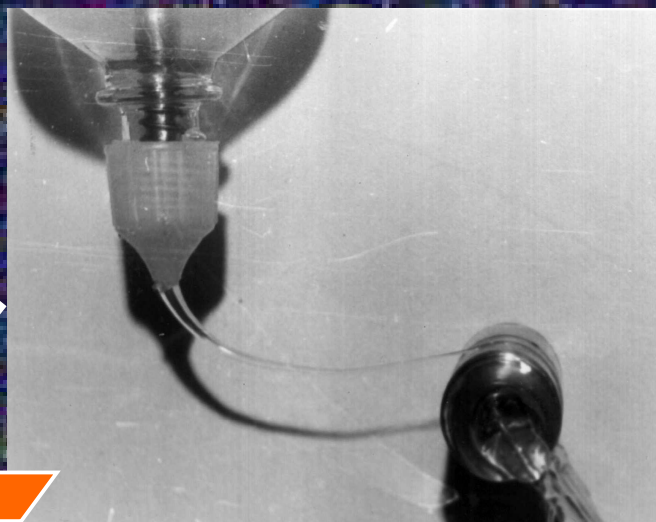
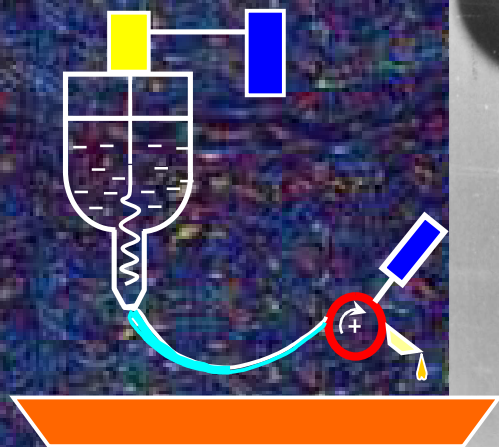




ШАПОВАЛОВ В.М.

**МЕХАНИКА
ЭЛОНГАЦИОННОГО
ТЕЧЕНИЯ ПОЛИМЕРОВ**

В.М. ШАПОВАЛОВ

МЕХАНИКА ЭЛОНГАЦИОННОГО ТЕЧЕНИЯ ПОЛИМЕРОВ



МОСКВА
ФИЗМАТЛИТ
2007

УДК 532.135
ББК 22.253
Ш 24

Шаповалов В.М. **Механика элонгационного течения полимеров.** – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007.-177 с. –ISBN 978-5-9221-0866-9

В книге с единых позиций рассматривается математическое моделирование базовых технологических процессов переработки полимеров. Анализируются стационарные и нестационарные продольные течения неньютоновских жидкостей в изотермических и неизотермических условиях. Приведены аналитические решения новых нелинейных задач. Обнаружены и подробно описаны новые физические эффекты течений неньютоновских жидкостей.

Предназначена для научных сотрудников, специалистов химической, машиностроительной и приборостроительной промышленности, может быть использована преподавателями вузов для составления курса лекций по теоретическим основам переработки полимеров и теплофизике.

Табл. 2. Ил. 75. Библиогр.-285 назв.

© В.М. Шаповалов, 2007

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие.....	5
Глава 1. Механика формования полимерных систем	8
1.1. Математическое моделирование процессов течения полимеров.....	8
1.2. Производство ориентированной полимерной пленки	9
1.2.1. Методы получения плоских пленок	10
1.2.2. Структурные изменения при формовании пленок.....	12
1.2.3. Теоретические исследования теплообмена при формовании и ориентационной вытяжке полимерных пленок.....	15
1.2.4. Коэффициент теплообмена при формовании пленки.....	16
1.2.5. Реодинамика формования плоских полимерных пленок.....	18
1.2.6. Теоретические исследования охлаждения пленки на барабане.....	20
1.3. Состояние исследований в области получения профилированных волокон.....	22
1.3.1. Математическое моделирование процесса формования профилированных волокон	23
1.4. Вопросы контроля реологических свойств полимеров в условиях растяжения.....	28
1.5. Упрощения в постановке задач механики неньютоновских жидкостей.....	31
Глава 2. Продольное течение плоской полимерной струи.....	34
2.1. Реодинамика элонгационного течения плоской полимерной струи при вытяжке пленки.....	34
2.2. Неизотермическая вытяжка плоской аномально-вязкой пленки.....	39
2.3. Влияние собственного веса жидкости на течение вертикальной струи.....	44
2.3.1. Аномально-вязкая (степенная) жидкость.....	44
2.3.2. Жидкость максвелловского типа.....	47
2.3.3. О бесфильтерном формовании.....	49
2.3.4. Нестационарное течение вязкой жидкости.....	52
2.4. Остаточное течение жидкости на валке.....	54
2.5. Нанесение высоковязкой жидкости на движущуюся подложку.....	58
2.6. Вытяжка полимерной пленки на валковых устройствах с учетом сил трения о поверхность валка.....	66
2.6.1. Элонгационное течение вязкоупругой струи в условиях внешнего трения. Эффект stick-slip (залипание-проскальзывание).....	71
2.7. Саморазогрев при растяжении аномально вязкого цилиндра в теплопроводной среде.....	89
2.8. Термическое взаимодействие в системе валок - плоская полимерная заготовка.....	86

2.8.1. Температурное поле в рабочей фазе процесса.....	87
2.8.2. Температурное поле вала в фазе холостого пробег.....	90
2.8.3. Численный анализ решения.....	91
Глава 3. Элонгационное течение свободной струи в условиях поперечного действия сил собственного веса.....	97
3.1. Уравнения равновесия свободной струи жидкости.....	97
3.1.1. Течение упруго вязкой жидкости.....	99
3.1.2. Неизотермическое течение аномально вязкой жидкости....	105
3.1.3. Влияние капиллярных сил.....	106
3.2. Исследование устойчивости.....	108
3.2.1. Дискретизация уравнений.....	111
3.2.2. Результаты численного решения.....	114
3.2.3. Влияние теплообмена на нестационарные режимы течения.....	119
3.2.4. Динамические режимы течения упруговязкой жидкости..	129
3.3. Экспериментальное исследование свободной струи.....	135
3.4. Основные результаты.....	137
Глава 4. Стационарное элонгационное течение некруглой струи с учетом действия капиллярных сил.....	140
4.1. Анализ напряжений.....	140
4.1.1. Применение принципа суперпозиции для анализа поля скоростей в зоне формирования.....	142
4.1.2. Кинетическое уравнение формоизменения профилированного волокна.....	144
4.2. Автомодельное решение для безынерционного случая.....	144
4.2.1. Регулярный режим формоизменения.....	148
4.2.2. Оценка сил инерции.....	150
4.2.3. Анализ математической модели изохорического течения под действием капиллярных сил.....	152
4.3. Конфигурация волокна в условиях застывания.....	153
4.3.1. Математическая модель неизотермического формования профилированного волокна.....	154
4.3.2. Модель изотермического формования	158
Литература.....	161
Об авторе.....	177

ПРЕДИСЛОВИЕ

Течения растяжения давно и прочно заняли место основного элемента в таких важных областях техники и технологии как двигатели внутреннего сгорания и топочные устройства, где они используются при распыливании жидкостей форсунками. Столь же важную роль эти течения играют в таких широко распространенных технологических процессах как струйное резание, гранулирование, кондиционирование, пылеочистка, охлаждение, распыливание инсектицидов в сельском хозяйстве, сушка и окраска распыливанием. Производство искусственных, синтетических и стеклянных волокон и пленок, составляет важную часть современной химической технологии. Струйные и пленочные течения неньютоновских жидкостей играют весьма важную роль в экспериментальной реологии. На основе наблюдения распространения и распада струй создаются методы измерения поверхностного натяжения.

Струи используются для абсорбирования и увлечения газов, для отвода тепла, как средство борьбы с пожарами и для дождевания.

В последние годы появились и новые «экзотические» области применения свободных струйных и пленочных течений в технике. В связи с катастрофическими последствиями аварий танкеров появляются исследования растекания нефтяных пленок по спокойной водной поверхности при действии сил веса, поверхностного натяжения и вязкости и о влиянии на такие пленки волн. Подобные вопросы решаются также в связи с новым технологическим методом производства листового стекла – флоат-процессом Пилкингтола. Создание современных печатающих устройств привело к использованию струй капельной жидкости (чернил) в принтерах. Все большее применение находят тонкие струи металлов в литейном производстве при получении проволоки, дроби и т.п. Новые методики диагностики в урологии также основаны на исследовании динамики о распада струй. Своеобразное применение находит эффект гиперустойчивости растягиваемых нитей, обнаруженный Тейлором. Он лежит в основе способа получения направленно-армированных пластмасс, когда жидкая эмульсия полимер-полимер продавливается через сходящийся насадок, и капли дисперсной фазы превращаются в систему тончайших армирующих нитей. Этот же эффект играет важную роль в повышении устойчивости вытянутых капель дисперсной фазы в эмульсиях. В производстве минеральной ваты жидкие струи отрываются от слоя жидкости на поверхности вращающегося вала и растягиваются под действием центробежных сил. Устойчивость течения в струях обусловлена в данном случае растяжением и ростом вязкости с охлаждением струи. Даже в технологии, связанной с управлением термоядерным синтезом, используются свободные жидкие струи и пленки. Так, таблетки аммиака и водорода получают при замораживании капель, на

которые распадаются жидкие струи, а свободные пленки жидкого лития планируется применять для защиты стенок термоядерных реакторов от разрушительного действия рентгеновского излучения.

Неньютоновские жидкости, как правило, более «вязкие», чем обычные ньютоновские (в том смысле, что при сравнимых кинематических условиях в них развиваются большие внутренние напряжения), поэтому ползущие течения составляют наиболее интересную категорию течений полимерных жидкостей. Если в ползущих течениях ньютоновских жидкостей уравнение движения линейно, то в неньютоновском случае оно нелинейно. Это справедливо независимо от того, в какой форме принимается реологическое уравнение состояния и существенно усложняет задачу математического моделирования.

При последующем анализе рассматриваются взаимосвязанные вопросы гидродинамической теории свободных струй применительно к процессу формирования длинномерных изделий плоских пленок, моноволокон и профилированных волокон. Также рассмотрены другие виды течения, связанные с переработкой полимеров.

В первой главе представлен обзор теоретических и экспериментальных исследований, посвященных моделированию базовых технологических процессов переработки полимеров. Рассмотрены общие подходы при анализе задач, связанных с проявлением капиллярных эффектов (Ярин А.Л., Ентов В.М., Шарчевич Л.И., Султанов Ф.М., Епихин В.Е., Шкадов В.Я., Новиков А.А.) и нестационарных квазиодномерных течений (Matovich M., Pearson J.R.A., Kase S., Matsuo T., Ярин А.Л., Ентов В.М., Колпашиков В.Л., Хусид Б.М.). Уравнения длинноволнового приближения, выражающие законы сохранения массы и продольного импульса, применяются в основном для анализа осесимметричных течений в условиях изотропной деформации в радиальном направлении.

Особое внимание уделено интенсивно развивающемуся в последние годы подходу, связанному с понижением размерности задачи – описанием течения как одномерного или двумерного континуума. Такой подход ведет к существенным упрощениям и позволяет учесть ряд новых эффектов, в частности, специфику реологического поведения и асимметрию граничных условий. Квазиодномерный подход, значительно упрощая определяющие уравнения, обеспечивает достаточную точность результатов. Есть все основания систематически использовать этот подход при изучении динамики свободных струй и пленок аномальных жидкостей.

Во второй главе представлены результаты исследования элонгационного течения плоской струи при формировании полимерной пленки. Предложено количественное описание «ширительного» эффекта. Исследованы вопросы прядомости и укладки плоской струи на поверхность барабана. Проанализировано остаточное течение жидкости на поверхности вала. Дано объяснение эффекта стик – слип (залипание – проскальзывание) при ориентационной вытяжке плоской полимерной пленки. Изучено влияние

термической инерции охлаждающего вала на температурное поле полимерной заготовки.

В третьей главе рассмотрены гидродинамические закономерности продольного течения свободной струи в условиях поперечного действия гравитационных сил. Впервые обнаружен и подробно описан эффект бифуркации стационарного течения (катастрофа складки). Для аномальных жидкостей и неизотермических условий проанализированы стационарные и нестационарные режимы течения.

В четвертой главе дана математическая модель формирования профилированного волокна. Для изотермических и неизотермических условий предложена теория капиллярной эволюции поперечного сечения в условиях элонгационного течения.

Из соображений компактности, сведения о неньютоновской гидромеханике, теории теплопроводности, реологии опущены. Для изучения этих вопросов можно рекомендовать оригинальные работы А.Я. Малкина, А.В. Лыкова, Д.М. Мак-Келви, Дж. Астарита и др., где общие принципы изложены исчерпывающим образом.

Автор выражает признательность сотрудникам кафедры «Процессы и аппараты химических производств» Волгоградского государственного технического университета д.т.н., проф. Н.В. Тябину, д.т.н., проф. Г.В. Рябчуку, к.т.н., доц. С.А. Трусову, к.т.н., доц. В.М. Ящуку за внимание к работе и полезные обсуждения. Решающее влияние на определение тематики настоящей работы оказали к.т.н., с.н.с. Л.М. Бедер (ВНИИСВ, Тверь), д.т.н., проф. В.М. Ентов и д.ф.-м. н. А.Я. Ярин (Институт проблем механики, Москва). Также автор признателен профессорам МГАТХТ им. Ломоносова В.Н. Кулезневу, В.С. Власову, Л.Б. Кандырину, Э.М. Карташову за полезное обсуждение научных результатов.

ГЛАВА 1

МЕХАНИКА ФОРМОВАНИЯ ПОЛИМЕРНЫХ СИСТЕМ

Приведен анализ литературных источников по проблемам математического моделирования процессов тепло - и массопереноса при формировании полимерных пленок, волокон. Особое внимание уделено последним достижениям теории тепло - и массопереноса реологически сложных сред. Представлен сравнительный анализ имеющихся математических моделей формирования длинномерных изделий типа пленок и волокон.

1.1. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ТЕЧЕНИЯ ПОЛИМЕРОВ

В химической технологии в последнее время приобрело широкое распространение создание математических моделей процессов. Наличие математической модели определяет степень изученности процесса и существенно облегчает задачу его оптимизации и автоматизации.

Выбор объектов исследования связан со следующими обстоятельствами. Во-первых, свободные струи и пленки представляют собой удобную модель для изучения механизма влияния теплообмена и реологических свойств жидкости на характер течения. Это делает теоретический анализ таких течений весьма важным и актуальным. Во-вторых, течение растяжения сравнительно легко реализуется в лабораторных условиях и может широко использоваться в экспериментальной реологии. И, наконец, в-третьих, анализ теплообмена и течения в струях и пленках важен с точки зрения структурообразования (ориентация, кристаллизация), а также для разработки теоретических основ базовых процессов переработки полимеров, их усовершенствования и оптимизации.

Современный математический аппарат позволяет решать широкий круг прикладных задач. Методы решения инженерных задач делятся на аналитические и численные; точные и приближенные; детерминированные и вероятностные. Широко применяются следующие детерминированные приближенные методы: вариационные и ортогональных проекций (Релея-Ритца, Бубнова-Галеркина, Лейбензона, Канторовича, Био и др.); операционные (конечных и бесконечных преобразований); возмущений (малого параметра); сведение к дифференциальным и интегральным уравнениям разных типов; подстановка готовых форм решения; метод теории размерности; линеаризации и другие. Подробное описание методов содержится в работах [1-7].

Выбор метода решения является делом субъективных пристрастий исследователя, однако аналитическое решение имеет непреходящую ценность, поскольку в большинстве случаев упрощая анализ влияния различных факторов на исследуемый процесс, позволяет экономить время при

численной обработке результатов и выполнять асимптотические оценки. При разработке математической модели в задачу исследователя входит наибольшая корректность физической постановки и выбор оптимального метода решения. Проблема математического моделирования технологических процессов производства химических волокон освещается в работе [8]. Подобно совершенствованию и модернизации технологического оборудования [9] математические модели соответствующих процессов претерпевают существенные изменения (уточняются, учитывают новые факторы).

В связи с резким увеличением выпуска синтетических волокон и пленок, повышенным требованиям к их качеству встал вопрос создания рационального оборудования их производства. В ряде случаев подготовка данных для проектирования оборудования проводится интуитивно, без достаточного физического обоснования. Особенно это касается процессов теплообмена, экспериментальное изучение которых сопряжено со значительными трудностями. Так, проблема непосредственного измерения температуры поверхности пленки или волокна окончательно не решена. Измерение температуры в поперечном сечении пленки в настоящее время практически осуществить невозможно, хотя именно там формируется надмолекулярная структура.

Различия в температурах, скоростях движения, производительности между лабораторными и производственными установками создают значительные трудности при определении режимов технологического процесса. Поэтому технологическое изыскание режимов обработки часто приходится переносить на этап наладочных работ уже при пуске оборудования, что, в свою очередь, удлиняет сроки ввода его в эксплуатацию, а иногда приводит к нарушению технологического режима.

Общей тенденцией математического моделирования является комплексный характер моделей и, соответственно, преимущественное применение численных методов анализа.

1.2. ПРОИЗВОДСТВО ОРИЕНТИРОВАННОЙ ПОЛИМЕРНОЙ ПЛЕНКИ

Результаты ряда экспериментальных работ, посвященных исследованию эффектов, характерных для струй и пленок полимерных жидкостей, показывают, что анализ картины течения дает возможность для косвенной оценки внутренних напряжений в жидкости. Это делает такие течения весьма привлекательными с точки зрения развития и совершенствования методов элонгационной реометрии. Исследования свободных струйных и пленочных течений имеют высокую эвристическую ценность, поскольку проливают свет на природу аномалий гидродинамики полимерных жидкостей в целом.

Кроме того, свободные струи пленки полимерных жидкостей являются основным элементом многих технических устройств и технологических

процессов. При формировании волокон с течением в жидкой части нити связан ряд нетривиальных гидродинамических эффектов.

Есть все основания для продолжения детального исследования свободных струйных и пленочных течений ньютоновских и аномальных, полимерных жидкостей, поскольку результаты этих исследований важны как в общетеоретическом, так и в прикладном плане.

В последние годы нашел широкое применение способ получения волокон, основанный на способности ориентированного материала к расщеплению (фибрилляции) [10,11,12,13]. Производство фибриллированных волокон способствует росту производительности труда, как на заводах химических волокон, так и на предприятиях, занимающихся переработкой химических волокон в изделия.

Изделия из полиолефиновых фибриллированных и плоских нитей применяются как для бытовых, так и для технических целей [12-16]. Из плоских нитей изготавливают упаковочный материал для хранения овощей, фруктов, зерна и других продуктов. Фибриллированные нити используются в производстве морских канатов, тросов, шпагата. Полученные изделия отличаются равномерностью свойств по длине, высокой эластичностью, хорошей плавучестью и легко образуют узел. Штапельные фибриллированные волокна можно использовать в производстве нетканых материалов: войлока, подложек для облицовки стен и полов.

Для изготовления декоративных тканей применяют волокна, как в чистом виде, так и в комбинации с натуральными и химическими волокнами. Нефибриллированные плоские нити, используемые для изготовления упаковочных материалов, имеют прочность 310-350 МН/м² и удлинение 6-12 %. Прочность упаковочных материалов из плоской полипропиленовой нити в два раза выше прочности льняных нитей, а масса меньше в 2,3 раза. Изделия из полипропилена имеют прочность шва на 13% выше, чем льняные.

Масса единицы готового изделия – каната – из фибриллированной нити уменьшается в 1,5-2 раза по сравнению с массой каната, изготовленного из натуральных нитей. Крученые изделия из фибриллированных полипропиленовых нитей имеют ряд преимуществ по сравнению с изделиями из натуральных и химических волокон: высокую прочность, гидрофобность, биологическую устойчивость и стабильность размеров [12].

Перечисленные преимущества нитей из ориентированных полиолефиновых пленок дают основание предположить, что исследования в области получения и переработки этих нитей будут продолжены.

1.2.1. Методы получения плоских пленок

В настоящее время производится широкий ассортимент полимерных пленок. Это соответственно определяет большое разнообразие технологических схем и конструктивного оформления процессов их получения. Подробно освещение вопросов получения полимерных пленок имеется в работах [18-23]. Существует три основных способа изготовления

полимерной пленки [24]. Способом полива получают ацетатную пленку, специальную пленку из поливинилхлорида и поливинилового спирта. Пленка образуется вследствие испарения растворителя из вязкотекучей массы. Теория этого процесса представлена в работе [25]. Процесс изготовления плоской пленки путем экструзии имеет некоторое подобие с поливом. Расплав выдавливается из формующей фильеры и при охлаждении превращается в пленку. При каландровании применяют порошкообразное сырье, которое после пластикации подается на вращающиеся валки каландра.

Разрабатывается много методов направленного влияния на процесс формования с целью управления этим процессом, а также повышения качества формируемой пленки. В работе [26] исследовалось влияние вибрации формующей части головки экструдера на разбухание экструдата, что в свою очередь существенно влияет на динамику течения расплава в зоне формования. В работе [27] предложен профиль сечения фильерной головки и способ регулирования её зазора. Предложено также устанавливать экран для уменьшения вибрации пленки от струи охлаждающего устройства. Для фиксации ширины и предотвращения утолщения краев пленки иногда устанавливают в зоне формования дополнительный валок.

Способы охлаждения пленки при формовании весьма разнообразны. Для охлаждения применяется воздушный обдув, валки, а также электростатическое поле [27]. В работе [28] предложена эмпирическая зависимость толщины листа от скорости вращения червяка и скорости отбора, на основании которой построена система автоматического управления.

Возрос спрос на более тонкую пленку, во-первых, ввиду изменения запросов производства и, во-вторых, по причине ее более низкой стоимости. Требования относительно качества пленки очень разнообразны. Наиболее важные: равномерность толщины, однородность и прозрачность, прочность, низкая паро- и газопроницаемость, тепло- и морозостойкость.

Наиболее распространенным способом получения пленки является экструзия с последующей ориентацией. Вопросы технологии производства и моделирования процесса получения рукавных пленок освещены в работах [9,29]. При ориентации первоначально толстая пленка растягивается под действием тянущего усилия. Вытягивание организуется при температурах, которые находятся намного ниже точки плавления.

Ориентацию можно осуществлять различными способами [9]. Самой простой является продольная ориентация, которая достигается растяжением в продольном направлении. Поперечная ориентация более сложна в конструктивном оформлении. При применении обоих способов получают двуосноориентированную пленку. Обзор методов одноосной вытяжки приведен в работе [30]. Одним из основных вопросов при ведении процесса ориентации является вопрос сохранения ширины пленки, поскольку установлено [31], что уменьшение ширины отрицательно сказывается на её качестве. В работе [30] анализируются конструктивные мероприятия, позволяющие снизить эффект уменьшения ширины. Величина ужения

зависит также от коэффициента трения пленки о вытяжные валки [31]. Расчету параметров процесса ориентации посвящена работа [32].

При охлаждении плоских пленок на специальных валках температура приемных валков оказывает значительное влияние не только на скорость охлаждения, но и на их физико-механические свойства, поэтому температуру тщательно контролируют и регулируют в процессе работы. Приемные валки охлаждают обычно проточной водой или водой из специальных холодильных установок. Для улучшения теплового контакта пленки с поверхностью приемного валка устанавливают прижимной ролик или применяют воздушный нож, который препятствует образованию воздушной прослойки между пленкой и валком.

Свойства пленки существенно зависят от метода охлаждения. При охлаждении пленки на валках обеспечивается равномерность физико-механических свойств, однако пленки получаются сравнительно мутными. При охлаждении в водяной ванне пленка отличается большей жесткостью, сильным блеском и хорошей прозрачностью. Работы [35-38] посвящены различным технологическим аспектам получения плоских пленок, в том числе и многослойных.

1.2.2. Структурные изменения при формовании пленок

При формовании волокон, пленок или блочных изделий расплав полимера подвергается значительным механическим воздействиям типа перемешивания, экструзии, продавливания через отверстия фильеры и т.п. Эти воздействия приводят к появлению молекулярной ориентации, которая в ряде случаев сказывается на структуре и свойствах готовых изделий. Наличие надмолекулярных структур в аморфных и кристаллических полимерах оказывает существенное влияние на релаксационные и прочностные свойства полимеров. Характер такого влияния установлен по преимуществу качественно, что не всегда позволяет делать рекомендации по созданию оптимальных условий переработки полимеров. Однако создание математических моделей деформационных и тепловых процессов переработки должно оказать решающее значение при оптимизации соответствующих технологических процессов [8, 39].

Варьирование надмолекулярной структуре путем изменения условий кристаллизации полимера во многих случаях является удобным технологическим приемом регулирования механических свойств изделий. Наиболее простая количественная оценка надмолекулярной структуры заключается в определении двух параметров - размеров сферолитов и степени их прорастания друг в друга. Приведенные в работе [40] данные показывают, что механическое поведение пленок полипропилена, состоящих из сферолитов разных размеров, в значительной степени определяется именно этим параметром. Ряд исследований показывает [41, 42], что во многих изделиях из полимеров наряду с надмолекулярной структурой в обычном смысле этого слова, самой большой структурной единицей, которой является сферолит,

существенную роль играют более крупные структурные образования. Эти надсферолитные структуры образуются в результате неоднородности температурного поля или механических напряжений, при которых происходит кристаллизация.

После выхода из формующей головки расплав полимера сильно разбухает и практически дезориентируется. Однако, как показали исследования волокон и пленок из полиэтилена и полипропилена, полученных методом экструзии, после кристаллизации полимера в материале вновь возникает ориентация, направление и степень которой зависят от условий кристаллизации. Непременным условием для развития ориентации является растяжение расплава. Ориентация вдоль оси волокна определяется скоростью деформации расплава, однако она также зависит от условий кристаллизации, в первую очередь от скорости снижения температуры в полимере.

Некоторые полимеры в зависимости от условий кристаллизации способны к образованию нескольких полиморфных форм, имеющих различную стабильность. Волокна из полипропилена после формования имеют несовершенную паракристаллическую структуру, которая в условиях последующих обработок переходит в более стабильную моноклинную [43]. Для процессов кристаллизации из расплавов полимеров при отсутствии растяжения или в слабых механических полях характерно формирование сферолитной структуры [44-46]. Большая серия исследований образования надмолекулярных структур при формовании волокон из расплава представлена в работах [47-49], где было показано, что в зависимости от величины механических напряжений при формовании резко изменяется характер образующихся структур. При малых величинах механического поля происходит сплющивание сферолитов, так что их малая ось совпадает с направлением действующих усилий. Такой асимметричный рост по отношению к направлению растяжения вполне понятен, если исходить из зависимости температуры плавления полимеров от величины механического поля [44]. По мере роста механических напряжений образование сферолитной структуры подавляется, и начинают появляться в большом количестве фибриллярные образования.

Влияние молекулярной ориентации на процессы структурообразования при кристаллизации можно проследить на примере технологии получения из расплавов полимеров волокон с положительной фильерной вытяжкой. Фильерная вытяжка заключается в одноосном растяжении расплава при его охлаждении и создается за счет больших (по сравнению со скоростью истечения из фильеры) скоростей отбора [50].

Весь путь волокна можно условно разделить на зоны. Первая зона - это область вблизи выхода из фильеры, где полимер находится в вязкотекучем состоянии и имеет наименьшую вязкость. Во второй зоне происходит повышение вязкости и приближение полимера к высокоэластическому состоянию, и даже, переход к нему. В третьей зоне идет отверждение полимера и резкое возрастание его вязкости. И, наконец, четвертая зона представляет собой уже полностью затвердевшее изделие. Имея в виду, что во всех четырех зонах действует, в первом приближении, одна и та же растягивающая сила, а

вязкость в зоне отверждения намного выше вязкости в первой зоне. Можно сделать заключение о том, что наибольшая деформация расплава и молекулярная ориентация имеют место в первой и во второй, а в третьей из-за релаксации они сравнительно малы. Кроме того, ясно, что молекулярная ориентация в зоне отверждения лимитируется прочностью расплава или раствора в самом слабом месте - в зоне выхода из фильеры. Как расчеты, так и эксперимент показывают, что расплав разрывается в первой зоне задолго до достижения значительной степени ориентации в зоне отверждения. В результате в зоне отверждения волокна не удастся создать значительной молекулярной ориентации и провести ориентационную кристаллизацию. Этот вывод подтверждается исследованиями влияния фильерной вытяжки на надмолекулярную организацию и механические характеристики полимерных изделий [51].

Одним из возможных направлений решения проблемы получения высокопрочных одноосноориентированных изделий (нитей, пленок) из гибкоцепных кристаллизующихся полимеров является разработанный сотрудниками ИВС АН СССР С.Я. Френкелем, В.Г. Барановым и др. метод ориентационной кристаллизации [50, 52, 53].

В отличие от традиционного метода [44, 54], заключающегося в формования незначительно ориентированных и частично складчато закристаллизованных изделий и последующей их ориентационной вытяжки, сопровождающейся перестройкой кристаллической структуры в благоприятном для повышения прочности направлении (при нагревании до близких к температуре плавления температур) по методу ориентационной кристаллизации высокопрочное изделие получается путем однократного вытягивания свежесформованного изделия при температуре плавления. При этом продольная ориентация макромолекул, происходящая под действием силового поля, стимулирует с самого начала получение кристаллитов в форме, наиболее благоприятной для достижения высоких физико-механических показателей.

Необходимым условием успешного проведения процесса ориентационной кристаллизации является недопустимость распространения усилия вытягивания к фильере, недопустимость фильерной вытяжки, т.е. предварительной ориентации макромолекул. Для выполнения этого условия зона формования и зона вытягивания должны быть разделены так называемым тормозом, в качестве которого обычно используют охлаждающий валок. При этом пленка на сходе с валка подвергается ориентационному вытягиванию, и температура пленки на сходе существенным образом влияет на режим ориентационной вытяжки. Таким образом, процесс охлаждения пленки в зоне формования и на барабане в значительной степени определяют прочностные свойства изделия. Согласно данным [55] зависимость прочности полиэтиленовой пленки от её температуры на сходе с валка имеет экстремальный характер, поэтому режим охлаждения заготовки на валке весьма важен для результатов ориентационной вытяжки.

Формование волокон в условиях сильного растяжения макромолекулярных клубков позволяет закристаллизовать их в развернутом состоянии и получить линейные кристаллы - фибриллы, обладающие малым

числом дефектов и большой прочностью на разрыв. В формовании из растворов и гелей наряду с традиционным наматыванием на бобину удастся использовать элонгационные области течений Куэтта и Пуазейля [56]. Получение сверхпрочных волокон, основанное на кристаллизации макромолекулярных цепей в развернутом состоянии, является в настоящее время одной из важнейших задач технологии. Наряду с известными способами получения волокон разрабатываются и другие, в которых формуются расплавы и даже полимеры в твердом состоянии [56].

1.2.3. Теоретические исследования теплообмена при формовании и ориентационной вытяжке полимерных пленок

Благодаря низкой теплопроводности полимеров при охлаждении пленки возникает градиент температур в поперечном направлении, зависящий от толщины пленки и условий охлаждения (чисел Фурье и Био). Неравномерность охлаждения приводит к неоднородности формирования первичной структуры, что может сказаться на способности пленки к последующей ориентационной вытяжке. Динамика охлаждения полимерной струи помимо качества определяет также производительность оборудования и конструктивное оформление самого процесса.

Теоретических исследований по теплообмену плоских пленок значительно меньше, чем, например, по теплообмену полимерных волокон и мононитей. Однако с физической точки зрения указанные задачи имеют много общего, что дает возможность переносить отдельные результаты с волокон на пленки и применять сходные методы решения.

Процесс охлаждения расплава может иметь различную техническую реализацию, что находит свое отражение в постановке краевых задач. Наиболее корректной следует считать сопряженную постановку, когда состояние пленки и окружающей среды описывается системой дифференциальных уравнений тепло- и массообмена. Однако анализ такой задачи связан со значительными математическими трудностями. Поэтому обычно рассматривают отдельно внутреннюю тепловую задачу (определение поля температур, скоростей в пленке) и внешнюю (определение эффективного коэффициента теплоотдачи).

Описания процесса теплообмена при формовании пленки [57-61] получены с использованием одномерного уравнения теплового баланса. Более корректной представляется формулировка задачи теплообмена рукавной пленки [57], где авторы наряду с указанными выше факторами учитывают диссипативное тепловыделение и тепловой эффект кристаллизации. К недостаткам подходов [57, 61] следует отнести пренебрежение тепловым сопротивлением пленки, поскольку при высоких интенсивностях охлаждения, которые часто имеют место при получении рукавных пленок, внутреннее термическое сопротивление может быть соизмеримо с внешним. Для малых чисел Био Малиновским В.В. [62] предложено простое выражение для расчета охлаждения плоской полимерной пленки постоянной толщины, согласно

которому температура экспоненциально зависит от произведения чисел Фурье и Био. Однако в процессе формования вследствие вытяжки толщина пленки изменяется и расчетную формулу [62] можно использовать как оценку для случаев малой вытяжки в зоне формования. Точное решение о температурном поле в пластине постоянной теплопроводности получено А.В. Лыковым [6] и Карслоу [63].

Из анализа имеющихся работ, посвященных теплообмену пленок, следует, что для определения поля температур необходимо решить четыре основных вопроса:

- 1) данные по динамике пленки в зоне течения (учет конвективного переноса),
- 2) физическая постановка и решение внутренней тепловой задачи,
- 3) определение эффективного коэффициента теплоотдачи,
- 4) информация о теплофизических характеристиках полимера в условиях рассматриваемого процесса включая теплоту кристаллизации.

В общем случае температурное поле в движущейся среде описывается уравнением Фурье-Кирхгофа [64], согласно которому температура элемента жидкости изменяется вследствие: молекулярной теплопроводности, конвективного переноса, вязкой диссипации и теплового эффекта кристаллизации. Диссипативным тепловыделением в процессе формования обычно пренебрегают ввиду небольшой кратности вытяжки в зоне формования и сравнительно невысокой вязкости расплава. Начальным условием для жидкой струи является эпюра температур в сечении, где закончился процесс разбухания. Обычно принимают её постоянной по сечению [57-60].

В процессе формования струя ввиду вытяжки изменяет свое сечение по длине, что существенно затрудняет постановку тепловой задачи и требует предварительного исследования формы струи. Суров Ю.Т.[60], исследуя теплообмен при формовании волокна, предложил конусообразный профиль волокна на участке от фильеры до точки, где радиус становится постоянным, разбить на систему элементарных цилиндров. При этом модель теплообмена тела неправильной формы представляется как система моделей тел правильной формы. При этом игнорируется радиальный конвективный перенос.

На свободной поверхности волокна или пленки имеет место граничное условие третьего рода, согласно которому количество тепла, отданное поверхностью пленки по закону Ньютона, равно количеству тепла, подводимому по кондуктивному механизму к поверхности.

Проблемы измерения температуры полимерных пленок в процессе их получения подробно рассмотрены в работах [65-67]. В работе [68] анализируется влияние толщины пленки на её излучательную способность.

1.2.4. Коэффициент теплообмена при формовании пленки

Коэффициент теплообмена является важной кинетической характеристикой, определяющей интенсивность охлаждения полимера в зоне

формования. Теплообмен между расплавом полимера и окружающей средой в общем случае осуществляется по трем механизмам: вынужденной конвекцией, свободной конвекцией и лучеиспусканием [69]. Теплообмену тел с окружающей средой посвящены работы [70-72], поэтому будут рассмотрены только вопросы, специфичные для процесса формования плоской полимерной пленки.

Гриффин и Трон [73], проводя эксперименты с плоским листом, вытягиваемым из щелевой фильеры, установили, что наличие поверхности фильеры приводит к уменьшению конвективной составляющей коэффициента теплообмена вблизи щели, обусловленное образованием застойных зон. С другой стороны, радиационное излучение пленки вблизи щели весьма значительно. Используя соответствующие формулы [73] можно показать, что вблизи щели фильеры эффект увеличения теплоотдачи излучением по величине примерно такой же, как и уменьшения конвективной составляющей. Поэтому суммарная ошибка, обусловленная не учетом этих двух явлений, весьма мала, кроме того, область, где эти процессы играют существенную роль, занимает только очень небольшую часть длины формируемой пленки [74].

Вынужденная конвекция обусловлена продольной скоростью движения формируемой пленки, что равносильно внешнему обтеканию пластины воздухом. Подробно эта задача рассмотрена в [72]. При обтекании пластины газом (жидкостью), его температура изменяется в пределах теплового пограничного слоя [75]. Путем решения уравнения Фурье-Кирхгофа найдена зависимость для локального числа Нуссельта. Формируемая пленка имеет температуру значительно выше окружающего воздуха, что обуславливает возникновение естественной конвекции. Толщина пограничного слоя при этом значительно больше, чем при вынужденной конвекции, поскольку скорости свободного движения малы. Теоретическое рассмотрение естественной конвекции в неограниченном объеме дано в работе [72]. Путем решения уравнения переноса импульса и энергии получено выражение для локального числа Нуссельта. Наибольшее распространение получила эмпирическая формула, обобщающая экспериментальные данные по теплоотдаче тел различной формы при свободной конвекции. Предложена степенная зависимость числа Нуссельта от произведения критериев Прандтля и Грасгофа [72, 76-78]. При этом установлено, что форма тела имеет второстепенное значение. Теплоотдача от бесконечной движущейся поверхности в условиях естественной и вынужденной конвекции исследована в работе [78]. Были приняты допущения: среда ньютоновская, вязкая диссипация незначительна, действуют лишь гравитационные силы, среда несжимаема, система двумерна, поток среды установившийся и ламинарный. Процесс описывается уравнениями сплошности, пограничного слоя и сохранения энергии. Решение ищется в виде полинома. Однако полученное решение неприемлемо для условий формования, поскольку описывается восходящее движение плоской поверхности.

Для случая поперечного обтекания движущегося продольно волокна предложена расчетная формула, учитывающая как осевую составляющую скорости, так и скорость поперечного потока [79]. Однако в условиях формования плоской пленки скорости сравнительно невелики и формула может дать

значительные погрешности. Граничное условие третьего рода может быть использовано при рассмотрении охлаждения тел лучеиспусканием [6, 80] путем линеаризации закона Стефана-Больцмана.

Согласно исследованиям [81, 82] при определении степени излучения полимерных пленок следует учитывать зависимость излученной теплоты от толщины излучателя, что имеет большое значение для тонких пленок. Теплоизлучающая способность полимерной пленки определяется не только его видимой поверхностью, но и внутренними слоями, которые также излучают. Согласно [8] существенное понижение излучательной способности наблюдается при толщинах меньше 0,5 мм.

1.2.5. Реодинамика формования плоских полимерных пленок

Характер течения полимерной пленки в зоне формования оказывает существенное влияние на протекающий при этом процесс теплообмена. В более точной постановке следует процессы теплообмена и течения рассматривать совместно. Эффекты неньютоновости в значительной степени подавляются эффектами неизотермичности, поскольку вязкость от температуры меняется в большей степени [83]. Хан [84] рассматривая формование рукавных пленок, использовал реологическую модель, которая учитывала эффекты аномалии вязкости и арренисову зависимость от температуры. Аналогично при рассмотрении формования полых волокон из расплава поликарбонатсилоксана авторы работ [85,86] использовали ньютоновскую модель с вязкостью, зависящей от температуры по закону Аррениуса. При снижении температуры расплава ниже температуры плавления считалась, что энергия активации вязкого течения возрастает вдвое, что обеспечивало практически полное прекращение деформации нити при дальнейшем понижении температуры.

Авторы [87] аналогично используя закон Аррениуса, момент затвердевания представляли внезапным ростом вязкости до бесконечности. Динамика раздувного формования рассмотрена в работах [84, 88-92]. Особенности развития возмущений в случае ускоряемых перепадом давления газа плоских пленок ньютоновских и реологически сложных, в частности упруговязких, жидкостей изучены в [89, 92]. Динамике раздуваемых цилиндрических пленок полимерных жидкостей в отсутствие возмущений посвящена работа [90]. Теоретические работы [87-92] основаны на анализе с использованием квазиодномерных уравнений тонких пленок [93, 94]. Устойчивость течения жидких пленок [88-92] анализировалась для изотермического случая, и положения этих работ могут быть использованы при переработке полимеров методом раздува или термоформования [95].

Теплоотдача от бесконечной движущейся поверхности в условиях естественной и вынужденной конвекции исследована в работе [78]. Были приняты допущения: среда ньютоновская, вязкая диссипация незначительна, действуют лишь гравитационные силы, среда несжимаема, система двумерна, поток среды установившийся и ламинарный. Процесс описывается уравнениями

сплошности, пограничного слоя и сохранения энергии. Решение ищется в виде полинома. Однако полученное решение неприемлемо для условий формования, поскольку описывает восходящее движение плоской поверхности.

Основные теоретические положения реологии полимеров представлены в работах [84,96-99], где также приведены примеры конкретного решения прикладных задач течения полимеров. Работа [98] посвящена построению реологических определяющих соотношений (РОС) разбавленных и концентрированных растворов и расплавов полимеров в рамках их микрофизических моделей. Метод основан на разделении по физическим процессам. В рамках феноменологической реологии для описания поведения полимерных жидкостей предложено значительное число различных РОС [96, 97]. Несмотря на то, что они все удовлетворяют таким общим принципам, как принципы затухающей памяти, объективности и др. и не противоречат второму началу термодинамики [97], невозможно указать, какой внутренней структуре жидкости отвечает то или иное РОС (и вообще существуют ли реальные жидкости, поведение которых соответствует иному РОС). Входящие в феноменологические РОС параметры (модуль упругости, время релаксации и др.) могут быть определены только из сопоставления макроскопической теории с экспериментом определенного типа.

В отдельных случаях даже в ньютоновском приближении можно получить ценные прикладные результаты. Например, в работе [100] на основе квазиодномерных уравнений динамики исследована устойчивость тонких струй и нитей высоковязких жидкостей, медленно натекающих на пластину. Результаты [99] позволяют сделать важный вывод о том, что применительно к интенсивным течениям растяжения полимерных жидкостей известная феноменологическая реологическая модель Максвелла с верхней конвективной производной обосновывается и в рамках микромеханического подхода.

Примером применения обобщенной модели Максвелла для элонгационного течения плоской пленки могут служить работы [19, 101]. Рассматривается изотермический случай с постоянным по длине градиентом скорости деформации. Решение получено в виде системы алгебраических уравнений. Реодинамика течения плоской вязкоупругой струи рассмотрена в работе [102]. Учитываются силы инерции, собственного веса и реологического сопротивления для моделей Максвелла, Уайта, Оствальда де Виля. Реодинамика формирования рукавной пленки вязкоупругой жидкости рассмотрена в [103].

При соответствующей организации течения свободной струи наблюдается существенное проявление сил собственного веса. В отдельных случаях этот фактор оказывает решающее влияние на технологический процесс. В работе [104] исследовано растяжение жидкого образца, выдавливаемого вертикально из отверстия произвольной формы. Сформулирована задача управления конфигурацией образца посредством изменения размера отверстия или скорости выдавливания. Подобная задача для трубчатой заготовки рассмотрена в [105].

Теория равновесия тяжелой нерастяжимой нити представлена в работах [106, 107]. В работе [107] решена задача о форме троса змейкового аэростата

под действием ветра, который имеет на различных высотах изменяющуюся величину и направление.

1.2.6. Теоретические исследования охлаждения пленки на барабане

После формования пленка охлаждается и фиксируется на поверхности термостатируемого барабана. При получении фибриллированных изделий [50,52,53] пленка на сходе с барабана подвергается ориентационной вытяжке. Температура на сходе определяет режим процесса ориентации, поэтому кинетика охлаждения в существенной мере определяет качество получаемой пленки. Кроме того, малая, измеряемая долями миллиметра, толщина пленки не позволяет исследовать распределение температуры инструментально, что также свидетельствует в пользу математического моделирования.

Толщина пленки более чем на два порядка меньше радиуса охлаждающего вала, поэтому её кривизной можно. В начальный момент времени одна из сторон пленки испытывает тепловой удар (соприкосновение с валком). Продолжительность теплового контакта определяется скоростью вращения и углом охвата пленкой барабана.

Нестационарный прогрев (охлаждение) плиты, имеющей постоянные теплофизические свойства, рассмотрен в работах [6, 64]. Решение получено методом Фурье. В работе [108] из анализа точного решения уравнения Фурье получены приближенные зависимости, характеризующие изменение средней по сечению температуры. Представляет интерес решение этой задачи М. Био [109]. Метод Био основан на термодинамической аналогии формулировки закона Ньютона в обобщенных координатах Лагранжа и закона теплопроводности Фурье. В решении Био процесс теплопроводности условно разбивается на две фазы, а профиль температур представляется в виде квадратичной параболы.

Пленка на охлаждающем валике значительно изменяет свою температуру, поэтому необходимо учитывать зависимость теплофизических свойств полимера от температуры и решения [6, 64, 108, 109] могут использоваться лишь для ориентировочных расчетов. Таким образом, задача охлаждения полимерной пленки является внутренне нелинейной. При решении такого рода задач встречаются значительные математические трудности, поэтому количество аналитически решенных задач с внутренней нелинейностью крайне невелико.

Решение подобной задачи выполнено А.В. Лыковым для полугораниченной среды [6]. Решение представляет систему алгебраических и трансцендентных уравнений. В работе [110] получено решение одномерной задачи теплопроводности для случая степенной зависимости коэффициента теплопроводности от температуры. В работе [111] для решения задачи с внутренней нелинейностью применен метод возмущений. Получено решение для полубесконечной среды с теплоемкостью линейно зависящей от температуры. Цирельман Н.М. [112] предложил следующий метод решения нелинейной задачи. В уравнении теплопроводности для неограниченной пластины делается подстановка специальной функции, содержащей зависимость

теплопроводности и теплоемкости от температуры. Полученное дифференциальное уравнение решается конечноразностным методом с использованием неявной абсолютно сходящейся схемы Кренка-Николсона. Выполнен расчет для постоянной теплоемкости и теплопроводности, зависящей от температуры линейно, экспоненциально и параболически.

Имеющиеся в настоящее время методики расчета основаны на предположении, что охлаждающая поверхность барабана не изменяет свою температуру [9, 113-115] или, что температура охлаждающей поверхности в начальный момент равна температуре термостатирующей жидкости [116]. В работе [117] была предпринята попытка учета теплопроводности барабана, однако авторы при формулировке краевой задачи принимают ряд некорректных допущений. Так, например, температурное поле в пленке и барабане считается стационарным, т.е. не учитывается конвективный перенос тепла в окружающем направлении обусловленный вращением барабана. В работе [118] численным методом решена задача охлаждения полимерного волокна на изотермической поверхности. В работе [116] рассматривается математическая модель теплообмена и неизотермической кристаллизации полимерной пленки на валках при различных граничных условиях. Теплообмен в полимерной пленке описывается нелинейным уравнением теплопроводности, учитывающим зависимость теплофизических свойств от температуры, а также теплоту кристаллизации. Для описания кинетики кристаллизации использовались уравнения Аврами-Колмогорова и уравнение автокаталитического типа. Задача решалась методом Видебурга. Предварительно методом Фурье было получено решение задачи для постоянных значений теплофизических свойств. Далее, неоднородная линейная задача решалась методом Галеркина-Канторовича. В результате получены профили температуры, степени кристалличности и мощности тепловыделений. Эта достаточно полная постановка задачи не учитывает незавершенности охлаждения валка в холостой фазе пробеге. В работе [119] подобная задача решена численно для полипропиленовой мононити.

Широкое распространение получили разностные методы решения задач нелинейной теплопроводности [120-123]. Однако численные методы для реализации требуют много машинного времени, неудобны при анализе (особенно для выявления асимптотических свойств решения) и при изменении условий требуют повторного расчета.

При охлаждении полимерной заготовки наряду с изменением теплофизических свойств наблюдается следующее явление. Фактический тепловой контакт между пленкой и валком является несовершенным, что может привести к существенным расхождениям теоретических и опытных результатов. На границе раздела возникает дополнительное термическое сопротивление, называемое контактным [124]. Тепло может передаваться теплопроводностью через контактные пятна и теплопроводностью, конвекцией, излучением в промежутках между ними [124, 125]. Численно учесть этот эффект весьма затруднительно, поскольку невозможно измерить площадь пятен воздуха и толщину воздушной прослойки. В работе [126] предложена гидродинамическая теория образования воздушной прослойки, согласно которой интенсивность

образования воздушных пятен зависит от соотношения сил инерции воздуха в клинообразном зазоре и сил реологического натяжения струи в зоне формования. Для предотвращения образования воздушной прослойки применяются следующие мероприятия [19]: электростатический прижим, воздушный нож (репель), вакуумирование зоны формования.

Задача термического взаимодействия перерабатываемого материала и вращающегося вала имеет достаточно широкое распространение [127-129]. Например, в теории вальцевания неньютоновских сред с учетом неизоэнтальпических эффектов [128]. В работе [129], предпринята попытка учесть влияние теплопроводности стенки вала на течение полимера в межвалковом зазоре.

1.3. Состояние исследований в области получения профилированных волокон

Важная область струйных течений, внешне очень простых, но играющих важную роль в современной промышленности и обнаруживающих нетривиальное динамическое поведение, лежит в основе технологического процесса формования волокон. Число работ по анализу процесса формования волокон огромно; даже упомянуть их здесь не представляется возможным. Детальное описание элонгационного и других способов формования волокон с позиций механики представлено в монографиях [69, 83, 84, 87].

История развития технологии получения профилированных волокон начинается практически с момента зарождения производства синтетических волокон. К настоящему времени разработано большое количество самых разнообразных форм поперечного сечения нитей и соответственно капилляров фильер. В обзоре [130] их представлено 170 и поиски новых профилей продолжаются. Сложное поперечное сечение придает волокнам новые физико-механические и потребительские свойства. Появление экзотических профилей объясняется стремлением найти оптимальный вариант, обеспечивающий получение волокон, приближающихся по свойствам к природным.

При получении профилированных волокон и нитей можно, не прибегая к специальным технологическим операциям, получить естественную извитость в процессе формования. Профилированные волокна и нити позволяют экономить полимер и получать равноценные по свойствам волокна с меньшей линейной плотностью. Ткани из профилированных волокон и нитей легче, обладают меньшей сминаемостью, более приятны на ощупь, имеют специфическую светоотражательную способность.

Профилированные волокна и нити все больше применяются в тканях бытового назначения (обивочные, гардинные и т.п.). Однако на практике объем производства профилированных волокон все-таки сравнительно невелик, что объясняется рядом причин. Узкие щелевые капилляры сложной формы требуют тщательной фильтрации формируемой среды, жесткого выдерживания технологических параметров процессов гомогенизации, стабилизации, условий охлаждения и т.д. Трудоемкость изготовления фильер с отверстиями сложной

формы очень высока и, вследствие этого фильеры существенно дороже; очистка фильер от загрязнения в процессе эксплуатации значительно труднее.

Форма поперечного сечения химических волокон влияет на многие их физические свойства: сорбционные, способность к окрашиванию, гриф, устойчивость к истиранию, термические свойства, блеск и другие. При формировании по мокрому и сухому методам форму волокна в некоторой мере определяют условия формирования, но при всех методах формирования существенное изменение поперечного сечения можно достигнуть только при применении специальных фильер с профилированными отверстиями. Такие фильеры используются при формировании из расплава и раствора. Этим путем получают волокна различного сечения с 3, 5 или 8 продольными выступами (лучиками) при формировании из расплава. В зависимости от числа выступов полиамидные, полиэфирные и полиолефиновые волокна обладают сильным переменным блеском (волокна с тремя лучиками) или матовостью (волокна с 8-10 лучиками). Одновременно профилированные волокна становятся менее скользкими, что особенно важно при изготовлении чулок и трикотажных изделий [131]. Для изделий, получаемых при переработке этих волокон, характерны более высокие эксплуатационные показатели, чем для изделий из волокон с круглым сечением [132]. Волокна с трех лучевым профилем по форме приближаются к профилю сечения натурального шелка [133].

Существует несколько отличительных особенностей при формировании волокон нецилиндрической формы. Увеличивающаяся удельная поверхность интенсифицирует массо- и теплообмен и, следовательно, образование твердой фазы. Это приводит к укорачиванию зоны деформации на пути формирования, увеличению средних градиентов скорости и степени молекулярной ориентации [83].

Одним из наиболее естественных путей асимптотического описания гидродинамики струй представляется построение квазиодномерной теории, в которой струя рассматривается как «оснащенный одномерный континуум», т.е. лишенный поперечных размеров объект, описываемый набором интегральных характеристик - радиусом сечения струи, расходом в сечении и т.д. Такой подход является прямым аналогом гидравлической теории течений в длинных трубах (особенно, течений в трубках с гибкими стенками), и его естественная область применимости - течения, медленно меняющиеся по длине струи. Уравнения, выражающие баланс массы и импульса записываются в предположении, что скорость и напряжения постоянны по сечению струи. На боковой поверхности струи отсутствуют внешние нагрузки, а деформация жидкого элемента представляет собой в первом приближении одноосное растяжение. Указанный подход использовался в ряде работ [134-137]. Модификация, введенная, по-видимому, в работах [138-140], состоит в сохранении полного нелинейного выражения для капиллярного давления, что позволяет описывать капиллярный распад вплоть до образования капель.

1.3.1. Математическое моделирование процесса формирования профилированных волокон

Количественный подход к формированию профилированных волокон должен основываться на теории тепло - и массообмена в системах, не имеющих радиальной симметрии. Процесс формирования сопровождается вытяжкой струи. При этом площадь поперечного сечения уменьшается, что способствует проявлению капиллярных сил на поверхности. Кроме того, процесс осложняется теплопереносом с поверхности (сухое формирование) или диффузионными явлениями на поверхности (мокрое формирование). Наиболее важной практической задачей является получение заданной формы поперечного сечения волокон в зависимости от размеров отверстий фильеры, условий истечения прядильной массы и затвердевания полимера в зоне формирования.

Таким образом, необходимо рассмотреть две взаимосвязанные задачи: задачу о капиллярной устойчивости цилиндрической некруглой струй и задачу о элонгационном течении в зоне формирования. Большинство исследований по формированию профилированных волокон содержит анализ экспериментальных результатов. Следует отметить, что анализ эволюции формы микроскопического профиля волокна представляет весьма трудоемкую операцию. В тоже время исследование изменения профиля во время формирования вообще не представляется возможным. Указанные обстоятельства подчеркивают целесообразность математического моделирования этого процесса.

Зябицким А. [83] предложен упрощенный анализ факторов, влияющих на капиллярную эволюцию поперечного сечения волокна эллипсоидального профиля. Получена оценка для времени формоизменения и указаны условия минимального искажения профиля.

Исключительно подробные экспериментальные результаты по формированию профилированных волокон представлены в работе Грёбе и Ферзоймера [141]. Формование осуществлялось из расплава полиамида посредством фильер с отверстиями звездообразной формы. Волокна проходило определенный путь на воздухе, а затем быстро охлаждалось в жидкой ванне. С увеличением длины пути в воздухе поперечные сечения становились более округлыми. Получен график зависимости высоты лучика от длины пути в воздухе.

Хан Ч.Д. [84] на примере профилированных полиакронитрильных волокон, формуемых по мокрому методу, установил, что при больших кратностях фильерной вытяжки форма поперечного сечения волокон более похожа на форму выходных отверстий фильеры. В монографии [84] он следующим образом охарактеризовал современное состояние исследований в области получения профилированных волокон: "Из-за сложности проблемы в литературе отсутствует строгий анализ процессов, сопровождающих получение профилированных волокон. Развитие технологии их производства в настоящее время все ещё идет по пути «проб и ошибок», и большинство технологических задач в этой области решается на основе частной информации различных фирм-изготовителей".

Весьма близкая по физической сущности задача рассмотрена в работах [142, 143]. Авторы анализируют деформацию двухслойного бесконечного цилиндра под действием капиллярных сил на его поверхности. При этом силы поверхностного натяжения стремятся придать внешней границе сечения форму окружности, деформируя жидкость, находящуюся в сердечнике. Представлена строгая

формулировка задачи в рамках капиллярной гидродинамики стоксова течения в линейном приближении. Решение получено в рядах Фурье. Кроме того, авторами показано, что в силу линейности уравнений движения можно интегрально учитывать уменьшение поперечных размеров сечения вследствие однородного одноосного растяжения.

Впервые задачу капиллярного равновесия жидкого цилиндра рассмотрел Рэлей [144]. Кроме сил поверхностного натяжения учитывались силы инерции. Безвихревое течение жидкости в поперечном сечении цилиндра описывалось уравнением Лапласа для функции тока. Решение получено в виде ряда Фурье. Амплитуды гармоник находятся как функции времени из уравнений Лагранжа. Получено выражение для частоты устойчивых колебаний.

Вопросы реодинамики вязких жидкостей с учетом капиллярных сил подробно рассмотрены в работе [145]. Показано, что для тонких пленок правомерно капиллярные силы учитывать второй производной от её толщины. Используемые авторами методы решения применимы только для тонких пленок и не могут быть распространены на течение жидкостей в границах большой кривизны.

В работе [146] изучено истечение осесимметричной капиллярной струи вязкой несжимаемой жидкости в пространство, заполненное другой жидкостью. Численным методом получено решение задачи о стационарном течении в струе и окружающей среде под действием вязкости, капиллярных сил и силы тяжести. Поставлена задача о неустойчивости этого течения к малым возмущениям. Выявлено значение безразмерных параметров Рейнольдса, Вебера, Фруда, а также влияние начального профиля скорости на характер течения, его неустойчивость и последующий распад струи на капли.

Задачи течения с капиллярными эффектами часто требуют применения численных методов решения. Так в [147] развит численный метод расчета нестационарных движений жидкости применительно к задачам ударного типа. Используется однородная, полностью консервативная разностная схема первого порядка точности. Для выделения разрывов и сглаживания решения применяется метод введения искусственной вязкости, основанный на анализе временных свойств решения. Исследована устойчивость схемы.

Развитию аналитических методов решения задач динамики жидкости со свободной поверхностью посвящены работы [148-150]. Так в [150] развит аналитический метод расчета нестационарного движения и растекания плоской и осесимметричной капли в потоке газа, основанный на разложении уравнений Навье-Стокса по малому параметру. Задача о неосесимметричных волнах на поверхности цилиндрического столба жидкости наиболее детально рассмотрена в работе Бора [151]. В работе Г. И. Петрова и Т. Д. Калининой [152] рассмотрено влияние окружающей среды на устойчивость жидкой капиллярной струи. Обзор работ этой тематики до 1967г. дан в [153]. Интерес к исследованию некруглых струй объясняется, в частности, тем, что струи вытекающие из неосесимметричных отверстий, распадаются значительно раньше, чем осесимметричные струи [154-156]. Работа [157] посвящена обсуждению нелинейной стадии развития неустойчивости струи вязкой жидкости при условиях, допускающих пренебрежение влиянием

окружающей среды и поля тяжести. В работе [158] анализируется устойчивость двойных капель. Отмечается, в случае соизмеримости вязкостей, колебания носят затухающий характер. Подробный обзор достижений в области капиллярной устойчивости жидких капель и струй выполнен в [159].

Обзор методов и результатов по теоретическому исследованию процесса столкновения капли с твердой поверхностью содержится в работе [160]. Отмечается, что имеющиеся аналитические результаты весьма скудны и дают ограниченную информацию о процессе, представленные же в литературе численные расчеты характеризуются большой погрешностью. В работе [161] представлены результаты численного решения уравнений гидродинамики для капли жидкости, с большей скоростью сталкивающейся с твердой поверхностью. Вязкость и поверхностное натяжение не учитывались. Представляет интерес работа [162], в которой излагается метод, с помощью которого задача о деформации капли жидкости сводится к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений, и позволяющий учесть сжимаемость, вязкость и поверхностное натяжение жидкости. Сущность метода заключается в аппроксимации свободной поверхности функцией, зависящей от конечного числа параметров (обобщенных координат). Зависимость обобщенных координат от времени находится из уравнений динамики в форме Лагранжа [163]. Автором допущена неточность: в случае вязкой жидкости вихревое течение описывается бигармоническим уравнением для функции тока, а не уравнением Лапласа.

Процесс формирования профилированных волокон из расплавов протекает в неизотермических условиях. При этом следует учитывать температурную зависимость не только вязкости, но и поверхностного натяжения. Экспериментальные исследования свидетельствуют о понижении поверхностного натяжения с ростом температуры. Согласно [164] зависимость поверхностного натяжения от температуры может быть описана законом Ван-дер-Ваальса. Данные по поверхностному натяжению для ряда полимеров (ПЭ, ПА, ПЭТФ) представлены в работах [165, 166].

Одним из факторов, влияющих на сечение сформированного волокна, является эффект разбухания струи при истечении из канала фильеры. Это явление широко освещено в научной литературе, например, в работах [83, 167] представлен обзор теорий этого явления. В работе [168] предложены расчётные формулы для разбухания полимеров на выходе из цилиндрического и щелевого каналов при степенной зависимости эластической деформации и касательного напряжения на стенке от скорости деформации. Однако большинство расчетных формул получены для двумерного течения и не могут быть распространены на трехмерную деформацию области разбухания профилированной фильеры. Кроме того, величина разбухания зависит от величины тянущего усилия, обусловленного отбором волокна.

В зоне формирования капиллярная эволюция профиля сопровождается одноосным, неоднородным растяжением. Проблемам элонгационного течения посвящены многочисленные работы как отечественных (Прокунин А.Н., Проскурнина Н.Г., Ярин А.Л., Ентов В.М. и др.) так и зарубежных (Уайт Д., Метцнер А.Б., Хан Ч.Д., Зябицкий А.) ученых. Работы по элонгационному

течению условно можно разделить на фундаментальные и прикладные. Для фундаментальных исследований характерны лабораторные, обычно изотермические условия течения, без учета сил собственного веса, аэродинамического сопротивления и т.п. На систему наносятся регулярные возмущения. Рассматриваются режимы течения, реализация которых возможна исключительно в лабораторных условиях. Задачей фундаментальных исследований обычно является выяснение поведения системы в предельных режимах (явления резонанса при вытяжке, устойчивость течения) аномальное поведение полимеров в определенных условиях (эффект Вейссенберга, деструкция). Результаты могут быть использованы для создания принципиально новых технологий переработки полимеров и формулировке новых направлений прикладных исследований.

Прикладные или инженерные работы носят, как правило, конкретный технологический характер. В постановке задачи учитываются конструктивные особенности установки, организация охлаждения, метод подачи и отбора полимера и т.д. Как правило, используются сравнительно несложные реологические модели (одно-, двух-, реже трех параметрические), зависимость вязкости от температуры описывается законом Аррениуса или Рейнольдса. Задачей чаще является определение оптимального режима переработки. Примером прикладных исследований элонгационного течения могут служить работы [182-192].

В [182] рассматривается процесс изменения конфигурации, охлаждения в струе воздуха нитей из расплава, экструдированных из единичной фильеры или из фильеры с множеством отверстий. Представлены математические модели процессов в динамическом и стационарном режимах, основанные на уравнениях сохранения вещества, энергии и количества движения. Модели описывают в распределенных параметрах изменения температуры и массы в последовательно следующих зонах остывания расплава. Указан способ решения линеаризованных уравнений с использованием конечных разностей. В работах [184, 188] предлагается калориметрический метод измерения температуры нити. Для температурного поля используется одномерный подход.

Авторы работы [185] для описания стационарного изотермического течения использовали обобщенную модель Максвелла. Рассчитывалось изменение профиля нити в зависимости от реологических свойств полимера. Предложено по измеренному профилю нити определять реологические свойства. В работе [187], используя метод размерности, находится средний коэффициент трения пучка нитей в воздухе. В работах [189, 190] действующая на волокно, аэродинамическая сила создается посредством эжектора и, кроме того, учитывается сила инерции и собственного веса. Вязкость экспоненциально зависит от температуры.

Авторами [190] получена таблица коэффициента чувствительности диаметра сформованного волокна от технологических параметров. В работах [186, 191, 192] исследуется явление "резонанса вытягивания" как следствие динамических свойств системы формируемая нить - приемное устройство. В исследовании [193] поставлена и решена сопряженная задача формования

одинокое волокно из расплава. Наряду с уравнениями динамики и теплообмена волокна учитывались уравнения динамического и теплового слоя.

В работах В. Г. Литвинова [177, 194] рассмотрено течение и теплообмен при растяжении вязкоупругой жидкости в неизотермических условиях. Получено аналитическое решение задачи. Показано, что при растяжении струи неньютоновской жидкости выполняется гипотеза подобия поперечных сечений. Подобная задача в [195] решена численным методом.

Немаловажным аспектом формирования волокон является вопрос устойчивости течения. В динамических исследованиях широко применяется ньютоновская квазиодномерная модель. Инерционными и капиллярными силами, а также силами веса и трения о воздух, малыми в сравнении с вязкими силами в волокне, пренебрегают [196, 197]. Такая модель, вполне удовлетворительная для стекловолокон, позволяет исследовать потерю устойчивости "резонанс при вытягивании" и отклики выходных параметров на различные возмущающие воздействия в изотермических условиях [175, 198, 199]. В рамках этой модели исследовалось также влияние изменения вязкости расплава на нестационарный процесс формирования [200-202], причем распределение вязкости по длине волокна задавалось априорно. В работе [203] исследовано влияние роста вязкости расплава с охлаждением на возникновение и развитие автоколебаний, а также влияние теплообмена на амплитудно-частотные характеристики волокон, формируемых в неизотермических условиях в области устойчивости. Вследствие увеличения вязкости высокочастотные возмущения практически полностью подавляются.

1.4. Вопросы контроля реологических свойств полимеров в условиях растяжения

Оптимизация и интенсификация технологических процессов получения пленок, волокон и других изделий из полимеров относятся к основным задачам развития и совершенствования промышленности переработки пластмасс. Одной из основных стадий указанных процессов служит так называемая фильерная вытяжка. Несмотря на это технологические свойства термопластов до сих пор характеризуются на основании реологических измерений только при ламинарном сдвиговом деформировании.

Недостатком большинства работ, посвященных гидродинамике неньютоновских жидкостей, является отсутствие расчетных формул для определения диапазона изменения градиента скорости в рабочей зоне течения. Это обстоятельство оставляет открытым вопрос определения параметров реологической модели, исходя из кривой течения конкретной перерабатываемой жидкости. Информация о рабочем диапазоне градиентов скорости позволяет с большой достоверностью использовать ньютоновское решение для анализа течения неньютоновской среды. При этом достаточно определять значение эффективной вязкости перерабатываемой среды в рабочем диапазоне скоростей деформаций.

Единственным реологическим показателем, используемым в настоящее время для аттестации термопластов, служит показатель текучести расплава (ПТР), определяемый при сдвиговом деформировании на экструзионных пластомерах (ИИРТ, ИИРТ-М, ИИРТ-А). Этот показатель, однако, не позволяет прогнозировать поведение материала при фильерной вытяжке в процессах получения пленок, пленочных лент, нитей и волокон. Поэтому требуется разработка и внедрение в практику такого показателя реологических свойств полимеров, который позволял бы достаточно надежно оценивать и прогнозировать поведение материалов при формовании изделий, когда определяющей является стадия растяжения.

Решение этой проблемы позволит обоснованно выбирать марки термопластов, наиболее пригодные для многих крупнотоннажных производств, сократить время пуско-наладочных работ, оптимизировать режимы вытяжки и повысить качество продуктов и устойчивость технологических процессов.

Низкий уровень автоматизации измерений в существующей системе контроля процесса получения нитей из расплава полимера является сдерживающим фактором дальнейшего повышения качества нитей и снижения трудоемкости при их выпуске. Так измерение вязкости полимера требует порядка пяти часов [204].

Рассмотрим основные методы контроля реологических свойств расплавов полимеров. Авторами работы [205] предлагается оценивать способность расплава к растяжению при одноосном течении в режиме постоянной растягивающей силы. Отмечается, что в реальных условиях имеет место неоднородная вытяжка, при которой одновременно протекают несколько процессов (разбухание, неизотермичность и т.п.) и её можно моделировать однородным растяжением. В работе [206] показано, что два полимера (расплав полиизобутилена П-20 при 44 °С и полиэтилена низкой плотности при 125 °С) ведущие себя одинаково при сдвиговом течении, различно деформируются при одноосном растяжении (постоянной силой). Испытания расплавов полимеров на растяжение чрезвычайно чувствительны к молекулярной природе полимера, а именно к молекулярно-массовому распределению и разветвленности макромолекул [207]. В работе [208] показано, что в полимерах может существовать большое время релаксации с малым весом, которое практически не влияет на сдвиговое течение, но существенно проявляется при растяжении.

Проблемам аттестации полимеров посвящена серия статей Севрук В. Д., Прокунина А. Н. и др. [209-215]. Однако предлагаемый авторами метод отличается сравнительно большой трудоемкостью (изготовление образца точных размеров, его закрепление, измерение ретардации и т.д.). Между тем исследовать релаксационные свойства полимеров можно и другими способами, реализующими течение с растяжением.

Для достаточно концентрированных растворов наличие заметных упругих напряжений может быть эффектно продемонстрировано фактом существования стационарной искривленной струи [216, 217]; элементарные уравнения баланса импульса позволяют рассчитать напряжение в струе, зная

лишь расход жидкости, форму оси струи и закон изменения радиуса струи по её длине (т. е. имея лишь фотографию струи).

Рассмотрим другие методы контроля реологических свойств полимеров. Для оценки реологических свойств полимеров и композиционных материалов существует ряд методов; из них наиболее распространенными являются методы капиллярной и ротационной вискозиметрии, пластометрический метод и метод малоамплитудного циклического деформирования. О приборах контроля ньютоновской вязкости представлена информация в [218]. Показана [219] возможность применения ротационных вискозиметров для оценки реологических свойств расплавов полимеров и их преимущество в сравнении с капиллярными вискозиметрами. Приводится сопоставительный анализ отечественных и зарубежных автоматических вискозиметров, используемых для регулирования процесса переработки полимеров.

С целью повышения достоверности экспериментальных данных о вязкости полимерных расплавов в червячных прессах и повышения точности измерений разработан вискозиметр непрерывного действия [220]. Вискозиметр устанавливается на выходе червячного пресса или в формующей головке и оснащен регулируемым нагревателем, сменными рабочими элементами.

Рассмотрена возможность использования для изучения упругих напряжений в разбавленных растворах полимеров пленочного течения в виде кольцевой струи [221]. При этом элементы жидкости испытывают деформацию плоского растяжения и легко реализовать скорости деформации, достигающие сотен обратных секунд.

Проведено [222] моделирование процесса раздува деформированием листового полимерного образца, закрепленного по кольцевому контуру. Деформирование осуществляется жидкостью, находящейся под образцом. При этом образуется шаровой сегмент, измерение высоты которого во времени позволяет провести расчет модуля упругости, поперечной вязкости, поверхностной энергии и в момент разрушения образца зарегистрировать предельную деформацию и прочность. Способ удобен для оценки характеристик полимеров при высоких температурах и условиях соответствующих их переработке.

Предлагается способ измерения реологических свойств адсорбционных слоев полимеров методом контактных взаимодействий [223]. Сущность методики заключается в формировании адсорбированных слоев полимеров на молекулярно гладких поверхностях пластин слюды или межфазной поверхности капель масла, взаимном сжатии поверхностей известной силой контактного давления, измерении ширины зазора между поверхностями по интерференционным кольцам в отраженном монохроматическом свете, в зависимости от длительности контактного взаимодействия и расклинивающего давления.

В работе [224] предлагается простой способ проверки линейности вязкоупругих свойств эластомеров. Сущность способа сводится к следующему. Определяется площадь петли гистерезиса в двух установившихся режимах:

а) растяжение-сокращение с постоянной скоростью,

б) растяжение-сокращение с удвоенной скоростью до той же деформации с остановкой при минимальной и максимальной деформациях на время, равное времени растяжения.

Согласно линейной теории вязкоупругости, площадь петли гистерезиса во втором случае должна быть в два раза больше, вне зависимости от спектра времен релаксации. Для наполненных резин указанное отношение всегда меньше единицы, а для ненаполненных совпадает с теоретическим. В работе [225] предлагается неразрушающий контроль полимерных материалов путем вдавливания индентора в поверхность детали, что позволяет определять статические механические свойства материала изделия.

Авторы [193] на основании решения задачи неизотермического формования синтетического волокна предлагают метод решения обратной задачи формования, когда по известным параметрам волокна вдоль зоны формования определяется продольная вязкость расплава в зависимости от температуры и осевого напряжения.

Перспективными являются современные системы для измерения физико-механических свойств веществ интегрированные с компьютером [226]. При этом на компьютер может возлагаться решение следующих классов задач: опрос датчиков и хранение измерительной информации, контроль и управление экспериментом, цифровая обработка сигналов (фильтрация, спектральный анализ и др.), интерпретация результатов измерений. Процесс измерения физико-механических характеристик вещества можно представить как процесс измерения и анализа отклика (выход) образца на стандартное испытательное воздействие (вход) [227]. Процесс измерения должен иметь итеративный характер и в каждом цикле проверяется достижение цели.

1.5. Упрощения в постановке задач механики неньютоновских жидкостей

Современный математический аппарат позволяет решить широкий круг прикладных задач. Методы решения делятся на аналитические и численные; точные и приближенные; детерминированные и вероятностные. Широко применяются следующие детерминированные приближенные методы: вариационные (Релея-Ритца, Бубнова-Галеркина, Лейбензона, Канторовича и др.); операционные (конечных и бесконечных преобразований); возмущений; сведение к дифференциальным и интегральным уравнениям разных типов; подстановка готовых форм решения; метод теории размерности, линеаризации и другие. Подробное описание методов содержится в работах [1-7].

Задача об определении решений уравнений, описывающих движение и другие физические процессы, с точки зрения Эйлера сводится к отысканию неизвестных функций от четырех переменных (трех координат и времени), например, скорости, давления и т.д. Наличие четырех независимых переменных сильно осложняет задачу. В ряде задач важные упрощающие предположения, обеспечивающие успех решения, связаны с уменьшением

числа независимых переменных. В некоторых практически приемлемых случаях рассматриваемые движения и многие процессы можно считать установившимися. Это позволяет при использовании точки зрения Эйлера сократить число независимых переменных на единицу, так как исключается время. Другим упрощением является предположение о плоскопараллельном движении среды. Математическая теория эффективного решения задач о плоскопараллельных движениях сильно развита и положена в основу многих приближенных методов для решения пространственных задач. Важным классом задач являются задачи с наличием осевой симметрии, когда игнорируется угловая координата в цилиндрической системе.

В тех случаях, когда допущение о малости искомой функции (малые возмущения) является приемлемым, в постановке задач можно произвести линеаризацию, которая сводится к следующему упрощению. Деформация границ принимается малой, поэтому граничные условия на деформированной поверхности скосятся по нормали к границе области, соответствующей основному невозмущенному состоянию.

Линейные дифференциальные уравнения обладают свойством суперпозиции решений. Сумма нескольких частных решений тоже является решением. С помощью образования конечных сумм, рядов или интегралов частных решений можно строить решения линейных уравнений механики сплошной среды, содержащие произвольные функции и совокупности постоянных, с помощью выбора которых можно удовлетворять начальным, граничным условиям задачи.

Комплексное применение перечисленных упрощений открывает широкие возможности анализа сложных задач гидродинамики. К сожалению, указанные упрощения ограниченно применимы при анализе течения неньютоновских сред. Например, в случае степенной жидкости вязкость зависит от второго инварианта тензора скоростей деформации. Это исключает применение для скорости метода суперпозиции.

Теоретическое исследование динамики свободных струй и пленок с использованием общих трехмерных уравнений механики жидкости малопродуктивно, поскольку речь идет о нестационарной, по крайней мере, двумерной, задаче со свободной поверхностью. В случае полимерных жидкостей дополнительные препятствия для теоретического анализа обусловлены их сложным реологическим поведением. В связи с этим в последние годы интенсивно развивались квазиодномерный (для тонких струй) и квазидвумерный (для тонких свободных пленок) подходы к описанию динамики. Получаемые в рамках этих подходов уравнения оперируют только такими "интегральными" характеристиками, как радиус или толщина поперечного сечения, скорость жидкости на оси или срединной поверхности, и описывают их изменение во времени и вдоль струи или пленки. Есть все основания систематически использовать квазиодномерный и квазидвумерный подходы при изучении динамики свободных струй и пленок ньютоновских и аномальных жидкостей.

Также эффективно применение квазиодномерного подхода при анализе других типов течений. Например, течения перерабатываемого материала в межвалковом зазоре роторного гранулятора. При этом квазиодномерность состоит в допущении однородности давления по высоте рабочего зазора. Указанный подход значительно упрощает анализ задачи, практически не снижая точности.

Общей тенденцией формулировки задач является их комплексный характер и, соответственно, преимущественное применение численных методов анализа.

ГЛАВА 2

ПРОДОЛЬНОЕ ТЕЧЕНИЕ ПЛОСКОЙ СТРУИ

Одной из основных технологических операций при получении плоских пленок из термопластов является вытяжка. Рассмотрены следующие проблемы продольного течения плоской струи: влияние размеров зоны течения на геометрические характеристики струи, влияние эффектов неньютоновости и неизотермичности на характер течения, влияние собственного веса жидкости на натяжение струи в точке отбора при формовании как сверху вниз, так и снизу вверх. В квазиодномерном приближении решена задача нестационарного элонгационного течения струи с учетом сил собственного веса.

В длинноволновом приближении изучено влияние условий течения на кинематические характеристики гравитационно-изогнутой стационарной струи. В результате численного анализа линеаризованной задачи о малых возмущениях струи определена область устойчивого течения.

Применительно к процессу ориентационной вытяжки полимерных пленок построена математическая модель движения пленки с учетом ее трения о поверхности нагревательных и охлаждающих валков. Дано объяснение возникновения неустойчивости типа “стик-слип” (залипание – проскальзывание).

Изучено термическое взаимодействие в системе полимерная пленка – охлаждающий валок, с учетом незавершенности охлаждения последнего.

2.1. Реодинамика элонгационного течения плоской полимерной струи при вытяжке пленки

Одной из основных технологических операций получения плоских пленок из термопластов является вытяжка. До выхода из фильеры расплав течет в плоском канале формирующих губок. Для снижения пульсаций канал имеет достаточную протяженность, поэтому есть основания полагать температуру однородной по толщине струи. При разбухании профиль скорости трансформируется из параболического в прямоугольный.

Окружная скорость охлаждающего валка больше осевой скорости в разбухшем сечении, что позволяет избежать провисания пленки в зоне формования и обеспечивает плотное прилегание её к поверхности валка. Интенсивность охлаждения пленки зависит от её температуры и конструктивного оформления процесса. Разбухание заканчивается в нескольких миллиметрах от губок фильеры и длина зоны вытяжки практически равна расстоянию от губок до точки касания с валком. Задача имеет геометрическую и тепловую симметрию. Коэффициент теплоотдачи одинаков для обеих сторон пленки. Толщина пленки по ширине постоянна.

Для описанных условий правомерно использовать квазиодномерное приближение для поля температур и скоростей [228]-[238].

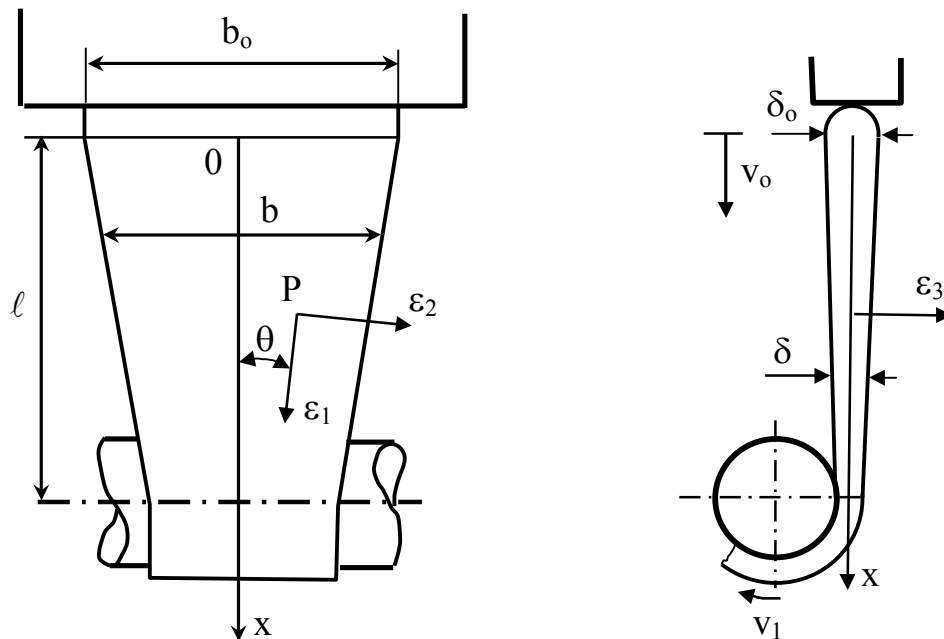


Рис.2.1. Схема процесса формирования плоской пленки.

На рис 2.1. представлена схема процесса вытяжки плоской пленки в зоне формирования. Отметим, что при ориентационном вытягивании зона вытяжки находится между тянущими валками и разбухание отсутствует. В точке P_1 поверхности пленки конвективные координаты выбраны следующим образом: ϵ_1 соответствует направлению течения, ϵ_3 - нормаль к поверхности пленки, ϵ_2 - направлена поперек течения. Начало неподвижной системы координат x, b, δ помещено в место наибольшего разбухания. Ось x направлена по длине пленки. Величины b, δ характеризуют текущую ширину и толщину. Тензор скоростей деформации $||d||$ характеризуется диагональными компонентами d_{11}, d_{22}, d_{33} , а все недиагональные компоненты равны нулю. При растяжении используем относительную деформацию Генки [167]. Если ширина пленки изменяется от начального значения b_0 до текущего b то относительная деформация по Генки составит $\ln(b/b_0)$. Соответственно, деформация по толщине составит $\ln(\delta/\delta_0)$. Скорости деформация находятся следующим образом

$$d_{22} = \frac{d}{dt} \left[\ln \left(\frac{b}{b_0} \right) \right] = \frac{1}{b} \frac{db}{dt}, \quad d_{33} = \frac{1}{\delta} \frac{d\delta}{dt}.$$

Для d_{22} можем записать

$$d_{22} = \frac{1}{b} \frac{db}{d\epsilon_1} \frac{d\epsilon_1}{dt},$$

но учитывая соотношения

$$d\varepsilon_1 = \frac{dx}{\cos\theta}, \quad \frac{dx}{dt} = v, \quad \frac{db}{dx} = b',$$

получим $d_{22} = vb'/b$. Здесь и ниже штрих означает производную по x . С учетом уравнения неразрывности $Q = vb\delta$, имеем

$$d_{22} = \frac{Qb'}{b\delta^2} \quad (2.1)$$

Аналогично получено выражение для d_{33}

$$d_{33} = \frac{Q\delta'}{b\delta^2} \quad (2.2)$$

Осевая компонента определяется из уравнения неразрывности

$$d_{11} = -d_{22} - d_{33} = -\frac{Q}{b\delta} \left(\frac{b'}{b} + \frac{\delta'}{\delta} \right). \quad (2.3)$$

Плотность жидкости постоянна, поэтому продифференцировав уравнение неразрывности $Q = vb\delta$, получим следующее выражение для осевой скорости деформации $d_{11} = v'$, где v - осевая скорость. Тензор скоростей деформаций имеет вид

$$\|d\| = \begin{vmatrix} d_{11} & 0 & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} \end{vmatrix} = -\frac{Q}{b\delta} \begin{vmatrix} \frac{b'}{b} + \frac{\delta'}{\delta} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{b'}{b} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\delta'}{\delta} \end{vmatrix}.$$

Компоненты напряжения в общем виде определяются так

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij}, \quad (i, j = 1, 2, 3). \quad (2.4)$$

Силами поверхностного натяжения пренебрегаем, и считаем что на плоских поверхностях струи давление атмосферное, тогда

$$\sigma_{33} = 0. \quad (2.5)$$

Подставляя (2.5) в (2.4) выразим гидростатическое давление (относительное к внешнему) через девиаторную компоненту

$$p = \tau_{33}. \quad (2.6)$$

Примем следующее реологическое уравнение

$$\tau_{ij} = 2\eta_0 (I_2)^{\frac{n-1}{2}} d_{ij}, \quad (i, j = 1, 2, 3), \quad (2.7)$$

где $I_2/2 = d_{11}^2 + d_{22}^2 + d_{33}^2$ - второй инвариант тензора скоростей деформаций, n, η_0 - реологические константы.

Подставив (2.6) в (2.4), получим для напряжений $\sigma_{11} = \tau_{11} - \tau_{33}$, $\sigma_{22} = \tau_{22} - \tau_{33}$, или с учетом (2.7)

$$\sigma_{11} = 2\eta_0 (I_2)^{\frac{n-1}{2}} (d_{11} - d_{33}), \quad (2.8)$$

$$\sigma_{22} = 2\eta_0 (I_2)^{\frac{n-1}{2}} (d_{22} - d_{33}). \quad (2.9)$$

В продольном течении различают режимы плоской вытяжки и одноосной. Для одноосной вытяжки характерно $\sigma_{33} = \sigma_{22} = 0$, что дает для деформаций $d_{22} - d_{33} = 0$, или с учетом (2.1), (2.2): $b'/b = \delta'/\delta$, $-2b'/b = v'/v$. Интегрируя эти уравнения с учётом условий $x=0$, $b=b_0$, $\delta=\delta_0$, $v=v_0$, получим $b/b_0 = \delta/\delta_0$, $v/v_0 = (b/b_0)^2$. Тензор скоростей деформаций в условиях одноосного растяжения

$$\|d\| = -\frac{Qb'}{\delta b^2} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = v' \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0,5 & 0 \\ 0 & 0 & -0,5 \end{vmatrix}. \quad (2.10)$$

В этом течении имеет место геометрическое подобие поперечных сечений [104, 177].

При плоской вытяжке ширина пленки не изменяется ($b'=0$, $d_{22}=0$), а вытяжка осуществляется за счет утонения струи. Интегрирование уравнений $b' = 0$, $-\delta'/\delta = v'/v$ дает: $b=b_0$, $\delta/\delta_0 = v'/v$. Тензор скоростей деформаций в этом случае имеет вид

$$\|d\| = -\frac{Q\delta'}{\delta^2 b} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = v' \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

Сопоставляя (2.8) и (2.9), получаем $\sigma_{22} = 0,5\sigma_{11}$. Следовательно, для реализации плоской вытяжки к краям струи необходимо приложить внешнее напряжение величиной $\sigma_{22} = \sigma_{11}/2$.

Экспериментально установлено, что с уменьшением длины зоны течения геометрическое подобие поперечных сечений струи нарушается в сторону увеличения её ширины [19] и условие (2.10) в этом случае неприемлемо. Проявляется так называемый "ширительный" эффект.

Это явление связано с трением струи о поверхность приемного вала и можно интерпретировать следующим образом. Если рассматривать край пленки как натянутую нить, то следует ожидать, что нить будет стремиться к положению, при котором она проходит наименьшее расстояние, т.е. когда плоскость намотки будет перпендикулярна оси вращения приёмного вала. Указанному перемещению края пленки препятствует сила реологического сопротивления направленная по ширине струи. В общем случае предполагаем следующее соотношение между напряжениями в осевом направлении и поперечном

$$\sigma_{22} = \psi \sigma_{11}, \quad \sigma_{33} = 0, \quad (2.11)$$

где ψ - эмпирический коэффициент, зависящий от размеров зоны течения и типа полимера.

Рассматривая совместно (2.8), (2.9), (2.11) можем записать

$$d_{22} - d_{33} = \psi(d_{11} - d_{33}).$$

Учитывая соотношения для компонентов скоростей деформаций (2.1), (2.2), (2.3), приходим к уравнению

$$\frac{db}{b} + \left(\frac{2\psi - 1}{\psi + 1} \right) \frac{d\delta}{\delta} = 0. \quad (2.12)$$

Разделяя переменные и интегрируя, получим

$$\ln \frac{b}{b_0} = \frac{1 - 2\psi}{\psi + 1} \ln \frac{\delta}{\delta_0}. \quad (2.13)$$

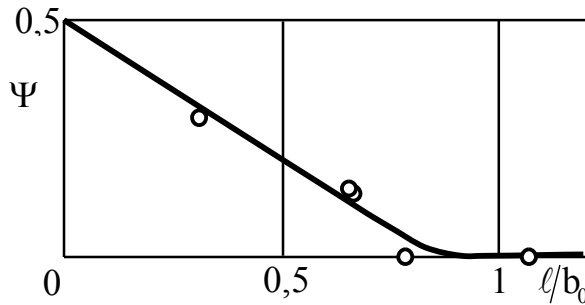


Рис. 2.2. Зависимость параметра ψ от размеров зоны формирования.

Выражение (2.13)

характеризует текущие поперечные размеры сечения с учетом действия “ширительного” эффекта приемного вала. При $\psi=0$ имеет место одноосная вытяжка, а при $\psi=0,5$ – плоская.

В результате обработки экспериментальных результатов для расплава полипропилена был построен график зависимости параметра ψ от размеров зоны

формования (рис. 2.2). Параметры течения изменялись в следующих пределах:

$$v_1 / v_0 = 1,97 \div 16,23; \quad v_0 = (5 \div 16,7) \times 10^{-3} \text{ м/с};$$

$b_0 = 0,16 \div 0,278 \text{ м}; \quad \ell = 0,09 \div 0,175 \text{ м}; \quad \ell/b_0 = 0,32 \div 1,1$, расход полимера от $0,853 \times 10^{-3}$ до $3,69 \times 10^{-3} \text{ кг/с}$. Температура струи расплава 250°C . Из рисунка видно, что режим одноосной вытяжки наступает при $\ell/b_0 \geq 0,85$. С уменьшением длины зоны течения происходит плавный переход от одноосной вытяжки к плоской. При ориентационной вытяжке полимерной пленки на валах вопрос изменения ширины имеет существенное значение [30].

Тензор скоростей деформаций для общего случая течения (2.11) имеет следующий вид

$$\|d\| = v' \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2\psi - 1}{2 - \psi} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 + \psi}{\psi - 2} \end{vmatrix}.$$

Условие постоянства тянущего усилия по длине струи ($F = b\delta\sigma_{11}$) дает уравнение для модели (2.7), (2.11)

$$F = \frac{\eta_0 Q v'^n}{v} \frac{6}{(2 - \psi)} \left[\frac{12(\psi^2 - \psi + 1)}{(2 - \psi)^2} \right]^{\frac{n-1}{2}}.$$

Коэффициент ψ не влияет на распределение осевой скорости при фиксированной скорости отбора.

Можно сделать вывод. При формировании плоской полимерной пленки с уменьшением длины зоны течения режим одноосной вытяжки отклоняется в сторону увеличения ширины струи. Это обусловлено возникновением дополнительных растягивающих напряжений по ширине струи. Для обобщенной ньютоновской жидкости соотношение между нормальными напряжениями в струе зависит от размеров зоны вытяжки и определяет выходное сечение струи.

2.2. Неизотермическая вытяжка плоской аномально-вязкой пленки

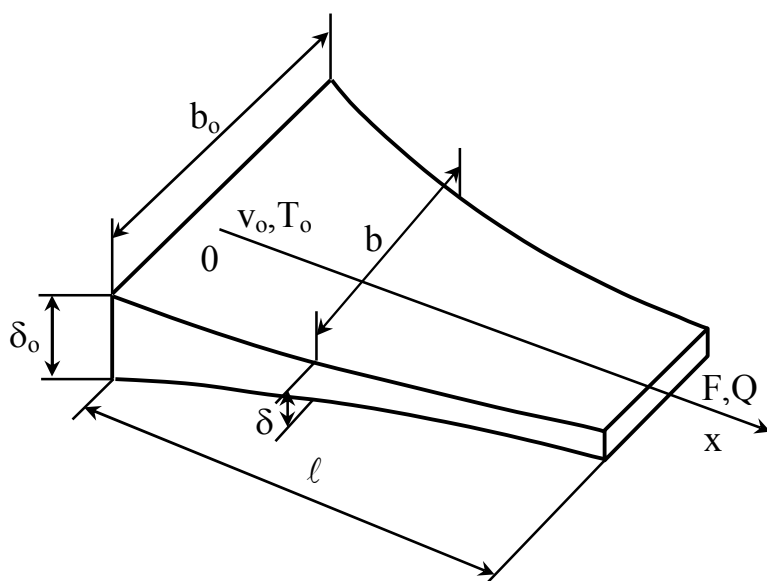


Рис.2.3. Схема процесса вытяжки плоской пленки в неизотермических условиях.

Схема процесса вытяжки представлена на рис. 2.3. Примем следующие допущения. Толщина пленки достаточно мала, так что неоднородностью профиля скорости и тепловым потоком в поперечном направлении можно пренебречь. Силами поверхностного натяжения, инерции и трения струи о воздух можно пренебречь в виду их сравнительной малости. Теплотой кристаллизации и диссипативным тепловыделением пренебрегаем. Охлаждение пленки происходит в основном за счет излучения и конвекции. Конвективный перенос тепла в продольном направлении значительно больше поперечного. Теплофизические свойства материала постоянны. Имеет место одноосная вытяжка плоской пленки. Коэффициент теплоотдачи постоянен по длине. Скорости деформации малы и упругие эффекты отсутствуют.

На рис. 2.4 представлено распределение градиента осевой скорости, ширины струи, температуры по длине струи при различном тянущем усилии и постоянной интенсивности охлаждения ($St = 0,5$). На рис. 2.5. представлено распределение ширины и осевой скорости при различных кратностях вытяжки и индексах течения; 1 – $n = 0,5$; 2 – 1; 3 – 2,0.

Уравнение теплового баланса для элемента пленки [236]

$$\rho C(Q/b)dT/dx = q. \quad (2.15)$$

Величина q - сумма конвективных и радиационных тепловых потоков от обеих сторон пленки,

$$q = -2\alpha_c(T - T_c) - 2\sigma^* \varepsilon(T^4 - T_c^4),$$

где $\alpha_c = (\alpha_1 + \alpha_2)/2$.

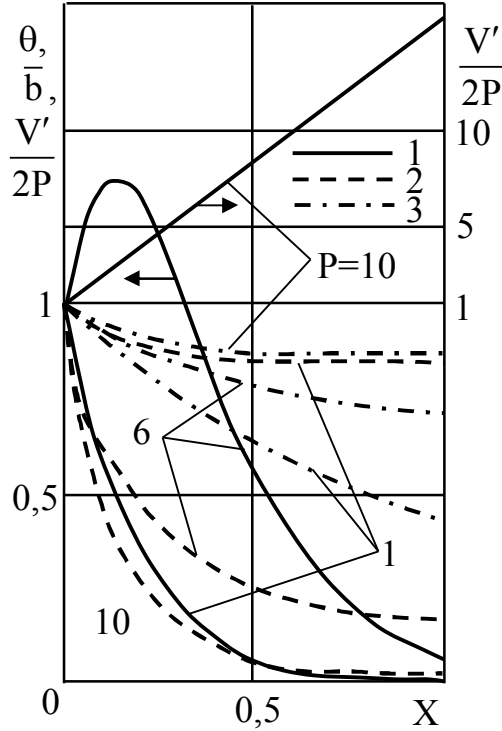


Рис. 2.4 Распределение градиента осевой скорости $V'/2P$ (1), ширины $\bar{b}$ (2) и температуры θ (3) по длине зоны вытяжки при различном тянущем усилии и $St = 0,5$.

Допустим, что охлаждение пленки происходит в достаточно узком интервале температур и к процессу лучеиспускания можно применить закон Ньютона [6]. Иными словами, линеаризуем закон Стефана-Больцмана. При этом для q можно записать

$$q = -2\alpha^*(T - T_c), \quad (2.16)$$

где $\alpha^* = \alpha_c + \varepsilon\sigma^*\varphi(T)$, $\varphi(T)$ - коэффициент [6].

Используем следующее полуэмпирическое выражение для материальной функции [29]

$$\eta = \eta_0 \exp \left[\frac{E}{R} \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} \right) \right] (I_2)^{\frac{n-1}{2}}. \quad (2.17)$$

В условиях одноосной вытяжки для компоненты напряжения по ширине пленка справедливо условие (2.10). Выражая σ_{33} через скорости деформации, получим $d_{33} - d_{22} = 0$ или

$$b'/b = \delta'/\delta. \quad (2.18)$$

Интегрируя (2.18) с учетом $x=0$, $\delta=\delta_0$, $b=b_0$, получим условие геометрического подобия сечений $b/b_0 = \delta/\delta_0$.

Введем безразмерные параметры:

$$\bar{b} = \frac{b}{b_0}, \quad \bar{\delta} = \frac{\delta}{\delta_0}, \quad X = \frac{x}{\ell}, \quad \theta = \frac{T - T_c}{T_0 - T_c}, \quad s = \frac{1}{n}, \quad K = \frac{v_1}{v_0}, \quad V = \frac{v}{v_0},$$

$$z(\theta) = \exp \left\{ \frac{E}{R} \left[\frac{1}{T_0} - \frac{1}{\theta(T_0 - T_c) + T_c} \right] \right\} \quad (2.19)$$

где $v_0 = Q/(b_0\delta_0)$ - осевая скорость в начальном сечении струи.

С учетом (2.1)-(2.3), (2.18) (и его интегрального следствия) выражение для второго инварианта, входящее в (2.17), может быть выражено в виде следующих зависимостей от кинематических параметров:

$$(I_2/2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{12}v_0\bar{b}'/\ell\bar{b}'^3 = \sqrt{3}v_0V'/\ell. \quad (2.20)$$

Система уравнений, описывающих процесс неизотермической вытяжки плоской пленки, с учетом (2.15) - (2.20) и баланса сил имеет вид

$$\theta' = -2St\bar{b}\theta, \quad (2.21)$$

$$\bar{b}' = -P\bar{b}z\left(2\bar{b}'\theta/\bar{b}'^3\right)^{1-n}, \quad (2.22)$$

$$V' = 2PV_z(V')^{1-n}, \quad (2.23)$$

где $St = \alpha * \ell b_0 / (\rho C Q)$; $P = (F\ell/3\eta_0 Q) \left(\sqrt{3}v_0/\ell \right)^{1-n}$ - безразмерное осевое усилие. В (2.20) - (2.23) штрихами обозначены производные по X .

Из (2.18) следует, что распределение толщины в зоне вытяжки подобно распределению ширины, поэтому в приведенной системе уравнение для толщины опущено.

Начальное условие для переменных имеет вид:

$$X = 0, \quad \theta = \bar{b} = \bar{\delta} = V = 1. \quad (2.24)$$

Из уравнения (2.21) можно получить следующие выражения для ширины пленки:

$$\bar{b} = -\frac{\theta'}{2St\theta}, \quad \bar{b}' = \frac{(\theta')^2 - \theta\theta''}{2St\theta^2}.$$

Подставив эти выражения в (2.22), будем иметь нелинейное дифференциальное уравнение, описывающее распределение температуры по длине струи

$$\frac{\theta''}{\theta} - \left(\frac{\theta'}{\theta}\right)^2 + \beta z^s \left(\frac{\theta'}{\theta}\right)^{3-2s} = 0, \quad \beta = p^s (2St)^{2(s-1)} (2)^{s-1}.$$

Полагая

$$Y = d\theta/dX, \quad (2.25)$$

получим дифференциальное уравнение Бернулли

$$\frac{dY}{d\theta} - \frac{Y}{\theta} + \beta z^s \left(\frac{Y}{\theta}\right)^{2(1-s)} = 0,$$

которое путем подстановки $U=Y^{2s-1}$ [248], переходит в линейное уравнение первого порядка

$$\frac{dU}{d\theta} - (2s-1)\frac{U}{\theta} + (s-1)\beta z^s \theta^{2(s-1)} = 0. \quad (2.26)$$

Из (2.21) с учетом (2.24) получим следующее условие для Y : при $\theta=1$, $Y=\theta'=-2St$. Соответственно для U имеем начальное условие:

$$\theta=1, \quad U=-(2St)^{2s-1} \quad (2.27)$$

Решение (2.26), (2.27) при переходе к Y дает

$$Y(\zeta) = -\zeta \left[(2St)^{2s-1} + \beta(2s-1)J(\zeta) \right]^{\frac{n}{2-n}}, \quad (n \neq 2) \quad (2.28)$$

где $J(\zeta) = \int_1^{\zeta} z^s(\xi)\xi^{-1}d\xi$. Переменные ξ и ζ соответствуют безразмерной температуре и введены для пояснения порядка интегрирования. При $n=2$ выражение (2.28) имеет неопределенность, поэтому для этого случая необходимо выполнить непосредственное интегрирование приведенного выше уравнения Бернулли

$$Y(\zeta) = -2St\zeta \exp \left[-\beta \int_1^{\zeta} \sqrt{z}\xi^{-1}d\xi \right].$$

Согласно (2.25) распределение температур определяется

$$X = \int_1^{\theta} Y(\zeta)^{-1} d\zeta. \quad (2.29)$$

Подставив выражение для dX из (2.25) в (2.22) и интегрируя с учетом (2.24), для ширины пленки получим

$$\frac{1}{2(s-1)} [\bar{b}^{2(s-1)} - 1] = -P^s 2^{s-1} \int_1^{\theta} \frac{z^s}{Y} d\zeta, \quad (n \neq 1). \quad (2.30)$$

Для определения скорости можно воспользоваться соотношением $\bar{b} = 1/\sqrt{V}$, которое следует из уравнения неразрывности $\bar{b}\bar{\delta}V = 1$ с учетом (2.18).

Полученные выражения несколько упрощаются для случая вязкой жидкости ($n=1$). При этом имеем следующие выражения: для температуры

$$X = \int_1^{\theta} \frac{d\zeta}{Y}, \quad (2.31)$$

для толщины и ширины пленки

$$\ln \bar{\delta} = \ln \bar{b} = -P \int_1^{\theta} \frac{z}{Y} d\zeta, \quad (2.32)$$

для скорости и градиента осевой скорости

$$\ln V = 2P \int_1^{\theta} \frac{z}{Y} d\zeta, \quad V' = \frac{dV}{dX} = 2Pz \exp \left[2P \int_1^{\theta} \frac{z}{Y} d\zeta \right], \quad (2.33)$$

$$\text{где } Y(\zeta) = -\zeta[2St + PJ(\zeta)], \quad J(\zeta) = \int_1^{\zeta} z\xi^{-1}d\xi.$$

Результаты анализа выражений (2.31)-(2.33) представлены на рис. 2.4. Расчеты выполнены для $T_0=523$ К, $T_c=293$ К и $E=64,7$ кДж/моль, что соответствует процессу формования полипропиленовой пленки. Из рисунка следует, что течение и теплообмен в ньютоновском случае определяется двумя параметрами: критерием Стантона и безразмерной силой вытяжки P . По характеру распределения градиента осевой скорости условно можно выделить три режима.

1. Режим «квазиизотермической» вытяжки. Имеет место при сравнительно больших значениях P и малых St . В этом режиме градиент

осевой скорости монотонно возрастает и выполняется условие $V' > 2P$ (на рис. 2.4 кривые, соответствующие $P=10$).

2. Промежуточный режим. При средних значениях P и St . Градиент осевой скорости имеет максимум (кривые для $P=6$).

3. Режим "застывания" полимера. При больших значениях St и малых P . Градиент осевой скорости монотонно убывает и выполняется условие $V' \leq 2P$ (кривые для $P=1$).

Согласно (2.20) распределение $\sqrt{I_2/2}$ по длине зоны вытяжки подобно распределению V' .

При увеличении тянущего усилия P толщина пленки уменьшается, однако степень охлаждения пленки при этом понижается, так как сокращается время ее пребывания.

Анализ показывает, что при постоянной скорости отбора и незначительном изменении P и St имеет место равенство $St/P = \text{const}$. Откуда следует соотношение $F \approx \text{const} \alpha^* \eta_0$, которое можно использовать при управлении режимом процесса вытяжки пленки.

В изотермическом случае решение уравнения (2.22) с учетом (2.24) имеет вид

$$\bar{b}^{2(s-1)} = 1 - 2^s (s-1) P^s X, \quad n \neq 1. \quad (2.34)$$

Используя условие отбора $X=1$, $\bar{b} = 1/\sqrt{K}$, можно из (2.34) исключить P . При этом, для профиля пленки имеем

$$\bar{\delta} = \bar{b} = \left[1 - (1 - K^{1-s}) X \right]^{1/[2(s-1)]}, \quad (n \neq 1) \quad (2.34)$$

где $K = v_1/v_0$. Распределение скорости $V = 1/\bar{b}^2$. В ньютоновском случае имеем $\bar{\delta} = \bar{b} = \exp(-0,5X \ln K)$.

Выражение для безразмерного градиента осевой скорости

$$\frac{dV}{dX} = \frac{1}{1-s} \left[1 - (1 - K^{1-s}) X \right]^{\frac{1}{n-1}} (K^{1-s} - 1), \quad (n \neq 1). \quad (2.35)$$

Соответственно для ньютоновской жидкости $V' = K^X \ln K$.

На рис. 2.5 представлены профили скорости и ширины пленки при различных кратностях вытяжки и индексах течения, рассчитанные по формуле (2.35). Из рисунка видно, что индекс течения существенно влияет на форму струи, причем с увеличением кратности эффекты аномалии вязкости проявляются ярче. Таким образом, выражения (2.34), (2.35) могут быть использованы для оценок реологических характеристик.

Из сопоставления рис. 2.4 и 2.5 следует, что увеличение n качественно равносильно увеличению St или уменьшению P в условиях неизотермической вытяжки. Критерий Стантона может быть представлен как произведение критериев Фурье и Био. Согласно [6] задачу можно рассматривать как внешнюю при $Bi \leq 0,1$. Таким образом, полученные решения приемлемы при $\alpha^* \delta_0 / 2\lambda \leq 0,1$.

Структура получаемой пленки определяется природой полимера и его температурно-деформационной историей в технологическом процессе. При этом важным фактором является время пребывания полимера в зоне вытяжки, которое определяется путем решения дифференциального уравнения $v_0 V dt = \ell dX$.

2.3. Влияние собственного веса жидкости на течение вертикальной струи

Рассмотрим поле скоростей при вертикальном (сверху вниз) формировании плоской пленки. Течение изотермическое. Учитываются силы реологического сопротивления, инерции и собственного веса. Приложением этой задачи является выбор скорости отбора, обеспечивающей натяжение в конце струи и плотное ее прилегание к поверхности вала.

Воспользуемся уравнением движения в прямоугольных координатах с последующим его усреднением по толщине и ширине струи. Силами инерции в поперечных направлениях пренебрегаем. Касательные напряжения на свободной поверхности отсутствуют. При этом имеем

$$\rho v \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x} + \rho g,$$

где v , σ_{11} - осевая скорость и растягивающее напряжение.

Умножим обе части уравнения на $dzdy$ и проинтегрируем по сечению струи

$$\rho b \delta v \frac{\partial v}{\partial x} = \int_0^\delta \int_0^b \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x} dz dy + \rho g b \delta.$$

Здесь учитывалось равенство $V = v(x)$. Применим формулу Лейбница для первого слагаемого правой части последнего выражения, учитывая зависимость толщины и ширины пленки от расстояния

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^\delta \int_0^b \sigma_{11} dz dy = \int_0^\delta \left[\int_0^b \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x} dz + \frac{d\delta}{dx} \sigma_{11}(\delta) \right] dy + \frac{db}{dx} \int_0^\delta \sigma_{11}(b) dz.$$

Здесь $\sigma_{11}(\delta)$, $\sigma_{11}(b)$ характеризуют действие внешних сил на поверхность пленки (аэродинамических, капиллярных). Считаем их нулевыми. Уравнение движения, с учетом уравнения неразрывности $Q = vb\delta$, примет вид

$$\rho v \frac{\partial v}{\partial x} = v \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\sigma_{11}}{v} \right) + \rho g.$$

2.3.1. Аномально вязкая (степенная) жидкость

Осевое напряжение определим соотношениями

$$\sigma_{11} = 2\eta_0 I_2^{\frac{n-1}{2}} (d_{11} - d_{33}), \quad d_{11} = v', \quad d_{33} = -0.5v', \quad I_2 = 3v'^2.$$

При этом в безразмерных переменных (2.19) получим уравнение

$$\text{Re} V V' = V \left(\frac{V'^n}{V} \right)' + G,$$

$$\text{где } \text{Re} = \rho v_0^{2-n} \ell^n / \left(3^{\frac{n+1}{2}} \eta_0 \right), \quad G = \rho g \ell^{n+1} / \left(3^{\frac{n+1}{2}} \eta_0 v_0^n \right).$$

Путем введения новой переменной $\xi = V'^n / V$, перейдём от нелинейного уравнения второго порядка к системе уравнений первого порядка

$$V' = (\xi V)^s, \quad \xi' = \text{Re}(\xi V)^s - G V^{-1}.$$

Начальное условие для этих уравнений: $X=0$, $V=1$, $\xi = \xi_0$. Величину ξ_0 подбирают из условия отбора: $X=1$, $V=K$.

Поскольку $\text{Re} \leq 10^{-3}$, подробно рассмотрим безынерционный случай течения, для которого уравнение движения имеет вид

$$\frac{d}{dX} \left[\frac{(V')^n}{V} \right] + \frac{G}{V} = 0.$$

Отметим, что при ориентационной вытяжке и горизонтальном формовании можно пренебречь силой собственного веса, положив $G=0$.

Имеем нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка

$$n V'' (V')^{n-1} V - (V')^{n+1} + G V = 0. \quad (2.36)$$

Положив

$$V' = y, \quad (2.37)$$

выполним понижение порядка

$$n y' y^n V - y^{n+1} + G V = 0.$$

Для решения полученного дифференциального уравнения Бернулли используем подстановку [248]

$$z = y^{1+n}, \quad z = z(V). \quad (2.38)$$

В результате получим линейное дифференциальное уравнение

$$z' - (s+1) \frac{z}{V} + (s+1)G = 0.$$

Решение, которого имеет вид [248]

$$z = V^{1+s} \left[C + G(1+n) V^{-s} \right].$$

Учитывая (2.37), (3.38) может записать

$$\frac{dV}{dX} = V^s \left[C + (1+n) G V^{-s} \right]^{\frac{1}{1+n}}. \quad (2.39)$$

Разделяя переменные и интегрируя, с учетом условия $X=0, V=1$, получим

$$X = \int_1^V V^{-5} \left[C + (1+n) G V^{-s} \right]^{\frac{-1}{1+n}} dV. \quad (2.40)$$

Постоянная C определяется из условия отбора $X=1, V=K$

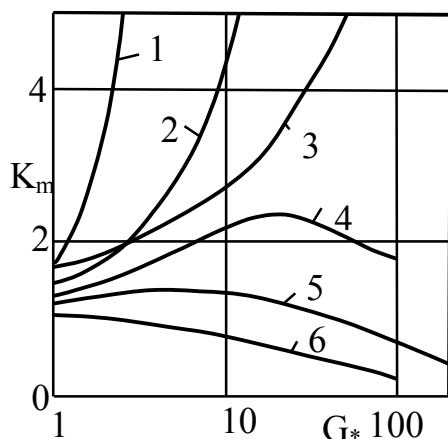


Рис. 2.6

$$1 = \int_1^K V^{-s} [C + (1+n)GV^{-s}]^{\frac{-1}{1+n}} dV. \quad (2.41)$$

В отсутствии гравитационных сил ($G=0$), для V имеем

$$V = \begin{cases} \left\{ 1 + \left(\exp[(1-s)\ln K] - 1 \right) X \right\}^{\frac{n}{n-1}}, & n \neq 1 \\ \exp(X \ln K), & n = 1. \end{cases}$$

Представляет интерес найти минимальное значение кратности вытяжки K_m , при которой струя начинает терять устойчивость из-за сжимающих осевых напряжений.

В случае маловязкой жидкости при этом происходит капиллярный распад, а высоковязкой - продольный изгиб струи с нарушением ее укладки на поверхность вала. Примем в точке отбора нулевые растягивающие напряжения

$$X = 1, \quad dV/dX = 0, \quad V = K_m \quad (2.42)$$

Условию (2.42) отвечает значение постоянной $C = -(1+n)GK_m^{-s}$. Подставляя последнее выражение в (2.41), получим уравнение для определения максимального значения параметра G_*

$$[(1+n)G_*]^{\frac{1}{1+n}} = \int_1^{K_m} V^{-s} (V^{-s} - K_m^{-s})^{\frac{-1}{1+n}} dV. \quad (2.43)$$

Минимальная кратность вытяжки зависит от параметров G_* , n , что иллюстрируется рис. 2.6. Кривой 2 отвечает $n=1$; 1-0,1; 3-2. Условию устойчивого течения (положительность растягивающих напряжений $K > K_m$, $G < G_*$) отвечает область, лежащая выше соответствующей кривой $n=\text{const}$. Для ньютоновского случая кривая аппроксимируется зависимостью $K_m = 1 + 0,445G_*^{0,875}$. С увеличением дилатантных свойств зона устойчивого течения увеличивается. Отметим, что результат получен при игнорировании сил аэродинамического трения струи, и применим для сравнительно коротких струй.

Анализ выражения (2.40) для условий течения струи под действием собственного веса показывает, что распределение осевой скорости близко к линейному закону, что согласуется с экспериментальными результатами Бедера Л.М. [249]. При этом эффекты неньютоновости мало влияют на распределение осевой скорости.

В ньютоновском случае интеграл (2.40) имеет аналитическое представление

$$X = \frac{2}{\sqrt{C}} \ln \left| \frac{\sqrt{CV} + \sqrt{CV + 2G}}{\sqrt{C} + \sqrt{C + 2G}} \right|. \quad (2.44)$$

Условие (2.42) дает трансцендентное уравнение для C

$$1 = \frac{2}{\sqrt{C}} \ln \left| \frac{\sqrt{CK_m} + \sqrt{CK_m + 2G}}{\sqrt{C} + \sqrt{C + 2G}} \right|. \quad (2.45)$$

Можно сделать вывод, что при формировании плоской пленки вертикально вниз (тангенциально к поверхности приемного вала) силы собственного веса могут привести к провисанию струи и нарушению укладки на поверхность вала. Область устойчивого формирования определяется наличием растягивающих напряжений в точке отбора и для жидкости Оствальда -де Вилля зависит от соотношения индекса течения, гравитационного параметра и кратности. Усиление дилатантных свойств повышает устойчивость укладки.

2.3.2. Жидкость максвелловского типа

При высоких скоростях деформаций могут проявляться упругие свойства полимерных жидкостей, поэтому рассмотрим стационарное течение упруговязкой жидкости максвелловского типа (см. гл. 3). Эта модель достаточно хорошо отражает основные свойства упруговязких жидкостей при одноосном растяжении. В принятых обозначениях для осевого напряжения имеем уравнение состояния

$$\sigma_{11} \left(1 - 2\lambda \frac{dv}{dx} \right) + \lambda v \frac{d\sigma_{11}}{dx} = 3\eta \frac{dv}{dx},$$

где λ, η - параметры модели. Для упруговязких жидкостей к граничным условиям следует добавить условие: $x=0, \sigma_{11} = \sigma_{11}^0$, где σ_{11}^0 - значение продольного напряжения в начальном сечении. Эта величина определяется характером течения жидкости в фильтре и зоне перестройки профиля после выхода струи из насадка. Силы инерции и капиллярные эффекты игнорируем. Уравнение движения

$$v \frac{d}{dx} \left(\frac{\sigma_{11}}{v} \right) + \rho g = 0.$$

В безразмерных переменных (2.19), а также, введя обозначения

$$G = \frac{\rho g \ell^2}{3\eta v_0}, \quad We = \frac{\lambda v_0}{\ell}, \quad \{q, q_0\} = \frac{\{\sigma_{11}, \sigma_{11}^0\} \ell}{3\eta v_0},$$

где We - число Вейссенберга, q - безразмерное напряжение, система стационарных уравнений примет вид

$$q' = \frac{Bq}{V} - G, \quad V' = B, \quad B = \frac{q - GVWe}{1 + Weq}, \quad (2.46)$$

$$X=0, V=1, q=q_0; \quad X=1, V=K, q=0.$$

Из сопоставления уравнения движения, полученного путем усреднения параметров по поперечному сечению прямоугольной струи, с данными работы [83] следует, что результаты данного исследования могут быть распространены и на течение струй круглого сечения.

Анализ задачи (2.46) выполнен методом Рунге-Кутты. Шаг по X - 0,05. Погрешность не превышала 1 %. Методом секущих хорд подбиралось q_0 так, чтобы выполнялось условие: $q=0$ при $x=1$. Нулевые напряжения в точке отбора соответствуют минимальной кратности, исключающей возникновение отрицательных (сжимающих) напряжений в струе. Анализ показывает, что выполнение условия отбора можно получить и при наличии в нижней части струи сжимающих напряжений, однако при этом будет происходить продольный изгиб в этой части струи и "завал" ее с образованием складок или отделение от поверхности вала [100]. Результаты расчета представлены на рис. 2.6. Кривой 2 отвечает $We=0$, 4 – 0,1, 5 – 0,2, 6 – 0,4. Видно, что зависимость минимальной кратности вытяжки от гравитационного параметра имеет экстремальный характер. Область $K > K_m$, находящаяся выше кривой характеризует устойчивое течение струи, а ниже ($K < K_m$) - отсутствие течения.

При кратностях $K < K_{max}$ имеются две области устойчивого течения; слева от кривой K_m , и справа от K_m . Учитывая, что G связано с длиной зоны течения, можно сделать вывод, что устойчивое течение в этом случае возможно или при малых длинах струи или при больших, но невозможно при средних, соответствующих области $K < K_m$. При этом следует иметь ввиду, что с изменением длины изменяется и число Вейссенберга. При больших G как профиль скорости, так и растягивающее напряжение имеют внутри зоны течения экстремум, что иллюстрируется рис. 2.8. Кривые 1 соответствуют $G^*=1$; $K=1,315$; $q_0=0,822$, а кривые 2 – $G^*=200$; $K=1,375$; $q_0=76,758$.

Согласно рис. 2.6 с увеличением We и G , (правая ветвь) кратность K_m снижается до значений меньше единицы. Под действием напряжений, обусловленных силами собственного веса, струя утолщается и покидает зону течения с сечением больше начального. Здесь имеет место релаксация растягивающих напряжений, запасенных в "шейке", соответствующей максимуму скорости при $X=0,8$. Максимум напряжений ($X=0,3$) всегда находится выше максимума скорости (минимума поперечного сечения) ($X=0,8$).

При малых G^* , K_m , We эпюры скорости и напряжения близки к линейным зависимостям: $q=q_0(1-X)$, $V=1+(K_m-1)X$. С увеличением G^* и K_m упругие силы проявляются слабо, и течение близко к ньютоновскому случаю (эпюра скорости близка к экспоненциальной зависимости $V=K^X$). При $G^* \geq 40$ в результате проявления упругих свойств, эпюры q и V стремятся к линейному распределению. С увеличением We ($We \geq 10$) снижается порог для G^* и K_m , при котором имеет место подобие эпюр продольной скорости (или продольных распределений радиуса), и справедлива оценка $G^* \sim 1/We$, $K_m \sim q_0/G^*$.

В случае обобщенной максвелловской жидкости есть режим, в котором устойчивая укладка возможна при малых и больших протяженностях зоны течения, но невозможна при средних. При значительной протяженности зоны течения, растягивающие напряжения и осевая скорость имеют экстремальный характер. Кроме того, если при этом

велико число Вейссенберга то возможно получение струи с сечением больше начального (скорость отбора меньше начальной скорости). Максимум напряжений всегда находится выше максимума скорости, где струя имеет «шейку». При $G > 40$ распределения скорости и напряжений близки к линейным.

2.3.3. О бесфильтрном формовании

Кратко остановимся на формально близком, но принципиально отличном случае течения свободной струи вверх от насадка к приемному валку. Задача связана с проблемой прядомости жидкостей [250] и так называемым "бесфильтрным формованием" синтетических волокон [83], формованием листового стекла со свободной поверхности расплава.

Ось x направим вверх. Начало координат поместим у среза насадка. Уравнение движения без учета сил инерции и капиллярных эффектов имеет вид

$$v \frac{d}{dx} \left(\frac{\sigma_{11}}{v} \right) - \rho g = 0. \quad (2.47)$$

Рассмотрим случай течения, когда у среза насадка нулевые растягивающие напряжения. Граничные условия имеют вид:

$$x = 0: \quad \sigma_{11} = 0, \quad v = v_0, \quad x = \ell: \quad \sigma_{11} = \sigma_{11}^K, \quad v = Kv_0. \quad (2.48)$$

В ньютоновском случае ($\sigma_{11} = 3\eta dv/dx$) решение задачи имеет вид

$$X = \frac{2}{\sqrt{C}} \ln \left| \frac{\sqrt{CV} + \sqrt{CV - 2G}}{\sqrt{C} + \sqrt{C - 2G}} \right|, \quad 1 = \frac{2}{\sqrt{C}} \ln \left[\frac{\sqrt{CK} + \sqrt{CK - 2G}}{\sqrt{C} + \sqrt{C - 2G}} \right]. \quad (2.49)$$

Здесь использованы безразмерные переменные (2.19). На корень C в (2.49) налагается ограничение $C \geq 2G$. В предельном случае $C = 2G^*$. Эпюра осевой скорости описывается уравнением

$$X = \ln(\sqrt{V} + \sqrt{V - 1}) / \ln(\sqrt{K_m} + \sqrt{K_m - 1}).$$

Кроме того, при этом для параметров G и K_m должно выполняться соотношение

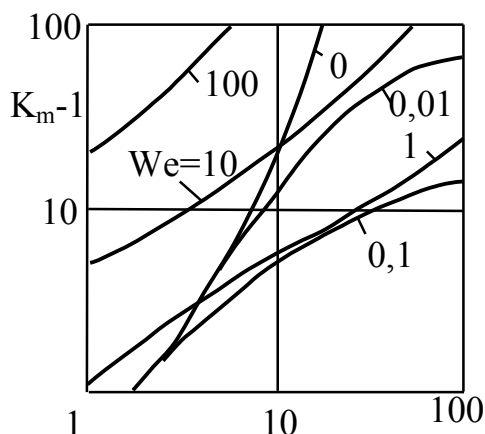


Рис. 2.7

$$G \leq 2 \ln^2 (\sqrt{K_m} + \sqrt{K_m - 1}).$$

Именно при выполнении этого условия возможно течение вязкой жидкости вверх, что в какой-то мере объясняет неудачную попытку А.Н. Прокунина [250] в экспериментальных условиях получить устойчивую струю со свободной поверхности меда. Кривая предельной прядомости вязкой жидкости показана на рис. 2.7 ($We=0$). Теоретические результаты

предполагает прядомость ньютоновских жидкостей при больших K , однако при этом могут сильно проявляться капиллярная неустойчивость, "резонанс при вытяжке" и центробежные силы в жидкости на поверхности вала. Анализ показывает, что при прядении высоковязкой жидкости в области больших G и K наиболее интенсивное течение имеет место в конце зоны вытяжки и струя почти по всей длине имеет поперечные размеры, близкие к начальным.

В случае степенной жидкости осевое напряжение определяется выражением $\sigma_{11} = \eta 3^{\frac{n+1}{2}} (v')^n$. Рассматривая совместно это уравнение с (2.47), (2.48) получим определяющие соотношения для скорости и напряжений:

$$\begin{aligned} V' &= q^s, & q' &= \frac{q^{1+s}}{V} + G, \\ X &= 0, & q &= 0, & V &= 1, \\ X &= 1, & q &= q_K, & V &= K, \end{aligned}$$

где $G = \rho g \ell^{n+1} / \left(3^{\frac{n+1}{2}} \eta v_0^n \right)$, $q = \sigma_{11} \ell^n / \left(3^{\frac{n+1}{2}} \eta v_0^n \right)$, $s = 1/n$.

Задача решалась методом Рунге-Кутты. Критические линии монотонно возрастают, экстремумов нет. Повышение дилатантных свойств улучшает прядомость, что согласуется с результатами [159].

Запишем определяющие уравнения для максвелловской жидкости

$$V' = B, \quad q' = \frac{Bq}{V} + G, \quad B = \frac{q + GWeV}{1 + Weq}, \quad (2.50)$$

$$X=0, V=1, q=0; \quad X=1, V=K, q=q_K.$$

Здесь использованы масштабы, принятые в (2.46). Начальные градиенты $X=0$, $q'=G$, $V'=GWe$.

На рис. 2.7 представлены графики предельных кратностей (K_m) в зависимости от G_* , We . Зависимости имеют монотонно возрастающий характер. Даже при слабых упругих свойствах жидкости ($We=0,01$) прядомость значительно улучшается, что проявляется в снижении K_m (особенно с увеличением G_*). Однако усиление упругих свойств ($We \sim 10$) повышает K_m при малых G_* ($G_* \leq 1$) и уменьшает K_m в области больших G_* , ($G_* > 100$). С увеличением G_* и We распределение растягивающих напряжений стремится к линейной зависимости. Точек экстремума внутри зоны течения нет. Аналогично ведет себя эпюра осевой скорости.

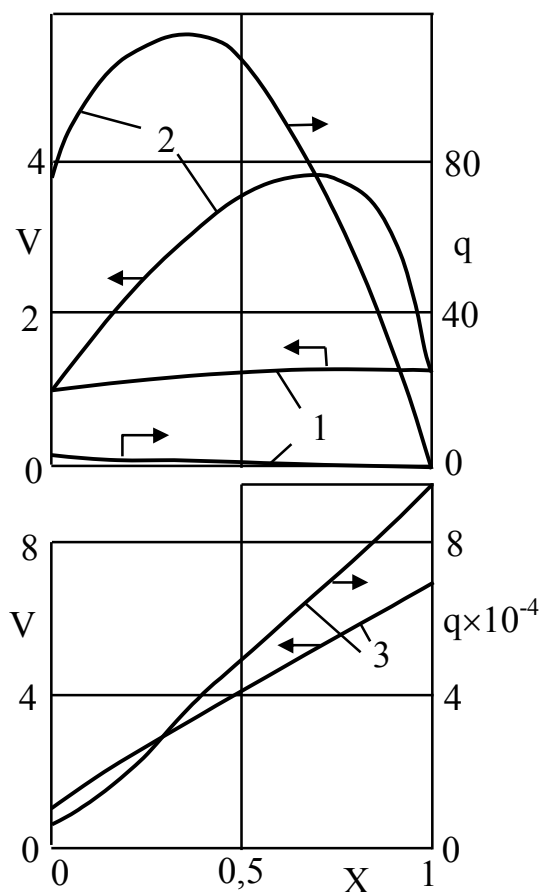


Рис. 2.8

Вытяжка вязкоупругой жидкости со свободной поверхности по бесфильтровой схеме (бесконечный диаметр насадка) исследована А.Н. Прокуниным [250]. Экспериментально измерено осевое распределение скорости, радиуса, напряжений. На некотором расстоянии от свободной поверхности течение приобретает квазиодномерный характер, что позволяет использовать полученные модели.

Опыты в работе [250] проводились на водном 0,5 % растворе полиоксиэтилена с физическими свойствами: $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$, $\lambda = 1,3 \text{ с}$, $\eta = 0,1 \text{ Па}\cdot\text{с}$. Экспериментально получено распределение радиуса струи и растягивающих напряжений при длине вытяжки $\ell = 0,17 \text{ м}$. Из графиков [251] следует: $K_3 = (r_0/r_1)^2 = 8$;

$$v_0 = Q / (\pi r_0^2) = 0,38 / (\pi 0,18^2) = 0,0373$$

м/с, где K_3 - кратность вытяжки в экспериментальных условиях, r_0 , r_1 - начальный и конечный радиусы струи. Для указанных условий безразмерные комплексы составляют: $We = 0,285$, $G = 25826$. Начальное напряжение в опытах составляло $\sigma_{11}^0 = 400 \text{ Па}$, соответственно безразмерное начальное напряжение $q_0 = 6076$. Расчетные по модели (2.50) значения кратности и напряжения в точке отбора ($X=1$) составляли: $K_T = 6,916$ и $q_k = 96853$. Безразмерному напряжению в точке отбора соответствует $\sigma_{11}^k(x=1) = 6376 \text{ Па}$. В экспериментальных условиях зарегистрировано растягивающее напряжение, равное $\sigma_{11}^k(x=\ell) = 6400 \text{ Па}$. Расчетные распределения скорости и напряжения, для рассматриваемого случая, представлены на рис. 2.8, кривые 3.

Таким образом, модель (2.50) удовлетворительно согласуется с экспериментальными результатами, полученными при течении реальной вязкоупругой жидкости. Распределение скорости и растягивающих напряжений, как в эксперименте, так и по результатам расчета близки к линейным зависимостям. Следует отметить, что увеличение начального напряжения приводит к снижению кратности вытяжки, т.е. вязкоупругая жидкость ведет себя «противоположным образом» по сравнению с ньютоновской. Это подчеркивает важность учета упругих напряжений в продольных течениях.

При различных скоростях отбора в [250] обнаружено подобие распределений радиуса струи. Согласно модели (2.50) это объясняется

линейным характером распределения осевой скорости при больших значениях гравитационного параметра.

В случае вытягивания струи ньютоновской жидкости вверх (безфильерное формование волокон) стационарное течение возможно при выполнении условия $G \leq 2 \ln^2(\sqrt{K} + \sqrt{K-1})$. Прядомость улучшается с усилением дилатантных свойств. Наличие даже слабых упругих свойств жидкости ($We \sim 0,01$) значительно повышает прядомость. Для жидкости Максвелла растягивающие напряжения распределяются линейно. Внутри зоны течения нет экстремумов скорости и напряжений. Теоретические результаты удовлетворительно согласуются с экспериментальными данными.

2.3.4. Нестационарное течение вязкой жидкости

В квазиодномерном приближении получено решение задачи нестационарного элонгационного течения струи с учетом сил собственного веса. В качестве приложения полученного решения можно указать на проблему прядомости вертикальных струй [250], процессы низкоскоростного формирования плоских пленок из расплавов полимеров [19].

Считаем инерционные, капиллярные и силы аэродинамического трения незначительными в сравнении с силами вязкого трения и собственного веса.

С учетом принятых допущений квазиодномерные уравнения неразрывности и движения имеют вид [238]

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} + \frac{\partial(fV)}{\partial X} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial X} \left(f \frac{\partial V}{\partial X} \right) = -fR \quad (2.51)$$

Для уравнений (2.51) поставим следующую начально-краевую задачу

$$\begin{aligned} \tau = 0, \quad f = f_s(X), \quad V = V_s(X); \\ X = 0, \quad f = f_0(\tau), \quad V = V_0(\tau); \quad X = 1, \quad V = V_1(\tau). \end{aligned} \quad (2.52)$$

В (2.51), (2.52) использованы безразмерные переменные и параметры:

$$\begin{aligned} X = \frac{x}{\ell}, \quad \tau = \frac{t \langle v_0 \rangle}{\ell}, \quad R = \frac{\rho g \ell^2}{3\eta \langle v_0 \rangle}, \quad \{f, f_0\} = \frac{\{f_*, f_{*0}(t)\}}{\pi \langle a_0 \rangle^2}, \\ \{V, V_0(\tau), V_1(\tau)\} = \frac{\{v, v_0, v_1\}}{\langle v_0 \rangle}. \end{aligned}$$

где f_* , f_{*0} - текущая и начальная площадь поперечного сечения, v , $v_0(\tau)$, $v_1(\tau)$ - текущая, начальная и конечная осевая скорость, $\langle v_0 \rangle$ - средняя начальная скорость, $\langle a_0 \rangle$ - средний начальный радиус, η - вязкость, t - время, x - продольная координата, ℓ - длина струи, g - ускорение свободного падения, ρ - плотность жидкости, X - безразмерная продольная координата, τ - безразмерное время, R - гравитационный параметр.

В качестве граничных условий заданы законы изменения со временем площади сечения и скорости струи на выходе из насадки, а также скорости

отбора. Величины, характеризующие масштаб скорости, радиуса и длины в нестационарных режимах принимаются усредненными $\langle v_0 \rangle$, $\langle a_0 \rangle$, ℓ .

Уравнения (2.51) построены для течения сверху вниз. Если инвертировать знак при R в (2.51) и последующих выражениях, то задача будет соответствовать случаю течения снизу вверх.

Введем в качестве новой пространственной переменной Y , определенную равенствами [201]

$$\frac{\partial Y}{\partial X} = f, \quad \frac{\partial Y}{\partial \tau} = -fV. \quad (2.53)$$

Соответственно уравнения (2.51) представляются в виде

$$\frac{\partial^2 f}{\partial X \partial \tau} = R, \quad \frac{\partial}{\partial Y} \left(f^2 \frac{\partial V}{\partial Y} \right) = -R. \quad (2.54)$$

Интегрируя первое уравнение в (2.54), имеем

$$f = RY\tau + A(Y) - B(\tau), \quad (2.55)$$

где $A(Y)$, $B(\tau)$ - произвольные функции.

Интегрируя второе уравнение в (2.54), получаем выражение для тянущего усилия

$$f^2 \frac{\partial V}{\partial Y} = F(Y, \tau), \quad F(Y, \tau) = -RY + E(\tau) \quad (2.56)$$

где $E(\tau)$ - произвольная функция.

Согласно (2.56) тянущее усилие $F(Y, \tau)$ изменяется по длине струи. При течении сверху вниз в начальном сечении усилие наибольшее и наименьшее - в конечном. Условие отсутствия сжимающих напряжений ($F > 0$) справедливо для прямолинейной натянутой струи. В случае $F < 0$ за счет сжимающих напряжений возникает продольный изгиб струи и стационарное течение невозможно.

Из (2.55) и (2.56) находим

$$V = V_0(\tau) - \int_{Y_0}^Y \frac{[R\xi - E(\tau)]}{[R\xi\tau + A(\xi) - B(\tau)]^2} d\xi \quad (2.57)$$

где $Y_0(\tau)$ - значение Y в начальном сечении.

Согласно (2.53) $\partial X / \partial Y = 1/f$, и для продольной координаты имеем

$$X = \int_{Y_0}^Y \frac{d\xi}{R\xi\tau + A(\xi) - B(\tau)} \quad (2.58)$$

Дифференцируя (2.58) по τ и учитывая, что в переменных τ , Y , $\partial X / \partial \tau = v$, находим, что $E = \partial B(\tau) / \partial \tau$.

Выражения (2.55), (2.57), (2.58) дают общее решение уравнений (2.51), выражаемое через произвольные функции A , B . Решение получено в параметрической форме.

Используя граничные условия (2.52), находим в неявном виде функции A , B , входящие в решение

$$Y_0(\tau) = Y(0, \tau) = - \int_0^\tau f_0(S) V_0(S) dS, \quad f_0(\tau) = RY_0\tau + A(Y_0) - B(\tau),$$

$$\frac{\partial Y_1}{\partial \tau} = -V_1(\tau) [RY_1\tau + A(Y_1) - B(\tau)], \quad f_1(\tau) = RY_1\tau + A(Y_1) - B(\tau),$$

$$V_1(\tau) = V_0(\tau) - \int_{Y_0}^{Y_1} \frac{(R\xi - \partial B/\partial \tau)}{[R\xi\tau + A(\xi) - B(\tau)]^2} d\xi, \quad 1 = \int_{Y_0}^{Y_1} \frac{d\xi}{[R\xi\tau + A(\xi) - B(\tau)]},$$

$$F_0(\tau) = -RY_0 + \partial B/\partial \tau, \quad F_1(\tau) = -RY_1 + \partial B/\partial \tau.$$

Полученная математическая модель позволяет исследовать как стационарные, так и динамические режимы течения, выяснить влияние сил собственного веса на возникновение “резонанса при вытяжке”.

2.4. Остаточное течение жидкости на валке

При описании течения свободной струи с отбором на вращающийся валок принято считать, что течение заканчивается в момент касания струей поверхности валка, и частицы жидкости приобретают скорость равную его окружной скорости валка. Однако Прокуниным А.Н. при исследовании вытягивания струи раствора полиоксиэтилена (жидкость с ярко выраженными упругими свойствами), было обнаружено, что скорость струи вблизи места касания с валком меньше окружной скорости валка в 1,5-3 раза. Т.е. имело место эффективное проскальзывание струи относительно валка [250]. Именно способностью растянутой свободной струи вязкоупругой жидкости скользить по стенке обусловлен, описанный Ентовым В.М., эффект нормальных напряжений [217].

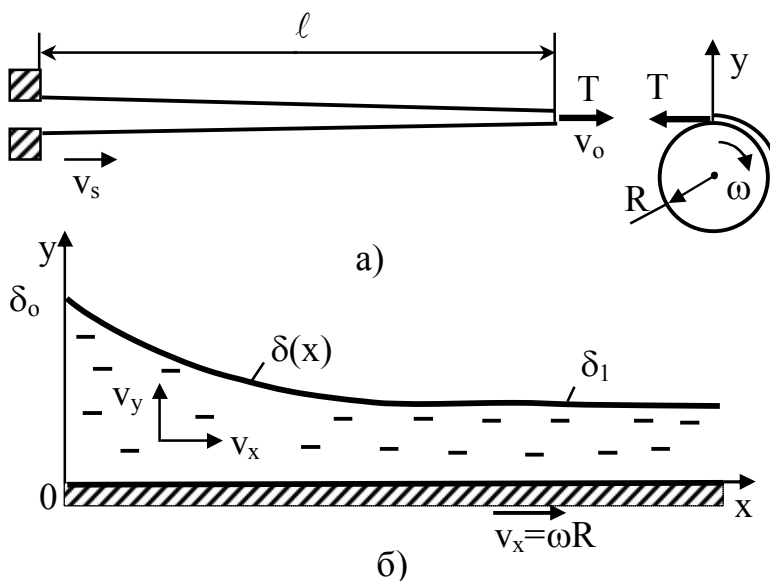


Рис. 2.9

Эффекты проскальзывания по поверхности тянущих валков плоских пленок анализируются в работе [251]. Отмечено влияние эффектов трения на устойчивость процесса формирования и качественные показатели получаемых пленок.

Имеющиеся подходы, например, задача об извлечении пластины из жидкости [145] или

экспоненциальный закон Эйлера об изменении натяжения полотна (ремня) вдоль окружности валка [252] к рассматриваемому течению неприемлемы.

Отмеченные факты свидетельствуют в пользу подробного рассмотрения гидродинамического взаимодействия боковой поверхности свободной растянутой струи и твердой непроницаемой поверхности. Предпринята попытка, в стоксовом приближении проанализировать закономерности течения в системе: вытянутая струя - отборный валок.

Схема течения и система координат показаны на рис. 2.9. Струя жидкости с начальной скоростью v_s , выходя из насадка, попадает в зону длиной ℓ , где происходит ее растяжение. Осевая скорость плоской струи в точке касания вала v_0 . Радиус вала R , а скорость его вращения ω . В точке касания растягивающие напряжения в струе T .

Рассмотрим пленку жидкости на валке рис. 2.9, б. Непосредственно в момент касания толщина плоской струи δ_0 , а на большом удалении от точки касания δ_1 . Учитывая $\delta_1 \ll R$, пренебрегаем кривизной поверхности вала и рассматриваем течение в декартовой системе координат, начало которой поместим в точку контакта (неподвижная система координат по Эйлеру). Ось y направлена по радиусу, а ось x - совпадает с направлением вращения и лежит на поверхности вала. Жидкость ньютоновская, высоковязкая. Поверхностным натяжением, силами инерции, аэродинамического трения и собственного веса пренебрегаем. На поверхности вала принимаем условие прилипания, а компоненты скорости: $v_x = \omega R$, $v_y = 0$. Толщина пленки однородна по ширине. Траектории частиц жидкости лежат в плоскостях перпендикулярных оси вала и $v_z = 0$, $\partial/\partial z = 0$. Течение стационарное изотермическое. На свободной поверхности $\delta = \delta(x)$ используются условия непрерывности нормальных и отсутствие касательных напряжений. Давление над свободной поверхностью P_0 без снижения общности полагаем $P_0 = 0$.

До контакта с валком течение в струе квазиодномерное (осевая скорость и напряжение однородно по сечению). На начальном участке контакта с валком течение двумерно и кроме неоднородных по сечению нормальных напряжений появляются касательные, обусловленные гидродинамическим влиянием стенки вала. Предполагаемая протяженность участка гидродинамического взаимодействия соизмерима с толщиной пленки.

С учетом принятых допущений, течение жидкости на поверхности вала в области $0 \leq x \leq +\infty$, $0 \leq y \leq \delta(x)$ описывается уравнениями [239]

$$\frac{1}{\eta} \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}, \quad (2.50)$$

$$\frac{1}{\eta} \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2}, \quad (2.51)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0, \quad (2.52)$$

$$x = 0, \quad T = -P + 2\eta \partial v_x / \partial x, \quad v_x = v_0, \quad \delta = \delta_0, \quad (2.53)$$

$$x = \infty, \quad v_x = \omega R, \quad P = 0, \quad v_y = 0, \quad \delta = \delta_1, \quad (2.54)$$

$$y=0, \quad v_x=\omega R, \quad v_y=0, \quad (2.55)$$

$$y=\delta, \quad \tau_{xy}=\eta(\partial v_x/\partial y + \partial v_y/\partial x)=0, \quad \tau_{yy}=-P+2\mu\partial v_y/\partial y=0. \quad (2.56)$$

Проинтегрировав по толщине пленки уравнение (2.52), получим уравнение для профиля свободной поверхности

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^\delta v_x dy - v_x(\delta) \frac{d\delta}{dx} + v_y(\delta) = 0. \quad (2.57)$$

Определим компоненты скорости через функцию тока

$$v_x = \partial\psi/\partial y, \quad v_y = -\partial\psi/\partial x \quad (2.58)$$

При этом уравнения (2.50), (2.51) примут вид

$$\frac{1}{\eta} \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial^3 \psi}{\partial y \partial x^2} + \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3}, \quad -\frac{1}{\eta} \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \psi}{\partial x \partial y^2}. \quad (2.59)$$

Путем перекрестного дифференцирования из (2.59) получим

$$\nabla^2 P = 0, \quad \nabla^4 \psi = 0. \quad (2.60)$$

В предположении малых отклонений поверхности $(\delta_0 - \delta_1) \ll \delta_1$, ищем поле скоростей и давления для полубесконечной полосы $0 \leq y \leq \delta_1$, $0 \leq x \leq +\infty$. Граничные условия с линии $\delta(x)$ перенесем на линию δ_1 .

Уравнениям (2.60) удовлетворяют решения в форме

$$\psi = (c_1 \sin \alpha y + c_2 \cos \alpha y + c_3 \alpha y \sin \alpha y + c_4 \alpha y \cos \alpha y) \exp(\alpha x) + c_5 y,$$

$$P = \eta A_1 (\sin \alpha y + A_2 \cos \alpha y) \exp(\alpha x).$$

Постоянные C_1 - C_5 найдем из граничных условий. Используя условия (2.55), получаем $C_2=0$, $C_1=-C_4$, $C_5=\omega R$. Из условия для касательных напряжений (2.56) имеем $C_1=C_3$ ($\operatorname{tg} \alpha \delta_1 - \alpha^{-1} \delta_1^{-1}$). Для функции тока можем записать

$$\psi = C_3 \left[(\operatorname{tg} \alpha \delta_1 - \alpha^{-1} \delta_1^{-1}) (\sin \alpha y - \alpha y \cos \alpha y) + \alpha y \sin \alpha y \right] \exp(\alpha x) + \omega R y. \quad (2.61)$$

Последнее слагаемое учитывает поступательное движение жидкости с поверхностью вала.

Постоянные A_1 и A_2 найдем, используя любое из уравнений (2.59). Имеем $A_1 = -2C_3 \alpha^2$, $A_2 = (\alpha^{-1} \delta_1^{-1} - \operatorname{tg} \alpha \delta_1)$. Давление описывается зависимостью

$$P = -2C_3 \alpha^2 \eta \left[\sin \alpha y + (\alpha^{-1} \delta_1^{-1} - \operatorname{tg} \alpha \delta_1) \cos \alpha y \right] \exp(\alpha x). \quad (2.62)$$

Собственные числа задачи определим из условия для нормальных напряжений на поверхности (2.56). Положив $\alpha = -\lambda/\delta_1$, и подставив (2.61), (2.62) в σ_{yy} , получим уравнение $1 - \lambda^2 = \lambda^2 \operatorname{tg}^2 \lambda$, которое имеет положительный единственный действительный корень $\pm \lambda = \cos \lambda$, $\lambda_1 = 0,739085$. Ограничимся аperiодическим приближением для течения. Существование только одного собственного числа обусловлено спецификой граничных условий на поверхности.

Решение в форме (2.61) не удовлетворяет начальному условию (2.53), поэтому потребуем его выполнения среднеинтегрально

$$x = 0, \quad \delta_0^{-1} \int_0^{\delta_0} v_x dy = v_0,$$

откуда найдем постоянную C_3

$$C_3 = \frac{\delta_0 \lambda (v_0 - \omega R)}{1 - \lambda \operatorname{tg} \lambda}. \quad (2.63)$$

Кроме того, интегральная форма граничных условий (2.53) для v_x и T сглаживает особенность точки контакта, в которой $v_x(x = -0, y = 0) = v_0$, $v_x(x = +0, y = 0) = \omega R$ и градиент скорости бесконечен. Очевидно, в реальных условиях гидродинамическое влияние вала на струю начинается до ее контакта с поверхностью.

Уравнение (2.57) запишем через функцию тока

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\psi \Big|_0^\delta \right) - \frac{d\delta}{dx} \frac{\partial \psi}{\partial y} \Big|_\delta - \frac{\partial \psi}{\partial x} \Big|_\delta = 0. \quad (2.64)$$

В (2.63), (2.64) используем условие $(\delta_0 - \delta_1) \ll \delta_1$, а в тригонометрических функциях полагаем $\delta_0/\delta_1 \sim \delta/\delta_1 \sim 1$.

Из (2.64) получаем дифференциальное уравнение первого порядка для толщины жидкой пленки на валке

$$\frac{d\delta}{dx} = \frac{B\lambda}{B - \lambda} \left(\frac{\delta}{\delta_1} - 1 \right),$$

где $B = (\lambda^{-1} - \operatorname{tg} \lambda)(\lambda^2 - \sin \lambda) + \lambda \sin \lambda$.

Его решение с учетом начального условия (2.53)

$$\bar{\delta} = \frac{\delta - \delta_1}{\delta_0 - \delta_1} = \exp \left(-1,097 \frac{x}{\delta_1} \right) \quad (2.65)$$

Согласно (2.65) протяженность зоны течения на валке определяется только толщиной пленки на бесконечности δ_1 . При $x = 3\delta_1$, $\bar{\delta} = 0,037$, и течение практически заканчивается.

Начальное напряжение T найдем из условия для нормальных напряжений (2.53) в интегральной форме

$$T = \frac{1}{\delta_0} \int_0^{\delta_0} (2\eta \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - P) dy.$$

Выполнив интегрирование с учетом (2.61)-(2.63), получим

$$T = 3,347 \frac{\eta(\omega R - v_0)}{\delta_0}.$$

Введем кратность вытяжки на валке $K_2 = \omega R / v_0$. Из условия неразрывности потока в начальном сечении и на бесконечности следует $\delta_0 v_0 = \delta_1 \omega R$ или $\delta_0 = K_2 \delta_1$. При этом полагаем, что ширина струи постоянна. Для начального напряжения можем записать

$$T = 3,347 \frac{\eta \omega R (K_2 - 1)}{\delta_1 K_2} . \quad (2.66)$$

Напряжение T обусловлено растяжением струи между насадкой и отборным устройством (см. рис. 2.9, а). Представляет интерес оценить связь условий вытяжки свободной струи с деформацией жидкой пленки на поверхности вала. Для свободной изотермической струи примем экспоненциальное распределение осевой скорости $v = v_s K_1^{x/\ell}$, где x – расстояние от насадка, K_1 – кратность элонгационной вытяжки. Тогда растягивающие напряжения в сечении отбора

$$T = 3\eta \left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{x=\ell} = \frac{3\eta v_s K_1 \ln K_1}{\ell} . \quad (2.67)$$

Между кратностями K_1 и K_2 есть связь

$$K = K_1 K_2 , \quad (2.68)$$

где $K = \omega R / v_s$ – общая кратность, $K_1 = v_0 / v_s$. В случае пленки постоянной ширины кратности характеризуют степень ее утонения.

Из совместного рассмотрения (2.66) – (2.68) получим для кратности вытяжки жидкой пленки на поверхности вала

$$K_2 = 1 + 0,8963 (\delta_1 / \ell) \ln K_1 .$$

Таким образом, для ньютоновских жидкостей эффект остаточного течения на валке наиболее существенно проявляется в случае толстой пленки (δ_1) и малых протяженностей зоны формования (ℓ). Рассмотренный эффект может иметь существенное значение в случае последующего охлаждения пленки на валке, поскольку скорость кондуктивного охлаждения зависит от квадрата толщины пленки. Дальнейшим развитием задачи является учет упругих свойств жидкости, неизотермичности, проскальзывания пленки по поверхности вала, а также случай схода пленки с поверхности вала с последующим элонгационным течением. Эффект может привести к искажениям результатов продольной реометрии.

2.5. Нанесение высоковязкой жидкости на движущуюся подложку

Проблеме статического равновесия тяжелой нерастяжимой нити посвящена задача о форме, принимаемой тросом змейкового аэростата под действием ветра [107]. В [253] рассмотрена задача об условиях равновесия шаровой мины, постоянной на течении. Статическое равновесие изогнутой струи было впервые проанализировано в [217]. Характерные для этого вида течения нелинейные эффекты описаны в работах [159, 175, 201].

В длинноволновом приближении изучается влияние условий течения на кинематические характеристики гравитационно-изогнутой стационарной струи. В результате численного анализа линеаризованной задачи о малых возмущениях струи определена область устойчивого течения. Полученные результаты можно использовать при формировании пленок из расплавов [10] и

растворов [9] полимеров методом «полива» на движущуюся подложку или вращающийся барабан. Кроме того, рассматриваемое течение имеет место в технологии светочувствительных материалов. Интенсификация этих процессов, а также повышение качества получаемых пленок (например, устранение продольной разнотолщинности) требуют понимания закономерностей при течении гравитационно-изогнутой натянутой струи.

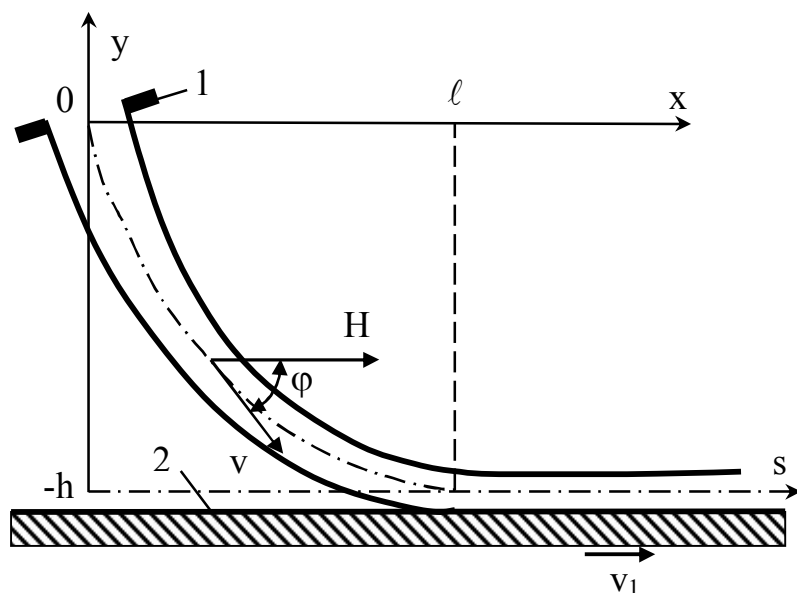


Рис. 2.10

Постановка задачи. Схема течения и система координат представлены на рис. 2.10. Из плоской щели 1 непрерывно выдавливается струя высоковязкой жидкости с начальной скоростью, однородной по ширине щели. Ниже формирующего устройства в горизонтальном направлении (кривизной барабана пренебрегаем) с постоянной скоростью v_1 перемещается плоская

подложка 2. В момент касания струей поверхности деформации в струе прекращаются, и жидкость приобретает скорость v_1 . Затягиванием воздуха в зазор между жидкостью и подложкой пренебрегаем.

Начало декартовой системы координат помещено в центре сечения струи, где закончился процесс перестройки профиля скорости. Ось x — горизонтальна, y — вертикальна. Координаты x и y характеризуют положение срединной поверхности. Штрихпунктирной линией обозначена срединная поверхность, протяженность которой характеризует s . Изгиб происходит в плоскости xu . Значения $x=l$, $y=-h$ отвечают «точке прилипания» струи к поверхности. Физическая точка контакта находится ниже на половину конечной толщины струи. Текущее сечение струи имеет толщину δ и ширину b , а нормальное сечение струи в начале координат — форму прямоугольника с размерами сторон δ_0 и b_0 .

Изучение течения жидкости в струе ведется с использованием квазиодномерного описания в пренебрежении инерционной, капиллярной и аэродинамической (трения о воздух) силами по сравнению с вязкой. Толщина струи мала в сравнении с ее длиной, поэтому изгибающий момент незначителен. Рассматриваем срединную поверхность струи как одномерный материальный континуум, (параметры усредняются по толщине и ширине струи). Стационарное течение описывается уравнениями [240]

$$\begin{aligned}
\frac{d(b\delta v)}{ds} &= 0, & \frac{d}{ds}(P \cos \varphi) &= 0, & \frac{d}{ds}(P \sin \varphi) &= b\delta \rho g, & (2.69) \\
P &= b\delta \sigma_{11}, & \frac{dy}{ds} &= \sin \varphi, & \frac{dx}{ds} &= \cos \varphi, \\
x &= 0, \quad y=0, \quad v = v_0, \quad \varphi = \varphi_0, \quad \delta = \delta_0, \quad s=0, \\
x &= \ell, \quad y = -h, \quad v = v_1, \quad \varphi=0, \quad s = s_1.
\end{aligned}$$

Здесь P - осевая сила в сечении, φ – угол между касательной к траектории струи и горизонталью, b – ширина струи, ρ – плотность жидкости, g – ускорение силы тяжести, σ_{11} – растягивающее напряжение, v – скорость, φ_0 – начальный угол, s_1 -общая длина струи.

Первое уравнение (2.69) – уравнение неразрывности, второе и третье – проекции уравнения количества движения, пятое и шестое – геометрические соотношения. В случае круглой струи в (2.69) достаточно заменить $b\delta$ на πr^2 (r - радиус струи).

Для замыкания задачи необходимо (2.69) определить растягивающие напряжения. Считаем, что скорости деформации незначительны и свойства жидкости можно охарактеризовать ньютоновским законом $\sigma = -p\delta + 2\eta \mathbf{d}$, где p – изотропное давление, η - вязкость, δ – метрический тензор; σ , $\mathbf{d}$ - тензоры напряжений и скоростей деформаций.

Компоненты тензора напряжений обозначим через $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}$ (индекс 1 отвечает орту касательной к оси струи, 2 – орту бинормали, 3 – орту нормали). В пренебрежении трением о воздух на поверхности свободной струи высоковязкой капельной жидкости в случае длинноволновых возмущений напряжения σ_{21} и σ_{31} в струе пренебрежимо малы в сравнении с осевым напряжением σ_{11} : $\sigma_{21} = O(\varepsilon \sigma_{11})$, $\sigma_{31} = O(\varepsilon \sigma_{11})$, $\varepsilon \sim \delta_0/s_1 \ll 1$. Сравнительно небольшая величина касательных напряжений указывает на то, что жидкое сечение струи остается плоским при изгибе. Поэтому жидкий параллелепипед, мысленно вырезанный из струи прямоугольного сечения, при ее изгибе поворачивается и растягивается вдоль оси струи s , сохраняя прямоугольное сечение. Эта картина не меняется с ростом амплитуды возмущений до тех пор, пока сохраняется длинноволновый характер движения, и на струе не возникают локально участки большой кривизны, что имеет место лишь для очень больших амплитуд возмущений.

Для течения плоской струи с укладкой на движущуюся поверхность, например, на вращающийся барабан, характерен «ширительный» эффект, который проявляется в увеличении ширины струи с уменьшением длины зоны течения и обусловлен силами трения между жидкостью и поверхностью [235]. В условиях одноосной вытяжки $\sigma_{22} = \sigma_{33} = 0$ и поперечная деформация жидкого сечения изотропна (поперечные сечения геометрически подобны). Ширина струи не будет изменяться лишь в случае, если к ее краям приложить внешнее напряжение $\sigma_{22} = \sigma_{11}/2$. Влияние на течение трения

струи о поверхность барабана предложено имитировать приложением к ее краям растягивающих напряжений, т.е. $\sigma_{33} = 0$, $\sigma_{22} = \psi \sigma_{11}$, где ψ – коэффициент, зависящий от размеров зоны течения ($0 \leq \psi \leq 0,5$).

В общем случае Реодинамика плоской струи характеризуется соотношениями $d_{11} = v' = \partial v / \partial s$, $d_{22} = v'(2\psi - 1)/(2 - \psi)$, $d_{33} = v'(1 + \psi)/(\psi - 2)$, $p = 2\eta v'(1 + \psi)/(\psi - 2)$, $\sigma_{11} = 6\eta v'/(2 - \psi)$. Согласно [235] при $s_1 \geq b_0$ имеет место одноосное течение ($\psi=0$ и $\sigma_{11} = 3\eta v'$). Для технологических процессов [9, 10] характерны относительно короткие струи ($s_1 \ll b_0$), поэтому далее полагаем $\sigma_{11} = 4\eta v'$, $b = b_0$, $\psi = 0,5$.

Для стационарного течения ($\partial/\partial t = 0$) уравнение неразрывности сводится к соотношению $v_0 \delta_0 = v \delta$. В безразмерной форме задачу (2.69) можно записать следующим образом

$$\begin{aligned} \bar{\delta} V = 1, \quad \frac{d}{d\bar{s}} \left(\bar{\delta} \frac{dV}{d\bar{s}} \cos \varphi \right) &= 0, \quad \frac{d}{d\bar{s}} \left(\bar{\delta} \frac{dV}{d\bar{s}} \sin \varphi \right) = \bar{\delta} R, \\ dY/d\bar{s} &= \sin \varphi, \quad dX/d\bar{s} = \cos \varphi, \\ X=0, \quad Y=0, \quad V=1, \quad \varphi=\varphi_0, \quad \bar{\delta}=1, \quad \bar{s}=0, \\ X=L, \quad Y=-1, \quad V=K, \quad \varphi=0, \quad \bar{s}=\bar{s}_1. \end{aligned} \quad (2.70)$$

Здесь введены следующие безразмерные переменные и параметры

$$\{X, Y, L, \bar{s}, \bar{s}_1\} = \frac{\{x, y, \ell, s, s_1\}}{h}, \quad \bar{\delta} = \frac{\delta}{\delta_0}, \quad \{V, K\} = \frac{\{v, v_1\}}{v_0}, \quad R = \frac{\rho g h^2}{4\eta v_0}, \quad \tau = \frac{tv_0}{h}.$$

Согласно второму уравнению в (2.70), горизонтальная составляющая натяжения постоянна по длине струи $[(V^{-1} dV/d\bar{s}) \cos \varphi = H, \quad H = \text{const}]$. Однако в динамических режимах она является функцией времени.

Решение задачи (2.70) может быть представлено в параметрической форме:

$$V = K[K(1 - A) + A]^{-1}, \quad A = 1 - T(\varphi)/T(\varphi_0), \quad T(\varphi) = \text{tg} \varphi \sec \varphi + \ln |\sec \varphi + \text{tg} \varphi|,$$

$$X = \frac{H}{R} \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{V d\varphi}{\cos \varphi}, \quad Y = \frac{H}{R} \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{V \text{tg} \varphi d\varphi}{\cos \varphi}, \quad \bar{s} = \frac{H}{R} \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{V d\varphi}{\cos^2 \varphi}.$$

При заданных K, R, φ_0 , постоянные $H, L, \bar{s}_1$ находятся из соотношений

$$2(K - 1)R = -H^2 K T(\varphi_0), \quad (2.71)$$

$$\frac{R}{H} = - \int_{\varphi_0}^0 \frac{V \sin \varphi d\varphi}{\cos^2 \varphi}, \quad \frac{LR}{H} = \int_{\varphi_0}^0 \frac{V d\varphi}{\cos \varphi}, \quad \frac{\bar{s}_1 R}{H} = \int_{\varphi_0}^0 \frac{V d\varphi}{\cos^2 \varphi}.$$

Результаты анализа (2.71) представлены на рис. 2.11 в виде зависимости L от R при различных K (штрихами показана бифуркационная кривая). Расстояние до точки контакта струи с поверхностью барабана возрастает с увеличением K и уменьшением R . Зависимость $L(R, K)$ носит

монотонный характер, точек экстремума нет. Условие $H > 0$ выполняется при $K > 1$. Исследована область $-\pi/12 \geq \varphi_0 \geq -\pi/2 + 0,05$, $10^{-3} < R < 10^3$, $0,2 < H < 2$.

Анализ показал, что характер распределения осевой скорости по длине струи существенно зависит от R . Так, при больших R интенсивное растяжение происходит на начальном «вертикальном» участке струи, а при малых – в конце зоны течения, в окрестности точки контакта.

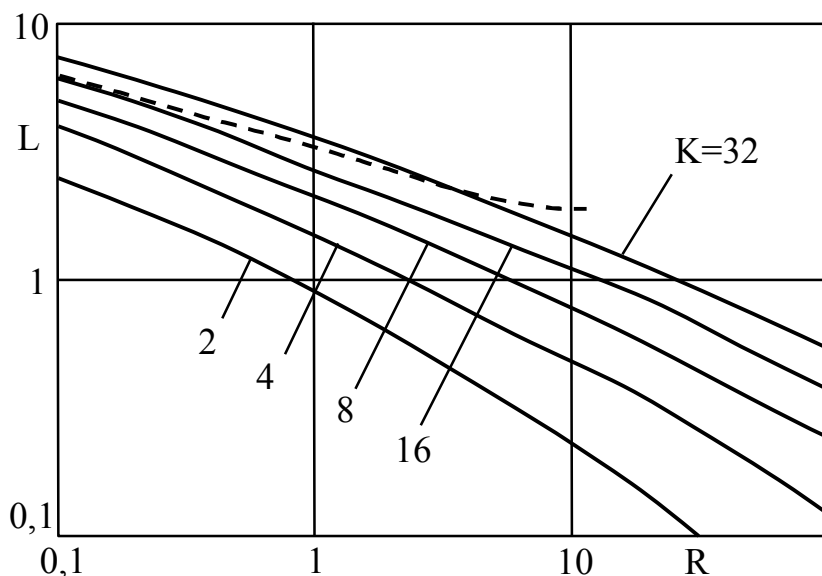


Рис. 2.11

При $\varphi = -\pi/2$ решение задачи имеет бесконечный разрыв, обусловленный множителем $\sec \varphi$ в уравнениях (2.71), поэтому область стационарных конфигураций струи ограничена сектором $-\pi/2 < \varphi < 0$. Возможно, это обусловлено игнорированием в исходных уравнениях (2.69) изгибающего момента.

Динамические режимы. Исследуем устойчивость течения к возникновению автоколебаний. Для прямолинейных струй достаточно подробно исследовано явление «резонанса при вытяжке» [159]. По достижению кратности вытяжки критического значения $K_* = 20,22$ возникают колебания, проявляющиеся в пульсациях толщины струи на выходе.

В замкнутой системе самопроизвольное нарастание интенсивности колебаний может быть при наличии внешнего источника энергии. Энергия струе передается от отборного устройства – поступательно движущейся подложки. Возникновение автоколебаний с возрастающей амплитудой характерно для систем с положительной обратной связью. При любом возмущении струи информация об изменении выходного сечения возвращается в зону течения в форме синхронно изменяющегося по времени и однородного по длине (игнорируются капиллярные и инерционные силы) тянущего усилия. Пульсации тянущего усилия оказывают модулирующее воздействие на динамические процессы в струе. В результате усиливаются колебания, период которых близок к времени пребывания жидкой частицы в зоне течения.

Тянущее усилие пропорционально произведению площади поперечного сечения на градиент скорости деформации на выходе. В случае прямолинейной струи вязкой жидкости градиент скорости деформации в точке отбора принимает наибольшее значение (экспоненциальное

распределение осевой скорости). Любой способ снижения градиента скорости в точке отбора (неизотермичность, дилатансия) расширяет область устойчивого течения. В случае изогнутой струи дополнительная степень свободы изменяет ее динамические свойства.

В динамических режимах в уравнениях (2.69) необходимо использовать нестационарное уравнение неразрывности

$$\frac{\partial \delta}{\partial t} + \frac{\partial(\delta v)}{\partial s} = 0. \quad (2.72)$$

Уравнение (2.72) записано для постоянной ширины струи.

Введем малые возмущения толщины, скорости, угла наклона и вертикальных отклонений:

$$\bar{\delta} = \bar{\delta}_*(\bar{s})[1 + \alpha(\tau, \bar{s})], \quad V = V_*(\bar{s})[1 + \beta(\tau, \bar{s})], \quad \varphi_* = \varphi_*(\bar{s}) + \gamma(\tau, \bar{s}), \\ Y = Y_*(\bar{s}) + \xi(\tau, \bar{s}), \quad \max(\alpha, \beta, \gamma, \xi) \ll 1. \quad (2.73)$$

Звездочкой обозначены величины, соответствующие стационарному течению. Ось $\bar{s}$ «вморожена» в невозмущенную струю.

Для момента $\tau = 0$ невозмущенное течение описывается задачей

$$\bar{\delta}_* V_* = 1, \quad \frac{d\varphi_*}{d\bar{s}} = \frac{R \cos^2 \varphi_*}{H V_*}, \quad \frac{dV_*}{d\bar{s}} = \frac{H V_*}{\cos \varphi_*}, \quad \frac{dY_*}{d\bar{s}} = \sin \varphi_*, \quad (2.74)$$

$$\bar{s} = 0: \quad \varphi_* = \varphi_{*0}, \quad V_* = 1, \quad Y_* = 0, \quad \bar{s} = \bar{s}_1: \quad \varphi_* = 0, \quad V_* = K, \quad Y_* = -1.$$

Рассмотрев совместно (2.69), (2.72) - (2.74) и выполнив линеаризацию, получим уравнения для отклонений:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \tau} + V_* \frac{\partial \alpha}{\partial \bar{s}} + V_* \frac{\partial \beta}{\partial \bar{s}} = 0, \quad \beta R \cos \varphi_* + \frac{H V_*}{\cos \varphi_*} \frac{\partial \gamma}{\partial \bar{s}} + \frac{R \cos^2 \varphi_*}{H} \frac{\partial \beta}{\partial \bar{s}} + \gamma R \sin \varphi_* = 0, \\ \sin \varphi_* \frac{\partial^2 \beta}{\partial \bar{s}^2} + \left(\frac{R \cos^3 \varphi_*}{H V_*} + H \operatorname{tg} \varphi_* \right) \frac{\partial \beta}{\partial \bar{s}} + H \operatorname{tg} \varphi_* \frac{\partial \alpha}{\partial \bar{s}} + H \frac{\partial \gamma}{\partial \bar{s}} + \frac{R}{V_*} \gamma = 0, \quad \frac{\partial \xi}{\partial \bar{s}} = \gamma \cos \varphi_*. \quad (2.75)$$

Граничные условия для отклонений ($\tau > 0$) следующие:

$$\bar{s} = 0: \quad \alpha = \beta = \xi = 0, \quad \gamma = \gamma_0, \quad \partial \beta / \partial \bar{s} = \beta', \quad \bar{s} = \bar{s}_1: \quad \beta = \xi = 0. \quad (2.76)$$

Возмущения малы по величине ($|\gamma| \ll 1$ при $\bar{s} \rightarrow \bar{s}_1$), поэтому полагаем, что точка контакта струи с твердой поверхностью в динамических режимах не изменяет своего положения: $X(\tau, \bar{s}_1) = L = \text{const}$, $\bar{s}_1 = \text{const}$. Уравнения (2.69) построены по безмоментной теории, поэтому условия сопряжения осей на концах струи $\gamma(\bar{s} = 0) = \gamma(\bar{s} = \bar{s}_1) = 0$ здесь неправомерны.

Представим возмущения в виде $\{\alpha, \beta, \gamma, \xi\} = \{A, B, C, E\} \exp(\lambda \tau)$, где $A(\bar{s})$, $B(\bar{s})$, $C(\bar{s})$, $E(\bar{s})$ - собственные функции задачи, λ - собственное значение.

Из совместного рассмотрения (2.74)–(2.76) для собственных функций получим задачу

$$A' = -B' - \lambda A / V_*, \quad C' = -\frac{R \cos \varphi_*}{H V_*} \left(B \cos \varphi_* + \frac{\cos^2 \varphi_*}{H} B' + C \sin \varphi_* \right),$$

$$B'' = \frac{\lambda H}{V \cos \varphi_*} A + \frac{R}{V_*} (C \cos \varphi_* - B \sin \varphi_*), \quad E' = C \cos \varphi_*,$$

$$\bar{s} = 0: A = B = E = 0, \quad C = C_0, \quad B' = B'_0, \quad \bar{s} = \bar{s}_1: B = E = 0. \quad (2.77)$$

Здесь штрих означает производную по $\bar{s}$.

Пользуясь тем, что собственные функции определены с точностью до произвольного множителя, можно без ограничения общности положить $B'_0 = 1$.

Анализ задачи (2.77) выполнен численным методом. Значения функций $V_*(\bar{s})$, $\varphi_*(\bar{s})$ на дискретном множестве точек находились из решения стационарной задачи (2.74) (методом Рунге-Кутты). Параметры H , R , $\bar{s}$ для предварительно заданных K и φ_{*0} - из соотношений (2.71) (методом Симпсона).

Задав какие-либо значения λ и C_0 , решим задачу Коши (2.7) и определим функции $B(\bar{s}_1)$, $E(\bar{s}_1)$. Если заданное значение λ совпадает с собственным числом задачи, то решение задачи Коши удовлетворяет также условиям $B(\bar{s}_1) = E(\bar{s}_1) = 0$. Задача решалась методом Рунге-Кутты четвертого порядка. Интервал $0 - \bar{s}_1$ равномерно разбивался на 64 участка. Собственное значение λ , обеспечивающее выполнение условий в точке отбора, находилось в комплексной плоскости ($\lambda = \lambda_r + i\lambda_i$) итерациями с использованием метода парабол.

В плоскости Гаусса собственные функции представлялись так: $A = A_r + iA_i$, $B = B_r + iB_i$, $C = C_r + iC_i$, $D = D_r + iD_i$, $E = E_r + iE_i$, где $D = B'$. Для десяти функций $A_r - E_i$ задача имела вид:

$$A'_r = -D_r - (A_r \lambda_r - A_i \lambda_i) / V_*,$$

$$A'_i = -D_i - (A_i \lambda_r + A_r \lambda_i) / V_*, \quad B'_r = D_r, \quad B'_i = D_i,$$

$$C'_r = -\frac{R \cos \varphi_*}{H V_*} \left(B_r \cos \varphi_* + \frac{\cos^2 \varphi_*}{H} D_r + C_r \sin \varphi_* \right),$$

$$C'_i = -\frac{R \cos \varphi_*}{H V_*} \left(B_i \cos \varphi_* + \frac{\cos^2 \varphi_*}{H} D_i + C_i \sin \varphi_* \right),$$

$$D'_r = \frac{H}{V_* \cos \varphi_*} (A_r \lambda_r - A_i \lambda_i) + \frac{R}{V_*} (C_r \cos \varphi_* - B_r \sin \varphi_*),$$

$$D'_i = \frac{H}{V_* \cos \varphi_*} (A_i \lambda_i + A_r \lambda_r) + \frac{R}{V_*} (C_i \cos \varphi_* - B_i \sin \varphi_*),$$

$$E'_r = C_r \cos \varphi_*, \quad E'_i = C_i \cos \varphi_*,$$

$$\bar{s} = 0: A_r = A_i = B_r = B_i = E_r = E_i = 0, \quad C_r = C_{0r}, \quad C_i = C_{0i}, \quad D_r = D_i = 1,$$

$$\bar{s} = \bar{s}_1: B_r = B_i = E_r = E_i = 0.$$

Подбором λ_r , λ_i , C_{0r} , C_{0i} , C_{0i} добивались выполнения условий в точке отбора. Методом парабол минимизировался функционал $\min(B_r^2 + B_i^2 + E_r^2 + E_i^2)$ при $\bar{s} = \bar{s}_1$.

Численный анализ показал, что существует спектр собственных чисел λ_r , λ_i . Из спектра собственных чисел выбирался наименьший по модулю корень, отвечающий одной длине волны возмущений $\text{Re}(B)$ и $\text{Re}(E)$ на всю струю. В качестве теста взято малое гравитационное провисание, близкое к течению прямолинейной струи с экспоненциальным распределением осевой скорости. Так, при $\varphi_{*0} = -\pi/48$, $R = 2,1 \times 10^{-4}$, $\bar{s}_1 = 54,4$ с увеличением K потеря устойчивости происходила при $K=K^*=20,27$, причем нейтральные колебания имели частоту $\lambda = \pm i\lambda_i = \pm i \cdot 0,2578$, где $\text{Im}(\lambda) = \lambda_i = \omega^0 h / v_0$, ω^0 – частота. Полученные значения хорошо согласуются с результатами для прямолинейной струи [69]: $K^0 = 20,22$, $\lambda_i = \pm 0,693$ (в [69] применялся масштаб частоты v_1/s_1).

С увеличением гравитационного параметра R критическое значение кратности увеличивается и возрастает собственная частота. В исследованной области зависимости $K^0(R)$ и $\lambda_i(R)$ имели монотонно возрастающий характер. С увеличением R расчетная схема теряла устойчивость. Параметры на границе исследованной области следующие: $\varphi_{*0} = -1,208$, $K^0 = 79,65$, $R = 17,22$, $\bar{s}_1 = 1,83$, $\lambda_i = \pm 18,9$.

С учетом того, что параметры R , K однозначно характеризуют течение, на рис. 2.11 представлена полученная из расчетов зависимость критической кратности от гравитационного параметра (кривая 6). Бифуркационная (нейтральная) кривая отделяет зону устойчивых течений с $\text{Re}(\lambda) < 0$ от зоны неустойчивых течений с $\text{Re}(\lambda) > 0$, в которой возникают автоколебания нарастающей амплитуды. Область устойчивых течений находится левее и ниже бифуркационной кривой.

Если в технологическом процессе, связанном с укладкой плоской высоковязкой струи, $K < K^0 = 20,22$, то независимо от высоты h (параметра R) течение будет устойчивым. При формировании плоских полимерных пленок параметры могут варьироваться в следующих пределах [10]: $0,1 < R < 2$ и $10 < K < 50$. Поскольку кратность K определяет толщину получаемой пленки и в технологическом процессе фиксирована, устойчивость течения можно обеспечить изменением R . Например, пусть $K = 32$. Согласно рис. 2.11, линия $K = 32$ пересекает бифуркационную кривую в точке $R = 1,6$. Следовательно, течение в условиях $R < 1,6$ (сравнительно малое расстояние между насадком и подложкой h) будет неустойчивым. Но увеличение расстояния h (так, чтобы $R > 1,6$) устраняет автоколебания.

Таким образом, гравитационная изогнутость струи повышает ее устойчивость к возникновению автоколебаний. В случае прямой вертикальной струи (течение сверху вниз) с увеличением числа Фруда устойчивость течения повышается [87]. Устойчивость повышается

вследствие того, что силы собственного веса уменьшают градиент скорости в точке отбора.

Имеет место нормальная бифуркация рождения предельного цикла. Линеаризованные уравнения (2.75) предполагают жесткий тип возбуждения автоколебаний.

В технологии производства полимерных пленок увеличение частоты вращения шнека приводит к пульсациям расплава (часто не обнаруживаемому визуально) и появлению продольной разнотолщинности [10, с 254]. Возможной причиной неравномерности могут являться автоколебания в струе, а вовсе не пульсация расхода.

Повышение устойчивости течения с увеличением расстояния между фильерой и поверхностью обусловлено «разгрузкой» точки отбора (снижением растягивающего напряжения) за счет растяжения струи под действием собственного веса.

2.6. Вытяжка полимерной пленки на валковых устройствах с учетом сил трения о поверхность вала

Из всех операций технологического процесса получения пленок ориентационное вытягивание является одной из самых ответственных, в значительной степени определяющей их качество и свойства.

Рассматривается процесс вытяжки пленки на валковых установках традиционного типа, состоящих из тихоходной и быстроходной групп термостатируемых валков [19]. Экспериментально обнаружено, что ориентационная вытяжка протекает не только в зазоре между валками, но и на поверхности валков, порождая проскальзывание, разное по величине на разных участках по окружности вала [251].

Имеются работы по течению растяжения свободных плоских пленок [19, 309]. В [242] аналитически доказано существование остаточного течения высоковязкой пленки на поверхности приемного вала без учета трения. Эффекты трения при валковой вытяжке приводят к неустойчивости типа <<стик-слип>> (залипание-проскальзывание), что в значительной степени препятствует переходу к тонким пленкам, для которых работа в режиме нерегулярного проскальзывания разрушительна.

Решение задачи затрудняют следующие факторы. Неизотермичность (в том числе неоднородность температуры, а, следовательно, и растягивающих напряжений по толщине пленки). Подбор адекватной реологической модели (с учетом ориентации и кристаллизации). Зависимость коэффициента трения от температуры, вида полимера, нормального напряжения, скорости скольжения (экспериментальные данные о нелинейных эффектах трения полимеров фрагментарны и противоречивы). Сложное напряженное состояние пленочного полотна в зоне ориентации и скольжения (имеют место не только продольные напряжения, но и напряжения по ширине полотна, проявляющиеся в его <<ужении>>).

В данном разделе формулируется общий подход к анализу задачи, и выясняются некоторые закономерности при существенном упрощении физических допущений.

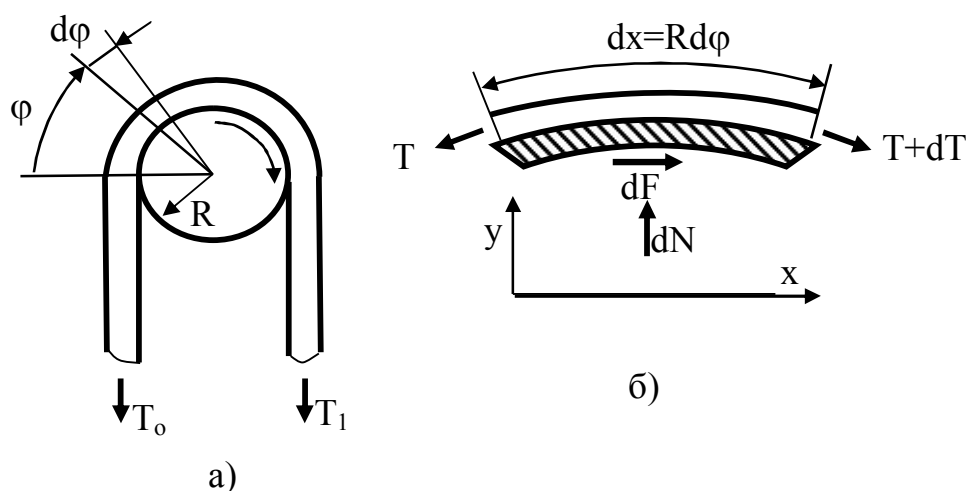


Рис. 2.12. Расчетная схема.

Определим зону вытяжки пленочного полотна как зону постепенного изменения толщины полотна (изменением ширины полотна пренебрегаем). Рассмотрим условие равновесия элемента пленки длиной $dx=Rd\varphi$ на поверхности отборного вала. Положение этого элемента определяется углом, отсчитываемым от точки соприкосновения пленки с валком. На силовой схеме этого элемента (рис. 2.12) показаны все действующие на него силы, являющиеся уравновешенной системой сил, расположенных в одной плоскости.

На элемент действуют силы (см. рис. 2.12, б): T - натяжение полотна пленки; $dF=\tau Rbd\varphi$ - элементарная сила трения пленки о поверхность вала; $dN=\sigma Rbd\varphi$ - сила нормального давления на поверхность (τ - касательное напряжение, σ - нормальное напряжение, b - ширина полотна).

Спроектируем все силы на ось x . Принимая во внимание, что угол $d\varphi$ мал, получим [241]

$$\tau Rbd\varphi = -dT. \quad (2.78)$$

Проектируя все силы на ось y , и снова принимая во внимание малость угла $d\varphi$ ($\sin d\varphi \approx d\varphi$), получим

$$\sigma Rbd\varphi - 0,5Td\varphi - 0,5(T+dT)d\varphi = 0,$$

откуда пренебрегая величинами второго порядка малости, получим

$$\sigma Rb = T. \quad (2.79)$$

Для замыкания задачи необходимо задать связь τ и σ , т.е. записать закон трения. Закон трения зависит от вида полимера, температуры, скорости скольжения, нормальной нагрузки [18, 328-331]. Чем больше жесткость материала и выше его термостойкость, тем в меньшей степени изменяется его коэффициент трения с повышением температуры. На коэффициент трения влияет также толщина пленки (для толщин меньше 50 мкм

коэффициент трения повышается). Игрет роль надмолекулярная структура поверхностного слоя. Мелкосферолитная структура улучшает антифрикционные свойства пленок. Возрастание скорости вызывает увеличение модуля для высокоэластичных материалов, что приводит к возрастанию коэффициента трения, но повышение температуры способствует его снижению.

Рассмотрим изотермический случай. Ввиду низкой теплопроводности полимеров будем считать температуру контактирующей поверхности пленки равной температуре вала. Кроме того, считаем, что трение не зависит от скорости скольжения и определяется уравнением

$$\tau = f\sigma, \quad f = A + B \sigma^{-n}, \quad (2.80)$$

где A , B , n - постоянные, f - коэффициент трения. Согласно [8] при упругом ненасыщенном контакте $n=0,2$, а при пластическом ненасыщенном контакте $n=-0,25$.

Рассматривая совместно (2.78), (2.79), (2.80), получим дифференциальное уравнение для натяжения

$$dT/d\varphi = -T \left[A + B(Rb/T)^n \right]. \quad (2.81)$$

Выполнив интегрирование с учетом условия $\varphi=0$, $T=T_0$ (см. рис.2.12,а), получим выражение для натяжения

$$AT^n = [AT_0^n + B(Rb)^n] \exp(-An\varphi) - B(Rb)^n. \quad (2.82)$$

В случае кулоновского закона трения ($n=1$, $B=0$) приходим к известной формуле Эйлера [10] $T=T_0 \exp(-A\varphi)$.

В процессе формования плоской пленки при некотором угле $\varphi=\varphi_k$ натяжение уменьшается до нуля, скольжение прекращается и пленка <<прилипает>> к поверхности барабана. В этом случае для конца зоны скольжения можно задать условие: $\varphi=\varphi_k$, $T=0$. При $\varphi>\varphi_k$ пленка перемещается без скольжения. Используя (2.82), найдем протяженность зоны скольжения

$$\varphi_k = \left[1/(An) \right] \ln \left[1 + (A/B)(T_0/Rb)^n \right].$$

Зона скольжения имеет конечные размеры только в случае упругого ненасыщенного контакта ($n=0,2$). При пластическом ненасыщенном контакте ($n=-0,25$) и кулоновском законе трения ($n=1$, $B=0$) зона скольжения имеет бесконечную протяженность. Следовательно, <<прилипание>> пленки к поверхности вала обусловлено нелинейными эффектами трения. Ниже рассмотрение ограничено, случаем $n=0,2$.

Протяженность участка скольжения зависит от натяжения в зоне ориентации T_0 и соотношения параметров A , B , Rb , n . С увеличением натяжения возрастает протяженность участка скольжения, и может наступить момент, когда протяженность участка скольжения превысит общую длину огибающей линии всех промежуточных валков (зазоры между валками не учитываем, поскольку в них отсутствует сила трения).

В случае ориентационной вытяжки пленка находится в напряженном состоянии от зоны вытяжки и вплоть до гуммированных отборных валков. Приводные промежуточные валки выполняют функцию охлаждения пленки и «разгрузки» отборных гуммированных валков. Переработка сравнительно «скользких» пленок, например ПЭТФ, требует установки большего количества приводных промежуточных валков, но и в этом случае натяжение в точке отбора не равно нулю.

Обозначим натяжение пленки на сходе с валка T_1 ($T_1 < T_0$), что приводит к условию $\varphi = \varphi_k$, $T = T_1$, где φ_k - угол охвата пленкой валка. Если промежуточные валки идентичны по температуре и радиусу, то в качестве T_1 можно взять натяжение пленки у отборных гуммированных валков. В этом случае φ_k равно сумме углов охвата пленкой всех промежуточных приводных валков (обычно их 2). Согласно (2.82) между T_1 и φ_k имеет место следующее соотношение

$$AT_1^n = [AT_0^n + B(Rb)^n] \exp(-An\varphi_k) - B(Rb)^n. \quad (2.83)$$

Степень разгрузки отборных гуммированных валков можно охарактеризовать снижением тянущего усилия т.е. T_1/T_0 . Анализ (2.83) показывает, что T_1/T_0 существенно зависит от A , B , φ_k , и незначительно – от T_0 , R , b .

Рассмотрим распределение скорости пленки при ее вытяжке на поверхности валка с учетом проскальзывания. В условиях ориентационной вытяжки пленку необходимо рассматривать как вязкоупругую жидкость. При этом необходимо иметь информацию обо всех ее предшествующих деформациях. В этом разделе ограничим рассмотрение растяжением высоковязкой ньютоновской жидкости. При растяжении без изменения ширины натяжение пленки описывается выражением $T = 4\delta b \eta dv/dx$, где δ - текущая толщина пленки, η -вязкость, v - осевая скорость.

С учетом условия неразрывности $Q = v\delta b$, можем записать

$$T = (4\eta Q/R) d[\ln(v)]/d\varphi, \quad (2.84)$$

где Q - объемный расход.

Осевая скорость в момент касания пленкой поверхности валка v_0 отлична от окружной скорости валка. Если пленка при $\varphi = \varphi_k$ «прилипает» к поверхности валка, то она приобретает его окружную скорость, равную v_1 . В случае скольжения пленки по поверхности всех валков, за конечную скорость v_1 примем скорость отбора пленки гуммированными валками.

Рассматривая совместно уравнения (2.81), (2.84), приходим к дифференциальному уравнению, связывающему скорость и натяжение

$$\left[A + B(Rb/T)^n \right] (4\eta Q/R) d[\ln(v)] = dT.$$

Граничные условия задачи: $\varphi=0$: $v=v_0$, $T=T_0$; $\varphi=\varphi_k$: $v=v_1$, $T=T_1$.

Решение этой задачи выражается через элементарные функции, только если $1/n$ целое число. Рассмотрим случай $n=0,2$. В результате интегрирования

получим выражения для распределения скорости на поверхности валка и связи скорости отбора v_1 с параметрами процесса:

$$\frac{4QA^5\eta}{5B^5R^2b} \ln\left(\frac{v}{v_0}\right) = \sum_{k=1}^5 \frac{(-1)^k C^k}{kA} (T^{nk} - T_0^{nk}) + 0,2(\varphi_k - \varphi), \quad (2.85)$$

$$\frac{4QA^5\eta}{5B^5R^2b} \ln\left(\frac{v_1}{v_0}\right) = \sum_{k=1}^5 \frac{(-1)^k C^k}{kA} (T_1^{nk} - T_0^{nk}), \quad C = A/[B(Rb)^n].$$

При кулоновском законе трения ($n=1$, $B=0$) распределение скорости характеризуется соотношениями

$$\ln(v/v_0) = [1 - \exp(An\varphi)] \ln(v_1/v_0), \quad \ln(v_1/v_0) = T_0 R / (4\eta QA).$$

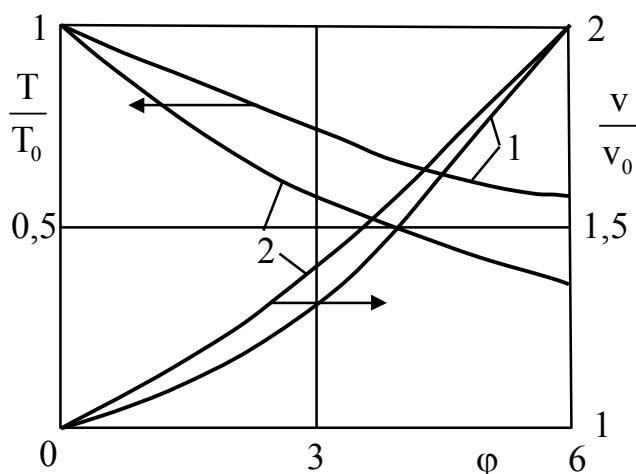


Рис. 2.13. Распределение тянущего усилия и осевой скорости по длине пленки: 1-полипропиленовая пленка, 2-пленка ПЭНП.

Результаты анализа (2.82), (2.85) представлены на рис. 2.13. Расчеты выполнены для условий: $R=0,2$ м, $b=0,5$ м, $v_1/v_0=2$, $T_0=100$ Н, $n=0,2$, $\varphi=6$ (два промежуточных валка). При ориентационной вытяжке полипропиленовой пленки ($A=0,035$; $B=0,003$ Паⁿ), полиэтиленовой - ($A=0,05$; $B=0,04$ Паⁿ) [11]. Установлено, что пленка из ПЭНП, имеющая сравнительно высокие A и B , создает меньшее тянущее усилие в точке отбора. На распределение скорости (если задано v_1/v_0) трение влияет незначительно, а сама зависимость близка к линейной.

Полученные модельные представления могут быть распространены и на участок схода пленки с валка, где она находится в состоянии адгезионного прилипания к поверхности. Это характерно при формовании пленки по методу ориентационной кристаллизации. При этом угловую координату необходимо отсчитывать против часовой стрелки от линии схода. Скольжение начинается на некотором расстоянии от точки схода, в момент, когда тянущее усилие будет отличным от нуля. Именно динамикой начала скольжения (когезионного срыва) обусловлена неравномерность схода пленки. Для начала скольжения необходима большая сила, чем для поддержания скольжения, поскольку коэффициент статического трения обычно больше коэффициента трения движения [10]. Кроме того, для полимеров в области малых скоростей характерна сложная нелинейная зависимость коэффициента трения от скорости скольжения [9].

Следовательно, при записи (2.80) необходимо использовать более сложную зависимость, учитывающую скорость скольжения.

2.6.1. Элонгационное течение вязкоупругой струи в условиях внешнего трения. Эффект stick-slip (залипание проскальзывание)

Поставлена и решена задача стационарного продольного течения свободной вязкоупругой струи в условиях трения ее поверхности.

Экспериментально обнаружено, что ориентационная вытяжка протекает не только в зазоре между валками, но и на поверхности валков, порождая проскальзывание, разное по величине на разных участках по окружности валка [251]. Эффекты трения при валковой вытяжке очень важны, поскольку могут привести к неустойчивости типа “стик–слип” (залипание – проскальзывание), что в значительной степени препятствует переходу к тонким пленкам, для которых работа в режиме нерегулярного проскальзывания разрушительна.

Несмотря на это детального анализа физических закономерностей течения, за исключением одноосного растяжения свободной струи [159], в настоящее время нет. Первым шагом является получение стационарных решений. В данной работе при ряде упрощающих допущений получено аналитическое решение стационарной задачи и проведен его анализ.

Постановка задачи. По характеру движения область пребывания пленки в агрегате условно разобьем на 3 зоны. Распределение скорости v , натяжения T и температуры T пленки по зонам показано на рис. 2.14.

Схема агрегата для продольной ориентационной вытяжки представлена на рис. 2.14 [293]. Входя в агрегат с линейной скоростью v_{10} , пленка 1 удерживается прижимными валками 2 от возможного проскальзывания и далее проходит по поверхности вращающихся валков 3, где нагревается в первой зоне предварительного подогрева. После этого пленка поступает на ориентирующие валки 4, где дополнительно разогревается ИК–нагревателем 5. Пленка растягивается в промежутке между двумя валками 4 за счет того, что окружная скорость v_{3k} отборных валков выше, чем v_{10} . На валках 6 пленка равномерно охлаждается и прижимными валками 2 транспортируется из агрегата. Линиями 7 показаны окружные скорости нагревательных валков, а линиями 8 – охлаждающих. Натяжение по длине зоны ориентации Π постоянно. Температура пленки T равномерно повышается до зоны ориентации, и далее снижается на охлаждающих валках. В дальнейшем анализе принято постоянное значение температуры в пределах каждой зоны (на рис. 2.14 показаны штриховыми линиями).

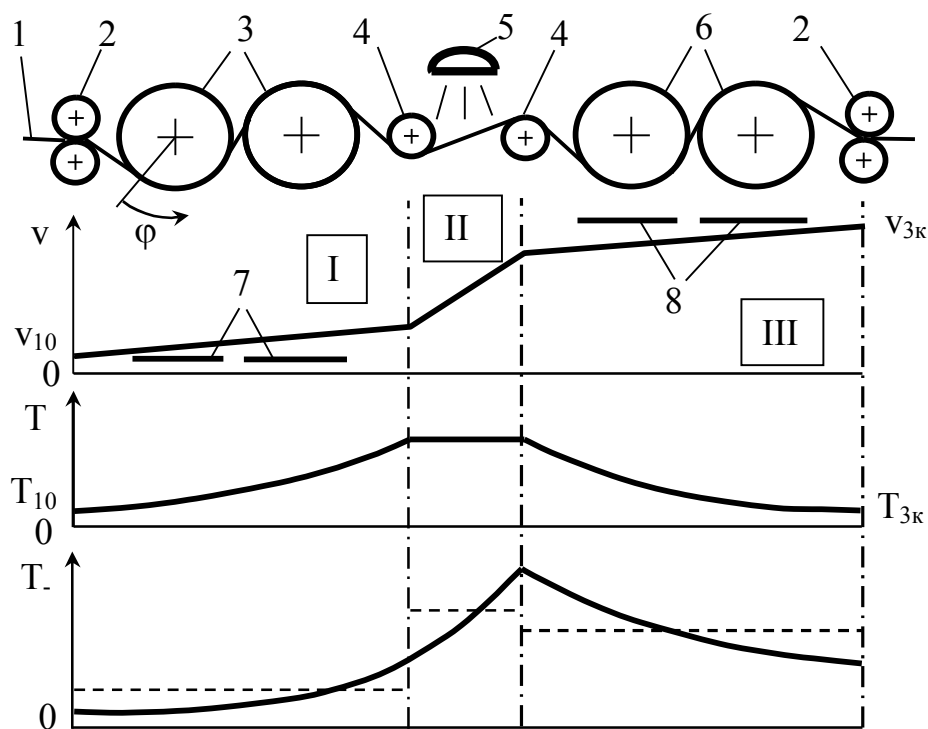


Рис. 2.14. Схема ориентации плоской пленочной заготовки, а также распределение осевой скорости v , натяжения T и температуры T_- : 1 – изотропная пленка; 2 – прижимные валки; 3 – нагревательные, медленно вращающиеся валки; 4 – ориентирующие валки; 5 – нагреватель; 6 – быстро вращающиеся охлаждаемые валки; 7 – окружная скорость нагревательных валков; 8 – окружная скорость охлаждающих валков.

Приняты следующие допущения. Физические свойства полимера и параметры реологической модели соответствуют средней температуре и остаются постоянными в пределах каждой зоны. Ширина пленки не изменяется. Растягивающие напряжения однородны по сечению. Силы инерции, аэродинамического трения, собственного веса и центробежные значительно меньше сил реологического сопротивления. Ориентирующие валки 4 вращаются без трения. Растяжением пленки в промежутках между прижимными, нагревательными (охлаждающими) валками пренебрегаем. Трение пленки по поверхности валков описывается законом Амонтона.

Ввиду низкой теплопроводности полимеров будем считать температуру контактирующей поверхности пленки равной температуре валка в соответствии, с которой и принимаем коэффициент трения. Тепловые эффекты (диссипативный саморазогрев, кристаллизация, нагрев от трения) не учитываем. На стыках зон выполняются условия непрерывности толщины, осевой скорости и растягивающих напряжений. Радиус валков значительно превышает толщину пленки ($R \gg \delta$) поэтому ее кривизной пренебрегаем.

Для достаточной эффективности процесса ориентационного деформирования продолжительность релаксации материала должна быть близка к продолжительности вытягивания. Поэтому учитываются вязко-упругие свойства полимера [242].

Рассмотрим общий случай элонгационного изотермического течения плоской струи. Для любой из трех зон реологическое уравнение материала

$$\sigma_{ij} = -p\delta + \tau_{ij}. \quad (2.86)$$

где σ_{ij} – компоненты тензора напряжений; p – изотропное давление; δ_{ij} – символ Кронекера; τ_{ij} – девиаторные компоненты напряжения; $i, j = 1, 2, 3$ – индексы; индекс 1 отвечает орту касательной к оси пленки, 2 – орту бинормали, 3 – орту нормали.

Девиаторные напряжения подчиняются уравнению (модель Максвелла) [97]

$$\tau_{ij} + \lambda \frac{D\tau_{ij}}{Dt} = 2\eta d_{ij}. \quad (2.87)$$

где d_{ij} – девиаторная часть тензора скоростей деформации; η – коэффициент сдвиговой вязкости; λ – время релаксации; D/Dt – конвективная производная по Олдройду; t – время.

Рассмотрен случай верхней конвективной производной

$$\frac{D\tau_{ij}}{Dt} = \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial t} + v_k \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_k} - \tau_{kj} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \tau_{ik} \frac{\partial v_j}{\partial x_k}. \quad (2.88)$$

Течение установившееся (описание движения по Эйлеру). Во всех трех зонах имеет место так называемое квазиодномерное течение [19]. Силы трения, действующие на пленку со стороны вала, не вызывают значительных сдвиговых деформаций: $|\partial v_i / \partial x_j| \ll |\partial v_i / \partial x_1|$, $|\tau_{ij}| \ll |\tau_{ii}|$, $i \neq j$. Случай существенных сдвиговых деформаций в плоской, вытягиваемой на поверхности вала, струе рассмотрен в [242]. Диагональные компоненты тензора скоростей деформации: $d_{11} = dv/dx$, $d_{22} = 0$, $d_{33} = -dv/dx$. Здесь x – продольная координата, совпадающая с траекторией пленки, v – осевая скорость.

С учетом условия $\sigma_{33} = 0$ из (2.86) имеем $p = \tau_{33}$, $\sigma_{11} = \tau_{11} - \tau_{33}$, $\sigma_{22} = \tau_{22} - \tau_{33}$. Для режима установившегося течения ($\partial/\partial t = 0$) уравнение (2.87) с учетом (2.88) распадается на три равенства:

$$\begin{aligned} \tau_{11} + \lambda \left(v_1 \frac{\partial \tau_{11}}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial \tau_{11}}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial \tau_{11}}{\partial x_3} - 2\tau_{11} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \right) &= 2\eta \frac{\partial v_1}{\partial x_1}, \\ \tau_{22} + \lambda \left(v_1 \frac{\partial \tau_{22}}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial \tau_{22}}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial \tau_{22}}{\partial x_3} - 2\tau_{22} \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right) &= 2\eta \frac{\partial v_2}{\partial x_2}, \\ \tau_{33} + \lambda \left(v_1 \frac{\partial \tau_{33}}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial \tau_{33}}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial \tau_{33}}{\partial x_3} - 2\tau_{33} \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \right) &= 2\eta \frac{\partial v_3}{\partial x_3}. \end{aligned}$$

Вычитая из первого уравнения третье, получаем для продольного напряжения

$$\sigma_{11} + \lambda \left(v_1 \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_3} - 2\tau_{11} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + 2\tau_{33} \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \right) = 2\eta \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} - \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \right).$$

С учетом однородности осевых напряжений по толщине и ширине пленки $\sigma_{11}/\partial x_2 = \sigma_{11}/\partial x_3 = 0$, условия неразрывности $\partial v_1/\partial x_1 = -\partial v_3/\partial x_3$, соотношения $\tau_{11} = \sigma_{11} + \tau_{33}$, полагая $|\sigma_{11}| \gg 2|\tau_{33}|$ [96], в окончательной форме для осевого растягивающего напряжения σ_{11} в любой из трех зон, имеем

$$\sigma_{11} + \lambda \left(v_1 \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} - 2\sigma_{11} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \right) = 4\eta \frac{\partial v_1}{\partial x_1}. \quad (2.89)$$

Далее, числовые индексы у переменных и параметров указывают номер зоны течения (задачи), а индекс k – указывает на соответствие переменной концу зоны течения.

Распределение натяжения пленки по дуге ее контакта с валками в I и III зонах можно найти, используя подход Эйлера [252]. Для первой зоны равновесие элемента пленки длиной $Rd\varphi$ на поверхности нагревательного вала описывается уравнениями:

$$\begin{aligned} \tau_{N1} Rb d\varphi &= dT_1, & \sum_1 Rb &= T_1, & \tau_{N1} &= f_1 \sum_1, \\ \varphi = 0: & T_1 = T_{10}; & \varphi = \varphi_k: & T_1 = T_{1k}. \end{aligned}$$

Аналогично для III зоны:

$$\begin{aligned} \tau_{N3} Rb d\varphi &= -dT_3, & \sum_3 Rb &= T_3, & \tau_{N3} &= f_3 \sum_3, \\ \varphi = 0: & T_3 = T_{1k}; & \varphi = \varphi_k: & T_3 = T_{3k}. \end{aligned} \quad (2.90)$$

где T_1, T_2, T_3 – натяжение пленки в I, II, III зонах; T_{1k}, T_{2k}, T_{3k} – то же в конце I, II, III зон; τ_{N1}, τ_{N3} – касательные напряжения, обусловленные трением пленки о поверхность нагревательных и охлаждающих валков соответственно; $\sum_1, \sum_3$ – нормальные давления со стороны пленки на валок; T_{10} – начальное натяжение пленки у прижимных валков (см. рис. 2.14); b – ширина пленки; φ_k – суммарный угол охвата всех валков (нагревательных или охлаждающих); φ – угол, отсчитываемый от линии касания пленкой поверхности вала; R – радиус валков; f_1, f_3 – коэффициенты трения скольжения пленки по нагревательным и охлаждающим валкам.

Решение этих задач имеет вид:

$$T_1 = T_{10} \exp(f_1 \varphi), \quad T_3 = T_{1k} \exp(-f_3 \varphi). \quad (2.91)$$

Согласно (2.91) нагревательные 3 и охлаждающие 6 валки “разгружают” прижимные валки 2, снижая на них тянущее усилие.

С учетом уравнений (2.89), (2.91) распределения натяжения T_1 , осевой скорости v_1 , толщины пленки δ_1 и растягивающих напряжений σ_1 в первой зоне описывается системой уравнений:

$$\begin{aligned} T_1 &= T_{10} \exp(f_1 \varphi), & T_1 &= b\delta_1\sigma_1, & b\delta_1 v_1 &= Q, \\ \sigma_1 + \lambda_1 \left(\frac{v_1}{R} \frac{d\sigma_1}{d\varphi} - \frac{2\sigma_1}{R} \frac{dv_1}{d\varphi} \right) &= \frac{4\eta_1}{R} \frac{dv_1}{d\varphi}, & & & \\ \varphi = 0: & T_1 = T_{10}, & v_1 &= v_{10}, & \delta_1 &= \delta_{10}, & \sigma_1 &= \sigma_{1k}, \end{aligned} \quad (2.92)$$

$$\varphi = \varphi_k: T_1 = T_{1k}, \quad v_1 = v_{1k}, \quad \delta_1 = \delta_{1k}, \quad \sigma_1 = \sigma_{1k},$$

где $v_1(\varphi)$, $v_2(x)$, $v_3(\varphi)$ – осевая скорость в I, II, III зонах; v_{1k} , v_{2k} , v_{3k} – то же в конце I, II, III зон; v_{10} – осевая скорость на входе в первую зону; $\delta_1(\varphi)$, $\delta_2(x)$, $\delta_3(\varphi)$ – толщина пленки в I, II, III зонах; δ_{1k} , δ_{2k} , δ_{3k} – то же в конце I, II, III зон; δ_{10} – начальная толщина пленки; $\sigma_1(\varphi)$, $\sigma_2(x)$, $\sigma_3(\varphi)$ – растягивающие напряжения в I, II, III зонах; σ_{1k} , σ_{2k} , σ_{3k} – то же в конце I, II, III зон; σ_{10} – растягивающее напряжение на входе первой зоны; Q – объемный расход полимера. Здесь второе выражение определяет тянущее усилие; третье – условие постоянства расхода. В качестве продольной координаты используется $R\varphi$.

Во второй зоне тянущее усилие постоянно по длине участка ориентации и задача описывается уравнениями:

$$\begin{aligned} T_{1k} = T_2 = b\delta_2 \sigma_2 = \text{const}, \quad b\delta_2 v_2 = Q, \\ \sigma_2 + \lambda_2 \left(v_2 \frac{d\sigma_2}{dx} - 2\sigma_2 \frac{dv_2}{dx} \right) = 4\eta_2 \frac{dv_2}{dx}, \end{aligned} \quad (2.93)$$

$$\begin{aligned} x = 0: \quad T_2 = T_{1k}, \quad v_2 = v_{1k}, \quad \delta_2 = \delta_{1k}, \quad \sigma_2 = \sigma_{1k}, \\ x = \ell: \quad T_2 = T_{1k}, \quad v_2 = v_{2k}, \quad \delta_2 = \delta_{2k}, \quad \sigma_2 = \sigma_{2k}. \end{aligned}$$

Здесь x – продольная координата, отсчитываемая от линии схода пленки с последнего нагревательного вала; ℓ – длина зоны ориентационной вытяжки.

Задача течения в третьей зоне подобна первой (2.92) и представляется как:

$$\begin{aligned} T_3 = T_{1k} \exp(-f_3\varphi), \quad T_3 = b\delta_3 \sigma_3, \quad b\delta_3 v_3 = Q, \\ \sigma_3 + \lambda_3 \left(\frac{v_3}{R} \frac{d\sigma_3}{d\varphi} - \frac{2\sigma_3}{R} \frac{dv_3}{d\varphi} \right) = \frac{4\eta_3}{R} \frac{dv_3}{d\varphi}, \end{aligned} \quad (2.94)$$

$$\begin{aligned} \varphi = 0: \quad T_3 = T_{1k}, \quad v_3 = v_{2k}, \quad \delta_3 = \delta_{2k}, \quad \sigma_3 = \sigma_{2k}, \\ \varphi = \varphi_k: \quad T_3 = T_{3k}, \quad v_3 = v_{10} K, \quad \delta_3 = \delta_{10}/K, \quad \sigma_3 = \sigma_{3k}. \end{aligned}$$

Здесь K – «машинная» кратность вытяжки; $v_1(\varphi)$, $v_2(x)$, $v_3(\varphi)$ – осевые скорости в I, II, III зонах; $\delta_1(\varphi)$, $\delta_2(x)$, $\delta_3(\varphi)$ – толщина пленки в I, II, III зонах; $\sigma_1(\varphi)$, $\sigma_2(x)$, $\sigma_3(\varphi)$ – растягивающие напряжения в I, II, III зонах.

Решение задач. Введем безразмерные переменные и параметры (масштабы взяты по начальному сечению):

$$\begin{aligned} V_{\{1,2,3\}} = \frac{v_{\{1,2,3\}}}{v_{10}}, \quad K = \frac{v_{3k}}{v_{10}}, \quad T_{+\{1,2,3\}} = \frac{T_{\{1,2,3\}}}{T_{10}}, \quad X = \frac{x}{\ell}, \quad A = \frac{4v_{10}\eta_1}{R\sigma_{10}}, \\ N_2 = \frac{\eta_2 R}{\eta_1 \ell}, \quad N_3 = \frac{\eta_3}{\eta_1}, \quad We_{\{1,3\}} = \frac{\lambda_{\{1,3\}} v_{10}}{R}, \quad We_2 = \frac{\lambda_2 v_{10}}{\ell}. \end{aligned} \quad (2.95)$$

Здесь $V_{\{1,2,3\}}$ – безразмерная скорость в I, II, III зонах; K – «машинная» кратность вытяжки; $T_{+\{1,2,3\}}$ – безразмерное тянущее усилие в I, II, III зонах; $T_{+\{1,2,3\}k}$ – безразмерное тянущее усилие в конце I, II, III зон; X – безразмерная продольная координата в зоне ориентации; A , N_2 , N_3 – безразмерные параметры; $We_{\{1,2,3\}}$ – число Вейссенберга для I, II, III зон; v_{1k} , v_{2k} , v_{3k} – безразмерная скорость в конце I, II и III зон.

С учетом (2.95) решение задач (2.92) –(2.94) имеет вид:

1) течение в первой зоне ($0 \leq \varphi \leq \varphi_k$, $1 \leq V_1 \leq V_{1k}$)

$$\exp(f_1 \varphi) = Z_1 + A f_1 [1 - Z_1 (1 + We_1 f_1 V_1) \ln(Z_1/V_1)],$$

$$Z_1 = (1 + We_1 f_1 V_1)/(1 + We_1 f_1), \quad T_{+1} = \exp(f_1 \varphi);$$

2) течение в зоне ориентации ($0 \leq X \leq 1$, $V_{1k} \leq V_2 \leq V_{2k}$)

$$X = (AN_2/T_{+1k}) \ln(V_2/V_{1k}) + We_2(V_2 - V_{1k}),$$

$$T_{+2} = T_{+1k} = \exp(f_1 \varphi_k) = \text{const};$$

3) течение на охлаждающих валках ($0 \leq \varphi \leq \varphi_k$, $V_{2k} \leq V_3 \leq K$)

$$\exp(-f_3 \varphi) = Z_3 - (AN_3 f_3/T_{+1k}) [1 - Z_3 - (1 - We_3 f_3 V_3) \ln |Z_3 V_{2k}/V_3|],$$

$$T_{+3} = T_{+1k} \exp(-f_3 \varphi), \quad Z_3 = (1 - We_3 f_3 V_3)/(1 - We_3 f_3 V_{2k}), \quad (2.96)$$

где $V_{1k} = V_1(\varphi = \varphi_k)$, $V_{2k} = V_2(X = 1)$, $K = V_{3k} = V_3(\varphi = \varphi_k)$.

Распределения скоростей $V_1(\varphi)$, $V_2(X)$, $V_3(\varphi)$, а также скорости на стыках зон V_{1k} , V_{2k} , V_{3k} находились итерационным методом Ньютона. Постоянная A характеризует начальное растягивающее напряжение σ_{10} и однозначно связана со скоростью отбора (кратностью вытяжки).

Численный анализ. Анализ математической модели стационарного течения выполнен для случая ориентационного вытягивания полиэтиленовой (полиэтилен низкой плотности) пленки. Использовались следующие значения параметров: $\lambda_1 = 10$ с, $\eta_1 = 10^6$ Па·с, $f_1 = 0,6$, $R = 0,2$ м, $\varphi_k = 6$ рад., (R и φ_k идентичны для охлаждающих и нагревательных валков), $\lambda_2 = 1$ с, $\eta_2 = 10^5$ Па·с, $\ell = 0,1$ м, $v_{10} = 0,1$ м/с, $\lambda_3 \sim 1$ с, $\eta_3 = 10^7$ Па·с, $f_3 = 0,3$, $K = 7$, $We_1 = 5$, $We_2 = 1$, $A = 60 \div 180$, $N_2 = 0,2$, $N_3 = 10$.

На рис. 2.15 показано распределение безразмерной скорости V и тянущего усилия T_+ по длине пленки во всех трех зонах течения.

Иллюстрируется влияние безразмерного времени релаксации We_3 (числа Вейссенберга) на течение в III зоне: кривой 1 отвечает $We_3 = 0,1$ ($A = 86,148$), 2 – $We_3 = 0,4762$ ($A = 76,318$), 3 – $We_3 = 1$ ($A = 60,874$), 4 – $We_3 = 1$ ($A = 179,814$). В скобках приведены значения параметра A , обеспечивающие заданную кратность вытяжки $K = 7$. Штриховыми линиями показано распределение T_+ : кривая 5 соответствует первым трем случаям (см. данные для кривых 1–3), а кривая 6 – 4 случаю (см. данные для 4 кривой). О кривых 4 и 6 будет сказано ниже.

Анализ влияния параметров течения в первых двух зонах показал, что характер распределения V_1 , V_2 , T_{+1} не изменяется. С уменьшением We_1 и увеличением f_1 снижается степень вытяжки на нагревательных валках (V_{1k} уменьшается). Понижение We_2 способствует росту степени вытяжки пленки в зоне ориентации.

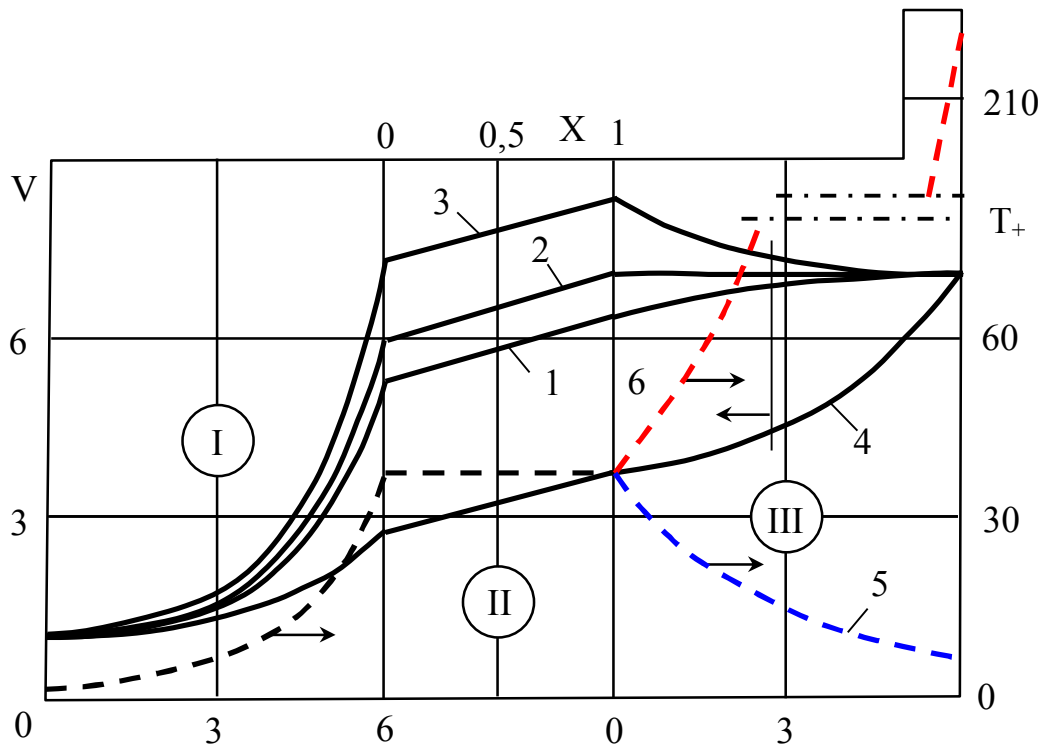


Рис. 2.15. Распределение безразмерной скорости V и тянущего усилия T_+ на нагревательных валках (участок I), в зоне ориентации (II) и на охлаждающих валках (III) при $We_1=5$, $We_2=1$: сплошные кривые 1 – $We_3=0,1$; 2 – 0,4761, 3 – 1, 4 – 1; штриховые кривые 5 – $S = 1$, 6 – $S = -1$.

Более сложная картина течения имеет место в III зоне. Для пояснения особенностей течения на охлаждающих валках запишем на основании (2.94) и (2.95) дифференциальное уравнение для осевой скорости

$$\frac{dV_3}{d\varphi} = \frac{T_{+lk} V_3 S_+}{We_3 V_3 T_{+lk} + AN_3 \exp(f_3 \varphi)}, \quad S_+ = (1 - We_3 f_3 V_3). \quad (2.97)$$

Уравнение (2.97) имеет следующую особенность решения: если $\varphi=0$, $dV_3/d\varphi=0$, то $V_3=K=\text{const}$. В общем случае осевая скорость в III зоне может монотонно возрастать ($dV_3/d\varphi>0$), убывать ($dV_3/d\varphi<0$) или сохранять постоянное значение. При этом $\text{sgn}(dV_3/d\varphi)=\text{sgn}(S_+)$, поскольку экстремумов внутри зоны течения функция $V_3(\varphi)$ не имеет.

Характер распределения V_3 зависит от знака функции S_+ ; можно выделить четыре режима течения.

1. Время пребывания пленки на валках превышает время релаксации и выполняется условие $S_+>0$. Скорость пленки на охлаждающих валках V_3 монотонно возрастает, достигая в конце зоны течения скорости отборных валков 2 (см. рис. 2.14). Имеет место эффективное скольжение пленки по поверхности валков (кривая 1 на рис. 2.15). Для ньютоновской жидкости $We_3=0$ всегда выполняется $V_{2k}<K$, а распределение осевой скорости описывается выражением

$$V_3 = V_{2k} \exp \left\{ \left[1 - \exp(-f_3 \varphi) \right] \ln(K/V_{2k}) / \left[1 - \exp(-f_3 \varphi_k) \right] \right\}.$$

2. Увеличив время релаксации, например, путем понижения температуры охлаждающих валков, можно добиться выполнения условия $S_+ = 0$. Деформации в пленке прекращаются: ее осевая скорость равна скорости отбора (кривая 2 на рис. 2.15). Если окружные скорости охлаждающих валков равны скорости отбора, то пленка как бы “прилипает” к поверхности валков.

3. При дальнейшем увеличении времени релаксации материала в III зоне (или сокращении времени пребывания) можно добиться выполнения условия $S_+ < 0$. Осевая скорость снижается (кривая 3 на рис. 2.15), что связано с упругим восстановлением (усадкой) пленки после ее растяжения. Высвобождается энтропийная упругость, запасенная в материале от момента начала деформирования до момента касания первого охлаждающего валка. Однако для реализации этого течения охлаждающие валки, снабженные индивидуальными приводами, должны иметь окружную скорость, превышающую осевую скорость пленки в конце второй зоны v_{2k} или равную ей (при этом $v_{2k} > v_{10}K$). С технологической точки зрения этот режим нежелателен, поскольку в полимере снижается ориентация цепей.

Важно отметить, что во всех трех режимах имеет место релаксация напряжений, а распределение тянущего усилия (кривая 5 на рис. 2.15) описывается функцией $T_{+3} = T_{+1k} \exp(-f_3 \varphi)$.

Рассматривается случай, когда окружная скорость охлаждающих валков равна скорости отбора. Следовательно, распределение осевой скорости в третьем режиме (кривая 3 на рис. 2.15) противоречит физической сущности задачи: скорость пленки не может превышать скорости отбора. Неадекватность математической модели III зоны обусловлена неточностью записи закона Амонтона при формулировке третьей задачи (2.90): используемая форма не учитывает направление скорости скольжения. Поэтому для третьей задачи более корректно закон Амонтона записать в форме

$$\tau_{N3} = f_3 \sum_3 S, \quad S = \operatorname{sgn}[v_{3k} - v_3(\varphi)]. \quad (2.98)$$

В первой зоне всегда выполняется условие $S=1$, поэтому для задачи (2.92) уточнение (2.98) не требуется.

С учетом (2.98) решение задач (2.90), (2.94) имеет вид:

$$\begin{aligned} 0 \leq \varphi \leq \varphi_k, \quad V_{2k} \leq V_3 \leq K, \\ \exp(-f_3 S \varphi) = Z_3 - (S A N_3 f_3 / T_{+1k}) [1 - Z_3 - (1 - S W e_3 f_3 V_3) \ln |Z_3 V_{2k} / V_3|], \\ Z_3 = (1 - S W e_3 f_3 V_3) / (1 - S W e_3 f_3 V_{2k}), \quad T_{+3} = T_{+1k} \exp(-S f_3 \varphi). \end{aligned} \quad (2.99)$$

В силу отмеченного свойства уравнения (2.97) в качестве S можно использовать ее начальное значение $S = \operatorname{sgn}[S_+(V_{2k})]$, которое сохраняется по всей длине III зоны.

4. Решение (2.99) при $S = -1$ описывает четвертый режим течения в III зоне, а при $S=1$ – третий. Результаты анализа уравнений (2.99) представлены на рис. 2.15 (кривые 4 и 6). В этом режиме существенно изменяется характер

распределения осевой скорости и тянущего усилия: область интенсивных деформаций смещается из зоны ориентации II к прижимным валкам, а натяжение пленки возрастает экспоненциально $S=-1$, $T_{+3}=T_{+1k}\exp(f_3\varphi)$ (кривая 6 на рис. 2.15), достигая наибольшего значения у прижимных валков, которые буквально <<сдирают>> пленку с охлаждающих валков. Если учесть трение покоя, то скачок натяжения будет более значительным. При идентичности числа Вейссенберга для кривых 3 и 4 начальное напряжение σ_{10} при переходе от третьего режима к четвертому снижается, поскольку параметр A увеличивается.

При переходе от второго режима к четвертому тянущее усилие у прижимных валков изменяется скачком от $T_{+1k}\exp(-f_3\varphi_k)$ до $T_{+1k}\exp(f_3\varphi_k)$, что в реальных условиях должно вызвать разрыв пленки у прижимных валков или возникновение в системе автоколебаний. Даже если разрыва не произойдет, пленка, полученная в четвертом режиме, будет иметь низкие физико-механические показатели, поскольку вытяжка протекает при пониженной температуре.

Таким образом, второй режим ($S=0$) можно рассматривать как граничный. Он разделяет два качественно различающихся стационарных течения плоской вязкоупругой струи: докритическое (первый режим $S=1$) и закритическое (четвертый режим $S=-1$). Технологически приемлемым является первый режим, при котором упругие свойства материала пленки проявляются незначительно. Второй режим (критический) неустойчив к малым возмущениям толщины, скорости, натяжения и т.п. При этом вероятен скачкообразный переход к четвертому режиму с последующим разрывом пленки.

В размерной форме условие течения в первом режиме может быть записано так: $\lambda_3 K v_{10} f_3 / R < 1$. Откуда следует, что для обеспечения устойчивой вытяжки пленки (или перехода в устойчивый режим) можно повысить температуру охлаждающих валков (снижение λ_3), снизить производительность (снижение v_{10} и K), уменьшить коэффициент трения, увеличить радиус охлаждающих валков.

Явления, связанные с неустойчивостью процесса ориентационной вытяжки, обусловлены нелинейными эффектами течения на охлаждающих валках. Предпосылками для возникновения автоколебаний в системе являются: малая амплитуда возмущения, достаточная для скачкообразного перехода из второго режима в четвертый и обратно; существенное изменение тянущего усилия, сопровождающее этот переход; конечная <<жесткость>> привода прижимных валков 2 (см. рис. 2.14). Под <<жесткостью>> понимается способность прижимных валков сохранять скорость отбора с изменением натяжения пленки.

Механизм возникновения автоколебаний следующий. Пусть организовано течение, соответствующее второму режиму. Допустим, незначительно возросла скорость отбора v_{3k} . Течение переходит в четвертый режим. Резко увеличивается натяжение пленки у прижимных отборных

валков, что вызывает ввиду конечной <<жесткости>> привода снижение скорости отбора. Скорость отбора падает до уровня, соответствующего второму режиму течения. При этом следует обратный переход из четвертого во второй режим течения, который сопровождается скачкообразным снижением тянущего усилия $T_{3к}$. Уменьшение нагрузки на прижимные валки, ввиду конечной <<жесткости>> привода увеличивает скорость отбора, тем самым повторно создаются условия для <<перескока>> течения из второго режима в четвертый, и т. д. Частота автоколебаний определяется соотношением продольной <<упругости>> пленки и момента инерции прижимных валков с приводом. Вероятно, именно таков механизм, отмеченной в [251], неустойчивости типа <<стик-слип>>.

2.7. Саморазогрев при растяжении аномально-вязкого цилиндра в теплопроводной среде

Температура является одним из наиболее важных факторов, влияющих на характер зависимости деформации полимерных материалов от напряжения. В связи с этим необходимо обратить внимание на то, что необратимое деформирование полимерных волокон и образцов при низкотемпературных реологических исследованиях в условиях растяжения связано со значительной затратой энергии (до 8×10^8 Дж/м³) [83]. При больших скоростях деформации, а именно эта область исследований часто представляет интерес, значительная часть этой энергии выделяется в виде тепла и вызывает разогрев образца. В отдельных случаях саморазогрев образцов достигает 15 К и более [83]. В вязкоупругих системах часть полной энергии деформации аккумулируется (энтропийная упругость) и вносит свой вклад в изменение внутренней энергии. Другая, диссипативная часть энергии, изменяет локальную температуру материала. В условиях вытяжки полимерные материалы находятся в состоянии близком к вязкотекучему. При этом потенциальной энергией деформации по сравнению с рассеянной можно пренебречь.

Применение термостатирующей жидкости приводит к неоднородности температуры по сечению образца, и как следствие, к неоднородности растягивающих напряжений. При этом результаты реологических исследований зависят от условий охлаждения. Игнорирование термического взаимодействия образца и охлаждающей среды может приводить к разночтению экспериментальных результатов.

Рассматривается термическое взаимодействие системы: теплопроводная среда - саморазогревающийся цилиндрический образец. Анализируется температурное поле сопряженной задачи с изменяющимся во времени (вследствие растяжения) радиусом термического контакта.

Рассмотрим цилиндрический образец с начальной длиной ℓ_0 и радиусом r_0 , поверхность которого находится в идеальном тепловом контакте с термостатирующей средой. Начальное распределение температур в образце и среде равномерное и соответствует температуре T_0 . Сила,

приложенная к торцевым поверхностям, вызывает растяжение образца со скоростью $V_z = d\ell/dt$. Градиент скорости деформации $\Gamma = dv_z/dz$ однороден по длине образца.

Реологические свойства растягиваемого образца характеризуются законом Оствальда де Виля

$$\tau = 2K[2\text{tr}(D^2)]^{(n-1)/2}D,$$

τ и D - девиатор тензора напряжений и тензор скоростей деформаций, K , n – константы. Поскольку упругую компоненту деформации не учитываем, то получим верхнюю оценку термического эффекта.

Продольной теплопроводностью пренебрегаем. Теплофизические свойства образца и среды постоянны. Уравнение энергии для произвольного сечения образца имеет вид [243], [244]

$$\frac{\partial T}{\partial t} + v_z \frac{\partial T}{\partial r} = a \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{K}{\rho C_v} \left[2\text{tr}(D^2) \right]^{\frac{n+1}{2}}, \quad 0 < r < r_*(t), \quad t > 0. \quad (2.100)$$

Начальное условие для температуры образца и среды $t=0$, $T=T_c=T_0$. На оси образца выполняется условие симметрии $r=0$, $\partial T/\partial r=0$.

Считаем, что термостатирующая среда в пределах гидродинамического пограничного слоя растягивается вместе с образцом и её радиальные перемещения обусловлены уменьшением поперечных размеров образца. Вязкость среды значительно меньше вязкости образца и её диссипативный саморазогрев не учитываем. Полагая для среды $\partial/\partial y = \partial/\partial z = 0$, можем записать уравнение энергии

$$\frac{\partial T_c}{\partial t} + v_z \frac{\partial T_c}{\partial r} = a_c \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T_c}{\partial r} \right), \quad r > r_*(t), \quad t > 0. \quad (2.101)$$

На поверхности образца принимаем граничное условие четвертого рода [75]

$$r=r_*(t), \quad \lambda \frac{\partial T}{\partial r} = \lambda_c \frac{\partial T_c}{\partial r}, \quad T = T_c.$$

Уравнение неразрывности в условиях одноосного растяжения имеет вид

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0,$$

где ℓ_0 , r_0 - начальная длина и радиус образца; r , y , z - цилиндрические координаты; v_r , v_z - компоненты скорости; t – время; Γ - градиент скорости деформации; T , T_c , T_0 - температура образца, среды и начальная температура среды; r_* - текущий радиус поверхности образца; a , ρ , C_v , λ - температуропроводность, плотность, теплоемкость и теплопроводность образца; a_c , λ_c - температуропроводность и теплопроводность термостатирующей среды; ℓ - текущая длина образца; ε - относительное удлинение образца.

Учитывая, что $\partial v_z/\partial z = \Gamma(t)$ можем записать $d(rv_r) = -\Gamma r dr$. Интегрируя полученное уравнение в пределах от $r=0$ до r , получим выражение для радиальной скорости образца и среды

$$V_r = -0,5\Gamma r. \quad (2.102)$$

Найдем изменение радиуса поверхности образца во времени. Выражение (2.102) можно записать так $dr/dt = -0,5\Gamma r$. Разделяя переменные, и интегрируя с учетом начального условия $t=0$, $r=r_0$, получим зависимость радиуса от продолжительности деформации

$$r_* = r_0 \exp \left[-\frac{1}{2} \int_0^t \Gamma(t) dt \right]. \quad (2.103)$$

Анализ поставленной сопряженной задачи для произвольной функции $\Gamma(t)$ представляет значительные трудности, поэтому подробно рассмотрим частный случай растяжения образца $\Gamma = \text{const}$ [167]

$$\ln(\ell/\ell_0) = \Gamma t. \quad (2.104)$$

Относительное удлинение образца определяется как $\varepsilon = (\ell - \ell_0)/\ell_0$. Выражение (2.104), с учетом $\ell/\ell_0 = 1 + \varepsilon$, можно записать следующим образом

$$\ln(1 + \varepsilon) = \Gamma t. \quad (2.105)$$

Полученное однозначное соответствие ε и t позволяет перейти от переменной t к ε .

Выберем удобные для дальнейшего анализа безразмерные переменные и параметры

$$R = \frac{r}{r_*} = \frac{r\sqrt{1+\varepsilon}}{r_0}, \quad \theta = \frac{(T - T_0)\rho C_v \Gamma}{K(3\Gamma^2)^{\frac{n+1}{2}}}, \quad \theta_c = \frac{(T_c - T_0)\rho C_v \Gamma}{K(3\Gamma^2)^{\frac{n+1}{2}}},$$

$$A = \frac{a}{r_0^2 \Gamma}, \quad \Lambda = \frac{\lambda}{\lambda_c}, \quad B = \frac{a_c}{a}. \quad (2.106)$$

Здесь R - безразмерный радиус; θ , θ_c - безразмерная температура образца и среды; A , Λ , B - безразмерные параметры.

С учетом (2.102), (2.103), (2.105), (2.106) уравнения (2.100), (2.101) и краевые условия примут вид:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \varepsilon} = \frac{A}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial \theta}{\partial R} \right) + \frac{R}{2(\varepsilon + 1)} \frac{\partial \theta}{\partial R} + \frac{1}{1 + \varepsilon}, \quad (2.107)$$

$$\frac{\partial \theta_c}{\partial \varepsilon} = \frac{AB}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial \theta_c}{\partial R} \right) + \frac{R}{2(\varepsilon + 1)} \frac{\partial \theta_c}{\partial R}, \quad (2.108)$$

$$\varepsilon = 0, \quad \theta = \theta_c = 0, \quad (2.109)$$

$$R = 0, \quad \partial \theta / \partial R = 0, \quad (2.110)$$

$$R = \infty, \quad \partial \theta_c / \partial R = 0, \quad \theta_c = 0, \quad (2.111)$$

$$R = 1, \quad \Lambda \partial \theta / \partial R = \partial \theta_c / \partial R, \quad \theta = \theta_c, \quad (2.112)$$

В уравнении (2.107) параметр A может принимать значения от 10^{-3} до 10^2 , следовательно, пренебрежение конвективным переносом тепла в радиальном направлении, принятое в работе [194], не во всех случаях правомерно.

Анализ задачи (2.107)-(2.112) ведем интегральным методом теплового баланса [1]. Введём величину $\delta(\varepsilon)$, называемой толщиной термического слоя, и для всех $R > \delta$ считаем, что тепло не распространяется за пределы $R = \delta$ и температура среды $\theta_c = 0$. Заменим граничные условия (2.111) на условия для цилиндрической поверхности, соответствующей радиусу проникновения тепла в термостатирующую среду.

$$R = \delta, \quad \theta_c = 0, \quad \partial \theta_c / \partial R = 0, \quad (2.113)$$

Пусть температурное поле в образце и в пределах пограничного теплового слоя среды аппроксимируется многочленами второй степени. Используя условия (2.110), (2.112), (2.113), методом неопределённых коэффициентов получим следующие выражения

$$\theta = \theta_* \left[1 - \frac{R^2}{\Lambda(\delta - 1) + 1} \right], \quad (2.114)$$

$$\theta_c = \frac{\theta_* \Lambda (\delta - R)^2}{(\delta - 1) [\Lambda (\delta - 1) + 1]}, \quad (2.115)$$

где $\theta_* = \theta(R = 0)$ - температура на оси образца; δ - безразмерная глубина проникновения тепла в термостатирующую среду. Начальное условие (2.109) для неизвестных функций θ_* и δ дает

$$\varepsilon = 0, \quad \theta_* = 0, \quad \delta = 1, \quad (2.116)$$

Умножим обе части уравнений (2.107), (2.108) на RdR и проинтегрируем, с учетом (2.114), (2.115), в пределах от 0 до 1 уравнение (2.107) и от 1 до δ - уравнение (2.108). После несложных преобразований получим систему дифференциальных уравнений первого порядка для функций θ_* и δ .

$$\frac{d\theta_*}{d\varepsilon} = \frac{C_2 C_4 - C_5 C_1}{C_0 C_4 - C_3 C_1}, \quad \frac{d\delta}{d\varepsilon} = \frac{C_0 C_5 - C_3 C_2}{C_0 C_4 - C_3 C_1}, \quad (2.117)$$

$$\text{где } C_0 = (\varepsilon + 1) [2\Lambda(\delta - 1) + 1], \quad C_1 = \frac{\theta_* \Lambda (\varepsilon + 1)}{\Lambda(\delta - 1) + 1},$$

$$C_2 = 2[\Lambda(\delta - 1) + 1] - \theta_* - 8A\theta_*(\varepsilon + 1), \quad C_3 = (\delta - 1)(\delta + 3)[\Lambda(\delta - 1) + 1],$$

$$C_4 = \theta_* \{ (3\delta + 5)[\Lambda(\delta - 1) + 1] - \Lambda(\delta - 1)(\delta + 3) \},$$

$$C_5 = \frac{\theta_* [\Lambda(\delta - 1) + 1]}{(\delta - 1)(\varepsilon + 1)} [24AB(\varepsilon + 1) - (\delta - 1)(\delta^2 + 2\delta + 3)].$$

Здесь $C_0 - C_5$ - функции от Λ , δ , ε , θ_* , A , B .

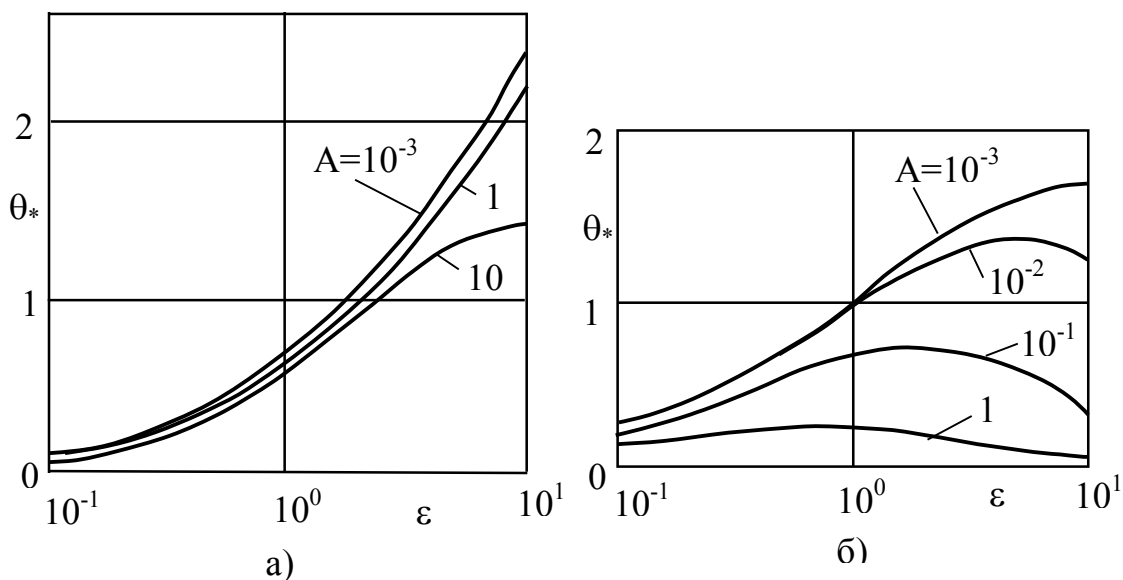


Рис. 2.16. Зависимость безразмерной температуры на оси образца θ_* от величины относительного удлинения ε при различных значениях параметра A : а – растяжение в воздухе; б – в воде

Температурное поле в образце и среде определяется параметрами Λ , A , B , ε . При $\varepsilon \rightarrow \infty$ диссипативный член уравнения (2.107) стремится к нулю и в условиях охлаждения $\theta \rightarrow \infty$. При растяжении образца в адиабатических условиях ($\Lambda \rightarrow \infty$, $B \rightarrow 0$, $\delta \rightarrow 1$) из (2.117) для θ_* имеем

$$d\theta_*/d\varepsilon = (1 + \varepsilon)^{-1},$$

или

$$\theta = \theta_* = \ln(\varepsilon + 1). \quad (2.118)$$

Выражение (2.118) характеризует максимальный саморазогрев образца без теплоотвода.

Процесс теплообмена образца с термостатирующей средой может быть охарактеризован числом Нуссельта Nu , которое получается из условия непрерывности теплового потока в среде [75]

$$r = r_*, \quad -\lambda_c \partial T_c / \partial r = \alpha (T_c - T_0). \quad (2.119)$$

Выражение (2.119) с учетом (2.106) можно записать в безразмерном виде

$$Nu = 2\sqrt{\varepsilon + 1} / (\delta - 1), \quad (2.120)$$

где $Nu = \alpha r_0 / \lambda_c$, α - коэффициент теплоотдачи от поверхности образца; Nu - число Нуссельта. Согласно (2.120) число Нуссельта зависит от ε , и в начальный момент $\varepsilon \rightarrow 0$, $Nu \rightarrow \infty$.

Решение системы уравнений (2.117) проводилось методом Рунге-Кутты. В точке $\varepsilon = 0$ уравнения (2.117) дают неопределенность типа ноль на ноль и условие (2.116) было заменено приближенным условием: $\varepsilon = 0$, $\theta_* = 10^{-5}$, $\delta = 1,00001$. Шаг по ε составлял 2×10^{-4} . Теплофизические свойства полиэтилентерефталата, полиамида, полистирола и полиэтилена в интервале температур 300÷350 К близки [258], поэтому для образца были приняты следующие усредненные теплофизические характеристики $a = 10^{-7} \text{ м}^2/\text{с}$,

$\lambda = 0,214$ Вт/м*К. Рассматривались случаи растяжения полимерного образца в воздухе и воде, для которых $B=220$, $\Lambda = 9$ и $B = 1,43$, $\Lambda = 0,3$, соответственно.

На рис. 2.16 представлены графики зависимости температуры на оси образца от величины относительного удлинения при различных значениях параметра A . Рис. 2.16,а отвечает случаю растяжения образца в воздухе, а рис. 2.16,б - в воде.

Из рисунков видно, что при малых значениях A характер изменения температуры близок к адиабатическому режиму растяжения, характеризуемому выражением (2.118). С увеличением A температура на оси образца понижается и зависимость принимает экстремальный характер. При этом с увеличением A точка максимума смещается в область малых значений ε .

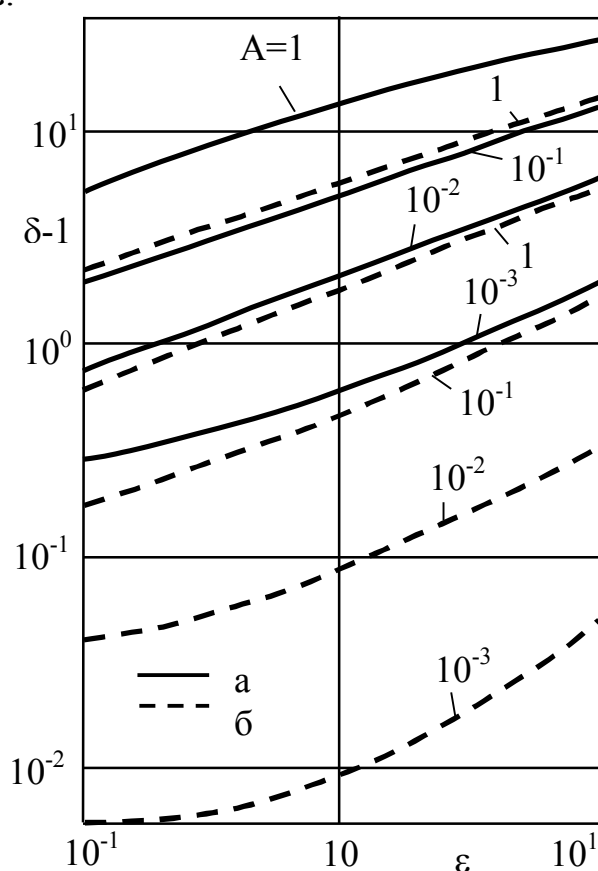


Рис. 2.17. Зависимость глубины проникновения тепла δ от относительного удлинения ε при различных значениях параметра A : а – растяжение в воздухе; б – в воде.

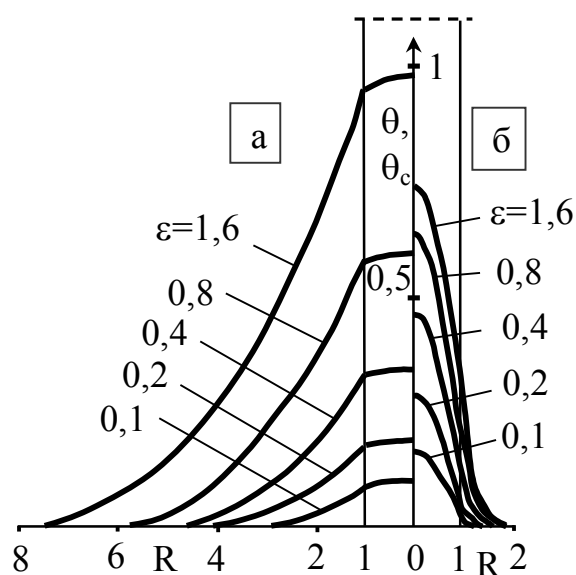


Рис. 2.18. Поле температур при растяжении образца в воздухе (а) и воде (б).

На рис. 2.17 представлен график изменения толщины теплового пограничного слоя δ в зависимости от относительного удлинения образца ε .

Толщина теплового пограничного слоя монотонно возрастает, и при $\varepsilon \rightarrow \infty$, $\delta \rightarrow \infty$. Глубина проникновения тепла в воде значительно меньше, чем в

воздухе. Меньшим значениям параметра A соответствуют меньшие значения δ .

На рис. 2.18 представлены профили температур при растяжении образца в воздухе (а) и в воде (б). Расчеты выполнены по выражениям (2.114) и (2.115) для $A = 0,1$. Из рисунков видно, что при растяжении в воде температурное поле в образце неоднородно.

Анализ уравнений (2.117) показал, что пренебрежение конвективным радиальным переносом тепла в среде несущественно влияет на θ_* , но сильно изменяет характер кривых $\delta(\epsilon)$ при малых ϵ и A . Согласно (2.114) с увеличением A и δ радиальный градиент температуры в образце уменьшается.

Выбор термостатирующей среды связан со следующим противоречием. Применение высокотеплопроводной среды снижает термический эффект от диссипативного саморазогрева, но приводит к значительным радиальным градиентам температур и как следствие - существенно неоднородным по сечению образца растягивающим напряжениям. Применение среды с низкой теплопроводностью снижает радиальный градиент температуры, но мало препятствует общему саморазогреву образца. В какой-то мере преодолеть это противоречие можно, выбирая условия растяжения обеспечивающие наибольшее численное значение параметров A и Λ .

2.8. Термическое взаимодействие в системе валок - плоская полимерная заготовка

Кинетика охлаждения полимерных заготовок на валке зависит от многих факторов, в частности, от толщины заготовки и стенки валка, теплофизических свойств компонентов системы и т.д. Рассматривается термическое взаимодействие в системе полимерная заготовка - охлаждающий валок, с учетом тепловой инерции валка.

Рассматриваемая задача нестационарной теплопроводности является сопряженной. Если угол охвата охлаждаемой пленкой валка φ_0 , то после схода пленочной заготовки с валка он продолжает охлаждаться со стороны внутренней стенки холодным теплоносителем (период холостого пробега) на дуге $2\pi - \varphi_0$, после чего вновь вступает в термическое взаимодействие с непрерывно поступающей плоской полимерной заготовкой. Оценки показывают [6], что в фазе холостого пробега ($0.1 \leq Fo \leq 1$, $0.1 \leq Bi \leq 1$) он не успевает полностью охладиться и, следовательно, вступает в термическое взаимодействие, имея неоднородную по толщине начальную температуру, отличную от температуры холодного теплоносителя. Указанное явление тепловой инерции валка усиливается с увеличением окружной скорости и при интенсификации процесса требует численных оценок.

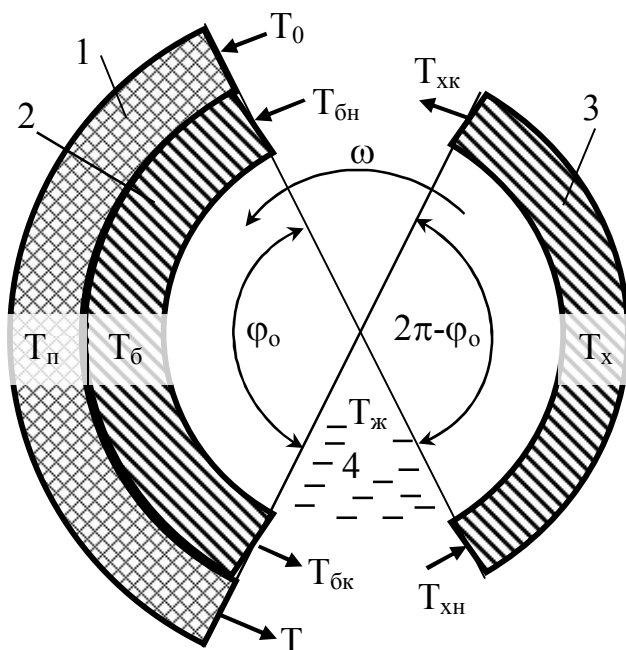


Рис. 2.19. Структурная схема термического взаимодействия в системе полимерная заготовка – охлаждающий валок: 1 – полимерная заготовка (пленка), 2 – рабочая часть окружности валка, 3 – валок в фазе холостого пробега, 4 – охлаждающая жидкость.

На рис. 2.19 представлена структурная схема процесса охлаждения плоской полимерной заготовки на валке. Начальная температура заготовки T_0 . Температура заготовки на сходе $T_{пк}$. Температурное поле в полимерной заготовке описывается функцией $T_{п} = T_{п}(t, y, \varphi)$. Температурное поле в стенке валка на участке термического взаимодействия с пленкой $T_{б} = T_{б}(t, y, \varphi)$. Температурное поле в стенке валка в фазе холостого пробега $T_{х} = T_{х}(t, y, \varphi)$.

Условия непрерывности температурного поля валка

$$T_{бн} = T_{хк}, \quad T_{бк} = T_{хн}. \quad (2.121)$$

Поверхности валка в рабочем режиме и в фазе холостого пробега имеют различные схемы теплового нагружения, и в этих фазах температурные поля описываются различными уравнениями. Последовательно рассмотрим решение указанных задач.

2.8.1. Температурное поле в рабочей фазе процесса

Принимаем следующие допущения. Начальный профиль температур в стенке валка описывается произвольной функцией. Ширина и толщина заготовки при охлаждении постоянны. Радиус валка значительно больше толщины заготовки и стенки валка и их кривизной пренебрегаем. Между заготовкой и поверхностью валка имеет место идеальный тепловой контакт. Тепловой поток радиальный. Теплофизические свойства полимерного материала и стенки валка постоянны. Тепловой эффект кристаллизации пренебрежимо мал. Потеря тепла со свободных поверхностей заготовки и валка пренебрежимо малы. Внутренняя поверхность валка охлаждается в соответствии с законом Ньютона. Начальная температура заготовки постоянна по толщине; начальная температура валка характеризуется произвольной функцией, удовлетворяющей условиям Дирихле.

Схема охлаждения представлена на рис. 2.20. Валок, наружным радиусом R , вращается с угловой скоростью ω . Плоская заготовка, толщиной δ , термически взаимодействует с валком на дуге φ_0 . Толщина стенки валка $k\delta$. Анализ ведем в системе Лагранжа, связанной с поверхностью валка. При этом температурные поля заготовки и валка зависят от поперечной координаты и времени. Время пребывания пленки на валке $t_1 = \varphi_0 / \omega$. Общая продолжительность одного оборота $t_2 = 2\pi / \omega$. Принятые обозначения поясняются рис. 2.21.

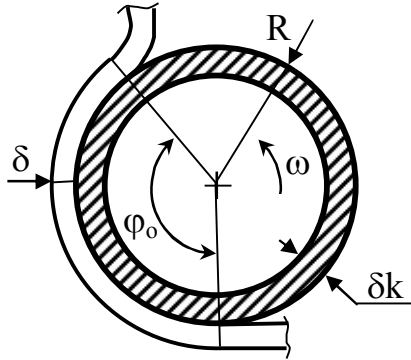


Рис. 2.20. Охлаждение пленки на валке.

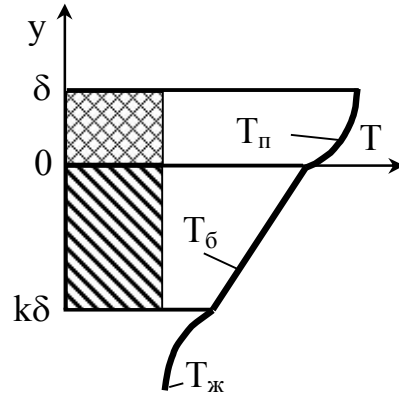


Рис. 2.21. Схема охлаждения пленки.

С учетом принятых допущений первая краевая задача описывается системой уравнений [245]-[247]

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_n}{\partial t} &= a_n \frac{\partial^2 T_n}{\partial y^2}; & \frac{\partial T_\delta}{\partial t} &= a_\delta \frac{\partial^2 T_\delta}{\partial y^2}; \\ t=0: & T_n = T_0, \quad T_\delta = T_{\delta n}(y), \\ y=\delta, & \partial T_n / \partial y = 0, \\ y=-k\delta, & \lambda_\delta \partial T_\delta / \partial y = \alpha(T_\delta - T_{\text{ж}}), \\ y=0, & T_n = T_\delta, \quad \lambda_\delta \partial T_\delta / \partial y = \lambda_n \partial T_n / \partial y. \end{aligned} \quad (2.122)$$

Введем безразмерные переменные и параметры:

$$\begin{aligned} \{\theta_x, \theta_n, \theta_\delta\} &= \frac{\{T_x, T_n, T_\delta\} - T_{\text{ж}}}{T_0 - T_{\text{ж}}}, \quad Y = \frac{y}{\delta}, \quad A = \frac{a_\delta}{a_n}, \quad \Lambda = \frac{\lambda_\delta}{\lambda_n}, \\ \text{Bi} &= \frac{\alpha\delta}{\lambda_\delta}, \quad \text{Fo} = \frac{a_\delta t}{\delta^2}, \quad \text{Fo}_1 = \frac{a_\delta \varphi_0}{\delta^2 \omega}, \quad \text{Fo}_2 = \frac{2\pi a_\delta}{\delta^2 \omega}. \end{aligned} \quad (2.123)$$

С учетом (2.123) уравнения (2.122) примут вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta_n}{\partial \text{Fo}} &= \frac{1}{A} \frac{\partial^2 \theta_n}{\partial Y^2}, \quad 0 < \text{Fo} < \text{Fo}_1, \quad 0 < Y < 1, \\ \frac{\partial \theta_\delta}{\partial \text{Fo}} &= \frac{\partial^2 \theta_\delta}{\partial Y^2}, \quad 0 < \text{Fo} < \text{Fo}_1, \quad -k < Y < 0, \end{aligned} \quad (2.124)$$

$$\text{Fo} = 0, \quad \theta_n = 1, \quad \theta_\delta = \theta_0(Y) = \frac{T_{\delta n}(Y) - T_{\text{ж}}}{T_0 - T_{\text{ж}}}, \quad (2.125)$$

$$\begin{aligned} Y=1, \quad \partial\theta_n/\partial Y &= 0, \\ Y=-k, \quad \partial\theta_\delta/\partial Y &= Bi\theta_\delta, \end{aligned} \quad (2.126)$$

$$Y=0, \quad \theta_\delta = \theta_n, \quad \Lambda \partial\theta_\delta/\partial Y = \partial\theta_n/\partial Y. \quad (2.127)$$

Решение задачи (2.124)-(2.127) ведем методом Фурье [1]. В силу однородности граничных условий, частное решение каждого из уравнений (2.124) определяется в виде произведения двух функций, одна из которых зависит только от поперечной координаты, а другая представляет собой экспоненциальную функцию числа Фурье

$$\theta_n = \Psi_n(Y) \exp(-\mu^2 Fo), \quad \theta_\delta = \Psi_\delta(Y) \exp(-\mu^2 Fo). \quad (2.128)$$

Подставляя (2.128) в (2.124), получим частное решение в виде:

$$\begin{aligned} \theta_n &= A_n \exp(-\mu^2 Fo) \sin(\mu \sqrt{A} Y + \varphi_n), \\ \theta_\delta &= A_\delta \exp(-\mu^2 Fo) \sin(\mu A + \varphi_\delta). \end{aligned}$$

Общее решение уравнений системы (2.124) представляют ряды:

$$\begin{aligned} \theta_n &= \sum_{n=0}^{\infty} A_{n\pi} \exp(-\mu_n^2 Fo) \cdot \sin(\mu_n Y + \varphi_{n\pi}), \\ \theta_\delta &= \sum_{n=0}^{\infty} A_{\delta n} \exp(-\mu_n^2 Fo) \cdot \sin(\mu_n Y + \varphi_{\delta n}). \end{aligned} \quad (2.129)$$

Используя граничные условия (2.126) и общее решение (2.129), получим систему уравнений, определяющую собственные числа задачи μ_n и постоянные $\varphi_{n\pi}$ и $\varphi_{\delta n}$.

$$\Lambda \operatorname{tg} \varphi_{n\pi} = \sqrt{A} \operatorname{tg} \varphi_{\delta n}, \quad \cos(\mu_n \sqrt{A} + \varphi_{n\pi}) = 0, \quad \mu_n = Bi \cdot \operatorname{tg}(-\mu_n k + \varphi_{n\pi}). \quad (2.130)$$

Кроме того, получим соотношения для коэффициентов

$$A_\delta = S_n A_{\pi}, \quad S_n = \sin \varphi_{n\pi} / \sin \varphi_{\delta n}. \quad (2.131)$$

С учетом полученных соотношений, выражения (2.129) примут вид

$$\begin{aligned} \theta_n &= \sum_{n=0}^{\infty} A_{nn} \exp(-\mu_n^2 Fo) \cdot \sin(\mu_n \sqrt{A} Y + \varphi_{n\pi}), \\ \theta_\delta &= \sum_{n=0}^{\infty} A_{nn} S_n \exp(-\mu_n^2 Fo) \cdot \sin(\mu_n Y + \varphi_{\delta n}). \end{aligned} \quad (2.132)$$

Произвольные постоянные A_{nn} определим из условий ортогональности собственных функций на отрезке $-k, 1$. Для рассматриваемой задачи это условие имеет вид

$$\frac{\lambda_n}{a_n} \int_0^1 \Psi_{ni} \Psi_{np} dY + \frac{\lambda_\delta}{a_\delta} \int_{-k}^0 \Psi_{\delta i} \Psi_{\delta p} dY = \begin{cases} \text{const} & \text{при } i = p, \\ 0 & \text{при } i \neq p. \end{cases} \quad (2.133)$$

Из начальных условий (2.125) с учетом представлений решений (2.128) и (2.132) следует, что

$$1 = \sum_{n=0}^{\infty} A_{nn} \sin(\mu_n \sqrt{A} Y + \varphi_{n\pi}), \quad \theta_0(Y) = \sum_{n=0}^{\infty} A_{nn} S_n \sin(\mu_n Y + \varphi_{\delta n}). \quad (2.134)$$

Умножая (2.134) на $\Psi_{n\pi}$, $\Psi_{\delta n}$ и используя условие (2.133), получим

$$A_{nn} = \frac{A \cdot J_{ln} + \Lambda S_n a_n^*}{A \cdot J_{2n} + \Lambda S_n^2 J_{3n}}, \quad (2.135)$$

где $J_{ln} = \frac{1}{\mu_n \sqrt{A}} \left[\cos \varphi_{nn} - \cos(\mu_n \sqrt{A} + \varphi_{nn}) \right]$, $a_n^* = \int_{-k}^0 \theta_0(Y) \cdot \sin(\mu_n Y - \varphi_{\delta n}) dY$,

$$J_{2n} = \frac{1}{4\mu_n \sqrt{A}} \left\{ 2\mu_n \sqrt{A} + \sin 2\varphi_{nn} - \sin \left[2(\mu_n \sqrt{A} + \varphi_{nn}) \right] \right\},$$

$$J_{3n} = \frac{1}{4\mu_n} \left\{ \mu_n k - \sin 2\varphi_{\delta n} + \sin \left[2(\varphi_{\delta n} - \mu_n k) \right] \right\}.$$

Постоянные φ_{nn} , $\varphi_{\delta n}$, μ_n удобно искать пошаговым методом. При этом систему уравнений (2.130) следует записать следующим образом:

$$\varphi_{nn} = \frac{\pi}{2} + \pi n - \mu_n \sqrt{A}, \quad \varphi_{\delta n} = \text{Arctg} \left(\frac{\Lambda}{\sqrt{A}} \text{tg} \varphi_{nn} \right) + \pi n,$$

$$f(\mu_n) = -\mu_n + \frac{1}{k} \left(\varphi_{\delta n} - \text{Arctg} \frac{\mu_n}{Bi} \right).$$

Алгоритм расчета. Задается начальное значение $\mu = 10^{-3}$ и находится значение функции f . Далее с определенным шагом увеличивают μ до наступления момента $f < 0$. Истинным значениям корней отвечает условие $f = 0$. Функция f убывающая. Расчетная схема абсолютно сходящаяся при любых A , k , Bi , Λ .

Средняя по сечению пленки температура определяется путем интегрирования первого выражения (2.132)

$$\theta_{nc} = \int_0^1 \theta_n dY = \sum_{n=0}^{\infty} A_{nn} J_{ln} \exp(-\mu_n^2 Fo). \quad (2.136)$$

Количество тепла, отдаваемого пленкой единичной ширины Q , можно определить, используя (2.136)

$$Q = (T_0 - T_{ж}) \cdot [1 - \theta_{nc}(Fo = Fo_1)] \rho C_v \delta \omega R.$$

Из выражения (2.135) следует, что температурное поле в пленке и барабане зависят от начального распределения температуры в поперечном сечении вала, которое характеризуется коэффициентами Фурье a_n^* . Распределение температур в стенке вала и сечении схода пленки описывается (2.132), а именно $\theta_{\delta}(Fo_1)$.

2.8.2. Температурное поле вала в фазе холостого пробега

В фазе холостого пробега поверхности вала (см. рис. 2.19, рис. 2.20) считаем, что на его внутренней поверхности имеет место граничное условие третьего рода, а на свободной поверхности теплообмен отсутствует. Начальное распределение температуры, обусловленное термическим воздействием пленки, описывается функцией $T_{хн}$.

С учетом принятых допущений, задача описывается уравнениями

$$\frac{\partial \theta_x}{\partial Fo} = \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial Y^2}, \quad 0 < Fo < Fo_2 - Fo_1, \quad -k < Y < 0,$$

$$Fo = 0: \quad \theta_x = \theta_{\text{хн}} = \frac{T_{\text{хн}} - T_{\text{ж}}}{T_0 - T_{\text{ж}}},$$

$$Y = 0: \quad \partial \theta_x / \partial Y = 0, \quad Y = 0: \quad \partial \theta_x / \partial Y = Bi \theta_x. \quad (2.137)$$

Обозначения в (2.137) соответствуют (2.123). Отсчет, времени ведется с момента схода пленки с поверхности вала. При этом продолжительность холостого пробега составляет $t_2 - t_1$.

Решение задачи (2.137) подробно рассмотрено в [6], и в принятых обозначениях имеет вид

$$\theta_x = \frac{2}{k} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{v_n b_n \cos\left(\frac{v_n Y}{k}\right) \cdot \exp\left(-\frac{v_n^2}{k} Fo\right)}{v_n + \sin v_n \cdot \cos v_n}, \quad (2.138)$$

где $b_n = \int_{-k}^0 \theta_{\text{хн}}(Y) \cos\left(\frac{v_n Y}{k}\right) dY$, v_n - корни характеристического уравнения

$$v_n \cdot \operatorname{tg} v_n = k Bi. \quad (2.139)$$

Согласно (2.138) распределение температуры по толщине стенки вала в конце фазы холостого пробега ($Fo = Fo_2 - Fo_1$), т.е. в момент очередного термического контакта с пленкой зависит от коэффициентов Фурье b_n .

2.8.3. Численный анализ решения

Условия сопряжения температурных полей (2.121), с учетом (2.123), примут вид

$$\theta_0 = \theta_{\text{хк}}, \quad \theta_{\delta\text{к}} = \theta_{\text{хн}}, \quad (2.140)$$

где $\theta_0 = \theta_{\delta}(Fo = 0)$, $\theta_{\text{хк}} = \theta_x(Fo = Fo_2 - Fo_1)$, $\theta_{\delta\text{к}} = \theta_{\delta}(Fo = Fo_1)$, $\theta_{\text{хн}} = \theta_x(Fo = Fo_1)$.

Однако решения (2.132) и (2.138) построены на разных собственных функциях, обусловленных различными граничными условиями каждой из задач, поэтому непосредственное использование условий (2.140) невозможно. Заменим равенства (2.140) интегральными условиями, обеспечивающими минимизацию квадрата отклонения разности температур

$$\int_{-k}^0 (\theta_0 - \theta_{\text{хн}})^2 dY = \min, \quad \int_{-k}^0 (\theta_{\delta\text{к}} - \theta_{\text{хн}})^2 dY = \min. \quad (2.141)$$

Левые части выражений (2.141) являются функциями коэффициентов Фурье, а именно: $\theta_0 = \theta_0(a_n^*)$, $\theta_{\text{хк}} = \theta_{\text{хк}}(b_n)$, $\theta_{\delta\text{к}} = \theta_{\delta\text{к}}(a_n^*)$, $\theta_{\text{хн}} = \theta_{\text{хн}}(b_n)$.

Неизвестные коэффициенты Фурье должны доставлять минимум интегралам (2.141), поэтому можем записать уравнения

$$\frac{\partial}{\partial a_n^*} \int_{-k}^0 (\theta_0 - \theta_{\text{хк}})^2 dY = 0, \quad \frac{\partial}{\partial b_n} \int_{-k}^0 (\theta_{\delta\text{к}} - \theta_{\text{хн}})^2 dY = 0.$$

Выполнив дифференцирование по параметру, получим систему линейных алгебраических уравнений для неизвестных коэффициентов a_n^*, b_n

$$\int_{-k}^0 (\theta_0 - \theta_{\text{хк}}) \sin(\mu_i Y - \varphi_{\delta i}) dY = 0, \quad \int_{-k}^0 (\theta_{\delta\text{к}} - \theta_{\text{хн}}) \cos\left(\frac{v_i Y}{k}\right) dY = 0, \quad i=0,1,2,\dots (2.142)$$

Решение системы (2.142) весьма трудоёмко. При этом остается открытым вопрос устойчивости решения. Уравнения определяют коэффициенты Фурье, соответствующие стабилизированному температурному полю объекта (бесконечное число оборотов вала). При этом нельзя определить продолжительность пускового периода и его зависимость от технологических параметров процесса.

Использовался итерационный метод решения. Метод состоял в определении температурного поля системы на каждом обороте вала, начиная с нулевого, когда температура поверхности вала принималась равной температуре термостатирующей жидкости. В реальных условиях температурное поле системы в пусковой период нестационарное, поскольку температура произвольной точки вала или пленки изменяется во времени. Предлагаемый метод предусматривает ступенчатое изменение температурного поля, соответствующее отдельному обороту вала.

Алгоритм расчета по предлагаемой методике следующий.

1. Для заданных параметров $\Lambda, Bi, Fo_1, Fo_2, A, k$ находятся $\varphi_{n\text{н}}, \varphi_{\delta\text{н}}, \mu_n, v_n$ как корни уравнений (2.130), (2.139). Распределение температур в сечении вала в начальный момент принимается $\theta_{\delta} = \theta_0(Y) = 0$, для чего достаточно положить $a_n^* = 0$.
2. Согласно (2.129) находятся распределения температур в пленке и валке, соответствующие значению $Fo = Fo_1$.
3. Используя формулу Бесселя [259], находятся коэффициенты, характеризующие начальный профиль температур для холостой фазы.
4. Подставляя в формулу (2.138) найденные значения b_n и $Fo = Fo_2 - Fo_1$, находим распределение температур в стенке вала в момент его касания пленкой при новом обороте.
5. Аналогично используя формулу Бесселя для приближенного гармонического анализа [259], находим, согласно (2.135), коэффициенты Фурье a_n^* , которые характеризуют начальный профиль температур в валке при его очередном обороте.
6. Далее, переходя к пп.2, находим температурное поле в пленке и валке, соответствующее следующему обороту, Программа циклическая. При каждом шаге итерации температурное поле в пленке и валке стабилизируется.

Численный анализ выполнен для случая охлаждения полимерной пленки (листа) на поверхности стального вала. Пользуясь литературными источниками, найдем пределы варьирования параметров процесса.

Теплофизические характеристики для материала стенки вала [260]: сталь Ст.20, $\lambda_6 = 50 \text{ Вт/(м}\times\text{К)}$, $\rho = 7800 \text{ кг/м}^3$, $C = 500 \text{ Дж/(кг}\times\text{К)}$. Для полимерной

пленки из различных полимеров, ПЭВД: $a_n=(0,1\div0,6)\times10^{-6}$ м²/с, $\lambda_n=0,25\div0,7$ Вт/м×К; ПЭНД: $a_n=(0,1\div0,7)\times10^{-6}$ м²/с, $\lambda_n=0,24\div0,55$ Вт/(м×К); ПВХ: $a_n=0,1\times10^{-6}$ м²/с, $\lambda_n=0,2$ Вт/(м.К). Таким образом, теплофизические свойства полимерной заготовки могут изменяться в следующих пределах: $a_n=(1\div7)\times10^{-7}$ м²/с, $\lambda_n=0,2\div0,7$ Вт/(м×К). Найдем безразмерные параметры, характеризующие соотношение теплофизических свойств. Принимаем средние значения теплофизических свойств $A=25$, $\Lambda=100$.

Коэффициент теплоотдачи со стороны внутренней стенки вала, при охлаждении водой, имеет порядок $\alpha=1200\text{--}5800$ Вт/(м²К) [261]. Толщина пленки (листа) может находиться в пределах $(0,25\text{--}20)\times10^{-3}$ м [19]. Угол охвата пленкой вала находится в пределах от $\varphi_0\approx\pi$ [19], до $\varphi_0=0,8\pi$ [14]. Принимаем $\varphi_0=\pi$. Окружная скорость вала зависит от толщины охлаждаемой пленки. С увеличением толщины скорость уменьшается, так при $\delta=10^{-3}$ м, $V=0,033$ м/с; при $\delta=6\times10^{-3}$ м, $V=2\times10^{-3}$ м/с; при $\delta=3\times10^{-3}$ м, $V=0,01$ м/с [19]. Диаметр вала находится в пределах от 0,25 м до 0,6 м [19]. Для указанных значений число Био изменяется в пределах от 0,024 до 2,32.

Число Фурье, соответствующее периоду контакта пленки с валком, можно определить выражением $Fo_1=a_6\varphi_0/\delta^2\omega$, которое с учетом $v=\omega D/2$, можно записать так $Fo_1=a_6\varphi_0 D/(2\delta^2 v)$. Расчеты показывают, что Fo_1 может находиться в пределах $10^{-3}\div10$. Для указанных толщин параметр k изменяется в пределах от 1 до 10, а для тонких пленок может достигать и 50.

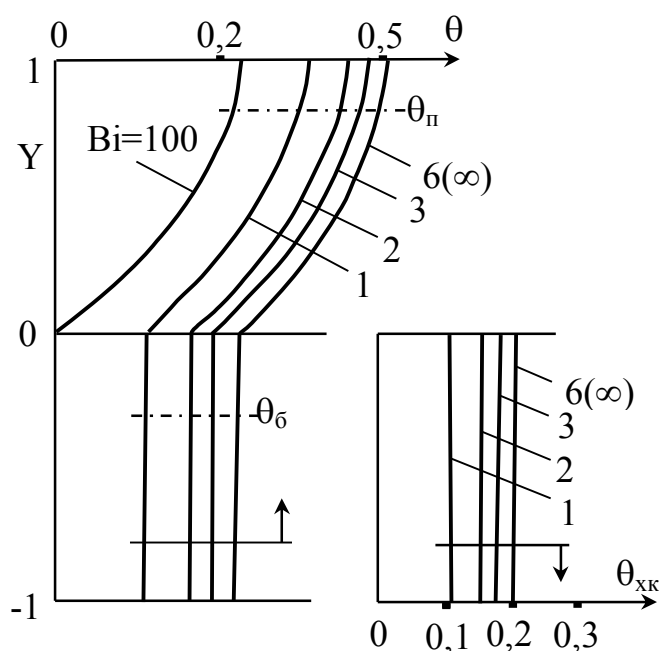


Рис. 2.22. Эволюция температурного поля в пленке и валке. Числа у кривых – номер итерации.

На рис. 2.22 представлена эволюция температурного поля в системе полимерная заготовка - валок в пусковой период. Расчеты выполнены для условий: $A=25$; $\Lambda=100$; $k=1$; $Bi=0,02$; $\varphi_0=\pi$; $Fo_1=14$. При расчете учитывались первые 7 членов рядов (2.132), (2.138). Точность вычисления собственных чисел 10^{-6} . Для определения коэффициентов Фурье использовались значения температур θ_x и θ_6 в десяти точках Y интервала $[0, -k]$. При малых числах Фурье ряды плохо сходились, что характерно для

решений, полученных методом разделения переменных [6]. Однако моменту схода пленки соответствуют числа Фурье, обеспечивающие хорошую сходимость, поскольку в случаях, соответствующих реальным условиям охлаждения ($\theta_{\text{бк}} < 0,2$), даже наблюдается наступление регулярного режима.

На рис. 2.22 представлена эволюция температурного поля в системе полимерная заготовка - валок в пусковой период. Расчеты выполнены для условий: $A=25$; $\Lambda=100$; $k=1$; $Bi=0,02$; $\varphi_0=\pi$; $Fo_1=14$. При расчете учитывались первые 7 членов рядов (2.132), (2.138). Точность вычисления собственных чисел 10^{-6} . Для определения коэффициентов Фурье использовались значения температур θ_x и θ_b в десяти точках Y интервала $[0, -k]$. При малых числах Фурье ряды плохо сходились, что характерно для решений, полученных методом разделения переменных [6]. Однако моменту схода пленки соответствуют числа Фурье, обеспечивающие хорошую сходимость, поскольку в случаях, соответствующих реальным условиям охлаждения ($\theta_{\text{бк}} < 0,2$), даже наблюдается наступление регулярного режима.

Согласно рисунку градиент температуры в поперечном сечении валка незначителен, что объясняется высокой теплопроводностью материала валка. С увеличением количества оборотов валка (или количества итераций) повышается температура, как валка, так и пленки. Интенсивность охлаждения пленки снижается.

В рассматриваемом случае стабилизация температурного поля наступает после 5-6 оборотов валка. На рисунке также представлен профиль температуры в пленке, соответствующий высокой интенсивности охлаждения (имитация граничного условия первого рода при $Bi=100$). Из сопоставления профилей температур на сходе пленки с валка видно, что в случае граничного условия первого рода температура пленки наименьшая. Далее, в случае учета теплопроводности валка, но при начальной его температуре равной температуре термостатирующей жидкости (первый оборот валка), температура пленки имеет среднее значение. И, наконец, при учете теплопроводности валка и его тепловой инерции, пленка на сходе имеет наибольшую температуру (при наступлении стабилизации). В последнем, наиболее реальном случае, интенсивность охлаждения наименьшая. При анализе протекающих в полимере надмолекулярных процессов, например, кристаллизации, указанное обстоятельство может привести к существенным качественным различиям в результатах.

Анализ показывает, что количество оборотов стабилизации температурного поля зависит от соотношения параметров Bi , Fo , Λ , k и может составлять от 2 до 15.

Анализировалось влияние параметров процесса на проявление эффекта тепловой инерции. В качестве численной характеристики указанного явления была взята температура наружной поверхности валка в момент касания пленки в режиме стабилизации температурного поля. Расчеты выполнены для случая $A=25$, $\Lambda=100$, что соответствует охлаждению полимерной заготовки на

стальном валке. Варьировались величины k , Bi и Fo . Параметр Fo_1 характеризует безразмерное время пребывания пленки на валке.

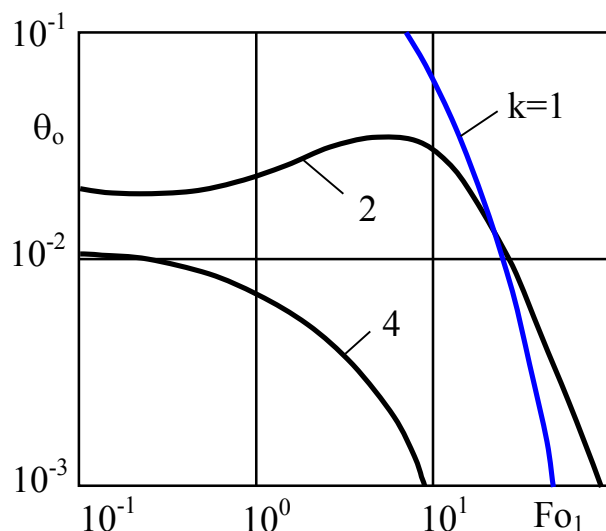


Рис. 2.23. Зависимость начальной температуры поверхности валка в режиме температурной стабилизации (θ_0) от безразмерного времени контакта пленки (Fo_1) и относительной толщины валка (k) при постоянной интенсивности охлаждения ($Bi=0,06$).

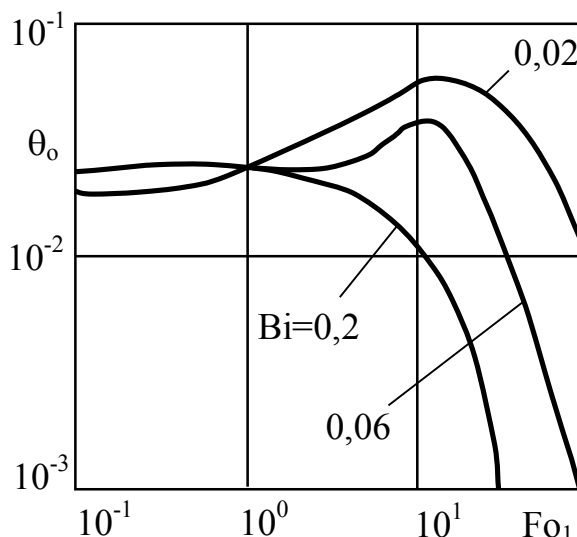


Рис. 2.24. Зависимость начальной температуры поверхности валка от числа Фурье и критерия Био при $k=2$.

На рис. 2.23 представлена зависимость начальной температуры поверхности валка в режиме температурной стабилизации от безразмерного времени контакта пленки и относительной толщины валка k . Интенсивность охлаждения была принята постоянной $Bi=0,06$. Из рисунка видно, что зависимость носит экстремальный характер. Для определения области влияния термической инерции условно примем разграничивающее значение $\theta_6(Y=0) = 0,01$. Если температура валка превышает это значение, то будем считать, что инерция оказывает влияние на температурное поле полимерной заготовки. В противном случае инерцией можно пренебречь. Тепловая инерция может быть весьма значительной при малых числах Фурье. Так при $Fo=0,01$, $k=1$, $Bi=0,2$ безразмерная температура поверхности валка в момент контакта с пленкой достигает $\theta_6(\varphi=0)=0,22$.

Можно сделать вывод. Эффект тепловой инерции проявляется при соизмеримости толщин полимерной заготовки и стенки валка, например, при формировании толстых полимерных листов. С увеличением толщины стенки валка повышение начальной температуры его поверхности незначительно и им можно пренебречь. Кроме того, с увеличением продолжительности пребывания пленки (уменьшение скорости вращения валка), что характеризуется Fo_1 , эффект инерции исчезает и валок в фазе холостого пробега успевает охладиться. Так для условий $k=1$, $Bi=0,2$ валок имеет в момент контакта с пленкой температуру близкую к температуре теплоносителя при $Fo_1 \geq 10$.

На рис. 2.24 иллюстрируется влияние интенсивности охлаждения на проявление эффекта тепловой инерции. Расчеты выполнены для случая $k=2$. Зависимость носит экстремальный характер, хотя в основном представлена правая (ниспадающая), часть кривой, что объясняется ухудшением сходимости рядов Фурье при малых длительностях процесса. Из рисунка видно, что с увеличением интенсивности охлаждения проявление термической инерции валка исчезает при меньших Fo_1 . Так для $Bi = 0,02$ влияние тепловой инерции прекращается при $Fo_1=100$, а для $Bi=0,2$ - уже при $Fo_1>12$.

По результатам исследований можно сделать следующие выводы. Подаваемая на охлаждение пленка вступает в сложное, включающее элемент обратной связи, взаимодействие с валком. На режим охлаждения полимерной заготовки влияет не только температурное поле валка в рабочей фазе процесса, но и условия охлаждения внутренней поверхности валка в холостой фазе пробега. Незавершенность охлаждения поверхности валка в холостой фазе снижает интенсивность охлаждения пленки.

Проявление эффекта термической инерции валка зависит от соотношения толщине полимерной заготовки и стенки валка, скорости вращения, интенсивности охлаждения внутренней стенки, а также от соотношения теплофизических свойств материала валка и пленки. Наиболее вероятно проявление эффекта термической инерции при формировании толстых полимерных листов в условиях низкой интенсивности охлаждения внутренней стенки, когда безразмерная температура заготовки на сходе находится в пределах 0.2-0.7. При более глубоком охлаждении (температура меньше 0.2) термическая инерция практически не проявляется. В случае тонких пленок, толщина стенки валка значительно превышает толщину заготовки и эффект термической инерции незначителен. В этом случае допустимо анализировать температурное поле, исходя из предположения равенства начальной температуры валка температуре термостатирующей жидкости.

В системах, характеризующихся большой термической инерцией, продолжительность пускового периода может достигать 15 оборотов, а в малоинерционных системах стабилизация температурного поля наступает уже после первого оборота валка.

Температурное поле внутри стенки валка (система полимер-сталь) практически однородно по толщине. Это дает возможность значительно упростить решение задачи охлаждения, приняв бесконечную теплопроводность стенки валка.

ЭЛОНГАЦИОННОЕ ТЕЧЕНИЕ СВОБОДНОЙ СТРУИ В УСЛОВИЯХ ПОПЕРЕЧНОГО ДЕЙСТВИЯ СИЛ СОБСТВЕННОГО ВЕСА

Получены уравнения динамики и проведен подробный анализ элонгационного течения свободной струи в условиях гравитационного провисания. Использовался квазиодномерный подход, теоретически обоснованный для рассматриваемого течения Ентовым В.М., Яриным А.Л., Хусидом Б.М., Шульманом З.П. [96, 99, 159].

Свободная изогнутая струя неньютоновской жидкости впервые описана в работе [217]. Отличие данного рассмотрения состоит во введении фиксированной скорости отбора, что расширяет возможности управления течением и приводит к новым нетривиальным эффектам [264-270]. Изучено элонгационное течение ньютоновской, упруговязкой (модель Максвелла) и аномально-вязкой (Оствальда де Виля) жидкостей в изотермических и неізотермических условиях. Выяснено влияние капиллярных сил. Исследована устойчивость течения. Раскрыты механизмы потери устойчивости при различных типах возмущений.

3.1 Уравнения равновесия свободной струи жидкости

Рассматривается стационарное продольное течение капельной жидкости в условиях поперечного действия гравитационных сил. Схема течения представлена на рис. 3.1. координаты x, y характеризуют положение центра сечения струи. Начало координат помещено в точку, где закончился процесс разбухания. В точке касания струей валка (ℓ, h) течение заканчивается. Длина зоны течения по горизонтали ℓ . В квазиодномерном приближении осевая скорость v однородна по сечению струи f . Скорость в разбухшем сечении v_0 , отбора – v_1 . Реализуется режим неоднородного одноосного изохорического растяжения.

Сила собственного веса элемента струи ds , горизонтальная проекция которого dx , определяется $dG = f\rho g \sec \varphi \cdot dx$. Если струя находится в жидкой ванне (мокрое формование), то вместо плотности необходимо использовать разность плотностей жидкости струи и окружающей среды.

Элементарная сила инерции обусловлена действием на элемент массой $\rho Q ds/v$ осевого ускорения vdv/ds и определяется $P_u = \rho Q dv$. На поверхность элемента со стороны окружающей среды действует сила трения [83] $dP_T = \rho_c v^2 C_f \sqrt{\pi Q/v} \sec \varphi dx$, где $C_f = 0,65 \cdot Re^{-0,7}$. Составляющая, обусловленная действием капиллярных сил, определяется $dP_k = -2\pi\sigma d\left(R_k / \sqrt{1 + R_k'^2}\right) \approx 2\pi\sigma \sqrt{Q/(\pi v)} \cdot dv/v$. При локальном радиусе

кривизны $R_k = (1 + y'^2)^{3/2} / y''$ на элемент действует центробежное ускорение $\rho Q ds / v$, поэтому элементарная центробежная сила $dP_{\text{ц}} = (ds) \rho Q v / R_k$. Изгибающий момент в сечении струи определяется интегралом $M = \int_f \sigma_u \xi df$,

в котором для круглой струи $df = \sqrt{r^2 - \xi^2} d\xi$. В случае ньютоновской жидкости изгибное напряжение обусловлено силами вязкого трения, и определяется $\sigma_u = 2\eta \partial v_u / \partial s$, где $v_u = \xi ds / (R_k dt)$, ξ - расстояние от нейтральной плоскости сечения. Выполняя интегрирование, получим $M = [\eta Q^2 / (2\pi v)] \partial(v / R_k) / \partial s$.

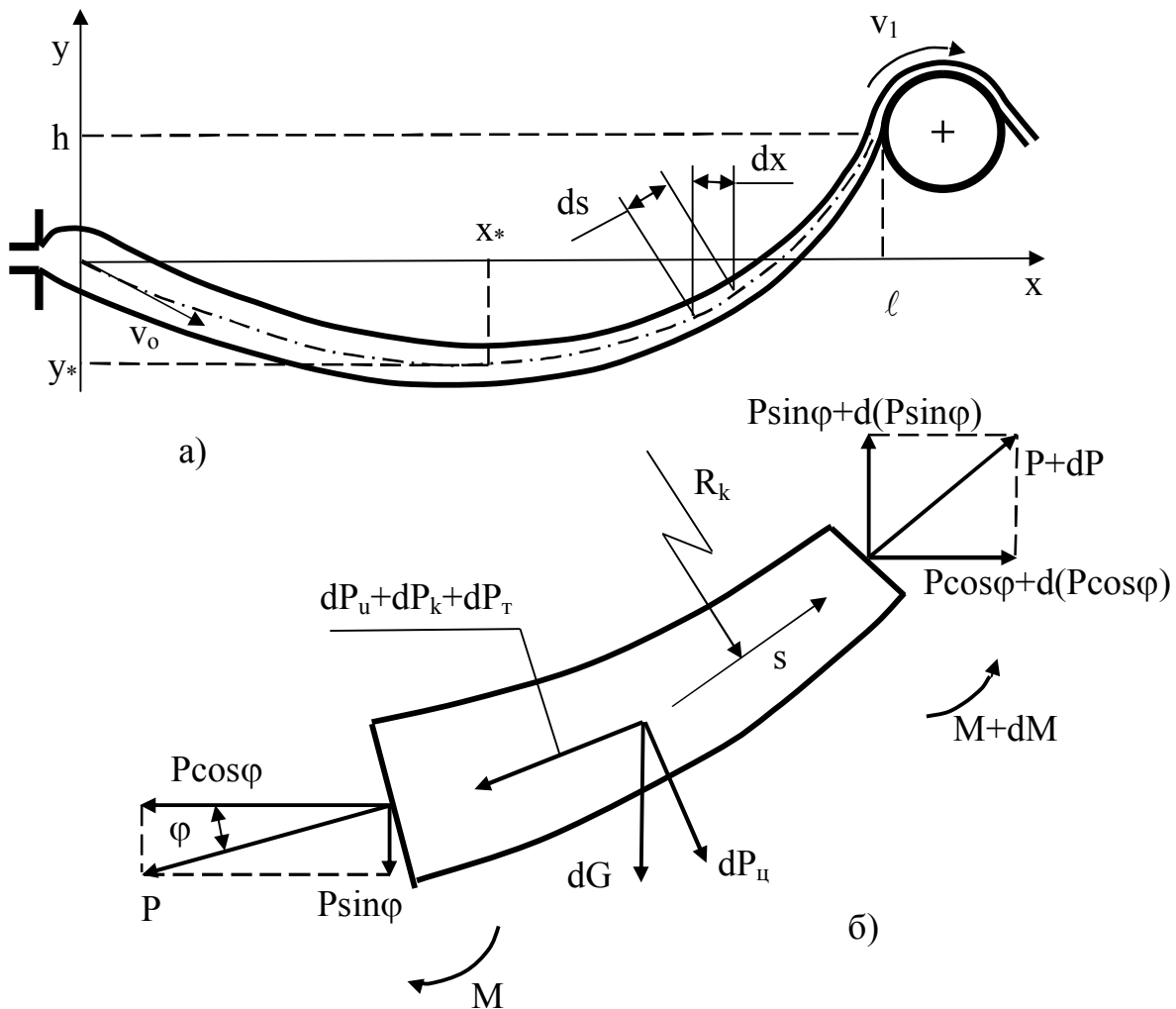


Рис. 3.1. Стационарное течение свободной струи: а – схема течения, б – равновесие элемента струи.

Все указанные силы уравнивает, действующая по направлению касательной, сила реологического сопротивления $P = \sigma_{11} f$.

Условия равновесия элемента струи описываются уравнениями Кирхгофа. Проекция сил на ось y:

$$-dG - (dP_u + dP_k + dP_\tau) \sin \phi + d(P \cdot \sin \phi) - P \cos \phi dP_{\text{ц}} = 0. \quad (3.1)$$

Проекция сил на ось x :

$$-(dP_u + dP_k + dP_T)\cos\varphi + d(P \cdot \cos\varphi) + \sin\varphi dP_u = 0. \quad (3.2)$$

Сумма моментов относительно конечного сечения элемента

$$dP_u ds/2 + dG dx/2 + dM - P(ds)^2/R_k = 0.$$

Оценим члены уравнений Кирхгофа для характерных значений параметров: $\sigma \sim 10^{-2}$ Н/м; $s \sim x \sim R_k \sim 0,1$ м; $\rho_c \sim 1$ кг/м³; $F \sim 10^{-6}$ м²; $\rho \sim 10^3$ кг/м³; $v \sim 10^{-2}$ м/с; $Q \sim 10^{-8}$ м³/с. Имеем следующие значения составляющих: $G \sim 10^{-3}$ Н; $P_u \sim 10^{-7}$ Н; $P_k \sim 10^{-5}$ Н; $P_T \sim 10^{-8}$ Н; $P \sim 10^{-5}$ Н; $P_u \sim 10^{-7}$ Н; $P_us \sim 10^{-8}$ Н·м; $Gx \sim 10^{-4}$ Н·м; $M \sim 10^{-13}$ Н·м; $Ps^2/R_k \sim 10^{-6}$ Н·м. В указанных условиях доминируют силы реологического сопротивления, собственного веса и капиллярные.

Рассмотрим течение высоковязких жидкостей с малыми скоростями в воздухе для $\sqrt{F} \ll \ell$, учитывая силы собственного веса и реологического сопротивления. Из уравнения (3.2) следует, что горизонтальная составляющая натяжения (натяжение в нижней точке) струи

$$H = \sigma_{11} v^{-1} Q \cos \varphi \quad (3.3)$$

остаётся постоянной $H = \text{const}$. Подставив (3.3) в (3.1), получим уравнение

$$H \frac{d(\text{tg}\varphi)}{dx} = \frac{\rho g Q}{v} \sec \varphi. \quad (3.4)$$

Граничные условия задачи для функций $v(x)$, $y(x)$

$$x = 0: v = v_0, y = 0, x = \ell: y = h, v = v_1, x = x_*: y = y_*, \partial y / \partial x = 0. \quad (3.5)$$

Согласно (3.3), (3.4) течение не зависит от расхода.

3.1.1. Течение упруговязкой жидкости

Рассмотрим течение обобщенной жидкости Максвелла с одним временем релаксации (модель Уайта-Метцнера) [29]

$$\tau_{ij} + \lambda \frac{D_0 \tau_{ij}}{D_0 t} = 2\eta d_{ij}, \quad (i, j = 1, 2, 3). \quad (3.6)$$

Компоненты тензора скоростей деформации для случая неоднородного одноосного растяжения определяются так: $d_{11} = \partial v / \partial s$; $d_{22} = d_{33} = -0,5 \partial v / \partial s$; $d_{ij} = 0$ для $i \neq j$. Для указанных условий течения уравнение (3.6) по компонентам напряжений (контрвариантная конвективная производная в операторе Олдройда) записывается в виде

$$\tau_{11} + \lambda \left(v \frac{\partial \tau_{11}}{\partial s} - 2\tau_{11} \frac{\partial v}{\partial s} \right) = 2\eta \frac{\partial v}{\partial s}, \quad \tau_{22} + \lambda \left(v \frac{\partial \tau_{22}}{\partial s} + \tau_{22} \frac{\partial v}{\partial s} \right) = -\eta \frac{\partial v}{\partial s}, \quad \tau_{33} = \tau_{22}. \quad (3.7)$$

Чтобы получить значение напряжения σ_{11} воспользуемся соотношением $\sigma_{ii} = -p + \tau_{ii}$, и, пренебрегая силами поверхностного натяжения, запишем $\sigma_{22} = \sigma_{33} = -p + \tau_{22} = 0$. Следовательно, для изотропного

давления имеем $p = \tau_{22} = \tau_{33}$. Таким образом, растягивающее напряжение равно разности девиаторных компонент $\sigma_{11} = \tau_{11} - \tau_{22}$. Вычитая из первого уравнения в (3.7) второе, получим

$$\sigma_{11} + \lambda \left(v \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial s} - 2\sigma_{11} \frac{\partial v}{\partial s} \right) - 3\lambda \tau_{22} \frac{\partial v}{\partial s} = 3\eta \frac{\partial v}{\partial s}. \quad (3.8)$$

Последним членом в левой части уравнения (3.8) пренебрегаем, ввиду его сравнительной малости с величиной $2\lambda \sigma_{11} \partial v / \partial s$. С учетом этого упрощения можно написать

$$\sigma_{11} \left(1 - 2\lambda \frac{\partial v}{\partial s} \right) + \lambda v \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial s} = 3\eta \frac{\partial v}{\partial s}. \quad (3.9)$$

Принимая во внимание соотношения: $\operatorname{tg} \varphi = y'$, $\sec \varphi = \sqrt{1 + y'^2}$, $ds = dx \sqrt{1 + y'^2}$, $F = Q/v$, запишем уравнения (3.3), (3.4), (3.9) в декартовой системе координат

$$\begin{aligned} \eta y'' &= \frac{Q \rho g}{v} \sqrt{1 + y'^2}, & H &= \frac{Q \sigma_{11}}{v \sqrt{1 + y'^2}}, \\ \sigma_{11} \left(\sqrt{1 + y'^2} - 2\lambda v' \right) + \lambda v \frac{d\sigma_{11}}{dx} &= 3\eta v', \end{aligned} \quad (3.10)$$

или в безразмерной форме

$$Y' = \frac{dY}{dX} = \operatorname{sh} \xi, \quad \xi' = \frac{R}{q \cdot V}, \quad V' = \frac{V(q \operatorname{ch}^2 \xi + \operatorname{We} R \operatorname{sh} \xi)}{1 \pm \operatorname{We} q V \operatorname{ch} \xi}, \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} X=0: & \quad Y=0, & V=1, & \quad \xi=\xi_0, \\ X=1: & \quad Y=0, & V=K. \end{aligned} \quad (3.12)$$

где $X = x/\ell$, $Y = y/\ell$ - безразмерные координаты, $V = v/v_0$ - безразмерная скорость, $K = v_1/v_0$ - кратность вытяжки, $\operatorname{We} = \lambda v_0/\ell$ - число Вейссенберга, $q = H\ell/(3\eta Q)$ - безразмерное тянущее усилие для упруговязкой жидкости, $R = \rho g \ell^2/(3\eta v_0)$ - безразмерный параметр, характеризующий силы собственного веса; $S = s/\ell$ - безразмерный параметр оси; ξ - безразмерная переменная. Штрих означает производную по S . В последнем выражении (3.11) знак “+” соответствует контрвариантной, а “-” ковариантной конвективной производной оператора Олдройда.

Принятая реологическая модель накладывает определенные ограничения на параметры K , We , q , поэтому предварительно рассмотрим частный случай течения без провисания ($R = 0$, $Y' = 0$). При этом, из (3.11) получим выражение для осевой скорости $V'(q\operatorname{We}V + 1) = qV$. Разделяя переменные и интегрируя с учетом начального условия (3.12), получим соотношение $\operatorname{We}(V - 1) + \ln V/q = X$.

Величину натяжения найдем, используя условие отбора $q = [1 - \text{We}(K - 1)]^{-1} \ln K$. Исключив натяжение, получим профиль скорости $K^X = V(K^{V-1}/V^{K-1})^{\pm \text{We}}$, где знак “+” соответствует контрвариантной, а “-”

Таблица 3.1

Одноосное растяжение вязкоупругой струи без провисания

Характеристики, условия	Конвективная производная	
	Ковариантная	Контрвариантная
Профиль скорости	$K^X = V(V^{K-1}/K^{V-1})^{\text{We}}$	$K^X = V(K^{V-1}/V^{K-1})^{\text{We}}$
Натяжение	$q = [1 + \text{We}(K - 1)]^{-1} \ln K$	$q = [1 - \text{We}(K - 1)]^{-1} \ln K$
Градиент скорости	$V' = \frac{V \ln K}{1 - \text{We}(V \ln K + 1 - K)}$	$V' = \frac{V \ln K}{1 - \text{We}(K - 1 - V \ln K)}$
Координата точки резонанса скорости деформации ($V' \rightarrow \infty$)	$X = 1, \quad V = K$	$X = 0, \quad V = 1$
Условие отсутствия резонанса скорости деформации ($V' < \infty$)	$\text{We} < \frac{1}{K \ln K + 1 - K}$	$\text{We} < \frac{1}{K - \ln K - 1}$
Условие отсутствия резонанса напряжений ($q < \infty$)	Не наступает при любых K и We	$\text{We} < \frac{1}{K - 1}$
Эпюры скорости в критических режимах	Резонанс скорости деформации $X = \frac{K \ln V - V + 1}{K \ln K - K + 1}$	Резонанс скорости деформации $X = \frac{V - 1 - \ln V}{K - 1 - \ln K}$, резонанс напряжений $V = 1 + (K - 1)X$.
Область применимости модели для $V' > 0$	$\text{We} < \frac{1}{K(\ln K - 1) + 1}$	$\text{We} < \frac{1}{K - 1}$

ковариантной конвективной производной. Для вязкой жидкости ($\text{We} = 0$) характерно экспоненциальное распределение скорости $V = K^X$.

Для обобщенной модели Максвелла в условиях растяжения различают резонанс скорости деформации и резонанс напряжений. Резонанс скорости деформации характеризуется бесконечным увеличением градиента скорости ($\partial v / \partial x \rightarrow \infty$) при фиксированном растягивающем напряжении, а напряжений $\sigma_{11} \rightarrow \infty$, ($q \rightarrow \infty$) при достижении некоторой фиксированной скорости отбора.

В табл. 3.1 представлены основные характеристики и особенности элонгационного течения упруговязкой жидкости Максвелла при разных представлениях конвективной производной в операторе Олдройда. Из таблицы видно, что резонанс скорости деформации может иметь место в обоих случаях. Резонанс напряжений характерен только для контрвариантной производной. Именно он и определяет область применимости модели, исходя из условия для We "меньше меньшего". Границы применимости моделей изменяться в условиях провисания струи.

Численный анализ уравнений (3.11), (3.12) выполнен методом Рунге-Кутты. Варьируя параметр ξ_0 добивались выполнения условия $X=1, Y=0$. Программа, реализующая метод стрельбы, предусматривала автоматическую коррекцию ξ_0 до достижения выполнения условия в точке отбора с точностью по Y порядка $10^{-5} \div 10^{-6}$. Соответствующее изменение K наблюдалось в 4^й значащей цифре. Шаг по X составлял 0,05.

Предварительно для выявления основных закономерностей был проведен анализ течения ньютоновской жидкости ($We=0$). На рис. 3.2 представлена зависимость кратности вытяжки от величины безразмерного тянущего усилия q при различных значениях гравитационного параметра R . Линия $R=0$ описывается функцией $K=\exp(q)$ и соответствует течению струи без провисания. Из рисунка видно, что зависимость носит экстремальный характер. В то время как между величиной тянущего усилия и провисанием зависимость однозначна: с увеличением усилия провисание уменьшается. Кратность, соответствующая минимуму $K=K_m$ на кривой $K(q)$, характеризует наименьшее значение скорости отбора, при котором ещё возможно стационарное течение.

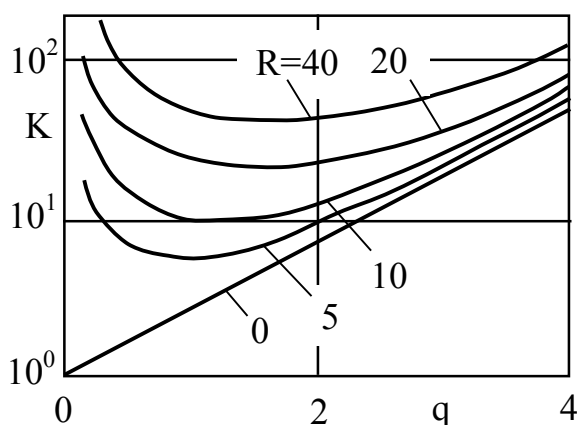


Рис. 3.2

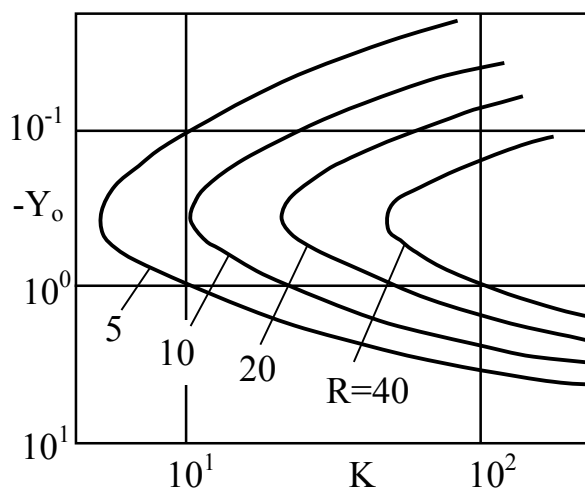


Рис. 3.3.

Она является точкой ветвления или вырождения бифуркации. Функция $q(K)$ при $K > K_m$ двужначная. Кратностям, лежащим выше K_m , отвечают два различных значения тянущего усилия (растягивающих напряжений) и, соответственно, две различные конфигурации струи (см. рис.

3.3); с малым (докритическое течение) и большим провисанием (закритическое течение). Если при докритических провисаниях имеет место равномерное течение вдоль всей струи и профиль скорости близок экспоненциальной зависимости, то при больших (закритических) провисаниях наблюдается локализация зон интенсивного течения в начале и в конце участка, а средняя (провисающая) часть струи практически не вытягивается. С увеличением параметра R критическая кратность возрастает, и в интервале $5 < R < 50$ с точностью 5 % справедливо соотношение $K_m = R$. Таким образом, в условиях фиксированной скорости отбора имеет место бифуркация напряжений и провисаний струи.

Свойства течений. В докритическом течении уменьшить провисание можно, увеличив скорость отбора или уменьшив гравитационный параметр (R). В закритическом режиме струя ведет себя противоположным образом, иначе сказать, парадоксально. С увеличением скорости отбора или уменьшением гравитационного параметра струя опускается (увеличивается провисание). И наоборот, уменьшение скорости отбора или увеличение R вызывает подъем струи (уменьшение провисания). В последнем случае струя, достигнув критического провисания ($Y_0 \sim 0,4$), обрывается.

На рис. 3.3 представлена зависимость величины провисания в средней части зоны течения $Y_0 = Y(X = 0,5)$ от кратности вытяжки и параметра R . Зависимость $Y_0(K)$ носит экстремальный характер: кратностям выше критических отвечают две различные величины провисания. Причем независимо от R критическое провисание находится в интервале $Y [-0,5 \div -0,3]$. Математическая модель предполагает неограниченное провисание при уменьшении тянущего усилия до нуля и возрастании скорости отбора до бесконечности. Однако стабильность течения при больших провисаниях (левые ветви на рис.3.2 и нижние - на рис.3.3) ухудшается, поскольку в реальных условиях тянущее усилие может стать соизмеримым с усилиями от случайных возмущений обусловленных, например, колебанием расхода, скорости отбора, аэродинамическими силами и др.

В случае упруговязкой жидкости картина течения существенно зависит от типа конвективной производной в операторе Олдройда. На рис. 3.4 представлена зависимость кратности вытяжки от тянущего усилия и числа Вейссенберга (We) для $R=10$ и ковариантной производной. С ростом We критическая кратность увеличивается.

Если в ньютоновском случае имел место неограниченный рост правых ветвей кривых $K(q)$, то в данном случае ветви имеют предельные точки (вертикальные асимптоты) с координатами q_* , K_* значения которых зависят от We . В этих точках имеет место резонанс скорости деформации и при $q > q_*$, $K > K_m$ течение невозможно. На концах ветвей выполняется условие $\partial q / \partial K = 0$. Рассматривая совместно выражения для резонансных условий q и We (см. табл. 3.1), получим соотношение для координат предельных точек

$q_* = 1/(K_* We)$. Докритическое течение возможно при значениях кратности $K_m(R, We) < K < K_*(We)$. Если для провисаний ньютоновской жидкости справедливо соотношение $\lim_{K \rightarrow \infty} Y_0 = 0$, то ковариантная модель предполагает конечные провисания $\lim_{K \rightarrow K_*} Y_0 = \text{const} \neq 0$, ввиду наступления резонанса скорости.

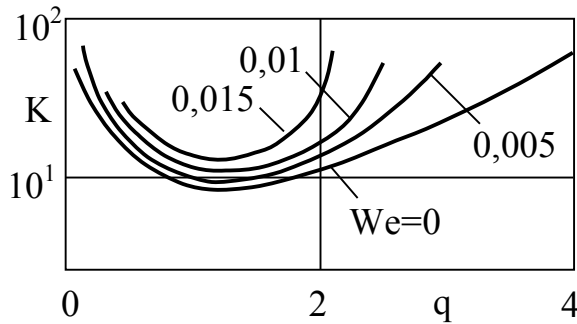


Рис. 3.4

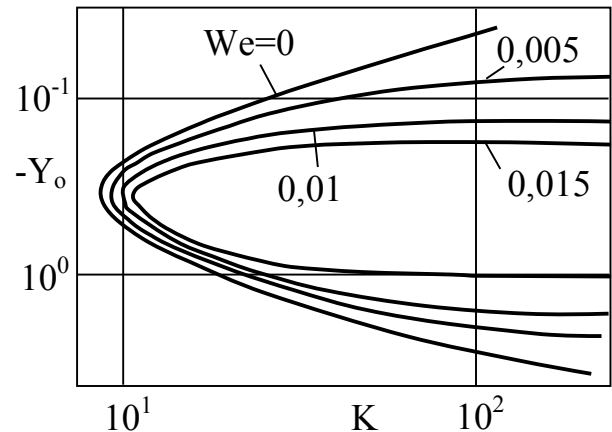


Рис. 3.5

На рис. 3.5 представлена зависимость провисаний от кратности вытяжки ковариантной модели при $R=10$. С увеличением упругих свойств We докритическое провисание увеличивается, а закритическое уменьшается. Кроме того, усиливается эффект автомодельности (независимости) провисаний от кратности [264], [265].

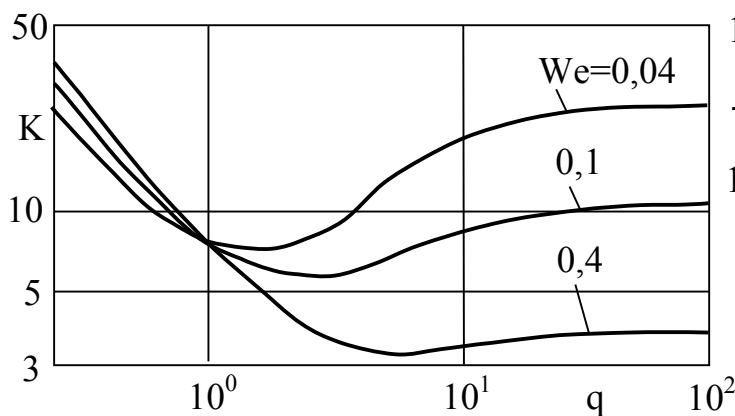


Рис. 3.6

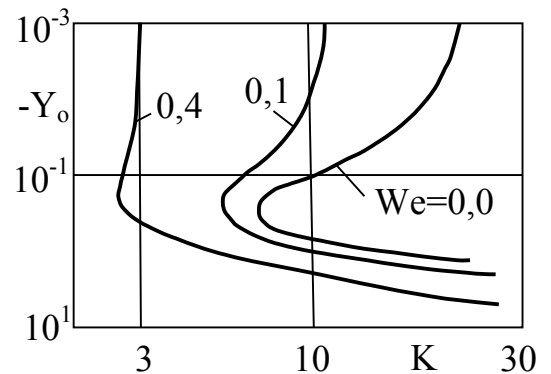


Рис. 3.7

На рис. 3.6 представлена зависимость кратности вытяжки от тянущего усилия и We для контрвариантной модели. Для этой модели характерен резонанс напряжений, поэтому при подходе к предельным кратностям по правым ветвям кривых, тянущее усилие резко возрастает. Из табл. 3.1 для предельной кратности имеем $K_* = 1 + 1/We$. С увеличением We значение предельной кратности уменьшается, минимум на кривой $K(q)$ сглаживается,

область проявления эффекта бифуркации (от K_m до K_*) сужается, и в предельном случае $We \rightarrow \infty$, $K_m = K_*$, исчезает. Поэтому для чисто упругой жидкости ($We \rightarrow \infty$) эффект бифуркации (двойственности) невозможен. На рис. 3.7 для этой же модели представлена зависимость провисаний от K и We для $R=10$. При больших значениях We достаточно незначительного изменения кратности для перехода от критического провисания к течению без провисания [266], [267]. Поэтому в условиях эксперимента устойчивое течение с промежуточными провисаниями, по-видимому, трудно получить, поскольку струя либо вытягивается, оставаясь горизонтальной, либо обрывается.

3.1.2. Неизотермическое течение аномально вязкой жидкости

Для материальной функции примем полуэмпирическое выражение [29]

$$\eta = \eta_0 \left(\frac{I_2}{2} \right)^{\frac{n-1}{2}} Z(T), \quad Z = \exp \left[\frac{E}{R_2} \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} \right) \right].$$

где E – энергия активации, R_2 – универсальная газовая постоянная.

При этом для осевого напряжения имеем

$$\sigma_{11} = \eta_0 Z (\sqrt{3})^{n+1} \left(\frac{dv}{ds} \right)^n.$$

Уравнение теплового баланса для элемента круглой струи при ньютоновском законе теплообмена на поверхности [268], [269]

$$\rho C_v Q dT = -2\alpha \sqrt{\frac{\pi Q}{v}} (T - T_c) ds.$$

Используя уравнения (3.3), (3.4), получим в безразмерной форме определяющие уравнения:

$$Y' = \text{sh} \xi, \quad \xi' = \frac{R}{qV}, \quad V' = R \text{ch}^{\frac{n+1}{n}} \xi \left(\frac{qV}{RZ} \right)^{\frac{1}{n}}, \quad \theta' = -\text{St} \frac{\text{ch} \xi}{\sqrt{V}} \theta, \quad (3.13)$$

$$\text{где } R = \frac{1}{\sqrt{3}v_0} \left(\frac{\rho g \ell}{3\eta_0} \right)^{\frac{1}{n}}, \quad q = \frac{H}{\sqrt{3}Qg\rho} \left(\frac{\rho g \ell}{\sqrt{3}\eta_0} \right)^{\frac{1}{n}}, \quad \text{St} = \frac{2\alpha \ell}{\rho C_v} \sqrt{\frac{\pi}{Qv_0}}, \quad \theta = \frac{T - T_c}{T_0 - T_c}.$$

Считаем температуру однородной по сечению струи. Начальная температура жидкости T_0 , а окружающей среды T_c . Объемные источники тепла отсутствуют. Условия (3.12) необходимо дополнить начальным значением температуры: $X = 0$, $\theta = 1$.

Игнорируя эффекты аномалии вязкости, рассмотрим в качестве модельной среды расплав полипропилена [19, 167], для которого $E = 46$ кДж/моль; $R_2 = 8,317$ Дж/(К·моль); $T_0 = 513$ К; $T_c = 293$ К;

$\alpha = 20 \text{ Вт}/(\text{м}^2\text{К}); \quad \rho = 10^3 \text{ кг}/\text{м}^3; \quad C_v = 2,3 \cdot 10^3 \text{ Дж}/(\text{кгК}); \quad \ell = 0,1 \text{ м};$
 $v_0 = 5 \cdot 10^{-2} \text{ м}/\text{с}; \quad Q \sim 6 \cdot 10^{-7} \text{ м}^3/\text{с}.$

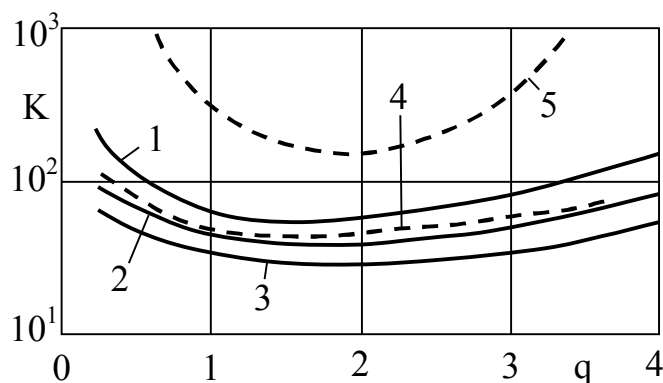


Рис. 3.8

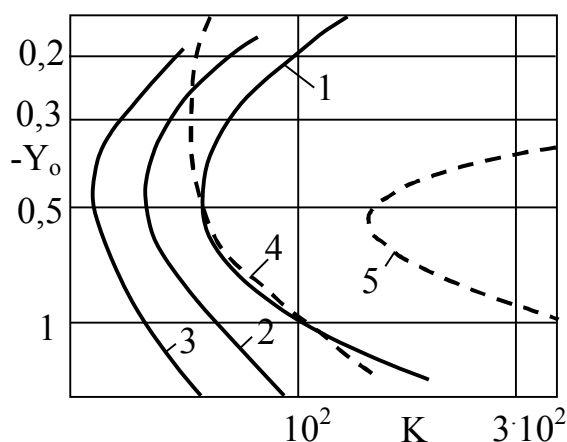


Рис. 3.9

Результаты численного анализа модели (3.13) представлены на рис. 3.8 и рис. 3.9. На обоих рисунках кривой 1 отвечает $St=0$ и $n=1$; 2 – 0,12,1; 3 – 0,24,1; 4 – 0,2; 5 – 0,2/3. Расчеты выполнены для $R = 50$ и $St = 0 \div 0,24$. С увеличением интенсивности охлаждения критическая кратность снижается. Имеет место бифуркация течения, причем с интенсификацией теплообмена (увеличение St) бифуркационный размах провисаний увеличивается. Расчеты также показывают, что в закритическом течении градиент осевой скорости в месте отбора снижается (ввиду застывания струи), а в начале зоны течения - возрастает.

Кроме того, на рисунках иллюстрируется влияние неньютоновости в изотермических условиях (кривые 4, 5). Для дилатантных жидкостей (кривые 4) характерно снижение критической кратности. В докритической фазе незначительное изменение кратности приводят к существенному изменению натяжения. Псевдопластические свойства (кривые 5) повышают критическую кратность, и при существенном изменении кратности величина натяжения изменяется незначительно.

3.1.3. Влияние капиллярных сил

Капиллярные силы, действуя на свободную поверхность струи, изменяют изотропное давление, а, следовательно, и компоненты напряжения. Воспользуемся положениями реодинамики элонгационного течения (гл. 2.1). Для компонент напряжения в поперечном направлении имеем

$$\sigma_{33} = \sigma_{22} = -\frac{\sigma}{r\sqrt{1+a'^2}} + \frac{\sigma a''}{(1+a'^2)^{3/2}}.$$

Учитывается кривизна, как в продольном направлении, так и в поперечном. При этом для изотропного давления P имеем

$$-P = \frac{1}{3} \left[\sigma_{11} - \frac{2\sigma}{r\sqrt{1+a'^2}} + \frac{2\sigma a''}{(1+a'^2)^{3/2}} \right],$$

где a - текущий радиус поверхности струи, $a' = \partial a / \partial s$, σ - коэффициент поверхностного натяжения.

Используя уравнение для компонент напряжения, получим следующее соотношение для растягивающего напряжения

$$\sigma_{11} = \frac{3}{2} \tau_{11} - \sigma \left[\frac{1}{a\sqrt{1+a'^2}} - \frac{a''}{(1+a'^2)^{3/2}} \right].$$

В случае ньютоновской жидкости $\tau_{11} = 2\eta \partial v / \partial s$. Для растягивающего напряжения также можно получить выражение в форме

$$\sigma_{11} = \tau_{11} - \tau_{22} - \frac{\sigma}{a\sqrt{1+a'^2}} + \frac{\sigma a''}{(1+a'^2)^{3/2}}.$$

Проанализируем влияние капиллярных сил на течение свободной струи ньютоновской жидкости в изотермических условиях. Величинами a'^2 , a'' пренебрегаем в силу условия $\sqrt{F} \ll \ell$. Уравнения (3.1), (3.2) имеют вид

$$\begin{aligned} & -\frac{Q\rho g}{v\cos\varphi} - 2\pi\frac{\sigma}{v}\sqrt{\frac{Q}{\pi v}}\frac{dv}{dx}\sin\varphi + \frac{d}{dx}\left(3\eta\frac{Q}{v}\frac{dv}{ds}\sin\varphi\right) - \frac{d}{dx}\left(\frac{\sigma Q}{av}\sin\varphi\right) = 0, \\ & -\frac{2\pi\sigma}{v}\sqrt{\frac{Q}{\pi v}}\frac{dv}{dx}\cos\varphi + \frac{d}{dx}\left(3\eta\frac{Q}{v}\frac{dv}{ds}\cos\varphi\right) - \frac{d}{dx}\left(\frac{\sigma Q}{av}\cos\varphi\right) = 0. \end{aligned}$$

Учитывая $\sec\varphi = \sqrt{1+y'^2}$, $\sin\varphi = y' / \sqrt{1+y'^2}$, $\cos\varphi = 1 / \sqrt{1+y'^2}$, $a = \sqrt{Q/(\pi v)}$, и переходя к безразмерным переменным (3.11), получим

$$\begin{aligned} Y' &= \text{sh}\xi, & \xi' &= \frac{2R\text{ch}\xi}{\sqrt{V}(2q\sqrt{V}\text{ch}\xi - W)}, \\ q' &= \frac{3qW \cdot \text{ch}\xi}{4\sqrt{V}} - \frac{WR \cdot \text{th}\xi}{V(2\sqrt{V}q \cdot \text{ch}\xi - W)}, & V' &= q \cdot V \cdot \text{ch}^2\xi, \end{aligned}$$

где $W = \frac{2\sigma\ell}{3\eta}\sqrt{\frac{\pi}{Qv_0}}$ - число Вебера, $R = \frac{\rho g\ell^2}{3\eta v_0}$. Граничные условия (3.13),

необходимо дополнить условиями для тянущего усилия на концах струи $q(X=0)=q_0$, $q(X=1)=q_1$.

Тянущее усилие q изменяется вдоль струи. При этом если q_0 задается, то q_1 является определяемым параметром и характеризует усилие отбора. По механизму действия капиллярные силы, входящие в σ_{11} и в (3.1), антагонистичны, поскольку первые сжимают струю, вызывая одноосное

течение, а вторые – препятствуют удлинению струи (увеличению её поверхности).

Численный анализ последней системы уравнений выполнен методом Рунге – Кутты. Параметр q_0 находился в пределах $0,064 \div 3$. Результаты для $R=10$, представлены на рис. 3.10. Из рисунка видно, что с увеличением числа Вебера критическая кратность возрастает. С уменьшением тянущего усилия усиливается проявление капиллярных сил. Вычислительный процесс становится неустойчивым, поскольку незначительному изменению параметров K , q отвечает существенное изменение осевой скорости и провисаний. Кроме того, при некотором соотношении параметров система расчетных уравнений генерировала странный аттрактор (излом и пунктир на конце кривых 2).

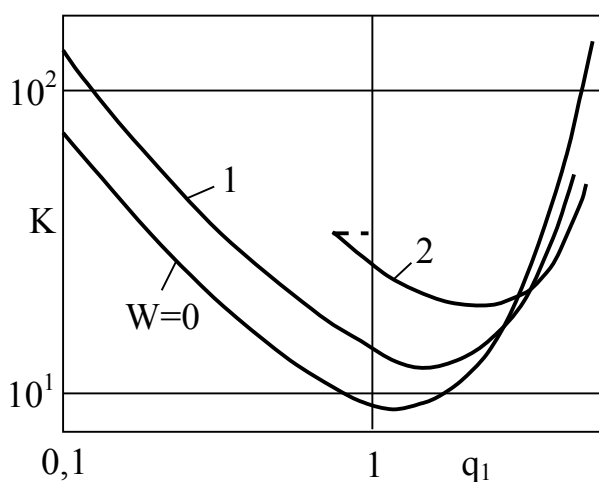


Рис. 3.10

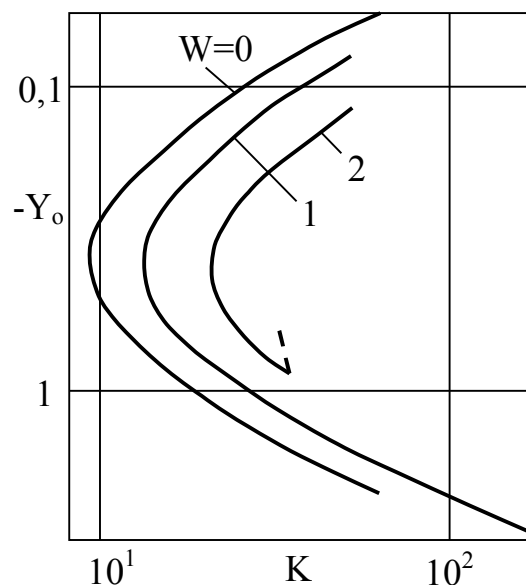


Рис. 3.11

Явление бифуркации сохраняется, но с увеличением числа Вебера область устойчивого течения сужается. На рис. 3.11 представлена зависимость провисаний от кратности вытяжки для $R=10$. В докритической фазе течения капиллярные силы способствуют увеличению провисания. В закритическом течении существует предельное провисание и, соответственно, минимальное тянущее усилие, по достижении которого наступает потеря устойчивости, сопровождаемая обрывом струи. Чем больше число Вебера, тем меньше закритическое провисание. Капиллярные силы сужают область существования стационарного элонгационного течения.

3.2. Исследование устойчивости

Рассматривается влияние различных источников возмущения на устойчивость течения свободной ньютоновской струи в изотермических условиях. В частности, изучена устойчивость течения при больших провисаниях. Отметим, что экспериментальное исследование

устойчивости достаточно трудоемко. Этим объясняется подробность рассмотрения всех возможных вариантов возмущений струи различных реологических жидкостей, в изотермических и неадиабатических условиях.

Силы инерции, трения окружающей среды и капиллярные эффекты не учитываем. Квазиодномерные уравнения неразрывности и сохранения импульса в нестационарном течении (см. рис. 3.1)

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial(fv)}{\partial s} &= 0, & H \frac{\partial(\operatorname{tg} \varphi)}{\partial s} &= f \rho g, \\ f &= \pi \cdot a^2, & H &= f \sigma_{11} \cos \varphi, & \sigma_{11} &= 3\eta \partial v / \partial s. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Здесь t - время, s - координата центра поперечного сечения, отсчитываемая вдоль оси невозмущенной струи, f - площадь поперечного сечения ($f = \pi a^2$), a - текущий радиус поперечного сечения, v - скорость в направлении s , H - горизонтальная составляющая натяжения, η , ρ - вязкость и плотность жидкости, φ - угол между осями s и x .

Начальные и граничные условия для уравнений (3.14)

$$\begin{aligned} t=0: & \quad a = a_*(x), \quad v = v_*(x), \quad y = y_*(x), \\ t>0, \quad x=0: & \quad v = v_0, \quad y = 0, \quad a = a_0, \\ t>0, \quad x=\ell: & \quad v = Kv_0, \quad y = 0, \end{aligned} \quad (3.15)$$

где a_0 - радиус начального сечения ($Q = \pi a_0^2 v_0$). Здесь и ниже звездочкой обозначены переменные и параметры, соответствующие стационарному течению.

К введенным ранее (3.11) безразмерным параметрам X, Y, V, R добавим

$$q = \frac{H\ell}{3\pi\eta v_0 a_0^2}, \quad r = \frac{a}{a_0}, \quad \tau = \frac{t \cdot v_0}{\ell}. \quad (3.16)$$

В безразмерной форме задача нестационарного течения (3.14), (3.15) имеет вид:

$$\begin{aligned} 2r\sqrt{1+Y'^2} \frac{\partial r}{\partial \tau} + \frac{\partial(r^2 V)}{\partial X} &= 0, \quad V' = \frac{q}{r^2}(1+Y'^2), \quad Y'' = \frac{r^2 R}{q}\sqrt{1+Y'^2}, \\ \tau=0: & \quad r = r_*(X), \quad V = V_*(X), \quad Y = Y_*(X), \\ \tau>0, \quad X=0: & \quad V = 1, \quad Y = 0, \quad r = 1, \\ \tau>0, \quad X=1: & \quad V = K, \quad Y = 0. \end{aligned} \quad (3.17)$$

При переходе от S и φ к x , y использовались геометрические соотношения: $ds/dx = \sqrt{1+y'^2}$, $y' = \operatorname{tg} \varphi$. Здесь и ниже штрих означает производную по параметру оси S , т.е. ($\partial/\partial S$).

Стационарное течение описывается уравнениями

$$\begin{aligned} V_* r_*^2 &= 1, \quad V_*' = q_* V_* (1+Y_*'^2), \quad Y_*'' = R \sqrt{1+Y_*'^2} / (V_* q_*), \\ X=0: & \quad V_* = 1, \quad Y_* = 0; \quad X=1: \quad V_* = K, \quad Y_* = 0. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Тянущее усилие в стационарном течении H_* , соответственно $q_* = q(H_*)$. Введение новой переменной ξ_* , определяемой как $Y_*' = \operatorname{sh} \xi_*$,

снимает иррациональность, а уравнения (3.18) приводятся к нормальной форме, удобной для решения методом Рунге-Кутты

$$\begin{aligned} V'_* &= q_* V_* \operatorname{ch}^2 \xi_*, & \xi'_* &= R / (V_* q_*), & Y'_* &= \operatorname{sh} \xi_*, & V_* \cdot r_*^2 &= 1, \\ X=0: V_* &= 1, & Y_* &= 0, & \xi_* &= \xi_{*0}; & X=1: V_* &= K, & Y_* &= 0. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Задача нестационарного течения решалась численно. Вначале находилось стационарное решение при независимых от времени граничных условиях (3.19). Нестационарное решение представлялось в виде [270]

$$\begin{aligned} r &= r_*(X) [1 + \alpha(X, \tau)], & V &= V_*(X) [1 + \beta(X, \tau)], \\ Y &= Y_*(X) + \gamma(X, \tau). \end{aligned} \quad (3.20)$$

При получении уравнений для отклонений введем новую переменную $\zeta(X, \tau)$, определяемую уравнением

$$Y' = Y'_* + \gamma' = \operatorname{sh} \zeta. \quad (3.21)$$

Из уравнения (3.21) имеем

$$\gamma' = \operatorname{sh} \zeta - Y'_*, \quad \gamma'' = \operatorname{ch} \zeta \zeta' - Y''_*. \quad (3.22)$$

В (3.17) уравнение для Y'' запишем так $Y''_* + \gamma'' = R r_*^2 (1 + \alpha)^2 q_*^{-1} \operatorname{ch} \zeta$. Подставив в него γ'' из (3.22), и учитывая $r_*^2 V_* = 1$, получим

$$\zeta' = R (1 + \alpha)^2 V_*^{-1} q_*^{-1}. \quad (3.23)$$

Из (3.21), с учетом введенного в (3.19) соотношения для ξ_* ($Y'_* = \operatorname{sh} \xi_*$), получим уравнение для вертикальных отклонений

$$\gamma' = \operatorname{sh} \zeta - \operatorname{sh} \xi_*. \quad (3.24)$$

Рассматривая совместно (3.20), (3.21) и уравнение для V' в (3.17), имеем

$$V'_* (1 + \beta) + V_* \beta' = q V_* (1 + \alpha)^{-2} \operatorname{ch}^2 \zeta.$$

Подставив в это уравнение V'_* из (3.18), получим для отклонений скорости

$$\beta' = q (1 + \alpha)^{-2} \operatorname{ch}^2 \zeta - (1 + \beta) q_* \operatorname{ch}^2 \xi_*. \quad (3.25)$$

Уравнение неразрывности в (3.17) с учетом (3.20), (3.21)

$$2 r_* (1 + \alpha) \operatorname{ch} \zeta \frac{\partial [r_* (1 + \alpha)]}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial X} [r_*^2 (1 + \alpha)^2 V_* (1 + \beta)] = 0.$$

Учитывая, что первый сомножитель не равен нулю и выполнив дифференцирование во втором слагаемом, получим

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \tau} + \frac{(1 + \beta) V_*}{\operatorname{ch} \zeta} \frac{\partial \alpha}{\partial X} = - \frac{V_* (1 + \alpha)}{2 \operatorname{ch} \zeta} \frac{\partial \beta}{\partial X}. \quad (3.26)$$

Подставив в (3.26) β' из (3.25) и учитывая (3.23), (3.24), (3.25), запишем уравнения для отклонений

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \tau} + F_1 \frac{\partial \alpha}{\partial X} = F_2, \quad \beta' = F_3, \quad \gamma' = \operatorname{sh} \zeta - \operatorname{sh} \xi_*, \quad \zeta' = \frac{R (1 + \alpha)^2}{q V_*}, \quad (3.27)$$

$$F_1 = \frac{V_*(1+\beta)}{\text{ch}\zeta}, \quad F_2 = -\frac{V_*(1+\alpha)}{2\text{ch}\zeta} F_3, \quad F_3 = \frac{q\text{ch}^2\zeta}{(1+\alpha)^2} - (1+\beta)q_*\text{ch}^2\zeta_*.$$

Линеаризация в (3.27) не проводилась.

Исследовались динамические режимы течения при ступенчатом и гармоническом возмущении начального радиуса и скорости. Условия для отклонений в общем случае имеют вид

$$\begin{aligned} \tau = 0: \alpha = \beta = \gamma = 0, \quad \zeta = \zeta_*; \quad \tau > 0, \quad X = 0: \alpha = \alpha_0 \sin \omega \tau, \\ \beta = \beta_0 \sin \omega \tau, \quad \gamma = 0, \quad \zeta = \zeta_0; \quad \tau > 0, \quad X = 1: \beta = \gamma = 0. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Здесь ω безразмерная частота. В нестационарных условиях q , ζ_0 и ζ являются функциями времени.

3.2.1. Дискретизация уравнений

В пределах каждого “временного слоя” уравнения для β , γ , ζ решались методом Рунге-Кутты четвертого порядка. Имеем задачу Коши для системы трех уравнений первого порядка. Метод обеспечивал высокую точность и устойчивость вычислений в сравнении с методами прогноза-коррекции Адамса и Милна. При этом параметры q и ζ_0 подбирались так чтобы выполнялись условия отбора. Условия $\beta(X=1, q, \zeta_0) = 0$, $\gamma(X=1, q, \zeta_0) = 0$ рассматривались как система трансцендентных уравнений, корни которой находились по алгоритму секущих-хорд [157]. Согласно методу Рунге-Кутты необходимо знать значения V_* и ξ_* на половинном шаге, поэтому для стационарных уравнений использовался шаг в два раза меньший, чем нестационарных.

Рассмотрены два метода дискретизации уравнения конвективного переноса массы (уравнение для α в (3.27)). Первоначально использовался сравнительно простой метод решения. В расчетной области $0 \leq X \leq 1$, $0 \leq \tau < \infty$ была введена разностная сетка $X_i = i \cdot \Delta X$, $\tau_j = j \cdot \Delta \tau$, $i = 0, 1, \dots, I$, $j = 0, 1, \dots, J$. При дискретизации уравнения для α использовались конечноразностные выражения “неявный левый уголок” и “явный левый уголок” [271], соответственно

$$\begin{aligned} \alpha_{i+1,j+1} &= (\Delta \tau F_2 + \alpha_{i+1,j} + \kappa \alpha_{i,j+1})(1 + \kappa)^{-1}, & \kappa > 1, \\ \alpha_{i+1,j+1} &= \alpha_{i+1,j} + \Delta \tau F_2 + \kappa(\alpha_{i,j} - \alpha_{i+1,j}), & \kappa < 1, \end{aligned} \quad (3.29)$$

где $\kappa = \Delta \tau \cdot F_1 / \Delta X$ - число Куранта. По длине зоны течения число Куранта изменяется и может принимать значения как меньше единицы, так и больше. В первом случае использовалась двухточечная прогонка. Точность аппроксимации (3.29), характеризуется остаточным членом $O(\Delta \tau, \Delta X)$. При решении задачи (3.18), (3.19) использовался шаг $\Delta X = 0,05$, а задачи (3.27), (3.28) - $\Delta X = 0,1$. Шаг по времени $\Delta \tau = 0,01$. При этом значения α в промежуточных точках, необходимые для решения уравнений для β , γ , ζ

методом Рунге-Кутты, находились методом 6^й точечной интерполяции по Лагранжу. Схема показала хорошую устойчивость, но низкую точность, особенно при начальных возмущениях скорости (нарушалось уравнение неразрывности в конце зоны течения). Точность расчета q и ζ_0 составляла $\pm 10^{-6}$. Именно их вычисление занимало основное машинное время.

Для повышения точности вычислений использовался следующий метод. Применив к уравнению для α , в (3.27) метод конечных элементов Галеркина с нелинейной интерполяцией по пространству, получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений [272]

$$M_X [d\alpha/d\tau]_i + F_1(X) L_X \alpha_i = F_2(X),$$

где $L_X \alpha_i = (\alpha_{i+1} - \alpha_{i-1}) / (2\Delta X)$, $M_X \{1/6, 2/3, 1/6\}$. Введение разностного представления $d\alpha/d\tau$ по Кранку-Николсону приводит к схеме

$$M_X \frac{\alpha_{i,j+1} - \alpha_{i,j}}{\Delta\tau} + F_1 L_X [0,5(\alpha_{i,j} + \alpha_{i,j+1})] = F_2. \quad (3.30)$$

Массовый оператор можно представить в виде $M_X \equiv \{\delta, 1-2\delta, \delta\}$, где значение $\delta=1/6$ дает конечно-элементную форму, а значение $\delta=0$ - конечноразностную форму. После подстановки (3.31) в (3.30) получим трехдиагональный алгоритм

$$\begin{aligned} (\delta - 0,25c_i) \alpha_{i-1,j+1} + (1-2\delta) \alpha_{i,j+1} + (\delta + 0,25c_i) \alpha_{i+1,j+1} &= \phi_{i,j}, \\ \phi_{i,j} &= F_{2i} \Delta\tau + (\delta + 0,25c_i) \alpha_{i-1,j} + (1-2\delta) \alpha_{i,j} + (\delta - 0,25c_i) \alpha_{i+1,j}, \\ (i &= 1, 2, \dots, n-1; j = 0, 1, 2, \dots), \end{aligned} \quad (3.32)$$

где $c_i = F_{1i} \Delta\tau / \Delta X$, $\Delta X = 1/n$ - шаг по X , $\Delta\tau$ - шаг по τ .

Граничные условия:

$$\alpha_{0,j+1} = \alpha_0(\tau_{j+1}), \quad \alpha_{n,j+1} = \alpha_n(\tau_{j+1}). \quad (3.33)$$

При $\delta=0$ погрешность схемы $O(\Delta\tau^2, \Delta X^2)$, а при $\delta=1/6$, соответственно $O(\Delta\tau^2, \Delta X^4)$. Точность повышается при $c_i < 1$.

Алгоритм Томаса (трехдиагональной прогонки) правомерен для задачи Дирихле, когда заданы граничные условия на обоих концах интервала. В рассматриваемой задаче (дифференциальное уравнение первого порядка) имеется только начальное значение для функции $\alpha(X=0)$, а условие на конце ($X=1$) отсутствует. Поэтому конечное значение функции найдем, используя уравнение переноса. Используем формулу Милна для производной на конце интервала [274]. Предполагаем, что неявная схема обладает большей устойчивостью и точностью. В этом случае

$$\left. \frac{\partial \alpha}{\partial X} \right|_{X=1} = \frac{3\alpha_{n,j+1} - 4\alpha_{n-1,j+1} + \alpha_{n-2,j+1}}{2\Delta X}.$$

Производную по времени в конечной точке аппроксимируем

$$\left. \frac{\partial \alpha}{\partial \tau} \right|_{X=1} = \frac{\alpha_{n,j+1} - \alpha_{n,j}}{\Delta\tau}.$$

Тогда уравнение переноса в конечной точке (см. (3.21))

$$\alpha_{n,j+1} \left(1 + F_1 \frac{3\Delta\tau}{2\Delta X} \right) = \Delta\tau F_2 + \alpha_{n,j} - F_1 \frac{\Delta\tau}{2\Delta X} (\alpha_{n-2,j+1} - 4\alpha_{n-1,j+1}).$$

Из этого соотношения находим значение функции в конечной точке

$$\alpha_{n,j+1} = \frac{\Delta\tau F_2 (X=1) + \alpha_{n,j} + 0,5C(X=1)(4\alpha_{n-1,j+1} - \alpha_{n-2,j+1})}{1 + 1,5C(X=1)}. \quad (3.34)$$

где $C(X=1) = C_n = F_1(X=1)\Delta\tau/\Delta X$, $F_1(X=1) = F_1(n)$, $F_2(X=1) = F_2(n)$.

Составим алгоритм Томаса по методике [274]. Пусть

$$\alpha_{i,j+1} = a_{i,j+1} (b_{i,j+1} - \lambda_i \alpha_{i+1,j+1}), \quad (3.35)$$

и, следовательно

$$\alpha_{i-1,j+1} = a_{i-1,j+1} (b_{i-1,j+1} - \lambda \alpha_{i-1,j+1}), \quad (3.36)$$

где $\lambda_i = \delta + C_i/4$. Подставляя выражение (3.36) в формулу (3.32), будем иметь

$$\alpha_{i,j+1} = \frac{-(\delta - 0,25C_i) a_{i-1,j+1} b_{i-1,j+1} + \varphi_{i,j} - \lambda_i \alpha_{i+1,j+1}}{1 - 2\delta - \lambda_{i-1} (\delta - 0,25C_i) a_{i-1,j+1}}.$$

Сравнивая это выражение с формулой (3.35), получим

$$a_{i,j+1} = [1 - 2\delta - \lambda_{i-1} (\delta - 0,25C_i) a_{i-1,j+1}]^{-1}, \quad (3.37)$$

$$b_{i,j+1} = -(\delta - 0,25C_i) a_{i-1,j+1} b_{i-1,j+1} + \varphi_{i,j}, \quad (i = 2, 3, \dots, n).$$

При $i = 1$ из формул (3.33), (3.32), (3.35) имеем

$$(\delta - 0,25C_1) \alpha_{0,j+1} + (1 - 2\delta) \alpha_{1,j+1} + \lambda_1 \alpha_{2,j+1} = \varphi_{1,j} \quad \alpha_{1,j+1} = a_{1,j+1} (b_{1,j+1} - \lambda_1 \alpha_{2,j+1}). \quad (3.38)$$

Отсюда, используя граничные условия, получаем

$$\alpha_{1,j+1} = \frac{\varphi_{1,j} - (\delta - 0,25C_1) \alpha_{0,j+1} - \lambda_1 \alpha_{2,j+1}}{1 - 2\delta}. \quad (3.39)$$

Так как формулы (3.38) и (3.39) должны быть тождественны, то, сравнивая их, выводим

$$a_{1,j+1} = (1 - 2\delta)^{-1}, \quad b_{1,j+1} = \varphi_{1,j} - (\delta - 0,25C_1) \alpha_{0,j+1}. \quad (3.40)$$

Пользуясь формулами (3.37), (3.40), проводя “прогонку” в прямом направлении (прямой ход), определяем две последовательности чисел: $a_{1,j+1}, a_{2,j+1}, \dots, a_{n-1,j+1}$ и $b_{1,j+1}, b_{2,j+1}, \dots, b_{n-1,j+1}$. Для выполнения обратного хода используем следующий прием. Согласно (3.35) для входящих в (3.34) $\alpha_{n-1,j+1}$ и $\alpha_{n-2,j+1}$ имеем

$$\alpha_{n-1,j+1} = a_{n-1,j+1} (b_{n-1,j+1} - \lambda_{i-1} \alpha_{n,j+1}), \quad (3.41)$$

$$\alpha_{n-2,j+1} = a_{n-2,j+1} (b_{n-2,j+1} - \lambda_{i-2} \alpha_{n-1,j+1}). \quad (3.42)$$

Подставив (3.41) в (3.42), получим

$$\alpha_{n-2,j+1} = a_{n-2,j+1} [b_{n-2,j+1} - \lambda_{i-2} (b_{n-1,j+1} - \lambda_{i-1} \alpha_{n,j+1}) a_{n-1,j+1}]. \quad (3.43)$$

Подставим (3.41) и (3.43) в (3.34) и, разрешив относительно $\alpha_{n,j+1}$, получим

$$\alpha_{n,j+1} = \frac{\Delta t F_{2n} + \alpha_{n,j} + 0,5 C_n \left[4a_{n-1,j+1} b_{n-1,j+1} - a_{n-2,j+1} (b_{n-2,j+1} - \lambda_{n-2} a_{n-1,j+1} b_{n-1,j+1}) \right]}{1 + C_n \left[1,5 + \lambda_{n-1} a_{n-1,j+1} (2 + 0,5 \lambda_{n-2} a_{n-2,j+1}) \right]}. \quad (3.44)$$

Используя (3.44), и применяя формулы (3.35), с помощью “обратного хода” находим значения α на очередном “временном слое”

$$\begin{aligned} \alpha_{n-1,j+1} &= a_{n-1,j+1} (b_{n-1,j+1} - \lambda_{n-1} \alpha_{n,j+1}), \\ \alpha_{n-2,j+1} &= a_{n-2,j+1} (b_{n-2,j+1} - \lambda_{n-2} \alpha_{n-1,j+1}), \\ &\dots \dots \dots \\ \alpha_{1,j+1} &= a_{1,j+1} (b_{1,j+1} - \lambda_1 \alpha_{2,j+1}). \end{aligned}$$

Представленная расчетная схема обеспечивает достаточную точность, высокую устойчивость, но в некоторых случаях на 30-50 шагах по времени схема генерирует высокочастотные гармонические осцилляции, искажающие картину течения. Это характерное свойство высокоточных расчетных алгоритмов. Для снятия осцилляций применялось сглаживание на каждом шаге по времени. Сглаживание осуществлялось с помощью формулы $\bar{\alpha}_{i,j+1} = (1 - 2\varepsilon) \alpha_{i,j+1} + \varepsilon \alpha_{i-1,j+1} + \varepsilon \alpha_{i+1,j+1}$. Коэффициент сглаживания был принят $\varepsilon = 0,05$. Значения радиуса в промежуточных точках находились с помощью сплайнов.

3.2.2. Результаты численного решения

Рассмотрены динамические режимы для стационарных течений с близкой кратностью вытяжки и идентичным гравитационным параметром: докритическое $R = 5$, $q_* = 1,5$, $\xi_*(X=0) = -0,928$, $Y_*(X=0,5) = -0,181$, $K = 5,98$, закритическое $R = 5$, $q_* = 0,5$, $K = 5,76$, $\xi_*(X=0) = -2,252$, $Y_*(X=0,5) = -0,628$. Идентичное по гравитационному параметру ($R = 5$) критическое течение имело характеристики: $q_* = 0,922$, $\xi_*(X=0) = -1,49$, $Y_*(X=0,5) = -0,341$, $K = 4,74$.

В табл. 3.2 приведены характерные соотношения для различных режимов течения растяжения в условиях провисания. Как видно из таблицы, закритический режим течения струи также можно назвать парадоксальным. Например, с увеличением гравитационного параметра R (ускорения свободного падения) или уменьшения скорости отбора (кратности K) провисание уменьшается.

На рис. 3.12 представлены перемещения средней части струи $Y_m = Y_{m*}(1 + \gamma_m)$, $\gamma_m = \gamma(X=0,5)$ при ступенчатых возмущениях начального радиуса $\alpha = \alpha_0$, $\beta = \beta_0 = 0$ (а) и начальной скорости $\alpha_0 = 0$, $\beta_0 \neq 0$ (б). Звездочками помечены точки потери устойчивости вычислительной схемы.

Таблица 3.2

Режимы течения изогнутой струи

Режим течения	Зависимости			
	Провисание	Кратность от натяжения	Провисание от кратности	Провисание от R
Докритический	$-Y_m \leq 0,4$	$\partial K / \partial q > 0$	$\partial Y_m / \partial K < 0$	$\partial Y_m / \partial R > 0$
Критический	$-Y_m \cong 0,4$	$\partial K / \partial q = 0$	$\partial Y_m / \partial K = 0$	$\partial Y_m / \partial R = 0$
Закритический	$-Y_m \geq 0,4$	$\partial K / \partial q < 0$	$\partial Y_m / \partial K > 0$	$\partial Y_m / \partial R < 0$

В докритическом режиме течения при возмущениях начального радиуса в струе протекают следующие динамические процессы. По окончании переходного процесса отклонения струи нулевые. Это обусловлено идентичностью растягивающих напряжений в моменты $\tau = -0$ и $\tau = \infty$: увеличение (уменьшение) сечения струи одновременно увеличивает (уменьшает) её вес и тянущее усилие. Параметр q в переходном процессе изменяется колебательно с быстрым затуханием и для него характерно соотношение $\lim_{\tau \rightarrow \infty} q = q_*(1 + \alpha_0)^2$, которое, с учетом $\tau \rightarrow \infty$, $\alpha = \alpha_0$, $\gamma = \beta = 0$, $\partial \alpha / \partial \tau \sim \partial \alpha / \partial X \sim 0$, $\xi_* = \zeta$, непосредственно следует из уравнения для α . Устойчивость теряется в пределах первого периода колебаний, в момент, когда струя перемещается вниз. При $\alpha_0 > 0$ это имеет место в первый полупериод.

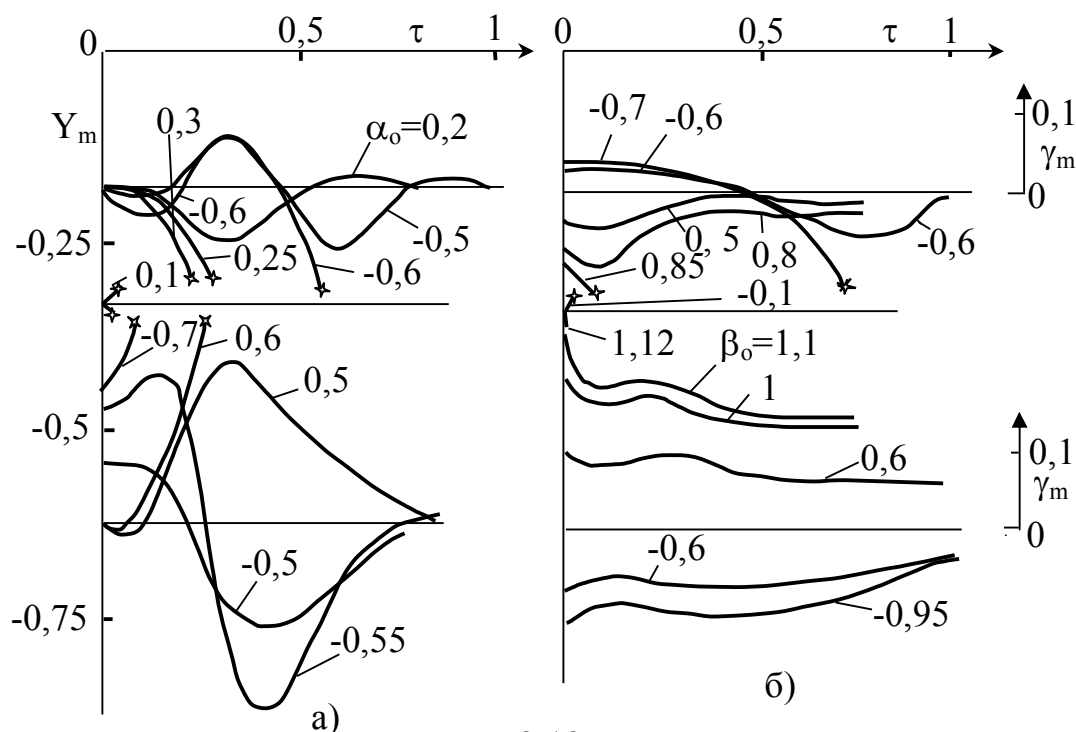


Рис. 3.12

На рис. 3.13 иллюстрируется изменение параметров α и β вдоль зоны течения при потере устойчивости для возмущения $\alpha_0 = 0,3$. В продольном направлении распространяется волна утолщения. Вес струи увеличивается, что приводит к ее сужению в точке отбора и перемещению струи вниз. Из

эпюры β видно, что струя разбухает почти по всей длине ($\beta < 0$). Градиент скорости в точке отбора увеличивается. В момент, непосредственно предшествующий разрушению, в начале зоны течения ($X \sim 0,1$) нарастают растягивающие деформации, которые и обуславливают перемещение струи вниз с последующим обрывом.

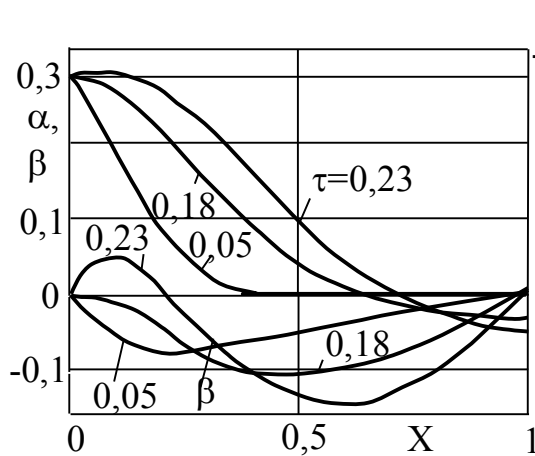


Рис. 3.13

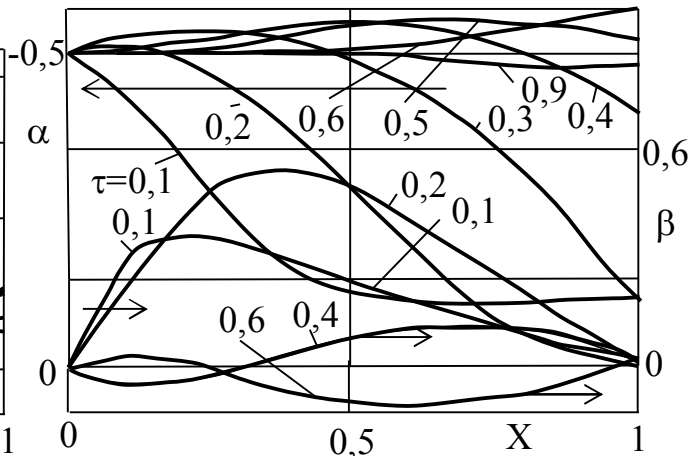


Рис. 3.14

На рис. 3.14 представлены продольные распределения α , β при отрицательном возмущении начального радиуса $\alpha_0 = -0,5$. Разрушения не происходит, но при $\alpha_0 = -0,6$ устойчивость теряется в момент $\tau = 0,57$. По струе распространяется волна сужения. В момент $\tau = 0,2$ струя в точке отбора утолщена. Конфигурация струи изменяется. Разрушение наиболее вероятно в момент $\tau = 0,6$, поскольку при этом струя значительно утоняется в точке отбора. Нарастают растягивающие деформации ($\beta > 0$) в окрестности начального сечения.

При возмущениях начального радиуса в закритическом течении отклонения струи от положения статического равновесия значительно больше, чем в докритическом течении (рис. 3.12,а). Переходные процессы более продолжительны, что обусловлено большей протяженностью струи. При потере устойчивости струя перемещается вверх, и разрушается в непосредственной близости от критического провисания. Картина переходных процессов качественно зеркальна докритическому течению. Динамические процессы в струе ($\alpha_0 = 0,6$) иллюстрируются на рис. 3.15. Кривые (1-3) построены при $\alpha_0 = 0,6$ для моментов времени $\tau = 0,09$ (1), 0,18 (2), 0,27 (3).

В момент разрушения волна разбухания достигает точки отбора. Почти вся струя испытывает деформацию сжатия (см. эпюра β), а в окрестности точки отбора увеличивается градиент скорости. Струя перемещается вверх (эпюра γ). В точке отбора начинается разрушение струи ввиду минимального сечения и прогрессирующей скорости растяжения. По окончании переходных процессов для нового стационарного состояния

характерны соотношения: $\tau = \infty$, $\alpha = \alpha_0$, $\beta = \gamma = 0$, $\partial\alpha/\partial\tau = 0$, $\partial\alpha/\partial X = 0$, $\zeta = \xi_*$, $q = q_* \cdot (1 + \alpha_0)^2$.

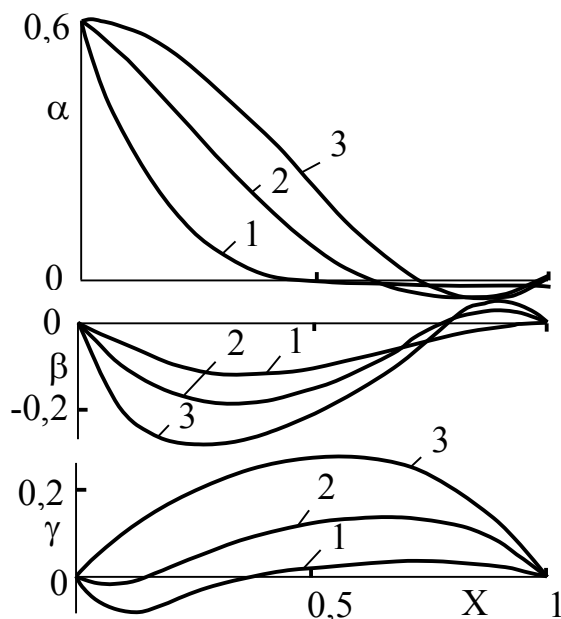


Рис. 3.15.

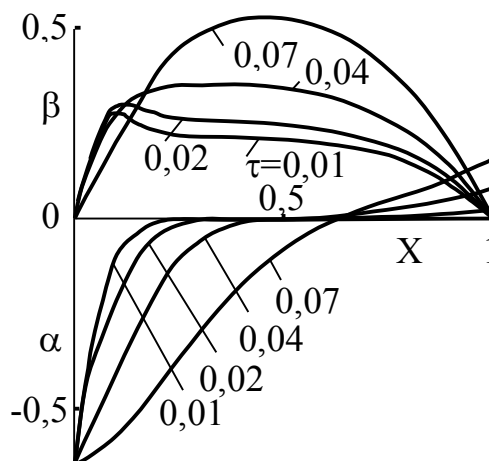


Рис. 3.16

При отрицательных возмущениях радиуса устойчивость теряется также при перемещении струи вверх в область критических провисаний. Динамические процессы в струе, приводящие к разрушению, иллюстрирует рис. 3.16, для случая $\alpha_0 = -0,7$. Потеря устойчивости наступает, когда волна сужения достигает середины струи, где в это время прогрессируют деформации растяжения. В начале процесса в начальном сечении весьма большой градиент скорости растяжения.

Даже малые возмущения радиуса в критическом течении вызывают быструю потерю устойчивости. На рис. 3.12,а показаны случаи возмущений $\alpha_0 = 0,1$ и $\alpha_0 = -0,01$. Потеря устойчивости наступает уже при $\tau = 0,03$. Течение весьма неустойчиво.

На рис. 3.12,б представлены динамические реакции средней части струи на различные по величине ступенчатые возмущения начальной скорости $\beta_0 \neq 0$, $\alpha_0 = 0$. Возмущение начальной скорости эквивалентно возмущению скорости отбора. Особенность поведения системы проявляется в ступенчатом изменении параметров γ_m , q , β , α непосредственно в момент подачи возмущения.

В докритическом течении потеря устойчивости происходит при перемещении струи вниз, и ее приближении к критическим провисаниям. При $\beta_0 > 0$ устойчивость теряется за счет прогрессирующего утолщения средней части струи. Это сопровождается высокой скоростью деформации растяжения в начальном сечении, где и происходит обрыв. Описанная картина иллюстрируется рис. 3.17, для $\beta_0 = +0,85$. На рис. 3.18 представлена

кинетика изменения параметров по длине струи при $\beta_0 = -0,7$. Наиболее интенсивно растягивается область начального сечения. Сечение отбора утоняется, но градиент скорости там мал, поэтому вероятна потеря устойчивости из-за обрыва струи в начальном сечении. По окончании переходного процесса из уравнения неразрывности следует соотношение для конца струи: $1 + \beta_0 = [1 + \alpha(X=1, \tau = \infty)]^2$. При этом распределение возмущения радиуса близко к линейному закону.

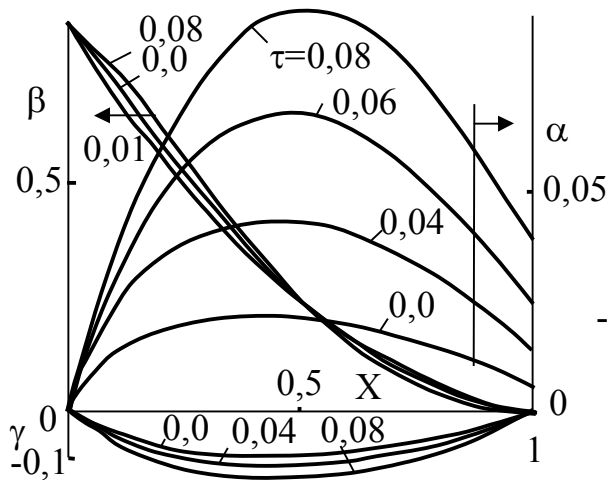


Рис. 3.17

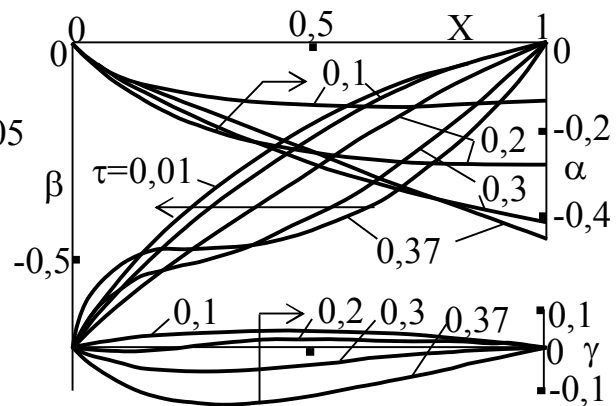


Рис. 3.18

Согласно рис. 3.17 и 3.18 распределение скорости растяжения по длине струи формируется практически мгновенно и мало изменяется в переходном процессе. Остаточные вертикальные отклонения струи незначительны. Струя практически одинаково чувствительна к положительным и отрицательным возмущениям начальной скорости.

Исследование возмущений скорости в закритическом режиме (см. рис. 3.12б) показало высокую устойчивость струи. При $\beta_0 > 0$ струя мгновенно перемещается вверх и колебательно переходит в новое положение статического равновесия, которое находится выше исходного. При подходе к возмущениям $\beta_0 = 1,12$ увеличивается начальный всплеск, который, приближаясь к критической области, приводит к потере устойчивости. Весьма сложна картина динамических процессов в струе. Вначале имеет место утонение средней части струи и утолщение на концах. Далее, в основном, перестройка локализована во второй половине струи. При отрицательных возмущениях скорости потерю устойчивости обнаружить не удалось даже при $\beta_0 = -0,95$.

В критическом режиме малые возмущения скорости приводят к быстрой потере устойчивости. Так при $\beta_0 = \pm 0,01$ расчетная схема теряла устойчивость уже при $\tau \sim 0,02$.

Как следует из рис. 3.12 возмущения α_0 и β_0 не дают существенного остаточного смещения струи. Представляет интерес возможность перевода струи из докритического течения в закритическое в изотермических

условиях. Наиболее реальным способом вертикального смещения струи является изменение параметра R . Возмущение R практически можно реализовать изменением длины зоны течения или ускорения свободного падения (например, в лифте при его ускоренном движении вверх или вниз). Сущность вычислительного эксперимента сводилась к следующему. На стационарное докритическое течение в момент $\tau = 0$ давалось ступенчатое увеличение гравитационного параметра (от $R = 5$ до $R = 6$). Струя плавно перемещалась вниз, и по достижению $\gamma_m = -0,143$ схема теряла устойчивость. При этом q уменьшалось. Росла скорость растяжения $\beta > 0$ в окрестности $X = 0,15$, и прогрессировало продольное сжатие $\beta < 0$ в окрестности $X = 0,75$. В момент $\tau = 0,1$ устойчивость терялась. Попытка вернуть струю в исходное положение, изменив R от 6 до 5, не дала результата. Анализ возмущений радиуса в момент потери устойчивости показал наличие утолщения струи ($\alpha > 0$) на участке $0,2 < X < 0,8$, и сужения ($\alpha < 0$) в окрестности $X = 0,1$ и $X \geq 0,9$.

На следующем этапе моделирования было дано плавное увеличение R по закону $R = 5 + 2\tau$. Потеря устойчивости наступила при $\tau = 0,61$, $R = 6,22$, $\gamma_m = -0,1507$ из-за прогрессирующего утонения струи в окрестности $X = 0,1$. Кроме того, в этой области увеличивалась скорость растяжения. Следовательно, переход докритического течения в закритическое в ньютоновском изотермическом случае маловероятен.

3.2.3. Влияние теплообмена на нестационарные режимы течения

Неизотермические режимы весьма характерны для технологических процессов получения синтетических волокон по методу сухого формования. Часто неизотермические эффекты, сопровождающие течение, даже подавляют эффекты неньютоновости. Исследование этой задачи в рамках гидромеханики струйных течений позволяет установить причины потери устойчивости. Выяснить влияние различных факторов на устойчивость течения, а также изучить отклики волокна на внешние возмущения в условиях устойчивого формования. Охлаждение волокна в процессе вытяжки, ведущее к росту вязкости жидкости и ее отвердеванию перед наматыванием на приемный барабан, существенно меняет динамические свойства струи.

Считаем расплав ньютоновской жидкостью с вязкостью, зависящей от температуры по закону Аррениуса. Вязкие силы являются доминирующими. Теплопроводностью вдоль струи пренебрегаем, считая, что струя расплава охлаждается по механизму конвективного и радиационного теплообмена окружающим воздухом. Характерное время перестройки пограничного слоя в воздухе много меньше характерного времени эволюции возмущений в жидкой струе.

Задаются в качестве граничных условий площадь сечения, скорость и температура в начальном сечении струи (условно на срезе фильеры) и скорость наматывания волокна на приемную бобину. Срез фильеры и точка контакта жидкой струи с поверхностью барабана находятся на одном уровне.

Квазиодномерное уравнение теплового баланса

$$\rho C_v f \left(\frac{\partial T}{\partial t} + v \frac{\partial T}{\partial s} \right) = -2\pi a q_T,$$

где ρC_v - объёмная теплопроводность жидкости, T - температура, q_T - тепловой поток от поверхности струи. Учитываем конвективную и радиационную составляющие теплообмена

$$q_T = \alpha(T - T_c) + \sigma^* \varepsilon \left[\left(\frac{T}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_c}{100} \right)^4 \right],$$

где α - коэффициент теплоотдачи, определяемый из уравнения [83] $Nu = 0,325 \cdot Re^{0,3}$, $Nu = 2\alpha a / \lambda_c$, $Re = 2\pi a v_c / \eta_c$, где $\lambda_c, \rho_c, \eta_c$ - коэффициент теплопроводности, плотность и вязкость окружающей среды (воздуха), $\sigma^* = 5,67 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \text{К}^4)$ - постоянная Стефана – Больцмана, ε - степень черноты.

Нестационарное неизотермическое течение изогнутой струи в квазиодномерном приближении описывается уравнениями

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + \frac{V}{\sqrt{1+Y'^2}} \frac{\partial \theta}{\partial X} = -\frac{0,325 St_0}{r^2} Re_0^{0,3} V^{0,3} r^{0,3} \theta - \frac{St_0}{r} \sigma_R \theta (\theta + 2A) \left[(\theta + A)^2 + A^2 \right],$$

$$\frac{\partial r}{\partial \tau} + \frac{1}{r \sqrt{1+Y'^2}} \cdot \frac{\partial (r^2 V)}{\partial X} = 0, \quad Y'' = \frac{R}{q} r^2 \sqrt{1+Y'^2},$$

$$V' = \frac{q(1+Y'^2)}{r^2} \exp \left[\frac{E^0 (\theta - 1)}{\theta + A} \right],$$

$$\tau = 0: \quad r = r_*(X), \quad V = V_*(X) = r_*^{-2}, \quad Y = Y_*(X), \quad \theta = \theta_*(X);$$

$$\tau > 0, \quad X = 0: \quad V = 1, \quad Y = 0, \quad r = 1, \quad \theta = 1;$$

$$\tau > 0, \quad X = 1: \quad V = K, \quad Y = 0,$$

где $\theta = \frac{T - T_c}{T_0 - T_c}, \quad E^0 = \frac{E}{R_2 T_0}, \quad A = \frac{T_c}{T_0 - T_c}, \quad St_0 = \frac{\ell \lambda_c}{\rho C_v v_0 a_0^2},$

$$Re_0 = \frac{2a_0 \rho_c v_0}{\eta_c}, \quad \sigma_R = \frac{2\sigma^* \varepsilon a_0 (T_0 - T_c)^3}{10^8 \lambda_c}.$$

Методика исследования задачи подобна изложенной выше (вязкой жидкости). Стационарное течение струи описывается системой уравнений в безразмерной форме

$$\begin{aligned}\frac{dV_*}{dX} &= q_* V_* \operatorname{ch}^2 \xi_* \exp \left[\frac{E^0(\theta_* - 1)}{\theta_* + A} \right]; & \frac{d\xi_*}{dX} &= \frac{R}{q_* V_*}; \\ \frac{dY_*}{dX} &= \operatorname{sh} \xi_*; & \frac{d\theta_*}{dX} &= -St_* \theta_* \frac{\operatorname{ch} \xi_*}{\sqrt{V_*}}; & V_* r_*^2 &= 1,\end{aligned}$$

где $\theta_* = (T_* - T_c)/(T_0 - T_c)$,

$$St_* = 0,325 St_0 Re_0^{0,3} V_*^{0,65} + \sigma_R St_0 \left[(\theta_* + A)^2 + A^2 \right] (\theta_* + 2A).$$

Граничные условия для стационарной задачи

$$X=0: \quad \theta_* = V_* = 1, \quad \xi_* = \xi_{*0}, \quad Y_* = 0, \quad X=1: \quad V_* = K, \quad Y_* = 0.$$

Добавим к отклонениям (3.20), возмущение температуры $\theta = \theta_*(X)[1 + \delta(X, \tau)]$. В неизотермических условиях уравнения для отклонений имеют вид

$$\begin{aligned}\frac{\partial \delta}{\partial \tau} + F_1 \frac{\partial \delta}{\partial X} &= (1 + \delta) F_4, & \frac{\partial \alpha}{\partial \tau} + F_1 \frac{\partial \alpha}{\partial X} &= F_2, & \frac{\partial \beta}{\partial X} &= F_3, \\ \frac{\partial \gamma}{\partial X} &= \operatorname{sh} \zeta - \operatorname{sh} \xi_*, & \frac{\partial \zeta}{\partial X} &= \frac{R(1 + \alpha)^2}{q V_*}, & F_1 &= \frac{(1 + \beta) V_*}{\operatorname{ch} \zeta}, & F_2 &= -\frac{(1 + \alpha) V_* F_3}{2 \operatorname{ch} \zeta}, \\ F_3 &= \frac{q \operatorname{ch}^2 \zeta}{(1 + \alpha)^2} \exp \left\{ \frac{E^0[\theta_*(1 + \delta) - 1]}{A + \theta_*(1 + \delta)} \right\} - q_*(1 + \beta) \operatorname{ch}^2 \xi_* \exp \left[\frac{E^0(\theta_* - 1)}{\theta_* + A} \right], \\ F_4 &= \frac{(1 + \beta) \operatorname{ch} \xi_*}{\operatorname{ch} \zeta} St_* - St St_0, & St &= 0,325 Re_0^{0,3} V_*^{1,15} \frac{[(1 + \beta)(1 + \alpha)]^{0,3}}{(1 + \alpha)^2} + \\ &+ \frac{\sigma_R \sqrt{V_*}}{(1 + \alpha)} [\theta_*(1 + \delta) + 2A] \left\{ [\theta_*(1 + \delta) + A]^2 + A^2 \right\}.\end{aligned}$$

Рассмотрены возмущения начального радиуса, скорости и температуры, поэтому в общем случае граничные и начальные условия для отклонений имеют вид:

$$\begin{aligned}\tau=0, X=0: \quad \alpha=\beta=\gamma=\delta=0, \quad \zeta=\xi_*; \quad X=1: \quad \alpha=\beta=\gamma=\delta=0, \quad \zeta=\xi_*; \\ \tau>0, X=0: \quad \delta=\delta_0, \quad \beta=\beta_0, \quad \alpha=\alpha_0, \quad \gamma=0, \quad \zeta=\zeta_0; \quad \tau>0, X=1: \quad \beta=\gamma=0.\end{aligned}$$

Методика численного анализа задачи подобна изотермическому случаю, изложенному в 3.3. В случае стационарной задачи для 4-х уравнений (V_* , ξ_* , Y_* , θ_*) и двух неизвестных параметров ξ_{*0} и q_* имеем 6 граничных условий. Процесс поиска q_* путем подбора ξ_{*0} для выполнения условий при $X=1$ формально близок задаче на собственные значения. В случае уравнений

для отклонений имеем уравнения в частных производных 1-го порядка для радиуса и температуры и 1-го порядка для β , γ , ζ (задача Коши для системы уравнений). Кроме того, неизвестны две функции времени $\zeta_0(\tau)$ и $q(\tau)$. Задача замкнута, поскольку имеем 7 граничных условий.

На каждом "временном слое" процесс поиска ζ_0 и q подобен решению стационарной задачи, но использовался алгоритм секущих-хорд, обеспечивающий более быструю сходимость. Для перехода от одного

"временного слоя" к следующему использовались конвективные уравнения в дискретной форме (схема Кранка-Николсона см. гл. 3.3).

Рассмотрено течение круглой струи расплава полипропилена без учета теплового эффекта кристаллизации. Параметры течения и физические свойства: $R_2=8,317$ Дж/Кмоль; $E=46$ кДж/моль $T_0=513$ К; $T_c=293$ К; $\rho=800$ кг/м³; $C_v=3000$ Дж/(кг·К); $\ell=0,1$ м; $v_0=0,007$ м/с; $\varepsilon=1$; $\eta_0=100$ Па·с; $\rho_c=1,2$ кг/м³; $\lambda_c=0,025$ Вт/(м·К); $\eta_c=17 \cdot 10^{-6}$ Па·с; $a_0=10^{-3}$ м; $E^\circ=11$; $A=0,563$; $St_0=0,15$; $Re_0=0,96$; $\sigma_R=0,0483$. Принятая начальная скорость обеспечивает существенное проявление эффектов неизотермичности как в докритическом, так и закритическом режимах течения.

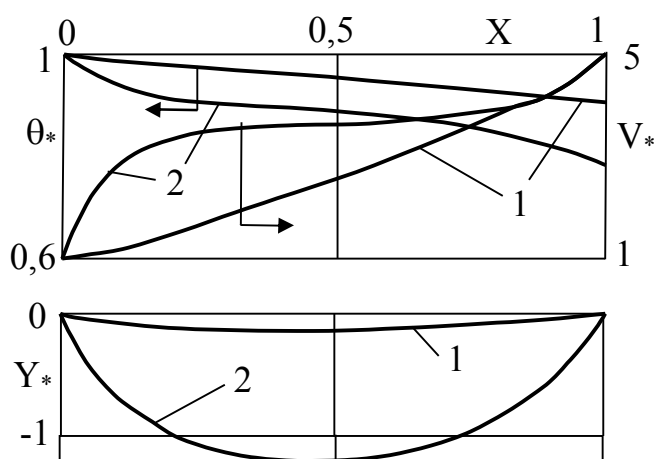


Рис. 3.19

На рис. 3.19 представлено продольное распределение скорости, температуры и провисаний для стационарных докритических и закритических течений. Видно, что уже в докритическом течении эпюра скорости отличается от, характерной для изотермического случая, экспоненциальной зависимости. В закритическом течении эпюры скорости и температуры имеют характерное плато в

средней части струи.

Стационарные характеристики представленных течений следующие: $q_*=2$; $Y_{*m}=-0,1318$; $R=5$; $K=5,021$; $\xi_{*0}=-0,6919$; $\theta_*(X=1)=0,912$; $St_*(X=0)=0,096$; $St_*(X=1)=0,19$ - для докритического (кривые 1) и $q_*=0,26$; $Y_{*m}=-1,202$; $R=5$; $K=5,195$; $St_*(X=0)=0,0912$; $St_*(X=1)=0,1728$; $\xi_{*0}=-3,122$; $\theta_*(X=1)=0,804$ - для закритического (кривые 2). Указанные течения идентичны по гравитационному параметру и близки по кратности. В закритическом течении вязкость в конце струи повышается в 5,5 раза.

На рис. 3.20 представлена кинетика перемещений средней части струи при различной по величине и знаку возмущении в начальном сечении радиуса, скорости и температуры. Крестиками отмечены точки потери устойчивости расчетной схемой. Из сопоставления с изотермическим течением (см. рис. 3.12) видно, что в неизотермических условиях устойчивость течения повышается и изменяется характер динамических процессов в струе. Сохраняется характерная особенность - в момент разрушения струя перемещается в область критических провисаний.

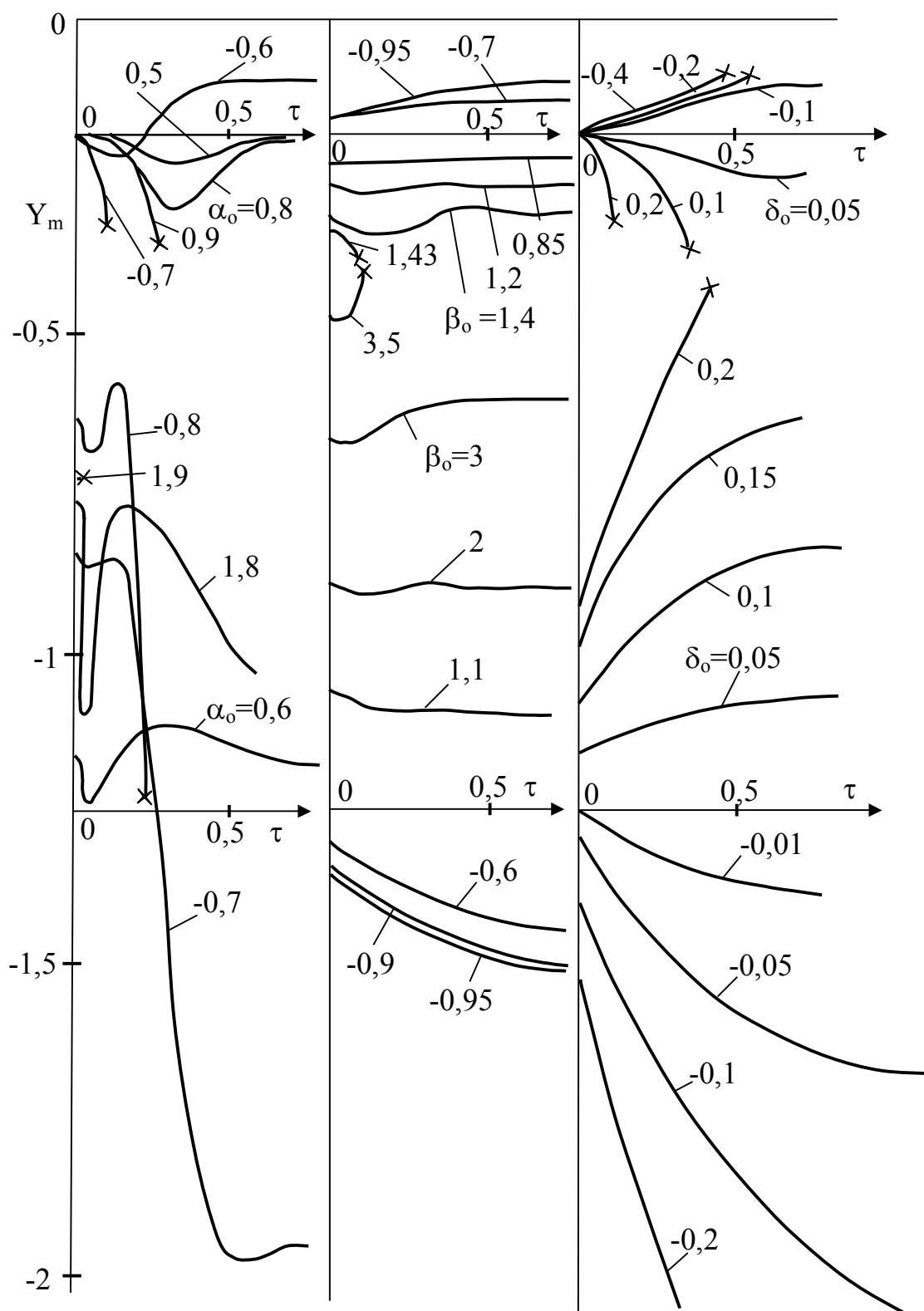


Рис. 3.20

Неизотермическое течение обладает ярковыраженными демпфирующими свойствами, и наиболее существенные динамические процессы в струе протекают непосредственно в первые моменты времени после подачи возмущения.

Рассмотрим динамические процессы в струе в закритическом режиме течения. На рис. 3.21 представлены эволюции радиуса, скорости и

температуры по длине струи при возмущении начального радиуса ($\alpha_0 = -0,7$). Процесс сопровождается сильным изменением провисания. Вначале по всей длине имеет место деформация растяжения $\beta > 0$ с большим градиентом в начальном сечении. Постепенно скорость растяжения снижается, и на концах струи появляются зоны сжатия. Имеет место существенное понижение температуры с экстремумом при $X = 0,2$. В конце же зоны течения температура изменяется незначительно. В конце зоны течения струя в момент обрыва почти вертикальна. Обрыв вероятен в средней части струи, где имеют место растягивающие деформации.

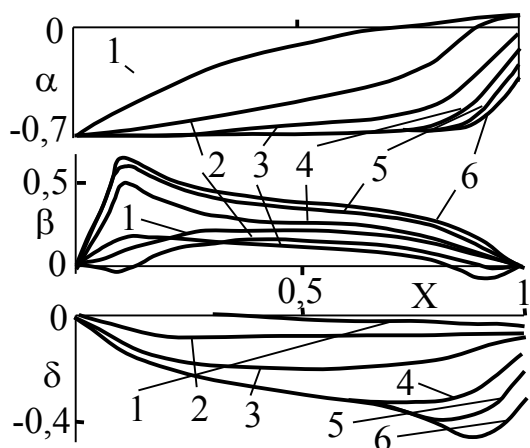


Рис. 3.21. Динамические процессы при возмущении радиуса ($\alpha_0 = -0,7$): для моментов $\tau = 0,14$ (1), $0,28$ (2), $0,42$ (3), $0,56$ (4), $0,7$ (5), $0,84$ (6).

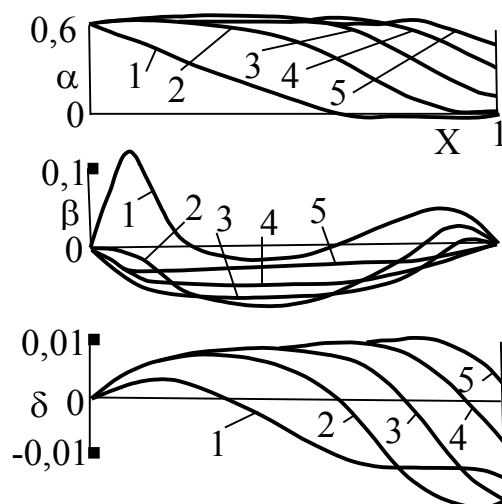


Рис. 3.22. Динамические процессы при возмущении радиуса ($\alpha_0 = 0,6$): для моментов $\tau = 0,14$ (1), $0,28$ (2), $0,42$ (3), $0,56$ (4), $0,7$ (5).

Динамические процессы в струе при положительном возмущении начального радиуса $\alpha_0 = 0,6$ иллюстрирует рис. 3.22. По длине струи распространяется волна избыточного радиуса. Весьма существенно изменяется характер распределения возмущений скорости. Если в начале процесса деформации растяжения сосредоточены на концах струи, а в средней части происходит ее сжатие, то в конце переходного процесса имеет место равномерное сжатие всей струи. Изменение температуры незначительно, но картина ее эволюции сложна. Эволюция избыточного радиуса подобна изотермическому случаю.

При положительном возмущении начальной скорости струя мгновенно перемещается вверх и апериодически приближается к новому положению статического равновесия. Для возмущений скорости, характерен значительный градиент в начале зоны течения и незначительное изменение профиля в переходном процессе. Для случая $\beta_0 = 2$ эволюция параметров по длине зоны течения показана на рис. 3.23. Потеря устойчивости наступает при $\beta_0 = 3,5$, $\tau = 0,1$. Струя перемещается вверх. Прогрессирует разбухание в сечениях $X = 0,1$ и $X = 1$, где, кроме того, повышается температура. Обрыв

вероятен в окрестности начального сечения, где значителен градиент скорости растяжения. При отрицательных отклонениях начальной скорости эволюция возмущений подобна представленной на рис. 3.23.

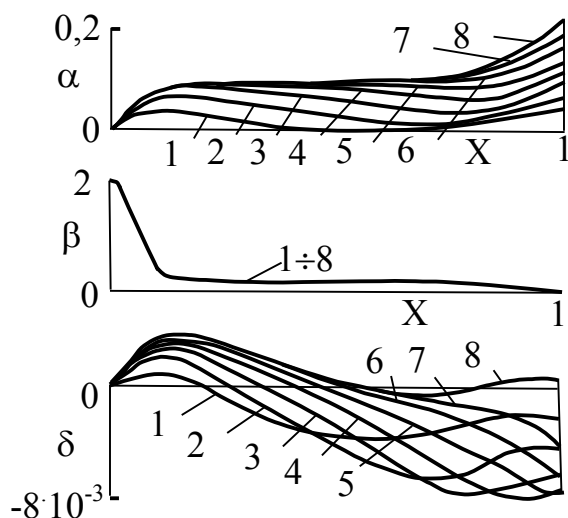


Рис. 3.23. Динамические процессы при возмущении скорости ($\beta_0=2$): для моментов $\tau=0,07$ (1), $0,14$ (2), $0,21$ (3), $0,28$ (4), $0,35$ (5), $0,42$ (6), $0,49$ (7), $0,84$ (8).

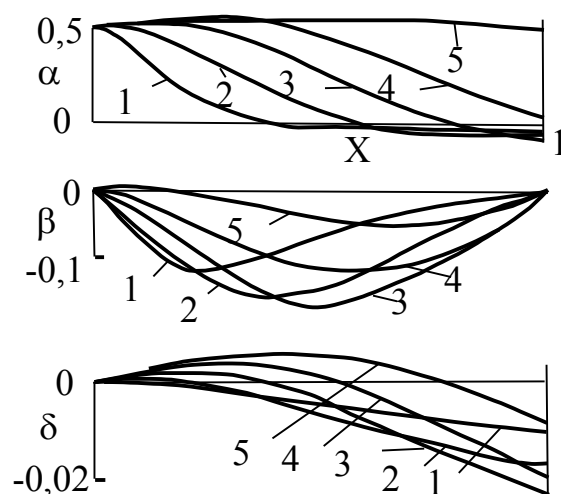


Рис. 3.24. Динамические процессы при возмущении радиуса ($\alpha_0=0,5$): для моментов $\tau=0,1$ (1), $0,2$ (2), $0,3$ (3), $0,4$ (4), $0,5$ (5).

Далее рассмотрим динамические режимы докритического течения. Продольная эволюция параметров при положительных возмущениях начального радиуса $\alpha_0=0,5$ показана на рис. 3.24. Практически в течение всего процесса возмущения скорости отрицательны, т.е. имеем случай равномерного сжатия всей струи. Если в начале процесса температура понижается, то после $\tau=0,3$ имеет место повышение температуры струи. Эволюция возмущений радиуса традиционна. Потеря устойчивости наступает при $\alpha_0=0,9$. При этом эволюция скорости имеет отличие от представленной на рисунке: в момент разрушения $\tau=0,26$ в сечении $X=0,1$ появляются растягивающие деформации, которые и обуславливают обрыв струи. Волна разбухания захватывает половину струи и под действием собственного веса начальный участок струи принимает почти вертикальное положение. Именно под действием собственного веса этого участка и происходит обрыв струи.

Эволюция параметров при $\alpha_0=-0,7$ вплоть до разрушения показана на рис. 3.25. В окрестности $X=0,1$ быстро прогрессируют растягивающие деформации. Струя в этом сечении сужается. На участке $X \geq 0,5$ сечение струи увеличивается, и она под действием собственного веса опускается. При положительных возмущениях начальной скорости потеря устойчивости происходит при $\beta_0=1,43$. Имеет место повышение температуры на участке

$X \leq 0,5$ и понижение на участке $X \geq 0,5$. В окрестности начального сечения значительный градиент скорости растяжения. Именно в этом сечении и происходит обрыв под действием собственного веса средней части струи, где радиус увеличен.

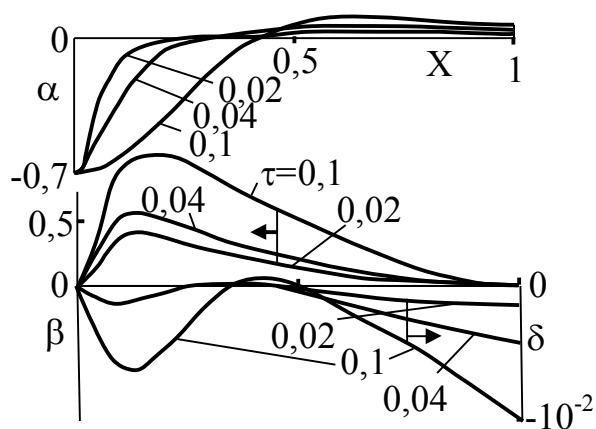


Рис. 3.25

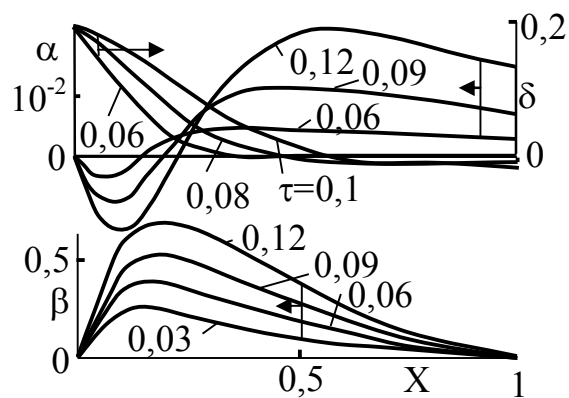


Рис. 3.26

Исследованы динамические режимы при возмущении начальной температуры в докритическом режиме течения. На рис. 3.26 представлена эволюция параметров по длине зоны течения при $\delta_0 = 0,2$. При $\tau = 0,12$ наступает потеря устойчивости. В окрестности начального сечения $X = 0,2$ прогрессируют деформации растяжения. За время до разрушения волна избыточной температуры успевает достичь середины струи. Радиус растет в средней части струи и уменьшается в начале.

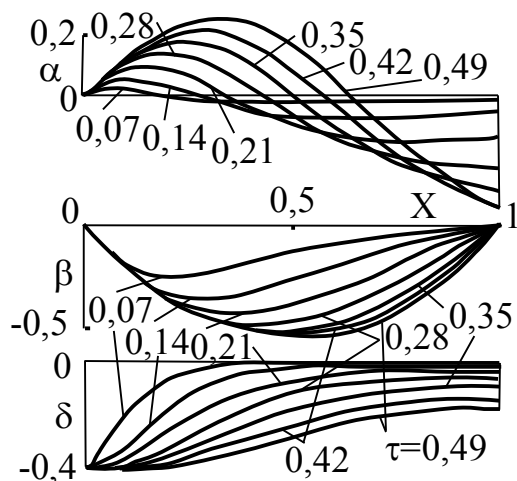


Рис. 3.27

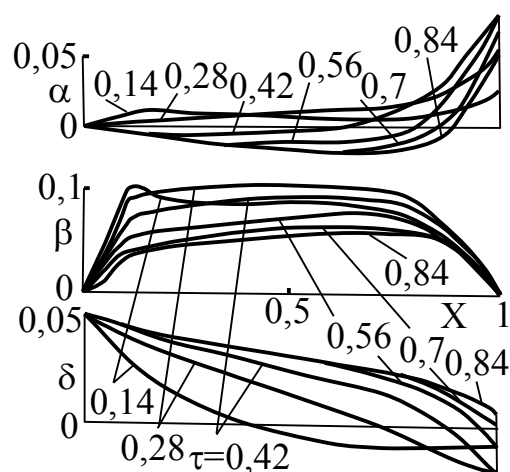


Рис. 3.28

На рис. 3.27 представлена эволюция параметров при внезапном понижении начальной температуры $\delta_0 = -0,4$, сопровождаемая потерей устойчивости. Из рисунков видно, что в конце зоны течения струя уменьшает свое сечение и происходит рост градиента скорости растяжения. Очевидно, происходит обрыв в точке отбора струи.

Эволюция параметров в закритическом течении при ступенчатом изменении начальной температуры иллюстрируется на рис. 3.28 и рис. 3.29 для $\delta_0 = 0,05$ и $\delta_0 = -0,05$ соответственно.

Исследованы условия перехода неизотермического течения из докритического режима в закритический. Переход осуществлялся путем изменения параметра R (что равносильно изменению длины зоны вытяжки или ускорения свободного падения) по следующему сценарию. Задавался линейный закон увеличения параметра $R = 5 + M\tau$, где скорость роста M варьировалась от 5 до 40. Во всех случаях по достижению струей провисаний порядка $\gamma_m = -0,18$ наблюдалась потеря устойчивости.

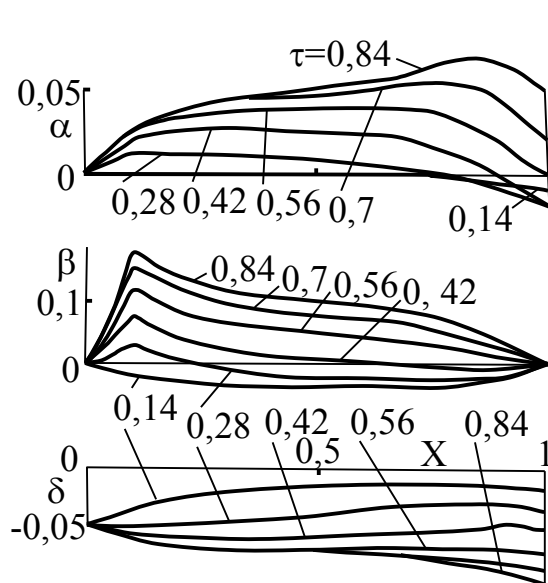


Рис. 3.29

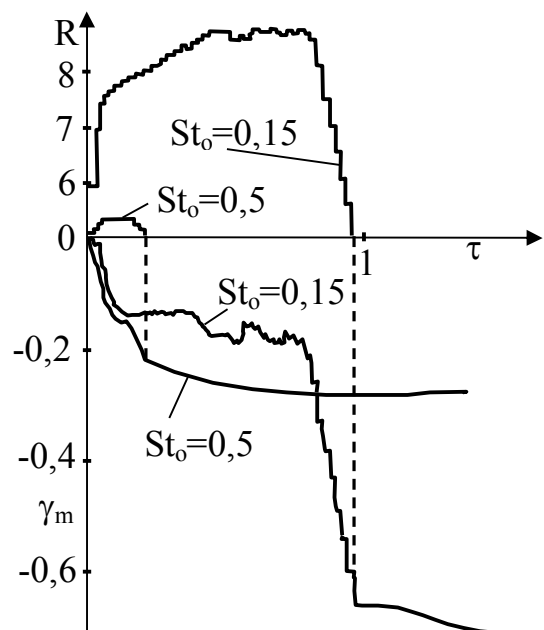


Рис. 3.30

При этом параметр R достигал критических значений $R \sim 8,5$. Решено было изменять параметр R в диалоговом режиме через шаг по времени с тем, чтобы в струе наступала относительная стабилизация течения. Кроме того, установлено, что если в начале процесса допустимо существенно изменять R , например, с шагом $0,5 \div 1$, то при подходе к критическим провисаниям ($\gamma_m \approx -0,19$) шаг по R следует уменьшать.

На рис. 3.30 представлено изменение провисаний струи и сценарий (программа) изменения гравитационного параметра. В момент $\tau = 0,78$, $R = 8,52$ (для $St_0 = 0,15$) произошел переход в закритический режим течения. Протекающие при этом в струе процессы иллюстрирует рис. 3.31. В начале процесса ($\tau \sim 0,1$) струя в точке отбора сужена и температура сравнительно высокая. В течение $\tau \sim 0,5-0,8$ разбухшая средняя часть струи смещается к выходу, увеличивая сечение в точке отбора. Кроме того, при этом температура струи понижается и вязкость возрастает. На участке $0 < X \leq 0,7$ в течение переходного процесса нарастают деформации растяжения, а в конце струи $X \geq 0,7$ происходит продольное сжатие $\beta < 0$. Возмущения скорости

изменяются незначительно, исключая момент перехода в закритический режим течения.

Таким образом, в докритическом течении при увеличении R струя перемещается вниз, ее сечение в средней части увеличивается, соответственно начальное и конечное сечения уменьшаются. Далее волна разбухания перемещается из средней части струи к выходу. Именно упрочнение выходного сечения обеспечивает последующий переход к закритическому течению и предотвращает обрыв струи, который наблюдался в изотермическом случае. Значение R изменялось ступенчато через шаг по времени. Это давало возможность стабилизации течения и выяснения характера изменения γ_m . Так если провисание увеличивалось, то R не корректировалось.

Если же провисание уменьшалось, то R увеличивалось. При этом было принято следующее изменение R в зависимости от интервала провисаний: на интервале $-0,1 < \gamma_m < -0,05$ шаг по R составлял 0,2, на $-0,14 < \gamma_m < -0,1$ шаг 0,1 и на $-0,18 < \gamma_m < -0,14$ шаг 0,05. Непосредственно в окрестности критических провисаний при переходе в закритический режим шаг составлял 0,02. В закритическом режиме параметр R уменьшался с шагом 0,5. Значение $R=5$ (соответствующее докритическому режиму) было достигнуто при $\tau=0,96$. При этом провисание составляло $\gamma_m=0,7$. Далее при $\tau > 0,96$ струя апериодически перемещалась вниз без изменения гравитационного параметра к новому состоянию статического равновесия. Расчеты продолжались до $\tau=1,7$. При этом струя опустилась до $\gamma_m=-0,73$.

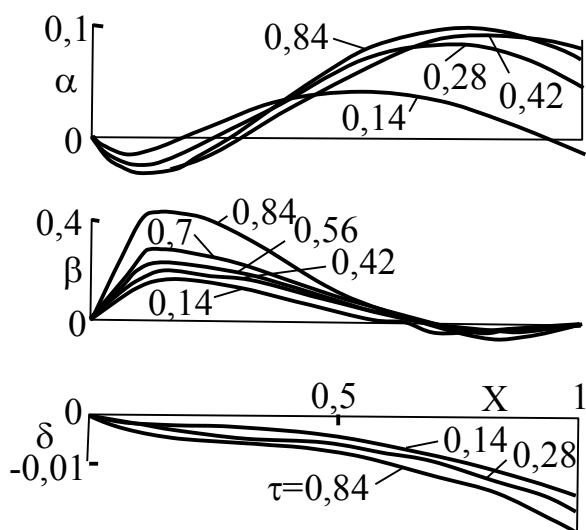


Рис. 3.31

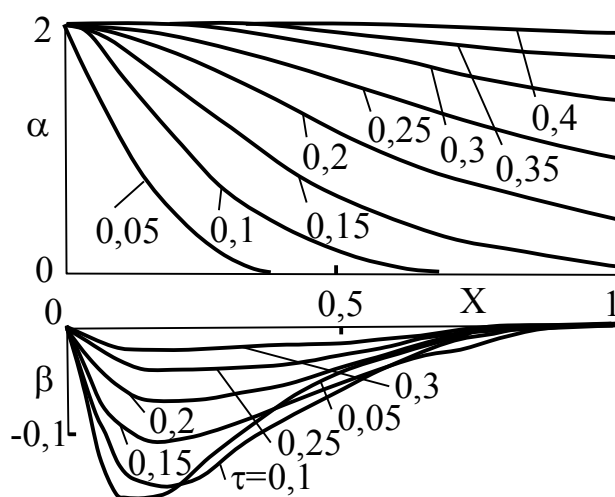


Рис. 3.32

Субъективное впечатление при осуществлении перехода струи через зону критических провисаний следующее. Приближаясь к зоне критических провисаний, как бы попадаешь в область автоколебаний объекта. И задача при подходе к этой зоне состоит в соотношении момента времени подхода и фазы автоколебаний. В случае «неудачного подхода» вычислительная схема (а, следовательно, и струя) теряет устойчивость. Диалоговый режим

управления сценарием перехода струи подсказал автору следующий мифологический образ поведения системы. Харон в лодке перевозит души через реку Стикс, с одного берега (берега живых) на другой (берег мертвых). Требуется душам подойти к берегу (изменяя параметр R) именно в момент причаливания лодки Харона. В противном случае все срывается (вычислительная схема и струя теряют устойчивость). То есть, гидромеханическая система в зоне критических провисаний вероятно имеет частоту собственных автоколебаний. Причем период автоколебаний в зоне критических провисаний зависит от реологических свойств жидкости (дилатансия, вязкоупругость) или неизотермичности.

Повышение интенсивности охлаждения, характеризуемое числом Стантона, значительно упрощает переход течения из докритического в закритическое. Так исследовано течение для условий: $R=5$; $K=2,26$; $Y_{*m}=-0,245$; $\theta_*(X=1)=0,738$; $St_0=0,5$; $St(X=0)=0,3$; $St(X=1)=0,367$; $\xi_{*0}=-1,0563$. На рис. 3.30 показаны переходные характеристики для перемещений средней части струи и сценарий (программа) изменения гравитационного параметра. Из рисунка видно, что для перехода в закритический режим требуется незначительное увеличение R (до $R=5,3$). Переход происходит быстро и не требует выдержки времени для упрочнения струи в точке отбора, поскольку вязкость ее на выходе высокая ввиду низкой температуры. Барьер критического провисания при этом составлял $\gamma_m \sim -0,11$. Переходные процессы в струе подобны представленным на рис. 3.31.

Таким образом, неизотермичность не только повышает устойчивость течения, но и позволяет, изменяя длину зоны течения сравнительно легко перевести режим течения из докритического в закритический.

3.2.4. Динамические режимы течения упруговязкой жидкости

Рассмотрены нестационарные режимы течения упруговязкой жидкости Максвелла (3.6) с конвективной производной по Олдройду. Использовалась верхняя (контрвариантная) конвективная производная, наиболее соответствующая реальному поведению упругих жидкостей. В условиях одноосного растяжения осевое напряжение в струе описывается уравнением (3.9). Используем уравнение неразрывности и сохранения импульса из (3.14) исключая последнее уравнение, соответствующее течению ньютоновской жидкости. Из совместного рассмотрения (3.14) и (3.9), переходя к безразмерным переменным, получим систему уравнений

$$r\sqrt{1+Y'^2} \frac{\partial r}{\partial \tau} + \frac{\partial(r^2 V)}{\partial X} = 0; \quad \frac{\partial Y}{\partial X} = sh\zeta; \quad \frac{\partial \zeta}{\partial X} = \frac{Rr^2}{q}; \quad \frac{\partial V}{\partial X} = \frac{qch^2\zeta + WeRsh\zeta}{r^2 + Weqch\zeta}.$$

Здесь использовались введенные ранее переменные и параметры из выражений (3.11) и (3.16). Полученную систему уравнений необходимо рассматривать совместно с граничными условиями (3.18).

Стационарное течение упруговязкой жидкости описывается полученными выше уравнениями (3.11). Как и ранее пометим переменные и параметры, соответствующие стационарному течению, звездочкой. Тогда для отклонений (3.20) получим следующую систему уравнений,

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \tau} + F_1 \frac{\partial \alpha}{\partial X} = F_2; \quad \gamma' = \text{sh} \zeta - \text{sh} \zeta_*; \quad \zeta' = \frac{R(1+\alpha)^2}{qV_*}; \quad \beta' = F_3; \quad F_1 = \frac{V_*(1+\beta)}{\text{ch} \zeta};$$

$$F_2 = -\frac{V_*(1+\alpha)}{2\text{ch} \zeta} F_3; \quad F_3 = \frac{q\text{ch}^2 + \text{We}R\text{sh} \zeta}{(1+\alpha)^2 + \text{We}qV_*\text{ch} \zeta} - (1+\beta) \frac{(q_*\text{ch}^2 \xi_* + \text{We}R\text{sh} \xi_*)}{1 + \text{We}q_*V_*\text{ch} \xi_*}.$$

Рассмотрены случаи ступенчатого и синусоидального возмущения начального радиуса и скорости. При этом начальные и граничные условия запишем в матричной форме:

$$\tau = 0, \quad \alpha = \beta = \gamma = 0, \quad \zeta = \zeta_*;$$

$$\tau > 0, \quad X = 0, \quad \alpha = \alpha_0 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \sin \omega \tau \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \beta_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \sin \omega \tau \end{pmatrix}, \quad \gamma = 0, \quad \zeta = \zeta_0;$$

$$\tau > 0, \quad X = 1, \quad \beta = \gamma = 0.$$

Численный анализ задачи был выполнен по методике, использованной для вязкой жидкости. Расчеты выполнены для следующих условий течения: $R=5$; $\text{We}=0,1$; докритический режим $q_*=15$; $K=9,5$; $\xi_{*0}=-0,0644$; $Y_{*m}=-0,0985$; закритический режим $q_*=0,3$; $K=9,52$; $\xi_{*0}=-3,126$; $Y_{*m}=-1,211$. Рассмотрен случай ступенчатого возмущения в начальном сечении.

На рис. 3.33 показаны эволюции средней части струи при различных по величине возмущениях радиуса (левые кривые) и скорости (правые кривые) в докритическом режиме (верхняя часть рисунка) и закритическом (нижняя часть рисунка). При возмущениях радиуса в докритическом режиме вертикальные отклонения струи весьма незначительны, но сильно изменяется натяжение (на рисунке не показано) до $q=33.76$ при $\tau=0,44$ и $\alpha=0,5$. По сравнению с вязкой жидкостью существенно повышается устойчивость течения.

Из сопоставления с переходными процессами для вязкой жидкости (см. рис. 3.12) видно, что упругие свойства существенно изменяют картину переходных процессов в струе. В частности значительно повышаются "демпфирующие" свойства системы, которые проявляются в снижении размаха колебаний струи и быстром их затухании.

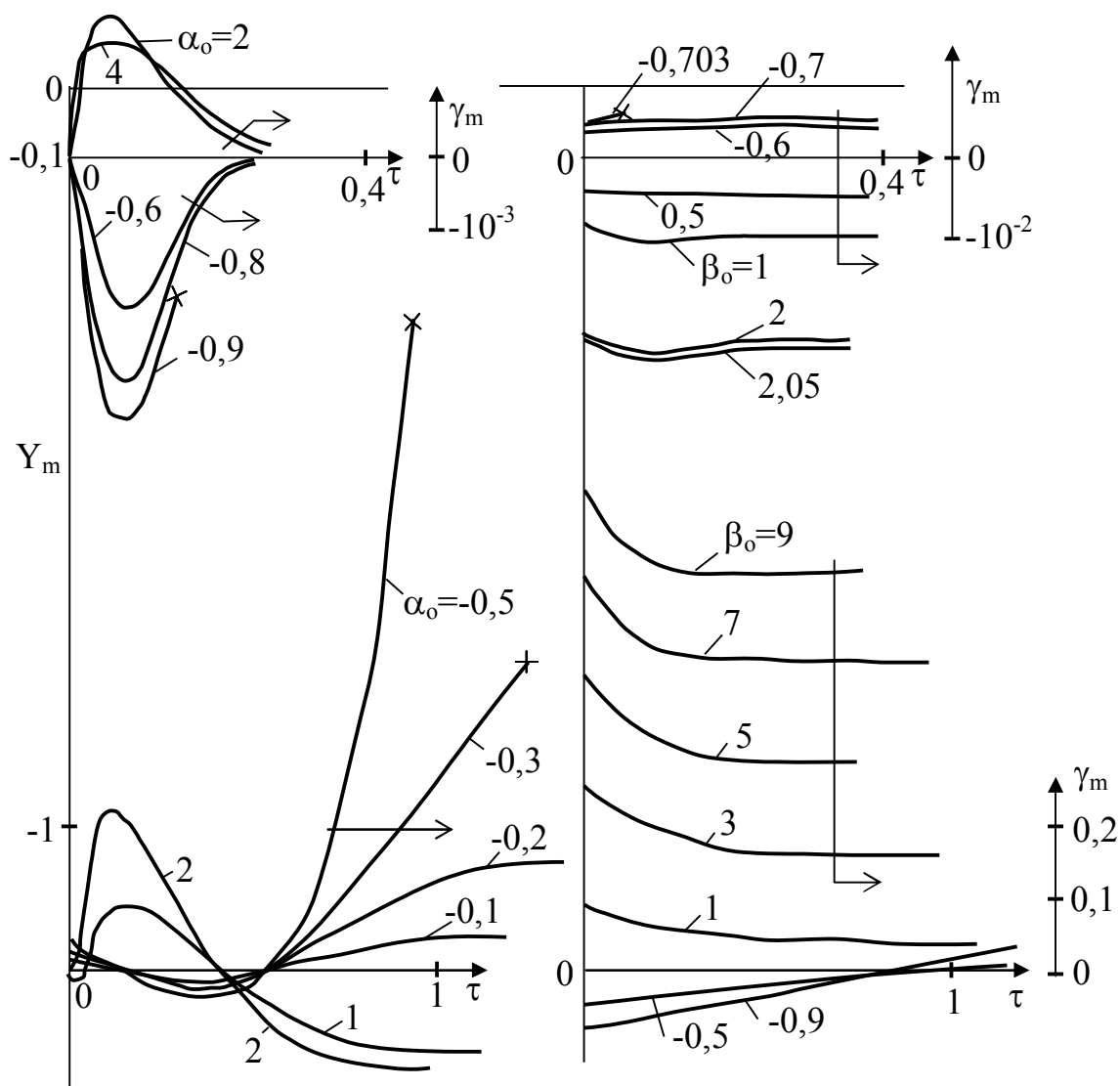


Рис. 3.33

На рис. 3.32 представлены эволюция параметров по длине струи в докритическом режиме при возмущении радиуса ($\alpha_0=2$). Волна избыточного радиуса распространяется равномерно по длине. В окрестности начального сечения при подаче возмущения возникает деформация сжатия, которая постепенно выравнивается по всей струе и уменьшается по величине.

Эволюция параметров в докритическом режиме при отрицательном возмущении начального радиуса ($\alpha_0=-0,6$) представлена на рис. 3.34. Картина переходных процессов близка к случаю положительного возмущения радиуса. В начале процесса в окрестности начала струи возникает максимум скорости растяжения, который незначительно возрастает в первые периоды и снижается в последующие. Потеря устойчивости наступает при $\alpha_0=-0,9$ и $\tau \sim 0,15$ (см. рис. 3.33). Возможной причиной потери устойчивости является увеличение скорости растяжения в окрестности начального сечения струи.

На рис. 3.35 показаны продольные эволюции параметров в докритическом режиме при возмущении начальной скорости ($\beta_0=2$). Устойчивое течение сохраняется до $\beta_0=2,05$. Имеется незначительное

остаточное отклонение струи γ_m приблизительно -10^{-2} . Эпюры возмущений скорости и провисаний практически неизменны в течение всего переходного процесса. Потеря устойчивости при $\beta_0 > 2,05$ происходит в момент подачи возмущения.

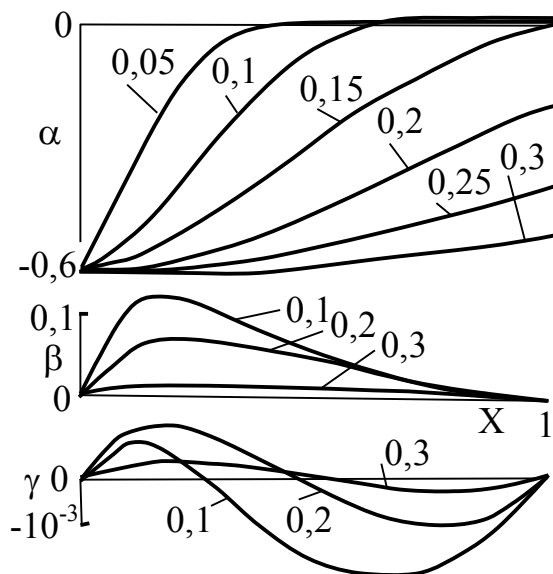


Рис. 3.34

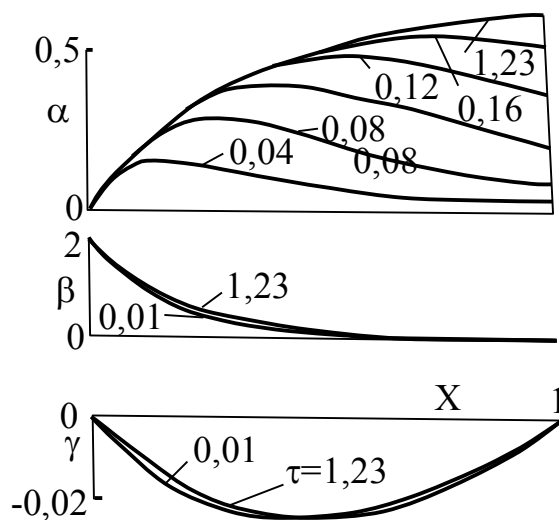


Рис. 3.35

Эволюция параметров при $\beta_0 = -0,6$ в докритическом режиме показана на рис. 3.36. Переходные процессы в струе подобны случаю положительных возмущений скорости. Потеря устойчивости наступает при $\beta_0 = -0,703$ в момент $\tau \sim 0,08$ и вероятно обусловлена значительным градиентом скорости в окрестности начального сечения. Имеются небольшие остаточные отклонения струи.

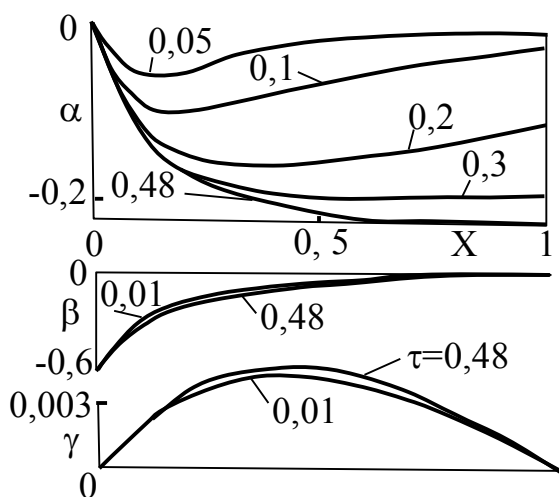


Рис. 3.36

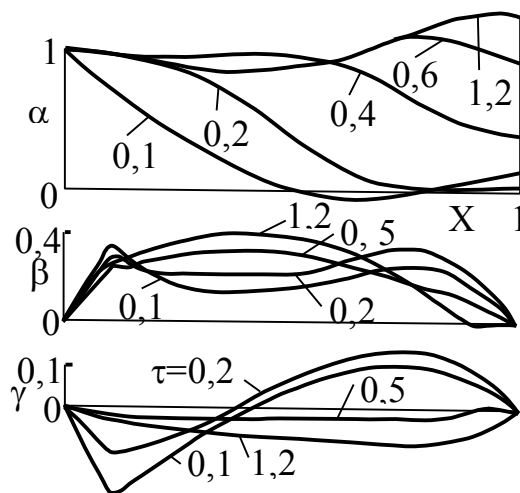


Рис. 3.37

Более сложная кинетика изменения параметров в закритическом режиме течения. На рис. 3.37 показано изменение параметров по длине зоны течения при положительном возмущении начального радиуса $\alpha_0 = 1$. Устойчивость течения сохраняется до $\alpha_0 = 2,2$. В отличие от докритического случая появляются остаточные отклонения струи. В начале переходного

процесса деформации растяжения в основном локализуются на концах струи. В конце переходного процесса максимальная скорость растяжения в средней части струи. Именно это растяжение обуславливает увеличение радиуса на выходе за счет релаксации упругих напряжений.

Менее устойчива струя упруговязкой жидкости при отрицательных возмущениях радиуса. Эволюции на рис. 3.38 получены для $\alpha_0 = -0,3$. В струе возникают автоколебания, обусловленные нелинейными свойствами растягиваемой среды.

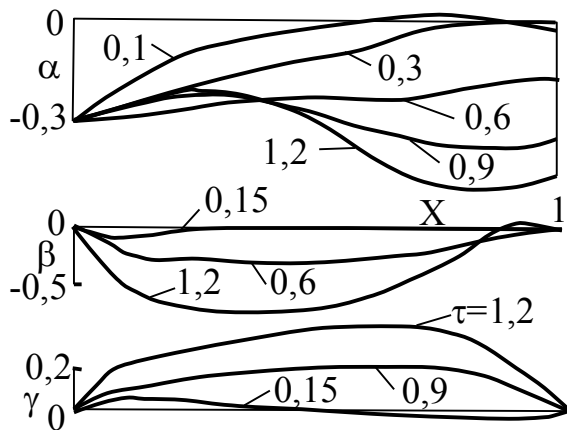


Рис. 3.38

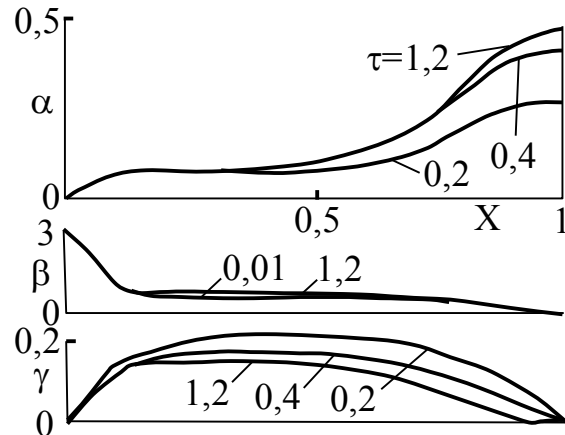


Рис. 3.39

В период времени $\tau < 1$ переходные процессы в струе носят монотонный характер, но далее в системе возникают прогрессирующие колебания радиуса и тянущего напряжения. Так, например, в момент $\tau = 2$ в окрестности $X = 0,3$ имеют место следующие значения возмущений: $\beta = -1,02$ и $\alpha = -3,3$, что физически невозможно. Следовательно, струя при этом теряет устойчивость. Устойчивость сохранялась до $\alpha_0 = -0,2$,

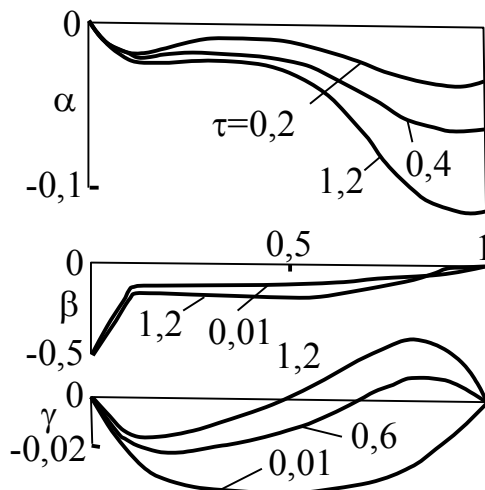


Рис. 3.40

Более устойчива струя в закритическом течении к возмущениям начальной скорости. На рис. 3.39 показана эволюция параметров при $\beta_0 = 3$. Профиль скорости изменяется незначительно. Переходный процесс дает остаточное отклонение средней части струи. Колебания в системе не возникают, а динамические процессы носят апериодический характер. Деформации растяжения в основном локализованы в начале струи. Эволюция параметров для случая отрицательного возмущения скорости $\beta_0 = -0,5$ представлена на рис. 3.40.

Проведен вычислительный эксперимент для упруговязкой жидкости по переходу докритического режима течения в закритический путем варьирования параметра R , что эквивалентно изменению длины зоны течения. Характер изменения провисания средней

части струи, и программа изменения параметра R показаны на рис. 3.41. Как видно из рисунка вначале параметр R увеличивался от 5 до 37,5 ступенчато. При подходе к значению $R=37,5$ шаг по R уменьшался. Струя при этом переместилась в область критических провисаний. Далее, в момент $\tau = 0,14$ произошел переход струи в область закритического режима течения. После этого параметр R снижался ступенчато до значения $R = 5$. По достижении стационарного равновесия в закритическом режиме $\tau > 0,6$ безразмерное тянущее усилие составляло $q = 0,679$, т.е. было соизмеримо с теоретическим $q^* = 0,3$. Расхождение обусловлено погрешностями разностной схемы при больших провисаниях струи. Динамические процессы в струе подобны описанным выше для неизотермического течения.

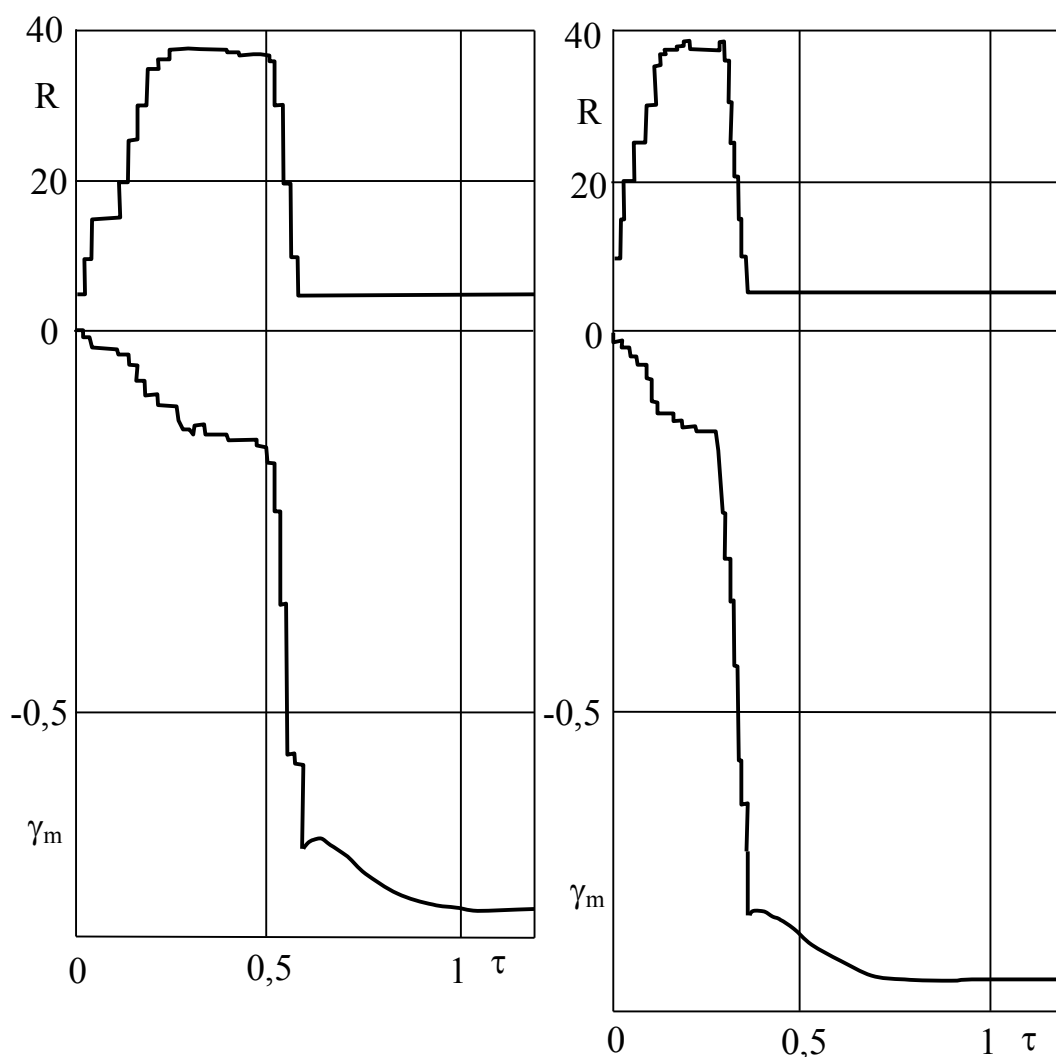


Рис. 3.41. Сценарии перехода из докритического в закритический режим для вязкоупругой жидкости.

Следовательно, наиболее вероятно практически реализовать переход докритического режима в закритический возможно либо в неизотермических условиях, либо для жидкостей с ярковыраженными упругими свойствами. При этом могут иметь существенное значение капиллярные силы и силы

инерции. Решающим фактором является прочность струи в окрестности точки отбора.

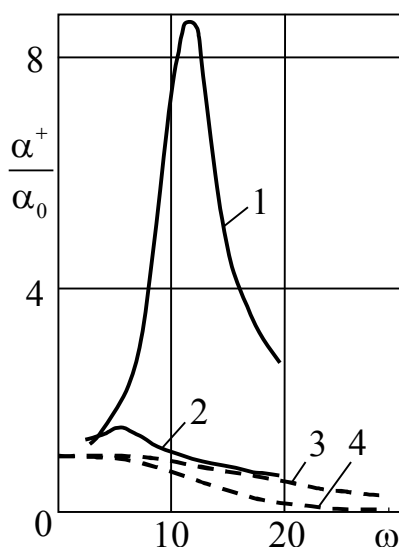


Рис. 3.42

Численно исследовано влияние упругих свойств жидкости на амплитудно-частотную характеристику при синусоидальном возмущении. Качество переходных процессов в нелинейных системах зависит от степени возмущения, поэтому использовались небольшие амплитуды колебаний $\alpha_0 \sim 0,1$. Поскольку для обеспечения приемлемой точности вычислений необходимо выдерживать определенное соотношение между частотой возмущений и шагом по продольной координате, исследована область малых частот в окрестности собственной частоты системы. При подаче синусоидального возмущения в струе возникают переходные процессы, длительность которых равна времени пребывания жидкой частицы в зоне течения. Далее кинетика изменения параметров струи носит синусоидальный характер. Именно в этот момент фиксировалась амплитуда колебаний радиуса на выходе зоны течения α^+ .

На рис. 3.42 представлена амплитудно-частотная характеристика изменения радиуса на выходе зоны течения. Исследованы докритический и закритический режимы для вязкой ($K=5,98$; $R=5$) и упруговязкой ($K=9,5$; $R=5$; $We=0,1$) жидкостей. Кривая 1 отвечает докритическому течению вязкой жидкости, 2-закритическому течению ньютоновской жидкости, 3-докритическому упруговязкой и 4 - закритическому упруговязкой. В докритическом течении вязкой жидкости АЧХ имеет ярко выраженный резонансный характер. В тоже время закритическое течение вязкой жидкости обладает существенными "демпфирующими" свойствами и резонансный пик менее выражен. Резонансная частота понижается с увеличением времени пребывания жидкости в зоне течения. Упруговязкая жидкость обладает столь сильными "демпфирующими" свойствами, что точка резонанса не обнаружена как в докритическом, так и в закритическом режимах течения.

3.3. Экспериментальное исследование свободной струи

Схема экспериментальной лабораторной установки представлена на рис. 3.43. Объем емкости для исследуемой жидкости 150 мл. Диаметр отверстия фильеры 1,6 мм. Для подачи жидкости использовался шнековый насос. Диаметр шнека 6 мм, длина рабочей части 20 мм. Предусмотрена возможность плавного регулирования расхода жидкости и скорости отбора струи. Исследовано течение различных жидкостей.

Исследовано течение патоки (ньютоновская жидкость, вязкостью 14 Па*с). Критическому течению, предшествовавшему обрыву струи, соответствовали следующие характеристики течения: $\ell=24$ мм. $y_*=8$ мм., v_0

$=0,021$ м/с, $v_1 = 0,149$ м/с. При этом безразмерное провисание $Y_* = y_*/\ell = 0,333$ соответствует теоретическому значению. Для экспериментальных условий значение гравитационного параметра $R = \rho g \ell^2 / (3\eta v_0) = 1300 \times 9,8 \times (0,022)^2 / (3 \times 14 \times 0,021) = 6,99$, соответствует теоретическим оценкам: $R = K_m = v_1 / v_0 = 7,06$. Закритической фазы течения реализовать не удалось, возможно, ввиду вибрации и капиллярных сил.

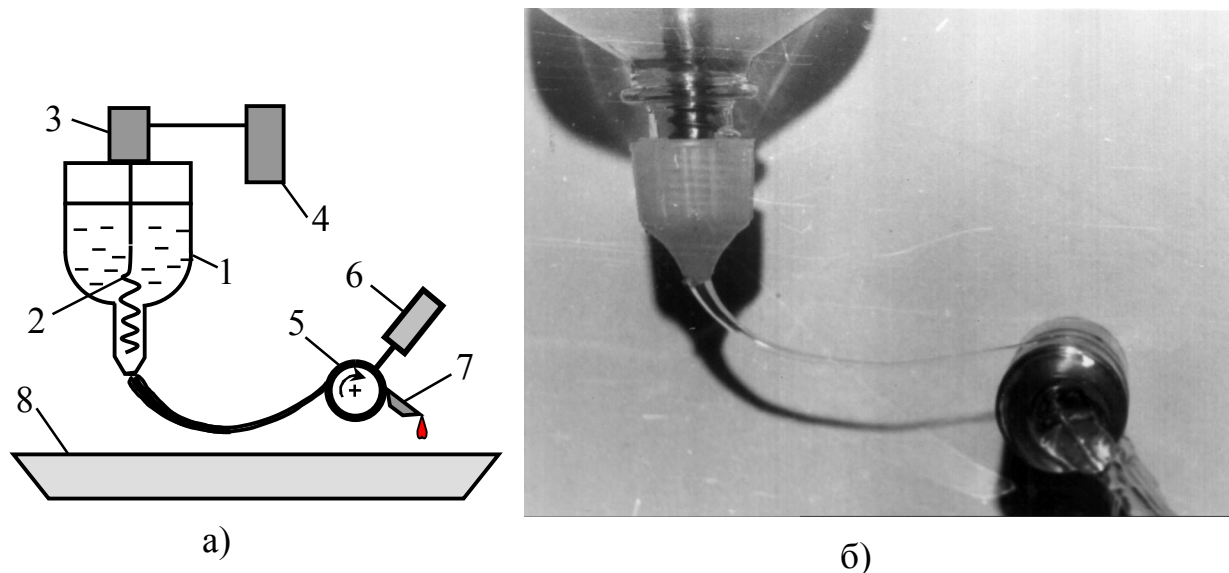


Рис. 3.43. Схема экспериментальной установки (а) и вид свободной струи (б): 1 – емкость, 2 – шнек, 3 – электродвигатель, 4 – регулятор напряжения, 5 – валок, 6 – электродвигатель, 7 – нож, 8 – емкость.

Проведены также эксперименты на 2 % растворе полиизобутилена в декалине. Скорость начальная $v_0 = 4,24 \times 10^{-2}$ м/с, отбора $v_1 = 0,265$ м/с, вязкость 0,1 Па·с. В указанных условиях максимальная длина зоны течения составляла 4 см. Провисание в момент потери устойчивости 0,018 м., что соответствует теоретическим прогнозам. С понижением скорости отбора длина зоны течения, необходимая для обрыва струи, сокращалась. Попытки получить устойчивое закритическое течение, путем изменения длины зоны течения, не увенчались успехом. При подходе к критическому режиму сечение струи увеличивалось по всей длине (увеличивался и ее вес) и в самом узком месте - в точке отбора, происходил обрыв. Вероятной причиной обрыва может быть значительный градиент скорости в точке отбора, а соответственно, и значительные растягивающие напряжения в этой точке. Так же вероятно влияло скольжение струи по поверхности отборного валка (см. гл. 2.4). Стабилизации продольного течения способствует либо наличие дилатантных свойств у жидкости, либо неизотермичность процесса с повышением (в результате остывания) вязкости в конце зоны течения, что было показано как в настоящем исследовании, так и в работах А.Л. Ярина.

В 1977 г. в лаборатории НПО "Пластполимер" (г. Ленинград) совместно с ВНИИСВ (г. Калинин) проводились экспериментальные

исследования по получению плоской полипропиленовой пленки методом ориентационной кристаллизации. Использовался экструдер с плоскощелевой горизонтальной формующей головкой. В процессе горизонтального формования на поверхность вращающегося вала приемного устройства наблюдалось следующее явление. Предварительно была организована горизонтальная струя с малым провисанием (докритический режим течения). При откате приемного устройства от фильеры с расстояния $\sim 0,15$ м до $\sim 0,24$ м струя стала опускаться вниз, и, чтобы предотвратить ее падение на пол, приемное устройство было установлено в первоначальное положение. Однако струя в первоначальное положение (провисание порядка 0,04 м) не вернулась, а образовала петлю с провисанием порядка 0,5 м. Течение с большим провисанием было устойчиво и могло продолжаться неограниченно долго. Начальная скорость и скорость отбора не изменялись. Таким образом, описанные манипуляции посредством отборного устройства позволяли в неизотермических условиях реализовать как докритический, так и закритический режим течения свободной струи. Качественно описанное поведение струй соответствует прогнозам математической модели.

Именно это экспериментальное наблюдение, обнаруженное Л.М. Бедером, подтолкнуло автора подробно изучить закономерности продольного течения горизонтальной гравитационно изогнутой струи.

3.4. Основные результаты

При горизонтальном вытягивании свободной струи ньютоновской жидкости, когда точки истечения и отбора находится на одном уровне, величина гравитационного провисания обратным образом зависит от растягивающего напряжения; при увеличении напряжения провисание уменьшается, и в предельном случае струя стремится к горизонтальному положению. В случае фиксированной скорости отбора струя имеет два положения равновесия, которые характеризуются различающимися провисаниями и тянущими усилиями. Границу между двумя положениями равновесия определяет критическая кратность K_m численное значение которой зависит от параметра $R = \rho g \ell / (3\eta v_0)$ (зависимость близка к линейной $K_m \cong R$). При $K < K_m$ стационарное течение невозможно. Критическим кратностям соответствует, независящее от R , критическое провисание, которое составляет $y/\ell \cong -0,4$. Струя выбирает положение равновесия в зависимости от организации течения. Описанное явление определено как бифуркация растягивающих напряжений и формы струи. Гидродинамических аналогов не имеет.

Анализ течения упруговязкой жидкости, описываемой обобщенной моделью Максвелла, свидетельствует о различном поведении струи в зависимости от представления конвективной производной в операторе Олдройда. Для ковариантной модели при резонансе скорости деформации изменение скорости отбора с увеличением числа Вейссенберга перестает влиять на провисание и растягивающее напряжение. В случае резонанса

напряжений, характерного для контрвариантной модели, резко увеличивается растягивающее напряжение, а провисание уменьшается до нуля. С увеличением числа Вейссенберга для этого требуется весьма незначительное превышение кратностью критического значения.

Капиллярные силы увеличивают тянущее усилие и снижают устойчивость течения при малых растягивающих напряжениях, характерных для закритической фазы течения.

В нестационарных изотермических режимах при нанесении возмущения по длине струи распространяются чередующиеся продольные волны разбуханий и сужений радиуса. Диспергирование волн зависит от условий течения и реологических свойств жидкости. Для системы характерно сильное демпфирование колебаний, поскольку изогнутая форма струи дает дополнительную степень свободы системе по сравнению с ранее подробно исследованным (Касе С., Пирсон Дж., Ярин А.Л.) течением прямолинейных струй. При этом изменяются условия возникновения автоколебаний в системе. Гравитационный фактор наиболее существенно проявляется в закритическом режиме, при больших провисаниях.

В большинстве случаев потеря устойчивости обусловлена утонением струи в точке отбора. Малые ступенчатые возмущения вызывают в системе быстро затухающие колебания провисания, тянущего усилия и радиуса на выходе. При этом период колебаний соизмерим со временем пребывания жидкой частицы в зоне течения. Динамические процессы в докритическом и закритическом режимах подобны (точнее, зеркально перевернуты), а их устойчивости к ступенчатым возмущениям радиуса или скорости сопоставимы. Критическое течение весьма неустойчиво даже к малым возмущениям.

В неизотермических условиях устойчивость течения повышается к любым типам возмущений. При этом имеет существенное значение стационарное распределение вязкости по длине струи, зависящее от интенсивности охлаждения и энергии активации. Механизмы потери устойчивости качественно отличны от изотермического случая, особенно при возмущениях начальной температуры. Кинетика изменения параметров носит аperiodический характер.

Показана возможность перехода режима течения из докритического в закритический путем изменения длины зоны вытяжки. При этом в струе протекают следующие динамические процессы, С увеличением длины зоны течения струя перемещается вниз в область критических провисаний. Струя разбухает в средней части и сужается на концах. Путем выдержки струи в окрестности критических провисаний разбухание из средней части струи перемещается к выходному сечению и укрепляет его. После этого возможен переход в закритический режим течения. Усиление неизотермичности процесса, характеризуемое числом Стантона, значительно упрощает переход струи в закритический режим, сокращая период "упрочнения" выходного сечения струи.

Упругие свойства жидкости существенно изменяют динамические процессы в струе. В частности, значительно повышаются "демпфирующие" свойства системы, которые проявляются в снижении размаха колебаний средней части струи и быстром затухании переходных процессов. При любых стационарных провисаниях устойчивость течения значительно повышается. В отдельных случаях (закритический режим, отрицательное возмущение начального радиуса) в системе возникают автоколебания, приводящие к потере устойчивости. Упругие свойства, наряду с неизотермичностью, позволяют осуществлять переход из докритического режима в закритический путем изменения длины зоны течения.

Изучены "резонансные" свойства течения путем задания синусоидального возмущения входного сечения, и регистрации радиуса на выходе в установившемся режиме. В случае вязкой жидкости докритический режим показывает резонансный характер зависимости коэффициента усиления от частоты. В околорезонансной области кинетика изменения выходного радиуса имеет вид пологих минимумов и пикообразных максимумов, что согласуется с известными результатами для прямолинейных струй. Закритическое течение значительно снижает коэффициент усиления выходного радиуса на резонансной частоте. При этом ввиду большей протяженности струи снижается резонансная частота. Наличие упругих свойств жидкости значительно усиливает демпфирующие свойства системы и на амплитудно-частотной характеристике полностью исчезает резонансный экстремум. Когда частота вынужденных колебаний велика по сравнению с собственной частотой, величина коэффициента усиления близка к нулю и пульсации выходного радиуса незначительны.

Обнаруженное явление бифуркации течения непрямолинейной струи не противоречит принципу единственности решения уравнений Навье-Стокса [201], поскольку режим течения (докритический или закритический) однозначно зависит от организации процесса (кинематического сценария и начальных условий) и возможен плавный переход из одного режима течения в другой. Подобные явления механики изучаются в теории катастроф.

Стационарное течение свободной изогнутой струи может использоваться при разработке методов непрерывного контроля реологических свойств расплавов и высоковязких растворов полимеров по величине провисания [264]. Изменяя положение точки отбора можно существенно изменять распределение скорости деформации в зоне течения. Это дает возможность управлять режимом формования длинномерных полимерных изделий типа пленок и волокон, а, следовательно, формированием их надмолекулярной структуры.

ГЛАВА 4

СТАЦИОНАРНОЕ ЭЛОНГАЦИОННОЕ ТЕЧЕНИЕ НЕКРУГЛОЙ СТРУИ С УЧЕТОМ ДЕЙСТВИЙ КАПИЛЛЯРНЫХ СИЛ

Современное состояние исследований формирования профилированных волокон Ч.Д. Хан охарактеризовал так: «Из-за сложности проблемы в литературе отсутствует строгий анализ процессов, сопровождающих получение профилированных волокон. Развитие технологии их производства в настоящее время все еще идет по пути «проб и ошибок», и большинство технологических задач в этой области решается на основе частной информации различных фирм»[29].

Количественный подход к формированию профилированных волокон основан на теории тепло - и массообмена в системах, не имеющих радиальной симметрии. Наиболее важной задачей является получение желаемой формы поперечного сечения волокон в зависимости от размеров отверстий фильеры, условий истечения прядильной массы и затвердевания полимера. Анализ процесса течения базируется на квазиодномерной теории элонгационного течения. Поле скоростей в струе трехмерно, что обусловлено действием капиллярных сил на поверхности.

Для вязкой жидкости задача существенно упрощается, если использовать принцип суперпозиции поля скоростей, согласно которому правомерно независимо рассматривать компоненты скорости, обусловленные элонгационным течением и действием капиллярных сил. В начале главы теоретически обоснован принцип суперпозиции. Подробно рассмотрены различные частные случаи течения: изотермическое, неізотермическое. Дана оценка сил инерции.

4.1. Анализ напряжений

В зоне формирования имеем трехмерное неізотермическое течение со свободной поверхностью. Оценка изменения профиля в процессе разбухания полимера на выходе из формующего инструмента представляет значительные трудности и может быть выполнена численными методами или экспериментальным путем. Поэтому рассматриваем зону течения (I) от сечения, где закончился процесс разбухания, и заканчивая точкой отбора. В условиях застывания течение обычно прекращается до точки отбора.

Струя находится в тепловом и аэродинамическом взаимодействии с окружающей средой. Ввиду малой продольной кривизны струи полагаем, что радиальная составляющая силы аэродинамического сопротивления пренебрежимо мала. При мокром формировании эффекты неізотермичности незначительны и капиллярная эволюция профиля определяется массообменными (диффузионными) процессами между струей и средой осадительной ванны.

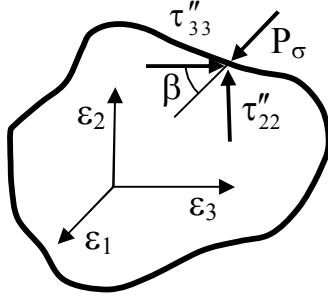


Рис. 4.1. Система координат, используемая при описании течения растяжения струи произвольного профиля.

Струя некруглого сечения под действием капиллярных сил стремится принять округлую форму, для которой потенциальная энергия поверхностного натяжения минимальна. Интенсивность капиллярного формоизменения зависит от площади сечения, вязкости, коэффициента поверхностного натяжения и времени пребывания. Повышение вязкости, обусловленное охлаждением струи, замедляет эволюцию профиля.

Выполним линеаризацию уравнений движения и граничных условий. Схема течения представлена на рис. 4.1. На рисунке ось ε_1 , эйлеровой системы координат, совпадает с направлением вытяжки, оси ε_2 и ε_3 перпендикулярны оси ε_1 , и лежат в плоскости поперечного сечения S . Линеаризация основана на предположении ньютоновских свойств жидкости и малости поперечных размеров струи

Зависимость радиального отклонения от равновесного профиля при капиллярной эволюции.

$$\sqrt{S/\pi} \ll \ell. \quad (4.1)$$

В общем случае компоненты напряжения определяются

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij}, \quad (i,j=1,2,3) \quad (4.2)$$

В силу условия (4.1) для девиаторных компонент напряжения справедливо принять $\tau_{12}=\tau_{13}=0$. Из условия парности касательных напряжений также следует $\tau_{21}=\tau_{31}=0$, и выражение (4.2) в развернутой форме имеет вид

$$\begin{vmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ 0 & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{vmatrix} = -p\delta_{ij} + \begin{vmatrix} \tau_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \tau_{22} & \tau_{23} \\ 0 & \tau_{32} & \tau_{33} \end{vmatrix}.$$

Здесь $\sigma_{12}=\sigma_{13}=\sigma_{21}=\sigma_{31}=0$.

Запишем тензор σ_{ij} в виде суммы

$$\begin{vmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ 0 & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sigma'_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma'_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma'_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma''_{22} & \sigma''_{23} \\ 0 & \sigma''_{32} & \sigma''_{33} \end{vmatrix}, \quad (4.3)$$

$$\begin{vmatrix} \sigma'_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma'_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma'_{33} \end{vmatrix} = -p'\delta_{ij} + \begin{vmatrix} \tau'_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \tau'_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \tau'_{33} \end{vmatrix}, \quad (4.4)$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma''_{22} & \sigma''_{23} \\ 0 & \sigma''_{32} & \sigma''_{33} \end{vmatrix} = -p''\delta_{ij} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \tau''_{22} & \tau''_{23} \\ 0 & \tau''_{32} & \tau''_{33} \end{vmatrix}, \quad (4.5)$$

где $p = p' + p''$.

Выражение (4.4) характеризует режим одноосной вытяжки. При этом полагаем на боковой поверхности струи напряжения равны атмосферному давлению и для направлений $\varepsilon_2, \varepsilon_3$ справедливы соотношения

$$\sigma''_{22} = -p' + \tau'_{22} = 0, \quad (4.6)$$

$$\sigma'_{33} = p' + \tau'_{33} = 0. \quad (4.7)$$

Если определить изотропное давление в (4.4) как

$$p' = -\frac{1}{3}(\sigma'_{11} + \sigma'_{22} + \sigma'_{33}),$$

то в силу равенств (4.6), (4.7) для p имеем

$$p = -\sigma'_{11}/3. \quad (4.8)$$

Согласно (4.4), для σ'_{11} можем записать

$$\sigma'_{11} = -p' + \tau'_{11}. \quad (4.9)$$

Подстановка формулы (4.9) в (4.8) дает

$$p' = -\tau'_{11}/2. \quad (4.10)$$

Из равенств (4.6) в (4.7) для τ'_{22} и τ'_{33} имеем

$$\tau'_{22} = -\tau'_{11}/2, \quad \tau'_{33} = -\tau'_{11}/2. \quad (4.11)$$

С учетом (4.10), (4.11) выражение (4.4) можно записать в традиционном виде [88]

$$\begin{vmatrix} \sigma'_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma'_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma'_{33} \end{vmatrix} = \frac{\tau'_{11}}{2}\delta_{ij} + \tau'_{11} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0,5 & 0 \\ 0 & 0 & -0,5 \end{vmatrix}. \quad (4.12)$$

Соотношение (4.5) характеризует напряжения в поперечном сечении струи, обусловленные действием капиллярных сил на поверхности. В силу условия (4.1) полагаем, что продольная кривизна струи пренебрежимо мала и осевая составляющая капиллярных сил равна нулю $\tau''_{11} = 0$. По правилу касательных напряжений $\tau''_{32} = \tau''_{23}$.

4.1.1. Применение принципа суперпозиции для анализа поля скоростей в зоне формирования

Пусть реологические свойства жидкости описываются законом Ньютона

$$\tau_{ij} = 2\eta d_{ij}, \quad (4.13)$$

где $d_{ij} = 0,5(\partial v_i / \partial \varepsilon_j + \partial v_j / \partial \varepsilon_i)$.

Для компонент напряжения можем записать.

$$\begin{vmatrix} \sigma'_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma'_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma'_{33} \end{vmatrix} = \eta d'_{11} \delta_{ij} + \eta d'_{11} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}, \quad (4.14)$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma''_{22} & \sigma''_{23} \\ 0 & \sigma''_{32} & \sigma''_{33} \end{vmatrix} = -p'' \delta_{ij} + 2\eta \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & d''_{22} & d''_{23} \\ 0 & d''_{32} & d''_{33} \end{vmatrix}. \quad (4.15)$$

Подставляя (4.14), (4.15) в (4.3), получим

$$\begin{vmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ 0 & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{vmatrix} = \eta d'_{11} \delta_{ij} + \eta d'_{11} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} - p'' \delta_{ij} + 2\eta \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & d''_{22} & d''_{23} \\ 0 & d''_{32} & d''_{33} \end{vmatrix}. \quad (4.16)$$

Компоненты d''_{ij} определяется из решения следующей задачи

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial r} + \eta \left(\nabla^2 v_r - \frac{v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} \right),$$

$$0 = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + \eta \left(\nabla^2 v_\varphi - \frac{v_\varphi}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} \right), \quad \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_r}{r} = 0, \quad (4.17)$$

где ∇^2 - оператор Лапласа. На свободной поверхности задаются условия непрерывности нормальных напряжений и отсутствие касательных. Согласно рис. 4.1 имеем $\tau''_{33} \cos \beta + \tau''_{22} \sin \beta = P_\sigma$, $\tau''_{23} = 0$, где $P_\sigma = \sigma/R$ - локальное поверхностное натяжение.

Из сопоставления девиаторных компонент в выражениях (4.2) и (4.16) следует, что результирующая скорость d_{ij} может быть представлена как сумма компонент скоростей деформаций, описывающих различные виды течения: d'_{ij} - одноосного растяжения и d''_{ij} , обусловленного действием капиллярных сил. Это дает возможность применить при решении задачи принцип суперпозиции течений. В общем случае суперпозиция напряжений (4.2) не предполагает суперпозицию полей скоростей. Лишь в частном случае ньютоновской жидкости, когда напряжения и скорости деформации связаны линейно (4.13), правомерна суперпозиция полей скоростей. Полученный результат применим к любым односвязным поперечным сечениям. Требованию односвязности сечения, в частности, удовлетворяет звездообразный профиль в полярных координатах [275]-[279].

Задача (4.17) описывает формоизменение бесконечной

цилиндрической струи вязкой жидкости под действием капиллярных сил. Решение этой задачи выполнено по методике Релея [144] и Био [109], и представлено в разделе 4.2.

Компоненты d_{ij} , входящие в (4.16), определяются из решения задачи для одноосного растяжения струи вязкой жидкости в неизотермических условиях. Этот вид течения изучался многими исследователями, в частности, А.Зябицким [83] и Ч.Д.Ханом [29]. В условиях одноосного растяжения имеет место геометрическое подобие поперечных сечений струи, что было теоретически показано в [177].

4.1.2. Кинетическое уравнение формоизменения профилированного волокна

Проведенный анализ позволяет предложить модель течения, поясняемую рис. 4.2. На расстоянии x от начального сечения струи выделим элементарный участок, протяженностью dx . В пределах участка полагаем величины ρ , v , S , σ , T , η постоянными. На элементарном участке имеет место изохорическое течение жидкости под действием капиллярных сил. Время пребывания жидкости, в предположении однородной по сечению аксиальной скорости v , на участке dx составляет $dt = dx / v$. В представлении по Лагранжу мы имеем капиллярную эволюцию свободной поверхности бесконечного цилиндра вязкой жидкости за период времени dt . Анализ этой задачи представлен в разделе 4.2.

Переход от $i^{го}$ участка к $i+1$ совершается ступенчато. При этом

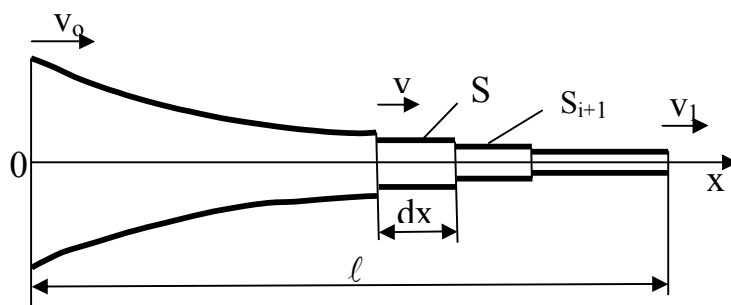


Рис. 4.2.

выполняются условия, характерные для одноосного течения, т.е. начальный профиль на $i+1$ участке геометрически подобен конечному профилю на i участке, и т.д.

Распределение осевой скорости по длине зоны формования находится из совместного рассмотрения уравнений движения и теплового баланса. Методика расчета капиллярной эволюции с учетом кинетики формоизменения представлена в разделе 4.3.

4.2. Автомоделное решение для безынерционного случая

Пусть контур волокна звездообразной формы аппроксимируется тригонометрическим многочленом

$$R^* = q_0^* + \sum_{n=1}^m q_n^* \cos(nZ\varphi), \quad (4.18)$$

где: $Z = \pi/\varphi_0$ - число лучиков в сечении. Величина m ($m \leq \infty$) зависит от требуемой точности.

Под действием капиллярных сил контур волокна стремится принять форму окружности радиуса $\sqrt{S/\pi}$, при этом $q_n^* \rightarrow 0$, $q_0^* \rightarrow \sqrt{S/\pi}$. Разделив обе части выражения (4.18) на $\sqrt{S/\pi}$, получим описание контура в безразмерной форме

$$R = q_0 + \sum_{n=1}^m q_n \cos(nZ\varphi), \quad (4.19)$$

где: $q_n = q_n^* \sqrt{\pi/S}$. Из уравнения неразрывности получим соотношение Парсевалья [144]

$$q_0^2 = 1 - 0,25 \sum_{n=1}^m q_n^2. \quad (4.20)$$

В процессе формоизменения q_0 мало отличается от единицы (меньше чем на 2%). Равновесный контур характеризуется $R=1$. Выражение (4.19) переносит капиллярную эволюцию на круг единичного радиуса, что значительно упрощает анализ.

Полагаем, что вязкость по сечению струн однородна. Силы инерции значительно меньше сил вязкого трения. Подробная оценка сил инерции представлена в разделе 4.2.2. Внешние условия течения стационарны, т.е. параметры σ , η , S изменяются в пространстве, но не изменяются во времени.

Для определения параметров q_n ($1 \leq n \leq m$) как функций времени используем уравнения динамики в форме Лагранжа. Параметры q_n рассматриваются как обобщенные координаты системы

$$\frac{\partial U}{\partial q_n} = -\frac{\partial D}{\partial q_n}, \quad n = 1, \dots, m, \quad (4.21)$$

$$\text{где: } \dot{q}_n = \frac{dq_n}{d\tau}, \quad \tau = \frac{t\sigma}{\eta} \sqrt{\frac{\pi}{S}}, \quad U^* = \sigma U \sqrt{\frac{S}{\pi}}, \quad D^* = \eta D \frac{S}{\pi}.$$

Потенциальная энергия системы в любой конфигурации U , обусловленная капиллярными силами, пропорциональна поверхности струи. В силу симметрии (4.19) ограничимся рассмотрением сектора сечения $0 \leq \varphi \leq \varphi_0$ цилиндра единичной длины. Потенциальная энергия определяется интегралом

$$U = \int_0^{\varphi_0} \left[1 + \left(\frac{1}{2} \frac{\partial R}{\partial \varphi} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} R d\varphi.$$

Разложим подынтегральную функцию в ряд Тейлора и, ограничиваясь первыми двумя членами, получим

$$U = \int_0^{\varphi_0} R dy + \frac{1}{2} \int_0^{\varphi_0} \frac{1}{R} \left(\frac{\partial R}{\partial \varphi} \right)^2 d\varphi.$$

Полагая во втором интеграле для малых отклонений $1/R \approx 1$, можем записать

$$U = q_0 \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \int_0^{\varphi_0} \left(\sum_{n=1}^m Z n q_n \sin(Z n \varphi) \right)^2 d\varphi.$$

Учитывая свойство ортогональности тригонометрических функций, получим расчетное выражение для потенциальной энергии

$$U = q_0 \frac{\pi}{Z} + \frac{\pi}{4} \sum_{n=1}^m Z n^2 q_n^2. \quad (4.22)$$

Численные оценки показали высокую точность (4.22).

Для определения диссипативной функции необходимо знать поле скоростей в поперечном сечении. В силу симметрии центральная точка сечения в течении не участвует, и компоненты скорости в точке $r=0$ равны нулю. Это эквивалентно условию прилипания к бесконечно тонкой нити. Следовательно, вихрь вектора скорости отличен от нуля [280] $\text{rot}(\vec{v}) \neq 0$, где $\vec{v}$ - вектор скорости. Для определения поля скоростей плоского течения воспользуемся уравнением Гельмгольца для функции тока [280]

$$\nabla^2 (\nabla^2 \psi) = 0, \quad (4.23)$$

где: ∇^2 - оператор Лапласа. Пусть компоненты скорости определяются следующим образом $v_r = -r^{-1} \partial \psi / \partial \varphi$, $v_\varphi = \partial \psi / \partial r$.

Для получения соответствия с (4.19) ищем решение уравнения (4.23) в форме

$$\psi = f_n(r) \sin(nZ\varphi). \quad (4.24)$$

Подставляя (4.24) в (4.23) получим уравнение Эйлера

$$r^4 f^{IV} + 2r^3 f''' - (1 + 2n^2 Z^2) r^2 f'' + (1 + 2n^2 Z^2) r f' + (n^4 Z^4 - 4n^2 Z^2) f = 0. \quad (4.25)$$

Решение (4.25) ищем в форме $f=r^k$. Характеристическое уравнение $K(K-1)(K-2)(K-3) + 2K(K-1)(K-2) - (1+2n^2 Z^2)(K-1)K + (1+2n^2 Z^2)K + n^2 Z^2(n^2 Z^2 - 4) = 0$. (4.26)

Решение биквадратного уравнения (4.26) имеет вид $K_{1,2,3,4} = 1 \pm 1 \pm nZ$. Следовательно, искомая функция (для $nZ \geq 2$, $n \geq 1$)

$$f_n = C_1 r^{2+nZ} + C_2 r^{-nZ} + C_3 r^{nZ} + C_4 r^{2-nZ}.$$

Из условия ограниченности функции при $r=0$ и $n \geq 1$ следует $C_2 = C_4 = 0$. Связь между коэффициентами C_1 и C_3 найдем используя условие отсутствия касательных напряжений на поверхности

$$r = 1, \quad r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\varphi}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} = 0.$$

При $r=1$ имеем $C_1(1+nZ) = C_3(1-nZ)$. Для функции тока можем записать

$$\psi = C_n \left[\frac{(1-nZ)}{(1+nZ)} r^{2+nZ} + r^{nZ} \right] \sin(nZ\varphi), \quad C_n = C_3.$$

Здесь и ниже деформация свободной поверхности принимается малой, поэтому граничные условия с деформируемой поверхности сносим по радиусу к границе $R=1$, соответствующей невозмущенному (равновесному) состоянию [281]. Радиальная скорость определяется

$$v_r = -C_n nZ \left[\frac{(1-nZ)}{(1+nZ)} r^{1+nZ} + r^{nZ-1} \right] \cos(nZ\varphi). \quad (4.27)$$

С другой стороны, дифференцируя выражение (4.19) по τ , найдем радиальную скорость свободной поверхности

$$v_{r(r=1)} = \sum_{n=1}^m \dot{q}_n \cos(nZ\varphi). \quad (4.28)$$

Сопоставляя моды (4.27) и (4.28) при $R=1$, получим $C_n = -\dot{q}_n (1+nZ)/(2nZ)$.

Таким образом, функция тока определяется

$$\psi = -\sum_{n=1}^m \frac{\dot{q}_n (1+nZ)}{2nZ} \left[\frac{(1-nZ)}{(1+nZ)} r^{2+nZ} + r^{nZ} \right] \sin(nZ\varphi). \quad (4.29)$$

Для рассматриваемой области диссипативная функция Рэлея определяется интегралом

$$D = \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^{\varphi_0} \left[4 \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - \frac{v_\varphi}{r} \right)^2 \right] d\varphi r dr.$$

Выполнив интегрирование с учетом (4.29), получим

$$D = \sum_{n=1}^m \frac{\pi(nZ-1)(1+nZ)}{2nZ^2} \dot{q}_n^2. \quad (4.30)$$

Подставив (4.22), (4.30) в (4.21), получим для обобщенных координат систему дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{dq_n}{d\tau} = -\frac{n^3 Z^3}{2(nZ-1)(nZ+1)} q_n, \quad n=1, \dots, m. \quad (4.31)$$

В момент $\tau=0$ обобщенные координаты q_n являются Фурье – коэффициентами для начального профиля, поэтому можем записать начальное условие: $\tau=0$, $q_n=q_{n0}$, $n=1, \dots, m$. С учетом начального условия, решение системы (4.31) имеет вид

$$q_n = q_{n0} \exp \left[-\frac{n^3 Z^3 \tau}{2(nZ-1)(nZ+1)} \right]. \quad (4.32)$$

Подставляя (4.32) в (4.19), окончательно получим выражение, описывающее эволюцию свободной поверхности бесконечного цилиндра

$$R = q_0 + \sum_{n=1}^m q_{n0} \exp \left[-\frac{n^3 Z^3 \tau}{2(nZ-1)(nZ+1)} \right] \cos(nZ\varphi), \quad (4.33)$$

где: q_0 является функцией τ и определяется согласно (4.20), (4.32). Расчетная формула (4.33) хорошо согласуется с полученными позже результатами анализа капиллярной эволюции вязкого двухслойного цилиндра выполненного методом Фурье [282].

4.2.1. Регулярный режим формоизменения

Форма выражения (4.33) позволяет провести следующую важную для приложений аналогию с теорией теплопроводности [6], [283], а именно с регулярным режимом теплопроводности твердых тел. Обозначим в выражении (4.33)

$$\mu_n = \frac{n^3 Z^3}{2(nZ-1)(nZ+1)}.$$

При этом для μ_n имеем очевидное неравенство

$$\mu_1 < \mu_2 < \mu_3 < \dots < \mu_{m-1} < \mu_m. \quad (4.34)$$

В силу неравенства (4.34) каждый последующий член ряда (4.33) с увеличением τ будет исчезающим малым по сравнению с предыдущим, а сумма всех членов будет отличаться лишь на малую величину от величины первого члена. Поэтому, начиная с определенного значения безразмерного времени τ_1 , можно ограничиться одним первым членом ряда, т.е.

$$R = q_0 + q_{1,0} \exp \left[-\frac{Z^3 \tau}{2(Z-1)(Z+1)} \right] \cos(Z\varphi) \quad \text{при } \tau > \tau_1. \quad (4.35)$$

Начиная с τ_1 , зависимость между R и τ будет описываться простой экспонентой. Логарифмируя (4.35), получим

$$\text{sign}(R - q_0) \ln |R - q_0| = \text{sign}(q_{1,0} \cos Z\varphi) \ln |q_{1,0} \cos Z\varphi| - \frac{Z^3 \tau}{2(Z^2 - 1)}. \quad (4.36)$$

Таким образом, графически зависимость $\text{sign}(R - q_0) \ln |R - q_0|$ от τ будет иметь вид прямой. При этом φ имеет фиксированное значение, соответствующее точке измерения R . Следует отметить, что при $\tau > \tau_1$, величина q_0 в соответствии с (4.20) стремится к единице и без большой погрешности в (4.36) можно положить $q_0 = 1$.

Следовательно, весь процесс формоизменения можно разделять на три стадии. Первая стадия неупорядоченного режима характеризуется тем, что здесь большую роль играет начальная конфигурация сечения. Всякая особенность формы сечения в начальный момент отражается на форме сечения в следующие моменты безразмерного времени. Зависимость между R и τ описывается многочленом (4.33). Вторую стадию можно, по аналогии с теорией теплопроводности, назвать регулярным режимом формоизменения. На этой стадии зависимость между R и τ описывается простой экспонентой. Конфигурация сечения характеризуется функцией $\cos Z\varphi$ и не зависит от начальной конфигурации, так как величина $q_{1,0}$ входит в качестве множителя, определяя масштаб, а не сущность явления. Третья стадия соответствует

равновесному состоянию ($\tau=\infty$), при котором сечение имеет форму круга ($R=1$). Проведенный анализ правомерен исключительно для струй звездообразного сечения и не может быть распространен на другие сечения.

На рис.4.3 представлен график зависимости $\ln|R-q_0|$ от τ для точек поверхности $\varphi=0$ и $\varphi=\varphi_0$. Из рисунка видно, что на стадии регулярного режима линии имеют вид прямой. Характер изменения линий в первой стадии может быть самым различным. При любом значении φ в стадии регулярного режима линии параллельны между собой и составляют угол ξ с осью τ . Тангенс угла наклона прямых линий будет равен

$$-\operatorname{tg}\xi = \frac{\ln|R(\tau_1)-1| - \ln|R(\tau_2)-1|}{\tau_2 - \tau_1} = m_1. \quad (4.37)$$

Постоянная m_1 характеризует изменение логарифма отклонения точки контура от положения равновесного состояния по времени, т.е.

$$-\frac{\partial \ln|R-1|}{\partial \tau} = m_1. \quad (4.38)$$

Она идентична для всех точек контура и может быть названа темпом формоизменения. Из равенства (4.36) следует

$$m_1 = \frac{Z^3}{2(Z^2 - 1)}. \quad (4.39)$$

Численное значение m_1 определяется числом лучиков. Заменяя в (4.38) τ его выражением через размерные величины, с учетом (4.39) можем записать

$$\frac{\eta}{\sigma} = \frac{\sqrt{\pi}Z^3}{2(Z^2 - 1)} \frac{d(t/\sqrt{S})}{d \ln|R-1|},$$

или в конечных равностях

$$\frac{\eta}{\sigma} = \frac{\sqrt{\pi}Z^3(t_2/\sqrt{S_2} - t_1/\sqrt{S_1})}{2(Z^2 - 1)[\ln|R(t_1)-1| - \ln|R(t_2)-1|]}. \quad (4.40)$$

Здесь η и σ считаем независимыми от t (течение изотермическое), а S может изменяться с ростом t , например, если струя вытягивается.

Регулярный режим формоизменения имеет для исследования капиллярных явлений такое же значение как регулярный тепловой режим для анализа тепловых процессов. Выражения (4.38)-(4.40) могут использоваться для измерения вязкости или поверхностного натяжения. Следует отметить, что цилиндрическая струя имеет ограниченную устойчивость и при малых скоростях растяжения может произойти капельное разрушение, особенно, если вязкость мала, а поверхностное натяжение велико. Это ограничивает область применения теории регулярного режима формоизменения для анализа течения цилиндрических струй. Между тем, если распространить эту теорию на сферические капли вязкой жидкости, то можно разработать новые методы измерения σ или η по "упругому восстановлению" капли в условиях

малой деформации её поверхности, например, от эллипсоидальной формы к сферической.

Можно следующим образом повысить точность выражения (4.38). В (4.35) и (4.36) величина q_0 близка к единице, но не равна ей. Ограничиваясь первым членом ряда (4.20), можем записать $q_0 \approx \sqrt{1 - q_1^2/4}$. Учитывая, что $q_1^2/4 \ll 1$, разложим q_0 в ряд Маклорена по степеням q_1^2 и взяв первые два члена, получим $q_0 \approx 1 - q_1^2/8$. Подставив это выражение в (4.35), имеем

$$R - 1 = q_{1,0} \exp(-m_1 \tau) \left[\cos(Z\varphi) - \frac{1}{8} q_{1,0} \exp(-m_1 \tau) \right].$$

Для описания эволюции высоты лучика необходимо от $R(\varphi=0)$ отнять $R(\varphi=\varphi_0)$. При этом получим выражение $R^+ - R^- = 2q_{1,0} \exp(-m_1 \tau)$, где $R^+ = R(\varphi=0)$, $R^- = R(\varphi=\varphi_0)$. Выполнив последовательно логарифмирование и дифференцирование этого выражения по τ , получим выражение, описывающее эволюцию высоты лучика в регулярном режиме формоизменения

$$-m_1 = \frac{\partial \ln(R^+ - R^-)}{\partial \tau}. \quad (4.41)$$

Контролировать размер $(R^+ - R^-)$ можно с большей точностью, чем любой другой, следовательно, выражение (4.41) более удобно для практических расчетов чем (4.38).

4.2.2. Оценка сил инерции

Решение (4.33) получено в предположении незначительности сил инерции по сравнению с силами вязкого трения. Это положение требует численной оценки. Ниже приведено решение задачи с учетом действия сил инерции.

В безразмерной форме уравнения Лагранжа, с учетом кинетической энергии, имеют вид

$$L \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial T_k}{\partial \dot{q}_n} \right) + \frac{\partial U}{\partial q_n} = - \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_n}, \quad (4.42)$$

где $L = (\rho\sigma/\eta^2) \sqrt{S/\pi}$ - безразмерный параметр, T_k - безразмерная кинетическая энергия, определяемая интегралом

$$T_k = \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^{\varphi_0} (v_r^2 + v_\varphi^2) d\varphi r dr, \quad (4.43)$$

где v_r , v_φ - компоненты безразмерной скорости, определяемые из (4.29).

Воспользовавшись теоремой Остроградского-Гаусса, выражение (4.43) можем записать через функцию тока

$$T_{\kappa} = \frac{1}{2} \left[\int_0^{\varphi_0} \frac{\partial \psi}{\partial r} \psi r \Big|_{r=1} d\varphi + \int_0^1 \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \frac{\psi}{r} \Big|_{\varphi=\varphi_0} dr \right]. \quad (4.44)$$

Второй интеграл в правой части равен нулю т.к. $\psi=0$ при $\varphi=\pi/Z$.
Выполнив интегрирование, имеем

$$T_{\kappa} = \frac{\pi}{4} \sum_{n=1}^m \frac{(nZ+2)}{n^2 Z^2} \dot{q}_n^2. \quad (4.45)$$

Подставив (4.22), (4.30), (4.45) в (4.42), получим

$$\ddot{q}_n + a\dot{q}_n + bq_n = 0, \quad (4.46)$$

где
$$a = \frac{4n^2 Z^2 (nZ+1)}{L(nZ+2)}, \quad b = \frac{n^4 Z^4}{L(nZ+2)}, \quad \ddot{q}_n = \frac{d^2 q_n}{d\tau^2}.$$

Решение уравнения (4.46) зависит от соотношения параметров a и b .
Могут иметь место следующие три случая [322]:

1) если $L > 16(nZ+1)^2 / (nZ+2)$, то решение имеет вид

$$q_n = \exp\left(-\frac{a\tau}{2}\right) \left[C_1 \cos\left(\frac{\lambda\tau}{2}\right) + C_2 \sin\left(\frac{\lambda\tau}{2}\right) \right], \quad (4.47)$$

где $\lambda^2 = 4b - a^2$, C_1 и C_2 - постоянные интегрирования;

2) если $L < 16(nZ+1)^2 / (nZ+2)$, то решение имеет вид

$$q_n = C_1 \exp\left(\frac{-a+\lambda}{2}\tau\right) + C_2 \exp\left(\frac{-a-\lambda}{2}\tau\right), \quad (4.48)$$

где $\lambda^2 = a^2 - 4b$;

3) если $L = 16(nZ+1)^2 / (nZ+2)$, то $q_n = \exp\left(-\frac{a\tau}{2}\right) (C_1\tau + C_2)$.

Первый случай соответствует маловязкой жидкости. Капиллярное равновесие струи идеальной жидкости было рассмотрено Рэлеем [144]. Второй случай соответствует течению вязкой жидкости с учетом сил инерции. Если положить $L=0$, то второй случай переходит в (4.32). Третий случай имеет чисто математический смысл.

Оценим силы инерции. Найдем численные значения параметра L для различных жидкостей. Пусть равновесный радиус струи $\sqrt{S/\pi} = 10^{-3}$ м., тогда для ртути при 20°C имеем [284] $L=2,44 \cdot 10^6$; для воды $L=7,28 \cdot 10^4$; для глицерина при 0 °C $L=5,1 \cdot 10^{-4}$; для полиамида $L=3,6 \cdot 10^{-6}$. Из приведенных значений видно, что для полимеров величина L близка к нулю, и силами инерции можно пренебречь.

4.2.3. Анализ математической модели изохорического течения под действием капиллярных сил

Согласно (4.31) с увеличением числа лучиков скорость формоизменения возрастает. В частности, трехлопастное волокно (шелк) обладает большей капиллярной устойчивостью чем, например, волокно, имеющее 5 и более лучиков.

В качестве характеристики профиля была принята безразмерная высота лучика $\delta = (R^+ - R^-) / (R_0^+ - R_0^-)$, где $R_0^+ = R^+(\tau=0)$, $R_0^- = R^-(\tau=0)$, которая представляет отношение текущей высоты лучика к высоте лучика в начальный момент времени ($\tau=0$). На рис. 4.4 представлена зависимость характеристики профиля δ от τ , для сечений, представленных на рис.4.5. Из рисунка видно, что регулярный режим формоизменения наступает при $\tau > 0,8$ - для профиля (а) и при $\tau > 1,3$ - для профиля (б).

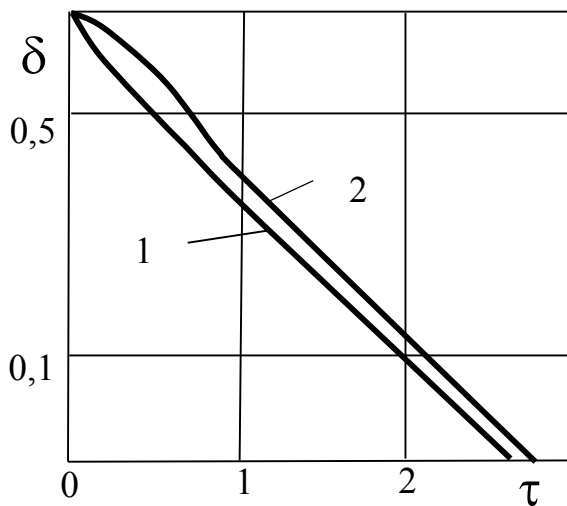


Рис. 4.4. Зависимость безразмерной высоты лучика от безразмерного времени формоизменения для волокон различной начальной конфигурации: 1 — для профиля (а), 2 — для профиля (б)

Выполнен численный расчет формоизменения для пятилучевого профиля, рассмотренного Грёбе и Ферзоймером [141] и профиля получаемого из фильеры в форме круга с пятью прямоугольными пазами, описанного Ч.Д.Ханом [29].

Контур исходного профиля аппроксимировался отрезком ряда Фурье (использовалось 6 членов) методом $12^{\text{н}}$ точек. За начальную конфигурацию профиля [141] был взят профиль, получаемый при длине зоны формования равной 4 см, поскольку при этом формоизменение было незначительно, и получаемый профиль соответствовал разбухшему сечению. Для начального профиля из [54.] были получены следующие значения коэффициентов Фурье: $q_{1,0}=0,395$; $q_{2,0}=0,12$; $q_{3,0}=0,07$; $q_{4,0}=0,035$; $q_{5,0}=0,02$; $q_{6,0}=0,0081$. Для профиля из [29] аппроксимация была выполнена в предположении, что конфигурация разбухшего сечения совпадает с профилем фильеры, и коэффициенты Фурье начального сечения: $q_{1,0}=0,215$; $q_{2,0}=0,157$; $q_{3,0}=0,078$; $q_{4,0}=-0,00123$; $q_{5,0}=-0,0593$; $q_{6,0}=-0,0403$.

Результаты расчета конфигурации лучиков в различные моменты безразмерного времени, выполненные с помощью выражения (4.33), представлены на рис. 4.5. Из рисунка видно, что наиболее интенсивно процесс формоизменения протекает в интервале $0 < \tau < 0,8$. При $\tau > 0,8$

доминирует первая гармоника и два типа сечений после этого времени, имеют практически идентичный вид, характеризуемый функцией $\cos(5\varphi)$. Процесс формоизменения практически заканчивается при $\tau=2,5$. При этом δ не превышает 0.01.

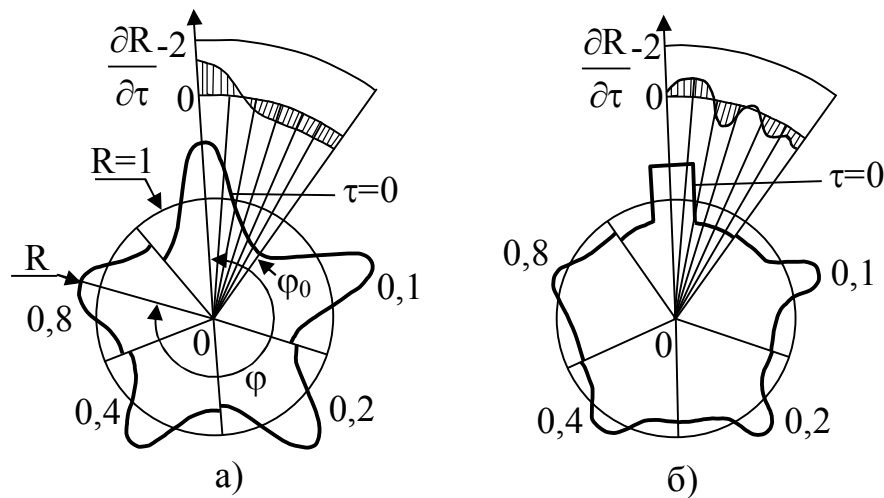


Рис.4.5. Капиллярная эволюция волокон различного профиля в безразмерном представлении: а – профиль, используемый в работе [141]; б – в работе [29].

Кроме того, на рис. 4.5 представлены профили радиальной скорости свободной поверхности в начальный момент. Скорость определялась путем дифференцирования выражения (4.33). Эпюра радиальной скорости поверхности имеет сложный характер, зависящий от конфигурации поверхности волокна. Для профиля из [29] наибольшую скорость имеют точки, находящиеся в острых углах сечения, где наибольшая кривизна поверхности.

Вид расчетных профилей качественно согласуется с экспериментальными результатами работ [29], [141].

4.3. Конфигурация волокна в условиях застывания

Капиллярную эволюцию поперечного профиля однозначно можно охарактеризовать величиной безразмерного времени формоизменения. Эта характеристика является универсальной и может быть использована для оценки формоизменения волокна любой конфигурации. Именно величина τ характеризует конечную форму профиля, поэтому представляет интерес расчет τ в условиях застывания, вытягиваемого волокна.

Безразмерное время формоизменения следующим образом определяется через размерные величины (см. раздел 4.2) $\tau = (\tau\sigma/\eta)\sqrt{\pi/S}$.

В процессе формования, если рассматривать элемент струи в системе Лагранжа, величины t , η , S , σ изменяются. О зависимости поверхностного натяжения (σ) полимеров от температуры имеются сведения в работе [164].

Рассмотрим участок пути формования длиной dx (см. рис.4.2). Время пребывания жидкости на этом участке, в предположении однородной по сечению осевой скорости, составляет $dt=dx/v$. Течение на элементарном участке изохорическое. Приращение безразмерного времени формоизменения на элементарном участке составит

$$d\tau = \frac{\sigma}{\eta v} \sqrt{\frac{\pi}{S}} dx. \quad (4.49)$$

Полученное дифференциальное уравнение описывает кинетику формоизменения (поэтому может быть названо кинетическим). Процесс формоизменения можно уподобить химической реакции, протекающей в сечении волокна, скорость которой зависит от параметров η , S , σ . Уравнение (4.49) позволяет рассчитывать общее время формоизменения, если известны зависимости η , S , σ от расстояния, поэтому его необходимо рассматривать совместно с уравнениями сохранения импульса и теплового баланса.

4.3.1. Математическая модель неизотермического формования профилированного волокна

Пусть сдвиговая вязкость жидкости зависит от температуры согласно закону Аррениуса

$$\eta = \eta_0 \exp \left[\frac{E}{R_1} \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} \right) \right],$$

где E – энергия активации, R_1 – газовая постоянная, T – температура, T_0 – начальная температура, η_0 – вязкость при температуре T_0 .

По А.Зябицкому [83] баланс сил, действующих на волокно при вертикальном формировании, описывается уравнением

$$\frac{d}{dx}(S\sigma_{xx}) - G \frac{dv}{dx} - \Pi\sigma_{xt} + \rho g S = 0, \quad (4.50)$$

включает: силу реологического сопротивления $d(S\sigma_{xx})/dx$, силу инерции Gdv/dx , силу аэродинамического трения $\Pi\sigma_{xt}$ и гравитационную силу $\rho g S$. Здесь x – продольная координата, ρ – плотность жидкости, v – осевая скорость, S – площадь поперечного сечения струи, Π – периметр свободной поверхности, G – весовой расход жидкости, σ_{xx} – осевое напряжение. Силами поверхностного натяжения в продольном направлении пренебрегаем.

Исследований по аэродинамическому трению и теплообмену профилированных волокон в настоящее время не имеется, поэтому перенесем результаты, полученные для круглых волокон, путем введения эквивалентного диаметра.

Напряжения от аэродинамического трения определяются $\sigma_{\text{хг}} = C_f 0,5\rho_c v^2$, где $C_f = A \text{Re}^\gamma$ - коэффициент аэродинамического трения [83], ρ_c – плотность среды. Характерным линейным размером в Re являются эквивалентный диаметр

$$d_s = \frac{4S}{\Pi} = \frac{2}{\Phi} \sqrt{\frac{G}{\pi\rho v}}, \quad (4.51)$$

где $S = G/(\rho v)$, $\Pi = 2\Phi\sqrt{\pi G/(\rho v)}$, $\Phi = 1 + (Z^2/8) \sum_{n=1}^m q_n^2$ - коэффициент формы или критерий конфигурации. Параметр Φ определяется с помощью выражения для потенциальной энергии (4.22), которая характеризует длину периметра профилированного волокна. Коэффициент формы показывает во сколько раз периметр профилированного волокна больше периметра круга идентичной площади. При $\tau \rightarrow \infty$, $\Phi = 1$.

При формировании волокон изменение вязкости полимера с температурой обычно настолько велико, что влиянием неньютоновости можно пренебречь [83]. Напряжение $\sigma_{\text{хх}}$ зависит от градиента скорости и температуры

$$\sigma_{\text{хх}} = 3\eta_0 \frac{dv}{dx} \exp\left[\frac{E}{R_1} \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0}\right)\right].$$

Теплообмен между волокном и окружающей средой описывается законом Ньютона. Для элемента нити длиной dx площадь теплоотдающей поверхности, с учётом эффекта оребрения, составит Πdx [285]. Уравнение теплового баланса, без учёта эффектов кристаллизации и диссипации, имеет вид

$$GC_p dT = -\alpha(T - T_c)\Pi dx. \quad (4.52)$$

Коэффициент теплоотдачи определяется из уравнения $Nu = B\text{Re}^\beta$ [83]. В Nu и Re характерный размер (4.51).

Следует отметить, что тепловой эффект от работы капиллярных сил незначителен. Так для повышения температуры полиамидного волокна на 1К профилированное волокно должно иметь размеры, исчисляемые сотыми долями микрона.

В уравнения (4.50), (4.52) входит критерий конфигурации Φ , характеризующий эффект оребрения за счёт лучиков, следовательно, процесс формоизменения влияет как на динамику движения волокна в зоне формования, так и на его охлаждение.

Введём безразмерные параметры: $X = x/\ell$, $V = v/v_0$, $\Theta = (T - T_c)/(T_0 - T_c)$. Уравнения (4.49), (4.50), (4.52) запишем в виде системы

$$\tau' = \frac{\text{Re}}{\text{We}\sqrt{V}} \exp\left[\frac{E}{R_1} \left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{\Theta(T_0 - T_c) + T_c}\right)\right], \quad (4.53)$$

$$\Gamma' = \frac{\Gamma^2}{V} - \frac{\text{Re}_2^\beta E \Gamma V^{0,5\beta} \Phi^{2-\beta} \Theta (T_0 - T_c)}{\text{Gz} R_1 [(T_0 - T_c) \Theta + T_c]^2} +$$

$$+ \text{Re}_1 (V \Gamma + \text{Re}_2^\gamma \zeta V^{2,5+0,5\gamma} \Phi^{1-\gamma} - \text{Fr}) \times \exp \left[\frac{E}{R_1} \left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{\Theta (T_0 - T_c) + T_c} \right) \right],$$

$$V' = \Gamma, \quad \Theta' = -\frac{\text{Re}_2^\beta}{\text{Gz}} \Phi^{2-\beta} \Theta,$$

$$\text{где } \text{Re}_1 = \frac{\rho v_0 \ell}{3 \eta_0}; \quad \text{Re}_2 = \frac{2 \rho_c}{\eta_c} \sqrt{\frac{v_0 G}{\pi \rho}}; \quad \text{We} = \frac{3 v_0}{\sigma} \sqrt{\frac{\rho G v_0}{\pi}}; \quad \text{Fr} = \frac{g \ell}{v_0^2};$$

$$\text{Gz} = \frac{G C_p}{\pi \ell \lambda_c B}; \quad \zeta = A \rho_c \ell \sqrt{\frac{\pi v_0}{\rho G}}.$$

Штрих означает производную по X . Уравнения (4.53) записаны для случая, когда ρ , σ , E , C_p не зависят от температуры. Граничные условия для системы (4.53) имеют вид:

$$\begin{aligned} X=0, \quad \tau=0, \quad V=1, \quad \Theta=1; \\ X=1, \quad V=K, \end{aligned} \quad (4.54)$$

где $K = v_1 / v_0$ - действительная кратность фильерной вытяжки.

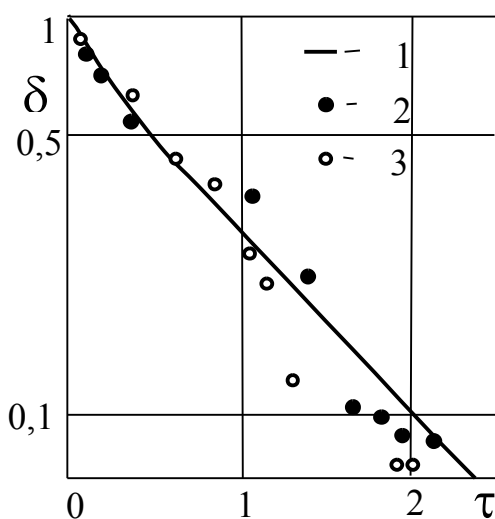


Рис. 4.6. Зависимость безразмерной высоты лучика от времени формоизменения: 1 – расчетная кривая для профиля (а); 2, 3 – опытные точки для $G=4,16 \times 10^{-5}$ и $8,33 \times 10^{-5}$ кг/с, соответственно.

Численный анализ системы (4.53), (4.54) выполнен методом Рунге – Кутты. Проверка на адекватность проводилась путём сопоставления расчётных результатов (безразмерная высота лучика и безразмерное время формоизменения) с экспериментальными результатами работы [141]. В указанной работе авторы исследовали поперечные сечения волокон, сформированных из расплава полиамида 6 из фильеры с отверстиями звездообразной формы. Волокно проходило определённый путь на воздухе ($\ell = 0,04 \div 2,62$ м), а затем быстро охлаждалось в жидкой ванне. С увеличением длины пути по воздуху поперечные сечения становились более округлыми. Расчёты выполнены для условий: $\eta_0=10^2$ Па·с, $\sigma=3,6 \times 10^{-2}$ Н/м, $T_0=548$ К, $T_c=303$ К, $E=41,7$ кДж/моль [125], $B=0,325$, $\beta=0,3$, $A=0,65$, $\gamma=0,7$

[83], $v_1=9,167$ м/с. Решение велось методом стрельбы: варьируя начальный градиент скорости вытяжки ($\Gamma(X=0)$) добивались выполнения условия отбора (4.54). Следует отметить, что с увеличением длины зоны формования

(увеличивается критерий Фруда) повышается чувствительность системы к изменению начального градиента.

Результаты представлены на рис. 4.6. В качестве характеристики профиля была взята безразмерная высота лучика (см. разд. 4.2.). За начальный был принят профиль, получаемый при формировании с $\ell=0,04$ м, который близок к профилю разбухшего сечения. Сопоставление расчетных и экспериментальных результатов показывает их удовлетворительное соответствие.

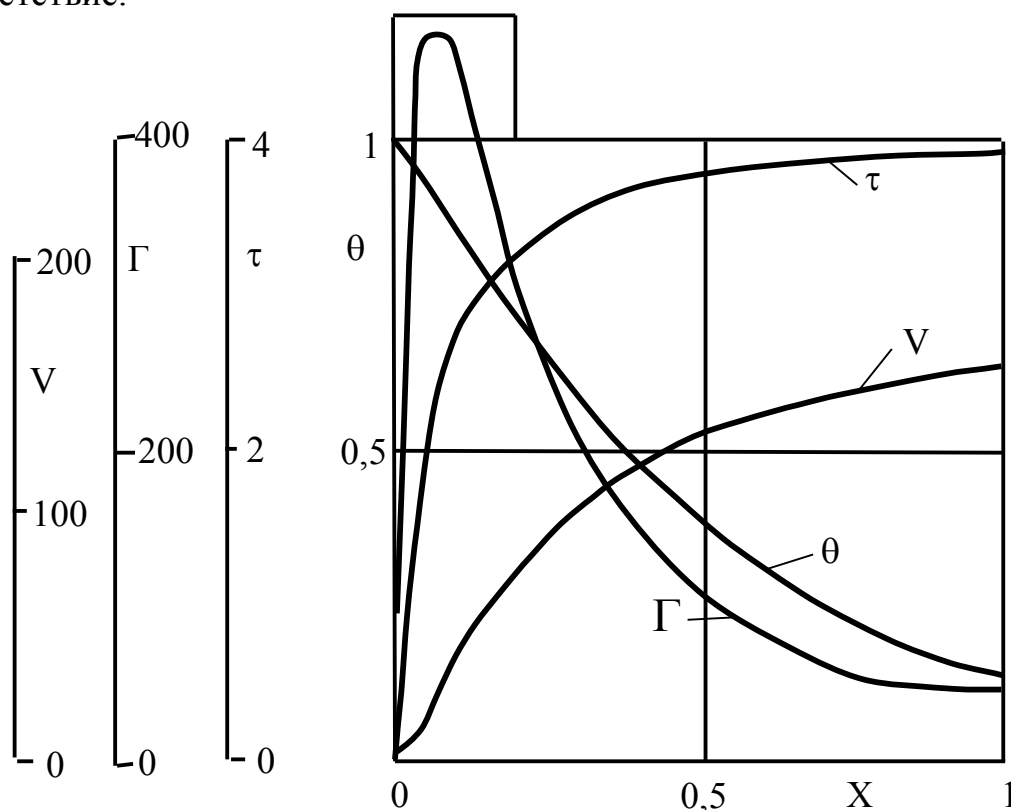


Рис. 4.7. Распределение безразмерных параметров по длине зоны формирования

На рис. 4.7. представлены расчётные распределения безразмерных параметров по длине зоны формирования. Расчёты выполнены для случая: $\ell=2,62$ м, $G=4,16 \times 10^{-5}$ кг/с, $v_0=0,056$ м/с, $K=163$. Из рисунка видно, что наиболее интенсивно формоизменение протекает в непосредственной близости от фильеры, где время пребывания сравнительно велико (осевая скорость мала) и вязкость расплава наименьшая. Процесс формоизменения (изменение τ) заканчивается значительно раньше, чем процесс течения. Длина области интенсивного формоизменения зависит от условий организации процесса. В рассматриваемом случае она составила 0,5 м. Путь от зоны интенсивного формоизменения до точки застывания волокно проходит с большой скоростью, и, несмотря на существенное уменьшение размеров поперечного сечения, профиль волокна изменяется незначительно, поскольку вязкость возрастает, а время пребывания незначительно.

В работе [29] предлагается снизить капиллярное искажение профиля путём увеличения скорости отбора. Проведённый анализ подтвердил это предположение. Например, увеличение скорости отбора в 12 раз приводит к уменьшению результирующего значения τ на 10 %. Таким образом, этот способ формосохранения нельзя считать эффективным, кроме того, не всегда возможно увеличить скорость отбора без нарушения технологического регламента. Между тем, расчёты показывают сильную зависимость τ от начальной скорости струи v_0 . Так, например, уменьшение v_0 в 2 раза приводит к уменьшению τ в 5,5 раз (v_1 и G – постоянны)! Это связано с тем, что с уменьшением начальной скорости время пребывания в зоне интенсивного формоизменения сокращается. Из этого следует целесообразность изготовления профильных фильер большего выходного сечения. Капиллярные эффекты также можно подавлять путём увеличения энергии активации и понижением температуры формования.

Модель (4.53) не учитывает надмолекулярные процессы, протекающие в полимере. В общем случае надмолекулярные процессы (кристаллизация, ориентация) могут быть не менее важны, чем капиллярная эволюция профиля. В этом случае систему уравнений (4.53), (4.54) следует дополнить уравнениями кинетики надмолекулярных изменений и целевой функцией считать формирование в волокне заданной надмолекулярной структуры.

4.3.2. Модель изотермического формирования

В изотермическом случае математическая модель существенно упрощается. Процесс изотермического формования реализуется в условиях быстрого замораживания струи на сравнительно небольших расстояниях от фильеры, подобно тому, как это делалось авторами работы [141].

В безразмерных переменных, с учётом уравнения неразрывности, дифференциальное уравнение кинетики формоизменения (4.49) имеет вид

$$d\tau = \frac{\ell\sigma}{\eta_0} \sqrt{\frac{\pi\rho}{Gv_0}} \frac{dX}{\sqrt{V}}. \quad (4.55)$$

Таким образом, задача сводится к определению распределения безразмерной скорости.

Уравнение движения с учётом сил инерции и реологического сопротивления (4.50) представляет нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка

$$\frac{d}{dX} \left(\frac{1}{V} \frac{dV}{dX} \right) - Re_1 \frac{dV}{dX} = 0. \quad (4.56)$$

Повторное интегрирование уравнения (4.56) даёт

$$X = \frac{1}{\Gamma_0 - \text{Re}_1} \ln \left| \frac{\Gamma_0 V}{\text{Re}_1 V + \Gamma_0 - \text{Re}_1} \right|, \quad (4.57)$$

где $\Gamma_0 = dV(X=0)/dX$ – начальный градиент осевой скорости. Параметр Γ_0 находится из условия отбора

$$\Gamma_0 - \text{Re}_1 = \ln \left| \frac{K\Gamma_0}{\text{Re}_1(K-1) + \Gamma_0} \right|. \quad (4.58)$$

Из выражения (4.57) для осевой скорости имеем

$$V = \frac{(\Gamma_0 - \text{Re}_1) \exp[(\Gamma_0 - \text{Re}_1)X]}{\Gamma_0 - \text{Re}_1 \exp[(\Gamma_0 - \text{Re}_1)X]}. \quad (4.59)$$

Подставив (4.59) в (4.55), с учётом начального условия $X=0$, $\tau=0$, для общего безразмерного времени формоизменения (после интегрирования) получим выражение

$$\tau = \frac{2A\sqrt{\text{Re}_1}}{(\Gamma_0 - \text{Re}_1)^{1.5}} \left[\sqrt{\frac{\Gamma_0 - \text{Re}_1}{\text{Re}_1}} - \sqrt{\frac{\Gamma_0 - \text{Re}_1 \exp(\Gamma_0 - \text{Re}_1)}{\text{Re}_1 \exp(\Gamma_0 - \text{Re}_1)}} \right] + \text{Arcsin} \sqrt{\frac{\text{Re}_1}{\Gamma_0}} - \text{Arcsin} \left(\sqrt{\frac{\text{Re}_1}{\Gamma_0} \exp(\Gamma_0 - \text{Re}_1)} \right), \quad (4.60)$$

где $A = (\sigma\ell/\eta_0) \sqrt{\pi\rho/(Gv_0)}$.

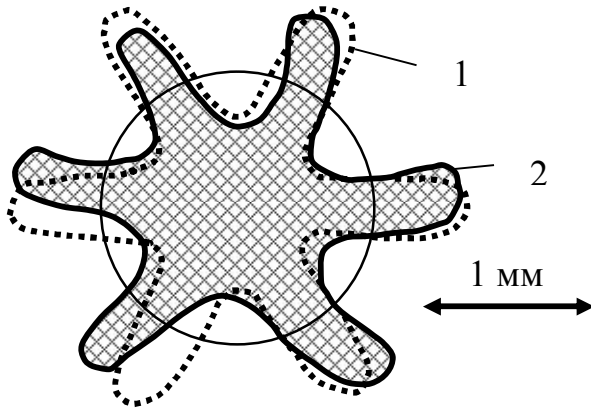


Рис. 4.8. Сопоставление расчетного (1) и опытного (2) профиля поперечного сечения профилированной жилки.

Из (4.60) видно, что τ возрастает с увеличением коэффициента поверхностного натяжения. Из сопоставления A и Re_1 следует, что если отношение ℓ/η_0 остаётся постоянным то величина τ сохраняет постоянное значение. При прочих равных условиях с увеличением G величина τ уменьшается как $\tau \sim 1/\sqrt{G}$. Формула (4.60) удовлетворительно соответствует экспериментальным результатам [141] при $\ell \leq 0,5\text{ м}$, когда эффекты неизотермичности несут существенны. При $\ell > 0,5\text{ м}$. Расчётные τ превышают экспериментальные, поскольку модель (4.60) не учитывает

увеличение вязкости.

Решение уравнения (4.56) без учёта сил инерции имеет вид $V=K^X$. Подставляя его в (4.55) и выполнив интегрирование, получим для времени формоизменения, соответствующего точке отбора

$$\tau = \frac{2\ell\sigma}{\eta_0} \sqrt{\frac{\pi\rho}{Gv_0}} \frac{(\sqrt{K}-1)}{\sqrt{K} \ln K}, \quad (4.61)$$

где $K \neq 1$. С увеличением скорости отбора время формоизменения уменьшается, соответственно профиль волокна меньше искажается.

На рис. 4.8 сопоставлены расчетный и опытный профили сечения. Расчеты выполнены по формуле (4.33) для $\tau=0,03$. Безразмерное время формоизменения соответствует длине зоны изотермического формования 8 см [302]. Безразмерное время формоизменения найдено по формуле (4.61). Имеет место удовлетворительное соответствие контуров сечения (исключая изгиб лучиков).

Таким образом, по результатам исследования можно сделать следующие выводы. Для вязкой жидкости правомерна суперпозиция полей скорости, обусловленных одноосным продольным течением и капиллярной эволюцией поперечного сечения, что значительно упрощает задачу анализа трехмерного течения.

Степень капиллярного искажения формы некруглой струи в условиях продольного неизотермического течения может быть охарактеризована безразмерным комплексом, включающим время, вязкость, коэффициент поверхностного натяжения и площадь поперечного сечения. При прочих равных условиях струя звездообразного сечения, имеющая меньшее количество лучиков, имеет большую капиллярную устойчивость.

Для струй звездообразного профиля существует регулярный режим формоизменения, при котором зависимость между радиусом свободной поверхности и временем описывается простой экспонентой, а конфигурация может быть охарактеризована тригонометрической функцией, и не зависит от начальной формы лучика. Перенесённое из теории теплопроводности понятие регулярного режима формоизменения, может быть использовано при разработке новых методов контроля вязкости или поверхностного натяжения.

Эффект оребрения приводит к тому, что капиллярное формоизменение поперечного профиля влияет на динамику движения струи и на интенсивность охлаждения.

Наиболее интенсивно эволюция профиля протекает в непосредственной близости от фильеры, и может быть снижена увеличением начального сечения струи (формирующего отверстия).

ЛИТЕРАТУРА

1. Беляев Н.М., Рядно А.А. Методы нестационарной теплопроводности. - М.: Наука, 1978.-328с.
2. Цой П.В. Методы расчета задач тепло- массопереноса. -М.: Энергоатомиздат, 1984.- 416 с.
3. Шехтер Р.С. Вариационный метод в инженерных расчетах. - М.: Мир, 1971.-291с.
4. Коздоба Л.А. Методы решения нелинейных задач теплопроводности. - М.: Наука, 1975.-284с.
5. Лыков А.В. Методы решения нелинейных уравнений нестационарной теплопроводности//Энергетика и транспорт.-1970.-№5.-С.109-150.
6. Лыков А.В. Теория теплопроводности. - М.: Высшая школа,1967.-599 с.
7. Канторович Л.В., Крылов В.И. Приближенные методы высшего анализа. - М.:ИФМЛ, 1962.-708с.
8. Журавлев Л.В. и др. Математическое моделирование технологических процессов в производстве химических волокон//Химические волокна.-1976.-№4.-с.34-39.
9. Лукач Ю.Е., Петухов А.Д., Сенатос В.А. Оборудование для производства полимерных пленок. - М.Машиностроение, 1981.-224с.
10. Dow J., Patchell A.G., Piskozub Z.T. Newer routes to fibere from-film//Plast. And Polum , 19.72, 40, №146, 80-83.
11. . Badrian W.H., Choufer J.H.L. Fibrillated polypropylene fibre//Text. Manuf., 1971, 97, №1159, 263-268.
12. Зверев М.П. Карбоцепные синтетические волокна. - М.: Химия, 1973.-589с.
13. Какорина И.Г., Зверев М.П. Способы получения и области применения волокон из пленки. -М.: НИИТЭХИМ.1975.-55с.
14. Balk H. Fibrilliren-Ein neues Verfahren zur Herstellung von Synthesefasern // Kunsts. - Berat., 1970, 16, N11,1090-1096.
15. Половихина Л.А. и др. Фибриллированные и плоские нити на основе полиолефинов//Хим. вол.-1972.-№4.-с. 56-58.
16. Гусев В.Е. и др. Улучшение грунтовых материалов для тафтинговых ковровых изделий//Текстильная промышл.-1976.-№1.с.10-12.
17. Бакуменко Т.Д., Фильберт Д.В. Экономические предпосылки развития производства полимерных волокон в СССР//Химические волокна.-1971.-№4.-с.6-68.
18. Гуль В.Е., Дьяконова В.П. Физико-химические основы производства полимерных пленок. - М.:Высшая школа,1978.-279с.
19. Фридман М.Л. Технология переработки кристаллических полиолефинов. - М.: Химия, 1977.-400с.
20. Такахаси Г. Пленки из полиолефинов. - Л.:Химия,1971.-152с.
21. Schrenk W.J. Multilayer Plastik Film//Pol. Preprint., 1973,14, №1, 241-244.
22. Loggewie E., Wurl G. Extrudieren von Follen und Plasten uber die Breitschlitzdüse//Kunststoffe , 1973, 63, № 10, 675-678.

23. Техника переработки пластмасс/Под ред. Басова Н.И., Броя. - М.: Химия, 1985.-528с.
24. Schönbach G. Neuzeitliche fertigung von Kunstsoffolien//Neue Verpackung , 1969, 23, № 3, 298-307.
25. Shih N.C., Middleman S. Post Extrusion Heat and Solvent Transfer from Polymerik Film // Pol.End.Sci., 1970, 10, №1, 4-12.
26. Рудницкий В.П. и др. Исследование влияния вибрации оформляющей части головки экструдера на разбухание экструдата. - В сб.: Материалы республ. научно-техн. совещания по реологии и переработке полимеров. Казань, 1974.-С.48-49.
27. Маицуми Х., Макишима Х., Окамура Х. Исследование литья тонкой пластмассовой пленки с целью сокращения изменений её толщины//Симитомо дзюкикай гито. Техн. Рев.,1974.-22.-№66.-С.99-105.
28. Патент 3930774 США. Контроль толщины экструдированного листа// Оpubл. 21.09.76.
29. Хан Ч.Д. Реология в процессах переработки полимеров. - М.: Химия, 1979.-368с.
30. Семенов В.Г., Панферов П.Я. Установка для одноосной ориентации полимерных пленок//Химическое и нефтяное машиностроение.-1977.-№8.-С.44-46.
31. Семенов В.Г. и др. Влияние параметров ориентационных валков на качество одноосноориентированных полимерных пленок//Химическое и нефтяное машиностроение.-1977.-.№2.-С.37-39.
32. Сагалаев В.Г. и др. Напряжение и работа при одновременной двухосной вытяжке полиэтилентерефталатной пленки//Пластмассы.-1966. -№6. -С. 34-36.
33. Иванов В.И., Сагалаев Г.В. К расчету длины зоны ориентации и мощности привода установок для ориентации полиэтилентерефталатных пленок//Химическое и нефтяное машиностроение -1973.-№8.-С.10-32.
34. Семенов В.Г. и др. Расчет параметров процесса продольной ориентации полимерных пленок на валковых установках//Химическое и нефтяное машиностроение -1976.- №1.-с. 18-21.
35. Kress S, Pfirrmann V. Verarbeitungsparameter beim Recken von Polyäthylenterephthalat-Folie auf Rollenreckmaschinen//Kunststoffe., 1969, 69, № 4, 252-255.
36. Schönbach G, Keuzeitliche fertigung von Kuristsoffolien//Neue Verpackung., 1969, N3, 298-307.
37. Hensen F., Hassenbruch R. Extrusion von mehrschichtblasfolien//Österreicher Plastic-Verarbeiter., 1971, 22, N 5, 313-318.
38. Schrenk W.J. Multilayer Plastic Films//Poiymer Preprints.,1973, 14, №1, 241-244.
39. Nakamura K. e.a. Some aspekt of nonisothermal crystallization of polymers//J.Appl.Polym.Sci , 1972,16,№5,1077-1091.
40. Каргин В.А., Андрианова Г.П., Кардаш Г.Г. О механизме больших деформаций кристаллического полипропилена в широком интервале

- температур//Высокомолек. соед. -1967. -№2. -С. 267-287.
41. Виноградская Е.Л., Тарасов Б.Я. Изучение механических свойств полиэтилена в изделиях при растяжении в широком диапазоне температур//Механика полимеров.-1969.-№5.-С.778-786.
 42. Никитин Е.Г., Марусенка В.В. Влияние технологии переработки на структуру и свойства полипропилена//Механика полимеров.-1971.-№2.-С.200-201.
 43. Зверев М.П. Волокна из синтетических полимеров. - М.: Химия, 1973.-С.491-589.
 44. Манделькern Л. Кристаллизация полимеров. - М.-Л.: Химия, 1966.-336с.
 45. Джейл Ф.Ж. Полимерные монокристаллы. - Л.: Химия, 1968.-552с.
 46. Каргин В.А., Слонимский Г.Л. Краткие очерки по физико-химии полимеров. - М.: Химия, 1967.-232с.
 47. Петухов Б.В. Полиэфирные волокна. - М. :Химия, 1976.-272с.
 48. Кудрявцев Г.И., Носов М.П., Волохина А.В. Полиамидные волокна. -М.: Химия, 1976.-262с.
 49. Баранов В.Г. и др. Влияние механического поля на морфологию кристаллизации полимеров//Механика пол. -1970. №6.-с.963 -970.
 50. Баранов В.Г. Ориентационная кристаллизация полимеров//Хим. вол. - 1977.-.№6. -С. 14-20.
 51. Перепелкин К.Е., Пугач Б. М. Основные закономерности формирования волокон мокрым методом при различных способах изменения фильерной вытяжки//Хим. вол. -1974. -№1. - с. 22-24.
 52. Гаспарян К.А. и др. Образование надмолекулярной структуры при экструзии пленок полиэтилена низкого давления//Механика полимеров.-1973.-№1.-С.178-179.
 53. Громов В.И. и др. Структура и свойства пленок полиэтилена, полученных при ориентационной кристаллизации//Механика полимеров.-1974.-№3.-С.522-524.
 54. Трелоар Л. Физика упругости каучука. - М.: Иностранная литература, 1953.-240с.
 55. Маликов О.Г. Влияние ориентационной кристаллизации на структурно-механические свойства изделий из полиэтилена. - В сб. :Машины и технология переработки полимеров. Л., 1974.-С.55-58.
 56. Ciferri A., Ward T.M. Ultra-high moduls Polymers//Appl. Sci. Publ, 1979,371-377.
 57. Сенатос В.А. и др. Особенности процесса охлаждения воздухом рукавной пленки//Химическое машиностроение. - К.: Техника. - Вып.27.- -С.12-16.
 58. Сенатос В.А. и др. Исследование процесса формования рукавной пленки//Химическая технология. -1974.-№8. -С. 51-53.
 59. Скрипник С.И. Кинетика температурных изменений при формовании волокна из расплава//Химическая технология. -1977. -№2.- с. 60--62.
 60. Суров Ю.В., Геллер В.Э. Оценка температурных полей моноволокон в процессе формования//Хим. вол.-1974.-№1.-с.17-20.
 61. Holmes-Walker W.A., Martin B, Theory of bubble cooling in film

- blowing//British Plastics, 1966, 39, 232-236.
62. Малиновский В.В. Расчет времени охлаждения изделий из полимерных материалов малой толщины//Химическое машиностр. - К.: Техника.-1978.- Вып.28.-С.29-51.
 63. Карслоу Х., Егер Д. Операционные методы в прикладной математике. - М. :ГИИЛ,1948. -292 с.
 64. Берд Р., Стьюарт В., Лайтфут Е. Явления переноса. - М.:Химия, 1974.-687 с.
 65. Scholl K.H. Berührungslose Temperaturmessung an Blasfolien// Österreichischer Plasticverarbeiter, 1971, 22, №6, 398-402.
 66. Niedzialek B., Ghomiak J. Prosta metoda pomiaru temperaturu Powierzchni za pomoca czujnikow promieniowania calkowitego// Prace Institut lotnictwa, 1967,№31, 24-29.
 67. Fuchs G. Temperaturmessen beim Hohlkörperblasen//Plastver arbeiter, 1968,N2, 99-102.
 68. Predöhl W. Wärmestrahlungsverhältnisse bei Kunststoff-Folien // Kunststoffe, 1971,61,N7, 489-491.
 69. Перепелкин К.Е. Физико-химические основы процессов формования химических волокон. - М.:Химия,1978.320 с.
 70. Лыков А.В., Михайлов Ю.А. Теория тепло - и массопередачи. - М.: Госэнергоиздат,1963.-536с.
 71. Перепелкин К.Е., Серков А.Т. Процессы тепло - и массообмена при формировании химических волокон. - М.:НИИТЭХИМ,1976.-48с.
 72. Лыков А.В. Теплообмен.-М.:Энергия,1978.-470с.
 73. Griffin J.F., Throne J.L. On thermal bondary layer growth on continuons moving belts//A.J.Gh.E , 1967, 13, 1210-1215.
 74. Bourne D.E., Dixon H. The cooling of fibers in formation process//Jnt.J. of Heat and Mass Trans., 1971,14,№9, 1323-1332.
 75. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. - М.:Наука,1969.-744с.
 76. Маньковский О.Н. и др. Теплообменная аппаратура химических производств. - М.:Химия,1976.-368с.
 77. 77. Михеев М.А., Михеева И.М. Основы теплопередачи. - М.:Энергия, 1977.-342с.
 78. Bhattacharyya D., Pel B.C. Heat transfer from a continuons moving surface under forced and free convections//Austral.Chem. Eng., 1973,14,№3,5.12.
 79. Matsuo T., Kase S. Studies on Melt Spinning//J.Polym. Sci., 1976, 20, 367-373.
 80. Мучник Г.Ф., Рубашов И.Б. Методы теории теплообмена. - М.: Высшая школа, 1970.-287 с.
 81. Predöhl W. Wärmestrahlungsverhältnisse bei Kunststoff-Folien//Kunststoffe , 1971,61,№7,489-491.
 82. Menges G., Predöhl W. Der Wärmeübergang an Blasfolien und ihr Schrumpferhalten//Plastverarbeiter, 1972,5,N3, 338-344.
 83. Зябицкий А. Теоретические основы формования волокон. - М.: Химия, 1979.-504 с.

84. Bird R.B., Armstrong R.C., Hassager O. Dynamics of polymeric liquids., v.1. Fluid Mechanics.-New York: Wiley, 1977.-440 p.
85. Гетманюк Т.М. и др. Особенности формирования полых волокон из расплавов поликарбонатсилоксана//Химич. вол.-1989.-№3.-С.41-43.
86. Yarin A.Y.e.a. Quasi one-dimensional model of drawing of glas micropillaries and approximate Solutions//Bulgarian Academy of Sci. Sofia, 1989,20, N3, 55-61.
87. Высокоскоростное формирование волокон/Под ред. А.Зябицкого, Х.Каваи.- М.:Химия,1988.-488с.
88. Кестенбойм Х.С., Шарчевич Л.И., Ярин А.Л. О закрученных пленках ньютоновских и упруговязких жидкостей//МЖГ.-1988.-№3.- с.170-178.
89. Ентов В.М., Султанов Ф.М., Ярин А.Л. Распад жидких пленок под действием перепада давления окружающего газа//ДАН СССР. Техническая физика.-1985.-т.284.-.№5.-С.1116-1120.
90. Султанов Ф.М., Ярин А.Л. О радиальном расширении цилиндрических слоев вязких и реологически сложных жидкостей// Инженерно-физический журнал.-1986.-т.50.-№6.-С.922-930.
91. Султанов Ф.М., Ярин А.Л. О Рэлей-Тейлоровской неустойчивости раздуваемых полимерных пленок//ЖПМТФ.-1988.-№3.-С.104-110.
92. Ентов В.М., Султанов Ф.М., Ярин А.Л. Распад жидких пленок под действием перепада давления окружающего газа//МЖГ.-1986.- №3. -С. 57-61.
93. Ентов В.М. Динамика пленок вязких и упругих жидкостей// (Препринт ИПМ АН СССР №130)-М.,1979.-47с.
94. Entow V.M. On the dynamics of films of viscous and elasoviscals liquids//Arch. Mech.Stosow., 1982, 34, №4, 395-407.
95. Тадмор З., Гогос К. Теоретические основы переработки полимеров. - М.:Химия,1984.-628с.
96. Шульман З.П., Хусид Б.М. Нестационарные процессы конвективного переноса в наследственных средах. - Минск: Наука и техника, 1983.-256с.
97. Астарита Дж. Марруччи Дж. Основы гидромеханики неньютоновских жидкостей. - М.:Мир,1978.-309с.
98. Ярин А.Л. Реология растворов и расплавов полимеров. - М.: ИПМ АН СССР Препринт №288.-1978.-66с.
99. Ярин А.Л. Интенсивные течения полимерных жидкостей в струях и пленках: реология и гидродинамика. Автореф. Дис. ... докт. ф.-м. наук. М.,1988.-32с.
100. Радев С., Чавдаров Б., Ярин А.Л. О выпучивании тонких жидких струй и нитей//МЖГ.-1987.№4.-с.37-45.
101. Тябин Н.В. и др. Математическая модель плоского растяжения вязкоупругих полимерных пленок. - В сб.:2 Всесоюзн. симпоз. "Теория механической переработки полимерных материалов". Пермь, 1980. -С.158-159.
102. Lipp R., Bergman J. Zur Modellirunp: von Dehnströmungsprozessen Bewegungsgleichungen // Plaste mid Kautschuk. 1983, 30, № 2, 86-91.

103. 103. Wagner M.H, Ein rheologischthermodynamisches Prozeßmodell des Folieinblasverfahrens//Diss. Dokt. Ingenieurwiss. Univ. Stuttgart (TH), 1976, 111s.
104. Бувевич Ю.А., Скуратов В.К. О растяжении прядомой жидкости под действием собственного веса//МЖГ.-1975.- №5.-С.10-14.
105. Бортников В.Г. Растяжение трубчатой заготовки под действием сил гравитации. - В сб.: Тезисы II Всесоюз. симпоз. "Теория механической переработки полимерных материалов". Пермь,1980.- -С.167-168.
106. Алексеев Н.И. Статика и установившееся движение гибкой нити. -М.: Легкая индустрия,1970.-272с.
107. Кочин Н.Е. Об изгибе троса змейкового аэростата под действием ветра. В кн.: Собрание сочинений. Т.2.-М.-Л.: Изд. АН СССР, 1949.-С.536-548.
108. Сергеев А.К. К расчету тепловой нагрузки вала каландра//Химическ. и нефтян. машиностроение.-1969.-№11.-С. 16-17.
109. Био М. Вариационные принципы в теории теплообмена. - М.: Энергия,1975.-208с.
110. Лагун В.Н. Класс частных решений одномерных нелинейных уравнений теплопроводности//Инженерно-физический журнал.-1977.-т.32.- №3.-С.508-511.
111. Aziz A., Beuzies J.Y., Application of perturbation techniques to heat-transfer problems with variable thermal properties //Int.J.Heat and Mass Transfer, 1976,19,N3, 271 -276.
112. Цирельман Н.М. Анализ решений некоторых нелинейных задач нестационарной теплопроводности// Инженерно-физический журнал.-1977.-т.32. -№1.-С.150-151.
113. Самойлов А.В. Тепловые расчеты червячных и валковых машин. - М. Машиностроение ,1978.-152с.
114. Бедер Л.М. и др. Расчет температуры полимерной пленки, охлаждаемой при формовании//Хим. волокна. -1985.-№4.-с.23-24.
115. Шаповалов В.М. и др. Охлаждение полимерной пленки на барабане с учетом зависимости коэффициента теплопроводности от температуры//Инженерно-физический журнал.-1980.-т. 38.-№1.- С. 129-133.
116. Ляпков А.В. Разработка методов расчета процесса производства полимерной пленки. Дис. ... канд. техн. наук.- Калинин,1989.- 215с.
117. Лукач Ю.Е., Чижская Л.В. Исследование процесса теплообмена в системе валок-полимерперерабатывающий материал. - В кн.: Химическое машиностроение. Вып.34.-К.:Техника,1981.-С.22-27.
118. Хейсо В.А., Рейн Д.М., Бедер Л.М. Исследование контактного теплообмена бесконечного цилиндра//Деп. в ВИНТИ.№2493-82,1982.
119. Рейн Д.М. и др. Математическая модель неизотермической кристаллизации полимеров в условиях переработки. В сб.: 2 Всесоюзный симпозиум "Теория механической переработки полимерных материалов", Пермь,1980.-С.18-19.
120. Menges G., Michaels W. Beitrag zur Extrusion von Plachfolien und Tafeln

- // Plastverarbeiter, 1974,25,№5,296-301.
121. Pechoc V. Generalized numerical solution of heat equation with moving boundary condition//Collect. Czech, Chem. Coimnuns, 1971, 36, N 9, 3222-3235.
122. Dietz W, Refroidissement des Plastiques // Plastiques Modernes et Elastomeres, 1976, 28, N4, 104-110,
123. Michaeli W.,e.i. Produktbeeinflussung durch Werkzeug und Folgeaggregate bei der Extrusion // Plastverarbeiter, 1976, 27, N 9, 490-495.
124. Шлыков Ю.П., Гание Е.А., Царевский С.Н. Контактное термическое сопротивление. - М.:Энергия,1977.-328с.
125. Кузьмин М.П. Электрическое моделирование нестационарных процессов теплообмена. - М.:Энергия,1974.-416с.
126. Шаповалов В.М. Исследование теплообмена при получении плоской пленки. Дис. ... канд. техн. наук - Волгоград,1980.-188с.
127. Lambert C. Temperaturen und Warmestrome an gekuhlen walzen bei der Kunststoffverarbeitung // Kunststoffe, 1977,67,N4, 226-227.
128. Литвинов В.В., Гохберг Г.С., Бекин Н.Г. Численное решение неізотермической задачи течения аномальновязких материалов между вращающимися цилиндрами. - В кн. Реологические свойства полимерных систем. Свердловск,1979.-С.40-45.
129. Бондаренко В.Н. и др. Математическая модель процесса каландрования. - В сб.: Тез.3 Всесоюзн. симпоз. "Теория механической переработки полимерных материалов", Пермь,1985.-С.27.
130. Волков В.З. и др. Фильеры для формования химических волокон и нитей. Обзор. Инф. сер. Синтетические волокна. - М.:НИИТЭХИМ, 1986.-56с.
131. Пакшвер А.Б. Физико-химические основы технологии химических волокон. - М.:Химия,1972.-С.432.
132. Кларе Г., Фрицше Э., Грёбе Ф. Синтетические полиамидные волокна. - М.:Мир,1966.-684с.
133. Савинов Б.В. Развитие ассортимента синтетических нитей для текстильных и трикотажных изделий//Хим. волокна. -1981. -.№6.-С.17-21.
134. Левич В.Г. Физико-химическая гидромеханика. - М.: Физматгиз, 1959.-699с.
135. Kase S., Matsuo T. Studies on melt spinning//Polym, Sci, 1965, 3, N 7, 2541-2554.
136. Matovich M.A., Pearson J.R.A. Spinning a molten threadlifie//Ind. and Eng. Chem. Fundam., 1969, 8,N3, 512-520.
137. Lee H.C. Drop formation in a liquid jet//IBM J.Res.and Develop, 1974, 18, №4, 364-369.
138. Ентов В.М., Ярин А.Л. Динамика струй капельной жидкости//ИПМ АН СССР Препринт.-1979.-№127.-64с.
139. Ентов В.М., Ярин А.Л. Уравнения динамики струи капельной жидкости//МЖГ.-1980.-№5.-С.11-18.
140. Ентов В.М. и др. Исследование распада струй реологически сложных жидкостей // ЖПМТФ. -1980. -№3. -С. 90-98.

141. Gröbe V., Versäumer H. Über die Fadenbildung beim Schmalzspinnen//Faserforsch. und Textiltechn, 1963, 14, №6, 249-256.
142. Ентов В.М., Ярин А.Л. Об одной задаче капиллярной гидродинамики//МЖГ.-1987.-№6.-С.101-108.
143. Григорьянц В.В. и др. О формировании двухслойных заготовок для волоконных световодов с профилированным сердечником // ДАН СССР.- 1989.-т. 305.-№4.-С. 855-860.
144. Стретт Дж. Б. (лорд Рэлей) Теория звука. Том 2.-М.:ГИТТЛ, 1955.-475С.
145. Шульман З.П., Байков В.И. Реодинамика и тепломассообмен в пленочных течениях. - Минск.: Наука и техника, 1979.-296 с.
146. Епихин В.Е., Шкадов В.Я. Течение и неустойчивость капиллярных струй, взаимодействующих с окружающей средой//МЖГ.-1978.-№6.-С.50-59.
147. Гонор А. Л., Яковлев В.Я. Динамика удара капли по твердой поверхности//МЖГ.-1978.-№1.-С.36-43.
148. Филянд Л.В. Неустойчивость и распад капиллярных жидких струй в смутном потоке воздуха//МЖГ.-1981.-№3.-С.124-128.
149. Шкадов В.Я. Некоторые методы и задачи теории гидродинамической устойчивости/Научные труды института механики МГУ.- 1973.-№25.-192с.
150. Гонор А.Л., Золотова Н.В. Торможение и деформация жидкой капли в потоке газа//МЖГ.-1981.-№2.-С.58-69.
151. Bohr N. Determation of the surface tension of water by method of jet vibration//Philos. Trans. Roy. Soc. London., 1909, 209-281.
152. Петров Г.И., Калинина Т.Д. Применение метода малых колебаний к исследованию распада струи топлива в воздухе//Технические заметки МАП.-1947.-№4.-213 с.
153. Бородин В.А. и др. Распыливание жидкостей. - М.: Машиностроение, 1967.-287с.
154. Дитякин Ю.Ф. Об устойчивости и распаде на капли жидкой струи эллиптического сечения // Изд. АН СССР ОТН. - 1954. - Т.10. - С.124-130.
155. Иванов В.А. О дроблении жидкой струи // ПМТФ.-1966.-№8.- с.30-37.
156. Герценштейн С.Я., Шкадов В.Я. Устойчивость неосесимметричных жидких струй//МЖГ.-1973.-№1.-С.43-52.
157. Новиков А.А. Нелинейные капиллярные волны на поверхности струи вязкой жидкости//МЖГ.-1977.-№2.-С.179-182.
158. Landman K.A. Stability of a viscous compound fluid drop//AIChE Joynal., 1985, 31, №4, 567-573.
159. Ентов В.М., Ярин А.Л. Динамика струй и пленок реологически сложных жидкостей//В сб. Итоги науки и технике.Сер.МЖГ.-1984.-Т.18.-С.112-197.
160. Гонор А.Л., Яковлев В.Я. О некоторых результатах в теории удара капли по твердой поверхности. В кн.Струйные и отрывные течения.- М.,1979.-С.70-74.
161. Гонор А.Л., Яковлев В.Я. Удар капли по твердой поверхности //МЖГ.-

- 1977.-№5.-с.151-155.
162. Брич М.А. Расчет деформаций капли жидкости. В кн. Тепло- и массоперенос. Институт тепло- и массообмена им. А.В. Лыкова. АН БССР.-Минск,1980.-С.69-70.
163. Ландау Л.Д., Ляфшиц Е.М. Механика. - М.: Наука, 1973.-208с.
164. Русанов А.И. Фазовые равновесия и поверхностные явления.- Л.:Химия,1967.-388с.
165. Kammer H.-W.u.a. Grenzflächenerchein unden in Polymerschmelzen//Faserforsch.und Textiltechn.,1976,27,№1,15-17.
166. Berger W.u.a. Grensflächenercheinungen in Polymerschinelzen //Paserforsch.und Textiltechn.,1976,27,№1 ,9-14.
167. Виноградов Г.В., Малкин А.Я. Реология полимеров. - М.: Химия, 1977.-440с.
168. Малкин А.Я. и др. Эффект разбухания полимерной струи при истечении из цилиндрического и щелевого каналов//Мех. полимеров.-1976.-№3.-С.478-492.
169. Прокунин А.Н., Севрук В.Д. Об эффекте разбухания при вытяжке упругой жидкости из капилляра// Инженерно-физический журнал.-1980.-39.-№2.-С. 343-350.
170. Прокунин А.Н., Проскурнина Н.Г. О связи однородного и неоднородного растяжения упругих жидкостей// Инженерно-физический журнал,-1978.-34.-№4,-С.625-629.
171. Акутин М.С. и др. О растяжении расплавов с постоянной скоростью деформации//Мех.пол.-1977.-№2,-С.353-356.
172. Прокунин А.Н., Проскурнина Н.Г. О механизме стационарного вытягивания полимерной струи из капилляра//Хим.вол.-1878.-№5.-С.22-24.
173. Прокунин А.Н., Проскурнина Н.Г. О роли реологии в процессе растяжения расплавов полимеров постоянной силой// Инженерно-физический журнал.-1979.-36.-№-3.-С.504-511.
174. Прокунин А.Н., Филиппова Н.П. Замедление течения полимерной жидкости при больших упругих деформациях// Инженерно-физический журнал.-1979.-37.-№4.-С.724-729.
175. Берман В.С., Ярин А.Л. Динамические режимы формования волокон//МЖГ. -1983. -№6.-С.31-37.
176. Куличихин В.Г., Малкин А.Я. Реология одноосного растяжения полимерных систем//Хим.вол.-1975.-№1.-С. 17-22.
177. Литвинов В.Г. Вытяжка вязко-упругой струи//Мех. пол.-1967.-№2.-С.326-333.
178. Ентов В.М. Реологические эффекты в динамике струй и пленок, В сб.: Новое в реологии полимеров. Материалы II Всесоюзн.симпоз. по реологии.Суздаль,1980.Вып.І.М.1982,с.172-181.
179. White J.L., Metzner A.B. Development of constitutive Equations for Polymeric Melts and Solutions//J.Appl.Pol.Sci., 1963,7, 1867-1889.
180. White J.L. Dynamics of viscoelastic fluids, melt fracture, and the rheology of fiber spinning//J. Appl. Pol. Sci., 1964, 8, 2339-2357.

181. Han G.D., Park J.Y. A study of shaped fiber formation// J.Appl.Pol.Sci.,1973,17, N 1, 187-200.
182. Ting L.S.e.a. Computer simulations of commercial melt spinning processes//Proc.3 Pacif.Chem.Eng.Gongr.1983,2,117-123.
183. Milton E.M. numerical Evaluation of Temperature Profiles and Interface Position in Filaments Undergoing Solidification// AIChE Journal., 1980, 16, N1, 57-63.
184. Осипов Н.П. и др. Определение температуры движущейся нити //Хим. вол. -1989. -№2. -С. 54-56.
185. Жиганов Н.К. и др. Метод определения реологических характеристик полимеров при формовании//Хим. вол.-1988.-№2.-С.7-9.
186. Жиганов Н.К. и др. Анализ причин несоответствия результатов экспериментальных и теоретических исследований резонанса вытягивания нитей//Хим.вол. -1988. -№2. -С. 11-13.
187. Генис А.В., Коровицын К.О. Внешняя аэродинамика в процессе получения волокнистых материалов одностадийным способом//Хим. вол.-1988.-№2.-С.14-16.
188. Коровицын К.О. и др. Изотермическое растяжение струи расплава полимера при аэродинамическом формовании волокон//Хим, вол. -1988. - №2. -С. 18-19.
189. Жиганов Н.К. Математическая модель аэродинамического способа формования волокон из расплавов полимеров//Хим. вол.-1988. -№4.-С.18-20.
190. Жиганов Н.К. и др. Влияние параметров аэродинамического формования и свойств полимера на диаметр волокон//Хим. вол. -1988. - №5. -С. 37-39.
191. Жиганов Н.К. и др. Теория гидродинамической неустойчивости формования полимеров, обусловленной "резонансом вытягивания" и случайными возмущениями. -В сб.:3 Всесоюзн. Симпоз. "Теория механической переработки полимерных материалов".Пермь, 1985.-С.63.
192. Жиганов Н.К. и др. Влияние "резонанса вытягивания" на неустойчивость неизотермического формования вязких, аномальновязких и вязкоупругих полимеров. -В сб.: III Всесоюзн. симпозиум "Теория механической переработки полимерных материалов".Пермь, 1985.-С.64.
193. Елисеев В.И. и др. Расчет процесса формования синтетических волокон из расплавов полимеров.-В сб.:2 Всесоюзн.н.-техн. конф."Реология и оптимизация процессов переработки полимеров", Ижевск,1989.-С.183.
194. Литвинов В.Г. К исследованию температурных полей в ориентируемых моноволокнах//Прикладная механика.-1967.-Вып.7.-т.3,-С.79-86.
195. Morrison M.E. Numerical Evaluation of Temperature Profiles and interface Position in Filaments Undergoing Solidification//AIChE J., 1970, 16, № 1, 57-63.
196. Kase S., Matsuo T. Studies on melt spinning//J. Pol. Sci.,1965, 3, N 7, 2541-2554.

197. Matovich M., Pearson J.R.A. Spinning a molten threadline//Ind. Eng. Chem. Fundam., 1969, 8, №3, 512-520.
198. Pearson J.R.A., Matovich. M. Spinning a molten threadline//Ind. Eng. Chem. Fundam., 1969, 8, №4, 605-609.
199. Ishihara H., Kase S. Studies on melt spinning//J. Appl. Polym. Sci., 1975, 19, N2, 557-565.
200. Geyling F.T. Basic fluid-dinam c consideration in the drawing of optical fibers//B.S.T.J., 1976, 55, №8, 1011-1056.
201. Колпашиков В.Л., Мартыненко О.Г., Шнип А.И. Динамическая модель реакции процесса вытяжки стекловолокна на возмущающие воздействия// Инженерно-физический журнал. 1984.-Т. 47.-N5.-С.817-822.
202. Колпашиков В.Л., Мартыненко О.Г., Шнип А.И. Динамическая модель реакции процесса вытяжки стекловолокна на возмущающие воздействия.- Минск, 1979.-41с.(Препринт ИТМО АН БССР, №2).
203. Ярин А.Л. Влияние теплоотвода на нестационарные режимы формования волокон//Инженерно-физический журнал.-1986.-т.50.-№5.- С.810-818.
204. Пупышев И.Д. Автоматизация контроля процесса получения нити из расплава полимера//Хим. вол.-1990.-№1.-С.53-56.
205. Севрук В.Д., Фридман М.Л. Прокунин А.Н. Метод аттестации сырья для получения ориентированных изделий по его способности, к растяжению в расплаве. -В сб.:Тезисы докл. 13 Всесоюзн. Симоз. по реологии. Волгоград, 1984.-С.63.
206. Севрук В.Д., Прокунин А.Н. Проявление эффекта замедления течения при растяжении расплава полиэтилена постоянной силой. В сб.:Труды II Всесоюзн. симпоз."Теория механической переработки полимерных материалов", Пермь, 1980.-С.165-166.
207. Севрук В.Д. и др. Оценка качества полимерного сырья по растяжению в расплаве. -В сб.: Тез. докл. III Всесоюзн. симпозиума. "Теория механической переработки полимерных материалов", Пермь, 1985.-С.151-152.
208. Прокунин А.Н. Максвелловские нелинейные уравнения для описания движений полимерных жидкостей и их использование для приложений. -В сб.:Тез.докл.I Всесоюзн. н.-техн. конф."Реология и оптимизация процессов переработки полимерных материалов".Устинов, 1986. -С. 118.
209. Севрук В.Д. Растяжение расплавов термопластов на выходе из формирующего инструмента.-Автореф, канд.техн.наук.-М., 1984.-24с.
210. Прокунин А.Н., Севрук В.Д. Об эффекте разбухания при вытяжке упругой жидкости из капилляра// Инженерно-физический журнал.-1980.-39.-№2.-с.343-350.
211. Прокунин А.Н., Севрук В.Д. О кинематических параметрах, определяющих процессы релаксации после растяжения. -В сб.: Тез. докл.II Всесоюзн. симпоз."Теория механической переработки полимерных материалов", Пермь, 1980.-С.164.
212. Прокунин А.Н. и др. О возможном механизме эффекта замедления

- течения полимерных жидкостей// Инженерно-физический журнал.-1981.-40.-№1.-С.46-51.
213. Прокунин А.Н., Севрук В.Д. Проявление эффекта замедления течения при различных видах деформации// Инженерно-физический журнал.-1981.-41.-№1.-С.74-81.
 214. Прокунин А.Н., Севрук В.Д. О релаксационных процессах в полимерных жидкостях// Инженерно-физический журнал.-1982.-42.-№6.-С.987-991.
 215. Прокунин А.Н., Севрук В.Д. О неизотермической ретардации упругих жидкостей// Инженерно-физический журнал.-1982.-43.-№1.-С.70-72.
 216. Entov Y.M. On the stability of capillary jets of elastoviscous liquids//Arch.mech. Stosow., 1978,30,№4,435-442.
 217. Ентов В.М., Махкамов С.М., Мукук К.В. Об одном эффекте нормальных напряжений// Инженерно-физический журнал. -1978 .-т.34. - № 3.-С. 514-518.
 218. Князев Е.Н., Белоусов В.В. Приборы и методы контроля реологических свойств полимеров и композиционных материалов. -В сб.: Тез.1 Всесоюз. н. -техн. конф. "Реология и оптимизация процессов переработки полимерных материалов", Устинов, 1986.-С.70.
 219. Пахаренко В.А. и др. Ротационные вискозиметры для оценки вязкости расплава в процессе экструзии полимеров. -В сб.: Тез. II Всесоюз. симпоз. "Теория механической переработки полимерных материалов", Пермь, 1980. - С. 171.
 220. Гладченко А.Н. и др. Дифференциальный вискозиметр непрерывного действия. - В сб.:Тез.1 Всесоюз. н.-техн. конф."Реология и оптимизация процессов переработки полимерных материалов", Устинов, 1986.-С.135.
 221. Рожков А.Н. Об упругих напряжениях в кольцевой струе разбавленных растворов полимеров. -В сб.:Тез.1 Всесоюз. симпоз. по реологии. Волгоград, 1984.-С.62.
 222. Морозов А.С. Деформация полимеров при раздуве и оценка их реологических характеристик и поверхностной энергии. -В сб.: Тез. докл.1 Всесоюз. н.-техн. конф."Реология и оптимизация процессов переработки полимерных материалов", Устинов, 1986.-С.48.
 223. Бабек В.Г. и др. Изучение структурно-реологических свойств абсорбционных слоев полимеров методом контактных взаимодействий. -В сб.:Тез.докл.13 Всесоюз.симпоз. по реологии.Волгоград,1984. -С.83.
 224. Шумская А.Г., Присс Л.С. Простой способ проверки линейности вязкоупругих свойств эластомеров. -В сб.:Тез.докл.13 Всесоюз. симпоз. по реологии.Волгоград,1984.-С.78.
 225. Ефремов С.М. Метод технологического контроля свойств полимерных материалов. -В сб.: Тез. докл. Всесоюз. н.-техн. конф."Реология и оптимизация процессов переработки полимерных материалов", Устинов, 1986.-С.79.
 226. Рец П.И. "Банки моделей" как ядро программного обеспечения реологических приборов с ЭВМ в контуре управления. -В сб.: Тезисы 13

- Всесоюзн. симпоз. по реологии. Волгоград, 1984.-С.60-61.
227. Тябин Н.В. Реологическая кибернетика.-Волгоград, 1977.-112с.
228. Шаповалов В.М. Физические эффекты в технологических процессах формирования длинномерных полимерных изделий в рамках квазиодномерного подхода. Дис. ... докт. техн. наук. Москва. 1996.- 386с.
229. Тябин Н.В., Голованчиков А.Б., Ремнев В.П., Шаповалов В.М. Определение извитости бикомпонентных полимерных нитей//Механика полимеров.-1977.-№3.-С. 559.
230. Тябин Н.В., Ремнев В.И., Шаповалов В.М. Дахин О.Х. Голованчиков А.Б. Неизотермическое растяжение тонких полимерных пленок. -В сб. "Исследования по теории упругости и вязкоупругости конструкций и материалов". -УНЦ АН СССР, Свердловск, 1979.-С.113-118.
231. Тябин Н.В., Ремнев В.П., Шаповалов В.М., Дахин О.Х., Голованчиков А.Б. Теплообмен при растяжении полимерных материалов. -В сб.: Реологические свойства полимерных систем. Свердловск, 1979.-С.62-66.
232. Тябин Н.В., Шаповалов В.М., Ремнев В.П. Теплообмен при вытяжке бикомпонентной плёнки//Инженерно-физический журнал.-1979.-т.36.-№ 1.-С.127-133.
233. Шаповалов В. И., Тябин Н.В., Иващенко С.К. Исследование теплообмена при формировании плоской пленки//Инженерно-физический журнал. –1979.-т.37.-№ 5.-С.354-359.
234. Пат. 821546.(СССР). Способ получения извитых нитей из многослойной плёнки (Тябин Н.В., Ремнев В.П., Голованчиков А.Б., Уютова Э.И., Шаповалов В.М.).-1981, -№ 14.
235. Шаповалов В.М., Тябин Н.В. Реодинамика элонгационного течения плоской полимерной струи при вытяжке плёнки//Инженерно-физический журнал. 1981.-Т.41.-№ 6.-С.1027-1031.
236. Шаповалов В.М., Тябин Н.В. Вытяжка плоской аномально-вязкой пленки в неизотермических условиях//Инженерно-физический журнал.-1982.-Т.43.-С.62-71.
237. Шаповалов В.М., Тябин Н.В. Реодинамика формирования плоской полимерной пленки//Деп. в НИИТЕХИМ. № 1040хп-84 Деп.-14с.
238. Шаповалов В.М., Бовда С.В. Нестационарное течение вертикальной струи/Сб. научн. трудов. Реология, процессы и аппараты химической технологии. -Волгоград: Изд. ВолгГТУ, 1996. -С.23-26.
239. Шаповалов В.М. Отбор свободной струи вращающимся валком//Инженерно-физический журнал.-1995, Т.68, №6.-С.954-959.
240. Шаповалов В.М. О нанесении высоковязкой жидкости на движущуюся подложку//ПМТФ. 1997, т.38, №2.-С.170-175.
241. Шаповалов В.М. Вытяжка полимерной пленки на валковых устройствах с учетом силы трения//Сб. научн. трудов. Реология, процессы и аппараты химической технологии. -Волгоград: Изд. ВолгГТУ, 1997. -С.93-100.
242. Шаповалов В.М. Элонгационное течение вязкоупругой струи в условиях

- внешнего трения//Инженерно-физический журнал.-1999, т.72, №2.-С.348-354.
243. Шаповалов В.М., Тябин Н.В. Саморазогрев при растяжении вязкого цилиндра//Инженерно-физический журнал.-1987, №1, Т.52.-С.160.
 244. Шаповалов В.М. Термические эффекты при реологических исследованиях полимеров в условиях продольного течения//Пластмассы.-1991, №9.-С.45.
 245. Шаповалов В.М., Тябин Н.В., Бедер Л.М. Охлаждение полимерной пленки на барабане с учетом зависимости коэффициента теплопроводности от температуры//Инженерно-физический журнал. 1980, №1, Т.38.-С.129-133.
 246. Шаповалов В.М. Контактное охлаждение полимерной пленки с учетом тепловой инерция вала//Инженерно-физический журнал.-1990, №6, Т.59.-С.1029-1030.
 247. Шаповалов В.М. Исследование термического взаимодействия в системе охлаждающий валок - плоская полимерная заготовка/Дел. в НИИТЭХИМ г. Черкассы. 20.04.90. №347хп-90.Деп.-25с.
 248. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. - М.: ГИФМЛ, 1961. -703с.
 249. Бедер Л.М., Сладкова О.А., Молькова Г.Н. Некоторые вопросы формирования пленочных нитей из термопластов. -В сб.: Тез. докл. Всесоюзн. конф. Вып.1. "Процессы а аппараты производства полимеров, методы в оборудование для переработка их в изделия. -М.: МИХМ 1977.-С.90-93.
 250. Прокунин А.Н. Теоретические и экспериментальные исследования вязкоупругих эффектов при растяжении и сдвиге полимерных жидкостей: Дис. ... канд. ф.-мат. наук. М.,1973, 144с.
 251. Мжельский А.И. Анализ одноосной вытяжки на валковых устройствах//Реология, процессы и аппараты химической технологии: Сб. науч. Трудов/Волгоград. Изд. ВПИ., 1987.-С.81-86.
 252. Тимошенко С., Юнг Д. Инженерная механика. - М.:ГИТИМЛ, 1960.-508с.
 253. Крылов А.Н. О равновесии шаровой мины на течении. Известия по минному делу. Вып.44, 1909.-С. 14-108.
 254. Бартенев Г.М., Лаврентьев В.В. Трение и износ полимеров.- Л.:Химия,1972.-240с.
 255. Белый В.А., Свиреденок А.И., Петроковец М.И., Савкин В.Г. Трение полимеров.-М.:Наука,1972.-204с.
 256. Крагельский И.В., Михин Н.М. Узлы трения машин.- М.:Машиностроение,1984.-280с.
 257. Вострокнутов Е.Г., Виноградов Г.В. Реологические основы переработки эластомеров. - М.:Химия,1988.-232с.
 258. Теплофизические и реологические характеристики полимеров. Справочник. Под общ. ред. Ю.С. Липатова. - К.: Наукова думка, 1977.-244с.
 259. Хемминг Р.В. Численные методы.-М.:Наука,1972.-400с.

260. Тепло - и массообмен. Теплотехнический эксперимент: Справочник/Аметистов Е.В. и др.; Под общ.ред. В.А. Григорьева, В.М. Зорина. –М.:Энергоиздат,1982.-512с.
261. Павлов К.Ф., Романков П.Г., Носков А.А. Примеры и задачи по курсу процессов и аппаратов химической технологии. - Л.: Химия, 1987,- 576с.
262. Хейсо В.А. Разработка и исследование устройств для непрерывной обработки синтетических нитей и методов расчета тепловых процессов, Автореф. дис. ... канд. техн. наук -Л.,1990.-17с.
263. Диткин В.А., Прудников А.П. Интегральные преобразования и операционное исчисление. -М.: Наука, 1974,-544с.
264. А.С.1193526, СССР, 1985. Способ измерения вязкости высоковязких жидкостей. Заявлено 22.05.84, № 3742061/24-25, опубликовано Бюл. № 43, 23.11.85 (Шаповалов В.М., Тябин Н.В.).
265. Шаповалов В.М., Тябин Н.В. О форме свободной струи при горизонтальном вытягивании неньютоновской жидкости//Инженерно-физический журнал.-1988.-54. № 2.-С.235-241.
266. Шаповалов В.М. Бифуркация напряжений при элонгационном течении свободной струи упруго вязкой жидкости//Инженерно-физический журнал.-1991. Т.60. -№ 2. -С.341-342.
267. Шаповалов В.М. Бифуркация течения свободной струи вязкоупругой жидкости//Рукоп. деп. в НИИТЭХИМ. Черкассы. № 503хп90.-29с.
268. Шаповалов В.М. Нестационарные режимы течения непрямолинейной натянутой струи полимера//МЖГ.1995.-№3.-С.47-54.
269. Shapovalov V.M. Unsteady flow regimes of a nonrectilinear polymer jet under tension//Fluid Dynamics, 1995, Vol. 30, N 3.-S.372-377.
270. Шаповалов В.М. Элонгационное течение гравитационно изогнутой струи вязкоупругой жидкости//ПМТФ.- 1996.-т.37.-№3.-С.58-66.
271. Пасконов В.М. и др. Численное моделирование процессов тепло - и массообмена.-М.: Наука,1984.-288 с.
272. Флетчер К. Вычислительные методы в динамике жидкостей. Т.1.-М.: Мир, 1991.-504с.
273. Пономарев К.К. Специальный курс высшей математики. – М.: Высшая школа, 1974.-367с.
274. Демидович Б.П., Марон И.А., Шувалова Э.З. Численные методы анализа. -М.: Наука, 1967.-368с.
275. Шаповалов В.М., Крайнов Ю.В. К вопросу формирования профилированных волокон. -В тез.докл. Всесоюзн.н.-техн.конф."Процессе и аппараты производства полимерных материалов, методы и оборудование для переработки их в изделия".М.,1982.-с.45-46.
276. Шаповалов В.М., Тябин Н.В. Формоизменение профилированного волокна при формовании. -В кн. Тез.13 Всесоюзн. симпоз. по реологии. Волгоград, 1984.-с.73.
277. Шаповалов В.М. Течение и теплообмен при формовании профилированных волокон//Инженерно-физический журнал. - Т .47. -№ 2.

- 1984. -С. 272-279.
278. Шаповалов В.М. Исследование капиллярных эффектов при формировании профилированных волокон//Рук. деп. в НИИТЭХИМ. Черкассы, № 225хп-85 Деп.1985.-44 с.
279. А.С. СССР. Способ получения поликапроамидного гранулята. Заявлено 7.05.90 №823759, получено положительное решение в 29.07.91 (Шаповалов В.М., Стрельченко С.А., Федюнин Ю.В.).
280. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика. Часть 2.-М.-Л. :ГИТТЛ, 1948,-612 с.
281. Седов Л.И. Механика сплошной среды. Том I. –М.: Наука, 1973. -536с.
282. Ентов В.М., Ярин А.Л. Об одной задаче капиллярной гидродинамики//МЖГ. №6. –С.101-108.
283. Черпаков П.В. Теория регулярного теплообмена.- М.: Энергия, 1975.- 224 с.
284. Кошкин Н.И., Ширкевич М.Г. Справочник по элементарной физике, - М.: Наука, 1955.-247 с.
285. Тепло - и массообмен. Теплотехнический эксперимент: Справочник/Под общ. ред. В.А. Григорьева, В.М. Зорина. -М.: Энергоиздат, 1982.-512 с.

ОБ АВТОРЕ



Шаповалов Владимир Михайлович (г. рожд. 1951) – доктор технических наук, профессор кафедры «Процессы и аппараты химических производств» Волжского политехнического института ВолГТУ (svm-5@mail.ru). Область научных интересов – Течение и теплообмен реологически сложных жидкостей. В 1980 году защитил диссертацию на соискание учёной степени кандидата технических наук, в 1996 году - диссертацию на соискание учёной степени доктора технических наук. Научные работы опубликованы в академических рецензируемых журналах: «Инженерно-физический журнал», «Механика жидкости и газа», «Прикладная механика и техническая физика», «Прикладная механика и математика», «Механика композиционных материалов и конструкций». Автор более 140 научных публикаций и патентов в России и за рубежом и четырёх монографий:

1. Шаповалов В.М., Лапшина С. В. Введение в механику течения волокнонаполненных композитов. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006.–176 с.
2. Шаповалов В.М. Механика элонгационного течения полимеров. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007.–176с.
3. Шаповалов В.М. Валковые течения неньютоновских жидкостей. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2011. – 168 с.
4. Шаповалов В.М. Процессы тепло – и массопереноса технологическом оборудовании: монография/В.М. Шаповалов, ВПИ (филиал) ВолГТУ, - Волград: ИУНЛ ВолГТУ, 2015. – 305 с.