

А. Шень

Математическая индукция

Издание третье, дополненное

Москва
Издательство МЦНМО
2007

ББК 22.1
Ш47

Шень А.

Ш47 Математическая индукция. — 3-е изд., дополн. — М.: МЦНМО, 2007. — 32 с.: ил.

ISBN 978-5-94057-324-1

В брошюре рассказывается (для школьников 7–11 классов) о методе математической индукции на примере 46 задач, из которых 19 снабжены подробными решениями. Предыдущее издание книги вышло в 2004 г.

ББК 22.1

Оригинал-макет (включая рисунки) подготовлен автором.

Электронная версия книги является
свободно распространяемой и доступна по адресам

<http://www.mccme.ru/free-books/induction/induction.zip>

<ftp://ftp.mccme.ru/users/shen/induction.zip>

Александр Шень

Математическая индукция

Подписано в печать 05.11.2007 г. Формат 60 × 90 ¹/₁₆. Бумага офсетная. Печать офсетная. Печ. л. 2. Тираж 3000 экз. Заказ №
Издательство Московского центра непрерывного математического образования. 119002, Москва, Б. Власьевский пер., 11. Тел. (495)-241-74-83. Отпечатано с готовых диапозитивов в ФГУП «Полиграфические ресурсы».

ISBN 978-5-94057-324-1

© Шень А., 2004, 2007

Математическая индукция: примеры

Как видно из самого названия, индукция бывает не только в математике. Иногда называют «неполной индукцией» переход от частных примеров к общим закономерностям. Бывает индукция и в физике (катушки индуктивности, явление самоиндукции). Но в этой брошюре мы говорим только о математической (полной) индукции.

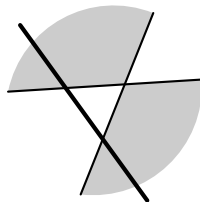
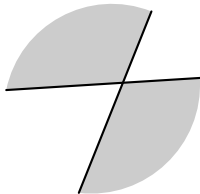
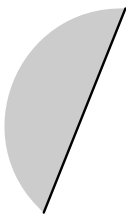
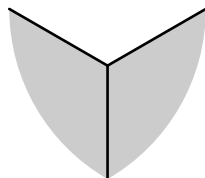
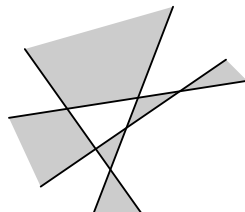
Что это такое, проще всего объяснить на примерах. Разберём несколько задач.

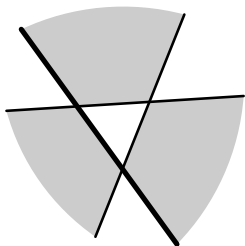
Задача 1. Несколько прямых делят плоскость на части. Доказать, что можно раскрасить эти части в белый и чёрный цвет так, чтобы соседние части (имеющие общий отрезок границы) были разного цвета (как на рисунке).

Решение. Заметим прежде всего, что любую «карту» (части — страны, разделённые линиями границ) можно так раскрасить. Например, если в одной точке сходятся три страны и верхняя страна, скажем, белая, то две оставшиеся страны должны быть чёрными, хотя граничат между собой.

Но для плоскости, разрезанной на части прямыми, такого случиться не может, и мы сейчас это докажем. Пусть прямая только одна. Тогда всё просто: одна полуплоскость белая, другая — чёрная (левый рисунок). Если прямых две, получатся четыре части (средний рисунок).

Посмотрим, что произойдёт, если мы на рисунке с двумя прямыми и четырьмя частями проведём третью прямую. Она поделит три страны из четырёх; при этом появятся новые участки границы, по обе стороны которых цвет один и тот же (правый рисунок).





Как же быть? С одной стороны от новой прямой поменяем цвета (белый сделаем чёрным и наоборот). Тогда новая прямая будет всюду разделять участки разного цвета. Другими словами, с одной стороны от прямой мы берём позитив карты, а с другой — негатив.

(Придирчивый читатель спросит: а почему старые границы раскрашены правильно? Это легко понять: в позитивной части цвета не изменились,

а в негативной оба цвета заменились на противоположные.)

Теперь ясно, что тем же способом можно добавить ещё одну прямую (перекрасив карту с одной стороны от неё), затем ещё одну и так далее — пока мы не получим нужную нам карту. Задача решена.

Задача 2. Число 111 делится на 3, число 111 111 111 делится на 9, число 111...111 (27 единиц) делится на 27. Доказать, что число 111...111 (3^n единиц) делится на 3^n при любом n .

Решение. Для чисел 3 и 9 можно воспользоваться признаками делимости на 3 и на 9 (если сумма цифр делится на 3, то число делится на 3, аналогично для 9). А можно и просто разделить; получится $111 : 3 = 37$ и $111\,111\,111 : 9 = 1234579$.

Число из 27 единиц уже не так просто разделить на 27, и признака делимости на 27 (с суммой цифр) нет. (Например, число 1899 имеет сумму цифр 27, но не делится на 27 — убедитесь!) Что же делать?

Вернёмся к числу 111111111 и докажем другим способом, что оно делится на 9. Для этого заметим, что оно нацело делится на 111:

$$111\,111\,111 = 111 \times 1001001.$$

Это можно проверить, поделив уголком или умножив 111 на 1001001 в столбик:

$$\begin{array}{r}
 111111111 \overline{) 111} \\
 \underline{111} \\
 0111 \\
 \underline{111} \\
 0111 \\
 \underline{111} \\
 0
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 111 \\
 1001001 \\
 \hline
 111 \\
 111 \\
 \hline
 111 \\
 111 \\
 \hline
 111111111
 \end{array}$$

Оба сомножителя в произведении 111×1001001 делятся на 3 (по признаку делимости на 3). Вынося из каждого множитель 3, получаем, что произведение делится на 9.

Этот способ можно применить и к числу $111 \dots 111$ (27 единиц). Оно делится нацело на число 111111111 . В частном получается число, состоящее из трёх единиц и большого числа нулей между ними. (Разделите и проверьте: должны получиться две группы по 8 нулей.)

Теперь смотрите: число 111111111 делится на 9 (мы это уже доказали, даже двумя способами). А частное $10 \dots 010 \dots 01$ делится на 3, поскольку его сумма цифр равна 3. Вынося множители 3 и 9, получаем, что число из 27 единиц делится на 27.

Продолжим: число из $81 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$ единиц есть произведение числа из 27 единиц и числа из трёх единиц и многих нулей. Первый множитель (мы уже знаем) делится на 27, а второй на 3, поэтому всё число делится на $27 \cdot 3 = 81$.

Далее, число из $81 \cdot 3 = 243$ единиц делится на 243, потому что оно есть произведение числа из 81 единицы (делящегося на 81) и числа из трёх единиц и многих нулей (делящегося на 3).

Ясно, что так будет и дальше. Задача решена.

Задача 3. Показать, что любую сумму, начиная с 8 копеек, можно уплатить монетами в 3 и 5 копеек.

Решение. Покажем, как уплатить 8, 9 и 10 копеек:

$$\begin{aligned}8 &= 5 + 3; \\9 &= 3 + 3 + 3; \\10 &= 5 + 5.\end{aligned}$$

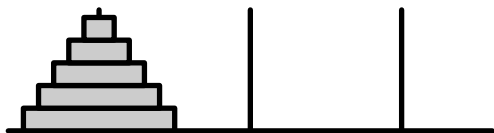
Добавив ещё одну трёхкопеечную монету, получаем

$$\begin{aligned}11 &= 8 + 3 = (5 + 3) + 3; \\12 &= 9 + 3 = (3 + 3 + 3) + 3; \\13 &= 10 + 3 = (5 + 5) + 3.\end{aligned}$$

Ещё одна трёхкопеечная монета позволит уплатить

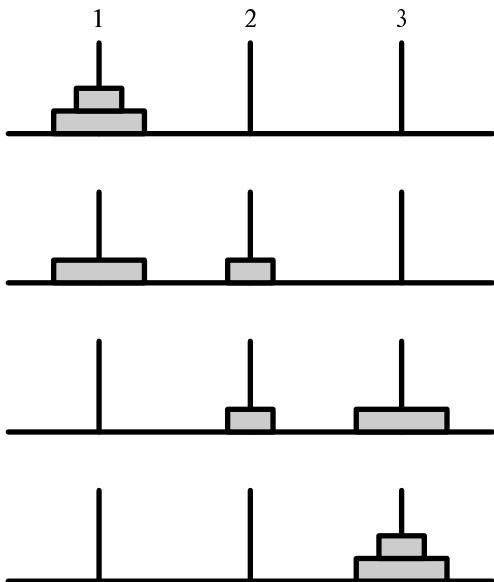
$$\begin{aligned}14 &= 11 + 3; \\15 &= 12 + 3; \\16 &= 13 + 3\end{aligned}$$

копеек, и так далее. Задача решена.



Задача 4. Игрушка («Ханойские башни») имеет три стержня. На одном находится пирамидка из нескольких колец (уменьшающихся снизу вверх). Эту пирамидку нужно переложить на другой стержень, соблюдая правила игры: нельзя переносить сразу несколько колец и нельзя класть большее кольцо поверх меньшего.

Например, пирамидку из двух колец можно переложить так: положить меньшее кольцо на второй стержень, затем большее на третий, а затем меньшее поверх большего ($1 \rightarrow 2$, $1 \rightarrow 3$, $2 \rightarrow 3$, если стержни нумеровать слева направо).



Наша задача — доказать, что возможно переместить на другой стержень пирамидку из любого числа колец, соблюдая правила игры.

Решение. Пусть в пирамидке три кольца. Временно забудем про нижнее, самое большое (мысленно приклеим его к основанию). Тогда останется пирамидка из двух колец, которую мы уже умеем перекладывать.

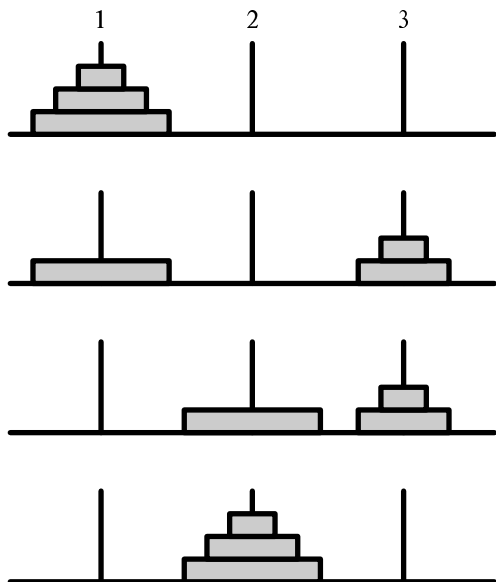


Рис. 1. Случай трёх колец.

Давайте переложим её с первого стержня на третий. (Это делается в несколько приёмов, но для нас сейчас это как бы один шаг.) После этого вспомним про большое кольцо и переложим его на второй стержень (который пока пуст). Теперь переложим пирамидку из двух верхних колец с третьего стержня на второй. Все эти действия изображены на рисунке 1.

Программисты сказали бы, что у нас есть *процедура* (подпрограмма, вспомогательный алгоритм) перекладывания пирамидки из двух колец, которую мы вызываем дважды. На более низком уровне (если заглядывать внутрь подпрограммы) наши действия показаны на рис. 2 (с. 8).

Записать их можно так: $1 \rightarrow 2$, $1 \rightarrow 3$, $2 \rightarrow 3$, $1 \rightarrow 2$, $3 \rightarrow 1$, $3 \rightarrow 2$, $1 \rightarrow 2$ (достаточно указывать номера стержней, так как мы всегда перекладываем верхнее кольцо).

Теперь, используя перекладывание пирамидки из трёх колец как подпрограмму, мы можем переложить четыре кольца (достаточно заменить на рис. 1 пирамидку из двух колец на пирамидку из трёх).

После этого можно переложить пять колец, используя перекладывание четырёх как подпрограмму и так далее. Задача решена.

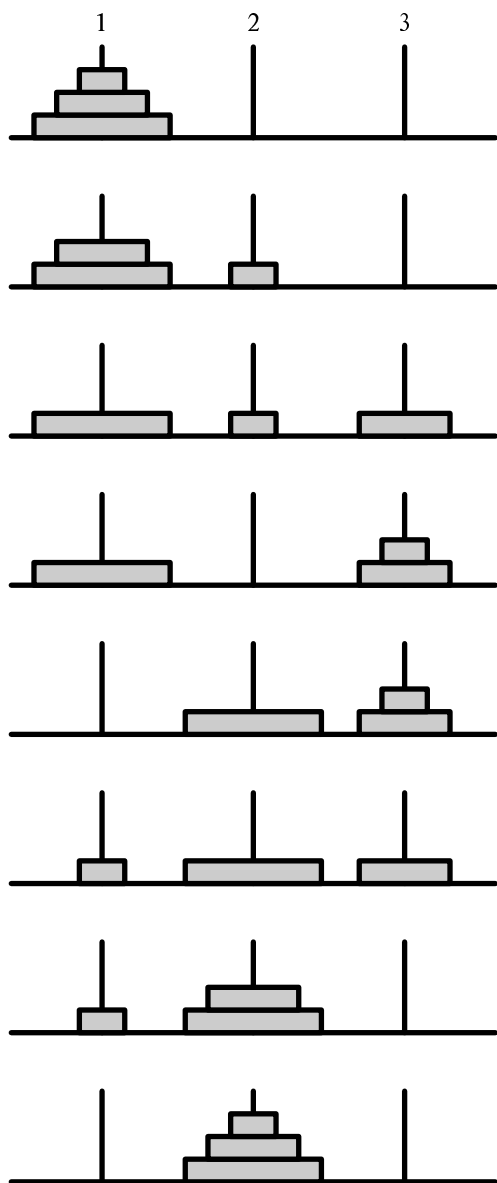


Рис. 2. Случай трёх колец: подробности.

Задача 5. Придя на встречу, некоторые из её участников пожали друг другу руки. Доказать, что число людей, сделавших *нечётное* число рукопожатий, *чётно*.

Решение. Будем считать, что рукопожатия происходят по очереди. Изначально все участники сделали 0 рукопожатий, а нуль — чётное число. Поэтому ни одного «нечётного» участника нет, и утверждение задачи верно. (Для краткости мы называем «чётными» и «нечётными» участников, сделавших чётное и нечётное число рукопожатий.)

После первого рукопожатия оба его участника стали нечётными (они сделали по одному рукопожатию), то есть появилось два нечётных участника. Два — чётное число, и утверждение задачи остаётся верным. Дальше уже возможны варианты: во втором рукопожатии могут участвовать новые люди, а также участники первого. Мы разберём три возможных случая:

а. Два чётных участника жмут друг другу руки. После этого каждый из них становится нечётным (чётное число плюс единица — нечётное число). Общее число нечётных участников увеличивается на 2.

б. Два нечётных участника жмут друг другу руки. Оба становятся чётными, и общее число нечётных участников уменьшается на два (и остаётся чётным, раз оно было таковым).

в. Чётный участник жмёт руку нечётному. При этом они меняются местами: нечётный становится чётным и наоборот. Поэтому общее число нечётных участников не меняется.

Таким образом, мы видим, что интересующее нас число (количество нечётных участников) всё время остаётся чётным (вначале оно равно нулю, потом может увеличиваться и уменьшаться на 2). Задача решена.

Общая схема

Что же такое «математическая индукция»? Что общего в решениях разобранных нами задач?

В каждой из них мы выделяем в задаче последовательность утверждений, которые доказываем по очереди. В задаче о карте мы сначала убедились, что для одной и двух прямых искомая раскраска возможна. Затем мы показали, как из раскраски для двух прямых сделать раскраску для трёх, затем для четырёх и так далее.

Во второй задаче мы сначала убедились, что 111 делится на 3, потом — что 111111111 делится на 9, затем — что 111...111 (27 единиц) делится на 27 и так далее. При этом каждый раз мы опирались на уже доказанное: зная, что число из 3^n единиц делится на 3^n , мы проверяли, что число

из 3^{n+1} единиц получается из него умножением на число, кратное трём, и потому делится на 3^{n+1} .

В задаче о монетах мы доказывали, что n копеек (при $n \geq 8$) можно уплатить монетами в 3 и 5 копеек. Сначала мы проверили это при $n = 8, 9, 10$, затем заметили, что прибавлением одной трёхкопеечной монеты можно получить $n = 11, 12, 13$, затем $n = 14, 15, 16$ и так далее.

В задаче о «ханойских башнях» мы доказывали, что при любом $n \geq 2$ пирамидку из n колец можно перенести (по правилам) с одного стержня на другой. При этом перенос $n + 1$ колец в качестве подпрограммы включал в себя перенос n колец, так что каждое из утверждений цепочки опиралось на предыдущее.

Наконец, в задаче о рукопожатиях мы доказывали, что число нечётных участников после n рукопожатий будет чётным (поскольку при переходе от n к $n + 1$ число рукопожатий либо не меняется, либо меняется на 2).

Итак, общая схема доказательства по индукции такова. Есть некоторая последовательность утверждений $(A_1, A_2, \dots, A_n, \dots)$. Мы доказываем, что очередное утверждение (A_n) верно, считая известным, что все предыдущие утверждения $(A_k$ при $k < n$) верны. Это позволяет нам утверждать, что все утверждения A_n верны.

Такой способ рассуждения называется *математической индукцией*, а величина n называется *параметром индукции*. Говорят, что мы доказываем утверждение A_n *индукцией по n* .

Например, в задаче о рукопожатиях утверждение A_n таково:

после n рукопожатий число участников, сделавших нечётное число рукопожатий, чётно.

Мы нумеровали утверждения, начиная с единицы, но это не обязательно. Например, в задаче о монетах последовательность утверждений начинается с A_8 (про 8 копеек). Мы сначала доказываем утверждения A_8, A_9, A_{10} , а затем все следующие по очереди. При этом доказательство утверждения A_n опирается на A_{n-3} (зная, как уплатить $n - 3$ копейки монетами в 3 и 5 копеек, мы можем уплатить n копеек: достаточно добавить одну трёхкопеечную монету).

Идею метода математической индукции можно пояснить так: выстроим рядом друг с другом кости домино (рис. 3). Если теперь повалить первую из них, то за ней последует вся цепочка: падая, костяшка толкает следующую (рис. 4).

Вот ещё две наглядных иллюстрации к принципу математической индукции.

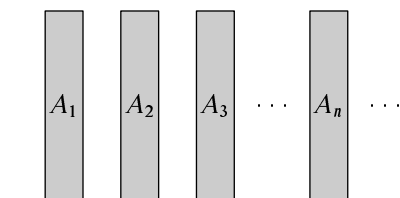


Рис. 3. Кости домино.

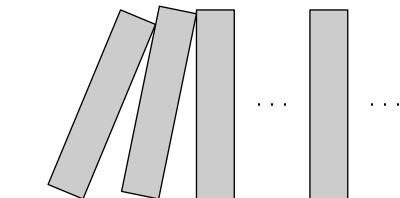


Рис. 4. Индукция в действии.

Вежливая очередь. Правила хорошего тона запрещают мужчине стоять в очереди сразу перед женщиной (он должен пропустить её вперёд). Поэтому, если первый человек в очереди — мужчина, то и все остальные — мужчины.

Резиновый автобус. Докажем, что в автобус помещается любое количество народу. В самом деле, один человек помещается без труда (базис индукции); с другой стороны, как бы ни был набит автобус, уж один-то человек в него всегда влезет (шаг индукции).

Возвращаясь к более серьёзному разговору, разберём ещё несколько задач, выделяя более чётко шаги индуктивного рассуждения.

Задача 6. На доске написаны сто цифр — нули и единицы (в любой комбинации). Разрешается выполнять два действия:

- (а) заменять первую цифру (ноль на единицу и наоборот);
- (б) заменять цифру, стоящую после первой единицы.

(Пример: в последовательности 0011001 . . . можно заменить первую цифру или четвёртую — они подчёркнуты.) Показать, что с помощью нескольких таких замен можно получить любую комбинацию из ста нулей и единиц.

Решение. Докажем по индукции такое утверждение A_n : *на первых n местах можно получить любую комбинацию нулей и единиц.*

Базис индукции. При $n = 1$ это нам дано по условию: первую цифру можно менять как угодно.

Шаг индукции. Предположим, что мы уже доказали, что на первых $n - 1$ местах можно получить любую комбинацию цифр. Тогда, в частности, там можно получить и комбинацию $000 \dots 0001$ (единица на $(n - 1)$ -ом месте и нули до неё). Эта комбинация позволяет заменить цифру, стоящую на n -м месте, поскольку именно она оказывается цифрой, стоящей после первой единицы. После этого мы можем снова воспользоваться предположением индукции A_{n-1} и получить на первых $n - 1$ местах любые нужные нам цифры.

Задача решена? На самом деле нет. Наше решение содержит не сразу заметный, но важный пробел: почему изменение $n - 1$ цифр на последнем шаге не испортит n -й цифры? Чтобы исправить положение, нам придётся изменить решение и доказывать по индукции более сильное утверждение: *на первых n местах можно получить любые цифры, не трогая следующих цифр*. Теперь уже всё проходит гладко: проводя шаг индукции, мы получили нужные нам цифры на первых n местах и не касались следующих цифр.

Теперь задача действительно решена. Для самопроверки полезно записать последовательность действий при переходе, скажем, от 001 к 000 . (Ответ: $001 \rightarrow 101 \rightarrow 111 \rightarrow 011 \rightarrow 010 \rightarrow 110 \rightarrow 100 \rightarrow 000$.)

Задача 7. Рассмотрим всевозможные обыкновенные дроби с числителем 1 и любым (целым положительным) знаменателем: $1/2, 1/3, 1/4, 1/5, \dots$. Доказать, что для любого $n \geq 3$ можно представить единицу в виде суммы n различных дробей такого вида.

Например, при $n = 3$ можно написать так:

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}.$$

(Ясно, что двумя дробями не обойтись, поскольку все дроби, кроме первой, меньше половины. Можно также проверить, что для трёх дробей есть только один вариант.)

Решение.

Базис индукции ($n = 3$) уже доказан.

Шаг индукции. Предположим, что для $n - 1$ дробей задача решена: есть представление

$$1 = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \dots + \frac{1}{k},$$

в котором $n - 1$ слагаемых и все знаменатели разные. Будем считать, что дроби убывают (знаменатели возрастают слева направо, так что k — наибольший из знаменателей). Мы получим искомое представление в виде суммы n

дробей, если разобьём одну дробь на две. Это можно сделать так:

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k(k+1)}.$$

(В самом деле, разность $1/k - 1/(k+1)$ равна $1/(k(k+1))$, поскольку после приведения к общему знаменателю числители отличаются на единицу.)

Последнее (но важное) замечание: все дроби остались различными, так как k было наибольшим знаменателем, а $k+1$ больше k (не говоря уж о $k(k+1)$, которое ещё больше).

Задача решена.

Если рассуждение по индукции кажется непонятным, полезно проследить несколько его шагов при конкретных значениях n . Например, при переходе от трёх дробей к четырём мы разбиваем $1/6$ на $1/7$ и $1/6 - 1/7 = 1/(6 \cdot 7) = 1/42$:

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{42}.$$

В данном конкретном случае можно было бы разбить на $1/6$, а $1/3$ (как?), но в общем случае мы хотим гарантировать, что все дроби будут разными, и потому разбиваем самую маленькую дробь.

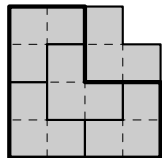
Задача 8. Доказать, что любой из квадратов 2×2 , 4×4 , 8×8 , ..., $2^n \times 2^n$, ..., из которого вырезан угловой квадратик 1×1 , можно разрезать на уголки из трёх клеток.



Решение.

Базис индукции. Для квадрата 2×2 (то есть при $n = 1$) это тривиально: после вырезания углового квадратика как раз и остаётся уголок.

Шаг индукции. Для квадрата 4×4 (то есть при $n = 2$) задача также решается легко: уголок из трёх квадратов размера 2×2 можно разрезать на четыре маленьких уголка, и остаётся добавить к ним ещё один уголок).



Тот же приём годится и в общем случае. Пусть мы разрезали квадрат $2^{n-1} \times 2^{n-1}$ без углового квадратика 1×1 на уголки из трёх клеток. Увеличим эту картинку вдвое. Мы увидим, что квадрат вдвое большего размера $2^n \times 2^n$ без углового квадрата 2×2 разрезан на уголки из трёх квадратов 2×2 . Остаётся каждый из этих уголков разрезать на четыре маленьких (как на рис. 5, с. 14) и добавить ещё один уголок в вырез 2×2 .

Задача решена. (Для самопроверки можно нарисовать схему разрезания для квадрата 8×8 .)

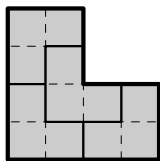


Рис. 5. Большой уголок разрезан на 4 меньших.

Индукция как трюк

Часто, рассказывая о математической индукции, начинают с такой задачи:

Задача 9. Доказать, что (при любом $n \geq 1$)

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Решение.

Базис индукции. При $n = 1$ утверждение имеет вид

$$1 = \frac{1 \cdot 2}{2}$$

и очевидно. Если сумма из одного члена кажется чем-то странным, можно проверить и случай $n = 2$: в этом случае

$$1 + 2 = 3 = \frac{2(2+1)}{2}.$$

Шаг индукции. Выделим в сумме $1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) + n$ последний член:

$$1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) + n = [1 + 2 + \dots + (n-1)] + n$$

По предположению индукции правую часть можно переписать как

$$\begin{aligned} \frac{(n-1)((n-1)+1)}{2} + n &= \frac{(n-1)n}{2} + n = \\ &= \frac{(n-1)n + 2n}{2} = \\ &= \frac{n^2 + n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать. Задача решена.

Решение простое, если откуда-то узнать ответ $n(n+1)/2$, но как до него догадаться? Можно решить эту задачу и иначе. Переставим в сумме

$$S = 1 + 2 + \dots + (n-1) + n$$

члены в обратном порядке:

$$S = n + (n-1) + \dots + 2 + 1.$$

Сложим эти два равенства почленно:

$$2S = [1 + n] + [2 + (n-1)] + \dots + [(n-1) + 2] + [n + 1].$$

В правой части n квадратных скобок (в каждой из сумм было n слагаемых), каждая скобка равна $n+1$, поэтому $2S = n(n+1)$.

В следующей задаче не так просто объяснить ответ, но зная его, уже легко провести доказательство по индукции.

Задача 10. Доказать, что (при любом $n \geq 1$)

$$1 + 4 + 9 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Решение.

Базис индукции: $1 = (1 \cdot 2 \cdot 3)/6$.

Шаг индукции. Пусть мы уже знаем, что равенство задачи верно для суммы $n-1$ квадратов:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2 = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$$

(в правой части записано выражение из условия задачи, в котором n заменено на $n-1$). Прибавим к обеим частям число n^2 . Получим, что сумма n квадратов равна

$$\begin{aligned} \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} + n^2 &= \frac{(n-1)n(2n-1) + 6n^2}{6} = \\ &= \frac{n[(n-1)(2n-1) + 6n]}{6} = \\ &= \frac{n[2n^2 - 3n + 1 + 6n]}{6} = \\ &= \frac{n[2n^2 + 3n + 1]}{6} = \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Но как же всё-таки угадать формулу для суммы квадратов? Вот одна из возможных реконструкций: для суммы первых степеней ответ $(n(n+1)/2)$ был многочленом второй степени. Поэтому можно ожидать, что для суммы квадратов получится многочлен третьей степени, то есть выражение вида $an^3 + bn^2 + cn + d$ с некоторыми коэффициентами a, b, c, d . После этого можно подобрать эти коэффициенты, подставляя конкретные значения n и решая систему линейных уравнений. А подобрав правильные коэффициенты, уже легко провести доказательство по индукции.

Задача 11. На доске написаны два числа 1, 1. Вписав между числами их сумму, мы получим числа 1, 2, 1. Повторив эту операцию ещё раз, получим числа 1, 3, 2, 3, 1. После трёх операций будут числа 1, 4, 3, 5, 2, 5, 3, 4, 1. Какова будет сумма всех чисел на доске после 100 операций?

Решение. Ясно, что для выполнения 100 операций нам не хватит ни места, ни времени. Значит, нужно пытаться найти какую-то общую формулу для суммы чисел после n операций (обозначим её S_n). Посмотрим на таблицу:

n	S_n
0	2
1	4
2	10
3	28

Видите ли вы здесь какую-то закономерность? Если нет, можно сделать ещё один шаг: после четырёх операций будут числа

$$1, 5, 4, 7, 3, 8, 5, 7, 2, 7, 5, 8, 3, 7, 4, 5, 1,$$

сумма которых (S_4) равна 82.

На самом деле можно не выписывать числа, а сразу сказать, как изменится сумма после добавления новых чисел. Пусть сумма была равна S . Какой она станет, когда добавятся новые числа? Разобьём каждое новое число в сумму двух старых. Например, от

$$1, 3, 2, 3, 1$$

мы переходим к

$$1, 1 + 3, 3, 3 + 2, 2, 2 + 3, 3, 3 + 1, 1.$$

Каждое старое число (кроме двух крайних единиц) входит теперь в сумму три раза, поэтому новая сумма равна $3S - 2$ (мы вычли 2, чтобы учесть недостающие единицы). Поэтому $S_5 = 3S_4 - 2 = 244$ и вообще

$$S_n = 3S_{n-1} - 2.$$

Но всё-таки, какова общая формула? Если бы не вычитание двух единиц, то каждый раз сумма увеличивалась бы в три раза, как в степенях тройки (1, 3, 9, 27, 81, 243, ...). А наши числа, как теперь видно, на единицу больше. Таким образом, можно предположить, что

$$S_n = 3^n + 1.$$

Теперь это легко доказать по индукции.

Базис индукции. Смотри таблицу (для $n = 0, 1, 2, 3$).

Шаг индукции. Если

$$S_{n-1} = 3^{n-1} + 1,$$

то

$$S_n = 3S_{n-1} - 2 = 3(3^{n-1} + 1) - 2 = 3 \cdot 3^{n-1} + 3 - 2 = 3^n + 1.$$

Наша формула доказана. Из неё видно, что после ста операций сумма всех чисел на доске (хотя, честно говоря, они уже вряд ли поместятся на доске) будет равна $3^{100} + 1$.

Задача решена.

Кстати, а сколько чисел будет после ста операций? Это аналогичная задача, чуть более простая.

Усиление утверждения

Задача 12. Доказать, что сумма

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3$$

является точным квадратом. (Например, $1 = 1^2$, $1 + 8 = 9 = 3^2$, $1 + 8 + 27 = 36 = 6^2$, $1 + 8 + 27 + 64 = 100 = 10^2$ и так далее.)

Решение. Чтобы провести рассуждение по индукции, мы, как это часто делают, *усилим* доказываемое утверждение. Нам мало знать, что сумма кубов является точным квадратом — надо ещё сказать, квадратом *чего* она является.

Что это за последовательность 1, 3, 6, 10, ...? Можно заметить, что разности между соседними членами увеличиваются на единицу: $3 - 1 = 2$, $6 - 3 = 3$, $10 - 6 = 4$ и так далее. С такой последовательностью мы уже сталкивались: это была последовательность сумм 1, $1+2$, $1+2+3$, $1+2+3+4$, ... Таким образом, можно предположить, что

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + \dots + n)^2.$$

Любопытно было бы придумать прямое доказательство этой формулы. Но по индукции её доказать несложно. Удобно переписать правую часть как $n^2(n+1)^2/4$, используя задачу 9. По предположению индукции

$$1^3 + 2^3 + \dots + (n-1)^3 = \frac{(n-1)^2 n^2}{4}.$$

Прибавив n^3 , получаем, что сумма $1^3 + 2^3 + \dots + n^3$ равна

$$\begin{aligned} \frac{(n-1)^2 n^2}{4} + n^3 &= \frac{(n-1)^2 n^2 + 4n^3}{4} = \\ &= \frac{((n-1)^2 + 4n) n^2}{4} = \\ &= \frac{(n^2 - 2n + 1 + 4n) n^2}{4} = \\ &= \frac{(n^2 + 2n + 1) n^2}{4} = \\ &= \frac{(n+1)^2 n^2}{4}, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Задача 13. Доказать, что (при любом натуральном $n \geq 1$)

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} < 2.$$

Решение. Как и в предыдущей задаче, мы будем доказывать по индукции более сильное утверждение. В данном случае это будет равенство

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} = 2 - \frac{1}{2^n}.$$

Базис индукции: $1 + 1/2 = 2 - 1/2$.

Шаг индукции: если

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} = 2 - \frac{1}{2^{n-1}},$$

то

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} = 2 - \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} = 2 - 2 \cdot \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} = 2 - \frac{1}{2^n},$$

что и требовалось. Задача решена.

Любопытно, что если постараться, то можно доказать по индукции и исходное утверждение (не усиливая его предварительно). Это делается так: если

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} < 2,$$

то (делим пополам)

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} < 1,$$

и после прибавления единицы получаем

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} < 2,$$

что и требовалось.

Задача 14. Доказать, что (при любом натуральном $n \geq 1$)

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{n^2} < 2.$$

Решение. Здесь оба приёма из предыдущей задачи встречаются с трудностями: нет ни общей формулы для суммы в левой части, ни способа провести шаг индукции, не меняя утверждения.

Однако можно усилить утверждение так:

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}.$$

При $n = 1$ неравенство превращается в равенство $1 = 2 - 1$. Проведём шаг индукции: если

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{(n-1)^2} \leq 2 - \frac{1}{n-1},$$

то после прибавления к обеим частям дроби $1/n^2$ получаем

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{n^2} &\leq 2 - \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n^2} = \\ &= 2 - \frac{n^2 - n + 1}{(n-1)n^2} < \\ &< 2 - \frac{n^2 - n}{(n-1)n^2} = 2 - \frac{1}{n}, \end{aligned}$$

что и требовалось.

По существу это же решение можно изложить и в более наглядном виде: заметим, что

$$\frac{1}{n^2} < \frac{1}{(n-1)n} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n},$$

поэтому

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$$

меньше суммы

$$1 + \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right).$$

Теперь все промежуточные члены сокращаются и остаётся $1 + 1 - 1/n$, так что исходная сумма меньше 2.

Задача 15. На краю пустыни имеется большой запас бензина и машина, которая при полной заправке может проехать 50 километров. Имеются (в неограниченном количестве) канистры, в которые можно сливать бензин из бензобака машины и оставлять на хранение (в любой точке пустыни). Доказать, что машина может проехать любое расстояние. (Канистры с бензином возить не разрешается, пустые можно возить в любом количестве.)

Решение. Попробуем доказать индукцией по n , что машина может отъехать на n километров от края. При $n \leq 50$ это известно. Осталось провести шаг индукции и объяснить, как проехать n километров, если известно, что $(n-1)$ километров проехать можно. Однако тут мы встречаемся с трудностью: после того как мы проехали $(n-1)$ километров, бензина может не хватить даже на обратную дорогу (не говоря уже о хранении).

Как и в предыдущих задачах, выход состоит в усилении доказываемого утверждения. Будем доказывать, что мы не только можем проехать n километров, но и

можем сделать сколь угодно большой запас бензина в точке на расстоянии n километров от края пустыни, оказавшись в этой точке после окончания перевозок.

Базис индукции ($n = 1$). Рейс на расстояние 1 и обратно требует 2 единиц бензина (будем называть единицей количество бензина на километр пути), поэтому мы можем оставить 48 единиц бензина в хранилище (на расстоянии километра от края) и вернуться за новой порцией. (Осторожный человек оставлял бы чуть меньше — скажем, 47 единиц, — чтобы не возвращаться с совсем уж пустым баком.) Но так или иначе, за несколько рейсов в хранилище можно сделать запас произвольного размера, какого

нам потребуется. (При этом «коэффициент полезного действия» составляет $48/50$: чтобы создать 48 единиц запаса, мы расходуем 50 единиц.)

Шаг индукции. Мы должны научиться создавать хранилище на расстоянии n с любым заданным наперёд запасом бензина (и оказаться у этого хранилища в конце перевозок). Как мы только что видели, это возможно, если в точке $n - 1$ имеется неограниченный запас бензина (базис индукции). Но по предположению индукции мы можем запасти любое количество бензина (A единиц при сколь угодно большом A) на расстоянии $n - 1$ от края!

Другими словами, если нам надо завезти заданное количество B бензина на расстояние n от края, мы сначала представляем себе, что в $n - 1$ бензина сколько угодно, и смотрим, какое количество (A) нам реально понадобится. Затем мы (пользуясь предположением индукции) завозим A единиц бензина в точку $n - 1$.

Принцип наименьшего числа

Часто рассуждения по индукции заменяют ссылкой на «принцип наименьшего числа»: *всякое непустое множество натуральных чисел имеет наименьший элемент*. Непонятно? Ничего страшного, сейчас объясним на примерах.

Вот как можно пересказать решение задачи 1 (о карте с прямыми, которую можно раскрасить в два цвета).

Предположим, что утверждение задачи неверно и есть карта, которую раскрасить в два цвета нельзя. Вообще говоря, таких карт может быть много и количество прямых в них может быть разным. Рассмотрим ту из них, в которой прямых меньше всего. Пусть в ней n прямых. Может ли n равняться единице? Нет, поскольку карту с одной прямой раскрасить можно.

Выберем в нашей (нераскрашиваемой) карте одну из прямых (всё равно какую) и временно удалим её. Получится карта с меньшим числом прямых. Раз наша карта была минимальной (по числу прямых), эту новую карту раскрасить можно. Так и сделаем. После этого мы вернём обратно временно удалённую прямую и перекрасим все страны с одной стороны от неё. Получим раскраску карты, которую (по предположению) раскрасить нельзя.

Мы получили противоречие. Значит, наше предположение (о существовании карты, которую раскрасить нельзя) неверно.

Аналогичным образом можно переизложить и другие рассуждения. Например, мы доказывали, что любую сумму, начиная с 8 копеек, можно уплатить монетами в 3 и 5 копеек. Теперь это рассуждение будет выглядеть так.

Предположим, есть такие суммы (целое число копеек, не меньшее 8), которые нельзя уплатить монетами в 3 и 5 копеек. Возьмём самую маленькую из них. Пусть это будет n . По предположению $n \geq 8$, поскольку меньшие значения n мы не рассматриваем. Мы знаем, кроме того, что n не может быть равно 8, 9 или 10, поскольку эти суммы уплатить можно. Значит, $n \geq 11$. Тогда $n - 3 \geq 8$ и, кроме того, $n - 3 < n$. Значит (раз n было наименьшим плохим значением), сумму в $n - 3$ копеек можно уплатить монетами в 3 и 5 копеек. Если добавить трёхкопеечную монету, то получится n копеек. А мы предполагали, что n копеек уплатить нельзя. Противоречие.

Некоторые задачи проще сразу решать, исходя их принципа наименьшего числа.

Задача 16. В последовательности Фибоначчи

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \dots$$

каждый следующий член равен сумме двух предыдущих. Доказать, что два делящихся на 7 числа в ней не могут стоять рядом.

Решение. Пусть это не так и есть два стоящих рядом числа, делящихся на 7. Двигаясь слева направо, найдём первую такую пару:

$$\dots, a, 7k, 7l, \dots$$

(соседние числа, делящиеся на 7, записаны как $7k$ и $7l$). Поскольку в начале последовательности стоят две единицы, эти числа не могут быть первыми, значит, перед ними есть какое-то число a . По условию $7l = a + 7k$, то есть $a = 7l - 7k = 7(l - k)$ и потому a тоже делится на 7. Значит, пара $7k, 7l$ не была первой — вопреки предположению.

Противоречие показывает, что пары рядом стоящих и делящихся на 7 чисел нет. (На самом деле число 7 в условии задачи можно заменить на любое другое целое положительное число.)

Для тренировки перескажем это же рассуждение по индукции. Оно будет выглядеть так: индукцией по n мы доказываем, что *хотя бы одно из чисел F_n и F_{n+1} не делится на 7*. (Здесь через F_n обозначено n -е число Фибоначчи.)

Базис индукции очевиден (два первых числа не делятся на 7).

Шаг индукции: если это не так и оба числа F_n и F_{n+1} делятся на 7, то и предыдущее число $F_{n-1} = F_{n+1} - F_n$ делится на 7, что противоречит предположению индукции.

Такой метод рассуждения (с наименьшим числом) часто применяется в теории чисел, где его называют *методом спуска*. Мы покажем лишь самый простой пример такого рода.

Задача 17. Доказать, что никакая обыкновенная дробь (отношение двух целых положительных чисел) не может в квадрате быть равна 2.

(Как говорят, число $\sqrt{2}$ *иррационально*, то есть не представимо в виде дроби с целым числителем и знаменателем.)

Решение. Пусть это не так и есть дроби, в квадрате равные 2. Выберем среди них дробь с наименьшим знаменателем. (Можно было бы выбрать дробь и с наименьшим числителем, это одно и то же, так как отношение числителя к знаменателю постоянно и равно $\sqrt{2}$.)

Пусть эта дробь есть p/q , тогда $(p/q)^2 = p^2/q^2 = 2$, то есть

$$p^2 = 2q^2.$$

Отсюда видно, что число p чётно. В самом деле, если p нечётно, то оно имеет вид $p = 2k + 1$, поэтому $p^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$, и p^2 тоже нечётно, а у нас $p^2 = 2q^2$ и потому чётно. Значит, p чётно и имеет вид $p = 2k$. Тогда

$$p^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2q^2.$$

Сокращая на 2, получаем, что $2k^2 = q^2$. Теперь мы видим, что q тоже чётно (иначе q^2 было бы нечётным), то есть $q = 2l$. Поэтому и числитель p , и знаменатель q нашей дроби чётны, и её можно сократить на 2:

$$\frac{p}{q} = \frac{2k}{2l} = \frac{k}{l}.$$

При этом $(k/l)^2 = (p/q)^2 = 2$ (от сокращения дроби её квадрат не меняется), поэтому мы нашли дробь с (вдвое) меньшим знаменателем, квадрат которой равен двум — противоречие (по предположению была выбрана дробь с наименьшим знаменателем).

Задача решена.

На самом деле мы могли остановиться и раньше: обнаружив, что $2k^2 = q^2$, мы заключаем, что $(q/k)^2 = 2$, откуда следует также, что $k < q$, поэтому от дроби p/q мы перешли к дроби q/k с меньшим знаменателем.

Неверные рассуждения

Рассказывая о математической индукции, обычно приводят примеры неправильных рассуждений. Мы сделаем то же самое: первый пример будет совсем наивным, два других — чуть посложнее.

Первое неверное рассуждение. Докажем по индукции, что соседние натуральные числа равны. Другими словами, утверждение A_n , доказываемое индукцией по n , будет иметь вид $n = n + 1$.

Докажем его, предположив, что оно верно для всех меньших значений n . Тогда оно должно быть верно и для предыдущего значения параметра n . Это означает, что $(n - 1) = (n - 1) + 1$, то есть $n - 1 = n$. Прибавляя единицу к обеим частям равенства, получаем, что $n = n + 1$.

Второе неверное рассуждение. Докажем, что любые n чисел равны: если $a_1, \dots, a_n$ — произвольные числа, то $a_1 = a_2 = \dots = a_n$. (Обычно предлагают доказать, что любые n лошадей одного цвета, но мы будем более наукообразны — так проще скрыть ошибку.)

При $n = 1$ доказывать нечего: число только одно и оно равно самому себе.

Докажем теперь, что любые n чисел равны, предположив (как это обычно делается при рассуждениях по индукции), что для меньших n это уже известно.

Рассмотрим произвольные числа $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$. Отбросив последнее число, получим набор из $n - 1$ чисел. По предположению индукции они равны:

$$a_1 = a_2 = \dots = a_{n-1}.$$

Теперь отбросим первое число. Снова получим набор из $n - 1$ чисел, и предположение индукции даёт

$$a_2 = \dots = a_{n-1} = a_n.$$

Объединяя эти два равенства, получаем, что

$$a_1 = a_2 = \dots = a_{n-1} = a_n,$$

что и требовалось доказать.

Третье неверное рассуждение. Докажем, что любые n точек лежат на одной прямой. При $n = 1$ и $n = 2$ это ясно (в геометрии есть соответствующая аксиома). Осталось доказать это для произвольного n , предполагая, что для $n - 1$ это верно. В самом деле, рассмотрим произвольные n точек $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}, A_n$. Отбросим последнюю точку и применим предположение индукции. Получим прямую l , на которой лежат точки $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$. Нам надо доказать, что и последняя точка A_n лежит на этой прямой. Отбросим первую точку и применим предположение индукции к точкам $A_2, A_3, \dots, A_n$. Получим, что они все лежат на некоторой прямой l' . Могут ли прямые l и l' быть различны? Нет, так как обе они проходят через точки A_2 и A_{n-1} , а как известно из той же аксиомы геометрии, через две точки можно провести только одну прямую. Значит, прямые l и l' совпадают и проходят через все n точек.

Ну как, нашли ошибки?

Вполне упорядоченные множества

Метод математической индукции, как мы уже не раз говорили, состоит в следующем: мы доказываем интересующее нас утверждение для некоторого значения n , считая, что для всех меньших n оно верно. Здесь под n понималось натуральное число. Однако это не обязательно — вместо натуральных чисел можно рассматривать и другие *вполне упорядоченные множества*. Сейчас мы объясним, что это значит.

Пусть имеется множество объектов определённого вида, причём для любых двух различных его элементов известно, какой из двух считается «большим». Такие множества называются *упорядоченными*. Прежде чем давать точное определение, приведём несколько примеров.

Пример 1. В ящике лежит множество камней, и среди них нет двух камней одинакового веса. Большим камнем считается тот, который тяжелее.

Пример 2. На множестве из 33 русских букв (считая букву Ё), называемом русским алфавитом, имеется порядок, изучаемый в школе: буква А меньше буквы Б, которая меньше буквы В, которая меньше буквы Г, . . . , которая меньше буквы Е, которая меньше буквы Ё, которая меньше буквы Ж, . . . , которая меньше буквы Ю, которая меньше буквы Я. (Другими словами, большей считается буква, которая идёт дальше по алфавиту.)

Пример 3. На множестве всех слов русского языка можно ввести *алфавитный* порядок, при котором большим считается то слово, которое идёт позже в словаре. Это делается так: два слова сравниваются по буквам слева направо, пока не обнаружатся разные буквы; большим считается то слово, у которого соответствующая буква больше. Например, слово КОТ меньше слова КОШКА, поскольку буква Т меньше буквы Ш (в смысле предыдущего примера).

К О Т
К О Ш К А

Исчерпывающе ли наше описание алфавитного порядка? На самом деле нет, мы пропустили важный случай: что будет, если одно слово является началом другого? Наше правило не говорит, какое из слов ВОРОН и ВОРОНА больше. В словарях обычно раньше идёт ВОРОН, и это правило надо включить в определение алфавитного порядка: слово предшествует всем своим продолжениям. Поэтому, в частности, слово «и» открывает раздел словаря, в котором слова начинаются на букву «и».

Порядок в словаре иногда называют *лексикографическим* (словари составляют учёные-лексикографы).

Пример 4. Введём порядок на парах натуральных чисел, напоминающий словарный: сначала сравниваем первые члены пар, а в случае равенства — вторые. Например, пара $\langle 3, 7 \rangle$ меньше пары $\langle 4, 5 \rangle$, поскольку у неё меньше первый член ($3 < 4$). А пара $\langle 4, 9 \rangle$ больше пары $\langle 4, 6 \rangle$, поскольку первые члены равны, а $9 > 6$.

Нечто подобное применяется при определении победителя в некоторых спортивных турнирах: сравнивается число очков, а при равенстве сравнивается разница забитых и пропущенных шайб, мячей или чего-нибудь ещё.

После этих примеров дадим точное определение линейного порядка.

Определение линейно упорядоченного множества. Говорят, что множество *линейно упорядочено*, если на нём задан *линейный порядок*, то есть для любых двух различных элементов x, y этого множества определено, какой из них считается большим, а какой — меньшим. Таким образом, для любых x и y имеет место ровно одна из трёх возможностей:

$$x < y \quad x = y \quad y < x.$$

При этом должно выполняться такое свойство:

$$\text{если } x < y \text{ и } y < z, \text{ то } x < z.$$

Как обычно, мы считаем выражения $x < y$ (x меньше y) и $y > x$ (y больше x) синонимами (они означают одно и то же).

Вот пример, когда приведённое условие нарушается. Предположим, что шахматный турнир проходил в один круг (каждый играл с каждым по разу) и ничьих не было. Можно ли ввести на множестве шахматистов порядок так: шахматист X больше шахматиста Y , если X выиграл у Y в турнире? Вообще говоря, нет: вполне возможно, что A выиграл у B , B выиграл у V , а V выиграл у A , и условие линейного порядка не выполнено.

Зачем нужны все эти определения? Сейчас мы увидим, что они могут быть действительно полезны при решении задач.

Задача 18. Шеренга новобранцев (рис. 6) стоит перед старшиной. Стар-



Рис. 6. Шеренга новобранцев: вид сверху.

шина командует: нале-ВО! Но по неопытности часть солдат поворачивается

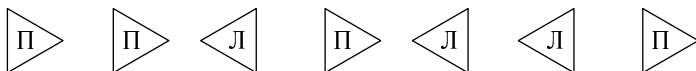


Рис. 7. Путаница (буква указывает направление поворота).

налево, а часть — направо (рис. 7). После этого каждую секунду происходит вот что: солдаты, оказавшиеся друг к другу лицом, понимают, что произошла ошибка, и оба поворачиваются кругом. (Например, через секунду после рис. 7 конфигурация будет такой, как на рис. 8. На этом повороты не за-



Рис. 8. Через секунду

кончатся: положение ещё через секунду показано на рис. 9, и так далее.) Требуется доказать, что рано или поздно повороты прекратятся (при любом

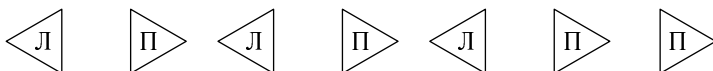


Рис. 9. Через две секунды

числе солдат и при любом их положении после команды).

Решение. Эта задача предлагалась на одной из олимпиад и оказалась вовсе не такой уж простой для участников. Но с помощью понятия порядка её решить легко. Будем кодировать положение солдат с помощью последовательности букв Л и П. Например, положение на рис. 7 кодируется как

П П Л П Л Л П,

положение через секунду кодируется как

П Л П Л П Л П,

через две секунды — как

Л П Л П Л П П,

и так далее.

Что происходит на каждом шаге? По условию задачи солдаты, стоящие нос к носу (при нашем кодировании это обозначается как ПЛ; такие пары подчеркнуты), поворачиваются кругом. При этом буквы ПЛ заменяются на ЛП). На каждом шаге происходит несколько таких замен — столько, сколько есть групп ПЛ.

Теперь осталось сделать простое наблюдение: при таких заменах слово уменьшается с точки зрения алфавитного порядка! В самом деле, первая слева группа ПЛ заменяется на ЛП, а буква Л меньше буквы П в алфавитном порядке. (Замены в других группах на порядок не влияют.) Поэтому с каждой секундой слово становится всё меньше и меньше, и рано или поздно процесс должен остановиться, так как существует лишь конечное число слов данной длины n из букв Л и П (а именно, 2^n — но точное значение нам сейчас не важно).

Задача решена.

В этой задаче мы использовали такое свойство: не существует бесконечной убывающей (в смысле алфавитного порядка) последовательности слов из n букв Л и П. (Мы говорим о «словах» из букв Л и П: хотя в русском языке таких слов нет, это не мешает рассматривать множество таких «слов» с алфавитным порядком.) Другими словами, если на каждом шаге мы уменьшаем элемент нашего линейно упорядоченного множества, то рано или поздно должны остановиться.

Множество с таким свойством называется «вполне упорядоченным».

Определение вполне упорядоченного множества. Линейно упорядоченное множество M называют *вполне упорядоченным*, если не существует бесконечной убывающей последовательности

$$m_1 > m_2 > m_3 > \dots$$

его элементов.

Для конечных множеств мы не получаем ничего нового, поскольку в них вообще нет бесконечной последовательности различных элементов. Но бывают и бесконечные вполне упорядоченные множества. Прежде всего, таково множество $\mathbb{N}$ натуральных чисел (вспомним принцип наименьшего числа).

Вполне упорядоченные множества играют важную роль (на них основано обобщение математической индукции, называемое *трансфинитной индукцией*). Мы не будем говорить об этом подробно; о трансфинитной индукции можно прочесть в книжке «Начала теории множеств» (авторы Н. К. Верещагин и А. Шень, Москва, издательство МЦНМО, 2007, свободно распространяется в электронной форме, <ftp://mccme.ru/users/shen/logic/sets>). Приведём лишь пример задачи, где это понятие полезно.

Задача 19. На доске написана последовательность 01010. С ней разрешается выполнять такое действие: в любом месте можно заменить группу 10 на группу 000...0001 (сколько угодно нулей и одна единица). Доказать, что это действие можно выполнить лишь конечное число раз (рано или поздно мы придём к последовательности, в которой единицы стоят справа от нулей, и действие выполнить нельзя).

Решение. Прежде всего заметим, что в любой момент в последовательности будет ровно две единицы, поскольку единицы не появляются и не исчезают. Идя справа налево, посмотрим, на каких местах стоят эти единицы. Получатся два натуральных числа.

Например, для исходной последовательности 01010 получится пара чисел $\langle 2, 4 \rangle$, а для последовательности 0100000001, которая получается из неё заменой второй группы 10 на 00000001, получится пара $\langle 1, 9 \rangle$ (единицы стоят на первом и девятом местах, считая справа).

Теперь для решения задачи осталось доказать две вещи:

(а) при каждом преобразовании пара чисел уменьшается с точки зрения определённого нами порядка (сначала сравниваем первые члены пар, а затем вторые);

(б) множество пар натуральных чисел с этим порядком является вполне упорядоченным (и потому пара не может уменьшаться бесконечно много раз подряд).

Оба этих утверждения доказать несложно. Если преобразование затрагивает правую единицу (как в рассмотренном примере), то она приближается к правому краю, перескакивая через нуль (который при этом размножается). При этом первый член пары уменьшается на единицу, а второй может возрасти (на сколько именно — зависит от числа добавленных нулей). Но по определению порядка (сравниваются сначала первые члены, а потом вторые), рост второго члена не играет роли: раз первый член уменьшается, уменьшается и пара.

Если же преобразование затрагивает левую единицу, то правая остаётся на месте и потому первый член пары не меняется. Второй член при этом уменьшается на единицу, поскольку левая единица перепрыгивает через стоящий справа от неё нуль.

Итак, утверждение (а) доказано. Покажем теперь, что множество пар вполне упорядочено, то есть что не существует бесконечной последовательности пар

$$\langle a_1, b_1 \rangle > \langle a_2, b_2 \rangle > \langle a_3, b_3 \rangle > \dots$$

(с точки зрения введённого на парах порядка). Пусть такая последовательность есть. Тогда первые члены пар образуют невозрастающую последова-

тельность:

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots$$

(поскольку возрастание первого члена пары безусловно означает возрастание пары). В этой невозрастающей последовательности натуральных чисел может быть лишь конечное число строгих неравенств: натуральное число нельзя уменьшать бесконечно много раз. Значит, начиная с некоторого места N , все первые члены пар равны:

$$a_N = a_{N+1} = a_{N+2} = \dots$$

Тогда порядок на парах целиком определяется вторыми членами, и поэтому с этого места вторые члены пар убывают. Но это продолжаться бесконечно не может.

Задача решена.

Ещё несколько задач

Задача 20. Плоскость разрезана на части n прямыми, причём $n \geq 3$ и не все прямые проходят через одну точку. Доказать, что хотя бы одна из частей — треугольник.

Задача 21. Доказать, что (а) для перекладывания ханойской башни из n колец с одной палочки на другую достаточно $2^n - 1$ действий и что (б) меньшим числом действий не обойтись.

Задача 22. Доказать, что $\sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6}}}} < 3$, а также аналогичное утверждения для любого числа корней.

Задача 23. Доказать, что сумма $1 + 1/2 + \dots + 1/k$ может быть сделана больше любого наперёд заданного числа n , если k выбрать достаточно большим.

Задача 24. Один выпуклый многоугольник находится внутри другого. Доказать, что периметр внутреннего многоугольника меньше периметра внешнего многоугольника.

Задача 25. На сколько частей делят плоскость n прямых, никакие две из которых не параллельны и никакие три не проходят через одну точку?

Задача 26. Доказать, что квадрат можно разрезать на n квадратов (возможно, разных размеров) при любом $n \geq 6$.

Задача 27. Доказать, что для любого целого $n \geq 3$ можно найти n различных целых положительных чисел, сумма которых нацело делится на каждое из чисел.

Задача 28. Имеется по одной гири в 1, 3, 9, 27, 81, ... граммов (каждая следующая втрое тяжелее предыдущей). Доказать, что с их помощью можно уравновесить любой груз, весящий целое число граммов, если разрешается класть гири на обе чашки рычажных весов.

Задача 29. Число

$$x + \frac{1}{x}$$

является целым. Доказать, что числа

$$x^2 + \frac{1}{x^2}, x^4 + \frac{1}{x^4}, x^8 + \frac{1}{x^8}, x^{16} + \frac{1}{x^{16}}, \dots$$

тоже будут целыми.

Задача 30 (продолжение). Доказать, что число

$$x^n + \frac{1}{x^n}$$

будет целым при любом $n = 2, 3, 4, 5, 6, \dots$

Задача 31. Доказать, что $2^n > n$ при всех $n = 1, 2, 3, 4, \dots$

Задача 32. Числа Фибоначчи определяются формулами

$$F_1 = 1; \quad F_2 = 1; \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \text{ при } n \geq 3.$$

Доказать, что

$$1, 5^n \leq F_{n+2} \leq 2^n$$

при всех $n = 1, 2, 3, 4, \dots$

Задача 33. Доказать, что количество различных слов из n букв Л и П равно 2^n .

Задача 34. На доске написано слово из n букв Л и П. За один ход можно изменить одну букву (заменить Л на П или наоборот). Доказать, что за несколько ходов можно получить на доске (одно за другим) все 2^n слов, причём никакое слово не встретится дважды.

Задача 35. Доказать, что количество различных слов из n букв Л и П, в которых буквы Л не идут подряд друг за другом, равно F_{n+2} .

Задача 36. Доказать, что прямоугольник $2 \times n$ можно разрезать на прямоугольники 1×2 ровно F_{n+1} способами.

Задача 37. Доказать, что (при всех $n = 2, 3, 4, \dots$)

$$F_1 + F_2 + F_3 + \dots + F_n = F_{n+2} - 1.$$

Задача 38. Доказать, что (при любом $n = 3, 4, 5, \dots$) сумма углов выпуклого n -угольника равна $(n - 2) \cdot 180^\circ$.

Задача 39. В колонию бактерий попадает вирус. В первую минуту он уничтожает одну бактерию и делится пополам, а оставшиеся бактерии тоже делятся пополам. За вторую минуту два вируса уничтожают две бактерии и делятся пополам (всего получается четыре вируса), оставшиеся бактерии тоже делятся пополам, и так далее. Вымрет ли колония бактерий?

Задача 40. Доказать, что квадрат $2^n \times 2^n$, в котором вырезана *любая* (не обязательно угловая) клетка, можно разрезать на уголки из трёх клеток.

Задача 41. Доказать неравенство

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

(Указание: полезно усилить неравенство, заменив в правой части n на $n+1$.)

Задача 42. Задачу о новобранцах можно решить и другим способом, индукцией по числу солдат. В самом деле, крайний солдат поворачивается не более одного раза, после чего остаётся воспользоваться предположением индукции. Провести это рассуждение подробно.

Задача 43. Показать, что в задаче с n солдатами повороты могут продлиться не более $10n$ секунд.

Задача 44. Решить задачу 19 для произвольной начальной последовательности нулей и единиц (не обязательно с двумя единицами).

Задача 45. Доказать, что линейно упорядоченное множество M является вполне упорядоченным тогда и только тогда, когда любое непустое его подмножество X имеет наименьший элемент (элемент, меньший всех других элементов множества X).

Задача 46. Бизнесмен заключил с чёртом такую сделку: он может любую имеющуюся у него купюру обменять у чёрта на любой набор купюр любого меньшего достоинства (по своему выбору, без ограничения общей суммы). Он может также тратить деньги, но не может получать их в другом месте (кроме как у чёрта). При этом каждый день на еду ему нужен рубль. Сможет ли он так жить бесконечно долго?