

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
МОСКОВСКИЙ ИНЖЕНЕРНО–ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)

С. В. Шведенко

**НАЧАЛА АНАЛИЗА
ФУНКЦИЙ
КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ**

Рекомендовано УМО “Ядерные физика и технологии”
в качестве учебного пособия для студентов
высших учебных заведений

Москва 2008

Типография "Тровант" г. Троицк Московской обл.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Данная книга написана на основе лекций по курсу “Теория функций комплексной переменной”, многократно читавшихся автором в Московском инженерно-физическом институте, в сочетании с опытом проведения им практических занятий по данному разделу математического анализа.

При написании книги автор ставил перед собой следующие ограничения.

1. Обращаясь (что неизбежно) к понятиям и фактам из предшествующего курса *действительного* анализа, избегать ссылок на те его разделы, к традиционному изложению которых можно высказать претензии. В частности, это относится к разделам “Криволинейные интегралы”¹ и “Несобственные интегралы с параметром”².

2. Выдержать ровный уровень изложения, не прибегая к ставшему привычным в математических курсах приему “выборочной строгости”.

3. Отдавая должное роли рисунков³ в *пояснении* рассуждений, отказаться от чрезмерно распространившегося (особенно при описании действий на *комплексной* плоскости) приема “рисуночной аргументации”, когда рисунки служат не столько иллюстрацией логических доводов, сколько способом “упростить” доказательства незаметной подменой (посредством “удачного” рисунка) “неудобного” *общего* случая более “удобным” *частным*.

¹ Каждый слушатель лекций по анализу вспомнит торопливость, с которой вводились понятия *контура* и *интеграла по контуру*, а каждый совестливый лектор — чувство неловкости, испытываемое им при “выводе” *формулы Грина*.

² Традиционные теоремы этого раздела имеют более жесткие условия по сравнению с теми, которые предоставляют приложения (например, в рамках *преобразования Лапласа*).

³ В этой книге их 133; стоит отметить, что в изложениях классиков рисунки либо отсутствуют (например, у Коши), либо крайне редки.

4. Отказаться от слов и словосочетаний “очевидно”, “легко видеть”, “нетрудно показать”, которые в математике давно утратили изначальный смысл и превратились в указатели слабых мест и пробелов в рассуждениях.

5. Установить *по первоисточникам* происхождение основных понятий и фактов теории функций комплексной переменной, дав точные ссылки.¹

Структурно книга состоит из 20 главок (или секций), названия которых могут звучать как вопросы, на которые автор стремился дать по возможности полные (в рамках заданного объема книги и эрудиции автора), но непременно внятные и аргументированные ответы. Среди *выводимых утверждений*, в которых концентрируются эти ответы, лишь наиболее фундаментальные и именные снабжены титулом (“теорема”, “лемма”, “критерий” и т. п.), утверждения же “второго ряда”, не требующие частого к ним обращения, выделяются в тексте двойной вертикальной чертой.

Использованием двухуровневого шрифта материал разделяется на основной (примерно соответствующий программе курса, принятой в МИФИ) и дополнительный, в который вынесены выходящие за рамки курса (но примыкающие к нему) утверждения, отдельные доказательства (или их фрагменты), исторический комментарий и всяческие подробности.

Задачи, разбираемые в качестве примеров, взяты из популярных задачников, задачи же упражнений (предлагаемые в конце каждой главки) в большинстве составлены автором.

Электронный адрес автора — sershvedenko@mail.ru

¹ Львиная их доля приходится на работы Коши, составившие основу этой теории, но, к сожалению, не оформленные им в виде систематически изложенного курса (подобного его “Курсу анализа” [26]), а оставленные в виде отдельных статей, мемуаров и т. п., разошедшихся по многочисленным томам его Полного собрания сочинений [28].

I. ЧТО НАЗЫВАЮТ КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТЬЮ И В ЧЕМ ЕЕ ОТЛИЧИЕ ОТ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЙ

Комплексная плоскость $\mathbb{C}$ — это то, чем становится действительная координатная плоскость $\mathbb{R}^2$ (с ее традиционными осями x (абсцисс) и y (ординат) и элементами, мыслимыми и как точки, и как векторы¹) при введении в ней (в дополнение к уже имеющимся операциям сложения векторов и умножения их на действительные числа) операции умножения вектора на вектор по правилу:

произведение ненулевого вектора z на ненулевой вектор w есть обозначаемый zw вектор (этой же плоскости), длина которого равна произведению длин перемножаемых векторов ($|zw| = |z||w|$), а угол, который он составляет с осью абсцисс, равен сумме углов между этой осью и сомножителями (при обычном соглашении считать положительным отсчет углов “против хода часовой стрелки”; рис. 1);

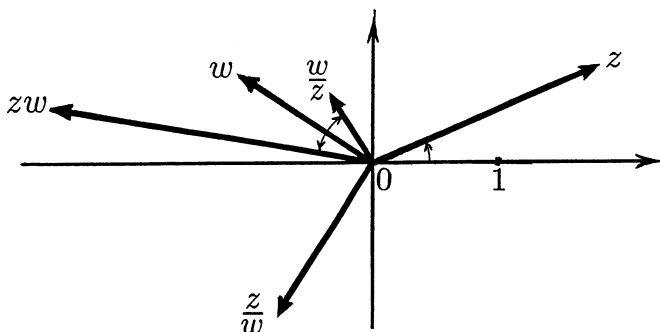


Рис. 1

произведением zw векторов z и w , среди которых есть нулевой, считается нулевой вектор.

¹ Откладываются от любой точки.

От традиционных *скалярного и векторного умножений* вводимую операцию отличает то, что ее результат есть *вектор*, причем той же *плоскости*, какой принадлежат сомножители.

Вот прямые следствия данного *правила перемножения векторов*.

1. Соблюдаются привычные “законы”:

$zw = wz$ — *переместительный*,

$(zw)\zeta = z(w\zeta)$ — *сочетательный*,

$(z+w)\zeta = z\zeta + w\zeta$ — *распределительный*.

2. Выполнима *обратная к умножению операция деления* любого вектора на любой *ненулевой вектор* (как на рис. 1).

На языке *алгебры* это означает, что плоскость $\mathbb{C}$ является *полем*, в то время как плоскость $\mathbb{R}^2$ есть лишь *линейное пространство* (над полем $\mathbb{R}$ *действительных чисел*).

На вопрос, можно ли превратить в *поле* координатное пространство $\mathbb{R}^3$, *отрицательный* ответ дает *теорема Фробениуса*¹: ввести в пространстве $\mathbb{R}^n$, $n > 1$, операцию *умножения вектора на вектор* с выполнением *переместительного, сочетательного и распределительного законов* и *возможностью деления на ненулевые векторы* можно лишь при $n=2$ (и именно указанным выше способом).

3. Для любого *ненулевого вектора* $z \in \mathbb{C}$ и $n = 2, 3, \dots$ определены n значений *корня n -й степени из z* , обозначаемые (все вместе и каждый в отдельности) $\sqrt[n]{z}$. Все они являются *векторами* длины $\sqrt[n]{|z|}$ (здесь $\sqrt[n]{|z|}$ — *арифметический корень из положительного числа $|z|$*), образуют друг с другом углы, кратные $\frac{2\pi}{n}$, причем один из векторов $\sqrt[n]{z}$ составляет с *осью абсцисс* угол, в n раз *меньший* угла между этой *осью* и *вектором z* . Как следствие, *концевые точки векторов $\sqrt[n]{z}$, отложенных от общего начала*,

¹ Фробениус (Frobenius, Georg Ferdinand, 1849–1917) — немецкий математик. Полную формулировку и доказательство установленной им (в 1877 г.) теоремы можно найти, например, у Л. Я. Окунева [14].

образуют вершины правильного n -угольника, вписанного в окружность радиуса $\sqrt[n]{|z|}$ (на рис. 2 изображены векторы z , $\sqrt{z}$ и $\sqrt[3]{z}$ при $|z| > 1$). Для нулевого вектора z единственным значением $\sqrt[n]{z}$ является нулевой вектор.

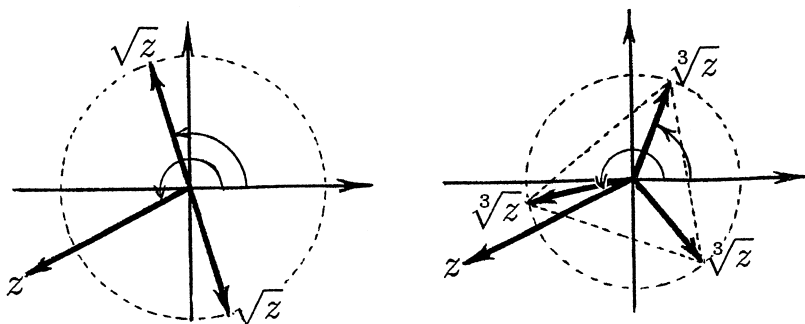


Рис. 2

4. Векторы, коллинеарные оси абсцисс, ведут себя при сложении, вычитании, умножении и делении как действительные числа и потому на комплексной плоскости могут иметь общие с ними обозначения. В частности, нулевой вектор и единичный направляющий вектор оси абсцисс записываются как 0 и 1.

5. Квадраты (результаты умножений на себя) ненулевых векторов, коллинеарных оси ординат, оказываются векторами, коллинеарными оси абсцисс, но противоположными ей по направлению. В частности, единичный направляющий вектор оси ординат, который на комплексной¹ плоскости обо-

¹ В отличие от действительной.

значают¹ i , обладает свойством $i^2 = -1$. *Ненулевые* векторы, коллинеарные *оси ординат*, имеют поэтому представление iy (с *ненулевым* $y \in \mathbb{R}$) и выполняют роль *квадратных корней* из *отрицательных действительных чисел*.

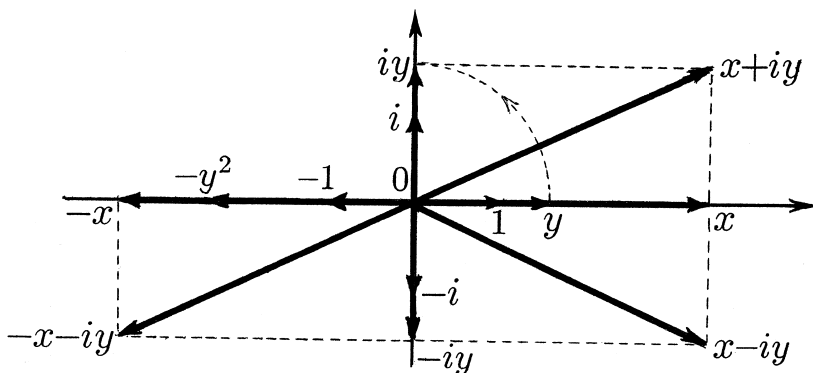


Рис. 3

Эти обозначения позволяют записывать *векторы* $z \in \mathbb{C}$ в виде $z = x + iy$, где x и y — *действительные числа*, которые одновременно можно рассматривать и как *векторы* плоскости $\mathbb{C}$, коллинеарные *оси абсцисс*; вектор iy обретает при этом смысл *произведения* векторов i и y (рис. 3).

Векторы $z, w, \dots \in \mathbb{C}$, записанные в виде *сочетаний* $z = x + iy, w = u + iv, \dots$, и есть комплексные числа², правила сложения, вычитания, умножения и деления которых — с результатами в виде таких же *сочетаний* — определяются правилами *векторного сложения* и введенной операции *векторного умножения* (с. 5–6):

¹ Исключая электротехников, обозначающих его j , поскольку i они привыкли воспринимать как *величину тока*.

² Лат. *complexio* — *сочетание*.

$$\begin{aligned}
(x+iy) \pm (u+iv) &= (x \pm u) + i(y \pm v); \\
(x+iy)(u+iv) &= x(u+iv) + iy(u+iv) = \\
&= xu + xiv + iyu + i^2yv = (xu - yv) + i(xv + yu); \\
\frac{x+iy}{u+iv} &= \frac{(x+iy)(u-iv)}{(u+iv)(u-iv)} = \frac{xu + iyu - xiv - i^2yv}{u^2 + ivu - uiv - i^2v^2} = \\
&= \frac{xu + yv}{u^2 + v^2} + i \frac{yu - xv}{u^2 + v^2} \quad (\text{при условии } u+iv \neq 0).
\end{aligned}$$

Воспринимая *комплексные числа* $z = x + iy$ как *векторы* плоскости¹ $\mathbb{C}$ их, следуя Гауссу², одновременно представляют себе и как *точки*³ этой плоскости — *концевые точки векторов*, откладываемых от *начала координат*.

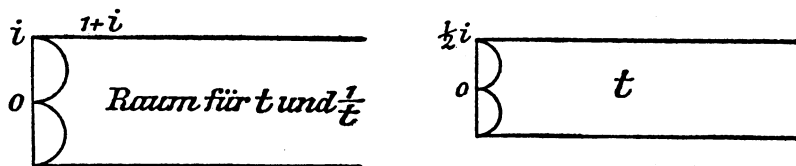


Рис. 4

Ирландский математик Гамильтон⁴, в монографии которого [35] окончательно оформилось понятие *вектора*⁵, предложил воспринимать *комплексные числа* как (*упорядоченные*) *пары действительных чисел*:

¹ Считая, что каждый из них можно отложить от любой ее *точки*.

² Га́усс (Gauss, Carl Friedrich, 1777–1855) — немецкий математик. На рис. 4 — заимствованный из [33] (Bd. VIII, S. 105) фрагмент его заметок 1805 г. — одно из первых изображений *комплексной плоскости*.

³ Иногда называя *комплексное число* $x + iy$ а́ффиксом изображающей его *точки* (лат. *affixus* — *прикрепленный*).

⁴ Hamilton, William Rowan, 1805–1865.

⁵ Соединившего понятия *длины* и *направления* и определяемого Гамильтоном — в отличие от *радиуса-вектора*, выражающего лишь *длину*, — как “*VECTOR = VECTUM – VENEND*” — *перенесение точки из начального положения в конечное* (лат. *vector* — *несущий*).

“The more general expression of algebra, $a_1 + \sqrt{-1} a_2$, for any (so called) imaginary root of a quadratic or other equation, . . . interpreted as being a symbol of the number-couple which I had otherwise denoted by (a_1, a_2) , . . . its multiplication by another number-couple is expressed by the formula $(b_1, b_2)(a_1, a_2) = (b_1 a_1 - b_2 a_2, b_2 a_1 + b_1 a_2)$ ” ([35], p. 12).

В результате широко распространилось именно такое определение комплексных чисел — как упорядоченных пар (a, b) действительных чисел с операциями их сложения и умножения по формулам:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d); \quad (a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

Формальную безупречность этого определения несколько портит возникающий терминологический казус: поскольку термин “комплексные числа” объединяет числа действительные и мнимые, принимая данное определение, приходится делать не украшающий математику вывод: любое действительное число есть упорядоченная пара действительных чисел.

Алгебраическое определение комплексных чисел, не связанное с их наглядным представлением, может быть дано следующим образом.

Система комплексных чисел $\mathbb{C}$ есть результат присоединения к системе действительных чисел $\mathbb{R}$ не содержащегося в ней элемента i , по определению обладающего свойством $i^2 = -1$. На возникающие в ходе этого присоединения¹ сочетания $a + ib$ (чисел $a, b \in \mathbb{R}$ и элемента i), получившие название комплексных чисел², распространяются действия сложения, вычитания, умножения и деления³ с результатами (что существенно) в виде таких же сочетаний (с. 9).

Судить о том, какой способ введения комплексных чисел предпочтительней — алгебраический или геометрический, — следует с уче-

¹ Т. е. распространения на элемент i имеющихся в системе $\mathbb{R}$ операций сложения и умножения с сохранением их привычных “законов”.

² С возможностью перестановок в них слагаемых и сомножителей, записью $a - ib$ вместо $a + i(-b)$ и сокращениями $a + i0 = a$, $0 + ib = ib$.

³ По тем же правилам, как если бы элемент i был действительной переменной с дополнительным свойством $i^2 = -1$.

том высказываний по этому поводу одного из основоположников современного математического анализа французского математика Коши¹. В своих работах до 1847 г. (например, “Курсе анализа” [26] 1821 г.) он понимал *комплексные числа* (не употребляя, однако этот термин) как “мнимые выражения” (“expressions imaginaires”) $a + b\sqrt{-1}$, составленные из двух *действительных чисел* и *символа* $\sqrt{-1}$, обращаясь с которыми надлежит по обычным правилам алгебры, оперируя с $\sqrt{-1}$ как с *действительной переменной*, квадрат которой равен -1 .

В 1847 г. он, однако, написал следующее: “Но после новых и зрелых размышлений наилучшим путем мне представляется полный отказ от символа $\sqrt{-1}$ и замена теории мнимых выражений теорией величин, которые я буду называть *геометрическими* ... Проведем в фиксированной плоскости через фиксированную точку O , принятую за начало, или полюс, полярную ось OX ... Будем называть *геометрической величиной* и обозначать r_p радиус-вектор OA , направленный из O к A . Его длина, обозначаемая буквой r , будет называться *численным значением*, или *модулем* геометрической величины r_p ; угол p , указывающий направление радиуса-вектора OA , — *аргументом*, или *азимутом* этой же величины. Две геометрические величины будут равны между собой, когда они будут представлять один и тот же радиус-вектор.”²

Исторически же *комплексные числа* возникли вне каких-либо геометрических ассоциаций. Их появление в XVI в. было вызвано откры-

¹ Cauchy, Augustin-Louis, 1789–1857.

² В оригинале: “Mais, après de nouvelles et mûres réflexions le meilleur parti à prendre me paraît être d’abandonner entièrement l’usage du signe $\sqrt{-1}$, et de remplacer la théorie des expressions *imaginaire* par la théorie des quantités que j’appellerai *géométriques* ... Menons, dans un plan fixe et par un point fixe O pris pour *origine* ou *pôle*, un axe *polaire* OX ... Nous appellerons *quantité géométrique*, et nous désignerons par la notation r_p le *rayon vecteur* OA dirigé de O vers A . La longueur de ce rayon, représentée par la lettre r sera nommée la *valeur numérique* ou le *module* de la *quantité géométrique* r_p ; l’angle p , qui indique la direction du rayon vecteur OA , sera l’*argument* ou l’*azimut* de cette même quantité. Deux *quantités géométriques* seront *égales* entre elles, lorsqu’elles représenteront le même rayon vecteur.” ([28], sér. I, t. II, p. 283; Коши практиковал многократную публикацию своих результатов, поэтому ссылки на них допускают варианты).

тием итальянскими математиками формулы корней *неполного кубического уравнения* $z^3 + pz + q = 0$, имеющей (в современной записи) вид

$$z = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

и известной под названием *формулы Кардано*¹. Оказалось, что в случае уравнения с тремя различными действительными корнями (например, $z^3 - z = 0$) в вычисления по формуле Кардано вовлекаются “несуществующие числа” — *квадратные корни из отрицательных чисел*. Эти “числа” со странным постоянством возникали в ходе вычислений, причем оказывалось, что если действовать с ними как с обычными числами, то на конечном шаге они сокращались и итоговый ответ оказывался верным. Не оставалось другого выхода как *легализовать* эти действия, что и сделал итальянский математик и инженер-гидравлик Бомбелли² в своей “Алгебре” (“L’Algebra”), изданной в 1572 г.

Суть этой *легализации* сводится к *присоединению* к системе действительных чисел отсутствующего в ней *корня* уравнения $x^2 + 1 = 0$, со временем получившего обозначение i и название “мнимой единицы”³.

Под *присоединением* “мнимой единицы” к *системе действительных чисел* $\mathbb{R}$ понимается распространение на элемент i имеющихся в

¹ Cardano, Gerolamo, 1501–1576, итальянский врач, философ, математик и изобретатель (“карданный вал”), не был автором данной формулы, но первым опубликовал ее в 1545 г. в трактате “Великое искусство” (“Ars magna”). Забавные подробности этой истории вместе с описанием жизни Кардано можно найти в книге [40], содержащей также перевод с латинского его “Книги об азартных играх” (“Liber de Ludo Aleae”) — первого в истории учебника по *теории вероятностей*.

² Bombelli, Raffaele, 1526–1573.

³ Термин “мнимый” в смысле *воображаемый* (“imaginaire”) ввел в математику французский математик и философ Декарт (Descartes, или Cartesius, René, 1596–1650), указавший в своей “Геометрии” (впервые изданной в 1637 г.), что “*корни ... не всегда бывают действительными, но иногда лишь воображаемыми*” (“les racines ... ne sont pas toujours réelles, mais quelquefois seulement imaginaires”; [30], p. 63). Символ i вместо $\sqrt{-1}$ ввел (в 1777 г.) Эйлер, однако активно внедрять его начал (с 1801 г.) Гаусс: “scribendo brevitatis caussa i pro quantitate imaginaria $\sqrt{-1}$ ” ([33], Bd. I, S. 414); внедрение шло постепенно: Коши, например, до 1847 г. писал исключительно $\sqrt{-1}$ (точнее, $\sqrt{-1}$).

этой системе операций сложения и умножения с сохранением привычных перестановочного, сочетательного и распределительного законов и возможностью выполнения обратных действий вычитания и деления. Результаты умножения элемента i на ненулевые действительные числа b , записываемые как ib или (ввиду перестановочного закона) bi , называют чисто мнимыми числами. Это и есть квадратные корни из отрицательных чисел: $(ib)^2 = (ib)(ib) = biib = b(-1)b = -b^2$. Мнимыми же числами называют результаты сложения $a+bi$ действительных чисел с чисто мнимыми.

Мнимые числа вместе с действительными и составляют поле $\mathbb{C}$ комплексных чисел (*campus numerorum complexorum*)¹ — всевозможных сочетаний $a+bi$, $a, b \in \mathbb{R}$, рациональные операции с которыми совершаются по тем же правилам, как если бы i была действительной переменной, с добавлением к ним свойства $i^2 = -1$, приводящего к тому, что результатами этих операций оказываются такие же сочетания (о чем уже говорилось выше).

По свидетельству Коши ([28], sér. I, t. II, p. 282) первым геометрическую трактовку комплексного числа дал в 1786 г. “скромный ученый г-н Анри-Доминик Трюель” (“un savant modeste M. Henri-Dominique Truel”). Обычно же изобретателями изображения комплексных чисел в виде направленных отрезков на плоскости называют английского математика и религиозного деятеля Вáллиса² (о его трактовке *мнимых чисел* ниже, в XV, с. 246), норвежского топографа Вéсселя³, представившего в 1797 г. доклад⁴ на эту тему в Датскую королевскую академию (Норвегия тогда была частью датского королевства) и французского математика-любителя Аргáна⁵, имея в виду вышедшее в 1806 г. первое (анонимное) издание его книги [21], знакомясь с которой, можно отчетливо ощутить себя присутствующим при рождении понятия

¹ Термин введен Гауссом ([33], Bd. II, S. 102) в 1837 г.

²Правильнее Уóллиса; Wallis, John, 1616–1703 (подробно об этом удивительном человеке можно прочитать в книге Дж. Скотта [42]).

³Wessel, Caspar, 1745–1818.

⁴ К двухсотлетию его опубликования (в 1799 г. на датском языке) вышло его английское издание [44], включающее биографию Весселя и подробный исторический очерк изображения комплексных чисел.

⁵Argand, Jean-Robert, 1768–1822; был родом из Женевы, держал книжную лавку в Париже.

вектор, соединившего в себе *длину* и *направление*. Можно лишь пожалеть тех, кого чрезмерное распространение в современном обществе незнания французского языка лишает этого удовольствия.

Хотя для Аргана главным было *геометрическое представление комплексных чисел*, а для Весселя — *алгебраические операции с направлениями*, они оба представили $\pm\sqrt{-1}$ “направленными отрезками” (“lignes dirigées” у Аргана), *перпендикулярными* к направлению “положительной единицы” $+1$, и общим для них было понимание того, что *умножение на вектор* сводится к *повороту* в плоскости этого вектора и “положительной единицы” на угол, равный углу между ними, и *растяжению* с коэффициентом, равным *длине* этого вектора.

Как уже отмечалось (с. 9), изображать *комплексные числа* на плоскости *точками* (а не *направленными отрезками*) начал Гаусс.

Действительные числа x и y называют соответственно действительной и мнимой частями комплексного числа $z = x+iy$ с использованием обозначений $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$.

Пример. Изобразить на плоскости комплексные числа z , удовлетворяющие для данных комплексных чисел z_1, z_2 соотношениям: а) $\operatorname{Im} \frac{z-z_1}{z-z_2} = 0$; б) $\operatorname{Re} \frac{z-z_1}{z-z_2} = 0$.

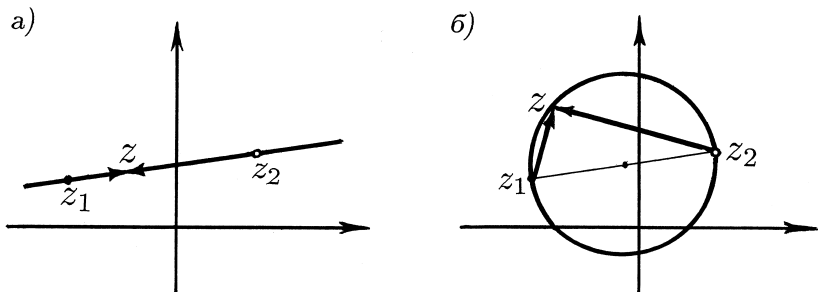


Рис. 5

Достаточно записать соотношения как а) $\frac{z-z_1}{z-z_2} = \lambda$ и б) $\frac{z-z_1}{z-z_2} = i\lambda$, где λ — *действительное* число, и заметить, что согласно правилу *умножения* векторов плоскости $\mathbb{C}$ (с. 5) векторы $z-z_1$ и $z-z_2$ соответственно а) *коллинеарны* и б) *перпендикулярны*, а потому числа z

изображаются точками соответственно а) *прямой*, проходящей через точки, изображающие числа z_1, z_2 (рис. 5, а), и б) *окружности*, для которой эти точки служат концами *диаметра* (в обоих случаях, точка, изображающая число z_2 , исключается; рис. 5, б).

Названия действительной и мнимой распространяются и на *координатные оси* плоскости $\mathbb{C}$, но с записью их элементов уже не x и y (как на плоскости $\mathbb{R}^2$), а x и iy .

Переходу на плоскости $\mathbb{R}^2$ от *декартовых* координат x, y к *полярным* r, φ соответствует на плоскости $\mathbb{C}$ запись *комплексных чисел* $z = x + iy \neq 0$ в полярной, или тригонометрической, форме $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, в которой $r = |z|$ есть модуль комплексного числа z — *длина* изображающего его *вектора*, а $\varphi = \arg z$ — *аргумент*¹ — выражаемая *длиной дуги* единичной окружности² величина *угла*, образуемого этим вектором с *действительной осью*. Считают, что $|0| = 0$, тогда как ни *аргумент*, ни *полярная форма* числа 0 не определены.

Например, $\sqrt{2}(\cos(-\frac{\pi}{4} + 2\pi k) + i \sin(-\frac{\pi}{4} + 2\pi k))$ (при любом выборе целого числа k) есть *полярная форма* числа $1 - i$.³

Напрямую вытекающая из *правила умножения* комплексных чисел (с. 5) формула Муавра⁴

$$(r(\cos \varphi + i \sin \varphi))^n = r^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$$

¹ Термины *модуль* и *аргумент* ввели соответственно Арган ([21], р. 122) и Коши ([28], sér. II, t. II, р. 38).

² Взятый со знаком “плюс” или “минус” соответственно отсчету ее “против” или “по ходу часовой стрелки” и вычисляемой с точностью до целого числа оборотов.

³ Равенство $1 - i = \sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4})$ также верно, однако его правая часть не является *полярной формой* числа $1 - i$.

⁴ de Moivre, Abraham (1687–1754) — французский математик. О том, каким сложным путем вывел он (в 1730 г.) названную его именем *формулу*, можно прочитать в [19] на с. 329–330 (примечание к §133).

лежит в основе практического *извлечения корней* из ненулевых комплексных чисел.

А именно, если $a \neq 0$ и $a = |a|(\cos \alpha + i \sin \alpha)$, то соотношение $\sqrt[n]{a} = z$, по определению равносильное $z^n = a$, в записи $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ означает, что

$$r^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi) = |a|(\cos \alpha + i \sin \alpha),$$

откуда следует:

$$r = \sqrt[n]{|a|} \text{ (арифметический корень)}, \text{ а } \varphi = \frac{\alpha}{n} + 2\pi \frac{k}{n} \text{ (} k \in \mathbb{Z} \text{)}.$$

Это возвращает к высказанному на с. 7 утверждению:

|| Для любого комплексного числа $a \neq 0$ существует ровно n комплексных значений $\sqrt[n]{a}$. Изображенные точками плоскости $\mathbb{C}$, они образуют вершины правильного n -угольника, вписанного в окружность радиуса $\sqrt[n]{|a|}$ с центром в начале координат.¹ Единственное значение $\sqrt[n]{0}$ есть 0.

Примеры. Найти: а) $\sqrt[6]{-1}$; б) $\sqrt[4]{1-i}$.

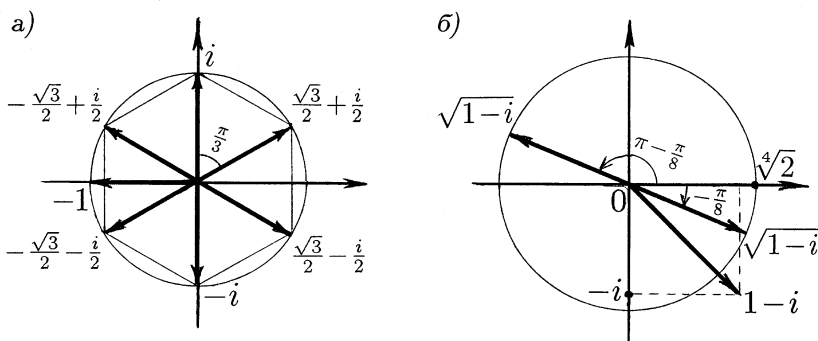


Рис. 6

Так как $i^6 = -1$, одним из значений $\sqrt[6]{-1}$ является i . Все же они изображаются вершинами правильного шестигульника, вписанного

¹ Это позволяет по одному найденному значению $\sqrt[n]{a}$ найти и все остальные.

в единичную окружность: $\pm i, \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \pm \frac{i}{2}$ (рис. 6, а).

Переход к полярной форме числа $1-i$ (с. 15) позволяет заключить: $\sqrt{1-i} = \sqrt[4]{2}(\cos(-\frac{\pi}{8} + \pi k) + i \sin(-\frac{\pi}{8} + \pi k)) = \pm \sqrt[4]{2}(\cos(-\frac{\pi}{8}) + i \sin(-\frac{\pi}{8}))$ (рис. 6, б).

Извлекать *квадратный корень* можно и не прибегая к *полярной форме* числа: запись $\sqrt{1-i} = x+iy$ приводит к системе
$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 1 \\ 2xy = -1 \end{cases}$$
 (с действительными x, y), решение которой позволяет получить значения $\sqrt{1-i}$ в виде $\pm(\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}})$.

Комплексные числа $x+iy$ и $x-iy$ называют сопряженными¹, обозначая их z и $\bar{z}$. На плоскости $\mathbb{C}$ *комплексное сопряжение* есть *зеркальное отражение* относительно *действительной оси* (как на рис. 3); в частности:

$$\begin{aligned} \overline{\bar{z}} &= z, & \overline{z \pm w} &= \bar{z} \pm \bar{w}, & \overline{zw} &= \bar{z}\bar{w}, & \overline{\frac{z}{w}} &= \frac{\bar{z}}{\bar{w}}, \\ z\bar{z} &= |z|^2, & \frac{1}{2}(z+\bar{z}) &= \operatorname{Re} z, & \frac{1}{2i}(z-\bar{z}) &= \operatorname{Im} z, & |\bar{z}| &= |z|, \\ \arg \bar{z} &= -\arg z \quad (\text{с точностью до слагаемого, кратного } 2\pi). \end{aligned}$$

Что касается *неравенств* — соотношений “больше” и “меньше”, то они для *комплексных чисел* (не являющихся *действительными*) не определены.

Имеют место, однако, следующие *неравенства* для *модулей* комплексных чисел, выражающие известные соотношения между *длинами сторон* соответственно а) любого и б) прямоугольного *треугольника*, и по этой причине называемые неравенствами треугольника:

- а) $|z+w| \leq |z|+|w|, \quad ||z|-|w|| \leq |z-w|;$
- б) $|\operatorname{Re} z| \leq |z|, \quad |\operatorname{Im} z| \leq |z|, \quad |z| \leq |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|.$

Главное при сопоставлении *действительной и комплексной* плоскостей — это их *геометрическое совпадение* и ал-

¹ *Expressions imaginaires conjuguées* у Коши в [26].

гебраическое различие: если в плоскости $\mathbb{R}^2$ векторы можно умножать и делить только на действительные числа, то в плоскости $\mathbb{C}$ их можно сверх того умножать и делить друг на друга.

Геометрическое совпадение плоскостей $\mathbb{C}$ и $\mathbb{R}^2$ позволяет сделать следующие выводы.

1. Окрестность точки $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbb{C}$ есть то же самое, что окрестность соответствующей точки $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

В силу специфики анализа на комплексной плоскости в окрестность точки $z_0 \in \mathbb{C}$ предпочтительнее не включать саму эту точку (это упрощает большинство формулировок и позволяет избавиться от не слишком изящных словосочетаний типа “проколотая окрестность” и “окрестность с выколотой точкой”).

2. Сходимость последовательности $\{z_n\} = \{x_n + iy_n\}$ точек плоскости $\mathbb{C}$ к точке $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbb{C}$, обозначаемая $\{z_n\} \rightarrow z_0$ или $\lim z_n = z_0$ и выражаемая формулой

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n (n \geq n_0 \Rightarrow |z_n - z_0| < \varepsilon),$$

равносильна сходимости соответствующей последовательности $\{(x_n, y_n)\}$ точек плоскости $\mathbb{R}^2$ к точке $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, т. е. одновременной сходимости $\{x_n\} \rightarrow x_0$, $\{y_n\} \rightarrow y_0$ двух последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ действительных чисел $x_n = \operatorname{Re} z_n$ и $y_n = \operatorname{Im} z_n$.

Как следствие, на последовательности $\{z_n\}$ комплексных чисел распространяется критерий Коши:

$$\exists z_0 (\lim z_n = z_0) \iff \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n \forall k (n \geq n_0 \Rightarrow |z_n - z_{n+k}| < \varepsilon).$$

3. Существование у функции $w = f(z)$ комплексной переменной z предела (равного w_0) в точке $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbb{C}$, записываемое как $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0$ и выражаемое формулой

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall z (0 < |z - z_0| < \delta \implies |f(z) - w_0| < \varepsilon)^1,$$

означает то же самое, что существование предела у функции $w = f(x+iy)$ двух действительных переменных x, y в точке $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Это же справедливо и в отношении понятий

- а) ограниченности,
- б) непрерывности,
- в) равномерной непрерывности

функции $w = f(z)$ на множестве $E \subset \mathbb{C}$. А именно, выражаемые, соответственно, формулами

- а) $\exists h > 0 \forall z (z \in E \implies |f(z)| \leq h)$;
- б) $\forall \zeta \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall z (\zeta \in E \wedge z \in E \wedge |z - \zeta| < \delta \implies |f(z) - f(\zeta)| < \varepsilon)^2$;
- в) $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall z \forall \zeta (\zeta \in E \wedge z \in E \wedge |z - \zeta| < \delta \implies |f(z) - f(\zeta)| < \varepsilon)$,

указанные понятия имеют для функции $w = f(z)$ комплексной переменной z (на множестве $E \subset \mathbb{C}$) тот же смысл, что и для функции $w = f(x+iy)$ двух действительных переменных x, y (на геометрически том же множестве $E \subset \mathbb{R}^2$).

Возможность *умножать и делить* (друг на друга) векторы $z \in \mathbb{C}$ позволяет перенести с *действительной оси* на *комплексную плоскость* понятия:

- а) *степенного ряда* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$;
- б) *производной функции*: $f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$.

¹ Ее эквивалентом является утверждение: какова бы ни была последовательность $\{z_n\}$ точек $z_n \neq z_0$, если $\{z_n\} \rightarrow z_0$, то $\{f(z_n)\} \rightarrow w_0$.

² Эквивалентно: для любой точки $\zeta \in E$ и любой сходящейся к ней последовательности $\{z_n\}$ точек $z_n \in E$ последовательность $\{f(z_n)\}$ значений в них функции $w = f(z)$ сходится к значению $f(\zeta)$.

В противоположность тому на плоскости $\mathbb{R}^2$

а) *степенные ряды* являются *двойными*: $\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} a_{nm} x^n y^m$; роль их в математике (в сравнении с обычными) незначительна;

б) *производные* функций приходится понимать как *частные* — отдельно по переменным x и y : $f'_x(x, y) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$ и $f'_y(x, y) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$ (если в плоскости $\mathbb{C}$ возможно деление на вектор приращения $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$, то в плоскости $\mathbb{R}^2$ делить можно лишь на компоненты Δx и Δy этого вектора).

Наглядной демонстрацией пользы введения *комплексной* плоскости служит объяснение причины, почему у функций *действительной* переменной $y = e^{-x^2}$ и $y = \frac{1}{1+x^2}$, схожих как в отношении свойств гладкости (обе имеют на *всей числовой оси* производные *всех* порядков), так и по виду графиков, *степенные разложения* ведут себя по-разному:

$$e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots$$

сходится на *всей числовой оси*, тогда как

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots + (-1)^n x^{2n} + \dots$$

только на *интервале* $(-1, 1)$.

С позиции “действительной оси” видимых причин такого различия нет, взгляд же с “комплексной плоскости” дает ему объяснение.

Дело в том, что если функцию $y = \frac{1}{1+x^2}$ распространить на *комплексную плоскость* (т. е. попросту считать *действительную* переменную x *комплексной*), то у нее возникают “особые точки” $x = \pm i$, *расстояние* до которых от *центра* степенного разложения — *начала координат* — совпадает с *радиусом сходимости* этого разложения. У функции же $y = e^{-x^2}$, напротив, никаких “особенностей” при продолжении ее с *действительной оси* на *комплексную плоскость* не возникает.

Причина, по которой наряду с *комплексной плоскостью* $\mathbb{C}$ вводят ее “сферический образ”, сравнима с той, по которой изображение участков *земной поверхности* на *плоской карте* дополняют представлением ее “в целом” на *глобусе*.

Чтобы получить изображение плоскости $\mathbb{C}$ на “глобусе” (разглядывать который, однако, надо не “снаружи”, а “изнутри”), эту плоскость воображают подпространством (координат x, y) в пространстве $\mathbb{R}^3$ координат x, y, t , в котором рассматривают сферу $\mathbb{S} : x^2 + y^2 + t^2 = 1$, диаметра 1, “лежащую” на этой плоскости и касающуюся ее в начале координат (рис. 7).

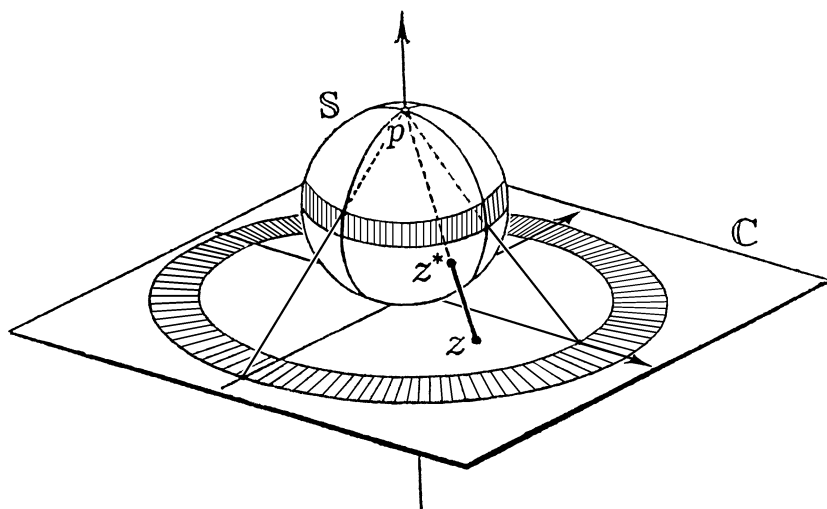


Рис. 7

Каждой точке $z = z(x, y, 0)$ этой плоскости, а следовательно, и изображаемому ею комплексному числу $z = x + iy$ соотносят ту точку z^* сферы $\mathbb{S}$, в которой ее пересекает отрезок, соединяющий точку $z(x, y, 0)$ с “северным полюсом” $p(0, 0, 1)$ этой сферы.

Устанавливаемое этим соответствие $z \longleftrightarrow z^*$ между точками $z \in \mathbb{C}$ и $z^* \in \mathbb{S}$ стали называть стереографической

проекцией¹, а сферу $\mathbb{S}$ (рассматриваемую с этим *соответствием*) — сферой Рíмана (иногда сферой Неймана)².

Являясь *взаимно однозначным* ($z_1 \neq z_2 \iff z_1^* \neq z_2^*$) и *взаимно непрерывным* ($\lim z_n = z_0 \iff \lim z_n^* = z_0^*$; упражнение 5, б), соответствие $z \longleftrightarrow z^*$ не охватывает *всю* сферу Римана: точке $p \in \mathbb{S}$ не соответствует *ни одна* точка $z \in \mathbb{C}$.

Устранить последний недостаток позволяет мысленное *присоединение* к плоскости $\mathbb{C}$ так называемого *несобственного* (не принадлежащего ей) *элемента*, который и считается соответствующим “северному полюсу” p сферы $\mathbb{S}$ при *стереографической проекции* $z \longleftrightarrow z^*$.

Этот *присоединяемый* к плоскости $\mathbb{C}$ *элемент* получил название бесконечно удаленной точки, или бесконечности, и обозначение ∞ ³. Плоскость $\mathbb{C}$, дополненную элементом ∞ , называют расширенной комплексной плоскостью и обозначают $\mathbb{C}^*$; плоскость же $\mathbb{C}$ — для отличия ее от $\mathbb{C}^*$ — называют конечной.

¹ Термин ввел бельгийский математик Агийон, Aguilion, 1566–1627 (греч. *σtereός* — *объемный*, *γραφή* — *письмо*; лат. *projectio* — *протягивание*). Устанавливая *стереографическую проекцию*, за основу иногда берут *сферу* $\mathbb{S}$: $x^2 + y^2 + t^2 = 1$, *пересекаемую* плоскостью $\mathbb{C}$ по “экватору” (при этом “северный полюс” можно заменить “южным”). *Стереографическую проекцию* применяли: древнегреческий астроном Птолемей (Πτολεμαῖος, Κλαυδῖος, ок. 90–ок. 160) для плоского изображения небесной сферы ([13], с. 26–27), Гаусс [33], Bd. IX, S. 121) и Эйлер ([20]) в их картографической деятельности (отнявшей у Эйлера зрение). О ее связи с *проекцией Меркатора* чуть ниже, в III, с. 49.

² Именно с работ немецкого математика Рíмана (Riemann, Berndard, 1826–1866) [15] (с. 202–203) и его ученика и последователя Неймана (точнее, Ноймана; Neumann, Carl, 1832–1866) [39] (S. 131–161) началось активное применение альтернативных (помимо *плоскости*) геометрических объектов при изображении *комплексной переменной*.

³ Его ввел Валлис (сноска² на с. 13) в своей изданной в 1656 г. “Арифметике бесконечностей” (“Arithmetica Infinitorum”).

Действия сложения, вычитания, умножения и деления, а также свойства комплексных чисел на элемент ∞ распространяются лишь частично: считается, например, что

$|\infty| = +\infty$ (тогда как $\arg \infty$ не определен); $\infty \cdot \infty = \infty$;

$\infty \pm z = z \pm \infty = \infty$, $\frac{z}{\infty} = 0$ для любого $z \in \mathbb{C}$;

$z \cdot \infty = \infty \cdot z = \infty$, $\frac{z}{0} = \infty$ для любого $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$;

действия $\infty \pm \infty$, $0 \cdot \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$ (как и $\frac{0}{0}$) не определены.

Окрестностями элемента ∞ на плоскости $\mathbb{C}$ считают внешности окружностей (всевозможных радиусов) с центром в начале координат: на сфере Римана (при стереографической проекции) им соответствуют окрестности ее “северного полюса” — сферические сегменты между “северным полюсом” сферы $\mathbb{S}$ и ее “параллелями” (как на рис. 7).

В соответствии с этим определением

а) элемент ∞ является *граничной* точкой плоскости $\mathbb{C}$ (других *граничных* точек у нее нет) и *внутренней* точкой плоскости $\mathbb{C}^*$ (как и сфера $\mathbb{S}$, она не имеет *граничных* точек, т. е. является *замкнутой*);

б) $\{z_n\} \rightarrow \infty \iff \{z_n^*\} \rightarrow p \iff \{|z_n|\} \rightarrow +\infty$.

Сфера Римана позволяет уяснить взаимосвязь элемента $\infty \in \mathbb{C}^*$ и элементов $+\infty$ и $-\infty$ *расширенной системы действительных чисел* (а заодно и философских понятий *актуальной* и *потенциальной бесконечностей*). ∞ есть символ *актуальной бесконечности* (с ее зримым образом на сфере); элементы же $\pm \infty$ соответствуют двум *способам стремления к бесконечности*¹; а именно: вдоль *действительной оси* плоскости $\mathbb{C}$ в прямом и обратном ее направлении (чему на сфере $\mathbb{S}$ соответствуют два *диаметрально противоположных* ее “меридиана”, что хорошо видно на рис. 6); в этом же смысле — как два других (из необозримого числа способов) *стремления к бесконечности* — следует понимать и употребление символов $\pm i\infty$.

¹ Т. е. являются выражениями *потенциальной бесконечности*.

Упражнения. 1. Решить уравнение $z^3 = \bar{z}$.

2. Изобразить на плоскости решения уравнений:

а) $|z-i| = |z+1|$; б) $\arg(z-i) = \arg(z+1)$; в) $|z-1| = \operatorname{Re}(z+1)$.

3. Пользуясь тем, что поворот осей плоскости $\mathbb{C}$ на угол α равносильно повороту вектора $x+iy$ на угол $-\alpha$, т.е. его умножению на $\cos(-\alpha) + i \sin(-\alpha)$, получить формулы перехода от “старых” координат точки $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ к “новым” $(\tilde{x}, \tilde{y})$:

$$\begin{cases} x = \tilde{x} \cos \alpha - \tilde{y} \sin \alpha \\ y = \tilde{x} \sin \alpha + \tilde{y} \cos \alpha \end{cases}$$

4. Для фиксированного комплексного числа z пусть $z_1 = \frac{z+|z|}{2}$ и $z_{n+1} = \frac{z_n+|z_n|}{2}$, $n = 1, 2, \dots$. Найти $\lim z_n$.

5. Проверить, что при стереографической проекции

а) точке $z \in \mathbb{C}$ отвечает точка $z^* \left(\frac{\operatorname{Re} z}{1+|z|^2}, \frac{\operatorname{Im} z}{1+|z|^2}, \frac{|z|^2}{1+|z|^2} \right) \in \mathbb{S}$;

б) расстояния между точками $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ и их “сферическими образами” $z_1^*, z_2^* \in \mathbb{S}$ связаны соотношением $|z_1^* - z_2^*| = \frac{|z_1 - z_2|}{\sqrt{1+|z_1|^2} \sqrt{1+|z_2|^2}}$; вывести отсюда эквивалентность условий $\{z_n\} \rightarrow z_0$ ($z_n, z_0 \in \mathbb{C}$) и $\{z_n^*\} \rightarrow z_0^*$.

в) окружности и прямые плоскости $\mathbb{C}$ переходят в окружности на сфере $\mathbb{S}$, соответственно не проходящие через ее “северный полюс” p и проходящие через него (и в этом случае считающиеся разомкнутыми в нем).

6. Найти соотношение между точками $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, при котором их сферические образы $z_1^*, z_2^* \in \mathbb{S}$ симметричны относительно центра сферы $\mathbb{S}$. (Ответ: $z_1 \bar{z}_2 = -1$.)

7. Получить матричное представление комплексных чисел: сопоставляя комплексному числу $z = x+iy$ кососимметрическую матрицу $Z = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}^1$, проверить, что сложению, вычитанию, умножению и делению комплексных чисел отвечают эти же операции с матрицами (если деление на матрицу понимать как умножение на обратную к ней).

¹ Вариант: $Z = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$.

II. КАК ОПЕРИРУЮТ СО СТЕПЕННЫМИ РЯДАМИ

Ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n$ (или $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n + \dots$), составленный из элементов последовательности $\{\alpha_n\} = \alpha_1, \alpha_2, \dots$ ¹, есть последовательность $\{s_n\}$ сумм

$s_1 \stackrel{\text{def}}{=} \alpha_1, s_2 \stackrel{\text{def}}{=} \alpha_1 + \alpha_2, \dots, s_n \stackrel{\text{def}}{=} \alpha_1 + \dots + \alpha_n, \dots$, называемых частичными суммами этого ряда.

Ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n$ называют сходящимся, если сходится² последовательность $\{s_n\} = \{\alpha_1 + \dots + \alpha_n\}$ его частичных сумм.

В частности, для числового ряда $\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n$ сходимость означает существование числа, являющегося пределом последовательности частичных сумм: $s = \lim s_n = \lim(\alpha_1 + \dots + \alpha_n)$. Это число принимают за сумму ряда, с использованием для нее того же обозначения, что для самого ряда: $s = \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n$. В случае расходимости последовательности частичных сумм ряд называют расходящимся (не имеющим суммы).

Добавление или отбрасывание нескольких начальных элементов ряда $\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n$ — переход к рядам $\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n$, $\sum_{n=2}^{+\infty} \alpha_n$ и т.п. — не влияет на сходимость ряда, изменяя лишь его сумму: $\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n = \alpha_0 + \alpha_1 + \sum_{n=2}^{+\infty} \alpha_n$.

Из критерия Коши сходимости числовой последовательности (I, с. 16) вытекает критерий Коши сходимости числового ряда: ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n$ сходится тогда и только тогда, когда

¹ Любой природы, но допускающих сложение друг с другом. В зависимости от природы элементов α_n различают числовые, функциональные, матричные и прочие ряды.

² В заранее оговоренном смысле.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n \forall k (n \geq n_0 \Rightarrow |\alpha_{n+1} + \dots + \alpha_{n+k}| < \varepsilon).^1$$

Данный критерий еще до Коши ([26], Чап. VI) установил чешский математик, теолог и философ Больцано²: он содержится в его работе 1817 г. с длинным, но весьма информативным названием “Чисто аналитическое доказательство теоремы, что между двумя значениями, дающими результаты с противоположными знаками, лежит по меньшей мере один действительный корень уравнения” (“Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, dass zwischen je zwey Werthen, die ein entgegengesetztes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege”; ее русский перевод дан в книге Э. Кольмана [9]). В этой же работе Больцано демонстрирует понимание *ряда* именно как *последовательности* его *частичных сумм*, впервые (опередив Коши) дает внятное определение *непрерывности* функции, устанавливает существование *точной верхней грани* у ограниченного сверху множества и, наконец, доказывает вынесенную в заголовок работы теорему (о *прохождении непрерывной функции через нуль*); эти, а также некоторые другие его достижения стали потом приписывать другим авторам.

Степенной ряд $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$ (с комплексными коэффициентами c_n и комплексной переменной z) есть *последовательность многочленов*

$c_0, c_0 + c_1 z, c_0 + c_1 z + c_2 z^2, \dots, c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots + c_n z^n, \dots$,
служащих частичными суммами данного ряда.

Сумма степенного ряда $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$, обозначаемая тем же символом

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n \rightarrow +\infty} (c_0 + c_1 z + \dots + c_n z^n),$$

есть *функция* переменной z , определенная на множестве сходимости этого ряда — тех значений $z \in \mathbb{C}$, для которых *предел* в правой части *существует* и является *конечным*.

¹ В частности, условие $\alpha_n \rightarrow 0$ необходимо для сходимости ряда.

² Bolzano, Bernard, 1781–1848 (по отцу был итальянец, жил в Праге).

Теорема Коши–Адамара.¹ Пусть число $r \in [0, +\infty]$ определено по коэффициентам степенного ряда $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$ формулой $\frac{1}{r} = \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|c_n|}$,² тогда при $|z| < r$ этот ряд сходится, причем абсолютно (т. е. сходится также и ряд $\sum_{n=0}^{+\infty} |c_n z^n|$), а при $|z| > r$ — расходится.

Доказательство. Если $|z| < r$, то взяв число ρ , промежуточное между $|z|$ и r , можно заключить: для всех достаточно больших n выполняется неравенство $\sqrt[n]{|c_n|} < 1/\rho$, а следовательно, $|c_n| |z|^n \leq (|z|/\rho)^n$. Так как ряд $\sum_{n=0}^{+\infty} (|z|/\rho)^n$ сходится, то (в силу критерия Коши) сходятся оба ряда $\sum_{n=0}^{+\infty} |c_n| |z|^n$ и $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$.

Если же $|z| > r$, то так как $\frac{1}{|z|} < \frac{1}{r} = \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|c_n|}$, для бесконечного числа номеров n будет выполняться неравенство $\frac{1}{|z|} < \sqrt[n]{|c_n|}$, или $|c_n| |z|^n > 1$, а потому ряд $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$ расходится. **Q.E.D.**³

¹ Французский математик Адамар (Hadamard, Jacques, 1865–1963) появился на свет позже содержащего эту теорему “Курса анализа” Коши [26] (Чар. IX, р. 286–287), но его имя в устоявшемся названии теоремы приятно разнообразит список утверждений, полученных Коши.

² Равенство $\alpha = \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n$ (α есть верхний предел последовательности действительных чисел $\{\alpha_n\}$) означает, что в любой окрестности точки α содержится бесконечно много элементов α_n , тогда как справа от этой окрестности их может быть лишь конечное число.

³ Q.E.D. — сокращение лат. *quod erat demonstrandum* (что требовалось доказать) — указатель завершения доказательства.

Ввиду теоремы Коши–Адамара неотрицательное (но, возможно, равное $+\infty$) число $r = \left(\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|c_n|} \right)^{-1}$ называют радиусом сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$, а множество $\{z \in \mathbb{C}: |z| < r\}$ — его кругом сходимости¹.

В некоторых случаях радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$ можно вычислять по более простой формуле².

Если существует $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} = r$ ($0 \leq r \leq +\infty$)³, то число r совпадает с радиусом сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$.

Доказательство. Если $|z| < r$, то взяв число ρ , промежуточное между $|z|$ и r , можно заключить: для всех n , больших некоторого n_0 , выполняется неравенство $\frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} > \rho$, а следовательно,

$$\frac{|c_{n_0}|}{|c_{n_0+1}|} \cdot \frac{|c_{n_0+1}|}{|c_{n_0+2}|} \cdots \frac{|c_{n-1}|}{|c_n|} > \rho^{n-n_0}, \text{ и поэтому } |c_{n_0}| \rho^{n_0} > |c_n| \rho^n.$$

Из последнего неравенства следует, что при $n > n_0$

$$|c_n| |z|^n = |c_n| \rho^n \left(|z|/\rho \right)^n \leq |c_{n_0}| \rho^{n_0} \left(|z|/\rho \right)^n,$$

а так как ряд $\sum_{n=n_0+1}^{+\infty} \left(|z|/\rho \right)^n$ сходится, то сходится и ряд $\sum_{n=n_0+1}^{+\infty} |c_n| |z|^n$, а вместе с ним исходный степенной ряд.

Если же $|z| > r$, то из того, что $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} = r$, следует, что для всех n , больших некоторого n_0 , выполняется неравенство $\frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} < |z|$, а следовательно,

$$\frac{|c_{n_0}|}{|c_{n_0+1}|} \cdot \frac{|c_{n_0+1}|}{|c_{n_0+2}|} \cdots \frac{|c_{n-1}|}{|c_n|} < |z|^{n-n_0}, \text{ и поэтому } |c_{n_0}| |z|^{n_0} < |c_n| |z|^n.$$

В силу последнего неравенства $c_n z^n \nrightarrow 0$, т. е. для ряда $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$ не выполнено необходимое условие его сходимости. **Q.E.D.**

¹ При $r=0$ этот “круг” *пуст*, а при $r=+\infty$ есть вся *плоскость* $\mathbb{C}$.

² Также приводимой Коши в [26] (Чар. IX, р. 286–287).

³ Этот *предел* не всегда существует, тогда как *верхний предел* последовательности $\{\sqrt[n]{|c_n|}\}$ существует всегда.

Определяющую роль в анализе на *комплексной* плоскости играют (кроме *степенных*) обобщенные степенные ряды

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n}(z-z_0)^{-n},$$

составленные, как следует из этой записи, из *двух* рядов, первый из которых *степенной* (по степеням $z-z_0$) с *кругом сходимости* $\{z \in \mathbb{C}: |z-z_0| < r\}$, $r = \left(\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|c_n|} \right)^{-1}$ (рис. 8, а), а второй *сводится к степенному* подстановкой $z-z_0 = \zeta^{-1}$, и для него роль “круга сходимости” выполняет множество $\{z \in \mathbb{C}: |z-z_0| > \rho\}$, $\rho = \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|c_{-n}|}$ (рис. 8, б).

Как следствие, для *обобщенных степенных рядов* имеет место следующий аналог теоремы Коши–Адамара¹

Обобщенный степенной ряд $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n$ сходится (абсолютно) в его кольце сходимости $\{z \in \mathbb{C}: \rho < |z-z_0| < r\}$, $\rho = \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|c_{-n}|}$, $r = \left(\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|c_n|} \right)^{-1}$ (рис. 8, в)², и расходится для всех z с $|z-z_0| < \rho$ или $|z-z_0| > r$.

Главным (после теоремы Коши–Адамара) утверждением о *степенных рядах* является следующее.

Теорема о производной суммы степенного ряда. В *круге сходимости* степенного ряда $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$ его сумма имеет производную, равную сумме степенного ряда $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n n z^{n-1}$, имеющего тот же *радиус сходимости*, что и исходный ряд.

¹ У Коши в [28], sér. I, t. VIII, p. 272 и sér. II, t. XIII, p. 439–440.

² Частными случаями этого “кольца” являются: а) *круг с изъятым центром* z_0 ; б) *внешность окружности*; в) *плоскость с изъятой точкой* z_0 ; при $r_1 \geq r_2$ это “кольцо” *пусто*.

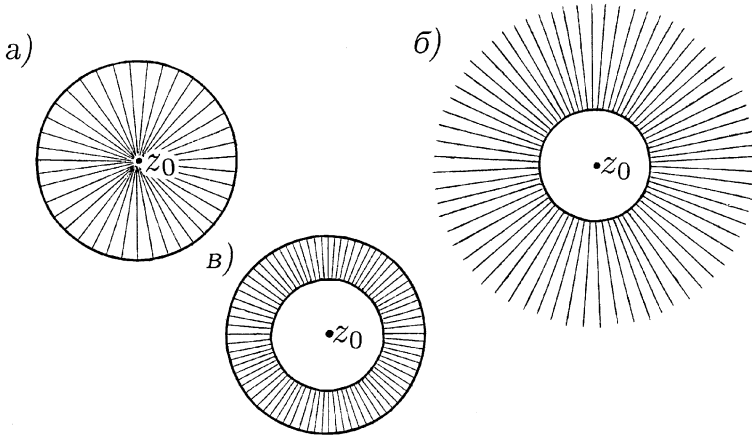


Рис. 8

Доказательство. Совпадение радиусов сходимости¹ степенных рядов $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n z^n$ и $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n n z^{n-1}$ есть следствие того, что второй из них сходится или расходится вместе со степенным рядом $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n n z^n$, а последовательности $\{\sqrt[n]{|c_n|}\}$ и $\{\sqrt[n]{|nc_n|}\}$ имеют одни и те же предельные точки.

Если α — предельная точка первой из них, т.е. предел некоторой ее подпоследовательности $\left\{|c_{n_j}|^{\frac{1}{n_j}}\right\}$, то (так как $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^{\frac{1}{n}} = 1$) $\lim |n_j c_{n_j}|^{\frac{1}{n_j}} = \lim |c_{n_j}|^{\frac{1}{n_j}} = \alpha$, т.е. α является предельной точкой и второй последовательности. Наоборот, если β — предельная точка второй последовательности, т.е. предел некоторой ее подпоследовательности $\left\{|n_k c_{n_k}|^{\frac{1}{n_k}}\right\}$, то $\lim |c_{n_k}|^{\frac{1}{n_k}} = \lim \left(n_k^{-\frac{1}{n_k}} |n_k c_{n_k}|^{\frac{1}{n_k}}\right) = \beta$, т.е. β является предельной точкой первой последовательности.

¹ Лишь эту часть теоремы счел необходимым доказывать Коши в [28], sér. II, t. XIII, p. 441–442.

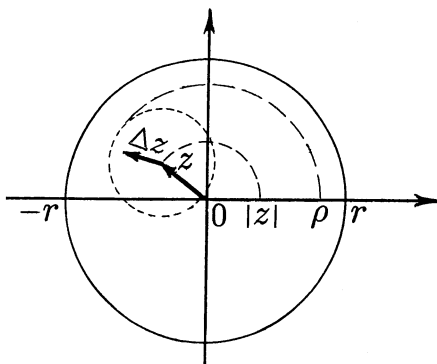


Рис. 9

Пусть r — радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$ и z — любая точка его круга сходимости, т. е. $|z| < r$. Если ρ — любое положительное число, промежуточное между $|z|$ и r , то для любого ненулевого “вектора приращения” Δz , для которого $|\Delta z| < \rho - |z|$, точка $z + \Delta z$ тоже принадлежит кругу сходимости этого степенного ряда: $|z + \Delta z| < r$ (рис. 9). С учетом тождества

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})^1,$$

если в нем взять $a = z + \Delta z$, $b = z$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta z} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z + \Delta z)^n - \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n \right) &= \frac{1}{\Delta z} \sum_{n=1}^{+\infty} c_n [(z + \Delta z)^n - z^n] = \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} c_n [(z + \Delta z)^{n-1} + (z + \Delta z)^{n-2}z + \dots + (z + \Delta z)z^{n-2} + z^{n-1}]. \end{aligned}$$

Так как оба числа $|z|$ и $|z + \Delta z|$ меньше ρ , а слагаемых в квадратной скобке ровно n , модуль общего слагаемого ряда

¹ Напрямую проверяемого раскрытием скобок и называемого при $n=2$ формулой разности квадратов, а при $n=3$ — разности кубов.

в правой части равенства не превосходит соответствующего слагаемого *сходящегося* ряда $\sum_{n=1}^{+\infty} |c_n| n \rho^{n-1}$.

Следовательно, каково бы ни было *положительное* число $\varepsilon > 0$, существует такое *натуральное* число n_0 , что

$$\left| \sum_{n=n_0}^{+\infty} c_n [(z+\Delta z)^{n-1} + (z+\Delta z)^{n-2} z + \dots + (z+\Delta z) z^{n-2} + z^{n-1}] \right| \leq \sum_{n=n_0}^{+\infty} |c_n| n \rho^{n-1} < \varepsilon/3.$$

С другой стороны, так как

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta z} \sum_{n=1}^{n_0-1} c_n [(z+\Delta z)^n - z^n] = \sum_{n=1}^{n_0-1} c_n n z^{n-1},$$

существует такое *положительное* число δ , что

$$\left| \frac{1}{\Delta z} \left(\sum_{n=0}^{n_0-1} c_n (z+\Delta z)^n - \sum_{n=0}^{n_0-1} c_n z^n \right) - \sum_{n=1}^{n_0-1} c_n n z^{n-1} \right| < \varepsilon/3.$$

Соединение этих оценок дает: если $|\Delta z| < \min\{\rho, \delta\}$, то

$$\left| \frac{1}{\Delta z} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z+\Delta z)^n - \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n \right) - \sum_{n=1}^{+\infty} c_n n z^{n-1} \right| < \varepsilon/3 + \left| \frac{1}{\Delta z} \left(\sum_{n=n_0}^{+\infty} c_n (z+\Delta z)^n - \sum_{n=n_0}^{+\infty} c_n z^n \right) - \sum_{n=n_0}^{+\infty} c_n n z^{n-1} \right| < \varepsilon,$$

а это (в силу произвольности числа $\varepsilon > 0$) и означает, что

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta z} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z+\Delta z)^n - \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n n z^{n-1}. \quad \mathbf{Q.E.D.}$$

Так как *производная* суммы *степенного ряда* сама является суммой *степенного ряда* (с тем же *радиусом сходимости*), последовательное применение доказанной *теоремы* приводит к соотношениям

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n \right)^{(k)} = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} c_n n z^{n-1} \right)^{(k-1)} = \dots = \sum_{n=k}^{+\infty} c_n n(n-1)\dots(n-k+1) z^{n-k},$$

выполняющимися в общем *круге сходимости* этих рядов.

Следствие 1. Сумма степенного ряда $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$ (с ненулевым радиусом сходимости) имеет в круге сходимости этого ряда производную любого порядка, причем

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{+\infty} c_n n(n-1) \cdots (n-k+1) z^{n-k}, \quad k=0, 1, 2, \dots$$

Следствие 2. Степенной ряд с ненулевым радиусом сходимости является рядом Маклорена своей суммы, т. е.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n, \quad \text{где} \quad f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n.$$

Теорема о производной суммы степенного ряда и следствия из нее переносятся на степенные ряды $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n$ с заменой ряда Маклорена на ряд Тейлора¹ $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$.

Сложение и перемножение степенных рядов

Суммой двух степенных рядов $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ и $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$ называют степенной ряд $\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) z^n$ (радиус сходимости этого ряда не меньше минимального из радиусов сходимости слагаемых рядов, а его сумма равна сумме их сумм).

¹ Taylor, Brook (1685–1731) и Maclaurin, Colin (1698–1746) — английский и шотландский математики; первый опубликовал в 1715 г. в работе “Прямой и обратный метод приращений” (“Methodus incrementorum directa et inversa”) изобретенный им (в 1712 г.) ряд, получивший его имя (хотя к этому ряду до Тейлора приходили другие авторы); второй в монографии 1742 г. [38] (с. 610–611), признавая приоритет Тейлора, оперировал частным случаем этого ряда — по степеням независимой переменной, который стали называть рядом Маклорена; он же установил свойство этого ряда, представленное здесь как следствие 2.

Умножают степенной ряд на степенной ряд по тому же правилу, что и многочлены, т.е. раскрывая скобки и складывая коэффициенты при одинаковых степенях z :

$$(a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots)(b_0 + b_1z + b_2z^2 + \dots) = \\ = a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)z + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)z^2 + \dots;$$

согласно этому правилу при перемножении степенных рядов $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ и $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$ возникает степенной ряд $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$ с коэффициентами $c_n = a_0b_n + a_1b_{n-1} + \dots + a_nb_0$, $n = 0, 1, 2, \dots$

Теорема о перемножении степенных рядов. Если $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ и $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$ — степенные ряды с радиусами сходимости r_a и r_b , то при $|z| < \min\{r_a, r_b\}$

а) сходится (абсолютно) результат их перемножения $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$ ($c_n = a_0b_n + a_1b_{n-1} + \dots + a_nb_0$);

б) $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n \right)$, т.е. сумма произведения степенных рядов равна произведению их сумм.

Этот факт напрямую вытекает¹ из следующего утверждения для числовых рядов.

Теорема Коши о перемножении рядов ([26], p. 283).

Если ряды (комплексных чисел) $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ и $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ сходятся абсолютно, то произведение этих рядов — ряд $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n$ со слагаемыми $c_n = a_0b_n + a_1b_{n-1} + \dots + a_nb_0$ — имеет сумму, равную произведению сумм перемножаемых рядов.

Доказательство. Так как

¹ Путем замены a_n и b_n соответственно на $a_n z^n$ и $b_n z^n$.

$$\begin{aligned}
c_0 + c_1 + \dots + c_n &= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) + \dots + (a_0 b_n + \dots + a_n b_0) = \\
&= a_0 (b_0 + b_1 + \dots + b_n) + a_1 (b_0 + b_1 + \dots + b_{n-1}) + \dots + a_n b_0 = \\
&= (a_0 + a_1 + \dots + a_n) (b_0 + b_1 + \dots + b_n) - \\
&\quad - a_1 b_n - a_2 (b_{n-1} + b_n) - \dots - a_n (b_1 + \dots + b_n),
\end{aligned}$$

достаточно доказать, что для любого *положительного* числа ε существует такое *натуральное* число n_0 , что

$$|a_1| |b_n| + |a_2| (|b_{n-1}| + |b_n|) + \dots + |a_n| (|b_1| + \dots + |b_n|) < \varepsilon$$

для всех $n \geq n_0$. Имея это целью, предварительно можно утверждать: так как ряды $\sum_{j=1}^{+\infty} |a_j|$ и $\sum_{j=1}^{+\infty} |b_j|$ *сходятся*, существует

такое k , что $|b_{k+1}| + \dots + |b_n| < \varepsilon \left(2 \sum_{j=1}^{+\infty} |a_j| \right)^{-1}$ при $n > k$.

Это неравенство в сочетании с тем, что для достаточно больших n каждая из k величин $|a_{n-k+1}|, \dots, |a_n|$ оказывается *меньшей* числа $\varepsilon \left(2 \sum_{j=1}^{+\infty} |b_j| \right)^{-1}$, позволяет заключить:

$$\begin{aligned}
&|a_1| |b_n| + \dots + |a_{n-k}| (|b_{k+1}| + \dots + |b_n|) + \\
&\quad + |a_{n-k+1}| (|b_k| + \dots + |b_n|) + \dots + |a_n| (|b_1| + \dots + |b_n|) < \\
&< (|a_1| + \dots + |a_{n-k}|) \varepsilon \left(2 \sum_{j=1}^{+\infty} |a_j| \right)^{-1} + \varepsilon \left(2 \sum_{j=1}^{+\infty} |b_j| \right)^{-1} (|b_1| + \dots + |b_n|) < \varepsilon
\end{aligned}$$

(так что *разность* $(c_0 + \dots + c_n) - (a_0 + \dots + a_n)(b_0 + \dots + b_n)$ *стремится к нулю* при $n \rightarrow +\infty$). **Q.E.D.**

Степенные ряды используют как эффективный механизм *распространения функций действительной переменной на комплексную плоскость*.

Определение экспоненциальной функции

Так как *степенной ряд* $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots$ имеет *радиус сходимости* $r = +\infty$ (с. 28), его *сумма* $w(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$

есть *функция*, определенная на всей плоскости $\mathbb{C}$, при этом в силу теоремы о производной суммы степенного ряда (с. 29)

$$w'(z) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} \right)' = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = w(z), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Эта *функция* получила название экспоненциальной, или экспоненты¹, и обозначения $w(z) = \exp z$ и $w(z) = e^z$.

Ее можно рассматривать как *распространение* на комплексную плоскость *экспоненциальной функции* $y=e^x$ *действительной* переменной — путем перехода в ее *разложении Маклорена* $e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ от *действительной* переменной x к *комплексной* z . А именно, замена *степеней* x на *степени* z , не меняющая *радиуса сходимости* степенного ряда $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$, расширяет *область определения* его *суммы* с *действительной* *оси* до *комплексной плоскости*.

Сравнивая равенства $e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ ($x \in \mathbb{R}$) и $\exp z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ ($z \in \mathbb{C}$) и прибегая к образным сравнениям, можно сказать, что первое является *теоремой*, тогда как второе есть *определение*.²

Базовым свойством *экспоненциальной функции*, оправдывающим ее *обозначение* $w = e^z$ и само ее *название*, является основное тождество для экспоненты

$$(\exp z)(\exp \zeta) = \exp(z + \zeta), \quad z, \zeta \in \mathbb{C},$$

напрямую вытекающее из *теоремы Коши о перемножении рядов* (с. 34) и формулы *бинома Ньютона*:

¹ Лат. *expono* — *выставлять, показывать*.

² Впрочем, определение e^x как $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{1!} + \dots + \frac{x^n}{n!} \right)$ является наилучшим в отношении внятности и вывода свойств и для *действительных* x . Именно так определял e^x еще в XVIII в. португалец да Кунья (da Cunha, Joseph-Anastase, 1744–1787) в [29] (с. 142–146).

$$\begin{aligned}
(\exp z)(\exp \zeta) &= \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\zeta^n}{n!} \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!} \frac{\zeta^{n-k}}{(n-k)!} \right) = \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \left(\sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} z^k \zeta^{n-k} \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} (z + \zeta)^n = \exp(z + \zeta).
\end{aligned}$$

Именно с учетом этого *тождества*, полагая¹

$$e^z \stackrel{\text{def}}{=} \exp z \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad e \stackrel{\text{def}}{=} \exp 1 \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!},$$

приходят к привычному *правилу показателей*: $e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}$.

Точно так же определяют функции

$$\sin z \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots, \quad z \in \mathbb{C},$$

$$\cos z \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots, \quad z \in \mathbb{C},$$

с сохранением соотношений $\sin(-z) = -\sin z$, $\cos(-z) = \cos z$ и *формулами производных*

$$\begin{aligned}
\sin' z &= \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots \right)' = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots = \cos z, \\
\cos' z &= \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots \right)' = -z + \frac{z^3}{3!} - \frac{z^5}{5!} + \dots = -\sin z.
\end{aligned}$$

Фундаментальную роль в математике и ее приложениях играет *формула Эйлера* $e^{iz} = \cos z + i \sin z$, $z \in \mathbb{C}$, для вывода которой достаточно заметить, что

$$\begin{aligned}
e^z &= 1 + iz + \frac{i^2 z^2}{2!} + \frac{i^3 z^3}{3!} + \frac{i^4 z^4}{4!} + \frac{i^5 z^5}{5!} + \frac{i^6 z^6}{6!} + \frac{i^7 z^7}{7!} + \dots = \\
&= \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots \right) + i \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots \right).
\end{aligned}$$

¹ Обозначение e ввел в 1728 г. швейцарский (он же российский) математик Эйлер (Euler, Leonhard, 1707–1783), почти вся деятельность которого прошла в Петербурге, где он и похоронен; он же вычислил значение $e = 2,71828\,18284\,59045\,23536\,028\dots$ ([19], § 122, с. 120).

Формулу Эйлера можно представить и в виде¹

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

Гиперболические косинус и синус² определяют соотношениями

$$\operatorname{ch} z \stackrel{\text{def}}{=} \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{sh} z \stackrel{\text{def}}{=} \frac{e^z - e^{-z}}{2};$$

как следствие, для любого $z \in \mathbb{C}$ справедливы равенства

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} z &= 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^6}{6!} + \dots, \quad \operatorname{sh} z = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \frac{z^7}{7!} + \dots, \\ \operatorname{ch}' z &= \operatorname{sh} z, \quad \operatorname{sh}' z = \operatorname{ch} z, \quad \operatorname{ch}(-z) = \operatorname{ch} z, \quad \operatorname{sh}(-z) = -\operatorname{sh} z, \quad \operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1, \end{aligned}$$

последнее из которых лежит в основе *параметрического* представления *гиперболы* $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$: $\begin{cases} x = a \operatorname{ch} t \\ y = b \operatorname{sh} t \end{cases}, \quad -\infty < t < +\infty.$

Операция *перемножения* степенных рядов позволяет *возводить* их в *степень* и на основе этого производить с ними другие действия.

Теорема о подстановке степенного ряда в степенной ряд.³

Для любого степенного ряда $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n z^n$ (не содержащего нулевой степени z) определена операция его *подстановки* (вместо *переменной*) в любой степенной ряд $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n \zeta^n$, результат которой есть *степенной ряд*

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{+\infty} b_m \left(\sum_{n=1}^{+\infty} a_n z^n \right)^m &= b_0 + b_1 (a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots) + \\ &+ b_2 (a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots)^2 + \dots, \end{aligned}$$

имеющий

а) *ненулевой радиус сходимости*, если *ненулевыми* являются *радиусы сходимости* r_a и r_b степенных рядов $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n z^n$ и $\sum_{m=0}^{+\infty} b_m \zeta^m$;

б) *сумму*, совпадающую с результатом подстановки *суммы* первого степенного ряда в *сумму* второго (вместо *переменной*).

¹ В котором ее и получил первоначально Эйлер исходя из формулы Муавра ([19], §§ 132–138, с. 128–) 134.

² Введенные в 1757 г. итальянским математиком Риккати (Riccati, Vincenzo, 1707–1775). (“Уравнение Риккати” — это не он, а его отец, Иасоро Francesco Riccati, 1676–1754.)

³ У Коши в [28], sér. II, t. X, p. 177.

Доказательство. То, что $\sum_{m=0}^{+\infty} b_m \left(\sum_{n=1}^{+\infty} a_n z^n \right)^m$ (результат указанной подстановки ряда в ряд) является *степенным рядом*, вытекает из того, что в ходе *внешнего* суммирования (по m) коэффициент при z^k ($k = 0, 1, 2, \dots$) стабилизируется по достижению значения $m = k$, т. е. не зависит от слагаемых $b_m \left(\sum_{n=1}^{+\infty} a_n z^n \right)^m$ с $m > k$. (Если бы *подставляемый ряд* содержал *нулевую степень* z , то в ходе *внешнего* суммирования коэффициент при z^k изменялся бы с каждым новым слагаемым, и результат *подстановки* такого *ряда в ряд* был бы не определен.)

Сумма $a(z)$ степенного ряда $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n z^n$ определена и непрерывна (поскольку имеет *производную*) в круге $\{|z| < r_a\}$, при этом (так как $a(0) = 0$) существует число $\rho > 0$ со свойством: $|a(z)| < r_b$ для любого z с $|z| < \rho$, а следовательно, для каждого такого z определено значение суммы степенного ряда $\sum_{m=0}^{+\infty} b_m \left(\sum_{n=1}^{+\infty} a_n z^n \right)^m = \sum_{m=0}^{+\infty} b_m (a(z))^m$ **Q.E.D.**

Разделить степенной ряд $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ на степенной ряд $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$ значит найти представление $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n \right)$.

Теорема о делении степенных рядов.¹ Любой степенной ряд $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ делится на любой степенной ряд $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$ с $b_0 \neq 0$; результатом деления является степенной ряд $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$ с ненулевым радиусом сходимости, если отличны от нуля радиусы сходимости делимого и делителя.

Доказательство. Так как степенной ряд $1 + 0z + 0z^2 + \dots$ играет (при умножении рядов) роль единицы, достаточно разобрать случай, когда делимым является именно этот степенной ряд:

$$\frac{a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots}{b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \dots} = (a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots) \frac{1 + 0z + 0z^2 + \dots}{b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \dots}.$$

Кроме того, так как по предположению $b_0 \neq 0$, запись

¹ Есть у Эйлера в [19] (§ 63, с. 81–82), но без утверждения о сходимости ряда.

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n\right) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b_n}{b_0} z^n\right) \left(b_0 \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n\right),$$

позволяет считать при доказательстве, что $b_0 = 1$. В соответствии с правилом *умножения степенных рядов* выполнение соотношения

$$(1 + b_1 z + b_2 z^2 + b_3 z^3 + \dots)(c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \dots) = 1$$

(правую часть которого надлежит рассматривать как *степенной ряд* $1 + 0z + 0z^2 + \dots$) равносильно выполнению *системы равенств*

$$c_0 = 1, \quad c_1 + c_0 b_1 = 0, \quad c_2 + c_1 b_1 + c_0 b_2 = 0, \quad c_3 + c_2 b_1 + c_1 b_2 + c_0 b_3 = 0, \quad \dots,$$

из которой по известным $b_1, b_2, b_3, \dots$ последовательно находят неизвестные $c_0, c_1, c_2, c_3, \dots$. Это означает, что *степенной ряд*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right)^{-1} = \frac{1 + 0z + 0z^2 + \dots}{1 + b_1 z + b_2 z^2 + \dots}$$

существует и является *единственным*.

Пусть степенной ряд в знаменателе имеет *радиус сходимости* $r > 0$. Так как степенной ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n z^n$ имеет тот же *радиус сходимости* $r > 0$ и не содержит *нулевой* степени z , а степенной ряд $1 - \zeta + \zeta^2 - \zeta^3 + \dots$ *сходится* при $|\zeta| < 1$ к $(1 + \zeta)^{-1}$, можно применить теорему о *подстановке степенного ряда в степенной ряд*. А именно, если *степенной ряд* $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n z^n$ подставить (вместо ζ) в *тождество* $(1 + \zeta)(1 - \zeta + \zeta^2 - \zeta^3 + \dots) \equiv 1$ (выполняющееся при $|\zeta| < 1$), то результатом окажется *тождество*

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right) \left(1 - \left(\sum_{n=1}^{+\infty} b_n z^n\right) + \left(\sum_{n=1}^{+\infty} b_n z^n\right)^2 - \left(\sum_{n=1}^{+\infty} b_n z^n\right)^3 + \dots\right) \equiv 1$$

(справедливое для всех z с настолько малым $|z|$, что $\left|\sum_{n=1}^{+\infty} b_n z^n\right| < 1$), в котором *второй сомножитель* есть (в силу упомянутой теоремы) *степенной ряд* с *ненулевым* радиусом сходимости. Как следствие, этот *второй сомножитель*, т. е. *степенной ряд*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = 1 - \left(\sum_{n=1}^{+\infty} b_n z^n\right) + \left(\sum_{n=1}^{+\infty} b_n z^n\right)^2 - \left(\sum_{n=1}^{+\infty} b_n z^n\right)^3 + \dots,$$

и есть требуемый результат *деления* степенного ряда $1 + 0z + 0z^2 + \dots$

на степенной ряд $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n z^n$. **Q.E.D.**

Теорема Абеля.¹ Пусть числовой ряд $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n$ сходится. Тогда степенной ряд $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$ сходится при $|z| < 1$ и $\lim_{\substack{z \rightarrow 1 \\ |z| < 1}} \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n$ при условии, что отношение $\frac{|1-z|}{1-|z|}$ при $z \rightarrow 1$ остается ограниченным².

Доказательство. В силу теоремы Коши–Адамара ряд $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$ сходится при $|z| < 1$, так как по условию он сходится при $z = 1$.

Пусть $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = s$, а $s_n = c_0 + \dots + c_n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$). Если $|z| < 1$, то согласно теореме о перемножении степенных рядов (с. 34) справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-z} \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n &= (1 + z + z^2 + \dots)(c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots) = \\ &= c_0 + (c_0 + c_1)z + (c_0 + c_1 + c_2)z^2 + \dots = \sum_{n=0}^{+\infty} s_n z^n, \end{aligned}$$

а следовательно, $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = (1-z) \sum_{n=0}^{+\infty} s_n z^n$ при $|z| < 1$. Кроме того,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = s(1-z) \sum_{n=0}^{+\infty} z^n = (1-z) \sum_{n=0}^{+\infty} s z^n \text{ при } |z| < 1,$$

в силу чего при любом выборе натурального числа m

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n - \sum_{n=0}^{+\infty} c_n \right| &= \left| (1-z) \sum_{n=0}^{+\infty} s_n z^n - (1-z) \sum_{n=0}^{+\infty} s z^n \right| \leq \\ &\leq |1-z| \left| \sum_{n=0}^{m-1} (s_n - s) z^n \right| + |1-z| \left| \sum_{n=m}^{+\infty} (s_n - s) z^n \right|. \end{aligned}$$

Пусть ε — любое (сколь угодно малое) положительное число, а h — верхняя граница отношения $\frac{|1-z|}{1-|z|}$ при стремлении z к 1. Так как

¹ Для действительных значений переменной это теорема IV в статье норвежского математика Абеля (Abel, Niels Henrik, 1802–1829) в Journal für die reine und angew. Math., Bd. I, 1826 (S. 314, Lehrsatz IV).

² Т. е. z остается внутри некоторого угла с вершиной 1, вписанного в единичную окружность (в этом случае говорят, что z стремится к 1 некасательно к единичной окружности).

$\{s_n\} \rightarrow s$, существует такое *натуральное* число m , что при $n \geq m$ выполняется неравенство $|s_n - s| < \frac{\varepsilon}{2h}$, а следовательно,

$$|1 - z| \left| \sum_{n=m}^{+\infty} (s_n - s)z^n \right| < |1 - z| \frac{\varepsilon}{2h} \sum_{n=0}^{+\infty} |z|^n \leq |1 - z| \frac{\varepsilon}{2h} \frac{1}{1 - |z|} \leq \frac{\varepsilon}{2};$$

с другой стороны, в силу того что $\lim_{z \rightarrow 1} \left(|1 - z| \left| \sum_{n=0}^{m-1} (s_n - s)z^n \right| \right) = 0$,

$$|1 - z| \left| \sum_{n=0}^{m-1} (s_n - s)z^n \right| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ если } z \text{ достаточно близко к } 1.$$

Вывод: $\left| \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n - \sum_{n=0}^{+\infty} c_n \right| < \varepsilon$ для всех z , $|z| < 1$, достаточно

близких к 1 и удовлетворяющих условию $\frac{|1 - z|}{1 - |z|} \leq h$. **Q.E.D.**

Теорема Абеля лежит в основе метода суммирования по Абелю расходящихся рядов: если ряд $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n$ расходится, но при этом существует $\lim_{r \rightarrow 1-0} \sum_{n=0}^{+\infty} c_n r^n = s$, то говорят, что ряд $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n$ суммируем по Абелю к сумме s (в случае сходимости ряда результат его суммирования по Абелю совпадает по теореме Абеля с его суммой в обычном смысле).

Упражнения. 1. Как радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$ соотносится с радиусами сходимости следующих степенных рядов:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n^2 z^n, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^{2n}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^{n^2}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{c_n}{1 + |c_n|} z^n, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} (c_0 + \dots + c_n) z^n?$$

2. Переходя к переменным $\zeta = z - z_0$ и $\xi = (z - z_0)^{-1}$ показать, что в кольце сходимости обобщенного степенного ряда $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n$ его

сумма имеет производную $\left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n \right)' = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n c_n (z - z_0)^{n-1}$.

3. Найти: $(1 + z + z^2 + z^3 + \dots)^3$; $(1 + 2z + 3z^2 + 4z^3 + \dots)^{-1}$.

4. Доказать, что $\exp z \neq 0$ при любом $z \in \mathbb{C}$ и что $\exp \frac{m}{n} = \sqrt[n]{e^m}$ для любых натуральных m, n ($e \stackrel{\text{def}}{=} \exp 1$).

5. Найти суммы по Абелю рядов $\sum_{n=0}^{+\infty} e^{in}$, $\sum_{n=0}^{+\infty} \cos n$, $\sum_{n=0}^{+\infty} \sin n$, $\sum_{n=0}^{+\infty} 2^n$.

III. КАКИЕ ФУНКЦИИ НАЗЫВАЮТ ЭЛЕМЕНТАРНЫМИ И ПОЧЕМУ СРЕДИ НИХ ЕСТЬ МНОГОЗНАЧНЫЕ

Логарифмическая функция, или логарифм¹, $w = \operatorname{Ln} z$ комплексной переменной $z \neq 0$ определяется как функция,

обратная экспоненциальной: $w = \operatorname{Ln} z \xLeftrightarrow{\text{def}} z = e^w$.

Поскольку в записи $w = u + iv$ соотношение $z = e^w$ принимает (согласно формуле Эйлера) вид $z = e^u(\cos v + i \sin v)$, $e^u = |z|$, а следовательно, $u = \ln |z|$;²

$v = \arg z + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ (т.е. $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$).

Окончательно: для $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$,

$$\operatorname{Ln} z = \ln |z| + i \operatorname{Arg} z = \ln |z| + i(\arg z + 2\pi k), \quad k \in \mathbb{Z}$$

с обозначением $\operatorname{Arg} z$ множества $\{\arg z + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}\}$ всех значений аргумента комплексного числа $z \neq 0$.

Значение $\operatorname{Ln} 0$ не определено, поскольку (ввиду тождества $e^w e^{-w} = 1$) не существует комплексного числа w , для которого бы $e^w = 0$.

Подход Эйлера к определению логарифмической функции комплексной переменной иллюстрирует воспроизводимый здесь фрагмент его работы 1749 г. “Исследования по мнимым корням уравнений” ([31], р.134), разобраться в котором можно даже без знания французского языка.

¹ Греч. λόγος — пропорция; ἀριθμός — счет. Ln — значит логарифм Непера (Napier, или Naper, 1550–1617) — шотландского барона, придумавшего логарифмы (включая само это слово). Эйлер обозначал *нэперов логарифм* одной буквой l и называл его *гиперболическим* (на том основании, что $\ln x$ при $x > 0$ выражает площадь под гиперболой).

² Здесь $\ln |z|$ — обычный (действительный) логарифм положительного числа $|z|$.

PROBLEME 4

100. *Un nombre imaginaire quelconque étant proposé, trouver son logarithme hyperbolique.*

SOLUTION

Soit $a + b\sqrt{-1}$ la quantité imaginaire dont il faut chercher le logarithme, qui soit $= x + y\sqrt{-1}$, de sorte qu'il y ait

$$l(a + b\sqrt{-1}) = x + y\sqrt{-1}.$$

Prenant les différentiels, on aura

$$\frac{a da + b db}{aa + bb} + \frac{(adb - bda)\sqrt{-1}}{aa + bb} = dx + dy\sqrt{-1}.$$

Soit encore $\sqrt{aa + bb} = c$, et l'angle φ tel qu'il soit $\cos \varphi = \frac{a}{c}$ et $\sin \varphi = \frac{b}{c}$; et par l'intégration on trouvera

$$x = l\sqrt{aa + bb} = lc \quad \text{et} \quad y = \Lambda \tan \frac{b}{a} = \varphi.$$

Donc nous aurons

$$l(a + b\sqrt{-1}) = l\sqrt{aa + bb} + \sqrt{-1} \cdot \Lambda \cos \frac{a}{\sqrt{aa + bb}}$$

ou

$$l(a + b\sqrt{-1}) = l\sqrt{aa + bb} + \sqrt{-1} \cdot \Lambda \sin \frac{b}{\sqrt{aa + bb}}.$$

C. Q. F. T.

COROLLAIRE 1

101. Puisqu'il y a une infinité d'angles auxquels répond le même sinus $\frac{b}{\sqrt{aa + bb}}$ et cosinus $\frac{a}{\sqrt{aa + bb}}$, chaque nombre, tant réel qu'imaginaire, a une infinité des logarithmes, dont tous sont imaginaires à l'exception d'un seul, lorsque $b = 0$ et a un nombre positif.

COROLLAIRE 2

102. Si nous posons $\sqrt{aa + bb} = c$, et l'angle trouvé $= \varphi$, à cause de $a = c \cos \varphi$ et $b = c \sin \varphi$, il sera

$$lc(\cos \varphi + \sqrt{-1} \cdot \sin \varphi) = lc + \varphi\sqrt{-1};$$

Сопоставление $z \mapsto \operatorname{Ln} z$ определяет поэтому *многозначную функцию*¹ на множестве $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, соотносящую каждому *ненулевому* комплексному числу z *бесконечное множество* $\operatorname{Ln} z$ значений его *логарифма*² с обозначением $\ln z$ какого-то *одного* из этих значений.

Формульно связь *логарифмической* и *экспоненциальной* функций *комплексной* переменной выражают равенства:

$$\boxed{\exp(\ln z) = z} \text{ для любого ненулевого } z \in \mathbb{C}$$

$$\boxed{\operatorname{Ln}(\exp w) = w + i2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}}^3 \text{ для любого } w \in \mathbb{C}$$

$$\boxed{\ln(\exp w) = w + i2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}}^4 \text{ для любого } w \in \mathbb{C}.$$

В записи $w = u + iv$ *многозначная функция* $w = \operatorname{Ln} z$ представляет собой линейную комбинацию двух *действительных* функций: $u = \ln |z|$ (*однозначной*) и $v = \operatorname{Arg} z$ (*многозначной*). *Многозначность логарифма* поэтому *напрямую* связана с *многозначностью аргумента*.

Запись символов $\operatorname{Arg} z$, $\operatorname{Ln} z$ (и других *многозначных функций*) с *заглавной* буквы служит указующим признаком их *многозначности*. Запись же $\arg z$ и $\ln z$ подразумевает при этом выбор из *множеств* $\operatorname{Arg} z$ и $\operatorname{Ln} z$ *всех* значений *аргумента* и *логарифма* переменной z каких-то их *конкретных* значений. Так как $\operatorname{Ln} z = \ln |z| + i \operatorname{Arg} z$, выбор значения $\arg z \in \operatorname{Arg} z$ одновременно определяет соответствующее значение $\ln z = \ln |z| + i \arg z \in \operatorname{Ln} z$.

¹ В определении Эйлера ([19], § 9, с. 33) “многозначная функция та, которая при подстановке вместо переменного одного какого угодно определенного значения получает несколько определенных значений”.

² Запись $W = \operatorname{Ln} z$ (вместо $w = \operatorname{Ln} z$) была бы в этом смысле более уместна, однако она не получила распространения.

³ Правильнее $\operatorname{Ln}(\exp w) = \{w + i2\pi k : k \in \mathbb{Z}\}$ (это *множество* комплексных чисел).

⁴ В этом равенстве (в отличие от предыдущего) k есть *конкретное* целое число, зависящее от выбора значения $\ln(\exp w) \in \operatorname{Ln}(\exp w)$.

С учетом этого соглашения из правила *перемножения* комплексных чисел (I, с. 5) вытекает выполнение для *ненулевых* $z, \zeta \in \mathbb{C}$ соотношения $\text{Arg}(z\zeta) = \text{Arg } z + \text{Arg } \zeta$ ¹; напротив, *числовое* равенство $\arg(z\zeta) = \arg z + \arg \zeta$ справедливо лишь *с точностью до слагаемого*, кратного 2π . Как следствие, справедливы соотношения $\text{Ln}(z\zeta) = \text{Ln } z + \text{Ln } \zeta$ (в смысле *совпадения множеств*) и $\ln(z\zeta) = \ln z + \ln \zeta$ (плюс *слагаемое*, кратное $2\pi i$).

В качестве иллюстрации можно отметить, что $2\text{Ln } z \subset \text{Ln } z^2$, однако $2\text{Ln } z \neq \text{Ln } z^2$. Это вытекает из того, что элементами *множества* $2\text{Ln } z$ являются *числа* $2\ln|z| + i(2\arg z + 4\pi k)$, $k \in \mathbb{Z}$, в то время как *множество* $\text{Ln } z^2$ состоит из *чисел* $2\ln|z| + i(2\arg z + 2\pi k)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Наглядно представить действие *многозначной функции* $w = \text{Ln } z$ (а также *обратной* к ней функции $z = e^w$) можно на *двух* экземплярах *комплексной плоскости*: $\mathbb{C}_z$ *переменной* z и $\mathbb{C}_w$ *переменной* $w = u + iv$ (рис. 10). В частности:

а) *луч*, выходящий из *начала координат* под углом α к *действительной оси*² при отображении $w = \text{Ln } z$ переходит в бесконечный набор равноотстоящих горизонтальных *прямых* $v = \alpha + 2\pi k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, при *взаимно однозначном* соответствии между точками *луча* и каждой отдельно взятой *прямой*; *обратное* отображение $z = e^w$ все эти *прямые* переводит в указанный *луч*;

б) *угол* между двумя такими *лучами* (составленный из промежуточных *лучей*) при отображении $w = \text{Ln } z$ переходит в набор *параллельных полос* (*ширина* каждой равна *раствору угла*); *обратным* отображением $z = e^w$ каждая такая *полоса* (мыслимая составленной из *параллельных прямых*)

¹ Понимаемого как совпадение *множества* $\text{Arg}(z\zeta)$ *всех* значений *аргумента* числа $z\zeta$ и *множества* $\text{Arg } z + \text{Arg } \zeta$ *сумм* взятых по одному всевозможных значений *аргумента* числа z и *аргумента* числа ζ .

² Точки этого *луча* имеют вид $z = r(\cos \alpha + i \sin \alpha)$, $0 < r < +\infty$.

переводится (взаимно-однозначно) на указанный угол.

в) дугу окружности радиуса r с центром 0 , заключенную в этом угле, отображение $w = \operatorname{Ln} z$ переводит в промежутки прямой $u = \ln r$, попадающие в указанные полосы (при взаимно-однозначном соответствии между каждым из этих промежутков и указанной дугой).

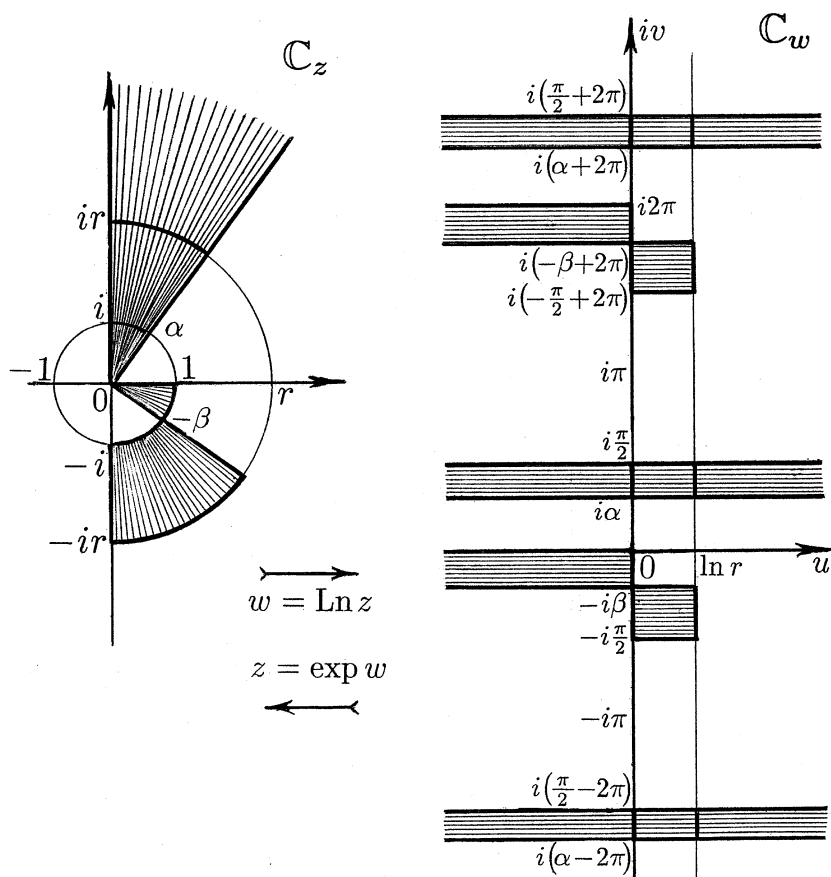


Рис. 10

Сочетание *стереографической проекцией* (I, с. 21) с *логарифмом (и комплексным сопряжением)* приводит к так называемой *проекции Меркатора*¹, по сей день лежащей в основе составления навигационных карт — *карт Меркатора*. Сетка меридианов и параллелей на таких картах является *прямоугольной и прямолинейной* (рис. 11).

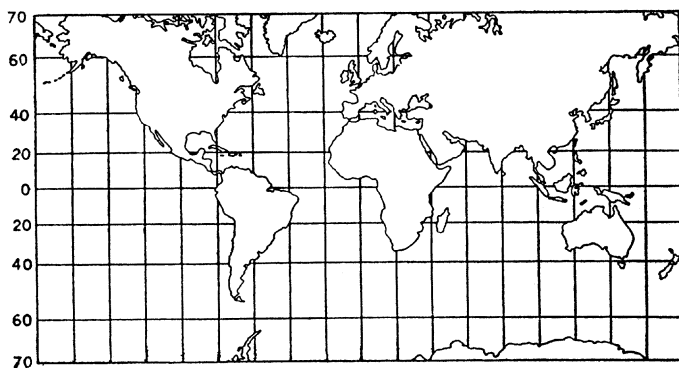


Рис. 11

Главное достоинство *карт Меркатора* — в простоте задач штурмана и рулевого: проложив на этой карте курс в виде *отрезка прямой* (пересекающего *меридианы* под *одним и тем же углом*), для выдерживания курса достаточно следовать с *постоянным румбом* — чтобы стрелка компаса оставалась в неизменном положении.

Движение при этом будет происходить *не по кратчайшей линии* на поверхности, но этот недостаток компенсируется крайней простотой управления². Куда бóльшим недостатком *карт Меркатора* является свойственное им нарастание искажений при приближении к полюсам, вследствие чего из них исключаются высокие широты (как на рис. 11).

¹ Mercator (наст. имя Kremer), Gerhard, 1512–1594, — фламандский картограф, опубликовавший в 1569 г. мореходную карту мира на основе этой проекции.

² Движение по *кратчайшей линии* — окружности большого круга (если Землю принимать за правильный шар) — требует постоянной корректировки румба.

Долгота λ и широта φ (стандартные обозначения) точки на поверхности Земли и декартовы координаты x, y ее изображения на карте Меркатора связаны уравнениями $x = \mu \rho \lambda$, $y = \mu \rho \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right)$, где ρ — радиус Земли, а μ — масштаб карты.

Построение проекции Меркатора как сочетания стереографической проекции и отображения $w = \mu \rho i \overline{\ln z}$ иллюстрирует рис. 12.

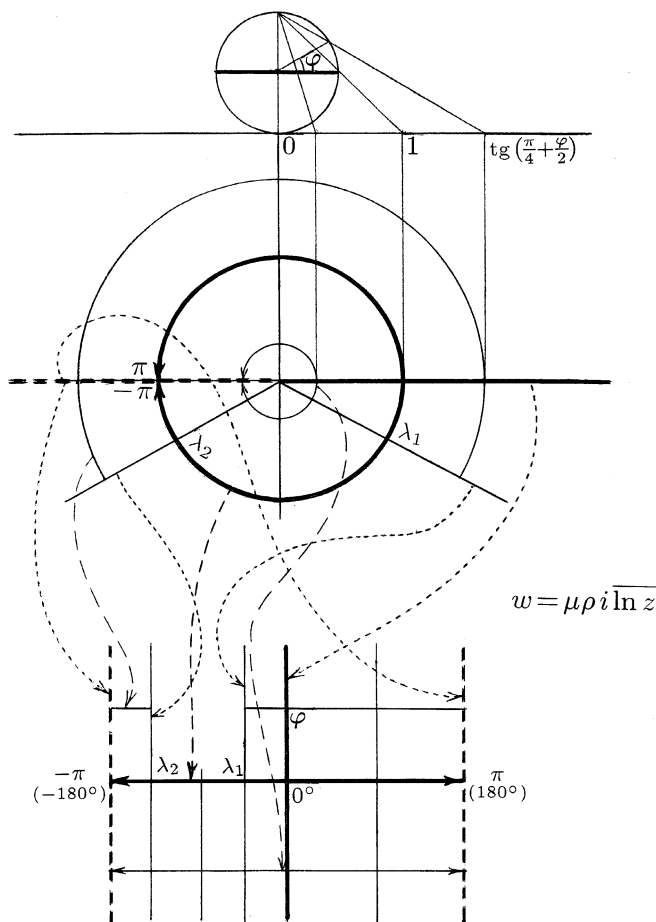


Рис. 12

Имея определения *экспоненты* и *логарифма*, можно дать общее определение *степени* z^ζ — с любым комплексным *показателем* ζ и при любом комплексном *основании* $z \neq 0$:

$$z^\zeta \stackrel{\text{def}}{=} \exp(\zeta \operatorname{Ln} z) = \exp(\zeta \ln |z| + i\zeta(\arg z + 2\pi k)), \quad k \in \mathbb{Z}^1$$

О том, сколько значений имеет z^ζ для различных z и ζ и насколько данное определение степени согласуется с обычным в случае *целого* показателя, обсуждается ниже (с. 54–56). Пока же следует отметить, что даже для *действительных* значений $z = a$ и $\zeta = b$ с $a > 0$ (и $\arg a = 0$) только определение $a^b \stackrel{\text{def}}{=} \exp(b \ln a)$ вкуче с соотношениями $\exp(a+b) = (\exp a)(\exp b)$ (II, с. 36) и $\exp 0 = 1$ позволяет дать короткий и внятный вывод *основных свойств степени*:

$$\begin{aligned} a^{b+c} &= \exp((b+c) \ln a) = \exp(b \ln a) + \exp(c \ln a) = a^b + a^c; \\ (a^b)^c &= \exp(c \ln a^b) = \exp(c \ln \exp(b \ln a)) = \exp(cb \ln a) = a^{bc}; \\ a^{-b} &= \exp(-b \ln a) = \exp(-b \ln a) \frac{\exp(b \ln a)}{\exp(b \ln a)} = \frac{\exp 0}{\exp(b \ln a)} = \frac{1}{a^b}. \\ a^0 &= \exp(0 \ln a) = 1. \end{aligned}$$

Глядя на то, как аккуратно делает это на с. 142–146 своего учебника [29] уже упоминавшийся (II, с. 36) да Кунья, можно лишь поражаться, насколько этот португальский математик, живший в XVIII в. и преподававший в университете г. Коимбра, выигрывает в сравнении с нынешними вузовскими пропагандистами математических знаний. Большинство из них, дойдя в своих лекциях (или учебниках) до определения и свойств степени с *любым* показателем, либо отсылают за ними в среднюю школу (вариант: обходятся *без определения*, а свойства “вынимают из рукава”), либо выступают с программой: “*сначала определим степень числа с рациональным показателем, затем, установив ее свойства, перейдем к случаю любого показателя etc.*”, каковую программу тут же сворачивают или проваливают.

Многозначность логарифма — главная причина широкого распространения явления *многозначности* среди функ-

¹ Данное *общее определение степени* имеет единственное исключение: e^z *всегда* понимают именно как $\exp z \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$, а не как $\exp(z \operatorname{Ln} e) = \exp(z(1+i2\pi k)) = \exp z \exp(i2\pi k z)$, $k \in \mathbb{Z}$.

ций *комплексной* переменной, в частности, тех из них, которые принято называть *элементарными*.

*К элементарным функциям*¹ комплексной переменной относят² те и только те, формульные выражения которых (через переменную и константы) можно получить, комбинируя (в конечном числе) действия сложения, вычитания, умножения, деления, взятия экспоненты и логарифма.

Элементарными, к примеру, являются однозначные функции

$$\text{а) } w = z^3, \quad \text{б) } w = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right), \quad \text{в) } w = \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2},$$

а также *обратные* к ним, оказывающиеся *многозначными*:

а') $z = \sqrt[3]{w} = \exp \left(\frac{1}{3} \operatorname{Ln} w \right) = \exp \left(\frac{1}{3} (\ln w + i 2\pi k) \right) = \sqrt[3]{w} \left(\cos \frac{2\pi k}{3} + i \sin \frac{2\pi k}{3} \right)$
(понимать это следует в том смысле, что *все* значения $\sqrt[3]{w}$ являются результатами *умножения* какого-то *одного* из них, обозначаемого *тем же* символом $\sqrt[3]{w}$, на всевозможные корни 3-й степени из -1);

$$\begin{aligned} \text{б') } z &= w + \sqrt{w^2 - 1} = w + \exp \frac{1}{2} \operatorname{Ln} (w^2 - 1) = \\ &= w + \exp \left(\frac{1}{2} (\ln (w^2 - 1) + i 2\pi k) \right) = w + \sqrt{w^2 - 1} e^{i\pi k} = w \pm \sqrt{w^2 - 1} \end{aligned}$$

(в первом равенстве подразумеваются *все* значения $\sqrt{w^2 - 1}$, а в двух последних — какое-то *одно* из них);

$$\begin{aligned} \text{в') } z = \operatorname{Arccos} w &\stackrel{\text{def}}{\iff} w = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \iff e^{2iz} - 2we^{iz} + 1 = 0 \iff \\ &\iff e^{iz} = w + \sqrt{w^2 - 1} \iff z = -i \operatorname{Ln} (w + \sqrt{w^2 - 1}); \end{aligned}$$

в частности, для *действительных* значений $w = u \in [-1, 1]$ (рис. 13)

$$\begin{aligned} \operatorname{Arccos} w &= -i (\ln |w + \sqrt{w^2 - 1}| + i \operatorname{Arg} (w + \sqrt{w^2 - 1})) = \\ &= -i \ln |u \pm i \sqrt{1 - u^2}| + \operatorname{Arg} (u \pm i \sqrt{1 - u^2}) = \\ &= \pm \arccos u + 2\pi k, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \end{aligned}$$

где $\arccos u$ — обычный (“школьный”) арккосинус числа $u \in [-1, 1]$.

Для *элементарных* функций принята следующая дополнительная классификация.

¹ Имеются в виду *явно* заданные функции $w = f(z)$.

² Вслед за Коши ([28], sér. II, t. X, p. 19) и английским математиком Гárdи (точнее, Хárdи; Hardy, Godfrey Harold, 1877–1947; [2] с. 7).

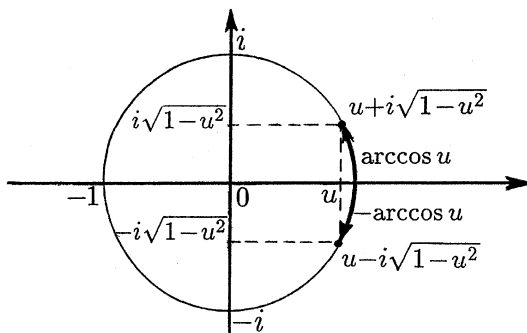


Рис. 13

Рациональными¹ функциями называют те, которые выражаются через переменную и константы конечным числом операций сложения, вычитания, умножения и деления. Любая рациональная функция представляет собой либо многочлен $w = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$ (с действительными или мнимыми коэффициентами) — это так называемые целые рациональные функции, либо отношение многочленов: $w = \frac{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n}{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \dots + b_m}$.

Примерами рациональных функций являются линейные $w = az + b$ и дробно-линейные $w = \frac{az+b}{cz+d}$ функции.

Алгебраическими² функциями (заданными явно) считаются те, которые можно выразить через переменную и

¹ Лат. ratio — счет, отношение, разум.

² Живший в VIII–IX вв. математик и астроном Мохаммед бен Муса аль-Хорезмӣ (т. е. из Хивы), приглашенный в числе других ученых в Багдад его правителем — сыном легендарного (“Тысяча и одна ночь”) Гарун аль-Рашида, написал руководство по решению уравнений, в названии которого — “Китаб аль-джабр валь мукабала” — “аль-джабр” обозначает операцию *устранения вычитаемого* путем его прибавления к обеим частям уравнения. Обогадив в результате мир термином “алгебра”, этот автор одарил его еще и словом “алгоритм”: *Algoarithmi* есть латинская транскрипция его имени аль-Хорезми.

константы конечным числом операций сложения, вычитания, умножения, деления и извлечения корней¹. В частности, любая рациональная функция является алгебраической.

Вообще алгебраическими функциями называют решения *в алгебраических уравнений*

$$p_0(z) w^k + p_1(z) w^{k-1} + \dots + p_{k-1}(z) w + p_k(z) = 0$$

(с многочленами в качестве коэффициентов). Запись левой части уравнения по степеням z показывает, что функция, обратная к алгебраической, сама является алгебраической.

Уравнениям, разрешимым в радикалах², соответствуют явные, т.е. представимые в виде $w = w(z)$, алгебраические функции, а неразрешимым (таковые есть среди уравнений, начиная с 5-й степени) — неявные. Вопрос о разрешимости в радикалах алгебраических уравнений стал отправной точкой так называемой теории Галуа³. Неявные алгебраические функции наравне с явными относят к элементарным.

Алгебраическим функциям (которые не являются рациональными) свойственна *многозначность*, при этом каждому значению *переменной* z может соответствовать лишь *конечное* множество значений w алгебраической функции.

Трансцендентными⁴ называют функции, не являющиеся алгебраическими. Простейшие среди элементарных трансцендентных функций — это экспонента и логарифм.

Доказательство *трансцендентности* (“неалгебраичности”) функций $w = e^z$ и $w = \ln z$ можно найти, например, в небольшой книжке Г. Гарди [2].

Важнейшими среди общих свойств перечисленных классов функций являются следующие:

¹ То, что извлечение корней не сводится к четырем основным действиям, вытекает из существования *иррациональных чисел*.

² Посредством комбинаций (в конечном числе) *четырёх основных действий и извлечения корней*.

³ Галуа́ (Galois, Evarist, 1811–1832) — темпераментный француз, в 20 лет убитый на дуэли, но успевший изменить ход развития *алгебры* и еще поизучать *интегралы* от алгебраических функций.

⁴ Лат. *transcendo* — выходить за пределы.

а) *производная* функции, являющейся *элементарной* (соответственно, *рациональной*, *алгебраической*), всегда есть функция *элементарная* (соответственно, *рациональная*, *алгебраическая*);

б) *первообразная* по отношению к *рациональной* функции всегда есть функция *элементарная*;

в) *первообразная* по отношению к *алгебраической* функции может быть как *элементарной*, так и *неэлементарной*;

г) *первообразная* по отношению к *элементарной трансцендентной* функции “как правило” не является *элементарной* функцией.

Доводами в пользу первых двух из этих утверждений служат общеизвестные правила *дифференцирования* и *интегрирования*. Обоснование утверждений в) и г) приведено в уже упоминавшейся книжке Г. Гарди [2].

Основные поставщики *неэлементарных* функций — *дифференциальные уравнения* и “*неберущиеся*” *интегралы*. Некоторые из *неэлементарных функций* имеют свои названия и объединены термином *специальные функции* (среди них наиболее на слуху: *интегральные синус* и *логарифм*, *интеграл вероятности*, *гамма-* и *бета-функции*, *функции Бесселя* и *Лежандра*).

Проиллюстрировать терминологию можно на примере *степенной функции* $w = z^a$ (с *комплексным* показателем a), определяемой (для *переменной* $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$) соотношением $z^a = \exp(a \operatorname{Ln} z)$ (с учетом *всех* значений *логарифма*).

1. Пусть показатель a есть *натуральное* число ($a = n$). Так как для любого *конкретного* значения $\operatorname{Ln} z \in \operatorname{Ln} z$

$$\begin{aligned} \exp(n \operatorname{Ln} z) &= \exp(\overbrace{\operatorname{Ln} z + \cdots + \operatorname{Ln} z}^n) = \\ &= \overbrace{(\exp(\operatorname{Ln} z)) \cdots (\exp(\operatorname{Ln} z))}^n = \overbrace{z \cdots z}^n = z^n, \end{aligned}$$

величина $z^n \stackrel{\text{def}}{=} \exp(n \operatorname{Ln} z)$ имеет *единственное* значение, совпадающее с обычным пониманием z^n как *произведения* n сомножителей, равных z . Таким образом, *степенная* функция $w = z^n$ с *натуральным* показателем n является *однозначной* и при этом *целой рациональной*.

2. Пусть a есть *целое отрицательное* число ($a = -n$). Каков бы ни был выбор *конкретного* значения $\ln z \in \text{Ln } z$,

$$z^a = \exp(-n \ln z) = \exp(-n \ln z) \frac{\exp(n \ln z)}{\exp(n \ln z)} = \frac{\exp 0}{\exp(n \ln z)} = \frac{1}{z^n}$$

(т. е. определение $z^{-n} = \exp(-n \ln z)$ согласуется с обычным, т. е. $z^{-n} = 1/z^n$), в силу чего *степенная* функция $w = z^{-n}$ (с *целым отрицательным* показателем) является *однозначной* и *рациональной* (но не *целой рациональной*).

3. Если a есть *рациональное* число ($a = \pm \frac{m}{n}$), то

$$\begin{aligned} (z^a)^n &= \exp(n \text{Ln } z^a) = \exp(n \text{Ln}[\exp(a \text{Ln } z)]) = \\ &= \exp(n(a \text{Ln } z + i2\pi k)) = \exp(\pm m \text{Ln } z) = z^{\pm m}, \end{aligned}$$

в силу чего *степенная* функция $w = z^a$ при $a = \pm \frac{m}{n}$ удовлетворяет уравнению $w^n - z^m = 0$ или $w^n z^m - 1 = 0$ и потому является *алгебраической*. Из соотношений же

$$\exp(a \text{Ln } z) = \exp(a(\ln z + i2\pi k)) = \exp(a \ln z) \exp \frac{\pm i2\pi k m}{n}$$

следует, что для получения *всех* значений $z^a = \exp(a \text{Ln } z)$

достаточно взять какое-либо *одно* из них $z^a = \exp(a \ln z)$ и

умножить его на *целые степени* числа $\cos \frac{2\pi m}{n} + i \sin \frac{2\pi m}{n}$.

Так как *различных* среди них (если дробь $\frac{m}{n}$ *несократима*) ровно n , *степенная* функция $w = z^a$ с *нецелым рациональным* показателем $a = \pm \frac{m}{n}$ является n -значной.

При $a = \frac{1}{n}$ набор n значений $z^{\frac{1}{n}} \stackrel{\text{def}}{=} \exp(\frac{1}{n} \text{Ln } z)$ совпадает с набором *всех корней n -й степени из z* , т. е. $z^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{z}$ для всех $z \neq 0$. Различие состоит в том, что запись $w = \sqrt[n]{z}$ (в отличие от $w = z^{\frac{1}{n}}$) допускает также подстановку *особых значений* $z = 0$ и $z = \infty$: $\sqrt[n]{0} = 0$, $\sqrt[n]{\infty} = \infty$.

4. Во всех прочих случаях, т. е. когда a есть *действительное иррациональное* или *мнимое* число, *степенная*

функция $w = z^a$ является *трансцендентной* и к тому же *бесконечнозначной*; последнее вытекает из соотношений

$$\begin{aligned} z^a &= \exp(a \operatorname{Ln} z) = \exp(a(\ln z + i2\pi k)) = \\ &= \exp(a \ln z) \exp(i2\pi k a), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \end{aligned}$$

с учетом того, что *все* числа

$$\exp(i2\pi k a), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

оказываются *различными*.

Если a — *действительное иррациональное* число, то для любых *целых* $k_1 \neq k_2$ число $(k_1 - k_2)a$ не является *целым*, а потому все *векторы* $\exp(i2\pi k a)$, $k \in \mathbb{Z}$, попарно образуют углы, *не кратные* 2π , т.е. имеют *разные направления*.

Если a — *мнимое* число ($\operatorname{Im} a \neq 0$), то в силу соотношений

$$|\exp(i2\pi k a)| = \exp(\operatorname{Re}(i2\pi k a)) = \exp((- \operatorname{Im} a)2\pi k)$$

все *векторы* $\exp(i2\pi k a)$, $k \in \mathbb{Z}$, имеют *разные длины*.

Отображения, осуществляемые простейшими *степенными функциями* $w = z^2$ и $w = z^{-1}$, проиллюстрированы на рис. 14. В частности:

а) *луч*, выходящий из начала координат под углом α (к действительной оси);

б) *дуга окружности* радиуса r с центром $z=0$;

в) *отрезки* (параллельные осям координат), соединяющие точку $z=1-i$ с точками $z=-i$ и $z=1$,

взаимно-однозначно переводятся функцией $w = z^2$ в

а') *луч*, выходящий из начала координат под углом 2α ;

б')¹ *дугу окружности* радиуса r^2 с центром $w=0$;

в') *отрезки парабол* $u = \frac{1}{4}v^2 - 1^2$ и $u = 1 - \frac{1}{4}v^2$,

¹ В предположении, что исходная *дуга* была раствором, меньшим π .

² Достаточно заметить, что точки $z = x - i$, $0 \leq x \leq 1$, переходят в точки $w = x^2 - 1 - i2x$, или (в записи $w = u + iv$)
$$\begin{cases} u = x^2 - 1, \\ v = -2x, \end{cases} \quad 0 \leq x \leq 1,$$
 что после исключения x дает $u = \frac{1}{4}v^2 - 1$, $-2 \leq v \leq 0$.

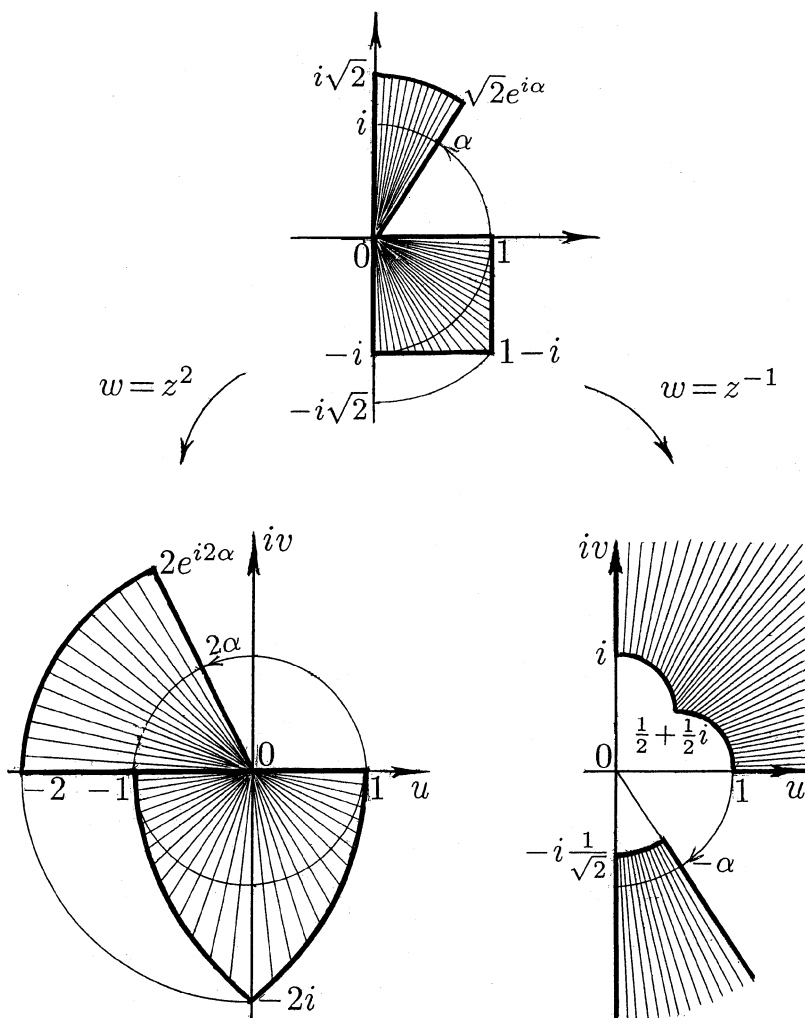


Рис. 14

а функцией $w = z^{-1}$ соответственно в

а") *луч*¹, выходящий из начала координат под углом $-\alpha$;

б") *дугу окружности* радиуса r^{-1} с центром $w=0$;

в") *дуги (точнее, четверти) окружностей* $u^2 + (v - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$ ²

и $(u - \frac{1}{2})^2 + v^2 = \frac{1}{4}$.

Упражнения. 1. Решить уравнение $(z+i)^n + (z-i)^n = 0$.

(Ответ: $z = \operatorname{ctg} \frac{\pi + 2\pi k}{n}$, $k = 0, 1, \dots, n-1$.)

2. Проверить, что $|\operatorname{tg} z| = \sqrt{\frac{\operatorname{ch} 2y - \cos 2x}{\operatorname{ch} 2y + \cos 2x}}$, $z = x + iy$.

3. Найти недостаток в выводе Эйлера (воспроизведенном на с. 44) формулы логарифма комплексного числа.

4. Доказать, что

а) $\operatorname{Arctg} z = \frac{1}{2i} \operatorname{Ln} \frac{1+iz}{1-iz}$, $z \neq \pm i$;

б) все значения $\operatorname{Arctg} z$ являются *действительными* числами в том и только в том случае, когда z — *действительное* число;

в) $\operatorname{Arctg} x = \frac{1}{2} \operatorname{Arg} \frac{1+ix}{1-ix}$ и $\operatorname{Arctg} x = \operatorname{arctg} x + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, для любого *действительного* x .

5. Найти образы *прямоугольника* с вершинами $\pm 1, \pm 1+i$ при отображении функциями: а) $w = z^2$, б) $w = z^{-1}$, в) $w = |z|$, г) $w = \operatorname{Arg} z$, д) $w = \sqrt{z}$.

6. Во что функция $w = z^2$ переводит *ветви гипербол* $x^2 - y^2 = \pm 1$ и $xy = \pm 1$, а *двузначная* функция $w = \sqrt{z}$ — *прямые* $\operatorname{Re} z = \pm 1$ и $\operatorname{Im} z = \pm 1$?

¹ Обходимый в направлении, *противоположном* обходу исходного *луча*.

² Достаточно заметить, что точки $z = x - i$, $0 \leq x \leq 1$, переходят в точки $w = \frac{1}{x-i}$, или (в записи $w = u + iv$)
$$\begin{cases} u = \frac{x}{x^2+1}, \\ v = \frac{1}{x^2+1}, \end{cases} \quad 0 \leq x \leq 1,$$
 из чего следует: $u^2 + v^2 = v$, или $u^2 + (v - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$, причем $0 \leq u \leq \frac{1}{2}$, а $\frac{1}{2} \leq v \leq 1$.

IV. ЧТО НАЗЫВАЮТ ОДНОЗНАЧНЫМИ ВЕТВЯМИ И ТОЧКАМИ ВЕТВЛЕНИЯ МНОГОЗНАЧНЫХ ФУНКЦИЙ

Многозначные функции $w = F(z)$ — это не функции в традиционном понимании, когда любому (допустимому) значению переменной z соответствует вполне определенное, единственное значение переменной w . В частности, привычно связываемые со словом “функция” понятия предела, непрерывности, производной, интеграла etc. к многозначным функциям напрямую не применимы.

Исходным при обращении с многозначными функциями $w = F(z)$ является поэтому вопрос: можно ли (и если да, то как) “подавить” присущую им *многозначность* — свести их к обычным, *однозначным*, функциям. Только решив этот вопрос, можно приступить к изучению *многозначных функций* методами *математического анализа*.

Геометрически наглядный способ “подавления” *многозначности* функций комплексной переменной предложил Риман в своей диссертации¹. Способ этот состоит в рассмотрении конкретной *многозначной функции $w = F(z)$* не на исходном множестве $E \subset \mathbb{C}$ ее задания, а на проецируемой на это множество “слоеной” конструкции — так называемой *римановой поверхности* данной *многозначной функции*. В общих чертах устроена она следующим образом:

1) над каждой точкой $z \in \mathbb{C}$ располагается ровно столько “слоев”, или “листов”², *поверхности*, сколько значений принимает *многозначная функция $w = F(z)$* в этой точке, и все эти значения распределяются по одному на каждую из *проецируемых в точку z точек поверхности*;

¹ “Основы общей теории функций одной комплексной переменной” (“Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Funktionen einer veränderlichen complexen Grösse”; Göttingen, 1851); [15], с. 49–87.

² Каждый из них представляет собой экземпляр *комплексной плоскости* или какой-то ее части.

2) способ соединения “листов” в “слоеную” конструкцию (*риманову поверхность*) и распределение по ее точкам значений $w \in F(z)$ *многозначной функции* должны быть такими, чтобы “непрерывным перемещением” по *поверхности* ее *переменная точка* могла быть переведена из любого начального положения в любое другое¹, и “бесконечно малому” перемещению точки по *поверхности* отвечало “бесконечно малое” изменение предписываемого этой точке значения $w \in F(z)$ *многозначной функции*².

В результате изначально *многозначная* (на *плоскости*) функция $w = F(z)$ оказывается *однозначной* и *непрерывной* на сконструированной *римановой поверхности*.

В простейшем (но весьма важном) случае *многозначной функции* $\varphi = \operatorname{Arg} z$ (а вместе с ней и $w = \operatorname{Ln} z$) соответствующую *риманову поверхность* можно представить как “шлейф”, оставляемый двумя экземплярами — $\mathcal{L}_+$ и $\mathcal{L}_-$ — *луча* вдоль *положительной* части *действительной* оси при вращении первого из них “против”, а второго “по ходу часовой стрелки” вокруг *начала координат* (рис. 15). Предполагается, что после каждого *полного оборота* “шлейф” от $\mathcal{L}_+$ идет “поверх”, а от $\mathcal{L}_-$ — “под” уже сформированной его частью, причем этот “шлейф” мыслится “разостланным” по плоскости и (несмотря на бесконечно возрастающее число слоев) имеющим *нулевую толщину*.

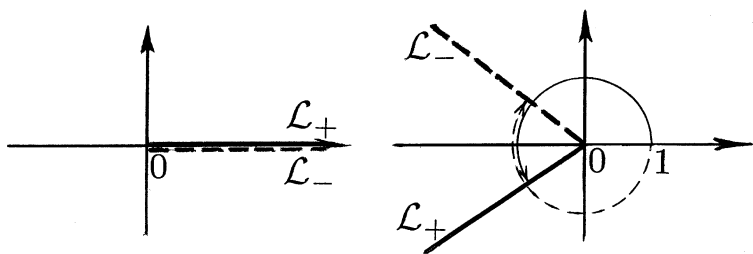


Рис. 15

¹ Т.е. конструкция из “листов” должна быть *связной*.

² *Функция* на *поверхности* должна быть *непрерывной*.

Каждой точке $z \neq 0$ плоскости $\mathbb{C}$ соответствует бесконечный набор (расположенных *над* и *под* ней) точек образуемой этим “шлейфом” *римановой поверхности*, значение же $\varphi = \text{Arg } z$ в каждой из них определяется как взятая со знаком (соответственно, $+$ для точек, лежащих *над* z и $-$ для лежащих *под* ней) *длина пути*, пройденного точкой 1 *луча* (соответственно, $\mathcal{L}_+$ или $\mathcal{L}_-$) до прохождения его через данную точку.¹

Для большинства *многозначных функций* $w = F(z)$ построение их *римановых поверхностей* оказывается более сложным и почти всегда лишь *виртуальным* — не осуществимым в *реальной* модели — даже для простейшей *двухзначной функции* $w = \sqrt{z}$ (XVIII, с. 299–300).

Построение *римановых поверхностей* дало импульс развитию как отдельной математической науки — *топологии*² (с ее различными специализациями), так и нового раздела анализа — *теории функций на римановых поверхностях*. С позиции же анализа на *комплексной плоскости* построение римановых поверхностей есть скорее развлечение нежели практический аппарат обращения с *многозначными функциями*: на первое место выступает не наглядная иллюстрация устройства их *многозначности*, а умение выделять их *однозначные ветви*.

Однозначной ветвью (или просто ветвью)³ *многозначной функции* $w = F(z)$ на множестве $E \subset \mathbb{C}$ называют любую *непрерывную* на этом множестве функцию $w = f(z)$, обладающую тем свойством, что $f(z) \in F(z)$ ⁴ для любого $z \in E$.

Если такая *непрерывная функция* $w = f(z)$, $z \in E$, существует, то говорят, что *многозначная функция* $w = F(z)$ допускает на множестве E выделение однозначной ветви.

Требование *непрерывности* однозначных ветвей $w = f(z)$ исходит из намерения *согласованного* выбора значений $f(z) \in F(z)$, сохраняющего существующую *зависимость* между *переменными*. *Разрывные* однозначные ветви, соответствующие *случайному* выбору по одному

¹ Соответствующим значением $w \in \text{Ln } z$ будет $w = \ln |z| + i\varphi$.

² Греч. τόπος — место, λόγος — слово, учение (первоначальное название *топологии* было *analysis situs*, т. е. *анализ расположения*).

³ Термин Римана ([15], с. 89; в немецком оригинале *Zweig*).

⁴ Т. е. $f(z)$ является каким-то одним из множества значений $F(z)$.

значению $f(z)$ в каждом *множестве* $F(z)$, не наследовали бы (или искажали) эту *зависимость*, тем более что *разрывные* функции плохо поддаются изучению методами *математического анализа*.

Точку $z_0 \in \mathbb{C}^*$, в окрестности которой¹ предполагается заданной *многозначная функция* $w = F(z)$, называют *точкой ветвления* (или *разветвления*)² этой *многозначной функции*, если не существует такой окрестности точки z_0 , в которой *многозначная функция* $w = F(z)$ допускала бы *выделение однозначной ветви*.

Примеры.³ 1. $w = (\sqrt[n]{z})^n$, $z \in \mathbb{C}$, — это обычная (однозначная) функция, так как $(\sqrt[n]{z})^n \equiv z$.

2. $w = \sqrt[n]{z^n}$, $z \in \mathbb{C}$, — это *многозначная функция*, сопоставляющая каждому комплексному числу $z \neq 0$ ровно n различных значений *корня n -й степени* из числа z^n (лишь $z = 0$ соответствует *единственное значение* $w = 0$). Поскольку набор этих значений совпадает с набором значений $z \cdot \sqrt[n]{1}$, их можно записать в виде

$$z, \quad z \cdot \left(\cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n} \right), \quad \dots, \quad z \cdot \left(\cos \frac{2\pi(n-1)}{n} + i \sin \frac{2\pi(n-1)}{n} \right),$$

из чего следует, что *многозначная функция* $w = \sqrt[n]{z^n}$ на *всем* множестве ее определения — *плоскости* $\mathbb{C}$ — распадается на n *непрерывных функций* (*однозначных ветвей*)

$$w = z \cdot \left(\cos \frac{2\pi k}{n} + i \sin \frac{2\pi k}{n} \right), \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Построение *римановой поверхности* для этой *многозначной функции* лишено практического смысла: это n экземпляров *плоскости* $\mathbb{C}$, “склеенных” в *начале координат*.

¹ Включая или не включая *точку* z_0 . Как уже отмечалось (I, с. 18), в *окрестность* точки на *комплексной плоскости* саму эту *точку* предпочтительнее не включать.

² В терминологии Римана ([15], с. 54, 89; в немецком оригинале Windungspunkt и Verzweigungsstelle).

³ В этих примерах n предполагается *целым* числом, *большим* 1.

3. $w = \sqrt[n]{z}$, $z \in \mathbb{C}$, — это *многозначная* функция: каждому числу $z \neq 0$ она сопоставляет ровно n *различных* значений *корня n -й степени из числа z* , причем весь набор этих значений можно представить в виде

$$\sqrt[n]{|z|} \left(\cos \frac{\arg z + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\arg z + 2\pi k}{n} \right), \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Отличие от предыдущего случая состоит в том, что данная *многозначная функция* на всем множестве ее определения (плоскости $\mathbb{C}$) *не допускает* расчленения на *непрерывные однозначные составляющие (однозначные ветви)*. Говоря иначе, *не существует непрерывной на плоскости $\mathbb{C}$ функции $w = f(z)$ со свойством: $(f(z))^n \equiv z$.*

Чтобы в этом убедиться, достаточно заметить, что для такой функции $w = f(z)$ в *каждой* точке $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$ выполнялось бы (при *некотором* $k = 0, 1, \dots, n-1$) соотношение

$$f(z) = \sqrt[n]{|z|} \left(\cos \frac{\arg z + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\arg z + 2\pi k}{n} \right),$$

причем условие *непрерывности* функции $w = f(z)$ требует, чтобы значение k было *одним и тем же* для *всех* значений $z \neq 0$. Если, однако, проследить за изменением величины $\arg z$ при *обходе* точки z *вокруг начала координат* (при котором эта величина изменяется на 2π), то придется сделать вывод: *по возвращении точки z в исходное положение значение $f(z)$ оказывается отличным от того, каким оно было до обхода, поскольку в результате обхода величина $\frac{\arg z + 2\pi k}{n}$ изменилась на $\frac{2\pi}{n}$. Непрерывность функции $w = f(z)$ вступает в противоречие с ее однозначностью.*

Сделанный вывод можно также выразить словами: 0 и ∞ *являются точками ветвления для многозначной функции $w = \sqrt[n]{z}$* . То, что других *точек ветвления* у нее *нет*, будет установлено ниже (с. 68).

Риманова поверхность этой *многозначной функции* является объектом *виртуальным* — не имеющим *реальной* модели. Ее можно пред-

ставить как “шлейф”, оставляемый *лучом*, выходящим из *начала координат* и вращающимся вокруг него “против хода часовой стрелки” в предположении, что после очередного *полного оборота* “шлейф” идет *поверх* уже сформированной его части; по завершению же n -го оборота *луч* возвращается в исходное положение, а “шлейф” соединяется со своим началом. Дополнительно это построение (для *двухзначной функции* $w = \sqrt{z}$ будет обсуждаться ниже (XVIII, с. 299–300).

Практически отыскание *однозначной ветви* $w = f(z)$ *многозначной функции* $w = F(z)$ — на том или ином *множестве* E допустимых значений переменной z — состоит в указании *способа*, как для *каждой* точки $z \in E$ выбрать из *совокупности* значений $F(z)$ *одно* такое, обозначаемое $f(z)$, чтобы возникающая *однозначная* функция $w = f(z)$ оказывалась бы *непрерывной* на *множестве* E .

Выделить *однозначные ветви* $w = f(z)$ *многозначной функции* $w = F(z)$ (разделить ее на *однозначные непрерывные* составляющие) на *всем* множестве, где она задана (как в примере 2 выше), удастся крайне редко. Обычно приходится довольствоваться *локальным* разделением: в *окрестностях* отдельно взятых точек. *Точки ветвления* многозначной функции — это именно те точки $z \in \mathbb{C}^*$ (*расширенной комплексной плоскости*), ни в какой *окрестности* которых осуществить такое *разделение* оказывается *невозможным*.

При всем разнообразии *многозначных функций комплексной переменной* нахождение их *однозначных ветвей* обычно сводится к выбору *однозначных ветвей аргумента* (как независимой переменной, так и результата промежуточных действий с ней). Во всяком случае это справедливо в отношении *элементарных функций* комплексной переменной, *многозначность* которых порождена исключительно *многозначностью логарифма* (III, с. 40), а выделять *однозначные ветви логарифма и аргумента* — одна и та же задача.

Где и как можно выделить однозначные ветви аргумента

Пусть $\text{Arg} z$ обозначает множество *всех* значений *аргумента* комплексного числа $z \neq 0$, а $\arg z$ — *одно* из этих значений¹: $\arg z \in \text{Arg} z$, $\text{Arg} z = \arg z + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Сопоставление $z \mapsto \text{Arg} z$ задает на множестве $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ *многозначную функцию* $\varphi = \text{Arg} z$, расчленив которую на *однозначные ветви* (*непрерывные однозначные функции*) $\varphi = \arg z$ на *всем* этом множестве невозможно.

Чтобы в этом убедиться, следует заметить, что если бы для каждой точки $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, значение $\arg z \in \text{Arg} z$ можно было выбрать так, чтобы (однозначная) *функция* $\varphi = \arg z$ оказывалась *непрерывной*, то сравнение величины $\arg z$ *до* и *после* обхода точки z вдоль *окружности* (любого радиуса) с центром в *начале координат* выявило бы следующее *противоречие*: по возвращению точки z в исходное положение величина $\arg z$ должна, с одной стороны, вернуться к тому значению, которое она имела *до* обхода, тогда как с другой — измениться на 2π (рис. 16, а).

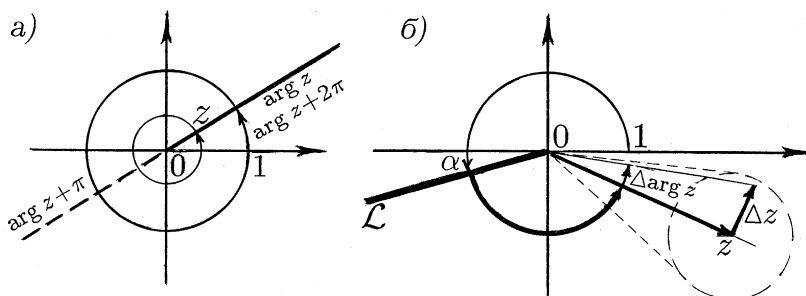


Рис. 16

¹ Можно (хотя не обязательно) считать, что это *главное значение аргумента*, выделяемое условиями $-\pi < \arg z \leq \pi$ или $0 \leq \arg z < 2\pi$.

Эти же рассуждения показывают, что *многозначная функция* $\varphi = \operatorname{Arg} z$ не имеет *однозначных ветвей* ни на каком *подмножестве* $E \subset \mathbb{C}$, допускающем обход точки z вокруг начала координат. В частности, этим свойством обладает любая *окрестность нуля* и любая *окрестность бесконечности*, а потому

|| 0 и ∞ являются для многозначной функции $\varphi = \operatorname{Arg} z$ точками ветвления.

То, что других точек ветвления у многозначной функции $\varphi = \operatorname{Arg} z$ нет, вытекает из следующего утверждения.

|| В плоскости $\mathbb{C}$ с “разрезом” по любому лучу¹ $\mathcal{L}$ с вершиной 0 можно выделить однозначную ветвь² $\varphi = \arg z$ многозначной функции $\varphi = \operatorname{Arg} z$. (Как следствие, однозначную ветвь $\varphi = \arg z$ можно выделить в окрестности любой точки $z_0 \in \mathbb{C}$, $z_0 \neq 0$).

Доказательство. Пусть луч “разреза” $\mathcal{L}$ выходит из точки 0 под углом α к действительной оси. Поскольку α есть (с точностью до слагаемого, кратного 2π) длина дуги единичной окружности³ от луча $[0, +\infty)$ до луча $\mathcal{L}$, достаточно для $z \in \mathbb{C}$, $z \notin \mathcal{L}$, положить $\arg z$ равным сложной с α длине дуги единичной окружности³ от луча $\mathcal{L}$ до луча через точку z (рис. 16, б). То, что функция $\varphi = \arg z$ оказывается непрерывной на множестве $\mathbb{C} \setminus \mathcal{L}$ (бесконечно малому приращению Δz точки $z \in \mathbb{C}$, $z \notin \mathcal{L}$, отвечает бесконечно малое приращение $\Delta \arg z$ ее аргумента), вытекает из неравенства $|\Delta \arg z| \leq \arcsin \frac{|\Delta z|}{|z|}$ (справедливого при $|\Delta z| \leq |z|$). **Q.E.D.**

¹ Т. е. в плоскости, из которой изъят этот луч (вместе с точкой 0).

² Точнее, бесконечно много однозначных ветвей, различающихся слагаемыми, кратными 2π .

³ Обходимой “против хода часовой стрелки”.

Выделить *однозначную ветвь* $\varphi = \arg z$ в *окрестности* произвольно взятой точки $z_0 \neq 0$ можно и в виде функции координат x, y . Это можно сделать либо разбором случаев нахождения точки в каждой из *полуплоскостей*, на которые делят плоскость $\mathbb{C}$ координатные оси:

$$\arg z = \arg(x+iy) = \begin{cases} \arctg \frac{y}{x} (+2\pi k), & \text{если } x > 0, \\ \operatorname{arccctg} \frac{x}{y} (+2\pi k), & \text{если } y > 0, \\ \arctg \frac{y}{x} \pm \pi (+2\pi k), & \text{если } x < 0,^1 \\ \operatorname{arccctg} \frac{x}{y} \pm \pi (+2\pi k), & \text{если } y < 0,^1 \end{cases}$$

либо, полагая α одним из значений $\arg z_0$, совершить *поворот* плоскости $\mathbb{C}$ на угол $-\alpha$, полагая $\tilde{z} = \tilde{x} + i\tilde{y} = ze^{-i\alpha} = (x+iy)(\cos \alpha - i \sin \alpha)$, и прийти к формуле

$$\arg z = \arctg \frac{\tilde{y}}{\tilde{x}} + \alpha = \arctg \frac{y \cos \alpha - x \sin \alpha}{x \cos \alpha + y \sin \alpha} + \alpha (+2\pi k),$$

справедливой в *полуплоскости* $\{z = x + iy : \operatorname{Re}(ze^{-i\alpha}) > 0\}$ (рис. 17).

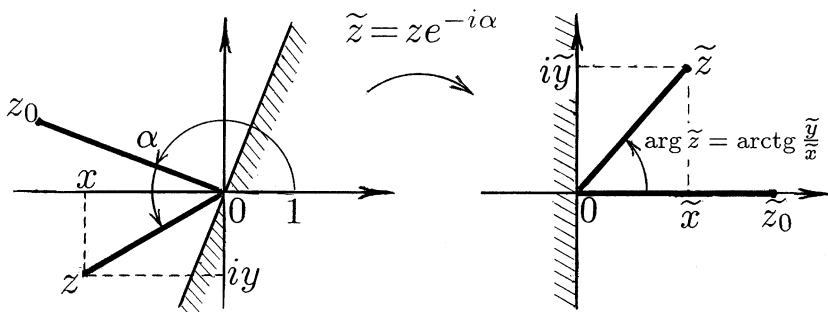


Рис. 17

Задача выделения *однозначных ветвей* $\varphi = \arg(z - z_0)$ *многозначной функции* $\varphi = \operatorname{Arg}(z - z_0)$ решается точно так

¹ Выбором знаков $\pm$ (перед π) достигается попарное *согласование значений* любых *трех* из четырех строк правой части в *пересечениях* полуплоскостей, что соответствует выделению *однозначной ветви* $\varphi = \arg z$ в плоскости $\mathbb{C}$ с “разрезом” вдоль одной из четырех координатных полуосей. Достичь попарного *согласования значений* всех *четырёх* строк *невозможно*, что отражает невозможность выделения однозначной ветви $\varphi = \arg z$ в плоскости $\mathbb{C}$ без “разреза”.

же, но уже в плоскости $\mathbb{C}$ с “разрезом” по *лучу* с вершиной z_0 (достаточно принять $z - z_0$ за *новую переменную*).

Внимание, уделяемое нахождению *однозначных ветвей аргумента*, объясняется тем, что на их основе могут быть выражены *однозначные ветви* большинства (если не всех) *многозначных функций* комплексной переменной.

К примеру, для *многозначных функций* $w = \text{Ln}(z - z_0)$ и $w = (z - z_0)^a$ (при *нецелом* a) *однозначные ветви* имеют соответственно вид

$$w = \ln(z - z_0) = \ln|z - z_0| + i \arg(z - z_0)$$

и

$$w = e^{a \ln(z - z_0)} = e^{a \ln|z - z_0|} e^{i a \arg(z - z_0)};$$

первые различаются *слагаемыми* $i 2\pi k$, а вторые — *множителями*¹ $e^{i a 2\pi k}$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$; каждая определена там, где можно выделить *однозначную ветвь* $\varphi = \arg(z - z_0)$ — например, в *плоскости* $\mathbb{C}$ с “разрезом” по *любому лучу* $\mathcal{L}$, *выходящему из точки* z_0 .

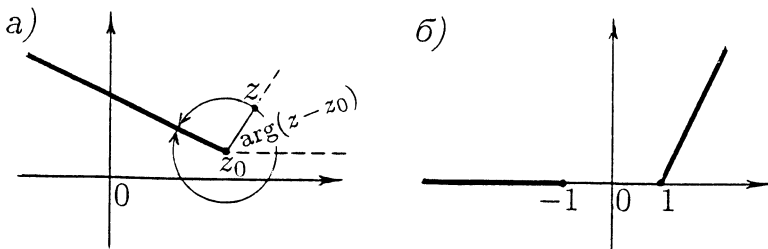


Рис. 18

¹ В случае *действительного рационального* показателя a среди них лишь *конечное* число *различных*, в случае же *иррационального* или *мнимого* — напротив, все они *различны* (III, с. 55–56).

В каждой же точке *луча* $\mathcal{L}$ эти (определенные в плоскости $\mathbb{C}$ с “разрезом” по этому *лучу*) *однозначные ветви* $w = \ln(z - z_0)$ и $w = e^{a \ln(z - z_0)}$ терпят *разрыв* — из-за различия (на 2π) *предельных значений* $\arg(z - z_0)$ по *разные стороны* от *луча* $\mathcal{L}$ (рис. 18, а). Кроме того, k -кратный *обход* точки z вокруг точки z_0 , *непрерывно* изменяя значение $\arg(z - z_0)$, придает ему *приращение* $2\pi k$, вследствие чего к *однозначным ветвям* $w = \ln(z - z_0) = \ln|z - z_0| + i \arg(z - z_0)$ и $w = e^{a \ln(z - z_0)} = e^{a \ln|z - z_0|} e^{i a \arg(z - z_0)}$ добавляется, соответственно, *слагаемое* $i 2\pi k$ и *множитель* $e^{i 2\pi k a}$: происходит то, что называют *ветвлением* — *непрерывный переход* к от одной *однозначной ветви* к другой.¹

Чуть более сложный пример — нахождение *однозначных ветвей* *двузначной функции* $w = z + \sqrt{z^2 - 1}$, *обратной* к $z = \frac{1}{2} \left(w + \frac{1}{w} \right)$.

Они заведомо определены и имеют вид $w = z + \sqrt{z - 1} \sqrt{z + 1}$ там, где определены *однозначные ветви* $w = \sqrt{z - 1}$ и $w = \sqrt{z + 1}$, в частности, в плоскости $\mathbb{C}$ с “разрезами” по (любым) двум *лучам*, выходящим из точек 1 и -1 (рис. 18, б).

Представление же *двузначной функции* $w = z + \sqrt{z^2 - 1}$ в виде $w = z + z \sqrt{1 - z^{-2}}$ позволяет выделить (две) ее *однозначные ветви* в плоскости $\mathbb{C}$ с “разрезом” по *отрезку* $[-1, 1]$. Достаточно заметить, что (так как $z \notin [-1, 1] \iff 1 - z^{-2} \notin (-\infty, 0]$) значениям z из *плоскости* $\mathbb{C}$ с “разрезом” по *отрезку* $[-1, 1]$ соответствуют значения $1 - z^{-2}$, принадлежащие *плоскости* $\mathbb{C}$ с “разрезом” по *лучу* $(-\infty, 0]$ (рис. 19), поэтому для них определены две (различающиеся знаком) *однозначные ветви* $w = \sqrt{1 - z^{-2}}$, а следовательно, и две *однозначные ветви* $w = z + z \sqrt{1 - z^{-2}}$. Как следствие, ∞ не является *точкой ветвления* для *двузначной функции* $w = z + \sqrt{z^2 - 1}$.

¹ Явление *ветвления* напоминает “незаметный” переход на “другую сторону” *листа Мёбиуса*. “Разрезанный” поперек (или рассматриваемый в *окрестности* любой из своих точек), он имеет *две стороны*. При “склеивании” же *листа Мёбиуса* разделение его “сторон” на две утрачивается: *непрерывным перемещением* можно с одной из них перейти на другую, не заметив при этом *момента перехода*.

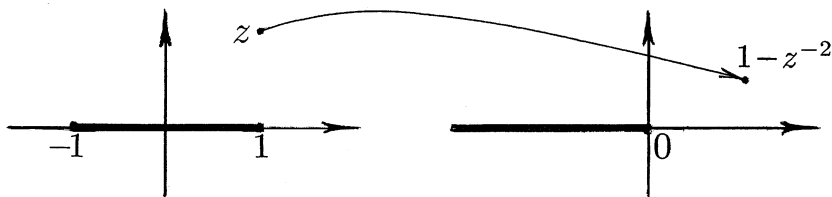


Рис. 19

Риманову поверхность этой *двузначной функции* можно представить как два экземпляра комплексной плоскости, “разрезанной” либо по любым двум непересекающимся лучам, выходящим из точек ± 1 (как на рис. 18, б), либо по отрезку $[-1, 1]$, причем эти два экземпляра (два “листа”) соединены “крест-накрест” противоположными “берегами” разрезом (что, разумеется, в реальной модели осуществить невозможно). Обе точки ± 1 являются *точками ветвления*: обход каждой из них сопровождается переходом с одного “листа” римановой поверхности на другой.

Упражнения. 1. Каким стало бы соотношение между функциями $w = e^z$ и $w = \exp z$ при понимании e^z в смысле *общего определения степени* (III, с. 50).

2. Объяснить, почему точки ± 1 являются *точками ветвления* для *двузначной функции* $w = z + \sqrt{z^2 - 1}$.

3. Проверить, что для *трехзначной функции* $w = \sqrt[3]{(z-1)(z-2)}$ *точками ветвления* являются 1, 2 и ∞ , а для *трехзначной функции* $w = \sqrt[3]{\frac{z-1}{z-2}}$ — только точки 1 и 2.

4. Найти *однозначные ветви* *многозначных функций* $w = \operatorname{Ln}(1-z)$ и $w = (z-1)^{\sqrt[3]{3}}$, выразив их через *однозначные ветви* $\varphi = \arg(z-1)$.

V. В ЧЕМ СУТЬ ПОНЯТИЯ ПРОИЗВОДНОЙ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Производная функции $w = f(z)$ комплексной переменной в точке $z \in \mathbb{C}$ — это (как и в случае действительной переменной) *число*

$$f'(z) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

(в предположении, что этот *предел* существует). Например:

$$a) \quad (z^2)' = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{(z+\Delta z)^2 - z^2}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{2z\Delta z + (\Delta z)^2}{\Delta z} = 2z;$$

б) $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n\right)' = \sum_{n=1}^{+\infty} n c_n z^{n-1}$ в любой точке *круга сходимости* данного *степенного ряда* (II, с. 29);

$$в) \quad (|z|^2)' = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{|z+\Delta z|^2 - |z|^2}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{(z+\Delta z)\overline{(z+\Delta z)} - z\bar{z}}{\Delta z} =$$

$$= \bar{z} + z \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z} = \begin{cases} 0, & \text{если } z=0, \\ \text{не существует,} & \text{если } z \neq 0. \end{cases}$$

Стандартным способом, как и в случае функций *действительной* переменной, выводятся формулы *производной суммы, разности, произведения и частного*:

$$\begin{aligned} (f(z) \pm g(z))' &= f'(z) \pm g'(z), \\ (f(z) g(z))' &= f'(z) g(z) + f(z) g'(z), \\ \left(\frac{f(z)}{g(z)}\right)' &= \frac{f'(z) g(z) - f(z) g'(z)}{g^2(z)}, \end{aligned}$$

а также *производной сложной функции*

$$(f(\varphi(z)))' = f'(\zeta) \varphi'(z), \quad \text{где } \zeta = \varphi(z).$$

Вот, к примеру, вывод последней:

$$f'(\zeta) = \lim_{\Delta \zeta \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta \zeta} \iff \Delta w = f'(\zeta) \Delta \zeta + o(|\Delta \zeta|), \quad \Delta \zeta \rightarrow 0;$$

$$\varphi'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta \zeta}{\Delta z} \iff \Delta \zeta = \varphi'(z) \Delta z + o(|\Delta z|), \quad \Delta z \rightarrow 0;$$

$$\begin{aligned} \Delta w &= f'(\zeta) [\varphi'(z) \Delta z + o(|\Delta z|)] + o(|\varphi'(z) \Delta z + o(|\Delta z|)|) = \\ &= f'(\zeta) \varphi'(z) \Delta z + f'(\zeta) o(|\Delta z|) + o(O(|\Delta z|)) = \\ &= f'(\zeta) \varphi'(z) \Delta z + o(|\Delta z|), \quad \Delta z \rightarrow 0, \iff \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = f'(\zeta) \varphi'(z). \end{aligned}$$

Например, вводя переменные $\zeta = z - z_0$, $\xi = (z - z_0)^{-1}$, можно установить факт существования и формулу производной суммы обобщенного степенного ряда:

$$\begin{aligned} \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n \right)'_z &= \left(\sum_{n=0}^{+\infty} c_n \zeta^n \right)'_{\zeta} \zeta'_z + \left(\sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n} \xi^n \right)'_{\xi} \xi'_z = \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} n c_n (z - z_0)^{n-1} + \sum_{n=-\infty}^{-1} n c_n (z - z_0)^{n-1} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n c_n (z - z_0)^{n-1} \end{aligned}$$

в точках его кольца сходимости $\{z \in \mathbb{C} : \rho < |z - z_0| < r\}$,

$$\text{где } \rho = \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|c_{-n}|}, \text{ а } r = \left(\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|c_n|} \right)^{-1} \quad (\text{II, стр. 29}).$$

Любая функция $w = f(z)$ комплексной переменной одновременно является функцией $w = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ двух действительных переменных. Предваряя выявление зависимости между производной $f'(z)$ и частными производными $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y}$, следует заметить:

а) существование производной $f'(z)$ в точке $z \in \mathbb{C}$ и дифференцируемость функции $w = f(z)$ в этой точке — это равносильные требования:

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = f'(z) \iff \Delta w = f'(z) \Delta z + o(|\Delta z|), \quad \Delta z \rightarrow 0;$$

б) существование частных производных $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ в точке $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ необходимо, но не достаточно для дифференцируемости функции $w = f(x + iy)$ в этой точке — представимости ее приращения $\Delta w = f((x + \Delta x) + i(y + i\Delta y)) - f(x + iy)$ в виде

$$\Delta w = \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y + o(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}), \quad \begin{cases} \Delta x \rightarrow 0; \\ \Delta y \rightarrow 0; \end{cases}$$

достаточным условием дифференцируемости является непрерывность частных производных (в данной точке).

Критерий существования производной. Для того чтобы функция комплексной переменной $w = f(z)$ имела производную $f'(z)$ в точке $z = x + iy \in \mathbb{C}$, необходимо и достаточно, чтобы она как функция двух действительных переменных $w = f(x + iy) = u(x, y) + i v(x, y)$ в точке $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

1) была дифференцируемой;

2) удовлетворяла уравнению (условию) Коши – Рíмана

$$\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad \text{или} \quad (\text{в эквивалентной записи}) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases};$$

производная функции по z связана с ее частными производными по x и y равенствами $f'(z) = \frac{\partial f}{\partial x} = -i \frac{\partial f}{\partial y}$.

Доказательство. Вектору приращения $\Delta z = \Delta x + i \Delta y \in \mathbb{C}$ соответствует вектор приращения $\{\Delta x, \Delta y\} \in \mathbb{R}^2$, при этом

$$|\Delta z| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \quad \text{и} \quad \Delta z \rightarrow 0 \iff \begin{cases} \Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0 \end{cases};$$

нижеследующие утверждения поэтому эквивалентны:

а) $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = f'(z);$

б) $\Delta w = f'(z) \Delta z + o(|\Delta z|), \quad \Delta z \rightarrow 0;$

в) $\Delta w = f'(z) \Delta x + f'(z) i \Delta y + o(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}), \quad \begin{cases} \Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0 \end{cases};$

г) функция $w = f(x + iy)$ действительных переменных x, y дифференцируема, причем $\frac{\partial f}{\partial x} = f'(z), \quad \frac{\partial f}{\partial y} = i f'(z)$. **Q.E.D.**

Условия (уравнения) Коши–Римана $\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$ исторически пра-

вильнее называть условиями д'Аламбера–Эйлера, поскольку впервые они появились на с. 61 книги д'Аламбера 1752 г. “Очерк новой теории сопротивления жидкостей”¹ (подробнее о гидромеханическом смысле этих условий чуть ниже, на с. 83–85), а в работе Эйлера 1777 г. [32] (на с. 2–3 и 269–271) впервые интерпретируются как условия существования *производной по комплексной* переменной (хотя и лишь в приложении к *непределенному интегрированию*).

В работах Коши эти условия встречаются по разным поводам ([28], sér. I, t. XI, p. 303; sér. II, t. I, p. 462; sér. II, t. II, p. 233), но особого внимания он им не уделяет. Напротив, у Римана (в записи их в виде *одного уравнения*) они лежат в основе его определения функции *комплексной* переменной: “Независимой переменной величине я неизменно даю в настоящее время уже общеизвестное, принадлежащее Гауссу, геометрическое истолкование, в силу которого комплексная величина $z = x + yi$ представляется точкой неограниченной плоскости с координатами x, y ; я буду одними и теми же буквами обозначать как сами комплексные величины, так и соответствующие им точки. Функцией от комплексной величины $z = x + yi$ я считаю всякую величину w , которая изменяется вместе с ней при соблюдении условия

$$i \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial y},$$

не зависимо от того, как выражается w через x и y .” ([15], с. 88).

Этому условию Риман дал такое толкование: оно выражает независимость отношения $\frac{dw}{dz} = \frac{\frac{\partial w}{\partial x}dx + \frac{\partial w}{\partial y}dy}{dx + i dy}$ от dz ([Ри], с. 50).

Другую запись *уравнения Коши–Римана* позволило дать введение в 1927 г. австрийским математиком Виртингером² *формальных частных производных* $\frac{\partial w}{\partial z}$ и $\frac{\partial w}{\partial \bar{z}}$ по переменным $z = x + iy$ и $\bar{z} = x - iy$. Так как $x = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$, а $y = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$, любая функция переменных x, y *формально* является функцией переменных $z, \bar{z}$, и (опять-таки *формально*)

¹ d'Alembert, Jean Le Rond (Saint-Jean-le Rond — парижская церковь, у которой его, незаконнорожденного младенца, оставила мать), 1717–1783 — французский математик, механик, философ. Обложка и разворот с. 60–61 его книги воспроизведены (уменьшенно) на с. 75.

² Wirtinger, Wilhelm, 1865–1945 (Math. Annalen, Bd. 97, 1927, S. 357).

E S S A I

D' U N E

NOUVELLE THEORIE

D E L A

RÉSISTANCE DES FLUIDES.

Par M. D'ALEMBERT, de l'Académie Royale des Sciences
de Paris, de celle de Prusse, & de la Société Royale de Londres.



A P A R I S,

Chez DAVID l'aîné, Libraire, rue S. Jacques, à la Plume d'or,

M D C C L I I.

AVEC APPROBATION ET PRIVILEGE DU ROI.

60. THEORIE DE LA RÉSISTANCE

SECTION III.

Méthode pour déterminer la vitesse du Fluide en un point quelconque.

57. Pour résoudre cette question, il ne s'agit que de déterminer les quantités p & q par le moyen des conditions qui ont été trouvées ci-dessus (art. 45) : or pour résoudre plus facilement ce Problème, je commencerai par le résoudre dans l'hypothèse suivante qui est plus simple, savoir que $dq = Mdx + Ndz$, & $dp = Ndx - Mdz$.

PROPOS. X. PROBLÈME.

58. Soient $Mdx + Ndz$ & $Ndx - Mdz$ des différentielles complètes, on propose de trouver les quantités M , & N .

Puisque $Mdx + Ndz$ est une différentielle complète, il s'ensuit que $Mdx + NV^{-1} \frac{dz}{\sqrt{-1}}$ sera aussi une différentielle complète : de même puisque $Ndx - Mdz$ est une différentielle complète, $NV^{-1}dx - Mdz\sqrt{-1}$, ou $NV^{-1}dx + \frac{Mdz}{\sqrt{-1}}$ le sera aussi ; donc la somme & la différence de ces deux quantités seront l'une & l'autre des différentielles complètes. Donc $(M + NV^{-1})(dx + \frac{dz}{\sqrt{-1}})$,

DES FLUIDES. 61

& $(M - NV^{-1})(dx - \frac{dz}{\sqrt{-1}})$ seront des différentielles complètes. Donc faisant $dx + \frac{dz}{\sqrt{-1}} = du$ ou $F + x + \frac{z}{\sqrt{-1}} = u$; $dx - \frac{dz}{\sqrt{-1}} = dt$ ou $G +$

$x - \frac{z}{\sqrt{-1}} = t$; $M + NV^{-1} = a$, & $M - NV^{-1} = c$, $a du$ & $c dt$ seront des différentielles complètes. Donc a est une fonction de u , c'est-à-dire $M + NV^{-1}$ une fonction de $F + x + \frac{z}{\sqrt{-1}}$, & c est une fonction de t , c'est-à-dire $M - NV^{-1}$ une fonction de $G + x - \frac{z}{\sqrt{-1}}$: d'où l'on tirera la valeur de M & N .

COROLLAIRE I.

59. On peut encore trouver M & N par la méthode suivante qui est un peu plus simple. Puisque $\frac{dp}{dx} = -\frac{dq}{dx}$ & $\frac{dp}{dx} = \frac{dq}{dx}$, donc $q dx + p dz$ & $p dx - q dz$ seront des différentielles complètes. Donc $q + pV^{-1} = \text{fonct.}$ $F + x + \frac{z}{\sqrt{-1}}$, & $q - pV^{-1} = \text{fonct.}$ $G + x - \frac{z}{\sqrt{-1}}$; donc $q = \text{fonct.}$ $F + x + \frac{z}{\sqrt{-1}}$ + fonct. $G + x - \frac{z}{\sqrt{-1}}$;

H iij

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right).$$

В итоге, условие Коши–Римана принимает вид $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$, и его *тождественное* выполнение можно истолковать как условие *независимости* функции от переменной $\bar{z}$; в этом случае $\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial x} = f'(z)$, т.е. *формальная частная производная* по z совпадает с *обычной*: $\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{df}{dz}$.

В этом смысле функциями *комплексной* переменной $z = x + iy$ следует считать только те функции *двух действительных* переменных x, y , которые после замены $x = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$, $y = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$ оказываются *не зависящими* от $\bar{z}$.

Разумеется, эти доводы не слишком основательны — хотя бы потому, что $\frac{\partial f}{\partial z}$ и $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$ не являются *частными производными* в общепринятом смысле: брать *производную* по одной из переменных $z, \bar{z}$ при *фиксированной* другой невозможно! Именно поэтому $\frac{\partial f}{\partial z}$ и $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$ — лишь *формальные частные производные* (называемые еще символами исчисления Вёртингера).

Примеры. 1. Функция $w = z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + i2xy$ в любой точке координатной плоскости имеет *непрерывные частные производные* $\frac{\partial w}{\partial x} = 2x + i2y$, $\frac{\partial w}{\partial y} = -2y + i2x$, удовлетворяющие уравнению Коши–Римана $\frac{\partial w}{\partial x} + i \frac{\partial w}{\partial y} = 0$. Поэтому в любой точке $z = x + iy \in \mathbb{C}$ существует *производная* $(z^2)' = \frac{\partial(x+iy)^2}{\partial x} = 2x + i2y = 2z$.

2. Функция *комплексной* переменной $w = |z|^2$, в записи $z = x + iy$ принимающая вид $w = x^2 + y^2$, имеет в любой точке координатной плоскости *непрерывные частные производные* $\frac{\partial w}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial w}{\partial y} = 2y$, для которых условие Коши–Римана выполняется лишь при $x = 0$ и $y = 0$. Это означает, что $(|z|^2)' = \begin{cases} 0, & \text{если } z = 0, \\ \text{не существует,} & \text{если } z \neq 0. \end{cases}$

3. Из записи *экспоненциальной* функции $w = e^z$ в виде $w = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$ следует, что ее *частные производные* $\frac{\partial w}{\partial x} = e^x(\cos y + i \sin y)$, $\frac{\partial w}{\partial y} = e^x(-\sin y + i \cos y)$ в любой

точке координатной плоскости *непрерывны* и удовлетворяют условию $\frac{\partial w}{\partial x} + i \frac{\partial w}{\partial y} = 0$. Поэтому в любой точке $z \in \mathbb{C}$ существует *производная* $(e^z)' = \frac{\partial w}{\partial x} = e^x(\cos y + i \sin y) = e^z$.

$$4. \text{ Функция } w = f(z) = f(x + iy) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \cdot y = 0, \\ 1, & \text{если } x \cdot y \neq 0, \end{cases}$$

имеет в *начале координат* частные производные по x и y , обе *равные нулю*, а следовательно, удовлетворяющие условию Коши–Римана. При этом *производная* (по z) $f'(0)$ не существует: в *начале координат* данная функция имеет *разрыв* и потому *дифференцируемой* не является.

В некоторых случаях более удобной оказывается следующая переформулировка критерия существования производной с заменой *декартовых* координат на *полярные*.

Функция комплексной переменной $w = f(z)$ имеет *производную* $f'(z)$ в *отличной от нуля* точке $z \in \mathbb{C}$ в том и только в том случае, когда в записи $w = f(r(\cos \varphi + i \sin \varphi))$ эта функция

1) *дифференцируема* по переменным $r = |z|$, $\varphi = \arg z$;

2) удовлетворяет условию Коши–Римана $\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{i}{r} \frac{\partial f}{\partial \varphi} = 0$;

производная по z связана с *частными производными* по r и φ равенствами $f'(z) = \frac{r}{z} \frac{\partial f}{\partial r} = -\frac{i}{z} \frac{\partial f}{\partial \varphi}$.

Достаточно проверить, что сформулированные условия эквивалентны условиям критерия существования производной (с. 73). Так как функции $x = r \cos \varphi$ и $y = r \sin \varphi$ *дифференцируемы* по r и φ в *каждой* точке координатной плоскости, а функции $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ и $\varphi = \arg z$ (IV, с. 67) *дифференцируемы* по x и y в *отличных от начала координат* точках этой плоскости, *дифференцируемость* по r , φ функции $w = f(r(\cos \varphi + i \sin \varphi))$ в любой *отличной от начала*

координат точке плоскости $\mathbb{R}^2$ равносильна ее дифференцируемости (в этой же точке, но уже по x и y) как функции $w = f(x+iy)$. Равносильность же записи условия Коши–Римана в декартовых и полярных координатах устанавливается заменой переменных:

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \varphi + \frac{\partial f}{\partial y} \sin \varphi, \quad \frac{\partial f}{\partial \varphi} = \frac{\partial f}{\partial x} (-r \sin \varphi) + \frac{\partial f}{\partial y} r \cos \varphi;$$

следовательно, $\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{i}{r} \frac{\partial f}{\partial \varphi} = 0 \iff \frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} = 0$, при этом

$$r \frac{\partial f}{\partial r} = r \left(\frac{\partial f}{\partial x} \cos \varphi + \frac{\partial f}{\partial y} \sin \varphi \right) = r (\cos \varphi + i \sin \varphi) \frac{\partial f}{\partial x} = z f'(z).$$

Пример. При любом выборе однозначной ветви логарифма $w = \ln z = \ln |z| + i \arg z$ она имеет в окрестности каждой точки, где она определена¹, непрерывные частные производные $\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{1}{r}$, $\frac{\partial w}{\partial \varphi} = i$, при этом $\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{i}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} \equiv 0$; можно утверждать поэтому, что $\ln' z = \frac{r}{z} \frac{\partial w}{\partial r} = \frac{1}{z}$ (в тех точках z , где определена однозначная ветвь $w = \ln z$).

Как следствие, однозначные ветви $w = z^\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \exp(\alpha \ln z)$ многозначной (если $\alpha \notin \mathbb{Z}$) функции $w = z^\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \exp(\alpha \operatorname{Ln} z)$ имеют в любой точке $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$ производную

$$(z^\alpha)' = (\exp(\alpha \ln z))' = \exp'(\alpha \ln z) (\alpha \ln z)' = z^\alpha \frac{\alpha}{z} = \alpha z^{\alpha-1}.$$

В наглядном представлении функция $w = f(z)$ комплексной переменной есть отображение, переводящее точки z комплексной плоскости $\mathbb{C}$ (или некоторой ее части) в точки w другого (или того же) экземпляра этой плоскости.

При локальном изучении функции (в окрестности фиксированной точки $z_0 \in \mathbb{C}$) удобнее оперировать векторами приращения $\Delta z = z - z_0$ и $\Delta w = w - w_0$, считая, что они отложены соответственно от точек z_0 и $w_0 = f(z_0)$. Вектор

¹ Например, в плоскости $\mathbb{C}$ с “разрезом” по любому лучу, выходящему из начала координат (IV, с. 68).

приращения функции $\Delta w \stackrel{\text{def}}{=} f(z_0 + \Delta z) - f(z)$ оказывается при этом функцией вектора приращения Δz , что и определяет отображение $\Delta z \mapsto \Delta w$. В частности, для функции $w = z^2$ $\Delta z \mapsto \Delta w = 2z_0 \Delta z + (\Delta z)^2$.

Если функция $w = f(z)$ имеет в точке z_0 производную, не равную нулю, то запись равенства $f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}$ в виде

$$\Delta w = f'(z_0) \Delta z + o(|\Delta z|) \quad (\text{при } \Delta z \rightarrow 0)$$

выражает тот факт, что дифференциал $dw \stackrel{\text{def}}{=} f'(z_0) \Delta z$ (в точке z_0) функции $w = f(z)$ составляет *главную линейную часть* отображения $\Delta z \mapsto \Delta w$ ¹, представляя собой поворот вектора Δz на угол $\arg f'(z_0)$ (с переносом начала вектора из точки z_0 в точку w_0) и изменение его длины в $|f'(z_0)|$ раз.

Так как $\Delta w - dw = o(|\Delta z|)$, отображение $\Delta z \mapsto \Delta w$ сводится к указанному действию с точностью до слагаемого (вносящего искажение), бесконечно малого по сравнению с $|\Delta z|$ при $\Delta z \rightarrow 0$.

По сути это означает следующее. Если $f'(z_0) \neq 0$, то при отображении посредством функции $w = f(z)$ треугольник с вершинами z_0, z_1, z_2 переходит — с точностью до бесконечно малого (относительно длин сторон $|z_1 - z_0|, |z_2 - z_0|$ треугольника) искажения — в подобный ему (с коэффициентом подобия $|f'(z_0)|$) и одинаково ориентированный с ним треугольник, повернутый вокруг точки w_0 (после переноса в нее вершины z_0) на угол $\arg f'(z_0)$ (рис. 20).

К этому же выводу можно прийти и чуть иными рассуждениями. Поскольку $f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{w - w_0}{z - z_0} \neq 0$, то при стремлении вершин z_1, z_2 треугольника к вершине z_0 выполняются следующие соотношения¹:

¹ Если $f'(z_0) = 0$, то дифференциал $dw = f'(z_0) \Delta z$, оставаясь линейной, перестает быть *главной* частью отображения $\Delta z \mapsto \Delta w$.

¹ В обозначениях $z_1 - z_0 = \Delta z_1$, $z_2 - z_0 = \Delta z_2$, $w_1 - w_0 = \Delta w_1$, $w_2 - w_0 = \Delta w_2$.

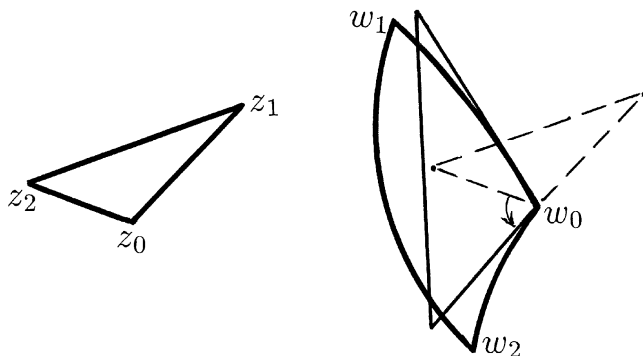


Рис. 20

$$\frac{|\Delta w_1|}{|\Delta z_1|} \rightarrow |f'(z_0)|, \quad \frac{|\Delta w_2|}{|\Delta z_2|} \rightarrow |f'(z_0)|;$$

$$\arg \frac{\Delta w_1}{\Delta z_1} \rightarrow \arg f'(z_0), \quad \arg \frac{\Delta w_2}{\Delta z_2} \rightarrow \arg f'(z_0)$$

и, как следствие, $\arg \frac{\Delta w_2}{\Delta w_1} - \arg \frac{\Delta z_2}{\Delta z_1} \rightarrow 0$. Это означает, что в *пределах* при $z_1, z_2 \rightarrow z_0$ соответствие между треугольниками w_0, w_1, w_2 и z_0, z_1, z_2 оказывается *отношением подобия* (с коэффициентом $|f'(z_0)|$; рис. 21).

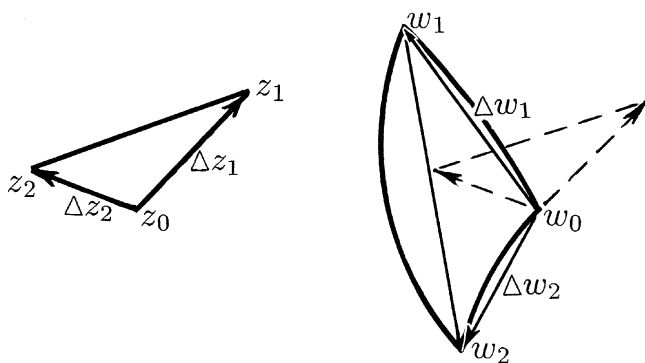


Рис. 21

Свойство отображения функцией $w = f(z)$, имеющей в точке z_0 не равную нулю производную $f'(z_0)$, — переводить стягивающиеся к точке z_0 *треугольники* (и другие фигуры) в *фигуры*, в пределе им *подобные* (и одинаково с ними ориентированные) — называют конформностью¹ отображения (в точке z_0).

Эквивалентно *конформность* отображения $w = f(z)$ (в точке z_0) означает выполнение следующих двух условий.

“Сохранение углов”². Пусть точки z_1 и z_2 стремятся к точке z_0 так, что $\arg \Delta z_1 \rightarrow \alpha_1$, а $\arg \Delta z_2 \rightarrow \alpha_2$ (наглядно это соответствует стремлению *точек* z_1 и z_2 к точке z_0 вдоль “линий”, имеющих в точке z_0 *касательные*, выходящие из нее под углами, соответственно, α_1 и α_2 к *действительной оси*). Тогда (если $f'(z_0) \neq 0$)

$$\arg \Delta w_1 = \arg \left(\frac{\Delta w_1}{\Delta z_1} \Delta z_1 \right) = \arg \left(\frac{\Delta w_1}{\Delta z_1} \right) + \arg \Delta z_1 \rightarrow \arg f'(z_0) + \alpha_1,$$

$$\arg \Delta w_2 = \arg \left(\frac{\Delta w_2}{\Delta z_2} \Delta z_2 \right) = \arg \left(\frac{\Delta w_2}{\Delta z_2} \right) + \arg \Delta z_2 \rightarrow \arg f'(z_0) + \alpha_2,$$

из чего следует вывод: при указанном стремлении точек z_1 и z_2 к точке z_0 точки $w_1 = f(z_1)$ и $w_2 = f(z_2)$ стремятся к точке $w_0 = f(z_0)$ вдоль “линий”, угол пересечения которых (в точке w_0) равен углу пересечения (в точке z_0) “линий”, вдоль которых стремятся к точке z_0 точки z_1 и z_2 (при одном и том же направлении отсчета углов; рис. 22).

¹ Сформулированное свойство отметил Гаусс в работе 1822 г. ([33], Bd. IV, S. 189–216), охарактеризовав его как “подобие в малом” (“in den kleinsten Theilen ähnlich”) с включением этого термина в самое название работы. Позднее (в 1844 г.) он назвал это свойство конформностью отображения ([33], Bd. IV, S. 262); лат. *conformis* — *сходный, подобный*.

² С *вершиной* в точке z_0 . Сразу следует отметить, что одного “сохранения углов” в *точке* z_0 еще недостаточно для *конформности* отображения в *указанной точке* (пример из упражнения 4 на с. 87).

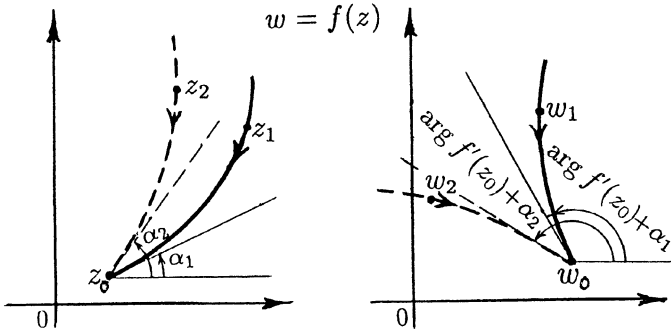


Рис. 22

“Постоянство растяжения”. Если $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{|\Delta w|}{|\Delta z|} = |f'(z)| \neq 0$,

то каким бы малым ни было число $\varepsilon > 0$, неравенства

$$(|f'(z)| - \varepsilon) |\Delta z| < |\Delta w| < (|f'(z)| + \varepsilon) |\Delta z|$$

выполняются для *всех* выходящих из точки z_0 ненулевых векторов Δz достаточно малой длины вне зависимости от их направлений. Это означает, что в пределе при $\Delta z \rightarrow 0$ отображение $\Delta z \mapsto \Delta w$ изменяет длины векторов Δz в одно и то же число $(|f'(z_0)|)^1$ раз. Как следствие, при любом стремлении точек z_1, z_2 к точке z_0 с условием, что отношение длин векторов $\Delta z_1, \Delta z_2$ остается равным (или стремится к) некоторому числу λ , отношение длин векторов $\Delta w_1, \Delta w_2$ стремится к *тому-же* числу λ .

В частности, окружность с центром z_0 достаточно малого радиуса r отображением $w = f(z)$ преобразуется в подмножество² кольца с центром w_0 , оба радиуса которого (внешний и внутренний) эквивалентны $|f'(z_0)|r$ при $r \rightarrow 0$, а следовательно, что существенно, ширина

¹ Число $|f'(z_0)|$ имеет поэтому смысл коэффициента локального растяжения в точке z_0 при отображении функцией $w = f(z)$.

² Это подмножество (если относительно функции $w = f(z)$ предполагать лишь существование производной в точке z_0) не обязано быть “непрерывной линией”.

этого кольца является бесконечно малой более высокого порядка по сравнению с его радиусами при $r \rightarrow 0$ (рис. 23).

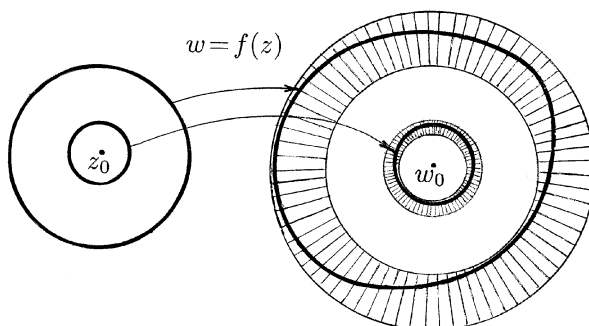


Рис. 23

Свойство *конформности* отображения $w = f(z)$ (в точках, где $f'(z) \neq 0$) и его нарушение (в точках, где $f'(z) = 0$) иллюстрирует на простых примерах рис. 14 (с. 57)¹. В частности, при отображении $w = z^2$ растворы углов, выходящих из точки 0, увеличиваются в два раза, а векторы Δz и $\lambda \Delta z$ переходят в векторы, различающиеся по длине в λ^2 раз (хотя при этом каждая *окружность* с центром 0 переходит в *окружность*).

Гидромеханический смысл производной по комплексной переменной

Пусть в некоторой части пространства задано *векторное поле*, по смыслу являющееся полем скоростей частиц жидкости. Предполагается, что

а) поле является *плоскопараллельным*: все векторы параллельны фиксированной плоскости (принимаемой за плоскость координат x, y или комплексную плоскость переменной $z = x + iy$) и не зависят от расстояния до этой плоскости;

¹ Следует подчеркнуть *локальность* свойства *конформности*: являясь *конформным* в отдельно взятых точках, отображение $w = f(z)$ может существенно изменить форму фигуры *в целом* (что и видно на рис. 14).

б) проекция на указанную плоскость той части пространства, в которой задано поле, является *односвязной областью*¹;

в) поле² является *безвихревым* и не имеет *источников* и *стоков*.

Первое предположение позволяет записать поле в виде $\mathbf{v} = \{p, q\}$, где $p = p(x, y)$, $q = q(x, y)$ — функции, имеющие *непрерывные частные производные* по x и y в упомянутой *односвязной области*.

Предположение о том, что векторное поле является *безвихревым* и не имеет *источников* (и *стоков*), означает выполнение равенств

$$\frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y} \quad (\text{rot } \mathbf{v} = \mathbf{0}) \quad \text{и} \quad \frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\partial q}{\partial y} \quad (\text{div } \mathbf{v} = 0).$$

Ввиду *односвязности* области, где справедливы эти равенства, из них выводится³, соответственно, что $pdx + qdy = du$, а $-qdx + pdy = dv$ для некоторых функций⁴ $u = u(x, y)$ и $v = v(x, y)$. Первую из них называют потенциальной функцией (*скорости*), а вторую — функцией тока.

Как следствие, $\frac{\partial u}{\partial x} = p$, $\frac{\partial u}{\partial y} = q$, $\frac{\partial v}{\partial x} = -q$, $\frac{\partial v}{\partial y} = p$, в силу чего функции $u = u(x, y)$ и $v = v(x, y)$ удовлетворяют *уравнениям Коши–Римана*, а потому — согласно установленному критерию существования производной (с. 73) — представляют собой, соответственно, *действительную* и *мнимую части* некоторой функции $w = f(z)$ комплексной переменной $z = x + iy$, имеющей (в каждой точке упомянутой односвязной области) *производную* $f'(z) = \frac{\partial(u+iv)}{\partial x} = p - iq$.

Эта функция $w = f(z)$ (определяемая с точностью до *постоянного комплексного слагаемого*) называется комплексным потенциалом векторного поля $\mathbf{v} = \{p, q\}$: на *комплексной* плоскости связь между ними выражается равенством $\overline{f'(z)} = \mathbf{v}$. Эквивалентно: *модуль* производной комплексного потенциала выражает абсолютную величину

¹ Подробно понятие *односвязной области* обсуждается ниже (X, с. 149–151), суть же *односвязности* состоит в требовании, что если *граница* какой-либо *плоской фигуры* принадлежит *области*, то и *сама эта фигура* принадлежит этой *области*.

² Его компоненты предполагаются *непрерывно дифференцируемыми* функциями точки.

³ Применением *формулы Грина* к *многоугольникам*.

⁴ Определяемых с точностью до *постоянного слагаемого*. Если не требовать *односвязности* области, то эти функции могут оказаться *многозначными*.

скорости потока, а ее *аргумент* — взятый с обратным знаком угол между вектором скорости и осью x .

*Линии тока*¹ векторного поля $\mathbf{v} = \{p, q\}$ — а это решения дифференциального уравнения $\frac{dx}{p} = \frac{dy}{q}$ (векторы поля являются касательными к ним) — имеют вид $v = \text{const}$, так как в силу этого уравнения $dv = -qdx + pdy = 0$.

Если $v = v_1$ и $v = v_2$ — две *линии тока*, а y_1, y_2 определяются (для фиксированного x) из уравнений $v(x, y_1) = v_1$, $v(x, y_2) = v_2$, то (поскольку $\frac{\partial v}{\partial y} = p$)

$$v_2 - v_1 = v(x, y_2) - v(x, y_1) = \int_{y_1}^{y_2} \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} dy = \int_{y_1}^{y_2} p(x, y) dy$$

есть *расход* (количество протекающей в единицу времени) жидкости через вертикаль (с координатой x) между уровнями y_1 и y_2 .

Отысканием *комплексного потенциала* (и через него распределения *скоростей*) потока жидкости занимался еще Д'Аламбер (с. 75). О том, как его находят в так называемых *задачах на обтекание*, можно понять на следующем простейшем примере.

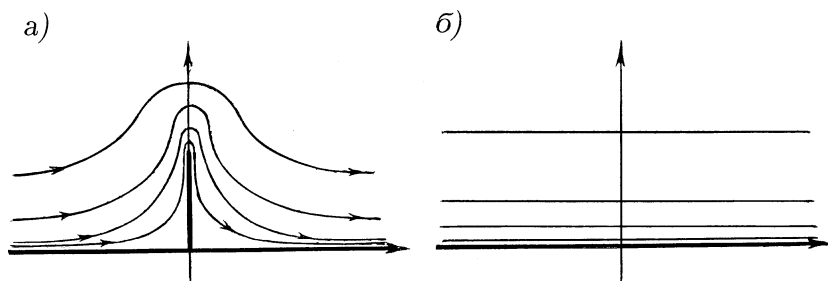


Рис. 24

Пусть плоскопараллельный поток жидкости — настолько большой *глубины*, что ее можно считать *бесконечной*, — встречает препятствие в виде *вертикального отрезка* высоты h (рис. 24, а).² Считая, что

¹ В пространстве им отвечают *цилиндрические поверхности* с образующими, перпендикулярными плоскости x, y .

² В пространстве этому *отрезку* соответствует перпендикулярная плоскости дна и вектору скорости *полоса* шириной h .

скорость потока вдали от препятствия равна v_∞ и направлена вдоль оси x , найти комплексный потенциал $w = f(z)$ этого потока.

Поскольку каждой частице жидкости отвечает своя линия тока, и граничной ($v(x, y) = v_0$) для них является ось x с отрезком-препятствием, а ввиду бесконечной глубины потока расход жидкости следует считать бесконечным, искомая функция $w = f(z)$ должна взаимнооднозначно отображать полуплоскость $\{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z > 0\}$, “разрезанную” по отрезку $[0, ih]$, на полуплоскость $\{w \in \mathbb{C} : \text{Im } w > v_0\}^2$; при этом — так как комплексный потенциал определяется с точностью до постоянного слагаемого — можно считать $v_0 = 0$ (рис. 24, б).

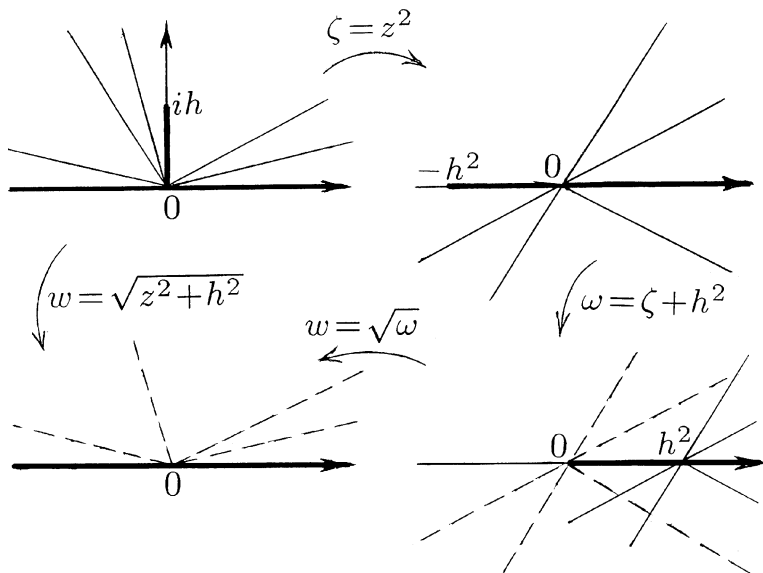


Рис. 25

Одной из таких функций является $w = \sqrt{z^2 + h^2}$, действие которой сводится к последовательному выполнению следующих (рис. 25):

а) $\zeta = z^2$ (лучи плоскости $\mathbb{C}_z$, выходящие из точки $z=0$ под углами из промежутка $(0, \pi)$, один из которых — выходящий под углом $\frac{\pi}{2}$ — неполный, переходят в лучи, выходящие из точки $\zeta=0$ под вдвое

² Или на полуплоскость $\{w \in \mathbb{C} : \text{Im } w < v_0\}$.

большими углами и потому заполняющие всю плоскость $\mathbb{C}_\zeta$ с “разрезом” по действительной оси от точки $\zeta = -h^2$ вправо до бесконечности);

б) $\omega = \zeta + h^2$ (начало “разреза” перемещается в точку $\omega = 0$; плоскость $\mathbb{C}_\omega$ с этим “разрезом” можно рассматривать как совокупность *лучей*, выходящих из точки $\omega = 0$ под углами из промежутка $(0, 2\pi)$);

в) $w = \sqrt{\omega} = \sqrt{z^2 + h^2}$ (*лучи* плоскости $\mathbb{C}_w$, выходящие из точки $\omega = 0$ под углами из промежутка $(0, 2\pi)$, переходят в *лучи* плоскости $\mathbb{C}_w$, выходящие из точки $w = 0$ под *вдвое меньшими* углами).

Любая другая функция $w = f(z)$ с указанными отображающими свойствами обязана иметь вид $f(z) = \frac{a\sqrt{z^2+h^2}+b}{c\sqrt{z^2+h^2}+d}$, где a, b, c, d — действительные числа с $ac - bd > 0$ (VI, с. 99; XVIII, с. 307). Остается учесть дополнительные требования, вытекающие из природы задачи: $f(\infty) = \infty$ (“бесконечность” является единственной “точкой”, в которой пересекаются все *линии тока*) и $f'(\infty) = v_\infty$.

Среди функций $w = \frac{a\sqrt{z^2+h^2}+b}{c\sqrt{z^2+h^2}+d}$ единственной (с точностью до постоянного слагаемого), удовлетворяющей данным требованиям является $w = v_\infty\sqrt{z^2+h^2}$ — это и есть искомый *комплексный потенциал*.

Вычисление *производной* найденного *комплексного потенциала* в точках $z = ih$ и $z = 0$ показывает, что в *концевой* точке препятствия *скорость* потока оказывается *бесконечной*, тогда как в *угловых* точках она равна *нулю*.

Представление же найденного *комплексного потенциала* в виде $u+iv = v_\infty\sqrt{(x+iy)^2+h^2}$ с последующим возведением в квадрат и проведением элементарных алгебраических преобразований позволяет получить уравнение *линий тока* ($v = \text{const}$): $x^2y^2 = c^4 - c^2(y^2 - x^2 - h^2)$.

Упражнения. 1. Найти точки $z = x+iy$, в которых существуют *производные* функций: а) $w = z^2 + \bar{z}^2$; б) $w = \sin^2(x+iy) + i \cos^2(x+iy)$.

2. Пусть подмножество $S \subset \mathbb{R}^2$ есть *объединение* одной из *координатных осей* и двух *кругов*, расположенных по обе стороны и *касающихся* ее в *начале координат*. Проверить, что в *начале координат* функция $w = f(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1, & \text{если } (x, y) \in S, \\ 0, & \text{если } (x, y) \notin S, \end{cases}$ имея *производную* по *любому направлению* (с выполнением условия Коши–Римана), не имеет *производной* как функция *комплексной переменной* $z = x+iy$.

3. Пусть $f(z) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} z, & \text{если } \operatorname{Im} z \geq 0, \\ \bar{z}, & \text{если } \operatorname{Im} z < 0. \end{cases}$ Убедиться, что отображение

$w = f(z)$ в точке $z=0$ обладает свойством *постоянства растяжения*, но не *сохраняет углы*. В каких точках существует *производная* $f'(z)$? *частные производные* $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$? выполняется *условие Коши–Римана*?

4. Пусть $f(0)=0$, а для $z \neq 0$

$$f(z) = \begin{cases} z \cdot |\cos(\arg z)|^{-1}, & \text{если } |\operatorname{Im} z| \leq |\operatorname{Re} z|, \\ z \cdot |\sin(\arg z)|^{-1}, & \text{если } |\operatorname{Im} z| > |\operatorname{Re} z|. \end{cases}$$

($w = f(z)$ есть удовлетворяющая условию $\arg w = \arg z$ точка *квадрата*, описанного около проходящей через точку z *окружности* с центром 0; рис. 26). Проверить, что функция $w = f(z)$ имеет в *начале координат* как *частные производные* $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ (удовлетворяющие условию *Коши–Римана*), так и *производную по любому направлению*, однако *производная* $f'(0)$ не существует. Является ли отображение $w = f(z)$ *конформным* в точке $z=0$? Обладает ли оно в ней свойством *постоянства растяжения*? *сохранения углов*?

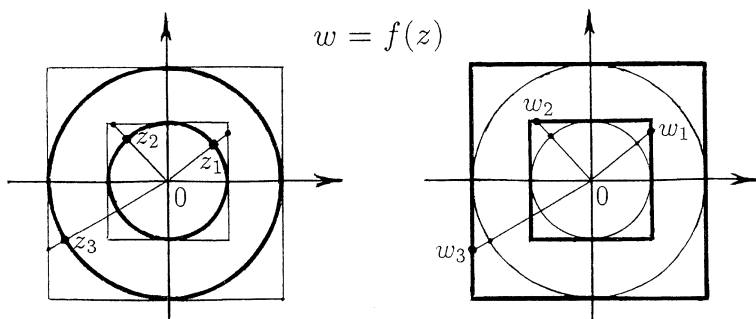


Рис. 26

5. Операция *комплексного сопряжения* $z \mapsto \bar{z}$, сохраняя углы, меняет направление их отсчета (являя собой пример *антиконформного отображения*, или *конформного отображения 2-го рода*). Почему эта операция участвует в *проекции Меркатора* (III, с. 48–49)?

VI. КАКИМИ СВОЙСТВАМИ ОБЛАДАЮТ ОТОБРАЖЕНИЯ ДРОБНО-ЛИНЕЙНЫМИ ФУНКЦИЯМИ

Простая, но исключительно важная по *отображающим свойствам* разновидность функций комплексной переменной — это дробно-линейные функции $w = \frac{az+b}{cz+d}$ (с любыми комплексными коэффициентами a, b, c, d , для которых, однако, $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$)¹.

При $c = 0$ *дробно-линейная* функция приводится к виду $w = \tilde{a}z + \tilde{b}$, т. е. оказывается линейной.

В образном представлении переменных z и w *точками плоскости* $\mathbb{C}$ (или двух ее экземпляров) *дробно-линейные функции* называют дробно-линейными отображениями.

На самом деле *дробно-линейные функции* $w = \frac{az+b}{cz+d}$ *распространяют* на всю *расширенную комплексную плоскость* $\mathbb{C}^*$, полагая по договоренности в “особых точках” $z_0 = -\frac{d}{c}$ и ∞ этих функций²

$$w(z_0) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{z \rightarrow -\frac{d}{c}} \frac{az+b}{cz+d} = \infty, \quad w(\infty) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c}$$

Запись соотношения $w = \frac{az+b}{cz+d}$ в виде $z = \frac{dw-b}{-cw+a}$ и, с другой стороны, подстановка в него $z = \frac{\alpha\zeta+\beta}{\gamma\zeta+\delta}$ с результатом

$$w = \frac{a(\alpha\zeta+\beta)+b(\gamma\zeta+\delta)}{c(\alpha\zeta+\beta)+d(\gamma\zeta+\delta)} = \frac{(a\alpha+b\gamma)\zeta+(a\beta+b\delta)}{(c\alpha+d\gamma)\zeta+(c\beta+d\delta)}$$

доказывают справедливость следующих утверждений.

¹ Иначе $w \equiv \text{const}$. Коэффициенты a, b, c, d допускают умножение на общий ненулевой множитель: $w = \frac{(1+i)z+i}{(1+2i)z-i}$ и $w = \frac{(3-i)z+2+i}{5z-2-i}$ — это одна и та же *дробно-линейная функция*.

² Для *линейных* функций “особые точки” сливаются в одну $z_0 = \infty$.

|| Всякая дробно-линейная функция взаимно-однозначно отображает (всю) расширенную комплексную плоскость на (всю) расширенную комплексную плоскость¹.

|| Любая дробно-линейная функция имеет обратную, также являющуюся дробно-линейной.

|| Композиция (результат последовательного выполнения) дробно-линейных функций есть дробно-линейная функция.

|| Дробно-линейные функции относительно операции композиции составляют группу, причем некоммутативную; в ней шесть функций: $w = z$, $w = \frac{1}{z}$, $w = 1 - z$, $w = \frac{1}{1-z}$, $w = \frac{z}{z-1}$, $w = \frac{z-1}{z}$ составляют подгруппу.

Неподвижной точкой дробно-линейной функции (отображения) $w = \frac{az+b}{cz+d}$ называют любое значение $z \in \mathbb{C}^*$, для которого $\frac{az+b}{cz+d} = z$, при этом ∞ оказывается неподвижной точкой лишь в случае $c = 0$, т.е. когда функция является линейной; (для тождественной функции $w = z$ любая точка $z \in \mathbb{C}^*$ является неподвижной).²

|| Дробно-линейная функция (отличная от тождественной) не может иметь более двух неподвижных точек.

Доказательство. Соотношение $\frac{az+b}{cz+d} = z$ в случае $c \neq 0$ для $z = \infty$ не выполняется, а для конечных z равносильно квадратному уравнению, в силу чего таких значений z два или одно³; в случае же $c = 0$ (линейной функции) указанному соотношению удовлетворяют $z = \infty$ и $z = \frac{b}{d-a}$ (оба равные ∞ при $d = a$ и $b \neq 0$)³; случай $c = 0$, $d = a$, $b = 0$ соответствует тождественной функции. **Q.E.D.**

¹ Ту же самую или другой ее экземпляр.

² Подробную классификацию дробно-линейных функций на основе их неподвижных точек можно найти у Л. Форда [18].

³ z тогда называют двойной неподвижной точкой.

Каковы бы ни были три (разные) точки $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}^*$ и три (разные) точки $w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{C}^*$, существует и притом единственная дробно-линейная функция, переводящая точки z_1, z_2, z_3 соответственно в w_1, w_2, w_3 .

Доказательство. Единственность такой функции вытекает из того, что если $w = w(z)$ и $w = \tilde{w}(z)$ — две дробно-линейные функции, переводящие точки z_1, z_2, z_3 соответственно в w_1, w_2, w_3 , а $z = \tilde{w}^{-1}(w)$ — дробно-линейная функция, обратная к $w = \tilde{w}(z)$, то композиция $z = \tilde{w}^{-1}(w(z))$ оказывается дробно-линейной функцией с тем свойством, что $\tilde{w}^{-1}(w(z_j)) = \tilde{w}^{-1}(w_j) = z_j$, $j = 1, 2, 3$, и поэтому имеющей не менее трех неподвижных точек. Согласно предыдущему утверждению $\tilde{w}^{-1}(w(z)) \equiv z$, из чего следует, что $\tilde{w}(z) \equiv \tilde{w}(\tilde{w}^{-1}(w(z))) \equiv w(z)$.

Существование такой функции можно вывести исходя из следующего соотношения между переменными w и z :

$$\frac{w-w_1}{w-w_2} \cdot \frac{w_3-w_2}{w_3-w_1} = \frac{z-z_1}{z-z_2} \cdot \frac{z_3-z_2}{z_3-z_1} \cdot 1.$$

Для проверки того, что записанное соотношение действительно определяет дробно-линейную функцию $w = w(z)$, достаточно ввести вспомогательные дробно-линейные функции $\zeta = \frac{z-z_1}{z-z_2} \cdot \frac{z_3-z_2}{z_3-z_1}$ и $\omega = \frac{w-w_1}{w-w_2} \cdot \frac{w_3-w_2}{w_3-w_1}$, через которые зависимость переменной w от переменной z выражается как $w = \omega^{-1}\zeta(z)$. То, что значениям $z = z_1, z_2, z_3$ действительно соответствуют значения $w = w_1, w_2, w_3$, проверяется прямой подстановкой. **Q.E.D.**

¹ Если одна из точек z_1, z_2, z_3 и (или) w_1, w_2, w_3 есть ∞ , то соотношение понимается как его предел при стремлении этих точек (этой точки) к ∞ , что равносильно замене на 1 всех содержащих их (ее) числителей и знаменателей:

$$\frac{w-w_1}{w-w_2} \cdot \frac{w_3-w_2}{w_3-w_1} = \frac{z_3-z_2}{z-z_2}, \quad \text{если (к примеру) } z_1 = \infty,$$

$$\frac{w-w_1}{w-w_2} = \frac{z-z_1}{z_3-z_1}, \quad \text{если } z_2 = \infty \text{ и } w_3 = \infty.$$

Замечание. Если точки z_3 и w_3 считать неопределенными, то неопределенными оказываются числа $\frac{z_3-z_2}{z_3-z_1}$ и $\frac{w_3-w_2}{w_3-w_1}$, и из доказанного утверждения вытекает следующее.

|| $\frac{w-w_1}{w-w_2} = \lambda \frac{z-z_1}{z-z_2}$ (λ — любое ненулевое комплексное число) есть общий вид тех дробно-линейных функций, которые переводят точки z_1, z_2 соответственно в точки w_1, w_2 .¹

Отображающие свойства дробно-линейных функций

Свойство конформности. Отображение дробно-линейной функцией $w = \frac{az+b}{cz+d}$ является конформным (в частности, сохраняющим углы) во всех неособых ($z \neq -\frac{d}{c}$) точках $z \in \mathbb{C}$.

Доказательство. Функция $w = \frac{az+b}{cz+d}$ при $z \neq -\frac{d}{c}$ имеет производную $\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)' = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2}$, не равную нулю, а потому отображение этой функцией в любой точке $z \in \mathbb{C}$, $z \neq -\frac{d}{c}$, является конформным (V, с. 81). **Q.E.D.**

При изображении переменных на сфере Римана (I, с. 21) свойство конформности отображений дробно-линейными функциями распространяется и на их “особые” точки (включая бесконечно удаленную). Свойство сохранения углов при стереографической проекции выводится либо аналитически (у А. И. Маркушевича [12] и Л. Форда [18]), либо геометрически (у Д. Гильберта и С. Кон-Фоссена [3]).

“Круговое” свойство. Отображение дробно-линейной функцией $w = \frac{az+b}{cz+d}$ преобразует окружности и прямые в окружности или прямые. Точнее: окружности и прямые, не проходящие через “особую” точку $z_0 = -\frac{d}{c}$, преобразуются в окружности, а проходящие через нее — в прямые².

¹ Если одна из точек z_1, z_2 и/или w_1, w_2 есть ∞ , то соответствующие числители и знаменатели заменяются на 1.

² Каждая прямая считается проходящей через точку ∞ .

Доказательство. Деление (с остатком) приводит *дробно-линейную* функцию $w = \frac{az+b}{cz+d}$ к виду $w = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$ (при $c=0$) или $w = \frac{a}{c} + \frac{b-\frac{ad}{c}}{cz+d}$ (при $c \neq 0$), т. е. либо к *линейной* функции, либо к *композиции*:

а) *линейной* функции $\zeta = cz+d$ (переводящей “особую” точку $z_0 = -\frac{d}{c}$ в *начало координат*),

б) функции $\omega = \frac{1}{\zeta}$ (с “особой” точкой 0),

в) *линейной* функции $w = \left(b - \frac{ad}{c}\right)\omega + \frac{a}{c}$.

Установив “*круговое*” свойство для всех *линейных* функций $w = az+b$ (с $a \neq 0$) и функции $w = \frac{1}{z}$, можно считать его доказанным для всех *дробно-линейных* функций.

Отображение $w = az+b$, $z \in \mathbb{C}$, представляет собой *растяжение* плоскости $\mathbb{C}$ (по всем направлениям) в $|a|$ раз, *поворот* на угол $\arg a$ и *сдвиг* на вектор b . В результате каждого из этих действий любая *окружность* переходит в *окружность*, а любая *прямая* — в *прямую*.

В записи $z = x+iy$, $w = u+iv$ соответствие $w = \frac{1}{z}$ принимает вид $x = \frac{u}{u^2+v^2}$, $y = \frac{-v}{u^2+v^2}$, любая же *прямая* или *окружность* на плоскости переменной $z = x+iy$ задается уравнением $\alpha(x^2+y^2) + \beta x + \gamma y + \delta = 0$, коэффициенты $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ которого — *действительные* числа, подчиненные условию $\beta^2 + \gamma^2 > 4\alpha\delta$.¹

Подстановка $x = \frac{u}{u^2+v^2}$, $y = \frac{-v}{u^2+v^2}$ преобразует это уравнение в $\delta(u^2+v^2) + \beta u - \gamma v + \alpha = 0$ (при этом $\beta^2 + (-\gamma)^2 > 4\delta\alpha$),

¹ В случае $\alpha = 0$ (уравнения *прямой*) последнее неравенство означает, что хотя бы одно из чисел β и γ не равно нулю, а при $\alpha \neq 0$ выражает тот факт, что *окружность* не является *вырожденной* или *мнимой*: это следует из записи уравнения (при $\alpha \neq 0$) в виде

$$\alpha \left[\left(x + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 + \left(y + \frac{\gamma}{2\alpha} \right)^2 - \frac{\beta^2}{4\alpha^2} - \frac{\gamma^2}{4\alpha^2} + \frac{\delta}{\alpha} \right] = 0.$$

т. е. в уравнение *прямой* или *окружности* (на плоскости переменной $w = u + iv$). Случаи *прямой* ($\delta = 0$) и *окружности* ($\delta \neq 0$) соответствуют *прохождению* и, наоборот, *не прохождению* исходной *прямой* или *окружности* через *начало координат* — “особую” точку функции $w = \frac{1}{z}$.

Определить, какие *прямые* и *окружности* переводятся дробно-линейной функцией $w = \frac{az+b}{cz+d}$ в *прямые*, а какие в *окружности*, проще всего с учетом того, что “особая” точка $z_0 = -\frac{d}{c}$ переходит в *бесконечно удаленную*, а ее среди *прямых* и *окружностей* содержат лишь *прямые*. **Q.E.D.**

Точки $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$ считают *симметричными* относительно *прямой* или *окружности* L , если все проходящие через эти точки *прямые* и *окружности* пересекают L под *прямым углом*.

Свойство “сохранения симметрии”. При дробно-линейном отображении $w = w(z)$ точки $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$, *симметричные* относительно *прямой* или *окружности* L , переходят в точки w_1, w_2 , *симметричные* относительно образа $w(L)$ этой *прямой* или *окружности*.

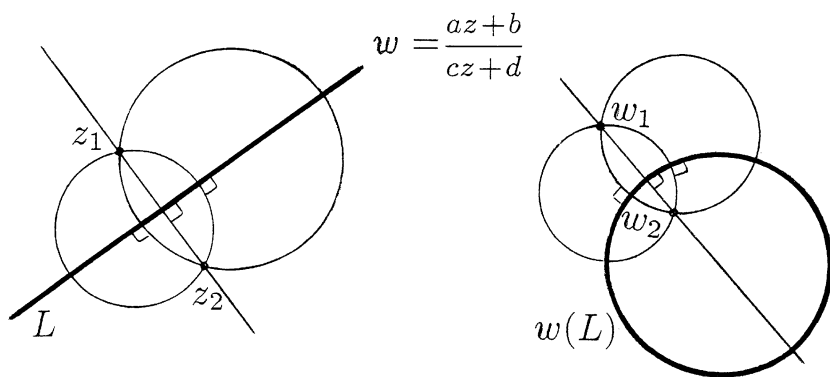


Рис. 27

Доказательство. Пусть z_1, z_2 — точки, симметричные относительно прямой или окружности L , и $w = w(z)$ — дробно-линейная функция, переводящая их, соответственно, в точки w_1, w_2 и прямую или окружность (“круговое” свойство!) $w(L)$. Требуется доказать, что если прямая или окружность $\mathcal{L}$ проходит через точки w_1, w_2 , то она пересекает линию $w(L)$ под прямым углом (рис. 27). Но обратным отображением $z = z^{-1}(w)$, также являющимся дробно-линейным (с. 90), прямая или окружность $\mathcal{L}$ переводится в прямую или окружность, проходящую через точки z_1, z_2 , а следовательно, пересекающую прямую или окружность L под прямым углом. Остается применить свойство конформности (с. 92), в силу которого прямым является и угол пересечения линий $\mathcal{L}$ и $w(L)$. **Q.E.D.**

Определение симметрии точек $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$ относительно прямой или окружности L , предшествующее формулировке “кругового” свойства, в случае прямой равносильно обычному: точки z_1 и z_2 служат концами отрезка, перпендикулярного прямой L и пересекаемого ею в его середине. Если же L — окружность, то симметричными относительно нее являются: а) центр O окружности L и бесконечно удаленная точка; б) точки z_1 и z_2 , лежащие на луче, выходящем из точки O , и отстоящие от нее на расстояния, произведение которых равно квадрату радиуса окружности L (“произведение секущей на ее внешнюю часть равно квадрату касательной”; рис. 28).

Например, симметричными относительно действительной оси являются пары комплексно-сопряженных чисел z и $\bar{z}$ (точнее, изображающих их точек). Симметричными относительно окружности радиуса 1 с центром в начале координат являются: а) 0 и ∞ ; б) z и $(\bar{z})^{-1}$ (так как $\arg(\bar{z})^{-1} = \arg z$, а $|(\bar{z})^{-1}| \cdot |z| = 1$).

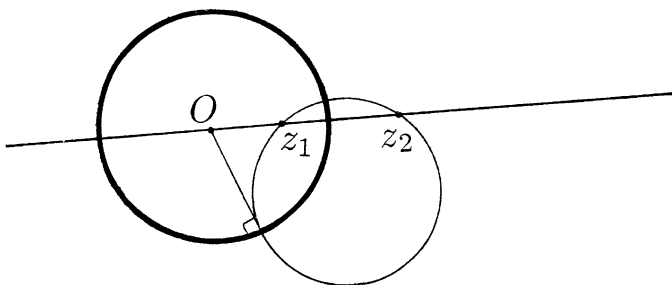


Рис. 28

Каковы бы ни были три (разные) точки $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}^*$ и три (разные) точки $w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{C}^*$, существует (и при- том единственная) прямая или окружность L , которая проходит через точку z_3 и относительно которой точки z_1 и z_2 симметричны.

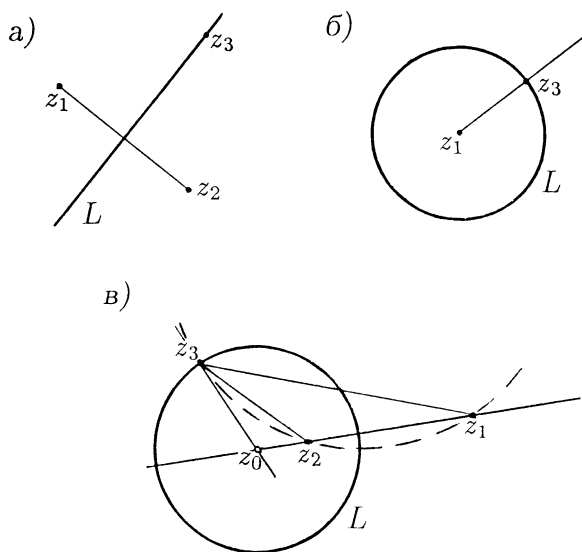


Рис. 29

Доказательство. Если $z_3 = \infty$ или же все три точки z_1, z_2, z_3 конечны, причем две первых равноудалены от третьей, то L — это прямая, которая перпендикулярна к соединяющему точки z_1 и z_2 отрезку и делит его пополам (рис. 29, а).

Если бесконечно удаленной является одна из точек z_1, z_2 (например, z_2), то L — это проходящая через точку z_3 окружность с центром z_1 (рис. 29, б).

Если $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$, а из значений $a = |z_1 - z_3|$ и $b = |z_2 - z_3|$ одно (к примеру, первое) больше другого, то L — это окружность, центр z_0 которой лежит на прямой, проходящей через точки z_1 и z_2 (ближе ко второй из них). Если при этом z_3 не лежит на этой же прямой, то z_0 есть та ее точка, в которой эту прямую пересекает касательная, проведенная из точки z_3 к окружности, проходящей через точки z_1, z_2, z_3 (рис. 29, в). Если же точки z_1, z_2, z_3 лежат на одной прямой, то центр z_0 окружности L удален от точки z_1 на расстояние $a^2/(a \pm b)$ — соответственно тому, лежит точка z_3 между или по одну сторону от точек z_1, z_2 . **Q.E.D**

Вот несколько задач, решаемых применением свойств дробно-линейных отображений.

1. Заданную прямую (окружность) перевести дробно-линейной функцией в заданную прямую (окружность).

Достаточно, взяв (произвольно) на обеих линиях по три точки z_1, z_2, z_3 и w_1, w_2, w_3 , построить дробно-линейную функцию согласно формуле

$$\frac{w-w_1}{w-w_2} \cdot \frac{w_3-w_2}{w_3-w_1} = \frac{z-z_1}{z-z_2} \cdot \frac{z_3-z_2}{z_3-z_1},$$

после чего воспользоваться “круговым” свойством и тем, что прямая или окружность полностью определяется заданием любых трех ее точек.

2. Найти функцию, взаимно однозначно и конформно отображающую: а) внутренность окружности, б) внешность окружности (с включением в нее точки ∞), в) полуплоскость (часть плоскости, лежащей по одну сторону от прямой) на любую область G из этого же списка.

Замечание. Как будет установлено ниже (XVIII, с. 307–308), *других* (помимо *дробно-линейных*) *функций*, дающих решения задач этого и следующего пунктов, *не существует*.

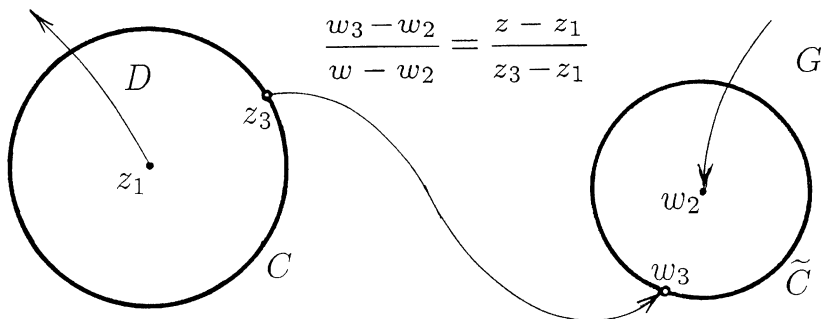


Рис. 30

Пусть, к примеру, D — внутренность окружности C , а G — внешность окружности $\tilde{C}$. Взяв точки z_1, z_2, z_3 соответственно *внутри, вне и на* окружности C , а точки w_1, w_2, w_3 — *вне, внутри и на* окружности $\tilde{C}$, причем так, чтобы точки z_1 и z_2 были *симметричны* относительно C , а w_1 и w_2 — относительно $\tilde{C}$ (в качестве z_1 и w_2 можно взять *центры* окружностей C и $\tilde{C}$, а в качестве z_2 и w_1 — *бесконечность*; рис.30), следует построить *дробно-линейную* функцию как в предыдущем пункте. Остается заметить, что точки, лежащие по *одну сторону* от окружности, *не могут* перейти в точки, лежащие по *разные стороны* от окружности $\tilde{C}$: любые две точки из *внешности* окружности C можно соединить *ломаной*, не пересекающей эту окружность, а *образ* этой *ломаной* при *дробно-линейном* отображении есть (в силу “*кругового*” свойства) “*ломаная*” (из дуг окружностей).

тей), не пересекающая окружности $\tilde{C}$. (Разбор других случаев областей D и G проводится по этой же схеме.)

3. Найти общий вид *дробно-линейных* функций, отображающих:

а) *круг* $\{z \in \mathbb{C}: |z| < 1\}$ на *круг* $\{w \in \mathbb{C}: |w| < 1\}$ (или, как говорят, *единичный круг* “на себя”);

б) *полуплоскость* $\{z \in \mathbb{C}: \operatorname{Im} z > 0\}$ на *полуплоскость* $\{w \in \mathbb{C}: \operatorname{Im} w > 0\}$ (*верхнюю полуплоскость* “на себя”);

в) *верхнюю полуплоскость* на *единичный круг*.

Любое *дробно-линейное* отображение *круга* $\{|z| < 1\}$ на *круг* $\{|w| < 1\}$ (пункт а) преобразует *окружность* $\{|z| = 1\}$ в *окружность* $\{|w| = 1\}$. Так как некоторая точка z_1 , $|z_1| < 1$, переходит в 0, *симметричная* ей (относительно окружности $\{|z| = 1\}$) точка z_2 переходит в ∞ . Поскольку $z_2 = z(\bar{z}_1)^{-1}$ при $z_1 \neq 0$ и $z_2 = \infty$ при $z_1 = 0$, то (с учетом замечания на с. 92) в обоих случаях $w = \lambda \frac{z - z_1}{1 - \bar{z}_1 z}$, где λ — *ненулевое комплексное число*. Подстановка $z = 1$ позволяет заключить: $|\lambda| = 1$, а следовательно, $w = e^{i\alpha} \frac{z - z_1}{1 - \bar{z}_1 z}$ ($|z_1| < 1$, $\alpha \in \mathbb{R}$).

Эта же схема рассуждений применительно к пунктам б) и в) дает ответы: б) $\frac{w - w_1}{w - \bar{w}_1} = e^{i\alpha} \frac{z - z_1}{z - \bar{z}_1}$, в) $w = e^{i\alpha} \frac{z - z_1}{z - \bar{z}_1}$, где z_1 и w_1 — *точки верхней полуплоскости*, а α — *действительное число*.

Ответ к пункту б) можно представить и в другой форме. Функция $w = \frac{az + b}{cz + d}$, отображающая *полуплоскость* $\{\operatorname{Im} z > 0\}$ на *полуплоскость* $\{\operatorname{Im} w > 0\}$, точки *действительной* оси должна переводить в точки *действительной* оси. Отсюда следует, что (с точностью до общего *ненулевого* множителя) *коэффициенты* a, b, c, d должны быть *действительными*. Требование, чтобы значениям z с $\operatorname{Im} z > 0$ соответствовали значения w с $\operatorname{Im} w > 0$, в записи $z = x + iy$ означает:

$$0 < \operatorname{Im} \frac{a(x + iy) + b}{c(x + iy) + d} = \frac{(ad - bc)y}{(cx + d)^2 + (cy)^2} \quad \text{при } y > 0, \quad \text{т. е.} \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} > 0.$$

Отображающие свойства функции $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$

Эта функция (в отечественной литературе именуемая функцией Жуковского¹) не является *дробно-линейной*, но, отличаясь по свойствам, близка к ним по роли в практике *конформных отображений*.

Разрешимость уравнения $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ относительно z при любом $w \in \mathbb{C}$ говорит о том, что *функция Жуковского* отображает плоскость $\mathbb{C}^*$ на всю плоскость $\mathbb{C}^*$ (значениям $z=0$ и $z=\infty$ отвечает $w=\infty$). Так как $w' = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{z^2}\right)$, *конформность* этого отображения гарантирована во всех *отличных от 0 и ± 1 точках $z \in \mathbb{C}$* .²

В отличие от *дробно-линейных*, отображение функцией $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ не является *взаимно-однозначным*: значениям $z = z_1, z_2$, для которых $z_1 z_2 = 1$, отвечает *одно и то же* значение w . По-другому это можно выразить словами: *обратной по отношению к функции $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ является двузначная функция $z = w + \sqrt{w^2 - 1}$* (где и как можно выделить ее *однозначные ветви*, указано в IV на с. 69).

Суть отображения $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ прояснится, если проследить за образами точек *окружностей* радиусов $r > 1$ с центром $z = 0$. Запись $z = re^{it} = r(\cos t + i \sin t)$, $w = u + iv$, приводит к соотношениям

$$\begin{aligned} u + iv &= \frac{1}{2}\left(re^{it} + \frac{1}{re^{it}}\right) = \frac{1}{2}\left(r(\cos t + i \sin t) + \frac{1}{r}(\cos t - i \sin t)\right) = \\ &= \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right) \cos t + i \frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right) \sin t, \end{aligned}$$

¹ Николай Егорович Жуковский (1847–1921) — российский механик, для которого эта функция послужила отправным пунктом в разработке теории подъемной силы крыла самолета.

² На самом деле *конформность* имеет место и в “особых” точках 0 и ∞ , если переменные z и w отмечать на *сфере Римана*.

т. е. параметрическому заданию эллипсов на плоскости переменной $w = u + iv$ с полуосями $\frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)$ и $\frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)$ — соответственно на ее действительной и мнимой осях (рис. 31; стрелки указывают направление движения точек при возрастании параметра t).

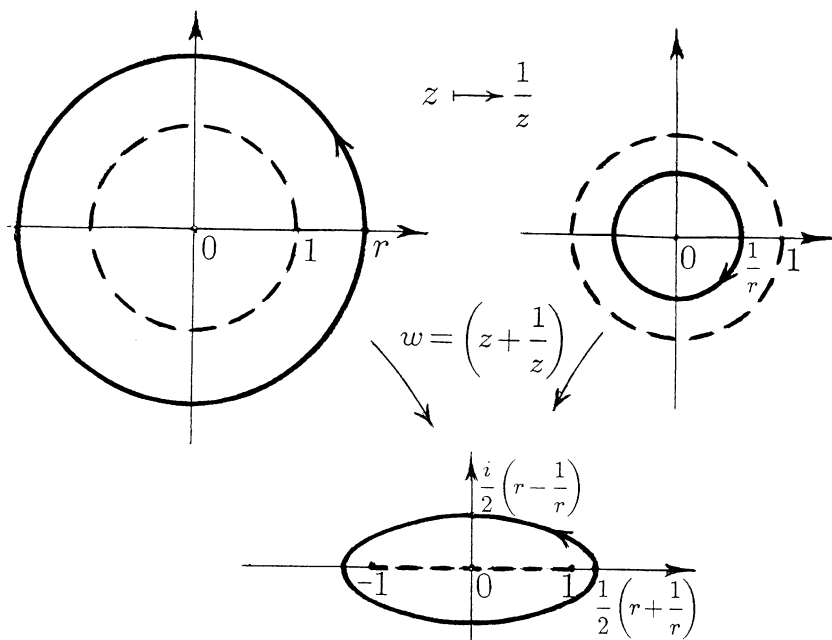


Рис. 31

Соответствие между точками указанных окружностей и эллипсов является взаимно однозначным, а в совокупности эти эллипсы заполняют всю плоскость $\mathbb{C}$ за исключением отрезка $[-1, 1]$. Образ плоскости (как $\mathbb{C}$, так и $\mathbb{C}^*$) переменной z с “прорехой” в виде круга $\{|z| \leq 1\}$ есть поэтому вся плоскость (соответственно $\mathbb{C}$ и $\mathbb{C}^*$) переменной

w с “разрезом” по отрезку $[-1, 1]$ (значению $z = \infty$ соответствует $w = \infty$).

Замена z на $\frac{1}{z}$ не меняет функции $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$, но переводит точку ∞ в точку 0 , а окружности радиусов $r > 1$ (с центром $z = 0$) — в концентрические окружности радиусов $\frac{1}{r} < 1$, но обходимые в противоположном направлении: значениям $z = re^{it}$ соответствуют $w = \frac{1}{r}e^{-it}$.

Выводы можно оформить в виде следующего утверждения.

Функция $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$, $z \in \mathbb{C}^*$, осуществляет взаимно-однозначное и конформное¹ отображение:

как внутренности окружности $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, так и ее внешности (включая ∞), на всю плоскость $\mathbb{C}^*$ с “разрезом” по отрезку $[-1, 1]$;

множеств $\{|z| > 1\} \cap \{\operatorname{Im} z > 0\}$ и $\{|z| < 1\} \cap \{\operatorname{Im} z < 0\}$ (каждое) — на полуплоскость $\{\operatorname{Im} w > 0\}$, а множеств $\{|z| > 1\} \cap \{\operatorname{Im} z < 0\}$ и $\{|z| < 1\} \cap \{\operatorname{Im} z > 0\}$ — на полуплоскость $\{\operatorname{Im} w < 0\}$;

обратные отображения производят однозначные ветви обратной функции $z = w + \sqrt{w^2 - 1}$ (IV, с. 69).

Так как подстановка $z = e^{it}$ преобразует соотношение $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ в $w = \cos t$, окружность $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ функцией $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ переводится в дважды проходимый отрезок $[-1, 1]$: симметричные относительно действительной оси точки $z = e^{it}$ и $\bar{z} = e^{-it}$ этой окружности переходят в одну и ту же точку $w \in [-1, 1]$. Наглядным становится нарушение конформности отображения $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ в точках $z = \pm 1$.

¹ В “неособых” точках.

Среди прочего функция $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ вкупе с *дробно-линейными* упрощает изучение отображений *тригонометрическими* (равно как и *гиперболическими*) функциями.

К примеру, представление $w = \cos z$ в виде *композиции*

$$z \mapsto iz \mapsto e^{iz} \mapsto \frac{1}{2}\left(e^{iz} + \frac{1}{e^{iz}}\right) = \cos z$$

позволяет наглядно представить преобразование при этом отображении, например, “изломанной” полосы (рис. 32).

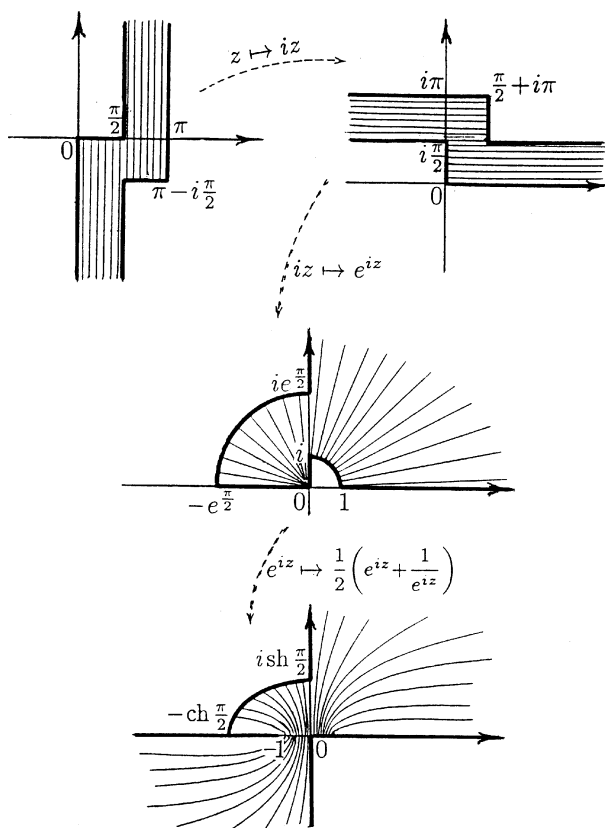


Рис. 32

Подобные представления отображений $w = \operatorname{ch} z$ и $w = \sin z$ соответственно на один шаг короче и длиннее:

$$z \mapsto e^z \mapsto \frac{1}{2} \left(e^z + \frac{1}{e^z} \right) = \operatorname{ch} z, \quad \text{а} \quad \sin z = \cos \left(\frac{\pi}{2} - z \right);$$

в случае $w = \operatorname{tg} z$ функцию Жуковского сменяет дробно-линейная:

$$z \mapsto 2iz \mapsto e^{2iz} \mapsto \frac{e^{2iz} - 1}{ie^{2iz} + i} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}} = \operatorname{tg} z.$$

Упражнения. 1. Доказать, что

а) отображение $w = \frac{1}{z}$ равносильно последовательному выполнению (в любом порядке) *двух* преобразований *симметрии*: относительно *единичной окружности* и *действительной оси*;

б) преобразование *подобия* $w = z$ (с коэффициентом > 0) сводится к *двум* преобразованиям *симметрии* относительно *окружностей* с общим центром 0;

в) *поворот* $w = e^{i\alpha} z$ на угол α (вокруг точки 0) равносильно *двум* преобразованиям *симметрии* относительно *пересекающихся* (в этой точке) *прямых*;

г) *сдвиг* $w = z + b$ на *вектор* b равносильно *двум* преобразованиям *симметрии* относительно *перпендикулярных* к вектору b *прямых*.

На основании этого прийти к выводу: *любое дробно-линейное преобразование равносильно выполнению четного числа симметрий (относительно прямых и окружностей).*

2. Проверить, что *дробно-линейные* отображения $w = \frac{az+b}{cz+d}$, соответствующие *вращениям* сферы Римана, — это те, которые имеют вид $\frac{w-w_1}{1+\overline{w_1}w} = e^{i\alpha} \frac{z-z_1}{1+\overline{z_1}z}$ или (что эквивалентно) характеризуются соотношениями $\frac{a}{d} = -\frac{b}{c} = -\frac{c}{\overline{b}} = \frac{d}{\overline{a}}$. (Указания: а) при таких отображениях пары точек z_1, z_2 с $z_1 \overline{z_2} = -1$, которым при *стереографической проекции* соответствуют *диаметрально противоположные точки сферы Римана* (I, упражнение 6), переходят в пары точек w_1, w_2 с таким же свойством; б) *неподвижные точки* таких отображений *симметричны* относительно *центра* сферы Римана и являются точками ее пересечения с *осью вращения* сферы.)

3. Применяя подстановку $z = e^t e^{i\alpha}$, $-\infty < t < +\infty$, найти образы *лучей* $\{z \in \mathbb{C}: \arg z = \alpha\}$ при отображении функцией $w = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$.

VII. КАКИЕ МНОЖЕСТВА НА ПЛОСКОСТИ $\mathbb{C}$ НАЗЫВАЮТ ОБЛАСТЯМИ, А ФУНКЦИИ — АНАЛИТИЧЕСКИМИ

Функцию комплексной переменной $w = f(z)$ называют аналитической¹ в точке $z \in \mathbb{C}$, если она имеет производную не только в этой точке, но и в некоторой ее окрестности (в некотором круге с центром в этой точке).

Функцию, аналитическую в каждой точке множества $E \subset \mathbb{C}$, называют аналитической на этом множестве, а аналитическую в каждой точке плоскости $\mathbb{C}$ — целой.

Термин *аналитические функции* имел хождение в математике еще до зарождения теории функций комплексной переменной, однако внятного смысла он не имел. В частности, входя в название монографии Лагранжа [37], он не встречается в ее тексте.

Коши ([28], sér. 1, t. 12, p. 35, 228) ввел следующую терминологию: “Функция действительной или мнимой переменной z будет называться *монотропной*, если она не перестает быть непрерывной пока не обращается в бесконечность; она будет называться *монопенной*, если у нее есть монотропная производная. Функция может быть монотропной и монопенной только для значений z , соответствующих внутренним точкам некоторой области . . . *Синектической* я называю функцию, которая для всех конечных значений переменной, от которой она зависит, является не только монотропной и монопенной, но и конечной.”²

¹ Варианты: голоморфной, регулярной. Говоря, что “ $w = f(z)$ есть аналитическая функция” подразумевают, что в плоскости $\mathbb{C}$ есть точки, в которых данная функция является *аналитической*.

² В оригинале: “Une fonction de la variable réelle ou imaginaire z sera dite *monodrome*, si elle ne cesse d’être continue qu’en devenant infinie; elle sera dite *monogène*, si elle a une dérivée monodrome. Une fonction peut être monodrome et monogène, seulement pour les valeurs de z correspondantes aux points intérieurs d’une certaine aire . . . J’appelle *synectique* une fonction qui, pour une valeur finie de la variable dont elle dépend, est toujours, non seulement monodrome et monogène, mais encore finie.”

Происхождение этих (как и других вводимых им) терминов Коши не объяснял¹, а их трактовка оказывается недостаточно внятной.

В 1875 г. во 2-м издании монографии Брио и Букé [23] (с. 14) термин Коши *синектическая* (функция) был впервые заменен на *голоморфная*²; он и вошел в обиход наравне с термином *аналитическая*³, которым пользовался Вейерштрасс⁴ [43] (Bd. I, S. 51; Bd. II, S. 77). Метаморфоза этих терминов отражена, например, в книге Э. Бореля [22].

Ныне *моногенность*⁵ понимают как *существование производной*⁵ (в том или ином смысле), а *аналитичность*⁵, *голоморфность*⁵ и *регулярность*⁵ — как синонимы *существования производной* $f'(z)$ (в обычном смысле) не только в *точке* z_0 , но и в некоторой ее *окрестности*, или, что эквивалентно (II, с. 33; XII, с. 180), *разложимости* функции $w = f(z)$ в *ряд по степеням* $z - z_0$ в некотором *круге* с *центром* z_0 .

Являясь *аналитической* в какой-либо *точке* $z \in \mathbb{C}$, т. е. имея *производную* в некотором *круге* с центром z , функция оказывается *аналитической* во *всех точках* этого *круга* (рис. 33, а). Вывод: для любой функции *множество* *всех точек, в которых она является аналитической, открыто*.

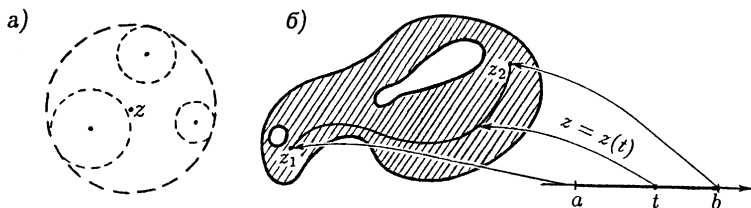


Рис. 33

¹ Греч. *μόνος* — один, единственный; *δρόμος* — бег, место для бега; *γένος* — происхождение, род; *συνεχής* — связный, непрерывный.

² Т. е. *подобная целой* (греч. *ὅλος* — целый; *μορφή* — вид).

³ Подразумевающим разложимость функции в *степенной ряд*.

⁴ Weierstrass, Karl, 1815–1897, — немецкий математик, основатель (вместе с Коши и Риманом) *теории функций комплексной переменной*.

⁵ Функции *комплексной* переменной $w = f(z)$ в *точке* $z_0 \in \mathbb{C}$.

То, что множество $O \subset \mathbb{C}$ является открытым, означает, что все его точки оказываются *внутренними* точками этого множества (каждая входит в него вместе с некоторой *окрестностью*). Символически это выражается *формулой*

$$\forall z (z \in O \implies \exists \delta > 0 \forall \zeta (|\zeta - z| < \delta \implies \zeta \in O)).^1$$

Из разбора примеров в V на стр. 71 следует:

- а) $w = z^2$ — *целая* функция;
- б) *сумма* степенного ряда с *ненулевым* радиусом сходимости r является *аналитической* функцией в *круге сходимости* этого ряда (а при $r = +\infty$ — *целой*).
- в) функция $w = |z|^2$ (имеющая производную в *единственной* точке $z = 0$) не является *аналитической*.

Открытое множество $O \subset \mathbb{C}$ называют областью², если для любых двух его точек z_1, z_2 существует соединяющий их *путь* в O — заданная на некотором отрезке $[a, b] \subset \mathbb{R}$ и непрерывная на нем функция $z = z(t)$ со свойствами:

$$z(t) \in O \text{ при } t \in [a, b], \quad z(a) = z_1, \quad z(b) = z_2 \quad (\text{рис. 33, б}).$$

На самом деле справедливо следующее утверждение о *соединимости* между собой точек области.

|| Любые две точки области можно соединить, не выходя за пределы этой области, *ломаной*³, причем можно дополнительно потребовать, чтобы каждое звено этой *ломаной* было параллельно одной из *координатных осей* (рис. 34).

¹ Обозначение *открытых* множеств O — по начальной букве фр. *ouvert*, англ. *open* и нем. *offen* — *открытый*. *Пустое* множество $\emptyset$ *открыто* (для него значение этой формулы — *истина*), но все упоминаемые ниже *открытые множества* подразумеваются *непустыми*.

² Для обозначения *областей* чаще всего используют буквы D и G (начальные англ. *domain* и нем. *Gebiet* — *область*).

³ Состоящей из *конечного* числа последовательно соединенных *прямолинейных отрезков*.

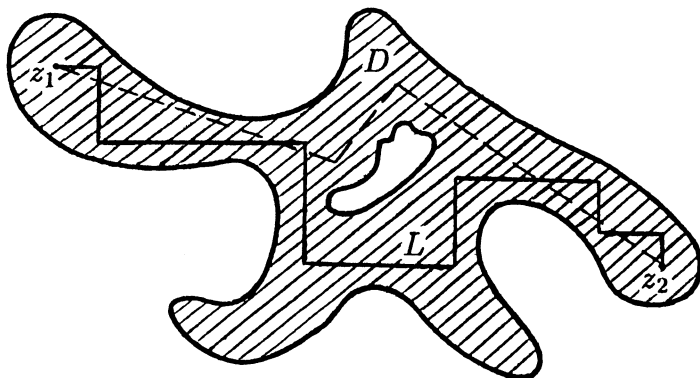


Рис. 34

Доказательство (от “противного”). Пусть D — область, какие-то две точки которого *не соединимы* (в пределах этой области) *ломаной*. Но — согласно определению *области* — для этих точек есть *соединяющий* их (в пределах области) *путь* $z = z(t)$, $t \in [a, b]$. Точка $z(\frac{a+b}{2})$, соответствующая *середине* отрезка $[a, b]$, оказывается либо *соединимой*, либо *не соединимой* с точкой $z(a)$ *ломаной*; в первом случае в качестве $[a_1, b_1]$ выбирают отрезок $[\frac{a+b}{2}, b]$, а во втором — отрезок $[a, \frac{a+b}{2}]$. Так или иначе *путь* $z = z(t)$, $t \in [a_1, b_1]$, соединяет точки, *не соединимые* (в пределах области D) *ломаной*. С отрезком $[a_1, b_1]$ поступают так же: в случае *соединимости* (в пределах области D) точки $z(\frac{a_1+b_1}{2})$ с точкой $z(a_1)$ *ломаной* в качестве $[a_2, b_2]$ берут отрезок $[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1]$, в случае же их *несоединимости* полагают $[a_2, b_2] = [a_1, \frac{a_1+b_1}{2}]$.

Последовательное выполнение этой процедуры приводит к *стягивающейся* последовательности *вложенных отрезков*

$$[a, b] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \cdots \supset [a_n, b_n] \supset \cdots,$$

имеющих *общую* точку τ . Так как область D — *открытое* множество, точка $z(\tau)$ принадлежит области D вместе с некоторым *кругом* с центром $z(\tau)$, а если учесть, что

$\{z(a_n)\} \rightarrow z(\tau)$ и $\{z(b_n)\} \rightarrow z(\tau)$ (ввиду непрерывности функции $z = z(t)$ на отрезке $[a, b]$), то следует вывод: обе точки $z(a_n)$, $z(b_n)$ попадают (при достаточно большом n) в указанный круг, причем — по построению — эти точки не соединимы (в пределах области D) ломаной. Но это противоречит элементарному геометрическому факту: в пределах круга любые две его точки соединимы между собой ломаной (со звеньями, параллельными осям координат). **Q.E.D.**

Замечание. Соединимость точек посредством ломаной есть более сильное требование, нежели их соединимость посредством пути: если $z_0, z_1, z_2, \dots, z_n, z_{n+1}$ — последовательные вершины ломаной, соединяющей точки z_0, z_{n+1} , то

$$z = \begin{cases} z_0 + t(z_1 - z_0) & \text{при } 0 \leq t \leq 1, \\ z_1 + (t-1)(z_2 - z_1) & \text{при } 1 \leq t \leq 2, \\ \dots\dots\dots, \\ z_n + (t-n)(z_{n+1} - z_n) & \text{при } n \leq t \leq n+1, \end{cases} \quad t \in [0, n+1],$$

есть путь (осуществляющий обход этой ломаной), который соединяет точки z_0, z_{n+1} .

В математике различают понятия связного и линейного связного множества¹.

Множество E называют связным, если при любом его разделении на два (непустых и непересекающихся) подмножества E_0, E_1 по крайней мере одно из них содержит (хотя бы одну) предельную точку другого.²

Множество E называют линейно связным, если для любых двух его точек z_0, z_1 существует соединяющий их путь $z = z(t)$, $t \in [a, b]$, проходящий по множеству E .

¹ Здесь речь идет о множествах на плоскости $\mathbb{C}$, но эти понятия применимы к множествам в координатных пространствах $\mathbb{R}^n$ любой размерности (и в более общих пространствах).

² Эквивалентно: не существует двух непересекающихся открытых множеств O_0, O_1 , объединение которых содержит все множество E , а каждое из них отдельно — часть этого множества.

Любое *линейно связное* множество является *связным*¹; обратное же утверждение (для множеств, не являющихся *открытыми*) неверно (упражнение 3).

Для *открытых* множеств $O \subset \mathbb{C}$ понятия *связности*, *линейной связности* и *связности посредством ломаных* совпадают. Для проверки этого (с учетом доказанного выше) достаточно установить, что любые две точки *связного* открытого множества O можно соединить *ломаной*, не выходящей за пределы этого множества. Если бы это было не так, т. е. если бы для каких-то двух точек $z_0, z_1 \in O$ такой *ломаной* не существовало, то множество O оказывалось бы объединением двух непересекающихся *открытых* множеств

$$O_0 \stackrel{\text{def}}{=} \{z \in O : z \text{ соединима с } z_0 \text{ ломаной в } O\},$$

$$O_1 \stackrel{\text{def}}{=} \{z \in O : z \text{ не соединима с } z_0 \text{ ломаной в } O\},$$

ни одна точка каждого из которых не является *предельной* для другого.

|| Любое *открытое* множество $O \subset \mathbb{C}$ является либо *областью*, либо *объединением* конечного или бесконечного² числа *непересекающихся областей*³.

Для доказательства достаточно разделить множество O на подмножества, относя точки $z_1, z_2 \in O$ к *одному* подмножеству, если эти точки *соединимы* в множестве O *ломаной*. Полученные множества оказываются *открытыми*, *линейно связными*, и *непересекающимися*.

¹ Доказательство. Пусть $E = E_0 \cup E_1$ — любое разделение *линейно связного* множества E на два (непересекающихся) подмножества и $z = z(t)$, $t \in [a, b]$ — проходящий по множеству E *путь*, соединяющий какие-то точки $z_0 \in E_0$ и $z_1 \in E_1$. В качестве $[a_1, b_1]$ выбирается отрезок $[\frac{a+b}{2}, b]$, если $z(\frac{a+b}{2}) \in E_0$, и отрезок $[a, \frac{a+b}{2}]$, если $z(\frac{a+b}{2}) \in E_1$; в том и другом случае $z(a_1) \in E_0$, $z(b_1) \in E_1$. Последовательное продолжение этого процесса приводит к *стягивающейся* последовательности *вложенных отрезков* $[a, b] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \dots \supset [a_n, b_n] \supset \dots$ со свойством: $z(a_n) \in E_0$, $z(b_n) \in E_1$, $n = 1, 2, \dots$. Если τ — *общая* точка этих *отрезков*, то $z(\tau)$ является *предельной точкой* для *обоих* множеств E_0, E_1 (вне зависимости от того, которому из них она принадлежит). **Q.E.D.**

² Точнее, *счетного*.

³ Это же относится к *открытым* множествам $O \subset \mathbb{R}^n$.

Сопоставление последнего утверждения с определением аналитической функции (с. 105) и критерием существования производной функции комплексной переменной (V, с. 73, 77) позволяет сделать следующие выводы.

1. Любую аналитическую функцию можно считать таковой в некоторой области.¹

2. Функция $w = f(z)$ является аналитической в области $D \subset \mathbb{C}$ в том и только в том случае, когда она имеет производную $f'(z)$ в каждой точке этой области.²

3. Для того чтобы функция $w = f(z)$ была аналитической в области $D \subset \mathbb{C}$, достаточно, чтобы как функция $w = f(x+iy)$ двух действительных переменных она имела в этой области непрерывные частные производные $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ с выполнением условия Коши–Римана $\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ (а в полярных координатах — непрерывные частные производные $\frac{\partial f}{\partial r}$, $\frac{\partial f}{\partial \varphi}$ с выполнением условия $\frac{\partial f}{\partial r} + i \frac{\partial f}{\partial \varphi} = 0$).

Как следствия, справедливы следующие утверждения.

Суммы рядов $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n$ и $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n$ — степенного и обобщенного степенного — являются аналитическими функциями соответственно в круге и кольце сходимости этих рядов (V, с. 72).

¹ Если открытое (с. 106) множество O всех точек аналитичности функции $w = f(z)$ не является областью, то оно оказывается объединением $O = \bigcup_j D_j$ непересекающихся областей, и функцию $w = f(z)$ удобнее изучать отдельно в каждой из них.

² Тогда как существование у функции производной в точке и ее аналитичность в точке — это разные требования (пример функции $w = |z|^2$ на с. 107).

|| Экспоненциальная функция $w = \exp x = e^z$ (II, с. 36) является аналитической во всей плоскости $\mathbb{C}$ (т. е. целой).

|| Однозначная ветвь логарифма $w = \ln z = \ln r + i\varphi$ является аналитической функцией в любой области $D \subset \mathbb{C}$, где определена однозначная ветвь аргумента $\varphi = \arg z$ (например, в плоскости $\mathbb{C}$ с “разрезом” по любому лучу, выходящему из точки 0; V, с. 78).

|| Элементарные функции¹ (в случае их многозначности — их однозначные ветви) являются аналитическими в тех областях плоскости $\mathbb{C}$, где они определены.

Условия постоянства аналитической функции в области. Если для функции $w = f(z)$, аналитической в области $D \subset \mathbb{C}$, выполнено одно из условий:

- 1) $f'(z) \equiv 0$; 2) $\operatorname{Re} f(z) \equiv c$; 3) $\operatorname{Im} f(z) \equiv c$;
- 4) $\arg f(z) \equiv c$; 5) $|f(z)| \equiv c$

(где c — некоторое действительное число), то эта функция является постоянной в области D .

Доказательство. Каждое из этих пяти условий влечет равенство нулю (в каждой точке области D) частных производных $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$ функций $u = \operatorname{Re} f(x + iy)$ и $v = \operatorname{Im} f(x + iy)$. В первых трех случаях это вытекает из условия Коши–Римана $\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ вкупе с соотношениями

$$f'(z) = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y} \quad (V, \text{ с. 73}).$$

Четвертый случай сводится к третьему (умножением функции на число e^{-ic}): $\operatorname{Im}(e^{-ic} f(z)) = 0$. В пятом случае $f(z) \equiv 0$, если $c = 0$, а если $c \neq 0$, то тождество $u^2(x, y) + v^2(x, y) \equiv c^2$ влечет выполнение в каждой точке $(x, y) \in D$ равенств

¹ Т. е. выражаемые через переменную и константы комбинациями четырех основных действий, экспоненты и логарифма (III, с. 51).

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} u + \frac{\partial v}{\partial x} v = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y} u + \frac{\partial v}{\partial y} v = 0. \end{cases}$$

Рассматривая эти равенства как *однородную систему линейных алгебраических уравнений*, имеющую *ненулевое* решение (u, v) , можно утверждать, что *определитель* этой системы *равен нулю* в любой точке $(x, y) \in D$, а следовательно (с учетом условий Коши–Римана), *равны нулю* в области D все частные производные $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$.

Для завершения доказательства остается воспользоваться свойством *соединимости* точек области посредством *ломаных* (с. 107): каковы бы ни были точки $z_0, z_1 \in D$, существует соединяющая их *ломаная* $L \subset D$, каждый из составляющих отрезков которой параллелен одной из осей координат (как на рис. 33, б). На каждом из этих *отрезков* значения $u(x, y)$ и $v(x, y)$ являются функциями только *одной* переменной (x или y), производная по которой *равна нулю* на этом отрезке. Вывод: функции $u = u(x, y)$ и $v = v(x, y)$ являются *постоянными* на каждом отрезке *ломаной*, а следовательно, $f(z_0) = f(z_1)$, т. е. функция $w = f(z)$ в любых двух точках области D принимает *равные* значения. **Q.E.D.**

Вот прямое следствие доказанных условий *постоянства*.

Восстановление аналитической функции по ее действительной (мнимой) части или модулю (аргументу)

|| Аналитическая в области $D \subset \mathbb{C}$ функция $w = f(z)$ восстанавливается¹: а) с точностью до *постоянного слагаемого* по своей *действительной* (или *мнимой*) части; б) с точностью до *постоянного множителя* по своему *модулю* (или *аргументу*, если $f(z) \neq 0$ в области D).

¹ По крайней мере в принципе.

Традиционный способ *практического* восстановления *аналитической* функции $w = f(z)$, например, по ее *действительной* части $u = u(x, y)$ состоит в

1) решении — относительно $v = v(x, y)$ при заданной функции $u = u(x, y)$ — системы уравнений Коши–Римана

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \quad (\text{при этом функция } v = v(x, y) \text{ определяется с точностью до постоянного слагаемого}) \quad \text{и}$$

2) последующей записи функции $w = u(x, y) + iv(x, y)$ в виде $w = f(z)$ (как функции не двух *действительных*, а одной *комплексной* переменной $z = x + iy$).

То, что второй из этих пунктов иногда требует больших усилий, чем первый, видно из примера $u = -2x^4 - 4x^3y + 12x^2y^2 + 4xy^3 - 2y^4$: получить предварительный ответ

$$w = -2x^4 - 4x^3y + 12x^2y^2 + 4xy^3 - 2y^4 + i(x^4 - 8x^3y - 6x^2y^2 + 8xy^3 + y^4 + c)$$

проще, чем окончательный $w = (i - 2)z^4 + ic$.

Более изящный способ восстановления *аналитической* функции по ее *действительной* части описывается следующим утверждением.

Если действительная часть $u = u(x, y)$ аналитической в области $D \subset \mathbb{C}$ функции $w = f(z)$ допускает подстановку $x = \frac{z}{2}$, $y = \frac{z}{2i}$ (т. е. значение $u\left(\frac{z}{2}, \frac{z}{2i}\right)$ определено для всех $z \in D$), то с точностью до постоянного слагаемого

$$f(z) = 2u\left(\frac{z}{2}, \frac{z}{2i}\right)$$

в области D .

Доказательство. Пусть $\tilde{f}(z) \stackrel{\text{def}}{=} 2u\left(\frac{z}{2}, \frac{z}{2i}\right)$, где $z = x + iy$. Тогда (ввиду выполнения для функции $w = f(z)$ условий Коши–Римана)

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x} = 2\left(\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{1}{2} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{1}{2i}\right) = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x},$$

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y} = 2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{i}{2} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{i}{2i} \right) = i \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = i \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Отсюда следует, что $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x} + i \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x} \equiv 0$, а поэтому $w = \tilde{f}(z)$ есть *аналитическая* функция в области D с производной

$$\tilde{f}'(z) = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right) \Big|_{\substack{x=\frac{z}{2} \\ y=\frac{z}{2i}}} = f' \left(\frac{z}{2} + i \frac{z}{2i} \right) = f'(z);$$

так как $[f(z) - \tilde{f}(z)]' \equiv 0$, следует вывод: $f(z) - 2u \left(\frac{z}{2}, \frac{z}{2i} \right) \equiv c$ в области D . **Q.E.D.**

Замечание. Так как $\operatorname{Im} f(z) = \operatorname{Re}(-if(z))$, формула восстановления *аналитической* функции $w = f(z)$ по ее *мнимой части* $v = v(x, y)$ имеет вид $f(z) = 2iv \left(\frac{z}{2}, \frac{z}{2i} \right)$.

Примеры. 1. В разобранном выше случае $f(z) = (i-2)z^4$, когда $u = -2x^4 - 4x^3y + 12x^2y^2 + 4xy^3 - 2y^4$, подстановка $x = \frac{z}{2}$, $y = \frac{z}{2i}$ дает:

$$2u \left(\frac{z}{2}, \frac{z}{2i} \right) = 2 \left(-2 \frac{z^4}{16} - 4 \frac{z^4}{16i} + 12 \frac{z^4}{-16} + 4 \frac{z^4}{-16i} - 2 \frac{z^4}{16} \right) = (i-2)z^4.$$

2. Подстановку $x = \frac{z}{2}$, $y = \frac{z}{2i}$ функция $u = \frac{x}{x^2+y^2}$ ($= \operatorname{Re} \frac{1}{z}$) не допускает (*знаменатель* обращается в *нуль*). Обойти это затруднение позволяет *перенос начала координат* (например, в точку $z=1$) — *замена* $z = \tilde{z} - 1$, или $x = \tilde{x} - 1$, $y = \tilde{y}$, при которой $u = \frac{x}{x^2+y^2} = \frac{\tilde{x}-1}{(\tilde{x}-1)^2 + \tilde{y}^2}$, так что

$$2u \left(\frac{\tilde{z}}{2}, \frac{\tilde{z}}{2i} \right) = \frac{(\tilde{z}/2)-1}{((\tilde{z}/2)-1)^2 + (\tilde{z}/2i)^2} = \frac{\tilde{z}-2}{-\tilde{z}+1} = \frac{z-1}{-z} = \frac{1}{z} - 1.$$

Функцию $u = u(x, y)$ двух *действительных* переменных называют *гармонической* в области $D \subset \mathbb{R}^2$, если в этой области она имеет *непрывные* частные производные 2-го порядка и удовлетворяет *уравнению Лапласа*¹ $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

В записи $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial u}{\partial y} \right)$ это уравнение выражает известный *критерий* того, что $-\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy$ есть *дифференциал* $dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy$

¹ Французский математик, механик и астроном Лаплас (Laplace, Pierre Simon, 1749–1827) оперировал этим уравнением в своих работах по небесной механике.

некоторой функции $v = v(x, y)$ (если не во всей области D , то по крайней мере в *окрестности* каждой ее точки).

Так как в этом случае $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$, а $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$, функция $v = v(x, y)$ также оказывается *гармонической* (а функция $w = u(x, y) + iv(x, y)$ — *аналитической*) по крайней мере в *окрестности* каждой точки области D .¹ В связи с этим функцию $v = v(x, y)$ называют *сопряженной гармонической* по отношению к *гармонической* функции $u = u(x, y)$, а формула $v = 2 \operatorname{Im} u \left(\frac{z}{2}, \frac{\bar{z}}{2i} \right)$ позволяет ее найти (с точностью до *постоянного слагаемого*).

Упражнения. 1. Объяснить, почему $w = \operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z$ — *аналитическая* функция, а $w = (\operatorname{Re} z)^2 + i (\operatorname{Im} z)^2$ — нет.

2. Найти все аналитические функции $w = f(z)$, действительная и мнимая части которых $u = u(x, y)$ и $v = v(x, y)$ связаны *линейным* соотношением $au + bv = c$ (с *постоянными* a, b, c).

3. Проверить, что *график функции* $y = \sin \frac{1}{x}$, $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, дополненный *отрезком* $[-1, 1]$ оси y , является *связным*, но не *линейно связным* множеством на координатной плоскости $\mathbb{R}^2$.

4. Восстановить *аналитическую* функцию $w = f(z)$ по ее *мнимой* части $v = \frac{\operatorname{sh} 2y}{\cos 2x + \operatorname{ch} 2y}$. (Ответ: $f(z) = \operatorname{tg} z$.)

5. Вывести формулу восстановления $f(z) = c \exp \left(2i \varphi \left(\frac{z}{2}, \frac{\bar{z}}{2i} \right) \right)$ аналитической функции $w = f(z)$ по ее *аргументу* $\varphi = \varphi(x, y)$, $z = x + iy$. Проверить ее на примере $\arg f(z) = x^2 + 2xy - y^2$.

6. Проверив, что $u = \ln(x^2 + y^2 + 2x + 1)$ — *гармоническая* функция в области $\mathbb{R}^2 \setminus \{(-1, 0)\}$, найти для нее *сопряженную гармоническую* функцию и убедиться, что она *многозначна* в указанной области.

¹ Во *всей* области D функции $v = v(x, y)$ и $w = u(x, y) + iv(x, y)$ могут оказаться *многозначными*.

VIII. КАК ВВОДИТСЯ ИНТЕГРАЛ ПО КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Интеграл функции комплексной переменной по природе является *контурным*, и потому дать его внятное определение можно, лишь придав четкий смысл понятиям *контура* (*кусочно-гладкого*) на плоскости $\mathbb{C}$ и *пути* его *обхода*. Начать при этом следует с понятия *гладкой дуги*.

Гладкая дуга $L \subset \mathbb{C}$ — это образ некоторого отрезка $[a, b] \subset \mathbb{R}$ при взаимно-однозначном отображении его в плоскость $\mathbb{C}$ комплекснозначной функцией $z = z(t) = x(t) + iy(t)$ (рис. 35), имеющей на этом отрезке непрерывную и не равную нулю производную.¹ Значения $z(a)$, $z(b)$ называют при этом концевыми, а $z(t)$, $a < t < b$, — внутренними точками гладкой дуги L . Число $l(L) \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^b |z'(t)| dt = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$ выражает длину этой гладкой дуги²

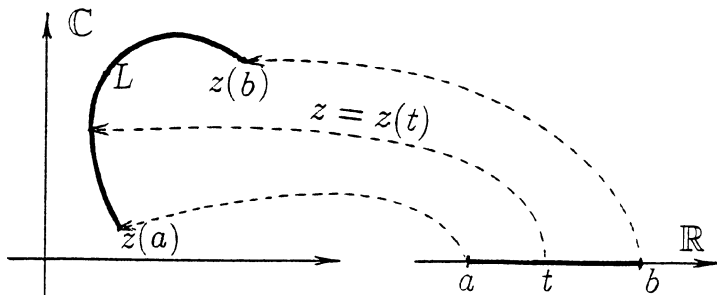


Рис. 35

¹ В этом случае говорят, что функция $z = z(t)$, $a \leq t \leq b$, задает параметризацию гладкой дуги L . На действительной плоскости $\mathbb{R}^2$ эта же гладкая дуга имеет параметризацию $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \quad a \leq t \leq b.$

² Согласно определению из курса *действительного* анализа.

Наглядно, *гладкая дуга* — это прямолинейный отрезок, подвергнутый *обратимой гладкой деформации* — *растяжению и изгибу без разрывов, изломов и склеиваний*. Математическим выражением такого сравнения являются следующие утверждения.

1. Функция $z = z(t)$, $t \in [a, b]$, задающая параметризацию гладкой дуги L , имеет непрерывную обратную: $t = t(z)$, $z \in L$, обладающую непрерывной производной $t'(z)$.¹
2. В каждой точке $z \in L$ гладкая дуга L имеет касательную прямую $\mathcal{L}$, направляющий вектор которой является непрерывной функцией точки касания.

Доказательства. 1. Существование функции $t = t(z)$, $z \in L$, есть следствие взаимно-однозначности отображения $z = z(t)$, $t \in [a, b]$: разным точкам $t \in [a, b]$ соответствуют разные точки $z \in L$.

Функция $t = t(z)$, $z \in L$, непрерывна: для любой последовательности $\{z_n\}$ точек $z_n \in L$, сходящейся к точке $z_0 \in L$, соответствующая последовательность $\{t_n\}$ точек $t_n = t(z_n)$ сходится к точке $t_0 = t(z_0)$.

Если бы это было не так, то у последовательности $\{t_n\}$ существовала бы подпоследовательность $\{t_{n_k}\}$, сходящаяся к некоторой точке $\tilde{t} \in [a, b]$, отличной от t_0 . Тем самым возникало бы противоречие: одновременно $\{z_{n_k}\} \rightarrow z_0$ и $\{z_{n_k}\} = \{z(t_{n_k})\} \rightarrow z(\tilde{t}) \neq z_0$.

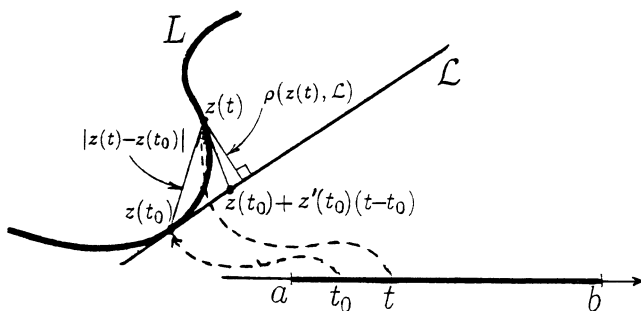


Рис. 36

¹ Величины $|z'(t)|$ и $|t'(z)|$ имеют смысл коэффициентов растяжения (в точках $t \in [a, b]$ и $z \in L$) при деформации отрезка $[a, b]$ в гладкую дугу L и обратно.

$t'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta t}{\Delta z} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta z}{\Delta t} \right)^{-1} = (z'(t))^{-1}$ — с учетом того, что $z'(t) \neq 0$, а $\Delta z \rightarrow 0 \iff \Delta t \rightarrow 0$ (непрерывность функции $t = t(z)$ и $z = z(t)$).

2. Прямая $\mathcal{L}$, проходящая через точку $z_0 = z(t_0)$ в направлении ненулевого вектора $z'(t_0)$, является касательной к гладкой дуге L в точке z_0 : если $\rho(z, \mathcal{L})$ — расстояние от точки $z \in L$ до прямой $\mathcal{L}$, то (рис. 36) $\lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \in L}} \frac{\rho(z, \mathcal{L})}{|z - z_0|} = 0$, так как при $t \rightarrow t_0$ (когда $z \rightarrow z_0$)

$$\frac{\rho(z, \mathcal{L})}{|z - z_0|} \leq \frac{|z(t) - z(t_0) - z'(t_0)(t - t_0)|}{|z(t) - z(t_0)|} = \frac{o(t - t_0)}{|z(t) - z(t_0)|} \rightarrow \frac{0}{|z'(t_0)|}.$$

Ввиду непрерывности зависимости $z'(t)$ от $t \in [a, b]$, а t от $z \in L$ (п. 1), направляющий вектор $z'(t(z_0))$ касательной прямой $\mathcal{L}$ оказывается непрерывной функцией точки касания $z_0 \in L$. **Q.E.D.**

Вот некоторые примеры гладких дуг $L \subset \mathbb{C}$ (вместе с их параметризациями):

1) отрезок прямой, соединяющий точки $z_0, z_1 \in \mathbb{C}$:

$$z = z_0 + (z_1 - z_0)t \quad (\text{или } z = z_1 + (z_0 - z_1)t), \quad t \in [0, 1];$$

2) график функции $y = f(x)$ (или $x = f(y)$), имеющей непрерывную производную на отрезке $[a, b] \subset \mathbb{R}$:

$$z = x + if(x), \quad x \in [a, b], \quad (\text{или } z = f(y) + iy, \quad y \in [a, b]; \text{ рис. 37});$$

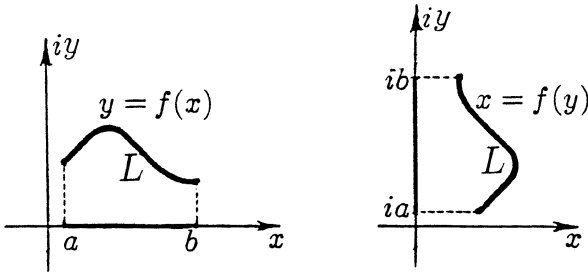


Рис. 37

3) дуга окружности $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\}$ между двумя лучами, выходящими из точки z_0 под углами α и β к действительной оси ($0 < \beta - \alpha < 2\pi$): $z = z_0 + re^{it}$, $t \in [\alpha, \beta]$.

Понятия концевой и внутренней точек гладкой дуги L и значение ее длины $l(L)$ (с.117) не зависят от выбора параметризации этой гладкой дуги, т.е. присущи самой этой гладкой дуге.

Доказательство. Если $z = z(t)$, $t \in [a, b]$, и $z = \zeta(\tau)$, $\tau \in [\alpha, \beta]$, — две параметризации (одной и той же) гладкой дуги L , то композиция функций $z = \zeta(\tau)$ и $t = t(z)$ (обратной к $z = z(t)$; с.118, утверждение 1) приводит к функции $t = t(\zeta(\tau))$ с производной $t'_\tau = t'_z \cdot \zeta'_\tau = (z'_t)^{-1} \zeta'_\tau$, не равной нулю, а следовательно, сохраняющей знак на отрезке $[\alpha, \beta]$. Соответствие $\tau \leftrightarrow t$, $\tau \in [\alpha, \beta]$, $t \in [a, b]$ (рис.38) оказывается поэтому строго монотонным, так что внутренним и концевым точкам отрезка $[\alpha, \beta]$ отвечают, соответственно, внутренние и концевые точки отрезка $[a, b]$, при этом либо $\zeta(\alpha) = z(a)$, а $\zeta(\beta) = z(b)$ (если $t'(\tau) > 0$), либо $\zeta(\alpha) = z(b)$, а $\zeta(\beta) = z(a)$ (если $t'(\tau) < 0$).

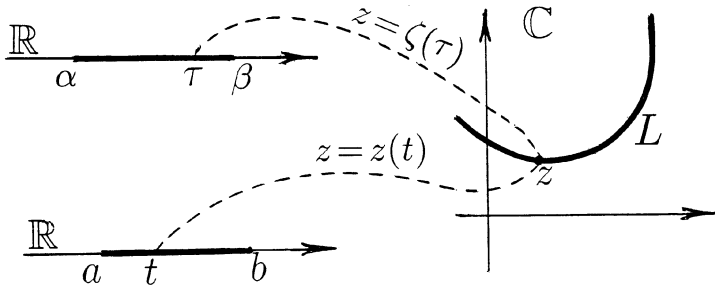


Рис.38

Что касается формулы длины $l(L)$ гладкой дуги, то в первом случае (при $t'(\tau) > 0$)

$$\int_a^b |z'(t)| dt = \int_\alpha^\beta |z'(t(\tau))| t'(\tau) d\tau = \int_\alpha^\beta |z'(t(\tau)) \cdot t'(\tau)| d\tau = \int_\alpha^\beta |\zeta'(\tau)| d\tau,$$

а во втором (когда $t'(\tau) < 0$)

$$\int_a^b |z'(t)| dt = \int_\beta^\alpha |z'(t(\tau))| t'(\tau) d\tau = - \int_\beta^\alpha |z'(t(\tau)) \cdot t'(\tau)| d\tau = \int_\alpha^\beta |\zeta'(\tau)| d\tau. \quad \text{Q.E.D.}$$

Под соединением двух гладких дуг L_1, L_2 понимается наличие у них общей концевой точки; соединение считается

гладким, если существует гладкая дуга $L \subset L_1 \cup L_2$, для которой эта общая концевая точка является внутренней.¹

Разделение гладкой дуги L подразумевает выбор конечного числа ее внутренних точек, каждая из которых становится общей концевой точкой одной из пар образующихся гладких дуг (имеющих в этой точке гладкое соединение).

Ориентированная гладкая дуга — это гладкая дуга L с указанием, какая из двух ее концевых точек принимается за начальную (а какая за конечную), и установлением тем самым порядка следования точек этой гладкой дуги².

Переход к противоположному порядку следования точек ориентированной гладкой дуги L (объявлении ее начальной точки конечной, а конечной — начальной) обозначается черточкой: L^- .

Кусочно-гладкий контур Γ — это либо ориентированная гладкая дуга ($\Gamma = \{L\}$), либо результат последовательного соединения ($\Gamma = \{L_1, \dots, L_n\}$) нескольких ориентированных гладких дуг³, начальная точка первой из которых считается начальной, а конечная точка последней — конечной точкой контура Γ ; в случае совпадения начальной и конечной точек контура его называют замкнутым.

Кусочно-гладкий контур называют гладким, если все соединения составляющих его ориентированных гладких дуг (включая соединение первой и последней у замкнутого контура) являются гладкими.

¹ Результат гладкого соединения двух гладких дуг не обязательно является гладкой дугой. К примеру, окружность есть результат гладкого соединения двух (или большего числа) гладких дуг.

² Если $z = z(t)$, $t \in [a, b]$, — какая-либо параметризация гладкой дуги L , то порядок следования точек $z \in L$ соответствует возрастанию или убыванию $t \in [a, b]$.

³ Для краткости просто дуг. Под их последовательным соединением понимается, что конечная точка дуги L_1 совпадает с начальной точкой дуги L_2 и т. д.

Считается, что два разных набора последовательно соединенных ориентированных гладких дуг $L_1, \dots, L_n$ и $L'_1, \dots, L'_m$ составляют один и тот же кусочно-гладкий контур Γ , если разбиением и соединением составляющих эти наборы сводятся друг к другу (рис. 39).



Рис. 39

Примеры. 1. Оперирруя одной гладкой дугой с двумя противоположными порядками следования точек, можно составить бесконечно много различных кусочно-гладких контуров¹ (не различимых как множества точек; рис. 40, а):

$$\Gamma_1 = \{L\}, \quad \Gamma_2 = \{L^-\}, \quad \Gamma_3 = \{L^-, L\}, \quad \Gamma_4 = \{L, L^-, L\}, \dots$$

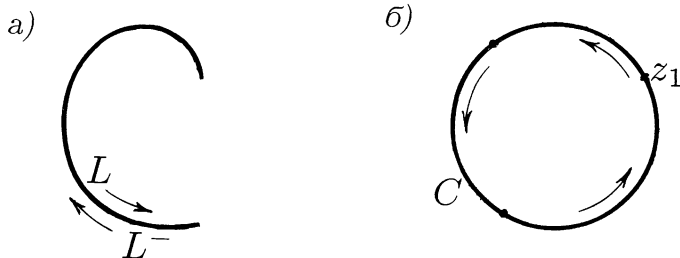


Рис. 40

¹ Как замкнутых, так и незамкнутых.

2. Окружность $C \subset \mathbb{C}$ (любая) является множеством точек необозримого числа кусочно-гладких контуров¹, но обычно подразумевают тот², который выделяет добавление: один раз обходимая (от какой-то точки³) в положительном направлении (“против хода часовой стрелки”; рис. 40, б).

Переход к обратному порядку следования составляющих дуг и точек каждой из них преобразует кусочно-гладкий контур $\Gamma = \{L_1, \dots, L_n\}$ в противоположно ориентированный $\Gamma^- = \{L_n^-, \dots, L_1^-\}$.

Кусочно-гладкий контур $\Gamma = \{L_1, \dots, L_n\}$ есть контур без самопересечений, если из составляющих его дуг любые две несмежные не имеют общих точек, а смежные имеют общими лишь точки их соединения.

Кусочно-гладкий контур Γ , все составляющие дуги которого являются отрезками прямых (ориентированными), называют ломаной (ориентированной; рис. 41, а), а при добавочном условии замкнутости и отсутствия самопересечений — многоугольником (ориентированным; рис. 41, б).

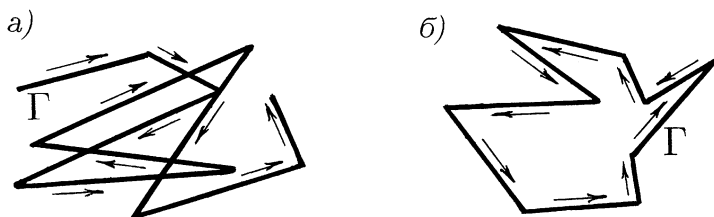


Рис. 41

¹ Не все из которых замкнутые и гладкие.

² Замкнутый гладкий — результат гладкого соединения нескольких ориентированных дуг окружности C без общих внутренних точек.

³ $z_1 \in C$, служащей начальной и конечной для этого контура.

Путь $\gamma : z = z(t)$, $t \in [a, b]$, т.е. непрерывная комплекснозначная функция на отрезке $[a, b] \in \mathbb{R}$ (VII, с. 107) есть путь обхода кусочно-гладкого контура $\Gamma = \{L_1, \dots, L_n\}$, если при возрастании t от a до b значение $z(t)$ этой функции поочередно проходит — в соответствии с их порядком следования — все точки всех составляющих контур Γ дуг.

Путь $\gamma : z = z(t)$, $t \in [a, b]$, считается путем класса C^1 , если функция $z = z(t)$ имеет на отрезке $[a, b]$ непрерывную производную $z'(t)$.¹

Если функция $z = z(t)$, $t \in [a, b]$, задает параметризацию гладкой дуги L (с. 117), то эта же функция задает путь (класса C^1) обхода той же, но уже ориентированной гладкой дуги L (с начальной точкой $z(a)$).

Обратное неверно: путь класса C^1 $z = t|t| + it^2$, $t \in [-1, 1]$, совершающий обход двухзвенной ломаной (рис. 42), не является параметризацией гладкой дуги.

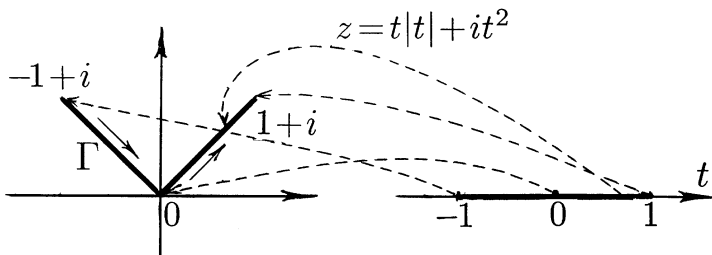


Рис. 42

¹ Эту производную обозначают также $\dot{z}(t)$, поскольку t обычно интерпретируют как *время*, а функцию $z = z(t)$ как зависимость *положения* точки от *времени* (в случае пути класса C^1 — при условии, что *скорость* ее перемещения есть непрерывная функция времени). C^1 — традиционная сокращенная запись требования существования непрерывной (лат. *continuus*) производной (по крайней мере) 1-го порядка.

|| Для любого кусочно-гладкого контура $\Gamma = \{L_1, \dots, L_n\}$ существует путь класса C^1 его обхода.

Доказательство. Пусть параметризацию гладкой дуги L_1 задает функция $z = z_1(\tau)$, $\tau \in [a_1, b_1]$. Можно при этом считать, что ориентация (порядок следования точек) дуги L_1 соответствует возрастанию значений $\tau \in [a_1, b_1]$.¹

Замена переменной $\tau = a_1 + (b_1 - a_1) \sin^2 \frac{t}{2}$, $t \in [0, \pi]$, позволяет заключить: функция $z = z_1(a_1 + (b_1 - a_1) \sin^2 \frac{t}{2})$, $t \in [0, \pi]$, задает путь класса C^1 , осуществляющий обход ориентированной гладкой дуги L_1 (рис. 43) со скоростью

$$\dot{z}(t) = z'_1(a_1 + (b_1 - a_1) \sin^2 \frac{t}{2})(b_1 - a_1) \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2},$$

являющейся непрерывной функцией на отрезке $0 \leq t \leq \pi$, равной нулю в его концевых точках.

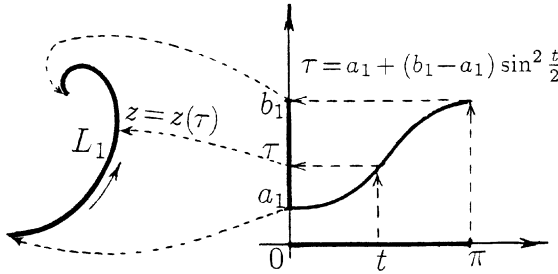


Рис. 43

Поскольку эти же рассуждения применимы и к остальным ориентированным гладким дугам в составе контура Γ , требуемый путь класса C^1 его обхода (включая случай замкнутого контура) задает функция $z = z(t)$, $t \in [0, n\pi]$, где

¹ В противном случае этого можно добиться переходом к параметризации $L_1 : z = z_1(-\tau)$, $\tau \in [-b_1, -a_1]$.

В основе определения *интеграла* функции по кусочно-гладкому контуру лежит понятие *интеграла* функции по отрезку¹; переходным же служит понятие *интеграла* функции *вдоль пути* (класса C^1) на плоскости $\mathbb{C}$, определяемого следующим образом.

Пусть $\gamma : z = z(t)$, $t \in [a, b]$, — путь класса C^1 на плоскости $\mathbb{C}$ (функция действительной переменной, имеющая непрерывную производную $\dot{z}(t)$ на отрезке $[a, b]$). Считая, что этот путь проходит по множеству, на котором задана функция комплексной переменной $w = f(z)$, полагают

$$\int_{\gamma} f(z) dz \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^b f(z(t)) \dot{z}(t) dt,$$

при этом интеграл в правой части заведомо определен, если функция $w = f(z)$ непрерывна на множестве точек пути γ (так как в этом случае подынтегральная функция оказывается непрерывной на отрезке $[a, b]$).

Интеграл функции по кусочно-гладкому контуру Γ понимают как ее *интеграл* по какому-либо пути $\gamma : z = z(t)$, $t \in [a, b]$, класса C^1 , обходящему этот контур² (рис. 44):

$$\boxed{\int_{\Gamma} f(z) dz \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\gamma} f(z) dz \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^b f(z(t)) \dot{z}(t) dt}.$$

В случае замкнутого контура Γ символ интеграла часто

¹ С его обычным определением (по Риману), обозначением $\int_a^b f(x) dx$ и достаточным условием существования в виде требования непрерывности подынтегральной функции на отрезке $[a, b]$.

² То, что для любого кусочно-гладкого контура Γ обходящий его путь γ класса C^1 существует, уже было установлено (с. 125), а то, что от выбора такого пути γ величина $\int_{\Gamma} f(z) dz \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\gamma} f(z) dz$ не зависит, доказывается чуть ниже.

(хотя и не всегда) снабжают кружочком: $\oint_{\Gamma} f(z) dz$.

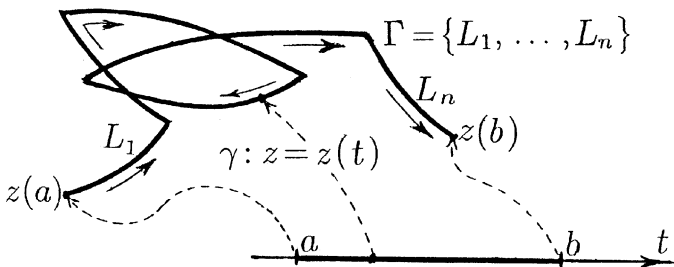


Рис. 44

Из данного определения вытекают следующие свойства величины $\int_{\Gamma} f(z) dz$.

1. *Линейность*: $\int_{\Gamma} (\alpha f(z) + \beta g(z)) dz = \alpha \int_{\Gamma} f(z) dz + \beta \int_{\Gamma} g(z) dz$.
2. *Аддитивность*: $\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{\Gamma_1} f(z) dz + \dots + \int_{\Gamma_m} f(z) dz$, если кусочно-гладкий контур Γ есть результат последовательного соединения кусочно-гладких контуров $\Gamma_1, \dots, \Gamma_m$.¹
3. $\int_{\Gamma^-} f(z) dz = - \int_{\Gamma} f(z) dz$.
4. Значение $\int_{\Gamma} f(z) dz$ не зависит от
 - а) конкретного пути γ (класса C^1) обхода контура Γ ;
 - б) представления контура Γ в виде последовательно соединенных ориентированных гладких дуг (и выбора начальной точки контура в случае его замкнутости).

¹ В их роли могут выступать, например, составляющие контур Γ ориентированные гладкие дуги.

Свойства 1, 2 — следствия линейности и аддитивности обычного интеграла (по отрезку). В частности, если путь (класса C^1) $z = z(t)$, $t \in [a, b]$, обходит контур Γ , а значения $t_1, \dots, t_{m-1} \in (a, b)$, отвечают конечным точкам контуров $\Gamma_1, \dots, \Gamma_{m-1}$ (они же начальные для $\Gamma_2, \dots, \Gamma_m$), то

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} f(z) dz &= \int_a^b f(z(t)) \dot{z}(t) dt = \int_a^{t_1} f(z(t)) \dot{z}(t) dt + \dots + \int_{t_{m-1}}^b f(z(t)) \dot{z}(t) dt = \\ &= \int_{\Gamma_1} f(z) dz + \dots + \int_{\Gamma_m} f(z) dz. \end{aligned}$$

Свойство 3 вытекает из того, что если $z = z(t)$, $t \in [a, b]$, — путь обхода контура Γ , то $z = z(-t)$, $t \in [-b, -a]$, — путь обхода контура Γ^- , так что (с заменой переменной $t = -\tau$)¹

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} f(z) dz &= \int_a^b f(z(t)) \dot{z}(t) dt \stackrel{t=-\tau}{=} \int_{-a}^{-b} f(z(-\tau)) \dot{z}(-\tau)(-1) d\tau = \\ &= \int_{-a}^{-b} f(z(-\tau)) z'(-\tau) d\tau = - \int_{-b}^{-a} f(z(-t)) \dot{z}(-t) dt = - \int_{\Gamma^-} f(z) dz. \end{aligned}$$

Пункт б) свойства 4 вытекает из свойства 2 (аддитивности), позволяющего также при обосновании пункта а) считать контур Γ состоящим лишь из одной (ориентированной) гладкой дуги L .

Пусть $L: z = z(t)$, $t \in [a, b]$, — какая-либо параметризация этой гладкой дуги (с. 117). Эту параметризацию одновременно можно рассматривать и как конкретный путь $\tilde{\gamma}$ (класса C^1), обходящий либо контур Γ (если дуга L ориентирована так, что ее начальной точкой является $z(a)$), либо контур Γ^- (если начальной служит точка $z(b)$). Соответственно этим двум случаям либо

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{\tilde{\gamma}} f(z) dz = \int_a^b f(z(t)) \dot{z}(t) dt,$$

либо

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = - \int_{\Gamma^-} f(z) dz = - \int_{\tilde{\gamma}} f(z) dz = - \int_a^b f(z(t)) \dot{z}(t) dt = \int_b^a f(z(t)) \dot{z}(t) dt.$$

¹ Если считать, что точка над z обозначает производную по t , а штрих — по τ .

Пусть теперь $\gamma : z = \zeta(\tau)$, $\tau \in [\alpha, \beta]$, — какой-либо из путей (класса C^1), обходящих контур Γ . В силу свойства обратимости параметризующей функции (утверждение 1 на с. 118) определена функция $t = t(\zeta(\tau))$, $\tau \in [\alpha, \beta]$, с непрерывной производной $t'(\tau) = \zeta'(\tau)(\dot{z}(t))^{-1}$, причем в первом из отмеченных случаев $t(\alpha) = a$, $t(\beta) = b$, тогда как во втором $t(\alpha) = b$, $t(\beta) = a$. Соответственно этим случаям

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_a^b f(z(t)) \dot{z}(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} f(z(t(\tau))) \dot{z}(t(\tau)) t'(\tau) d\tau = \int_{\alpha}^{\beta} f(\zeta(\tau)) \zeta'(\tau) d\tau,$$

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_b^a f(z(t)) \dot{z}(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} f(z(t(\tau))) \dot{z}(t(\tau)) t'(\tau) d\tau = \int_{\alpha}^{\beta} f(\zeta(\tau)) \zeta'(\tau) d\tau,$$

что и доказывает независимость значения $\int_{\Gamma} f(z) dz \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\gamma} f(z) dz$ от выбора пути γ (класса C^1) обхода контура Γ . **Q.E.D.**

Замечания. 1. Определение величины $\int_{\Gamma} f(z) dz$ распространяется на случай *многозначной* продынтегральной функции (с обозначением $\int_{\Gamma} F(z) dz$) при условии, что контур Γ допускает разделение на участки $\Gamma_1, \dots, \Gamma_m$, на которых определены *однозначные ветви* многозначной функции $w = F(z)$, *продолжающие* друг друга (совпадающие по значениям) в *точках соединения* этих участков: Γ_1 и Γ_2 , $\dots$, Γ_{m-1} и Γ_m . В случае *замкнутого* контура Γ одновременного с этим *совпадения* ветвей в *точке соединения* участков Γ_m и Γ_1 (*начальной* и *конечной* точке контура Γ) обычно не происходит, в силу чего — в противовес свойству 4, пункт б — не исключена зависимость значения $\oint_{\Gamma} F(z) dz$ от выбора *начальной* точки контура Γ (как в примере 3 ниже).

2. В записи $z = x + iy$, $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ величина $\int_{\Gamma} f(z) dz$ принимает вид $\int_{\Gamma} u(x, y) dx - v(x, y) dy + i \int_{\Gamma} v(x, y) dx + u(x, y) dy$ — линейной комбинации *криволинейных интегралов 2-го рода* (на плоскости $\mathbb{R}^2$).

Примеры. 1. Пусть $\Gamma = \{L_1, L_2\}$ — *двухзвенная ломаная*, идущая из точки $-1+i$ в точку $1+i$ через точку 0 (рис. 45, а). С учетом свойств 2, 3 (с. 128) для любой (непрерывной на этой ломаной) функции $w = f(z)$

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{L_1} f(z) dz + \int_{L_2} f(z) dz = - \int_{L_1^-} f(z) dz + \int_{L_2} f(z) dz,$$

а так как в качестве *путей обхода* (класса C^1) *ориентированных отрезков* L_1^- , L_2 можно взять соответственно *функции* $z = (-1+i)t$, $t \in [0, 1]$, и $z = (1+i)t$, $t \in [0, 1]$, то

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = - \int_0^1 f((-1+i)t) (-1+i) dt + \int_0^1 f((1+i)t) (1+i) dt;$$

в частности,

$$\int_{\Gamma} \bar{z} dz = - \int_0^1 \overline{(-1+i)t} (-1+i) dt + \int_0^1 \overline{(1+i)t} (1+i) dt = 0.$$

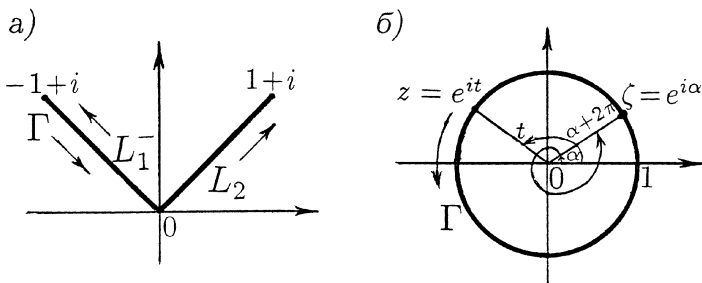


Рис. 45

2. Пусть Γ — *окружность* радиуса 1 с центром 0, *однократно* обходимая от ее точки $\zeta = e^{i\alpha}$ в *положительном* направлении (“против хода часовой стрелки”). Так как за *путь обхода* (класса C^1) этого замкнутого гладкого контура можно взять *функцию* $z = e^{it}$, $t \in [\alpha, \alpha + 2\pi]$ (рис. 45, б), для любой непрерывной на Γ функции $w = f(z)$

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(e^{it}) i e^{it} dt = \int_0^{2\pi} f(e^{it}) i e^{it} dt;$$

последнее равенство (а оно вытекает из 2π -периодичности подынтегральной функции) иллюстрирует *независимость*

интеграла по замкнутому контуру Γ от выбора его начальной точки¹ (служащую оправданием записи $|z|=1$ в качестве символа контура); в частности,

$$\oint_{|z|=1} \operatorname{Re} z dz = \int_0^{2\pi} \cos t (\cos t + i \sin t) i dt = i\pi.$$

3. Пусть Γ — тот же замкнутый гладкий контур, что и в примере 2 (с той же начальной точкой $\zeta = e^{i\alpha}$ и тем же путем $z = e^{it}$, $t \in [\alpha, \alpha + 2\pi]$ его обхода. Если среди множества всех значений $\operatorname{Ln} \zeta = \operatorname{Ln} e^{i\alpha}$ выбрано $i\alpha$, то при любом выборе числа $\beta \in (\alpha, \alpha + 2\pi)$, отвечающем разделению контура Γ на участки Γ_1 (от точки $e^{i\alpha}$ до точки $e^{i\beta}$) и Γ_2 (от точки $e^{i\beta}$ до точки $e^{i(\alpha+2\pi)}$),

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} \operatorname{Ln} z dz &= \int_{\Gamma_1} \ln z dz + \int_{\Gamma_2} \ln z dz = \left(\int_{\alpha}^{\beta} + \int_{\beta}^{\alpha+2\pi} \right) (0 + it)(e^{it})' dt = \\ &= \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} it(e^{it})' dt = ite^{it} \Big|_{t=\alpha}^{t=\alpha+2\pi} - \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} ie^{it} dt = 2\pi ie^{i\alpha} = 2\pi i\zeta; \end{aligned}$$

значение $\oint_{\Gamma} \operatorname{Ln} z dz$ оказывается² зависящим от того, какая точка замкнутого контура Γ взята в качестве начальной.

Пояснение. Вдоль участков Γ_1 и Γ_2 интегрируются две разные ветви логарифма, которые продолжают друг друга в точке $e^{i\beta}$, но не совпадают в точке $\zeta = e^{i\alpha} = e^{i(\alpha+2\pi)}$: для первой из них $\ln \zeta = i\alpha$, тогда как для второй $\ln \zeta = i(\alpha + 2\pi)$. Зависимость значения $\oint_{\Gamma} \operatorname{Ln} z dz$ от выбора начальной точки ζ замкнутого контура Γ объясняется тем, что при замене ее другой, $\zeta' = e^{i\alpha'}$ ($\alpha < \alpha' < \alpha + 2\pi$), на соединяющей их дуге $\zeta\zeta'$ значения подынтегральной функции берутся уже с другой ее ветви — той, для которой на этой дуге $\ln z = it$ с $\alpha + 2\pi \leq t \leq \alpha' + 2\pi$ (а не $\alpha \leq t \leq \alpha'$).

¹ С. 128, свойство 4, б.

² Как о том говорилось в замечании 1 (с. 130).

Оценка интеграла по контуру. Если $|f(z)| \leq h$ на кусочно-гладком контуре Γ (длины $l(\Gamma)^1$), то

$$\left| \int_{\Gamma} f(z) dz \right| \leq h \cdot l(\Gamma).$$

Доказательство. В силу свойства аддитивности (с. 128) достаточно рассмотреть случай, когда контур Γ состоит из одной (ориентированной) гладкой дуги L . Так как функция $z = z(t)$, $t \in [a, b]$, задающая параметризацию (с. 117) этой гладкой дуги, одновременно служит путем (класса C^1) обхода либо самого контура Γ , либо противоположно ориентированного контура Γ^{-} ,²

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Gamma} f(z) dz \right| &= \left| \pm \int_a^b f(z(t)) \dot{z}(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(z(t))| |\dot{z}(t)| dt \leq \\ &\leq \int_a^b h |\dot{z}(t)| dt = h \cdot l(L) \quad (\text{с. 117}). \quad \mathbf{Q.E.D.} \end{aligned}$$

Формула Ньютона – Лёйбница.³ Если кусочно-гладкий контур Γ расположен в области $D \subset \mathbb{C}$, в которой функция $w = f(z)$ непрерывна и имеет первообразную $\varphi(z)$,⁴ то

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \varphi(z^*) - \varphi(z_*),$$

где z_* и z^* — соответственно начальная и конечная точки контура Γ ; в частности, если этот контур замкнут, то

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = 0.$$

¹ Понимаемой как сумма длин составляющих контур Γ гладких дуг.

² Что зависит от того, как ориентирована гладкая дуга L : какая из двух ее концевых точек $z(a)$, $z(b)$ является начальной.

³ Английский математик и физик Ньютон (Newton, Isaac, 1643–1727) и немецкий математик и философ Лёйбниц (правильнее Ляйбниц, Leibniz, Gottfried Wilhelm, 1646–1716) оперировали ей (в случае действительной переменной) еще до оформления понятия интеграла.

⁴ Т. е. $f(z) = \varphi'(z)$ в области D .

Доказательство. Пусть $z = z(t)$, $t \in [a, b]$, — любой путь (класса C^1) обхода контура Γ (с. 125). Согласно определению контурного интеграла (с. 127) и классической формуле Ньютона–Лейбница (для интеграла по отрезку функции действительной переменной)

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} f(z) dz &= \int_{\Gamma} \varphi'(z) dz \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^b \varphi'((z(t)) \dot{z}(t) dt = \int_a^b \frac{d}{dt} \varphi(z(t)) dt = \\ &= \varphi(z(b)) - \varphi(z(a)) = \varphi(z^*) - \varphi(z_*). \quad \mathbf{Q.E.D.} \end{aligned}$$

Замечание. Правую часть формулы Ньютона–Лейбница (разность значений первообразной подынтегральной функции в конечной и начальной точках контура) можно трактовать как приращение первообразной вдоль контура Γ с записью формулы в виде $\int_{\Gamma} f(z) dz = \Delta \varphi|_{\Gamma}$.

Упражнения. 1. Проверить, что взаимно однозначный образ L отрезка $[-1, 1]$ при отображении функцией $z = t^2 + it^3$ не является гладкой дугой, хотя в каждой точке $z \in L$ существует касательная прямая к L , положение которой непрерывно зависит от точки касания.

2. Доказать, что любая гладкая дуга $L \subset \mathbb{C}$ есть либо график функции вида $y = y(x)$, $a \leq x \leq b$, или $x = x(y)$, $c \leq y \leq d$, либо результат гладкого соединения нескольких таких графиков. (Воспользоваться тем, что если функция $z = z(t) = x(t) + iy(t)$, $t \in [a, b]$, задает параметризацию гладкой дуги L , то отрезок $[a, b]$ допускает разбиение на конечное число отрезков, на каждом из которых хотя бы одна из производных $x'(t)$, $y'(t)$ сохраняет знак.)

3. Доказать, что окружность не является гладкой дугой. (Прийти к противоречию, предположив, что непрерывная на отрезке функция $z = z(t)$ взаимно-однозначно отображает его на окружность.)

4. Построить путь класса C^1 , обходящий двухзвенную ломаную, изображенную на рис. 45, а.

5. Выяснить, любой ли путь класса C^1 является путем обхода некоторого кусочно-гладкого контура. (Ответ: нет.)

6. Доказать, что если $\operatorname{Re} z \leq 0$, то $|e^z - 1 - \frac{z}{1!} - \dots - \frac{z^n}{n!}| \leq |z|^{n+1}$. (Применить индукцию по n .)

IX. ЧТО НАЗЫВАЮТ ИНДЕКСОМ ЗАМКНУТОГО КОНТУРА И НА ЧТО ОН УКАЗЫВАЕТ

Важным для дальнейшего примером применения формулы Ньютона–Лейбница (VIII, с. 133) служит вычисление значения $\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{dz}{z-z_0}$, где Γ — замкнутый кусочно-гладкий контур Γ на плоскости $\mathbb{C}$, не проходящий через точку $z_0 \in \mathbb{C}$.

Прямое применение формулы Ньютона–Лейбница здесь затруднено тем, что первообразными для подынтегральной функции служат однозначные ветви $w = \ln(z - z_0)$ многозначной функции $w = \text{Ln}(z - z_0)$ (V, с. 78), а выделить какую-либо из них в области, целиком содержащей контур Γ , можно лишь для отдельных видов контуров¹.

В подобных случаях (когда подынтегральная функция в $\int_{\Gamma} f(z) dz$ имеет “многозначную первообразную” $w = \Phi(z)$) выход состоит в разделении контура Γ на участки (кусочно-гладкие контуры $\Gamma_1, \dots, \Gamma_m$), целиком расположенные в областях $(D_1, \dots, D_m)$, в которых можно выделить однозначные ветви ($w = \varphi_1(z), \dots, w = \varphi_m(z)$) многозначной функции $w = \Phi(z)$ (рис. 46). После этого остается применить формулу Ньютона–Лейбница к каждому участку $\Gamma_1, \dots, \Gamma_m$ и воспользоваться свойством аддитивности (VIII, с. 128):

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \Delta \varphi_1|_{\Gamma_1} + \dots + \Delta \varphi_m|_{\Gamma_m}.$$

Из самого этого равенства следует, что его правая часть не зависит от конкретного разделения контура Γ на участки $\Gamma_1, \dots, \Gamma_m$, равно как от выбора однозначных ветвей $w = \varphi_1(z), \dots, w = \varphi_m(z)$. Если же эти ветви непрерывно

¹ Например, не пересекающих некоторый луч, выходящий из точки z_0 (IV, с. 68).

продолжают друг друга (совпадают в точках соединения участков Γ_1 с $\Gamma_2, \dots, \Gamma_{m-1}$ с Γ_m), то

$$\Delta\varphi_1|_{\Gamma_1} + \dots + \Delta\varphi_m|_{\Gamma_m} = \varphi_m(z^*) - \varphi_1(z_*),$$

(z^* — конечная, а z_* — начальная точки контура Γ)¹, что позволяет придать формуле Ньютона–Лейбница вид

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \Delta\Phi|_{\Gamma},$$

если правую часть понимать именно как $\varphi_m(z^*) - \varphi_1(z_*)$ — суммарное приращение продолжающих друг друга ветвей “многозначной первообразной” вдоль контура Γ .

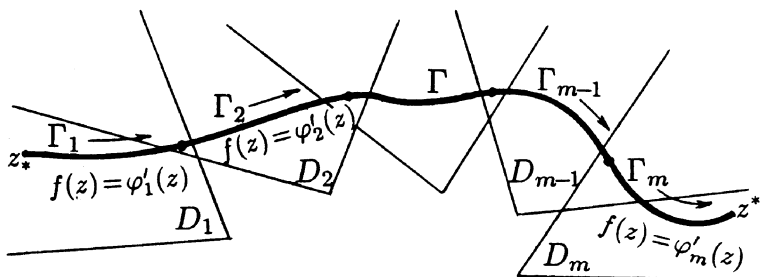


Рис. 46

Возможность упомянутого *разделения* контура — при условии, что он не проходит через *точки ветвления* (IV, с. 62) “многозначной первообразной” $w = \Phi(z)$ подынтегральной функции в $\int_{\Gamma} f(z) dz$, — можно доказать, рассуждая “от противного”.

Пусть $\gamma: z = z(t)$, $t \in [a, b]$, — *путь* (класса C^1) *обхода* контура Γ (VIII, с. 125), и пусть отрезок $[a, b]$ *нельзя* разделить на *конечное* число *отрезков* $[a, t_1], \dots, [t_{m-1}, b]$ с тем, чтобы соответствующие им

¹ При этом в случае $z^* = z_*$ (замкнутого контура) не обязательно $\varphi_m(z^*) = \varphi_1(z_*)$.

участки контура Γ — между точками $z(a)$ и $z(t_1), \dots, z(t_{m-1})$ и $z(b)$ — оказывались в областях, где определены *однозначные ветви* $w = \varphi(z)$ многозначной функции $w = \Phi(z)$.

Разделив отрезок $[a, b]$ пополам, можно утверждать, что по крайней мере один из отрезков $[a, \frac{a+b}{2}]$, $[\frac{a+b}{2}, b]$ (обозначаемый далее $[a_1, b_1]$) обладает тем же свойством: его *нельзя* разделить на *конечное* число отрезков с тем, чтобы соответствующие им *участки* контура Γ оказывались в областях, где определены *однозначные ветви* многозначной функции $w = \Phi(z)$.

Продолжение этого процесса приводит к *стягивающейся* последовательности *вложенных отрезков* $[a, b] \supset [a_1, b_1] \supset \dots \supset [a_n, b_n] \supset \dots$, каждый из которых обладает указанным свойством. Пусть $\hat{t}$ — общая точка этих отрезков и $z(\hat{t})$ — соответствующая ей точка контура Γ . Так как $z(\hat{t})$ не является *точкой ветвления* многозначной функции $w = \Phi(z)$, в некотором *круге* с центром $z(\hat{t})$ определена ее *однозначная ветвь* $w = \varphi(z)$.

Здесь и заключено *противоречие*: с одной стороны, каково бы ни было n , участок контура Γ , соответствующий (при его *обходе* $z = z(t)$, $t \in [a, b]$) значениям t от a_n до b_n , по построению *не может* целиком располагаться в *области*, где определена *однозначная ветвь* $w = \varphi(z)$; с другой стороны, отрезки $[a_n, b_n]$ *стягиваются* к точке $\hat{t}$, а потому соответствующие им участки контура Γ (отвечающие изменению t от a_n до b_n) при достаточно больших значениях n целиком оказываются в упомянутом *круге* (с центром $z(\hat{t})$), в котором *определена* такая *однозначная ветвь*.

В рассматриваемом конкретном случае

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{dz}{z-z_0} &= \frac{1}{2\pi i} \Delta \operatorname{Ln}(z-z_0) \Big|_{\Gamma} = \frac{1}{2\pi i} \Delta (\ln |z-z_0| + i \operatorname{Arg}(z-z_0)) \Big|_{\Gamma} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \Delta \operatorname{Arg}(z-z_0) \Big|_{\Gamma}^1. \end{aligned}$$

Последнее выражение — деленное на 2π *суммарное приращение* продолжающих друг друга *однозначных ветвей* $\varphi = \arg(z-z_0)$ — есть ничто иное как *суммарное число обо-*

¹ $\Delta \ln |z-z_0| \Big|_{\Gamma} = \ln |z^* - z_0| - \ln |z_* - z_0| = 0$, так как контур Γ *замкнут* ($z^* = z_*$), а функция $w = \ln |z-z_0|$ *однозначна*.

ротом¹ вектора $z - z_0$ (вокруг точки z_0) при обходе точки z вдоль замкнутого контура Γ . Это число (а оно заведомо является целым) называют индексом (замкнутого) контура Γ относительно точки z_0 ²:

$$\text{ind}(\Gamma, z_0) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{dz}{z - z_0}.$$

Запись $\text{ind}(\Gamma, z_0) = n$ является, таким образом, *формульным выражением* наглядного представления о том, что замкнутый контур Γ обходит точку z_0 (в общей сложности) n раз в *положительном* направлении (соответственно $|n|$ раз в *отрицательном*, если $n < 0$; рис. 47). Полагают также $\text{ind}(\Gamma, \infty) \stackrel{\text{def}}{=} -\text{ind}(\Gamma, 0)$: *обход* точки 0 одновременно считается *обходом* точки ∞ в *противоположном* направлении.³

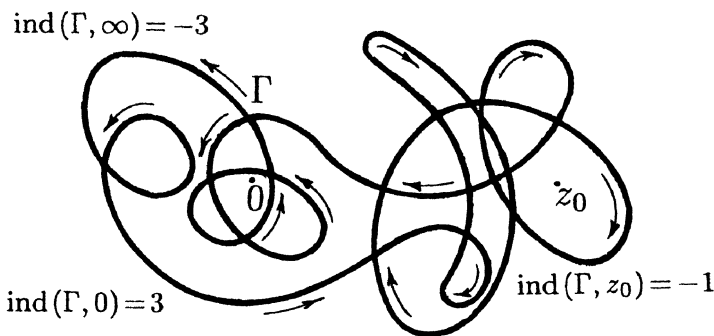


Рис. 47

¹ Обороты “против хода часовой стрелки” считаются со знаком “плюс”, а в противоположном направлении — со знаком “минус”.

² Или индексом точки z_0 относительно контура Γ .

³ Причины этого видны из рассмотрения *сферы Римана* (I, с. 21).

Наглядно понятие *индекса* (относительно точки $z_0 \in \mathbb{C}$) можно определить для любого (не проходящего через эту точку) *замкнутого пути* $\gamma: z = z(t), t \in [a, b]^1$. А именно, $\text{ind}(\gamma, z_0)$ полагается равным *числу оборотов*² вектора $z(t) - z_0$ при возрастании t от a до b , причем в случае пути γ *класса* C^1 выполняется равенство

$$\text{ind}(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0} \quad \left(\stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{\dot{z}(t) dt}{z(t) - z_0} \right).^3$$

В соответствии с этим определением *индекс* замкнутого контура Γ (относительно какой-либо точки z_0) совпадает с *индексом* любого пути γ , осуществляющего *обход* этого контура.

Понятие *индекса* замкнутого контура (хотя и в других терминах и обозначениях) ввел Коши [28] (sér. I, t. 12, p. 222–224; sér. II, t. VI, p. 121). В соответствии с его подходом $\text{ind}(\Gamma, z_0)$ — это взятое с коэффициентом $\frac{1}{2}$ *число перемен знака*⁴ величины $\frac{\text{Re}(z - z_0)}{\text{Im}(z - z_0)}$ в точках обращения ее в *бесконечность* при перемещении z вдоль контура Γ .

Оперируя *индексом* (и формулой *Ньютона–Лейбница*), удобно вычислять интегралы *рациональных* функций — отношений $\frac{p(z)}{q(z)}$ *многочленов* — по не *проходящим* через “особые точки” этих функций (*корни* знаменателей) *замкнутым* кусочно-гладким контурам. Достаточно воспользоваться разложимостью любой *рациональной* функции в сумму *многочлена* и *простых дробей*:

$$\begin{aligned} \frac{p(z)}{q(z)} = p_0(z) + \frac{A_1}{z-a} + \cdots + \frac{A_k}{(z-a)^k} + \frac{B_1}{z-b} + \cdots + \frac{B_m}{(z-b)^m} + \cdots \\ \cdots + \frac{C_1}{z-c} + \cdots + \frac{C_n}{(z-c)^n}; \end{aligned}$$

¹ *Замкнутость* пути γ означает *совпадение* его *начальной* и *конечной* точек: $z(b) = z(a)$.

² При *положительном* их отсчете “против хода часовой стрелки”.

³ Если γ не является *путем класса* C^1 , то этот интеграл может потерять смысл.

⁴ С соглашением считать каждую *перемену знака* с “минуса” на “плюс” за 1, а с “плюса” на “минус” — за -1 .

здесь $a, b, \dots, c$ — корни многочлена $q(z)$ (знаменателя), $k, t, \dots, n$ — кратности этих корней, а $A_1, \dots, C_n$ — комплексные числа¹ (о чем ниже в XIV, с. 225–227).

Так как, исключая лишь дроби $\frac{A_1}{z-a}, \frac{B_1}{z-b}, \dots, \frac{C_1}{z-c}$, все слагаемые разложения имеют в области $\mathbb{C} \setminus \{a, b, \dots, c\}$ первообразные², применение формулы Ньютона–Лейбница (VIII, с. 133) дает: для любого не проходящего через точки $a, b, \dots, c$ замкнутого кусочно-гладкого контура $\Gamma \subset \mathbb{C}$

$$\oint_{\Gamma} \frac{p(z)}{q(z)} dz = \oint_{\Gamma} \frac{A_1}{z-a} dz + \oint_{\Gamma} \frac{B_1}{z-b} dz + \dots + \oint_{\Gamma} \frac{C_1}{z-c} dz =$$

$$= 2\pi i (A_1 \operatorname{ind}(\Gamma, a) + B_1 \operatorname{ind}(\Gamma, b) + \dots + C_1 \operatorname{ind}(\Gamma, c)).$$

Например, для замкнутого кусочно-гладкого контура Γ , изображенного на рис. 48, индексы которого относительно точек $-1, 1, 0$ равны соответственно $-1, 1, 3$,

$$\oint_{\Gamma} \frac{dz}{z(z^2-1)} = \oint_{\Gamma} \left(\frac{1}{2(z-1)} + \frac{1}{2(z+1)} - \frac{1}{z} \right) dz = 2\pi i \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 3 \right).$$

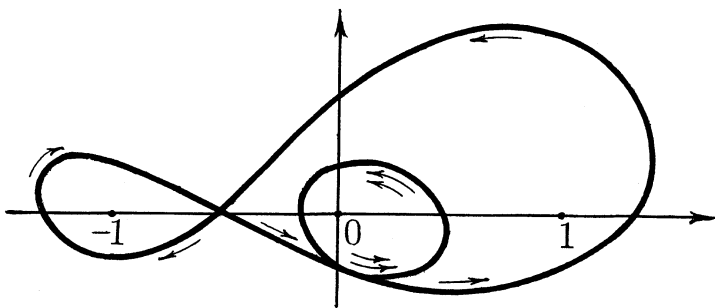


Рис. 48

¹ Обычно находимые методом неопределенных коэффициентов.

² К примеру, $\frac{A_2}{(z-a)^2} = \left(-\frac{A_2}{z-a} \right)'$.

Переходя к свойствам *индекса* замкнутого контура как функции точки, относительно которой он вычисляется, удобнее ввести переобозначение: $\text{ind}(\Gamma, z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{d\zeta}{\zeta - z}$, $z \notin \Gamma$.

|| 1. $\text{ind}(\Gamma^-, z) = -\text{ind}(\Gamma, z)$.

|| 2. $\text{ind}(\Gamma, z) = \text{ind}(\Gamma_1, z) + \text{ind}(\Gamma_2, z)$, если замкнутый контур Γ разделяется на замкнутые контуры Γ_1, Γ_2 .

Оба утверждения — прямые следствия свойств контурных интегралов (VIII, с. 128, свойства 2, 3).

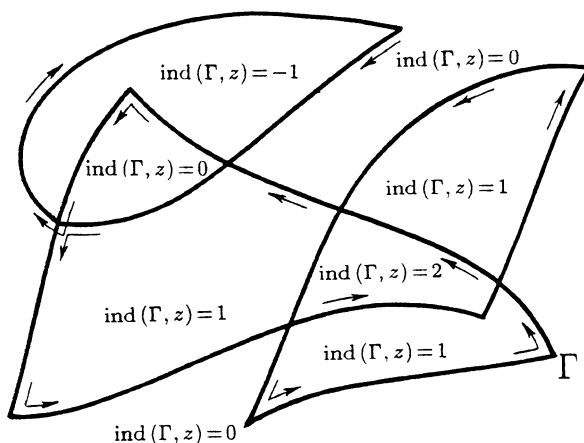


Рис. 49

|| 3. Для любого замкнутого кусочно-гладкого контура Γ значение $\text{ind}(\Gamma, z)$ постоянно в каждой области $D \subset \mathbb{C}$, не содержащей точек контура Γ (рис. 49).

Доказательство. Пусть z — любая точка области D , а K — круг радиуса ρ с центром z , принадлежащий этой области. Для любого ненулевого “вектора приращения” $\Delta z \in \mathbb{C}$ с $|\Delta z| < \frac{\rho}{2}$ (рис. 50)

$$\begin{aligned} \frac{\text{ind}(\Gamma, z+\Delta z) - \text{ind}(\Gamma, z)}{\Delta z} &= \frac{1}{\Delta z} \left(\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{d\zeta}{\zeta - z - \Delta z} - \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{d\zeta}{\zeta - z} \right) = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{d\zeta}{(\zeta - z - \Delta z)(\zeta - z)} = \frac{1}{2\pi i} \left(\oint_{\Gamma} \frac{d\zeta}{(\zeta - z)^2} + \oint_{\Gamma} \frac{\Delta z d\zeta}{(\zeta - z - \Delta z)(\zeta - z)^2} \right), \end{aligned}$$

при этом, поскольку $|\zeta - z| < \rho$, а $|\zeta - z - \Delta z| < \frac{\rho}{2}$, второе слагаемое в скобках по модулю не превосходит величины $|\Delta z| \rho^{-3} 2l(\Gamma)$, где $l(\Gamma)$ — длина контура Γ (VIII, с. 133, оценка интеграла по контуру) и потому стремится к нулю при $\Delta z \rightarrow 0$.

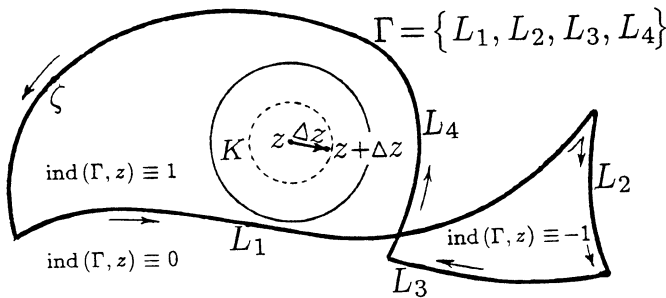


Рис. 50

Это доказывает существование в любой точке $z \in D$ производной

$$(\text{ind}(\Gamma, z))' \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\text{ind}(\Gamma, z+\Delta z) - \text{ind}(\Gamma, z)}{\Delta z} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{d\zeta}{(\zeta - z)^2},$$

равной нулю в силу формулы Ньютона–Лейбница (VIII, с. 133). С учетом первого из условий постоянства аналитической функции в области (VII, с. 112) $\text{ind}(\Gamma, z) \equiv \text{const}$ в области D . **Q.E.D.**

4. Значение индекса любого замкнутого кусочно-гладкого контура относительно любой точки $z \in \mathbb{C}$, лежащей вне окружности, содержащей этот контур, равно нулю.

Доказательство. Если точка $z \in \mathbb{C}$ лежит вне окружности, внутри которой расположен контур Γ , то вектор $\zeta - z$ при обходе точки ζ вдоль контура Γ не совершает ни одного оборота. **Q.E.D.**

5. Если замкнутый кусочно-гладкий контур Γ не имеет самопересечений, то для любой его точки ζ круг достаточно малого радиуса с центром в этой точке разделяется контуром на две области, в которых значения $\text{ind}(\Gamma, z)$ разнятся на 1.

Доказательство. Любой кусочно-гладкий контур Γ на плоскости $\mathbb{C}$ представим в виде результата последовательного соединения *графиков функций* ($y = y(x)$ или $x = x(y)$; VIII, упражнение 2), в силу чего при *отсутствии* у него *самопересечений* он делит *внутренность* любой (достаточно малой) *окружности* с центром в произвольно взятой точке $\zeta \in \Gamma$ на две *области*, лежащие “по разные стороны” от него.

Пусть C — такая *окружность* и пусть точки z_1 и z_2 лежат *внутри* нее “по разные стороны” от *контюра* Γ (рис. 51, а). Замена *части* контюра Γ между точками пересечения его с *окружностью* C *дугами* C' и C'' этой *окружности*, лежащими “по разные стороны” от Γ с точками z_1 и z_2 , преобразует контур Γ в *замкнутые* кусочно-гладкие *контюры* Γ' и Γ'' (рис. 51, б, в). В силу свойства 3 (с. 141)

$$\text{ind}(\Gamma', z_1) = \text{ind}(\Gamma', z_2), \quad \text{ind}(\Gamma'', z_1) = \text{ind}(\Gamma'', z_2);$$

$$\text{ind}(\Gamma', z_1) = \text{ind}(\Gamma, z_1), \quad \text{ind}(\Gamma'', z_2) = \text{ind}(\Gamma, z_2).$$

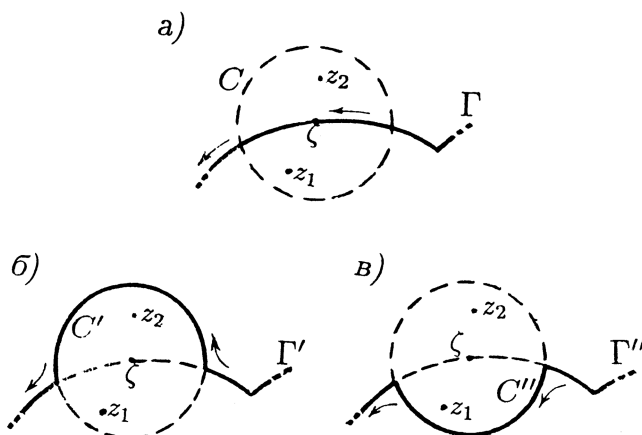


Рис. 51

С другой стороны, в силу свойств 1–2

$$\operatorname{ind}(\Gamma', z_k) - \operatorname{ind}(\Gamma'', z_k) = \operatorname{ind}(C, z_k) = \pm 1, \quad k = 1, 2;$$

окружность C воспринимается здесь как контур $\{C', C''\}$, а знак $\pm$ зависит от расположения точек z_1 и z_2 по отношению к контуру Γ : какая из них лежит “слева”, а какая — “справа” от него.

Сопоставление этих соотношений приводит к требуемому заключению: $\operatorname{ind}(\Gamma, z_1) = \operatorname{ind}(\Gamma, z_2) \pm 1$. **Q.E.D.**

6 (свойство Жордана)¹. Замкнутый и не имеющий самопересечений кусочно-гладкий контур Γ на плоскости $\mathbb{C}$ разделяет ее на две области: ограниченную внутреннюю, обозначаемую $\operatorname{int}\Gamma$, и неограниченную внешнюю — $\operatorname{ext}\Gamma$.² Область $\operatorname{ext}\Gamma$ составляют все те не лежащие на контуре Γ точки $z \in \mathbb{C}$, для которых $\operatorname{ind}(\Gamma, z) = 0$; для всех же точек области $\operatorname{int}\Gamma$ либо $\operatorname{ind}(\Gamma, z) = 1$ (как на рис. 52), либо $\operatorname{ind}(\Gamma, z) = -1$; в первом случае обход контуром Γ области $\operatorname{int}\Gamma$ считают положительным³, а во втором — отрицательным.

Доказательство. Множество точек $z \in \mathbb{C}$, не лежащих на контуре Γ , является открытым⁴, а потому распадается на непересекающиеся области (VII, с. 110).

¹ Французский математик Жордан (Jordan, Camille, 1838–1922) в первом томе своего “Курса анализа” (“Cours d’Analyse de l’École Polytechnique”) на с. 91–98 (издания 1909 г.) впервые представил свойство замкнутой и не пересекающей себя кривой на плоскости разделять ее на две области — внутреннюю и внешнюю — не как “самоочевидный” факт, а как доказываемое математическое утверждение, известное теперь как “теорема Жордана” (некоторое представление о степени ее “очевидности” дает рис. 52).

² Обозначения от лат. *interior* — внутренний и *exterior* — внешний.

³ Наглядно это соответствует тому, что область $\operatorname{int}\Gamma$ при обходе контура Γ остается от него “слева”.

⁴ Если $z = z(t)$, $t \in [a, b]$, — путь обхода контура Γ , а z_0 — не лежащая на этом контуре точка, то $\mu = \inf_{t \in [a, b]} |z_0 - z(t)| > 0$ и круг $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \mu\}$ не содержит точек контура Γ .

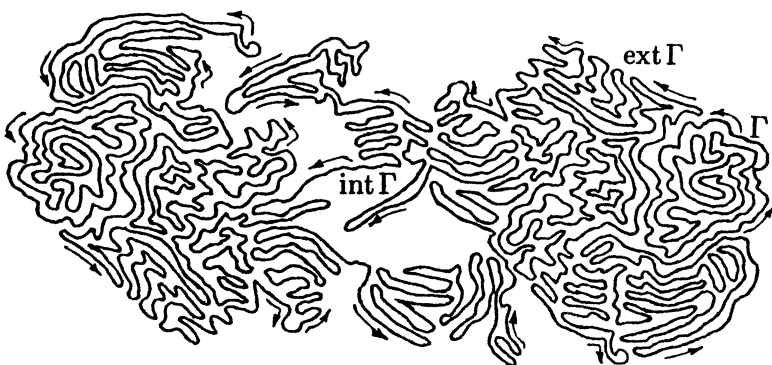


Рис. 52

Существенно, что общими *границными точками* любой пары этих областей могут быть лишь точки контура Γ .

С другой стороны, объединение всех *кругов* с центрами $\zeta \in \Gamma$, о которых шла речь в свойстве 5, само распадается на две *области*, общими *границными точками* которых служат *все точки контура* Γ .

Сопоставляя эти наблюдения, можно сделать следующий вывод: *областей, на которые распадается множество точек $z \in \mathbb{C}$, не лежащих на замкнутом и не имеющем самопересечений кусочно-гладком контуре Γ , имеется ровно две, причем (в силу свойств 3 и 4) для всех точек z одной из этих областей (а именно неограниченной, обозначаемой $\text{ext } \Gamma$) $\text{ind}(\Gamma, z) = 0$. С учетом же свойств 3 и 5 в оставшейся области (ограниченной, обозначаемой $\text{int } \Gamma$) либо $\text{ind}(\Gamma, z) \equiv 1$, либо $\text{ind}(\Gamma, z) \equiv -1$. Q.E.D.*

Замечание. Свойство любого *многоугольника* (замкнутой и несамопересекающейся ломаной) на плоскости разделять ее на две *области* — ограниченную *внутреннюю* и неограниченную *внешнюю* — имеет следующее простое доказательство (взятое из книги Р. Куранта [10], с. 16–17).

Пусть через каждую *точку* $z \in \mathbb{C}$, не лежащую на *многоугольнике* P , проведен *луч* в каком-либо одном направлении, не параллельном ни одной из *сторон* многоугольника. Это приведет к разделению всех

точек $z \in \mathbb{C} \setminus P$ на два множества, Π_0 и Π_1 , для точек z первого из которых число $n = n(z)$ пересечений выходящего из точки z луча с многоугольником P четно, а для второго — нечетно.

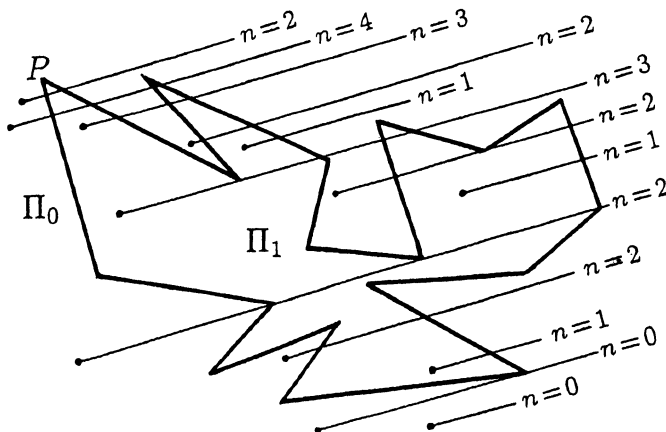


Рис. 53

Если прохождение *луча* через какую-либо *вершину* многоугольника P считать *пересечением* только в том случае, когда выходящие из нее *стороны* многоугольника лежат по *разные* стороны от *луча* (рис. 53), то в некоторой *окрестности* каждой точки $z \in \mathbb{C} \setminus P$ *четность* числа n будет той же, что и в самой этой *точке*. Следовательно, оба множества Π_0 и Π_1 являются *открытыми*, причем их общей *границей* служит многоугольник P (поскольку “по разные стороны” от каждой его *стороны* число n имеет *противоположную* четность).

Если бы какое-то из *открытых* множеств Π_0 и Π_1 распадалось на несколько *непересекающихся* *открытых* множеств, то *границей* каждого из них оказывалась бы некоторая *замкнутая ломаная*, являющаяся *частью* многоугольника P , что невозможно. Оба множества Π_0 и Π_1 являются поэтому *областями*, причем первой принадлежат все точки $z \in \mathbb{C}$ с достаточно большим значением $|z|$. Это и означает, что $\Pi_0 = \text{ext } P$, а $\Pi_1 = \text{int } P$. **Q.E.D.**

Оперируя понятием *индекса* замкнутого контура и имея в виду свойство Жордана, можно решить, например, следующую задачу.

Найти формулу, позволяющую определить, лежит заданная точка $p_0(x_0, y_0)$ координатной плоскости $\mathbb{R}^2$ “на”, “внутри” или “вне” заданного n -угольника P с последовательными вершинами $p_1(x_1, y_1)$, $p_2(x_2, y_2)$, $\dots$, $p_n(x_n, y_n)$ и $p_{n+1}(x_{n+1}, y_{n+1}) = p_1(x_1, y_1)$ (рис. 54).

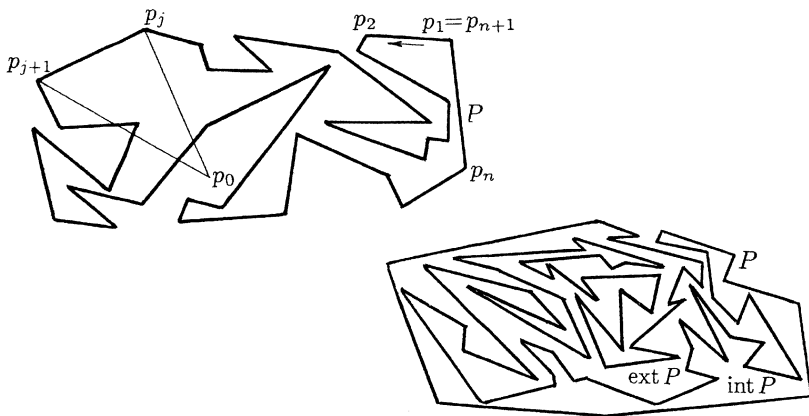


Рис. 54

Решение. Для $j = 1, \dots, n$ пусть $\vec{r}_j = \{x_j - x_0, y_j - y_0\}$ — вектор, ведущий из точки p_0 в точку p_j , а $S_j = \begin{vmatrix} x_j - x_0 & y_j - y_0 \\ x_{j+1} - x_0 & y_{j+1} - y_0 \end{vmatrix}$ — удвоенная площадь треугольника $p_0 p_j p_{j+1}$, взятая со знаком “плюс”, если данный порядок следования вершин соответствует положительному обходу этого треугольника (как на рис. 54), и со знаком “минус” при отрицательном обходе.

Если при каком-то $j = 1, \dots, n$ одновременно выполняются соотношения $S_j = 0$ и $(\vec{r}_j, \vec{r}_{j+1}) \leq 0$, то готов ответ: точка $p_0(x_0, y_0)$ лежит “на” ломаной P , а именно на j -м ее звене (рис. 55, а).

В противном случае, переходя к комплексной плоскости, следует вычислить индекс многоугольника P (ориентированного согласно порядку следования его вершин) относительно точки $p_0 = x_0 + iy_0$, т. е.

число $\text{ind}(P, p_0) = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^n \Delta \varphi_j$, где

$$\Delta\varphi_j = \begin{cases} 0, & \text{если } S_j = 0 \text{ и } (\vec{r}_j, \vec{r}_{j+1}) > 0, \\ \arcsin \frac{S_j}{|\vec{r}_j| \cdot |\vec{r}_{j+1}|}, & \text{если } S_j > 0 \text{ и } (\vec{r}_j, \vec{r}_{j+1}) > 0, \\ \pi - \arcsin \frac{S_j}{|\vec{r}_j| \cdot |\vec{r}_{j+1}|}, & \text{если } S_j > 0 \text{ и } (\vec{r}_j, \vec{r}_{j+1}) \leq 0, \\ -\arcsin \frac{-S_j}{|\vec{r}_j| \cdot |\vec{r}_{j+1}|}, & \text{если } S_j < 0 \text{ и } (\vec{r}_j, \vec{r}_{j+1}) > 0, \\ -\pi + \arcsin \frac{-S_j}{|\vec{r}_j| \cdot |\vec{r}_{j+1}|}, & \text{если } S_j < 0 \text{ и } (\vec{r}_j, \vec{r}_{j+1}) \leq 0 \end{cases}$$

(рис. 55, б, в, г, д, е). Значениями $\text{ind}(P, p_0)$ могут быть лишь 0 и ± 1 . Если $\text{ind}(P, p_0) = 0$, точка p_0 лежит *вне*, а если $\text{ind}(P, p_0) = \pm 1$ — *внутри* многоугольника P .

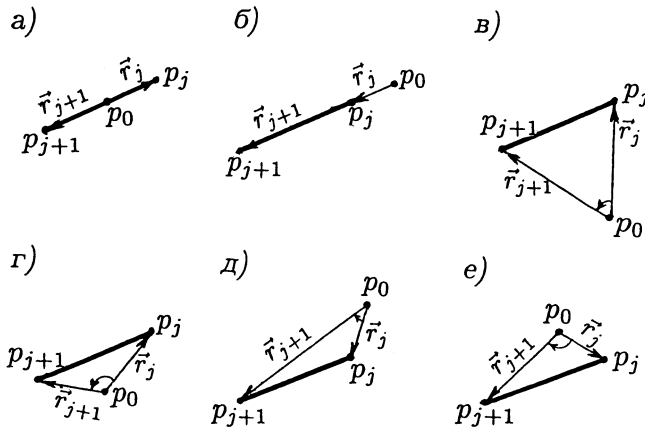


Рис. 55

Упражнения. 1. Изобразить замкнутый *гладкий* контур Γ , индекс которого относительно любой точки $z \notin \Gamma$ равен нулю.

2. Построить замкнутый *кусочно-гладкий* контур Γ , делящий *плоскость* на *бесконечное* число областей, значениями *индекса* контура в которых являются числа 0, 1, -1 .

3. Изобразить замкнутый *гладкий* контур Γ , значениями *индекса* которого являются 0 и два целых числа m и n (например, -2 и 3).

Х. КАКУЮ ОБЛАСТЬ НАЗЫВАЮТ ОДНОСВЯЗНОЙ И ЧТО УТВЕРЖДАЕТ ТЕОРЕМА КОШИ

Границу ∂D области D на плоскости $\mathbb{C}$ (так же, как и на расширенной плоскости $\mathbb{C}^*$) составляют все те точки $z \in \mathbb{C}^*$, которые области D не принадлежат, но в любой окрестности которых есть точки этой области.

Например:

а) граница плоскости $\mathbb{C}$ состоит из одной точки ∞ , плоскость же $\mathbb{C}^*$ границы не имеет: $\partial \mathbb{C} = \{\infty\}$, $\partial \mathbb{C}^* = \emptyset$;

б) границей круга $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$ является окружность $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\}$, в то время как граница кольца $\{z \in \mathbb{C} : \rho < |z - z_0| < r\}$ состоит из двух окружностей: $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = \rho\}$ и $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\}$.

Область D плоскости $\mathbb{C}$ (или плоскости $\mathbb{C}^*$) называют односвязной, если ее граница ∂D является связным множеством¹. Наглядно это означает, что множество ∂D состоит “из одного куска”, а математически — что при любом разделении его на два (непустых) множества хотя бы одно из них будет содержать *предельные точки* другого (к примеру, *круг* — это *односвязная* область, а *кольцо* — нет).

Замечание. Важно иметь в виду следующее. Для *неограниченной* области свойство *быть* (или *не быть*) *односвязной*, вообще говоря, зависит от того, рассматривают эту область на плоскости $\mathbb{C}$ или же на плоскости $\mathbb{C}^*$. В частности, *внешность окружности* (любой) на плоскости $\mathbb{C}^*$ является *односвязной* областью, а на плоскости $\mathbb{C}$ — нет.

Объясняется это тем, что под *внешностью* окружности $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\}$ в этих случаях понимают две *разные*

¹ Понятие *связности* множества обсуждалось в VII на с. 109–110.

области: $\{z \in \mathbb{C}^* : |z - z_0| > r\}$ и $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| > r\}$ — соответственно включающую и не включающую точку ∞ . Границей первой области служит окружность $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\}$, а второй — эта же окружность вместе с бесконечно удаленной точкой. Уяснить это помогает изображение обеих областей на сфере Римана (рис. 56).

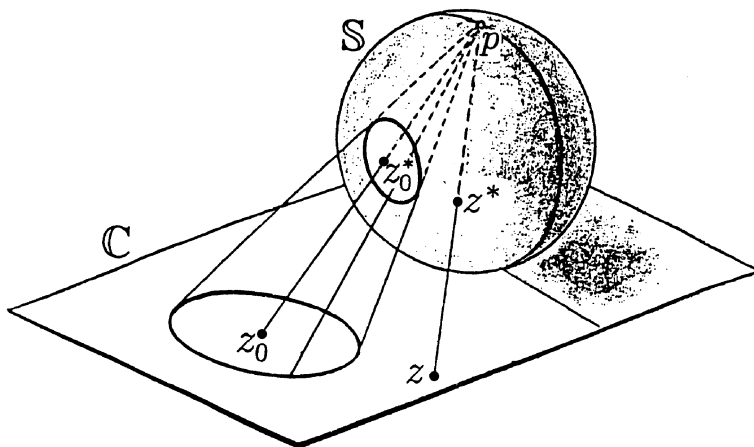


Рис. 56

Следующее свойство *односвязных* областей на плоскости $\mathbb{C}$ говорит об отсутствии у них “проколов” и “дыр”.¹

Если область $D \subset \mathbb{C}$ односвязна, то каков бы ни был расположенный в этой области замкнутый и не имеющий самопересечений кусочно-гладкий контур Γ , внутренняя по отношению к нему область $\text{int } \Gamma$ также принадлежит области D .

¹ Иногда это свойство принимают за определение односвязности области на плоскости $\mathbb{C}$ (но не на плоскости $\mathbb{C}^*$).

Доказательство. Согласно свойству Жордана (IX, с. 144) замкнутый и не имеющий самопересечений кусочно-гладкий контур $\Gamma \subset \mathbb{C}$ разделяет плоскость $\mathbb{C}$ на две области: внутреннюю $\text{int}\Gamma$ и внешнюю $\text{ext}\Gamma$ (по отношению к этому контуру). Если такой контур Γ принадлежит односвязной области D , то (ввиду связности ее границы ∂D) возможны два варианта: либо $\partial D \subset \text{int}\Gamma$, либо $\partial D \subset \text{ext}\Gamma$. Первый вариант невозможен: в этом случае точка ∞ принадлежала бы области D , тогда как по условию $D \subset \mathbb{C}$. Остается второй вариант: $\text{int}\Gamma \subset D$. **Q.E.D.**

Следующее утверждение играет центральную роль в теории функций комплексной переменной.

Теорема Коши. Если в односвязной области $D \subset \mathbb{C}$ функция $w = f(z)$ является аналитической, то для любого кусочно-гладкого контура Γ , целиком лежащего в области D , интеграл $\int_{\Gamma} f(z) dz$ зависит лишь от начальной и конечной

точек этого контура¹ и равен нулю, если контур Γ замкнут. Утверждение теоремы остается в силе, если в конечном числе точек $z_1, \dots, z_k \in D$ функция $w = f(z)$ не определена², но имеет в этих точках конечные пределы³.

Доказательство теоремы будет проведено по следующей схеме. Сначала (лемма 1) устанавливается равенство нулю интеграла по любому (расположенному в области D) тре-

¹ Т. е. не изменяется при замене его другим (также расположенным в области D), но с теми же начальной и конечной точками. Контур Γ при этом может быть сколь угодно сложно устроенным — как контур на рис. 52 (IX, с. 145) или иметь бесконечное число самопересечений.

² Или ее аналитичность в них не установлена.

³ Полагая в этом случае $f(z_j) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{z \rightarrow z_j} f(z)$, $j = 1, \dots, k$, функцию $w = f(z)$ можно считать непрерывной во всей области D , в силу чего допустимо прохождение контура Γ через точки $z_1, \dots, z_k$.

угольнику, затем (лемма 2) — по любой замкнутой ломаной, откуда (лемма 3) выводится фундаментальный факт:

|| Любая функция, аналитическая в односвязной области $D \subset \mathbb{C}$, имеет в этой области первообразную,

после чего остается применить формулу Ньютона–Лейбница (VIII, с. 133).

Перед формулировкой и доказательством лемм несколько замечаний.

1. Допущение утраты функцией аналитичности в конечном числе точек (при условии существования в них конечных пределов) не раз продемонстрирует свою эффективность в дальнейшем.

2. Впервые эта теорема с (так и не выполненным) обещанием сообщить ее доказательство встречается в письме Гаусса к Бесселю¹, датированном 18 декабря 1811 г.: “Я утверждаю теперь, что интеграл $\int \varphi x \cdot dx$ по двум разным путям всегда сохраняет одно и то же значение, если нигде внутри пространства, заключенного между представляющими эти пути линиями, φx не равно ∞ . Это очень красивая теорема, совсем не трудное доказательство которой я сообщу при случае.”²

3. Первое опубликованное доказательство этой теоремы интересующиеся могут найти на с. 5–6 выпущенного в 1825 г. мемуара Коши [27]³. На самом деле Коши титулом “теорема” это утверждение не снабдил, а представил его как следующее наблюдение: “Предположим теперь, что функция $f(x+y\sqrt{-1})$ остается конечной и непрерывной всякий раз, когда x остается в пределах между x_0, X , а y между y_0, Y . В этом случае легко доказать, что значение интеграла

¹ Bessel, Friedrich Wilhelm (1784–1846) — немецкий астроном и математик (изучал, в частности, функции, позднее названные его именем).

² В оригинале: “Ich behaupte nun, dass das Integral $\int \varphi x \cdot dx$ nach zweien verschieden Übergängen immer einerlei Werth erhalte, wenn innerhalb des zwischen beiden die Übergänge repräsentirenden Linien eingeschlossenen Flächenraumes nirgends $\varphi x = \infty$ wird. Dies ist ein sehr schöner Lehrsatz, dessen eben nicht schweren Beweis ich bei einer schicklichen Gelegenheit geben werde.” ([33], Bd. VIII, S. 91).

³ Или на с. 44–45 его перепечатки в [28] (sér. II, t. XV).

$$\int_{x_0+y_0\sqrt{-1}}^{X+Y\sqrt{-1}} f(z) dz = \int_{t_0}^T (\varphi'(t) + \sqrt{-1}\chi'(t)) f(\varphi(t) + \sqrt{-1}\chi(t)) dt$$

не зависит от вида непрерывных функций $x = \varphi(t)$, $y = \chi(t)$ (переменной t от t_0 до T), подчиненных условиям $\begin{cases} \varphi(t_0) = x_0, & \chi(t_0) = y_0, \\ \varphi(T) = X, & \chi(T) = Y. \end{cases}$ ¹

Обосновывая это наблюдение, Коши использует прием, известный из *вариационного исчисления*: придание функциям $x = \varphi(t)$, $y = \chi(t)$ “приращений” порядка ε приводит к изменению интеграла на величину порядка ε^2 , а следовательно, переход к функциям $x = \tilde{\varphi}(t)$, $y = \tilde{\chi}(t)$ за n шагов (с “приращениями” $\frac{1}{n}(\tilde{\varphi}(t) - \varphi(t))$, $\frac{1}{n}(\tilde{\chi}(t) - \chi(t))$ каждый) дает изменение интеграла на величину порядка $\frac{1}{n}$, т. е. (в силу произвольности n) равную нулю.

Существенно, что выдвигая условие *непрерывности* подынтегральной функции, Коши в своих рассуждениях на самом деле оперирует *непрерывностью* ее *производной*².

4. Первое доказательство *теоремы Коши*, не требующее (как в рассуждениях самого Коши) *непрерывности* производной подынтегральной функции, а опирающееся лишь на ее *существование*, было дано в конце XIX в. французским математиком Гурса³. Следует, однако, заметить, что у Гурса (как порой и у современных авторов) понятие *контура* оказывается недостаточно внятным — с наглядным представлением его в виде “не слишком извилистой линии” (не допускающей, например, такого “неприятного” явления, как *бесконечное* число пересечений с некоторой прямой⁴).

5. Среди накопившихся за почти два века доказательств *теоремы Коши* наиболее популярное, но вместе с тем и наименее удовлетвори-

¹ “Concevons maintenant que la fonction $f(x+y\sqrt{-1})$ reste finie et continue, toutes les fois que x reste comprise entre les limites x_0, X , et y entre les limites y_0, Y . Dans ce cas particulier, on prouvera facilement ...”

² То же в отношении *задающих обход* функций $x = \varphi(t)$, $y = \chi(t)$.

³ Goursat, Édouard (1858–1936): Acta Math., 1884, v. 4, p. 197–200; Trans. Amer. Math. Soc., 1900, v. 1, p. 14–16; [5], § 279, с. 66–69.

⁴ Что свойственно *графику функции* $y = \begin{cases} x^\alpha \sin \frac{1}{x}, & \text{если } 0 < x \leq 1, \\ 0, & \text{если } x = 0, \end{cases}$

являющемуся при $\alpha > 2$ *гладкой дугой*.

тельное в смысле аргументации состоит в соединении формулы Грина (из курса *действительного* анализа) с условиями Коши–Римана (V, с. 73) по схеме:

$$\begin{aligned}\oint_{\Gamma} f(z) dz &= \oint_{\Gamma} (u+iv)(dx+idy) = \oint_{\Gamma} u dx - v dy + i \oint_{\Gamma} v dx + u dy = \\ &= - \iint_{\text{int } \Gamma} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy + i \iint_{\text{int } \Gamma} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy = 0.\end{aligned}$$

Считать полноценным это “доказательство” не позволяет не только необходимость дополнительно предполагать *непрерывность* частных производных $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$, (или, что то же самое, производной $f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}$ подынтегральной функции), но и узость класса допустимых *контуров интегрирования* Γ — тех, для которых применение формулы Грина можно считать *обоснованным*¹.

Лемма 1 (об интеграле по треугольнику).² Если функция $w = f(z)$ имеет производную $f'(z)$ в любой точке треугольника³ $T \subset \mathbb{C}$ и внутри него, то $\oint_T f(z) dz = 0$.

Утверждение сохраняет силу, если в конечном числе точек $z_1, \dots, z_k$ (на или внутри треугольника) условие существования производной заменить условием существования конечных пределов $\lim_{z \rightarrow z_j} f(z)$, $j = 1, \dots, k$.

Доказательство. Пусть функция $w = f(z)$ имеет производную $f'(z)$ во всех точках (на и внутри) треугольника T и пусть (вопреки заключению леммы) $\left| \oint_T f(z) dz \right| =$

¹ Не секрет, что “вывод” формулы Грина в курсах действительного анализа является, мягко говоря, несовершенным: вместо доказательства предлагается разбор “непроблемных” частных случаев (с неосновательным утверждением о сводимости к ним *общего*).

² Впервые была опубликована в журнале Trans. Amer. Math. Soc. за 1901 г. (v. 2, p. 420) немецким математиком Прингсхаймом (Pringsheim, Alfred, 1850–1941).

³ *Замкнутой трезвенной ломаной* (не имеющей самопересечений), ориентированной одним из двух возможных способов.

$= c > 0$. Стороны треугольника T вместе с его средними линиями образуют четыре треугольника, сумма интегралов по которым, если считать, что все треугольники ориентированы одинаково (например, “против хода часовой стрелки”; рис. 57, а), равна интегралу по исходному треугольнику T .

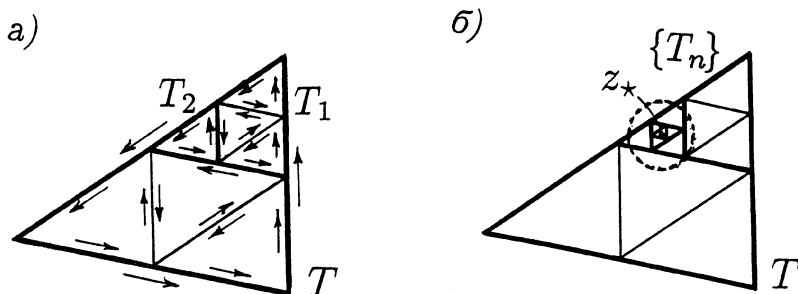


Рис. 57

Среди этих *четырёх* треугольников, *периметр* каждого из которых равен *половине* периметра p исходного треугольника, есть *по крайней мере один*, обозначаемый T_1 , для которого $\left| \oint_{T_1} f(z) dz \right| \geq \frac{c}{4}$.

Эти же действия с треугольником T_1 приводят к треугольнику T_2 периметра $\frac{p}{2}$, для которого $\left| \oint_{T_2} f(z) dz \right| \geq \frac{c}{4^2}$, а их продолжение — к *последовательности* $\{T_n\}$ *треугольников* T_n периметров $\frac{p}{2^n}$, для которых $\left| \oint_{T_n} f(z) dz \right| \geq \frac{c}{4^n}$. Так как *проекции* треугольников T_n на *стороны* треугольника T образуют *стягивающиеся* последовательности *вложенных отрезков*,

существует (*единственная*) точка z_* (не выходящая за пределы *треугольника* T), δ -окрестность которой (для сколь угодно малого числа $\delta > 0$) содержит *все* треугольники T_n , начиная с некоторого (зависящего от числа δ) номера n_0 (рис. 57, б).

Существование *производной* $f'(z_*) = \lim_{z \rightarrow z_*} \frac{f(z) - f(z_*)}{z - z_*}$ означает, что для *сколь угодно малого* числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что при $0 < |z - z_*| < \delta$ выполняется неравенство $\left| \frac{f(z) - f(z_*)}{z - z_*} - f'(z_*) \right| < \varepsilon$, или, что равносильно, неравенство $|f(z) - f(z_*) - f'(z_*)(z - z_*)| < \varepsilon |z - z_*|$.

С учетом того, что $\oint_{T_n} [f(z_*) + f'(z_*)(z - z_*)] dz = 0$ (так как подынтегральная функция имеет *первообразную* в плоскости $\mathbb{C}$), и что все *треугольники* T_n (начиная с некоторого номера n_0) попадают в δ -окрестность точки z_* и имеют периметры $\frac{p}{2^n}$,

$$\left| \oint_{T_n} f(z) dz \right| = \left| \oint_{T_n} [f(z) - f(z_*) - f'(z_*)(z - z_*)] dz \right| \leq \left(\varepsilon \frac{p}{2 \cdot 2^n} \right) \frac{p}{2^n}$$

(IX, с. 114, оценка интеграла по контуру).

Как следствие, $\frac{c}{4^n} \leq \left| \oint_{T_n} f(z) dz \right| < \varepsilon \frac{p^2}{4^n}$, а потому $\frac{c}{p^2} < \varepsilon$ для *любого* $\varepsilon > 0$, что *невозможно* при $c > 0$. Предположение $\oint_T f(z) dz \neq 0$ оказывается поэтому *ложным*.

Пусть теперь функция $w = f(z)$ имеет производную $f'(z)$ во всех точках *треугольника* T (и внутри него) за исключением точек $z_1, \dots, z_k$, в которых, однако, существуют *конечные пределы* $\lim_{z \rightarrow z_j} f(z)$, $j = 1, \dots, k$. Разделяя *треугольник* T *отрезками* *прямых* на меньшие *треугольники*, число $\oint_T f(z) dz$ можно представлять как *сумму интегралов* по *треугольникам*, каждый из которых содержит *не более одной* из точек $z_1, \dots, z_k$ и

лишь в одной из *вершин*. Интеграл же по каждому такому треугольнику в свою очередь может быть представлен как сумма *трех интегралов*: по двум треугольникам, не содержащим эту точку (а по доказанному оба эти интеграла *равны нулю*), и интегралу по треугольнику, периметр которого можно считать *сколь угодно малым*, для которого указанная точка является *вершиной*. Так как в окрестности этой точки подынтегральная функция (в силу существования *конечного предела*) является *ограниченной*, сумма этих трех интегралов оказывается (по модулю) *сколь угодно малой*, а потому *равной нулю*. Как следствие $\oint_T f(z) dz = 0$. **Q.E.D.**

Лемма 2 (об интегралах по замкнутым ломаным)¹. Если функция $w = f(z)$ в односвязной области $D \subset \mathbb{C}$ обладает тем свойством, что ее интеграл $\oint_T f(z) dz$ по любому лежащему в области D треугольнику T равен нулю, то равен нулю и ее интеграл $\oint_P f(z) dz$ по любой замкнутой ломаной P , лежащей в области D .

Доказательство. Какова бы ни была замкнутая ломаная $P \subset D$, число $\oint_P f(z) dz$ есть либо интеграл по *многоугольнику*, принадлежащему области D (ввиду ее *односвязности*) вместе со своей *внутренностью*, либо *сумма интегралов* по таким *многоугольникам*.

Вот доказательство этого последнего утверждения.

Можно считать, что звенья замкнутой ломаной $P \subset D$ не имеют *общих отрезков*: в противном случае каждый из них *при повторном его прохождении* можно заменить (не выходя за пределы области D) *двухзвенной ломаной*, звенья которой не *параллельны* остальным

¹ Склонным принять эту лемму без доказательства стоит ответить на вопрос, зачем в ее условии требуется *односвязность* области.

звеньям ломаной P (рис. 58, а). Согласно условию леммы (равенству нулю интеграла по любому *треугольнику*) при такой замене ломаной P значение $\oint_P f(z) dz$ остается неизменным, отсутствие же *общих* отрезков у звеньев ломаной P гарантирует *конечность* числа точек ее самопересечения.

Если у замкнутой ломаной P вообще нет точек самопересечения, то эта ломаная есть *многоугольник*. Если же у замкнутой ломаной P есть точки самопересечения, то принимая любую ее точку за начальную, можно указать последнюю точку z^* этой замкнутой ломаной из числа тех, которые при ее обходе (от выбранной начальной точки) встречаются *еще один раз*.

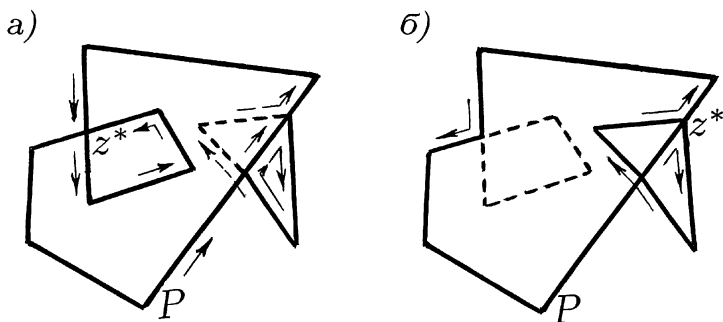


Рис. 58

Участок замкнутой ломаной P от предпоследнего до последнего прохождения точки z^* есть замкнутая ломаная, не имеющая самопересечений, т. е. *многоугольник*. Остающаяся после отделения этого *многоугольника* часть замкнутой ломаной P есть замкнутая ломаная с меньшим (чем у P) числом звеньев (рис. 58, б), к которой (если она еще не оказывается *многоугольником*) можно применить уже проведенные рассуждения.

Для доказательства леммы достаточно поэтому доказать, что $\oint_P f(z)dz = 0$ для любого многоугольника $P \subset D$.

Если многоугольник P выпуклый (а это означает, что ограничиваемая им часть плоскости с каждой парой точек содержит и отрезок, их соединяющий), то $\oint_P f(z)dz = 0$ как сумма равных нулю (по условию леммы) интегралов по принадлежащим области D треугольникам, которые образуют со сторонами многоугольника P отрезки прямых, соединяющие произвольно взятую точку z_0 внутри многоугольника P с его вершинами (рис. 59, а).

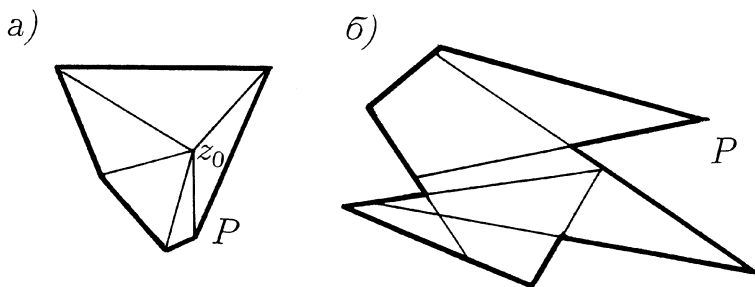


Рис. 59

Если же многоугольник P не является выпуклым, то $\oint_P f(z)dz = 0$ как сумма равных нулю (как только что было установлено) интегралов по выпуклым многоугольникам, образуемым сторонами многоугольника P и их продолжениями внутрь него (рис. 59, б). **Q.E.D.**

Лемма 3 (о существовании первообразной). Если в области¹ $D \subset \mathbb{C}$ функция $w = f(z)$ является непрерывной,

¹ Не обязательно односвязной.

и ее интеграл по любой замкнутой ломаной $P \subset D$ равен нулю, то у этой функции в области D есть первообразная функция: $f(z) = \varphi'(z)$, $z \in D$.

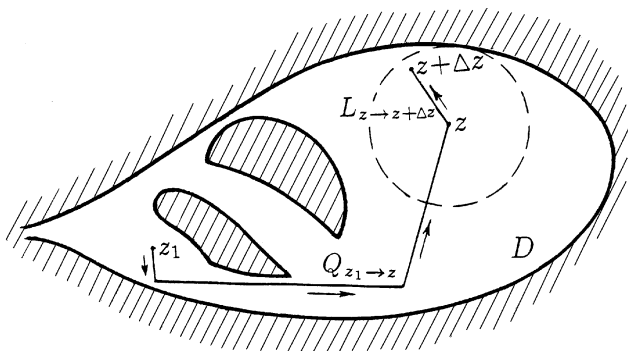


Рис. 60

Доказательство. Для фиксированной точки z_1 и переменной точки z области D пусть $\varphi(z) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{Q_{z_1 \rightarrow z}} f(\zeta) d\zeta$, где

$Q_{z_1 \rightarrow z}$ — любая ломаная, расположенная в области D и ведущая из точки z_1 в точку z (рис. 60). Факт существования такой ломаной вытекает из свойства линейной связности областей (VII, с. 107), а то, что значение $\varphi(z)$ определено для каждой точки $z \in D$ единственным образом (т.е. не зависит от выбора конкретной ломаной $Q_{z_1 \rightarrow z} \subset D$) — из условия леммы¹. Остается доказать, что определяемая ра-

¹ Если $\tilde{Q}_{z_1 \rightarrow z}$ — любая другая ломаная, принадлежащая области D и ведущая из точки z_1 в точку z , то результат ее продолжения ломаной $(Q_{z_1 \rightarrow z})^-$ есть замкнутая ломаная $P \subset D$, интеграл по которой, с одной стороны, есть разность интегралов по ломаным $\tilde{Q}_{z_1 \rightarrow z}$ и $Q_{z_1 \rightarrow z}$ (VIII, с. 128, свойства 2 и 3), а с другой — равен нулю по условию леммы.

венством $\varphi(z) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{Q_{z_1 \rightarrow z}} f(\zeta) d\zeta$ функция в самом деле служит

первообразной по отношению к подынтегральной¹.

Так как функция $w = f(z)$ непрерывна в области D , для произвольно взятых точки $z \in D$ и числа $\varepsilon > 0$ существует круг с центром z , в пределах которого значения этой функции отличаются от ее значения в центре данного круга меньше, чем на ε . Если δ — радиус этого круга, а Δz — любое ненулевое комплексное число (“вектор приращения”) с $|\Delta z| < \delta$, то по определению значения $\varphi(z)$

$$\varphi(z + \Delta z) - \varphi(z) = \int_{Q_{z_1 \rightarrow z + \Delta z}} f(\zeta) d\zeta - \int_{Q_{z_1 \rightarrow z}} f(\zeta) d\zeta = \int_{L_{z \rightarrow z + \Delta z}} f(\zeta) d\zeta,$$

где $L_{z \rightarrow z + \Delta z}$ — отрезок прямой с начальной точкой z и конечной $z + \Delta z$: так как значение $\varphi(z + \Delta z) = \int_{Q_{z_1 \rightarrow z + \Delta z}} f(\zeta) d\zeta$ не

зависит от выбора ломаной $Q_{z_1 \rightarrow z + \Delta z} \subset D$, можно считать, что этой ломаной служит ломаная $Q_{z_1 \rightarrow z}$, продолженная отрезком $L_{z \rightarrow z + \Delta z}$. Поскольку $\zeta = z + t\Delta z$, $t \in [0, 1]$, — путь обхода этого отрезка,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta z} (\varphi(z + \Delta z) - \varphi(z)) &= \frac{1}{\Delta z} \int_{L_{z \rightarrow z + \Delta z}} f(\zeta) d\zeta = \frac{1}{\Delta z} \int_0^1 f(z + t\Delta z) \Delta z dt = \\ &= \int_0^1 [f(z + t\Delta z) - f(z)] dt + f(z), \end{aligned}$$

а так как $|f(z + t\Delta z) - f(z)| < \varepsilon$, выполняются неравенства

$$\left| \frac{\varphi(z + \Delta z) - \varphi(z)}{\Delta z} - f(z) \right| \leq \int_0^1 |f(z + t\Delta z) - f(z)| dt < \varepsilon,$$

из которых следует, что в любой точке $z \in D$ существует $\varphi'(z) = f(z)$. **Q.E.D.**

¹ Если бы определяющий значение $\varphi(z)$ интеграл зависел от выбора ломаной $Q_{z_1 \rightarrow z}$, то он задавал бы в области D многозначную функцию.

Соединение установленных лемм с формулой Ньютона–Лейбница завершает доказательство теоремы Коши.

Замечание. Пример функции $w = \frac{1}{z - z_0}$, аналитической в области $D = \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$, показывает, что на *неодносвязные* области $D \subset \mathbb{C}$ теорема Коши не распространяется.

Теорема Коши допускает различные переформулировки и обобщения; в частности, бывает удобен следующий ее вариант для специального типа *односвязных* областей.

Область $D \subset \mathbb{C}$ называется звёздной, если существует точка $z_\star \in D$ с тем свойством, что при перемещении точки ζ вдоль границы области D точки $z_\star + \lambda(\zeta - z_\star)$, $0 \leq \lambda < 1$, остаются в пределах этой области (рис. 61).

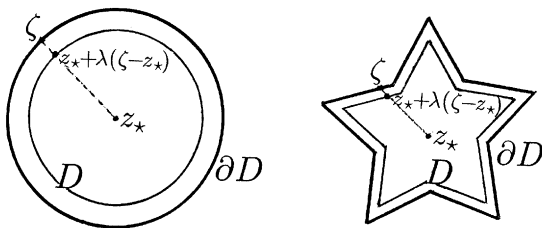


Рис. 61

Теорема Коши об интеграле по границе звёздной области. Если точки замкнутого кусочно-гладкого контура Γ составляют границу ∂D звёздной области $D \subset \mathbb{C}$, то для любой функции $w = f(z)$, аналитической в этой области и непрерывной вплоть до ее границы¹, $\oint_{\Gamma} f(z) dz = 0$.

¹ Т. е. непрерывной на замыкании $\overline{D} = D \cup \partial D$ области D .

Доказательство. Пусть область D является звёздной относительно точки z_* и пусть $\gamma : z = z(t), t \in [a, b]$, — путь (класса C^1) обхода контура Γ . Тогда при любом выборе числа $\lambda \in (0, 1)$ функция $z = z_* + \lambda(z(t) - z_*)$, $t \in [a, b]$, задает путь $\gamma^{(\lambda)}$ (класса C^1) обхода “гомотетичного” контура Γ замкнутого кусочно-гладкого контура $\Gamma^{(\lambda)}$, целиком лежащего в области D (ввиду ее звёздности относительно точки z_* ; рис. 62).

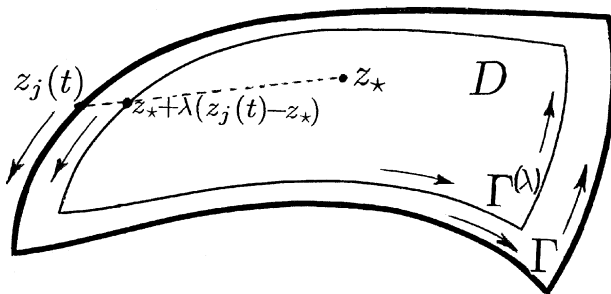


Рис. 62

Поскольку область D односвязна¹, применение теоремы Коши дает: $\oint_{\Gamma^{(\lambda)}} f(z) dz = 0$. Остается поэтому доказать, что

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = \lim_{\lambda \rightarrow 1-0} \oint_{\Gamma^{(\lambda)}} f(z) dz, \text{ для чего следует оценить величину}$$

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz - \oint_{\Gamma^{(\lambda)}} f(z) dz = \int_a^b f(z(t)) z'(t) dt - \int_a^b f(z_* + \lambda(z(t) - z_*)) \lambda z'(t) dt:$$

¹ Ее границей служит связное (VII, с. 109–110) множество точек контура Γ (VIII, с. 126).

$$\left| \int_{\Gamma} f(z) dz - \int_{\Gamma(\lambda)} f(z) dz \right| \leq \left| (1-\lambda) \int_a^b f(z(t)) z'(t) dt \right| + \\ + \left| \lambda \int_a^b [f(z(t)) - f(z_* + \lambda(z(t) - z_*))] z'(t) dt \right|,$$

при этом *первое* слагаемое в правой части есть ничто иное как $(1-\lambda) \left| \int_{\Gamma} f(z) dz \right|$ и потому *стремится к 0* при $\lambda \rightarrow 1-0$; *второе*

же слагаемое *стремится к 0* при $\lambda \rightarrow 1-0$ ввиду

а) *ограниченности* как задающей путь γ (класса C^1) функции $z = z(t)$, так и ее *производной*:

$$\exists h > 0 \forall t (t \in [a, b] \implies |z(t)| \leq h \wedge |z'(t)| \leq h);$$

б) *непрерывности*, а потому и *равномерной непрерывности* функции $w = f(z)$ на замкнутом и ограниченном множестве $\overline{D} = D \cup \partial D$:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall z_1 \forall z_2 (z_1 \in \overline{D} \wedge z_2 \in \overline{D} \wedge |z_1 - z_2| < \delta \implies \\ \implies |f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon),$$

следовательно, если число λ *достаточно близко к 1*, то

$$|z(t) - (z_* + \lambda(z(t) - z_*))| = (1-\lambda)|z(t) - z_*| \leq (1-\lambda)(h + |z_*|) < \delta,$$

а потому $|f(z(t)) - f(z_* + \lambda(z(t) - z_*))| < \varepsilon$ для всех $t \in [a, b]$, в силу чего

$$\left| \lambda \int_a^b [f(z(t)) - f(z_* + \lambda(z(t) - z_*))] z'(t) dt \right| \leq \varepsilon h (b-a).$$

Упражнение. Показать (на примере функции $w = (z - z_0)^{-1}$ в кольце $\{z \in \mathbb{C}: 1 < |z - z_0| < 2\}$), что для *неодносвязной* области утверждение леммы об интегралах по замкнутым ломаным (с. 157) может оказаться *неверным*.

XI. ЧТО ВЫРАЖАЕТ ИНТЕГРАЛЬНАЯ ФОРМУЛА КОШИ И КАКОВЫ СВОЙСТВА ИНТЕГРАЛА КОШИ

Теорема Коши вместе с понятием *индекса* замкнутого контура (IX, с. 135) приводят к следующему утверждению.

Интегральная формула Коши.¹ Если в односвязной области $D \subset \mathbb{C}$ функция $w = f(z)$ является аналитической, то для любого расположенного в этой области замкнутого кусочно-гладкого контура Γ и любой не лежащей на этом контуре точки $z_0 \in D$ справедливо равенство

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = f(z_0) \cdot \text{ind}(\Gamma, z_0);$$

в частности, если контур Γ не имеет самопересечений, а обход им внутренней по отношению к нему области $\text{int } \Gamma$ является положительным (IX, с. 144; рис. 63), то

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \begin{cases} f(z_0), & \text{если } z_0 \in \text{int } \Gamma, \\ 0, & \text{если } z_0 \in \text{ext } \Gamma \end{cases}.$$

Доказательство. Функция $w = \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ в односвязной области $D \subset \mathbb{C}$ является аналитической, исключая точку z_0 , в которой она не определена, но имеет конечный предел: $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0)$. По теореме Коши (X, с. 151)

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz - \frac{f(z_0)}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{dz}{z - z_0} = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz - f(z_0) \cdot \text{ind}(\Gamma, z_0). \quad \mathbf{Q.E.D.} \end{aligned}$$

Смена обозначений (z на ζ , а z_0 на z) приводит к следующей переформулировке доказанного утверждения.

¹ Была получена Коши в 1831 г. ([28], sér. II, t. XV, p. 449).

Если замкнутый кусочно-гладкий контур Γ расположен в односвязной области $D \subset \mathbb{C}$, в которой функция $w = f(z)$ является аналитической, то в не лежащих на контуре Γ точках $z \in D$, для которых $\text{ind}(\Gamma, z) \neq 0$, значения $f(z)$ этой функции восстанавливаются по ее значениям $f(\zeta)$ на контуре Γ посредством интегральной формулы Коши

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = f(z) \cdot \text{ind}(\Gamma, z).$$

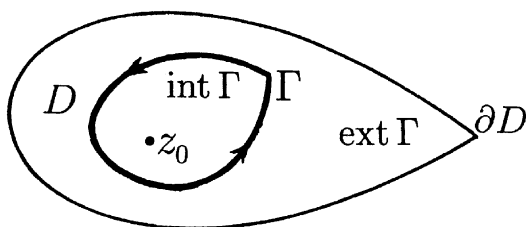


Рис. 63

Существенно, что левая часть интегральной формулы Коши имеет смысл и в более общих предположениях, нежели те, при которых была получена эта формула. А именно, если Γ — кусочно-гладкий контур (не обязательно замкнутый), а $w = \varphi(\zeta)$ — непрерывная на этом контуре функция, то в не лежащих на контуре Γ точках $z \in \mathbb{C}$ определены значения интеграла Коши¹ $\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$ функции $w = \varphi(\zeta)$.

¹ Термин из заметки итальянского математика Морэры (сноска ² на с. 173) “Intorno all’integrale di Cauchy” (“Об интеграле Коши”) в Rendiconti Reale Istituto Lombardo, ser. II, v. XXII, 1889, p. 191–200.

Левая часть интегральной формулы Коши (в записи на с. 166) является *частным случаем интеграла Коши*, когда:

а) Γ — *замкнутый* кусочно-гладкий контур, целиком расположенный в *односвязной* области $D \subset \mathbb{C}$, в которой задана *аналитическая* функция $w = f(z)$;

б) в качестве $\varphi(\zeta)$ берутся значения $f(\zeta)$ этой *аналитической* функции на этом контуре;

при этом интеграл Коши *восстанавливает*¹ уже заданную в *односвязной* области $D \subset \mathbb{C}$ *аналитическую* функцию $w = f(z)$ по ее значениям на (*замкнутом*) контуре Γ .

В *общем* же случае интеграл Коши $\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$ по заданной на контуре Γ функции $w = \varphi(\zeta)$ *определяет*² новую функцию $f(z) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$ (при этом контур Γ не обязан быть *замкнутым*, а заданная на нем функция $w = \varphi(\zeta)$ — *аналитической*).

С целью оттенить это различие, термин *интеграл Коши* некоторые относят исключительно к левой части *интегральной формулы Коши* (с. 166), *восстанавливающей* заданную *аналитическую* функцию по ее значениям на *замкнутом* контуре. Сходную же по виду правую часть равенства $f(z) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$, *определяющего* по заданной на контуре Γ (не обязательно *замкнутом*) *непрерывной* функции $w = \varphi(z)$ (не обязательно *аналитической*) *новую функцию* $w = f(z)$, предпочитают называть *интегралом типа Коши*, вовсе не желая выразить тем пренебрежение к великому математику, а лишь сокращая более длинное название *интеграл типа интеграла Коши*.

Фундаментальную роль играет следующее свойство *интеграла Коши* (или *типа Коши*).

¹ В тех точках $z \in D$, относительно которых $\text{ind}(\Gamma, z) \neq 0$.

² В точках $z \in \mathbb{C}$, не лежащих на контуре Γ .

Теорема о производных интеграла Коши. *Интеграл Коши $f(z) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$ непрерывной на кусочно-гладком контуре $\Gamma \subset \mathbb{C}$ функции $w = \varphi(\zeta)$ определяет вне этого контура¹ аналитическую функцию $w = f(z)$, имеющую производные $f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} d\zeta$ всех порядков.*

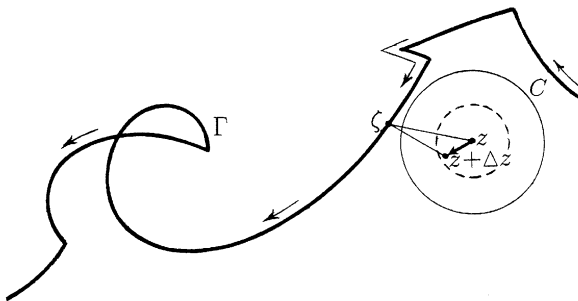


Рис. 64

Доказательство. Пусть z — не лежащая на контуре Γ точка плоскости $\mathbb{C}$, C — окружность (радиуса r) с центром z , не захватывающая точек контура Γ (VIII, с. 126) и Δz — ненулевое комплексное число с $|\Delta z| < \frac{r}{2}$ (рис. 64).

$$\begin{aligned} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} &= \frac{1}{\Delta z} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z - \Delta z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \right) = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z - \Delta z)(\zeta - z)} d\zeta = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\zeta)\Delta z}{(\zeta - z - \Delta z)(\zeta - z)^2} d\zeta. \end{aligned}$$

¹ Точнее, в каждой области, на которые распадается множество не лежащих на контуре Γ точек $z \in \mathbb{C}$.

В силу непрерывности на контуре Γ функция $w = \varphi(\zeta)$ является на нем ограниченной ($|\varphi(\zeta)| \leq h$). С другой стороны, $|\zeta - z| > r$ и $|\zeta - z - \Delta z| > \frac{r}{2}$ для всех точек ζ контура Γ . Как следствие (VIII, с. 133, оценка интеграла по контуру) модуль второго слагаемого в правой части предыдущей системы равенств не превосходит величины $\frac{1}{2\pi} \frac{2}{r} \frac{1}{r^2} h |\Delta z| l(\Gamma)$, где $l(\Gamma)$ — длина контура Γ . Поскольку эта величина стремится к нулю при $\Delta z \rightarrow 0$, следует вывод: в любой точке $z \in \mathbb{C}$, не лежащей на контуре Γ , интеграл Коши (точнее, определяемая им функция) $f(z) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$ имеет производную $f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta$ и потому является аналитической функцией в любой области $D \subset \mathbb{C}$, не содержащей точек контура Γ .

Доказать, что эта функция на самом деле имеет в любой точке $z \notin \Gamma$ производную $f^{(k)}(z)$ любого порядка k можно либо рассуждениями по этой же схеме (но с возрастающими техническими сложностями), либо опираясь на следующую лемму.

Лемма о производной интеграла по параметру. Если Γ и D — соответственно кусочно-гладкий контур и область на плоскости $\mathbb{C}$ (или двух различных ее экземплярах), а функция $w = \psi(\zeta, z)$, $\zeta \in \Gamma$, $z \in D$, является

- а) непрерывной (по ζ) на контуре Γ при любом $z \in D$;
- б) аналитической (по z) в области D при любом $\zeta \in \Gamma$,

то интеграл $\int_{\Gamma} \psi(\zeta, z) d\zeta$ является (по переменной z) аналитической функцией в области D , при этом

$$\left(\int_{\Gamma} \psi(\zeta, z) d\zeta \right)' = \int_{\Gamma} \psi'_z(\zeta, z) d\zeta.$$

Доказательство леммы.¹ Для произвольно взятой точки $z \in D$ пусть K — круг с центром z , принадлежащий области D ; C — концентрическая окружность радиуса r , меньшего, чем радиус круга K ; Δz — любое комплексное число (“вектор приращения”), для которого $0 < |\Delta z| < \frac{r}{2}$ (как на рис. 64).

Если аналитическую функцию $w = \psi(\zeta, z)$ (переменной z при фиксированной точке $\zeta \in \Gamma$) рассматривать не во всей области D (которая может быть неодносвязной), а лишь в круге K , то применение к ней интегральной формулы Коши с окружностью C (один раз обходимой в положительном направлении) в качестве контура интегрирования дает:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta z} \left(\int_{\Gamma} \psi(\zeta, z + \Delta z) d\zeta - \int_{\Gamma} \psi(\zeta, z) d\zeta \right) &= \\ &= \frac{1}{\Delta z} \int_{\Gamma} \frac{1}{2\pi i} \left(\oint_C \frac{\psi(\zeta, \omega)}{\omega - z - \Delta z} d\omega - \oint_C \frac{\psi(\zeta, \omega)}{\omega - z} d\omega \right) d\zeta = \\ &= \int_{\Gamma} \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{\psi(\zeta, \omega)}{(\omega - z - \Delta z)(\omega - z)} d\omega d\zeta = \\ &= \int_{\Gamma} \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{\psi(\zeta, \omega)}{(\omega - z)^2} d\omega d\zeta + \int_{\Gamma} \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{\psi(\zeta, \omega) \Delta z}{(\omega - z - \Delta z)(\omega - z)^2} d\omega d\zeta. \end{aligned}$$

Первое слагаемое в последней сумме есть (согласно уже установленной формуле производной интеграла Коши) ничто иное как $\int_{\Gamma} \psi'_z(\zeta, z) d\zeta$, второе же по модулю не больше величины $\frac{1}{2\pi} \frac{2}{r} \frac{1}{r^2} h |\Delta z| l(C) l(\Gamma)$, где $l(C)$ и $l(\Gamma)$ — длины соответственно окружности C и контура Γ , а h — верхняя граница значений $|\psi(\zeta, \omega)|$ на замкнутом и ограниченном

¹ Для наглядности (и ввиду особой важности этого случая) область D можно считать множеством точек $z \in \mathbb{C}$, не лежащих на контуре Γ (или одной из областей, на которые распадается это множество).

множестве *совокупного* изменения переменных $\zeta \in \Gamma$, $\omega \in C$.

Этим установлено, что для любой точки z области D существует

$$\begin{aligned} \left(\int_{\Gamma} \psi(\zeta, z) d\zeta \right)' &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta z} \left(\int_{\Gamma} \psi(\zeta, z + \Delta z) d\zeta - \int_{\Gamma} \psi(\zeta, z) d\zeta \right) = \\ &= \int_{\Gamma} \psi'_z(\zeta, z) d\zeta. \quad \mathbf{Q.E.D.} \end{aligned}$$

Завершить доказательство *теоремы* можно последовательным применением доказанной *леммы*, полагая на *первом* шаге в ее условии $\psi(\zeta, z) = \frac{1}{2\pi i} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z}$ ¹ и получая (повторно, но на сей раз как следствие *леммы*) результат:

$$f'(z) = \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \right)' = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \left(\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z} \right)' d\zeta = \frac{1!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta.$$

Рассуждая далее по индукции, т. е. считая уже установленным факт существования

$$f^{(k-1)}(z) = \frac{(k-1)!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z)^k} d\zeta,$$

достаточно применить *лемму* с $\psi(\zeta, z) = \frac{(k-1)!}{2\pi i} \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z)^k}$, доказав в результате существование

$$\begin{aligned} f^{(k)}(z) &= \left(\frac{(k-1)!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z)^k} d\zeta \right)' = \frac{(k-1)!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \left(\frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z)^k} \right)' d\zeta = \\ &= \frac{k!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} d\zeta. \quad \mathbf{Q.E.D.} \end{aligned}$$

Соединение доказанной *теоремы* и *интегральной формулы Коши* приводит к следующему фундаментальному свойству *аналитических функций*.

¹ Считая, что ζ пробегает контур Γ , а z — любую не пересекающуюся с ним область D .

Теорема о производных аналитической функции.

Если функция $w = f(z)$ является аналитической в области $D \subset \mathbb{C}$ (т. е. имеет производную $f'(z)$ в любой точке $z \in D$), то она имеет в области D производные всех порядков¹; в случае, если область D является односвязной, справедлива формула Коши для производных:

$$f^{(k)}(z) \cdot \text{ind}(\Gamma, z) = \frac{k!}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} d\zeta, \quad z \in D, \quad k = 1, 2, \dots,$$

где в качестве Γ может быть взят любой не проходящий через точку $z \in D$ замкнутый кусочно-гладкий контур, целиком расположенный в области D .

Доказательство. Для произвольно взятой точки z области D пусть K — круг с центром z , принадлежащий этой области, а C — любая концентрическая окружность меньшего радиуса. Применение к аналитической функции $w = f(z)$ в круге K (а не во всей области D , которая может быть не односвязной) интегральной формулы Коши с окружностью C в качестве контура (считая ее однократно обходимой в положительном направлении) дает представление этой функции внутри окружности C в виде интеграла Коши: $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$, $z \in \text{int } C$. Остается при-

менить теорему о производных интеграла Коши: правая (а потому и левая) часть последней формулы имеет внутри окружности C (с центром в произвольно взятой точке области D) производные всех порядков $f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_C \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} d\zeta$.

В случае односвязной области D вместо окружности

¹ В этом состоит принципиальное различие функций действительной и комплексной переменных: функция действительной переменной может иметь на интервале (области на прямой) первую производную, но не иметь следующих (пример: $y = x|x|$ с $y' = 2|x|$).

C (с центром в произвольно взятой точке $z \in D$) можно взять любой (не проходящий через эту точку) замкнутый кусочно-гладкий контур $\Gamma \subset D$ и, применив вначале интегральную формулу Коши, а затем теорему о производных интеграла Коши с учетом свойства постоянства индекса замкнутого контура¹, последовательно получить:

$$f(z) \cdot \text{ind}(\Gamma, z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta,$$

$$f^{(k)}(z) \cdot \text{ind}(\Gamma, z) = \frac{k!}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} d\zeta, \quad k = 1, 2, \dots \quad \text{Q.E.D.}$$

Теорема Морэры.² Если в области³ $D \subset \mathbb{C}$ функция $w = f(z)$ непрерывна и для любого замкнутого кусочно-гладкого контура Γ (лежащего в области D) $\oint_{\Gamma} f(z) dz = 0$,⁴ то функция $w = f(z)$ является аналитической в области D .

Доказательство. Если выполнены условия теоремы, то в силу леммы о существовании первообразной (IX, с. 159) функция $w = f(z)$ имеет в области D первообразную: $f(z) = \varphi'(z)$, $z \in D$. Функция $w = \varphi(z)$, имея в области D производную $\varphi'(z) = f(z)$, является аналитической в этой области и по теореме о производных аналитической функции (с. 172) имеет в ней производные всех порядков. Следовательно, производные всех порядков имеет в области D и функция $w = f(z) = \varphi'(z)$. **Q.E.D.**

¹ В любой области, не содержащей точек этого контура (IX, с. 141), а следовательно, в окрестности каждой не лежащей на нем точки.

² Итальянский математик Морэра (Morera, Giacinto, 1856–1909) опубликовал ее в 1886 г. (в Rendiconti Reale Istituto Lombardo, ser. II, t. XIX, p. 304–307) как “обратную к теореме Коши” (“l’inverso del teorema di Cauchy”).

³ Не обязательно односвязной.

⁴ На самом деле достаточно, чтобы равнялся нулю интеграл этой функции по любой замкнутой ломаной в области D .

Последовательность функций $\{f_n(z)\}$ считают¹ сходящейся равномерно внутри области D к функции $w = f(z)$, если для любого замкнутого круга $\overline{K} \subset D$ и любого положительного числа ε существует такое (зависящее от круга $\overline{K}$ и числа ε) натуральное число n_0 , что при $n \geq n_0$ неравенство $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$ оказывается выполненным сразу для всех точек $z \in \overline{K}$.

Символически данное определение выражается формулой

$$\forall z_0 \forall r > 0 ((z_0 \in D \wedge \forall z (|z - z_0| \leq r \implies z \in D)) \implies \\ \implies \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n \forall z (n \geq n_0 \wedge |z - z_0| \leq r \implies |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon)).$$

Теорема Вейерштрасса (о последовательностях аналитических функций).² *Если последовательность $\{f_n(z)\}$ функций, аналитических в области D , сходится равномерно внутри этой области к функции $w = f(z)$, то*

а) $w = f(z)$ — аналитическая функция в области D ;

б) для любого $k = 1, 2, \dots$ последовательность производных $\{f_n^{(k)}(z)\}$ сходится к производной $f^{(k)}(z)$ предельной функции равномерно внутри области D .

Доказательство. Пусть K_0 — любой принадлежащий области D круг, z_0 — его центр, $\overline{K}$ — замкнутый концентрический круг меньшего радиуса, C — ограничивающая круг $\overline{K}$ окружность (рис. 65, а). В силу неравенства $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$ (выполняющегося для всех точек $z \in \overline{K}$ при $n \geq n_0(\overline{K}, \varepsilon)$) и неравенства

$$|f(z) - f(\zeta)| \leq |f(z) - f_n(z)| + |f_n(z) - f_n(\zeta)| + |f_n(\zeta) - f(\zeta)|$$

¹ Основываясь на определении Вейерштрасса того, что ряд $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(z)$ (т. е. последовательность $f_0(z), f_0(z) + f_1(z), f_0(z) + f_1(z) + f_2(z), \dots$) функций сходится равномерно в окрестности точки a (“die Reihe convergiren gleichmässig in der Nähe der Stelle a ”; [43], Bd. 2, S. 201–202).

² Первоначальный ее вариант был получен Вейерштрассом в 1841 г. ([43], Bd. 1, S. 73–74).

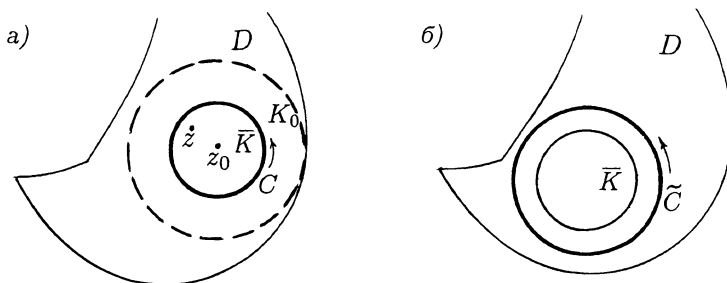


Рис. 65

предельная функция $w = f(z)$ непрерывна в круге $\bar{K}$ (а значит, и на окружности C), поэтому для установления аналитичности этой функции в точке z_0 достаточно проверить выполнение равенства $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$ внутри окружности

C (считая ее однократно обходимой в положительном направлении). В силу интегральной формулы Коши, примененной к функциям $w = f_n(z)$ в круге K_0 и точкам z с $|z - z_0| < r$ (r — радиус окружности C), а также выполняющегося для всех точек $z \in \bar{K}$ при $n \geq n_0(\bar{K}, \varepsilon)$ неравенства $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$ эту проверку дает оценка интеграла по контуру (VIII, с. 133):

$$\begin{aligned} \left| f(z) - \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \right| &= \left| f(z) - f_n(z) - \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta) - f_n(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \right| \leq \\ &\leq |f(z) - f_n(z)| + \left| \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f_n(\zeta) - f(\zeta)}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} d\zeta \right| \leq \varepsilon + \frac{1}{2\pi} \frac{\varepsilon 2\pi r}{r - |z - z_0|}. \end{aligned}$$

Для любого замкнутого круга $\bar{K} \subset D$ пусть $\tilde{C}$ — концентрическая окружность большего радиуса, также принадлежащая (с ограничиваемым ею кругом) области D (рис. 65, б). Так как $\{f_n(z)\} \rightarrow f(z)$ равномерно внутри области D , $|f_n(\zeta) - f(\zeta)| < \varepsilon$ одновременно для всех точек $\zeta \in \tilde{C}$

при $n \geq n_0(\tilde{C}, \varepsilon)$, из чего с применением формул Коши для производных (с. 172) и оценки интеграла (VIII, с. 133) следует, что для точек $z \in \overline{K}$

$$|f_n^{(k)}(z) - f^{(k)}(z)| = \left| \frac{k}{2\pi i} \oint_{\tilde{C}} \frac{f_n(\zeta) - f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} d\zeta \right| < \frac{k! 2\pi r}{2\pi} \frac{\varepsilon}{(r - \rho)^{k+1}}$$

(здесь r и ρ — радиусы соответственно окружности $\tilde{C}$ и круга $\overline{K}$). **Q.E.D.**

Упражнения. 1. Доказать, что если непрерывная в области $D \subset \mathbb{C}$ функция $w = f(z)$ обладает тем свойством, что $\int_L f(z) dz = 0$ для любого прямолинейного отрезка $L \subset D$, то $f(z) \equiv 0$ в области D .

2. Доказать следующий усиленный вариант теоремы Мореры.

Если функция $w = f(z)$ непрерывна в области $D \subset \mathbb{C}$ и $\oint_T f(z) dz = 0$ для любого (расположенного в области D) треугольника¹ T , то эта функция является аналитической в области D .

3. Доказать следующий факт, известный как теорема Лиувилля².

Если целая (т. е. аналитическая во всей плоскости $\mathbb{C}$) функция является ограниченной, то эта функция постоянна.

(Указание: для произвольно взятой точки $z \in \mathbb{C}$ оценить интеграл $\oint_{C_r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta$ по окружности C_r радиуса r при $r \rightarrow +\infty$, а затем применить формулу Коши для производной (с. 172) и первое из условий постоянства аналитической функции в области (VII, с. 112).)

¹ Следует отметить, что в случае *неодносвязной* области D из этого не следует, что $\oint_P f(z) dz = 0$ для любой замкнутой ломаной P ,

расположенной в области D (X, упражнение на с. 164).

² Французский математик Лиувиль (Liouville, Joseph, 1809–1882) опубликовал эту теорему в 1844 г. Свое недовольство этим неоднократно выражал Коши ([28], sér. I, t. VIII, p. 378; t. XI, p. 374), считавший себя автором этой теоремы.

XII. КАК ОПЕРИРУЮТ ТЕОРЕМОЙ И ИНТЕГРАЛЬНОЙ ФОРМУЛОЙ КОШИ И ЧТО УТВЕРЖДАЮТ ТЕОРЕМЫ ТЕЙЛОРА И ЛОРАНА

Обычным препятствием к практическому применению *теоремы Коши* (равно как и ее следствия — *интегральной формулы Коши*) выступает *неодносвязность* области, по которой проходит *контур интегрирования* (и в которой подынтегральная функция является *аналитической*).

Встречающиеся в литературе попытки распространить *теорему Коши* на *многосвязные* области (общего вида) неизменно приводят к утверждениям *частного* характера: в качестве *многосвязной области* в них выступает *конкретная* ее разновидность, равно как *конкретным* представляется и расположенный в ней *контур интегрирования*.

Невозможность прямого применения *теоремы Коши* и *интегральной формулы Коши* к интегралам функций в *неодносвязных* областях вовсе не означает, что это затруднение нельзя обойти.

Наиболее простым оказывается случай, когда в исходной *неодносвязной* области $D \subset \mathbb{C}$ (в которой лежит *контур интегрирования*, а подынтегральная функция является *аналитической*) удастся выделить *односвязную* область $D_1 \subset D$, целиком содержащую *контур интегрирования* Γ : следует лишь на время забыть про исходную область D и действовать исключительно в рамках *односвязной* области D_1 .

Чаще же выход из затруднения находят в преобразовании *контура интегрирования* — замене его (целиком или по участкам) другим, но с тем же значением *интеграла*. Примером применения этого приема может служить доказательство следующего утверждения — варианта *теоремы Коши* для простейшей *неодносвязной* области.

Теорема Коши для кольца.¹ Если функция $w = f(z)$ является аналитической в кольце

$$A = \{z \in \mathbb{C}: r_1 < |z - z_0| < r_2\}, \quad 0 \leq r_1 < r_2 \leq +\infty,$$

то ее интеграл $\int_{\Gamma} f(z) dz$ по любому (расположенному в этом кольце) замкнутому кусочно-гладкому контуру Γ зависит лишь от индекса этого контура относительно центра z_0 кольца. А именно, $\boxed{\oint_{\Gamma} f(z) dz = \text{ind}(\Gamma, z_0) \oint_C f(z) dz}$, где C — любая (лежащая в этом кольце) окружность с центром z_0 , один раз обходимая в положительном направлении (рис. 66, а)³.

Доказательство. Пусть z_1 — любая точка контура Γ (выбранная начальной)⁴, $\mathcal{L}_1$ — прямая, проходящая через точки z_0 и z_1 , $\mathcal{L}_2$ — прямая, пересекающая в точке z_0 прямую $\mathcal{L}_1$ (для определенности под прямым углом; рис. 66, б).

Если контур Γ не имеет общих точек с прямой $\mathcal{L}_2$, то утверждение теоремы верно, так как одновременно

$$\text{ind}(\Gamma, z_0) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{dz}{z - z_0} = 0 \quad \text{и} \quad \oint_{\Gamma} f(z) dz = 0$$

в силу теоремы Коши, примененной к аналитическим функциям $w = \frac{1}{z - z_0}$ и $w = f(z)$ в односвязной области — полукольце, “отрезаемом” от кольца A прямой $\mathcal{L}_2$.

¹ У Коши в [28], sér. I, t. VIII, p. 162–163.

² При $r_1 = 0$ и $r_2 < +\infty$ это кольцо есть круг с изъятым центром z_0 , при $r_1 > 0$ и $r_2 = +\infty$ — внешность окружности, а при $r_1 = 0$ и $r_2 = +\infty$ — плоскость $\mathbb{C}$ с изъятой точкой z_0 (обозначение кольца A — по начальной букве фр. *anneau* — кольцо).

³ Окружность C — чтобы не загромождать рисунок — изображена не пересекающей контур Γ , а этот контур — однократно обходящим центр кольца в положительном направлении.

⁴ От ее выбора значение $\oint_{\Gamma} f(z) dz$ не зависит (VIII, с. 128).

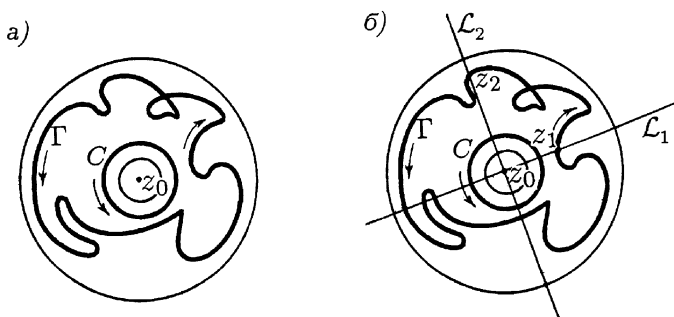


Рис. 66

Если же контур Γ имеет общие точки с прямой $\mathcal{L}_2$ (как на рис. 66, б), то пусть z_2 — первая из них (в порядке следования точек контура Γ от точки z_1).

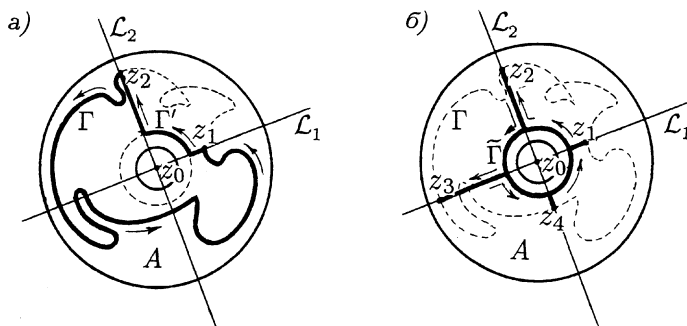


Рис. 67

Применяя теорему Коши (X, с. 151) к функции $w = f(z)$ в односвязной области — кольце A с “разрезом” по лучу из точки z_0 вдоль прямой $\mathcal{L}_1$ в направлении, противоположном направлению на точку z_1 , можно сделать вывод: значения $\oint_{\Gamma} f(z) dz$ и $\text{ind}(\Gamma, z_0)$ не изменятся, если участок контура Γ

Γ от точки z_1 до точки z_2 заменить *кусочно-гладким контуром*, состоящим из *отрезков* прямых $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$, соединяющих точки z_1 и z_2 с *окружностью* C , и *четверти* этой *окружности* (рис. 67, а).

Действия по этой схеме (при которой *прямые* $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ попеременно меняются ролями) преобразуют контур Γ — с *сохранением значений* $\oint_{\Gamma} f(z) dz$ и $\text{ind}(\Gamma, z_0)$ — в состоящий из *четвертей окружности* C , соединенных *отрезками* *прямых* $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ (рис. 67, б). Поскольку каждый из этих *отрезков* обходится *дважды* в *противоположных* направлениях, интеграл по этому *контуру* равен интегралу по *окружности* C , обходимой столько же раз, каков $\text{ind}(\Gamma, z_0)$. **Q.E.D.**

Теорема Тейлора.¹ Функция $w = f(z)$, аналитическая в круге $D = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$ ² имеет в этом круге представление в виде суммы сходящегося степенного ряда

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad z \in D,$$

коэффициенты которого связаны с ней соотношениями³

$$c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \quad \text{и} \quad c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

где Γ — любой замкнутый *кусочно-гладкий контур*, расположенный в *круге* D и *один раз* обходящий его *центр* z_0 в *положительном* направлении (рис. 68, а).

¹ Название условно: эту теорему (установленную Коши в 1831 г. для случая $z_0 = 0$; [28], sér. II, t. XV, p. 448–450) правильнее называть *теоремой Коши о разложении аналитической функции в ряд Тейлора*. По удивительно частому повторению ее формулировки в работах Коши разного времени можно сделать вывод, что именно ее (а не то, что ныне называют *теоремой Коши*) он считал главным своим результатом.

² Включая случай $r = +\infty$, когда *круг* D есть вся *плоскость* $\mathbb{C}$.

³ Первое из которых и означает, что этот *степенной ряд* является *рядом Тейлора* функции $w = f(z)$ (II, с. 33).

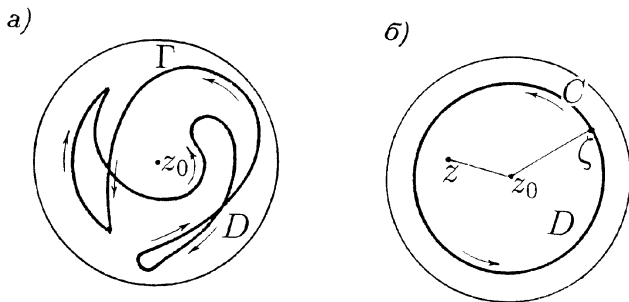


Рис. 68

Доказательство. Пусть z — любая точка круга D , а C — любая окружность с центром z_0 , радиус ρ которой удовлетворяет неравенствам $|z - z_0| < \rho < r$ (рис. 68, б). Если окружность C рассматривать как замкнутый гладкий контур, обходящий точку z_0 (а следовательно, и точку z) один раз в положительном направлении, то применение интегральной формулы Коши (XI, с. 166) и формулы суммы геометрической прогрессии со знаменателем $\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}$ (модуля $\frac{|z - z_0|}{\rho} < 1$ для точек $\zeta \in C$) дает:

$$\begin{aligned}
 f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} d\zeta = \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \left[1 + \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} + \frac{(z - z_0)^2}{(\zeta - z_0)^2} + \dots \right] d\zeta = \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \left[1 + \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} + \dots + \frac{(z - z_0)^m}{(\zeta - z_0)^m} \right] d\zeta + \\
 &\quad + \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} \frac{(z - z_0)^{m+1}}{(\zeta - z_0)^{m+1}} d\zeta = I_1 + I_2.
 \end{aligned}$$

Так как на окружности C аналитическая в круге D функция $w = f(z)$ ограничена: $\exists h \forall z (z \in C \implies |f(z)| \leq h)$,

второе слагаемое в правой части предыдущей серии равенств допускает оценку (VIII, с. 133):

$$|I_2| \leq \frac{h\rho}{\rho - |z - z_0|} \left| \frac{z - z_0}{\rho} \right|^{m+1} \rightarrow 0, \quad m \rightarrow +\infty.$$

Как следствие

$$\begin{aligned} f(z) &= \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \left[1 + \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} + \dots + \frac{(z - z_0)^m}{(\zeta - z_0)^m} \right] d\zeta = \\ &= \lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^m \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta) (z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n, \end{aligned}$$

где $c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta, \quad n = 0, 1, 2, \dots$

Поскольку *подынтегральные функции* (переменной ζ) в правых частях последних формул являются *аналитическими* в *круге* D с *изъятым центром* z_0 , теорема Коши для “кольца” (в данном случае *кольца* $A = D \setminus \{z_0\}$) позволяет заменить в формулах для коэффициентов c_n *окружность* C любым *замкнутым кусочно-гладким контуром* $\Gamma \subset D$ с тем же значением *индекса* относительно точки z_0 , т.е. *один раз обходящим* ее в *положительном* направлении (как на рис. 68, а). Это означает, что в полученном *представлении* функции $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n$ *коэффициенты* c_n *не зависят* от начального выбора *точки* $z \in D$, и потому это *представление* имеет место во *всем круге* D .

С учетом теоремы Коши–Адамара (II, с. 27) *радиус сходимости* степенного ряда $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n$ *не меньше* радиуса *круга* D , а потому применима теорема о производной суммы степенного ряда (II, с. 29), в силу которой функция $w = f(z)$ имеет в *круге* D *производную* любого порядка $k = 1, 2, \dots$

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{+\infty} c_n n(n-1) \dots (n-k+1) (z - z_0)^{n-k}, \quad \text{откуда } c_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}.$$

Теорема Лорана.¹ Если функция $w = f(z)$ является аналитической в кольце $A = \{z \in \mathbb{C} : r_1 < |z - z_0| < r_2\}$ ², то в этом кольце справедливо ее представление

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad z \in A,$$

в виде суммы обобщенного степенного ряда, коэффициенты c_n которого, связаны с этой функцией соотношениями

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

где Γ — любой замкнутый кусочно-гладкий контур, расположенный в кольце A и один раз обходящий его центр z_0 в положительном направлении (т. е. $\text{ind}(\Gamma, z_0) = 1$; рис. 69, а).

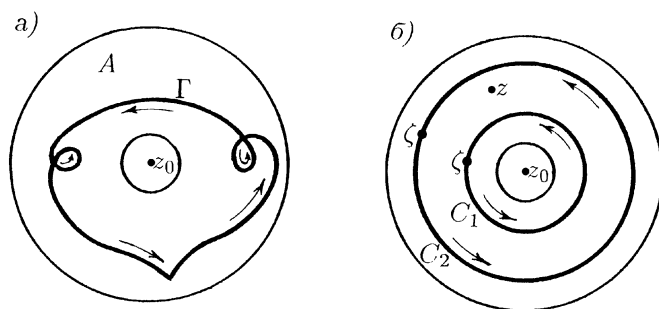


Рис. 69

¹ Хотя первым эту теорему доказал (в 1841 г.) Вейерштрасс ([43], Bd. I, S. 51), за ней закрепилось имя французского военного инженера Лорана (Laurent, Pierre Alphonse, 1813–1854), который опубликовал ее в 1843 г. как “обобщение теоремы Коши” (“Extension du théorème de M. Cauchy relatif à la convergence du développement d’une fonction suivant les puissances ascendentes de la variable x ”), что самим Коши неоднократно подчеркивалось ([28], sér. I, t. VIII, p. 115–117; 147).

² Включая случаи $r_1 = 0$, $r_2 = +\infty$.

Доказательство¹. Для произвольно взятой точки $z \in A$ пусть C_1 и C_2 — окружности с центром z_0 радиусов ρ_1 и ρ_2 , удовлетворяющих неравенствам $r_1 < \rho_1 < |z - z_0| < \rho_2 < r_2$ (рис. 69, б). Каждая из окружностей C_1 , C_2 рассматривается как замкнутый гладкий контур, один раз обходящий центр z_0 кольца A (а следовательно, и точку z) в положительном направлении. Первый шаг доказательства состоит в установлении соотношения

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1^-} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

(C_1^- — окружность C_1 , однократно обходимая в отрицательном направлении).

Для этого следует, соединив окружности C_1 и C_2 двумя не проходящими через точку z прямолинейными отрезками, представить правую часть равенства в виде суммы $\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$, где замкнутые кусочно-гладкие контуры Γ_1 и Γ_2 образованы дугами окружностей C_1^- и C_2 и соединяющими их отрезками, обходимыми в противоположных направлениях — так, что точка z оказывается внутри контура Γ_1 и вне контура Γ_2 (рис. 70).

Вычислить интегралы по контурам Γ_1 и Γ_2 можно с помощью интегральной формулы Коши (XI, с. 166), применяя ее, соответственно, к односвязным областям $A \setminus \mathcal{L}_1$ и $A \setminus \mathcal{L}_2$, где $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$ — какие-либо лучи, выходящие из точки z_0 и не пересекающие, соответственно, контуры Γ_1 и Γ_2 (как на рис. 70). Так как $\text{ind}(\Gamma_1, z) = 1$, а $\text{ind}(\Gamma_2, z) = 0$,

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = f(z), \quad \text{а} \quad \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = 0.$$

¹ По схеме доказательства теоремы Тейлора (с. 181–182), но с удлиняющими осложнениями, вызванными неодносвязностью кольца.

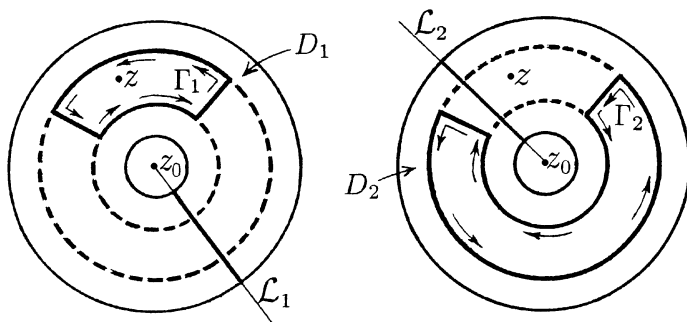


Рис. 70

Второй шаг доказательства состоит (как и при доказательстве теоремы Тейлора на с. 181) в преобразовании интегралов по окружностям C_2 и C_1^- на основе формулы суммы геометрической прогрессии и ограниченности значений $f(\zeta)$ ($|f(\zeta)| \leq h$) на этих окружностях:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} d\zeta = \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \left[1 + \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} + \frac{(z - z_0)^2}{(\zeta - z_0)^2} + \dots \right] d\zeta = \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \left[1 + \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} + \dots + \frac{(z - z_0)^m}{(\zeta - z_0)^m} \right] d\zeta + \\
 &\quad + \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} \frac{(z - z_0)^{m+1}}{(\zeta - z_0)^{m+1}} d\zeta,
 \end{aligned}$$

причем согласно оценке интеграла (VIII, с. 133) модуль второго слагаемого в правой части не превосходит величины $\frac{h\rho_2}{\rho_2 - |z - z_0|} \left| \frac{z - z_0}{\rho_2} \right|^{m+1}$, стремящейся к нулю при $n \rightarrow +\infty$, в силу чего исходный интеграл есть предел (при $n \rightarrow +\infty$) первого из двух слагаемых в правой части:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta &= \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \sum_{n=0}^m \frac{f(\zeta)}{\zeta-z_0} \frac{(z-z_0)^n}{(\zeta-z_0)^n} d\zeta = \\
&= \lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^m \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}} (z-z_0)^n d\zeta = \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}} d\zeta \right) (z-z_0)^n; \\
\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1^-} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta &= -\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(\zeta)}{(z-z_0)-(\zeta-z_0)} d\zeta = \\
&= \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(\zeta)}{z-z_0} \left[1 + \frac{\zeta-z_0}{z-z_0} + \frac{(\zeta-z_0)^2}{(z-z_0)^2} + \dots \right] d\zeta = \\
&= \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(\zeta)}{z-z_0} \left[1 + \frac{\zeta-z_0}{z-z_0} + \dots + \frac{(\zeta-z_0)^m}{(z-z_0)^m} \right] d\zeta + \\
&\quad + \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{f(\zeta)}{(z-z_0)-(\zeta-z_0)} \frac{(\zeta-z_0)^{m+1}}{(z-z_0)^{m+1}} d\zeta,
\end{aligned}$$

при этом *модуль* последнего слагаемого в правой части не превосходит величины $\frac{h \rho_1}{|z-z_0|-\rho_1} \left| \frac{\rho_1}{z-z_0} \right|^{m+1}$, стремящейся к нулю при $m \rightarrow +\infty$, из чего следует, что

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1^-} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta &= \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \sum_{n=0}^m \frac{f(\zeta)}{z-z_0} \frac{(\zeta-z_0)^n}{(z-z_0)^n} d\zeta = \\
&= \lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^m \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}} (z-z_0)^n d\zeta \stackrel{(n=-k-1)}{=} \\
&= \lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{k=-m-1}^{-1} \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{-k}} (z-z_0)^{-k-1} d\zeta = \\
&= \sum_{k=-\infty}^{-1} \left(\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{k+1}} d\zeta \right) (z-z_0)^k.
\end{aligned}$$

Сложение интегралов по окружностям C_2 и C_1^- дает:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-z_0)^n + \sum_{k=-\infty}^{-1} c_k (z-z_0)^k,$$

где

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}} d\zeta, \quad \text{а} \quad c_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{k+1}} d\zeta.$$

Остается заменить в последнем равенстве обозначение k на n и заметить, что согласно теореме Коши для кольца (с.178) обе окружности C_1 и C_2 могут быть заменены любым замкнутым кусочно-гладким контуром Γ , расположенным в кольце A и имеющим тот же (равный 1) индекс относительно его центра z_0 (т.е. однократно обходящим точку z_0 в положительном направлении (как на рис.93, а)). Это означает, что хотя выбор окружностей C_1 и C_2 изначально зависел от выбора точки $z \in A$, коэффициенты c_n в представлении

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-z_0)^n + \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z-z_0)^n = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-z_0)^n$$

не зависят от этой точки, т.е. это представление имеет место во всем кольце A . **Q.E.D.**

Устанавливаемые теоремами Тейлора (с.180) и Лорана (с.183) представления

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-z_0)^n \text{ и } f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k (z-z_0)^k$$

функции $w = f(z)$, аналитической, соответственно, в круге

$$D = \{z \in \mathbb{C} : |z-z_0| < r\} \text{ и кольцо } A = \{z \in \mathbb{C} : r_1 < |z-z_0| < r_2\}$$

называют разложениями данной функции в ряд Тейлора¹ и ряд Лорана (кратко: ее разложениями Тейлора¹ и Лорана) соответственно в указанном круге и кольце.

¹ Маклорена, если $z_0 = 0$.

Свойство единственности разложений Тейлора и Лорана. Если функция $w = f(z)$ каким-то способом представлена в круге (или кольце) с центром z_0 в виде суммы сходящегося степенного ряда $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n$ (или обобщенного степенного ряда $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n$), то этот ряд является рядом Тейлора (рядом Лорана) этой функции: его коэффициенты связаны с ней соотношениями

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta, \quad n=0, 1, 2, \dots \quad (n=0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

где Γ — любой замкнутый кусочно-гладкий контур, не выходящий за пределы этого круга (кольца) и один раз обходящий его центр z_0 в положительном направлении.

Доказательство. Каков бы ни был замкнутый кусочно-гладкий контур Γ указанного вида, для фиксированного значения n (равного, соответственно, $0, 1, 2, \dots$ в случае степенного и $0, \pm 1, \pm 2, \dots$ в случае обобщенного степенного ряда) и k , пробегающего все перечисленные значения,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{\sum_k c_k (\zeta - z_0)^k}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \sum_k c_k (\zeta - z_0)^{n-k-1} d\zeta = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \left[\sum_{k \neq n} c_k (\zeta - z_0)^{k-n-1} + c_n (\zeta - z_0)^{-1} \right] d\zeta = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \left[\left(\sum_{k \neq n} \frac{(\zeta - z_0)^{k-n}}{n-k} \right)' + \frac{c_n}{\zeta - z_0} \right] d\zeta = 0 + c_n \operatorname{ind}(\Gamma, z_0) = c_n, \end{aligned}$$

что следует из теоремы о производной суммы степенного (а также обобщенного степенного) ряда (II, с. 29; V, с. 72), формулы Ньютона–Лейбница (VIII, с. 133) и определения индекса замкнутого контура (IX, с. 138). **Q.E.D.**

Примеры. 1. Согласно формуле суммы геометрической прогрессии справедливы равенства

$$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + \dots, \quad |z| < 1,$$

$$\frac{1}{1+z} = \frac{1}{z(1+z^{-1})} = z^{-1} - z^{-2} + z^{-3} - z^{-4} + \dots, \quad |z| > 1,$$

первое из которых есть¹ разложение функции $w = \frac{1}{1+z}$ в ряд Тейлора (точнее, Маклорена) в круге $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ (в окрестности нуля), а второе — в ряд Лорана в кольце $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < +\infty\}$ (в окрестности бесконечности).

2. С учетом предыдущего примера и формулы производной суммы (обобщенного) степенного ряда (V, с. 72)

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1+z^3)^2} \stackrel{z^3=\zeta}{=} \frac{1}{(1+\zeta)^2} &= -\left(\frac{1}{1+\zeta}\right)' = \\ &\stackrel{\zeta=z^3}{=} \begin{cases} 1 - 2z^3 + 3z^6 - 4z^9 + \dots, & \text{если } |z| < 1, \\ z^{-6} - 2z^{-9} + 3z^{-12} - 4z^{-15} + \dots, & \text{если } |z| > 1. \end{cases} \end{aligned}$$

3. Применение теоремы Тейлора к однозначным ветвям $w = \ln(1+z) \stackrel{\text{def}}{=} \ln|1+z| + i \arg(1+z)$ и $w = (1+z)^\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \exp(\alpha \ln(1+z))$, в круге $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ ², в котором они являются аналитическими функциями с производными $(\ln(1+z))' = \frac{1}{1+z}$ (V, с. 78) и $((1+z)^\alpha)' = (\exp(\alpha \ln(1+z)))' = (1+z)^\alpha \frac{\alpha}{1+z} = \alpha(1+z)^{\alpha-1}$, приводит к разложениям Маклорена этих однозначных ветвей:

$$\begin{aligned} \ln(1+z) &= \ln 1 + z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \dots, \quad |z| < 1; \\ (\ln 1 = 2\pi ki, \quad k=0, \pm 1, \pm 2, \dots) \end{aligned}$$

¹ В силу свойства единственности разложений Тейлора и Лорана.

² Это максимальный круг с центром 0, в котором определены эти однозначные ветви; явное выражение ветвей $w = \ln(1+z)$ в записи $z = x+iy$ переменной z в этом круге дается равенствами

$$\ln(1+z) = \ln|1+z| + i \arg(1+z) = \ln \sqrt{(1+x)^2 + y^2} + i \left(\arctg \frac{y}{1+x} + 2\pi k \right),$$

где выбор значения $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ определяет выбор конкретной ветви $w = \ln(1+z)$ (например, $k=0$ отвечает та, для которой $\ln 1 = 0$).

$$(1+z)^\alpha = 1^\alpha + \frac{\alpha}{1} z + \frac{\alpha(\alpha-1)}{1 \cdot 2} z^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} z^3 + \dots, \quad |z| < 1.$$

$$(1^\alpha = \exp(\alpha 2\pi k i), \quad k=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

4. Чтобы разложить в ряд *Тейлора* в окрестности точки i однозначную ветвь $w = \sqrt{z}$, для которой $\sqrt{i} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$, следует ввести обозначение $\frac{z-i}{i} = \zeta$ и, считая, что $|\zeta| < 1$, воспользоваться разложением *Маклорена* той однозначной ветви $w = (1+\zeta)^{\frac{1}{2}}$ (предыдущий пример), для которой $1^{\frac{1}{2}} = 1$:

$$\begin{aligned} \sqrt{z} &= \sqrt{(z-i) + i} = \sqrt{i} \left(1 + \frac{z-i}{i}\right)^{\frac{1}{2}} = \\ &= \frac{1+i}{\sqrt{2}} \left(1 + \frac{1}{2}\zeta - \frac{1}{2^2 2!}\zeta^2 + \frac{1 \cdot 3}{2^3 3!}\zeta^3 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^4 4!}\zeta^4 + \dots\right) = \\ &= \frac{1+i}{\sqrt{2}} \left(1 + \frac{1}{2i}(z-i) - \frac{1}{(2i)^2 2!}(z-i)^2 + \frac{1 \cdot 3}{(2i)^3 3!}(z-i)^3 - \dots\right). \end{aligned}$$

5. Разложения *Лорана* в окрестности бесконечности (различающихся знаком) однозначных ветвей двухзначных функций $w = \sqrt{(z-a)(z-b)}$ и $w = \sqrt{\frac{z-a}{z-b}}$ можно получить, записав их в виде $w = z \left(1 - \frac{a}{z}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{b}{z}\right)^{\frac{1}{2}}$, $w = \left(1 - \frac{a}{z}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{b}{z}\right)^{-\frac{1}{2}}$, воспользовавшись разложениями *Лорана* сомножителей в правых частях¹ и, наконец, воспользовавшись *правилом перемножения степенных рядов* (в данном случае относительно переменной z^{-1} ; II, с. 33):

$$\begin{aligned} \sqrt{(z-a)(z-b)} &= \pm z \left(1 - \frac{a}{2}z^{-1} - \frac{a^2}{2^2 2!}z^{-2} - \frac{a^3 1 \cdot 3}{2^3 3!}z^{-3} - \dots\right) \times \\ &\quad \times \left(1 - \frac{b}{2}z^{-1} - \frac{b^2}{2^2 2!}z^{-2} - \frac{b^3 1 \cdot 3}{2^3 3!}z^{-3} - \dots\right) = \\ &= \pm z \left(1 - \frac{a+b}{2}z^{-1} - \frac{(a-b)^2}{2^2 2!}z^{-2} - \frac{(a+b)(a-b)^2 1 \cdot 3}{2^3 3!}z^{-3} - \dots\right); \end{aligned}$$

¹ Получив их из разложений *Маклорена*:

$$(1-\zeta)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}\zeta - \frac{1}{2^2 2!}\zeta^2 - \frac{1 \cdot 3}{2^3 3!}\zeta^3 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^4 4!}\zeta^4 - \dots, \quad |\zeta| < 1;$$

$$(1-\zeta)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}\zeta + \frac{1}{2^2 2!}\zeta^2 + \frac{1 \cdot 3}{2^3 3!}\zeta^3 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^4 4!}\zeta^4 + \dots, \quad |\zeta| < 1.$$

$$\begin{aligned}
 \sqrt{\frac{z-a}{z-b}} &= \pm \left(1 - \frac{a}{2} z^{-1} - \frac{a^2}{2^2 2!} z^{-2} - \frac{a^3 1 \cdot 3}{2^3 3!} z^{-3} - \dots \right) \times \\
 &\quad \times \left(1 + \frac{b}{2} z^{-1} + \frac{b^2}{2^2 2!} z^{-2} + \frac{b^3 1 \cdot 3}{2^3 3!} z^{-3} + \dots \right) = \\
 &= \pm \left(1 + \frac{b-a}{2} z^{-1} + \frac{(b-a)(a+3b)}{2^2 2!} z^{-2} + \frac{(b-a)(a^2+2ab+5b^2)}{2^3 2!} z^{-3} + \dots \right).
 \end{aligned}$$

6. В круге $\{z \in \mathbb{C} : |z| < \frac{\pi}{2}\}$ определены две (различающиеся знаком) *однозначные ветви* многозначной функции $w = \sqrt{\cos z}$; это вытекает из того, что $\operatorname{Re} \cos z = \cos x \cosh y > 0$, если $|z| = |x + iy| < \frac{\pi}{2}$, а следовательно, в указанном *круге* определены *однозначные ветви аргумента*, а поэтому (IV, с. 68) и любой *степени* $\cos z$. По теореме Тейлора имеет место *разложение*

$$\sqrt{\cos z} = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \dots, \quad |z| < \frac{\pi}{2},$$

коэффициенты которого можно найти (сначала c_0 , затем c_1 , c_2 etc.) исходя из разложения в ряд *косинуса* (II, с. 37), теоремы о *перемножении степенных рядов* (II, с. 34) и свойства *единственности разложений*:

$$1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} \dots = (c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \dots)(c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \dots),$$

откуда $c_0^2 = 1$ ($c_0 = \pm 1$), $2c_0 c_1 = 0$ ($c_1 = 0$), $2c_0 c_2 = -\frac{1}{2!}$ ($c_2 = -\frac{c_0}{4}$), ...

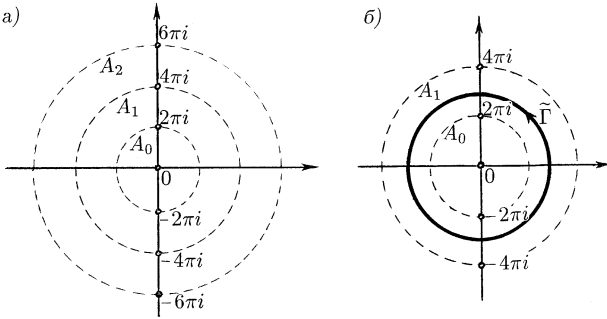


Рис. 71

7. Функция $w = \frac{z}{e^z - 1}$ является *аналитической* в плоскости $\mathbb{C}$, исключая точки $2\pi ki$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, и, по теореме Лорана, в каждом из *колец* $A_k = \{z \in \mathbb{C} : 2\pi k < |z| < 2\pi(k+1)\}$, $k = 0, 1, 2, \dots$

(рис. 71, а) имеет разложение по степеням z . Найти это разложение в *кольце* A_0 позволяет теорема о делении степенных рядов (II, с. 39), в силу которой

$$\frac{z}{e^z - 1} = \frac{z}{z \left(1 + \frac{z}{2!} + \frac{z^2}{3!} + \dots \right)} = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots,$$

где коэффициенты $c_0, c_1, \dots$ последовательно находятся из равенств: $c_0 = 1, c_0 \frac{1}{2!} + c_1 = 0, c_0 \frac{1}{3!} + c_1 \frac{1}{2!} + c_2 = 0, \dots$ Чаше, однако, их записывают как $c_n = \frac{B_n}{n!}$, $n = 0, 1, 2, \dots$, называя B_n числами Бернулли¹. В этих обозначениях $\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n}{n!} z^n$ в *кольце* A_0 (при $0 < |z| < 2\pi$).

Полученному разложению можно придать иной вид, если учесть, что $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{B_n}{n!} z^n = \frac{z}{e^z - 1} + \frac{z}{2} - 1 = \frac{z}{2} \frac{e^z + 1}{e^z - 1} - 1 = \frac{-z}{2} \frac{e^{-z} + 1}{e^{-z} - 1} - 1$ — *четная* функция, а поэтому ее *степенное разложение* содержит только *четные* степени z ; как следствие, *числа Бернулли* B_n с *нечетными* номерами, *бóльшими* 1, *равны нулю* и, таким образом,

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n}{n!} z^n = 1 - \frac{z}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{B_{2k}}{(2k)!} z^{2k}, \quad 0 < |z| < 2\pi.$$

Получить *разложение Лорана* $\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \tilde{c}_n z^n$ в *кольце* A_1 можно из уже полученного разложения (в *кольце* A_0) и формулы коэффициентов Лорана $\tilde{c}_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\tilde{\Gamma}} \frac{z}{(e^z - 1)z^{n+1}} dz$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ (с. 183),

беря в качестве *контура интегрирования* $\tilde{\Gamma}$ лежащую в *кольце* A_1 *окружность* с центром 0, *однократно* обходимую в *положительном* направлении (рис. 71, б). Следует учесть, что при замене *окружности* $\tilde{\Gamma}$ *концентрической окружностью* Γ радиуса, *меньшего* 2π (а поэтому лежащей в *кольце* A_0), значение правой части формулы оказывается известным:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{z}{(e^z - 1)z^{n+1}} dz = c_n = \begin{cases} \frac{B_n}{n!} & \text{для } n = 0, 1, 2, \dots, \\ 0 & \text{для } n = -1, -2, \dots; \end{cases}$$

разность же интегралов по *окружностям* $\tilde{\Gamma}$ и Γ равна *сумме* интег-

¹ Их ввел в основополагающей для *теории вероятностей* работе “Искусство догадки” (“Ars conjectanti”), вышедшей в 1713 г., старший из швейцарских математиков Бернулли (Bernoulli, Jakob, 1654–1705).

ралов по замкнутым Γ_+ и Γ_- , изображенным на рис. 72.

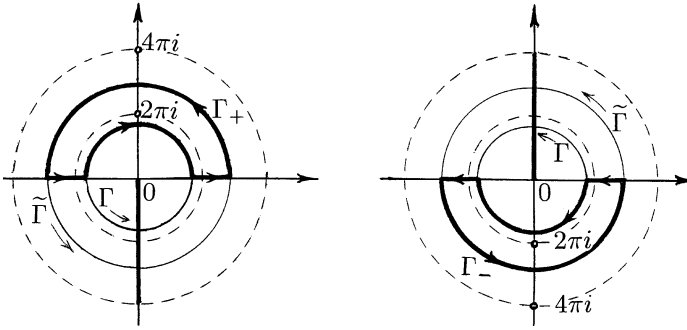


Рис. 72

Интегралы по контурам Γ_+ и Γ_- вычисляются с помощью *интегральной формулы Коши*, применяемой к *кольцу* $\{z \in \mathbb{C}: 0 < |z| < 4\pi\}$ с “разрезом” соответственно вдоль *отрицательной* и *положительной* частей *мнимой* оси с учетом *аналитичности* (после *доопределения* значением 1) в точках $\mp 2\pi i$ функций $w = \frac{z \pm 2\pi i}{e^{z \pm 2\pi i} - 1}$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_+} \frac{z}{(e^z - 1)z^{n+1}} dz &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_+} \frac{z - 2\pi i}{(e^{z-2\pi i} - 1)z^n} \frac{dz}{z - 2\pi i} = \frac{1}{(2\pi i)^n}; \\ \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_-} \frac{z}{(e^z - 1)z^{n+1}} dz &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_-} \frac{z + 2\pi i}{(e^{z+2\pi i} - 1)z^n} \frac{dz}{z + 2\pi i} = \frac{1}{(-2\pi i)^n}. \end{aligned}$$

Вывод: в кольце $A_1 = \{z \in \mathbb{C}: 2\pi < |z| < 4\pi\}$

$$\begin{aligned} \frac{z}{e^z - 1} &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \tilde{c}_n z^n = \sum_{n=-\infty}^{-1} \tilde{c}_n z^n + \tilde{c}_0 + \tilde{c}_1 z + \sum_{n=2}^{+\infty} \tilde{c}_n z^n = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{-1} \left(\frac{1}{(2\pi i)^n} + \frac{1}{(-2\pi i)^n} \right) z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{B_n}{n!} + \frac{1}{(2\pi i)^n} + \frac{1}{(-2\pi i)^n} \right) z^n, \end{aligned}$$

или

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{k=-\infty}^{-1} \frac{(-1)^k 2}{(2\pi)^{2k}} z^{2k} + 3 - \frac{1}{2}z + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{B_{2k}}{(2k)!} + \frac{(-1)^k 2}{(2\pi)^{2k}} \right) z^{2k}.$$

Неравенства Коши для коэффициентов Тейлора и Лорана.¹ Коэффициенты разложения $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n$

(соответственно $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n$) функции $w = f(z)$, аналитической в круге (соответственно кольце) с центром z_0 , удовлетворяют неравенствам Коши

$$|c_n| \leq \frac{\mu_\rho}{\rho^n}, \quad n=0, 1, 2, \dots \quad (\text{соответственно } n=0 \pm 1, \pm 2, \dots),$$

где ρ — любое положительное число, меньшее радиуса этого круга (соответственно число, промежуточное между внутренним и внешним радиусами кольца), а μ_ρ — верхняя граница значений $|f(z)|$ на окружности $C_\rho = \{z \in \mathbb{C}: |z-z_0| = \rho\}$.

Доказательство. В формулах для коэффициентов разложений Тейлора (с.180) и Лорана (с.183) следует взять в качестве контура Γ окружность C_ρ , однократно обходимую в положительном направлении, и воспользоваться оценкой интеграла (VIII, с.133):

$$|c_n| = \left| \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}} d\zeta \right| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{\mu_\rho}{\rho^{n+1}} 2\pi\rho = \frac{\mu_\rho}{\rho^n}. \quad \mathbf{Q.E.D.}$$

Упражнения. 1. Объяснить, почему для любой четной аналитической функции разложение Тейлора (Лорана) в круге (кольце) с центром $z_0=0$ содержит лишь четные степени z .

2. Пользуясь представлением

$$\sqrt{(z-a)(z-b)} = \sqrt{(c-a)(c-b)} \left(1 + \frac{z-c}{c-a}\right)^{1/2} \left(1 + \frac{z-c}{c-b}\right)^{1/2},$$

найти несколько начальных слагаемых в разложениях в ряды Тейлора в окрестности точки $c \neq a, b$ однозначных ветвей двухзначной функции $w = \sqrt{(z-a)(z-b)}$.

3. Заметив, что $\frac{z}{e^z-1} + \frac{z}{2} \equiv \frac{z}{2i} \operatorname{ctg} \frac{z}{2i}$, получить (на базе примера 7) разложения Лорана функции $w = \operatorname{ctg} z$ для $0 < |z| < \pi$ и $\pi < |z| < 2\pi$.

¹ У Коши в [28], sér. II, t. II, p. 161; t. XV., p. 450.

XIII. ЧТО СЛЕДУЕТ ИЗ ТЕОРЕМЫ ТЕЙЛОРА

В приложениях теорему Тейлора¹ обычно применяют в следующей формулировке.

Если функция $w = f(z)$ является аналитической в области $D \subset \mathbb{C}$, то какова бы ни была точка $z_0 \in D$, в круге K с центром z_0 , принадлежащем области D (рис. 73), имеет место разложение этой функции в ряд Тейлора:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n, \quad z \in K.^2$$

(Как следствие, радиус сходимости этого ряда не меньше расстояния от точки z_0 до границы ∂D области D .)

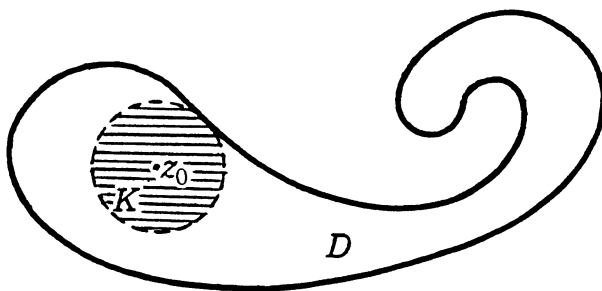


Рис. 73

Пример. Применение формулы суммы геометрической прогрессии $\frac{1}{1-q} = 1 + q + q^2 + \dots$, $|q| < 1$, дает следующие разложения функции $w = \frac{1}{z}$, аналитической в области

¹ Точнее, теорему Коши о разложении аналитической функции в ряд Тейлора (XII, с. 180, сноска¹).

² В соединении со свойством “бесконечной дифференцируемости” суммы степенного ряда (II, с. 33, следствие 1) это служит другим обоснованием того, что функция, аналитическая в области, имеет в этой области производные всех порядков (XI, с. 172).

$D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, в *степенные ряды* (с указанием их *радиусов сходимости*; рис. 74):

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{1+(z-1)} = 1 - (z-1) + (z-1)^2 - (z-1)^3 + \dots \quad (r=1);$$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{2+(z-2)} = \frac{1}{2} - \frac{z-2}{2^2} + \frac{(z-2)^2}{2^3} - \frac{(z-2)^3}{2^4} + \dots \quad (r=2);$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{z} = \frac{1}{(i-1)+(z+1-i)} = -\frac{1}{1-i} - \frac{z+(1-i)}{(1-i)^2} - \frac{(z+(1-i))^2}{(1-i)^3} - \\ - \frac{(z+(1-i))^3}{(1-i)^4} - \dots \quad (r=\sqrt{2}). \end{aligned}$$

То, что это действительно *разложения в ряды Тейлора* функции $w = \frac{1}{z}$ (с разными *центрами* и зависящими от них *радиусами сходимости*), вытекает из свойства *единственности разложений Тейлора и Лорана* (XII, с. 188).

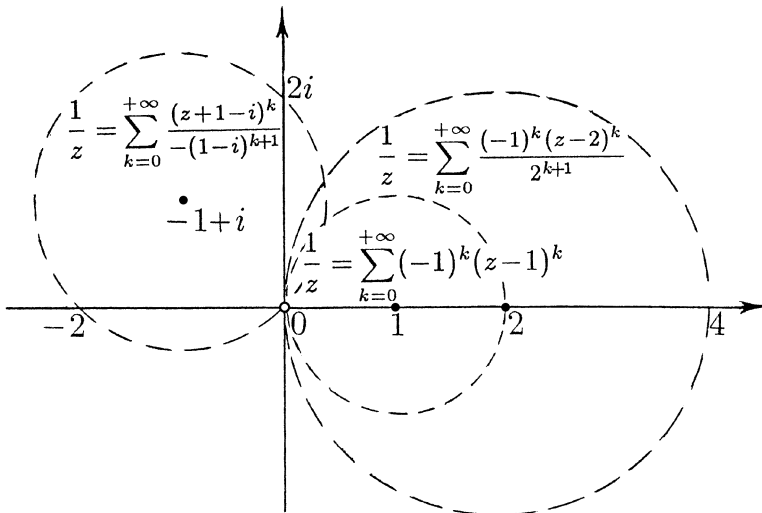


Рис. 74

Теорема Лиувилля.¹ Функция, аналитическая во всей плоскости $\mathbb{C}$ (а такие функции называют целыми) является либо неограниченной, либо постоянной.

Доказательство. Применение к функции $w = f(z)$, аналитической во всей плоскости $\mathbb{C}$, теоремы Тейлора с $z_0 = 0$, приводит к ее разложению

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n, \quad z \in \mathbb{C} \quad \left(c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \right).$$

Если эта функция ограничена ($\exists h > 0 \forall z (|f(z)| \leq h)$), то в силу неравенств Коши (XII, с. 194)

$$|c_n| \leq \frac{h}{\rho^n}, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

причем — ввиду аналитичности функции во всей плоскости $\mathbb{C}$ — в качестве ρ можно брать сколь угодно большое положительное число. Устремляя ρ к $+\infty$, можно заключить: $c_n = 0$ для $n = 1, 2, \dots$, т.е. разложение функции $w = f(z)$ в плоскости $\mathbb{C}$ принимает вид $f(z) = c_0$, $z \in \mathbb{C}$. **Q.E.D.**

Теорема о существовании корня у многочлена.² Любой многочлен $p(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n$ степени $n \geq 1$ с действительными или мнимыми коэффициентами ($a_0 \neq 0$) имеет корень (т.е. принимает значение 0) в плоскости $\mathbb{C}$.

Доказательство. Если бы такой многочлен $p(z)$ не имел корней (т.е. не обращался в нуль) в плоскости $\mathbb{C}$, то функция $w = \frac{1}{p(z)}$ оказывалась бы аналитической во всей плос-

¹ Уже встречалась выше (XI, с. 176, упражнение 3).

² Первым ее высказал в вышедшей в 1629 г. книге “Новое изобретение в алгебре” (“Invention nouvelle en l’algèbre”) французский математик Жирар (Girard, Albert, 1595–1632), а первое приемлемое доказательство опубликовал (в 1799 г., дав впоследствии еще три) Гáусс ([33], Bd. III, S. 1–30). Расхожее ее название “основная теорема алгебры” может создать неверное представление о достижениях этой науки.

кости $\mathbb{C}$ (т.е. *целой*) и притом *ограниченной*: ее ограниченность *вне* некоторого *замкнутого круга* $\{z \in \mathbb{C}: |z| \leq r\}$ есть следствие того, что $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{p(z)} = 0$, а на этом круге — того, что функция $w = \left| \frac{1}{p(z)} \right|$ *непрерывна* на нем. По *теореме Лиувилля* функция $w = \frac{1}{p(z)}$ оказывалась бы *постоянной*, при этом *равной нулю* (так как $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{p(z)} = 0$) в плоскости $\mathbb{C}$. Предположение об *отсутствии* у многочлена *корней* приводит, таким образом, к *противоречию*. **Q.E.D.**

Нули аналитических функций

Нулями функции $w = f(z)$, аналитической в области $D \subset \mathbb{C}$, называют все те *точки* этой области, в которых значение функции равно нулю. Говорят при этом, что точка $z_0 \in D$ есть *нуль кратности* (или *порядка*) k этой функции, если $f(z_0) = f'(z_0) = \dots = f^{(k-1)}(z_0) = 0$, тогда как $f^{(k)}(z_0) \neq 0$; нули кратности 1 называют *простыми*.

Следующее утверждение дает эквивалентные описания нулей и их кратностей.

Если $w = f(z)$ — аналитическая функция в области $D \subset \mathbb{C}$, а z_0 — точка этой области, то следующие три условия эквивалентны:

1° $f(z_0) = f'(z_0) = \dots = f^{(k-1)}(z_0) = 0$, а $f^{(k)}(z_0) \neq 0$, т.е. z_0 есть нуль кратности k этой функции;

2° разложение Тейлора функции $w = f(z)$ в принадлежащем области D круге с центром z_0 имеет вид

$$f(z) = \sum_{n=k}^{+\infty} c_n (z-z_0)^n = c_k (z-z_0)^k + c_{k+1} (z-z_0)^{k+1} + \dots \quad (c_k \neq 0);$$

3° в некотором круге с центром z_0 справедливо представление $f(z) = (z-z_0)^k \varphi(z)$, где $w = \varphi(z)$ — функция, аналитическая и не имеющая нулей в этом круге.

Доказательство. Равносильность условий 1° и 2° — прямое следствие теоремы Тейлора (XII, с. 180). При выполнении условия 2° запись $f(z) = (z - z_0)^k (c_k + c_{k+1}(z - z_0) + \dots)^1$ означает выполнение условия 3° , из которого, согласно подсчету производных — например, по формуле Лейбница²

$$[(z - z_0)^k \varphi(z)]^{(n)} = \sum_{j=0}^n C_n^j [(z - z_0)^k]^{(j)} [\varphi(z)]^{(n-j)} \quad \text{—}$$

следует, что

$$f^{(n)}(z_0) = [(z - z_0)^k \varphi(z)]_{z=z_0}^{(n)} = \begin{cases} 0, & \text{если } n = 0, 1, \dots, k-1, \\ k! \varphi(z_0), & \text{если } n = k, \end{cases}$$

а потому выполнено условие 1° . **Q.E.D.**

Примеры. 1. Согласно формуле Эйлера (II, с. 38) нули функции $w = \sin z$ — это корни уравнения $\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 0$, или, что то же самое, $e^{2iz} - 1 = 0$, т. е. $z = \frac{1}{2i} \operatorname{Ln} 1 = \frac{1}{2i} i 2\pi n = \pi n$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Так как $\sin'(\pi n) = \cos(\pi n) \neq 0$, все точки πn являются простыми нулями функции $w = \sin z$.

2. Так как

$$\begin{aligned} (1 - \cos z)(e^{z^2} - 1) &= \left(\frac{z^2}{2!} - \frac{z^4}{4!} + \frac{z^6}{6!} - \dots \right) \left(\frac{z^2}{1!} + \frac{z^4}{2!} + \frac{z^6}{3!} + \dots \right) = \\ &= z^4 \left(\frac{1}{2!} - \frac{z^2}{4!} + \frac{z^4}{6!} - \dots \right) \left(1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{3!} + \dots \right), \end{aligned}$$

точка $z = 0$ является для функции $w = (1 - \cos z)(e^{z^2} - 1)$ нулем 4-й кратности. Другие нули этой функции, кратностей (как показывает вычисление производных) соответственно 2 и 1, — это $z = \pm 2\pi n$ и $z = \pm(1 \pm i)\sqrt{\pi n}$, $n = 1, 2, \dots$

3. Точка 1 является нулем (простым) для одной из двух выделяемых в ее окрестности однозначных ветвей $w = \sqrt{z} - 1$.

¹ Так как взятый в скобки степенной ряд сходится в круге D (с центром z_0), его сумма, обозначаемая $\varphi(z)$ (с $\varphi(z_0) = c_k \neq 0$), является аналитической функцией, не равной нулю в окрестности точки z_0 .

² $(u \cdot v)^{(n)} = \sum_{j=0}^n C_n^j u^{(j)} v^{(n-j)}.$

Свойство изолированности нулей аналитических функций. Любой нуль аналитической в области $D \subset \mathbb{C}$ функции $w = f(z)$ ($f(z) \not\equiv 0$) имеет конечную кратность, и все нули являются изолированными: каждый обладает окрестностью, не содержащей других нулей этой функции.

Доказательство. Вторая часть утверждения (об изолированности нулей) есть следствие первой: если $z = z_0$ — нуль конечной кратности k аналитической функции $w = f(z)$, то из представления $f(z) = (z - z_0)^k \varphi(z)$, где $\varphi(z) \neq 0$ в круге с центром z_0 (с. 198, условие 3°), следует, что в этом круге нет отличных от z_0 нулей этой функции. Достаточно поэтому прийти к противоречию, предположив, что некая аналитическая в области $D \subset \mathbb{C}$ функция $w = f(z)$ ($f(z) \not\equiv 0$) имеет в некоторой точке $z_0 \in D$ нуль бесконечной кратности, т. е. $f(z_0) = f'(z_0) = f''(z_0) = \dots = 0$. Пусть z_1 — любая точка области D , в которой $f(z_1) \neq 0$, а L — ломаная, идущая в области D от точки z_0 к точке z_1 (VII, с. 107). Воспринимая ее как “изломанный” отрезок действительной оси, можно утверждать существование точки $z^* \in L$, являющейся точной верхней гранью множества Z_∞ тех точек $z \in L$, в которых функция $w = f(z)$ имеет нуль бесконечной кратности. Остается заметить, что

а) если $z^* \in Z_\infty$, т. е. $f(z^*) = f'(z^*) = f''(z^*) = \dots = 0$, то из разложения Тейлора $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z^*)}{n!} (z - z^*)^n$ (в содержащемся в области D круге с центром z^*) следовало бы, что z^* не является верхней границей множества Z_∞ ;

б) если $z^* \notin Z_\infty$, т. е. функция $w = f(z)$ в точке z^* либо не имеет нуля, либо имеет нуль конечной кратности, то в окрестности этой точки нет (отличных от z^*) нулей этой функции, так что z^* не может быть точной верхней гранью множества Z_∞ .

В обоих случаях возникает противоречие: одновременно истинны равенство $z^* = \sup Z_\infty$ и его отрицание. **Q.E.D.**

Теорема единственности. Если $w = f(z)$ и $w = g(z)$ — аналитические в области $D \subset \mathbb{C}$ функции, которые либо

а) совпадают на некотором подмножестве $E \subset D$, имеющем предельную точку в области D (рис. 75),¹ либо

б) совпадают вместе с производными всех порядков в некоторой точке $z_0 \in D$: $f^{(k)}(z_0) = g^{(k)}(z_0)$, $k = 0, 1, \dots$, то эти функции совпадают тождественно в области D : $f(z) \equiv g(z)$, $z \in D$.

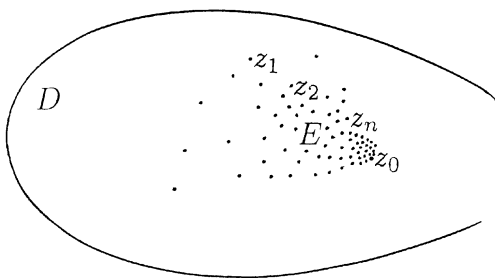


Рис. 75

Доказательство. В случае выполнения первого из условий пусть z_0 — точка области D , являющаяся предельной для множества E (последнее по определению означает, что в любой окрестности точки z_0 есть отличные от нее точки $z \in E$, а потому из них можно составить последовательность $\{z_n\}$, сходящуюся к точке z_0 — как на рис. 75). Так как функция, аналитическая в точке, является в ней непрерывной, $f(z_0) - g(z_0) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (f(z_n) - g(z_n)) = 0$. Вывод:

¹ К примеру, совпадают в окрестности (сколь угодно малой) какой-либо точки $z_0 \in D$.

точка $z_0 \in D$, предельная для множества $E \subset D$, на котором аналитические в области D функции $w = f(z)$ и $w = g(z)$ совпадают, является неизолированным нулем для аналитической функции $w = f(z) - g(z)$, что (с. 200) возможно лишь если $f(z) \equiv g(z)$ в области D .

Если же выполнено второе условие, т. е.

$$f(z_0) = g(z_0), \quad f'(z_0) = g'(z_0), \quad f''(z_0) = g''(z_0), \quad \dots,$$

то точка $z_0 \in D$ оказывается нулем бесконечной кратности для аналитической в области D функции $w = f(z) - g(z)$, что опять же возможно только в случае $f(z) \equiv g(z)$. **Q.E.D.**

Аналитическое продолжение¹

То, что заданная в области $D \subset \mathbb{C}$ аналитическая функция $w = f(z)$ допускает аналитическое продолжение из области D в не принадлежащую ей точку z^* , по определению означает, что существует область $\tilde{D} \subset \mathbb{C}$, содержащая как область D , так и точку z^* (рис. 76), и аналитическая в ней функция $w = \tilde{f}(z)$, такая, что $\tilde{f}(z) \equiv f(z)$ в области D .

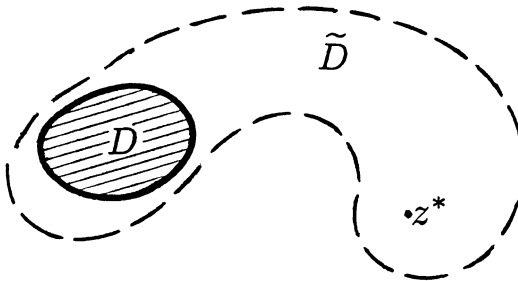


Рис. 76

¹ Термин “аналитическое продолжение” является собирательным, так что наряду с предлагаемым здесь, кратким и упрощенным, имеются другие его толкования.

Примеры. 1. Функция $w = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n$ определена и является аналитической в круге сходимости $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ степенного ряда в правой части. Так как $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$, $z \in D$, функция $w = \frac{1}{1-z}$ осуществляет аналитическое продолжение функции $w = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n$ из круга D в любую выходящую за его пределы и отличную от 1 точку плоскости $\mathbb{C}$.

2. Пусть $w = \ln z = \ln |z| + i \arg z$ — однозначная ветвь логарифма в области $\{z \in \mathbb{C} : -\frac{3\pi}{2} < \arg z < \frac{\pi}{2}\}$ (т.е. плоскости $\mathbb{C}$ с “разрезом” по неотрицательной части мнимой оси). Так как $\ln^{(n)} z = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} z^{-n}$, $n = 1, 2, \dots$, а $\ln 1 = 0$ (для этой однозначной ветви), ее разложением Тейлора по степеням $z-1$ является $\ln z = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} (z-1)^n}{n}$, $|z-1| < 1$. Указанная однозначная ветвь $w = \ln z$ осуществляет поэтому аналитическое продолжение функции $w = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} (z-1)^n}{n}$ из круга $\{z \in \mathbb{C} : |z-1| < 1\}$ — круга сходимости степенного ряда в правой части — в любую лежащую вне этого круга, но не на неотрицательной части мнимой оси, точку z^* , например $z^* = -1$, для которой $\ln(-1) = \ln|-1| + i \arg(-1) = -i\pi$.

Но на том же основании аналитическое продолжение функции $w = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} (z-1)^n}{n}$ — из того же круга в ту же точку $z^* = -1$ — осуществляет и другая однозначная ветвь $w = \ln z = \ln |z| + i \arg z$ — та, которая определена в области $\{z \in \mathbb{C} : -\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{3\pi}{2}\}$, и для которой, следовательно, $\ln(-1) = i\pi$.

Как показывает последний пример, аналитическое про-

должение функции из области $D \subset \mathbb{C}$ в точку $z^* \in \mathbb{C}$, $z^* \notin D$, не обязательно является *единственным*: две функции $w = \tilde{f}(z)$ и $w = \hat{f}(z)$, аналитические в двух разных областях $\tilde{D}$ и $\hat{D}$, содержащих как область D , так и точку z^* (рис. 77), и совпадающие в области D с функцией $w = f(z)$, могут иметь разные значения в точке z^* . Противоречия с теоремой единственности (с. 201) здесь нет: осуществляющие аналитическое продолжение функции $w = \tilde{f}(z)$ и $w = \hat{f}(z)$ являются аналитическими в разных областях.

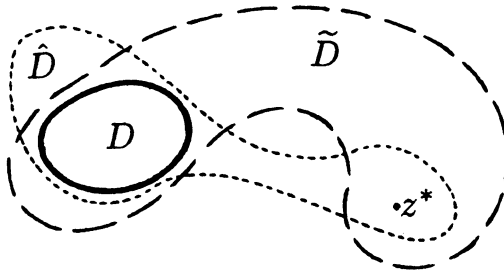


Рис. 77

То, что аналитическая функция $w = f(z)$ имеет разные аналитические продолжения из области D в одну и ту же точку $z^* \in \mathbb{C}$, $z^* \notin D$, можно сформулировать иначе: результатом аналитических продолжений этой функции (из области D) оказывается *многозначная функция*¹.

¹ На многозначные функции, возникающие в результате аналитических продолжений, распространяют (вслед за Вейерштрассом) термин *аналитическая* — в отличие от терминов *голоморфная* и *регулярная* (VII, с. 106), применимых только к однозначным функциям.

Механизм *аналитических продолжений* (и возникновения *многозначности*) проясняет следующий комментарий к теореме Тейлора (в ее формулировке на с. 195).

В силу этой теоремы *разложение* $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{n!} (z-z_0)^n$ функции $w = f(z)$ в *ряд Тейлора* (по *степеням* $z-z_0$) имеет место в *круге* с центром z_0 , целиком принадлежащем *области аналитичности* D этой функции. *Радиус сходимости* этого *ряда* заведомо не меньше расстояния от точки z_0 до *границы* ∂D *области аналитичности* функции $w = f(z)$, но не исключено, что на самом деле он *больше* этого расстояния, иначе говоря, *круг сходимости* ряда Тейлора функции выходит за пределы *области* ее аналитичности.

То, что это действительно случается, видно на простейшем примере функции $w = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n$, определенной и *аналитической* в *круге* $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ — *круге сходимости* этого степенного ряда. В то время как *ряд Тейлора* этой функции по степеням $z - \frac{1}{2}$ сходится лишь в *содержащемся* в D *круге* $\{z \in \mathbb{C} : |z - \frac{1}{2}| < \frac{1}{2}\}$, *кругом сходимости* ее *ряда Тейлора* по степеням $z + \frac{1}{2}$ является *содержащий* D *круг* $\{z \in \mathbb{C} : |z + \frac{1}{2}| < \frac{3}{2}\}$.¹

Более интересна в этом отношении ситуация с *однозначной ветвью логарифма* $w = \ln z = \ln |z| + i \arg z$, выделяемой (в *плоскости* $\mathbb{C}$ с “*разрезом*” вдоль *луча*, выходящего из начала координат под углом $-\frac{\pi}{6}$ к действительной оси) условием $-\frac{\pi}{6} < \arg z < \frac{11}{6}$. В то время как *ряд Тейлора* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (z-1)^n$ указанной *однозначной ветви* $w = \ln z$ имеет *радиус сходимости* 1, а потому сходится в *круге* $\{z \in \mathbb{C} : |z-1| < 1\}$, представление $\ln z = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (z-1)^n$ имеет место

¹ Все это вытекает из того, что $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$ в *круге* D .

лишь в той части этого круга, которая не заштрихована на рис. 78, тогда как в заштрихованной его части $\ln z = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (z-1)^n + 2\pi i$.

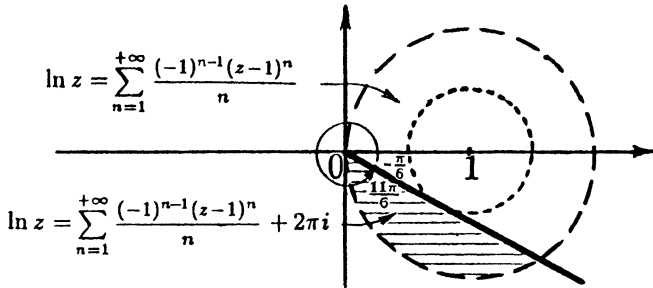


Рис. 78

В том случае, когда пересечение $D \cap K$ области аналитичности D функции $w = f(z)$ и круга сходимости K ее ряда Тейлора $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$ (с центром разложения $z_0 \in D$) оказывается связным множеством (т. е. представляет собою область; рис. 79), то аналитическое продолжение функции $w = f(z)$ из области D в объединение $D \cup K$ этой области с кругом K осуществляет функция

$$w = \begin{cases} f(z), & \text{если } z \in D, \\ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n, & \text{если } z \in K; \end{cases}$$

однозначность этой функции — совпадение значений $f(z)$ и $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$ в пересечении $D \cap K$ области D и круга K — вытекает из теоремы единственности (с. 201), примененной к аналитическим в области $D \cap K$ функциям

$w = f(z)$ и $w = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$ (первая является *аналитической* в области D , а вторая — в *круге* K) и (в качестве множества E из формулировки теоремы единственности) *концентрическому* с K *кругу* $K_0 \subset (D \cap K)$, в котором данные функции *совпадают* по теореме Тейлора (с. 195).

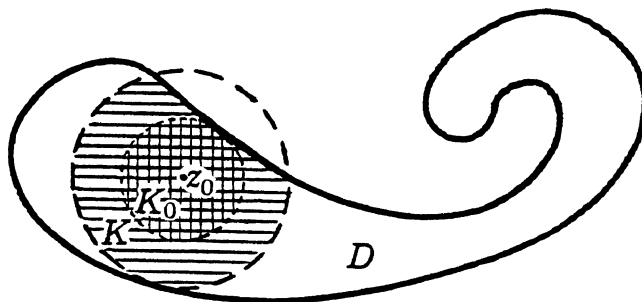


Рис. 79

В случае же, когда *пересечение* $D \cap K$ *областью* не является (рис. 80)¹, *совпадение* значений $f(z)$ и $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$ для *всех* точек $z \in D \cap K$ *не гарантировано*², а потому функция

$$w = \begin{cases} f(z), & \text{если } z \in D, \\ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n, & \text{если } z \in K, \end{cases}$$

¹ Как, например, в обсуждавшейся на сс. 205–206 ситуации с *однозначной ветвью логарифма*.

² Теорема единственности здесь *не применима*, так как множество $D \cap K$ не является *областью*.

осуществляющая *аналитическое продолжение* функции $w = f(z)$, может оказаться *многозначной*.

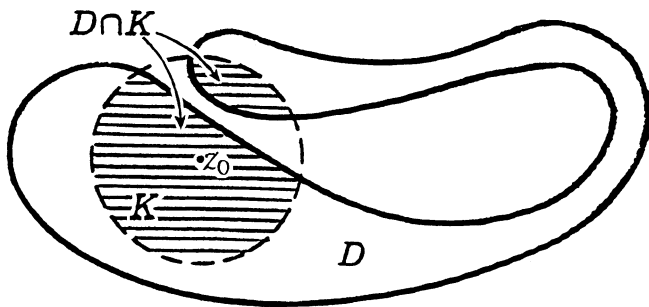


Рис. 80

Упражнения. 1. Доказать, следуя схеме доказательства теоремы Лиувилля (с. 197), что любая *целая* функция $w = f(z)$ с *ограничением* на *рост* $|f(z)| \leq c|z|^n$ при $z \rightarrow \infty$ есть *многочлен* степени не выше n .

2. Найти все *целые* функции $w = f(z)$, удовлетворяющие тождеству $f(z) \equiv f(az)$ для некоторого числа a с $|a| \neq 1$.

3. Что можно сказать об *аналитических* в области $D \subset \mathbb{C}$ функциях $w = f(z)$ и $w = g(z)$, если $f(z)g(z) \equiv 0$ в этой области?

XIV. КАК ВЫДЕЛЯЮТ И КЛАССИФИЦИРУЮТ ОСОБЫЕ ТОЧКИ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ¹

Особые точки аналитической функции $w = f(z)$ — это те точки расширенной комплексной плоскости $\mathbb{C}^*$, в которых данная функция аналитической не является, но в любой окрестности которых есть точки аналитичности этой функции.²

К примеру, для функции $w = \frac{1}{z}$ особыми точками являются 0 и ∞ , функция же $w = e^z$ (как и любая целая функция) имеет единственную особую точку ∞ ; для функции $w = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$ — суммы степенного ряда, имеющего ненулевой радиус сходимости r , — особые точки составляют окружность $\{z \in \mathbb{C} : |z| = r\}$ — границу круга сходимости $\{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$ данного степенного ряда.

Точка $z_0 \in \mathbb{C}$, являющаяся особой для аналитической функции $w = f(z)$, считается устранимой, если существует аналитическое продолжение этой функции из области ее аналитичности в точку z_0 (XIII, с. 202).³

Явный признак неустранимости особой точки — неограниченность функции в ее окрестности.

Точка ветвления “многозначной аналитической функции” не может быть устранимой особой точкой ни для одной из ее однозначных ветвей.

¹ Следует подчеркнуть: речь идет об *однозначных* аналитических функциях, в частности, тех, которые являются *однозначными ветвями* “многозначных аналитических функций” (XIII, сноска на с. 204).

² Выражаясь другими словами, особые точки аналитической функции — это *граничные* точки области аналитичности этой функции.

³ Понятие *устранимости* распространяют и на случай $z_0 = \infty$, считая *особую точку* ∞ аналитической функции $w = f(z)$ устранимой, если 0 оказывается *устранимой особой точкой* для функции $w = f\left(\frac{1}{z}\right)$.

Примеры. 1. Сумма степенного ряда $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$ является аналитической функцией в круге $\{z \in \mathbb{C}: |z| < 1\}$, а так как вне этого круга данный степенной ряд расходится, все точки $z \in \mathbb{C}$ с $|z| = 1$ являются особыми для этой функции. Поскольку $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$ при $|z| < 1$, для функции $w = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n$ эти особые точки, кроме $z = 1$, оказываются устранимыми.¹

2. Функция $w = \frac{\sin \sqrt{z}}{\sqrt{z}}$, если считать, что в числителе и знаменателе $\sqrt{z}$ — любое (из двух возможных), но одно и то же значение квадратного корня из числа $z \neq 0$, является однозначной и аналитической в области $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Это следует из определения синуса (II, с. 37), в силу которого

$$w = \frac{\sin \sqrt{z}}{\sqrt{z}} = \frac{1}{\sqrt{z}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (\sqrt{z})^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{\sqrt{z}}{\sqrt{z}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n z^n}{(2n+1)!}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0\};$$

сокращение квадратных корней в правой части дает аналитическое продолжение данной функции из области $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ в точку 0, оказывающуюся поэтому для нее устранимой.

Другой особой точкой этой функции, но уже неустранимой, является ∞ : о ее неустранимости свидетельствует неограниченность функции при $z \rightarrow \infty$, поскольку при $z = -t^2$, $t > 0$,

$$\frac{\sin \sqrt{z}}{\sqrt{z}} = \frac{\sin it}{it} = \frac{e^t - e^{-t}}{2t} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} +\infty.$$

3. Для любой однозначной ветви $w = \sqrt{z}$, выделяемой в плоскости $\mathbb{C}$ с “разрезом” по (любому) лучу, выходящему из

¹ Особая точка $z = 1$ является для нее неустранимой, так как в случае возможности аналитического продолжения функции $w = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n$ из круга $\{z \in \mathbb{C}: |z| < 1\}$ в эту точку она оказывалась бы ограниченной при $z \rightarrow 1$, что неверно, поскольку $\lim_{\substack{z \rightarrow 1 \\ |z| < 1}} \sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \lim_{\substack{z \rightarrow 1 \\ |z| < 1}} \frac{1}{1-z} = \infty$.

начала координат (IV, с. 68), все точки этого луча являются *неустраняемыми особыми точками* (IV, с. 69). (Для функции же $w = \frac{\sin \sqrt{z}}{\sqrt{z}}$ при таком понимании $\sqrt{z}$ все точки этого луча оказываются *особыми*, но *устраняемыми*.)

4. Для функции $w = \operatorname{ctg} z$ *особыми* являются точки $0, \pm\pi, \pm2\pi, \dots$, а также ∞ ; все они *неустраняемые* (ввиду неограниченности функции в любой окрестности каждой из них).

5. Функция $w = \frac{\sin^3 z}{z}$ имеет те же *особые точки* — 0 (*устраняемую*) и ∞ (*неустраняемую*), — что и функция из примера 2. Следует, однако, отметить, что так как

$$\frac{\sin^3 z}{z} = \frac{1}{z} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} \right)^3 = \frac{z^3}{z} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n+1)!} \right)^3, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0\},$$

точка 0 после *аналитического продолжения* в нее функции, практически осуществляемого *сокращением* на z числителя и знаменателя дроби в правой части, оказывается (для *продолженной* функции!) *нулем кратности 2*. В этом и подобных случаях говорят, что и сама исходная функция $w = \frac{\sin^3 z}{z}$ (для которой точка 0 является *особой*!) имеет в этой точке *нуль кратности 2*.

Замечание. В связи с последним примером следует отметить, что существует (не разделяемое автором) мнение, по которому *устраняемые особые точки* аналитической функции вообще не следует считать ее *особыми точками*, а наоборот, причислять их к *точкам аналитичности* этой функции, называя их ее правильными точками. В соответствии с этим подходом, например, функция $w = \frac{\sin z}{\sin z}$ имеет *особой точкой* лишь ∞^1 или даже² вообще не имеет *особых точек*.

¹ Считается, что “особенности” функции в точках πk , $k \in \mathbb{Z}$, “устранены” ее *аналитическим продолжением* в них функцией $w \equiv 1$.

² Сноска ³ на с. 209.

Изолированные особые точки и их классификация

Точку $z_0 \in \mathbb{C}^*$ называют изолированной особой точкой аналитической функции $w = f(z)$, если у этой точки существует окрестность¹, все точки которой (отличные от z_0) являются точками аналитичности этой функции.²

Например, для однозначной ветви “квадратного корня” $w = \sqrt{z}$, выделяемой в плоскости $\mathbb{C}$ с “разрезом” по какому-либо лучу, выходящему из точки 0 (пример 3 на с.110), все точки этого луча (включая 0 и ∞) являются неизолированными особыми точками. Для аналитической функции $w = \operatorname{ctg} z$ (пример 4) особые точки $0, \pm\pi, \pm2\pi, \dots$ являются изолированными, а особая точка ∞ — неизолированной.

Классификация (описание характерных разновидностей) изолированных особых точек аналитических функций базируется на том, что в окрестности каждой своей изолированной особой точки z_0 функция по теореме Лорана (XII, с.183)³ имеет разложение в ряд Лорана:

$$f(z) = \begin{cases} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-z_0)^n & \text{при } 0 < |z-z_0| < r, \quad \text{если } z_0 \in \mathbb{C}, \\ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n & \text{при } r < |z| < +\infty, \quad \text{если } z_0 = \infty. \end{cases}$$

В обоих случаях (как $z_0 \in \mathbb{C}$, так и $z_0 = \infty$) ряд Лорана функции $w = f(z)$ в окрестности ее изолированной особой

¹ Т.е. множество вида $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < r\}$ (при некотором r , $0 < r \leq +\infty$), если $z_0 \in \mathbb{C}$, и $\{z \in \mathbb{C} : r < |z| < +\infty\}$ (при некотором $r \geq 0$), если $z_0 = \infty$.

² Эквивалентно: особая точка z_0 аналитической функции $w = f(z)$ считается изолированной, если в некоторой окрестности точки z_0 нет других особых точек этой функции (в противном случае особую точку z_0 называют неизолированной).

³ Примененной к кольцу вида $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < r\}$, если $z_0 \in \mathbb{C}$, и $\{z \in \mathbb{C} : r < |z| < +\infty\}$, если $z_0 = \infty$.

точки z_0 разделяют на *главную* и *правильную* части.¹.

Главной частью ряда Лорана аналитической функции $w = f(z)$ в окрестности ее изолированной особой точки z_0 считают — соответственно случаям $z_0 \in \mathbb{C}$ и $z_0 = \infty$ —

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z - z_0)^n = \frac{c_{-1}}{z - z_0} + \frac{c_{-2}}{(z - z_0)^2} + \frac{c_{-3}}{(z - z_0)^3} + \dots$$

и

$$\sum_{n=1}^{+\infty} c_n z^n = c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \dots;$$

прочие слагаемые ряда Лорана² относят к его правильной части.

Поскольку среди коэффициентов Лорана c_n могут быть и равные нулю, не исключены случаи, когда *главная часть* ряда Лорана³ содержит лишь конечное число (ненулевых) слагаемых или даже вовсе отсутствует.

Соответственно случаям, когда в *ряде Лорана* аналитической функции $w = f(z)$ в окрестности ее *изолированной* *особой точки* z_0 *главная часть*

а) *отсутствует*,

б) *содержит конечное* число слагаемых,

в) *содержит бесконечное* число слагаемых

изолированную особую точку z_0 функции $w = f(z)$ называют

а) устранимой,

б) полюсом,

в) существенно особой.

¹ Для *ряда Лорана* функции в кольце $\{z \in \mathbb{C}: 0 < r_1 < |z - z_0| < r_2\}$ или $\{z \in \mathbb{C}: r_1 < |z| < r_2 < +\infty\}$ (первое не является *окрестностью* точки $z_0 \in \mathbb{C}$, а второе — точки $z_0 = \infty$) такого разделения — на *главную* и *правильную* части — не производят.

² Содержащие неотрицательные степени $z - z_0$ в случае $z_0 \in \mathbb{C}$ и неположительные степени z , если $z_0 = \infty$.

³ Равно как и его *правильная* часть.

Понятие *полюса* имеет уточнение. Считается, что *полюс* z_0 функции $w = f(z)$ имеет порядок (или кратность) k , если¹ $(z - z_0)^{-k}$ есть старшая *отрицательная* степень $z - z_0$ или² z^k есть старшая *положительная* степень z в *главной части* ряда Лорана этой функции в окрестности точки z_0 . *Полюсы 1-го порядка* принято называть простыми.

Например, для функции $w = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + z^2 + z^3$ точки 0 и ∞ являются *полюсами* соответственно *2-го* и *3-го порядков*.

Наглядную иллюстрацию перечисленных типов *изолированных особых точек* дают *целые*³ функции $w = f(z)$, для каждой из которых во *всей плоскости* $\mathbb{C}$ имеет место *разложение Тейлора*

$$f(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \dots, \quad z \in \mathbb{C},$$

одновременно⁴ являющееся *разложением Лорана* этой функции в *окрестности бесконечности*.

Единственная особая точка ∞ такой функции оказывается для нее соответственно: а) *устранимой*, б) *полюсом* (порядка k), в) *существенно особой* тогда и только тогда, когда эта функция есть соответственно: а) *постоянная* ($c_1 = c_2 = \dots = 0$), б) *многочлен* ($c_k \neq 0, c_{k+1} = c_{k+2} = \dots = 0$), в) *целая трансцендентная функция* (III, с. 53).

Смягчить неудобство, связанное с необходимостью отдельно рассматривать случаи *конечной* ($z_0 \in \mathbb{C}$) и *бесконечной* ($z_0 = \infty$) *особой точки*, позволяет замена переменной z на $\frac{1}{z}$, при которой ряд Лорана $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n$ функции $w = f(z)$,

¹ В случае $z_0 \in \mathbb{C}$.

² В случае $z_0 = \infty$.

³ Т.е. *аналитические* во *всей* плоскости $\mathbb{C}$.

⁴ В силу свойства *единственности разложений Тейлора и Лорана* (XII, с. 188).

являющейся аналитической в *окрестности бесконечности* (при $|z| > r$), и *ряд Лорана* $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^{-n}$ функции $w = f\left(\frac{1}{z}\right)$, оказывающейся аналитической в *окрестности нуля* (при $|z| < r^{-1}$), переходят друг в друга с одновременным переходом друг в друга также и *главных частей* этих рядов.

На основании этого можно заключить:

|| *Особая точка $z_0 = \infty$ аналитической функции $w = f(z)$ является а) устранимой, б) полюсом (порядка k), в) существенно особой, г) неизолированной в том и только в том случае, когда $z_0 = 0$ оказывается особой точкой именно такого вида для аналитической функции $w = f\left(\frac{1}{z}\right)$.*

В частности, для функции $w = \sin \frac{1}{z}$ точки 0 и ∞ являются соответственно *существенно особой* и *устранимой*, поскольку после замены z на $\frac{1}{z}$ эта функция переходит в $w = \sin \frac{1}{1/z}$ — функцию, совпадающую (при $z \neq 0$) с $w = \sin z$, а потому имеющую разложение

$$\sin \frac{1}{z} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots, \quad 0 < |z| < +\infty,$$

являющееся ее *разложением в ряд Лорана* и в *окрестности бесконечности* (по отношению к которой весь ряд состоит из *главной части*), и в *окрестности нуля* (по отношению к которой ряд состоит только из *правильной части*).

Понятиями *полюса* аналитической функции и его *порядка* оперировали (еще до оформления этих терминов) Коши (например, в [28], sér. II, t. II, p. 354; t. VI, p. 25) и Риман ([15], с. 68–69). Вейерштрасс ([43], Bd. II, S. 78) ввел понятие *существенно особой точки*¹, а обращаясь с *полюсами*, называл их *несущественными особыми точками*². Термин *полюс* вошел в обиход из книг Неймана ([39], S. 94) и Брио и Буке ([23], p. 15).

¹ Wesentliche singuläre Stelle.

² Ausserwesentliche singuläre Stellen.

Характеристика устранимой особой точки

Для изолированной особой точки z_0 аналитической функции $w = f(z)$ следующие три условия эквивалентны:

1° z_0 — устранимая особая точка функции $w = f(z)$, т. е. разложение Лорана этой функции в окрестности точки z_0 ¹ не содержит главной части, имея вид

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n = c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \dots$$

(если $z_0 \in \mathbb{C}$) или

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^0 c_n z^n = c_0 + \frac{c_{-1}}{z} + \frac{c_{-2}}{z^2} + \dots \quad (\text{если } z_0 = \infty);$$

2° функция $w = f(z)$ имеет конечный предел при $z \rightarrow z_0$;

3° функция $w = f(z)$ ограничена ($|f(z)| \leq h$) в некоторой окрестности точки z_0 .

Доказательство. Пусть z_0 — точка конечной плоскости.

1° $\Rightarrow$ 2°. Так как $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n$ в кольце вида $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < r\}$, это кольцо принадлежит кругу сходимости степенного ряда в правой части, а потому существует $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n = c_0$.

2° $\Rightarrow$ 3°. Любая функция, имеющая конечный предел в точке, является ограниченной в окрестности этой точки.

3° $\Rightarrow$ 1°. Так как z_0 — изолированная особая точка аналитической функции $w = f(z)$, существует кольцо вида $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < r\}$, в котором данная функция является аналитической и по теореме Лорана (XII, с. 183) имеет

¹ Т. е. в кольце вида $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < r\}$, если z_0 — точка конечной плоскости, и $\{z \in \mathbb{C} : r < |z| < +\infty\}$, если $z_0 = \infty$.

разложение Лорана $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n$, $0 < |z-z_0| < r$, коэффициенты c_n которого в силу неравенств Коши для коэффициентов Лорана (XII, с. 194) и ограниченности функции ($|f(z)| \leq h$) в окрестности точки z_0 удовлетворяют неравенствам

$$|c_n| \leq \frac{h}{\rho^n}, \quad 0 < \rho < r, \quad n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Переходя в этих неравенствах к пределу при $\rho \rightarrow 0$, можно заключить: $c_n = 0$ для $n = -1, -2, \dots$, а потому разложение Лорана функции $w = f(z)$ в окрестности точки z_0 не содержит главной части, имея вид $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(z-z_0)^n$.¹

Распространить эквивалентность условий $1^\circ - 3^\circ$ на случай $z_0 = \infty$ позволяет переход от функции $w = f(z)$ к функции $w = f\left(\frac{1}{z}\right)$, для которой изолированной особой точкой является $z_0 = 0$. Следует лишь заметить, что:

а) *устранимость* особой точки $z_0 = \infty$ аналитической функции $w = f(z)$ (т.е. отсутствие главной части в ее разложении Лорана в окрестности бесконечности) равносильна *устранимости* особой точки $z_0 = 0$ аналитической функции $w = f\left(\frac{1}{z}\right)$;

$$\text{б) } \lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} f\left(\frac{1}{z}\right);$$

в) *ограниченность* функции $w = f(z)$ в окрестности бесконечности ($|f(z)| \leq h$ при $|z| > r$) равносильна *ограниченности* функции $w = f\left(\frac{1}{z}\right)$ в окрестности нуля: $\left|f\left(\frac{1}{z}\right)\right| \leq h$ при $0 < |z| < \frac{1}{r}$. **Q.E.D.**

¹ Степенной ряд в правой части сходится в окрестности точки z_0 , включая саму эту точку, а потому его сумма осуществляет аналитическое продолжение функции в точку z_0 , т.е. устраняет особенность в этой точке (в смысле определения *устранимости*, данного на с. 209).

Характеристика полюса

Для конечной ($z_0 \in \mathbb{C}$) изолированной особой точки z_0 аналитической функции $w = f(z)$ следующие условия эквивалентны:

1° z_0 — полюс (порядка k) функции $w = f(z)$, т.е. разложение Лорана этой функции в окрестности точки z_0 имеет в главной части лишь конечное число (ненулевых) слагаемых:

$$f(z) = \frac{c_{-k}}{(z-z_0)^k} + \cdots + \frac{c_{-1}}{z-z_0} + \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-z_0)^n \quad (\text{где } c_{-k} \neq 0);$$

2° $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$ (при этом существует конечный и не равный нулю $\lim_{z \rightarrow z_0} (z-z_0)^k f(z)$);

3° z_0 является устранимой особой точкой для функции $w = \frac{1}{f(z)}$, причем — при доопределении $\frac{1}{f(z_0)} \stackrel{\text{def}}{=} 0$ — нулем этой функции (кратности k).

Доказательство. 1° $\Rightarrow$ 2°. Достаточно записать разложение Лорана функции в окрестности точки z_0 в виде

$$f(z) = \frac{1}{(z-z_0)^k} (c_{-k} + c_{-k+1}(z-z_0) + \cdots + c_0(z-z_0)^k + \cdots)$$

(где $c_{-k} \neq 0$).

2° $\Rightarrow$ 3°. Так как $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$, $f(z) \neq 0$ в окрестности

точки z_0 , а потому в этой окрестности функция $w = \frac{1}{f(z)}$ является аналитической, имея в точке z_0 нулевой предел, а следовательно, устранимую особенность (с. 216, 2°). После ее аналитического продолжения в эту точку доопределением $\frac{1}{f(z)} \stackrel{\text{def}}{=} 0$ эта функция получает в окрестности точки z_0

разложение Тейлора вида $\frac{1}{f(z)} = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n (z-z_0)^n$, подстановка которого в условие 2° показывает, что $b_0 = \cdots = b_{k-1} = 0$, а

$b_k \neq 0$, т.е. функция $w = \frac{1}{f(z)}$ имеет в точке z_0 нуль кратности k (XIII, с.198, 2°).

3° $\Rightarrow$ 1°. Пусть K — круг с центром z_0 , в котором функция $w = \frac{1}{f(z)}$ (после устранения особенности в точке z_0) имеет представление $\frac{1}{f(z)} = (z-z_0)^k \varphi(z)$, где $w = \varphi(z)$ — аналитическая функция, не обращающаяся в нуль в этом круге (XIII, с.198, 3°). Применение теоремы Тейлора к функции $w = \frac{1}{\varphi(z)}$ (также аналитической в круге K) приводит к ее разложению Тейлора

$$\frac{1}{\varphi(z)} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n \quad \left(\text{с } a_0 = \frac{1}{\varphi(z_0)} \neq 0 \right), \quad z \in K,$$

в силу которого для функции $w = f(z) = (z-z_0)^{-k} \frac{1}{\varphi(z)}$ в этом же круге (но уже с исключенным центром z_0) справедливо разложение Лорана¹

$$f(z) = (z-z_0)^{-k} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n, \quad z \in K, \quad z \neq z_0,$$

с главной частью $\frac{a_0}{(z-z_0)^k} + \dots + \frac{a_{k-1}}{z-z_0}$ ($a_0 \neq 0$). **Q.E.D.**

Замечание. Доказанное утверждение распространяется на случай $z_0 = \infty$ переходом от функции $w = f(z)$ (с изолированной особой точкой $z_0 = \infty$) к функции $w = f\left(\frac{1}{z}\right)$ (с изолированной особой точкой $z_0 = 0$). При этом следует

а) степени $z-z_0$ (в условиях 1° и 2° утверждения) заменить соответствующими степенями $\frac{1}{z}$;

б) считать изолированную особую точку $z_0 = \infty$ аналитической функции $w = f(z)$ ее нулем (кратности k), если точка $z_0 = 0$ оказывается нулем (кратности k) функции $w = f\left(\frac{1}{z}\right)$ (после ее доопределения $f\left(\frac{1}{z}\right) \stackrel{\text{def}}{=} 0$).

¹ Являющееся таковым ввиду свойства единственности (XII, с.188).

Характеристика существенно особой точки

Для того чтобы изолированная особая точка z_0 аналитической функции $w = f(z)$ была существенно особой, необходимо и достаточно, чтобы данная функция не имела предела (ни конечного, ни бесконечного) при $z \rightarrow z_0$.

Доказательство. Любая изолированная особая точка z_0 аналитической функции $w = f(z)$ является либо

устранимой, что равносильно существованию у функции $w = f(z)$ конечного предела при $z \rightarrow z_0$ (с. 216), либо полюсом, если $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$ (с. 218), либо

существенно особой, для какого случая не остается иной возможности как быть эквивалентным отсутствию у функции $w = f(z)$ предела (как конечного, так и бесконечного) при $z \rightarrow z_0$. **Q.E.D.**

Теорема Казорáти–Сохóцкого–Вéйерштрасса.¹ Если z_0 — существенно особая точка аналитической функции $w = f(z)$, то в любой окрестности этой точки данная функция принимает значения, сколь угодно близкие к любому значению $w_0 \in \mathbb{C}^*$.²

¹ Содержится в вышедшей в 1868 г. книге [25] (на с. 434) итальянского математика Казорáти (Casorati, Felice, 1835–1890), в магистерской диссертации (того же 1868 г.) петербургского математика Юлиана Васильевича Сохоцкого (1842–1927) и (уже в современных терминах) в статье Вéйерштрасса 1876 г. “Zur Theorie der eindeutige analytischen Functionen” (на с. 124 в [43], Bd. II). Вопреки исторической правде в российской литературе автором данной теоремы обычно называют одного Сохоцкого, в зарубежной — одного Вейерштрасса.

² Т.е. каковы бы ни были точка $w_0 \in \mathbb{C}^*$ и окрестности V_{z_0} и V_{w_0} точек z_0 и w_0 , существует точка $z \in V_{z_0}$, для которой $f(z) \in V_{w_0}$. Равносильная формулировка теоремы: Если z_0 — существенно особая точка аналитической функции $w = f(z)$, то для любой точки $w_0 \in \mathbb{C}^*$ существует последовательность $\{z_n\} \rightarrow z_0$, для которой $\{f(z_n)\} \rightarrow w_0$.

Доказательство. Пусть z_0 — существенно особая точка аналитической функции $w = f(z)$ и пусть вначале w_0 — какое-либо конечное комплексное значение ($w_0 \in \mathbb{C}$). Рассуждая “от противного”, т. е. предполагая, что в некоторой окрестности точки z_0 данная функция не принимает сколь угодно близкие к w_0 значения (т. е. $|f(z) - w_0| \geq \mu > 0$ для всех z из указанной окрестности точки z_0), можно сделать вывод: функция $w = \frac{1}{f(z) - w_0}$ является аналитической и ограниченной в окрестности точки z_0 и потому имеет в этой точке (согласно утверждению на с. 216) устранимую особенность, а следовательно (по тому же утверждению), конечный предел при $z \rightarrow z_0$. Но отсюда вытекает, что функция $w = f(z) - w_0$ (а следовательно, и функция $w = f(z)$) имеет конечный¹ или бесконечный² предел при $z \rightarrow z_0$, что невозможно, поскольку z_0 — существенно особая точка функции $w = f(z)$.

В случае $w_0 = \infty$ рассуждение гораздо проще: в любой окрестности существенно особой точки аналитическая функция $w = f(z)$ заведомо является неограниченной³, т. е. среди ее значений есть “сколь угодно близкие к бесконечности”. **Q.E.D.**

Усилением теоремы Казорати–Сохотского–Вейерштрасса является следующее (более трудное для доказательства⁴) утверждение.

Теорема Пикара⁵ В любой окрестности существенно особой точки аналитическая функция принимает любое комплексное значение за возможным исключением лишь одного.

¹ Если $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{f(z) - w_0} \neq 0$.

² Если $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{f(z) - w_0} = 0$.

³ Иначе она имела бы в точке z_0 устранимую особенность (с. 216).

⁴ Оно есть, например, у А. И. Маркушевича в [12] (с. 690–691).

⁵ Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure, sér. II, t. 9, 1880, p. 165; Picard, Émile, 1856–1941, — французский математик.

Сформулированную теорему иногда называют “большой теоремой Пикара”, снабжая эпитетом “малая” тот ее частный случай, когда функция является *целой* (с *существенной особой точкой* ∞).

Вот несколько примеров классификации *изолированных особых точек* на основе приведенных характеристик.

1. *Особые точки* функции $w = \operatorname{ctg} z$, которая является аналитической в плоскости $\mathbb{C}$ с исключенными точками πk , $k \in \mathbb{Z}$, — это указанные точки (все они *изолированные*¹) и ∞ (*неизолированная*²). Поскольку для функции $w = \frac{1}{\operatorname{ctg} z}$ каждая точка πk является *устранимой особой точкой*, а после *устранения* в ней особенности (путем замены $\frac{1}{\operatorname{ctg} z}$ на $\operatorname{tg} z$) — *простым нулем*, для исходной функции $w = \operatorname{ctg} z$ точки πk , $k \in \mathbb{Z}$, являются *простыми полюсами*.

При переходе к функции $w = \operatorname{ctg} z - \frac{1}{z}$ *особая точка* 0 оказывается *устранимой*, что видно из разложения

$$\operatorname{ctg} z - \frac{1}{z} = \frac{z \cos z - \sin z}{\sin z} = \frac{z(1 - z^2/2! + \dots) - (z - z^3/3! + \dots)}{z - z^3/3! + \dots},$$

и (после *устранения особенности*) — *нулем 2-й кратности*. Точки же πk , $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$, для функции $w = \operatorname{ctg} z - \frac{1}{z}$ (как и для функции $w = \operatorname{ctg} z$) являются *простыми полюсами*; это вытекает из следующего простого, но весьма полезного в практике классификации особых точек утверждения — прямого следствия теоремы Лорана (XII, с. 183).

Если z_0 является *изолированной особой точкой* аналитической функции $w = f(z)$ и *точкой аналитичности* функции $w = g(z)$, то ряды Лорана функций $w = f(z)$ и $w = f(z) \pm g(z)$ в окрестности точки z_0 имеют одну и ту же главную часть.

¹ В π -окрестности каждой из них нет других *особых точек* этой функции.

² В любой *окрестности бесконечности* есть точки вида πk .

2. Для аналитической функции $w = \sin \frac{1}{z^2+1}$ *особыми точками* являются $\pm i$ и ∞ (все *изолированные*). Так как при стремлении z к точкам $\pm i$ вдоль *мнимой* оси (от начала координат) величина $\frac{1}{z^2+1}$, *возрастая*, принимает все действительные значения от 1 до $+\infty$, функция $w = \sin \frac{1}{z^2+1}$ не имеет предела при $z \rightarrow \pm i$, а потому обе точки $\pm i$ — *существенно особые* для этой функции. Так как $\lim_{z \rightarrow \infty} \sin \frac{1}{z^2+1} = 0$, *особая точка* ∞ является для функции $w = \sin \frac{1}{z^2+1}$ *устранимой*; более того, поскольку при замене z на $\frac{1}{z}$ функция $w = \sin \frac{1}{z^2+1}$ переходит в $w = \sin \frac{z}{1+z^2}$ (для которой начало координат есть *нуль кратности 1*), *бесконечность* является (замечание на с. 219) *нулем* функции $w = \sin \frac{1}{z^2+1}$ *кратности 1*.

3. Для аналитической функции $w = \exp \frac{1}{z \sin \frac{1}{z}}$ *особыми точками* являются: $\infty, \pm \frac{1}{\pi}, \pm \frac{1}{2\pi}, \pm \frac{1}{3\pi}, \dots$ (*изолированные*) и 0 (*неизолированная*). Так как

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \exp \frac{1}{z \sin \frac{1}{z}} \stackrel{\frac{1}{z} = \zeta}{=} \exp \lim_{\zeta \rightarrow 0} \frac{\zeta}{\zeta - \frac{1}{3!}\zeta^3 + \frac{1}{5!}\zeta^5 - \dots} = \exp 1 = e,$$

особая точка ∞ является *устранимой*; при стремлении же z к любой из точек $\frac{1}{\pi k}$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$, с *разных сторон* вдоль *действительной* оси значение функции стремится в одном случае к 0, а в другом к $+\infty$; следовательно, функция не имеет предела ни в одной из этих точек, а потому каждая из них — *существенно особая*.

4. Для аналитической функции $w = \frac{\operatorname{ctg} z}{\cos z - 1}$ *особыми* являются точки $z_k = \pi k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ (все они *изолированные*) и ∞ (*неизолированная*). Так как для функции $w = \frac{1}{\frac{\operatorname{ctg} z}{\cos z - 1}} = \frac{\sin z (\cos z - 1)}{\cos z}$ точки $z_k = \pi k$ являются *нулями*

(кратности 1 для нечетных k и кратности 3 для k четных), указанные точки оказываются для функции $w = \frac{\operatorname{ctg} z}{\cos z - 1}$ полюсами соответствующих порядков.

5. Особые точки аналитической функции $w = \frac{z^2 + \pi^2}{e^z + 1}$ — это нули знаменателя, т. е. $z_k = i\pi(2k-1)$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ (все изолированные) и ∞ (неизолированная). Поскольку

$$\frac{z^2 + \pi^2}{e^z + 1} = \frac{(z+i\pi)(z-i\pi)}{1 - e^{z-i\pi(2k-1)}} = \frac{(z-z_0)(z-z_1)}{1 - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z-z_k)^n}{n!}} = \frac{(z-z_0)(z-z_1)}{-\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(z-z_k)^n}{n!}},$$

особые точки z_k при $k=0, 1$ оказываются *устраняемыми*, а при $k=-1, \pm 2, \dots$ — *полюсами 1-го порядка*.

6. Многозначная функция $w = \frac{1}{z + \sqrt{z}}$ имеет в окрестности точки $z_0 = 1$ две однозначные аналитические ветви, определяемые соответственно значениями $\sqrt{1} = 1$ и $\sqrt{1} = -1$; точка $z_0 = 1$ для первой из них не является особой, для второй же она служит *полюсом 1-го порядка*, поскольку для этой ветви $\left. \frac{1}{z + \sqrt{z}} \right|_{z=1} = 1 + \sqrt{1} = 0$, а $\left(\frac{1}{z + \sqrt{z}} \right)'_{z=1} \neq 0$.

Иллюстрировать данные выше характеристики *изолированных особых точек* могут также следующие утверждения.

Если для целой (т. е. аналитической во всей плоскости $\mathbb{C}$) функции $w = f(z)$ единственная ее особая точка ∞ является *устраняемой*, то эта функция есть *постоянная*, при этом $f(z) \equiv \lim_{z \rightarrow \infty} f(z)$.

Доказательство. Любая *целая* функция $w = f(z)$ имеет во всей плоскости $\mathbb{C}$ разложение Тейлора $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$, одновременно являющееся ее *разложением Лорана* в окрестности *бесконечности*. Если *особая точка* ∞ этой функции

является *устранимой*, то *главная часть* $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n z^n$ этого разложения должна отсутствовать, т.е. $f(z) = c_0$. **Q.E.D.**

Теорема Лиувилля.¹ Среди *целых функций ограниченного порядка* являются лишь *постоянные*.

Доказательство. Если *целая функция ограничена*, то ∞ является для нее *устранимой особой точкой* (с.216), а по предыдущему утверждению такая функция есть *постоянная*. **Q.E.D.**

Теорема о существовании корня у многочлена.¹ Любой *многочлен* $p(z)$ (степени $n \geq 1$) имеет *корень* $z \in \mathbb{C}$.

Доказательство. Если бы *многочлен* $p(z)$ степени $n \geq 1$ не обращался в нуль ни в одной точке $z \in \mathbb{C}$, то функция $w = \frac{1}{p(z)}$ оказывалась бы *целой*, причем — поскольку $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{p(z)} = 0$ — имеющей *устранимую особенность* в ∞ . Это возможно лишь если эта функция — *постоянная*, причем $\frac{1}{p(z)} = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{p(z)} = 0$ — противоречие.

Теорема о разложении правильной рациональной дроби на простые. Если *многочлены* $p(z)$ и $q(z)$ не имеют общих нулей (корней) и степень первого меньше степени второго, то отношение $\frac{p(z)}{q(z)}$ — его в этом случае называют² правильной рациональной дробью — представимо, причем *единственным образом*, в виде

$$\frac{p(z)}{q(z)} = \left[\frac{A_k}{(z-a)^k} + \cdots + \frac{A_1}{z-a} \right] + \left[\frac{B_m}{(z-b)^m} + \cdots + \frac{B_1}{z-b} \right] + \cdots \\ \cdots + \left[\frac{C_n}{(z-c)^n} + \cdots + \frac{C_1}{z-c} \right],$$

¹ Уже встречалась выше (XIII, с.197).

² Следуя Эйлеру [19], §38, с.47.

где в знаменателях простых дробей в правой части $a, b, \dots$, $\dots, c$ — нули многочлена $q(z)$, а $k, m, \dots, n$ — кратности этих нулей; числителями же их являются некоторые комплексные числа (традиционно обозначаемые заглавными буквами и обычно находящиеся методом неопределенных коэффициентов — сравнением левой и правой частей равенства после приведения составляющих их дробей к общему знаменателю).

Доказательство. Единственность указанного представления следует из того, что точка a является *особой* лишь для *первой* (взятой в квадратные скобки) группы простых дробей в правой части, в силу чего эта группа простых дробей составляет в точности *главную часть ряда Лорана* суммы всех дробей в правой части, а следовательно, и функции $w = \frac{p(z)}{q(z)}$ в окрестности точки a . По тем же соображениям $\frac{B_m}{(z-b)^m} + \dots + \frac{B_1}{z-b}$ есть в точности *главная часть ряда Лорана* функции $w = \frac{p(z)}{q(z)}$ в окрестности точки b и т. д.

Практически так же доказывается существование указанного представления. Так как точки $a, b, \dots, c$ являются нулями (кратностей $k, m, \dots, n$) многочлена $p(z)$, они же оказываются *полюсами* (тех же порядков $k, m, \dots, n$) функции $w = \frac{p(z)}{q(z)}$. Если считать, что $\frac{A_k}{(z-a)^k} + \dots + \frac{A_1}{z-a}$ есть *главная часть ряда Лорана* функции $w = \frac{p(z)}{q(z)}$ в окрестности точки a , то замена в ней $\frac{p(z)}{q(z)}$ на $\frac{p(z)}{q(z)} - \left[\frac{A_k}{(z-a)^k} + \dots + \frac{A_1}{z-a} \right]$, с одной стороны, делает *особую точку a устранимой*, а с другой — оставляет неизменными *главные части рядов Лорана* функции $w = \frac{p(z)}{q(z)}$ в окрестностях точек $b, \dots, c$ (утверждение на с. 222).

Повторение этих рассуждений применительно к точкам $b, \dots, c$ позволяет сделать вывод: функция

$$w = \frac{p(z)}{q(z)} - \left[\frac{A_k}{(z-a)^k} + \dots + \frac{A_1}{z-a} \right] - \left[\frac{B_m}{(z-b)^m} + \dots + \frac{B_1}{z-b} \right] - \dots \\ \dots - \left[\frac{C_n}{(z-c)^n} + \dots + \frac{C_1}{z-c} \right]$$

имеет в плоскости $\mathbb{C}$ лишь *устранимые* особые точки, а потому после устранения в ней особенностей оказывается *целой*. Так как при $z \rightarrow \infty$ эта функция (сумма *правильных* рациональных дробей) *стремится к нулю*, она (утверждение на с. 223) есть тождественный *нуль*. **Q.E.D.**

Упражнения. 1. Доказать, что определение *изолированной особой точки* на с. 212 эквивалентно данному в сноске на той же странице.

2. Обосновать и проиллюстрировать примерами следующую таблицу возможных *особенностей* аналитической функции $w = f(z) + g(z)$ в зависимости от видов особенностей аналитических функций $w = f(z)$ и $w = g(z)$ в их общей *изолированной особой точке*.

f g	устраняемая особая точка, нуль кратности k	полюс порядка l	существенно особая точка
устраняемая особая точка, нуль кратности m	устраняемая, нуль кратности $\geq \min\{k, m\}$ ¹	полюс порядка l	существенно особая точка
полюс порядка n	полюс порядка n	полюс порядка $\leq \max\{l, n\}$ ²	существенно особая точка
существенно особая точка	существенно особая точка	существенно особая точка	особенность любого вида

¹ Точнее, кратности $\min\{k, m\}$, если $m \neq k$, и кратности $\geq k$, если $m = k$.

² Точнее, порядка $\max\{l, n\}$, если $n \neq l$, и порядка $\leq l$ (включая случай *устраняемой особой точки*), если $n = l$.

3. Заполнить подобную таблицу для функции $w = f(z)g(z)$.

4. Доказать, что на *границе* круга сходимости *степенного ряда* непременно есть *неустраняемая* особая точка его *суммы*.

5. Проверить равносильность формулировок теоремы Казорати–Сохотского–Вейерштрасса на с. 220 и данной в сноске на той же странице.

6. Какую особенность имеет функция $w = e^{f(z)}$ в точке z_0 , если для функции $w = f(z)$ эта точка является а) *полосом*? б) *существенно особой*?

7. Проверить утверждение теоремы Пикара (с. 221) для функций $w = \cos \frac{1}{z}$, $w = \exp \frac{1}{z}$.

8. Привести пример *многозначной функции* $w = F(z)$, для *однозначных ветвей* которой точка $z_0 \in \mathbb{C}$ была бы *особой*, причем для одной ветви — *устраняемой*, для другой — *полосом*, для третьей — *существенно особой*, для четвертой — *неизолированной*.

$$\left(w = \frac{\frac{1}{\sqrt[4]{z}-i} \sin \frac{\sqrt[4]{z}-i}{\sqrt[4]{z}+i}}{\sin \frac{2\pi}{\sqrt[4]{z}+1}}, \quad z_0 = 1. \right)$$

XV. ЧТО НАЗЫВАЮТ ВЫЧЕТАМИ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ И КАК ИМИ ОПЕРИРУЮТ

Вычетом¹ аналитической функции $w = f(z)$ в ее изолированной особой точке $z_0 \in \mathbb{C}^*$ называют обозначаемый²

$$\operatorname{res}_{z=z_0} f(z)$$

коэффициент при $(z - z_0)^{-1}$ в разложении Лорана этой функции $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n$ в окрестности точки z_0 в

случае, если эта точка конечна: $\left[\operatorname{res}_{z=z_0} f(z) \stackrel{\text{def}}{=} c_{-1} \quad (z_0 \in \mathbb{C}) \right]$;

взятый с минусом коэффициент при z^{-1} в ее разложении Лорана $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n$ в окрестности бесконечности, если

$$z_0 = \infty: \left[\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) \stackrel{\text{def}}{=} -c_{-1} \right].$$

Понятие *вычета* аналитической функции (первоначально в ее *полюсе*) ввел в 1826 г. Коши, видя в нем (в случае обращения функции в бесконечность) некоторую аналогию с понятием *производной*. Вот что можно прочитать на с. 11 первого тома его “Exercices de Mathématiques” (= [28], sér. II, t. VI, p. 23), где впервые появляется термин *вычет*.

“Когда независимой переменной x придается бесконечно малое приращение ε , функция $f(x)$ этой переменной сама получает, вообще

¹ Устоявшийся перевод термина Коши *le résidu* — остаток; причину выбора именно этого термина для вводимого им понятия Коши в своих работах не объяснил.

² В настоящее время (наряду с вариантами этого обозначения). Предложенное Коши обозначение *вычетов* на основе стилизованной буквы E — начальной в названии операции *извлечения вычетов* (*Extraction des résidus*) — не прижилось.

говоря, бесконечно малое приращение, первый член которого пропорционален ε , и конечный коэффициент при ε в приращении функции есть то, что называют дифференциальным коэффициентом ... Если после нахождения значений x , обращающих функцию $f(x)$ в бесконечность, прибавить к одному из этих значений, обозначаемому x_1 , бесконечно малое количество ε , а затем разложить $f(x_1 + \varepsilon)$ по возрастающим степеням этого количества, то первые члены разложения будут содержать отрицательные степени ε , и один из них будет произведением $\frac{1}{\varepsilon}$ на конечный коэффициент, который мы будем называть вычетом функции $f(x)$ относительно конкретного значения x_1 переменной x .¹

Пример. Вычеты аналитической функции $w = \frac{z}{z^2 - 1}$ в ее особых точках $1, -1, \infty$ равны соответственно $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1$:

$$\begin{aligned} \frac{z}{z^2 - 1} &= \frac{1}{z - 1} \left(1 - \frac{1}{z + 1} \right) = \frac{1}{z - 1} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{1}{1 + (z - 1)/2} \right) = \\ &= \frac{1}{z - 1} \left(1 - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{z - 1}{2} + \frac{(z - 1)^2}{2^2} - \dots \right) \right), \quad |z - 1| < 2; \\ \frac{z}{z^2 - 1} &= \frac{1}{z + 1} \left(1 + \frac{1}{z - 1} \right) = \frac{1}{z + 1} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{1}{1 + (z + 1)/2} \right) = \\ &= \frac{1}{z + 1} \left(1 - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{z + 1}{2} + \frac{(z + 1)^2}{2^2} + \dots \right) \right), \quad |z + 1| < 2; \end{aligned}$$

¹ В оригинале: "Lorsqu'on attribue à une variable indépendante x un accroissement infiniment petit ε , une fonction $f(x)$ de cette variable reçoit elle-même en général un accroissement infiniment petit dont le premier terme est proportionnel à ε , et le coefficient fini de ε dans l'accroissement de la fonction est ce qu'on nomme le coefficient différentiel... Si, après avoir cherché les valeurs de x qui rendent la fonction $f(x)$ infinie, on ajoute à l'une de ces valeurs, désignée par x_1 , la quantité infiniment petite ε , puis, que l'on développe $f(x_1 + \varepsilon)$ suivant les puissances ascendantes de la même quantité, les premiers termes du développement renfermeront des puissances négatives de ε , et l'un d'eux sera le produit de $\frac{1}{\varepsilon}$ par un coefficient, que nous appellerons le résidu de la fonction $f(x)$ relatif à la valeur particulière x_1 de la variable x ."

$$\frac{z}{z^2-1} = \frac{1}{z} \frac{1}{1-z^{-2}} = z^{-1} (1 + z^{-2} + z^{-4} + \dots), \quad 1 < |z| < +\infty.$$

Комбинируя данное определение *вычета* с формулой для коэффициента c_{-1} в *разложении Лорана* (XII, с. 183), приходят к следующему *эквивалентному* определению *вычета* аналитической функции $w = f(z)$ в ее *изолированной особой*

точке $z_0 \in \mathbb{C}^*$: $\boxed{\operatorname{res}_{z=z_0} f(z) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} f(z) dz}$, где Γ — любой замкнутый *кусочно-гладкий контур*, лежащий в *окрестности* точки z_0 (*не содержащей* других *особых точек* функции) и *один раз* обходящий точку z_0 в *положительном* направлении (т. е. так, что $\operatorname{ind}(\Gamma, z_0) = 1$)¹.

Следует отметить, что *вычет* аналитической функции в ее *конечной* *изолированной особой точке* определяется *главной частью* ее ряда Лорана (в *окрестности* этой *точки*), тогда как *вычет* в *бесконечной* *изолированной особой точке* — его *правильной частью*.

Формула вычета в полюсе.² Если точка $z_0 \in \mathbb{C}$ — *полюс* аналитической функции $w = f(z)$ *порядка* $\leq k$, то

$$\boxed{\operatorname{res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} [(z-z_0)^k f(z)]^{(k-1)}}.$$

Доказательство. В *окрестности полюса* z_0 *порядка* $\leq k$ *разложение Лорана* аналитической функции имеет вид

$$f(z) = \frac{c_{-k}}{(z-z_0)^k} + \dots + \frac{c_{-1}}{z-z_0} + c_0 + c_1(z-z_0) + c_2(z-z_0)^2 + \dots$$

Умножение обеих частей этого равенства на $(z-z_0)^k$, взятие производной *порядка* $k-1$ и переход к пределу при $z \rightarrow z_0$ последовательно приводят к следующим соотношениям:

$$(z-z_0)^k f(z) = c_{-k} + \dots + c_{-1}(z-z_0)^{k-1} + c_0(z-z_0)^k + \dots;$$

¹ В случае $z_0 = \infty$ это означает, что $\operatorname{ind}(\Gamma, 0) = -1$ (IX, с. 138).

² Коши оперировал ей еще до оформления понятия “вычет” (например, в работе 1825 г.: [28], sér. II, t. II, p. 61).

$$[(z-z_0)^k f(z)]^{(k-1)} = 1 \cdot 2 \cdots (k-1) c_{-1} + 2 \cdots k c_0 (z-z_0) + \cdots ;$$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} [(z-z_0)^k f(z)]^{(k-1)} = (k-1)! c_{-1}. \quad \mathbf{Q.E.D.}$$

Вот пример применения этой формулы с привлечением (для сокращения вычислений) операций *деления, умножения и почленного дифференцирования* степенных рядов (II, с. 39, 34, 33):

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_{z=0} \frac{1}{\sin z (1-\cos z)} &\stackrel{k=3}{=} \frac{1}{2!} \lim_{z \rightarrow 0} \left[\frac{z^3}{\sin z (1-\cos z)} \right]'' = \frac{1}{2!} \left[\left(1 - \frac{z^2}{3!} + \cdots \right)^{-1} \times \right. \\ &\times \left. \left(\frac{1}{2!} - \frac{z^2}{4!} + \cdots \right)^{-1} \right]'' = \frac{1}{2} \left[\left(1 + \frac{z^2}{3!} + \cdots \right) \left(2 + \frac{z^2}{3!} + \cdots \right) \right]''_{z=0} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Если z_0 — полюс *1-го порядка* (простой полюс) функции $w = f(z)$, то формула вычета принимает вид

$$\boxed{\operatorname{res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} [(z-z_0) f(z)]},$$

а в частном случае, когда функция задана как *отношение* $\left(f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)} \right)$ двух аналитических в точке z_0 функций с

$$\varphi(z_0) \neq 0, \quad \psi(z_0) = 0, \quad \psi'(z_0) \neq 0, \quad \boxed{\operatorname{res}_{z=z_0} \frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}}, \text{ поскольку}$$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \left((z-z_0) \frac{\varphi(z)}{\psi(z)} \right) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{(z-z_0)\varphi(z)}{\psi(z)-\psi(z_0)} = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}; \text{ например:}$$

$$1) \quad \operatorname{res}_{z=\pm\pi} \frac{1}{\sin z (1-\cos z)} = \frac{1}{\left(\sin z (1-\cos z) \right)'_{z=\pm\pi}} = -\frac{1}{2};$$

$$2) \quad \text{если } w = \frac{z+2}{\sqrt{2-z+1}} \text{ — однозначная ветвь, определяе-}$$

мая в окрестности точки $z=1$ условием $\sqrt{1} = -1$, то

$$\operatorname{res}_{z=1} \frac{z+2}{\sqrt{2-z+1}} = \frac{z+2}{(\sqrt{2-z+1})'} \Big|_{z=1} = \frac{z+2}{\frac{-1}{2\sqrt{2-z}}} \Big|_{z=1} = 6$$

(для другой однозначной ветви — определяемой условием $\sqrt{1} = 1$ — точка $z=1$ не является *особой*).

Теорема о вычетах.¹ Если функция $w = f(z)$ является аналитической в односвязной области $D \subset \mathbb{C}$ за исключением конечного числа особых точек $z_1, \dots, z_m \in D$, то каков бы ни был лежащий в области D и не проходящий через эти точки замкнутый кусочно-гладкий контур, справедливо равенство

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^m \left(\operatorname{res}_{z=z_j} f(z) \cdot \operatorname{ind}(\Gamma, z_j) \right);$$

в частности, если контур Γ не имеет самопересечений, и обход им внутренней по отношению к нему области $\operatorname{int} \Gamma$ является положительным (как на рис. 81), то

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{z_j \in \operatorname{int} \Gamma} \operatorname{res}_{z=z_j} f(z).$$

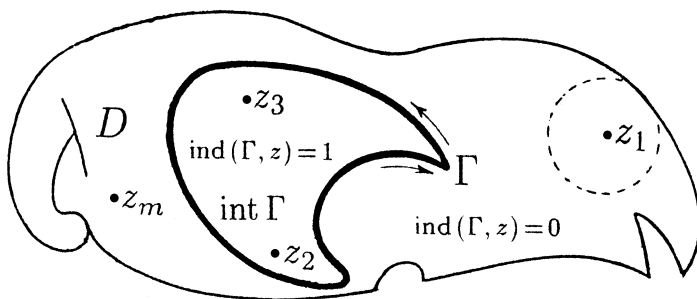


Рис. 81

¹ В первоначальном виде — в случае *простых полюсов* функции (и еще до оформления понятия “вычет”) — содержится в знаменитом мемуаре Коши 1825 г. [27], p. 26 (= [28], sér. II, t. XV, p. 59). В общей формулировке виде была получена им в 1831 г. ([28], sér. I, t. XI, p. 307).

Доказательство. Пусть $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-z_1)^n$ — разложение данной функции в ряд Лорана в круге с изъятым центром z_1 , не выходящем за пределы области D и не содержащем точек $z_2, \dots, z_m$ (рис. 81).

Главная часть $\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n(z-z_1)^n$ этого ряда (без неотрицательных степеней $z-z_1$) сходится не только в указанном круге, но и во всей плоскости $\mathbb{C}$ с исключенной точкой z_1 (II, с. 29), вследствие чего ее сумма $g_1(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n(z-z_1)^n$ является аналитической функцией в области $\mathbb{C} \setminus \{z_1\}$.

Следует вывод (XIV, утверждение на с. 222): замена $f(z)$ на $f(z) - g_1(z)$, устраняя главную часть ряда Лорана функции $w = f(z)$ в окрестности ее особой точки z_1 , оставляет неизменными главные части рядов Лорана этой функции в окрестностях прочих ее особых точек ($z_2, \dots, z_m$) и не добавляет к ним новых.

Повторение проведенных рассуждений последовательно для точек $z_2, \dots, z_m$ с обозначением $g_2(z), \dots, g_m(z)$ сумм главных частей рядов Лорана функции $w = f(z)$ в окрестностях этих точек позволяет заключить: в односвязной области D функция $w = f(z) - g_1(z) - \dots - g_m(z)$ является аналитической за исключением конечного числа особых точек $z_1, \dots, z_m$, оказывающихся для этой функции устраняемыми, и в которых, следовательно, она имеет конечные пределы.

Применяя к функции $w = f(z) - g_1(z) - \dots - g_m(z)$ теорему Коши (X, с. 151), можно прийти к предварительному выводу: для любого замкнутого кусочно-гладкого контура Γ , расположенного в области D и не проходящего через точки $z_1, \dots, z_m$,

$$\oint_{\Gamma} [f(z) - g_1(z) - \dots - g_m(z)] dz = 0,$$

а потому

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = \oint_{\Gamma} g_1(z) dz + \dots + \oint_{\Gamma} g_m(z) dz.$$

Остается применить к первому, а затем и ко всем последующим слагаемым в правой части последнего равенства формулу *Ньютона–Лейбница* (VIII, с. 133) и воспользоваться определением *индекса* замкнутого контура (IX, с. 138):

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} g_1(z) dz &= \oint_{\Gamma} \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z - z_1)^n dz = \\ &= \oint_{\Gamma} \left(\sum_{n=-\infty}^{-2} c_n (z - z_1)^n + c_{-1} (z - z_1)^{-1} \right) dz = \\ &= \oint_{\Gamma} \left(\sum_{n=-\infty}^{-2} c_n \frac{(z - z_1)^{n+1}}{n+1} \right)' dz + \oint_{\Gamma} \frac{c_{-1}}{z - z_1} dz = \\ &= 0 + \oint_{\Gamma} \frac{c_{-1}}{z - z_1} dz = 2\pi i \cdot \operatorname{res}_{z=z_1} f(z) \cdot \operatorname{ind}(\Gamma, z_1), \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^m \left(\operatorname{res}_{z=z_j} f(z) \right) \cdot \operatorname{ind}(\Gamma, z_j). \quad \mathbf{Q.E.D.}$$

К примеру, вычисление *вычетов* на с. 232 позволяет найти

$$\oint_{|z|=3} \frac{dz}{\sin z (1 - \cos z)} = 2\pi i \operatorname{res}_{z=0} \frac{1}{\sin z (1 - \cos z)} = i\pi,$$

а

$$\oint_{|z|=5} \frac{dz}{\sin z (1 - \cos z)} = 2\pi i \sum_{k=-1}^1 \operatorname{res}_{z=\pi k} \frac{1}{\sin z (1 - \cos z)} = -i\pi$$

(предполагается, что каждая из *окружностей* — радиусов 3 и 5 — *однократно* обходится в *положительном* направлении). Достаточно применить *теорему о вычетах* к функции

$w = \frac{1}{\sin z(1 - \cos z)}$, беря в качестве *односвязной области* D не всю *плоскость* $\mathbb{C}$ (в ней данная функция имеет *бесконечное число особых точек*), а какой-нибудь *круг*, содержащий *контуры интегрирования* (рис. 82).

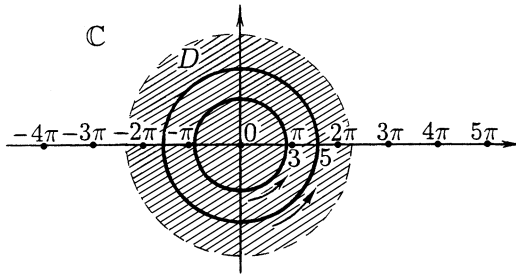


Рис. 82

Дополнением к *теореме о вычетах* служит следующее утверждение, иногда упрощающее ее применение.

Если функция $w = f(z)$ является аналитической во всей плоскости $\mathbb{C}$, исключая конечное число особых точек $z_1, \dots, z_m$, то

$$\sum_{j=1}^m \operatorname{res}_{z=z_j} f(z) + \operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = 0.$$

Доказательство. Если за контур Γ взять окружность с центром 0 радиуса $r > \max\{|z_1|, \dots, |z_m|\}$, однократно обходимую в *положительном* направлении, то применение *теоремы о вычетах* и определения *вычета в бесконечности* приводит к равенствам:

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^m \operatorname{res}_{z=z_j} f(z), \quad \operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma^-} f(z) dz,$$

сравнение которых дает: $\sum_{j=1}^m \operatorname{res}_{z=z_j} f(z) = -\operatorname{res}_{z=\infty} f(z)$. **Q.E.D.**

Оперируя этим утверждением, часто пользуются тем, что если *аналитическая в окрестности бесконечности* функция $w = f(z)$ либо является *четной*, либо имеет в *бесконечности* нуль кратности $k > 1$, то $\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = 0$: в обоих случаях коэффициент при z^{-1} в разложении Лорана функции в окрестности бесконечности равен нулю.

Пусть, например, требуется вычислить $\oint_{\Gamma} \frac{dz}{z^4+1}$, где контуром Γ служит *однократно* обходимый в *положительном* направлении эллипс $\{z = x + iy \in \mathbb{C} : x^2 - xy + y^2 + x - y - 1 = 0\}$.

Особые точки подынтегральной функции — это

$z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}$, $z_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}$, $z_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}$, $z_4 = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}$ (корни 4-й степени из -1), из которых z_1, z_2, z_3 расположены *внутри*, а z_4 — *вне* данного эллипса¹.

По теореме о вычетах $\oint_{\Gamma} \frac{dz}{z^4+1} = 2\pi i \sum_{j=1}^3 \operatorname{res}_{z=z_j} \frac{1}{z^4+1}$, тогда как дополнение к ней позволяет сократить вычисления:

$$\oint_{\Gamma} \frac{dz}{z^4+1} = 2\pi i \left(-\operatorname{res}_{z=z_4} \frac{1}{z^4+1} \right) = -2\pi i \frac{1}{4z_4^3} = \frac{\pi(1-i)}{2\sqrt{2}}$$

(вычет функции в бесконечности равен нулю, так как эта функция *четная*, и к тому же *бесконечность* является для нее нулем 4-й кратности).

Примером применения теоремы о вычетах к вычислению интегралов *однозначных ветвей* многозначных функций может служить вычисление $\oint_{|z|=r} \frac{dz}{z\sqrt{z^2+z+1}}$ соответственно случаям $0 < r < 1$ и $r > 1$ (при *однократном* обходе *окружности* в *положительном* направлении).

¹ Чтобы в этом убедиться, достаточно определить *знаки* левой части уравнения эллипса при подстановке в нее $x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$, $y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$.

В случае $0 < r < 1$ теорема о вычетах применима в круге $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, в котором определены две (различающиеся зна́ком) однозначные ветви $w = \frac{1}{z\sqrt{z^2+z+1}}$. Достаточно заметить, что ни при каком $z \in D$ значение z^2+z+1 не лежит на луче $(-\infty, 0]$ действительной оси¹, а следовательно (IV, с. 68), в круге D можно выделить однозначные ветви $w = \sqrt{z^2+z+1}$. Применение теоремы о вычетах дает:

$$\oint_{|z|=r} \frac{dz}{z\sqrt{z^2+z+1}} = 2\pi i \operatorname{res}_{z=0} \frac{1}{z\sqrt{z^2+z+1}} = 2\pi i \frac{1}{\sqrt{0^2+0+1}} = \pm 2\pi i$$

соответственно выбору однозначной ветви $w = \frac{1}{z\sqrt{z^2+z+1}}$.

Если же $r > 1$, то $\oint_{|z|=r} \frac{dz}{z\sqrt{z^2+z+1}} = 0$ для обеих однозначных ветвей подынтегральной функции, выделяемых в кольце $A = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < +\infty\}$ записью $w = \frac{z^{-2}}{\sqrt{z^{-2}+z^{-1}+1}}$ (поскольку $z^{-1} \in D$): по теореме Коши для кольца (XII, с. 178) $\oint_{|z|=r} \frac{dz}{z\sqrt{z^2+z+1}}$ не зависит от $r > 1$, а в силу оценки

контурного интеграла (VIII, с. 133) $\oint_{|z|=r} \frac{dz}{z\sqrt{z^2+z+1}} \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} 0$.

Разложение мероморфных функций в ряды простых дробей

Мероморфными² называют функции, аналитические в плоскости $\mathbb{C}$ за возможным исключением полюсов.³

¹ Если для $z = x + iy \in D$ число $z^2 + z + 1 = x^2 - y^2 + x + 1 + i(2xy + y)$ является действительным, то либо $x = -\frac{1}{2}$, а следовательно, $y^2 < \frac{3}{4}$, либо $y = 0$, причем в обоих случаях $z^2 + z + 1 = x^2 - y^2 + x + 1 > 0$.

² Т.е. *подобные дробным*: греч. *μέρος* — часть, доля; *μορφή* — вид. Термин введен во 2-м издании монографии Брио и Букé [23] (р. 15).

³ Если целые (аналитические во всей плоскости $\mathbb{C}$) функции считать обобщениями многочленов, то мероморфные функции следует рассматривать как обобщения рациональных.

Если *мероморфная* функция $w = f(z)$ имеет лишь *конечное* число *полюсов* $z_1, \dots, z_m$, то она представима в виде суммы *целой* функции и *простых дробей*.

Достаточно записать эту функцию в виде

$$w = [f(z) - g_1(z) - \dots - g_m(z)] + g_1(z) + \dots + g_m(z),$$

где $g_1(z), \dots, g_m(z)$ — *главные части* ее *рядов Лорана* в *окрестностях* ее *особых точек* (*полюсов*) $z_1, \dots, z_m$. Первое слагаемое (в квадратных скобках) имеет в этих точках *устраняемые* особенности и (после их *устранения*) представляет собой *целую* функцию.

Для *мероморфных* функций, имеющих *бесконечное* число *полюсов*, Коши¹ предложил способ их разложения в *ряды рациональных функций*, в частности, *простых дробей*.

Способ базируется на следующем утверждении.

Лемма. Пусть $g(z) = \frac{c_{-k}}{(z-z_0)^k} + \dots + \frac{c_{-1}}{z-z_0}$ — *главная часть* ряда Лорана аналитической функции $w = f(z)$ в *окрестности* ее *полюса* z_0 (*порядка* k), а ζ — *любая точка*, в которой эта функция является *аналитической*; тогда

$$\operatorname{res}_{z=\zeta} \frac{f(z)}{z-\zeta} = f(\zeta), \quad \text{а} \quad \operatorname{res}_{z=z_0} \frac{f(z)}{z-\zeta} = -g(\zeta).$$

Доказательство. Первое равенство — прямое следствие формулы вычета в *полюсе 1-го порядка* (с. 232). Получить второе позволяют разложения функций $w = f(z)$ и $w = \frac{1}{z-\zeta}$ в *ряды Лорана* в *окрестности* точки z_0 :

$$f(z) = \frac{c_{-k}}{(z-z_0)^k} + \dots + \frac{c_{-1}}{z-z_0} + c_0 + c_1(z-z_0) + \dots,$$

$$\frac{1}{z-\zeta} = -\frac{1}{\zeta-z_0} - \frac{z-z_0}{(\zeta-z_0)^2} - \dots - \frac{(z-z_0)^{k-1}}{(\zeta-z_0)^k} - \frac{(z-z_0)^k}{(\zeta-z_0)^{k+1}} - \dots;$$

¹ В работе 1827 г. “Sur le développement des fonctions d’une seule variable en fonctions rationnelles” ([28], sér. II, t. VII, p. 324–344).

а именно, выделив из результата *перемножения* этих рядов *коэффициент* при $(z - z_0)^{-1}$, можно заключить, что

$$\operatorname{res}_{z=z_0} \frac{f(z)}{z-\zeta} = -\frac{c_{-k}}{(\zeta - z_0)^k} - \dots - \frac{c_{-1}}{\zeta - z_0} = -g(\zeta). \quad \mathbf{Q.E.D.}$$

Суть способа Коши разложения мероморфных функций в ряды простых дробей выражает следующее утверждение.

Пусть $w = f(z)$ — мероморфная функция с полюсами $z_1, z_2, \dots$ и пусть $g_1(z), g_2(z), \dots$ — главные части ее рядов Лорана в окрестностях указанных полюсов. Дополнительно предполагается, что существует последовательность $\{\Gamma_n\}$ замкнутых кусочно-гладких контуров без самопересечений со свойствами:

- 1° каждый из контуров Γ_n лежит внутри следующего;
- 2° при $n \rightarrow +\infty$ расстояние от начала координат до ближайшей к нему точки контура Γ_n неограниченно возрастает, при этом отношение длины контура Γ_n к этому расстоянию остается ограниченным;
- 3° вдоль последовательности контуров $\{\Gamma_n\}$ значения $f(z)$ стремятся к нулю: $\sup_{z \in \Gamma_n} |f(z)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.¹

Тогда в области $\mathbb{C} \setminus \{z_1, z_2, \dots\}$ имеет место следующее разложение функции в ряд простых дробей:

$$f(z) = \sum_{j=1}^{+\infty} g_j(z) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{z_j \in \operatorname{int} \Gamma_n} g_j(z), \quad z \in \mathbb{C}, \quad z \neq z_1, z_2, \dots$$
²

¹ Мероморфные функции с таким свойством можно рассматривать как обобщения *правильных рациональных дробей*.

² Следует подчеркнуть: *сумма ряда* $\sum_{j=1}^{+\infty} g_j(z)$ понимается здесь не как *предел последовательности частичных сумм* (он может не существовать), а как *предел ее подпоследовательности* при группировке (возможно, с перестановкой) слагаемых по принципу $z_j \in \operatorname{int} \Gamma_n$.

Доказательство. Пусть ζ — любая *отличная* от $z_1, z_2, \dots$ точка плоскости $\mathbb{C}$, а n — настолько большое натуральное число, что $\zeta \in \text{int } \Gamma_n$ (свойство 2°). Применение теоремы о вычетах к контурному интегралу $\oint_{\Gamma_n} \frac{f(z)}{z-\zeta} dz$ в односвязной области $\text{int } \Gamma_{n+1}$ (в силу свойства 2° *содержащей* контур Γ_n) дает в сочетании с доказанной леммой:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_n} \frac{f(z)}{z-\zeta} dz = \text{res}_{z=\zeta} \frac{f(z)}{z-\zeta} + \sum_{z_j \in \text{int } \Gamma_n} \text{res}_{z=z_j} \frac{f(z)}{z-\zeta} = f(\zeta) - \sum_{z_j \in \text{int } \Gamma_n} g_j(\zeta).$$

Остается применить к левой части равенства оценку интеграла (VIII, с. 133), из которой с учетом свойств 2° и 3° вытекает, что $\left| \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_n} \frac{f(z)}{z-\zeta} dz \right| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, а следовательно,

$$f(\zeta) = \sum_{j=1}^{+\infty} g_j(\zeta), \quad \zeta \in \mathbb{C}, \quad \zeta \neq z_1, z_2, \dots,$$

если правую часть понимать как $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{z_j \in \text{int } \Gamma_n} g_j(\zeta)$. **Q.E.D.**

Существенно, что изложенный способ разложения применим и к *мероморфным функциям* $w = f(z)$, удовлетворяющим более слабому, нежели 3° , условию

$$\widetilde{3}^\circ \sup_{z \in \Gamma_n} |z^{-m} f(z)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \quad \text{при некотором натуральном } m;$$

достаточно перейти к вспомогательной *мероморфной* функции $w = z^{-m} f(z)$, получить ее разложение $z^{-m} f(z) = \sum_{j=1}^{+\infty} g_j(z)$ в ряд *простых дробей* и из него разложение $f(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} z^m g_k(z)$ исходной *мероморфной* функции в ряд *рациональных* (с последующим разложением их на *простые*)¹.

¹ Более распространенный прием *разложения* мероморфных функций со свойством $\widetilde{3}^\circ$, изложен в [4], гл. VI, §7 и [12], гл. IV, §7.

Пример. У мероморфной функции $w = \operatorname{ctg} z$ полюсами (1-го порядка) служат точки $z_j = \pi j$, $j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

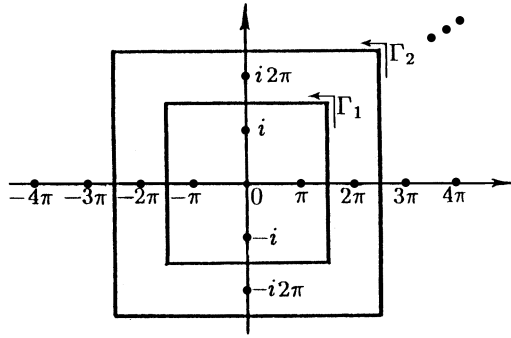


Рис. 83

Если за последовательность $\{\Gamma_n\}$ контуров взять последовательность однократно обходимых в положительном направлении квадратов

$$\Gamma_n = \left\{ z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Re} z| = \pi \left(n + \frac{1}{2} \right) \vee |\operatorname{Im} z| = \pi \left(n + \frac{1}{2} \right) \right\} \quad (\text{рис. 83}),$$

то условия 1° и 2° будут заведомо выполнены. Остается (для проверки выполнения условия 3°) оценить величину $|\operatorname{ctg} z|$ на сторонах этих квадратов. Поскольку

$$|\operatorname{ctg} z|^2 = \left| \frac{\cos(x+iy)}{\sin(x+iy)} \right|^2 = \frac{e^{-2y} + e^{2y} + 2 \cos 2x}{e^{-2y} + e^{2y} - 2 \cos 2x},$$

на “вертикальных” сторонах, т. е. при $z = \pm \pi \left(n + \frac{1}{2} \right) + iy$,

$$|\operatorname{ctg} z|^2 = \frac{e^{-2y} + e^{2y} - 2}{e^{-2y} + e^{2y} + 2} < 1,$$

тогда как на “горизонтальных”, т. е. при $z = x \pm i\pi \left(n + \frac{1}{2} \right)$,

$$|\operatorname{ctg} z|^2 \leq \frac{e^{-\pi(2n+1)} + e^{\pi(2n+1)} - 2}{e^{-\pi(2n+1)} + e^{\pi(2n+1)} + 2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1.$$

Это означает, что функция $w = \operatorname{ctg} z$ ограничена на данной последовательности контуров $\{\Gamma_n\}$ и потому (не обладая свойством 3°) удовлетворяет условию $\tilde{3}^\circ$ с $m = 1$.

Переход к функции $w = z^{-1} \operatorname{ctg} z$, *главными частями* рядов Лорана которой в окрестностях точек: $z_0 = 0$ — ее *полюса 2-го порядка* и $z_j = \pi j$, $j = \pm 1, \pm 2, \dots$, — ее *полюсов 1-го порядка*) являются соответственно

$$g_0(z) = \frac{\operatorname{res}_{z=0} \operatorname{ctg} z}{z^2} + \frac{\operatorname{res}_{z=0} (z^{-1} \operatorname{ctg} z)}{z} = \frac{\cos 0}{\sin' 0} \frac{1}{z^2} + 0 \frac{1}{z} = \frac{1}{z^2}$$

и

$$g_j(z) = \frac{\operatorname{res}_{z=\pi j} (z^{-1} \operatorname{ctg} z)}{z - \pi j} = \frac{\cos \pi j}{(z \sin z)'_{z=\pi j}} \frac{1}{z - \pi j} = \frac{1}{\pi j} \frac{1}{z - \pi j},$$

приводит к *разложениям* в области $\mathbb{C} \setminus \{0, \pm\pi, \pm 2\pi, \dots\}$:

$$\begin{aligned} z^{-1} \operatorname{ctg} z &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{z_j \in \operatorname{int} \Gamma_n} g_j(z) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{z^2} + \sum_{\substack{-n \leq j \leq n \\ j \neq 0}} \frac{1}{\pi j} \frac{1}{z - \pi j} \right] = \\ &= \frac{1}{z^2} + \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{\pi j} \left(\frac{1}{z - \pi j} - \frac{1}{z + \pi j} \right); \end{aligned}$$

$$\boxed{\operatorname{ctg} z = \frac{1}{z} + \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{2z}{z^2 - (\pi j)^2} = \frac{1}{z} + \sum_{j=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{z - \pi j} + \frac{1}{z + \pi j} \right)}$$

(“раскрытие скобок” в правых частях обоих *разложений не допускается*: оба ряда $\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{z - \pi j}$ и $\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{z + \pi j}$ по отдельности *расходятся!*).

Записав последнее *разложение* в виде

$$\operatorname{ctg} z - \frac{1}{z} = \sum_{j=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{z - \pi j} + \frac{1}{z + \pi j} \right), \quad z \in \mathbb{C}, \quad z \neq \pm\pi, \pm 2\pi, \dots,^1$$

можно утверждать, что если точка z остается в пределах *круга* радиуса r с центром 0 (т.е. $|z| \leq r$), то для любого (сколь угодно малого) положительного числа ε

¹ Для функции $w = \operatorname{ctg} z - \frac{1}{z}$ особая точка $z = 0$ является *устранимой*, а потому значение $z = 0$ оказывается для этой функции (при доопределении $\operatorname{ctg} z - \frac{1}{z} \Big|_{z=0} \stackrel{\text{def}}{=} 0$) *допустимым*.

$$\begin{aligned} \left| \left(\operatorname{ctg} z - \frac{1}{z} \right) - \sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{z - \pi j} + \frac{1}{z + \pi j} \right) \right| &\leq \\ &\leq \left| \sum_{j=n+1}^{+\infty} \left(\frac{1}{z - \pi j} + \frac{1}{z + \pi j} \right) \right| \leq 2 \sum_{j=n+1}^{+\infty} \frac{1}{\pi j - r} < \varepsilon \end{aligned}$$

лишь только n достаточно велико ($n \geq n_0(\varepsilon, r)$)¹.

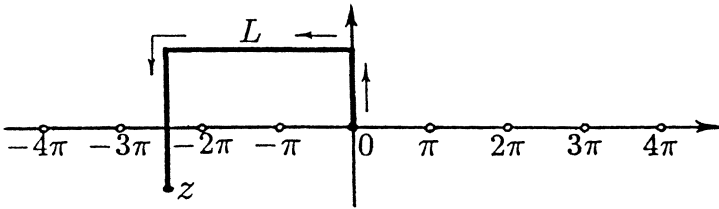


Рис. 84

Считая теперь, что z — любая (но *фиксированная*) точка области $\mathbb{C} \setminus \{\pm\pi, \pm 2\pi, \dots\}$, а L — какая-либо *ломаная* (длины $l(L)$) с *начальной* точкой 0 и *конечной* z , не выходящая за пределы этой области (рис. 84), можно утверждать, что для *сколь угодно малого* числа $\varepsilon > 0$ и любой точки $\zeta \in \mathbb{C}$ с $|\zeta| \leq l(L)$

$$\left| \left(\operatorname{ctg} z - \frac{1}{z} \right) - \sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{z - \pi j} + \frac{1}{z + \pi j} \right) \right| \leq 2 \sum_{j=n+1}^{+\infty} \frac{1}{\pi j - l(L)} < \varepsilon$$

лишь только n достаточно велико ($n \geq n_0(\varepsilon, L)$). С учетом оценки интеграла (VIII, с. 133) из этих неравенств следует, что

$$\left| \int_L \left(\operatorname{ctg} \zeta - \frac{1}{\zeta} \right) d\zeta - \sum_{j=1}^n \int_L \left(\frac{1}{\zeta - \pi j} + \frac{1}{\zeta + \pi j} \right) d\zeta \right| < \varepsilon \cdot l(L),$$

¹ Т.е. *ряд дробей в разложении котангенса сходится равномерно* на каждом *ограниченном* множестве области $\mathbb{C} \setminus \{0, \pm\pi, \pm 2\pi, \dots\}$.

а следовательно, — в силу возможности перехода к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$ (влекущему стремление n к $+\infty$) —

$$\int_L \left(\operatorname{ctg} \zeta - \frac{1}{\zeta} \right) d\zeta = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{j=1}^n \int_L \left(\frac{1}{\zeta - \pi j} + \frac{1}{\zeta + \pi j} \right) d\zeta.$$

Применение к интегралам *формулы Ньютона–Лейбница* (случай *многозначной первообразной*; IX, с. 135) и последующее *потенцирование* дают:

$$\int_L \left(\operatorname{ctg} \zeta - \frac{1}{\zeta} \right) d\zeta = \Delta \operatorname{Ln} \frac{\sin \zeta}{\zeta} \Big|_L = \ln \frac{\sin \zeta}{\zeta};$$

$$\int_L \left(\frac{1}{\zeta - \pi j} + \frac{1}{\zeta + \pi j} \right) d\zeta = \Delta \operatorname{Ln} (\zeta - \pi j) \Big|_L + \Delta \operatorname{Ln} (\zeta + \pi j) \Big|_L =$$

$$= (\ln(z - \pi j) - \ln(-\pi j)) + (\ln(z + \pi j) - \ln(\pi j)) = \ln \left[1 - \left(\frac{z}{\pi j} \right)^2 \right]$$

(значения *логарифмов* зависят от выбора их *однозначных ветвей* вдоль ломаной L , но изменения сводятся к *слагаемым*, кратным $2\pi i$, а потому “исчезающим” при *потенцировании*);

$$\begin{aligned} \frac{\sin z}{z} &= \exp \left(\ln \frac{\sin z}{z} \right) = \exp \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{j=1}^n \ln \left[1 - \left(\frac{z}{\pi j} \right)^2 \right] \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \exp \left(\sum_{j=1}^n \ln \left[1 - \left(\frac{z}{\pi j} \right)^2 \right] \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{j=1}^n \left[1 - \left(\frac{z}{\pi j} \right)^2 \right]. \end{aligned}$$

Вывод: имеет место *разложение синуса в бесконечное произведение*¹

$$\boxed{\sin z = z \prod_{j=1}^{+\infty} \left[1 - \left(\frac{z}{\pi j} \right)^2 \right] = z \left(1 - \frac{z}{\pi} \right) \left(1 + \frac{z}{\pi} \right) \left(1 - \frac{z}{2\pi} \right) \left(1 + \frac{z}{2\pi} \right) \cdots},$$

следствием которого (при $z = \frac{\pi}{2}$) является *формула Вэйлеса*

$$\boxed{\frac{\pi}{2} = \frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 3} \frac{4 \cdot 4}{3 \cdot 5} \frac{6 \cdot 6}{5 \cdot 7} \cdots \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdots 2n \cdot 2n}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdots (2n-1) \cdot (2n+1)}}.$$

¹ Выведенное Эйлером (из других соображений) в [19], гл. IX.

Эта формула была выведена Валлисом¹ в изданной в 1656 г. “Арифметике бесконечностей” (“Arithmetica Infinitorum”) посредством цепи преобразований интеграла в равенстве $\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$. О роли этого автора в развитии математики говорит уже то, что именно он

ввел символ ∞ (I, с. 22) и термин “интерполяция”;

нашел значение *элемента* (точнее, *дифференциала*) *длины гладкой дуги*: $dl = \sqrt{1+(y'(x))^2} dx$;

показал “реальность” *мнимых чисел*² и дал ключ к их геометрической трактовке, приведя в своем изданном в 1685 г. “Курсе Алгебры” (“Treatise of Algebra”) следующие рассуждения: “*These Imaginary Quantities (as they are commonly called) arising from the supposed root of a negative square (when they happen) are reputed to imply that the case proposed is Impossible. But suppose that we gain from the sea 10 acres, but that we lose 20. Our gain must be -10 acres, or -1600 square perches³. Now suppose this negative plain, -1600 square perches, to be in the form of a square, must not this supposed square be supposed to have a side? And if so, what shall this side be? We cannot say that it is 40 or -40 , but it is $\sqrt{-1600}$, or $40\sqrt{-1}$, where $\sqrt{}$ signifies a mean proportional between a positive and a negative quantity*”.

Упражнения. 1. Доказать, что *мероморфная* функция является *рациональной* в том и только в том случае, когда ∞ является для нее *устранимой особой точкой* или *полюсом*.

2. Доказать, что если для функции $w = f(z)$ *бесконечность* является а) *устранимой особой точкой* или б) *полюсом порядка $\leq k$* , то а) $\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} (z^2 f'(z))$; б) $\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = (-1)^k \frac{1}{(k+1)!} \lim_{z \rightarrow \infty} (z^{k+2} f^{(k+1)}(z))$.

3. Опираясь на теорему Вейерштрасса (XI, с. 174), получить *дифференцированием* разложения *котангенса* (с. 243) *разложение*

$$\frac{1}{\sin^2 z} = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(z-\pi j)^2}, \quad z \in \mathbb{C}, \quad z \neq 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \dots$$

¹ I, сноска ² на с. 13.

² В противовес их изобретателям — итальянским математикам XVI в. (I, с. 12), считавшим их “фикцией”.

³ Англ. *perch* (*шест*) — мера длины (=5,03 м); *square perch* (*квадратный шест*) — мера площади (=25,3 м²).

XVI. КАК, ПРИМЕНЯЯ ВЫЧЕТЫ, ВЫЧИСЛЯЮТ ИНТЕГРАЛЫ ПО НЕЗАМКНУТЫМ КОНТУРАМ

Используя демонстрируемые ниже приемы, вычисление *контурных интегралов* с помощью *вычетов* можно распространить¹ на интегралы по *незамкнутым* контурам и прежде всего — по промежуткам *действительной оси*.

Суть этих приемов состоит в дополнении *незамкнутых* контуров до *замкнутых* с последующей оценкой интегралов по “замыкающим” гладким дугам. Сделать эту оценку более единообразной позволяют следующие утверждения.

Леммы об интегралах по дугам окружностей.²

1. Пусть функция $w = f(z)$ обладает свойствами:

1) интеграл $\int_{C_r} f(z) dz$, где C_r — дуга окружности радиуса r с центром 0 (рис. 85), определен для достаточно больших (соответственно достаточно малых) $r > 0$;

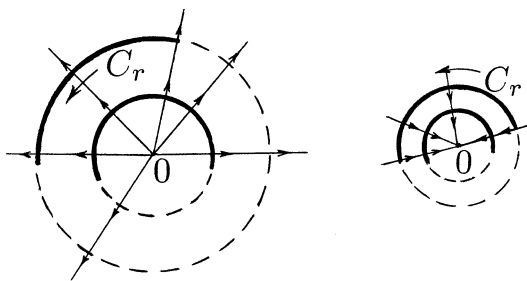


Рис. 85

¹ Идея этого распространения восходит к мемуару Коши [27].

² Именно *дугами окружностей* обычно дополняют *незамкнутые* контуры с целью преобразования их в *замкнутые*.

2) $z \cdot f(z) \rightarrow 0$ при $z \rightarrow \infty$ (соответственно $z \rightarrow 0$)¹;

тогда $\int_{C_r} f(z) dz \rightarrow 0$ при $r \rightarrow +\infty$ (соответственно $r \rightarrow 0$)².

2. Если для аналитической функции $w = f(z)$ точка z_0 является полюсом 1-го порядка, а гладкие дуги L_1 и L_2 пересекаются в этой точке под углом θ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$; рис. 86), то для интегралов $\int_{C_r} f(z) dz$ по заключенным между L_1 и L_2

дугам C_r окружностей $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\}$ (обходимым в положительном направлении), справедливо предельное соотношение $\lim_{r \rightarrow 0} \int_{C_r} f(z) dz = i\theta \operatorname{res}_{z=z_0} f(z)$.

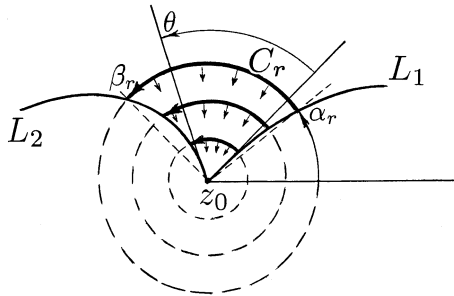


Рис. 86

3 (лемма Жордана).³ Пусть функция $w = f(z)$ (не обязательно аналитическая) обладает свойствами:

¹ По крайней мере по множеству, содержащему все дуги C_r .

² Независимо от раствора и направления обхода дуг C_r .

³ Приведена во 2-м томе “Курсе анализа” (“Cours d’Analyse de l’École Polytechnique”) французского математика Жордана (Jordan, Camille, 1838–1922): в издании 1913 г. на с. 331.

1) для положительного числа α интеграл $\int_{C_r} f(z) e^{i\alpha z} dz$ по полуокружности $C_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| = r \wedge 0 \leq \arg z \leq \pi\}$ (рис. 87, а) определен для достаточно больших $r > 0$;

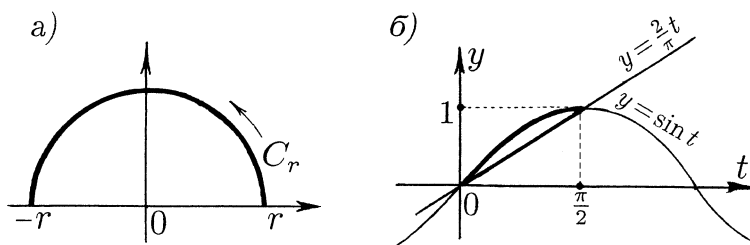


Рис. 87

$$2) \lim_{\substack{z \rightarrow \infty \\ \operatorname{Im} z > 0}} f(z) = 0;$$

тогда $\lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{C_r} f(z) e^{i\alpha z} dz = 0$.

Доказательства. 1. В силу второго из условий леммы для любого (сколь угодно малого) числа $\varepsilon > 0$ существует настолько большое (соответственно настолько малое) число $r_\varepsilon > 0$, что $|z \cdot f(z)| < \frac{\varepsilon}{2\pi}$ при $|z| > r_\varepsilon$ (соответственно при $0 < |z| < r_\varepsilon$). Тогда согласно оценке интеграла по контуру (VIII, с. 133)

$$\left| \int_{C_r} f(z) dz \right| = \left| \int_{C_r} \frac{z \cdot f(z)}{z} dz \right| < \frac{\varepsilon}{2\pi} \frac{1}{r} l(C_r) \leq \frac{\varepsilon}{2\pi r} 2\pi r = \varepsilon$$

лишь только $r > r_\varepsilon$ (соответственно $0 < r < r_\varepsilon$).

2. Представление точек z дуги C_r в виде $z = z_0 + re^{it}$, $t \in [\alpha_r, \beta_r]$ (как на рис. 86) позволяет записать:

$$\begin{aligned}
\int_{C_r} f(z) dz &= \int_{\alpha_r}^{\beta_r} f(z_0 + re^{it}) re^{it} i dt = \\
&= \int_{\alpha_r}^{\beta_r} [f(z_0 + re^{it}) re^{it} i - i \operatorname{res}_{z=z_0} f(z) + i \operatorname{res}_{z=z_0} f(z)] dt = \\
&= i \int_{\alpha_r}^{\beta_r} [f(z_0 + re^{it}) re^{it} - \operatorname{res}_{z=z_0} f(z)] dt + i(\beta_r - \alpha_r) \operatorname{res}_{z=z_0} f(z).
\end{aligned}$$

При $r \rightarrow 0$ второе слагаемое в правой части стремится¹ к $i\theta \operatorname{res}_{z=z_0} f(z)$, первое же (интегральное) слагаемое стремится к нулю, так как по формуле вычета функции в полюсе 1-го порядка $\operatorname{res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} (f(z)(z - z_0))$ (XV, с. 232), а потому для сколь угодно малого положительного числа ε существует такое (зависящее от него) положительное число δ , что

$$|f(z)(z - z_0) - \operatorname{res}_{z=z_0} f(z)| < \frac{\varepsilon}{2\pi} \text{ как только } 0 < |z - z_0| < \delta,$$

и, следовательно, если $0 < r < \delta$, то

$$\left| i \int_{\alpha_r}^{\beta_r} [f(z_0 + re^{it}) re^{it} - \operatorname{res}_{z=z_0} f(z)] dt \right| < (\beta_r - \alpha_r) \frac{\varepsilon}{2\pi} \leq \varepsilon.$$

3. В силу второго из условий леммы для любого (сколь угодно малого) числа $\varepsilon > 0$ существует настолько большое число $r_\varepsilon > 0$, что $|f(z)| < \frac{\alpha\varepsilon}{\pi}$ при $|z| > r_\varepsilon$, $\operatorname{Im} z > 0$. Представление же точек $z \in C_r$ в виде $z = re^{it} = r(\cos t + i \sin t)$, $t \in [0, \pi]$, позволяет записать при $r > r_\varepsilon$:

$$\begin{aligned}
\left| \int_{C_r} f(z) e^{i\alpha z} dz \right| &= \left| \int_0^\pi f(re^{it}) e^{i\alpha r(\cos t + i \sin t)} re^{it} i dt \right| \leq \\
&\leq \int_0^\pi |f(re^{it})| e^{-\alpha r \sin t} r dt < \int_0^\pi \frac{\alpha\varepsilon}{\pi} e^{-\alpha r \sin t} r dt = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\alpha\varepsilon}{\pi} e^{-\alpha r \sin t} r dt,
\end{aligned}$$

а следовательно (так как $\sin t \geq \frac{2}{\pi} t$ при $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$; рис. 87, б),

¹ Поскольку $\lim_{r \rightarrow 0} (\beta_r - \alpha_r) = \theta$.

$$\left| \int_{C_r} f(z) e^{i\alpha z} dz \right| < 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\alpha \varepsilon}{\pi} e^{-\alpha r \frac{2}{\pi} t} r dt = 2r \frac{\alpha \varepsilon}{\pi} \frac{-\pi}{2\alpha r} e^{-\alpha r \frac{2}{\pi} t} \Big|_{t=0}^{\frac{\pi}{2}} = \\ = \varepsilon (1 - e^{-\alpha r}) < \varepsilon. \quad \mathbf{Q.E.D.}$$

Примером того, как оперируют с интегралами по “бесконечным” контурам может служить вычисление интеграла $\int_{\Gamma} \frac{dz}{\sqrt{1+z^2}(1+z^4)}$ по *параболе* $\Gamma = \{z = x + iy \in \mathbb{C} : x = y^2\}$, обходимой в направлении *возрастания* y (рис. 88, а); подразумевается та *однозначная ветвь* $w = \sqrt{1+z^2}$, для которой $\sqrt{1+0^2} = 1$. Интеграл в таких случаях понимают в смысле *главного значения*¹: в данном конкретном примере — как

$$\text{v.p.} \int_{\Gamma} \frac{dz}{\sqrt{1+z^2}(1+z^4)} \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma_r} \frac{dz}{\sqrt{1+z^2}(1+z^4)},$$

где Γ_r — часть “бесконечного” контура Γ (в данном случае *параболы*) между точками его пересечения с *окружностью* радиуса r с центром в *начале координат* (рис. 88, б).

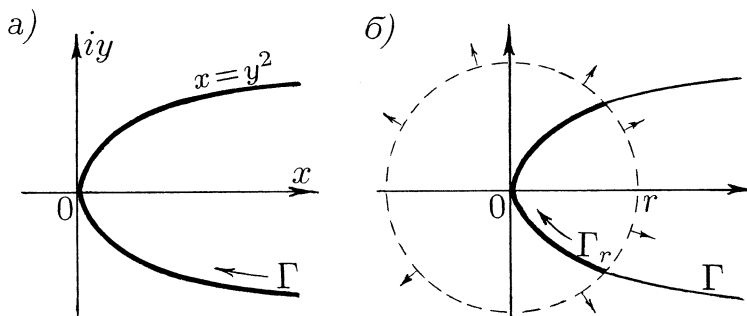


Рис. 88

¹ Фр. *valeur principale* (произносится примерно как *валёр пренсипаль*) — понятие, введенное Коши в 1822 г. ([28], sér. I, t. I, p. 289). Начальные буквы *v.p.* — общепринятое его обозначение.

Для любого числа $r > 1$ пусть $\Gamma_r^* = \{\Gamma_r, C_r\}$ — замкнутый кусочно-гладкий контур, составленный из дуги параболы Γ_r и дуги окружности C_r , обходимых “по ходу часовой стрелки” (рис. 89). Вычислить $\oint_{\Gamma_r^*} \frac{dz}{\sqrt{1+z^2}(1+z^4)}$ можно с помо-

щью теоремы о вычетах, беря в качестве односвязной области $D \subset \mathbb{C}$ (содержащей замкнутый контур Γ_r^*) объединение “правой полуплоскости” и “единичного круга”, т.е. $D = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0 \vee |z| < 1\}$ (рис. 89).

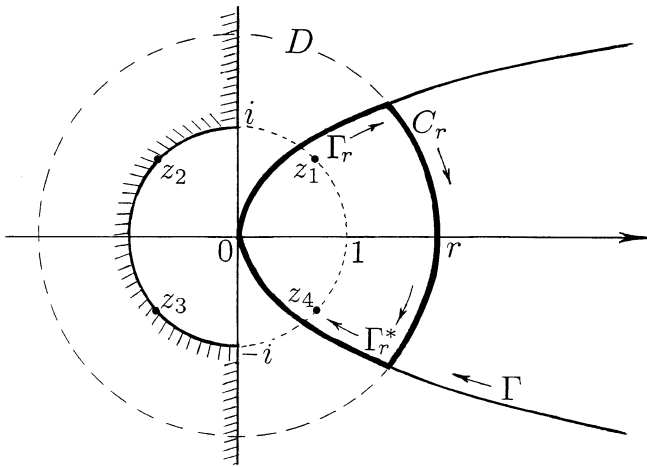


Рис. 89

Выбор этой области обусловлен тем, что при любом $z \in D$ значение $1+z^2$ не выходит за пределы плоскости $\mathbb{C}$ с “разрезом” от нуля вдоль отрицательной части действительной оси, а следовательно (IV, с. 68), в области D определены две (различающиеся знаком) однозначные ветви $w = \sqrt{1+z^2}$, для одной из которых $\sqrt{1+0^2} = 1$.

Применение к интегралу по контуру $\Gamma_r^* \subset D$ теоремы о вычетах (XV, с. 233) с обозначением $z_{1,2,3,4} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \pm \frac{i}{\sqrt{2}}$ корней 4-й степени из -1 (как на рис. 89) дает:

$$\begin{aligned}
\oint_{\Gamma_r^*} \frac{dz}{\sqrt{1+z^2}(1+z^4)} &= 2\pi i \sum_{j=1}^4 \left(\operatorname{res}_{z=z_j} \frac{1}{\sqrt{1+z^2}(1+z^4)} \operatorname{ind}(\Gamma_r^*, z_j) \right) = \\
&= -2\pi i \left[\operatorname{res}_{z=z_1} \frac{1}{\sqrt{1+z^2}(1+z^4)} + \operatorname{res}_{z=z_4} \frac{1}{\sqrt{1+z^2}(1+z^4)} \right] = \\
&= -2\pi i \left[\lim_{z \rightarrow z_1} \frac{z-z_1}{\sqrt{1+z^2}(1+z^4)} + \lim_{z \rightarrow z_4} \frac{z-z_4}{\sqrt{1+z^2}(1+z^4)} \right] = \\
&= \frac{\pi}{\sqrt{2}} \left[\frac{1}{\sqrt{1-i}(1-i)} - \frac{1}{\sqrt{1+i}(1+i)} \right] = \frac{i\pi}{2} \operatorname{Im}(1+i)^{\frac{3}{4}} = i\pi \frac{\sqrt{1+\sqrt{2}}}{2}.
\end{aligned}$$

Остается записать интеграл по части Γ_r контура Γ_r^* как *разность* интегралов по Γ_r^* и C_r и перейти к пределу при $r \rightarrow +\infty$, применив лемму 1 (с. 247–248):

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma} \frac{dz}{\sqrt{1+z^2}(1+z^4)} &= \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{\Gamma_r} \frac{dz}{\sqrt{1+z^2}(1+z^4)} = \\
&= \lim_{r \rightarrow +\infty} \left[\oint_{\Gamma_r^*} \frac{dz}{\sqrt{1+z^2}(1+z^4)} - \int_{C_r} \frac{dz}{\sqrt{1+z^2}(1+z^4)} \right] = i\pi \frac{\sqrt{1+\sqrt{2}}}{2}.
\end{aligned}$$

Среди вычисляемых с применением *вычетов* интегралов функций *действительной* переменной (как *собственных*, так и *несобственных*) выделяют несколько классических типов.

Один из них — интегралы *рациональных комбинаций* $\sin \varphi$ и $\cos \varphi$ (с *константами*), которые можно вычислять переходом к *комплексной* переменной $z = e^{i\varphi}$. Для начала совсем простой пример: $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} \varphi d\varphi$ ($n = 1, 2, \dots$).

Данный интеграл следует, предварительно записав его как $\frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \cos^{2n} \varphi d\varphi$, преобразовать в *контурный* — взятый по *окружности* $C = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, *однократно* обходимой (от точки $z = 1$) в *положительном* направлении (рис. 90):

$$\begin{aligned}
 I &= \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \left(\frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} \right)^{2n} d\varphi = \frac{1}{2^{2n+2}} \int_0^{2\pi} \frac{(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi})^{2n} i e^{i\varphi}}{i e^{i\varphi}} d\varphi = \\
 &= \frac{1}{2^{2n+2}} \oint_C \frac{(z + z^{-1})^{2n}}{i z} dz = \frac{\pi}{2^{2n+1}} \operatorname{res}_{z=0} \frac{(z + z^{-1})^{2n}}{z} = \frac{\pi (2n)!}{(n!)^2 2^{2n+1}}.
 \end{aligned}$$

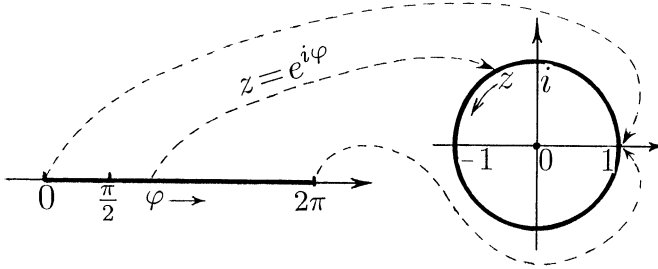


Рис. 90

Вот более сложный пример: $I = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos^2 \varphi}{1 - a \sin^2 \varphi} d\varphi$, где $a > 0$.

При $0 < a \leq 1$ этот интеграл является *собственным* (случай $a = 1$ интереса не представляет), а при $a > 1$ — *несобственным*, причем *расходящимся* и поэтому понимаемым в смысле *главного значения* (как именно — чуть ниже).

Пусть вначале $0 < a < 1$. Применение *формул Эйлера* $\cos \varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}$, $\sin \varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}$ и подстановка $e^{i\varphi} = z$ преобразуют интеграл в *контурный* — взятый по *окружности* $C = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, *однократно* обходимой (от точки $z = -1$) в *положительном* направлении (рис. 91):

$$\begin{aligned}
 \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(e^{2i\varphi} + 2 + e^{-2i\varphi})}{4 + a(e^{2i\varphi} - 2 + e^{-2i\varphi})} d\varphi &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(e^{4i\varphi} + 2e^{2i\varphi} + 1) i e^{i\varphi}}{(a e^{4i\varphi} - (2a - 4) e^{-2i\varphi} + a) i e^{i\varphi}} d\varphi = \\
 &= \oint_C \frac{(z^4 + 2z^2 + 1)}{(a z^4 - (2a - 4) z^2 + a) i z} dz = \oint_C \frac{(z^4 + 2z^2 + 1)}{i a z (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)(z - z_4)} dz,
 \end{aligned}$$

где $z_1 = \frac{-i(1-\sqrt{1-a})}{\sqrt{a}}$, $z_2 = \frac{-i(1+\sqrt{1-a})}{\sqrt{a}}$, $z_3 = \frac{i(1-\sqrt{1-a})}{\sqrt{a}}$,
 $z_4 = \frac{i(1+\sqrt{1-a})}{\sqrt{a}}$, при этом $|z_1| < 1$, $|z_3| < 1$, $|z_2| > 1$, $|z_4| > 1$.

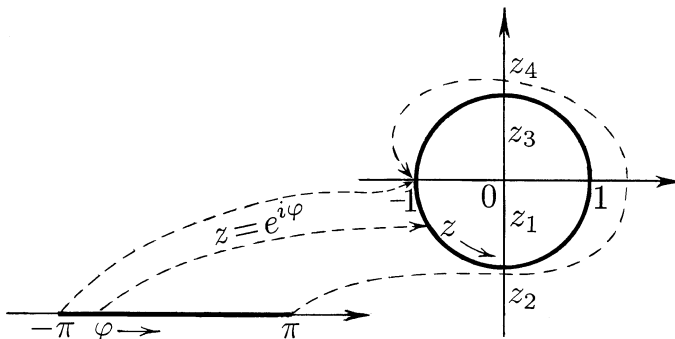


Рис. 91

Так как *вычеты* подынтегральной функции в ее (лежащих *внутри* окружности C) особых точках $0, z_1, z_3$ равны соответственно $\frac{1}{ia}$, $\frac{\sqrt{1-a}}{2ia}$, $\frac{\sqrt{1-a}}{2ia}$, применение теоремы о вычетах (XV, с. 233) позволяют заключить: значение контурного (а следовательно, и исходного) интеграла в случае $0 < a < 1$ равно $2\pi \frac{1+\sqrt{1-a}}{a}$.

При $a > 1$ интеграл понимается как

$$\begin{aligned} \text{v.p.} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos^2 \varphi}{1-a \sin^2 \varphi} d\varphi &\stackrel{\text{def}}{=} \\ &\stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\substack{\varepsilon_j \rightarrow 0 \\ j=1,2,3,4}} \left(\int_{-\pi}^{\varphi_1-\varepsilon_1} + \int_{\varphi_1+\varepsilon_1}^{\varphi_2-\varepsilon_2} + \int_{\varphi_2+\varepsilon_2}^{\varphi_3-\varepsilon_3} + \int_{\varphi_3+\varepsilon_3}^{\varphi_4-\varepsilon_4} + \int_{\varphi_4+\varepsilon_4}^{\pi} \right) \frac{\cos^2 \varphi}{1-a \sin^2 \varphi} d\varphi = \\ &= \lim_{\substack{\varepsilon_j \rightarrow 0 \\ j=1,2,3,4}} \left(\int_{L_1^\varepsilon} + \int_{L_2^\varepsilon} + \int_{L_3^\varepsilon} + \int_{L_4^\varepsilon} \right) \frac{(z^4+2z^2+1)}{iaz(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4)} dz, \end{aligned}$$

где $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ — корни уравнения $1 - a \sin^2 \varphi = 0$ на отрезке $[-\pi, \pi]$, а $L_1^\varepsilon, L_2^\varepsilon, L_3^\varepsilon, L_4^\varepsilon$ — дуги окружности C с начальными и конечными, соответственно, $e^{i(\varphi_1+\varepsilon_1)}$ и $e^{i(\varphi_2-\varepsilon_2)}$, $e^{i(\varphi_2+\varepsilon_2)}$ и $e^{i(\varphi_3-\varepsilon_3)}$, $e^{i(\varphi_3+\varepsilon_3)}$ и $e^{i(\varphi_4-\varepsilon_4)}$, $e^{i(\varphi_4+\varepsilon_4)}$ и $e^{i(\varphi_1-\varepsilon_1)}$ (можно брать $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon_4$), при этом $z_1 = \frac{-\sqrt{a-1}-i}{\sqrt{a}} = e^{i\varphi_1}$,

$$z_2 = \frac{\sqrt{a-1}-i}{\sqrt{a}} = e^{i\varphi_2}, \quad z_3 = \frac{\sqrt{a-1}+i}{\sqrt{a}} = e^{i\varphi_3}, \quad z_4 = \frac{-\sqrt{a-1}-i}{\sqrt{a}} = e^{i\varphi_4}$$

(рис. 92).

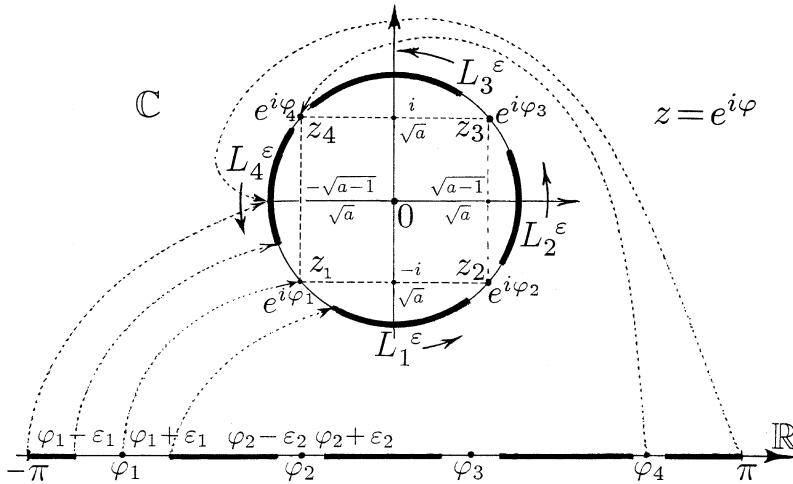


Рис. 92

Пусть $C_{r_1}, C_{r_2}, C_{r_3}, C_{r_4}$ — дуги окружностей с центрами z_1, z_2, z_3, z_4 , дополняющие дуги $L_1^\varepsilon, L_2^\varepsilon, L_3^\varepsilon, L_4^\varepsilon$ до замкнутого кусочно-гладкого контура Γ^ε , изображенного на рис. 93, а¹.

¹ Радиус r_j дуги C_{r_j} равен $2 \sin \frac{\varepsilon_j}{2}$, поэтому $\varepsilon_j \rightarrow 0 \iff r_j \rightarrow 0$, $j=1, 2, 3, 4$.

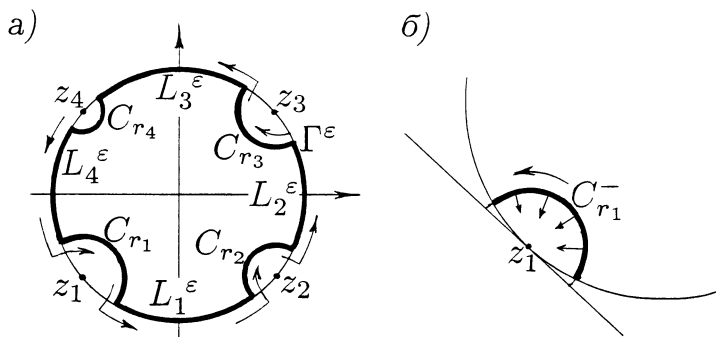


Рис. 93

По теореме о вычетах $\oint_{\Gamma^\varepsilon} \frac{(z^4+2z^2+1)}{ia z(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4)} dz$ равен умноженному на $2\pi i$ вычету подынтегральной функции в нуле. Так как этот вычет равен $\frac{1}{ia}$, значением интеграла является $\frac{2\pi}{a}$. Нахождение же вычетов в точках z_1, z_2, z_3, z_4 (а они равны $\frac{\pm\sqrt{a-1}}{2a\sqrt{a}(\sqrt{a-1}\pm i)}$ и составляют в сумме 0), а также применение к интегралам по дугам $C_{r1}^-, C_{r2}^-, C_{r3}^-, C_{r4}^-$ леммы 2 (с. 248) с $\theta = \pi$ (рис. 93, б) дает:

$$\begin{aligned} \text{v.p.} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos^2 \varphi}{1-a \sin^2 \varphi} d\varphi &\stackrel{\text{def}}{=} \\ &= \lim_{\varepsilon_j \rightarrow 0} \left(\oint_{\Gamma^\varepsilon} + \sum_{j=1}^4 \int_{C_{r_j}^-} \right) \frac{(z^4+2z^2+1)}{ia z(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4)} dz = \frac{2\pi}{a}. \end{aligned}$$

По этой же схеме вычисляется интеграл $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\varphi}{1-2a \cos \varphi + a^2}$ ($a \in \mathbb{C}, a \neq \pm 1$)¹.

¹ При $a = \pm 1$ он принимает вид $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\varphi}{4 \sin^2 \frac{\varphi}{2}}$ или $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\varphi}{4 \cos^2 \frac{\varphi}{2}}$ и равен $+\infty$.

Если $|a| \neq 1$, то интеграл является *собственным* и вычисляется преобразованием в *контурный* — по окружности $C = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, *однократно* обходимой (от точки $z = -1$) в *положительном* направлении (как на рис. 91) — переходом к переменной $z = e^{i\varphi}$:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\varphi}{1-2a \cos \varphi + a^2} &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\varphi}{1-a(e^{i\varphi}+e^{-i\varphi})+a^2} = \\ &= \frac{1}{i} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{ie^{i\varphi} d\varphi}{-ae^{2i\varphi} + (1+a^2)e^{i\varphi} - a} = -\frac{1}{i} \oint_C \frac{1}{az^2 - (1+a^2)z + a} dz = \\ &= \begin{cases} \operatorname{res}_{z=a} \frac{-2\pi}{az^2 - (1+a^2)z + a} = \frac{-2\pi}{2az - (1+a^2)} \Big|_{z=a} = \frac{2\pi}{1-a^2}, & \text{если } |a| < 1, \\ \operatorname{res}_{z=\frac{1}{a}} \frac{-2\pi}{az^2 - (1+a^2)z + a} = \frac{-2\pi}{2az - (1+a^2)} \Big|_{z=\frac{1}{a}} = \frac{2\pi}{a^2-1}, & \text{если } |a| > 1. \end{cases} \end{aligned}$$

При $|a| = 1$ ($a \neq \pm 1$) интеграл оказывается *несобственным*: $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\varphi}{1-2a \cos \varphi + a^2} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{-e^{i\varphi} d\varphi}{ae^{2i\varphi} - (1+a^2)e^{i\varphi} + a}$ (с “особенностями” в тех точках $\varphi \in [-\pi, \pi]$, где $e^{i\varphi} = a^{\pm 1}$, т. е. $\varphi_{1,2} = \pm \arg a$) и понимать его приходится в смысле *главного значения*, т. е. (если считать, что $\varphi_1 < 0$, а $\varphi_2 > 0$) как

$$\lim_{\substack{\varepsilon_1 \rightarrow 0+0 \\ \varepsilon_2 \rightarrow 0+0}} \left(\int_{-\pi}^{\varphi_1 - \varepsilon_1} + \int_{\varphi_1 + \varepsilon_1}^{\varphi_2 - \varepsilon_2} + \int_{\varphi_2 + \varepsilon_2}^{\pi} \right) \frac{-e^{i\varphi} d\varphi}{ae^{2i\varphi} - (1+a^2)e^{i\varphi} + a}.$$

Вводится вспомогательный интеграл $-\frac{1}{i} \oint_{\Gamma^\varepsilon} \frac{1}{az^2 - (1+a^2)z + a} dz$, где $z = e^{i\varphi}$, а Γ^ε — *замкнутый* кусочно-гладкий контур, сходный с изображенным на рис. 93, а, но не с четырьмя, а лишь с двумя *особыми точками*² подынтегральной функции на окружности $C = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Точнее, контур Γ^ε

¹ Можно брать $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$.

² $a^{\pm 1}$, или, что то же самое, $e^{i\varphi_1}$, $e^{i\varphi_2}$.

состоит из *двух* (обходимых “*против* хода часовой стрелки”) *дуг* этой окружности от точки $e^{i(\varphi_2+\varepsilon_2)}$ до точки $e^{i(\varphi_1-\varepsilon_1)}$ (через точку -1) и от точки $e^{i(\varphi_1+\varepsilon_1)}$ до точки $e^{i(\varphi_2-\varepsilon_2)}$ (через точку 1), и *двух* (обходимых “*по* ходу часовой стрелки”) *дуг* окружностей с центрами $e^{i\varphi_1}$ и $e^{i\varphi_2}$, соединяющих точку $e^{i(\varphi_1-\varepsilon_1)}$ с точкой $e^{i(\varphi_1+\varepsilon_1)}$ и точку $e^{i(\varphi_2-\varepsilon_2)}$ с точкой $e^{i(\varphi_2+\varepsilon_2)}$.¹ Поскольку *внутри* контура Γ^ε нет особых точек подынтегральной функции,

$$-\frac{1}{i} \oint_{\Gamma^\varepsilon} \frac{dz}{az^2 - (1+a^2)z + a} = 0,$$

а потому применение леммы 2 (с. 248) к *дугам окружностей* с центрами $e^{i\varphi_1}$ и $e^{i\varphi_2}$, но обходимым не “*по*”, а “*против* хода часовой стрелки” (при этом $\theta = \pi$), позволяет заключить: при $|a| = 1$ (но $a \neq \pm 1$)

$$\begin{aligned} \text{v.p.} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\varphi}{1 - 2a \cos \varphi + a^2} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} \left(\int_{-\pi}^{\varphi_1-\varepsilon} + \int_{\varphi_1+\varepsilon}^{\varphi_2-\varepsilon} + \int_{\varphi_2+\varepsilon}^{\pi} \right) \frac{-e^{i\varphi} d\varphi}{ae^{2i\varphi} - (1+a^2)e^{i\varphi} + a} = \\ &= -\frac{1}{i} \left(\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} \oint_{\Gamma^\varepsilon} \frac{dz}{az^2 - (1+a^2)z + a} + \right. \\ &\quad \left. + i\pi \operatorname{res}_{z=a} \frac{1}{az^2 - (1+a^2)z + a} + i\pi \operatorname{res}_{z=\frac{1}{a}} \frac{1}{az^2 - (1+a^2)z + a} \right) = \\ &= -\frac{1}{i} \left(0 + \frac{i\pi}{2az - (1+a^2)} \Big|_{z=a} + \frac{i\pi}{2az - (1+a^2)} \Big|_{z=\frac{1}{a}} \right) = 0. \end{aligned}$$

Простейший тип интегралов по *действительной оси*, вычисляемых с помощью *вычетов*, — интегралы *рациональных функций*, у которых степень числителя по крайней мере на 2 единицы *меньше* степени знаменателя. В качестве при-

¹ Разумеется, в предположении, что *положительные* числа ε_1 и ε_2 достаточно малы. На рис. 93, а — это либо пара дуг C_{r_1}, C_{r_4} , либо пара дуг C_{r_2}, C_{r_3} .

меров приведены вычисления $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{x^4+1} dx$ и $\text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{x^4-1} dx$.¹

Распространяя подынтегральные функции в *комплексную плоскость* (попросту заменяя *действительную* переменную x на *комплексную* z), вводят вспомогательные *контурные интегралы* $\oint_{\Gamma_r} \frac{z^2}{z^4+1} dz$ и $\oint_{\Gamma'_r} \frac{z^2}{z^4-1} dz$ — по замкнутым кусочно-гладким контурам Γ_r и Γ'_r , составленным из *отрезков* действительной оси и *полуокружностей*² (обходимых как указано на рис. 94 а, б).

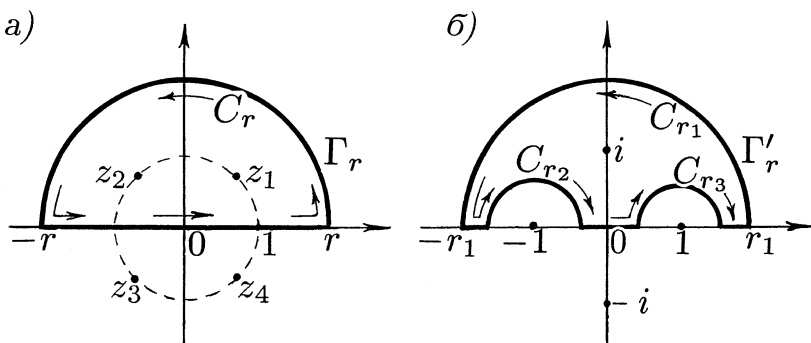


Рис. 94

Оба *контурных интеграла* вычисляются применением *теоремы о вычетах*³:

¹ Первый из этих *несобственных* интегралов *сходится*, второй же (из-за “особенностей” в точках ± 1) приходится понимать в смысле *главного значения* — как $\lim_{\substack{r_1 \rightarrow +\infty \\ r_2 \rightarrow 0+0 \\ r_3 \rightarrow 0+0}} \left(\int_{-r_1}^{-1-r_2} + \int_{-1+r_2}^{1-r_3} + \int_{1+r_3}^{r_1} \right) \frac{x^2}{x^4-1} dx$.

² Радиусов C_r (рис. 94, а) и C_{r_1} , C_{r_2} , C_{r_3} (рис. 94, б), подчиненных условиям $r > 1$, $r_1 > 1$, $r_2 < 1$, $r_3 < 1$.

³ И способа вычисления *вычета* в *полюсе 1-го порядка* (XV, с. 232).

$$\begin{aligned}
 \text{a)} \quad \oint_{\Gamma_r} \frac{z^2}{z^4+1} dz &= 2\pi i \left(\operatorname{res}_{z=z_1} \frac{z^2}{z^4+1} + \operatorname{res}_{z=z_2} \frac{z^2}{z^4+1} \right) = \\
 &= 2\pi i \left(\left. \frac{z^2}{(z^4+1)'} \right|_{z=z_1} + \left. \frac{z^2}{(z^4+1)'} \right|_{z=z_2} \right) = \frac{2\pi i}{4} \left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} \right) = \frac{\pi}{\sqrt{2}},
 \end{aligned}$$

($z_1 = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$, $z_2 = \frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ — те из *корней* z_1, z_2, z_3, z_4 уравнения $z^4+1=0$,¹ которые лежат *внутри* контура Γ_r ; рис. 94, а);

$$\text{б)} \quad \oint_{\Gamma'_r} \frac{z^2}{z^4-1} dz = 2\pi i \operatorname{res}_{z=i} \frac{z^2}{z^4-1} = 2\pi i \left. \frac{z^2}{(z^4-1)'} \right|_{z=i} = \frac{\pi}{2}.$$

Остается выделить интегралы по отрезкам *действительной оси* (полагая на них $z = x$) и устремить r и r_1 к $+\infty$, а r_2 и r_3 к 0, применяя к интегралам по *полуокружностям* C_r и C_{r_1} первую, а по полуокружностям $C_{r_2}^-$ и $C_{r_3}^-$ вторую из *лемм об интегралах по дугам окружностей* (с. 247–248):

$$\begin{aligned}
 \text{a)} \quad \int_{-r}^r \frac{x^2}{x^4+1} dx &= \oint_{\Gamma_r} \frac{z^2}{z^4+1} dz - \int_{C_r} \frac{z^2}{z^4+1} dz \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{\sqrt{2}}; \\
 \text{б)} \quad \left(\int_{-r_1}^{-1-r_2} + \int_{-1+r_2}^{1-r_3} + \int_{1+r_3}^{r_1} \right) \frac{x^2}{x^4-1} dx &= \oint_{\Gamma'_r} \frac{z^2}{z^4-1} dz - \int_{C_{r_1}} \frac{z^2}{z^4-1} dz + \\
 &+ \int_{C_{r_2}^-} \frac{z^2}{z^4-1} dz + \int_{C_{r_3}^-} \frac{z^2}{z^4-1} dz \xrightarrow[r_2 \rightarrow 0+0, r_3 \rightarrow 0+0]{r_1 \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2} + \\
 &+ i\pi \left(\operatorname{res}_{z=-i} \frac{z^2}{z^4-1} + \operatorname{res}_{z=i} \frac{z^2}{z^4-1} \right) = \frac{\pi}{2}.
 \end{aligned}$$

$$\text{Следовательно, } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{x^4+1} dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}, \quad \text{а в.р. } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{x^4-1} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Вот еще примеры вычисления *несобственных интегралов* сведением их к *контурным* и применением *лемм об интегралах по дугам окружностей* (с. 247–249).

¹ Являющихся *полюсами 1-го порядка* подынтегральной функции.

$$1. \int_0^{+\infty} \frac{a \cos bx}{x^2+a^2} dx, \quad \int_0^{+\infty} \frac{x \sin bx}{x^2+a^2} dx \quad (a \text{ и } b \text{ — положительные}$$

числа). Поскольку выполняются соотношения

$$\int_0^{+\infty} \frac{a \cos bx}{x^2+a^2} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a \cos bx}{x^2+a^2} dx = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a e^{ibx}}{x^2+a^2} dx,$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{x \sin bx}{x^2+a^2} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin bx}{x^2+a^2} dx = \frac{1}{2} \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x e^{ibx}}{x^2+a^2} dx,$$

достаточно вычислить интегралы $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a e^{ibx}}{x^2+a^2} dx$ и $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x e^{ibx}}{x^2+a^2} dx$.

С этой целью вводятся *контурные интегралы* $\oint_{\Gamma_r} \frac{a e^{ibz}}{z^2+a^2} dz$ и

$\oint_{\Gamma_r} \frac{z e^{ibz}}{z^2+a^2} dz$, где в обоих случаях *замкнутый* контур Γ_r со-

стоит из *отрезка* $[-r, r]$ *действительной оси* и *“верхней”* *полуокружности* радиуса r с центром 0 (обходимой “против хода часовой стрелки” — как на рис. 94, а).

Так как при любом (достаточно большом) r *внутрь* контура Γ_r попадает лишь *особая точка* $z=ia$ подынтегральных функций, из *теоремы о вычетах* (XV, с. 233) следует, что

$$\oint_{\Gamma_r} \frac{a e^{ibz}}{z^2+a^2} dz = 2\pi i \operatorname{res}_{z=ia} \frac{a e^{ibz}}{z^2+a^2} = 2\pi i \left. \frac{a e^{ibz}}{2z} \right|_{z=ia} = \pi e^{-ab},$$

$$\oint_{\Gamma_r} \frac{z e^{ibz}}{z^2+a^2} dz = 2\pi i \operatorname{res}_{z=ia} \frac{z e^{ibz}}{z^2+a^2} = 2\pi i \left. \frac{ia e^{ibz}}{2z} \right|_{z=ia} = i\pi e^{-ab},$$

а потому — с учетом же *леммы Жордана* (с. 248–249) —

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a e^{ibx}}{x^2+a^2} dx = \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{-r}^r \frac{a e^{ibx}}{x^2+a^2} dx = \lim_{r \rightarrow +\infty} \left(\oint_{\Gamma_r} - \int_{C_r} \right) \frac{a e^{ibz}}{z^2+a^2} dz = \pi e^{-ab},$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x e^{ibx}}{x^2+a^2} dx = \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{-r}^r \frac{x e^{ibx}}{x^2+a^2} dx = \lim_{r \rightarrow +\infty} \left(\oint_{\Gamma_r} - \int_{C_r} \right) \frac{z e^{ibz}}{z^2+a^2} dz = i\pi e^{-ab};$$

как следствие $\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{a \cos bx}{x^2+a^2} dx = \int_0^{+\infty} \frac{x \sin bx}{x^2+a^2} dx = \frac{\pi}{2} e^{-ab}}^1$

2. По такой же схеме вычисляются *главные значения* *расходящихся* (из-за “особенности” в точке a) интегралов $\int_0^{+\infty} \frac{a \cos bx}{x^2-a^2} dx$ и $\int_0^{+\infty} \frac{x \sin bx}{x^2-a^2} dx$. Вводятся *контурные интегралы* $\oint_{\Gamma'_r} \frac{ae^{ibz}}{z^2-a^2} dz$ и $\oint_{\Gamma'_r} \frac{ze^{ibz}}{z^2-a^2} dz$, где Γ'_r — *замкнутый* контур, изображенный на рис. 94, б, с тем лишь отличием, что центрами полуокружностей C_{r_2} и C_{r_3} служат точки $-a$ и a — *полюсы* (*1-го порядка*) подынтегральных функций, оказывающиеся *вне* контура $\Gamma_{r'}$. С учетом лемм 2 и 3 (с. 248–249)

$$\begin{aligned} \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ae^{ibx}}{x^2-a^2} dx &\stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\substack{r_1 \rightarrow +\infty \\ r_2 \rightarrow 0 \\ r_3 \rightarrow 0}} \left(\int_{-r_1}^{-a-r_2} + \int_{-a+r_2}^{a-r_3} + \int_{a+r_3}^{r_1} \right) \frac{ae^{ibx}}{x^2-a^2} dx = \\ &= \lim_{\substack{r_1 \rightarrow +\infty \\ r_2 \rightarrow 0 \\ r_3 \rightarrow 0}} \left(\oint_{\Gamma'_r} - \int_{C_{r_1}} + \int_{C_{r_2}} + \int_{C_{r_3}} \right) \frac{ae^{ibz}}{z^2-a^2} dz = 0 - 0 + \\ &+ i\pi \operatorname{res}_{z=-a} \frac{ae^{ibz}}{z^2-a^2} + i\pi \operatorname{res}_{z=a} \frac{ae^{ibz}}{z^2-a^2} = i\pi \frac{ae^{-iab}}{-2a} + i\pi \frac{ae^{iab}}{2a} = -\pi \sin ab, \\ \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xe^{ibx}}{x^2-a^2} dx &\stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\substack{r_1 \rightarrow +\infty \\ r_2 \rightarrow 0 \\ r_3 \rightarrow 0}} \left(\int_{-r_1}^{-a-r_2} + \int_{-a+r_2}^{a-r_3} + \int_{a+r_3}^{r_1} \right) \frac{xe^{ibx}}{x^2-a^2} dx = \\ &+ i\pi \operatorname{res}_{z=-a} \frac{ze^{ibz}}{z^2-a^2} + i\pi \operatorname{res}_{z=a} \frac{ze^{ibz}}{z^2-a^2} = i\pi \frac{-ae^{-iab}}{-2a} + i\pi \frac{ae^{iab}}{2a} = \pi \cos ab; \end{aligned}$$

как следствие

$$\boxed{\text{v.p.} \int_0^{+\infty} \frac{a \cos bx}{x^2-a^2} dx = -\frac{\pi}{2} \sin ab, \quad \text{v.p.} \int_0^{+\infty} \frac{x \sin bx}{x^2-a^2} dx = \frac{\pi}{2} \cos ab}^1$$

¹ Способ вычисления этих интегралов с помощью *вычетов* (еще до появления термина “вычет”) был указан Коши в [27] (р. 63).

3. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sqrt{x+i} e^{ix}}{x^2+1} dx$, где под квадратным корнем в числителе

подразумеваются значения на действительной оси той *однозначной ветви* $w = \sqrt{z+i}$,¹ для которой $\sqrt{0+i} = e^{i\frac{\pi}{4}}$.

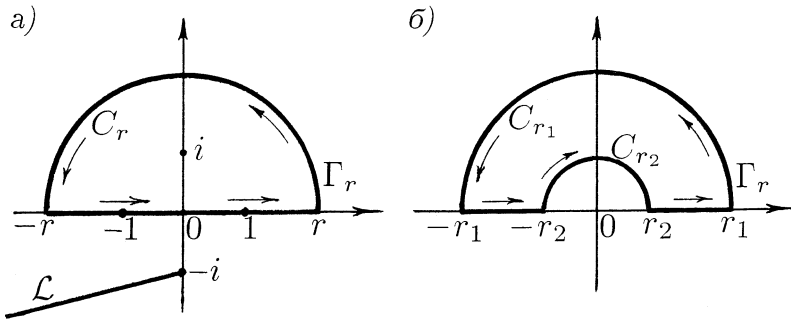


Рис. 95

Взяв в качестве *односвязной области* $D \subset \mathbb{C}$ *плоскость* $\mathbb{C}$ с “разрезом” по любому (но не пересекающему *действительной оси*) *лучу* $\mathcal{L}$ от точки $-i$ до ∞ и применяя теорему о вычетах к интегралу по замкнутому контуру $\Gamma_r \subset D$, состоящему из *полуокружности* C_r радиуса $r > 1$ и *отрезка* $[-r, r]$ (обходимых как указано на рис. 95, а), можно заключить:

$$\oint_{\Gamma_r} \frac{\sqrt{z+i} e^{iz}}{z^2+1} dz = 2\pi i \operatorname{res}_{z=i} \frac{\sqrt{z+i} e^{iz}}{z^2+1} = \pi \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}} e^{-1} = \pi(1+i)e^{-1}.$$

С другой стороны,

$$\oint_{\Gamma_r} \frac{\sqrt{z+i} e^{iz}}{z^2+1} dz = \int_{-r}^r \frac{\sqrt{x+i} e^{ix}}{x^2+1} dx + \int_{C_r} \frac{\sqrt{z+i} e^{iz}}{z^2+1} dz,$$

¹ Ее можно выделить в плоскости $\mathbb{C}$ с “разрезом” по любому *лучу* от точки $-i$ до ∞ (IV, с. 68).

причем ко второму интегралу в правой части применима лемма Жордана (с. 248–249): $\int_{C_r} \frac{\sqrt{z+i} e^{iz}}{z^2+1} dz \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} 0$. Вместе эти соотношения дают:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sqrt{x+i} e^{ix}}{x^2+1} dx = \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{-r}^r \frac{\sqrt{x+i} e^{ix}}{x^2+1} dx = \lim_{r \rightarrow +\infty} \oint_{\Gamma_r} \frac{\sqrt{z+i} e^{iz}}{z^2+1} dz = \frac{\pi(1+i)}{e}.$$

$$4. \text{ Найти } \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\lambda x}}{x} dx \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\substack{r_1 \rightarrow +\infty \\ r_2 \rightarrow 0+0}} \left(\int_{-r_1}^{-r_2} + \int_{r_2}^{r_1} \right) \frac{e^{i\lambda x}}{x} dx \text{ при лю-}$$

бом $\lambda > 0$ можно исходя из того, что для замкнутого контура Γ_r , состоящего из отрезков $[-r_1, -r_2]$ и $[r_2, r_1]$ и полуокружностей C_{r_1} и C_{r_2} (обходимых как на рис. 95, б), $\oint_{\Gamma_r} \frac{e^{i\lambda z}}{z} dz = 0$ ¹. Остается перейти к пределу при $r_1 \rightarrow +\infty$ и $r_2 \rightarrow 0+0$ и применить к интегралам по полуокружностям C_{r_1} и $C_{r_2}^-$ соответственно лемму 3 и лемму 2 (с. 248–249):

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\lambda x}}{x} dx = \lim_{\substack{r_1 \rightarrow +\infty \\ r_2 \rightarrow 0+0}} \left(\oint_{\Gamma_r} - \int_{C_{r_1}} + \int_{C_{r_2}^-} \right) \frac{e^{i\lambda z}}{z} dz = i\pi \operatorname{res}_{z=0} \frac{e^{i\lambda z}}{z} = i\pi.$$

Так как

$$\begin{aligned} \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\lambda x}}{x} dx &= \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \lambda x + i \sin \lambda x}{x} dx = \\ &= \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \lambda x}{x} dx + i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \lambda x}{x} dx, \end{aligned}$$

$$\text{следует вывод: } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \lambda x}{x} dx = \pi, \text{ а } \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \lambda x}{x} dx = 0.$$

¹ По теореме Коши (XV, с. 151), примененной к односвязной области — плоскости $\mathbb{C}$ с “разрезом” от 0 вниз по мнимой оси (не изображенном на рис. 95, б).

² Последний интеграл сходится, и потому символ v.p. перед ним может быть опущен.

5. Вычислить $\frac{1}{2\pi i} \text{v.p.} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{e^{pt}}{p^{n+1}} dp \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi i} \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{\sigma-ir}^{\sigma+ir} \frac{e^{pt}}{p^{n+1}} dp$,¹

$t > 0$, $n = 0, 1, 2, \dots$, позволяющей замена переменной $z = \frac{p-\sigma}{i}$ и введение замкнутого контура Γ_r , состоящего из отрезка $[-r, r]$ и полуокружности C_r (обходимых как указано на рис. 96, б), с применением теоремы о вычетах, леммы Жордана (с. 248–249) и формулы вычета в полюсе (XV, с. 231):

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \text{v.p.} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{e^{pt}}{p^{n+1}} dp &= \frac{1}{2\pi i} \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{-r}^r \frac{e^{\sigma t} e^{itz} i}{(\sigma + iz)^{n+1}} dz = \\ &= \frac{e^{\sigma t}}{2\pi} \lim_{r \rightarrow +\infty} \left(\oint_{\Gamma_r} - \int_{C_r} \right) \frac{e^{itz}}{(\sigma + iz)^{n+1}} dz = \frac{e^{\sigma t}}{2\pi} 2\pi i \operatorname{res}_{z=i\sigma} \frac{e^{itz}}{(\sigma + iz)^{n+1}} = \\ &= e^{\sigma t} i \frac{1}{n!} \lim_{z \rightarrow i\sigma} \left[\frac{e^{itz} (z - i\sigma)^{n+1}}{(\sigma + iz)^{n+1}} \right]^{(n)} = e^{\sigma t} \frac{1}{n! i^n} (e^{itz})_{z=i\sigma}^{(n)} = \frac{t^n}{n!}. \end{aligned}$$

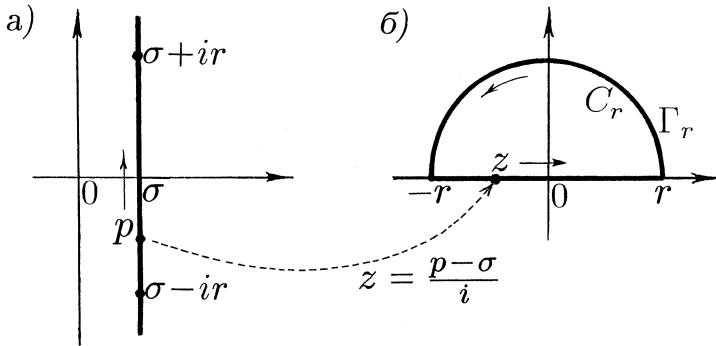


Рис. 96

¹ Главное значение интеграла по прямой $\{p \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} p = \sigma > 0\}$ (рис. 96, а); p — обозначение комплексной переменной, принятое в операционном исчислении (XIX, с. 309).

6. Вычислить $\int_0^{+\infty} \frac{x^2 \ln x}{(x^2+1)^2} dx$ можно переходом к интегралу $\oint_{\Gamma_r} \frac{z^2 \ln z}{(z^2+1)^2} dz$ по замкнутому контуру Γ_r , изображенному на рис. 95, б, понимая под логарифмом его однозначную ветвь, определенную в плоскости $\mathbb{C}$ с “разрезом” от 0 вниз по мнимой оси как $\ln z = \ln |z| + i \arg z$, $-\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{3\pi}{2}$. По теореме о вычетах

$$\oint_{\Gamma_r} \frac{z^2 \ln z}{(z^2+1)^2} dz = 2\pi i \operatorname{res}_{z=i} \frac{z^2 \ln z}{(z^2+1)^2} = 2\pi i \left(\frac{z^2 \ln z}{(z+i)^2} \right)'_{z=i} = \frac{\pi}{2} + i \frac{\pi^2}{4}.$$

Применение же свойства аддитивности интеграла, замены x на $-x$ в интеграле по отрезку $[-r_1, -r_2]$ (с учетом того, что $\ln x = \ln |x| + i\pi$ для $x < 0$) и, наконец, леммы 1 (с. 247–248) дает:

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma_r} \frac{z^2 \ln z}{(z^2+1)^2} dz &= \\ &= \int_{-r_1}^{-r_2} \frac{x^2 \ln x}{(x^2+1)^2} dx + \int_{r_2}^{r_1} \frac{x^2 \ln x}{(x^2+1)^2} dx + \oint_{C_{r_2}} \frac{z^2 \ln z}{(z^2+1)^2} dz + \oint_{C_{r_1}} \frac{z^2 \ln z}{(z^2+1)^2} dz = \\ &= \int_{r_2}^{r_1} \frac{x^2 (\ln x + i\pi)}{(x^2+1)^2} dx + \int_{r_2}^{r_1} \frac{x^2 \ln x}{(x^2+1)^2} dx + \oint_{C_{r_1}} \frac{z^2 \ln z}{(z^2+1)^2} dz + \oint_{C_{r_2}} \frac{z^2 \ln z}{(z^2+1)^2} dz \xrightarrow[r_2 \rightarrow 0]{r_1 \rightarrow +\infty} \\ &\xrightarrow[r_2 \rightarrow 0]{r_1 \rightarrow +\infty} 2 \int_0^{+\infty} \frac{x^2 \ln x}{(x^2+1)^2} dx + i\pi \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^2} dx. \end{aligned}$$

Сравнение с найденным выше значением $\oint_{\Gamma_r} \frac{z^2 \ln z}{(z^2+1)^2} dz$

позволяет заключить: $\int_0^{+\infty} \frac{x^2 \ln x}{(x^2+1)^2} dx = \frac{\pi}{4}$ (в качестве “бес-
платного приложения” получено значение $\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^2} dx = \frac{\pi}{4}$).

7. При вычислении $\int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{x+b} dx$ ($0 < \alpha < 1$ ¹, $b \neq 0$) контур интегрирования вспомогательного контурного интеграла $\oint_{\Gamma_r} \frac{z^{\alpha-1}}{z+b} dz$ выбирается в зависимости от знака числа b .

Если $b > 0$, то этот интеграл берется по замкнутому контуру Γ_r , изображенному на рис. 97, а,² однако чтобы аргументированно применить теорему о вычетах, необходимо вначале придать смысл этому интегралу, т. е. разобраться с однозначными ветвями степени. Для этого интеграл лучше представить в виде $\oint_{\Gamma'_r} \frac{z^{\alpha-1}}{z+b} dz + \oint_{\Gamma''_r} \frac{z^{\alpha-1}}{z+b} dz$, где замкнутые контуры Γ'_r , Γ''_r изображены на рис. 97, б.³

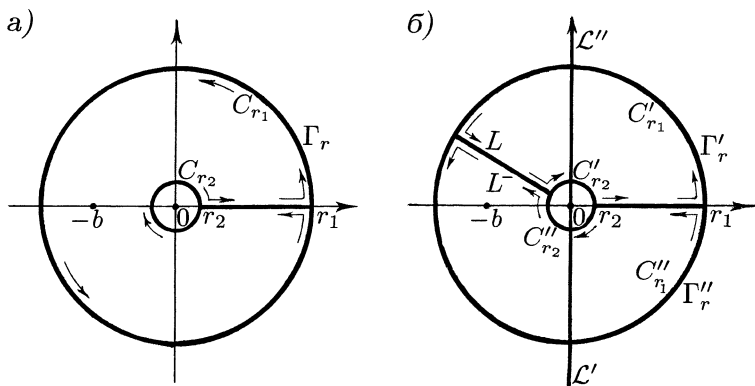


Рис. 97

¹ Интеграл сходится только для этих значений α .

² Направления обхода окружностей C_{r_1} и C_{r_2} указаны стрелками, а их радиусы удовлетворяют неравенствам $r_2 < b < r_1$.

³ Здесь L — любой соединяющий окружности C_{r_1} и C_{r_2} отрезок, не проходящий через точку $-b$ (для определенности лежащий во второй координатной четверти.)

К первому интегралу теорема о вычетах применяется в односвязной области $\mathbb{C} \setminus \mathcal{L}'$, где $\mathcal{L}'$ — луч, идущий из точки 0 вниз по мнимой оси¹. Внутри контура Γ'_r нет особых точек подынтегральной функции, а потому $\oint_{\Gamma'_r} \frac{z^{\alpha-1}}{z+b} dz = 0$.

К интегралу по контуру Γ''_r теорема о вычетах применяется в односвязной области $\mathbb{C} \setminus \mathcal{L}''$, где $\mathcal{L}''$ — луч, идущий из точки 0 вверх по мнимой оси²:

$$\oint_{\Gamma''_r} \frac{z^{\alpha-1}}{z+b} dz = 2\pi i \operatorname{res}_{z=-b} \frac{z^{\alpha-1}}{z+b} = 2\pi i (-b)^{\alpha-1} = 2\pi i b^{\alpha-1} e^{i\pi(\alpha-1)}.$$

Сложение результатов и применение к интегралам по дугам $C'_{r_1}, C''_{r_1}, C'_{r_2}, C''_{r_2}$ окружностей C_{r_1}, C_{r_2} леммы 1 (с. 247–248) дают:

$$\begin{aligned} 2\pi i b^{\alpha-1} e^{(\alpha-1)i\pi} &= \oint_{\Gamma_r} \frac{z^{\alpha-1}}{z+b} dz = \left(\oint_{\Gamma'_r} + \oint_{\Gamma''_r} \right) \frac{z^{\alpha-1}}{z+b} dz = \\ &= \int_{r_2}^{r_1} \frac{x^{\alpha-1}}{x+b} dx + \int_{r_1}^{r_2} \frac{x^{\alpha-1} e^{i2\pi(\alpha-1)}}{x+b} dx + \oint_{C_{r_1}} \frac{z^{\alpha-1}}{z+b} dz + \oint_{C_{r_2}} \frac{z^{\alpha-1}}{z+b} dz \xrightarrow[r_2 \rightarrow 0]{r_1 \rightarrow +\infty} \\ &\xrightarrow[r_2 \rightarrow 0]{r_1 \rightarrow +\infty} (1 - e^{i2\pi(\alpha-1)}) \int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{x+b} dx; \end{aligned}$$

как следствие $\int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{x+b} dx = \frac{2\pi i b^{\alpha-1} e^{i\pi(\alpha-1)}}{1 - e^{(\alpha-1)2i\pi}} = \frac{\pi b^{\alpha-1}}{\sin \pi \alpha}.$

В случае $b < 0$ за основу берется интеграл $\oint_{\Gamma_r} \frac{z^{\alpha-1}}{z+b} dz$, взятый по контуру Γ_r , изображенному на рис. 98, а. Записав

¹ В этой области $z^{\alpha-1} \stackrel{\text{def}}{=} e^{(\alpha-1)(\ln |z| + i \arg z)}$, где $-\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{3\pi}{2}$.

² В этой области $z^{\alpha-1} \stackrel{\text{def}}{=} e^{(\alpha-1)(\ln |z| + i \arg z)}$, где $\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{5\pi}{2}$; на отрезке L значения $z^{\alpha-1}$ в обеих областях совпадают, тогда как на отрезке $[r_2, r_1]$ они различаются множителем $e^{(\alpha-1)2\pi i}$.

его как $\oint_{\Gamma_r} \frac{z^{\alpha-1}}{z+b} dz + \oint_{\Gamma'_r} \frac{z^{\alpha-1}}{z+b} dz$ (рис. 98, б), остается применить к обоим слагаемым теорему Коши в односвязных областях $\mathbb{C} \setminus \mathcal{L}'$ и $\mathbb{C} \setminus \mathcal{L}''$, где $\mathcal{L}'$ и $\mathcal{L}''$ — лучи, идущие из точки 0 соответственно вниз и вверх по мнимой оси, и воспользоваться леммами об интегралах по дугам окружностей (с. 247–248)¹:

$$\begin{aligned}
 0 = \oint_{\Gamma_r} \frac{z^{\alpha-1}}{z+b} dz &= \int_{r_2}^{-b-r_3} \frac{x^{\alpha-1}}{x+b} dx - \int_{C'_{r_3}} \frac{z^{\alpha-1}}{z+b} dz + \int_{-b+r_3}^{r_1} \frac{x^{\alpha-1}}{x+b} dx + \\
 &+ \int_{-b-r_3}^{r_2} \frac{x^{\alpha-1} e^{i2\pi(\alpha-1)}}{x+b} dx - \int_{C''_{r_3}} \frac{z^{\alpha-1}}{z+b} dz + \int_{r_1}^{-b+r_3} \frac{x^{\alpha-1} e^{i2\pi(\alpha-1)}}{x+b} dx + \\
 &+ \oint_{C_{r_1}} \frac{z^{\alpha-1}}{z+b} dz + \oint_{C_{r_2}} \frac{z^{\alpha-1}}{z+b} dz \xrightarrow[r_3 \rightarrow 0]{\substack{r_1 \rightarrow +\infty \\ r_2 \rightarrow 0}} \text{v.p.} \int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1} (1 - e^{i2\pi(\alpha-1)})}{x+b} dx - \\
 &- i\pi \left(\operatorname{res}_{z=-b} \frac{z^{\alpha-1}}{z+b} + \operatorname{res}_{z=-b} \frac{z^{\alpha-1}}{z+b} \right),
 \end{aligned}$$

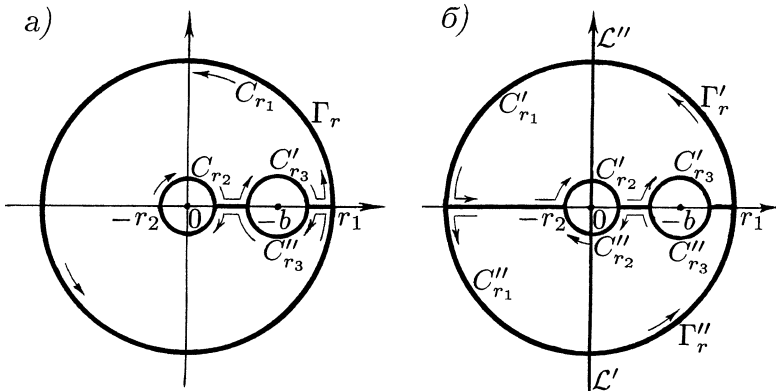


Рис. 98

¹ Применяя лемму 1 к интегралам по дугам $C'_{r_1}, C''_{r_1}, C'_{r_2}, C''_{r_2}$, а лемму 2 — к интегралам по дугам C'_{r_3}, C''_{r_3} .

при этом слагаемые в скобках — это *вычеты* двух *разных однозначных ветвей* многозначной функции $w = \frac{z^{\alpha-1}}{z+b}$ (с *разными* значениями $(-b)^{\alpha-1}$). Для одной из этих *ветвей*, выделяемой в области $\mathbb{C} \setminus \mathcal{L}'$, в которой $\arg z \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$,

$$\operatorname{res}_{z=-b} \frac{z^{\alpha-1}}{z+b} = e^{(\alpha-1)} (\ln |-b| + i \arg(-b)) = e^{(\alpha-1)} \ln |b| = |b|^{\alpha-1},$$

для другой же — в области $\mathbb{C} \setminus \mathcal{L}''$, где $\arg z \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right)$, —

$$\operatorname{res}_{z=-b} \frac{z^{\alpha-1}}{z+b} = e^{(\alpha-1)} (\ln |-b| + i \arg(-b)) = |b|^{\alpha-1} e^{i2\pi(\alpha-1)}.$$

Вывод: при $b < 0$

$$\text{v.p.} \int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{x+b} dx = \frac{i\pi |b|^{\alpha-1} (1 + e^{i2\pi(\alpha-1)})}{1 - e^{i2\pi(\alpha-1)}} = \pi |b|^{\alpha-1} \operatorname{ctg} \pi(\alpha - 1).$$

8. При вычислении $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2(1+x^2)} dx$ вспомогательным слу-

жит $\oint_{\Gamma_r} \frac{\ln(1-iz)}{z^2(1+z^2)} dz$ по замкнутому контуру Γ_r , состоящему из двух отрезков $[-r_1, -r_2]$, $[r_2, r_1]$ и двух полуокружностей C_{r_1} , C_{r_2} (направления их обхода указаны на рис. 99).

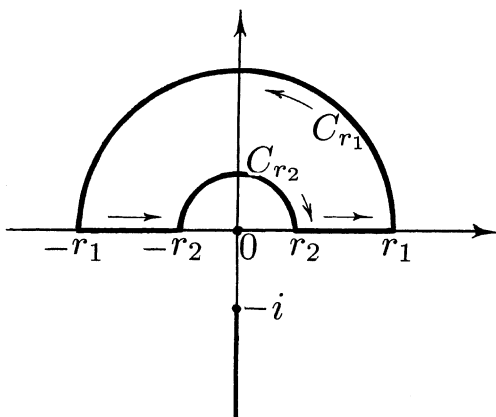


Рис. 99

Существенно, что данный контур принадлежит односвязной области — плоскости с “разрезом” от точки $-i$ вниз по мнимой оси: в этой области $-\frac{\pi}{2} < \arg(z - (-i)) < \frac{3\pi}{2}$, а следовательно, логарифм в числителе подынтегральной функции имеет однозначную ветвь

$$\begin{aligned}\ln(1-iz) &\stackrel{\text{def}}{=} \ln|1-iz| + i \arg(1-iz) = \\ &= \ln|1-iz| + i \arg((-i)(z+i)) = \ln|1-iz| + i\left(\arg(z-(-i)) - \frac{\pi}{2}\right).\end{aligned}$$

Применение теоремы о вычетах дает:

$$\oint_{\Gamma_r} \frac{\ln(1-iz)}{z^2(1+z^2)} dz = 2\pi i \operatorname{res}_{z=i} \frac{\ln(1-iz)}{z^2(1+z^2)} = 2\pi i \left. \frac{\ln(1-iz)}{z^2(z+i)} \right|_{z=i} = -\pi \ln 2;$$

в силу же свойства аддитивности интеграла вкупе с леммами 1, 2 (с. 247–248)

$$\begin{aligned}\oint_{\Gamma_r} \frac{\ln(1-iz)}{z^2(1+z^2)} dz &= \int_{r_2}^{r_1} \frac{\ln(1-ix)}{x^2(1+x^2)} dx + \int_{-r_1}^{-r_2} \frac{\ln(1-ix)}{x^2(1+x^2)} dx + \oint_{C_{r_1}} \frac{\ln(1-iz)}{z^2(1+z^2)} dz + \\ &+ \oint_{C_{r_2}} \frac{\ln(1-iz)}{z^2(1+z^2)} dz = \int_{r_2}^{r_1} \frac{(\ln(1-ix) + \ln(1+ix))}{x^2(1+x^2)} dx + \oint_{C_{r_1}} \frac{\ln(1-iz)}{z^2(1+z^2)} dz + \\ &+ \oint_{C_{r_2}} \frac{\ln(1-iz)}{z^2(1+z^2)} dz \xrightarrow[r_2 \rightarrow 0]{r_1 \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2(1+x^2)} dx - i\pi \operatorname{res}_{z=0} \frac{\ln(1-iz)}{z^2(1+z^2)}.\end{aligned}$$

Вычисление последнего вычета¹

$$\operatorname{res}_{z=0} \frac{\ln(1-iz)}{z^2(1+z^2)} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\ln(1-iz)}{z^2(1+z^2)} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{-iz - (iz)^2/2 - \dots}{z(1+z^2)} = -i$$

и сопоставление выведенных соотношений дают требуемый

$$\text{ответ: } \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2(1+x^2)} dx = \pi(1 - \ln 2).$$

¹ Точка $z = 0$ является полюсом 1-го порядка, так как для выделенной однозначной ветви $w = \ln(1-iz)$ справедливы равенства $\ln(1-iz)_{z=0} = 0$ и $\ln(1-iz)'_{z=0} = -i$.

9. Интегралы Френеля¹ $\int_0^{+\infty} \cos x^2 dx$ и $\int_0^{+\infty} \sin x^2 dx$ можно вычислить, зная значение $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$,² исходя из интеграла $\oint_{\Gamma_r} e^{iz^2} dz$, взятого по замкнутому контуру Γ_r , состоящему из двух отрезков и восьмой части окружности C_r радиуса r с центром 0 (рис. 100).

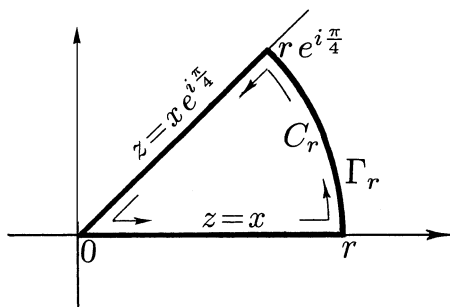


Рис. 100

В силу теоремы Коши (X, с.151)³ и свойства аддитивности интеграла с учетом того, что на неотрицательной части действительной оси $z=x$, а на биссектрисе первого координатного угла $z=x e^{i\frac{\pi}{4}}$, $x \geq 0$,

$$0 = \oint_{\Gamma_r} e^{iz^2} dz = \int_0^r e^{ix^2} dx - \int_0^r e^{-x^2} e^{i\frac{\pi}{4}} dx + \int_{C_r} e^{iz^2} dz.$$

¹ Имеющие приложение в теории дифракции света и названные в честь ее создателя — французского физика Френеля (Fresnel, Augustin Jean, 1788–1827).

² Его вычисляют в курсе действительного анализа сведением к несобственному двойному интегралу.

³ Или теоремы о вычетах (XV, с. 233).

При последующем переходе в этих равенствах к пределу при $r \rightarrow +\infty$ небольшая трудность состоит в том, что к $\int_{C_r} e^{iz^2} dz$ лемма 1 напрямую не применима: не выполнено условие 2) этой леммы. Чтобы обойти эту трудность, следует записать $e^{iz^2} = \frac{1}{2i} \left(\frac{e^{iz^2}}{z} \right)' + \frac{e^{iz^2}}{2iz^2}$ и, представив интеграл по дуге C_r в виде суммы двух, применить к первому формулу Ньютона–Лейбница (VIII, с. 133), а ко второму — упомянутую лемму:

$$\int_{C_r} e^{iz^2} dz = \frac{1}{2i} \left(\frac{e^{-r^2}}{re^{i\frac{\pi}{4}}} - \frac{e^{ir^2}}{r} \right) + \int_{C_r} \frac{e^{iz^2}}{2iz^2} dz \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} 0.$$

$$\text{Вывод: } \int_0^{+\infty} e^{ix^2} dx = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} e^{i\frac{\pi}{4}} dx, \quad \text{т. е.}$$

$$\int_0^{+\infty} \cos x^2 dx + i \int_0^{+\infty} \sin x^2 dx = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) dx,$$

а следовательно,
$$\boxed{\int_0^{+\infty} \cos x^2 dx = \int_0^{+\infty} \sin x^2 dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}}.$$

Упражнения. 1 (к последнему примеру). В какой части плоскости $\mathbb{C}$ функция $w = e^{iz^2}$ является ограниченной?

2 (к примеру 8). Почему вычислить $\operatorname{res}_{z=0} \frac{\ln(1-iz)}{z^2(1+z^2)}$ (с. 272) можно и по формуле $\operatorname{res}_{z=0} \frac{\ln(1-iz)}{z^2(1+z^2)} = \left(\frac{\ln(1-iz)}{1+z^2} \right)'$, а во вспомогательном контурном интеграле (с. 271) нельзя вместо $\ln(1-iz)$ взять $\ln(z+i)$?

3 (к примеру 7). Как понимать $\oint_{C_{r_1}} \frac{z^{\alpha-1} dz}{z+b}$ и $\oint_{C_{r_2}} \frac{z^{\alpha-1} dz}{z+b}$ (интегралы по окружностям C_{r_1}, C_{r_2}) на с. 269–270?

4 (к примеру 6). Найти $\int_0^{+\infty} \frac{x^2 \ln x dx}{(x^2+1)^2}$, вычисляя $\oint_{\Gamma_r} \frac{z^2 \ln^2 z dz}{(z^2+1)^2}$ по замкнутому контуру Γ_r , представленному на рис. 97, а.

XVII. В ЧЕМ СОСТОИТ ПРИНЦИП АРГУМЕНТА И ЧТО УТВЕРЖДАЕТ ТЕОРЕМА РУШЕ

Теорема (принцип аргумента).¹ Пусть в односвязной области $D \subset \mathbb{C}$ функция $w = f(z)$ является аналитической, исключая лишь конечное число полюсов, и имеет в этой области лишь конечное число нулей;² тогда для любого замкнутого и не имеющего самопересечений кусочно-гладкого контура $\Gamma \subset D$, обходящего внутреннюю по отношению к нему область $\text{int } \Gamma$ в положительном направлении и не проходящего через нули и полюсы данной функции, справедливо равенство

$$\boxed{N_{f, \text{int } \Gamma} - P_{f, \text{int } \Gamma} = \frac{1}{2\pi} \Delta \text{Arg } f(z) \Big|_{\Gamma}},$$

левая часть которого — разность между числами нулей и полюсов³ функции $w = f(z)$ внутри контура Γ , а правая — деленное на 2π полное приращение аргумента вектора $f(z)$ (или, что то же самое, суммарное число его оборотов⁴) при перемещении точки z вдоль контура Γ .

Доказательство. Достаточно двумя способами найти значение интеграла $\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz$, применяя: 1) теорему о вычетах (XV, с. 233), 2) формулу Ньютона–Лейбница в варианте с “многозначной первообразной”, обсуждавшемся в IX (с. 135—137).

¹ У Коши в [28], sér. I, t. XII, p. 266.

² Включая случаи *отсутствия* у функции нулей и/или полюсов.

³ На рис. 101 $z_1, \dots, z_m$ — нули и полюсы функции $w = f(z)$, при этом каждый *нуль* считается столько раз, какова его *кратность*, а каждый *полюс* — столько раз, каков его *порядок*.

⁴ Обороты “против хода часовой стрелки” берутся со знаком $+$, а в противоположную сторону — со знаком $-$.

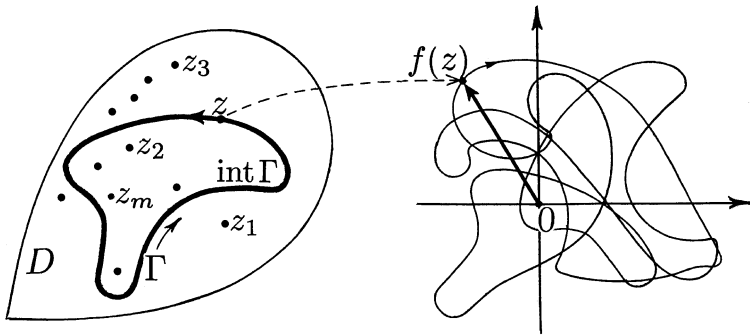


Рис. 101

В условиях теоремы функция $w = \frac{f'(z)}{f(z)}$ является *аналитической* в области D , исключая лишь а) нули и б) полюсы функции $w = f(z)$.

Пусть $z = a$ — нуль функции $w = f(z)$ кратности k (XIII, с. 198), т. е. разложение Тейлора этой функции в окрестности точки a имеет вид

$$f(z) = c_k(z-a)^k + c_{k+1}(z-a)^{k+1} + \dots \quad (c_k \neq 0),$$

а так как

$$f'(z) = kc_k(z-a)^{k-1} + (k+1)c_{k+1}(z-a)^k + \dots,$$

для частного

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{kc_k + (k+1)c_{k+1}(z-a) + \dots}{(z-a)[c_k + c_{k+1}(z-a) + \dots]}$$

$z = a$ является полюсом 1-го порядка с вычетом

$$\operatorname{res}_{z=a} \frac{f'(z)}{f(z)} = \lim_{z \rightarrow a} \left(\frac{kc_k + (k+1)c_{k+1}(z-a) + \dots}{(z-a)[c_k + c_{k+1}(z-a) + \dots]} (z-a) \right) = k.$$

Пусть теперь $z = b$ — полюс функции $w = f(z)$ порядка n (XIV, с. 218), т. е. разложение Лорана этой функции в окрестности точки b имеет вид

$$f(z) = \frac{c_{-n}}{(z-b)^n} + \frac{c_{-n+1}}{(z-b)^{n-1}} + \dots \quad (c_{-n} \neq 0),$$

так что

$$f'(z) = \frac{-nc_n}{(z-b)^{n+1}} + \frac{(-n+1)c_{-n+1}}{(z-b)^n} + \dots,$$

а поэтому для *частного*

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{-nc_{-n} + (-n+1)c_{-n+1}(z-b) + \dots}{(z-b)[c_{-n} + c_{-n+1}(z-b) + \dots]}$$

$z=b$ является *полюсом 1-го порядка с вычетом*

$$\operatorname{res}_{z=b} \frac{f'(z)}{f(z)} = \lim_{z \rightarrow b} \left(\frac{-nc_{-n} + (-n+1)c_{-n+1}(z-b) + \dots}{(z-b)[c_{-n} + c_{-n+1}(z-b) + \dots]} (z-b) \right) = -n.$$

Этим установлено, что *вычет* функции $w = \frac{f'(z)}{f(z)}$ в *нуле* функции $w = f(z)$ равен *кратности* этого *нуля*, а в *полюсе* функции $w = f(z)$ — взятому со знаком “минус” *порядку* этого *полюса*.

Применение теоремы о вычетах (XV, с. 233) позволяет поэтому утверждать: если $z_1, \dots, z_m$ — *общий список нулей и полюсов* функции $w = f(z)$ в области D , то для любого *замкнутого кусочно-гладкого контура* $\Gamma \subset D$ без *самопересечений*, который не *проходит* через точки $z_1, \dots, z_m$ и *обходит внутреннюю по отношению к нему область* $\operatorname{int} \Gamma$ в *положительном направлении*¹, выполняются соотношения

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{z_j \in \operatorname{int} \Gamma} \operatorname{res}_{z=z_j} \frac{f'(z)}{f(z)} = N_{f, \operatorname{int} \Gamma} - P_{f, \operatorname{int} \Gamma}.$$

С другой стороны, *подынтегральная функция* в $\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz$ в области $D' = D \setminus \{z_1, \dots, z_m\}$ (как и выше, $z_1, \dots, z_m$ — *общий список нулей и полюсов* функции $w = f(z)$ в области D) имеет “*многозначную первообразную*” $w = \operatorname{Ln} f(z)$ (VIII, с. 135): в *окрестности* каждой точки области D' определена *однозначная ветвь* $w = \ln f(z)$ с производной $(\ln f(z))' = \frac{f'(z)}{f(z)}$.

¹ Это означает, что $\operatorname{ind}(\Gamma, z) = 1$ для точек $z \in \operatorname{int} \Gamma$ (IX, с. 144).

Чтобы в этом убедиться, достаточно заметить, что любая точка $\zeta \in D'$ имеет *окрестность*, во всех точках z которой $|f(z) - f(\zeta)| < |f(\zeta)|$, и в которой поэтому определена *однозначная ветвь* $\varphi = \arg f(z)$, а следовательно, и *однозначная ветвь* $w = \ln f(z) = \ln |f(z)| + i \arg f(z)$.

Применение (к уже вычисленному с помощью *вычетов* интегралу) *формулы Ньютона–Лейбница* — путем разделения контура Γ на участки, целиком попадающие в области определения однозначных ветвей $w = \ln f(z)$, — дает:

$$\begin{aligned} N_{f, \text{int } \Gamma} - P_{f, \text{int } \Gamma} &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \Delta \operatorname{Ln} f(z) = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \Delta (\ln |f(z)| + i \operatorname{Arg} f(z)) \Big|_{\Gamma} = \frac{1}{2\pi} \Delta \operatorname{Arg} f(z) \Big|_{\Gamma} \end{aligned}$$

$(\Delta \ln |f(z)|) \Big|_{\Gamma} = 0$, так как контур Γ *замкнут*). **Q.E.D.**

Вот важное следствие *принципа аргумента*.

Теорема Рушэ.¹ Пусть Γ — *замкнутый и не имеющий самопересечений кусочно-гладкий контур*, не выходящий за пределы *односвязной области* $D \subset \mathbb{C}$, в которой функции $w = \varphi(z)$ и $w = \psi(z)$ являются *аналитическими* и имеют не более *конечного числа нулей*. Тогда если на этом контуре выполнено неравенство $|\varphi(z) - \psi(z)| < |\psi(z)|$, то *внутри этого контура функции* $w = \varphi(z)$ и $w = \psi(z)$ *имеют одинаковое число нулей*².

¹ Французский математик Рушэ (Rouché, Eugène, 1832–1910) установил эту теорему в 1861 г.; опубликована в Journal de l'École Impériale Polytechnique за 1862 г. (t. 22, p. 217–218).

² Каждый *нуль* считается столько раз, какова его *кратность*. Разумеется, правую часть неравенства $|\varphi(z) - \psi(z)| < |\psi(z)|$ в условии теоремы можно заменить на $|\varphi(z)|$. Известны различные переформулировки и обобщения этой теоремы; в частности, упомянутое неравенство в ее условии допускает замену на $|\varphi(z) - \psi(z)| < |\varphi(z)| + |\psi(z)|$ (Т. Estermann. Complex numbers and functions. London, 1962, p. 156).

Доказательство. Ввиду выполнения в точках контура Γ неравенства $|\varphi(z) - \psi(z)| < |\psi(z)|$ этот контур *не проходит* через *нули* функций $w = \varphi(z)$ и $w = \psi(z)$, а так как у этих функций нет *особых точек* в области D , принцип аргумента позволяет сделать вывод: количества $N_{\varphi, \text{int } \Gamma}$ и $N_{\psi, \text{int } \Gamma}$ нулей, которые имеют функции $w = \varphi(z)$ и $w = \psi(z)$ *внутри* контура Γ , совпадают с количествами *оборотов* векторов $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ при обходе точкой z этого контура. Остается заметить, что (опять же в силу условия $|\varphi(z) - \psi(z)| < |\psi(z)|$) *угол* между векторами $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ при перемещении точки вдоль контура Γ остается *острым* (рис. 102), а потому *разность* между количествами *оборотов*, совершенных этими векторами по завершению обхода точкой z контура Γ *равна нулю*. **Q.E.D.**

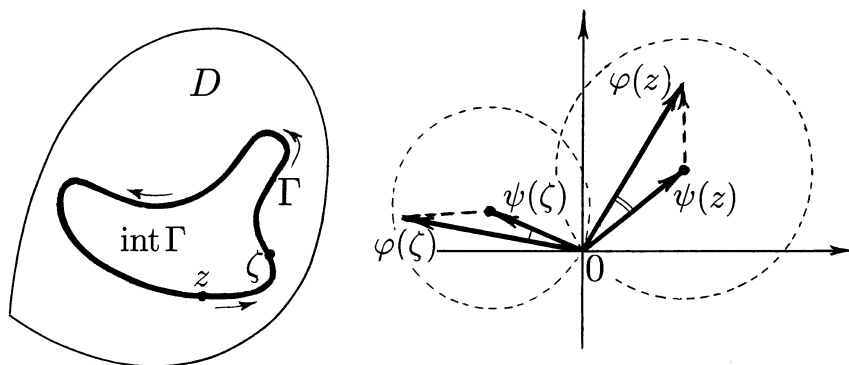


Рис. 102

Теорема Руше дает один из способов доказательства теоремы о существовании корней многочленов (XIII, с. 197) и даже в более сильной формулировке:

|| Любой многочлен степени $n \geq 1$ имеет в плоскости $\mathbb{C}$ ровно n корней.

Доказательство. Пусть $p(z)$ — многочлен степени n с коэффициентом a_0 при z^n . Так как $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{p(z) - a_0 z^n}{a_0 z^n} = 0$, на любой окружности с центром 0 достаточно большого радиуса выполняется неравенство $|a_0 z^n - p(z)| < |a_0 z^n|$, а потому согласно теореме Руше (взяв в ней $\varphi(z) = p(z)$, $\psi(z) = a_0 z^n$) можно утверждать, что *внутри* любой такой окружности многочлен $p(z)$ имеет столько же нулей (или корней), сколько их имеет *одночлен* $a_0 z^n$, т. е. ровно n (для него начало координат является n -кратным нулем). **Q.E.D.**

Следующие примеры показывают, как, используя *принцип аргумента* и теорему Руше, получать информацию не только о *количестве*, но и о *расположении нулей* аналитических функций (прежде всего *многочленов*).

1. Найти число корней уравнения $z^4 + z^3 - 4z + 1 = 0$ в кольце $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$.

Достаточно применить теорему Руше, взяв в качестве контура Γ вначале *окружность* радиуса 1, а затем *окружность* радиуса 2 (обе с центром в начале координат), а в качестве *функций* — соответственно

$$\begin{cases} \varphi(z) = z^4 + z^3 - 4z + 1 \\ \psi(z) = -4z \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \varphi(z) = z^4 + z^3 - 4z + 1 \\ \psi(z) = z^4 + 1. \end{cases}$$

На *первой* окружности $|\varphi(z) - \psi(z)| = |z^4 + z^3 + 1| \leq 3$, а $|\psi(z)| = |-4z| = 4$, потому *внутри* нее лежит столько же корней данного уравнения, сколько их имеет уравнение $-4z = 0$, т. е. *один*.

Получить соответствующие оценки на *второй* окружности (при $|z| = 2$) не столь просто. Рассуждать можно, например, так. Для точек z с $|z| = 2$ *вне дуг*, определяемых неравенствами

$$\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2} \leq \arg z \leq \frac{3\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}, \quad k \in \mathbb{Z} \quad (\text{рис. 103, а}),$$

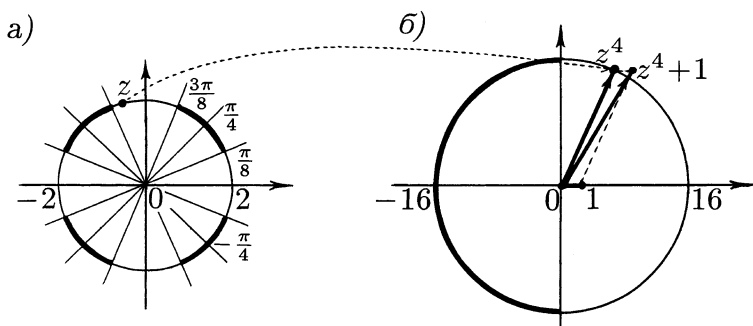


Рис. 103

$|\psi(z)| = |z^4 + 1| > |z^4| = 16$ (угол между векторами z^4 и 1 острый; рис. 103, б), при этом $|\varphi(z) - \psi(z)| = |z^3 - 4z| \leq 16$.

Для точек же z на указанных дугах $|\psi(z)| = |z^4 + 1| \geq 15$, тогда как $|\varphi(z) - \psi(z)| = |z(z^2 - 4)| \leq 2 \cdot 8 \cdot \sin \frac{3\pi}{8} < 15$, поскольку угол между векторами z^2 и 4 (оба длины 4) меньше, чем $\frac{3\pi}{4}$ (рис. 104).

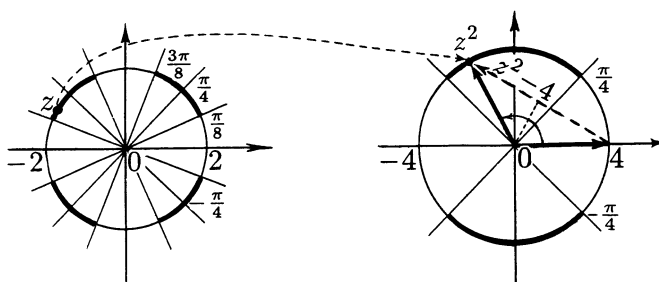


Рис. 104

Применение теоремы Руше дает: внутри второй окружности уравнения $z^4 + z^3 - 4z + 1 = 0$ и $z^4 + 1 = 0$ имеют равное

число корней, т. е. *четыре*. Так как на самих окружностях корней *нет*, следует ответ: искомое число равно 3.

2. Сколько *корней* имеет в каждом *координатном угле* уравнение $2z^4 - 3z^3 + 3z^2 - z + 1 = 0$?

Ответ: в каждом *координатном угле* лежит по *одному* корню данного уравнения. Это вытекает из следующих рассуждений.

На *действительной оси* левая часть уравнения имеет лишь *положительные* значения: если $z = x$, $x \in \mathbb{R}$, то

$$\begin{aligned} 2z^4 - 3z^3 + 3z^2 - z + 1 &= \\ &= \begin{cases} (2x^4 - x + 1) + 3x^2(-x + 1) > 0 & \text{для } 0 \leq x \leq 1, \\ x^2(2x^2 - 3x + 2) + (x^2 - x + 1) > 0 & \text{для } 1 < x < +\infty, \\ (2x^4 + 3x^2 + 1) - 3x(x^2 + 1) > 0 & \text{для } x < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

На лежащей в *первом* координатном угле *дуге окружности* радиуса r с центром 0, т. е. для $z = re^{i\varphi}$, $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$,

$$\begin{aligned} 2z^4 - 3z^3 + 3z^2 - z + 1 &= 2z^4 \left(1 - \frac{3}{2z} + \frac{3}{2z^2} - \frac{1}{2z^3} + \frac{1}{2z^4} \right) = \\ &= 2r^4 e^{i4\varphi} (1 + o(1)) \quad \text{при } r \rightarrow +\infty, \end{aligned}$$

в силу чего при *обходе* указанной *дуги* в *положительном* направлении *аргумент* величины $2z^4 - 3z^3 + 3z^2 - z + 1$ получает *приращение*¹ $2\pi + o(1)$ при $r \rightarrow +\infty$.

На *мнимой оси* — для $z = iy$, $y \in \mathbb{R}$, — величина

$$2z^4 - 3z^3 + 3z^2 - z + 1 = (2y^2 - 1)(y^2 - 1) + iy(3y^2 - 1)$$

сохраняет знаки *действительной* и *мнимой* частей в промежутках между точками $y = 0$, $\pm \frac{i}{\sqrt{3}}$, $\pm \frac{i}{\sqrt{2}}$, ± 1 .

Из этих наблюдений следует вывод: при обходе точкой z *замкнутого* контура Γ_r , изображенного на рис. 105, а, ход изменения величины $2z^4 - 3z^3 + 3z^2 - z + 1$ схематически выражает линия, представленная на рис. 105, б.

¹ Равное сумме *приращений аргументов* величин $e^{i\varphi}$ и $1 + o(1)$.

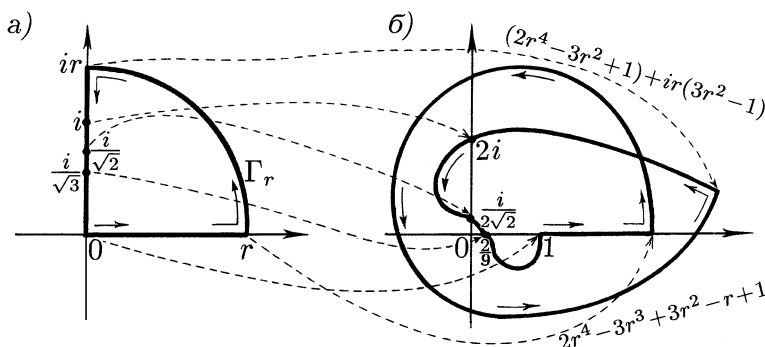


Рис. 105

Анализ этой линии и *принцип аргумента* позволяют заключить: *целая* функция $w = 2z^4 - 3z^3 + 3z^2 - z + 1$ имеет *внутри* контура Γ_r (если значение r достаточно велико) ровно *один* нуль, иначе говоря, число *корней* уравнения $2z^4 - 3z^3 + 3z^2 - z + 1 = 0$ в *первом координатном угле* равно *единице*. Так как

$$2z^4 - 3z^3 + 3z^2 - z + 1 = 0 \iff 2\bar{z}^4 - 3\bar{z}^3 + 3\bar{z}^2 - \bar{z} + 1 = 0,$$

число, *комплексно-сопряженное* любому *корню* этого уравнения, также является его *корнем*, а следовательно, *ровно один* корень этого уравнения есть и в *четвертом координатном угле*. Остается заметить, что всего *корней* у данного уравнения *четыре*, причем на *действительной оси* их *нет*.

3. Доказать, что каково бы ни было число $r > 0$, существует такое число n_0 , что при $n \geq n_0$ каждый корень многочлена $1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!}$ по модулю *больше* r .

Пусть $r > 0$ и $\varepsilon_r = \min_{|z|=r} |\exp z|$. Поскольку ряд $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{r^k}{k!}$ *сходится* и *сумма* его равна $\exp r$, существует такое число n_0 ,

что для всех $n \geq n_0$ выполняется неравенство $\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{r^k}{k!} \right| < \varepsilon_r$,
а следовательно, и соотношения

$$\left| \sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!} - \exp z \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{z^k}{k!} \right| < \varepsilon_r \leq |\exp z|, \quad |z| \leq r.$$

Применение теоремы Руше дает: при $n \geq n_0$ многочлен $\sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!}$ имеет *внутри* окружности $\{z \in \mathbb{C} : |z| = r\}$ столько же нулей, сколько их имеет $\exp z$, т.е. *ни одного*.

Упражнения. 1. Доказать, что утверждение теоремы Руше остается в силе при замене в ее условии неравенства $|\varphi(z) - \psi(z)| < |\psi(z)|$ на $|\varphi(z) - \psi(z)| < |\varphi(z)| + |\psi(z)|$ (сноска ² на с. 278).

2. Пусть ν_n — число корней многочлена $1 + \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} + \dots + \frac{z^{2n}}{(2n+1)!}$ в круге $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 100\}$. Найти $\lim \nu_n$.

XVIII. КАКИЕ ОБЩИЕ ПРИНЦИПЫ СВОЙСТВЕННЫ ОТОБРАЖЕНИЯМ АНАЛИТИЧЕСКИМИ ФУНКЦИЯМИ

Наглядно представляя *функции* комплексной переменной $w = f(z)$ как отображения — *воображаемые соотношения (сопоставления)* точкам z одного экземпляра комплексной плоскости (плоскости $\mathbb{C} = \mathbb{C}_z$ переменной z) точек $w = f(z)$ другого ее экземпляра (плоскости $\mathbb{C} = \mathbb{C}_w$ переменной w ; рис. 106), принимают следующую терминологию (и обозначения).

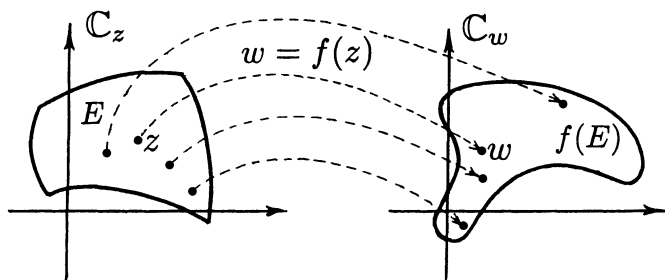


Рис. 106

Значение функции $w = f(z)$ в точке $z \in \mathbb{C}$ есть образ этой точки при отображении данной функцией. Множество значений функции $w = f(z)$, когда z пробегает то или иное множество $E \subset \mathbb{C}$ (допустимых значений этой функции), есть образ этого множества, обозначаемый $f(E)$:

$$f(E) \stackrel{\text{def}}{=} \{w \in \mathbb{C}: \exists z (z \in E \wedge f(z) = w)\};$$

говорят при этом, что функция $w = f(z)$ отображает множество E на множество $f(E)$ (как на рис. 106).

Функцию $w = f(z)$ называют однолистной на множестве E , если она *отображает* множество E на его образ $f(E)$ *взаимно-однозначно*, т.е. разным точкам множества E соответствуют разные точки множества $f(E)$:

$$\forall z \forall \zeta (z \in E \wedge \zeta \in E \wedge z \neq \zeta \implies f(z) \neq f(\zeta)).$$

Помимо свойства *конформности* — в тех точках z , где $f'(z) \neq 0$ (V, с. 81), — *отображениям*, осуществляемым *аналитическими* функциями $w = f(z)$, присущи и другие *общие* свойства, или, как принято говорить, *принципы*.

Принцип сохранения области. Функция $w = f(z)$, *аналитическая* и не являющаяся *постоянной* в области $G \subset \mathbb{C}$, отображает эту область на область.¹

Доказательство. Требуется доказать, что образ $f(G)$ области G есть *открытое* множество и обладает тем свойством, что для любых двух точек $w_1, w_2 \in f(G)$ в множестве $f(G)$ существует *соединяющий их путь* (VII, с. 107).

Доказать, что множество $f(G)$ *открыто*, значит доказать, что каждая его *точка* является *внутренней*, т.е. обладает *окрестностью*, принадлежащей этому множеству.

Пусть w_0 — какая-либо точка множества $f(G)$, т.е. $w_0 = f(z_0)$ для некоторого $z_0 \in G$. В этом случае точка z_0 является *нулем* функции $w = f(z) - w_0$, причем — ввиду *непостоянства* этой функции — ее *изолированным нулем*. Это означает (XIII, с. 200), что существует *окрестность* точки z_0 — *круг* $K \subset G$ с центром z_0 , где нет *других нулей* функции $w = f(z) - w_0$. Можно утверждать поэтому, что если C — *окружность* с центром z_0 , *содержащаяся* в *круге* K (рис. 107), то число $\mu = \inf_{z \in C} |f(z) - w_0|$ *положительно*.

¹ Образ области при отображении *постоянной* функцией состоит из одной *точки* и потому *областью* не является.

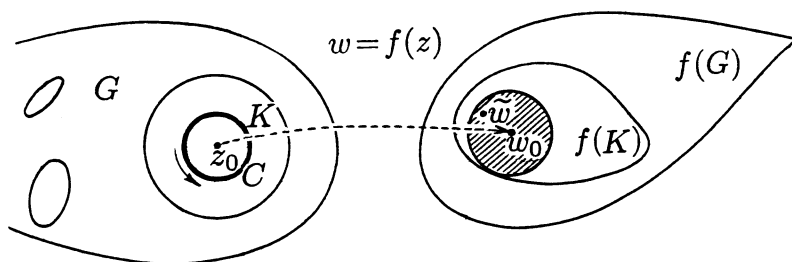


Рис. 107

Для доказательства того, что w_0 — внутренняя точка множества $f(G)$, достаточно показать, что круг $\{w \in \mathbb{C} : |w - w_0| < \mu\}$ (заштрихован на рис. 107) содержится в образе круга K — множестве $f(K) \subset f(G)$. Доказывая это “от противного”, следует предположить существование точки $\tilde{w}$ с $|\tilde{w} - w_0| < \mu$, не являющейся образом ни одной из точек круга K . Это предположение сразу же приводит к противоречию с теоремой Руше: если в ее формулировке (XVII, с. 278) взять $\varphi(z) = f(z) - \tilde{w}$, $\psi(z) = f(z) - w_0$, а в качестве односвязной области D и замкнутого контура Γ — круг K и окружность C , то, так как на окружности C

$$|(f(z) - \tilde{w}) - (f(z) - w_0)| = |\tilde{w} - w_0| < \mu \leq |f(z) - w_0|,$$

функция $w = f(z) - \tilde{w}$ имеет внутри окружности C столько же нулей, сколько их имеет функция $w = f(z) - w_0$, т. е. по крайней мере один (поскольку $f(z_0) = w_0$).

Пусть теперь w_1, w_2 — любые две точки множества $f(G)$, т. е. $w_1 = f(z_1)$, $w_2 = f(z_2)$ для некоторых точек $z_1, z_2 \in G$. Так как G — область, в ней существует соединяющий эти точки путь — непрерывная на некотором отрезке $[a, b] \in \mathbb{R}$ функция $z = z(t)$ со свойствами: $z(a) = z_1$, $z(b) = z_2$, $z(t) \in G$

при $a < t < b$. Но в этом случае функция $w = f(z(t))$, $t \in [a, b]$, есть требуемый *путь*, проходящий по множеству $f(G)$ и соединяющий точки w_1, w_2 . **Q.E.D.**

Принцип максимума модуля. Если $w = f(z)$ — непостоянная аналитическая функция в области $G \subset \mathbb{C}$, то величина $|f(z)|$ не достигает максимального значения в этой области: $\forall z_0 (z_0 \in G \implies |f(z_0)| < \sup_{z \in G} |f(z)|)$.

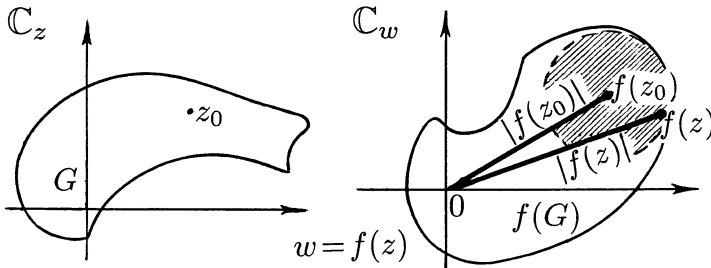


Рис. 108

Доказательство. Предположение, что $\sup_{z \in G} |f(z)| = |f(z_0)|$ для некоторой точки $z_0 \in G$ приводит к противоречию с принципом сохранения области: так как образ $f(G)$ области G есть область, любая его точка, в частности $f(z_0)$, является внутренней, т.е. множество $f(G)$ содержит некоторый круг с центром $f(z_0)$ (рис. 108), а потому среди точек $f(z) \in f(G)$ есть более удаленные от начала координат, чем $f(z_0)$, так что $|f(z_0)| < \sup_{z \in G} |f(z)|$. **Q.E.D.**

Принцип локальной однолиственности. Пусть z_0 — любая точка области $G \subset \mathbb{C}$, в которой функция $w = f(z)$, $f(z) \neq \text{const}$, является аналитической. Тогда:

если $f'(z_0) \neq 0$, то в некоторой окрестности точки z_0 функция $w = f(z)$ оказывается однолистной: в разных точках этой окрестности она принимает разные значения;

если же $f'(z_0) = 0$, то ни в какой окрестности точки z_0 функция $w = f(z)$ однолистной не является, а именно: если $f'(z_0) = \dots = f^{(k-1)}(z_0) = 0$, но $f^{(k)}(z_0) \neq 0$, то в любой достаточно малой окрестности точки z_0 функция $w = f(z)$ принимает каждое свое значение ровно k раз.

Доказательство. Пусть z_0 — любая точка области G и $f(z_0) = w_0$, т. е. z_0 есть нуль функции $w = f(z) - w_0$, причем (поскольку $f(z) \neq \text{const}$) *изолированный* (XIII, с. 200). Существует поэтому круг K с центром $z_0 \in G$, не содержащий *отличных от z_0 нулей* функции $w = f(z) - w_0$; более того, как при $f'(z_0) \neq 0$, так и при $f'(z_0) = 0$, можно считать, что $f'(z) \neq 0$ в каждой *отличной от z_0 точке z этого круга*¹.

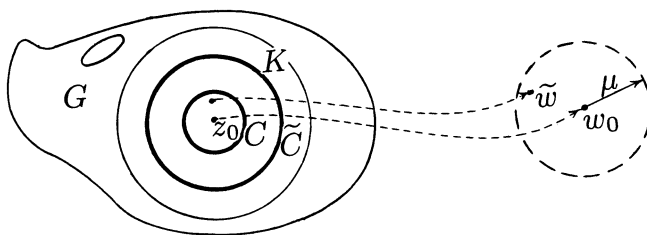


Рис. 109

¹ Если $f'(z_0) \neq 0$, то (в силу непрерывности производной аналитической функции) $f'(z) \neq 0$ в окрестности точки z_0 , если же $f'(z_0) = 0$, то (так как $f(z) \neq \text{const}$) z_0 есть *изолированный нуль* функции $w = f'(z)$.

Далее, пусть $\tilde{C}$ — какая-либо окружность с центром z_0 , принадлежащая кругу K , а C — концентрическая окружность меньшего радиуса (рис. 109), на которой (поскольку $f(z) - w_0 \neq 0$ в круге K) $\inf_{z \in C} |f(z) - w_0| = \mu > 0$.

Каково бы ни было значение $\tilde{w}$ с $|\tilde{w} - w_0| < \mu$, взяв в качестве односвязной области D и контура Γ соответственно внутренность окружности $\tilde{C}$ и окружность C , к функциям $w = f(z) - \tilde{w}$ и $w = f(z) - w_0$ можно применить теорему Руше¹: так как на окружности C

$$|(f(z) - \tilde{w}) - (f(z) - w_0)| = |\tilde{w} - w_0| < \mu \leq |f(z) - w_0|,$$

внутри этой окружности функция $w = f(z) - \tilde{w}$ имеет столько же нулей, сколько их у функции $w = f(z) - w_0$, а именно:

ровно один, если $f'(z_0) \neq 0$, так как единственный нуль z_0 функции $w = f(z) - w_0$ является простым;

ровно k , если $f'(z_0) = \dots = f^{(k-1)}(z_0) = 0$, а $f^{(k)}(z_0) \neq 0$, так как единственный нуль z_0 функции $w = f(z) - w_0$ в этом случае имеет кратность k , а каждый нуль функции $w = f(z) - \tilde{w}$ является простым ($f'(z) \neq 0$ для $z \in K$, $z \neq z_0$).

В эквивалентной переформулировке это означает, что внутри окружности C функция $w = f(z)$ принимает каждое свое значение ровно один раз (является однолистной), если $f'(z_0) \neq 0$, и ровно k раз (в k различных точках внутренней окружности C), если $f'(z_0) = \dots = f^{(k-1)}(z_0) = 0$, а $f^{(k)}(z_0) \neq 0$. **Q.E.D.**

Замечание. Пример функции $w = \exp z$ (с $\exp' z \neq 0$ в плоскости $\mathbb{C}$) показывает, что условие $f'(z) \neq 0$ обеспечивает лишь локальную (но не глобальную) однолистность

¹ Следует отметить, что функция $w = f(z) - \tilde{w}$ может иметь внутри окружности $\tilde{C}$ лишь конечное число нулей: в противном случае эти нули имели бы предельную точку (внутри или на окружности $\tilde{C}$), оказывающуюся для этой функции изолированным нулем.

аналитической функции $w = f(z)$ — не на всем *множестве*, где это условие выполняется, а только в некоторой *окрестности* каждой его точки. Именно, ввиду $2\pi i$ -периодичности функции $w = \exp z$ она не является *однолистной* в *плоскости* $\mathbb{C}$ (и потому *обратной* к ней является “многозначная функция” $z = \operatorname{Ln} w$). В *окрестности* же любой точки $z_0 \in \mathbb{C}$ функция $w = \exp z$ *однолистна* и потому для нее в *окрестности* точки $w_0 = \exp z_0$ существует *обратная* $z = \ln w$ — *однозначная ветвь* многозначной функции $z = \operatorname{Ln} w$.

Принцип соответствия границ. Пусть Γ — *замкнутый* и не имеющий самопересечений кусочно-гладкий контур, расположенный в односвязной области $D \subset \mathbb{C}$, в которой функция $w = f(z)$ является аналитической. Тогда если эта функция *взаимно-однозначно* отображает контур Γ на замкнутый и не имеющий самопересечений кусочно-гладкий контур $\tilde{\Gamma}$ с сохранением направления обхода¹, то она отображает — *взаимно-однозначно и конформно* — *внутренность* $\operatorname{int} \Gamma$ контура Γ на *внутренность* $\operatorname{int} \tilde{\Gamma}$ контура $\tilde{\Gamma}$.

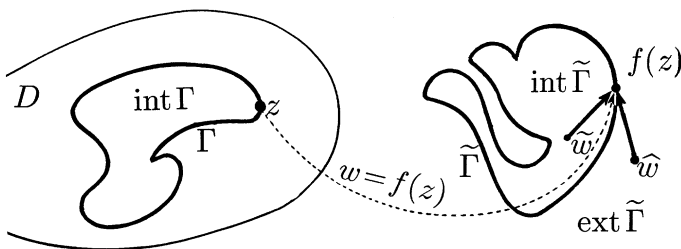


Рис. 110

¹ Это означает, что *положительному* обходу (точкой z) контура Γ соответствует *положительный* обход (точкой $f(z)$) контура $\tilde{\Gamma}$.

Доказательство. Так как функция $w = f(z)$ взаимно-однозначно отображает контур Γ на контур $\tilde{\Gamma}$, она не принимает в области $\text{int } \Gamma$ значений w , лежащих на контуре $\tilde{\Gamma}$. Для произвольно взятого же значения $\tilde{w} \in \text{int } \tilde{\Gamma}$ применение к функции $w = f(z) - \tilde{w}$ в односвязной области D принципа аргумента (XVII, с. 275) позволяет заключить: так как при обходе (точкой z) контура Γ вектор $f(z) - \tilde{w}$ совершает ровно один оборот (рис. 110), функция $w = f(z) - \tilde{w}$ имеет внутри контура Γ ровно один нуль. По тем же соображениям для любого значения $\hat{w} \in \text{ext } \tilde{\Gamma}$ функция $w = f(z) - \hat{w}$ не имеет нулей внутри контура Γ .

Это означает, что функция $w = f(z)$ принимает в области $\text{int } \Gamma$ только значения $\tilde{w} \in \text{int } \tilde{\Gamma}$, и каждое из этих значений принимает в единственной точке $\tilde{z} \in \text{int } \Gamma$; говоря другими словами, функция $w = f(z)$ взаимно-однозначно отображает область $\text{int } \Gamma$ на область $\text{int } \tilde{\Gamma}$.

Для доказательства конформности этого отображения достаточно проверить, что $f'(z) \neq 0$ в любой точке области $\text{int } \Gamma$. Но это напрямую вытекает из принципа локальной однолиственности: если бы в какой-то точке $z_0 \in \text{int } \Gamma$ выполнялось равенство $f'(z_0) = 0$, то в окрестности этой точки отображение $w = f(z)$ не было бы взаимно-однозначным (с. 289). **Q.E.D.**

Принцип непрерывного продолжения. Пусть изъятием из области $D \subset \mathbb{C}$ открытого¹ прямолинейного промежутка $L \subset D$ она разделяется на две области G_1 и G_2 (рис. 111, а), в которых заданы аналитические функции — соответственно, $w = f_1(z)$ и $w = f_2(z)$, — являющиеся непрерывными вплоть до промежутка L и совпадающие в его

¹ Т. е. без включения в него концевых точек.

точках.¹ Тогда функция $w = f(z)$, где

$$f(z) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} f_1(z), & \text{если } z \in G_1, \\ f_2(z), & \text{если } z \in G_2, \\ f_1(z) = f_2(z), & \text{если } z \in L, \end{cases}$$

называется аналитической в области D (говорят при этом, что функции $w = f_1(z)$ и $w = f_2(z)$ служат аналитическими продолжениями друг друга через промежуток L).

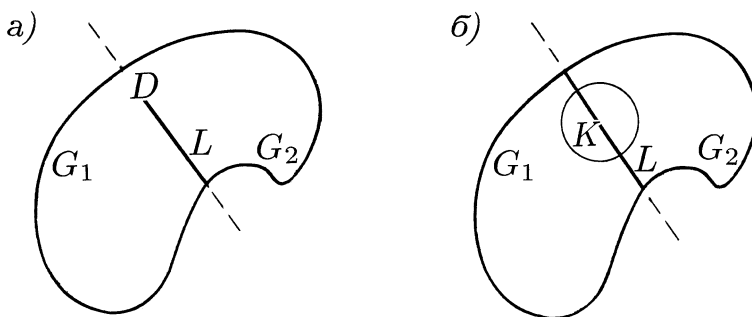


Рис. 111

Доказательство. Достаточно установить, что функция $w = f(z)$ является аналитической в произвольно взятой точке $z \in L$. Пусть K — круг с центром $z \in L$ настолько малого радиуса, что он содержится в области D , разделяясь промежутком L на два полуокруга (рис. 111, б).

Так как из определения функции $w = f(z)$ следует ее непрерывность в области D (и, в частности, в круге K),

¹ Т. е. $\lim_{\substack{z \rightarrow \zeta \\ z \in G_1 \cup L}} f_1(z) = f_1(\zeta) = f_2(\zeta) = \lim_{\substack{z \rightarrow \zeta \\ z \in G_2 \cup L}} f_2(z)$ для всех точек $\zeta \in L$.

для доказательства ее *аналитичности* в круге K достаточно в силу *теоремы Мореры* (XI, с. 173) установить, что $\oint_P f(z) dz = 0$ для любой замкнутой ломаной $P \subset K$ (рис. 112, а). Согласно *лемме об интегралах по замкнутым ломаным* (X, с. 157) для этого, в свою очередь, достаточно проверить, что $\oint_T f(z) dz = 0$ для любого *треугольника* $T \subset K$.

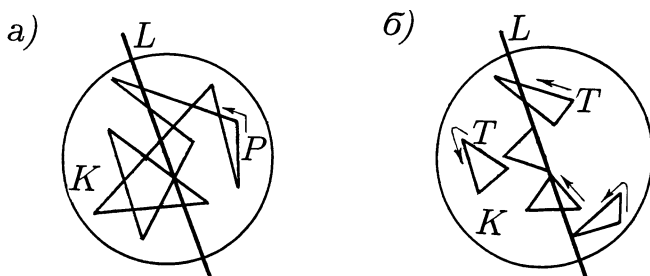


Рис. 112

Осуществить эту проверку позволяет *теорема Коши об интеграле по границе звёздной области* (X, с. 162), примененная (в зависимости от положения треугольника T по отношению к промежутку L) к одной или двум звёздным областям: либо внутренней части треугольника T , если он лежит по одну сторону от промежутка L , либо внутренним частям треугольника и выпуклого четырехугольника (или двух треугольников), образующимся в случае пересечения треугольника T промежутком L (рис. 112, б). Следует лишь заметить, что в каждой из этих звёздных областей функция $w = f(z)$ является *аналитической*, а на ограничивающем ее контуре — *непрерывной*. **Q.E.D.**

Принцип симметрии.¹ Пусть область $G \subset \mathbb{C}$ расположена по одну сторону от прямой $\mathcal{L}$, а ее граница ∂D содержит открытый промежуток L этой прямой. Далее, пусть функция $w = f(z)$, аналитическая в области G , является непрерывной вплоть до промежутка L и отображает его на открытый промежуток $\tilde{L}$ прямой $\tilde{\mathcal{L}}$ (рис. 113). Тогда соотношение $f^*(z) \stackrel{\text{def}}{=} (f(z^*))^*$, где z^* — точка, симметричная z относительно прямой $\mathcal{L}$, а $(f(z^*))^*$ — точка, симметричная $f(z^*)$ относительно прямой $\tilde{\mathcal{L}}$, определяет в симметричной G области G^* аналитическую функцию $w = f^*(z)$, служащую аналитическим продолжением функции $w = f(z)$ из области G в область G^* через промежуток L .²

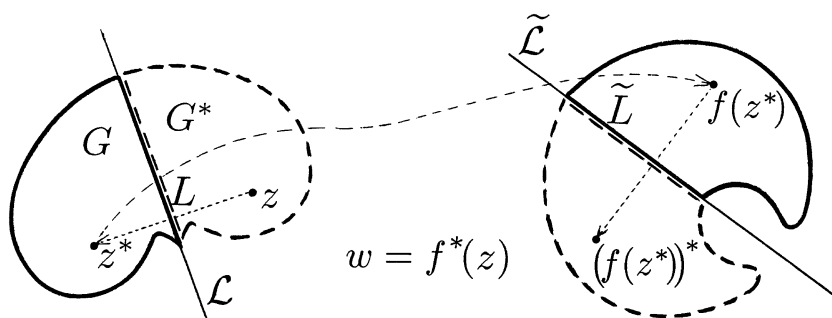


Рис. 113

¹ Называемый еще **принципом симметрии Римана–Шварца**; Шварц (Schwarz, Hermann Amandus, 1843-1921) — немецкий математик, ученик и последователь Вейерштрасса и Римана.

² Привлечение вспомогательных *дробно-линейных преобразований* в плоскостях переменных z и w позволяет распространить принцип симметрии на случай областей, симметричных относительно окружностей, при этом роль *прямолинейных промежутков* L и $\tilde{L}$ будут выполнять *дуги* этих окружностей.

Доказательство. Вспомогательными линейными преобразованиями переменных z и w (сдвигом и поворотом плоскостей $\mathbb{C}_z$ и $\mathbb{C}_w$) можно добиться того, чтобы прямые $\mathcal{L}$ и $\tilde{\mathcal{L}}$ оказывались действительными осями этих плоскостей. Симметрии относительно прямых $\mathcal{L}$ и $\tilde{\mathcal{L}}$ сводятся при этом к комплексным сопряжениям, и, следовательно,

$$f^*(z) \stackrel{\text{def}}{=} (f(z^*))^* = \overline{f(\bar{z})} \quad \text{для } z \in G^* \quad (\text{рис. 114}).$$

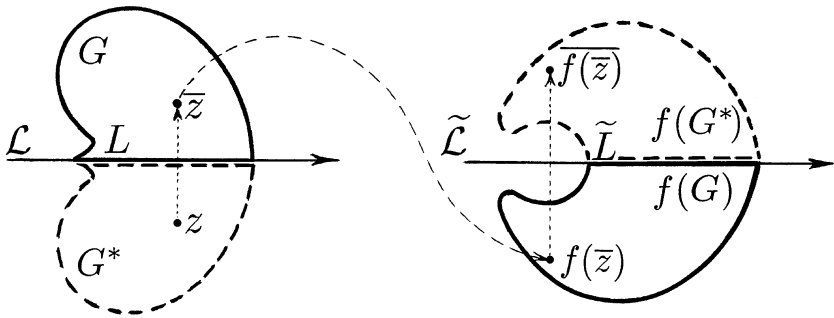


Рис. 114

Аналитичность функции $w = f^*(z)$ в области G^* вытекает из существования в любой точке $z_0 \in G^*$ производной

$$\begin{aligned} (f^*)'(z_0) &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f^*(z) - f^*(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\overline{f(\bar{z})} - \overline{f(\bar{z}_0)}}{z - z_0} = \\ &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\overline{f(\bar{z}) - f(\bar{z}_0)}}{\overline{z - z_0}} = \lim_{\bar{z} \rightarrow \bar{z}_0} \frac{\overline{f(\bar{z}) - f(\bar{z}_0)}}{\overline{z - z_0}} = \overline{f'(\bar{z}_0)}. \end{aligned}$$

Для точек же $\zeta \in L$ (учитывая, что L есть промежуток действительной оси, и функция $w = f(z)$ отображает его на промежуток $\tilde{L}$ действительной оси)

$$\lim_{\substack{z \rightarrow \zeta \\ z \in G^* \cup L}} f^*(z) = \lim_{\substack{z \rightarrow \zeta \\ z \in G^* \cup L}} \overline{f(\bar{z})} = \overline{\lim_{\substack{\bar{z} \rightarrow \bar{\zeta} \\ \bar{z} \in G \cup L}} f(\bar{z})} = \overline{f(\bar{\zeta})} = f(\zeta) = f^*(\zeta),$$

а это означает, что *аналитическая* в области G^* функция $w = f^*(z)$ *непрерывна* вплоть до промежутка L , совпадая на нем с функцией $w = f(z)$.

Остается применить *принцип непрерывного продолжения*, полагая в его формулировке (с. 292) $G_1 = G$, $G_2 = G^*$, $f_1(z) = f(z)$, $f_2(z) = f^*(z)$. В соответствии с ним функция¹

$$w = \begin{cases} f(z), & \text{если } z \in G, \\ f^*(z), & \text{если } z \in G^*, \\ f(z) = f^*(z), & \text{если } z \in L, \end{cases}$$

является *аналитической* в области $D = G \cup G^* \cup L$, причем следует добавить, что *образом* этой области оказывается область $f(G) \cup (f(G))^* \cup \tilde{L}$. **Q.E.D.**

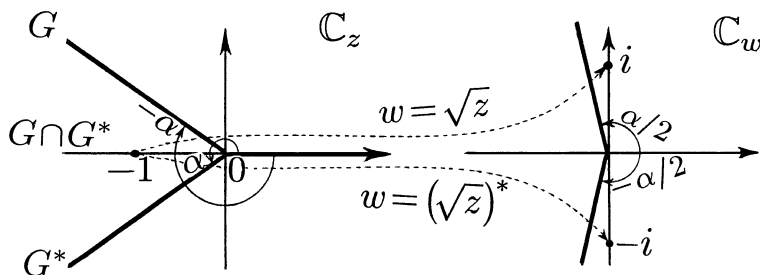


Рис. 115

Замечание. Пример *аналитической* функции $w = \sqrt{z}$ — однозначной ветви *квадратного корня*, определяемой в области $G = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \arg z < \alpha\}$ условием $0 < \arg \sqrt{z} < \alpha/2$,

¹ Однозначная ввиду отсутствия у областей G и G^* общих точек (поскольку эти области лежат по разные стороны от прямой L).

показывает, что если области G и G^* , симметричные относительно прямой $\mathcal{L}$ (в данном случае действительной оси), имеют общие точки (при $\pi < \alpha \leq 2\pi$; рис. 115), то при аналитическом продолжении этой однозначной ветви в соответствии с принципом симметрии (в данном случае через прямолинейный промежуток $L = (0, +\infty)$) может возникнуть многозначная функция: $-1 \in G \cap G^*$, при этом $\sqrt{-1} = i$, а $\sqrt{-1}^* = \overline{\sqrt{-1}} = -i$.

Особое место в этом примере занимает случай $\alpha = 2\pi$, когда область $G = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \arg z < 2\pi\}$ и симметричная ей (относительно действительной оси) область G^* совпадают, а роль открытого промежутка L (как и промежутка $\tilde{L}$) выполняет луч $(0, +\infty)$ действительной оси (рис. 116). Результатом применения к функции $w = \sqrt{z}$, $z \in G$, принципа симметрии¹ оказывается двухзначная функция $w = \{\sqrt{z}, \overline{\sqrt{z}}\}$, отображающая область $G \cup G^* \cup L = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ на область $\sqrt{G} \cup (\sqrt{G})^* \cup \tilde{L} = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$.

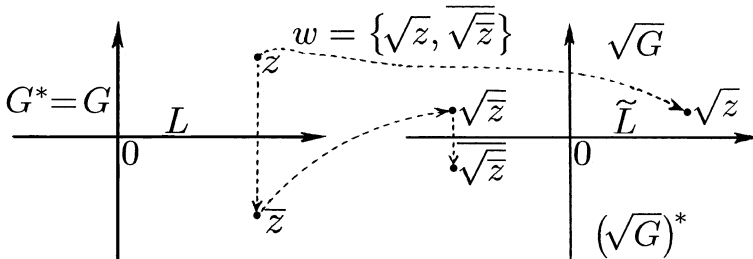


Рис. 116

¹ Непрерывность этой функции вплоть до промежутка L понимается в данном случае как ее непрерывность в точках $z \in L$ либо из верхней, либо из нижней полуплоскости, соответственно выбору для всех точек $z \in L$ одного из двух значений $\arg \sqrt{z}$: либо 0, либо π (здесь выбрано значение 0).

Наглядно представить эту *двухзначную функцию* как *однозначную* позволяет следующая конструкция. Область $G^* = G$ представляют как второй экземпляр области G , “склеенный” с первым по промежутку L (на котором *предельные значения* $\sqrt{z}$ и $\overline{\sqrt{z}}$ *совпадают*; рис. 117, а). Каждая точка $z \in G \cup G^*$ отмечается на обоих экземплярах, или, как говорят, “листах”, причем точке z на первом “листе” ($z \in G$) отвечает значение $\sqrt{z}$ (для которого $0 < \arg \sqrt{z} < \pi$), а ее “двойнику” на втором “листе” ($z \in G^*$) — значение $\overline{\sqrt{z}}$ ($-\pi < \arg \overline{\sqrt{z}} < 0$; рис. 117, б).

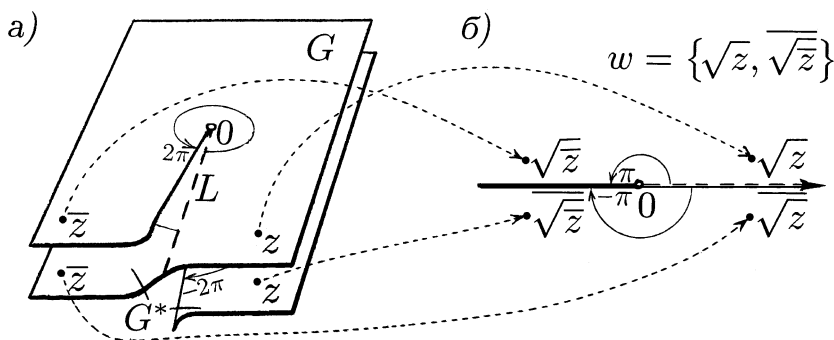


Рис. 117

Поскольку *предельные значения* $\sqrt{z}$ и $\overline{\sqrt{z}}$ совпадают также и на *противоположных* сторонах верхнего и нижнего “листов” (изображенных “отогнутыми” соответственно вверх и вниз на рис. 117, а), применение *принципа непрерывности* приводит к “склейке” также и этих сторон — разумеется, воображаемой (и то с трудом, поскольку на реальной модели это сделать невозможно).

Такие конструкции, “склеенные” из нескольких (иногда *бесконечного* числа) “листов” — экземпляров плоскости $\mathbb{C}$ или ее частей¹, —

¹ Число “листов”, а также способ их соединения (путем “разрезаний” и “склеиваний”) определяются конкретной *многозначной функцией* $w = F(z)$, причем ее значениям на отдельных “листах” отвечают различные *однозначные ветви* $w = f(z)$ этой *многозначной функции*.

получили название римановых поверхностей — по имени их изобретателя (IV, с. 59–61.) — и дали импульс развитию как отдельной математической науки *топологии*¹ (с ее различными специализациями), так и новых разделов анализа, в частности *теории функций на римановых поверхностях*. В рамках же *математического анализа на комплексной плоскости* роль этих конструкций не столь велика, так как на первый план выходит не наглядное изображение *многозначности функции*, а *практическое* выделение ее *однозначных ветвей*.

Примером *практического* применения принципа симметрии может служить решение следующей задачи.

Найти аналитическую функцию $w = f(z)$, взаимно-однозначно и конформно отображающую область G — плоскость $\mathbb{C}$ с “разрезами” по положительной части действительной оси и отрезкам биссектрис координатных углов между корнями 4-й степени из -1 (рис. 118, а) — на верхнюю полуплоскость.

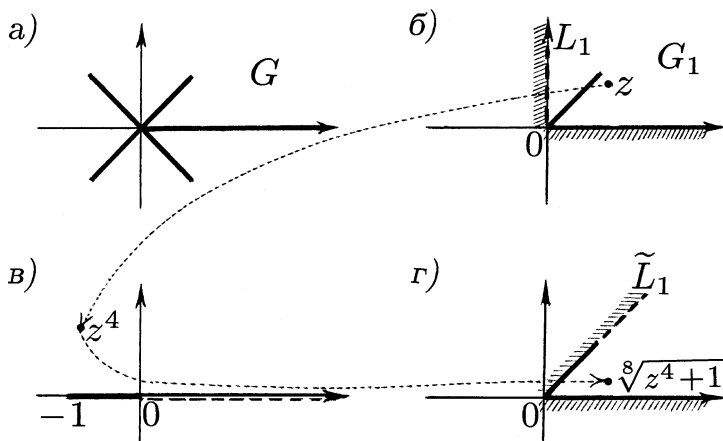


Рис. 118

¹ От греч. τόπος — место, λόγος — слово, счет, учение.

Решение. Пусть G_1 — пересечение данной области G с 1-м координатным углом (рис. 118, б). Однозначная ветвь функции $\zeta = \sqrt[8]{z^4 + 1}$, определяемая в области G_1 условием $0 < \arg \sqrt[8]{z^4 + 1} < \frac{\pi}{4}$, отображает ее взаимно-однозначно и конформно на угол $\{\zeta \in \mathbb{C}: 0 < \arg \zeta < \frac{\pi}{4}\}$ (рис. 118, в, г).

Принцип симметрии по отношению к промежуткам L_1 и $\tilde{L}_1$ (соответственно, мнимой оси и биссектрисы 1-го координатного угла), обозначенным пунктиром на рис. 118, б, г, с учетом того, что преобразования симметрии относительно мнимой оси плоскости $\mathbb{C}_z$ и биссектрисы 1-го координатного угла плоскости $\mathbb{C}_\zeta$ имеют, соответственно, вид $z \mapsto -\bar{z}$ и $\zeta \mapsto i\bar{\zeta}$, позволяет утверждать: функция

$$\zeta = f_1(z) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \sqrt[8]{z^4 + 1}, & \text{если } z \in G_1 \cup L_1, \\ i \sqrt[8]{(-\bar{z})^4 + 1}, & \text{если } z \in G_1^* \cup L_1, \end{cases}$$

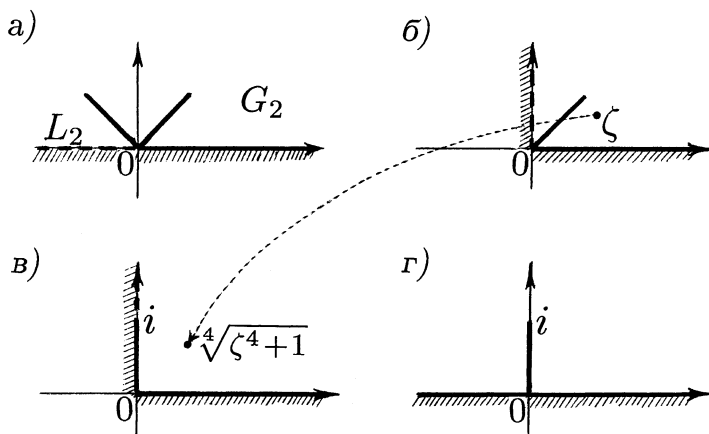


Рис. 119

преобразует область $G_2 = G_1 \cup G_1^* \cup L_1$ — верхнюю полуплоскость с “разрезами” длины 1 по биссектрисам 1-го и 2-го

координатных углов (рис. 119, а) — взаимно-однозначно и конформно на 1-й координатный угол с “разрезом” длины 1 по его биссектрисе (рис. 119, б).

Однозначная ветвь функции $\omega = \sqrt[4]{\zeta^4 + 1}$, определяемая в точках этого угла условием $0 < \arg \sqrt[4]{\zeta^4 + 1} < \frac{\pi}{4}$, отображает его на такой же угол без “разреза” (рис. 119, в), после чего применение принципа симметрии — на сей раз относительно промежутка $L_2 = (-\infty, 0)$ действительной оси плоскости $\mathbb{C}_z$ и мнимой оси плоскости $\mathbb{C}_w$ (преобразования симметрии имеют, соответственно, вид $z \mapsto \bar{z}$ и $w \mapsto -\bar{w}$) — приводит к взаимно-однозначному и конформному отображению

$$\omega = f_2(z) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \sqrt[4]{(f_1(z))^4 + 1}, & \text{если } z \in G_2 \cup L_2, \\ -\sqrt[4]{(f_1(\bar{z}))^4 + 1}, & \text{если } z \in G_2^* \cup L_2, \end{cases}$$

исходной области $G = G_2 \cup G_2^* \cup L_2$ на верхнюю полуплоскость с “разрезом” по отрезку от 0 до i (рис. 119, г).

Остается лишь применить ту однозначную ветвь функции $w = \sqrt{\omega^2 + 1}$, которая отображает верхнюю полуплоскость с “разрезом” по отрезку от 0 до i на верхнюю полуплоскость (без “разреза”), что и дает окончательный ответ: требуемое отображение заданной области G на верхнюю полуплоскость осуществляет функция $w = \sqrt{(f_2(z))^2 + 1}$.

Теорема об обратной функции. Если в области $G \subset \mathbb{C}$ функция $w = f(z)$ является аналитической и однолистной, то в области $f(G)$, на которую эта функция отображает область G , определена обратная функция $z = f^{-1}(w)$, также являющаяся аналитической и однолистной, при этом

а) $(f^{-1})'(w) = \frac{1}{f'(z)}$ в точках $w = f(z)$ области $f(G)$;

б) отображения функциями $w = f(z)$ и $z = f^{-1}(w)$ областей G и $f(G)$ друг на друга являются конформными.

Доказательство. То, что множество $f(G)$ есть область и в этой области определена функция $z = f^{-1}(w)$, обратная к $w = f(z)$ (и вместе с ней являющаяся однолистной), следует из однолистности (взаимно-однозначности) функции $w = f(z)$ и принципа сохранения области (с. 286).

Для доказательства аналитичности функции $z = f^{-1}(w)$ в области $f(G)$ следует вначале доказать ее непрерывность в произвольно взятой точке $w_0 = f(z_0)$ этой области. Пусть ε — любое положительное число. Взяв положительное число $\varepsilon' \leq \varepsilon$ настолько малым, что круг K радиуса ε' с центром z_0 принадлежит области G (рис. 120), можно утверждать (на основании принципа сохранения области), что образ $f(K)$ этого круга при отображении функцией $w = f(z)$ есть область, содержащая точку w_0 , а вместе с ней и круг с центром w_0 достаточно малого радиуса δ . Какова бы ни была точка w с $|w - w_0| < \delta$, значение $z = f^{-1}(w)$ в этом случае будет отличаться от $z_0 = f^{-1}(w_0)$ меньше, чем на $\varepsilon' \leq \varepsilon$. Тем самым установлена истинность утверждения

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall w (|w - w_0| < \delta \implies |f^{-1}(w) - f^{-1}(w_0)| < \varepsilon),$$

т. е. непрерывность функции $z = f^{-1}(w)$ (в произвольно взятой точке $w_0 \in f(G)$).

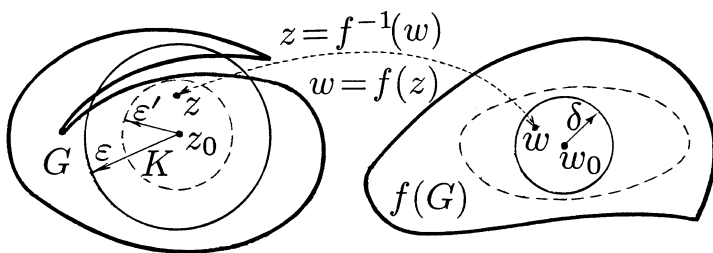


Рис. 120

Теперь можно доказать и *аналитичность* этой функции в области $f(G)$, т.е. существование у нее *производной* в любой точке $w_0 \in f(G)$. Так как $z \rightarrow z_0 \iff w \rightarrow w_0$ (ввиду непрерывности функций $w = f(z)$ и $z = f^{-1}(w)$), а $f'(z_0) \neq 0$ (в силу принципа локальной однолиственности),

$$\begin{aligned}(f^{-1})'(w_0) &\stackrel{\text{def}}{=} \lim_{w \rightarrow w_0} \frac{f^{-1}(w) - f^{-1}(w_0)}{w - w_0} = \lim_{w \rightarrow w_0} \frac{z - z_0}{f(z) - f(z_0)} = \\ &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{z - z_0}{f(z) - f(z_0)} = \frac{1}{f'(z_0)}.\end{aligned}$$

Конформность осуществляемых функциями $w = f(z)$ и $z = f^{-1}(w)$ отображений областей G и $f(G)$ друг на друга вытекает из необращения в нуль производных обеих функций. **Q.E.D.**

Пример. Так как *целая* функция $w = \exp z$ является *однолистной* в любой *полосе* $\{z \in \mathbb{C} : \alpha < \operatorname{Im} z < \alpha + 2\pi\}$ ¹ и отображает ее на область $\{w \in \mathbb{C} : \alpha < \arg w < \alpha + 2\pi\}$ (III, с. 45-46), применение теоремы об обратной функции дает: в плоскости $\mathbb{C}$ с “разрезом” по какому-либо лучу $\mathcal{L}$, выходящему из точки 0, определена *обратная функция* $z = \exp^{-1}w$, или (в более привычном обозначении) $z = \ln w$ — *однозначная ветвь логарифма*, которая отображает указанную плоскость с “разрезом” на *полосу* $\{z \in \mathbb{C} : \alpha < \operatorname{Im} z < \alpha + 2\pi\}$, где α — величина угла, под которым луч “разреза” $\mathcal{L}$ выходит из точки 0. Поскольку угол α определен с точностью до слагаемого, кратного 2π , фактически возникает бесконечный набор *однозначных ветвей* $z = \ln w$, различающихся *слагаемыми*, кртаными $2\pi i$, но для каждой из которых $\ln' w = \frac{1}{\exp' z} = \frac{1}{\exp z} = \frac{1}{w}$. Изменяя направление луча $\mathcal{L}$, получают разные наборы *однозначных ветвей логарифма*.

¹ Это следует из формулы Эйлера (II, с. 37): если $z_1 = x_1 + iy_1$, а $z_2 = x_2 + iy_2$, то $\exp z_1 = \exp z_2$ в том и только в том случае, когда $e^{x_1} = e^{x_2}$, а $y_1 - y_2 = 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Теорема единственности отображения. *Каковы бы ни были точка z_0 области $G \subset \mathbb{C}$ и действительное число α , существует не более одной функции $w = f(z)$, аналитической и однолистной в области G , которая бы отображала эту область на единичный круг $D = \{w \in \mathbb{C} : |w| < 1\}$ с выполнением условий $f(z_0) = 0$, $\arg f'(z_0) = \alpha$.*

Доказательство. Пусть $w = f(z)$ и $w = \tilde{f}(z)$ — две функции, обладающие перечисленными свойствами. Применение к той и другой теоремы об обратной функции позволяет заключить: обе композиции $f(\tilde{f}^{-1}(w))$ и $\tilde{f}(f^{-1}(w))$ (рис. 121) определяют в круге D обратные друг другу аналитические функции со свойствами:

$$|f(\tilde{f}^{-1}(w))| < 1 \text{ и } |\tilde{f}(f^{-1}(w))| < 1 \text{ в круге } D \text{ (т.е. при } |w| < 1);$$

$$f(\tilde{f}^{-1}(0)) = f(z_0) = 0, \quad \tilde{f}(f^{-1}(0)) = \tilde{f}(z_0) = 0;$$

$$\arg(f(\tilde{f}^{-1}))'(0) = \arg \frac{f'(z_0)}{f'(z_0)} = 0, \quad \arg(\tilde{f}(f^{-1}))'(0) = \arg \frac{\tilde{f}'(z_0)}{f'(z_0)} = 0.$$

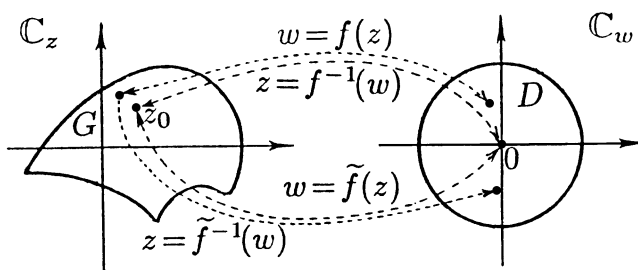


Рис. 121

Завершить доказательство теоремы позволяет следующее знаменитое утверждение, выводимое из принципа максимума модуля (с. 288).

Лемма Шварца.¹ Пусть $\zeta = \varphi(z)$ — аналитическая функция в круге $D = \{z \in \mathbb{C}: |z| < 1\}$ со свойствами:

а) $|\varphi(z)| < 1$ в круге D ; б) $\varphi(0) = 0$;

тогда $|\varphi(z)| \leq |z|$ в круге D , причем равенство (хотя бы в одной точке $z \in D$) может выполняться лишь для функции $\varphi(z) = e^{i\alpha} z$ (α — действительное число).

Доказательство леммы. В силу теоремы Тейлора (XII, с. 180) $\varphi(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots$ в круге D , при этом $c_0 = \varphi(0) = 0$, а следовательно, $\varphi(z) = z\psi(z)$, где $\zeta = \psi(z)$ — аналитическая функция в круге D .

Взяв любое число $r \in (0, 1)$, можно утверждать, что максимум модуля этой функции в замкнутом круге $\{z \in \mathbb{C}: |z| \leq r\}$ (а он достигается в силу непрерывности функции $u = |\psi(z)|$ в этом замкнутом круге) фактически достигается на границе этого круга: $\sup_{|z| \leq r} |\psi(z)| = |\psi(z_0)|$ для некоторой точки z_0 с $|z_0| = r$.

Это заведомо так, если $\zeta = \psi(z)$ — постоянная функция, в случае же непостоянной функции $\zeta = \psi(z)$ достаточно применить к ней в открытом круге $\{z \in \mathbb{C}: |z| < r\}$ принцип максимума модуля (с. 288), согласно которому $|\psi(z_0)| < \sup_{|z| < r} |\psi(z)|$ при $|z_0| < r$.

Как следствие для любой точки z с $|z| \leq r$

$$|\psi(z)| \leq \sup_{|z| \leq r} |\psi(z)| = |\psi(z_0)| = \frac{|\varphi(z_0)|}{|z_0|} < \frac{1}{r},$$

из чего (ввиду произвольности числа $r \in (0, 1)$) следует, что $|\psi(z)| \leq 1$, т. е. $|\varphi(z)| \leq |z|$ в любой точке $z \in D$.

¹ На значимость этого утверждения из включенной в программу Федеральной Политехнической Школы в Цюрихе за 1869–70 уч. г. работы Шварца (сноска ¹ на с. 295) “Zur Theorie der Abbildung” (“К теории отображения”) впервые указал немецкий математик Каратеодори (Carathéodori, Constantin, 1873–1950), в чьей формулировке (в Mathematische Annalen, B. 72, 1912, S. 110, а также в [7], с. 50–51) это утверждение и приводится здесь.

Если предположить, что $|\varphi(\tilde{z})| = |\tilde{z}|$ (т. е. $|\psi(\tilde{z})| = 1$) в *некоторой* точке $\tilde{z} \in D$, то отсюда будет следовать, что величина $|\psi(z)|$ в *круге* D достигает *максимального значения* (равного 1) в точке $\tilde{z}$ этого *круга*, а потому, согласно *принципу максимума модуля*, функция $\zeta = \psi(z)$ является *постоянной* в *круге* D (равной по модулю 1), т. е. $\psi(z) = e^{i\alpha}$, или, что то же самое, $\varphi(z) = e^{i\alpha}z$ в *круге* D для некоторого *действительного* числа α . **Q.E.D.**

Возвращаясь к доказательству теоремы, следует применить лемму Шварца, полагая в ней (с переобозначением переменной z на w) вначале $\varphi(w) = f(\tilde{f}^{-1}(w))$, а затем $\varphi(w) = \tilde{f}(\tilde{f}^{-1}(w))$:

$$|f(\tilde{f}^{-1}(w))| \leq |w|, \quad |\tilde{f}(\tilde{f}^{-1}(w))| \leq |w|, \quad w \in D,$$

при этом замена в *первом* неравенстве w на $\tilde{f}(\tilde{f}^{-1}(w))$ приводит к неравенству $|w| \leq |\tilde{f}(\tilde{f}^{-1}(w))|$, которое в сочетании со *вторым* и утверждением леммы Шварца приводит к соотношению $\tilde{f}(\tilde{f}^{-1}(w)) \equiv e^{i\alpha}w$, $w \in D$ (для некоторого *действительного* числа α), а если учесть, что $\arg(\tilde{f}(\tilde{f}^{-1}))'(0) = 0$, то $\tilde{f}(\tilde{f}^{-1}(w)) \equiv w$ в *круге* D , т. е. $\tilde{f}(z) \equiv f(z)$ в *области* G . **Q.E.D.**

Следствием доказанной теоремы является следующий интересный факт.

|| Если функция $w = f(z)$, аналитическая в *круге* или *полуплоскости*, взаимно-однозначно отображает его или ее на *круг* или на *полуплоскость*, то эта функция является *дробно-линейной*.

Доказательство. Поскольку надлежащим *дробно-линейным* отображением любой *круг*, равно как и любая *полуплоскость*, взаимно-однозначно переводится на *единичный круг* (VI, с. 97, свойство 2), а композиция *дробно-линейных* отображений и обратное к *дробно-линейному* также являются *дробно-линейными* (VI, с. 90), достаточно разобрать случай, когда $w = f(z)$ — аналитическая функция, *взаимно-однозначно* отображающая *круг* $\{z \in \mathbb{C}: |z| < 1\}$ на *круг* $\{w \in \mathbb{C}: |w| < 1\}$. Пусть z_0 — та точка, которую функция $w = f(z)$ переводит в 0. Полагая $\alpha = \arg f'(z_0)$

и замечая, что *дробно-линейная* функция $w = e^{i\alpha} \frac{z-z_0}{1-\bar{z}_0 z}$ также переводит точку z_0 в 0 и $\arg \left(e^{i\alpha} \frac{z-z_0}{1-\bar{z}_0 z} \right)'_{z=z_0} = \alpha$, приходится делать вывод: $f(z) \equiv e^{i\alpha} \frac{z-z_0}{1-\bar{z}_0 z}$. **Q.E.D.**

Что касается *существования* аналитической функции, о которой говорится в теореме *единственности отображения*, справедлива следующая теорема, первоначальный вариант которой содержится в диссертации Римана (IV, сноска ¹ на с. 59).

Теорема Рíмана.¹ Какова бы ни была *односвязная область* G *расширенной комплексной плоскости*, *граница* ∂G которой содержит более одной точки, существует аналитическая² функция $w = f(z)$, *взаимно-однозначно и конформно отображающая область* G *на единичный круг*; можно при этом потребовать, чтобы произвольно взятая точка $z_0 \in G$ переходила в *центр* круга ($f(z_0) = 0$), а *аргумент производной функции* в этой точке имел любое заданное значение ($\arg f'(z_0) = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$), и тогда функция $w = f(z)$ оказывается *единственной*.³

Упражнения. 1. Доказать, что ни в какой окрестности *существенно особой точки* аналитическая функция не является *однолистной*.

2. Доказать, что *аналитическая функция* является *однолистной* в окрестности *полюса* тогда и только тогда, когда это полюс *1-го порядка*.

3. Вывести из предыдущих упражнений, что если *целая функция* *взаимно-однозначно отображает плоскость* $\mathbb{C}$ *на плоскость* $\mathbb{C}$, то эта функция является *линейной*.

¹ Ее доказательства (требующие привлечения специальных понятий) имеются, например, у К. Каратеодóри [7] (вместе с историческим очерком этой теоремы), А. Карта́на [8] и А. И. Маркушевича [12].

² *Аналитичность функции в бесконечности* (если $\infty \in G$) понимается как *устранимость* ее *особой точки* $z = \infty$.

³ В первоначальной формулировке Римана [15] (с. 83–84) “нормировочными условиями” были: произвольно взятая *точка* $z_0 \in G$ переходит в *центр* единичного круга, а произвольно взятая точка *границы* области G — в любую заданную точку *границы* этого круга.

XIX. ЧТО ТАКОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА И КАКОВЫ ЕГО СВОЙСТВА

Несобственные интегралы $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt} dt$ (с комплексным параметром p) принято называть интегралами Лапласа¹. Каждый такой интеграл (если он сходится хотя бы для некоторых значений $p \in \mathbb{C}$) задает преобразование Лапласа

$$f(t) \mapsto F(p) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt} dt,$$

функции $\zeta = f(t)$ действительной переменной², называемой в этом случае оригиналом³, в функцию комплексной переменной $w = F(p)$ (обозначаемую соответствующей заглавной буквой⁴ функцию комплексной переменной, которую называют изображением (по Лапласу) данного оригинала, с использованием обозначений $f(t) \doteq F(p)$ и $F(p) \doteq f(t)$ ⁵.

К *функциям-оригиналам* $\zeta = f(t)$ обычно предъявляют следующий набор требований, не являющихся строго обязательными для существования изображений, но придающих *преобразованию Лапласа* удобные для обращения с ним свойства:

¹ Хотя до Лапласа (Laplace, 1749–1827) ими оперировал Эйлер.

² Значения этой функции могут быть комплексными.

³ Или функцией-оригиналом; лат. *originalis* — первоначальный.

⁴ Как в книге Дж. Карсона [24], где впервые было дано систематическое обоснование “операционного исчисления” — предложенного английским физиком Хевисайдом (Heaviside, Oliver, 1850–1925) способа обращения *дифференциальных уравнений* в *алгебраические* (“The process of algebraisation, or conversion from differential to algebraic form”; [36], p. iv) заменой *производной по времени* (the time differentiator) d/dt алгебраическим *символом* p . Подробно о Хевисаиде и его деятельности можно прочесть в юбилейном издании The Heaviside Centenary Volume. London, 1950 (есть в Российской государственной библиотеке).

⁵ Имеют хождение и другие обозначения.

1° функция-оригинал $\zeta = f(t)$ определена и является *непрерывной* (а вместе с ней и ее производные до специально оговариваемого порядка) на всей оси $-\infty < t < +\infty$ за возможным исключением отдельных точек (их на каждой *отрезке* оси может быть лишь *конечное* число), в которых она (и ее производные) имеет (имеют) *конечные пределы* (слева и справа);

2° $f(t) = 0$ при $t < 0$, а $f(0) = \lim_{t \rightarrow 0+0} f(t)$ (т. е. функция-оригинал является *непрерывной справа* в точке 0);

3° $f(t) = O(e^{\alpha t})$ (т. е. отношение $\frac{f(t)}{e^{\alpha t}}$ остается *ограниченным*) при $-\infty < t < +\infty$ для некоторого числа $\alpha \in \mathbb{R}$.

Первое требование гарантирует (даже с запасом) *существование* для любого $b > 0$ интеграла $\int_0^b f(t)e^{-pt} dt$; для выполнения второго требования (при выполнении первого) достаточно считать, что

$$f(t) = \begin{cases} f(t), & \text{если } t > 0, \\ \lim_{t \rightarrow 0+0} f(t), & \text{если } t = 0, \\ 0, & \text{если } t < 0, \end{cases} \quad (\text{рис. 122});$$

третье требование обеспечивает (опять же с избытком) *сходимость* (причем *абсолютную*) интеграла $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt} dt \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b f(t)e^{-pt} dt$ для значений параметра p с *абсциссой* (действительной частью), бóльшей *показателя роста* оригинала.

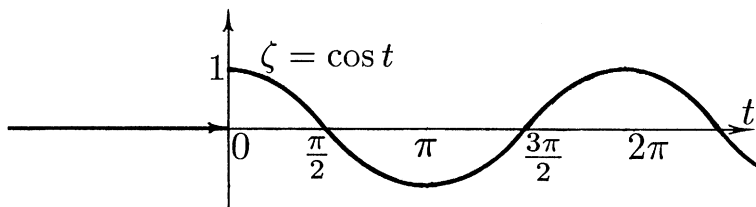


Рис. 122

Показателем роста функции-оригинала $\zeta = f(t)$ называют число $\alpha_f = \inf \{ \alpha \in \mathbb{R} : f(t) = O(e^{\alpha t}) \}$.

Эквивалентно: *показатель роста* функции-оригинала $\zeta = f(t)$ — это такое число¹ α_f , что оценка $f(t) = O(e^{\alpha t})$ ² выполняется при любом $\alpha > \alpha_f$ и не выполняется ни для какого $\alpha < \alpha_f$ (при $\alpha = \alpha_f$ эта оценка может как выполняться, так и не выполняться³).

Из этого определения следует, что показатель роста *суммы* оригиналов не выше *максимального* из показателей роста слагаемых, а показатель роста *произведения* — не выше *суммы* показателей роста сомножителей:

$$\alpha_{f+g} \leq \max \{ \alpha_f, \alpha_g \}, \quad \alpha_{fg} \leq \alpha_f + \alpha_g.$$

Теорема существования изображения. Если оригинал $\zeta = f(t)$ имеет показатель роста α_f , то его изображение по Лапласу $F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt} dt$ определено⁴ по крайней мере для всех p с $\operatorname{Re} p > \alpha_f$ (иначе говоря, в полуплоскости $\{ p \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} p > \alpha_f \}$), при этом $F(p) \rightarrow 0$, когда $\operatorname{Re} p \rightarrow +\infty$.

Доказательство. Пусть p — любое комплексное число с $\operatorname{Re} p > \alpha_f$ и пусть $\delta = \frac{\operatorname{Re} p - \alpha_f}{2}$ (рис. 123). Применение оценки $f(t) = O(e^{(\alpha_f + \delta)t})$ приводит к соотношениям

$$|f(t)e^{-pt}| = |f(t)|e^{-\operatorname{Re} p t} = |f(t)|e^{-(\alpha_f + \delta)t}e^{-\delta t} \leq h e^{-\delta t}$$

¹ Не исключено, что оно равно $-\infty$ (например, в случае функции-оригинала $f(t) = e^{-t^2}$), однако всюду ниже предполагается, что α_f — конечное число (*показатель роста* $\alpha_f < 0$ следует воспринимать как “показатель убывания” оригинала).

² Т. е. утверждение $\exists h > 0 \forall t (|f(t)e^{-\alpha t}| \leq h)$.

³ Например, в случае $f(t) = e^{\zeta t}$ ($\alpha_f = \operatorname{Re} \zeta$) оценка $f(t) = O(e^{\alpha_f t})$ выполняется, а в случае $f(t) = t$ ($\alpha_f = 0$) — нет.

⁴ Т. е. интеграл в правой части *сходится*.

(с постоянной $h > 0$), в силу которых *сходится* интеграл $\int_0^{+\infty} |f(t)e^{-pt}| dt$, а с ним и интеграл $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt} dt = F(p)$. Остается заметить, что (в силу тех же соотношений)

$$|F(p)| \leq \int_0^{+\infty} |f(t)e^{-pt}| dt \leq \int_0^{+\infty} h e^{-\delta t} dt = \frac{h}{\delta} = \frac{2h}{\operatorname{Re} p - \alpha_f},$$

так что $F(p) \rightarrow 0$, когда $\operatorname{Re} p \rightarrow +\infty$. **Q.E.D.**

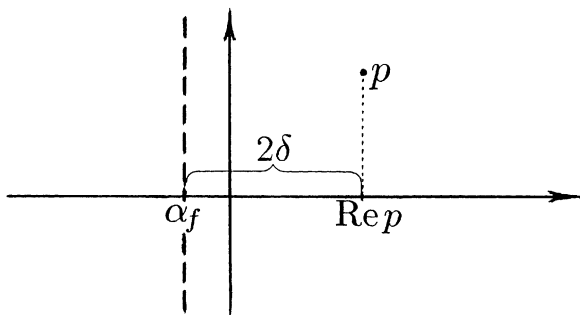


Рис. 123

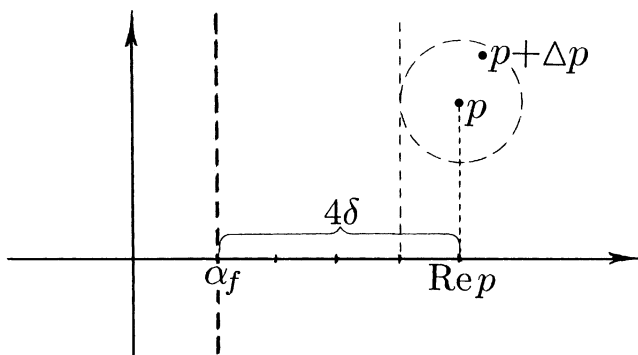


Рис. 124

Теорема аналитичности изображения. Если оригинал $\zeta = f(t)$ имеет показатель роста α_f , то изображение по Лапласу $F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt} dt$ этого оригинала является аналитической функцией в полуплоскости $\{p \in \mathbb{C}: \operatorname{Re} p > \alpha_f\}$ ¹ с производной $F'(p) = \int_0^{+\infty} (-t)f(t)e^{-pt} dt$.

Доказательство. Для фиксированного $p \in \mathbb{C}$ с $\operatorname{Re} p > \alpha_f$ и переменного $\Delta p \in \mathbb{C}$ с $0 < |\Delta p| < \delta = \frac{\operatorname{Re} p - \alpha_f}{4}$ (рис. 124)

$$\begin{aligned} \frac{F(p+\Delta p) - F(p)}{\Delta p} &= \frac{1}{\Delta p} \left(\int_0^{+\infty} f(t)e^{-(p+\Delta p)t} dt - \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt} dt \right) = \\ &= \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt} \frac{1}{\Delta p} (e^{-\Delta p t} - 1) dt = \\ &= \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt} \frac{1}{\Delta p} \left(-\Delta p t + \frac{(-\Delta p t)^2}{2!} + \frac{(-\Delta p t)^3}{3!} + \dots \right) dt = \\ &= \int_0^{+\infty} (-t)f(t)e^{-pt} \left(1 + \frac{-\Delta p t}{2!} + \frac{(-\Delta p t)^2}{3!} + \dots \right) dt = \\ &= \int_0^{+\infty} (-t)f(t)e^{-pt} dt + \Delta p J(\Delta p), \end{aligned}$$

где $J(\Delta p) = \int_0^{+\infty} t^2 f(t)e^{-pt} \left(\frac{1}{2!} + \frac{-\Delta p t}{3!} + \frac{(-\Delta p t)^2}{4!} + \dots \right) dt$.

Для доказательства существования производной

$$F'(p) = \lim_{\Delta p \rightarrow 0} \frac{F(p+\Delta p) - F(p)}{\Delta p}, \quad \text{равной} \quad \int_0^{+\infty} (-t)f(t)e^{-pt} dt,$$

достаточно поэтому установить, что интеграл $J(\Delta p)$ остается ограниченным при $\Delta p \rightarrow 0$. Это вытекает из следующих оценок сомножителей его подынтегральной функции:

¹ Теорема не исключает аналитичности изображения и вне указанной полуплоскости.

$$|f(t)| \leq h e^{(\alpha_f + \delta)t}, \quad t^2 \leq h_1 e^{\delta t} \quad (\text{с постоянными } h > 0 \text{ и } h_1 > 0)$$

и

$$\left| \frac{1}{2!} + \frac{-\Delta p t}{3!} + \frac{(-\Delta p t)^2}{4!} + \dots \right| \leq \frac{1}{2!} + \frac{|-\Delta p t|}{3!} + \frac{|-\Delta p t|^2}{4!} + \dots \leq \\ \leq \frac{1}{2!} + \frac{\delta t}{3!} + \frac{(\delta t)^2}{4!} + \dots < 1 + \frac{\delta t}{1!} + \frac{(\delta t)^2}{2!} + \dots = e^{\delta t};$$

а именно,

$$|J(\Delta p)| \leq \int_0^{+\infty} t^2 |f(t)| \cdot |e^{-pt}| \cdot \left| \frac{1}{2!} + \frac{-\Delta p t}{3!} + \frac{(-\Delta p t)^2}{4!} + \dots \right| dt \leq \\ \leq \int_0^{+\infty} h_1 h e^{(\alpha_f + 2\delta)t} e^{-\operatorname{Re} p t} e^{\delta t} dt = \int_0^{+\infty} h_1 h e^{-\delta t} dt = \frac{h_1 h}{\delta}. \quad \mathbf{Q.E.D.}$$

Примеры. 1. Функция $\zeta = e^{\omega t}$ (ω — комплексное число) является оригиналом¹ с показателем роста $\operatorname{Re} \omega$ (так как $|e^{\omega t}| = e^{\operatorname{Re} \omega t}$). Если $\operatorname{Re} p > \operatorname{Re} \omega$, то

$$\int_0^{+\infty} e^{\omega t} e^{-pt} dt = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b e^{-(p-\omega)t} dt = \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{1 - e^{-(p-\omega)b}}{p-\omega} = \frac{1}{p-\omega}$$

(поскольку $|e^{-(p-\omega)b}| = e^{-\operatorname{Re}(p-\omega)b} \xrightarrow{b \rightarrow +\infty} 0$). Вывод:

$$e^{\omega t} \doteq \frac{1}{p-\omega}; \quad \text{в частности, } 1 \doteq \frac{1}{p}.$$

Теорема об аналитичности изображения гарантирует аналитичность функции $w = \frac{1}{p-\omega}$ как изображения функции-оригинала (с показателем роста $\operatorname{Re} \omega$) в полуплоскости $\{p \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} p > \operatorname{Re} \omega\}$. На самом же деле эта функция является аналитической во всей плоскости $\mathbb{C}$, кроме точки ω . Кроме того, эта функция стремится к нулю при любом стремлении p к ∞ , а не только когда $\operatorname{Re} p \rightarrow +\infty$ (как утверждает теорема о существовании изображения). Ни то, ни другое, однако, не противоречит утверждениям названных теорем.

¹ Если, как уже отмечалось (с. 310), считать все подвергаемые преобразованию Лапласа функции равными нулю для отрицательных значений t .

2. Согласно определению гамма-функции (интеграла Эйлера 2-го рода) $\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} x^{a-1} e^{-x} dx$, $a > 0$. Замена $x = pt$ (p — любое положительное число) приводит к равенству $\Gamma(a) = p^a \int_0^{+\infty} t^{a-1} e^{-pt} dt$. Поскольку правая часть этого равенства определена и для комплексных значений p с $\operatorname{Re} p > 0$ ($p^a = \exp(a \ln p)$), а интеграл при $\operatorname{Re} p > 0$ сходится, следует вывод: $t^{a-1} \doteq \frac{\Gamma(a)}{p^a}$ при любом $a > 0$.

При $0 < a < 1$ функция $\zeta = t^{a-1}$ не является полновесным оригиналом (в смысле определения на с. 310), поскольку имеет бесконечный предел при $t \rightarrow 0+0$. Тем не менее она имеет изображение по Лапласу: интеграл $\int_0^{+\infty} t^{a-1} e^{-pt} dt = \lim_{\substack{b \rightarrow +\infty \\ \delta \rightarrow 0+0}} \int_{\delta}^b t^{a-1} e^{-pt} dt$ сходится при $a > 0$.

Следующие свойства преобразования Лапласа (впервые аккуратно сформулированные Дж. Карсоном [Car]) устанавливают соответствия действий с оригиналами действиям с изображениями этих оригиналов. Первое из них напрямую вытекает из свойства линейности интеграла.

Свойство линейности. Если $f(t) \doteq F(p)$ и $g(t) \doteq G(p)$, то $\alpha f(t) + \beta g(t) \doteq \alpha F(p) + \beta G(p)$ для любых комплексных постоянных α и β .

Примеры применения:

$$\cos \omega t = \frac{1}{2} (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) \doteq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p-i\omega} + \frac{1}{p+i\omega} \right) = \frac{p}{p^2 + \omega^2};$$

$$\sin \omega t = \frac{1}{2i} (e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}) \doteq \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{p-i\omega} - \frac{1}{p+i\omega} \right) = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2};$$

$$\operatorname{ch} \omega t = \frac{1}{2} (e^{\omega t} + e^{-\omega t}) \doteq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p-\omega} + \frac{1}{p+\omega} \right) = \frac{p}{p^2 - \omega^2};$$

$$\operatorname{sh} \omega t = \frac{1}{2} (e^{\omega t} - e^{-\omega t}) \doteq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p-\omega} - \frac{1}{p+\omega} \right) = \frac{\omega}{p^2 - \omega^2};$$

$$\sin^2 \omega t = \frac{1}{2} (1 - \cos 2\omega t) \doteq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p} - \frac{p}{p^2 + 4\omega^2} \right) = \frac{2\omega^2}{p(p^2 + 4\omega^2)};$$

$$\begin{aligned}
e^{\alpha t} \cos \beta t &= \frac{1}{2} (e^{(\alpha+i\beta)t} + e^{(\alpha-i\beta)t}) \doteq \\
&\doteq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p-\alpha-i\beta} + \frac{1}{p-\alpha+i\beta} \right) = \frac{p-\alpha}{(p-\alpha)^2 + \beta^2} ; \\
e^{\alpha t} \sin \beta t &= \frac{1}{2i} (e^{(\alpha+i\beta)t} - e^{(\alpha-i\beta)t}) \doteq \\
&\doteq \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{p-\alpha-i\beta} - \frac{1}{p-\alpha+i\beta} \right) = \frac{\beta}{(p-\alpha)^2 + \beta^2} .
\end{aligned}$$

Дифференцирование оригинала. Если функция-оригинал $\zeta = f(t)$ имеет производную, тоже являющуюся оригиналом, и $f(t) \doteq F(p)$, то $f'(t) \doteq pF(p) - f(0)$.

Доказательство. Пусть p — любое комплексное число, действительная часть которого больше показателя роста α_f функции-оригинала $\zeta = f(t)$. Тогда согласно формуле интегрирования по частям,

$$\begin{aligned}
f'(t) &\doteq \int_0^{+\infty} f'(t) e^{-pt} dt = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b f'(t) e^{-pt} dt = \\
&= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(f(t) e^{-pt} \Big|_{t=0}^b - (-p) \int_0^b f(t) e^{-pt} dt \right) = -f(0) + pF(p),
\end{aligned}$$

если учесть, что $f(t) = O(e^{(\alpha_f + \delta)t})$ для положительного числа $\delta = \frac{\operatorname{Re} p - \alpha_f}{2}$, а следовательно,

$$|f(b) e^{-pb}| = O(e^{(\alpha_f + \delta)b}) e^{-\operatorname{Re} pb} = O(e^{-\delta b}) \xrightarrow{b \rightarrow +\infty} 0. \quad \mathbf{Q.E.D.}$$

Двукратное применение полученного соответствия с заменой в нем $f(t)$ на $f'(t)$, а $f'(t)$ на $f''(t)$ (если и вторая производная оригинала является оригиналом) дает:

$$f''(t) \doteq p(pF(p) - f(0)) - f'(0) = p^2 F(p) - p f(0) - f'(0).$$

Например, полагая $\sin \omega t \doteq X(p)$ и пользуясь равенством $(\sin \omega t)'' = -\omega^2 \sin \omega t$ и установленным правилом изображения второй производной, можно прийти к соотношению $p^2 X(p) - p \cdot 0 - \omega = -\omega^2 X(p)$, откуда $X(p) = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$.

Дифференцирование изображения. Если $f(t) \doteq F(p)$, то $F'(p) \doteq -t f(t)$ (переход к производной изображения соответствует умножению оригинала на $-t$).

Данное свойство — прямое следствие теоремы аналитичности изображения (с. 313).

$$\begin{aligned} \text{Примеры применения: } t \sin \omega t &\doteq -\left(\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}\right)' = \frac{2\omega p}{(p^2 + \omega^2)^2}; \\ t e^{\omega t} &\doteq -\left(\frac{1}{p - \omega}\right)' = \frac{1}{(p - \omega)^2}, \quad t^2 e^{\omega t} \doteq -\left(\frac{1}{(p - \omega)^2}\right)' = \frac{1 \cdot 2}{(p - \omega)^3} \end{aligned}$$

и вообще $t^n e^{\omega t} \doteq \frac{n!}{(p - \omega)^{n+1}}$, в частности, $t^n \doteq \frac{n!}{p^{n+1}}$, $n \in \mathbb{N}$;

изображение $X(p)$ функции-оригинала $\zeta = \frac{\sin t}{t}$ (с нулевым показателем роста) можно найти, решив вытекающее из соотношения $t \frac{\sin t}{t} \doteq \frac{1}{p^2 + 1}$ уравнение $-X'(p) = \frac{1}{p^2 + 1}$: так как $X(p) \xrightarrow{\operatorname{Re} p \rightarrow +\infty} 0$, его решением (при $\operatorname{Re} p > 0$) служит

$$X(p) = \frac{1}{2i} (\ln(p+i) - \ln(p-i)) = \frac{1}{2i} \ln \left| \frac{p+i}{p-i} \right| + \frac{\arg(p+i) - \arg(p-i)}{2},$$

$-\frac{\pi}{2} < \arg(p-i) < \arg(p+i) < \frac{\pi}{2}$ (рис. 125, а), — продолжение функции $\varphi = \operatorname{arctg} p$ с действительной полуоси $0 < p < +\infty$ в полуплоскость $\{p \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} p > 0\}$ (рис. 125, б).

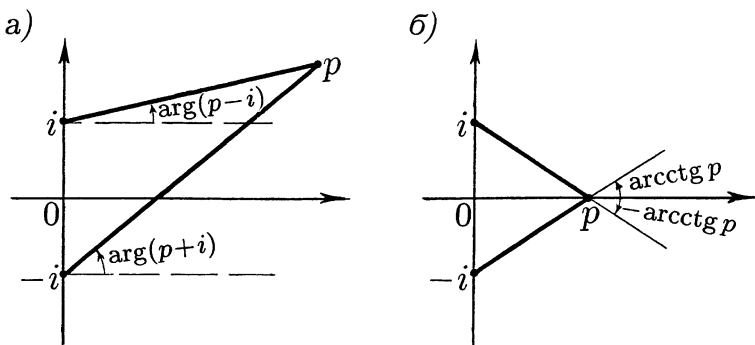


Рис. 125

Свойство подобия. Если $f(t) \doteq F(p)$, а a — положительное число, то $f(at) \doteq \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right)$.

Доказательство. С использованием подстановки $\tau = at$

$$\begin{aligned} f(at) &\doteq \int_0^{+\infty} f(at) e^{-pt} dt = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b f(at) e^{-pt} dt = \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^{ab} f(\tau) e^{-\frac{p\tau}{a}} \frac{1}{a} d\tau = \frac{1}{a} \int_0^{+\infty} f(\tau) e^{-\frac{p\tau}{a}} d\tau = \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right) \end{aligned}$$

(в предположении, что $\operatorname{Re} p > \alpha_f$, где α_f — показатель роста функции-оригинала $\zeta = f(t)$). **Q.E.D.**

Например, выше было установлено, что $\frac{\sin t}{t} \doteq \frac{1}{2i} \ln \frac{p+i}{p-i}$, поэтому $\frac{\sin 2t}{t} = 2 \frac{\sin 2t}{2t} \doteq \frac{1}{2i} \ln \frac{p+2i}{p-2i}$.

Смещение изображения. Если $f(t) \doteq F(p)$, а ζ — комплексное число, то $F(p-\zeta) \doteq e^{\zeta t} f(t)$ (смещение изображения — замена переменной p на $p-\zeta$ — соответствует умножению оригинала на $e^{\zeta t}$).

$$\begin{aligned} \text{Доказательство. } e^{\zeta t} f(t) &\doteq \int_0^{+\infty} e^{\zeta t} f(t) e^{-pt} dt = \\ &= \int_0^{+\infty} f(t) e^{-(p-\zeta)t} dt = F(p-\zeta). \quad \mathbf{Q.E.D.} \end{aligned}$$

К примеру, запись $\frac{p}{p^2-p+1} = \frac{p-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{\left(p-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$ с учетом изображений *синуса* и *косинуса* (с. 315) позволяет сделать вывод: функция $w = \frac{p}{p^2-p+1}$ служит *изображением* функции-оригинала $\zeta = e^{\frac{t}{2}} \left(\cos \frac{\sqrt{3}}{2} t + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t \right)$.

Запаздывание оригинала. Если $f(t) \doteq F(p)$, а τ — положительное число, то $f(t) \doteq F(p)$, то $f(t-\tau) \doteq e^{-p\tau} F(p)$ (включению оригинала с запаздыванием τ соответствует умножение изображения на $e^{-p\tau}$)¹.

¹ Вместо $f(t-\tau)$ иногда используют запись $f_\tau(t)$.

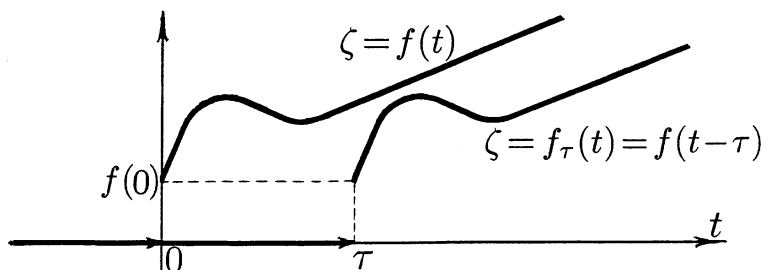


Рис. 126

Доказательство. С учетом того, что $f(t-\tau)=0$ при $t < \tau$ (рис. 126), переход к переменной $u = t - \tau$ дает:

$$\begin{aligned} f(t-\tau) &\doteq \int_0^{+\infty} f(t-\tau) e^{-pt} dt = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b f(t-\tau) e^{-pt} dt = \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^{b-\tau} f(u) e^{-p(\tau+u)} du = \int_0^{+\infty} f(u) e^{-p\tau} e^{-pu} du = \\ &= e^{-p\tau} F(p). \quad \text{Q.E.D.} \end{aligned}$$

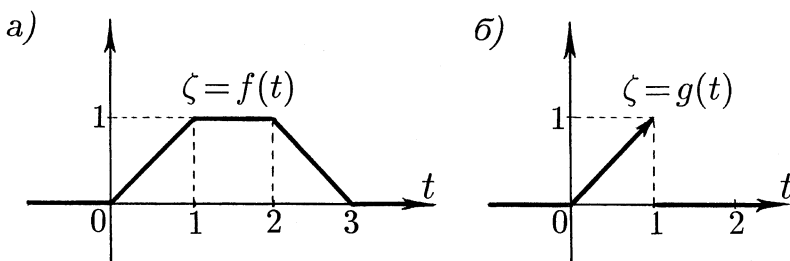


Рис. 127

К примеру, простейший способ получить изображения функций-оригиналов, представленных на рис. 127, а, б, — записать их как а) $f(t) = t - t_1 - t_2 + t_3$ и б) $g(t) = t - t_1 - 1_1$ и применить свойство запаздывания оригинала:

$$a) f(t) \doteq \frac{1}{p^2} - \frac{e^{-p}}{p^2} - \frac{e^{-2p}}{p^2} + \frac{e^{-3p}}{p^2} = \frac{(1-e^{-p})(1-e^{-2p})}{p^2};$$

$$б) g(t) \doteq \frac{1}{p^2} - \frac{e^{-p}}{p^2} - \frac{e^{-p}}{p}.$$

Изображение периодического оригинала. Если оригинал $\zeta = f(t)$ является периодической функцией с периодом l , то $f(t) \doteq \frac{1}{1-e^{-pl}} \int_0^l f(t) e^{-pt} dt$.

Доказательство. Так как любая периодическая функция -оригинал $\zeta = f(t)$ является ограниченной (и потому имеет нулевой порядок роста), изображающий ее интеграл Лапласа $\int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt$ сходится для всех $p \in \mathbb{C}$ с $\text{Re } p > 0$. С учетом l -периодичности функции $\zeta = f(t)$ для любого такого p

$$\begin{aligned} f(t) &\doteq \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{nl} f(t) e^{-pt} dt = \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\int_0^l f(t) e^{-pt} dt + \dots + \int_{(n-1)l}^{nl} f(t) e^{-pt} dt \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + e^{-pl} + \dots + e^{-(n-1)pl} \right) \int_0^l f(t) e^{-pt} dt = \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1-e^{-npl}}{1-e^{-pl}} \int_0^l f(t) e^{-pt} dt = \frac{1}{1-e^{-pl}} \int_0^l f(t) e^{-pt} dt \end{aligned}$$

(поскольку $|e^{-pl}| < 1$). **Q.E.D.**

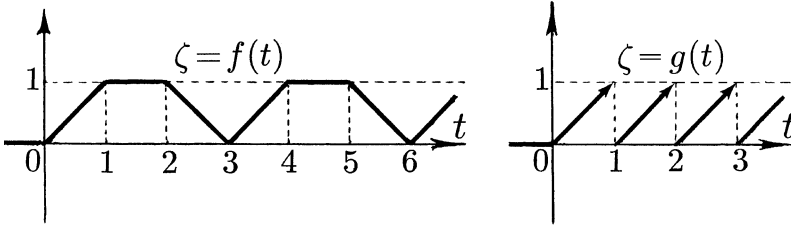


Рис. 128

В частности, если представленные на рис. 127 оригиналы $f(t) = t - t_1 - t_2 + t_3$ и $g(t) = t - t_1 - 1_1$ считать *периодически продолженными* (с периодами, соответственно, $l=3$ и $l=1$; рис. 128), то их *изображениями* окажутся, соответственно, $F(p) = \frac{(1-e^{-p})(1-e^{-2p})}{(1-e^{-3p})p^2}$ и $G(p) = \frac{1-e^{-p}-e^{-p}p}{(1-e^{-p})p^2}$.

Изображение свертки. Если $f(t) \doteq F(p)$, а $g(t) \doteq G(p)$, то $F(p)G(p) \doteq \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$, т. е. умножению изображений отвечает свертка оригиналов¹.

Доказательство. Пусть α — наибольший из показателей роста функций-оригиналов $\zeta = f(t)$ и $\zeta = g(t)$, и пусть p — любое комплексное число с $\operatorname{Re} p > \alpha$. Поскольку $\delta = \frac{\operatorname{Re} p - \alpha}{2} > 0$, выполняются оценки $f(t) = O(e^{(\alpha+\delta)t})$ и $g(t) = O(e^{(\alpha+\delta)t})$, т. е. неравенства

$$|f(t)| \leq h_1 e^{(\alpha+\delta)t} \quad \text{и} \quad |g(t)| \leq h_2 e^{(\alpha+\delta)t}, \quad t \in [0, +\infty),$$

где h_1 и h_2 — некоторые положительные постоянные.

Для любого положительного числа b пусть P — параллелограмм в плоскости $\mathbb{R}^2$ переменных t и τ , задаваемый соотношениями $\tau=0$, $\tau=b$, $\tau=t$, $\tau=t-b$ и разделяемый диагональю ($t=b$) на треугольники T_1 и T_2 (рис. 129).

Переход от двойного интеграла (по параллелограмму) $\iint_P f(\tau)g(t-\tau)e^{-p^t} dt d\tau$ к повторным вкуче со свойством аддитивности двойного интеграла дает, с одной стороны,

¹ Вообще сверткой функций $\zeta = f(t)$ и $\zeta = g(t)$ на числовой оси называют функцию, обозначаемую символом $f*g$ и определяемую соотношением $(f*g)(t) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau$, $-\infty < t < +\infty$, которое для функций-оригиналов принимает указанный выше вид. Свертка обладает свойством перестановочности: $f*g = g*f$, что проверяется заменой τ на $u = t - \tau$.

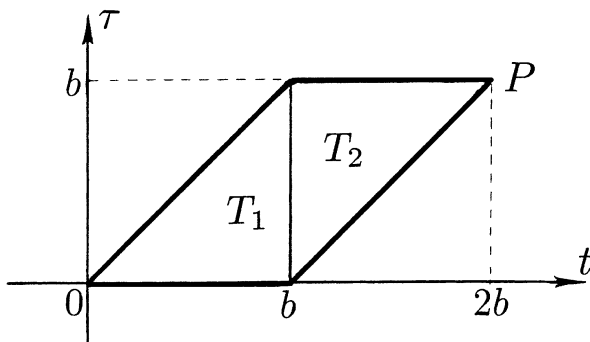


Рис. 129

$$\begin{aligned} \iint_P f(\tau) g(t-\tau) e^{-p t} dt d\tau &= \int_0^b \left(\int_{\tau}^{\tau+b} f(\tau) g(t-\tau) e^{-p t} dt \right) d\tau \stackrel{t-\tau=u}{=} \\ &= \int_0^b f(\tau) e^{-p \tau} d\tau \int_0^b g(u) e^{-p u} du \xrightarrow{b \rightarrow +\infty} F(p) G(p), \end{aligned}$$

а с другой —

$$\begin{aligned} \iint_P f(\tau) g(t-\tau) e^{-p t} dt d\tau &= \\ &= \int_0^b \left(\int_0^t f(\tau) g(t-\tau) d\tau \right) e^{-p t} dt + \iint_{T_2} f(\tau) g(t-\tau) e^{-p t} dt d\tau \end{aligned}$$

со следующей оценкой двойного интеграла по треугольнику T_2 :

$$\begin{aligned} \left| \iint_{T_2} f(\tau) g(t-\tau) e^{-p t} dt d\tau \right| &\leq \iint_{T_2} |f(\tau) g(t-\tau) e^{-p t}| dt d\tau \leq \\ &\leq \iint_{T_2} h_1 e^{(\alpha+\delta)\tau} h_2 e^{(\alpha+\delta)(t-\tau)} e^{-\operatorname{Re} p t} dt d\tau = \\ &= \iint_{T_2} h_1 h_2 e^{(\alpha+\delta-\operatorname{Re} p)t} dt d\tau < \frac{b^2}{2} h_1 h_2 e^{-\delta b} \xrightarrow{b \rightarrow +\infty} 0. \end{aligned}$$

Сопоставление этих соотношений дает:

$$\begin{aligned} \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau &\doteq \int_0^{+\infty} \left(\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau \right) e^{-pt} dt = \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \left(\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau \right) e^{-pt} dt = F(p)G(p). \quad \mathbf{Q.E.D.} \end{aligned}$$

Примеры применения:

если $f(t) \doteq F(p)$, то $\int_0^t f(\tau)d\tau = (f*1)(t) \doteq \frac{F(p)}{p}$ (свойство интегрирования оригинала);

$$\begin{aligned} \frac{1}{(p^2+1)^2} &\doteq \int_0^t \sin \tau \sin(t-\tau)d\tau = \frac{1}{2} \int_0^t [\cos(2\tau-t) - \cos t] d\tau = \\ &= \frac{1}{2} (\sin t - t \cos t). \end{aligned}$$

Теорема обращения преобразования Лапласа. В тех точках, где функция-оригинал $\zeta = f(t)$ имеет производную¹, она восстанавливается по своему изображению

$F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt$ посредством формулы обращения

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \text{в.п.} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(p)e^{pt}dp \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi i} \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{\sigma-ir}^{\sigma+ir} F(p)e^{pt}dp,$$

в которой σ — любое действительное число, большее показателя роста α_f функции-оригинала, а интеграл от $\sigma - ir$ до $\sigma + ir$ берется по прямолинейному отрезку, плоскости переменной p , соединяющему эти точки.

Доказательство этой теоремы можно дать, сославшись на теорему обращения преобразования Фурье², рассуждая следующим образом.

¹ Или, будучи непрерывной, имеет обе односторонние производные.

² Разумеется, ссылка будет корректной, лишь если названная теорема была усвоена в предшествующем курсе действительного анализа: в противном случае доказательство с такой ссылкой оказывается лишь номинальным.

Для любого числа $\sigma > \alpha_f$ функция $\zeta = f_\sigma(t) \stackrel{\text{def}}{=} e^{-\sigma t} f(t)$ на оси $-\infty < t < +\infty$ является *абсолютно интегрируемой* и имеет (в промежутках между возможными точками разрыва функции-оригинала) *производную*. Следовательно, она восстанавливается (в указанных промежутках) по ее преобразованию Фурье $\widehat{f}_\sigma(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f_\sigma(t) e^{-i\lambda t} dt$, $-\infty < \lambda < +\infty$, формулой обращения (например, [17], $n^\circ 715$)

$$f_\sigma(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}_\sigma(\lambda) e^{i\lambda t} d\lambda \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{-r}^r \widehat{f}_\sigma(\lambda) e^{i\lambda t} d\lambda.$$

Подстановка в эту формулу

$$\begin{aligned} \widehat{f}_\sigma(\lambda) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\sigma t} f(t) e^{-i\lambda t} dt = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} f(t) e^{-\sigma t - i\lambda t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} F(\sigma + i\lambda), \end{aligned}$$

умножение на $e^{\sigma t}$ и запись $\sigma + i\lambda = p$ дают:

$$\begin{aligned} f(t) &= e^{\sigma t} f_\sigma(t) = \frac{e^{\sigma t}}{\sqrt{2\pi}} \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{-r}^r \frac{1}{\sqrt{2\pi}} F(\sigma + i\lambda) e^{i\lambda t} d\lambda = \\ &= \frac{1}{2\pi} \lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{-r}^r F(\sigma + i\lambda) e^{(\sigma + i\lambda)t} d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\substack{r \rightarrow +\infty \\ \sigma - ir}}^{\sigma + ir} \int_{\sigma - ir}^{\sigma + ir} F(p) e^{p t} dp = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \text{v.p.} \int_{\sigma - ir}^{\sigma + ir} F(p) e^{p t} dp. \quad \mathbf{Q.E.D.} \end{aligned}$$

Можно дать и прямое (без обращения к преобразованию Фурье) доказательство теоремы обращения преобразования Лапласа.¹

Пусть t_0 — любая точка числовой оси, в которой функция-оригинал $\zeta = f(t)$ имеет производную (или, будучи *непрерывной*, имеет в ней правую и левую производную). Взяв любые значения $\sigma > \alpha_f$ и $\nu > 0$, можно записать:

¹ На самом деле теорема обращения преобразования Лапласа и теорема обращения преобразования Фурье — это два варианта одной и той же теоремы с практически одинаковыми доказательствами.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-ir}^{\sigma+ir} F(p) e^{pt_0} dp &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-ir}^{\sigma+ir} \left(\int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt \right) e^{pt_0} dp \stackrel{p=\sigma+i\lambda}{=} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-r}^r d\lambda \int_0^{+\infty} f(t) e^{-\sigma(t-t_0)} e^{-i\lambda(t-t_0)} dt, \end{aligned}$$

при этом оценка

$$\left| \int f(t) e^{-\sigma(t-t_0)} e^{-i\lambda(t-t_0)} dt \right| \leq h e^{(\alpha_f + \delta)t} e^{-\sigma(t-t_0)} \leq e^{\sigma t_0} h e^{-\delta t} \quad (\text{где } \delta = \frac{\sigma - \alpha_f}{2}),$$

вытекающие из нее соотношения

$$\begin{aligned} \int_{-r}^r d\lambda \int_{\beta}^{+\infty} f(t) e^{-\sigma(t-t_0)} e^{-i\lambda(t-t_0)} dt &\longrightarrow 0, \\ \int_{\beta}^{+\infty} dt \int_{-r}^r f(t) e^{-\sigma(t-t_0)} e^{-i\lambda(t-t_0)} d\lambda &\longrightarrow 0, \end{aligned}$$

и, наконец, возможность поменять порядок интегрирования по *отрезкам* $0 \leq t \leq \beta$ и $-r \leq \lambda \leq r^1$ приводит к соотношениям

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-ir}^{\sigma+ir} F(p) e^{pt_0} dp &= \frac{1}{2\pi} \int_{-r}^r d\lambda \int_0^{+\infty} f(t) e^{-\sigma(t-t_0)} e^{-i\lambda(t-t_0)} dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{+\infty} dt \int_{-r}^r f(t) e^{-\sigma(t-t_0)} e^{-i\lambda(t-t_0)} d\lambda = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} f(t) e^{-\sigma(t-t_0)} \frac{\sin r(t-t_0)}{t-t_0} dt. \end{aligned}$$

Взяв сколь угодно малое число $\varepsilon > 0$, последний интеграл следует разбить на три: J_1 — от 0 до $t_0 - \varepsilon$, J_2 — от $t_0 - \varepsilon$ до $t_0 + \varepsilon$ и J_3 — от $t_0 + \varepsilon$ до $+\infty$, а затем к интегралам J_1 и J_3 применить известную из курса действительного анализа (например, [17], $n^\circ 682$) лемму

Римана, утверждающую, что если интеграл $\int_a^b g(t) dt$ существует (как собственный или как несобственный, но абсолютно сходящийся), то $\int_a^b g(t) \sin r t dt \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} 0$.

Применение этой леммы дает:

$$J_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{t_0 - \varepsilon} \frac{f(t) e^{-\sigma(t-t_0)}}{t-t_0} \sin r(t-t_0) dt \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} 0 \quad \text{и} \quad (\text{точно так же}) \quad J_3 \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} 0.$$

Что касается интеграла J_2 , то его, в свою очередь, следует записать в виде

¹ Например, на основании теоремы о переходе от *двойного* интеграла (по *прямоугольнику*) к *повторным*.

$$\frac{1}{\pi} \int_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon} \frac{f(t) e^{-\sigma(t-t_0)} - f(t_0)}{t-t_0} \sin r(t-t_0) dt + \frac{1}{\pi} \int_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon} \frac{f(t_0)}{t-t_0} \sin r(t-t_0) dt$$

и применить к первому интегралу лемму Римана¹, а во втором сделать подстановку $r(t-t_0) = x$ (и вспомнить, что $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \pi$; XVI, с. 265):

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon} \frac{f(t) e^{-\sigma(t-t_0)} - f(t_0)}{t-t_0} \sin r(t-t_0) dt &\longrightarrow 0, \\ \frac{1}{\pi} \int_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon} \frac{f(t_0)}{t-t_0} \sin r(t-t_0) dt &= f(t_0) \frac{1}{\pi} \int_{-r\varepsilon}^{r\varepsilon} \frac{\sin x}{x} dx \longrightarrow f(t_0), \end{aligned}$$

а следовательно,

$$J_2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} f(t) e^{-\sigma(t-t_0)} \frac{\sin r(t-t_0)}{t-t_0} dt \longrightarrow f(t_0).$$

Объединение полученных предельных соотношений для интегралов J_1 , J_2 , J_3 дает окончательно:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \text{в.п.} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(p) e^{pt_0} dp &\stackrel{\text{def}}{=} \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-ir}^{\sigma+ir} F(p) e^{pt_0} dp = \\ &= \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} f(t) e^{-\sigma(t-t_0)} \frac{\sin r(t-t_0)}{t-t_0} dt = \\ &= \lim_{r \rightarrow +\infty} (J_1 + J_2 + J_3) = f(t_0). \quad \mathbf{Q.E.D.} \end{aligned}$$

Для *практического* восстановления оригинала по его изображению теорему обращения преобразования Лапласа применяют сравнительно редко (XVI, с. 266, пример 5). Чаще с этой целью используют² следующие выводимые из нее утверждения.

¹ Именно здесь используется существование производной (или хотя бы односторонних производных) у функции-оригинала в точке t_0 : подынтегральная функция в $\int_{t_0-\varepsilon}^{t_0+\varepsilon} \frac{f(t) e^{-\sigma(t-t_0)} - f(t_0)}{t-t_0} dt$ имеет в этом случае в точке t_0 *устранимый разрыв* (или же *разрыв 1-го рода*), что обеспечивает существование данного интеграла.

² Хотя, разумеется, не так часто, как разной степени подробности справочные таблицы “оригинал”–“изображение” и (в простых случаях) изложенные выше свойства преобразования Лапласа.

Теоремы разложения.¹ **1.** Если оригинал $\zeta = f(t)$ имеет своим изображением (по Лапласу) функцию, аналитическую в окрестности бесконечности, с разложением Лорана $F(p) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_k}{p^{k+1}}$, то $f(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_k t^k}{k!}$, $t > 0$.

2. Если оригинал $\zeta = f(t)$ имеет своим изображением (по Лапласу) рациональную функцию с полюсами $p_1, \dots, p_m$, то $f(t) = \sum_{j=1}^m \operatorname{res}_{p=p_j} (F(p) e^{pt})$, $t > 0$.

Доказательства. В условиях обоих утверждений существует *положительное* число σ с тем свойством, что для всех достаточно больших значений $r > 0$ замкнутый контур $\Gamma_{\sigma,r}$, состоящий из отрезка прямой $\{p \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} p = \sigma\}$ от точки $\sigma - ir$ до точки $\sigma + ir$ и полуокружности $C_{\sigma,r}$ (для которой этот отрезок служит диаметром; рис. 130), целиком лежит в окрестности бесконечности, где функция-изображение $w = F(p)$ является аналитической.

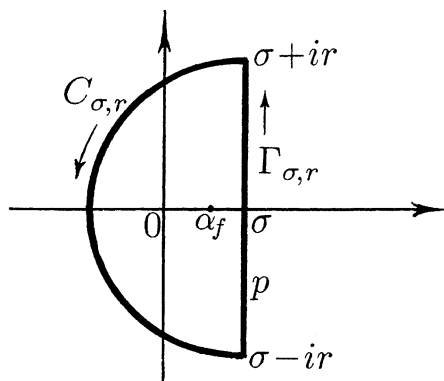


Рис. 130

¹ “Expansion Theorem” — так называл Хевисайд сформулированный им вариант второй из этих теорем ([36], р. 126–131).

В соответствии с эквивалентными определениями *вычета в бесконечности* (XV, с. 229, 231) и теоремой о вычетах (XV, с. 233) в условиях первого утверждения

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_{\sigma,r}} F(p) e^{pt} dp &= - \operatorname{res}_{p=\infty} (F(p) e^{pt}) = \\ &= - \operatorname{res}_{p=\infty} \left[\left(\frac{a_0}{p} + \frac{a_1}{p^2} + \frac{a_2}{p^3} + \dots \right) \left(1 + \frac{pt}{1!} + \frac{(pt)^2}{2!} + \dots \right) \right] = \\ &= a_0 + \frac{a_1 t}{1!} + \frac{a_2 t^2}{2!} + \dots \quad 1, \end{aligned}$$

а в условиях второго —

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_{\sigma,r}} F(p) e^{pt} dp = \sum_{j=1}^m \operatorname{res}_{p=p_j} (F(p) e^{pt}).$$

С другой стороны,

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_{\sigma,r}} F(p) e^{pt} dp = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-ir}^{\sigma+ir} F(p) e^{pt} dp + \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{\sigma,r}} F(p) e^{pt} dp,$$

при этом введение переменной $z = \frac{p-\sigma}{i}$ преобразует второе слагаемое в правой части в $\frac{e^{\sigma t}}{2\pi i} \int_{C_r} F(\sigma+iz) e^{itz} dz$ — интеграл

по изображенной на рис. 96, б (XVI, с. 266) *полуокружности* C_r , к которому при любом $t > 0$ применима лемма Жордана (XVI, с. 248–249) с $\alpha = t$ и $f(z) = F(\sigma+iz)^2$:

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{\sigma,r}} F(p) e^{pt} dp = \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{e^{\sigma t}}{2\pi i} \int_{C_r} F(\sigma+iz) e^{itz} dz = 0,$$

¹ Взятый со знаком “минус” коэффициент при p^{-1} в произведении стоящих в скобках абсолютно сходящихся рядов.

² Выполнение условия $f(z) \xrightarrow{z \rightarrow \infty} 0$ в случае первого утверждения вытекает из представления $F(p) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_k}{p^{k+1}}$, а в случае второго — из того, что $F(p)$ есть *правильная рациональная дробь*, поскольку $F(p) \xrightarrow{\operatorname{Re} p \rightarrow +\infty} 0$ (с. 311).

а следовательно (с учетом теоремы обращения преобразования Лапласа) для всех точек $t > 0$, в которых функция-оригинал имеет производную $f'(t)^1$,

$$f(t) = \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - ir}^{\sigma + ir} F(p) e^{pt} dp = \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_{\sigma, r}} F(p) e^{pt} dp,$$

а потому $f(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_k t^k}{k!}$ в условиях первого утверждения и

$$f(t) = \sum_{j=1}^m \operatorname{res}_{p=p_j} (F(p) e^{pt}) \text{ в условиях второго. } \mathbf{Q.E.D.}$$

Замечание. Если заранее не известно, что данная функция $w = F(p)$ действительно служит *изображением* некоторого *оригинала*, то найденную по приведенным формулам функцию $\zeta = f(t)$ следует рассматривать лишь как “предполагаемый” оригинал, требующий проверки, что в самом деле $f(t) \doteq F(p)$, т.е. $\int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt = F(p)$.

Предлагаемые иногда *достаточные признаки* того, что та или иная функция $w = F(p)$ служит *изображением по Лапласу* некоторой функции $\zeta = f(t)$, являются типичными примерами “диссертационных” теорем-пустоцветов, бесполезных в плане их конкретного применения. Судить об этом можно по их формулировкам (например, в [11], с. 404, теорема 4):

Если функция $F(p)$ аналитична в полуплоскости $\operatorname{Re} p > s_0$, стремится к нулю при $|p| \rightarrow \infty$ в любой полуплоскости $\operatorname{Re} p \geq a > s_0$ равномерно относительно $\arg p$ и интеграл $\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} F(p) dp$ абсолютно сходится, то $F(p)$ является изображением функции $f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt} F(p) dp$.

Пример. Из разложения дроби $\frac{1}{(p^2+1)^3}$ в ряд Лорана

¹ Или, будучи в них *непрерывной*, имеет в них *односторонние производные*.

$$\frac{1}{(p^2+1)^3} = \frac{1}{p^6(1+p^{-2})^3} = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(-1)^j (j+2)(j+1)}{p^{6+3j}}, \quad |p| > 1,$$

и первой из теорем разложения можно заключить, что

$$\frac{1}{(p^2+1)^3} = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(-1)^j (j+2)(j+1)}{(5+3j)!} t^{5+3j}.$$

Гораздо более внятный ответ дает *вторая* из теорем разложения:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(p^2+1)^3} &= \operatorname{res}_{p=i} \frac{e^{pt}}{(p^2+1)^3} + \operatorname{res}_{p=-i} \frac{e^{pt}}{(p^2+1)^3} = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{e^{pt}}{(p+i)^3} \right)''_{p=i} + \frac{1}{2} \left(\frac{e^{pt}}{(p-i)^3} \right)''_{p=-i} = -\frac{1}{8} t^2 \sin t - \frac{3}{8} t \cos t + \frac{3}{8} \sin t. \end{aligned}$$

Этот же результат (приблизительно с тем же объемом вычислительной работы) можно получить, разлагая дробь $\frac{1}{(p^2+1)^3}$ на *простые* (XIV, с. 225)

$$\frac{1}{(p^2+1)^3} = \frac{A}{(p+i)^3} + \frac{B}{(p+i)^2} + \frac{C}{p+i} + \frac{D}{(p-i)^3} + \frac{E}{(p-i)^2} + \frac{F}{p-i}$$

(с $A = \frac{1}{8i}$, $B = -\frac{3}{16}$, $C = -\frac{3}{16i}$, $D = -\frac{1}{8i}$, $E = -\frac{3}{16}$, $F = \frac{3}{16i}$)

и оперируя затем свойством дифференцирования изображения (с. 317).

Упражнения. 1. Проверить, что функция $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t \notin \mathbb{N}, \\ e^{t^2} & \text{при } t \in \mathbb{N} \end{cases}$

имеет *бесконечный* порядок роста, но ее *изображение по Лапласу* определено для *всех* комплексных значений p .

2. Применив теорему Коши к интегралу $\oint_{P_b} e^{ie^z} e^{-pz} dz$ по прямоугольнику P_b с вершинами 0 , b , $b+i\frac{\pi}{2}$, $i\frac{\pi}{2}$ ($b > 0$), а затем лемму Жордана к его составляющей по *отрезку* между точками b и $b+i\frac{\pi}{2}$ (при $b \rightarrow +\infty$ с переходом к переменной $\zeta = e^z$), доказать, что

- функция-оригинал $f(t) = e^{ie^t}$ имеет *нулевой* показатель роста;
- ее *изображение по Лапласу* определено для всех p с $\operatorname{Re} p > -1$.

XX. КАК ОПЕРИРУЮТ ПРЕОБРАЗОВАНИЕМ ЛАПЛАСА

Традиционным приложением *преобразования Лапласа*, или, как еще говорят, *операционного исчисления*¹, является решение “операционным методом” линейных дифференциальных (а также интегральных и интегродифференциальных) уравнений и систем, возникающих, в частности, при расчете электрических цепей — занятии, подвигшем бывшего сотрудника телеграфной компании Хевисайда (XIX, сноска ⁴ на с. 309) к изобретению того, что стали называть *операционным исчислением*.

Общая схема метода весьма проста и, если есть основания считать искомые (равно как и заданные) функции *оригиналами*, сводится к следующему:

а) от исходного уравнения, применяя к обеим его частям *преобразование Лапласа* и учитывая имеющиеся (или дополнительно задаваемые) *начальные условия*, переходят к так называемому *уравнению в изображениях*;

б) решая полученное уравнение (а оно, если, к примеру, исходное уравнение было *дифференциальным*, оказывается *алгебраическим*²) находят *изображения* искомых функций;

в) по найденным *изображениям* находят *функции-оригиналы*, используя имеющиеся *справочные таблицы* или иные способы восстановления *оригиналов* по их *изображениям*.

Вот несколько примеров, иллюстрирующих как саму эту схему, так и типовые приемы ее реализации.

¹ На самом деле термин *операционное исчисление* имеет более широкий смысл: помимо *преобразования Лапласа* он охватывает все методы сведения *дифференциальных* (и *интегральных*) уравнений к *алгебраическим*.

² Или *дифференциальным*, но с меньшим числом переменных.

1. Найти *общее* решение уравнения $\ddot{x} + \omega^2 x = f(t)$, а для случаев а) $f(t) = \cos \mu t$ ($\mu \neq \omega$) и б) $f(t) = \cos \omega t$ найти его *частные* решения, отвечающие *нулевым* начальным условиям: $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$.

Для нахождения *общего* решения уравнения за *начальные значения* искомой функции берут произвольные числа: $x(0) = c_1$, $\dot{x}(0) = c_2$, после чего, полагая $x(t) \doteq X(p)$, а $f(t) \doteq F(p)$, приходят к уравнению в *изображениях*:

$$(p^2 X(p) - px(0) - \dot{x}(0)) + \omega^2 X(p) = F(p).$$

В его решении $X(p) = \frac{F(p)}{p^2 + \omega^2} + \frac{c_1 p + c_2}{p^2 + \omega^2}$ первое слагаемое есть изображение *свертки* $\frac{1}{\omega} \int_0^t f(\tau) \sin \omega(t - \tau) d\tau$, второе же — линейной комбинации $c_1 \cos \omega t + c_2 \frac{1}{\omega} \sin \omega t$. Ввиду произвольности чисел c_1 , c_2 (и возможности их переобозначения) общим решением исходного *неоднородного* уравнения будет

$$x(t) = \frac{1}{\omega} \int_0^t f(\tau) \sin \omega(t - \tau) d\tau + (c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t),$$

т. е. (как и следовало ожидать) *сумма* его *частного* решения (с *нулевыми* начальными условиями) и *общего* решения соответствующего *однородного* уравнения.

В случае $f(t) = \cos \mu t$ (и *нулевых* начальных условий) решением уравнения в *изображениях* является

$$X(p) = \frac{p}{(p^2 + \mu^2)(p^2 + \omega^2)} = \frac{1}{\omega^2 - \mu^2} \left(\frac{p}{p^2 + \mu^2} - \frac{p}{p^2 + \omega^2} \right) \text{ при } \mu \neq \omega$$

и

$$X(p) = \frac{p}{(p^2 + \omega^2)^2} = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{p^2 + \omega^2} \right)' \text{ при } \mu = \omega,$$

соответственно чему

$$x(t) = \frac{1}{\omega^2 - \mu^2} (\cos \mu t - \cos \omega t) \text{ при } \mu \neq \omega$$

и

$$x(t) = t \frac{1}{2\omega} \sin \omega t \text{ при } \mu = \omega \text{ (резонансный случай).}$$

2. Решить систему уравнений
$$\begin{cases} \dot{x} = y - z \\ \dot{y} = x + y \\ \dot{z} = x + z \end{cases}$$
 с начальными

условиями $x(0) = 1, y(0) = 2, z(0) = 3$.

Переход к изображениям дает систему
$$\begin{cases} pX - 1 = Y - Z \\ pY - 2 = X + Y \\ pZ - 3 = X + Z \end{cases},$$

решая которую (например, по правилу Крамера), можно получить ответ в изображениях:

$$X = \frac{p-2}{p(p-1)}, \quad Y = \frac{2p^2-p-2}{p(p-1)^2}, \quad Z = \frac{3p^2-2p-2}{p(p-1)^2};$$

разложение же полученных дробей на простые

$$X = \frac{2}{p} - \frac{1}{p-1}, \quad Y = \frac{-2}{p} + \frac{4}{p-1} - \frac{1}{(p-1)^2}, \quad Z = \frac{-2}{p} + \frac{5}{p-1} - \frac{1}{(p-1)^2}$$

позволяет получить окончательный ответ:

$$x(t) = 2 - e^t, \quad y(t) = -2 + 4e^t - te^t, \quad z(t) = -2 + 5e^t - te^t.$$

3. Найти общее решение уравнения $t\ddot{x} - (1+t)\dot{x} + x = 0$.

Считая начальные значения $x(0), \dot{x}(0)$ произвольными числами, полагая $x(t) = X(p)$ и пользуясь свойствами дифференцирования оригинала и изображения (XIX, с. 316–317), можно перейти к уравнению в изображениях¹:

$$-(p^2 X - px(0) - \dot{x}(0))' - (pX - x(0)) + (pX - x(0))' + X = 0.$$

Запись его в виде

$$(p^2 - p)X' + (3p - 2)X = 2x(0)$$

и применение стандартной схемы решения линейных неоднородных дифференциальных уравнений 1-го порядка (метод вариации произвольной постоянной) приводит последовательно к соотношениям:

¹ В котором штрих обозначает производную по p .

$$X = \frac{C}{p^2(p-1)} \quad (C = C(p)), \quad (p^2 - p) \frac{C'}{p^2(p-1)} = 2x(0),$$

$$C = x(0)p^2 + \tilde{C}, \quad X = \frac{x(0)p^2 + \tilde{C}}{p^2(p-1)} = \frac{x(0)}{p-1} + \frac{\tilde{C}}{p-1} - \frac{\tilde{C}}{p^2} - \frac{\tilde{C}}{p};$$

переход к оригиналу дает: $x(t) = (x(0) + \tilde{C})e^t - \tilde{C}(t+1)$ или (после переобозначения констант) $x(t) = c_1 e^t + c_2(t+1)$.

4. Найти решение уравнения $t\ddot{x} + 2\dot{x} + tx = \sin t$, удовлетворяющее нулевым начальным условиям: $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$.

Соответствующим уравнением в изображениях будет

$$-(p^2 X)' + 2pX - X' = \frac{1}{p^2 + 1},$$

в силу чего $X' = -\frac{1}{(p^2 + 1)^2}$. С учетом свойства дифференцирования изображения (XIX, с. 317) и изображения свертки (XIX, с. 321) последнее равенство позволяет заключить, что

$$\begin{aligned} -tx(t) &= -\int_0^t \sin \tau \sin(t-\tau) d\tau = \frac{1}{2} \int_0^t (\cos t - \cos(2\tau - t)) d\tau = \\ &= \frac{1}{2} t \cos t - \frac{1}{4} \sin(2\tau - t) \Big|_{\tau=0}^t = \frac{1}{2} (t \cos t - \sin t), \end{aligned}$$

и окончательно $x(t) = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin t}{t} - \cos t \right)$.

5. Решить интегральное уравнение Вольтэрры¹ (типа свертки)² $x(t) = t + \int_0^t \sin(t-u) x(u) du$.

Полагая $x(t) \doteq X(p)$ и вспоминая изображение свертки², уравнение можно записать в изображениях:

$$X(p) = \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^2 + 1} X(p);$$

решение его и возвращение к оригиналу дают:

$$X(p) = \frac{\frac{1}{p^2}}{1 - \frac{1}{p^2 + 1}} = \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^4}, \text{ а следовательно, } x(t) = t + \frac{t^3}{6}.$$

¹ Вольтэрра (Volterra, Vito, 1860–1940) — итальянский математик.

² XIX, с. 321.

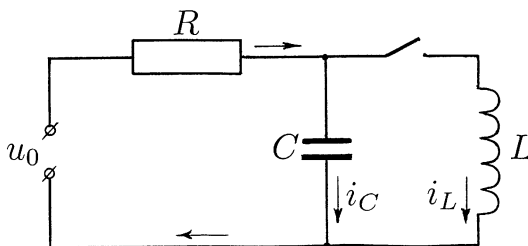


Рис. 131

6. Найти величину тока через конденсатор в схеме, изображенной на рис.131, если на вход подано напряжение $u_0 = 100$ В, емкость конденсатора $C = 100$ мкФ, индуктивность катушки $L = 29,4$ мГн, сопротивление $R = 10$ оМ, а ключ включается в момент времени $t = 0$.

Пусть $i_C = i_C(t)$ и $i_L = i_L(t)$ — токи соответственно через конденсатор и катушку, при этом $i_C(0) = i_L(0) = 0$.

Поскольку начальное падение напряжения на конденсаторе равнялось u_0 , к моменту времени t оно оказывается равным $u_0 + (1/C) \int_0^t i_C(t) dt$, падение же напряжения на катушке равно (по закону Ленца) Li'_L ; с учетом закона Ома это приводит к системе уравнений

$$\begin{cases} R(i_C + i_L) + 1/C(u_0 C + \int_0^t i_C(t) dt) = u_0 \\ R(i_C + i_L) + Li'_L = u_0. \end{cases}$$

Переход к изображениям $i_C(t) \doteq I_C(p)$, $i_L(t) \doteq I_L(p)$ преобразует ее в систему

$$\begin{cases} R(I_C + I_L) + I_C/(Cp) = 0 \\ R(I_C + I_L) + L(pI_L - 0) = u_0/p, \end{cases}$$

из которой следует, что

$$\begin{aligned}
 I_C &= \frac{-u_0}{p\left(\frac{1}{Cp} + \frac{L}{RC} + Lp\right)} = \frac{-\frac{u_0}{L}}{p^2 + \frac{p}{RC} + \frac{1}{LC}} = \\
 &= \frac{-\frac{100}{29,4 \cdot 10^{-3}}}{p^2 + \frac{p}{10 \cdot 100 \cdot 10^{-6}} + \frac{1}{29,4 \cdot 10^{-3} \cdot 100 \cdot 10^{-6}}} = -\frac{3400}{(p+500)^2 + 300^2},
 \end{aligned}$$

и (по переходу к оригиналу) $i_C(t) = 11,3 e^{-500t} \sin 300t [\text{A}]$.

7. В схеме, изображенной на рис. 132, а, найти *выходное напряжение* $u_{R_2}(t)$, если $R_1 = R_2 = 1 \text{ кОм}$, $C = 2000 \text{ мкФ}$, а зависимость $u = u(t)$ *входного напряжения* от времени представлена на рис. 132, б.

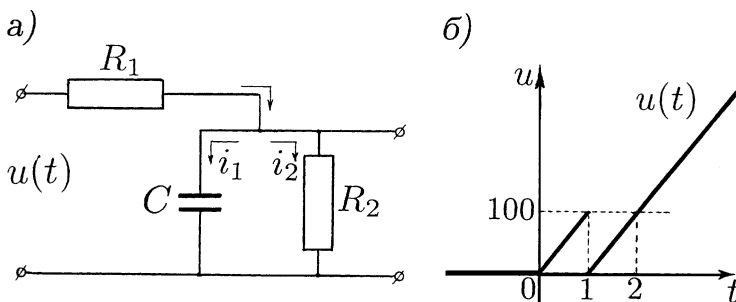


Рис. 132

При обозначении $i_1 = i_1(t)$ и $i_2 = i_2(t)$ токов соответственно через *конденсатор* и параллельное ему *сопротивление* (как на рис. 132, а) для них можно записать систему уравнений

$$\begin{cases} R_1(i_1 + i_2) + (1/C) \int_0^t i_1(t) dt = u \\ R_1(i_1 + i_2) + R_2 i_2 = u. \end{cases}$$

Если считать, что $i_1(t) \doteq I_1(p)$, $i_2(t) \doteq I_2(p)$, а $u(t) \doteq U(p)$, то системой уравнений в изображениях будет

$$\begin{cases} R_1(I_1 + I_2) + I_1/(Cp) = U \\ R_1(I_1 + I_2) + R_2 I_2 = U. \end{cases}$$

Из нее следует, что $I_2 = \frac{U}{R_1 R_2 C p + (R_1 + R_2)}$, а следовательно,

$$\begin{aligned} u_{R_2}(t) &= R_2 i_2(t) \doteq R_2 I_2 = \frac{R_2 U}{R_1 R_2 C p + (R_1 + R_2)} = \\ &= \frac{10^3 U}{10^3 \cdot 10^3 \cdot 2000 \cdot 10^{-6} p + 2 \cdot 10^3} = \frac{U}{2(p+1)} \doteq \frac{1}{2} \int_0^t u(\tau) e^{-(t-\tau)} d\tau. \end{aligned}$$

Применительно же к заданному *входному напряжению* (рис. 132, б) вычисление последнего интеграла дает:

если $0 \leq t \leq 1$, то

$$\begin{aligned} u_{R_2}(t) &= \frac{1}{2} \int_0^t 100 \tau e^{\tau-t} d\tau = \\ &= 50 \left(\tau e^{\tau-t} \Big|_{\tau=0}^t - \int_0^t e^{\tau-t} d\tau \right) = 50 (t - 1 + e^{-t}) \text{ [В]}, \end{aligned}$$

если же $t \geq 1$, то

$$\begin{aligned} u_{R_2}(t) &= \frac{1}{2} \left(\int_0^1 100 \tau e^{\tau-t} d\tau + \int_1^t 100 (\tau - 1) e^{\tau-t} d\tau \right) = \\ &= 50 (e^{-t} + t - 2 + e e^{-t}) \text{ [В]}. \end{aligned}$$

Для упрощения расчета электрических цепей их разделяют на отдельные участки (контуры), характеризующиеся (вне зависимости от индивидуального устройства каждого) наличием двух клемм *входного* напряжения и двух клемм *выходного*. Такие участки в электротехнике называют *четырёхполюсниками*. Отношение *изображения* напряжения на *выходе* четырёхполюсника к *изображению* напряжения на *входе* называют передаточной функцией четырёхполюсника. В частности, четырёхполюсник в разобранным примере имеет передаточную функцию $\frac{U_{R_2}}{U} = \frac{R_2}{R_1 R_2 C p + (R_1 + R_2)}$. При *последовательном* включении четырёхполюсников их передаточные функции *перемножаются*.

8. Найти формулу распространения электрического потенциала $u = u(x, t)$ в полубесконечной проводной линии ($0 \leq x < +\infty$), на вход которой ($x=0$) подается (при $t \geq 0$) потенциал $\varepsilon = \varepsilon(t)$; за “положительное” направление тока $i = i(x, t)$ принимается направление *возрастания* x (рис. 133), при этом *начальные значения потенциала и тока* считаются *нулевыми*: $u(x, 0) = 0$, $i(x, 0) = 0$. Параметрами линии служат *отнесенные к единице длины* линии

а) активное (омическое) сопротивление¹ R ;

б) индуктивность² L ;

в) емкость³ C ;

г) коэффициент потерь⁴ G .

Задачу решить в случае $LG = RC$ — линии “без искажений” (смысл термина выяснится ниже).

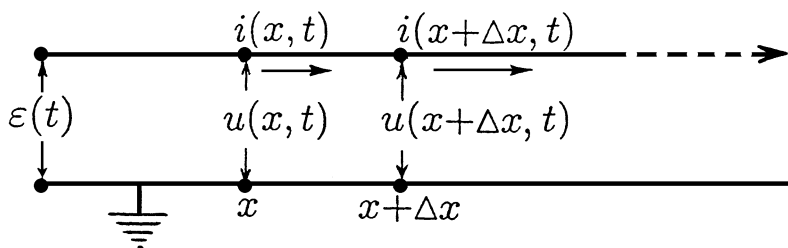


Рис. 133

¹ Зависящее от материала и сечения провода.

² Коэффициент пропорциональности между ЭДС самоиндукции и скоростью изменения тока.

³ Коэффициент пропорциональности между скопившимся зарядом и потенциалом (обкладками “конденсатора” служат провод и “земля” с окружающими провод предметами).

⁴ Коэффициент пропорциональности между потоком стекающего через изоляцию заряда и потенциалом провода.

Применение закона Ома к участку линии от x до $x+\Delta x$ приводит к соотношению

$$u(x, t) - u(x+\Delta x, t) = R\Delta x i(x, t) + L\Delta x i'_t(x, t)$$

(под значениями *тока* и его *производной* понимаются их *усреднения* на участке от x до $x+\Delta x$). Деление его правой и левой частей на Δx и устремление Δx к нулю приводит к первому из так называемых *телеграфных уравнений*:

$$\boxed{u'_x + Ri + Li'_t = 0}.$$

С другой стороны, составление *баланса заряда* за промежуток времени от t до $t+\Delta t$ позволяет записать:

$$\begin{aligned} (i(x, t) - i(x+\Delta x, t))\Delta t = \\ = C\Delta x (u(x, t+\Delta t) - u(x, t)) + G\Delta x u(x, t)\Delta t \end{aligned}$$

(значения *тока* и *потенциала* понимаются как *усредненные* соответственно по времени и/или координате); деление обеих частей равенства на Δx и Δt с последующим устремлением их к нулю дают второе *телеграфное уравнение*:

$$\boxed{i'_x + Cu'_t + Gu = 0}.$$

Исключение *тока* из полученной системы телеграфных уравнений (вычитанием из первого уравнения, продифференцированного по x , второго уравнения, умноженного на L и продифференцированного по t , с последующим выражением i'_x через u и u'_t из второго уравнения) приводит к *телеграфному уравнению* второго порядка относительно u :

$$u''_{xx} - LCu''_{tt} - (LG + RC)u'_t - RG u = 0. \quad (*)$$

С учетом условий $u(x, 0) = 0$, $i(x, 0) = 0$ (и второго телеграфного уравнения) возникает задача *Коши*: найти решение $u = u(x, t)$ уравнения (*), удовлетворяющее *начальным условиям* $u(x, 0) = 0$, $u'_t(x, 0) = 0$ и *граничному условию* $u(0, t) = \varepsilon(t)$.

Метод решения этой задачи — применение *преобразования Лапласа* по переменной t :

$$\begin{aligned} u(x, t) &\doteq U(x, p) = \int_0^{+\infty} u(x, t) e^{-pt} dt, \quad \varepsilon(t) \doteq E(p) = \int_0^{+\infty} \varepsilon(t) e^{-pt} dt, \\ u'_t(x, t) &\doteq pU(x, p) - u(x, 0) = pU(x, p), \\ u''_{tt}(x, t) &\doteq p^2 U(x, p) - pu(x, 0) - u'_t(x, 0) = p^2 U(x, p), \\ u''_{xx}(x, t) &\doteq \int_0^{+\infty} u''_{xx}(x, t) e^{-pt} dt = U''(x, p).^1 \end{aligned}$$

Сформулированная *задача Коши* для *уравнения в частных производных* (*) переходит при этом в *краевую задачу*

$$\frac{d^2 U}{dx^2} - (LCp^2 + (LG + RC)p + RG)U = 0, \quad U(0, p) = E(p)$$

для *линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными* (по отношению к переменной x) *коэффициентами*. В случае $LG = RC$ корнями его *характеристического уравнения* служат $\pm(p\sqrt{LC} + \sqrt{RG})$,² а потому *общее решение* данного *дифференциального уравнения* имеет вид

$$U(x, p) = c_1 e^{(p\sqrt{LC} + \sqrt{RG})x} + c_2 e^{-(p\sqrt{LC} + \sqrt{RG})x},$$

где c_1, c_2 — произвольные коэффициенты (не зависящие от x , но, возможно, зависящие от p).

Так как должно выполняться условие $U(x, p) \xrightarrow{\operatorname{Re} p \rightarrow +\infty} 0$ (XIX, с.311), а из двух экспонент в представлении $U(x, p)$ лишь *вторая* стремится к нулю при $\operatorname{Re} p \rightarrow +\infty$, коэффициент c_1 должен *равняться нулю*, из условия же $U(0, p) = E(p)$

¹ Последнее равенство означает возможность *дифференцирования* интеграла $\int_0^{+\infty} u(x, t) e^{-pt} dt$ по *параметру* x , для обоснования которого нет достаточной информации о подынтегральной функции. Заменой этого обоснования может служить *прямая проверка* окончательного результата.

² При $LG = RC$ многочлен 2-й степени $LCp^2 + (LG + RC)p + RG$ принимает вид $(p\sqrt{LC} + \sqrt{RG})^2$.

следует, что $c_2 = E(p)$. Остается применить к полученному решению в изображениях

$$U(x, p) = E(p) e^{-(p\sqrt{LC} + \sqrt{RG})x} = e^{-p\sqrt{LC}} (e^{-x\sqrt{RG}} E(p))$$

свойство запаздывания оригинала (XIX, с. 318):

$$u(x, t) = e^{-x\sqrt{RG}} \varepsilon(t - x\sqrt{LC}).$$

Вывод: в случае $LG = RC$ подаваемый на вход сигнал (потенциал) $\varepsilon(t)$ распространяется со скоростью $\frac{1}{\sqrt{LC}}$, при этом форма сигнала не искажается, а его амплитуда (по приходу сигнала в точку x) уменьшается в $e^{x\sqrt{RG}}$ раз.

Приложения к разностным уравнениям.

Аналогами дифференциальных уравнений, когда в качестве участвующих в них функций выступают последовательности, являются разностные уравнения.

К примеру, линейное разностное уравнение k -го порядка с постоянными коэффициентами имеет вид

$$x_{n+k} + a_1 x_{n+k-1} + \dots + a_k x_n = b_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

где $a_1, \dots, a_k$ — заданные числа, а $\{b_n\} = b_0, b_1, b_2, \dots$ — заданная числовая последовательность.¹

Задача Коши для такого разностного уравнения имеет следующую формулировку: найти числовую последователь-

¹ Фактически такое разностное уравнение (а в случае, если все $b_n = 0$, его называют однородным) есть бесконечная система линейных алгебраических уравнений.

Разностные уравнения часто возникают как дискретные приближения дифференциальных, когда функции заменяют последовательностями их значений в (обычно равноотстоящих) точках числовой оси. Например, соответствующим разностным уравнением (однородным) для уравнения колебания маятника $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ будет

$$\frac{x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n}{h^2} + \omega^2 x_{n+1} = 0, \quad \text{или} \quad x_{n+2} + (h^2 \omega^2 - 2)x_{n+1} + x_n = 0,$$

где $x_n = x(nh)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, — значения искомой функции при $t = 0, h, 2h, 3h, \dots$

ность $\{x_n\} = x_0, x_1, x_2, \dots$, удовлетворяющую данному разностному уравнению и имеющую в качестве начальных k элементов $(x_0, \dots, x_{k-1})$ заданные k чисел. То, что решение этой задачи (последовательность $\{x_n\}$ с этими свойствами) существует и является единственным, напрямую вытекает из возможности вычисления элементов последовательности $\{x_n\}$, начиная с x_k , по k предыдущим. Интерес же представляет получение общей формулы этих элементов.

К задаче Коши для линейного однородного разностного уравнения (2-го порядка) приводит следующая “Задача о кроликах” из “Книги абака” (“*Liber abaci*”) ¹ итальянского математика Леонардо Пизанского, или Фибона́ччи ²

В первый день января в загон помещают пару кроликов, которые производят новую пару кроликов в первый день февраля и затем в первый день каждого следующего месяца. Каждая новорожденная пара становится зрелой уже через месяц и затем через месяц дает жизнь новой паре кроликов. Сколько пар кроликов будет в загоне через год, т.е. через 12 месяцев с начала размножения?

Обозначая x_n , $n = 0, 1, \dots, 12$, число пар кроликов (зрелых) в первый день n -го месяца (считая $x_0 = 0$), приходят к задаче Коши для однородного разностного уравнения ³
 $x_{n+2} - x_{n+1} - x_n = 0$ с начальными условиями $x_0 = 0$, $x_1 = 1$.

Поскольку преобразование Лапласа к последовательностям напрямую не применимо, его привлечение к решению

¹ Лат. *abacus* — счетная доска; в этой впервые вышедшей в 1202 г. рукописной книге были изложены достижения арабских математиков, и с нее начался переход в Европе от римских цифр к арабским.

² Leonardo Pisano (Fibonacci — значит сын Боначчо) родился между 1170 и 1180 гг., умер не ранее 1240 г. О его жизни, его времени, его путешествиях и книгах очень интересно написано в [34].

³ Об ограничении $n \leq 12$, разумеется, можно забыть.

разностных уравнений организуют следующим образом. От последовательностей $\{x_n\} = x_0, x_1, x_2, \dots$ переходят к ступенчатым функциям

$$\tilde{x}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 0, & \text{если } t < 0, \\ x_0, & \text{если } 0 \leq t < 1, \\ x_1, & \text{если } 1 \leq t < 2, \\ x_2, & \text{если } 2 \leq t < 3, \\ \dots & \dots \end{cases}$$

и уже к ним, предполагая, что они являются оригиналами (XIX, с. 310)¹ применяют преобразование Лапласа:

$$\begin{aligned} \tilde{x}(t) &\doteq \tilde{X}(p) = \int_0^{+\infty} \tilde{x}(t) e^{-pt} dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{n+1} \tilde{x}(t) e^{-pt} dt = \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\int_0^1 x_0 e^{-pt} dt + \int_1^2 x_1 e^{-pt} dt + \dots + \int_n^{n+1} x_n e^{-pt} dt \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1-e^{-p}}{p} (x_0 + x_1 e^{-p} + \dots + x_n e^{-np}) = \frac{1-e^{-p}}{p} \sum_{n=0}^{+\infty} x_n e^{-np}. \end{aligned}$$

Опуская общий для изображений таких ступенчатых функций множитель $\frac{1-e^{-p}}{p}$, определяют дискретное преобразование Лапласа исходной последовательности $\{x_n\}$:

$$\boxed{\{x_n\} \stackrel{\mathcal{D}}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} x_n e^{-np} = x_0 + x_1 e^{-p} + x_2 e^{-2p} + x_3 e^{-3p} + \dots},$$

воспринимая его исключительно как *сокращенную запись* обычного преобразования Лапласа соответствующей ступенчатой функции².

¹ А это равносильно тому, что для некоторого числа α выполняется оценка $x_n = O(e^{\alpha n})$.

² В обозначении $e^p = z$ дискретное преобразование Лапласа называют еще $\mathcal{Z}$ -преобразованием. Подробнее об этом — у Г. Дёча [6].

Некоторые, впрочем, предпочитают оперировать *дискретным преобразованием Лапласа* как обычным (интегральным), но только не *последовательности* $\{x_n\}$, а *обобщенной функции* (*псевдофункции*, *распределения*) $x^*(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n \delta(t-n)$, где $\delta(t)$ — так называемая “дельта-функция” Дира́ка¹ со следующим *формальным* правилом интегрирования ее произведения с “обычной” функцией: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \delta(t-a) dt = f(a)$.

Ввиду этого свойства *формально*

$$x^*(t) \stackrel{\text{D}}{=} \int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} x_n \delta(t-n) e^{-pt} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n e^{-np} \stackrel{\text{D}}{=} \{x_n\}.$$

Подробно об этом подходе можно прочитать у Г. Бремермана [1].

Так как при $\operatorname{Re} p > \ln |q|$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n e^{-np} = 1 + qe^{-p} + (qe^{-p})^2 + (qe^{-p})^3 + \dots = \frac{1}{1 - qe^{-p}},$$

справедлива следующая *формула дискретного преобразования Лапласа геометрической прогрессии*:

$$\boxed{\{q^n\} \stackrel{\text{D}}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} q^n e^{-np} = \frac{e^p}{e^p - q}}.$$

Хороший пример применения *дискретного преобразования Лапласа* — отыскание *формулы чисел Фибоначчи*², т. е. решение *разностного уравнения* $x_{n+2} - x_{n+1} - x_n = 0$ с *начальными условиями* $x_0 = 0, x_1 = 1$ (с. 342). Полагая

$$\{x_n\} \stackrel{\text{D}}{=} X(p) \stackrel{\text{def}}{=} x_0 + x_1 e^{-p} + x_2 e^{-2p} + x_3 e^{-3p} + \dots,$$

можно прийти к соотношениям

¹ Хотя принято считать, что ее ввел английский физик Дира́к (точнее, Дирэ́к; Dirac Paul Adrien Maurice, 1902–1984), этой “функцией” оперировали и до него — например, Коши в опубликованном в 1827 г. мемуаре о распространении волн (“Théorie de la propagation des ondes”) [28], sér. I, t. I, p. 5–318 (конкретно на с. 28–29, 61, 63).

² 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ... ($x_1 = x_2 = 1$, а каждое следующее есть сумма двух предыдущих).

$$\{x_{n+1}\} \stackrel{\mathcal{D}}{=} x_1 + x_2 e^{-p} + x_3 e^{-2p} + x_4 e^{-3p} + \dots = (X(p) - x_0) e^p,$$

$$\{x_{n+2}\} \stackrel{\mathcal{D}}{=} x_2 + x_3 e^{-p} + x_4 e^{-2p} + \dots = (X(p) - x_0 - x_1 e^{-p}) e^{2p},$$

так что переход в *разностном уравнении* $x_{n+2} - x_{n+1} - x_n = 0$ к *изображениям* (с учетом начальных условий $x_0 = 0$, $x_1 = 1$) приводит к *уравнению* $(X(p) - e^{-p}) e^{2p} - X(p) e^p - X(p) = 0$, решением которого является $X(p) = \frac{e^p}{e^{2p} - e^p - 1}$. Восстановить по этому решению саму *последовательность* $\{x_n\}$ проще всего путем разложения дроби $\frac{1}{e^{2p} - e^p - 1}$ на простые:

$$\frac{1}{e^{2p} - e^p - 1} = \frac{1}{(e^p - q_1)(e^p - q_2)} = \frac{1}{q_1 - q_2} \left(\frac{1}{e^p - q_1} - \frac{1}{e^p - q_2} \right),$$

а следовательно,

$$\frac{e^p}{e^{2p} - e^p - 1} = \frac{1}{q_1 - q_2} \left(\frac{e^p}{e^p - q_1} - \frac{e^p}{e^p - q_2} \right), \text{ где } q_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Поскольку $\{q^n\} \stackrel{\mathcal{D}}{=} \frac{e^p}{e^p - q}$, следует окончательный ответ:

$$\boxed{x_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right], \quad n = 1, 2, \dots} \quad —$$

так называемая формула Бинэ¹ *чисел Фибоначчи*.

Как следствие, для *чисел Фибоначчи* выполняется (в пределе при $n \rightarrow +\infty$) "божественная (золотая) пропорция"²: $\frac{x_n}{x_{n+1}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$.

Упражнения. 1. Найти *дискретное преобразование Лапласа* последовательности $\{n\} = 0, 1, 2, 3, \dots$ (Ответ: $\{n\} \stackrel{\mathcal{D}}{=} \frac{e^p}{(e^p - 1)^2}$).

2. Найти *формулу общего элемента* последовательности $\{x_n\}$, определяемой соотношением $x_{n+2} = \frac{x_n + x_{n+1}}{2}$ (при произвольных x_0 и x_1). (Ответ: $x_n = \frac{x_0 + 2x_1}{3} + (-1)^n \frac{x_0 - x_1}{3 \cdot 2^{n-1}}$).

¹ Binet, Jacques (1786–1856) — французский астроном и математик.

² Меньшая часть так относится к большей, как большая к целому. *Божественной* назвал эту пропорцию итальянский математик Пачоли (Pacioli, Luca, 1445–1515) в книге [41], впервые вышедшей в 1509 г. с иллюстрациями приятеля Пачоли — Леонардо да Винчи (1452–1519).

Приложение. Буквы древнегреческого письма

Написание	Название	Передаваемый звук
Α α	áльфа	[а]
Β β	бéта	[б]
Γ γ	гáμμα	[г]
Δ δ	дéльта	[д]
Ε ε	э псилóн	[е] (краткое)
Ζ ζ	дзéта	[дз]
Η η	éта	[е] (долгое)
Θ θ	тéта	[т] (с придыханием)
Ι ι	иόта	[и]
Κ κ	ка́ппа	[к]
Λ λ	ла́μβда	[л]
Μ μ	мю (ми)	[м]
Ν ν	ню (ни)	[н]
Ξ ξ	кси	[кс]
Ο ο	ο микрóн	[о] (краткое)
Π π	пи	[п]
Ρ ρ	ро	[р]
Σ σ, ς (в конце слова)	сй́гма	[с]
Τ τ	та́у	[т]
Υ υ	и псилóн	между [и] и [у]
Φ φ	фи	[ф]
Χ χ	хи	[х]
Ψ ψ	пси	[пс]
Ω ω	ο мéга	[о] (долгое)

(μέγας — большой, μικρός — малый, ψιλός — голый, краткий)

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ¹

1. Бремерман Г. Распределения, комплексные переменные и преобразования Фурье. М.: Мир, 1968.
2. Гарди Г. Интегрирование элементарных функций. М.–Л.: ОНТИ, 1935.²
3. Гильберт Д., Кон-Фоссен С. Наглядная геометрия. М.: Наука, 1981.
4. Гурвиц А. Теория аналитических и эллиптических функций. М.–Л.: ГТТИ, 1933.²
5. Гурса Э. Курс математического анализа. Т. II. М.–Л.: ОНТИ, 1936.²
6. Дёч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа. М.: Наука, 1965.
7. Каратеодори К. Конформное отображение. М.–Л.: ОНТИ, 1934.²
8. Картан А. Элементарная теория функций одного и нескольких комплексных переменных. М.: ИЛ., 1963.
9. Кольман Э. Бернард Больцано. М.: Изд-во АН СССР, 1955.
10. Курант Р. Геометрическая теория функций комплексной переменной. М.–Л.: ОНТИ, 1934.
11. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М.–Л.: ГИТТЛ, 1951.
12. Маркушевич А. И. Теория аналитических функций. М.–Л.: ГИТТЛ, 1950.
13. Матвиевская Г. П. Очерки истории тригонометрии. Ташкент: “ФАН”, 1990.²
14. Окунев Л. Я. Высшая алгебра. М.–Л.: ГИТТЛ, 1949.

¹ Помимо приведенной в тексте. Для сравнительно редких и зарубежных изданий указано, где их можно найти.

² Имеется в Российской государственной библиотеке.

15. Риман Б. Сочинения. М.–Л.: ГИТТЛ, 1948.
16. Титчмарш Е. Теория функций. М.–Л.: ГИТТЛ, 1951.
17. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. III. М.: Наука, 1966.
18. Форд Л. Р. Автоморфные функции. М.–Л.: ОНТИ, 1936.¹
19. Эйлер Л. Введение в анализ бесконечно малых. Т. 1. М.–Л.: ОНТИ, 1936.
20. Эйлер Л. Три статьи по математической картографии. М.: Геодезиздат, 1959.¹
21. Argand R. Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques. 2-me édition. Paris, 1874.¹
22. Borel E. Leçons sur les fonctions monogènes uniformes d'une variable complexe. Paris, 1917.¹
23. Briot et Bouquet. Théorie des fonctions elliptiques. 2-me édition. Paris, 1875.¹
24. Carson J.R. Electric circuit theory and the operational calculus. New York–London, 1926.¹
25. Casorati F. Teorica delle funzioni di variabili complesse. V. I. Pavia, 1868.^{1, 2}
26. Cauchy A.-L. Cours d'Analyse de l'École Royale Polytechnique. Paris, 1821.²
27. Cauchy A.-L. Mémoire sur les intégrales définies. Paris, 1825.¹
28. Cauchy A.-L. Œuvres complètes. Sér. I–II. Paris, 1887–1974.^{1, 2}
29. da Cunha J.-A. Principes mathématiques. Bordeaux, 1811.¹
30. Descartes R. La géométrie (nouvelle édition). Paris, 1927.²
31. Euler L. Opera omnia, series prima. V. VI. Lipsiae et Berolini, 1921.¹

¹ Имеется в Российской государственной библиотеке.

² Имеется в библиотеке мех.-мат. ф-та МГУ.

32. Euler L. Opera omnia, series prima. V. XIX. Turici, 1932.¹
33. Gauss C.F. Werke. Göttingen, 1863–1933.²
34. Gies J., Gies F. Leonard of Pisa and the new mathematics of the middle ages. New York, 1969.¹
35. Hamilton W.R. Lectures on quaternions. London–Cambridge, 1853.²
36. Heaviside O. Electromagnetic theory. V. II. London, 1899.¹
37. Lagrange. Théorie des fonctions analytiques. Paris, 1813.^{1, 2}
38. Maclaurin C. A treatise of fluxions. Edinburgh, 1742.²
39. Neumann C. Vorlesungen über Riemann's Theorie der abelschen Integrale. Leipzig, 1865.¹
40. Ore O. Cardano the gambling scholar. Princeton, N.-J., 1953.¹
41. Pacioli L. De divina proportione. Milano, 1956.¹
42. Scott J.F. The mathematical work of John Wallis. New York, 1981.¹
43. Weierstrass K. Mathematische Werke. Berlin, 1894–1927.²
44. Wessel C. On the Analytical Representation of Direction. An Attempt Applied Chiefly to Solving Plane and Spherical Polygons. Copenhagen, 1999.²

¹ Имеется в Российской государственной библиотеке.

² Имеется в библиотеке мех.-мат. ф-та МГУ.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Абеля теорема 41
 Алгебраическая функция 52–53
 Аналитическая функция 105
 Аналитическое продолжение 202
 Аналитичность 106
 Аргумент комплексного числа 15
 Бернулли числа 192
 Бесконечно удаленная точка
 (бесконечность) 22
 Бинé формула 345
 “Божественная пропорция” 345
 Вейерштрасса теорема о последовательностях аналитических функций 174
 – (Казорати–Сохóцкого) теорема 220
 Верхний предел 27
 Ветвление 69
 Ветвления точка 62
 Ветвь (однозначная) 61
 Восстановление аналитической функции по ее действительной (мнимой) части 113–115
 Вычет 229
 Гамма-функция 315
 Гармоническая функция 115
 Гидромеханический смысл производной 83
 Гиперболические косинус и синус 38
 Главное значение интеграла 251
 Гладкая дуга 117
 – – ориентированная 121
 Гладкое соединение дуг 120–121
 Голоморфность 106
 Граница области 149
 Деление степенных рядов 39
 Дельта-функция (Дира́ка) 344
 Дискретное преобразование Лапласа 343
 Дифференцирование изображения 317
 – оригинала 316
 Дифференцируемость функции 72
 Дробно-линейная функция, отображение 89
 Жордана лемма 248–249
 – свойство 144
 Жуковского функция 100
 Запаздывание оригинала 318
 “Золотая пропорция” 345
 Изображение (по Лапласу) 309
 – периодического оригинала 320
 – свертки 321
 Изолированная особая точка 212
 Индекс замкнутого контура 138
 Интеграл вдоль пути (класса C^1) 127
 – (типа) Коши 166–167
 – по кусочно-гладкому контуру 127
 – Лапласа 309
 – Эйлера 2-го рода 315
 Интеграла оценка 133
 Интегралы Френéля 273
 Интегральная формула Коши 165
 Казорати–Сохóцкого–Вейерштрасса теорема 220

- Кардано формула 12
 Карта Меркатора 48
 Кольцо сходимости (обобщенного степенного ряда) 29
 Комплексная плоскость 5
 — — конечная, расширенная 22
 Комплексные числа 8, 10
 Комплексный потенциал 85
 Контур (кусочно-гладкий, гладкий, замкнутый) 121
 Конформность отображения 81
 Корень из комплексного числа 6,
 Коши интеграл 166
 — теорема 151
 — интегральная формула
 — неравенства для коэффициентов Тейлора и Лорана 194
 — формула для производных 172
 Коши–Адамара теорема 27
 Коэффициент локального растяжения 82
 Кратность (порядок) нуля 198
 Критерий Коши сходимости числовой следовательности 18
 — — — числового ряда 25–26
 — существования производной 73
 Круг сходимости (степенного ряда) 28
 “Круговое” свойство дробно-линейных отображений 92
 Кусочно-гладкий контур 121
 — — без самопересечений 123
 — — замкнутый 121
 Лапласа интеграл 309
 — преобразование 309
 — — дискретное 343
 Лемма Жордана 248–249
 — о производной интеграла по параметру 169
 — о существовании первообразной 159–160
 — об интегралах по замкнутым ломаным 157
 — об интеграле по треугольнику 154
 — Шварца 306
 Леммы об интегралах по дугам окружностей 247–249
 Лиувилля теорема 176, 197, 225
 Логарифм 43
 Ломаная (ориентированная) 123
 Лорана разложение, ряд 187
 — теорема 183
 Маклорена разложение, ряд 187
 Меркатора проекция, карта 48
 Мнимая часть числа 14
 Мнимые числа 13
 Многозначная функция 45, 59
 — первообразная 135
 Множество замкнутое 126
 — линейно связное 109
 — открытое 107
 — связное
 — сходимости ряда 26
 — точек контура 126
 Модуль комплексного числа 15
 Моногенность 106
 Мореры теорема 173
 Муавра формула 15–16
 Неизолированная особая точка 212
 Некасательное стремление к единичной окружности 41
 Неподвижная точка дробно-линейного отображения 90
 Непрерывность функции 19
 Неравенства Коши для коэффици-

- ентов Тейлора и Лорана 194
- треугольника 17
- Нули аналитических функций 198
- Область 107
 - внешняя, внутренняя 144
 - звездная 162
 - односвязная 149
- Обобщенный степенной ряд 29
- Образ точки, множества 285
- Ограниченность функции 19
- Однозначные ветви 61
 - — аргумента 65
 - — логарифма, степени 68
- Окрестность точки 18
 - бесконечности 23
- Оригинал 309
- Ориентированная гладкая дуга 121
 - ломаная 123
- Особая точка (аналитической функции) 209
 - — изолированная, неизолированная 212
 - — существенно особая 213, 220
 - — устранимая 209, 213, 216
- Отображение 78, 285
 - дробно-линейное 89
 - конформное 81–82
- Оценка интеграла по контуру 133
- Первообразная 133
- Передаточная функция 337
- Пикара теорема 221
- Плоскость комплексная 5
 - — расширенная 22
- Показатель роста оригинала 311
- Полюс (функции) 213–216, 218
- Полярная (тригонометрическая) форма комплексного числа 15
- Постоянство растяжения 82
- Порядок полюса 214
- Потенциальная функция 84
- Правильная точка 211
- Предел (функции) 18–19
- Преобразование Лапласа 309
 - — дискретное 343
- Принцип аргумента 275
 - локальной однолиственности 289
 - максимума модуля 288
 - непрерывного продолжения 292
 - симметрии (Римана–Шварца) 295
 - соответствия границ 291
 - сохранения области 286
- Проекция Меркатора 48
- Производная однозначных ветвей логарифма, степени 78
 - суммы обобщенного степенного ряда 72
 - суммы степенного ряда 29
 - функции комплексной переменной 71
- Путь (на плоскости C) 107, 124
 - класса C^1 124
 - обхода контура 124
- Равномерная непрерывность (функции на множестве) 19
- Разложение мероморфных функций в ряды простых дробей 238
 - правильной рациональной дроби на простые
 - Тейлора (Маклорена), Лорана 187
- Разностное уравнение 341
- Расширенная комплексная плоскость 22
- Регулярность 106
- Римана теорема 308

- Ріманова поверхність 59, 300
- — аргумента, логарифма 60–61
 - — корня n -й степени 63–64
 - — обратной к функции Жуковского 70
- Рунд теорема 278
- Ряд, его частичные суммы, сходимость, сумма 25
- , — суммирование по Абелю 42
 - Лорана 187
 - —, его главная и правильная части 213
 - Тейлора (Маклорена) 33, 187
- Свертка функций 321
- Свойство единственности разложений Тейлора и Лорана 188
- Жордана 144
 - изолированности нулей аналитических функций 200
 - конформности 81
 - — дробно-линейного отображения 92
 - линейности преобразования Лапласа 315
 - подобия 318
 - сохранения симметрии (дробно-линейноу] отображения 94
- Связное множество 109
- Система комплексных чисел 10
- Сопряженные гармонические функции 116
- числа 17
- Сохóцкого (Казорати–Вейерштрасса) теорема 220
- Сохранение углов 81
- Степенной ряд 26
- Стереографическая проекция 21
- Суммируемость ряда по Абелю 42
- Существенно особая точка 213–215, 220
- Сфера Рімана (Неймана) 22
- Сходимость последовательности 18
- — функций, равномерная внутри области 174
 - ряда 25
- Тейлора разложение, ряд 187
- теорема 183, 195
- Теорема Абеля 41
- аналитичности изображения 313
 - Вейерштрасса о последовательностях аналитических функций 174
 - единственности 201
 - — отображения 305
 - Казорати–Сохóцкого–Вейерштрасса 220
 - Кóши 151
 - — для кольца 178
 - — о перемножении рядов 34
 - — об интеграле по границе звездной области 162
 - Кóши–Адамара 27
 - Лорана 183
 - Лиувилля 176, 197, 225
 - Мореры 173
 - о вычетах 233
 - о делении степенных рядов 39
 - о перемножении степенных рядов 34
 - о подстановке степенного ряда в степенной ряд 38
 - о производной суммы степенного ряда 29
 - о производных аналитической функции 172
 - о производных интеграла Ко-

- шй 168
 - о разложении правильной рациональной дроби на простые 225
 - о существовании корня у многочлена 197, 225
 - об обратной функции 302
 - об обращении преобразования Лапласа 323
 - Пика́ра 221
 - — “большая”, “малая” 222
 - Рима́на 308
 - Руше́ 278
 - существования изображения 311
 - Те́йлора 180, 195
 - Фробе́ниуса 6
- Теоремы разложения 327
- Точка ветвления многозначной функции 62
 - — корня n -й степени 63
 - — аргумента 66
 - неподвижная (дробно-линейного отображения) 90
 - особая (аналитической функции) 209
 - — изолированная 212
 - — неизолйрованная 212
 - — устранимая 209, 213–216
 - существенно особая 213–215, 220
- Условия Коши–Рима́на (д’Аламбе́ра–Эйлера) 73–74
 - — в полярных координатах 77
- Условия постоянства аналитической функции в области 112
- Устранимая особая точка 209, 213–216
- Фибона́ччи числа 344
- Формула Бине́ 345
 - Карда́но 12
 - Коши́ для производных 172
 - Муа́вра 15–16
 - Нью́тона–Лейбница 133
 - Эйлера 37
- Френеля́ интегралы 273
- Фробе́ниуса теорема 6
- Функция алгебраическая 52–53
 - аналитическая 105
 - гармоническая 115
 - — сопряженная 116
 - голоморфная 105–106
 - дробно-линейная 52, 89
 - Жуковского 100
 - линейная 52, 89
 - логарифмическая 43
 - мероморфная 238
 - моногенная 105
 - монодромная 105
 - обратная 302
 - однолистная 286
 - передаточная 337
 - рациональная 52
 - регулярная 105
 - синектическая 105
 - степенная 54
 - тока 84
 - трансцендентная 53
 - целая 105
 - — рациональная 52
 - экспоненциальная 36
 - элементарная 51
- Числа Берну́лли 192
 - комплексные 8–10
 - мнимые, чисто мнимые 13
 - сопряженные 17
 - Фибона́ччи 344

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
I. Что называют комплексной плоскостью и в чем ее отличие от действительной	5
II. Как оперируют со степенными рядами	25
III. Какие функции называют элементарными и почему среди них есть многозначные	43
IV. Что называют однозначными ветвями и точками ветвления многозначных функций	59
V. В чем суть понятия производной функции комплексной переменной	71
VI. Какими свойствами обладают отображения дробно-линейными функциями	89
VII. Какие множества на плоскости $\mathbb{C}$ называют областями, а функции — аналитическими.....	105
VIII. Как вводится интеграл по комплексной переменной.....	117
IX. Что называют индексом замкнутого контура и на что он указывает	135
X. Какую область называют односвязной и что утверждает теорема Коши	149
XI. Что выражает интегральная формула Коши и каковы свойства интеграла Коши.....	165
XII. Как оперируют теоремой и интегральной формулой Коши и что утверждают теоремы Тейлора и Лорана.....	177
XIII. Что следует из теоремы Тейлора.....	195
XIV. Как выделяют и классифицируют особые точки аналитических функций.....	209

XV.	Что называют вычетами аналитических функций и как ими оперируют	229
XVI.	Как, применяя вычеты, вычисляют интегралы по незамкнутым контурам	247
XVII.	В чем состоит принцип аргумента и что утверждает теорема Руше	275
XVIII.	Какие общие принципы свойственны отображениям аналитическими функциями	285
XIX.	Что такое преобразование Лапласа и каковы его свойства	309
XX.	Как оперируют преобразованием Лапласа	331
	Приложение. Буквы древнегреческого письма	346
	Список цитированной литературы	347
	Предметный указатель	350