В.М. Шаповалов
С.В. Лапшина

ВВЕДЕНИЕ В МЕХАНИКУ ТЕЧЕНИЯ ВОЛОКНОНАПОЛНЕННЫХ КОМПОЗИТОВ

В.М. Шаповалов
С.В. Лапшина

ВВЕДЕНИЕ В МЕХАНИКУ ТЕЧЕНИЯ ВОЛОКНОНАПОЛНЕННЫХ КОМПОЗИТОВ

МОСКВА
ФИЗМАТЛИТ
2005

УДК 532.5.011+531.391.1+591.173
ББК 22.253
Ш 24

Шаповалов В.М., Лапшина С.В. **Введение в механику течения волокнонаполненных композитов.** – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006.- 159 с. - ISBN 5-9221-0643-0.

Выведены уравнения движения искривленного стержня конечной длины в потоке вязкой жидкости. Получено аналитическое решение задач движения прямолинейного стержня в условиях чистого сдвига, простого сдвига и одноосного растяжения жидкости. Исследована продольная устойчивость прямолинейного стержня при его пространственном движении в потоке вязкой жидкости. Найдена минимальная жесткость стержня, обеспечивающая устойчивость при любой ориентации в потоке. Выполнена оценка эффективной вязкости суспензии, наполненной жесткими прямыми стержнями. Представлена задача рептационного движения животных в жидкости.

Для специалистов по механике, преподавателей, аспирантов и студентов университетов, занимающихся вопросами переработки волокнонаполненных полимеров и бионики.

ISBN 5-9221-0643-0

ОГЛАВЛЕНИЕ

Светлой памяти Владимира Марковича Ентова посвящается

Введение

Повышение качества и снижение материалоемкости изделий является важнейшей задачей стоящих перед технологией производства полимерных материалов. Одним из направлений решения этой задачи является создание новых композиционных материалов и внедрение этих материалов в производство.

Большое распространение в зарубежных и отечественных производствах имеют полимерные материалы, наполненные армирующими короткими волокнами различной природы (полиамидные, стеклянные, хлопковые, углеродные, борные, металлические). В основе их широкого применения лежит возможность направленного регулирования свойств материала – температур переработки, прочности и модулей. Кроме того, использование волокон позволяет получить анизотропию физико-механических свойств в материале, что открывает возможность создавать полимерные изделия оптимальной конструкции и повысить срок их эксплуатации.

Стремление к предельно достижимой однородности композитов при перемешивании нивелирует преимущества волокон как анизотропных наполнителей вследствие значительного их разрушения. Разрушение волокон имеет место на всех видах смесительного оборудования, реализующего сдвиговые деформации. При получении и переработке композиционных полимерных материалов не только происходит усложнение процессов, происходящих в рабочих полостях оборудования и протекающих при переработке «чистых» (не наполненных) полимеров. Появляются новые дополнительные процессы – такие, как смешение расплава полимера с твердым наполнителем, разрушение волокнистых наполнителей, ориентация наполнителя, образование пристенного слоя и другие.

Число работ, посвященных технологии переработки полимеров наполненных волокнами значительно (Дзюра Е.А., Неосиловская Т.Н., Бекин Н.Г., Гончаров Г.М. и др.). В тоже время количество исследований, важных для построения моделей и создания математического описания процессов диспергирования и смешения, явно недостаточно и не соответствует значимости этих процессов при получении и переработке композиций. Работы по изучению влияния параметров деформирования системы на степень ориентации и напряженное состояние гибких коротких волокон в полимерной матрице практически отсутствуют. Между тем без решения этой задачи невозможно прогнозировать анизотропию и механические характеристики изделий, правильно выбирать параметры переработки (скорость деформации матрицы, температуру, продолжительность), оценить возможность увеличения анизотропии. Как возможную область приложения теории течения волокнонаполненных композитов можно указать на ориентационные эффекты в электро - и магнитореологических жидкостях и рептационное движение длинномерных биологических объектов.

Цель работы – создать теоретическую основу для анализа механического поведения гетерогенных сред, наполненных гибкими короткими волокнами произвольной пространственной конфигурации. Изучить основные закономерности механического поведения единичного волокна в основных вискозиметрических течениях наполненной системы.

Работа основана на анализе механического поведения, описываемого линейной теорией упругости и законами гидродинамики ламинарных течений, которые сами по себе являются высокоразвитыми и стройными теориями.

В первой главе представлен обзор литературных источников, посвященных рассматриваемой проблеме.

Во второй главе в длинноволновом приближении построены уравнения динамики тонкого стержня и нити в потоке вязкой жидкости. Рассматривается эволюция формы упругой линии тонкого стержня конечной длины под действием распределенной нагрузки, обусловленной силами трения со стороны вязкой жидкости. Особенность задачи состоит в том, что интенсивность распределенной нагрузки зависит от пространственной ориентации стержня. Отдельно рассмотрены пространственный и плоский случай, поскольку они имеют различную параметризацию. Предложен способ уменьшения размерности уравнений динамики.

В третьей главе численно изучены закономерности эволюции формы и натяжения криволинейной нити в условиях чистого и простого сдвига матрицы. Методом малого параметра решена плоская задача динамического взаимодействия ламинарного потока вязкой жидкости и гибкой нерастяжимой нити конечной длины. Рассмотрены два типа реологических двумерных течений: чистый сдвиг и простой сдвиг. Получены выражения для эволюции растягивающего усилия и формы нити. Сопоставлены результаты асимптотического и численного расчетов.

Исследована продольная устойчивость прямолинейного стержня для двух реологических течений: чистого сдвига и простого сдвига. Найдена минимальная изгибная жесткость стержня, обеспечивающая его устойчивость при любой ориентации в потоке. Предложена гипотеза предельного разрушения высокомодульных волокон по механизму потери устойчивости.

Численно изучена задача о статической форме упругой линии консольного стержня, обтекаемого потоком вязкой жидкости. Для стержня малой изгибной жесткости получено асимптотическое решение задачи.

Дана оценка эффективной вязкости суспензии, наполненной прямыми моно- и полидисперсными волокнами, лежащими в параллельных плоскостях.

В четвертой главе представлены аналитические решения задач пространственного движения прямолинейного стержня в условиях чистого сдвига, простого сдвига и одноосного растяжения жидкости. Исследована продольная устойчивость прямолинейного стержня при его пространственном движении. Найдена минимальная изгибная жесткость стержня, обеспечивающая устойчивость при любой ориентации в потоке. Предложена гипотеза физического эффекта скручивания в клубок низкомодульных волокон в процессе перемешивания. Выполнена оценка эффективной вязкости суспензии, наполненной жесткими прямыми стержнями.

В пятой главе представлена теория рептационного движения биологических объектов (водяных змей, рыб и др.) в жидкости. Для ламинарного режима движения получено аналитическое решение задачи. Для турбулентного – приближенное. Найдены все характеристики движения: перерезывающая сила, изгибающий момент, скорость движения, затрачиваемая мощность.

Авторы благодарны доценту М.В. Одоевцевой за информацию и многочисленные консультации по технологии переработки волокнонаполненных полимерных композиций и доценту каф. «ВТМ» ВПИ В.Н. Харитонову за помощь в компьютерном оформлении рукописи.

ГЛАВА 1
СОВРЕМЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ПРОБЛЕМЫ

1.1. ОБЛАСТИ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ВОЛОКНОНАПОЛНЕНЫХ ПОЛИМЕРНЫХ КОМПОЗИЦИЙ

Весьма перспективным материалом производства являются наполненные полимеры. В качестве наполнителя могут быть использованы самые различные материалы это - поликапроамидные волокна, стекловолокна, стальная проволока и др. Изделия из наполненных материалов отличаются рядом эксплуатационных преимуществ по сравнению с ненаполненными. В чистом виде полимеры, как правило, не обладают заданным комплексом свойств, вследствие чего требуется введение соответствующих добавок (наполнителей, пластификаторов, красителей, стабилизаторов и т.п.), обеспечивающих необходимые эксплутационные свойства изделий. В связи с этим доля композиционных материалов в общем объеме полимерных материалов возрастает быстрыми темпами. Различной комбинацией полимеров и наполнителей могут быть получены материалы, удовлетворяющие практически всем требованиям. Правильный выбор наполнителя позволяет значительно расширить диапазон свойств полимерных материалов и область их применения.

Немаловажным доводом в пользу применения композиционных полимерных материалов является их экономичность в случае использования дешевых наполнителей для изделий неответственного назначения. При этом экономятся не только полимеры, но и ряд природных материалов, ресурсы которых начали истощаться или переместились в отдаленные, труднодоступные районы.

Наполнители для композиционных полимерных материалов различаются по составу, форме и размерам частиц, свойствами материала и его фазовому состоянию. Наибольшее распространение получили дисперсионные наполнители, частицы которых имеют форму сфер, дисков, чешуек, стержней или волокон длиной 10 –20 мм. Такие наполнители технологичны при переработке, недороги и имеют обширную сырьевую базу.

Особую группу составляют непрерывные волокнистые наполнители в виде нитей, жгутов, тканей различного плетения, используемые для изготовления армированных изделий, отличающихся высокими физико-механическими характеристиками; при производстве таких изделий применяются специфическая технология переработки и оборудование [1].

В настоящее время композиционные материалы, содержащие различные типы волокон находят все более широкое применение, как в отечественных, так и зарубежных производствах, благодаря уникальному комплексу механических свойств. В частности, сочетание высокой гибкости эластомера с очень высокой жесткостью линейно ориентированных волокон в эластомер – волокнистых композициях (ЭВК) позволяет получать материалы с ценным комплексом свойств, в том числе и с высокой степенью анизотропии [2]. Именно поэтому широко известны работы, посвященные исследованию свойств ЭВК в зависимости от типа, геометрических размеров и концентрации коротких волокон, а также технологическим аспектам применения таких композиций [3].

Введение волокнистых наполнителей в полимерную матрицу преследует разнообразные цели, среди которых выделяют следующие:

- придание композиту заданных физико-механических свойств, в частности, повышение упруго-прочностных показателей, регулирование теплофизических, электрических, антикоррозионных и других характеристик;
- модификация потребительских качеств изделий путем изменения состояния и структуры материала;
- создание более дешевых композиций за счет введения наполнителя с низкой стоимостью;
- использование отходов производства и потребления.

Не будет преувеличением сказать, что потребность в волокнистых наполнителях возрастает пропорционально развитию собственно производства полимеров. Полимерные композиты, наполненные волокнами, обнаруживают синергизм механических свойств, т.е. обладают наряду с высоким модулем упругости высокой прочностью и ударной вязкостью.

Высокие модули упругости резиноволокнистых композитов [4], позволяют применить их в различных элементах пневматических шин традиционной конструкции: наполнительных деталях борта [5], протекторных деталях шин подземной техники для повышения сопротивления порезам, в подпротекторных и брекерных деталях шин тяжелых карьерных автомобилей [6].

Стойкость резин, наполненных короткими волокнами к истиранию в сочетании с антискользящими свойствами [7] предопределяет их использование в качестве протекторов радиальных шин [5]. Непневматические массивные шины, при одинаковых габаритах с пневматическими шинами, обладают более высокой грузоподъемностью. Технологическая трудоемкость изготовления непневматических шин на 40 –45 % меньше, чем пневматических, на треть сокращаются производительные площади, при этом не требуются дорогостоящие материалы – корд и бортовая проволока [8].

Значительное внимание уделяют использованию волокнистых наполнителей в производстве клиновых ремней [9], [10]. Недостатки ремней той и другой конструкции могут быть устранены применением слоев резиноволокнистых композитов, в которых благодаря ориентации волокон сочетается продольная жесткость с поперечной гибкостью [11]. Использование волокнистых наполнителей в рецептуре вариаторных клиновых ремней увеличивает их средний пробег более чем в два раза [12].

Повышенное сопротивление порезам и раздиру, твердость [13], [14] – комплекс свойств, обеспечивающих перспективность использования резиноволокнистых композитов в конвейерных лентах [10].

Повышенная изгибная жесткость резиноволокнистых композитов лежит в основе использования их в рукавах [13] и шлангах [5].

Применение коротковолокнистых наполнителей в подошвенных резинах [15] связывают с повышенной износостойкостью резиноволокнистых композитов.

В литературе имеется значительное количество сведений о прокладочных материалах на основе эластомеров, содержащих волокнистые наполнители [13]. Короткие волокна применяют в вибрpозащитных резинах**,** материалах с пониженными фрикционными характеристиками**,** и даже в аэрокосмической технике [13].

Применение в резинах волокнистых наполнителей начиналось с полидисперсных волокон – очесов шерсти, отходов хлопка, вискозы [9]. Однако вследствие значительной полидисперсности они не обеспечивали структурной и механической однородности композитов. Пройдя через этап получения коротких волокон фиксированной длины из бесконечных нитей [12], являющихся специально подготовленным дефицитным полимерным сырьем, исследователи вернулись к целесообразности получения волокнистых полидисперсных наполнителей из сырья, имеющего конечные размеры [16]. Это было обусловлено как экономическими причинами, так и необходимостью решения экологических вопросов.

Волокнистые материалы можно разделить на три группы: природные, химические и минеральные. Минеральные волокна придают материалам высокую прочность и жесткость. Природные и химические волокна повышают монолитность материала, сопротивление действию агрессивных сред, увеличивают его устойчивость к истиранию. Наиболее широко применяют стекловолокно, имеющее по сравнению с другими видами волокон, более высокую прочность, высокий модуль упругости к термической деструкции, невысокую стоимость. Кроме того, оно сравнительно быстро распределяется в полимерной матрице при введении. К недостаткам этого типа наполнителя можно отнести: незначительную стойкость к утомлению при динамических нагрузках, хрупкость, вследствие которой стекловолокно при переработке значительно изменяется, низкую изгибоустойчивость. Из натуральных волокон наиболее широко применяются целлюлозные волокна, обладающие высокими модулями растяжения и значительной прочностью наряду с гибкостью, обусловленной лентообразной формой волокна. Из химических волокон в качестве армирующего наполнителя применяют вискозные, полиамидные, полиэфирные и другие виды волокон.

В работе [17] показано, что при изготовлении смеси на основе бутадиен-стирольного каучука содержащей 30% масс. техуглерода П245 на его введение и диспергирование необходимо затратить приблизительно 600 кДж энергии на 1 кг смеси, или 40% от суммарных энергозатрат на смешение.

1.2. ФИЗИЧЕСКИЕ ЭФФЕКТЫ ПРИ ПЕРЕМЕШИВАНИИ ВОЛОКНОНАПОЛНЕННЫХ СИСТЕМ

В процессе приготовления и обработки резиновых смесей волокна обнаруживают тенденцию к ориентации вдоль направления течения, что обуславливает создание ориентированных структур. Гибкость и склонность волокон к агломерированию, измельчение их в процессе изготовления смеси снижают ориентацию волокон и уровень анизотропии свойств. [18]

Ориентация армирующих элементов определяется не только условиями течения, но также вязкостью связующего и структурными параметрами композиции (геометрическими размерами и объемным содержанием армирующих элементов). Как показывают эксперименты, толщина армирующих элементов (изгибная жесткость) мало влияет на их ориентацию, а с увеличением длины степень ориентации уменьшается. Таким образом, изменяя технологические параметры, конструкцию формующего инструмента и структурные параметры материала, можно изменять технологическую анизотропию материала в изделии а следовательно, и его свойства.

Технологическая анизотропия приводит к анизотропии усадки готового изделия. Коробление является одним из наиболее распространенных видов брака и происходит, если имеются различия в величине усадки по объему изделия. Влияние температуры и скорости каландрования на коэффициент анизотропии вулканизатов ЭВК изучали на резиновых смесях на основе комбинации СКСМ – 30РК и СКИ –3, а также хлоропренового каучука, содержащих технический углерод и банавис – Р. Было установлено, что зависимость коэффициента анизотропии от температуры и скорости каландрования имеет экстремальный характер. С увеличением температуры и скорости каландрования коэффициент анизотропии уменьшается почти вдвое.

Коэффициент анизотропии ЭВК при увеличении продолжительности обработки на вальцах изменяется по экстремальной кривой. При этом можно отметить существенную разницу в показателях анизотропии вулканизатов и невулканизованных образцов. Коэффициент анизотропии для невулканизованных образцов больше чем для вулканизатов. Коэффициент анизотропии зависит также от прочности связи волокон с материалом матрицы [19].

В работе [20] показано, что в течении растяжения деформируемая взвешенная частица ориентируется вдоль оси растяжения. В течении простого сдвига взвешенная деформируемая частица совершает периодическое движение по одной из бесконечного однонаправленного семейства замкнутых орбит.

В работе [21] показано, что анизотропия реологических свойств может быть выявлена у многих жидкостей, в частности, у структурированных. Допустим, структурированная жидкость, помещена между двумя пластинами, одна из которых (нижняя) неподвижна, образует первоначально изотропную внутреннюю структуру. Сдвигая верхнюю пластину в каком-нибудь направлении, мы разрушаем эту структуру определенным образом, так что в перпендикулярном направлении в этот момент свойства жидкости уже отличны от первоначально изотропных. Данное явление авторы называют «механически наведенной анизотропией». Если жидкость имеет реологическую память, то после прекращения сдвига верхней пластины некоторое время будет наблюдаться различие свойств в направлении сдвига и, например, в перпендикулярном направлении. Такое явление названо «остаточной анизотропией».

В работе [22] изучен процесс ориентации коротких волокон в матрице. Авторы исследовали поведение прямолинейных волокон в одномерных течениях (валковое оборудование и др.). Установлена взаимосвязь параметров процесса течения полимера с распределением волокон по различным направлениям как на выходе из зоны деформации, так и на протяжении всего процесса переработки.

В работе [23] рассмотрены волокнистые однонаправленные материалы с регулярной структурой. На основе предложенного автором метода численного исследования напряжений и деформаций в матрице и волокнах при поперечном по отношению к направлению армирования нагружении определены осредненные по объему элементарной ячейки напряжения и деформации. При известных условиях эти напряжения и деформации совпадают с макроскопическими напряжениями и деформациями, действующими в композите. В силу особенностей внутренней структуры материала даже при изотропных компонентах свойства композита в целом анизотропны.

В работе [24] рассмотрен метод создания высокопрочных композиционных материалов. Метод основан на предварительном формировании промежуточного слоя из эластичных полимеров (полиацеталей, латексов, поливинилхлоридов) между поверхностью армирующих волокон и матрицей.

Немало интересных исследований связано с изучением поведения различных видов наполнителя при переработке полимерных материалов. В частности, изучалось поведение наполнителя при реализации трех основных видов вискозиметрических течений.

Вращение частиц в пристенном слое суспензий наблюдали Г.В. Виноградов и Г.М. Бартенев. Экспериментальные исследования реологических свойств суспензий бумажных волокон в воде на ротационном вискозиметре подтвердили, что волокна при вращении одного измерительного цилиндра относительно другого скручиваются в жгуты, диаметр которых равен зазору между цилиндрами, а сами жгуты перекатываются по боковым измерительным поверхностям, как ролики в подшипниках [25].

В работе [26] рассмотрено гидродинамическое взаимодействие двух жестких частиц, имеющих форму эллипсоидов вращения взвешенных в ньютоновской жидкости. Учет влияния возмущения, вносимого второй частицей, производится с помощью метода «зеркальных отражений».

При введении коротких волокон в полимерную матрицу получают композиционный материал, в котором упругие свойства матрицы сочетаются с жесткостью и прочностью волокон. Усиливающий эффект обусловлен тем, что часть приложенной к композиционному материалу нагрузки передается через матрицу на волокна. При этом степень их нагружения зависит от средней длины волокон. Важной геометрической характеристикой короткого волокна является фактор формы (l/d), определенный как отношение наибольшего и наименьшего размера наполнителя. Для коротких волокон фактор формы обычно лежит в интервале от 10 до 1000. При этом для того чтобы усиление было оптимальным фактор формы должен иметь значение 100…200. При большем значении этого фактора, на волокна передается незначительная часть приложенной к матрице нагрузки, а при больших значениях волокна начинают перепутываться, образуя клубки [27], [28].

Не всегда форма и размер наполнителя по всему объему матрицы одинаковы. В работе [29] рассмотрены полифракционные суспензии со степенной матрицей, в которых частицы соседних фракций наполнителя сильно различаются по размерам. Коэффициент нелинейности суспензии не зависит от наполнителя и совпадает с коэффициентом нелинейности матрицы. Относительная вязкость суспензии не зависит от скорости сдвига и равна относительному коэффициенту консистенции суспензии. Здесь же показана справедливость принципа мильтипликативности для случая полифракционных суспензий со степенной матрицей. При данной величине предельного наполнения наименьшую относительную вязкость будет иметь тот состав, в котором максимальна объемная доля мелких фракций.

В работе [30] рассматривается линейно – упругая композитная среда, состоящая из однородной матрицы и случайного, однородного в пространстве множества эллипсоидальных включений. Одним из способов оценки эффективных модулей композита является метод эффективного поля, основанный на точном решении упругой задачи для эллипсоидального включения, находящегося в эффективном поле. Предложенный метод позволяет учесть форму включений и полифракционный состав наполнителя. Рассматривая случай жестких включений в несжимаемой матрице можно получить оценку для эффективной вязкости суспензии.

Все приведенные выше явления часто встречаются при переработке наполненных полимеров в процессах смешения и формования, а также существенно влияют на качество готовой продукции. Повышение качества изделий требует понимания механизма изменения конфигурации отдельного волокна и возникающих в нем напряжений. В процессе перемешивания волокнонаполненных резиновых смесей возникают усилия такого порядка, что стальная проволока рвется, а стеклянные волокна превращаются в пыль.

1.3. МЕХАНИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ ВОЛОКНИСТОГО НАПОЛНИТЕЛЯ ПРИ ПЕРЕРАБОТКЕ НА ТЕХНОЛОГИЧЕСКОМ ОБОРУДОВАНИИ

В процессе перемешивания волокна подвергаются разрушению, т.е. фактическая их длина в композите отличается от начальной длины перед переработкой. Это снижает прочность изделий. Имеются многочисленные экспериментальные исследования процессов переработки наполненных полимеров (Дзюра Е. А., Серебро А. Л., Одоевцева М. В., Несиловская Т. Н. и др.). Однако в настоящее время отсутствуют теоретические модели поведения волокна в условиях течения смеси в перерабатывающем оборудовании.

Между тем есть настоятельная необходимость в раскрытии механизма разрушения волокон наполнителя. Кроме того, нет теоретического объяснения так называемого «каландрового эффекта», который проявляется в анизотропии прочностных свойств РВК. Он обусловлен ориентацией волокон вдоль направления каландрования. Указанная проблема актуальна также при компрессионном формовании хаотически армированных материалов (типа эпоксидных смол). Возникает анизотропия свойств, обусловленная ориентацией армирующих элементов. Технологическая анизотропия приводит к анизотропии усадки готового изделия. Коробление является одним из наиболее распространенных видов брака и происходит, если имеются различия в величине усадки по объему изделия.

Наряду с процессами смешения важную роль играют процессы диспергирования, также протекающие в оборудовании для получения и переработки композитных материалов. Из имеющихся работ можно в качестве основополагающей выделить работу [31], в которой рассматривается модель диспергирования агломерата частиц, позволяющая установить связь степени диспергирования с параметрами процесса. Несколько другой подход, основанный на оценке степени диспергирования по величине работы диспергирования при течении расплава композитного материала, использован в работах Р. В. Торнера. Модели диспергирования не позволяют получить количественные данные для прогнозирования степени диспергирования и качества изготовляемых деталей и не могут быть распространены на волокнистый наполнитель.

Увеличение содержания волокнистого наполнителя в общем случае способствует улучшению поверхности экструдата и уменьшению его эластического разбухания. Таким образом, при получении и переработке композиционных полимерных материалов не только происходит усложнение процессов, происходящих в рабочих полостях оборудования и протекающих при переработке “чистых” (ненаполненных) полимеров. Появляются новые дополнительные процессы – такие, как смешение расплава полимера с твердым наполнителем, диспергирование порошкообразных агломератов и разрушение волокнистых наполнителей, ориентация наполнителя, образование пристенного слоя и другие.

В процессе распределения в высоковязкой резиновой матрице волокна подвергаются многократным изгибам, в результате чего их средняя длина уменьшается, волокна, обладающие большой усталостной выносливостью, в этих условиях разрушаются в меньшей степени. Так, испытание стальной проволоки, стеклянных и поликапроамидных нитей на сопротивление многократным изгибам под натяжением показал, что они разрушаются за 100 циклов, 2 –4 цикла и 12 –15 тыс. циклов соответственно. В такой же мере изменяется степень разрушения этих волокон в процессе изготовления композита – длина стеклянных уменьшается в десятки раз, стальной проволоки – в два раза, тогда как поликапроамидные разрушаются незначительно [32].

При рассмотрении разрушения волокнистого наполнителя в условиях сдвиговых деформаций расплава композиции необходимо выделить две характерные области: 1) пристенный слой, образующейся при течении расплава, характеризующейся высокими скоростями сдвига материала слоя, обогащенного полимерной матрицей и содержащего сильно разрушенный наполнитель; 2) основная масса расплава вне пристенного слоя, характеризующаяся сильным армирующим действием волокнистого наполнителя и, как следствие, малыми деформациями сдвига (значительные деформации в этой области имеют место только при изменении поперечного сечения или направления канала, в котором происходит течение композиции).

Для анализа процесса разрушения волокнистого наполнителя в области развитого пристенного слоя может быть использована следующая модель, адекватность которой была подтверждена при анализе разрушения наполнителя в зоне плавления одночервячного экструдера. Волокна наполнителя вблизи движущейся твердой стенки могут рассматриваться как длинные гибкие стержни, закрепленные одним концом в массе композиции и выступающие в движущуюся массу пристенного слоя. Ввиду хаотического расположения волокон в композиции и хаотической ориентации плоскостей их изгиба при течении можно принять равномерное распределение угла наклона осей волокон к поверхности раздела пристенного слоя и основной массы. Процесс разрушения наполнителя приводит к увеличению содержания продуктов его разрушения. Это можно учесть введением в расчет вместо вязкости чистого полимера вязкости композиции с волокнистым наполнителем, размеры которого совпадают с размерами продуктов его разрушения в пристенном слое. Другие допущения, облегчающие математический анализ процесса, соответствуют конкретным условиям.

Анализ поведения волокон, выступающих в пристенный слой толщиной δ, выполняется с учетом сил, действующих на волокно, и возможного характера его разрушения. В композиции на основе пластичной матрицы, армированной прочными хрупкими волокнами конечной длины, имеются два вида разрушения. Первое - из–за разрыва волокон, второе - за счет вытягивания нескольких порванных волокон конечной длины [33]. В первом случае можно предположить, что после разрушения одного волокна оставшиеся волокна в этом поперечном сечении перегружаются. Второй вид разрушения свидетельствует либо о слабом сцеплении между волокнами и матрицей, либо о недостаточной прочности матрицы, либо о дефектах волокон образовавшихся в процессе их изготовления.

Прочность композиций является функцией средней прочности отдельных волокон при данной базе образца, дисперсии прочности волокон, их объемной доли и эффективной длины [33]. Анализ взаимосвязи статической прочности волокна с прочностью композита показал, что если неэффективная длина волокна сопоставима с базовой, то создание высокопрочных систем обеспечивается за счет популяции волокон с малой дисперсией прочности. В случае, когда неэффективная длина волокна много меньше базовой длины, зависимость обратная.

В качестве примера рассмотрим механизм разрушения и ориентацию волокнистого наполнителя при работе шнекового пластикатора и экструзионного оборудования. В случае использования вертикального шнекового пластикатора (для предварительного нагрева и пластикации композита) имеет место значительное разрушение и ориентация наполнителя в функционально различных зонах материального цилиндра. При этом наиболее существенное разрушение волокон наблюдается в зоне выхода расплава из канала шнека за счет интенсивных сдвиговых деформаций.

Установлено [34], что разрушение волокон происходит не по всему объему материала, находящегося в канале шнека, а в относительно тонких слоях материала, прилегающих к материальному цилиндру и шнеку, причем толщина этого слоя может меняться в зависимости от технологических параметров процесса пластикации. Степень ориентации волокон наполнителя зависит от давления и уплотнения материала в канале шнека. При увеличении прикладываемого давления наблюдается упорядоченная укладка волокон в плоскости, перпендикулярной направлению прикладываемого давления.

Вид разрушения определяется деформативными свойствами композиции в твердом состоянии, упругими и прочностными свойствами армирующих волокон. Рассмотрим разрушение волокнистого наполнителя в функционально различных зонах экструзионного оборудования. В зоне загрузки основным видом разрушения волокнистого наполнителя является срез. В процессе транспортировки и уплотнения композиции существенного разрушения наполнителя не происходит. В зоне сжатия наблюдается интенсивное разрушение волокнистого наполнителя, имеющего большой модуль упругости, в то время как низкомодульные волокна практически не разрушаются. В процессе сжатия композиций высокомодульные волокна разрушаются сначала за счет возникающих в них напряжений изгиба, а затем и контактных напряжений. Наиболее интенсивное разрушение волокнистого наполнителя имеет место в зоне плавления в пленке расплава вблизи поверхности материального цилиндра, где возникают наибольшие напряжения сдвига. В этой области волокнистый наполнитель разрушается за счет изгибающих напряжений для высокомодульных волокон или растяжения – для низкомодульных. Как правило, в пленке расплава, независимо от параметров работы оборудования, разрушение стекловолокнистого наполнителя происходит до размера частиц 0.2 – 0.3мм. Отсутствие значительного разрушения волокнистого наполнителя в зоне расплава позволяет получить композиционные материалы с большой длиной наполнителя путем его введения в расплав. При этом длина определяется размерами резки гранул [34].

При переработке наполненных материалов на экструзионном оборудовании достигается ориентация волокон в направлении течения смеси. Ориентация возрастает с увеличением длины канала экструзионной головки. Однако в литературе отсутствует количественная оценка связи ориентации волокон с параметрами процесса экструзии [36].

Авторами [37] рассмотрено разрушение волокнистого стеклянного наполнителя во время шнековой пластикации сухосмешанной композиции. В результате анализа процесса разрушения волокнистого наполнителя установлено, что средняя длина стекловолокна в изделии практически не зависит от начальной длины рубки, а зависит от параметров переработки и геометрии шнека (L/D, h) и составляет 0.2÷0.9мм.

В работе [38] исследовалась экструзия фенольной композиции содержащей 30% вес. рубленого стекловолокна. Средняя длина стекловолокнистого наполнителя в полимерной композиции повышается с увеличением температуры цилиндра экструдера и скорости вращения шнека. При увеличении давления в головке экструдера до 80-100 кг/см^2 средняя длина наполнителя в композиции резко уменьшается до 0.2-0.3 мм. Дальнейшее увеличение давления почти не влияет на степень разрушения стекловолокнистого наполнителя.

При переработке смесей с волокнистым наполнителем на валковом оборудовании волокна ориентируются в направлении вальцевания, т.е. в направлении действия напряжений сдвига. В работе [39] на одном типе полимера показано, что ориентация волокон тем больше, чем больше продолжительность вальцевания и чем меньше зазор между валками.

Известно, что тип волокон влияет на степень их ориентации в полимерной матрице. Гибкие волокна ориентируются хуже, чем жесткие. Первые обладают способностью скручиваться. Углеродное и стекловолокно проявляют более высокую степень ориентации, чем полиамидные и арамидные волокна.

При компрессионном формовании возникает анизотропия свойств хаотически армированных материалов [40-41]. В тонкостенных изделиях волокна всегда располагаются в плоскостях, параллельных ориентирующим поверхностям пресс – формы. Поэтому даже при хаотическом расположении их в этих плоскостях материал является трансверсально – анизотропным.

Технологическая анизотропия свойств является одной из наиболее существенных причин различия свойств изделий из хаотически армированных стеклопластиков. На перерабатывающем оборудовании (резиносмесителе, вальцах, экструдере) наряду с выравниванием концентрации диспергируемой фазы происходит разрушение волокон [42]. При этом имеет место, как изменение средней длины волокна, так и характера распределения длины [43]. Степень диспергирования волокна растет с увеличением его содержания, что объясняют возрастающей вязкостью и жесткостью системы [42] и считают, что чем больше вязкость матрицы, тем выше степень разрушения волокна. Однако, в работах Е. А. Дзюры [43] показано, что введение дискретных волокон в полиизопреновый каучук приводит к получению композитов, обладающих меньшей вязкостью, чем полимерная матрица. Это явление связывают с интенсификацией поверхностью высокомодульных волокон процесса механодеструкции каучука при переработке композита на смесительном оборудовании, что приводит к снижению его молекулярного веса и, как следствие, к уменьшению вязкости системы. Таким образом, степень диспергирования волокна должна зависеть не от исходной вязкости композитов, определенной стандартными методами, а от той эффективной вязкости, которую они имеют при данных условиях смешения.

Тип волокна в значительной мере определяет степень его диспергирования при смешении. Наибольшее разрушение отмечают для стекловолокна [44], характеристическое отношение которого уменьшается в десятки раз, а форма частиц приближается к сферической. Авторы [45] считают, что степень разрушения волокна в процессе диспергирующего смешения коррелирует с сопротивлением нитей многократным изгибным нагрузкам.

Каландровый эффект [46] проявляется в анизотропии прочностных свойств РВК достаточно сильно при низкой концентрации около 2.5 об. % волокна. Волокна ориентируются, главным образом, вдоль направления каландрования [47].

Необходимо отметить, что модели смешения высоковязких жидкостей и расплавов полимеров неприемлемы для анализа волокнонаполненных композиций.

1.4. ОСОБЕННОСТИ РЕОЛОГИЧЕСКОГО ПОВЕДЕНИЯ ВОЛОКНОНАПОЛНЕННЫХ КОМПОЗИТОВ

Введение в состав композиции волокнистого наполнителя не только улучшает эксплуатационные качества готового изделия, но и значительно изменяет поведение такой композиции при переработке, что обусловлено изменением ее реологических свойств. Исследования показали [48], что при малой дозировки наполнителя (до 15 вес. ч. на 100 вес. частей полимера) происходит снижение вязкости системы. Происходить подобное может по следующим причинам. Это разрыхление структуры композита и расщепление наполнителя под действием сдвиговых напряжений, последнее приводит к тому, что наполнитель играет роль твердой смазки. Увеличение содержания наполнителя приводит к повышению вязкости системы, что объясняется возникновением в системе пространственной сетки полимер-наполнитель.

Механическая переработка высоконаполненных полимерных композитов на основе жидких отверждающих связующих определяется их способностью к течению [49]. Исследование реологических свойств высококонцентрированных дисперсий, содержащих 65-80% по объему твердой фазы с частицами различных размеров, проведенного методом ротационной вискозиметрии, показало, что, в зависимости от фракционного состава дисперсионной фазы, вязкость, даже при постоянном содержании твердой фазы, может меняться более чем в 100 раз. Исследованные дисперсии на основе ньютоновских жидкостей проявляли при течении псевдопластичное поведение и характеризовались наличием предела текучести.

Согласно современным представлениям все суспензии можно разделить на два основных класса: структурированные и бесструктурные.

Структурированные суспензии имеют сплошную сетчатую структуру, пронизывающую в статическом состоянии весь объем дисперсионной среды. В структурированных суспензиях на границе раздела фаз имеют место сложные физико-химические явления, изменяющие свойства дисперсионной среды по сравнению с ее свойствами в объеме. Структурированные суспензии обладают ярко выраженными неньютоновскими свойствами.

В бесструктурных суспензиях отсутствует силовое взаимодействие между частицами, и свойства дисперсионной среды одинаковы как на поверхности раздела фаз, так и вдали от нее. Большая подборка формул для эффективной вязкости (20 формул различных авторов) бесструктурных суспензий, наполненных изометрическими частицами, приведена в работе [50].

Таблица 1.1.

№	Авторы	Уравнение $\mu_c / \mu = f(c)$	Метод вывода	Область применения
1	А. Эйнштейн	$1+2{,}5c$	теор.	$c<0{,}04$
2	А. Эйнштейн	$(1+0{,}5c)/(1-c)^2$	теор.	$c<0{,}2$
3	В.И. Ванд	$1+2{,}5c+7{,}17c^2+16{,}2c^3$	эмпир.	$c<0{,}35$
4	В.И. Ванд	$\exp[2.5c/(1-0{,}61c)]$	эмпир	$c<0{,}5$
5	Е. Гатчек	$1+4.5c$	эмпир.	$c<0{,}4$
6	М. Кунитц	$(1+0{,}5c)/(1-c)^4$	теор.	$c<0{,}1$
7	Х. Эйлерс	$\{1+2{,}5c/[2(1-1{,}35c)]\}^2$	эмпир.	$c<0{,}5$
8	М. Муни	$\exp[2{,}5c/(1-1{,}91c)]$	теор.	$c<0{,}5$
9	М. Муни	$\exp[2{,}5c/(1-1{,}35c)]$	теор.	$c<0{,}7$
10	Р.Х. Манлей, С.Б. Малон	$1+2{,}5c+10{,}05c^2$	эмпир.	$c<0.3$
11	Р. Роско, Х.С. Бринкмен	$1/(1-c)^{2,5}$	теор.	$c<0{,}5$
12	Р. Симха	$2{,}57c^2/(1-1{,}91c)^3$	теор.	$0{,}3<c<0{,}5$
13	Р. Симха	$1{,}83c^2/(1-1{,}35c)^3$	теор.	$0{,}4<c<0{,}5$
14	И. Хэппел	$1+5{,}5c$	эмпир.	$c<0{,}4$
15	О.М. Тодес	$1/(1-c)^{3,75}$	эмпир.	$c<0{,}5$
16	Н.И. Гельперин	$(1+0{,}5c)/(1-c)^4$	эмпир.	$c<0{,}5$
17	Ю.А. Буевич, А.И. Леонов	$(1-c/0{,}52)^{-1,.3}$	теор.	$c<0{,}5$
18	Ю.А. Буевич, А.И. Леонов	$(1-c/0{,}74)^{-1,85}$	теор.	$c<0{,}7$
19	Е.Ф. Кургаев	$1+2c\left[(1+c)/(1-c)\right]^2$	теор.	$c<0{,}3$
20	Е.Ф. Кургаев	$1+2c/(1-1{,}2c^{2/3})^3$	теор.	$c<0{,}3$

В табл. 1.1 представлены зависимости относительной вязкости бесструктурных суспензий μ_c/μ от объемной концентрации твердых частиц с. Как видно из этих уравнений, вязкость бесструктурных суспензий не зависит от градиента скорости или касательных напряжений сдвига, и при течении такие суспензии ведут себя как ньютоновские жидкости. Однако точные эксперименты ряда авторов показали, что ньютоновское поведение бесструктурных суспензий можно рассматривать только в узком диапазоне изменения градиентов скорости. Косвенно этот вывод подтверждается расхождением значений относительной вязкости суспензий, рассчитанных по формулам табл. 1.1.

Основным механизмом, определяющим аномалию вязкости бесструктурных суспензий со сферическими частицами, является перераспределение частиц по объему при изменении градиента скорости деформации.

Можно отметить существование некоторой аналогии механического поведения волокон и макромолекул полимера при течении. Поэтому кратко остановимся на реологических моделях высоконаполненных полимеров [51].

В модели Каргина – Слонимского – Рауза (сокращенно КСР) рассматривается поведение растягиваемой цепочки, подвергнутой действию продольных сил. Исследуется движение этих сегментов относительно центра масс. Отклонение положения сегмента от среднестатистического вызывает силу, стремящуюся вернуть его в наиболее вероятное положение. Эта сила прямо пропорциональна отклонению от равновесного положения и моделируется пружиной. Таким образом, движение отдельных сегментов относительно центра масс моделируется набором максвелловских элементов, один из концов которых жестко связан с центром масс, а на втором конце помещен шарик, погруженный в вязкую жидкость и связанный с центром масс пружиной.

Рассмотрение макромолекулы в модели Бики [52] в виде набора сегментов, каждый из которых представляется максвелловским элементом, близко к идеям, заложенным в модели КСР. Основное же различие между ними состоит в том, что в модели Бики учитывается влияние вращательного движения макромолекулярного клубка на поведение сегментов. Полное перемещение клубка складывается из поступательного перемещения центра масс и вращения клубка относительно этой точки.

За начало координат выбран центр масс макромолекулы. Предполагается, что макромолекулярный клубок совершенно не искажает того распределения скоростей, которое бы существовало в отсутствие макромолекулы. Это означает, что клубок проницаем (протекаем) для потока и не вносит возмущений в движение окружающей среды. Аналогичное предположение в неявном виде использовалось при анализе движений шариков в модели КСР.

Теория Бики приводит к двум конечным формулам: зависимости эффективной вязкости от скорости сдвига $\eta(\dot{\gamma})$, обусловленной описанным механизмом, и совершенно такой же по внешней форме зависимости динамической вязкости η' от частоты ω.

Предсказание соответствия зависимостей $\eta(\dot{\gamma})$, и $\eta'(\omega)$ является основным результатом теории Бики, представляющим интерес для анализа релаксационных свойств текучих полимерных систем. Что касается количественного расчета релаксационных характеристик, то модель Бики не обеспечивает удовлетворительного соответствия теории с экспериментальными наблюдениями, особенно в области высоких частот.

Необходимо также указать на весьма интенсивно развивающуюся область реологии наполненных систем, в которой ориентационные эффекты дисперсной фазы играют решающую роль. Шульманом З.П. и его учениками подробно исследуются свойства магнито - и электрореологических суспензий [53-54]. Например, во внешнем магнитном поле магнитореологические суспензии проявляют ярко выраженную способность к структурообразованию (проявляющуюся, в частности, в анизотропии физических свойств), обусловленную магнитным взаимодействием частиц.

Бекиным Н.Г. и другими при моделировании течения волокнонаполненных резин предложено использовать степенную модель реологического поведения системы [55].

Для многих сплошных сред зависимость между напряжением сдвига и скоростью сдвига носит временной характер, т.е. эффективная вязкость определяется не только скоростью сдвига, но и продолжительностью деформации сдвига. В зависимости от того, убывают или возрастают со временем напряжения сдвига, различают две разновидности материалов: тиксотропные и антитиксотропные.

Тиксотропия – это протекающее во времени обратимое изменение реологических свойств материала, возникающее в результате внешнего механического воздействия. Термин “тиксотропия” был предложен Фрейндлихом [56]. Он означает “изменяющийся от прикосновения” [57].

По представлениям П.А. Ребиндера [58], тиксотропия двухфазных систем обусловлена образованием особых коагуляционных структур – беспорядочных пространственных сеток, образующихся в результате изменения взаимодействия частиц дисперсной фазы друг с другом. Такая сетка образует внутри геля как бы скелет, или каркас, пронизывающий всю систему и механически удерживающий жидкость.

В настоящее время различают два типа тиксотропных систем: 1) истинно тиксотропные системы, реологические свойства которых отличаются наличием явно выраженного предела сдвиговой прочности; к таким системам относятся типографские краски, конденсированные смазки, некоторые саженаполненные резиновые смеси; 2) квазитиксотропные системы, у которых отсутствует ярко выраженный предел текучести.

Специфические особенности истинно тиксотропных систем заключаются в существовании гистерезиса вязкостных свойств [59] .Такого рода экспериментальные данные получены при исследовании саженаполненных резиновых смесей и каучуков. В истинно тиксотропных системах существует устойчивая пространственная сетка. Такой пространственный каркас обладает вполне определенной сдвиговой прочностью. Поэтому истинно тиксотропные системы даже при больших деформациях (достигающих в отдельных случаях 100 – 200 % и более) ведут себя как твердые тела. Деформация в этих пределах полностью обратима, а возникшие в материале напряжения не релаксируют до нуля, сколь бы велико не было время эксперимента.

Специфическая особенность квазитиксотропных систем состоит в том, что вязкостные свойства системы, начиная с определенного значения скорости деформации, зависят не только от скорости деформации, но также и от абсолютной величины деформации. К квазитиксотропным системам относится большинство каучуков и расплавов пластмасс. Для реологических свойств квазитиксотропных систем типично существования области течения с максимальной ньютоновской вязкостью практически неразрушенной структуры, в пределах которой не обнаруживается никаких тиксотропных (временных) эффектов [60].

Кроме того, существуют антитиксотропные среды. Термин «антитиксотропия» был введен Эрмитом [61] для определения явления возрастания эффективной вязкости в результате предшествующей деформации. Антитиксотропия представляет собой относительно редкое явление. Качальский и его сотрудники [62] обнаружили явление антитиксотропии в пятипроцентном растворе полиметакриловой кислоты в воде.

Нельзя не упомянуть еще один термин, часто встречающийся в литературе, - «реопексия». Многие авторы отожествляют оба понятия – антитиксотропия и реопексия, так как оба явления сопровождаются возрастанием напряжения сдвига в процессе деформации. Однако между ними можно заметить и различие. Реопексия – это свойство некоторых материалов постепенно структурироваться при механическом воздействии в условиях небольших скоростей сдвига. При дальнейшем увеличении скорости сдвига материал становится тиксотропным [63].

Присутствие анизометричного наполнителя существенно изменяет реологические свойства системы, что связано с нетривиальными физическими эффектами. Так, по данным Малкина А.Я. введение волокна нитрон в ньютоновскую жидкость приводит к резкому возрастанию вязкости в областях низких скоростей и напряжений сдвига. В то же время введение нитрона сферической формы не меняет ньютоновского характера течения жидкости. Эффект аномалии вязкости усиливается по мере увеличения длины, концентрации и гибкости волокна.

Начиная с определенных степеней наполнения, волокна в системе образуют пространственную сетку. Однородное сдвиговое течение композиций сопровождается разрушением исходной сетки с образованием агрегатов волокон. В сдвиговом поле образуются агрегаты волокон – в узкой области скоростей сдвига. При объемной концентрации 5 %, начиная с определенной скорости сдвига, на кривой течения была установлена «сверханомалия» вязкости и образования «кластеров». Появление «сверханомалии» вязкости соответствует нарушению термодинамической устойчивости Циглера и Пригожина [64].

По данным А. Я. Малкина [65] введение волокна нитрона с характеристическим отношением от 75 до 900 в высоковязкую полимерную среду, обладающую свойствами ньютоновской жидкости, приводит к резкому возрастанию вязкости в области низких скоростей и напряжений сдвига. При высоких напряжениях сдвига вязкость системы снижается, что объясняют изменением механизма вязкого течения и увеличением степени ориентации анизометричных частиц в потоке [65]. Это достаточно хорошо коррелирует с данными Л. Нильсена об обратной зависимости эффективной вязкости неньютоновских суспензий от напряжения сдвига [66]. Л. Нильсен приводит также важное соотношение между вязкостью и модулем упругости наполненных систем, указывая, что они должны выражаться подобными теоретическими соотношениями [66].

1.5. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ДИНАМИЧЕСКОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ВОЛОКНА С МАТРИЦЕЙ

Модельные подходы существенно разняться в зависимости от механических свойств наполнителя. Наполнители по агрегатному состоянию и природе бывают газообразные, жидкие и твердые. При наполнении газом получают пено- и поропласты. Далее газонаполненные системы не рассматриваем. Наполненные жидкостью полимерные материалы получают отверждением (охлаждением) эмульсий, в которых дисперсной фазой является жидкость, а матрицей – полимер.

Твердые наполнители можно разделить на изодиаметрические (порошки) и анизодиаметрические (волокна, нити). Причем очень короткие волокна можно рассматривать как изодиаметрические.

На рис.1.1 представлены схемы деформации гетерогенных систем наполненных короткими волокнами или эллипсоидами (а), длинными волокнами (б), жидким наполнителем в виде капель (в). На верхних рисунках представлено начальное состояние системы. На нижних – состояние наполнителя после деформации системы (без разрушения наполнителя). В процессе деформации в вязкотекучем состоянии системы наполненной жидкостью (см. рис. 1.1, в) или волокнами (см. рис. 1.1, б) конфигурация наполнителя изменяется. Так крупные капли жидкого наполнителя вытягиваются и, при определенных условиях, разрушаются на систему мелких капель. Гидродинамика этого явления подробно разработана Коссом [46]. Короткие волокна и частицы типа эллипсоидов при деформации изменяют свою ориентацию (см. рис. 1.1, а). Длинные волокна изменяют свою пространственную конфигурацию и ориентируются по направлению течения (см. рис. 1.1, б), что существенно усложняет математическое моделирование.

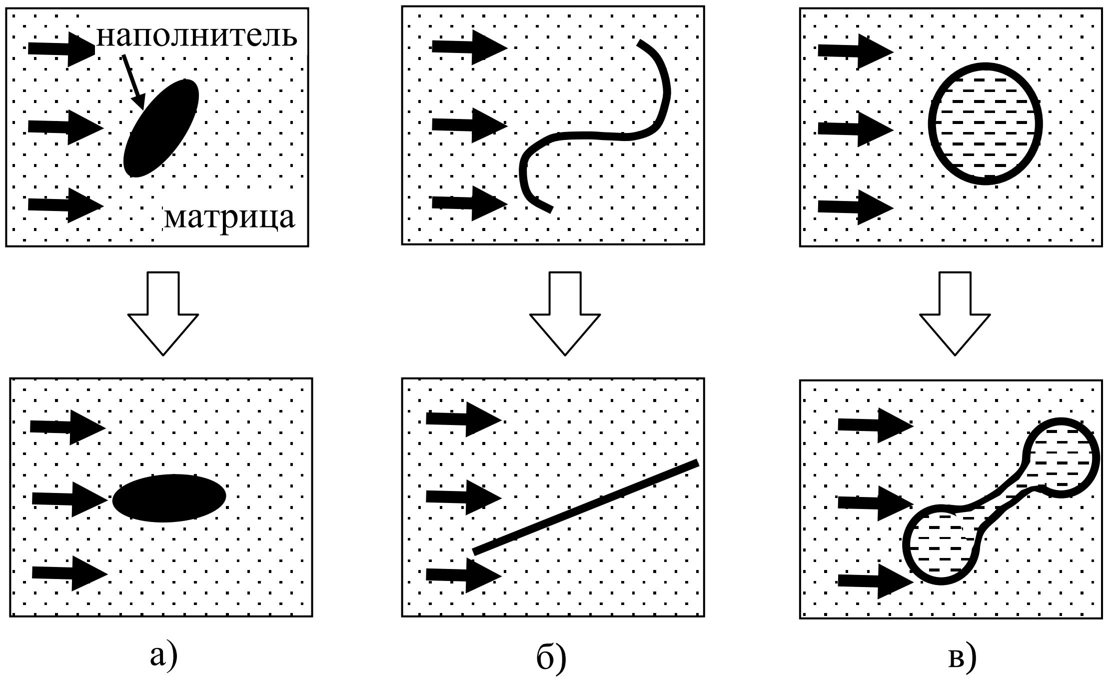

Рис. 1.1

Предметом настоящего исследования являются системы, наполненные сравнительно короткими волокнами, т.е. рассматриваются случаи а и б на рис. 1.1. Поэтому рассмотрим теоретические представления механического взаимодействия матрицы и свободного одиночного волокна.

Задача о форме упругой оси гибкого стержня является классической задачей механики. В ее изучение внесли вклад крупнейшие ученые.

В 1859 г. в мемуаре Кирхгофа [67] представлены дифференциальные уравнения упругой линии, т.е. той кривой, по которой располагается ось тонкого упругого стержня, находящегося в равновесии под действием сил, приложенных к его концам.

Плоская упругая линия была изучена Яковом Бернулли [68] и Леонардом Эйлером [69]. Эйлер исследовал различные очертания плоской упругой линии и установил девять различных ее типов.

Дифференциальные уравнения упругой линии для стержня с равными главными жесткостями при изгибе были получены Пуассоном [70] в 1816 г.; интегрирование этих уравнений было произведено Бинэ [71] и Ванцелем [72] в 1844 г. Наконец Эрмитом [73] решение задачи приведено к функциям Якоби в 1880 г.

Эйлер [74], Лагранж [75] и другие авторы исследовали вопрос об устойчивости прямолинейной формы равновесия стержня, сжатого силами, приложенными к его концам. Устойчивость прямолинейной формы равновесия стержня, сжатого и скрученного силами, приложенными к его концам, исследована Гринхиллом [76].

Николаи Е.Л.[77] дополнил уже известное решение задачи об упругой линии двоякой кривизны для упругого однородного и изотропного стержня с равными главными жесткостями при изгибе исследованием различных очертаний этой упругой линии. Рассмотрел вопрос об устойчивости той формы равновесия стержня с равными главными жесткостями при изгибе, когда упругая кривая есть винтовая линия.

Гораздо меньше работ посвящено взаимодействию сплошной среды и упругой криволинейной среды (нить, стержень). Академиком А.Н. Крыловом в 1909 г разработана задача об условиях равновесия шаровой мины, поставленной на течение [78], которая, по его словам, «помимо того, что представляет собой любопытную задачу статики, имеет и некоторое практическое значение». Задача сформулирована следующим образом: «Шаровая мина данных размеров, плавучести и веса поставлена на течении, скорость которого одна и та же по всей глубине и также известна. Требуется определить: 1) положение равновесия мины, 2) форму, принимаемую минрепом, 3) зависимость между длиной минрепа, плавучестью мины и глубиной ее погружения при разных скоростях течения». Та же самая тема трактуется также в работе Виллерса [79], в которой рассматривается вопрос о форме, принимаемой тросом, несущим змей, и о влияние на высоту подъема змея силы ветра и толщины троса.

Кочиным Н.Е. изучена форма, принимаемая тросом змейкового аэростата под действием ветра [80]. В частности рассмотрен случай, когда ветер постоянной величины, но переменного по высоте направления. При этом трос изогнется так, что будет представлять собой кривую двоякой кривизны. Для расчета силы, преложенной к элементу троса, использовалась формула, отвечающая квадратичному сопротивлению (турбулентный режим обтекания)

$$F = 0.5c\rho v^2 d\sin\alpha,$$

где ρ- плотность воздуха, d – диаметр троса, c – числовой коэффициент, равный 1.1, α - угол наклона троса. Вектор силы F перпендикулярен тросу.

Из последних работ на эту тему следует отметить работы Светлицкого В.А. В работе [81] сформулированы задачи, связанные с определением частот и форм колебаний систем с конечным числом степеней свободы; анализом установившихся и неустановившихся режимов колебаний; анализом нелинейных колебаний; определением вероятностных характеристик решений при действии случайных сил; анализом устойчивости параметрических колебаний.

В работе [81] изучается динамика тросовых систем в морской технике, в частности, в якорных системах удержания полупогруженных плавучих буровых установок, строительство которых развивается в последние годы в связи с расширением добычи нефти и газа со дна моря. Такие задачи отличают достаточно большие характерные размеры, в связи с чем, при исследовании статики и динамики встает вопрос об учете такого фактора, как упругость тросовой связи (особенно для синтетических тросов). Даже при упругом удлинении 1-2% и длине связей порядка километра ошибка в определении проекции составляет десятки метров, что может значительно превосходить допустимые смещения сооружения.

В разработанном в программной среде MATLAB алгоритме одновременно учитываются как вес, так и упругость тросовой системы. На сравнительном примере с моделью нерастяжимого троса показано, что учет упругости связи позволяет корректно определить частоту и форму основного (первого) тона колебаний троса. Знание частотного спектра позволяет прогнозировать всевозможные резонансные колебания, как при силовом, так и при кинематическом (в зависимости от условий эксплуатации) возбуждении. Кроме того, знание собственных частот и соответствующих им собственных форм колебаний необходимо для приближенных методов исследования автоколебаний гибких элементов конструкций, находящихся в потоке жидкости или газа. Рассматриваемая авторами модель представляет собой уточнение широко известной модели весомого нерастяжимого троса.

Напомним, что по определению, идеально гибкой нитью называется криволинейная среда, для которой момент тождественно равен нулю. Уравнение равновесия при этом показывает, что векторы усилия и касательной к упругой оси коллинеарны; следовательно, перерезывающая сила всегда равна нулю.

Рассматриваемая проблема движения нити или стержня в условиях деформации матрицы непосредственно примыкает к теории высокоэластичности высокополимеров. Подобная картина имеет место при ориентационном вытягивании расплавов полимеров и деформации резины [82-84].

Кратки (в 1933 г.), Ока (1939 г.) и Кун и Грюн (1942 г.) проанализировали систему твердых, асимметричных частиц, введенных в среду с бесконечной вязкостью [82]. Рассматривая случайное распределение частиц, и предполагая, что их вращение является аффинным, можно выразить фактор ориентации частиц, соответствующий произвольной деформации растяжения матрицы. Кратки рассмотрел также модель, в которой твердые стержни соединены в виде свободносочлененной цепи. Модель Кратки применима к системам с неограниченными деформациями (суспензиям, изолированным кристаллитам в пластичной или высоковязкой среде). Кроме того, эти модели часто используются для описания процессов формования и вытягивания полимерных волокон.

Динамическое воздействие потока вязкой жидкости на консольное волокно наполнителя рассмотрено в работе (Ким В.С., Скачков В.В.). Для определения упругой линии волокна предложено разбить его длину на конечное число участков, в пределах каждого из которых жесткость волокна постоянна, а внешние нагрузки (силы и моменты) действуют только на концах участков. Имеющиеся модели построены либо с использованием существенных упрощений и для малых деформаций (Aston J.E., Halpin J.C., Petit P.H., Hearman R.F., Нильсен Л., Li P.S., Moghe S.R., Christensen R.M.), либо правомерны только для конкретного вида течения (Катышков Ю.В.).

Рассмотрим поперечные F и продольные P силы, действующие на нить (стержень) со стороны вязкой жидкости. Как будет показано ниже (см. гл. 3) в зависимости от изгибной жесткости волокно наполнителя можно моделировать либо стержнем, либо идеально гибкой нитью. Предполагаем, что нить смачивается вязкой жидкостью, и адгезионные силы не допускают проскальзывания жидкости по поверхности нити. Сила F, действующая перпендикулярно оси нити, определяется по формуле[85]

$$F = \xi \frac{\rho v^2 d}{2},$$

где ξ - коэффициент гидродинамического сопротивления, ρ - плотность жидкости, d – диаметр нити.

В работах [86], [87], [88] предположены следующие выражения для коэффициента гидродинамического сопротивления в условиях ламинарного поперечного обтекания

$$\xi = \frac{16\pi}{\mathrm{Re}}\left[1 - 2\ln\left(\frac{1.7811}{4}\mathrm{Re}\right)\right]^{-1}, \quad \xi = 20\,\mathrm{Re}^{-0.778}, \quad \xi = C\,\mathrm{Re}^{-1},$$

где $\mathrm{Re} = vd\rho/\mu$. Первая формула слева (Ламба) получена теоретически и учитывает силы инерции.

В процессе вальцевания резиновой смеси оценка числа Рейнольдса для характерных значений параметров $\Delta v \approx 0.3$ м/с, $d \approx 0.1\times10^{-3}$, $\rho \approx 1500$кг/м ^{3}, $\mu \approx 10^6$ Па×с дает $\mathrm{Re} \approx 10^{-7}$, соответственно для расплавов полимеров $\rho \approx 1000$кг/м ^{3}, $\mu \approx 10^{\,2}$ Па×с, $\mathrm{Re} \approx 10^{-3}$. Течение ламинарное.

Вторая формула получена в результате обработки экспериментальных данных для Re<1. В работе [89] отмечается, что с уменьшением числа Рейнольдса показатель степени приближается к минус единице (третья формула).

Сакиадисом [82] рассмотрена задача продольного обтекания бесконечного цилиндра. Решение учитывает развитие пограничного слоя по длине цилиндра. В рассматриваемом случае траектория движения нити не прямолинейна и применимость подхода Сакиадиса проблематична.

В реальных процессах течения и перемешивания при малых концентрациях волокон течение жидкости вокруг нити ограниченно другими волокнами, поэтому как первое приближение будет считать, что нить вытягивается из трубки, заполненной вязкой жидкостью. Эффективный радиус трубки определяется средним расстоянием между нитями и связан с их объемной концентрацией $r_ф \approx d/\sqrt{c}$, где c – объемная концентрация армирующих волокон (c=0.05÷0.3). Для указанных условий на поверхность нити со стороны жидкости действует касательное напряжение [90]

$$\tau = -\frac{\mu \Delta v_\tau}{r_ф \ln\left(2 r_ф / d\right)}.$$

Таким образом, для осевой силы трения P получим оценку

$$P = -\frac{\pi d \mu v_\tau}{r_ф \ln\left(2 r_ф / d\right)},$$

где v_τ - осевая скорость движения нити в жидкости.

Следует отметить, что матрица, как правило, является неньютоновской жидкостью. Определение силы сопротивления в неньютоновской жидкости сопряжено с большими трудностями. В работе [92] получено приближенное выражение для силы, которая действует на шар, движущейся с постоянной скоростью в неньютоновской жидкости. Анализ проведен в предположении справедливости уравнений ползущего течения. Представленный метод наиболее эффективен, когда имеется аналитическое решение данной задачи для ньютоновской жидкости. Точность метода достаточна для приложений, что проверено на ряде тестовых задач. Через энергию диссипации могут быть рассчитаны и другие интегральные характеристики течения – сила, мощность.

В литературе посвященной рассмотрению наполненных полимерных систем встречаются выражения мало- и высоконаполненные системы. Возникает вопрос о границе этих понятий. По мнению авторов [93] к высоконаполненным системам относятся материалы с наполнением $c/c_m>0.565$ (c_m – предельная объемная концентрация), при $c/c_m>0.85$ происходит резкое возрастание вязкости и модуля упругости.

В настоящей работе рассматриваются малонаполненные системы, когда можно пренебречь взаимным механическим контактом соседних волокон.

ВЫВОДЫ

Композиционные материалы, содержащие различные типы волокон, находят все более широкое применение благодаря комплексу механических свойств. Весьма ответственной с точки зрения качества получаемого изделия является операция перемешивания матрицы с наполнителем.

При получении и переработке композиционных полимерных материалов имеет место не только усложнение процессов, протекающих в рабочих полостях оборудования при переработке “чистых” (ненаполненных) полимеров. Появляются новые дополнительные процессы – такие, как смешение расплава полимера с твердым наполнителем, диспергирование агломератов порошкообразных и разрушение волокнистых наполнителей, ориентация наполнителя, образование пристенного слоя и другие. В процессе перемешивания волокна подвергаются разрушению, т.е. фактическая их длина в композите отличается от начальной длины перед переработкой. Это снижает прочность изделий.

К наиболее существенным явлениям, связанным с процессом течения волокнонаполненных композиций, относятся повышенное давление течения, изменения распределения (ориентация) волокон по направлениям, измельчение волокон. Даже если матрица имеет ньютоновское поведение, волокнонаполненная композиция всегда обладает неньютоновскими свойствами.

В процессе перемешивания волокнонаполненных резиновых смесей возникают усилия такого порядка, что стальная проволока рвется, а стеклянные волокна превращаются в пыль.

Современные теоретические модели процессов диспергирования не позволяют получить количественные результаты, которые дали бы возможность прогнозировать степень диспергирования и качество изготовляемых изделий.

Кроме того, нет теоретического объяснения так называемого «каландрового эффекта», который проявляется в анизотропии прочностных свойств РВК. Он обусловлен ориентацией волокон вдоль направления каландрования.

Проблема ориентации актуальна также при компрессионном формовании хаотически армированных материалов (типа эпоксидных смол). При этом анизотропия свойств, обусловлена ориентацией армирующих элементов. Технологическая анизотропия приводит к анизотропии усадки готового изделия. Коробление является одним из наиболее распространенных видов брака и происходит, вследствие различия в величине усадки по объему изделия. Технологическая анизотропия свойств является одной из наиболее существенных причин различия свойств изделий из хаотически армированных стеклопластиков.

Изменяя технологические параметры, конструкцию формующего инструмента и структурные параметры материала, можно изменять технологическую анизотропию материала в изделии а, следовательно, и его свойства.

Наполнение эластомеров дискретными волокнами приводит к образованию макрогетерогенной системы, напряженно – деформированное состояние которой определяется в первую очередь геометрическими размерами волокна, его объемным содержанием, ориентацией в матрице эластомера.

Результаты работ, проливающие свет на явления, сопровождающие деформацию систем, наполненных короткими волокнами, неоднозначны, а иногда противоречивы. В настоящее время отсутствуют теоретические модели поведения волокна в условиях течения смеси в перерабатывающем оборудовании.

Большинство моделей (Кристенсен Р. и др.) посвящено изучению распределения касательных напряжений на поверхности волокна и нормальных в волокне и полимерной матрице, в предположении, что волокно и полимерная матрица обладают упругими свойствами.

Перспективным представляется подход Кристенсена, согласно которому на наиболее элементарном уровне система с малой объемной долей включений моделируется бесконечной средой с одиночным включением. Частицы так малы и настолько удалены одна от другой, что взаимодействием между ними можно пренебречь независимо от того, каков размер представительного элемента объема. Анализ основан на том, что основные возмущения соответствующих полей переменных относятся к области, непосредственно прилегающей к включению.

На основании проведенного обзора можно сделать вывод, что анализ динамики отдельного волокна в условиях течения наполненной системы является актуальным и представляет значительный теоретический и прикладной интерес.

ГЛАВА 2

УРАВНЕНИЯ ДИНАМИКИ КРИВОЛИНЕЙНОГО СТЕРЖНЯ И ГИБКОЙ НИТИ В ПОТОКЕ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Рассматривается эволюция упругой линии тонкого стержня конечной длины под действием распределенной нагрузки, обусловленной силами трения со стороны вязкой жидкости. Особенность задачи состоит в том, что интенсивность распределенной нагрузки зависит от пространственной ориентации стержня. Отдельно рассмотрены пространственный и плоский случай, поскольку они имеют различную параметризацию. Предложен способ уменьшения размерности уравнений динамики.

При выводе уравнений динамики использовались результаты работ [94], [77], [95], [96], [97], посвященных дифференциальным уравнениям упругой линии пространственного стержня. Анализ гидродинамического взаимодействия криволинейного стержня и вязкой жидкости выполнен на основании работ [86], [98], [88], [87].

2.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Механические свойства вязкой несжимаемой жидкости вполне определяются двумя постоянными: плотностью ρ и коэффициентом вязкости μ. Две химически разные вязкие несжимаемые жидкости с одинаковыми ρ=const, μ=const неразличимы с точки зрения механики. Задача об установившемся обтекании неподвижных тел несжимаемой вязкой жидкостью представляет собой задачу об интегрировании уравнений Навье – Стокса с условиями прилипания жидкости на поверхности тел и с условием, что скорость и давление в набегающем потоке заданы. Для нелинейных уравнений Навье – Стокса эта математическая задача очень трудна. Нет даже частных решений этой задачи, для какого – либо тела самой простой формы [88]. Обычно рассматривается только суммарная сила или главный вектор и суммарный момент.

Чтобы иметь возможность достичь практически интересных результатов, часто оказывается необходимым привлечь различные упрощения, позволяющие заменить первоначально поставленную задачу другой, лучше поддающейся изучению средствами математического анализа. Линеаризация как раз и представляет собой один из общих методов приведения в определенных условиях такого упрощения [95], [88]. Матрица, как правило, является неньютоновской жидкостью. Задача движения криволинейного стержня в потоке неньютоновской жидкости весьма сложна. Однако многие важные в практическом отношении результаты могут быть получены уже из решения задачи в пренебрежении неньютоновскими свойствами жидкости.

Присутствующая в потоке твердая частица (или ансамбль твердых частиц) вносит искажение в поле скоростей. В случае анизодиаметрической частицы с одной стороны вязкая несжимаемая жидкость изменяет ее форму и ориентацию, а с другой сама измененная частица вносит возмущение в поле скоростей вязкой жидкости. Это явление носит название эффекта аэроупругости. Кроме того, имеет место взаимное гидродинамическое влияние соседних частиц. В качестве первого приближения можно положить, что частица не вносит возмущения в поле скоростей жидкости. Случай механического контакта соседних частиц рассмотрен в гл. 3.3.

Подобный подход использовался в задаче стоксова стесненного обтекания твердой частицы, когда на первой стадии исследования рассматривалось ее движение в неограниченной жидкости, а на второй стодии было изучено гидродинамическое влияние стенки на движение частицы в условиях стоксова обтекания. При этом, использовался метод отражения (последовательных приближений) Смолуховского [99].

Вещество стержня будем предполагать упругим, однородным и изотропным. Прямую линию, проходящую через центры тяжести поперечных сечений стержня, назовем осью стержня. Различным точкам оси будут соответствовать различные значения параметра s; концам оси соответствуют значения s=-ℓ, s=ℓ. Под действием сил, приложенных к поверхности, стержень деформируется; в положении равновесия его ось образует некоторую кривую линию, которая называется упругой линией. Стержень нерастяжимый, поэтому длина его оси равна длине упругой линии.

Анализ деформации волокон наполнителя зависит от его изгибной жесткости. При малой жесткости волокна на изгиб его можно рассматривать как гибкую нерастяжимую нить. При значительной жесткости волокна на изгиб его следует рассматривать как стержень. Как будет показано ниже (подробнее см. гл. 3) жесткость волокна на изгиб может быть охарактеризована безразмерным комплексом К

$$K = E^* J \Big/ \left(B\ell^4 \left|\dot{\gamma}_п\right| \right), \qquad B=4\pi\mu/\ln(7{,}4/Re), \qquad Re=\gamma_п \ell d\rho/\mu,$$

который равен отношению изгибной жесткости стержня к силам вязкого трения, действующего со стороны потока. Здесь обозначено В- коэффициент поперечной силы трения, Re – число Рейнольдса, E^*-модуль упругости, $J = \pi d^4/64$ - момент инерции сечения, d – диаметр стержня, μ- вязкость, ρ - плотность матрицы, 2ℓ – длина стержня, $\gamma_п$ – скорость сдвига.

Выполним оценку сил инерции, действующих на стержень. Если воспользоваться результатами работы [97] и уравнениями динамики (гл. 2.2), то можно получить безразмерный комплекс

$$In = \pi d^2 \rho_c \left|\dot{\gamma}_п\right| \Big/ (4A), \qquad A=2\pi\mu/\ln(0{,}952/\sqrt{c}).$$

где ρ_c-плотность материала волокна, с – объемная концентрация волокон в композиции. Комплекс In характеризует соотношение действующих на стержень сил инерции и вязкого трения.

Численные значения параметров К и In зависят от физических свойств наполнителя, вязкости матрицы и условий течения. Используя экспериментальные и справочные данные работ [32], [100], [101], [102], [103] был выполнен расчет параметров K, In для типичных волокнистых наполнителей. Матрица – резина (ρ=1200 кг/м^3; $\mu=10^4$ Па·с). Скорость деформации простого сдвига соответствовала характерным значениям для валковых машин, экструдеров и резиносмесителей ($\gamma_п$=100 с$^{-1}$). Результаты расчетов представлены в табл. 2.1.

Таблица 2.1.

Характеристики	Материал волокна		
	Стекло	Капрон	Сталь
d, м	10×10^{-6}	30×10^{-6}	150×10^{-6}
ℓ, м	5×10^{-3}	5×10^{-3}	10^{-2}
E^*, ГПа	75	3	200
ρ_c, кг/м^3	2600	1140	7800
Re	6×10^{-7}	$1{,}8\times10^{-6}$	$1{,}8\times10^{-5}$
B	7692	8247	9716
K	$7{,}8\times10^{-8}$	$2{,}35\times10^{-7}$	$5{,}2\times10^{-4}$
In	$4{,}7\times10^{-10}$	$1{,}85\times10^{-9}$	$3{,}17\times10^{-7}$

Как видно из табл. 2.1 силы инерции незначительны (In<<1) и их можно не учитывать. Наибольшую изгибную жесткость (параметр K) имеют стальные волокона. Остальные волокна, в указанных условиях течения, можно рассматривать как гибкую нить с нулевой изгибной жесткостью. Отметим, что расчеты выполнены для резиновой матрицы. В случае маловязкой матрицы (напрмер, эпоксидная смола) численные значения безразмерных параметров будут другими, и может появиться необходимость учета изгибной жесткости волокон. В соответствии с проведенным анализом в работе отдельно представлены динамические уравнения для стержня и нити (стержня нулевой изгибной жесткости K=0).

Рассматривается изолированный пространственный стержень произвольной формы (криволинейная упругая среда) в ламинарном потоке вязкой жидкости. При изгибе тонкого стержня внешние силы, действующие на боковую поверхность, малы по сравнению с возникающими внутри стержня напряжениями. Вектор смещения может быть большим даже при слабой деформации. Так, при слабом сгибании тонкого длинного (2ℓ>>d) стержня его концы могут значительно переместиться в пространстве, даже если относительные смещения соседних точек в стержне малы.

Существует два типа деформаций стержней, могущих сопровождаться большим смещением отдельных частей стержня. Одним из них является изгиб стержня, а вторым – кручение.

В изогнутом стержне в некоторых местах его происходит растяжение, а в других сжатие. Растянуты линии на выпуклой стороне изогнутого стержня, а на вогнутой стороне происходит сжатие. Внутри стержня существует “нейтральная” поверхность, на которой не происходит ни растяжения, ни сжатия. Она отделяет собой области сжатия от областей растяжения. “Нейтральная” поверхность проходит через центры инерции поперечных сечений стержня. Сечения остаются при изгибе плоскими, лишь поворачиваясь на некоторый угол относительно своего первоначального положения (гипотеза Бернулли). Радиус кривизны можно определить как радиус кривизны “нейтральной” поверхности. Но в силу тонкости стержня его можно рассматривать здесь с той же точностью просто как радиус кривизны самого изогнутого стержня, рассматриваемого как не имеющая толщины линия (об этой линии часто говорят как об “упругой линии”).

При круговом сечении стержня (с диаметром d) центр инерции находится в центре круга, а направление главных осей инерции произвольно. Момент инерции вокруг любой оси, проходящей в плоскости сечения через его центр, равен $J=\pi d^4/64$.

Таким образом, силы инерции и тяжести пренебрежимо малы. Стержень смачивается жидкостью и выполняется условие прилипания. Со стороны вязкой жидкости на стержень действует сила трения, но поле скоростей в жидкости не нарушается (игнорируем эффект аэроупругости). Упругие деформации, связанные с растяжением или сжатием упругой оси стержня, не учитываются. На стержне в естественном состоянии и при деформации отсутствуют участки большой кривизны, и выполняется условие $\max(d/\ell, kd) \ll 1$, где 2ℓ, d – длина и диаметр стержня, k – кривизна. Поперечное сечение принимается малым в сравнении с общими размерами стержня и при деформации не меняется, т.е. отсутствует давление продольных волокон друг на друга.

2.2. СИЛЫ, ДЕЙСТВУЮЩИЕ СО СТОРОНЫ ЖИДКОСТИ НА СТЕРЖЕНЬ (НИТЬ)

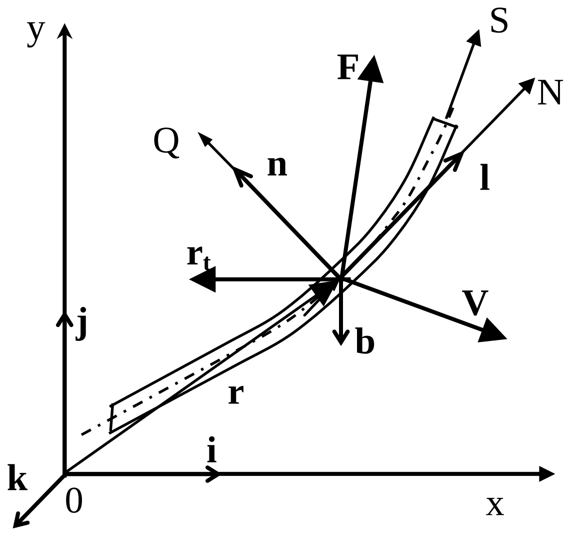

Рис. 2.1. Схема изогнутого стержня.

Определим составляющие силы трения. У поверхности движущегося стержня существует трехмерный пограничный слой. В силу линейности уравнений Стокса (безынерционное приближение для малых чисел Рейнольдса) движение в пограничном слое можно рассматривать как наложение двух движений: поперечного и продольного обтекания стержня [88]. Отметим, что для неньютоновских жидкостей суперпозиция течений неправомерна. Отметим, что новые задачи, как правило, ставятся в стоксовом приближении (течение в валках, экструдере, жидкие пленки и струи и др.). Основные закономерности обнаруживаются уже в ньютоновском приближении. Некоторые полимеры (например, эпоксидные смолы) в реологическом отношении близки к ньютоновским жидкостям. Также игнорируем эффекты неизотермичности.

Введем неподвижную в пространстве (или «вмороженную» в жидкость) систему координат (x,y,z) (см. рис. 2.1). Обозначим через x, y, z координаты точек упругой линии стержня s. Векторную параметризацию кривой s выполняет вектор – функция $\mathbf{r}(s, t)$, $-\ell \le s \le \ell$, где t – время. Направлениям x,y,z соответствует правосторонне ориентированный триэдр ($\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$). Обозначим через $\mathbf{l}$ ($\mathbf{l}=\mathbf{r}_s$, $|\mathbf{l}|=1$) вектор касательной к упругой линии, $\mathbf{n}=\mathbf{b}\times\mathbf{l}$ – вектор нормали, $\mathbf{b}$ – вектор бинормали. Скорость жидкости характеризуется вектором $\mathbf{V}(x,y,z)$. Скорость произвольной точки упругой оси стержня определяется $\mathbf{r}_t$.

Сила вязкого трения обусловлена некоторым <<отставанием>> стержня от движущейся окружающей жидкости. Сила трения при поперечном обтекании бесконечного цилиндра определяется формулой Ламба [86], [98], [87]. При этом нормальная и бинормальная составляющие силы трения описываются выражениями

$$\mathbf{Kn}=B(\mathbf{V}-\mathbf{r}_t)\mathbf{n}, \qquad \mathbf{Kb}=B(\mathbf{V}-\mathbf{r}_t)\mathbf{b}, \qquad (2.1)$$

где $\mathbf{V}-\mathbf{r}_t$ – относительная скорость поперечного обтекания, $B=4\pi\mu/\ln(7,4/Re)$, $Re=<v>d\rho/\mu$ – число Рейнольдса, μ – вязкость жидкости, d – диаметр стержня (нити), ρ – плотность жидкости, $<v>$ – характерная скорость.

В формуле (2.1) коэффициент B учитывает влияние диаметра стержня. В широком интервале чисел Рейнольдса коэффициент B изменяется незначительно (так при возрастании Re от 10^{-8} до 10^{-3} коэффициент B увеличивается в 2,3 раза). Поэтому параметр B принимается постоянным, соответствующим характерной скорости обтекания стержня жидкостью.

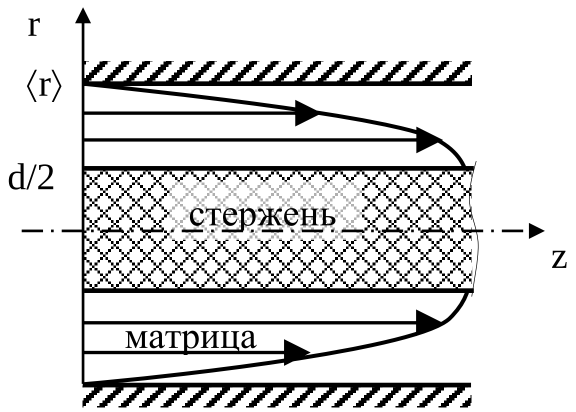

Рис. 2.2.

Вокруг движущегося поступательно цилиндра формируется гидродинамический пограничный слой. В неограниченной среде с увеличением длины цилиндра толщина пограничного слоя (зона гидродинамического возмущения) неограниченно растет. В реальных условиях перемешивания гетерогенной среды, наполненной короткими волокнами, очевидно, рост толщины пограничного слоя ограничен его длиной и окружающими волокнами, которые так же формируют локальные пограничные слои, поэтому толщина пограничного слоя не может превышать характерный размер представительного объема.

Исходя из этих соображений, получим формулу осевой составляющей силы трения. При перемешивании систем наполненных волокнами течение жидкости вокруг отдельного волокна топологически ограничено гидродинамическим влиянием соседних волокон, которые вокруг волокна образуют подобие трубки (см. рис. 2.2, 2.3). Поэтому в первом приближении рассматриваем аксиально движущийся стержень в цилиндрической трубке, заполненной вязкой жидкостью (осесимметричное течение Куэтта). Радиус условной трубки <r> определяется средним расстоянием между волокнами и связан с их объемной концентрацией с как [91] $<r>=d/(2{,}1\sqrt{c})$, ($c= 0{,}05\div 0{,}3$).

Оценим связь взаимного расположения волокон с их объемным содержанием в смеси. Пусть оси всех волокон бесконечной длины параллельны между собой. При квадратной упаковке в нормальном сечении оси четырех соседних волокон расположены по углам квадрата со стороной <r>. Отношение площади поперечного сечения одного цилиндрического волокна к площади сечения квадрата равно объемной концентрации волокон. Получим соотношение $d/\left(2<r>\right)=1.14\sqrt{c}$, где d – диаметр волокна, <r> – характерное расстояние между волокнами, c – объемное содержание волокон в смеси.

При гексагональном расположении волокон по углам равностороннего треугольника справедливо соотношение [91] $d/(2<r>)=1.05\sqrt{c}$. Из сопоставления формул видно, что укладка незначительно изменяет числовой множитель.

Задача осевого движения стержня в коаксиальном зазоре, заполненном вязкой жидкостью, включает уравнение движения и граничные условия (полагаем $\partial/\partial t$, $v_r=0$, $v_\theta=0$, $P=0$)

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r\tau_{rz}\right)=0, \qquad \tau_{rz}=\mu\frac{\partial v_z}{\partial r},$$

$$r=0{,}5d,\quad v_z=\mathbf{r}_t\mathbf{l}; \qquad r=\langle r\rangle,\quad v_z=\mathbf{V}\mathbf{l}.$$

Принимаем скорость стенок трубки равной скорости жидкости. Плотность распределенной нагрузки (осевая составляющая трения) определяется выражением $\mathbf{Kl}=\pi d\tau_{rz}|_{d/2}$. Проинтегрировав уравнение движения, получим

$$\mathbf{Kl}=A(\mathbf{V}-\mathbf{r}_t)\mathbf{l}, \qquad (2.2)$$

где $A=\pi d\mu/[(d/2)\ln(2<r>/d)]=2\pi\mu/\ln(0{,}952/\sqrt{c})$. Что соответствует результатам [86].

Возможно уточнение численных значений коэффициентов A и B. Формулы (2.1), (2.2) верно отражают линейную зависимость силы трения от скорости при ламинарном течении.

Сила трения пропорциональна относительной скорости движения стержня в жидкости и в трехмерном случае может быть представлена так

$$\mathbf{K}=A\mathbf{l}((\mathbf{V}-\mathbf{r}_t)\mathbf{l})+B\mathbf{n}((\mathbf{V}-\mathbf{r}_t)\mathbf{n})+B\mathbf{b}((\mathbf{V}-\mathbf{r}_t)\mathbf{b}), \qquad (2.3)$$

где $\mathbf{V}=v_x\mathbf{i}+v_y\mathbf{j}+v_z\mathbf{k}$ – скорость жидкости, v_x, v_y, v_z - компоненты скорости жидкости.

При плоском движении стержня распределенный крутящий момент отсутствует. В общем случае пространственного движения стержня на его

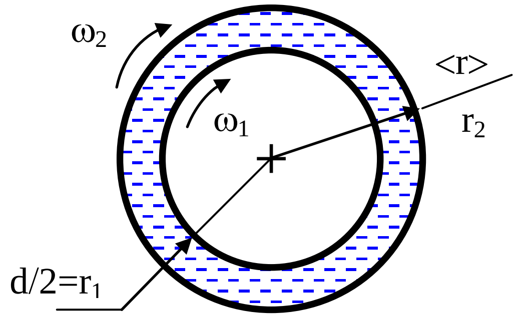

Рис. 2.3. Сила вязкого трения, действующая на поверхность стержня.

поверхность действуют силы, создающие распределенный крутящий момент. Эти силы обусловлены вращением как самого стержня вокруг упругой оси, так и вращательным движением окружающей жидкости.

Расчетная схема показана на рис. 2.3. Радиус внутреннего цилиндра (стержня) $r_1 = 0,5d$, наружного $r_2 = \langle r \rangle = d \big/ \left(2.1\sqrt{c}\right)$. Скорость вращения внутреннего цилиндра ω_1, наружного ω_2. Скорость ω_1 связана с пространственным изменением конфигурации стержня. Скорость ω_2 – перемещением окружающих волокон, совершающих круговое движение вокруг упругой оси актуального стержня под действием сил вязкого трения со стороны окружающей жидкости. Окружную скорость точек поверхности стержня можно определить так $v_{\theta 1} = r_1\omega_1$, $\omega_1 = d\varphi/dt$, где $d\varphi$ - угол поворота двух сечений, находящихся на расстоянии ds вдоль длины стержня. Можем записать $v_{\theta 1} = \frac{d}{2}\frac{d\varphi}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{d}{2}\chi\,\mathbf{r}_t\mathbf{l}$, где $\chi = d\varphi/ds$ - кручение. В скалярной форме получим выражение

$$v_{\theta 1} = 0.5d\chi\left(\alpha x_t + \beta y_t + \gamma z_t\right). \qquad (2.4)$$

Вращательное движение внешнего цилиндра обусловлено осевой составляющей вектора угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$, то есть $\omega_2=\boldsymbol{\omega}\mathbf{l}$. Из теории поля [104] известно соотношение $\boldsymbol{\omega} = 0.5\mathrm{rot}\mathbf{V}$. Следовательно, можем записать

$$\omega_2=0.5(\mathrm{rot}\mathbf{V})\mathbf{l},\ \ \mathbf{l}=\alpha\mathbf{i}+\beta\mathbf{j}+\gamma\mathbf{k},\ \ \mathrm{rot}\mathbf{V}=\left(\frac{\partial v_z}{\partial y}-\frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\mathbf{i}+\left(\frac{\partial v_x}{\partial z}-\frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\mathbf{j}+\left(\frac{\partial v_y}{\partial x}-\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\mathbf{k}.$$

Выполнив скалярное умножение, получим для скорости вращения стенок внешнего цилиндра

$$v_{\theta 2} = \langle r \rangle \omega_2,\quad \omega_2 = 0.5\left\{\alpha\left(\frac{\partial v_z}{\partial y}-\frac{\partial v_y}{\partial z}\right)+\beta\left(\frac{\partial v_x}{\partial z}-\frac{\partial v_z}{\partial x}\right)+\gamma\left(\frac{\partial v_y}{\partial x}-\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\right\}. \qquad (2.5)$$

Распределенный крутящий момент $\mathbf{m}$, действующий со стороны вязкой несжимаемой жидкости в трубке на поверхность стержня можно записать через касательное напряжение

$$\mathbf{m}= 0.5\pi d^2\,\tau_{\tau\theta}\big|_{r=r_1}\,\mathbf{l}. \qquad (2.6)$$

Чтобы найти касательное напряжение рассмотрим задачу течения вязкой несжимаемой жидкости в коаксиальном зазоре между цилиндрами (см. рис. 2.3)

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\tau_{\tau\theta}\right) = 0;\qquad \tau_{\tau\theta} = \mu r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_\theta}{r}\right); \qquad (2.7)$$

$$r = r_1,\quad v_\theta = v_{\theta 1};\qquad r = r_2,\quad v_\theta = v_{\theta 2}.$$

Здесь первое уравнение – уравнение движения.

Решение уравнений (2.7) имеет вид $v_\theta = c_1/r + c_2 r$. Постоянные c_1, c_2 находятся из граничных условий (2.7) и равны

$$c_1 = \frac{r_1^2 r_2^2}{\left(r_2^2 - r_1^2\right)}\left(\frac{v_{\theta 1}}{r_1} - \frac{v_{\theta 2}}{r_2}\right), \quad c_2 = \frac{v_{\theta 1}}{r_1} - \frac{c_1}{r_1^2}.$$

Касательное напряжение на поверхности стержня обусловлено разностью скоростей вращения поверхности стержня и стенок трубки и равно

$$\tau_{r\theta}\big|_{r=r_1} = -\mu\frac{c_1}{r_1^2} = -\mu\frac{r_2^2}{\left(r_2^2 - r_1^2\right)}\left(\frac{v_{\theta 1}}{r_1} - \frac{v_{\theta 2}}{r_2}\right). \qquad (2.8)$$

Таким образом, выражения (2.4)-(2.6), (2.8) полностью определяют распределенный момент **m**, действующий со стороны вязкой несжимаемой жидкости на поверхность стержня.

Составляющие вектора распределенного крутящего момента m_b и m_n ($\mathbf{m}=m_l\mathbf{l}+m_n\mathbf{n}+m_b\mathbf{b}$) обусловленные составляющими ω_b и ω_n, можно не учитывать, поскольку они являются величинами высшего порядка малости (порядок $(ds)^2$).

Отметим, что существует безвихревое движение жидкости, в котором повсюду rot**V**=0 и можно не учитывать вращательное движение жидкости в окрестности стержня, поскольку $\omega_2=0$. В простом сдвиговом течении ($v_x = \gamma_п y$, $v_y = v_z = 0$) вектор скорости вращения направлен поперек потока, и составляет, $\omega_2 = -0.5\gamma\gamma_п$, что согласуется с теорией Бики [51], о средней скорости вращения клубков макромолекул.

В течениях растяжения (чистый сдвиг и одноосное растяжение) поле скоростей безвихревое rot**V**=0 и можно считать $v_{\theta 2}=0$, $\omega_2=0$. В этом случае расчетное выражение (2.6) упрощается. Достаточно учитывать вращение стержня с окружной скоростью $v_{\theta 1}=0{,}5d\chi_s\mathbf{r}_t\mathbf{l}$. При этом на его поверхность действует касательное напряжение $\tau_{\tau\theta}\big|_{r=r_1}=12\mu v_{\theta 1}\langle r\rangle/(d^2-4\langle r\rangle^2)$. Распределенный момент внешней нагрузки определяется выражением (2.6), в котором необходимо положить $\tau_{\tau\theta}\big|_{r=r_1}=-25{,}2\mu\sqrt{c}\,v_{\theta 1}/[d(4-4{,}41c)]$, $v_{\theta 1}=0{,}5d\chi(\alpha x_t+\beta y_t+\gamma z_t)$.

2.3. УРАВНЕНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ДВИЖЕНИЯ КРИВОЛИНЕЙНОГО СТЕРЖНЯ (НИТИ) В ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

Обозначим силу внутренних напряжений (рис. 2.1), приложенную к площади сечения стержня, посредством **F**. Если рассматривать два бесконечно близких сечения как поверхности оснований вырезаемого ими элемента стержня, то на верхнее основание действует сила **F**+d**F**, а на нижнее – сила –**F**; их сумма есть дифференциал d**F**. Пусть **K** есть действующая на стержень внешняя сила, отнесенная к единице его длины (плотность распределенной нагрузки). Тогда на элемент длины ds действует внешняя сила **K**ds. Равнодействующая всех сил, действующих на выделенный элемент, **F**+d**F**–**F+K**ds, следовательно, d**F**+**K**ds. В равновесии эта сила обращается в нуль [96] d**F**+**K**ds=0.

Второе уравнение получается из условия равенства нулю полного момента сил, приложенных к данному элементу. Пусть **M** есть момент сил внутренних напряжений, действующих на площадь сечения стержня. На поверхность стержня со стороны вязкой жидкости действует распределенный момент **m**. Момент же, обусловленный силами **K**, является малой величиной высшего порядка. Полный действующий на элемент стержня момент сил есть $d\mathbf{M}+\mathbf{m}ds+d\mathbf{l}\times\mathbf{F}$, $(d\mathbf{l}=\mathbf{l}ds)$. В равновесии эта сумма обращается в нуль.

Таким образом, имеем следующие уравнения равновесия произвольным образом изогнутого стержня:

$$\mathbf{F}_s= -\mathbf{K}, \qquad \mathbf{M}_s+\mathbf{m}=\mathbf{F}\times\mathbf{l}, \tag{2.9}$$

где $\mathbf{K}=A\mathbf{l}((\mathbf{V}-\mathbf{r}_t)\mathbf{l})+B\mathbf{n}((\mathbf{V}-\mathbf{r}_t)\mathbf{n})+B\mathbf{b}((\mathbf{V}-\mathbf{r}_t)\mathbf{b})$– линейная плотность внешних сил. Нижним индексом обозначены производные.

Представим вектор **F** в компонентах

$$\mathbf{F}=(\mathbf{Fl})\mathbf{l}+(\mathbf{Fn})\mathbf{n}+(\mathbf{Fb})\mathbf{b}=N\mathbf{l}+Q\mathbf{n}+P\mathbf{b}, \tag{2.10}$$

где N – осевая сила, Q, P – компоненты перерезывающей силы.

Подставив (2.10) в первое уравнение в (2.9), получим

$$N_s\mathbf{l}+Q_s\mathbf{n}+P_s\mathbf{b}+Nk\mathbf{n}+Q(-k\mathbf{l}+\chi\mathbf{b})-P\chi\mathbf{n}=-\mathbf{K}. \tag{2.11}$$

Здесь использовались формулы Френе - Серре

$$\mathbf{l}_s=k\mathbf{n},\ \mathbf{n}_s=-k\mathbf{l}+\chi\mathbf{b},\ \mathbf{b}_s=-\chi\mathbf{n}, \tag{2.12}$$

где k – кривизна, χ - кручение.

Уравнение (2.11) с учетом (2.3) примет вид

$$\mathbf{l}(N_s-kQ)+\mathbf{n}(Q_s+Nk-P\chi)+\mathbf{b}(P_s+\chi Q)=$$
$$=-A\mathbf{l}((\mathbf{V}-\mathbf{r}_t)\mathbf{l})-B\mathbf{n}((\mathbf{V}-\mathbf{r}_t)\mathbf{n}-B\mathbf{b}((\mathbf{V}-\mathbf{r}_t)\mathbf{b}). \tag{2.13}$$

Полученное уравнение запишем в скалярной форме

$$\begin{aligned} &N_s-kQ=-A(\mathbf{V}-\mathbf{r}_t)\mathbf{l},\\ &Q_s+Nk-P\chi=-B(\mathbf{V}-\mathbf{r}_t)\mathbf{n},\\ &P_s+\chi Q=-B(\mathbf{V}-\mathbf{r}_t)\mathbf{b}. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Имеют место следующие соотношения:

$$\mathbf{ii}=1, \quad \mathbf{ij}=0, \quad \mathbf{l}=\alpha\mathbf{i}+\beta\mathbf{j}+\gamma\mathbf{k}, \quad \mathbf{n}=l\mathbf{i}+m\mathbf{j}+n\mathbf{k},$$
$$\mathbf{b}=\lambda\mathbf{i}+\mu\mathbf{j}+\nu\mathbf{k}, \quad \mathbf{V}-\mathbf{r}_t=(v_x-x_t)\mathbf{i}+(v_y-y_t)\mathbf{j}+(v_z-z_t)\mathbf{k}, \tag{2.15}$$

где α, β, γ, l, m, n, λ, μ, ν -направляющие косинусы девяти углов, образуемых осями **l**, **n**, **b** (оси сопровождающего трехгранника) и осями **i**,**j**,**k**. Из них только три независимых.

Уравнения (2.14) с учетом (2.15) примут вид

$$\begin{aligned} &N_s-kQ=-A[\alpha(v_x-x_t)+\beta(v_y-y_t)+j(v_z-z_t)],\\ &Q_s+Nk-P\chi=-B[l(v_x-x_t)+m(v_y-y_t)+n(v_z-z_t)],\\ &P_s+\chi Q=-B[\lambda(v_x-x_t)+\mu(v_y-y_t)+\nu(v_z-z_t)]. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Ограничим рассмотрение стержнем кругового сечения. При этом для момента можем записать [96]

$$\mathbf{M}=E^*J(\mathbf{l}\times\mathbf{l}_s-\mathbf{l}_0\times\mathbf{l}_{0s})+GJ_p(\chi-\chi_o)\mathbf{l}, \tag{2.17}$$

где E^*-модуль упругости, $J = \pi d^4/64$ - момент инерции сечения, d – диаметр стержня, $\mathbf{l}_0$ – вектор касательной, соответствующий начальной (естественной) конфигурации стержня; χ – кручение; G – модуль сдвига; $J_p=\pi d^4/32$ – полярный момент инерции поперечного сечения; k_o, χ_o– начальные кривизна и кручение.

Подставим (2.17) во второе уравнение (2.9)

$$E^*J(\mathbf{l_s}\times\mathbf{l_s}+\mathbf{l}\times\mathbf{l_{ss}}-\mathbf{l_{0s}}\times\mathbf{l_{0s}}-\mathbf{l_0}\times\mathbf{l_{0ss}})+GJ_p(\chi-\chi_o)\mathbf{l}_s+GJ_p(\chi_s-\chi_{os})\mathbf{l}+\mathbf{m}=\mathbf{F}\times\mathbf{l}. \qquad (2.18)$$

С учетом (2.12) можем записать соотношения $\mathbf{l}\times\mathbf{l_{ss}}=\mathbf{l}\times(k\mathbf{n})_s=\mathbf{l}\times[k_s\mathbf{n}+k(-k\mathbf{l}+ +\chi\mathbf{b})]=k_s\mathbf{b}-k\chi\mathbf{n}$, $\mathbf{l}_s\times\mathbf{l}_s=0$. Здесь учитывались равенства: $\mathbf{l}\times\mathbf{n}=\mathbf{b}$, $\mathbf{l}\times\mathbf{l}=0$, $\mathbf{l}\times\mathbf{b}=-\mathbf{n}$. Аналогичный вид имеет выражение для $\mathbf{l}_0\times\mathbf{l}_{0ss}$.

Уравнение (2.18) с учетом (2.10) имеет вид

$$E^*J(k_s\mathbf{b}-k\chi\mathbf{n}-k_{0s}\mathbf{b}+k_0\chi_0\mathbf{n})+GJ_p(\chi-\chi_o)k\mathbf{n}+GJ_p(\chi_s-\chi_{os})\mathbf{l}+\mathbf{m} =(N\mathbf{l}+Q\mathbf{n}+P\mathbf{b})\times\mathbf{l},$$

где k_0, χ_0 – начальная кривизна и кручение.

Выполнив в правой части этого равенства векторное умножение, получим

$$E^*J[(k_o\chi_o-k\chi)\mathbf{n}+(k_s-k_{os})\mathbf{b}]+GJ_p(\chi-\chi_o)k\mathbf{n}+GJ_p(\chi_s-\chi_{os})\mathbf{l}+0{,}5\pi d^2\,\tau_{\tau\theta}\big|_{r=r_1}\,\mathbf{l}=-Q\mathbf{b}+P\mathbf{n}.$$

Таким образом, момент из уравнений исключен и имеем три скалярных уравнения

$$\begin{aligned}&E^*J(k_o\chi_o-k\chi)+GJ_pk(\chi-\chi_o)=P,\\&E^*J(k_s-k_{os})=-Q,\\&GJ_p(\chi_s-\chi_{os})+0{,}5\pi d^2\,\tau_{\tau\theta}\big|_{r=r_1}=0.\end{aligned} \qquad (2.19)$$

Уравнения равновесия (2.16), (2.19) необходимо дополнить условиями ортогональности направляющих косинусов [105]

$$\begin{aligned}&\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1, && l^2+m^2+n^2=1, && \lambda^2+\mu^2+\nu^2=1,\\&\alpha l+\beta m+\gamma n=0, && \alpha\lambda+\beta\mu+\gamma\nu=0, && l\lambda+m\mu+n\nu=0.\end{aligned} \qquad (2.20)$$

Для шести неизвестных функций x, y, z, N, P, Q от s, t имеем шесть уравнений (2.16), (2.19).

При решении прикладных задач эти уравнения необходимо дополнить начальными и граничными условиями. Пусть в начальный момент времени конфигурацию пространственного стержня характеризует радиус – вектор $\mathbf{r}_0=\mathbf{r}(t=0)$, где $\mathbf{r}_0=x_0\mathbf{i}+y_0\mathbf{j}+z_0\mathbf{k}$. Кроме того, считаем, что напряжения в стержне отсутствуют. Имеем t=0, $\mathbf{r}=\mathbf{r}_0$, $\mathbf{M}=\mathbf{F}=0$, или в скалярной форме с учетом (2.10), (2.17)

$$t=0,\quad x=x_0(s),\quad y=y_0(s),\quad z=z_0(s),\quad N=Q=P=0.$$

На свободных концах стержня отсутствуют силы и моменты, поэтому граничные условия $t>0$, $s=\pm\ell$: $\mathbf{F}=\mathbf{M}=0$, или в скалярной форме

$$t>0,\quad s=\pm\ell:\quad N=P=Q=0,\quad k=0. \qquad (2.21)$$

Принят отсчет параметра s от середины стержня, длиной 2ℓ. Кривизна начальной конфигурации k_0 должна удовлетворять краевому условию (2.21).

Кривизна и кручение следующим образом связана с функциями x, y, z [97]:

$$k=\sqrt{x_{ss}^2+y_{ss}^2+z_{ss}^2},\qquad \chi=k^{-2}\begin{vmatrix}x_s & y_s & z_s\\ x_{ss} & y_{ss} & z_{ss}\\ x_{sss} & y_{sss} & z_{sss}\end{vmatrix}.$$

Направляющие косинусы могут быть представлены функциями x, y, z [97]:

$$\{\alpha,\beta,\gamma\}=\{x_s,y_s,z_s\},\qquad \{l,m,n\}=\frac{\{x_{ss},\,y_{ss},\,z_{ss}\}}{\sqrt{x_{ss}^2+y_{ss}^2+z_{ss}^2}},$$

$$\{\lambda,\mu,\nu\}=\frac{\{y_sz_{ss}-z_sy_{ss},\,z_sx_{ss}-x_sz_{ss},\,x_sy_{ss}-y_sx_{ss}\}}{\sqrt{\left(y_sz_{ss}-z_sy_{ss}\right)^2+\left(z_sx_{ss}-x_sz_{ss}\right)^2+\left(x_sy_{ss}-y_sx_{ss}\right)^2}}.$$

Производная от кривизны определяется выражением

$$k_s=\frac{1}{k}\left(\alpha_s\alpha_{ss}+\beta_s\beta_{ss}+\gamma_s\gamma_{ss}\right)=l\alpha_{ss}+m\beta_{ss}+n\gamma_{ss}.$$

Учитывалось условие нерастяжимости упругой оси $\sqrt{x_s^2+y_s^2+z_s^2}=1$.

2.3.1. Улучшение формы уравнений

Улучшить форму уравнений, и тем самым значительно упростить решение и анализ прикладных задач, можно исключив из уравнений функции x, y, z и их производные, т.е. уменьшив размерность задачи.

Непосредственно функции x, y, z, x_t, y_t, z_t входят в уравнение (2.13), поэтому предварительно разрешим его относительно $\mathbf{V}$-$\mathbf{r}_t$.

Умножив дважды скалярно обе части равенства (2.13) на $\mathbf{l}$, получим

$$N_s-kQ=-A(\mathbf{l}((\mathbf{V}-\mathbf{r}_t)\mathbf{l}))\mathbf{l},\qquad ((\mathbf{l}((\mathbf{V}-\mathbf{r}_t)\mathbf{l}))\mathbf{l})\mathbf{l}=\mathbf{l}((\mathbf{V}-\mathbf{r}_t)\mathbf{l})=-A^{-1}(N_s-kQ)\mathbf{l}.$$

Умножив дважды (2.13) на $\mathbf{n}$, получим

$$Q_s+Nk-P\chi=-B(\mathbf{n}((\mathbf{V}-\mathbf{r}_t)\mathbf{n}))\mathbf{n},\qquad ((\mathbf{n}((\mathbf{V}-\mathbf{r}_t)\mathbf{n}))\mathbf{n})\mathbf{n}=\mathbf{n}((\mathbf{V}-\mathbf{r}_t)\mathbf{n})=-B^{-1}(Q_s+Nk-P\chi)\mathbf{n}.$$

Аналогично, дважды умножая (2.13) на $\mathbf{b}$, получим

$$P_s+\chi Q=-B(\mathbf{b}((\mathbf{V}-\mathbf{r}_t)\mathbf{b}))\mathbf{b},\qquad ((\mathbf{b}((\mathbf{V}-\mathbf{r}_t)\mathbf{b}))\mathbf{b})\mathbf{b}=\mathbf{b}((\mathbf{V}-\mathbf{r}_t)\mathbf{b})=-B^{-1}(P_s+\chi Q)\mathbf{b}.$$

Имеем три проекции вектора $\mathbf{V}$-$\mathbf{r}_t$, т.е. можем записать

$$\mathbf{V}-\mathbf{r}_t=-B^{-1}(Q_s+Nk-P\chi)\mathbf{n}-A^{-1}(N_s-kQ)\mathbf{l}-B^{-1}(P_s+\chi Q)\mathbf{b}.\qquad(2.22)$$

Продифференцируем обе части полученного равенства (2.22) по s

$$\mathbf{V}_s-\mathbf{r}_{ts}=-B^{-1}(Q_{ss}+N_sk+Nk_s-P_s\chi-P\chi_s)\mathbf{n}-B^{-1}(Q_s+Nk-P\chi)(-k\mathbf{l}+\chi\mathbf{b})-A^{-1}(N_{ss}-k_sQ-kQ_s)\mathbf{l}-$$
$$-A^{-1}(N_s-kQ)k\mathbf{n}-B^{-1}(P_{ss}+\chi_sQ+\chi Q_s)\mathbf{b}+B^{-1}(P_s+\chi Q)\chi\mathbf{n},$$

или

$$\mathbf{V}_s-\mathbf{r}_{ts}=\mathbf{n}[-B^{-1}(Q_{ss}+N_sk+Nk_s-P_s\chi-P\chi_s)-A^{-1}k(N_s-kQ)+B^{-1}\chi(P_s+Q\chi)]+\mathbf{l}[kB^{-1}(Q_s+Nk-$$
$$-P\chi)-A^{-1}(N_{ss}-k_sQ-kQ_s)]+\mathbf{b}[-B^{-1}\chi(Q_s+Nk+P\chi)-B^{-1}(P_{ss}+\chi_sQ+\chi Q_s)].\qquad(2.23)$$

Рассмотрим слагаемые левой части уравнения (2.23). Производная по направлению $\mathbf{V}_s$ может быть представлена в виде проекций на оси сопровождающего репера (трехгранника) [106]

$$\mathbf{V}_s=(\mathbf{l}\nabla)\mathbf{V}=(((\mathbf{l}\nabla)\mathbf{V})\mathbf{n})\mathbf{n}+(((\mathbf{l}\nabla)\mathbf{V})\mathbf{l})\mathbf{l}+(((\mathbf{l}\nabla)\mathbf{V})\mathbf{b})\mathbf{b},\qquad(2.24)$$

где $\nabla=\partial/\partial x\,\mathbf{i}+\partial/\partial y\,\mathbf{j}+\partial/\partial z\,\mathbf{k}$- дифференциальный вектор-оператор Гамильтона.

Скалярное произведение векторов **l** и ∇ с учетом (2.15) имеет вид $\mathbf{l}\nabla = \alpha\frac{\partial}{\partial x} + \beta\frac{\partial}{\partial y} + \gamma\frac{\partial}{\partial z}$. Выполнив скалярное умножение полученного выражения на **V**, имеем вектор

$$(\mathbf{l}\nabla)\mathbf{V} = \left(\alpha\frac{\partial v_x}{\partial x} + \beta\frac{\partial v_x}{\partial y} + \gamma\frac{\partial v_x}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\alpha\frac{\partial v_y}{\partial x} + \beta\frac{\partial v_y}{\partial y} + \gamma\frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\mathbf{j} + \left(\alpha\frac{\partial v_z}{\partial z} + \beta\frac{\partial v_z}{\partial y} + \gamma\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)\mathbf{k}.$$

Скалярно умножая это выражение на векторы **n**, **l**, **b**, получим составляющие вектора $\mathbf{V}_s$ в (2.24)

$$((\mathbf{l}\nabla)\mathbf{V})\mathbf{n} = l\left(\alpha\frac{\partial v_x}{\partial x} + \beta\frac{\partial v_x}{\partial y} + \gamma\frac{\partial v_x}{\partial z}\right) + m\left(\alpha\frac{\partial v_y}{\partial x} + \beta\frac{\partial v_y}{\partial y} + \gamma\frac{\partial v_y}{\partial z}\right) + n\left(\alpha\frac{\partial v_z}{\partial x} + \beta\frac{\partial v_z}{\partial y} + \gamma\frac{\partial v_z}{\partial z}\right),$$

$$((\mathbf{l}\nabla)\mathbf{V})\mathbf{l} = \alpha\left(\alpha\frac{\partial v_x}{\partial x} + \beta\frac{\partial v_x}{\partial y} + \gamma\frac{\partial v_x}{\partial z}\right) + \beta\left(\alpha\frac{\partial v_y}{\partial x} + \beta\frac{\partial v_y}{\partial y} + \gamma\frac{\partial v_y}{\partial z}\right) + \gamma\left(\alpha\frac{\partial v_z}{\partial x} + \beta\frac{\partial v_z}{\partial y} + \gamma\frac{\partial v_z}{\partial z}\right),$$

$$((\mathbf{l}\nabla)\mathbf{V})\mathbf{b} = \lambda\left(\alpha\frac{\partial v_x}{\partial x} + \beta\frac{\partial v_x}{\partial y} + \gamma\frac{\partial v_x}{\partial z}\right) + \mu\left(\alpha\frac{\partial v_y}{\partial x} + \beta\frac{\partial v_y}{\partial y} + \gamma\frac{\partial v_y}{\partial z}\right) + \nu\left(\alpha\frac{\partial v_z}{\partial x} + \beta\frac{\partial v_z}{\partial y} + \gamma\frac{\partial v_z}{\partial z}\right). \qquad (2.25)$$

Найдем второе слагаемое в левой части (2.23). По определению $\mathbf{r}_s=\mathbf{l}$ следовательно, $\mathbf{r}_{ts}=\mathbf{l}_t$. С учетом (2.15) можем записать $\mathbf{r}_{ts}=\mathbf{l}_t=\alpha_t\mathbf{i}+\beta_t\mathbf{j}+\gamma_t\mathbf{k}$. Последовательно умножая скалярно на **l**, **n**, **b** найдем проекции вектора $\mathbf{l}_t$

$$\mathbf{l}_t\mathbf{l}=\alpha_t\alpha+\beta_t\beta+\gamma_t\gamma, \qquad \mathbf{l}_t\mathbf{n}=\alpha_t l+\beta_t m+\gamma_t n, \qquad \mathbf{l}_t\mathbf{b}=\alpha_t\lambda+\beta_t\mu+\gamma_t\nu.$$

Следовательно

$$\mathbf{r}_{ts}=\mathbf{l}_t=(\alpha_t l+\beta_t m+\gamma_t n)\mathbf{n}+(\alpha_t\alpha+\beta_t\beta+\gamma_t\gamma)\mathbf{l}+(\alpha_t\lambda+\beta_t\mu+\gamma_t\nu)\mathbf{b}. \qquad (2.26)$$

Лишь первое слагаемое правой части полученного выражения отлично от нуля. Покажем это. Для второго слагаемого можем записать

$$\alpha_t\alpha+\beta_t\beta+\gamma_t\gamma=\left(lk\alpha + mk\beta + nk\gamma\right)\frac{ds}{dt} = k\frac{ds}{dt}\left(l\lambda + m\beta + n\gamma\right) = 0.$$

Здесь использовались известные соотношения [97] $\alpha_s=kl$, $\beta_s=km$, $\gamma_s=kn$, $\lambda l+m\mu+n\nu=0$. Отметим, что первое слагаемое в (2.26) дает выражение $\mathbf{r}_{ts}= k\,ds/dt\,\mathbf{n}$, поскольку $l^2+m^2+n^2=1$.

Таким образом, имеем

$$\mathbf{r}_{ts}=(\alpha_t l+\beta_t m+\gamma_t n)\mathbf{n}. \qquad (2.27)$$

В скалярной форме уравнение (2.23) с учетом (2.24), (2.25), (2.27) имеет вид

$$-B^{-1}(Q_{ss}+N_s k+N k_s -P_s\chi-P\chi_s)-A^{-1}k(N_s-kQ)+B^{-1}\chi(P_s+Q\chi)=$$

$$=l\left(\alpha\frac{\partial v_x}{\partial x}+\beta\frac{\partial v_x}{\partial y}+\gamma\frac{\partial v_x}{\partial z}\right)+m\left(\alpha\frac{\partial v_y}{\partial x}+\beta\frac{\partial v_y}{\partial y}+\gamma\frac{\partial v_y}{\partial z}\right)+$$

$$+n\left(\alpha\frac{\partial v_z}{\partial x}+\beta\frac{\partial v_z}{\partial y}+\gamma\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)-\alpha_t l-\beta_t m-\gamma_t n,$$

$$kB^{-1}(Q_s+Nk-P\chi)-A^{-1}(N_{ss}-k_sQ-kQ_s)=$$

$$=\alpha\left(\alpha\frac{\partial v_x}{\partial x}+\beta\frac{\partial v_x}{\partial y}+\gamma\frac{\partial v_x}{\partial z}\right)+\beta\left(\alpha\frac{\partial v_y}{\partial x}+\beta\frac{\partial v_y}{\partial y}+\gamma\frac{\partial v_y}{\partial z}\right)+$$

$$+\gamma\left(\alpha\frac{\partial v_z}{\partial x}+\beta\frac{\partial v_z}{\partial y}+\gamma\frac{\partial v_z}{\partial z}\right),$$

$$-B^{-1}\chi(Q_s+Nk-P\chi)-B^{-1}(P_{ss}+\chi_sQ+\chi Q_s)=$$

$$=\lambda\left(\alpha\frac{\partial v_x}{\partial x}+\beta\frac{\partial v_x}{\partial y}+\gamma\frac{\partial v_x}{\partial z}\right)+\mu\left(\alpha\frac{\partial v_y}{\partial x}+\beta\frac{\partial v_y}{\partial y}+\gamma\frac{\partial v_y}{\partial z}\right)$$

$$+\nu\left(\alpha\frac{\partial v_z}{\partial x}+\beta\frac{\partial v_z}{\partial y}+\gamma\frac{\partial v_z}{\partial z}\right). \qquad (2.28)$$

Согласно (2.28) постоянная составляющая скорости (v_x=const, v_y=const, v_z=const) не вызывает изменение формы стержня, а дает его общий снос. Изменение формы стержня обусловлено градиентом скорости. Уравнения (2.28) уже не содержат функций x, y, z. Уравнения должны рассматриваться совместно с уравнениями (2.19), (2.20) и краевыми условиями (2.21). Двенадцать уравнений (2.19), (2.20), (2.28) связывают 12 величин – функций от s и t: P, Q, N, α, β, γ, l, m, n, λ, μ, ν.

При необходимости визуального представления конфигурации стержня, которая описывается функциями x(s, t), y(s, t), z(s, t), можно воспользоваться уравнениями $\{x_s, y_s, z_s\}=\{\alpha, \beta, \gamma\}$. Предварительно из вышеуказанной системы уравнений необходимо найти функции α(s,t), β(s,t), γ(s,t). Граничными условиями при этом будут s=0, $x=x_0$, $y=y_0$, $z=z_0$. Если упругая ось стержня проходит через начало декартовой системы координат, то $x_0=y_0=z_0=0$.

2.3.2. Пространственное движение гибкой нити конечной длины

При большой вязкости матрицы и малой изгибной жесткости волокна его можно рассматривать как идеально гибкую нить конечной длины. Численной характеристикой относительной жесткости волокна служит параметр K, введенный в главе 3. Например, синтетические волокна (капроновое и др) в резиновой матрице можно рассматривать как гибкую нить (см. табл. 2.1).

Динамические уравнения в случае гибкой нити существенно упрощаются. Так как такая нить не оказывает сопротивления изгибу (**M**=0), то единственная внутренняя сила есть сила натяжения N, действующая по направлению касательной к оси нити. Поперечная перерезывающая сила отсутствует P=Q=0, что также следует из условия **M**=0. Сила инерции и тяжести в сравнении с осевым натяжением пренебрежимо малы. Нить не соприкасается с другими нитями. Со стороны деформируемой вязкой жидкости на нее действует сила трения, но поле скоростей в жидкости не нарушается (игнорируем эффект аэроупругости). Упругие деформации, связанные с растяжением или сжатием нити, не учитываются. На нити отсутствуют участки большой (или бесконечной) кривизны. Течение ламинарное, изотермическое. Ось нити представляет пространственную кривую.

Для получения динамических уравнений достаточно в уравнениях, полученных для упругого стержня (см. раздел 2.3), положить **M**=0, Q=P=0. При этом уравнение (2.13) примет вид

$$\mathbf{l}N_s+\mathbf{n}Nk=-A\mathbf{l}((\mathbf{V}-\mathbf{r}_t)\mathbf{l})-B\mathbf{n}((\mathbf{V}-\mathbf{t}_t)\mathbf{n})-B\mathbf{b}((\mathbf{V}-\mathbf{r}_t)\mathbf{b}).$$

Или в скалярной форме (с учетом соотношений (2.15))

$$\begin{gathered} N_s = -A[\alpha(v_x-x_t)+\beta(v_y-y_t)+\gamma(v_z-z_t)], \\ Nk = -B[l(v_x-x_t)+m(v_y-y_t)+n(v_z-z_t)], \\ -B[\lambda(v_x-x_t)+\mu(v_y-y_t)+\nu(v_z-z_t)] = 0. \end{gathered} \tag{2.29}$$

Между функциями x, y, z, α, β, γ выполняются соотношения

$$x_s=\alpha, \qquad y_s=\beta, \qquad z_s=\gamma. \tag{2.30}$$

Начальное условие в случае отсутствия в нити усилий

$$t=0: \quad x=x_0(s), \quad y=y_0(s), \quad z=z_0(s), \quad N=0. \tag{2.31}$$

Если длина нити 2ℓ, то граничные условия на свободных концах следующие:

$$t>0, \quad s=\pm l: \quad N=0, \quad k=0. \tag{2.32}$$

Условие отсутствия кривизны на свободных концах непосредственно следует из условия **M**=0 (см. (2.17), (2.18)).

Движение нити описывается уравнениями (2.20), (2.29) – (2.32).

Как было отмечено в гл. 2.3.1 форму уравнений (2.29) можно улучшить путем уменьшения размерности задачи, т.е. исключением функций x, y, z. Повторив действия гл. 2.3.1, вместо уравнений (2.29) получим

$$\begin{aligned} &-B^{-1}\left(N_s k + N k_s\right) - A^{-1} k N_s = l\left(\alpha\frac{\partial v_x}{\partial x} + \beta\frac{\partial v_x}{\partial y} + \gamma\frac{\partial v_x}{\partial z}\right) + \\ &+m\left(\alpha\frac{\partial v_y}{\partial x} + \beta\frac{\partial v_y}{\partial y} + \gamma\frac{\partial v_y}{\partial z}\right) + n\left(\alpha\frac{\partial v_z}{\partial x} + \beta\frac{\partial v_z}{\partial y} + \gamma\frac{\partial v_z}{\partial z}\right) - \\ &-\alpha_t l - \beta_t m - \gamma_t n, \end{aligned} \tag{2.33}$$

$$B^{-1}k^2N - A^{-1}N_{ss} = \alpha\left(\alpha\frac{\partial v_x}{\partial x} + \beta\frac{\partial v_x}{\partial y} + \gamma\frac{\partial v_x}{\partial z}\right) +$$

$$+\beta\left(\alpha\frac{\partial v_y}{\partial x} + \beta\frac{\partial v_y}{\partial y} + \gamma\frac{\partial v_y}{\partial z}\right) + \gamma\left(\alpha\frac{\partial v_z}{\partial z} + \beta\frac{\partial v_z}{\partial y} + \gamma\frac{\partial v_z}{\partial z}\right),$$

$$-B^{-1}\chi kN = \lambda\left(\alpha\frac{\partial v_x}{\partial x} + \beta\frac{\partial v_x}{\partial y} + \gamma\frac{\partial v_x}{\partial z}\right) + \mu\left(\alpha\frac{\partial v_y}{\partial x} + \beta\frac{\partial v_y}{\partial y} + \gamma\frac{\partial v_y}{\partial z}\right) +$$

$$+\nu\left(\alpha\frac{\partial v_z}{\partial x} + \beta\frac{\partial v_z}{\partial y} + \gamma\frac{\partial v_z}{\partial z}\right),$$

где $k = \sqrt{\alpha_s^2 + \beta_s^2 + \gamma_s^2}$, $\chi = \pm\sqrt{\lambda_s^2 + \mu_s^2 + \nu_s^2}$.

В этом случае задача пространственной эволюции нити описывается уравнениями (2.20), (2.33), (2.31), (2.32). Для построения упругой линии используются уравнения (2.30).

2.4. УРАВНЕНИЯ ПЛОСКОГО ДВИЖЕНИЯ КРИВОЛИНЕЙНОГО СТЕРЖНЯ И НИТИ В ПОТОКЕ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Поле скоростей в технологическом оборудовании трехмерно, но для выяснения основных закономерностей (эволюции формы и натяжения) иногда можно ограничиться рассмотрением двумерного движения. Например, в смесительных вальцах поле скоростей двумерно; при этом у поверхности валков преобладает простой сдвиг, а в средней части зоны течения деформация материала близка к чистому сдвигу [31].

Очевидно полученные уравнения пространственного движения, пригодны и для плоского случая. Плоское движение стержня и нити имеет самостоятельное значение, поскольку позволяет описывать достаточно широкий круг задач, и получить при этом важные результаты. Решение задач плоского движения значительно проще, чем пространственных. Кроме того, снижение размерности изменяет параметризацию уравнений и расширяет возможности анализа.

2.4.1. Скалярный вывод уравнений движения нити

Рассматривается идеально гибкая нить в потоке вязкой жидкости (рисунок 2.4). Так как такая нить не оказывает сопротивления изгибу, то единственная внутренняя сила есть сила натяжения N, действующая по направлению касательной к оси нити. Ось нити остается плоской кривой. Оставляем в силе основные допущения, принятые в гл. 2.3.2.

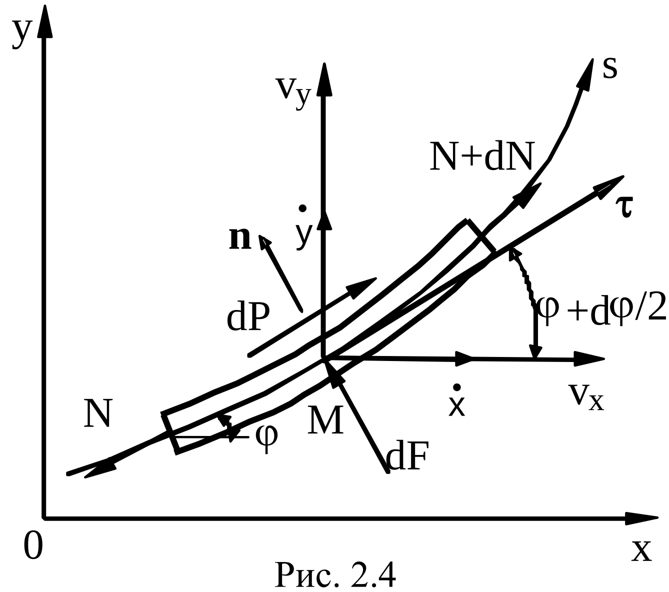

Рис. 2.4

Составим уравнения равновесия. В декартовых координатах xOy конфигурация оси нити в параметрической форме описывается функциями x(s), y(s), где s – координата, отсчитываемая вдоль оси нити. Ось нити лежит в плоскости xOy. Согласно рис. 2.4 на элемент нити, длиной ds со стороны жидкости действует сила трения, проекция которой на нормаль dF, а на касательную dP. Угол между горизонтальным направлением, которое примем за направление оси x, и касательной к оси нити обозначим φ. Уравнения равновесия (уравнения Кирхгофа) имеют вид:

$$\Sigma\ X=0:\ (N+dN)\cos(\varphi+d\varphi) - N\cos\varphi - dF\sin(\varphi+d\varphi/2)+dP\cos(\varphi + d\varphi/2)=0,$$

$$\Sigma\ Y=0:\ (N+dN)\sin(\varphi+d\varphi) - N\sin\varphi+dP\sin(\varphi+d\varphi/2)+dF\cos(\varphi+d\varphi/2) = 0.$$

Принимая во внимание соотношения

$$\cos(\varphi+d\varphi) = \cos\varphi - d\varphi\sin\varphi+..., \qquad \sin(\varphi+d\varphi)=\sin\varphi + ds\cos\varphi+...,$$

и пренебрегая бесконечно малыми выше первого порядка, получим уравнения

$$d(Nx_s)- y_s dF+ x_s dP=0, \qquad (2.34)$$

$$d(Ny_s) + y_s dP+ x_s dF=0. \qquad (2.35)$$

Учитывались соотношения $\sin\varphi =dy/ds=y_s$, $\cos\varphi = dx/ds=x_s$.

Уравнение связи (условие нерастяжимости оси нити)

$$x_s^2 + y_s^2 = 1 \qquad (2.36)$$

продифференцируем по s

$$x_{ss}x_s + y_{ss}y_s = 0. \qquad (2.37)$$

Умножим уравнение (2.34) на x_s, а уравнение (2.35) – на y_s и сложив их с учетом (2.36), (2.37), получим

$$dN + dP = 0. \qquad (2.38)$$

Аналогично, умножая уравнение (2.34) на y_s, а (2.35) – на x_s, и вычитая полученные равенства с учетом соотношений (2.36), (2.37), получим второе уравнение равновесия

$$F_s + Ny_{ss}/x_s = 0. \qquad (2.39)$$

Уравнения эволюции формы плоской нити получим путем учета в (2.38), (2.39) зависимости силы трения от скорости жидкости и нити. В безынерционном приближении изменение силы трения, обусловленное деформацией жидкости, вызовет синхронное изменение конфигурации нити и натяжения.

Плоское стационарное поле скоростей жидкости характеризуется компонентами $v_x(x,y)$, $v_y(x,y)$. Для произвольной точки нити M компоненты скорости $\partial x/\partial t =x_t$, $\partial y/\partial t= y_t$ (см. рисунок 2.4). Сила вязкого трения обусловлена некоторым <<отставанием>> нити от движущейся окружающей жидкости.

Например, в направлении оси x скорость жидкости v_x превышает скорость нити x_t на величину $v_x - x_t$. Проектируя скорости на касательную и нормаль к оси нити, получим выражения для относительных скоростей

$$\Delta v_n = -(v_x - x_t)\sin\varphi + (v_y - y_t)\cos\varphi,$$
$$\Delta v_\tau = (v_x - x_t)\cos\varphi + (v_y - y_t)\sin\varphi.$$

Индексом t обозначены производные по t. Как и в (2.34) заменив тригонометрические функции величинами x_s, y_s, имеем

$$\Delta v_n = (\mathbf{V}-\mathbf{r_t})\mathbf{n} = -(v_x - x_t)y_s + (v_y - y_t)x_s,$$
$$\Delta v_\tau = (\mathbf{V}-\mathbf{r_t})\mathbf{l} = (v_x - x_t)x_s + (v_y - y_t)y_s. \qquad (2.40)$$

Согласно (2.1), (2.2) составляющие силы трения (см. рис. 2.3) определяются выражениями

$$dF = \mathbf{Kn}\,ds = B\,\Delta v_n\,ds,$$
$$dP = \mathbf{Kl}\,ds = A\,\Delta v_\tau\,ds. \qquad (2.41)$$

Рассматривая совместно (2.36), (2.38)–(2.41), получим систему уравнений, описывающих нестационарную деформацию гибкой нити

$$N_s + A[(v_x - x_t)x_s + (v_y - y_t)y_s] = 0, \qquad (2.42)$$
$$B[-(v_x - x_t)y_s + (v_y - y_t)x_s] + Ny_{ss}/x_s = 0,$$
$$x_s^2 + y_s^2 = 1.$$

Их необходимо дополнить начальными и граничными условиями

$$t=0:\ x=x_o(s),\ y=y_o(s),\ N=0,$$
$$t>0,\ s=\pm\ell:\quad y_{ss}=0,\quad N=0,$$

где 2ℓ – длина нити, $x_o(s)$, $y_o(s)$ – параметрическое описание начальной формы нити. Принимаем отсчет s от середины нити: вправо – положительное направление, влево – отрицательное (см. рис. 2.4). Отсутствие растягивающего усилия на свободных концах нити согласно (2.39) или второму уравнению в (2.42) эквивалентно нулевой кривизне концов нити $y_{ss}=x_{ss}=0$ при $s=\pm\ell$. Начальное натяжение отсутствует.

Уравнения в форме (2.42) малопригодны для анализа. Например, соответствующая разностная схема теряет устойчивость при наличии на нити участков сжатия, кроме того, возникают трудности при описании таких геометрических ситуаций, когда имеет место «перехлест» и «опрокидывание» нити. Для улучшения формы уравнений элиминируем из уравнений функции x, y и их производные.

Учитывая геометрические соотношения $\sin\varphi = y_s$, $\cos\varphi = x_s$, $\varphi_s\cos\varphi = y_{ss}$, первые два уравнения в (2.42) запишем в форме

$$N_s + A[(v_x - x_t)\cos\varphi + (v_y - y_t)\sin\varphi] = 0,$$
$$B[-(v_x - x_t)\sin\varphi + (v_y - y_t)\cos\varphi] + N\varphi_s = 0.$$

Умножим первое уравнение на $\sin\varphi$, а второе – на $\cos\varphi$ и сложим их. Кроме того, умножив первое на $\cos\varphi$, а второе – на $\sin\varphi$, вычтем из первого второе. Получим уравнения, разрешенные относительно разностей скоростей

$$v_y - y_t = -A^{-1}N_s\sin\varphi - B^{-1}N\varphi_s\cos\varphi,$$
$$v_x - x_t = -A^{-1}N_s\cos\varphi - B^{-1}N\varphi_s\sin\varphi.$$

Учитывая соотношения

$y_{st}=\varphi_t \cos\varphi$, $x_{st}=\varphi_t \sin\varphi$, $\dfrac{\partial v_y}{\partial s}=\dfrac{\partial v_y}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial s}+\dfrac{\partial v_y}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial s}=\dfrac{\partial v_y}{\partial x}\cos\varphi+\dfrac{\partial v_y}{\partial y}\sin\varphi$,

$$\frac{\partial v_x}{\partial s}=\frac{\partial v_x}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial v_x}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}=\frac{\partial v_x}{\partial x}\cos\varphi+\frac{\partial v_x}{\partial y}\sin\varphi,$$

выполним дифференцирование полученных уравнений по s

$$\frac{\partial v_y}{\partial x}\cos\varphi+\frac{\partial v_y}{\partial y}\sin\varphi-\varphi_t\cos\varphi=\frac{\partial}{\partial s}\left(-A^{-1}N_s\sin\varphi-B^{-1}N\varphi_s\cos\varphi\right),$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x}\cos\varphi+\frac{\partial v_x}{\partial y}\sin\varphi-\varphi_t\sin\varphi=\frac{\partial}{\partial s}\left(-A^{-1}N_s\cos\varphi-B^{-1}N\varphi_s\sin\varphi\right).$$

Из первого уравнения, предварительно умноженного на cos φ, вычтем второе, умноженное на sin φ

$$-\varphi_t+\frac{\partial v_y}{\partial x}\cos^2\varphi+\frac{\partial v_x}{\partial y}\sin^2\varphi+\left(\frac{\partial v_y}{\partial y}-\frac{\partial v_x}{\partial x}\right)\sin\varphi\cos\varphi=$$

$$=\cos\varphi\frac{\partial}{\partial s}\left(-A^{-1}N_s\sin\varphi-B^{-1}N\varphi_s\cos\varphi\right)-\sin\varphi\frac{\partial}{\partial s}\left(-A^{-1}N_s\cos\varphi+B^{-1}N\varphi_s\sin\varphi\right),$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x}\cos^2\varphi+\frac{\partial v_y}{\partial y}\sin^2\varphi+\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}+\frac{\partial v_y}{\partial x}\right)\sin\varphi\cos\varphi=$$

$$=\sin\varphi\frac{\partial}{\partial s}\left(-A^{-1}N_s\sin\varphi-B^{-1}N\varphi_s\cos\varphi\right)+\cos\varphi\frac{\partial}{\partial s}\left(-A^{-1}N_s\cos\varphi+B^{-1}N\varphi_s\sin\varphi\right).$$

Учитывая уравнение неразрывности $\partial v_x/\partial x+\partial v_y/\partial y=0$, третье слагаемое в левой части первого уравнения и два первых – во втором можно записать так

$$\left(\frac{\partial v_y}{\partial y}-\frac{\partial v_x}{\partial x}\right)\sin\varphi\cos\varphi=-\frac{\partial v_x}{\partial x}\sin 2\varphi,\qquad \frac{\partial v_x}{\partial x}\cos^2\varphi+\frac{\partial v_y}{\partial y}\sin^2\varphi=\frac{\partial v_x}{\partial x}\cos 2\varphi.$$

Выполнив дифференцирование в правых частях уравнений, после несложных преобразований, получим

$$-\varphi_t+\frac{\partial v_y}{\partial x}\cos^2\varphi+\frac{\partial v_x}{\partial y}\sin^2\varphi-\frac{\partial v_x}{\partial x}\sin 2\varphi=-A^{-1}N_s\varphi_s-B^{-1}\left(N_s\varphi_s+N\varphi_{ss}\right),$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x}\cos 2\varphi+0,5\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}+\frac{\partial v_y}{\partial x}\right)\sin 2\varphi=-A^{-1}N_{ss}+B^{-1}N\varphi_s^2.$$

Следует отметить, что в векторной форме описанная процедура имеет более компактную запись. Полученные уравнения содержат полную информацию о динамике движения нити, но более удобны при анализе, поскольку не содержат функций x и y. После определения функции φ координаты упругой оси x и y могут быть найдены из геометрических соотношений $\sin\varphi=y_s$, $\cos\varphi=x_s$.

2.4.2. Векторный вывод уравнений плоского движения стержня

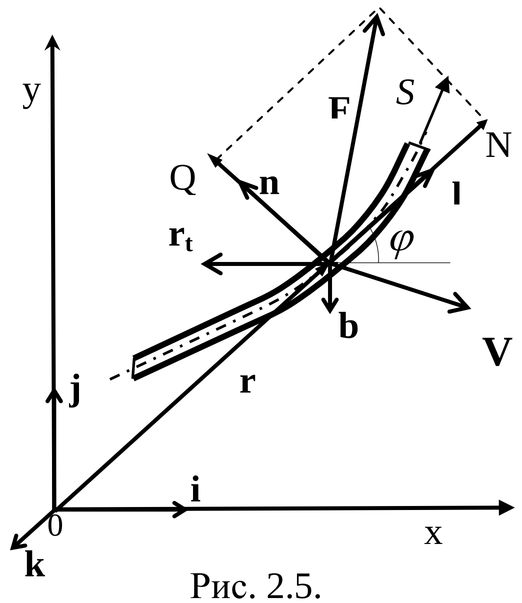

Рис. 2.5.

Ось стержня расположена в плоскости xOy. Каждое поперечное сечение симметрично относительно плоскости z=0. Следовательно, ось, проходящая через центр тяжести, параллельная **b**, является главной осью инерции сечения; через J обозначим момент инерции сечения относительно этой оси. Расчетная схема представлена на рисунке 2.5. Поскольку деформация стержня плоская, то следует считать, что главные векторы **F** и **K** лежат в плоскости z=0, а главные моменты **M** коллинеарны **b**.

Запишем векторы **F**, **M** в проекциях

$$\mathbf{F}=(\mathbf{Fl})\mathbf{l}+(\mathbf{Fn})\mathbf{n}=N\mathbf{l}+Q\mathbf{n},\qquad \mathbf{M}=M\mathbf{b}, \qquad (2.43)$$

где N – продольная сила, Q – перерезывающая сила, M – изгибающий момент, **F** – вектор внутренних напряжений.

Согласно [96] уравнения равновесия стержня имеют вид

$$\mathbf{F}_s= -\mathbf{K},\qquad \mathbf{M}_s=\mathbf{F}\times\mathbf{l}. \qquad (2.44)$$

Здесь и далее нижним индексом обозначены производные (исключая компоненты скорости).

Подставив (2.43) в (2.44), имеем

$$N_s\mathbf{l}+N\varphi_s\mathbf{n}+Q_s\mathbf{n}-Q\varphi_s\mathbf{l}= -\mathbf{K},\qquad M_s= -Q. \qquad (2.45)$$

Здесь учитывались соотношения: $\mathbf{l}\times\mathbf{l}=0$, $\mathbf{n}\times\mathbf{l}= -\mathbf{b}$ и формулы Френе – Серре [106] $\mathbf{l}_s=k\mathbf{n}$, $\mathbf{n}_s= - k\mathbf{l}$, где $k=\varphi_s$ – кривизна стержня, φ - угол наклона касательной. Кручение отсутствует и $\mathbf{b}_s=0$.

Согласно результатам гл. 2.1 сила трения, действующая на стержень со стороны вязкой жидкости, обусловлена разностью скоростей жидкости **V** и стержня $\mathbf{r}_t$, т.е. $\mathbf{K}=A\mathbf{l}((\mathbf{V}-\mathbf{r}_t)\mathbf{l})+B\mathbf{n}((\mathbf{V}-\mathbf{r}_t)\mathbf{n})$. Подставим в первое уравнение (2.45) выражение для внешних сил

$$(N_s-Q\varphi_s)\mathbf{l}+(N\varphi_s+Q_s)\mathbf{n}= -A\mathbf{l}((\mathbf{V}-\mathbf{r}_t)\mathbf{l})-B\mathbf{n}((\mathbf{V}-\mathbf{r}_t)\mathbf{n}). \qquad (2.46)$$

В скалярной форме имеем систему уравнений

$$N_s-Q\varphi_s= -A(\mathbf{V}-\mathbf{r}_t)\mathbf{l},\qquad N\varphi_s+Q_s= -B(\mathbf{V}-\mathbf{r}_t)\mathbf{n}. \qquad (2.47)$$

Здесь

$$\mathbf{V}-\mathbf{r}_t=(v_x-x_t)\mathbf{i}+(v_y-y_t)\mathbf{j},\qquad \mathbf{l}=\cos\varphi\mathbf{i}+\sin\varphi\mathbf{j},\qquad \mathbf{n}= -\sin\varphi\mathbf{i}+\cos\varphi\mathbf{j}. \qquad (2.48)$$

Выполнив скалярные умножения в уравнениях (2.47) с учетом (2.48), получим

$$N_s-Q\varphi_s= -A[(v_x-x_t)\cos\varphi+(v_y-y_t)\sin\varphi],$$
$$N\varphi_s+Q_s= -B[-(v_x-x_t)\sin\varphi+(v_y-y_t)\cos\varphi]. \qquad (2.49)$$

Для замыкания задачи используем условие пропорциональности кривизны стержня моменту внутренних усилий (дифференциальное уравнение упругой линии) [96], [97]

$$M= E^{*}J(\varphi_s-\varphi_s^{0}), \qquad (2.50)$$

где $\varphi_s^0=\varphi_{s(t=0)}$, $\varphi_{(t=0)}=\varphi^{o}$ – функция, описывающая начальную (естественную) конфигурацию стержня, удовлетворяющая условиям (2.53).

Функции x, y и φ связаны геометрическими соотношениями

$$x_s=\cos\varphi, \quad y_s=\sin\varphi. \qquad (2.51)$$

Таким образом, для шести неизвестных функций N, Q, M, φ, x, y от s,t имеем шесть уравнений: (2.49)-(2.51) и второе в (2.45).

Полученную систему дифференциальных уравнений необходимо дополнить начальными и граничными условиями. В начальный момент времени (t=0) форму стержня характеризует радиус – вектор $\mathbf{r}^0=\mathbf{r}(t=0)$, кроме того напряжения в стержне отсутствуют t=0, $\mathbf{r}=\mathbf{r}^0$, $\mathbf{M}=\mathbf{F}=0$, или в скалярной форме

$$t=0,\ x=x^0(s),\quad y=y^0(s),\quad \varphi=\varphi^0(s),\quad N=Q=M=0, \qquad (2.52)$$

где $\mathbf{r}^0=x^0(s)\mathbf{i}+y^0(s)\mathbf{j}$.

На свободных концах стержня отсутствуют силы и моменты. Согласно (2.50) свободные концы имеют нулевую кривизну. Граничные условия $s=\pm\ell$, $\mathbf{F}=\mathbf{M}=0$, $\mathbf{l}_s=0$, или в скалярной форме

$$s=\pm\ell, \qquad N=Q=M=\varphi_s=0. \qquad (2.53)$$

Здесь принят отсчет s от середины стержня, длиной 2ℓ.

Улучшение формы уравнений. Полученные уравнения малопригодны для численного анализа, поскольку необходимо одновременно решать шесть уравнений, два из которых (2.49) являются нелинейными уравнениями конвективного переноса. Численная реализация таких уравнений связана с проблемой аппроксимации первых производных. Кроме того, как показал численный анализ, итерационная схема на каждом временном слое плохо сходится, особенно при большой кривизне стержня. Улучшить структуру уравнений можно путем исключения двух функций – x и y и их производных.

Разрешим векторное уравнение (2.46) относительно $\mathbf{V}$-$\mathbf{r}_t$. Умножив скалярно дважды обе части уравнения (2.46) на $\mathbf{n}$, имеем

$$Q_s+N\varphi_s=-B(\mathbf{n}((\mathbf{V}-\mathbf{r}_t)\mathbf{n}))\mathbf{n},\quad ((\mathbf{n}((\mathbf{V}-\mathbf{r}_t)\mathbf{n}))\mathbf{n})\mathbf{n}=\mathbf{n}((\mathbf{V}-\mathbf{r}_t)\mathbf{n})=-B^{-1}(N\varphi_s+Q_s)\mathbf{n}. \qquad (2.54)$$

Аналогично, умножив уравнение (2.46) на $\mathbf{l}$, последовательно получим

$$N_s-Q\varphi_s=-A(\mathbf{l}((\mathbf{V}-\mathbf{r}_t)\mathbf{l}))\mathbf{l},\quad ((\mathbf{l}((\mathbf{V}-\mathbf{r}_t)\mathbf{l}))\mathbf{l})\mathbf{l}=\mathbf{l}((\mathbf{V}-\mathbf{r}_t)\mathbf{l})=-A^{-1}(N_s-Q\varphi_s)\mathbf{l}. \qquad (2.55)$$

Вторые выражения в (2.54), (2.55) соответственно являются проекциями вектора $\mathbf{V}$-$\mathbf{r}_t$ на нормаль и касательную, поэтому можем записать

$$\mathbf{V}-\mathbf{r}_t=-B^{-1}(N\varphi_s+Q_s)\mathbf{n}-A^{-1}(N_s-Q\varphi_s)\mathbf{l}.$$

Продифференцируем полученное уравнение по s

$$\mathbf{V}_s-r_{ts}= - B^{-1}[(N_s\varphi_s+N\varphi_{ss}+Q_{ss})\mathbf{n}+(N\varphi_s+Q_s)\mathbf{n}_s]-$$
$$-A^{-1}[(N_{ss}-Q_s\varphi_s-Q\varphi_{ss})\mathbf{l}+(N_s-Q\varphi_s)\mathbf{l}_s]. \qquad (2.56)$$

Выражение для $\mathbf{r}_{ts}$ получим, учитывая, что $\mathbf{r}_s=\mathbf{l}$. Равенство для правой тройки $\mathbf{l}=\mathbf{n}\times\mathbf{b}$, продифференцируем по t. Имеем $\mathbf{l}_t=s_t(\mathbf{n}_s\times\mathbf{b})+s_t(\mathbf{n}\times\mathbf{b}_s)$. Здесь использовались соотношения $\mathbf{n}_t=\mathbf{n}_s s_t$, $\mathbf{b}_t=\mathbf{b}_s s_t$. Далее, с учетом формул Френе –

Сере $\mathbf{n}_s = -\varphi_s \mathbf{l} + \chi \mathbf{b}$, $\mathbf{b}_s = -\chi \mathbf{n}$, можем записать $\mathbf{l}_t = s_t[-\varphi_s(\mathbf{l}\times\mathbf{b}) + \chi(\mathbf{b}\times\mathbf{b}) - \chi(\mathbf{n}\times\mathbf{n})]$, но $\mathbf{b}\times\mathbf{b} = \mathbf{n}\times\mathbf{n} = 0$, $\mathbf{l}\times\mathbf{b} = -\mathbf{n}$, поэтому имеем $\mathbf{l}_t = s_t\varphi_s\mathbf{n} = \varphi_t\mathbf{n}$, или

$$\mathbf{r}_{ts} = \varphi_t \mathbf{n}. \qquad (2.57)$$

Кручение отсутствует ($\chi=0$).

Спроектируем производную по направлению на нормаль и касательную

$$\mathbf{V}_s = (\mathbf{l}\nabla)\mathbf{V} = (((\mathbf{l}\nabla)\mathbf{V})\mathbf{n})\mathbf{n} + (((\mathbf{l}\nabla)\mathbf{V})\mathbf{l})\mathbf{l}, \qquad (2.58)$$

где $\nabla = (\partial/\partial x)\mathbf{i} + (\partial/\partial y)\mathbf{j}$ – вектор – оператор Гамильтона. С учетом (2.57), (2.58) и формул Френе - Серре $\mathbf{n}_s = -\varphi_s \mathbf{l}$, $\mathbf{l}_s = \varphi_s \mathbf{n}$, уравнение (2.56) в скалярной форме имеет вид

$$\varphi_t - B^{-1}(N_s\varphi_s + N\varphi_{ss} + Q_{ss}) - A^{-1}\varphi_s(N_s - Q\varphi_s) = ((\mathbf{l}\nabla)\mathbf{V})\mathbf{n},$$
$$\varphi_s B^{-1}(N\varphi_s + Q_s) - A^{-1}(N_{ss} - Q_s\varphi_s - Q\varphi_{ss}) = ((\mathbf{l}\nabla)\mathbf{V})\mathbf{l}, \qquad (2.59)$$

где

$$((\mathbf{l}\nabla)\mathbf{V})\mathbf{n} = \sin 2\varphi \frac{\partial v_y}{\partial y} - \sin^2\varphi \frac{\partial v_x}{\partial y} + \cos^2\varphi \frac{\partial v_y}{\partial x},$$
$$((\mathbf{l}\nabla)\mathbf{V})\mathbf{l} = 0.5\sin 2\varphi\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right) + \cos 2\varphi \frac{\partial v_x}{\partial x}.$$

Таким образом, для четырех неизвестных функций N, Q, M, φ имеем четыре уравнения: второе в (2.45), (2.50) и (2.59). Их необходимо рассматривать совместно с условиями (2.52), (2.53). Уравнения (2.59) в разностном представлении можно решать методом трехточечной прогонки для функций φ и N. На верхнем временном слое указанные функции находят итерациями. Расчетная схема показала хорошую сходимость даже при большой изначальной кривизне стержня. Указанные четыре уравнения содержат полную информацию о динамике стержня. Уравнения (2.51) необходимы только для графического представления конфигурации упругой линии.

2.5. КИНЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАКОНОМЕРНОСТИ ОСНОВНЫХ ТИПОВ ВИСКОЗИМЕТРИЧЕСКИХ ТЕЧЕНИЙ

В технологии переработки полимерных композиций можно выделить доминирующий тип течения. Кроме того, течение в перерабатывающем оборудовании можно рассматривать как суперпозицию известных вискозиметрических течений. Например, при течении в каналах постоянного сечения имеет место простой сдвиг. В сходящемся канале одновременно присутствуют простой сдвиг и одноосное растяжение. При переработке на валках – простой сдвиг и чистый сдвиг; причем последний доминирует в середине межвалкового зазора.

При компрессионном формовании хаотически армированных стеклопластиков неоднородность ориентации волокон приводит к короблению изделия, поэтому выделяют в форме участки с различным типом течения. Тип течения в существенной мере определяет ориентацию волокон.

Отметим, что уравнения динамики получены для произвольного поля скоростей, но для выполнения анализа, представленного в главах 3 и 4, ограничимся тремя широко известными в реологии типами вискозиметрических течений.

2.5.1. Одноосное растяжение

Одноосное растяжение является вискозиметрическим трехмерным течением. Тензор скорости деформации можно записать следующем образом

$$\|d\| = \begin{Vmatrix} d_{11} & 0 & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} \end{Vmatrix},$$

где $d_{11} = \partial v_x / \partial x, \quad d_{22} = \partial v_y / \partial y, \quad d_{33} = \partial v_z / \partial z.$

Компоненты напряжения σ_{ij} в общем виде могут быть записаны как

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij}, \qquad (i, j = 1,\ 2,\ 3) \qquad (2.60)$$

где p – изотропное давление; δ_{ij} – символ Кронекера; τ_{ij} – девиатор тензора напряжений.

На поверхностях жидкости, растягиваемой в направлении оси x (i=1), давление равно атмосферному, поэтому

$$\sigma_{33} = 0. \qquad (2.61)$$

Подставляя (2.61) в (2.60), выразим гидростатическое давление в жидкости (отнюдь не равное внешнему) через девиаторную компоненту

$$p = \tau_{33}. \qquad (2.62)$$

Примем реологическое уравнение ньютоновской жидкости

$$\tau_{ij} = 2\mu d_{ij}, \qquad (i,\ j=1, 2, 3). \qquad (2.63)$$

где μ - сдвиговая вязкость.

Подставив (2.62) в (2.60), получим для напряжений $\sigma_{11} = \tau_{11} - \tau_{33}, \quad \sigma_{22} = \tau_{22} - \tau_{33}$, или с учетом (2.63)

$$\sigma_{11} = 2\mu(d_{11} - d_{33}), \qquad \sigma_{22} = 2\mu(d_{22} - d_{33}). \qquad (2.64)$$

Для одноосной вытяжки характерно $\sigma_{33} = \sigma_{22} = 0$, или с учетом (2.64), $d_{22} - d_{33} = 0$. Ввиду условия неразрывности $d_{11} + d_{22} + d_{33} = 0$, тензор скоростей деформаций в условиях одноосного течения имеет вид

$$\|d\| = \begin{Vmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & -0.5\frac{\partial v_x}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & -0.5\frac{\partial v_x}{\partial x} \end{Vmatrix} = \gamma_н \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.5 & 0 \\ 0 & 0 & -0.5 \end{Vmatrix},$$

где $\gamma_н = \partial v_x / \partial x$ - скорость деформации. Следовательно, компоненты скорости определяются соотношениями

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = \gamma_н, \quad \frac{\partial v_y}{\partial y} = -\frac{\gamma_н}{2}, \quad \frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{\gamma_н}{2}, \qquad (2.65)$$

откуда $v_x = \gamma_н x + v_{x0}$, $v_y = -\frac{\gamma_н}{2} y + v_{y0}$, $v_z = -\frac{\gamma_н}{2} z + v_{z0}$, где v_{x0}, v_{y0}, v_{z0} – постоянные составляющие скорости, в частности они могут быть равны нулю.

Если подставить d_{11} и d_{33} из (2.65) в (2.64), то получим для осевого напряжения

$$\sigma_{11} = 2\mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + 0.5\frac{\partial v_x}{\partial x}\right) = 3\mu\frac{\partial v_x}{\partial x} = 3\mu\gamma_н. \qquad (2.66)$$

Пусть объем деформируемой жидкости V. Умножим обе части равенства (2.66) на $V\gamma_н$

$$\sigma_{11}\gamma_н V = 3\mu\gamma_н^2 V. \qquad (2.67)$$

Выражение слева $\sigma_{11}\gamma_н V$ характеризует работу, совершаемую в результате деформации жидкости (размерность Вт). Из выражения (2.67) можем записать определение вязкости жидкости в указанном объеме

$$\mu = \frac{\sigma_{11}\gamma_н V}{3\gamma_н V}. \qquad (2.68)$$

Знаменатель (2.68) характеризует интенсивность деформации жидкости.

Если жидкость при деформации совершает дополнительную работу W_Σ, например, в случае присутствия в ней гетерогенной фазы, то эта работа должна быть учтена в числителе (2.68) как слагаемое. Соответственно, эффективная вязкость суспензии μ_+ будет выше вязкости чистой жидкости ($\mu_+>\mu$) и рассчитывается по формуле

$$\mu_+ = \frac{\sigma_{11}\gamma_н V + W_\Sigma}{3\gamma_н^2 V}. \qquad (2.69)$$

2.5.2. Простой сдвиг

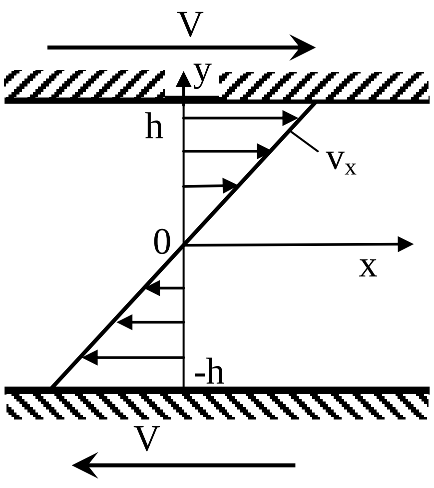

Рис. 2.6. Схема течения при простом сдвиге (g=1).

Рассмотрим закономерности линейного течения Куэтта (простой сдвиг) [51], [107]. В декартовой системе координат течение описывается уравнениями:

$$v_x = \gamma_п y, \quad v_y = v_z = 0. \qquad (2.70)$$

Эти уравнения эквивалентны следующей системе дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = \gamma_п y, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{dz}{dt} = 0.$$

Если начальные условия задать в следующем виде: $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$ при $t=\tau$ то, интегрируя, получим

$$x = x_0 - \gamma_п y(\tau - t), \quad y = y_0, \quad z = z_0. \qquad (2.71)$$

Уравнения (2.71) представляют собой точную форму уравнений движения в координатной форме для рассматриваемого течения.

Рассмотрим течение жидкости в зазоре между двумя встречно перемещающимися плоскостями (рис. 2.6). Расстояние между плоскостями 2h. Начало декартовой системы координат находится в середине зазора. Скорость движения плоскостей V – верхняя и -V – нижняя. Согласно (2.70) распределение осевой скорости линейное. В середине зазора слой жидкости неподвижен, следовательно, система координат неподвижна. Используя первое уравнение в (2.70) и условие v_x=V при y=h, найдем скорость сдвига $\gamma_п$=V/h.

Можно инвертировать направление движения плоскостей. Поэтому в общем случае компоненты скорости записываются так:

$$v_x = g|\gamma_п| y, \quad v_y = v_z = 0, \qquad (2.72)$$

где g – характеризует направление течения (g=1 – прямое, g=-1 – обратное).

Закон Ньютона в случае простого сдвига имеет вид $\tau = \mu \frac{\partial v_x}{\partial y}$, или, учитывая, обозначение (2.72) $\tau = \mu g|\gamma_п|$.

Если жидкость занимает объем V, то общая энергия вязкого трения составляет

$$W = \tau \frac{\partial v_x}{\partial y} V = \mu V g^2 |\gamma_п|^2 = \mu V |\gamma_п|^2 .$$

Здесь учитывалось g^2=1. Направление течения (знак g) не влияет на рассеиваемую энергию вязкого трения.

Вязкость определяется как $\mu = \tau / (g|\gamma_п|)$. Умножим числитель и знаменатель этого выражения на $V|\gamma|g$

$$\mu = \frac{\tau|\gamma_п| g V}{g^2 |\gamma_п|^2 V} = \frac{\tau|\gamma_п| g V}{|\gamma_п|^2 V} .$$

Числитель характеризует интенсивность тепловыделения (за счет превращения механической энергии в тепло по механизму диссипации). Знаменатель характеризует интенсивность деформации рассматриваемого объема жидкости. Если в жидкости присутствует гетерогенная фаза, то для определения эффективной вязкости необходимо в числитель добавить затраты энергии на обтекание частиц.

2.5.3. Чистый сдвиг

В случае чистого сдвига в декартовой системе координат течение описывается уравнениями [51], [108] (рисунок 2.7)

$$\frac{dv_x}{dx} = \gamma_c, \quad \frac{dv_y}{dy} = -\gamma_c, \quad \frac{dv_z}{dz} = 0. \qquad (2.73)$$

Здесь γ_c - скорость деформации чистого сдвига (γ_c=const). Уравнение неразрывности $\frac{dv_x}{dx}+\frac{dv_y}{dy}+\frac{dv_z}{dz}=0$ выполняется автоматически

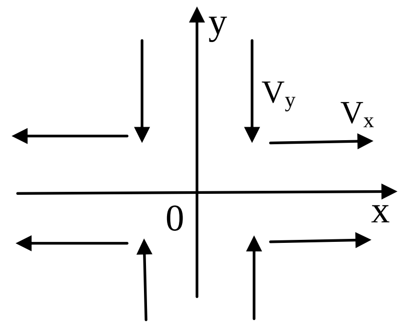

Рис. 2.7. Течение чистый сдвиг (g=1)

Интегрируя уравнение (2.73) с учетом начального условия: $v_x=v_{x0}$, $v_y=v_{y0}$, $v_z=v_{z0}$, при t=0, получим $v_x=v_{x0}+\gamma_c x$, $v_y=v_{y0}-\gamma_c y$, $v_z=v_{z0}$.

Рассматриваемое течение описывает растяжение жидкости (γ_c>0) вдоль оси x и сжатие – вдоль оси y. В направлении z имеет место поступательное движение со скоростью v_{z0}. Рассматриваем случай $\gamma_c>0$, $v_{x0}=v_{y0}=v_{z0}=0$, когда начало декартовой системы координат помещено в центр течения, где x=y=0 и v_x=v_y=v_z=0.

В общем случае возможно и обратное течение, при котором γ_c<0. При этом компоненты скорости имеют вид

$$v_x=g|\gamma_c|x, \qquad v_y=-g|\gamma_c|y, \qquad v_z=0, \qquad (2.74)$$

где g=±1- безразмерный параметр, характеризующий направление течения: g=1 – прямое (растяжение вдоль оси x), g=-1- обратное (сжатие по оси x и растяжение – по y).

Особенностью, рассмотренных в гл. 2.5.2 и 2.5.3 течений, является отсутствие движения жидкости в направлении оси z, поскольку они являются плоскими. Это значительно упрощает последующий анализ движения нити и стержня.

При изучении эволюции нити или стержня, как было показано в гл. 2.3.1, важен градиент скорости; постоянная составляющая скорости (v_x=const, v_y=const, v_z=const) эволюции не вызывает. Поэтому начало координат может быть помещено в любую точку деформируемой жидкости. При этом эволюция будет идентичной. Различие будет состоять в величине общего конвективного сноса нити.

Анализ чистого сдвига можно выполнить в тензорной форме, используя теоретические результаты работ [109], [110]. Компоненты напряжения $\boldsymbol{\sigma}$ в общем виде определяются уравнением

$$\boldsymbol{\sigma}=-p\boldsymbol{\delta}+\boldsymbol{\tau}, \qquad (2.75)$$

где p – изотропное давление, $\boldsymbol{\delta}$ - метрический тензор, $\boldsymbol{\tau}$ - тензор девиаторных напряжений.

Примем реологическое уравнение ньютоновской жидкости (2.63). Касательные напряжения отсутствуют: $\sigma_{12}=\sigma_{21}=\sigma_{31}=\sigma_{13}=0$. В условиях чистого сдвига

$$\sigma_{22}=0. \qquad (2.76)$$

Подставляя (2.76) в (2.75),

$$\begin{Vmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{Vmatrix} = -p \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} \tau_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \tau_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \tau_{33} \end{Vmatrix},$$

выразим гидростатическое давление (отнюдь не равное внешнему) через девиаторную компоненту

$$p = \tau_{22}. \qquad (2.77)$$

Подставив (2.77) в (2.75), получим для напряжений $\sigma_{11} = \tau_{11} - \tau_{22}$, $\sigma_{33} = \tau_{33} - \tau_{22}$, или с учетом (2.63)

$$\sigma_{11} = 2\mu\left(d_{11} - d_{22}\right), \qquad (2.78)$$

$$\sigma_{33} = 2\mu\left(d_{33} - d_{22}\right). \qquad (2.79)$$

Таблица 2.2

Компоненты скорости в различных реологических течениях.

Тип течения	Компоненты скорости			Скорость деформации
	v_x	v_y	v_z	
Чистый сдвиг	$\gamma_c x$	$-\gamma_c y$	0	$\gamma_c = \partial v_x / \partial y$
Простой сдвиг (течение Куэтта)	$\gamma_п y$	0	0	$\gamma_п = \partial v_x / \partial y$ (скорость сдвига)
Одноосное растяжение	$\gamma_н x$	$-0{,}5\gamma_н y$	$-0{,}5\gamma_н z$	$\gamma_н = \partial v_x / \partial x$

В условиях чистого сдвига течение в направлении z отсутствуют (d_{33}=0) и тензор скоростей деформации имеет вид

$$\|\mathbf{d}\| = \begin{Vmatrix} d_{11} & 0 & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

С учетом условия неразрывности (sp**d**=0), можем записать $d_{11}=-d_{22}$. Компоненты скорости деформаций определяются

$$d_{11} = dv_x/dx, \qquad d_{22} = -dv_x/dx. \qquad (2.80)$$

Выражения (2.78) и (2.79) с учетом (2.80) примут вид

$$\sigma_{11} = 4\mu\frac{dv_x}{dx}, \quad \sigma_{33} = 2\mu\frac{dv_x}{dx}. \qquad (2.81)$$

Следовательно, для реализации чистого сдвига к краям плоской струи необходимо приложить внешнее напряжение величиной $\sigma_{33} = \sigma_{11}/2$. При вальцевании это реализуется за счет трения материала о поверхность валков.

Рассматривая совместно (2.77), (2.80) найдем изотропное давление

$$p = -2\mu\frac{dv_x}{dx}.$$

Эффективную вязкость в условиях чистого сдвига можно определить из первого выражения в (2.81)

$$\mu = \frac{\sigma_{11}}{4 dv_x / dx} = \frac{\sigma_{11}}{4g|\gamma_c|}.$$

Результаты проведенных кинематических исследований, которые используются в последующих главах 3 и 4, сведены в табл. 2.2.

В последующих главах используются понятия прямое течение и обратное течение. Эти течения отличаются знаком скорости деформации, но при этом абсолютная величина скорости деформации идентична.

ГЛАВА 3
ПЛОСКОЕ ДВИЖЕНИЕ НИТИ И КРИВОЛИНЕЙНОГО СТЕРЖНЯ В ПОТОКЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

Численно изучены закономерности эволюции формы и натяжения криволинейной нити в условиях чистого и простого сдвига матрицы.

Методом малого параметра решена плоская задача динамического взаимодействия ламинарного потока вязкой жидкости и гибкой нерастяжимой нити конечной длины. Рассмотрены два типа реологических двумерных течений: чистый сдвиг и простой сдвиг. Получены выражения для эволюции растягивающего усилия и формы нити. Сопоставлены результаты асимптотического и численного расчетов.

Исследована продольная устойчивость прямолинейного стержня для двух реологических течений: чистого сдвига и простого сдвига. Найдена минимальная изгибная жесткость стержня, обеспечивающая устойчивость при любой ориентации в потоке. Предложена гипотеза предельного разрушения высокомодульных волокон в процессах переработки волокнонаполненных композиций.

Численно изучена задача статической формы плоской упругой линии консольного стержня, обтекаемого потоком вязкой жидкости. Для стержня малой изгибной жесткости приведено асимптотическое решение задачи.

Получена оценка эффективной вязкости суспензии, наполненной прямыми моно- и полидисперсными волокнами, лежащих в плоскостях параллельных плоскости xOy.

3.1. ДВИЖЕНИЕ ГИБКОЙ НИТИ
3.1.1. Движение нити в условиях чистого сдвига

Компоненты скорости для чистого сдвига представлены в гл. 2.5.3. Введем безразмерные переменные и параметры:

$$\tau = t|\gamma_c|,\ \{X,X_o,Y,Y_o,S\}=\{x,x_o,y,y_o,s\}/\ell,\ N_+=N/(A|\gamma_c|\ell^2),\ E=A/B. \quad (3.1)$$

С учетом уравнений (2.42) задача о движении нити в безразмерной форме имеет вид:

$$\begin{gathered} N_{+s} + (gX - X_\tau)X_s - (gY + Y_\tau)Y_s = 0, \qquad (3.2)\\ (gX - X_\tau)Y_sX_s + (gY + Y_\tau)X_s^2 - EN_+Y_{ss} = 0, \qquad X_s^2 + Y_s^2 = 1,\\ \tau=0:\ X=X_o(S),\ Y=Y_o(S),\ N_+=0;\\ \tau>0:\ \ S=0:\ X=0,\ Y=0;\quad S=1:\ N_+=0,\ Y_{ss}=0. \end{gathered}$$

Индексом τ обозначены производные по τ, а s – по S. Граничные условия в (3.2) записаны для центральносимметричной исходной конфигурации нити. Середина нити находится в начале координат, и выполняются соотношения: X(S)=−X(−S), Y(S)=−Y(−S). При этом для симметричных полей скорости жидкости средина нити в процессе её деформации всегда будет находиться в начале координат (снят конвективный снос нити). Достаточно рассмотреть эволюцию правой половины нити ($0 \le S \le 1$).

Согласно (3.1), (3.2) вязкость жидкости определяет натяжение, но не влияет на эволюцию формы. При прочих равных условиях натяжение нити пропорционально вязкости, скорости деформации и квадрату длины нити. Экспериментальные данные [128], [47], [38] подтверждают усиление разрушения волокнистого наполнителя с повышением вязкости среды и скорости деформации [128], а также начальной длины волокон [47], [38]. На эволюцию формы влияют поле скоростей жидкости, соотношение сил трения E и исходная конфигурация нити.

Численный анализ задачи (3.2) выполнен для условий перемешивания поликапроамидных волокон с резиновой матрицей: $d=30\text{x}10^{-6}$ м, $2\ell=10^{-2}$ м, $|\gamma_c|=18$ c^{-1}, $\mu=10^5$ Па·с, $\rho=1200$ кг/м^3, $\langle c \rangle=0{,}05$, $\langle v \rangle \approx |\gamma_c| \ell/2$, $Re=4{,}32\text{x}10^{-8}$, $E=1{,}53$. Вместо второго уравнения в (3.2) использовалось уравнение, полученное путем исключения X_τ из первых двух уравнений

$$EN_+Y_{ss} + N_{+s}\,Y_s - gY = Y_\tau. \qquad (3.3)$$

Уравнение (3.3) повышает устойчивость разностной схемы. Была введена равномерная разностная прямоугольная сетка $\Delta S=0{,}01$, $\Delta\tau=0{,}0025$. Натяжение N_+ находилось из первого уравнения (3.2) методом левой двухточечной прогонки, начиная с точки $S=1$. Использовалась схема <<неявный правый уголок>> [111]. Из уравнения (3.3) методом левой трехточечной прогонки (схема Кранка-Николсона) находились значения Y на верхнем временном слое. Уравнение связи (третье в (3.2)) использовалось для нахождения X. Значения N_+,Y,X на верхнем временном слое уточнялись итерациями. Подробности построения разностной схемы приведены в разделе 3.1.3.

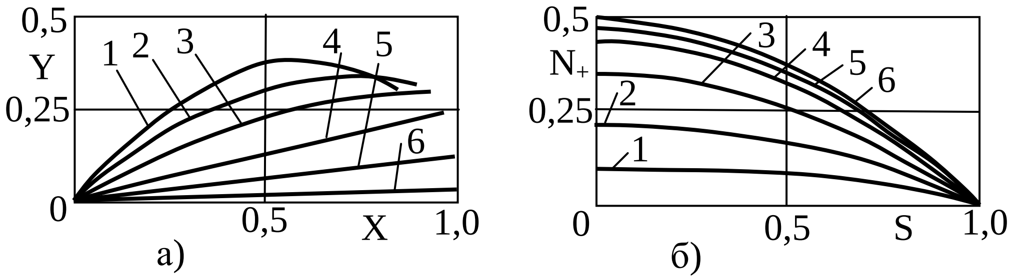

Рис. 3.1

На рис. 3.1 представлены эволюции конфигурации нити (а) и распределения натяжения по длине (б) для τ=0;0,1;0,2;0,4;0,8;1,6 (кривые 1–6). Как на рисунке 3.1,б, так и рисунке 3.2,б кривая 1 для N_+ получена на первом шаге по времени. Исходная форма нити описывалась синусоидой $Y_o=a \sin \omega X_o$, $a=0{,}4$, $\omega=2{,}7$. Направление течения $g=1$. Из рисунка видно, что эволюцию нити произвольной начальной формы условно можно разбить на два периода. В первом периоде распределение растягивающего усилия по длине нити неоднородно и даже могут быть участки сжатия. Нить уменьшает свою кривизну, вплоть до $Y''=0$. Процесс эволюции зависит от исходной конфигурации.

Во втором периоде прямолинейная нить, сохраняя прямолинейную форму, совершает поворот вокруг точки $X=Y=0$ по направлению течения. Эволюция не зависит от исходной конфигурации. Распределение натяжения описывается параболой с вершиной в точке $S=0$. При $\tau\to\infty$ ось нити совпадает с линией тока, проходящей через начало координат. Для $g=1$ линия тока совпадает с осью X (для $g=-1$ – с осью Y). По окончании второго периода натяжение в нити достигает максимума и составляет $N_{max}=N_{(S=0)}=0{,}5A\left|\gamma_c\right|\ell^2$. Вероятно, именно этот момент опасен с точки зрения разрушения наполнителя при низкой его прочности на растяжение.

Эволюция нити обратима; если во время вычислений изменить направление течения жидкости (инвертировать знак g), то нить будет перемещаться в первоначальное положение.

Анализ задачи (3.2) показал, что изначально прямолинейная нить в процессе эволюции сохраняет прямолинейную форму, а распределение натяжения по длине описывается параболической зависимостью. Её эволюция соответствует второму периоду криволинейной нити. Для прямолинейной нити получим аналитическое решение задачи (3.2).

Пусть угол наклона прямолинейной нити к оси X описывается функцией $\varphi(\tau)$. Начальное условие для нити

$$\tau = 0, \qquad \varphi = \varphi_o. \qquad (3.4)$$

Для функций X,Y примем выражения, удовлетворяющие уравнению связи (третье в (3.2)):

$$Y=S\sin\varphi, \qquad X=S\cos\varphi. \qquad (3.5)$$

Примем параболическое распределение натяжения по длине нити

$$N_+=\Psi(\tau)(1-S^2). \qquad (3.6)$$

Подставив (3.5), (3.6) в первые два уравнения (3.2), после несложных преобразований, получим уравнения для функций $\Psi(\tau)$ и $\varphi(\tau)$:

$$\Psi=0{,}5g\cos 2\varphi, \qquad \varphi_\tau=-g\sin 2\varphi. \qquad (3.7)$$

Интегрируя второе уравнение с учетом начального условия (3.4), найдем зависимость угла наклона от времени

$$\varphi=2\,\mathrm{arctg}[\mathrm{tg}(\varphi_o/2)\exp(-2g\tau)]. \qquad (3.8)$$

Таким образом, эволюция прямолинейной нити описывается уравнениями:

$$Y=S\sin\varphi, \qquad X=S\cos\varphi, \qquad N_+=0{,}5g(1-S^2)\cos 2\varphi,$$
$$\varphi=2\,\mathrm{arctg}[\mathrm{tg}(\varphi_o/2)\exp(-2g\tau)]. \qquad (3.9)$$

Согласно (3.9) при $\varphi=\pi/4$ натяжение нити нулевое ($N_+=0$). Растягивающие усилия имеют место в секторе $|\varphi|<\pi/4$ при $g=1$ или $\pi/2>|\varphi|>\pi/4$ и $g=-1$. Растягивающее усилие достигает максимума в середине нити $S=0$ при $\varphi=0$, $g=1$ либо при $|\varphi|=\pi/2$, $g=-1$ и составляет $N_+=0{,}5$ или в размерной форме $N_{max}=N_{(S=0)}=0{,}5A\left|\gamma_c\right|\ell^2$. При этом <<эффективная продольная вязкость>> системы, наполненной ориентированными в направлении растяжения волокнами максимальна (превышает вязкость матрицы). При ориентации волокон $|\varphi|=\pi/4$ их натяжение нулевое, а эффективная вязкость системы близка к вязкости матрицы (подробнее гл. 3.4).

Решение (3.9) описывает эволюцию при любой ориентации нити и даже при наличии сжимающих усилий в ней. Однако численный анализ задачи (3.2) показал, что в случае сжимающих усилий в нити вычислительная схема теряет устойчивость. При этом середина нити ($|S|\le 0{,}2$), где сжимающие усилия максимальны, непосредственно перед потерей устойчивости разностной схемы, приобретает пилообразную форму с периодом приблизительно $2\Delta S$. Вероятно причиной сильного разрушения стеклянных волокон наполнителя, что отмечалось в работах [128], [38], является их изгиб при продольном сжатии в средней части волокна. Более подробно об этом будет сказано при исследовании стержня.

3.1.2. Простой сдвиг (линейное течение Куэтта)

Уравнения (2.42) с учетом (3.1) и результатов раздела 2.4.2 (табл. 2.2) приводят к следующей задаче:

$$
\begin{aligned}
&N_{+s}+(gY-X_\tau)X_s-Y_\tau Y_s=0,\\
&(gY-X_\tau)Y_sX_s+Y_\tau X_s^2-EN_+Y_{ss}=0, \qquad X_s^2+Y_s^2=1, \qquad (3.10)\\
&\tau=0:\ X=X_o(S),\ Y=Y_o(S),\ N_+=0;\\
&\tau>0,\ S=0:\ X=0,\ Y=0;\ \ S=1:\ N_+=0,\ Y_{ss}=0.
\end{aligned}
$$

При этом в τ и N_+ (см. (3.1)) используется скорость сдвига $|\gamma_п|$.

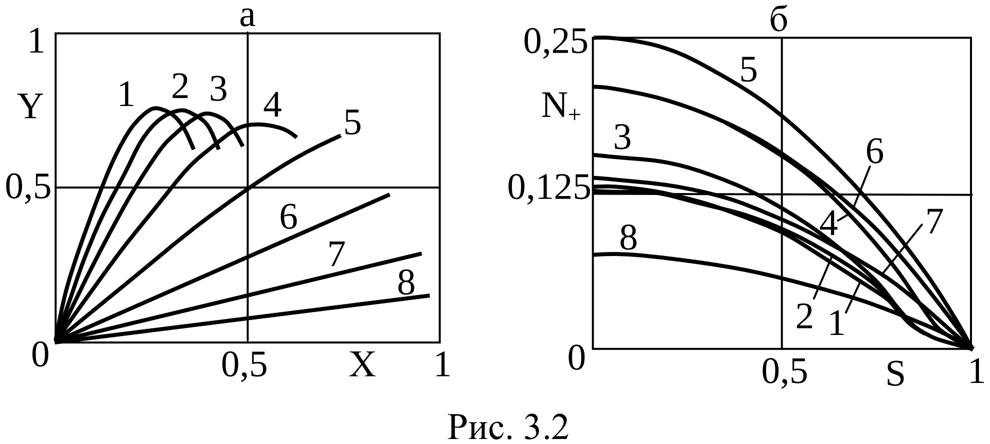

Рис. 3.2

На рис. 3.2 представлена эволюция формы (а) и натяжения (б) нити синусоидальной формы в условиях простого сдвига для τ=0; 0,1; 0,2; 0,4; 0,8; 1,6; 3,2; 6,4 (кривые 1−8). Расчеты выполнены для указанных в гл. 3.1.1 условий, но a=0,75, ω=6, g=1. Из рисунка видно, что движение нити также может быть отчетливо разделено на два периода. В первом периоде нить уменьшает свою кривизну, эволюционируя к прямолинейной форме, а во втором − прямолинейная нить совершает поворот по направлению течения. Характер изменения натяжения существенно отличается от случая чистого сдвига. В первом периоде натяжение возрастает, а его распределение постепенно приближается к параболической форме. Во втором периоде (τ>0,8) натяжение, сохраняя параболический характер распределения по длине нити, уменьшается до нуля. Ниже будет показано, что максимальное натяжение имеет место при наклоне нити $\varphi=\pi/4$. Кроме того, анализ показал, что первоначально прямолинейная нить в процессе эволюции сохраняет прямолинейную форму.

Для прямолинейной нити можно получить аналитическое решение задачи (3.10). Ищем решение в форме (3.5), (3.6). Подставив эти выражения в (3.10), получим уравнения для функций $\Psi(\tau)$ и $\varphi(\tau)$:

$$\Psi = 0{,}25g \sin 2\varphi, \qquad \varphi_\tau = -g \sin^2 \varphi.$$

Решение второго уравнения с учетом условия (3.4) имеет вид

$$\tau g= \operatorname{ctg} \varphi - \operatorname{ctg} \varphi_o.$$

Таким образом, в условиях простого сдвига эволюция прямолинейной нити описывается уравнениями:

$$Y = S \sin \varphi, \qquad X = S \cos \varphi, \qquad N_+ = 0{,}25g(1 - S^2) \sin 2\varphi,$$

$$\varphi = \operatorname{arctg}[\operatorname{tg}\varphi_o/(1+ g\tau \operatorname{tg}\varphi_o)]. \qquad (3.11)$$

При этом в секторе $-\pi/2<\varphi<\pi/2$ должно выполняться условие $N_+>0$, для чего достаточно соблюдать равенство $\operatorname{sgn} \varphi = g$, которое в частности следует из особенности выражения для $\varphi(\tau)$ в (3.11) (g и $\operatorname{tg}\varphi_o$ должны иметь одинаковый знак). Из выражения для N_+ в (3.11) видно, что максимальное натяжение в нити имеет место при $\varphi=\pi/4$ и составляет $N_+(S=0)=0{,}25(N_{max}=0{,}25A\,|\gamma_п|\,\ell^2)$ т.е. в два раза ниже чем при чистом сдвиге. Существенное отличие от чистого сдвига заключается в том, что по окончании второго периода, когда ось нити совпадает с линией тока ($g=1$, $Y=0$, $\tau=\infty$, $\varphi=0$), натяжение равно нулю ($N_+ = 0$). Сопоставление функций $\varphi(\tau)$ в (3.8) и (3.11) показало, что скорость поворота нити в направлении течения при простом сдвиге меньше, чем при чистом сдвиге. Следовательно, течение чистого сдвига проявляет более ярко выраженный эффект <<ориентации>> волокон. Однако удельные затраты энергии на деформацию вязкой жидкости, характеризуемые диссипативной функцией, при чистом сдвиге ($\approx 4\mu\gamma_c^2$) больше чем в случае простого сдвига ($\approx\mu\gamma_п^2$).

При $\operatorname{sgn}(\varphi) = -g$ в нити возникают сжимающие усилия и разностная схема задачи (3.10) теряет устойчивость. Устойчивость теряется даже, если участок непрямолинейной нити испытывает сжимающую нагрузку ($N_+ <0$).

Угловая скорость вращения нити вокруг начала координат меняется, поскольку она зависит от угла φ. Усредненное по времени значение угловой скорости $\langle\omega\rangle$ соответствует значению $\omega = d\varphi/dt$, усредненному по углу, поскольку вращение происходит периодически. Поэтому, с учетом выражений (3.1), (3.11) можем записать

$$\langle\omega\rangle = -\frac{\gamma_п}{\pi}\int_\pi^0 \sin^2\varphi d\varphi = \frac{\gamma_п}{2},$$

что соответствует известному результату теории Бики о вращении макромолекул в условиях простого сдвига [51].

3. 1. 3. Построение разностной схемы

Рассмотрено задание начальной конфигурации нити и построение разностной схемы для системы дифференциальных уравнений, описывающих динамику нити.

3. 1. 3. 1. Начальная конфигурация нити

Рассмотрим параметрическое задание исходной конфигурации нити, соответствующее начальному моменту времени. Пусть в декартовой системе координат форма оси нити описывается функцией $Y = Y(X)$. Общая длина нити 2ℓ, следовательно, в безразмерной форме параметр оси изменяется в пределах -1<S<+1. Поместим середину нити в начало координат, а на ее форму наложим условие симметрии II рода [112] Y(-X)=-Y(X). Ввиду симметрии ограничимся рассмотрением левой половины нити, для которой параметр оси S изменяется в пределах от 0 до 1 (см. рисунок 3.1, а; 3.2, а; 3.3).

Условию симметрии, в частности, удовлетворяет функция

$$Y = a\sin\omega X. \qquad (3.12)$$

где a, ω - постоянные.

Для проведения численных расчетов линию, соответствующую уравнению (3.12), необходимо представить ломаной, состоящей из конечного числа равноудаленных точек (шарниров). Рассматриваем нить как шарнирную систему стержней, расположенных в одной плоскости. Расстояние между ближайшими шарнирами (длина звена) составляет ΔS (ΔS=1/M, где M – число расчетных точек). Отдельный излом на линии (шарнир) характеризует его номер i (i≤M). Параметрическое уравнение оси нити Y=Y(S), X=X(S) заменяем зависимостью $Y_i=Y_i(i)$, $X_i=X_i(i)$.

Для выполнения этой задачи можно использовать аппроксимацию первых производных (аналог метода Эйлера решения дифференциальных уравнений первого порядка). Для нерастяжимой оси характерны геометрические соотношения

$$Y_S = \sin\varphi, \quad X_S = \cos\varphi \qquad (3.13)$$

где $\varphi = \operatorname{arctg}(dY/dX)$. Запишем уравнения (3.13), используя функцию тангенс

$$Y_S = \operatorname{tg}\varphi\left(1+\operatorname{tg}^2\varphi\right)^{-0,5}, \quad X_S = \left(1+\operatorname{tg}^2\varphi\right)^{-0,5}.$$

С учетом выражения (3.12), имеем

$$Y_S = a\omega\cos\omega X\left(1+a^2\omega^2\cos^2\omega X\right)^{-0,5}; \qquad X_S = \left(1+a^2\omega^2\cos^2\omega X\right)^{-0,5}.$$

Значению i=0 отвечает начало координат, в котором $X_i=Y_i=0$. Давая приращения функциям X и Y, можем записать рекуррентные формулы для определения координат узлов ломаной линии

$$Y_{i+1} = Y_i + \Delta S a\omega\cos\omega X_i\left(1+a^2\omega^2\cos^2\omega X_i\right)^{-0,5},$$

$$X_{i+1} = X_i + \Delta S\left(1+a^2\omega^2\cos^2\omega X_i\right)^{-0,5}. \qquad (3.14)$$

Численные расчеты, выполненные по формулам (3.14), показали нарастающее отклонение ломаной кривой от кривой, заданной уравнением (3.12), что является типичным для прямого метода Эйлера решения дифференциальных уравнений. Уменьшение длины звена (шага) ΔS не уменьшает отклонение.

Для того чтобы все узлы ломанной кривой строго лежали на линии (3.12) использовался следующий способ отыскания координат узлов. Выберем на кривой (3.12) некоторую точку с координатами X_i, Y_i. Требуется определить координаты следующей точки, лежащей по направлению увеличения параметра S и удаленной от первой на расстояние, равное длине звена ΔS. Построим окружность радиусом ΔS, центр которой совпадает с точкой X_i, Y_i. Очевидно, что искомые координаты следующего узла должны удовлетворять системе уравнений окружности и выражения (3.12)

$$\left(X_{i+1}-X_i\right)^2+\left(Y_{i+1}-Y_i\right)^2=\left(\Delta S\right)^2, \qquad Y_{i+1}=a\sin\omega X_{i+1}. \qquad (3.15)$$

Имеем систему двух нелинейных уравнений с двумя неизвестными X_{i+1}, Y_{i+1}. Система (3.15) легко решается методом итераций. Приближенные (начальные) значения X_{i+1}, Y_{i+1} задаются так: $X_{i+1}\approx X_i+0.5\Delta S$, $Y_{i+1}\approx Y_i+0.5\Delta S$. Расчет начинают с точки $S=0$, $i=0$, $X_0=Y_0=0$. Численная проверка показала хорошую сходимость итерационной схемы. При этом можно изменять характер исходной кривой, т.е. вид уравнения (3.12).

Кроме того, использовалось такое уравнение оси нити $\varphi=\varphi_{00}+k_0 S$, где φ_{00}, k_0 – постоянные, φ - угол наклона касательной. Используя уравнения (3.13) и граничное условие $S=0$, $X=Y=0$, можем записать уравнение оси нити в параметрической форме

$$X=\int_0^S\cos\left(\varphi_{00}+k_0 S\right)dS=\frac{1}{k_0}\left[\sin\left(\varphi_{00}+k_0 S\right)-\sin\varphi_{00}\right],$$

$$Y=\int_0^S\sin\left(\varphi_{00}+k_0 S\right)dS=-\frac{1}{k_0}\left[\cos\left(\varphi_{00}+k_0 S\right)-\cos\varphi_{00}\right].$$

Если в эти уравнения подставить вместо S дискретные значения длины $i\Delta S$, то получим соответствующие координаты точек ломаной кривой X_i, Y_i.

3. 1. 3. 2. Разностная схема

Рассмотрим построение разностной схемы на примере течения чистого сдвига. Движение нити описывается системой уравнений

$$N_s+\left(gX-X_\tau\right)X_s-\left(gY-Y_\tau\right)Y_s=0, \qquad (3.16)$$

$$ENY_{ss}+N_sY_s-gY=Y_\tau, \qquad (3.17)$$

$$X_s^2+Y_s^2=1, \qquad (3.18)$$

$$\tau=0:\quad X=X_0(s),\quad Y=Y_0(s),\quad N=0;$$

$$\tau>0,\ S=0:\ \ X=Y=0;\quad S=1:\ \ N=0,\ \ Y_{ss}=0. \qquad (3.19)$$

Вместо второго уравнения в (3.2) использовалось уравнение, полученное путем исключения X_τ из первых двух уравнений. Это повысило устойчивость разностной схемы.

Взята равномерная прямоугольная сетка (τ^n, S_m), $\tau^n=n\Delta\tau$, $S_m=m\Delta S$, где $\Delta\tau$, ΔS – шаги сетки по τ и S соответственно. Между шагом по S и числом точек M соотношение $\Delta S=1/M$. Уравнение для N (3.16) аппроксимируется с помощью схемы «неявный правый уголок» [111], а второе уравнение – с помощью двухслойной неявной шеститочечной схемы [113], [114].

Конечно – разностную аппроксимацию уравнений (3.16)-(3.18) запишем в следующем виде [114]:

$$\frac{N_{m+1}^{n+1}-N_{n}^{n+1}}{\Delta S}=gY_m^{n+1}\frac{\left(Y_{m+1}^{n+1}-Y_m^{n+1}\right)}{\Delta S}+\frac{\left(Y_m^{n+1}-Y_m^{n}\right)}{\Delta\tau}\frac{\left[\left(Y_{m+1}^{n+1}-Y_m^{n+1}\right)+\left(Y_{m+1}^{n}-Y_m^{n}\right)\right]}{1\Delta S}-$$

$$-gX_m^{n+1}\frac{\left(X_{m+1}^{n+1}-X_m^{n+1}\right)}{\Delta S}+\frac{\left(X_m^{n+1}-X_m^{n}\right)}{\Delta\tau}\frac{\left[\left(X_{m+1}^{n+1}-X_m^{n+1}\right)+\left(X_{m+1}^{n}-X_m^{n}\right)\right]}{2\Delta S}; \qquad (3.20)$$

$$E\frac{\left(N_m^{n+1}+N_m^{n}\right)}{2}\frac{\left[\xi\left(Y_{m+1}^{n+1}-2Y_m^{n+1}+Y_{m-1}^{n+1}\right)+\left(1-\xi\right)\left(Y_{m+1}^{n}-2Y_m^{n}+Y_{m-1}^{n}\right)\right]}{\left(\Delta S\right)^2}+$$

$$+\frac{\left[\left(N_m^{n+1}+N_m^{n}\right)+\left(N_{m+1}^{n}-N_{m-1}^{n}\right)\right]}{2}\frac{\left[\xi\left(Y_{m+1}^{n+1}-Y_{m-1}^{n+1}\right)+\left(1-\xi\right)\left(Y_{m+1}^{n}-Y_{m-1}^{n}\right)\right]}{2\Delta S}-$$

$$-g\left[\xi Y_m^{n+1}+\left(1-\xi\right)Y_m^{n}\right]=\frac{\left(Y_m^{n+1}-Y_m^{n}\right)}{\Delta\tau}; \qquad (3.21)$$

$$\left(X_{m+1}^{n+1}-X_m^{n+1}\right)^2=\left(\Delta S\right)^2-\left(Y_{m+1}^{n+1}-Y_m^{n+1}\right)^2; \qquad (3.22)$$

$$m=1,\ 2,....,\ M-1,\quad 0.5\le\xi\le 1.$$

Натяжение в расчетных точках нити определяется с помощью уравнения (3.20), начиная со свободного конца нити, где согласно условию (3.19) натяжение равно нулю. При этом уравнение (3.20) удобно записать так

$$N_m^{n+1}=N_{m+1}^{n+1}-\left(gY_1+Y_t\right)\tilde{Y}'+\left(gX_1-X_t\right)\tilde{X}',\quad 0\le m\le M-1, \qquad (3.23)$$

где $Y_1=\left(Y_m^{n+1}+Y_{m+1}^{n+1}\right)/2,\quad X_1=\left(X_m^{n+1}+X_{m+1}^{n+1}\right)/2,$

$$Y_t=\left(Y_m^{n+1}-Y_m^{n}+Y_{m+1}^{n+1}-Y_{m+1}^{n}\right)\frac{1}{2\Delta\tau},\quad X_t=\left(X_m^{n+1}-X_m^{n}+X_{m+1}^{n+1}-X_{m+1}^{n}\right)\frac{1}{2\Delta\tau},$$

$$\tilde{Y}'=\left(Y_{m+1}^{n+1}-Y_m^{n+1}+Y_{m+1}^{n}-Y_{m+1}^{n}\right)\frac{1}{2\Delta\tau},\quad \tilde{X}'=\left(X_{m+1}^{n+1}-X_m^{n+1}+X_m^{n+1}-X_{m+1}^{n}\right)\frac{1}{2\Delta\tau}.$$

Для решения уравнения (3.21) использовался метод левой трехточечной прогонки [113], [114], [115]. Запишем уравнение (3.21) для «верхнего» временного слоя в форме

$$A_mY_{m-1}^{n+1}-C_mY_m^{n+1}+B_mY_{m+1}^{n+1}=-F_m,\quad 1\le m\le M-1, \qquad (3.24)$$

где $A_m=\xi\left(\frac{E}{2}N_2-\frac{1}{8}N_3\right),\quad B_m=\xi\left(\frac{E}{2}N_2+\frac{1}{8}N_3\right),\ N_2=N_m^{n+1}+N_m^{n},$

$$C_m = \xi E N_2 + (\Delta S)^2 (\xi g + 1/\Delta\tau), \quad N_3 = N_{m+1}^{n+1} - N_m^{n+1} + N_m^n - N_m^n,$$

$$F_m = Y_m^n (\Delta S)^2 \left[\frac{1}{\Delta\tau} - g(1-\xi) \right] + \frac{E}{2}(1-\xi) N_2 \left(Y_{m+1}^n - 2Y_m^n + Y_{m-1}^n \right) + \frac{1}{8}(1-\xi)\left(Y_{m+1}^n - Y_{m-1}^n \right) N_3.$$

Граничное условие нулевой кривизны конца нити (3.19) запишем, используя аппроксимацию второй производной [106] (относительная погрешность порядка $(\Delta S)^2$)

$$-Y_{M-3}^{n+1} + 4Y_{M-2}^{n+1} - 5Y_{M-1}^{n+1} + 2Y_M^{n+1} = 0. \qquad (3.25)$$

Уравнение (3.24), записанное для точки М-2, имеет вид

$$A_{M-2} Y_{M-3}^{n+1} - C_{M-2} Y_{M-2}^{n+1} + B_{M-2} Y_{M-1}^{n+1} = -F_{M-2}. \qquad (3.26)$$

Аналогично можно записать уравнение (3.24) для точки М-1

$$A_{M-1} Y_{M-2}^{n+1} - C_{M-1} Y_{M-1}^{n+1} + B_{M-1} Y_m^{n+1} = -F_{M-1}. \qquad (3.27)$$

Элиминировав из системы линейных уравнений (3.25) – (3.27) функции Y_{M-3}^{n+1} и Y_{M-2}^{n+1}, получим условие

$$\frac{F_{M-2}}{A_{M-2}} - \frac{F_{M-1}}{A_{M-1}}\left(4 - \frac{C_{M-2}}{A_{M-2}}\right) + \left[\left(4 - \frac{C_{M-2}}{A_{M-2}}\right)\frac{C_{M-1}}{A_{M-1}} - 5 + \frac{B_{M-2}}{A_{M-2}}\right] Y_{M-1}^{n+1} +$$
$$+\left[2 - \frac{B_{M-1}}{A_{M-1}}\left(4 - \frac{C_{M-2}}{A_{M-2}}\right)\right] Y_M^{n+1} = 0. \qquad (3.28)$$

Предполагая, что имеет место соотношение

$$Y_{m+1}^{n+1} = \xi_{m+1} Y_m + \eta_{m+1}, \qquad (3.29)$$

исключим из (3.24) последовательно Y_{m+1}^{n+1} и Y_m^{n+1} (учитывая $Y_m^{n+1} = \xi_m Y_{m-1}^{n+1} + \eta_m$)

$$-F_m = \left[A_m - (C_m - B_m \xi_{m+1}) \xi_m \right] Y_{m-1}^{n+1} + B_m \eta_{m+1} - (C_m - B_m \xi_{m+1}) \eta_m.$$

Уравнение (3.24) выполняется при

$$A_m - (C_m - B_m \xi_{m+1}) \xi_m = 0, \qquad -F_m = B_m \eta_{m+1} - (C_m - B_m \xi_{m+1}) \eta_m.$$

Отсюда получаем формулы левой прогонки

$$\xi_m = \frac{A_m}{C_m - \xi_{m+1} B}, \qquad m = M-1,\ M-2, \ldots, 2,\ 1, \qquad (3.30)$$

$$\eta_m = \frac{B_m \eta_{m+1} + F_m}{C_m - \xi_{m+1} B_m}, \quad m = M-1,\ M-2, \ldots, 2,\ 1. \qquad (3.31)$$

Сопоставляя выражения (3.28) и (3.29) (последнее удобнее записать так $-\eta_M - \xi_M Y_{M-1}^{n+1} + Y_M^{n+1} = 0$), находим выражения для ξ_M и η_M

$$\eta_M = -\left[\frac{F_{M-2}}{A_{M-2}} - \frac{F_{M-1}}{A_{M-1}}\left(4 - \frac{C_{M-2}}{A_{M-2}}\right)\right]\left[2 - \frac{B_{M-1}}{A_{M-1}}\left(4 - \frac{C_{M-2}}{A_{M-2}}\right)\right]^{-1}, \qquad (3.32)$$

$$\xi_M = -\left[\left(4 - \frac{C_{M-2}}{A_{M-2}}\right)\frac{C_{M-1}}{A_{M-1}} - 5 + \frac{B_{M-2}}{A_{M-2}}\right]\left[2 - \frac{B_{M-1}}{A_{M-1}}\left(4 - \frac{C_{M-2}}{A_{M-2}}\right)\right]^{-1}. \qquad (3.33)$$

Таким образом, для функций η_m, ξ_m получили задачу Коши (3.30) – (3.33) (формулы прямой прогонки). После того, как функции η_m, ξ_m найдены для всех m=1, 2,…., M, необходимо, используя граничное значение $Y_0^{n+1}=0$, найти все функции Y_m^{n+1} по формуле (3.29) (обратная прогонка)

$$Y_{m+1}^{n+1}=\xi_{m+1}Y_m^n+\eta_{m+1},\quad m=0,\ 1,...,\ M-1.$$

Далее находятся значения функции X_m^{n+1} по формуле (3.22), которую запишем так

$$X_{m+1}^{n+1}=X_m^{n+1}+\sqrt{\left(\Delta S\right)^2-\left(Y_{m+1}^{n+1}-Y_m^{n+1}\right)^2},\quad m=0,\ 1,...,\ M-1.$$

Согласно граничному условию (3.19) $X_0^{n+1}=0.$

Значения N_m^{n+1}, Y_m^{n+1}, X_m^{n+1} на каждом «временном слое» уточнялись итерациями. Итерации заканчивались при стабилизации натяжения в середине нити, т.е. N_0^{n+1}. Численный анализ показал, что наилучшее значение параметра ξ в (3.22) ξ=1.

3.1.4. Исследование устойчивости

3.1.4.1. Чистый сдвиг

Для определения границ применимости решения (3.9), а также устойчивости уравнений (3.2), представляет интерес проанализировать устойчивость решения к малым возмущениям. Задача об устойчивости формулируется следующим образом. Пусть в некоторый момент времени положение прямолинейной нити характеризуется углом φ. Зададим приращения функций X, Y, N_+. Требуется выяснить, будет ли возмущение, вызванное этими приращениями, неограниченно нарастать или затухать.

Исследуем «быструю» неустойчивость в начальный момент эволюции нити, полагая, что возмущения растут настолько быстро, что невозмущенное движение может считаться «замороженным». Рассматриваемая гидромеханическая система не обладает «памятью», поэтому любое промежуточное положение прямолинейной нити, характеризуемое углом φ, можно рассматривать как начальное. Следовательно, при анализе устойчивости угол φ в уравнениях будем рассматривать как параметр.

Для решения (3.9) введем малые возмущения формы нити α, β и натяжения Υ

$$X = S\cos\varphi + \alpha(\tau,S),\qquad Y = S\sin\varphi + \beta(\tau,S)\,, \tag{3.34}$$
$$N_+ = 0{,}5g(1 - S^2)\cos 2\varphi + \Upsilon(\tau,S),\qquad |\alpha,\beta,\Upsilon|<<1.$$

Подставив (3.34) в (3.2), и выполнив линеаризацию, получим следующие уравнения для отклонений:

$$\Upsilon_s+(g\alpha-\alpha_\tau)\cos\varphi+\alpha_s gS\cos\varphi\cos2\varphi-(g\beta+\beta_\tau)\sin\varphi+\beta_s gS\sin\varphi\cos2\varphi=0,$$
$$0{,}5Eg(1-S^2)\beta_{ss}\cos2\varphi+\Upsilon_s\sin\varphi-\beta_s gS\cos2\varphi-g\beta-\beta_\tau=0,\quad \alpha_s+\beta_s\mathrm{tg}\varphi=0. \tag{3.35}$$

Здесь для φ_τ использовалось соотношение (3.7).

Анализ устойчивости сводится к исследованию задачи на собственные значения для системы (3.35) с граничными условиями

$S=0$: $\alpha=\beta=0$, $\Upsilon=\Upsilon_o$, $\beta_s=\beta_{os}$; $S=1$: $\Upsilon=0$, $\beta_{ss}=0$. (3.36)

Представим возмущения в виде $\{\alpha,\beta,\Upsilon\}=\{A,B,C\}\exp(\lambda\tau)$, где $A(S)$, $B(S)$, $C(S)$ − собственные функции задачи; λ − собственное значение. В соответствии с (3.35) и (3.36) для собственных функций получим задачу

$C_s+A(g-\lambda)\cos\varphi+A_s gS\cos\varphi\cos2\varphi-B(g+\lambda)\sin\varphi+B_s gS\sin\varphi\cos2\varphi=0,$

$0{,}5Eg(1-S^2)B_{ss}\cos2\varphi+C_s\sin\varphi-B_s gS\cos2\varphi-(g+\lambda)B=0,\quad A_s+B_s\mathrm{tg}\varphi=0,$

$S=0$: $A=B=0$, $C=C_o$, $B_s=B_{os}$; $S=1$: $C=0$, $B_{ss}=0$.

Проинтегрировав последнее уравнение с учетом граничных условий, получим $A=-B\mathrm{tg}\varphi$. Функции A и B линейно зависимы, что позволяет исключить функцию A, а для функций B и C записать следующие уравнения:

$0{,}5Eg(1-S^2)B_{ss}\cos2\varphi-B_s gS\cos2\varphi-(g\cos2\varphi+\lambda)B=0,\quad C_s=2Bg\sin\varphi,$

$S=0$: $B=0$, $C=C_o$, $B_s=B_{os}$; $S=1$: $C=0$, $B_{ss}=0$. (3.37)

Собственные функции определены с точностью до произвольного множителя, поэтому без ограничения общности можно положить $B_{os}=1$.

Решение задачи (3.37) ищем в плоскости Гаусса. Для этого введем следующие обозначения: $\lambda=\lambda_r+i\lambda_i$, $B=B_r+iB_i$, $C=C_r+iC_i$. Для функций и собственного числа имеем $B_r=B_i=S$, $C_r=C_i=g(S^2-1)\sin\varphi$, $\lambda_r=-2g\cos2\varphi$, $\lambda_i=0$.

Поскольку $\lambda_i=0$ в системе отсутствуют колебания. Отметим идентичность зависимости собственного числа λ_r и натяжения нити N_+ в (3.9) от φ. Поэтому область устойчивых деформаций соответствует области растягивающих усилий ($N_+>0$). При $g=1$ и $|\varphi|<\pi/4$ течение устойчиво ($\lambda_r<0$). Значения параметров $\varphi=\pi/4$, $\lambda_r=0$, $N_+=0$ соответствуют нейтральной устойчивости нити. При $g=1$ и $\pi/2>|\varphi|>\pi/4$ возмущения неограниченно возрастают ($\lambda_r>0$), а движение нити неустойчиво. Действительно, в этой области наблюдалась потеря устойчивости разностной схемы для уравнения (3.2). Таким образом, решение для прямолинейной нити (3.9) правомерно в области $|\varphi|<\pi/4$ при $g=1$ и $\pi/2>|\varphi|>\pi/4$ при $g=-1$. Более наглядно это поясняется на рисунке 3.5, а.

3.1.4.2. Простой сдвиг

Исследована устойчивость прямолинейной нити к малым возмущениям. По аналогии с (3.34) возмущения представим следующим образом:

$X=S\cos\varphi+\alpha(\tau,S),\qquad Y=S\sin\varphi+\beta(\tau,S),$

$N_+=0{,}25g(1-S^2)\sin2\varphi+\Upsilon(\tau,S),\qquad |\alpha,\beta,\Upsilon|<<1.$

Линеаризованные уравнения (3.10) для возмущений имеют вид

$\Upsilon'+(g\beta-\alpha_\tau)\cos\varphi-\beta_\tau\sin\varphi=0,$

$0{,}25Eg(1-S^2)\beta_{ss}\sin2\varphi+\Upsilon_s\sin\varphi-0{,}5\beta_s gS\sin2\varphi-\beta_\tau=0,$

$\alpha_s+\beta_s\,\mathrm{tg}\,\varphi=0,$

$\tau>0$, $S=0$: $\alpha=\beta=0$, $\Upsilon=\Upsilon_o$, $\beta_s=\beta_{so}$; $S=1$: $\Upsilon=0$, $\beta_{ss}=0$.

Введем собственные функции задачи A(S), B(S), C(S) и собственное значение λ: $\{\alpha,\beta,\Upsilon\}=\{A,B,C\}\ \exp(\lambda\tau)$. Учитывая линейную зависимость функций A и B (гл. 3.1.4.1), для функций B и C имеем уравнения

$C_s+gB\cos\varphi=0,$

$0{,}5Eg(1-S^2)B_{ss}\sin 2\varphi-0{,}5B_s gS\sin 2\varphi-(0{,}5g\sin 2\varphi+\lambda)B=0,$

$S=0:\ B=0,\ C=C_o,\ B_s=1;\quad S=1:\ C=0,\ B_{ss}=0.$

Решение этой задачи в комплексной плоскости имеет вид $B_r=B_i=S$, $C_r=C_i=-0{,}5g(1-S^2)\cos\varphi$, $\lambda_r=-g\ \sin 2\varphi$, $\lambda_i=0$. Колебания отсутствуют ($\lambda_i=0$). Зависимость $\lambda_r(\varphi)$ подобна зависимости $N_+(\varphi)$ в (3.11), поэтому если нить испытывает растягивающие усилия ($N_+>0$), то $\lambda_r<0$ и её движение устойчиво. При $|\varphi|<\pi/2$ условие устойчивости $\lambda_r<0$ выполняется, если $-g\ \mathrm{sgn}(\varphi)<0$. В горизонтальном положении нити ($\lambda_r=0$, $\varphi=0$, $N_+=0$) имеет место нейтральная устойчивость. Это поясняется на рис. 3.6, а.

Статическое равновесие нити совпадает с нейтральной устойчивостью. Поэтому в реальных условиях ориентация волокон неустойчива, поскольку остаточная изгибная упругость нити или возмущение скорости жидкости могут сместить нить в область $\varphi<0$ (при $g=1$), что, в конечном счете, приведет к вращению нити вокруг центра, находящегося в ее середине. Угловая скорость вращения будет неравномерной: она достигает максимума при $|\varphi|=\pi/2$ и минимума в окрестности $\varphi=0$. Таким образом, простое сдвиговое течение не обеспечивает устойчивую ориентацию изолированной нити конечной длины.

3.1.5. Асимптотическое решение задачи движения гибкой нити в потоке вязкой жидкости

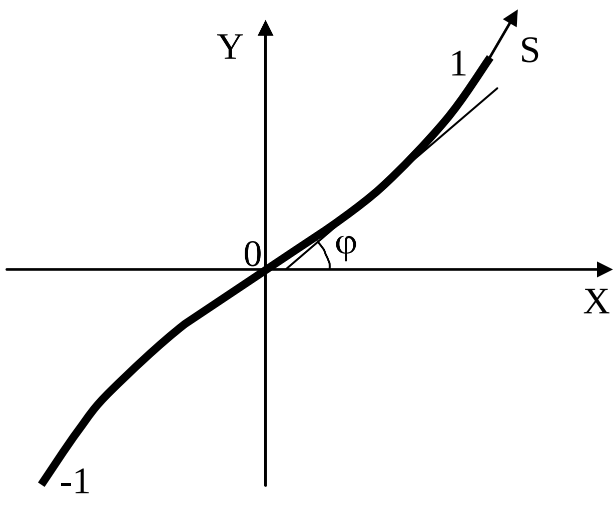

Рис.3.3

В перерабатывающем оборудовании (валки, резиносмесители) величина деформации наполненной системы конечна, поскольку время перемешивания ограничено. Поэтому исходная конфигурация нити оказывает существенное влияние на ее ориентацию в конце технологической операции.

В качестве приложения рассматриваемой задачи можно указать на проблему диспергирования волокон при перемешивании полимерных композиций и на каландровый эффект (ориентация волокон в направлении течения).

В разделе 3.1.1. поставлена задача о движении гибкой нити конечной длины в потоке вязкой жидкости. Выполним преобразование исходных уравнений**.** Наряду с (3.1) введем следующие безразмерные переменные и параметры, позволяющие компактно описывать оба вида вискозиметрических течений:

$$\tau = t\left|\dot{\gamma}_c g_1 + (1-g_1)\dot{\gamma}_п\right| \quad , \quad N_+ = N\Big/\left(A\ell^2\left|\dot{\gamma}_c g_1 + (1-g_1)\dot{\gamma}_п\right|\right), \qquad (3.38)$$

где g_1 - параметр “переключения” типа течения (g_1=1 - соответствует чистому сдвигу, g_1 =0 - простому).

Запишем уравнения (2.59) для рассматриваемой задачи в скалярной форме

$$EN_+\varphi_{SS} + (1+E)N_{+S}\varphi_S - \varphi_\tau = g\left[g_1\sin 2\varphi + (1-g_1)\sin^2\varphi\right],$$

$$N_{+SS} - E(\varphi_S)^2 N_+ = -g\left[g_1\cos 2\varphi + 0,5(1-g_1)\sin 2\varphi\right], \qquad (3.39)$$

$$\tau = 0: \ \varphi = \varphi^*(S), N_+ = 0,$$

$$\tau > 0, \ S = 0: \ \varphi_S = N_{+S} = 0, \ \ S = 1, \ \ \varphi_S = N_+ = 0.$$

Здесь φ - угол между касательной к оси нити и осью X; $\varphi^*(S)$ - угол наклона оси нити в начальный момент; g - параметр, характеризующей направление течения ($g = \mathrm{sign}\,\dot{\gamma}_c$ - для чистого сдвига, $g = \mathrm{sign}\,\dot{\gamma}_п$ - для простого сдвига). Граничные условия в (3.39) записаны для центрально-симметричной исходной конфигурации нити. Расчетная схема и оси координат представлены на рис. 3.3.

Таким образом, при исследовании задачи можно ограничиться уравнениями (3.39). Функции X и Y находятся путем интегрирования уравнений

$$\partial X/\partial S = \cos\varphi, \qquad \partial Y/\partial S = \sin\varphi, \qquad (3.40)$$

$$S=0, \qquad X=0, \qquad Y=0.$$

Пусть начальная конфигурация нити описывается функцией $\varphi^* = \varphi_+ + \varepsilon S$, где φ_+, ε - постоянные.

Полагая в начальном условии (3.39) $|\varepsilon|$<<1, используем для анализа задачи метод малого параметра [118], [119]. Ищем решение в виде прямых разложений по степеням малого параметра

$$\varphi = \varphi_0(\tau) + \varepsilon\varphi_1(S,\tau) + ...,$$

$$N_+ = N_{+0}(S,\tau) + \varepsilon N_{+1}(S,\tau) + ... \qquad (3.41)$$

Первые члены разложения φ_0, N_0 описывают эволюцию прямолинейной нити. Принято $\varphi_0 = \varphi_0(\tau)$, поскольку численный анализ задачи (3.39) показал, что прямолинейная нить в процессе эволюции сохраняет свою форму (см. разделы 3.1.1. и 3.1.2).

Подставляя разложения (3.41) в уравнения и граничные условия (3.39) и приравнивая члены одного порядка малости по ε, получим задачи:

-для порядка ε^0

$$\varphi_{0\tau} = -g\left[g_1\sin 2\varphi_0 + (1-g_1)\sin^2\varphi_0\right], \qquad (3.42)$$

$$N_{+0,SS} = -g\left[g_1\cos 2\varphi_0 + 0,5(1-g_1)\sin 2\varphi_0\right],$$

$\tau = 0$: $\varphi_0 = \varphi_+$, $N_{+0}=0$;

$\tau > 0$, S=0: $\varphi_{0,S} = N_{+0,S} = 0$, S=1: $\varphi_{0S} = N_{+0} = 0$;

-для порядка ε^1

$$EN_{+0}\varphi_{1,SS} + (1+E)N_{+0,S}\varphi_{1,S} - \varphi_{1,\tau} = 2g\varphi_1\left[g_1\cos 2\varphi_0 + 0,5(1-g_1)\sin 2\varphi_0\right],$$

$$N_{+1,SS} - EN_{+0}\varphi_{1,S} = 2g\varphi_1\left[g_1\sin 2\varphi_0 - 0,5(1-g_1)\cos 2\varphi_0\right], \qquad (3.43)$$

$\tau = 0$: $\varphi_1 = S$, $N_{+1}=0$,

$\tau > 0$: S=0, $\varphi_{1,S} = N_{+1,S} = 0$, S=1, $\partial\varphi_1/\partial S = N_1 = 0$.

Решение задачи (3.42) имеет вид:

- в случае чистого сдвига (g_1=1)

$$\varphi_0 = \mathrm{arctg}\left[\mathrm{tg}\varphi_+ \exp(-2g\tau)\right], \quad N_0 = 0,5g\left(1-S^2\right)\cos 2\varphi_0, \qquad (3.44)$$

- в случае простого сдвига (g_1=0)

$$\varphi_0 = \mathrm{arctg}\left[\mathrm{tg}\varphi_+/(1+g\ \tau\ \mathrm{tg}\varphi_+)\right], \quad (g\ \mathrm{tg}\varphi_+ > 0),$$

$$N_0 = 0,25g\left(1-S^2\right)\sin 2\varphi_0. \qquad (3.45)$$

Решение первого уравнения в (3.43) будем искать в виде произведения функций

$$\varphi_1 = f(\tau)\psi(S), \qquad (3.46)$$

которое является решением системы уравнений

$$0,5E\left(1-S^2\right)\psi_{SS} - (1+E)S\psi_S - (2+C)\psi = 0, \qquad (3.47)$$

$$\frac{1}{f}f_\tau = Cg\left[g_1\cos 2\varphi_0 + 0,5(1-g_1)\sin 2\varphi_0\right], \qquad (3.48)$$

где C - постоянная.

Решение уравнения (3.47) имеет вид

$$\psi = C_1S + C_2S\int_0^S S^{-2}\left(1-S^2\right)^{-\frac{1+E}{E}}dS,$$

где C_1 и C_2 - постоянные. Последний интеграл для произвольного E через элементарные функции не выражается. Для удовлетворения начальному условию (3.43) необходимо положить C_1=1, C_2=0, C= - (E+3).

В случае чистого сдвига (g_1=1) уравнение (3.48), с учетом выражения $d\varphi_0/d\tau$ из первого уравнения в (3.42), можно представить в виде

$$\frac{df}{f} = (E+3)\mathrm{ctg}2\varphi_0 d\varphi_0.$$

Выполнив интегрирование, получим

$$f = \left(\sin 2\varphi_0/\sin 2\varphi_+\right)^{0,5(E+3)}. \qquad (3.49)$$

Здесь использовалось начальное условие $\tau = 0$, $\varphi_0 = \varphi_+$, f=1.

Аналогично находится решение уравнения (3.48) для простого сдвига

$$f = \left(\sin\varphi_0/\sin\varphi_+\right)^{E+3}. \qquad (3.50)$$

Следует отметить, что частное решение уравнения (3.47) $\psi = S$ не удовлетворяет граничным условиям (3.43). Между тем решение первого уравнения в (3.43) методом Канторовича [120] (методом сведения к обыкновенному дифференциальному уравнению) в виде $\varphi_1 = f(\tau)\left(3S^2 - 2S^3\right)$, удовлетворяющим граничным условиям, дало для f выражения, близкие к (3.49), (3.50): показатели степени составляли $\left(37+15E\right)/26$ и $\left(37+15E\right)/13$, соответственно. Поэтому есть основания полагать, что отмеченное обстоятельство в данной задаче не играет существенной роли.

Решение второго уравнения в (3.43) с учетом (3.44)-(3.46), (3.49), (3.50) не представляет трудностей: путем двукратного интегрирования получаем выражение для N_1.

Таким образом, для чистого сдвига с точностью до членов $O\left(\varepsilon^2\right)$, имеем решение

$$\varphi = \varphi_0 + \varepsilon S\left(\frac{\sin 2\varphi_0}{\sin 2\varphi_+}\right)^{\frac{E+3}{2}}, \qquad N_+ = 0,5\left(1-S^2\right)g\cos 2\varphi_0 +$$
$$+\frac{\varepsilon g}{24}\left(\frac{\sin 2\varphi_0}{\sin 2\varphi_+}\right)^{\frac{E+3}{2}}\left[E\left(6S^2 - S^4 - 5\right)\cos 2\varphi_0 - 8(1-S^3)\sin 2\varphi_0\right]. \tag{3.51}$$

Функция $\varphi_0(\tau)$ определена в (3.44).

Для простого сдвига соответствующие выражения имеют вид

$$\varphi = \varphi_0 + \varepsilon S\left(\frac{\sin\varphi_0}{\sin\varphi_+}\right)^{E+3}, \qquad N_+ = 0,25g\left(1-S^2\right)\sin 2\varphi_0 +$$
$$+\frac{\varepsilon g}{48}\left(\frac{\sin\varphi_0}{\sin\varphi_+}\right)^{E+3}\left[E\left(6S^2 - S^4 - 5\right)\sin 2\varphi_0 + 8\left(1-S^3\right)\cos 2\varphi_0\right] \tag{3.52}$$

Функция $\varphi_0(\tau)$ определена в (3.45).

Прямые разложения (3.51), (3.52) не содержат секулярных членов, что подтверждает правомерность выражений (3.41) и принятого метода анализа.

Интегрируя уравнения (3.40) с учетом (3.51), (3.52), получим выражения для функций X и Y

$$X = \frac{1}{\varepsilon\alpha}\left[\sin\left(\varphi_0 + \varepsilon\alpha S\right) - \sin\varphi_0\right], \qquad Y = \frac{1}{\varepsilon\alpha}\left[\cos\varphi_0 - \cos\left(\varphi_0 + \varepsilon\alpha S\right)\right], \tag{3.53}$$

где $\alpha = g_1\left(\frac{\sin 2\varphi_0}{\sin 2\varphi_+}\right)^{\frac{E+3}{2}} + \left(1-g_1\right)\left(\frac{\sin\varphi_0}{\sin\varphi_+}\right)^{E+3}$. Функция $\varphi_0(\tau)$ определена в (3.44), (3.45).

Рассматривается идеально гибкая нить, способная передавать только растягивающие усилия, поэтому полученное решение правомерно только для областей устойчивых движений нити (раздел 3.1.4).

В процессе эволюции вторые слагаемые в (3.51), (3.52) достаточно быстро убывают, и нить приобретает прямолинейную форму с параболическим распределением натяжения по длине. При этом параметр E, определяющий силу трения, влияет на скорость убывания слагаемого порядка ε, но не влияет на эволюцию прямолинейной нити. Таким образом, асимптотический анализ подтверждает гипотезу о двух периодах эволюции нити, предложенную в разделе 3.1.

Следует отметить, что параметр E зависит от объемной доли волокнистого наполнителя, следовательно, его изменение в технологическом процессе оказывает влияние на степень ориентации волокон.

В условиях чистого сдвига первоначально прямолинейная нить, сохраняя свою форму, совершает поворот вокруг точки X=Y=0 по направлению течения. График зависимости натяжения от координаты S является параболой с вершиной в точке S=0. При $\tau \to \infty$ и g=1 ось нити совпадает с осью X, при g=-1 - с осью Y. В этом случае натяжение максимально и описывается зависимостью $N = 0{,}5\left(1 - S^2\right)$.

Численный анализ. Система уравнений (3.39), (3.40) решалась численно с помощью неявной конечно-разностной схемы Кранка-Николсона. Функции N и φ на верхнем временном слое находились методом трехточечной прогонки и уточнялись итерациями. Здесь из уравнений (3.40) находились функции X и Y.

Схема сохраняла устойчивость даже при наличии в нити сжимающих усилий. При этом на участке сжатия нить принимала пилообразную форму, с периодом, приблизительно равным двум шагам по S.

В качестве теста использовалось точное решение задачи для прямолинейной нити (3.44), (3.45). Анализ выполнен для системы поликапроамидные волокна - резиновая матрица (d=30 мкм; $2\ell = 10^{-2}$ м; $|\dot{\gamma}_с| = |\dot{\gamma}_п| = 18$ $с^{-1}$; $\mu = 10^5$ Па$\cdot$с; $\rho = 1200$ кг/м^3; $\langle c \rangle = 0{,}05$; $\langle v \rangle = |\dot{\gamma}_с|\ell$; $Re = 3{,}24 \cdot 10^{-8}$; $E = 1{,}56$). Параметры начальной конфигурации нити $\varphi_0 = 0{,}6$, $\varepsilon = 0{,}5$. Шаг по координате S составлял 0,025, по времени - 0,001.

Результаты численного решения в безразмерном виде представлены сплошными линиями на рис. 3.4 (результаты асимптотического решения показаны штриховыми линиями). Рис. 3.4.а соответствует чистому сдвигу, рис. 3.4.б - простому. Кривые 1 соответствуют значениям τ=0; 2 - 0,1; 3 - 0,2; 4 - 0,4; 5 - 0,8; 6 - 1,6; 7 - 3,2. Видно, что в случае деформации чистого сдвига поворот нити в направлении течения совершается с большей скоростью. Поэтому наличие в течении деформации растяжения ускоряет процесс ориентации волокнистого наполнителя.

Асимптотическое решение получено в предположении $|\varepsilon| \ll 1$. Даже при $\varepsilon = 0{,}5$ асимптотическое решение (3.51)-(3.53) достаточно точно описывает эволюцию нити (расхождение не более 12 %).

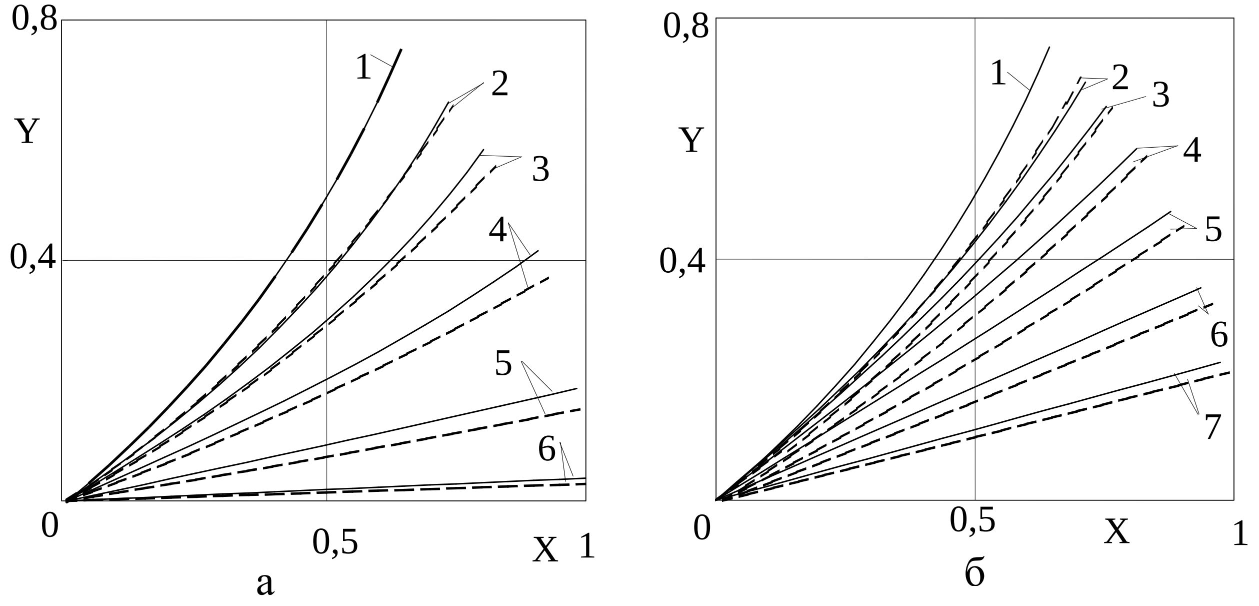

Рис. 3.4. Сопоставление результатов расчета.

Асимптотическое решение является непосредственным продолжением исследования гл. 3.1.4. В разделе 3.1.4. (опуская постановку, решение для прямолинейной нити и численный анализ) анализ устойчивости заключался в решении линеаризованной задачи на собственные значения. При этом определялся только знак собственного числа, который указывал, нарастают или убывают отклонения. В результате были установлены границы устойчивости нити для двух видов течения жидкости. Поскольку с физической точки зрения вопрос об устойчивости идеально гибкой нити представляется не вполне корректным, то правомерней будет сказать, что исследовалась устойчивость нелинейных уравнений. Действительно, вычислительная схема в областях неустойчивости расходилась.

Проведенный в 3.1.4. анализ, не дает информации о скорости изменения отклонения в зависимости от условий течения.

Следует отметить, что асимптотическое решение задачи занимает промежуточное положение между численным решением и аналитическим. Решение получено в сравнительно простой форме, дает возможность выяснения качественных особенностей задачи, отвечает на вопрос о скорости изменения отклонения в зависимости от типа течения и угла наклона нити, может использоваться как «тест» при численном решении задачи. Следует отметить, что попытка решения данной задачи методом многих масштабов [119] (растяжение в окрестности середины нити) оказалась неудачной.

На рис. 3.4 представлены только случаи исчезающих отклонений нити. Ниже будет показано, что решения (3.51), (3.52) согласуются с результатами устойчивости, полученными в разделе 3.1.4. В указанных выражениях отклонения характеризуют слагаемые порядка ε.

В асимптотическом анализе «замороженную» неустойчивость можно имитировать следующим образом. Для заданного угла начального положения φ_+ рассмотрим характер изменения отклонения. При этом достаточно проанализировать изменение функции f, определенной в (3.49), (3.50), с учетом

(3.44), (3.45). Пусть элементарное приращение времени составляет $\Delta\tau$ ($\Delta\tau<<1$). Тогда условия устойчивости следующие:

$\lim\limits_{\Delta\tau\to 0} f-1>0$ - отклонение нарастает, движение неустойчиво;

$\lim\limits_{\Delta\tau\to 0} f-1<0$ -отклонения убывают, движение устойчиво; (3.54)

$\lim\limits_{\Delta\tau\to 0} f-1=0$ - нейтральная устойчивость.

Используя формулу Маклорена, разложим функцию f по степеням $\Delta\tau$

$$f \approx f\big|_{\Delta\tau=0} + \Delta\tau \frac{\partial f}{\partial\varphi_0}\bigg|_{\varphi_0=\varphi_+} \frac{\partial\varphi_0}{\partial\Delta\tau}\bigg|_{\Delta\tau=0}.$$

При этом, для чистого сдвига имеем

$$f \approx 1-\Delta\tau(E+3)g\cos 2\varphi_+ . \qquad (3.55)$$

Соответственно, для простого сдвига

$$f \approx 1-\Delta\tau(1/2)(E+3)g\sin 2\varphi_+ . \qquad (3.56)$$

Согласно результатам раздела 3.1.4. знак действительной части собственного числа λ_r, характеризующий устойчивость, связан со знаком натяжения N_0 следующим образом: $\mathrm{sign}(\lambda_r)= -\mathrm{sign}(N_0)$. Если подставить выражения (3.55), (3.56) в соотношения (3.54) и сопоставить с выражениями для N_0 в (3.44), (3.45), то можно убедиться в адекватности полученных результатов и результатов по устойчивости раздела 3.1.4.

Таблица 3.1

Вид течения	Направление течения	Сектор	Знак λ_r в гл. 3.1.4.	Слагаемое порядка ε в (3.51), (3.52)
Чистый сдвиг, $g_1=1$	Растяжение вдоль оси x, g=1	$\lvert\varphi_+\rvert<\pi/4$	$\lambda_r<0$, движение нити устойчиво	Отклонение уменьшается
		$3\pi/4>\lvert\varphi_+\rvert>\pi/4$	$\lambda_r>0$, неустойчиво	Увеличивается
	Сжатие вдоль оси x, g= –1	$3\pi/4>\lvert\varphi_+\rvert>\pi/4$	$\lambda_r<0$, устойчиво	Уменьшается
		$\lvert\varphi_+\rvert<\pi/4$	$\lambda_r>0$, неустойчиво	Увеличивается
Простой сдвиг, $g_1=0$	«прямое», g=1	$0<\varphi_+<\pi/2$	$\lambda_r<0$, устойчиво	Уменьшается
		$-\pi/2<\varphi_+<0$	$\lambda_r>0$, неустойчиво	Увеличивается
	«обратное», g= –1	$-\pi/2<\varphi_+<0$	$\lambda_r<0$, устойчиво	Уменьшается
		$0<\varphi_+<\pi/2$	$\lambda_r>0$, неустойчиво	Увеличивается

Анализ устойчивости может быть выполнен непосредственно; путем численного анализа соотношений (3.54), с учетом выражений (3.55), (3.56), (3.44), (3.45). При этом можно положить, например, $\Delta\tau\cong 10^{-3}$.

Для большей наглядности результатов сопоставления их можно представить в виде табл. 3.1. Поскольку нить с ориентацией φ_+ идентична нити с ориентацией $\varphi_+ +\pi n$, где n-целое число, то анализ проведен для сектора размером π. Видно полное соответствие последних двух столбцов табл. 3.1.

3.2. ДВИЖЕНИЕ СТЕРЖНЯ

3.2.1. Исследование устойчивости

Рассматривается два вида течения: чистый сдвиг, характеризуемый компонентами скорости $v_x = g|\dot{\gamma}_c|x,\ v_y = -g|\dot{\gamma}_c|y,\ g = \operatorname{sign}\dot{\gamma}_c$, и простой сдвиг $v_x = g|\dot{\gamma}_п|y,\ v_y = 0,\ g = \operatorname{sign}\dot{\gamma}_п$, где $\dot{\gamma}_c = \partial v_x/\partial x$ - скорость деформации при чистом сдвиге, $|\dot{\gamma}_п| = \partial v_x/\partial y$ - скорость сдвига. Введем параметр переключения типа течения g_1, для сокращения записи (g_1=1 соответствует чистому сдвигу, g_1=0 – простому).

Динамические уравнения для изогнутого стержня в потоке вязкой жидкости имеют вид (см. раздел 2.4.2)

$$\varphi_t - B^{-1}\left(N_s\varphi_s + N\varphi_{ss} + Q_{ss}\right) - A^{-1}\varphi_s\left(N_s - Q\varphi_s\right) = g\left[-g_1|\dot{\gamma}_c|\sin 2\varphi - \left(1-g_1\right)|\dot{\gamma}_п|\sin^2\varphi\right],$$

$$\varphi_s B^{-1}\left(N\varphi_s + Q_s\right) - A^{-1}\left(N_{ss} - Q_s\varphi_s Q\varphi_{ss}\right) = g\left[g_1|\dot{\gamma}_c|\cos 2\varphi + 0.5\left(1-g_1\right)|\dot{\gamma}_п|\sin 2\varphi\right],$$

$$M = E^* J\left(\varphi_s - \varphi_s^{\circ}\right), \qquad M_s = -Q, \qquad (3.57)$$

$$t = 0:\ \ \varphi = \varphi_0(s),\ \ M = N = Q = 0;$$

$$t > 0,\ \ s = \pm\ell:\ \ M = N = Q = 0.$$

Считается, что в начальный момент напряжения в стержне отсутствует (в общем случае это необязательно).

Введем следующие безразмерные переменные и параметры:

$$\tau = t\left|\dot{\gamma}_c g_1 + \left(1-g_1\right)\dot{\gamma}_п\right|,\ \ E = \frac{A}{B},\ \ S = \frac{s}{\ell},\ \ K = E^* J\left(B\ell^4\left|\dot{\gamma}_c g_1 + \left(1-g_1\right)\dot{\gamma}_п\right|\right)^{-1}.$$

В качестве масштабов осевого усилия, изгибающего момента и перерезывающей силы, примем

$$A\ell^2\left|\dot{\gamma}_c g_1 + \left(1-g_1\right)\dot{\gamma}_п\right|,\ \ B\ell^3\left|\dot{\gamma}_c g_1 + \left(1-g_1\right)\dot{\gamma}_п\right|,\ \ B\ell^2\left|\dot{\gamma}_c g_1 + \left(1-g_1\right)\dot{\gamma}_п\right|,$$

соответственно.

В безразмерной форме уравнения (3.57) имеют вид

$$\varphi_\tau - EN_s\varphi_s - EN\varphi_{ss} - Q_{ss} - \varphi_s N_s + E^{-1}\varphi_s^2 = -g\left[g_1\sin 2\varphi + \left(1-g_1\right)\sin^2\varphi\right],$$

$$EN\varphi_s^2 + \varphi_s Q_s \_ N_{ss} + E^{-1}Q_s\varphi_s + E^{-1}Q\varphi_{ss} = g\left[g_1\cos 2\varphi + 0.5\left(1-g_1\right)\sin 2\varphi\right],$$

$$M_s = -Q,\quad M = K\left(\varphi_s - \varphi_s^2\right), \qquad (3.58)$$

$$\tau = 0:\quad \varphi = \varphi_0(S),\quad M = N = Q = 0;\qquad \tau > 0,\quad S = \pm 1:\quad M = N = Q = 0.$$

Используя последние два уравнения в (3.58), исключим функции M и Q, оставив N и φ. Имеем

$$\varphi_\tau - \left(E+1\right)N_s\varphi_s - EN\varphi_{ss} + K\varphi_{ssss} - E^{-1}K\varphi_{ss}\varphi_s^2 = -g\left[g_1\sin 2\varphi + \left(1-g_1\right)\sin^2\varphi\right],$$

$$EN\varphi_s^2 - N_{ss} - K\left(1-E^{-1}\right)\varphi_s\varphi_{sss} - KE^{-1}\varphi_{ss}^2 = g\left[g_1\cos 2\varphi + 0.5\left(1-g_1\right)\sin 2\varphi\right], \qquad (3.59)$$

$$\tau = 0:\quad \varphi = \varphi_0(S),\quad \varphi_s = \varphi_{ss} = N = 0;\qquad \tau > 0,\quad S = \pm 1:\quad N = \varphi_s = \varphi_{ss} = 0.$$

Анализ (3.59) показал, что изначально прямолинейный стержень в процессе эволюции для рассматриваемых видов течения сохраняет прямолинейную форму. Для прямолинейного стержня решение задачи (3.59) имеет вид

$$\bar{N} = g_1 0.5g\left(1-S^2\right)\cos 2\bar{\varphi} + \left(1-g_1\right)0.25g\left(1-S^2\right)\sin 2\bar{\varphi},$$

$$\bar{\varphi} = g_1 \mathrm{arctg}\left[\mathrm{tg}\varphi_0 \exp\left(-2g\tau\right)\right] + \left(1-g_1\right)\mathrm{arctg}\left[\mathrm{tg}\varphi_0 \big/ \left(1+g\tau\mathrm{tg}\varphi_0\right)\right], \qquad (3.60)$$

$$\bar{\varphi}_\tau = -g_1 g\sin 2\bar{\varphi} - \left(1-g_1\right)g\sin^2\bar{\varphi},$$

где φ_0 – начальная ориентация прямолинейного стержня $\left(d\varphi_0/dS = d\bar{\varphi}/dS = 0\right)$. Здесь и ниже параметры прямого стержня отмечены сверху черточками.

В рассматриваемых течениях в зависимости от ориентации стержня, в нём могут возникать как растягивающие, так и сжимающие усилия, обусловленные распределенной нагрузкой, создаваемой силами вязкого трения. Задав малый начальный изгиб, исследуем устойчивость стержня. Выясним, при каких ориентациях стержня возмущение будет неограниченно возрастать или затухать. Считаем, что возмущения растут настолько быстро, что эволюцию (поворот по направлению течения) можно считать «замороженной», т.е. угол $\bar{\varphi}$ в уравнениях будем рассматривать как параметр. Для «быстрых» процессов характерное время много меньше времени поворота стержня в направлении течения. При этом можно пренебречь изменением величины $\bar{\varphi}$ во времени и считать $\bar{\varphi}$, $\bar{N}$, $\bar{\varphi}_t$ постоянными (анализ т.н. устойчивости «замороженного» состояния).

Введем малые возмущения формы стержня ε и осевой силы γ

$$\varphi = \bar{\varphi} + \varepsilon\left(S,\tau\right), \quad N = \bar{N} + \gamma\left(S,\tau\right), \quad \max\left(\varepsilon,\gamma\right) \ll 1. \qquad (3.61)$$

Подставим (3.60), (3.61) в (3.59)

$$-g\left[g_1\sin 2\varphi + \left(1-\bar{g}_1\right)\sin^2\bar{\varphi}\right] + \varepsilon_\tau - \left(E+1\right)\left(-D+\gamma_s\right)\varepsilon_s -$$

$$-E\left[0.5D\left(1-S^2\right)+\gamma\right]\varepsilon_{ss} + K\varepsilon_{ssss} - E^{-1}K\varepsilon_{ss}\varepsilon_s^2 =$$

$$= -g\left[g_1\sin\left(2\bar{\varphi}+2\varepsilon\right) + \left(1-g_1\right)\sin^2\left(\bar{\varphi}+\varepsilon\right)\right];$$

$$E\left[0.5D\left(1-S^2\right)+\gamma\right]\varepsilon_s^2 - (1+E^{-1})K\varepsilon_s\varepsilon_{sss} - KE^{-1}\varepsilon_{ss}^2 =$$

$$= g\left[g_1\cos\left(2\bar{\varphi}+2\varepsilon\right) + 0.5\left(1-g_1\right)\sin\left(2\bar{\varphi}+2\varepsilon\right)\right];$$

$$\tau = 0:\ \bar{\varphi}+\varepsilon = \varphi_0\left(S\right),\ \varepsilon_s = \varepsilon_{ss} = 0,\ \bar{N}+\gamma = 0;$$

$$\tau > 0,\ S = \pm 1:\ \varepsilon_s = \varepsilon_{ss} = 0,\ \bar{N}+\gamma = 0,$$

где $D = g\left[g_1 \cos 2\bar{\varphi} + 0.5(1-g_1)\sin 2\bar{\varphi}\right]$. Здесь учитывалось $d\bar{\varphi}/dS = 0$. Для тригонометрических функций в правой части уравнений используем асимптотические выражения

$$\sin\left(2\bar{\varphi} + 2\varepsilon\right) \approx \sin 2\bar{\varphi} + 2\varepsilon \cos 2\bar{\varphi}, \quad \cos\left(2\bar{\varphi} + 2\varepsilon\right) \approx \cos 2\bar{\varphi} - 2\varepsilon \sin 2\bar{\varphi},$$

$$\sin^2\left(\bar{\varphi} + \varepsilon\right) \approx \sin^2 \bar{\varphi} + 2\varepsilon \sin\bar{\varphi}\cos\bar{\varphi} \approx \sin^2 \bar{\varphi} + \varepsilon \sin 2\bar{\varphi}.$$

Выполнив линеаризацию, получим следующие уравнения для отклонений

$$\begin{gathered} \varepsilon_\tau + (E+1)SD\varepsilon_s - 0{,}5ED\left(1-S^2\right)\varepsilon_{ss} + K\varepsilon_{ssss} = -2D\varepsilon; \quad -\gamma_{ss} = -2D\varepsilon; \\ \tau = 0: \quad \varepsilon = \varepsilon_0(S), \quad \varepsilon_s = \varepsilon_{ss} = 0, \quad \gamma = 0; \quad \tau > 0, \quad S = \pm 1: \quad \varepsilon_s = \varepsilon_{ss} = 0, \quad \gamma = 0. \end{gathered} \tag{3.62}$$

Видно, что первое уравнение содержит одну неизвестную функцию ε. Второе уравнение связывает функции ε и γ. Поэтому для анализа устойчивости можно ограничиться первым уравнением.

Представим возмущение в виде ε=Aexp(λτ), где A(S) – собственная функция задачи, λ - собственное значение. В соответствии с (3.62) для собственной функции получим задачу

$$\begin{gathered} \lambda A + (E+1)SDA_s - 0{,}5ED\left(1-S^2\right)A_{ss} + KA_{ssss} + 2DA = 0; \\ S = \pm 1: \quad A_s = A_{ss} = 0. \end{gathered} \tag{3.63}$$

Имеем однородную задачу. Выясним: возникают ли в стержне колебания? Для этого переведем задачу в плоскость Гаусса. Введем следующие обозначения $\lambda=\lambda_r+i\lambda_I$, $A=A_r+iA_i$. В плоскости Гаусса задача (3.63) имеет вид

$$L_1\left(A_r, A_i\right) = A_r\left(\lambda_r + 2D\right) - A_i\lambda_i + D\left[(E+1)SA_{r,s} - 0.5E\left(1-S^2\right)A_{r,ss}\right] + KA_{r,ssss} = 0,$$

$$L_2\left(A_r, A_i\right) = A_i\left(\lambda_r + D\right) + A_r\lambda_i + D\left[(E+1)SA_{i,s} - 0.5E\left(1-S^2\right)A_{i,ss}\right] + KA_{i,ssss} = 0,$$

$$S = \pm 1: \quad A_{r,s} = A_{r,ss} = A_{i,s} = A_{i,ss} = 0. \tag{3.64}$$

Здесь $A_{r,s} = dA_r/dS$, т.е. первый индекс указывает вид функции, а второй – производную.

Используем приближенный метод решения задачи о собственных значениях Галеркина [121], [124].

В разделе 3.1.4 отмечено, что в рассматриваемых типах течения при определенных углах ориентации стержня в нем возникает сжимающая нагрузка. На поверхность стержня со стороны движущейся жидкости действует сила трения, т.е. сжатие стержня происходит под действием распределенной нагрузки. Вид граничных условий в (3.63) и (3.64) соответствует шарнирному закреплению концов стержня. В случае сжимающих нагрузок имеем задачу эйлеровой устойчивости при продольном изгибе.

В качестве аппроксимации собственной функции A используем полином пятой степени

$$A=a_0+a_1S+a_2S^2+a_3S^3+a_4S^4+a_5S^5. \qquad (3.65)$$

Коэффициенты полинома определяются, исходя из требования выполнения граничных условий (3.64). Ввиду того, что граничные условия для функций A_r и A_i идентичны, можно полагать, что эти функции различаются постоянным множителем (по крайней мере, в пределах приближенного анализа). Поэтому определение коэффициентов полинома (3.65) идентично для функций A_r и A_i. Дважды дифференцируя (3.65), имеем

$$\breve{A}_s=a_1+2a_2S+3a_3S^2+4a_4S^3+5a_5S^4, \qquad \breve{A}_{ss}=2a_2+6a_3S+12a_4S^2+20a_5S^3.$$

Граничные условия (3.63) приводят к системе уравнений

$$a_1-2a_2+3a_3-4a_4+5a_5=0, \qquad a_1+2a_2+3a_3+4a_4+5a_5=0,$$
$$2a_2-6a_3+12a_4-20a_5=0, \qquad 2a_2+6a_3+12a_4+20a_5=0.$$

Коэффициент a_0 не влияет на производные $\breve{A}_s$ и $\breve{A}_{ss}$, поэтому может принимать любое значение. Отсюда находим $a_2=0$, $a_4=0$, $a_0=0$, $a_1=5a_5$, $a_3=-10a_5/3$. Подставив их в (3.65), получим $\breve{A}=a_5(15S-10S^3+3S^5)$. Здесь учитывалось, что a_5 – постоянная, определяемая из условия ортогональности невязки к координатной функции. Принятая аппроксимация собственной функции (первая мода задачи) позволяет найти первое собственное число, что соответствует случаю наименьшей (критической) нагрузки на стержень, при которой он теряет устойчивость.

Для собственных функций принимаем многочлены

$$\breve{A}_r=C_r(15S-10S^3+3S^5), \qquad \breve{A}_i=C_i(15S-10S^3+3S^5).$$

Здесь C_r, C_i – постоянные.

Согласно методу Галеркина потребуем ортогональности невязок L_1 и L_2 в (3.64) к координатным функциям

$$\int_0^1 L_1\left(\breve{A}_r,\breve{A}_i\right)\left(15S-10S^3+3S^5\right)dS=0,$$
$$\int_0^1 L_2\left(\breve{A}_r,\breve{A}_i\right)\left(15S-10S^3+3S^5\right)dS=0. \qquad (3.66)$$

Учитывая симметрию задачи при интегрировании можно ограничиться интервалом [0, 1]. Ввиду однородности дифференциальных операторов L_1, L_2 и того обстоятельства, что собственные функции определяются с точностью до постоянного множителя, без снижения общности можно положить $C_r=C_i=1$. В развернутой форме система (3.66) имеет вид

$$\left(\lambda_i+2D\right)J_1-\lambda_i J_1+DJ_2+KJ_3=0, \qquad \left(\lambda_r+2D\right)J_1+\lambda_i J_1+DJ_2+KJ_3=0, \qquad (3.67)$$

где $J_1=\int_0^1\left(15S-10S^3+3S^5\right)dS=\dfrac{8384}{231}$,

$$J_2=\int_0^1\Big[\left(E+1\right)\left(15S-30S^3+15S^5\right)-\left(15S-10S^3+3S^5\right)-0.5E\left(1-s^2\right)\left(-60S+60S^3\right)\Big]dS,$$

$$J_2=\left(E+1\right)\frac{3200}{231}+E\frac{6400}{231}=\frac{9600}{231}E+\frac{3200}{231},\ J_3=360\int_0^1\left(15S-10S^3+3S^5\right)SdS=\frac{8640}{7}.$$

При выполнении интегрирования учитывались соотношения
$\breve{A}_{r,s} = \breve{A}_{i,s} = 15 - 30S^2 + 15S^4,\ \breve{A}_{r,ss} = \breve{A}_{i,ss} = -60S + 60S^3,\ \breve{A}_{r,ssss} = \breve{A}_{i,ssss} = 360S.$

Из анализа системы (3.67) следует, что λ_i=Im(λ)=0, т.е. колебания в системе отсутствуют.

Реальная часть собственного числа Re(λ) определяется выражением

$$\mathrm{Re}(\lambda) = \lambda_r = -g\left[2g_1\cos 2\bar{\varphi} + (1-g_1)\sin 2\bar{\varphi}\right]\left(1 + \frac{J_2}{2J_1}\right) - K\frac{J_3}{J_1},$$

или

$$\lambda_r = \lambda = -(0.5725E + 1.19)g\left[2g_1\cos 2\bar{\varphi} + (1-g_1)\sin 2\bar{\varphi}\right] - 34K. \qquad (3.68)$$

Первое слагаемое правой части было получено в разделе 3.1.4 и характеризует границы устойчивости гибкой нити (стержня нулевой жесткости, для которого K=0). Второе слагаемое правой части характеризует влияние изгибной жесткости стержня на границы устойчивости. Учет изгибной жесткости расширяет область устойчивости.

Интересно отметить, что существует критическая жесткость стержня K^*, при которой стержень с жесткостью $K>K^*$ сохраняет устойчивость при любой ориентации. В случае чистого сдвига (g_1=1), с учетом равенства max(-gcos2$\bar{\varphi}$)=1, критическая жесткость

$$K^*=0.0336E+0.07. \qquad (3.69)$$

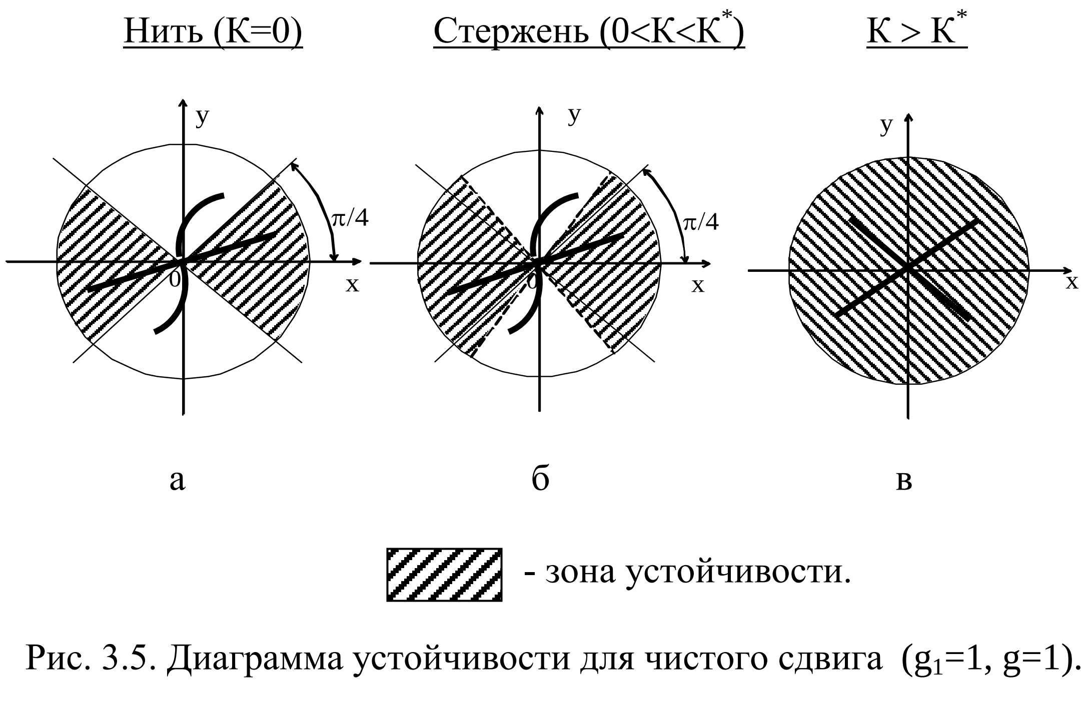

Рис. 3.5. Диаграмма устойчивости для чистого сдвига (g_1=1, g=1).

При простом сдвиге (g_1=0) с учетом равенства max(-gsin2$\bar{\varphi}$)=1 критическая жесткость в два раза меньше: K^*=0.0168e+0.035. Действительно, согласно (3.60), при чистом сдвиге осевое усилие в два раза больше, чем при простом.

На рис. 3.5. представлены диаграммы устойчивости для течения чистого сдвига, которые иллюстрируют расположение зон устойчивой ориентации прямых нитей и стержней. Нить или стержень лежат в плоскости z=0 и их середина совпадает с началом координат. Нити (или стержню нулевой жесткости) соответствует диаграмма на рис. 3.5, а. При расположении прямой нити в пределах заштрихованной зоны нить испытывает растягивающее усилие, и ее эволюция (поворот в направлении оси x) устойчива. Если жесткость стержня меньше критической (рис. 3.5, б) то зона устойчивости расширяется относительно зоны нити. Для стержня с жесткостью равной или превышающей критическую жесткость, устойчивость сохраняется при любой ориентации (рис. 3.5, в).

На рис. 3.6. представлена диаграмма устойчивости для прямолинейной нити и стержня в условиях простого сдвига. Смысл диаграммы аналогичен диаграмме, представленной на рис. 3.5. Из сопоставления рис. 3.5 и 3.6 видно, что для рассматриваемых вискозиметрических течений расположение зон устойчивости существенно отличается. Диаграммы «а» на обоих рисунках соответствуют результатам, полученным для нити в разделах 3.1.4.1 и 3.1.4.2. Однако в обоих случаях повышение жесткости стержня способствует расширению границ зоны устойчивости, поскольку он воспринимает сжимающее усилие, сохраняя продольную устойчивость.

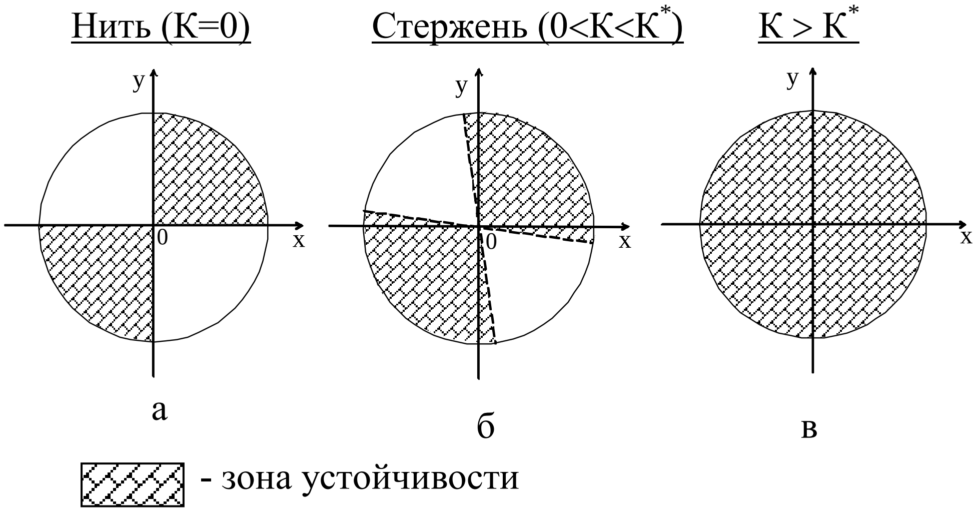

Рис. 3.6. Диаграмма устойчивости для простого сдвига (g_1=0, g=1).

Переработка волокнонаполненных полимеров сопровождается интенсивным диспергированием волокон, причем существует предел разрушения наполнителя. Можно предположить, что разрушение высокомодульных волокон (стеклянных, углеродных) происходит по механизму потери устойчивости. Для типичных условий переработки на экструдере композиции, содержащей стеклянные волокна, значения параметров следующие: d=10 мкм; c=0.05; $\mu = 10^3$ Па·с; $E^* = 7.5$ ГПа; $\gamma = 100$ с$^{-1}$; $\mathrm{Re} = 1.2 \cdot 10^{-7}$; $E = 1.56$. При этом значению критической жесткости в условиях чистого сдвига (K^*=0.122) соответствует длина волокна $2\ell = 0.3$ мм. Этот результат согласуется с экспериментальными данными работ [46], [38], [37] в которых средняя длина волокон после интенсивного силового воздействия на систему составляет 0.1 ÷ 0.9 мм. Для указанных условий расчетные (с использованием формулы (3.60) при g=1, S=0, φ=0) растягивающие напряжения в середине волокна $4N_*/\pi d^2$ составляют 59 МПа, что существенно меньше разрушающих напряжений при растяжении стеклянного волокна (3.5 ГПа).

Кроме того, найдем критическую длину стержня, обеспечивающую его устойчивость. В случае стеклянных волокон наполнителя потеря устойчивости равносильна разрушению и это соответствует минимальным размерам диспергирования. Меньше этой длины диспергирование невозможно. Считаем, что потеря устойчивости вызывает разрушение стеклянного волокна.

В развернутой форме выражение (3.69) имеет вид

$$\frac{E^* J}{B\ell^4|\dot{\gamma}_c|}=\frac{1.145E+2.38}{34}.$$

Учитывая, что $J=0.05d^4$, $B=\dfrac{4\pi\mu}{\ln(7.4/Re)}$, $Re=\dfrac{\langle v\rangle d\rho}{\mu}$, $\langle v\rangle=\ell|\dot{\gamma}_c|$, можем записать

$$\frac{\ell}{d}=\sqrt[4]{\frac{34E^* 0.05\ln(7.4/Re)}{(1.145E+2.38)4\pi\mu|\dot{\gamma}_c|}}. \qquad (3.70)$$

Если для стеклянных волокон в резине $\mu=10^5\,\text{Па}\cdot\text{с}$; $E=1.53$; $|\dot{\gamma}_c|=18\ \text{с}^{-1}$; $Re=3.24\cdot10^{-8}$; $B=6.5\cdot10^4\ \text{Па}\cdot\text{с}$; $E^*=75\cdot10^9$ Па. То в результате вычисления имеем, $\ell/d=12.8$. Что соответствует экспериментальным данным работы [46], [38], [37]. Формула (3.70) иллюстрирует влияние условий переработки на диспергирование стеклянных волокон. Видно, что уменьшение скорости деформации матрицы $|\dot{\gamma}_c|$ и уменьшение вязкости μ снижает диспергирование.

3.2.2. Второе приближение для собственного числа

Метод Галеркина позволяет выполнить уточнение полученного собственного числа задачи, в том числе найти второе собственное число. Отметим, что первое собственное число, как это следует из теории продольной устойчивости стержня, характеризует наименьшее усилие сжатия, при котором возникает элементарное выпучивание упругого стержня. Второе собственное число характеризует наименьшее усилие сжатия, при котором на стержне образуются две волны выпучивания (см. рис. 3.5, а). При этом требуется большая величина усилия и дополнительные боковые воздействия на стержень [122]. Поскольку стержень окружен вязкой жидкостью, то сила вязкого трения препятствует выпучиванию стержня, поэтому есть условия для возникновения высших форм равновесия.

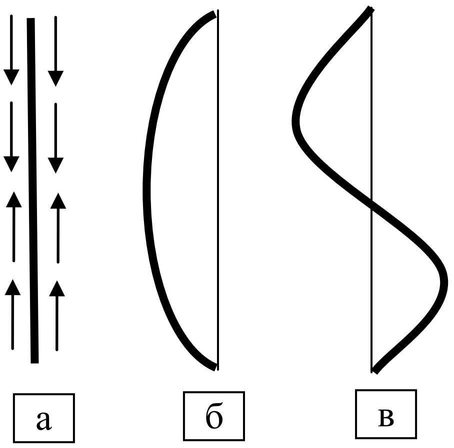

Рис. 3.7 Стержень под действием распределенной сжимающей нагрузки (а). Типы выпучивания стержня с осевой нагрузкой (б), (в). Только тип (б) может возникнуть без добавочной связи.

Несомненно, для данной задачи вопрос первого и второго собственного числа представляет теоретический интерес.

Независимо от ориентации прямого стержня на него действует распределенная сжимающая или растягивающая нагрузка, исключая положения нейтрального равновесия. Например, в условиях чистого сдвига при ориентации $\varphi_0=\pi/4$ нагрузка на стержень не действует.

Схема действия распределенных сил вязкого трения на стержень иллюстрируется рис. 3.7, а. Показан случай действия сжимающих нагрузок, т.е. условия при которых стержень может потерять устойчивость (продольный изгиб).

Первая критическая нагрузка (рис. 3.7,б), соответствующая первому или наименьшему собственному числу λ_1, играет особенно важную роль, потому что она представляет верхнюю границу нагрузок, для которых неизогнутое положение стержня остается единственным устойчивым. Высшие формы продольного изгиба (рис. 3.7, в), соответствующие λ_j (j>1), могут быть получены только при условии поддержания дополнительными связями прямолинейной формы после достижения наименьшей критической силы. Другими словами, конфигурация (б) соответствует первому собственному числу Re (λ_1), а (в) – второму Re(λ_2). Для стержней, находящихся под осевым усилием, известно равенство $\lambda_2=4\lambda_1$ [123].

В качестве примера ограничимся случаем чистого сдвига. Характеристическое уравнение (3.63) запишем так

$$A_{ssss}+b_2(1-s^2)A_{ss}+b_1sA_s+b_0A=0, \qquad (3.71)$$

где $b_2=-0.5K^{-1}E g\cos2\varphi_0$, $b_1=(E+1)K^{-1}g\cos2\varphi_0$, $b_0=(\lambda+2g\cos2\varphi_0)K^{-1}$.

Граничные условия задачи – отсутствие усилий и изгибающих моментов на свободных концах стержня

$$S=\pm1, \quad A_{ss}=A_s=0. \qquad (3.72)$$

Базисные функции должны удовлетворять условиям (3.72). Найдем две первые базисные функции методом неопределенных коэффициентов. Для приближенного решения уравнения (3.71) возьмем полином шестой степени

$$\bar{A}=a_1S+a_2S^2+a_3S^3+a_4S^4+a_5S^5+a_6S^6. \qquad (3.73)$$

Условия (3.72) дают следующую систему линейных уравнений для коэффициентов $a_1 - a_6$

$$a_1+2a_2+3a_3+4a_4+5a_5+6a_6=0, \quad a_1-2a_2+3a_3-4a_4+5a_5-6a_6=0,$$

$$2a_2+6a_3+12a_4+20a_4+30a_6=0, \quad 2a_2-6a_3+12a_4-20a_5+30a_6=0,$$

откуда $a_1 = 5a_5$, $a_2 = 3a_6$, $a_4 = -3a_6$, $a_3 = -10/3a_5$.

Подставив полученные соотношения в (3.73), получим две базисные функции

$$\bar{A} = a_5\left(5S - 10S^3/3 + S^5\right) + a_6\left(3S^2 - 3S^4 + S^6\right).$$

Поскольку базисные функции находятся с точностью до постоянного множителя, то можно принять

$$\bar{A} = a_1\left(15S - 10S^3 + 3S^5\right) + a_2\left(3S^2 - 3S^4 + S^6\right). \qquad (3.74)$$

Найдем производные, входящие в уравнение (3.71)

$$\bar{A}_s = a_1\left(15 - 30S^2 + 15S^4\right) + a_2\left(6S - 12S^3 + 6S^5\right),$$

$$\bar{A}_{ss} = a_1\left(-60S + 60S^3\right) + a_2.\left(6 - 36S^2 + 30S^4\right),$$

$$\bar{A}_{ssss} = a_1 360S + a_2\left(-72 + 360S^2\right).$$

Невязка уравнения (3.71) имеет вид

$$L\left(\bar{A}\right) = \bar{A}_{ssss} + b_2\left(1 - S^2\right)\bar{A}_{ss} + b_1 S\bar{A}_s + b_0\bar{A}. \qquad (3.75)$$

По Галеркину условие ортогональности невязки к базисным функциям приводит к системе уравнений

$$\int_{-1}^{1} L\left(\bar{A}\right)\left(15S - 10S^3 + 3S^5\right)dS = 0, \qquad \int_{-1}^{1} L\left(\bar{A}\right)\left(3S^2 - 3S^4 + S^6\right)dS = 0.$$

С учетом выражений (3.74) -(3.75) имеем систему уравнений

$$a_1 J_1 + a_2 J_2 = 0, \quad a_1 J_3 + a_2 J_4 = 0, \qquad (3.76)$$

где

$$J_1 = \int_{-1}^{1}\Big[360S + b_2\left(1 - S^2\right)\left(-60S + 60S^3\right) +$$
$$+ b_1 S\left(15 - 30S^2 + 15S^4\right) + b_0\left(15S - 10S^3 + 3S^5\right)\Big]\left(15S - 10S^3 + 3S^5\right)dS\ ,$$

$$J_2 = \int_{0}^{1}\Big[-72 + 360S^2 + b_2\left(1 - S^2\right)\left(6 - 36S^2 + 30S^4\right) +$$
$$+ b_1 S\left(6S - 12S^3 + 6S^5\right) + b_0\left(3S^2 - 3S^4 + S^6\right)\Big]\ \left(15S - 10S^3 + 3S^5\right)dS,$$

$$J_3 = \int_{0}^{1}\Big[360S + b_2\left(1 - S^2\right)\left(-60S + 60S^3\right) +$$
$$+ b_1 S\left(15 - 30S^2 + 15S^4\right) + b_0\left(15S - 10S^3 + 3S^5\right)\Big]\left(3S^2 - 3S^4 + S^6\right)dS,$$

$$J_4 = \int_{0}^{1}\Big[-72 + 360S^2 + b_2\left(1 - S^2\right)\left(6 - 36S^2 + 30S^4\right) +$$
$$+ b_1 S\left(6S - 12S^3 + 6S^5\right) + b_0\left(3S^2 - 3S^4 + S^6\right)\Big]\ \left(3S^2 - 3S^4 + S^6\right)dS.$$

Напомним, что искомое собственное число входит в постоянную b_0.

Приближенные значения собственных чисел находятся как корни уравнения (условие равенства нулю определителя однородной линейной системы (3.76) относительно коэффициентов a_1 и a_2) $\begin{vmatrix} J_1 & J_2 \\ J_3 & J_4 \end{vmatrix} = 0$, или $J_1J_4-J_2J_3=0$.

В силу свойства четной функции на симметричном интервале интегрирования $S^{2n}\Big|_{-1}^{1} = 0$, n=1, 2, 3…, можем записать $J_2=J_3=0$. Таким образом, остается уравнение $J_1J_4=0$. Его можно разбить на два уравнения $J_1=0$ и $J_4=0$.

Выполнив интегрирование в J_1 в (3.76), получим уравнение для b_0

$$1234{,}28-b_2 55{,}4112+b_1 13{,}852+b_0 36{,}2943=0,$$

откуда находим первое собственное число

$$\lambda_1 = -34K - g\cos\varphi_0\left(2{,}381+1{,}145E\right),$$

которое идентично полученному в гл.3.2.1.

Выполнив интегрирование в (3.76) J_4, получим уравнение для b_0

$$62{,}62858-b_2 8{,}550316+b_1 0{,}286646+b_0 0{,}4267=0.$$

Откуда находим второе собственное число

$$\lambda_2 = -146{,}7K - g\cos 2\varphi_0\left(2{,}671+10{,}67E\right).$$

В положении нейтрального равновесия (для чистого сдвига $\varphi=\pi/4$, для простого $\varphi=0$) отношение собственных чисел $\lambda_2/\lambda_1 = 4.314$. Что согласуется с эйлеровой теорией устойчивости, в соответствии с которой $\lambda_2/\lambda_1 = 4$ [122]. Выражения для λ_1 и λ_2 идентичны по форме и знакам, отличаясь лишь численными множителями. Следовательно, картина устойчивости принципиально не меняется.

Как правило, второе приближение дает также уточнение для первого собственного числа [120], [124]. В данной задаче этого не наблюдается, что вероятно связано со спецификой задачи и определяющих уравнений. Можно ожидать, что третье приближение даст уточнение для первого собственного числа задачи.

3.3. ПОПЕРЕЧНОЕ ОБТЕКАНИЕ КОНСОЛЬНОГО СТЕРЖНЯ ПОТОКОМ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Задача связана с переработкой, в частности, перемешиванием волокнонаполненых полимерных композиций (ВПК). При перемешивании ВПК наблюдается интенсивное диспергирование волокон, которое существенно снижает качество получаемых изделий. Имеются различные гипотезы разрушения волокон в условиях деформации ВПК. Некоторые из них представлены в работе Несиоловской Т.Н.[100]. В частности, в [46] при ряде упрощающих допущений рассмотрена задача изгиба волокна в сдвиговом потоке вязкой жидкости и предложена гипотеза разрушения волокна от изгибных напряжений.

3.3.1. Форма упругой линии стержня

Как указывают авторы [46] возможным механизмом разрушения хрупких волокон (стеклянных) является изгибающий момент при их перекрещивании. Указанная ситуация имеет место при захлестывании или запутывании волокон (см. рис. 3.8). Имеется относительно неподвижный стержень 1 (перпендикулярный плоскости рисунка). Второе волокно 2, рассматриваемое как упругий стержень, лежит в плоскости, перпендикулярной оси первого волокна и изгибается под действием потока вязкой жидкости.

В сечении контакта возникает максимальный изгибающий момент, который при некоторой скорости потока V приводит к обрыву волокна в средней части. Считаем, что деформируемое волокно контактирует с вертикальным стержнем точно в средней части. На рис. 3.9 представлена расчетная схема и система координат (длина стержня l, φ-угол наклона, x,y-декартовые координаты, s-координата, отсчитываемая вдоль оси стержня).

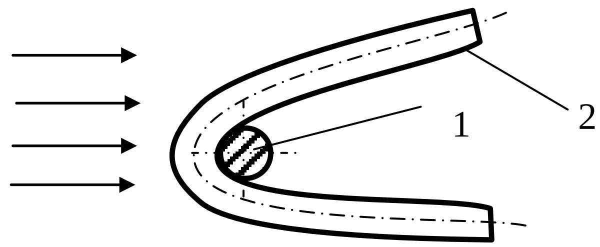

Рис. 3.8

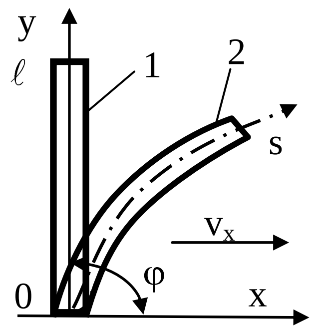

Рис. 3.9

Задача состоит в определении формы упругой линии стержня в условиях равновесия, изгибающего момента и перерезывающего усилия в опасном сечении – месте заделки (y=0, s=0).

Пусть имеем однородный профиль скорости жидкости, т.е. $v_x=V$, $v_y=0$. Специфика рассматриваемой задачи заключается в том, что единственная компонента скорости является величиной постоянной. Если использовать «улучшенные» уравнения, то при дифференцировании компонента скорости теряется и задача становится некорректной. Используем уравнения (2.45), (2.47), (2.50), (2.53). Задача статического $\left(\partial/\partial t=0\right)$ равновесия стержня описывается уравнениями

$$\begin{gathered}
N_s = Q\varphi_s - AV\cos\varphi,\quad Q_s = -N\varphi_s + BV\sin\varphi,\quad \varphi_s - \varphi_s^0 = M/E^*J,\\
M_s = -Q,\qquad x_s = \cos\varphi,\qquad y_s = \sin\varphi,\\
s=0,\quad x=y=0,\quad \varphi=\varphi^0,\quad N=N_0,\quad M=M_0,\quad Q=Q_0,\\
s=\ell,\quad M=0,\quad Q=0,\quad N=0,\quad \varphi=\varphi_k.
\end{gathered}\tag{3.77}$$

Рассматриваем изначально прямолинейный стержень ($\varphi_s^0 = 0$), с углом наклона в области заделки φ_0. Для шести неизвестных функций M(s), Q(s), N(s), x(s), y(s) имеем шесть уравнений первого порядка.

Введем безразмерные переменные и параметры.

$$\{X,Y,S\} = \frac{\{x,y,z\}}{\ell}, \quad \{n,n_0,q,q_0\} = \frac{\{N,N_0,Q,Q_0\}}{A\ell V},$$
$$E = \frac{A}{B}, \quad K = \frac{E^*J}{AV\ell^3}, \quad \{m,m_0\} = \frac{\{M,M_0\}\ell}{E^*J}. \tag{3.78}$$

Физический смысл параметра K идентичен приведенному в разделе 3.2.1, хотя и отличается по форме.

Задача (3.77) в безразмерных переменных (3.78) имеет вид

$$n_s = qm - \cos\varphi, \quad q_s = -nm + E^{-1}\sin\varphi,$$
$$\varphi_s = m, \quad m_s = -qK^{-1}, \quad X_s = \cos\varphi, \quad Y_s = \sin\varphi,$$
$$S = 0: \quad X = Y = 0, \quad \varphi = \varphi^0, \quad n = n_0, \;\; m = m_0, \;\; q = q_0, \tag{3.79}$$
$$S = 1: \quad m = q = n = 0, \quad \varphi = \varphi_k.$$

Усилия в окрестности заделки n_0, m_0, q_0 неизвестны, поэтому применяем следующий алгоритм численного решения нормальной системы дифференциальных уравнений (3.79). Первые четыре уравнения (для m, n, q, φ) решаются методом Рунге-Кутта, начиная от конца стержня S=1 к его началу S=0 (отрицательный шаг по S). Значения $\varphi_к$ подбирают так, чтобы условие в начальном сечении $\varphi=\varphi_0$ выполнялось с заданной точностью. Используются итерации. В результате находятся не только величины n_0, m_0, q_0, но и функция φ(S). Далее, методом Рунге-Кутта, используя функцию φ(S), в прямом направлении от точки S=0 до S=1 с помощью последних двух уравнений в (3.79), находятся функции X(S) и Y(S), которые в параметрической форме описывают упругую линию стержня.

Как видно из уравнений (3.79) форма стержня и усилия зависят от соотношения параметров E, K, φ_0. Параметр E=1.53, характеризующий соотношение сил трения, изменяется незначительно. Параметр K мал по величине и изменяется в широких пределах. Для стеклянных волокон в резиновой матрице $K \approx 5\times10^{-8}$, для стальных - $K \cong 4\times10^{-4}$, для капроновых $K \approx 1.6\times10^{-7}$ (см. табл. 2.1).

Результаты численного анализа представлены на рис. 3.10. Расчеты выполнены для условий $\varphi_o=\pi/2$, $K=10^{-3}$, E=1,53. В результате расчета найдены следующие значения параметров: $\varphi_к=5.1*10^{-6}$, $n_o=1,075*10^{-2}$, m_o=-44,051, q_o=-0,99031. Из рисунка видно, что функции существенно изменяются в окрестности заделки стержня (S=0). С уменьшением K, что соответствовало бы реальным волокнам, вычислительная схема теряла устойчивость (труден подбор малых значений $\varphi_к$).

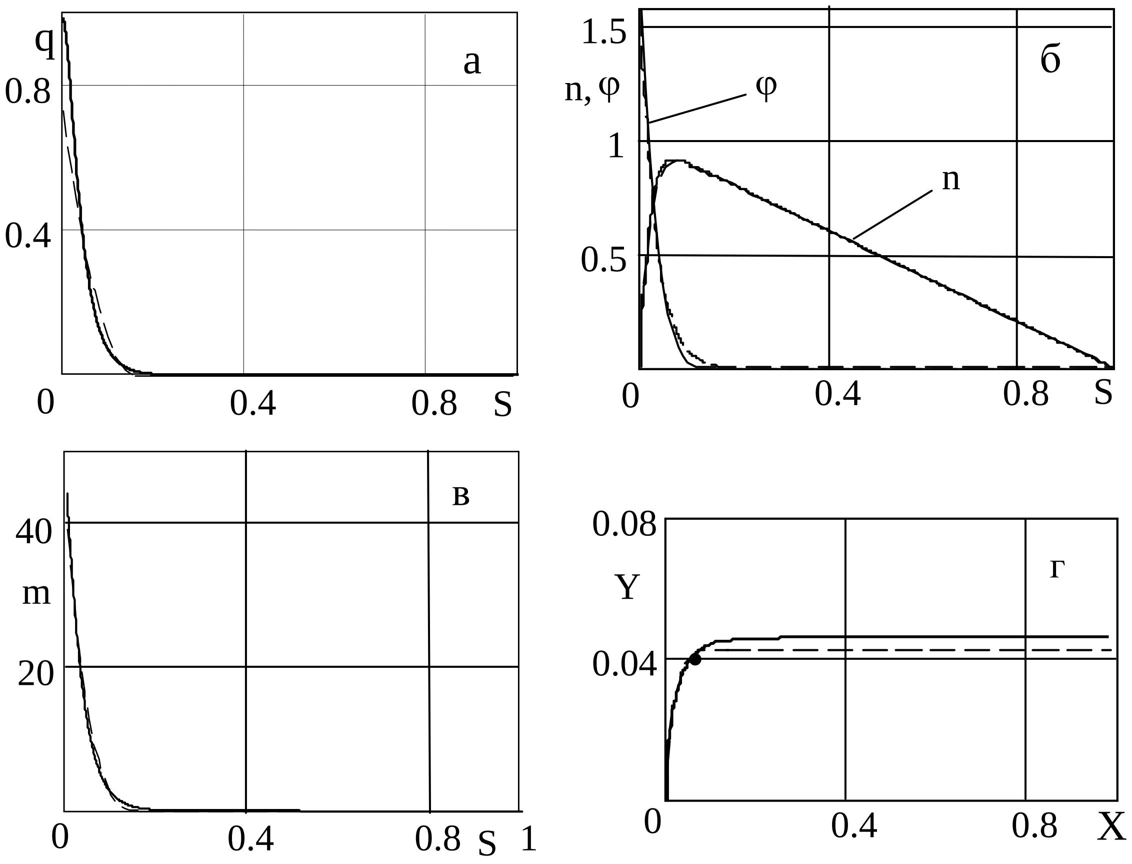

Рис 3.10. Распределение параметров q (а), n, φ (б), m (в) по длине стержня и форма его упругой оси (г). На графиках сплошной линией обозначено точное решение методом Рунге – Кутта уравнений (3.79), прерывестой линией – приближенное решение. Точкой отмечена граница пограничного слоя.

В частном случае стержня большой жесткости (К>>1) приходим к задаче изгиба консольной балки. При этом имеют мести следующие соотношения: $\varphi_0 = \pi/2$, $\varphi \approx \pi/2$, $q = q_0$, $n = 0$. Уравнения (3.79) принимают вид $\varphi_s = m$, $m_s = -q_0/K$, $X_s = \cos\varphi$, $Y_s = 1$. Введем новую функцию $\varphi = \pi/2 - \psi$, $(\psi << 1)$. При этом получим уравнения $-\psi_s = m$, $m_s = -q_0/K$, $Y = S$, $X_s = -\psi$, которые далее дают известные уравнения [123] изогнутой оси балки $X_{YY} = m$, $m_Y = -q_0/K$.

3.3.2. Асимптотический анализ изгиба стержня малой жесткости

Численные оценки показывают, что даже в случае стальных волокон при перемешивании с резиновой матрицей жесткость волокон, характеризуемая параметром К, незначительна и они приближаются по жестким свойствам к идеально гибким нитям. Численное решение системы (3.79) в этом случае весьма проблематично, поскольку варьируемый параметр $\varphi_к$ близок к нулю. Функции n, m, q, φ существенно изменяются в окрестности места крепления стержня $S \approx 0$. В то же время на участке стержня $0{,}1 \le S \le 1$ функции изменяются незначительно: φ, m, q – близки к нулю, а n - к линейной зависимости.

С математической точки зрения указанная особенность задачи обусловлена наличием малого параметра K при старшей производной (dm/dS). В задачах механики жидкостей и газов зоны резкого изменения зависимых переменных называют обычно пограничными слоями, в механике твердого тела – областями краевого эффекта.

Существует большое число методов исследования задач с пограничным слоем, как, например, метод сращивания асимптотических разложений, метод составных разложений, метод многих масштабов, метод ВКБ и преобразование Лангера [118].

Применение метода многих масштабов (в качестве малого параметра принят K, растяжение в окрестности S=0) не дало положительного результата.

Форму уравнений (3.79) можно улучшить, если перейти к естественным координатам [97] $\rho=\rho(\varphi)$, $S=\int\limits_{\varphi_0}^{\varphi}\rho d\varphi \rho\varphi$, где ρ- радиус кривизны. Обычно применение естественных координат существенно упрощает форму уравнений и приводит к хорошим результатам при исследовании кривых стержней. В рассматриваемой задаче удалось, с использованием программы «Maple», получить зависимости q, m, S от ρ, однако саму функцию ρ необходимо находить из решения нелинейного дифференциального уравнения третьего порядка. Его решение возможно только численными методами. Следовательно, этот подход не дает существенных преимуществ по сравнению с непосредственным решением задачи численным методом.

Для анализа задачи используем метод пограничного слоя, пример применения, которого дан, например, в работе [125]. В контексте рассматриваемой задачи под пограничным слоем следует понимать начальный участок стержня, имеющий большую кривизну. За указанным участком кривизна стержня будем полагать, равна нулю.

Перепишем и пронумеруем основные уравнения (3.79)

$$m_s=-q/K, \quad (3.80)$$

$$\varphi_s=m, \quad (3.81)$$

$$n_s=qm-\cos\varphi , \quad (3.82)$$

$$q_s=-nm+E^{-1}\sin\varphi, \quad (3.83)$$

$$S=0: \quad \varphi=\varphi_0, \quad n=n_0, \quad m=m_0, \quad q=q_0, S=1: \quad m=n=q=0, \quad \varphi=\varphi_k. \quad (3.84)$$

Из рис. 3.10 видно, что функции q, m, φ существенно изменяются на начальном участке (в окрестности заделки). Обозначим длину этого участка Δ.

В свете сказанного, запишем граничные условия (3.84) следующим образом:

$$S=0, \ \varphi=\varphi_0, n=n_0, q=q_0, m=m_0. \quad (3.85)$$

$$S=\Delta, \varphi=0, n=n_\Delta, q=0, m=0, \quad (3.86)$$

$$S=1, \varphi=0, n=0, q=0, m=0. \quad (3.87)$$

Пусть в пределах пограничного слоя $0 \le S \le \Delta$ функция q описывается параболической зависимостью, удовлетворяющей условиям (3.85), (3.86) (формула получена методом неопределенных коэффициентов)

$$q = q_0 (1 - S/\Delta)^2, \quad \text{при} \quad 0 \le S \le \Delta, \qquad (3.88)$$
$$q = 0, \qquad \text{при} \quad \Delta < S \le 1.$$

Разделяя переменные в уравнении (3.80) и интегрируя с учетом (3.86), (3.88), найдем изгибающий момент

$$m = q_0 \Delta (1 - S/\Delta)^3 / (3K), \quad \text{при} \quad 0 \le S \le \Delta, \qquad (3.89)$$
$$m = 0, \qquad \text{при} \quad 0 < S \le 1.$$

Условие (3.85) позволяет записать выражение для момента в заделке

$$m_0 = q_0 \Delta / (3K). \qquad (3.90)$$

Интегрируя уравнение (3.81) с учетом (3.85), (3.86), (3.89), найдем угол наклона стержня

$$\varphi = \varphi_0 (1 - S/\Delta)^4, \quad \text{при} \quad 0 \le S \le \Delta, \qquad (3.91)$$
$$\varphi = 0, \qquad \text{при} \quad \Delta < S \le 1,$$
$$\varphi_0 = -q_0 \Delta^2 / (12K). \qquad (3.92)$$

Интегрируя уравнение (3.82) с учетом (3.85), (3.88), (3.89), (3.91), получим в пределах пограничного слоя

$$n = n_0 + \frac{q_0^2 \Delta^2 \left[1 - (1 - S/\Delta)^6\right]}{18K} - \int_0^S \cos\left[\varphi_0 (1 - S/\Delta)^4\right] dS, \quad 0 \le S \le \Delta. \qquad (3.93)$$

Учитывая условия (3.86), (3.87) для n и выражения (3.88), (3.89), (3.91), для участка $\Delta < S \le 1$ получим

$$\int_n^0 dn = -\int_S^1 dS, \quad n = 1 - S, \quad \Delta < S \le 1. \qquad (3.94)$$

Согласно условию (3.86) на границе $S=\Delta$ осевые усилия, предполагаемые выражениями (3.93) и (3.94), равны n_Δ. Поэтому можем записать уравнение связи

$$1 - \Delta = n_0 + q_0^2 \Delta^2 / (18K) - \int_0^\Delta \cos\left[\varphi_0 (1 - S/\Delta)^4\right] dS. \qquad (3.95)$$

Потребуем выполнения уравнения (3.83) в начальном сечении (заделке) учитывая условие (3.85) и выражения (3.88), (3.89), (3.91), (3.93). Получим соотношение

$$-2q_0/\Delta = -n_0 q_0 \Delta / (3K) + E^{-1} \sin\varphi_0. \qquad (3.96)$$

Рассмотрим совместно уравнения связи (3.90), (3.92), (3.95), (3.96), которые служат для определения неизвестных параметров Δ, n_0, q_0, m_0.

Из (3.96) находим n_0

$$n_0 = 3K\left(E^{-1} \sin\varphi_0 + 2q_0/\Delta\right) / (q_0 \Delta). \qquad (3.97)$$

Согласно (3.92) для q_0 имеем

$$q_0 = -12K\varphi_0 / \Delta^2. \qquad (3.98)$$

Рассматривая совместно выражения (3.95), (3.97), (3.98), получим уравнение, связывающее неизвестную длину пограничного участка Δ с известными (заданными) параметрами К и φ_0

$$1-\Delta = -\frac{\Delta}{4\varphi_0}\left(E^{-1}\sin\varphi_0 - \frac{24K\varphi_0}{\Delta^3}\right) + \frac{144k\varphi_0^2}{18\Delta^2} - \int_0^{\Delta}\cos\left[\varphi_0\left(1-\frac{S}{\Delta}\right)^4\right]dS.. \quad (3.99)$$

Последний интеграл в (3.99) через элементарные функции не выражается. Используем аппроксимацию функции косинус [126]

$$\cos x = 1 + a_2x^2 + a_4x^4 + \varepsilon, \quad |\varepsilon| < 10^{-3}, \quad 0 \le x \le \pi/2,$$
$$a_2 = -0.4967; \quad a_4 = 0.03705. \qquad (3.100)$$

Выполним интегрирование в (3.99), учитывая (3.100). В результате получим кубическое уравнение для Δ, которое можно разрешить относительно К

$$K = \frac{\Delta^2}{\left(6+8\varphi_0^2\right)}\left[1 + \frac{\Delta}{4E\varphi_0}\sin\varphi_0 - \Delta\left(0.0552\varphi_0^2 - 0.00218\varphi_0^4\right)\right]. \quad (3.101)$$

Из (3.101) следует асимптотические свойства параметров $\lim\limits_{K\to 0}\Delta = 0, \quad \Delta \approx \sqrt{K}$ при К<<1. С физической точки зрения должно выполняться условие $\Delta > d/\ell$.

Выполним асимптотическую оценку параметров для стержня малой изгибной упругости. Согласно выражениям (3.90), (3.92), (3.97), (3.98), (3.101) при К→0 получим соотношения:

$$\Delta \approx \sqrt{6+8\varphi_0^2}\sqrt{K}, \qquad q_0 \approx -\frac{12\varphi_0}{6+8\varphi_0^2}, \qquad m_0 \approx -\frac{4\varphi_0}{\sqrt{6+8\varphi_0^2}\sqrt{K}},$$

$$n_0 \approx \frac{6}{6+8\varphi_0^2} - \frac{\sqrt{6+8\varphi_0^2}}{4\varphi_0 E}\sqrt{K}\sin\varphi_0,$$

которые можно использовать при тестовой проверке результатов анализа данной задачи

Форма упругой линии стержня описывается уравнениями

$$X_s = \cos\varphi, \qquad Y_s = \sin\varphi. \qquad (3.102)$$

Учитывая (3.91), (3.100) и граничное условие S=0, X=Y=0, выполним интегрирование первого уравнения в (3.102)

$$X = S + a_2\frac{\varphi_0^2\Delta}{9}\left[1-\left(1-\frac{S}{\Delta}\right)^9\right] + a_4\frac{\varphi_0^4\Delta}{17}\left[1-\left(1-\frac{S}{\Delta}\right)^{17}\right], \quad 0 \le S \le \Delta. \quad (3.103)$$

Значению S=Δ отвечает $X=X_\Delta$

$$X_\Delta = \Delta + \frac{a_2\varphi_0^2\Delta}{9} + \frac{a_4\varphi_0^4\Delta}{17}.$$

Проинтегрируем первое уравнение в (3.102) для горизонтального участка упругой оси

$$\int_{X_\Delta}^{X} dX = \int_{\Delta}^{S} \cos\varphi\big|_{\varphi=0} dS, \qquad X - X_\Delta = S - \Delta. \qquad (3.104)$$

Координата конца стержня $X_k = X_\Delta + 1 - \Delta, \quad S = 1$.

Для функции синус используем аппроксимацию [126]

$$\sin x = x + a_3 x^3 + a_5 x^5 + \varepsilon, \qquad |\varepsilon| < 2 \cdot 10^{-4}, \qquad (3.105)$$

$$0 \le x \le \pi/2, \quad a_3 = -0.16605, \quad a_5 = 0.00761.$$

В результате интегрирования второго уравнения в (3.102) с учетом (3.105), получим

$$Y = \frac{\varphi_0 \Delta}{5}\left[1 - \left(1 - \frac{S}{\Delta}\right)^5\right] + a_3 \frac{\varphi_0^3 \Delta}{13}\left[1 - \left(1 - \frac{S}{\Delta}\right)^{13}\right] + a_5 \frac{\varphi_0^5 \Delta}{21}\left[1 - \left(1 - \frac{S}{\Delta}\right)^{21}\right], \ (3.106)$$

$$(0 \le S \le \Delta).$$

Ордината Y, соответствующая $S=\Delta$ находится из выражения

$$Y_\Delta = \frac{\varphi_0 \Delta}{5} + a_3 \frac{\varphi_0^2 \Delta}{13} + a_5 \frac{\varphi_0^5 \Delta}{21}.$$

На участке $\Delta < S \le 1$ ордината $Y = Y_\Delta$ сохраняет постоянное значение.

Пример расчета. Пусть $K=10^{-3}$, $E=1{,}53$, $\varphi_o=\pi/2$. Непосредственное решение кубического уравнения (3.101) достаточно громоздко, поэтому получим его асимптотическое решение [118]. Уравнение (3.101) можно записать так $Kb=\Delta^2+\Delta^3\varepsilon$, где $b = 6 + 8\varphi_0^2$, $\varepsilon = \sin\varphi_0 / \left(4E\varphi_0\right) - 0.0552\varphi_0^2 +$ $+0.00218\varphi_0^4$. Численные оценки показывают, что ε является малой величиной ($|\varepsilon| \approx 10^{-2}$).

Положим $\Delta=\Delta_o+\Delta_1\varepsilon+\Delta_2\varepsilon^2+\ldots$. При этом кубическое уравнение принимает вид

$$Kb=\Delta_o^2+\varepsilon^2\Delta_1^2+2\varepsilon\Delta_0\Delta_1+2\Delta_0\Delta_2\varepsilon^2+\ldots+\varepsilon(\Delta_o^3+3\Delta_o^2\varepsilon\Delta_1+3\Delta_o\varepsilon^2\Delta_1^2+\ldots).$$

Выделив множители при каждой степени ε, получим систему алгебраических уравнений:

$$Kb=\Delta_o^2, \qquad 0=2\Delta_0\Delta_1+\Delta_o^3, \qquad 0=\Delta_1^2+2\Delta_0\Delta_2+3\Delta_o^2\Delta_1.$$

Откуда последовательно находим

$$\Delta_o^2= Kb, \qquad \Delta_1=-0{,}5\ Kb, \qquad \Delta_2= (5/8)(Kb)^{3/2}.$$

Следовательно, асимптотическое решение кубического уравнения имеет вид

$$\Delta=\sqrt{Kb}-0{,}5\ Kb\varepsilon+0{,}625(Kb)^{3/2}\varepsilon^2+\ldots .$$

Подставив численные значения, последовательно находим: $\varepsilon=-0{,}01874$; $b=25{,}72$; $\Delta=0{,}16037-2{,}4099\cdot10^{-4}+9{,}0537\cdot10^{-7}=0{,}16013$. Видно, что асимптотический ряд быстро сходится.

Далее, используя формулу (3.98), находим перерезывающее усилие в основании стержня

$$q_0 = -\frac{12K\varphi_0}{\Delta^2} = \frac{12 \cdot 10^{-3} \cdot 1{,}57}{(0{,}1601)^2} = -0{,}73044.$$

Асимптотическое значение $q_o=-0{,}7325$ (расхождение 0,28 %).

По формуле (3.90) находим m_o=-39,1. Асимптотическая оценка дает значение m_o=-39,15 (расхождение 0,12 %). Согласно (3.97) начальное осевое усилие n_o=0,2159. Асимптотическое значение n_o=0,2166 (расхождение 0,32 %).

Далее, для графического построения функций q, m, φ, X, Y используются, соответственно выражения (3.88), (3.89), (3.91), (3.103), (3.104), (3.106). Осевое усилие на участке S>Δ рассчитывается по формуле (3.94); на начальном участке – по формуле (3.93), которую можно упростить, если использовать аппроксимацию (3.100). При этом для интервала 0<S<Δ получим

$$n = n_0 + \frac{q_0^2\Delta^2}{18K}\left[1-\left(1-\frac{S}{\Delta}\right)^6\right] - S - a_2\frac{\varphi_0^2\Delta}{9}\left[1-\left(1-\frac{S}{\Delta}\right)^9\right] - a_4\frac{\varphi_0^4\Delta}{17}\left[1-\left(1-\frac{S}{\Delta}\right)^{17}\right].$$

Сопоставление результатов численного решения задачи и приближенного представлены на графиках рис. 3.10. Имеет место хорошее соответствие. Наибольшее расхождение имеет место в сечении S=0. Погрешность для q_o, m_o, n_o составляла 26,26 %, 11,14 %, 2059 %, соответственно. В данной схеме нагружения осевое усилие мало влияет на напряженное состояние сечения заделки. Согласно рис. 3.10, б существует также второе опасное сечение в точке максимума осевого усилия.

3.3.3. Определение положения опасного сечения

При плоском изгибе криволинейного стержня имеем случай сложного сопротивления: N отвечает растяжению или сжатию, Q – сдвигу в направлении перпендикулярном S, M – чистому плоскому изгибу. Касательные напряжения, обусловленные перерезывающей силой Q, не будем учитывать [123]. При изгибе кривого стержня нейтральная ось не проходит через центр тяжести сечения, а несколько (на величину z_0) смещена к центру кривизны стержня. Наибольшие по абсолютной величине растягивающие и сжимающие напряжения будут иметь место в крайних волокнах. Формула для вычисления полных нормальных напряжений σ в кривом стержне [123]

$$\sigma = \frac{N}{F} + \frac{M}{S}\frac{z_1}{\rho},$$

где $F = \pi d^2/4$ - площадь поперечного сечения, $R_0 = \varphi_S^{-1}$ - радиус кривизны стержня, $z_0 = R_0 - r$ - расстояние между нейтральной осью и центром тяжести сечения, $r = d^2\Big/\left\{4\left[2R_0 - \sqrt{4R_0^2 - d^2}\right]\right\}$ - радиус кривизны нейтрального слоя, $z_1 = R_0 - r + 0.5d$ - расстояние от нейтрального слоя до наружных волокон, $\rho = R_0 + 0.5d$, $S = Fz_0$.

С учетом соотношений $m = \varphi_S$ выражение для напряжений примет вид

$$\bar{\sigma} = n + \frac{2Km^2}{(2-\delta m)}\left\{1 - \frac{2\delta m\left(2-\sqrt{4-\delta^2 m^2}\right)}{8-\delta^2 m^2 - 4\sqrt{4-\delta^2 m^2}}\right\},$$

где $\bar{\sigma} = \pi d^2 \sigma / (4AlV)$ - безразмерное растягивающее напряжение, $\delta = d/\ell$.

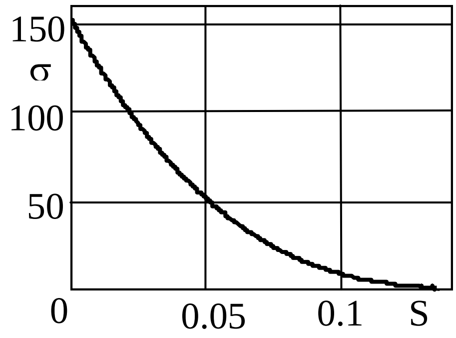

Рис. 3.11. Зависимость σ от S.

Условие прочности $\sigma \le [\sigma]$, где $[\sigma]$ - допускаемое напряжение для материала стержня.

Рассмотрим распределение $\bar{\sigma}$ на участке стержня $0 \le S \le \Delta$. На рис. 3.11 представлены результаты. Для вычисления n, m использовались формулы (3.93), (3.89). Расчеты выполнены для условий $K=10^{-3}$, $E=1.53$, $\delta=2\times10^{-3}$. Распределения напряжения носит монотонно падающий характер. Возможность разрушения сохраняется в точке заделки стержня. Следовательно, опасным сечением является основание стержня.

3.3.4. Контактные напряжения

Как показывают экспериментальные исследования, одним из механизмов разрушения волокон наполнителя является контакт соседних волокон в условиях деформации матрицы. Сделаем предварительную оценку возможности разрушения, обусловленного контактным давлением соприкасающихся волокон. Имеем, так называемую, контактную задачу. Отметим некоторые особенности контактных задач. Граница между частями площадки контакта изменяется по мере возрастания в них сил. В ряде случаев условия взаимодействия контактирующих тел определяются наличием смазки между ними. При этом если оба контактирующих тела рассматриваются как абсолютно жесткие, то давление взаимодействия определяется методами гидродинамической теории смазки. Если же тела упругие, то приходится совместно использовать аппараты теории упругости и гидродинамической теории смазки. Если скорости относительного движения тел невелики, то гидродинамическими явлениями можно пренебречь.

Наибольшие напряжения (растягивающие) возникают внутри тела (волокна). Эта теория подтверждается опытами с такими хрупкими материалами, как стекло, фарфор и др. Проверка прочности материала должна производиться для опасной точки, которая лежит на некотором удалении от поверхности под центром окружности контакта. Его величина при контакте двух цилиндров с осями расположенными перпендикулярно определяется по формуле [123], [127], [128]:

$$\sigma_{max} = 1.5 \frac{P}{\pi ab} \qquad (3.107)$$

где $a = \alpha \sqrt[3]{\dfrac{3P(1-\mu^2)}{E^*\left(\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}\right)}}$; $\quad b = \beta \sqrt[3]{\dfrac{3P(1-\mu^2)}{E^*\left(\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}\right)}}$, R_1, R_2 – радиусы цилиндров, P – сила, E^* – модуль упругости, μ - коэффициент Пуассона.

В рассматриваемом случае радиусы цилиндров (волокон) равны $R_1=R_2=R=d/2$; оси цилиндров расположены перпендикулярно и $\alpha=\beta=1$. При этом имеют место следующие соотношения между компонентами напряжений:

$$\sigma_1=\sigma_2=-0.18\sigma_{max}; \qquad \sigma_3=-0.8\sigma_{max}; \qquad \tau_{max}=0.32\sigma_{max}. \qquad (3.108)$$

Если использовать энергетическое условие пластичности (четвертая теория прочности), то условие отсутствия предельного состояния материала в опасной точке имеет вид

$$\sigma_1-\frac{\sigma_{в\ раст}}{\sigma_{в\ сж}}\sigma_3\le[\sigma]_{раст}, \qquad (3.109)$$

где $[\sigma]_{раст}$ - допустимое напряжение при растяжении, $\sigma_{в\ раст}$, $\sigma_{в\ сж}$ – пределы прочности при растяжении и сжатии.

Для хрупких материалов (стекла) может быть использована первая теория прочности или теория наибольших нормальных напряжений. Если принять $\sigma_1\ge\sigma_2\ge\sigma_3$, то безопасное состояние будет в том случае, если

$$\sigma_{max}=\sigma_1\le\frac{\sigma_{отр}}{R_*}=[\sigma]_р,$$

где $\sigma_{отр}$ – постоянное для данного материала сопротивление отрыву, для многих хрупких материалов $\sigma_{отр}$ равно напряжению в момент разрушения при растяжении $\sigma_{вр}$, $[\sigma]_р$ – допускаемое напряжение на растяжение, R_* – коэффициент запаса прочности.

Для вычислений используем теорию прочности Мора, как более универсальную. Нетрудно заметить, что условие прочности по теории Мора [123]

$$\sigma_1-\frac{[\sigma]_р}{[\sigma]_с}\sigma_3=\sigma_1-p\sigma_3\le[\sigma]_р; \qquad p=\frac{[\sigma]_р}{[\sigma]_с},$$

совпадает с условием прочности по теории наибольших касательных напряжений, если p=1, т.е.$[\sigma]_р=[\sigma]_с$. Если допускаемое напряжение на растяжение очень мало (хрупкие материалы), т.е. можно считать, что $[\sigma]_р=0$ и p=0, теория Мора переходит в теорию наибольших нормальных напряжений. При плоском напряженном состоянии, когда $\sigma_2=0$ и $p\approx\mu$, теория Мора совпадает с теорией наибольших удлинений. Таким образом, теория Мора в известной мере обобщает первые три теории прочности, она хорошо описывает явление пластического деформирования и разрушения путем среза материалов, имеющих различное сопротивление растяжению и сжатию.

Подставив (3.108) в (3.109), имеем

$$-0.18\sigma_{max}+\frac{\sigma_{в\,раст}}{\sigma_{в\,сж}}\times0.8\sigma_{max}=[\sigma]_{раст},$$

откуда находим σ_{max}

$$\sigma_{max}=\frac{[\sigma]_{раст}}{-0.18+0.8\sigma_{в\ раст}/\sigma_{в\ сж}}.$$

Подставив в эту формулу σ_{max} из уравнения (3.107), получим:

$$\frac{1.5P_m}{\pi}\sqrt[3]{\frac{4E^{*2}}{9P^2\left(1-\mu^2\right)^2 R^2}}=\frac{[\sigma]_{раст}}{-0.18+0.8\sigma_{в\ раст}/\sigma_{в\ сж}}.$$

Откуда получим выражение для усилия P_m и радиуса контакта в случае предельного состояния материала волокна.

$$P_m=\frac{9\pi^3\left(1-\mu^2\right)^2 R^2}{1.5^3 4E^{*2}}\left[\frac{[\sigma]_{раст}}{-0.18+0.8\sigma_{в\ раст}/\sigma_{в\ сж}}\right]^3, \qquad a=\sqrt[3]{\frac{3P_m d\left(1-\mu^2\right)}{4E^*}}$$

Таблица 3.2

Мате-риал	d, мкм	E^*, ГПа	μ	$[\sigma]_р / [\sigma]_{сж}$	$[\sigma]_р$, МПа	P_m, Н	a, мкм	σ_{max}, МПа
Стекло	10	56	0.25	0.74	3700	0.105	2.36	8980
Стекло	15	56	0.25	0.74	3700	0.236	2.71	6850
Сталь	150	200	0.3	1	150	$3{,}4\times 10^{-5}$	0,259	242
Сталь	200	200	0.3	1	150	$6{,}1\times 10^{-5}$	0,285	199
Капрон	30	1,7	0.4	0.5	35	54×10^{-4}	3.92	168
Капрон	25	1,7	0.4	0.5	35	0.003	3.69	189

Механические характеристики и результаты расчетов трех типов волокон представлены в табл. 3.2.

Из табл. 3.2 видно, что для стали значение усилия P_m является величиной небольшой и радиус площадки контакта намного меньше радиуса волокна. При этом формируется концентратор напряжений, который может ускорить разрушение волокна при любом виде нагружения.

Для стекла радиус площадки контакта равен приблизительно половине радиуса волокна.

Для капрона усилие создания максимального контактного напряжения на два порядка больше чем для стали, а радиус пятна контакта составляет приблизительно ¼ от радиуса волокна.

3.4. ВЯЗКОСТЬ ГЕТЕРОГЕННОЙ СИСТЕМЫ, НАПОЛНЕННОЙ ЖЕСТКИМИ ПРЯМЫМИ СТЕРЖНЯМИ, ЛЕЖАЩИМИ В ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ПЛОСКОСТЯХ

Для расчета течений гетерогенные системы идеализируются как эквивалентные гомогенные материалы. Теория течения анизотропных сред является вполне самостоятельным разделом механики.

Жидкость, в которой взвешено большое количество волокон, можно рассматривать как однородную среду. Такая среда будет обладать эффективной вязкостью μ_+, отличной от вязкости основной жидкости (матрицы) μ. Предполагаем случай малых концентраций взвешенных волокон, когда суммарный объем всех волокон мал по сравнению с объемом жидкости так, что контакт и гидродинамическое взаимное влияние между волокнами отсутствует. Упругие оси всех волокон лежат в плоскостях, перпендикулярных оси z. В частности, система с параллельными волокнами обладает симметрией свойств в плоскости, перпендикулярной к направлению ориентации волокон, и называется трансверсально изотропной [129].

Рассмотрим представительный элемент объема и определим затраты энергии потока жидкости, обусловленные присутствием одного волокна (кривого стержня). Критерием для определения эффективной вязкости является равенство скорости диссипации энергии в вязкой суспензии и в однородной эквивалентной среде [129].

Скорость отдельной точки упругой оси стержня $\mathbf{r}_t$ (см. гл. 2), поэтому относительная скорость жидкости $\mathbf{V}$-$\mathbf{r}_t$. Локальный вектор плотности внешних сил $\mathbf{K}$. На элемент стержня длиной ds действует сила $\mathbf{K}$ds. Для стержня длиной 2ℓ энергия вязкого трения W определяется интегралом от векторной функции по скалярному аргументу

$$W = \int_{-\ell}^{\ell} (\mathbf{V}\text{-}\mathbf{r}_t)\mathbf{K}ds.$$

Учитывая первое уравнение в (2.44) и соотношения $\mathbf{F}=N\mathbf{l}+Q\mathbf{n}$, $\mathbf{V}\text{-}\mathbf{r}_t=-B^{-1}(N\varphi_s+Q_s)\mathbf{n}-A^{-1}(N_s-Q\varphi_s)\mathbf{l}$, а также выполнив скалярное умножение, получим для криволинейного стержня

$$W = \int_{-\ell}^{\ell} [B^{-1}(N\varphi_s+Q_s)^2+A^{-1}(N_s-Q\varphi_s)^2]ds.$$

В случае прямого достаточно жесткого стержня $K>K^*$ (см. раздел 3.2.1), $\varphi_s=0$, $Q=0$, имеем

$$W=A^{-1}\int_{-\ell}^{\ell} N_{-,s}^{\ 2}ds.$$

Общее количество волокон в суспензии составляет $2Vc/(\pi d^2\ell)$, где V-объем суспензии. Поэтому суммарные затраты энергии W_Σ, связанные с обтеканием всех волокон, определяются

$$W_\Sigma=2WVc/(\pi d^2\ell). \qquad (3.110)$$

Полученная формула (аналог формулы Эшелби [129], [130]) имеет сравнительно простой вид. Если записать формулу для общей энергии диссипации в окружающем объеме жидкости, то она будет содержать громоздкие квадратичные формы. По предложенной формуле для определения энергии диссипации достаточно проинтегрировать осевое усилие по длине волокна. Результат можно обобщить на полидисперсные системы. Это значительно упрощает исследование механического поведения гетерогенных сред.

3.4.1. Простой сдвиг

В случае простого сдвига с учетом (3.60), получим

$$W=\frac{1}{6}A\gamma_п^2\ell^3\sin^2 2\varphi. \tag{3.111}$$

Эффективная вязкость в условиях простого сдвига с учетом дополнительных затрат энергии на обтекание дисперсной фазы имеет вид (см. гл. 2.5.2)

$$\mu_+=\left(\tau_{xy}\gamma_п V+W_\Sigma\right)/\left(\gamma_п^2 V\right), \tag{3.112}$$

где $\tau_{xy}=\mu\,\gamma_п$– касательное напряжение.

Рассматривая совместно (3.110), (3.111), (3.112), для суспензии, наполненной прямыми волокнами одинаковой длины, диаметра и ориентации, можем записать

$$\mu_+=\mu\left[1+\frac{2}{3}\frac{\ell^2 c}{d^2\ln\left(0.952/\sqrt{c}\right)}\sin^2 2\varphi\right]. \tag{3.112a}$$

Из полученного выражения видно, что при φ=0 вязкость системы минимальна, а при $\varphi=\pm\pi/4$ – максимальна. Ориентация волокон φ в процессе течения изменяется во времени согласно (3.11) (синхронный поворот), поэтому эффективная вязкость также будет меняться.

В случае полидисперсной системы, все фракции которой равномерно распределены по объему среды, вязкость определяется выражением

$$\mu_+=\mu\left[1+\frac{2c}{3\ln\left(0.952/\sqrt{c}\right)}\sum_{i=1}^{m}\frac{\ell_i^2}{d_i^2}\psi_i\sin^2 2\varphi_i\right], \tag{3.113}$$

где $\varphi_i=\operatorname{arctg}\left[\operatorname{tg}\varphi_{0i}/\left(1+g\tau\operatorname{tg}\varphi_{0i}\right)\right]$, d_i, $2\ell_i$, $\varphi_{0i,}$ -диаметр, длина и начальная ориентация волокон $i^й$ фракции, m -число фракций, ψ_i – относительное количество волокон $i^й$ фракции, ($\sum_{i=1}^{m}\psi_i=1$).

При простом сдвиге положение нейтрального равновесия неустойчиво, поэтому волокна будут вращаться с неравномерной скоростью. Причинами неустойчивости могут являться: изогнутость волокна, гидродинамические возмущения, обусловленные соседними волокнами и т.п. Если в начальный момент все волокна имели одинаковую ориентацию, то эффективная вязкость будет приближаться к постоянному значению, отвечающему изотропной (хаотической) ориентации, по закону затухающих колебаний. Стабильность нейтрального равновесия можно повысить, дополнительно наложив на основное течение деформацию растяжения, что реализуется, например, на смесительных вальцах.

Найдем эффективную вязкость системы при изотропной (хаотической) ориентации волокон. Согласно (3.111) волокнам с ориентацией $+\varphi_-$ и $-\varphi_-$ в силу четности функции $\sin^2 2\varphi_-$, отвечает одно значение W, поэтому ограничимся сектором $0<\varphi_-<\pi/2$. Выделим в окрестности направления φ_i сектор раствором $\Delta\varphi=\pi/(2m)$, и будем рассматривать ℓ и d как функции угла $\ell(\varphi_i)$, $d(\varphi_i)$. С учетом изотропной ориентации $\psi=2\Delta\varphi/\pi$, можем записать равенство

$$\lim_{\substack{\Delta\varphi\to 0,\\ m\to\infty}} \sum_{i=1}^{m} \frac{\ell^2(\varphi_i)}{d^2(\varphi_i)} \frac{2\Delta\varphi}{\pi} \sin^2 2\varphi_i = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{\ell^2(\varphi)}{d^2(\varphi)} \sin^2 2\varphi d\varphi.$$

В случае монодисперсного наполнителя (ℓ=const, d=const) последний интеграл равен $0.5\ell^2/d^2$, а выражение (3.112а) примет вид

$$\mu_+ = \mu\left[1+\frac{1}{3}\frac{\ell^2}{d^2}\frac{c}{\ln\left(0.952/\sqrt{c}\right)}\right]. \qquad (3.113а)$$

В случае полидисперсной системы, все фракции которой равномерно распределены по объему среды, вязкость определяется выражением

$$\mu_+ = \mu\left[1+\frac{c}{3\ln\left(0.952/\sqrt{c}\right)}\sum_{i=1}^{m}\frac{\ell_i^2}{d_i^2}\psi_i \sin^2 2\varphi_i\right], \qquad (3.113б)$$

где $\varphi_i = \operatorname{arctg}\left[\operatorname{tg}\varphi_{0i}/\left(1+g\tau\operatorname{tg}\varphi_{0i}\right)\right]$, d_i, $2\ell_i$, φ_{0i}, -диаметр, длина и начальная ориентация волокон $i^й$ фракции, m -число фракций, ψ_i – относительное количество волокон $i^й$ фракции, ($\sum_{i=1}^{m}\psi_i = 1$).

3.4.2. Чистый сдвиг

В условиях чистого сдвига суммарные затраты энергии обтекания всех волокон найдем по формуле (3.110), с учетом (3.60)

$$W_\Sigma = \frac{4Vc\ell^2}{3\pi d^2} A\gamma_c^{\,2} \cos^2 2\varphi_- . \qquad (3.114)$$

Растягивающее напряжение при чистом сдвиге определяется выражением (2.81) $\sigma_{xx}=4\mu\gamma_c$. С учетом затрат энергии на обтекание частиц формула для эффективной вязкости, имеет вид

$$\mu_+ = \frac{\sigma_{xx}\gamma_c V + W_\Sigma}{4\gamma_c^{\,2} V} .$$

Учитывая (3.114), можем записать

$$\mu_+ = \mu\left[1+\frac{2}{3}\frac{\ell^2 c}{d^2\ln\left(0.952/\sqrt{c}\right)}\cos^2 2\varphi_-\right], \qquad (3.115)$$

где функция $\varphi_-(\tau)$ определена в (3.60). Все волокна имеют одинаковую длину, диаметр и ориентацию.

В случае полидисперсной системы выражение для эффективной вязкости имеет вид

$$\mu_{+} = \mu\left[1 + \frac{2c}{3\ln\left(0.952/\sqrt{c}\right)}\sum_{i=1}^{m}\psi_i\frac{\ell_i^2}{d_i^2}\cos^2 2\varphi_i\right], \qquad (3.116)$$

где $\varphi_i = \mathrm{arctg}\left[\mathrm{tg}\varphi_{0i}\exp\left(-2g\tau\right)\right]$, φ_{0i} – начальная ориентация волокон i^{й} фракции, ψ_i - относительное количество волокон i^{й} фракции, $\left(\sum_{i=1}^{m}\psi_i = 1\right)$, $2\ell_i$, d_i – длина и диаметр волокон i^{й} фракции.

Независимо от начальной ориентации волокон формулы (3.115), (3.116) предполагают асимптотическое повышение продольной вязкости во времени, поскольку $\varphi\to 0$, $\varphi_i\to 0$, $\cos^2 2\varphi\to 1$, $\cos^2 2\varphi_i\to 1$ при $\tau\to\infty$. Положение статического равновесия устойчиво. Максимальная вязкость системы определяется концентрацией волокон и отношением $(\ell/d)^2$. С увеличением параметра $(\ell/d)^2$ вязкость системы увеличивается, что согласуется с опытными результатами работы [29].

ГЛАВА 4
ПРОСТРАНСТВЕННОЕ ДВИЖЕНИЕ ПРЯМОЛИНЕЙНОГО СТЕРЖНЯ

Получены аналитические решения трехмерных задач движения прямолинейного стержня в условиях чистого сдвига, простого сдвига и одноосного растяжения жидкости. Исследована продольная устойчивость прямолинейного стержня при его пространственном движении. Найдена минимальная изгибная жесткость стержня, обеспечивающая устойчивость при любой ориентации в потоке. Предложена гипотеза физического эффекта скручивания в клубок низкомодульных волокон в процессе перемешивания. Выполнена оценка эффективной вязкости суспензии, наполненной жесткими, различным образом ориентированными в пространстве, прямыми стержнями в различных типах течения.

4.1. ПРОСТОЙ СДВИГ

Начало декартовой системы координат находится в середине стержня. Его положение (ориентацию) можно охарактеризовать направляющими косинусами $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$, поскольку касательная совпадает с осью стержня. Уравнения движения стержня: $x=s\alpha$, $y=s\beta$, $z=s\gamma$, ($s\le\pm\ell$), где α, β, γ - направляющие косинусы (функции времени). В процессе деформации ввиду симметрии течения середина стержня остается в начале координат. В плоском случае (см. гл. 3.2.) показано, что в рассматриваемом течении изначально прямолинейный стержень в процессе эволюции сохраняет свою прямолинейную форму. Совершенно аналогично можно показать, что и при пространственном движении прямой стержень сохраняет свою форму. Поэтому принимаем $k=k_s=\chi=\chi_s=0$, $k_0=\chi_0=0$. Откуда следует $M=0$, $Q=P=0$, т.е. изгибающий момент и поперечная (перерезывающая) сила отсутствуют. Напомним, плоское поле скоростей характеризуется компонентами: $v_x=\gamma_п y$, $v_y=0$, $v_z=0$, где $\gamma_п$ – скорость сдвига $\left(\gamma_п=\partial v_x/\partial y=\mathrm{const}\right)$. Уравнения (2.19), (2.20), (2.21), (2.28) приводят к следующей задаче:

$$l\beta\gamma_п-\alpha_t l-\beta_t m-\gamma_t n=0,\quad \alpha\beta\gamma_п=-A^{-1}N_{ss},\qquad \lambda\beta=0,\qquad (4.1)$$
$$t=0:\quad \alpha=\alpha_0,\quad \beta=\beta_0,\quad \gamma=\gamma_0,\quad t>0,\qquad s=\pm\ell:\quad N=0.$$

Здесь и в задачах (4.15), (4.27) условия ортогональности (2.20) опущены.

Дважды интегрируя второе уравнение в (4.1) по s, получим:

$$N=-0{,}5A\alpha\beta\gamma_п s^2+c_1 s+c_2.$$

Постоянные интегрирования найдем, используя граничные условия для N в (4.1). Имеем: $c_1=0$, $c_2=0{,}5A\alpha\beta\gamma_п\ell^2$. Следовательно, распределение осевого усилия по длине параболическое

$$N=0{,}5A\alpha\beta\gamma_п(\ell^2-s^2).\qquad (4.2)$$

Результат (4.2) согласуется с данными раздела 3 для двумерной задачи. При $\alpha\beta=0$ усилие в стержне нулевое и соответствует ориентации либо вдоль оси x ($\beta=0$), либо его поперечному расположению относительно потока ($\alpha=0$) - вдоль оси y. Исследуем выражение (4.2) на экстремум для чего продифференцируем его по α ($\partial N/\partial\alpha|_{\alpha_m}=0$). Учитывая, что $\beta_m=\sqrt{1-\alpha_m^2-\gamma_m^2}$, имеем

$$\frac{\partial(\alpha\beta)}{\partial\alpha}=\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\alpha\sqrt{1-\alpha^2-\gamma^2}\right)=\sqrt{1-\alpha_m^2-\gamma_m^2}-\frac{\alpha_m^2}{1-\alpha_m^2-\gamma_m^2}=0$$

или

$$1-\alpha_m^2-\gamma_m^2-\alpha_m^2=0.$$

Откуда находим, учитывая $\alpha_m^2+\beta_m^2+\gamma_m^2=1$, уравнение поверхности $\alpha_m^2=\beta_m^2$, на которой усилие в стержне максимально. Упругая ось лежит в плоскости, проходящей через ось z и наклоненной к оси x под углом $\pm\pi/4$, что согласуется с результатами гл. 3.1.2.

Согласно (4.2) в общем случае функция β не равна нулю, поэтому в третьем уравнении в (4.1) следует положить $\lambda=0$. Для решения задачи удобно перейти к функциям θ, φ, ψ, связанным с функциями α, β, γ следующим образом [105]

$\alpha=\cos\psi\cos\varphi-\cos\theta\sin\varphi\sin\psi$, $\beta=\cos\psi\sin\varphi+\cos\theta\cos\varphi\sin\psi$, $\gamma=\sin\psi\sin\theta$,
$l=-\sin\psi\cos\varphi-\cos\theta\cos\varphi\sin\psi$, $m=-\sin\psi\sin\varphi+\cos\theta\cos\varphi\cos\psi$, $n=\cos\psi\sin\theta$,
$\lambda=\sin\theta\sin\varphi$, $\mu=-\sin\theta\cos\varphi$, $\nu=\cos\theta$, (4.3)

где ψ, φ, θ - углы Эйлера ($0\le\varphi\le2\pi$, $0\le\theta\le\pi$, $0\le\psi\le2\pi$).

При этом первое уравнение в (4.1) и уравнение $\lambda=0$ примут вид

$$\begin{aligned}&(\sin\psi\cos\varphi-\cos\theta\sin\varphi\cos\psi)(\cos\psi\sin\varphi+\cos\theta\cos\varphi\sin\psi)\gamma_п-\\&-(-\sin\psi\cos\varphi-\cos\theta\sin\varphi\cos\psi)(-\sin\psi\psi_t\cos\varphi-\cos\psi\sin\varphi\varphi_t+\sin\theta\theta_t\sin\varphi\sin\psi-\\&-\cos\theta\cos\varphi\varphi_t\sin\psi-\cos\theta\sin\varphi\cos\psi\psi_t)-(-\sin\psi\sin\varphi+\cos\theta\cos\varphi\cos\psi)* \qquad (4.4)\\&*(-\sin\psi\psi_t\sin\varphi+\cos\psi\cos\varphi\phi_t-\sin\theta\theta_t\cos\varphi\sin\psi-\sin\psi\psi_t\sin\varphi+\cos\psi\cos\varphi\varphi_t-\\&-\sin\theta\theta_t\cos\varphi\sin\psi-)-\cos\psi\sin\theta(\cos\psi\psi_t\sin\theta+\sin\psi\cos\theta\theta_t)=0,\quad \sin\theta\sin\varphi=0,\end{aligned}$$

где $\varphi_t=d\varphi/dt$, $\psi_t=d\psi/dt$, $\theta_t=d\theta/dt$ - скорости изменения углов Эйлера.

Для выполнения второго уравнения в (4.4) достаточно положить $\sin\varphi=0$, откуда следует $\varphi=0$, $\cos\varphi=1$. Кроме того, примем $\sin\theta=\sin\theta_0=\text{const}$, поскольку множитель в первом уравнении (4.4) перед θ_t равен нулю.

С учетом этих условий первое уравнение в (4.4), после несложных преобразований, примет вид

$$-\gamma_п\sin^2\psi\cos\theta_c-\psi_t=0.$$

Разделяя переменные и интегрируя с учетом начального условия $t=0$, $\psi=\psi_0$

$$C\gamma_п\int_0^t dt+\int_{\psi_0}^{\psi}\frac{d\psi}{\sin^2\psi}=0,$$

получим

$$\mathrm{tg}\psi=\frac{\mathrm{tg}\psi_0}{1+\mathrm{tg}\psi_0 C\gamma_п t}, \qquad (4.5)$$

где $C=\cos\theta_0$ – постоянная.

С учетом равенств $\cos\varphi=1$, $\sin\varphi=0$, $C=\cos\theta_0$, направляющие косинусы (4.3) примут вид

$$\alpha=\cos\psi, \qquad \beta=C\sin\psi, \qquad \gamma=\sin\psi\sqrt{1-C^2}. \qquad (4.6)$$

Используя тригонометрические соотношения

$$\cos\psi=\frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\psi}}, \qquad \sin\psi=\frac{\mathrm{tg}\psi}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\psi}},$$

выразим α, β, γ через функцию тангенс, чтобы получить соответствие с формулой (4.5)

$$\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\psi}}, \qquad \beta=\frac{C^2\cdot\mathrm{tg}\psi}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\psi}}, \qquad \gamma=\frac{\mathrm{tg}\psi\sqrt{1-C^2}}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\psi}}. \qquad (4.7)$$

Начальными значениями для функций α, β, γ являются α_0, β_0, γ_0, соответственно, поэтому выразим ψ_0 и C через эти начальные значения. Из выражений (4.6), непосредственно следует

$$\mathrm{tg}\psi_0=\frac{\sqrt{\beta_0^2+\gamma_0^2}}{\alpha_0}, \quad C=\frac{\beta_0}{\sqrt{\beta_0^2+\gamma_0^2}}. \qquad (4.8)$$

Согласно (4.5), (4.8) при $\beta_0=0$, $C=0$ (упругая ось стержня лежит в плоскости x0y) стержень не изменяет своей ориентации, поскольку при любом t имеют место равенства $\psi=\psi_0$ и $\alpha=\alpha_0$, $\gamma=\gamma_0$.

Выражения для α и β из совместного рассмотрения (4.5) и (4.7) могут быть записаны так

$$\alpha=\frac{\alpha_0+\beta_0\gamma_п t}{\sqrt{1+\alpha_0\beta_0\gamma_п t+\beta_0^2\gamma_п^2 t^2}}, \quad \beta=\frac{\beta_0}{\sqrt{1+\alpha_0\beta_0\gamma_п t+\beta_0^2\gamma_п^2 t^2}} \qquad (4.9)$$

Если подставить выражения (4.9) в выражение для осевой силы (4.2), то получим

$$N=A\gamma_п\frac{\left(l^2-s^2\right)}{2}\frac{\beta_0\left(\alpha_0+\beta_0\gamma_п t\right)}{\left(1+\alpha_0\beta_0\gamma_п t+\beta_0^2\gamma_п^2 t^2\right)}. \qquad (4.10)$$

Согласно (4.2) и (4.10) осевое усилие зависит от пространственной ориентации стержня.

После несложных преобразований расчетные выражения можно записать так

$$\{\alpha, \beta, \gamma\}=\{1, C\cdot\mathrm{tg}\psi, \mathrm{tg}\psi\,(1-C^2)^{0,5}\}(1+\mathrm{tg}^2\psi)^{-0,5}. \qquad (4.11)$$

Из начальных условий (4.1) находим

$$\mathrm{tg}\psi_o=\alpha_o^{-1}(\beta_o^2+\gamma_o^2)^{0,5}, \qquad C=\beta_o(\beta_o^2+\gamma_o^2)^{-0,5}. \qquad (4.12)$$

Абсолютная величина скорости стержня определяется формулой v=|$\mathbf{r}_t$|=$\sqrt{x_t^2+y_t^2+z_t^2}$. С учетом соотношений x=αs, y=βs, z=γs, расчетная формула, для абсолютной величины скорости конца стержня, примет вид

$$V=\sqrt{\alpha_\tau^2+\beta_\tau^2+\gamma_\tau^2}\,, \tag{4.13}$$

где V=v(s=l)/(l$\gamma_п$) – безразмерная скорость, $\tau=\gamma_п t$. Получим расчетное выражение $\gamma^2=1-\alpha^2-\beta^2$, из (4.13) исключим функцию γ.

$$V=\sqrt{\alpha_\tau^2+\beta_\tau^2+\frac{\left(\alpha\alpha_\tau+\beta\beta_\tau\right)^2}{1-\alpha^2-\beta^2}}\,. \tag{4.14}$$

В условиях простого сдвига α и β определены в формулах (4.5), (4.11), (4.12), а производные имеют вид

$$\alpha_\tau=\frac{\partial\alpha}{\partial(\mathrm{tg}\psi)}\cdot\frac{\partial(\mathrm{tg}\psi)}{\partial\tau}=\frac{\left(\beta_0^2+\gamma_0^2\right)}{\beta_0^2}\beta^3,\quad \beta_\tau=\frac{\partial\beta}{\partial(\mathrm{tg}\psi)}\cdot\frac{\partial(\mathrm{tg}\psi)}{\partial\tau}=-\frac{\sqrt{\beta_0^2+\gamma_0^2}}{\beta_0}\beta^3.$$

На рис. 4.1 представлена зависимость скорости конца стержня (4.14) от параметра α для постоянного значения α_o=-0,75 и β_o=0,8; 0,6; 0.4; 0,2; 0,1 (кривые 1-5). Видно, что зависимости носят экстремальный характер с максимумом скорости в точке α=0, что соответствует моменту пересечения стержнем вертикальной плоскости yz. Чем ближе стержень расположен к горизонтальной плоскости xz, тем ниже его скорость. Приближаясь к точке статического равновесия (α=1) скорость конца стержня снижается до нуля (см. также рис. 4.4).

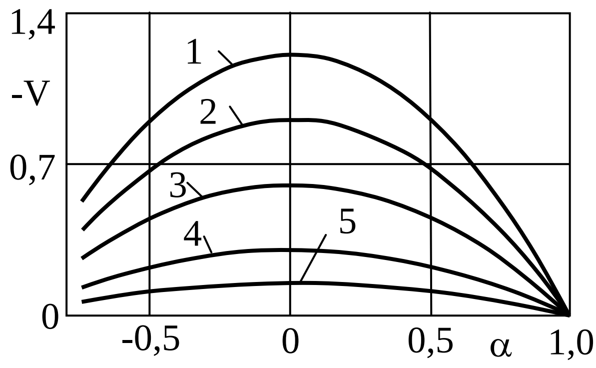

Рис. 4.1. Абсолютная скорость конца стержня в условиях простого сдвига.

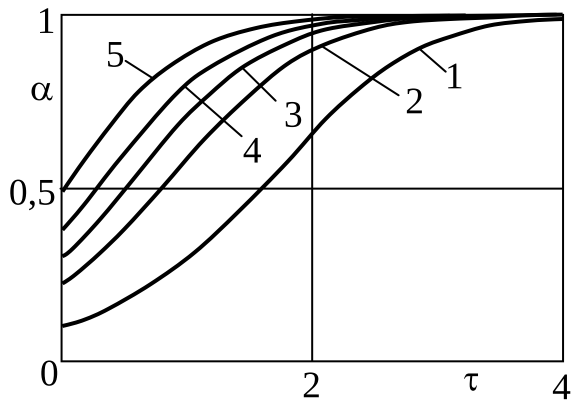

Рис. 4.2. Кинетика изменения параметра α(τ) при различных начальных положениях стержня.

На рис. 4.2 представлена кинетика изменения параметра α:1-α_0=0.1, β_0=0.1; 2-0.8, 0.1; 3- 0.9, 0.1; 4- 0.3, 0.5; 5- 0,6, 0.4. Зависимости имеют асимптотический характер (α→1 при τ→∞). С приближением стержня к плоскости xOz (линия 1) скорость поворота снижается.

На рис. 4.3. представлена кинетика изменения параметров α и β: кривые 1, 2, 3 – изменение параметра α; 4, 5, 6 – изменение параметра β; 1 и 4 - α_0=0.3; 2 и 5 - α_0=0.5; 3 и 6 - α_0=0.01, при γ_0=0.86. Зависимости носят монотонный асимптотический характер. Скорость поворота меньше чем при чистом сдвиге и одноосном растяжении. Скорость поворота снижается, если стержень расположен близко к плоскости xOz (линия 3).

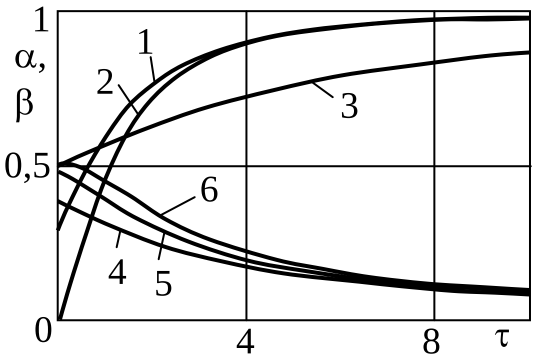

Рис. 4.3. Изменение во времени параметров α и β.

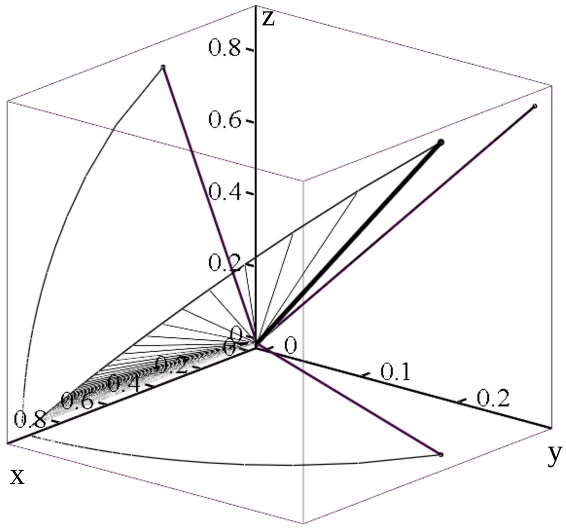

Рис 4.4. Пространственное движение стержня в условиях простого сдвига

На рис. 4.4 представлена пространственная картина движения стержня в условиях простого сдвига. Расчеты выполнены по формулам (4.5), (4.11), (4.12) для α_0=0.4, β_0=0.288, γ_0=0.87. Шаг по времени $\Delta\tau$=0.5. Показаны также проекции траектории конца стержня на плоскости xOz, zOy, xOy. Видно, что начальная скорость поворота стержня большая, но по мере приближения к состоянию статического равновесия (α=1, γ=β=0) скорость снижается, что находится в соответствии с результатами, представленными на рис. 4.1.

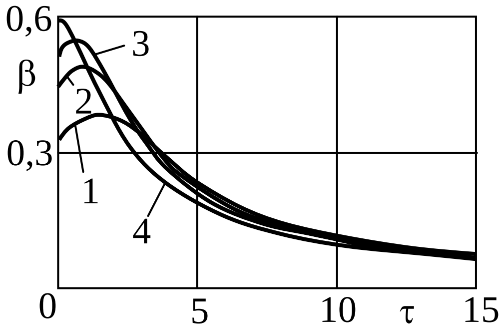

Рис. 4.5. Зависимость β(τ) при простом сдвиге.

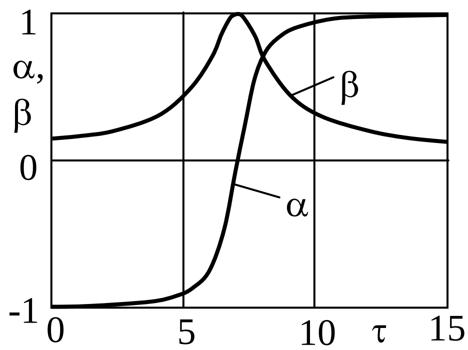

Рис. 4.6. Кинетика параметров α и β.

В условиях простого сдвига возможен поворот стержня, даже если он изначально находился во втором октанте (α_0<0, β_0>0, γ_0>0). При этом в нем, вплоть до пересечения упругой осью плоскости yOz, действует сжимающее усилие. Кинетика изменения параметров α и β представлена на рис 4.5 и 4.6 Расчеты на рис. 4.5 выполнены для γ_0=0.8 и α_0=-0.5; -0.4; -0.3; 0.1 (кривые 1 –

4). Если зависимость $\alpha(\tau)$ носит монотонно возрастающий характер (см. рис. 4.2. 4.3), то зависимость $\beta(\tau)$ в этом случае имеет точку экстремума. Отметим, что β характеризует величину возвышения стержня над горизонтальной плоскостью xOz. Следовательно, при $\alpha_0<0$ в начале поворота имеет место некоторый подъем стержня над плоскостью xOz.

Если стержень изначально лежит в плоскости xOy ($\gamma_0=0$), то имеем плоский случай движения (см. гл.3.1.2). На рисунке 4.6 представлена кинетика изменения параметров α и β для $\alpha_0=-0.99$, $\gamma_0=0$. В окрестности экстремума функция β симметрична.

4.2. ЧИСТЫЙ СДВИГ

Согласно табл. 2.2 в условиях чистого сдвига плоское (двумерное) поле скоростей характеризуется компонентами: $v_x=\gamma_c x$, $v_y=-\gamma_c y$, $v_z=0$, где γ_c – скорость деформации ($\gamma_c=\partial v_x/\partial x=\text{const}$).

Воспользовавшись уравнениями (2.19)-(2.21), (2.28), запишем задачу эволюции прямолинейного стержня в условиях чистого сдвига

$$l\alpha\gamma_c-m\beta\gamma_c-\alpha_t l-\beta_t m-\gamma_t n=0, \quad \alpha^2\gamma_c-\beta^2\gamma_c=-A^{-1}N_{ss}, \quad \lambda\alpha-\mu\beta=0, \tag{4.15}$$

$$t=0,\ \alpha=\alpha_0,\ \beta=\beta_0,\ \gamma=\gamma_0; \quad t>0:\ \ s=\pm l,\ N=0,$$

где α_0, β_0, γ_0 – начальное значение направляющих косинусов.

Используя второе уравнение в (4.15), найдем осевое усилие в стержне. Учитывая, что $\alpha(t)$, $\beta(t)$, а N функция от t и s, выполним последовательно интегрирование по s. Имеем

$$N=0{,}5A\gamma_c\left(\beta^2-\alpha^2\right)s^2+c_1 s+c_2 .$$

Постоянные интегрирования c_1, c_2 находятся из граничных условий на концах стержня и равны

$$c_1=0, \qquad c_2=-0{,}5A\gamma_c\left(\beta^2-\alpha^2\right)\ell^2 .$$

Таким образом, распределение натяжения описывается зависимостью

$$N=0{,}5A\gamma_c\left(\beta^2-\alpha^2\right)\left(s^2-\ell^2\right). \tag{4.16}$$

Натяжение распределяется по параболическому закону, что находится в соответствии с результатами двумерного подхода гл. 3.1.1. При $\beta^2>\alpha^2$ осевое усилие отрицательно (N<0), при $\beta^2<\alpha^2$ – положительно (N>0). Значение $\alpha^2=\beta^2$ отвечает нулевому усилию N=0.

Найдем уравнение поверхности, отвечающей нейтральному равновесию стержня. В стержне, лежащем на нейтральной поверхности, осевое усилие нулевое N=0. Из условия $\alpha^2=\beta^2$ или $\alpha=\pm\beta$ и уравнений движения $x=\alpha s$, $y=\pm s\alpha$, $z=\gamma s$ следует, что нейтральными поверхностями являются плоскости, проходящие через ось z и наклоненные под углом $\pm\pi/4$ к горизонтальной плоскости xOz.

Для решения задачи (4.15) перейдем к углам Эйлера (4.3). При этом первое и третье уравнения (4.15), приводят к системе тригонометрических уравнений

(-sinψcosφ-cosθsinφcosψ)(cosψcosφ-cosθsinφsinψ)γ_c-(-sinψsinφ+ +cosθcosφcosψ)(cosψsinφ+cosθcosφsinψ)γ_c-(-sinψcosθ-cosφsinψcosψ)* *(-sinψcosφψ_t-cosψsinφφ_t+sinθ$\theta_t$sinφsinψ-cosθcosφ$\varphi_t$sinψ-cosθsinφcosψψ_t)- -(-sinψsinφ+cosθcosφcosψ)(-sinψ$\psi_t$sinφ+cosψcosφφ_t-sinθ$\theta_t$cosφsinψ- -cosθsinφ$\varphi_t$sinψ+ cosθcosφcosψψ_t)-cosψsinθ(cosψ$\psi_t$sinθ+sinψcosθθ_t)=0,
sinθsinφ(cosψcosφ-cosθsinφsinψ)+sinθcosφ(cosψsinφ+cosθcosφsinψ)=0,
где $\varphi_t = d\varphi/dt$, $\psi_t = d\psi/dt$, $\theta_t = d\theta/dt$ - скорости изменения углов Эйлера.

Согласно первому уравнению множитель при θ_t равен нулю, поэтому в первом уравнении остаются две неизвестные φ и ψ. Второе уравнение связывает углы θ, φ и ψ. Используем формулы: sin2φ=2sinφcosφ, cos2φ=cos^{2}φ-sin^{2}φ, sin^{2}φ+cos^{2}φ=1, а также уравнение связи (4.18). Приходим к уравнениям

$$-\frac{\gamma_c}{2}\frac{\sin 2\psi}{\cos 2\varphi}+\frac{\sin 2\varphi}{\cos 2\varphi}\frac{\cos\psi}{\sin\psi}\varphi_t-\psi_t=0, \qquad (4.17)$$

$$\cos\theta=-\mathrm{tg}2\varphi\ \mathrm{ctg}\psi. \qquad (4.18)$$

Для трех неизвестных функций θ, φ, ψ имеем только два уравнения; первое из которых (4.17) дифференциальное первого порядка, второе (4.18) – тригонометрическое. Для сохранения корректности задачи зафиксируем угол нутации, т.е. полагаем cosθ=c=const, где c- постоянная, определяемая из начальных условий.

Продифференцировав уравнение (4.18) по времени $\tau=\gamma_c t$, и, исключив функцию ψ из (4.17), (4.18), после разделения переменных получим уравнение для φ

$$\left(\frac{2}{\sin 2\varphi}-\frac{c^2\cos^2 2\varphi}{\sin 2\varphi}-\sin 2\varphi\right)d\varphi=-d\tau. \qquad (4.19)$$

При пространственном движении стержня c≠1, поэтому в результате интегрирования уравнения (4.19) получим зависимость τ от φ

$$\left(1-\frac{c^2}{2}\right)\ln\left|\frac{\mathrm{tg}\varphi}{\mathrm{tg}\varphi_0}\right|-\frac{1}{2}\left(1-c^2\right)\left(\cos 2\varphi-\cos 2\varphi_0\right)=-\tau. \qquad (4.20)$$

Вернемся к функциям α, β, γ, используя формулы (4.3). Учитываем следующие тригонометрические соотношения:

$$\mathrm{tg}\psi=-\frac{1}{c}\mathrm{tg}2\varphi=-\frac{1}{c}\frac{2\mathrm{tg}\varphi}{1-\mathrm{tg}^2\varphi},\quad \sin\psi=\frac{\mathrm{tg}\psi}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\psi}},\quad \cos\psi=\frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\psi}}, \quad (4.21)$$

первое из которых непосредственно следует из уравнения (4.18).

С учетом соотношений (4.21) формулы для α, β, γ (4.3) имеют вид

$$\{\alpha,\beta,\gamma\}=\frac{\left\{1-c\cdot\mathrm{tg}\varphi\cdot\mathrm{tg}\psi,\mathrm{tg}\varphi+c\cdot\mathrm{tg}\psi,\sqrt{1-c^2}\,\mathrm{tg}\psi\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\varphi}\right\}}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\varphi}\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\psi}}.$$

Первое соотношение в (4.21) позволяет из последних выражений исключить функцию ψ

$$\alpha=\frac{c\sqrt{1+tg^2\varphi}}{\sqrt{c^2\left(1-tg^2\varphi\right)^2+4tg^2\varphi}},\quad \beta=\alpha\cdot tg\varphi,\quad \gamma=\frac{2\sqrt{1-c^2}\,tg\varphi}{\sqrt{c^2\left(1-tg^2\varphi\right)^2+4tg^2\varphi}}. \qquad (4.22)$$

Найдем постоянные φ_0 и c, используя начальные условия $\tau=0$: $\alpha=\alpha_0$, $\beta=\beta_0$, $\gamma=\gamma_0$, $\varphi=\varphi_0$. Приходим к следующим соотношениям:

$$tg^2\varphi_0=\frac{\beta_0^2}{\alpha_0^2},\quad c^2=\frac{4\alpha_0^2\beta_0^2}{\alpha_0^2+\beta_0^2-\left(\alpha_0^2-\beta_0^2\right)^2},\quad \cos 2\varphi_0=\frac{\alpha_0^2-\beta_0^2}{\alpha_0^2+\beta_0^2}. \qquad (4.23)$$

Используем также соотношение $\cos 2\varphi=\left(1-tg^2\varphi\right)/\left(1+tg^2\varphi\right)$. С учетом соотношений (4.23) уравнение (4.20) примет вид

$$\left(1-\frac{c^2}{2}\right)\ln\left|\frac{\alpha_0 tg\varphi}{\beta_0}\right|+\frac{1}{2}\left(1-c^2\right)\left(\frac{1-tg^2\varphi}{1+tg^2\varphi}-\frac{\alpha_0^2-\beta_0^2}{\alpha_0^2+\beta_0^2}\right)=-\tau. \qquad (4.24)$$

В плоском случае c=1, $\alpha^2+\beta^2=1$, $\gamma=0$ и из (4.22), (4.24) находим $\alpha^2=\alpha_0^2/\left(\alpha_0^2+\beta_0^2e^{-4\tau}\right)$. Что соответствует результатам главы 3.1.1.

Численный анализ полученного решения выполнялся в следующей последовательности. Задавались значения α_0, β_0 (γ_0 находится из соотношения $\gamma_0=\sqrt{1-\alpha_0^2-\beta_0^2}$). Согласно (4.23) находят c^2. Задают $tg\varphi$ на интервале [0, $tg\varphi_0$], и из уравнения (4.24) находят τ. Подставив $tg\varphi$ в выражения (4.22), находят α, β, γ.

Для построения зависимости скорости конца стержня V(s=l) от α используем формулу (4.14). Согласно (4.22), (4.24) $\alpha=\alpha[tg\varphi(\tau)]$, $\beta=\alpha tg\varphi$, поэтому можем записать $\alpha_\tau=\alpha_\xi\xi_\tau$, $\beta_\tau=\alpha_\tau\xi+\alpha\xi_\tau$, где $\xi=tg\varphi$. Подставив эти соотношения в (4.14), получим расчетное выражение для скорости

$$V=\xi_\tau\sqrt{\alpha_\xi^2+\left(\xi\alpha_\xi+\alpha\right)^2+\frac{\left[\alpha\alpha_\xi+\alpha\xi\left(\xi\alpha_\xi+\alpha\right)\right]^2}{1-\alpha^2\left(1+\xi^2\right)}}, \qquad (4.25)$$

где

$$\xi_\tau=-\frac{2\xi\left(1+\xi^2\right)^2}{\left(2-c^2\right)\left(1+\xi^2\right)^2-4\left(1-c^2\right)\xi^2},\quad \alpha_\xi=\frac{\alpha^2}{c^2\left(1+\xi^2\right)}\left\{\frac{\xi c^2}{\alpha}-\alpha\left[4\xi+2c^2\xi\left(1-\xi^2\right)\right]\right\}.$$

Входящий в (4.25) параметр ξ находится из выражения для α (4.22)

$$\xi^2=-\frac{1}{2}\left(-2+\frac{4}{c^2}-\frac{1}{\alpha^2}\right)+\sqrt{\frac{1}{4}\left(-2+\frac{4}{c^2}-\frac{1}{\alpha^2}\right)^2-1+\frac{1}{\alpha^2}}. \qquad (4.26)$$

Таким образом, зависимость $V(\alpha)$ рассчитывают в следующем порядке. Задаются значения параметрам α_0, β_0. Вычисляется c^2 согласно (4.23). Задается ряд значений α из интервала [α_0, 1], для каждого из которых находится значение параметра ξ^2 по (4.26), ξ_τ и α_ξ по (4.25). По формуле (4.25) вычисляются соответствующие значения скорости.

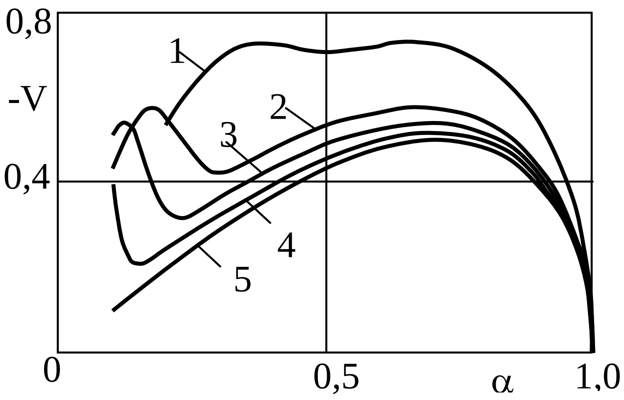

Рис. 4.7.

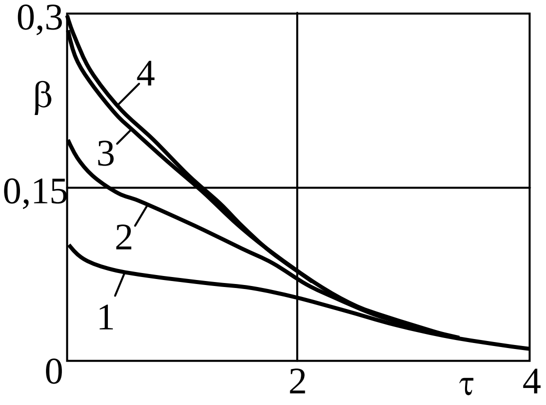

Рис. 4.8.

На рис. 4.7 представлена зависимость скорости конца стержня (4.25) от параметра α при различных начальных положениях стержня: α_o=0,2, β_o=0,9; α_o=0,1, β_o=0,9; α_o=0,1, β_o=0,8; α_o=0,1, β_o=0,4; α_o=0,001, β_o=0,001; (кривые 1-5). Зависимости существенно отличаются от простого сдвига. В окрестности $\alpha \approx 0{,}7$ скорость имеет экстремум. Наличие второго экстремума в области $\alpha<0{,}7$ зависит от начального положения стержня. Даже при близком расположении стержня к плоскости xz (линия 5) он имеет сравнительно высокую скорость поворота по направлению течения и один экстремум скорости.

На рис. 4.8 представлена кинетика движения стержня, характеризуемая параметром $\beta(\tau)$: линия 1 отвечает α_0=0.1, β_0=0.1; 2- 0.1, 0.7; 3- 0.2, 0.5; 4- 0.9,0.1. Параметр β в процессе поворота монотонно уменьшается, стремясь к $\beta=0$ при $\tau \to \infty$.

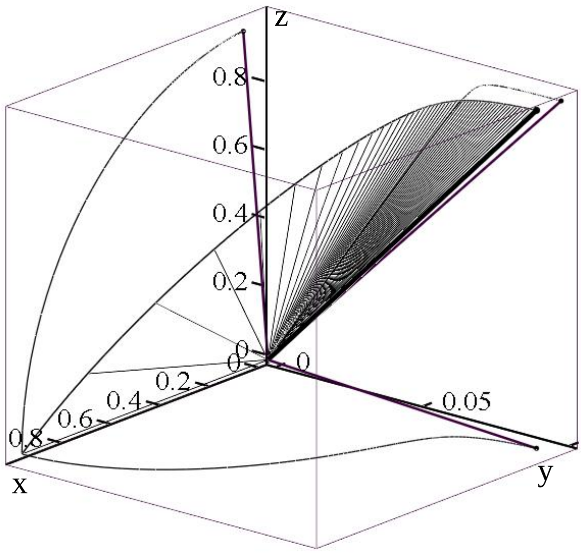

Рис. 4.9. Пространственное движение стержня в условиях чистого сдвига.

Пространственное движение стержня в условиях чистого сдвига иллюстрирует рис. 4.9. Расчеты выполнены для условий α_0=0.1, β_0=0.1. Шаг по времени $\Delta\tau$=0.01. В начальный момент времени стержень расположен близко к вертикальной плоскости yOz, поэтому начальная скорость поворота мала. Но с приближением к положению статического равновесия (α=1, $\beta=\gamma=0$) скорость возрастает, что находится в полном соответствии с результатами рис. 4.7.

4.3. ОДНООСНОЕ РАСТЯЖЕНИЕ

Примером трехмерного вискозиметрического течения является одноосное растяжение. При этом компоненты скорости следующие: $v_x = \gamma_н x,\ v_y = -0.5\gamma_н y,\ v_z = -0.5\gamma_н z$ где $\gamma_н = \partial v_x / \partial x = \text{const}$. Используя уравнения движения (2.19)-(2.21), (2.28), получим следующую задачу:

$$l\alpha\gamma_н - m\beta\frac{1}{2}\gamma_н - n\gamma\frac{1}{2}\gamma_н - \alpha_t l - \beta_t m - \gamma_t n = 0, \qquad \alpha^2\gamma_н - \beta^2\frac{1}{2}\gamma_н - \gamma^2\frac{1}{2}\gamma_н = -A^{-1}N_{ss},$$

$$\lambda\alpha\gamma_н - \mu\beta\frac{1}{2}\gamma_н - \nu\gamma\frac{1}{2}\gamma_н = 0,$$

$$t = 0:\ \alpha = \alpha_0,\ \beta = \beta_0,\ \gamma = \gamma_0, \qquad t > 0,\ s = \pm\ell:\ N = 0. \qquad (4.27)$$

Дважды интегрируя второе уравнение, с учетом граничных условий для N, получим

$$N = A\gamma_н\left(\alpha^2 - \frac{1}{2}\beta^2 - \frac{1}{2}\gamma^2\right)\frac{\ell^2 - s^2}{2},$$

или, учитывая геометрическое соотношение $\beta^2 + \gamma^2 = 1 - \alpha^2$, имеем

$$N = 0{,}25A\gamma_н\left(3\alpha^2 - 1\right)\left(\ell^2 - s^2\right). \qquad (4.28)$$

Осевое усилие равно нулю (N=0) при ориентации стержня $3\alpha^2=1$ (или $\alpha = \pm 1/\sqrt{3}$,) что представляет уравнение круглой конической поверхности с осью, совпадающей с осью x; вершина конуса – в начале координат. Упругая ось стержня лежит на указанной конической поверхности.

Согласно (4.28) максимальное растягивающее усилие в стержне имеем место при его «осевом» расположении вдоль направления вытягивания $\alpha=1$. При «поперечном» положении ($\alpha=0$), в стержне наибольшее сжимающее усилие. Усилие в стержне зависит от ориентации, а именно от углового отклонения от оси x, характеризуемого параметром α. Следовательно, поверхностью равных усилий является круглый конус, а ось стержня лежит на образующей. Угол при вершине конуса составляет arcosα и является функцией времени.

С учетом соотношения (2.20) и $\mu\beta + \nu\gamma = -\alpha\lambda$, третье уравнение в (4.27) принимает вид $\alpha\lambda = 0$. В общем случае $\alpha\neq0$, следовательно имеем в качестве третьего уравнения в (4.27) уравнение $\lambda=0$.

Перейдем к углам Эйлера (4.3). При этом первое и третье уравнение в (4.27) примут вид

$$(-\sin\psi\cos\varphi-\cos\theta\sin\varphi\cos\psi)(\cos\psi\cos\varphi-\cos\theta\sin\varphi\sin\psi)\gamma_н-(-\sin\psi\sin\varphi+$$
$$+\cos\theta\cos\varphi\cos\psi)(\cos\psi\sin\varphi+\cos\theta\cos\varphi\sin\psi)0.5\gamma_н-\cos\psi\sin^2\theta\sin\psi 0.5\gamma_н-$$
$$-(-\sin\psi\cos\varphi-\cos\theta\sin\varphi\cos\psi)(-\sin\psi\psi_t\cos\varphi-\cos\psi\sin\varphi\varphi_t+\sin\theta\theta_t\sin\varphi\sin\psi-$$
$$-\cos\theta\cos\varphi\varphi_t\sin\psi-\cos\theta\sin\varphi\cos\psi\psi_t)-(-\sin\psi\sin\varphi+\cos\theta\cos\varphi\cos\psi)(-\sin\psi\psi_t\sin\varphi+$$
$$+\cos\psi\cos\varphi\varphi_t-\sin\theta\theta_t\cos\varphi\sin\psi-\cos\theta\sin\varphi\varphi_t\sin\psi+\cos\theta\cos\varphi\cos\psi\psi_t)-$$
$$-\cos\psi\sin\theta(\cos\psi\psi_t\sin\theta+\sin\psi\cos\theta\theta_t)=0, \qquad \sin\theta\sin\varphi=0. \qquad (4.29)$$

Во втором уравнении в (4.29) полагаем $\sin\varphi=0$, $\varphi=0$, $\cos\varphi=1$. Первое уравнение в (4.29) с учетом равенства $\varphi_t=0$, примет вид

$$-1.5\gamma_н \sin\psi\cos\psi - \psi_t = 0.$$

Разделяя переменные, и интегрируя с учетом начального условия $t=0$, $\psi=\psi_0$, получим

$$\mathrm{tg}\psi = \mathrm{tg}\psi_0 \exp\left(-1.5\gamma_н t\right). \qquad (4.30)$$

Согласно (4.3) направляющие косинусы в рассматриваемом случае имеют вид

$$\alpha = \cos\psi, \quad \beta = \cos\theta\sin\psi, \quad \gamma = \sin\psi\sin\theta. \qquad (4.31)$$

Полагаем $\theta=\theta_0=\mathrm{const}$. Значение θ_0 найдем из начальных условий. Так для β и γ имеем $\beta_0 = \cos\theta_0 \sin\psi_0$, $\gamma_0 = \sin\psi_0 \sin\theta_0$. Поэтому

$$\theta_0 = \mathrm{arctg}\left(\gamma_0/\beta_0\right). \qquad (4.32)$$

Соответственно, используя выражение для α в (4.31) найдем начальное значение ψ, необходимое в формуле (4.30), $\psi_0 = \mathrm{arcos}\alpha_0$.

Согласно (4.31) скорость эволюции не зависит от углов γ и β, т.е. движение стержня существенно отличается от его движения в плоских вышерассмотренных течениях (чистого и простого сдвига).

Улучшим форму выражений (4.31), (4.32). Используя связь тригонометрических функций $\sin\psi$ и $\cos\psi$ с функцией $\mathrm{tg}\psi$, вместо (4.31) можем записать

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\psi}}, \quad \beta = \cos\theta_0 \frac{\mathrm{tg}\psi}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\psi}}, \quad \gamma = \sin\theta_0 \frac{\mathrm{tg}\psi}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\psi}}. \qquad (4.33)$$

Для начального угла θ_0 эти же тригонометрические соотношения дают

$$\mathrm{tg}\theta_0 = \frac{\gamma_0}{\beta_0}, \quad \cos\theta_0 = \frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\theta_0}} = \frac{\beta_0}{\sqrt{1-\alpha_0^2}}, \quad \sin\theta_0 = \frac{\mathrm{tg}\theta_0}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\theta_0}} = \frac{\gamma_0}{\sqrt{1-\alpha_0^2}},$$

$$\cos\psi_0 = \alpha_0 = \frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\psi_0}}, \quad \mathrm{tg}\psi_0 = \frac{\sqrt{1-\alpha_0^2}}{\alpha_0}.$$

При этом формулы (4.30), (4.33) примут вид

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\psi}}, \quad \beta = \frac{\beta_0 \mathrm{tg}\psi}{\sqrt{1-\alpha_0^2}\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\psi}}, \quad \gamma = \frac{\gamma_0 \mathrm{tg}\psi}{\sqrt{1-\alpha_0^2}\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\psi}},$$

$$\mathrm{tg}\psi = \frac{\sqrt{1-\alpha_0^2}}{\alpha_0}\exp\left(-1.5\gamma_н t\right). \qquad (4.34)$$

Согласно (4.34) при длительной деформации упругая ось стержня совпадает с осью x ($\alpha=1$, $\beta=\gamma=0$ при $t\to\infty$), независимо от начальной ориентации. В процессе эволюции упругая ось перемещается в плоскости, проходящей через ось x и прямую, соответствующую первоначальному положению упругой оси стержня.

На рис. 4.10 представлена кинетика изменения параметра α при различных начальных положениях стержня: линии 1 отвечает α_0=0.001; 2- 0.05; 3- 0.1; 4- 0.3; 5- 0.5. На рисунке обозначено $\tau = \gamma_н t$. При малых начальных отклонениях стержня от направления течения ($\alpha \geq 0.3$, линии 4, 5) зависимость $\alpha(\tau)$ близка экспоненциальной. При больших отклонениях кривые приобретают S – образный характер. Если стержень близок к плоскости, перпендикулярной к направлению течения (кривая 1), то его начальное движение очень медленное.

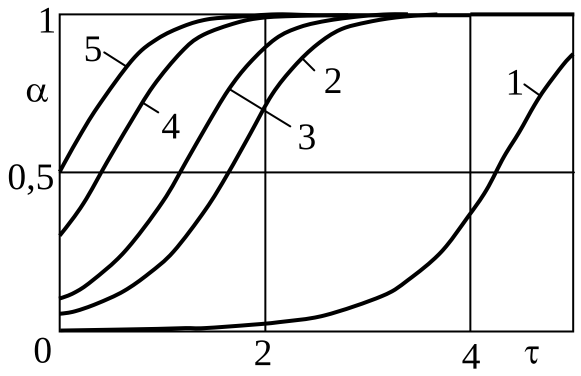

Рис. 4.10.

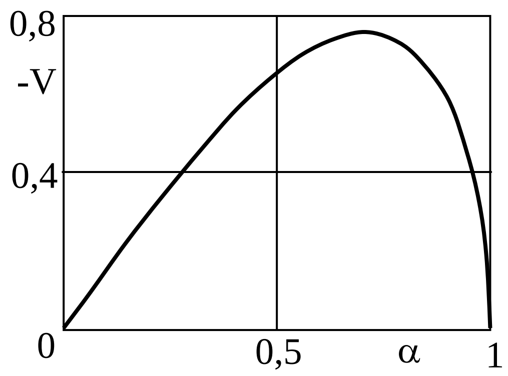

Рис. 4.11.

Абсолютная величина скорости конца стержня (4.14) описывается выражением $V=-1{,}5\alpha\sqrt{1-\alpha^2}$. Скорость поворота стержня не зависит от функций β, γ и имеет один экстремум V=-0,75 при $\alpha=1/\sqrt{2}$. На рис 4.11 представлена зависимость $-V(\alpha)$ для одноосного растяжения. Зависимость носит экстремальный характер. При любом α_0 скорость конца стержня описывается единственной линией рис. 4.11. Интересно отметить, что координата максимальной скорости $\alpha = 1/\sqrt{2}$ не совпадает с координатой нулевых усилий $\alpha = 1/\sqrt{3}$ (см. (4.28)).

4.4. ПРОДОЛЬНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ СТЕРЖНЯ В ТРЕХМЕРНОМ ПОТОКЕ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Для трех рассмотренных течений получены выражения для осевого усилия в произвольно ориентированном прямом стержне (4.2), (4.16), (4.28). Общим, в указанных формулах, является параболический характер распределения осевого усилия с максимумом в середине стержня. Знак усилия (сжатие или растяжение) зависит от ориентации, которая описывается направляющими косинусами α, β, γ. В табл. 4.1 показано влияние ориентации на знак усилия. Случай N=0 определяет поверхность нейтрального равновесия. Усилие в стержне, упругая ось которого лежит на этой поверхности, равно нулю (N=0). Нейтральная поверхность отделяет область сжатия от области растяжения. Отмеченные области и границы различны для рассмотренных типов вискозиметрических течений. В табл. 4.1 также указаны ориентации стержня, отвечающие экстремальным значениям осевого усилия. Видно, что тип течения существенно влияет на характер зависимости N от α, β, γ.

С прикладной точки зрения в области N>0 для стержня существует угроза разрыва в средней части в случае превышения растягивающим напряжением предела прочности. В области N<0 для стержня существует угроза потери устойчивости за счет продольного изгиба с последующим разрушением в случае высокомодульных волокон.

Ввиду того, что в случае эволюции прямолинейного стержня в условиях рассмотренных вискозиметрических течений сила внешнего трения обусловлена только осевой составляющей, представляется заманчивым распространить полученные результаты на неньютоновский случай течения. Поскольку в этом случае аналитическое определение осевой составляющей трения не представляет, значительных трудностей (например, для жидкости Оствальда-де Виля). Однако уравнения (4.1), (4.15), (4.27) базируются на уравнениях динамики, полученных для ньютоновской жидкости, в частности, с использованием принципа суперпозиции поперечных и продольных течений (линейность стоксовых уравнений). Поэтому, для неньютоновского случая предварительно необходимо составить соответствующие уравнения динамики, а это связано с большими трудностями определения составляющих силы трения при пространственном движении криволинейного цилиндрического стержня.

В двумерном случае (см. гл. 3.2.1) границы устойчивости найдены путем введения малых отклонений (возмущений) формы стержня, линеаризации уравнений равновесия и определения собственных чисел задачи (определение нарастания или убывания начального возмущения). Описанная процедура требует сравнительно громоздких преобразований, кроме того, решение получается приближенным методом Галеркина.

Таблица 4.1.

Знак осевого усилия в зависимости от ориентации стержня и типа течения

Тип течения	Область сжатия N<0	Область растяжения N>0	Нейтральная поверхность N=0	N_{max}
Чистый сдвиг	$\beta^2>\alpha^2$	$\beta^2<\alpha^2$	Две наклонные плоскости $x=\pm y$, $\alpha=\pm\beta$	При $\alpha=0$ или $\beta=0$
Простой сдвиг	$\alpha\beta<0$	$\alpha\beta>0$	Координатные плоскости $\beta=0$ или $\alpha=0$	При $\alpha=\beta$
Одноосное течение	$3\alpha^2<1$	$3\alpha^2>1$	Коническая поверхность вокруг оси x, $\alpha=1/\sqrt{3}$	При $\alpha=0$ или $\alpha=1$

В трехмерном случае устойчивость также можно исследовать указанным методом, но этот путь анализа весьма трудоемкий и требует громоздких выкладок. Поэтому используем, хотя и приближенный, но более простой способ анализа устойчивости стержня [122].

Сравнивая формы выражений для N в различных типах вискозиметрических течений, можно отметить, что все они показывают параболическое распределение осевого усилия по длине стержня. Остальные сомножители связаны с ориентацией стержня, поскольку содержат функции α, β, γ.

В свете сказанного, запишем в общем случае выражение для осевого усилия в форме

$$N = -D\left(\ell^2 - s^2\right). \qquad (4.35)$$

где $D=D(\alpha, \beta, \gamma)$ – функция ориентации, зависящая от типа течения (см. (4.2), (4.16), (4.28)), 2ℓ – длина стержня, s – продольная координата упругой линии стержня $\left(|s| \le \ell\right)$.

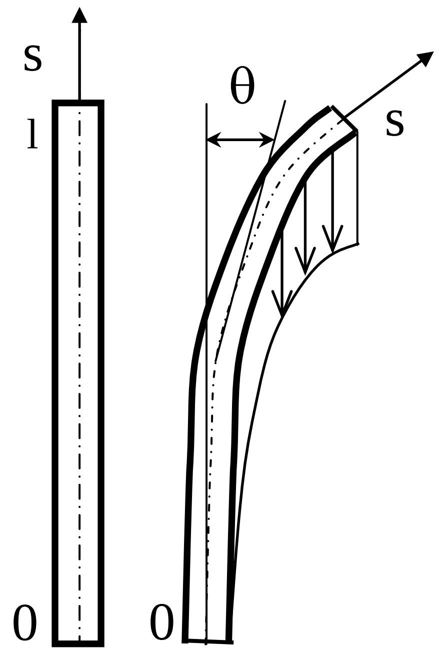

Рис.4.12. Изгиб стержня под действием распределенной нагрузки.

Ввиду симметрии задачи, расчетная схема для анализа продольного сжатия стержня, имеет вид рис. 4.12. стрелками показаны касательные напряжения, действующие на поверхность стержня, создающие неравномерную распределенную нагрузку. В средней части s=0 стержня усилие максимально и выполняется условие симметрии $\partial N/\partial s = 0$, а на концах $s=\pm\ell$, N=0. Это позволяет ограничиться рассмотрением верхней половиной стержня, заменив отброшенную половину заделкой. Поперечное сечение стержня $\pi d^2/4$. В изогнутом положении (рис. 4.12.) результирующее усилие участка, заключенного между сечением s и вершиной $(s=\ell)$ уравновешивается результирующей продольных напряжений и перерезывающей силой, действующей в точке s. При отклонении оси стержня от вертикали на угол θ перерезывающая сила с учетом (4.35) определяется интегралом

$$Q = -\int_s^l \frac{\partial N}{\partial s} ds \sin\theta = -D\frac{\left(\ell^2 - s^2\right)}{2}\theta.$$

Здесь учитывалось $\sin\theta \cong \theta$ при $|\theta| \langle\langle 1$. Производная $\partial N/\partial s$ характеризует интенсивность распределенной сжимающей нагрузки.

Изгибающий момент $M=E^*J\theta_s$, где E^*J – жесткость стержня на изгиб. Значит перерезывающая сила $Q=M_s=E^*J\theta_{ss}$. Отсюда, очевидно, получим следующее дифференциальное уравнение для отклонения θ:

$$\theta_{ss} + \frac{D}{2E^{*}J}\left(\ell^{2} - s^{2}\right)\theta = 0. \qquad (4.36)$$

Граничные условия задачи - момент в вершине (на свободном конце) равен нулю и отсутствие отклонения в месте заделки

$$s=\ell,\ \theta_s=0; \qquad s=0,\ \theta=0. \qquad (4.37)$$

Введем безразмерные переменные $S = s/\ell$, $\lambda_1 = D\ell^4 \big/ \left(2E^{*}J\right)$. Тогда задача (4.36), (4.37) примет вид

$$\begin{gathered}\theta_{SS} + \lambda_1\left(1 - S^2\right)\theta = 0,\\ S = 1, \quad \theta_S = 0; \quad S = 0, \quad \theta = 0.\end{gathered} \qquad (4.38)$$

Решение уравнения (4.38) не выражается через элементарные функции [121]. Поэтому для определения первого собственного числа задачи используем метод Галеркина. Ищем решение в виде многочлена второй степени $\theta = \left(S^2 - 2S\right)$, который удовлетворяет граничным условиям и определен с точностью до постоянного множителя.

Условие ортогональности невязки уравнения (4.38) к координатной функции имеет вид

$$\int_0^1 \left[2 + \lambda_1\left(1 - S^2\right)\left(S^2 - 2S\right)\right]\left(S^2 - 2S\right)dS = 0.$$

Отсюда находим приближенное значение первого собственного числа задачи

$$\lambda_1 = -2\int_0^1 \left(S^2 - 2S\right)dS \Bigg/ \left[\int_0^1 \left(1 - S^2\right)\left(S^2 - 2S\right)^2 dS\right] = 5.1851.$$

Кроме того, собственные числа $\lambda = Dl^4/(2E^*J)$ задачи (4.38) были найдены численно; они равны λ_1=5,122; λ_2=39,66; λ_3=106,249; λ_4=204,86;…. Метод Галеркина дает хорошее приближение для первого собственного числа. Обозначим $D_1 = 2\lambda_1 E^*J/\ell^4$. Следовательно, при $D>D_1$ стержень теряет устойчивость; при $D<D_1$ – устойчивость сохраняется, $D=D_1$ – соответствует положению безразличного равновесия. Если выполняется условие $D<D_1$ при $D=D_m$ (D_m – соответствует максимальному сжимающему усилию), то стержень сохраняет устойчивость при любой пространственной ориентации. Например, в случае одноосного течения согласно (4.28) $D_m=D(\alpha=0)=0{,}25A\gamma_н$; при простом сдвиге согласно (4.2) $\alpha^2=\beta^2$, $\gamma=0$, $\alpha=-\beta=\cos\pi/4=\sqrt{2}/2$, $D_m=0{,}25A\gamma_п$; при чистом сдвиге согласно (4.16) $\gamma=0$, $\alpha=0$, $\beta=1$, $D_m=0{,}5A\gamma_c$.

Экспериментально наблюдалось явление скручивания низкомодульных волокон в клубок при перемешивании суспензии [131]. Это объясняется неустойчивостью положения нейтрального равновесия стержня в условиях простого сдвигового течения (см. гл. 3.1.3 и 3.3.1). Стержень, совершая вращательное движение, проходит положения ($\alpha>0$, $\beta<0$, см. табл. 4.1) в которых действует осевое сжимающее усилие ($N<0$). Выпучиванию середины стержня препятствуют силы вязкого трения, поэтому есть все условия получения высших форм продольного изгиба, соответствующих λ_2, λ_3 и т.д.

Действительно, численный анализ задач (см. гл.3.1.3.) показал возможность «сворачивания в гармошку» стержня при значительных сжимающих усилиях.

Перемешивание полиуретановых волокон в полиакрилатовой матрице проводилось при следующих условиях [131]: d=30 мкм; c=0,1; $\mu = 0{,}1$ Па·с;; $E^* = 0.5$ МПа ; $\gamma_n = 200$ с$^{-1}$;2ℓ=1 мм. При этом имеем D_m=0,25A$\gamma_п$=9,46 Па; D_1=3,31 Па, следовательно, стержень (полиуретановое волокно) теряет устойчивость (D_m>D_1).

4.5. ВЯЗКОСТЬ СИСТЕМЫ, НАПОЛНЕННОЙ ПРОИЗВОЛЬНО ОРИЕНТИРОВАННЫМИ ЖЕСТКИМИ СТЕРЖНЯМИ

Основные положения механики систем, наполненных жесткими прямыми стержнями изложены в гл.3.4. Очевидно, что система, наполненная пространственно ориентированными стержнями будет иметь другую вязкость по сравнению с системой, наполненной стержнями параллельными плоскости xOy. Поэтому материал этого раздела обобщает ранее полученные результаты гл.3.4.

Система, наполненная гибкими или жесткими стержнями в условиях течения требует дополнительных энергетических затрат на преодоление сил вязкого трения при обтекании стержней. Вследствие этого эффективная вязкость системы выше вязкости чистой жидкости.

Рассмотрим случай хаотически ориентированных полидисперсных волокон (стержней) при отсутствии между ними механического контакта. Частицы равномерно распределены в объеме жидкости.

Определим затраты энергии, обусловленные присутствием одного кривого пространственного стержня. Скорость отдельной точки упругой линии стержня $\mathbf{r}_t$, следовательно, относительная скорость жидкости $\mathbf{V}$-$\mathbf{r}_t$. Локальный вектор плотности внешних сил **К**. На элемент стержня длиной ds действует сила **К**ds. Для стержня длиной 2ℓ энергия вязкого трения W определяется интегралом (см. гл. 3.4)

$$W = \int_{-\ell}^{\ell} (\mathbf{V}-\mathbf{r}_t)\mathbf{K}ds.$$

Учитывая первое уравнение в (2.9) и выражение (2.22) можем записать для пространственного искривленного стержня

$$W = \int_{-\ell}^{\ell} [B^{-1}(Q_s+Nk+P\chi)^2+A^{-1}(N_s-kQ)^2+B^{-1}(P_s+\chi Q)^2]ds.$$

В случае прямого (k=0, χ=0, P=0, Q=0) достаточно жесткого стержня (см. гл. 3.2.1 и гл. 4.4), имеем

$$W=A^{-1}\int_{-\ell}^{\ell} N_s^2 ds. \qquad (4.39)$$

Отметим, что в случае прямолинейного стержня энергозатраты обусловлены исключительно продольной составляющей силы трения (сомножитель A^{-1} в (4.39)) и не зависят от поперечной составляющей трения (параметра B^{-1}).

Полученная формула (аналог формулы Эшелби [130]) имеет сравнительно простой вид. Она позволяет избежать пространственного интегрирования по объему жидкости в пределах пограничного гидродинамического слоя (или представительного элемента объема). Для определения скорости диссипации энергии достаточно выполнить интегрирование осевого усилия по длине отдельного волокна. При этом значительно упрощается исследование механического поведения (реологии) гетерогенных систем. Полученный результат может быть распространен на случай полидисперсной системы.

Как было показано выше в гл. 4.1, 4.2, 4.3 распределение осевого усилия по длине стержня описывается квадратичной параболой, поэтому выполнение интегрирования (4.39) для трех рассмотренных случаев вискозиметрических течений не представляет трудностей.

Найдем энергозатраты для всех волокон, находящихся в деформируемой суспензии. Количество волокон можно определить, разделив занимаемый ими объем на объем одного волокна. Если объемная концентрация гетерогенной фазы в суспензии c, то общий объем всех волокон составит Vc, где V – объем суспензии. Объем одного волокна цилиндрической формы диаметром d и длиной 2ℓ равен $0{,}5\pi d^2\ell$. Следовательно, количество волокон идентичных размеров (одна фракция) составляет $2Vc\big/\left(\pi d^2\ell\right)$. Суммарные затраты энергии W_Σ, обусловленные обтеканием всех волокон, составляют

$$W_\Sigma = \frac{2WVc}{\pi d^2\ell} = \frac{2VcA^{-1}}{\pi d^2\ell}\int\limits_{-\ell}^{\ell} N_s^2 ds. \qquad (4.40)$$

4.5.1. Простой сдвиг

Согласно результатам гл.4.1 осевая сила в стержне определяется выражениями (4.2), (4.6), (4.8)

$$N = A\gamma_п \frac{\left(\alpha_0+\beta_0\tau\right)\beta_0}{\left[\left(\alpha_0+\beta_0\tau\right)^2+\beta_0^2+\gamma_0^2\right]}\frac{\left(l^2-s^2\right)}{2}, \qquad (4.41)$$

где $tg\psi = tg\psi_0\left(1+tg\psi_0 c_*\gamma_п t\right)^{-1}$, $c_* = \dfrac{\beta_0}{\sqrt{\beta_0^2+\gamma_0^2}}$, $tg\psi_0 = \dfrac{\sqrt{\beta_0^2+\gamma_0^2}}{\alpha_0}$, $\tau = \gamma_п t.$

Подставив (4.41) в (4.40) и выполнив интегрирование, получим

$$W_\Sigma = \frac{4VcA\ell^2\gamma_п^2}{3\pi d^2}\frac{\left(\alpha_0+\beta_0\tau\right)^2\beta_0^2}{\left[\left(\alpha_0+\beta_0\tau\right)^2+\beta_0^2+\gamma_0^2\right]^2}. \qquad (4.42)$$

Выражение для эффективной вязкости μ_+ в условиях простого сдвига с учетом дополнительных затрат энергии имеет вид (см. гл. 2.5.2)

$$\mu_+ = \frac{\tau_{xy}\gamma_п V + W_\Sigma}{\gamma_п^2 V}, \tag{4.43}$$

где $\tau_{xy} = \mu\gamma_п$ - касательное напряжение.

Подставив (4.42) в (4.43) найдем эффективную вязкость суспензии, наполненную прямыми волокнами одинаковой длины, диаметра и начальной ориентации (упругие оси конгруэнтны)

$$\mu_+ = \mu\left[1 + \frac{4c\ell^2}{3\pi d^2}\frac{2\pi}{\ln\left(0.952/\sqrt{c}\right)}\frac{c_*^2 tg^2\psi}{\left(1+tg^2\psi\right)^2}\right]. \tag{4.44}$$

Из (4.44) и (4.41) видно, что при β_0=0 (волокна лежат в плоскостях параллельных плоскости y=0) вязкость системы минимальна.

Кроме того, можно отметить, что наклон стержней в направлении оси z (направляющий косинус γ) при прочих равных условиях снижает вязкость. То есть если γ=0, то система таких волокон имеет наибольшую вязкость.

Согласно (4.44) эффективная вязкость μ_+ является функцией $tg\psi$, характеризующей ориентацию волокна. Найдем экстремум (4.2) с учетом (4.7), используя уравнение

$$\left.\frac{\partial N}{\partial\left(tg\psi\right)}\right|_{\psi=\psi_m} = 0.$$

Имеем $tg^2\psi_m = 1$ или $tg\psi_m = \pm 1$. При этом, согласно (4.7), направляющие косинусы имеют численные значение

$$\alpha_m = 1/\sqrt{2},\quad \beta_m = \pm c_*/\sqrt{2},\quad \gamma_m = \pm\sqrt{1-c_*^2}/\sqrt{2}.$$

А сама эффективная вязкость принимает максимальное значение

$$\mu_+ = \mu\left[1 + \frac{2c\ell^2 c_*^2}{3d^2\ln\left(0.952/\sqrt{c}\right)}\right].$$

В случае полидисперсных волокон (в пределах фракции волокна конгруэнтны), все фракции которых равномерно распределены по объему среды, вязкость определяется выражением

$$\mu_+ = \mu\left[1 + \frac{8c}{3\ell n\left(0.952/\sqrt{c}\right)}\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{l_i}{d_i}\right)^2 c_{*i}^2\psi_{*i}\frac{tg^2\psi_i}{\left(1+tg^2\psi_i\right)^2}\right], \tag{4.45}$$

где $\psi_i = \psi_{0i}\left(1 + tg\psi_{0i}c_{*i}\gamma_п t\right)^{-1}$, $c_{*i} = \dfrac{\beta_{0i}}{\sqrt{\beta_{0i}^2+\gamma_{0i}^2}}$, $tg\psi_{0i} = \dfrac{\sqrt{\beta_{0i}^2+\gamma_{0i}^2}}{\alpha_{0i}}$, m – число фракций, ψ_{*i} - относительное количество волокон i-й фракции ($\sum_{i=1}^{m}\psi_{*i} = 1$).

Как было отмечено в гл. 3.1.4.2 положение нейтрального равновесия $\beta=0$ (упругая ось волокна лежит в плоскости $y=0$) неустойчиво, поэтому волокна вращаясь, через некоторое время, приобретают хаотическую ориентацию.

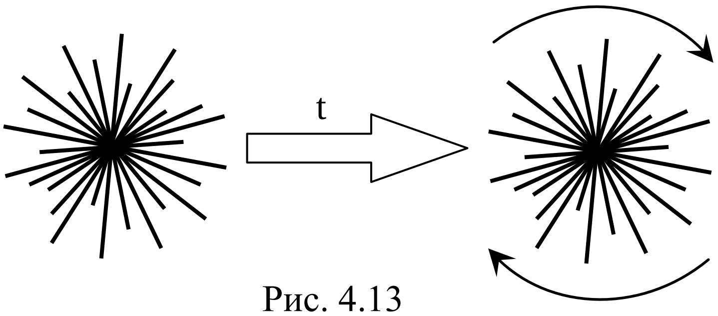

Рис. 4.13

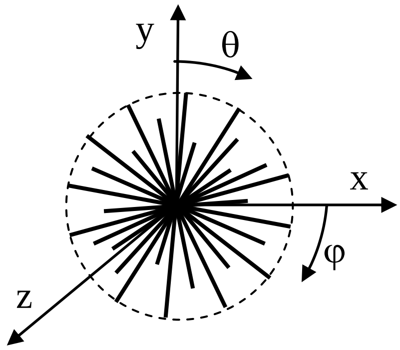

Рис. 4.14

Если начальная ориентация волокон была изотропной, то и в условиях сдвигового течения изотропная ориентация сохраняется. При этом каждое волокно вращаются вокруг оси, параллельной оси z и проходящей через его середину. Для наглядности можно совместить центры тяжести всех волокон в одной точке, выполнив параллельный перенос всех волокон. При этом получившийся «ёж» в условиях течения матрицы будет вращаться, сохраняя в среднем изотропную ориентацию, как показано на рис. 4.13.

Для изотропной (хаотичной), ориентации волокон найдем эффективную вязкость системы. Изменение ориентации во времени игнорируем. Ввиду четности функции W_Σ в (4.42) $W_\Sigma(+\alpha)=W_\Sigma(-\alpha)$, $W_\Sigma(+\beta)=W_\Sigma(-\beta)$ ограничимся первым октантом декартовой системы: $\theta\in[0,\pi/2]$, $\varphi\in[0,\pi/2]$, где θ, φ - сферические координаты. Выделим в пространстве в направлении θ_i, φ_i двумерный сектор размерами $\Delta\theta=\pi/(2m)$, $\Delta\varphi=\pi/(2m)$ и будем рассматривать ℓ и d как функции углов $\ell(\varphi_i,\theta_i)$, $d(\varphi_i,\theta_i)$. Функция ψ_* в (4.45) в изотропном случае (равновероятностной ориентации) определяется как отношение объемов выделенного конуса и 1/8 шара единичного радиуса

$$\psi_*=\frac{\sin\theta\Delta\theta\Delta\varphi}{\int\limits_0^{\pi/2}\int\limits_0^{\pi/2}\sin\theta d\theta d\varphi}=\frac{2}{\pi}\sin\theta\Delta\theta\Delta\varphi.$$

В изотропном случае сумма, входящая в (4.45), примет вид

$$\lim_{\substack{\Delta\theta\to0\\ \Delta\varphi\to0\\ m\to\infty}}\sum_{i=1}^{m}\frac{\ell^2(\varphi_i,\theta_i)}{d^2(\varphi_i,\theta_i)}\frac{2\sin\theta_i\Delta\theta\Delta\varphi}{\pi}\alpha^2\beta^2=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2}\int\limits_0^{\pi/2}\frac{\ell^2(\varphi,\theta)}{d^2(\varphi,\theta)}\sin\theta\alpha^2\beta^2 d\theta d\varphi.$$

Здесь учитывалось выражение (4.2).

В случае монодисперсного наполнителя (ℓ=const, d=const) последний интеграл можно определить, используя связь направляющих косинусов и сферических координат: $\alpha^2\beta^2=\cos^2\theta\cdot(\sin\theta\cdot\sin\varphi)^2(\sin\theta\sin\varphi)^2$. Последний интеграл равен

$$\frac{2}{\pi}\frac{\ell^2}{d^2}\int_0^{\pi/2}\sin^3\theta\cdot\cos^2\theta\cdot\theta d\theta\cdot\int_0^{\pi/2}\sin^2\varphi\cdot\varphi d\varphi=\frac{1}{15}\frac{\ell^2}{d^2},$$

при этом выражение для эффективной вязкости (4.45) принимает вид

$$\mu_+=\mu\left[1+\frac{8\cdot c\ell^2}{45\cdot\ln\left(0.952/\sqrt{c}\right)d^2}\right]. \qquad (4.45a)$$

При вычислении интегралов учитывались равенства

$$\int\sin^3\theta\cdot\cos^2\theta d\theta=-\frac{\cos^3\theta}{3}+\frac{\cos^5\theta}{5}, \qquad \int\sin^2\varphi d\varphi=\frac{\varphi}{2}-\frac{\sin 2\varphi}{4}.$$

Таким образом, эффективная вязкость зависит от концентрации волокон и отношения $\left(\ell/d\right)^2$.

4.5.2. Чистый сдвиг

При чистом сдвиге с учетом выражений (4.16), (4.40) и результатов гл. 2.5.3, имеем соотношения

$$W_\Sigma=\frac{4Vc\ell^2}{3\pi d^2}A\gamma_c^2\left(\alpha^2-\beta^2\right)^2, \quad \mu_+=\frac{\sigma_{xx}\gamma_c V+W_\Sigma}{4\gamma_c^2 V},$$

где $\sigma_{xx}=4\mu\gamma_c$, функции $\alpha(t)$, $\beta(t)$ определены в (4.22).

Для монодисперсной системы эффективная вязкость определяется выражением

$$\mu_+=\left[1+\frac{2}{3}\cdot\frac{c\ell^2}{d^2\ln\left(0.952/\sqrt{c}\right)}\left(\alpha^2-\beta^2\right)^2\right]. \qquad (4.46)$$

В случае полидисперсного наполнителя вязкость

$$\mu_+=\mu\left[1+\frac{2c}{3\ln\left(0.952/\sqrt{c}\right)}\sum_{i=1}^{m}\frac{\ell_i^2}{d_i^2}\psi_i\left(\alpha_i^2-\beta_i^2\right)^2\right]. \qquad (4.47)$$

где m – число фракций, ψ_i - относительное количество волокон $i^{-й}$ фракции $\left(\sum_{i=1}^{m}\psi_i=1\right)$, α_i, β_i - ориентация $i^{-й}$ фракции.

Можно заметить, что в пределах данной модели согласно формуле (4.40) экстремальным значениям осевого усилия соответствует максимальное значение вязкости суспензии. Нулевому осевому усилию соответствует минимальная вязкость, близкая к вязкости матрицы. Поэтому при анализе вязкости можно пользоваться данными табл. 4.1.

Согласно (4.46), (4.47) и табл. 4.1. максимальной вязкости отвечает ориентация стержней α=1, β=0 или α=0, β=1. Минимальная вязкость имеет место при диагональном расположении стержней ($\alpha^2=\beta^2$).

Обеспечить идентичную начальную ориентацию всех стержней возможно, например, методами электро- или магнитореологии. Чаще в технологии переработки наполненных систем встречается ситуация, когда имеет место хаотическое начальное расположение волокон. Представляет интерес изучить изменение эффективной вязкости системы в процессе перехода от хаотической ориентации волокон к их однонаправленному расположению. В качестве примера такого изменения ориентации можно указать на процесс вальцевания или течение в сходящемся канале.

Введем сферическую систему координат. Ось x совпадает с направлением течения. Ввиду четности функции W_Σ (см. раздел 4.5.1.) ограничимся первым октантом $\theta\in[0, \pi/2]$, $\varphi\in[0, \pi/2]$. Волокна с различной (случайной) ориентацией равномерно распределены по объему матрицы. Перенесем упругие оси всех волокон параллельно так чтоб они проходили через начало координат и середина каждого «волокна» совпадала с ним. Все волокна имеют идентичные размеры ℓ, d, т.е. имеем монодисперсную систему.

Модель наполненной системы, идентична описанной в гл. 4.5.1, и напоминает «морского ежа». Но если в простом сдвиговом течении «ёж» равномерно вращается, сохраняя равновероятную ориентацию волокон (рис. 4.13), то в условиях чистого сдвига волокна постепенно поворачиваются в направлении течения (см. рис. 4.15). Параметр отклонения от направления течения α увеличивается со временем от α_0 ($\alpha_0<1$) до $\alpha=1$. По истечении некоторого времени наступает ситуация, когда упругие оси всех волокон параллельны оси x ($\tau\to\infty$, $\alpha=1$, $\theta=0$).

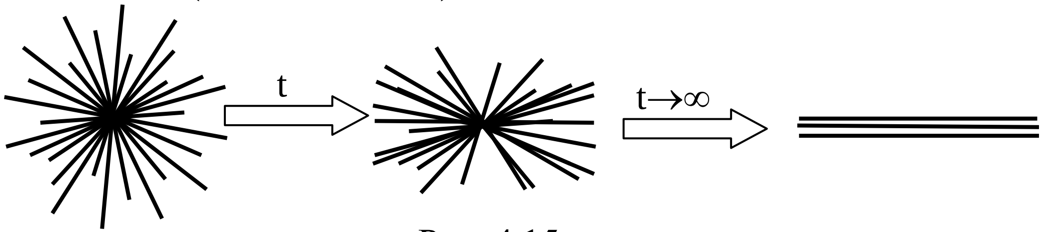

Рис. 4.15

Выделим на поверхности сферы единичного радиуса область, ограниченную двумя конусами, определяемыми углами θ_0 и $\theta_0+\Delta\theta_0$ (отсчитываемыми от оси x), и двумя полуплоскостями, составляющими углы φ_0 и $\varphi_0+\Delta\varphi_0$ с плоскостью xy. Эту область можно считать прямоугольником с размерами сторон $\Delta\theta_0$ и $\sin\theta_0\Delta\varphi_0$. Фракции волокон различаются начальной ориентацией. Например, i-я фракция, доля которой ψ_i, содержит волокна с начальной ориентацией θ_{0i}, φ_{0i}. В случае равновероятной начальной ориентации стержней функция ψ_i в (4.47) определяется как отношение телесных углов (мерой телесного угла является площадь, вырезаемая телесным углом на сфере единичного радиуса с центром в вершине) выделенного конуса и октанта ($4\pi/8=\pi/2$)

$$\psi = \frac{\pi}{2}\sin\theta_0\Delta\theta_0\Delta\varphi_0 .$$

Сумма, входящая в (4.47) примет вид

$$\lim_{\substack{\Delta\theta_0\to 0\\ \Delta\varphi_0\to 0\\ m\to\infty}}\left(\frac{\ell}{d}\right)^2\frac{2}{\pi}\sum_{i=1}^{m}\left(\alpha_i^2-\beta_i^2\right)^2\sin\theta_{0i}\Delta\theta_0\Delta\varphi_0=\left(\frac{\ell}{d}\right)^2 I(\tau), \qquad (4.48)$$

где $I(\tau)=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\left(\alpha^2-\beta^2\right)^2\sin\theta_0 d\theta_0 d\varphi_0$

Учитывая формулы $\alpha=\cos\theta$, $\beta=\sin\theta\cdot\sin\varphi$, а также выражения (4.22), (4.23) запишем выражение (4.48) так

$$c_*^2=\frac{4\cos^2\theta_0\sin^2\theta_0\sin^2\varphi_0}{\cos^2\theta_0+\sin^2\theta_0\sin^2\varphi_0-\left(\cos^2\theta_0-\sin^2\theta_0\sin^2\varphi_0\right)^2},$$

$$I=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\frac{c_*^4\left(1-tg^4\varphi\right)^2}{\left[c_*^2\left(1-tg^2\varphi\right)^2+4tg^2\varphi\right]^2}\sin\theta_0 d\theta_0 d\varphi_0, \qquad (4.49)$$

где функция $tg\varphi=z(\theta_0,\ \varphi_0,\ \tau)$ определяется из уравнения (4.24), которое для сферических координат принимает вид

$$\left(1-\frac{c_*^2}{2}\right)\ln\left|\frac{z\cdot\cos\varphi_0}{\sin\varphi_0\cdot\sin\theta_0}\right|+\frac{1}{2}\left(1-c_*^2\right)\left(\frac{1-z^2}{1+z^2}-\frac{\cos^2\theta_0-\sin^2\theta_0\cdot\sin^2\varphi_0}{\cos^2\theta_0+\sin^2\theta_0\cdot\sin^2\varphi_0}\right)=-\tau. \qquad (4.50)$$

Выражение для эффективной вязкости с учетом (4.47), (4.48) имеет вид

$$\mu_+=\mu\left[1+\frac{2c}{3\ln\left(0.952/\sqrt{c}\right)}\left(\frac{\ell}{d}\right)^2 I(\tau)\right]. \qquad (4.51)$$

Если имеем полидисперсную систему, состоящую из m, равномерно распределенных по объему, фракций, то расчетная формула для эффективной вязкости будет иметь вид (эволюция ориентации волокон любой i-й фракции описывается функцией $I(\tau)$)

$$\mu_+=\mu\left[1+\frac{2cI(\tau)}{3\ln\left(0.952/\sqrt{c}\right)}\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\ell_i}{d_i}\right)^2\psi_i\right], \qquad (4.52)$$

где ψ_i - относительное количество стержней i-й фракции $\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{m}\psi_i=1\right)$.

Таким образом, выражение для I (4.49) содержит подынтегральную функцию $z(\theta_0,\ \varphi_0,\ \tau)$, которая определяется из уравнения (4.50). Достаточно громоздкая задача отыскания функции $I(\tau)$ может быть решена методом механических квадратур. Для собственного интеграла, зависящего от параметра $I(\tau)$, выполним асимптотические оценки.

При бесконечно большой продолжительности течения имеют место соотношения $\alpha\to 1$, $\beta\to 0$ при $\tau\to\infty$. Этому случаю отвечает предельное значение интеграла (4.48)

$$\lim_{\tau\to\infty} = -\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2} d\cos\theta_0 d\varphi_0 = 1.$$

Если все волокна ориентированы поперек течения (α=0, β=1), то значение интеграла $I_{(\beta=1)}$=1. Интеграл (4.48) имеет минимум (I=0) если все волокна параллельны диагональным плоскостям $\alpha=\beta$, $\alpha=-\beta$ (при этом матрица как бы «не видит» волокон).

При хаотической начальной ориентации в момент времени τ=0 имеют место соотношения $\alpha_0 = \cos\theta_0$, $\beta_0 = \sin\theta_0 \cdot \sin\varphi_0$. При этом интеграл в (4.48) имеет вид

$$I(\tau=0) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\left[\cos^2\theta_0\left(1+\sin^2\varphi_0\right) - \sin^2\varphi_0\right]^2 \sin\theta_0 d\theta_0 d\varphi_0 .$$

Выполнив интегрирование, получим $I(\tau=0) = 4/15$. Таким образом, в процессе ориентации параметр I увеличивается от $I=1$ до $I=4/15$ при изменении времени от τ=0, до $\tau=\infty$.

Если ввести новые переменные $\sin\varphi=y$, $\cos\theta=x$, $c_*^2=c_1$, то задача отыскания функции $I(\tau)$ примет вид

$$I = -\frac{2}{\pi}\int_0^1\int_1^0 \frac{c_1^2\left(1-z^4\right)^2 dxdy}{\left[c_1\left(1-z^2\right)^2 + 4z^2\right]^2\sqrt{1-y^2}}, \qquad 0 < z < \frac{y\sqrt{1-x^2}}{x},$$

$$c_1 = \frac{4x^2\left(1-x^2\right)y^2}{x^2+\left(1-x^2\right)y^2 - \left[x^2-\left(1-x^2\right)y^2\right]^2},$$

$$\left(1-0.5c_1\right)\ln\left|\frac{zx}{y\sqrt{1-x^2}}\right| + 0.5\left(1-c_1\right)\left[\frac{1-z^2}{1+z^2} - \frac{x^2-\left(1-x^2\right)y^2}{x^2+\left(1-x^2\right)y^2}\right] + \tau = 0.$$

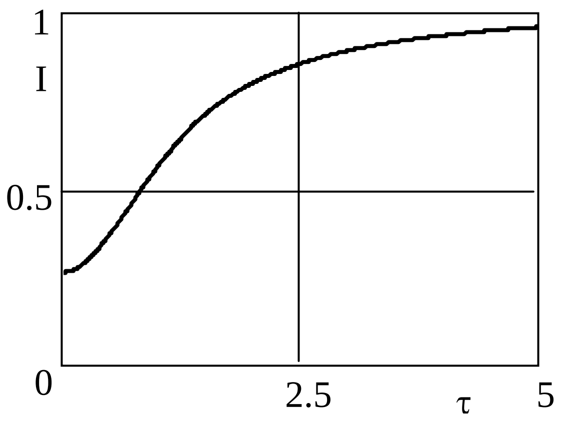

Рис. 4.16. Зависимость функции I от τ

Второе соотношение определяет область корней трансцендентного уравнения. Численная реализация этой задачи выполнена с помощью стандартной программы «Matcad» для интервала $0 \le \tau \le 5$. Результаты представлены на рис 4.16. Из графика видно, что зависимость $I(\tau)$ имеет S-образный характер, монотонно возрастая от $I(\tau=0) = 4/15$ до $I(\tau=5) = 0.96$. В пределе $\lim_{\tau\to\infty} I(\tau) = 1$. Зависимость может быть аппроксимирована выражением $I(\tau) = \left\{4 + 11\left[1-\exp(-0.617\tau)\right]\right\}/15$.

При τ=4 его погрешность составляет 0.19%, при τ=0 - 0%. Наибольшее расхождение имеет место на отрезке $0<\tau\le1$.

4.5.3. Одноосное растяжение

При одноосном растяжении, с учетом выражений (4.28), (4.34), (4.40) и результатов главы 2.5.1, имеем соотношения

$$W_\Sigma = \frac{4Vc\ell^2}{3\pi d^2} A\gamma_н^2 (3\alpha^2 - 1)^2\,, \quad \mu_+ = \frac{\sigma_{11}\gamma_н V + W_\Sigma}{3\gamma_н^2 V}, \tag{4.53}$$

где $\alpha^2 = \alpha_o^2/[\alpha_o^2 + (1-\alpha_o^2)\exp(-3\tau)]$, $\tau = \gamma_н t$, $\sigma_{11} = 3\mu\gamma_н$ - растягивающее напряжение.

Из соотношений (4.53) получим для монодисперсной системы

$$\mu_+ = \mu\left[1 + \frac{2}{9}\frac{\ell^2 c}{d^2 \ln\left(0.952/\sqrt{c}\right)}(3\alpha^2 - 1)^2\right]. \tag{4.54}$$

Согласно (4.54) вязкость системы при ориентации стержней $\alpha^2 = 1/3$ минимальна, а при $\alpha^2 = 1$ – максимальна.

В случае полидисперсной системы

$$\mu_+ = \mu\left[1 + \frac{2c}{9\ln\left(0.952/\sqrt{c}\right)}\sum_{i=1}^{m}\frac{\ell_i^2}{d_i^2}\psi_i(3\alpha_i^2 - 1)^2\right], \tag{4.55}$$

где $\alpha_i^2 = \alpha_{io}^2/[\alpha_{io}^2 + (1-\alpha_{io}^2)\exp(-3\tau)]$.

Рассмотрим, важный для технологии переработки наполненных полимерных систем, случай, когда исходная смесь (в начальный момент) имеет хаотическую ориентацию. Такая ситуация имеет место, например, при предварительной обработке смеси на резиносмесителе, когда трехмерный характер движения в рабочей полости обеспечивает практически изотропную (хаотическую) ориентацию коротких волокон. Далее смесь может быть направлена на валки или другое оборудование, обеспечивающее однонаправленную ориентацию волокон.

Вначале рассмотрим случай монодисперсных волокон. В начальный момент времени волокна характеризуются хаотической ориентацией, т.е. они распределены равномерно по объему, а их пространственная ориентация носит случайный характер. Далее, начинается одноосное растяжение системы, и волокна начинают поворачиваться по направлению течения. Это имеет место, например, на входе в сходящийся канал. Спустя некоторое время все волокна будут ориентированы по направлению течения и эффективная вязкость системы примет максимальное значение. Требуется найти кинетику изменения эффективной вязкости.

Пусть ось x совпадает с направлением течения. Введем сферическую систему координат θ, φ, причем $\theta=0$ соответствует направлению течения. Середины упругих осей всех волокон перенесем в начало координат. Возьмем сферу единичного радиуса с центром в начале координат. В начальный момент точки пересечения упругих осей с поверхностью сферы распределены по поверхности равномерно. Ввиду симметрии ограничимся полусферой $\theta \in [0, \pi/2]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$. В процессе эволюции плотность расположения упругих осей в направлении φ однородна. Выделим в пространстве в направлении $\theta=\theta_0$ конус. Зададим некоторое приращение координате $\theta=\theta_0+\Delta\theta_0$ и построим второй конус. При равномерном начальном расположении волокон количество волокон пропорционально величине телесного угла. Относительное количество стержней, находящихся в выделенном конусе раствором $\Delta\theta_0$, определяется как отношение телесных углов выделенного конуса и полусферы (телесный угол сферы 4π)

$$\psi = \frac{2\pi \sin\theta_0 \Delta\theta_0}{2\pi}.$$

В рассматриваемом случае все фракции волокон имеют идентичные размеры, но различаются начальной ориентацией. По определению направляющий косинус связан со сферической координатой как $\alpha = \cos\theta$. Используя формулу (4.55), можем записать для всех фракций

$$\mu_+ = \mu\left[1 + \frac{2c\ell^2}{9d^2 \ln\left(0.952/\sqrt{c}\right)} I(\tau)\right], \tag{4.56}$$

где $I = \sum_{i=1}^{m} \psi_i \left(3\cos^2\theta_i - 1\right)^2$.

Учитывая соотношение из (4.53) $\cos^2\theta_i = \left[1 + tg^2\theta_{0i}\exp(-3\tau)\right]^{-1}$, можем записать

$$I = \lim_{\substack{\Delta\theta_0\to 0\\ m\to\infty}} \sum_{i=1}^{m} \sin\theta_0\Delta\theta_0 \left[\frac{3}{1+tg^2\theta_{0i}\exp(-3\tau)} - 1\right]^2 = \int_0^{\pi/2} \left[\frac{3}{1+tg^2\theta_0\exp(-3\tau)} - 1\right]^2 \sin\theta_0 d\theta_0. \tag{4.57}$$

Формула (4.57) интегрально усредняет силы трения волокон различной ориентации. Отметим, что в (4.57) время τ является параметром. После замены переменной $x = \cos\theta_0$ интеграл распадается на три табличных

$$\begin{aligned} I = &-\left[2+\exp(-3\tau)\right]^2 \int_1^0 \frac{x^4 dx}{\left\{x^2\left[1-\exp(-3\tau)\right]+\exp(-3\tau)\right\}^2} + \\ &+2\exp(-3\tau)\left[2+\exp(-3\tau)\right]\int_1^0 \frac{x^2 dx}{\left\{x^2\left[1-\exp(-3\tau)\right]+\exp(-3\tau)\right\}^2} - \\ &-\exp(-6\tau)\int_1^0 \frac{dx}{\left\{x^2\left[1-\exp(-3\tau)\right]+\exp(-3\tau)\right\}^2}. \end{aligned} \tag{4.58}$$

Предварительно, как тест, рассмотрим предельные случаи. Найдем начальную вязкость (4.56) в момент τ=0. Согласно (4.58) имеем

$$I(\tau=0) = -\int_1^0 \left(3x^2-1\right)^2 dx = 0{,}8. \tag{4.59}$$

При большой продолжительности деформации системы (τ→∞) все волокна ориентируются вдоль оси x, а интеграл равен

$$\lim_{\tau\to\infty} I = I(\tau\to\infty) = -\int_1^0 4dx = 4, \qquad (4.60)$$

что находится в полном соответствии с формулой (4.54).

В результате интегрирования (4.58), находим функцию времени

$$I = -\frac{a}{2}\mathrm{arctg}\left(\frac{1}{a}\right)\left(15+42a^2+27a^4\right)+\frac{1}{2\left(a^2+1\right)}\left(27a^6+60a^4+41a^2+8\right), \qquad (4.61)$$

где $a^2 = \exp(-3\tau)/\left[1-\exp(-3\tau)\right]$.

Согласно (4.59), (4.60), (4.61) сомножитель в выражении для эффективной вязкости в (4.56) I монотонно изменяется во времени от I(τ=0)=0,8 до I(τ→∞)=4. Действительно, в формуле (4.54) сомножитель $\left(3\alpha^2-1\right)^2$ имеет предельные значения: максимум $\left(3\alpha^2-1\right)^2=1$ при $\alpha=0,\ \cos\theta=0,\ \theta=\pi/2$; второй максимум $\left(3\alpha^2-1\right)^2=4$ по окончании ориентации $\left(\tau\to\infty,\ \alpha=1,\ \theta=0,\ \cos\theta=1\right)$; на интервале $\alpha\in[0,\ 1]$ функция имеет минимум $\left(3\alpha^2-1\right)^2=0$ при $\alpha^2=1/3,\ \cos\theta=1/\sqrt{3},\ \theta=\arccos\left(1/\sqrt{3}\right)$.

Если имеем полидисперсную систему, состоящую из m, равномерно распределенных по объему, фракций, то расчетная формула для эффективной вязкости будет иметь вид

$$\mu_+ = \mu\left[1+\frac{2c}{9\ln\left(0.952/\sqrt{c}\right)}I(\tau)\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\ell_i}{d_i}\right)^2\psi_i\right], \qquad (4.62)$$

где ψ_i - относительное количество стержней i-й фракции $\left(\sum_{i=1}^{m}\psi_i=1\right)$.

Формула (4.54) предсказывает существенное, пропорциональное $\left(\ell/d\right)^2$, повышение вязкости системы в условиях растяжения. Экспериментально, при исследовании реологических характеристик полиамида ПА610 с рубленными стеклянными, углеродными и органическими волокнами наблюдалось существенное повышение входовых потерь, которое коррелировало со степенью разрушения высокомодульных волокон [132].

Независимо от начальной ориентации формулы (4.46), (4.47), (4.51), (4.52), (4.56), (4.62) предполагают асимптотическое повышение вязкости во времени, поскольку α=1, β=0 при τ→∝. Положение статического равновесия стержней в течениях растяжения устойчиво.

Сопоставление результатов полученных в этой главе с результатами плоского движения (гл. 3) показывает, что при прочих равных условиях отклонение стержней от вертикальной плоскости xy (γ≠0) снижает эффективную вязкость суспензии.

Нумерация формул для расчета эффективной вязкости, по результатам исследований гл. 3 и гл. 4, представлены сводной табл. 4.2.

Таблица 4.2. Формулы для расчета эффективной вязкости

Реологический тип течения	Расположение волокон	Монодисперсные волокна	Полидисперсные волокна
Простой сдвиг	<u>Плоская</u>: 1. Вязкость для заданной начальной ориентации 2. При хаотической ориентации <u>Пространственная</u>: 1. Вязкость для заданной начальной ориентации 2. При хаотической ориентации	(3.112а) (3.113а) (4.44) (4.45а)	(3.113) (3.113б) (4.45) нет
Чистый сдвиг	<u>Плоская</u>: Заданная начальная ориентация <u>Пространственная</u>: 1. Заданная начальная ориентация 2. Хаотическая начальная ориентация	(3.115) (4.46) (4.51)	(3.116) (4.47) (4.52)
Одноосное растяжение	<u>Пространственная</u>: 1. Заданная начальная ориентация 2. Хаотическая начальная ориентация	(4.54) (4.56)	(4.55) (4.62)

ГЛАВА 5
РЕПТАЦИОННОЕ ДВИЖЕНИЕ ЖИВОТНЫХ В ЖИДКОСТИ

Во второй половине XX века все возрастающий интерес вызывают проблемы биомеханики. В последнее время биомеханика начинает складываться как самостоятельная ветвь механики деформируемых тел и сред. Область интересов биомеханики весьма многогранна, и положительную роль ее в решении многих важных задач и техники и биологии трудно переоценить. Именно потому мы, желая фиксировать внимание читателя, рассматриваем здесь одну из возможных постановок задачи биомеханики – задачу движения длинномерных биологических объектов в сплошной среде. Отметим, что в биомеханике термин локомоция означает совокупность согласованных (координированных) движений, с помощью которых животные и человек активно перемещаются в пространстве; разновидностями локомоции являются ходьба, полет, плавание и др. Также используется термин - локомоторный принцип движения.

Британский исследователь Грэм Тейлор и его коллеги из Оксфорда обнаружили, что, несмотря на множество различий в физиологии, движения рыб, птиц и животных удивительным образом похожи. Они считают, что найденная таким образом «оптимальная физиология» поможет в создании машин передвижения будущего.

По словам исследователей, в животном мире существует не так уж много путей эффективного достижения необходимой скорости движения. Чем бы представители фауны ни пользовались – перьями, хвостами или плавниками, - частоты, амплитуды и другие характеристики в большинстве своем совпадают. Все эти механизмы совершенствовались миллионы лет, и ученые полагают, что эволюционный выбор сделан.

Модель плавания водных животных угревидным способом была предложена академиком М.А. Лаврентьевым [133], впервые использовавшим для изучения этой проблемы метод плоских сечений. Тело животного рассматривалось как прямоугольная пластинка, способная изгибаться по любому закону, оставаясь при этом цилиндрической. Указаны деформации пластинки, обеспечивающие ее перемещение в жидкости.

Движению крупных рыб и морских животных посвящены работы [134-138]. Лэндхил [136] при составлении модели движения, рассматривал рыбу как гибкую пластину нулевой толщины. Им изучено движение рыбы в идеальной жидкости, т.е. без учета сил вязкого трения. Ву [138] продолжил направление исследований, сформулированное Лэндхилом. Отмечается, что оптимальному движению тела животного (движению с минимальными затратами энергии) соответствует вариационная формулировка задачи движения.

В работах [139]-[146] представлена теория движения стержня в потоке вязкой жидкости. Полученные уравнения динамики могут использоваться для описания движения биологических объектов в сплошной среде.

5.1. ЛАМИНАРНЫЙ РЕЖИМ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В длинноволновом приближении поставлена и в квадратурах решена задача плоского рептационного движения животных в вязкой жидкости (лат. reptiles ползающий). Определены энергосиловые и кинематические характеристики движения. Приведены результаты численного анализа.

Оценим силы инерции при движении рассматриваемых животных. Для объектов малых размеров примем: $d=10^{-3}$ м, $\ell \sim 10^{-2}$ м, $v=10^{-3}$ м/с, $\rho=10^{3}$ кг/м³, $\mu=10^{-3}$ Па·с. Число Рейнольдса при поперечном обтекании тела животного $Re=vd\rho/\mu=1$ (μ, ρ - вязкость и плотность жидкости, d – диаметр тела, ℓ-длина тела, v – скорость). Для крупных объектов $d=0{,}05$ м, $v=1$ м/с, $Re=5\text{x}10^{4}$. Следовательно, ламинарный режим движения характерен для мелких объектов при малой скорости их движения. Для крупных объектов типичен турбулентный режим движения.

Наряду с преодолением сил вязкого трения, животному необходимо затрачивать энергию на инерцию собственного тела. Оценим силы инерции, действующие на тело животного. Согласно [5] при $ReSh=\rho d^2/(T\mu)<<1$ ($Sh=d/(vT)$ – число Струхала, $T\sim\ell/v$ – характерное время) движение допустимо считать квазистационарным и не учитывать силы инерции, обусловленные локальным ускорением. Принимаем среднюю плотность тела животного близкой к плотности окружающей жидкости ($\rho=10^{3}$ кг/м^3). Имеем для объектов малых размеров $ReSh=0{,}1$, для крупных $ReSh=2500$. Следовательно, силами инерции тела животного можно пренебречь.

Ограничим рассмотрение животными, имеющими достаточно вытянутое тело (малых размеров рыбы типа угря в высыхающем водоёме, личинки некоторых насекомых, сперматозоиды, микроорганизмы), так что выполняется условие $\ell>>d$. Для направленного перемещения животного, ему необходимо совершать рептационное движение, например, в горизонтальной плоскости. Упругая ось лежит на цилиндрической поверхности, перпендикулярной плоскости xOy и проходящей через ось симметрии позвоночника. Позвоночник можно рассматривать как ломаную кривую, состоящую из конечного числа элементов (чередующихся стержней и шарниров). Однако будем считать, что количество позвонков бесконечно и упругая ось является сплошной кривой. Для беспозвоночных животных будем полагать, что упругая ось проходит через центры поперечных сечений.

Центральная нервная система посылает управляющие сигналы мышцам тела, так что формируется бегущая волна, близкая синусоидальной. Количество управляющих нервных импульсов конечно и соответствует количеству рабочих мышц, равномерно расположенных по всей длине тела. Однако будем считать, что число мышц бесконечно, а нервный управляющий сигнал описывается монотонной непрерывной функцией.

Архимедова сила отсутствует, поскольку обычно плотность животных близка к плотности окружающей жидкости. Режим движения ламинарный.

Принципиальным отличием движения животных в жидкости от движения суспензии частиц является распределение механической энергии. В случае суспензии механическая энергия поступает со стороны окружающей жидкости к частице, изменяя ее конфигурацию или положение. В случае животного источником энергии является сама «частица». И если условно считать, что в целом жидкость неподвижна, то рассеивание механической энергии (за счет вязкой диссипации) локализовано в небольшой области, окружающей тело животного, – в области гидродинамического пограничного слоя.

Введем неподвижную в пространстве (или «вмороженную» в жидкость) систему координат (x, y, z). Обозначим через x,y,z координаты точек упругой линии тела s. Векторную параметризацию кривой s выполняет вектор – функция $\mathbf{r}(s, t)$, $-l \le s \le l$, где t – время. Направлениям x, y, z соответствует правосторонне ориентированный триэдр ($\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$). Обозначим через $\mathbf{l}$ ($\mathbf{l}=\mathbf{r}_s$, $|\mathbf{l}|=1$) вектор касательной к упругой линии, $\mathbf{n}=\mathbf{b}\times\mathbf{l}$ – вектор нормали, $\mathbf{b}$ – вектор бинормали.

Уравнения равновесия имеют вид

$$\mathbf{F}_s= -\mathbf{K}, \qquad \mathbf{M}_s=\mathbf{F}\times\mathbf{l},$$

где $\mathbf{M}$ – момент, $\mathbf{F}=(\mathbf{F}\mathbf{l})\mathbf{l}+(\mathbf{F}\mathbf{n})\mathbf{n}=N\mathbf{l}+Q\mathbf{n}$ -сила, $\mathbf{K}$– линейная плотность внешних сил.

При движении животного сила трения обусловлена разностью скоростей упругой оси тела $\mathbf{r}_t$ и жидкости $\mathbf{V}$, поэтому выражение для $\mathbf{K}$ имеет вид

$$\mathbf{K}=A\mathbf{l}((\mathbf{r}_t -\mathbf{V})\mathbf{l})+B\mathbf{n}((\mathbf{r}_t -\mathbf{V})\mathbf{n}),$$

где $\mathbf{V}$– скорость жидкости; $A = 2\pi\mu \big/ \ln\left(0,952/\sqrt{c}\right)$ – коэффициент, характеризующий продольную составляющую силы трения; μ - вязкость жидкости; c– объемная концентрация животных в жидкости; $B = 4\pi\mu/\ln(7,4/\mathrm{Re})$ - коэффициент, характеризующий поперечную составляющую силы трения; $\mathrm{Re} = \langle v\rangle \rho d/\mu$ - число Рейнольдса; ρ– плотность жидкости; $\langle v\rangle$ – характерная скорость. Нижним индексом обозначены производные.

В скалярной форме имеем систему уравнений

$$N_s-Q\varphi_s= -A(\mathbf{r}_t -\mathbf{V})\mathbf{l}, \qquad N\varphi_s+Q_s= -B(\mathbf{r}_t -\mathbf{V})\mathbf{n}.$$

Выполнив скалярные умножения в последних уравнениях с учетом соотношений $\mathbf{r}_t-\mathbf{V}=(x_t-v_x)\mathbf{i}+(y_t-v_y)\mathbf{j}$, $\mathbf{l}=\cos\varphi\mathbf{i}+\sin\varphi\mathbf{j}$, $\mathbf{n}= -\sin\varphi\mathbf{i}+\cos\varphi\mathbf{j}$, получим

$$N_s-Q\varphi_s= -A[(x_t-v_x)\cos\varphi+(y_t-v_y)\sin\varphi],$$

$$N\varphi_s+Q_s= -B[-(x_t-v_x)\sin\varphi+(y_t-v_y)\cos\varphi], \qquad M_s=-Q, \qquad (5.1)$$

где N – осевая сила, Q– перерезывающая сила, M – изгибающий момент.

Соответственно, «улучшенные» уравнения (2.59) (полученные в результате исключения функций x,y) для рассматриваемой плоской задачи будут иметь вид

$$\varphi_t+B^{-1}(N\varphi_s+Q_s)_s+A^{-1}\varphi_s(N_s-Q\varphi_s)= \frac{\partial v_y}{\partial y}\sin 2\varphi-\frac{\partial v_x}{\partial y}\sin^2\varphi+\frac{\partial v_y}{\partial x}\cos^2\varphi,$$

$$\varphi_s B^{-1}(N\varphi_s+Q_s)-A^{-1}(N_s-Q\varphi_s)_s=-0.5\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}+\frac{\partial v_y}{\partial x}\right)\sin 2\varphi-\frac{\partial v_x}{\partial x}\cos 2\varphi. \qquad (5.2)$$

Уравнения (5.1), (5.2) необходимо дополнить геометрическими соотношениями

$$x_s=\cos\varphi, \quad y_s=\sin\varphi. \qquad (5.3)$$

и краевыми условиями

$$t=0, \quad x=x_0(s), \quad y=y_0(s), \qquad (5.4)$$
$$t>0, \quad s=0: \quad N=Q=0, \quad s=\ell: \quad N=Q=0.$$

Для удобства анализа разрешим уравнения (5.1) относительно функций x_t, y_t

$$x_t= -A^{-1}(N_s-Q\varphi_s)\cos\varphi+B^{-1}(N\varphi_s+Q_s)\sin\varphi+v_x,$$
$$y_t =-A^{-1} (N_s-Q\varphi_s)\sin\varphi -B^{-1}(N\varphi_s+Q_s)\cos\varphi+v_y. \qquad (5.5)$$

Далее рассмотрим случай неподвижной жидкости, т.е. полагаем $\mathbf{V}=0$ ($v_x=0$, $v_y=0$). Лобовое сопротивление не учитываем. Уравнение, связывающее момент и угол изгиба через изгибную жесткость, в рассматриваемой задаче лишено физического смысла (как и понятие упругого стержня), поэтому не используется.

5.1.1. Решение задачи

Перейдем к безразмерным параметрам и переменным, взяв в качестве масштаба силы наибольшее значение перерезывающего усилия Q ($Q_o=|\max Q|$)

$$\{X,Y,S\}=\frac{\{x,y,s\}}{\ell}, \qquad e=\frac{A}{B}, \quad n=\frac{N}{Q_0}, \quad q=\frac{Q}{Q_0}, \quad \tau=\frac{Q_0 t}{A\ell^2},$$

$$\Omega=\frac{\omega A\ell^2}{Q_0}, \quad K=k\ell, \quad w=AlW/Q_o^2, \qquad (5.6)$$

где ω - частота колебаний.

С учетом (5.6) определяющие уравнения (5.2)-(5.5) примут вид

$$n\varphi_s+q_s=Z, \qquad (5.7)$$
$$n_s-q\varphi_s=D, \qquad (5.8)$$
$$\varphi_\tau+eZ_s+\varphi_s D=0, \qquad (5.9)$$
$$e\varphi_s Z- D_s=0, \qquad (5.10)$$
$$X_\tau= -D\cos\varphi+eZ\sin\varphi, \qquad (5.11)$$
$$Y_\tau = -D\sin\varphi -eZ \cos\varphi, \qquad (5.12)$$
$$X_s=\cos\varphi, \quad Y_s=\sin\varphi. \qquad (5.13)$$
$$\tau=0: \quad X=X_0(S), Y=Y_0(S), \qquad (5.14)$$
$$\tau>0, \quad S=0: \quad n=q=0; \quad S=1: \quad n=q=0. \qquad (5.15)$$

Для краткости записи и удобства последующего анализа введены две вспомогательные функции D(S, τ), Z(S, τ), определенные уравнениями (5.7), (5.8). Момент в решении не используется, поэтому последнее уравнение из (5.1) опущено.

Нервные импульсы, поступающие к мышцам животного, формируют бегущую волну, обеспечивающую поступательное движение. В уравнениях (5.7)-(5.15) необходимо априорно задать вид одной из функций n, q или φ. Примем следующее выражение для плоской бегущей волны

$$\varphi=\varepsilon\sin(KS-\Omega\tau), \qquad (5.16)$$

где Ω -безразмерная частота, ε- безразмерный параметр ($|\varepsilon|\le 1$), $K=2\pi i$, $i=1,2,3\ldots$.Согласно последнему равенству длина тела обеспечивает четное количество полуволн. При этом значительно упрощаются расчетные выражения.

Считаем, что функции D и Z зависят от φ. При этом уравнение (5.9) можно записать так

$$\varphi_\tau+eZ_\varphi\varphi_s+D\varphi_s=0,$$

где $Z_\varphi=\partial Z/\partial\varphi$. С учетом выражения (5.16), последнее уравнение можно записать так

$$-\Omega+eKZ_\varphi+K\,D=0. \qquad (5.17)$$

Соответственно, уравнение (5.10) примет вид

$$D_\varphi = eZ\,. \qquad (5.18)$$

Продифференцировав уравнение (5.18) по φ и подставив в (5.17), получим неоднородное линейное дифференциальное уравнение второго порядка

$$D_{\varphi\varphi}+D=\Omega/K.$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$D=C_1\sin\varphi+C_2\cos\varphi+\Omega/K, \qquad (5.19)$$

где C_1,C_2 – неизвестные функции времени.

Подставив выражение (5.19) в (5.18), найдем функцию Z

$$Z=e^{-1}(C_1\cos\varphi-C_2\sin\varphi). \qquad (5.20)$$

Используя уравнения (5.7), (5.8), найдем функции n и q, считая также, что эти функции зависят от φ. Уравнения (5.7),(5.8) с учетом (5.19),(5.20) примут вид

$$n+q_\varphi=Z\varphi_s^{-1}, \qquad (5.21)$$

$$n_\varphi-q=D\varphi_s^{-1}. \qquad (5.22)$$

Продифференцировав обе части уравнения (5.22) по φ и сложив с (5.21), получим неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка для функции n

$$n_{\varphi\varphi}+n=Z\varphi_s^{-1}+(D\varphi_s^{-1})_\varphi.$$

Решение полученного уравнения имеет вид

$$n=C_3\sin\varphi+C_4\cos\varphi-\cos\varphi\int[Z\varphi_s^{-1}+(D\varphi_s^{-1})_\varphi]\sin\varphi d\varphi+$$

$$+\sin\varphi\int[Z\varphi_s^{-1}+(D\varphi_s^{-1})_\varphi]\cos\varphi d\varphi,$$

или после интегрирования по частям и несложных преобразований

$$n=C_3\sin\varphi+C_4\cos\varphi- \qquad (5.23)$$

$$-\cos\varphi\Big[\int_0^1 e^{-1}(C_1\cos\varphi-C_2\sin\varphi)\sin\varphi dS-\int_0^1(C_1\sin\varphi+C_2\cos\varphi+\Omega/K)\cos\varphi dS\Big]+$$

$$+\sin\varphi\,[\int_0^1 e^{-1}(C_1\cos\varphi - C_2\sin\varphi)\cos\varphi dS + \int_0^1 (C_1\sin\varphi + C_2\cos\varphi + \Omega/K)\sin\varphi\, dS]\,.$$

Подставив выражение (5.23) в уравнение (5.22), найдем перерезывающее усилие

$$q = C_3\cos\varphi - C_4\sin\varphi + \qquad (5.24)$$

$$+\sin\varphi\,[\int_0^1 e^{-1}(C_1\cos\varphi - C_2\sin\varphi)\sin\varphi dS - \int_0^1 (C_1\sin\varphi + C_2\cos\varphi + \Omega/K)\cos\varphi dS] +$$

$$+\cos\varphi\,[\int_0^1 e^{-1}(C_1\cos\varphi - C_2\sin\varphi)\cos\varphi dS + \int_0^1 (C_1\sin\varphi + C_2\cos\varphi + \Omega/K)\sin\varphi\, dS]\,.$$

Неизвестные C_1-C_4 найдем, используя условие (5.15). Условие $\tau>0$, $S=0$: $n=q=0$ для (5.23), (5.24) приводит к системе уравнений

$$C_3\sin\varphi_o + C_4\cos\varphi_o = 0, \qquad C_3\cos\varphi_o - C_4\sin\varphi_o = 0,$$

где $\varphi_o=\varphi_{(s=0)}$. Решение этой системы имеет вид $C_3 = C_4 = 0$.

Неизвестные коэффициенты C_1, C_2 найдем, используя условие из (5.15) $\tau>0$, $S=1$: $n=q=0$. При этом выражения (5.23), (5.24) приводят к системе уравнений

$$-\cos\varphi_o[\int_0^1 e^{-1}(C_1\cos\varphi - C_2\sin\varphi)\sin\varphi dS - \int_0^1 (C_1\sin\varphi + C_2\cos\varphi + \Omega/K)\cos\varphi dS] +$$

$$+\sin\varphi_o[\int_0^1 e^{-1}(C_1\cos\varphi - C_2\sin\varphi)\cos\varphi dS + \int_0^1 (C_1\sin\varphi + C_2\cos\varphi + \Omega/K)\sin\varphi\, dS] = 0,$$

$$\sin\varphi_o[\int_0^1 e^{-1}(C_1\cos\varphi - C_2\sin\varphi)\sin\varphi dS - \int_0^1 (C_1\sin\varphi + C_2\cos\varphi + \Omega/K)\cos\varphi dS] +$$

$$+\cos\varphi_o[\int_0^1 e^{-1}(C_1\cos\varphi - C_2\sin\varphi)\cos\varphi dS + \int_0^1 (C_1\sin\varphi + C_2\cos\varphi + \Omega/K)\sin\varphi\, dS] = 0.$$

Здесь учитывалось равенство $\varphi_o=\varphi_{(s=0)}=\varphi_{(s=1)}$, непосредственно следующее из условия $K=2\pi i$, $i=1,2,\ldots$

После несложных преобразований приходим к следующей системе уравнений

$$C_1(e^{-1}-1)\int_0^1 \cos\varphi\,\sin\varphi dS + C_2[(1-e^{-1})\int_0^1 \sin^2\varphi\, dS - 1] = \Omega/K\int_0^1 \cos\varphi dS,$$

$$C_1[e^{-1} + (1-e^{-1})\int_0^1 \sin^2\varphi dS] + C_2(1-e^{-1})\int_0^1 \cos\varphi\sin\varphi dS = -\Omega/K\int_0^1 \sin\varphi dS.$$

С учетом равенств

$$\int_0^1 \cos\varphi\sin\varphi dS = 0, \qquad \int_0^1 \sin\varphi\, dS = 0,$$

находим

$$C_1=0, \qquad C_2=\frac{\Omega}{K}\frac{\int\limits_0^1 \cos\varphi dS}{\left(1-\frac{1}{e}\right)\int\limits_0^1 \sin^2\varphi dS-1}.$$

Полагая в (5.16) $|\varepsilon|\langle\langle 1$ и разлагая подынтегральные функции в ряд, после интегрирования с точностью до членов порядка ε^4, можем записать

$$C_2=\frac{\Omega}{K}\frac{\left(1-\frac{\varepsilon^2}{4}+\frac{\varepsilon^4}{64}+...\right)}{\left(1-\frac{1}{e}\right)\left(\frac{\varepsilon^2}{2}-\frac{\varepsilon^4}{8}+...\right)-1}. \qquad (5.25)$$

Определим траекторию движения упругой оси животного. Уравнения (5.11), (5.12) с учетом выражений (5.19), (5.20), (5.25) примут вид

$$X_\tau= -\frac{\Omega}{K}\cos\varphi\text{-}C_2, \qquad Y_\tau = -\frac{\Omega}{K}\sin\varphi.$$

Выполнив интегрирование, получим

$$X= -\frac{\Omega}{K}\int\limits_0^\tau \cos\varphi d\tau\text{-}C_2\tau+X_o(S), \qquad Y = -\frac{\Omega}{K}\int\limits_0^\tau \sin\varphi \sin\varphi\, d\tau+Y_o(S), \qquad (5.26)$$

где $X_o(S)$, $Y_o(S)$- неизвестные функции.

С другой стороны, интегрируя геометрические соотношения (5.13), можем записать

$$X= C_5(\tau) +\int\limits_0^S \cos\varphi\, dS, \qquad Y = C_6(\tau) +\int\limits_0^S \sin\varphi\, dS. \qquad (5.27)$$

Любая точка упругой оси биологического объекта описывает одну и туже траекторию. Условно можно положить, что значению S=0 отвечает «траектория хвоста» животного. Приравнивая выражения (5.26), (5.27) при S=0 получим равенства

$$X(S=0)= -\frac{\Omega}{K}\int\limits_0^\tau \cos\varphi_o d\tau\text{-}C_2\tau+X_o(S=0)= C_5(\tau),$$

$$Y(S=0) = -\frac{\Omega}{K}\int\limits_0^\tau \sin\varphi_o d\tau+Y_o(S=0) = C_6(\tau). \qquad (5.28)$$

Начальное условие (5.14) сводит первое равенство к соотношению $X=X_o(S=0)=C_5(\tau)=0$ при $\tau=0$. Кроме того, сопоставляя выражения для X в (5.26) и (5.27) в момент времени $\tau=0$, можем записать равенство

$$X(S=0)= X_o(S=0)= \int\limits_0^S \cos\varphi(\tau=0)dS.$$

Следовательно, выражение для X (5.26) примет вид

$$X= -\frac{\Omega}{K}\int\limits_0^\tau \cos\varphi d\tau\text{-}C_2\tau+\int\limits_0^S \cos\varphi\, (\tau=0)dS. \qquad (5.29)$$

Второе равенство в (5.28) для начального момента времени дает соотношение

$$Y(S=0,\ \tau=0) = Y_o(S=0) = C_6(\tau=0).$$

Кроме того, из вторых выражений в (5.26), (5.27) следует соотношение

$$Y(\tau=0) = Y_o(S) = C_6(\tau=0) + \int_0^S \sin\varphi\,(\tau=0)\,dS.$$

С учетом полученных последних соотношений расчетная формула для Y (5.26) примет вид

$$Y = Y_o(S=0) + \int_0^S \sin\varphi\,(\tau=0)\,dS - \frac{\Omega}{K}\int_0^\tau \sin\varphi\,d\tau. \qquad (5.30)$$

Постоянную $Y_o(S=0)$ найдем из условия симметричного отклонения упругой оси тела от оси X

$$\int_0^1 Y(\tau=0)\,dS=0\ .$$

Имеем $$Y_o(S=0) = -\int_0^1\int_0^S \sin\varphi(\tau=0)dsds\ .$$

Учитывая, что $\varphi(\tau=0)=\varepsilon\sin KS$, в первом приближении имеем $Y_o(S=0)\cong-\varepsilon/K$.

Выражение для Y в (5.30) с точностью до членов порядка ε^3 имеет вид

$$Y = -\frac{\varepsilon}{K}\cos\left(KS-\Omega\tau\right) + O(\varepsilon^3)\,. \qquad (5.31)$$

Выполнив разложения подынтегральных функций в ряды и интегрируя (5.29), получим приближенное выражение для функции X

$$X = \left(1-\frac{1}{e}\right)\frac{\varepsilon^2\Omega\tau}{2K} + S\left(1-\frac{\varepsilon^2}{4}\right) + \frac{\varepsilon^2}{8K}\sin(2KS-2\Omega\tau) + O(\varepsilon^4)\,. \qquad (5.32)$$

Найдем энергию, затрачиваемую животным на движение. Механическая энергия мышц животного, в конечном счете, превращается в тепло за счет диссипации механической энергии окружающей жидкостью. Согласно результатам гл. 3.4 работу деформации вязкой жидкости W можно определить интегралом

$$W = \int_0^\ell (\mathbf{r}_t-\mathbf{V})\mathbf{K}ds.$$

С учетом соотношений (2.44), (2.54), (2.55) можем записать равенства $\mathbf{r}_t$-$\mathbf{V}$=$-B^{-1}(N\varphi_s+Q_s)\mathbf{n}-A^{-1}(N_s-Q\varphi_s)\mathbf{l}$, $\mathbf{K}=-[(N\varphi_s+Q_s)\mathbf{n}+(N_s-Q\varphi_s)\mathbf{l}]$. При этом расчетная формула примет вид

$$W = \int_0^\ell [B^{-1}(N\varphi_s+Q_s)^2+A^{-1}(N_s-Q\varphi_s)^2]ds.$$

С учетом (5.6) запишем это выражение в безразмерном виде

$$w=\int_0^1 [e(n\varphi_s+q_s)^2+(n_s-q\varphi_s)^2]dS.$$

Принимая во внимание выражения (5.7), (5.8), запишем подынтегральную функцию через функции D, Z

$$w=\int_0^1 (eZ^2+D^2)dS.$$

С учетом результатов (5.19), (5.20), (5.25), можем записать

$$w=C_2^2\left(\frac{1}{e}-1\right)\int_0^1 \sin^2\varphi dS+C_2^2+\frac{\Omega^2}{K^2}+2C_2\frac{\Omega}{K}\int_0^1\cos\varphi dS. \qquad (5.33)$$

Выполнив интегрирование первых членов разложения подынтегральных функций, получим асимптотическую оценку

$$w=\frac{\Omega^2\varepsilon^2}{2eK^2}+O(\varepsilon^4).$$

Используя соотношения (5.6), а также $A=2\pi\mu\big/\ln\left(0,952\big/\sqrt{c}\right)$, $y_m/\ell=\varepsilon/K$, запишем расчетную формулу для энергии в размерном виде

$$W=\frac{2\pi\mu\ell\omega^2y_m^2}{\ln(7,4/Re)}+O(\varepsilon^4). \qquad (5.34)$$

где y_m-размерная амплитуда отклонения упругой оси от оси x.

Выражение для безразмерного осевого усилия (5.23) с учетом результатов (5.25) примет вид

$$n=C_2\{\cos\varphi[(e^{-1}-1)\int_0^S \sin^2\varphi dS+S]+0,5(1-e^{-1})\sin\varphi\int_0^S \sin 2\varphi dS\}+$$

$$+\Omega/K[\sin\varphi\int_0^S \sin\varphi dS+\cos\varphi\int_0^S \cos\varphi dS]. \qquad (5.35)$$

Соответственно, формулу (5.24) можно записать так

$$q=C_2\{0,5\cos\varphi(1-e^{-1})\int_0^S \sin 2\varphi dS-\sin\varphi[(e^{-1}-1)\int_0^S \sin^2\varphi dS+S]\}+$$

$$+\Omega/K[\cos\varphi\int_0^S \sin\varphi dS-\sin\varphi\int_0^S \cos\varphi dS]. \qquad (5.36)$$

Формулы (5.35), (5.36) малопригодны для анализа, поэтому, используя разложения в ряды тригонометрических функций, запишем приближенные выражения для функций n и q

$$n=\frac{\Omega\varepsilon^2}{4K^2}\left\{\left(\frac{1}{e}-\frac{1}{2}\right)\left[\sin(2KS-2\Omega\tau)+\sin 2\Omega\tau\right]-\right.$$

$$\left.-\frac{4}{e}\sin(KS-\Omega\tau)\left[\cos(KS-\Omega\tau)-\cos\Omega\tau\right]\right\}+O(\varepsilon^4), \qquad (5.37)$$

$$q=-\frac{\Omega\varepsilon}{K^2e}\left[\cos(KS-\Omega\tau)+\cos\Omega\tau\right]+O(\varepsilon^3). \qquad (5.38)$$

Таким образом, получено точное аналитическое решение задачи. Определены основные параметры движения животного: осевое усилие описывается выражением (5.34), приближенная формула (5.37); поперечная сила (5.35), приближенно (5.38); затрачиваемая энергия (5.33) и (5.34); траектория движения в параметрической форме точное (5.29), (5.30), приближенное (5.31),(5.32). Для определения момента можно использовать последнее уравнение в (5.1) $M_s=-Q$.

5.1.2. Анализ решения

Множитель первого слагаемого в (5.32) $(1-e^{-1})\varepsilon^2\Omega/(2K)$ характеризует среднюю безразмерную скорость поступательного движения животного вдоль оси X. С учетом (5.6) эту скорость можно записать в размерном виде $y_m^2k\omega$, где $y_m=\varepsilon/k$ –амплитуда колебаний (см. (5.31)). Скорость пропорциональна квадрату амплитуды колебаний, «извитости» тела животного (k) и частоте сокращения мышц (ω).

Согласно выражению (5.37) осевая нагрузка, воспринимаемая позвоночником, имеет циклический характер. Амплитуда нагрузки ($N/Q_o \cong \omega A y_m^2/Q_o$) пропорциональна частоте сокращения мышц (ω), квадрату отклонения (y_m^2) и осевой силе трения (A). Отметим, что сила лобового сопротивления не учитывалась.

Перерезывающая сила (5.38), воспринимаемая межпозвоночными дисками, также имеет циклический характер. Амплитуда силы ($Q/Q_o \cong \omega B\, y_m/(Q_o k)$) пропорциональна частоте сокращения мышц (ω), отклонению (y_m), поперечной силе трения (B) и обратно пропорциональна частоте изгибов тела (k).

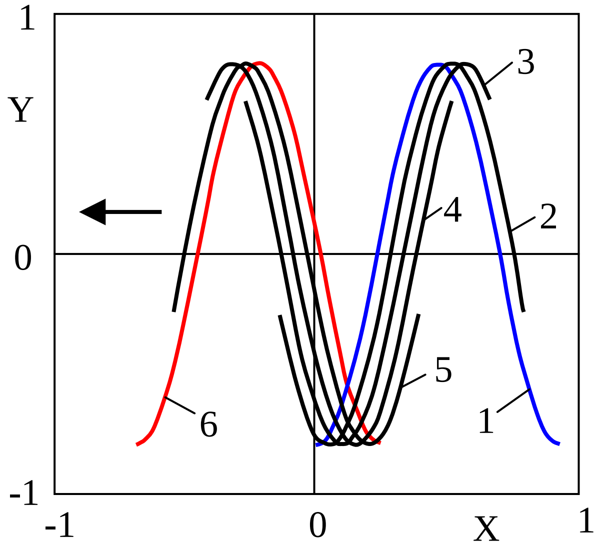

Рис. 5.1.

Согласно выражению (5.34) энергия, затрачиваемая на движение (W), пропорциональна длине тела животного (ℓ), квадрату частоты сокращения мышц (ω^2) и квадрату отклонения (y_m^2).

На рис. 5.1 представлены конфигурации упругой оси тела животного, рассчитанные по формулам (5.31), (5.32) для условий: $\varepsilon=0,5$; $\Omega=2\pi$; $K=2\pi$; $e=2/3$ шаг по τ составлял 2,2. Первой линии отвечает момент времени $\tau=0$, соответственно шестой - $\tau=2,2x5=11$. Объект перемещается в левую сторону (показано стрелкой).

Численный анализ (5.31), (5.32) показывает, что для обеспечения правильного направления движения должно выполняться условие $e<1$.

Параметр е характеризует соотношение продольной и поперечной сил трения и определяется формулой $e = 0{,}5\ln(7{,}4/\mathrm{Re})\Big/\ln\left(0{,}952/\sqrt{c}\right)$. При этом число Рейнольдса может изменяться в следующих пределах $8{,}167c < \mathrm{Re} < 7{,}4$, где Re=vdρ/μ, v-скорость поперечного обтекания тела жидкостью, d- диаметр тела, ρ, μ - плотность и вязкость жидкости, с - объемная концентрация животных в жидкости. Следовательно, полученная математическая модель применима для описания движения животных малого размера.

При е=1 перемещение вдоль оси Х отсутствует. Интересно отметить, что согласно (5.32) при е>1 и прочих равных условиях животное будет перемещаться назад («инверсное» движение). Один из вариантов реализации условия е>1 – закрепление по длине тала с одинаковым шагом, перпендикулярных оси, тонких дисков: поперечное сопротивление обтеканию будет меньше продольного.

Следует отметить, что на поверхности тела некоторых животных выделяется секрет. При этом гидродинамический пограничный слой приобретает неньютоновские свойства. Секрет снижает продольное трение, т.е. параметр е уменьшается. Поэтому, в общем случае, точное определение параметра е весьма проблематично.

Согласно (5.31) параметр ε характеризует безразмерную амплитуду (размах) колебаний тела животного. Согласно (5.32) скорость осевого движения пропорциональна квадрату размаха колебаний (ε^2). Параметр К характеризует извитость упругой оси, а именно число полуволн изогнутого тела: так при К=2π тело имеет две полуволны, при К=4π - четыре, и т.д. Если организовать движение животного без трения в стеклянной трубке, имеющей форму $Y = -\left(\varepsilon/K\right)\cos KS$, $X = S\left(1 - \varepsilon^2/4\right)$, то он имел бы предельно возможную скорость осевого перемещения, равную скорости бегущей волны Ω/К. В реальных условиях объект имеет меньшую скорость. Поэтому параметры ε и е должны удовлетворять условию $0{,}5(e^{-1}-1)\varepsilon^2 \le 1$. Функция φ (см. (5.16)), являясь аргументом тригонометрических функций должна удовлетворять условию φ<π/2. Откуда следует условие ε<π/2. Большие величины параметра ε приводят к искажению формы упругой оси высокочастотными гармониками.

Закон движения животного был задан априорно. Возможно управляющее уравнение (5.16) не является оптимальным, т.е. обеспечивающим минимальные затраты энергии на перемещение. Но этот вопрос требует отдельного рассмотрения.

Как видно из рисунка ориентация головы животного изменяется по периодическому закону, что обусловлено принятой формой «управляющего» уравнения (5.16). Для некоторых животных характерно сохранение осевой (вдоль оси Ox) ориентации головы в процессе движения. В этом случае необходимо принять другое «управляющее» уравнение, которое будет удовлетворять краевому условию: t>0, s=0, φ=0. Кроме того, если в правую часть уравнения (5.16) ввести дополнительное слагаемое, то можно изменять направление движения модели животного: вправо, влево, по кругу, по спирали и другим плоским траекториям.

5.2. ТУРБУЛЕНТНЫЙ РЕЖИМ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Оставляем в силе основные допущения, принятые для ламинарного режима движения. Рассматриваем развитый турбулентный режим, которому соответствует квадратичный закон сопротивления.

Для анализа рассматриваемой задачи ранее использовался принцип, сформулированный М.А.Лаврентьевым [133]. Согласно принципу М.А.Лаврентьева тело животного рассматривалось как упругий стержень, помещенный в твердый канал с переменной кривизной. Роль твердых стенок канала выполняет среда, окружающая тело. При движении в жидкой среде стенками канала служит жидкость, которая в силу своей инерционности при достаточно быстром воздействии практически не смещается от первоначального положения за время, в течение которого происходит существенное перемещение самого организма.

Учениками М.А.Лаврентьева (Кузнецов В.М., Луговцов Б.А., Шер Е.Н.) в 1967 году рассмотрено безвихревое движение в идеальной жидкости, что эквивалентно движению в свободно смещающемся твердом канале, масса которого зависит от формы. При поперечном обтекании цилиндра потенциал определялся методом плоских сечений. Осевая сила трения не учитывалась, поскольку в идеальной жидкости касательное напряжение на поверхности тела равно нулю.

В главе 5.1 рассмотрено рептационное движение животных в ламинарном режиме. Полученные результаты применимы к движению микроорганизмов. Настоящую работу можно рассматривать как развитие подхода гл. 5.1 для описания движения животных в турбулентном режиме. При этом, речь идет о животных сравнительно крупных размеров, например, уж, угорь, мурена и другие рыбы.

В длинноволновом приближении поставлена и решена задача плоского рептационного движения крупных животных в жидкости. Определены энергосиловые и кинематические характеристики движения. Приведены результаты численного анализа.

Гликсман [82], основываясь на теории турбулентного пограничного слоя для неподвижного цилиндра, получил следующее выражение для продольной силы трения, которое хорошо согласуется с экспериментальными данными

$$dP = 0{,}65\,\mathrm{Re}^{-0{,}7}\,\pi d\,\frac{\rho v_\tau^2}{2}\,ds\,,$$

где v_τ - осевая скорость движения цилиндра. В рассматриваемом случае осевая скорость имеет пульсирующий характер. Будем далее считать значение числа Рейнольдса постоянным, соответствующим некоторой средней скорости тела животного.

Поперечная сила трения согласно [148] описывается выражением

$$dF = 0,5\xi d\rho v_n^2 ds,$$

где ξ - коэффициент лобового сопротивления, зависящий от числа Рейнольдса (так при Re=10 значение коэффициента сопротивления ξ=1,3; при Re=10^2, ξ=1,1; при Re=10^3, ξ=1; при Re=10^4, ξ=1). В критическом режиме Re=5x10^5, ξ=0,3 [148]. За исключением критического режима, коэффициент сопротивления, с изменением числа Рейнольдса, изменяется незначительно. В работе [86] для развитого турбулентного движения приведена подобная зависимость $dF = 0,48 d\rho v_n^2 ds$.

По длине тела поперечные и продольные компоненты скорости изменяются по периодическому закону. Тем не менее, в качестве первого приближения для продольной и поперечной составляющих сил сопротивления примем квадратичный закон сопротивления, соответствующий развитому турбулентному режиму. Часто тело водных животных сплюснуто (имеет лентообразную форму), что улучшает его гидродинамические свойства. В этом случае расчетные формулы имеют идентичную форму, отличаясь лишь постоянными множителями. Для упрощения анализа остановимся на теле круглого поперечного сечения. Лобовое сопротивление не учитываем.

Запишем составляющие силы трения в форме

$$dP = A_m v_\tau^2 ds, \qquad dF = B_m v_n^2 ds,$$

где $A_m = 0,65\,\mathrm{Re}^{-0,7}\,\pi d\rho/2$, $B_m = 0,5\xi d\rho$. Для упрощения анализа примем, что параметры A_m, B_m сохраняют постоянное значение.

Мышцам животного необходимо преодолевать не только сопротивление внешней среды, но и силу инерции собственного тела. В первом приближении примем плотность тела равной плотности окружающей жидкости ρ. Выражение для вектора внешних сил, учитывающее квадратичный закон сопротивления и силы инерции тела, имеет вид (окружающая жидкость неподвижна $\mathbf{V}$=0)

$$\mathbf{K} = A_m\,|\mathbf{r}_t|\mathbf{l}(\mathbf{r}_t\,\mathbf{l}) + B_m|\mathbf{r}_t|\mathbf{n}(\mathbf{r}_t\,\mathbf{n}) - \rho\frac{\pi d^2}{4}\,\mathbf{l}(\mathbf{r}_{tt}\,\mathbf{l}) - \rho\frac{\pi d^2}{4}\,\mathbf{n}(\mathbf{r}_{tt}\,\mathbf{n}), \qquad (5.39)$$

где $|\mathbf{r}_t| = \sqrt{x_t^2 + y_t^2}$ - модуль вектора скорости упругой оси животного.

Остаются в силе уравнения (2.44), (2.45), (см. гл. 2.4.2), поэтому вместо уравнения (2.46) следует записать

$$(N_s - Q\varphi_s)\mathbf{l} + (N\varphi_s + Q_s)\mathbf{n} = -A_m\,|\mathbf{r}_t|\mathbf{l}(\mathbf{r}_t\mathbf{l}) - B_m|\mathbf{r}_t|\mathbf{n}(\mathbf{r}_t\,\mathbf{n}) + \rho\frac{\pi d^2}{4}[\mathbf{l}(\mathbf{r}_{tt}\mathbf{l}) + \mathbf{n}(\mathbf{r}_{tt}\mathbf{n})]. \qquad (5.40)$$

В скалярной форме имеем уравнения

$$N_s - Q\varphi_s = -A_m\,|\mathbf{r}_t|(\mathbf{r}_t\mathbf{l}) + \rho\frac{\pi d^2}{4}(\mathbf{r}_{tt}\mathbf{l}),$$

$$N\varphi_s + Q_s = -B_m|\mathbf{r}_t|(\mathbf{r}_t\mathbf{n}) + \rho\frac{\pi d^2}{4}(\mathbf{r}_{tt}\mathbf{n}). \qquad (5.41)$$

Здесь $\mathbf{r}_t\,\mathbf{l} = x_t\cos\varphi + y_t\sin\varphi$, $\mathbf{r}_t\,\mathbf{n} = -x_t\sin\varphi + y_t\cos\varphi$, $\mathbf{r}_{tt} = x_{tt}\mathbf{i} + y_{tt}\mathbf{j}$.

В уравнении для момента (2.44) необходимо учитывать распределенный момент внешней нагрузки **m**, который обусловлен моментом инерции вращения сечения [97, 149]. С учетом сказанного можем записать

$$\mathbf{M}_s = \mathbf{F} \times \mathbf{l} - \mathbf{m},$$

где $\mathbf{m} = -\rho J \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}\mathbf{b}$, J – момент инерции поперечного сечения тела (постоянный по его длине).

Соответственно, скалярное уравнение для момента имеет вид

$$M_s - \rho J \varphi_{tt} = -Q. \qquad (5.42)$$

Выполнив скалярные умножения в уравнениях (5.41), получим

$$N_s - Q\varphi_s = -A_m \sqrt{x_t^2 + y_t^2}\left(x_t \cos\varphi + y_t \sin\varphi\right) + \rho \frac{\pi d^2}{4}\left(x_{tt}\cos\varphi + y_{tt}\sin\varphi\right),$$

$$N\varphi_s + Q_s = -B_m \sqrt{x_t^2 + y_t^2}\left(-x_t \sin\varphi + y_t \cos\varphi\right) + \rho \frac{\pi d^2}{4}\left(-x_{tt}\sin\varphi + y_{tt}\cos\varphi\right). \qquad (5.43)$$

Имеем систему с распределенными параметрами. Согласно уравнению (5.42) мышцы, расположенные симметрично относительно позвоночника животного, создают момент, который затрачивается на преодоление сил инерции, обусловленных поворотом поперечного сечения тела, и создание перерезывающей силы. В свою очередь, согласно уравнениям (5.43), перерезывающая сила затрачивается на преодоление сил инерции, обусловленных поперечным перемещением тела, и сил гидродинамического сопротивления внешней среды.

Совокупность уравнений (5.3), (5.4), (5.42), (5.43) описывает движение модели животного. К сожалению, выполнить «улучшение» уравнений, путем исключения функций x, y, невозможно ввиду их нелинейности.

Используем безразмерные параметры (5.6), за исключением e, τ, Ω, w, In для которых примем $e = A_m/B_m$, $\tau = t\sqrt{Q_0/\left(A_m \ell^3\right)}$, $\Omega = \omega\sqrt{A_m \ell^3/Q_0}$, $w = W\sqrt{A_m \ell/Q_0^3}$, $In = \rho\pi d^2/\left(4A_m \ell\right)$. В безразмерной форме уравнения (5.3), (5.4), (5.43) имеют вид

$$n_s - q\varphi_s = f_1, \quad f_1 = -\sqrt{X_\tau^2 + Y_\tau^2}\left(X_\tau \cos\varphi + Y_\tau \sin\varphi\right) + In\left(X_{\tau\tau}\cos\varphi + Y_{\tau\tau}\sin\varphi\right), \qquad (5.44)$$

$$n\varphi_s + q_s = f_2, \quad f_2 = -e^{-1}\sqrt{X_\tau^2 + Y_\tau^2}\left(-X_\tau \sin\varphi + Y_\tau \cos\varphi\right) + In\left(-X_{\tau\tau}\sin\varphi + Y_{\tau\tau}\cos\varphi\right),$$

$$X_s = \cos\varphi, \quad Y_s = \sin\varphi,$$

$$\tau = 0: \quad X = X_0(S), \; Y = Y_0(S),$$

$$\tau > 0, \quad S = 0: \quad n = q = 0; \quad S = 1: \quad n = q = 0.$$

Задачу (5.44) необходимо дополнить «управляющим» уравнением движения (5.16). Имеем для четырех неизвестных функций (X, Y, n, q) четыре уравнения. После нахождения перерезывающего усилия можно найти момент, используя уравнение (5.42). Для условий, указанных в гл. 5.1 численное значение фактора инерции In=74,86. Следовательно, последним слагаемым в правой части первых двух уравнений (5.44) пренебрегать нельзя. Решение нелинейной задачи (5.44) возможно численными методами.

Уравнения (5.44) не содержат в сомножителях момента инерции поперечного сечения, следовательно, силы инерции, связанные с инерцией поворота сечений (см. уравнение (5.42)) не оказывают влияния на траекторию движения тела животного, а определяют лишь момент (5.42).

5.2.1. Решение задачи

Положим, что осевое усилие и перерезывающая сила являются функциями φ, т.е. $n=n(\varphi)$, $q=q(\varphi)$, где $\varphi=\varphi(S,\tau)$. При этом первые два уравнения в (5.44) примут вид

$$n_\varphi-q=f_1\varphi_s^{-1},\qquad n+q_\varphi=f_2\varphi_s^{-1},\qquad (5.45)$$

Продифференцируем первое уравнение по φ и сложим со вторым. Получим неоднородное линейное уравнение второго порядка для функции n

$$n_{\varphi\varphi}+n=f_2\varphi_s^{-1}+(f_1\varphi_s^{-1})_\varphi.$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$n=C_1\sin\varphi+C_2\cos\varphi-\cos\varphi\int[f_2\varphi_s^{-1}+(f_1\varphi_s^{-1})_\varphi]\sin\varphi d\varphi+ \qquad (5.46)$$

$$+\sin\varphi\int[f_2\varphi_s^{-1}+(f_1\varphi_s^{-1})_\varphi]\cos\varphi d\varphi,$$

где C_1 и C_2 – постоянные.

Выполнив интегрирование по частям для подынтегральных функций, можем записать

$$\int\left(f_1\varphi_s^{-1}\right)_\varphi\sin\varphi d\varphi=f_1\varphi_s^{-1}\sin\varphi-\int f_1\cos\varphi dS,\quad \int\left(f_1\varphi_s^{-1}\right)_\varphi\cos\varphi d\varphi=f_1\varphi_s^{-1}\cos\varphi+\int f_1\sin\varphi dS.$$

С учетом этих соотношений, выражение (5.46) примет вид

$$n=C_1\sin\varphi+C_2\cos\varphi-\cos\varphi[\int_0^S f_2\sin\varphi dS-\int_0^S f_1\cos\varphi dS]+ \qquad (5.47)$$

$$+\sin\varphi[\int_0^S f_2\cos\varphi dS+\int_0^S f_1\sin\varphi dS].$$

Используя первое уравнение в (5.44), найдем перерезывающее усилие. Имеем $q=\varphi_s^{-1}(n_s-f_1)$. Продифференцировав выражение (5.47) по S, получим

$$n_s=C_1\varphi_s\cos\varphi-C_2\varphi_s\sin\varphi+\varphi_s\sin\varphi[\int_0^S f_2\sin\varphi dS-\int_0^S f_1\cos\varphi dS]+$$

$$+\varphi_s\cos\varphi[\int_0^S f_2\cos\varphi dS+\int_0^S f_1\sin\varphi dS]+f_1.$$

Следовательно, перерезывающая сила определяется выражением

$$q=C_1\cos\varphi-C_2\sin\varphi+\sin\varphi[\int_0^S f_2\sin\varphi dS-\int_0^S f_1\cos\varphi dS]+ \qquad (5.48)$$

$$+\cos\varphi[\int_0^S f_2\cos\varphi dS+\int_0^S f_1\sin\varphi dS].$$

Постоянные в выражениях (5.47), (5.48) найдем из условия отсутствия сил на левом конце (S=0, n=q=0) тела (5.44). При этом получим систему уравнений

$$C_1 \sin\varphi_o + C_2\cos\varphi_o=0, \qquad C_1 \cos\varphi_o - C_2 \sin\varphi_o =0,$$

где $\varphi_o=\varphi_{(s=0)}$. Решение системы имеет вид $C_1 = C_2=0$.

Граничное условие для правого конца (S=1, n=q=0) тела животного (5.44) приводит к следующей системе уравнений

$$-\cos\varphi_o\left[\int_0^1 f_2\sin\varphi dS-\int_0^1 f_1\cos\varphi dS\right]+\sin\varphi_o\left[\int_0^1 f_2\cos\varphi dS+\int_0^1 f_1 \sin\varphi dS\right]=0,$$

$$\sin\varphi_o\left[\int_0^1 f_2\sin\varphi dS-\int_0^1 f_1\cos\varphi dS\right]+\cos\varphi_o\left[\int_0^1 f_2\cos\varphi dS+\int_0^1 f_1 \sin\varphi dS\right]=0.$$

Здесь учитывалось свойство функции (5.16) $\varphi_o=\varphi_{(S=0)}=\varphi_{(S=1)}$. Отсюда следует равенство нулю коэффициентов системы (единственное решение)

$$\int_0^1 (f_2\sin\varphi -f_1\cos\varphi)dS=0, \qquad \int_0^1 (f_2\cos\varphi +f_1 \sin\varphi)dS=0. \qquad (5.49)$$

Подставив в (5.49) выражения для функций f_1 и f_2 из (5.44), запишем эти уравнения в развернутой форме

$$\int_0^1 \left\langle \sqrt{X_\tau^2+Y_\tau^2}\,\{X_\tau[1+(e^{-1}-1)\sin^2\varphi]+0{,}5\,(1-e^{-1})\,Y_\tau \sin2\varphi\}-\ln X_{\tau\tau}\right\rangle dS=0, \quad (5.50)$$

$$\int_0^1 \left\langle \sqrt{X_\tau^2+Y_\tau^2}\,\{0{,}5(e^{-1}-1)X_\tau \sin2\varphi-Y_\tau[e^{-1}+(1- e^{-1})\sin^2\varphi]\}+\ln Y_{\tau\tau}\right\rangle dS=0.$$

Используя геометрические соотношения для упругой оси животного, а также выражение (5.16), получим следующие уравнения для функций X,Y

$$X_S=\cos\varphi=1-\frac{\varphi^2}{2!}+\ldots=1-\frac{\varepsilon^2}{2}\sin^2\left(KS-\Omega\tau\right)+\ldots, \qquad (5.51)$$

$$Y_S=\sin\varphi=\varphi-\frac{\varphi^3}{3!}+\ldots=\varepsilon\sin\left(KS-\Omega\tau\right)-\frac{\varepsilon^3}{6}\sin^3\left(KS-\Omega\tau\right)+\ldots.$$

Анализ задачи ведем методом малого параметра, в качестве которого примем амплитуду «геометрического» возмущения ε в (5.16). Ищем функции X, Y в виде прямых разложений по степеням малого параметра. В соответствии с разложениями (5.51), запишем для искомых функций

$$X=X_o+\varepsilon^2X_2+\ldots, \qquad Y=\varepsilon Y_1+\varepsilon^3Y_3{}^3+\ldots, \qquad |\varepsilon|<<1. \qquad (5.52)$$

Подробный анализ задачи показал, что члены с нечетными степенями ε в X и четными – в Y равны нулю. Ограничиваясь двумя первыми членами разложения функции X и одним – для Y, в результате интегрирования уравнений (5.51) в пределах от 0 до S с учетом (5.52), получим

$$X_o=S+C_3(\tau), \qquad X_2=-\frac{1}{2K}\left[\frac{KS}{2}-\frac{\sin2\left(KS-\Omega\tau\right)}{4}-\frac{\sin2\Omega\tau}{4}\right]+C_4(\tau),$$

$$Y_1=-\frac{1}{K}\left[\cos\left(KS-\Omega\tau\right)-\cos\Omega\tau\right]+C_5(\tau), \qquad (5.53)$$

где C_3 - C_5 – неизвестные функции времени.

Функция C_3 характеризует перемещение животного вдоль оси X. Но поскольку X_o не зависит от амплитуды возмущения ε, следует положить $C_3=0$.

Пусть в начальный момент левый конец тела животного находится в сечении X=0, а упругая ось расположена «симметрично» относительно оси X (статический момент упругой оси относительно оси X равен нулю). При этом имеем условия

$$\tau=0,\ S=0:\ \ X=0, \tag{5.54}$$

$$\tau=0:\ \ \int_0^1 Y dS = 0. \tag{5.55}$$

Учитывая соотношения (5.52), (5.53) и условие (5.54), получим равенство

$$\varepsilon^2 C_4(\tau=0)+\ldots=0.$$

Откуда следует начальное условие для неизвестной функции времени

$$\tau=0, \qquad C_4=0. \tag{5.56}$$

Подставив (5.52) и (5.53) в (5.55), получим для любого момента времени

$$\varepsilon(K^{-1}\cos\Omega\tau + C_5)+\ldots=0.$$

Здесь учитывались равенства: $K=2\pi n$, $n=1,2,3,\ldots$, $\sin K=0$, $\cos K=1$. Таким образом, функция C_5 имеет вид

$$C_5=-K^{-1}\cos\Omega\tau. \tag{5.57}$$

Согласно (5.52), (5.53), (5.57) для функции Y можем записать

$$Y=-\frac{\varepsilon}{K}\cos\left(KS-\Omega\tau\right)+O\left(\varepsilon^3\right). \tag{5.58}$$

Для отыскания функции C_4 используем уравнения (5.50). Подставив разложения (5.52) в (5.50), получим (учитываем только члены рассматриваемых порядков)

$$\int_0^1\left\langle\left(\varepsilon\left|Y_{1\tau}\right|+\frac{\varepsilon^3}{2}\frac{X_{2\tau}^2}{Y_{1\tau}}+\ldots\right)\{\varepsilon^2X_{2\tau}[1+(e^{-1}-1)(\varepsilon\varphi_1)^2]+(1-e^{-1})\varepsilon^2Y_{1\tau}\varphi_1\}-\mathrm{In}\,\varepsilon^2X_{2\tau\tau}\right\rangle dS=0,$$

$$\int_0^1\left\langle\left(\varepsilon\left|Y_{1\tau}\right|+\frac{\varepsilon^3}{2}\frac{X_{2\tau}^2}{Y_{1\tau}}+\ldots\right)\{(e^{-1}-1)\varepsilon^3X_{2\tau}\varphi_1-\varepsilon Y_{1\tau}[e^{-1}+(1-e^{-1})\varepsilon^2\varphi_1^2]\}+\mathrm{In}\,\varepsilon Y_{1\tau\tau}\right\rangle dS=0,$$

где $\varphi_1=\sin(KS-\Omega\tau)$. Использовались соотношения

$$\sin^2\varphi\approx\varepsilon^2\varphi_1^2+\ldots,\quad \sin2\varphi\approx2\varepsilon\varphi_1+\ldots,\quad \sqrt{\left(\varepsilon^2X_{2\tau}\right)^2+\left(\varepsilon Y_{1\tau}\right)^2}\approx\varepsilon\left|Y_{1\tau}\right|+\frac{\varepsilon^3}{2}\frac{X_{2\tau}^2}{Y_{1\tau}}+\ldots.$$

Выделив множители при одинаковых степенях ε, получим уравнения

$$\varepsilon^1:\qquad \int_0^1 Y_{1\tau\tau}dS=0, \tag{5.59}$$

$$\varepsilon^2:\qquad \int_0^1 X_{2\tau\tau}dS=0,\qquad \int_0^1 Y_{1\tau}^2dS=0, \tag{5.60}$$

$$\varepsilon^3:\qquad \int_0^1\left[\left|Y_{1\tau}\right|X_{2\tau}+\left|Y_{1\tau}\right|\left(1-e^{-1}\right)Y_{1\tau}\varphi_1\right]dS=0, \tag{5.61}$$

Уравнения (5.59) и второе в (5.60) являются тождествами. Из первого уравнения в (5.60) с учетом (5.53) находим функцию C_4

$$C_4 = -\frac{1}{8K}\sin 2\Omega\tau + C_{40}\tau + C_{41}, \qquad (5.62)$$

где C_{40}, C_{41} – постоянные. С учетом условия (5.56) находим $C_{41}=0$.

Постоянную C_{40} найдем, используя уравнение (5.61). Интегрируя это уравнение с учетом выражений (5.53), (5.58), (5.62), получим

$$C_{40} = -\frac{\Omega}{12K}\frac{(8-7e)}{e}.$$

Учитывая соотношения (5.52), (5.53), (5.62) запишем выражение для функции X

$$X = S\left(1-\frac{\varepsilon^2}{4}\right) + \frac{\varepsilon^2}{8K}\sin 2(KS-\Omega\tau) - \frac{\varepsilon^2\Omega(8-7e)\tau}{12eK} + O(\varepsilon^4). \qquad (5.63)$$

Выражения (5.47), (5.48) после несложных преобразований примут вид

$$n=-\cos\varphi\int_0^S\left\langle\sqrt{X_\tau^2+Y_\tau^2}\ \{X_\tau[1+(e^{-1}-1)\sin^2\varphi]+0{,}5\,(1-e^{-1})\,Y_\tau\sin 2\varphi\}-\mathrm{In}\,X_{\tau\tau}\right\rangle dS+$$

$$+\sin\varphi\int_0^S\left\langle\sqrt{X_\tau^2+Y_\tau^2}\ \{0{,}5(e^{-1}-1)X_\tau\sin 2\varphi-Y_\tau[e^{-1}+(1-e^{-1})\sin^2\varphi]\}+\mathrm{In}\,Y_{\tau\tau}\right\rangle dS,$$

$$q=\sin\varphi\int_0^S\left\langle\sqrt{X_\tau^2+Y_\tau^2}\ \{X_\tau[1+(e^{-1}-1)\sin^2\varphi]+0{,}5\,(1-e^{-1})\,Y_\tau\sin 2\varphi\}-\mathrm{In}\,X_{\tau\tau}\right\rangle dS+$$

$$+\cos\varphi\int_0^S\left\langle\sqrt{X_\tau^2+Y_\tau^2}\ \{0{,}5(e^{-1}-1)X_\tau\sin 2\varphi-Y_\tau[e^{-1}+(1-e^{-1})\sin^2\varphi]\}+\mathrm{In}\,Y_{\tau\tau}\right\rangle dS.$$

Если в эти выражения подставить выражения (5.58) и (5.63), то получим асимптотические оценки для осевой силы и перерезывающего усилия

$$n=\varepsilon^2\frac{\Omega^2}{K^2}\cos[\varepsilon\sin(KS-\Omega\tau)]\left[\frac{2-e}{3e}J_1+\left(\frac{1}{2}-e^{-1}\right)J_3\right]+\varepsilon^2\frac{\Omega^2}{eK^2}\sin[\varepsilon\sin(KS-\Omega\tau)]J_2-$$

$$-\varepsilon^2\frac{\Omega^2}{4K^2}\mathrm{In}\,[\cos 2(KS-\Omega\tau)-\cos 2\Omega\tau]\cos[\varepsilon\sin(KS-\Omega\tau)]+$$

$$+\varepsilon^2\frac{\Omega^2}{eK^2}\ \mathrm{In}\,[\sin(KS-\Omega\tau)-\sin\Omega\tau]\sin[\varepsilon\sin(KS-\Omega\tau)]+O(\varepsilon^4),$$

$$q=-\varepsilon^2\frac{\Omega^2}{K^2}\sin[\varepsilon\sin(KS-\Omega\tau)]\left[\frac{2-e}{3e}J_1+\left(\frac{1}{2}-e^{-1}\right)J_3\right]+\varepsilon^2\frac{\Omega^2}{eK^2}\cos[\varepsilon\sin(KS-\Omega\tau)]J_2+$$

$$+\varepsilon^2\frac{\Omega^2}{4K^2}\mathrm{In}\,[\cos 2(KS-\Omega\tau)-\cos 2\Omega\tau]\sin[\varepsilon\sin(KS-\Omega\tau)]+$$

$$+\varepsilon^2\frac{\Omega^2}{eK^2}\ \mathrm{In}\,[\sin(KS-\Omega\tau)-\sin\Omega\tau]\cos[\varepsilon\sin(KS-\Omega\tau)]+O(\varepsilon^4), \qquad (5.64)$$

где

$$J_1=\int_0^S\left|\sin\left(KS-\Omega\tau\right)\right|dS=$$

$$=\frac{2}{\pi K}\left\{KS-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n\left(4n^2-1\right)}\left[\sin\left(2n(KS-\Omega\tau)\right)+\sin\left(2n\Omega\tau\right)\right]\right\},$$

$$J_2=\int_0^S\left|\sin\left(KS-\Omega\tau\right)\right|\sin\left(KS-\Omega\tau\right)dS=-\frac{1}{2K}\left\{\left|\sin\left(KS-\Omega\tau\right)\right|\cos\left(KS-\Omega\tau\right)-\right.$$

$$\left.-\left|\sin\left(\Omega\tau\right)\right|\cos\left(\Omega\tau\right)+\arcsin\left[\cos\left(KS-\Omega\tau\right)\right]-\arcsin\left[\cos\left(\Omega\tau\right)\right]\right\},$$

$$J_3=\int_0^S\left|\sin\left(KS-\Omega\tau\right)\right|\sin^2\left(KS-\Omega\tau\right)dS=$$

$$=\frac{1}{2}J_1-\frac{1}{2\pi K}\left\{-\frac{2}{3}KS+\sin\left(2(KS-\Omega\tau)\right)+\sin\left(2\Omega\tau\right)-\right.$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\left(4n^2-1\right)}\left[\sin\left(2(n+1)(KS-\Omega\tau)\right)+\sin\left(2(n+1)\Omega\tau\right)\right]-$$

$$\left.-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-1)\left(4n^2-1\right)}\left[\sin\left(2(n-1)(KS-\Omega\tau)\right)+\sin\left(2(n-1)\Omega\tau\right)\right]\right\}.$$

При вычислении интегралов J_1, J_3 использовалось разложение

$$\left|\sin x\right|=\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos 2x}{1\cdot 3}+\frac{\cos 4x}{3\cdot 5}+\frac{\cos 6x}{5\cdot 7}+...\right).$$

Ряды в (5.20) хорошо сходятся, поэтому достаточно учета первых 2-3 членов.

Найдем энергию, затрачиваемую животным на движение. Согласно результатам гл. 3.4 энергию, затрачиваемую животным W, можно определить интегралом

$$W=\int_0^{\ell}(\mathbf{r}_t\text{-}\mathbf{V})\mathbf{K}ds.$$

С учетом соотношений (5.40), (5.41) можем записать равенства

$\mathbf{K}=-A_m|\mathbf{r}_t|\mathbf{l}(\mathbf{r}_t\mathbf{l})-B_m|\mathbf{r}_t|\mathbf{n}(\mathbf{r}_t\,\mathbf{n})+\rho\frac{\pi d^2}{4}[\mathbf{l}(\mathbf{r}_{tt}\mathbf{l})+\mathbf{n}(\mathbf{r}_{tt}\mathbf{n})]$, $N_s-Q\varphi_s=-A_m|\mathbf{r}_t|(\mathbf{r}_t\mathbf{l})+\rho\frac{\pi d^2}{4}(\mathbf{r}_{tt}\mathbf{l})$,

$N\varphi_s+Q_s=-B_m|\mathbf{r}_t|(\mathbf{r}_t\mathbf{n})+\rho\frac{\pi d^2}{4}(\mathbf{r}_{tt}\mathbf{n})$, $\mathbf{r}_t\mathbf{l}=x_t\cos\varphi+y_t\sin\varphi$, $\mathbf{r}_t\mathbf{n}=-x_t\sin\varphi+y_t\cos\varphi$,

$\mathbf{r}_t=x_t\mathbf{i}+y_t\mathbf{j}$, $\mathbf{r}_{tt}=x_{tt}\mathbf{i}+y_{tt}\mathbf{j}$, $\mathbf{V}=0$.

Выполнив скалярное умножение в подынтегральной функции, можем записать

$$(\mathbf{K}\mathbf{r}_t)=-(N_s-Q\varphi_s)(x_t\cos\varphi+y_t\sin\varphi)-(N\varphi_s+Q_s)(-x_t\sin\varphi+y_t\cos\varphi)+$$

$$+\rho\frac{\pi d^2}{4}[(x_{tt}\cos\varphi+y_{tt}\sin\varphi)(x_t\cos\varphi+y_t\sin\varphi)+(-x_{tt}\sin\varphi+y_{tt}\cos\varphi)(-x_t\sin\varphi+y_t\cos\varphi)].$$

С учетом соотношений (5.44) выражение для безразмерной потребляемой мощности примет вид

$$w=\int_0^1\{-f_1\,(x_t\cos\varphi+y_t\sin\varphi)\text{-}f_2(\text{-}x_t\sin\varphi+y_t\cos\varphi)+In[(x_{tt}\cos\varphi+y_{tt}\sin\varphi)(x_t\cos\varphi+y_t\sin\varphi)+$$

$$+(\text{-}x_{tt}\sin\varphi+y_{tt}\cos\varphi)(\text{-}x_t\sin\varphi+y_t\cos\varphi)]\}dS.$$

Учитывая выражения для f_1 и f_2 в (5.44), подынтегральную функцию можно упростить

$$w=\int_0^1\left\{\sqrt{X_\tau^2+Y_\tau^2}\,[(x_t\cos\varphi+y_t\sin\varphi)^2+e^{-1}(\text{-}x_t\sin\varphi+y_t\cos\varphi)^2]\right\}dS.$$

С учетом результатов (5.58), (5.63), можем записать асимптотическую оценку потребляемой мощности

$$w=\varepsilon^3\frac{\Omega^3}{eK^3}\int_0^1\left|\sin\left(KS-\Omega\tau\right)\right|\sin^2\left(KS-\Omega\tau\right)dS+O(\varepsilon^5).$$

Выполнив интегрирование, получим

$$w=\frac{4\Omega^3\varepsilon^3}{3\pi eK^3}+O(\varepsilon^5).$$

Запишем расчетную формулу для энергии в размерном виде

$$W=\frac{2\omega^3y_m^3\ell\xi\rho d}{3\pi}+O(\varepsilon^5)\,. \qquad (5.65)$$

где y_m-размерная амплитуда отклонения упругой оси тела от оси x.

5.2.2. Анализ решения

Первое слагаемое правой части выражения (5.63) в совокупности с выражением (5.58) описывает упругую ось тела животного. Второе – осевые пульсации тела в процессе движения. Множитель третьего слагаемого $\Omega\varepsilon^2(8\text{-}7e)/(12Ke)$ характеризует среднюю скорость перемещения животного вдоль оси X (как и в ламинарном случае при $\Omega>0$, $K>0$ тело перемешается влево, как показано на рис.5.1). Скорость перемещения не зависит от инерции тела (параметра In). При априорно заданном движении (функция φ) силы инерции влияют на осевое усилие и перерезывающую силу. В размерной форме средняя скорость перемещения $\overline{v}_x$ определяется выражением $\overline{v}_x=-(8\text{-}7e)\,y_m^2\,k\omega/(12e)$. Полученный результат подтверждает идею М.А. Лаврентьева о необходимости учета вязких свойств жидкости [133].

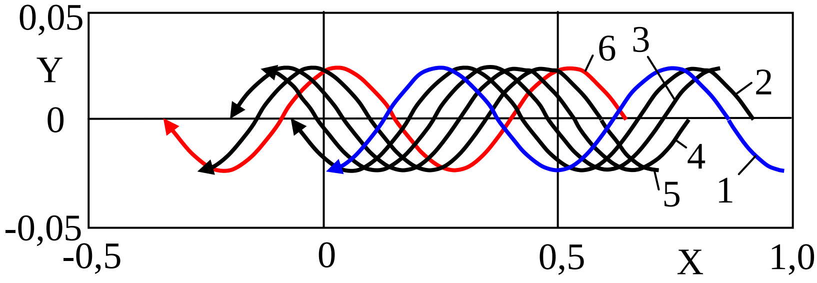

Рис.5.2

Численный анализ (5.58), (5.63) показывает, что для обеспечения правильного направления движения должно выполняться условие e<8/7. Параметр e характеризует соотношение продольной и поперечной сил трения и определяется формулой $e = 0{,}65\pi \mathrm{Re}^{-0,7}$. Число Рейнольдса должно удовлетворять условию $\mathrm{Re}^{0,7} > 0{,}568\pi$.

На рис.5.2 представлены конфигурации упругой оси в различные моменты времени. Расчеты выполнены по формулам (5.58), (5.63) для условий: ε=0,3, Ω=2π, K=4π, e=0,1. Шаг по времени τ составлял 0,25. Кривой 1отвечает момент времени τ=0, соответственно шестой - τ=0,25x5=1,25. Животное перемещается влево (при Ω>0, K>0), вдоль оси X. На каждой линии упругой оси стрелкой показана голова животного. Начальное положение указано синим цветом, конечное – красным.

При снижении продольного трения (уменьшение параметра e) скорость движения возрастает. Поэтому на скорость движения большое влияние оказывает гидродинамический пограничный слой на поверхности тела животного.

Если организовать движение животного в стеклянной трубке без трения, имеющей форму $Y = -(\varepsilon/K)\cos KS$, $X = S(1-\varepsilon^2/4)$, то оно имело бы предельно возможную скорость осевого перемещения, равную скорости бегущей волны Ω/K. В реальных условиях объект имеет меньшую скорость. Поэтому на параметры ε и e накладывается условие $\varepsilon^2(8-7e)/(12e) \le 1$.

При e=8/7 перемещение вдоль оси X отсутствует. Согласно выражению для осевого перемещения (5.63) как и в ламинарном случае возможно «инверсное» движение животного при выполнении условия (8-7e)<0.

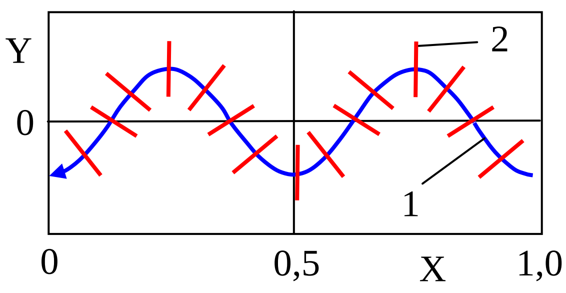

Рис.5.3

Один из технически возможных способов реализации условия e>8/7 состоит в равномерном по длине тела (1) закреплении тонких перпендикулярных оси дисков (2) как показано на рис.5.3. Сопротивление поперечному обтеканию будет значительно ниже, чем продольному. При этом, если животное будет совершать традиционное рептационное движение, то будет перемещаться назад.

Из выражений (5.64) видно, что осевое усилие и перерезывающая сила имеют циклический характер и пропорциональны комплексу $\varepsilon^2\Omega^2/K^2$. Составляющая, обусловленная силами инерции, пропорциональна $\ln \varepsilon^2\Omega^2/K^2$. Используя выражение для q и уравнение (5.42), можно найти момент.

Потребляемая мощность в турбулентном режиме движения (5.65) существенно отличается от формулы для ламинарного режима (5.34). В первом приближении силы инерции не влияют на затрачиваемую мощность. Величину ω можно определить через среднюю скорость движения $\omega=|-12e\overline{v}_x/[(8-7e)y_m^2k]|$. Исключив из выражения (5.65) ω, можем записать

$$W=\frac{1152e^3\overline{v}_x^3\xi\rho d}{(8-7e)^3k^4y_m^3}+O(\varepsilon^5).$$

Рассмотрим водяную змею, длиной ℓ=1,5 м, имеющую среднюю скорость движения $\overline{v}_x$=1,0 м/с. Пусть размах колебаний тела y_m =0,2 м, соотношение сил трения e=0,1, ρ=1000 кг/м^3, ξ=1, d=0,05 м, $k=2\pi/\ell=4{,}187$ м$^{-1}$. Мощность, затрачиваемая на движение, составит W=0,072 Вт.

Возможно управляющее уравнение (5.16) не во всех случаях является оптимальным, т.е. обеспечивающим минимальные затраты энергии на перемещение. Действительно, во время движения водяных змей сохраняется осевая ориентация головы. Кроме того, размах поперечных колебаний нарастает от головы к хвосту. Для этого случая можно использовать, например, такое управляющее уравнение $\varphi=\varepsilon[\exp(aS)-1]\sin(KS-\Omega\tau)$, где а - постоянная.

Вероятно плоское синусоидальное движение тела животного, обеспечивающее его равномерное перемещение, является оптимальным. Это перемещение отработано миллионами лет эволюции [150]. Хотя с математической точки зрения осевое перемещение тела можно достичь трёхмерным движением (например, коническая спираль).

Уравнения динамики, полученные в длинноволновом приближении в главе 2, значительно упрощают инженерный анализ движения животных с вытянутым телом в сплошной среде.

Список литературы

1. Ионов Н.В., Шершнев В.А., Габибуллаев И.Д. Влияние некоторых факторов на анизотропию эластомер – волокнистых композиций. IV российская конференция «Сырье и материалы для резиновой промышленности». Каучук и резина. 1998. №1.
2. Ягнятинская С.М., Гольдберг Б.Б., Леонов И.И., Жарова И.В. Технология изготовления, свойства и особенности применения резин с волокнистыми наполнителями в РТИ: Тем. Обзор. Серия «Производство резинотехнических и асбестотехнических изделий».-М.: ЦНИИТЭнефтехим, 1979. – 54с.
3. Несиоловская Т.Н., Соловьев Е.М. Коротковолокнистые наполнители, способы получения, свойства и области применения: Тем. Обзор. Серия «Производство резинотехнических и асбестотехнических изделий».-М.: ЦНИИТЭнефтехим, 1992 –70с.
4. Rueda J. L., Anton C.C., Rodriquez T. Mechanics of short fibers in filler styrene-butadiene rubber (SBR) composits//Polym. Compos. 1988. - Vol. 9, №3. -P. 198-203.
5. Nylon short fiber-reinforced rubber//New Mater. Dev. Jap. - Tokyo, 1987. -P. 616-617.
6. Пат. 3762458 США, МКИ В 60 С 9/18 Pnevmatic tire having a glass cord breaker laver/Tomonori Ioshida, Hirokito Takagi, Katzuyuki Harakon. - Заяв. 22.11.71; Опубл. 2.10.73. - 9 с.
7. Senapall A. K., Pradhan B., Nanda G. B. Short polyester fibre reinforced natural rubber composites//Proc. Int. Rubber Conf. IRC 86. - Geteborg, 1986. - Vol. 2. - P. 541-543.
8. Белковский В.Н., Дзюра Е.А., Клименко Л.Г. и др. Сельскохозяйственные массивные шины со сквозными каналами//Каучук и резина. 1989. №2. С. 39-41.
9. Ягнятинская С.М., Гольдберг Б.Б., Дубинкер Е.М. и др. Влияние волокнистых наполнителей на анизотропию механических свойств резин, применяемых в клиновых ремнях//Каучук и резина. -1973. -№7. -С. 28-30.
10. Setua D.K. Short fibre-rubber composites//Renewable Resour. Mater. New Polym. Sources. Proc. 2-nd Int. Symp. Polym. Renewable Resour. Mater., Miami Beach, Flo. - L., 1986. - P. 275-285.
11. Ионов Н.В., Шершнев В.А., Габибуллаев И.Д. Влияние некоторых факторов на анизотропию эластомер-волокнистых композиций//Сырье и материалы для резиновой промышленности: настоящее и будующие: Тез. Докл. 4-ой Россиской науч.-практ. конф. резинщиков. - М.: 1997. - С. 207.
12. Дорофеев Н.А., Абрамычев Г.М., Кузнецов В.А. и др. Вискозный волокнистый наполнитель «Банавис»//Хим. волокна. - 1989. - №1. - С. 40-41.
13. Foldi A.P. Rubber compounds reinforced with short individual fibres: nev kind of composite//Rubbercon ' 88: Int. Rubber Conf. - Sidney, 1988. - P. 1-22.
14. Новицкая С.Н., Нудельман З.Н., Донцов А.А. Фторэластомеры. - М.: Химия, 1988. -240 с.
15. Заявка 63-8441 Япония, МКИ С 08 L 21/00. Получение нескользящего резинового материала/Морито Кодзо. - Заявл. 28.06.86; Опубл. 14.01.88.

16. Кузнецова И.А., Свешников А.Н., Соловьев Е.М. Исследование и разработка оборудования для переработки обрезиненных текстильных отходов //Исследование и разработка оборудования для малоотходной и безотходной технологии переработки полимеров в изделия. - Тамбов, 1987. - С. 68-75.
17. Белокур С.П., Скок В.И., Гришин Б.С. О кинетике диспергирования активного наполнителя в резиновых смесях при их изготовлении и переработке.//Тезисы докладов третьего всесоюзного симпозиума «Теория механической переработки полимерных материалов». -Пермь,1985. С. 211.
18. Несиоловская Т.Н., Кузнецова И.А., Соловьев Е.М., Захаров Н.Д. Влияние соотношения короткое волокно – измельченный вулканизат на свойства резин на основе хлоропренового каучука.- Промышленность синтетического каучука, шин и резино – технических изделий. – 1985. - № 10. – С.19-22
19. Несиоловская Т.Н. Повышение эффективности использования волокнистых наполнителей в резинах. IV Российская конференция «Сырье и материалы для резиновой промышленности». Каучук и резина. 1998. № 3.
20. Придатченко Ю.В., Есмуханов М.М. Реологическое поведение разбавленных суспензий относительно крупных деформируемых частиц.//Тезисы докладов XIII всесоюзного симпозиума по реологии.
-Волгоград, 1984.С.252.
21. Кузьмин В.И., Пищухин А.М., Назаров В.В., Сухарев А.А. Прибор для определения анизотропии реологических свойств в жидкостях.//Тезисы докладов XIII всесоюзного симпозиума по реологии. -Волгоград, 1984.-С.252.
22. Седов Е.М., Гончаров Г.М., Богданов В.Н. Моделирование взаимосвязи параметров процесса течения с ориентацией коротких волокон в полимерной матрице.//Тезисы докладов второй региональной научно – технической конференции 6-7 февраля 1990г. Математическое моделирование в процессах производства и переработки полимерных материалов. Пермь, 1990. -С. 48.
23. Ташкинов А.А. Прогнозирование макроскопических свойств регулярных гетерогенных материалов.//Тезисы докладов второго всесоюзного симпозиума Теория механической переработки полимерных материалов. -Пермь, 1980.-С.190.
24. Екименко Н.А. Принцип создания композиций повышенной прочности и текучести на основе измельченной древесины и армирующих волокон//Тезисы докладов второго всесоюзного симпозиума Теория механической переработки полимерных материалов. Пермь, 1980.-С. 190.
25. Голованчиков А.Б., Клетнев Г.С., Шишлянников В.В. Механическая модель для описания супераномальных реологических свойств жидкостей.//Тезисы докладов XIII всесоюзного симпозиума по реологии. -Волгоград, 1984.-С.252.
26. Шмаков Ю.И., Парахников И.Б. Парное гидродинамическое взаимодействие жестких эллипсоидальных частиц, взвешенных в ньютоновской жидкости.//Тезисы докладов XIII всесоюзного симпозиума по реологии.
-Волгоград, 1984.-С.252.
27. Дзюра Е.А., Серебро А.Л. Особенности механических свойств резин, армированных отрезками стальной проволоки//Каучук и резина. 1977. №3. С. 39-42.

28. Дзюра Е.А., Серебро А.Л. Исследование прочностных свойств резин, армированных короткими капроновыми волокнами//Каучук и резина. 1978. №7. С. 33-34.
29. Иванов В.А., Марченко А.Е. Концентрированные неньютоновские суспензии с распределением частиц наполнителя по размерам.//Тезисы докладов XIII всесоюзного симпозиума по реологии. -Волгоград, 1984.-С.252.
30. Буряченко В.А., Липанов А.М. Оценка эффективных модулей дисперсно наполненных композитов.//Тезисы докладов третьего всесоюзного симпозиума «Теория механической переработки полимерных материалов». -Пермь, 1985.-С.211.
31. Мак-Келви Д.М. Переработка полимеров/Пер. с англ. под ред. Г.В. Виноградова. -М.: Химия, 1965.-444 с.
32. Дзюра Е.А., Серебро А.Л., Кирюшина Н.Д. Разрушение компонентов резиноволокнистых композитов в процессе переработки.//Каучук и резина 1983, №12. С. 19 –22.
33. Современные композиционные материалы/Под ред. Л. Браутмана, Р. Крока; Пер. с анг. – М.: Мир, 1970. – 672 с.
34. Зубков А.В., Салазкин К.А., Скачков В.В. К расчету разрушения волокнистых наполнителей в шнековых пластикаторах.//Тезисы докладов второй региональной научно – технической конференции 6-7 февраля 1990г. Математическое моделирование в процессах производства и переработки полимерных материалов. -Пермь, 1990. С. 48.
35. Скачков В.В. Механизм диспергирования волокнистого наполнителя в экструзионном оборудовании: Тез. докл. Второго всесоюзного симпозиума Теория механической переработки полимерных материалов. -Пермь, 1980.-190 с.
36. Сидоров В.Н., Шанин Н.П., Бекин Н.Г., Гончаров Г.М. Отчет о научно – исследовательской работе. Разработка технологического процесса каландрования резиновых смесей с волокнистым наполнителем. -Ярославль, 1986. -151 с.
37. Боровикова С.М., Лурье Е.В., Скачков В.В. Процесс изготовления изделий из стеклонаполненых термопластов одностадийным методом литья под давлением: Тез. докл. Всесоюзной научно-технической конференции «Процессы и аппараты производства полимеров, методы и оборудование для переработки их в изделия». Москва, 11-13 окт. 1977г. М.: Моск. ин-т. хим. машиностр., 1977. Вып. 1. 197с.
38. Катышков Ю.В., Скачков В.В., Салазкин К.А., Макаров М.С. Исследование процесса разрушения стекловолокнистого наполнителя при переработке полимерных композиций на одношнековом экструдере: Тез. докл. Всесоюзной научно-технической конференции «Процессы и аппараты производства полимеров, методы и оборудование для переработки их в изделия». –М., 1977.-165 с.
39. O’Connor J.E. Short-fiber-reinforced elastomers composites.- Rubb. Chem.Technol., 1977, V50., № 5, p.945-958.
40. Мотавкин А.В., Катаев В.М., Мартынов В.Н., Слотинцев М.Н.//Пласт. Массы.- 1975.- №12.- С. 29 –31.
41. Мотавкин А.В., Мартынов В.Н., Телетов В.А.//Механика полимеров –1973.- №3.- С. 507 –517.

42. Бородулин М.М., Захаров Н.Д., Смирнова Е.В. и др. Диспергирование волокон хризотиласбеста при изготовлении асбокаучуковых смесей в резиносмесителе//Пр-во шин, РТИ и АТИ. –М.: ЦНИИТЭнефтехим, 1976. - №2.-С. 9-11.
43. Скачков В.В., Торнер Р.В., Стунгур Ю.В. и др. Моделирование и оптимизация экструзии полимеров - Л.: Химия, 1984.- 152 с.
44. Fisa B. Mechanical degradation of glass fibers during compounding with polypropylene//Polym. Compos. -1985.- Vol. 6,-№4.-P. 132-240.
45. Дзюра Е.А., Серебро А.Л. Особенности механических свойств резин, армированных отрезками стальной проволоки//Каучук и резина.-1977.- №3.- С. 39-42.
46. Ким В.С., Скачков В.В. Диспергирование и смешение в процессах производства и переработки пластмасс. – М.: Химия, 1988. – 240 с.
47. Одоевцева М.В. Структура и механические свойства резиноволокнистых композиций, модифицированных олигодиенами, и разработка составов на их основе. Дис. на соискания ученый степени к.т.н. -Волгоград, 1997, 155с.
48. Лучкий М.С., Клигеник Г.С., Фридман И.Д. Снижение вязкости систем при введении некоторых наполнителей//Коллоидный журнал.- 1977. Т.39, № 2.- С.376 – 378.
49. Кандырин Л.Б., Кулезнев В.Н. Реология высококонцентрированных дисперсий: Тез. докл. Третьего всесоюзного симпозиума «Теория механической переработки полимерных материалов». -Пермь, 1985.- 211с.
50. Голованчиков А.Б., Тябин Н.В. К вопросу об аномалии вязкости суспензий. Сб. «Реология, процессы и аппараты химической технологии». Волгоград, 1977.- С.69-76.
51. Виноградов Г.В., Малкин А.Я. Реология полимеров. -М.: «Химия».-1977.
52. Bueche F., J. Chem. Phys., 1954, v.22,№4, p.603-609.
53. Шульман З.П., Кордонский В.И. Магнитореологический эффект.- Минск: Наука и техника, 1982.- 184с.
54. Шульман З.П., Дейнега Ю.Ф., Городкин Р.Г. и др. Электрореологический эффект. – Минск: Наука и техника, 1972.-195 с.
55. Бекин Н.Г. Машины и аппараты заводов резиновой промышленности. Учебное пособие. - Ярославль. 1975. -475с.
56. Green H., Weltmann R.N. In: Colloid Chemistry Theoretical and Applied. N. Y., Interscience Pube., 1946, p. 328-379.
57. Торнер Р.В. Теоретические основы переработки полимеров. -М.: Химия, 1977.- 464 с.
58. Ребиндер П.А. В кн.: Совещание по вязкости жидких и коллоидных растворов. Т. 1. -М.: Изд-во АНСССР, 1941. с. 361-379.
59. Торнер Р.В., Гудкова Л.Ф. «Каучук и резина». 1965, №1, с. 33-36.
60. Торнер Р.В., Гудкова Л.Ф. «Механика полимеров». 1967. №1, С. 177-179.
61. Рейнер М. Реология.- М.: Наука, 1965.- 223 с.
62. Eliassa F.S., Katchalsky A., Julisberger F.,”Nature”; 1955, V. 176, №167, p. 1119-1120.
63. Freundlich H, Julisberger F., Trans. Faraday Soc. 1935, V. 31, pt. 6, p. 920-921.

64. Бурлий В.Н., Ковтун В.П. Определение критических параметров структурирования при сдвиговом течении суспензий монодисперсных волокон: Тез. докл. XIII Всесоюзного симпозиума по реологии. Волгоград, 1984.-С.14.
65. Малкин. А.Я., Эппле Г.В., Грицук А.И. Влияние волокнистого наполнителя на вязкостные свойства среды//Коллоидный журнал.—1972.-Т. 34, №4.- С. 550-554.
66. Нильсен Л. Механические свойства полимеров и полимерных композиций/Пер. с анг.- М.: Химия, 1978.- 312с.
67. Kirchhoff. G. Ueber das Gleichgewicht und die Bewegung eines unendlich dunnen elastischen Stabes. Journ. Fur Vath., т. 56 (1859), стр. 285, 302, 305, 308.
68. Jac. Bernoulli. Curvatura laminae elasticae. Acta eruditorum. Lipsiae, 1694, S. 262.
69. Euler. L. Methodus inveniendi lineas curves maximi minimive proprietate gaudentes. Aggitamentum I. De curvis elasticis (1744).Имеется русский перевод в издании «Классики естествознания» (1934).
70. Poisson. Sur les lignes elastiques a double courbure. Correspondance sur l ecole polytechn., т.3 (1816), s. 355.
71. Binet J. Memoire sur l'integration des equations de la courbe elastique a double courbure. Comptes rendus, т. 18(1844), S. 1115, 1116.
72. Wantzel. Note sur l'integration des equations de la courbe elastique a double courbure. Comptes rendus, т. 18 (1884), S. 1197-1201.
73. Hermite. Sur quelques applications des functions elliptiques. Comptes redus, т.90 (1880), S.478, 483, 643, 645.
74. Euler L. Sur la force des colonnes. Histoire de l'Academie de Berlin (1757),S. 252.
75. Lagrange. Sur la figure dea colonnes. Oeuvres, т.2, S. 125.
76. Greenhill A.G. On the strength of shafting when exposed both to torsion and to end thrust. Proceed. Of the lnstit. Of Mechan. Engineers (1883), S. 182.
77. Николаи Е.Л. Труды по механике. -М.: ГИТТЛ, 1955.- 584с.
78. Крылов А.Н. О равновесии шаровой мины на течении//Изв. По минному делу. 1909. Вып. 44. С.14-108.
79. Willers Fr. A. ber die steighohe von drachen. Zeitschrift fur Matematik and physic, 1909. Bd. 57, S. 158-173.
80. Кочин Н.Е. Собрание сочинений. Том 2. М. –Л.: Издательство АН СССР, 1949. С.536 – 548.
81. Светлицкий В.А. Задачи и примеры по теории колебаний. Учебное пособие. -М.: Изд-во МГТУ, 1994. Ч.1, 308 с. ISBN 5-7038-0893-6.
82. Зябицкий А. Теоретические основы формования волокон. -М.: Химия, 1979.- 504 с.
83. Перепелкин К.Е. Физико–химические основы процессов формования химических волокон. -М.: Химия, 1978. -320 с.
84. Уорд И. Механические свойства твердых полимеров. -М.: Химия, 1975. – 350 с.
85. Batchelor G.K. An Introduction to Fluid Dynamics. – New York: Cambridge University Press, 1967. (имеется перевод: Бэтчелор Дж. Введение в динамику жидкости. – М.: Мир, 1973. -758 с.
86. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика. Часть 2. -М. –Л.: ГИТТЛ, 1948.- 612с.

87. Кутателадзе С.С. Теплопередача и гидродинамическое сопротивление: Справочное пособие. -М.: Энергоатомиздат, 1990.-367с.
88. Седов Л.И. Механика сплошной среды. Т.1.-М.: Наука, 1973.-536с.
89. Альтшуль А.Д. Гидравлические сопротивления. -М.: Недра, 1982.- 224 с.
90. Слезкин Н.А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости. -М.: Гостехиздат, 1955.- 500 с.
91. Композиционные материалы: справочник В.В. Васильев, В.Д.Протасов, В.В. Болотин и др.; Под общей редакции В.В. Васильева, Ю.М. Тарнопольского. – М.: Машиностроение, 1950. –512с.
92. Иванов В.А. Определение реологических характеристик неньютоновских жидкостей методом падающего шарика: Тез. докл. Второй региональной научно – технической конференции «Математическое моделирование в процессах производства и переработки полимерных материалов».- Пермь, 1990.
93. Шишкин В.А. О вязкости и упругости высоконаполненных сред: Тез. докл. Второго всесоюзного симпозиума Теория механической переработки полимерных материалов.- Пермь, 1980.- 190 с.
94. Кирхгоф. Г. Механика. Лекции по математической физике. -М.: Издательство Академии наук СССР. 1962. -970с.
95. Жермен П. Механика сплошных сред.- М.: Мир, 1965. -480с.
96. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория упругости. - М.: Наука, 1965.- 204с.
97. Рекач В.Г. Руководство к решению задач прикладной теории упругости. -М.: Высшая школа, 1984. -287с.
98. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. - М.: Наука, 1969.-744с.
99. Протодъяконов И.О., Люблинская И.Е., Рыжков А.Е. Гидродинамика и массообмен в дисперсных системах жидкость – твердое тело. – Л.: Химия, 1987. – 336 с.
100. Несиоловская Т.Н. Формирование структуры и технология переработки резиноволокнистых композитов. Дис… докт. техн. наук. Ярославль. 1998.- 467с.
101. Основы технологии переработки пластмасс: Учебник для вузов/С.И.Власов, Э.Л. Калинчев, Л.Б. Кандырин и др.-М.: Химия, 1995. - 528с.
102. Кошкин Н.И., Ширкевич М.Г. Справочник по элементарной физике. -М.: Наука, 1965.- 248с.
103. Любошиц М.И., Ицкович Г.М. Справочник по сопротивлению материалов. -Минск.: Вышэйшая школа, 1969. -464с.
104. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. -М.: Наука, 1973. -848с.
105. Ольховский И.И. Курс теоретической механики для физиков. -М.: ГРФМЛ. Наука, 1970.- 448с.
106. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. -М.: ГРФМЛ. Наука, 1978.- 832с.
107. Астарита Дж., Марруччи Дж. Основы гидромеханики неньютоновских жидкостей. -М: Мир, 1978.- 310 с.
108. Трелоар Л. Физика упругости каучука. -М.: Издательство Иностранной литературы, 1953. -240с.

109. Шаповалов В.М., Тябин Н.Г. Реодинамика элонгационного течения плоской полимерной струи при вытяжке пленки//Инж. – физ. журн. -1981.- Т. 41. -№ 6.- С. 1027 – 1031.
110. Шаповалов В.М. О нанесении высоковязкой жидкости на движущуюся подложку//ПМТФ.- 1997. -Т.38.- №2.- С.170 – 175.
111. Пасконов В.М., Полежаев В.И., Чудов Л.А. Численное моделирование процессов тепло - и массообмена.- М.: Наука, 1984.
112. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике. – М.: ГИТТЛ, 1956.- 608с.
113. Самарский А.А. Теория разностных схем.- М.: Наука, 1989.- 616с.
114. Флетчер К. Вычислительные методы в динамике жидкостей. Т.1. -М.: Мир, 1991.- 504с.
115. Демидович Б.П., Марон И.А., Шувалова Э.З. Численные методы анализа.-М.: 1967. -368с.
116. Несиоловская Т.Н., Соловьев Е.М. Диспергирование полиамидного волокна в процессе приготовления РВК // Каучук и резина.- 1990.- N 8.-С.17-19.
117. Несиоловская Т.Н., Соловьев Е.М., Дуросов С.М., Толобов С.В. Способ получения коротковолокнистых наполнителей с улучшенным комплексом свойств//Каучук и резина.- 1988. -N 2.- С. 22-24.
118. Найфэ А.Х. Введение в методы возмущений: Пер. с англ. -М.: Мир, 1984.- 535с.
119. Найфэ А.Х. Методы возмущения: Пер. с англ. -М.: Мир, 1976. -456с.
120. Канторович Л.В., Крылов В.И. Приближенные методы высшего анализа. -М.-Л.: ГИФМЛ, 1962.
121. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. -М.: ГИФМЛ. 1961.- 704с.
122. Карман Т., Био М. Математические методы в инженерном деле. – М.: ОТИЗ, 1948. -424 с.
123. Беляев Н.М. Сопротивление материалов. –М: Наука. ГРФМЛ. 1976.- 608с.
124. Цой П.В. Методы расчета задач теплопереноса. -М.: Энергоатомиздат, 1984.- 416с.
125. Берд Р., Стьюарт В., Лайтфут Е. Явления переноса. -М.: Химия, 1974.-688с.
126. Справочник по специальным функциям. Под редакцией М. Абрамовица и И. Стиган. –М.: Наука, 1979.- 832с.
127. Филин А.П. Прикладная механика твердого деформируемого тела. Т.1.-М.:Наука, 1975.- 832с.
128. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. -М.: Наука. ГРФМЛ. 1979.- 560с.
129. Кристенсен Р. Введение в механику композитов. -М.: Мир, 1982.-336с.
130. Эшелби Дж. Континуальная теория дислокаций. -М.: ИЛ, 1963- 247с.
131. Пучков А.Ф., Миликевич В.Ю., Салямов К.Ю**.,** Чалдаева Е.В. Использование коротких волокон для улучшения свойств адгезивов ортопедической стоматологии: Химия и технология элементоорганических мономеров и полимерных материалов: Сборник научных трудов. ВолгГТУ, Волгоград, 1994. -С.122-126.

132. Станкой Г.Г., Тростянская Е.Б., Иванов А.А., Михасенок О.Я., Бейдер Э.Я. Особенности течения термопластичных волокнитов: Тез. Докл. Всесоюзн. Н.-техн. конф. Процессы и аппараты производства полимерных материалов, методы и оборудования для переработки их в изделия. 21 – 23 декабря. 1982.- М.: МИХМ, 1982. Т.1, С.13-14.
133. Лаврентьев М.А. Модель движения рыб, ужей//ПМТФ.-1973.-№2.-С.164-165.
134. Смольников Б.А. Проблемы механики и оптимизации роботов. -М.: Наука, 1991. 232с.
135. Логвинович Г.В. Гидродинамика плавания рыб.- В сб.: Бионика. №7, Киев, Наукова думка, 1973. С.3-8.
136. Lighthill M.J. A note on slender fish swimming.-J. Fluid Mech., 1960, v.9,p.305-317.
137. Lighthill M.J. Hydromechanics of aquatic animal propulsion. Annual Review of Fluid Mechanics. 1969, v.1, p.413-446.
138. Wu T. Hydromechanics of swimming propulsion. Part 3. Swimming and optimum movements of slender fish with side fins. - J. Fluid Mech., 1971, v.46, p.545-568.
139. Шаповалов В.М. Движение гибкой нити конечной длины в потоке вязкой жидкости//ПМТФ.- 2000. -Т.41.- №2.- С.144 – 153.
140. Шаповалов В.М., Лапшина С.В. Движение непрямолинейной нити в потоке вязкой жидкости//ПМТФ.- 2002. -Т.43.- №2.- С.197 – 202.
141. Shapovalov V.M., Lapshina S.V. Motion of a nonrectilinear fiber in a viscous fluid flow//Journal of Applied Mechanics and Technical Physics, Vol. 43, No.2, pp.336-340, 2002.
142. Шаповалов В.М., Лапшина С.В. Движение стержня в потоке вязкой жидкости//ПМТФ.- 2003. -Т.44.- №2.- С.56 – 62.
143. Shapovalov V.M., Lapshina S.V. Motion of a rod in a viscous flow//Journal of Applied Mechanics and Technical Physics, Vol. 44, No.2, pp.198-203, 2003.
144. Шаповалов В.М., Лапшина С.В. Пространственное движение стержня в потоке вязкой жидкости//ПМТФ.- 2004. -Т.45.- №1.- С.56 – 65.
145. Shapovalov V.M., Lapshina S.V. Spatial motion of a rod in a viscous fluid flow//Journal of Applied Mechanics and Technical Physics, Vol. 45, No.1, pp.45-53, 2004.
146. Шаповалов В.М., Лапшина С.В. Уравнения динамики изогнутого стержня в потоке вязкой жидкости. Труды ХХХ11 Уральского семинара.-Екатеринбург, 2002.-С.119-122.
147. Попов Д.Н. Нестационарные гидромеханические процессы. - М.: Машиностроение, 1982.-240 с.
148. Жукаускас А.А. Конвективный перенос в теплообменниках. М.: Наука, 1982. -472с.
149. Тимошенко С.П., Янг Д.Х., Уивер У. Колебания в инженерном деле. – М.: Машиностроение, 1985.-472 с.
150. Биогидродинамика плавания и полёта. Пер. с англ. Под ред. В.М. Ентова. – М.: Мир, 1980.

ОБ АВТОРАХ

Шаповалов Владимир Михайлович (г. рожд. 1951) – доктор технических наук, профессор кафедры «Процессы и аппараты химических производств» Волжского политехнического института ВолгГТУ (svm-5@mail.ru). Область научных интересов – течение и теплообмен реологически сложных жидкостей. В 1980 году защитил диссертацию на соискание учёной степени кандидата технических наук, в 1996 году - диссертацию на соискание учёной степени доктора технических наук. Научные работы опубликованы в академических рецензируемых журналах: «Инженерно-физический журнал», «Механика жидкости и газа», «Прикладная механика и техническая физика», «Прикладная механика и математика», **«**Механика композиционных материалов и конструкций**»**. Автор более 140 научных публикаций и патентов в России и за рубежом и четырёх монографий:

1. Шаповалов В.М., Лапшина С. В. Введение в механику течения волокнонаполненных композитов. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006.–176 с.
2. Шаповалов В.М. Механика элонгационного течения полимеров. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007.–176с.
3. Шаповалов В.М. Валковые течения неньютоновских жидкостей. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2011. – 168 с.
4. Шаповалов В.М. Процессы тепло – и массопереноса технологическом оборудовании: монография/В.М. Шаповалов, ВПИ (филиал) ВолгГТУ, - Волград: ИУНЛ ВолгГТУ, 2015. – 305 с.

Лапшина Светлана Владимировна (г. рожд. 1973). Кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры «ВХТО». Candidate of Technical Sciences, Assistant professor, Associate Professor of "VHTO". Волжский политехнический институт (филиал) Волгоградского государственного технического университета, Volzhsky Polytechnical Institute (branch of) State Educational Institution of Higher Professional Education ‘Volgograd State Technical University’. VPI (branch) VSTU. Область научных интересов – течение волокно наполненных систем. В 2005 году защитила диссертацию на соискание учёной степени кандидата технических наук. Тема диссертации: «Макромеханический анализ динамических процессов в волокно наполненных композитах». Основные научные работы опубликованы в академическом рецензируемом журнале «Прикладная механика и техническая физика». А также в материалах научных конференций и вузовских сборниках. Автор более 40 научных публикаций.

Научное издание

ШАПОВАЛОВ Владимир Михайлович
ЛАПШИНА Светлана Владимировна

ВВЕДЕНИЕ В МЕХАНИКУ ТЕЧЕНИЯ ВОЛОКНОНАПОЛНЕННЫХ КОМПОЗИТОВ

Редактор *О.В. Салецкая*
Оригинал-макет *И.Г. Андреева*

Подписано в печать 11.11.05. Формат 60х90/16. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Усл. Печ. Л. 11. Уч.-изд. л 13,2. Тираж 400 экз.
Заказ № 6132

Издательская фирма «Физико-математическая литература»
МАИК «Наука/Интерпериодика»
117997, Москва, ул. Профсоюзная, 90