

АКАДЕМИК
М.В.ШУЛЕЙКИН

ЭЛЕКТРОННЫЕ ЛАМПЫ



МИХАИЛ ВАСИЛЬЕВИЧ
ШУЛЕЙКИН
(1884—1939)

А К А Д Е М И Я Н А У К С С С Р

М. В. ШУЛЕЙКИН

ЭЛЕКТРОННЫЕ ЛАМПЫ

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР

МОСКВА 1963

РЕДАКТОР-СОСТАВИТЕЛЬ

П. А. ПЕТРОВ

В данную книгу включены рукописи академика М. В. Шулейкина (1884—1939), относящиеся к периоду его работы с 1918 по 1934 г. Здесь использованы материалы теоретических исследований М. В. Шулейкина, проводившихся им при решении вопросов радиоэлектроники, которые возникали при работе в научно-исследовательских институтах, а также при подготовке к лекциям по курсу «Электронные лампы». Этот курс он читал в Московском высшем техническом училище, Военной электротехнической академии и Московском электротехническом институте связи. В книге освещаются основные элементарные процессы, связанные с движением электронов и используемые в электронных лампах, физические основы этих ламп и теория их расчета. Одновременно с этим дается теория расчета параметров радиосхем (выпрямителей, генераторов, модуляторов и усилителей), в которых используются электронные лампы.

Отдельные разделы книги отражают историческое развитие теории расчета электронных ламп и радиосхем, в которую М. В. Шулейкин внес большой вклад.

Лекции М. В. Шулейкина, основоположника московской школы радиоспециалистов, отличались строгостью изложения, методическими достоинствами, глубоким проникновением в сущность рассматриваемых вопросов. Публикуемые в настоящей книге материалы лекций М. В. Шулейкина были созданы на основе огромной творческой работы их автора. Отдельные положения, выдвинутые в трудах М. В. Шулейкина, в настоящее время стали классическими.

Книга имеет несомненную научно-историческую ценность и может служить пособием для изучающих затронутые в ней основные проблемы, так как трактовка их не устарела и в настоящее время, а примеры, рассматриваемые в отдельных разделах являются особо содержательными.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Выдающийся представитель отечественной радиотехники академик Михаил Васильевич Шулейкин за время своей плодотворной научной и педагогической деятельности создал и воспитал большую армию радиоспециалистов. Михаил Васильевич вел большую педагогическую работу во многих институтах Москвы (Московском высшем техническом училище, Военной электротехнической академии, Московском электротехническом институте связи).

Круг вопросов, которыми занимался М. В. Шулейкин, кроме радиотехники, очень велик. Автор этих строк был свидетелем того, как Михаил Васильевич давал, например, консультации по проектированию подъемников для угольных шахт, мостовых кранов, антенных мачтовых сооружений и электродвигателей.

В своей научной и педагогической работе он не останавливался на раскрытии только теоретической сущности рассматриваемого вопроса с целью немедленного закрепления своего приоритета в литературе, а стремился найти и практическое решение поставленной задачи, сразу же ознакомить с ним своих учеников на лекциях, на руководимых им семинарах и многочисленных консультациях. Вследствие этого у него не оставалось сил на издание своих трудов, о чем приходится весьма сожалеть.

Многие преподаватели и авторы учебных пособий используют в своей работе отдельные положения его трудов, ставших уже классическими. Здесь следует особенно отметить, что в каждом отдельном случае разработка этих положений не заканчивалась лишь получением окончательного результата. Как правило, результаты дорабатывались и оформлялись в виде строгой и наиболее простой расчетной формулы с обязательной проверкой ее на практике.

Михаилом Васильевичем в свое время были созданы основные курсы по отдельным вопросам радиотехники и теории электронных ламп. Эти курсы по строгости и глубине рассматриваемых вопросов в то время не имели равных ни у нас, ни за границей.

Лекции Михаила Васильевича всегда были насыщены новым весьма ценным материалом. Метод изложения на его лекциях выгодно отличался немногословием и ясностью, что давало возможность слушателям вести подробные записи. Конспекты его лекций не только переходили из рук в руки, но и перепечатывались на пишущих машинках, и использовались многими авторами (в основном его учениками) при составлении учебных руководств.

Обычно в литературе наибольшее внимание уделяется работам М. В. Шулейкина по основам радиотехники, по распространению электромагнитной энергии, а также по антенным устройствам и в очень малой степени отмечаются его работы по вопросам электроники.

Автор этих строк взял на себя труд заполнить этот пробел и ознакомить читателей с основными работами Михаила Васильевича в области теорети-

ческого исследования физических основ электронных ламп. Здесь, как и в других научных областях своей работы, М. В. Шулейкин не рассматривал электронный прибор изолированно от условий его работы. Как показано в данной книге, Михаил Васильевич исследовал электронную лампу не только с точки зрения глубокого изучения основных физических процессов, протекающих в ней, но и связывал ее параметры с условиями работы схемы. При этом он выяснил наивыгоднейшие режимы работы всего устройства в целом.

Тщательность отработки материалов лекций требовала от Михаила Васильевича большой затраты творческих сил. Последнее обстоятельство осложнялось тем, что в то время электроника как наука начинала только развиваться. В вузах еще не существовало отдельной специализации в этой области. Материалы исследований по электронике, которые использовались М. В. Шулейкиным, требовали тщательной систематизации и доработки.

Рукописи, оставленные нам М. В. Шулейкиным по отдельным вопросам радиотехники, в частности по физическим основам и расчету электронных ламп, дают некоторое представление об объеме этого труда. Здесь уместно отметить, что только по этому вопросу он оставил несколько сот листов большого формата, исписанных его четким и убористым почерком.

Многие рукописи были оставлены Михаилом Васильевичем в перепечатанном виде с вписанными математическими формулами и расчетами. Среди этого материала есть конспекты его лекций, составленные студентами. Эти конспекты имеют много исправлений и дополнений, сделанных рукой Михаила Васильевича. Он оставил рукопись, которая, судя по ее оформлению, готовилась к печати в виде курса лекций по катодным лампам.

В данной книге этот курс использован нами как основной материал. В отдельных разделах он дополнен сохранившимися конспектами лекций Михаила Васильевича, составленными в 1920—1923 гг. В. К. Виторским, А. Андреевым и автором этих строк.

Некоторые разделы книги, например разработка метода расчета электронной лампы как генератора электромагнитных колебаний, включены в виде нескольких вариантов, показывающих исторический ход развития теории расчета, разработанного М. В. Шулейкиным. Здесь мы сочли необходимым сохранить весь материал, который излагался Михаилом Васильевичем в курсе электронных ламп и который в настоящее время, как правило, излагается в виде отдельных дисциплин (генераторы, приемники, усилители, выпрямители и т. д.).

Кроме этого, мы включили в данную книгу рукописи Михаила Васильевича, посвященные разработке некоторых других вопросов, и, в частности, те, которые касаются истории развития электронных ламп (укажем, например, на отзыв Михаила Васильевича о работе инженера В. И. Волюнкина).

Переходя к краткому изложению содержания данной книги, заметим, что, учитывая большое научно-историческое значение рукописей, оставленных Михаилом Васильевичем, мы старались возможно точнее воспроизвести их. Это, с нашей точки зрения, в некоторой степени должно оправдать имеющиеся повторения отдельных положений.

Все содержание книги разбито на одиннадцать глав.

В главе I описываются основные физические свойства элементарного заряда — электрона, его взаимодействие с одноименными зарядами, с электрическим и магнитным полями и, наконец, излучение электромагнитной энергии электроном при различных условиях его движения.

Глава II посвящена вопросам термоэлектронной эмиссии. Рассматриваются физические явления, сопровождающие возникновение эмиссии, и теоретические методы ее расчета. Даются основные условия, положенные в основу вывода формул Ричардсона, Вильсона, Дешмана и Шоттки.

1. Вольфрам применяется в качестве катодного материала в вакуумных лампах.

При рассмотрении процессов модификации нити накала в вакуумных лампах необходимо учитывать следующие положения:

- 1) Статистические характеристики течения электронов, исходящего от катодов, зависят от параметров течения β , β_0 и β_1 и не зависят от β_2 при увеличении β_2 и β_1 .
- 2) Коэффициент, характеризующий течения электронов - суммарный коэффициент.
- 3) Эквивалентное сопротивление катодного контура при токе модифицирующей системы крайне мало. Как только амплитуда или частота, что является фактором, влияющим на модифицирующую систему, совпадает с собственной частотой системы, то характеристики (длина и др.)
- 4) В системе электронов приложенная электромагнитная сила частотой α .
- 5) Вектор на систему, направленный вправо (в $\beta = \beta_0$)

Число (φ) - изобразил график оттока тока.

Число (φ) - изобразил от $\frac{\pi}{2}$ до 0 и от 0 до $(-\frac{\pi}{2})$.

При $\varphi = \frac{\pi}{2}$ амплитуда колебаний первого рода, при $\varphi = 0$ амплитуда тока существует под периодом и при $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ ток в амплитуде равен нулю в течение $301 - 25$ н.с. за все время.

Рассчитав формулы (1) в виде формулы, найдем значения катодного сопротивления, а также (первый) гармонической и высших.

Полученные значения сопротивления равны:

$$I_{\text{ср}} = \frac{1}{T} \int_0^T i \, dt = \frac{1}{T} \int_0^T \left(\frac{I_0}{2} \right) \cos(\omega t + \varphi) \, dt =$$

$$= \frac{I_0}{2} \left\{ \cos \varphi + \left(\frac{\pi}{2} + \varphi \right) \sin \varphi \right\}.$$

Факсимиле записей М. В. Шулейкина

В главе III описывается метод расчета системы нити накала и в качестве примера приводится расчет накала лампы заводского типа. Дается краткий исторический обзор теории работы катода из торированного вольфрама.

В главе IV рассматривается получение термоэлектронного тока в лампе с учетом электрического поля и дается вывод формулы Ленгмюра для различных форм электродов. В конце главы исследуются причины отклонения теоретической характеристики от действительной.

В главе V рассматривается теория выпрямления переменного тока с различным числом фаз и используемых полупериодов. Здесь дается вывод общей формулы, учитывающей различное число фаз и полупериодов. Приводятся основные положения расчета сглаживающих фильтров и, наконец, рассматриваются условия выпрямления высокочастотного тока.

Глава VI посвящена теории работы трехэлектродной лампы. Параметры лампы определяются не только математически по ее характеристикам, но и раскрывается их физическая сущность. Излагаются теоретические методы расчета этих параметров и описываются основные методы их экспериментального определения.

В этой главе дается основное понятие о методах определения критической длины волны лампы. Здесь учитываются не только отдельные действующие электрическое и магнитное поля, но и их суммарное воздействие на движущийся электрон в межэлектродном пространстве. Последнее используется для определения влияния тока нити накала на условия движения электрона. В конце главы дается понятие о критических параметрах триодов и устанавливаются преимущества многоэлектродных ламп.

В главе VII триод рассматривается как генератор. В эту главу включено два первых варианта (из трех) аналитического метода расчета лампового генератора как с независимым возбудителем, так и с самовозбуждением, разработанных М. В. Шулейкиным. В первом варианте рассмотрение вопроса и расчет проводятся без использования угла отсечки. В другом варианте вводится угол отсечки, который М. В. Шулейкин называет «углом отсека». Этот вариант мы приводим как в его подлиннике, так и с разбором теории, выполненным одним из его учеников (Д. Ф. Масановым).

В главе VIII дается теория явления затягивания и разбираются различные условия возникновения колебаний при самовозбуждении лампового генератора и устойчивости этих колебаний.

Главы IX и X посвящены вопросам основ радиотелефонии. Здесь нами дан третий вариант метода расчета лампового генератора, который Михаил Васильевич использует при рассмотрении теории различных систем модуляции. Здесь же рассматривается влияние цепей питания на модуляцию.

В главе XI проводится теоретическое рассмотрение основ детектирования и усиления.

В настоящей книге мы воспроизводим два фотоснимка собственноручных записей М. В. Шулейкина, в которых он излагает основные положения, впервые введенные им при разработке теории расчета условий работы электронных ламп. В частности, это относится к использованию спрямленных вольтамперных характеристик и угла отсека тока, что является значительным вкладом в теорию расчета ламповых радиосхем. Эти записи, по-видимому, относятся к 1921—1924 гг.

Работая над этой книгой, мы стремились возможно полнее и точнее воспроизвести творческие искания Михаила Васильевича в теории электронных ламп. Насколько хорошо удалось нам это сделать, покажет ближайшее будущее. Мы надеемся, что читатели выскажут свое мнение по данной книге, за что мы будем весьма признательны.

В заключение считаю своим приятным долгом выразить благодарность академику А. И. Бергу, взявшему на себя труд просмотреть рукопись, и при поддержке которого оказалось возможным подготовить настоящую книгу к изданию, члену-корр. АН СССР В. И. Сифорову, проф. П. В. Шмакову, проф. Б. М. Цареву, Л. А. Котоминой за просмотр рукописи и Н. М. Шулейкину за большую помощь, оказанную при подготовке к изданию данной книги.

П. А. Петров

1.1. Основные сведения об электроне

Электрическое поле электрона

Электрон представляет собой наименьший существующий в природе заряд отрицательного электричества — атом электричества. В элементарном представлении модель электрона изображается в виде шара радиуса r_0 , обладающего зарядом e , равномерно распределенным или по объему шара или по поверхности шаровой сферы.

Данная модель электрона предполагает строение электрического поля электрона подобным электрическому полю заряженной сферы, а именно в виде радиально расходящихся из некоторого центра электрических силовых линий.

Радиальная составляющая напряженности электрического поля в некоторой точке пространства, окружающего электрон на расстоянии r от его центра *, определяется из теоремы Остроградского — Гаусса: полный поток электрической индукции через замкнутую поверхность равняется взятому 4π раз количеству электричества, содержащемуся внутри этой сферы:

$$\varepsilon E \cdot 4\pi r^2 = 4\pi e,$$

отсюда

$$E = \frac{1}{\varepsilon} \frac{e}{r^2}. \quad (1.1)$$

С другой стороны, напряженность электрического поля может быть определена из выражения

$$E = \frac{\hat{f}}{e}, \quad (1.2)$$

где $\hat{f}$ — сила взаимодействия между зарядами e_1 и e_2 , определяемая из закона Кулона

$$\hat{f} = \frac{1}{\varepsilon} \frac{e_1 \cdot e_2}{r^2}. \quad (1.3)$$

Полагая, что заряды равны, получим

$$\hat{f} = \frac{1}{\varepsilon} \frac{e^2}{r^2}$$

и, следовательно,

$$E = \frac{1}{\varepsilon} \frac{e}{r^2}.$$

* Имеется в виду, что $r \geq r_0$. (Прим. составителя).

Заряд и масса электрона

Экспериментально определенный заряд электрона в электростатической системе единиц равен

$$e = (4,8025 \pm 0,001) 10^{-10} \text{ CGSE},$$

в электромагнитной системе единиц —

$$e = (1,60203 \pm 0,00034) 10^{-20} \text{ CGSM},$$

а в практических электрических единицах заряд электрона равен

$$e = (1,60203 \pm 0,00034) 10^{-19} \text{ К.}$$

Отношение заряда электрона к его массе покоя (см. гл. III, § 5), найденное опытным путем, равно

$$\frac{e}{m_0} = (1,7592 \pm 0,0005) \cdot 10^7 \text{ CGSM}$$

или

$$\frac{e}{m_0} = (5,28 \pm 0,024) \cdot 10^{17} \text{ CGSE}.$$

Масса же электрона, находящегося в покое, равна

$$m_0 = (9,1066 \pm 0,0032) \cdot 10^{-28} \text{ z.}$$

Диаметр электрона $2r_0 = 2 \cdot 1,87 \cdot 10^{-13} \text{ см} = 3,74 \cdot 10^{-13} \text{ см}.$

**Сила, действующая на электрон, находящийся
в электрическом поле**

Если электрон находится в некоторой точке пространства, в которой создано электрическое поле с напряженностью E , то на электрон действует сила, численное значение которой равно

$$f = eE. \quad (1.4)$$

Если e выражено в кулонах, а E — в вольтах на сантиметр, то

$$f = \frac{e \cdot 3 \cdot 10^9 E}{300} = eE \cdot 10^7 \text{ дин.}$$

Взаимодействие электронов

Допустим, что в пространстве находится n электронов. Обозначим их порядковыми номерами i , соответственно, от каждого отсчитаем расстояния до всех остальных.

Для рассматриваемого случая можно написать систему электростатических уравнений Максвелла:

$$\begin{aligned} u_1 &= e_1 u_{11} + e_2 u_{12} + \dots + e_n u_{1n}, \\ u_2 &= e_1 u_{21} + e_2 u_{22} + \dots + e_n u_{2n}, \\ &\vdots \\ u_n &= e_1 u_{n1} + e_2 u_{n2} + \dots + e_n u_{nn}. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Здесь

u_n и e_n — потенциал и заряд n -го электрона, соответственно;
 u_{n1} — потенциал первого электрона, создаваемый n -м электроном, если бы на нем была единица заряда, а остальные заряда не имели;

u_{nm} — потенциал n -го электрона, создаваемый m -м электроном, если бы на нем была единица заряда, а остальные заряда не имели.

Согласно определению следует, что

$$u_{nm} = \frac{1}{r_{nm}} \quad (1.6)$$

и

$$u_{nn} = \frac{1}{r_0}.$$

Выпишем потенциалы, под которыми находятся электроны нашей системы.

Умножая каждое из уравнений Максвелла на e_n и складывая, мы получим энергию электрического поля всей системы

$$W_{\text{э}} = \frac{1}{2} \sum_1^n e_n u_n = \frac{1}{2} \sum_1^n \sum_1^m e_n e_m u_{nm}.$$

Так как заряды электронов равны, то, подставляя значения u_{nm} , мы получим

$$W_{\text{э}} = \frac{1}{2} \left(\frac{ne^2}{r_0} + e^2 \sum_1^n \sum_1^m \frac{1}{r_{nm}} \right); \quad n \neq m. \quad (1.7)$$

Таким образом, электрическая энергия системы электронов не равна сумме электрических энергий отдельных электронов, а превышает ее на величину $\frac{1}{2} e^2 \sum \frac{1}{r_{nm}}$. Эта величина характеризует работу, затраченную на создание данной системы. Эта работа будет отдана обратно при возвращении системы в первоначальное состояние.

1.2. Энергия электрона и его масса

Количество энергии, содержащееся в единице объема, в некоторой точке электрического поля равно

$$W_{\text{э0}} = \frac{\varepsilon E^2}{8\pi}. \quad (1.8)$$

Напряженность электрического поля, создаваемого электроном в данной точке, определяется уравнением (1.2)

$$E = \frac{1}{\varepsilon} \frac{e}{r^2},$$

откуда следует, что

$$W_{\text{э0}} = \frac{e^2}{8\pi r^4 \varepsilon}.$$

Если мы образуем вокруг электрона шаровой пояс толщиной dr и объемом $dV = 4\pi r^2 dr$, то содержащаяся в нем электрическая энергия будет равна

$$W_{\text{э0}} dV = dW_{\text{э}} = \frac{4\pi r^2 e^2 dr}{8\pi r^4 \varepsilon} = \frac{e^2 dr}{2r^2 \varepsilon}.$$

Интегрируя это выражение в пределах от $r = r_0$ (радиус электрона) до $r = \infty$, получим выражение электрической энергии электрона

$$W_{\text{э}} = \frac{1}{2\varepsilon} \frac{e^2}{r_0}, \quad (1.9)$$

или, выражая e в кулонах,

$$W_3 = \frac{9 \cdot 10^{18} e^2}{2\epsilon r_0}.$$

При движении электрона его электрическое поле создает магнитное поле, силовые линии которого представляют собой concentрические круги, лежащие в плоскости, перпендикулярной к движению электрона.

По закону Био — Савара — Лапласа напряженность магнитного поля, создаваемая элементом провода длины dl , по которому течет ток i , равна

$$dH = \frac{i dl \sin \varphi}{r^2} \text{ CGSM},$$

где φ — угол между направлением тока и радиусом-вектором r .

В нашем случае

$$idl = ev,$$

где v — скорость электрона.

Напомним, что единицы заряда в системе CGSM и CGSE связаны соотношением

$$q \text{ CGSM} = \frac{q}{c} \text{ CGSE},$$

где c — скорость света.

Таким образом, напряженность магнитного поля, создаваемого движущимся электроном, в некоторой точке равна

$$H = \frac{ev \sin \varphi}{cr^2}. \quad (1.10)$$

Магнитная энергия, содержащаяся в единице объема (плотность энергии магнитного поля), определяется выражением

$$W_{H0} = \frac{\mu H^2}{8\pi} \quad (1.11)$$

а количество энергии магнитного поля в элементарном объеме dV мы определяем следующим образом:

$$dW_H = \frac{\mu H^2}{8\pi} dV = \frac{\mu e^2 v^2 \sin^2 \varphi}{8\pi r^4 c^2} dV.$$

Объем dV в сферических координатах r, φ, θ определяется выражением

$$dV = r^2 \sin \varphi d\varphi d\theta dr.$$

Интегрируя предыдущее выражение по r, φ, θ в пределах соответственно от r_0 до ∞ , от 0 до π и от 0 до 2π , получаем энергию магнитного поля, созданную движением электрона:

$$W_H = \frac{e^2 v^2}{3r_0 c^2}. \quad (1.12)$$

Уподобляя движение электрона движению заряженного шара, масса покоя которого равна m_0 , мы находим, что полная энергия движения такого шара будет равна

$$W_T + W_H = \frac{1}{2} m_0 v^2 + \frac{1}{2} \frac{e^2 v^2}{r_0 c^2} = \frac{v^2}{2} \left(m_0 + \frac{2e^2}{3r_0 c^2} \right). \quad (1.12a)$$

Здесь принимается во внимание, что незаряженный шар,двигающийся с той же скоростью v , обладает кинетической энергией W_T , равной $\frac{m_0 v^2}{2}$.

На основе этого выражения мы заключаем, что тот же самый шар, но заряженный при движении со скоростью v , обладает добавочной энергией $\frac{e^2 v^2}{3 r_0 c^2}$ или добавочной массой

$$\Delta m = \frac{2}{3} \frac{e^2}{r_0 c^2}. \quad (1.13)$$

Эта добавочная энергия заряженного шара создается движением его электрического поля и представляет собой электромагнитную энергию

$$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{e^2 v^2}{3 r_0 c^2},$$

на основании чего массу (1.13)

$$\Delta m = m_{\text{эм}} = \frac{2}{3} \frac{e^2}{r_0 c^2}$$

можно охарактеризовать как электромагнитную массу.

Согласно выражению (1.13), электромагнитная масса электрона не зависит от скорости его движения. В действительности это справедливо лишь в том случае, когда скорость движения электрона мала по сравнению со скоростью света.

Теоретические исследования Дж. Дж. Томсона, Абрагамма и Лоренца указали на зависимость массы электрона от скорости его движения. Та же самая зависимость массы от скорости, что и найденная Лоренцом, была получена А. Эйнштейном в теории относительности, причем она была распространена им на любую движущуюся массу. На самом деле, если предположить, что масса электрона зависит от скорости его движения, то мы не можем написать, что сила, действующая на электрон, равна массе, умноженной на ускорение:

$$\vec{f} = m \frac{dv}{dt}.$$

Так как мы предположили массу переменной, то ее нужно ввести под знак дифференциала. Тогда

$$\vec{f} = \frac{d(mv)}{dt}.$$

Обозначая через m_0 массу покоящегося электрона, а через m — массу электрона, достигшего скорости v , мы можем предположить, что кинетическая энергия W_T , приобретенная электроном, будет пропорциональна $(m - m_0)$

$$W_T = c^2 (m - m_0), \quad (1.14)$$

т. е.

$$W_T = W - W_0, \quad (1.14a)$$

где c — коэффициент пропорциональности. Так как

$$v \vec{f} = \frac{dW_T}{dt},$$

то мы получим

$$\frac{dW_T}{dt} = v \frac{d}{dt} (mv)$$

или

$$c^2 \frac{dm}{dt} = \frac{dm}{dt} v^2 + v m \frac{dv}{dt},$$

отсюда следует

$$(c^2 - v^2) \frac{dm}{dt} = vm \frac{dv}{dt},$$

или

$$\frac{1}{m} \frac{dm}{dt} = \frac{v \frac{dv}{dt}}{c^2 - v^2} = -\frac{1}{2} \frac{\frac{d}{dt}(c^2 - v^2)}{c^2 - v^2}.$$

Интегрируя, находим

$$\lg m = -\frac{1}{2} \lg (c^2 - v^2) + A.$$

Согласно условию, при $v = 0$, $m = m_0$, так что

$$\lg m_0 = -\frac{1}{2} \lg c^2 + A,$$

откуда

$$A = \lg m_0 + \frac{1}{2} \lg c^2,$$

или

$$\lg \frac{m}{m_0} = \frac{1}{2} [\lg c^2 - \lg (c^2 - v^2)] = \lg \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Окончательно имеем

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (1.15)$$

где коэффициент c^2 обозначает квадрат скорости света.

Как следует из последнего выражения (1.15), скорость электрона не может превосходить этой критической скорости, так как при $v = c$ масса электрона становится бесконечно велика.

Согласно выражению (1.14), кинетическую энергию электрона мы выражаем следующим образом:

$$W_T = c^2 m_0 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} - 1 \right). \quad (1.16)$$

Последнее выражение определяет кинетическую энергию движущегося электрона как разность энергии, содержащейся в электроне при данной скорости v и некоторой постоянной энергии $c^2 m_0$, которую можно охарактеризовать как энергию электрона в спокойном состоянии.

Таким образом, имеем

$$W_T = W - W_0,$$

где

$$W_0 = m_0 c^2. \quad (1.17)$$

Разлагая $W = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$ в ряд, получим

$$W = m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 v^2 + \frac{3}{8} m_0 \frac{v^4}{c^2} + \dots,$$

$$W_T = \frac{1}{2} m_0 v^2 + \frac{3}{8} m_0 \frac{v^4}{c^2} + \dots$$

Только при малых скоростях $\left(\frac{v}{c}\right) \ll 1$ мы получим обычное выражение

для кинетической энергии

$$W_T = \frac{1}{2} m_0 v^2.$$

Чтобы определить массу покоя электрона, необходимо рассчитать энергию электрона в состоянии покоя. Известно, что при этом электрон обладает электрической энергией (см. 1.9)

$$W_э = \frac{1}{2} \frac{e^2}{r_0}$$

(ϵ принимаем равным единице).

Поскольку мы представили себе модель электрона в виде шара, то совершенно очевидно, что электрическим полем к поверхности электрона прилагается усилие

$$f = \frac{E^2}{8\pi}.$$

Для того чтобы электрон находился в покое, необходимо, чтобы внутренние силы уравновешивали это усилие. На этом основании мы должны предположить, что внутри электрона содержится энергия, равная

$$W_в = fV,$$

где $V = \frac{4}{3} \pi r_0^3$ — объем электрона.

Теперь напомним

$$W_в = \frac{E^2}{8\pi} \frac{4}{3} \pi r_0^3 = \frac{E^2}{6} r_0^3 = \frac{1}{6} \frac{e^2 r_0^3}{r_0^4} = \frac{1}{6} \frac{e^2}{r_0}.$$

Таким образом, полная энергия покоя электрона будет равна

$$W_0 = W_э + W_в = \frac{1}{2} \frac{e^2}{r_0} + \frac{1}{6} \frac{e^2}{r_0} = \frac{2}{3} \frac{e^2}{r_0}. \quad (1.18)$$

С другой стороны, энергия покоя [см. стр. 12] равна

$$W_0 = m_0 c^2, \quad (1.18 a)$$

отсюда следует

$$m_0 = \frac{2}{3} \frac{e^2}{r_0 c^2}. \quad (1.19)$$

Из этого выражения можно определить и радиус электрона (см. стр. 8)

$$r_0 = \frac{2}{3} \frac{e^2}{m_0 c^2} = \frac{2}{3} \frac{4,82 \cdot 10^{-20}}{9,1 \cdot 10^{-28} \cdot 9 \cdot 10^{20}} = 1,87 \cdot 10^{-13} \text{ см.}$$

Выражение энергии покоя для электрона можно представить в виде

$$W_0 = \frac{4}{3} W_э. \quad (1.20)$$

Энергия покоя электрона определяется его электрической энергией плюс одна треть величины этой электрической энергии. Эта добавочная часть энергии обусловлена теми внутренними силами, которые уравновешивают внешние электрические силы. Природа этих внутренних сил, точно так же, как и внутренней энергии, нам не известна. Таким образом, мы можем считать, что масса электрона имеет электромагнитное происхождение постольку, поскольку мы не касаемся внутренней энергии электрона.

Зависимость (1.15) массы электрона от скорости проверялась опытным путем многими учеными (Кауфман (1906), Бухерер (1909), Катковский, (1911), Нейман (1914), Зоммерфельд (1911)).

Однако окончательное подтверждение зависимости (1.15) получила в работах Зоммерфельда о тонкой структуре спектральных линий и др. Приведем ряд примеров, иллюстрирующих закон взаимосвязи массы и энергии.

Пример 1. 1 см^2 поверхности Земли получает от Солнца $2,1 \text{ г} \cdot \text{кал}$ в минуту. Среднее расстояние Земли от Солнца $1,5 \cdot 10^{13} \text{ см}$; $1 \text{ г} \cdot \text{кал}$ равна $4,2 \cdot 10^7 \text{ эрг}$. Количество энергии, излучаемой Солнцем в минуту, если не учитывать поглощение в атмосфере, будет равно

$$4\pi (1,5 \cdot 10^{13})^2 \cdot 2,1 \cdot 4,2 \cdot 10^7 = 2,49 \cdot 10^{35} \text{ эрг}.$$

Годовое излучение Солнца составит

$$365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 2,49 \cdot 10^{35} = 1,308 \cdot 10^{41} \text{ эрг}.$$

На основании формулы (1.18 а) имеем:

$$\Delta m = \frac{1,308 \cdot 10^{41}}{9 \cdot 10^{20}} = 1,45 \cdot 10^{20} \text{ г}, \text{ или } 1,45 \cdot 10^{14} m.$$

Так как масса Солнца равна $2 \cdot 10^{33} \text{ г}$, то в процентах потеря массы Солнцем за 1 год будет равна

$$\frac{\Delta m}{m} = \frac{1,45 \cdot 10^{20}}{2 \cdot 10^{33}} 100 = 0,725 \cdot 10^{-11} \%. \quad .$$

Пример 2. Смесь из 2 г водорода и 16 г кислорода в результате соединения дает воду с выделением энергии в $2,9 \cdot 10^{12} \text{ эрг}$. Определить эквивалентное уменьшение массы.

Эквивалентное уменьшение массы мы определим равным

$$\Delta m = \frac{2,9 \cdot 10^{12}}{9 \cdot 10^{20}} = 3,22 \cdot 10^{-9} \text{ г},$$

или, выражая в процентах,

$$\frac{\Delta m}{m} = \frac{3,22 \cdot 10^{-9}}{18} = 1,79 \cdot 10^{-10} = 1,79 \cdot 10^{-8} \%. \quad .$$

Пример 3. Один грамм-атом радия теряет $30\,240 \text{ г} \cdot \text{кал}$ в час. Таким образом, потеря в год будет равна: $30\,240 \cdot 365 \cdot 24 = 2,65 \cdot 10^8 \text{ г} \cdot \text{кал}$, что составит $2,65 \cdot 10^8 \cdot 4,2 \cdot 10^7 = 11,1 \cdot 10^{15} \text{ эрг}$ в год.

Эквивалентная потеря массы будет равна

$$\Delta m = \frac{11,1 \cdot 10^{15}}{9 \cdot 10^{20}} = 1,234 \cdot 10^{-5} \text{ г}.$$

Грамм-атом радия весит 225 г, следовательно, потеря массы в процентах составит

$$\frac{\Delta m}{m} = \frac{1,234 \cdot 10^{-5}}{225} 100 = 0,55 \cdot 10^{-5} \%. \quad .$$

Пример 4. Атомный вес водорода равен 1,008, тогда как атомный вес гелия, состоящего из четырех атомов водорода, равен 4.

Таким образом, при образовании грамм-молекулы гелия (4 г) масса частиц, образовавших гелий, уменьшилась на $4,032 - 4 = 0,032 \text{ г}$, что составит

$$0,032 \cdot 9 \cdot 10^{20} = 0,288 \cdot 10^{20} \text{ эрг}.$$

Если такое образование гелия произошло в 1 сек, то выделенная мощность равна

$$\frac{0,288 \cdot 10^{20}}{10^7} = 288 \cdot 10^{10} \text{ вт} = 2880 \cdot 10^6 \text{ квт.}$$

1.3. Работа, совершаемая при движении электрона в электрическом поле

Если электрон находится в поле одноименного заряда, то на него будет действовать отталкивающая сила и электрон будет равномерно-ускоренно удаляться от центра одноименного заряда.

Работа в этом случае будет совершаться силами поля. Она израсходуется на увеличение кинетической энергии электрона, поскольку он обладает материальной массой, и на создание энергии магнитного поля. Таким образом, уменьшение электрической энергии системы уйдет на увеличение магнитной энергии электрона.

Можно написать следующее уравнение:

$$mv = eE(x), \quad (1.21)$$

где $E(x)$ — напряженность электрического поля, создаваемого в точке x одноименным зарядом.

Интегрируя его, находим

$$\frac{mv^2}{2} = e \int_{x_1}^{x_2} E(x) dx = -e(u_2 - u_1), \quad (1.22)$$

где u_1 и u_2 — потенциалы в точках x_1 и x_2 соответственно. Координата x_1 указывает, откуда электрон начал свое движение, а x_2 — где он находится в данный момент.

С другой стороны, согласно § 1.2 (1.17), на эту величину уменьшились электрические энергии системы, равные

$$\begin{aligned} W_{э2} &= -\frac{1}{2} \left(\frac{2e^2}{r_0} + \frac{2e^2}{x_2} \right), \\ W_{э1} &= -\frac{1}{2} \left(\frac{2e^2}{r_0} + \frac{2e^2}{x_1} \right) \end{aligned} \quad (1.22a)$$

во второй и первой точках.

Их разность дает

$$W_{э2} - W_{э1} = -\left(\frac{e^2}{x_2} - \frac{e^2}{x_1} \right) = -e(u_2 - u_1). \quad (1.23)$$

Это уменьшение электрической энергии, согласно тому же § 1.2, можно положить равным увеличению магнитной энергии. Так как [см. (1.12)]

$$W_H = \frac{1}{3} \frac{e^2 v^2}{r_0 c^2},$$

то получим

$$-e(u_2 - u_1) = \frac{1}{3} \frac{e^2 v^2}{r_0 c^2}.$$

Если электрон уходил с поверхности одноименного заряда, то, полагая $x_2 = \infty$ и $x_1 = 2r_0$, можно получить

$$\frac{e^2}{2r_0} = \frac{1}{3} \frac{e^2 v^2}{r_0 c^2}, \quad \frac{v^2}{c^2} = \frac{3}{2},$$

откуда следует, что с точки зрения классической физики (если не брать во внимание перераспределение заряда при близком расстоянии электронов друг от друга) электрон в бесконечности должен иметь скорость, равную

$$v = \sqrt{\frac{3}{2}} c = 1,223c. \quad (1.24)$$

Таким же образом может быть решена обратная задача, а именно: притяжение электрона равным ему положительным зарядом. Напишем уравнение движения

$$m\dot{v} = -eE(x) = -e\left(-\frac{du}{dx}\right) = e\frac{du}{dx}.$$

Интегрирование его дает

$$\frac{mv^2}{2} = e \int_{x_1}^{x_2} du = e(u_2 - u_1).$$

С другой стороны, на эту же величину уменьшилась электрическая энергия системы, т. е. [см. (1.22a)]

$$W_{э2} = \frac{1}{2} \left(\frac{2e^2}{r_0} - \frac{2e^2}{x_2} \right),$$

$$W_{э1} = \frac{1}{2} \left(\frac{2e^2}{r_0} - \frac{2e^2}{x_1} \right).$$

Разность их дает (см. 1.23)

$$W_{э2} - W_{э1} = e^2 \left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} \right).$$

Если электрон притягивается из бесконечности ($x_1 = \infty$), то мы имеем уменьшение энергии, равное

$$W_{э1} - W_{э2} = \frac{e^2}{x_2}. \quad (1.25)$$

Так как скорость электрона возрастала, то, согласно § 1. 2, мы имеем возрастание магнитной энергии (за счет уменьшения электрической энергии). В свою очередь, первая равна

$$W_H = \frac{1}{3} \frac{e^2 v^2}{r_0 c^2}.$$

Если электрон движется до соприкосновения с положительным зарядом, то можно написать

$$\frac{e^2}{2r_0} = \frac{1}{3} \frac{e^2 v^2}{r_0 c^2},$$

откуда следует

$$\frac{v^2}{c^2} = \frac{3}{2},$$

т. е. электрон в момент столкновения имеет скорость, равную

$$v = 1,223 c.$$

Проверим это. Так как $m\dot{v} = -\frac{e^2}{x^2}$, то, интегрируя это равенство, получим

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{e^2}{x} + A.$$

При $x = \infty, v = 0$, откуда постоянная $A = 0$ и, значит,

$$v^2 = \frac{2e^2}{mx}.$$

Если $x = 2r_0$, то, подставляя числовые значения, получим

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot 4,803^2 \cdot 10^{-20}}{2 \cdot 9,1 \cdot 10^{-28} \cdot 1,87 \cdot 10^{-13}}} = 1,223 \text{ с},$$

т. е. полученный результат сходится с приведенным выше.

На основе результатов наших расчетов мы убеждаемся в том, что, во-первых, электрическая энергия перешла в магнитную. Во-вторых, когда электрон соприкасается с положительным зарядом, то совершенно очевидно что накопленная магнитная энергия не может пропасть и испускается в виде излучения.

Таким образом, можно написать

$$\frac{e^2}{2r_0} = \frac{1}{3} \frac{e^2 v^2}{r_0 c^2} = h\nu, \quad (1.26)$$

где ν — частота излучаемых колебаний, а h — постоянная, имеющая размерность «действия» — размерность импульса момента силы (ML^2T^{-1})

Приведенное выше равенство мы пишем по аналогии с существующими выражениями для энергии излучения, которая всегда пропорциональна частоте.

1.4. Сила, действующая на электрон, находящийся в магнитном и электрическом полях

Сила, действующая на электрон, находящийся в магнитном поле находится по формуле из электродинамики

$$f = Hidl \sin(\hat{H}, \hat{i}) \text{ дин}, \quad (1.27)$$

где H и i выражены в CGSM системе. Выражая i в CGSE, а H в CGSM системах единиц, получим

$$f = \frac{Hidl \sin(\hat{H}, \hat{i})}{c} \text{ дин}. \quad (1.27a)$$

Переходя к определению силы, действующей на электрон, мы делаем подстановку

$$idl = ev$$

и получаем окончательно $f = He \frac{v}{c} \sin(\hat{H}, \hat{v})$.

Для расчетов выгодно писать данное выражение в виде проекции силы f на координатные оси.

Предположим, что напряженность магнитного поля имеет слагающие H_x, H_y, H_z , слагающие v будут v_x, v_y, v_z .

Нетрудно доказать, что слагающие силы f по координатным осям определяются следующими выражениями:

$$\begin{aligned} f_x &= \frac{e}{c} (v_y H_z - v_z H_y), \\ f_y &= \frac{e}{c} (v_z H_x - v_x H_z), \\ f_z &= \frac{e}{c} (v_x H_y - v_y H_x). \end{aligned} \quad (1.28)$$

Рассмотрим силы, действующие на электрон, находящийся в электрическом и магнитном полях. Если предположить, что слагающие напряженности электрического поля по осям x, y, z есть E_x, E_y, E_z , то получим:

$$\begin{aligned} f_x &= E_x e + \frac{e}{c} (v_y H_z - v_z H_y), \\ f_y &= E_y e + \frac{e}{c} (v_z H_x - v_x H_z), \\ f_z &= E_z e + \frac{e}{c} (v_x H_y - v_y H_x). \end{aligned} \quad (1.29)$$

Случай 1. Разберем случай, когда в некоторый начальный момент времени два электрона, находящиеся в плоскости xy на расстоянии y_0 один от другого, движутся равномерно со скоростью v_x , причем первый электрон движется по оси Ox .

Между электронами будет действовать электрическая (кулоновская) сила отталкивания

$$f_y = E_y e \quad (1.30)$$

и сила магнитного поля, притягивающая электроны друг к другу:

$$f_H = -v_x H_z \frac{e}{c}. \quad (1.31)$$

На основании полученных значений действующих сил получаем следующее выражение для закона движения по оси Oy :

$$m\dot{v}_y = eE_y - v_x H_z \frac{e}{c}. \quad (1.32)$$

В свою очередь, на основании предыдущего (1.2 и 1.10) имеем

$$E_y = \frac{e}{y^2}, \quad H_z = \frac{ev_x}{cy^2}$$

и после подстановки в (1.32) получим

$$f_{\text{эм}} = m\dot{v}_y = \frac{e^2}{y^2} \left(1 - \frac{v_x^2}{c^2} \right).$$

Таким образом, при движении электронов сила, действующая между ними, отличается от статической силы на добавочный член.

Все происходит так, как если бы напряженность электрического поля, создаваемая электроном, была не $\frac{e}{y^2}$, а

$$\frac{e}{y^2} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right).$$

Находим первый интеграл

$$\frac{mv_y^2}{2} = -\frac{e^2}{y} (1 - \beta^2) + A,$$

где

$$\beta^2 = \frac{v^2}{c^2}.$$

Задавая начальные условия

$$t = 0, v_y = 0, y = y_0,$$

определим постоянную интегрирования, после чего получим

$$\frac{mv_y^2}{2} = e^2 (1 - \beta^2) \left(\frac{1}{y_0} - \frac{1}{y} \right). \quad (1.33)$$

При достаточном расхождении электронов ($y \gg y_0$) скорость v_y будет постоянна:

$$v_y = \sqrt{\frac{2e^2}{m} \frac{1 - \beta^2}{y_0}}.$$

Угол отклонения траектории от оси Ox определяется по формуле

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v_y}{v_x} = \frac{1}{v_x} \sqrt{\frac{2e^2}{m} \frac{1 - \beta^2}{y_0}}. \quad (1.34)$$

Чем больше будет v_x приближаться к скорости света, тем ближе будет движение электронов приближаться к параллельному.

Потенциал в поле, создаваемом первым электроном, равен

$$u_{\text{э}} = \frac{e}{y}.$$

Сравнивая с данным случаем (один электрон) случай движения двух электронов, мы находим, что этот потенциал равен

$$u_{\text{эм}} = \frac{e}{y} (1 - \beta^2), \quad (1.35)$$

т. е. отличается некоторым членом.

Последнее выражение в электродинамике носит название электрокинетического потенциала.

Случай 2. Движение электрона в магнитном поле.

Допустим, что магнитное поле направлено по оси Oz и его напряженность $H_z \neq 0$; $H_x = H_y = 0$.

Для сил, действующих на электрон, имеем следующие выражения:

$$f_x = v_y H_z \frac{e}{c},$$

$$f_y = -v_x H_z \frac{e}{c}$$

или

$$m\dot{v}_x = v_y H_z \frac{e}{c},$$

$$m\dot{v}_y = -v_x H_z \frac{e}{c}. \quad (1.36)$$

Умножая первое на v_x , второе на v_y и складывая, получим

$$m(\dot{v}_x v_x + \dot{v}_y v_y) = 0,$$

$$\frac{m}{2} \frac{d}{dt} (v_x^2 + v_y^2) = 0.$$

т. е.

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \text{const.}$$

Из уравнений (1.36)

$$m\ddot{v}_x = -v_x H_z^2 \frac{e^2}{mc^2},$$

$$m\ddot{v}_y = -v_y H_z^2 \frac{e^2}{mc^2},$$

откуда следует

$$\begin{aligned}v_x &= A \sin \alpha t + B \cos \alpha t, \\v_y &= A \cos \alpha t - B \sin \alpha t,\end{aligned}\tag{1.37}$$

где $\alpha = H_z \frac{e}{mc}$ определено подстановкой значений v_x и v_y в дифференциальные уравнения.

A и B определяются из начальных условий:

при: $t = 0, v_x = V_x, v_y = V_y$;

из первого уравнения (1.37) $B = V_x$, из второго $A = V_y$.

Отсюда

$$\begin{aligned}v_x &= V_x \cos \alpha t + V_y \sin \alpha t, \\v_y &= V_y \cos \alpha t - V_x \sin \alpha t.\end{aligned}\tag{1.37a}$$

Последние выражения можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned}v_x &= V \sin (\alpha t + \varphi), \\v_y &= V \cos (\alpha t + \varphi),\end{aligned}\tag{1.37b}$$

где

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}\tag{1.38}$$

и

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{V_x}{V_y}.\tag{1.38a}$$

Из значений проекций скоростей определяем проекции траекторий электрона на оси Ox и Oy :

$$\begin{aligned}x &= \int v_x dt = -\frac{V}{\alpha} \cos (\alpha t + \varphi) + A, \\y &= \int v_y dt = \frac{V}{\alpha} \sin (\alpha t + \varphi) + B.\end{aligned}\tag{1.39}$$

Из начальных условий получим:

$$t = 0; x = X_0; y = Y_0,$$

тогда

$$\begin{aligned}X_0 &= -\frac{V}{\alpha} \cos \varphi + A, \\Y_0 &= \frac{V}{\alpha} \sin \varphi + B,\end{aligned}$$

и после подстановки найдем:

$$\begin{aligned}X_0 - x &= \frac{V}{\alpha} [\cos (\alpha t + \varphi) - \cos \varphi], \\Y_0 - y &= -\frac{V}{\alpha} [\sin (\alpha t + \varphi) - \sin \varphi].\end{aligned}$$

Изображая полученные выражения в виде

$$\begin{aligned}x - X_0 - \frac{V}{\alpha} \cos \varphi &= -\frac{V}{\alpha} \cos (\alpha t + \varphi), \\y - Y_0 + \frac{V}{\alpha} \sin \varphi &= \frac{V}{\alpha} \sin (\alpha t + \varphi),\end{aligned}$$

возведем в квадрат оба равенства и сложим их:

$$\left(x - X_0 - \frac{V}{\alpha} \cos \varphi\right)^2 + \left(y - Y_0 + \frac{V}{\alpha} \sin \varphi\right)^2 = \frac{V^2}{\alpha^2}. \quad (1.40)$$

Получим уравнение окружности. Из него следует, что электрон движется по кругу радиуса

$$R = \frac{V}{\alpha} = \frac{V}{H_z \frac{e}{mc}}, \quad (1.41)$$

центр которого имеет координаты

$$\begin{aligned}x_1 &= X_0 + R \cos \varphi, \\y_1 &= Y_0 - R \sin \varphi.\end{aligned} \quad (1.42)$$

Частный случай (см. рис. 1.1): $V_y = 0$ и $X_0 = 0$, тогда (см. 1.38a) $\tan \varphi = \infty$ и $\varphi = \frac{\pi}{2}$, а из (1.42) получим $x_1 = 0$, $y_1 = Y_0 - R$.

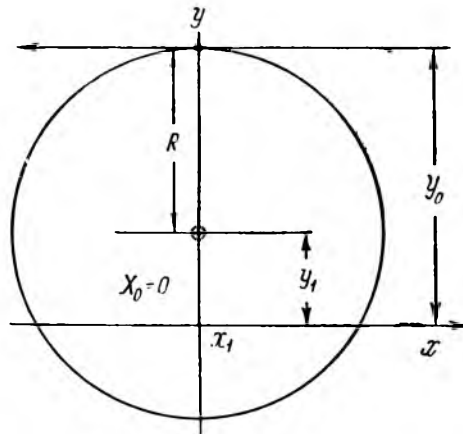


Рис.1.1

Из выражения (1.41) определяется скорость электрона, движущегося по окружности:

$$v = \frac{RH_z e}{mc}. \quad (1.43)$$

1.5. Однородное электрическое поле по оси Ox и однородное магнитное поле по оси Oz

На электрон, движущийся в магнитном поле, действует сила (формула Лоренца)

$$F^* = Hev \sin (H, \hat{v}), \quad (1.44)$$

где H — напряженность магнитного поля; e — заряд электрона; v — скорость его движения; $(H, \hat{v})$ — угол между направлением магнитного поля и

скоростью электрона. Разлагая силу, действующую на электрон по оси $0x$ и $0y$, получим следующие уравнения движения:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = Ee - He \frac{dy}{dt}, \quad m \frac{d^2y}{dt^2} = He \frac{dx}{dt}. \quad (1.45)$$

Если скорость по оси $0z$ равна нулю, то орбита электрона лежит в плоскости xOy (рис. 1.2).

Из уравнений (1.45) находим

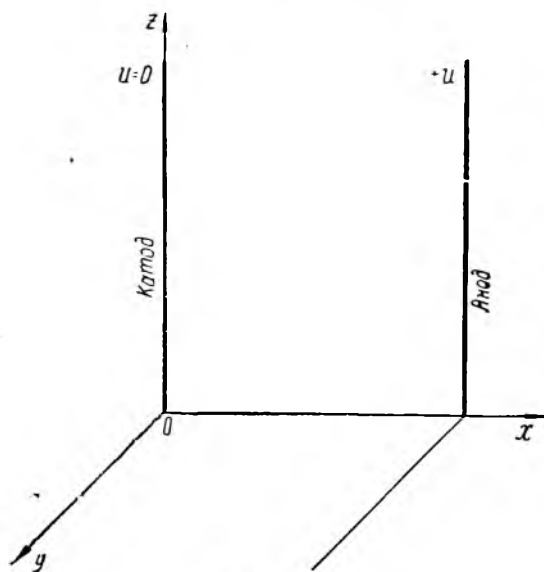


Рис. 1.2

$$\frac{d^3x}{dt^3} = -H^2 \left(\frac{e}{m} \right)^2 \frac{dx}{dt},$$

$$\frac{d^3y}{dt^3} = EH \left(\frac{e}{m} \right)^2 - H^2 \left(\frac{e}{m} \right)^2 \frac{dy}{dt},$$

или

$$\frac{d^2v_x}{dt^2} = -H^2 \left(\frac{e}{m} \right)^2 v_x,$$

$$\frac{d^2v_y}{dt^2} = EH \left(\frac{e}{m} \right)^2 - H^2 \left(\frac{e}{m} \right)^2 v_y. \quad (1.46)$$

Принимая во внимание, что

$$\frac{dv_x}{dt} = v_x \frac{dv_x}{dx}, \quad (1.47)$$

приводим первое из уравнений (1.46) к виду

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{dv_x}{dx} v_x \right) = -H^2 \left(\frac{e}{m} \right)^2 v_x. \quad (1.46a)$$

Уравнение (1.46a) легко интегрируется

$$\frac{dv_x}{dx} v_x = -H^2 \left(\frac{e}{m} \right)^2 x + C_1. \quad (1.48)$$

$$\frac{v_x^2}{2} = -\frac{1}{2} H^2 \left(\frac{e}{m} \right)^2 x^2 + C_1 x + C_2. \quad (1.49)$$

Постоянные C_1 и C_2 определяем из начальных условий: при $t = 0$

$$x = 0, \quad v_x = 0 \quad \text{и} \quad v_y = 0,$$

согласно чему

$$C_2 = 0.$$

Из первого уравнения (1.45) определяем v_y . Действительно, подставляя в него выражения (1.47) и (1.48), будем иметь

$$m \frac{dv_x}{dt} = m \frac{dv_x}{dx} v_x = Ee - He v_y = -mH^2 \left(\frac{e}{m} \right)^2 x + C_1 m,$$

или

$$v_y = \frac{E}{H} + H \frac{e}{m} x - C_1 \frac{m}{He}. \quad (1.50)$$

Полагая в (1.50) при $x = 0$, $v_y = 0$, имеем

$$C_1 = E \frac{e}{m}.$$

Таким образом, уравнение (1.49) будет иметь вид

$$\frac{v_x^2}{2} = -\frac{1}{2} \left(H \frac{e}{m} x \right)^2 + E \frac{e}{m} x. \quad (1.51)$$

Подставляя в (1.50) значение C_1 , определим составляющую скорости по оси Oy

$$v_y = H \frac{e}{m} x. \quad (1.51a)$$

Значение полной скорости (по величине) определим, если в (1.51) заменим $H \frac{e}{m} x$ на v_y (1.51a). Тогда получим

$$\frac{v_x^2 + v_y^2}{2} = \frac{v^2}{2} = \frac{e}{m} E x. \quad (1.52)$$

Этот же результат смотри в выражении (6.29). К нему же приводится уравнение (1.51), если в нем положить $H = 0$. Подставляя в выражение (1.51) $x = r_a$, т. е. расстояние между электродами, и, как и ранее, полагая $E r_a = u$, найдем

$$v_x^2 = 2u \frac{e}{m} - \left(H \frac{e}{m} \right)^2 r_a^2,$$

или

$$v_x = \sqrt{2u \frac{e}{m}} \sqrt{1 - \frac{H^2}{2u} \left(\frac{e}{m} \right) r_a^2} \quad (1.53)$$

и

$$v_y = H \frac{e}{m} r_a.$$

Направления, которые имеет равнодействующая скорость $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ с осями Ox и Oy , определяется из выражений (1.51) и (1.52)

$$\begin{aligned} \cos(\hat{v}, x) &= \frac{v_x}{v} = \sqrt{1 - \frac{1}{2} \frac{H^2}{u} \frac{e}{m} x}, \\ \cos(\hat{v}, y) &= \frac{v_y}{v} = \frac{H \sqrt{\frac{e}{m} x}}{\sqrt{2E}}. \end{aligned} \quad (1.54)$$

Что касается траектории электрона, то она определится интегрированием уравнения (1.51). Из уравнения (1.51)

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \sqrt{2E \left(\frac{e}{m} \right) x - \left(H \frac{e}{m} \right)^2 x^2}$$

или

$$dt = \frac{dx}{\sqrt{2E \left(\frac{e}{m} \right) x - \left(H \frac{e}{m} \right)^2 x^2}}.$$

Интегрируя это выражение, будем иметь

$$t = \frac{1}{H \frac{e}{m}} \arcsin \frac{\left(H \frac{e}{m} \right)^2 x - E \frac{e}{m}}{E \frac{e}{m}} + C_3. \quad (1.55)$$

Подставляя начальные условия интегрирования $x = 0, t = 0$, получим

$$0 = \frac{1}{H \frac{e}{m}} \arcsin(-1) + C_3,$$

и так как

$$\arcsin(-1) = \frac{2k+1}{2} \pi,$$

где k — любое нечетное целое число, то

$$C_3 = -\frac{2k+1}{2} \pi \frac{1}{H \frac{e}{m}}.$$

Подставляя C_3 в (1.55), получим окончательно

$$\begin{aligned} x &= \frac{E}{H^2 \frac{e}{m}} \left(1 - \cos^2 \frac{He}{m} t \right) = \\ &= \frac{2E \sin^2 \frac{He}{2m} t}{H^2 \frac{e}{m}}. \end{aligned} \quad (1.56)$$

Если $\frac{1}{2} H \frac{e}{m}$ очень мало, то значение синуса можно заменить его аргументом. Тогда

$$x = \frac{E}{2} \frac{e}{m} t^2.$$

Проекцию траектории на ось Oy найдем, подставляя (1.56) во второе уравнение (1.45):

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = H \frac{e}{m} \frac{dx}{dt},$$

что дает после интегрирования

$$\frac{dy}{dt} = v_y = H \frac{e}{m} x + C_4,$$

и так как при $x = 0$ и $v_y = 0$, то и $C_4 = 0$. Поэтому

$$v_y = \frac{dy}{dt} = H \frac{e}{m} x = 2 \frac{E}{H} \sin^2 \frac{He}{2m} t. \quad (1.57)$$

Интегрируя данное выражение, находим

$$y = \frac{2E}{H} \left(\frac{1}{2} t - \frac{1}{2H \frac{e}{m}} \sin \frac{He}{m} t \right) + C_5. \quad (1.58)$$

Так как при $t = 0, y = 0$, то и $C_5 = 0$.

Рассматривая выражения (1.53) и (1.54), можно заметить, что при условии

$$\frac{H^2}{2u} \frac{e}{m} r_a^2 = 1$$

$$v_x = 0; \quad \cos(\widehat{v, x}) = 0 \quad \text{и} \quad \cos(\widehat{v, y}) = 1. \quad (1.59)$$

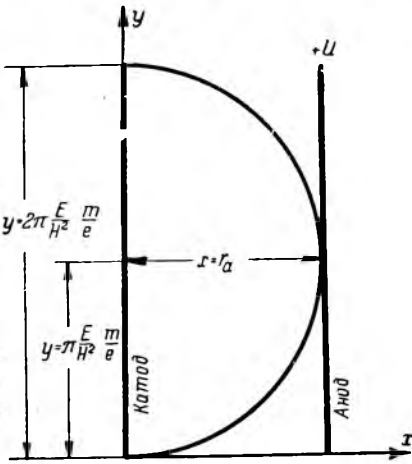


Рис. 1.3

Скорость направлена по касательной к аноду. Подставляя в (1.57) значение $x = r_a$, найдем

$$v_y = H \frac{e}{m} r_a = \sqrt{2u \frac{e}{m}}. \quad (1.57a)$$

Сравнивая выражения (1.59) и (1.56), замечаем, что $x = r_a$ получается при условии $\frac{He}{2m} t = \frac{\pi}{2}$. Соответствующее значение y (рис. 1.3) равно

$$y = \frac{2E}{H} \frac{1}{2} \frac{\pi}{2} \frac{2m}{He} = \pi \frac{E}{H^2} \frac{m}{e}.$$

Далее электрон будет возвращаться к катоду и достигнет его в точке, для которой x будет равен нулю, т. е. при $\frac{He}{2m} t = \pi$, что соответствует значению y , равному

$$y = \frac{2E}{H} \frac{1}{2} \frac{\pi}{H} \frac{m}{e} = 2\pi \frac{E}{H^2} \frac{m}{e}.$$

1.6. Радиальное электрическое поле и однородное магнитное поле по оси цилиндра, направленного по оси Oz

а) Движение электрона с начальной скоростью, равной нулю *. В точке P (рис. 1.4) на электрон будет действовать сила F от электрического поля, определяемая следующим выражением:

$$F = \frac{ue}{r \ln \frac{r_a}{\rho}}, \quad (1.60)$$

где r_a — радиус анода; ρ — радиус катода.

Разложим ее в точке P на слагающие по оси Ox и Oy:

$$F_x = \frac{A_1 e}{r} \cos \varphi$$

и

$$F_y = \frac{A_1 e}{r} \sin \varphi.$$

Здесь

$$A_1 = \frac{u}{\ln \frac{r_a}{\rho}}, \text{ а } r^2 = x^2 + y^2. \quad (1.61)$$

Подставляя значения тригонометрических функций, найдем F_x и F_y :

$$F_x = \frac{A_1 e}{r} \frac{x}{r} \text{ и } F_y = \frac{A_1 e}{r} \frac{y}{r}.$$

Так как кроме электрического поля мы имеем еще и магнитное, то кроме слагающих, которые мы определили,

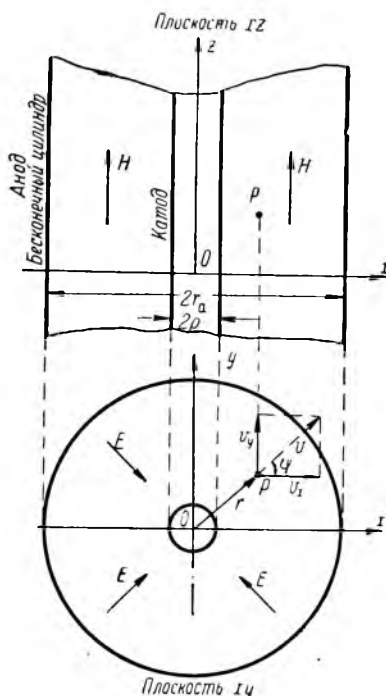


Рис. 1.4

* Движение положительного иона в этих случаях будет учитываться массой M с направлением движения от анода к катоду. (Прим. составителя).

на электрон будут действовать силы, зависящие от магнитного поля. Слагающая силы действия магнитного поля на электрон, зависящая от его скорости по оси Ox , будет действовать в направлении оси Oy и будет равна

$$F'_y = He \frac{dx}{dt}.$$

Слагающая той же силы от скорости электрона по оси Oy будет действовать по оси Ox в ее отрицательном направлении

$$F'_x = -He \frac{dy}{dt}.$$

Уравнения движения электрона в прямоугольных координатах при заданных условиях имеют вид

$$\begin{aligned} m \frac{d^2x}{dt^2} &= F_x + F'_x = \frac{A_1 e x}{r^2} - He \frac{dy}{dt}, \\ m \frac{d^2y}{dt^2} &= F_y + F'_y = \frac{A_1 e y}{r^2} + He \frac{dx}{dt}. \end{aligned} \quad (1.62)$$

Умножая первое уравнение на $\frac{dx}{dt}$, второе на $\frac{dy}{dt}$ и почленно складывая их, исключаем слагающие магнитной силы (находим интеграл кинетической энергии):

$$\begin{aligned} m \left(\frac{dx}{dt} \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dy}{dt} \frac{d^2y}{dt^2} \right) &= \frac{A_1 e}{r^2} \left(x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} \right), \\ \frac{m}{2} \frac{d}{dt} \left[\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 \right] &= \frac{A_1 e}{2} \frac{d(\ln r^2)}{dt}, \end{aligned} \quad (1.62a)$$

или

$$m \frac{d}{dt} (v^2) = A_1 e \frac{d}{dt} (\ln r^2).$$

Интегрируя, находим

$$mv^2 = A_1 e \ln r^2 + C_1,$$

и так как по начальным условиям при $r = \rho$ значение $v = 0$, то $C_1 = -A_1 e \ln \rho^2$, так что окончательно

$$\frac{mv^2}{2} = A_1 e \ln \frac{r}{\rho}. \quad (1.63)$$

Перепишем уравнение (1.63) в полярных координатах

$$\frac{m}{2} \left[\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \left(r \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right] = A_1 e \ln \frac{r}{\rho}. \quad (1.63a)$$

Далее исключаем слагающие силы электрического поля, умножая первое из уравнений 1.62 на y , второе — на x . Вычитая первое из второго, находим интеграл площадей:

$$m \left[x \frac{d^2y}{dt^2} - y \frac{d^2x}{dt^2} \right] = He \left[x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} \right].$$

Интегрируем данное выражение:

$$m \left[x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right] = \frac{He}{2} [x^2 + y^2 + C_2] = \frac{He}{2} [r^2 + C_2].$$

Так как при $x = 0$, $y = \rho$, то $C^2 = -\rho^2$, так что

$$m \left[x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right] = \frac{He}{2} (r^2 - \rho^2). \quad (1.64)$$

Переписываем выражение (1.64) в полярных координатах, принимая во внимание, что $x = r \cos \varphi$ и $y = r \sin \varphi$:

$$mr^2 \frac{d\varphi}{dt} = \frac{He}{2} (r^2 - \rho^2). \quad (1.64a)$$

Уравнения (1.63a) и (1.64a) дают возможность получить траекторию электрона в полярных координатах.

На самом деле, выражение (1.63a) можно представить в виде

$$\frac{m}{2} \left[\left(\frac{dr}{d\varphi} \right)^2 + r^2 \right] \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 = A_1 e \ln \frac{r}{\rho},$$

откуда имеем

$$\left(\frac{dr}{d\varphi} \right)^2 = \frac{2A_1 \frac{e}{m} \ln \frac{r}{\rho}}{\left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2} - r^2 = \frac{2A_1 \frac{e}{m} \ln \frac{r}{\rho} - r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2}{\left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2}.$$

Из уравнения (1.64a) подставим $\frac{d\varphi}{dt}$ и получим

$$\varphi = \int \frac{\frac{H}{2} \frac{e}{m} (r^2 - \rho^2) dr}{r \sqrt{2A_1 \frac{e}{m} r^2 \ln \frac{r}{\rho} - \left(\frac{He}{2m} \right)^2 (r^2 - \rho^2)^2}} + C_3. \quad (1.65)$$

Интегрирование уравнения (1.65) мы произведем для некоторого критического случая, а именно для случая, когда траектория электрона получается касательной к поверхности анода. Нетрудно заметить, что при этом условии в точке P (рис. 1.5) скорость v_φ будет направлена по касательной к поверхности анода, а значение радиальной скорости v_r будет равно нулю. Значение v_φ дает нам выражение (1.64a):

$$v_\varphi = r \frac{d\varphi}{dt} = \frac{H}{2} \frac{e}{m} \frac{r^2 - \rho^2}{r}.$$

Из выражения (1.63) получим v , тогда

$$v_r^2 = v^2 - v_\varphi^2 = 2A_1 \frac{e}{m} \ln \frac{r}{\rho} - \left(\frac{H}{2} \frac{e}{m} \right)^2 \frac{(r^2 - \rho^2)^2}{r^2}.$$

По условию при $r = r_a$, $v_r = 0$, следовательно,

$$2A_1 \frac{e}{m} \ln \frac{r_a}{\rho} = \left(\frac{H}{2} \frac{e}{m} \right)^2 \frac{(r_a^2 - \rho^2)^2}{r_a^2}$$

или

$$\left(\frac{H}{2} \frac{e}{m} \right)^2 = 2A_1 \frac{e}{m} \left(\ln \frac{r_a}{\rho} \right) \frac{r_a^2}{(r_a^2 - \rho^2)^2}. \quad (1.66)$$

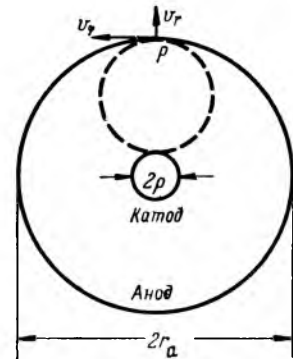


Рис. 1.5

Выражение (1.66) дает возможность получить зависимость между H и u , при которой электрон, вышедший с катода, не попадает на анод, так как его

траектория касательна к аноду. Подставив значение A_1 из уравнения (1.61) в уравнение (1.66), получим

$$H = \sqrt{\frac{8u}{e} \frac{r_a}{r_a^2 - \rho^2}} \simeq \sqrt{\frac{8u}{c} \frac{1}{r_a}}. \quad (1.66a)$$

Для электрона

$$H_e = \sqrt{\frac{8u \cdot 10^8}{1,76 \cdot 10^7} \frac{1}{r_a}}.$$

Окончательно

$$H_e = 6,72 \frac{\sqrt{u}}{r_a}, \quad (1.66b)$$

где u выражено в вольтах, r_a — в сантиметрах.

Подставляя значения A_1 из (1.61) и H из (1.66a) в выражение 1.65, найдем

$$\varphi = \int \frac{\frac{r_a}{r^2} \frac{r^2 - \rho^2}{r_a^2 - \rho^2} dr}{\sqrt{\frac{\ln\left(\frac{r}{\rho}\right)}{\ln\left(\frac{r_a}{\rho}\right)} - \frac{r_a^2 (r^2 - \rho^2)^2}{r^2 (r_a^2 - \rho^2)^2}}} + C_3.$$

Для тех частей траектории, при которых $r \gg \rho$, это выражение может быть проанализировано по такому пути

$$\varphi = \frac{1}{r_a} \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{\ln r^2}{\ln r_a^2} - \frac{r^2}{r_a^2}}} + C_3.$$

Далее, полагая $r = e^x$ и, следовательно, $dr = e^x dx$, найдем

$$\varphi = \frac{1}{r_a} \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{2xe^{-2x}}{\ln r_a^2} - \frac{1}{r_a^2}}} + C_3$$

или, разлагая e^{-2x} в ряд и пренебрегая высшими степенями, берем первые два члена

$$\varphi = \sqrt{\ln r_a^2} \int \frac{dx}{\sqrt{r_a^2 2x - 4x^2 r_a^2 - \ln r_a^2}} + C_3.$$

б) Движение электрона с начальной скоростью v_0 . Кроме разобранного случая, интересно рассмотреть движение электрона, если последний имеет начальную скорость v_0 , не равную нулю. Естественно, что это будет подобно явлению, рассмотренному выше. В частном случае, если при $x = 0$ и $y = \rho$, то для электрона имеем $v_x = v_{x0}$, $v_y = v_{y0}$ и $v = v_0$. Для общего случая вместо (1.63) мы можем написать, что

$$\frac{m(v^2 - v_0^2)}{2} = A_1 e \ln \frac{r}{\rho}, \quad (1.67)$$

так как постоянная интегрирования

$$C_1 = mv_0^2 - A_1 e \ln \rho^2,$$

и вместо (1.64)

$$m \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} + \rho v_{x0} \right) = \frac{He}{2} (r^2 - \rho^2), \quad (1.68)$$

так как

$$m (-\rho v_{x0}) = \frac{He}{2} \rho^2 + C_2, \quad C_2 = - \left(m \rho v_{x0} + \frac{He}{2} \rho^2 \right)$$

или

$$m r^2 \frac{d\varphi}{dt} = \frac{He}{2} (r^2 - \rho^2) - m \rho v_{x0}.$$

Определим теперь, при каких условиях электрон опишет орбиту, касательную к поверхности анода (рис. 1.5). Условием, определяющим данную орбиту, будет значение $v_r = 0$ при $y = 0$ и $x = r_a$. Уравнение (1.67) при этом условии дает

$$\frac{m(v^2 - v_0^2)}{2} = A_1 e \ln \frac{r_a}{\rho}, \quad (1.69)$$

а из (1.68)

$$m \left(r_a \frac{dy}{dt} + \rho v_{x0} \right) = \frac{He}{2} (r^2 - \rho^2). \quad (1.70)$$

Условие касательности орбиты в точке $x = r_a, y = 0$ мы найдем, если, положив в уравнениях (1.69) и (1.70) $(v_x)_{x=r_a} = 0$, исключим из этих уравнений v_y .

Из (1.69) и (1.70) находим

$$m \frac{v_y^2 - v_0^2}{2} = A_1 e \ln \frac{r_a}{\rho},$$

$$v_y = \frac{He}{2m} \frac{r_a^2 - \rho^2}{r_a} - \frac{\rho}{r_a} v_{x0},$$

откуда после исключения v_y получим

$$m \left[\left(\frac{H}{2} \frac{e}{m} \frac{r_a^2 - \rho^2}{r_a} - \frac{\rho}{r_a} v_{x0} \right)^2 - v_0^2 \right] = 2A_1 e \ln \frac{r_a}{\rho}. \quad (1.71)$$

Выражение (1.71) определяет условие, которое при этом должно существовать между H и u . Предположим, что начальная скорость равна нулю ($v_0 = 0$). Тогда

$$\left(\frac{He}{2m} \right)^2 \left(\frac{r_a^2 - \rho^2}{r_a} \right)^2 = 2A_1 \frac{e}{m} \ln \frac{r_a}{\rho} = 2u \frac{e}{m}. \quad (1.71a)$$

1.7. Радиальное электрическое поле и concentрическое магнитное поле, создаваемое током накала

Допустим, что магнитное поле создается током i , протекающим по нити накала в отрицательном направлении оси Oy , т. е. сверху вниз (рис. 1.6).

Уравнения движения электрона имеют вид (приняв, в силу симметрии, направление $r = \sqrt{x^2 + z^2}$, совпадающее с осью Ox)

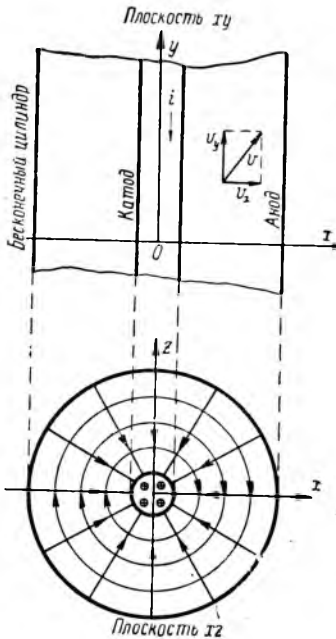
$$\begin{aligned} m \frac{d^2x}{dt^2} &= Ee - He \frac{dy}{dt}, \\ m \frac{d^2y}{dt^2} &= He \frac{dx}{dt}. \end{aligned} \quad (1.72)$$

Согласно (1.60) и (1.61), заменяя r на x , получим

$$E = \frac{u}{x \ln \frac{r_a}{\rho}} = \frac{A_1}{x},$$

где

$$A_1 = \frac{u}{\ln \frac{r_a}{\rho}}.$$



Значение H для бесконечно длинного цилиндра будет (из закона Био — Савара — Лапласа)

$$H = \frac{2i}{x}. \quad (1.72a)$$

Подставляя значения H и E в выражения (1.72), получим

$$\left. \begin{aligned} m \frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{A_1 e}{x} - \frac{2ie}{x} \frac{dy}{dt}, \\ m \frac{d^2y}{dt^2} &= \frac{2ie}{x} \frac{dx}{dt}. \end{aligned} \right\} \quad (1.73)$$

Найдем интеграл кинетической энергии.

Умножая первое уравнение на $\frac{dx}{dt}$, вто-

рое — на $\frac{dy}{dt}$ и складывая их, получим

$$m \left(\frac{dx}{dt} \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dy}{dt} \frac{d^2y}{dt^2} \right) = \frac{A_1 e}{x} \frac{dx}{dt}.$$

Записывая это подобно предыдущему случаю [см. (1.62a)], будем иметь

$$\frac{m}{2} \frac{d}{dt} (v^2) = A_1 e \frac{d(\ln x)}{dt},$$

или

$$\frac{mv^2}{2} = A_1 e \ln x + C_1.$$

Полагая при $x = \rho$, $v = 0$, найдем $C_1 = -A_1 e \ln \rho$, так что

$$\frac{mv^2}{2} = A_1 e \ln \frac{x}{\rho}. \quad (1.74)$$

Умножим первое из уравнений (1.73) на x и взяв производную по t , подставим $\frac{d^2y}{dt^2}$. Тогда получим

$$\frac{d}{dt} \left(mx \frac{d^2x}{dt^2} \right) = - \frac{(2ie)^2}{mx} \frac{dx}{dt},$$

откуда следует после интегрирования

$$m^2 x \frac{d^2x}{dt^2} = - (2ie)^2 \ln x + C_2.$$

Так как при $x = \rho$, $\frac{dy}{dt} = 0$, то $m \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{A_1 e}{\rho}$ и $C_2 = A_1 e m + (2ie)^2 \cdot \ln \rho$, на основании чего имеем

$$m^2 x \frac{d^2x}{dt^2} = - (2ie)^2 \ln \frac{x}{\rho} + A_1 e m. \quad (1.75)$$

Выражение (1.75) представим в виде

$$m^2 \frac{dv_x}{dx} v_x = - \frac{(2ie)^2}{x} \ln \frac{x}{\rho} + \frac{A_1 e m}{x},$$

что дает после интегрирования

$$\frac{m^2 v_x^2}{2} = - \frac{(2ie)^2}{2} \left(\ln \frac{x}{\rho} \right)^2 + A_1 e m \ln x + C_3.$$

При $x = \rho$, $v_x = 0$ и

$$C_3 = - A_1 e m \ln \rho,$$

откуда

$$\frac{mv_x^2}{2} = - \frac{(2ie)^2}{2m} \left(\ln \frac{x}{\rho} \right)^2 + A_1 e \ln \frac{x}{\rho}. \quad (1.76)$$

Если электрон описывает орбиту, касательную к поверхности анода, то должно иметь место условие: при $x = r_a$, $v_x = 0$

$$\frac{(2ie)^2}{2m} \ln \frac{r_a}{\rho} = A_1 e,$$

или

$$\frac{4i^2 e^2}{2m} \ln \frac{r_a}{\rho} = \frac{ue}{\ln \frac{r_a}{\rho}}.$$

Подставляя известные величины и выражая i в амперах и u в вольтах, получим

$$i^2 = \frac{u}{2 \frac{e}{m} \left(\ln \frac{r_a}{\rho} \right)^2} = \frac{u \cdot 10^8 \cdot 10^2}{2 \cdot 1,76 \cdot 10^7 \cdot 2,303^2 \left(\lg \frac{r_a}{\rho} \right)^2}.$$

Окончательно

$$\boxed{i = \frac{7,3 \cdot u^{1/2}}{\lg \frac{r_a}{\rho}}} \quad (1.77)$$

Для того чтобы найти уравнение траектории, напомним

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} / \frac{dx}{dt} = \frac{v_y}{v_x}$$

или

$$dy = \frac{v_y}{v_x} dx. \quad (1.78)$$

Из (1.76) имеем

$$v_x = \sqrt{-\frac{(2ie)^2}{m^2} \left(\ln \frac{x}{\rho}\right)^2 + \frac{2A_1 e}{m} \ln \frac{x}{\rho}},$$

и из (1.73)

$$v_y = \frac{2ie}{m} \ln \frac{x}{\rho}.$$

Подставляя v_x и v_y в выражение (1.78) и интегрируя его, получим

$$y = \frac{2ie}{m} \int \sqrt{\frac{\ln \frac{x}{\rho}}{\frac{2A_1 e}{m} - \frac{(2ie)^2}{m^2} \ln \frac{x}{\rho}}} dx + C_4; \quad (1.79)$$

так как

$$A_1 = \frac{u}{\ln \frac{x}{\rho}} \quad \text{и} \quad u = i^2 2 \frac{e}{m} \ln \frac{x}{\rho},$$

то

$$y = \frac{2ie}{m} \int \sqrt{\frac{\left(\ln \frac{x}{\rho}\right)^2}{2u \frac{e}{m} \left(1 - \ln \frac{x}{\rho}\right)}} dx + C_4 = \frac{2ie}{m} \int \frac{\ln \frac{x}{\rho}}{\sqrt{2u \frac{e}{m} \left(1 - \ln \frac{x}{\rho}\right)}} dx + C_4.$$

Решение данного уравнения даст выражение для траектории электрона.

1.8. Ускоренное движение электрона. Излучение электроном энергии

Допустим, что электрон, находившийся в состоянии покоя или равномерного прямолинейного движения, получает ускорение в течение малого промежутка времени τ или замедление его движения. Тогда концы силовых линий у поверхности электрона или ускорят или замедлят свое движение, благодаря чему вдоль линий будет распространяться возмущение.

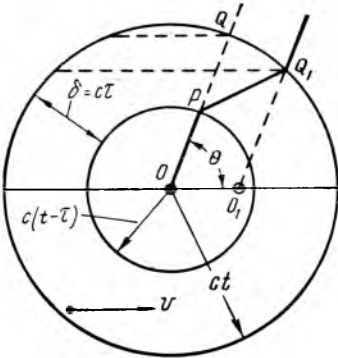


Рис. 1.7

Из точки O (рис. 1.7) опишем сферу радиуса ct , где c — скорость распространения возмущения, а t — время, истекшее с того момента, как на электрон перестала действовать сила.

Из точки O опишем вторую сферу радиуса $c(t - \tau)$. Силовые линии, находящиеся вне сферы радиуса ct , будут занимать то же положение, как если бы движение электрона не было замедлено. Переходный же слой между двумя сферами представит собою шаровую электромагнитную волну, излучаемую электроном.

В этом переходном слое, кроме радиальной слагающей напряженности электрического поля E_r , появится также тангенциальная составляющая

E_m , величина которой определится из соотношения

$$\frac{E_m}{E_p} = \frac{QQ_1}{QP} \cong \frac{OO_1 \cdot \sin \theta}{c\tau} = \frac{vt \sin \theta}{\delta},$$

где v — скорость, которую электрон имел в тот момент, когда на него подействовало ускорение; $\delta = c\tau$ — величина импульса, ограниченная указанными сферами.

Так как $E_p = \frac{e}{r^2}$ и $r = ct$, то мы определяем величину тангенциальной составляющей

$$E_m = \frac{e}{c^2 t^2} \frac{vt \sin \theta}{\delta} = \frac{ev \sin \theta}{c r \delta}.$$

При своем распространении тангенциальная составляющая напряженности электрического поля образует составляющую напряженности магнитного поля, равную

$$H = E_m = \frac{ev \sin \theta}{cr \delta}. \quad (1.80)$$

Напряженность магнитного поля в точке p имеет направление, перпендикулярное к плоскости чертежа и противоположное направлению напряженности магнитного поля, созданного равномерно движущимся электроном.

Количество энергии, излучаемое электроном в одну секунду через поверхность шарового пояса dS , будет равно

$$dW_{\Sigma} = \Pi dS,$$

где

$$\Pi = \frac{cEH}{4\pi} = \frac{e^2 v^2 \sin^2 \theta}{4\pi c (r\delta)^2} \quad (1.81)$$

есть численное значение вектора Умова — Пойнтинга.

Последним, как известно, определяется поток электромагнитной энергии, находящейся в каждой точке поля. Так как (в сферических координатах)

$$dS = r \cdot d\theta \cdot 2\pi r \sin \theta = 2\pi r^2 \cdot \sin \theta d\theta,$$

то, подставляя Π и dS , найдем

$$dW_{\Sigma} = \frac{e^2 v^2 2\pi \cdot \sin^3 \theta d\theta}{4\pi c \delta^2}.$$

Интегрируя в пределах от $\theta = 0$ до $\theta = \pi$, найдем

$$W_{\Sigma} = \frac{e^2 v^2 2\pi}{c \delta^2 4\pi} \int_0^{\pi} \sin^3 \theta d\theta = \frac{2}{3} \frac{e^2 v^2}{c \delta^2}. \quad (1.82)$$

Найденное выражение определяет мощность, излучаемую электроном. Полное количество энергии, которое излучает электрон, мы найдем, умножая данное выражение на время τ , в течение которого действовало ускорение

$$W_{\tau} = W_{\Sigma} \tau = \frac{2}{3} \frac{e^2 v^2}{c^2 \delta} \tau. \quad (1.83)$$

Излучение электрона может происходить за счет той магнитной энергии, которую он запас в то время, за которое его скорость достигла значения v .

Отсюда мы можем найти условие, при котором электрон излучает всю энергию, запасенную им при движении, т. е. когда ускорение отрицательно

и тормозит электрон до полной остановки. Для этого должно иметь место условие

$$W_{\tau} = W_H$$

или

$$\frac{2}{3} \frac{e^2 v^2}{c^2 \delta} = \frac{e^2 v^2}{3 r_0 c^2},$$

откуда следует $\delta = 2r_0$. Вообще же Дж. Дж. Томсон по этому поводу указывает, что отношение количества излучаемой энергии к энергии поля электрона равно $\frac{2r_0}{\delta}$, где r_0 есть радиус электрона. Если $2r_0 = \delta$, то излучается вся энергия (предполагается, что вся масса электрона электромагнитная). При большем размере импульса излучается лишь часть энергии, тогда как ее остаток поглощается там, где электрон тормозится.

Описанный механизм излучения при ускорении электрона был найден Стоксом для объяснения механизма возникновения рентгеновских лучей и исследован Дж. Дж. Томсоном.

1.9. Излучение электромагнитной энергии электроном, совершающим гармонические колебания и двигающимся по круговой орбите

Выражение тангенциальной составляющей напряженности электрического поля в электромагнитном импульсе

$$E_m = \frac{ev}{c} \frac{\sin \theta}{r \delta} \quad (1.84)$$

мы можем представить в следующем виде, принимая во внимание, что $\delta = c\tau$:

$$E_m = \frac{ev}{c^2} \frac{\sin \theta}{r \tau} = \frac{e \dot{v} \sin \theta}{c^2 r},$$

где $\dot{v} = \frac{v}{\tau}$ — ускорение, получаемое электроном.

Напряженность магнитного поля, создаваемого движением поля тангенциальной составляющей, определится выражением

$$H = \frac{e \dot{v} \sin \theta}{c^2 r}. \quad (1.85)$$

Численное значение вектора Умова — Пойнтинга выразится как

$$P = \frac{c E_m H}{4\pi} = \frac{e^2 \dot{v}^2 \sin^2 \theta}{4\pi c^3 r^2}; \quad (1.86)$$

энергия же излучения электрона в единицу времени, подобно предыдущему выражению, будет равна

$$W_{\Sigma} = \int_0^{\pi} P dS = \frac{e^2 \dot{v}^2 2\pi r^2}{4\pi c^3 r^2} \int_0^{\pi} \sin^3 \theta d\theta = \frac{e^2 \dot{v}^2}{2c^3} \int_0^{\pi} \sin^3 \theta d\theta,$$

т. е.

$$W_{\Sigma} = \frac{2}{3} \frac{e^2 \dot{v}^2}{c^3}. \quad (1.87)$$

Если электрон колеблется ($x = l \sin \omega t$), то ускорение будет равно

$$\dot{v} = -l\omega^2 \sin \omega t.$$

Здесь l — величина максимального отклонения электрона.

Согласно этому, наибольшее значение излучаемой мощности будет найдено из выражения

$$W_{\Sigma \text{ макс}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{e^2 l^2 \omega^4}{c^3} = \frac{2}{3} \frac{e^2 l^2 \cdot 16 \pi^4 c^4}{\lambda^4 c^3},$$

или

$$W_{\Sigma \text{ макс}} = \frac{32}{3} \frac{e^2 l^2 \pi^4 c}{\lambda^4}. \quad (1.87a)$$

Пример 1. Определить энергию излучения W_{Σ} , если электрон движется прямолинейно и равномерно:

$$v = \text{const}, \quad \dot{v} = \frac{dv}{dt} = 0, \quad W_{\Sigma} = 0.$$

Пример 2. Определить W_{Σ} , если электрон движется по кругу радиуса r :

$$v = r\omega, \quad \dot{v} = r\omega^2,$$

$$W_{\Sigma} = \frac{2}{3} \frac{e^2 r^2 \omega^4}{c^3}.$$

Длина волны в данном случае связана с угловой частотой вращения электрона $\omega = \frac{2\pi c}{\lambda}$. Тогда

$$W_{\Sigma} = \frac{2}{3} \frac{(4,8 \cdot 10^{-10})^2 r^2 (2\pi)^4 \cdot (3 \cdot 10^{10})^4}{\lambda^4 (3 \cdot 10^{10})^3} = \frac{72\,600 r^2}{\lambda^4} 10^{-10} \text{ эрг},$$

или, выражая мощность в ваттах,

$$W_{\Sigma} = \frac{72\,600}{\lambda^4} r^2 \cdot 10^{-17} \text{ вт}.$$

В полученном выражении мощности, излучаемой электроном, двигающимся по кривой орбите, радиус орбиты r и угловая частота ω , связанные выражением

$$\dot{v} = r\omega^2,$$

нельзя определить непосредственно, исходя из параметров движущейся системы.

Вводим новое условие, что электрон вращается вокруг положительно заряженного центра, имеющего заряд e . В этом случае, если в данный момент времени электрон находится на круговой орбите, то мы можем написать, что центробежная сила уравнивается силой притяжения

$$mr\omega^2 = \frac{e^2}{r^2}.$$

Последнее выражение дает возможность выразить излучаемую мощность или только через радиус, или только через длину волны, или через угловую частоту вращения. Имеем:

$$\dot{v}^2 = r^2 \omega^4 = \frac{e^4}{m^2 r^4},$$

откуда

$$W_{\Sigma} = \frac{2}{3} \left(\frac{e}{m} \right)^2 \frac{e^4}{c^3 r^4}.$$

Пример 3. Найти мощность излучения электрона W_{Σ} , если последний колеблется вдоль оси Ox по закону

$$x = l \sin \omega t.$$

Наибольшее ускорение будет равно

$$\dot{v} = \frac{d^2x}{dt^2} = -l\omega^2.$$

Согласно найденному выражению, получаем максимальное значение излучаемой мощности

$$W_{\Sigma \text{ макс}} = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} l^2 \omega^4.$$

Принимая во внимание, что максимальное значение силы тока будет равно

$$I = \omega e,$$

находим

$$W_{\Sigma \text{ макс}} = \frac{2}{3} \frac{I^2 l^2 \omega^2}{c^3} = \frac{8\pi^2 I^2 l^2}{3c\lambda^2}.$$

Переходя к практическим единицам, мы получим

$$W_{\Sigma \text{ макс}} = \frac{8\pi^2 I^2 l^2}{3c\lambda^2} = 80\pi^2 I^2 \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 \text{ эрг.}$$

С другой стороны,

$$W_{\Sigma \text{ макс}} = I^2 R_{\Sigma},$$

где R_{Σ} — сопротивление излучения. Отсюда находим сопротивление излучения равным

$$R_{\Sigma} = 80\pi^2 \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 \text{ ом.}$$

Далее, принимая во внимание, что максимальное значение скорости электрона равно

$$v_{\text{макс}} = \omega l = \frac{2\pi cl}{\lambda},$$

найдем

$$\frac{l}{\lambda} = \frac{1}{2\pi} \frac{v_{\text{макс}}}{c}. \quad (1.88)$$

Найденное выражение доказывает неоднозначную зависимость отношений максимального отклонения электрона, колеблющегося по синусоидальному закону по оси x , к длине волны и максимального значения его скорости к скорости света.

Для большей наглядности рассмотрим табл. 1.1, построенную на основании равенства (1.88). В последней строке таблицы даны значения l при длине волны $\lambda = 10 \text{ см.}$

Таблица 1.1

Максимальное отклонение электрона в зависимости от его скорости

$\frac{v_{\text{макс}}}{c}$	1	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1
$\frac{l}{\lambda}$	$\frac{1}{2\pi}$	$\frac{0,9}{2\pi}$	$\frac{0,8}{2\pi}$	$\frac{0,7}{2\pi}$	$\frac{0,6}{2\pi}$	$\frac{0,5}{2\pi}$	$\frac{0,4}{2\pi}$	$\frac{0,3}{2\pi}$	$\frac{0,2}{2\pi}$	$\frac{0,1}{2\pi}$
$l, \text{ см}$	$\frac{5}{\pi}$	$\frac{4,5}{\pi}$	$\frac{4}{\pi}$	$\frac{3,5}{\pi}$	$\frac{3}{\pi}$	$\frac{2,5}{\pi}$	$\frac{2}{\pi}$	$\frac{1,5}{\pi}$	$\frac{1}{\pi}$	$\frac{0,5}{\pi}$

1.10. Силы, действующие на электрон при его движении

Если электрон находится в состоянии ускоренного движения, то это является результатом действия на него каких-то сил. Так, например, электрон движется ускоренно в электрическом поле. В электрическом и магнитном полях электрон описывает сложную траекторию и т. д. Вокруг атома электрон вращается по замкнутой орбите. Во всех этих случаях силам, создающим движение электрона и являющимся их причиной, будут противодействовать силы инерции и та реакция, которая фактически является излучением энергии.

Нами было найдено, что масса электрона зависит от его скорости (1.12а):

$$m = m_0 + \frac{2}{3} \frac{e^2}{rc^2}.$$

С другой стороны, мы определили (1.9), что электрическая энергия, сосредоточенная в электроне, равна

$$W_{\text{э}} = \frac{1}{2} \frac{e^2}{r_0} \quad (\text{при } \varepsilon = 1).$$

Магнитная энергия, создаваемая при движении электрона, равна (1.12)

$$W_H = \frac{e^2 v^2}{3rc^2} = \frac{2}{3} \frac{v^2}{c^2} W_{\text{э}},$$

а масса электрона определится выражением

$$m = m_0 + \frac{4}{3} \frac{W_{\text{э}}}{c^2}.$$

Последнее выражение можно представить в следующем виде:

$$\frac{W}{c^2} = \frac{W_0}{c^2} + \frac{4}{3} \frac{W_{\text{э}}}{c^2},$$

где $m = \frac{W}{c^2}$ — есть масса движущегося электрона [см. (1.14)];

$m_0 = \frac{W_0}{c^2}$ — масса покоя [см. (1.19)];

$m_{\text{эм}} = \frac{4}{3} \frac{W_{\text{э}}}{c^2}$ — электромагнитная масса [см. (1.13) и (1.20)].

Выражение для излучаемой мощности

$$W_{\Sigma} = \frac{2}{3} \frac{e^2 \dot{v}^2}{c^3}$$

даст возможность определить силу реакции излучения на колебание электрона.

Разберем случай, когда электрон колеблется около неподвижного центра.

Совершенно очевидно, что работа силы реакции в промежуток времени $t_2 - t_1$ будет как раз равна излучаемой энергии. На основании (1.87) можно написать:

$$\int_{t_1}^{t_2} F_{\Sigma} v dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{2}{3} \frac{e^2 \dot{v}^2}{c^3} dt = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{dv}{dt} \right)^2 dt. \quad (1.89)$$

Моменты t_2 и t_1 , между которыми производим интегрирование, выберем таким образом, чтобы в эти моменты ускорение было равно нулю.

Возьмем последний интеграл по частям:

$$\int \left(\frac{dv}{dt} \right)^2 dt = \int \frac{dv}{dt} \frac{dv}{dt} dt = \int \frac{dv}{dt} dv = v \frac{dv}{dt} - \int v \frac{d^2v}{dt^2} dt.$$

Подставляя это в (1.89), получим

$$\int_{t_1}^{t_2} F_{\Sigma} v dt = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} v \frac{dv}{dt} \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} v \frac{d^2v}{dt^2} dt.$$

Первый интеграл в правой части пропадает, так как при обоих пределах ускорение равно нулю, и мы получим

$$\int_{t_1}^{t_2} F_{\Sigma} v dt = - \int_{t_1}^{t_2} \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} v \frac{d^2v}{dt^2} dt, \quad (1.90)$$

откуда путем сравнения (1.89) и (1.90) следует

$$F_{\Sigma} = - \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \frac{d^2v}{dt^2}.$$

Мощность излучения при данном движении электрона мы получим, если силу реакции излучения умножим на скорость движения v .

На самом деле, например, при гармоническом колебательном движении с угловой частотой ω , мы будем иметь соотношение

$$\frac{d^2v}{dt^2} = - \omega^2 v,$$

на основании чего получим

$$F_{\Sigma} = \frac{2}{3} \frac{e^2 \omega^2 v}{c^3}.$$

В свою очередь, наибольшая скорость гармонического колебательного движения будет равна

$$v = \omega l,$$

где l — амплитуда колебания. Тогда

$$W_{\Sigma} = v F_{\Sigma} = \frac{2}{3} \frac{e^2 \omega^4 l^2}{c^3}.$$

Пользуясь выражением силы реакции излучения, вычислим мощность, излучаемую электроном при движении по кругу радиуса R .

В этом случае $l = R$ и

$$\frac{d^2v}{dt^2} = - R \omega^3, \quad v = R \omega.$$

Тогда мы будем иметь

$$W_{\Sigma} = v F_{\Sigma} = \frac{2e^2 R^2 \omega^4}{3c^3}, \quad (1.91)$$

т. е. выражение, полученное нами ранее при непосредственном вычислении излучаемой мощности.

Рассмотрим колебательное движение электрона при наличии затухания. Предположим, что электрон совершает колебания около неподвижного

центра. Движение электрона определяется следующим уравнением:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -fx + F_{\Sigma}, \quad (1.92)$$

где fx — упругая сила, возвращающая электрон в исходное положение ($x = 0$); F_{Σ} — реакция излучения, равная

$$\frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \frac{d^3 x}{dt^3} = b \frac{d^3 x}{dt^3}.$$

Предполагая частное решение в виде

$$x = X e^{\alpha t},$$

получим характеристическое уравнение в следующем виде:

$$m \alpha^2 = -f + b \alpha^3.$$

В тех случаях, когда последний член мал, мы можем приближенно положить $m \alpha^2 = -f$. Тогда $\alpha^2 = -f/m$, и, обозначив $f/m = n^2$, получим $\alpha = jn$.

Запишем теперь характеристическое уравнение в следующем виде:

$$\alpha^2 + \frac{b \alpha n^2}{m} + n^2 = 0,$$

откуда следует

$$\alpha = -\frac{1}{2} \frac{b n^2}{m} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2} \frac{b n^2}{m}\right)^2 - n^2} = -\frac{1}{2} \frac{b n^2}{m} \pm j n$$

и

$$x = e^{-\frac{1}{2} \frac{b n^2}{m}} (A_1 e^{j n t} + A_2 e^{-j n t}).$$

Согласно формуле Эйлера, последнее выражение можно представить так:

$$\begin{aligned} x &= e^{-\frac{1}{2} \frac{b n^2}{m}} [(A_1 + A_2) \cos nt + j (A_1 - A_2) \sin nt] = \\ &= e^{-\frac{1}{2} \frac{b n^2}{m}} [B_1 \cos nt + B_2 \sin nt] = x_0 e^{-\frac{1}{2} \frac{b n^2}{m}} \sin (nt + \varphi), \end{aligned}$$

где $x_0 = \sqrt{B_1^2 + B_2^2}$, $\operatorname{tg} \varphi = \frac{B_1}{B_2}$.

Таким образом, электрон будет совершать затухающие колебания.

В течение времени $\tau = \frac{2m}{b n^2}$ амплитуда колебания уменьшится до $1/e$ первоначальной величины.

Преобразуем выражение для τ :

$$\tau = \frac{2m}{b n^2} = \frac{2m}{\frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} n^2} = \frac{3mc^3}{e^2 n^2}.$$

Для m примем значение [см. (1.19)]

$$m = m_0 = \frac{2}{3} \frac{e^2}{r_0 c^2}.$$

Тогда $\tau = \frac{2c}{r_0 n^2}.$

В это выражение вместо n^2 подставим

$$n n = \frac{2\pi}{T} \frac{2\pi c}{\lambda} = \frac{4\pi^2 c}{T \lambda},$$

где T — период колебаний. Теперь выражение для τ запишется так:

$$\tau = \frac{\lambda}{2\pi^2 r_0} T.$$

Подставляя для радиуса электрона его значение $r_0 = 1,87 \cdot 10^{-13}$ см (см. стр. 8), мы найдем для длины волны желтого света $\lambda = 6 \cdot 10^{-5}$ см

$$\tau \cong 2 \cdot 10^7 T.$$

Это показывает, что колебания получатся слабо затухающими, и мы были правы, когда предположили, что член реакции излучения мал по величине сравнительно с остальными.

1.11. К теории излучения электрона

Изложенная теория излучения электроном электромагнитной энергии, построенная на основе классической электродинамики, была применена Релеем для исследования расстояния светового луча в атмосфере и имела опытное подтверждение. Формула Релея для коэффициента затухания светового луча была подтверждена астрономическими наблюдениями, например измерениями яркости звезд на различных высотах. Было найдено, что ослабление лучей благодаря прохождению через атмосферу, вычисленное по формуле Релея, совпадает с опытным значением.

С другой стороны, величина коэффициента затухания, определенная опытным путем, дает возможность определить из формулы число Авогадро. Полученная величина хорошо согласуется с найденной другими методами.

Баркла и его ученики детально изучили вторичные лучи, которые излучаются телами под воздействием рентгеновых лучей. Это явление было использовано для определения числа электронов в атоме рассеивающего вещества. В данном случае был использован теоретический коэффициент рассеяния, получаемый из выражения мощности, излучаемой электроном.

Однако изложенная теория излучения, вытекающая из классической электродинамики, оказалась недостаточной в следующих основных явлениях.

Во-первых, оказалось невозможным построить теорию излучения энергии абсолютно черным телом, ограничиваясь изложенной теорией излучения и принципами электродинамики.

Во-вторых, изложенная теория излучения оказалась неудовлетворительной в приложении к атомному излучению.

Резерфордом была предложена модель атома, согласно которой атом состоит из положительно заряженного ядра, окруженного вращающимися вокруг него электронами.

Резерфорд и его сотрудники, исследуя рассеяние α -частиц, излучаемых радием и проходящих через металлические листочки, доказали следующие положения:

- 1) атом состоит из ядра (малого по сравнению с атомом), окруженного электронами с большими промежуточными расстояниями;
- 2) основная масса атома сосредоточена в ядре;
- 3) положительный заряд ядра равен атомному номеру по таблице Менделеева.

Поскольку из приведенной выше теории следует, что электрон, вращающийся вокруг ядра, должен излучать, из сравнения с исследованным гармоническим колебанием электрона, который совершает затухающие колебания около положения покоя, мы должны заключить, что внешние электроны модели Резерфорда должны рано или поздно упасть на ядро.

Модель Резерфорда в основных количественных соотношениях, доказанная опытом, не может существовать, если принять соответствующим

действительности непрерывное излучение электрона, движущегося вокруг ядра по замкнутой орбите.

Решение первой проблемы было дано Максом Планком, предположившим гипотезу скачкообразного излучения электромагнитной энергии квантами.

Решение второй проблемы было дано Нильсом Бором, который, опираясь на гипотезу Планка, ввел в модель Резерфорда добавочные условия, а именно: предположил, что электрон вопреки принципам классической электродинамики, двигаясь по замкнутой орбите, не излучает. Как следствие из этого положения было получено, что электрон может двигаться не по любой орбите, а лишь по орбитам, удовлетворяющим определенным условиям (стационарным орбитам), и потому лишь движение по этим орбитам является устойчивым.

Акт излучения происходит только тогда, когда электрон перескакивает с одной устойчивой орбиты на другую, причем излучается всегда одно и то же количество энергии — один квант.

Количество энергии, т. е. та частота колебаний, которой обладает данный квант, определяется разностью энергий, которую имел электрон на покидаемой им орбите, и энергией, оставшейся у электрона на той орбите, куда он перескочил.

ТЕРМОЭЛЕКТРОННАЯ ЭМИССИЯ. ФОРМУЛА РИЧАРДСОНА

2.1. Тепловые скорости электронов

Допустим, что в металле, кроме электронов, связанных с атомами, имеется большое количество электронов, которые перемещаются в металле подобно молекулам газа какого-либо объема.

Допустим также, что этот электронный газ подчиняется всем законам, которые вытекают из кинетической теории газов и которые приложимы к молекулам газа.

Из кинетической теории газов известно, что для грамм-молекулы (моля) какого-либо газа (т. е. столько грамм вещества, сколько единиц в молекулярном весе) произведение из давления на объем определяется соотношением

$$pV_0 = \frac{1}{3} N m \bar{v}^2, \quad (2.1)$$

где N — число Авогадро (напомним закон Авогадро: грамм-молекула всякого вещества содержит одно и то же число частиц, т. е. $N = (6,062 \pm 0,006) \cdot 10^{23}$ частиц в грамм-молекуле); $\bar{v}^2$ — среднее квадратичное значение скорости частицы газа при данной его абсолютной температуре T .

По закону Менделеева — Клапейрона

$$pV_0 = RT, \quad (2.2)$$

где R — универсальная газовая постоянная, равная $8,313 \cdot 10^7$ эрг/град·моль.

На основании этих двух соотношений получим

$$\frac{1}{2} m \bar{v}^2 = \frac{3}{2} \frac{R}{N} T = \frac{3}{2} kT; \quad \bar{v}^2 = \frac{3kT}{m},$$

откуда

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}, \quad (2.3)$$

где $k = \frac{R}{N} = 1,372 \cdot 10^{-16}$ эрг/град — постоянная Больцмана.

Пример 1. Температура металла (вольфрама) 2300°K . Найти среднюю квадратичную, наиболее вероятную и среднюю арифметическую скорости электронов в металле.

Среднее квадратичное значение скорости определится из формулы

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 1,372 \cdot 10^{-16} \cdot 2300}{9 \cdot 10^{-28}}} = 32,4 \cdot 10^6 \text{ см/сек.}$$

Наиболее вероятная скорость равняется

$$v_v = \sqrt{\frac{2kT}{m}} = 26,4 \cdot 10^6 \text{ см/сек,}$$

и среднее арифметическое значение скорости равно

$$v_{\text{ср}} = \frac{2v_{\text{в}}}{\sqrt{\pi}} = 2\sqrt{\frac{2kT}{\pi m}} = 29,9 \cdot 10^6 \text{ см/сек.}$$

Таким образом, при $T = 2300^\circ \text{ К}$ будем иметь:

средняя квадратичная скорость $v = 32,4 \cdot 10^6 \text{ см/сек.}$

средняя арифметическая скорость $v_{\text{ср}} = 29,9 \cdot 10^6 \text{ см/сек.}$

наиболее вероятная скорость $v_{\text{в}} = 26,4 \cdot 10^6 \text{ см/сек.}$

Пример 2. Требуется выразить скорость электрона в вольтах и, наоборот, линейную скорость электрона в функции от разности потенциалов, выраженной в вольтах.

Если электрон приобрел кинетическую энергию $\frac{m\bar{v}^2}{2}$, то ее можно выразить через разность потенциалов u , проходя которые электрон приобретает скорость v :

$$\frac{m\bar{v}^2}{2} = ue; \quad u = \frac{\bar{v}^2}{2} \frac{1}{e/m},$$

где v выражено в сантиметрах в секунду, а u в вольтах;

$$u = 28,4 \cdot 10^{-17} \bar{v}^2.$$

Решая это уравнение относительно $\bar{v}$, получим

$$\bar{v} = 5,931 \cdot 10^7 \sqrt{u} \text{ см/сек} \approx 600 \sqrt{u} \text{ км/сек.}$$

Вычисленная в примере 1 средняя квадратичная скорость была равна $32,4 \cdot 10^6 \text{ см/сек.}$

Определим разность потенциалов, проходя которую электрон приобретает эту скорость:

$$u = 28,4 \cdot 10^{-17} \cdot (3,24 \cdot 10^7)^2 = 0,297 \text{ в.}$$

Пример 3. Выразить среднюю квадратичную скорость в вольтах через абсолютную температуру.

Учитывая, что

$$\bar{v}^2 = \frac{3kT}{m} = \frac{3 \cdot 1,37 \cdot 10^{-16} T}{9 \cdot 10^{-28}} = 0,4573 \cdot 10^{12} \cdot T,$$

и (см. пример 2)

$$u = 28,4 \cdot 10^{-17} \bar{v}^2,$$

получим

$$u = 28,4 \cdot 10^{-17} \cdot 0,4573 \cdot 10^{12} T = 12,987 \cdot 10^{-5} \cdot T = 0,12987 \left(\frac{T}{1000} \right) \text{ в.}$$

2.2. Исследование двойного слоя

Двойной слой образуется на поверхности тела слоем ядер и вращающимися вокруг них электронами. При этом мы полагаем, что в создании двойного слоя участвуют валентные (внешние) электроны, а роль внутренних электронов сводится к соответствующему уменьшению положительного заряда.

Проведем по центрам положительных ядер воображаемую плоскость $00'$ и отложим параллельно ей две плоскости на расстоянии атомного радиуса согласно рис. 2.1. Под атомным радиусом понимаем радиус, соответствующий орбитам крайних валентных электронов.

В одном кубическом сантиметре число внешних электронов равно $k'n$, где n — число ядер в 1 см^3 , а k' — число валентных электронов.

Если g есть атомный вес вещества, δ — удельный вес и N — число Авогадро, то

$$n = \frac{\delta}{g} N. \quad (2.4)$$

Так как в слой 2 попадает лишь $\frac{k'n}{2}$ электронов, то электрический заряд в 1 см^3 слоя 2 при $x = 0$ равен $+\frac{k'ne}{2}$. На расстоянии $x = r$ от плоскости $00'$, в положительном направлении оси x объемный заряд ρ будет равен нулю.

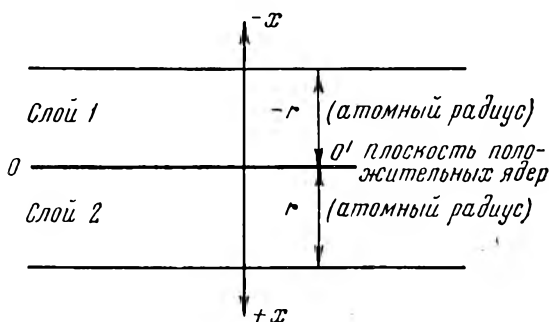


Рис. 2.1

Следовательно, для слоя 2

$$\rho_2 = +\frac{k'}{2} \frac{ne}{r} (r - x),$$

где $r > x > 0$.

Точно так же для слоя 1

$$\rho_1 = -\frac{k'}{2} \frac{ne}{r} [r - (-x)],$$

где

$$0 > -x > -r$$

или

$$\rho_1 = -\frac{k'}{2} \frac{ne}{r} (r + x).$$

Распределение пространственного заряда показано на рис. 2.2. Исходя из полученных выражений, можно определить распределение напряжен-

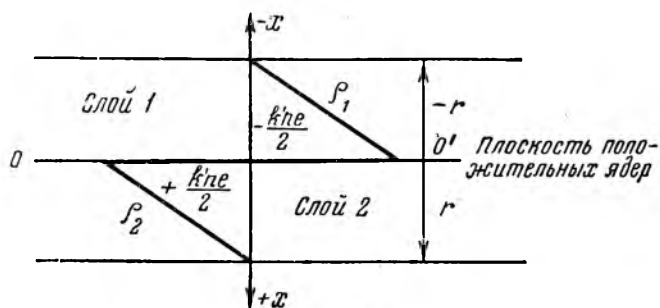


Рис. 2.2

ности электрического поля, для чего воспользуемся уравнением Пуассона

$$\frac{dE}{dx} = 4\pi\rho, \quad (2.5)$$

где $E = -\frac{du}{dx}$ есть напряженность поля.

В слое 2, для которого $r > x > 0$,

$$E_2 = \int \frac{2\pi k' ne}{r} (r - x) dx = -\frac{\pi k' ne}{r} (r - x)^2.$$

В слое 1, для которого $0 > -x > -r$,

$$E_1 = -\int \frac{2\pi k' ne}{r} (r + x) dx = -\frac{\pi k' ne}{r} (r + x)^2;$$

распределение напряженности поля показано на рис. 2.3.

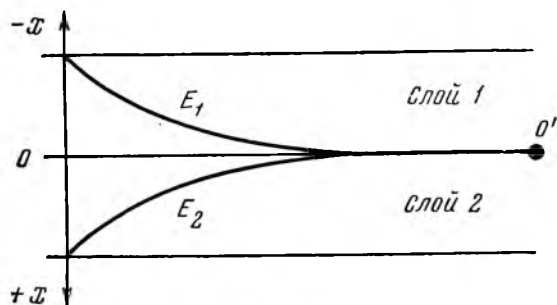


Рис. 2.3

Исходя из уравнений, полученных для напряженности поля, мы можем определить распределение потенциала. Зная, что $\frac{du}{dx} = -E$, получаем для слоя 2

$$u_2 = +\frac{\pi k' ne}{r} \int (r - x)^2 dx = -\frac{\pi k' ne}{3r} (r - x)^3 + A_2 \quad (2.6)$$

и для слоя 1

$$u_1 = \frac{\pi k' ne}{r} \int (r + x)^2 dx = \frac{\pi k' ne}{3r} (r + x)^3 + A_1. \quad (2.7)$$

При $x = -r$, $u_1 = 0$ и $A_1 = 0$, следовательно,

$$u_1 = \frac{\pi k' ne}{3r} (r + x)^3.$$

При $x = 0$ оба потенциала равны, т. е. $u_1 = u_2$

$$\frac{\pi k' ne}{3r} r^3 = -\frac{\pi k' ne}{3r} r^3 + A_2.$$

Отсюда определяем A_2 :

$$A_2 = \frac{2}{3} \pi k' ne r^2 \quad (2.8)$$

и, следовательно,

$$u_2 = -\frac{\pi k' ne}{3r} (r - x)^3 + \frac{2}{3} \pi k' ne r^2.$$

Распределение потенциала показано на рис. 2.4.

Анализируя выражения (2.6) и (2.7), можно сделать вывод, что постоянная A_2 (2.8) характеризует внутренний потенциал металла, разность потенциалов двойного слоя, а именно

$$A_2 = u_0 = \frac{2}{3} \pi k' ne r^2, \quad (2.8a)$$

где $e = 4,802 \cdot 10^{-10}$ CGSE, $n = \frac{\delta}{g} N$, $N = 6,062 \cdot 10^{23}$.

В первом приближении мы предположим, что атомный радиус равен половине среднего междуатомного расстояния. Если в 1 см^3 содержится n атомов, то мы можем положить, что объем, занимаемый атомом, равен $1/n$.

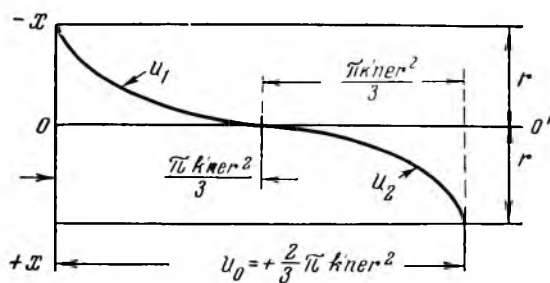


Рис. 2.4

Если объем изобразить некоторым кубом со сторонами a , то мы будем иметь

$$a^3 = \frac{1}{n}$$

или

$$a = \sqrt[3]{\frac{1}{n}}.$$

На основании сделанного нами предположения определяем атомный радиус:

$$r = \frac{a}{2} = \frac{1}{2 \sqrt[3]{n}}.$$

Из последнего выражения получаем

$$n = \frac{1}{8r^3}.$$

С другой стороны, величина r определяется из формулы

$$r = \frac{1}{2 \sqrt[3]{n}} = \frac{1}{2 \sqrt[3]{N}} \sqrt[3]{\frac{g}{\delta}} = 6,45 \cdot 10^{-9} \sqrt[3]{\frac{g}{\delta}},$$

так как $N = 6,062 \cdot 10^{23}$.

Подставляя значение r в выражение (2.8а), получим

$$u_0 = \frac{2}{3} \pi k' n e \frac{1}{4n^{2/3}} = \frac{2}{3} \pi k' e \frac{1}{4 \sqrt[3]{n}}.$$

Подставляя значения e и n , получим следующую расчетную формулу для внутреннего потенциала:

$$u_0 = 6,05 k' \sqrt[3]{\frac{\delta}{g}} = \frac{6,05 k'}{\sqrt[3]{A}} e, \quad (2.9)$$

где

$$A = \sqrt[3]{\frac{g}{\delta}}.$$

Расчет работы выхода по этой формуле дает удовлетворительное совпадение для Li, Na, Ka, Cs и большую разницу для C, Mg, Al, Ni, Mo, W, Pt и т. д.

Полный заряд, находящийся в каждой половине двойного слоя на единице его поверхности, равен

$$q = \pm \frac{1}{2} \frac{k' n e}{r} \int_0^r (r - x) dx = \pm \frac{1}{2} k' n e \left(\int_0^r dx - \int_0^r \frac{x dx}{r} \right) = \pm \frac{1}{4} k' n e r.$$

Представляя себе грубо двойной слой как плоский конденсатор и зная, что $q = Cu$, мы получим для 1 см^2 поверхности конденсатора

$$\frac{1}{4} k'ner = \frac{2}{3} \pi k'ner^2 \frac{1}{4\pi d},$$

где

$$C = \frac{1}{4\pi d} \text{ при } \epsilon = 1 \text{ и } S = 1.$$

Отсюда следует, что

$$d = \frac{2}{3} r,$$

т. е. представленную нами картину мы можем заменить плоским конденсатором, если расстояние между его обкладками выберем равным $\frac{2}{3} r$. Напряженность электрического поля такого конденсатора будет равна

$$E = \frac{u_0}{d} = \frac{2}{3} \frac{\pi k'ner^2}{\frac{2}{3} r} = \pi k'ner. \quad (2.10)$$

Электрическая энергия, отнесенная к единице поверхности такого конденсатора, будет равна

$$W_3 = \frac{qu_0}{2} = \frac{1}{2} \frac{2}{3} \pi k'ner^2 \cdot \frac{1}{4} k'ner = \frac{\pi (k'ne)^2 r^3}{12}. \quad (2.11)$$

Эта величина определяет собой тангенциальное, т. е. поверхностное, натяжение.

Сила, возникающая между заряженными пластинами эквивалентного конденсатора, определится выражением

$$p = \frac{1}{2} Eq = \frac{1}{2} \pi (k'ne) r \cdot \frac{1}{4} (k'ne)r = \frac{\pi}{8} (k'ne)^2 r^2. \quad (2.12)$$

Сила p есть то внутреннее давление, которое удерживает электроны в данном теле.

2.3. Условия выхода электрона за пределы двойного слоя

Рассматриваем ось x , перпендикулярную к поверхности проводника, и принимаем начало координат на нижней границе двойного слоя (рис. 2.5). Те электроны, которые имеют некоторую, не равную нулю, составляющую скорости теплового движения v_x , попадая в двойной слой, будут притягиваться положительным зарядом слоя и отталкиваться отрицательным. Движение по оси x будет замедляться.

Если E — напряженность электрического поля по оси x , а e — заряд электрона, то он будет испытывать силу противодействия, равную Ee .

Рассматривая движение по оси x , можно написать

$$m \frac{dv}{dt} = -Ee$$

или

$$m \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = m \frac{dv}{dx} v = -Ee.$$

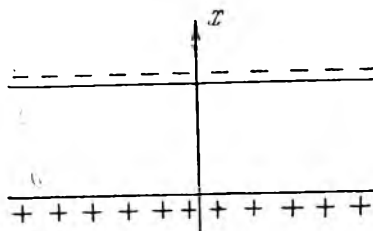


Рис. 2.5

Последнее выражение представим в следующем виде:

$$m \frac{d}{dx} \left(\frac{v^2}{2} \right) = -Ee.$$

Интегрируя его, найдем

$$\frac{mv^2}{2} = -Eex + C_1.$$

При $x = 0$ электрон обладает скоростью v_0 , т. е. той скоростью, с которой он вошел в двойной слой. Отсюда

$$\frac{mv_0^2}{2} = C_1,$$

или

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = Eex. \quad (2.13)$$

Если мы в полученное уравнение подставим $x = d$, где d — расстояние между обкладками конденсатора, эквивалентного двойному слою, то v будет означать скорость электрона в тот момент, когда он достигает отрицательной обкладки, т. е. скорость на выходе из двойного слоя. Таким образом, мы получим

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{mv_0^2}{2} - Eed,$$

где $Ed = u_0$ есть разность потенциалов двойного слоя. Тогда

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = u_0 e.$$

В левой части уравнения мы имеем разность между кинетической энергией, которой электрон обладал, войдя в двойной слой $\frac{mv_0^2}{2}$, и той энергией, которой он обладает на выходе из двойного слоя $\frac{mv^2}{2}$. Эта разность энергий расходуется на преодоление силы поля двойного слоя, т. е. на «работу выхода» электрона.

Из данного уравнения мы определяем скорость, которую электрон имеет на выходе из двойного слоя:

$$v^2 = v_0^2 - \frac{2u_0 e}{m}. \quad (2.14)$$

Исследуя данное выражение, рассмотрим три случая:

1) $v_0^2 > \frac{2u_0 e}{m}$. Электрон при выходе из двойного слоя имеет скорость, большую нуля, и продолжает свое движение далее.

2) $v_0^2 = \frac{2u_0 e}{m}$. Электрон имеет на границе выхода из двойного слоя нулевую скорость. В этом случае все будет зависеть от последующего поведения электрона, который может как выйти из двойного слоя, так и вернуться обратно.

3) $v_0^2 < \frac{2u_0 e}{m}$. В этом случае электрон не выйдет за пределы двойного слоя.

Таким образом, необходимым условием выхода электрона за пределы двойного слоя является требование, чтобы кинетическая энергия теплового

движения по оси x , которой обладает электрон при входе в двойной слой, была больше той работы, которую необходимо затратить на преодоление сил покоя, т. е. на работу выхода. Следовательно, условие выхода электрона за пределы двойного слоя характеризуется следующими выражениями:

$$\frac{mv_0^2}{2} \geq u_0 e \quad \text{или} \quad v_0 \geq \sqrt{\frac{2u_0 e}{m}}. \quad (2.15)$$

Уравнение скоростей можно представить в следующем виде:

$$\frac{v}{v_0} = \sqrt{1 - 2 \frac{u_0 e}{mv_0^2}}. \quad (2.16)$$

Это уравнение показывает, во сколько раз скорость электрона на выходе меньше скорости при входе в зависимости от отношения «работы выхода» к кинетической энергии электрона при входе.

Зависимость $\frac{v}{v_0} = f\left(\frac{u_0 e}{mv_0^2}\right)$ представлена в табл. 2.1.

Таблица 2.1

Соотношение выходной и входной скоростей электрона
в зависимости от отношения работы выхода
к его кинетической энергии

$\frac{v}{v_0}$	0	0,316	0,547	0,706	0,836	0,951
$2 \frac{u_0}{mv_0^2}$	1	0,9	0,7	0,5	0,3	0,1

В случае, когда $v_0^2 < \frac{2u_0 e}{m}$, расстояние, на которое продвигается электрон в двойном слое, определяется из выражения

$$\frac{mv_0^2}{2} - \frac{mv^2}{2} = Eex.$$

Учитывая, что $E = \frac{u_0}{d}$, имеем

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{mv_0^2}{2} - u_0 e \frac{x}{d}. \quad (2.17)$$

Из данного выражения следует, что электрон будет иметь нулевую скорость ($v = 0$) на расстоянии, определяемом из уравнения

$$\frac{mv_0^2}{2} = u_0 e \frac{x}{d},$$

откуда

$$\frac{x}{d} = \frac{\frac{mv_0^2}{2}}{u_0 e}, \quad x = \frac{mv_0^2 d}{2u_0 e}.$$

При условии, что кинетическая энергия электрона при входе в двойной слой меньше «работы выхода», т. е. электрон не может преодолеть сил поля, он будет получать нулевую скорость на расстоянии, меньшем толщины

двойного слоя во столько раз, во сколько раз кинетическая энергия при входе меньше работы выхода.

Рассмотрим работу выхода и условия выходной скорости.

Для того чтобы провести электрон через двойной слой, необходимо совершить работу

$$\varphi = e \int_{x_1}^{x_2} E dx, \quad (2.18)$$

где E — напряженность электрического поля двойного слоя. Значение $\int_{x_1}^{x_2} E dx$ есть разность потенциалов двойного слоя, на основании чего работа φ будет равна

$$\varphi = u_0 e. \quad (2.18a)$$

Как было указано выше, условие выхода электрона за пределы двойного слоя определится соотношением

$$\frac{1}{2} m v_0^2 \geq u_0 e,$$

определяющим слагающую скорости теплового движения электрона по оси x , с которой электрон должен попасть в двойной слой, чтобы пройти и выйти за пределы слоя.

Пример. Для вольфрама разность потенциалов двойного слоя равна $u_0 = 4,53$ в.

Для того чтобы пройти двойной слой и выйти с поверхности металла, электрон должен обладать слагающей скорости теплового движения, перпендикулярной к поверхности металла, равной или большей $\sqrt{\frac{2u_0 e}{m}}$:

$$v_0 \geq \sqrt{\frac{2u_0 e}{m}} = \sqrt{\frac{2u_0}{300} \frac{e}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 5,28 \cdot 10^{17}}{300}} u_0 = 59,3 \cdot 10^6 \sqrt{u_0},$$

или

$$v_0 = 59,3 \cdot 10^6 \sqrt{4,53} = 126,2 \cdot 10^6 \text{ см/сек.}$$

Сравнивая это значение скорости со скоростью, которой обладает наибольшее число электронов в металле при $T = 2300^\circ \text{ К}$ (наиболее вероятная скорость — пример 1, стр. 42), мы видим, что значение скорости, необходимой для выхода электрона, почти в пять раз больше той, которой обладает наибольшее число электронов при $T = 2300^\circ \text{ К}$.

Отсюда можно заключить, что главная масса электронов при данной температуре металла 2300° К не выйдет за пределы двойного слоя, и ток излучения будет обуславливаться только электронами, обладающими значительно большими скоростями.

2.4. Распределение скоростей по Максвеллу

1. Вероятности того, что слагающие скоростей данного числа частиц по осям x , y и z лежат в пределах v_x , $v_x + dv_x$; v_y , $v_y + dv_y$; v_z , $v_z + dv_z$, можно представить функциями скоростей

$$f(v_x) dv_x, f(v_y) dv_y, f(v_z) dv_z.$$

Так как вероятность сложного события определяется произведением вероятностей тех событий, из которых состоит сложное событие (предпо-

лагается, что события независимы), то вероятность одновременного появления указанных скоростей определится выражением

$$f(v_x) \cdot f(v_y) \cdot f(v_z) \cdot dv_x \cdot dv_y \cdot dv_z. \quad (2.19)$$

Полагаем далее

$$f(v_x) \cdot f(v_y) \cdot f(v_z) = \Phi(v_x^2 \cdot v_y^2 \cdot v_z^2),$$

ибо вероятность появления той или иной скорости не зависит от ее направления.

После соответствующих преобразований и интегрирования получаем

$$f(v_x) = Ce^{-Av_x^2}, \quad f(v_y) = Ce^{-Av_y^2}, \quad f(v_z) = Ce^{-Av_z^2},$$

где A и C — некоторые постоянные коэффициенты.

Перед A берем знак минус, потому что появление бесконечно большой скорости маловероятно.

Постоянную C определим из условия

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(v_x) dv_x = C \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-Av_x^2} dv_x = 1. \quad (2.19a)$$

Это означает, что появление данной скорости в пределах от $-\infty$ до $+\infty$ имеет стопроцентную вероятность.

Воспользуемся интегралом вероятности ошибок, который равен

$$I = \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Используем подстановку $x^2 = Au^2$, тогда

$$x = u\sqrt{A}$$

и

$$dx = \sqrt{A} du.$$

Отсюда имеем

$$I = \int_0^{\infty} e^{-Au^2} \sqrt{A} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

или

$$\int_0^{\infty} e^{-Au^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{A}}.$$

Так как подынтегральная функция выражения (2.19a) четная, то представим это выражение в следующем виде:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(v_x) dv_x = C \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-Av_x^2} dv_x = 2C \int_0^{\infty} e^{-Av_x^2} dv_x = 1, \quad (2.196)$$

откуда получим значение C :

$$C = \frac{1}{2} \frac{1}{\int_0^{\infty} e^{-Av_x^2} dv_x} = \sqrt{\frac{A}{\pi}}.$$

2. Выражения вероятностей того, что составляющие скоростей частиц лежат в пределах $v_x, v_x + dv_x; v_y, v_y + dv_y; v_z, v_z + dv_z$.

Подставляя значение C в исходные выражения данного параграфа, найдем

$$\begin{aligned} f(v_x) dv_x &= \sqrt{\frac{A}{\pi}} e^{-Av_x^2} dv_x, \\ f(v_y) dv_y &= \sqrt{\frac{A}{\pi}} e^{-Av_y^2} dv_y, \\ f(v_z) dv_z &= \sqrt{\frac{A}{\pi}} e^{-Av_z^2} dv_z. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Принимая $A = \frac{1}{v_B^2}$, получим

$$\begin{aligned} f(v_x) dv_x &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{v_x^2}{v_B^2}} d\left(\frac{v_x}{v_B}\right), \\ f(v_y) dv_y &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{v_y^2}{v_B^2}} d\left(\frac{v_y}{v_B}\right), \\ f(v_z) dv_z &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{v_z^2}{v_B^2}} d\left(\frac{v_z}{v_B}\right). \end{aligned}$$

Так можно написать, исходя из того, что показатель при e не должен иметь размерности.

3. Вернемся теперь к формуле (2.19) и определим вероятность одновременного появления скоростей данного числа частиц со слагающими, лежащими в пределах

$$v_x, v_x + dv_x; v_y, v_y + dv_y; v_z, v_z + dv_z.$$

Такая вероятность определится из (2.20) соотношением

$$\begin{aligned} f(v_x) \cdot f(v_y) \cdot f(v_z) \cdot dv_x \cdot dv_y \cdot dv_z &= \\ &= \left(\frac{A}{\pi}\right)^{3/2} e^{-A(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)} \cdot dv_x \cdot dv_y \cdot dv_z = \left(\frac{A}{\pi}\right)^{3/2} e^{-Av^2} dV_0, \end{aligned}$$

где $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$.

Выражение $dv_x \cdot dv_y \cdot dv_z = dV_0$ есть элемент объема в прямоугольных координатах. Так как теперь вероятность появления данной скорости выражена не через составляющие, а через полную скорость (раньше было указано, что вероятность получения данной скорости не зависит от направления), то переходим к полярным координатам.

Элемент объема в полярных (сферических) координатах (рис. 2.6) будет

$$dV_0 = v^2 dv d\theta \sin \theta. \quad (2.21)$$

Вероятность того, что слагающие скорости v_x, v_y, v_z одновременно лежат в заданных пределах $v_x, v_x + dv_x; v_y, v_y + dv_y; v_z, v_z + dv_z$, а полная скорость — в пределах $v, v + dv$, находим из выражения

$$Bdv = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} f(v_x) f(v_y) f(v_z) dV_0 = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} v^2 dv \frac{A^{3/2}}{\pi^{3/2}} e^{-Av^2} \sin \theta d\theta d\varphi$$

окончательно

$$Bdv = \frac{4A^{3/2}}{\sqrt{\pi}} v^2 e^{-Av^2} dv. \quad (2.22)$$

Скорость, для которой значение B будет наибольшим, будет наиболее вероятной скоростью частиц для данного состояния газа. Находя первую производную $\frac{dB}{dv}$ и приравнявая ее нулю, получим

$$2ve^{-Av^2} - v^2 2Ave^{-Av^2} = 0,$$

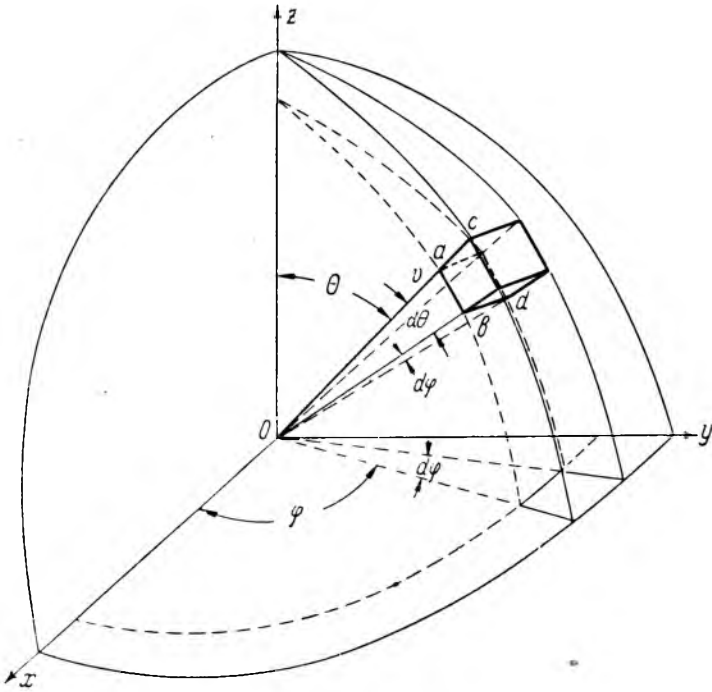


Рис. 2.6

откуда

$$v_B^2 = \frac{1}{A}.$$

Значение скорости v_B мы назовем наиболее вероятной скоростью, поскольку вероятность ее появления наибольшая. Отсюда определяется и значение постоянной A :

$$A = \frac{1}{v_B^2}.$$

После этого выражение (2.22) приобретает следующий вид:

$$Bdv = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{v}{v_B} \right)^2 e^{-\left(\frac{v}{v_B} \right)^2} d\left(\frac{v}{v_B} \right). \quad (2.23)$$

Отношение $\frac{v}{v_B}$ называется относительной скоростью.

Число частиц, скорость которых лежит в пределах от v до $v + dv$.
Наиболее вероятная скорость

Допустим, что в единице объема у нас содержится N_0 частиц. Тогда можно положить, что $Bdv = \frac{dN_0}{N_0}$, так как вероятность того, что скорости dN_0 частиц лежат в пределах от v до $v + dv$, есть отношение числа частиц, имеющих эту скорость, ко всему числу частиц.

Таким образом мы получим

$$\frac{1}{N_0} \frac{dN_0}{dv} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{v}{v_B} \right)^2 e^{-\left(\frac{v}{v_B} \right)^2} \frac{1}{v_B}. \quad (2.24)$$

Это выражение можно построить в виде кривой, показывающей отношение числа частиц, приходящееся на единицу скорости данного диапазона скоростей dv , к общему числу частиц. Наибольшее его значение получается при $v = v_B$.

Если мы условно примем v_B за единицу, то получим

$$B_1 = \frac{4}{\sqrt{\pi}} x^2 e^{-x^2}.$$

Здесь B_1 есть вероятность того, что величина скорости v в x раз больше наиболее вероятной скорости.

Построим кривую $B_1 = f(x)$ и ее ординаты будем умножать на длину Δx выбранного диапазона. Тогда мы будем находить число частиц по отношению к общему их числу, приходящемуся на данный диапазон $\Delta B_1 = B_1 \Delta x$ (табл. 2.2).

Таблица 2.2

Распределение молекулярных скоростей

Δx	ΔB_1	Δx	ΔB_1
0—0,1	0,001	1,1—1,3	0,150
0,1—0,3	0,021	1,3—1,5	0,112
0,3—0,5	0,063	1,5—1,7	0,078
0,5—0,7	0,112	1,7—1,9	0,058
0,7—0,9	0,149	1,9—2,1	0,034
0,9—1,1	0,161	2,1—2,5	0,030

Наконец, чтобы определить, какое число частиц имеет скорость в пределах от 0 до v , мы должны взять интеграл

$$\frac{N_v}{N_0} = \int_0^{\frac{v}{v_B}} \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{v}{v_B} \right)^2 e^{-\left(\frac{v}{v_B} \right)^2} d \left(\frac{v}{v_B} \right) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_0^x x^2 e^{-x^2} dx. \quad (2.25)$$

Данную кривую проще построить графически, интегрируя основную кривую $\frac{dN_0}{N_0}$ [(см. (2.24)] в указанных пределах.

2.5. Средняя арифметическая и средняя квадратичная скорости

Средняя арифметическая скорость

Если число частиц dN_0 умножить на ту скорость, которую они имеют в диапазоне от v до $v + dv$, и просуммировать все эти произведения, то можно написать

$$v_{\text{ср}} N_0 = \int_0^{\infty} v \cdot dN_0$$

или

$$\begin{aligned} v_{\text{ср}} &= \int_0^{\infty} \frac{dN_0}{N_0} v = \int_0^{\infty} \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{v}{v_B} \right)^2 e^{-\left(\frac{v}{v_B} \right)^2} d \left(\frac{v}{v_B} \right) v = \\ &= \int_0^{\infty} \frac{1}{2} \frac{4v_B}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{v}{v_B} \right)^2 e^{-\left(\frac{v}{v_B} \right)^2} d \left(\frac{v}{v_B} \right)^2. \end{aligned}$$

Положив $\left(\frac{v}{v_B} \right)^2 = x$, находим

$$v_{\text{ср}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} v_B \int_0^{\infty} x e^{-x} dx.$$

Интегрируя по частям, найдем

$$\int_0^{\infty} x e^{-x} dx = [-x e^{-x} - e^{-x}]_0^{\infty} = 1,$$

на основании чего получим

$$v_{\text{ср}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} v_B. \quad (2.26)$$

Средняя арифметическая скорость используется при решении некоторых задач. Например, в данном объеме газа проведем некоторую плоскость, перпендикулярную к оси Ox . Так как газ находится в равновесном состоянии, то совершенно очевидно, что сколько частиц пройдет с одной стороны плоскости на другую, столько же частиц пройдет и в обратном направлении. Допустим теперь, что при максвелловском распределении пропускаются частицы только в одном направлении. Само собой разумеется, что проходить могут только те частицы, скорость которых имеет некоторую, большую нуля, слагающую скорости по оси Ox . Далее предположим, что при таком распределении скоростей пропускаются не все частицы, а лишь те, скорости которых лежат выше некоторого предела, скажем, пропускаются все частицы, скорость которых лежит в диапазоне

$$v < v_x < \infty.$$

Нами было выведено [см. (2.20)] выражение вероятности того, что слагающая скорости по оси Ox лежит в пределах от v_x до $v_x + dv_x$ и равна

$$f(v_x) dv_x = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{\pi}} e^{-A v_x^2} dv_x = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{v_x^2}{v_B^2}} d \left(\frac{v_x}{v_B} \right).$$

Если число частиц в 1 см^3 равно N_0 , то число частиц, имеющих скорость, лежащую в данных пределах, определится выражением

$$dN_0 = N_0 f(v_x) dv_x,$$

откуда следует

$$dN_0 = \frac{N_0}{\sqrt{\pi}} e^{-\left(\frac{v_x}{v_B}\right)^2} d\left(\frac{v_x}{v_B}\right). \quad (2.27)$$

Если частицы уходят со скоростью v_x , то число их, которое пройдет через 1 см^2 за 1 сек нашей разграничивающей площади в одну сторону, будет равно

$$dN_1 = dN_0 v_x = \frac{N_0}{\sqrt{\pi}} v_B \frac{v_x}{v_B} e^{-\left(\frac{v_x}{v_B}\right)^2} d\left(\frac{v_x}{v_B}\right) = \frac{N_0}{\sqrt{\pi}} \frac{v_B}{2} e^{-\left(\frac{v_x}{v_B}\right)^2} d\left(\frac{v_x}{v_B}\right)^2.$$

Число частиц, которое по условию скоростей будет пропущено, будет равно

$$N_1 = \int_0^\infty \frac{N_0}{\sqrt{\pi}} \frac{v_B}{2} e^{-\left(\frac{v_x}{v_B}\right)^2} d\left(\frac{v_x}{v_B}\right)^2,$$

или

$$N_1 = \frac{N_0 v_B}{2 \sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-\left(\frac{v_x}{v_B}\right)^2} d\left(\frac{v_x}{v_B}\right)^2 = \frac{N_0 v_B}{2 \sqrt{\pi}} e^{-\left(\frac{v}{v_B}\right)^2}.$$

Если мы раздвинем предел пропускания до нуля, то получим число выходящих частиц равным

$$N_1 = \frac{N_0 v_B}{2 \sqrt{\pi}}.$$

В свою очередь, нетрудно заметить, что, подставив значение наиболее вероятной скорости через среднюю арифметическую, мы получим

$$N_1 = \frac{N_0 v_{\text{ср}}}{4}, \quad \text{ибо} \quad v_{\text{ср}} = \frac{2v_B}{\sqrt{\pi}}.$$

Данное выражение дает возможность подсчитать, какое число частиц проходит через 1 см^2 нашей разграничивающей плоскости в секунду, если скорость проходящих частиц не ограничена никаким условием.

Если мы будем пропускать только те частицы, скорость которых лежит выше заданного предела, то будут проходить не все частицы, определяемые числом частиц в 1 см^3 (N_0) и средней арифметической скоростью их движения, а лишь часть их, которая определится коэффициентом, меньшим единицы:

$$e^{-\left(\frac{v}{v_B}\right)^2} = e^{-\frac{4}{\pi} \left(\frac{v}{v_{\text{ср}}}\right)^2}.$$

Окончательно получим

$$N_1 = \frac{N_0}{4} v_{\text{ср}} e^{-\frac{4}{\pi} \left(\frac{v}{v_{\text{ср}}}\right)^2}. \quad (2.28)$$

Пример. Выражение $N_1 = \frac{N_0}{4} v_{\text{ср}}$ может быть рассматриваемо как равенство, определяющее число частиц, ударяющих о стенку сосуда в секунду. Кроме того, оно может быть применено для определения давления паров по количеству испаряющегося вещества.

На самом деле, из закона Бойля — Мариотта имеем

$$pV_0 = RT$$

(V_0 — объем грамм-молекулы, равный $\frac{N}{N_0} = \frac{\text{число Авогадро}}{\text{число частиц в 1 см}^3}$), следовательно,

$$p \frac{N}{N_0} = RT,$$

или

$$N_0 = \frac{pN}{RT}.$$

Масса газа, ударяющегося об 1 см^2 поверхности, будет равна

$$M = N_1 m = \frac{m N_0 v_{\text{ср}}}{4}.$$

Подставляя N_0 , найдем

$$M = \frac{mpNv_{\text{ср}}}{4RT}.$$

Но

$$v_{\text{ср}} = 2 \sqrt{\frac{2kT}{m\pi}}.$$

Поэтому

$$M = \frac{mpN}{4RT} 2 \sqrt{\frac{2kT}{m\pi}} = \frac{2mp}{4kT} \frac{\sqrt{2kT}}{\sqrt{m\pi}} = p \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{2\pi kT}}.$$

Отсюда следует

$$p = M \sqrt{\frac{2\pi kT}{m}}. \quad (2.29)$$

Если масса атома водорода равна $1,663 \cdot 10^{-24} \text{ г}$, то масса атома или молекулы любого вещества будет равна $m = 1,663 \cdot 10^{-24} \cdot A$, где A — атомный или молекулярный вес. Тогда

$$\frac{2\pi kT}{m} = \frac{6,28 \cdot 1,372 \cdot 10^{-16} T}{1,663 \cdot 10^{-24} \cdot A} = 5,2 \cdot 10^8 \frac{T}{A}$$

и

$$p = M \cdot 2,28 \cdot 10^4 \sqrt{\frac{T}{A}} \text{ дин/см}^2.$$

Здесь M выражено в г/см^2 .

Данное выражение можно написать иначе:

$$p = M \sqrt{\frac{2\pi RT}{Nm}};$$

но, так как $Nm = A$, то

$$p = M \sqrt{\frac{2\pi RT}{A}}. \quad (2.29a)$$

Подставляя численные значения

$$2\pi R = 6 \cdot 28 \cdot 83,1 \cdot 10^6 = 5,22 \cdot 10^8,$$

найдем

$$p = 2,29 \cdot 10^4 M \sqrt{\frac{T}{A}} \text{ дин/см}^2.$$

Допустим, что в секунду испаряется $M = 4,36 \cdot 10^{-10} \text{ г}$ с 1 см^2 поверхности вольфрама при 2400° С . Для вольфрама $A = 184$ и

$$p = 2,29 \cdot 10^4 \cdot 4,36 \cdot 10^{-10} \sqrt{\frac{2400}{184}} = 3,6 \cdot 10^{-5} \text{ дин/см}^2.$$

Выразим давление p в миллиметрах ртутного столба. Так как $1 \text{ атм} = 760 \text{ мм рт. ст.} = 1,01 \cdot 10^6 \text{ дин/см}^2$, то

$$p = 760 \frac{3,6 \cdot 10^{-5}}{1,01 \cdot 10^6} = 2,70 \cdot 10^{-8} \text{ мм.}$$

Средняя квадратичная скорость

Пусть dN_0 частиц, скорость которых лежит в пределах, от v до $v+dv$, обладают массой m и скоростью v . Кинетическая энергия dN_0 частиц будет равна

$$\frac{mv^2}{2} dN_0.$$

Если мы просуммируем все частицы, умножив каждую группу частиц на соответствующее значение кинетической энергии, то получим кинетическую энергию данного числа N_0 частиц равной

$$\int_0^{\infty} \frac{mv^2}{2} dN_0.$$

Если эту величину мы разделим на N_0 частиц, то найдем среднее значение кинетической энергии, приходящееся на каждую частицу:

$$\left| \frac{mv^2}{2} \right|_{\text{ср}} = \int_0^{\infty} \frac{mv^2}{2} \frac{dN_0}{N_0}.$$

Отсюда мы и получаем значение средней квадратичной скорости

$$\begin{aligned} \bar{v}^2 &= \int_0^{\infty} v^2 \frac{dN_0}{N_0} = \int_0^{\infty} \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{v}{v_B} \right)^2 v^2 e^{-\left(\frac{v}{v_B} \right)^2} d \left(\frac{v}{v_B} \right) = \\ &= \frac{4}{\sqrt{\pi}} v_B^2 \int_0^{\infty} \left(\frac{v}{v_B} \right)^4 e^{-\left(\frac{v}{v_B} \right)^2} d \left(\frac{v}{v_B} \right). \end{aligned} \quad (2.30)$$

Значение этого интеграла равно

$$\int_0^{\infty} x^4 e^{-x^2} dx = \frac{3}{8} \sqrt{\pi}.$$

На этом основании получим значение средней квадратичной скорости

$$\bar{v}^2 = \frac{3}{2} v_B^2, \quad \bar{v} = \sqrt{\frac{3}{2}} v_B.$$

Выражая найденные ранее наиболее вероятную и среднюю арифметическую скорости через среднюю квадратичную, получим

$$\begin{aligned} v_B &= \sqrt{\frac{2}{3}} \bar{v}, \\ v_{\text{ср}} &= \frac{2}{\sqrt{3\pi}} \bar{v}. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Зависимость средней квадратичной скорости от температуры газа

Допустим, что молекулы жидкости в некотором сосуде обладают слагающимися средней квадратичной скорости $\bar{v}$ по осям x, y, z , равными $\bar{v}_x, \bar{v}_y$ и $\bar{v}_z$, т. е.

$$\bar{v}^2 = \bar{v}_x^2 + \bar{v}_y^2 + \bar{v}_z^2.$$

Если в единице объема находится N_x молекул, движущихся в одну сторону параллельно оси x со средней квадратичной скоростью $\bar{v}_x$, то о стенку сосуда ударяется $N_x \bar{v}_x$ молекул в секунду. От каждого удара, который предполагаем упругим, стенка отдает количество движения $2m\bar{v}_x$, где m — масса молекулы. Так как в секунду о стенку ударяется $N_x \bar{v}_x$ молекул, полное количество частиц, ударяющихся об 1 см^2 этой стенки, будет равно

$$2m\bar{v}_x^2 N_x.$$

Давление на стенку будет равно

$$p = \sum 2N_x m \bar{v}_x^2.$$

Так как молекулы газа движутся беспорядочно, то естественно предположить, что слагающие средней квадратичной скорости равны между собой, т. е.

$$\bar{v}_x = \bar{v}_y = \bar{v}_z$$

и

$$\bar{v}^2 = \bar{v}_x^2 + \bar{v}_y^2 + \bar{v}_z^2 = 3\bar{v}_x^2.$$

После этого получим

$$p = \frac{2m\bar{v}^2}{3} \sum N_x,$$

где $\sum N_x$ — количество молекул в единице объема сосуда, ударяющихся об его стенку в секунду, причем оно равно

$$\sum N_x = \frac{n_0}{2}$$

(n_0 — полное количество молекул), так как половина этих молекул движется к стенке и половина в противоположном направлении.

Если сосуд имеет объем V и содержит n_0 молекул, то

$$N_0 = \frac{n_0}{V} \quad \text{и} \quad p = \frac{m\bar{v}^2}{3} N_0 = \frac{m\bar{v}^2 n_0}{3V},$$

откуда получим

$$pV = \frac{1}{3} N_0 m \bar{v}^2. \quad (2.32)$$

Если под объемом V мы будем подразумевать объем грамм-молекулы V_0 (т. е. столько кубических сантиметров, сколько единиц в молекулярном весе), то n_0 есть число молекул в грамм-молекуле, которое по закону Авогадро есть число постоянное и равное

$$n_0 = N = 6,062 \cdot 10^{23}. \quad (2.33)$$

С другой стороны, из закона Менделеева — Клапейрона имеем

$$pV_0 = RT.$$

Из приведенных уравнений следует

$$\bar{v}^2 = \frac{3RT}{Nm},$$

$$\bar{v}^2 = \frac{3kT}{m} \quad \text{или} \quad \frac{m\bar{v}^2}{2} = \frac{3}{2} kT.$$

Нами было найдено в предыдущих параграфах

$$v_v = \sqrt{\frac{2}{3}} \bar{v},$$

$$v_{\text{ср}} = \frac{2}{\sqrt{3\pi}} \bar{v}.$$

Подставляя значения $\bar{v}$, получим

$$v_v = \sqrt{\frac{2kT}{m}},$$

$$v_{\text{ср}} = 2 \sqrt{\frac{2kT}{\pi m}}. \quad (2.34)$$

Согласно приведенным зависимостям (2.28) и (2.34), число молекул, проходящих в секунду через 1 см^2 площади, можно выразить следующим образом:

$$N_1 = N_0 \sqrt{\frac{kT}{2\pi m}} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} = N_0 \sqrt{\frac{kT}{2\pi m}} e^{-\frac{\Phi}{kT}}, \quad (2.35)$$

где

$$\Phi = \frac{mv^2}{2}.$$

2.6. Испарение жидкости

Прежде всего условимся считать, что молекула, находящаяся в жидкости, притягивается заметно лишь той частью жидкости, которая окружает данную молекулу в объеме некоторого радиуса a . На рис. 2.7 изображен ряд положений молекулы, очерченной радиусом сферы притяжения, которая обладает слагающей скорости по вертикальной оси. Рассмотрим эти положения.

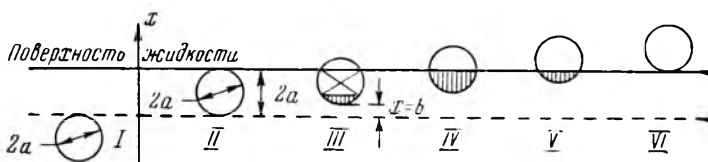


Рис. 2.7

Положение I. Молекула находится в равновесном состоянии, так как притягивается частицами, лежащими в сфере притяжения со всех сторон одинаково.

Положение II. То же самое можно сказать о частице, подошедшей настолько близко к поверхности жидкости, что ее сфера притяжения касательна к поверхности жидкости.

На расстоянии $2a$ от поверхности жидкости проведем ось абсцисс x , расположив в некоторой точке начало координат, будем от него отсчитывать продвижение молекулы.

Положение III. Молекула продвинулась на расстояние b . Совершенно очевидно, что она будет испытывать притяжение от заштрихованного объема жидкости, лежащей в сфере притяжения.

Положение IV. В этом положении сила притяжения будет наибольшей.

Положение V. При продвижении молекулы над поверхностью жидкости на расстоянии $x > 2a$ от начала координат сила притяжения начнет убывать.

Положение VI. Молекула продвинулась на $2a$ над поверхностью жидкости и притяжения больше не испытывает.

Если мы обозначим массу 1 см^3 жидкости через $m_1 = N_0 m$, где m — масса молекулы, а N_0 — число их в 1 см^3 , то мы можем написать, что работа при продвижении молекулы на расстояние $x = 2a$ будет равна

$$\varphi = \int_0^{2a} f \cdot m_1 dx,$$

где f — коэффициент пропорциональности.

Для того чтобы молекула могла улететь с поверхности жидкости, она должна иметь скорость v , большую скорости, определяемой из равенств

$$\frac{mv^2}{2} = \varphi.$$

Отсюда следует

$$v \geq \sqrt{\frac{2\varphi}{m}}.$$

Пример. Испарение воды. Зная нижний предел кинетической энергии молекулы, который определяет ее работу выхода, можно применить для расчета выведенную нами формулу (2.35)

$$N_1 = N_0 \sqrt{\frac{kT}{2\pi m}} e^{-\frac{\varphi}{kT}}. \quad (2.36)$$

Для того чтобы определить работу выхода φ , вспомним, что внутренняя теплота испарения одного грамма воды

$$\lambda = 575 - 0,791 t^\circ,$$

где t° выражено в градусах Цельсия, а λ в калориях.

Определяем число молекул в 1 см^3 . Для этого находим молекулярный вес воды

$$\text{H}_2\text{O} = 1,008 \cdot 2 + 16 = 18,016 \cong 18.$$

Так как атом водорода весит $1,663 \cdot 10^{-24} \text{ г}$, то находим массу молекулы воды $29,934 \cdot 10^{-24} \cong 2,99 \cdot 10^{-23} \text{ г}$.

Далее нам необходимо определить число молекул в единице объема N_0 . Так как вес 1 см^3 воды равен 1 г , то

$$N_0 = \frac{1}{2,99 \cdot 10^{-23}} = 0,33 \cdot 10^{23}.$$

Эту же цифру мы получим, если число Авогадро разделим на молекулярный вес. Действительно, грамм-молекула дает число молекул в объеме, заключающем в себе столько граммов, сколько единиц в молекулярном весе, а так как 1 см^3 воды весит 1 г , то число молекул в 1 см^3 равно

$$\frac{6,062 \cdot 10^{23}}{18,016} = 0,33 \cdot 10^{23}.$$

Для удобства расчета мы будем вычислять не число молекул, вылетающих в секунду с 1 см^2 воды, а массу воды m_2 , испаряющуюся с той же поверхности. Умножив обе части уравнения (2.35) на вес одной молекулы, получаем*

$$m_2 = \sqrt{\frac{kT}{2\pi m}} e^{-\frac{\varphi}{kT}} \text{ г/см}^2 \cdot \text{сек.}$$

Так как работа выхода одной молекулы будет равна

$$\varphi = \frac{\lambda}{N_0},$$

то**

$$\varphi = (575 - 0,791t^\circ) \frac{4,19 \cdot 10^7}{0,333 \cdot 10^{23}} = (575 - 0,791t^\circ) 12,6 \cdot 10^{-16},$$

$$\varphi = (7230 - 9,94t^\circ) \cdot 10^{-16} \text{ эрг.}$$

Произведем расчет для 20° С или $T = 293^\circ \text{ К}$:

$$k = 1,372 \cdot 10^{-16} \text{ эрг/град}, m = 30 \cdot 10^{-24} \text{ г},$$

$$\varphi = 7031 \cdot 10^{-16} \text{ эрг},$$

$$m_2 = \sqrt{\frac{1,372 \cdot 10^{-16} \cdot 293}{6,28 \cdot 30 \cdot 10^{-24}}} e^{-\frac{7031 \cdot 10^{-16}}{1,372 \cdot 10^{-16} \cdot 293}} = 0,35 \cdot 10^{-3} \text{ г/см}^2 \cdot \text{сек.}$$

Время, в течение которого испарится 1 г, будет равно

$$t = \frac{10^3}{0,35} = 2860 \text{ сек.}$$

2.7. Вывод формулы тока излучения электронов с единицы поверхности проводника [формула Ричардсона]

Согласно закону распределения скоростей Максвелла, вероятность того, что слагающая скорости по оси x лежит в пределах v , $v + dv$, определится выражением (см. 2.20)

$$f(v) dv = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\left(\frac{v}{v_B}\right)^2} d\left(\frac{v}{v_B}\right).$$

Если в данном объеме (1 см^3) содержится N_0 электронов, то число электронов dN_0 , скорости которых лежат в указанных пределах, будет равно

$$dN_0 = N_0 f(v) dv = \frac{N_0}{\sqrt{\pi}} e^{-\left(\frac{v}{v_B}\right)^2} d\left(\frac{v}{v_B}\right).$$

Располагая по-прежнему ось Ox перпендикулярно к поверхности проводника как к двойному слою, мы найдем, что из числа электронов со слагающей скорости по оси Ox , лежащей в пределах между v и $v + dv$, через 1 см^2 поверхности пройдет в секунду число электронов, равное

$$dN_1 = dN_0 v \text{ электрон/см}^2 \cdot \text{сек}$$

или

$$dN_1 = \frac{N_0}{\sqrt{\pi}} e^{-\left(\frac{v}{v_B}\right)^2} v d\left(\frac{v}{v_B}\right).$$

* Для воды произведение $N_0 m_2$ равно 1 г (уд. вес воды).

** Так как $1 \text{ г} \cdot \text{кал} = 4,19 \cdot 10^7 \text{ эрг.}$

Для удобства расчетов числитель и знаменатель умножим на v_B

$$dN_1 = \frac{N_0 v_B}{\sqrt{\pi}} e^{-\left(\frac{v}{v_B}\right)^2} \left(\frac{v}{v_B}\right) d\left(\frac{v}{v_B}\right),$$

что можно записать так:

$$dN_1 = \frac{N_0 v_B}{2\sqrt{\pi}} e^{-\left(\frac{v}{v_B}\right)^2} d\left(\frac{v}{v_B}\right)^2. \quad (2.37)$$

Таким образом, число электронов, содержащееся в данном объеме (1 см^3), мы разбили на группы, в каждой из которых находится число электронов dN_0 и их скорость лежит в пределах от v до $v + dv$.

Если скорость движения данной группы электронов лежит в указанных пределах, то в 1 сек через 1 см^2 проводника их выйдет число, равное числу электронов в данной группе, умноженному на скорость движения v

$$dN_1 = dN_0 v,$$

как это было указано выше.

Для того чтобы узнать, в каких пределах лежит та скорость, при которой выходит наибольшее число электронов, построим кривую (рис. 2.8) согласно уравнению

$$\frac{1}{N_0} \frac{dN_1}{dv} = \frac{1}{\sqrt{\pi} v_B} e^{-\left(\frac{v}{v_B}\right)^2} v.$$

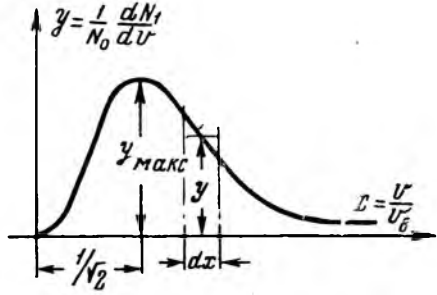


Рис. 2.8

Это выражение является функцией распределения, которое определяет отношение числа выходящих электронов к числу содержащихся в данном объеме (1 см^3), рассчитанное на единицу скорости данного диапазона ($v, v + dv$).

Данное выражение имеет наибольшее значение при условии

$$\frac{d}{dv} \left(\frac{dN_1}{N_0 dv} \right) = \frac{d}{dv} \left(\frac{1}{\sqrt{\pi} v_B} e^{-\left(\frac{v}{v_B}\right)^2} v \right) = 0,$$

откуда следует

$$e^{-\left(\frac{v}{v_B}\right)^2} - 2 \left(\frac{v}{v_B}\right)^2 e^{-\left(\frac{v}{v_B}\right)^2} = 0, \quad v_{\text{вв}} = \frac{v_B}{\sqrt{2}}.$$

Наибольшее значение $\frac{1}{N_0} \frac{dN_1}{dv}$ (см. рис. 2.8) будет при $\frac{v}{v_B} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, т. е.

$$\left(\frac{1}{N_0} \frac{dN_1}{dv} \right)_{\text{макс}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}}.$$

Скорость, с которой выходит наибольшее число частиц, в $\sqrt{2}$ раз меньше наиболее вероятной скорости теплового движения. Скорость выхода наибольшего числа электронов, таким образом, равна

$$v_{\text{вв}} = \sqrt{\frac{kT}{m}},$$

в то время как наиболее вероятная скорость

$$v_B = \sqrt{\frac{2kT}{m}}.$$

В примере 1 § 2.1 было указано, что для вольфрама при 2300°K наиболее вероятная скорость теплового движения

$$v_b = 26,4 \cdot 10^6 \text{ см/сек.}$$

Наиболее вероятное значение скорости движения по оси Ox , т. е. той скорости, при которой на выход движется наибольшее число электронов, будет равно

$$v_{\text{вв}} = \frac{26,4 \cdot 10^6}{\sqrt{2}} \approx 18,65 \cdot 10^6 \text{ см/сек.}$$

Однако способными к выходу оказываются лишь те электроны, скорость которых выше $126,2 \cdot 10^6 \text{ см/сек}$ (см. пример § 2.3).

Умножая ординаты кривой рис. 2.8 на Δx , получим

$$\Delta y = y \Delta x,$$

т. е. ту часть электронов, выходящих с поверхности накаливаемого металла, которая падает на данный диапазон скорости

$$\Delta x = d \left(\frac{v}{v_b} \right).$$

Для того чтобы найти число вышедших электронов, мы должны подсчитать сумму

$$\sum dN_1 = \sum dN_0 v$$

для всех значений скорости v , большей $\sqrt{\frac{2u_0 e}{m}}$, т. е. от

$$v_0 = \sqrt{\frac{2u_0 e}{m}} \text{ до } v = \infty.$$

Другими словами, мы должны определить интеграл

$$N_1 = \int_{v_0}^{\infty} dN_0 v = \frac{N_0 v_b}{2 \sqrt{\pi}} \int_{v_0}^{\infty} e^{-\left(\frac{v}{v_b}\right)^2} d\left(\frac{v}{v_b}\right)^2,$$

что будет равно

$$N_1 = \frac{N_0 v_b}{2 \sqrt{\pi}} \left| -e^{-\left(\frac{v}{v_b}\right)^2} \right|_{v_0}^{\infty} = \frac{N_0 v_b}{2 \sqrt{\pi}} e^{-\left(\frac{v_0}{v_b}\right)^2}.$$

Если бы двойной слой не оказывал своего задерживающего действия, то число электронов, выходящее в секунду с 1 см^2 поверхности проводника, было бы равно

$$N'_0 = \frac{N_0 v_b}{2 \sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\left(\frac{v}{v_b}\right)^2} d\left(\frac{v}{v_b}\right)^2 = \frac{N_0 v_b}{2 \sqrt{\pi}} \left| -e^{-\left(\frac{v}{v_b}\right)^2} \right|_0^{\infty} = N_0 \sqrt{\frac{kT}{2\pi m}}.$$

Совершенно очевидно, что при этом

$$\frac{N'_0}{N_0} = \frac{v_b}{2 \sqrt{\pi}} = \sqrt{\frac{kT}{2\pi m}} \quad (2.38)$$

есть величина средней скорости выхода.

Таким образом, выражение для числа электронов, выделяющихся с поверхности проводника, имеет следующий физический смысл:

число электронов, выделяющихся с 1 см^2 поверхности проводника в секунду, равно числу электронов, которое могло бы выйти, если бы не имело места

задерживающее действие двойного слоя $\frac{N_0 v_n}{2 \sqrt{\pi}}$, умноженному на коэффициент, показывающий, какая часть этого числа электронов может выделиться с поверхности проводника благодаря задерживающему действию двойного слоя.

Подставляя в выражение для N_0 значение наиболее вероятной скорости $v_n = \sqrt{\frac{2kT}{m}}$, получим

$$N_1 = N_0 \sqrt{\frac{kT}{2\pi m}} e^{-\frac{e^2 m}{2kT}}.$$

По условию выхода электронов имеем

$$\frac{mv^2}{2} = u_0 e,$$

где u_0 — разность потенциалов двойного слоя (внутренний потенциал металла). Отсюда

$$N_1 = N_0 \sqrt{\frac{kT}{2\pi m}} e^{-\frac{u_0 e}{kT}}. \quad (2.39)$$

Сила тока, создаваемая эмиттируемыми электронами, будет определена, если обе части уравнения умножим на заряд электрона

$$i = N_1 e = N_0 e \sqrt{\frac{k}{2\pi m}} \cdot \sqrt{T} \cdot e^{-\frac{u_0 e}{kT}}.$$

Полагая $N_0 e \sqrt{\frac{k}{2\pi m}} = a$, $\frac{u_0 e}{k} = b$, получим обычное выражение формулы Ричардсона

$$i = a \sqrt{T} e^{-\frac{b}{T}}. \quad (2.39a)$$

Для различных материалов значения a и b приведены в табл. 2.3 и 2.4.

На основании приведенного выражения для b устанавливается следующее соотношение:

$$b = u_0 \frac{e}{k} = \frac{u_0}{300} \frac{4,774 \cdot 10^{-10}}{1,372 \cdot 10^{-16}} = 11\,600 u_0$$

или

$$u_0 = 0,862 \cdot 10^{-4} b.$$

Последние выражения дают возможность по работе выхода (внутреннему потенциалу металла) определить b или, наоборот, по току эмиссии найти u_0 .

Пример 1. В предыдущем примере мы определили, что ток излучения электронов образуется лишь наиболее быстрыми электронами. Требуется подсчитать, какую часть составляют выходящие электроны от полного числа электронов, содержащихся в проводнике и обладающих некоторой положительной и большей нуля слагающей скорости по оси Ox (перпендикулярно к поверхности проводника).

Число электронов, выделяющихся в 1 сек с 1 см² поверхности проводника, равно

$$N_1 = N_0 \sqrt{\frac{kT}{2\pi m}} e^{-\frac{u_0 e}{kT}}.$$

Т а б л и ц а 2.3

Работа выхода и коэффициенты a и b для различных металлов

Материал	b , град	a	$u_0 = \frac{bk}{e} \cdot a$
Вольфрам . . .	52 500	$23,6 \cdot 10^6$	4,54
Молибден . . .	50 312	$21 \cdot 10^6$	4,34
Тантал	47 800	$11,2 \cdot 10^6$	4,12
Платина . . .	62 700	$48,7 \cdot 10^5$	5,4
Никель	38 000	$46,2 \cdot 10^6$	—
Торий	34 100	$20 \cdot 10^7$	2,94
Цирконий . .	38 000		3,28
Иттрий	37 000		3,19
Уран	38 000		3,28
Церий	35 600		3,07
Цезий	16 000		1,38
Кальций . . .	36 000		2,24

Вылетевшие таким образом электроны составляют $\frac{N_1}{N'_0}$ часть от общего числа имеющих положительную слагающую скорости в данном направлении

$$\frac{N_1}{N'_0} = e^{-\frac{u_0 e}{kT}} \left(N'_0 = N_0 \sqrt{\frac{kT}{2\pi m}} \right).$$

Таким образом, с 1 см^2 поверхности проводника выделяется лишь $1/e^{\frac{u_0 e}{kT}}$ часть от общего числа электронов $N'_0 = N_0 \sqrt{\frac{kT}{2\pi m}}$, которые могли бы вылететь, если бы не было двойного слоя, оказывающего задерживающее действие.

При температуре 2300° K , принятой в предыдущем примере, $\frac{N_1}{N'_0}$ будет равно

$$\frac{N_1}{N'_0} = e^{-\frac{b}{T}} = e^{-\frac{52500}{2300}} = e^{-22,8} = \frac{1}{7,95 \cdot 10^{10}},$$

$\frac{N_1}{N'_0}$ составляет лишь крайне незначительную часть от всего числа электронов, которые могли бы вылететь.

Обратим внимание на то, что сила тока с 1 см^2 поверхности проводника равна

$$i = N_1 e = N_0 e \sqrt{\frac{k}{2\pi m}} \sqrt{T} e^{-\frac{u_0 e}{kT}} = a \sqrt{T} e^{-\frac{b}{T}} a / \text{см}^2. \quad (2.40)$$

Согласно вычислениям, приведенным в примере, если бы двойной слой не оказывал задерживающего действия, то сила тока могла бы быть равной

$$i_0 = N'_0 e = N_0 e \sqrt{\frac{k}{2\pi m}} \sqrt{T} = a \sqrt{T} a / \text{см}^2.$$

Таблица 2.4 *

Значения коэффициентов a_1 , b_1 , a_2 , b_2 в формуле Ричардсона**

Материал	a_1	b_1	a_2	b_2
Уголь	$74,6 \cdot 10^5$	$5,49 \cdot 10^4$	24,86	$5,25 \cdot 10^4$
	$23,7 \cdot 10^5$	$4,87 \cdot 10^4$	5,933	$4,57 \cdot 10^4$
		$4,8 \cdot 10^4$		
Платина	$11,93 \cdot 10^5$	$4,93 \cdot 10^4$	16,3	$4,75 \cdot 10^4$
	$11,0 \cdot 10^7$	$6,55 \cdot 10^4$		$6,3 \cdot 10^4$
	$18,6 \cdot 10^7$	$7,25 \cdot 10^4$		$7 \cdot 10^4$
	$79,5 \cdot 10^8$	$6,78 \cdot 10^4$		$6,55 \cdot 10^4$
	$48,7 \cdot 10^5$	$6,1 \cdot 10^4$		$5,85 \cdot 10^4$
	$25,45 \cdot 10^5$	$6,1 \cdot 10^4$		$5,9 \cdot 10^4$
	$31,82 \cdot 10^5$	$2,8 \cdot 10^4$		$2,56 \cdot 10^4$
	$114,55 \cdot 10^5$	$5,11 \cdot 10^4$		$4,9 \cdot 10^4$
Вольфрам	$31,2 \cdot 10^6$	56000	62	$4,95 \cdot 10^4$
	$23,6 \cdot 10^6$	52500		
	$24,7 \cdot 10^6$	52500		
	$34 \cdot 10^6$	55500		
	$67,4 \cdot 10^7$	54700		$5,2 \cdot 10^4$
	$47,7 \cdot 10^7$	$5,47 \cdot 10^4$		
Тантал	$118,6 \cdot 10^5$	$5 \cdot 10^4$	29,8	$4,7 \cdot 10^4$
	$11,2 \cdot 10^6$	$5 \cdot 10^4$		
Молибден	$21,95 \cdot 10^6$	$5 \cdot 10^4$	55	$4,7 \cdot 10^4$
	$21 \cdot 10^6$	$5 \cdot 10^4$		
Торий	$19,9 \cdot 10^7$	$3,9 \cdot 10^4$		
	$20 \cdot 10^7$	$3,9 \cdot 10^4$		

* Таблица составлена по Ричардсону:

$$i = a_1 \sqrt{T e^{-\frac{b_1}{T}}}, \quad i = a_2 T^2 e^{-\frac{b_2}{T}}.$$

** Данные разных авторов.

На этом основании мы можем определить, что формула Ричардсона состоит из двух множителей, имеющих следующий физический смысл.

Первый множитель

$$i_0 = a \sqrt{T} a / \text{см}^2,$$

где i_0 — сила тока излучения электронов с 1 см^2 , которую можно было бы получить, если бы не было двойного слоя, задерживающего электроны.

Второй множитель $e^{-\frac{b}{T}}$ определяет ту часть электронов от общего их числа, имеющих слагающую скорости в положительном направлении оси Ox , которая может выйти за пределы двойного слоя.

При температуре 2300°K , принимая для вольфрама

$$a = 23,6 \cdot 10^6, \text{ получим для } i_0 \\ i_0 = 23,6 \cdot 10^6 \sqrt{2300} = 1130 \cdot 10^6 a / \text{см}^2,$$

тогда как действительный ток излучения будет равен

$$i = a \sqrt{T} e^{-\frac{b}{T}} = 1130 \cdot 10^6 \frac{1}{7,95 \cdot 10^9} = 0,142 \text{ а/см}^2.$$

Пример 2. Чему равна разность потенциалов двойного слоя вольфрама. Из выражения $b = \frac{u_0 e}{k}$ имеем

$$u_0 = 0,865 \cdot 10^{-4} b.$$

Для вольфрама при $b = 52\,500$

$$u_0 = 4,53 \text{ в.}$$

Историческая справка

Ричардсон, опираясь на электронную теорию электропроводности металлов Томсона, Рикке и Друде, разработал свою основную теорию излучения электронов накалившимся телом. Он представляет электроны в проводнике в виде газа, который, находясь в состоянии хаотического движения, стремится выйти за пределы поверхности проводника, будучи сдерживаем разностью потенциалов между внешней и внутренней поверхностями проводника.

Кроме вывода Ричардсона, приведенного выше, имели место работы, в которых закон термоэлектронного излучения строился, исходя из начал термодинамики.

Так, например, Вильсон применил уравнение Клапейрона к электронному газу и нашел таким путем формулу Ричардсона. Рассмотрение вопроса приняло совершенно новые формы после того, как Сакуром и Тетроде (1913 г.) была определена постоянная энтропии идеальных газов. К этому времени Ричардсон (1914 г.), исходя из теории квантов, получил новую форму термодинамического закона, а именно, квадратичную зависимость*.

В 1918 г. Лауэ, пользуясь работами Сакура и Тетроде, дал полный термодинамический вывод формулы термоионной эмиссии. Углубление теории Лауэ дало возможность Шоттки (1919—1925 гг.) распространить эти выводы на излучения атомов и нейтральных молекул.

2.8. Скрытая теплота испарения

На основании первого начала термодинамики количество теплоты эквивалентно некоторой работе.

Если телу сообщено количество теплоты dQ , то часть ее dU уйдет на увеличение ее внутренней энергии, а именно кинетической энергии частиц тела, вследствие чего повышается температура, и потенциальной энергии частиц, т. е. внутренней работы. Другая часть dL уйдет на внешнюю работу, совершаемую телом над внешними телами при том изменении состояния, которое сопровождается поглощением теплоты dQ . Таким образом, можно написать

$$dQ = dU + dL = dU + A p dV, \quad (2.41)$$

где $p dV$ — произведение давления на соответствующее изменение объема, а A — термический эквивалент работы.

Если состояние тела характеризуется функциями X и Y , называемыми функциями состояния, зависящими от x и y , то можно положить

$$dQ = X dx + Y dy. \quad (2.42)$$

Проф. П. В. Шмаков указывает, что в свое время М. В. Шулейкин проводил тщательный анализ этой теории. В архиве этот материал не сохранился. (Прим. составителя).

Выражая U и V в зависимости от x и y , найдем

$$\begin{aligned}dU &= \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy, \\dV &= \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy, \\dQ &= \left(\frac{\partial U}{\partial x} + Ap \frac{\partial V}{\partial x} \right) dx + \left(\frac{\partial U}{\partial y} + Ap \frac{\partial V}{\partial y} \right) dy.\end{aligned}$$

Сравнивая выражение (2.42) и последнее, можно написать

$$X = \frac{\partial U}{\partial x} + Ap \frac{\partial V}{\partial x} \quad \text{и} \quad Y = \frac{\partial U}{\partial y} + Ap \frac{\partial V}{\partial y}.$$

Дифференцируя первое выражение по y и второе по x , а затем вычитая из первого второе, получим

$$\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} = \left(\frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial x} \right) A. \quad (2.43)$$

Далее из термодинамики известно, что $\frac{dQ}{T}$ есть полный дифференциал для обратимых процессов. Тогда, представив $\frac{dQ}{T}$ в виде

$$\frac{dQ}{T} = \frac{X dx}{T} + \frac{Y dy}{T},$$

мы должны получить соотношение

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{X}{T} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Y}{T} \right),$$

откуда следует

$$\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{1}{T} \left(X \frac{\partial T}{\partial y} - Y \frac{\partial T}{\partial x} \right). \quad (2.44)$$

Сравнивая выражения (2.43) и (2.44), найдем

$$X \frac{\partial T}{\partial y} - Y \frac{\partial T}{\partial x} = \left(\frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial x} \right) AT. \quad (2.45)$$

Допустим, что некоторое вещество переходит из первого состояния (например, твердого или жидкого) во второе (газообразное). Допустим, что мы имеем некоторое количество вещества при температуре T . Пусть одна часть этого вещества μ находится во втором состоянии, а другая часть $(1 - \mu)$ — в первом.

В этом случае уравнение (2.42) можно записать так:

$$dQ = X d\mu + Y dT.$$

Если $T = \text{const}$, то

$$dQ = X d\mu.$$

Очевидно, что X есть скрытая теплота ρ перехода единицы массы из первого состояния во второе

$$X = \rho.$$

Допустим теперь, что $\mu = \text{const}$. Тогда

$$dQ = Y dT.$$

Очевидно, что Y есть тепло, затраченное на нагревание на один градус $(1 - \mu)$ количества вещества в первом состоянии и количества вещества μ во втором состоянии, т. е.

$$dQ = (1 - \mu) C dT + \mu c dT.$$

Здесь C — теплоемкость вещества в твердом или жидком состоянии, c — теплоемкость вещества в парообразном состоянии.

В общем случае мы будем иметь

$$dQ = \rho d\mu + [C - \mu (C - c)] dT;$$

Если s и σ — удельные объемы вещества в первом и втором состояниях, то

$$V = (1 - \mu) s + \mu \sigma = s + \mu (\sigma - s).$$

Дифференцируя это выражение, найдем

$$\frac{\partial V}{\partial \mu} = \sigma - s.$$

Выражения (2.43) и (2.44) представим на основании предыдущих рассуждений в следующем виде (при этом примем $x = \mu$ и $y = T$):

$$\frac{\partial p}{\partial T} - \frac{\partial}{\partial \mu} [C - \mu (C - c)] = A (\sigma - s) \frac{\partial p}{\partial T};$$

$\frac{\partial p}{\partial x} = 0$, так как p зависит лишь от температуры

$$\frac{\partial p}{\partial T} - \frac{\partial}{\partial \mu} [C - \mu (C - c)] = \frac{p}{T},$$

так как $\frac{\partial T}{\partial y} = 1$ и $\frac{\partial T}{\partial \mu} = 0$, ибо мы приняли, что T и μ — независимые переменные.

Последние два выражения после дифференцирования приводятся к следующему виду:

$$\frac{\partial p}{\partial T} + C - c = A (\sigma - s) \frac{\partial p}{\partial T}, \quad (2.46)$$

$$\frac{\partial p}{\partial T} + C - c = \frac{p}{T}.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{p}{T} = A (\sigma - s) \frac{\partial p}{\partial T}.$$

Так как величиной s можно пренебречь по сравнению с σ , то, умножая на молекулярный вес обе части выражения, получим

$$\frac{L}{T} = AV_0 \frac{\partial p}{\partial T}$$

(L — скрытая теплота испарения на грамм-молекулу).

Заменяем V_0 его значением из уравнения Менделеева — Клапейрона — Клаузиуса

$$\frac{L}{T} = ART \frac{\partial p}{p} \frac{1}{\partial T},$$

или

$$L = ART^2 \frac{\partial \ln p}{\partial T}.$$

Из первого уравнения (2.46) имеем

$$\frac{\partial p}{\partial T} = A (\sigma - s) \frac{\partial p}{\partial T} + c - C.$$

После интегрирования, получим

$$p = A (\sigma - s) p + \int_0^T c dT - \int_0^T C dT$$

или

$$L = L_0 + \int_0^T c dT - \int_0^T C dT. \quad (2.47)$$

В последнем выражении значения c и C отнесены к грамм-молекуле после умножения предыдущего уравнения на молекулярный вес.

2.9. Вывод формул Вильсона, Дешмана и Шоттки

Формула Вильсона. Полную теплоту испарения можно представить уравнением

$$L = RT^2 \frac{\partial (\ln p)}{\partial T}, \quad (2.48)$$

а с другой стороны, как эквивалентное количество работы, ушедшее на покрытие работы выхода, и изотермическое (при постоянной температуре) расширение газа:

$$L = N\varphi + pV = N \left(\varphi + \frac{RT}{N} \right) = N (\varphi + kT).$$

Сравнивая эти две формулы, получим

$$RT^2 \frac{\partial (\ln p)}{\partial T} = N (\varphi + kT),$$

$$\begin{aligned} \ln p &= \frac{N}{R} \left(\int \frac{\varphi}{T^2} dT + \int \frac{k}{T} dT \right) = \frac{N}{R} \left(-\frac{\varphi}{T} + k \ln T \right) + B = \\ &= -\frac{\varphi}{kT} + \ln T + B. \end{aligned}$$

Потенцируя это выражение, находим

$$p = B_1 T e^{-\frac{\varphi}{kT}}. \quad (2.49)$$

Если грамм-молекула содержит N электронов, а 1 см^3 — n электронов, то объем грамм-молекулы

$$V_0 = \frac{N}{n} \quad \text{и} \quad n = \frac{N}{V_0}.$$

С другой стороны, так как $pV_0 = RT$, то

$$V_0 = \frac{RT}{p}, \quad n = \frac{N}{R} \frac{p}{T} = \frac{p}{kT}. \quad (2.50)$$

Отсюда следует [см. (2.49)], что

$$n = \frac{B_1}{k} e^{-\frac{\varphi}{kT}}.$$

Если $\varphi = 0$, то

$$n = \frac{B_1}{k}.$$

При $\varphi = 0$ имеем

$$N_1 = N_0 \sqrt{\frac{kT}{2\pi m}}.$$

Скончателно получим, учитывая, что $N_0 = n$

$$N_1 = N_0 \sqrt{\frac{k}{2\pi m}} \sqrt{T} e^{-\frac{\varphi}{kT}}, \quad (2.51)$$

а так как $i = N_1 e$, то $i = a \sqrt{T} e^{-\frac{b}{T}}$ (см. табл. 2.3).

Вывод формулы Дешимана и Шоттки. Рассматривая процесс, происходящий при постоянном давлении, мы можем, кроме уравнения

$$L = RT^2 \frac{\partial \ln p}{\partial T},$$

написать, что сумма эквивалентной работы L_T , затраченной на нагревание до температуры T , равна

$$L_T = L_0 + \int_0^T c_p dT - \int_0^T C_p dT. \quad (2.52)$$

Здесь

L_0 — скрытая теплота испарения при абсолютном нуле или количество тепла, эквивалентное работе выхода;

$\int_0^T c_p dT$ — количество тепла, необходимое для превращения 1 см³ твердого или жидкого вещества в пар;

$\int_0^T C_p dT$ — количество тепла, необходимое для нагревания 1 см³ твердого

или жидкого вещества, например, металла до температуры T .

Здесь C_p — теплоемкость твердого (или жидкого) вещества при $p = \text{const}$; c_p — теплоемкость вещества в парообразном состоянии при $p = \text{const}$.

Так как первая значительно меньше второй, то величиной $\int_0^T C_p dT$ можно пренебречь. Тогда

$$\ln p = \int \frac{L_0}{RT^2} dT + \frac{1}{R} \int_0^T \frac{c_p dT}{T^2} + A_1.$$

Из работ Сакура и Тетроде мы знаем, что

$$A_1 = A_0 + \frac{3}{2} \ln M^*,$$

причем

$$A_0 = \ln \left(\frac{2\pi k}{N} \right)^{3/2} \frac{k}{h^3},$$

где h — постоянная Планка, равная $6,55 \cdot 10^{-27}$ эрг · сек.

В свою очередь, теплоемкость одноатомного газа при постоянном давлении постоянна и равна $\frac{5}{2} R$.

* M — молекулярный вес газа. (Прим. составителя).

Отсюда находим

$$\ln p = -\frac{L_0}{RT} + \frac{5}{2} \ln T + \ln \left(\frac{2\pi k}{N} \right)^{3/2} \frac{k}{h^3} + \frac{3}{2} \ln M,$$

$$p = \left(\frac{2\pi M k}{N} \right)^{3/2} \frac{k}{h^3} T^{5/2} e^{-\frac{L_0}{RT}} \text{ дин / см}^2.$$

Предположим теперь, что мы имеем дело с электронным газом.

Нами было найдено [см. (2.50)], что $n = \frac{p}{kT}$ и $i = N_0 e \sqrt{\frac{kT}{2\pi m}}$.

Подставляя сюда выражение для p , получим

$$i = \frac{pe}{\sqrt{2\pi mkT}} = \frac{e (2\pi mk)^{3/2} k}{(2\pi mk)^{1/2} h^3} \frac{T^{5/2}}{T^{1/2}} e^{-\frac{L_0}{RT}};$$

$$i = \frac{2\pi me k^2}{h^3} T^2 e^{-\frac{L_0}{RT}}$$

или

$$i = AT^2 e^{-\frac{L_0}{RT}} = AT^2 e^{-\frac{b}{T}}. \quad (2.53)$$

Здесь $A = \frac{2\pi me k^2}{h^3}$ — постоянная, не зависящая от природы металла. Она равна (при подстановке числовых значений) 60,2.

Логарифмируя выражение для i , получим

$$\lg i = \lg 60,2 + 2 \lg T - \frac{b}{T} \lg e$$

или

$$\lg i = 1,779 + 2 \lg T - 0,434 \frac{b}{T}.$$

Наносим на оси ординат (рис. 2.9) значения $\lg i$, а на оси абсцисс — значения b .

Полагая $b = 0$, находим точки пересечения семейства прямых с осью ординат

$$|\lg i|_{b=0} = 1,779 + 2 \lg T.$$

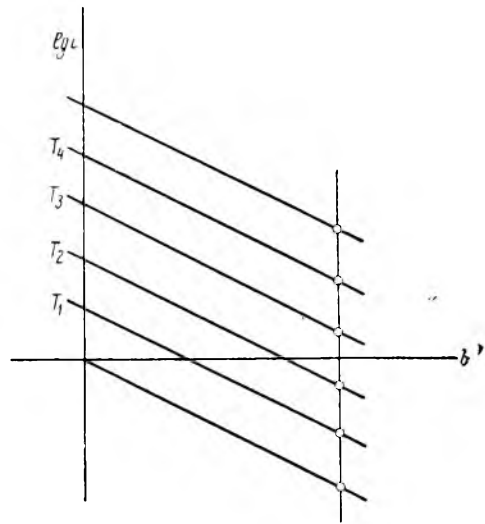


Рис. 2.9

При $i = 1$ мы получим точки пересечения того же семейства прямых с осью абсцисс

$$0,434 \frac{b}{T} = 1,779 + 2 \lg T$$

$$\text{или } b = 4,1 + \frac{2T \lg T}{0,434} \quad (\text{рис. 2.9}).$$

Соединяя точки соответствующих T , получаем графическое изображение семейства прямых $\lg i = f(b)$ при $T = \text{const}$.

Для того чтобы получить значения i для данного металла, находим b по табл. 2.3 и, проведя через точку b на оси абсцисс линию, параллельную оси ординат, определяем ее точки пересечения с семейством прямых. На основании этих точек находим значения $\lg i = f(T)$ при $b = \text{const}$.

Выражение $i = 60,2T^2 e^{-\frac{b}{T}}$, тщательно проверенное Ленгмюром и его сотрудниками, в настоящее время принимается для расчета силы тока излучения электронов и дает весьма точные результаты.

Значения коэффициента b для разных металлов даны в табл. 2.5.

Таблица 2.5

Значение коэффициента b для разных металлов

Материал	Нить из чистого металла		Данные для одномолекулярного слоя при вольфрамовом керне		
	b	$u_0 = \frac{bk}{e}$	u_0	b	A
Вольфрам	52 400—52 600	4,52—4,54			
Платина	62 700	5,4			
Молибден	50 312	4,34			
Тантал	47 800	4,12			
Торий	38 900	3,35	2,63	30 500	3,0
Цирконий	47 900	4,13	3,15	36 500	5,0
Иттрий	—	—	2,7	31 300	7,0
Уран	—	—	2,84	33 000	3,2
Церий	—	—	2,71	31 500	8,0
Лантан	—	—	2,71	31 500	8,0
Кальций	2 600	2,24	—	—	—
Цезий	21 000	1,81	0,695	8 300	0,001

Примечание. В третьем столбце приведены значения разности потенциалов в вольтах которую электрон должен преодолеть при выходе (разность потенциалов двойного слоя).

2.10. Энергия вылетевшего электрона, средняя квадратичная скорость вылетевших электронов и баланс энергии

Мы видим, что внутри металла число свободных электронов, у которых слагающая скоростей по оси Ox лежит в пределах $v, v + dv$, равно [см. (2.27)]

$$dN = N_0 \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv.$$

Проходя через поверхностный слой, вылетающие электроны совершают работу $\varphi = u_0 e$. Поэтому их скорости вне металла определяются соотношением

$$\frac{1}{2} mv_1^2 = \frac{1}{2} mv^2 - \varphi.$$

Если у данного числа dN электронов слагающая скорости по оси Ox лежит в пределах $v, v + dv$, то таких электронов в секунду вылетит, согласно уравнениям Максвелла, $dN_1 = dNv$ или

$$dN_1 = N_0 \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v dv. \quad (2.54)$$

У всех этих электронов вне металла энергия будет меньше на величину работы выхода φ . Поэтому dN_1 будет числом вылетающих электронов, у ко-

торых вне металла скорости будут лежать в пределах $v_1, v_2 + dv_1$ и v_1 будет удовлетворять равенству (2.54). Учитывая что, $v_1 dv_1 = v dv$ и v выражается через v_1 , получим

$$dN_1 = N_0 \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} e^{-\frac{mv_1^2}{2kT}} e^{-\frac{\varphi}{kT}} v_1 dv_1.$$

Представим его в виде

$$dN_1 = N_1 \frac{m}{kT} e^{-\frac{mv_1^2}{2kT}} v_1 dv_1,$$

где $N_1 = N_0 \sqrt{\frac{kT}{2\pi m}} e^{-\frac{\varphi}{kT}}$, (N_1 — общее число электронов, выделяющихся в 1 сек с 1 см² поверхности накаливаемого тела).

Кинетическая энергия, которой обладают dN_1 электронов, будет равна

$$\frac{1}{2} dN_1 m v_1^2 = \frac{N_1 m^2}{2kT} e^{-\frac{mv_1^2}{2kT}} v_1^3 dv_1.$$

Кинетическая энергия электронов, скорости которых лежат в пределах от нуля до бесконечности, будет равна

$$\frac{1}{2} N_1 m \bar{v}_1^2 = \frac{N_1 m^2}{4kT} \int_0^\infty e^{-\frac{mv_1^2}{2kT}} v_1^2 d(v_1^2) = \frac{N_1 m^2}{4kT} \left(\frac{2kT}{m} \right).$$

Отсюда средняя квадратичная скорость вылетающих электронов будет

$$\bar{v}_1^2 = \frac{2kT}{m}$$

или

$$\frac{m \bar{v}_1^2}{2} = kT.$$

Пример 1. Чему будет равно $\bar{v}_1$ при $T = 2300^\circ \text{K}$? Подставляя численные значения, получим

$$\bar{v}_1^2 = 700 \cdot 10^{12} \text{ см}^2/\text{сек}^2,$$

и

$$v_1 = 26,45 \cdot 10^6 \text{ см/сек}.$$

Пример 2. Чему должна быть равна разность потенциалов тормозящего поля или какая отрицательная разность потенциалов должна быть приложена к аноду, чтобы прекратить силу тока излучения электронов при $T = 2300^\circ \text{K}$?

Имеем

$$u_a e = \frac{1}{2} m \bar{v}_1^2 = kT.$$

Отсюда

$$u_a = \frac{kT}{e}$$

или

$$u_a = 0,1985 \text{ в}.$$

Мы упоминали уже о том, что среднее значение кинетической энергии электрона внутри металла равно $3/2 kT$. Нетрудно доказать, что средние значения кинетической энергии, соответствующие слагающим скорости по осям Ox, Oy и Oz в проводнике, равны $\frac{kT}{2}$.

Соответственно вне проводника кинетическая энергия электрона по оси Ox будет равна kT и по осям y, z , т. е. касательно к проводнику, $\frac{kT}{2}$. Таким образом, значение кинетической энергии электрона вне проводника будет равно $2kT$, на основании чего мы получим

$$\frac{\bar{v}_x^2}{\bar{v}_{x1}^2} = \frac{\frac{kT}{2}}{kT} = \frac{1}{2}; \quad \frac{\bar{v}^2}{\bar{v}_1^2} = \frac{\frac{3kT}{2}}{2kT} = \frac{3}{4}.$$

Когда электроны покидают проводник, то они уносят с собой энергию, которая равна

$$N_1 (\varphi + 2kT),$$

где N_1 — число электронов, покидающих в секунду 1 см^2 поверхности проводника.

Если сопротивление проводника r , то мощность накала будет равна

$$P_n = i_n^2 r$$

при условии, что излучение электронов не имеет места (т. е. напряжение анода равно нулю или приложено тормозящее поле).

Если поставить катод в такие условия, что сила тока излучения электронов будет равна i , то расход тепла вследствие вылета электронов увеличится и накал (катод) охладится.

Для того чтобы тело накала довести до прежней температуры, необходимо ток накала увеличить на Δi_n , тогда получим

$$(i_n + \Delta i_n)^2 r = i_n^2 r + SN_1 (\varphi + 2kT) = i_n^2 r + SN_1 (u_0 e + 2kT),$$

где S — боковая поверхность тела накала.

Преобразуя это выражение, имеем

$$\Delta P_n = 2i_n \Delta i_n r = SN_1 (u_0 e + 2kT) = i \left(u_0 + \frac{2kT}{e} \right) \\ i = SN_1 e.$$

Пример 3. Тело накала — вольфрам, $T = 2300^\circ \text{ К}$, $i = 2 \cdot 10^{-3} \text{ а}$, $i_n = 0,2 \text{ а}$, $u_0 = 4,53 \text{ в}$, $r = 20 \text{ ом}$. Найти ΔP_n и Δi_n .

$$\Delta P_n = 4,53 \cdot 2 \cdot 10^{-3} + \frac{2 \cdot 1,372 \cdot 10^{-16} \cdot 2300}{4,8 \cdot 10^{-10}} \cdot 2 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{3 \cdot 10^9}{10^7} = 9,854 \cdot 10^{-3} \text{ вт};$$

$$\Delta i_n = \frac{\Delta P_n}{2i_n r} = \frac{9,854 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 0,2 \cdot 20} = 1,23 \text{ ма}.$$

Ток накала равен 200 ма , так что изменение тока накала составит

$$\frac{\Delta i_n}{i_n} = \frac{1,23}{200} \cdot 100\% = + 0,61\%.$$

Пример 4. Выражение для ΔP_n можно представить в следующем виде:

$$\Delta P_n = i \frac{2kT}{e} \left(\frac{u_0 e}{2kT} + 1 \right) = i \frac{2kT}{e} \left(\frac{b}{2T} + 1 \right),$$

откуда следует

$$\frac{\Delta P_n e}{2kT i} = \frac{b}{2T} + 1.$$

Подставляя значения k и e , получим

$$b = \frac{\Delta P_n}{i} 11\,600 - 2T.$$

Имеем из опыта: $T = 2300^\circ \text{K}$; $i = 2 \cdot 10^{-3} \text{a}$, $\Delta P_n = 9,854 \cdot 10^{-3} \text{вт}$.

Подставляя эти значения в последнюю формулу, получим

$$b = \frac{9,854 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^{-3}} \cdot 11\,600 - 4600 = 52\,400.$$

Таким образом, по эффекту охлаждения можно определить b .

Пример 5. Последнее выражение для удобства расчета также может быть представлено в виде

$$u_0 = \frac{\Delta P_n}{i} - \frac{2T}{11\,600} = \frac{\Delta P_n}{i} - \frac{T}{5800},$$

из которого непосредственно получается значение разности потенциалов двойного слоя.

Из опыта найдено: $\Delta P_n = 9,854 \cdot 10^{-3} \text{вт}$, $i = 2 \cdot 10^{-3} \text{a}$, $T = 2300^\circ \text{K}$. Следовательно,

$$u_0 = \frac{9,854}{2} - \frac{2300}{5800} = 4,53 \text{ в}.$$

2.11. Испарение металлов. Упругость паров

Точно так же, как и в предыдущем случае, исходным является уравнение $L = RT^2 \frac{\partial (\ln p)}{\partial T}$, и выражение для скрытой теплоты испарения

$$L = L_0 + \int_0^T c_p dT - \int_0^T C_p dT,$$

где L_0 — скрытая теплота испарения на грамм-атом металла при абсолютном нуле; c_p и C_p — соответственно теплоемкости пара и металла при постоянном давлении.

Теплоемкость пара, подобно газам при постоянном давлении, постоянна и равна $\frac{5}{2} R \text{ эрг/град}$ на грамм-атом. Поэтому можно записать

$$L = L_0 + \frac{5}{2} RT - \int_0^T C_p dT.$$

Сравнивая с уравнением Клапейрона, находим

$$\frac{d \ln p}{dT} = \frac{L_0}{RT^2} + \frac{5}{2} \frac{1}{T} - \frac{1}{RT^2} \int_0^T C_p dT,$$

что дает после интегрирования

$$\ln p = -\frac{L_0}{RT} + \frac{5}{2} \ln T - \frac{H}{R} + i,$$

где $H = \int_0^T \frac{dT}{T^2} \int_0^T C_p dT.$

Согласно выражению, определяющему состояние равновесия, масса газа, ударяющегося об 1 см^2 поверхности металла в 1 сек , а стало быть, и испаряющегося, равна

$$m_T = p \sqrt{\frac{M}{2\pi RT}},$$

согласно чему

$$\ln m_T = \ln p + \frac{1}{2} \ln M - \frac{1}{2} \ln T - \frac{1}{2} \ln 2\pi R.$$

Подставляя значение $\ln p$, находим

$$\ln m_T = -\frac{L_0}{RT} + 2 \ln T + \frac{1}{2} \ln M - \frac{1}{2} \ln 2\pi R - \frac{H}{R} + i.$$

Согласно Сакуру и Тетроде, для одноатомного пара

$$i = \ln \left(\frac{2\pi k}{N} \right)^{3/2} \frac{k}{h^3} + \frac{3}{2} \ln M.$$

Принимая во внимание, что $k = 1,372 \cdot 10^{-16} \text{ эрг/град}$, $N = 6,062 \cdot 10^{23} \text{ 1/моль}$, $h = 6,554 \cdot 10^{-27} \text{ эрг/град}$ и $R = 8,315 \cdot 10^7 \text{ эрг/град} \cdot \text{моль}$, найдем значение постоянных

$$\lg \left(\frac{2\pi k}{N} \right)^{3/2} \frac{k}{h^3} = \lg 26130 = 4,417, \quad \lg 2\pi R = \lg 52,2 \cdot 10^7 = 8,718, \\ \frac{1}{2} \lg 2\pi R = 4,359$$

и получим

$$\lg m_T = -\frac{L_0}{2,303 RT} + 2 \lg T + 2 \lg M - \frac{H}{2,303 R} + 0,058.$$

Выражая L_0 и H в калориях и принимая, что одна калория равна $4,188 \cdot 10^7 \text{ эрг}$, найдем окончательно

$$\lg m_T = -\frac{L_0}{4,577 T} + 2 \lg T + 2 \lg M - \frac{H}{4,577} + 0,058. \quad (2.54a)$$

Все величины, входящие в настоящее выражение, легко поддаются вычислению, за исключением величины H .

Для определения H поступаем следующим образом. Воспользуемся зависимостью между C_p и C_v *

$$C_p - C_v = aT^{3/2}, \quad \text{где } a = 1,254 \cdot 10^{-3}.$$

Подставляя C_p в выражение для H , получим

$$H = \int_0^T \frac{dT}{T^2} \int_0^T C_v dT + \int_0^T \frac{dT}{T^2} \int_0^T aT^{3/2} dT = \int_0^T \frac{dT}{T^2} \int_0^T C_v dT + \frac{4}{15} aT^{3/2},$$

или

$$H = F + \frac{4}{15} aT^{3/2}.$$

Величина F дана в литературе** в виде функции $\frac{E}{T} = f(T)$.

* C_v — теплоемкость газа при постоянном объеме.

** Handbuch der Physik, Band 10.

Для температур выше некоторой T_0 необходимо добавить член

$$\int_{T_0}^T \left(\frac{dT}{T^2} \right) \int_0^T C_p dT,$$

где

$$C_p = N + zT. \quad (2.54б)$$

Значения N и z для разных металлов даны в табл. 2.6. Окончательно получим

$$H = \frac{E}{T} + \frac{4}{15} aT_0^{3/2} + N \lg T - N \lg T_0 + \frac{zT}{2} - \frac{zT_0}{2}.$$

Принимая для вольфрама $T_0 = 900^\circ$, $N = 4,7$ и $z = 0,0015$ (см. табл. 2.6), получим

$$H = \frac{E}{T} + \frac{4}{15} aT_0^{3/2} + 4,7 \lg T - 4,7 \lg T_0 + \frac{zT}{2} - \frac{zT_0}{2}.$$

Подставляем H в выражение для $\lg m_T$ (2,54а)

$$4,577 \lg m_T = -\frac{L_0}{T} + 9,154 \lg T + 9,154 \lg M + 0,26547 - \frac{E}{T} - \\ - \frac{4}{15} aT_0^{3/2} - 4,7 \lg T + 4,7 \lg T_0 - \frac{zT}{2} + \frac{zT_0}{2}.$$

После вычислений получим

$$4,577 \lg m_T = 45,6 - \frac{L_0 + E}{T} + 4,454 \lg T - 0,00075 T, \quad (2.55)$$

или в общем виде

$$4,577 \lg m_T = A - \frac{L_0 + E}{T} - B \lg T - DT.$$

Значения постоянных и характерных величин различных металлов даны в табл. 2.7.

Значение теплоемкости при постоянном объеме по теории Дебая дается как функция θ/T , где θ есть характеристическая температура для твердого тела, пропорциональная частоте колебаний атомов твердого тела ν .

Значение θ для различных элементов даны Симоном (табл. 2. 6).

Таблица 2.6

Значение N , z , T_0 и θ для разных металлов

Металл	N	z	T_0	θ
Вольфрам	4,7	0,0015	900	306
Молибден	4,88	0,00248	360	360
Платина	5,4	0,0017	220	220
Никель	4,39	0,00411	300	375
Железо	4,39	0,00405	300	390
Медь	5,33	0,0016	300	315
Серебро	5,44	0,00194	300	390

Значение теплоемкости при постоянном давлении C_p задается приведенной выше зависимостью (2.54б).

На основании данных, приведенных в табл. 2.7, можно вычислить, подобно тому как это сделано нами для вольфрама, постоянные уравнения испарения массы для остальных металлов, указанных в табл. 2.7.

Рассмотрим упругость паров испаряющегося вещества.

Расчетные и опытные данные металлов*

Металл	A	B	D	E	L_0	Темп. пл., °К	Темп. кип., °К
Вольфрам	45,600	4,454	0,00075	80	191 880	3655	6970
Молибден	44,719	2,076	0,00124	457	146 000	2895	5960
Платина	48,023	3,276	0,00085	340	124 750	2045	4800
Никель	40,218	0,971	0,00206	400	89 440	1725	3650
Железо	40,231	0,971	0,00203	240	89 025	1808	3475
Медь	44,638	3,126	0,00080	370	82 060	1356	3110
Серебро	45,836	3,396	0,00097	382	71 320	1234	2740

Давление паров p связано с количеством испаряющегося вещества m_T , при состоянии равновесия известным нам соотношением

$$m_T = p \left(\frac{M}{2\pi RT} \right)^{1/2}$$

или

$$\lg p = \lg m_T + \frac{1}{2} \lg (2\pi R) + \frac{1}{2} \lg T - \frac{1}{2} \lg M. \quad (2.56)$$

Пример. Произведем расчет для вольфрама:

$$\frac{1}{2} \lg (2\pi R) = 4,359,$$

$$\frac{1}{2} \lg M = 1,132,$$

$$\frac{1}{2} \lg (2\pi R) - \frac{1}{2} \lg M = K = 3,227.$$

Значения K , рассчитанные таким образом, приведены ниже.

Металл	K	
Вольфрам	3,227	
Молибден	3,368	Железо 3,486
Платина	3,214	Медь 3,458
Никель	3,475	Серебро 3,343

Обозначая в выражении (2.55) $C = 4,577$ и подставляя $\lg m_T$ в выражение (2.56), найдем

$$\lg p = \frac{A}{C} + K - \frac{L_0 + E}{CT} - \left(\frac{B}{C} - 0,5 \right) \lg T - \frac{D}{C} T.$$

Значения коэффициентов A, L_0, E, D, B даны в табл. 2.7.

С целью упрощения расчетов формула может быть представлена в следующем виде:

$$\lg p = A_0 - \frac{L'_0}{T} - B_0 \lg T - D_0 T. \quad (2.57)$$

Расчеты по приведенным формулам должны производиться весьма точно. Таблицы 2.7 и 2.8 приводятся для определения m_T и p , которые рассчитаны по выведенным выше формулам (2.55) и (2.56).

В таблицах давление указано в барах, т. е. в динах на 1 см^2 .

* Н. А. Iones, J. Langmuir, G. M. I. Mackay. Phys. Rev., 30 201, 1927.

Расчетные данные для вольфрама

Таблица 2.8

$T, ^\circ\text{K}$	Удельное сопротивление, $\rho \cdot 10^8, \text{омосм}$	Излученная мощность, вт/см^2	Ток излучен- ных электро- нов $i, \text{а/см}^2$	n	Испарение $m_T, \text{г/см}^2 \cdot \text{сек}$	$w' = w\pi$	$r' \cdot 10^8, \text{омосм}$	A_T	$B_T \cdot 10^3$	$i' = i\pi$
		w	i							
273	5,48	—	—	—	—	—	6,97	—	—	—
300	5,65	$0,314 \cdot 10^{-4}$	—	—	—	$0,415 \cdot 10^{-4}$	7,2	3,727	0,02683	—
500	10,56	0,00971	—	—	—	0,0305	13,45	47,62	0,6404	—
700	16,09	0,0764	—	—	—	0,240	20,49	108,2	2,218	—
900	21,94	0,322	—	—	—	1,041	27,94	193,1	5,393	—
1100	27,94	1,027	$1,52 \cdot 10^{-13}$	49,7	$2,17 \cdot 10^{-30}$	3,223	35,58	301	10,71	$4,77 \cdot 10^{-13}$
1300	34,08	2,57	$3,21 \cdot 10^{-10}$	42,3	$1,35 \cdot 10^{-24}$	8,06	43,4	430,9	18,7	$1,01 \cdot 10^{-9}$
1500	40,36	5,52	$9,14 \cdot 10^{-8}$	36,9	$2,37 \cdot 10^{-20}$	17,33	51,4	580,6	29,85	$2,87 \cdot 10^{-7}$
1700	46,78	10,62	$7,08 \cdot 10^{-6}$	32,8	$4,17 \cdot 10^{-17}$	33,28	59,58	747,3	44,52	$2,22 \cdot 10^{-5}$
1900	53,35	18,64	$2,28 \cdot 10^{-4}$	29,6	$1,41 \cdot 10^{-14}$	58,45	67,94	927,4	63,02	$7,15 \cdot 10^{-4}$
2100	60,06	30,05	$3,93 \cdot 10^{-3}$	27	$1,66 \cdot 10^{-12}$	95,69	76,49	1119	85,57	$1,23 \cdot 10^{-2}$
2300	66,91	47,2	$4,07 \cdot 10^{-2}$	24,8	$8,10 \cdot 10^{-11}$	148,2	85,22	1319	112,4	$1,28 \cdot 10^{-1}$
2500	73,91	69,8	0,298	23	$2,03 \cdot 10^{-9}$	219,3	94,13	1526	143,6	0,935
2600	77,49	83,8	0,716	22,2	$8,41 \cdot 10^{-9}$	263	98,66	1623	161,1	2,25
2700	81,04	99,6	1,631	21,4	$3,19 \cdot 10^{-8}$	312,7	103,22	1741	179,7	5,12
2900	88,33	137,8	7,31	20,1	$3,3 \cdot 10^{-7}$	432,4	112,51	1961	220,6	22,95
3100	95,76	185,8	26,44	18,5	$2,6 \cdot 10^{-6}$	583	121,95	2187	266,7	83
3300	103,3	245,4	84,45	17,9	$1,56 \cdot 10^{-5}$	769,7	131,6	2413	318,3	265,2
3500	111,1	318,0	233,2	17	$7,54 \cdot 10^{-5}$	998	141,42	2657	375,7	732
3655	117,1	382,6	479,9	16,4	$2,28 \cdot 10^{-4}$	1202	149,15	2837	423,4	1505

Пример. Требуется определить время, за которое диаметр катодной нити уменьшается в $1/n = \beta$ раз. Пусть катод имеет диаметр D см и количество испаряющегося вещества при температуре T равно m_T г/см²·сек (табл. 2.8). Если в течение данного малого промежутка времени диаметр проводника уменьшился от D_1 до D_2 , то можно написать

$$\pi D m_T = - \frac{d}{dt} \left(\frac{\pi D^2}{4} \delta \right)$$

(δ — удельный вес материала) или

$$\pi D m_T = - \frac{\pi D}{2} \delta \frac{dD}{dt},$$

$$2m_T dt = - \delta dD.$$

Интегрируя в пределах времени $t_2 - t_1$, находим

$$\int_{t_1}^{t_2} 2m_T dt = - \int_{D_1}^{D_2} \delta dD,$$

$$2m_T [t_2 - t_1] = \delta (D_1 - D_2),$$

или

$$2m_T \tau = \delta (D_1 - D_2),$$

где $\tau = t_2 - t_1$, и окончательно

$$\tau = \frac{\delta D_1}{2m_T} \left(1 - \frac{D_2}{D_1} \right) = \frac{\delta D_1 \beta}{2m_T}$$

или (если время измеряется в часах)

$$\tau_{\text{час}} = \frac{\delta D_1 \beta}{7200 m_T}.$$

Для вольфрама $\delta = 19$, так что

$$\tau_{\text{час}} = \frac{\beta D_1}{379 m_T}.$$

2.12. Связь между фотоэффектом и двойным слоем

Если металл, являющийся отрицательным электродом, освещать светом, в особенности богатым ультрафиолетовыми лучами, то с поверхности металла начинают вылетать электроны.

Скорость их по закону Эйнштейна определяется из выражения (элементарный фотоэффект)

$$\frac{mv^2}{2} = h\nu - \phi. \quad (2.58)$$

Здесь h — постоянная Планка, равная $6,55 \cdot 10^{-27}$ эрг/сек; ν — частота падающего света; $h\nu$ — световая энергия, получая и преобразовывая которую электрон совершает работу выхода ϕ (работу вырывания) и на выходе имеет кинетическую энергию $\frac{mv^2}{2}$; m — масса электрона.

Из приведенного уравнения следует, что электроны при освещении будут выходить с поверхности металла только в том случае, если $\nu > 0$, т. е. $h\nu > \phi$. Предполагая, что мы можем выразить ϕ через некоторую частоту светового луча ν_0 , мы получим, что

$$\frac{mv^2}{2} = h(\nu - \nu_0), \quad (2.59)$$

т. е. что для выхода электрона из металла частота падающего света должна быть больше некоторой предельной частоты ν_0 .

$$\nu > \nu_0.$$

Таким образом, данный металл является фоточувствительным для частот света, которые больше некоторой предельной частоты, и нечувствительным к световым лучам, имеющим частоту, меньшую этой предельной. Частота ν_0 называется красной границей фотоэффекта. Милликэн, вычисляя для Li и Na их внутренние потенциалы и сравнивая их с контактной разностью потенциалов, измеренной по электростатическому методу, получил для Li: $\nu_0 = 57 \cdot 10^{13}$, $\phi = 2,21$ в; для Na: $\nu_0 = 43,9 \cdot 10^{13}$, $\phi = 1,81$ в.

Опыт Милликэна можно считать одним из доказательств существования двойного слоя.

Рассмотрим связь между красной границей фотоэффекта и работой выхода. На основании опытов Милликэна можно предположить, что

$$\phi = h\nu_0 = u e, \quad (2.60)$$

откуда следует

$$u = \frac{\phi}{e} = \frac{h\nu_0}{e}. \quad (2.61)$$

Выражая u в вольтах, найдем

$$u = \frac{300 \cdot 6,55 \cdot 10^{-27}}{4,774 \cdot 10^{-10}} \nu_0 = 412 \cdot 10^{-17} \nu_0.$$

Для лития $\nu_0 = 57 \cdot 10^{13}$, поэтому $u = 0,0412 \cdot 57 = 2,34$ в, и для натрия $\nu_0 = 43,9 \cdot 10^{13}$ и $u = 0,0412 \cdot 43,9 = 1,81$ в.

Чаше длина волны света задается в ангстремах ($1 \text{ \AA} = 10^{-8} \text{ см}$). Можно написать

$$\nu_0 = \frac{c}{\lambda} = \frac{3 \cdot 10^{10}}{\lambda_{\text{см}}} = \frac{3 \cdot 10^{18}}{\lambda_{\text{А}}}.$$

Отсюда определяем разность потенциалов двойного слоя:

$$u = 412 \cdot 10^{-17} \frac{3 \cdot 10^{18}}{\lambda_{\text{А}}} = \frac{12360}{\lambda_{\text{А}}} \text{ в}.$$

Пример. Для алюминия красная граница лежит в пределах

$$\lambda_{\text{А}} = 3150 \div 3391 \text{ \AA}.$$

Подставляя эти данные в последнюю формулу, находим

$$u = 3,52 \div 3,92 \text{ в}.$$

Для вольфрама красная граница равна $2615 \text{ \AA}$. Разность потенциалов

$$u = 4,7 \text{ в}.$$

Полученные совпадения мы считаем удовлетворительными.

Дюбридж (1928 г.) сравнивал значение работы вылета электрона для платины, определив последнюю из фотоэффекта и термоионного эффекта, и нашел согласие в пределах экспериментальной ошибки.

Варнер (1927 г.) нашел более точное совпадение обоих значений для вольфрама.

Для молибдена сравнительное исследование произвел Мартин в 1929 г. Он исследовал, кроме того, изменение фоточувствительности, которое могло произойти в течение 300 часов нагревания. В высоком вакууме тонкая лента молибдена нагревалась до 1325° С . Фототок измерялся при помощи

квadrантного электрoметра. Фoтoчувствительность возрастала с увеличением времени прогрева, достигая в конце концов предельного значения. Увеличение чувствительности сопровождалось сдвигом красной границы с 2600 до 3800 Å.

Работа вылета была определена по красной границе после того, как установились устойчивые условия. Она была равной $3,22 \pm 0,16$ в.

С тем же самым оборудованием определялась и работа вылета у вольфрама. Была построена лoгарифмическая зависимость термоионного излучения по формуле Ричардсона.

Значение работы вылета, определенное из наклона этой кривой, было равно $3,48 \pm 0,7$ в. Оба значения согласуются с точностью до 0,26 в.

Фoтoэлектрическая чувствительность молибдена от комнатной температуры до 1000°C увеличивается на 30%.

2.13. Расчет нити накала электронной лампы

Расчет нити накала производится в предположении, что температура накаливаемого тела при его нагреве одинакова по всей длине.

Для расчета нити накала вводим понятие **единичного цилиндра**, понимая под этим термином цилиндр, имеющий диаметр $d = 1$ см и длину $l = 1$ см.

Такой единичный цилиндр характеризуется следующими постоянными: боковая поверхность $s = \pi d l = \pi \text{ см}^2$, температура накала — T_k , и постоянными, зависящими от температуры:

1) током излучения электронов с боковой поверхности единичного цилиндра $i' \text{ а/см}^2$,

2) мощностью, излучаемой с боковой поверхности единичного цилиндра $w' \text{ вт/см}^2$,

3) омическим сопротивлением, $r' \text{ ом/см}$.

Сила тока излучения электронов боковой поверхностью единичного цилиндра и цилиндрического проводника

Силу тока излучения электронов с 1 см^2 принимаем согласно формуле Дешмана — Шоттки — Лауэ, равной для вольфрама

$$i = 60,2 \cdot T^2 e^{-\frac{52400}{T}} \text{ а/см}^2.$$

Сила тока излучения электронов со всей боковой поверхности цилиндрического проводника будет равна

$$I = i \pi d l. \quad (2.62)$$

Так как $s = \pi$ есть боковая поверхность единичного цилиндра, то его ток равен

$$i' = i \pi,$$

или

$$i' = 189,028 \cdot T_k^2 e^{-\frac{52400}{T_k}}.$$

Значения i' приведены в табл. 2.8 (столбец 11).

В свою очередь сила тока излучения цилиндрического проводника длиной l и диаметром d будет равна

$$I = i' d l. \quad (2.62a)$$

Для того чтобы найти термоионную силу тока цилиндрического проводника, нужно, задавшись температурой, взять из столбца 11 соответствующее значение (i') и умножить его на длину и диаметр проводника.

Мощность, рассеиваемая боковой поверхностью единичного цилиндра, и мощность, рассеиваемая боковой поверхностью цилиндрического проводника

Если напряжение и сила тока накала соответственно равны u_n и i_n , то подводимая к накалу мощность $u_n i_n$ при установившейся температуре рассеивается боковой поверхностью проводника. Если с 1 см^2 рассеивается $\omega \text{ вт/см}^2$, то для всей поверхности проводника можно написать

$$u_n i_n = \pi d l \omega. \quad (2.63)$$

С боковой поверхности единичного цилиндра рассеиваемая мощность будет равна

$$\omega' = \pi \omega.$$

Мощность накала цилиндрического проводника при этом выразится так:

$$u_n i_n = \omega' d l.$$

Мощность, рассеиваемая при температуре T с 1 см^2 , определяется выражением, данным Вортингом:

$$\lg \omega = 3,68 (\lg T - 3,3) - \frac{1040}{T} + 1,9 = 3,68 \lg T - \frac{1040}{T} - 10,244.$$

Значения ω и ω' приведены в табл. 2.8.

Для того чтобы определить мощность, потребляемую нитью накала, необходимо, задавшись температурой, найти из таблицы соответствующее значение ω' и умножить на диаметр и длину проводника.

Сопротивление единичного цилиндра r' и сопротивление цилиндрического тела накала r_n

Сопротивление цилиндрического тела накала будет равно

$$r_n = \frac{\rho l}{\frac{\pi d^2}{4}},$$

где ρ — удельное сопротивление проводника.

Из этого выражения получим сопротивление единичного цилиндра

$$r' = \frac{4}{\pi} \rho,$$

откуда следует

$$r_n = r' \frac{l}{d^2}. \quad (2.64)$$

Значения ρ (для вольфрама) и r' приведены в табл. 2.8 (столбцы 2 и 8).

Для определения сопротивления тела накала, задавшись температурой, находим r' из табл. 2.8 и определяем сопротивление тела накала r_n , умножая r' на $\frac{l}{d^2}$.

Зависимость диаметра провода от тока накала

Согласно изложенному, мощность, выделяемая на нити накала, равна

$$u_n i_n = \omega' d l.$$

С другой стороны, используя закон Ома, то же выражение можно представить в виде

$$i_n^2 r_n = i_n^2 r' \frac{l}{d^2}.$$

Сравнивая оба выражения, получим

$$i_n^2 r' \frac{l}{d^2} = w' dl,$$

$$\frac{i_n^2}{d^3} = \frac{w'}{r'}.$$

Приведенная зависимость была проверена опытным путем Дейчманом, причем он дает таблицу значений отношения $\frac{i_n^2}{d^3}$ в зависимости от температуры:

$$\frac{i_n^2}{d^3} = A_T^2.$$

Сравнение обоих последних выражений дает зависимость между тремя постоянными

$$A_T^2 = \frac{w'}{r'}. \quad (2.65)$$

Эта зависимость дает возможность убедиться в точности аналитического выражения для w' .

Физическое значение постоянной A_T заключается в том, что A_T есть сила тока единичного цилиндра. Значения A_T приведены в табл. 2.8. Для того чтобы найти силу тока накала, следует, задавшись температурой, определить из таблицы постоянную A_T и умножить ее на $d^{3/2}$ данного проводника (d в см).

Зависимость напряжения накала катода от размеров проводника

Мощность, выделяемая на катоде, равна

$$u_n i_n = w' dl.$$

Ее можно выразить еще следующим образом, используя закон Ома:

$$\frac{u_n^2}{r_n} = \frac{u_n^2}{r'} \frac{d^2}{l}.$$

Сравнивая оба выражения, получим

$$\frac{u_n^2 d^2}{r' l} = w' dl,$$

$$\frac{u_n^2 d}{l^2} = w' r'.$$

Подобно предыдущему случаю, можно обозначить

$$B_T^2 = w' r'.$$

Значения B_T приведены в табл. 2.8. B_T означает падение напряжения на единичном цилиндре. Для того чтобы найти напряжение на нити накала, нужно, задавшись температурой, определить B_T из табл. 2.8 и умножить на $\frac{l}{\sqrt{d}}$:

$$u_n = B_T \frac{l}{\sqrt{d}}. \quad (2.66)$$

Перемножая соответствующие выражения i_n и u_n , найдем выражение мощности накала через постоянные A_T и B_T :

$$u_n \cdot i_n = A_T B_T l d. \quad (2.67)$$

Произведение $A_T B_T$ есть мощность накала единичного цилиндра. Согласно предыдущему, имеем

$$w' = A_T B_T.$$

Охлаждающее влияние концов нити накала

В действительности нить накала по длине будет накалиена неравномерно, а потому напряжение на нити накала, получаемое по расчету, должно быть больше наблюдаемого на опыте. Это охлаждение на концах нити создается за счет отвода тепла в местах ее крепления.

Обозначим через u_n напряжение накала, получаемое из расчета, $u_{но}$ — напряжение накала, наблюдаемое на опыте, Δu_n — повышение напряжения на одном конце, которое бы имело место, если бы накал был равномерный по всей длине; для всей нити это повышение напряжения будет равно $2\Delta u_n$.

Между этими величинами имеется зависимость

$$u_n = u_{но} + 2\Delta u_n,$$

откуда следует

$$u_{но} = u_n - 2\Delta u_n. \quad (2.68)$$

Точно так же, если длина l накалена неравномерно, то ток излучения будет меньше, чем расчетный.

Обозначим через I_n — ток наблюдаемый, а I — ток расчетный и используем зависимость

$$I_n = \frac{I}{f_2}, \quad f_2 > 1.$$

Относя I_n к току излучения единичного цилиндра (то значение, которое было выбрано при расчете), мы получаем действующую длину нити, т. е. ту длину нити, которая дала бы силу тока, если бы была накалиена равномерно

$$l_d = \frac{I_n}{i'd}.$$

Данное соотношение можно выразить так:

$$l_d = \frac{I}{f_2 i'd},$$

но так как $\frac{I}{i'd}$ есть действительная длина нити l , то

$$l_d = \frac{l}{f_2}. \quad (2.69)$$

Для f_2 дается выражение

$$f_2 = \frac{u_n}{u_n - 2\Delta u_n}. \quad (2.70)$$

В зависимости от температуры накала мы получим следующие два случая.

1-й с л у ч а й. Если диаметр ввода в шесть раз больше диаметра тела накала и T_m (температура в точке наивысшего накала) больше 1200° , то из анализа следует, что отношение $\frac{T_0}{T_m}$ (T_0 — температура на конце нити) приближенно равно 0,25.

В этом случае Δu_n определяется следующим соотношением:

$$\Delta u_n = 0,9897 \cdot 10^{-5} T_M^{1,8}.$$

Рассматриваемая мощность излучения электронов, световое излучение, скорость испарения и все другие величины, изменяющиеся быстрее, чем в третьей степени, должны быть умножены на коэффициент

$$f_2 = \frac{u_n}{u_n - 2\Delta u'_n},$$

где $\Delta u'_n$ — сложная функция T_M (наибольшей температуры тела накала) и показателя n (функция $\Delta u'_n$ возрастает пропорционально величине T^n).

В рассматриваемом случае, если $n \geq 5$, мы имеем следующее выражение для $\Delta u'_n$:

$$\Delta u'_n = 10^{-5} T_M^{1,3} [2,113 \lg n + 0,709].$$

2-й с л у ч а й. Если диаметр ввода в шесть раз больше диаметра тела накала и $T_M \leq 1200^\circ$, то T_0 остается приблизительно при комнатной температуре. Тогда

$$\Delta u_n = 1,394 \cdot 10^{-4} T_M^{1,3} - 4,894 \cdot 10^{-3} T_M^{0,3},$$

$$\Delta u'_n = 10^{-5} \cdot T_M^{1,3} [2,113 \lg n + 1,153] - 0,00527 T_M^{0,3}.$$

2.14. Расчет катода лампы

Данные катода. Длина накаливаемого проводника $l = 2,9,8$ см; диаметр накаливаемого проводника $d = 0,03$ см; ток накала $i_n = 8,2$ а; напряжение накала $u_n = 17$ в; ток эмиссии больше 0,75 а.

Определение температуры катода

Температуру катода определяем с точностью, вытекающей из предположения, что длина 9,8 см достаточна для того, чтобы в середине провода температура мало отличалась от температуры весьма длинного проводника. Второе предположение заключается в том, что материал катода (вольфрам) по своим качествам удовлетворяет табличным данным.

Расчет равномерно накаливаемого катода

Р а с ч е т т е м п е р а т у р ы к а т о д а. Температуру определяем с помощью соотношения

$$i_n^2 = d^3 A_T^2, \quad (2.71)$$

$$A_T = \frac{i_n}{d^{3/2}} = \frac{8,2}{0,03^{3/2}} = 1578. \quad (2.72)$$

Из табл. 2.8 находим

$T, ^\circ K$	A_T
2500	1526
2600	1632

На основании полученных цифр пишем:

$$\frac{1632 - 1526}{2600 - 2500} = \frac{1578 - 1526}{\Delta T} = \frac{52}{\Delta T}, \quad \Delta T = \frac{52}{1,06} = 49.$$

Температура катода равна $2500^\circ + 49^\circ = 2549^\circ K$.

Расчет тока эмиссии. Согласно температуре нагрева нити накала 2500—2600° находим из табл. 2.8 силу тока излучения электронов единичного цилиндра:

$T, ^\circ\text{K}$	$i'a$
2500	0,935
2600	2,25

Полагая пропорциональное изменение тока с температурой накала в пределах 2500—2600°, для найденной выше температуры накала 2549° К получено приращение

$$\Delta i' = 49 \frac{2,25 - 0,935}{100} = 0,49 \cdot 1,315 = 0,645 a.$$

Полная сила тока излучения единичного цилиндра при температуре 2549° К будет равна

$$i' = 0,935 + 0,645 = 1,58 a.$$

Силу тока эмиссии катода мы найдем из выражения

$$I = i'dl = 1,58 \cdot 2 \cdot 9,8 \cdot 0,03 = 0,928 a.$$

Определение напряжения на катоде

Напряжение на катоде находим из следующего выражения:

$$u_n = B_T \frac{l}{\sqrt{d}}. \quad (2.73)$$

Из табл. 2.8 имеем

$T, ^\circ\text{K}$	B_T
2500	0,1436
2600	0,1611

Для температуры накала 2549° К

$$\Delta B_T = \frac{0,1611 - 0,1436}{100} \cdot 49 = 0,0175 \cdot 0,49 = 8575 \cdot 10^{-6},$$

$$B_T = 0,1436 + 0,008575 = 0,1522,$$

$$u_n = 0,1522 \frac{2 \cdot 9,8}{\sqrt{0,03}} = 17,25 \text{ в.}$$

С целью учета охлаждающего влияния концов нити накала, создаваемого вводами, введем поправку на ток излучения электронов. Ток наблюдаемый равен расчетному, умноженному на $1/f_2$.

$$I_n = \frac{I}{f_2},$$

$$f_2 = \frac{u_n}{u_n - 2\Delta u'_n},$$

$$\Delta u'_n = 10^{-5} T^{1,3} (2,113 \lg n + 0,709).$$

Из табл. 2.8 определяем n : для $T = 2500^\circ$ $n = 23$, для $T = 2600^\circ$ $n = 22,2$.

Поправка для температуры 2549°

$$\Delta n = \frac{23 - 22,2}{100} \cdot 49 = 0,392;$$

$$n = 23 - 0,392 = 22,608;$$

$$\Delta u_n' = 0,269 (2,113 \cdot 1,355 + 0,709) = 0,958 \text{ в};$$

$$f_2 = \frac{17,25}{17,25 - 2 \cdot 0,958} = \frac{17,25}{15,334} = 1,125;$$

Наблюдаемый в действительности ток эмиссии равен $\frac{0,928}{1,125} = 0,825 \text{ а}$. По данным завода он равен или больше 0,750 а. Разница 0,077 а. Ошибка расчета, если за истинное значение принимать $I = 0,75 \text{ а}$, будет

$$\frac{0,077}{0,75} \cdot 100 = 10,3 \%$$

Поправка к расчетному значению напряжения на катоде

Напряжение на катоде, наблюдаемое на опыте, равно

$$u_{\text{но}} = u_n - 2\Delta u_n; \quad (2.74)$$

$$\Delta u_n = 0,9897 \cdot 10^{-5} T^{1.3} \text{ (случай 1);}$$

$$\Delta u_n = 0,9897 \cdot 26900 \cdot 10^{-5} = 0,266;$$

$$u_{\text{но}} = 17,25 - 2 \cdot 0,266 \cong 16,7 \text{ в.}$$

Ошибка расчета равна $\frac{17 - 16,7}{17} \cdot 100 = \frac{30}{17} = 1,765 \%$.

Определение сопротивления катода

Из табл. 2.8 находим: для $T = 2500^\circ$ $r' = 94,13 \cdot 10^{-6}$, для $T = 2600^\circ$ $r' = 98,66 \cdot 10^{-6}$. Тогда

$$\Delta r' = \frac{98,66 - 94,13}{100} \cdot 49 \cdot 10^{-6} = 4,53 \cdot 0,49 \cdot 10^{-6} = 2,22 \cdot 10^{-6},$$

$$r' = (94,13 + 2,22) \cdot 10^{-6} = 96,35 \cdot 10^{-6}.$$

Сопротивление тела накала будет

$$r_n = r' \frac{l}{d^2} = \frac{2 \cdot 9,8 \cdot 96,35 \cdot 10^{-6}}{0,03^2} = \frac{1850 \cdot 10^{-6}}{9 \cdot 10^{-4}} = 205 \cdot 10^{-2} \text{ ом},$$

$$r_n = 2,05 \text{ ом.}$$

При равномерном накале нити мы имели бы силу тока

$$i_n = \frac{u_n}{r_n} = \frac{17,25}{2,05} = 8,37 \text{ а.}$$

Заданная же сила тока накала $i_n = 8,2 \text{ а}$.

Если же принять охлаждающее влияние концов, то мы получим сопротивление меньше во столько же раз, во сколько раз меньше напряжение, т. е.

$$r_{\text{но}} = r_n \frac{u_{\text{но}}}{u_n} = 2,05 \frac{16,7}{17,25} = 1,98 \text{ ом.}$$

$$i_n = \frac{16,7}{1,98} = 8,44 \text{ а.}$$

Ошибка расчета $\frac{8,44 - 8,2}{8,2} \cdot 100 = 2,92\%$.

Важно определить холодное сопротивление катода.

Из столбца 8 для $T = 300^\circ \text{K}$ находим $r' = 7,2 \cdot 10^{-6}$, $r_n = \frac{7,2 \cdot 10^{-6} \cdot 19,6}{0,03^2} = 15,7 \cdot 10^{-2} = 0,157 \text{ ом}$.

Если включать накал без добавочного сопротивления, то получаем скачок тока, равный

$$\frac{u_n}{r_n} = \frac{17}{0,157} = 108 \text{ а.}$$

Добавочное сопротивление, чтобы избежать этого скачка, должно быть равно

$$r_{\text{доб}} \approx 2 \text{ ом.}$$

Таким образом, сопротивление реостата, регулирующего накал, должно быть не менее 2 ом.

Определим продолжительность работы катода τ . Мощность накала равна $w = u_n i_n = 8,2 \cdot 17 = 139,5 \text{ вт}$. Число миллиампер на ватт накала (мера накала) будет

$$\frac{750}{139,5} = 5,37 \text{ ма/вт.}$$

По кривым Руккопа для $d = 0,03 \text{ см}$ и данной меры накала находим число часов работы катода, которое будет равно 7500 час.

По проверочному расчету получается

$$\frac{I}{w} = \frac{928}{139,5} = 6,7 \text{ ма/вт,}$$

откуда из диаграммы Руккопа число часов горения получается равным 4000 час.

Определим время τ (в часах), за которое диаметр уменьшится на $(k = \frac{1}{n})$ -ю от своей первоначальной величины:

$$\tau_{\text{час}} = \frac{k \cdot d}{m_T 379}.$$

Из табл. 2.8 берем m_T : для $T = 2500^\circ$ $m_{T_1} = 2,03 \cdot 10^{-9}$, для $T = 2600^\circ$

$$m_{T_2} = 8,41 \cdot 10^{-9}, \Delta m_T = \frac{6,38 \cdot 10^{-9}}{100} \cdot 49 = 3,13 \cdot 10^{-9},$$

$$m_T = (2,03 + 3,13) \cdot 10^{-9} = 5,16 \cdot 10^{-9}.$$

Предположим, что r_a уменьшилось на 0,1. Тогда

$$\tau = \frac{0,1 \cdot 0,03}{5,16 \cdot 10^{-9} \cdot 379} = 1540 \text{ час.}$$

Построение характеристик катода (табл. 2.9)

Ток и напряжение накала (i_n и u_n) в зависимости от температуры рассчитываются по формулам

$$i_n = A_T d^{3/2} = A_T \sqrt{0,03^3} = A_T \cdot 5,2 \cdot 10^{-3}, \quad (2.76)$$

Ток излучения электронов рассчитывается по формуле

$$I = i' dl = 19,6 \cdot 0,03 \cdot i' \cdot 1000 = 588 i' \text{ ма,} \quad (2.77)$$

$$u_n = B_T \frac{l}{\sqrt{d}} = B_T \frac{19,6}{\sqrt{0,03}} = 113,2 B_T \text{ вт.}$$

Таблица 2.9

Расчетные характеристики накала вольфрамовой нити

$T, ^\circ\text{K}$	A_T	$B_T \cdot 10^3$	i_H, a	$u_H, \text{в}$	$I, \text{ма}$	$\omega = u_H i_H, \text{вт}$
1800	836	53,28	4,35	6,02	0,0825	26,2
1900	927	63,02	4,83	7,2	0,42	34,8
2000	1022	73,75	5,32	8,35	1,855	44,5
2100	1119	85,57	5,81	9,7	7,25	56,3
2200	1217	98,4	6,32	11,15	14,6	70,5
2300	1319	112,4	6,85	12,73	75,3	87,3
2400	1422	127,5	7,40	14,45	214	106,8
2500	1526	143,6	7,94	16,25	550	128,8
2600	1623	161,1	8,45	18,25	1325	154
2700	1741	179,7	9,17	20,3	3020	186

2.15. Расчет анода электронной лампы

Температура анода

Если на аноде выделяется количество тепла W вт/сек и $\pi d_a l_a$ есть боковая поверхность анода (предполагаем последний цилиндрическим), то соответствующее рассеяние энергии единичного цилиндра будет равно

$$W' = \frac{W}{d_a l_a}.$$

Зная W' , мы находим из табл. 2.8 температуру анода.

Рассеяние энергии поверхностью металла в зависимости от температуры

К сожалению, точный расчет W' , приведенный выше, имеется только для вольфрама. Однако можно указать следующую формулу для определения температуры на основании рассеивания единицы поверхности (1 см^2):

$$\frac{W}{S} = c_K \left(\frac{T_K}{1703} \right)^{4,73}. \quad (2.78)$$

Здесь постоянная c_K имеет разные значения для различных металлов: так, например, для чистого вольфрама $c_K = 12,54$, для молибдена — 6, для никеля — 1,5.

Более подробные данные для рассеиваемой мощности молибдена можно определить по формуле

$$W = 19,7 \left(\frac{T_K}{2000} \right)^{5,08} \text{ вт/см}^2,$$

удельное сопротивление

$$10^6 \rho = 53,5 + 3,1 (T_K - 2000) \text{ ом} \cdot \text{см},$$

Яркость в международных свечах (1 межд. св. = 4π люмен)

$$L = 69,5 \left(\frac{T_K}{2000} \right)^{11,8} \text{ свеча/см}^2.$$

Подобно этому для платины удельное сопротивление

$$\rho_t = \rho_0 (1 + 384 \cdot 10^{-3} T_K - 0,000576 T_K^2),$$

$$\rho_0 = 0,102 \cdot 10^{-6} \text{ ом} \cdot \text{см}$$

и мощность рассеяния

$$W = 6,22 \cdot 10^{-4} \cdot 5,75 \cdot 10^{-12} T_K^{4,767}.$$

На основании данных Дешмана и Эвальда можно составить следующую таблицу для молибдена и тантала (табл. 2.10).

Т а б л и ц а 2.10

Расчетные характеристики для молибденовой и танталовой нитей

$T, ^\circ K$	$W, \text{ вт/см}^2$	$r, \text{ мком} \cdot \text{см}$	$i, \text{ а/см}^2$	$T, ^\circ K$	$W, \text{ вт/см}^2$	$r, \text{ мком} \cdot \text{см}$	$i, \text{ а/см}^2$
Для молибдена	273	5,14		Для тантала	1400	—	$4,47 \cdot 10^{-7}$
	1000	0,55			1600	1,65	$3,72 \cdot 10^{-5}$
	1200	1,43			1800	2,9	$1,2 \cdot 10^{-3}$
	1400	3,18	$363 \cdot 10^{-8}$		2000	4,81	$1,95 \cdot 10^{-2}$
	1600	6,3	$4,17 \cdot 10^{-6}$		2200	7,6	0,193
	1800	11,3	$1,7 \cdot 10^{-4}$		2400	11,5	1,34
	2000	19,2	$3,31 \cdot 10^{-3}$		2600	16,9	
	2200	30,7	$3,89 \cdot 10^{-2}$		2800	24,2	105
	2400	47	0,309		2895		
	2600	69,5					
	2800	98					
	2895	116					

КАТОДЫ ИЗ ТОРИРОВАННОГО ВОЛЬФРАМА

3.1. Общая характеристика излучения электронов катодами из торированного вольфрама*

В 1913 г. Ленгмюр и Роджерс, исследуя вольфрам, применяемый в осветительной технике, обратили внимание на ряд явлений, которые возникали при изменении режима обработки, и объяснили их происхождение существованием в вольфраме окиси тория. О влиянии тория на повышение излучения электронов с вольфрама было доложено в Американском физическом обществе в 1914 г. с помещением краткой заметки в журнале *Physical review* (1914). Очень краткое описание наблюдавшихся явлений появилось в журналах *Transaction American Electrochem. Society*, 1916 г. и *Journal Chemical Society*, 1916 г. Полное описание условий повышения испускания электронов благодаря примеси тория было дано в патентах.

В 1921 г. появилась работа Хэлла, в которой были даны соотношения между размерами атомов вольфрама и тория. В 1922 г. появилось краткое описание (*Phys. Rev.*, 20, 107, 1922), подобное опубликованному в «Известиях Электрохимического общества» и журнале Химического общества. В том же году Ленгмюр показал, что специальной тепловой обработкой на поверхности вольфрамовой нити, содержащей небольшой процент окиси тория, можно получить сплошной слой тория толщиной в один атом. Там же было описано, что между частью поверхности, покрытой торием, и током излучения электронов существует определенная зависимость. В 1922 г. Ленгмюр и Кингдон поместили в *Physical review* исследование о влиянии ударов положительных ионов о торированный катод под влиянием электрического поля. Результаты подробного исследования торированного катода были опубликованы Ленгмюром лишь в 1923 г. В том же году появилась работа Дешмана, содержащая характерные данные торированного катода. Зависимость силы тока испускания электронов с торированного катода исследовали Кингдон в 1924 г., Дешман и Эвальд в 1927 г.

Если на поверхности двойного слоя металла (вольфрама) расположатся положительно или отрицательно заряженные атомы, которыми будет занята часть поверхности θ , то работу выхода b_θ можно охарактеризовать величиной, пропорциональной θ ,

$$b_\theta = b_W + C\theta, \quad (3.1)$$

причем знак перед $C\theta$ будет зависеть от того, какие атомы (положительные или отрицательные) расположились на поверхности металла. В этом случае сила тока излучения электронов будет равна

$$i_\theta = AT^2 e^{-\frac{b_W + C\theta}{T}}. \quad (3.2)$$

Последнее выражение дает возможность опытным путем определить, какая

* В последнее время торированный вольфрам находит все большее применение в области проектирования мощных генераторных ламп. (*Прим. составителя*).

часть поверхности металла занята инородными атомами. Допуская, что $\theta = 0$, получим $i_W = AT^2 e^{-\frac{b_W}{T}}$, а выражение для i_θ представим в виде

$$i_\theta = i_W e^{-\frac{C\theta}{T}}.$$

Отсюда получим $\ln i_\theta = \ln i_W - \frac{C\theta}{T}$.

Если $\theta = 1$, то $\ln i_{Th} = \ln i_W - \frac{C}{T}$. Разделив одно выражение на другое, получим

$$\theta = \frac{\ln i_\theta - \ln i_W}{\ln i_{Th} - \ln i_W}. \quad (3.3)$$

Точно так же можно найти величину θ в зависимости от b . На самом деле

$$i_\theta = AT^2 e^{-\frac{b_\theta}{T}}. \quad (3.4)$$

С другой стороны, имеем ($\theta = 1$):

$$i_{Th} = AT^2 e^{-\frac{b_W + C}{T}} = AT^2 e^{-\frac{b_{Th}}{T}},$$

$$i_W = AT^2 e^{-\frac{b_W}{T}}.$$

Логарифмируя три последних уравнения, можно получить

$$\ln i_\theta - \ln i_W = -\frac{b_\theta}{T} + \frac{b_W}{T},$$

$$\ln i_{Th} - \ln i_W = -\frac{b_{Th}}{T} + \frac{b_W}{T},$$

откуда на основании (3.3) следует

$$\theta = \frac{b_W - b_\theta}{b_W - b_{Th}}. \quad (3.5)$$

Что касается величины коэффициента A , то на основании ряда опытов было установлено, что A в сильной степени зависит от температуры и от площади покрытия θ .

Чтобы объяснить это обстоятельство, принимая во внимание, что разность потенциалов двойного слоя вольфрама не зависит от температуры, мы предполагаем такую зависимость для разности потенциалов, создаваемой инородными атомами соответственно этому:

$$b_\theta = b_W + \theta (C_0 + \beta T). \quad (3.6)$$

На этом основании из (3.4) имеем

$$i_\theta = A e^{-\beta\theta} T^2 e^{-\frac{b_W + C_0\theta}{T}} \quad (3.7)$$

и получаем вместо A , равного $A_W = 60,2$, величину $A_\theta = A_W e^{-\beta\theta}$. Эту зависимость исследовал Кингдон (Phys. Rev., 24, 510, 1924), который сравнил теоретическое значение A_θ с опытным и нашел зависимость, более удовлетворяющую данным эксперимента:

$$A_\theta = (A_{Th}^\theta + A_W^{(1-\theta)} - 1). \quad (3.8)$$

A_W соответствует чистому вольфраму и равно 60,2, тогда как A_{Th} соответствует полному покрытию торием ($\theta = 1$) и равно 7.

Точно так же Кингдон определяет величину C_0 равной $b_{Th} - b_W$, так что в числителе показательной функции (3.7) мы имеем

$$b_W + (b_{Th} - b_W)\theta = b_{Th}\theta + b_W(1 - \theta).$$

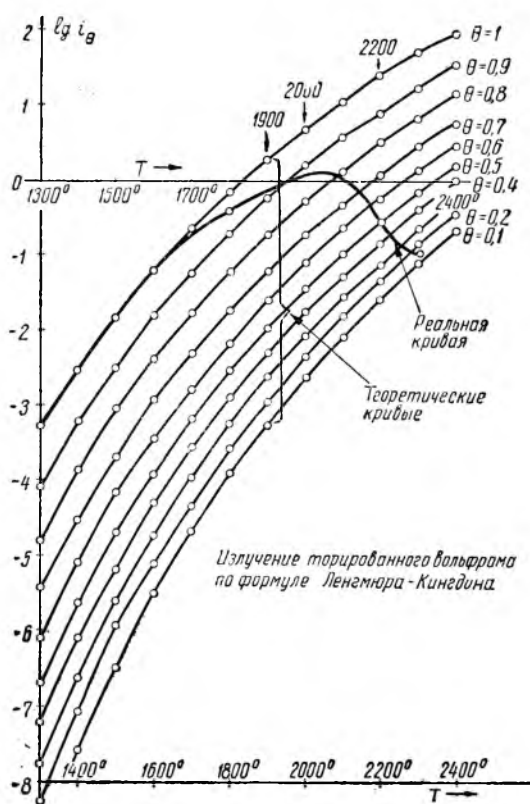


Рис. 3.1

Это соотношение вытекает из уравнения (3.5). Окончательно по Кингдону выражение излучения электронов принимает следующую форму:

$$i_0 = (A_{Th}^{\theta} + A_W^{(1-\theta)} - 1) T^2 e^{-\frac{b_{Th}\theta + b_W(1-\theta)}{T}}. \quad (3.7a)$$

$$b_W = 52\,200, \quad b_{Th} = 31\,200,$$

$$A_W = 60,2, \quad A_{Th} = 7.$$

В табл. 3.1 приведены некоторые из расчетов функции $\lg i_0 = f(T)$ для различных температур и для $\theta = 0,5$. Расчет производился по формуле

$$\lg i_0 = \lg(60,2^{(1-\theta)} + 7^{\theta} - 1) + 2 \lg T - 0,4343 \frac{b_{Th}\theta + b_W(1-\theta)}{T}. \quad (3.7b)$$

Для $\theta = 0,5$ последний член данного выражения будет равен

$$0,4343 [b_{Th}\theta + b_W(1 - \theta)] = 18110,$$

а первый член

$$\lg(60,2^{1-\theta} + 7^{\theta} - 1) = 0,974.$$

Таблица 3.1

Значения функции $\lg i_0 = f(T)^*$

$T, ^\circ\text{K}$	1300	1500	1700	1800	2000	2200	2300
$\lg i_0 = f(T)$	—6,698	—4,674	—3,166	—2,514	—1,444	—0,524	—0,152
$i_0 = f(T), \text{a/cm}^2$	$0,2 \cdot 10^{-6}$	$0,212 \cdot 10^{-4}$	$0,682 \cdot 10^{-3}$	$0,306 \cdot 10^{-2}$	$0,35 \cdot 10^{-1}$	0,288	0,705

* В табл. 3.1 для сокращения расчета $\lg i_0 = f(T)$ для других значений θ не приводится.

Результаты расчета представлены графически на рис. 3.1.

Следует обратить внимание, что работа выхода торированного вольфрама получается при полном покрытии $\theta = 1$ меньше, чем для металлического тория, имеющего $b_{\text{Th}} = 34 \text{ } 100$.

3.2. Условия для получения больших сил токов излучения с торированного вольфрама

Если торированный вольфрам применяется в обычных катодных лампах, то при измерении тока излучения электронов не замечается ничего необычного, так как при обычной температуре вольфрамовой нити торий очень быстро испаряется с поверхности и, кроме того, очень сильно подвержен действию окисляющих его газов. Торий может быть сохранен на поверхности катода при исключительно высоком вакууме, который получается при применении во время откачки жидкого воздуха или при распылении в баллоне таких веществ, как натрий, калий, магний или кальций. В обычных торированных катодах торий находится всегда в виде окиси ThO_2 . Поэтому очевидно, что сильное излучение получается лишь в тех случаях, когда нить была предварительно раскалена до 2600°K или выше. Повышения температуры до 2800°K в течение 3 мин вполне достаточно для предварительной обработки. Этот нагрев, по-видимому, переводит часть окислов тория в металлический торий, который остается распределенным внутри нити в очень малой концентрации. Кроме того, подобное нагревание, очевидно, при испарении удаляет весь торий с поверхности нити, так как при понижении температуры до 1900°K или еще ниже измеренная сила тока остается такой же, как и в случае чистого вольфрама при той же температуре.

Активирование поверхности вольфрамовой нити металлическим торием может быть осуществлено путем диффузии последнего изнутри. Заметным образом это происходит только при температурах несколько выше 1900°K . С другой стороны, при температуре выше 2200°K торий весьма быстро испаряется с поверхности нити.

Наивыгоднейшая температура для активирования должна быть, таким образом, около $2000\text{--}2100^\circ \text{K}$ (рис. 3.2).

После того как нить приведена в активное состояние такой тепловой обработкой, то и при пониженной температуре (ниже 2100°) это состояние остается неизменным. Предполагается, конечно, что вакуум достаточно высок и окисляющие газы удалены введением легко окисляющихся веществ, как, например, щелочные пары.

В присутствии инертных газов катод может быть деактивирован бомбардировкой положительными ионами, если скорость их достаточно велика.

При более низких напряжениях накала торированная нить может быть приведена в активное состояние при большом давлении аргона, щелочных паров и т. д., если газы достаточно ионизированы, чтобы практически удалить весь пространственный заряд.

Активность нити при различных условиях изучалась по измерению силы тока излучения электронов при некоторой температуре T_t , которую мы назовем испытательной и ниже которой заметной диффузии или испарения тория не происходит. Если требуется изучить состояние активности, начи-

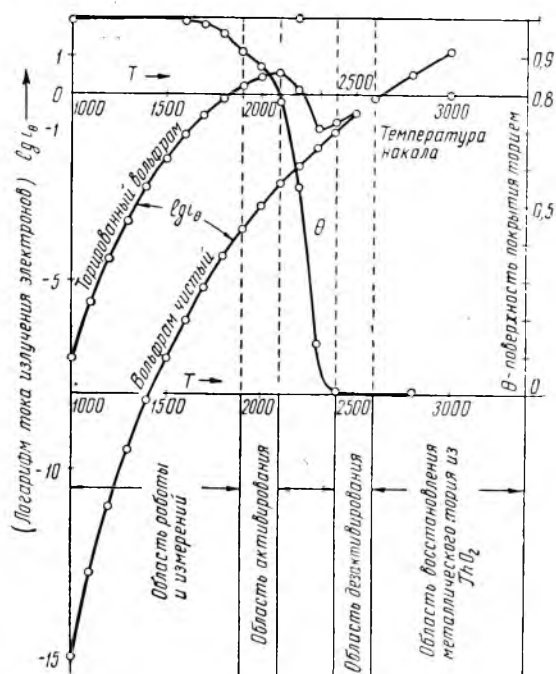


Рис. 3.2

ная с неактивированной (чистой) поверхности вольфрама до вполне активированной, то наиболее подходящей испытательной температурой будет $T_t = 1500^\circ \text{K}$. При этой температуре излучение чистого вольфрама составляет $0,1 \cdot 10^{-6} \text{ a/cm}^2$, тогда как излучение с вполне активированной поверхности торированного вольфрама равно $18 \cdot 10^{-3} \text{ a/cm}^2$.

Активирование наглядно может быть показано при помощи кривых активирования, как, например, кривая OAB (рис. 3.3). Изучаемые нити ($l = 9 \text{ см}$, $r_a = 0,075 \text{ см}$) всегда содержали 1—2% окиси тория (ThO_2) и нагревались в течение 30 сек до 2800°K и более.

После снятия кривой активирования нить дезактивировалась, прежде чем снималась другая кривая. Для этого нить нагревалась на некоторое время t_d до дезактивирующей температуры T_d , при которой торий испаряется с поверхности быстрее, чем диффундирует к ней. Дезактивирующие температуры выбирались от 2200 и до 2800°K . Для определения степени активирования при данной температуре нить сперва дезактивировалась, а затем нагревалась на последовательные периоды времени до активирующей температуры T_a . После каждого из этих периодов активность нити определялась измерением силы тока излучения электронов при испытательной температуре T_t (в данном случае $T_t = 1500^\circ \text{K}$).

Откладывая по оси ординат ток излучения i_0 (при $T_t = 1500^\circ$), а по оси абсцисс — время t_a , в продолжение которого нить была активирована при $T_a = 2100^\circ \text{K}$, получим кривую OAB (рис. 3.3). В некоторых точках, например A и B , активирование может быть прервано и можно получить кривые дезактивирования AC , BD , нагревая нить до температуры дезактивирова-

ния T_d на короткие промежутки времени. В данном случае температура T_d была равна 2250°K .

После каждого подогрева до T_d нить внезапно охлаждалась прекращением тока накала, вследствие чего последний должен был быстро проходить через область активирующей температуры. Затем температура поднималась и измерялась сила тока излучения электронов.

Рассмотрим природу пленки тория активированной вольфрамовой нити. Свойства вольфрамовой нити дают основание предполагать, что торий, диффундирующий к поверхности, образует пленку, совершенно покрывающую поверхность вольфрама. Максимум активности, получаемый при различных температурах активирования, один и тот же, но скорость активирования может меняться в очень широких пределах. На первый взгляд кажется очень странным, что торий, находящийся в вольфраме в очень малой концентрации (1—2%), может осаждаться на поверхности в очень высокой концентрации.

Это явление не отличается от наблюдаемого в растворах, содержащих вещество, способное понижать поверхностную энергию раствора. Например, эфир, растворенный в воде, понижает поверхностную энергию и, согласно правилу Джибса, становится адсорбированным на поверхности. Свойства тория таковы, что мы должны ожидать понижения поверхностной энергии вольфрама.

Известно, что поверхностная энергия некоторых веществ ниже критической температуры ($T_{кр}$) и согласно закону Этвеша пропорциональна $T_{кр}/V^{1/3}$ (V — атомный объем). Критическая температура для подобных веществ пропорциональна температуре кипения при обычном сравнении. Таким образом, для различных металлов поверхностная энергия пропорциональна $T_{кр}/V^{1/3} = T_{кр}(\rho/A)^{-1/3}$, так как $V = \rho/A$ (A — атомный вес, ρ — удельный вес вещества).

Торий резко испаряется при 2000° , а вольфрам — при 3000°K . Удельный вес тория 11,9, вольфрама — 19,4, а атомные веса соответственно 232 и 184. Таким образом, имеем

$$\frac{W_{Th}}{W_W} = \frac{2000}{3000} \left(\frac{11,9}{19,4} \frac{184}{232} \right)^{1/3} = 0,666 (0,615 \cdot 0,793)^{1/3} = 0,41,$$

где W_{Th} и W_W — поверхностные энергии тория и вольфрама. Следовательно, поверхностная энергия тория составляет 41% от поверхностной энергии вольфрама. Поэтому торий, растворенный в вольфраме, стремится понизить поверхностную энергию вольфрама и адсорбируется на поверхности. Адсорбированная пленка имеет толщину не более одного атома или молекулы.

То обстоятельство, что во всех случаях активирования пленка однородна, следует из одного и того же закона хода кривых дезактивирования и не зависит от промежутка времени, в течение которого нить была активирована. Так, кривые AC и BD на рис. 3.3 тождественны, хотя пленка тория в случае кривой BD образовывалась дольше, чем в случае кривой AC .

Если бы во втором случае пленка стала толще, чем в первом, то мы имели бы замедление в падении активирования на кривой BD . То обстоятельство, что эта однородная во всех случаях пленка имеет толщину в один атом, следует из того, что сила тока излучения электронов не увеличивалась бы по простому закону. В противном случае мы наблюдали бы изменения в законе возрастания тока излучения электронов, как только пленка становилась бы толще одного атома.

3.3. Кривые активирования

Когда торированная нить нагрета до температуры, при которой происходит дезактивирование, весь торий испаряется с ее поверхности. В нити градиент концентрации, надо полагать, должен быть одинаков, тогда как концентрация на поверхности равна нулю. В этом случае торий будет диффундировать к поверхности практически постоянно в продолжение активирования нити, до тех пор, пока весь торий не испарится.

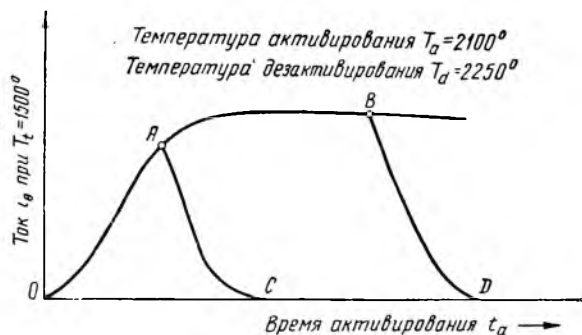


Рис. 3.3

Так как количество тория, необходимое для активирования, содержится в пленке толщиной в один атом, то кажется вероятным, что количество тория, имеющегося в нити, достаточно для многократных активирований. Опыт, действительно, показывает, что в серии активирования попеременно с дезактивированием степень активирования при последовательных операциях убывает очень медленно.

В продолжение начальной стадии описанной выше операции мы должны ожидать появления тория на поверхности нити, а θ — поверхность покрытия — должна возрастать равномерно с течением времени. Так как логарифм тока излучения электронов $\ln i_0$ меняется линейно с изменением θ^* , то, естественно, надо строить кривую активирования, пользуясь $\ln i_0$ как ординатой.

Кривые A и B на рис. 3.4 построены на основании одних и тех же данных, но с разным масштабом по оси ординат. Ток в 0,01 а соответствует неактивированной поверхности; пунктирная линия MN соответствует $\theta = 0$. Ток, соответствующий 1000 мка, получается со вполне активированной поверхности, и пунктирная линия S'R' соответствует $\theta = 1$.

В продолжение начальной стадии активирования, до тех пор пока ток возрастает до значения, которое показано на кривых A и B точкой P, значение θ возрастает от 0 до 0,6 и ток увеличивается почти в 10000 раз. Тот факт, что ход кривой B мало меняется в этом интервале, является хорошим подтверждением линейной зависимости между $\lg i_0$ и θ . Если бы торий диффундировал на поверхность, как мы допустили ранее, в постоянном отношении и оставался на поверхности, то поверхность θ возрастала бы и далее, и $\lg i_0$, отложенный в функции от t_a , дал бы кривую, подобную MQR', вместо наблюдаемой кривой B. Таким образом, практически торий оседает все меньше, тогда как θ возрастает.

* Из уравнения (3.3) следует;

$$\theta (\ln i_{Th} - \ln i_w) = \ln i_0 - \ln i_w,$$

$$\ln i_0 = \ln i_w + \theta (\ln i_{Th} - \ln i_w),$$

или

$$\ln i_0 = F_1 + \theta F_2.$$

На первый взгляд такое явление может быть отнесено за счет того, что диффузия может идти от большой концентрации на поверхности в толщу нити. Отсюда следует, что доступ тория на поверхность, когда пленка насыщена, равен нулю. Градиент концентрации вблизи поверхности почти приближается к нулю, тогда как концентрация под пленкой должна возрастать. Торий, который перестал накапливаться на поверхности, будет накапливаться под поверхностью.

Очень легко проверить на опыте, так ли это, потому что при возрастающей концентрации под поверхностью нити будет возрастать начальная скорость активирования при последовательных операциях.

В одном из опытов такого рода нить была нагрета до 2800°K в течение 23 сек, что привело к высокому содержанию тория, и затем, охлажденная до 2500° , сохранялась при этой температуре 100 сек, чтобы уничтожить неравномерности в концентрации тория. Затем нить была охлаждена до температуры 2055° . Эта температура сохранялась 187 сек. Начальная скорость активирования (соответствует прямой MQ) $\frac{d\theta}{dt} = 0,0006 \text{ сек}^{-1}$, тогда как окончательная скорость активирования в конце процесса составляет 0,000003 в 1 сек. Нить на короткое время была снова нагрета до 2800° (менее чем в 1 сек), чтобы очистить торий с поверхности без заметного нового подвода тория. Нагреванием нити опять до 2055° начальное отношение скорости активирования было получено 0,00034 в 1 сек. Оно показывает, что скорость активирования не возросла и что очень долгое предшествующее активирование не вызвало оседания тория под поверхностью, но имело в результате убывание концентрации тория.

После этого нить выдерживалась при 2055° в течение 277 мин и активирование за этот промежуток времени пришло в устойчивое состояние ($\frac{d\theta}{dt} < 10^{-6}$).

Чтобы быть уверенным в том, что нагрев нити в течение 1 сек в последнем опыте (который совершенно дезактивировал катод $\theta = 0$) не исказил результатов, вызвав потерю тория под поверхностью, нить была только частью дезактивирована нагреванием в течение 3 сек при 2500° .

Этот нагрев понизил θ до 0,78. Нагрев нити был опять доведен до 2055° . Скорость активирования получилась $\frac{d\theta}{dt} = 27 \cdot 10^{-6} \text{ сек}^{-1}$, тогда как в предыдущем опыте при подобном значении θ скорость активирования была равна $61 \cdot 10^{-6} \text{ сек}^{-1}$. Ни в одном опыте не было обнаружено такого накопления тория под пленкой, какое получилось бы от обратной диффузии пленки. Таким образом, при обычных условиях опыта образование пленки есть необратимый процесс в том смысле, что торий не идет от поверхности обратно в толщу нити.

Из этих опытов следует, что торий постепенно диффундирует к поверхности даже после того, как пленка становится насыщенной. Если же он не накапливается в пленке, то исчезает с нее в виде пара. Однако это не есть обычное испарение адсорбированной пленки, так как оно происходит при гораздо более низкой температуре.

Явление, которое мы только что рассмотрели (уменьшение $\frac{d\theta}{dt}$ со временем), так же хорошо наблюдается при температуре в 1900° , как и при 2055° , но испарение совершенно сформированной пленки очень мало, пока температура не достигнет величины порядка 2150° .

Исследование большого числа логарифмических кривых показывает, что изменение площади покрытия со временем может быть достаточно точно представлено формулой следующего типа:

$$\frac{d\theta}{dt} = k(1 - \theta), \quad (3.9)$$

что будет иметь место, если

$$\ln(1 - \theta) = -kt, \quad (3.10)$$

или

$$\theta \leq 1 - e^{-kt}. \quad (3.10a)$$

Пусть при полном покрытии одноатомная пленка содержит N_{Th} атомов тория на 1 см^2 и пусть g — градиент концентрации непосредственно под пленкой, выраженный $\frac{\text{числом атомов } (n)}{\text{см}^3 \cdot \text{см}} = n \text{ см}^{-4}$. Если коэффициент диффузии мы обозначим через $D \text{ см}^2/\text{сек}$, то Dg будет равно числу атомов, которые проходят поверхность в 1 см^2 за 1 сек .

Если площадь покрытия очень мала, то, обозначив

$$\left| \frac{d\theta}{dt} \right|_{\theta \rightarrow 0} = k,$$

можно написать

$$N_{\text{Th}} \left| \frac{d\theta}{dt} \right|_{\theta \rightarrow 0} = kN_{\text{Th}}. \quad (3.11)$$

Последнее выражение определяет число атомов тория, которые будут путем диффузии достигать поверхности изнутри и оседать на ней. Согласно выражениям (3.9) и (3.11), получим

$$kN_{\text{Th}} = Dg,$$

$$k = \frac{Dg}{N_{\text{Th}}}; \quad (3.12)$$

$$N_{\text{Th}} \frac{d\theta}{dt} = Dg(1 - \theta). \quad (3.13)$$

Торий покидает поверхность вольфрама в виде пара в отношении $Dg\theta$. Оно зависит не только от тех условий на поверхности, которые определяют θ , но и от отношения, в котором торий диффундирует к поверхности. Мы обозначим этот тип испарения как *индуктированное испарение*, чтобы отличить его от *нормального испарения*, которое зависит только от тория, присутствующего на поверхности. Индуктированное испарение происходит благодаря разнице в нормальном отношении испарения атомов с вольфрама и тория. Поэтому предполагается, что *нормальная* скорость испарения отдельных атомов тория в контакте только с атомами вольфрама незаметна при рассматриваемых температурах активирования, но скорость испарения атомов тория, которые удерживаются одним или несколькими нижележащими атомами тория, очень велика по сравнению с диффузией к поверхности. Если атом тория движется к точке поверхности, покрытой только торием, то испаряется один атом с поверхности, как только приходящий атом достигает положения точно под атомом тория на поверхности вольфрама. Новый атом занимает место испарившегося, но ничего не добавляет к содержанию тория на поверхности. Содержание тория на поверхности увеличивается только в том случае, если его атомы диффундируют к точке поверхности, которая не вся покрыта торием.

Если вероятность того, что данная часть поверхности не занята торием, есть $1 - \theta$, то мы приходим к заключению, что скорость образования пленки пропорциональна $1 - \theta$ согласно основному уравнению (3.13). Так как скорость образования пленки пропорциональна $1 - \theta$, а $\ln i_0$ в свою очередь пропорционален θ , то по рис. 3.4 скорость образования пленки будет пропорциональна отрезку qr . Логарифм этого отрезка, отложенный в произвольных единицах, будет, согласно (3.10), пропорционален $-kt$, так

что наклон к оси абсцисс полученной прямой будет равен $-2,303 k$, если основание логарифмов равно 10.

На рис. 3.5 показано определение k по этому способу и в свою очередь по k построены кривые активирования (см. ниже). В частности, кривая A снята при активизирующей температуре 2000° . Опытные значения для всех кривых показаны точками пересечения, тогда как сами кривые построены

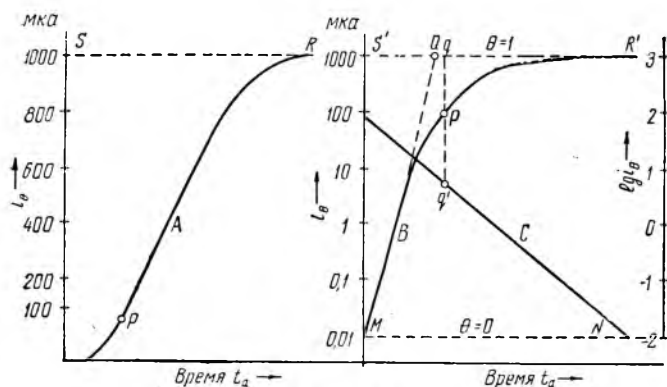


Рис. 3.4

указанным выше способом по соответствующей прямой. Например, кривая A' имеет $k = 0,000259 \text{ сек}^{-1}$.

Хотя скорость активирования может широко меняться даже при данной активизирующей температуре благодаря изменению градиента концен-

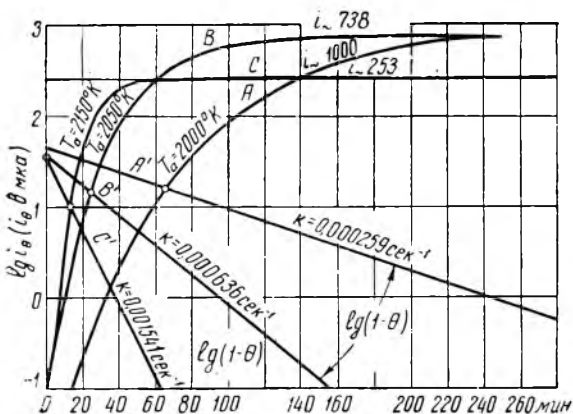


Рис. 3.5

трации g , однако при испытательной температуре $T_t = 1445^\circ$ была найдена практически одна и та же предельная сила тока $i = 1000 \text{ мка}$ во всем диапазоне активизирующих температур от 1900 до 2100° . Но если g принимает необычайно низкие значения, как, например, после длительного нагрева нити при 2300° , то предельный ток становится при активизирующей температуре 2150° заметно ниже.

Это явление обуславливается испарением тория с поверхности со скоростью, сравнимой с той, с которой подводится торий благодаря диффузии изнутри. Кривая C (см. рис. 3.5) при активизирующей температуре $T = 2150^\circ$ иллюстрирует результат этого испарения. Скорость активирования намного больше, чем в случае кривой A , так как диффузия возросла при более высокой температуре, но предельный ток упал до 253 мка , что

соответствует $\theta_{\sim} = 0,88$, где $\theta_{\sim}$ характеризует предельное покрытие ($\frac{d\theta}{dt} = 0$).

Для того чтобы учесть это обстоятельство, примем, что вследствие нормального испарения с 1 см^2 уходит N_1 атом/см²·сек.

Тогда основное уравнение скорости образования пленки тория мы должны написать в следующем виде:

$$N_{\text{Th}} \frac{d\theta}{dt} = Dg (1 - \theta) - N_1. \quad (3.13a)$$

Так как при $\theta = \theta_{\sim}$, т. е. при полном (предельном) покрытии, $d\theta/dt = 0$ (см. рис. 3.5), то

$$Dg (1 - \theta_{\sim}) = N_1, \quad (3.136)$$

откуда можно определить

$$\theta_{\sim} = 1 - \frac{N_1}{Dg} = \frac{Dg - N_1}{Dg}.$$

Из уравнений (3.13a и 3.136) можно получить

$$N_{\text{Th}} \frac{d\theta}{dt} = Dg (1 - \theta) - Dg (1 - \theta_{\sim}) = Dg (\theta_{\sim} - \theta) \quad (3.13в)$$

и, используя выражение (3.12), будем иметь

$$\frac{d\theta}{k(\theta_{\sim} - \theta)} = dt$$

или

$$-kt = \ln \frac{\theta_{\sim} - \theta}{\theta_{\sim} - \theta_0} \quad (3.13г)$$

(θ_0 — покрытие, которое получается при $t = 0$).

Так как N_1 есть функция поверхности покрытия и температуры, то можно принять для $t = 0$, $N_1 = N_0$.

Ленгмюр берет для N_1 зависимость $N_1 = V_0 + V\theta$, на основании которой

$$N_{\text{Th}} \frac{d\theta}{dt} = Dg (1 - \theta) - (V_0 + V\theta) = Dg - V_0 - (Dg + V)\theta. \quad (3.13д)$$

Последнее выражение для условия, когда $\theta \rightarrow 0$, определяет

$$k = \frac{Dg - V_0}{N_{\text{Th}}}. \quad (3.14)$$

Кроме того, при $\theta = \theta_{\sim}$, $N_1 = V_0 + V\theta_{\sim}$, а $\frac{d\theta}{dt} = 0$, из (3.13д) получим

$$\theta = \theta_{\sim} = \frac{Dg - V_0}{Dg + V}. \quad (3.15)$$

Так как значения величин k и $\theta_{\sim}$ мы находим из опыта, то по последним формулам можно определить Dg , V и V_0 . На самом деле, из (3.14) и (3.15) получаем

$$\theta_{\sim} = \frac{k N_{\text{Th}}}{Dg + V}. \quad (3.15a)$$

Основное уравнение может быть написано в виде (3.13в), а именно:

$$N_{\text{Th}} \frac{d\theta}{dt} = (Dg + V) (\theta_{\sim} - \theta) \quad (3.15б)$$

или на основе (3.15)

$$N_{\text{Th}} \frac{d\theta}{dt} = (Dg - V_0) \left(1 - \frac{\theta}{\theta_{\sim}}\right).$$

Если скоростью испарения нельзя пренебречь по сравнению со скоростью диффузии Dg , то $\theta_{\sim}$ получается меньше единицы и катод в этом случае не может быть полностью активированным. Линейное соотношение $\ln(1 - \theta) = kt$, которое согласуется с опытом когда нет испарения, должно быть при испарении заменено на основе (3.156) другим соотношением

$$\ln(\theta_{\sim} - \theta) = - \left(\frac{Dg + V}{N_{\text{Th}}} \right) t. \quad (3.16)$$

Прямые A' , B' и C' (рис. 3.5) построены указанным образом. Кривые A , B и C были рассчитаны при помощи соотношения $\ln \left(\frac{\theta_{\sim} - \theta}{\theta_{\sim} - \theta_0} \right) = -kt$ (3.13 г) при значениях $\theta_{\sim}$ (или $i_{\sim}$) и k , которые дают лучшее согласие с опытом.

Результаты активирования (см. кривые A , B , C), полученные при различных условиях (даже при высоких температурах активирования, указанных на рисунке, что $\theta_{\sim}$ не превосходит 0,1), всегда имеют хорошее согласие с результатами, представленными прямыми, подобными A' , B' и C' .

За N_{Th} Ленгмюр принимает величину, равную $0,756 \cdot 10^{15}$ атом/см².

3.4. Скорость активирования как функция температуры

При низких температурах, когда испарение тория пренебрежимо мало, скорость активирования, измеренная через k , пропорциональна произведению Dg , так как предварительной тепловой обработкой g в каждой серии опытов при разных температурах может быть приведено к тому же самому значению. Скорость активирования k , таким образом, есть относительное изменение коэффициента диффузии D . Результаты такой серии опытов приводим в табл. 3.2.

Таблица 3.2

Скорость активирования при разных температурах
(поверхность нити 0,217 см²)

T_a	$i_{\sim}$ при $T_t = 1445^\circ \text{K}$, $\mu\text{ка}$	$k \cdot 10^{-4}$, сек^{-1}	$\theta_{\sim}$ опытная	$\theta_{\sim}$ расчетная
2050	790	5,31	0,957	0,958
2050	738	6,36	0,951	0,964
2150	253	15,41	0,856	0,856
2105	477	9,29	0,913	0,913
2050	707	5,11	0,948	0,957
2050	805	5,15	0,958	0,957
1950	1300	1,7	1,000	0,990
2000	1000	2,59	0,977	0,970

Перед каждым опытом катод нагревался до 2800° в течение 5 сек, чтобы привести g к определенному постоянному значению. Устанавливалась температура T_a и активирование периодически прерывалось на 5—20 мин, чтобы при температуре $T_t = 1445^\circ \text{K}$ измерить силу тока. В таблице приведен предельный ток $i_{\sim}$ при $t = \infty$. Токи, измеренные в каждом опыте, наносились на полулогарифмическую бумагу (см. рис. 3.5). Построение $\lg i_{\sim} - \lg i$ как ординаты в функции времени дало прямые, подобные A' , B' и C' . Постоянная наклона этих прямых, умноженная на 2,303, чтобы

привести к натуральным логарифмам, и деленная на 60, чтобы перейти к секундам, дает, согласно уравнению (3.13г), значение k (см. табл. 3.2). Столбец 4 рассматриваемой таблицы дает значение $\theta_{\sim}$, рассчитанное по уравнению (3.3) на основании значений $i_{Th} = 1360$ мка и $i_w = 0,013$ мка (значения для $T_i = 1445^\circ$).

Столбец 5 дает значение $\theta_{\sim}$, рассчитанное при помощи уравнения $V_0 + V\theta = N_{Th} k (1 - \theta_{\sim})$, что будет разобрано позже. Проникновение одного металла в другой заключается в изменении места между одними и другими атомами в пространственной решетке. Такое изменение положения могут совершать атомы, обладающие некоторым критическим количеством кинетической энергии. Частота перемен положения пропорциональна $e^{-\frac{Q_D}{RT}}$, причем Q_D можно определить как критическую энергию (на грамм-атом), заключающуюся в атомных перемещениях.

Отсюда следует, что коэффициент диффузии изобразится функцией следующего вида:

$$\lg D = a - \frac{b}{T}, \quad (3.17)$$

т. е. если мы $\lg D$ будем откладывать в функции от $1/T$, то получим прямую линию. Такое построение выполнено на рис. 3,6, причем для четырех серий

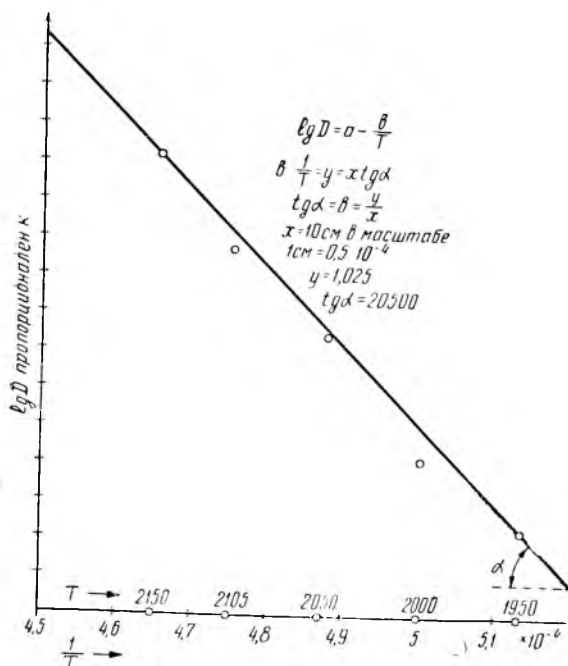


Рис. 3.6

опытов, произведенных при $T_a = 2050^\circ$ (см. табл. 3.2), для k взято среднее значение:

$$k = 0,000548 \text{ сек}^{-1}.$$

Из наклона кривой мы определяем $b = 20\,500$, откуда следует, если принять $R = 1,986 \text{ кал/град} \cdot \text{моль}$, что $Q_D = 94\,000 \text{ кал/г} \cdot \text{атом}$ (по данным Ленгмюра в этом случае $b = 20540$).

3.5. Абсолютное значение коэффициента диффузии

Для определения действительного значения коэффициента диффузии необходимо произвести некоторые измерения, определяющие содержание тория в вольфраме. Мгновенный нагрев катода при очень высокой температуре повышает концентрацию тория на его поверхности. При нагреве нити в течение долгого времени при более низкой температуре этот запас тория постепенно испаряется, так что градиент концентрации на поверхности пропорционально убывает. Измеряя произведение Dg во время расходования этого запаса тория, можно определить абсолютное значение g .

Задача диффузии подобна тепловой задаче охлаждения длинного цилиндра, внезапно погруженного в идеально теплопроводящую жидкость при заданной температуре. Если концентрация на всей поверхности цилиндра равна нулю и при $t = 0$ температура внезапно повышается настолько, что все вещество, диффундирующее к поверхности, с нее испаряется, то через время t градиент концентрации на внешней поверхности цилиндра выражается рядом

$$g = \sum B_n e^{-p_n^2 t}. \quad (3.18)$$

Здесь

$$p_n = \frac{\mu_n^2 D t}{R^2} \quad (3.19)$$

(R — радиус цилиндра, D — коэффициент диффузии, μ_n — корни уравнения $J_0(x) = 0$; $J_0(x)$ — бесселева функция нулевого порядка, $\mu_1^2 = 5,783$, $\mu_2^2 = 30,47$, $\mu_3^2 = 74,89$, $\mu_4^2 = 139,04$).

Величина B_n зависит от распределения начальной концентрации. Если концентрация равномерна по всему катоду и равна C_u , то

$$B_1 = B_2 = \dots = \frac{2C_u}{R}. \quad (3.20)$$

Если концентрация равномерно распределена по толще всего цилиндра, тогда как концентрация на поверхности поддерживается равной нулю, то окончательно получается параболическое распределение концентрации:

$$C = C_0 \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right], \quad (3.21)$$

где C_0 — концентрация на оси цилиндра при $r = 0$; тогда

$$g = -\frac{\partial C}{\partial r} = + \frac{2r}{R^2} C_0 \quad (3.22)$$

и на поверхности цилиндра

$$g = \frac{2C_0}{R}. \quad (3.22a)$$

Если внезапно приостановить образование диффундирующего вещества, после того как подобное параболическое распределение достигнуто, то изменение градиента концентрации со временем определяется выражением (3.18), но B_n принимают значения

$$B_n = \frac{8C_0}{\mu_n^2 R}; \quad (3.22б)$$

в случае начальной равномерной концентрации начальное значение g бесконечно велико, согласно (3.18) и (3.20),

$$g_{t=0} = \sum B_n = \frac{2nC_u}{R}. \quad (3.22в)$$

При параболическом распределении, согласно (3.22в) и (3.22б),

$$g_{t=0} = \frac{8C_0}{R} \sum \frac{1}{\mu_n^2}.$$

Как будет показано ниже [см. выражение (3.27)],

$$B_1 = \frac{1,383C_0}{R}.$$

Ввиду быстрого уменьшения всех членов ряда, кроме первого, начальное распределение не играет роли.

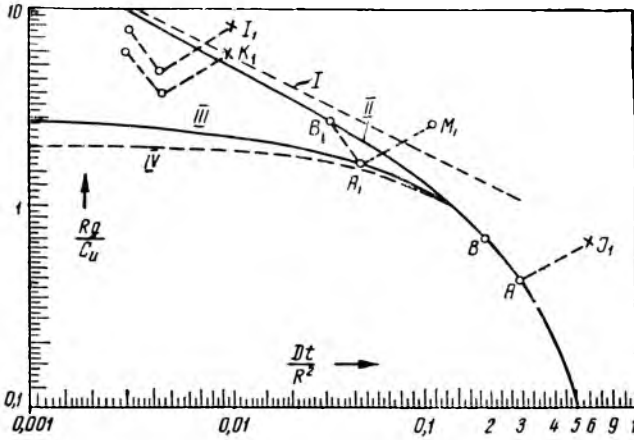


Рис. 3.7

В целях удобства рассмотрения искомой зависимости концентрации от времени используем график (рис. 3.7). Кривая *III* на этом рисунке построена в логарифмическом масштабе, причем за ординату принято $\frac{Rg}{C_u}$, а за абсциссу $\frac{Dt}{R^2}$.

Кривая *II* изображает изменение концентрации в случае наличия начальной равномерной концентрации. Кривая *IV* определяет лишь первый член ряда, изображающего случай:

$$g = \frac{2C_u}{R} e^{-\alpha t}, \quad (3.23)$$

$$\alpha = \frac{\mu_n^2 D}{R^2} = \frac{5,783}{R^2} D. \quad (3.24)$$

Из рис. 3.7 следует, что даже если начальная концентрация равномерна, g весьма точно определяется уравнением (3.23) для всех значений $\frac{Dt}{R^2}$, больших 0,16.

Рассмотрим теперь случай, когда диффузия происходит кратковременно, так что концентрация отличается заметным образом от равномерной лишь в слоях, глубина которых от поверхности мала по сравнению с радиусом. Условия, получающиеся при этом, подобны условиям в случае плоской поверхности тела большей толщины, внезапно изменившей температуру.

Таким образом, для соответствующей задачи, когда начальная концентрация равномерна, а концентрация на поверхности сведена к нулю, имеем

$$g = C_u \sqrt{\frac{1}{\pi Dt}} \quad (3.25)$$

или

$$\frac{Rg}{C_u} = 0,564 \sqrt{\frac{R^2}{Dt}}, \quad (3.26)$$

что соответствует линии I (рис. 3.7). Для небольших значений $\frac{Dt}{R^2}$ кривая II приближается к кривой I, но очень медленно.

Если начальная концентрация имеет параболическое распределение (3.21)

$$C = C_0 \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right],$$

то градиент концентрации для достаточно больших значений $\frac{Dt}{R^2}$ также может быть выражен лишь первым членом уравнения (3.18)

$$g = B_1 e^{-\mu_1^2} = \frac{8C_0}{5,783R} e^{-\frac{5,783Dt}{R^2}} = 1,383 \frac{C_0}{R} e^{-\alpha t}. \quad (3.27)$$

Сравнивая последнее выражение с выражением (3.23) для случая равномерной концентрации, находим, что в обоих случаях градиент концентрации изменяется со временем одинаково, если принять

$$1,383C_0 = 2C_u; \quad C_0 = 1,446C_u.$$

Другими словами, если мы возьмем первоначально равномерное распределение концентрации, или параболическое, с концентрацией на оси в 1,446 раз большей, то окончательное распределение будет одно и то же.

Кривая III (рис. 3.7) дает значения $\frac{Rg}{C_u}$ для этого случая, рассчитанные при помощи всего ряда с коэффициентами $B_n = \frac{8C_0}{\mu_n^2 R}$. Таким образом, уравнение (3.27) дает хорошее приближение, когда $\frac{Dt}{R^2} > 0,1$.

Общее количество диффундирующего вещества q на единицу длины цилиндра равно $\pi R^2 C_u$, если концентрация равномерна. В случае параболического распределения мы находим интегрированием

$$q = \frac{\pi}{2} R^2 C_0. \quad (3.28)$$

Если распределение таково, что g изменяется во времени согласно (3.23) или кривой IV рис. 3.7, то можно найти q для момента времени t_∞ , рассчитывая количество вещества, диффундированного от $t = t_0$ до $t = \infty$:

$$q = \frac{4\pi R^2 C_u}{\mu_1^2} e^{-\alpha t} = 2,1729 R^2 C_u e^{-\alpha t}. \quad (3.28a)$$

Распределение концентрации внутри цилиндра при этих условиях, т. е. если g выражается первым членом ряда, определяется выражением

$$C = 0,8018 Rg J_0 \left(\mu_1 \frac{r}{R} \right). \quad (3.29)$$

Концентрация на оси равна

$$C_0 = 0,8018 Rg. \quad (3.29a)$$

Абсолютное значение коэффициента диффузии наиболее удобно найти из опыта, при котором g изменяется во времени согласно (3.23) или (3.27):

$$g = \frac{2C_u}{R} e^{-\alpha t} \quad \text{или} \quad g = 1,383 \frac{C_0}{R} e^{-\alpha t}.$$

Опыт определения скорости активирования катода последовательными активированиями дает возможность определения α и путем вычисления D по формуле (3.24)

$$D = \frac{\alpha R^2}{5,783}.$$

Т а б л и ц а 3.3

Скорость активирования при 2055° К, следующая за дезактивированием при 2500° К для различного времени дезактивирования t_d (поверхность нити 0,217 см²)

№ опыта	Время при 2500° К, сек (t_d)	$i_{\sim}$ при 1450° К, мка	k при 2055° К, 10 ⁻⁴ .сек ⁻¹	$\theta_{\sim}$ из наблюдений $i_{\sim}$	$\theta_{\sim}$ расчетная *	$(k - k_r) \cdot 10^{-4}$
1	10	760	11,49	0,976	0,981	7,85
2	600	548	4,31	0,947	0,949	0,67
3	10	780	9,58	0,978	0,978	5,94
4	3600	505	3,64**	0,941	0,941	0,00
5	10	720	6,22	0,972	0,970	2,58

* $1 - \theta_{\sim} = \frac{N_1}{N_{Th} \cdot k}$. см. (3.12 и 3.136). См. также (3.38).

** Дано значение $k = k_r$.

Данные для вычисления коэффициента диффузии при 2500° К, полученные из опыта, приводятся в табл. 3.3. Перед каждым опытом нить была нагрета до 2800° К в течение 23 сек, чтобы привести содержание тория к определенному значению. Катод нагревался при 2500° К в течение времени, указанного во втором столбце, для того чтобы градиент концентрации убывал, согласно уравнению (3.18), после нагревания до 2500° К. Скорость активирования k (столбец 4) измерялась при $T_a = 2055^\circ \text{ К}$ с прерыванием этого подогрева для измерения активности при $T_i = 1450^\circ \text{ К}$.

Значения $\theta_{\sim}$ в столбце 5 рассчитывались по уравнению (3.3) при $i_w = 0,01$ и $i_{th} = 1000 \text{ мка}$. Расчет в столбце 6 будет рассмотрен позже.

Исследование данных столбца 4 показывает, что k сперва быстро убывает, а затем приближается к предельному значению $k_r = 3,64 \cdot 10^{-4}$. В этом стационарном состоянии торий восстанавливается из окиси в таком же количестве, как он теряется благодаря диффузии и испарению. Значения k пропорциональны g , так что уравнения, выведенные для g , приложимы к нашим опытным данным. Вследствие постоянства генерирования тория мы пользуемся для этой цели не величиной k , но разностью $k - k_r$, данной в столбце 7. После того, как прошло достаточно времени, чтобы все члены ряда, кроме первого, сделались малы, величина $k - k_r$ должна следовать показательному закону (3.23)

$$g = \frac{2C_u}{R} e^{-at}.$$

Для сравнения опытных данных непосредственно с полным уравнением (3.18) $g = \Sigma B_n e^{-p_n t}$ применен следующий метод. Совершенно очевидно, что построение $\lg(k - k_r)$ в функции от $\lg t$ должно иметь тот же вид и тот же масштаб, что и соответствующая кривая рис. 3.7, но должно отличаться лишь параллельным смещением. Точки, обозначенные I_1, K_1, M_1 и J_1 , помещены на рис. 3.7 построением $(k - k_r) \cdot 10^{-4}$ из столбца 7 табл. 3.3 в зависимости от $10^{-4} t$, где t — время (в сек) из столбца 2 той же таблицы.

Помещая эти точки на прозрачной бумаге и передвигая ее так, чтобы ось абсцисс была горизонтальна, возможно привести любые из двух точек, например J_1 и M_1 , к совпадению с исследуемой кривой. Например, смещая

кривую так, что J_1 двигается по J_1A , мы совмещаем обе точки с кривой III , соответствующей параболическому распределению. Точки I_1 и K_1 не попадут на эту кривую, но лягут между кривыми II и III . При смещении бумаги по $A - B$ обе точки попадут на кривую II , соответствующую первоначальному равномерному распределению. Точки I_1 и K_1 лягут ниже кривой II .

Отсюда следует, что распределение тория есть промежуточное между этими двумя случаями. Тем не менее более вероятно, что истинное распределение, являющееся результатом восстановления тория нагревом нити до высокой температуры, более приближается к параболическому, если прошло достаточно времени, чтобы достигнуть стационарного состояния. Сомнительно, чтобы 23 сек было для этого достаточно. Отступления от стационарного состояния достаточны, чтобы вызвать отклонения наблюдаемого типа.

Помещая найденные точки на теоретическую кривую, мы определяем абсолютное значение Dt/R^2 и находим D . Предполагая параболическое распределение для точки A , находим

$$\frac{Dt}{R^2} = 0,27.$$

Так как $t = 600$ сек и $R = 0,00389$, то $D = 6,8 \cdot 10^{-9}$ см²/сек для $t_d = 2500^\circ$ К. Для равномерного распределения в случае точки B находим $Dt/R^2 = 0,18$, что дает $D = 4,3 \cdot 10^{-9}$ см²/сек. Те же самые значения D были найдены из других двух точек. При $T = 2055^\circ$ К коэффициент диффузии был найден из продолженных опытов активирования 1, 2, 3 (табл. 3.4). Перед опытом 1 нить была нагрета в течение 2 сек до 2800° К. В одном из опытов катод прогревался при 2055° в течение 277 мин, активность же снижалась обычным образом.

Затем нить была нагрета до 2500° и выдержана 3 сек, время столь короткое, что нить лишь частью дезактивировалась и g не уменьшилось. В опыте 2 нить находилась 110 мин при температуре 2055° К. После нагрева в течение 4 сек при 2500° К кривая активирования была снята (опыт 3) при 2055° К.

Фиксация в этих опытах точек, соответствующих определенному значению t , дает следующие данные, причем k_r принято равным $0,53 \cdot 10^{-4}$ (табл. 3.4).

Таблица 3.4
Значение коэффициентов k и $k - k_r$

№ опыта	t , мин	k	$k - k_r$
1	30	$3,59 \cdot 10^{-4}$	$3,06 \cdot 10^{-4}$
2	305	$1,62 \cdot 10^{-4}$	$1,09 \cdot 10^{-4}$
3	475	$1,25 \cdot 10^{-4}$	$0,72 \cdot 10^{-4}$

Помещая эти данные на прозрачную бумагу и сравнивая с кривой III (рис. 3.7), находим наиболее вероятное значение коэффициента диффузии при 2055° К, равное $1,1 \cdot 10^{-10}$ см²/сек.

Кривая дезактивирования одного опыта 2 (табл. 3.6, рис. 3.8) использована для расчета D при $T_d = 2300^\circ$ К.

Часть EG кривой CEG получается вследствие постепенного уменьшения градиента g по мере того, как запас тория исчерпывается. В области, представленной кривой CE , скорость изменения активности столь велика, что величина $N_{Th} \frac{d\theta}{dt}$ в уравнении (3.13д) сравнима по величине с членами

второй] части, но в области $EG \frac{d\theta}{dt}$ настолько мала, что можно написать [см. (3.13д)]

$$Dg = \frac{V_0 + V\theta}{1 - \theta}. \quad (3.30)$$

Величина g из этого уравнения не может быть непосредственно использована для расчета в случае постоянного поступления тория при 2300°K . Пусть g_r будет предельное значение, к которому стремится g , когда запас тория будет израсходован и скорость потери тория через диффузию бу-

дет равна скорости восстановления. Значение g_r может быть выражено через θ_r . Соответствующее значение θ может быть найдено из уравнения (3.30) и подобного ему

$$Dg_r = \frac{V_0 + V\theta_r}{1 - \theta_r},$$

откуда

$$\frac{D(g - g_r)}{V + V_0} = \frac{1}{1 - \theta} - \frac{1}{1 - \theta_r}. \quad (3.30a)$$

Величины второй части уравнения можно легко найти из опыта. Находя логарифм второго члена и откладывая в зависимости от $t \lg i$, как на рис. 3.7, найдем значение D .

Данные опыта 2 (рис. 3.8) находятся в полном согласии с рис. 3.7 в области $t = 40$ мин, соответствующей области, где кривые II, III и IV совпадают. Для меньших значений t опытная кривая ложится

около кривой *II*. Однако это не означает, что распределение концентрации равномерное, а не параболическое. Более вероятно, что отклонения от кривой *III* получаются за счет изменения скорости испарения как функции θ от линейного закона $N_1 = V_0 + V\theta$, на котором основано последнее уравнение (3.30а).

Предположения линейного закона всегда справедливы для узкого диапазона θ , но вопрос становится открытым, если его прилагать ко всему широкому диапазону последнего опыта 2 (2300° K). Если сосредоточить внимание на диапазоне выше 40 мин, то из сравнения с рис. 3.7 находим $D = 1.12 \cdot 10^{-9} \text{ см}^2/\text{сек.}$

Так как в этой области невыявленный вопрос о начальном распределении тория может быть исключен, ибо приходится рассматривать лишь первый член упомянутого ряда, то можно применить более простой метод. Откладывая [согласно (3.30a)]

$$\lg \left(\frac{1}{1-\theta} - \frac{1}{1-\theta_r} \right)$$

на полулогарифмической бумаге в зависимости от θ , получаем прямую линию. По тангенсу угла наклона этой прямой, умноженному на 2,303, можно определить значение α (угол наклона), откуда, согласно предыдущему, находим значение D .

Опыт 3 дает возможность определить D при 2400° К (см. табл. 3.6). В данном случае катод был нагрет за 30 сек до 2800° К и затем находился при 2400° для дезактивирования. Активность катода измерялась при 1800° К .

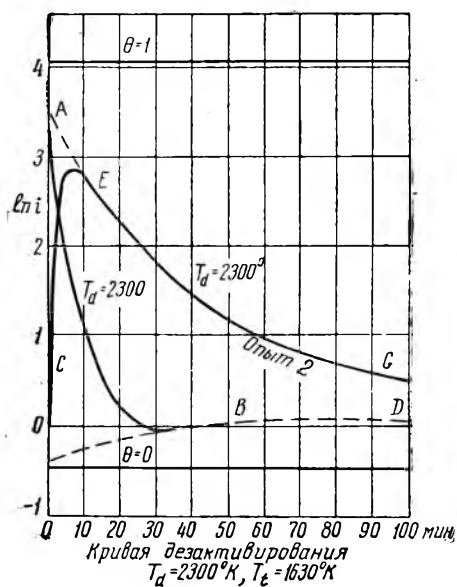


Рис. 3.8

Для определения $\frac{Dg}{N_{Th}}$ в течение опыта было сделано три коротких пере-
рыва, во время которых определялась активность при 2100°. Из этих опытов
было определено θ и $\frac{d\theta}{dt}$, откуда можно рассчитать $\frac{Dg}{N_{Th}}$ по формуле (3.13д)

$$N_{Th} \frac{d\theta}{dt} = Dg(1 - \theta) - (V_0 + V\theta).$$

Член $V_0 + V\theta$ принимался как небольшая поправка к данным, которые
будут определены позднее. Результаты, полученные из опыта 3, приведены
в табл. 3.5.

Т а б л и ц а 3.5

Результаты расчета

$t_{мин}$ при 2400° К	$\frac{Dg}{N_{Th}}$ сек ⁻¹ при 2100° К	$D(g - g_r)/N$ сек ⁻¹ при 2100° К
4,7	$7,67 \cdot 10^{-4}$	$3,86 \cdot 10^{-4}$
23,1	$4,65 \cdot 10^{-4}$	$0,84 \cdot 10^{-4}$
45,6	$3,95 \cdot 10^{-4}$	$0,13 \cdot 10^{-4}$

Три наблюдения, собранные в этой таблице, сравнивались с кривыми
рис. 3.7 и было найдено, что они лежат в области совпадения кривых II,
III и IV.

Предполагалось, что применим тип уравнения (3.23)

$$g = \frac{2C_u}{R} e^{-\alpha t}.$$

Значение g_r было найдено основываясь на том, что три точки, соответствую-
щие данным столбца 3, лежат на прямой, если откладывать их в полулога-
рифмическом масштабе в зависимости от времени t .

Наклон прямой дает угол $\alpha = 0,00140$ и, согласно (3.24), из $\alpha = 5,723 \frac{D}{R^2}$
находим

$$D = 3,70 \cdot 10^{-9} \text{ см}^2/\text{сек при } 2400^\circ \text{ К (табл. 3.6).}$$

Т а б л и ц а 3.6

Результаты расчета

№ опыта	$T, ^\circ\text{К}$	$D, \text{см}^2/\text{сек}$
1	2055	$1,1 \cdot 10^{-10}$
2	2300	$1,12 \cdot 10^{-9}$
3	2400	$3,70 \cdot 10^{-9}$
4	2500	$6,8 \cdot 10^{-9}$

Кривая линия на рис. 3.9 дает следующее уравнение для D согласно
выражению (3.17)

$$\lg D = 0,044 - 20540 \frac{1}{T}. \quad (3.306)$$

На рис. 3.9 приведен график, дающий зависимость $\lg D$ от T_K и на рис. 3.10 $\lg \frac{D}{D_{2000}}$, где D_{2000} относится к $T = 2000^\circ \text{K}$. Одновременно с этим коэффициент диффузии тория в вольфраме и скорость испарения тория, адсорбированного вольфрамом, дается в табл. 3.7.

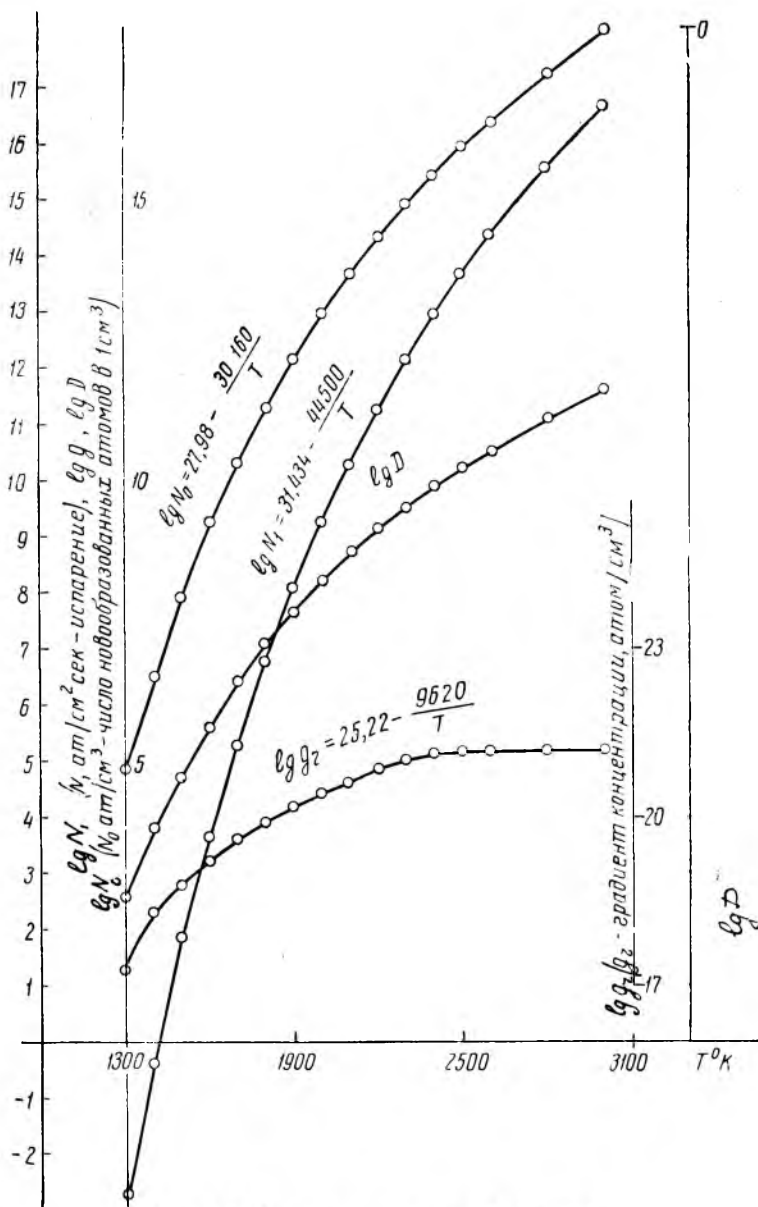


Рис. 3.9. Цена деления шкалы $\lg D_{\text{—}} 0,5$

3.6. Скорость образования металлического тория

Данные, полученные из активирования при низких температурах, дают возможность вычислить градиент концентрации (3.12)

$$g = \frac{kN_{\text{Th}}}{D}.$$

Постоянная наклона этой прямой к оси абсцисс, умноженная на

$$4,575 = \frac{1,986}{0,434}, \text{ дает } Q = 44\,000 \text{ кал/г} \cdot \text{атом}.$$

На рис. 3.10 приведены логарифмы изменения коэффициента диффузии D , концентрации g_r , числа новообразованных атомов тория N_0 и величины испарения N_1 относительно их значений при 2000° К .

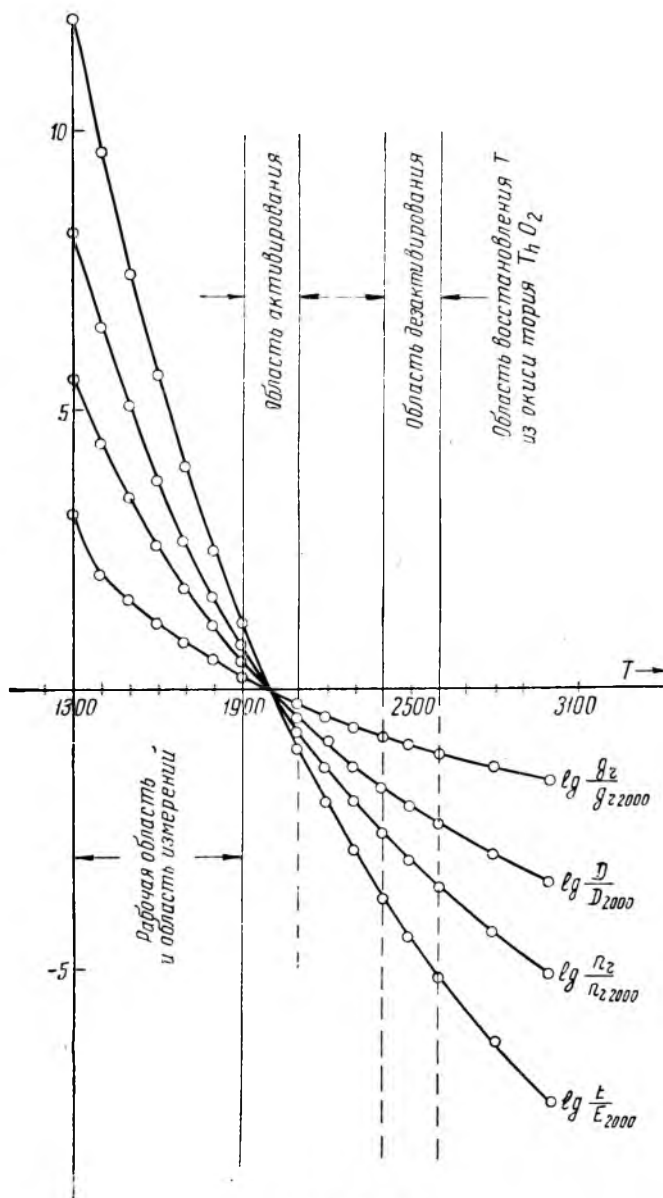


Рис. 3.10

Расчет величин D и g_r проведен по формулам (3.306) и (3.31); значения N_0 и N_1 — по формулам

$$\lg N_0 = 27,98 - \frac{30160}{T};$$

$$\lg N_1 = 31,434 - \frac{44500}{T} \text{ (при } \theta = 0,1 \div 0,85).$$

Пусть p_r — скорость появления тория в единице объема в толще нити. Когда достигнуто устойчивое состояние, при котором градиент концентрации на поверхности тория равен g_r , скорость восстановления тория на единицу длины равна $2\pi RDg_r$ и

$$p_r = \frac{2\pi RDg_r}{\pi R^2} = \frac{2Dg_r}{R} \quad (3.32)$$

или

$$\lg p_r = \lg 2D + \lg g_r - \lg R = \lg 2 + 0,044 - \frac{20\,540}{T} + 25,22 - \frac{9620}{T} - \lg R,$$

так как $R = 0,00389$ см, $\lg R = \lg 0,389 \cdot 10^{-2}$,

$$\lg p_r = 27,975 - \frac{30\,160}{T}.$$

В данном случае p_r показывает число новообразованных атомов (N_0) на единицу объема (см. рис. 3.9).

Теплота реакции восстановления тория есть, таким образом,

$$Q_r = - \frac{30\,160 \cdot 1,986}{0,434} = - 138\,000 \text{ кал/г} \cdot \text{атом}.$$

Знак минус указывает на то, что реакция сопровождается поглощением тепла.

1% тория соответствует $4,4 \cdot 10^{20}$ атом/см³. Если торий восстанавливается в постоянном количестве p_r , то жизнь тория определится в $\frac{4,4 \cdot 10^{20}}{p_r}$ сек или $\frac{1,22 \cdot 10^{17}}{p_r}$ час. Таким образом, мы можем рассчитать, что избытка тория при 1900° хватит на 94 000 час.

Принимая во внимание, что скорость восстановления тория убывает по мере того, как содержание тория падает, «жизнь» тория, рассчитанная таким образом, представляет собой, вероятно, время, необходимое для того, чтобы содержание тория упало до $1/2$ своей первоначальной величины.

Для различных нитей, даже содержащих одно и то же количество тория, p_r изменяется заметным образом в зависимости от механического состояния распределения тория в них и от других причин. Присутствие даже следов углерода восстанавливает окись тория в торий и весьма повышает p_r . Нити, содержащие различное количество тория, но подобные во всем остальном, дают значение p_r , пропорциональное количеству тория.

Из выражения $q = \frac{\pi}{2} R^2 C_0$ (3.28) в случае параболического распределения следует, что средняя концентрация тория в нити равна половине концентрации в центре и, согласно формуле (3.22а), $g = \frac{2C_0}{R}$ равна $\frac{gR}{4}$.

Таблица 3.7

Коэффициент диффузии тория в вольфраме и скорость испарения тория, абсорбированного вольфрамом

$T, ^\circ\text{K}$	$D, \text{см}^2/\text{сек}$	$N_{\text{Th}}, \text{атом}/\text{см}^3 \cdot \text{сек}$	$T, ^\circ\text{K}$	$D, \text{см}^2/\text{сек}$	$N_{\text{Th}}, \text{атом}/\text{см}^3 \cdot \text{сек}$
1300	$1,75 \cdot 10^{-16}$		2200	$5,1 \cdot 10^{-10}$	$1,61 \cdot 10^{11}$
1400	$2,36 \cdot 10^{-15}$	0,445	2300	$1,3 \cdot 10^{-9}$	$1,22 \cdot 10^{12}$
1500	$2,24 \cdot 10^{-14}$	58,5	2400	$3,06 \cdot 10^{-9}$	$7,8 \cdot 10^{12}$
1600	$1,61 \cdot 10^{-13}$	$4,18 \cdot 10^3$	2500	$6,73 \cdot 10^{-9}$	$4,31 \cdot 10^{13}$
1700	$9,15 \cdot 10^{-13}$	$1,81 \cdot 10^5$	2600	$1,39 \cdot 10^{-8}$	$2,08 \cdot 10^{14}$
1800	$4,29 \cdot 10^{-12}$	$5,15 \cdot 10^6$	2800	$5,11 \cdot 10^{-8}$	$3,48 \cdot 10^{15}$
1900	$1,71 \cdot 10^{-11}$	$1,03 \cdot 10^8$	3000	$1,58 \cdot 10^{-7}$	$3,99 \cdot 10^{16}$
2000	$5,94 \cdot 10^{-11}$	$1,53 \cdot 10^9$			
2100	$1,83 \cdot 10^{-10}$	$1,75 \cdot 10^{10}$			

Из табл. 3.3 следует, что после того как катод был нагрет в течение долгого времени при температуре 2500°K , при 2055°K , приближается к значению $3,64 \cdot 10^{-4}$. Из значения $D = 1,12 \cdot 10^{-10}$ по формуле (3.12) найдем $g = 2,46 \cdot 10^{21} \text{ ат/см}^4$ при 2500°K .

Таким образом, из других опытов активирования были получены значения g_r в промежутке от 2055 до 3000°K . Логарифм этих значений в функции от $1/T$ дает прямую линию, уравнение которой имеет следующий вид:

$$\lg g_r = 25,22 - \frac{9620}{T} \quad (3.31)$$

(см. рис. 3.9).

В стационарном состоянии можно g заменить g_r , определяемым из (3.31). Принимая $R = 0,00389$ и переходя от ат/см^3 к весовым частям делением на $5 \cdot 10^{22}$, получим следующую среднюю концентрацию металлического тория в миллионных долях:

$T, ^\circ\text{K}$	1800	1900	2000	2100	2200	2400	2800	3000
Концентрация Th, ат/см ³ . .	1,4	2,8	5	8,4	14	32	118	200

3.7. Индуктированное и нормальное испарение тория

Кривые активирования, полученные в опытах (см. табл. 3.3), после того как нить частично дезактивировалась, дают прямую линию, если $\theta_{\sim} - \theta$ построить на полулогарифмической бумаге в зависимости от времени, т. е. данные согласуются с уравнением (3.13г)

$$\ln \frac{\theta_{\sim} - \theta}{\theta_{\sim} - \theta_0} = -kt,$$

которое выведено в предположении, что g постоянно.

Однако предыдущий анализ указывает, что вблизи температуры 2100°K g заметным образом меняется во время обработки, если вначале оно очень отличается от стационарного своего значения. Например, при активирующей обработке при 2100°K (часть кривой опыта 10, см. табл. 3.9), которая следовала после нагревания в течение 30 сек при 2800°K , θ за 20 мин. возросло от 0,01 до 0,83. Линия, полученная построением $\theta_{\sim} - \theta$ на полулогарифмической бумаге, оказалась настолько прямой, что ее наклон не изменился более чем на 2% по всей длине, тогда как расчет показывает, что g должно измениться на 6%.

Обработка опыта 1 (см. табл. 3.9) дает более яркий пример наклона, остающегося постоянным в течение полной обработки за 277 мин при 2055° , хотя g упало на 55% в течение этого времени. Результат можно объяснить тем, что, во-первых, θ не строго линейная функция $\lg i_0$, и, во-вторых, индуктированное испарение не точно пропорционально θ . Считая последнее предположение более вероятным, было найдено, что данные N_1 и N_0 точно так же, как несколько других подобных, весьма удовлетворительно объясняются, если коэффициент $(1 - \theta)$ в уравнении (3.13д)

$$N_{\text{Th}} \frac{d\theta}{dt} = Dg(1 - \theta) - (V_0 + V\theta)$$

заменить выражением

$$f(\theta) = 1 - 0,82 \cdot \theta - 0,81 \theta^3. \quad (3.33)$$

Последние два члена представляют индуктированное испарение. Таким образом, если θ мало, то вероятность того, что атом тория, достигая поверхности, причинит испарение атома на поверхность, есть $0,82 \theta$. Если же θ

близко к единице, то вероятность того, что атом может найти себе место на поверхности, не воздействуя на уже находящийся там, есть $1,36(1 - \theta)$. Поэтому можно предположить, что атомы тория не плотно расположены на поверхности, даже если $\theta = 1$.

Нормальное испарение тория

Действительное испарение тория с достаточной для многих целей точностью можно подсчитать из опытных данных на основании уравнения (3.13а). Однако мы оставим в стороне линейную зависимость $N_{Th} \frac{d\theta}{dt}$ от θ и напишем уравнение в следующем виде:

$$N_{Th} \frac{d\theta}{dt} = Dg f(\theta) - N_1, \quad (3.34)$$

причем $f(\theta)$ определяем из (3.33).

С достаточной точностью для многих целей можно положить

$$N_{Th} \frac{d\theta}{dt} = Dg(1 - \theta) - N_1.$$

Как пример метода, примененного для расчета значений N_1 как функции θ , рассмотрим данные опыта, приведенные в табл. 3.8.

Таблица 3.8

Испарение тория как функция θ

(Температура нити 2300°K , $D = 1,3 \cdot 10^{-9}$, $g_r = 1,09 \cdot 10^{21}$, $k = 0,0389 \text{ сек}^{-1}$)

$t_{\text{мин}}$	θ	$\frac{d\theta}{dt} 10^7, \text{сек}^{-1}$	$f(\theta)$	$Dg \cdot 10^{-11},$ атом/см ² ·сек	$N_1 \cdot 10^{-11},$ атом/см ² ·сек
0	0,883	—15,95	0,152	7,86	13,25
2	0,721	—11,73	0,341	9,07	11,96
4	0,599	—9,4	0,472	9,6	11,44
6	0,5	—7,39	0,567	9,98	11,24
8	0,419	—6,13	0,64	10,36	11,26
10	0,352	—5,11	0,702	10,58	11,29
12	0,296	—4,2	0,752	10,81	11,30
16	0,201	—3,35	0,833	11,26	11,91
20	0,141	—1,72	0,855	11,64	11,6
24	0,111	—1,01	0,909	11,94	11,62
28	0,694	—0,44	0,925	12,25	11,33

Значения θ рассчитаны по формуле (3.3):

$$\theta = \frac{\ln i_\theta - \ln i_W}{\ln i_{Th} - \ln i_W}.$$

Кривые $\ln i$ показаны на рис. 3.8.

Производная $\frac{d\theta}{dt}$ была получена значительно точнее, чем было возможно с помощью последнего рисунка, а именно построением $(\theta - \theta_\infty) = f(t)$ на полулгарифмической бумаге так, чтобы получить кривую, весьма

близкую к прямой, наклон которой можно точно измерить в любой точке. Согласно (3.10а), этот наклон равен k , и очевидно, что

$$\frac{d\theta}{dt} = -k(\theta - \theta_{\infty}). \quad (3.35)$$

Значения Dg в табл. 3.8 сосчитаны при помощи кривой III на рис. 3.7 следующим образом. При обработке нити (см. опыты 5 и 6, табл. 3.9) катод был нагрет на несколько часов до 2250°K , пока g не достигло стационарного значения g_r , которое, согласно уравнению (3.31), равно $8,8 \cdot 10^{20}$ при 2250°K .

В опыте 2, следующем непосредственно за опытами 5 и 6, катод находился при $2105^\circ 196 \text{ мин}$, в продолжение которых g упало с $8,8 \cdot 10^{20}$ до $6,2 \cdot 10^{20}$, тогда как θ возросло с 0,12 до 0,857. Затем катод в течение 47 мин находился в нагретом состоянии при 2000°K , что понизило g до $6,05 \cdot 10^{20}$ и θ возросло до 0,883. Это и явилось условием для нити в начале опыта 8.

Начальное значение Dg в столбце 5 (табл. 3.8) было получено умножением g на $1,3 \cdot 10^{-9}$, равное значению D при 2300° из табл. 3.7. Из времени $t_{\text{мин}}$ (табл. 3.8) мы получаем $\frac{Dt}{R^2}$ и из кривой рис. 3.7 находим соответствующее значение $\frac{Rg}{C_u}$. Последнее пропорционально $Dg - Dg_r$, и так как мы знаем начальное значение Dg и получили $g_r = 1,09 \cdot 10^{21}$ при 2300° из уравнения (3.31), то можно рассчитать остальные значения Dg в столбце 5 табл. 3.8.

Испарение N_1 подсчитано по формуле (3.13а):

$$N_{\text{Th}} \frac{d\theta}{dt} = Dg(1 - \theta) - N_1$$

из соответствующих значений $\frac{d\theta}{dt}$, Dg и $f(\theta)$ в столбцах 3, 4 и 5 табл. 3.8; N_{Th} равно $0,756 \cdot 10^{15} \text{ атом/см}^3$. Хотя θ убывает в отношении 10/1, N_1 изменяется лишь на 15% и на всем протяжении может быть принято за постоянное.

В опыте 2, показанном на рис. 3.8, подобный анализ указывает, что Dg при $t = 5 \text{ мин}$ было равно $52 \cdot 10^{11}$ и упало до $15 \cdot 10^{11}$ при $t = 106 \text{ мин}$. Несмотря на эти весьма высокие значения Dg , значения N_1 не очень отличны — в среднем $16,3 \cdot 10^{11}$ в диапазоне $\theta = 0,7 \div 0,2$, хотя такое же среднее значение в опыте 8 дает $11,5 \cdot 10^{11}$.

Это различие эквивалентно изменению в температуре на 18° при 2300°K . В опыте 2 величина N_1 также практически не зависит от θ . Данные испарения из опыта 8 (табл. 3.9) вероятно более вески, чем из опыта 2 (табл. 3.8), так как в первом опыте член, содержащий Dg в уравнении (3.34), был гораздо меньше по сравнению с $\frac{d\theta}{dt}$, чем в последнем опыте. Отношение значений этих членов в начале этих опытов было 1/10 и 4,5/1 соответственно. Конечно, множитель Dg в продолжении опыта есть предмет значительной неуверенности, так как он не определяется непосредственно, но рассчитывается из данных рис. 3.7 и заключает в себе предположение о распределении тория в толще катода.

Член, заключающий $\frac{d\theta}{dt}$, с другой стороны, определен из опытных данных.

Таким образом, выясняется, что определение N_1 из таких опытов, как 2, в которых g велико, имеет несущественное значение. В некоторых опытах для определения N_1 были приняты другие два значения. Это можно пояснить примерами опытов 5 и 6. Катод сперва был нагрет до 2800° в течение 30 сек и затем обрабатывался при 2195°K 60 мин. За это время температура была доведена до 2250° . Между 1-й и 12-й минутами (2195°) θ возросло от 0,23 до 0,88, и значения $\theta - \theta_{\infty}$ дали на полулогарифмической бумаге

прямую линию, наклон которой соответствовал $k = 35,5 \cdot 10^{-1} \text{ сек}^{-1}$. Значение $\theta_{\sim}$, чтобы получить эту прямую линию, было выбрано равным 0,943. Подставляя это значение в выражение (считая $\theta \approx 1$)

$$V_0 + V = N_{\text{Th}} k (1 - \theta_{\sim}),$$

получим

$$Dg = 26,8 \cdot 10^{11}$$

или, приняв $D = 4,85 \cdot 10^{-10}$ при 2195° из

$$\lg D = 0,044 - \frac{20540}{T},$$

находим $g = 5,53 \cdot 10^{21}$ и $N_1 = 1,53 \cdot 10^{11}$. В продолжение остального опыта при 2195° θ возрастает до максимума 0,921 при $t = 24 \text{ мин}$ и затем постепенно убывает, как в опыте 2 (рис. 3.8).

При $t = 60 \text{ мин}$ данные показывают: $\theta = 0,882$ и $\frac{d\theta}{dt} = -0,2 \cdot 10^{-4} \text{ сек}^{-1}$ при температуре катода 2195° К . В этой точке температура была изменена на 2250° , катод быстро дезактивировался, так что кривая $\theta = f(t)$ дала резкое падение, и наклон резко изменился от $-0,2 \cdot 10^{-4}$ до $-4,5 \cdot 10^{-4}$. Подставляя эти данные в уравнение (3.34) и принимая

$$N_{\text{Th}} = 0,756 \cdot 10^{15} \text{ атом/см}^3,$$

получим

$$-1,51 \cdot 10^{12} = Dgf(\theta) - N_1,$$

$$-3,4 \cdot 10^{11} = D'gf(\theta) - N_1',$$

причем $D = 4,85 \cdot 10^{-10}$ и $D' = 8,22 \cdot 10^{-10}$ (см. табл. 3.7).

Решая уравнение, находим:

$$g = 1,35 \cdot 10^{16} N_1 - 0,20 \cdot 10^{21},$$

$$N_1' = 3,15 \cdot 10^{11} + 1,69 N_1.$$

Таким образом, измеряя изменение наклона, благодаря изменению температуры можно найти одно значение N_1 из другого. Взяв $N_1 = 1,53 \cdot 10^{11}$ из первой части опыта 5 (табл. 3.9), мы получим $N_1' = 5,74 \cdot 10^{11}$, как испарение при 2250° , и $g = 1,86 \cdot 10^{21}$, равное примерно одной трети градиента в начале опыта.

Табл. 3.9 содержит итог наиболее важных данных опыта, а именно испарения.

Таблица 3.9

Итог опытных данных испарения тория (см. табл. 3.3)

№ опыта	Метод	T	$g \cdot 10^{21}$	Диапазон θ	N_1
1	I-A	2055	1,9	0,4—0,8	$6,2 \cdot 10^9$
2	II-A	2105	0,75	0,2—0,8	$1,98 \cdot 10^{10}$
3	II-D	2150	0,61	0,82	$5,5 \cdot 10^{10}$
4	I-D	2195	0,57	0,7—0,4	$1,7 \cdot 10^{11}$
5	II-A	2195	5,5	0,2—0,9	$1,53 \cdot 10^{11}$
6	III-D	2250	1,9	0,88	$5,74 \cdot 10^{11}$
7	I-D	2300	0,54	0,38	$1,3 \cdot 10^{12}$
8	I-D	2300	0,81	0,7—0,2	—
9	I-D	2400	1,7	0,6—0,4	$7,8 \cdot 10^{12}$
10	I-D	2450	4,6	0,8—0,3	$1,6 \cdot 10^{13}$

В столбце 2 указан метод определения N_1 . Три описанных метода обозначены цифрами I, II, III. Буквы А и Д указывают, активировался или дезактивировался катод при опыте. Столбец 4 показывает условие, в которое катод был приведен предыдущей обработкой. Он дает значение g в середине диапазона θ , показывающего данную обработку. В некоторых из обработок θ изменялось в более широком диапазоне, нежели это указано в столбце 5, но значения N_1 в последнем столбце относятся к наблюдениям в данном диапазоне и в этом диапазоне N_1 существенно не зависит от θ .

На рис. 3.9 $\lg N_1$ отложены в $f(T)$:

$$\lg N_1 = 31,434 - \frac{44\,500}{T}. \quad (3.36)$$

Наклон данной кривой, определяемый последним членом равен $44500/T^2$, что соответствует теплоте испарения $204\,000 \text{ кал/г.атом}$. Хотя в диапазоне θ , ограниченном предыдущими опытами, N_1 почти постоянно при данной температуре, но из кинетических соображений очевидно, что N_1 должно становиться пропорциональным θ для достаточно малых значений θ , когда каждый атом тория независим от других. Действительно, несколько обработок, произведенных для частных малых значений θ , дают некоторые указания на падение N_1 . В опыте 10 при 2450° N_1 было постоянно между $\theta = 0,2 \div 0,8$, но при $\theta = 0,1$ упало до 65% и при $\theta = 0,07$ до 48% от его значения при $\theta = 0,2$. Чтобы получить больше данных о том, как происходит испарение при малых θ , в опыте после обработки было сделано около 30 обработок со значениями θ в диапазоне от 0,02 до 0,3. Данные были весьма убедительны, но ввиду более новых опытов с другими активными катодами кажется вероятным, что это было результатом ошибки благодаря неполному испарению тория с части катода вблизи вводов, которая была при более низкой температуре. Очевидно, что благодаря громадному соотношению между излучением с активированной и дезактивированной частей катода, если очень короткая часть катода удерживает его торий, может произойти серьезная ошибка в определении θ , в частности для низких его значений.

Для катодов, находящихся в почти активных условиях, вполне можно пользоваться испытательной температурой в 1450° К . Так как охлаждающий эффект сильнее выражен при этой низкой температуре, чем при более высоких, когда происходит дезактивирование, с конечных частей не получается заметного излучения, которое может удержать его торий. При более высоких испытательных температурах при работе с малыми значениями θ могут произойти более серьезные ошибки. Вообще эти ошибки могут быть обойдены подразделением анода на секции по принципу предохранительных колец. Общий результат этих обработок с малыми значениями θ следующий.

При температурах от 2200 до 2250° N_1 не изменяет своего значения с возрастанием θ от 0,07 до 0,3, но показывает наибольшее стремление к возрастанию. При более высоких температурах величина N_1 убывает с θ тем быстрее, чем выше температура, но даже при 2400° убывает все-таки медленнее, чем прямо пропорционально θ . Как результат этих изменений N_1 , температурный коэффициент N_1 и теплота испарения будут меньше при высоких значениях θ .

Обработки активирования, подобные приведенным в табл. 3.3 и 3.4, дают некоторые данные испарения при высоких значениях θ . Если N_1 — линейная функция θ , то при $\theta = 1$ и $N_1 = V_0 + V$, которую мы можем обозначить N_0 . В этом случае уравнение

$$V_0 + V = N_{Th}k(1 - \theta \sim)$$

принимает вид

$$N_0 = N_{Th}k(1 - \theta \sim). \quad (3.37)$$

Таким образом, уравнение

$$(1 - \theta_{\sim}) = \frac{N_0}{N_{Th}} \frac{1}{k}, \quad (3.38)$$

представляющее зависимость функции от $1/k$, дает прямую линию, проходящую через начало координат. Опытные значения θ , приведенные в табл. 3.4, хорошо удовлетворяют этому условию. Наклон линии дает отношение $\frac{N_0}{N_{Th}}$, из которого находим $N_0 = 1,66 \cdot 10^{10}$. Столбец 6 табл. 3.3 содержит данные, рассчитанные согласно уравнению (3.38) с упомянутым значением N_0 и данными для k из столбца 4.

Согласие с наблюдаемыми значениями в пределах опытных ошибок подтверждает предположение линейного соотношения между N_1 и θ в области от $\theta = 0,94$ до $\theta = 1$. Значение N_0 из данных табл. 3.4 в 2,75 раза больше, нежели значения N_1 , рассчитанные согласно (3.37) для этой температуры. Данные столбцов 4 и 5 табл. 3.3 были также применены для расчета значений N_0 из (3.38).

Было произведено сравнение N_0 для этой же температуры с уравнением (3.34) и было найдено, что оно в среднем в 3.12 раз больше, чем дает уравнение. Столбец 4 табл. 3.2 содержит значения $\theta_{\sim}$, рассчитанные из (3.38) из данных k в столбце 3 при $N_0 = 3.12 N_1$, где N_1 рассчитано из (3.34) для температуры T_a (столбец 1).

Согласие между значением опыта θ и расчетным очень хорошее. Это имеет особое значение, если вспомнить, что данные табл. 3.2 получены с катодом, содержащим 1,5% тория, тогда как катод табл. 3.8 содержит 1%.

Работа при низких, средних и высоких значениях θ приводит к следующим заключениям.

В диапазоне от $0 < \theta < 0,1$ N_1 возрастает, вероятно, пропорционально θ , но после $\theta = 0,2$ N_1 возрастает намного медленнее. При $0,2 < \theta < 0,8$ N_1 приблизительно постоянно, но тем не менее имеет склонность к небольшому повышению с температурой, если $T > 2400^\circ$, но слегка уменьшается с возрастанием θ при температуре 2200° .

При $\theta > 0,8$ N_1 растет опять, и при $0,85 < \theta < 1$ N_1 растет линейно с θ . При $\theta = 1$ N_1 принимает значение в три раза большее, нежели в диапазоне $0,2 < \theta < 0,8$.

3.8. Изменение теплоты испарения тория в зависимости от θ

Дешман предложил следующее опытное соотношение для скорости мономолекулярной реакции:

$$\frac{d \ln C}{dt} = V e^{-\frac{hV}{kT}}, \quad (3.39)$$

где C — концентрация реагирующего вещества; hV — теплота реакции на молекулу, V — грамм-атом вещества. Хотя это уравнение, вероятно, не вполне строго, но было найдено, что его можно использовать с высокой степенью точности при исследовании многих важных процессов, зависящих от температуры.

В левой части равенства выражена обратная величина среднего времени жизни τ молекулы реагирующего вещества, и в этой форме уравнение приложимо ко многим классам явлений, для которых ранее мы не имели подобных соотношений. Среднее время жизни атома тория на поверхности вольфрама равно

$$\tau = \frac{N_{Th} \theta_0}{N_1}, \quad (3.40)$$

где θ_0 — теплота испарения тория с вольфрама на грамм-атом. Комбинируя эти уравнения и подставляя $Q = NhV$, получим

$$N_1 = \frac{N_{Th} Q \theta_0}{Nh} e^{-\frac{Q}{RT}}. \quad (3.41)$$

Если подставить численные значения N_{Th} , N и h , то

$$N_1 = 1,804 \cdot 10^{17} \cdot Q \theta_0 e^{-\frac{Q}{RT}} \text{ атом/сек} \cdot \text{см}^2. \quad (3.41a)$$

Можно рассчитать Q из наших данных (табл. 3.10) в зависимости от θ . Столбец 2 дает испарение при 2300° , рассчитанное из (3.41a), которое подытоживает опытные данные. Значения N_1 в три раза больше при $\theta = 1$, нежели в диапазоне $0,2 < \theta < 0,8$ в согласии с нашими прежними заключениями. Столбец 3 дает теплоту испарения Q , рассчитанную по выведенному уравнению и выраженную в калориях на грамм-атом.

Таблица 3.10

Теплота испарения тория в функции от θ .
Температура катода 2300°K

θ	N_1	Q , кал/г·атом
0,2	$1,22 \cdot 10^{12}$	182 800
0,5	$1,22 \cdot 10^{12}$	187 100
0,8	$1,22 \cdot 10^{12}$	189 200
1	$3,66 \cdot 10^{12}$	185 200

Результат применения уравнения Дешмана для расчета значения Q довольно близко согласуется с найденным из опытного уравнения (3.36) и равным $Q = 204\,000$. Разница в величине Q для различных значений вероятно в высокой степени точна. Аналогично эта разница может быть определена из уравнения Больцмана. Наиболее важное свойство изменений Q с θ заключается в том, что они малы. Это указывает на то, что силы между прилегающими к поверхности атомами тория очень малы по сравнению с теми, которые связывают их с нижележащими атомами вольфрама. Возрастание Q при изменении θ от 0,2 до 0,8 соответствует притягательным силам, тогда как убывание Q при изменении θ от нуля до единицы делает очевидным, что атомы подвергаются воздействию сил отталкивания со стороны атомов тория, когда последние сильно сжимаются. Однако это явление очень слабо, что свидетельствует о том, что атомы тория, по-видимому, не тесно сжаты. Таким образом, эти результаты находятся в согласии с заключением, которое мы сделали относительно величины N_{Th} . Вольмар и Эстерман показали, что атомы ртути, конденсирующиеся на твердом кристалле ртути, сохраняют свою подвижность теплового движения в адсорбированном слое, вроде двумерного газа. Очень вероятно, что атомы тория на поверхности вольфрама при достаточно высокой температуре способны таким же образом двигаться по поверхности. Явление индуктированного испарения, тем не менее, указывает, что эта подвижность крайне ограничена для атома тория, приходящего изнутри на поверхность катода, только частично покрытого торием. С другой стороны, она способна сместить атом тория на поверхности в соседнее положение, вместо того, чтобы индуцировать испарение. Среднее время жизни атома тория в данном положении на поверхности решетки вольфрама (по отношению к подвижности на поверхности) должно быть, таким образом, велико сравнительно с длительностью жизни

Таблица 3.11

Характеристики торированного вольфрама

$T, ^\circ K$	g_r	θ_r	$i_r, a/cm^2$	τ	D	b	$N_1 \text{ атом}/$ $/cm^2 \cdot сек$
1300	$6,91 \cdot 10^{17}$	1,0	$6,4 \cdot 10^{-4}$	$0,52 \cdot 10^{13}$	$1,75 \cdot 10^{-16}$	34 000	0,0016
1400	$2,24 \cdot 10^{18}$	0,995	$4,0 \cdot 10^{-3}$	$0,82 \cdot 10^{11}$	$2,36 \cdot 10^{-15}$	34 100	0,465
1500	$6,46 \cdot 10^{18}$	0,99	$2,0 \cdot 10^{-2}$	$0,32 \cdot 10^{10}$	$2,24 \cdot 10^{-14}$	34 200	58,5
1600	$1,62 \cdot 10^{19}$	0,985	$8,0 \cdot 10^{-2}$	$0,16 \cdot 10^9$	$1,61 \cdot 10^{-13}$	34 300	$4,18 \cdot 10^3$
1700	$3,63 \cdot 10^{19}$	0,95	$3,2 \cdot 10^{-1}$	$0,13 \cdot 10^8$	$9,15 \cdot 10^{-13}$	34 900	$1,81 \cdot 10^5$
1800	$7,42 \cdot 10^{19}$	0,86	$3,2 \cdot 10^{-1}$	$0,13 \cdot 10^7$	$4,29 \cdot 10^{-12}$	36 600	$5,15 \cdot 10^6$
1900	$1,46 \cdot 10^{20}$	0,72	$2,51 \cdot 10^{-1}$	$0,16 \cdot 10^6$	$1,71 \cdot 10^{-11}$	39 200	$1,03 \cdot 10^8$
2000	$2,57 \cdot 10^{20}$	0,5	$1,0 \cdot 10^{-2}$	$0,26 \cdot 10^5$	$5,94 \cdot 10^{-11}$	43 300	$1,53 \cdot 10^9$

атома тория (по отношению к испарению), которую имеет атом тория под этой поверхностью. Суммарные свойства торированного вольфрама содержатся в табл. 3.11.

Явления с подобным катодом мы можем классифицировать по двум группам.

I. Характеристики стационарных состояний, в которых металлический торий диффундирует к поверхности и покидает ее в том же отношении, в каком внутри катода восстанавливается торий.

II. Переходные явления благодаря отклонениям от стационарного состояния, вызванные изменением температуры или удалением тория с поверхности катода внезапным нагреванием или бомбардировкой положительными ионами. Эти переходные явления существуют двух родов: 1) такие, при которых степень производства металлического тория в катоде не равна степени диффузии к поверхности (так называемое устойчивое состояние) и 2) при которых степень испарения с поверхности не равна скорости подачи к поверхности.

Столбец 2 табл. 3.11 дает значения g_r — градиента концентрации на поверхности, когда достигнуто стационарное состояние I , рассчитанного по уравнению (3.31):

$$\lg g_r = 25,22 - \frac{9620}{T}.$$

Столбец 3 дает значения θ_r — часть поверхности катода, покрытой торием, когда катод в стационарном состоянии I . Эти данные рассчитаны при помощи уравнения (3.30), причем θ заменено на θ_r и g — на g_r .

Значения D взяты из табл. 3.7 или уравнения (3.30б).

В согласии с опытными данными, рассмотренными ранее, было принято

$$V_0 = 0 \text{ и } V = 10 N_1.$$

Значения N_1 даны в табл. 3.9 или в уравнении (3.36)

$$\lg N_1 = 31,434 - \frac{44\,500}{T}.$$

Столбец 4 дает излучение электронов i_r в a/cm^2 при температуре T (столбец 1), когда часть поверхности покрыта торием. Дешман показал, что излучение электронов с нагретого металла задано уравнением

$$i_r = 60,2 T^2 e^{-\frac{b}{T}} a/cm^2,$$

где b — постоянная, зависящая от материала катода или условий его поверхности $b = b_0 + \theta (b_1 - b_0)$.

Дешман получил значения: $b_0 = 52\,600$, $b_1 = 34\,000$. Согласно этим данным построен столбец 4. Стационарное излучение достигает максимума при $1700\text{--}1800^\circ\text{K}$ и затем падает постепенно до значения, соответствующего чистому вольфраму. Столбец 5 дает время жизни тория τ в нити, рассчитанное из p_r на основании (3.32) для данного диаметра $R = 0,00389\text{ см}$:

$$\tau = 1 \cdot 22 \cdot 10^{-17} \frac{1}{p_r} \tag{3.39a}$$

Этим определяется время, необходимое, чтобы общее содержание тория в катоде упало до $1/e$ начальной величины.

3.9. Дальнейшие сведения по одноатомному слою

Для тел, излучающих эмиссию и содержащих окислы подобно вольфраму, с примесью ThO_2 , исследованному Ленгмюром, наблюдаются подобные же явления. Восстановление окисла происходит при очень высокой температуре, а активирование — при более низкой. Ни одна из полученных таким образом одноатомных пленок не является столь устойчивой, как ториевая, вследствие быстрой диффузии и испарения. Поэтому весьма трудно получить точные данные излучения эмиссии для полной пленки.

Применяя уравнение $I = AT^2e^{-b/T}$, можно определить постоянные A и b (табл. 3.12).

Таблица 3.12

Расчетные характеристики эмиссии

	Y	L	Ce	Zr	U	Th
A	7	8	8	5	3,2	3
b	31 300	31 500	31 500	36 500	33 000	30 500
φ	2,69	2,7	2,70	3,13	2,83	2,61

Измерения коэффициента диффузии D и испарения N_1 дают следующие значения для этих пленок при температуре $T = 2000^\circ$ и диаметре нити $2R = 0,1\text{ мм}$ (табл. 3.13).

Таблица 3.13

Опытные данные диффузии и испарения пленок

Элемент	$D \cdot 10^{11}, \text{ см}^2/\text{сек}^{-1}$	Теплота диффузии	$N_1 \cdot 10^9, \text{ атом}/\text{см}^2 \cdot \text{сек}$	Ат. вес
U	1,3	100 000		238,5
Th	5,9	94 000	1,53	232
Ce	95	83 000	1 450	140,3
Zr	324	78 000	68	91
Y	1820	62 000	—	89

Дешман и Эвальд при исследовании молибдена, тантала и ванадия и Гермер, Девиссон и Цвикер при исследовании ванадия и тория пришли к заключению, что для всех этих металлов $A = 60,2$.

Дешман и Эвальд полагают, что это справедливо для всех чистых металлов, за исключением небольшой разницы вследствие влияния поверхностного заряда, как указывает Бриджмен. Однако, как это следует из приведенных цифр наблюдений Кингдона над торированным вольфрамом и исследований Венельта, видно, что для этих поверхностей A меньше 60,2. В связи с этим весьма интересно подчеркнуть, что хотя в случае пленки тория $A < 60,2$ в, для одноатомного тория меньше, чем для металлического тория, как это следует из работ Цвикера и Майера с ториевыми нитями.

Для сплошного тория Цвикер дает:

$$b_0 = 39\,400, \quad u = 3,39 \text{ в}, \quad A = 70.$$

Результатом исследования одноатомного слоя циркония на вольфраме было следующее определение этих постоянных: $A = 5$, $b = 36\,500$ (см. выше), тогда как для металлического циркония у Цвикера находим: $b_0 = 52\,200$, $A = 3000$. Ток эмиссии на всем диапазоне рабочей температуры получается меньше, чем для пленки циркония. Таким образом, можно предполагать, что всякий раз одноатомный слой принадлежит более электроположительному металлу, и значение A получается меньше 60,2. С другой стороны, для поверхностей, в большей или меньшей степени частично покрытых кислородом, значение $A > 60,2$, и это заключение можно считать правильным во всех случаях, когда мы имеем одноатомный слой более электроотрицательного элемента, как, например, фосфор или иод на вольфраме. Полностью затронутый вопрос был разработан Тонксом и Дешманом.

Одноатомная пленка кислорода.

Еще давно Ленгмюр наблюдал, что небольшое присутствие кислорода понижает ток эмиссии. Он показал, что при $T = 2000^\circ \text{ К}$ 5% всех молекул O_2 дают реакцию с вольфрамом и испаряются с поверхности как газообразная трехокись вольфрама WO_3 . Кингдон определил постоянные A и b для этого случая при давлении кислорода 0,2 — 0,001 мм:

$$A = 5 \cdot 10^{11} \text{ а/см}^2 \cdot \text{град}^2, \\ b = 107\,000 \text{ град}^{-1} (u_0 = 9,2 \text{ в}).$$

Одноатомный слой цезия на вольфраме

Поведение цезия отличается от поведения тория в том отношении, что в случае тория атомы подводятся к поверхности изнутри, тогда как в случае цезия они подводятся из окружающего пространства (катод из вольфрама находится в парах цезия). В случае тория подвод атомов к поверхности при помощи диффузии зависит от температуры, тогда как во втором случае атомы цезия попадают на катод извне в количестве, зависящем лишь от давления, но не от температурного состояния этого катода.

Так, например: при низких температурах $1000/T = 1,8 \div 1,55 \lg i$ зависит линейно от T (область I). К этой области прилегает вторая область (II), в которой ток достигает максимума и далее (область III) уменьшается, несмотря на увеличивающуюся температуру. При дальнейшем увеличении температуры ток проходит через минимум и приближается затем к эмиссионной способности чистого вольфрама.

Можно предположить, что при низких температурах на поверхности вольфрама образуется плотный слой атомов цезия, который при дальнейшем повышении температуры становится тоньше и при очень высоких температурах совершенно исчезает.

ТЕРМОЭЛЕКТРОННЫЙ ТОК В АНОДНОЙ ЦЕПИ ДВУХЭЛЕКТРОДНОЙ ЛАМПЫ (ДИОДА)

4.1. Влияние пространственного заряда на излучение электронов накалившимся телом (формула Ленгмюра)

Опытному исследованию излучения электронов накалившимся телом, начиная с первых опытов Ричардсона, посвящено большое количество работ.

Первые исследования Ричардсона были посвящены вопросу излучения электронов платиной и угольной нитью. Эти опыты затем были продолжены Вильсоном и самим Ричардсоном.

В 1903 г. Венельтом было открыто мощное электронное излучение, получаемое от окислов кальция, бария и щелочноземельных металлов. Из последующих работ, появившихся с усовершенствованием техники откачки вакуумных приборов, следует упомянуть об основных работах Ленгмюра с вольфрамом, танталом, молибденом, платиной и углем и о работах Ричардсона и Смита с вольфрамом.

На основании предварительных наблюдений Ленгмюр обнаружил, что в лампе с накаленной вольфрамовой нитью при давлении остаточных газов порядка $0,001 \text{ мм рт ст}$ обыкновенно возникает тихий разряд.

В хорошо откачанной лампе, если напряжение накала доводилось до значения в 2,5 раза больше нормального (до точки плавления нити), тихого разряда не наблюдалось. С другой стороны, не обнаруживался и ток в анодной цепи, тогда как, исходя из уравнения Ричардсона, электронное излучение должно бы было достигать нескольких ампер для данной лампы.

В дальнейших опытах Ленгмюр применял лампы с двумя вольфрамовыми нитями, впаянными в виде петель и имеющими отдельные вводы. Одна из этих нитей служила в качестве накаленного катода, а другая в качестве анода. Давление доводилось до $5 \cdot 10^{-5} \text{ мм рт ст}$.

Ток в анодной цепи возникал лишь в том случае, если в анодную цепь включался источник напряжения.

При 125 в анодного напряжения, поддерживаемого постоянным, сила тока соответствовала уравнению Ричардсона при повышении температуры до 2000° К . При дальнейшем повышении температуры катода анодный ток увеличивался медленно, и после 2200° не получалось никакого увеличения силы тока, даже если вольфрам доводился до точки плавления. При повышении анодного напряжения до 250 в анодный ток увеличивался примерно в три раза, если температура накала была соответственно высока, но при низких температурах ток не зависел от анодного напряжения.

Дальнейшие исследования показали, что каждая кривая электронного тока в зависимости от температуры нити накала состоит из трех частей: первая часть кривой точно соответствует уравнению Ричардсона; вторая часть является горизонтальной прямой, на которой сила тока не зависит от температуры тела накала; третья часть соединяет первую и вторую части кривой.

Горизонтальная часть кривой, впервые полученная Ленгмюром, зависит от следующих факторов: анодного потенциала, присутствия магнитного поля, размеров и формы поверхности анода, расстояния между катодом и анодом. Ни один из перечисленных факторов не влияет на силу тока, определяемую уравнением Ричардсона.

Исследуя этот вопрос, Ленгмюр приходит к заключению, что ток насыщения, определяемый второй частью кривой, получается благодаря пространственному заряду, который создают электроны, излучаемые катодом при соответствующем повышении температуры. Кривые, снятые Ленгмюром, $i_a = f(T)$ при $u_a = \text{const}$, подтверждающие сказанное, изображены на рис. 4.1.

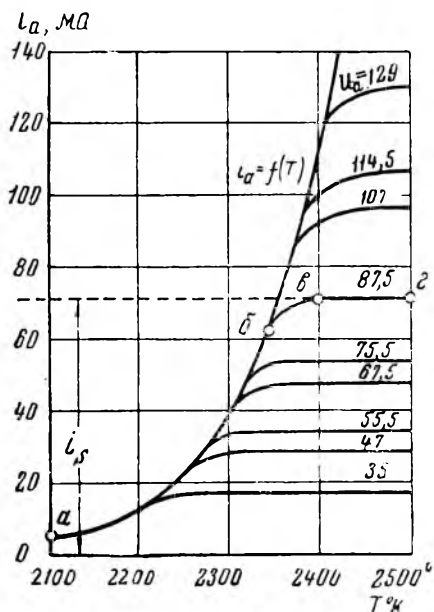


Рис. 4.1

4.2. Термоэлектронный ток при отсутствии и наличии напряжения в анодной цепи

Предположим, что в цепь между накаленным катодом и анодом не включено никакого напряжения и катод находится при потенциале, равном нулю. Предположим далее, что анод находится достаточно далеко от катода. В этом случае явления будут протекать следующим образом. Электроны, уходящие с поверхности нити со скоростями, лежащими между $v = 0$ и $v = \infty$, попадая в пространство между катодом и анодом, стремятся к последнему. Последующие электроны,

излучаясь в том же направлении, будут испытывать отталкивание от электронов, ушедших ранее. Когда все пространство между катодом и анодом будет заполнено электронами, то всякий вылетающий электрон должен будет обладать достаточной скоростью при вылете, чтобы достигнуть анода.

В пространстве между катодом и анодом создается электрическое поле, силовые линии которого, начинаясь на катоде, будут кончаться на пространственном заряде. Так как катод находится при нулевом потенциале (анодный ток отсутствует), а пространственный заряд отрицателен, то силовые линии будут иметь направления от катода к пространственному заряду. Благодаря этому потенциал в каждой точке пространства между катодом и пространственным зарядом будет отрицателен; его абсолютная величина будет увеличиваться от нуля до некоторого предельного значения. Естественно, что при этих условиях анода достигнут только те электроны, которые обладают достаточной кинетической энергией для того, чтобы преодолеть отрицательную разность потенциалов, возникающую за счет пространственного заряда у поверхности катода.

Если к анодной цепи будет приложено некоторое положительное напряжение, то при ненакаленном катоде между анодом и катодом будет создано электрическое поле, силовые линии которого, начинаясь на аноде, все закончатся на катоде. При разогреве катода с его поверхности будут вылетать электроны и часть силовых линий поля будет заканчиваться на заряде этих вылетающих электронов, а часть линий будет заканчиваться на катоде. Поэтому при поставленных условиях все электроны, вылетающие с катода, попадут на анод. Стало быть, до некоторой температуры сила анодного тока будет соответствовать кривой Ричардсона. Повышая постепенно нагрев

катода, мы достигнем, наконец, такой температуры, при которой все силовые линии электрического поля анода будут кончаться на электронах пространственного заряда. Если при этом число электронов, вылетающих с накаливаемого катода, будет определяться формулой Ричардсона, то сколько бы мы ни поднимали дальше температуру катода, сила тока не увеличится, так как лишние вылетающие электроны будут образовывать добавочный пространственный заряд, который будет препятствовать вылету новых электронов. В этом случае число электронов, попадающих на анод и обуславливающих силу анодного тока, будет все время равно тому числу электронов, достигающих анода, при котором все силовые линии электрического поля закончатся на пространственном заряде и величина поля обусловится всеми электронами, вылетающими с катода.

Таким образом, каждому напряжению на аноде будет соответствовать наибольшая температура накала, выше которой сила анодного тока не будет увеличиваться. При этом мы получаем ток насыщения, обусловленный напряжением на аноде. Каждая точка кривой Ричардсона определяет собой некоторый ток насыщения; при заданном анодном напряжении большего тока получить нельзя, сколько бы мы ни повышали нагрев катода.

До области насыщения при заданном напряжении на аноде сила анодного тока зависит только от температуры катода. Выше тока насыщения при заданном напряжении сила анодного тока от дальнейшего повышения температуры не зависит, или, точнее, зависит очень слабо.

4.3. Семейство характеристик $i_a = f(T)$ при $u_a = \text{const}$. Расчет тока насыщения, кривая Ричардсона

Для снятия семейства характеристик нагреем катод от источника напряжения накала и, регулируя силу тока накала, установим требуемую температуру. В анодную цепь включаем напряжение, поддерживаемое постоянным при снятии зависимости $i_a = f(T)$ (или зависимости анодного тока от связанной с температурой катода величины i_n — тока накала (см. рис. 4.1)).

Допустим, что в анодной цепи включено напряжение $u_a = 87,5$ в (см. рис. 4.1). Повышая силу тока накала (и, соответственно, температуру катода), мы будем иметь до температуры, соответствующей точке *б*, возрастающие силы тока согласно формуле Ричардсона, так как электрическое поле, созданное приложенным напряжением, будет увлекать к аноду все электроны, излучаемые катодом. В точке *б* почти все силовые линии электрического поля будут заканчиваться на пространственном заряде электронов, летящих от катода к аноду, и при дальнейшем увеличении температуры сила тока будет увеличиваться очень медленно до точки *в*. В точке *в* все силовые линии электрического поля будут заканчиваться на пространственном заряде, и сколько бы мы ни увеличивали температуру катода (например, до точки *г*), сила тока больше не возрастает, так как электрическое поле анода не может увлечь электронов больше того числа, которое испускает катод при $T = 2400^\circ \text{ К}$ (точка *в*), несмотря на то, что, например, при температуре 2500° (точка *г*) количество излучаемых электронов значительно больше, чем получается при $T = 2400^\circ$ и $u_a = 87,5$ в. Силу тока излучения электронов в точке *в* мы назовем «силой тока насыщения» или, короче, «током насыщения», а температуру точки *в* — «температурой насыщения».

Снимая подобные характеристики при различных анодных напряжениях, мы получаем семейство характеристик $i_a = f(T)$ при $u_a = \text{const}$ (рис. 4.1 и 4.2).

Как указывалось выше, сила тока на горизонтальной части кривой (сила тока насыщения) $i_a = f(T)$ при $u_a = \text{const}$ не зависит от температуры;

она в основном определяется потенциалом анода, формой электродов и расстоянием между катодом и анодом.

Выражение для расчета силы тока насыщения было дано впервые Ленгмюром, но не было им применено к излучению электронов накалившимся телом.

Ленгмюр, исходя из уравнения Пуассона, дал следующее выражение для силы тока насыщения.

1. Электроды плоские. Площадь катода S см². Расстояние между электродами равно d . Тогда

$$i_a = \frac{\sqrt{2}}{9\pi} \sqrt{\frac{e}{m}} \frac{u_a^{3/2}}{d^2} S. \quad (4.1)$$

2. Электроды — коаксиальные цилиндры. Длина катода l . Радиус анода r_a см. Радиус катода r_k см. Здесь будем иметь

$$i_a = \frac{\sqrt{2}}{9\pi} \sqrt{\frac{e}{m}} \frac{u_a^{3/2}}{r_a \beta^2} l, \quad (4.1a)$$

где β^2 — функция от $\frac{r_a}{r_k}$; при $\frac{r_a}{r_k} \geq 12$ $\beta^2 \cong 1$. см. табл. 44.

Таким образом, Ленгмюром было доказано, что при любой форме электродов сила тока есть функция анодного напряжения в степени трех вторых.

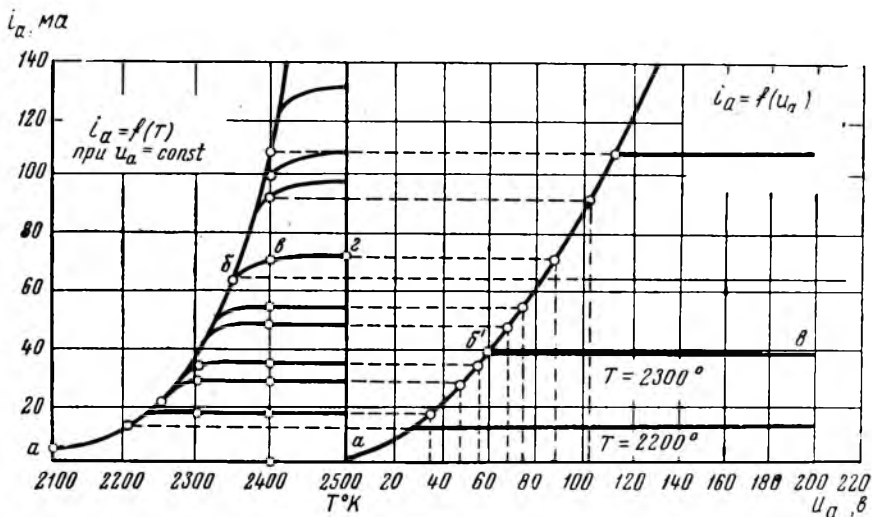


Рис. 4.2

Это дает возможность построить семейство характеристик $i_a = f(u_a)$ при $T_k = \text{const}$.

Задавшись определенной формой электродов, например коаксиальной мы можем построить кривую $i_a = f(u_a)$ по формуле (2.39) или при помощи следующего построения, используя семейство характеристик представленных на рис. 4.1.

Взяв семейство характеристик (рис. 4.1): $i_a = f(T)$ при $u_a = \text{const}$, проводим ординату при данной температуре, например при 2400°, и отмечаем точки пересечения этой ординаты с кривыми при $u_a = u_{a1}, u_{a2}, u_{a3}$ и т. д. (рис. 4.2).

Затем, как это показано на рис. 4.2, строим кривую зависимости тока i_a от анодного напряжения, в результате чего для каждой заданной температуры получаем соответствующую кривую. Полученные кривые состоят из криволинейной части $a-b'$ и горизонтальной части (см. верхнюю го-

горизонтальную линию); последняя не зависит от напряжения и здесь сила тока остается практически постоянной. Начальные криволинейные участки характеристик, соответствующие различным температурам, налагаются друг на друга и образуют одну плавную кривую.

Допустим, что мы установили температуру катода 2300° и постепенно повышаем напряжение (см. кривую $i_a = f(u_a)$).

Когда напряжение анода мало и между электродами имеется слабое электрическое поле, то естественно, что оно не может увлечь все электроны, излучаемые катодом. При дальнейшем повышении анодного напряжения сила тока будет постепенно увеличиваться до точки b' , т. е. до тех пор, пока электрическое поле анода не достигнет такой величины, когда все электроны, излучаемые катодом, смогут достигнуть анода. Сколько бы далее мы ни повышали напряженность электрического поля, увеличивая напряжение на аноде, сила тока не будет больше той, которая существует при $2300^\circ K$. Ток, соответствующий горизонтальной части кривой, определяемой выражением

$$i_a = a \sqrt{T} e^{-\frac{b}{T}} = i_s, \quad (4.16)$$

мы назовем током насыщения, а напряжение, выше которого ток не увеличивается (точка b'), — напряжением насыщения.

4.4. Распределение потенциала и напряженности электрического поля между электродами

Предположим, что в предыдущем случае катод и анод плоские. При малых температурах не будет излучения электронов с катода, и мы будем иметь линейное распределение потенциала, а именно (потенциал катода принимается равным нулю):

$$u = u_a \frac{x}{d}, \quad (4.2)$$

где $u_a = 87,5$ в — потенциал анода; x — расстояние от катода до данной точки; d — расстояние между электродами.

Напряженность электрического поля между электродами будет равна

$$E = -\frac{du}{dx} = -\frac{u_a}{d}, \text{ в/см.} \quad (4.3)$$

Значения u_a и E для случая холодных электродов изображены прямыми I на рис. 4.3.

Допустим, что мы накалили катод до температуры, меньшей температуры насыщения. Все вылетающие с катода электроны будут увлекаться полем анода, но их присутствие между катодом и анодом создает добавочное электрическое поле, которое будет начинаться на катоде (потенциал нуль) и кончаться на отрицательных зарядах электронов. Так как это поле будет направлено от катода к пространственному заряду, т. е. обратно полю электродов, то оно, вообще говоря, ослабит внешнее поле. Напряженность электрического поля в каждой точке между электродами уменьшится и мы

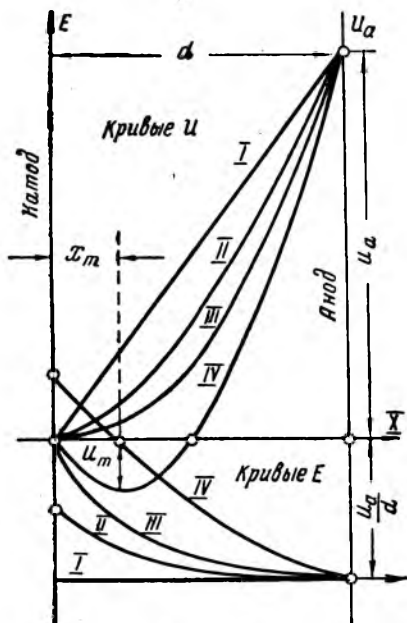


Рис. 4.3

получим в качестве распределения напряженности электрического поля кривую II . Соответственно в каждой точке уменьшится и потенциал, изображенный также кривой II .

Увеличивая накал, повышаем температуру катода до точки b (рис. 4.2), соответствующей току насыщения. Так как при этой температуре все силовые линии электрического поля анода заканчиваются на пространственном заряде, то напряженность электрического поля на катоде будет равна нулю.

Распределение u и E для этих условий изображено на рис. 4.3 кривыми III .

Далее повысим температуру катода выше температуры насыщения (точка z на рис. 4.2).

Так как при температуре насыщения все силовые линии электрического поля заканчивались на пространственном заряде, обусловленном всеми электронами, излучаемыми катодом при температуре насыщения, то при большей температуре катод будет излучать электронов больше, чем электрическое поле анода может увлечь их. Следовательно, вблизи катода получится скопление электронов, которое создает электрическое поле, направленное от катода к пространственному заряду, причем оно не будет уже компенсироваться внешним полем. Внешнее поле будет компенсировать поле пространственного заряда лишь в точке x_m , в которой напряженность электрического поля будет равна нулю.

На катоде напряженность электрического поля будет положительна и ее распределение изобразится кривой IV (рис. 4.3). Имея нулевое значение на катоде, потенциал достигает наибольшего отрицательного значения в точке x_m и, переходя затем нулевое значение, возрастает далее до 87,5 в на аноде.

Таким образом, между $x = 0$ и $x = x_m$ мы будем иметь область замедляющего поля и лишь после x_m поле будет ускоряющим.

Следовательно, электрическое поле анода будет в состоянии увлечь лишь те электроны, которые имели выходную скорость с раскаленного катода больше нуля на величину, необходимую для преодоления действия замедляющего поля на расстоянии x_m .

Сила тока при этом не увеличится, так как если в точке x_m напряжение электрического поля равно нулю, то, очевидно, на расстоянии $d = x_m$ все поле анода заканчивается на пространственном заряде.

4.5. Уравнение Пуассона в прямоугольных и цилиндрических координатах

Допустим, что в прямоугольной системе координат $x y z$ имеется электрическое поле. Выделим в пространстве, занимаемом этим полем, бесконечно малый объем dV в виде параллелепипеда со сторонами dx , dy и dz (рис. 4.4):

$$dV = dx \cdot dy \cdot dz.$$

Условимся за положительное направление потока вектора напряженности поля считать направление внешней нормали к поверхности и обозначим слагающие вектора напряженности электрического поля по осям x , y и z через E_x , E_y и E_z . Пусть направление электрического поля будет таково, что оно входит через поверхности параллелепипеда, обозначенные цифрами 1, и выходит через поверхности с цифрами 2.

Поток напряженности через каждую боковую поверхность, обозначенную 1, будет равен

$$\begin{aligned} & - E_{x1} dy dz, \\ & - E_{y1} dx dz, \\ & - E_{z1} dy dx \end{aligned}$$

Соответственно получаем значение потока вектора напряженности через каждую поверхность, обозначенную цифрой 2:

$$E_{x2} dy dz,$$

$$E_{y2} dx dz,$$

$$E_{z2} dy dx.$$

Так как значение напряженности электрического поля есть непрерывная функция координат, то можно написать:

$$E_{x2} = E_{x1} + \frac{\partial E_{x1}}{\partial x} dx,$$

$$E_{y2} = E_{y1} + \frac{\partial E_{y1}}{\partial y} dy,$$

$$E_{z2} = E_{z1} + \frac{\partial E_{z1}}{\partial z} dz. \quad (4.4)$$

Складывая значение потока вектора напряженности через все боковые поверхности, мы найдем значение потока вектора напряженности через всю поверхность, ограничивающую объем dV .

Согласно теореме Гаусса — Остроградского, поток вектора напряженности поля сквозь замкнутую поверхность равняется количеству электричества, находящемуся внутри поверхности, взятому 4π раз:

$$I = \int E_n dS = 4\pi q,$$

где E_n — слагающая вектора напряженности электрического поля, взятая по нормали к данной поверхности; dS — элемент поверхности.

На основании изложенного имеем

$$I = \int (E_{x2} - E_{x1}) dy dz + (E_{y2} - E_{y1}) dx dz + (E_{z2} - E_{z1}) dy dx. \quad (4.5)$$

Количество электричества, содержащееся внутри объема dV , будет равно

$$q = \rho dV = (\rho_+ + \rho_-) dV = (\rho_+ + \rho_-) dx dy dz,$$

где объемная плотность положительного электричества обозначена через ρ_+ и отрицательная через ρ_- .

Подставляя в выражения для I значения E_{x2} , E_{y2} , E_{z2} и приравнявая полученное выражение $4\pi\rho$ и сокращая на dV , найдем

$$\frac{\partial E_{x1}}{\partial x} + \frac{\partial E_{y1}}{\partial y} + \frac{\partial E_{z1}}{\partial z} = 4\pi (\rho_+ + \rho_-) = 4\pi\rho. \quad (4.6)$$

Так как слагающие напряженности электрического поля соответственно равны

$$E_{x1} = -\frac{\partial u}{\partial x}; \quad E_{y1} = -\frac{\partial u}{\partial y}; \quad E_{z1} = -\frac{\partial u}{\partial z},$$

где u — потенциал данной точки, то мы будем иметь

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -4\pi\rho. \quad (4.7)$$

Последнее уравнение есть уравнение Пуассона.

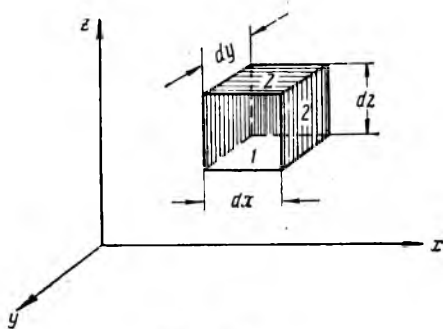


Рис. 44.

В том случае, если $\rho = 0$, мы получаем уравнение Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0. \quad (4.8)$$

Рассмотрим теперь уравнение Пуассона в цилиндрических координатах.

Допустим, что заданное электрическое поле обладает радиальной симметрией, т. е. слагающие напряженности поля зависят только от координат $y = r \sin \varphi$, $x = r \cos \varphi$, но не зависят от угла φ и координаты z . В этом случае можно написать

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \left(\frac{\partial r}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial u}{\partial r} \cdot \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} \end{aligned}$$

и составить таким же образом выражение для соответствующих производных $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ и $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$. В свою очередь,

$$r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

так что

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{r}$$

и

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} = \frac{r^2 - x^2}{r^3} = \frac{y^2}{r^3}.$$

Теперь $\partial^2 u / \partial x^2$ можно записать в виде

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \left(\frac{x}{r} \right)^2 + \frac{\partial u}{\partial r} \frac{y^2}{r^3}.$$

Таким же образом находим значения $\partial^2 u / \partial y^2$.

Подставляя найденные значения в уравнение Пуассона (4.7), находим его выражение в цилиндрических координатах:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \left(\frac{x^2 + y^2}{r^2} \right) + \frac{\partial u}{\partial r} \left(\frac{x^2 + y^2}{r^3} \right) = -4\pi\rho$$

или

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} = -4\pi\rho, \quad (4.8a)$$

что можно записать и так:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial u}{\partial r} r \right) = -4\pi\rho r.$$

Пример 1. В плоскости yz расположена металлическая поверхность и на расстоянии d по положительному направлению оси Ox находится другая поверхность. Объемная плотность электрического заряда между пластинами равна нулю, разность потенциалов — u_a . Пластина, находящаяся при $x = 0$, имеет $u = 0$. Найти распределение потенциала и напряженности электрического поля между пластинами.

В данном случае напряженность электрического поля будет зависеть только от координаты x и, согласно уравнению (4.8), мы получим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,$$

откуда

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \text{const} = A_1$$

и

$$u = A_1 x + A_2.$$

Согласно поставленному условию, при $x = 0$, $u = 0$, мы имеем

$$A_2 = 0$$

или

$$u = A_1 x.$$

Для определения постоянной A_1 мы имеем второе условие, а именно при $x = d$, $u = u_a$, на основании чего пишем

$$A_1 = \frac{u_a}{d}$$

и

$$u = u_a \frac{x}{d}.$$

Напряженность электрического поля будет равна

$$E = -\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{u_a}{d}.$$

Пример 2. По оси Oz (подобно рис. 4.4) расположен цилиндрический электрод радиуса r_k и concentрично с ним расположен второй электрод с радиусом r_a . Предположим, что первый электрод имеет потенциал $u = 0$ и разность потенциалов между электродами равна u_a . Найти распределение потенциала и напряженности электрического поля между электродами, предполагая, что объемная плотность зарядов равна нулю.

Согласно поставленным условиям и уравнению (4.8а) получим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial u}{\partial r} r \right) = 0$$

или

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{A_1}{r},$$

откуда

$$u = A_1 \ln r + A_2.$$

Согласно начальным условиям имеем

$$A_1 \ln r_k + A_2 = 0,$$

$$A_1 \ln r_a + A_2 = u_a,$$

откуда следует

$$A_1 = \frac{u_a}{\ln \frac{r_a}{r_k}},$$

$$A_2 = -A_1 \ln r_k = -\frac{u_a \ln r_k}{\ln \frac{r_a}{r_k}}.$$

Таким образом,

$$u = u_a \left(\frac{\ln r}{\ln \frac{r_a}{r_k}} - \frac{\ln r_k}{\ln \frac{r_a}{r_k}} \right) = u_a \frac{\ln \frac{r}{r_k}}{\ln \frac{r_a}{r_k}}.$$

Напряженность электрического поля будет равна

$$E = -\frac{du}{dr} = -\frac{u_a}{r \ln \frac{r_a}{r_k}}.$$

Вычислим напряженность электрического поля для случая цилиндрических электродов, имеющих следующие данные:

$$r_k = 0,01 \text{ см}, r_a = 1,2 \text{ см} \text{ и } u_a = 750 \text{ в.}$$

Напряженность электрического поля на катоде ($r = r_k$) будет равна

$$E = -\frac{750}{0,01 \cdot 2,3 \lg \frac{1,2}{0,01}} = -15\,650 \text{ в/см}$$

и на аноде $r = r_a$

$$E = -\frac{750}{1,2 \cdot 2,3 \lg \frac{1,2}{0,01}} = -130 \text{ в/см.}$$

Обращаем внимание на то, что, применяя один из цилиндрических электродов малого радиуса, можно получить на его поверхности весьма большие значения напряженности электрического поля при весьма умеренных разностях потенциалов.

4.6. Пространственный заряд при плоских электродах

Пусть имеется прибор с двумя электродами (диод), помещенными в откачанном сосуде. Предположим, что катод накален и форма электродов плоская. Спрашивается, какая сила тока получится в цепи анода, если снаружи оба электрода соединить проводником и к ним приложить некоторую э. д. с.

На первый взгляд казалось бы, что сила тока в анодной цепи при отсутствии в ней электродвижущей силы должна определиться по формуле

$$i_a = Si_1,$$

где i_1 — сила тока с 1 см^2 накаленной поверхности катода, определяемая формулой Ричардсона, а S — поверхность катода.

На самом деле при этих условиях ток получается равным нулю. Для теоретического решения задачи рассмотрим распределение потенциала. Пусть в данной точке пространства между электродами объемная плотность пространственного заряда будет равна ρ . Тогда, обозначая потенциал данной точки относительно катода равным u , мы имеем право написать уравнение Пуассона

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -4\pi\rho.$$

Если мы имеем дело с условием равновесия электронного газа, то распределение электронов пространственного заряда определится следующим выражением:

$$\rho = \rho_1 e^{\alpha u}, \quad (4.9)$$

где ρ_1 — объемная плотность электронов пространственного заряда у поверхности катода, а

$$\alpha = \frac{e}{kT} \quad (4.10)$$

(здесь e — заряд электрона, k — постоянная Больцмана, T — абсолютная температура).

Подставляя значение e и k , найдем

$$\alpha = \frac{3,48 \cdot 10^6}{T} \text{ CGSE.} \quad (4.11)$$

Так как α имеет размерность, обратную потенциалу, то, выражая ее в вольтах, получим

$$\alpha = \frac{3,48 \cdot 10^6}{300 T} = \frac{11600}{T} \text{ в}^{-1}. \quad (4.12)$$

Подставим ρ из выражения (4.9) в уравнение Пуассона

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -4\pi\rho_1 e^{\alpha u}$$

и умножим обе части на $\frac{du}{dx}$. Тогда

$$\frac{du}{dx} \frac{d^2 u}{dx^2} = \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \left(\frac{du}{dx} \right)^2 = -4\pi\rho_1 e^{\alpha u} \frac{du}{dx}.$$

Интегрируя полученное выражение, находим

$$\frac{1}{2} \left(\frac{du}{dx} \right)^2 = -4\pi\rho_1 \frac{e^{\alpha u}}{\alpha} + B_1.$$

Постоянная B_1 определится из предположения, что если расстояние между электродами достаточно велико, то $\frac{du}{dx} = 0$ и $\rho = \rho_1 e^{\alpha u} = 0$, т. е. мы предположим, что потенциал анода бесконечно велик и отрицателен. При этом условии $B_1 = 0$ и, следовательно,

$$\left(\frac{du}{dx} \right)^2 = -8\pi\rho_1 \frac{e^{\alpha u}}{\alpha},$$

откуда следует, что

$$x = - \sqrt{\frac{\alpha}{8\pi\rho_1}} \int \frac{du}{e^{\frac{\alpha}{2} u}}.$$

Производя интегрирование, находим

$$x = \sqrt{\frac{1}{2\pi\rho_1\alpha}} e^{-\frac{\alpha}{2} u} + B_2, \quad (4.13)$$

и, подставляя начальные условия ($x = 0$, $u = 0$), определяем B_2 :

$$B_2 = - \sqrt{\frac{1}{2\pi\rho_1\alpha}} = -x_0, \quad (4.14)$$

так что теперь можно записать [см. (4.13)]

$$e^{-\alpha u} = 2\pi\rho_1\alpha (x + x_0)^2. \quad (4.15)$$

Из последнего выражения можно определять искомое распределение потенциала между электродами

$$u = - \frac{1}{\alpha} \ln 2\pi\rho_1\alpha (x + x_0)^2. \quad (4.16)$$

Дифференцируя это выражение по x , найдем распределение напряженности электрического поля

$$E = - \frac{du}{dx} = \frac{2}{\alpha} \frac{1}{x + x_0}. \quad (4.17)$$

Распределение пространственного заряда определяется выражением (4.9)

$$\rho = \rho_1 e^{2u}.$$

Определяя правую часть этого равенства из (4.15), получим

$$\rho = \frac{1}{2\pi\alpha (x+x_0)^2}. \quad (4.18)$$

Для того чтобы произвести численный расчет полученных выражений, необходимо знать значение объемной плотности пространственного заряда у поверхности катода ρ_1 . Пусть N_1 будет число электронов, излучаемых в единицу времени с единицы поверхности накаливаемого катода. Согласно закону максвелловского распределения скоростей, число электронов dN_1 , излучаемых в одну секунду с квадратного сантиметра поверхности накаливаемого катода и имеющих значение слагающей скорости, нормальной к поверхности катода, между v и $v + dv$, будет равно [см. (2.54)]

$$dN_1 = N_0 \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} v dv. \quad (4.19)$$

Интегрируя выражение (4.19) в пределах от 0 до $+\infty$, получим

$$N_0 = N_1 \sqrt{\frac{2\pi m}{kT}}. \quad (4.20)$$

Так как $N_1 = \frac{i_1}{e}$, где i_1 — удельная эмиссия катода, т. е. электронный ток (все электроны, излучаемые с 1 см^2 поверхности накаливаемого катода), то

$$N_0 = \frac{i_1}{e} \sqrt{\frac{2\pi m}{kT}}. \quad (4.21)$$

Подставляя числовые значения входящих величин и выражая ток в амперах, получим расчетную формулу для числа электронов в 1 см^3 :

$$N_0 = \frac{3 \cdot 10^{18} i_1}{l} \sqrt{\frac{2\pi m}{kT}} = \frac{19260 i_1}{l \sqrt{T}}, \quad (4.22)$$

где i_1 выражено в а/см^2 .

Искомая нами объемная плотность электронов пространственного заряда выразится как

$$\rho_1 = N_0 e = \frac{19260 i_1}{\sqrt{T}} \text{ CGSE}. \quad (4.23)$$

Для вывода расчетной формулы разности потенциалов приводим выражение (4.16) к следующему виду:

$$u = -\frac{4,6}{\alpha} \lg [\sqrt{2\pi\rho_1\alpha}(x+x_0)^2] = -\frac{4,6}{\alpha} \lg \left(\frac{x}{x_0} + 1 \right). \quad (4.24)$$

Принимая во внимание (4.10), (4.22) и (4.23), подкоренную величину последнего выражения запишем так:

$$2\pi\rho_1\alpha = 2\pi i_1 \sqrt{\frac{2\pi m}{kT}} \frac{e}{kT} = \sqrt{\frac{(2\pi)^3 m}{k^3}} e \frac{i_1}{T^{3/2}} = 422,5 \cdot 10^9 \frac{i_1}{T^{3/2}},$$

после чего [см. (4.14)] будем иметь

$$\frac{1}{x_0} = \sqrt{2\pi\rho_1\alpha} = 65 \cdot 10^5 \frac{i_1^{1/2}}{T^{3/4}}. \quad (4.25)$$

Подставляя α в (4.24) из выражения (4.12), получаем окончательно

$$u = -\frac{T}{2520} \lg \left(\frac{x}{x_0} + 1 \right) e. \quad (4.26)$$

Внося значение x_0 в выражение для напряженности электрического поля (4.17), получаем следующую формулу:

$$E = \frac{2}{\alpha} \cdot \frac{1}{x + x_0} = \frac{2}{\alpha} \cdot \frac{\sqrt{2\pi\rho_1\alpha}}{\sqrt{2\pi\rho_1\alpha} \cdot x + 1}.$$

Подставив в (4.17) значение α из выражения (4.12), получим

$$E = \frac{T}{5800} \cdot \frac{1}{x + x_0}. \quad (4.27)$$

Для выражения объемной плотности пространственного заряда из (4.18) находим

$$\rho = \frac{1}{2\pi\alpha \left(x + \frac{1}{\sqrt{2\pi\rho_1\alpha}} \right)^2} = \frac{\rho_1}{\left(\frac{x}{x_0} + 1 \right)^2}, \quad (4.28)$$

$$\rho = \frac{19260}{\left(\frac{x}{x_0} + 1 \right)^2} \cdot \frac{i_1}{\sqrt{T}} \text{ CGSE.}$$

Переходя к определению числа электронов в 1 см^3 , получим

$$N_0 = \frac{\rho}{e} = \frac{4040}{\left(\frac{x}{x_0} + 1 \right)^2} \frac{i_1}{\sqrt{T}} 10^{10}. \quad (4.29)$$

Пример. Предположим, что плоская пластинка вольфрама накалиена до 2300° K . Согласно формуле

$$i_1 = 60,2 T^2 e^{-\frac{52400}{T}} \text{ а/см}^2,$$

находим плотность тока излучения электронов

$$i_1 = 0,04 \text{ а/см}^2$$

и определяем постоянную $1/x_0$ (4.25)

$$\frac{1}{x_0} = \frac{65 \cdot 10^4 \cdot i_1^{1/2}}{T^{3/4}} = 392 \text{ см}^{-1}.$$

Подставляя значение $T = 2300^\circ \text{ K}$ в формулы для u (4.26), E (4.27) и N_0 (4.29), получаем следующие выражения:

$$u = -0,92 \lg (392 x + 1) e,$$

$$E = 0,397 \frac{392}{392x + 1} = \frac{155,5}{392x + 1} \text{ в/см},$$

$$N_0 = \frac{3,37 \cdot 10^{10}}{(392x + 1)^2} \text{ электрон / см}^3.$$

В табл. 4.1 приведены численные значения u , E и N на заданном расстоянии x от накалинного катода, рассчитанные по полученным формулам.

Таблица 4.1

Потенциал, напряженность электрического поля и плотность объемного заряда, образующиеся вокруг вольфрамового катода ($T = 2300^\circ \text{K}$) при плоских электродах

$x, \text{ см}$	$u, \text{ в}$	$E, \text{ в/см}$	$N, \text{ электрон/см}^3$	$x, \text{ см}$	$u, \text{ в}$	$E, \text{ в/см}$	$N, \text{ электрон/см}^3$
0	—0	155,5	$3,32 \cdot 10^{10}$	2	—2,66	0,198	$0,54 \cdot 10^5$
0,001	—0,129	111,6	$1,71 \cdot 10^9$	3	—2,83	0,1323	$2,4 \cdot 10^4$
0,01	—0,637	31,0	$1,372 \cdot 10^9$	4	—2,94	0,0992	$1,35 \cdot 10^4$
0,1	—1,475	3,87	$2,05 \cdot 10^7$	10	—3,3	0,0396	$2,16 \cdot 10^2$
1	—2,39	0,396	$2,15 \cdot 10^5$				

4.7. Пространственный заряд при цилиндрических электродах

Система электродов представляет собой цилиндрический анод и катод в виде накаленной нити, расположенной по оси цилиндра.

Уравнение Пуассона в прямоугольных координатах, характеризующее этот случай, имеет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -4\pi\rho$$

или запись в цилиндрических координатах с подстановкой

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} = -4\pi\rho_1 e^{\alpha u}.$$

Последнее приводится к виду (см. стр. 134)

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{du}{dr} \right) = -4\pi r \rho_1 e^{\alpha u}. \quad (4.30)$$

Для интегрирования этого уравнения производим подстановку

$$u = -\psi - \frac{1}{\alpha} \ln \left(\frac{r}{r_k} \right)^2. \quad (4.31)$$

Напомним, что r_k — радиус накаленного катода, величина α — постоянная.

Согласно этой подстановке,

$$\frac{du}{dr} = -\frac{d\psi}{dr} - \frac{2}{\alpha r}, \quad e^{\alpha u} = e^{-\alpha\psi - \ln \left(\frac{r}{r_k} \right)^2} = e^{-\alpha\psi} \left(\frac{r_k}{r} \right)^2$$

и

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{d\psi}{dr} + \frac{2}{\alpha} \right) = 4\pi r \rho_1 e^{-\alpha\psi} \left(\frac{r_k}{r} \right)^2$$

или

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{d\psi}{dr} \right) = 4\pi r \rho_1 e^{-\alpha\psi} \left(\frac{r_k}{r} \right)^2. \quad (4.32)$$

Далее вводим вместо r новую переменную $\omega = \ln r$ и, значит,

$$\frac{d\omega}{dr} = \frac{1}{r}. \quad (4.33)$$

Производим замену переменных в уравнении (4.32)

$$\frac{d}{d\omega} \frac{d\omega}{dr} \left(r \frac{d\psi}{d\omega} \cdot \frac{d\omega}{dr} \right) = 4\pi r \rho_1 e^{-\alpha\psi} \left(\frac{r_K}{r} \right)^2$$

или

$$\frac{1}{r} \frac{d}{d\omega} \frac{d\psi}{d\omega} = 4\pi \rho_1 r e^{-\alpha\psi} \left(\frac{r_K}{r} \right)^2.$$

Отсюда имеем

$$\frac{d^2\psi}{d\omega^2} = 4\pi \rho_1 e^{-\alpha\psi} r_K^2. \quad (4.34)$$

Таким образом нам удалось свести поставленную задачу к разобранному в предыдущем параграфе уравнению (см. стр. 137), решение которого дает возможность найти при помощи формул (4.32) и (4.34) функцию $\psi = f(\omega)$, а следовательно, и потенциал $u = f(r)$.

Умножив обе части полученного уравнения на $\frac{d\psi}{d\omega}$, получим

$$\frac{d\psi}{d\omega} \left(\frac{d^2\psi}{d\omega^2} \right) = \frac{1}{2} \frac{d}{d\omega} \left(\frac{d\psi}{d\omega} \right)^2 = 4\pi r_K^2 \rho_1 e^{-\alpha\psi} \frac{d\psi}{d\omega},$$

что дает после интегрирования

$$\left[\frac{d\psi}{d\omega} \right]^2 = \frac{8\pi r_K^2 \rho_1}{\alpha} e^{-\alpha\psi} + B_1, \quad (4.35)$$

где $\sqrt{B_1}$ имеет размерность потенциала.

Начальные условия интегрирования выберем для следующих групп параметров:

- 1) $r = r_K, u = 0, \psi = 0, \frac{du}{dr} = -E,$
- 2) $r = \infty, u = \infty, \frac{du}{dr} = 0, \rho = 0.$

На основании второй группы начальных условий имеем

$$\left| \frac{du}{dr} \right|_{r=\infty} = - \left| \frac{d\psi}{dr} \right|_{r=\infty} = 0.$$

Подставляя это в выражение (4.35), получим

$$\left(\frac{d\psi}{dr} \cdot \frac{dr}{d\omega} \right)_{r=\infty}^2 = \left(\frac{8\pi r_K^2 \rho_1}{\alpha} e^{-\alpha\psi} \right)_{r=\infty} + B_1,$$

откуда следует, что $B_1 = 0$.

После этого уравнение (4.35) запишем так:

$$\frac{d\psi}{d\omega} = \sqrt{\frac{8\pi r_K^2 \rho_1}{\alpha} e^{-\frac{\alpha}{2}\psi}} = A e^{-\frac{\alpha}{2}\psi}. \quad (4.36)$$

Разделяя переменные, получим

$$d\omega = \frac{1}{A} e^{\frac{\alpha}{2}\psi} d\psi \quad (4.37)$$

или (после интегрирования)

$$\omega = \frac{2e^{\frac{\alpha}{2}\psi}}{A\alpha} + B_2. \quad (4.38)$$

Подставляя сюда первую группу начальных условий и принимая во внимание уравнения (4.38) и нашу подстановку (4.33), найдем

$$\omega = \ln r_K = B_2 + \frac{2}{A\alpha}, \quad B_2 = \ln r_K - \frac{2}{A\alpha},$$

откуда следует, что

$$\omega = \frac{2}{A\alpha} (e^{\frac{\alpha}{2}\psi} - 1) + \ln r_K = \ln r$$

или

$$e^{\frac{\alpha}{2}\psi} - 1 = \frac{A\alpha}{2} \ln \frac{r}{r_K}, \quad e^{\frac{\alpha}{2}\psi} = \frac{A\alpha}{2} \ln \frac{r}{r_K} + 1 = \ln \left(\frac{r}{r_K} \right)^K + 1,$$

где

$$K = \frac{A\alpha}{2} = r_K \sqrt{2\pi\rho_1\alpha} = \frac{r_K}{x_0}, \quad (4.39)$$

на основании чего получим

$$\alpha\psi = \ln \left[1 + \ln \left(\frac{r}{r_K} \right)^K \right]^2, \\ \psi = \frac{1}{\alpha} \ln \left[1 + \ln \left(\frac{r}{r_K} \right)^K \right]^2.$$

В соответствии с (4.31) имеем

$$u = -\frac{1}{\alpha} \ln \left[1 + \ln \left(\frac{r}{r_K} \right)^K \right]^2 - \frac{1}{\alpha} \ln \left(\frac{r}{r_K} \right)^2 = \\ = -\frac{1}{\alpha} \ln \left[\frac{r}{r_K} + \frac{r}{r_K} \ln \left(\frac{r}{r_K} \right)^K \right]^2. \quad (4.40)$$

Переходя к десятичным логарифмам, запишем выражение для потенциала в данной точке в виде

$$u = -\frac{2 \cdot 2,3}{\alpha} \lg \left[\frac{r}{r_K} + 2,3 K \frac{r}{r_K} \lg \left(\frac{r}{r_K} \right) \right]. \quad (4.41)$$

Внося значение α из (4.12) и K из (4.39), получим

$$u = -\frac{T}{2520} \lg \left[\frac{r}{r_K} + 2,3 \frac{r}{x_0} \lg \left(\frac{r}{r_K} \right) \right]. \quad (4.42)$$

Напряженность электрического поля в данной точке получим, продифференцировав уравнение (4.40) по r . Тогда

$$E = -\frac{du}{dr} = \frac{2}{\alpha r} \frac{1 + K + K \ln \frac{r}{r_K}}{1 + K \ln \frac{r}{r_K}} \quad (4.43)$$

или, подставляя α и K ,

$$E = \frac{T}{5800 r} \frac{1 + \frac{r_K}{x_0} \left(1 + 2,3 \lg \frac{r}{r_K} \right)}{1 + \frac{r_K}{x_0} 2,3 \lg \frac{r}{r_K}}. \quad (4.44)$$

Распределение пространственного заряда определяется формулой (4.9)

$$\rho = \rho_1 e^{\alpha u},$$

что после подстановки u из (4.40) и формулы $e^{\ln x} = x$ дает

$$\rho = \rho_1 e^{-\ln \left[\frac{r}{r_K} + \frac{r}{r_K} \ln \left(\frac{r}{r_K} \right) K \right]^2} = \rho_1 \frac{\left(\frac{r_K}{r} \right)^2}{\left[1 + K \ln \left(\frac{r}{r_K} \right) \right]^2}. \quad (4.45)$$

Число электронов 1 см^3 будет равно [см. (4.29)]

$$N_0 = \frac{\rho_1}{e} \frac{\left(\frac{r_K}{r} \right)^2}{\left[1 + K \ln \left(\frac{r}{r_K} \right) \right]^2},$$

что приводится для расчета к следующему виду:

$$N_0 = \frac{4040 \cdot 10^{10} \frac{i_1}{\sqrt{T}} \left(\frac{r_K}{r} \right)^2}{\left[1 + \frac{r_K}{x_0} \ln \left(\frac{r}{r_K} \right) \right]^2}. \quad (4.46)$$

Пример. Накаленная вольфрамовая нить радиусом $r_K = 0,01 \text{ см}$ имеет температуру 2300° К . Найти распределение потенциала, напряженности электрического поля и объемного заряда.

Постоянная $1/x_0$ для температуры вольфрама 2300° вычислена нами в предыдущем примере

$$\frac{1}{x_0} = 392 \text{ см}^{-1},$$

на основании чего в соответствии с (4.41) получаем следующее выражение для распределения потенциала:

$$u = -0,92 \lg \left[\frac{r}{r_K} + 895 r \lg \left(\frac{r}{r_K} \right) \right] \text{ в}.$$

Далее с помощью (4.44) находим распределение напряженности электрического поля

$$E = \frac{0,397}{r} \frac{4,88 + 8,95 \lg \left(\frac{r}{r_K} \right)}{1 + 8,95 \lg \left(\frac{r}{r_K} \right)}$$

и, согласно (4.46), количество электронов в единице объема

$$N_0 = \frac{3,37 \cdot 10^{10} \left(\frac{r_K}{r} \right)^2}{\left[1 + 8,95 \lg \left(\frac{r}{r_K} \right) \right]^2}.$$

Численные значения u , E и N_0 при различных значениях r приведены в табл. 4.2.

Таблица 4.2

Потенциал, напряженность электрического поля и плотность объемного заряда, образующиеся вокруг накаливаемого вольфрамового катода ($T = 2300^\circ \text{K}$)

$r, \text{ см}$	$u, \text{ в}$	$E, \text{ в/см}$	$N_{\text{в}},$ электронов/см ³	$r, \text{ см}$	$u, \text{ в}$	$E, \text{ в/см}$	$N_{\text{в}},$ электронов/см ³
0,01	0	194	$3,32 \cdot 10^{10}$	2	-3,34	0,234	$1,78 \cdot 10^3$
0,1	-1,84	5,52	$3,36 \cdot 10^5$	5	-3,77	0,0916	$2,12 \cdot 10^2$
1	-3,01	0,478	$9,3 \cdot 10^3$	10	-4,06	0,0453	$4,2 \cdot 10^{-1}$

4.8. Анодный ток при плоских электродах

Вследствие наличия пространственного заряда между электродами ток в цепи анода будет мал. Прилагая к аноду постоянное напряжение, мы компенсируем действие пространственного заряда и увеличиваем силу анодного тока, причем только до некоторого предела, а именно, до тока насыщения, определяемого количеством электронов, излучаемых с единицы поверхности нити при данной температуре накала T . Для определения зависимости между i_a и u_a предположим, что потенциал катода равен нулю и, значит, напряженность электрического поля E на его поверхности тоже равна нулю. Расположим ось Ox перпендикулярно к поверхности анода. Если объемная плотность пространственного заряда равна ρ , то уравнение Пуассона запишется так:

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = -4\pi\rho \quad (4.47)$$

и сила анодного тока

$$i_a = \rho \frac{dx}{dt} = \rho v, \quad (4.48)$$

причем v — скорость — определится из уравнения

$$\frac{1}{2}mv^2 = eu. \quad (4.49)$$

Исключая ρ и v из (4.47), (4.48) и (4.49), получаем

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = -\frac{i_a}{\sqrt{2 \frac{e}{m}}} \frac{4\pi}{\sqrt{u}}. \quad (4.50)$$

Умножая обе части этого уравнения на $\frac{du}{dx}$, предыдущее уравнение запишем так:

$$d \left(\frac{du}{dx} \right)^2 = \frac{A}{\sqrt{u}} du,$$

где

$$A = -\frac{4 \sqrt{2} \pi i_a}{\sqrt{\frac{e}{m}}},$$

откуда после интегрирования получаем

$$\left[\frac{du}{dx} \right]^2 = 2A u^{1/2} + B_1. \quad (4.51)$$

Из условия $x = 0, u = 0$ и $E = -\frac{du}{dx} = 0$ получаем $B_1 = 0$, после чего, разделяя переменные и интегрируя вторично выражение (4.51), будем иметь

$$\frac{4}{3} u^{3/2} = \sqrt{2A} x + B_2.$$

Из условия $x = 0, u = 0$ имеем $B_2 = 0$, таким образом

$$\left(\frac{4}{3}\right)^2 u^{3/2} = \frac{8 \sqrt{2} \pi i_a}{\sqrt{\frac{e}{m}}} x^2 = 8 \pi i_a \sqrt{2 \frac{m}{e}} x^2, \quad (4.51a)$$

откуда

$$i_a = \frac{1}{9\pi} \sqrt{2 \frac{e}{m}} \frac{u^{3/2}}{x^2}. \quad (4.52)$$

Если x будет равно расстоянию между электродами ($x = d$), то $u = u_a$ и

$$i_a = \frac{1}{9\pi} \sqrt{2 \frac{e}{m}} \frac{u_a^{3/2}}{d^2} \quad (4.52a)$$

или в практических единицах

$$i_a = 2,336 \cdot 10^{-6} \frac{u_a^{3/2}}{d^2} \text{ а/см}^2. \quad (4.52б)$$

Рассмотрим пример. Пусть $T = 2400^\circ \text{ К}$, $d = 0,5 \text{ см}$. Сравнение результатов, полученных из формулы (4.52б), с результатами опытов, произведено в табл. 4.3 (данные из журнала Physical Review 17, 441, 1921).

Таблица 4.3

Опытные и расчетные данные тока анода

$u_a, \text{ в}$	$i_a \text{ оп., а/см}^2$	$i_a \text{ расч., а/см}^2$	$\frac{i_a \text{ оп.}}{i_a \text{ расч.}}$
2,5	$0,16 \cdot 10^{-3}$	$0,0379 \cdot 10^{-3}$	4,22
24,2	$0,16 \cdot 10^{-2}$	$0,1122 \cdot 10^{-2}$	1,424
131,5	$0,16 \cdot 10^{-1}$	$0,141 \cdot 10^{-1}$	1,34
645	0,16	0,153	1,045

Выражение силы тока дает возможность определить все интересующие нас величины.

Сравнивая уравнения (4.52) и (4.52a), находим потенциал, соответствующий данной точке x ,

$$u = u_a \left(\frac{x}{d}\right)^{4/3}. \quad (4.53)$$

На основании этого выражения можно рассчитать распределение потенциала между электродами.

Далее определим распределение напряженности электрического поля.

Так как $E = -\frac{du}{dx}$, то из (4.53) получим, что

$$E = -\frac{4}{3} \frac{u_a}{d} \left(\frac{x}{d}\right)^{1/3} = \frac{4}{3} E_a \left(\frac{x}{d}\right)^{1/3}. \quad (4.54)$$

Величину скорости движения электрона находим, подставив в выражение $\frac{1}{2} mv^2 = eu$ значение u из уравнения (4.51a)

$$v = (4\pi i_a)^{1/3} \left(2 \frac{e}{m}\right)^{1/3} \left(\frac{3}{2}\right)^{2/3} x^{2/3},$$

или на основе (4.53)

$$v = v_a \left(\frac{x}{d}\right)^{2/3},$$

где v_a — скорость, которую электрон получает у анода.

Принимая во внимание, что

$$v_a = \sqrt{2u_a \frac{e}{m}} = 0,595 \cdot 10^8 \sqrt{u_a},$$

получим

$$v = 5,95 \cdot 10^7 \sqrt{u_a} \left(\frac{x}{d}\right)^{2/3} \text{ см/сек.}$$

Наконец, объемная плотность тока определится выражением

$$\rho_a = \frac{i_a}{v} = \frac{i_a^{2/3}}{(4\pi)^{1/3} \left(2 \frac{e}{m}\right)^{1/3} \left(\frac{3}{2}\right)^{2/3} x^{2/3}}.$$

Объемная плотность вблизи анода будет равна

$$\rho_a = \frac{i_a^{2/3}}{(4\pi)^{1/3} \left(2 \frac{e}{m}\right)^{1/3} \left(\frac{3}{2}\right)^{2/3} d^{2/3}},$$

откуда находим

$$\rho = \rho_a \left(\frac{d}{x}\right)^{2/3}.$$

Нетрудно доказать, что

$$\rho_a = \frac{i_a}{v_a} = \frac{i_a}{\sqrt{2u_a \frac{e}{m}}} = \frac{1}{9\pi} \frac{u_a}{d^2}$$

или же

$$\rho = \frac{1}{9\pi} \frac{u_a}{d^2} \left(\frac{d}{x}\right)^{2/3}.$$

Пример расчета силы тока, напряжения анода и мощности, выделяемой на аноде лампы. Допустим, что мы имеем двухэлектродное устройство из двух вольфрамовых пластинок площадью по 1 см^2 на расстоянии $d = 0,25 \text{ см}$. Температура катода равна 2300° К . Найдим ток излучения электронов (ток эмиссии):

$$i = 60,2 T^2 e^{-\frac{b}{T}} \quad (b = 52\,400), \\ i = 0,042 \text{ а/см}^2.$$

Для того чтобы получить это значение силы тока, необходимо определить разность потенциалов между катодом и анодом

$$u_a^{3/2} = \frac{i_a d^2}{2,336 \cdot 10^{-6}} = 1126; \quad u_a = 108 \text{ в.}$$

Скорость, приобретаемая электроном у анода, будет равна

$$v_a = 5,95 \cdot 10^7 \sqrt{108} = 6,17 \cdot 10^8 \text{ см/сек.}$$

На рис. 4.5 вычерчены кривые распределения напряженности электрического поля, скорости электронов, объемного заряда и потенциала между

электродами. Пунктирной прямой $\frac{u}{u_a} = \frac{x}{d}$ показано распределение потенциала, которое получилось бы, если бы мы имели аналогичный плоский конденсатор, т. е. ненакаленные пластинки в тех же условиях.

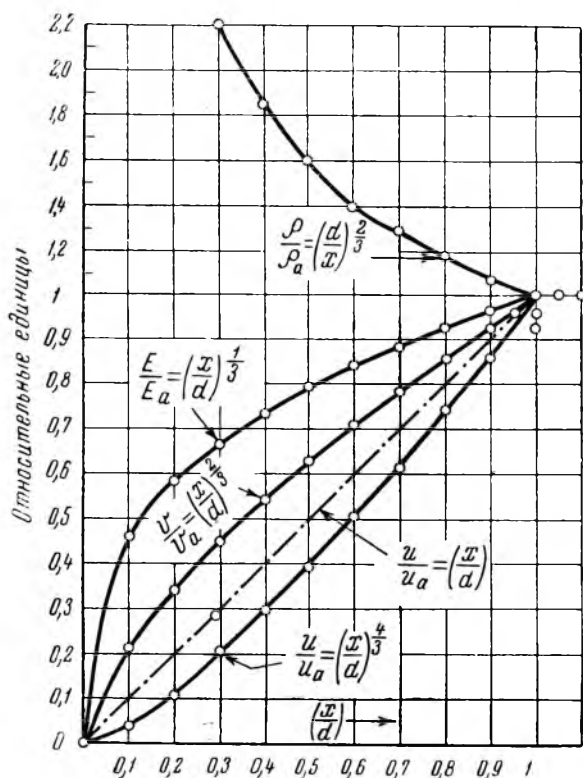


Рис. 4.5

Электроны, ударяясь об анод, отдают последнему свою кинетическую энергию, которая тратится на повышение кинетической энергии частиц металла анода и повышает его температуру. Мощность, выделяющаяся с 1 см^2 анода, определится следующим выражением:

$$\omega_a = i_a u_a = 2,336 \cdot 10^{-6} \frac{u_a^{3/2}}{d^2} \text{ вт/см}^2.$$

Принимая данные предыдущего примера, найдем

$$\omega_a = 2,336 \cdot 10^{-6} \frac{234^{3/2}}{0,25^2} = 7 \text{ вт/см}^2.$$

4.9. Анодный ток при цилиндрических электродах

Для данного случая уравнение Пуассона имеет вид [см. (4.7а)]

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{du}{dr} \right) = -4\pi r,$$

а сила тока на погонную единицу длины цилиндра будет

$$i_a = 2\pi r v,$$

где v — скорость электронов — определяется из выражения $\frac{mv^2}{2} = ue$.

Исключая ρ и v , получим

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{du}{dr} \right) = i_a \sqrt{\frac{m}{e}} \frac{2}{u}. \quad (4.55)$$

Предположим, что решение уравнения (4.55) по аналогии с выражением (4.52) имеет вид

$$i_a = \frac{\sqrt{2}}{9\pi} \sqrt{\frac{e}{m}} \frac{u_a^{3/2}}{r\beta^2} a/cm^2. \quad (4.56)$$

Следовательно, чтобы найти выражения для анодного тока, нужно найти β . Из уравнения (4.56) получаем

$$u_a = \left(\frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{9\pi} \sqrt{\frac{e}{m}}} \right)^{2/3} r^{2/3} \beta^{4/3} i_a^{2/3} = k r^{2/3} \beta^{4/3} i_a^{2/3}, \quad (4.57)$$

где

$$k = \left[\frac{9\pi}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{m}{e}} \right]^{3/2}.$$

Находя $\frac{du_a}{dr}$ и $\frac{d^2u_a}{dr^2}$ и полагая $i_a = 1$, получим

$$3\beta r^2 \frac{d^2\beta}{dr^2} + r^2 \left(\frac{d\beta}{dr} \right)^2 + 4\beta r \frac{d\beta}{dr} + \beta^2 - 1 = 0. \quad (4.58)$$

Пусть r_k — радиус катода. Применяя подстановку $r = r_k e^\gamma$, где $\gamma = \ln \frac{r}{r_k}$, получаем из (4.58)

$$3\beta \frac{d^2\beta}{d\gamma^2} + \left(\frac{d\beta}{d\gamma} \right)^2 + 4\beta \frac{d\beta}{d\gamma} + \beta^2 - 1 = 0. \quad (4.59)$$

Чтобы определить β , предположим, что оно представляется рядом

$$\beta = \gamma + A\gamma^2 + B\gamma^3 + C\gamma^4 + D\gamma^5 + \dots \quad (4.60)$$

Определив $\frac{d\beta}{d\gamma}$ и $\frac{d^2\beta}{d\gamma^2}$ из (4.60) и подставляя их в (4.59), получим

$$(10A + 4)\gamma + (10A^2 + 12A + 24B + 1)\gamma^2 + \dots = 0.$$

Окончательно выражение для β примет вид

$$\beta = \ln \frac{r}{r_k} - \frac{2}{5} \left[\ln \frac{r}{r_k} \right]^2 + \frac{11}{120} \left[\ln \frac{r}{r_k} \right]^3 - \frac{47}{3300} \left[\ln \frac{r}{r_k} \right]^4 \pm \dots \quad (4.61)$$

Расчетные данные коэффициента β приведены в табл. 4.4

Таблица 4.4

Расчетные данные зависимости коэффициента $\beta^2 = f\left(\frac{r}{r_k}\right)$

$\frac{r}{r_k}$	β^2	$\frac{r}{r_k}$	β^2	$\frac{r}{r_k}$	β^2	$\frac{r}{r_k}$	β^2
7	0,8870	12	1,0122	44,70	1,0945	735,1	1,0225
8	0,9252	16	1,0513	66,69	1,0889	2440	1,0064
9	0,9547	20,09	1,0718	121,5	1,0722	22026	0,9990
10	0,9783	29,96	1,0908	221,4	1,0531	—	—

Точно так же, как и в случае плоских электродов, выражение (4.56) дает возможность детально исследовать все величины

$$u^{3/2} = \frac{i_a r \beta^2}{14,65 \cdot 10^{-6} l},$$

$$u_a^{3/2} = \frac{i_a r_a \beta_a^2}{14,65 \cdot 10^{-6} l}.$$

Последние два выражения определяют распределение потенциала между электродами:

$$\left(\frac{u}{u_a} \right)^{3/2} = \left(\frac{r}{r_a} \right) \frac{\beta^2}{\beta_a^2}. \quad (4.62)$$

Теперь можно найти выражение для напряженности электрического поля между электродами, а именно

$$E = -\frac{du}{dr} = -u_a \left[\frac{2}{3} \frac{\beta^{3/2}}{\beta_a^{3/2}} \left(\frac{r}{r_a} \right)^{-1/2} \frac{1}{r_a} + \left(\frac{r}{r_a} \right)^{1/2} \frac{d\beta}{\beta_a^{3/2}} \frac{4}{3} \beta^{1/2} \right]. \quad (4.63)$$

Что касается распределения скоростей потока электронов, то, так как тепловые скорости электронов малы по сравнению со скоростью, приобретаемой под воздействием потенциала электрического поля между электродами, можно написать уравнение

$$\frac{mv^2}{2} = ue, \quad (4.64)$$

отсюда, подставляя значение потенциала из выражения (4.62) в данной точке, получим для квадрата скорости

$$v^2 = 2 \frac{e}{m} \left(\frac{r}{r_a} \frac{\beta^2}{\beta_a^2} \right)^{1/2} u_a. \quad (4.65)$$

Наконец, распределение объемного заряда получится из выражения

$$i_a = 2\pi r v$$

или

$$\rho = \frac{i_a}{2\pi r v}. \quad (4.66)$$

Подставляя i_a и v из уравнений (4.56) и (4.65), находим

$$\rho = \frac{u_a}{18\pi^2 r^2 \beta^2 \left(\frac{r}{r_a} \frac{\beta^2}{\beta_a^2} \right)^{1/2}}, \quad (4.67)$$

или, принимая во внимание плотность объемного заряда на аноде при $\beta = \beta_a$ и $r = r_a$, получим

$$\frac{\rho}{\rho_a} = \frac{\beta_a^2 r_a^2}{\beta^2 r^2 \left(\frac{r}{r_a} \frac{\beta^2}{\beta_a^2} \right)^{1/2}}. \quad (4.68)$$

Переходя к практическим единицам, рассчитаем ток на всю длину катода l при его радиусе r_k , равно, положим, $\beta^2 = 1$, что при $\frac{r_a}{r_k} \geq 12$ является

достаточно точным приближением. Получим

$$i_a = 14,65 \cdot 10^{-6} \frac{l}{r_a} u_a^{3/2} a. \quad (4.69)$$

Пример. Радиус катода $r_k = 0,25$ мм. Анод молибденовый, диаметром $2 r_a = 2,54$ см. Рабочая длина анода $l = 7,62$ см; тогда по формуле (4.69) $i_a = 87,8 \cdot 10^{-3} \cdot u_a^{3/2} a$.

В табл. 4.5 приведено сравнение расчета с опытными данными Дешмана (Phys. Zeitschrift, 15, 689, 1914).

Т а б л и ц а 4.5

Опытные и расчетные характеристики вольфрамового катода

$T^{\circ}K$	2240	2300	2340	2400	2450	2480	2400	2430	2512	2520	2540
$u, \text{ в}$	35	35	55,5	68	87,2	89	93,5	108,5	115	129	135
$i_a \text{ оп., ма}$	17	17,3	34	48	71	72	81	98	108	130	144
$i_a \text{ расч., ма}$	18,2	18,2	36	49	72,5	74	80	100	109	130	144

Как видно из табл. 4.5, совпадение с опытом получается удовлетворительное.

4.10. Анодный ток при электродах произвольной формы

Рассмотрим некоторую систему электродов, в которых при некотором потенциале u_a получается максимум тока i_a (ток насыщения). Уравнение Пуассона для такой системы электродов произвольной формы запишем в общем виде

$$\frac{\partial^2 u_a}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_a}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_a}{\partial z^2} = -4\pi\rho.$$

Сила анодного тока будет

$$i_a^1 = \rho v, \quad (4.70)$$

где v — скорость электронов — определяем, как и выше, уравнением

$$v = \sqrt{2u_a \frac{e}{m}}. \quad (4.71)$$

Повышая напряжение в n раз, соответственно повысим и силу тока i_a в $n^{3/2}$ раз [(см. 4.69)]. Тогда уравнения (4.70) и (4.71) примут вид

$$i_a n^{3/2} = \rho v, \quad v = \sqrt{2n u_a \frac{e}{m}}.$$

Исключая v , получим

$$\rho = n i_a^1 \sqrt{\frac{m}{2u_a e}}, \quad (4.72)$$

т. е. объемная плотность пространственного заряда изменилась в n раз и, следовательно, уравнение (4.70) удовлетворяется по-прежнему, так как и u_a изменилось в n раз. Следовательно, увеличение i_a в $(n)^{3/2}$ раза и u_a в n

раз приводит к условиям, удовлетворяющим уравнения (4.70) и (4.71). т. е. i_a пропорционально $u_a^{3/2}$ независимо от конструкции электродов, иначе

$$i_a = k u_a^{3/2}, \quad (4.73)$$

где k — коэффициент, зависящий от геометрической формы электродов.

4.11. Метод расчета анодного тока для случая плоских электродов с учетом начальных скоростей электронов, излучаемых накалившимся телом *

При выводе силы тока анодной цепи мы предполагаем, что скорость электронов при выходе их с поверхности катода равна нулю. Такое предположение привело к тому, что сила тока пропорциональна разности потенциалов между анодом и катодом в степени трех вторых. Рядом авторов был произведен анализ для выяснения влияния начальных скоростей электронов, излучаемых накаленной поверхностью, на зависимость между i_a и u_a . Шоттки производил приблизительное вычисление, принимая во внимание влияние начальных скоростей для случая малых сил токов. Эпштейн, анализируя явления между параллельными плоскостями, дает исчерпывающее рассмотрение влияния начальных скоростей и приводит таблицы, предназначенные для облегчения расчета. К сожалению, Эпштейн допустил ошибку при введении постоянной Больцмана ($k = 1,38 \cdot 10^{-16}$ эрг/град) и, чтобы пользоваться его уравнениями, необходимо всюду ввести $2k$. Фрей, рассматривая ту же задачу, что и Эпштейн, и не будучи знаком, по всей вероятности, с предыдущими работами последнего, получает сходные результаты. Однако уравнения Фрея приводятся в такой громоздкой и сложной форме, что применение их затруднительно. Это привело и самого Фрея к серьезным ошибкам в его расчетах. Летом 1913 г. по предложению Ленгмюра Адамс предпринял исследование задачи о пространственном заряде, принимая во внимание распределение начальных скоростей излучаемых электронов согласно закону Максвелла, и получил правильное и полное решение задачи.

Рассмотрим тот же случай, который имел место у Эпштейна, Фрея и Адамса, а именно случай электродов в виде бесконечных параллельных поверхностей. Пусть накаленный катод упомянутой формы излучает электроны согласно закону Максвелла. Пусть анод имеет положительный потенциал (по отношению к катоду), такой, что анодный ток меньше тока насыщения. В согласии с обычным выводом уравнения Ричардсона предположим, что каждая единица объема металла содержит N_0 электронов. Закон Максвелла определяет число dN_0 электронов в этом объеме, имеющих составляющую скорости по оси Ox , лежащую в пределах между v и $v + dv$:

$$dN_0 = N_0 \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv. \quad (4.74)$$

Изложенное предположение, сделанное Эпштейном, требует знания внутренней структуры металла катода, которая нам не известна. Однако сделанное предположение математически эквивалентно следующему, получившему экспериментальное подтверждение в работах Ричардсона и других.

Пусть число электронов, испускаемых в единицу времени единицей поверхности плоского катода, равно N_1 . Тогда, согласно закону распределения скоростей, число электронов dN_1 , излучаемых единицей поверхности катода в единицу времени и имеющих скорость, нормальную к поверхности

* Эта часть рукописи написана М. В. Шулейкиным до 1923 г. (Прим. составителя)

катода и лежащую в пределах v и $v + dv$, равно

$$dN_1 = N_1 \frac{mv}{2kT} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv. \quad (4.74a)$$

Если ток в цепи анода меньше тока насыщения, то, очевидно, это результат того, что вблизи поверхности катода существует некоторое задерживающее поле, которое принуждает наиболее медленные электроны двигаться обратно к катоду. Если потенциал анода положителен, то, естественно, при этом между катодом и анодом должна существовать поверхность, обладающая минимумом потенциала. Принимая нормаль к поверхности катода за ось Ox , обозначим через x_k , x_m и x_a соответственно координаты поверхности катода, поверхности наименьшего потенциала и анода. Соответственные значения потенциалов обозначим через u_k , u_m и u_a .

Пусть i_s есть ток насыщения, получаемый от катода при очень высоких потенциалах анода. Электроны, число которых соответствует току i_s , непрерывно излучаются катодом даже и в том случае, когда ток меньше тока насыщения, но некоторая часть их при этом возвращается обратно к катоду.

Действительный ток, который течет между катодом и анодом, обусловливается теми электронами, скорости которых достаточны, чтобы преодолеть разность потенциалов $u_k - u_m$. При помощи уравнений (4.74) и (4.74a) и учитывая, что произведение количества электронов на их скорость определяет ток, после интегрирования получаем

$$i = i_s e^{-\frac{e(u_k - u_m)}{kT}}. \quad (4.75)$$

Рассмотрение данной задачи Адамсом, Эпштейном и Фреем основано на следующих положениях.

Между x_k и x_m существуют две группы электронов: одна движется по направлению к аноду, другая — по направлению к катоду.

Что касается первой группы, то в ней существуют все значения скоростей согласно закону Максвелла от 0 до ∞ . Каждый электрон теряет часть скорости, пока движется в задерживающем поле, причем наиболее медленные электроны возвращаются обратно к катоду. Что касается электронов второй группы, то, рассматривая слагающую скорости, нормальную к поверхности, мы видим, что здесь существуют не все скорости, так как скорость, приобретаемая в любой точке пространства между катодом и плоскостью, проходящей через минимум потенциала, не может превосходить скорости, соответствующей разности потенциалов $u_k - u_m$. В пространстве между x_m и x_a электроны движутся только от катода к аноду.

Каждый из электронов будет иметь наименьшую скорость в плоскости, проходящей через x_m , т. е. через минимум потенциала, так как тормозящее действие минимума потенциала здесь будет иметь наибольшее значение.

Скорость любого электрона, летящего от катода к минимуму потенциала, в плоскости минимума уменьшится на

$$\Delta v_{\text{макс}} = \sqrt{\frac{2e(u_k - u_m)}{m}},$$

что следует из уравнения

$$\frac{mv^2}{2} = e(u_k - u_m).$$

Следовательно, в любой точке междуэлектродного пространства, имеющей потенциал $u \neq u_m$, т. е. не лежащей на плоскости минимума потенциала, скорость электрона будет больше, чем в месте расположения этой плоскости.

Изложенное относительно распределения скоростей было принято во внимание при выборе пределов интегрирования уравнений (4.74) и (4.74a)

Первый шаг в математическом решении заключается в расчете пространственного заряда или плотности электронов в любой точке при помощи упомянутого интегрирования.

Уравнение Пуассона

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = -4\pi\rho \quad (4.76)$$

требует выполнения двух интегрирований для определения распределения потенциала.

Первый интеграл может быть выражен при помощи интеграла вероятностей, но второй требует численного расчета некоторых новых функций. В связи с этим необходимо выбрать значения для постоянных интегрирования. Для первого интеграла используем условия: при $u = u_m$, $du/dx = 0$, а для другого — условие при $x = x_m$, $u = u_m$.

Первое из этих условий исключает возможность применения полученных далее уравнений в том случае, когда между анодом и катодом не существует минимума потенциала. Например, распределение потенциала между двумя электродами с потенциалом, несколько большим потенциала насыщения, не может быть рассчитано предлагаемым способом. Если в этом случае мы установим особые условия для определения постоянных интегрирования, то все-таки первое интегрирование не может быть выполнено; точно так же нельзя воспользоваться уравнениями, получившимися из этих расчетов, если тормозящее поле распространяется за пределы анода (т. е. если минимум потенциала располагается за анодом).

Прежде чем производить числовые расчеты, требуемые при первом интегрировании, желательно привести уравнение к такому виду, при котором в них будут входить относительные величины, т. е. только числа. Это выполняется введением новых переменных, а именно:

$$\eta = \frac{e(u - u_m)}{kT} \quad (4.77)$$

и

$$\xi = 4 \left(\frac{1}{2kT} \right)^{3/4} \pi^{3/4} m^{1/4} (ei)^{1/2} (x - x_m). \quad (4.78)$$

Первое из этих новых переменных η равно отношению разности между потенциалом u в произвольной точке x междуэлектродного пространства и потенциалом минимума u_m к потенциалу u_b , характеризующему энергию электронов, имеющих наивероятнейшую скорость $\left(\eta = \frac{u - u_m}{u_b} \right)$.

Действительно, из основного уравнения равенства кинетической и потенциальной энергии

$$\frac{mv^2}{2} = eu$$

следует, что энергия электронов, обладающих наивероятнейшей скоростью v_b , характеризуется потенциалом

$$\frac{mv_b^2}{2} = eu_b.$$

Учитывая, что наивероятнейшее значение скорости электронов при температуре T равняется

$$v_b = \sqrt{\frac{2kT}{m}},$$

получим

$$u_b = \frac{mv_b^2}{2e} = \frac{kT}{e},$$

откуда

$$\eta = \frac{e(u - u_m)}{kT} = \frac{u - u_m}{u_B} . \quad (4.79)$$

Таким образом, по физическому смыслу переменная η является относительной мерой потенциала некоторой точки междуэлектродного пространства по отношению к минимуму потенциала.

Выражая u и u_m в вольтах, а T в градусах Кельвина, получим

$$\eta = 11600 \frac{u - u_m}{T} . \quad (4.79a)$$

Вторая переменная ξ является относительной мерой расстояния произвольной точки x междуэлектродного пространства, потенциал которой равен u , от минимума потенциала (т. е. от x_m).

Действительно, обозначив через l выражение

$$l = \frac{1}{4 \left(\frac{1}{2kT} \right)^{3/4} \pi^{3/4} m^{1/4} (ei)^{1/2}} , \quad (4.80)$$

получим, что

$$\xi = \frac{x - x_m}{l} , \quad (4.81)$$

где единицей линейного масштаба служит l , имеющее размерность в сантиметрах.

Заслуживает внимания, что величина нашей единицы линейного масштаба l зависит как от температуры катода, так и от удельного анодного тока i , т. е. от анодного тока, отнесенного к единице (1 см^2) поверхности катода.

Выражая удельный анодный ток в амперах, получим

$$\frac{1}{l_i} = 9,18 \cdot 10^5 \cdot T^{-3/4} i^{1/2} \text{ см}^{-1} \quad (4.82)$$

и

$$\xi = 9,18 \cdot 10^5 \cdot T^{-3/4} i^{1/2} (x - x_m).$$

Учитывая, что при $x = x_m$ величины $\xi = 0$, $u = u_m$ и $\eta = 0$, получим, что в принятой нами относительной системе начало координатной оси абсцисс лежит в точке минимума потенциала, причем положительным значениям ξ соответствуют точки, расположенные между минимумом потенциала и анодом, и отрицательным значениям ξ — точки, лежащие между минимумом потенциала и катодом.

Те же самые переменные использует Фрей, хотя он пишет их в символах, отличающихся от выражений (4.77) и (4.78). Эпштейн дает уравнения в несколько иной форме, пользуясь переменными τ и g , которые связаны с ξ и η соотношениями

$$\tau = \pm \sqrt{\eta}, \quad g = \pm \frac{1}{2} \xi.$$

Вводя переменные ξ и η , получим второй интеграл в виде

$$\xi = \pm \int_0^\eta \frac{d\eta}{[e^\eta - 1 + e^{\eta P} (\sqrt{\eta}) \mp \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\eta}]^{1/2}} . \quad (4.83)$$

В данном уравнении верхние знаки соответствуют точкам, расположенным между катодом и минимумом потенциала, когда

$$(x - x_m) < 0,$$

и нижние знаки соответствуют точкам, лежащим между минимумом потенциала и анодом, где

$$(x - x_m) > 0.$$

В выражении (4.83) $P(\sqrt{\eta})$ есть так называемый интеграл вероятности Гаусса

$$P(\sqrt{\eta}) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{\eta}} e^{-\eta^2} d\eta. \quad (4.84)$$

Интеграл (4.83) вычисляется по правилу трапеций (Симпсон и Ведла). Для всех значений η больше трех отрицательное значение ξ определяется с точностью до единицы в пятом десятичном знаке из выражения

$$\xi = -2,55389 + \sqrt{2}e^{-1/2\eta} - 0,0123e^{-\eta} + \frac{1}{3\sqrt{2}} \left(\frac{\sqrt{\eta}}{\pi} + 1 \right) e^{-3/2\eta}. \quad (4.85)$$

Для положительных значений ξ с точностью до единицы в четвертом десятичном знаке при $\eta > 8$ применяется следующая формула:

$$\begin{aligned} \xi = & 1,2552 \eta^{3/4} + 1,66854 \eta^{1/4} - 0,5088 - 0,1677 \eta^{-1/4} + 0,1441 \eta^{-3/4} - \\ & - 0,0145 \eta^{-5/4} - 0,069 \eta^{-7/4} + 0,036 \eta^{-9/4} + 0,083 \eta^{-11/4}. \end{aligned} \quad (4.86)$$

Коэффициент первого члена равен $\frac{2}{3}\sqrt{2\pi^{1/4}}$, так что в первом приближении для больших значений $\eta > 8$ имеем

$$\xi = \frac{2}{3}\sqrt{2\pi^{1/4}}\eta^{3/4}. \quad (4.87)$$

Подставляя найденное значение ξ (4.87) в уравнение (4.78), возводим последнее в квадрат и подставляем η из уравнения (4.77). Пренебрегая далее u_m и x_m по сравнению с u и x , получаем

$$i = \frac{\sqrt{2}}{9\pi} \sqrt{\frac{e}{m}} \frac{u^{3/2}}{x^2}, \quad (4.87a)$$

т. е. уравнение, встречавшееся уже ранее [см. (4.52)].

Если мы примем во внимание второй член разложения (4.86), а также значения u_m и x_m , то тем же путем получим

$$\begin{aligned} i &= \frac{\sqrt{2}}{9\pi} \sqrt{\frac{e}{m}} \frac{(u - u_m)^{3/2}}{(x - x_m)^2} \left(1 + \frac{2,66}{\sqrt{\eta}} \right) = \\ &= 2,33 \cdot 10^{-6} \frac{(u - u_m)^{3/2}}{(x - x_m)^2} \left(1 + \frac{2,66}{\sqrt{\eta}} \right). \end{aligned} \quad (4.88)$$

Ход расчета анодного напряжения, соответствующего заданной силе тока анодной цепи, получается следующий.

Из уравнений (4.75) и (4.77) находим (при $u = u_k$) соотношение

$$\sqrt{\eta} = \ln \frac{i_s}{i} = 2,3 \lg \frac{i_s}{i}. \quad (4.89)$$

Это уравнение позволяет при заданной силе тока i и известном токе эмиссии получить значение параметра η на катode, которое мы будем обозначать через η_1 (табл. 4.6). Напомним, что сила тока эмиссии зависит от

температуры и физической природы катода и определяется по следующей формуле:

$$i_s = 60,2 T^2 e^{-\frac{b}{T}} a / \text{см}^2.$$

По значению силы тока i вычисляем постоянную $1/l$ см. [(4.82)].

По табл. 4.6 для данной величины η_1 находим $-\xi_1$.

Таблица 4.6 *

Расчетные данные коэффициентов η и ξ

η	$\xi < 0 (-\xi)$	$\xi > 0 (+\xi)$	η	$\xi < 0 (-\xi)$	$\xi > 0 (+\xi)$
0	0	0	6,5	2,4990	7,1924
0,05	0,4281	0,4657	7	2,5112	7,5345
0,1	0,5941	0,6593	7,5	2,5206	7,8690
0,15	0,7167	0,8296	8	2,5280	8,1963
0,2	0,8170	0,9674	9	2,5382	8,8323
0,25	0,9028	1,0909	10	2,5444	9,4463
0,3	0,9785	1,2042	11	2,5481	10,0417
0,35	1,0464	1,3098	12	2,5504	10,6204
0,4	1,1081	1,4092	13	2,5518	11,1845
0,45	1,1648	1,5025	14	2,5526	11,7355
0,5	1,2173	1,5936	15	2,5531	12,2747
0,6	1,3120	1,7636	16	2,5534	12,8032
0,7	1,3956	1,9224	18	2,5537	13,8313
0,8	1,4704	2,0725	20	2,5538	14,8260
0,9	1,5380	2,2154	25	2,5539	17,1931
1,0	1,5996	2,3522	30	2,5539	19,4253
1,1	1,6561	2,4839	35	2,5539	21,5522
1,2	1,7081	2,6110	40	2,5539	23,5939
1,4	1,8009	2,8539	45	2,5539	25,5643
1,6	1,8813	3,0842	50	2,5539	27,474
1,8	1,9515	3,3040	60	2,5539	31,141
2,0	2,0134	3,5151	70	2,5539	34,642
2,2	2,0681	3,7187	80	2,5539	38,007
2,4	2,1168	3,9158	90	2,5539	41,258
2,6	2,1602	4,1071	100	2,5539	44,412
2,8	2,1990	4,2934	150	2,5539	59,086
3,0	2,2338	4,4750	200	2,5539	72,479
3,2	2,2650	4,6524	300	2,5539	96,877
3,4	2,2930	4,8261	400	2,5539	119,185
3,6	2,3183	4,9963	500	2,5539	140,068
3,8	2,3410	5,1634	600	2,5539	159,886
4,0	2,3615	5,3274	700	2,5539	178,861
4,5	2,4044	5,7259	800	2,5539	197,146
5,0	2,4376	6,1098	900	2,5539	214,850
5,5	2,4634	6,4811	1000	2,5539	232,054
6,0	2,4834	6,8416			

* Таблица взята из работ Ленгмюра и Блодгетта. Phys. Rev., 24, 49, 1924. (Прим. составителя)

Чтобы определить абсциссу минимума потенциала x_m , используется уравнение (4.81), из которого получим для поверхности катода

$$\xi_1 = \frac{1}{l} (x_k - x_m)$$

и для любых точек межэлектродного пространства

$$\xi = \frac{1}{l} (x - x_m).$$

Далее найдем, вычитая одно уравнение из другого,

$$\xi - \xi_1 = \frac{1}{l} (x - x_k). \quad (4.90)$$

Если отсчет координаты x мы условимся вести от катода, то, принимая абсциссу катода $x_k = 0$, имеем

$$\xi - \xi_1 = \frac{x}{l}. \quad (4.91)$$

После того как $-\xi_1$ будет определено, мы можем рассчитать ξ для любой заданной точки:

$$\xi = \frac{x}{l} + \xi_1, \quad (4.92)$$

и координату x_m , соответствующую минимуму потенциала,

$$x_m = -\xi_1 l, \quad (4.93)$$

так как при этом условии $\xi = 0$ (см. стр. 153). Для определения величины потенциала в точке минимума используется уравнение (4.79а). На поверхности катода имеем

$$\eta_1 = \frac{11\,600}{T} (u_k - u_m) \quad (4.94)$$

и в произвольной точке междуэлектродного пространства

$$\eta = \frac{11\,600}{T} (u - u_m). \quad (4.95)$$

Вычитая из второго уравнения первое, получим

$$\eta - \eta_1 = \frac{11\,600}{T} (u - u_k).$$

Определяя потенциал данной точки относительно потенциала катода, полагаем $u_k = 0$. Тогда

$$\eta - \eta_1 = \frac{11\,600}{T} u. \quad (4.96)$$

Кроме того, выражение (4.96) позволяет определить численную величину минимума потенциала. Так как здесь $\eta = 0$, то

$$\eta_1 = -\frac{11\,600}{T} u_m, \quad (4.97)$$

откуда

$$u_m = -\frac{T}{11\,600} \eta_1. \quad (4.98)$$

Уравнение (4.96) дает возможность найти u для любой заданной точки между электродами, и, в частности, потенциал анода. Для этого в выражении (4.92) x следует положить равным расстоянию между катодом и анодом ($x = d$). Таким образом может быть определено и анодное напряжение для того значения анодного тока, которым мы задаемся в выражении (4.89).

В объеме поставленной задачи рассмотрим следующие частные случаи.

1. Найти анодное напряжение, соответствующее току насыщения. Если сила анодного тока равна силе тока насыщения, то из выражения (4.89) следует, что

$$\eta_1 = 0.$$

Из табл. 4.6 находим $\xi_1 = 0$.

Из уравнения (4.93) вытекает, что при этих условиях $x_m = 0$, т. е. минимум потенциала совпадает с катодом и его численная величина, согласно (4.97) и табл. 4.6, будет также равна нулю ($u_m = 0$). Из выражения (4.92) получается, что в любой точке междуэлектродного пространства в данном случае будем иметь

$$\xi = \frac{x}{l},$$

и в плоскости анода, полагая $x = d$, получим

$$\xi = \frac{d}{l},$$

где d — расстояние между катодом и анодом.

По данному ξ из табл. 4.6 находим и далее вычисляем анодное напряжение, требуемое для получения заданного анодного тока.

Выражение (4.96), примененное к данному случаю, дает

$$u = \frac{T}{11\,600} \eta.$$

2. Найти силу анодного тока, соответствующего нулевому потенциалу анода.

Из выражения (4.96) находим

$$\eta = \eta_1.$$

3. Найти силу анодного тока при условии, что точка минимума потенциала совпадает с анодом ($x = x_m$).

Из выражений (4.92) и (4.93) находим

$$\xi = -\xi_1 + \xi_1 = 0.$$

Поэтому, подставляя в (4.92) $\xi = 0$, находим

$$-\xi_1 = \frac{x_m}{l} = \frac{d}{l}.$$

Далее задаемся величиной $\eta = 0$ и находим $-\xi l = d$. Эту операцию продолжают до тех пор, пока не получают действительной величины расстояния между электродами.

Таким же образом определяем точку наименьшего потенциала при заданной силе тока между электродами.

4. Определить условия, при которых тока между электродами не будет ($i_a = 0$).

Из выражения (4.89) имеем для этого случая

$$\eta_1 = \infty.$$

На основании этого из (4.97) определяем, что наименьший потенциал имеет бесконечно большое отрицательное значение.

Из табл. 4.6 мы видим, что при $\eta_1 > 1000$ величина ξ практически не меняется, поэтому можно принять, что значению $\eta_1 = \infty$ соответствует $\xi = -2,5539$; по условию $1/l = 0$, таким образом, $x_m = \infty$. Сила тока будет равна нулю только в том случае, если анод находится бесконечно далеко и имеет бесконечно большой отрицательный потенциал. Таким образом, мы приходим к задаче, поставленной нами в § 2.1.

Пример. Размеры и форму диода с плоскими электродами принимаем такими, как указано в примере (стр. 139), $T = 2300^\circ \text{K}$, $i_s = 0,04 \text{ a/cm}^2$. Требуется найти зависимость силы анодного тока от анодного напряжения.

По уравнению (4.89) находим значение i , задаваясь величиной η_1 , и по значениям η_1 подбираем по таблице соответствующие значения — ξ_1 (см. табл. 4.6).

По формуле (4.82)

$$\frac{1}{l} = 9,18 \cdot 10^5 \cdot T^{-3/4} i^{1/2}$$

рассчитываем для данной силы тока значения $1/l$, помещенные в четвертом столбце табл. 4.7:

$$\frac{1}{l} = \frac{9180 \cdot 10^2 \sqrt{i}}{332} = 2770 \sqrt{i} \text{ см}^{-1},$$

и по формуле (4.92) рассчитываем ξ_1 (см. третий столбец той же таблицы) соответствующее аноду для $x = 0,25 \text{ см}$ (пятый столбец):

$$\xi = \frac{x}{l} + \xi_1 = 691,5 \sqrt{i} + \xi_1.$$

Согласно значениям ξ из табл. 4.6, подбираем значения η . Так как табл. 4.6 кончается на значении $\xi = 232,054$, а мы имеем значения ξ большие, то в этом случае для расчета η пользуемся приближенной формулой

$$\xi = \frac{2\sqrt{2}}{3} \pi^{1/4} \eta^{3/4}$$

$$\eta^{3/4} = \frac{\xi}{1,255}.$$

По полученному значению η вместе с найденным значением η_1 определяют из формулы (4.96) искомое значение потенциала анода:

$$u = \frac{T}{11\,600} (\eta - \eta_1) = 0,198 (\eta - \eta_1).$$

Для определения значения наименьшего потенциала между электродами применяем формулу (4.97)

$$\eta_1 = -\frac{11\,600}{T} u_m$$

или

$$u_m = -\frac{T}{11\,600} \eta_1 = -0,198 \eta_1$$

(см. табл. 4.7).

Таблица 4.7

Расчет тока $i_a = f(u_a)$ для плоских электродов площадью 1 см^2 , при накале катода $T = 2300^\circ$, $d = 25 \text{ см}$ и $i_s = 0,04 \text{ а/см}^2$

$\eta_1 = 2,3 \lg \frac{i_s}{i}$	$\frac{i_s}{i}$	ξ_1	$\frac{1}{l}$	ξ_a	η_a	u	u_m	x_m
0	1	0	553,2	138,3	491,54	97,4	0	0
2,3026	10	2,094	175,0	41,66	89,77	17,3	-0,456	0,01196
4,6052	100	2,411	55,32	11,42	13,13	1,685	-0,912	0,0435
6,9078	1 000	2,509	17,50	1,866	1,4162	-1,085	-1,37	0,143
9,2104	10 000	2,54	5,532	-1,157	0,458	-1,735	-1,82	0,46
11,5130	100 000	2,55	1,750	-2,112	0,24	-1,805	-2,28	1,46

Координата, соответствующая наименьшему потенциалу, находится из выражения (4.93)

$$x_m = -\xi l$$

(см. девятый столбец той же таблицы).

4.12. Приближенная формула для расчета силы анодного тока для плоских электродов с учетом начальных скоростей электронов

Если мы ограничимся при расчетах большими значениями ξ , что соответствует значениям i , сравнимым с током насыщения, то для расчета η мы можем ограничиться упомянутой ранее приближенной формулой (4.87):

$$\xi = \frac{2\sqrt{2}}{3} \pi^{1/4} \eta^{3/4}.$$

На основании формул (4.81), (4.87) и (4.77) можно написать

$$\xi = \frac{(x - x_m)}{l} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \pi^{1/4} \eta^{3/4},$$

$$\eta = \frac{e(u - u_m)}{kT},$$

откуда

$$\frac{(x - x_m)}{l} = \frac{2\sqrt{2}\pi^{1/4}}{3} \frac{e^{3/4}(u - u_m)^{3/4}}{(kT)^{3/4}}.$$

Подставляя значение l [см. (4.80)], получим

$$(x - x_m) 4\pi^{3/4} \left(\frac{1}{2kT}\right)^{3/4} m^{1/4} (ei)^{1/2} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \pi^{1/4} \frac{e^{3/4}(u - u_m)^{3/4}}{(kT)^{3/4}}.$$

Возводя в квадрат последнее выражение, находим значение тока i :

$$i = \frac{\sqrt{2}}{9\pi} \sqrt{\frac{e}{m}} \frac{(u - u_m)^{3/2}}{(x - x_m)^2}. \quad (4.99)$$

При пренебрежении значениями u_m и x_m по сравнению с соответствующими величинами u и x получаем обычную формулу анодного тока (4.87а).

Принимая во внимание второй член разложения (4.86), можно получить во втором приближении

$$i_a = \frac{\sqrt{2}}{9\pi} \sqrt{\frac{e}{m}} \frac{(u - u_m)^{3/2}}{(x - x_m)^2} \left(1 + \frac{2,66}{\sqrt{\eta}}\right). \quad (4.100)$$

Однако расчет по приближенной формуле не является более простым, чем приведенный в предыдущем параграфе точный расчет.

4.13. Случай нулевого значения силы анодного тока

Этот случай был нами разобран в § 4.2 и 4.6. Следует заметить, что результаты, полученные в § 4.2, получаются из разобранных нами уравнений, характеризующих силу анодного тока с учетом начальных скоростей вылета электрона. На самом деле, при весьма малых силах тока, как мы видели в примере на стр. 141, ξ принимает отрицательные значения, которые будут увеличиваться с уменьшением силы тока (см. табл. 4.7). Если сила анодного тока будет стремиться к нулю, то ξ будет принимать очень большие отрицательные значения. Принимая поэтому во внимание

лишь первые два слагаемых разложения (4.85), подставляем значение ξ в уравнение (4.90).

Из выражений (4.80) и (4.89) мы получим

$$\eta_1 = \ln \frac{i_s}{i} \quad \text{или} \quad i_s e^{-\eta_1} = i$$

$$\frac{1}{l^2} = \frac{1}{l_0^2} e^{-\eta_1} *.$$

Подставляя найденные значения в уравнение (4.91), получим

$$\sqrt{2} \left(e^{-\frac{\eta}{2}} - e^{-\frac{\eta_1}{2}} \right) = e^{-\frac{\eta_1}{2}} \frac{x}{l}$$

или, разделив обе части этого равенства на $\sqrt{2} e^{-\frac{\eta_1}{2}}$, получим

$$\frac{x}{\sqrt{2} e} = e^{-\frac{\eta - \eta_1}{2}} - 1.$$

Нетрудно показать, что $\frac{1}{4l^2}$, определяемое из (4.25), равно

$$\frac{1}{4l^2} = \pi \rho_1 \alpha.$$

Поэтому

$$\sqrt{2\pi\rho_1\alpha}x = e^{-\frac{\eta - \eta_1}{2}} - 1.$$

Значение $\eta - \eta_1$ подставляем из (4.96):

$$\sqrt{2\pi\rho_1\alpha}x = e^{-\frac{\alpha u}{2}} - 1,$$

где $\alpha = \frac{11600}{T}$.

Далее, преобразовывая это равенство и возводя обе его части в квадрат, найдем

$$e^{-\frac{\alpha u}{2}} = \sqrt{2\pi\rho_1\alpha}x + 1 = \sqrt{2\pi\rho_1\alpha} \left(x + \frac{1}{\sqrt{2\pi\rho_1\alpha}} \right) = \sqrt{2\pi\rho_1\alpha} (x + x_0),$$

$$e^{-\alpha u} = 2\pi\rho_1\alpha (x + x_0)^2. \quad (4.101)$$

Последнее выражение определяет распределение потенциала между электродами в случае нулевой силы тока.

4.14. Метод расчета анодного тока для цилиндрических электродов с учетом начальных скоростей электронов

Шоттки полагает, что поправка в формуле для цилиндрических электродов должна быть значительно меньше, нежели для плоских. Член, соответствующий x_m , должен быть очень мал, так как он изменяет диаметр катода, а последний не должен входить в уравнение тока для цилиндрических электродов. Член, содержащий u_m , остается таким же, как и в случае плоских электродов. Сила тока между цилиндрическими электродами с поправкой на начальные скорости электронов определится следующим

* $\frac{1}{l} = 9,18 \cdot 10^5 T^{-3/4} \sqrt{i}$, $\frac{1}{l_0} = 9,18 \cdot 10^5 T^{-3/4} \sqrt{i_s}$. (Прим. составителя).

выражением:

$$i = \frac{2\sqrt{2}}{9\pi} \sqrt{\frac{e}{m}} \left[u_a - u_m + \frac{u_0}{4} \left(\ln \frac{u_a}{\lambda u_0} \right)^2 \right]^{3/2} \frac{1}{\beta^2 r_a}, \quad (4.102)$$

где i — сила тока на единицу длины катода; u_a — потенциал анода; η_1 — определяется, как и раньше, из выражения $\eta_1 = \ln \frac{i_s}{e}$; $u_m = -\frac{T}{11600} \eta_1$ — наименьший потенциал между электродами; $u_0 = \frac{3}{2} \frac{kT}{e} = \frac{T}{7733} \text{ в}$; $\lambda \cong 1 \div 2$ — числовая постоянная, которая, по мнению Ленгмюра, должна определяться из опыта; β — определяется из табл. 4.4.

Для расчета приведенную формулу представляем в следующем виде:

$$i = \frac{2\sqrt{2}}{9\pi} \sqrt{\frac{e}{m}} \frac{u_a^{3/2}}{\beta^2 r_a} \left[1 - \frac{u_m}{u_a} + \frac{u_0}{4u_a} \left(\ln \frac{u_a}{\lambda u_0} \right)^2 \right]^{3/2}$$

или

$$i = \frac{2\sqrt{2}}{9\pi} \sqrt{\frac{e}{m}} \frac{u_a^{3/2}}{\beta^2 r_a} \bar{f}, \quad (4.103)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{f} &= \left[1 - \frac{u_m}{u_0} \frac{u_0}{u_a} + \frac{u_0}{4u_a} \left(\ln \frac{u_a}{\lambda u_0} \right)^2 \right]^{3/2} = \\ &= \left\{ 1 + \frac{u_0}{u_a} \left[0,665\eta_1 + 0,25 \left(\ln \frac{u_a}{\lambda u_0} \right)^2 \right]^{3/2} \right\}. \end{aligned}$$

Из приведенного выражения следует, что поправка на начальные скорости в случае цилиндрических электродов очень мала, и особенно мала при лампах с большим анодным напряжением.

4.15. Сила тока насыщения при напряженности электрического поля на катоде, значительно большем, чем значения, соответствующие току насыщения

Рассматривая силу тока излучения электронов накаливаемым телом, Шоттки определяет работу выхода электрона с поверхности металла как работу, производимую силой, действующей на электрон и получающейся от его зеркального электрического изображения.

На самом деле, если вообразить электрон, находящийся над металлической поверхностью, то все будет происходить так, как если бы мы заменили плоскость зеркальным изображением электрона. Электрическое поле и сила, действующая на электрон, в том и другом случае будут одни и те же. Если плоскость имеет нулевой потенциал, то электрон будет притягиваться ею, или, что то же самое, своим зеркальным изображением, и для того, чтобы его удалить с плоскости, необходимо затратить некоторую работу. Сила притяжения, направленная по оси Ox (рис. 4.6), будет равна

$$f = -\frac{e^2}{4x^2},$$

а слагающая напряженности электрического поля по оси Ox

$$E = \frac{e}{4x^2}.$$

Потенциал точки, в которой находится электрон, определится выражением

$$u = \int_0^x \frac{e}{4x^2} dx. \quad (4.104)$$

Шоттки полагает, что закон, определяющий силу притяжения, действующую на электрон, не удовлетворяется для сколь угодно малых значений x , а действителен только до некоторого расстояния x_0 . Это расстояние по Дебаю характерно и различно для разных металлов. Мы получим приближение к действительности, если предположим, что сила, действующая от зеркального изображения, остается постоянной для значений x

$$0 < x < x_0$$

и равна $-\frac{e^2}{4x_0^2}$, а соответствующая напряженность электрического поля

$$E_0 = \frac{e}{4x_0^2}.$$

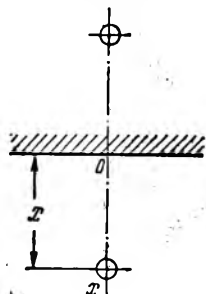


Рис. 4.6

Работа, затраченная для того, чтобы электрон прошел расстояние x_0 , будет равна $u_0 e$, где u_0 есть «потенциал вылета» электрона, определяемый выражением

$$u_0 = \int_0^{x_0} \frac{e}{4x_0^2} dx + \int_{x_0}^{\infty} \frac{e}{4x^2} dx = \frac{e}{2x_0^2}. \quad (4.104a)$$

Здесь под нулем предполагается весьма малое конечное значение предела

$$u_0 = \frac{300 \cdot 4,803 \cdot 10^{-10}}{2x_0} = \frac{7,2 \cdot 10^{-8}}{x_0} \text{ в,}$$

$$x_0 = \frac{7,2}{u_0} \text{ \AA.}$$

Шоттки принимает, что потенциал u_0 имеет величину того же порядка, что и потенциал двойного слоя, определяющий работу вылета электрона. Величину x_0 он называет «критическим расстоянием» и считает равным 10^{-8} см для всех известных материалов.

Таким образом, по Шоттки работа вылета производится не только при выходе электрона с поверхности проводника, но и после того, как он отошел от поверхности на некоторое расстояние.

Если рассматриваемая плоскость является одной из пластин конденсатора и над ней расположена другая, заряженная положительно, и между ними создано электрическое поле с постоянной напряженностью E_0 , то приложенное поле будет компенсировать поле зеркального изображения, и на расстоянии x_1 от плоскости проводника мы будем иметь плоскость, во всех точках которой напряжение электрического поля будет равно нулю, т. е. в этой плоскости притяжение электрона зеркальным изображением и притяжение его положительно заряженной поверхностью будут равны и сила, действующая на электрон, будет равна нулю (рис. 4.7).

На основании сказанного выше величина x_1 определится из выражения

$$E_0 = \frac{e}{4x_1^2}, \quad x_1 = \sqrt{\frac{e}{4E_0}}.$$

Таким образом, для того чтобы электрон отрывался от поверхности

проводника, необходимо преодолевать притяжение зеркального изображения только на расстоянии x_1 .

В этом случае потенциал вылета определится из формулы

$$u = \int_0^{x_0} \frac{e}{4x_0^2} dx + \int_{x_0}^{x_1} \frac{e}{4x^2} dx - \int_0^{x_1} E_0 dx = \frac{e}{4x_0} - \frac{e}{4x_1} + \frac{e}{4x_0} - E_0 x_1 = \frac{e}{2x_0} - \frac{e}{4x_1} - E_0 x_1$$

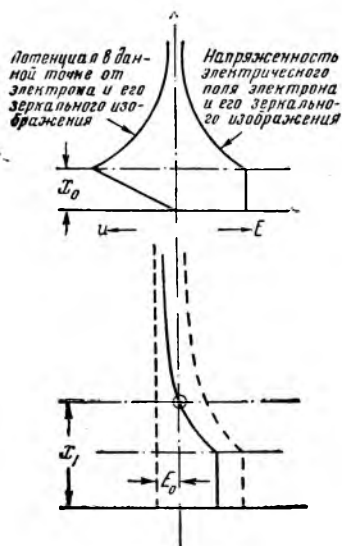


Рис. 4.7

или

$$u = u_0 - \sqrt{eE_0}. \quad (4.1046)$$

Для того чтобы получить силу тока излучения электронов, мы должны величину u подставить в известное нам выражение

$$i = 60,2 T^2 e^{-\frac{ue}{kT}},$$

что дает

$$i_j = 60,2 T^2 e^{-\frac{u_0 e - e \sqrt{eE_0}}{kT}}$$

или

$$i = 60,2 T^2 e^{-\frac{b - 4,39 \sqrt{-\frac{du}{dx}}}{T}},$$

так как

$$E_0 = -\frac{du}{dx}.$$

Для случая цилиндрических электродов, принимая за независимую переменную r , получим

$$-\frac{du}{dr} = \frac{u_a}{2,3r \lg \frac{r_a}{r_k}},$$

где u_a — разность потенциалов между электродами, r_a — радиус внешнего, а r_k — радиус внутреннего электрода.

Таким образом, при достаточной напряженности внешнего поле может уменьшить работу вылета. Практически влияние, определяемое членом $4,39 \sqrt{-\frac{du}{dx}}$, мало и сказывается лишь при очень высоких градиентах.

Теория, данная Шоттки, дает возможность объяснить так называемое холодное излучение. Мы можем получить значительные градиенты на поверхности катода. Так, например, полагая $r_k = 0,01$ см, $r_a = 0,5$ см, $u_a = 10\,000$ в, находим

$$-\frac{du}{dr} = \frac{10\,000}{0,023 \lg 50} = 255\,000 \text{ в/см.}$$

При этом в числителе показательной функции принято

$$b = 1840.$$

Пример 1. Какой напряженностью внешнего поля можно было бы уничтожить действие двойного слоя?

Так как в этом случае x_1 должно быть равно критическому расстоянию, то мы получим

$$x_0 = \sqrt{\frac{e}{4E_0}}$$

или

$$E_0 = \frac{e}{4x_0^2}.$$

В свою очередь, по Шоттки критическое расстояние определяется потенциалом вылета

$$x_0 = \frac{e}{2u_0},$$

откуда следует, что

$$E_0 = \frac{u_0^2}{e} = \frac{u_0^2}{4,803 \cdot 10^{-10}} \text{ CGSE}$$

или

$$E_0 = 6,96 \cdot 10^6 u_0^2 \text{ в/см.}$$

Пример 2. Картина вылета электрона, обрисованная Шоттки, дает возможность оценить порядок размера двойного слоя и существующей в нем напряженности электрического поля.

Потенциал вылета связывается с критическим расстоянием следующим соотношением:

$$u_0 = \frac{e}{2x_0},$$

откуда

$$x_0 = \frac{e}{2u_0} = 7,204 \cdot 10^{-8} \cdot \frac{1}{u_0} \text{ см.}$$

Напряженность электрического поля двойного слоя равна

$$E_0 = \frac{e}{4x_0^2} = \frac{u_0}{2x_0} = \frac{u_0^2 10^8}{14,408} = 6,96 \cdot 10^6 u_0^2 \text{ в/см.}$$

Для вольфрама

$$E_0 = 1,43 \cdot 10^8 \text{ в/см.}$$

При этом $u_0 = 4,53 \text{ в}$ и $x_0 = 1,55 \cdot 10^{-8} \text{ см.}$

Пример 3. Насколько увеличится ток излучения при насыщении в катодной лампе, если устройство электродов будет таково, что выдержит напряжение в 10 000 в.

Радиус анода $r_a = 2 \text{ см}$, радиус нити накала $r_k = 0,005 \text{ см}$, $T = 2300^\circ$. Тогда (см. стр. 164)

$$-\frac{du}{dr} = \frac{10^4}{2,3 \cdot 0,005 \lg \frac{2}{0,005}} = 5,44 \cdot 10^8 \text{ в/см.}$$

Отношение тока при сильном внешнем поле к току насыщения будет равно

$$e \frac{4,39 \sqrt{-\frac{du}{dx}}}{T} = 4,10$$

4.16. Причины отклонения теоретических характеристик ламп от реальных

Формула Ленгмюра дает зависимость анодного тока от напряжения на аноде в предположении, что вся длина нити излучает одинаково. На самом деле, особенно при малых напряжениях анода, соизмеримых с напряжением на катоде, этого не наблюдается, что вынуждает вводить соответствующую поправку. При выводе формулы Ленгмюра мы допустили, что поверхность катода эквипотенциальна, и на основании этого вели исследова-

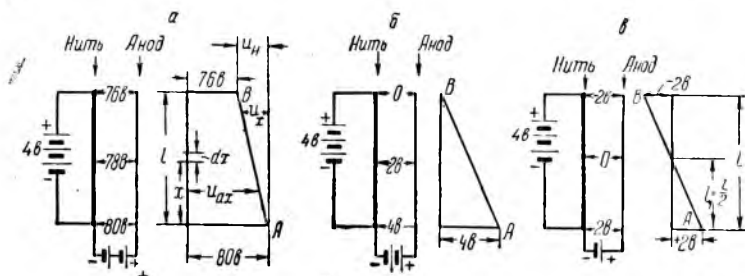


Рис. 4.8

ние потенциала только по одной оси. Фактически же поверхность нити не эквипотенциальна.

Рассмотрим следующий случай: допустим, что на катод подано 4 в и на анод 80 в. Изобразим схематически электроды лампы и постараемся набросать графически картину происходящего явления (рис. 4.8).

Рассмотрим случай, когда минусы батареи анода и батареи катода поданы в одну точку нити. Падение напряжения на нити изобразится прямой АВ. Совершенно очевидно, что здесь об эквипотенциальной поверхности говорить не приходится, но, рассматривая каждый элемент нити dx на расстоянии x как элемент с эквипотенциальной поверхностью, можно для каждого такого элемента практически без погрешности применить формулу Ленгмюра.

Определим напряжение, под которым находится рассматриваемый нами элемент.

Можно написать, что

$$\frac{u_n}{u_x} = \frac{l}{x}. \quad (4.105)$$

С другой стороны,

$$u_{ax} = u_a - u_x. \quad (4.106)$$

Подставляя выражение для u_x из (4.105), получим

$$u_{ax} = u_a - \frac{u_n x}{l}.$$

Нетрудно убедиться, что это уравнение удовлетворяет нашему случаю, что может быть проверено путем подставления пределов, в которых изменяется длина нити, а именно: $x = 0$ и $x = l$.

Далее можно написать для элемента нити dx

$$i_a dx = 14,65 \cdot 10^{-6} \frac{dx}{r} \left(u_a - u_n \frac{x}{l} \right)^{3/2}. \quad (4.107)$$

Совершенно очевидно, что для нахождения полной силы тока необходимо просуммировать наши элементы по всей длине нити. Для этого интегрируем (4.107) в пределах от нуля до излучающей длины нити l_1 (о величине l_1

смотри ниже)

$$i_a = 14,65 \cdot 10^{-6} \frac{1}{r} \int_{x=0}^{-x=l_1} \left(u_a - \frac{u_n x}{l}\right)^{3/2} dx = 14,65 \cdot 10^{-6} \frac{1}{r} \left[-\frac{2}{5} \frac{l}{u_n} \left(u_a - \frac{u_n x}{l}\right)^{5/2} \right]_0^{l_1}$$

и окончательно

$$i_a = 14,65 \cdot 10^{-6} \frac{1}{r} \left[-\frac{2l}{5u_n} \left(u_a - \frac{u_n l_1}{l}\right)^{5/2} + \frac{2}{5} \frac{l}{u_n} u_a^{5/2} \right]. \quad (4.108)$$

Это есть полное выражение, учитывающее падение напряжения на нити накала. После дальнейших преобразований получим

$$\begin{aligned} i_a &= 14,65 \cdot 10^{-6} \frac{2}{5} \frac{l}{u_n r} \left[u_a^{5/2} - \left(u_a - \frac{u_n l_1}{l}\right)^{5/2} \right] = \\ &= 14,65 \cdot 10^{-6} \frac{u_a^{3/2}}{r} l \frac{2u_a}{5u_n} \left[1 - \left(1 - \frac{l_1 u_n}{l u_a}\right)^{5/2} \right]. \end{aligned} \quad (4.109)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{формула Ленгмюра}} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{поправочный коэффициент}}$

Как видим, поправочный коэффициент зависит от отношения произведения излучающей длины нити и напряжения накала к произведению напряжения анода и всей длины нити.

Выделенная нами длина l_1 получается из следующих соображений. Рассмотрим три графика распределения потенциалов (см. рис. 4.8).

Здесь мы полагаем, что $u_n = \text{const}$ и $l = \text{const}$, изменяется только u_a . Как видим, в этих трех случаях длина нити, участвующая в излучении, разная. Так, например, в случае $u_a = 2v$ она равна $1/2 l$ (рис. 48 в). Это соображение и заставляет нас интегрировать в пределе от 0 до l_1 , так как это кажущееся уменьшение длины нити накала и сказывается на характеристике в нижней ее части (см. пунктир на рис. 4.9).



Рис. 4.9

Применим наше последнее уравнение к частным случаям. Рассмотрим случай, когда u_a много больше u_n . Этот случай будет соответствовать верхней части кривой. Здесь будет излучать вся длина нити, так как она находится под положительной разностью потенциалов. Для полного определения этого момента полагаем, что $l = l_1$, и выражение для силы тока будет

$$i_a = 14,65 \cdot 10^{-6} \frac{l}{r} u_a^{3/2} \frac{2}{5} \frac{u_a}{u_n} \left[1 - \left(1 - \frac{u_n}{u_a}\right)^{5/2} \right]. \quad (4.110)$$

Разложим наш бином по формуле Ньютона и, пренебрегая высшими членами, так как дробь $\frac{u_n}{u_a}$ мала, получим

$$\begin{aligned} i_a &= 14,65 \cdot 10^{-6} \frac{l}{r} u_a^{3/2} \frac{u_a}{u_n} \frac{2}{5} \left[1 - \left(1 - \frac{5}{1 \cdot 2} \frac{u_n}{u_a} + \frac{5 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} \frac{u_n^2}{u_a^2} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{5 \cdot 3 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3} \frac{u_n^3}{u_a^3} + \dots \right) \right]. \end{aligned}$$

Раскроем скобки

$$i_a = 14,65 \cdot 10^{-6} \frac{l}{r} u_a^{3/2} \frac{u_a}{u_n} \frac{2}{5} \left[\frac{5}{2} \frac{u_n}{u_a} - \frac{5 \cdot 3}{8} \frac{u_n^2}{u_a^2} + \frac{5}{16} \frac{u_n^3}{u_a^3} - \dots \right]$$

и вынесем за скобки член $\frac{5}{2} \frac{u_n}{u_a}$. Тогда

$$i_a = 14,65 \cdot 10^{-6} \frac{l}{r} u_a^{3/2} \left[1 - \frac{3}{4} \left(\frac{u_n}{u_a} \right) + \frac{3}{24} \left(\frac{u_n}{u_a} \right)^2 - \dots \right].$$

Пренебрегая для верхней части кривой членом $\frac{u_n^2}{u_a^2}$, получим

$$i_a = 14,65 \cdot 10^{-6} \frac{l}{r} u_a^{3/2} \left(1 - \frac{3}{4} \frac{u_n}{u_a} \right). \quad (4.111)$$

Определим теперь изменение силы тока на нижней части кривой, когда u_n соизмеримо с u_a . У нас имеются соотношения (4.106) и (4.105)

$$u_{ax} = u_a - u_x$$

и

$$u_x = \frac{u_n}{l} x.$$

Для определения l_1 положим, что $u_a = u_x$ для точки, где $u_{ax} = 0$.

$$u_n \frac{x}{l} \Big|_{x=l_1} = u_a, \quad l_1 = \frac{u_a}{u_n} l.$$

Это значение мы и подставим в исследуемое выражение для i_a , т. е. в (4.109) и, стало быть, получим при наших условиях, что $u_n \leq u_a$ и $l_1 \leq l$,

$$i_a = 14,65 \cdot 10^{-6} \frac{2}{5} \frac{l}{r} \frac{u_a^{5/2}}{u_n} = 5,86 \cdot 10^{-6} \frac{l}{r} \frac{u_a^{5/2}}{u_n}. \quad (4.111a)$$

Очевидно, что при снятии характеристики в момент, когда u_n соизмеримо с u_a (это соответствует нижней части характеристики рис. 4.9), нужно пользоваться этим уравнением.

Примем во внимание, что при соединении батарей минус с минусом при $u_a = 0$ тока не будет, чего нет при другом включении.

Рассмотрим и тот случай (рис. 4.10), когда в общую точку поданы разные полярности источников напряжения.

Поскольку все рассуждения остаются прежними, то и выражения

$$u_x = u_n \frac{x}{l}, \quad u_{ax} = u_a + u_x = u_a + u_n \frac{x}{l}$$

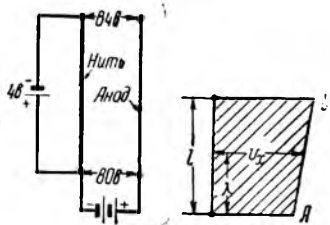


Рис. 4.10

остаются в силе.

Теперь, подставив эти выражения в формулу Ленгмюра и проинтегрировав ее, получим окончательно

$$i_a = 14,65 \cdot 10^{-6} \frac{l}{r} u_a^{3/2} \frac{2u_a}{5u_n} \left[\left(1 + \frac{u_n}{u_a} \right)^{5/2} - 1 \right]. \quad (4.111b)$$

По своему виду эта формула аналогична предыдущей. Рассмотрим теперь два частных случая: первый — когда u_a во много раз больше u_n .

Разложив множитель, стоящий в скобках, по формуле бинома Ньютона, получим

$$i_a = 14,65 \cdot 10^{-6} \frac{l}{r} u_a^{3/2} \left[1 + \frac{3}{4} \left(\frac{u_n}{u_a} \right) + \frac{1}{8} \left(\frac{u_n}{u_a} \right)^2 + \dots \right].$$

Для второго частного случая, когда $u_a \leq u_n$, мы опять положим $l = l_1$, в результате чего получим формулу

$$i_a = 5,86 \cdot 10^{-6} \frac{l}{r} u_n^{3/2}. \quad (4.111в)$$

Это будет начальный ток при $u_a = 0$.

Составим теперь следующую схему (рис. 4.11) и рассчитаем характеристику

$$i_a = f(u_a)$$

по формуле Ленгмюра:

$$i_a = 14,65 \cdot 10^{-6} \frac{l}{r} u_a^{3/2}.$$

В действительности мы получим характеристики рис. 4.12, которые будут расходиться с рассчитанными. Их прямолинейные части будут идти не по

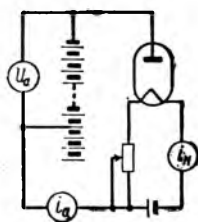


Рис. 4.11

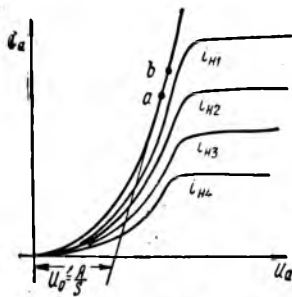
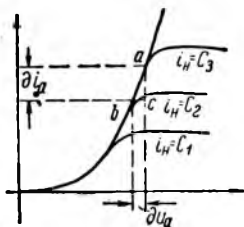


Рис. 4.12

одной линии, с уменьшением i_n . Они будут все больше отклоняться. Чтобы объяснить это явление, введем новое понятие о крутизне характеристики. Для этого возьмем производную от i_a по u_a :

$$\frac{\partial i_a}{\partial u_a} = \frac{3}{2} 14,65 \cdot 10^{-6} \frac{l}{r} u_a^{1/2}. \quad (4.112)$$

Выясним физический смысл этого выражения. Взяв на рис. 4.13 бесконечно малый участок прямолинейной части характеристики ab и спроектировав его на оси координат, мы получим некоторый треугольник abc (рис. 4.13), у которого один катет будет ∂i_a , а другой ∂u_a . Отношение этих катетов есть $\tan \alpha$. Другими словами, крутизна есть тангенс угла, образуемого касательной к характеристике в данной точке с осью абсцисс. Это отношение характеризует крутизну, которую обозначим через

$$S = \frac{\partial i_a}{\partial u_a}.$$

З а м е ч а н и е. Если строго рассуждать, то здесь надо вводить поправку для каждого из рассмотренных ранее случаев в отдельности, но мы этого делать не будем.

Выясним размерность крутизны. Как видим, это есть отношение ампер к вольтам и, стало быть, она выразится в единицах проводимости — $ма/в$. Для простейшего случая, при эквипотенциальном катоде, можно написать, что

$$S = \frac{3}{2} 14,65 \cdot 10^{-6} \frac{l}{r} u_a^{1/2}. \quad (4.112a)$$

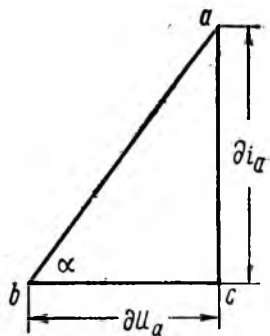


Рис. 4.13

Формула Ленгмюра учитывает действующую длину нити, которая есть функция $f(T_k)$. Как известно, с падением тока накала температура нити падает, а стало быть, уменьшается и ее действующая длина. Поэтому и крутизна характеристики также пойдет на убыль, и благодаря этому прямолинейные части характеристики разойдутся.

Решим теперь это в общем виде. Можно написать

$$di_a = \frac{\partial f(u_a)}{\partial u_a} du_a = \frac{\partial i_a}{\partial u_a} du_a = S du_a.$$

Чтобы проинтегрировать это выражение, нам надо знать функцию крутизны S . Для частного случая, положив, что она равна постоянной величине, получим в результате интегрирования:

$$i_a = Su_a + A.$$

Рассмотрим это равенство. Если взять одну из снятых практически характеристик, то можно найти на ней некоторый участок ab , совпадающий с прямой линией (рис. 4.12). Постоянная A представит некоторый отрезок на оси абсцисс, отсекаемой при продолжении прямолинейного участка характеристики. Тогда

$$i_a = S(u_a - u_0), \quad (4.113)$$

где

$$u_0 = \frac{A}{S}.$$

Таким образом, мы можем характеристику лампы заменить некоторой идеальной прямой, совпадающей на некотором участке с прямолинейной частью характеристики. Конечно, нижняя и верхняя части идеальной характеристики не будут иметь физического смысла*.

4.17. К вопросам упрощения формулы тока эмиссии и долговечности катода

(Отзыв М. В. Шулейкина о печатных работах инженера-электрика В. И. Волюнкина)**

Работы инженера-электрика В. И. Волюнкина, представленные на отзыв, разделяются на две группы.

К первой группе относятся самостоятельные и оригинальные научно-технические работы, имеющие целью главным образом дать методы технического расчета в области исследуемого явления. Например в работе на тему «Эмпирическая зависимость электронной эмиссии от температуры» автор имеет целью дать расчетную формулу для плотности тока излучения электронов накаливаемым телом, преследуя наибольшую ее простоту по сравнению с установленными в науке формулами Ричардсона и Дешмана — Ленгмюра. «Лишь упрощенная формула позволяет с легкостью производить некоторые расчеты...», говорит в упомянутой статье В. И. Волюнкин.

Ко второй группе относятся авторские свидетельства на изобретения (их девять). Из них два изобретения, относящиеся к катодным лампам, являются результатами теоретических исследований, которые дали возможность автору в одном свидетельстве спроектировать лампу с искусственным катодом равного потенциала, а в другом — лампу, которая должна давать прямолинейную характеристику. Остальные семь патентов являются предложениями изобретательского характера, появившимися в результате богатого и разностороннего инженерного опыта автора. Из них я должен отметить два: «Способ изготовления диэлектрических масс» и в особенности «Способ получения сплошных магнитных тел из порошкообразных магнитных материалов».

* По литературным данным, это положение было впервые введено М. В. Шулейкиным (см. фото собственноручной записи М. В. Шулейкина, стр. 5). (Прим. составителя).

** Отзыв написан 15 февраля 1934 г. (Прим. составителя).

Последнее авторское свидетельство важно по двум причинам: во-первых, оно применимо для изготовления так называемых пупиновских катушек, включаемых в телефонный кабель большого протяжения для уничтожения получающихся искажений речи. Во-вторых, сейчас существует тенденция применять в длинноволновых и широкополосных приемниках контуры, содержащие железные сердечники, сделанные из упомянутого материала, что значительно уменьшает геометрические размеры и в связи с этим дает ряд конструктивных преимуществ.

Таким образом, в отдельных частях работа В. И. Волынкина заслуживает весьма большого внимания и безусловно представляет собой определенную ценность. Тем не менее мы должны сделать некоторые замечания.

В работе «Эмпирическая зависимость электронной эмиссии от температуры» В. И. Волынкин, кратко изложив богатый литературный материал по вопросу построения теоретической зависимости плотности тока электронного излучения от температуры, говорит: «Экспериментальная проверка эмиссионных формул обнаружила, что выражения с показателем степени T , равным — 1, 0,5, 1 и 2, одинаково хорошо согласуются с наблюдениями в пределах ошибок измерений, причем в настоящее время нет оснований, которые заставили бы отдать предпочтение какой-либо одной формуле».

Исходя из этого положения, автор упрощает классическую формулу Ричардсона

$$i = A_1 \sqrt{T} e^{-\frac{b_1}{T}} \text{ а/см}^2$$

или формулу Дешмана

$$i = A_2 T^2 e^{-\frac{b_2}{T}} \text{ а/см}^2,$$

написав последнюю в следующем виде:

$$i = A_0 e^{-\frac{a}{T}} \text{ а/см}^2 \quad (4.114)$$

или

$$i = A_0 \cdot 10^{-\frac{a}{2,303 T}} = A_0 \cdot 10^{-\frac{a_1}{T}}. \quad (4.114a)$$

1) В. И. Волынкин пишет: «Как будет показано дальше, эмпирическая формула (4.114) удовлетворяет опыту в обычных пределах изменения температуры, в частности для вольфрама от 1000 до 3500° К, т. е. примерно от 700° С до температуры плавления. Но формула не противоречит также и крайнему пределу температуры, т. е. $T = 0$. В этом случае нужно ожидать исчезновения эмиссии, что и получается из формулы».

2) На той же странице читаем дальше: «При увеличении температуры наступают моменты, когда проводник плавится и начинает заметно испаряться... По мере возрастания температуры до бесконечности, эмиссия стремится к предельному значению, равному A_0 . Обычные формулы также удовлетворяют первому условию ($i = 0$ при $T = 0$), но при беспредельном увеличении температуры эмиссия не стремится к конечному пределу, а формально возрастает до бесконечности...».

3) Далее указывается: «Проверка формулы (4.114a) может быть произведена графическим приемом Ричардсона. Для этого откладывают на одной из осей $\lg i$, а на другой соответствующие значения $1/T$.

Тогда полученные точки должны лежать на прямой линии и, если A_0 и a не зависят от температуры».

Результаты построения оцениваются так: «Из построенных в большом масштабе девяти кривых здесь приводится только часть. Все они дают прямую линию со случайными отклонениями в ту или другую сторону...».

4) В конце своей работы В. И. Волынкин пишет: «... приходим к заключению, что формулы с различными показателями численно выражают явление с практически одинаковой точностью. Учитывая же простоту, следует остановить свой выбор на предлагаемых автором формулах».

Поэтому даже в том случае, когда будет установлена и всеми признана точная теоретическая формула для эмиссии, зависимости (4.114) и (4.114a) нужно сохранить для инженерных целей, так как вполне безупречная формула, не имея здесь никаких преимуществ, внесет в вычисления излишние неудобства и осложнения».

Из приведенных выдержек следует, что автор подходит к построению формулы формально, ведет формальную проверку формулы (см. выдержку 3) и лишь отчасти, но так же формально пытается получить некоторые физические следствия (выдержки 1 и 2).

Разбирая формальную сторону вопроса, мы утверждаем ряд следующих положений:

1. Формулы вида $i = AT^\alpha e^{-\frac{b}{T}}$, дающие одно и то же значение i для данной температуры T_1 при различных показателях α , в результате подбора постоянной A для этой температуры дадут в диапазоне $T_2 < T_1 < T_3$ значения, отличающиеся на определенную величину в зависимости от выбранного диапазона.

Приведенное положение элементарно и очевидно. Кроме того, автор принимает еще функциональную зависимость от температуры постоянных A и b .

2. Автор¹ считает, что полученная им прямолинейная зависимость $\lg i = f\left(\frac{1}{T}\right)$ есть доказательство того, что предложенная им формула удовлетворяет опытным данным, которые действительно дают в широком диапазоне температур прямолинейную зависимость $\lg i = f\left(\frac{1}{T}\right)$ (см. выдержку 3).

В действительности это обстоятельство не есть доказательство правильности формулы автора, но есть свойство формулы

$$i = AT^{\alpha} e^{-\frac{b}{T}}.$$

Действительно, прологарифмировав это выражение, имеем

$$\ln i = \ln A + \alpha \ln T - \frac{b}{T}. \quad (4.115)$$

Вводя зависимость $y = \frac{1}{T}$, получим

$$\ln i = \ln A - \alpha \ln y - by.$$

Взяв производную по $y = \frac{1}{T}$, найдем

$$\frac{d(\ln i)}{dy} = -\left(\frac{\alpha}{y} + b\right) = -(\alpha T + b).$$

Последнее выражение определяет наклон касательной к кривой в данной точке к оси абсцисс.

Величина b имеет порядок 10^4 , тогда как αT имеет порядок 10^3 , т. е. составляет 10% от величины b . Таким образом, наклон кривой к оси абсцисс постоянен с точностью до 10%, т. е. с точностью до 10% отличается от прямой линии, независимо от того, каково значение показателя α в пределах $-1 < \alpha < 2$.

К сказанному следует добавить, как это утверждает и автор, что из всех зависимостей типа $i = AT^{\alpha} e^{-\frac{b}{T}}$, простейшей является та, при которой $\alpha = 0$.

Однако данная зависимость, как и ряд других, о чем мы упоминаем ниже, совершенно не удовлетворяет физическому смыслу.

3. Классическая формула Ричардсона имеет точный физический смысл. Если написать эту формулу, раскрыв значения постоянных, то получим

$$i = N_0 e \sqrt{\frac{kT}{2\pi m}} e^{-\frac{u_0 e}{kT}}$$

или

$$N_1 = N_0 \sqrt{\frac{kT}{2\pi m}} e^{-\frac{u_0 e}{kT}}.$$

Здесь множитель $N_0 \sqrt{\frac{kT}{2\pi m}}$ определяет число электронов, которое было бы излучено с единицы поверхности накаливаемого провода, если бы задерживающий потенциал двойного слоя u_0 был равен нулю.

В свою очередь этот множитель может быть получен из следующих соображений:

$$\bar{v} = \int_0^{\infty} \frac{dN_a}{N_0} v = \int \frac{e^{-\frac{v^2}{v_B^2}}}{\sqrt{\pi}} v d\left(\frac{v}{v_B}\right) = \int \frac{v_B e^{-\frac{v^2}{v_B^2}}}{2\sqrt{\pi}} d\left(\frac{v^2}{v_B^2}\right) = \sqrt{\frac{kT}{2\pi m}}.$$

Таким образом, N_0 есть число электронов, содержащихся в 1 см^3 , а $\sqrt{\frac{kT}{2\pi m}}$ — слагающая средней арифметической скорости электронов, перпендикулярной к поверхности накаливаемого тела.

Если мы создадим формулу, хотя бы эмпирическую, все же она должна иметь правильный физический смысл. Если же мы будем утверждать, что упомянутый множитель есть величина постоянная, то тем самым мы утверждаем физическую бессмыслицу, глядящую, что средняя арифметическая скорость электронов не зависит от температуры.

Подобное же доказательство можно привести и относительно формулы, полученной Лауэ — Шоттки — Дешманом:

$$i = \frac{2\pi m e k^2}{h^3} T^2 e^{-\frac{u_0 e}{kT}}$$

Что касается множителя $e^{-\frac{u_0 e}{kT}}$, то, как не трудно убедиться, он означает ту часть общего числа электронов, которые при данной температуре накала могут излучаться с 1 см^2 поверхности при наличии задерживающей разности потенциалов двойного слоя.

Относительно показателя $\frac{h}{T} = \frac{u_0 e}{kT}$ следует заметить, что он представляет собой величину, которую формально можно, конечно, подбирать, но в действительности (и по физическому смыслу) подбор этот крайне ограничен, так как каждый раз может корректироваться фотоэффектом.

На самом деле энергия фотоэлектрона, вызванного светом частоты, определяется формулой Эйнштейна

$$E = h\nu - \varphi,$$

где φ — работа, затраченная на прохождение двойного слоя.

Если $\varphi = h\nu_0$, то ν_0 — есть частота, определяющая «красную» границу фотоэффекта, т. е. ту минимальную частоту, при которой еще возможен фотоэффект.

Так, например, для вольфрама $\frac{\varphi}{e} = 4,7 \text{ в}$, откуда следует, что $\lambda_0 = 2615 \text{ \AA}$.

В свою очередь, для коэффициента b мы получим

$$b = \frac{4,7}{300} \frac{4,803 \cdot 10^{-10}}{1,38 \cdot 10^{-16}} = 54\,500.$$

В действительности в среднем мы имеем для вольфрама $b = 52\,400$, что дает различие с корректировкой по фотоэффекту в 3,86%. Такая ошибка вполне возможна, так как благодаря температурным условиям в области двойного слоя могут происходить соответствующие изменения.

В. И. Волюнкин говорит, что «... в настоящее время нет оснований, которые заставили бы отдать предпочтение какой-либо одной формуле».

Как показано в монографиях Шоттки, Дешмана и обширных статьях Ленгмюра, признанным является соотношение

$$i = \frac{2\pi m e k^2}{h^3} T^2 e^{-\frac{u_0 e}{kT}}$$

Больше того, в январе 1928 г. Зоммерфельд опубликовал статью, согласно которой, исходя из статистики Ферми — Дирака, можно получить более общее выражение для плотности тока излучения электрона. При этом получается квадратичная зависимость от температуры.

Если же от распределения скоростей по Ферми — Дираку перейти к классическому максвелловскому, то у того же выражения получается классическая формула Ричардсона.

Квадратичная зависимость плотности тока, полученная по Зоммерфельду, в связи со значением показателя, получающегося в несколько ином виде, дала возможность поставить весьма важные вопросы как для теории, так и для эксперимента.

Таким образом, как показали последующие события (статья В. И. Волюнкина опубликована в 1927 г.), имеются веские основания для установления правильной теоретической зависимости. Мы не можем входить в рамках отзыва в подробности о том теоретическом и экспериментальном развитии, которое получилось в связи с возможностью применить к явлению излучения электронов накалившимся телом учение о потенциальном барьере и уравнения волновой механики. Таким образом, мы приветствуем инициативу автора, давшего упрощенную формулу, но не может согласиться с тем, что «следует остановить свой выбор» на формуле автора. Формулу нельзя «выбрать», она есть обобщающий и концентрированный вывод теоретической мысли, а то, что предлагает автор, есть у д о б н а я э м п и р и ч е с к а я ф о р м у л а, которой в некоторых случаях можно пользоваться.

В работе «Долговечность идеального катода» В. И. Волюнкин дает расчет срока «горения» катода, т. е. срока службы его до разрушения.

Как указывается в заглавии, задача решается до некоторой степени теоретически, но автор замечает, что «результаты исследования не могут быть приложены непосредственно к действительным катодам без введения нужных поправок», и приступает к «... дальнейшему шагу... определения поправок, с принятием во внимание всех отклонений от идеальных условий».

В работе анализируется влияние на долговечность катода различных факторов и даются выражения, согласно которым можно решить ряд задач.

Статья «Долговечность накаливаемого проводника при переменном режиме» является почти единственной работой на эту тему, решающей задачу в аналитической форме и дающей возможность решать весьма важные практические задачи.

ДИОД КАК ВЫПРЯМИТЕЛЬ

5.1. Однополупериодное выпрямление однофазного тока [графоаналитическое исследование]

Двухэлектродная лампа может служить в качестве выпрямителя переменного тока*. Схема, приведенная на рис. 5.1, является основной. Все последующие схемы являются ее развитием.

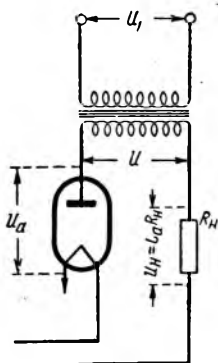


Рис. 5.1

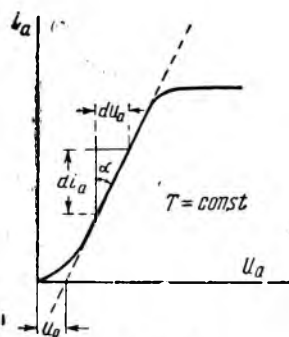


Рис. 5.2

Допустим, что нам задана характеристика диода (рис. 5.2), аналитически выражаемая формулой

$$i_a = 14,65 \cdot 10^{-6} \frac{l}{r_a} u_a^{3/2}. \quad (5.1)$$

Дифференцируя по u_a , найдем следующее выражение:

$$\frac{\partial i_a}{\partial u_a} = 14,65 \cdot 10^{-6} \frac{l}{r_a} \frac{3}{2} u_a^{1/2}.$$

Последнее выражение, как видно из рис. 5.2, характеризует наклон кривой к оси абсцисс, как было сказано выше, выражение $\frac{\partial i_a}{\partial u_a}$ называется крутизной характеристики S :

$$S = \frac{\partial i_a}{\partial u_a}.$$

* В рукописи М. В. Шулейкин применяет термины: выпрямление однофазного тока на «одну полуволну» или на «две полуволны». При подготовке рукописи эти термины заменены общепринятыми. (Прим. составителя).

Рассматривая i_a вообще как функцию анодного напряжения u_a , т. е. $i_a = f(u_a)$, можно написать

$$di_a = \frac{\partial f(u_a)}{\partial u_a} du_a = \frac{\partial i_a}{\partial u_a} du_a = S du_a.$$

Для тех участков характеристики, где S постоянно (для прямолинейного участка), можно проинтегрировать данное выражение. Тогда для этого участка получим (см. стр. 174)

$$i_a = Su_a + A.$$

Так как при $u_a = u_0$ ток $i_0 = 0$ (см. рис. 5.2), то отсюда можно определить значение A :

$$A = -Su_0 \text{ и } i_a = S(u_a - u_0).$$

Если у нас во вторичной обмотке трансформатора индуцируется э. д. с. $u = U_m \sin \omega t$ и если самоиндукцией обмотки по сравнению с внешним сопротивлением R_n (омическим сопротивлением нагрузки) можно пренебречь, то полученный в сопротивлении пульсирующий ток будет в фазе с индуцированной э. д. с. (Здесь и далее U_m — амплитудное значение э. д. с.).

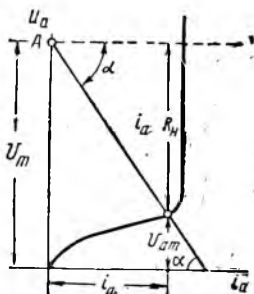


Рис. 5.3

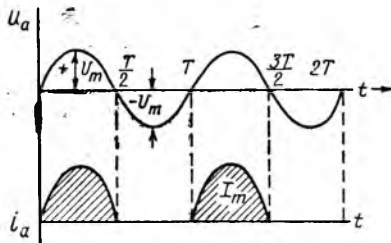


Рис. 5.4

Рассмотрим кривую тока и мощность в цепи выпрямления. Если бы диод имел постоянное сопротивление, то силу тока можно было бы подсчитать по закону Кирхгофа. Но сопротивление диода непостоянно и поэтому просто решить этот вопрос нельзя.

Пусть в данный момент напряжение на вторичных зажимах трансформатора имеет максимальную величину U_m . Найдем силу тока, которая будет во внешней цепи. Для этого построим характеристику диода (рис. 5.3). Отложив по оси ординат U_m , проведем из точки A линию, параллельную оси абсцисс, и от нее отложим для данного i_{am} падение напряжения $i_a R_n$ во внешней цепи для данного сопротивления R_n . Прямая, проведенная под углом α к горизонтальной линии, определит падение напряжения во внешней цепи, которое выразится отрезком $i_a R_n$.

Сила тока во внешней цепи определяется точкой пересечения этой прямой с характеристикой диода, так как только для этой точки имеет место равенство, которое можно написать на основании второго закона Кирхгофа:

$$U_m = i_a R_n + U_{am}, \quad (5.2)$$

где U_{am} есть максимальное падение напряжения на диоде.

Теперь построим изменение силы тока и напряжения в цепи выпрямления в зависимости от времени (рис. 5.4). Ток будет идти только полупериода, когда на аноде будет положительное напряжение. В момент времени $t = T/4$ он достигнет максимума, и на зажимах вторичной обмотки трансформатора в это время будет максимум напряжения U_m .

Отложим U_m параллельно оси Oy и проведем прямую, параллельную оси абсцисс (рис. 5.5). По оси Oy , как и ранее, у нас отложены величины u_a , а по оси Ox — величины i_a . Нам дано, что $u = U_m \sin \omega t$, с другой стороны, $u = i_a R_n + u_a$. Для построения кривой $u_n = i_a R_n$ построим слева от оси Oy полуокружность радиусом, равным U_m , и разделим ее на части, например через каждые 10° . Проектируя каждую точку u_1, u_2 и т. д. на ось Oy и проводя из полученных проекций (точки u'_1, u'_2 и т. д.) линии под углом $\alpha = \arctg R_n$, мы получим пересечение этих линий с характеристикой диода $i_a = f(u_a)$ в разных точках. Величина падения напряжения в лампе u_a выразится отрезками, лежащими между осью Ox и нашей характеристикой.

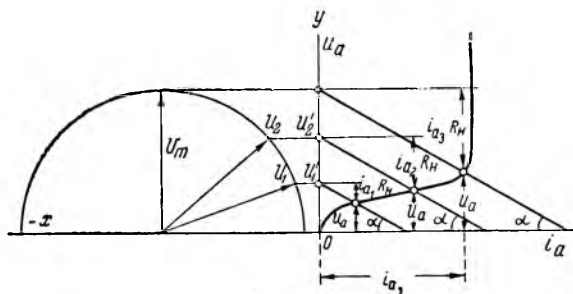


Рис. 5.5

Отрезки, лежащие между характеристикой и прямыми, проведенными из точек u'_1 и u'_2 параллельно оси Ox , дадут нам падение напряжения во внешней цепи $i_a R_n$. Этот графический метод расчета применим к любой схеме диода.

Обычно при расчете станции задается ток антенны I_A . Тогда мощность в антенне $W_A = I_A^2 R_A$. Задав коэффициент полезного действия $\eta = 0,5$, получим мощность, потребляемую генератором от источника питания, $W_r = \frac{W_A}{\eta}$.

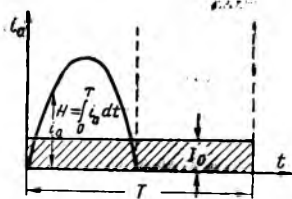


Рис. 5.6

С другой стороны, $W_r = I_0 U_0$ (U_0 — постоянная составляющая выпрямленного напряжения, I_0 — постоянная составляющая выпрямленного тока). Задав напряжение анода U_{am} , определяют U_m , далее по характеристике находят ток через диод и таким образом осуществляется построение формы пульсирующего тока в цепи

нагрузки. При расчете выпрямителя не нужно заходить на верхнюю часть характеристики диода, а следует выбирать ток меньше тока насыщения.

Постоянная составляющая пульсирующего тока, получаемого в анодной цепи при выпрямлении (рис. 5.6), будет равна

$$I_0 = \frac{1}{T} \int_0^T i_a dt. \quad (5.3)$$

Если мы возьмем площадь нашей кривой H за время одного периода в ампер-секундах и разделим ее на период, то получим искомую постоянную составляющую тока $I_0 = \frac{H \text{ (а·сек)}}{T \text{ (сек)}}$:

$$I_0 = \frac{1}{T} \int_0^T i_a dt$$

или

$$I_0 = \frac{1}{T} \int_0^T I_m \sin \omega t dt = \frac{1}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} I_m \sin \omega t dt + \\ + \frac{1}{T} \int_{\frac{T}{2}}^T I_m \sin \omega t dt = \frac{I_m}{T} \left[-\frac{1}{\omega} \cos \omega t \right]_0^{\frac{T}{2}} - \frac{1}{\omega} \cos \omega t \left[\frac{T}{2} \right].$$

Так как интеграл в пределах от $\frac{T}{2}$ до T равен нулю (ток однополупериодный, рис. 5.6), то окончательно

$$I_0 = \frac{I_m}{T} \left| \frac{1}{\omega} + \frac{1}{\omega} \right| = \frac{2}{T} \frac{I_m}{\omega} = \frac{1}{\pi} I_m = 0,318 I_m.$$

Пример. Ламповый генератор в анодной цепи должен иметь напряжение 6000 в. Выпрямитель работает по однополупериодной схеме. Следует определить амплитуду напряжения на вторичной обмотке трансформатора и коэффициент трансформации. Напряжение на вторичной обмотке трансформатора

$$U_m = \frac{6000}{0,318} = 18\,800 \text{ в},$$

коэффициент трансформации

$$n = \frac{U_m}{120 \sqrt{2}} = \frac{18\,800}{120 \sqrt{2}} = 111.$$

5.2. Одно- и двухполупериодное выпрямление однофазного тока (аналитическое исследование)

Допустим, что напряжение на вторичной обмотке трансформатора $u = U_m \sin \omega t$.

Пользуясь нашей диаграммой (рис. 5.5) и беря значения ее через каждые 10° , можно построить кривую $u_n = i_a R_n$, а также $u_a = i_a R_i$ (рис. 5.7). Деля ординаты $u_n = i_a R_n$ на R_n , получим кривую изменения i_a во времени.

Нас интересует, чему равны постоянная слагающая выпрямленного тока, мощность пульсирующего тока и коэффициент полезного действия установки.

Предположим, что потери в диоде малы, что характеристика диода $i_a = f(u_a)$ линейна и она не вносит искажений в синусоидальную форму импульса выпрямленного тока. При этом предположим, что мы будем иметь одинаковые формы выпрямленного тока и напряжения, т. е. $i_a = f(t)$ и $u_n = f(t)$.

Разложим выражение для силы тока i_a (рис. 5.7) в ряд Фурье

$$i_a = A_0 + A_1 \sin \omega t + A_2 \sin 2\omega t + \dots + B_1 \cos \omega t + B_2 \cos 2\omega t + \dots \quad (5.4)$$

Присутствие в разложении членов, содержащих синусы и косинусы, указывает на то, что гармоники могут иметь сдвиг фаз одна относительно другой:

$$A_1 \sin \omega t + B_1 \cos \omega t = I_1 (\sin \omega t \cos \varphi_1 + \cos \omega t \sin \varphi_1) = I_1 \sin (\omega t + \varphi_1),$$

$$A_1 = I_1 \cos \varphi_1, \quad B_1 = I_1 \sin \varphi_1,$$

$$I_1^2 = A_1^2 + B_1^2, \quad \operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{B_1}{A_1}.$$

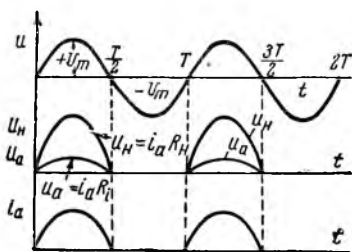


Рис. 5.7

Таким образом,

$$i_a = A_0 + I_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + I_2 \sin(2\omega t + \varphi_2) + \dots \quad (5.4a)$$

Проинтегрируем:

$$\int_0^T i_a dt = \int_0^T A_0 dt.$$

Остальные члены дадут нуль, так как они представляют собою площади за целое число периодов синусоид (или косинусоид).

Чтобы найти амплитуду гармонической составляющей n -го порядка, равную $I_n^2 = A_n^2 + B_n^2$, надо найти отдельно A_n и B_n .

Для определения A_n умножаем весь ряд i_a на $\sin n\omega t dt$ и интегрируем. Тогда все интегралы равны нулю, за исключением n -го, и мы будем иметь

$$\int_0^T i_a \sin n\omega t dt = A_n \int_0^T \sin^2 n\omega t dt = A_n \frac{T}{2}.$$

Так как

$$i_a = I_m \sin \omega t,$$

то

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} I_m \sin \omega t \sin n\omega t dt = \frac{2I_m}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \left[\frac{1}{2} \cos(n-1)\omega t - \frac{1}{2} \cos(n+1)\omega t \right] dt = \\ &= \frac{I_m}{\omega T} \left[\frac{\sin(n-1)\omega t}{n-1} - \frac{\sin(n+1)\omega t}{n+1} \right]_0^{\frac{T}{2}} = \frac{I_m}{2\pi} \left\{ \left[\frac{\sin(n-1)\pi}{n-1} \right] - \left[\frac{\sin(n+1)\pi}{n+1} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Для всех случаев, когда $n > 1$, $A_n = 0$ и только в случае $n = 1$ будет $A_1 = \frac{I_m}{2}$.

Переходим к определению B_n . Для этого умножим весь ряд на $\cos n\omega t$ и проинтегрируем. Тогда

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} I_m \sin \omega t \cos n\omega t dt = \frac{2I_m}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \left[\frac{1}{2} \sin(n+1)\omega t - \frac{1}{2} \sin(n-1)\omega t \right] dt = \\ &= \frac{I_m}{\omega T} \left[-\frac{1}{n+1} \cos(n+1)\omega t + \frac{1}{n-1} \cos(n-1)\omega t \right]_0^{\frac{T}{2}} = \\ &= \frac{I_m}{2\pi} \left[\frac{-\cos(n+1)\pi + 1}{n+1} + \frac{\cos(n-1)\pi - 1}{n-1} \right], \end{aligned} \quad (5.6)$$

функция $\cos(n \pm 1)\pi$ имеет два значения:

- 1) при n нечетном $\cos(n \pm 1)\pi = +1$,
- 2) при n четном $\cos(n \pm 1)\pi = -1$.

Эти два случая можно объединить в один, введя в формулу $(-1)^n$; тогда

$$B_n = \frac{I_m}{2\pi} \left[\frac{(-1)^n + 1}{n+1} - \frac{(-1)^n + 1}{n-1} \right] = -\frac{I_m}{\pi(n^2-1)} [(-1)^n + 1].$$

Если n — нечетное, то $B_n = 0$, если n — четное, то $B_n = -\frac{2I_m}{\pi(n^2-1)}$.

Для первой гармоники $B_1 = 0$. В результате нашего исследования для кривой выпрямленного тока мы будем иметь следующее выражение:

$$i_a = I_m \left(\frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \sin \omega t - \frac{2}{3\pi} \cos 2\omega t - \frac{2}{15\pi} \cos 4\omega t - \frac{2}{35\pi} \cos 6\omega t - \dots \right) = \\ = I_m (0,318 + 0,5 \sin \omega t - 0,212 \cos 2\omega t - 0,042 \cos 4\omega t - \dots).$$

Насколько такое выпрямление пригодно, видно из того, что только 31,8% тока будет выпрямляться; 50% его будет характеризоваться током такой же частоты, что и сеть питания. Оставшаяся часть будет приходиться на высшие гармоники.

Если собрать такую схему, то на аноде генератора будет, кроме постоянного, еще и переменное напряжение питающей частоты, по амплитуде равное половине амплитуды э. д. с. вторичной обмотки трансформатора. Каждое из этих напряжений создает свой режим, и переменный ток, суммируясь с постоянным, вызовет изменение тока в антенне, и работа такой станции будет обнаружена в приемнике с детектором. Такой способ передачи называется «модуляцией на первой гармонике» (тональной передачей). Его применяют на береговых станциях, где используются колебания, могущие быть принятыми на детектор. Имея же схему радиотелефона, приходится заботиться об уничтожении влияния этих модулированных колебаний.

Для того чтобы найти мощность пульсирующего тока, перемножим ординаты кривых u и i_a (рис. 5.7). Полученная кривая даст мгновенные значения мощности, отдаваемой сетью переменного тока. Таким образом, мощность пульсирующего тока будет равна площади кривой $i_a u$, помноженной на $1/T$, т. е.

$$W = \frac{1}{T} \int_0^T i_a u dt.$$

Мощность пульсирующего тока будет равна мощности постоянного тока W_0 , плюс мощность первой гармоники W_1 , плюс мощность высших гармоник W_n . Мощность, теряемая на аноде, мала и ею в первом приближении можно пренебречь.

Уравнение напряжения на нагрузке u_n , изображенного на (рис. 5.7), имеет вид

$$u_n = U_m (0,318 + 0,5 \sin \omega t - 0,212 \cos 2\omega t - 0,042 \cos 4\omega t - \dots). \quad (5.7)$$

Считая нагрузку безындукционной, мы получим следующее выражение для силы тока:

$$i_a = I_m (0,318 + 0,5 \sin \omega t - 0,212 \cos 2\omega t - 0,042 \cos 4\omega t - \dots).$$

Мощность постоянного тока будет равна

$$W_0 = I_m U_m \cdot 0,318^2, \quad (5.8)$$

что составит от мощности пульсирующего тока

$$\frac{W_0}{W} = 0,318^2 \cdot 4 = 0,406,$$

так как мощность W пульсирующего тока определяется по формуле

$$W = \frac{U_m I_m}{4}.$$

Мощность первой гармоники будет

$$W_1 = \frac{U_m I_m}{2} 0,5^2 = 0,125 U_n I_n$$

что составит от мощности пульсирующего тока

$$\frac{W_1}{W} = 0,125 \cdot 4 = 0,5.$$

На остальные гармоники падает 9,47% от мощности пульсирующего тока, Расчетную формулу для двухполупериодного выпрямления однофазного тока (см. рис. 5.8) можно получить следующим образом. На рис. 5.9 при-

водится форма выпрямленного напряжения, которая при разложении в ряд Фурье определится следующим выражением: $u_n = U_m (0,637 - 0,424 \cos 2\omega t - 0,085 \cos 4\omega t - 0,036 \cos 6\omega t - \dots)$. (5.9)

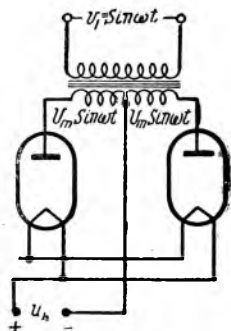


Рис. 5.8



Рис. 5.9

Сила тока при наличии в цепи безындукционной нагрузки будет равна

$$i_a = I_m (0,637 - 0,424 \cos 2\omega t - 0,085 \cos 4\omega t - \dots).$$

Мощность выпрямленного тока будет равна

$$W_0 = U_m I_m \cdot 0,637^2 = 0,405 U_m I_m \quad (5.10)$$

что составит от мощности пульсирующего тока $W = \frac{U_m I_m}{2}$ величину $\frac{W_0}{W} = 0,811$.

Первая гармоника в данном случае отсутствует, а мощность второй равна

$$W_2 = U_m I_m \frac{0,18}{2} = U_m I_m 0,09$$

или (относительно W)

$$\frac{W_2}{W} = 0,18.$$

На остальные гармоники падает всего лишь около 1% мощности.

5.3. Трехфазная цепь питания выпрямителя

Однополупериодное выпрямление трехфазного тока

На рис. 5.10 дана схема трехфазного однополупериодного выпрямителя, а на рис. 5.11 — кривая напряжения на нагрузке (обозначена жирной линией). Обратим внимание на то обстоятельство, что в течение некоторого времени (его абсциссе соответствует заштрихованная площадь) включается параллельно по два диода. Однако ток будет проходить лишь через тот диод, напряжение которого выше. Таким образом, каждый диод

работает $1/3$ периода. Напряжение, изображенное на рис. 5.11, выразится следующим рядом Фурье:

$$u_n = U_m (0,827 - 0,214 \cos 3\omega t - 0,047 \cos 6\omega t - 0,02 \cos 9\omega t - \dots). \quad (5.9a)$$

Так как U_m есть фазовое напряжение, то мощность пульсирующего тока будет равна

$$W = \frac{I_m U_m}{2} \left(1 + \frac{3}{2\pi} \sin 120^\circ\right) = 0,707 U_m I_m, \quad (5.11)$$

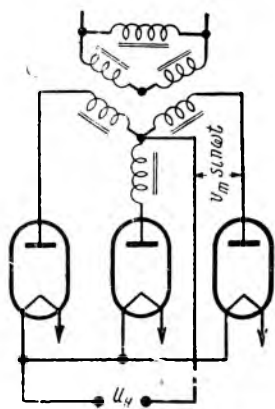


Рис. 5.10

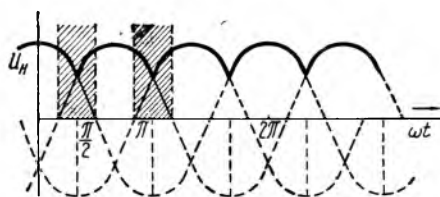


Рис. 5.11

а мощность выпрямленного тока

$$W_0 = 0,684 I_m U_m, \quad (5.10a)$$

что составит по отношению к W

$$\frac{W_0}{W} = \frac{0,685}{0,706} = 0,97.$$

Мощность третьей гармоники в данном случае будет

$$W_3 = 0,0229 U_m I_m,$$

что составляет по отношению к W

$$\frac{W_3}{W} = \frac{0,0214}{0,706} = 0,0325.$$

Двухполупериодное выпрямление трехфазного тока

Схема трехфазного двухполупериодного выпрямителя дана на рис. 5.12 и кривая выпрямленного напряжения — на рис. 5.13.

Напряжение u_n и сила тока, разложенные в ряд, определяются следующими выражениями:

$$\begin{aligned} u_n &= U_m (0,955 - 0,0546 \cos 6\omega t - 0,01335 \cos 12\omega t - \dots), \\ i_a &= I_m (0,955 - 0,0546 \cos 6\omega t - 0,01335 \cos 12\omega t - \dots). \end{aligned} \quad (5.12)$$

Через каждый диод ток проходит одну шестую часть периода. Отсюда следует, что трехфазный двухполупериодный выпрямитель предпочтительнее

вследствие более совершенного выпрямления, отсутствия четных гармоник в выпрямленном токе и малого содержания высших гармоник.

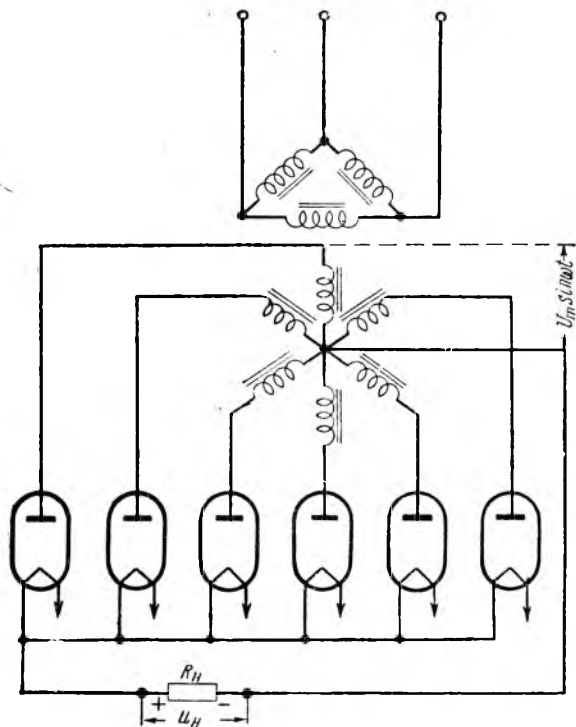


Рис. 5.12

Мощность пульсирующего тока и постоянной слагающей равна

$$W = \frac{I_m U_m}{2l} \left(1 + \frac{6}{2\pi} \sin 60^\circ \right) = 0,914 I_m U_m, \quad (5.13)$$

$$W_0 = 0,955^2 I_m U_m = 0,912 I_m U_m,$$

т. е. выпрямляется почти вся мощность. Мощность высших гармоник весьма мала.

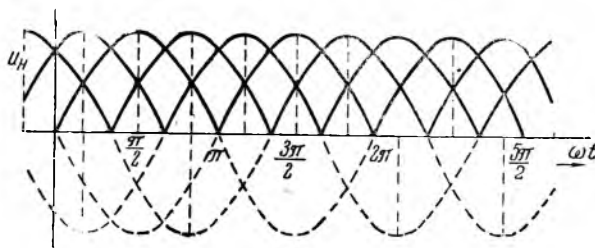


Рис. 5.13

5.4 Аналитическое исследование выпрямления многофазных токов

1-й вариант. Мы видели, что кривые трех последних случаев схожи одна с другой, причем число пульсаций за период равно числу анодов (p). Значит можно вывести формулу в общем виде, годную для всех случаев любого числа пульсаций.

Пусть $i_a = I_m \cos \omega t$. Выберем начало отсчета времени так, чтобы при $t = 0, i_a = I_m$ (рис. 5.14). Заменяя в формуле $A_0 = \frac{1}{T} \int i_0 dt$ переменную t на $p t$, получим постоянную составляющую

$$\begin{aligned}
 I_0 = A_0 &= \frac{1}{T} \int_0^T i_a dt = \frac{p}{T} \int_{-\frac{T}{2p}}^{+\frac{T}{2p}} i_a dt = \frac{p I_m}{T} \int_{-\frac{T}{2p}}^{+\frac{T}{2p}} \cos \omega t dt = \\
 &= \frac{I_m p}{T} \left[\frac{1}{\omega} \sin \omega t \right]_{-\frac{T}{2p}}^{+\frac{T}{2p}} = \frac{p I_m^2}{2\pi} \sin \frac{\pi}{p} = I_m \frac{p}{\pi} \sin \frac{\pi}{p} .
 \end{aligned}
 \tag{5.14}$$

Отношение постоянной составляющей к максимальному значению тока будет

$$\frac{I_0}{I_m} = \frac{A_0}{I_m} = \frac{p}{\pi} \sin \frac{\pi}{p} .$$

Для наших случаев имеем

p	1	2	3	6
$\frac{I_0}{I_m}$	0,318	0,637	0,827	0,955

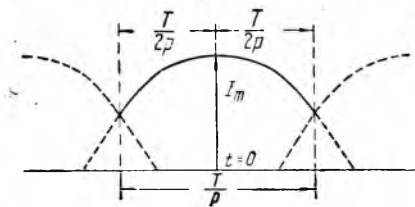


Рис. 5.14

Мощность постоянной составляющей выпрямленного тока будет

$$W_0 = I_m U_m \left[\frac{p}{\pi} \sin \frac{\pi}{p} \right]^2 ,
 \tag{5.15}$$

а мощность пульсирующего тока

$$W = \frac{p}{2\pi} \int_{-\frac{T}{2p}}^{+\frac{T}{2p}} I_m U_m \cos^2 \omega t dt = \frac{1}{2} I_m U_m \left(1 + \frac{p}{2\pi} \sin \frac{2\pi}{p} \right)
 \tag{5.16}$$

Основные расчетные данные сведены в табл. 5.1.

Таблица 5.1

Соотношения основных электрических характеристик
в зависимости от числа полупериодов
выпрямленного тока

p	$\frac{W_0}{I_m U_m}$	$\frac{W}{I_m U_m}$	$\eta = \frac{W_0}{W} \cdot \%$
1	0,101	0,250	45,3
2	0,406	0,500	81,14
3	0,684	0,707	96,8
6	0,912	0,914	99,8

Теперь нам нужно определить амплитуды высших гармоник

$$\begin{aligned}
 A_n &= \frac{2p}{T} \int_0^T i_a \sin n \omega t dt = \frac{2p}{T} \int_{-\frac{T}{2p}}^{+\frac{T}{2p}} I_m \cos \omega t \sin n \omega t dt = \\
 &= \frac{2p}{T} \int_{-\frac{T}{2p}}^{+\frac{T}{2p}} I_m \left[\frac{1}{2} \sin (n+1) \omega t - \frac{1}{2} \sin (n-1) \omega t \right] dt = \\
 &= \frac{2p I_m}{2 \omega T} \left[-\frac{\cos (n+1) \omega t}{n+1} + \frac{\cos (n-1) \omega t}{n-1} \right]_{-\frac{T}{2p}}^{+\frac{T}{2p}} = \\
 &= \frac{p I_m}{2 \pi} \left[-\frac{\cos (n+1) \frac{\pi}{p}}{n+1} + \frac{\cos (n+1) \frac{\pi}{p}}{n+1} + \frac{\cos (n-1) \frac{\pi}{p}}{n-1} - \frac{\cos (n-1) \frac{\pi}{p}}{n-1} \right] = 0.
 \end{aligned} \tag{5.17}$$

Значит, все члены с синусами (A_n) отпадают, остаются члены с косинусами (B_n). Найдём их амплитуды:

$$\begin{aligned}
 B_n &= \frac{2}{T} \int_0^T I_m \cos n \omega t \cos \omega t dt = \frac{2p I_m}{T} \int_{-\frac{T}{2p}}^{+\frac{T}{2p}} \left[\frac{\cos (n+1) \omega t}{2} + \frac{\cos (n-1) \omega t}{2} \right] dt = \\
 &= \frac{p I_m}{\omega T} \left[\frac{\sin (n+1) \omega t}{n+1} + \frac{\sin (n-1) \omega t}{n-1} \right]_{-\frac{T}{2p}}^{+\frac{T}{2p}} = \frac{I_m p}{2 \pi} \left[\frac{2 \sin (n+1) \frac{\pi}{p}}{n+1} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{2 \sin (n-1) \frac{\pi}{p}}{n-1} \right] = \frac{I_m p}{\pi} \left[\frac{\sin (n+1) \frac{\pi}{p}}{n+1} + \frac{\sin (n-1) \frac{\pi}{p}}{n-1} \right] = \\
 &= \frac{I_m p}{\pi (n^2 - 1)} \left[n \sin (n+1) \frac{\pi}{p} - \sin (n+1) \frac{\pi}{p} + n \sin (n-1) \frac{\pi}{p} + \sin (n-1) \frac{\pi}{p} \right]. \\
 B_n &= \frac{I_m p}{\pi (n^2 - 1)} \left(2n \sin \frac{n \pi}{p} \cos \frac{\pi}{p} - 2 \cos \frac{n \pi}{p} \sin \frac{\pi}{p} \right).
 \end{aligned} \tag{5.18}$$

Мы преобразовали наше выражение, заменив сумму тригонометрических функций их произведением. Напомним, что p есть число анодов, а n — порядок гармоники. Нетрудно сообразить, что n будет кратным p , т. е. $n = mp$ и, следовательно,

$$B_n = \frac{I_m p}{\pi (n^2 - 1)} \left(2n \sin m \pi \cos \frac{\pi}{p} - 2 \cos m \pi \sin \frac{\pi}{p} \right).$$

Ясно видно, что первый член, стоящий в скобках, при всяком m равен нулю. Следовательно,

$$B_n = - \frac{I_m p}{\pi (n^2 - 1)} 2 \cos m \pi \sin \frac{\pi}{p}. \tag{5.18a}$$

Если m — четное число, то $\cos m \pi = +1$

$$\text{и} \quad B_n = - \frac{I_m p}{\pi (n^2 - 1)} 2 \sin \frac{\pi}{p}. \tag{5.18б}$$

Если m — нечетное число, то $\cos m\pi = -1$

и
$$B_n = \frac{I_{mp}}{\pi(n^2-1)} 2 \sin \frac{\pi}{p}. \quad (5.18\text{в})$$

Отсюда видно, что при трехфазном однополупериодном выпрямлении,

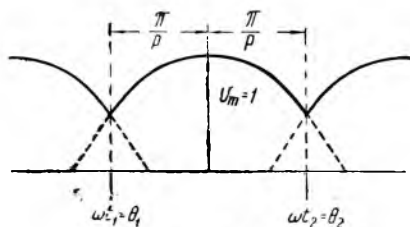


Рис. 5.15

т. е. при $p = 3$, будут гармоники $n = 3, 6, 9, 12$ и т. д. При двухполупериодном выпрямлении $p = 6$ и $n = 6, 12, 18, 24$ и т. д. мы нашли, что

$$A_0 = \frac{p}{\pi} I_m \sin \frac{\pi}{p}$$

и

$$B_n = \frac{I_{mp}}{\pi(n^2-1)} 2 \sin \frac{\pi}{p}.$$

Отношение коэффициента B_n к A_0 показывает на влияние высших гармонических составляющих переменного напряжения:

$$\frac{B_n}{A_0} = \frac{2}{n^2-1}.$$

2-й вариант. Разложение в ряд Фурье кривой выпрямленного тока или напряжения для любого числа полупериодов. Обозначим угол $\omega t = \theta$ (рис. 5.15), откуда следует

$$dt = \frac{d\theta}{\omega}.$$

Ток кенотрона пульсирует в течение $\frac{T}{p}$ сек, где p — число фаз выпрямителя.

Если кривая напряжения задана выражением $u = U_m \cos \omega t$, то, приняв U_m равным единице, получим

$$A_0 = \frac{p}{T} \int_{\omega t_1}^{\omega t_2} \cos \omega t dt = \frac{p}{2\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \cos \theta d\theta, \quad (5.19)$$

$$B_n = \frac{p}{\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \cos \theta \cos n \theta d\theta.$$

В свою очередь, $\theta_1 = -\frac{\pi}{p}$, $\theta_2 = +\frac{\pi}{p}$

и

$$A_0 = \frac{p}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{p}}^{+\frac{\pi}{p}} \cos \theta d\theta = \frac{p}{2\pi} \left[\sin \theta \right]_{-\frac{\pi}{p}}^{+\frac{\pi}{p}} = \frac{p}{\pi} \sin \frac{\pi}{p}.$$

Определим амплитуду n -й гармоники:

$$B_n = \frac{p}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{p}}^{+\frac{\pi}{p}} \cos \theta \cos n \theta d\theta = \frac{p}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{p}}^{+\frac{\pi}{p}} [\cos \theta (n+1) + \cos \theta (n-1)] d\theta =$$

$$= \frac{p}{2\pi} \left[\frac{\sin \theta (n+1)}{n+1} + \frac{\sin \theta (n-1)}{n-1} \right]_{-\frac{\pi}{p}}^{+\frac{\pi}{p}} = \frac{p}{\pi} \left[\frac{\sin (n+1) \frac{\pi}{p}}{n+1} + \frac{\sin (n-1) \frac{\pi}{p}}{n-1} \right].$$

Запишем последнее выражение так:

$$B_n = \frac{p}{\pi (n^2 - 1)} \left[2n \sin \frac{n\pi}{p} \cos \frac{\pi}{p} - 2 \cos \frac{n\pi}{p} \sin \frac{\pi}{p} \right]. \quad (5.20)$$

Так как n кратно p ($n = mp$), то

$$B_n = \pm \frac{2p \sin \frac{\pi}{p}}{\pi (n^2 - 1)}.$$

Плюс соответствует нечетным m , минус соответствует четным m . Согласно рассмотренным выше формулам были вычислены коэффициенты разложения, приведенные в предыдущих параграфах. На основании найденных формул мы получим мощность выпрямленного тока

$$W_0 = U_m I_m \left(\frac{p}{\pi} \right)^2 \sin^2 \frac{\pi}{p} \quad (5.21)$$

и мощность n -й гармоники

$$W_n = \frac{U_m I_m}{2} \frac{(2p)^2}{\pi^2 (n^2 - 1)^2} \sin^2 \frac{\pi}{p}.$$

Нетрудно доказать, что мощность пульсирующего тока будет равна

$$W = \frac{U_m I_m}{2} \left(1 + \frac{p}{2\pi} \sin \frac{2\pi}{p} \right), \quad (5.22)$$

откуда следует, что к. п. д. равен

$$\eta = \frac{2 \left(\frac{p}{\pi} \right)^2 \sin^2 \frac{\pi}{p}}{1 + \frac{p}{2\pi} \sin \frac{2\pi}{p}}. \quad (5.23)$$

Обращая внимание на значение постоянных слагающих

$$U_0 = U_m \frac{p}{\pi} \sin \frac{\pi}{p}, \quad I_0 = I_m \frac{p}{\pi} \sin \frac{\pi}{p}$$

и гармонических слагающих

$$U_n = \frac{2U_m p}{\pi} \frac{1}{n^2 - 1} \sin \frac{\pi}{p}, \quad I_n = \frac{2I_m p}{\pi} \frac{1}{n^2 - 1} \sin \frac{\pi}{p},$$

находим между ними следующую зависимость:

$$U_n = \frac{2U_0}{n^2 - 1}, \quad I_n = \frac{2I_0}{n^2 - 1}. \quad (5.24)$$

5.5. Расчет сглаживающих емкостей и самоиндукций

Постоянное напряжение, снимаемое с выпрямителя и подаваемое на генератор или приемник, имеет пульсации высших гармоник, которые сильно влияют на чистоту передачи. Наиболее сильное влияние будет оказывать ближайшая гармоника. Как увидим дальше, каждый генератор дает ток определенной частоты, но так как он питается от выпрямителя, имеющего гармоники звуковой частоты, то ток высокой частоты генератора, подаваемый в цепь антенны, будет иметь изменяющуюся амплитуду (как результат сложения двух периодических колебаний). В таких случаях говорят, что ток высокой частоты модулируется переменной слагающей выпрямителя. Это нежелательное явление скажется и на приеме. Гармонические колебания, образуемые в цепях выпрямителя, могут быть исключены или ослаблены при помощи фильтров, составленных из конденсаторов и дросселей. При расчете подобного рода сглаживающих устройств стремятся сделать так, чтобы включаемый конденсатор или дроссель погасили первую ближайшую гармонику, так как следующие за ней гармоники погасятся при этом в значительно большей степени.

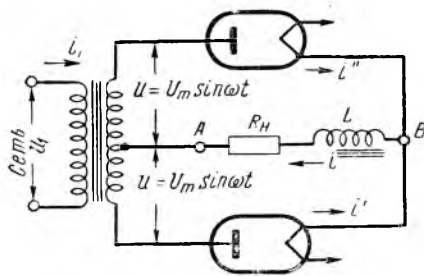


Рис. 5.16

Разберем первый случай — включение сглаживающего дросселя L (рис. 5.16). Допустим, что последний обеспечивает полное сглаживание выпрямленного тока.

На зажимах A и B (рис. 5.16) возбуждается электродвижущая сила, которая представляет для каждого случая сумму электродвижущих сил на данном участке, и по закону Кирхгофа можно написать, что

$$U_0 + \sum U_n \sin(n\omega t + \psi_n) = R_H i + L \frac{di}{dt}, \quad (5.25)$$

$$i = \sum i_n = \sum I_n \sin(n\omega t + \psi_n), \quad (5.26)$$

где I_n — амплитуда силы тока высших гармоник с частотой $n\omega$.

Совершенно очевидно, что постоянная слагающая в уравнении (5.25) уравновешена членом $R_H i$, так как производная постоянной слагающей, входящей в член $L \frac{di}{dt}$, равна нулю.

Подставляя из (5.26) в (5.25) выражение для n -й гармоники тока, получим

$$I_n [R_H \sin(n\omega t + \psi_n) + Ln\omega \cos(n\omega t + \psi_n)] = U_n \sin(n\omega t + \psi_n).$$

Здесь у нас одно уравнение с двумя неизвестными (t и ψ); для решения его составим два уравнения, положив в одном из них $\omega t = 0$ и во втором $n\omega t = \frac{\pi}{2}$. Тогда

$$I_n (R_H \sin \psi_n + Ln\omega \cos \psi_n) = U_n \sin \psi_n,$$

$$I_n (R_H \cos \psi_n - Ln\omega \sin \psi_n) = U_n \cos \psi_n.$$

Возводя в квадрат последние равенства и складывая их, получим

$$I_n^2 = \frac{U_n^2}{R_H^2 + (Ln\omega)^2} \cong \frac{U_n^2}{(Ln\omega)^2}. \quad (5.27)$$

Так как $R_H < Ln\omega$, то

$$I_n \cong \frac{U_n}{Ln\omega}.$$

Постоянная слагающая будет равна

$$I_0 = \frac{U_0}{R_H}. \quad (5.27a)$$

Членами I_n по сравнению с I_0 можно пренебречь, что дает право принять прямоугольную форму для токов первичной и вторичной цепей (рис. 5.17).

Задача расчета дросселя сводится к выбору такой его самоиндукции, чтобы амплитуда ближайшей гармоники сделалась менее определенного задаваемого нами значения, а высшие гармоники погасятся сами, так как квадрат их порядкового номера входит в знаменатель.

Рассмотрим графически работу трехфазного выпрямителя с самоиндукцией в цепи выпрямленного тока (рис. 5.18).

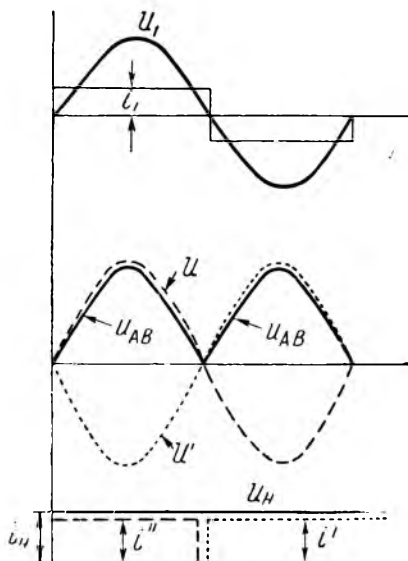


Рис. 5.17

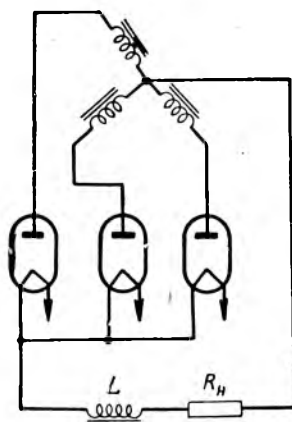


Рис. 5.18

На основании тех же соображений получается следующая диаграмма сил токов и выпрямленного напряжения (рис. 5.19).

Пример расчета. Полагаем, что $U_0 = 15\,000$ в и сила тока $i_H = 2$ а. Пульсация должна быть не более $\pm 1\%$, что составляет $\pm 0,02$ а.

Разберем случай двухполупериодного выпрямления однофазного тока; тогда ближайшая гармоника будет относиться к выпрямленной составляющей, как $\frac{U_2}{U_0} = 0,667$, что было ранее получено из выражения

$$u_H = U_m (0,637 - 0,424 \cos 2\omega t - \dots).$$

Стало быть,

$$\frac{U_2}{U_0} = \frac{0,424}{0,637} = 0,667 = \frac{U_2}{15000},$$

откуда

$$U_2 = 15\,000 \cdot 0,667 = 10\,000 \text{ в}$$

и

$$2\omega L \cong \frac{10\,000}{0,02} = 500\,000 \text{ ом.}$$

Пренебрегая величиной R_n (это вызывает только улучшение) и принимая частоту сети равной 50 гц, получим величину самоиндукции в генри:

$$L = \frac{500\,000}{2\pi \cdot 50 \cdot 2} = 796 \text{ гн},$$

что на практике осуществить весьма сложно.

Если этот числовой пример подсчитать для трехфазного тока, то коэффициент самоиндукции дросселя будет равен

$$L \cong 23 \text{ гн}.$$

Второй способ ослабления пульсаций основан на применении сглаживающей емкости (рис. 5.20).

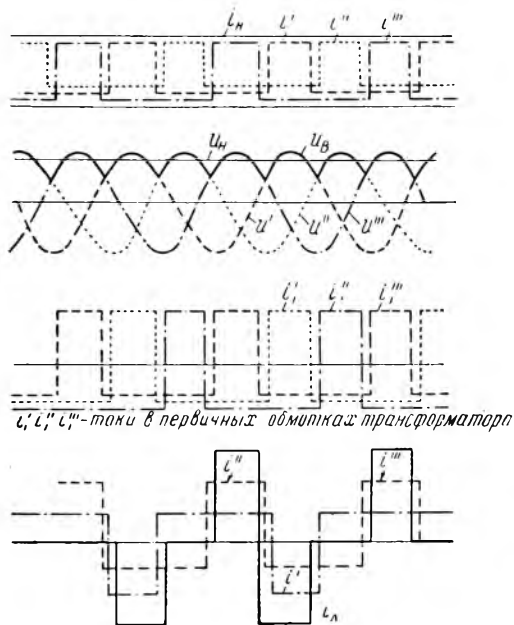


Рис. 5.19

Емкостное сопротивление $x_C = \frac{1}{\omega C}$ ом.

Совершенно очевидно, что постоянная слагающая тока через емкость не пойдет, и поэтому можно написать, что

$$i'_n x_C = i_n R_n,$$

откуда

$$\frac{i'_n}{i_n} = \frac{x_C}{R_n} = \frac{1}{\omega C R_n}. \quad (5.28)$$

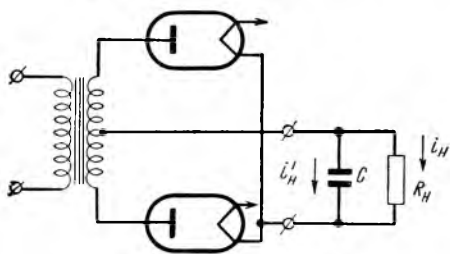


Рис. 5.20

В нашем числовом примере это отношение должно быть меньше 0,01, т. е. только один процент пульсации попадет в полезное сопротивление. По этой формуле можно легко подсчитать требуемую емкость.

Сглаживающая емкость может быть также подсчитана из следующих соображений.

Допустим, что напряжение на вторичной обмотке трансформатора соответствует напряжению на конденсаторе. Тогда заряд конденсатора в момент $t = T/4$ будет равен $Q = CU_m$ (рис. 5.21).

Затем конденсатор будет разряжаться по кривой AC'' или AC' , наклон которых зависит от величин R_n и C . Надо подобрать такие условия, чтобы за время $T/2$ конденсатор не разрядился до конца (кривая AC'') и чтобы при нарастании напряжения диод начинал работать от точки C , близкой к точке A .

Сила разрядного тока

$$i = \frac{dQ}{dt} = -C \frac{du}{dt}; \quad -Cdu = idt.$$

Интегрируя, получим

$$\int_{U_m}^U -Cdu = \int_0^t idt; \quad U_m - U = \frac{it}{C} = \Delta U.$$

Преобразуя полученное выражение путем умножения и деления на R_H и 2π , получим

$$\Delta U = \frac{iR_H 2\pi t}{2\pi CR_H} \approx \frac{U_m 2\pi}{CR_H \frac{2\pi}{t}} = \frac{U_m 2\pi}{\omega CR_H}.$$

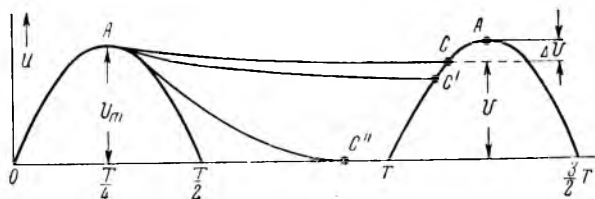


Рис. 5.21

Здесь мы положили $t = T$, так как мы к этому и стремимся, исходя из условия $\Delta U \ll U_m$:

$$\frac{\Delta U}{U_m} = \frac{2\pi}{\omega CR_H}. \quad (5.29)$$

В данном случае сглаживание рассматривалось для однополупериодного выпрямления. В случае многополупериодного выпрямления время разряда емкостей соответственно должно уменьшиться, и выражение получит вид

$$\frac{\Delta U}{U_m} = \frac{2\pi}{\omega CR_H p}.$$

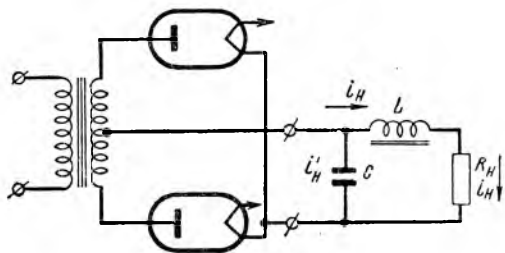


Рис. 5.22

Развивая рассмотренные два способа сглаживания пульсирующего тока, используем включение фильтровых контуров, составленных из сглаживающих конденсаторов и дросселей (рис. 5.22).

Здесь после емкости C мы включили самоиндукцию L , которая значительно ослабит оставшуюся пульсацию. Для данного случая можно написать следующее выражение:

$$i_H (R_H + j\omega L) = i_H' \frac{j}{\omega C}. \quad (5.30)$$

Переходя от комплексного выражения к вещественному, можно определить величину L .

Этот путь погашения пульсации иногда используется для дальнейшего сглаживания путем включения за самоиндукцией емкости, затем снова самоиндукции и т. д., т. е. на пути тока ставится несколько ячеек фильтра.

5.6 Применение многоступенчатых фильтров для сглаживания высших гармоник

Обозначим сопротивление фильтра (рис. 5.23) с n -й ячейки и до конца z_n . Нагрузочное сопротивление обозначим через R , индуктивное сопротивление $x_L = \omega L$, где L — коэффициент самоиндукции дросселя, и сопротивление емкостной цепи через $x_C = \frac{1}{\omega C}$, где C — емкость конденсатора.

$$z_n = \frac{(R + x_L) x_C}{R + x_L + x_C} = \frac{R + x_L}{1 + \frac{R + x_L}{x_C}} = \frac{R + x_L}{1 + Ry_C + x_L y_C},$$

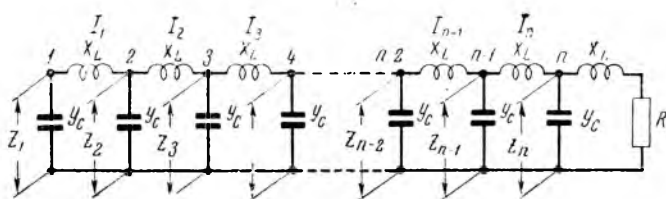


Рис. 5.23

Переходя последовательно от ячейки к ячейке, получим следующие значения их сопротивлений:

$$z_{n-1} = \frac{z_n + x_L}{1 + z_n y_C + x_L y_C}, \quad (5.31)$$

$$z_{n-2} = \frac{z_{n-1} + x_L}{1 + y_C z_{n-1} + x_L y_C},$$

.....

$$z_1 = \frac{z_2 + x_L}{1 + y_C z_2 + x_L y_C},$$

где $y_C = \omega C$.

Полученные выражения определяют следующее произведение:

$$\prod_{n=2}^n (1 + z_n y_C + x_L y_C) = \frac{\prod_{n=2}^n (z_n + x_L)}{\prod_{n=2}^n z_{n-1}}. \quad (5.32)$$

Далее находим отношение токов пульсаций. Так как

$$U_{n-1} - U_n = I_n x_L$$

или

$$I_{n-1} z_{n-1} - I_n z_n = I_n x_L,$$

то

$$\frac{I_{n-1}}{I_n} = \frac{z_n + x_L}{z_{n-1}}.$$

Таким образом, получается следующий ряд отношений:

$$\frac{I_{n-1}}{I_n} = \frac{z_n + x_L}{z_{n-1}}; \quad \frac{I_{n-2}}{I_{n-1}} = \frac{z_{n-1} + x_L}{z_{n-2}}; \quad \frac{I_{n-3}}{I_{n-2}} = \frac{z_{n-2} + x_L}{z_{n-3}}; \quad \dots \quad \frac{I_1}{I_2} = \frac{z_2 + x_L}{z_1}.$$

Перемножив найденные соотношения, получим на основании (5.32)

$$\frac{I_1}{I_n} = \frac{(z_n + x_L)(z_{n-1} + x_L) \dots (z_2 + x_L)}{z_1 z_2 \dots z_{n-1}} = \prod_{n=2}^n (1 + y_C z_n + x_L y_C). \quad (5.33)$$

Анализ схемы рассматриваемого многоступенчатого фильтра (см. рис. 5.23) показывает, что все его ячейки, за исключением последней (n -й), могут быть выполнены в виде симметричных цепей с равными электрическими параметрами, а именно:

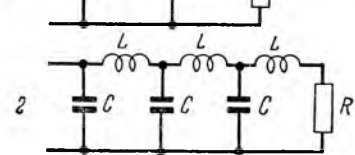
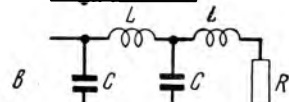
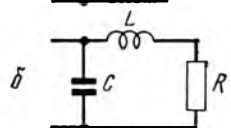
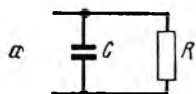


Рис. 5.24

$$z_1 \cong z_2 \cong z_3 \cong \dots \cong z_{n-1} \cong z = \frac{1}{\omega C}.$$

В этом случае отношение токов пульсации на основе выражения (5.33) может быть записано так:

$$\frac{I_n}{I_1} = \frac{z^{n-1}}{(z_n + x_L)(z + x_L)^{n-2}}. \quad (5.33a)$$

Для определения относительного изменения напряжения находим следующие соотношения (для схемы рис. 5.23):

$$\frac{\Delta U_R}{\Delta U'_n} = \frac{R}{R + x_L}; \quad \frac{\Delta U_n}{\Delta U_{n-1}} = \frac{z_n}{z_n + x_L}; \quad \frac{\Delta U_{n-1}}{\Delta U_{n-2}} = \frac{z_{n-1}}{z_{n-1} + x_L}; \dots \quad \frac{\Delta U_1}{U_0} = \frac{1}{\omega C R} \frac{2\pi}{p}. \quad (5.34)$$

Здесь ΔU_R , ΔU_n и ΔU_1 — соответственно колебание напряжения на сопротивлении нагрузки, на n -й ячейке и на первой ячейке; U_0 — напряжение постоянного тока на входе фильтра, которое в нашем случае по своему значению примерно равно U_m .

Перемножая последние выражения и учитывая выражения (5.31), получим

$$\frac{\Delta U_R}{U_0} = \frac{1}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \frac{1}{(1 - \omega^2 LC)^{n-1}} \frac{1}{\omega C} \frac{2\pi}{p}.$$

Ниже приводятся выражения для нескольких фильтров, приведенных на рис. 5.24.

$$\left. \begin{aligned} \text{а)} \quad \frac{\Delta U_R}{U_0} &= \frac{1}{R\omega C} \frac{2\pi}{p}, \\ \text{б)} \quad \frac{\Delta U_R}{U_0} &= \frac{1}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \frac{1}{\omega C} \frac{2\pi}{p} \quad (n=1), \\ \text{в)} \quad \frac{\Delta U_R}{U_0} &= \frac{1}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \frac{1}{(1 - \omega^2 LC)} \frac{1}{\omega C} \frac{2\pi}{p} \quad (n=2), \\ \text{г)} \quad \frac{\Delta U_R}{U_0} &= \frac{1}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \frac{1}{(1 - \omega^2 LC)^2} \frac{1}{\omega C} \frac{2\pi}{p} \quad (n=3). \end{aligned} \right\} \quad (5.35)$$

5.7. Выпрямление тока высокой частоты

Выпрямление тока высокой частоты может представлять интерес при умножении частоты и при измерении напряжений. При решении этой задачи необходимо принимать во внимание внутреннюю емкость диода, которая при определенных условиях может уничтожить желаемый эффект.

На самом деле, при достаточно высокой частоте при незажженном диоде через последний будет проходить ток, обусловленный внутренней емкостью электродов, величина которого при зажженном диоде изменится лишь постольку, поскольку, благодаря пространственному заряду, диэлектрическая постоянная сильно разреженной газовой среды будет отличаться от единицы. Последнее изменение мы не вводим в расчет.

Если падение напряжения на зажимах диода равно u , то емкостной «пропускаемый» ток будет равен

$$I = u j \omega C, \quad (5.36)$$

где ω — угловая частота выпрямляемой э.д.с.

Амплитуда силы тока будет равна

$$I_m = U_m \omega C = \frac{\pi U_m C}{1500 \lambda} \quad (5.36a)$$

или

$$I_m = \frac{U_m}{477} \frac{C}{\lambda},$$

где λ выражена в метрах, C — в сантиметрах.

Если взять данные диодов, применяемых в радиовещательной аппаратуре, то даже при падении напряжения на них, меньшем 10% выпрямляемой э.д.с., емкостные токи значительно превосходят возможные токи эмиссии. Поэтому основным требованием, которое необходимо поставить, является наименьшая емкость электродов.

5.8. Умножение частоты при помощи двухэлектродной лампы

Применение однополупериодного выпрямления для умножения частоты не будет эффективным, даже при исключении указанного выше недостатка, по следующим соображениям.

В данном случае разложение выпрямленного тока определяется следующим выражением:

$$i = SU \left(\frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \sin \omega t - \frac{2}{\pi} \sum \frac{\cos \frac{n\pi}{2}}{n^2 - 1} \cos n\omega t \right). \quad (5.37)$$

Как и следовало ожидать, в данном случае имеет место ярко выраженная первая гармоника *, амплитуда которой равна

$$I_1 = \frac{SU}{2},$$

тогда как амплитуда второй гармоники

$$I_2 = SU \cdot 0,212.$$

причем их отношение равно

$$\frac{I_1}{I_2} = 2,36.$$

* Точно так же дело обстоит и в триоде. При угле отсека в 180° мы имеем такое же разложение анодного тока, и благодаря наличию первой гармоники возможна работа. (Прим. М. В. Шулейкина).

Более выгодной схемой при удвоении частоты является двухполупериодное выпрямление, при котором разложение тока на высшие гармоники определяется выражением

$$i = 2SU \left(\frac{1}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum \frac{\cos \frac{n\pi}{2}}{n^2 - 1} \cos n\omega t \right). \quad (5.37a)$$

Амплитуда второй гармоники в данном случае будет

$$I_2 = SU \frac{4}{3\pi} = 0,424 \cdot SU.$$

Пример. Принимая для крутизны кенотрона очень большое (но возможное) значение $S = 4 \cdot 10^{-3} a/v$, получим

$$I_2 = 1,696 \cdot 10^{-3} U,$$

что дает для выпрямляемого напряжения $U = 500$ в значение тока

$$I_2 = 0,848 \text{ а},$$

В данном случае к кенотрону также должно быть предъявлено требование малой междоузелковой емкости.

Возможная практическая схема умножения частоты в этом случае изображена на рис. 5.25 в пространственном расположении.

Конденсаторы C служат для исключения постоянной слагающей и замыкания источников накала.

Приведенная схема должна работать при следующих условиях. Согласно изложенному, отношение амплитуды второй гармоники к «пропускаемой» первой будет равно

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{4SU}{3\pi\omega CU} = \frac{200S\lambda}{C},$$

где λ — выражена в метрах, а C — в сантиметрах.

Если мы поставим условие, чтобы $\frac{I_2}{I_1} = 10$, то

$$C = 20S\lambda.$$

Пример. $S = 4 \cdot 10^{-3}$; $\lambda = 4 \text{ м}$; $\frac{I_2}{I_1} = 10$.

Отсюда $C \cong 0,3 \text{ см}$.

В расчете не принято во внимание, что междоузелковая емкость будет оказывать какое-то влияние также и на ток удвоенной частоты.

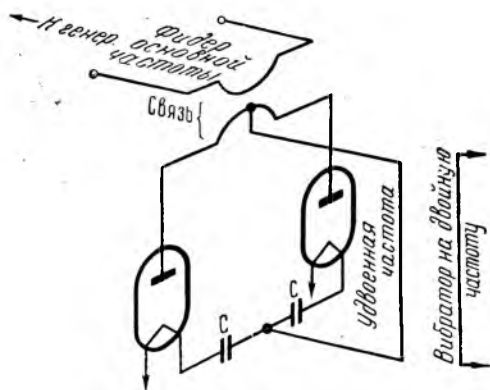


Рис. 5.25

ЭЛЕКТРОННАЯ ЛАМПА С ТРЕМЯ ЭЛЕКТРОДАМИ (ТРИОД), ЕЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ И ПАРАМЕТРЫ

6.1. Вольтамперные характеристики триода и его проницаемость

Триодом называется электронная лампа, имеющая три электрода: нить накала (катод), сетку и анод, имеющий форму пластины или цилиндра.

Ранее мы определили, что у диода сила тока катода полностью соответствует анодному току, протекающему в цепи катод — анод. Этот ток является функцией напряжения у зажимов анода, а именно, при постоянном токе накала ($i_n = \text{const}$)

$$i_k = i_a = 14,65 \cdot 10^{-6} \frac{l}{r_a} u_a^{3/2},$$

где l — действующая длина нити накала и r_a — радиус анода.

Для триода же $i_k = f(u_a, u)$, т. е. сила тока катода будет функцией двух переменных: напряжения анода и напряжения сетки. Найдем эту зависимость.

На рис. 6.1 имеем триод, нить которого накаливается от батареи E_n , а между нитью и анодом включена батарея высокого напряжения E , причем анод присоединен к ее положительному электроду, а нить — к отрицательному; наконец, между сеткой и нитью приложена некоторая произвольно изменяющаяся э.д.с.

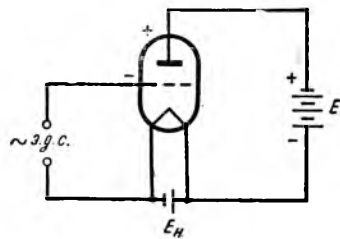


Рис. 6.1

Выясним физический смысл сетки. Если у диода при $u_a = \text{const}$ увеличивать ток накала i_n , то сила тока i_a поднимается до некоторого предела, называемого током насыщения и обусловленного тем, что электроны, вылетающие с катода, образуют между катодом и анодом пространственный отрицательный заряд, препятствующий дальнейшему увеличению излучения электронов с нити.

В триоде мы включаем добавочную э.д.с. между сеткой и катодом и тем самым изменяем состояние электрического поля в пространстве между нитью накала и анодом. Если при токе в цепи анода, меньшем тока насыщения, на сетку будет дан положительный потенциал, то ее заряд частью уничтожит отрицательный пространственный заряд и тем самым увеличит силу тока катода, а стало быть, и тока анода.

Наоборот, при отрицательном потенциале на сетке ее действие на вылетающие с нити электроны будет усиливать действие пространственного заряда, и сила тока катода будет уменьшаться. Таким образом, заряд сетки будет регулировать силу тока в анодной цепи, причем незначительные изменения потенциала сетки будут вызывать весьма значительные изменения силы тока в цепи анода, благодаря чему и возможно действие лампы как усилителя колебаний, которые подаются на сетку. Так как при отрицатель-

ном напряжении на сетке подводимая к ней энергия будет использована только на перезаряд конденсатора сетка — катод, то, следовательно, в цепи сетки энергия будет поглощаться постольку, поскольку это будет зависеть от поглощения энергии электродами и теми проводниками, при помощи которых напряжение подается на сетку.

Итак, изменение силы тока катода i_k зависит от внесения в существующее электрическое поле анода добавочного электрического поля, действующего совместно с полем анода на объемный заряд и поверхность накаливаемого катода. Равнодействующее электрическое поле определяет силу тока катода, следовательно, для вычисления i_k применима та же формула, какая употребляется и для диода, только вместо напряжения u_a следует принимать некоторую другую, более сложную величину, но в конце концов излучение электронов будет обуславливаться напряжением электрического поля на объемном заряде и поверхности нити накала.

Для диода заряд на нити

$$Q = C_a u_a, \quad (6.1)$$

где C_a — емкость между анодом и нитью; u_a — разность потенциалов между анодом и нитью.

Для триода

$$Q = C_{ак} u_a + C_{гк} u_g, \quad (6.2)$$

где $C_{ак}$ — емкость между анодом и нитью (выходная); $C_{гк}$ — емкость между сеткой и нитью (входная); u_a — разность потенциалов между анодом и нитью; u_g — разность потенциалов между сеткой и нитью.

Преобразуем последнее выражение

$$Q = C_{гк} \left(u_g + \frac{C_{ак}}{C_{гк}} u_a \right) = C_{гк} (u_g + D u_a), \quad (6.2a)$$

где величина

$$D = \frac{C_{ак}}{C_{гк}} \quad (6.3)$$

называется проницаемостью.

Из формулы (6.2a) видно, что напряжение, обуславливающее заряд нити, будет сложной величиной, а сравнивая формулы (6.2a) и (6.1), заключаем, что триод можно заменить эквивалентным диодом, если емкость анод — катод диода $C_a \cong C_{гк}$, а напряжение $u'_a = u_g + D u_a$. При этих условиях сила анодного тока триода останется той же самой, как и в диоде, будучи «управляема» напряжением $u'_a = u_g + D u_a$.

Следовательно, формулу тока катода для триода в случае цилиндрической конструкции электродов можно переписать так:

$$i_k = 14,65 \cdot 10^{-6} \frac{l}{r_g} (u_g + D u_a)^{3/2}. \quad (6.4)$$

Здесь r_g — радиус сетки, а l — ее длина, так как заряд Q пропорционален емкости $C_{гк}$. Напряжение измеряется в вольтах, ток — в амперах.

Следует заметить, что при замене анода в диоде сеткой емкость $C_{гк}$ будет несколько меньше. Если соответственно нормальной конструкции анод лежит сзади сетки, то он перекрывает отверстия сетки и можно приближенно написать, что

$$C_a \cong C_{гк} + C_{ак},$$

откуда получим

$$\frac{C_a}{C_{gк}} = 1 + D. \quad (6.5)$$

При малом значении проницаемости D различие между C_a и $C_{gк}$ мало. Поэтому триод с сеткой и анодом в отношении тока катода можно заменить диодом, анод которого расположен на месте сетки триода и напряжение которого равно управляющему напряжению $u'_a = u_g + Du_a$, умноженному на $\frac{C_{gк}}{C_a} = \frac{1}{1+D}$. Действительно, один и тот же ток анода будет получен при одном и том же значении u'_a независимо от того, повысим ли мы напряжение на сетке на Δu_g и одновременно понизим напряжение на аноде на $D\Delta u_a$ или наоборот. Таким образом, подставляя (6.5) в уравнение (6.2а), получим

$$Q = C_a \frac{u_g + Du_a}{1 + D}$$

и, сравнивая с (6.1), найдем

$$u'_a = \frac{u_g + Du_a}{1 + D}. \quad (6.6)$$

Ток катода будет

$$i_k = 14,65 \cdot 10^{-6} \frac{l}{r_g} (u'_a)^{3/2} = 14,65 \cdot 10^{-6} \frac{l}{r_g} \left(\frac{u_g + Du_a}{1 + D} \right)^{3/2} \quad (6.7)$$

Для усилительных триодов D подбирается в пределах от 0,05 до 0,2, для триодов генераторов от 0,1 до 0,01 и менее (в случае триодов большой мощности). Поэтому в тех случаях, когда $D \ll 1$, формула (6.7) принимает вид формулы (6.4).

6.2. Физическое значение проницаемости D триода и семейства его характеристик

Из формулы (6.1) видно, что заряд нити пропорционален напряжению анода, а из формулы (6.2а) для триода, — что заряд определяется напряжением, пропорциональным всему напряжению сетки, и только частично напряжением анода. Так как заряд пропорционален числу электрических силовых линий в поле между соответствующими проводниками, то можно сказать, что на катоде окончатся все силовые линии, исходящие из сетки, и только лишь часть силовых линий, выходящих с анода. Следовательно, величина D показывает, какая часть силовых линий с анода дойдет до нити, и называется проницаемостью триода.

Если цилиндр анода будет большого радиуса, то емкость $C_{ак}$ будет очень мала и величина $D \cong 0$, т. е. ни одна силовая линия с анода не попадает на нить. В этом случае получим (см. 6.7)

$$i_k = 14,65 \cdot 10^{-6} \frac{l}{r_g} u_g^{3/2}. \quad (6.7а)$$

То же самое будет иметь место в том случае, если сетка будет очень густая и, следовательно, D будет очень мало. Если сетка будет редкой, то емкость $C_{gк}$ будет малой, а величина D — очень большой [см. (6.3)] и, следовательно, силовые линии с анода будут свободно проходить сквозь сетку. Тогда из (6.7) найдем

$$i_k = 14,65 \cdot 10^{-6} \frac{l}{r_g} (u_a')^{3/2}. \quad (6.7б)$$

Далее допустим, что $D = 0,1$. Это значит, согласно (6.4), что изменение u_a на $\Delta u_a = 10$ в вызовет такое же изменение тока катода i_k , как и изменение u_g на 1 в. Точно также и наоборот: изменение напряжения на сетке на $\Delta u_g = 1$ в вызовет изменение силы тока в цепи анода, соответствующее изменению напряжения на аноде в $\Delta u_a = \frac{\Delta u_g}{D}$ в (так как $D \Delta u_a = \Delta u_g = 1$ в).

Написанные выше уравнения (6.7) для триода представляют собой уравнения семейства характеристик $i_k = f(u_g)$ при нескольких определенных значениях E_a (рис. 6.2) и $i_n = \text{const}$ (или $T_k = \text{const}$).

Для построения характеристик включаем в цепь сетки (рис. 6.1) некоторую э. д. с., которую можно переключать с одного направления на другое и изменять от нуля до u_g .

а) Пусть $E_a = 0$, тогда, аналогично диоду при $u_g = 0$, ток $i_k = 0$; затем с увеличением u_g сила тока i_k будет некоторое время медленно возрастать, дальше пойдет по линии, близкой к прямой, и, наконец, перейдет в силу тока насыщения i_s . Каждому значению E_a и данному u_g будет соответствовать определенная сила тока i_k .

б) Пусть $E_a = E_{a1}$, т. е. некоторой конечной величине; тогда, по усло-

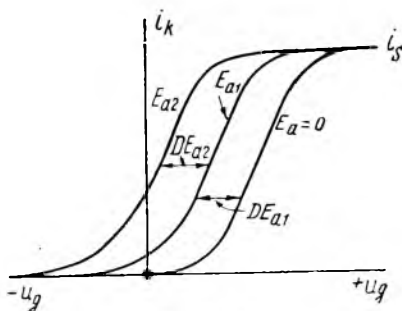


Рис. 6.2

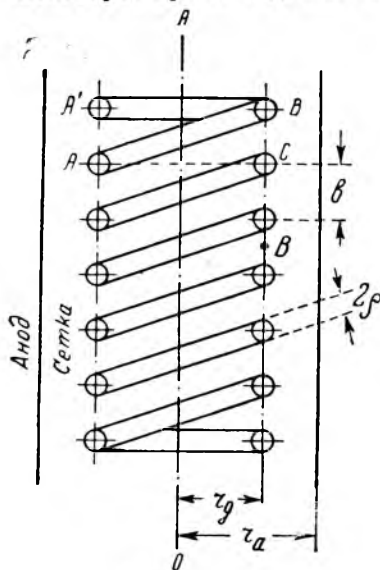


Рис. 6.3

вию эквивалентности триода диоду, сила тока i_k всякий раз будет иметь одно и то же значение при одной и той же величине управляющего напряжения u'_a . Следовательно, при напряжении на аноде E_{a1} мы получим ту же величину i_k при значении u_g , определяемом из равенства $u'_a = u_g + DE_{a1}$, а именно $u_g = u'_a - DE_{a1}$, т. е. та же сила тока i_k будет существовать при напряжении u_g , меньшем, чем первоначальное, на величину DE_{a1} .

Следовательно, все точки новой характеристики будут смещены влево на величину DE_{a1} по отношению к характеристике, построенной для $E_a = 0$. Аналогично будет и при построении характеристики при $E_a = E_{a2}$ и т. д. Величину DE_a можно назвать напряжением смещения характеристики.

Таким образом, мы получаем семейство характеристик, причем при увеличении E_a характеристики будут постепенно смещаться в отрицательную часть u_g . Эти характеристики определяют все свойства триода и позволяют решать любую задачу. Характеристики, снятые на постоянном токе при отсутствии сопротивления в анодной цепи, называются статическими характеристиками триода.

До сих пор мы использовали выражение, которое определяет проицаемость лампы: $D = \frac{\Delta u_g}{\Delta u_a}$. Рассмотрим обратную величину, а именно.

$\frac{1}{D} = \frac{\Delta u_a}{\Delta u_g}$. В данном случае выражение показывает, что при одном и том же значении силы тока анода лампы изменение напряжения на сетке на ± 1 в приводит к увеличению или уменьшению напряжения на аноде в $1/D$ раз. В нашем случае $1/D$ всегда будет больше единицы. Эта обратная величина проницаемости носит название коэффициента усиления лампы и обычно обозначается через μ :

$$\frac{1}{D} = \mu = \frac{\Delta u_a}{\Delta u_g}.$$

6.3. Метод расчета проницаемости триода

При проектировании триода необходимо знать зависимость проницаемости D от его геометрических размеров. На рис. 6.3 показано сечение цилиндрического триода по оси. Обозначим через Q_a заряд, приходящийся на единицу длины анода, и, через Q_g — заряд, приходящийся на единицу длины провода сетки. Тогда заряд, приходящийся на единицу длины спирали сетки в направлении OA , будет равен

$$Q_p = \frac{2\pi r_g Q_g}{b}, \quad (6.8)$$

где r_g и b — радиус и шаг спирали сетки.

Если обозначить потенциал в точке B относительно нити накала (OA) через u_B , то сила тока определится выражением

$$i_k = 14,65 \cdot 10^{-6} \frac{l}{r_g} u_B^{3/2}. \quad (6.9)$$

Разность потенциалов между анодом и точкой B будет равна

$$u_a - u_B = 2Q_a \ln \frac{r_a}{r_g}, \quad (6.10)$$

так как электрическое поле в данном случае радиальное.

Далее определим разность потенциалов между точкой B и поверхностью витка сетки. По Максвеллу потенциал, наводимый зарядом сетки в точке, отстоящей от оси витка на расстоянии x , равен

$$u_x = 2Q_g \ln \sin \frac{2\pi x}{b} + u_0. \quad (6.11)$$

Постоянная u_0 , не зависящая от x , есть потенциал точки B . Подставляя в (6.11) $x = \rho$, найдем потенциал сетки

$$u_g = 2Q_g \ln \sin \frac{2\pi \rho}{b} + u_B. \quad (6.12)$$

Так как величина $\frac{\pi \rho}{b}$ мала, то, заменяя синус на его аргумент, получим

$$u_B - u_g = 2Q_g \ln \frac{b}{2\pi \rho}. \quad (6.13)$$

Так как все силовые линии, выходящие с анода, оканчиваются на сетке и пространственном заряде, то можно написать

$$Q_a = \frac{2\pi r_g Q_g}{b} + \text{пространственный заряд} = \frac{2\pi a r_g Q_g}{b}, \quad (6.14)$$

где α — коэффициент, определяемый из опыта ($\alpha \geq 1$). Исключая из (6.14) Q_a и Q_g , при помощи уравнений (6.10) и (6.13) найдем

$$u_a - u_B = \frac{2\pi\alpha r_g}{b} (u_B - u_g) \frac{\ln \frac{r_a}{r_g}}{\ln \frac{2\pi\rho}{b}}.$$

Обозначая

$$D = \frac{b}{2\pi\alpha r_g} \frac{\ln \frac{b}{2\pi\rho}}{\ln \frac{r_a}{r_g}},$$

найдем

$$u_a + \frac{1}{D} u_g = u_B \left(1 + \frac{1}{D}\right)$$

или

$$u_B = \frac{u_g + Du_a}{1 + D}. \quad (6.15)$$

Подставляя (6.15) в уравнение (6.9), найдем окончательно

$$i_k = 14,65 \cdot 10^{-6} \frac{l}{r_g} \left(\frac{u_g + Du_a}{1 + D} \right)^{3/2}. \quad (6.15a)$$

Уравнение (6.5a) было нами уже найдено [см. (6.7)]. Итак, проницаемость, выраженная в зависимости от параметров триода, равна

$$D = \frac{b}{2\pi\alpha r_g} \frac{\ln \frac{b}{2\pi\rho}}{\ln \frac{r_a}{r_g}}. \quad (6.16)$$

Для примера сравним значения D , рассчитанные по формуле (6.16) и найденные из опыта. Для заданной катодной лампы с цилиндрическими анодом и сеткой проницаемость D , вычисленная по формуле (6.16), равна 0,084, проницаемость же, найденная из опыта, равна 0,1165.

Данные этой лампы следующие: длина анода 1,5 см, диаметр 1 см.

Для сетки лампы имеем: длина 1,6 см, диаметр 0,45 см, диаметр (толщина) провода сетки 0,02 см, шаг намотки сетки 0,13 см.

Кроме выражения (6.16), для вычисления проницаемости триода по его геометрическим размерам существуют еще и другие выражения. Так, например,

$$\frac{1}{D} = \frac{\frac{2\pi r_g}{b} \ln \frac{r_a}{r_g} - \ln \operatorname{csch} \frac{2\pi\rho}{b}}{\ln \operatorname{cth} \frac{2\pi\rho}{b}}; \quad (6.17)$$

если радиус провода $\rho \leq 1/3 b$, то формула упрощается:

$$\frac{1}{D} = \frac{\frac{2\pi r_g}{b} \ln \frac{r_a}{r_g}}{\ln \operatorname{cth} \frac{2\pi\rho}{b}}.$$

В тех случаях, когда сетка выполнена в виде решетки (для рассмотрения используем тот же рис. 6.3), можно видоизменить формулу.

Обозначив через l длину горизонтального провода сетки на единицу длины оси цилиндра, можно написать: $l = \frac{2\pi r_g}{b}$. Это верно для густой сетки. Если же сетка редкая, то из $\triangle ABC$ (рис. 6.3) видно, что

$$l = \sqrt{1 + \left(\frac{2\pi r_g}{b}\right)^2}.$$

Если шаг между вертикальными проводами p и их длина 1 см, то общая длина вертикальных проводов будет равна $l' = \frac{2\pi r_g}{p}$.

Если отверстия сетки квадратные, то $p = b$, и общая активная длина проводов сетки на единицу длины цилиндра будет

$$L = \frac{4\pi r_g}{b}. \quad (6.18)$$

Если диаметр провода сетки не очень мал, то благодаря перекрещиванию проводов ее активная длина уменьшается. Число перекрещиваний равно

$$n = \frac{l'}{b} = \frac{2\pi r_g}{b^2}.$$

Если диаметр провода равен 2ρ , то

$$L_n = L - 2\rho n = \frac{4\pi r_g}{b} - \frac{2\pi r_g}{b^2} 2\rho = \frac{4\pi r_g}{b} \left(1 - \frac{\rho}{b}\right). \quad (6.18a)$$

Если параллельные провода имеют s вертикальных поддерживающих траверс единичной длины, не совпадающих с вертикальными проводами, то

$$L_n = \frac{4\pi r_g}{b} \left(1 - \frac{\rho}{b}\right) + s \left(1 - \frac{t}{b}\right),$$

где t — диаметр траверсы.

В случаях, когда вертикальных проводов вообще нет и вместо них имеются s траверс, то

$$L = \frac{2\pi r_g}{b} + s \left(1 - \frac{t}{b}\right).$$

Для сетки в виде спирали величина $\frac{2\pi\rho}{b}$ обозначает π раз взятое отношение проектируемой поверхности сетки ко всей ее поверхности. Действительно, вся поверхность сетки на единицу длины равна $2\pi r_g l$. Поверхность проводников сетки (проектируемая поверхность на единицу длины) равна $\frac{2\pi r_g 2\rho}{b}$. Отношение их, умноженное на π , дает

$$\pi \frac{\frac{2\pi r_g 2\rho}{b}}{2\pi r_g l} = \pi \frac{2\rho}{b} = \pi a, \quad (6.19)$$

где $a = \frac{2\rho}{b}$.

Для сетки из решетки или системы параллельных проводов

$$\pi a = \frac{2L\rho}{2r_g} = \frac{L\rho}{r_g}.$$

Если параллельные провода имеют держатели, то

$$\pi a = \frac{(L - s) 2\rho + st}{2r_g}.$$

Таким образом, выражение для коэффициента усиления принимает вид

$$\frac{1}{D} = \frac{L \ln \frac{r_a}{r_g}}{\ln \operatorname{cth} \pi a}. \tag{6.20}$$

Значение L и πa приведены в табл. 6.1.

Таблица 6.1

Расчетные формулы параметров при разных сетках		
Конструкция сетки	L	πa
Провода параллельны (поддерживающие провода не учитываются)	n	$\frac{n\rho}{r_g}$ или $\frac{L\rho}{r_g}$
Параллельные провода или спирали без учета поддерживающих проводов	$\frac{2\pi r_g}{b}$	$\frac{2\pi\rho}{b}$ или $\frac{L\rho}{r_g}$
То же с поддерживающими проводами	$\frac{2\pi r_g}{b} + s\left(1 - \frac{t}{b}\right)$	$\frac{(L - s) 2\rho + st}{2r_g}$
Квадратные решетки без поддерживающих проводов	$\frac{4\pi r_g}{b} \left(1 - \frac{\rho}{b}\right)$	$\frac{2\pi\rho}{b} \left(2 - \frac{2\rho}{b}\right)$ или $\frac{L\rho}{r_g}$

6.4 Крутизна и внутреннее сопротивление триода

Так как в средней своей части характеристики близки к линейным, то это позволяет упростить расчеты. Здесь заменим зависимость $i_k = f(u_g)$ линейной зависимостью. В общем виде ток $i_k = f(u_g, u_a)$.

Напишем выражение полного дифференциала

$$di_k = \frac{\partial i_k}{\partial u_g} du_g + \frac{\partial i_k}{\partial u_a} du_a.$$

Чтобы выяснить физическое значение величин, определяющих di_k , откладываем ∂i_k и ∂u_g (рис. 6.4). Получаем треугольник с катетами ∂u_g и ∂i_k . Из рисунка следует, что $\frac{\partial i_k}{\partial u_g} = \operatorname{tg} \alpha$.

Таким образом, $\frac{\partial i_k}{\partial u_g}$ характеризует наклон характеристики к оси абсцисс и называется крутизной характеристики

триода S . Крутизна определяется частной производной

$$S = \frac{\partial i_k}{\partial u_g}.$$

Величина же $\frac{\partial i_k}{\partial u_a} = \frac{1}{R_i}$ есть внутренняя проводимость триода. Итак,

$$di_k = S du_g + \frac{1}{R_i} du_a. \tag{6.21}$$

Величина R_i представляет собой внутреннее сопротивление триода, выраженное в омах; крутизна характеристик триода S выражается в ma/v .

В общем для характеристики в целом величины S и R_i переменны. Для прямолинейной же части они будут постоянны. Следовательно, в этом случае уравнение (6.21) легко проинтегрировать. Тогда получим

$$i_k = Su_g + \frac{1}{R_i} u_a + M, \quad (6.22)$$

где M — постоянная интегрирования, имеющая лишь геометрическое значение. Величина M определится из условия при $u_a = 0$ ток $i_k = 0$ и, следовательно, $M = -Su_{g0}$, так что $i_k = S(u_g - u_{g0}) + \frac{u_a}{R_i}$. Величиной M определяется та точка, в которой ось абсцисс пересекается с продолжением прямолинейной части характеристики $i_k = f(u_g)$ (рис. 6.4) для $E_a = \text{const}$.

Согласно данным определениям крутизны S и внутреннего сопротивления R_i , находим их при помощи уравнения (6.15 а):

$$S = \frac{\partial i_k}{\partial u_g} = \frac{3}{2} \cdot 14,65 \cdot 10^{-6} \frac{l}{r_g} \frac{1}{1+D} \left(\frac{u_g + Du_a}{1+D} \right)^{1/2}; \quad (6.23)$$

$$\frac{1}{R_i} = \frac{\partial i_k}{\partial u_a} = \frac{3}{2} \cdot 14,65 \cdot 10^{-6} \frac{l}{r_g} \frac{D}{1+D} \left(\frac{u_g + Du_a}{1+D} \right)^{1/2}. \quad (6.24)$$

Разделив уравнение (6.23) на (6.24), получим

$$R_i S D = 1. \quad (6.25)$$

Произведем такой опыт. Задав определенный ток i_k , например на характеристике II (рис. 6.5), изменим u_g так, чтобы ток i_k уменьшился, а затем увеличим E_a так, чтобы ток i_k вновь стал прежним. Очевидно, для выполнения этого необходимо перейти на соседнюю характеристику III , так чтобы общее изменение силы тока $i_k = 0$.

Согласно уравнению (6.21).

$$di_k = S du_g + \frac{du_a}{R_i} = 0$$

можно написать, что

$$\frac{1}{R_i S} = - \frac{du_g}{du_a}$$

или окончательно, на основании (6.25),

$$D = - \frac{du_g}{du_a}. \quad (6.26)$$

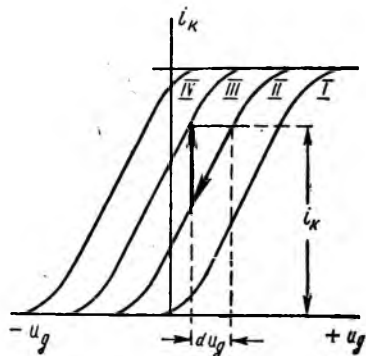


Рис. 6.5

На основании этого можно при помощи приведенного опыта определять проницаемость D из семейства характеристик триода.

6.5. Определение параметров триода

1. Параметры триода можно определить по семейству характеристик, причем для каждого параметра получится подобное же семейство с числом кривых, равных числу характеристик. В линейной части характеристик параметры будут постоянными, в тех же частях, где характеристики не линейны, параметры будут переменными.

Обычно в практике используется два вида характеристик, а именно: статические и динамические. Статические характеристики снимаются при условии отсутствия сопротивления нагрузки в анодной цепи, динамические — при наличии такого сопротивления. Параметры, определяемые из этих характеристик, носят наименования, соответствующие условиям снятия этих характеристик.

Параметры триода также можно определить, не снимая характеристик, путем непосредственного измерения их как на постоянном, так и на переменном токе.

Определение динамической проницаемости D

Включаем в цепь анода сопротивление R_2 и в цепь сетки R_1 ; к этим сопротивлениям присоединяем источник переменного тока. Падение напряжения на сопротивлении R_1 будет u_g , на сопротивлении R_2 — u_a (рис. 6.6). Постоянные напряжения E_a и E_g , введенные в цепи сетки и анода, определяют нам данную точку характеристики. При производстве опыта телефон издает звук с частотой, равной частоте переменного тока. Передвигаем ползунок до тех пор, пока звук не прекратится, при этом изменение силы тока $di_k = 0$ и, следовательно,

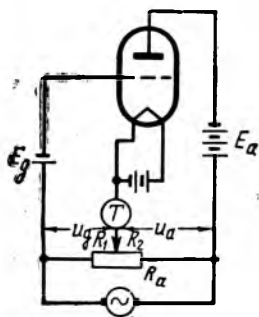


Рис. 6.6

$$D = -\frac{du_g}{du_a} = \frac{u_g}{u_a} = \frac{l_1}{l_2}, \quad (6.26a)$$

где l_1 и l_2 — длина соответствующих частей сопротивления.

Беря различные точки характеристики, путем малого изменения E_g и E_a находим соответствующие значения D для данной характеристики. Следует заметить, что результат будет тем точнее, чем меньше напряжение источника переменного тока.

Определение статической проницаемости D

Для этого берем две характеристики, соответствующие значениям напряжения на аноде E'_a и E''_a (рис. 6.7), отмечаем на них одну и ту же силу тока катода i_k и определяем для каждой характеристики соответствующие значения u_g . Тогда характеристике E'_a соответствует напряжение на сетке $u'_g = E_g + \Delta u_g$, а характеристике E''_a — напряжение на сетке $u''_g = E_g - \Delta u_g$. Проницаемость определим по формуле (6.26):

$$D = -\frac{du_g}{du_a} = \frac{u'_g - u''_g}{E'_a - E''_a}. \quad (6.26b)$$

Определение статической крутизны S

Берем на характеристике с анодным напряжением E_a две точки, соответствующие значениям силы тока i'_k и i''_k (рис. 6.8) и напряжениям сетки

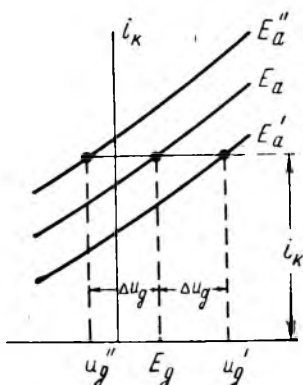


Рис. 6.7

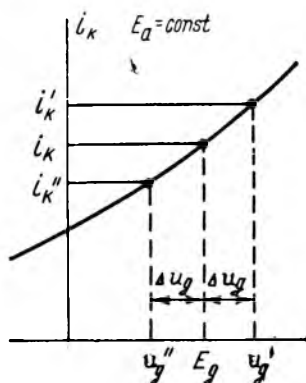


Рис. 6.8

u'_g и u''_g . Тогда значению i'_k будет соответствовать $u'_g = E_g + \Delta u_g$, а i''_k — значение $u''_g = E_g - \Delta u_g$.

Крутизна, согласно уравнению (6.23), будет равна $S = \frac{\partial i_k}{\partial u_g} = \frac{i'_k - i''_k}{u'_g - u''_g}$.

Определение внутреннего статического сопротивления триода R_i

Зная D и S , можно из формулы $DR_iS = 1$ вычислить значение R_i . Но можно также R_i определить тем же самым методом, как D и S . Для этого, выбрав определенное значение E_g , меняем соответственно E_a , а следовательно, и i_k (рис. 6.9).

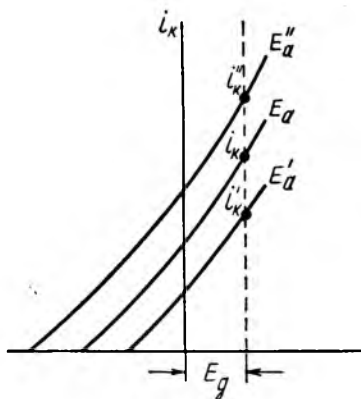


Рис. 6.9

Тогда значению i_k будет соответствовать значение E_a , а значению i'_k и i''_k — соответственно $E'_a = E_a + \Delta u_a$ и $E''_a = E_a - \Delta u_a$.

Согласно уравнению (6.24), внутреннее сопротивление будет равно

$$R_i = \frac{\partial u_a}{\partial i_k} = \frac{E''_a - E'_a}{i''_k - i'_k}. \quad (6.27)$$

Определение динамического сопротивления R_i

Динамическое сопротивление измеряется по способу мостика Уитстона (рис. 6.10), причем в одну диагональ включается источник переменного тока, а в другую — телефон. В момент, когда путем передвижения контакта A по струне достигают исчезновения звука в телефоне, будет существовать известное соотношение

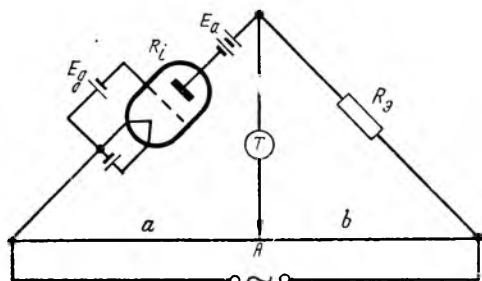


Рис. 6.10

$$R_i = R_3 \frac{a}{b}.$$

Сохраняя постоянным E_a и меняя E_g , можно получить зависимость $R_i = f(E_g)$ при $E_a = \text{const}$ и $i_n = \text{const}$.

Таким образом, сняв семейство характеристик, можно определить значение всех параметров лампы, а затем опытным путем найти законы

изменения этих параметров в зависимости от изменения E_g , что даст возможность определить ту область, где эти параметры постоянны, т. е. линейную часть характеристик.

6.6. Движение электрона в электрическом поле и критическая длина волны триода

Чтобы выяснить возможный предел использования катодной лампы по диапазону частот переменного тока, рассмотрим физические процессы, протекающие в междуэлектродном пространстве при повышении частоты электрического поля.

В данном случае основное внимание уделим вопросам движения электронов в этом поле.

Для электрона, движущегося в таком поле равномерно ускоренно, получим

$$ma = m \frac{d^2x}{dt^2} = Ee. \quad (6.28)$$

Интегрируя (6.28), найдем

$$\frac{v^2}{2} = \frac{e}{m} Ex + C_1.$$

Так как при $x = 0$ будет и $v = 0$, то и $C_1 = 0$. Поэтому (ср. [1.52])

$$\frac{v^2}{2} = \frac{e}{m} Ex. \quad (6.29)$$

Запишем уравнение (6.29) в следующем виде:

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2e}{m} Ex},$$

что после разделения переменных и интегрирования дает

$$t = \sqrt{\frac{2m}{Ee}} x + C_2.$$

В свою очередь, при $t = 0$ будет $x = 0$ и, следовательно, $C_2 = 0$. Окончательно находим

$$t = \sqrt{\frac{2m}{Ee}} x. \tag{6.30}$$

Выражая $\frac{m}{Ee}$ через $\frac{1}{a}$ [см. (6.28)], из (6.30) получим

$$t = \sqrt{2 \frac{x}{a}}. \tag{6.31}$$

Из (6.31) и рис. 6.11 найдем, что время пробега электрона на участке 1 равно

$$t = \sqrt{2 \frac{l}{a}}.$$

Нетрудно сообразить, что время пробега участка 2 (при заданных условиях на электродах (см. рис. 6.11) и принимая начальную скорость электрона $v_0=0$) равно времени, определяемому последним выражением. На основании изложенного период колебания электрона будет равен

$$T = 4t = 4 \sqrt{2 \frac{l}{a}},$$

а соответствующая ему длина волны

$$\lambda = vT = 4v \sqrt{2 \frac{l}{a}}. \tag{6.31a}$$

Выражение (6.29) определяет наибольшую скорость, которой достигаетдвигающийся электрон при $x = l$:

$$v = \sqrt{\frac{2e}{m} EL}.$$

Так как $E = \frac{u}{l}$, то $v = \sqrt{\frac{2e}{m} u}.$

Принимая $e/m = 5,28 \cdot 10^{17}$ CGSE и выражая u в вольтах, найдем

$$v = \sqrt{2 \cdot 5,28 \cdot 10^{17} \frac{u}{300}} = 5,94 \cdot 10^7 \sqrt{u} \text{ см/сек}.$$

Подставляя v и t в уравнение (6.31a), получим $\lambda = 8l$. Стало быть в нашем частном случае критическая длина волны будет величиной постоянной и не будет зависеть от поля.

В табл. 6.2 приведены значения v в зависимости от u .

Таблица 6.2

Зависимость скорости полета электрона от u

$u, \text{ в}$	$v, \text{ см/сек}$	$u, \text{ в}$	$v, \text{ см/сек}$
200	$82,5 \cdot 10^7$	20 000	$825 \cdot 10^7$
2 000	$262 \cdot 10^7$	200 000	$2 660 \cdot 10^7$

Рассмотрим этот случай движения электрона с учетом изменения его массы со скоростью согласно теории относительности. Закон преобразования масс при этом окажется следующим:

$$m = \frac{m_0}{(1 - \beta^2)^{3/2}},$$

где m — так называемая продольная масса электрона (сила направлена вдоль движения электрона) и $\beta = \frac{v}{c}$.

Согласно изложенному, вместо уравнения (6.28) мы получим

$$\frac{m_0}{(1 - \beta^2)^{3/2}} \frac{d^2x}{dt^2} = Ee$$

или

$$\frac{m_0}{(1 - \beta^2)^{3/2}} \frac{dv}{dx} v = Ee.$$

Принимая во внимание, что $v = \beta c$ и $dv = c d\beta$, найдем

$$\frac{m_0}{(1 - \beta^2)^{3/2}} \frac{cd\beta}{dx} \beta c = Ee$$

или, разделяя переменные,

$$\frac{\beta d\beta}{(1 - \beta^2)^{3/2}} = \frac{Ee}{m_0 c^2} dx.$$

Интегрируя это выражение, находим

$$\frac{1}{(1 - \beta^2)^{1/2}} = \frac{Ee}{m_0 c^2} x + C_1,$$

или, полагая $x = 0$, скорость $v = 0$, а следовательно, и $\beta = 0$, определяем $C_1 = 1$, откуда

$$\frac{1}{(1 - \beta^2)^{1/2}} = \frac{Ee}{m_0 c^2} x + 1 = bx + 1, \quad (6.32)$$

где $b = \frac{Ee}{m_0 c^2}$.

Раскрывая последнее выражение, находим скорость v :

$$v = c \frac{\sqrt{b^2 x^2 + 2bx}}{(bx + 1)}. \quad (6.33)$$

Наибольшая скорость при прохождении расстояния $x = l$ (рис. 6.11) получится равной

$$v = c \frac{\sqrt{1 + \frac{2}{bx}}}{1 + \frac{1}{bx}} = c \frac{\sqrt{1 + \frac{2m_0 c^2}{Eel}}}{1 + \frac{m_0 c^2}{Eel}}. \quad (6.34)$$

Записав формулу (6.33) в виде

$$\frac{dx}{dt} = c \frac{\sqrt{b^2 x^2 + 2bx}}{bx + 1}$$

и разделяя переменные, получим

$$dt = \frac{1}{c} \frac{bx + 1}{\sqrt{b^2 x^2 + 2bx}} dx.$$

Интегрируя, находим

$$t = \frac{1}{2bc} \int \frac{d(b^2x^2 + 2bx)}{\sqrt{b^2x^2 + 2bx}} = \frac{1}{bc} \sqrt{b^2x^2 + 2bx} + C_2.$$

Так как при $t = 0$ и $x = 0$, то и $C_2 = 0$, тогда

$$t = \frac{1}{bc} \sqrt{b^2x^2 + 2bx} = \frac{1}{bc} \sqrt{(bx + 1)^2 - 1}. \quad (6.35)$$

Подставляя в (6.35) $bx + 1$, из (6.32) найдем

$$t = \frac{1}{bc} \frac{\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

В свою очередь, из (6.32)

$$b = \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} - 1 \right) \frac{1}{x},$$

откуда

$$t = \frac{x\beta}{c \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} - 1 \right) \sqrt{1 - \beta^2}} = - \frac{x\beta}{c(1 - \sqrt{1 - \beta^2})}. \quad (6.36)$$

Наибольшая скорость, которой достигнет электрон, проходя через сетку, будет при $x = l$ и $El = u$. Тогда из (6.34)

$$v = c \frac{\sqrt{1 + \frac{2m_0c^2}{ue}}}{1 + \frac{m_0c^2}{ue}}.$$

Подставляя $\frac{m_0}{e} = \frac{1}{5,28 \cdot 10^{17}}$ и выражая u в вольтах, получим

$$v = 3 \cdot 10^{10} \frac{\sqrt{1 + 10,2 \cdot 10^5 \frac{1}{u}}}{1 + 5,1 \cdot 10^5 \frac{1}{u}} \text{ см/сек.}$$

или

$$v = 3 \cdot 10^{10} \sqrt{u} \frac{\sqrt{u + 10,2 \cdot 10^5}}{u + 5,1 \cdot 10^5} \text{ см/сек.} \quad (6.37)$$

Из выражения (6.37) видно, что для получения скорости электрона, сравнимой со скоростью света, необходимо, чтобы u было порядка сотен тысяч вольт.

Нетрудно показать, что время пробега электроном участка l (см. рис. 6.11) будет тоже определяться выражением (6.36). Поэтому период колебания электрона будет равен

$$T = 4t \quad (6.38)$$

и соответствующая длина волны выразится так:

$$\lambda = vT = 4 \frac{\beta l v}{c(1 - \sqrt{1 - \beta^2})}. \quad (6.39)$$

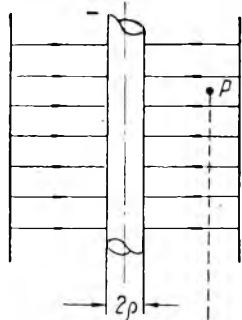
Ниже даны значения функции $\frac{\lambda}{4l} = f(\beta)$.

$\beta \dots$	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
$\frac{\lambda}{4l} \dots$	1,87	1,8	1,72	1,6	1,42	1

Таким образом, согласно изложенному, триод может дать длину волны в несколько сантиметров.

6.7. Движение электрона в радиальном электрическом поле

Анод и катод—концентрические цилиндры радиусов r_a и ρ (рис. 6.12). Напряженность электрического поля в точке ρ между концентрическими цилиндрическими поверхностями определяется выражением



$$E = \frac{u}{r \ln \frac{r_a}{\rho}}, \quad (6.40)$$

где u — разность потенциалов между анодом и катодом; r — расстояние точки ρ от оси цилиндров.

Уравнение движения электрона в радиальном электрическом поле имеет вид

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = E e = \frac{ue}{r \ln \frac{r_a}{\rho}}. \quad (6.41)$$

Обозначив

$$A = \frac{ue}{\ln \frac{r_a}{\rho}}, \quad (6.42)$$

получим

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{A}{r},$$

откуда, интегрируя, найдем

$$\frac{v^2}{2} = A \ln r + C_1.$$

Полагая при $r = \rho$ и $v = 0$, определяем $C_1 = -A \ln \rho$, после чего можно написать

$$\frac{v^2}{2} = A \ln \frac{r}{\rho}$$

или

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{2A} \sqrt{\ln \frac{r}{\rho}}.$$

Заменяя $\frac{r}{\rho}$ на e^x ($x = \ln \frac{r}{\rho}$), последнее выражение запишем так:

$$dt = \frac{dr}{\sqrt{2A} \sqrt{\ln \frac{r}{\rho}}} = \frac{\rho}{\sqrt{2A}} \frac{dx}{\sqrt{x}} e^x.$$

Это выражение интегрируется или разложением e^x в ряд или по частям. В первом случае, полагая за начальные условия $t = 0$, $r = \rho$, $x = 0$ и

определяя таким образом постоянную интегрирования, получим

$$t = \frac{\rho}{\sqrt{2A}} x^{1/2} f,$$

где

$$f = \left(2 + \frac{2}{3} x + \frac{1}{5} x^2 + \frac{1}{21} x^3 + \dots \right), \quad (6.43)$$

или, подставляя значение A из (6.42), будем иметь

$$t = \frac{\rho \sqrt{\ln \frac{r_a}{\rho}}}{\sqrt{2u \frac{e}{m}}} \sqrt{\ln \frac{r}{\rho}} f.$$

При $r = r_a$ последнее выражение определяет время пробега электрона от катода до анода:

$$t = \frac{\rho \ln \frac{r_a}{\rho} f_a}{\sqrt{2u \frac{e}{m}}}, \quad (6.44)$$

где

$$f_a = 2 + \frac{2}{3} \ln \frac{r_a}{\rho} + \frac{1}{5} \left(\ln \frac{r_a}{\rho} \right)^2 + \frac{1}{21} \left(\ln \frac{r_a}{\rho} \right)^3 + \dots$$

Полученное нами выражение пригодно для расчетов, если ряд f_a — сходящийся, что будет иметь место при $\ln \frac{r_a}{\rho} < 1$. Если же $\ln \frac{r_a}{\rho} > 1$, то интегрируем по частям и при начальных условиях $t = 0$, $r = \rho$, $x = 0$ получим

$$t = \frac{\rho}{\sqrt{2A}} e^x x^{-1/2} f',$$

где*

$$f' = 1 + \frac{1}{2} x^{-1} + \frac{1 \cdot 3}{2^2} x^{-2} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3} x^{-3} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2^4} x^{-4} \dots$$

или

$$t = \frac{\rho \sqrt{\ln \frac{r_a}{\rho}}}{\sqrt{2u \frac{e}{m}}} \frac{r}{\rho} \left(\ln \frac{r}{\rho} \right)^{-1/2} f' = \frac{r \left(\ln \frac{r}{\rho} \right)^{-1/2} \left(\ln \frac{r_a}{\rho} \right)^{1/2}}{\sqrt{2u \frac{e}{m}}} f'. \quad (6.45)$$

* Выражения для f и f' можно представить в таком виде:

$$\begin{aligned} f &= 2 \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\ln \frac{r}{\rho} \right)^n}{n! (2n+1)} \right] = 2 \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n! (2n+1)} \right], \\ f' &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2^n} \left[\ln \left(\frac{r}{\rho} \right) \right]^{-n} = \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2^n} (x)^{-n}. \end{aligned} \quad (6.45a)$$

Время пробега электрона от катода до анода определится подстановкой $r = r_a$:

$$t = \frac{r_a}{\sqrt{2u \frac{e}{m}}} f'_a, \quad (6.46)$$

где

$$f'_a = 1 + \frac{1}{2} \left(\ln \frac{r_a}{\rho} \right)^{-1} + \frac{1 \cdot 3}{2^2} \left(\ln \frac{r_a}{\rho} \right)^{-2} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3} \left(\ln \frac{r_a}{\rho} \right)^{-3} + \dots$$

Подставляя $\frac{e}{m} = 5,28 \cdot 10^{17}$ CGSE и выражая u в вольтах, найдем:

при $\ln \frac{r_a}{\rho} < 1$

$$t = \frac{\rho \lg \frac{r_a}{\rho}}{2,58 \cdot 10^7 \sqrt{u}} f_a; \quad (6.47)$$

при $\ln \frac{r_a}{\rho} > 1$

$$t = \frac{r_a}{5,95 \cdot 10^7 \sqrt{u}} f'_a. \quad (6.48)$$

Прежде всего определим область применения обеих формул. Условие $\ln \frac{r_a}{\rho} < 1$ равносильно условию $\lg \frac{r_a}{\rho} < 0,433$, т. е. $\frac{r_a}{\rho} < 2,71$; условие $\ln \frac{r_a}{\rho} > 1$ означает, что $\frac{r_a}{\rho} > 2,71$.

6.8. Движение электрона в однородном высокочастотном электрическом поле и критическая длина волны триода

Рассмотрим условия работы лампы в поле высокой частоты. Для этого исследования используем уравнение движения электрона в переменном электрическом поле.

Напряжение на зажимах конденсатора меняется по закону $u = U_m \sin \omega t$. Записав уравнение движения электрона

$$m \frac{dv}{dt} = \frac{U_m}{r_a} e \sin \omega t = E_m e \sin \omega t$$

и интегрируя его, получим выражение для скорости $v = -\frac{E_m e}{\omega m} \cos \omega t + C_1$.

При $t = 0$ и $v = 0$, $C_1 = \frac{E_m e}{\omega m}$ и, следовательно, $v = \frac{E_m e}{\omega m} \times (1 - \cos \omega t)$. Обозначая $v_m = \frac{E_m e}{\omega m}$, получим $v = v_m (1 - \cos \omega t)$. Отсюда видно, что v_m , при $\cos \omega t = 0$, есть максимальная скорость электрона.

Отклонение его от первоначального положения можно вычислить по формуле

$$x = \int v dt = \frac{v_m}{\omega} (\omega t - \sin \omega t) + C_2. \quad (6.49)$$

Полагая $t = 0$ и $x = 0$, найдем $C_2 = 0$

и $x = \frac{v_m}{\omega} (\omega t - \sin \omega t)$.

Наибольшее отклонение, которое получает электрон, будет при $t = T/2$, т.е.

$$x_m = \frac{v_m}{\omega} \pi = \frac{\pi E_m e}{\omega^2 m}. \quad (6.50)$$

Так как

$$E_m = \frac{U_m}{r_a} \text{ и } \frac{1}{\omega^2} = \frac{\lambda^2}{4\pi^2 \cdot 9 \cdot 10^{16}},$$

то

$$x_m = r_a = \frac{U_m}{r_a} \frac{e}{m} \frac{\lambda^2}{4\pi^2 \cdot 9 \cdot 10^{16}}.$$

Критическая длина волны, наблюдаемая при $x_m = r_a$, определится из формулы

$$\lambda_{кр}^2 = \frac{r_a^2 \cdot 4\pi^2 \cdot 9 \cdot 10^{16}}{U_m \frac{e}{m}}.$$

Подставляя известные величины и выражая $\lambda_{кр}$ в метрах, U_m в киловольтах и r_a в сантиметрах, получим

$$\lambda_{кр} = \frac{0,8}{\sqrt{U_m}} r_a. \quad (6.51)$$

Для $r_a = 1$ см производим расчет $\lambda_{кр} = f(U_m)$:

$U_m, \text{кВ}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$\lambda_{кр}, \text{м}$	2,5	1,8	1,45	1,26	1,13	1,03	0,95	0,89	0,84	0,8

Найдем точку, где кинетическая энергия максимальна. Максимум кинетической энергии $\left(\frac{mv^2}{2}\right)$ будет иметь место при $v = 2v_m$ в момент времени $\omega t = \pi$. Значение x при этом будет равно

$$x = \frac{v_m}{\omega} (\omega t - \sin \omega t) = \frac{v_m}{\omega} \pi. \quad (6.52)$$

Зависимость v и x от ωt показана на рис. 6.13.

6.9. Критические параметры трехэлектродной лампы *

Улучшение эксплуатационных качеств трехэлектродной лампы имеет предел, зависящий, во-первых, от возможности изменения ее параметров, а, во-вторых, от нижнего предела диапазона волнового диапазона.

Определяя качество лампы коэффициентом усиления μ , мы не можем сделать его выше некоторой определенной наибольшей величины, определяемой конструкцией анода, сетки и нити.

Динамический коэффициент усиления определяется в зависимости от рода усилителя. Так, например, для усилителя высокой частоты с настроенным контуром в цепи анода динамический коэффициент усиления K определяется из выражения

$$K = 3,5 \sqrt{\frac{S}{D}} \sqrt{\frac{\lambda}{C}}, \quad (6.53)$$

* Этот раздел рукописи М. В. Шулейкина следует отнести к 1930—1933 гг. (Прим. составителя).

где λ — рабочая длина волны, выраженная в метрах; C — емкость контура сетки — в сантиметрах.

В этом выражении * влияние паразитной емкости анод — сетка компенсируется конденсатором, включенным последовательно в анодную цепь.

Для усилителя на сопротивлениях мы имеем

$$K = \frac{1}{D + \frac{1}{S|z_a|}}, \quad (6.53a)$$

$$|z_a| = \frac{1}{\sqrt{(\omega C_g)^2 + \frac{1}{R_a^2}}};$$

C_g — динамическая емкость между сеткой и нитью накала второй лампы $C_g = C_k + (1 + \frac{1}{D}) C_{ag}$; R_a — сопротивление, включенное в анод.

Если сопротивление цепи анода очень велико, то

$$\frac{1}{S|z_a|} \ll D \text{ и } K = \frac{1}{D} = \mu,$$

т. е. динамический коэффициент усиления K равен статическому коэффициенту μ , который, как указано выше, называется также коэффициентом усиления лампы. В случае малых значений R_a (динамическая крутизна близка к статической $S_d \approx S$) мы имеем

$$K = S |R_a|.$$

Для усилителей низкой частоты

$$K = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\eta_2}{\eta_1} R_g \frac{S}{D}}, \quad (6.53б)$$

где η_2 — к. п. д. выходного трансформатора; η_1 — к. п. д. входного трансформатора; R_g — сопротивление цепи сетка — нить катода.

Во всех трех случаях мы имеем одну и ту же закономерность в отношении параметров лампы, а именно, коэффициент усиления (динамический) тем больше, чем больше крутизна и чем меньше проницаемость.

В свою очередь, крутизна определяется выражением

$$S = \frac{3}{2} 14,65 \cdot 10^{-6} \frac{l}{r_g} (u_g + Du_a)^{1/2} \frac{1}{(1+D)^{3/2}}. \quad (6.54)$$

Таким образом, предел увеличения крутизны определяется размером радиуса сетки и длиной нити. Предел уменьшения радиуса сетки определяется возможным прогибом сетки и накаленной нити, которая может закоротить сетку.

Таким образом, и в отношении коэффициента усиления лампы и в отношении динамического коэффициента усиления предел улучшения определяется соотношением $\frac{S}{D}$, которое нельзя сделать больше величины, определяемой конструктивными соображениями. Величину $\frac{S}{D} = g$. Баркгаузен называет добротностью лампы.

Применение трехэлектродной лампы для усиления высокой частоты в диапазоне меньше 15 м сопряжено с понижением динамического коэффициента усиления.

* Runge, Telefunken Zeitung, 47, 50, 1927.

Сказанное следует, в частности, из выражения для коэффициента усиления

$$K = \frac{1}{D + \frac{1}{SR_a} \sqrt{(\omega C_g R_a)^2 + 1}}. \quad (6.53 \text{ в})$$

Если частота очень велика и $(\omega C_g R_a)^2 \gg 1$, то мы имеем

$$K = \frac{S}{\frac{1}{R_i} + \omega C_g} \cong \frac{S}{\omega C_g}.$$

Определим, при какой длине волны мы получим $K = 1$. Это условие будет соблюдено, если $\omega C_g = S$ или $\lambda = \frac{18,84}{9000} \frac{C_g}{S}$. Допустим, что $C_g = 3 \text{ см}$ и $S = 4 \cdot 10^{-3} \text{ а/в}$. Тогда

$$\lambda = \frac{18,84 \cdot 3}{4 \cdot 9} = 1,57 \text{ м},$$

т. е. при $\lambda = 1,57 \text{ м}$ лампа с данными параметрами потеряет свои усилительные свойства.

Применение трехэлектродной лампы в диапазонах промежуточных, коротких волн и ниже связано с сильным уменьшением коэффициента усиления.

Таким образом, работа в указанном диапазоне с помощью трехэлектродной лампы потребовала дальнейшего развития лампы и способов ее применения. Так как падение коэффициента усиления и ограничение диапазона работы лампы определяются ее внутриэлектродными емкостями, то, как это и было доказано опытом, представляются возможными следующие пути.

Во-первых, решение поставленной задачи может быть получено непосредственно путем соответствующего уменьшения геометрических размеров ламп. В самом деле, из выражения $K \cong \frac{S}{\omega C_g}$ мы можем рассчитать, какова должна быть емкость сетка — катод, чтобы можно было получить рациональный коэффициент усиления.

Кроме того, можно предложить также конструктивное решение данного вопроса, выводя указанную емкость из ламповой схемы.

Вторая возможность применения трехэлектродной лампы в упомянутом диапазоне представляется в соответствующем видоизменении приемной и усилительной схем по высокой частоте. Схема может быть выполнена так, чтобы удовлетворялись условия увеличения коэффициента усиления через погашение сопротивлений приемных контуров.

Во-вторых, уничтожать влияние C_{ag} , компенсируя падение напряжения, получающееся на участке емкости между сеткой и анодом, и, наконец, перевести прием с заданного диапазона в диапазон рационального усиления трехэлектродной лампы.

Таким образом, созданся регенеративный прием, суперрегенеративный прием, нейтродинирование и супергетеродинный прием.

6.10. Критические параметры многоэлектродной лампы с экранирующей сеткой

В 1919 г. Шоттки предложил лампу, у которой между сеткой и анодом был помещен добавочный экранирующий электрод.

Лампа типа SS_1 имела следующие данные*: ток накала $i_n = 0,4 \text{ а}$, напряжение накала $u_n = 2,4$, анодное напряжение $u_a = 35 \text{ в}$, напряжение экранирующей сетки 15 в , статический коэффициент усиления $\mu = 50$.

* Декабрь 1927 года.

Приводим также данные лампы типа SS_{11} : $i_n = 0,24 \text{ а}$, $u_n = 1,9 \text{ в}$, $u_a = u_{g2} = 15 \text{ в}$, $\mu = 20$. Очень интересно отметить отзывы, которые имели место в печати после выхода в свет двухсеточных ламп. В июле 1921 г. проф. Хоу пишет в издававшемся им журнале *Radio Review*, что комбинацию сетки пространственного заряда и экранирующей сетки можно сочетать в трехсеточной лампе, «но конструктивные невыгоды такого реле будут слишком велики».

Проф. Руккоп в сборнике по радиовещательному приему пишет: «Едва ли такие лампы с экранирующей сеткой войдут в практику радиовещания, так как их преимущества недостаточно очевидны и мнимы». После такой совершенно неверной оценки следует крайне одностороннее сравнение: «Цепь экранирующей сетки не имеет отрицательной характеристики, подобно цепи сетки пространственного заряда, и поэтому не имеет возможности тех схем, как и у лампы пространственного заряда, из которых некоторые крайне интересны и свойственны только ей».

В 1926 г. Хелл и Вильямс опубликовали две статьи об экранированных лампах с описанием модели этой лампы.

В июле 1928 г. Роквуд и Томпсон описали применение лампы $UX-222$ компании «Радиотрон», появившейся к тому времени на американском рынке. Лампа с экранирующей сеткой имеет схему, изображенную на рис. 6.14. Анод и экранирующая сетка находятся под постоянными потенциалами. Управляющей сеткой является та, которая расположена ближе к катоду.

Уравнение анодного тока для данной лампы очень нетрудно написать, воспользовавшись приемом, применяемым для трехэлектродной лампы.

Для второй сетки и анода можно определить величину управляющего напряжения

$$u_{S2} = (u_{g2} + D_2 u_a) \frac{1}{1 + D_2}.$$

Далее можно таким же образом определить управляющее напряжение, создаваемое первой сеткой:

$$u_{S1} = \left\{ u_{g1} + D_1 \left[(u_{g2} + D_2 u_a) \frac{1}{1 + D_1} \right] \right\} \frac{1}{1 + D_2}.$$

Пренебрегая в знаменателе величинами D_1 и D_2 по сравнению с единицей, получим

$$u_{S1} = u_{g1} + D_1 u_{g2} + D_1 D_2 u_a,$$

откуда величина анодного тока определяется равной

$$i_a = \text{const} (u_{g1} + D_1 u_{g2} + D_1 D_2 u_a)^{3/2}.$$

Для выявления качеств экранированной лампы произведем ее сравнение с некоторой трехэлектродной лампой, подобранной таким образом, что она имеет то же самое управляющее напряжение на сетке и проницаемость, равную $D_1 D_2$. Получим две характеристики:

$$i_{a2} = \text{const} (u_{g1} + D_1 u_{g2} + D_1 D_2 u_a)^{3/2},$$

$$i_{a1} = \text{const} (u_{g1} + D_1 D_2 u_a)^{3/2}.$$

Допустим, что на экранирующей сетке мы имеем постоянное напряжение ($u_{g2} = \text{const}$). В этом случае мы получим следующее выражение для изменения анодной силы тока:

$$di_{a2} = \text{const} \frac{3}{2} (u_{g1} + D_1 u_{g2} + D_1 D_2 u_a)^{1/2} (du_{g1} + D_1 D_2 du_a)$$

и

$$di_{a1} = \text{const} \frac{3}{2} (u_{g1} + D_1 D_2 u_a)^{1/2} (du_{g1} + D_1 D_2 du_a).$$

Если $di_a = 0$, то

$$-\frac{du_a}{du_{g1}} = \frac{1}{D_1 D_2} = \mu, \quad (6.55)$$

т. е. коэффициент усиления экранированной лампы в $1/D_2$ раз больше нормального коэффициента усиления трехэлектродной лампы. Добавление второй сетки (в данном случае экранирующей) увеличило коэффициент усиления в $1/D_2$ раз.

Непосредственное сравнение выражений анодного тока показывает, что при прочих равных условиях $i_{a2} > i_{a1}$. Отсюда можно заключить, что при равных накалах характеристика экранированной лампы смещается влево, и при равных анодных токах ($i_{a2} = i_{a1}$) экранированная лампа имеет меньший накал.

Определим крутизну характеристики, получаемую в том и в другом случаях:

$$S_{a2} = \frac{\partial i_{a2}}{\partial u_{g1}} = \frac{3}{2} \text{const} (u_{g1} + D_1 u_{g2} + D_1 D_2 u_a)^{1/2},$$

$$S_{a1} = \frac{\partial i_{a2}}{\partial u_{g1}} = \frac{3}{2} \text{const} (u_{g1} + D_1 D_2 u_a)^{1/2}.$$

Крутизна экранированной лампы получается при прочих равных условиях тем больше, чем больше D_1 . Таким образом, очень выгодно увеличивать коэффициент усиления за счет D_2 . Этим определяются качества управляющей и экранирующей сеток. Управляющая сетка выбирается поэтому редкой, а экранирующая весьма густой.

6.11. Критические параметры пентода и гексода

Допустим, что мы задали экранирующей сетке некоторый постоянный потенциал, а потенциал анода повышаем от нуля до его нормального значения. Совершенно естественно, что с повышением анодного напряжения

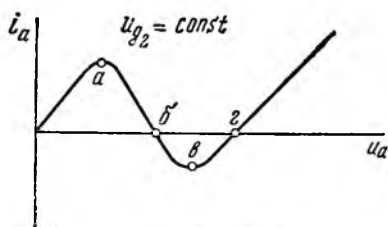


Рис. 6.15

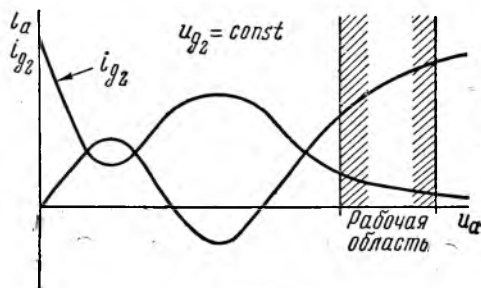


Рис. 6.16

ток анода начинает увеличиваться (рис. 6.15). Однако при некоторых напряжениях на аноде, меньших напряжения экранирующей сетки, электроны, падающие на анод, начнут выбивать вторичные электроны с анода, причем они будут притягиваться экранирующей сеткой, поскольку ее

потенциал выше анодного. В результате анодный ток будет уменьшаться этими электронами, летящими обратно (точка *a*), может дойти до нуля (точка *b*) и сделаться отрицательным (точка *в*), т. е. будет идти не с экранирующей сетки на анод, а наоборот. Когда же анодное напряжение делается таким, что его разность с напряжением экранирующей сетки будет больше напряжения, определяющего выходную скорость динатронных электронов, то последние будут возвращаться на анод и анодный ток опять начнет возрастать. На рис. 6.16 показаны, согласно изложенному, токи цепи анода и цепи экранирующей сетки. Нетрудно доказать, что рабочая область лампы определится заштрихованной площадью на характеристиках рис. 6.16. Отсюда можно сделать два весьма важных вывода. Во-первых, внутреннее сопротивление лампы велико, так как $\frac{di_a}{du_a}$ мало в той области, которую

мы определили рабочей, а в выборе этой области мы руководствовались значением тока экранирующей сетки. Во-вторых, мы не можем допускать больших колебаний анодного напряжения, так как это будет вызывать динатронный эффект, а отсюда можно заключить, что экранированная лампа непригодна для мощного усиления и в этом отношении требует дальнейшего развития. Означенный недостаток был устранен в пятиэлектродной лампе, у которой пентодная сетка имеет нулевой или малый положительный потенциал (рис. 6.17).

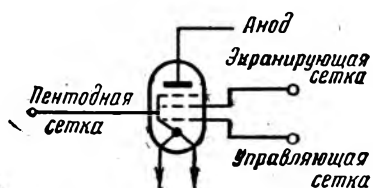


Рис. 6.17

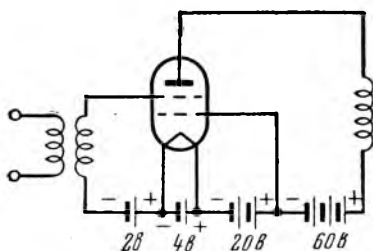


Рис. 6.18

Балл и Кооб указали, что пентод эквивалентен триоду с той же мощностью рассеяния на аноде плюс ступень с усилением в 3,3 раза.

Шоттки указывает на возможность ближайшую к аноду сетку делать управляющей и сообщать положительный потенциал сетке, прилегающей к катоду. Он назвал полученную таким образом лампу (рис. 6.18) лампой с сеткой пространственного заряда. Патент на эту лампу Шоттки получил 19 марта 1915 г. Следует отметить, что Ленгмюр подобный же патент взял 29 октября 1913 г., т. е. почти за год до опубликования своей статьи о пространственном заряде. Мы полагаем, что этот патент Ленгмюра был одним из практических предложений и естественным выводом, сделанным этим ученым из его теории о пространственном заряде.

Основной принцип, на котором основывается действие предлагаемой конструкции, заключается в следующем. В теории пускового тока:

$$i = i_s e^{-\frac{E}{E_0}} = i_s e^{-\frac{Eq}{kT}}.$$

Здесь q — заряд электрона $= 4,802 \cdot 10^{-10}$ CGSM; k — постоянная Больцмана; T — абсолютная температура; i_s — ток насыщения; i — пусковой ток для плоских электродов, E — разность потенциалов между электродами.

Теорией доказывается, что кривая тока, протекающего между двумя электродами, в зависимости от приложенной разности потенциалов имеет значительно большую крутизну, чем это получается при пространственном заряде. Располагая между управляющей сеткой и катодом сетку, заряжен-

ную до достаточно высокого потенциала, удается уничтожить пространственный заряд. Благодаря этому эмиссионный ток получается при всех обстоятельствах равным току насыщения и распределяется между управляющей сеткой, сеткой пространственного заряда и анодом в зависимости от приложенных к ним напряжений. Сетка пространственного заряда имеет относительно нити напряжение около 20 в, рабочая же управляющая сетка находится под напряжением относительно нити в -2 в. Электроны проходят через сетку пространственного заряда, тормозятся у сетки, если ее управляющее напряжение равно нулю, и возвращаются обратно; далее идут к нити и повторяют движения, пока не осядут на сетке пространственного заряда.

Поскольку электроны поворачивают от управляющей сетки обратно, то в непосредственной близости от нее получается пространственный заряд. При диаметре нити 0,1 мм и диаметре управляющей сетки 10 мм плотность пространственного заряда будет равна 1/100 своего прежнего значения. Таким образом, мы могли бы произвести расчет тока по закону трех вторых, принимая катод находящимся вблизи управляющей сетки. Однако при таком расчете значение постоянной получилось бы очень велико вследствие малости расстояния сетка — катод. Кроме того, следует отметить еще следующее обстоятельство. Возле катода всегда лежит минимум потенциала, образованный пространственным зарядом. Если бы пространственный заряд в пространстве: сетка пространственного заряда — управляющая сетка, отсутствовал, то распределение потенциала было бы такое, как это показано на рис. 6.19. Пока значение потенциала на управляющей сетке было бы отрицательно или равно нулю, прохождение тока на анод не имело бы места. Однако как только потенциал управляющей сетки становился бы положительным, ток анода был бы равен току насыщения, следовательно, в этом случае крутизна была бы бесконечно велика.

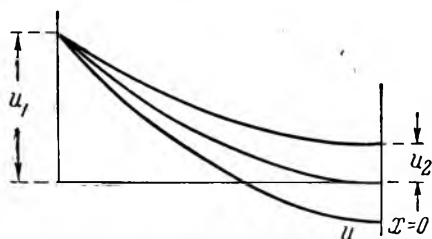


Рис. 6.19

Теоретически можно доказать следующее. Перед управляющей сеткой всегда получается пространственный заряд и во вторичном пространстве не получается минимума потенциала, если значение тока меньше некоторой определенной величины. При этом, как было доказано, крутизна получается бесконечно велика. Однако вертикальная характеристика получится лишь при двух условиях: а) катод должен быть эквипотенциальным, б) все электроны должны иметь одинаковую радиальную скорость.

Соотношение между радиусами пространственной и управляющей сеток должно быть

$$r_y = r_n \cdot 1,62. \quad (6.56)$$

Характеристику можно определить в следующем виде:

$$\left(\frac{i_a}{i_s} \right)^{2/3} = \frac{\left(2n \ln \frac{r_y}{r_n} \right)}{\pi^2} = \frac{u_y}{u_s}, \quad (6.57)$$

где u_y — управляющее напряжение; u_s — напряжение, соответствующее току насыщения анода; n — число проволок сетки пространственного заряда, расположенных по образующим цилиндра.

В конце своей статьи Шоттки делает следующее замечание: «Наконец мы могли бы упомянуть здесь еще о некоторых наших опытах, сделанных нами с лампами, при которых управляющая сетка дважды включена на пути

электронного потока, так что получается следующая последовательность электродов :1) катод, 2) управляющая сетка, 3) перфорированный электрод с положительным постоянным потенциалом, 4) управляющая сетка, 5) анод. В этом случае две управляющие сетки будут взаимно усиливать друг друга, благодаря чему возрастание анодного тока будет еще более крутым».

«В действительности эти лампы весьма пригодны для усиления, особенно при низких напряжениях, но едва ли их можно предпочесть лампам с одним вспомогательным электродом и безусловно они уступают трехсеточным лампам с экранирующей сеткой и сеткой пространственного заряда».

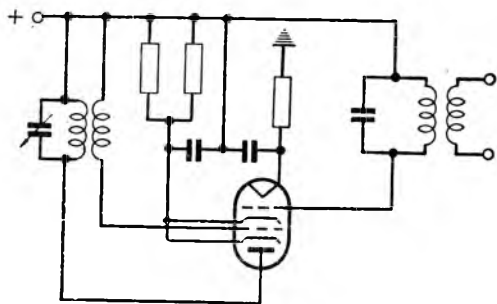


Рис. 6.20

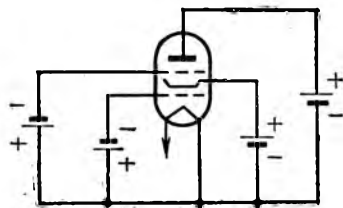


Рис. 6.21

Хотя в цитируемой работе Шоттки и ушел далеко вперед по отношению к тому времени, но все же он не учел всех открывавшихся возможностей.

Основной принцип новых ламп заключается в том, что один и тот же поток электронов, испускаемых катодом, управляется дважды без потери мощности, на что указывал и Шоттки. Необходимым условием для работы лампы является отсутствие емкостной связи между обоими процессами. Возможность такого лампового устройства, как мы указали, отмечалась еще Шоттки, но его необходимость обусловилась рядом деталей приема незатухающих колебаний.

Для регенеративного приема необходимо подводить энергию к цепи сетки от цепи анода, причем электродвижущая сила в цепи сетки должна индуктироваться в определенной фазе. Трудности, связанные с этим, выразились в том, что благодаря связям, возникающим в элементах цепей обратной связи, между цепью анода и сетки происходила расстройка сеточного контура или возбуждались паразитные колебания. Кроме того, обратная связь практически была возможна при условии отсутствия настроенного контура в цепи анода.

Если бы можно было подводить анодное напряжение к цепи управляющей сетки, заэкранированной от анода, то такая задача была бы решена. Схема такого устройства показана на рис. 6.20. Колебания приходят на первую сетку гексода. Вторая и четвертая сетки являются экранирующими. На третью сетку действует обратная связь анодного контура. Предлагаемая схема лишена указанных недостатков.

Под крутизной многоэлектродной лампы мы примем выражение

$$S_{nm} = \frac{\partial i_n}{\partial u_m}, \quad (6.58)$$

если на ток n -й сетки будем воздействовать напряжением m -й сетки. Под проницаемостью n -й сетки относительно m -й принимаем выражение

$$D_{nm} = - \left. \frac{\partial u_n}{\partial u_m} \right| i_m = \text{const}. \quad (6.59)$$

Внутреннее сопротивление n -й сетки будет равно

$$R_{in} = \frac{\partial u_n}{\partial i_n} \cdot \eta \quad (6.60)$$

Так как мы задались целью получить управление без потери мощности, то естественно, что наши два электрода должны находиться под отрицательным напряжением относительно катода (рис. 6.21). Далее совершенно очевидно, что эти электроды должны быть экранированы друг от друга как внутри лампы, так и вне ее. С другой стороны, чтобы получить значительную силу тока, необходимо задать этому экранирующему электроду положительный потенциал, для того чтобы он, кроме экранного действия, создавал еще ускорение потоку электронов. Совершенно ясно, что при постоянном напряжении u_2 на поток электронов влияет только первая сетка, регулируя плотность потока. Третья сетка опять тормозит электроны и создает между вторым и третьим электродами пространственный заряд, что является предпосылкой для вторичного управления, так как сетка может управлять лишь электронами малых скоростей. Напряженность электрического поля вблизи третьей сетки (рис. 6.20) определяется напряжением u_3 , проницаемостью $D_{3,4}$, напряжением u_4 , проницаемостью $D_{2,3}$ и напряжением u_2 . Таким образом, напряжение около третьей сетки будет пропорционально

$$u_2 + D_{3,4}u_4 + D_{2,3}u_3.$$

Если эта сумма будет равна нулю и поле будет однородно, то и ток будет равен нулю. В этом случае ток i_4 был бы или прекращен или принял бы свою начальную величину.

В действительности, благодаря различным причинам и, в частности, неоднородности поля, ток с напряжением увеличивается постепенно

$$i_a = S_{3,4} (u_3 - \bar{u}_3).$$

Здесь $\bar{u}_3$ — постоянное напряжение, а $S_{3,4}$ зависит от u_1 , u_2 и $\bar{u}_4$. Точно также можно написать

$$i_a = S_{1,4} (u_1 - \bar{u}_1),$$

где $\bar{u}_1$ — постоянное напряжение, а $S_{1,4}$ зависит от u_2 , u_3 и $\bar{u}_4$.

Из этих двух выражений вытекает весьма важное соотношение

$$S_{3,4} (u_3 - \bar{u}_3) = S_{1,4} (u_1 - \bar{u}_1), \quad (6.61)$$

из которого следует, что крутизна каждого процесса управления есть линейная функция другого управляющего напряжения и что изменение напряжения на одной сетке модулирует процесс управления на другой.

Совершенно очевидно, что при отрицательных напряжениях на первой и третьей сетках мы должны иметь зависимость

$$i_2 + i_4 = \text{const.}$$

Однако это может иметь место лишь при условии

$$-S_{2,3} = -S_{3,4},$$

т. е.

$$i_2 = -S_{2,3} (u_3 - \bar{u}_3) + \text{const.},$$

$$i_a = -S_{2,4} (u_4 - \bar{u}_4).$$

Гексод-смеситель (рис. 6.22). Высокая частота подводится к первой сетке, и мы имеем

$$i_a = S_{1,4} \cdot u_h,$$

где u_h характеризует напряжение на контуре первой сетки.

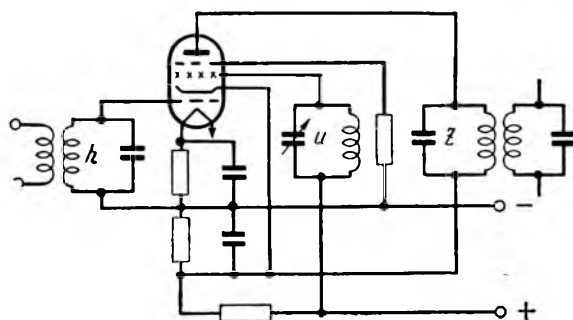


Рис. 6.22

Далее

$$S_{1,4}u_h = S_{1,3}u_u,$$

где u_u характеризует напряжение на контуре третьей сетки, и, наконец,

$$i_a = au_u u_h,$$

где a — коэффициент пропорциональности.

Выход высокой частоты и местный генератор мы имеем развязанными. Развязана также антенна и местный генератор, благодаря чему она не излучает колебания местного генератора. Наконец, вместо двух ламп мы имеем только одну.

ТРИОД КАК ГЕНЕРАТОР

7.1. Сила тока катода i_k , сетки i_g и анода i_a

В предыдущем изложении мы относили все свои рассуждения к силе тока, излучаемого катодом, т. е. к току катода. Для этой величины было выведено уравнение [см. (6.7 б)], а в дальнейшем на основании этой величины были определены параметры триода и под этой величиной понималась также и сила тока анодной цепи.

Однако если мы составим схему для снятия статических характеристик триода, то нетрудно заметить, что часть тока катода ответвится и будет измерена прибором A_2 (рис. 7.1) как ток сетки i_g . Та часть электронов, которая, пройдя сетку, достигнет анода, учтется прибором A_3 как сила тока анода i_a . Оба тока сойдутся далее в точке б и сумма их определится прибором A_1 как сила тока электронов, проходящих через катод или ток катода.

Таким образом, можно написать на основании первого закона Кирхгофа, что

$$i_k = i_a + i_g. \quad (7.1)$$

Распределение силы тока катода между сеткой и анодом трудно выразить каким-либо простым законом, но можно установить следующее важное условие, которому это распределение подчиняется. Если одни

из электродов — сетка или анод — имеют отрицательный потенциал по отношению к катоду, то сила тока, ответвляющаяся на этот электрод, будет практически равна нулю, и весь ток катода замкнется на другой электрод. Так как в действительности не все электроны покидают катод с нулевой скоростью, то при нулевой разности потенциалов данного электрода и катода ток, ответвляющийся на этот электрод, не будет еще равен нулю, но уже при незначительных отрицательных потенциалах будет очень быстро уменьшаться и при минус одном-двух вольтах практически будет равен нулю.

Это положение имеет большое значение для усилителей, так как при небольшом добавочном отрицательном напряжении на сетку мощность, потребляемая ею, будет практически равна нулю, тогда как усилительное действие триода от этого не пострадает. С другой стороны, если в триодном генераторе анод получит отрицательный потенциал, то, естественно, что весь ток катода замкнется на сетку, что должно отразиться на коэффициенте полезного действия триода, так как цепь сетки не представляет собой полезной нагрузки, которая в данном случае находится в цепи анода. В том случае, когда оба электрода имеют положительный потенциал, соотношение между токами анода и сетки определяется относительной разностью величин потенциалов анода и сетки. Если при постоянном положительном потенциале одного из них мы будем увеличивать потенциал второго, то сила, ответвляющаяся на этот электрод, будет увеличиваться. Если при

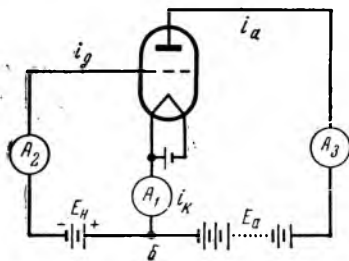


Рис. 7.1

этом сила тока катода равняется силе тока насыщения ($i_k = i_s$), то увеличение силы тока, ответвляющегося на данный электрод, будет происходить за счет другого электрода, так что

$$i_a + i_g = i_k = i_s = \text{const},$$

т. е. сумма силы тока анода и сетки будет постоянной величиной при данных напряжениях сетки и анода.

Если же сила тока катода меньше силы тока насыщения, то при увеличении потенциала одного из электродов сила тока i_k будет увеличиваться согласно характеристикам триода, причем может увеличиваться также и

сила тока, ответвляющаяся на второй электрод, например на анод, если увеличивать напряжение на сетку.

Такое изменение силы анодного тока i_a дано на рис. 7.2, там же дано соответствующее изменение тока на сетку i_g и изменение силы тока катода i_k .

Приведенные характеристики сняты с триода, имеющего пропускательность 10%. Нетрудно заключить на основании уравнения

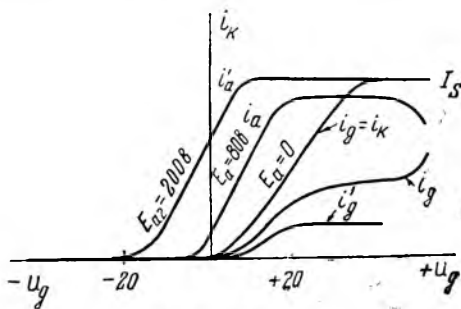


Рис. 7.2

(6.4), что при напряжении при аноде $E_a = 200$ в ток катода будет равен нулю при $u_g = -20$ в. При увеличении напряжения на сетке ток катода увеличивается, и так как от $u_g = -20$ в до $u_g = 0$, напряжение на сетке отрицательно, то весь ток катода замыкается на анод.

Поэтому для области характеристик при отрицательном напряжении на сетку можно написать уравнение (7.1) в виде

$$u_g \leq 0 \begin{cases} i_k = i_a, \\ i_g = 0. \end{cases} \quad (7.2)$$

При меньших анодных напряжениях характеристики триода (см. рис. 7.2) сдвигаются вправо. При меньшем напряжении на аноде та же сила тока катода i_k получается при большем u_g .

Таким образом, в области $u_g \leq 0$ характеристики триода $i_k = f(u_g, u_a)$ совпадают с характеристиками анодного тока

$$i_a = f(u_g, u_a).$$

Как только напряжение на сетке становится положительным ($u_g > 0$), характеристики анодного тока начинают отличаться от характеристик тока катода на величину тока цепи сетки. Тем не менее анодная сила тока при данном напряжении на аноде будет увеличиваться до некоторого предела. С приближением к силе тока насыщения сила анодного тока будет уменьшаться тем больше, чем больше при данном анодном напряжении будет сила тока на сетку. Ток на сетку увеличивается тем сильнее, чем меньше анодное напряжение. При больших по сравнению с u_g напряжениях на аноде ток на сетку очень мал, тогда как при малых напряжениях на аноде и напряжении на аноде, равном нулю, почти весь ток i_k ответвляется на сетку.

На рис. 7.3 изображены характеристики, снятые с триода усилителя, густая сетка которого сконструирована из толстой проволоки, благодаря чему ток на сетку по сравнению с анодным током достаточно велик. При 10 в анодного напряжения ток на сетку имеет такую же величину, как и

анодный ток, причем даже при 100 в на аноде сила тока на сетку составляет 25 % от анодного.

На рис. 7.4. изображены характеристики генераторного триода, работающего нормально при 3000 в на аноде, с очень редкой сеткой из тонкой проволоки. Пока напряжение на аноде велико по сравнению с напряжением

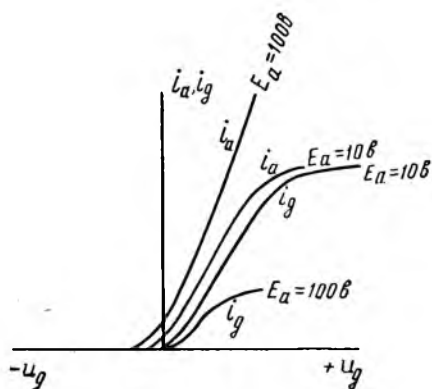


Рис. 7.3

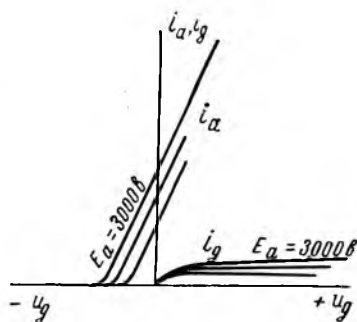


Рис. 7.4

на сетке, ток сетки очень мал, всего несколько процентов от i_a . При сравнимых напряжениях сетки и анода ток i_g растет, но не столь сильно, как в предыдущем случае, поэтому сравнимые величины i_a и i_g наблюдаются здесь только при наличии значительных напряжений на сетке.

7.2. Эквивалентная схема генератора

Проводя параллель между коллекторной динамомашинной и триодом, можно сказать, что триодный генератор может работать с независимым возбуждением, с самовозбуждением и со смешанным возбуждением. В последнем случае мы подразумеваем комбинацию из первых двух.

Рассмотрим вначале генераторную лампу с независимым возбуждением, как наиболее простой случай.

Такой триод (рис. 7.5) должен иметь:

1) цепь накала (для упрощения схемы реостат в цепи накала не обозначен);

2) цепь нагрузки с полезным сопротивлением R_a , находящимся в цепи анода, и батарею высокого напряжения E_a .

3) цепь сетки, к которой приложена электродвижущая сила соответствующей частоты (независимое возбуждение).

Пусть для простоты полезная нагрузка будет чисто активной; к цепи сетка — накал подводим возбуждение переменного напряжения с амплитудой U_{gm} с угловой частотой ω .

Для того чтобы при прохождении тока высокой частоты через аккумуляторную батарею не выделялись джоулевы потери, ее шунтируют блокировочным конденсатором с такой емкостью C , чтобы $\frac{1}{\omega C} \ll r$ — внутреннего сопротивления батареи.

Делаем допущение, что сила тока, отвечающая на сетку, очень мала и, следовательно, сила тока катода

$$i_k = i_a + i_g \cong i_a.$$

Требуется рассчитать, какая сила тока будет в цепи анода, какая мощность выделится в полезном сопротивлении и каков будет к. п. д. триода

должна была бы изменяться, в соответствии с характеристикой E_{a3} , от точки 1 до точки 2.

Все это было бы справедливо, если бы напряжение на аноде равнялось э. д. с. батареи. В действительности же напряжение на аноде определяется формулой (7.3), т. е. E_a будет меняться в зависимости от силы анодного тока, вследствие чего при изменении напряжения на сетке u_g сила тока I_a не будет изменяться по характеристике E_{a3} , а будет переходить на соседние характеристики E_{a4} , E_{a1} и так далее, т. е. будет изменяться по некоторой кривой, называемой *рабочей*, или *динамической*, характеристикой.

Произведем построение u_g , u_a и i_a как функций ωt (рис. 7.7).

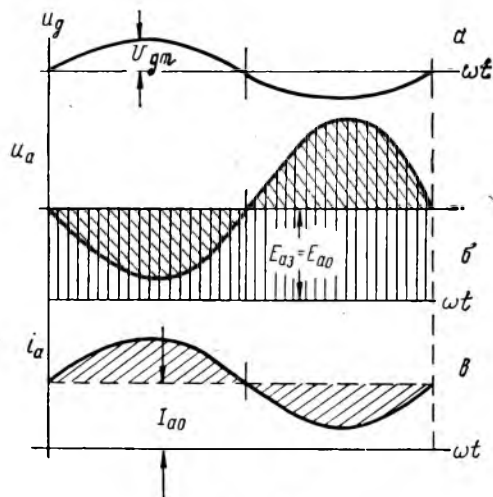


Рис. 7.7

Изобразим на рис. 7.7, а изменение напряжения в цепи сетки в зависимости от ωt , предполагая, что оно изменяется по закону

$$u_g = U_{gm} \sin \omega t.$$

Согласно уравнению (7.3), на рис. 7.7, б отложим значение напряжения на аноде при холостом ходе, равное $E_{a3} = E_{a0}$. Из рис. 7.6 следует, что при положительной амплитуде $+U_{gm}$ напряжение на аноде будет меньше, чем при отрицательной амплитуде $-U_{gm}$.

Предполагая изменение слагающей переменного напряжения на аноде равным

$$u_a = -U_{am} \sin \omega t, \quad (7.5)$$

строим на рис. 7.7, б изменение напряжения на аноде лампы.

Знак минус в выражении (7.5) взят потому, что, согласно характеристикам при $\omega t = \frac{\pi}{2}$, когда $u_g = U_{gm}$, напряжение на аноде имеет наименьшую величину. Откладывая ординаты кривых рис. 7.7, б согласно (7.5), получаем изменения напряжения на аноде лампы. Полученная кривая определяет не только мгновенные значения напряжения на аноде, но дает также и обе ее составляющие. Ординаты площади, заштрихованной вертикально, определяют мгновенные значения напряжения на аноде, а ординаты площади, заштрихованной косыми штрихами, — мгновенные значения переменной, составляющей напряжения на аноде u_a .

Кривую силы тока анодной цепи находим следующим образом. На рис. 7.6 на диаметре, равном $2 U_{gm}$, строим полуокружность и, принимая угол $OO'A$ равным ωt , вращаем вектор $O'A$ по часовой стрелке. Нетрудно

но видеть, что любой отрезок OB представит собой проекцию вектора $O'A$ на горизонтальную ось, равную

$$u_g = U_{gm} \sin \omega t.$$

Определяя из рис. 7.7, б мгновенное значение u_a для данного ωt из характеристик рис. 7.6, находим i_a , соответствующее выбранным значениям u_a и u_g . Прodeлав такое построение для значений ωt от 0 до 2π , получаем кривую (рис. 7, 7, в). Откладывая в тех же координатных осях значение тока холостого хода I_{a0} согласно уравнению (7.4), определяем кривую переменной слагающей тока анодной цепи (ординаты площади, заштрихованной косо). Из построенных кривых следует, что напряжения на аноде и сетке будут сдвинуты на 180° , так как при наибольшем напряжении u_g сила тока i_a будет максимальна, а следовательно, по формуле (7.3) u_a будет минимальным. Сила же тока i_a будет в фазе с u_g и будет изменяться

около некоторой постоянной величины тока холостого хода I_{a0} , соответствующей нулевому значению u_g и обусловленной постоянной составляющей напряжения на аноде $E_{a3} = E_{a0}$.

Подобные кривые получаются, если изменения всех величин будут происходить в прямолинейной части характеристики. В противном случае будет введено условие, что наибольшее значение i_a не превосходит тока насыщения и не может быть меньше нулевого значения, так что верхняя и нижняя части синусоиды $i_a = f(\omega t)$ будут срезаны и i_a будет изменяться, как показано на рис. 7.8.

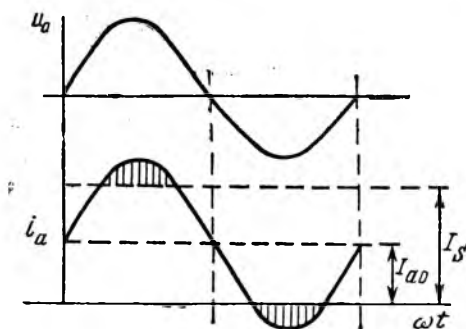


Рис. 7.8

Итак, могут быть два случая: 1) когда сила тока i_a изменяется по синусоиде (рис. 7.7в) и 2) когда она изменяется по кривой, изображенной на рис. 7.8.

Для второго случая составление аналитических уравнений затруднено, так как все величины определяются нелинейными частями характеристик. Поэтому, когда явления заходят в область тока насыщения или в область нулевого значения анодного тока, решают задачу графическим путем.

Колебания, захватывающие область нелинейной части характеристик, мы назовем колебаниями второго рода, в то время как колебания в прямолинейной части характеристик будем называть колебаниями первого рода.

На практике обычно приходится иметь дело с колебаниями второго рода, что предпочтительнее ввиду того, что при колебаниях первого рода во все время работы оставалась бы некоторая постоянная слагающая силы тока i_a , которая, не давая полезной мощности как переменная слагающая, обуславливает собой потери на аноде. Коэффициент полезного действия триода, как будет показано ниже, не может превысить 50% при колебаниях первого рода, в то время как при колебаниях второго рода он может быть значительно выше.

7.3. Основы аналитического расчета генератора по динамической характеристике

Аналитический расчет обычно служит предварительным расчетом, определяющим основные размеры триода, в то время как графический расчет служит проверочным. Впрочем, оба расчета дают близкие результаты*, так

* С достаточной точностью для практики (Прим. составителя).

что в некоторых случаях можно пользоваться только одним аналитическим расчетом.

Произведем аналитический расчет режима работы триода. Заменяем наши характеристики прямыми линиями (рис. 7.9), причем точки пересечения прямых с осью абсцисс физического значения иметь не будут, так как i_a не может равняться нулю при положительном напряжении на сетке. Следовательно, эти точки будут иметь только геометрическое значение.

Мгновенное значение силы тока катоды будет

$$i_k = Su_g + \frac{1}{R_i} u_a + M,$$

где i_k и u_a — мгновенные значения, которые, как мы выяснили, состоят из двух слагающих — постоянной и переменной:

$$(i_{k0} + i_{k\sim}) = Su_g + \frac{1}{R_i} (E_a + u_{a\sim}) + M.$$

(7.6)

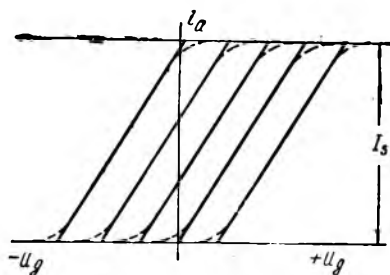


Рис. 7.9

Очевидно, что это уравнение справедливо для любых условий, а стало быть, и для случая, когда переменные слагающие равны нулю. Тогда постоянная слагающая равна

$$i_{k0} = \frac{1}{R_i} E_a + M. \quad (7.7)$$

Вычтя (7.7) из (7.6), получим переменную слагающую

$$i_{k\sim} = Su_g + \frac{1}{R_i} u_{a\sim}.$$

Найдем значение силы тока в анодной цепи $i_{a\sim}$ при заданном значении u_g , считая, что $i_{k\sim} = i_{a\sim} + i_{g\sim} \cong i_{a\sim}$ и что $u_a = -i_{a\sim} R_a$. Знак минус ставится потому, что сила тока в анодной цепи сдвинута на 180° относительно напряжения на аноде лампы.

Тогда

$$i_{a\sim} \cong i_{k\sim} = Su_g + \frac{1}{R_i} u_{a\sim} = Su_g - \frac{R_a}{R_i} i_{a\sim},$$

$$Su_g = i_{a\sim} \left(1 + \frac{R_a}{R_i} \right),$$

откуда

$$i_{a\sim} = \frac{R_i Su_g}{R_a + R_i}. \quad (7.8)$$

Это уравнение определяет силу тока в цепи анода в зависимости от напряжения на сетке.

Проведем аналогию триода с генератором переменного тока, для чего заменим схему триода эквивалентной схемой генератора (рис. 7.10). В этой схеме генератор с э.д.с. $SR_i u_g$ работает в цепи с двумя последовательно соединенными сопротивлениями R_i и R_a .

Формулу (7.8) можно переписать иначе:

$$i_{a\sim} = \frac{u_g}{D} \frac{1}{R_a + R_i}, \quad (7.9)$$

Отсюда следует, что напряжение сетки u_g будет действовать в цепи анода как э.д.с., равная $\frac{u_g}{D}$, т. е., если проницаемость равна 10% (0,1), то

в цепи анода будет действовать э.д.с. в 10 раз бóльшая, чем u_g ; таким образом, триод можно использовать как усилитель. Усиление можно произвести несколько раз, включив соответственным образом несколько триодов (так называемое каскадное усиление).

На основании изложенного можно формулировать следующее положение: триодный генератор в отношении слагающей переменного тока эквивалентен генератору переменного тока, который имеет индуктированную электродвижущую силу, равную

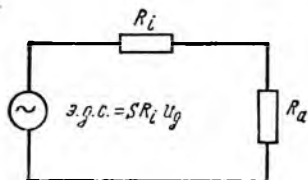


Рис. 7.10

$$SR_i u_g = \frac{u_g}{D}, \quad (7.10)$$

и работает во внешней цепи с сопротивлением, равным внутреннему сопротивлению плюс полезное сопротивление R_a .

В данном случае это положение высказано для частного случая, а именно, когда имеется только омическое сопротивление в анодной цепи, но это положение справедливо для случая каких угодно электрических постоянных анодной цепи.

Множитель $\frac{1}{D(R_a + R_i)} = S_d$ в уравнении (7.9) назовем крутизной рабочей характеристики. Тогда $i_{a\sim} = S_d u_g$. Отсюда с помощью (7.9) и (7.10) получаем

$$S_d = S \frac{R_i}{R_i + R_a}. \quad (7.11)$$

Полезная мощность, выделенная в цепи нагрузки, будет

$$W_a = \frac{I_{am}^2 R_a}{2} = \frac{(SR_i U_{gm})^2 R_a}{2(R_a + R_i)^2}, \quad (7.12)$$

где, на основе (7.8),

$$I_{am} = \frac{SR_i U_{gm}}{R_a + R_i}. \quad (7.13)$$

Найдем условие максимума полезной мощности, т. е. условие оптимального режима работы генератора

$$\frac{dW_a}{dR_a} = -\frac{(SR_i U_{gm})^2}{2} \frac{1}{(R_i + R_a)^4} [(R_a + R_i)^2 - 2R_a(R_a + R_i)] = 0,$$

откуда

$$R_a = R_i.$$

Таким образом, максимум мощности W_a будет иметь место при $R_a = R_i$, т. е., когда внутреннее сопротивление триода равно внешнему сопротивлению. При соблюдении этого условия из (7.13) и (7.11) получим

$$I_{am} = \frac{S}{2} U_{gm}, \quad S_d = \frac{S}{2}.$$

Окончательно, подставляя отсюда значение I_{am} в (7.12), получим

$$W_{am} = \frac{(S U_{gm})^2 R_a}{8}.$$

Следует помнить, что мы все время имели дело с амплитудными значениями. Теперь определим полную мощность, подведенную от батареи, и коэффициент полезного действия триода. Сила тока в цепи анода

$$i_a = I_{a0} + I_{am} \sin \omega t,$$

где I_{a0} — ток холостого хода, а I_{am} — амплитуда слагающей переменного тока.

Так как напряжение батареи E_6 постоянно и равно E_a , то подведенная от батареи мощность равна

$$W_6 = \frac{1}{T} \int_0^T E_a i_a dt = \frac{1}{T} \left(\int_0^T E_a I_{am} \sin \omega t dt + \int_0^T E_a I_{a0} dt \right) = E_a I_{a0}.$$

Полезная же мощность

$$W_a = \frac{1}{T} \int_0^T i_a u_a dt,$$

где u_a — мгновенное значение переменной составляющей напряжения на аноде, равное $U_{am} \sin \omega t$. Тогда

$$\begin{aligned} W_a &= \frac{1}{T} \int_0^T i_a U_{am} \sin \omega t dt = \frac{1}{T} \int_0^T I_{a0} U_{am} \sin \omega t dt + \\ &+ \frac{1}{T} \int_0^T I_{am} U_{am} \sin^2 \omega t dt = \frac{I_{am} U_{am}}{2}. \end{aligned}$$

Коэффициент полезного действия триода

$$\eta = \frac{W_a}{W_6} = \frac{I_{am} U_{am}}{2 I_{a0} E_a}. \quad (7.14)$$

При нашем условии, что сила тока не ниже нуля,

$$I_{am} \leq I_{a0} = \frac{I_s}{2},$$

очевидно, и $U_{am} \leq E_a$. Таким образом, при колебаниях первого рода $\eta \leq 0,5$. Другими словами, половина или более энергии, отданной батареей при колебаниях первого рода, превращается в джоулево тепло; как мы увидим дальше, при колебаниях второго рода η может быть гораздо выше. Мощность потерь на аноде определится по формуле

$$W_n = \frac{1}{T} \int_0^T i_a u_a dt, \quad (7.15)$$

где

$$\begin{aligned} i_a &= I_{a0} + I_{am} \sin \omega t, \\ u_a &= E_a - U_{am} \sin \omega t. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} W_n &= \frac{1}{T} \int_0^T (E_a I_{a0} - I_{a0} U_{am} \sin \omega t + E_a I_{am} \sin \omega t - \\ &- I_{am} U_{am} \sin^2 \omega t) dt = E_a I_{a0} - \frac{I_{am} U_{am}}{2} = W_6 - W_a. \end{aligned} \quad (7.15a)$$

Обратимся теперь к нахождению крутизны рабочей характеристики на рис. 7.11. Так как $S_d = S \frac{R_i}{R_i + R_a}$, то при $R_a = 0$, $S_d = S$, т. е. сила анодного тока изменялась бы по идеальной статической характеристике*. При

* См. среднюю жирную линию на рис. 7.11 (Прим. составителя).

$R_a = \infty$, $S_d = 0$, т. е. сила анодного тока оставалась бы постоянной, см. пунктирную линию ab . Таким образом, крутизна рабочей характеристики S_d может изменяться в пределах угла β , причем в случае максимальной полезной мощности, когда $S_d = S/2$, рабочая характеристика будет проходить под углом $\beta/2$ к идеальной характеристике.

При работе триода в режиме колебаний первого рода напряжение сетки U_{gm} можно увеличивать лишь до тех пор, пока $I_{am} \leq \frac{I_s}{2}$ или $I_{am} + I_{a0} \leq I_s$. В противном случае мы будем иметь колебания второго рода.

Итак, при заданных значениях R_a и W_a можно найти I_{am} , силу тока насыщения триода, а следовательно, максимум U_{gm} и напряжение батареи анодной цепи.

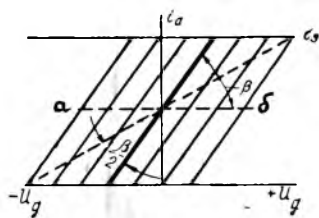


Рис. 7.11

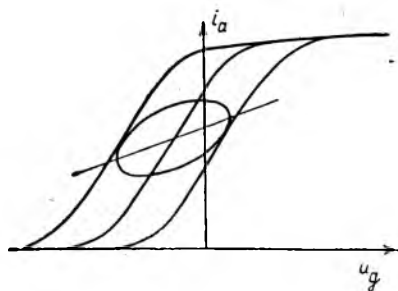


Рис. 7.11а

Разобранный случай, когда внешнее полезное сопротивление исключительно безындукционное, является простейшим. На практике, в схемах усилителей и генераторов в цепи анода, имеется или телефон или трансформатор, вторичная обмотка которого присоединяется к сетке следующего триода, т. е. имеется последовательное включение омического и индуктивного сопротивления. В этом случае сила тока I_{am} не будет сдвинута на 180° относительно напряжения на аноде триода и рабочая характеристика будет уже не прямая линия, а некоторая замкнутая фигура (рис. 7.11а). То же самое будет и в случае, когда параллельно с омическим сопротивлением будет включена емкостная нагрузка, т. е. в этом случае i_a не будет иметь точного совпадения минимума с максимумом u_a .

7.4. Расчет генератора с помощью комплексной плоскости

Разберем важный для нас случай работы триодного генератора непосредственно на радиосеть (рис. 7.12). Схема, эквивалентная данному случаю, изображена на рис. 7.13.

Для того чтобы произвести замену триода эквивалентным генератором переменного тока, надо найти условия замены сопротивлений двух параллельных цепей некоторым эквивалентным сопротивлением. При выполнении этого условия можно перейти к разобранному уже случаю.

В цепи анода данной схемы будет иметь место как постоянный ток, так и переменный. Разветвленные цепи должны быть настроены в резонанс токов на угловую частоту ω возбудителя. Следовательно, сила тока в них будет максимальная, а так как одна из этих цепей будет иметь преобладающее емкостное сопротивление, а другая — индуктивное, то эти токи будут сдвинуты друг относительно друга на 180° . Ток в неразветвленной части цепи будет иметь значительно меньшую величину, чем в разветвленных цепях, как это и осуществляется при настройке разветвленных цепей в резонанс токов.

Математическое исследование подобных схем можно вести двояко: 1) с помощью дифференциальных уравнений и 2) с помощью комплексной

плоскости, для чего силу тока и напряжение разлагаем на активные слагающие, откладываемые по оси ординат, и на реактивные, откладываемые по оси абсцисс. Таким образом, ось абсцисс будет осью мнимых величин, а ось ординат — вещественных. Аналогично поступаем и со значениями сопротивлений. Умножение вектора на j соответствует вращению его на 90° .

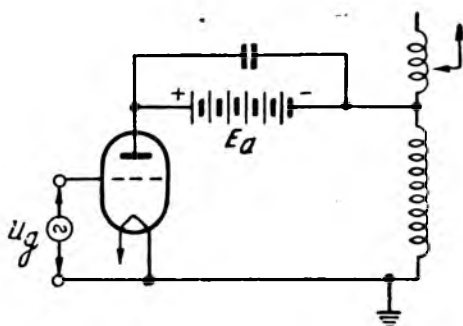


Рис. 7.12

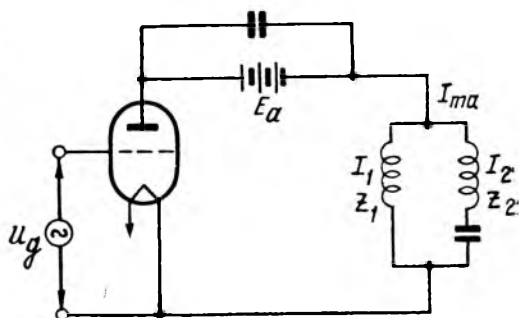


Рис. 7.13

Анализируем схему рис. 7.13 вторым методом. Найдем эквивалентное сопротивление цепи анода.

По второму закону Кирхгофа имеем

$$U_{am} = I_1 (R_1 + j\omega L_1) + j\omega M I_2,$$

$$U_{am} = I_2 \left[R_A + j \left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_A} \right) \right] + j\omega M I_1.$$

Пусть

$$R_1 + j\omega L_1 = z_1, \quad (7.16)$$

$$R_A + j \left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_A} \right) = z_2.$$

Тогда

$$U_{am} = I_1 z_1 + j\omega M I_2, \quad (7.17)$$

$$U_{am} = I_2 z_2 + j\omega M I_1.$$

По первому закону Кирхгофа $I_{am} = I_1 + I_2$. Найдем значение этих сил токов, для чего решаем систему уравнений (7.17) относительно I_1 и I_2 . Определитель этой системы равен

$$\Delta = \begin{vmatrix} z_1 & j\omega M \\ j\omega M & z_2 \end{vmatrix} = z_1 z_2 - (j\omega M)^2. \quad (7.17a)$$

Значения I_1 и I_2 получим по формулам алгебры

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} U_{am} & j\omega M \\ U_{am} & z_2 \end{vmatrix}}{\Delta}, \quad I_2 = \frac{\begin{vmatrix} z_1 & U_{am} \\ j\omega M & U_{am} \end{vmatrix}}{\Delta}.$$

Раскрывая определители в числителях этих выражений, получим

$$I_1 = U_{am} \frac{z_2 - j\omega M}{\Delta}, \quad I_2 = U_{am} \frac{z_1 - j\omega M}{\Delta},$$

и окончательно

$$I_{am} = I_1 + I_2 = U_{am} \frac{z_1 + z_2 - 2j\omega M}{\Delta}. \quad (7.18)$$

Исследуем полученные уравнения. Наш контур требуется настроить в резонанс на заданную частоту. Условием резонанса будет служить уравнение $I_{am} \cong 0$, так как можно считать, что в первом приближении период не зависит от сопротивлений, что возможно лишь, если числитель выражения силы тока в анодной цепи равен нулю:

$$z_1 + z_2 - 2j\omega M = 0. \quad (7.19)$$

Так как мы считаем, что в первом приближении сопротивление не оказывает влияния на величину периода, то можно положить, что $R_1 = R_A = 0$. Тогда условие резонанса выразится так:

$$j\omega L_1 + j\left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_A}\right) - 2j\omega M = 0.$$

Сокращая на j и вынося ω за скобки, получаем

$$\omega(L_1 + L_2 - 2M) - \frac{1}{\omega C_A} = 0,$$

или

$$\omega^2 = \frac{1}{(L_1 + L_2 - 2M)C_A}. \quad (7.20)$$

Из уравнения (7.20) можно получить значение длины волны

$$\lambda = \frac{2\pi}{100} \sqrt{(L_1 + L_2 - 2M)C_A} \text{ (метров),}$$

где величины L_1 , L_2 , M и C_A выражены в сантиметрах.

При резонансе (см. рис. 7.13 и 7.14) из выражения 7.19 получим

$$z_1 = -z_2 + 2j\omega M,$$

следовательно, на основе (7.17а)

$$\begin{aligned} \Delta_{\text{рез}} = & -z_2^2 + 2j\omega M z_2 + \omega^2 M^2 = \left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_A}\right)^2 - \\ & - 2\omega M \left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_A}\right) + \omega^2 M^2 = \left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_A} - \omega M\right)^2. \end{aligned} \quad (7.21)$$

Подставляя значение $\Delta_{\text{рез}}$ в формулу для I_{am} , получаем значение силы тока цепи анода при резонансе

$$I_{am} = U_{am} \frac{R_1 + R_A}{\left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_A} - \omega M\right)^2},$$

где

$$\frac{\left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_A} - \omega M\right)^2}{R_A + R_1} = z_0 \quad (7.22)$$

— эквивалентное сопротивление цепи анода.

Приравнявая это эквивалентное сопротивление внутреннему сопротивлению триода, можно найти условия получения максимальной полезной

мощности триода. Определяя значения I_1 и I_2 при резонансе, получим

$$I_1 = U_{am} \frac{j \left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_A} \right) - j\omega M + R_A}{\Delta_{\text{рез}}}, \quad (7.23)$$

$$I_2 = U_{am} \frac{j\omega (L_1 - M) + R_1}{\Delta_{\text{рез}}} = U_{am} \frac{-j \left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_A} \right) + j\omega M + R_1}{\Delta_{\text{рез}}}, \quad (7.24)$$

так как из условия резонанса

$$j\omega (L_1 - M) = -j \left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_A} \right) + j\omega M.$$

Складывая I_1 и I_2 , получаем для I_{am} выражение, аналогичное выведенному, что может служить проверкой правильности вывода.

В этих выражениях R_1 и R_A вещественны, вследствие чего они обуславливают собой активные составляющие сил токов, которые будут в фазе с U_{am} . Следовательно, в общем виде $I_1 = I_{1B} + I_{1\text{БВ}}$, где I_{1B} — активная (ваттная) и $I_{1\text{БВ}}$ — реактивная (безваттная) составляющие. Аналогично $I_2 = I_{2B} + I_{2\text{БВ}}$.

Равнодействующий же ток I_{am} реактивных составляющих иметь не будет, а будет исключительно активным. Так как R_1 и R_2 измеряются всего лишь единицами омов, то I_{am} будет весьма мало по своей величине, но не равно нулю.

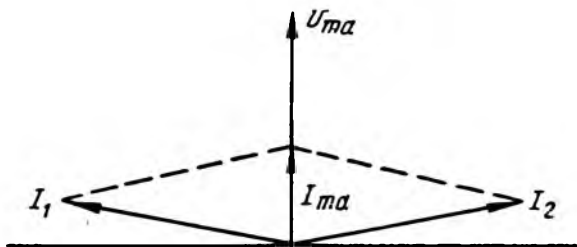


Рис. 7.14

Что касается сил токов I_1 и I_2 , то в них ваттные слагающие, будучи одного порядка с силой тока I_{am} , будут весьма малы по сравнению с реактивными слагающими, почему при расчетах I_1 и I_2 первыми можно пренебречь.

Итак, в действительности токи I_1 и I_2 будут сдвинуты друг относительно друга на угол, несколько меньший 180° , причем численно их можно считать равными [пренебрегая активными составляющими (рис. 7.14)].

Подобное распределение токов выгодно для триода, так как через анодную цепь идет весьма малый ток I_{am} . Приключая сеть к триодному контуру, как указано на рис. 7.12, мы видим, что вследствие противоположности направлений токов I_1 и I_2 ток в сети будет иметь общее направление с током в анодной цепи.

Если задается мощность сети W_A , сила тока в ней I_A , длина волны λ и емкость сети C_A , то расчет ведется так: задавшись амплитудой изменения напряжения на аноде U_{am} , определяют реактивные сопротивления обеих цепей из условия резонанса, для чего выражения для I_1 и I_2 можно упростить следующим образом.

При резонансе, пренебрегая активными сопротивлениями по сравнению с реактивными, мы получим из (7.24)

$$I_2 = U_{am} \frac{-j \left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_A} \right) + j\omega M}{\left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_A} - \omega M \right)^2} = U_{am} \frac{-j}{\left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_A} - \omega M \right)}. \quad (7.25)$$

Точно также из (7.23) следует, что

$$I_1 = U_{am} \frac{-j}{\omega (L_1 - M)}. \quad (7.26)$$

Из (7.25) и (7.26) получим

$$-j\omega (L_1 - M) = -\frac{U_{am}}{I_1} \quad (7.27)$$

и

$$j \left[\left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_A} \right) - \omega M \right] = \frac{U_{am}}{I_2}. \quad (7.28)$$

Так как левые части равны между собой, согласно условию резонанса, то $|I_1| = |I_2|$.

Поэтому, зная C_A , U_{am} и I_2 , можно из этих уравнений найти L_1 и L_2 и далее определить все параметры цепи анода.

Для получения условия максимальной мощности в сети определяем эквивалентное сопротивление цепи триода z_0 [см. (7.22)] из уравнения

$$|I_{am}| = \frac{|U_{am}|}{z_0} = |U_{am}| \frac{R_1 + R_A}{\left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_A} - \omega M \right)^2}$$

и приравниваем полученное значение z_0 внутреннему сопротивлению триода. Из выражения же $U_{am} = I_{am} z_0$ можно определить величину тока I_{am} , после чего нетрудно определить коэффициент полезного действия и мощность источника постоянного тока.

Выведем значение эквивалентного сопротивления другим путем. Мощность при превращении в тепло энергии тока во внешней цепи (считая $M = 0$) будет

$$W_a = \frac{I_1^2 R_1}{2} + \frac{I_2^2 R_A}{2} = \frac{U_{am}^2 R_1}{2z_1^2} + \frac{U_{am}^2 R_A}{2z_2^2}$$

при резонансе $z_1 = z_2$. Следовательно,

$$W_a = U_{am}^2 \frac{R_1 + R_A}{2z_2^2} = \frac{I_{am}^2}{2} \frac{z_2^2}{R_1 + R_A} = \frac{I_{am}^2}{2} z_0,$$

т. е.

$$z_0 = \frac{z_2^2}{R_1 + R_A}, \quad (7.29)$$

что мы и имели выше.

7.5. Расчет генератора с параллельно включенными триодами

Во многих случаях практики заданная полезная мощность не может быть обеспечена одним триодом. В таких случаях можно использовать схему параллельного включения нескольких однотипных триодов, работающих на одну полезную нагрузку.

Рассмотрим эквивалентную схему такого включения (рис. 7.15), когда триоды работают с эквивалентным сопротивлением, приведенном к безындук-

ционному. Имеем n параллельно включенных триодов. Сила анодного тока в n -м триоде

$$i_{an} = S_n u_g + \frac{u_a}{R_{in}}.$$

Общий ток в анодной цепи

$$i_a = \sum_1^n i_{an} = \sum_1^n S_n u_g + \sum_1^n \frac{u_a}{R_{in}} = u_g \sum_1^n S_n + u_a \sum_1^n \frac{1}{R_{in}}.$$

Отсюда видно, что систему из n параллельно включенных одностипных триодов можно заменить одним триодом, у которого $S = \sum_1^n S_n$ и $\frac{1}{R_i} = \sum_1^n \frac{1}{R_{in}}$, и тогда задача приводится к виду, уже рассмотренному выше. В случае, когда все R_{in} и S_n равны между собой, мы получаем $S = nS_n$ и $\frac{1}{R_i} = \frac{n}{R_{in}}$,

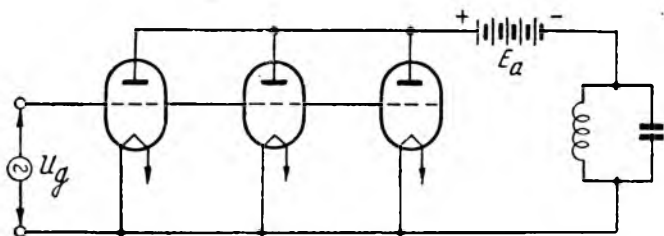


Рис. 7.15

т. е. крутизна эквивалентного триода будет в n раз больше, а сопротивление эквивалентного триода будет в n раз меньше сопротивления каждого из n триодов. Что касается проницаемости эквивалентного триода, то она равна проницаемости одного из параллельно включенных триодов, так как

$$D = \frac{1}{SR_i} = \frac{1}{nS_n} \frac{n}{R_{in}} = \frac{1}{S_n R_{in}}. \quad (7.30)$$

Аналогично можно доказать, что максимум к. п. д. будет при условии $z_0 = R_i = \frac{R_{in}}{n}$.

В случае несоблюдения этого условия можно, включив несколько параллельных триодов, получить в анодной цепи силу тока, не превышающую силы тока одной лампы.

Теперь найдем значения силы тока анода и мощности, выделяемой в цепи анода, при условии соблюдения указанного выше равенства, т. е. в оптимальном режиме работы (максимальной отдачи генератора).

Имеем $i_a = u_g n S_n + u_a \frac{n}{R_{in}}$. Заменяем u_a через падение напряжения во внешней цепи, т. е. $u_a = -u_a = -i_a z_0$, где z_0 — эквивалентное сопротивление. Тогда

$$i_a = u_g n S_n - i_a z_0 \frac{n}{R_{in}},$$

откуда

$$i_a = u_g \frac{n S_n}{1 + z_0 \frac{n}{R_{in}}} = u_g \frac{S_n}{\frac{1}{n} + \frac{z_0}{R_{in}}}.$$

Отсюда видно, что величина $\frac{S_n}{\frac{1}{n} + \frac{z_0}{R_{in}}} = S_d$ есть крутизна рабочей характеристики в случае n параллельно включенных триодов, так как $i_a = u_g S_d$.

Мощность, выделенная в цепи анода, будет

$$W_a = \frac{I_{am}^2 z_0}{2},$$

где I_{am} — амплитудная величина тока. Следовательно,

$$W_a = \frac{U_{gm}^2 S_n^2 z_0}{2 \left(\frac{1}{n} + \frac{z_0}{R_{in}} \right)^2} = \frac{U_{gm}^2}{2} z_0 S_d^2.$$

Подставляя в полученные выражения для i_a , S_d и W_a условия оптимальной работы триодов, получим

$$z_0 = \frac{R_{in}}{n} = R_i,$$

$$S_{d \text{ опт}} = S_n \frac{n}{2},$$

$$I_{am \text{ опт}} = \frac{U_g S_n n}{2}$$

и

$$W_{a \text{ опт}} = \frac{U_{gm}^2 S_n^2 R_{in} n}{8}. \quad (7.31)$$

Таким образом, из выражения для $I_{am \text{ опт}}$ видно, что в случае соблюдения условия $z_0 = R_i$ сила анодного тока при n параллельно включенных триодах будет в n раз больше, чем при одном триоде. Для получения этого результата весьма важно помнить, что при параллельном включении триодов эквивалентное сопротивление внешней цепи надо уменьшить в n раз против случая работы с одним триодом.

Найдем отношение

$$\frac{I_{am \text{ опт}}}{I_{am}} = \frac{U_{gm} S_{d \text{ опт}}}{U_{gm} S_d} = \frac{n}{2} \left(\frac{1}{n} + \frac{z_0}{R_{in}} \right) = \frac{1}{2} (1 + n\alpha), \quad (7.32)$$

где

$$\alpha = \frac{z_0}{R_{in}}.$$

Аналогично

$$\frac{W_{a \text{ опт}}}{W_a} = \frac{R_{in} n}{z_0} \frac{1}{4} \left(\frac{1}{n} + \frac{z_0}{R_{in}} \right)^2 = \frac{n}{4\alpha} \left(\frac{1}{n} + \alpha \right)^2. \quad (7.33)$$

Подставляя в последнее выражение $z_0 = \frac{R_{in}}{n}$ (т. е. $\alpha = \frac{1}{n}$), получаем, что оба отношения будут равны единице, что и следовало ожидать, так как они представляют собой отношение силы тока анодной цепи (или соответственно мощности) при оптимальных условиях к силе тока (или мощности) при любых соотношениях z_0 и R_{in} .

Задавая определенные значения $\frac{z_0}{R_{in}}$, можно построить кривую соотношения сил токов или мощностей как функции соотношения сопротивлений z_0 и R_{in} .

Теперь аналогичным путем найдем соотношения сил токов и мощностей при n параллельно включенных триодах к таковым же при одном триоде как для общего, так и для наивыгоднейшего случая.

Для общего случая, т. е. для любого соотношения z_0 и R_{in} ,

$$\frac{I_{am}}{I_{amn}} = \frac{U_{am} S_n}{\left(\frac{1}{n} + \frac{z_0}{R_{in}}\right)} : \frac{U_{am} S_n R_{in}}{z_0 + R_{in}} = \frac{(z_0 + R_{in}) n}{(1 + n\alpha) R_{in}} = \frac{n(1 + \alpha)}{1 + n\alpha},$$

где I_{amn} — сила анодного тока в случае одного n -го триода.

$$\frac{W_a}{W_{an}} = \frac{U_{gm}^2 S_n^2 z_0}{2 \left(\frac{1}{n} + \frac{z_0}{R_{in}}\right)^2} : \frac{U_{gm}^2 S_n^2 z_0 R_{in}^2}{2 (z_0 + R_{in})^2} = \frac{(z_0 + R_{in})^2 n^2}{(1 + n\alpha)^2 R_{in}^2} = \frac{n^2 (1 + \alpha)^2}{(1 + n\alpha)^2}, \quad (7.34)$$

где W_{an} — мощность анодной цепи в случае одного триода.

Для оптимальных условий, подставляя $\alpha = \frac{1}{n}$, получаем

$$\frac{I_{am \text{ опт}}}{I_{amn}} = \frac{n+1}{2} \quad \text{и} \quad \frac{W_{a \text{ опт}}}{W_{an}} = \frac{(n+1)^2}{4}.$$

Наконец, для случая, когда обе системы поставлены в наивыгоднейшие условия, имеем

$$\frac{I_{am \text{ опт}}}{I_{amn \text{ опт}}} = n \quad \text{и} \quad \frac{W_{a \text{ опт}}}{W_{an \text{ опт}}} = n^2. \quad (7.35)$$

В заключение приведем перечень формул для I_{am} и W_a .

Для одного n -го триода

$$I_{am} = \frac{SR_i U_{gm}}{z_0 + R_i}$$

$$(I_{amn})_{\text{опт}} = \frac{S}{2} U_{gm}$$

$$W_{an} = \frac{S^2 R_i^2 z_0}{2 (z_0 + R_i)^2} U_{gm}^2$$

$$(W_{an})_{\text{опт}} = \frac{S^2 R_i}{8} U_{gm}^2$$

Условия оптимальности:

$$z_0 = R_i$$

Для n параллельно включенных триодов

$$I_{am} = \frac{S_n}{\frac{1}{n} + \frac{z_0}{R_{in}}} U_{gm}$$

$$(I_{am})_{\text{опт}} = \frac{S_n n}{2} U_{gm}$$

$$W_a = \frac{S_n^2 z_0}{2 \left(\frac{1}{n} + \frac{z_0}{R_{in}}\right)^2} U_{gm}^2$$

$$(W_a)_{\text{опт}} = \frac{S_n^2 R_{in} n}{8} U_{gm}^2$$

7.6. Расчет триода при колебаниях второго рода

Разработанный расчет для колебаний первого рода является предварительным для расчета рабочих режимов и параметров триода, расчет же колебаний второго рода графическим путем является более точным и используется как проверочный, если имеются соответствующие характеристики триода. Получающиеся результаты при этих расчетах сходятся между собой в отношении наибольшей отдачи мощности, что является наиболее важным (параметры триода в обоих случаях остаются равными).

Что касается коэффициента полезного действия, то последний при графическом расчете режимов второго рода получается гораздо выше, чем при аналитическом, а именно, доходит до 80% и более *. Кроме того, при графическом расчете мы уже не пренебрегаем токами на сетку и принимаем, что сила тока катода $i_k = i_a + i_g$.

Для расчета используем схему, изображенную на рис. 7.16. При заданной мощности W_a и сопротивлении R_A находим $I_2^2 = \frac{W_a}{R_A}$ (индекс

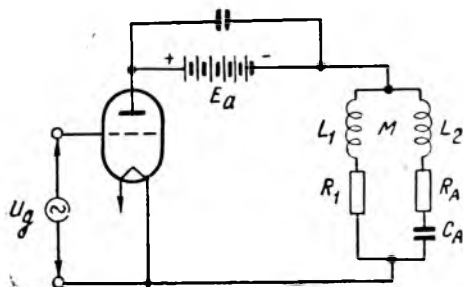


Рис. 7.16

A относится к параметрам антенного контура). Далее, в случае резонанса $|I_2| \approx |I_1|$ имеем

$$|I_2 z_2| = |I_{am} z_0|,$$

где I_{am} — амплитуда тока в цепи анода и z_0 — полное эквивалентное сопротивление.

Откуда

$$I_{am} = I_2 \frac{z_2}{z_0}.$$

Зная I_{am} и I_2 , можно, задавшись емкостью сети C_A , найти необходимые самоиндукции. С другой стороны, можно узнать $U_{am} = I_{am} z_0$ — напряжение на зажимах контура (величиной U_{am} можно и задаться). Как видим, расчет постоянных контура не изменяется. Здесь важно помнить, чтобы было соблюдено условие равенства внешнего и внутреннего сопротивления.

Для графического расчета необходимо наличие характеристик заданного триода (рис. 7.17), для чего нужно или рассчитать триод по колебаниям первого рода, построить

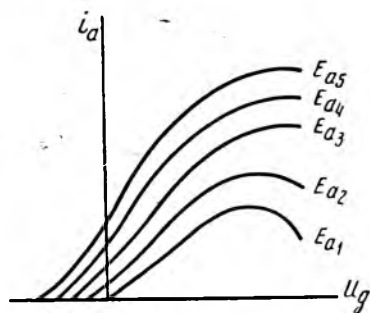


Рис. 7.17

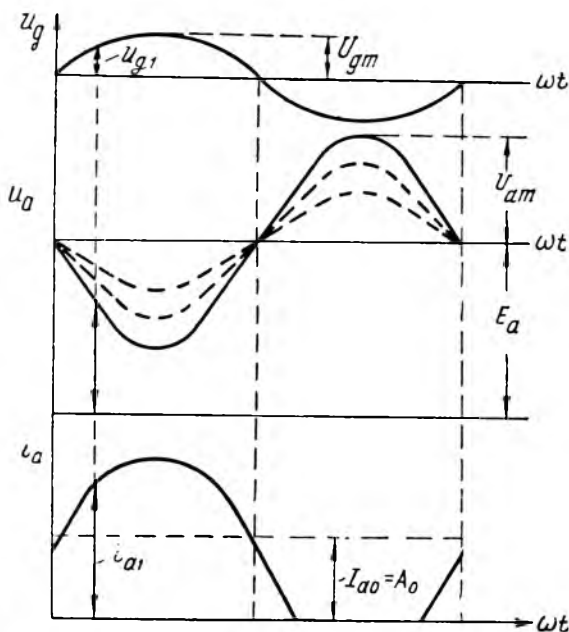


Рис. 7.18

его и затем снять его характеристики, или же подыскать триоды с подходящими характеристиками.

Задавшись амплитудой напряжения на сетке U_{gm} и изменением напряжения в цепи анода, мы строим соответствующие изменения этих напряже-

* Это расхождение объясняется приближенным характером уравнений предельных величин при аналитическом расчете. Графоаналитический метод опирается не на приближенные, а на реальные значения этих величин. (Прим. ред.)

ний во времени (рис. 7.18). Здесь кривая анодного напряжения будет изменяться относительно постоянного напряжения анодной батареи E_a и будет при настройке в резонанс сдвинута на 180° относительно u_g , так как последняя будет в фазе с анодным током i_a .

Для построения кривых рис. 7.18 берем ряд значений напряжения на сетке u_g и находим соответствующие значения u_a во времени. Дальше по

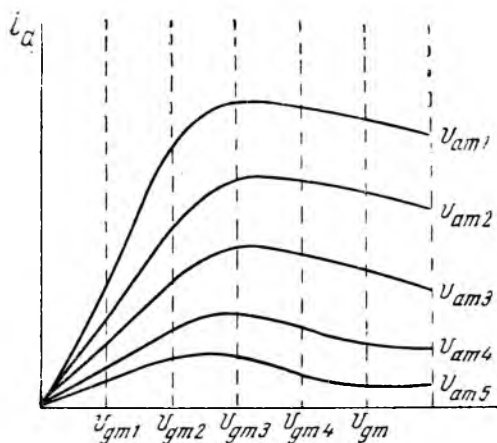


Рис. 7.19

значениям u_g и u_a на картине характеристик находим соответствующие значения силы тока i_a , которые и откладываем на кривой рис. 7.18; так, например, значению напряжения на сетке u_{g1} будет соответствовать некоторое напряжение на аноде u_{a1} , а по этой паре значений находится на рис. 7.17 соответствующее значение силы анодного тока i_{a1} . Рассматривая получившуюся кривую $i_a = f(t)$, мы видим, что она прекращается на известном протяжении, когда напряжение на сетке отрицательно, причем этот промежуток будет тем больше, чем больше амплитуда U_{gm} .

Большая амплитуда U_{gm} вызывает появление впадины в кривой i_a при положительном максимуме напряжения на сетке, причем эта впадина будет тем больше, чем меньше напряжение u_a для данного U_{gm} . Из рис. 7.18 видно, что коэффициент полезного действия здесь должен повыситься, так как тепло, выделяемое анодом, будет почти исключительно только при положительных значениях u_g , да и то в небольшом количестве, так как напряжение u_a будет довольно мало. При отрицательном же значении u_g сила тока почти на всем протяжении полупериода $i_a = 0$ и, следовательно, в этом случае потери на аноде $i_a u_a$ будут тоже малы. Отсюда ясно, что повышение коэффициента полезного действия осуществляется путем повышения амплитуды напряжения на сетке, но лишь до известного предела, так как благодаря наличию впадины коэффициент полезного действия опять уменьшается. Поэтому для определения соответствующего оптимума, задавшись определенной амплитудой U_{gm} , задаются значениями U_{am} и соответственно строят кривые i_a (рис. 7.19). Затем, задавшись другими значениями амплитуды U_{gm} и теми же значениями U_{am} , опять строят кривые i_a и т. д. В итоге получается семейство кривых i_a . Вычисляя полезную мощность и коэффициент полезного действия для всех комбинаций, мы находим искомый оптимум (рис. 7.20). Так как синусоиды чертить трудно, то лучше проделать это в полярных координатах (рис. 7.21).

Чертим окружность радиусом $r = E_a$ (E_a — напряжение батареи анодной цепи) и разбиваем ее на углы в радианах. Кроме того, откладываем от центра по вертикальному диаметру вверх амплитуды выбранных напря-

жений U_{am} , а вниз — амплитуду заданного напряжения U_{gm} , и на этих амплитудах, как на диаметрах, строим окружности. Проводя для определенных углов радиусы-векторы, например, OA , мы сразу получаем как значение u_g в данный момент, так и напряжение на аноде лампы

$$u_a = E_a - U_{am},$$

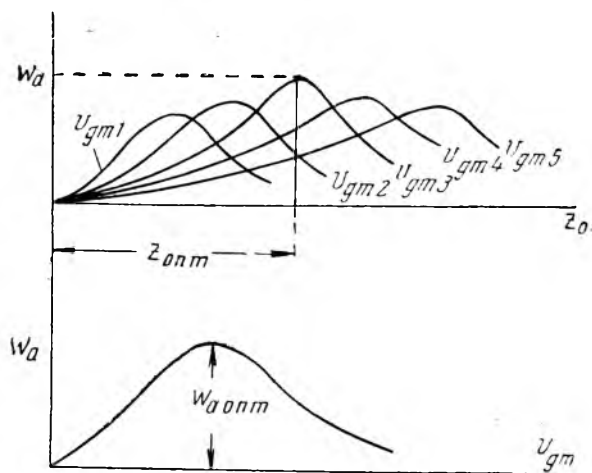


Рис. 7.20

выраженное отрезками AB , AB' и AB'' для каждого из заданных U_{am} . По найденным значениям u_a и u_g из характеристики находят соответствующие

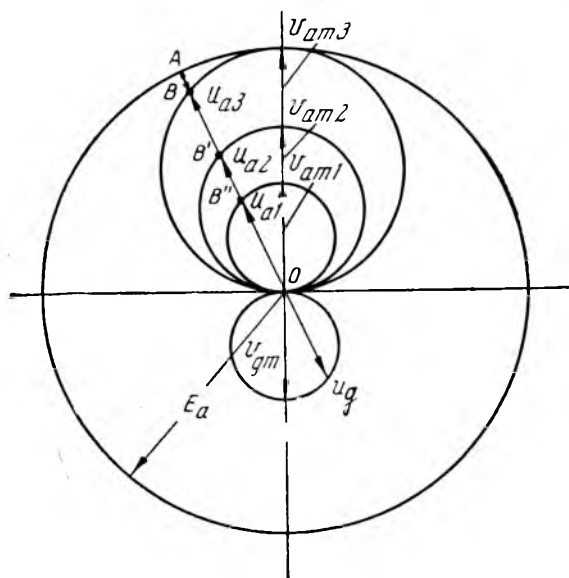


Рис. 7.21

значения i_a , которые уже откладывают в обычном порядке в прямоугольных координатах. Этот способ значительно облегчает и ускоряет работу.

Нужно указать, что для получения значений u_a при отрицательном u_g надо начертить окружности диаметром U_{am} также и вниз от центра; тогда

$$u_a = E_a - U_{am}.$$

Итак, мы получим кривую $i_a = f(t)$, из которой видно, что в цепи анода будет пульсирующий ток, изменяющийся около некоторой нейтральной оси, обусловленной постоянной слагающей силы тока I_{a0} , отдаваемой анодной батареей (рис. 7.18). Этот пульсирующий ток i_a состоит из ряда гармоник, из которых наибо-

лее интересной для нас будет первая гармоника, на которую настраивается колебательный контур в резонанс.

Полученную кривую $i_a = f(t)$ разлагаем в ряд Фурье, чтобы, во-первых, определить величину постоянной слагающей силы тока i_a , или, иначе, найти положение оси абсцисс, относительно которой изменяется переменный ток, и, во-вторых, определить амплитуду первой гармоники.

На основании теоремы Фурье

$$i_a = A_0 + A_1 \sin \omega t + A_2 \sin 2\omega t + \dots + A_n \sin n\omega t + \\ + B_1 \cos \omega t + B_2 \cos 2\omega t + \dots + B_n \cos n\omega t + \dots$$

Надо было бы определить все коэффициенты, но так как амплитуды высших гармоник сильно убывают с увеличением порядка гармоники, то можно ограничиться с достаточным приближением для расчета только первыми членами разложения. В частности, нас интересуют всего лишь первые члены, так как контур настроен в резонанс с первой гармоникой.

Произведение постоянной слагающей на напряжение батареи определяет мощность, отдаваемую батареей. Произведение же квадрата первой гармоники на половину эквивалентного сопротивления дает полезную мощность, выделяемую в контуре. Отсюда можно узнать коэффициент полезного действия и потери на аноде, относя к ним и потери за счет наличия высших гармоник.

Например, площадь кривой i_a на рис. 7.18

$$\int_0^T i_a dt = \int_0^T \left(A_0 dt + \sum_1^n A_n \sin n\omega t dt + \sum_1^n B_n \cos n\omega t dt \right),$$

Экспериментально эта площадь определяется или планиметром или путем подсчета квадратов, нанесенных на поверхность рисунка.

Решаем интеграл. Так как площади синусоиды и косинусоиды в этих пределах равны нулю, то $\int_0^T i_a dt = A_0 T$, откуда $A_0 = \frac{1}{T} \int_0^T i_a dt$. Таким обра-

зом, получаем значение A_0 для каждой пары значений u_g и u_a . Теперь берем площадь кривой такого вида

$$\int_0^T i_a \sin \omega t dt = \frac{A_1}{2} T,$$

откуда

$$A_1 = \frac{2}{T} \int_0^T i_a \sin \omega t dt.$$

Аналогично

$$\int_0^T i_a \cos \omega t dt = \frac{B_1}{2} T = 0.$$

Следовательно, $B_1 = 0$.

Амплитуды высших гармоник можно было бы получить, умножая соответственно $i_a dt$ на $\sin 2\omega t$, но мы ограничимся рассмотрением режима только для первой гармоники. Теперь в таком же порядке, как и при аналитическом расчете, строим кривые зависимости амплитуды силы тока первой гармоники I_{a1m} от напряжения на сетке при $U_{am} = \text{const}$. Это дает (рис. 7.19) аналогичные характеристики. Из кривых определим эквивалентное сопротивление

$$z_0 = \frac{U_{am}}{I_{a1m}}$$

и полезную мощность

$$W_a = I_{a1m}^2 \frac{z_0}{2}.$$

Проведя на рис. 7.19 ряд вертикалей и отмечая точки пересечения их с кривыми $I_{a1m} = f(U_{gm})$ при $U_{am} = \text{const}$, можно на основании приведенных формул построить ряд кривых $W_a = f(z_0)$ (рис. 7.20). Как видим, кривые данной зависимости при $U_{gm} = \text{const}$ имеют максимумы. Подобным путем можно построить зависимость $W_a = f(U_{gm})$ (рис. 7.20).

Из рис. 7.20 видно, чему равно $z_{\text{опт}}$ для наибольшей мощности, отдаваемой триодом в сеть, и чему равно наивыгоднейшее напряжение U_{gm} для этого случая.

Так как I_{a1m} задано, то, зная наивыгоднейшее значение U_{gm} , можно из рис. 7.19 определить соответствующее напряжение u_{am} .

Для каждой схемы можно определить наивыгоднейшее эквивалентное сопротивление, при котором в сеть будет отдаваться максимальная мощность.

Графический расчет может быть проведен в таком порядке.

1. Строятся кривые напряжения на сетке u_g в виде синусоид.
2. Строятся кривые напряжения на аноде u_a , также в виде синусоид.
3. Для каждой пары значений u_g и u_a на основе характеристик строятся кривые i_a за период.
4. Кривые i_a используются для определения постоянной слагающей и амплитуды первой гармоники.
5. Мощность, отдаваемая батареей, определяется как произведение напряжения батареи на постоянную слагающую силы тока.
6. Для каждой пары значений U_{gm} и u_a строятся кривые зависимости:
 - а) $I_{a1m} = f(U_{gm})$ при $U_{am} = \text{const}$;
 - б) $W_a = f(z_0)$ при $U_{gm} = \text{const}$;
 - в) $W_a = f(U_{gm})$.

С помощью этих кривых можно определить наивыгоднейшее значение U_{gm} для получения W_{am} .

7. По найденным наивыгоднейшим U_{gm} и W_a определяется z_0 .

8. По найденным наивыгоднейшим U_{gm} и I_{a1m} определяется U_{am} .

Если на рис. 7.20 при указанном построении не получится отчетливого максимума W_a , то для его выявления нужно построить дополнительные кривые при промежуточных значениях U_{gm} .

7.7. Триодный генератор с самовозбуждением

Рассмотрим сперва условия его работы с точки зрения колебаний первого рода, предполагая, что характеристики триода линейны.

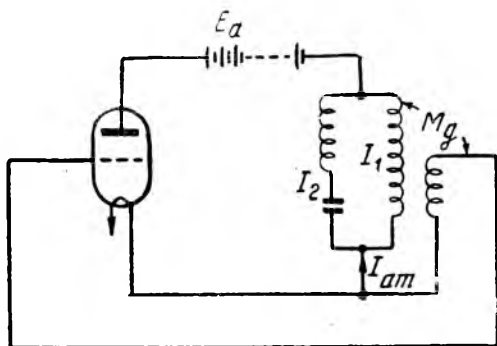


Рис. 7.22

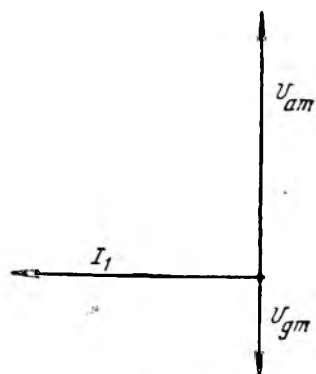


Рис. 7.23

Рассмотрим работу схемы генератора (рис. 7.22). Около самоиндукции одной из ветвей контура расположим катушку связи и присоединим последнюю к тем же зажимам, к которым присоединялся возбудитель в схеме независимого возбуждения.

Ток I_1 в одной ветви контура при отсутствии в ней емкости будет отставать на 90° от напряжения U_{am} (рис. 7.23), а э. д. с., индуктированная этим током, т. е. напряжение сетки U_{gm} , будет отставать от тока на 90° , следовательно, у нас сохранится тот же самый сдвиг фаз в 180° между U_{am} и U_{gm} , как это и было в схеме независимого возбуждения. Остается только подобрать такую связь, чтобы амплитуда индуктированной э. д. с. была равна амплитуде напряжения источника независимого возбуждения, и полное тождество работы обеих схем будет достигнуто.

Надо обратить внимание, что проводники от зажимов катушки связи могут быть присоединены только единственным образом: при другом их включении U_{gm} и U_{am} совпадут по фазе, и процесса самовозбуждения не будет. На рис. 7.24 дана простейшая схема генератора с самовозбуждением.

Разберем математическое условие работы этого генератора по эквивалентной схеме (рис. 7.22). Имеем

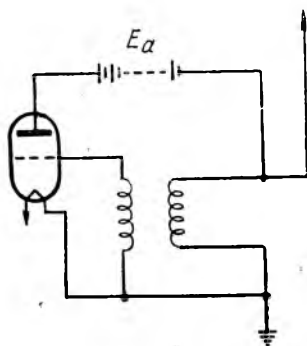


Рис. 7.24

$$U_{am} = I_2 \left[R_2 + j \left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2} \right) \right] + j\omega M I_1, \quad (7.36)$$

$$U_{am} = I_1 [(R_1 + j\omega L_1) + j\omega M I_2].$$

Влиянием тока в катушке связи пренебрегаем:

$$U_{gm} = j\omega M_g I_1,$$

$$I_{am} = I_1 + I_2,$$

$$I_{am} = S U_{gm} - \frac{U_{im}}{R_i}. \quad (7.37)$$

Для решения этой задачи зададимся величинами W_2 , R_2 и U_{am} .

Так как уравнения даны в комплексной форме, то это определяет, что незатухающие колебания уже установились. Таким образом, условие возникновения колебаний, которые мы получим, решая эти уравнения, считается уже выполненным. Ток контура I_2 определится из уравнения

$$W_2 = \frac{I_2^2 R_2}{2}.$$

Задавшись напряжением $U_{am} \ll E_a$, где E_a — напряжение батареи, мы тем самым устанавливаем величину E_a . Силу тока анодной цепи I_{am} и сопротивление контура z_0 вычисляем с помощью уравнений (7.36), записав их в следующем виде:

$$U_{am} = z_1 I_1 + j\omega M I_2,$$

$$U_{am} = j\omega M I_1 + z_2 I_2, \quad (7.38)$$

где

$$z_1 = R_1 + j\omega L_1,$$

$$z_2 = R_2 + j \left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2} \right).$$

Напишем определитель системы уравнения (7.38) для нахождения I_1 и I_2 :

$$\Delta = \begin{vmatrix} z_1 & j\omega M \\ j\omega M & z_2 \end{vmatrix}, \quad (7.39)$$

$$\Delta = z_1 z_2 + \omega^2 M^2.$$

Выражения для I_1 и I_2 получим по формулам:

$$I_1 = \begin{vmatrix} U_{am} & j\omega M \\ U_{am} & z_2 \end{vmatrix}, \quad I_2 = \begin{vmatrix} z_1 & U_{am} \\ j\omega M & U_{am} \end{vmatrix},$$

т. е.

$$I_1 = U_{am} \frac{z_2 - j\omega M}{\Delta}, \quad I_2 = U_{am} \frac{z_1 - j\omega M}{\Delta}.$$

Окончательно,

$$I_{am} = I_1 + I_2 = U_{am} \frac{z_1 + z_2 - 2j\omega M}{\Delta}. \quad (7.40)$$

Так как $I_{am} = \frac{U_{am}}{z_0}$,

то

$$z_0 = \frac{\Delta}{z_1 + z_2 - 2j\omega M}. \quad (7.41)$$

В первом приближении сопротивление не имеет влияния на период и можно считать, что $T = 2\pi \sqrt{LC}$. Даже при $\delta \approx 1^*$ ошибка будет всего лишь 1—2%. Если $R_1 = R_2 = 0$, то при резонансе $I_{am} = 0$, т. е. $z_0 = \infty$, для чего необходимо условие $z_1 + z_2 - 2j\omega M = 0$.

В последующем ходе расчета при вычислении I_1 и I_2 мы пренебрегаем сопротивлениями R_1 и R_2 ввиду их малости, но так как при этом допущении $z_0 = \infty$, чего в действительности не бывает, то I_{am} определяется из условия, где R_1 и R_2 сохраняют свои значения.

Вычислим условие настройки в резонанс. Имеем

$$j\omega L_1 + j\left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2}\right) - 2j\omega M = 0. \quad (7.42)$$

Сокращая на j и умножая на ω , получим

$$\omega^2 (L_1 + L_2 - 2M) = \frac{1}{C_2},$$

или

$$\omega^2 = \frac{1}{(L_1 + L_2 - 2M) C_2},$$

откуда собственная длина волны контура будет равна (в метрах)

$$\lambda = \frac{2\pi}{100} \sqrt{(L_1 + L_2 - 2M) C_2}. \quad (7.43)$$

Следовательно, при резонансе

$$I_{am} = U_{am} \frac{R_1 + R_2}{\Delta_{рез}}. \quad (7.44)$$

Так как

$$z_1 z_2 = (j\omega L_1 + R_1) \left[R_2 + j\left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2}\right) \right],$$

то, пренебрегая R_1 и R_2 , получаем

$$z_1 z_2 = -\omega L_1 \left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2} \right).$$

Кроме того, из (7.42)

$$j\omega L_1 = -j\left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2}\right) + 2j\omega M.$$

Сокращая на j и подставляя в предыдущее выражение, получим

$$z_1 z_2 = \left[\left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2} \right) - 2\omega M \right] \left[\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2} \right],$$

* δ — логарифмический коэффициент затухания.

и, следовательно,

$$\Delta_{\text{рез}} = z_1 z_2 + \omega^2 M^2 = \left[\left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2} \right) - 2\omega M \right] \left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2} \right) + \omega^2 M^2 = \\ = \left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2} \right)^2 - 2\omega M \left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2} \right) + \omega^2 M^2 = \left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2} - \omega M \right)^2. \quad (7.45)$$

Итак, при резонансе

$$I_1 = U_{am} \frac{j \left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2} - \omega M \right)}{\Delta_{\text{рез}}}, \\ I_2 = U_{am} \frac{j (\omega L_1 - \omega M)}{\Delta_{\text{рез}}}.$$

Принимая во внимание условие резонанса

$$j\omega L_1 + j \left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2} \right) - 2j\omega M = 0$$

и преобразовывая его, можно получить

$$\left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2} \right) - \omega M = -(\omega L_1 - \omega M). \quad (7.46)$$

Отсюда видно, что в первом приближении $I_1 = -I_2$. Что касается силы тока I_{am} , то она не равна нулю. Практически такие соотношения имеем, если I_{am} соответствует нескольким десяткам миллиампер, а ток в разветвленных цепях контура равен нескольким десяткам ампер.

Далее находим $I_{am} = f(I_2)$.

Из приведенных уравнений путем ряда преобразований получаем

$$I_{am} = I_2 \frac{R_1 + R_2}{j(\omega L_1 - \omega M)}. \quad (7.47)$$

Из уравнения

$$z_2 = \frac{U_{am}}{I_2} = \left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2} \right) - \omega M,$$

задавшись M , можно определить L_2 . Из последних уравнений, зная M и L_2 , можно определить L_1 , а следовательно, и I_{am} .

Теперь найдем условие самовозбуждения. Имеем уравнения

$$U_{gm} = j\omega M_g I_1, \quad I_{am} = S U_{gm} - \frac{U_{am}}{R_i}.$$

Так как все величины в этих уравнениях, кроме M_g , известны, то они должны быть согласованы между собой. Это и будет условием самовозбуждения. Находим соответствующее значение M_g из уравнения

$$I_{am} = j\omega S M_g I_1 - \frac{U_{am}}{R_i} = j\omega S M_g U_{am} \frac{j \left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2} - \omega M \right)}{\Delta_{\text{рез}}} - \frac{U_{am}}{R_i}.$$

Разделив на U_{am} и сравнивая с (7.44), получаем

$$\frac{I_{am}}{U_{am}} = \frac{R_1 + R_2}{\Delta_{\text{рез}}} = - \frac{\omega S M_g \left[\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2} - \omega M \right]}{\Delta_{\text{рез}}} - \frac{1}{R_i}.$$

Здесь неизвестно лишь одно M_g , поэтому нужно дать такую связь между цепями сетки и анода, чтобы это уравнение удовлетворялось. Из последнего уравнения имеем

$$\omega SM_g = - \frac{\Delta_{\text{рез}}}{\left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2} - \omega M \right)} \left(\frac{1}{R_i} + \frac{R_1 + R_2}{\Delta_{\text{рез}}} \right).$$

Так как

$$\Delta_{\text{рез}} = \left[\left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2} \right) - \omega M \right]^2,$$

то

$$\omega SM_g = \left(- \frac{1}{R_i} - \frac{R_1 + R_2}{\Delta_{\text{рез}}} \right) \sqrt{\Delta_{\text{рез}}},$$

и окончательно

$$|M_g| = \frac{\sqrt{\Delta_{\text{рез}}}}{\omega SR_i} + \frac{R_1 + R_2}{\omega S \sqrt{\Delta_{\text{рез}}}}. \quad (7.48)$$

В некоторых случаях это выражение может быть упрощено. Так, если $M = 0$ и $L_2 \approx 0$, то (см. 7.46)

$$\omega L_1 = \frac{1}{\omega C_2}$$

и, следовательно, $\Delta_{\text{рез}} = \left(\frac{1}{\omega C_2} \right)^2 = (\omega L_1)^2$. С учетом этого, при условии $R_1 < R_2$, выражение (7.48) запишется так:

$$|M_g| = \frac{\omega L_1}{\omega SR_i} + \frac{R_2}{\omega S \frac{1}{\omega C_2}} = \frac{L_1}{SR_i} + \frac{R_2 C_2}{S}.$$

При расчетах обычно пользуются полной формулой для M_g . В случае, если взятое M_g меньше необходимого, то на сетку будет подаваться меньшая э. д. с. Амплитуда колебаний анодного тока также будет меньше и может наступить такой режим, когда потери в контуре не смогут быть восполнены и колебания будут затухающими.

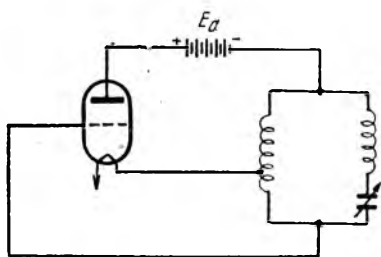


Рис. 7.25

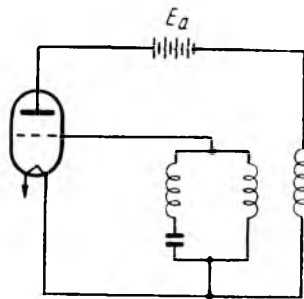


Рис. 7.26

Если взятое M_g будет больше необходимого, то возрастание амплитуды колебаний анодного тока будет продолжаться до тех пор, пока увеличившиеся потери контура не покроют дополнительно доставляемой энергии или не наступит ток насыщения.

Если M_g выбрано правильно, то раз возникшие колебания будут продолжаться, так как в такт изменению анодного тока будут изменяться напряжение u_g и энергия, подводимая от батареи.

Теперь рассмотрим несколько наиболее употребительных схем генераторов с самовозбуждением.

На рис. 7.25 связь на сетку дается не индуктивная, а автотрансформаторная.

На рис. 7.26 дана схема, часто употребляемая в приемниках. В ней колебательный контур включен в сетку, а на анод дана связь.

На рис. 7.27 дана схема Кюна, в ней колебательный контур включается как в цепь сетки, так и в цепь анода. В этой схеме связь осуществляется через емкость лампы.

На рис. 7.28 дана схема, употребляемая на мощных станциях, где батарея включается параллельно лампе. Последовательно с ней включены блокирующие реактивные катушки,

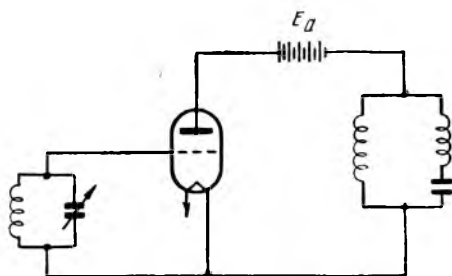


Рис. 7.27

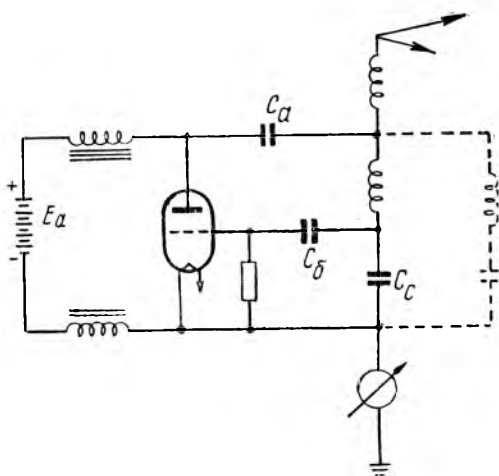


Рис. 7.28

которые защищают батарею от токов высокой частоты. В то же время в цепь анода включают конденсатор C_a . Сетка защищается от тока батареи (который может ее расплавить) при помощи блокировочного конденсатора C_b . Конденсатор C_c служит здесь емкостной связью сетки с цепью анода.

Видоизменение этой схемы дано на рис. 7.29. Здесь сетка индуктивно связана с цепью анода, а блокировочный конденсатор C_a находится в цепи анода.

Что касается расчета колебаний второго рода при генераторе с самовозбуждением, то он будет аналогичен расчету колебаний при генераторе независимого возбуждения только с тем дополнением, что, зная U_{gm} и I_1 , можно из уравнения

$$U_{gm} = \omega M_g I_1$$

Рис. 7.29

найти величину взаимной индукции M_g^* , а следовательно, задавшись коэффициентом связи $K = 30 \div 40\%$, из формулы

$$K = \frac{M_g}{\sqrt{L_1 L_2}}$$

можно найти самоиндукцию катушки связи.

7.8. Приближенная теория расчета генератора по углу отсека

Анодная цепь генератора

Разберем на графиках основные виды режима работы лампы. Для упрощения данного рассмотрения совместим начало координат с началом идеализированной нами линейной характеристики лампы (рис. 7.30).

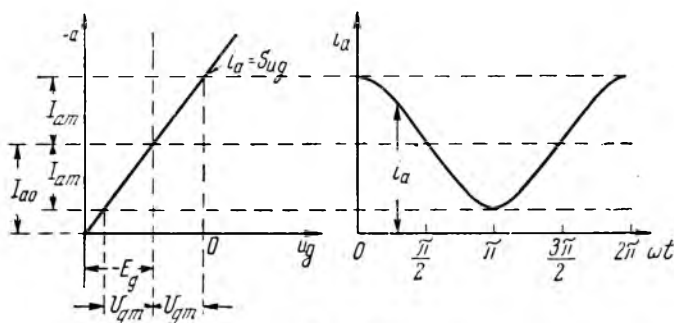


Рис. 7.30

В этом случае $E_g > u_g$,

$$I_{a0} > I_{am},$$

$$i_a = I_{am} \cos \omega t + I_{a0}.$$

На рис. 7.31 показан предельный критический режим существования колебаний первого рода, а именно:

$$E_g = u_g,$$

$$I_{am} = I_{a0},$$

$$i_a = I_{am} (\cos \omega t + 1).$$

Условия существования режима второго рода представлены на рис. 7.32, 7.33 и 7.34.

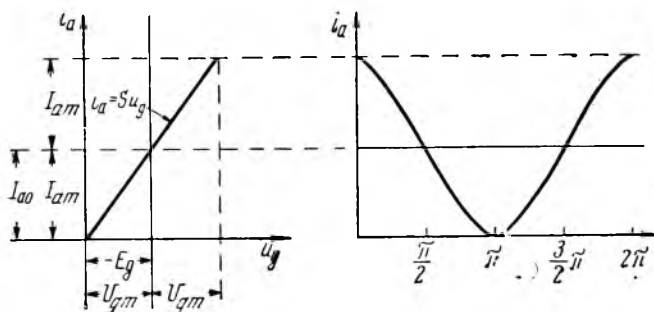


Рис. 7.31

Во всех этих случаях $E_g < u_g$, что приводит к образованию разрывов тока в анодной цепи.

В первом приближении мы заменили рабочую характеристику прямой линией. Точку холостого хода в данном случае установим отрицательным напряжением $-E_g$, приложенным к сетке. Переменная слагающая сеточного напряжения амплитуды U_{gm} определяет форму кривой анодного тока.

Согласно рис. 7.35, форму анодного тока выражаем уравнением

$$i_a = I_{am} (\cos \omega t - \cos \chi).$$

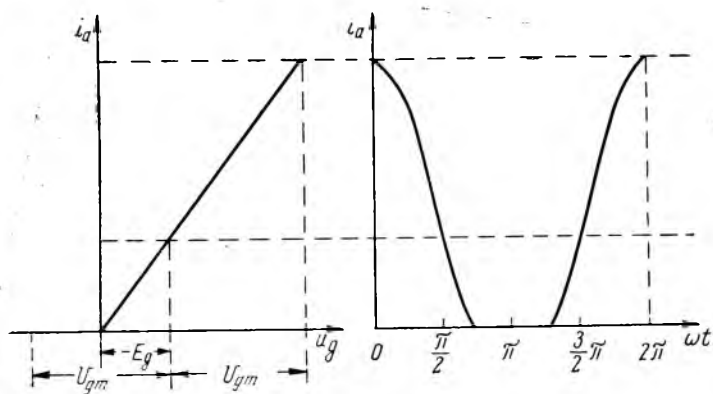


Рис. 7.32

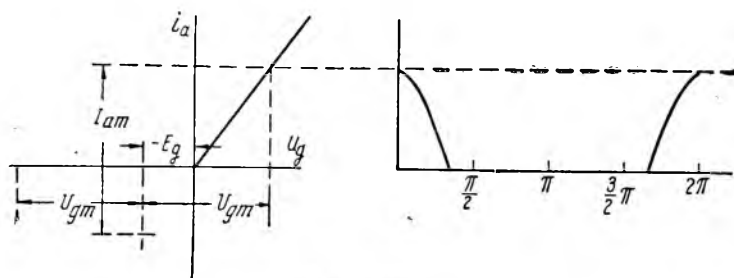


Рис. 7.33

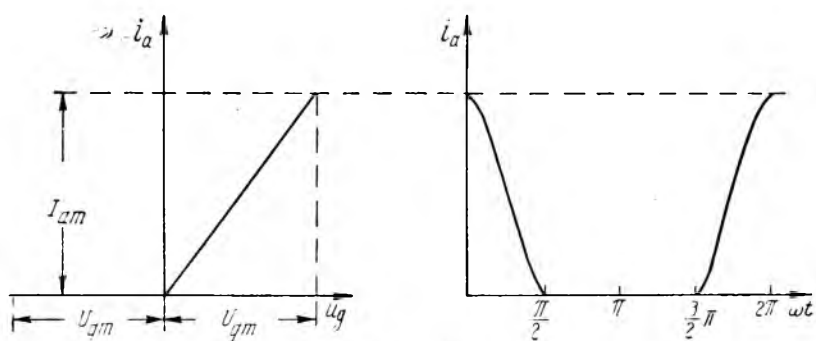


Рис. 7.34

Анодная сила тока будет равна нулю при

$$\chi = \omega t.$$

Согласно рис. 7.36,

$$\chi = \omega t = \frac{\pi}{2} + \varphi,$$

откуда

$$i_a = I_{am} (\cos \omega t + \sin \varphi).$$

В соответствии с рис. 7.37,

$$\chi = \omega t = \frac{\pi}{2} - \varphi,$$

откуда следует

$$i_a = I_{am} (\cos \omega t - \sin \varphi).$$

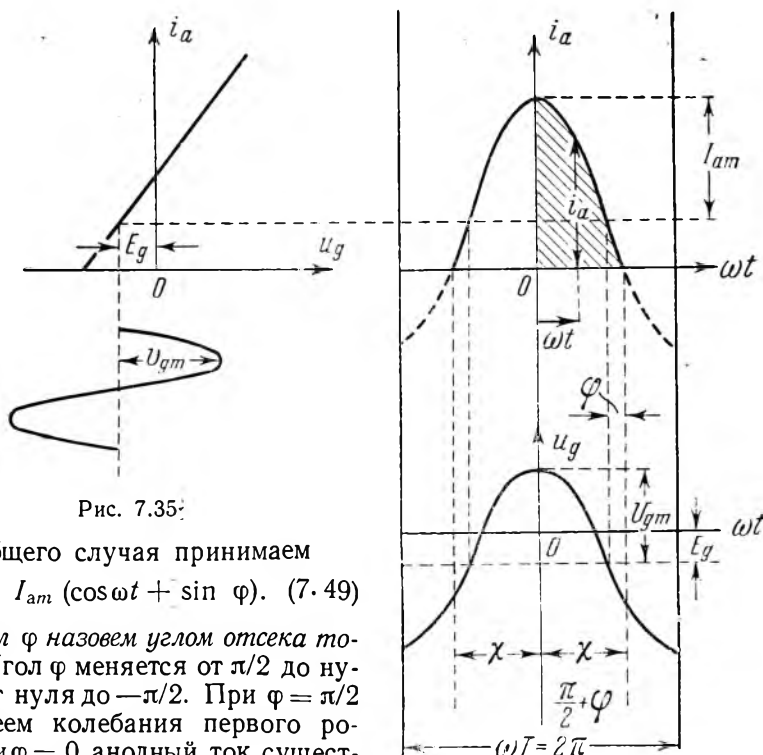


Рис. 7.35

Для общего случая принимаем

$$i_a = I_{am} (\cos \omega t + \sin \varphi). \quad (7.49)$$

Угол φ назовем *углом отсека тока* *. Угол φ меняется от $\pi/2$ до нуля и от нуля до $-\pi/2$. При $\varphi = \pi/2$ мы имеем колебания первого рода, при $\varphi = 0$ анодный ток существует полпериода и при $\varphi = -\pi/2$ ток в анодной цепи равен нулю в течение $\omega t = 2\pi$, т. е. за весь период.

Разлагая выражение (7.49) в ряд Фурье, находим значения постоянной слагающей, основной (первой) и высших гармоник.

Постоянная слагающая определяется по формуле

$$\begin{aligned} I_{a0} &= \frac{1}{T} \int_0^T i_a dt = \frac{1}{T} \int_{-\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) \frac{1}{\omega}}^{\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) \frac{1}{\omega}} I_{am} (\cos \omega t + \sin \varphi) dt = \\ &= \frac{I_{am}}{\pi} \left[\cos \varphi + \left(\frac{\pi}{2} + \varphi \right) \sin \varphi \right]. \end{aligned} \quad (7.50)$$

* Подчеркнуто нами. В рукописях М. В. Шулейкина это выражение вводится впервые; оно относится к периоду его работы до 1923 г. (см. фото (2) собственноручных записей М. В. Шулейкина на стр. 5). (Прим. составителя).

Амплитуда первой гармоники будет равна

$$I_{a1} = \frac{2}{T} \int_0^T i_a \cos \omega t \, dt = \frac{2}{T} \int_{-\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) \frac{1}{\omega}}^{\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) \frac{1}{\omega}} I_{am} (\cos \omega t + \sin \varphi) \cos \omega t \, dt =$$

$$= \frac{I_{am}}{\pi} \left\{ \frac{\pi}{2} + \varphi + \frac{1}{2} \sin 2\varphi \right\}, \quad (7.51)$$

и, наконец, значение n -й гармоники мы получим в следующем виде:

$$I_{an} = \frac{2}{T} \int_0^T i_a \cos n\omega t \, dt = \frac{2}{T} \int_{-\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) \frac{1}{\omega}}^{\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) \frac{1}{\omega}} I_{am} (\cos \omega t + \sin \varphi) \cos n\omega t \, dt =$$

$$= \frac{I_{am}}{\pi} \left[\frac{\sin(n+1) \left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right)}{n+1} + \frac{\sin(n-1) \left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right)}{n-1} + \frac{2 \sin \varphi \sin n \left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right)}{n} \right] \quad (7.52)$$

На основании полученных формул в табл. 7.1 и на рис. 7.38 приведены значения коэффициентов α_0 и α_1 :

$$\alpha_0 = \frac{I_{a0}}{I_{am}} =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\cos \varphi + \left(\frac{\pi}{2} + \varphi \right) \sin \varphi \right], \quad (7.53)$$

$$\alpha_1 = \frac{I_{a1}}{I_{am}} =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} + \varphi + \frac{1}{2} \sin 2\varphi \right],$$

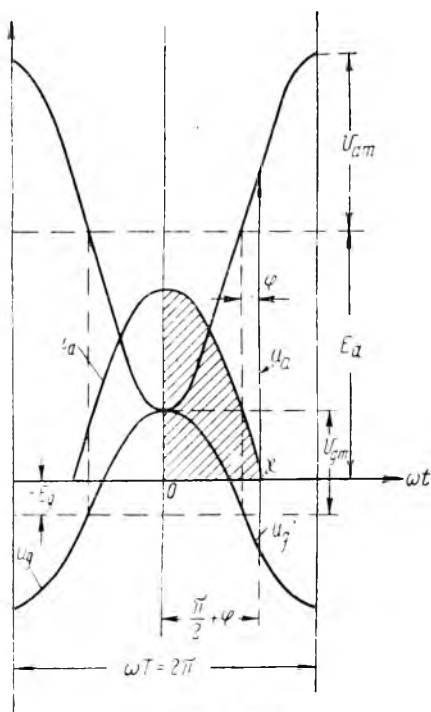


Рис. 7.36

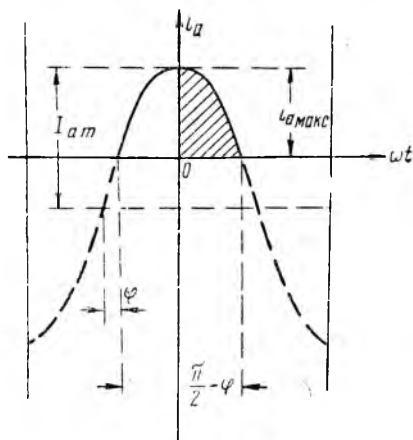


Рис. 7.37

и коэффициента α_3 , определяющего непосредственно отношение переменной слагающей к постоянной:

$$\alpha_3 = \frac{I_{a1}}{I_{a0}} = \frac{\frac{\pi}{2} + \varphi + \frac{1}{2} \sin 2\varphi}{\cos \varphi + \left(\frac{\pi}{2} + \varphi \right) \sin \varphi} = \frac{\alpha_1}{\alpha_0}. \quad (7.54)$$

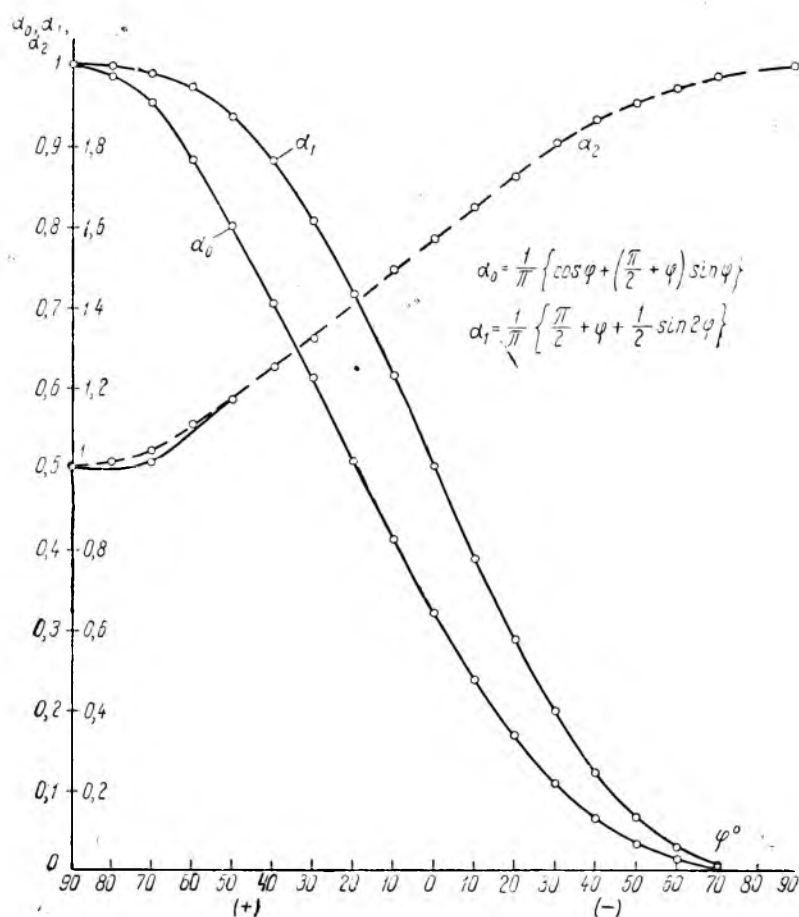


Рис. 7.38

Нетрудно определить значения мощностей. Обозначая постоянную э. д. с. источника высокого напряжения E_a , определим мощность, подводимую к генератору:

$$W_0 = E_a I_{a0}. \quad (7.55)$$

Значения расчетных постоянных

Таблица 7.1

φ	α_0	α_1	α_2	α_3	φ	α_0	α_1	α_2	α_3
+90	1	1	0,5	1	-10	0,236	0,386	0,82	1,64
+80	0,985	0,998	0,505	1,012	-20	0,166	0,286	0,86	1,72
+70	0,953	0,99	0,52	1,04	-30	0,109	0,1955	0,9	1,8
+60	0,88	0,972	0,552	1,104	-40	0,065	0,1205	0,925	1,85
+50	0,8	0,935	0,585	1,17	-50	0,0344	0,0653	0,95	1,9
+40	0,702	0,88	0,627	1,254	-60	0,0148	0,0288	0,972	1,944
+30	0,61	0,805	0,66	1,32	-70	0,00446	0,0088	0,985	1,97
+20	0,506	0,714	0,705	1,41	-80	0,000564	0,00112	0,993	1,986
+10	0,41	0,612	0,745	1,49	-90	0	0	1,00	2,00
0	0,318	0,5	0,787	1,574					

Полезная мощность будет равна

$$W_1 = \frac{1}{2} U_{am} I_{a1}$$

или, если переменную слагающую анодного напряжения U_{am} выразить через напряжение анодной батареи

$$U_{am} = \xi E_a, \quad \xi < 1, \quad \text{то} \quad W_1 = \frac{1}{2} \xi I_{a1} E_a. \quad (7.56)$$

Потери на аноде генераторной лампы определяются выражением

$$W_a = E_a \left[I_{a0} - \frac{1}{2} \xi I_{a1} \right]. \quad (7.57)$$

Коэффициент полезного действия определится из отношения

$$\eta = \frac{W_1}{W_0} = \frac{\xi}{2} \frac{I_{a1}}{I_{a0}}. \quad (7.58)$$

Значения $\frac{1}{2} \frac{I_{a1}}{I_{a0}} = \alpha_2$ даны в табл. 7.1 и на рис. 7.38.

Пример 1. Произведем расчет режима работы генераторной лампы, дающей в колебательном контуре 20 кВт при $E_a = 10\,000 \text{ в}$ и рассеивающей на аноде 10 кВт , при условии постоянной полезной мощности $20 \text{ кВт} = \text{const}$.

Задаваясь значениями ξ , находим значения I_{a1} и эквивалентного сопротивления z_3 ;

$$I_{a1} = \frac{2W_1}{U_{am}}, \quad z_3 = \frac{U_{am}^2}{2W_1}. \quad (7.59)$$

По этим значениям и принимая $E_a = 10 \text{ кВ}$ строим таблицу (табл. 7.2)

Таблица 7.2

Результаты расчета U_a , I_{a1} и z_3 как функции изменения ξ

ξ	1	0,9	0,8	0,7	0,6
$U_a, \text{ в}$	10000	9000	8000	7000	6000
$I_{a1}, \text{ а}$	4	4,45	5,0	5,72	6,66
$z_3, \text{ ом}$	2500	2020	1600	1225	900

Согласно табл. 7.2, по коэффициенту α_3 находим для каждого угла отсека значение постоянной слагающей, подводимую мощность и коэффициент полезного действия по формулам

$$I_{a0} = I_{a1} / \alpha_3, \quad W_0 = E_a I_{a0}, \quad \eta = \frac{W_1}{W_0}.$$

Расчет всех указанных величин для разных значений ξ представлен в табл. 7.3.

Согласно данному расчету построены кривые мощности (рис. 7.39) в зависимости от угла отсека. Рассмотрим кривую подведенной мощности при $\xi = 0,9$. Если на диаграмме изобразить постоянную полезную мощность, в данном случае равную 20 кВт , то разность ординат подведенной и полезной мощностей определит потери на аноде. Наибольшие потери на аноде в 10 кВт определяют предельный угол отсека для данной кривой $\xi = 0,9$, равный 10° .

Пример 2. Рассмотрим другой вариант расчета. Предположим, что постоянная подводенная мощность W_0 равна 30 квт. При напряжении $E_a = 10\,000$ в постоянная слагающая будет равна $I_{a0} = 3$ а.

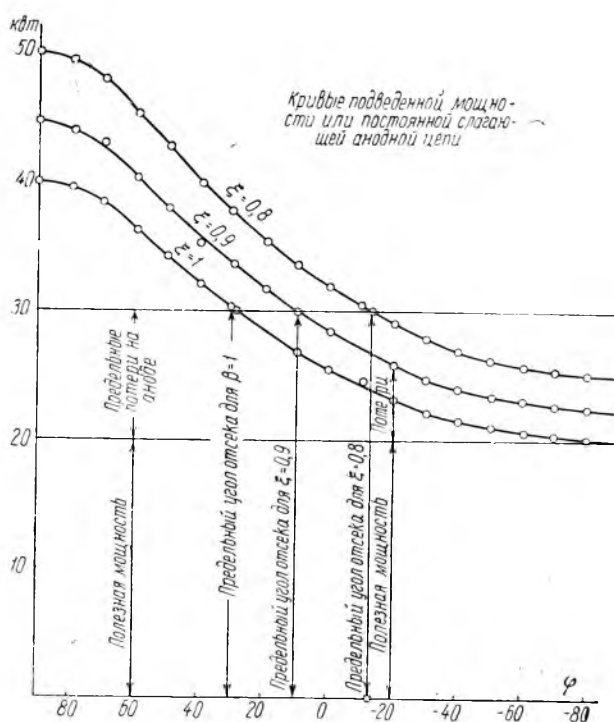


Рис. 7.39

Согласно табл. 7.1, по коэффициенту α_3 находим для каждого угла отсечения значения основной гармоники, полезной мощности и коэффициента полезного действия:

$$I_{a1} = I_{a0}\alpha_3, \quad W_1 = \xi E_a I_{a1}, \quad \eta = \frac{W_1}{W_0}.$$

Полагая при расчете $\xi = 0,9$, сводим результаты расчетов в таблицу. Для расчета необходимого напряжения на сетку предположим, что наибольшее превышение сеточного напряжения $U_{gm} - E_g$ равно наименьшему напряжению на аноде:

$$U_{gm} - E_g = E_a - U_{am}. \quad (7.60)$$

Анодная сила тока $i_a = f(u_g + Du_a)$ получается равной нулю при условии, что

$$u_g = -Du_a. \quad (7.61)$$

В свою очередь

$$\begin{aligned} u_g &= -E_g + U_{gm} \cos \omega t, \\ u_a &= E_a - U_{am} \cos \omega t. \end{aligned}$$

Так как условие (7.61) получается при $\omega t = \frac{\pi}{2} + \varphi$, то

$$\begin{aligned} u_g &= -E_g - U_{gm} \sin \varphi, \\ u_a &= E_g + U_{am} \sin \varphi. \end{aligned}$$

Таблица 7.3

Результаты расчета примера 1

φ , град	I_{a0} , а	W_e , кат	η	φ , град	I_{a0} , а	W_e , кат	η
$\xi = 1$							
90	4	40	0,5	-90	2	20	~1
80	3,95	39,5	0,507	-80	2,01	20,1	0,995
70	3,85	38,5	0,52	-70	2,03	20,3	0,985
60	3,62	36,2	0,553	-60	2,06	20,6	0,97
50	3,42	34,2	0,585	-50	2,1	21	0,953
40	3,19	31,9	0,627	-40	2,16	21,6	0,925
30	3,03	30,3	0,66	-30	2,22	22,2	0,2
20	2,84	28,4	0,705	-20	2,32	23,2	0,862
10	2,68	26,8	0,746	-10	2,44	24,4	0,82
0	2,54	25,4	0,787				
$\xi = 0,9$							
90	4,45	44,5	0,45	-90	2,22	22,2	0,9
80	4,40	44	0,455	-80	2,24	22,4	0,893
70	4,28	42,8	0,467	-70	2,26	22,6	0,885
60	4,02	40,2	0,497	-60	2,29	22,9	0,873
50	3,8	38	0,526	-50	2,34	23,4	0,855
40	3,55	35,6	0,564	-40	2,4	24	0,835
30	3,37	33,7	0,594	-30	2,47	24,7	0,81
20	3,16	31,6	0,634	-20	2,58	25,8	0,775
10	2,99	29,9	0,67	-10	2,71	27,1	0,737
0	2,83	28,3	0,706				
$\xi = 0,8$							
90	5	50	0,4	-90	2,5	25	0,8
80	4,94	49,4	0,405	-80	2,52	25,2	0,794
70	4,8	48	0,417	-70	2,54	25,4	0,787
60	4,53	45,3	0,44	-60	2,57	25,7	0,778
50	4,27	42,7	0,468	-50	2,63	26,3	0,76
40	3,99	39,9	0,50	-40	2,7	27	0,74
30	3,79	37,9	0,528	-30	2,78	27,8	0,72
20	3,54	35,4	0,565	-20	2,91	29,1	0,687
10	3,36	33,6	0,595	-10	3,05	30,5	0,655
0	3,18	31,8	0,629				

Таблица 7.4

Результаты расчета примера 2

φ , град	I_{a1} , а	W_1 , кат	z_3 , ом	η	φ , град	I_{a1} , а	W_1 , кат	z_3 , ом	η
90	3	13,5	3000	0,45	-90				0,9
80	3,04	13,7	2960	0,456	-80	5,95	26,8	1515	0,894
70	3,12	14	2890	0,466	-70	5,9	26,6	1530	0,885
60	3,31	14,9	2720	0,496	-60	5,83	26,2	1545	0,872
50	3,51	15,78	2560	0,525	-50	5,7	25,6	1580	0,853
40	3,76	16,9	2390	0,563	-40	5,55	25	1620	0,833
30	3,96	17,8	2270	0,593	-30	5,4	24,3	1670	0,81
20	4,225	19	2130	0,633	-20	5,16	23,2	1745	0,77
10	4,46	20,1	2020	0,67	-10	4,92	22,2	1830	0,74
0	4,72	21,2	1910	0,706					

С учетом (7.61) из последних уравнений следует

$$-E_g - U_{gm} \sin \varphi = -DE_a - DU_{am} \sin \varphi. \quad (7.62)$$

Решая уравнения (7.60) и (7.62), получим:

$$E_a - U_{gm} - U_{am} - U_{gm} \sin \varphi = -DE_a - DU_{am} \sin \varphi,$$

$$U_{gm} (1 + \sin \varphi) = E_a (D + 1) + DU_{am} \sin \varphi - U_{am},$$

$$\frac{U_{gm}}{E_a} = \frac{1 + D - \xi (1 - D \sin \varphi)}{1 + \sin \varphi},$$

где $\xi = \frac{U_{am}}{E_a}$.

Далее из выражения (7.60) находим

$$-\frac{E_g}{E_a} = 1 - \xi - \frac{U_{gm}}{E_a}$$

или

$$+\frac{E_g}{E_a} = \frac{D - \sin \varphi + \xi (1 + D) \sin \varphi}{1 + \sin \varphi}. \quad (7.63)$$

7.9. Приближенная теория генератора с независимым возбуждением *

Широко известен метод расчета лампового генератора на триоде, основанный на идеализации ламповой характеристики. Метод этот вошел во все наши учебники, а затем распространился и в зарубежную литературу.

Не всем, однако, известно, что впервые этот метод был разработан М. В. Шулейкиным в 1921 г. и излагался им на лекциях студентам МВТУ и слушателям ВЭТА КА. Академик А. И. Берг завершил этот метод и создал стройную теорию расчета генератора, работающего в любом режиме **.

В личном архиве М. В. Шулейкина обнаружена тетрадь, в которой подробно изложен метод расчета триодного генератора в той интерпретации, как он излагался в те годы на лекциях. Тетрадь имеет заголовок: «Приближенная теория генератора с независимым возбуждением»***. Ниже разбираются основные положения этой работы.

Ток анодной цепи

В настоящем расчете М. В. Шулейкиным впервые вводится метод использования спрямленной характеристики триода для расчета лампового генератора.

На рис. 7.35 показаны графики, иллюстрирующие работу генератора с косинусоидальным импульсом анодного тока, мгновенное значение которого показано на том же рисунке.

$$i_a = I_{am} \cos \omega t - I_{am} \cos \left(\frac{\pi}{2} + \varphi \right) = I_{am} \cos \omega t + I_{am} \sin \varphi$$

* Материал этого параграфа был подготовлен Д. Ф. Масановым.

** См. фото (1) записей М. В. Шулейкина, стр. 5. Последние взяты из рукописи, относящейся к периоду до 1923 г.

*** Содержание ее приведено в гл. VII. (Прим. составителя).

$$i_a = I_{am} (\cos \omega t + \sin \varphi). \quad (7.64)$$

Постоянная составляющая анодного тока определится разложением (7.64) в ряд Фурье и будет равна

$$I_{a0} = \frac{1}{T} \int_{-\theta/\omega}^{+\theta/\omega} i_a dt = \frac{1}{T} \int_{-\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right)}^{+\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right)} I_{am} (\cos \omega t + \sin \varphi) dt,$$

что после решения дает

$$I_{a0} = \frac{I_{am}}{\pi} \left[\cos \varphi + \left(\frac{\pi}{2} + \varphi \right) \sin \varphi \right]. \quad (7.65)$$

Соответственно амплитуда первой гармоники будет

$$I_{a1} = \frac{2}{T} \int_{-\theta/\omega}^{+\theta/\omega} i_a \cos \omega t dt = \frac{2}{T} \int_{-\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right)}^{+\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right)} I_{am} (\cos^2 \omega t + \sin \varphi \cos \omega t) dt,$$

где $\theta = \frac{\pi}{2} + \varphi$.

После решения получаем

$$I_{a1} = \frac{I_{am}}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} + \varphi + \frac{1}{2} \sin 2\varphi \right). \quad (7.66)$$

Амплитуда k -й гармоники будет

$$I_{ak} = \frac{2}{T} \int_{-\theta/\omega}^{+\theta/\omega} I (\cos \omega t \cos k\omega t + \sin \varphi \cos k\omega t) dt,$$

и после решения

$$I_{ak} = \frac{2I_{am}}{\pi k (k^2 - 1)} \left[-\sin k \left(\frac{\pi}{2} + \varphi \right) \sin \varphi - k \cos \varphi \cos k \left(\frac{\pi}{2} + \varphi \right) \right]. \quad (7.67)$$

Подводящая мощность

$$W_0 = E_a I_0 = \frac{E_a I_{am}}{\pi} \left[\cos \varphi + \left(\frac{\pi}{2} + \varphi \right) \sin \varphi \right]. \quad (7.68)$$

Полезную мощность генератора W_1 можно выразить в виде

$$W_1 = \frac{U_{a1m} I_{a1m}}{2} = \frac{\xi E_a I_{am}}{2\pi} \left(\frac{\pi}{2} + \varphi + \frac{1}{2} \sin 2\varphi \right) \quad (7.69)$$

и к. п. д.

$$\eta = \frac{W_1}{W_0} = \frac{1}{2} \xi \frac{\frac{\pi}{2} + \varphi + \frac{1}{2} \sin 2\varphi}{\cos \varphi + \left(\frac{\pi}{2} + \varphi \right) \sin \varphi}. \quad (7.70)$$

Амплитуда напряжения U_{gm} и напряжение смещения E_g на сетке

Считаем, что положительное превышение сеточного напряжения (рис. 7.36) равно наименьшему потенциалу анода (критический режим), т. е.

$$U_{gm} - E_g = E_a - U_{a1m}. \quad (7.71)$$

В той точке, где начинает появляться анодный ток (точка x на рис. 7.36),

$$i_a = f(u_g + Du_a),$$

должно быть выполнено условие

$$-u_g = Du_a. \quad (7.72)$$

Имеем (см. рис. 7.35)

$$-u_g = -\left[U_{gm} \cos\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) - E_g\right] = U_{gm} \sin \varphi + E_g.$$

Следовательно,

$$-u_g = U_{gm} \sin \varphi + E_g = D \left[E_a - U_{a1m} \cos\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) \right],$$

и окончательно

$$U_{gm} \sin \varphi + E_g = D (E_a + U_{a1m} \sin \varphi).$$

По подстановке значения E_g из условия (7.71) получаем

$$U_{gm} \sin \varphi + U_{gm} - E_a + U_{a1m} = D (E_a + U_{a1m} \sin \varphi),$$

откуда амплитуда сеточного напряжения равна

$$U_{gm} = \frac{E_a - U_{a1m} + D (E_a + U_{a1m} \sin \varphi)}{1 + \sin \varphi}. \quad (7.73)$$

Вводя в уравнение (7.73) значение коэффициента использования анодного напряжения

$$\xi = \frac{U_{a1m}}{E_a},$$

получаем другое выражение

$$U_{gm} = E_a \frac{1 - \xi + D (1 + \xi \sin \varphi)}{1 + \sin \varphi}. \quad (7.74)$$

Зная U_{gm} , находим из (7.71) напряжение сеточного смещения

$$E_g = U_{gm} - (E_a - U_{a1m}). \quad (7.75)$$

Замечание составителя

В записках М. В. Шулейкина дальше указывается порядок расчета лампового генератора. Анализируя предложенные М. В. Шулейкиным расчетные формулы для I_{a1m} и I_0 , напрашивается в первую очередь вопрос, какой вид они будут иметь для случая (рис. 7.37), когда угол отрицателен

Пользуясь соотношениями

$$\sin(-\varphi) = -\sin \varphi,$$

$$\cos(-\varphi) = \cos \varphi,$$

формулы (7.65) и (7.66) можно записать в общем виде следующим образом:

$$I_0 = \frac{I_{am}}{\pi} \left[\cos \varphi \pm \sin \varphi \left(\frac{\pi}{2} \pm \varphi \right) \right], \quad (7.76)$$

$$I_{a1m} = \frac{I_{am}}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} \pm \varphi \pm \frac{1}{2} \sin 2\varphi \right]. \quad (7.77)$$

Если далее придать формулам Шулейкина современный вид, вводя в них вместо амплитуды I_{am} максимальное значение анодного тока $i_{a \text{ макс}}$, которое (рис. 7.35, 7.37) определится из соотношения

$$i_{a \text{ макс}} = I_{am} \pm I_{am} \sin \varphi = I_{am} (1 \pm \sin \varphi),$$

то формулы (7.76) и (7.77) получают следующий окончательный вид:

$$I_0 = \frac{i_{a \text{ макс}}}{\pi (1 \pm \sin \varphi)} \left[\cos \varphi \pm \sin \varphi \left(\frac{\pi}{2} \pm \varphi \right) \right], \quad (7.78)$$

$$I_{am} = \frac{i_{a \text{ макс}}}{\pi (1 \pm \sin \varphi)} \left[\frac{\pi}{2} \pm \varphi \pm \frac{1}{2} \sin 2\varphi \right]. \quad (7.79)$$

Мы приходим к выводу, что коэффициенты разложения для составляющих анодного тока в формулах Шулейкина получили следующее выражение:

$$\alpha_0 = \frac{\cos \varphi \pm \sin \varphi \left(\frac{\pi}{2} \pm \varphi \right)}{\pi (1 \pm \sin \varphi)}, \quad (7.80)$$

$$\alpha_1 = \frac{\frac{\pi}{2} \pm \varphi \pm \frac{1}{2} \sin 2\varphi}{\pi (1 \pm \sin \varphi)}, \quad (7.81)$$

а вместо угла осечки

$$\theta = \frac{\pi}{2} \pm \varphi$$

введен угол

$$\varphi = \theta - \frac{\pi}{2}$$

или

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \theta.$$

7.10. Эквивалентная схема двухтактного генератора

Обозначив, согласно схеме (рис. 7.40),

$$x_1 = R_1 + j\omega L_1,$$

$$x_2 = -\frac{j}{\omega C_2},$$

можно написать следующие уравнения:

$$u_1 + u_2 = 2u_a = I_1 x_1,$$

$$u_1 + u_2 = 2u_a = I_2 x_2.$$

Решая уравнения, получим

$$i = I_1 + I_2 = \frac{2u_a}{z},$$

$$\text{где } z = \frac{x_1 x_2}{x_1 + x_2}.$$

С учетом формулы для характеристики триода:

$$i = S(u_g + Du_a)$$

можно написать

$$i = \frac{Su_g}{1 + \frac{z}{2R_i}} = \frac{2R_i Su_g}{2R_i + z}.$$

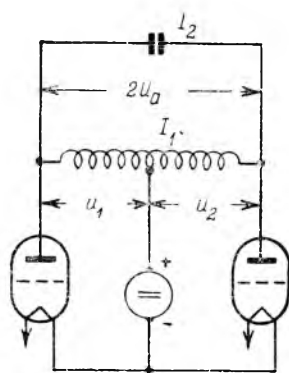


Рис. 7.40

Если мы желаем двухтактную схему заменить схемой с одним триодом, то должны поставить определенные условия, которые могут быть следующими:

1. Колебательный контур остается тем же.

2. Переменная слагающая анодного напряжения равна удвоенному значению той же величины одного триода двухтактной схемы (то же условие и для постоянного напряжения).

3. Проницаемость триода такая же, как и проницаемость триодов двухтактной схемы.

Из уравнения для i имеем, что внутреннее сопротивление R_{i1} одного триода равно $R_{i1} = 2R_i$. Так как $D_1 = D$, то мы имеем

$$\frac{1}{S_1 R_{i1}} = \frac{1}{S R_i}, \quad \frac{1}{2S_1} = \frac{1}{S} \quad \text{или} \quad S_1 = \frac{S}{2}.$$

Напряжение на сетке находим из условия

$$i = \frac{R_{i1} S_1 u_{g1}}{R_{i1} + z} = \frac{2R_{i1} S u_g}{2R_i + z}$$

или

$$\frac{R_{i1} S_1 u_{g1}}{R_{i1} + z} = \frac{R_{i1} 2S u_g}{R_{i1} + z},$$

$$u_{g1} = 2u_g.$$

Триод, эквивалентный триодам двухтактной схемы, должен иметь, согласно поставленным условиям,

$$R_{i1} = 2R_i, \quad S_1 = \frac{S}{2}, \quad u_{a1} = 2u_a, \quad u_{g1} = 2u_g, \quad D_1 = D.$$

ТЕОРИЯ ЯВЛЕНИЯ ЗАТЯГИВАНИЯ

3.1. Явление затягивания

Схему генератора (с самовозбуждением и независимым возбуждением) обычно в целях ослабления влияния высших гармоник приходится усложнять путем включения промежуточного контура. В случае генератора с независимым возбуждением изменение его режима работы при введении лишнего контура можно всегда компенсировать подбором самоиндукции в сети, чтобы установить резонанс (рис. 8.1). В данном случае можно также добиться резонанса, изменяя емкость замкнутого контура и не изменяя самоиндукцию сети. Гораздо сложнее обстоит дело как с расчетом, так и с происходящими явлениями при введении дополнительных контуров в генераторе с самовозбуждением.

Для анализа этих явлений положим, что у нас колебательный контур получает энергию от источника высокого напряжения. Свяжем его индуктивно с волномером. По включенному в волномер ваттметру W мы можем исследовать зависимость квадрата силы тока от емкости (рис. 8.2). Графически получим кривую резонанса, изображенную на рис. 8.3. Для частного случая при незатухающих колебаниях мы будем иметь следующее выражение:

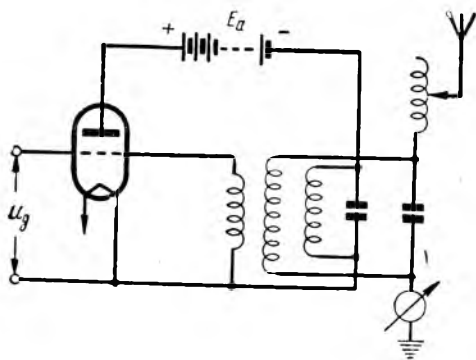


Рис. 8.1

$$i = \frac{U_m \sin \omega t}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}.$$

При $\omega L = \frac{1}{\omega C}$ $I_m = \frac{U_m}{R}.$

Отсюда $\omega^2 = \frac{1}{LC}.$ Но $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi c}{T_c} = \frac{2\pi c}{\lambda},$ где $\lambda = T_c = 2\pi c \sqrt{LC},$

следовательно, частота передаваемых колебаний соответствует собственной длине волны, т. е. частоте собственных колебаний контура.

Допустим теперь, что имеется замкнутый колебательный контур передатчика (L_1C), связанный индуктивно с контуром сети (L_2C_2), а также с волномером (рис. 8.4). В этом случае вид кривой резонанса может быть иной. В отличие от первого случая кривая резонанса может быть получена двугорбая, т. е. имеющая два максимума и один минимум. Вид кривой резонанса в данном случае изменяется в зависимости от изменения коэффициента связи. При сильной связи, как правило, будет получаться двугорбая кри-

вая резонанса, так как из теории колебаний известно, что в данном случае будут существовать две волны $\lambda_{1,2} = \lambda \sqrt{1 \pm k^2}$ (рис. 8.5).

Опыт и теория подтверждают, что в действительности в цепях генератора имеется одна волна, а не две. Некоторые явления, наблюдаемые в генераторе

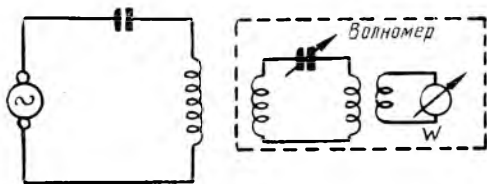


Рис. 8.2

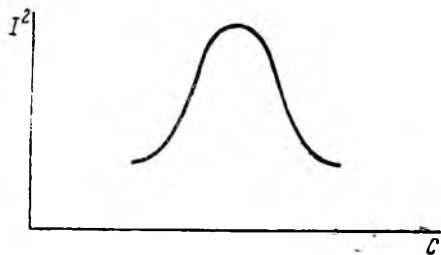


Рис. 8.3

со связанными контурами, имеют происхождение от указанных причин, т. е. от существования двух волн при большой связи. Так, например, если будем изменять емкость C замкнутого контура, то сможем снять некоторую двугорбую кривую с двумя максимумами при C_1 и C_2 и одним минимумом при C_0 (рис. 8.6). Стало быть, в отдельные моменты получается кривая, образуемая за счет сдвига и наложения одной на другую двух кривых, соответствующих двум частотам.

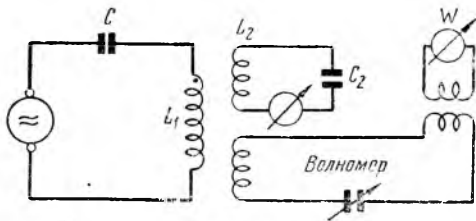


Рис. 8.4

Разберем следующий случай. Положим, что радиотелеграфный ключ K (рис. 8.7) замкнут и в антенне имеется максимум тока. Теперь разомкнем и снова замкнем

ключ. Опыт показывает, что то же условие получения максимума в отдельных случаях не повторится. Это явление носит название *з а т я г и в а н и я*. Последнее может быть устранено только подбором надлежащего

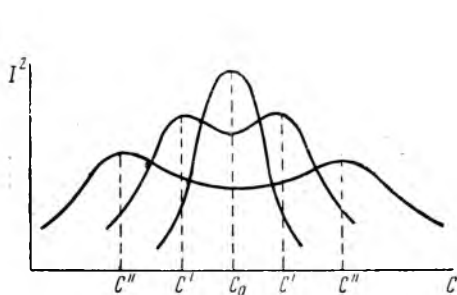


Рис. 8.5

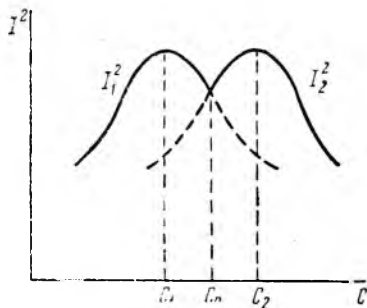


Рис. 8.6

коэффициента связи. При определенной связи мы получим нормальный вид резонансной кривой с одним максимумом.

Из теории колебаний связанных систем известно, что каждая длина волны связи имеет свой множитель затухания. В нашем случае триод из затухающих колебаний вырабатывает незатухающие. Очевидно для какой-нибудь из двух волн связи множитель затухания становится равным нулю. И если для одной волны множитель затухания равен нулю, то для другой

волны должен быть множитель, не равный нулю, иначе мы не могли бы осуществить незатухающих колебаний (при одной волне). Такой момент соответствует определенной величине емкости замкнутого контура.

В схеме (рис. 8.7) с точки зрения связанных систем должны существовать две волны с разными длинами. В практике же работы такой схемы создается режим, обуславливающий существование только одной из них.

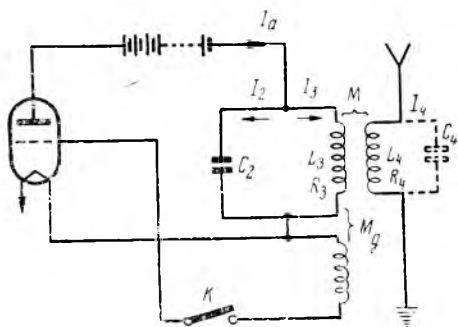


Рис. 8.7

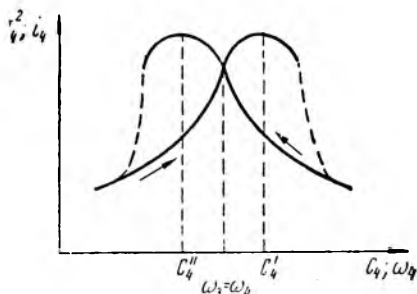


Рис. 8.8

Практически, если нанесем кривую зависимости i_4 от ω или n_4 или C_4^* , то получим следующую картину. При определенном изменении C_4 , а следовательно, и n_4 сила тока i_4 будет расти и дойдет до максимума, потом упадет до нуля (рис. 8.8). При обратном изменении емкости ток опять начнет подниматься, но уже по другой кривой, и достигнет максимума при другом значении емкости — C_4'' . При такой работе нашей схемы мы будем иметь явление затягивания, которого необходимо избегать как при проектировании схемы, так и при ее наладке.

Выясним теперь целесообразность устройства промежуточного контура. Так, например, это выгодно при устройстве маломощных станций, работающих на небольшой длине волны, так как у таких станций емкость сети мала и всякое изменение емкости, которое происходит от изменения атмосферных условий и даже от приближения к сети человека, может изменить передаваемую длину волны. Эта неустойчивость может быть устранена введением промежуточного контура, который не реагирует на изменение параметра открытого колебательного контура. При изменении емкости открытого контура последний только выходит из резонанса, но длина излучаемой волны не меняется. Сила тока антенны в этом случае, конечно, меняется, но на приеме это гораздо менее отражается, чем изменение длины волны.

Замкнутые контуры выгодно также применять при использовании коллекторных динамомашинок для питания передатчика станции. В этом случае можно ослабить шумы, вызываемые этими машинами.

Недостатком схем, имеющих промежуточные контуры, является то, что добавляются катушки самоиндукции и конденсаторы, которые усложняют схему.

8.2. Теория явления затягивания

Схема

Рассмотрим схему рис. 8.7, в которой связь на сетку взята от колебательного контура анода, который мы назовем первичным или замкнутым, причем катушка связи на сетку включена в цепь, содержащую самоиндукцию.

* Здесь n_4 — резонансная частота выходного контура — равна $\frac{1}{\sqrt{L_4 C_4}}$. (Прим. составителя).

Вторичный контур или контур сети связан с замкнутым посредством катушки L_4 . Катушки связи замкнутого контура с сетью (со вторичным контуром) и с сеткой не связаны индуктивно друг с другом.

Уравнения, характеризующие схему

На основании второго закона Кирхгофа можно написать, полагая переменную слагающую анодного напряжения равной U_{am} .

$$U_{am} = I_3 (j\omega L_3 + R_3) + j\omega M I_4, \quad (8.1)$$

$$U_{am} = -\frac{j}{\omega C_2} I_2, \quad (8.2)$$

$$0 = I_4 \left[j \left(\omega L_4 - \frac{1}{\omega C_4} \right) + R_4 \right] + j\omega M I_3. \quad (8.3)$$

На основании первого закона Кирхгофа

$$I_{am} = I_2 + I_3. \quad (8.4)$$

Кроме того, имеем уравнение рабочей характеристики:

$$I_{am} = S U_{gm} - \frac{U_{am}}{R_i}.$$

Тогда условие самовозбуждения будет

$$S U_{gm} - \frac{U_{am}}{R_i} - I_{am} \geq 0 \quad (8.5)$$

и значение напряжения на сетке

$$U_{gm} = j\omega M_g I_3. \quad (8.6)$$

Решение предложенных уравнений

Обозначая $z_3 = j\omega L_3 + R_3$, $z_4 = j \left(\omega L_4 - \frac{1}{\omega C_4} \right) + R_4$, имеем

$$U_{am} = I_3 z_3 + j\omega M I_4,$$

$$0 = I_4 z_4 + j\omega M I_3.$$

Определитель данной системы уравнений равен

$$\Delta = \begin{vmatrix} z_3 & j\omega M \\ j\omega M & z_4 \end{vmatrix} = z_3 z_4 + (\omega M)^2, \quad (8.6a)$$

а силы токов определяются следующими выражениями:

$$I_3 = \frac{z_4}{\Delta} U_{am}, \quad I_4 = -\frac{j\omega M}{\Delta} U_{am}. \quad (8.7)$$

Подставляя значения I_2 и I_3 в уравнение (8.4), определим величину анодного тока

$$I_{am} = I_2 + I_3 = U_{am} \left(j\omega C_2 + \frac{z_4}{\Delta} \right) = U_{am} \frac{z_4 + j\omega C_2 \Delta}{\Delta}.$$

С другой стороны, обозначая эквивалентное сопротивление замкнутого контура равным z_p , можно написать:

$$I_{am} = \frac{U_{am}}{z_p} \quad (8.8)$$

или

$$z_p = \frac{\Delta}{z_4 + j\omega C_2 \Delta}.$$

Определение длины волны и условия самовозбуждения

Подставляем в (8.5) значения I_{am} и U_{gm} . Принимая во внимание [см. (8.6) и (8.7)], что

$$U_{gm} = j\omega M_g I_3 = \frac{j\omega M_g z_1}{\Delta} U_{am},$$

из (8.5) получаем (после сокращения на U_{am})

$$j \frac{\omega M_g S z_4}{\Delta} - \frac{1}{R_i} - \frac{1}{z_p} \geq 0$$

Заменяем z_p :

$$\frac{j\omega M_g S z_4}{\Delta} - \frac{1}{R_i} - \frac{z_4 + j\omega C_2 \Delta}{\Delta} \geq 0.$$

Окончательно получим

$$j\omega M_g S z_4 - \frac{\Delta}{R_i} - z_4 - j\omega C_2 \Delta \geq 0.$$

Умножив полученное выражение на $-j$, получим

$$\omega M_g S z_4 + j \frac{\Delta}{R_i} + j z_4 - \omega C_2 \Delta \geq 0$$

или, после несложных преобразований

$$z_4 (\omega M_g S + j) + \Delta \left(\frac{j}{R_i} - \omega C_2 \right) \geq 0. \quad (8.9)$$

Выполним перемножение в (8.6а) и найдем:

$$\begin{aligned} z_3 z_4 &= -\omega^2 L_3 L_4 + \frac{L_3}{C_4} + j\omega L_3 R_4 + j\omega L_4 R_3 - j \frac{R_3}{\omega C_4} + R_4 R_3 = \\ &= L_3 L_4 \left(-\omega^2 + \frac{1}{L_3 C_4} + j\omega \frac{R_4}{L_4} + j\omega \frac{R_3}{L_3} - j \frac{R_3}{\omega C_4 L_3 L_4} + \frac{R_4 R_3}{L_4 L_3} \right) = \\ &= L_3 L_4 \left[-\omega^2 + n_4^2 + j2\omega (\alpha_3 + \alpha_4) - j \frac{2\alpha_3 n_4^2}{\omega} + 4\alpha_3 \alpha_4 \right], \end{aligned}$$

где

$$n_4^2 = \frac{1}{L_4 C_4}; \quad 2\alpha_3 = \frac{R_3}{L_3}; \quad 2\alpha_4 = \frac{R_4}{L_4}.$$

Обозначим $\frac{M^2}{L_3 L_4} = k^2$ и $1 - k^2 = \sigma$, тогда значение определителя выразится так:

$$\Delta = L_3 L_4 \left\{ -\omega^2 \sigma + n_4^2 + 4\alpha_3 \alpha_4 + j \left[2\omega (\alpha_3 + \alpha_4) - \frac{2\alpha_3 n_4^2}{\omega} \right] \right\}$$

или

$$\Delta = L_3 L_4 (A + jB), \quad (8.10)$$

где A и B равны:

$$\begin{aligned} A &= -\omega^2 \sigma + n_4^2 + 4\alpha_3 \alpha_4, \\ B &= 2\omega (\alpha_3 + \alpha_4) - \frac{2\alpha_3 n_4^2}{\omega}. \end{aligned} \quad (8.10a)$$

Представим z_4 в следующем виде:

$$z_4 = \omega L_4 \left[j \left(1 - \frac{n_4^2}{\omega^2} \right) + \frac{2\alpha_4}{\omega} \right]. \quad (8.106)$$

Подставим последнее значение z_4 и Δ из (8.10) в выражение (8.9) и найдем

$$\omega L_4 \left[j \left(1 - \frac{n_4^2}{\omega^2} \right) + \frac{2\alpha_4}{\omega} \right] (\omega M_g S + j) + L_3 L_4 (A + jB) \left(\frac{j}{R_i} - \omega C_2 \right) \geq 0.$$

Вынесем из последнего множителя за скобку ωC_2 , обозначим $n_3^2 = \frac{1}{L_3 C_2}$ и произведем сокращение на ωL_4 . Тогда

$$\left[j \left(1 - \frac{n_4^2}{\omega^2} \right) + \frac{2\alpha_4}{\omega} \right] (\omega M_g S + j) + \frac{1}{n_3^2} (A + jB) \left(j \frac{1}{\omega C_2 R_i} - 1 \right) \geq 0.$$

Разделив вещественную и мнимую части, определим условие самовозбуждения

$$\left(1 - \frac{n_4^2}{\omega^2} \right) \omega M_g S + \frac{2\alpha_4}{\omega} + \frac{A}{n_3^2 \omega C_2 R_i} - \frac{B}{n_3^2} \geq 0 \quad (8.11)$$

и условие частоты

$$2\alpha_4 M_g S - \left(1 - \frac{n_4^2}{\omega^2} \right) - \frac{A}{n_3^2} - \frac{B}{n_3^2 \omega C_2 R_i} = 0. \quad (8.12)$$

Условие самовозбуждения

Умножим выражение (8.11) на ω и заменим A и B [см. (8.10a)]. Тогда

$$\omega^2 M_g S - n_4^2 M_g S + 2\alpha_4 - \frac{\omega^2 \sigma}{n_3^2 C_2 R_i} + \frac{n_4^2}{n_3^2} \frac{1}{C_2 R_i} + \frac{4\alpha_3 \alpha_4}{n_3^2 C_2 R_i} - \frac{2\omega^2 (\alpha_3 + \alpha_4)}{n_3^2} + \frac{2\alpha_3 n_4^2}{n_3^2} \geq 0.$$

Обозначая $u = \frac{\omega^2}{n_3^2}$, $p = \frac{n_4^2}{n_3^2}$ и разделив все выражение на n_3^2 , приводим его к следующему виду:

$$u M_g S - p M_g S + \frac{2\alpha_4}{n_3^2} - u \frac{\sigma}{C_2 R_i n_3^2} + p \frac{1}{n_3^2 C_2 R_i} + \frac{4\alpha_3 \alpha_4}{n_3^4 C_2 R_i} - 2u \frac{\alpha_3 + \alpha_4}{n_3^2} + p \frac{2\alpha_3}{n_3^2} \geq 0.$$

Откуда следует, после вынесения за скобки u и p :

$$u \left(M_g S - \frac{\sigma}{C_2 R_i n_3^2} - 2 \frac{\alpha_3 + \alpha_4}{n_3^2} \right) - p \left(M_g S - \frac{1}{n_3^2 C_2 R_i} - \frac{2\alpha_3}{n_3^2} \right) + \frac{2\alpha_4}{n_3^2} + \frac{4\alpha_3 \alpha_4}{n_3^4 C_2 R_i} \geq 0.$$

Полагаем далее

$$M_g S - \frac{1}{n_3^2 C_2 R_i} - \frac{2\alpha_3}{n_3^2} = \frac{2\alpha_{30}}{n_3^2},$$

откуда

$$\alpha_{30} = \frac{1}{2} M_g S n_3^2 - \frac{1}{2} \frac{1}{C_2 R_i} - \alpha_3 \quad (8.12a)$$

и

$$M_g S - \frac{5}{C_2 R_i n_3^2} - 2 \frac{\alpha_3 + \alpha_4}{n_3^2} = \frac{2\alpha_{30}}{n_3^2} + \frac{k^2}{C_2 R_i n_3^2} - \frac{2\alpha_4}{n_3^2}.$$

Подставляем найденные выражения в рассматриваемое неравенство:

$$u \frac{2\alpha_{30}}{n_3^2} + \frac{uk^2}{C_2 R_i n_3^2} - \frac{2\alpha_4}{n_3^2} u - \frac{2\alpha_{30}}{n_3^2} p + \frac{2\alpha_4}{n_3^2} + \frac{4\alpha_3\alpha_4}{n_3^4 C_2 R_i} \geq 0$$

или

$$\alpha_{30} (u - p) - \alpha_4 (u - 1) + \frac{1}{2} \frac{k^2}{C_2 R_i} u + \frac{2\alpha_3\alpha_4}{n_3^2 C_2 R_i} \geq 0.$$

Считая, что в ряде случаев два последних слагаемых малы по сравнению с членами, содержащими α_{30} и α_4 , получим окончательно условие самовозбуждения в следующем виде:

$$\frac{\alpha_{30}}{\alpha_4} \geq \frac{u - 1}{u - p}. \quad (8.126)$$

Условие частоты

Выражение (8.12) мы получили в следующем виде:

$$2\alpha_4 M_g S - \left(1 - \frac{n_4^2}{\omega}\right) - \frac{A}{n_3^2} - \frac{B}{n_3^2 \omega C_2 R_i} = 0.$$

Подставляя A и B , находим

$$2\alpha_4 M_g S - 1 + \frac{n_4^2}{\omega^2} + \frac{\omega^2 \sigma}{n_3^2} - \frac{n_4^2}{n_3^2} - \frac{4\alpha_3\alpha_4}{n_3^2} - \frac{2(\alpha_3 + \alpha_4)}{n_3^2 C_2 R_i} + \frac{2\alpha_3 n_4^2}{n_3^2 \omega^2 C_2 R_i} = 0.$$

Умножая это выражение на $\frac{\omega^2}{n_3^2} = u$, получим

$$2\alpha_4 M_g S u - u + p + u^2 \sigma - up - u \frac{4\alpha_3\alpha_4}{n_3^2} - u \frac{2(\alpha_3 + \alpha_4)}{n_3^2 C_2 R_i} + \frac{2\alpha_3}{n_3^2} \frac{p}{C_2 R_i} = 0$$

или, после приведения подобных членов:

$$u^2 \sigma - u \left[p + 1 - 2\alpha_4 \left(M_g S - \frac{2\alpha_3}{n_3^2} - \frac{1}{n_3^2 C_2 R_i} \right) + \frac{2\alpha_3}{n_3^2 C_2 R_i} \right] + p \left(1 + \frac{2\alpha_3}{n_3^2 C_2 R_i} \right) = 0.$$

Принимая обозначения (8.12а), будем иметь

$$u^2 \sigma - u \left(p + 1 - \frac{4\alpha_{30}\alpha_4}{n_3^2} + \frac{2\alpha_3}{n_3^2 C_2 R_i} \right) + p \left(1 + \frac{2\alpha_3}{n_3^2 C_2 R_i} \right) = 0.$$

Последнее выражение может быть представлено еще и так:

$$u^2 \sigma - u \left(p + 1 - \frac{4\alpha_{30}\alpha_4}{n_3^2} + \frac{R_3}{R_i} \right) + p \left(1 + \frac{R_3}{R_i} \right) = 0.$$

В ряде случаев $\frac{R_3}{R_i}$ значительно меньше $\frac{4\alpha_{30}\alpha_4}{n_3^2}$, на основании чего можно написать

$$u^2 \sigma - u \left(p + 1 - \frac{4\alpha_{30}\alpha_4}{n_3^2} \right) + p = 0. \quad (8.12з)$$

Выражение (8.12в) есть условие частоты. В том случае, когда величиной $\frac{4\alpha_{30}\alpha_4}{n_3^2}$ можно пренебречь по сравнению с единицей, мы получаем условие самовозбуждения (8.12а) и условие частоты независимыми одно от другого. В том случае, когда величиной $\frac{4\alpha_{30}\alpha_4}{n_3^2}$ нельзя пренебречь по сравнению с единицей, условия (8.12а) и (8.12б) аналитически связаны, вследствие чего их необходимо решить совместно, чтобы определить u .

Исследование условия частоты в предположении, что $\frac{4\alpha_{30}\alpha_4}{n_3^2}$ мало по сравнению с единицей

В этом случае из выражения (8.12 в) имеем

$$\sigma u^2 - (p + 1)u + p = 1,$$

откуда следует

$$u = \frac{p + 1 \pm \sqrt{(p + 1)^2 - 4p\sigma}}{2\sigma}. \quad (8.13)$$

Применим выражение (8.13) для трех предельных случаев, а именно: для случая, когда $k=0$, т. е. связи между первым и вторым контурами не существует (в этом случае $\sigma = 1$), для случая короткого замыкания вторичного контура ($p = 0$) и случая $p = 1$, что характеризует настройку контуров в резонанс.

В первом случае, при $k = 0$ и $\sigma = 1$, выражение (8.13) принимает следующий вид:

$$u = \frac{p + 1 \pm (p - 1)}{2},$$

откуда следует, что

$$u_1 = p, \quad u_2 = 1.$$

В данном случае мы будем иметь две частоты, из которых одна равна собственной частоте вторичного контура:

$$u_1 = p, \text{ т. е. } \frac{\omega_1^2}{n_3^2} = \frac{n_4^2}{n_3^2} \quad \text{или} \quad \omega_1^2 = n_4^2,$$

а другая равна собственной частоте первичного контура:

$$u_2 = 1, \text{ т. е. } \frac{\omega_2^2}{n_3^2} = 1 \quad \text{или} \quad \omega_2^2 = n_3^2.$$

Так как в условиях поставленной задачи мы изменяем частоту вторичного контура при помощи переменного конденсатора, то u_1 выразится прямой, проходящей через начало координат под углом в 45° , а u_2 — прямой, параллельной оси абсцисс на расстоянии, равном единице от нее, что показано на рис. 8.9.

Во втором случае, когда $p=0$, будет существовать условие короткого замыкания вторичного контура. В этом случае $p = \frac{n_4^2}{n_3^2} = 0$ получается при условии $n_4^2 = 0$. Так как $n_4^2 = \frac{1}{L_4 C_4}$, где C_4 является переменной величиной, то n_4^2 будет равно нулю при условии $C_4 = \infty$, т. е. при коротком замыкании емкости контура.

При этом из выражения (8.13) имеем

$$u = \frac{1 \pm 1}{2\sigma},$$

откуда следует

$$u_1 = \frac{1}{\sigma}, \quad u_2 = 0.$$

Последние выражения указывают на то, что кривые для второй частоты при любом коэффициенте связи начнутся из начала координат. Кривые для

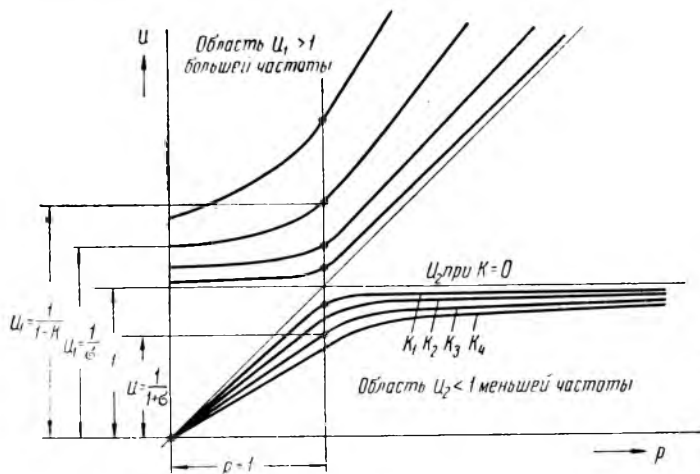


Рис. 8.9

первой частоты в зависимости от величины k будут начинаться на оси ординат в точках

$$u_1 = \frac{\omega_1^2}{n_3^2} = \frac{1}{1 - k^2}.$$

Частота получающихся колебаний при этом будет равна

$$u_1 = \frac{\omega_1^2}{n_3^2} = \frac{1}{1 - k^2}$$

или

$$\omega_1^2 = \frac{n_3^2}{1 - k^2},$$

т. е. присутствие аperiодического контура (вторичный контур в данном случае — аperiодический, так как емкость C_4 замкнута накоротко), индуктивно связанного с первичным, увеличивает собственную частоту первичного контура.

В третьем случае, когда $p = 1$, контура настроены в резонанс (т. е. на одну и ту же частоту или длину волны). В этом случае из выражения (8.13) мы получаем

$$u = \frac{1 \pm \sqrt{1 - \sigma}}{\sigma} = \frac{1 \pm k}{1 - k^2},$$

откуда следует, что

$$u_1 = \frac{1}{1 - k} \quad \text{и} \quad u_2 = \frac{1}{1 + k}.$$

Кривые u_1 будут пересекать ординату $p = 1$ выше прямой u_2 при $k = 0$, а кривые u_2 — ниже этой прямой.

Тогда при $p \gg 1$

$$u \cong \frac{p \pm \sqrt{p^2 - 4\sigma}}{2\sigma}$$

или

$$u \cong \frac{p \pm p \sqrt{1 - \frac{4\sigma}{p}}}{2\sigma} = \frac{p \pm p \left(1 - \frac{2\sigma}{p}\right)}{2\sigma} = \frac{p \pm (p - 2\sigma)}{2\sigma},$$

откуда следует, что

$$u_1 = \frac{p - \sigma}{\sigma}, \quad u_2 = 1. \quad (8.14)$$

При больших значениях p графики u_1 изобразятся прямыми, наклон которых к оси абсцисс равен $1/\sigma$, а графики u_2 будут приближаться к прямой $u = 1$, что соответствует значению u_2 при $k = 0$.

Построенные на рис. 8.9 кривые дают возможность для любых заданных p и k находить соответствующие величины u_1 и u_2 .

8.3. Исследование условия самовозбуждения

Данное исследование проведем, используя выражение (8.126) для условий самовозбуждения.

1) $p = 0$. Тогда $\frac{\alpha_{30}}{\alpha_4} \geq \frac{u-1}{u}$, определим начало соответствующих кривых для случая $p = 0$. Согласно предыдущему, в этом случае мы имеем $u_1 = \frac{1}{\sigma}$, $u_2 = 0$.

Следовательно, для первой частоты

$$\frac{\alpha_{30}}{\alpha_4} \geq 1 - \sigma = k^2.$$

Для второй частоты

$$u_2 = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\alpha_{30}}{\alpha_4} = \infty.$$

Таким образом, кривые $\frac{\alpha_{30}}{\alpha_4}$ для u_1 будут начинаться на оси ординат в точках, ординаты которых равны k^2 , а кривые $\frac{\alpha_{30}}{\alpha_4}$ для u_2 будут начинаться в бесконечности.

2) $p = 1$. В этом случае $\frac{\alpha_{30}}{\alpha_4} = 1$ независимо от коэффициента связи k , согласно чему все кривые проходят через точку с координатами $p = 1$; $\frac{\alpha_{30}}{\alpha_4} = 1$.

3) $p \gg 1$. Согласно предыдущему (8.14), в этом случае

$$u_1 = \frac{p - \sigma}{\sigma}, \quad u_2 = 1.$$

Таким образом, для первой частоты получим

$$\frac{\alpha_{30}}{\alpha_4} \geq \frac{p - 2\sigma}{p(1 - \sigma) - \sigma} \geq \frac{p - 2\sigma}{pk^2 - \sigma} \geq \frac{1}{k^2} \quad (8.15)$$

и для второй

$$\frac{\alpha_{30}}{\alpha_4} = \frac{1 - 1}{1 - 1} \cong 0,$$

т. е. при больших p кривые $\frac{\alpha_{30}}{\alpha_4}$ для u_1 стремятся к пределу $\frac{1}{k^2}$, а кривые для u_2 стремятся к нулю. Зависимость $\frac{\alpha_{30}}{\alpha_4} = f(p)$ для различных k представлена на рис. 8.10.

Зависимость возникновения затягивания от длины волны

Приведенные кривые u (рис. 8.9) и кривые $\frac{\alpha_{30}}{\alpha_4}$ (рис. 8.10) позволяют построить полную картину изменения длины волны, наблюдаемую при настройке.

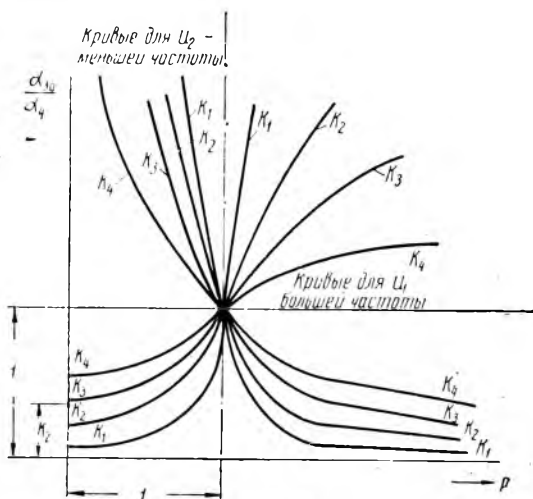


Рис. 8.10

Возьмем некоторый определенный коэффициент связи первичного и вторичного контуров (k), согласно которому выберем две кривые для u и две кривые для $\frac{\alpha_{30}}{\alpha_4}$ из рис. 8.9 и 8.10 и нанесем их на рис. 8.11 и 8.12.

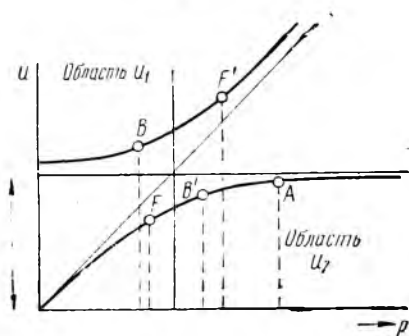


Рис. 8.11

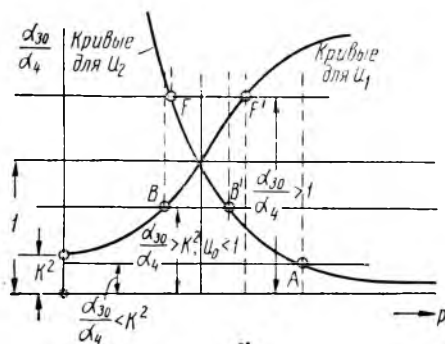


Рис. 8.12

1) $\frac{\alpha_{30}}{\alpha_4} \geq 0$. Это условие выполняется при $u = 1$ и, возможно, в случае $k = 0$ и $u_2 = 1$ (для $u_1 = p$ имеем $\alpha_{30} = \infty$).

В этом случае

$$\alpha_{30} = \frac{1}{2} M_g S n_3^2 - \frac{1}{2} \frac{1}{C_2 R_f} - \alpha_3 \geq 0$$

или

$$M_g S \geq \frac{1}{n_3^2 C_2 R_f} + \frac{2\alpha_3}{n_3^2} = \frac{1}{C_2 R_f n_3^2} + \frac{R_3}{L_3 n_3^2}.$$

Но $n_3^2 = \frac{1}{L_3 C_2}$, поэтому

$$M_g S \geq \frac{L_3}{R_i} + R_3 C_2. \quad (8.16)$$

Отсюда коэффициент взаимной индукции замкнутого контура и сетки определится по формуле

$$M_g \geq \frac{L_3}{S R_i} + \frac{R_3 C_2}{S} = D L_3 + \frac{R_3 C_2}{S}. \quad (8.17)$$

Это выражение является условием самовозбуждения схемы, содержащей колебательный контур в цепи анода.

2) $\frac{\alpha_{30}}{\alpha_4} < k^2$. Проводим на рис. 8.12 параллельную оси абсцисс линию на расстоянии, меньшем k^2 . Эта прямая пересечет кривую $\frac{u_2 - 1}{u_2 - p}$ в точке A . Следовательно, лишь для значений p , больших, чем в точке A , будет соблюдено условие

$$\frac{\alpha_{30}}{\alpha_4} > \frac{u_2 - 1}{u_2 - p}.$$

Соответственно этому значению p на кривой для u_2 (рис. 8.11) находим точку A , от которой в сторону возрастающих p могут получаться колебания. Эту часть кривой переносим на рис. 8.13, которая и определит

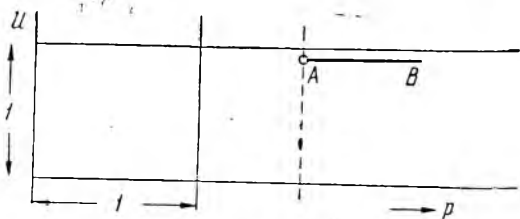


Рис. 8.13

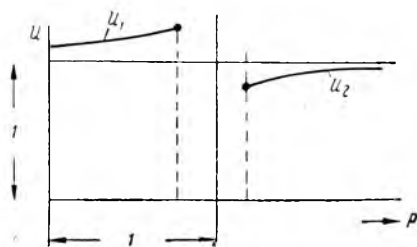


Рис. 8.14

в зависимости от p частоты получающихся колебаний. В данном случае получается лишь меньшая частота или большая длина волны.

3) $1 > \frac{\alpha_{30}}{\alpha_4} > k^2$. Проводим на рис. 8.12 прямую параллельно оси абсцисс и на расстоянии от нее, большем k^2 , но меньшем единицы. Эта прямая пересечет кривые $\frac{u_1 - 1}{u_1 - p}$ и $\frac{u_2 - 1}{u_2 - p}$ в точках B и B' , причем условия самовозбуждения для u_1 будут соблюдены в сторону убывающих p от точки B , а для u_2 — в сторону возрастающих p от точки B' . Отмечая соответственные точки кривых u_1 и u_2 , получим зависимость получающихся колебаний от p , изображенную на рис. 8.14. Оказывается возможным при $\frac{\alpha_{30}}{\alpha_4} > k^2$, но меньше единицы, получить обе частоты, и большую и меньшую, но с перерывом вблизи резонанса.

4) $\frac{\alpha_{30}}{\alpha_4} = 1$. В этом случае параллельная оси абсцисс линия, проведенная на расстоянии 1 от нее, пересекает кривые в их общей точке, причем условию самовозбуждения $\frac{\alpha_{30}}{\alpha_4} \leq \frac{u - 1}{u - p}$ для $p < 1$ удовлетворяет лишь кривая $\frac{u_1 - 1}{u_1 - p}$, а для $p > 1$ удовлетворяет кривая $\frac{u_2 - 1}{u_2 - p}$. Поэтому для $p < 1$ будет

существовать лишь большая частота u_1 , а для $p > 1$ будет существовать меньшая частота u_2 (рис. 8.15).

5) $\frac{\alpha_{30}}{\alpha_4} > 1$. Соответствующая параллель оси абсцисс пересекает кривые $\frac{u-1}{u-p}$ в точках $F - F'$ (рис. 8.12). Переносим эти точки для соответствующих p на рис. 8.11, получим кривую, изображенную на рис. 8.16.

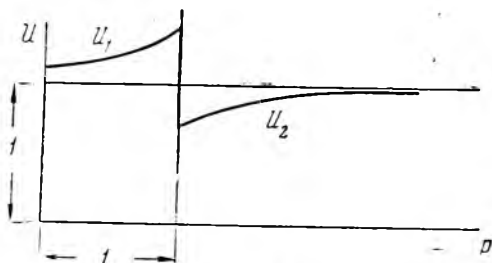


Рис. 8.15

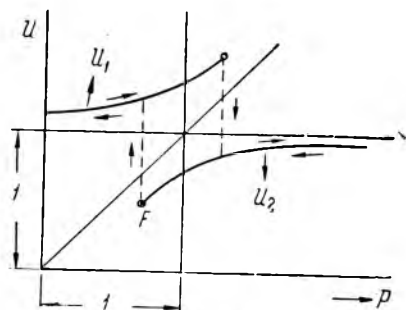


Рис. 8.16

В этом случае мы получим для некоторых значений p или большую или меньшую частоту. Идя от $p = 0$ до p , соответствующего точке F' , будем получать большую частоту.

В точке F' получится прыжок на кривую для меньшей частоты, которая и останется в сторону возрастающих p . При обратном ходе мы будем иметь меньшую частоту до точки F , после которой получится прыжок на большую частоту. При телеграфной работе ключом возможно установление той или иной частоты, если p лежит в пределах от F до F' .

Аналитическое определение замечаний p , определяющих возникновение колебаний

Положим $\frac{\alpha_{30}}{\alpha_4} = \frac{u-1}{u-p} = \text{const} = \mu$, откуда определим $u = \frac{p\mu-1}{\mu-1}$. С другой стороны, из (8.13) имеем

$$u = \frac{p+1}{2\sigma} \pm \frac{p+1}{2\sigma} \sqrt{1 - \frac{4p\sigma}{(1+p)^2}}. \quad (8.18)$$

Приравняв выражения для u и перенеся члены, не содержащие корня, в одну сторону и возводя в квадрат, найдем

$$\frac{(p+1)^2}{4\sigma^2} \left[1 - \frac{4p\sigma}{(1+p)^2} \right] = \left[\frac{p\mu-1}{\mu-1} - \frac{(p+1)}{2\sigma} \right]^2$$

или

$$\frac{(p+1)^2}{4\sigma^2} - \frac{p}{\sigma} = \left(\frac{p\mu-1}{\mu-1} \right)^2 - \frac{(p\mu-1)(p+1)}{\sigma(\mu-1)} + \frac{(p+1)^2}{4\sigma^2}.$$

Умножим на $(\mu-1)^2$. Получим

$$(p\mu-1)^2 - \frac{(p\mu-1)(p+1)(\mu-1)}{\sigma} + \frac{p}{\sigma}(\mu-1)^2 = 0,$$

откуда определяем p :

$$p = \frac{\mu \pm \sqrt{\mu^2 - \mu \left(\mu - \frac{\mu-1}{\sigma} \right) \left(\frac{\mu-1}{\sigma} + 1 \right)}}{\mu \left(\mu - \frac{\mu-1}{\sigma} \right)}. \quad (8.19)$$

Исследуем полученное уравнение.

1) $\frac{\alpha_{30}}{\alpha_4} = \mu > 1$. В этом случае имеем два решения; эти две точки лежат выше $\frac{\alpha_{30}}{\alpha_4} = 1$ и соответственно $p \neq 1$.

2) $\frac{\alpha_{30}}{\alpha_4} = \mu = 1$. В этом случае $p = 1$. Корни получаются равными, точка пересечения не зависит от k и ее координаты $p = 1$; $\frac{\alpha_{30}}{\alpha_4} = 1$.

3) $\frac{\alpha_{30}}{\alpha_4} = \mu = k^2 < 1$. Находим $\mu - 1 = k^2 - 1 = -\sigma$ и

$$p = \frac{k^2 \pm \sqrt{k^4 - k^2(k^2 + 1)(-1 + 1)}}{k^2(k^2 + 1)} = \frac{k^2 \pm k^2}{k^2(k^2 + 1)}.$$

Отсюда

$$p_1 = \frac{2}{k^2 + 1} > 1.$$

Точка пересечения имеет координаты $\frac{\alpha_{30}}{\alpha_4} = k^2$, $p = \frac{2}{k^2 + 1} > 1$,

т. е. колебания существуют лишь меньшей частоты (поэтому рассмотрим только ω_2). Так как $p = \frac{n_4^2}{n_3^2}$, то $n_4^2 = \frac{2n_3^2}{k^2 + 1}$.

Частота полученных колебаний [см. (8.18)] равна

$$u_2 = \frac{p + 1 - \sqrt{(p + 1)^2 - 4p\sigma}}{2\sigma}.$$

Подставляя сюда $p_1 = \frac{2}{k^2 + 1}$, найдем

$$u_2 = \frac{2 + k^2 + 1 - \sqrt{(2 + k^2 + 1)^2 - 4 \cdot 2(1 + k^2)\sigma}}{2(1 + k^2)(1 - k^2)}$$

или после упрощения

$$u_2 = \frac{(1 - k^2)}{(1 + k^2)(1 - k^2)} = \frac{1}{1 + k^2}.$$

Так как $u = \frac{\omega^2}{n_3^2}$, то частота полученных колебаний равна

$$\omega_2^2 = \frac{n_3^2}{1 + k^2}.$$

Необходимый коэффициент взаимной индукции для связи с сеткой определится из следующих соотношений:

$$\frac{\alpha_{30}}{\alpha_4} = k^2, \text{ откуда } \alpha_{30} = k^2 \alpha_4.$$

С другой стороны,

$$\alpha_{30} = \frac{1}{2} M_g S n_3^2 - \frac{1}{2} \frac{1}{C_2 R_i} - \alpha_3,$$

поэтому

$$\frac{1}{2} M_g S n_3^2 = k^2 \alpha_4 + \alpha_3 + \frac{1}{2} \frac{1}{C_2 R_i}$$

или

$$M_g S = \frac{k^2 R_4 C_2 L_3}{L_4} + R_3 C_2 + \frac{L_3}{R_i}. \quad (8.16a)$$

8.4. Решение условия частоты с учетом члена, зависящего от сопротивления

Принимая во внимание член, зависящий от сопротивления, запишем условия частоты и самовозбуждения соответственно в следующем виде:

$$u^2\sigma - u \left(p + 1 - \frac{4\alpha_{30}\alpha_4}{n_3^2} \right) + p = 0, \quad (8.20)$$

$$\frac{\alpha_{30}}{\alpha_4} \geq \frac{u-1}{u-p}.$$

Сравнивая эти два выражения, мы видим, что они зависят друг от друга. Исключая из обоих уравнений α_{30} и опуская знак неравенства, получаем

$$u^3\sigma - u^2 \left(\sigma p + p + 1 - \frac{4\alpha_4^2}{n_3^2} \right) + u \left(p^2 + 2p - \frac{4\alpha_4^2}{n_3^2} \right) - p^2 = 0.$$

Исследуем решение данного уравнения в точке, соответствующей резонансу ($p = 1$):

$$u^3\sigma - u^2 \left(2 + \sigma - \frac{4\alpha_4^2}{n_3^2} \right) + u \left(3 - \frac{4\alpha_4^2}{n_3^2} \right) - 1 = 0.$$

Полученное выражение можно представить так:

$$u^2 (1 - k^2) (u - 1) - u (u - 1) \left(2 - \frac{4\alpha_4^2}{n_3^2} \right) + (u - 1) = 0.$$

Отсюда, приравняв $u - 1$ нулю, получим первое решение $u = 1$. Вторые два решения получим, решив уравнение

$$u^2 (1 - k^2) - u \left(2 - \frac{4\alpha_4^2}{n_3^2} \right) + 1 = 0.$$

На основании последнего выражения u определяется так

$$u = \frac{2 - \frac{4\alpha_4^2}{n_3^2} \pm \sqrt{\left(2 - \frac{4\alpha_4^2}{n_3^2} \right)^2 - 4(1 - k^2)}}{2(1 - k^2)}.$$

Преобразуя подкоренную величину, получим

$$u = \frac{1 - \frac{2\alpha_4^2}{n_3^2} \pm \sqrt{k^2 - \frac{4\alpha_4^2}{n_3^2} \left(1 - \frac{\alpha_4^2}{n_3^2} \right)}}{1 - k^2}. \quad (8.21)$$

При любом k^2 имеем по-прежнему при резонансе две частоты, но условие

$$k^2 = \frac{4\alpha_4^2}{n_3^2} \left(1 - \frac{\alpha_4^2}{n_3^2} \right) \cong \frac{4\alpha_4^2}{n_3^2}$$

дает только одну частоту

$$u = \frac{1 - \frac{2\alpha_4^2}{n_3^2}}{1 - k^2} = \frac{1 - \frac{k^2}{2}}{1 - k^2} = 1 + \frac{k^2}{2} + \frac{k^4}{2} + \frac{k^6}{2} + \dots \cong 1.$$

Величину коэффициента связи, при котором получается одна частота, мы назовем критическим коэффициентом связи.

Однако выражение (8.21) получается комплексным, если

$$k < k_{\text{крит}}, \text{ или } k^2 < \frac{4\alpha_4^2}{n_3^2} \left(1 - \frac{\alpha_4^2}{n_3^2}\right).$$

Отсюда можно заключить, что при $k^2 < k_{\text{крит}}^2$ и при условии $\rho = 1$ вторые два решения не имеют места, а остается только первое. Найдем условия, которые необходимо соблюсти для того, чтобы u равнялось единице при $\rho = 1$.

Согласно поставленному заданию, условие частоты (8.20) принимает следующий вид (см. 8.12в):

$$\sigma - 1 + \frac{4\alpha_{30}\alpha_4}{n_3^2} = 0$$

или

$$k^2 = \frac{4\alpha_{30}\alpha_4}{n_3^2}. \quad (8.22)$$

В свою очередь, условие самовозбуждения приводится к следующему виду:

$$\frac{\alpha_{30}}{\alpha_4} \geq \left(\frac{u-1}{u-\rho}\right)_{\rho=1} = 1$$

или

$$\alpha_{30} \geq \alpha_4.$$

Подставляя α_{30} в выражение (8.22), получим

$$k^2 \geq \frac{4\alpha_4^2}{n_3^2}.$$

8.5. Выражения для сил токов и некоторых параметров контуров

Сила тока в цепи, содержащей самоиндукцию в первичном или замкнутом контуре

$$I_3 = \frac{z_4}{\Delta} U_{am}.$$

Подставляя значения для z_4 и Δ (8.10а и 8.10б), найдем

$$I_3 = \frac{\omega L_4 \left[j \left(1 - \frac{n_4^2}{\omega^2} \right) + \frac{2\alpha_4}{\omega} \right]}{L_3 L_4 (A + jB)} U_{am} = \frac{j(\omega^2 - n_4^2) + 2\alpha_4 \omega}{\omega L_3 (A + jB)} U_{am}.$$

Деля числитель и знаменатель на n_3^2 , получим

$$I_3 = \frac{U_{am}}{\omega L_3} \frac{j(u - \rho) + \frac{2\alpha_4}{n_3} \sqrt{u}}{\left(-u\sigma + \rho + \frac{4\alpha_3\alpha_4}{n_3^2} \right) + 2j \left(\sqrt{u} \frac{\alpha_3 + \alpha_4}{n_3} - \frac{\alpha_3}{\omega} \rho \right)}$$

или, пренебрегая последними членами,

$$I_3 = \frac{U_{am}}{\omega L_3} \frac{j(u - \rho)}{(-u\sigma + \rho)}.$$

Сила тока в цепи, содержащей емкость:

$$I_2 = \frac{U_{am}}{-\frac{j}{\omega C_2}} = j\omega C_2 U_{am}. \quad (3.23)$$

Сила тока во вторичном контуре:

$$I_4 = -\frac{j\omega M}{\Delta} U_{am}.$$

Подставляя значение определителя, найдем

$$I_4 = -\frac{j\omega M}{L_3 L_4 (A + jB)} U_{am} = -\frac{j\omega k}{\sqrt{L_3 L_4}} \frac{U_{am}}{(A + jB)}$$

или

$$I_4 = -\frac{j\omega k}{\sqrt{L_3 L_4}} \frac{U_{am}}{(-\omega^2 \varsigma + n_1^2 + 4\alpha_3 \alpha_4) + j2\omega \left(\alpha_3 + \alpha_4 - \frac{\alpha_3 n_1^2}{\omega^2} \right)}.$$

Деля числитель и знаменатель на n_3^2 , получим

$$I_4 = -j\omega k C_2 \sqrt{\frac{L_3}{L_4}} \frac{U_{am}}{-u\varsigma + p + \frac{4\alpha_3 \alpha_4}{n_3^2} + 2j \left(\sqrt{u} \frac{\alpha_3 + \alpha_4}{n_3} - \frac{\alpha_3}{\omega} p \right)} \quad (8.24)$$

Приблизительно значение тока во вторичной цепи определится из выражения

$$I_4 = -j\omega k C_2 \sqrt{\frac{L_3}{L_4}} \frac{U_{am}}{(-u\varsigma + p)}$$

Отношение сил токов I_3 и I_4 будет

$$\begin{aligned} \frac{I_3}{I_4} &= -\frac{1}{j\omega L_3 \omega C_2 k} \sqrt{\frac{L_4}{L_3}} \left[j(u - p) + \frac{2\alpha_4}{n_3} \sqrt{u} \right] = \\ &= -\frac{j}{\omega^2 k L_3 C_2} \sqrt{\frac{L_4}{L_3}} \left[j(u - p) + \frac{2\alpha_4}{n_3} \sqrt{u} \right] = \\ &= \frac{1}{ku} \sqrt{\frac{L_4}{L_3}} \left[j \frac{2\alpha_4}{n_3} \sqrt{u} - (u - p) \right] \end{aligned} \quad (8.25)$$

или, раскрывая скобки, получим

$$\frac{I_3}{I_4} = -\frac{1}{ku} \sqrt{\frac{L_4}{L_3}} (u - p) + j \frac{1}{k \sqrt{u}} \sqrt{\frac{L_4}{L_3}} \frac{2\alpha_4}{n_3}.$$

Эквивалентное сопротивление анодной цепи лампы

$$z_0 = \frac{\Delta}{z_4 + j\omega C_2 \Delta}.$$

Подставляя значение z_4 и Δ , найдем

$$z_0 = \frac{L_3 L_4 (A + jB)}{\omega L_4 \left[j \left(1 - \frac{n_4^2}{\omega^2} \right) + \frac{2\alpha_4}{\omega} \right] + j\omega L_3 L_4 C_2 (A + jB)}$$

или

$$z_0 = \frac{\omega L_3 (A + jB)}{[j(\omega^2 - n_4^2) + 2\alpha_4 \omega] + j \frac{\omega^2}{n_3^2} (A + jB)}.$$

Делим и числитель и знаменатель на n_3^2 :

$$z_0 = \frac{\omega L_3 \left[-u\sigma + p + 4 \frac{\alpha_3 \alpha_4}{n_3^2} + 2j \left(\sqrt{u} \frac{\alpha_3 + \alpha_4}{n_3} - \frac{\alpha_3 p}{\omega} \right) \right]}{j(u-p) + \frac{2\alpha_4}{n_3} \sqrt{u} + ju \left[-u\sigma + p + \frac{4\alpha_3 \alpha_4}{n_3^2} + 2j \left(\sqrt{u} \frac{\alpha_3 + \alpha_4}{n_3} + \frac{\alpha_3 p}{\omega} \right) \right]}$$

или

$$z_0 = \frac{\omega L_3 \left[-u\sigma + p + 4 \frac{\alpha_3 \alpha_4}{n_3^2} + 2j \left(\sqrt{u} \frac{\alpha_3 + \alpha_4}{n_3} - \frac{\alpha_3 p}{\omega} \right) \right]}{\frac{2\alpha_4}{n_3} \sqrt{u} - 2u \left[\sqrt{u} \frac{\alpha_3 + \alpha_4}{n_3} + \frac{\alpha_3 p}{\omega} \right] + j \left[-u^2 \sigma + u \left(p + 1 + \frac{4\alpha_3 \alpha_4}{n_3^2} \right) - p \right]} \quad (8.26)$$

Сила тока анодной цепи

$$I_{am} = \frac{U_{am}}{z_0} \quad (8.27)$$

Приведенное сопротивление. Вводя эквивалентное сопротивление, мы определяем мощность, отдаваемую триодом, как $I_{am}^2 \frac{z_0^*}{2}$. Ту же мощность можно определить несколько иначе. Мощность вторичного контура равняется

$$\frac{I_4^2 R_4}{2}.$$

Ее можно отнести к току в цепи самоиндукции при помощи следующего соотношения:

$$I_3^2 R_n = I_4^2 R_4,$$

где R_n — приведенное сопротивление.

Считая потери первичного контура равными $\frac{I_3^2 R_2}{2}$, можно написать выражение для полезной мощности в следующем виде:

$$W_2 = \frac{I_4^2 R_4}{2} + \frac{I_3^2 R_3}{2} = \frac{I_3^2}{2} (R_n + R_3). \quad (8.28)$$

Приведенное сопротивление определяется по формуле

$$R_n = \frac{I_4^2}{I_3^2} R_4$$

или, на основании (8.25),

$$R_n = R_4 k^2 u^2 \frac{L_3}{L_4} \frac{1}{\left[j \frac{2\alpha_4}{n_3} \sqrt{u} - (u-p) \right]^2}. \quad (8.29)$$

Коэффициент полезного действия замкнутого контура. Согласно установленным понятиям о сопротивлениях, коэффициент полезного действия будет

$$\eta = \frac{I_4^2 R_4}{I_{am}^2 z_0}.$$

* Здесь под z_0 подразумевается активная составляющая сопротивления. (Прим. составителя).

Заменяя I_{am} и z_0 , получим

$$\eta = \frac{I_4^2 R_4}{I_3^2 (R_n + R_3)} = \frac{I_3^2 R_n}{I_3^2 (R_n + R_3)} = \frac{R_n}{R_n + R_3} \quad (8.30)$$

или

$$\eta = \frac{1}{1 + \frac{R_3}{R_n}}. \quad (8.31)$$

8.6. Применение выражений предыдущего параграфа для случая, когда коэффициент связи равен критическому

В этом случае

$$k^2 = \frac{4\alpha_4^2}{n_3^2} (u = 1; p = 1),$$

$$I_3 = \frac{U_{am}}{\omega L_3} \frac{k}{k^2 + 2k \frac{\alpha_3}{n_3} + 2j \frac{\alpha_4}{n_3}} = \frac{U_{am}}{\omega L_3} \frac{1}{k + \frac{2\alpha_3}{n_3} + j} = \frac{U_{am}}{L_3} \frac{1}{2(\alpha_3 + \alpha_4) + jn_3}.$$

Выражение для коэффициента связи можно представить в следующем виде:

$$k^2 = \frac{4\alpha_4^2}{(2\pi f)^2} = \frac{4\alpha_4^2 T^2}{(2\pi)^2} = \frac{\delta_4^2}{\pi^2}, \quad (8.32)$$

где $\delta_4 = \alpha_4 T$ — логарифмический декремент вторичного контура. Отсюда видно, что коэффициент связи равен $1/\pi$ логарифмического декремента вторичного контура.

Сила тока во вторичном контуре

$$I_4 = -j\omega C_2 k \sqrt{\frac{L_3}{L_4}} \frac{U_{am}}{k^2 + k \frac{2\alpha_3}{n_3} + jk},$$

$$I_4 = -j\omega C_2 \sqrt{\frac{L_3}{L_4}} \frac{U_{am}}{k + \frac{2\alpha_3}{n_3} + j} \quad \text{или} \quad I_4 = -j \frac{1}{\sqrt{L_3 L_4}} \frac{U_{am}}{2(\alpha_3 + \alpha_4) + jn_3}.$$

Отношение сил токов

$$\frac{I_3}{I_4} = \sqrt{\frac{L_4}{L_3}}. \quad (8.33)$$

Сила тока в анодной цепи и эквивалентное сопротивление.

$$z_0 = \frac{\omega L_3 \left(k^2 + 2k \frac{\alpha_3}{n_3} + jk \right)}{k - 2 \frac{\alpha_4}{n_3} + j \left(k^2 + k \frac{2\alpha_3}{n_3} \right)} = \frac{\omega L_3 \left(k^2 + k \frac{2\alpha_3}{n_3} + jk \right)}{k - k + j \left(k^2 + k \frac{2\alpha_3}{n_3} \right)} =$$

$$= \frac{\omega L_3 \left(k^2 + k \frac{2\alpha_3}{n_3} + jk \right)}{j \left(k^2 + k \frac{2\alpha_3}{n_3} \right)}$$

$$\text{или } z_0^* = \frac{1}{2C_2 (\alpha_3 + \alpha_4)} \quad \text{или } z_0 = \frac{1}{C_2 (n_3 k + 2\alpha_3)} \quad (8.34)$$

Сила тока анодной цепи

$$I_{am} = U_{am} \cdot 2C_2 (\alpha_3 + \alpha_4). \quad (8.35)$$

* См. прим. на стр. 280.

Приведенное сопротивление

$$R_{\Pi} = -R_4 \left(\frac{L_3}{L_4} \right). \quad (8.36)$$

Коэффициент полезного действия

$$\eta = \frac{1}{1 - \frac{R_3}{R_4} \left(\frac{L_4}{L_3} \right)}. \quad (8.37)$$

Если самоиндукции обеих цепей равны, то

$$\eta = \frac{1}{1 - \frac{R_3}{R_4}}. \quad (8.37a)$$

Условие самовозбуждения в случае коэффициента связи, равного критическому ($\alpha_{30} \geq \alpha_4$)

На основании выражения (8.12a) имеем

$$\alpha_{30} = \frac{1}{2} M_g S n_3^2 - \frac{1}{2} \frac{1}{C_2 R_i} - \alpha_3 \geq \alpha_4$$

или

$$M_g S \geq \frac{2\alpha_3}{n_3^2} + \frac{2\alpha_4}{n_3^2} + \frac{1}{C_2 R_i n_3^2} = \frac{R_3}{L_3 n_3^2} + \frac{R_4}{L_4 n_3^2} + \frac{1}{C_2 R_i n_3^2},$$

откуда следует, что

$$M_g S \geq \left(R_3 + R_4 \frac{L_3}{L_4} \right) C_2 + \frac{L_3}{R_i}. \quad (8.38)$$

Приводя формулу к расчетному виду, получим

$$900 M_g S \geq \left(R_3 + R_4 \frac{L_3}{L_4} \right) C_2 + 900 \frac{L_3}{R_i}.$$

8.7. К решению условия частоты с учетом члена, зависящего от сопротивления

Из выражения для силы тока в цепи самоиндукции I_3 (8.7)

$$I_3 = \frac{z_4}{\Delta} U_{am}; \quad I_3 = \frac{U_{am}}{z_3'}$$

можно найти сопротивление первичного контура в следующем виде:

$$z_3' = \frac{\Delta}{z_4}$$

или, согласно (8.6a),

$$z_3' = z_3 + \frac{(\omega M)^2}{z_4} = R_3 + jx_3 + \frac{(\omega M)^2}{R_4 + jx_4}, \quad (8.39)$$

где

$$x_3 = \omega L_3, \quad x_4 = \left(\omega L_4 - \frac{1}{\omega C_4} \right).$$

* M_g выражено в сантиметрах, S — в $мо$, R_3 , R_4 , R_1 — в омах, L_3 , L_4 , C_2 — в сантиметрах. (Прим. составителя).

Избавляясь от мнимого члена в знаменателе третьего слагаемого, получим

$$z'_3 = R_3 + jx_3 + \frac{(\omega M)^2 (R_4 - jx_4)}{R_4^2 + x_4^2}$$

или

$$z'_3 = R_3 + R_4 \frac{(\omega M)^2}{z_4^2} + j \left(x_3 - x_4 \frac{\omega^2 M^2}{z_4^2} \right),$$

где

$$z_4^2 = R_4^2 + x_4^2.$$

Введем обозначения

$$R'_3 = R_3 + R_4 \frac{(\omega M)^2}{z_4^2}, \quad x'_3 = x_3 - x_4 \frac{(\omega M)^2}{z_4^2}, \quad (3.40)$$

тогда

$$z'_3 = R'_3 + jx'_3.$$

В условиях самовозбуждения первичный контур не должен иметь реактивной составляющей, поэтому

$$x_3 - x_4 \frac{(\omega M)^2}{z_4^2} = 0. \quad (8.41)$$

Допустим, что оба контура настроены в резонанс на частоту ω и пусть две другие частоты равны соответственно $\omega + \Delta\omega$ и $\omega - \Delta\omega$. Подставим эти значения в последнее уравнение. Так как здесь решается вопрос с учетом частоты контуров, то в $x_3 = \omega L_3$ введем дополнительную емкостную реакцию $\frac{1}{\omega C_2}$.

Тогда, подставляя в (8.41) выражения для x_3 , x_4 , z_4 , найдем

$$(\omega + \Delta\omega) L_3 - \frac{1}{(\omega + \Delta\omega) C_2} - \frac{\left[(\omega + \Delta\omega) L_4 - \frac{1}{(\omega + \Delta\omega) C_4} \right] (\omega + \Delta\omega)^2 M^2}{R_4^2 + \left[(\omega + \Delta\omega) L_4 - \frac{1}{(\omega + \Delta\omega) C_4} \right]^2} = 0.$$

Приводя к одному знаменателю, найдем

$$\frac{(\omega^2 + 2\Delta\omega \cdot \omega + \Delta\omega^2) L_3 C_2 - 1}{(\omega + \Delta\omega) C_2} - \frac{\left[\frac{(\omega^2 + 2\Delta\omega \cdot \omega + \Delta\omega^2) L_4 C_4 - 1}{(\omega + \Delta\omega) C_4} \right] (\omega + \Delta\omega)^2 M^2}{R_4^2 + \left[\frac{(\omega^2 + 2\Delta\omega \cdot \omega + \Delta\omega^2) L_4 C_4 - 1}{(\omega + \Delta\omega) C_4} \right]^2} = 0.$$

Принимая во внимание, что $\omega^2 L_3 C_2 = \omega^2 L_4 C_4 = 1$, получим

$$\frac{L_3 (\Delta\omega + 2\omega) \Delta\omega}{\Delta\omega + \omega} - \frac{\left[\frac{(2\omega + \Delta\omega) \Delta\omega L_4}{(\omega + \Delta\omega)} \right] (\omega + \Delta\omega)^2 M^2}{R_4^2 + \left[\frac{(\Delta\omega + 2\omega) \Delta\omega L_4}{\omega + \Delta\omega} \right]^2} = 0$$

или приближенно

$$2\Delta\omega L_3 - \frac{L_4 M_0^2 2\Delta\omega}{R_4^2 + 4\Delta\omega^2 L_4^2} = 0, \quad (8.42)$$

где $M_0 = (\omega + \Delta\omega) M$.

Решая полученное уравнение, найдем

$$4L_3 L_4^2 \Delta\omega^2 + L_3 R_4^2 - L_4 M_0^2 = 0.$$

Разделив его на $L_3 L_4^2$, получим $4\Delta\omega^2 + 4\alpha_4^2 - k_0^2 = 0$, где $k_0 = \frac{M_0}{\sqrt{L_3 L_4}}$.

Отсюда следует, что

$$\Delta\omega^2 = \frac{1}{4} \left(\frac{M_0^2}{L_3 L_4} - \frac{R_4^2}{L_4^2} \right); \quad \Delta\omega = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{M_0^2}{L_3 L_4} - \frac{R_4^2}{L_4^2}} = \pm \frac{n_3}{2} \sqrt{k^2 - \frac{4\alpha_4^2}{n_3^2}}$$

или

$$\Delta u = \frac{\omega}{n_3} \sqrt{k^2 - \frac{4\alpha_4^2}{n_3^2}}. \quad (8.43)$$

При условии $k^2 = \frac{4\alpha_4^2}{n_3^2}$ или $\frac{M_0^2}{L_3 L_4} = \frac{R_4^2}{L_4^2}$ все три частоты совпадают.

Если $k^2 < \frac{4\alpha_4^2}{n_3^2}$, то остается лишь одна частота, так как $\Delta\omega$ получается мнимое.

Итак, условие, при котором получается одна волна, есть:

$$k \leq \frac{2\alpha_4}{n_3} \quad \text{или} \quad M_0 \leq R_4 \sqrt{\frac{L_3}{L_4}}. \quad (8.44)$$

В § 8.4 нами было выведено условие частоты

$$u = \frac{1 - \frac{2\alpha_4^2}{n_3^2} \pm \sqrt{k^2 - \frac{4\alpha_4^2}{n_3^2} \left(1 - \frac{\alpha_4^2}{n_3^2}\right)}}{1 - k^2}.$$

Из данного выражения следует, что

$$\frac{\omega^2}{n_3^2} \cong \frac{1 \pm \sqrt{k^2 - \frac{4\alpha_4^2}{n_3^2} \left(1 - \frac{\alpha_4^2}{n_3^2}\right)}}{1 - k^2}.$$

Полагая $\omega^2 \cong (\omega + \Delta\omega)^2$ и $(1 - k^2) \cong 1$ (при очень слабой связи k), найдем

$$\frac{\omega^2}{n_3^2} + \frac{2\omega\Delta\omega}{n_3^2} + \frac{(\Delta\omega)^2}{n_3^2} \cong 1 \pm \sqrt{k^2 - \frac{4\alpha_4^2}{n_3^2} \left(1 - \frac{\alpha_4^2}{n_3^2}\right)}. \quad (8.45)$$

Так как $u = 1$ относится нами к ω , то, разделив последнее выражение на 2ω и пренебрегая третьим членом, получим

$$\frac{\Delta\omega}{n_3^2} = \pm \frac{1}{2\omega} \sqrt{k^2 - \frac{4\alpha_4^2}{n_3^2} \left(1 - \frac{\alpha_4^2}{n_3^2}\right)}.$$

8.8. Графическое построение сопротивлений, характеризующих связанную систему, и их исследование

Построим сопротивления связанной системы в зависимости от ω или $\Delta\omega$.

1) Индуктивное сопротивление первичной цепи без вторичной примем за $x_1 = 2L_3\Delta\omega$. Она изобразится прямой, проходящей через начало координат под углом к оси абсцисс, тангенс которого равен $2L_3$.

2) Полное индуктивное сопротивление первичной цепи

$$x_1' = 2L_3\Delta\omega - \frac{2M_0^2 L_4 \Delta\omega}{4L_4^2 \Delta\omega^2 + R_4^2}. \quad (8.46)$$

Найдем его максимальные значения в зависимости от $\Delta\omega$, для чего возьмем производную $\frac{dx_1'}{d(\Delta\omega)}$ и приравняем ее нулю. Тогда

$$2L_3 - \frac{2M_0^2 L_4 (4L_4^2 \Delta\omega^2 + R_4^2) - 2M_0^2 L_4 \Delta\omega 8L_4^2 \Delta\omega}{(4L_4^2 \Delta\omega^2 + R_4^2)^2} = 0.$$

Сокращая на 2 и приводя к одному знаменателю, найдем

$$L_3 (4L_4^2 \Delta\omega^2 + R_4^2)^2 - M_0^2 L_4 R_4^2 + 4M_0^2 L_4^3 \Delta\omega^2 = 0.$$

Деля все выражение на $L_3 L_4^4$, получим

$$(4\Delta\omega^2 + 4\alpha_4^2)^2 - k_0^2 4\alpha_4^2 + 4k_0^2 \Delta\omega^2 = 0$$

или

$$4(\Delta\omega^2 + \alpha_4^2)^2 - k_0^2 \alpha_4^2 + k_0^2 \Delta\omega^2 = 0.$$

Раскрывая скобки и группируя члены, получим квадратное уравнение относительно $\Delta\omega^2$, решив которое, получим

$$\Delta\omega^2 = \frac{-(8\alpha_4^2 + k_0^2) \pm \sqrt{(8\alpha_4^2 + k_0^2)^2 - 16(4\alpha_4^2 - k_0^2)\alpha_4^2}}{8}.$$

Нижний знак при корне не имеет физического смысла. Если $k_0^2 = 4\alpha_4^2$, то $\Delta\omega^2 = 0$; k_0^2 не может быть меньше $4\alpha_4^2$, в противном случае остается лишь одна длина волны.

Данное выражение дает возможность определить порядок расходимости частот, если $\Delta\omega^2$ представить в следующем виде:

$$\Delta\omega^2 = \frac{\alpha_4^2}{2} \left[-\left(2 + \frac{k_0^2}{4\alpha_4^2}\right) \pm \sqrt{\left(2 + \frac{k_0^2}{4\alpha_4^2}\right)^2 - 4\left(1 - \frac{k_0^2}{4\alpha_4^2}\right)} \right]. \quad (8.46a)$$

3) Приведенное омическое сопротивление первичной цепи

$$R_3' = R_3 + R_4 \frac{\omega^2 M^2}{Z_4^2} = R_3 + R_4 \frac{M_0^2}{R_4^2 + 4\Delta\omega^2 L_4^2} \quad (8.47)$$

получает наибольшее значение при $\Delta\omega = 0$

$$R_{3\text{макс}}' = R_3 + \frac{M_0^2}{R_4}.$$

4) Индуктивное сопротивление первичной цепи с учетом влияния вторичной

$$x_2' = - \frac{2M_0^2 L_4 \Delta\omega}{4L_4^2 \Delta\omega^2 + R_4^2}. \quad (8.48)$$

Продифференцировав это выражение по $\Delta\omega$ и приравняв его к нулю так же, как и для x_1' , найдем максимумы этой величины

$$4L_4^2 \Delta\omega^2 + R_4^2 - 8L_4^2 \Delta\omega^2 = 0.$$

или

$$4L_4^2 \Delta\omega^2 = R_4^2, \quad \Delta\omega = \pm \frac{R_4}{2L_4}. \quad (8.49)$$

Наибольшее значение равно:

для положительных значений $\Delta\omega$

$$x_2' = - \frac{2M_0^2 R_4}{2[R_4^2 + R_4^2]} = - \frac{M_0^2}{2R_4},$$

для отрицательных

$$x_2' = \frac{M_0^2}{2R_4}. \quad (8.50)$$

Для больших положительных ω получим

$$x_2' = - \frac{2M_0^2}{4L_4\Delta\omega} = - \frac{M_0^2}{2L_4\Delta\omega}.$$

Исследованные величины нанесены на рис. 8.17, причем отмечаем, что диаграмма построена для случая настройки контуров в резонанс.

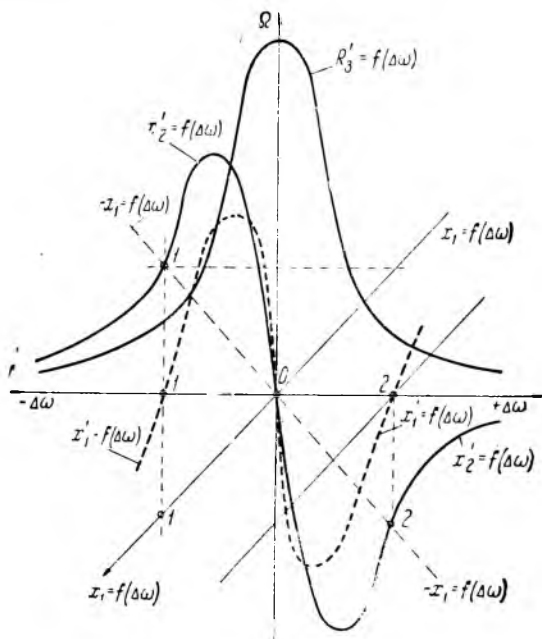


Рис. 8.17

Индуктивное сопротивление первичной цепи без вторичной изобразится, согласно выражению

$$x_1 = 2L_3\Delta\omega,$$

прямой линией, проходящей через начало координат.

Оно будет положительно для положительных $\Delta\omega$ и отрицательно для отрицательных $\Delta\omega$.

Приведенное омическое сопротивление первичной цепи

$$R_3' = R_3 + R_4 \frac{(\omega M)^2}{z_4^2} \quad (8.51)$$

будет положительно при любом ω и имеет максимум при $\Delta\omega = 0$.

Индуктивное сопротивление вторичной цепи, приведенное к первичной, будет

$$x_2' = - \frac{2M_0^2 L_4 \Delta\omega}{4L_4^2 \Delta\omega^2 + R_4^2}; \quad (8.52)$$

как видно из этой формулы, для положительных значений ω оно будет отрицательно и для отрицательных ω положительно.

Наибольшие значения будут:

при ω положительных $x_2 = -\frac{M_0}{2R_4}$,

при ω отрицательных $x_2 = +\frac{M_0}{2R_4}$.

Сумма $x_1 = x_1 + x_2$ определяет приведенное индуктивное сопротивление первичной цепи. Точки, в которых кривая x_1 пересекается с осью абсцисс, определяют корни уравнения $x_1 = 0$.

Таких точек три: $\Delta\omega = 0$ и

$$\Delta\omega = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{M_0^2}{L_3L_4} - \frac{R_4^2}{L_4^2}}.$$

Составим таблицу для оптимальных значений сопротивления и приращений частоты $\Delta\omega$ (табл. 8.1).

Т а б л и ц а 8.1

Таблица основных параметров для критических условий

Сопротивле- ние	Знак величин сопротив- ления		При каком $\Delta\omega$ величина сопротивления имеет максимум	Значение мак- симума сопро- тивления для оптимального значения $\Delta\omega$	Значение $\Delta\omega$, при котором сопротив- ление равно нулю
	для $+\Delta\omega$	для $-\Delta\omega$			
R_3	+	+	0	$R_3 + \frac{M_0^2}{R_4}$	$\pm\infty$
x_2	—	+	$\Delta\omega = \pm \frac{R_4}{2L_4}$	$x_2 = \mp \frac{M_0^2}{2R_4}$	0
x_1	+	—	—	—	0
x_1	+	—	$\pm \sqrt{\frac{\alpha_0^2}{2} \left[-A + \sqrt{A^2 - 4 \left(1 - \frac{k_0^2}{4\alpha_4^2} \right)} \right]}$ $A = + \left(2 + \frac{k_0^2}{4\alpha_4^2} \right)$	—	$\pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{M_0^2}{L_3L_4} - \frac{R_4^2}{L_4^2}}$

Если прямую безваттного сопротивления первичной цепи отложим с противоположным знаком, то ее точки пересечения с кривой приведенного безваттного сопротивления вторичной цепи определяют корни уравнения.

8.9. Определение возникающих частот при расстройке первичного контура

Допустим, что мы расстроили первичный контур на определенный про-
цент, например $\frac{\Delta\omega}{\omega} \cdot 100\%$, где ω — частота, соответствующая настройке
в резонанс первичного и вторичного контуров

$$\omega^2 = \frac{1}{L_3C_2} = \frac{1}{L_4C_4}. \tag{8.53}$$

Установим, что эту расстройку мы произвели, изменив самоиндукцию пер-
вичной цепи на ΔL_3 . В таком случае реактивное сопротивление первичного

контура будет равно нулю при некоторой положительной величине $\Delta\omega$, если самоиндукция L_3 уменьшена на ΔL_3 , и при отрицательной величине $\Delta\omega$, если самоиндукция L_3 увеличена на ΔL_3 .

Эта величина $\Delta\omega$ определится из следующего выражения:

$$\frac{2\Delta\omega}{\omega} = \mp \frac{\Delta L_3}{L_3 \pm \Delta L_3}. \quad (8.54)$$

Соответственно знаку $\Delta\omega$ реактивное сопротивление первичного контура нужно сдвинуть на чертеже параллельно на соответствующую величину (на рис. 8.17 на $\Delta\omega$ для изменения L_3 на $-\Delta L_3$).

Если на чертеже построить реактивное сопротивление первичного контура с обратным знаком, то точки пересечения изображающей его прямой с кривой приведенного реактивного сопротивления вторичного контура определяют те частоты, при которых генератор может самовозбуждаться. В общем случае для прямых (1—1) и (4—4) мы будем иметь три частоты. Для прямой (2—2) получится две частоты и для прямой (3—3) — одна.

Если самоиндукция первичного контура будет равна $L_3 - \Delta L_3$, то можно написать, что

$$x_1 = 2 (\Delta\omega L_3 - \omega \Delta L_3).$$

В свою очередь, приведенное реактивное сопротивление будет равно

$$x_1 = 2 (\Delta\omega L_3 - \omega \Delta L_3) - \frac{2M_0^2 L_4 \Delta\omega}{4L_4^2 \Delta\omega + R_4^2},$$

где $M_0 = M (\omega + \Delta\omega)$.

Приравнявая это выражение нулю, найдем частоты, соответствующие возникновению колебаний,

$$2 (\Delta\omega L_3 - \omega \Delta L_3) - \frac{2M_0^2 L_4 \Delta\omega}{4L_4^2 \Delta\omega + R_4^2} = 0. \quad (8.55)$$

Приводя к одному знаменателю, получим

$$8\Delta\omega^3 L_3 L_4^2 - 8\Delta L_3 \omega \cdot \Delta\omega^2 L_4^2 + 2R_4^2 \Delta\omega L_3 - 2\Delta L_3 \omega R_4^2 - \\ - 2M^2 \omega^2 \Delta\omega L_4 - 4M^2 L_4 \omega \Delta\omega^2 - 2M^2 L_4 \Delta\omega^3 = 0.$$

Делим на $2L_3 L_4^2$:

$$4\Delta\omega^3 - 4L_0 \Delta\omega^2 + 4\alpha_1^2 \Delta\omega - 4\alpha_1^2 L_0 - k^2 \omega^2 \Delta\omega - 2k^2 \omega \Delta\omega^2 - k^2 \Delta\omega^3 = 0,$$

где

$$L_0 = \omega \frac{\Delta L_3}{L_3}; \quad k^2 = \frac{M^2}{L_3 L_4}.$$

Запишем это так:

$$\Delta\omega^3 (4 - k^2) - \Delta\omega^2 (4L_0 + 2k^2\omega) - \Delta\omega (k^2\omega^2 - 4\alpha_1^2) - 4\alpha_1^2 L_0 = 0. \quad (8.56)$$

Полученное уравнение определяет три точки пересечения, например для прямых 1—1, 4—4, 5—5 (рис. 8.18).

При некоторой определенной настройке мы получаем лишь две точки, именно, когда прямая реактивного сопротивления первичной цепи касательна к кривой приведенного реактивного сопротивления вторичной цепи.

В этом случае два корня кубического уравнения равны. Можно найти эти две частоты следующим образом.

Представим уравнение (8.56) в следующем виде:

$$\Delta\omega^3 - \Delta\omega^2 \frac{4L_0 + 2k^2\omega}{4 - k^2} - \Delta\omega \frac{\omega^2 k^2 - 4\alpha_4^2}{4 - k^2} - \frac{4\alpha_4^2 L_0}{4 - k^2} = 0 = (\Delta\omega - \alpha)(\Delta\omega - \beta)(\Delta\omega - \gamma). \quad (8.57)$$

По теореме Виета

$$\alpha + \beta + \gamma = \frac{4L_0 + 2k^2\omega}{4 - k^2} = A, \quad \alpha\beta + \beta\gamma + \alpha\gamma = -\frac{\omega^2 k^2 - 4\alpha_4^2}{4 - k^2} = -B, \\ \alpha\beta\gamma = \frac{4\alpha_4^2 L_0}{4 - k^2} = D.$$

Положим $\alpha = \beta$. Тогда

$$2\alpha + \gamma = A, \quad 2\alpha^2 + \alpha\gamma = -B, \quad \alpha^2\gamma = D.$$

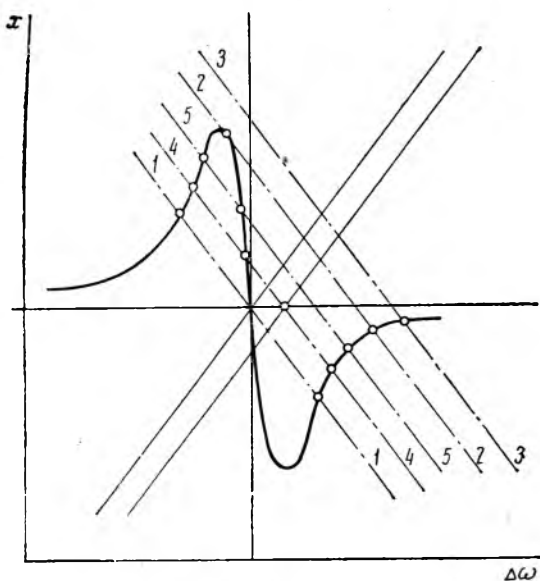


Рис. 8.18

Если подставить в первые два равенства значение γ из третьего равенства $\gamma = \frac{D}{\alpha^2}$, то можно написать

$$2\alpha + \frac{D}{\alpha^2} = A, \quad 2\alpha^3 - A\alpha^2 + D = 0, \\ \frac{2D}{\alpha} + \alpha^2 = -B, \quad \alpha^3 + B\alpha + 2D = 0.$$

Исключая из двух последних (правых) выражений α^3 , получим

$$\alpha^2 A + 2B\alpha + 3D = 0.$$

Запишем это выражение в виде полного квадрата

$$\alpha^2 A + 2B\alpha + 3D = (\alpha\sqrt{A} + \sqrt{3D})^2.$$

Для этого должна существовать следующая зависимость между коэффициентами:

$$B = \sqrt{3AD} \text{ или } \omega^2 k^2 - 4\alpha_4^2 = 2\sqrt{(4L_0 + 2k^2\omega) 3\alpha_4^2 L_0}.$$

Отсюда следует, что

$$\Delta\omega_1 = \alpha = -\sqrt{\frac{3D}{A}} = -2\sqrt{\frac{3\alpha_4^2 L_0}{4L_0 + 2k^2\omega}},$$

$$\Delta\omega_2 = \gamma = \frac{D}{\alpha^2} = \frac{A}{3} = \frac{4L_0 + 2k^2\omega}{3(4 - k^2)}. \quad (8.58)$$

Если увеличивать расстройку далее, то мы получим одну частоту. Ее значение можно найти, если в уравнении (8.55) пренебречь R_4^2 по сравнению с $4L_4^2\Delta\omega^2$.

Тогда

$$2(\Delta\omega L_3 - \Delta L_3\omega) - \frac{M^2(\omega + \Delta\omega)^2}{2L_4\Delta\omega} = 0$$

или

$$4L_3L_4\Delta\omega^2 - 4L_4\Delta\omega\Delta L_3\omega - M^2\omega^2 - 2M^2\omega\Delta\omega - M^2\Delta\omega^2 = 0.$$

Деля на L_3L_4 , находим

$$4\Delta\omega^2 - 4\Delta\omega \frac{\Delta L_3}{L_3}\omega - \frac{M^2\omega^2}{L_4L_3} - \frac{2M^2\omega}{L_3L_4}\Delta\omega - \frac{M^2}{L_3L_4}\Delta\omega^2 = 0,$$

$$\Delta\omega^2(4 - k^2) - \Delta\omega(4L_0 + 2k^2\omega) - k^2\omega^2 = 0. \quad (8.59)$$

Решаем полученное уравнение:

$$\Delta\omega = \frac{4L_0 + 2k^2\omega \pm \sqrt{(4L_0 + 2k^2\omega)^2 + 4k^2\omega^2(4 - k^2)}}{2(4 - k^2)}. \quad (8.60)$$

Нижний знак не имеет физического смысла, так как определяет пересечение прямой с несуществующей частью кривой безваттного сопротивления вторичной цепи.

Об устойчивости получаемых частот

Выше мы упоминали о том, что одноволновый и многоволновый режимы работы связанных контуров могут быть определены вольтамперными характеристиками связанных контуров.

1) Одна частота получается, если вольтамперы первичной цепи больше или равны вольтамперам вторичной.

2) Две частоты получаются, если вольтамперы первичной цепи меньше вольтамперов вторичной (третья частота, как мы покажем ниже, является неустойчивой).

Что касается коэффициента полезного действия и конструктивности первичной цепи, то нежелательно в первичной цепи иметь такую же вольтамперную характеристику, как и во вторичном контуре (в сети). Поэтому в тех случаях, когда указанные выгоды окупаются усложнением схемы, выгоднее пользоваться двухволновым режимом работы схемы.

Сила тока вторичного контура равна

$$I_4 = \frac{\frac{(\omega M)^2}{z_4^2} U_{am}}{z_3 + \frac{(\omega M)^2}{z_4}}.$$

Чем больше будет величина $\frac{(\omega M)^2}{z_4}$, тем больше будет сила тока вторичного контура. Поэтому если считать сопротивление вторичной цепи за постоянное, то кривая $\frac{(M\omega)^2}{z_4^2} R_4$ (получаемая из кривой R_3 , рис. 8.17) дает

возможность судить о силе тока вторичной цепи. Сила тока вторичного контура будет тем больше, чем больше будет член омического сопротивления вторичной цепи в выражении приведенного первичного сопротивления.

Допустим, что у нас установилась частота f_0 (см. рис. 8.17), и предположим, что по какой-либо причине эта частота увеличилась на величину Δf_0 . Величина реактивного сопротивления, входящая в приведенное реактивное сопротивление первичной цепи, становится более емкостной (абсолютное значение отрицательной величины — x_2 увеличивается). Благодаря этому последовательно с C_2 как бы включается добавочная емкость, а эквивалентная получается меньше. Точка резонанса переходит на более высокую частоту, и частота колебаний повышается. Если f_0 уменьшится на Δf_0 , то — x_2 становится положительной величиной, точка резонанса переходит на более низкие частоты, и частота колебаний понижается. Таким образом, частота изменяется в сторону получаемого импульса от f_0 . Соответствующее рассуждение показывает, что точки f_1 и f_2 определяют собой устойчивые частоты.

Наибольшие значения реактивного сопротивления лежат между устойчивыми частотами, и эти устойчивые частоты могут быть выбраны, благодаря соответствующей расстройке первичного контура, сколь угодно близко от этих максимальных значений. Чем ближе точка устойчивой частоты к одному из максимальных значений, тем выше омическое сопротивление от вторичной цепи и тем больше сила тока этой цепи.

Таким образом, выгодно конструировать первичный контур таким образом, чтобы устойчивая частота получалась вблизи от максимума вторичного реактивного сопротивления.

РАДИОТЕЛЕФОНИЯ

(основы модуляции)

9.1. Микрофон

Принцип работы телефонной связи заключается в том, что сила постоянного тока в приемном телефоне изменяется в такт изменению силы человеческого голоса, воздействующего на передающий прибор, в данном случае микрофон.

Под действием звуковой волны, попадающей в микрофон, изменяются постоянные телефонной сети вместе с изменением человеческого голоса. Таким образом, в телефонной сети в качестве переносчика звуковой энергии служит постоянный ток, подаваемый от батареи.



Рис. 9.1

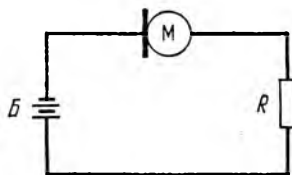


Рис. 9.2

В радиотелефонии в качестве такого переносчика используются высокочастотные токи, значительно превышающие частоту звука. Разрешение вопроса радиотелефонирования может быть разнообразное. Широкое применение, например, получили схемы, использующие электронные лампы.

Наиболее простым способом осуществления радиотелефонной связи является непосредственное включение микрофона M в радиосеть A (рис. 9.1). Эта схема работает неудовлетворительно, так как получающаяся в сети мощность будет крайне незначительна, ибо максимальный ток, пропускаемый обычным микрофоном, очень мал.

Рассмотрим принцип действия микрофона на простом примере. Имеем цепь (рис. 9.2), состоящую из батареи B , микрофона M и омического сопротивления R (телефон). Пусть на микрофон падает звуковая энергия с угловой частотой Ω . Обычно гласная или согласная состоят из ряда колебаний, лежащих в диапазоне частот от 200 до 2000 $гц$, причем в зависимости от соотношения амплитуд составляющих синусоид получается тот или другой тембр звука.

Примем, что сопротивление микрофона во время подачи звука изменяется по закону

$$r = R_0 + R_m \sin \Omega t,$$

где R_0 — сопротивление микрофона во время покоя; R_m — амплитуда изменения сопротивления микрофона во время разговора; Ω — угловая частота передаваемого звука.

Запишем выражение для r так:

$$r = R_0 (1 + k \sin \Omega t),$$

где $k = \frac{R_m}{R_0} > 0$, так как сопротивление микрофона до нуля никогда не падает.

По закону Ома

$$i = \frac{u}{R + r} = \frac{u}{R + R_0 (1 + k \sin \Omega t)}, \quad (9.1)$$

где R — сопротивление соединительных проводов телефона.

Из этой формулы видно, что получающаяся кривая силы тока не будет синусоидальной, а будет иметь более сложную форму.

Преобразуем уравнение (9.1):

$$\alpha = i (R + R_0 + R_m \sin \Omega t) = i (R + R_0) + i R_m \sin \Omega t = i \rho + i R_m \sin \Omega t,$$

где $\rho = R_0 + R$ — сопротивление всей цепи во время покоя.

Пусть $i = I + i_1$, где I — постоянная слагающая, а i_1 — переменная слагающая силы тока. Тогда

$$u = I \rho + i_1 \rho + I R_m \sin \Omega t + i_1 R_m \sin \Omega t. \quad (9.2)$$

На одно из неизвестных данного уравнения надо наложить какое-нибудь условие, иначе будем иметь неопределенное решение. Это условие будет заключаться в том, что по физическому смыслу напряжение батареи u может компенсировать только постоянное падение напряжения в сети, т. е. $u = I \rho$ и, следовательно,

$$- I R_m \sin \Omega t = i_1 \rho + i_1 R_m \sin \Omega t.$$

Теперь предположим, что $i_1 = i_2 + i_3$; тогда

$$- I R_m \sin \Omega t = i_2 \rho + i_3 \rho + i_2 R_m \sin \Omega t + i_3 R_m \sin \Omega t. \quad (9.3)$$

Примем для изменения i_2 следующее условие: $i_2 \rho = - I R_m \sin \Omega t$ (отсюда можно определить i_2). Тогда из (9.3)

$$- i_2 R_m \sin \Omega t = i_3 \rho + i_3 R_m \sin \Omega t$$

и при $i_3 = i_4 + i_5$ получаем

$$- i_2 R_m \sin \Omega t = i_4 \rho + i_5 \rho + i_4 R_m \sin \Omega t + i_5 R_m \sin \Omega t.$$

Теперь примем условие, что $i_4 \rho = - i_2 R_m \sin \Omega t$ (откуда определим i_4); тогда

$$- i_4 R_m \sin \Omega t = i_5 \rho + i_5 R_m \sin \Omega t$$

и при $i_5 = i_6 + i_7$ получим аналогичное уравнение.

Напишем окончательный результат:

$$\begin{aligned} i &= I + i_2 + i_4 + i_6 + \dots = \\ &= u \left(\frac{1}{\rho} - \frac{R_m}{\rho^2} \sin \Omega t + \frac{R_m^2}{\rho^3} \sin^2 \Omega t - \frac{R_m^3}{\rho^4} \sin^3 \Omega t + \dots \right) = \\ &= \frac{u}{\rho} \left(1 - \frac{R_m}{\rho} \sin \Omega t + \frac{R_m^2}{\rho^2} \sin^2 \Omega t - \frac{R_m^3}{\rho^3} \sin^3 \Omega t + \dots \right). \end{aligned} \quad (9.4)$$

Таким образом, имеем знакопеременный ряд геометрической прогрессии, знаменатель которой равен $\frac{R_m}{\rho \sin \Omega t}$. Если коэффициент $\frac{R_m}{\rho} = \frac{R_m}{R_0 + R}$

мал, что может быть при телефоне с малым сопротивлением, когда омическое сопротивление R , т. е. сопротивление телефона, очень мало, тогда и квадрат этого коэффициента тоже будет близок к единице и, следовательно, разлагая $\sin^2 \Omega t = \frac{1 - \cos 2\Omega t}{2}$, получим, что сила тока двойной частоты будет иметь большое значение, и в телефоне, кроме основной частоты, будет слышима и удвоенная частота. Аналогично, разлагая $\sin^3 \Omega t$, получим утроенную частоту, и т. д. Следовательно, при телефоне с малым сопротивлением мы услышим в нем наряду с основной гармоникой и высшие гармоники, и речь будет искажена.

Для сохранения чистоты речи необходимо условие, чтобы коэффициент $\frac{R_m}{R_0 + R}$ был достаточно мал для того, чтобы можно было пренебречь его высшими степенями. Это условие выполнимо, если R , т. е. сопротивление телефона, будет велико. Мы считали его здесь омическим. В действительности же телефон обладает определенной самоиндукцией, следовательно, расчет должен был бы быть более сложным, хотя метод и остается прежним. Прodelывать это мы не будем.

Обычно для случая чистой передачи достаточно, чтобы отношение $\frac{R_m}{R_0 + R}$ было несколько меньше $\frac{1}{10}$, тогда квадрат этого отношения будет уже меньше 0,01, т. е. 1%, и, следовательно, высшими гармониками при этом условии можно будет пренебречь.

Тогда, принимая во внимание только первую гармонику, будем иметь

$$i = \frac{u}{\rho} \left(1 - \frac{R_m}{\rho} \sin \Omega t \right);$$

действующая сила тока

$$i_{\text{эфф}}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt = \frac{u^2}{\rho^2} \left(1 + \frac{R_m^2}{2\rho^2} \right). \quad (9.5)$$

Отсюда полная энергия, выделившаяся в цепи как от переменной, так и от постоянной слагающей, будет

$$W = i_{\text{эфф}}^2 R = \frac{u^2}{\rho^2} \left(1 + \frac{R_m^2}{2\rho^2} \right) R. \quad (9.6)$$

Теперь найдем действующую силу тока и мощность только колебательной энергии, зависящей от переменной слагающей силы тока:

$$i_{\text{эфф}\sim} = \frac{u R_m}{\sqrt{2} \rho^2}, \quad W_{\sim} = \frac{u^2 R_m^2}{2 \rho^4} R = \frac{u^2}{2} \frac{R_m^2 R}{(R_0 + R)^4}. \quad (9.7)$$

Найдем условие максимума колебательной энергии в зависимости от сопротивления нагрузки R :

$$\frac{\partial W_{\sim}}{\partial R} = \frac{u^2}{2} \frac{[R_m^2 (R_0 + R)^4 - 4 R_m^2 R (R_0 + R)^3]}{(R_0 + R)^8}. \quad (9.8)$$

Приравняв числитель нулю, получим $R_0 + R - 4R = 0$, откуда $R = \frac{R_0}{3}$ будет условием максимума. Отсюда

$$\frac{R_m}{R_0 + R} = \frac{3 R_m}{4 R_0}.$$

Если взять $\frac{R_m}{R_0} = 0,5$, то $\frac{R_m}{R_0 + R} = \frac{3}{8}$ и, следовательно, если постоянная

составляющая силы тока равна единице, то амплитуда первой слагающей равна $\frac{3}{8} = \frac{1}{2,66}$, амплитуда второй слагающей равна $\frac{9}{64} = \frac{1}{7}$ и т. д.

Отсюда видно, что при наимыгоднейшей отдаче энергии в цепь амплитуда второй гармоники будет всего лишь в 2,5 раза меньше амплитуды первой гармоники и, следовательно, речь будет искажаться высшими гармониками.

Для избежания этого необходимо отношение $\frac{R_m}{R_0}$ брать гораздо меньше.

Итак, имеем, что $\rho = R + R_0$, $R = \frac{R_0}{3}$ и, следовательно, $\rho = \frac{4}{3} R_0$. Отсюда (см. 9.7)

$$W_{\sim \text{опт}} = \frac{u^2}{2} R_m^2 \frac{R_0}{3} \frac{1}{R_0^4} \left(\frac{3}{4}\right)^4 = \frac{u^2}{2} \frac{R_m^2}{R_0^3} \frac{1}{3} \left(\frac{3}{4}\right)^4,$$

а из (9.6)

$$W_{\text{опт}} = \frac{u^2}{R_0^2} \left(\frac{3}{4}\right)^2 \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{3R_m}{4R_0}\right)^2\right] \frac{R_0}{3},$$

откуда

$$\eta = \frac{W_{\sim \text{опт}}}{W_{\text{опт}}} = \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^2 R_m^2}{2R_0^2 \left[1 + \frac{9}{32} \left(\frac{R_m}{R_0}\right)^2\right]} = \frac{9}{32} \frac{\left(\frac{R_m}{R_0}\right)^2}{\left[1 + \frac{9}{32} \left(\frac{R_m}{R_0}\right)^2\right]}. \quad (9.9)$$

Пренебрегая последним членом в знаменателе, имеем

$$\eta = \frac{9}{32} \left(\frac{R_m}{R_0}\right)^2.$$

Мы уже знаем, что для ясности передачи речи требуется, чтобы $R_m/R_0 \leq 0,1$ и, следовательно, чистота речи всегда идет в разрез с условием наибольшего коэффициента полезного действия, так как при условии $R_m/R_0 \leq 0,1$, коэффициент $\eta \leq 0,3\%$.

Вообще говоря, изменяя сопротивление цепи при помощи микрофона, нельзя обеспечить достаточной мощности и никогда нельзя получить вполне чистый тон, так как всегда возникают высшие гармоники.

9.2. Модуляция *

Рассмотрим условия радиотелефонирования. В случае передачи обычных незатухающих колебаний детекторный контур срежет нижнюю часть кривой колебаний и через телефон пройдет как бы постоянный ток (рис. 9.3) **.

При наложении же на незатухающие колебания высокой частоты ω колебаний звуковой частоты Ω в цепи передатчика возникает ток, как показано на рис. 9.4.

Этот модулированный ток

$$i = I_m \sin \omega t (1 \pm M \sin \Omega t) ***, \quad (9.10)$$

* В журнале «Известия по минному делу» (№ 49, 1—15, 1916) была опубликована статья М. В. Шулейкина «Об условиях применения генераторов высокой частоты для радиотелефонии». В ней впервые в литературе было показано, что в результате модуляции незатухающих колебаний в антенне одновременно с несущей частотой возникают дополнительно две боковые частоты. Таким образом, доказывається, что при сложении двух простых колебаний получаются модулированные по амплитуде колебания, которые занимают некоторую полосу частот. (Прим. составителя).

** Так как мембрана не будет успевать перемещаться в такт с импульсами высокочастотного тока, кроме того и сами импульсы практически будут сглажены за счет емкости и самондукции телефона. (Прим. составителя).

*** Здесь I_m зависит от M . (Прим. составителя).

где коэффициент модуляции $M < 1$, период незатухающих колебаний $T_1 = \frac{2\pi}{\omega}$, период звуковых колебаний $T_2 = \frac{2\pi}{\Omega}$. Плюс или минус перед M зависит от начальной фазы колебаний. Если принять ток приемной антенны (рис. 9.4) на детектор, то в телефоне будет прослушиваться частота передаваемой звуковой волны. На телефон будет действовать разность амплитуд

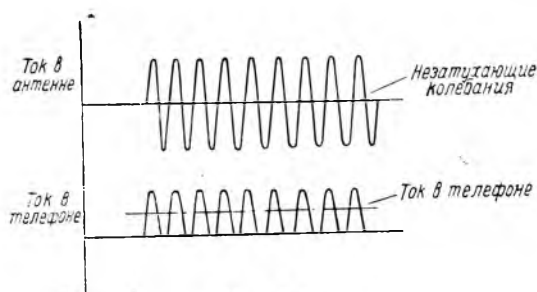


Рис. 9.3

$I_{\text{макс}} - I_{\text{мин}}$. При заданном $I_{\text{макс}}$ звук в телефоне будет тем сильнее, чем больше эта разность. При $I_{\text{мин}} = I_{\text{макс}}$, $M = 0$ будут иметь место незатухающие колебания с частотой ω . При $I_{\text{мин}} = 0$ и $M = 1$ воздействие на телефон будет максимальное.

Можно построить диаграмму формы тока, проходящего через приемный телефон (рис. 9.4). Часть этого тока постоянной величины i' обусловлена $I_{\text{мин}}$, другая же часть — пульсирующий ток — зависит от разности $(I_{\text{макс}} - I_{\text{мин}})$.

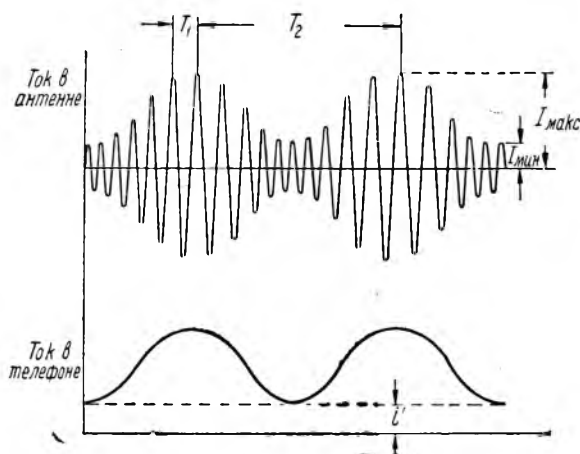


Рис. 9.4

Значение действующей силы тока при модуляции

$$i_{\text{эф.мод}}^2 = \frac{1}{T_1} \int_0^{T_1} i^2 dt,$$

где $i = I_m \sin \omega t (1 + M \sin \Omega t)$;
отсюда

$$i_{\text{эф.мод}}^2 = \frac{I_m^2}{2} (1 + M \sin \Omega t)^2.$$

Окончательно действующая сила тока в передающей сети

$$i_{\text{эф}}^2 = \frac{1}{T_2} \int_0^{T_2} i_{\text{эф.мод}}^2 dt = \frac{I_m^2}{2T_2} \int_0^{T_2} (1 + M \sin \Omega t)^2 dt = \\ = \frac{I_m^2}{2T_2} \left(T_2 + \frac{M^2 T_2}{2} \right) = \frac{I_m^2}{2} \left(1 + \frac{M^2}{2} \right). \quad (9.11)$$

При отсутствии модуляции ($M = 0$)

$$|i_{\text{эф}}^2|_{M=0} = \frac{|I_m^2|_{M=0}}{2}.$$

Следовательно,

$$\frac{i_{\text{эф}}^2}{|i_{\text{эф}}^2|_{M=0}} = \frac{I_m^2 \left(1 + \frac{M^2}{2} \right)}{|I_m^2|_{M=0}}. \quad (9.12)$$

Можно различить два случая:

$$1) i_{\text{эф}}^2 = |i_{\text{эф}}^2|_{M=0}, \text{ тогда } I_m^2 = |I_m^2|_{M=0} \frac{1}{1 + \frac{M^2}{2}}. \text{ При } M=0, I_m^2 = |I_m^2|_{M=0},$$

при $M = 1$, $I_m^2 = \frac{2}{3} |I_m^2|_{M=0}$, т. е. если действующие значения модулированного и немодулированного токов равны, то амплитуда модулированного тока равна $\frac{2}{3}$ амплитуды немодулированного.

$$2) I_m = |I_m|_{M=0}. \text{ Тогда } i_{\text{эф}}^2 = |i_{\text{эф}}^2|_{M=0} \left(1 + \frac{M^2}{2} \right). \text{ При } M=0, i_{\text{эф}}^2 = |i_{\text{эф}}^2|_{M=0},$$

$$\text{при } M = 1, i_{\text{эф}}^2 = \frac{3}{2} |i_{\text{эф}}^2|_{M=0}.$$

Можно судить об идеальности модуляции, замечая показания амперметра до и во время разговора. При $M = 1$ отношение показаний будет равно 1,5, а при $M < 1$ это отношение будет лежать между 1 и 1,5. Далее, из полученного отношения можно найти действительный коэффициент модуляции M .

Хотя мощность колебательной энергии в цепи $W_1 = i_{\text{эф}}^2 R$, но на мембрану приемного телефона будет действовать всего лишь часть этой энергии, зависящая от разности $I_{\text{макс}} - I_{\text{мин}}$, часть же мощности, получаемая от $I_{\text{мин}}$, для нас пропадает.

Преобразуем теперь значение мгновенной силы тока

$$i = I_m \sin \omega t (1 + M \sin \Omega t).$$

Учитывая соотношение:

$$\sin \omega t \sin \Omega t = \frac{1}{2} [\cos (\omega - \Omega) t - \cos (\omega + \Omega) t],$$

окончательно получим:

$$i = I_m \sin \omega t + \frac{I_m M}{2} [\cos (\omega - \Omega) t - \cos (\omega + \Omega) t]. \quad (9.13)$$

Итак, модулированный ток i состоит из трех токов различных частот: основной частоты колебаний ω , разности частот основной и звуковой ($\omega - \Omega$) и суммы этих частот ($\omega + \Omega$). Два последних тока и обуславливают собой прием; ток же частоты ω на передающей станции может отсутствовать, так как его всегда можно создать на приемной станции.

При работе частота ω бывает очень велика, Ω же обычно бывает порядка от 200 до 2000 гц^* и, следовательно, разница в частотах составляющих токов будет весьма незначительна и в приемнике можно настроиться одновременно на три частоты. Вообще же бывает три положения резонанса. Расхождение между настройками на $\omega + \Omega$ и $\omega - \Omega$ будет тем больше, чем больше длина волны, т. е. чем больше сравнимы частоты ω и Ω .

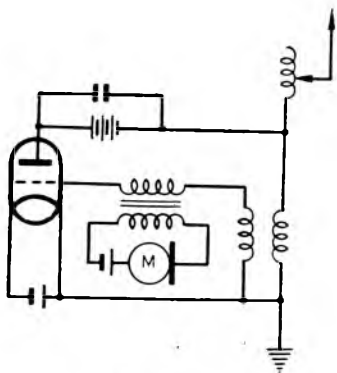


Рис. 9.5 **

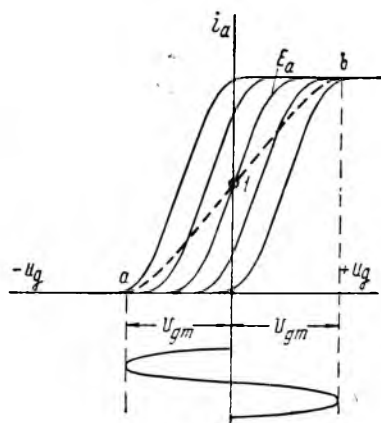


Рис. 9.6

Так при $\lambda = 600 \text{ м}$ соответствующие числа колебаний будут $500\,000 + 2000 = 502\,000$ и $500\,000 - 2000 = 498\,000$.

Так как частота ω для приема значения не имеет, то в современных системах стремятся от нее избавиться. При этом энергия будет излучаться меньше, а при той же излучаемой мощности дальность действия увеличится.

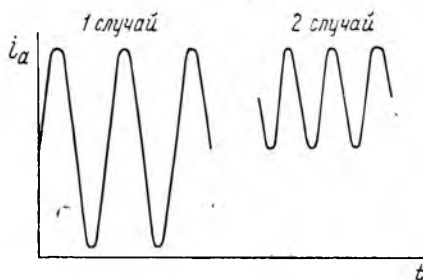


Рис. 9.7

9.3. Схемы радиотелефонных передатчиков

На рис. 9.5 представлена простейшая схема радиотелефонного передатчика. Генераторная лампа включена по схеме с самовозбуждением. Микрофон связывается с цепью сетки посредством трансформатора, обычно с железом. При разговоре потенциал на сетке изменяется. Сила анодного тока от этого тоже изменяется и происходит модулированная передача.

При заданном напряжении батареи и напряжении на сетку из семейства характеристик (рис. 9.6) по рабочей характеристике всегда можно найти соответствующее значение силы тока анода. Так, например, точка 1 будет

* Здесь подразумевается передача разговорной речи. (Прим. составителя).

** Током сетки пренебрегают. (Прим. составителя).

соответствовать $u_g = 0$ и $u_a = E_a$. Если приложить к сетке некоторое переменное напряжение с амплитудой U_{gm} , то точка 1 будет совершать колебания вправо и влево по рабочей характеристике в такт с его изменением.

При этом как максимум, так и минимум значения силы тока анода будет определяться амплитудой U_{gm} . На рис. 9.7 представлен случай наибольшего

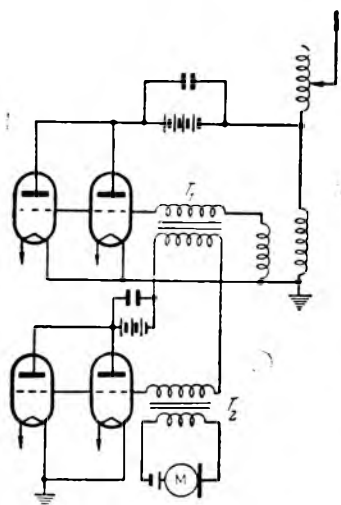


Рис. 9.8

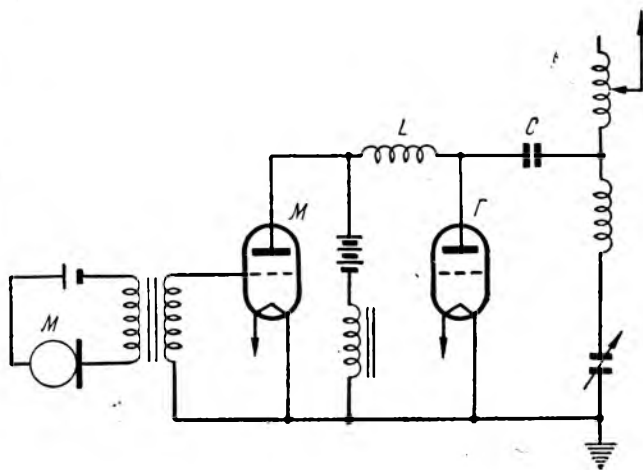


Рис. 9.9

изменения силы анодного тока от нуля до насыщения. Если же потенциал на сетке будет оставаться все время положительным, то и колебания анодного тока станут меньше. На рис. 9.7 дана картина изменений анодного тока для обоих случаев*.

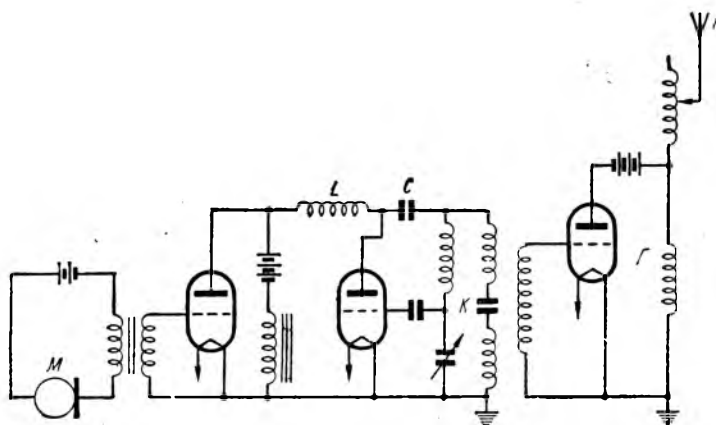


Рис. 9.10

При расчете схемы необходимо рассчитать амплитуды возбуждающего напряжения на сетке по заданным пределам изменения силы анодного тока. Зная же напряжение на первичной обмотке трансформатора, можно подобрать соответствующий трансформатор.

Так как сила тока в микрофоне ограничена известным пределом, то в случае параллельного включения нескольких ламп непосредственно свя-

* Как в данной схеме, так и в последующих обмотка трансформатора, включенная в цепь сетки, замыкается блокированным конденсатором для пропускания высокочастотного тока. В целях упрощения схемы при рассмотрении ее работы конденсатор опущен. (Прим. составителя).

зывать с цепью их сеток микрофонный контур нельзя. Тогда применяют схему каскадного включения (рис. 9.8). В ней в первичную обмотку трансформатора T_1 включают еще одну или несколько ламп, в цепь сетки которых включается микрофонный трансформатор T_2 . Дополнительные лампы будут усиливать напряжение, развиваемое микрофоном. При большом количестве ламп возможно включение двух и более каскадов; на этом основана схема Углова.

На рис. 9.9 дана весьма употребительная схема Хиссинга. Отличие ее заключается в том, что в ней источник питания присоединяется к генераторной лампе Γ параллельно. Микрофон воздействует на сетку модуляторной лампы M , изменяя силу тока анода, а изменения последнего соответственно будут вызывать изменения потенциала на аноде генераторной лампы, т. е. как будто бы к аноду последней прилагается переменная э.д.с. Следовательно, здесь будет происходить модуляция на анод.

Самоиндукцию L включают для защиты от тока высокой частоты первой модуляторной лампы, а емкость C — для того, чтобы батарея не могла замкнуться накоротко, особенно в случае использования в анодном контуре только индуктивных цепей. В целях отдачи максимальной мощности звуковой энергии необходимо, чтобы сопротивления обеих ламп были равны и, следовательно, мощности модулированной и генераторной ламп тоже должны быть одинаковыми. При увеличении мощности генераторных ламп или увеличении их числа нужно увеличить мощность или число модуляторных ламп, что является недостатком схемы Хиссинга, который устранен в следующей схеме (рис. 9.10).

В последней (за обычной схемой Хиссинга) помещается замкнутый контур K , к которому через трансформаторную связь включается генераторная лампа Γ значительно большей мощности. В данном случае схема Хиссинга через трансформатор будет работать на сетку этой лампы. Эта система гораздо экономичнее при больших мощностях. Так, например, при мощности в 100 *квт* первая схема (рис. 9.9) требует модуляторных ламп тоже на 100 *квт*, следовательно, общая мощность ламповой установки будет равна 200 *квт*. Для второй же схемы (рис. 9.10) достаточно взять на возбуждение всего лишь 10%, т. е. две пятикиловаттные лампы, и, следовательно, вся установка будет только на 110 *квт*.

9.4. Модуляция на сетку [первый вариант метода расчета]

Разберем математически случай модуляции на сетку. Аналогичным методом можно было бы разобрать и случай модуляции на анод.

У нас задано изменение u_g ; кроме того, к сетке прилагается э. д. с., получаемую от изменения сопротивления микрофона во время разговора. Требуется определить изменение i_a . Разложим i_a в ряд по степени $(u_g + Du_a)$.

$$i_a = p_1 (u_g + Du_a) + p_2 (u_g + Du_a)^2 + p_3 (u_g + Du_a)^3 + \dots \quad (9.14)$$

Для того чтобы получить это разложение, допустим, что

$$i_a = i_1 + i_2 + i_3 + \dots, \quad (9.15)$$

$$u_a = u_1 + u_2 + u_3 + \dots \quad (9.16)$$

Подставляем значение u_a в (9.14), получаем

$$i_a = p_1 [u_g + D(u_1 + u_2 + u_3 + \dots)] + p_2 [u_g + D(u_1 + u_2 + u_3 + \dots)]^2 + p_3 [u_g + D(u_1 + u_2 + u_3 + \dots)]^3 + \dots \text{ и т. д.}$$

Раскрываем скобки:

$$i_a = p_1 u_g + p_2 u_g^2 + p_3 u_g^3 + \dots + p_1 D u_1 + p_2 D^2 u_1^2 + p_3 D^3 u_1^3 + \dots + \\ + p_1 D u_2 + \dots + 2p_2 u_g D u_1 + 2p_3 u_g D u_2 + \dots$$

Отсюда

$$i_1 = p_1 (u_g + D u_1), \quad (9.17)$$

$$i_2 = p_2 (u_g^2 + 2u_g D u_1 + D^2 u_1^2) + p_1 D u_2 = p_2 (u_g + D u_1)^2 + p_1 D u_2, \quad (9.18)$$

$$i_3 = p_3 (u_g + D u_1)^3 + p_1 D u_3. \quad (9.19)$$

Определим коэффициенты p_1 , p_2 и т. д. Для этого берем частные производные $\partial i_a / \partial u_a$.

Полагая u_2 , u_3 , ... малыми, получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial i_a}{\partial u_a} &= D p_1 + 2p_2 (u_g + D u_1) + 3p_3 (u_g + D u_1)^2 + \dots \\ \left(\frac{\partial^2 i_a}{\partial u_a^2} \right) &= 2p_2 D, \\ \left(\frac{\partial^3 i_a}{\partial u_a^3} \right) &= 2 \cdot 3 \cdot p_3 D \text{ и т. д.} \end{aligned} \right\} \quad (9.20)$$

Получаем ряд Маклорена, все члены которого, начиная со второго, приравняем нулю. Ряд же берется около некоторой точки A (рис. 9.11), относительно которой происходят колебания. Первая

производная $\frac{\partial i_a}{\partial u_a}$ (9.20) представляет собой внутреннюю проводимость лампы $\frac{1}{R_i}$, а вторая производная равна

$$\frac{\partial^2 i_a}{\partial u_a^2} = - \frac{\partial R_i}{\partial u_a} \frac{1}{R_i^2} = - \frac{R_{iI} - R_{iII}}{u_{aI} - u_{aII}} \frac{1}{R_i^2}. \quad (9.21)$$

Изменения R_i и являются условием модуляции.

Когда изменения u_g и u_a равны нулю, то из этих уравнений определи-

лась бы точка, соответствующая данному напряжению u_a . Фактически здесь имеет место следующее:

1. Имеется некоторое постоянное напряжение E_a .
2. Медленные изменения u_g вызывают медленное изменение u_a .
3. Генерируются колебания высокой частоты.

Из сказанного следует:

$$p_1 = \frac{1}{D R_i} = S,$$

$$p_2 = - \frac{1}{2} \frac{\partial R_i}{\partial u_a} \frac{1}{R_i^2 D} = - \frac{1}{2} \frac{\partial R_i}{\partial u_a} \frac{S}{R_i} \quad (9.22)$$

и т. д.

Для простоты высшими гармониками, как обычно, мы пренебрегаем.

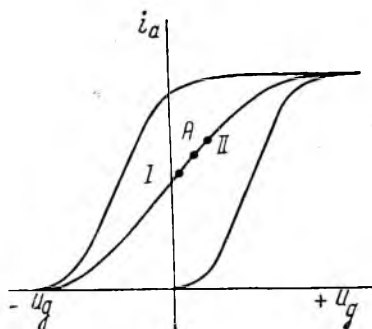


Рис. 9.11

Заменяя p_1 в (9.17) через S , имеем

$$i_1 = S(u_g + Du_1) = S(u_g - DR_a i_1). \quad (9.23)$$

Заменяем u_1 через падение напряжения во внешней цепи, где предполагаем безындукционную нагрузку R_a ($u_1 = -R_a i_1$). Отсюда

$$i_1 = \frac{Su_g}{1 + SDR_a} = \frac{SR_i u_g}{R_i + R_a}. \quad (9.24)$$

Аналогично на основе (9.18)

$$i_2 = -\frac{1}{2} \frac{\partial R_i}{\partial u_a} \frac{S}{R_i} (u_g + Du_1)^2 + SDu_2. \quad (9.25)$$

Обозначим

$$\frac{1}{2} \frac{\partial R_i}{\partial u_a} \frac{1}{R_i} = M.$$

Тогда

$$i_2 = -MS(u_g + Du_1)^2 + SDu_2 = -\frac{Mi_1^2}{S} - SDR_a i_2 = -\frac{Mi_1^2}{S} - \frac{R_a i_2}{R_i}.$$

Откуда

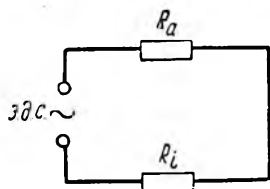


Рис. 9.12

$$i_2 = \frac{-\frac{Mi_1^2}{S}}{1 + \frac{R_a}{R_i}}.$$

Подставляя вместо i_1 его значение, получим

$$i_2 = -\frac{M(SR_i)^2 u_g^2 R_i}{(R_i + R_a)^2 S (R_i + R_a)} = -\frac{MR_i (SR_i)^2 u_g^2}{S (R_i + R_a)^3}.$$

В общем виде

$$i_a = a_1 u_g + a_2 u_g^2 + \dots, \quad (9.26)$$

где $a_1 = \frac{SR_i}{R_a + R_i}$ и $a_2 = -\frac{MR_i (SR_i)^2}{S (R_i + R_a)^3}$.

Модуляторную схему можно заменить эквивалентной (рис. 9.12) с двумя последовательными сопротивлениями R_a и R_i и с э. д. с., приложенной к зажимам и равной $SR_i u_g$ для первого члена и $u_g^2 M \left[\frac{(SR_i)^2}{(R_i + R_a)^2} \frac{R_i}{S} \right]$ для второго члена.

В случае, если нагрузка будет индуктивной или емкостной, надо уже брать $u_1 = -i_1 Z$, также и u_2 и, следовательно, выражение будет сложнее.

Найдем теперь коэффициент модуляции для случая безындукционной нагрузки.

Имеем $u_g = U_{m1} \sin \omega t + U_{m2} \sin \Omega t$, где U_{m1} — амплитуда э. д. с., получаемой от связи с генератором; U_{m2} — амплитуда э. д. с., получаемой от микрофона. Тогда уравнение (9.26) запишется так:

$$i_a = a_1 U_{m1} \sin \omega t + a_1 U_{m2} \sin \Omega t + \\ + a_2 [U_{m1}^2 \sin^2 \omega t + U_{m2}^2 \sin^2 \Omega t + 2U_{m1} U_{m2} \sin \omega t \sin \Omega t].$$

9.5. Модуляция * (второй вариант метода расчета)

Положения, принятые в основу элементарной теории модуляции

При рассмотрении процессов модуляции мы берем за основу схему, изображенную на рис. 9.13, и принимаем следующие положения за исходные.

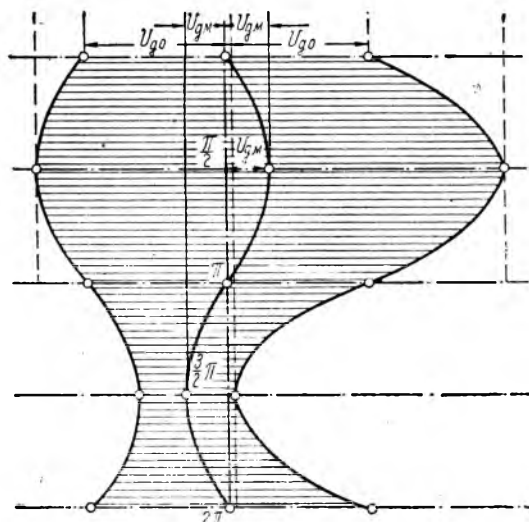


Рис. 9.15

1. Статические характеристики триода линейны, откуда следует, что параметры триода D , R_i и S не меняются при изменении u_g , u_a и i_a .

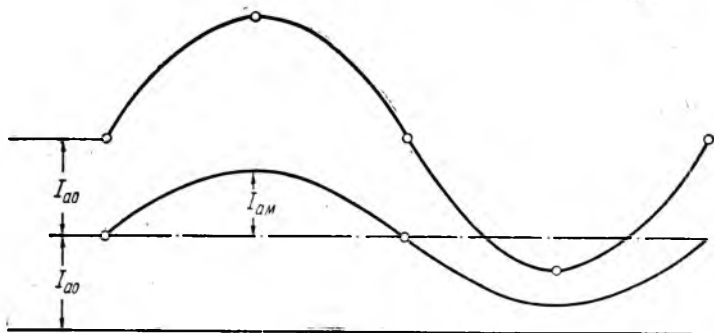


Рис. 9.16

2. Колебания, генерируемые триодом, есть колебания первого рода.

3. Эквивалентное сопротивление колебательного контура для тока модулирующей частоты крайне мало. На этом основании мы принимаем, что рабочая характеристика для модулирующего тока совпадает с соответствующей статической характеристикой ($g - h$ на рис. 9.14).

4. К сетке триода приложена модулирующая электродвижущая сила угловой частоты $\Omega \ll \omega$ (частоты генератора).

5. Ток на сетку полагаем равным нулю ($i_k = i_a$).

* Данная рукопись М. В. Шулейкина относится к периоду его работы до 1923 г. (Прим. составителя).

А. Модуляция на сетку

Построение диаграммы модуляции. Выражения для u_g , i_a и u_a при модуляции

Процесс модуляции на сетку в предельном случае колебаний первого рода (i_a доходит до нуля) заключается в следующем.

Если к сетке приложено отрицательное напряжение — U_{g0} , то при анодном напряжении, соответствующем статической характеристике ($I - I$), (рис. 9.14), сила анодного тока будет равна I_{a0} .

При возникновении колебаний мы подбираем связь на сетке таким образом, чтобы амплитуда напряжения высокой частоты на сетке менялась от $+U_{g0}$ до $-U_{g0}$. Рабочая характеристика изображается на рис. 9.14 прямой ab .

Если к сетке мы приложим постоянное напряжение — $(U_{g0} - U_{gm})$, где U_{gm} — амплитуда модулирующего напряжения, то при той же связи на сетке рабочая характеристика переместится в положение cd .

Перемещение рабочей точки характеристики, соответствующее напряжению на сетке, равному $-(U_{g0} + U_{gm})$, определится отрезком прямой gh .

Таким образом, при изменении напряжения на сетке от $-(U_{g0} - U_{gm})$ до $-(U_{g0} + U_{gm})$ рабочая характеристика будет перемещаться из положения cd в положение ef с частотой $f_m = \frac{\Omega}{2\pi}$, если электродвижущая сила, приложенная к сетке, изменяется по закону

$$u_g = U_{gm} \sin \Omega t - U_{g0}.$$

Полученная диаграмма есть диаграмма модуляции на сетку и, будучи развернута в прямоугольных координатах, дает возможность найти соотношения между u_g , u_a и i_a при модуляции. На рис. 9.15, 9.16 и 9.17 построены кривые — огибающие амплитуды высокой частоты для u_g , i_a и u_a .

На основании этих кривых и рис. 9.14 нетрудно доказать, что перечисленные величины аналитически выразятся следующим образом:

$$u_g = U_{gm} \sin \Omega t + \{U_{g0} + k_g U_{gm} \sin \Omega t\} \sin \omega t - U_{g0}, \quad (9.30)$$

$$i_a = (I_{a0} + k_i U_{gm} \sin \Omega t) (1 + \sin \omega t), \quad (9.31)$$

$$u_a = E_a - (U_{a0} + k_a U_{gm} \sin \Omega t) \sin \omega t. \quad (9.32)$$

В выражениях (9.30) — (9.32) k_g , k_i и k_a означают коэффициенты пропорциональности, остальные обозначения понятны из рис. 9.14, 9.15, 9.16, 9.17.

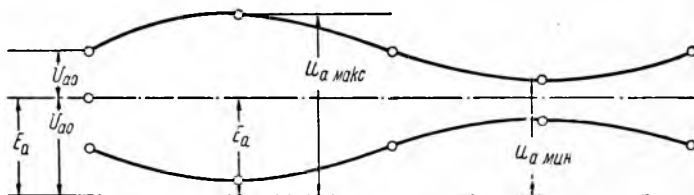


Рис. 9.17

Определение коэффициентов пропорциональности k_g , k_i и k_a

Переменная слагающая тока высокой частоты на основании выражения (9.31) определится так:

$$i_a = (I_{a0} + k_i U_{gm} \sin \Omega t) \sin \omega t. \quad (9.33)$$

Соответствующая ей слагающая сеточного напряжения будет равна

$$u_g = \{U_{g0} + k_g U_{gm} \sin \Omega t\} \sin \omega t. \quad (9.34)$$

Так как мы имеем

$$i_a = S_A u_g,$$

где S_A — крутизна рабочей характеристики, то

$$k_i = S_A k_g. \quad (9.35)$$

Для слагающих высокой частоты анодного тока (9.33) и анодного напряжения

$$u_a = (U_{a0} + k_a U_{gm} \sin \Omega t) \sin \omega t \quad (9.36)$$

мы имеем соотношение $i_a z = u_a$, где z — эквивалентное сопротивление замкнутого контура. Подставив (9.36) и (9.33), находим

$$k_a = z k_i. \quad (9.37)$$

Из уравнения статической характеристики получим

$$\begin{aligned} i_a &= S u_g + \frac{u_a}{R_i}, \\ I_{a0} + k_i U_{gm} \sin \Omega t + (I_{a0} + k_i U_{gm} \sin \Omega t) \sin \omega t &= \\ &= S [U_{gm} \sin \Omega t + (U_{g0} + k_g U_{gm} \sin \Omega t) \sin \omega t - U_{g0}] + \\ &+ \frac{E_a}{R_i} - \frac{U_{a0} + k_a U_{gm} \sin \Omega t}{R_i} \sin \omega t. \end{aligned} \quad (9.38)$$

Найденное выражение распадается на следующие:

$$I_{a0} = -S U_{g0} + \frac{E_a}{R_i}.$$

Это выражение определяет точку, соответствующую на рис. 9.14 абсциссе ($-U_{g0}$) и статической характеристике $I - I$:

$$\begin{aligned} (I_{a0} + k_i U_{gm} \sin \Omega t) \sin \omega t &= \\ &= S (U_{g0} + k_g U_{gm} \sin \Omega t) \sin \omega t - \frac{U_{a0} + k_a U_{gm} \sin \Omega t}{R_i} \sin \omega t. \end{aligned}$$

При отсутствии модуляции имеем

$$I_{a0} = S U_{g0} - \frac{U_{a0}}{R_i},$$

благодаря чему должно быть

$$k_i = S k_g - \frac{k_a}{R_i}.$$

Подставляя из (9.35) и (9.37) k_a и k_g , найдем

$$k_i = \frac{k_i S}{S_A} - \frac{z k_i}{R_i}$$

или

$$S_A \left(1 + \frac{z}{R_i}\right) = S.$$

Отсюда следует, что

$$S_A = \frac{R_i S}{z + R_i}.$$

Последнее выражение

$$k_i U_{gm} \sin \Omega t = S U_{gm} \sin \Omega t$$

определяет коэффициент k_i :

$$k_i = S. \quad (9.39)$$

Таким образом, имеем

$$k_g = \frac{S}{S_A}, \quad (9.40)$$

$$k_a = Sz. \quad (9.41)$$

На основании полученных значений для k_i , k_g и k_a выражения (9.30), (9.31), (9.32) приводятся к следующему виду:

$$\begin{aligned} u_g &= U_{gm} \sin \Omega t + U_{g0} \left(1 + \frac{U_{gm}}{U_{g0}} \frac{S}{S_A} \sin \Omega t\right) \sin \omega t - U_{g0}, \\ i_a &= I_{a0} \left(1 + \frac{S U_{gm}}{I_{a0}} \sin \Omega t\right) (1 + \sin \omega t), \\ u_a &= E_a \left[1 - \frac{U_{a0}}{E_a} \left(1 + \frac{S U_{gm}}{U_{a0}} z \sin \Omega t\right) \sin \omega t\right]. \end{aligned} \quad (9.42)$$

Далее имеем

$$\begin{aligned} \frac{U_{gm} S}{U_{g0} S_A} &= \frac{I_{am}}{I_{a0}}, & \frac{U_{gm} S}{I_{a0}} &= \frac{I_{am}}{I_{a0}}, \\ \frac{S U_{gm}}{U_{a0}} z &= \frac{I_{am}}{I_{a0}}, \end{aligned}$$

или, обозначив $\frac{I_{am}}{I_{a0}} = \bar{k}$, а $\frac{U_{a0}}{E_a} = \xi$, получим

$$u_g = U_{gm} \sin \Omega t + U_{g0} (1 + \bar{k} \sin \Omega t) \sin \omega t - U_{g0}, \quad (9.43)$$

$$i_a = I_{a0} (1 + \bar{k} \sin \Omega t) (1 + \sin \omega t), \quad (9.44)$$

$$u_a = E_a [1 - \xi (1 + \bar{k} \sin \Omega t) \sin \omega t]. \quad (9.45)$$

Нетрудно показать, что

$$\bar{k} = \frac{i_{a \text{ макс}} - i_{a \text{ мин}}}{i_{a \text{ макс}} + i_{a \text{ мин}}}$$

есть коэффициент модуляции, который на основании выражений (9.39), (9.40) и (9.41) может быть выражен следующим образом:

$$\bar{k} = \frac{U_{gm}}{U_{g0}} \frac{S}{S_A}, \quad \bar{k} = \frac{U_{gm}}{U_{a0}} Sz, \quad \bar{k} = \frac{I_{am}}{I_{a0}} = \frac{U_{gm}}{I_{a0}} S. \quad (9.46)$$

Между коэффициентом модуляции $\bar{k}$ и коэффициентом использования анодного напряжения ξ существует некоторая определенная зависимость. Наименьшее значение анодного напряжения, согласно выражению (9.45), определится из выражения

$$u_{a \text{ мин}} = E_a [1 - \xi (1 + \bar{k})]. \quad (9.47)$$

Из этого выражения находим

$$\xi = \frac{1}{1 + \bar{k}} \left(1 - \frac{u_{a \text{ мин}}}{E_a} \right)$$

или

$$\bar{k} = \frac{1}{\xi} \left(1 - \frac{u_{a \text{ мин}}}{E_a} - \xi \right). \quad (9.48)$$

Последние выражения могут быть представлены так. Разделив (9.47) на U_{a0} , получим

$$\frac{u_{a \text{ мин}}}{U_{a0}} = \frac{1}{\xi} [1 - \xi (1 + \bar{k})] = \frac{1}{\xi} - (1 + \bar{k})$$

или

$$\frac{1}{\xi} = \frac{u_{a \text{ мин}}}{U_{a0}} + 1 + \bar{k}, \quad \xi = \frac{1}{\frac{u_{a \text{ мин}}}{U_{a0}} + 1 + \bar{k}}. \quad (9.49)$$

Из выражения (9.47) или (9.49) следует, что ξ , т. е. отношение амплитуды напряжения высокой частоты при отсутствии модуляции к напряжению батареи, будет при заданном коэффициенте модуляции $\bar{k}$ тем больше, чем меньше отношение $u_{a \text{ мин}}/U_{a0}$. Так как $u_{a \text{ мин}} \geq 0$, то наибольшее возможное значение ξ равно

$$\xi = \frac{1}{1 + \bar{k}} \quad (9.50)$$

и при $\bar{k} = 1$, $\xi = \frac{1}{2}$.

Выражения для мощностей

Мощность, отдаваемая источником питания, равна

$$W_2 = \frac{1}{T_2} E_a \int_0^{T_2} i_a dt = E_a I_{a0}. \quad (9.51)$$

Мощность, потерянная на аноде триода, определится из следующего выражения:

$$W_3 = \frac{1}{T_2} \int_0^{T_2} i_a u_a dt = \frac{E_a I_{a0}}{T} \int_0^{T_2} (1 + \bar{k} \sin \Omega t) (1 + \sin \omega t) \times \\ \times [1 - \xi (1 + \bar{k} \sin \Omega t) \sin \omega t] dt.$$

Интегрируя по dt , найдем

$$W_3 = E_a I_{a0} \left[1 - \frac{\xi}{2} \left(1 + \frac{\bar{k}^2}{2} \right) \right]$$

или

$$W_3 = E_a I_{a0} - \frac{I_{a0} E_a \xi}{2} \left[1 + \frac{\bar{k}^2}{2} \right] = W_2 - W_1. \quad (9.52)$$

Нетрудно доказать, что

$$W_1 = \frac{I_{a0} U_{a0}}{2} \left[1 + \frac{\bar{k}^2}{2} \right] \quad (9.53)$$

есть полезная мощность.

Коэффициент полезного действия будет равен

$$\eta = \frac{W_1}{W_2} = \frac{\xi}{2} \left[1 + \frac{\bar{k}^2}{2} \right].$$

При отсутствии модуляции ($\bar{k} = 0$)

$$\eta = \frac{\xi}{2}$$

или, при наибольшем возможном ($\xi = 1$),

$$\eta = \frac{1}{2}.$$

При модуляции значение ξ определяется выражением (9.49), откуда

$$\eta = \frac{1}{2 \left[\frac{u_{a \text{ мин}}}{U_{a0}} + 1 + \bar{k} \right]} \left(1 + \frac{\bar{k}^2}{2} \right). \quad (9.54)$$

При заданном коэффициенте модуляции наибольший возможный к. п. д. ($u_{a \text{ мин}} = 0$) равен

$$\eta = \frac{1 + \frac{\bar{k}^2}{2}}{2(1 + \bar{k})} = \frac{2 + \bar{k}^2}{4(1 + \bar{k})}. \quad (9.55)$$

Если $\bar{k} = 1$, то

$$\eta = 0,375. \quad (9.55a)$$

Б. Модуляция на анод

Построение диаграммы модуляции при постоянной силе питающего тока. Выражения для i_a , u_a и u_g

На рис. 9.18, а заданы статические характеристики триода. Пусть напряжению анодной батареи соответствует статическая характеристика $I—I$. При отсутствии добавочного напряжения на сетку анодная сила тока определится ординатой I_{a0} (рис. 9.18, б). При заданном эквивалентном сопротивлении замкнутого контура рабочая характеристика определится отрезком $a—a'$. Допустим, что анодное напряжение мы увеличили до значения, равного $E_a + U_{ам}$. Анодная сила тока при этом увеличится до значения, равного $I_a + I_{ам}$, и рабочая характеристика при том же эквивалентном сопротивлении замкнутого контура определится отрезком $в—в'$.

Точно также при уменьшении анодного напряжения до значения $E_a - U_{ам}$ рабочая характеристика определится отрезком $бб'$. Таким образом, процесс модуляции определится движением рабочей характеристики между отрезками $в—в'$ и $б—б'$ с угловой частотой Ω .

Согласно графическому построению кривых, огибающих амплитуды высокой частоты (рис. 9.18, в), нетрудно доказать, что анодная сила тока i_a , анодное напряжение u_a и напряжение на сетку u_g аналитически выразятся

следующим образом:

$$\begin{aligned} i_a &= (I_{a0} + I_{aM} \sin \Omega t) (1 + \sin \omega t), \\ u_a &= E_a + k_{a1} I_{aM} \sin \Omega t - (U_{a0} + k_{a2} I_{aM} \sin \Omega t) \sin \omega t, \\ u_g &= (U_{g0} + k_g I_{aM} \sin \Omega t) \sin \omega t. \end{aligned} \quad (9.56)$$

В выражениях (9.56) k_{a1} , k_{a2} и k_g являются коэффициентами пропорциональности. Остальные обозначения понятны из рисунка.

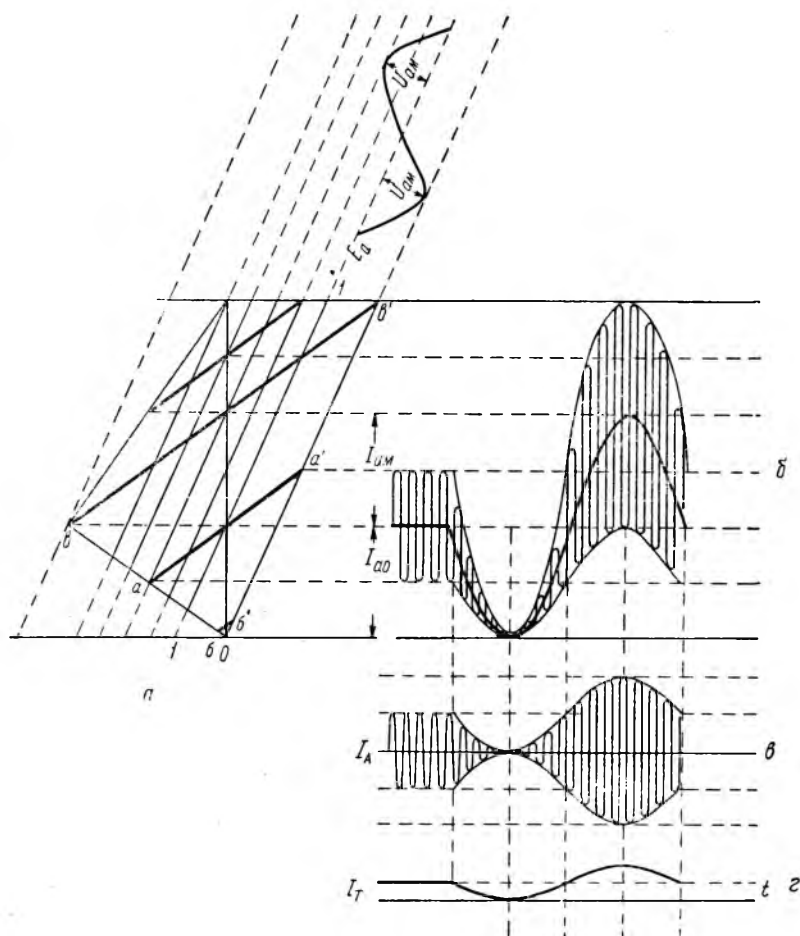


Рис. 9.18

Определение коэффициентов k

Переменная слагающая высокой частоты анодного тока определится из первой формулы (9.56) следующим выражением:

$$i_a = (I_{a0} + I_{aM} \sin \Omega t) \sin \omega t. \quad (9.57)$$

Соответствующая ей слагающая сеточного напряжения будет равна

$$u_g = (U_{g0} + k_g I_{aM} \sin \Omega t) \sin \omega t. \quad (9.58)$$

На основании соотношения $i_a = S_A u_g$

мы получим

$$\begin{aligned} I_{a0} &= S_A U_{g0}, \\ I_{aM} &= k_g S_A I_{aM}. \end{aligned} \quad (9.59)$$

Для слагающих высокой частоты анодного тока (9.57) и анодного напряжения

$$u_a = -(U_{a0} + k_{a2} I_{aM} \sin \Omega t) \sin \omega t$$

имеем соотношение

$$z i_a = -u_a,$$

откуда следует

$$\begin{aligned} U_{a0} &= z I_{a0}, \\ z &= k_{a2}. \end{aligned} \quad (9.60)$$

Из уравнения статической характеристики получим

$$\begin{aligned} i_a &= S u_g + \frac{u_a}{R_i}, \\ I_{a0} + I_{aM} \sin \Omega t + (I_{a0} + I_{aM} \sin \Omega t) \sin \omega t &= \\ &= S (U_{g0} + k_g I_{aM} \sin \Omega t) \sin \omega t + \frac{E_a}{R_i} + \\ &+ \frac{k_{a1}}{R_i} I_{aM} \sin \Omega t - \frac{U_{a0} + k_{a2} I_{aM} \sin \Omega t}{R_i} \sin \omega t. \end{aligned}$$

Сравнивая постоянные слагающие, находим

$$I_{a0} = \frac{E_a}{R_i}.$$

Затем мы должны иметь

$$k_{a1} = R_i \quad (9.61)$$

и

$$I_{a0} + I_{aM} \sin \Omega t = S (U_{g0} + k_g I_{aM} \sin \Omega t) - \frac{U_{a0} + k_{a2} I_{aM} \sin \Omega t}{R_i}.$$

При отсутствии модуляции

$$I_{a0} = S U_{g0} - \frac{U_{a0}}{R_i},$$

что дает уравнение рабочей характеристики ($a - a$) (рис. 9.18), благодаря чему находим

$$1 = S k_g - \frac{k_{a2}}{R_i}.$$

Подставляем значения k_g и k_{a2} из (9.59) и (9.60):

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{S}{S_A} - \frac{z}{R_i} \\ \text{или } S_A \left(1 + \frac{z}{R_i} \right) &= S, \end{aligned}$$

откуда следует, что

$$S_A = \frac{R_i S}{R_i + z}. \quad (9.62)$$

На основании полученных значений для коэффициентов k выражения (9.56) приводятся к следующему виду:

$$\begin{aligned} i_a &= I_{a0} \left(1 + \frac{I_{aM}}{I_{a0}} \sin \Omega t \right) (1 + \sin \omega t), \\ u_a &= E_a \left[1 + \frac{R_i I_{aM}}{E_a} \sin \Omega t - \left(\frac{U_{a0}}{E_a} + \frac{z I_{aM}}{E_a} \sin \Omega t \right) \sin \omega t \right], \\ u_g &= U_{g0} \left[1 + \frac{I_{aM}}{S_A U_{g0}} \sin \Omega t \right] \sin \omega t. \end{aligned} \quad (9.56a)$$

Обозначим $\frac{I_{aM}}{I_{a0}} = \bar{k}$ и примем во внимание следующие соотношения:

$$\begin{aligned} R_i I_{aM} &= U_{aM}, \\ \frac{z I_{aM}}{E_a} &= \frac{U_{a0}}{I_{a0}} \frac{I_{aM}}{E_a} = \frac{U_{a0}}{E_a} \bar{k} = \xi \bar{k}, \\ \frac{I_{aM}}{S_A U_{g0}} &= \bar{k}. \end{aligned} \quad (9.63)$$

Тогда найдем

$$\begin{aligned} i_a &= I_{a0} (1 + \bar{k} \sin \Omega t) (1 + \sin \omega t), \\ u_a &= E_a \left[1 + \frac{U_{aM}}{E_a} \sin \Omega t - \xi (1 + \bar{k} \sin \Omega t) \sin \omega t \right] \end{aligned} \quad (9.64)$$

или

$$\begin{aligned} u_a &= E_a \left[1 + \frac{U_{aM}}{U_{a0}} \cdot \frac{U_{a0}}{E_a} \sin \Omega t - \xi (1 + \bar{k} \sin \Omega t) \sin \omega t \right] = \\ &= E_a \left[1 + \frac{R_i}{z} \xi \bar{k} \sin \Omega t - \xi (1 + \bar{k} \sin \Omega t) \sin \omega t \right], \end{aligned} \quad (9.65)$$

или же

$$\begin{aligned} u_a &= E_a \left[1 + \frac{U_{aM}}{U_{a0}} \xi \sin \Omega t - \xi (1 + \bar{k} \sin \Omega t) \sin \omega t \right], \\ u_g &= U_{g0} [1 + \bar{k} \sin \Omega t] \sin \omega t. \end{aligned} \quad (9.66)$$

Нетрудно доказать, что

$$\bar{k} = \frac{i_{a \text{ макс}} - i_{a \text{ мин}}}{i_{a \text{ макс}} + i_{a \text{ мин}}}$$

есть коэффициент модуляции.

Коэффициенты ξ и $\bar{k}$ связаны следующим образом. Определим из (9.65) значение $u_{a \text{ мин}}$ (считая $R_i \leq z$):

$$u_{a \text{ мин}} = E_a \left[1 + \frac{R_i}{z} \xi \bar{k} - \xi (1 + \bar{k}) \right]. \quad (9.67)$$

Разделив на U_{a0} , найдем

$$\frac{u_{a \text{ мин}}}{U_{a0}} = \frac{1}{\xi} \left[1 + \frac{R_i}{z} \xi \bar{k} - \xi (1 + \bar{k}) \right]$$

или

$$\frac{u_{a \text{ мин}}}{U_{a0}} = \frac{1}{\xi} + \frac{R_i}{z} \bar{k} - 1 - \bar{k},$$

откуда следует

$$\frac{u_{a \text{ мин}}}{U_{a0}} - \frac{R_i}{z} \bar{k} + 1 + \bar{k} = \frac{1}{\xi}$$

или

$$\xi = \frac{1}{1 + \bar{k} \left(1 - \frac{R_i}{z}\right) + \frac{u_{a \text{ мин}}}{U_{a0}}} \quad (9.68)$$

Возможное наибольшее значение ξ при заданном коэффициенте модуляции, на основании условия $\frac{u_{a \text{ мин}}}{U_{a0}} \geq 0$, будет равно

$$\xi = \frac{1}{1 + \bar{k} \left(1 - \frac{R_i}{z}\right)} \quad (9.68a)$$

Из выражения (9.68a) следует, что

- 1) $\frac{R_i}{z}$ должно быть ≤ 1 ;
- 2) $\bar{k}$ может быть равно единице при любом ξ , в зависимости от соответствующего значения R_i/z ;
- 3) при $\frac{R_i}{z} = 1$, ξ не зависит от $\bar{k}$.

Выражения для мощностей

а) Мощность, подведенная от источника высокого напряжения к генератору высокой частоты,

$$W_2 = \frac{1}{T_2} \int_0^{T_2} i_a E_a dt = E_a I_{a0}.$$

б) Мгновенное значение мощности, выделенной на аноде, будет [см. (9.64), (9.65)]

$$\begin{aligned} W_3 &= \frac{1}{T_1} \int_0^{T_1} i_a u_a dt = \\ &= \frac{1}{T_1} \int_0^{T_1} I_{a0} (1 + \bar{k} \sin \Omega t) (1 + \sin \omega t) E_a \left[1 + \frac{R_i}{z} \xi \bar{k} \sin \Omega t - \right. \\ &\quad \left. - \xi (1 + \bar{k} \sin \Omega t) \sin \omega t \right] dt = \\ &= I_{a0} E_a (1 + \bar{k} \sin \Omega t) \left(1 + \frac{R_i}{z} \xi \bar{k} \sin \Omega t \right) - \frac{I_{a0} E_a}{2} (1 + \bar{k} \sin \Omega t)^2 \xi. \end{aligned} \quad (9.69)$$

Мощность звуковой частоты будет равна

$$\begin{aligned} W_4 &= \frac{1}{T_2} \int_0^{T_2} W_a dt = I_{a0} E_a \left(1 + \frac{R_i}{z} \xi \frac{\bar{k}^2}{2} \right) - \frac{I_{a0} E_a}{2} \left(1 + \frac{\bar{k}^2}{2} \right) \xi = \\ &= W_2 + W_5 - W_1. \end{aligned} \quad (9.70)$$

Нетрудно доказать, что $W_1 = \frac{I_{a0} E_a}{2} \xi \left(1 + \frac{\bar{k}^2}{2} \right)$ есть мощность высокой частоты, т. е. полезная мощность, отданная в контур, а W_5 — мощность,

подведенная и выделенная на аноде генератора высокой частоты модуляционным приспособлением.

Таким образом, к генератору высокой частоты подводится от источника высокого напряжения мощность, равная

$$W_a = I_{a0} E_a,$$

и от модулятора

$$W_b = E_a I_{a0} \frac{R_i}{z} \xi \frac{\bar{k}^2}{2} = \frac{I_{ам}^2 R_i}{2} = \frac{U_{ам}^2}{2R_i} = \frac{U_{ам} I_{ам}}{2}.$$

Расчет модулятора

Для расчета модуляционного устройства заменяем схему (рис. 9.19) присоединения модулятора эквивалентной схемой (рис. 9.20).

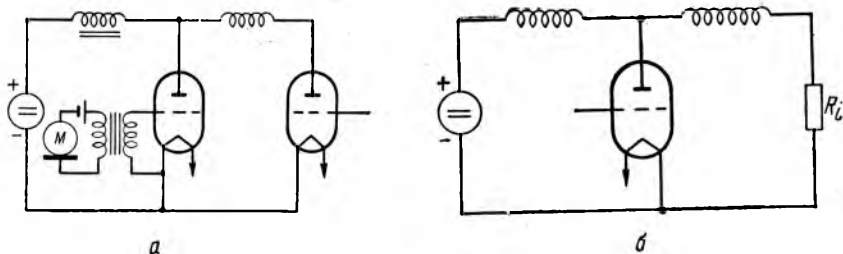


Рис. 9.19

Эквивалентное сопротивление в анодной цепи определяется из соотношения

$$\frac{1}{z_{\text{эkv}}} = \frac{1}{R_i} + \frac{1}{z}, \quad z = j\Omega L, \quad (9.71)$$

т. е.

$$z_{\text{эkv}} = \frac{R_i r}{R_i + z}.$$

Сила анодного тока модуляторной лампы выразится так:

$$I_{ам} = \frac{U_{gm}}{D} \frac{1}{z_{\text{эkv}} + R_i}.$$

Мы предполагаем, что сопротивления генераторной и модуляторной ламп будут равны:

$$I_{ам} = \frac{U_{gm}}{D} \frac{R_i + z}{R_i^2 + 2zR_i}.$$

Амплитуда напряжения на аноде будет

$$U_{ам} = I_{ам} z_{\text{эkv}} = \frac{U_{gm}}{D} \frac{(R_i + z) R_i z}{(R_i + z)(R_i^2 + 2zR_i)} = \frac{U_{gm}}{D} \frac{R_i z}{R_i^2 + 2zR_i} = \frac{U_{gm}}{D} \frac{1}{\frac{R_i}{z} + 2}. \quad (9.72)$$

Находим модуль данного выражения ($z = j\Omega L$)

$$|U_{ам}| = \frac{U_{gm}}{2D} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{R_i}{2\Omega L}\right)^2}}$$

или

$$\frac{U_{ам}}{U_{gm}} = \frac{1}{2D} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{R_i}{2\Omega L}\right)^2}}. \quad (9.73)$$

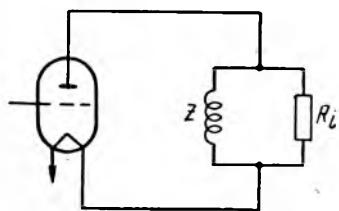


Рис. 9.20

Отношение $\frac{U_{ам}}{U_{гм}}$ не зависит от частоты только в том случае, если $\left(\frac{R_i}{2\Omega L}\right)^2 \ll 1$, при тех частотах, для которых $\left(\frac{R_i}{2\Omega L}\right)^2$ сравнимо с единицей, $\frac{U_{ам}}{U_{гм}}$ уменьшается с уменьшением Ω . В действительности соотношения получаются гораздо сложнее, так как источник высокого напряжения бывает заблокирован емкостью от токов высокой частоты и, кроме того, обладает собственной емкостью. Поэтому эквивалентная схема (рис. 9.20) приобретает вид, изображенный на рис. 9.21.

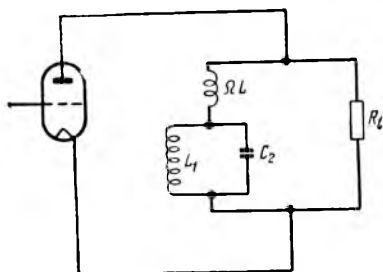


Рис. 9.21

Сопротивление, эквивалентное разветвленной цепи $L_1 C_2$, будет равно

$$z_1 = j \frac{\Omega L_1}{\Omega^2 L_1 C_2 - 1}, \quad (9.74)$$

а сопротивление всей цепи, содержащей индуктивные сопротивления,

$$z = j \left(\Omega L + \frac{\Omega L_1}{\Omega^2 L_1 C_2 - 1} \right) = j \frac{\Omega^3 L L_1 C_2 + \Omega (L_1 - L)}{\Omega^2 L_1 C_2 - 1}. \quad (9.75)$$

Эквивалентное сопротивление разветвленной цепи определится следующим выражением:

$$z_э = \frac{R_i z}{R_i + z}.$$

Таким образом, амплитуда напряжения на аноде будет равна

$$U_{ам} = \frac{U_{гм}}{D} \frac{z_э}{R_i + z_э}. \quad (9.76)$$

Путем подстановки значения $z_э$ находим модуль данного выражения:

$$\frac{U_{ам}}{U_{гм}} = \frac{1}{D} \frac{z_э}{R_i + z_э} = \frac{1}{D} \frac{\frac{\Omega^3 L L_1 C_2 + \Omega (L_1 - L)}{\Omega^2 L_1 C_2 - 1}}{R_i^2 + \left[\frac{\Omega^3 L L_1 C_2 + \Omega (L_1 - L)}{\Omega^2 L_1 C_2 - 1} \right]^2} \quad (9.77)$$

или

$$\begin{aligned} \frac{U_{ам}}{U_{гм}} &= \frac{1}{D} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{R_i^2 (\Omega^2 L_1 C_2 - 1)}{[(\Omega^3 L L_1 C_2 + \Omega (L_1 - L))^2]}}}, \\ \frac{U_{ам}}{U_{гм}} &= \frac{1}{D} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{R_i^2 (\Omega^2 - n_1^2)^2}{[(\Omega^3 L + \Omega (\frac{1}{C_2} - \frac{L}{L_1 C_2}))^2]}}}, \end{aligned} \quad (9.78)$$

где $n_1^2 = \frac{1}{L_1 C_2}$ и $n^2 = \frac{1}{LC_2}$,

$$\frac{U_{ам}}{U_{гм}} = \frac{1}{D} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{R_i^2}{\Omega^2 L^2} \frac{(\Omega^2 - n_1^2)^2}{(\Omega^2 + n^2 - n_1^2)^2}}}$$

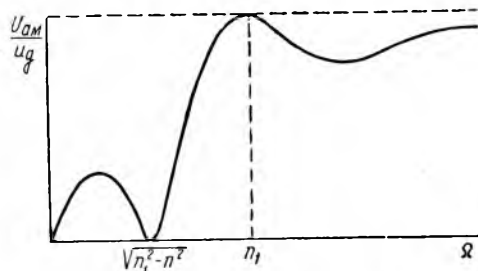


Рис. 9.22

Обратим внимание на то обстоятельство, что $n^2 = \frac{1}{LC_2}$ значительно меньше, чем $n_1^2 = \frac{1}{L_1 C_2}$ ($n < n_1$):

$$\frac{U_{ам}}{U_{гм}} = \frac{1}{D} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{R_i}{\Omega L}\right)^2 \frac{(\Omega^2 - n_1^2)^2}{\Omega^2 - (n_1^2 - n^2)^2}}}. \quad (9.79)$$

Таким образом, при увеличении Ω от нуля Ω^2 сперва принимает значение $n_1^2 - n^2$, а затем n_1^2 (рис. 9.22).

ОСНОВЫ РАСЧЕТА РАДИОТЕЛЕФОННОГО ГЕНЕРАТОРА

10.1. Расчет лампового генератора при немодулированных колебаниях* (третий вариант метода расчета)

Основные положения расчета

Расчет мы основываем на уравнении статической характеристики

$$i_a = S (u_g + Du_a), \quad (10.1)$$

где i_a , u_g и u_a означают мгновенные значения анодного тока, сеточного и анодного напряжений. Далее мы предполагаем, что в рабочем состоянии u_g и u_a изменяются по следующему закону:

$$\begin{aligned} u_g &= -E_g + U_{gm} \cos \omega t, \\ u_a &= E_a - U_{am} \cos \omega t, \end{aligned} \quad (10.2)$$

где E_g — постоянное отрицательное напряжение на сетке; E_a — постоянное напряжение на аноде; U_{gm} и U_{am} — амплитуды переменных слагающих сеточного и анодного напряжений.

Вывод уравнения для силы анодного тока

Подставив выражение (10.2) в (10.1), получим

$$i_a = S [-E_g + DE_a + (U_{gm} - DU_{am}) \cos \omega t] \quad (10.3)$$

или

$$i_a = S (U_{gm} - DU_{am}) \left(\cos \omega t + \frac{-E_g + DE_a}{U_{gm} - DU_{am}} \right). \quad (10.4)$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned} I_{am} &= S (U_{gm} - DU_{am}), \\ I_{a0} &= S (-E_g + DE_a); \end{aligned} \quad (10.5)$$

$$\begin{aligned} E_y &= -E_g + DE_a, \\ U_{ym} &= U_{gm} - DU_{am}; \end{aligned} \quad (10.6)$$

для $E_y \leq U_{ym}$

$$\begin{aligned} \sin \varphi &= \frac{E_y}{U_{ym}} \\ \sin \varphi &= \frac{-E_g + DE_a}{U_{gm} - DU_{am}}. \end{aligned} \quad (10.7)$$

* Данная работа М. В. Шулейкина написана в июле 1929 г. (Прим. составителя).

Реальные значения сила тока, согласно выражению (10.4), имеет только при условии

$$\cos \omega t + \frac{-E_g + DE_a}{U_{gm} - DU_{am}} \geq 0.$$

Выражение $\frac{-E_g + DE_a}{U_{gm} - DU_{am}}$ определяет режим колебаний тока в цепи анода.

Так, например,

при $-E_g + DE_a > U_{gm} - DU_{am}$ будут условия колебаний первого рода,

при $-E_g + DE_a = U_{gm} - DU_{am}$ — условия предельного случая колебаний первого рода,

при $-E_g + DE_a < U_{gm} - DU_{am}$ — условия колебаний второго рода и, наконец,

при $-E_g + DE_a = U_{gm} - DU_{am}$ — условия предельного случая колебаний второго рода.

Колебания первого рода $-E_g + DE_a \geq U_{gm} - DU_{am}$

Из выражения (10.1) имеем

$$\begin{aligned} i_a &= S (U_{gm} - DU_{am}) \cos \omega t + S (-E_g + DE_a) = \\ &= I_{am} \cos \omega t + I_{a0}. \end{aligned} \quad (10.8)$$

Значения силы тока при изменении ωt от нуля до 2π действительны. I_{am} в данном случае представляет амплитуду переменного тока; I_{a0} — постоянную слагающую.

Колебания второго рода $-E_g + DE_a < U_{gm} - DU_{am}$

На основании выражений (10.4) и (10.6) получим

$$i_a = S (U_{gm} - DU_{am}) [\cos \omega t + \sin \varphi]. \quad (10.9)$$

Это выражение можно представить так:

$$i_a = I_{am} (\cos \omega t + \sin \varphi).$$

В данном случае сила тока будет иметь действительные значения лишь при условии

$$\cos \omega t > \sin \varphi.$$

Значение угла ωt , при котором сила тока переходит от действительных положительных величин к отрицательным, имеющим лишь геометрическое значение, и определяет нулевое значение анодной силы тока, мы назовем углом отсека*.

Так как $i_a = 0$,

то

$$\cos \omega t + \sin \varphi = 0,$$

$$\cos \omega t = -\sin \varphi = \cos \left(\frac{\pi}{2} + \varphi \right)$$

* Это наименование, впервые введенное М. В. Шулейкиным, в настоящее время в нашей литературе изменено и принимается как угол отсечки. (Прим. составителя).

и $\omega t = \frac{\pi}{2} + \varphi$ есть значение угла отсека. Мы будем характеризовать угол отсека углом φ . Ток существует в продолжении удвоенного значения угла отсека.

Рассмотрим три случая:

- 1) $\varphi > 0$; $2\omega t = \pi + 2\varphi$ — анодный ток существует более полупериода;
- 2) $\varphi = 0$; ($2\omega t = \pi$) — анодный ток существует полупериода;
- 3) $\varphi < 0$; ($2\omega t = \pi - |2\varphi|$) — анодный ток существует меньше полупериода.

Графическое изображение колебаний анодного тока

Для графического изображения колебаний первого рода строим прямую (рис. 10.1), используя обозначения (10.5) — (10.7):

$$i_a = Su_y. \quad (10.10)$$

Запишем уравнение (10.3) так [см. (10.5)]:

$$\begin{aligned} i_a &= S [-E_g + DE_a + (U_{gm} - DU_{am}) \cos \omega t] = \\ &= S [E_y + U_{ym} \cos \omega t]. \end{aligned} \quad (10.10a)$$

Отложим $-E_y$ от начала координат, принимая во внимание знак этой величины (рис. 10.1).

К отложенной величине $-E_y$ прибавляем $\pm U_{ym}$ и радиусом, равным U_{ym} , описываем окружность (на чертеже показана полуокружность).

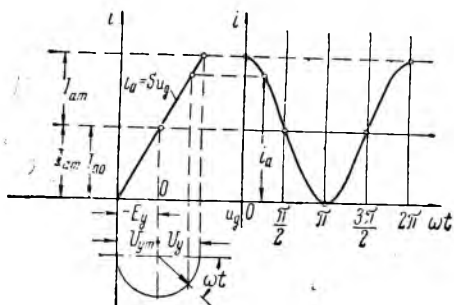


Рис. 10.1

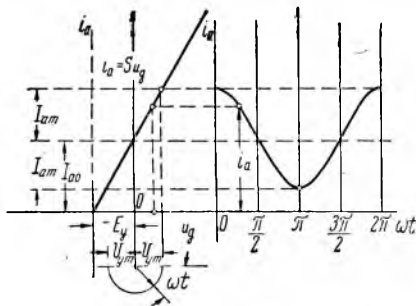


Рис. 10.2

Движение радиуса вектора определяет текущий угол ωt , позволяющий развернуть кривую силы тока в прямоугольных координатах.

На рис. 10.1 и 10.2 изображены колебания первого рода для случаев $E_y = U_{ym}$ и $E_y > U_{ym}$.

На рис. 10.3 показаны колебания второго рода для случая

$$E_y < U_{ym}.$$

При отсутствии колебаний сила анодного тока равна

$$i_a = SE_y.$$

Как не трудно доказать и как это видно из рис. 10.3, имеет место также следующее соотношение:

$$i_a = SE_y = I_{am} \sin \varphi, \quad (10.11)$$

где I_{am} — амплитуда колебания тока за положительный полупериод. Наибольшая сила анодного тока имеет значение

$$I_{am} (1 + \sin \varphi).$$

Так как E_y в данном случае положительно, то мы имеем положительное значение угла φ и

$$\sin \varphi = \frac{-E_g + DE_a}{U_{gn} - DU_{am}}.$$

Анодный ток существует больше полупериода.

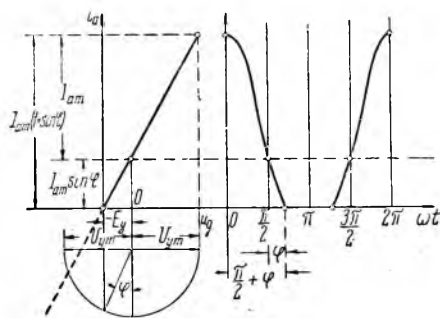


Рис. 10.3

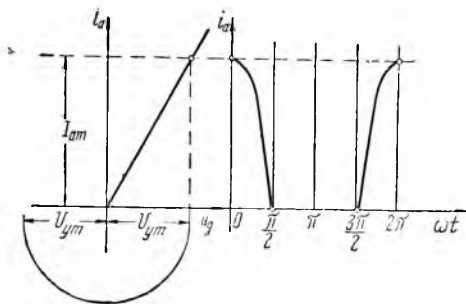


Рис. 10.4

На рис. 10.4 разобран случай $E_y = 0$ и $\varphi = 0$. В данном случае анодный ток существует полупериода. Амплитуда тока за положительный полупериод равна I_{am} . То же значение имеет и наибольшая сила анодного тока.

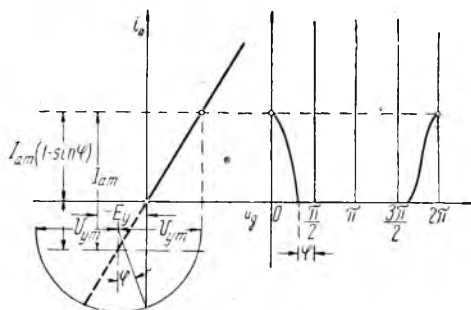


Рис. 10.5

Задавая постоянной составляющей управляющего напряжения отрицательное значение (10.5), получаем случай, когда анодный ток существует меньше полупериода:

$$\sin \varphi = \frac{E_y}{U_{ym}} < 0, \quad \varphi > 0.$$

Обращаем внимание, что в этом случае наибольшая сила тока не достигает значения амплитуды I_{am} :

$$i_{a \text{ макс}} = I_{am} (1 - \sin \varphi). \quad (10.12)$$

I_{am} можно рассматривать в этом случае как параметр, точно так же, как и величину

$$I_{am} \sin \varphi = SE_y, \quad (10.13)$$

имеющую лишь геометрическое значение.

Определение постоянной слагающей, первой гармоники и высших гармоник анодного тока

Так как сила анодного тока существует при изменении текущего угла ωt от $-\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right)$ до нуля и от нуля до $\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right)$, то по теореме Фурье мы можем определить постоянную слагающую этого тока

$$\begin{aligned} I_{a0} &= \frac{1}{T} \int_0^T i_a dt = \frac{1}{T} \int_{-\frac{1}{\omega} \left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right)}^{\frac{1}{\omega} \left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right)} i_a dt = \\ &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{1}{\omega} \left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right)}^{\frac{1}{\omega} \left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right)} S [E_y + U_{ym} \cos \omega t] dt = \\ &= \frac{S}{\pi} \left[E_y \left(\frac{\pi}{2} + \varphi \right) + U_{ym} \cos \varphi \right]. \end{aligned} \quad (10.14)$$

Последнее выражение перепишем в следующем виде:

$$\begin{aligned} I_{a0} &= \frac{1}{\pi} S U_{ym} \left[\frac{E_y}{U_{ym}} \left(\frac{\pi}{2} + \varphi \right) + \cos \varphi \right] = \\ &= \frac{I_{am}}{\pi} \left[\left(\frac{\pi}{2} + \varphi \right) \sin \varphi + \cos \varphi \right] = I_{am} \alpha_0. \end{aligned}$$

Таким образом, постоянная слагающая анодной силы тока равна

$$I_{a0} = I_{am} \alpha_0, \quad (10.15)$$

где

$$\alpha_0 = \frac{1}{\pi} \left[\left(\frac{\pi}{2} + \varphi \right) \sin \varphi + \cos \varphi \right]. \quad (10.15a)$$

При колебаниях первого рода (предельный случай)

$$\varphi = \frac{\pi}{2}, \quad \alpha_0 = 1, \quad I_{a0} = I_{am}.$$

Значения α_0 даны в табл. 7.1 и на рис. 7.38. По той же теореме находим значение первой гармоники

$$\begin{aligned} I_{a1m} &= \frac{2}{T} \int_0^T i_a \cos \omega t dt = \frac{2}{T} \int_{-\frac{1}{\omega} \left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right)}^{\frac{1}{\omega} \left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right)} S [E_y \cos \omega t + U_{ym} \cos^2 \omega t] dt = \\ &= \frac{S}{\pi} \left[2E_y \cos \varphi + U_{ym} \left(\frac{\pi}{2} + \varphi - \frac{1}{2} \sin 2\varphi \right) \right] \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} I_{a1m} &= \frac{S U_{ym}}{\pi} \left[2 \frac{E_y}{U_{ym}} \cos \varphi + \left(\frac{\pi}{2} + \varphi - \frac{1}{2} \sin 2\varphi \right) \right] = \\ &= \frac{I_{am}}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} + \varphi + \frac{1}{2} \sin 2\varphi \right]. \end{aligned} \quad (10.16)$$

Таким образом, первая гармоника анодного тока определяется так:

$$I_{a1m} = I_{am}\alpha_1, \quad (10.17)$$

где

$$\alpha_1 = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} + \varphi + \frac{1}{2} \sin 2\varphi \right]. \quad (10.17a)$$

Значения для α_1 приведены в табл. 7.1 и на рис. 7.38.

Связь между I_{am} , U_{ym} и E_y

Согласно выражениям (10.3) и (10.9) мы имеем

$$\begin{aligned} I_{am}[\cos \omega t + \sin \varphi] &= S [-E_g + DE_a + (U_{gm} - DU_{am}) \cos \omega t] = \\ &= S [E_y + U_{ym} \cos \omega t]. \end{aligned} \quad (10.18)$$

Так как приведенное выражение должно удовлетворяться при любом (ωt) , то мы должны получить

$$\begin{aligned} I_{am} \cos \omega t &= S U_{ym} \cos \omega t, \\ I_{am} &= S U_{ym}, \end{aligned} \quad (10.19)$$

$$I_{am} \sin \varphi = S E_y. \quad (10.20)$$

Уравнение рабочей характеристики

На основании уравнения (10.19) мы можем написать

$$I_{am} = S U_{ym} = S(U_{gm} - D U_{am}).$$

Так как можно положить, что $U_{am} = I_{a1m} z_0$, где z_0 — эквивалентное сопротивление колебательного контура генератора, то мы получим

$$I_{am} = S U_{gm} - \frac{I_{a1m} z_0}{R_i}. \quad (10.21)$$

Принимая во внимание, что

$$I_{a1m} = I_{am} \alpha_1, \quad (10.22)$$

получим

$$I_{am} = \frac{S U_{gm}}{1 + \frac{z_0}{R_i} \alpha_1} = S_g U_{gm}, \quad (10.23)$$

где

$$S_g = \frac{S}{1 + \frac{z_0}{R_i} \alpha_1}. \quad (10.24)$$

Последнее выражение дает значение для крутизны рабочей характеристики лампы.

Значение эквивалентного сопротивления определяется выражением

$$z_0 = \frac{1}{2} \frac{U_{am}^2}{W_1}, \quad (10.25)$$

где $W_1 = \frac{1}{2} U_{am} I_{a1m}$ — полезная мощность генератора.

Связь между U_{gm} и U_{am}

Из того же выражения (10.22) мы можем найти, что

$$I_{am} = S (U_{gm} - D U_{am}); \quad I_{am} = \frac{I_{a1m}}{\alpha_1} = \frac{U_{am}}{Z_0 \alpha_1} \quad (10.26)$$

$$\frac{U_{am}}{Z_0 \alpha_1} = S U_{gm} - \frac{U_{am}}{R_i}, \quad (10.27)$$

откуда следует

$$\frac{U_{gm}}{U_{am}} = K = \frac{1}{S Z_0 \alpha_1} + D = D \left[1 + \frac{R_i}{Z_0 \alpha_1} \right]. \quad (10.28)$$

Связь между наибольшим положительным значением напряжения на сетке ($-E_g + U_{gm}$) и остаточным напряжением на аноде ($E_a - U_{am}$)

Эмиссия катода распределяется между двумя электродами — анодом и сеткой.

В случае, если напряжение на аноде значительно больше напряжения на сетке, почти все электроны попадают на анод. Когда напряжения на сетке и на аноде делаются сравнимыми, то на сетку идет значительная часть тока, анодный ток падает и наступает так называемый перенапряженный режим. Последний характеризуется излишними потерями на сетке и падением коэффициента полезного действия генератора.

Для того чтобы избежать перенапряженного режима, Пренс (1926) рекомендует выбирать избыток положительного напряжения на сетке равным 0,8 положительного остатка напряжения на аноде, т. е.

$$(-E_g + U_{gm}) = 0,8 (E_a - U_{am}).$$

В приближенном расчете Пренс пользуется соотношением

$$-E_g + U_{gm} = E_a - U_{am}$$

и из данного соотношения получает аналитические выражения для $(-E_g)$ и (U_{gm}) .

Мы ставим задачу несколько шире и полагаем, что для того, чтобы избежать перенапряженного режима, должно быть

$$E_a - U_{am} > -E_g + U_{gm} \quad (10.29)$$

или

$$-E_g + U_{gm} = \alpha (E_a - U_{am}) = \alpha E_a (1 - \xi), \quad (10.29a)$$

где

$$\xi = \frac{U_{am}}{E_a} \quad (10.29b)$$

и α — число меньше единицы.

Полагая ωt равным углу отсека,

$$\omega t = \frac{\pi}{2} + \varphi,$$

мы получим

$$E_g + U_{gm} \sin \varphi = D E_a + D U_{am} \sin \varphi = D E_a (1 + \xi \sin \varphi). \quad (10.30)$$

Решение уравнений (10.29а) и (10.30) дает нам

$$\left. \begin{aligned} \frac{U_{gm}}{E_a} &= \frac{\alpha(1-\xi) + D(1+\xi \sin \varphi)}{1 + \sin \varphi}, \\ \frac{E_g}{E_a} &= \frac{D(1+\xi \sin \varphi) - \alpha(1-\xi) \sin \varphi}{1 + \sin \varphi}. \end{aligned} \right\} \quad (10.31)$$

Выражения (10.31) дают возможность непосредственно рассчитать напряжения на сетке и на аноде.

Мощности: полезная W_1 , подводенная W_0 и потери на аноде $W_a = W_0 - W_1$

Полезную мощность определяем по формуле

$$W_1 = \frac{1}{2} I_{a1m} U_{am} = \frac{\xi}{2} I_{a1m} E_a = \frac{\xi}{2} I_{am} \alpha_1 E_a. \quad (10.32)$$

Мощность подводенная рассчитывается по формуле

$$W_0 = E_a I_{a0} = E_a I_{am} \alpha_0, \quad (10.33)$$

потери на аноде определяются из (10.32) и (10.33)

$$W_a = E_a I_{a0} - \frac{\xi}{2} I_{a1m} E_a = E_a \left(I_{a0} - \frac{\xi}{2} I_{a1m} \right). \quad (10.34)$$

Так как, согласно (10.15) и (10.17),

$$I_{a0} = I_{am} \alpha_0 \text{ и } I_{a1m} = I_{am} \alpha_1,$$

то, следовательно,

$$I_{a0} = \frac{\alpha_0}{\alpha_1} I_{a1m} \quad (10.35)$$

и

$$W_a = E_a I_{a1m} \left[\frac{\alpha_0}{\alpha_1} - \frac{\xi}{2} \right] = E_a I_{a1m} \left[\frac{1}{\alpha_2} - \frac{\xi}{2} \right], \quad (10.36)$$

где $\frac{\alpha_1}{\alpha_0} = \alpha_2$.

Коэффициент полезного действия определяется следующим образом:

$$\eta = \frac{W_1}{W_0} = \frac{\xi}{2} \frac{\alpha_1}{\alpha_0} = \frac{\xi}{2} \alpha_2. \quad (10.37)$$

10.2. Расчет лампового генератора при колебаниях, модулированных синусоидой [с угловой частотой $\Omega \ll \varepsilon$]

Модуляция в предыдущем каскаде, уравнение модуляции

Анодным контуром предыдущего каскада задается напряжение на сетку рассчитываемого каскада. Его выражение мы можем считать известным:

$$u_g = -E_g + U_{gm} \cos \omega t, \quad (10.38)$$

$$U_{gm} = U_{gm} (1 + k_g \cos \Omega t), \quad (10.38a)$$

где

$$k_g = \frac{U_{gm \text{ макс}} - U_{gm \text{ мин}}}{U_{gm \text{ макс}} + U_{gm \text{ мин}}}. \quad (10.39)$$

В результате возбуждения рассчитываемого генератора мы получаем силу анодного тока, первая гармоника которого в данном состоянии модуляции определяет напряжение на анодном контуре

$$I_{a1m} z_0 = U_{am}. \quad (10.40)$$

Предполагаем, что напряжение на аноде

$$u_a = E_a - U_{am} \cos \omega t, \quad (10.41)$$

$$U_{am} = U_{am} (1 + k_a \cos \Omega t),$$

$$k_a = \frac{U_{am \text{ макс}} - U_{am \text{ мин}}}{U_{am \text{ макс}} + U_{am \text{ мин}}}. \quad (10.42)$$

В силу соотношения (10.41) коэффициент модуляции первой гармоники анодного тока в данном состоянии модуляции и анодного напряжения один и тот же. Подставляя (10.38) и (10.41) в уравнение статической характеристики, получаем выражение анодной силы тока

$$i_a = S [-E_g + DE_a + (U_{gm} - DU_{am}) \cos \omega t], \quad (10.42a)$$

откуда следует

$$i_a = S (U_{gm} - DU_{am}) \left[\cos \omega t + \frac{-E_g + DE_a}{U_{gm} - U_{am}} \right]. \quad (10.43)$$

Как и ранее, введем обозначения

$$S (U_{gm} - DU_{am}) = I_{am}, \quad (10.44)$$

$$-E_g + DE_a = E_y, \quad (10.45)$$

$$U_{gm} - DU_{am} = U_{ym}, \quad (10.46)$$

$$\frac{-E_g + DE_a}{U_{gm} - DU_{am}} = \sin \chi = \frac{E_y}{U_{ym}}. \quad (10.47)$$

Получаем

$$i_a = I_{am} [\cos \omega t + \sin \chi] \quad (10.48)$$

или

$$i_a = S [U_{ym} \cos \omega t + E_y]. \quad (10.48a)$$

Сравнение двух последних выражений дает

$$I_{am} \sin \chi = SE_y \quad (10.49)$$

и

$$I_{am} = SU_{ym}. \quad (10.50)$$

Связь между коэффициентами модуляции

Выражение (10.50) можно представить в следующем виде:

$$I_{am} = I_{am} (1 + k_g' \cos \Omega t). \quad (10.50a)$$

Коэффициент модуляции силы анодного тока на основе (10.48a) будет равен

$$k_i = \frac{i_{a \text{ макс}} - i_{a \text{ мин}}}{i_{a \text{ макс}} + i_{a \text{ мин}}} = \frac{I_{am \text{ макс}} - I_{am \text{ мин}}}{I_{am \text{ макс}} + I_{am \text{ мин}} + 2SE_y}. \quad (10.51)$$

На основании (10.50а) имеем

$$I_{ам макс} - I_{ам мин} = 2k'_g I_{ам},$$

$$I_{ам макс} + I_{ам мин} = 2I_{ам}$$

и

$$k_i = \frac{I_{ам} k'_g}{I_{ам} + SE_y} = \frac{k'_g}{1 + \sin \varphi}, \quad (10.52)$$

так как на основании (10.49)

$$I_{ам} \sin \varphi = SE_y.$$

Выражение (10.51) дает возможность установить связь между коэффициентами модуляции силы анодного тока и первой гармоникой.

Заметим, что

$$i_{макс} = \frac{I_{а1м макс}}{\alpha_{1 макс}}; \quad i_{мин} = \frac{I_{а1м мин}}{\alpha_{1 мин}}. \quad (10.53)$$

На основании этого и (10.51) найдем, что

$$k_i = \frac{I_{а1м макс} \alpha_{1 мин} - I_{а1м мин} \alpha_{1 макс}}{I_{а1м макс} \alpha_{1 мин} + I_{а1м мин} \alpha_{1 макс}}. \quad (10.54)$$

Принимая во внимание, что

$$I_{а1м} = I_{ам} (1 + k_a \cos \Omega t),$$

получим

$$k_i = \frac{(1 + k_a) \alpha_{1 мин} - (1 - k_a) \alpha_{1 макс}}{(1 + k_a) \alpha_{1 мин} + (1 - k_a) \alpha_{1 макс}},$$

$$k_i = \frac{\alpha_{1 мин} - \alpha_{1 макс} + k_a (\alpha_{1 мин} + \alpha_{1 макс})}{\alpha_{1 мин} + \alpha_{1 макс} + k_a (\alpha_{1 мин} - \alpha_{1 макс})}. \quad (10.54a)$$

Принимая обозначения

$$x = \frac{\alpha_{1 мин} + \alpha_{1 макс}}{\alpha_{1 мин} - \alpha_{1 макс}}, \quad y = \frac{\alpha_{1 мин} + \alpha_{1 макс}}{\alpha_{1 макс} - \alpha_{1 мин}},$$

можно записать последнее выражение так:

$$k_i = \frac{1 + k_a x}{x + k_a}, \quad (10.54b)$$

$$k_a = \frac{1 + k_i y}{k_i + y}. \quad (10.55)$$

Из выражений (10.44) и (10.50а) нетрудно получить соотношение

$$I_{ам} k'_g = (k_g U_{gm} - k_a D U_{ам}) S \quad (10.56)$$

или [см. (10.44)]

$$k'_g = \frac{k_g U_{gm} - k_a D U_{ам}}{(U_{gm} - D U_{ам})}.$$

Так как нам коэффициент модуляции k'_g задается, то мы выразим через него все остальные коэффициенты модуляции. На основании (10.52) и (10.546)

$$k'_g = k_i (1 + \sin \varphi) = \frac{1 + k_a x}{x + k_a} (1 + \sin \varphi). \quad (10.57)$$

Анализ рассмотренных выше зависимостей при $\varphi = 0$

Как показывает исследование выведенных формул, наиболее простые зависимости получаются при условии $\varphi = 0$.

В этом случае

$$\begin{aligned} S(U_{gm} - DU_{am}) &= I_{am}, \\ E_y &= 0, \quad \sin \chi = 0 \end{aligned}$$

(независимо от состояния модуляции, см. (10.47))

или

$$\begin{aligned} i_a &= I_{am} \cos \omega t, \\ i_a &= S U_{ym} \cos \omega t, \\ I_{am} &= S U_{ym}. \end{aligned}$$

Отличительным свойством предложенного режима является то, что все коэффициенты модуляции одинаковы:

$$k_i = k'_g, \quad k_i \approx k_a, \quad k_l = k'_g \approx k_a = k, \quad [(10.57a)]$$

$$k_g = k'_g - (k'_g - k_a) \frac{DU_{am}}{U_{gm}}. \quad (10.58)$$

Как видим, коэффициент k_g отличается от k'_g на очень малую величину.

В этом случае очень просто определяются полезная и подведенная мощности:

$$W_1 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{1}{\omega} \frac{\pi}{2}}^{+\frac{1}{\omega} \frac{\pi}{2}} U_{am} I_{am} \cos^2 \omega t \, dt = \frac{U_{am} I_{am}}{T} \int_{-\frac{1}{\omega} \frac{\pi}{2}}^{+\frac{1}{\omega} \frac{\pi}{2}} \cos^2 \omega t \, dt = \frac{U_{am} I_{am}}{4}. \quad (10.59)$$

Далее подставляем U_{am} и I_{am} в (10.59) и поскольку $k_g \approx k'_g = k$ [см. (10.58)], то

$$W_1 = \frac{I_{am} (1 + k'_g \cos \Omega t) U_{am} (1 + k_a \cos \Omega t)}{4} = \frac{I_{am} U_{am} (1 + k \cos \Omega t)^2}{4}.$$

Окончательно, при $\cos \Omega t = 0,5$

$$W_1 = \frac{I_{am} U_{am}}{4} \left(1 + \frac{k}{2}\right)^2. \quad (10.60)$$

Так, для $\varphi = 0$ $I_{a1m} = I_{am} \alpha_1$, а $\alpha_1 = 0,5$ и

$$W_1 = \frac{I_{a1m} U_{am}}{2} \left(1 + \frac{k}{2}\right)^2. \quad (10.61)$$

Максимальная полезная мощность на основании этого будет равна

$$W_{1\text{макс}} = \frac{I_{am} U_{am}}{4} (1 + k)^2 = \frac{I_{a1m} U_{am}}{2} (1 + k)^2. \quad (10.61a)$$

Подведенная мощность определится так:

$$W_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{1}{\omega} \frac{\pi}{2}}^{+\frac{1}{\omega} \frac{\pi}{2}} E_a i_a dt = \frac{E_a I_{am}}{T} \int_{-\frac{1}{\omega} \frac{\pi}{2}}^{+\frac{1}{\omega} \frac{\pi}{2}} \cos \omega t dt = \frac{E_a I_{am}}{\pi}. \quad (10.62)$$

С другой стороны, заменяя I_{am} по формуле $I_{am} = I_{am} (1 + k \cos \Omega t)$, получим

$$\frac{1}{T} \int_0^T I_{am} dt = \frac{I_{am}}{T} \left[\int_0^T dt + k \int_0^T \cos \Omega t dt \right] = I_{am}.$$

Тогда

$$W_0 = \frac{E_a I_{am}}{\pi}. \quad (10.63)$$

Так как $I_{a0} = I_{am} \alpha_0$, а для $\varphi = 0$, $\alpha_0 = \frac{1}{\pi}$, то с учетом этого из (10.63), получим

$$W_0 = E_a I_{a0}. \quad (10.64)$$

Коэффициент полезного действия для данного случая выразится так:

$$\eta = \frac{I_{a1m} U_{am}}{2} \frac{\left(1 + \frac{k}{2}\right)^2}{E_a I_{a0}} = \frac{1}{2} \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \xi \left(1 + \frac{k}{2}\right)^2. \quad (10.65)$$

При отсутствии модуляции ($k = 0$) к.п.д. равен

$$\eta = \frac{1}{2} \frac{\alpha_1}{\alpha_0} \xi \quad (10.66)$$

и в состоянии наибольшей модуляции

$$W_{1 \text{ макс}} = \frac{I_{am} U_{am}}{4} (1 + k)^2 = \frac{I_{a1m} U_{am}}{2} (1 + k)^2, \quad (10.67)$$

$$W_0 = \frac{E_a I_{am} (1 + k)}{\pi}, \quad (10.68)$$

$$W_0 = E_a I_{a0} (1 + k),$$

$$\eta = \frac{1}{2} \frac{\alpha_1}{\alpha_0} \xi (1 + k) \quad (10.69)$$

(ξ определяется по немодулированному состоянию). При выборе величины ξ надо иметь в виду следующее:

$$U_{am} = U_{am} (1 + k \cos \Omega t);$$

наибольшее значение $U_{am \text{ макс}} = U_{am} (1 + k)$ и так как

$$\frac{U_{am \text{ макс}}}{E_a} = \frac{U_{am}}{E_a} (1 + k) = b,$$

$$\xi = \frac{b}{1 + k}.$$

Таким образом, если $k = 1$ и $b = 0,9$, то $\xi = 0,45$.

Задавая предельные режимы модуляции, состояние наивысшей модуляции $\Omega t = 0$, немодулированное состояние $\Omega t = \frac{\pi}{2}$ и наименьшей модуляции $\Omega t = \pi$, можно провести подобный анализ для различных углов отсека.

10.3. Частотная модуляция

Общая постановка вопроса

Модулированные по частоте колебания могут быть в данном случае выражены функцией следующего вида:

$$u_f = \sin q(t). \quad (10.70)$$

Можно принять, что угловая частота определяется по формуле

$$\omega = \frac{d}{dt} q(t), \quad (10.71)$$

а изменение угловой частоты — выражением

$$\omega = \omega_0 + \varphi(t). \quad (10.72)$$

Функцию $\varphi(t)$ нельзя определить, не исходя из конкретной схемы, хотя бы очень общей.

Обычно допускают, что $\varphi(t)$ выражается следующим образом:

$$\varphi(t) = q \sin \Omega t, \quad (10.73)$$

где Ω — угловая частота модулированного звука. Тогда из уравнений (10.71), (10.72) и (10.73) получаем

$$q(t) = \int \omega dt = \omega_0 t - \frac{q}{\Omega} \cos \Omega t,$$

согласно чему, на основании уравнения (10.70),

$$u_f = \sin \left(\omega_0 t - \frac{q}{\Omega} \cos \Omega t \right). \quad (10.74)$$

Выражение (10.74) может быть исследовано двояко.

а) Рассмотрим выражение для u_f как синус разности:

$$u_f = \sin \omega_0 t \cos \left(\frac{q}{\Omega} \cos \Omega t \right) - \cos \omega_0 t \sin \left(\frac{q}{\Omega} \cos \Omega t \right). \quad (10.75)$$

Разлагая синус и косинус в ряд, найдем

$$\begin{aligned} \cos \left(\frac{q}{\Omega} \cos \Omega t \right) &= 1 - \left(\frac{q}{\Omega} \right)^2 \frac{1}{2} \frac{(1 + \cos 2\Omega t)}{2!} + \\ &+ \left(\frac{q}{\Omega} \right)^4 \frac{1}{4!} \frac{\left[1 + 2 \cos 2\Omega t + \frac{1}{2} (1 + \cos 4\Omega t) \right]}{4!} - \dots \\ \sin \left(\frac{q}{\Omega} \cos \Omega t \right) &= \frac{q}{\Omega} \cos \Omega t - \left(\frac{q}{\Omega} \right)^3 \frac{1}{4} \frac{\cos 3\Omega t + 3 \cos \Omega t}{3!} + \left(\frac{q}{\Omega} \right)^5 \frac{(\cos \Omega t)^3}{5!} - \dots \end{aligned}$$

одставляя данные выражения в уравнение (10.75), получим

$$\begin{aligned} u_f &= [(1 - \Omega_0) - \Omega_2 \cos 2\Omega t + \Omega_4 \cos 4\Omega t - \dots] \sin \omega_0 t - \\ &- \left[\left(\frac{q}{\Omega} + \Omega_1 \right) \cos \Omega t - \Omega_3 \cos 3\Omega t + \Omega_5 \cos 5\Omega t - \dots \right] \cos \omega_0 t. \quad (10.76) \end{aligned}$$

Выражение (10.76) дает возможность определить боковые частоты и значения их амплитуд.

б) Можно также воспользоваться разложением $\cos\left(\frac{q}{\Omega} \cos \Omega t\right)$ и $\sin\left(\frac{q}{\Omega} \cos \Omega t\right)$ в ряд с помощью функций Бесселя:

$$\cos\left(\frac{q}{\Omega} \cos \Omega t\right) = J_0\left(\frac{q}{\Omega}\right) - 2J_2\left(\frac{q}{\Omega}\right) \cos 2\Omega t + 2J_4\left(\frac{q}{\Omega}\right) \cos 4\Omega t - \dots$$

$$\sin\left(\frac{q}{\Omega} \cos \Omega t\right) = 2J_1\left(\frac{q}{\Omega}\right) \cos \Omega t - 2J_3\left(\frac{q}{\Omega}\right) \cos 3\Omega t + 2J_5\left(\frac{q}{\Omega}\right) \cos 5\Omega t - \dots$$

Согласно этому получим

$$u_f = \sin \omega_0 t \left[I_0\left(\frac{q}{\Omega}\right) - 2J_2\left(\frac{q}{\Omega}\right) \cos 2\Omega t + 2J_4\left(\frac{q}{\Omega}\right) \cos 4\Omega t - \dots \right] - \cos \omega_0 t \left[2J_1\left(\frac{q}{\Omega}\right) \cos \Omega t - 2J_3\left(\frac{q}{\Omega}\right) \cos 3\Omega t + 2J_5\left(\frac{q}{\Omega}\right) \cos 5\Omega t - \dots \right]. \quad (10.77)$$

Из выражения (10.77) получаем сразу значение амплитуды несущей частоты $I_0\left(\frac{q}{\Omega}\right)$ и амплитуды двух ближайших боковых частот

$$\omega_0 + \Omega \dots \text{амплитуда } 2I_1\left(\frac{q}{\Omega}\right),$$

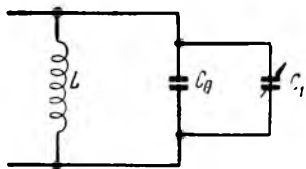
$$\omega_0 - \Omega \dots \text{амплитуда } 2I_1\left(\frac{q}{\Omega}\right).$$

Анализ конкретной схемы

1. Рассмотрим замкнутый контур лампового генератора с самовозбуждением, к конденсатору которого присоединен вращающийся конденсатор переменной емкости (рис. 10.6).

Пусть суммарная емкость изменяется по закону

$$C = C_0 (1 - 2b \cos \Omega t). \quad (10.78)$$



Если оставить конденсатор в положении, при котором $\cos \Omega t = 0$, то сила тока в контуре будет равна

$$I = A \sin \omega_0 t,$$

Рис. 10.6

где

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC_0}} = 2\pi f_0.$$

Если вращать конденсатор, то, казалось бы, должно быть

$$\omega = \omega_0 (1 - 2b \cos \Omega t) \quad (10.79)$$

или

$$I = A \sin \omega_0 t (1 - 2b \cos \Omega t). \quad (10.80)$$

Согласно уравнению (10.80), казалось бы, что мы получим изменение частоты в пределах

$$\omega_0 (1 - 2b) \text{ и } \omega_0 (1 + 2b).$$

Кроме того, мы должны были бы получить постоянную амплитуду тока, т. е. могли бы работать все время в точке наивысшей модуляции

(телеграфный режим). Однако в действительности уравнения (10.79) и (10.80) не соблюдаются, вследствие чего отпадает кажущееся преимущество узких боковых полос и повышенной мощности при телефонии, что связано с к. п. д. устройства.

Для схемы рис. 10.6 можно написать следующее уравнение:

$$Lq'' + \frac{1}{C}q = 0,$$

где q — мгновенное значение заряда на обкладках конденсаторов.

Если $2b$ мало по сравнению с единицей, то можно записать

$$q'' + \frac{1}{LC_0} (1 + 2b \cos \Omega t) q = 0.$$

Так как $\frac{1}{LC_0} = \omega_0^2$ и $\cos \Omega t = \frac{1}{2} (e^{j\Omega t} + e^{-j\Omega t})$, то

$$q'' + \omega_0^2 [1 + b (e^{j\Omega t} + e^{-j\Omega t})] q = 0. \quad (10.81)$$

Полученное уравнение (10.81) решаем следующей подстановкой:

$$q = K \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n e^{j(\omega_0 + n\Omega)t}, \quad (10.82)$$

где K — некоторая постоянная. Подстановка (10.82) в (10.81) дает нам

$$\begin{aligned} \sum_{-\infty}^{+\infty} -(\omega_0 + n\Omega)^2 a_n e^{j(\omega_0 + n\Omega)t} + \omega_0^2 \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n e^{j(\omega_0 + n\Omega)t} + \\ + \omega_0^2 b \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n e^{j[\omega_0 + (n+1)\Omega]t} + \omega_0^2 b \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n e^{j[\omega_0 + (n-1)\Omega]t} = 0. \end{aligned} \quad (10.83)$$

Приравнявая в уравнении (10.83) коэффициенты при одинаковых степенях $e^{jn\Omega t}$, получим

$$-(\omega_0 + n\Omega)^2 a_n + \omega_0^2 a_n + \omega_0^2 b (a_{n-1} + a_{n+1}) = 0$$

или

$$-(2\omega_0 n\Omega + n^2 \Omega^2) a_n + \omega_0^2 b (a_{n-1} + a_{n+1}) = 0.$$

Для общего случая можно написать

$$a_{n+1} + a_{n-1} = \frac{2\omega_0 n\Omega + n^2 \Omega^2}{\omega_0^2 b} a_n = \left[\frac{2n}{\frac{\omega_0 b}{\Omega}} + \frac{n^2}{\frac{\omega_0^2 b}{\Omega^2}} \right] a_n.$$

Если $(n\Omega) \ll 2\omega_0$, то

$$a_{n+1} + a_{n-1} = a_n \frac{2n}{\frac{\omega_0 b}{\Omega}}. \quad (10.84)$$

Из уравнения (10.84) следует, что коэффициент разложения a_n есть функция величины $\frac{\omega_0 b}{\Omega}$, т. е.

$$a_n = I_n \left(\frac{\omega_0 b}{\Omega} \right).$$

Так как нас интересует сила тока, то мы находим

$$i_1 = \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt} K \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n e^{j(\omega_0 + n\Omega)t} = Kj \sum_{-\infty}^{+\infty} (\omega_0 + n\Omega) a_n e^{j(\omega_0 + n\Omega)t}. \quad (10.85)$$

Нетрудно убедиться, что уравнение (10.81) удовлетворяется также решением

$$i_2 = -K j \sum (\omega_0 + n\Omega) a_n e^{-j(\omega_0 + n\Omega)t}.$$

Так как $e^{\pm ix} = \cos x \pm j \sin x$, то

$$\begin{aligned} i &= i_1 + i_2 = Kj \left\{ \sum (\omega_0 + n\Omega) a_n e^{j(\omega_0 + n\Omega)t} - \sum (\omega_0 + n\Omega) a_n e^{-j(\omega_0 + n\Omega)t} \right\} = \\ &= -2K \sum (\omega_0 + n\Omega) a_n \sin(\omega_0 + n\Omega)t. \end{aligned} \quad (10.86)$$

Амплитуда n -го члена будет равна

$$A_n = -2K (\omega_0 + n\Omega) I_n \left(\frac{\omega_0 b}{\Omega} \right), \quad (10.87)$$

а соответствующая частота

$$\omega_0 + n\Omega,$$

или

$$A_n = -2K (\omega_0 - n\Omega) I_{-n} \left(\frac{\omega_0 b}{\Omega} \right) \quad (10.87a)$$

и соответствующая частота

$$(\omega_0 - n\Omega).$$

2. Обращаем внимание на то, что приведенное решение справедливо только для случая, когда

$$2b \ll 1.$$

В свою очередь, из рис. 10.6 имеем

$$C = C_0 + C_1 \cos \Omega t = C_0 \left(1 + \frac{C_1}{C_0} \cos \Omega t \right),$$

откуда следует: $2b = -\frac{C_1}{C_0}$.

Если $2b \ll 1$, то $\left| \frac{C_1}{C_0} \right| \ll 1$, т. е. емкость меняется на очень незначительную величину. Если же это соотношение не соблюдается, то решению подлежит уравнение

$$(1 - 2b \cos \Omega t) q'' + \omega_0^2 q = 0$$

или

$$[1 - b(e^{j\Omega t} + e^{-j\Omega t})] q'' + \omega_0^2 q = 0.$$

Применяя подстановку

$$q = K \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n e^{j(\omega_0 + n\Omega)t},$$

получим

$$q'' = - \sum_{-\infty}^{+\infty} (\omega_0 + n\Omega)^2 a_n K e^{j(\omega_0 + n\Omega)t},$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} & -(\omega_0 + n\Omega)^2 [1 - b(e^{j\Omega t} + e^{-j\Omega t})] e^{j(\omega_0 + n\Omega)t} a_n + \omega_0^2 a_n e^{j(\omega_0 + n\Omega)t} = 0, \\ & -(\omega_0 + n\Omega)^2 [a_n e^{j(\omega_0 + n\Omega)t} - b a_n e^{j(\omega_0 + (n+1)\Omega)t} - b a_n e^{j(\omega_0 + (n-1)\Omega)t}] + \\ & + \omega_0^2 a_n e^{j(\omega_0 + n\Omega)t} = 0, \end{aligned}$$

$-a_n (\omega_0 + n\Omega)^2 + b a_{n-1} [\omega_0 + (n-1)\Omega]^2 + b a_{n+1} [\omega_0 + (n+1)\Omega]^2 + \omega_0^2 a_n = 0$
 $-[2n\Omega\omega_0 + (n\Omega)^2] a_n + a_{n-1} b [\omega_0 + (n-1)\Omega]^2 + a_{n+1} b [\omega_0 + (n+1)\Omega]^2 = 0,$
 что не поддается решению по прежнему способу. Таким образом, для общего случая решение нужно искать иначе.

10.4. О влиянии цепей питания на модуляцию

Настоящий раздел ставит целью выяснить роль, которую могут играть элементы цепей питания в модулирующих схемах радиотелефонных станций. Эти явления будут определяться схемой модуляции. Для их выяснения разберем ряд отдельных случаев.

Предварительно введем обозначения:

S — крутизна, R_i — внутреннее сопротивление модуляторной лампы, R_r — сопротивление, эквивалентное генераторной лампе, L_0 — самоиндукция модулирующего дросселя, L_M — самоиндукция машины, C_M — емкость блокировочного конденсатора, K — коэффициент усиления, U_{gm} , U_{am} — амплитуды напряжения на сетке и аноде.

Питание от машины постоянного тока

В качестве первого примера возьмем модуляцию на анод по схеме постоянного тока (рис. 10.7). Питание схемы осуществляется машиной постоянного тока с самоиндукцией L_M , заблокированной емкостью C_M . Если через z обозначим полное сопротивление цепи, состоящей из последовательного соединения модулирующего дросселя, самоиндукции и блокирующей емкости машины соединенных параллельно, то

$$z = j\omega L_0 + \frac{\frac{L_M}{C_M}}{j\left(\omega L_M - \frac{1}{\omega C_M}\right)} =$$

$$= j\left[\omega L_0 + \frac{\omega L_M}{1 - \omega^2 L_M C_M}\right] \quad (10.88)$$

и

$$K = \frac{U_{am}}{U_{gm}} = \frac{SR_r R_i z}{R_r R_i + R_i z + R_r z}.$$

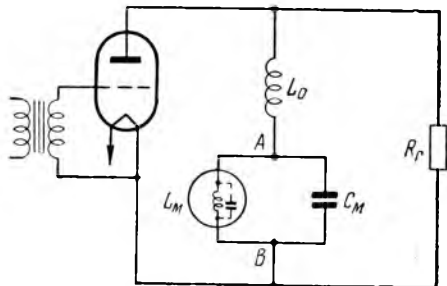


Рис. 10.7

Омическими сопротивлениями катушки L_0 и машины для простоты пренебрегаем.

Если ввести обозначение $R = \frac{R_r R_i}{R_r + R_i}$, то в первом приближении можно принять, что

$$|K| = \frac{S|z|}{\sqrt{1 + \left(\frac{|z|}{R}\right)^2}}. \quad (10.89)$$

Обозначим через $K_{пр}$ величину K для $|z| \rightarrow \infty$, тогда

$$|K_{пр}| = \lim_{z \rightarrow \infty} |K| = SR.$$

Отсюда имеем

$$\frac{|K|}{|K_{пр}|} = \frac{\frac{|z|}{R}}{\sqrt{1 + \left(\frac{|z|}{R}\right)^2}}. \quad (10.90)$$

Введем еще одно обозначение

$$\frac{|z|}{R} = \operatorname{tg} \psi;$$

тогда

$$\left| \frac{K}{K_{\text{пр}}} \right| = \sin \psi. \quad (10.91)$$

Проанализируем выражение (10.91). Если $\left| \frac{K}{K_{\text{пр}}} \right| = 1$, то $\sin \psi = 1$, $\psi = \frac{\pi}{2}$, $\text{tg } \psi = \infty$.

Так как R — величина конечная и постоянная, то имеем, что $\left| \frac{K}{K_{\text{пр}}} \right| = 1$, если $|z| \rightarrow \infty$. Далее, если $\left| \frac{K}{K_{\text{пр}}} \right| = 0$, то $\sin \psi = 0$, $\psi = 0$ и $\frac{|z|}{R} = 0$, т. е. $|z| = 0$.

$$\text{Итак, при } |z| = \infty \quad \left| \frac{K}{K_{\text{пр}}} \right| = 1,$$

$$\text{при } |z| = 0 \quad \left| \frac{K}{K_{\text{пр}}} \right| = 0.$$

Перейдем к анализу явлений, вносимых отдельными элементами цепей питания в схеме рис. 10.7. Сначала допустим, что $C_M = \infty$. Тогда $|z| = \omega L_0$. $|z| = 0$ для $\omega = 0$, $|z| = \infty$ для $\omega = \infty$.

Рассмотрим случай конечной емкости, тогда

$$|z| = \omega L_0 + \frac{\omega L_M}{1 - \omega^2 L_M C_M}. \quad (10.92)$$

При этих условиях $|z| = 0$, если $\omega = 0$, и $|z| = \infty$, если $\omega = \infty$. Но, кроме того, $|z| = 0$, если $\frac{\omega L_M}{1 - \omega^2 L_M C_M} = -\omega L_0$ и, следовательно, $\omega = \sqrt{\frac{L_0 + L_M}{L_0 L_M C_M}}$.

Имеется также еще одно прохождение z через бесконечность. Это будет при $\omega = \frac{1}{\sqrt{L_M C_M}}$. Если увеличивать угловую частоту от нуля до бесконечности, то вначале оба члена в правой части выражения (10.92) остаются положительными. Для $\omega = \frac{1}{\sqrt{L_M C_M}}$ второй член обращается в бесконечность.

При дальнейшем увеличении ω эта дробь становится отрицательной, и затем обращает $|z|$ в нуль. Таким образом, при увеличении ω от нуля до ∞ $|z|$ и $\left| \frac{K}{K_{\text{пр}}} \right|$ будут проходить последовательно следующие значения:

$$\omega = 0, \quad |z| = 0, \quad \left| \frac{K}{K_{\text{пр}}} \right| = 0,$$

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{L_M C_M}}, \quad |z| = \infty, \quad \left| \frac{K}{K_{\text{пр}}} \right| = 1,$$

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{\frac{L_0 L_M}{L_0 + L_M} C_M}}, \quad |z| = 0, \quad \left| \frac{K}{K_{\text{пр}}} \right| = 0,$$

$$\omega = \infty, \quad |z| = \infty, \quad \left| \frac{K}{K_{\text{пр}}} \right| = 1.$$

Задавшись определенным значением для R , легко для каждого данного z определить ω , $\text{tg } \psi$ и $\sin \psi = \frac{K}{K_{\text{пр}}}$.

Отсюда видно, что в случае конечной емкости существует некоторый диапазон частот с уменьшенным коэффициентом усиления. Совершенно очевидно, что эти частоты выпадут из передачи. Так как во многих случаях может быть целесообразной такая установка схемы, при которой непроходящая частота имеет наименьшее из возможных значений, то имеет смысл разобрать явление при следующей постановке вопроса.

Общая самоиндукция цепи машины и модулирующего дросселя остается постоянной. Емкость, блокирующая машину, тоже постоянна. Требуется найти такое распределение самоиндукции между машиной и модулирующим дросселем, при котором непроходящая частота имеет наименьшее значение. Обозначим непроходящую частоту через Ω . Согласно изложенному,

$$\Omega^2 = \frac{L_M + L_0}{L_M L_0} \frac{1}{C_M}.$$

Обозначим $L_M + L_0 = L$. Тогда

$$\frac{1}{\Omega^2} = \frac{L_0 (L - L_0) C_M}{L}. \quad (10.93)$$

Найдем условия экстремума для $\frac{1}{\Omega^2}$. Дифференцируя это выражение по L_0 и приравнявая его нулю, получим

$$\frac{C_M}{L} (L - L_0) - \frac{C_M}{L} L_0 = 0$$

или

$$L - 2L_0 = 0; \quad L_0 = \frac{L}{2}. \quad (10.94)$$

Вторая производная от $\frac{1}{\Omega^2}$ по L_0 равна $-\frac{2C_M}{L}$, всегда отрицательна.

Отсюда следует, что для $\frac{1}{\Omega^2}$ имеем максимум и, следовательно, для Ω^2 — минимум. Самоиндукция модулирующего дросселя должна равняться половине общей самоиндукции. Самоиндукция должна быть распределена поровну между машиной и модулирующим дросселем. Подставляя в выражения (10.93) вместо L_0 выражение (10.94), получим

$$\Omega_{\min} = \frac{2}{\sqrt{LC_M}},$$

т. е. наименьшая непроходящая частота равна удвоенной собственной частоте контура, составленного из последовательного соединения самоиндукции машины, дросселя и емкости C_M .

Питание от выпрямителя

В этой же схеме модуляции в качестве источника энергии может быть использован выпрямитель со сглаживающим фильтром. Рассмотрим предварительно простейший случай, когда сглаживание состоит из емкости C , блокирующей выпрямитель, и самоиндукции L (схема рис. 10.8).

Самоиндукция L в этом случае соединена последовательно с модулирующей самоиндукцией L_0 . Выражение для коэффициента усиления остается тем же, что и в предыдущем случае, с той лишь разницей, что здесь

$$|z| = \omega (L_0 + L) - \frac{1}{\omega C}.$$

Проводимостью диода пренебрегаем по сравнению с реактивной проводимостью с емкостью C .

При этом условии имеем

$$\omega = 0, \quad |z| = \infty, \quad \left| \frac{K}{K_{\text{пр}}} \right| = 1,$$

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{(L_0 + L)C}}, \quad |z| = 0, \quad \left| \frac{K}{K_{\text{пр}}} \right| = 0,$$

$$\omega = \infty, \quad |z| = \infty, \quad \left| \frac{K}{K_{\text{пр}}} \right| = 1.$$

Согласно предыдущему, будет существовать диапазон частот с уменьшением коэффициента усиления. Здесь может быть построена зависимость $\left| \frac{K}{K_{\text{пр}}} \right|$ от z и для сравнения $C = \infty$.

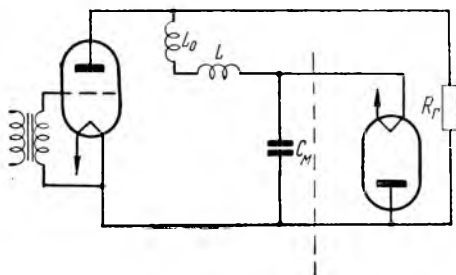


Рис. 10.8

Аналогичные явления будут существовать и в других схемах модуляции. Допустим, что мы имеем модуляцию с независимым возбуждением постоянной амплитуды. В этом случае к сетке генератора приложены напряжение

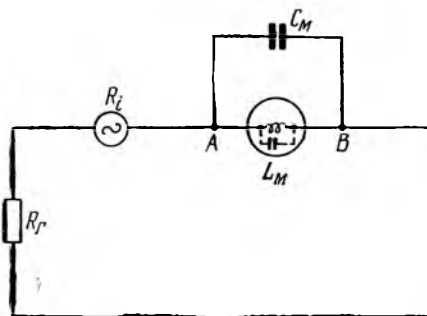


Рис. 10.9

звуковой частоты и напряжение высокой частоты, постоянное по амплитуде. Э. д. с. звуковой частоты можно отнести в цепь анода, разделив ее на проницаемость лампы. Тогда получим схему, изображенную на рис. 10.9. Колебательный контур высокой частоты оказывает переменным токам звуковой частоты столь малое сопротивление, что им можно пренебречь. Тогда в случае $C_M = \infty$ все э.д.с. звуковой частоты будут погашены на сопротивлении R_r . Для данной схемы внутреннее сопротивление источника и э.д.с. звуковой частоты равны нулю.

Если же, например, рассматривать модуляцию на анод по схеме постоянного напряжения, то источник э.д.с. звуковой частоты будет иметь

сопротивление R_i . Если ее амплитуду обозначим через U_n , импеданс цепи питания через z , то

$$\frac{U_{am}}{U_n} = \frac{R_r}{R_r + R_i + z}$$

для случая, когда сопротивление источника э.д.с. звуковой частоты не равно нулю. Модуль этой величины будет

$$\left| \frac{U_{am}}{U_n} \right| = \frac{R_r}{R_r + R_i} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{z^2}{(R_r + R_i)^2}}}. \quad (10.95)$$

Если ввести обозначение $\frac{|z|}{R_r + R_i} = \operatorname{tg} \psi$, то

$$\left| \frac{U_{am}}{U_n} \right| = \frac{R_r}{R_r + R_i} \cos \psi. \quad (10.95a)$$

Для случая $R_i = 0$ имеем

$$\left| \frac{U_{am}}{U_n} \right| = \cos \psi. \quad (10.95b)$$

Анализируя выражение (10.95a), имеем

$$\cos \psi = 0 \quad \operatorname{tg} \psi = \infty \quad |z| = \infty \quad \left| \frac{U_{am}}{U_n} \right| = 0,$$

$$\cos \psi = 1 \quad \operatorname{tg} \psi = 0 \quad |z| = 0 \quad \left| \frac{U_{am}}{U_n} \right| = 1 \text{ (при } R_i = 0)$$

В случае, если питание осуществляется машиной постоянного тока, то

$$|z| = \frac{\omega L_M}{\omega^2 L_M C_M - 1},$$

$$\omega = 0, \quad |z| = 0,$$

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{L_M C_M}}, \quad |z| = \infty,$$

$$\omega = \infty, \quad |z| = 0.$$

Если емкость $C_M = \infty$, то для всех частот $|z| = 0$ и, следовательно, $\left| \frac{U_{am}}{U_n} \right| = 1$.

Аналогично предыдущему можно рассмотреть случай сглаживания так, как это было представлено на рис. 10.9. Перейдем к определению непроходящих частот для случая сглаживания, осуществленного в виде фильтра с произвольным числом ячеек. Фильтр будем представлять так, как это изображено на рис. 10.10. Потребитель энергии постоянного тока включен в разрыв AB . Для решения задач о влиянии фильтра на модуляцию необходимо знать импеданс фильтра, относимый к клеммам A и B . При решении этой задачи для упрощения допускаем, что реактивная проводимость емкости C (по своему модулю) значительно больше, чем проводимость диода, поэтому диод из рассмотрения можно исключить. Из теории фильтров известно, что напряжение и ток в каждой ячейке могут быть определены выражениями

$$\begin{aligned} U_n &= U_A e^{\delta n} e^{j \nu n} + U_B e^{-\delta n} e^{-j \nu n}, \\ I_n &= - \frac{U_A e^{\delta n} e^{j \nu n}}{\xi e^{-\frac{(\delta + j \nu)}{2}}} + \frac{U_B e^{-\delta n} e^{-j \nu n}}{\xi e^{\frac{\delta + j \nu}{2}}}, \end{aligned} \quad (10.96)$$

где n — номер ячейки. Пренебрегая омическими сопротивлениями катушек самоиндукции нашего фильтра, получим между δ , v и ω соотношения (см. пример в конце данного параграфа). Если введем обозначения: ω_1 — собственная частота ячейки, равная $\frac{1}{\sqrt{LC}}$, $\theta^2 = \frac{\omega^2}{\omega_1^2}$, то эти соотношения при-

нимают следующий вид. При изменении θ от 0 до 2, $\delta = 0$ и $\cos v = 1 - \frac{\theta^2}{2}$.

При изменении θ от 2 до бесконечности $v = \pi$; $\text{ch } \delta = \frac{\theta^2}{2} - 1$. Эти соотношения значительно упрощают выражение (10.96).

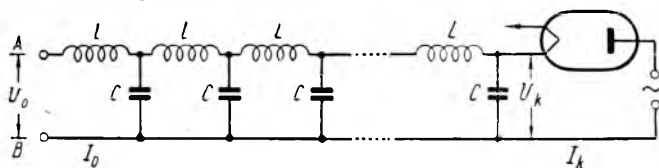


Рис. 10.10

1. Начнем анализ для случая $0 < \theta \leq 2$. Согласно предыдущему, для нашего фильтра

$$U_n = U_A e^{jvn} + U_B e^{-jvn},$$

$$I_n = -\frac{U_A e^{jvn}}{\xi e^{-\frac{jv}{2}}} + \frac{U_B e^{-jvn}}{\xi e^{\frac{jv}{2}}}; \quad (10.96a)$$

$$\xi = \sqrt{\frac{L}{C}} = z. \quad (10.97)$$

Допустим, что фильтр состоит из k ячеек. Если фильтр включен на модулирующую схему и через AB проходит переменный ток низкой (звуковой) частоты, то на клеммах A и B будет некоторое напряжение U_0 . Это напряжение, распространяясь от одной ячейки к другой, проявит себя на последней ячейке у диода в виде некоторого напряжения U_k . Для k -ой ячейки, согласно принятому относительно диода имеем

$$U_k = U_A e^{jvk} + U_B e^{-jvk},$$

$$I_k = -\frac{U_A e^{jvk}}{ze^{-\frac{jv}{2}}} + \frac{U_B e^{-jvk}}{ze^{\frac{jv}{2}}} = 0. \quad (10.98)$$

Решая систему уравнений (10.98) относительно U_A и U_B , получим выражение для них через U_k и U . Эти выражения имеют следующий вид:

$$U_A = \frac{U_k e^{-jvk}}{2} \left(1 - j \operatorname{tg} \frac{v}{2} \right),$$

$$U_B = \frac{U_k e^{jvk}}{2} \left(1 + j \operatorname{tg} \frac{v}{2} \right). \quad (10.99)$$

Подставляя (10.99) и (10.97) в (10.96a), получим значение тока и напряжения для любого n от 0 до k .

Для определения тока и напряжения на клеммах AB в выражение (10.96a) необходимо подставить $n = 0$. Тогда $U_0 = U_A + U_B$, что после подстановки из (10.99) даст

$$U_0 = U_k \frac{\cos v \left(k + \frac{1}{2} \right)}{\cos \frac{v}{2}}. \quad (10.100)$$

Аналогичным способом получим выражение

$$I_0 = j \frac{U_k}{z} \frac{\sin vk}{\cos \frac{\theta^2}{2}}. \quad (10.101)$$

Для определения импеданса фильтра z в целом необходимо определить U_0 и I_0 . Из (10.100) и (10.101) имеем

$$z_{\Phi} = \frac{U_0}{I_0} = -jz \frac{\cos v \left(k + \frac{1}{2}\right)}{\sin vk},$$

$$\cos v = 1 - \frac{\theta^2}{2}. \quad (10.102)$$

Рассмотрим теперь выражение $\frac{\cos v \left(k + \frac{1}{2}\right)}{\sin vk}$. При изменении θ от 0 до 2, $\cos v$ изменится от 1 до -1 и, следовательно, v изменится от 0 до π . Найдем те значения v , при которых исследуемое выражение проходит через нуль. Для этого необходимо, чтобы $v \left(k + \frac{1}{2}\right) = (2m + 1) \frac{\pi}{2}$ или

$$v = \frac{2m + 1}{2k + 1} \pi.$$

Для тех значений v , при которых $\sin vk = 0$, исследуемое выражение будет проходить через ∞ , т. е.

$$\frac{\cos v \left(k + \frac{1}{2}\right)}{\sin vk} = \infty, \text{ если } v = \frac{m}{k} \pi \quad (m = \pm 0, 1, 2, \dots, k - 1).$$

Если $v \rightarrow \pi$, то исследуемое выражение для $v = \pi$ становится неопределенным. Раскрывая эту неопределенность по правилу Лопиталья, имеем

$$\lim_{v \rightarrow \pi} \frac{\cos v \left(k + \frac{1}{2}\right)}{\sin vk} = \lim_{v \rightarrow \pi} \frac{-\left(k + \frac{1}{2}\right) \sin v \left(k + \frac{1}{2}\right)}{k \cos vk} = -\frac{2k + 1}{2k}.$$

Перейдем к определению непроходящих частот для схемы рис. 10.9. Если к точкам A и B будет приключен сглаживающий фильтр и удалена емкость C_m , то условие равенства нулю коэффициента усиления при заданной частоте состоит в том, что модулирующий дроссель и фильтр оказываются настроенными в резонанс. Это значит, что

$$-jz \frac{\cos v \left(k + \frac{1}{2}\right)}{\sin vk} = -j\omega L_0$$

или

$$\frac{\cos v \left(k + \frac{1}{2}\right)}{\sin vk} = \frac{\omega L_0}{z}. \quad (10.103)$$

Принимая во внимание, что $\cos v = 1 - \frac{\theta^2}{2}$, имеем

$$0 = \frac{\omega}{\omega_1} = 2 \sin \frac{v}{2}; \quad \omega = 2\omega_1 \sin \frac{v}{2}. \quad (10.104)$$

Тогда (10.103) преобразуется так:

$$\frac{\cos v \left(k + \frac{1}{2}\right)}{\sin vk} = \frac{2\omega_1 L_0}{z} \sin \frac{v}{2}. \quad (10.103a)$$

Если правую и левую части выражения (10.103а) изобразить графически, то точки пересечения определяют v , $\sin \frac{v}{2}$ и, следовательно, частоты, для которых коэффициент усиления равен нулю. Из результатов анализа левой части выражения (10.103) следует, что для фильтра существует k значений v , при которых z_{ϕ} обращается в бесконечность, и столько же значений v , при которых z_{ϕ} проходит через нуль. Так как правая часть во всем интервале изменения v остается конечной, то существует k точек пересечения и, следовательно, k непроходящих частот.

Так как z изменяется от нуля до π , то, согласно (10.104), наибольшая угловая частота не может быть больше $2\omega_1$.

Вывод верен для случая, когда фильтр не заблокирован на своем выходе емкостью и самоиндукция L первой ячейки играет ту же роль по отношению к модуляции, что и модулирующий дроссель L_0 . Если заблокировать выход фильтра емкостью C , то для расчета необходимо составить новую ячейку, состоящую из блокирующей емкости C и некоторой части модулирующего дросселя, равной L . Только оставшаяся часть самоиндукции модулирующего дросселя должна входить в расчет в виде самоиндукции L_0 .

Перейдем к анализу явлений, происходящих в схеме рис. 10.9, если машина заменена выпрямителем со сглаживанием, которое в точках A и B заблокировано емкостью C_m . В этом случае выпадут из передачи те частоты, для которых емкость и фильтр дадут контур, настроенный в резонанс на рассматриваемую частоту. Условие резонанса требует

$$-jz \frac{\cos v \left(k + \frac{1}{2}\right)}{\sin vk} - \frac{j}{\omega C_m} = 0 \quad (10.105)$$

или

$$\frac{\cos v \left(k + \frac{1}{2}\right)}{\sin vk} = -\frac{1}{\omega C_m z}. \quad (10.106)$$

Принимая во внимание (10.104), имеем

$$\frac{\cos v \left(k + \frac{1}{2}\right)}{\sin vk} = -\frac{1}{2\omega_1 C_m z} \frac{1}{\sin \frac{v}{2}}. \quad (10.106a)$$

Необходимо отметить, что в данном случае в зависимости от емкости C_m число непроходящих частот может быть k или $k - 1$. Если величина $\frac{1}{2\omega_1 C_m z} > \frac{2k+1}{2k}$, то кривая, соответствующая левой части выражения (10.106a), не будет иметь пересечения с кривой правой части для значений v , лежащих в интервале от $\frac{k-1}{k}\pi$ до π , и, таким образом, одним пересечением будет меньше. Если же $\frac{1}{2\omega_1 C_m z} < \frac{2k+1}{k}$, то имеют место все k пересечений. Несоразмерное увеличение емкости C_m может привести к увеличению числа непроходящих частот на диод.

В общем случае, когда фильтр заблокирован емкостью $C_m \neq C$ и затем, будучи заблокированным, соединен последовательно с некоторым сопротивлением jx , условие непроходящих частот для схемы рис. 10.9 примет вид

$$\frac{jx - \frac{j}{\omega C} - j \frac{z \cos v \left(k + \frac{1}{2}\right)}{\sin vk}}{z \frac{\cos v \left(k + \frac{1}{2}\right)}{\sin vk} + \frac{1}{\omega C_m}} = 0.$$

Выражая ω через ν , можно получить уравнение, решаемое графически. Анализируя предыдущее выражение, нетрудно доказать наличие k непроходящих частот. На этом можно закончить рассмотрение явлений в диапазоне угловых частот от $\theta = 0$ до $\theta = 2$.

2. В диапазоне от $\theta = 2$ до $\theta = \infty$, $\nu = \pi$, $\delta \neq 0$ и $\text{ch } \delta = \frac{\theta^2}{2} - 1$. Производя подстановку в (10.96), имеем

$$\begin{aligned} U_n &= U_A e^{\delta n} e^{j\pi n} + U_B e^{-\delta n} e^{-j\pi n}, \\ I_n &= -\frac{U_A}{\xi} \frac{e^{\delta n} e^{j\pi n}}{e^{-\frac{\delta+j\pi}{2}}} + \frac{U_B}{\xi} \frac{e^{-\delta n} e^{-j\pi n}}{e^{\frac{\delta+j\pi}{2}}}. \end{aligned} \quad (10.107)$$

Напряжение на последнем конденсаторе фильтра равно U_k , и аналогично предыдущему имеем

$$\begin{aligned} U_k &= \cos \pi k (U_A e^{\delta k} + U_B e^{-\delta k}), \\ I_k &= -\frac{j \cos \pi k}{z} \left(U_A e^{\delta \left(k + \frac{1}{2}\right)} + U_B e^{-\delta \left(k + \frac{1}{2}\right)} \right) = 0. \end{aligned} \quad (10.108)$$

Решая систему уравнений (10.108) относительно U_A и U_B , получим

$$\begin{aligned} U_A &= \frac{U_k e^{-\delta k}}{\cos \pi k (1 - e^{\delta})}, \\ U_B &= \frac{U_k e^{\delta k}}{\cos \pi k (1 - e^{-\delta})}. \end{aligned} \quad (10.109)$$

Далее из (10.107) при $n = 0$ получим $U_0 = U_A + U_B$, что после преобразований дает

$$U_0 = \frac{U_k}{\cos \pi k} \frac{\text{sh } \delta \frac{2k+1}{2}}{\text{sh } \frac{\delta}{2}}. \quad (10.110)$$

Аналогичным же способом получим

$$I_0 = -\frac{j U_k}{z \cos \pi k} \frac{\text{sh } \delta k}{\text{sh } \frac{\delta}{2}}. \quad (10.111)$$

Из (10.110) и (10.111) имеем

$$z_{\Phi} = \frac{U_0}{I_0} = jz \frac{\text{sh } \delta \frac{2k+1}{2}}{\text{sh } \delta k}. \quad (10.112)$$

Рассмотрим выражение $\frac{\text{sh } \delta \frac{2k+1}{2}}{\text{sh } \delta k}$. Выражение становится неопределенным для $\delta = 0$ и для $\delta = \infty$. Неопределенность для $\delta = 0$ раскрывается обычным способом:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\text{sh } \delta \frac{2k+1}{2}}{\text{sh } \delta k} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\frac{2k+1}{2} \text{ch } \delta \frac{2k+1}{2}}{k \text{ch } \delta k} = \frac{2k+1}{2k}.$$

Для раскрытия неопределенности для $\delta = \infty$ представим рассматриваемое

выражение в следующем виде:

$$\frac{\operatorname{sh}\left(\delta k + \frac{\delta}{2}\right)}{\operatorname{sh} \delta k} = \operatorname{ch} \frac{\delta}{2} + \operatorname{cth} \delta k \operatorname{sh} \frac{\delta}{2}.$$

Если $\delta \rightarrow \infty$, то рассматриваемое выражение тоже стремится к бесконечности.

Применим выражение (10.112) к схемам. Если в схеме машину вместе с ее блокировочным конденсатором (рис. 10.7) заменить выпрямителем со сглаживанием (рис. 10.8), то в интервале от $\theta = 2$ до $\theta = \infty$ не будет ни одной непроходящей частоты. Для того чтобы такая частота существовала, необходимо, чтобы для нее цепь, составленная из модулирующего дросселя и фильтра, оказалась настроенной в резонанс на рассматриваемую частоту. Но из (10.112) следует, что для схемы рис. 10.10 все непроходящие частоты лежат в диапазоне $0 < \theta < 2$. В случае схемы рис. 10.9 при достаточно малой блокирующей емкости C_m в диапазоне $0 < \theta < 2$ может оказаться $(k-1)$ непроходящая частота. Но тогда одна непроходящая частота будет находиться в интервале $2 < \theta < \infty$ и определяться графически решением уравнения (10.106а). Если C_m достаточно велико, то эта частота перейдет в диапазон для θ от 0 до 2.

В заключение произведем проверку формул для z_Φ на одном из частных примеров. В качестве такового возьмем схему рис. 10.8. При разборе этой схемы применялось выражение

$$|z| = \omega (L_0 + L) - \frac{1}{\omega C}.$$

Здесь рассматривается фильтр, состоящий из одной ячейки. Подставим в (10.102) $k = 1$. Тогда

$$z_\Phi = -jz \frac{\cos v \left(1 + \frac{1}{2}\right)}{\sin v} = -jz \left(\frac{\cos v}{2 \sin \frac{v}{2}} - \sin \frac{v}{2} \right).$$

Принимая во внимание, что $\cos v = 1 - \frac{\theta^2}{2}$, $2 \sin \frac{v}{2} = \theta$, $\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, $z = \sqrt{\frac{L}{C}}$, после преобразований имеем $z_\Phi = j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)$, и, следовательно,

$$|z| = \omega (L_0 + L) - \frac{1}{\omega C}.$$

Пример

Пусть дан фильтр, составленный из сопротивлений R и проводимостей G так, как это показано на рис. 10.11. Если к началу фильтра приложено некоторое напряжение U_0 и рассматривается падающая волна (например, фильтр с бесконечным числом ячеек), то может быть использовано положение, на основе которого принимается, что в заданном диапазоне частот фильтр действует как самоиндукция и, следовательно, резонанса быть не может.

Перейдем к схеме рис. 10.8. В данном случае фильтр заблокирован емкостью C_m и, вообще говоря, резонанс может существовать. Нетрудно установить, что

$$\omega = 2\omega_1 \operatorname{ch} \frac{\delta}{2}. \quad (10.113)$$

Условие наличия резонанса и, следовательно, непроходимость частоты формулируется в виде

$$\frac{\operatorname{sh} \delta \frac{2k+1}{2}}{\operatorname{sh} \delta k} = \frac{1}{2\omega_1 C z} \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{\delta}{2}}. \quad (10.114)$$

Правая часть уравнения (10.114) изменяется от $\frac{1}{2\omega_1 C z}$ до нуля, причем $\frac{1}{2\omega_1 C z}$ есть наибольшее значение правой части, имеющей место при $\delta = 0$. Согласно предыдущему, левая часть изменяется от своего наименьшего значения

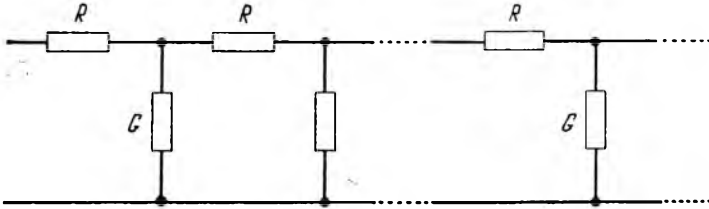


Рис. 10.11

при $\delta = 0$, равного $\frac{2k+1}{2k}$, до бесконечности. Если $\frac{1}{2\omega_1 C z} > \frac{2k+1}{2k}$, то при графическом решении уравнения (10.114) будет иметь место пересечение и, следовательно, одна непроходящая частота. Чтобы этого не было, необходимо выполнение следующего условия:

$$\frac{1}{2\omega_1 C z} < \frac{2k+1}{2k}. \quad (10.115)$$

При заданном фильтре непроходящая частота может быть уничтожена достаточно большой емкостью. Резюмируя все сказанное, можно утверждать, что число непроходящих частот всегда равно k . Для напряжения и тока имеем

$$U_n = U_A e^{\delta n} e^{jvn} + U_B e^{-\delta n} e^{-jvn}, \quad (10.116)$$

$$I_n = - \frac{U_A e^{\delta n} e^{jvn}}{\xi e^{-\frac{(\delta+jv)}{2}}} + \frac{U_B e^{-\delta n} e^{-jvn}}{\xi e^{\frac{\delta+jv}{2}}}. \quad (10.117)$$

В случае фильтра для сглаживания (рис. 10.10) $R = R + j\omega L$ и $G = j\omega C$. При этих условиях

$$\operatorname{ch}(\delta + jv) = 1 - \frac{\omega^2 LC}{2} + \frac{RCj\omega}{2}. \quad (10.118)$$

Так как $\operatorname{ch}(\delta + jv) = \operatorname{ch} \delta \cos v + j \operatorname{sh} \delta \sin v$, то из (10.118) имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} \delta \cos v &= 1 - \frac{1}{2} \frac{\omega^2}{\omega_1^2} = 1 - \frac{\theta^2}{2}, \\ \operatorname{sh} \delta \sin v &= \frac{RC\omega}{2} = \frac{R}{2L\omega_1} \frac{\omega}{\omega_1} = D\theta, \end{aligned} \quad (10.119)$$

где

$$D = \frac{R}{2L\omega_1}.$$

Теперь допустим, что множитель затухания весьма мал по сравнению с ω_1 и D можно положить равным нулю. Тогда из (10.119) следует, что либо

$\text{sh } \delta = 0$, либо $\sin v = 0$. Согласно этим двум возможностям, соответственно имеем $\text{ch } \delta = 1$ и $\cos v = \pm 1$.

Следовательно, $\delta = 0$. Ток и напряжение распространяются от одной ячейки к другой без затухания. Соответственно условиям имеем

$$\cos v = 1 - \frac{\theta^2}{2}. \quad (10.120)$$

Так как $\left| 1 - \frac{\theta^2}{2} \right| \leq 1$, то θ^2 не может быть больше четырех и, следовательно, но, если $\delta = 0$, то $0 < \theta \leq 2$ и $\cos v = 1 - \frac{\theta^2}{2}$.

При дальнейшем увеличении θ величина $\cos v$ в пределе принимает значение -1 .

Уравнения

$$\left. \begin{aligned} I_n R &= U_n - U_{n+1}, \\ U_{n+1} G &= I_n - I_{n+1} \end{aligned} \right\} \quad (10.121)$$

представляют собой систему разностных уравнений, которые приводятся к линейному разностному уравнению с постоянными коэффициентами. Последнее имеет решение в виде

$$\left. \begin{aligned} U_n &= U e^{\alpha n}, \\ I_n &= I e^{\alpha n}. \end{aligned} \right\} \quad (10.122)$$

Подставляя (10.122) в (10.121), имеем

$$\left. \begin{aligned} R I e^{\alpha n} &= U e^{\alpha n} (1 - e^{\alpha}), \\ U e^{\alpha n} e^{\alpha} G &= I e^{\alpha n} (1 - e^{\alpha}). \end{aligned} \right\} \quad (10.123)$$

Введя обозначение $I' = I e^{-\frac{\alpha}{2}}$, имеем после преобразований

$$\left. \begin{aligned} I' R &= -U 2 \operatorname{sh} \frac{\alpha}{2}, \\ -I' 2 \operatorname{sh} \frac{\alpha}{2} &= U G, \end{aligned} \right\} \quad (10.124)$$

или

$$\frac{U}{I'} = -\frac{R}{2 \operatorname{sh} \frac{\alpha}{2}} = -\frac{2 \operatorname{sh} \frac{\alpha}{2}}{G}. \quad (10.125)$$

Произведя умножение, имеем

$$\left(2 \operatorname{sh} \frac{\alpha}{2} \right)^2 = R G, \quad (10.126)$$

откуда

$$\operatorname{ch} \alpha = 1 + 2 \operatorname{sh}^2 \frac{\alpha}{2} = 1 + \frac{R G}{2}.$$

Подставляя (10.126) в (10.125), имеем

$$\frac{U}{I'} = -\frac{(\pm \sqrt{R G})}{G} = \pm \sqrt{\frac{R}{G}} = \pm \xi. \quad (10.127)$$

Так как α , вообще говоря, число комплексное, то, принимая во внимание падающую и отраженную волны, получим токи и напряжения в ячейках фильтра, полагая $\alpha = \delta + jv$. Мы имеем

$$\sin v = 0, \quad \cos \delta = -1, \quad v = \pi,$$

$$\operatorname{ch} \delta = \frac{\theta^2}{2} - 1.$$

По этим условиям происходят явления в интервале

$$2 \leq \theta < \infty.$$

Выражение для ξ при принятых условиях принимает вид

$$\xi = \sqrt{\frac{R}{G}} = \sqrt{\frac{j\omega L}{j\omega C}} = z. \quad (10.128)$$

ДЕТЕКТИРОВАНИЕ И УСИЛЕНИЕ

11.1. Диод как детектор

На рис. 11.1 изображена схема приемника, в котором в качестве детектора применен диод. Детекторное действие диода пояснено на рис. 11.2а. Допустим, что напряжение анодной цепи равно E_a . При отсутствии колебаний в сети сила анодного тока будет равна силе тока холостого хода I_{a0} .

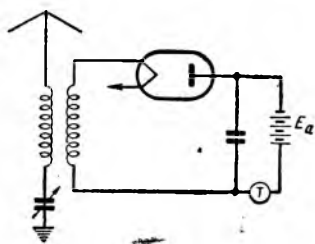


Рис. 11.1

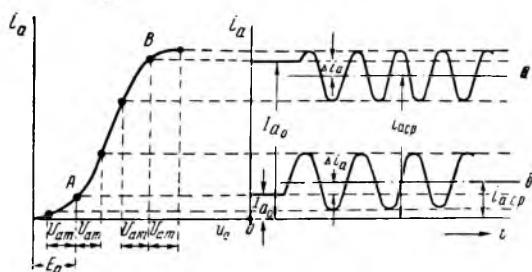


Рис. 11.2

Когда в цепи диода будет индуцироваться синусоидальная электродвижущая сила с амплитудой U_{am} , то сила тока изобразится кривой b (рис. 11.2, б). На основании данной кривой нетрудно найти среднюю силу тока анодной цепи, равную

$$i_{a \text{ ср}} = \frac{1}{T} \int i_a dt. \quad (11.1)$$

Разность

$$\Delta i_a = i_{a \text{ ср}} - I_{a0} \quad (11.2)$$

определяет детектирующее свойство диода. Эту величину нетрудно рассчитать, разложив в ряд выражение характеристики диода по степеням u_a .

В самом деле, полагаем

$$i_a = A [E_a + u_a]^{3/2} = A_0 + A_1 u_a + A_2 u_a^2 + A_3 u_a^3 + \dots, \quad (11.3)$$

где $A = 14,65 \cdot 10^{-6} \frac{l}{r}$.

Полагая $u_a = 0$, найдем

$$A_0 = I_{a0} = A E_a^{3/2}.$$

Беря производную $\frac{\partial i_a}{\partial u_a}$ и полагая в ней $u_a = 0$, имеем

$$A_1 = \frac{\partial i_a}{\partial u_a} = S.$$

Далее, беря вторую производную по u_a выражения (11.3) и полагая $u_a = 0$, точно также получим

$$A_2 = \frac{1}{2} \frac{\partial S}{\partial u_a}$$

и т. д. На основании выражения (11.3) определим силу анодного тока

$$i_a = I_{a0} + S U_{am} \sin \omega t + \frac{1}{2} \frac{\partial S}{\partial u_a} U_{am}^2 \sin^2 \omega t + \dots \quad (11.4)$$

Согласно уравнениям (11.1) и (11.3), нетрудно рассчитать, что

$$i_{a \text{ ср}} = \frac{1}{T} \int_0^T i_a dt = I_{a0} + \frac{1}{4} \frac{\partial S}{\partial u_a} U_{am}^2 + \dots,$$

откуда следует, что

$$\Delta i_a \approx \frac{1}{4} \frac{\partial S}{\partial u_a} U_{am}^2,$$

т. е. что детектирующее свойство диода пропорционально квадрату амплитуды электродвижущей силы. Коэффициент пропорциональности равен $\frac{\partial S}{\partial u_a}$, т. е. детектирующее свойство будет сильнее всего там, где наиболее резко изменяется крутизна характеристики.

Кроме разобранных случаев работы на нижней части характеристики, возможна работа диода как детектора на ее верхней части, как это изображено на рис. 11.2, а. В этом случае нетрудно найти, что детектирующее действие диода равно

$$\Delta i_a = I_{a0} - i_{a \text{ ср}} = - \frac{1}{4} \frac{\partial S}{\partial u_a} U_{am}^2,$$

т. е. при работе на верхней части средняя рабочая сила тока меньше тока холостого хода. Следует заметить, что работа на нижней части является более выгодной, так как ток холостого хода значительно меньше. При работе на средней линейной части характеристики выпрямительное свойство диода равно нулю.

11.2. Триод как детектор

На рис. 11.3, а изображена схема включения триода как детектора. Допустим, что напряжение сетки относительно нити накала равно — 6 в, получаемым при помощи потенциометра, введенного в цепь сетки. Согласно характеристике триода (рис. 11.3, б), при заданном напряжении на аноде сила тока холостого хода определится точкой В. Нетрудно убедиться в том, что при действии в цепи сетки переменной электродвижущей силы (6 ± 2 в) пульсации тока будут большие (по амплитуде) при повышении потенциала, чем при его понижении. Таким образом, как и в случае работы диода на нижней части характеристики, средняя сила тока анодной цепи при наличии колебаний будет больше тока холостого хода, определяемого точкой В.

Следует заметить, что в данных условиях сила тока в цепи сетки равна нулю, поэтому данный детекторный контур не заимствует энергии от приходящих колебаний и не увеличивает их затухания.

Подобно предыдущему случаю, изменяя при помощи потенциометра напряжение, приложенное к сетке, можно получить детекторное действие на верхней части характеристик триода, установив точку В при данном

напряжении на аноде вблизи силы тока насыщения. При этом, так же как и в случае диода, средняя сила рабочего тока будет меньше тока холостого хода. Естественно, что работа триода как детектора на верхнем изгибе характеристики будет рациональна лишь при малых токах накала*, для того чтобы не перегружать анодную цепь током холостого хода. Кроме того, в условиях детектирования на верхней части характеристики в цепи сетки будет возникать ток, который увеличивает затухание приходящих колебаний при работе с затухающими колебаниями, чего можно избежать при работе на нижней части характеристики.

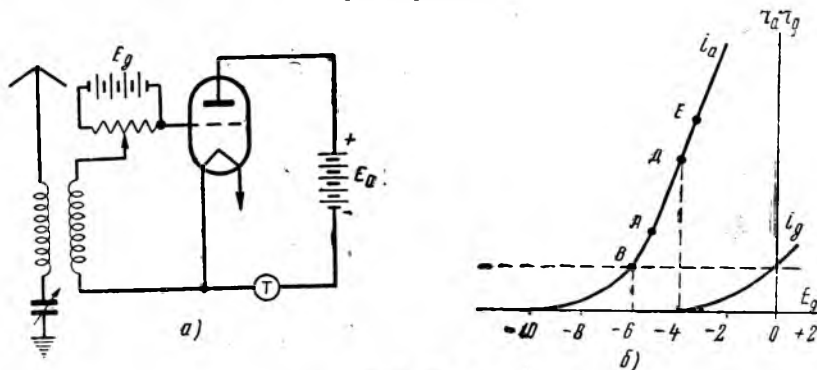


Рис. 11.3

Допустим теперь, что напряжение на сетке выбрано так, что холостой ход триода определяется точкой A . В этом месте характеристика близка к прямой линии и, естественно, что детектирующее действие будет равно нулю, если изменение анодного тока будет в пределах линейной части характеристики.

Предположим, что на сетку схемы рис. 11.4 действуют затухающие колебания, принимаемые антенной I_A . Допустим, что первый полупериод электродвижущей силы в цепи сетки повышает ее потенциал выше потенциала, соответствующего точке D (рис. 11.3, б). В цепи сетки, согласно характеристикам, появляется ток, т. е. электроны притягиваются к сетке и заряжают ее отрицательно, уничтожая влияние данного положительного полупериода; благодаря конденсатору в цепи сетки ее заряд удерживается. За вторую часть первого периода сетка получает отрицательный потенциал, который уменьшается, пока длится второй полупериод (рис. 11.5 u_g). За третий полупериод, в течение которого сетка будет заряжаться положительно, амплитуда будет больше, чем при первом полупериоде, однако потенциал сетки не будет выше точки D , так как сетка будет еще больше заряжаться отрицательно. Таким образом, в продолжение первых нескольких полупериодов средний потенциал сетки будет уменьшаться, но далее, благодаря утечке заряда через сопротивление конденсатора и сопротивление цоколя сетка — нить, средний потенциал сетки будет снова нарастать. Изменения потенциала сетки сопровождаются соответствующим изменением силы анодного тока, благодаря чему каждая серия затухающих колебаний обусловит соответствующий толчок в телефоне (I_T) (рис. 11.5). Описанное действие предполагает, что избыток отрицательного заряда сетки уничтожится вследствие утечки за время затухания колебаний, и сетка вернется к исходному состоянию, пока не начнет действовать ближайшая серия волн. Если конденсатор сам по себе не обладает достаточной утечкой, то его приходится шунтировать сопротивлением (рис. 11.6). Если величина его не подобрана соответствующим образом, то сильные колебания, как, например, атмосферные разряды, сообщают сетке столь высокий отри-

* Здесь предполагается катод из чистого металла. (Прим. составителя).

цательный потенциал, что анодный ток делается равным нулю, и триод парализуется до тех пор, пока конденсатор не придет в исходное состояние.

Триод может работать в качестве детектора также и в тех случаях, когда сетка соединяется через катушку связи с сетью или контуром приемника

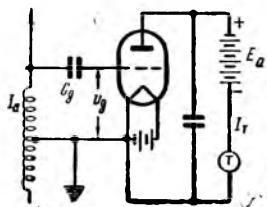


Рис. 11.4

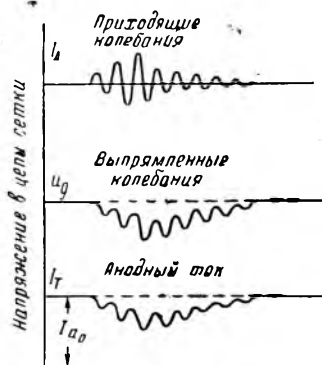


Рис. 11.5

с отрицательным концом нити накала или с некоторой точкой, имеющей потенциал ниже потенциала нити накала в месте присоединения к отрицательному электроду батареи (рис. 11.7, а и б). Принцип действия схемы, изображенной на рис. 11.7, а, подобен описанному на стр. 347. Что касается схемы (рис. 11.7, б), то потенциал сетки будет ниже потенциала отрицательного конца нити накала на величину $i_n R_g$.

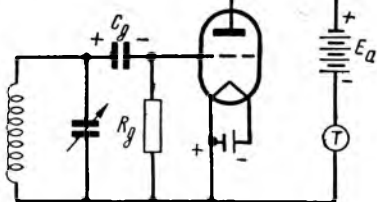


Рис. 11.6

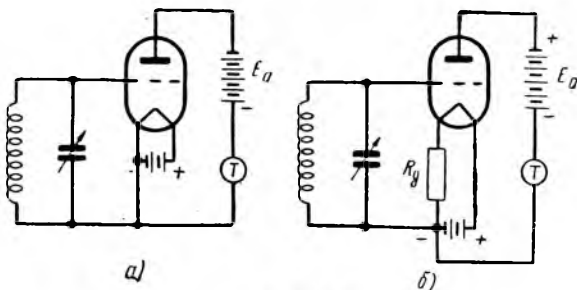


Рис. 11.7

При последовательном включении конденсатора с сеткой триода для получения работы триода как детектора можно сопротивление включать параллельно участку сетка — нить (рис. 11.6). Потенциал сетки будет зависеть от сопротивления R_g , характера кривой $i_g = f(u_g)$ и потенциала той точки, к которой присоединен другой конец сопротивления R_g .

Определим потенциал сетки при холостом ходе триода, если сопротивление R_g присоединим к положительному электроду системы накала. Обратимся к характеристике сеточного тока триода (рис. 11.8).

Пусть напряжение накала равно 2 в . Проведем через точку $u_g = +2\text{ в}$ прямую под углом $\text{ctg } \varphi = R$. Точка D , в которой характеристика пересечется с постоянной прямой, определит точку холостого хода. Это следует из того, что потенциал сетки будет равен $E_{g0} = E_n - i_g R_g$, где $E_n = 2\text{ в}$ (т. е. если мы прибавим к потенциалу сетки падение напряжения на сопротивлении R_g , то получим 2 в). Если к зажимам сетка — нить будет приложена переменная электродвижущая сила, то потенциал сетки будет изменяться около точки D в пределах, задаваемых положительной и отрицательной

амплитудами приложенных колебаний. Так как, согласно ходу кривой $i_g = f(u_g)$, возрастание тока сетки при положительных полупериодах потенциала на сетке больше, чем убывание, то означенное детектирующее действие будет стремиться увеличить число электронов на пластине конденсатора, присоединенной к сетке. Благодаря этому потенциал сетки упадет ниже его значения при холостом ходе и, следовательно, вызовет уменьшение силы анодного тока. Если, как и в ранее разобранным случае, принимаются затухающие колебания, то сопротивление R_g должно быть подобрано таким образом, чтобы заряд сетки имел возможность стекать через него до начала очередной серии затухающих колебаний.

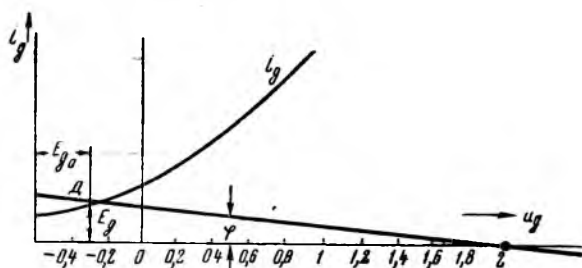


Рис. 11.8

Емкостное сопротивление конденсатора $\frac{1}{\omega C_g}$ должно быть меньше, чем сопротивление утечки, включаемое между сеткой и нитью накала. В условиях приема это сопротивление имеет порядок нескольких сот килоом. С другой стороны, емкость конденсатора должна быть значительно больше емкости между нитью и сеткой.

11.3. Усилители низкой частоты

Задача лампового усилителя сводится к использованию небольшого изменения напряжения на сетке для управления запасом энергии, сосредоточенным в анодной батарее. По характеру работы различают усилители низкой и высокой частот.

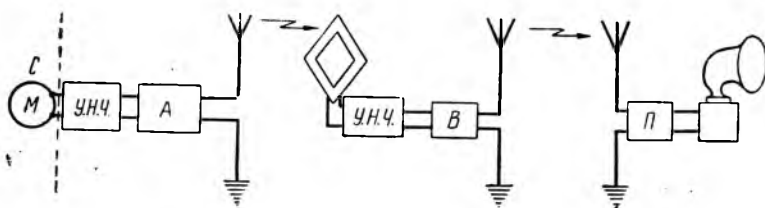


Рис. 11.9

Усилители низкой частоты применяются для усиления токов звуковой частоты. В радиоприемных устройствах с помощью усилителей низкой частоты усиливают ток, получаемый после детектирования. Вообще область применения усилителей низкой частоты довольно широка: они применяются в трансляционных установках проволочной связи, в приемных устройствах и, наконец, в радиотрансляционной аппаратуре. Пример такого устройства показан на рис. 11.9. Усиленный ток из радиостудии С передается радиостанцией А на далеко отстоящую от нее радиостанцию В, которая принимает эти сигналы и снова их передает. Это позволяет всем близлежащим

от *B* приемным установкам *П* слушать передачу из студии *С*. Модуляторное устройство радиотрансляционной установки *B* требует изменения напряжения на зажимах порядка сотен вольт; приходящие же сигналы создают в приемной антенне станции *B* напряжения в пределах 10^{-4} в. Поэтому после детектирования принятых сигналов приходится их усиливать. Вообще усилить без искажений напряжение приходящего сигнала довольно трудно.

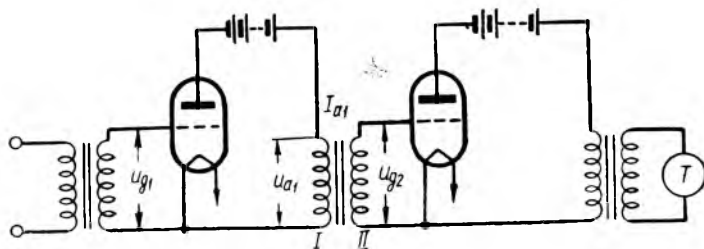


Рис. 11.10

Усилители низкой частоты бывают разных типов: усилители на сопротивлениях, усилители на дросселях и, наконец, усилители на трансформаторах. Схема последнего усилителя (двухлампового) приведена на рис. 11.10.

Если предположить, что ток сеток ламп усилителя равен нулю (это достигается подачей на сетку отрицательного потенциала), то переменная слагающая тока в анодной цепи первой лампы будет равна

$$I_{a1} = \frac{SR_i u_{g1}}{\sqrt{(R_1 + R_i)^2 + (\omega L)^2}}, \quad (11.5)$$

где $SR_i u_{g1}$ — переменная слагающая напряжения эквивалентного генератора; R_i — внутреннее сопротивление лампы; R_1 и ωL — активное и реактивное сопротивления трансформатора.

Переменная слагающая напряжения на зажимах первичной обмотки трансформатора будет

$$u_{a1} = I_{a1} \sqrt{R_1^2 + (\omega L)^2}, \quad (11.6)$$

или, подставляя выражение (11.5), получим

$$u_{a1} = \frac{SR_i u_{g1} \sqrt{R_1^2 + (\omega L)^2}}{\sqrt{(R_1 + R_i)^2 + (\omega L)^2}}. \quad (11.7)$$

На зажимах вторичной обмотки нашего трансформатора мы получим напряжение

$$u_{g2} = n u_{a1}, \quad (11.8)$$

где n — коэффициент трансформации или, заменяя u_{a1} через его выражение (11.7), получим

$$u_{g2} = u_{g1} \frac{n}{D} \frac{\sqrt{R_1^2 + (\omega L)^2}}{\sqrt{(R_1 + R_i)^2 + (\omega L)^2}}. \quad (11.9)$$

Величина ωL в трансформаторах обыкновенно порядка тысяч ом, омическое же сопротивление трансформатора R_1 колеблется в пределах сотен ом. Поэтому им, по сравнению с ωL , можно пренебречь. Приближенно, особенно в случае усиления высоких частот, можно пренебречь и внутренним сопротивлением лампы R_i . Тогда получим очень простое выражение

$$u_{g2} = u_{g1} \frac{n}{D}. \quad (11.10)$$

Отношение $\frac{u_{g2}}{u_{g1}}$ носит название коэффициента усиления и для одного каскада двухлампового усилителя оно равно

$$\frac{u_{g2}}{u_{g1}} = \frac{n}{D}. \quad (11.11)$$

Для усилителя с m ступенями усиления это отношение будет равно

$$\frac{u_{gm}}{u_{g1}} = \left(\frac{n}{D}\right)^{m-1}. \quad (11.12)$$

Если не пренебрегать в выражении (11.5) внутренним сопротивлением лампы R_i , которое бывает в обыкновенных лампах, предназначенных для приемников, около 30—40 ком, то выражение (11.9) преобразуется в следующее:

$$u_{g2} = u_{g1} \frac{n}{D} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{R_i}{\omega L}\right)^2}}. \quad (11.13)$$

Проанализируем это выражение, взяв два крайних случая. Пусть ω мала, тогда $\left(\frac{R_i}{\omega L}\right)^2 \gg 1$ и $\frac{u_{g2}}{u_{g1}} \approx \frac{n}{D} \frac{\omega L}{R_i}$, т. е. коэффициент усиления изменяется прямо пропорционально ω . И чем больше L или меньше R_i , тем круче при малых ω будет подниматься прямая $\frac{n}{D} \frac{\omega L}{R_i}$, так как тангенс угла наклона прямой к оси ω будет $\operatorname{tg} \alpha = \frac{n}{D} \frac{L}{R_i}$. Если ω велика, то отношение $\frac{R_i}{\omega L} \ll 1$ и $\frac{u_{g2}}{u_{g1}} = \frac{n}{D}$, т. е. коэффициент усиления не изменяется с увеличением ω .

Между этими двумя случаями отношение $\frac{u_{g2}}{u_{g1}}$ будет изменяться по кривой AB и асимптотически будет приближаться к прямой $\frac{n}{D}$ (рис. 11.11).

В усилителях необходимо избегать искажений и поэтому нужно работать только на участке AC , т. е. нужно, чтобы точка, соответствующая наименьшей из передаваемых частот, лежала правее спада кривой $\frac{u_{g2}}{u_{g1}} = \frac{n}{D} \frac{1}{\sqrt{1 + (R_i/\omega L)^2}}$. Сдвинуть этот спад в область низких частот можно путем увеличения $\operatorname{tg} \alpha = \frac{n}{D} \frac{L}{R_i}$. Для этого нужно увеличить L , т. е. увеличить число витков первичной обмотки. При этом будет увеличиваться и распределенная емкость обмотки. Может случиться, что собственный резонанс трансформатора будет иметь место как раз в интервале усиливаемых частот, и кривая $\frac{u_{g2}}{u_{g1}}$ в точке M (рис. 11.11) будет иметь резко выраженный максимум. Присутствие этого максимума внесет значительные искажения.

Можно сместить спад кривой влево, уменьшая внутреннее сопротивление ламп R_i . Для этого включаются или несколько ламп параллельно, или применяются специальные лампы с малым внутренним сопротивлением.

Всякий звук, имеющий тембр, состоит из многих гармоник. Кроме того, гармоники эти бывают сдвинуты на разные углы относительно основной. Выражение же (11.5) показывает, что ток, а значит и магнитный поток в трансформаторе, будет иметь по отношению к U_a дополнительный сдвиг из-за присутствия индукции L трансформатора. Другими словами, форма

кривой усиленного звука не может быть передана без искажения. К счастью, опыт показывает, что сдвиги гармоник относительно основной частоты передаваемого звука не влияют на качество его воспроизведения. Для неискаженной передачи важны абсолютные значения амплитуд всех составляющих. В данном же усилителе, несмотря на наличие фазовых сдвигов, абсолютная величина амплитуд усиливается без искажения.

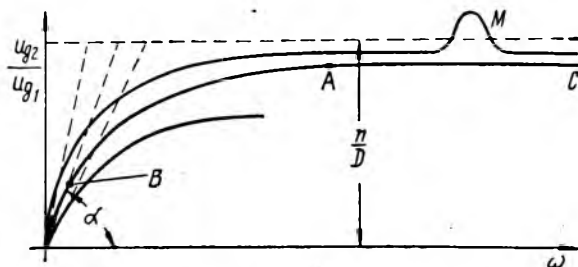


Рис. 11.11

На практике не всегда два элемента усилителя низкой частоты бывают связаны, как это показано на рис. 11.10, через трансформатор. Иногда между передающей станцией *A* (рис. 11.9) и студией *C* проложена длинная линия, что показано на схеме рис. 11.12.

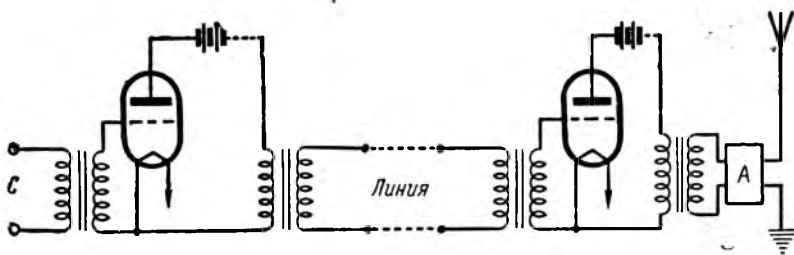


Рис. 11.12

В таком случае выражение для анодного тока будет сильно осложнено по сравнению с выражением (11.5), так как ток вторичной обмотки, соединенной с линией, уже не будет равен нулю. Прохождение же тока по обмоткам трансформаторов нагружает их, изменяя по сложному закону индуктивное сопротивление трансформаторов и нарушает справедливость формулы (11.5), а значит, и вносит искажения. Бороться с этим можно только подбирая компоненты цепи так, чтобы выражение для I_{a1} было близким выражению (11.5). Как перегрузка трансформаторов, так и наличие в усилителе сеточного тока вносят значительные искажения. Для исключения влияния сеточных токов лампа никогда не должна работать с положительным напряжением смещения на сетке. Кроме того, лампа не должна работать при относительно небольшом анодном токе холостого хода I_{a0} . Как видно из семейства характеристик (условий намагничивания) (рис. 11.13), в этом случае не будет прямой зависимости между u_g и i_a . Поэтому мы должны стараться, чтобы рабочая характеристика лампы лежала в линейной области — «области усиления». Обыкновенная, хотя бы генераторная, лампа этому требованию удовлетворить не может. Поэтому строятся специальные усилительные лампы. Они должны обладать следующими свойствами: характеристики их должны быть по возможности прямолинейны, причем необходимо, чтобы большинство характеристик лежало в «области усиления». Сдвинуть характеристики влево можно или давая повышенное напряжение на анод, что, конечно, не особенно выгодно, или увеличивая

абсолютную величину проницаемости D , что следует из уравнения

$$i_a = 14,65 \cdot 10^{-6} \frac{l}{r_g} (u_g + Du_a)^{3/2}.$$

В виде примера можно указать, что если генераторную лампу, обладающую, как известно, малой величиной проницаемости, использовать для усиления низкой частоты, то мы смогли бы получить от нее, не внося искажений, мощность в 10—15 раз меньшую, чем та, на которую она рассчитана.

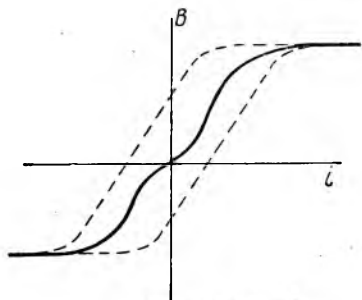


Рис. 11.13

Для расчета усилительной схемы нам должно быть задано:

1) максимальное $I_{a \text{ макс}}$ и минимальное $I_{a \text{ мин}}$ (обыкновенно $I_{a \text{ мин}} = 0, I_{a \text{ макс}}$) значения колебаний анодного тока;

2) переменная слагающая анодного напряжения u_a ;

3) пределы, в которых изменяется напряжение на сетке: от 0 в до $-u_g$ в;

4) данные, зависящие от конструкции лампы, например D или l и r_g сетки.

Допустим, что нам неизвестно напряжение батареи в анодной цепи. Исходим из уравнений Ленгмюра

$$i_a = A (u_g + Du_a)^{3/2}, \quad (11.14)$$

где

$$A = 14,65 \cdot 10^{-6} \frac{l}{r_g} \quad (11.15)$$

и напряжение на аноде

$$u_a = E_a + U_{am} \sin(\omega t + \psi). \quad (11.16)$$

В нашем случае при максимальном анодном токе $I_{a \text{ макс}}$ напряжение на сетке равно нулю, напряжение на аноде $u_a = E_a - U_{am}$.

Подставляя это выражение в уравнение Ленгмюра, получим

$$I_{a \text{ макс}} = A [D (E_a - U_{am})]^{3/2}. \quad (11.17)$$

При минимальном анодном токе $I_{a \text{ мин}}$ напряжение на сетке равно $-u_g$, напряжение на аноде $u_a = E_a + U_{am}$.

Подставляя в выражение (11.14), получим

$$I_{a \text{ мин}} = A [-u_g + D (E_a + U_{am})]^{3/2}. \quad (11.18)$$

Решение последних двух уравнений (11.17) и (11.18) дает возможность определить неизвестные A и E_a .

Некоторые замечания к расчету междуплампового трансформатора. При расчете междуплампового трансформатора руководствуются следующими соображениями. Чтобы не получить в железе больших потерь, индукцию выбирают не больше 300 гс для самой низкой из передаваемых частот, так как

$$BQ = \Phi \sim n \frac{U_{am}}{\omega L}, \quad (11.19)$$

где Q — сечение железного сердечника; n — число витков; L — полная самоиндукция обмотки. Кроме уменьшения B с увеличением ω , магнитный поток уменьшается еще и от своеобразного магнитного скин-эффекта. Действительно, при больших значениях ω токи Фуко располагаются по поверх-

ности листов сердечника. Внутри листа сердечника возникает противодействующий основному магнитный поток от токов Фуко. Значит и густота силовых линий на поверхности листа будет больше, чем в середине его. Вообще зависимость между током и магнитным потоком (при замкнутом сердечнике) не бывает прямолинейной (рис. 11.14). Поэтому, чтобы не вносить

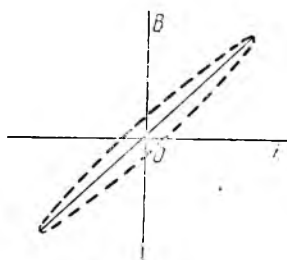


Рис. 11.14

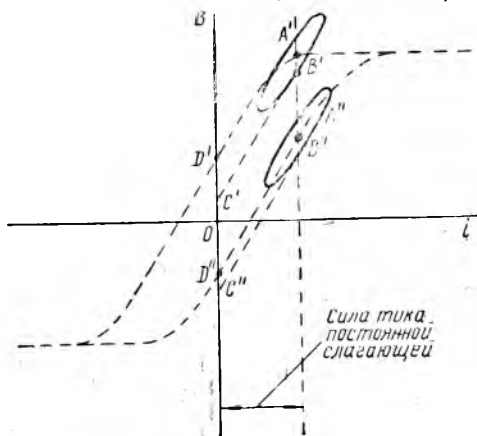


Рис. 11.15

искажений, приходится делать в магнитопроводе небольшой воздушный зазор (0,1—0,3 мм). Внося с помощью зазора большое сопротивление магнитному потоку, мы, во-первых, приближаемся к прямолинейной зависимости между B и i (рис. 11.15), и, во-вторых, превращаем петлю гистерезиса в удлинённый эллипс. Только при соблюдении этих условий, а также при устройстве трансформатора из специальных сортов железа мы сможем свести до минимума искажения при передаче. В предыдущем изложении мы вообще не касались вопроса о влиянии постоянной слагающей анодного тока. Постоянная слагающая анодного тока приносит много неприятностей. При ней циклы перемагничивания железа уже не происходят около точки 0 (рис. 11.14), а будут происходить в точках A' или A'' (рис. 11.15) в зависимости от первоначального состояния железа. Таким образом, работа междупроводного трансформатора происходит при относительно большем насыщении железа. Если во время работы разомкнуть анодную цепь то мы попадем уже не в прежнюю точку D' или D'' , а в новую C' или C'' (рис. 11.15). При следующем включении анодного тока колебания будут происходить даже уже не около точек A' и A'' , а около каких-то новых точек, может быть, при еще больших насыщениях железа. Поэтому в ответственных случаях вместо предложенной выше схемы употребляют двухтактную схему (рис. 11.16).

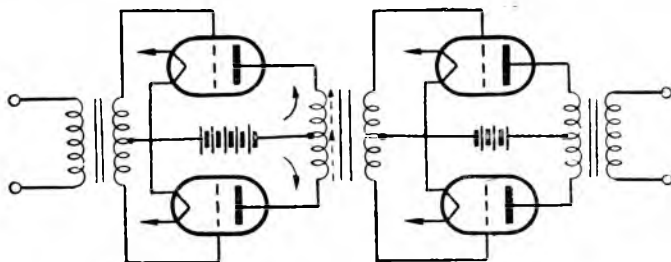


Рис. 11.16

В данной схеме переменные слагающие анодного тока складываются, постоянные же слагающие создают два равных, но по направлению противоположных магнитных потока, которые взаимно уничтожаются. На чер-

теже сплошные стрелки указывают направление магнитных силовых линий, вызванных переменными слагающими токов, а пунктирные — их постоянными слагающими. Наконец, надо заметить, что даже железные болты и отверстия в остова трансформатора способствуют нарушению чистоты передачи.

11.4. Усилители высокой частоты

Усилители высокой частоты бывают двух типов: 1) усилители без избирательности, 2) усилители с избирательностью.

Основным признаком усилителя без избирательности является отсутствие емкости и самоиндукции в его анодной цепи. Примером такого усилителя может служить усилитель на сопротивлениях (рис. 11.17). Показанные на схеме конденсаторы C_{g1} и C_{g2} необходимы для защиты сетки от положительного напряжения анодной батареи. Если же в цепи сетки включен

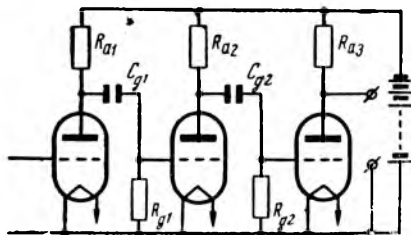


Рис. 11.17

конденсатор, то необходимо создать утечку, для чего и включаются сопротивления R_{g1} и R_{g2} . Сила тока в анодной цепи будет равна

$$I_{a1} = \frac{U_{g1m} S R_i}{R_{a1} + R_i}. \quad (11.20)$$

Напряжение на сетке второй лампы будет

$$U_{g2m} = I_{a1} R_{a1}. \quad (11.21)$$

Тогда коэффициент усиления для двух ламп будет равняться

$$\frac{U_{g2m}}{U_{g1m}} = \frac{S R_i R_{a1}}{R_{a1} + R_i} = \frac{1}{D} \frac{1}{1 + \frac{R_i}{R_{a1}}}. \quad (11.22)$$

Коэффициент усиления для m ламп при условии равенства R_a и R_i для всех каскадов получим в виде

$$\frac{U_{g2m}}{U_{g1m}} = \left[\frac{1}{D} \frac{1}{1 + \frac{R_i}{R_a}} \right]^{m-1}, \quad (11.23)$$

т. е. коэффициент усиления совершенно не зависит от частоты принимаемых сигналов.

Схема усилителя высокой частоты с избирательностью по существу очень проста. Она представляет собой ряд последовательно включенных генераторов с независимым возбуждением. Принципиальная схема ее показана на рис. 11.18 (очерчена сплошными линиями). Важнейшее ее свойство — высокая избирательность. На такой усилитель нельзя принимать радиотелеграфной работы незатухающими колебаниями, если не принимать специальных мер, в частности включения дополнительного генератора в детекторный контур с низкочастотным сигналом. В этом случае мож-

но также применять метод биений. Сущность этого метода состоит в том, что мы связываем последний анодный контур усилителя с небольшим ламповым генератором, генерирующим колебания с частотой ω_2 , немного отличной от принимаемой частоты ω_1 . Тогда в детекторном контуре создадутся

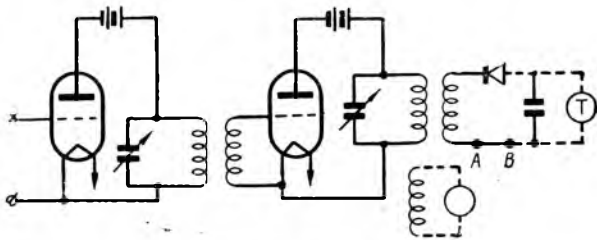


Рис. 11.18

биения, которые дадут в телефоне звук. Это можно изобразить на векторной диаграмме рис. 11.19. В каждый данный момент сила тока в детекторной цепи выразится формулой

$$I^2 = I_1^2 + I_2^2 + 2I_1I_2 \cos (\omega_1 - \omega_2) t. \tag{11.24}$$

В некоторый (скажем, начальный) момент оба вектора совпадут. Тогда $(\omega_1 - \omega_2) t_1 = 0$ или $I^2 = (I_1 + I_2)^2$.

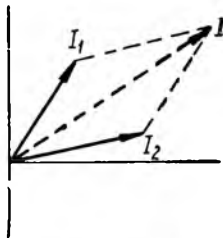


Рис. 11.19

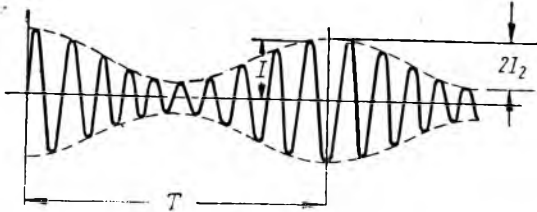


Рис. 11.20

Дальше подобным же рассуждением найдем:

$$\text{если } (\omega_1 - \omega_2) t_2 = \frac{\pi}{2}, \text{ то } I^2 = I_1^2 + I_2^2,$$

$$\text{если } (\omega_1 - \omega_2) t_3 = \pi, \text{ то } I^2 = (I_1 - I_2)^2,$$

$$\text{если } (\omega_1 - \omega_2) t_4 = \frac{3\pi}{2}, \text{ то } I^2 = I_1^2 + I_2^2.$$

И, наконец, в момент времени t_5 получим то же состояние, что и в исходный момент времени:

$$(\omega_1 - \omega_2) t_5 = 2\pi \text{ или } I_2 = (I_1 + I_2)^2.$$

Дальше картина будет повторяться, причем период этого явления будет равен

$$T = t_5 - t_1 = \frac{2\pi}{\omega_1 - \omega_2}. \tag{11.25}$$

Соответственно угловая частота биений будет равна

$$\Omega = \frac{2\pi}{T} = \omega_1 - \omega_2. \tag{11.26}$$

Иллюстрацию этого см. на рис. 11.20.

Сила приема будет пропорциональна разности максимальной и минимальной величин суммарного тока I , т. е. сила приема пропорциональна $I_{\text{макс}} - I_{\text{мин}}$ или величине

$$(I_1 + I_2) - (I_1 - I_2) = 2I_2. \quad (11.27)$$

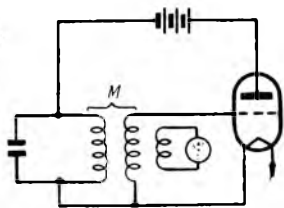


Рис. 11.21

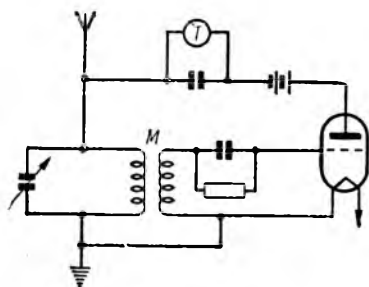


Рис. 11.22

Если бы мы предположили, что $I_2 > I_1$, то рассуждения остались бы аналогичными, но сила приема была бы пропорциональна не $2I_2$, а $2I_1$, следовательно, сила приема не может превышать удвоенную величину меньшей из переменных слагающих, протекающих по детекторному контуру.

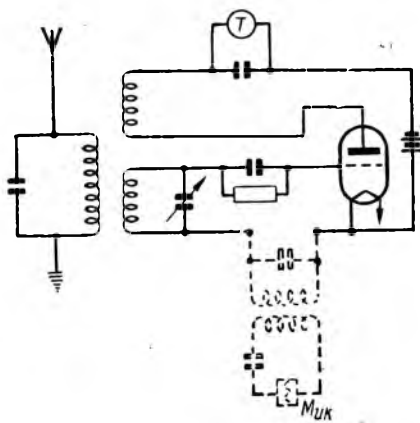


Рис. 11.23

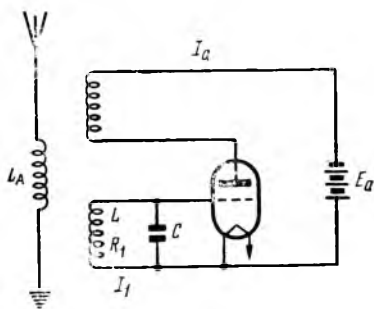


Рис. 11.24

Поскольку такой метод приема, называемый гетеродинным, требует трех отдельных элементов: приемника, усилителя и генератора, его стараются упростить. Для этого все эти элементы соединяют вместе, применяя регенеративную схему.

Генератор с самовозбуждением (рис. 11.21) обладает тем свойством, что начинает генерировать колебания только при определенной магнитной связи M между сеткой и анодом. Например, если связь немного меньше критической, то колебания в генераторе не возникнут, но если мы приложим на сетку переменную электродвижущую силу извне, хотя бы от генератора G , то этим мы создадим добавочное магнитное поле, увеличивающее существующую связь между анодом и сеткой, и лампа начнет генерировать и притом очень интенсивно. То же самое мы имеем и в регенеративном приемнике — обратной связью (рис. 11.22).

Пусть анодный контур, он же и приемный, чуть-чуть расстроен относительно принимаемой частоты, а связь между сеткой и анодом выбрана не-

много меньше критической. Когда нет приходящих сигналов, то не будет и генерации. Если же в приемном контуре появятся колебания от приходящих сигналов, то лампа начнет генерировать. Но так как анодный контур немного расстроен относительно приходящей волны, то в приемнике возникнут биения. Наличие же конденсатора и сопротивления утечки (гридлика), сообщающего сетке отрицательный заряд, позволит выпрямить эти колебания и мы услышим в телефоне звук. Эта схема регенеративного приемника (рис. 11.23) интересна еще и тем, что позволяет осуществить при помощи включения микрофона в цепь сетки дуплексную передачу.

Чтобы рассчитать степень усиления регенеративного приемника, упростим его схему (рис. 11.24). В упрощенной схеме отсутствуют телефон, конденсатор, шунтирующий его, и конденсатор с сопротивлением утечки. Для упрощенных рассуждений сделать это вполне возможно.

На схеме R_1 — активное сопротивление замкнутого контура LC и под R_a будем подразумевать сопротивление анодной цепи (включая внутреннее сопротивление лампы).

Напряжение, подводимое к сетке,

$$U_{gm} = \frac{I_1}{j\omega C} \quad (11.28)$$

С другой стороны, напряжение, действующее в анодной цепи,

$$U_{am} = \frac{U_{gm}}{D} \quad (11.29)$$

Ток в анодной цепи будет равен

$$I_{am} = \frac{U_{am}}{R_a} \quad (11.30)$$

Кроме того, при достаточной связи и надлежащем включении катушки обратной связи в самоиндукции L будет индуцироваться напряжение приходящего сигнала U_m того же направления, что и индуцируемое катушкой L_A . Электродвижущая сила, определяемая наличием обратной связи,

$$u_m = j\omega M I_{am} \quad (11.31)$$

Последнее выражение с учетом уравнений (11.28) и (11.29) можно преобразовать так:

$$j\omega M I_{am} = j\omega M \frac{U_{am}}{R_a} = j\omega M \frac{U_{gm}}{R_a D} = j \frac{\omega M}{R_a D} \frac{I_1}{j\omega C}$$

или

$$u_m = \frac{M I_1}{C D R_a} \quad (11.32)$$

Принимая во внимание входящие в уравнение (11.32) величины, можно составить уравнение равновесия электродвижущих сил для сеточного контура (второй закон Кирхгофа):

$$I_1 R_1 - \frac{M I_1}{C D R_a} + j I_1 X = u_m, \quad (11.33)$$

где X — реактивное сопротивление сеточного контура, равное $\omega L - \frac{1}{\omega C}$.

Если контур настроен в резонанс с приходящими сигналами, $X=0$. Тогда

$$I_1 R_1 - \frac{M I_1}{C D R_a} = u_m, \quad (11.34)$$

$$I_1 = \frac{u_m}{R_1 - \frac{M}{C D R_a}}. \quad (11.35)$$

При отсутствии обратной связи уравнение тока сеточного контура выглядело бы так:

$$I_{10} R_1 + j I_{10} X = u_m. \quad (11.36)$$

В случае же резонанса $X=0$, тогда

$$I_{10} R_1 = u_m, \quad (11.37)$$

$$I_{10} = \frac{u_m}{R_1}. \quad (11.38)$$

Степень усиления регенеративного приемника относительно обыкновенного будет

$$\frac{I_1}{I_{10}} = \frac{R_1}{R_1 - \frac{M}{C D R_a}}, \quad (11.39)$$

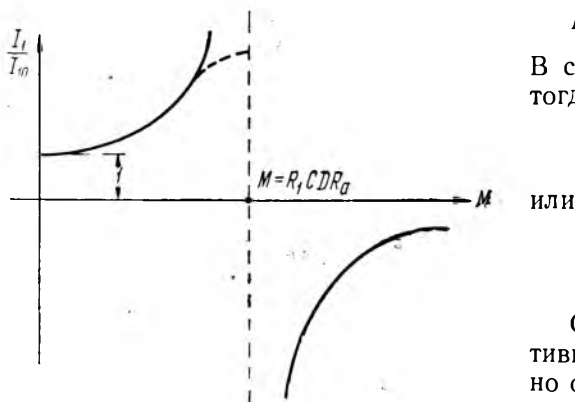


Рис. 11.25

т. е. усиление не зависит от длины волны принимаемого сигнала, а также от его э. д. с., равной u_m , хотя последнее не совсем верно. Действительно, если связь M будет равной $R_1 C D R_a$, то знаменатель выражения (11.39) превращается в нуль, т. е. отношение $\frac{I_1}{I_{10}}$ становится равным бесконечности, но так как I_{10} — величина конечная, то тогда $I_1 = \infty$. Последнее же обстоятельство, если вспомнить условия самовозбуждения лампового генератора, будет означать, что наша система начнет генерировать. Очевидно, что ток в анодной цепи I_{am} даже при таком условии не сможет превысить тока эмиссии. Поэтому и ток сеточного контура I_1 не может стать равным бесконечности, т. е. кривая $\frac{I_1}{I_{10}} = f(M)$ не уйдет в бесконечность (см. пунктирную кривую на рис. 11.25). Сильный сигнал создает большую э. д. с. u_m , а значит и больший ток в замкнутом контуре LC , чем э. д. с. u_m и I_{10} от слабого сигнала. Поэтому отношение $\frac{I_1}{I_{10}}$ сможет стать большим для слабого сигнала по сравнению с тем же отношением от сильного сигнала прежде, чем I_1 достигнет предельной величины. Таким образом, усиление слабых сигналов относительно больше усиления сильных сигналов.

Отношение (11.39) можно представить в таком виде:

$$\frac{I_{10}}{I_1} = 1 - \frac{M}{C D R_a R_1}. \quad (11.40)$$

Последнюю формулу можно иллюстрировать рис. 11.26. Из данной формулы ясно, что чем больше сопротивление сеточного контура R_1 , тем больше и величина критической связи $M = C D R_a R_1$, при которой наступает самовозбуждение.

Во всех предыдущих рассуждениях предполагалось наличие в приемнике одной индуктивной связи. Это не совсем точно: есть еще и емкостная связь через емкость анод — нить. Если принять во внимание и эту связь, то формула (11.40) приобретает вид

$$\frac{I_{10}}{I_1} = \frac{R_1 - a}{R_1} - \frac{M}{CDR R_1}, \quad (11.41)$$

где a — коэффициент, зависящий от внутренней емкости ламп.

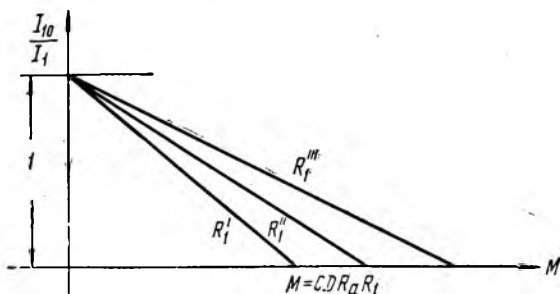


Рис. 11.26

Основной недостаток регенеративного приемника — его склонность к генерированию. Если в сеточном контуре нет проходящих колебаний, то приемник самовозбуждается только тогда, когда связь достигнет критического значения. При наличии же э. д. с. от антенны генерация наступает раньше, т. е. и при меньшей связи, а именно, как только сумма $u_m + u_A$ [см. уравнение (11.34)] достигнет величины, достаточной для самовозбуждения. Но как только начнутся собственные колебания нашей лампы, прием становится невозможным из-за сильных искажений.

ЛИТЕРАТУРА, ИСПОЛЬЗОВАННАЯ М. В. ШУЛЕЙКИНЫМ

1. H. D. Arnold. Phys. Rev., **16**, 70 (1920).
2. C. D. Child. Phys. Rev., **32**, 492 (1911).
3. S. Dushman, H. N. Rowe, Ewald, C. A. Kidner. Phys. Rev., **25**, 338 (1925).
4. S. Dushman, D. Dennison, N. B. Reynolds. Phys. Rev., **29**, 903 (1927).
5. S. Dushman, I. W. Ewald. Gen. Elec. Rev., **26**, 3, 154 (1923).
6. L. A. Dubridge. Phys. Rev., **31**, 236 (1928).
7. Fischvoigt, F. Koref. Zeit. für tech. phys., **7**, 296 (1925).
8. H. A. Jones, I. Langmuir, G. M. I. Mackay. Phys. Rev., **30**, 201 (1927).
9. K. H. Kingdon. Phys. Rev., **24**, 510 (1924).
10. I. Langmuir. Phys. Rev., **2**, 450 (1913).
11. I. Langmuir, K. B. Blodgett. Phys. Rev., **24**, 49 (1924).
12. I. Langmuir. Phys. Rev., **8**, 149 (1916).
13. I. Langmuir. Phys. Rev., **2**, 450 (1913).
14. I. Langmuir. Phys. Rev., **2**, 329 (1913).
15. G. N. Lewis, E. Q. Adams. Phys. Rev., **3**, 92 (1914).
16. A. Magnus, F. A. Lindemann. Zeit. für Electrot, **16**, 269 (1910).
17. M. I. Martin. Phys. Rev., **33**, 991 (1929).
18. G. Oweh. Phil. Mag., **8**, 230 (1904).
19. O. W. Richardson. Phil. Mag., **28**, 633 (1914).
20. W. Schlichter. Ann. der Phys., **47**, 573 (1915).
21. W. Schottky. Ann. der Phys., **62**, 113 (1920).
22. W. Schottky. Ann. der Phys., **44**, 1011 (1914).
23. H. Simon. Zeit. für techn. Phys., **8**, 434 (1927).
24. K. K. Smith. Phil. Mag., **29**, 802 (1915).
25. O. Sockur. Ann. der phys., **40**, 67 (1913).
26. H. J. Spanner. Ann. der Phys., **75**, 609 (1924).
27. E. R. Stokle. Phys. Rev., **8**, 5, 534 (1916).
28. H. A. Wilson. Phys. Rev., **24**, 38 (1924).
29. A. G. Worthing. Phys. Rev., **25**, 846 (1925).
30. H. A. Wilson. Phil. Trans, A **202**, 243 (1913).
31. F. Deiniger. Ann. der Phys., **25**, 149 (1907).
32. M. I. Martin. Phil. Mag., **14**, 306 (1907).
33. Pring, Parker. Phil. Mag., **23**, 192 (1912).
34. A. G. Worthing. Phys., Rev., **28**, 190 (1926).
35. O. Sackur. Ann. der Phys., **36**, 598 (1911).
36. S. Simon. Zeit. für phys. Chem., **109**, 138 (1924).
37. H. Tetrode. Ann. der Phys., **38**, 434 (1912).
38. A. G. Worthing. Phys. Rev., **28**, 174 (1926).
39. Günters, Schulße. Zeit. für Phys., **36**, 563 (1926).
40. Suhman. Zeit. für Phys., **13**, 17 (1923).
41. F. Deiniger. Ann. der Phys., **25**, 298 (1908).
42. I. Langmuir. Journ. Am. Chem. Soc., **35**, 105 (1913).

О Г Л А В Л Е Н И Е

Предисловие	3
<i>Г л а в а I. Электрон</i>	
1.1 Основные сведения об электроне	7
Электрическое поле электрона	7
Заряд и масса электрона	8
Сила, действующая на электрон, находящийся в электрическом поле	8
Взаимодействие электронов	8
1.2. Энергия электрона и его масса	9
1.3. Работа, совершаемая при движении электрона в электрическом поле	15
1.4. Сила, действующая на электрон, находящийся в магнитном и электрическом полях	17
1.5. Однородное электрическое поле по оси Ox и однородное магнитное поле по оси Oz	21
1.6. Радиальное электрическое поле и однородное магнитное поле по оси цилиндра, направленного по оси Oz	25
1.7. Радиальное электрическое поле и concentрическое магнитное поле, создаваемое током накала	30
1.8. Ускоренное движение электрона. Излучение электроном энергии	32
1.9. Излучение электромагнитной энергии электроном, совершающим гармонические колебания и двигающимся по круговой орбите	34
1.10. Силы, действующие на электрон при его движении	37
1.11. К теории излучения электрона	40
<i>Г л а в а II. Термоэлектронная эмиссия. Формула Ричардсона</i>	
2.1 Тепловые скорости электронов	42
2.2. Исследование двойного слоя	43
2.3. Условия выхода электрона за пределы двойного слоя	47
2.4. Распределение скоростей по Максвеллу	50
Число частиц, скорость которых лежит в пределах от v до $v + dv$. Наиболее вероятная скорость	54
2.5. Средняя арифметическая и средняя квадратичная скорости	55
Средняя арифметическая скорость	55
Средняя квадратичная скорость	58
Зависимость средней квадратичной скорости от температуры газа	59
2.6. Испарение жидкости	60
2.7. Вывод формулы тока излучения электронов с единицы поверхности проводника (формула Ричардсона)	62
Историческая справка	68
2.8. Скрытая теплота испарения	68
2.9. Вывод формул Вильсона, Дешмана и Шоттки	71
2.10. Энергия вылетевшего электрона, средняя квадратичная скорость вылетевших электронов и баланс энергии	74
2.11. Испарение металлов. Упругость паров	77
2.12. Связь между фотоэффектом и двойным слоем	82

2.13. Расчет нити накала электронной лампы	84
Сила тока излучения электронов боковой поверхностью единичного цилиндра и цилиндрического проводника	84
Мощность, рассеиваемая боковой поверхностью единичного цилиндра, и мощность, рассеиваемая боковой поверхностью цилиндрического проводника	85
Сопротивление единичного цилиндра r' и сопротивление цилиндрического тела накала r_n	85
Зависимость диаметра провода от тока накала	85
Зависимость напряжения накала катода от размеров проводника	86
Охлаждающее влияние концов нити накала	87
2.14. Расчет катода лампы	88
Определение температуры катода	88
Расчет равномерно накаливаемого катода	88
Определение напряжения на катоде	89
Поправка к расчетному значению напряжения на катоде	90
Определение сопротивления катода	90
Построение характеристик катода	91
2.15. Расчет анода электронной лампы	92
Температура анода	92
Рассеяние энергии поверхностью металла в зависимости от температуры	92

Глава III. Катоды из торированного вольфрама

3.1. Общая характеристика излучения электронов катодами из торированного вольфрама	94
3.2. Условия для получения больших сил токов излучения с торированного вольфрама	97
3.3. Кривые активирования	100
3.4. Скорость активирования как функция температуры	105
3.5. Абсолютное значение коэффициента диффузии	107
3.6. Скорость образования металлического тория	114
3.7. Индуцированное и нормальное испарение тория	117
Нормальное испарение тория	118
3.8. Изменение теплоты испарения тория в зависимости от θ	122
3.9. Дальнейшие сведения по одноатомному слою	125
Одноатомная пленка кислорода	126
Одноатомный слой цезия на вольфраме	126

Глава IV. Термоэлектронный ток в анодной цепи двухэлектродной лампы (диска)

4.1. Влияние пространственного заряда на излучение электронов накаленным телом (формула Ленгмюра)	127
4.2. Термоэлектронный ток при отсутствии и наличии напряжения в анодной цепи	128
4.3. Семейство характеристик $i_a = f(T)$ при $u_a = \text{const}$. Расчет тока насыщения, кривая Ричардсона	129
4.4. Распределение потенциала и напряженности электрического поля между электродами	131
4.5. Уравнение Пуассона в прямоугольных и цилиндрических координатах	132
4.6. Пространственный заряд при плоских электродах	136
4.7. Пространственный заряд при цилиндрических электродах	140
4.8. Анодный ток при плоских электродах	144
4.9. Анодный ток при цилиндрических электродах	147
4.10. Анодный ток при электродах произвольной формы	150
4.11. Метод расчета анодного тока для случая плоских электродов с учетом начальных скоростей электронов, излучаемых накаленным телом	151
4.12. Приближенная формула для расчета силы анодного тока для плоских электродов с учетом начальных скоростей электронов	160
4.13. Случай нулевого значения силы анодного тока	160
4.14. Метод расчета анодного тока для цилиндрических электродов с учетом начальных скоростей электронов	161

4.15. Сила тока насыщения при напряженности электрического поля на катоде, значительно большем, чем значения, соответствующие току насыщения	162
4.16. Причины отклонения теоретических характеристик лампы от реальных	166
4.17. К вопросам упрощения формулы тока эмиссии и долговечности катода (отзыв М. В. Шулейкина о печатных работах инженера-электрика В. И. Волынкина)	170

Глава V. Диод как выпрямитель

5.1. Однополупериодное выпрямление однофазного тока (графоаналитическое исследование)	174
5.2. Одно- и двухполупериодное выпрямление однофазного тока (аналитическое исследование)	177
5.3. Трехфазная цепь питания выпрямителя	180
Однополупериодное выпрямление трехфазного тока	180
Двухполупериодное выпрямление трехфазного тока	181
5.4. Аналитическое исследование выпрямления многофазных токов	182
5.5. Расчет сглаживающих емкостей и самоиндукций	187
5.6. Применение многоступенчатых фильтров для сглаживания высших гармоник	191
5.7. Выпрямление тока высокой частоты	193
5.8. Умножение частоты при помощи двухэлектродной лампы	193

Глава VI. Электронная лампа с тремя электродами (триод), ее характеристики и параметры

6.1. Вольтамперные характеристики триода и его проницаемость	195
6.2. Физическое значение проницаемости D триода и семейства его характеристик	197
6.3. Метод расчета проницаемости триода	199
6.4. Крутизна и внутреннее сопротивление триода	202
6.5. Определение параметров триода	204
Определение динамической проницаемости D	204
Определение статической проницаемости D	204
Определение статической крутизны S	205
Определение внутреннего статического сопротивления триода R_i	205
Определение динамического сопротивления R_i	206
6.6. Движение электрона в электрическом поле и критическая длина волны триода	206
6.7. Движение электрона в радиальном электрическом поле	210
6.8. Движение электрона в однородном высокочастотном электрическом поле и критическая длина волны триода	212
6.9. Критические параметры трехэлектродной лампы	213
6.10. Критические параметры многоэлектродной лампы с экранирующей сеткой	215
6.11. Критические параметры пентода и гексода	217

Глава VII. Триод как генератор

7.1. Сила тока катода i_k , сетки i_g и анода i_a	223
7.2. Эквивалентная схема генератора	225
7.3. Основы аналитического расчета генератора по динамической характеристике	228
7.4. Расчет генератора с помощью комплексной плоскости	232
7.5. Расчет генератора с параллельно включенными триодами	236
7.6. Расчет триода при колебаниях второго рода	239
7.7. Триодный генератор с самовозбуждением	244
7.8. Приближенная теория расчета генератора по углу отсека	250
Анодная цепь генератора	250
7.9. Приближенная теория генератора с независимым возбуждением	258
Ток анодной цепи	258
Амплитуда напряжения U_{gm} и напряжение смещения E_g на сетке	259
Замечание составителя	260
7.10. Эквивалентная схема двухтактного генератора	261

Глава VIII. Теория явления затягивания

8.1. Явление затягивания	263
8.2. Теория явления затягивания	265
Схема	265
Уравнения, характеризующие схему	266
Решение предложенных уравнений	266
Определение длины волны и условия самовозбуждения	267
Условие самовозбуждения	268
Условие частоты	269
Исследование условия частоты в предположении, что $\frac{4\alpha_3\alpha_4}{n_3^2}$ мало по сравнению с единицей	270
8.3. Исследование условия самовозбуждения	272
Зависимость возникновения затягивания от длины волны	273
Аналитическое определение значений p , определяющих возникновение колебаний.	275
8.4. Решение условия частоты с учетом члена, зависящего от сопротивления	277
8.5. Выражения для сил токов и некоторых параметров контуров	278
8.6. Применение выражений предыдущего параграфа для случая, когда коэффициент связи равен критическому	281
Условие самовозбуждения в случае коэффициента связи, равного критическому ($\alpha_{30} \geq \alpha_4$)	282
8.7. К решению условия частоты с учетом члена, зависящего от сопротивления	282
8.8. Графическое построение сопротивлений, характеризующих связанную систему, и их исследование	284
8.9. Определение возникающих частот при расстройке первичного контура	287
Об устойчивости] получаемых частот	290

Глава IX. Радиотелефония (основы модуляции)

9.1. Микрофон	292
9.2. Модуляция	295
9.3. Схемы радиотелефонных передатчиков	298
9.4. Модуляция на сетку (первый вариант метода расчета)	300
9.5. Модуляция (второй вариант метода расчета)	304
Положения, принятые в основу элементарной теории модуляции	304
А. Модуляция на сетку	
Построение диаграммы модуляции. Выражения для u_g , i_a и u_a при модуляции	305
Определение коэффициентов пропорциональности k_g , k_i и k_a	306
Выражения для мощностей	308
Б. Модуляция на анод	
Построение диаграммы модуляции при постоянной силе питающего тока. Выражения для i_a , u_a и u_g	309
Определение коэффициентов k	310
Выражения для мощностей	313
Расчет модулятора	314

Глава X. Основы расчета радиотелефонного генератора

10.1. Расчет лампового генератора при немодулированных колебаниях (третий вариант метода расчета)	317
Основные положения расчета	317
Вывод уравнения для силы анодного тока	317
Колебания первого рода — $E_g + DE_a \geq U_{gm} - DU_{am}$	318
Колебания второго рода — $E_g + DE_a < U_{gm} - DU_{am}$	318
Графическое изображение колебаний анодного тока	319
Определение постоянной слагающей, первой гармоники и высших гармоник анодного тока	321

Связь между I_{am} , U_{ym} и E_y	322
Уравнение рабочей характеристики	322
Связь между U_{gm} и U_{am}	323
Связь между наибольшим положительным значением напряжения на сетке ($-E_g + U_{gm}$) и остаточным напряжением на аноде ($E_a - U_{am}$) . . .	323
Мощности: полезная W_1 , подведенная W_0 и потери на аноде $W_a = W_0 - W_1$. . .	324
10.2. Расчет лампового генератора при колебаниях, модулированных синусоидой (с угловой частотой $\Omega \ll \omega$)	324
Модуляция в предыдущем каскаде, уравнение модуляции	324
Связь между коэффициентами модуляции	325
Анализ рассмотренных выше зависимостей при $\varphi = 0$	327
10.3. Частотная модуляция	329
Общая постановка вопроса	329
Анализ конкретной схемы	330
10.4. О влиянии цепей питания на модуляцию	333
Питание от машины постоянного тока	333
Питание от выпрямителя	335
Пример	342

Г л а в а XI. Детектирование и усиление

11.1 Диод как детектор	346
11.2 Триод как детектор.	347
11.3. Усилители низкой частоты	350
11.4. Усилители высокой частоты	356
Литература, использованная М. В. Шулейкиным	362

Михаил Васильевич Шулейкин

Электронные лампы

Редакторы Издательства *Г. Г. Гуськов, В. И. Лапшин*

Художник *В. В. Краснов*

Технический редактор *Т. В. Полякова*

РИСО АН СССР №23—6 В. Сдано в набор 6/II 1963 г.
Подписано к печати 30/VIII-1963 г. Формат 70×103¹/₁₆.

Печ. л. 23+1 вкл. =31,51 усл. печ. л.

Уч.-изд. л. 23,3 (23,2 + 1 вкл.)

Тираж 10.000 экз.

Изд. № 1647 Тип. заказ № 1876.

Цена 1 р. 83 к.

Издательство Академии наук СССР
Москва, К-62, Подсосенский пер., 21

2-я типография Издательства АН СССР
Москва, Г-99, Шубинский пер., 10

ОПЕЧАТКИ

Страница	Строка	Напечатано	Должно быть
29	5 сн.	ρ_a	r_a
58	3 св.	мм	мм рт. ст.
130	9 св.	$u_a^{3/2}$	$u_a^{3/2}$
138	13 сн.	l	e
161	9 св.	e	l
162	14 св.	$I^{3/2}$	$I^{3/2}$
258	18 св.	1921 г.	1921 ** г.
	21 св.	режиме. **	режиме.
260	15 сн.	составителя	Д. Ф. Масанова
275	14 сн.	замечаний	значений
296	6 сн.	$I - I_{\min}$	$I_{\max} - I_{\min}$
318	2 сн.	, в настоящее время	(до 1923 г.),
324	9 сн.	$\Omega \ll \varepsilon$	$\Omega \ll \omega$

