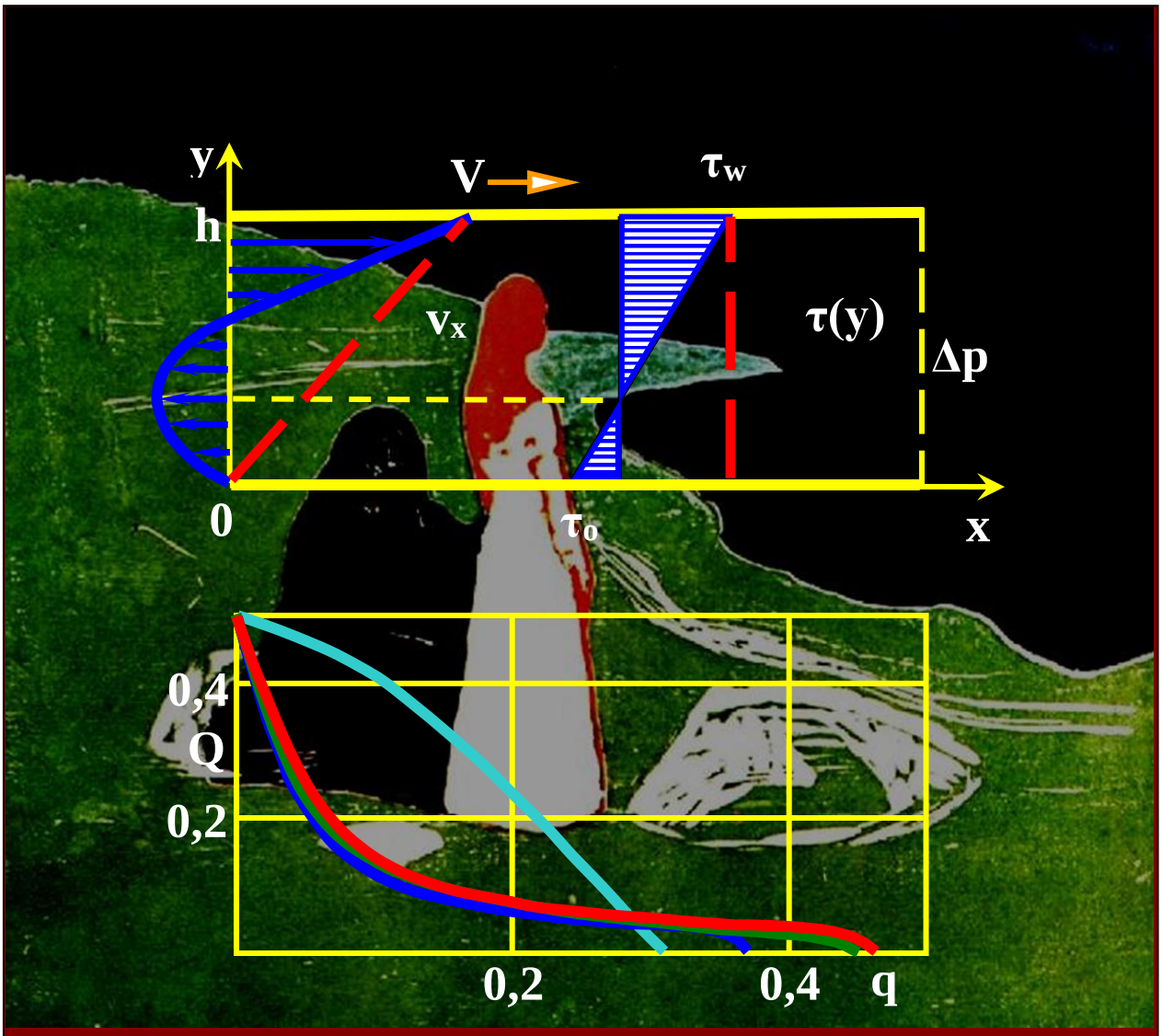


ШАПОВАЛОВ В.М.
КАБЛОВ В.Ф.

СТЕПЕННОЕ РЕОЛОГИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ В ПРИКЛАДНЫХ ЗАДАЧАХ НЕНЬЮТОНОВСКОЙ ГИДРОМЕХАНИКИ

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ВОЛЖСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ФИЛИАЛ)
ФЕДЕРАЛЬНОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО БЮДЖЕТНОГО ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО
УЧРЕЖДЕНИЯ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОЛГОГРАДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

ШАПОВАЛОВ В.М., КАБЛОВ В.Ф.

СТЕПЕННОЕ РЕОЛОГИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ В ПРИКЛАДНЫХ ЗАДАЧАХ НЕНЬЮТОНОВСКОЙ ГИДРОМЕХАНИКИ

Монография

Волжский
2020

УДК 532
ББК 22.253
Ш 241

Рецензенты:
д.т.н., доцент, зав. кафедрой технологии органических соединений, переработки полимеров и техносферной безопасности ФГБОУ ВО «ВГУИТ»
О.В. Карманова
д.ф.-м.н., профессор кафедры «Химия и технология переработки биологически активных веществ и полимерных и композитов» ФГБОУ ВО «Ярославский государственный технический университет,
Соловьев М.Е.
к.ф.-м.н., доцент, главный научный сотрудник ООО «НТЦ НИИШП»,
Гамлицкий Ю.А.

Печатается по решению редакционно-издательского совета
Волгоградского государственного технического университета.

Шаповалов В.М. Степенное реологическое уравнение в прикладных задачах неньютоновской гидромеханики: монография/ Шаповалов В.М., Каблов В.Ф.; Министерство науки и высшего образования Российской Федерации, ВПИ (филиал) ФГБОУ ВО ВолгГТУ. - Волгоград: Издательство ВолгГТУ, 2020. – 228 с.

ISBN 978-5-9948-3542-5

На примере решения конкретных задач течения неньютоновской жидкости, имеющих широкое приложение, показана несостоятельность уравнения Оствальда – де Виля с точки зрения точности прогноза математической модели. В качестве «эталонной» реологической модели использовалось уравнение Эллиса, обеспечивающее хорошую аппроксимацию кривой течения в области малых и средних скоростей деформации. Рассмотрены задачи неньютоновского течения и теплообмена: в плоском и круглом канале, в зазоре встречно вращающихся валков, в канале экструдера, в трубчатом реакторе, в пленке жидкости, стекающей по наклонной поверхности. Получены новые результаты задачи Гретца-Нуссельта с учётом диссипации. Даны выводы и рекомендации относительно применения реологического уравнения Оствальда – де Виля для решения прикладных задач. Полученные модели течения жидкости Эллиса представлены впервые и могут использоваться для составления компьютерных программ расчёта соответствующих технологических процессов.

Монография будет полезна специалистам химической, машиностроительной промышленности, аспирантам и студентам, обучающимся по специальностям 241000.62 "Энерго - и ресурсосберегающие процессы в химической технологии, нефтехимии и биотехнологии" и 18.04.01 -«Химическая технология» при составлении математических моделей и преподавателям вузов при составлении курса лекций по теоретическим основам переработки полимеров и тепло- массопереносу.

Илл. 76. Табл. 8. Библиогр.: 58 назв.

ISBN 978-5-9948-3542-5

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

1. Реологические модели – обоснование выбора

В целом ряде ситуаций, встречающихся на практике (плёночное течение и тепло - и массообмен, свободная конвекция, медленное движение тел в неньютоновских жидкостях), одинаково важен правильный учёт реологического фактора, как при малых, так и при умеренных скоростях сдвига. Встаёт вопрос о выборе реологической модели.

Для описания участка переменной вязкости неньютоновских жидкостей Де-Вилем (de Waele) (1923 г.) и Оствальдом (Ostwald) (1925 г.) было предложено эмпирическое уравнение, известное под названием степенного закона. Модель Оствальда – де Виля (Ostwald – de Waele) широко используется для описания течений реологически сложных жидкостей (расплавов и растворов полимеров) в технологическом оборудовании их переработки. Это обусловлено относительной простотой двухпараметрической модели и удобством определения реологических характеристик по кривой течения [1].

Указать все работы, построенные на модели Оствальда – де Виля не представляется возможным: на запрос Google «степенной закон вязких жидкостей» было получено 16800 ссылок. Математические модели основных типов течений и соответствующие расчётные методики были получены в 60-80 годах прошлого столетия. Теоретические результаты решения прикладных задач с использованием степенной модели вошли в популярные учебники и методики расчёта технологического оборудования переработки полимеров. Где-то в 80 годах прошлого века на одной из научных конференций, посвящённой реологии, в своём выступлении д.ф.-м.н. проф. А.Я. Малкин сформулировал следующее пожелание (привожу по памяти): «Прикладные задачи, построенные на степенном уравнении, представлены большим

количеством статей и диссертаций. Хорошо бы все имеющиеся решения задач, построенные на этом уравнении, собрать в одну книгу. Получилась бы очень полезная книга». Как-то коллега пошутил: «Степенное уравнение придумали специально, чтобы защищать диссертации». В смысле, путём несложных математических манипуляций и доработки имеющегося известного решения какой-либо прикладной задачи для вязкой жидкости, получить новый научный, вполне пригодный для защиты диссертации, результат.

Пример типичной оценки степенного уравнения в научной литературе возьмём из классической книги «Реология полимеров» Виноградова Г.В. и Малкина А.Я. [2]: «…степенное уравнение неудовлетворительно описывает поведение полимерных систем при малых скоростях сдвига и малых напряжениях, что, в частности, не даёт возможности использовать её для нахождения начальной вязкости. Однако в интервале величин напряжений и скоростей сдвига, имеющих наибольшее значение в технологии, степенная формула достаточно хорошо описывает поведение многих полимерных систем. Кроме того, она удобна вследствие простоты графического определения индекса течения при представлении опытных данных в двойных логарифмических координатах. Наконец, степенная формула удобна в расчётном отношении при решении различных прикладных задач. Всё это обусловило то, что, несмотря на её недостатки, эта формула, несомненно, наиболее широко используется для описания аномалии вязкости полимерных систем».

Обычно исследователь, например, строя модель течения в канале, отдаёт предпочтение степенной модели, руководствуясь следующими соображениями. Наибольшая скорость сдвига (или касательное напряжение) имеет место у стенки канала. Именно эта область определяет картину течения, в том числе касательное напряжение на стенке и интегральные параметры. В окрестности максимума скорости касательное напряжение близко к нулю. В этих условиях для псевдопластиков степенная модель показывает завышенную эффективную вязкость. Но размеры этой зоны высокой вязкости

незначительны по сравнению с общим сечением канала, поэтому она не должна оказывать существенное влияние на течение. Как будет показано ниже, распределение эффективной вязкости в «ядре» существенно влияет на общий профиль скорости, и в «зоне градиентного течения», в частности.

Между тем существуют и другие реологические модели, каждая из которых имеет свои преимущества и недостатки. Для ряда прикладных задач использование степенного реологического уравнения чревато серьёзными ошибками, которых можно избежать применением других реологических моделей, например, модели Эллиса [3].

Методическая особенность построения книги. Оценка погрешности модели Оствальда – де Виля выполнена путём сопоставления расчётных результатов с результатами, полученными с помощью «эталонной» модели, в качестве которой использовалась трёхпараметрическая реологическая модель Эллиса. Модель Эллиса хорошо описывает реологическое поведение полимерных растворов и расплавов в области малых и средних скоростей деформации. Для любой «тестируемой» задачи необходимо получить два решения: для степенной модели и для модели Эллиса. Далее следует сопоставление результатов их численного анализа. Для сопоставимости расчётных результатов сравниваемые параметры должны иметь идентичную размерность, причём в них недопустимо присутствие реологических констант. Насколько известно автору, подобных подробных оценок для рассматриваемых течений не проводилось. Выбраны типы течений, позволяющие получить аналитическое решение задач для степенной модели и для жидкости Эллиса.

В результате проведённого исследования показана неправомерность применения степенного реологического уравнения, если к точности результатов предъявляются высокие требования или задача носит фундаментальный характер. Между тем, правомерно использование степенного уравнения в лекционном материале для студентов и аспирантов, поскольку решение задач неньютоновского течения при этом отличается

простотой, а результаты наглядностью.

Рассмотрены течения неньютоновской жидкости в плоской щели, в круглом канале, в зазоре встречно вращающихся валков, канале экструдера и трубчатом реакторе. Выводы представлены в конце каждого раздела. Материал с 9 по 18 стр. представлен проф. Кабловым В.Ф., остальное – проф. Шаповаловым В.М.

2. Нелинейность поведения полимерных материалов

В основной части книги рассмотрены особенности нелинейных моделей в реологических процессах.

Следует отметить, что нелинейные закономерности описывают большинство процессов в полимерах – от химических процессов до процессов разрушения материала. Подробно эти вопросы разобраны в работе [4].

Нелинейность, без сомнения, стала фундаментальным аспектом новой парадигмы современного естествознания, и проявляется в разных «обличьях» В реологии и химической кинетике нелинейность давно является парадигмой.

Существует большое количество нелинейных моделей достаточно адекватно описывающих поведение полимеров в различных процессах.

Нелинейность поведения полимерных материалов усиливается по мере приближения эксплуатационных параметров к критическим. Одновременно растет и неустойчивость материалов (см. ниже).

Кинетические уравнения, описывающие поведение полимерных материалов весьма разнообразны и, как правило, нелинейны.

Наиболее часто они описываются **экспоненциальными** аррениусовскими зависимостями. Особенно разнообразны зависимости показателей полимерных материалов при старении в различных условиях.

В ряде случаев кинетических кривых, описывающие процесс старения, имеют экстремумы. Так если в полимерном материале происходят два параллельных и конкурирующих процесса – деструкция и структурирование,

то зависимость какого-либо свойства от времени описывается уравнением вида

$$Y = \alpha e^{-k_1 t} - \beta e^{-k_2 t} + Y_0, \qquad (1)$$

где k_1 и k_2 – константы скорости деструкции и структурирования; α, β, Y_0 – постоянные величины. Если в условиях испытаний $k_1 < k_2$, то $Y(t)$ проходит через минимум. Однако в условиях эксплуатации может оказаться, что $k_1 > k_2$ и тогда $Y(t)$ имеет максимум. Экстраполяция, основанная на поведении функции $Y(t)$ лишь в начальные периоды испытания, может привести к грубым ошибкам [5].

Ряд процессов описывается логистической функцией (когда процессы имеют индукционный период и область «насыщения»). Особенно это характерно для вулканизационных кривых, полученных по изменения крутящего момента при деформации сдвига вулканизующейся резиновой смеси – то есть для процесса в котором протекают химические реакции и происходят изменения вязкостных характеристик. Эта же кривая описывает и некоторых случаи старения, автокаталитических реакций и другие процессы с насыщением.

Экспоненциальные кривые хорошо описывают процессы имеющие "лавинообразный" характер, т.е. когда прирост зависит в основном от достигнутого уровня, при этом различного рода ограничения, факторы практически не берется во внимание.

В сущности, S-образные кривые описывают два последовательных лавинообразных процесса: один с ускорением развития, другой – с замедлением.

Модифицированная экспонента, кривая Гомперца и логистическая кривая при определенных значениях своих параметров имеют асимптоты,

проходящие выше этих кривых, поэтому эти кривые пригодны для описания различного вида процессов.

Так И.М. Агаянцем [6] предложено кинетические кривые вулканизации описывать следующим образом.

Для изучения кинетики образования полимерных сеток часто используют методы, основанные на регистрации зависимости крутящего момента (т.е. энергии, затрачиваемой на создание деформации сдвига в образце) от времени деформирования. Эта зависимость описывается S-образной (логистической) кривой (рис.1).

Кинетику необратимой реакции произвольного порядка можно описывать уравнением следующего вида:

$$\frac{dM}{dt} = k(M_{\max} - M)^n \qquad (2)$$

где ***M(t)*** – значение крутящего момента; ***t*** – продолжительность процесса; ***k*** – константа скорости превращения; $\boldsymbol{M_{max}}$ – максимальное значение крутящего момента; ***n*** – порядок реакции.

Можно рассчитать характеристики процесса структурирования и кинетические параметры (параметры Аррениуса) по следующей кинетической кривой (без учета начального участка падения величины крутящего момента):

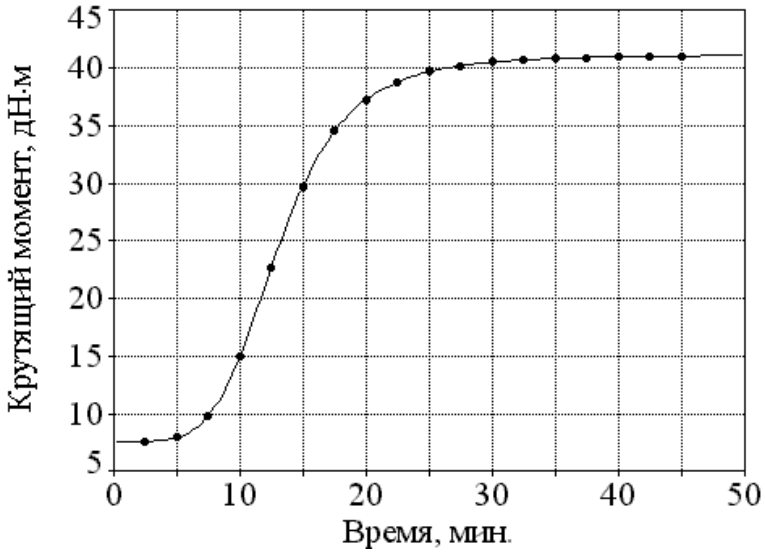


Рисунок 1. - Реограмма процесса вулканизации

Представленную зависимость крутящего момента от времени целесообразно аппроксимировать моделью следующего вида:

$$M = A + \frac{B}{1 + \left(\frac{t}{C}\right)^{D}} \qquad (3)$$

При t=0 $M_{min}=A$, при $t\to\infty$ $M_{max}\to A+B$, при $t=C$ $M=A+B/2$, следовательно $C=t_{c(50)}$, степень превращения $\beta=(M-A)/B=1/(1+(t/C)^{D})$, отсюда $D=-\ln 9/\ln(t_{c(90)}/t_{c(50)})$.

Указанными уравнениями не ограничивается описание нелинейных процессов.

Большое разнообразие нелинейных зависимостей используется и в механике резин. Так, в описании деформационных кривых резин применяется ряд нелинейных уравнений, в т. ч., уравнение Муни-Ривлина, однако единого уравнения для всей области больших деформаций резин не найдено.

Нелинейные зависимости характерны и для процессов механического и термического разрушения, а также разрушения в агрессивных средах.

Процессы нелинейной динамики и саморганизации в системах рассматриваются в синергетике, которую можно определить как науку о саморганизации. Синергетика тесно связана с термодинамикой неравновесных процессов и термодинамикой открытых систем, а также нелинейной динамикой.

В химических науках часто употребляется термин синергизм. Синергизм – это эффект, связанный с тем, что композиционный материал как система характеризуется набором свойств, превышающих значения, рассчитанные согласно правилу аддитивности.

Нелинейность поведения полимерных материалов усиливаемся по мере приближения эксплуатационных параметров к критическим. Одновременно

растет и неустойчивость материалов - структурная устойчивость и динамическая устойчивость (по Ляпунову). В то же время, нелинейные системы могут иметь при некоторых значениях параметров и зоны устойчивости. Так система с автокатализом или автоингибицией может описываться уравнением

$$\dot{X} = -kX - k_1 X^3 \qquad (4)$$

где $\dot{X}$ – изменение какой-либо характеристики, k и k_1 – параметры, характерные для данной системы.

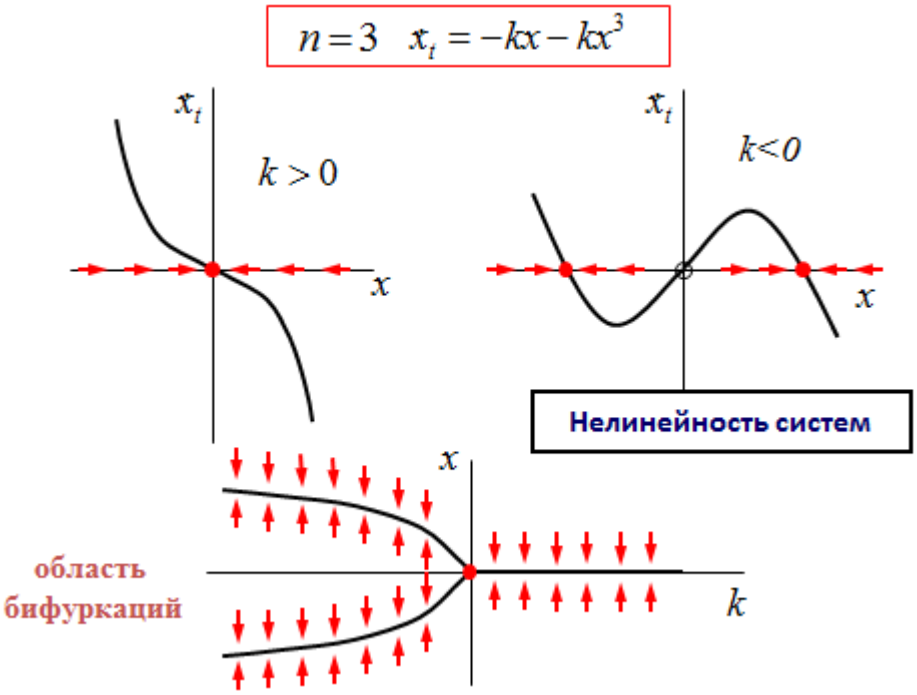


Рисунок 2. - Анализ нелинейных синергетических зависимостей.

(Исследование уравнения $x = -kx - k_1x^3$ ($k_1>0$) [9])

При $k>0$ такая система имеет единственный действительный корень $X = 0$, соответствующий устойчивому состоянию, а при $k<0$ три действительных корня, из которых $X = 0$ становится неустойчивым, а устойчивыми оказываются два крайних корня $X_{2,3} = \pm\sqrt{\frac{-k}{k_1}}$. Видно, что при переходе значения параметра через 0 в отрицательную сторону теряется устойчивость

состояния исходного, но взамен возникает два новых устойчивых состояния: происходит усложнение (дифференцировка) системы путем бифуркации (расщепления) исходного устойчивого состояния (рис.2). Математический анализ показывает, что при достаточно сильной нелинейности может происходить усложнение структуры системы с образованием устойчивых состояний. Усложнение структуры системы еще более многовариантно в системах с двумя и более переменными.

Системы в состоянии неустойчивости особенно чувствительны к небольшим внешним воздействиям, которые могут приводить не только к разрушению системы, но и напротив, переводить ее в новое стационарное состояние, которое хотя и не является равновесным, но характеризуется достаточной стабильностью. Таким образом, полимерные системы, находящиеся в нелинейной области, характерной для экстремальных условий эксплуатации, могут стабилизироваться с помощью внутренних или внешних «управляющих» воздействий [4].

Критическое поведение полимерных систем. При воздействии эксплуатационных факторов на полимерный материал можно выделить два режима эксплуатации: нормальный режим и эксплуатация в экстремальных условиях (критический режим), для нормального режима характерно относительно медленное и плавное изменение показателей в процессе эксплуатации. Такие изменения показателей, как правило, описываются линейными зависимостями, линейными участками нелинейных зависимостей или уравнениями типа аррениусовских. При нормальном режиме эксплуатации действующие значения факторов (температура, концентрация агрессивной среды и т.п.) находятся далеко от пределов работоспособности материалов. При экстремальных условиях значения действующих факторов приближаются к пределам работоспособности или даже попадают в область «неработоспособности». Материал в этом режиме катастрофически быстро выходит из строя. Изменение показателей описывается, как правило, нелинейными, в т. ч., экстремальными зависимостями. Долговечность, тем не

менее, может быть в некоторых случаях достаточной – при одноразовом использовании, при больших запасах по толщине (массе, объему и т.п.), а также в случае особенностей конструктивного выполнения узла, применения защитных покрытий и других способах защиты. Наконец, долговечность материала может быть существенно повышена при введении в его состав функционально-активных компонентов, обеспечивающих защиту материала при эксплуатации [4].

Критические явления привлекают большое внимание исследователей (теоретиков и экспериментаторов), работающих в области химической кинетики. По значимости их можно сравнить с фазовыми переходами в классической физике (иногда употребителен термин «кинетические фазовые переходы»). Сейчас, по-видимому, мы стоим на пороге нового «синергетического» этапа понимания критических явлений. Выясняется, с одной стороны, многообразие явлений, зависящих от физико-химической специфики системы; с другой стороны, их общность, связанная с единой причиной – нелинейностью сложной химической реакции.

Во многих случаях поведение систем описывается особыми нелинейными зависимостями, характерными для «теории катастроф» [7].

Теория катастроф является весьма элегантным результатом применения топологии к системам, которые обладают четырьмя основными свойствами: бимодальностью, разрывностью, гистерезисом и дивергенцией. О бимодальности говорят, когда для системы характерно одно из двух (или более) состояний, а свойство разрывности предполагает, что между этими двумя состояниями оказывается сравнительно мало индивидов или наблюдений. О разрывности говорят и тогда, когда малые изменения какой-либо переменной, в том числе времени, вызывают большие изменения в поведении или состоянии. Гистерезис проявляется в том, что система обладает четко выраженной замедленной реакцией на некое воздействие, причем эта реакция идет по одному пути, когда воздействие возрастает, и по-другому, когда оно убывает.

Труднее описать свойство дивергенции, характерной особенностью которого является то, что близкие начальные условия эволюционируют к значительно удаленным друг от друга конечным состояниям. Простейший тип катастрофы иллюстрируется рис. 3, на котором изображена катастрофа, именуемая складкой. Предполагается, что система сначала находится в точке *A* на нижней ветви складчатого многообразия. С ростом переменной p переменная x тоже возрастает, так что система переходит через точку *B* и достигает точки *C*. В данной точке переменная *p* пересекает особенность S_1, и система совершает «катастрофический» скачок на верхнюю ветвь многообразия в точку *C'*. Дальнейшее возрастание переменной уводит систему далее за точку *D*.

Если же переменная p начинает теперь убывать, то система продолжает следовать вдоль верхней ветви многообразия через точку *E* к точке *F*. В этой точке переменная *p* пересекает особенность S_2, и система совершает «катастрофический» возврат на нижнюю ветвь многообразия в точку *F'*, после чего дальнейшие изменения переменной *p* ведут систему либо к точке *A*, либо к точке B до тех пор, пока она вновь не пересечет особенность S_1.

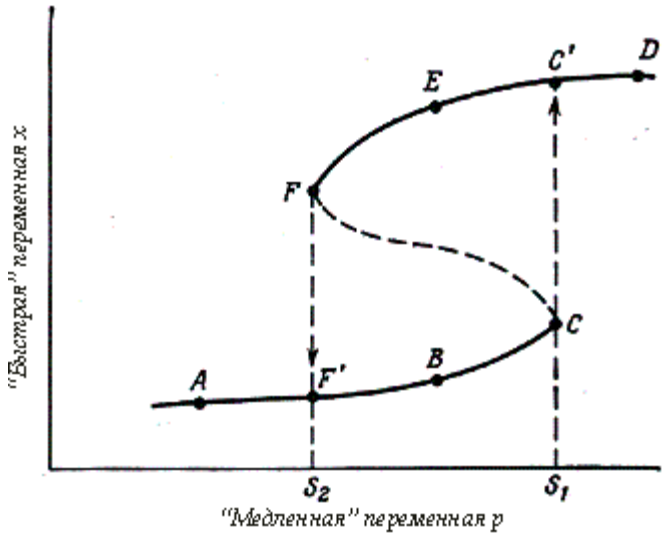


Рисунок 3. - Изображение катастрофы «складка»

Простая катастрофа «складка» довольно хорошо иллюстрирует свойство бимодальности, представленное двумя ветвями складчатого многообразия, и

свойство разрывности, представленное резкими скачками с одной ветви на другую, в особенностях S_1 и S_2. Гистерезис иллюстрируется тем, что траектория системы при уменьшении p после пересечения особенности отличается от траектории, по которой движется система при увеличении p. Следует пожалуй отметить, что конкретная форма функции, связывающей x и p на многообразии, не важна – лишь бы в проекциях x на p сохранялась особенность типа складки.

Простейшая из эквивалентных функций, представляющих катастрофу «складка», задается многочленом третьей степени:

$$f(x,p)= -(x^3-x+p) \qquad (5)$$

Вероятностный подход.

Следует отметить еще один аспект протекания процессов в полимерах – его можно связать со стохастичностью многих процессов [8].

Кроме того, кривые распределения прочности и долговечности полимодальны и в принципе не могут быть аппроксимированы каким-либо простым распределением типа гауссова. Из этого следует, что тонкие пленки и волокна имеют несколько наиболее вероятных характеристик прочности или долговечности при неизменных условиях испытания, т.е. при переходе к тонким пленкам и волокнам размываются классические понятия, утрачивается их однозначность.

Оказалось, что огромный разброс и неоднозначность характерны не только для механических свойств, но и для электрической прочности-важной характеристики изоляционных материалов при переходе к тонким пленкам и волокнам. Здесь тоже наблюдается спектр электрической прочности. Вся совокупность экспериментальных результатов приводит к выводу, что подход к описанию многих свойств должен быть вероятностным. Все эксплуатационные характеристики тонких пленок и волокон являются случайными функциями и функционалами от условий эксплуатации и должны

описываться на языке теории случайных функций и полей. Это означает прежде всего то, что должны быть экспериментально получены законы распределения величин, характеризующих различные свойства пленок и волокон.

Следует учитывать и невозможность **микромеханического равновесия в твёрдых телах и резинах.** Механические свойства изготовленных деталей, а также любого куска материала определенной формы всегда представляют собой функции времени и температуры.

Существуют и другие механизмы прогрессирующих изменений. Причина этого состоит в непрерывных химических изменениях или в потере компонентов и взаимодействии с окружающей средой путем испарения, деградации или химических реакций. Все напряженные места быстрее «поражаются» химически, поскольку они обладают более высокой свободной энергией.

Таким образом, адекватное описание реологических, механических процессов, а также кинетики физико-химических процессов требуют анализа и обоснованного выбора нелинейных математических моделей.

Литература

1. Мак-Келви Д.М. Переработка полимеров. – М.: Химия, 1965. –444с.
2. Виноградов Г.В., Малкин А.Я. Реология полимеров. – М.: Химия,1977. – 440с.
3. Шульман З.П. Конвективный тепломассоперенос реологически сложных жидкостей. – М.: Энергия, 1975.
4. Каблов, В.Ф. Полимерные материалы с функционально-активными компонентами. Исследования и технологии (часть 1): монография / В.Ф. Каблов, Н.А. Кейбал; ВПИ (филиал) ВолгГТУ. – Волгоград, 2018. – 406 с.
5. Эмануэль Н.М., Бучаченко А.Л. Химическая физика старения и стабилизации полимеров.- М.: Наука. 1982. - 360с
6. Агаянц И.М. Азы статистики в мире химии.-М.: МИТХТ, 2012.- 404с.
7. Постон Т., Стюарт И. Теория катастроф и ее приложения / Пер. с англ. – Москва : Мир, 1980. – 607 с.

8. Цой Б., Карташов Э.М., Шевелев В.В. Прочность и разрушение полимерных пленок и волокон - М. : Химия, 1999. - 496с.

Кант снял катаракту с глаз человечества.

А. Шопенгауэр

Моё дело сказать правду, а не заставлять верить в неё.

Ж.Ж. Руссо

Г Л А В А 1

ТЕЧЕНИЕ В КАНАЛАХ

Рассмотрено течение в плоском и круглом каналах. Представлена подробная методика определения реологических параметров. Рассмотрена также задача теплообмена в граничных условиях первого рода. Приведены расчётные результаты и выводы.

1.1. Течение в плоской щели

В настоящей работе предпринята попытка оценить погрешность степенной модели при течении жидкости в плоском канале. Оценка выполнена путем сопоставления расчётных результатов для степенной модели с результатами для жидкости Эллиса. Модель Эллиса взята в качестве «эталона», поскольку хорошо описывает поведение реологически сложных жидкостей при малых и средних скоростях деформации. Трёхпараметрическая модель Эллиса при низких скоростях сдвига предсказывает ньютоновское поведение жидкости и существование конечного значения вязкости. При высоких скоростях сдвига, что маловероятно в реальной практике переработки полимеров, модель Эллиса полагает поведение, описывающееся степенным законом.

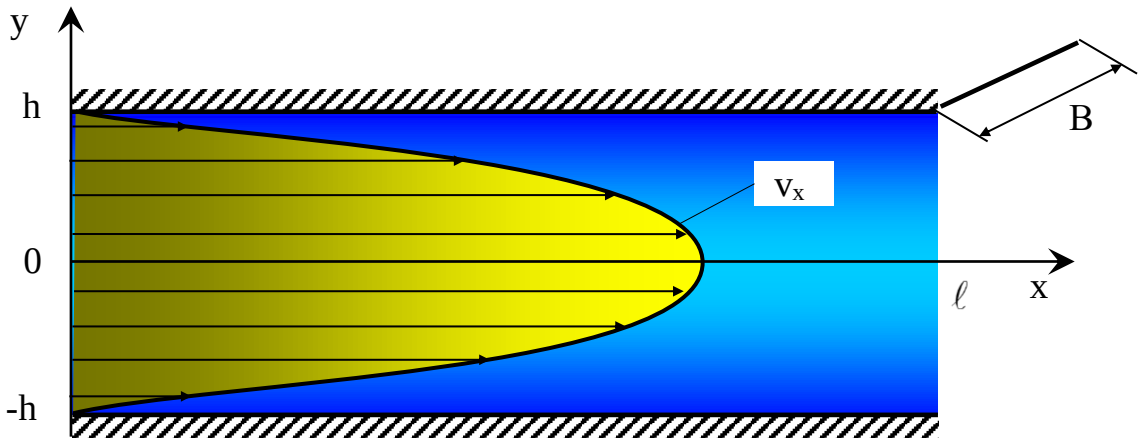


Рис. 1. Расчётная схема течения.

Схема течения и система декартовых координат представлена на рис.1. Имеем две бесконечные параллельные пластины, расстояние между которыми 2h постоянно. Напорное течение совершается только в направлении x, длина канала ℓ. Течение изотермическое, ламинарное. Трение жидкости о боковые стенки не учитываем, считая B>>h (B - ширина щели).

Плоское течение жидкости описывается уравнением движения [4]

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y},$$

где P – давление; x – продольная координата; y – поперечная координата; $\tau_{xy}(y)$ – касательное напряжение.

Граничные условия задачи включают: условие прилипания жидкости к поверхностям канала и условие симметрии, или отсутствия касательных напряжений на оси

$$y=\pm h, \qquad \upsilon_x=0; \qquad y=0, \quad \partial\upsilon_x/\partial y = 0, \quad \tau_{xy}=0,$$

где $v_x(y)$ – осевая компонента скорости.

Для замыкания задачи представленную систему уравнений необходимо дополнить реологическим уравнением состояния.

Учитывая симметрию задачи и граничных условий, ограничимся рассмотрением течения в верхней части канала 0<y<h.

Проинтегрировав уравнение движения с учётом условия симметрии, получим выражение для касательного напряжения

$$\tau_{xy} = \frac{dP}{dx} y \ .$$

Из уравнения движения с учётом граничных условий, выражение для касательного напряжения в поперечном сечении канала можно записать следующим образом

$$\tau_{xy} = \tau_w \frac{y}{h},$$

где $\tau_w = \frac{dp}{dx} h$ - касательное напряжение на стенке (аналог градиента давления), $\frac{dp}{dx} = -\frac{\Delta p}{\ell}$, Δp – падение давления по длине канала.

Видно, что распределение касательного напряжения описывается линейной функцией: на оси напряжение нулевое и наибольшее у стенки. Поскольку градиент давления имеет постоянное значение (задаваемый параметр), то имеет место однозначное соответствие между касательным напряжением и поперечной координатой. Поэтому эквивалентно использовать в качестве аргумента либо координату «y», либо касательное напряжение «τ». Далее индексы «$_{xy}$» у касательного напряжения опущены.

Для получения расчётных формул воспользуемся методикой Рабиновича – Муни [1], [5]. Связь между напряжением τ и скоростью сдвига $\dot{\gamma}$ запишем в виде (уравнение состояния)

$$-\dot{\gamma} = \mathrm{f}\left(\tau\right), \qquad \frac{dv_x}{dy} = \dot{\gamma} \ . \qquad (1)$$

Необходимо дать пояснения относительно знаков касательного напряжения и градиента скорости сдвига. Ввиду симметрии задачи расчётная область ограничена первым квадрантом (x>0, y>0). Если решать задачу в области x>0, y<0, то проблема со знаками отпадает, поскольку и касательное напряжение и градиент скорости положительны. Уравнение движения показывает отрицательный знак касательного напряжения $\tau_{xy} = -\Delta p y / \ell$. Кроме того, градиент скорости сдвига тоже отрицательный (функция

убывающая). Но дело в том, что зависимость (1) часто имеет степенной характер и операции, например, интегрирования с отрицательными основаниями представляют определенные проблемы. Запишем зависимость (1) так $\dot{\gamma} = \tau/\eta(\tau)$, где $\eta(\tau)$ - вязкость. Вязкость по определению всегда положительна, поэтому может записать $\eta(|\tau|)$. Т.е. в выражении для вязкости касательное напряжение всегда положительное. Кроме того, допустима запись в форме $\dot{\gamma} = |\tau| sign(\tau)/\eta(|\tau|)$. А поскольку величина касательного напряжения отрицательна, то $\dot{\gamma} = -|\tau|/\eta(|\tau|)$. Но градиент скорости тоже отрицателен, следовательно, относительно знаков выполняется тождество. Уилкинсон У.Л. [5] предложил в случае непосредственного интегрирования реологического уравнения записывать уравнение состояния (1), в форме $-\dot{\gamma} = \mathrm{f}(\tau)$, полагая в нём τ>0 ($\tau = |-\Delta p/\ell| y$). Это существенно упрощает операцию интегрирования степенных функций с дробным показателем степени. Представленные соображения применимы к плоским и круглым каналам, но не могут быть распространены на течение в валковом зазоре и канале экструдера.

Учитывая соотношения

$$\tau = \tau_w \frac{y}{h}, \qquad d\tau = \tau_w \frac{dy}{h}$$

и уравнение состояния (1) последовательно можем записать

$$-\int_{v_x}^{0} dv_x = \int_{y}^{h} \mathrm{f}(\tau) dy = \int_{\tau}^{\tau_w} \mathrm{f}(\tau) \frac{h}{\tau_w} d\tau .$$

Следовательно, осевая скорость определяется интегралом

$$v_x = \frac{h}{\tau_w} \int_{\tau}^{\tau_w} \mathrm{f}(\tau) d\tau .$$

Учитывая осевую симметрию задачи и связь касательного напряжения с поперечной координатой, последовательно можем записать для объёмного

расхода

$$Q = 2B\int_0^h v_x dy = 2B\frac{h}{\tau_w}\int_0^{\tau_w} v_x d\tau .$$

Подставив в это выражение скорость, получим двойной интеграл

$$Q = 2B\frac{h^2}{\tau_w{}^2}\int_0^{\tau_w}\int_\tau^{\tau_w} \mathrm{f}\left(\tau\right) d\tau d\tau .$$

Выполним интегрирование по частям

$$Q = \frac{2Bh^2}{\tau_w{}^2}\left\{\tau\int_\tau^{\tau_w} \mathrm{f}\left(\tau\right) d\tau\Bigg|_0^{\tau_w} + \int_0^{\tau_w} \tau \mathrm{f}\left(\tau\right) d\tau\right\}.$$

Первое слагаемое равно нулю, следовательно

$$Q = \frac{2Bh^2}{\tau_w{}^2}\int_0^{\tau_w} \tau \mathrm{f}\left(\tau\right) d\tau$$

Таким образом, расход жидкости и профиль скорости определяются интегралами:

$$\frac{Q}{2Bh^2} = \frac{1}{\tau_w^2}\int_0^{\tau_w} \tau f\left(\tau\right) d\tau , \quad V\left(\xi\right) = \frac{2Bh^2}{Q}\int_\xi^1 \mathrm{f}\left(\tau_w \xi\right) d\xi , \qquad (2)$$

где Q – расход жидкости; $\xi = y/h$ - безразмерная координата; v_x - скорость; $V = 2Bhv_x/Q$ - безразмерная скорость.

Рассмотрим **течение жидкости Оствальда – де Виля**

$$\tau = \mu_0 \dot{\gamma}^n , \qquad f\left(\tau\right) = \left(\frac{\tau}{\mu_0}\right)^{\frac{1}{n}} . \qquad (3)$$

Здесь n, μ_o - параметры реологической модели.

Подставив выражение (3) в формулы (2) и выполнив интегрирование, получим

$$\frac{Q}{2Bh^2}=\frac{n}{1+2n}\left(\frac{\tau_w}{\mu_0}\right)^{\frac{1}{n}}, \quad V(\xi)=\frac{1+2n}{1+n}\left(1-\xi^{1+\frac{1}{n}}\right). \qquad (4)$$

Согласно выражению (4) профиль безразмерной скорости при любом напряжении на стенке определяется только индексом течения. В ньютоновском случае (n=1) имеем параболическое распределение скорости $V(\xi)=1{,}5\left(1-\xi^2\right)$.

Течение жидкости Эллиса. Уравнение состояния (1) имеет вид

$$\dot{\gamma}=f(\tau)=a\tau+b\tau^{\alpha}. \qquad (5)$$

Подставив выражение (5) в формулы (2), получим

$$\frac{Q}{2Bh^2}=\frac{a\tau_w}{3}+\frac{b\tau_w^{\alpha}}{2+\alpha}, \qquad V(\xi)=\frac{\frac{a\tau_w}{2}\left(1-\xi^2\right)+\frac{b\tau_w^{\alpha}}{1+\alpha}\left(1-\xi^{1+\alpha}\right)}{\frac{a\tau_w}{3}+\frac{b\tau_w^{\alpha}}{2+\alpha}}. \qquad (6)$$

Согласно выражению (6) профиль безразмерной скорости зависит не только от всех реологических констант модели Эллиса (a, b, α), но и от касательного напряжения на стенке. В этом состоит принципиальное отличие формул для скорости в (4) и (6).

Для численного анализа воспользуемся данными реологических исследований из работы [6]. Измерения выполнены на капиллярном вискозиметре плунжерного типа. Резиновая смесь на основе каучуков СКИ-3НТ и СКМС-30АРКПН [по 50 ч. (масс)] содержащая в качестве наполнителей технический углерод ПМ-15 (35 ч.) и ПГМ-33 (38 ч.). В основной состав входили также: масло соляровое-18, сера-1,5, оксид цинка-3 ч. (масс). Диаметр плунжера и цилиндрической камеры термостатирования 9,52 мм, диаметр капилляра 2 мм, температура смеси при испытании 120 ºС. Исследован интервал касательных напряжений от 0,123 МПа до 0,203 МПа. Выражения $\tau_w=h\Delta p/\ell$, $\tau=\tau_w y/h$ позволяют давление и касательное напряжение выражать в мегапаскалях. При этом расчётные формулы не изменяются.

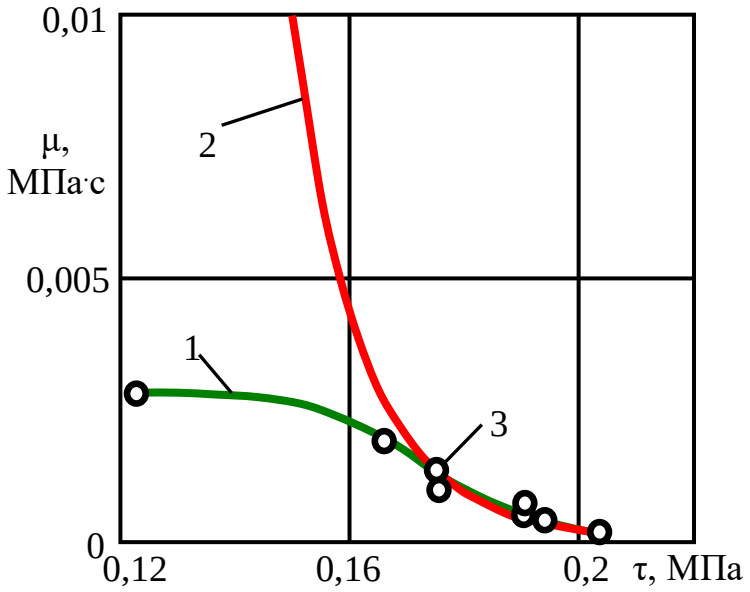


Рис.2. Зависимость вязкости на стенке жидкостей Эллиса (линия 1) и Оствальда – де Виля (2) от касательного напряжения на стенке. Экспериментальные точки – 3.

В результате обработки кривой течения методом выбранных точек (подробности в разделе 1.10.2), получены следующие значения реологических констант для модели Эллиса: α=17,893, a=350,217 МПа$^{-1}$с$^{-1}$, b=2,373x10^{15} МПа$^{-\alpha}$с$^{-1}$. Соответственно, для модели Оствальда - де Виля: n=0,071, μ_o=0,124 МПа*с^{0,071}. Материал является ярко выраженным псевдопластиком. Обработка реологических данных выполнена без учёта поправки Муни – Рабиновича, поскольку она качественно не влияет на результат.

Сопоставление аппроксимаций с экспериментальными точками иллюстрируется с помощью зависимости эффективной вязкости ($\mu = \tau / \dot{\gamma}$) от касательных напряжений. Поскольку касательное напряжение измеряется в мегапаскалях, то размерность вязкости будет МПа·с. Выражения для расчёта вязкости моделей Эллиса (5) и Оствальда – де Виля (3) имеют вид:

$$\mu = \left(a + b\tau_w^{\alpha-1}\right)^{-1}, \qquad \mu = \mu_0 \left(\frac{\tau_w}{\mu_0}\right)^{\frac{n-1}{n}}.$$

Расчётные результаты зависимости вязкости от касательного напряжения представлены на рис.2. Видно, что при больших значениях касательных напряжений обе модели дают близкий результат. Однако при напряжениях меньше 0,16 МПа наблюдается сильное расхождение прогнозируемых вязкостей. Модель Эллиса при $\tau \to 0$ показывает монотонно возрастающую вязкость к конечному значению и хорошо согласуется с

экспериментальными результатами. Модель Оствальда - де Виля показывает завышенную вязкость с уменьшением напряжений, это, в частности, следует из расчётной формулы (при n<1, $\tau \to 0$, $\mu \to \infty$).

На рис.3 представлены результаты численного анализа формул (4) и (6). Эпюра скорости для ньютоновской жидкости (Оствальда – де Виля, n=1) построена для сравнения. Кривая 2 отвечает жидкости Оствальда – де Виля для всего интервала касательных напряжений.

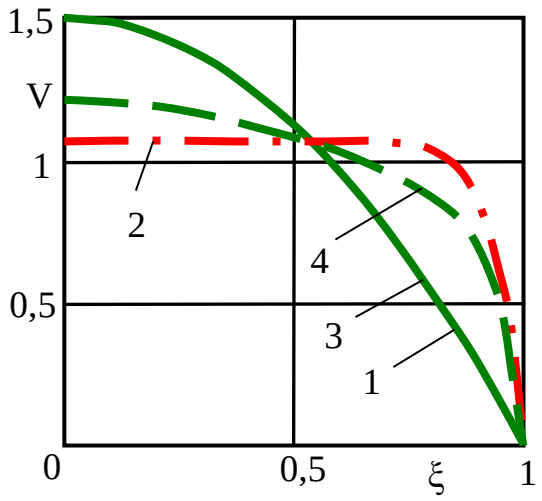


Рис.3. Профили безразмерной скорости при течении жидкости Оствальда – де Виля: 1 – n=1, 2 – n=0,09 и жидкости Эллиса: 3 – τ_w= 0,123 МПа, 4 – τ_w= 0,202 МПа.

При течении жидкости Эллиса профиль скорости зависит от напряжения на стенке. В интервале малых касательных напряжений τ_w<0,123 МПа (малых градиентов давления) профиль скорости близок к ньютоновскому (линия 3); линии 1 и 3 практически сливаются. С увеличением касательного напряжения усиливается эффект неньютоновости (линия 4). Профили 2 и 4 отвечают наибольшему проявлению аномальных свойств (τ_w= 0,202 МПа). «Истинная» эпюра 4 для жидкости Эллиса более мягко очерчена по сравнению с эпюрой 2 для жидкости Оствальда – де Виля. Кроме того, из сопоставления линий 3 и 4 можно заключить, что степенная модель показывает чрезмерно преувеличенное (гипербола, гротеск) проявление эффектов аномалии вязкости. В частности, существенно завышен градиент скорости у стенки.

Необходимо отметить, что профиль скорости, особенно у стенки канала, существенно влияет на тепло – и массообменные процессы. Следовательно, модель Оствальда – де Виля может привести с существенным ошибкам при их описании.

На рис.4 в полулогарифмических координатах представлены расчётные

расходные характеристики при течении жидкостей Оствальда-де Виля, формула (4) и Эллиса - (6). Из рисунка видно, что степенная модель показывает существенно заниженные значения расхода, особенно с уменьшением касательного напряжения. При больших касательных напряжениях расхождение уменьшается. Полученные результаты вполне коррелируют с данными по реологическим исследованиям, представленным на рис.2, согласно которым, с уменьшением касательного напряжения существенно возрастает вязкость, предсказываемая моделью Оствальда - де Виля.

Модель Эллиса обладает свойством «стабилизации» течения: при изменении касательного напряжения расход изменяется в значительно меньшей степени, чем в случае жидкости Оствальда – де Виля.

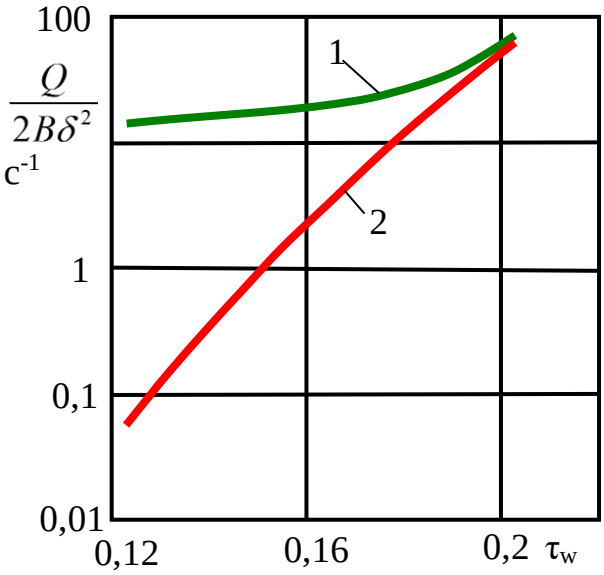


Рис.4. Расходные характеристики при течении жидкости Эллиса (1) и Оствальда - де Виля (2). Касательное напряжение в мегапаскалях.

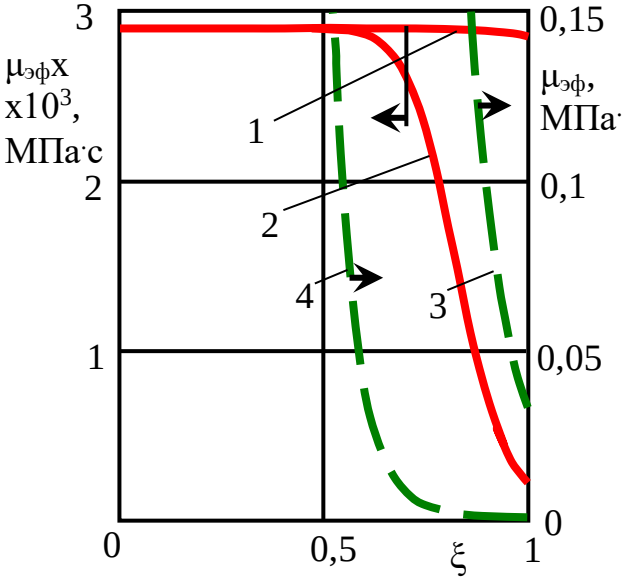


Рис.5. Распределение эффективной вязкости по высоте плоского канала при течении жидкостей Эллиса (1, 2) и Оствальда – де Виля (3, 4). Линии 1 и 3 отвечают касательному напряжению на стенке τ_w=0,123 МПа, а 2 и 4 – τ_w=0,202 МПа.

Подобные расчёты были выполнены для течения в круглом канале расплава полиэтилена (раздел 1.5). Были получены подобные результаты.

Примеры применения степенной модели

1. Течение плёнки жидкости по наклонной поверхности. Касательное напряжение на свободной поверхности отсутствует, следовательно, вязкость поверхностного слоя равна бесконечности. При этом становится проблематичным исследовать, например, волнообразование на свободной поверхности жидкости.

2. Перемешивание псевдопластика. В начальный пусковой момент вязкость неподвижной жидкости бесконечна, следовательно, теоретически перемешивающий орган не сможет быть приведен в движение. Далее, в процессе перемешивания (даже в турбулентном режиме) имеются зоны с нулевой скоростью деформации, вязкость которых бесконечна.

3. Сомнительно применение степенной модели для описания симметричного вальцевания псевдопластика, поскольку в срединной плоскости и двух поперечных сечениях касательные напряжения равны нулю. Это должно привести к ошибке определения, как поля скоростей, так и интегральных параметров течения. Эта проблема подробно рассмотрена в разделе 2.

Если же валки работают при большой фрикции, то можно выделить в качестве доминирующей и отвечающей за эффекты аномалии вязкости простую сдвиговую компоненту течения, и применять степенную модель [7].

Выводы

1. Если в рассматриваемой области течения имеются точки (зоны, линии) в которых профиль скорости имеет экстремум, то прогноз модели Оствальда - де Виля показывает большую погрешность. Это имеет место, в частности, при симметричных течениях в каналах. В плоских каналах погрешность больше чем в осесимметричных (круглых) каналах. Это обусловлено влиянием относительно большого сечения низко градиентного ядра (область в окрестности максимума скорости).

2. Если в рассматриваемой области течения отсутствуют точки (зоны) в которых скорость деформации (касательного напряжения) находятся вне

зоны аппроксимации кривой течения, то точность прогноза модели повышается. Например, течение, близкое к простому сдвигу.

3. Величина погрешности возрастает с увеличением отклонения индекса течения от единицы.

4. Полученные результаты следует учитывать при использовании модели Оствальда – де Виля в задачах тепло – и масссообмена (стационарных и нестационарных), для которых точность описания поля скоростей и расчёта интегральных параметров течения имеют решающее значение.

1.2. Расчёт реологических констант

Для выполнения конкретных инженерных расчётов необходимо знать численные значения реологических констант выбранной модели. Пусть имеем экспериментально полученные данные о зависимости касательного напряжения на стенке канала от градиента скорости сдвига. Эти данные получаются в результате исследования жидкости на вискозиметре.

Для читателей, имеющих навык определять параметры аппроксимирующей зависимости методом наименьших квадратов, данный раздел можно пропустить (как и раздел 1.5.3). Более того, следует отметить, что для задачи сопоставления математических моделей, построенных на различных реологических уравнениях, вполне допустимо использовать априорно заданную реологическую зависимость в виде системы «экспериментальных» точек даже для несуществующей в природе жидкости. Но при этом желательно чтобы она являлась псевдопластиком с ярко выраженными аномальными свойствами.

Модель Эллиса содержит три неизвестных параметра: a, b, α. Наиболее точно параметры модели можно определить методом наименьших квадратов. Однако система нормальных уравнений получится нелинейной, и решения её связано с некоторыми техническими трудностями.

Для определения констант воспользуемся методом выбранных точек [25]. Необходимо выбрать 3 наиболее удалённые друг от друга точки, лежащие на кривой

течения. Обозначим эти точки их координатами: γ_1,τ_1; γ_2,τ_2; γ_3,τ_3. Необходимо отметить, что на кривой течения скорость сдвига и касательные напряжения положительны, это упрощает запись реологического уравнения. В выбранных точках уравнение состояния должно выполняться тождественно, поэтому можно записать три равенства:

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \tau_1\left(a + b\tau_1^{\alpha-1}\right), \\ \gamma_2 &= \tau_2\left(a + b\tau_2^{\alpha-1}\right), \\ \gamma_3 &= \tau_3\left(a + b\tau_3^{\alpha-1}\right). \end{aligned} \qquad (7)$$

Требуется найти численные значения параметров a, b, α, доставляющие тождества уравнениям (7). Разделим обе части первых двух уравнений (7) на τ_1 и τ_2, соответственно

$$\frac{\gamma_1}{\tau_1} = a + b\tau_1^{\alpha-1}, \qquad \frac{\gamma_2}{\tau_2} = a + b\tau_2^{\alpha-1}. \qquad (8)$$

Вычтем из первого второе, тем самым исключим параметр «a»

$$\frac{\gamma_1}{\tau_1} - \frac{\gamma_2}{\tau_2} = b\left(\tau_1^{\alpha-1} - \tau_2^{\alpha-1}\right). \qquad (9)$$

Аналогичные операции со 2 и 3 уравнениями системы (7), приводит к соотношению

$$\frac{\gamma_2}{\tau_2} - \frac{\gamma_3}{\tau_3} = b\left(\tau_2^{\alpha-1} - \tau_3^{\alpha-1}\right). \qquad (10)$$

И наконец, разделив левые и правые части уравнений (9), (10), получим трансцендентное уравнение для параметра α

$$\left(\frac{\gamma_1}{\tau_1} - \frac{\gamma_2}{\tau_2}\right)\left(\tau_2^{\alpha-1} - \tau_3^{\alpha-1}\right) - \left(\frac{\gamma_2}{\tau_2} - \frac{\gamma_3}{\tau_3}\right)\left(\tau_1^{\alpha-1} - \tau_2^{\alpha-1}\right) = 0. \qquad (11)$$

Уравнение (11) решается численными методами.

Далее, параметр «b» можно найти из уравнения (9)

$$b = \frac{\frac{\gamma_1}{\tau_1} - \frac{\gamma_2}{\tau_2}}{\tau_1^{\alpha-1} - \tau_2^{\alpha-1}}. \qquad (12)$$

И, наконец, параметр «a» можно найти, используя первое уравнение в (8)

$$a = \frac{\gamma_1}{\tau_1} - b\tau_1^{\alpha-1}. \qquad (13)$$

Последовательность вычисления реологических параметров модели Эллиса: (11), (12), (13).

Для практических расчётов воспользуемся данными реологических исследований, представленными в работе [6]. Измерения выполнены на капиллярном вискозиметре плунжерного типа. Резиновая смесь на основе каучуков СКИ-3НТ и СКМС-30АРКПН [по

50 ч. (масс)] и содержащей в качестве наполнителей технический углерод ПМ-15 (35 ч.) и ПГМ-33 (38 ч.). В основной состав входили также: масло соляровое-18, сера-1,5, оксид цинка-3 ч. (масс). Диаметр плунжера и цилиндрической камеры термостатирования 9,52 мм, диаметр капилляра 2 мм, температура смеси при испытании 120 ºС. Результаты измерения представлены в табл. 1.

Табл. 1

γ, c^{-1}	43,2	86,2	129	173	259	344	517	1035
τ, МПа	0,123	0,166	0,175	0,175	0,19	0,19	0,194	0,203

Выбранные точки показаны в таблице 2. Выбраны две крайние точки и точка в средине интервала. Там же показаны расчётные значения отношений скоростей сдвига к касательным напряжениям, необходимые при численном решении трансцендентного уравнения (11).

Табл. 2.

m	1	2	3
γ_m, c^{-1}	43,2	173	1035
τ_m, МПа	0,123	0,175	0,203
$\frac{\gamma_m}{\tau_m}$	351,219	988,57	5098,52

Уравнение (11) для рассматриваемых условий имеет вид

$$(351,219-988,57)\left(0,175^{\alpha-1}-0,203^{\alpha-1}\right)-(988,57-5098,52)\left(0,123^{\alpha-1}-0,175^{\alpha-1}\right)=0$$

или

$$637,351\left(0,175^{\alpha-1}-0,203^{\alpha-1}\right)-4109,95\left(0,123^{\alpha-1}-0,175^{\alpha-1}\right)=0\,.$$

Согласно результатам решения трансцендентного уравнения α=17,893. Далее, с помощью формул (12), (13) находим: a=350,217 $МПа^{-1}c^{-1}$, b=2,373x10^{15} $МПа^{-\alpha}c^{-1}$. Необходимо отметить, что касательное напряжение измеряется в мегапаскалях (табл. 1 и 2). Показатель степени α=17,893 свидетельствует о том, что рассматриваемая жидкость проявляет ярко выраженные псевдопластические свойства.

Следовательно, реологическое уравнение Эллиса, для рассматриваемой резиновой смеси, имеет вид

$$\gamma = 350,893\tau + 2,373\times10^{15}\tau^{17,893},$$

Реологические константы модели Оствальда - де Виля находились методом двух точек [25]. Реологический закон имеет вид (двух параметрическая модель)

$$\tau = \mu\gamma^n . \qquad (14)$$

Используем точки 2 и 3 из табл. 2. Т.е. область сравнительно больших скоростей деформаций и напряжений. Мак-Келви рекомендует для аппроксимации использовать участок кривой течения, протяжённостью не более одного порядка [1]. Для указанных точек уравнение (14) приводит к системе уравнений

$$\tau_2 = \mu\gamma_2^n , \qquad \tau_3 = \mu\gamma_3^n . \qquad (15)$$

Разделив в (15) первое уравнение на второе, получим

$$\frac{\tau_2}{\tau_3} = \left(\frac{\gamma_2}{\gamma_3}\right)^n .$$

Прологарифмируем обе части этого уравнения

$$\ln\left(\frac{\tau_2}{\tau_3}\right) = n\ln\left(\frac{\gamma_2}{\gamma_3}\right). \qquad (16)$$

Из выражения (16) получаем расчётную формулу для индекса течения

$$n = \ln\left(\frac{\tau_2}{\tau_3}\right) \Big/ \ln\left(\frac{\gamma_2}{\gamma_3}\right). \qquad (17)$$

И наконец, из первого выражения в (15) можем записать расчётную формулу для консистенции

$$\mu = \frac{\tau_2}{\gamma_2^n} . \qquad (18)$$

В результате расчётов по формулам (17), (18), получены следующие значения констант модели Оствальда - де Виля: n=0,071, μ_o=0,124 МПа*$c^{0,071}$.

1.3. Распределение эффективной вязкости по высоте канала

Для того чтобы объяснить столь сильное расхождение результатов, представленное в конце раздела 1.1, рассмотрим распределение эффективной вязкости по сечению канала.

Жидкость Оствальда – де Виля. Эффективная вязкость описывается выражением

$$\mu_{эф} = \mu \left(\frac{dv_x}{dy} \right)^{n-1} . \qquad (19)$$

Градиент скорости и касательное напряжение отрицательны, для удобства операций со степенной функцией инвертируем знак одновременно у этих величин.

Согласно уравнению движения, касательное напряжение распределяется по сечению плоского канала линейно

$$\tau = \frac{\Delta p}{\ell} y . \qquad (20)$$

Если ввести напряжение на стенке

$$\tau_w = \frac{\Delta p}{\ell} h ,$$

то выражение для касательного напряжения (20) можно записать так

$$\tau = \tau_w \xi , \qquad (21)$$

где $\xi = y/h$ - безразмерная ордината. Согласно уравнению движения, распределение касательного напряжения линейно.

С учётом введённых обозначений, выражение для скорости сдвига может быть записано так

$$\frac{dv_x}{dy} = \left(\frac{\tau_w \xi}{\mu} \right)^{\frac{1}{n}} .$$

Следовательно, для распределения эффективной вязкости по высоте канала, с учётом (19), имеем выражение

$$\mu_{эф} = \mu \left(\frac{\tau_w \xi}{\mu} \right)^{\frac{n-1}{n}} . \qquad (22)$$

Жидкость Эллиса. Эффективная вязкость в произвольном сечении канала описывается выражением

$$\mu_{эф} = \frac{1}{a + b\tau^{\alpha-1}} .$$

С учётом соотношения (21), выражение для эффективной вязкости примет вид

$$\mu_{эф} = \frac{1}{a + b\left(\tau_w \xi\right)^{\alpha - 1}} . \qquad (23)$$

На рис.5 представлены результаты численного анализа выражений (22), (23). Расчёты выполнены для двух крайних значений касательных напряжений на стенке для τ_w=0,123 МПа, и τ_w=0,202 МПа.

Из рисунка видно, что жидкость Эллиса при малых напряжениях на стенке ведёт себя подобно ньютоновской жидкости: эффективная вязкость практически постоянна по сечению канала (линия 1). При значительных напряжениях на стенке эффективная вязкость около стенки уменьшается, а в области ядра $|\xi| \le 0,6$ вязкость практически постоянна.

Жидкость Оствальда – де Виля в случае псевдопластика (n=0,071) показывает на оси бесконечную эффективную вязкость, что в частности, непосредственно следует из расчётной формулы (22). Однако, с увеличением касательного напряжения на стенке увеличивается толщина пристенного слоя с малой вязкостью (линия 4).

Из рис.5 видно, что рассмотренные жидкости демонстрируют весьма качественно различающуюся картину распределения эффективной вязкости. Причём жидкость Эллиса демонстрирует поведение, наиболее согласующееся с физическими представлениями о течении псевдопластической жидкости.

Градиент скорости сдвига на стенке для жидкости Эллиса определяется выражением

$$\gamma_w = \left.\frac{d\upsilon_x}{dy}\right|_{y=h} = \tau_w \left(a + b\tau_w{}^{\alpha - 1}\right) . \qquad (24)$$

Соответственно, для жидкости Оствальда – де Виля

$$\gamma_w = \left.\frac{dv_x}{dy}\right|_{y=h} = \left(\frac{\tau_w}{\mu}\right)^{\frac{1}{n}} . \qquad (25)$$

С использованием формул (24), (25) и результатов расчётов рис.5 заполнена табл.3. В последней графе представлены значения градиента скорости сдвига на стенке. Скорость сдвига на стенке пропорциональна расходу жидкости. Из таблицы видно, что при малых напряжениях на стенке (τ_w=0,123 МПа) расход жидкости Оствальда – де Виля значительно меньше расхода жидкости Эллиса (3,843 $с^{-1}$<<43,203 $с^{-1}$). И, наоборот, при больших касательных напряжениях на стенке (τ_w=0,202 МПа) расходы жидкостей близки (948,35 $с^{-1}$ и 967,89 $с^{-1}$, соответственно).

Табл.3.

Жидкость	τ_w, МПа	$\mu_{эф}$, МПа*с		γ_w, $с^{-1}$
		ξ=0	ξ=1	ξ=1
Оствальда – де Виля	0,123	∞	0,032	3,843
	0,202	∞	$2,13*10^{-4}$	948,35
Эллиса	0,123	$2,893*10^{-3}$	$2,847*10^{-3}$	43,203
	0,202	$2,893*10^{-3}$	$2,087*10^{-4}$	967,89

Вероятно, именно различным характером эпюр скорости и эффективных вязкостей для рассматриваемых модельных жидкостей обусловлено существенное различие расходных характеристик. Так в случае течения жидкости Оствальда – де Виля при малых перепадах давления (малых касательных напряжениях на стенке) большая часть средней части сечения движется с малыми скоростями сдвига (линия 2 на рис.4). Этой области согласно рис.5 отвечают значительные вязкости (отметим, что на оси вязкость равна бесконечности). В результате существенно возрастает сопротивление течению и расход уменьшается. В то же время жидкость Эллиса в области малых касательных напряжений на стенке показывает ньютоновский характер поведения с параболической эпюрой течения. Вязкость в срединной области течения повышена, но в меньшей степени, чем у жидкости Оствальда – де

Виля (см. рис.5). В результате в области малых касательных напряжений на стенке расход жидкости Эллиса больше чем расход жидкости Оствальда – де Виля (линия 1 на рис.4).

1.4. Диссипативный разогрев при течении неньютоновской жидкости в плоской щели

В разделе 1.1 подробно освещена постановка и решение задачи течения степенной жидкости в плоской щели. Данное исследование можно рассматривать как развитие указанной задачи.

При течении в трубах расплавов полимеров, обладающих высокой вязкостью, имеет место интенсивное тепловыделение, обусловленное внутренним трением. Интенсивность тепловыделения изменяется от нуля в центре трубы до максимального значения у стенки трубы.

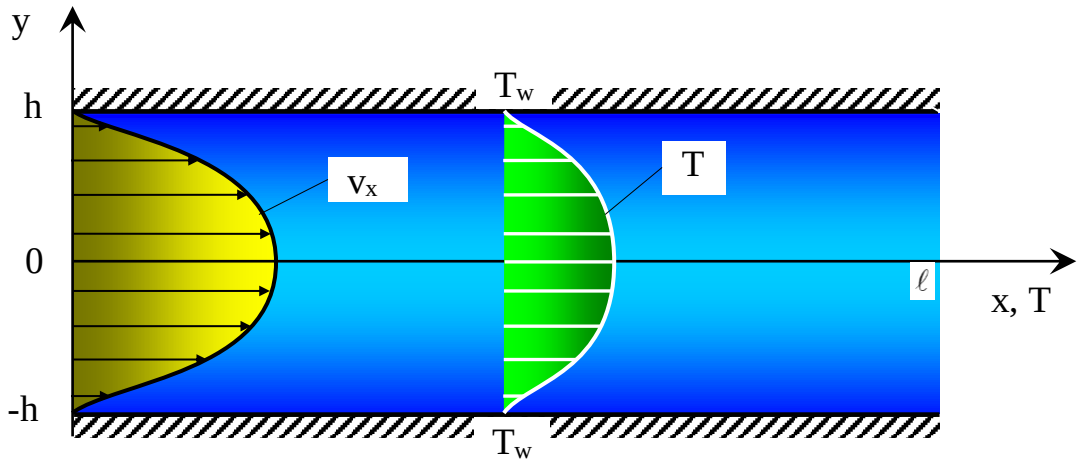


Рис.6. Расчётная схема

В настоящей работе предпринята попытка оценить погрешность степенной модели при решении сравнительно простой задачи теплообмена. Особенность задачи состоит в том, что область течения содержит зону малых скоростей сдвига, в которой степенная модель предсказывает завышенную вязкость (п.1.3). Оценка выполнена путем сопоставления расчётных

результатов для степенной модели с результатами для жидкости Эллиса. Модель Эллиса взята в качестве «эталона», поскольку хорошо описывает поведение реологически сложных жидкостей, как при малых, так и средних скоростях деформации. Необходимо отметить, что процесс теплообмена существенно зависит от профиля скорости.

Схема течения и теплового нагружения неньютоновской жидкости в плоской щели представлена на рис.6. Имеем две бесконечные параллельные пластины, расстояние между которыми 2h постоянно. Напорное течение совершается только в направлении x (y – поперечная координата). Реологические и теплофизические константы не зависят от температуры. Течение установившееся, ламинарное. Температура стенок поддерживается постоянной (граничное условие первого рода). Полагаем $\partial/\partial x = \partial/\partial z = \partial/\partial t = 0$. Задача состоит в отыскании распределения температуры в поперечном сечении, настолько удалённого от входа, что температура не зависит от продольной координаты.

Задача описывается следующей системой уравнений [1, 30, 32, 33, 34]:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}, \tag{26}$$

$$\lambda \frac{d^2 T}{dy^2} + \tau_{xy}\left(\frac{dv_x}{dy}\right) = 0, \tag{27}$$

$$y = 0, \quad \tau_{xy} = 0, \quad \frac{dv_x}{dy} = 0, \quad \frac{dT}{dy} = 0, \tag{28}$$

$$y = \pm h, \quad \left|\tau_{xy}\right| = \tau_w, \quad v_x = 0, \quad T = T_w. \tag{29}$$

Некоторые замечания относительно размерности величин в уравнениях (26) и (27). В уравнении (26) тождество сохраняется, если давление и касательное напряжение измерять в мегапаскалях. В уравнении (27) если касательное напряжение измеряется в мегапаскалях (МПа), то коэффициент теплопроводности должен иметь размерность МВт/(мК). Например, если коэффициент теплопроводности материала λ = 0,4 Вт/(мК) = $0{,}4 \times 10^{-6}$ МВт/(мК).

Для замыкания задачи (26) – (29) используется одна из реологических моделей - Эллиса или Оствальда - де Виля

$$\frac{d\upsilon_x}{dy} = \tau_{xy}\left(a + b\left|\tau_{xy}\right|^{\alpha-1}\right), \qquad \tau_{xy} = \mu_o\left|\frac{d\upsilon_x}{dy}\right|^{n-1}\frac{d\upsilon_x}{dy} \quad . \qquad (30)$$

Здесь p – давление; x, y, z – декартовы координаты; t – время; $\tau_{xy}(y)$ – касательное напряжение; $v_x(y)$ – осевая компонента скорости; T, T_w – температура жидкости и стенки канала; λ – коэффициент теплопроводности жидкости; a, b, α, n, μ_o – реологические константы.

Из уравнения движения (26) с учётом условий (28), (29) находим распределение касательного напряжения в поперечном сечении канала

$$\tau_{xy} = \tau_w \frac{y}{h},$$

где $\tau_w = \frac{dp}{dx}h$ - касательное напряжение на стенке (аналог градиента давления), $\frac{dp}{dx} = -\frac{\Delta p}{\ell}$, Δp – падение давления по длине канала, длиной ℓ.

Если ввести переменные в форме

$$\theta = \frac{(T - T_w)\lambda}{h^2}, \qquad \xi = \frac{y}{h},$$

То краевая задача для температуры примет вид:

$$\frac{d^2\theta}{d\xi^2} + \tau_w\xi\left(\frac{dv_x}{dy}\right) = 0,$$

$$\xi = 0, \qquad \frac{d\theta}{d\xi} = 0,$$

$$\xi = \pm 1, \qquad \theta = 0.$$

В частности, для модели Эллиса уравнение энергии имеет вид

$$\frac{d^2\theta_E}{d\xi^2} + (\tau_w\xi)^2\left[a + b(\tau_w\xi)^{\alpha-1}\right] = 0,$$

соответственно, для модели Оствальда – де Виля

$$\frac{d^2\theta_{OV}}{d\xi^2}+\tau_w\xi\left(\frac{\tau_w\xi}{\mu_0}\right)^{\frac{1}{n}}=0\,.$$

Здесь учитывалось соотношение, непосредственно следующее из (30)

$$\left|\frac{dv_x}{dy}\right|=\left(\frac{\tau_w\xi}{\mu_0}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

В результате интегрирования уравнения Фурье-Киргофа (27) с учётом условий (28), (29), для модели Эллиса (30) имеем следующее распределение температуры

$$\theta_E=\frac{a\tau_w^2}{12}\left(1-\xi^4\right)+\frac{b\tau_w^{\alpha+1}}{(\alpha+2)(\alpha+3)}\left(1-|\xi|^{\alpha+3}\right). \qquad (31)$$

Соответственно, для модели Оствальда – де Виля (30), получим

$$\theta_{OV}=\frac{n^2\tau_w^{1+\frac{1}{n}}}{(1+2n)(1+3n)\mu_o^{\frac{1}{n}}}\left(1-|\xi|^{3+\frac{1}{n}}\right). \qquad (32)$$

В выражениях (31), (32) приняты обозначения

$$\theta_E=\frac{(T_E-T_w)\lambda}{h^2},\qquad \theta_{OV}=\frac{(T_O-T_w)\lambda}{h^2},\qquad \xi=\frac{y}{h}, \qquad (33)$$

где θ_E (T_E), θ_{OV} (T_O) – модифицированные температуры при течении жидкости Эллиса и Оствальда – де Виля, соответственно, ξ - безразмерная поперечная координата.

Принятая форма для температуры (33) не содержит реологических параметров и даёт возможность сопоставлять профили температур обеих моделей в идентичных условиях течения, хотя и является размерной (МВт/м^3).

Согласно выражениям (31), (32) эпюра температуры имеет максимум в точке ξ=0. При этом максимальные температуры составляют, соответственно, для модели Эллиса (31) и модели Оствальда – де Виля (32)

$$\theta_{E,m}=\frac{a\tau_w^2}{12}+\frac{b\tau_w^{\alpha+1}}{(\alpha+2)(\alpha+3)},\qquad \theta_{OV,m}=\frac{n^2\tau_w^{1+\frac{1}{n}}}{(1+2n)(1+3n)\mu_0^{\frac{1}{n}}}\,. \qquad (34)$$

Здесь обозначено: $\theta_{E,m} = \theta_E(\xi = 0)$, $\theta_{OV,m} = \theta_{OV}(\xi = 0)$.

Для практических расчётов воспользуемся данными реологических исследований, представленными в работе [6]. В результате обработки кривой течения (раздел 1.2) получены следующие значения реологических констант для модели Эллиса: α=17,893, a=350,217 МПа$^{-1}$с$^{-1}$, b=2,373x10^{15} МПа$^{-\alpha}$с$^{-1}$. Соответственно, при аппроксимации кривой течения моделью Оствальда - де Виля: n=0,071, μ_o=0,124 МПа*с^{0,071}. Рассматриваемый материал - ярко выраженный псевдопластик. Модель Эллиса хорошо описывает все экспериментальные точки. Модель Оствальда - де Виля хорошо коррелирует с экспериментальными данными только на участке больших касательных напряжений. Кроме того, в области малых напряжений степенная модель показывает завышенные значения вязкости, поскольку имеет свойство: при n<1. $\tau_w \to 0$, $\mu \to \infty$, где μ – эффективная вязкость (отношение касательного напряжения к скорости сдвига).

На рис.7 представлены расчётные профили температур, построенные с использованием выражений (31), (32) для наименьшего (τ_w=0,123 МПа) и наибольшего (τ_w=0,203 МПа) напряжения на стенке. Видно, что в случае жидкости Эллиса (линии 1, 2) имеет место плавное изменение температуры по всему сечению. Для жидкости Отствальда – де Виля (линии 3, 4) распределение температуры в ядре потока практически однородное и сильно изменяется у стенки, на участке 0,8<ξ<1. Согласно выражению (32) поперечное распределение температуры полностью определяется индексом течения, поэтому линии 3 и 4 геометрически подобны (отличаются постоянным множителем). Кроме того, по абсолютной величине модель Оствальда – де Виля при малых напряжениях на стенке показывает существенно заниженные значения температур (кривая 3).

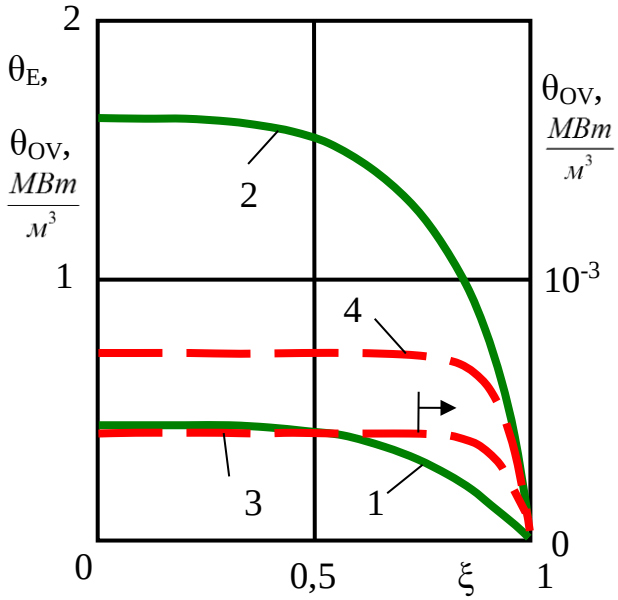


Рис.7. Распределения температуры в поперечном сечении канала при течении жидкости Эллиса (линии 1 и 2) и Оствальда – де Виля (3,4). Линии 1 и 3 отвечают τ_w =0,123 МПа; 2, 4 – τ_w=0,203 МПа.

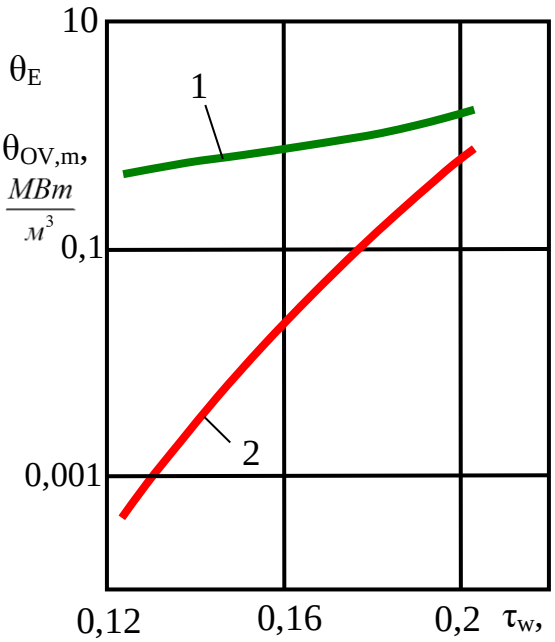


Рис.8. Зависимость максимальной температуры от касательного напряжения на стенке для жидкости Эллиса (линия 1) и жидкости Оствальда – де Виля (2).

На рис.8 представлен график изменения максимальной температуры с изменением касательного напряжения на стенке. Использовались расчётные формулы (34). Из рисунка видно, что модель Оствальда – де Виля показывает сильно заниженные значения температур даже в области больших касательных напряжений. С уменьшением касательных напряжений расхождение увеличивается, и достигает 3 десятичных порядков.

Также изучено влияние касательного напряжения на стенке на плотность теплового потока на стенке. График зависимости плотности теплового потока от касательного напряжения подобен представленному на рис.8.

Выводы.

1. Значительное расхождение расходных характеристик обусловлено неточностью описания моделью Оствальда – де Виля течения неньютоновской жидкости, а именно, погрешностью прогноза профиля осевой скорости (рис.3). В частности, в окрестности максимума скорости степенная модель

показывает значительно завышенную эффективную вязкость, о чём подробно было сказано в разделах 1.1 и 1.3.

2. Степенная модель даёт большую ошибка в прогнозе, как поля температур, так и в описании изменения максимальной температуры с изменением касательного напряжения на стенке.

3. Расхождение уменьшается при приближении индекса течения к единице.

4. Очевидно, что и при других видах теплового нагружения, в том числе и для нестационарных задач, ошибка, заложенная в прогнозе профиля скорости, ведёт к ошибкам расчёта поля температур и тепловых потоков.

5. При решении уравнения Фурье-Кирхгофа потребовалось однократное дифференцирование и двукратное интегрирование профиля скорости. Даже операция однократного интегрирования увеличивает погрешность модели Оствальда – де Виля. Следовательно, каждое последующее интегрирование увеличивает ошибку прогноза модели Оствальда – де Виля. Указанное обстоятельство нашло своё подтверждение в задачах, рассмотренных ниже.

1.5. Течение неньютоновской жидкости в круглом канале

Выполнена проверка правомерности применения реологической модели Оствальда – де Виля для описания течения неньютоновских жидкостей в круглом канале. В этом разделе сопоставляются реологические модели Эллиса и Оствальда – де Виля с точки зрения адекватности описания течения конкретного расплава полимера (псевдопластика). Поставлена и решена задача течения Эллиса в канале круглого сечения. Используется модельная жидкость с менее выраженными псевдопластическими свойствами (расплав полиэтилена) чем выше рассмотренная. В результате решения найдено поле скоростей, расход жидкости, эффективной вязкости. Для модели Оствальда – де Виля используется имеющиеся в научной литературе расчётные формулы

течения в круглом канале. Представлены и сопоставлены расчётные результаты для двух реологических моделей. При этом результаты, полученные для модели Эллиса, рассматриваются как «эталонные», ввиду лучшей аппроксимацией этой моделью экспериментальных результатов реологических исследований.

1.5.1. Течение жидкости Эллиса в канале круглого сечения.

Рассматриваемое течение имеет весьма широкое распространение в различном технологическом оборудовании. Например, в формующей головке экструдера при формовании полимерных прутков, нитей и т.д.

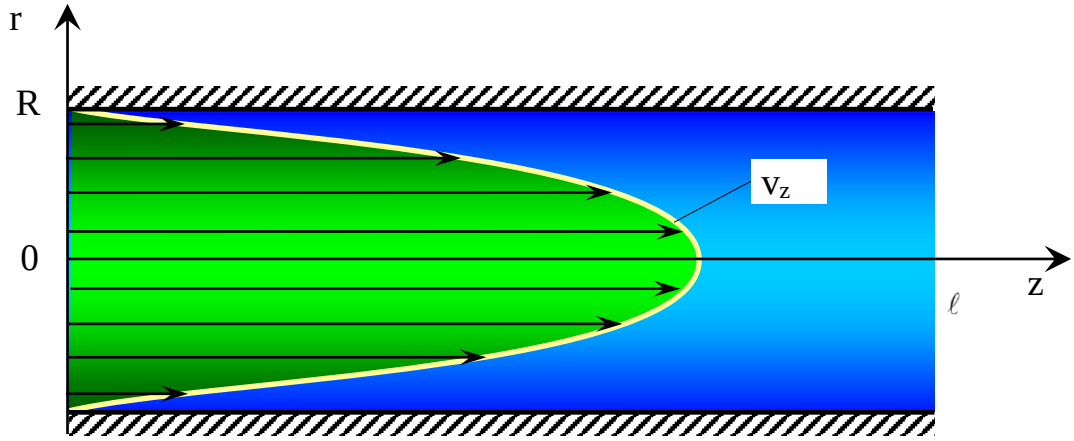


Рис.9. Расчётная схема течения.

Схема течения и система цилиндрических декартовых координат представлена на рис.9. Напорное течение совершается только в направлении оси z. Реологические свойства жидкости описываются уравнением Эллиса. Течение изотермическое, ламинарное. Требуется найти профиль скорости и расход жидкости.

Уравнение движения для данного течения и реологическое уравнение жидкости Эллиса

$$\frac{\partial P}{\partial z}=\frac{1}{r}\frac{\partial(r\tau)}{\partial r}, \qquad \frac{d\upsilon_z}{dr}=\tau\left(a+b|\tau|^{\alpha-1}\right). \qquad (35)$$

Здесь P – давление; z – осевая координата; r – радиус; τ(r) – касательное напряжение; $v_z(r)$ – осевая компонента скорости; a, b, α – реологические константы.

В случае, когда α>1, величина «a» характеризует обратную ньютоновскую вязкость в диапазоне малых напряжений сдвига, а «b» является мерой консистенции в нелинейной области умеренных напряжений сдвига. Для концентрированных растворов высокополимеров, проявляющих псевдопластические свойства, как показывают измерения, 1<α.

Градиент давления является величиной постоянной и определяется падением давления по длине канала

$$\frac{dP}{dz}=-\frac{\Delta P}{\ell},$$

где dP/dz - градиент давления, ℓ - длина канала, ΔP - избыточное давление на входе в канал относительно давления в выходном сечении (считаем на выходе канала давление атмосферное).

Граничные условия задачи включают: условие прилипания жидкости к стенкам канала и условие симметрии, или отсутствия касательных напряжений на оси

$$r=R, \quad \upsilon_z=0; \qquad r=0, \quad \partial\upsilon_z/\partial r=0, \quad \tau=0. \qquad (36)$$

Проинтегрировав уравнение движения в (35) с учётом условия симметрии (36), получим выражение для касательного напряжения

$$\tau=\frac{dP}{dz}\frac{r}{2}.$$

Следовательно, напряжение на стенке

$$\tau_w=\frac{dP}{dz}\frac{R}{2}. \qquad (37)$$

Согласно полученному выражению, градиент давления эквивалентен напряжению на стенке. Эти величины имеют идентичную размерность. Далее,

вместо давления, будем оперировать касательным напряжением на стенке. При этом, для касательного напряжения можем записать линейную зависимость

$$\tau = \tau_w \frac{r}{R}. \qquad (38)$$

Из совместного рассмотрения выражения (38) и уравнения состояния в (35), можем записать выражение для градиента скорости

$$\frac{d\upsilon_z}{dr} = a\tau_w \frac{r}{R} + b\left|\tau_w \frac{r}{R}\right|^{\alpha} sign\left(\tau_w\right).$$

Здесь используется функция сигнатуры

$$sign\left(y\right) = \begin{cases} 1, & y > 0 \\ 0, & y = 0 \\ -1, & y < 0 \end{cases}.$$

Замечание. Расчётное выражение не изменится, если одновременно у скорости сдвига и касательного напряжения изменить знак на противоположный одновременно. Т.е. рассматривать их положительными.

Разделив переменные и проинтегрировав с учётом условия (36), получим выражение для осевой скорости

$$\upsilon_z = \frac{a}{2}\frac{\left|\tau_w\right|}{R}\left(R^2 - r^2\right) + \frac{b}{\alpha+1}\left|\frac{\tau_w}{R}\right|^{\alpha}\left(R^{\alpha+1} - r^{\alpha+1}\right). \qquad (39)$$

Видно, что эпюра осевой скорости (39) не является параболической.

Объемный расход жидкости определяется интегралом

$$Q = 2\pi\int_0^R \upsilon_z r dr. \qquad (40)$$

Выполнив интегрирование в (40) с учётом выражения (39), получим

$$\frac{Q}{\pi R^3} = \frac{a\left|\tau_w\right|}{4} + \frac{b\left|\tau_w\right|^{\alpha}}{\alpha+3}. \qquad (41)$$

Также расход жидкости Эллиса можно найти, используя методику Уилкинсона [5]

$$\frac{Q}{\pi R^3} = \frac{1}{\tau_w^3} \int_0^{\tau_w} \tau^2 f(\tau) d\tau ,$$

где $f(\tau) = \gamma(\tau)$ - реологическое уравнение.

Подставив реологические уравнение из (35) в уравнение расхода

$$\frac{Q}{\pi R^3} = \frac{1}{\tau_w^3} \int_0^{\tau_w} \tau^2 \left(a\tau + b\tau^{\alpha} \right) d\tau ,$$

и выполнив интегрирование, получим выражение для расхода жидкости Эллиса в круглом канале

$$\frac{Q}{\pi R^3} = \frac{a|\tau_w|}{4} + \frac{b|\tau_w|^{\alpha}}{\alpha + 3} ,$$

идентичное (41).

1.5.2. Течение жидкости Оствальда – де Виля в круглом канале.

Уравнение движения в (35) остаётся в силе, но реологическое уравнение имеет вид

$$\tau = \mu \left(\frac{dv_z}{dr} \right)^n , \qquad (42)$$

где μ, n – реологические константы.

Результаты интегрирования уравнения движения, полученные выше (37), (38), остаются в силе, как и граничные условия (36). Поэтому, с учётом (42), можем записать следующее выражение для градиента скорости

$$\frac{dv_z}{dr} = \left| \frac{\tau_w}{\mu R} \right|^{\frac{1}{n}} r^{\frac{1}{n}} sign(\tau_w) .$$

Проинтегрировав это уравнение с учётом условия прилипания (36), получим выражение для осевой скорости

$$v_z = \left(\frac{n}{n+1}\right)\left|\frac{\tau_w}{\mu R}\right|^{\frac{1}{n}}\left(R^{\frac{1}{n}+1} - r^{\frac{1}{n}+1}\right). \qquad (43)$$

Расход найдём, используя формулу (40). В результате интегрирования (43) имеем

$$\frac{Q}{\pi R^3} = \frac{n}{1+3n}\left|\frac{\tau_w}{\mu}\right|^{\frac{1}{n}}. \qquad (44)$$

Поскольку в формулах (41) и (44) используется абсолютная величина напряжения на стенке, будем пользоваться положительным значением этой величины $\tau_w = \Delta PR/(2\ell)$.

1.5.3. Определение констант реологических моделей Эллиса и Оствальда – де Виля по кривой течения

Для выполнения численных расчётов необходимо знать численные значения реологических констант рассмотренных моделей. Пусть имеем экспериментально полученные данные о зависимости касательного напряжения на стенке канала от градиента скорости сдвига (кривая течения). Модель Эллиса содержит три неизвестных параметра: a, b, α.

Для определения констант воспользуемся методом выбранных точек. Нам необходимо выбрать 3 наиболее удалённые друг от друга точки, лежащие на кривой течения. Обозначим эти точки их координатами: γ_1,τ_1; γ_2,τ_2; γ_3,τ_3 (γ - скорость сдвига, τ - касательное напряжение).

Подробно методика расчёта констант представлена в разделе 1.2. Сохраним принятые ранее обозначения. Используем следующие расчётные формулы.

Модель Эллиса. Уравнение для параметра α

$$\left(\frac{\gamma_1}{\tau_1} - \frac{\gamma_2}{\tau_2}\right)\left(\tau_2^{\alpha-1} - \tau_3^{\alpha-1}\right) - \left(\frac{\gamma_2}{\tau_2} - \frac{\gamma_3}{\tau_3}\right)\left(\tau_1^{\alpha-1} - \tau_2^{\alpha-1}\right) = 0. \qquad (45)$$

Выражение для параметра «b»

$$b = \left(\gamma_1/\tau_1 - \gamma_2/\tau_2\right)/\left(\tau_1^{\alpha-1} - \tau_2^{\alpha-1}\right). \qquad (46)$$

Расчётная формула для параметра «a»

$$a = \gamma_1 / \tau_1 \ - b\tau_1^{\alpha-1}. \qquad (47)$$

Для практических расчётов воспользуемся данными реологических исследований, представленными в работе [21]. Измерения выполнены на капиллярном вискозиметре: диаметр капилляра 1,19 мм, длина 3,6x1,19 мм. Полиэтилен Алтон 10. Плотность при 23 ºС равна 0,92 г/см^3. Средний молекулярный вес, определённый методом светорассеяния, 30000. Индекс расплава: 2,1 г/10 мин. Температура смеси при испытании 190 ºС. Состояние полимера соответствует технологическим условиям работы червячного пресса.

Результаты измерения представлены в табл. 4.

Табл. 4

γ, с$^{-1}$	3	29	75	330	900	2000	5700	14000	25000
τ, МПа	0,11	0,38	0,9	2,2	3,4	4,2	6	8	10

Выбранные точки показаны в табл. 5. Там же показаны расчётные значения отношений скоростей сдвига к касательным напряжениям, необходимые при численном решении трансцендентного уравнения (45). Выбраны две крайние точки и точка в средине интервала.

Табл. 5

m	1	2	3
γ_m, с$^{-1}$	3	330	25000
τ_m, МПа	0,11	2,2	10
γ_m / τ_m , МПа·с	27,2727	150	2500

Уравнение (45) для рассматриваемых условий имеет вид

$$(27,2727 - 150)\left(2,2^{\alpha-1} \ - 10^{\alpha-1}\right) - (150 - 2500)\left(0,11^{\alpha-1} \ - 2,2^{\alpha-1}\right) = 0$$

или

$$122,727\left(2,2^{\alpha-1} \ - 10^{\alpha-1}\right) - 2350\left(0,11^{\alpha-1} \ - 2,2^{\alpha-1}\right) = 0 .$$

Решение трансцендентного уравнения α=2,982. Кроме того, по формулам (46), (47) находим: a=26,948 МПа$^{-1}$с$^{-1}$, b=25,793 МПа$^{-\alpha}$с$^{-1}$. Необходимо отметить, что при указанных значениях коэффициентов касательное напряжение измеряется в мегапаскалях (табл. 4 и 5). Показатель степени α=2,982 свидетельствует о том, что рассматриваемая среда (расплав полиэтилена) относится к псевдопластикам.

Реологическое уравнение Эллиса, для рассматриваемого расплава полиэтилена, имеет вид

$$\gamma = 26{,}948\tau + 25{,}793\tau^{2{,}982}. \qquad (48)$$

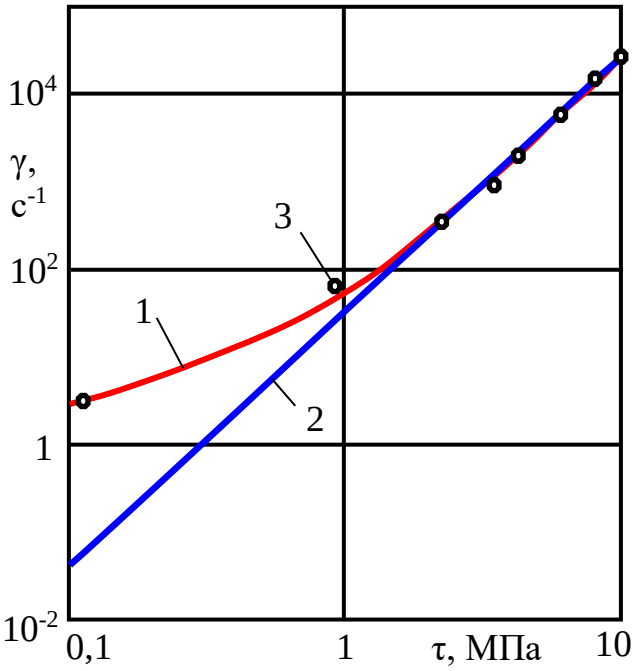


Рис.10. Кривая течения полиэтилена: 1 – модель Эллиса, 2 – Оствальда – де Виля, 3 – экспериментальные точки.

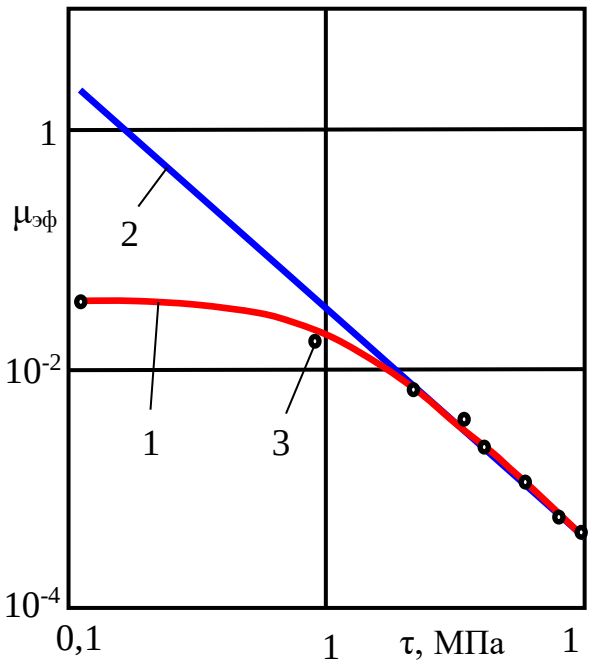


Рис.11. Зависимость эффективной вязкости от касательного напряжения для модели Эллиса (1) и Оствальда – де Виля (2). Экспериментальные точки (3).

Реологические константы модели Оствальда - де Виля находились методом двух точек, используя данные табл. 5 (точки 2 и 3). Используем расчётные формулы:

$$n = \ln(\tau_2/\tau_3)/\ln(\gamma_2/\gamma_3), \qquad \mu = \tau_2/\gamma_2^n. \qquad (49)$$

В результате расчётов по формулам (49) получены следующие значения констант модели Оствальда - де Виля: n=0,346, μ=0,302 МПа*$c^{0,346}$. Именно по этим параметрам построена линия (2) на рис.10. Степенной закон в рассматриваемом случае имеет вид

$$\tau = 0{,}302\gamma^{0{,}346}. \qquad (50)$$

Следует напомнить, что в выражениях (48) и (50) касательное напряжение измеряется в мегапаскалях.

На рис.10 в двойных логарифмических координатах представлены расчётные кривые течения по выражениям (48) и (50) и экспериментальные точки (3). Из рисунка видно, что степенная модель (Оствальда - де Виля), в отличие от модели Эллиса, показывает сильное отклонение в области малых скоростей сдвига и касательных напряжений. Имеет место удовлетворительная корреляция в интервале касательных напряжений от 2 МПа до

10 МПа. Модель же Эллиса (линия 1) показывает хорошую корреляцию с экспериментальными точками (3) во всём исследованном диапазоне касательных напряжений.

Для наглядности исследуем изменение эффективной вязкости этих жидкостей от касательного напряжения. Учитывая, что эффективная вязкость определяется соотношением $\mu_{эф} = \tau/\gamma$. Для жидкости Эллиса можем записать

$$\mu_{эф} = \frac{1}{a + b\tau^{\alpha-1}}. \qquad (51)$$

Соответственно, для жидкости Оствальда - де Виля имеем

$$\mu_{эф} = \mu\left(\frac{\tau}{\mu}\right)^{\frac{n-1}{n}}. \qquad (52)$$

Расчётные результаты анализа формул (51), (52) представлены на рис.11. Видно, что при больших значениях касательных напряжений обе модели дают близкий результат. Однако при напряжениях на стенке меньше 2 МПа эффективные вязкости моделей значительно отличаются. Модель Эллиса показывает монотонно изменяющуюся конечную вязкость и хорошо согласуется с экспериментальными результатами. Модель Оствальда - де Виля показывает резкое возрастание вязкости с уменьшением напряжений, это, в частности следует из расчётной формулы (52) (при n<1, $\tau \to 0$, $\mu_{эф} \to \infty$).

1.5.4. Расходная характеристика формующего устройства.

Можно предположить существование аналогии между кривой течения и расходной характеристикой. Однако расходная характеристика отличается от кривой течений тем, что интегрально учитывает текучие свойства жидкости в поперечном сечении канала.

Рассмотрим процесс течения расплава полиэтилена в цилиндрическом канале пресс-формы. Будем оперировать касательным напряжением на стенке, которое однозначно связано с градиентом давления.

Расчётная формула для вычисления расхода жидкости Эллиса как функции касательных напряжений на стенке имеет вид (41)

$$\frac{Q}{\pi R^3} = \frac{a|\tau_w|}{4} + \frac{b|\tau_w|^{\alpha}}{\alpha + 3}. \qquad (53)$$

Соответственно, расчётная формула для расхода жидкости Оствальда - де Виля (44) имеет вид

$$\frac{Q}{\pi R^3} = \frac{n}{1+3n}\left|\frac{\tau_w}{\mu}\right|^{\frac{1}{n}}. \qquad (54)$$

Использовались полученные в пп.1.53 реологические параметры. При этом давление и касательное напряжение на стенке измеряется в мегапаскалях.

Найдём пределы изменения давления, соответствующие изменению касательных напряжений в реологическом исследовании. Согласно выражению (37) касательное напряжение на стенке канала определяется выражением

$$\tau_w = \frac{dP}{dz}\frac{R}{2}.$$

Следовательно, перепад давления определяется выражением

$$\Delta P = |\tau_w|\frac{2\ell}{R}. \qquad (55)$$

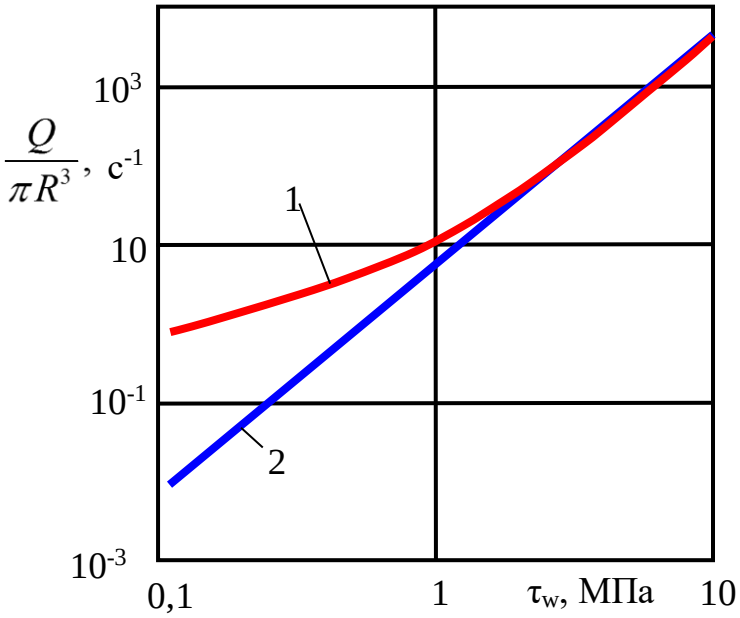


Рис.12. Расходные характеристики при течении жидкости Эллиса (1) и Оствальда - де Виля (2).

Пусть канал имеет следующие геометрические характеристики: ℓ=0,01; R=0,001. В этом случае нижней границе касательного напряжения на стенке $\tau_w = 0{,}11 \quad МПа$ соответствует давление $\Delta P = 2{,}2 \quad МПа$ (22 атм.). Верхней границе касательного напряжения на стенке $\tau_w = 10 \quad МПа$ согласно (55) отвечает давление $\Delta P = 200 \quad МПа$ (2000 атм.).

На рис.12 представлены расчетные характеристики при течении жидкостей Эллиса (линия 1) и Оствальда-де Виля (линия 2) выполненные по формулам (53), (54), соответственно. Из рисунка видно, что степенная модель предсказывает заниженные значения расходов, особенно при значениях касательного напряжения на стенке меньше 2 МПа. При больших давлениях, в окрестности 10 МПа, расходные характеристики хорошо коррелируют. Полученные результаты вполне соответствуют данным по реологическим исследованиям, представленным на рис.10, согласно которым, с уменьшением касательного напряжения существенно уменьшается скорость деформации и сильно возрастает эффективная вязкость для модели Оствальда - де Виля. Таким образом, реологическая модель Эллиса лучше описывает реологические свойства расплава полиэтилена, чем степенная и имеет больше оснований использоваться при моделировании течений.

1.5.5. Профиль скорости.

Сильное расхождение расходов жидкостей Эллиса и Оствальда-де Виля, представленное на рис.12, заслуживает более подробного рассмотрения и анализа течения. В частности, представляют интерес рассмотреть эпюры осевой скорости для рассматриваемых жидкостей в зависимости от касательного напряжения на стенке.

Рассмотрим течение жидкости Оствальда-де Виля. Профиль осевой скорости описывается выражением (43)

$$v_z = \left(\frac{n}{n+1}\right)\left|\frac{\tau_w}{\mu R}\right|^{\frac{1}{n}}\left(R^{\frac{1}{n}+1} - r^{\frac{1}{n}+1}\right). \qquad (56)$$

Расход описывается формулой (44)

$$\frac{Q}{\pi R^3} = \frac{n}{1+3n}\left|\frac{\tau_w}{\mu}\right|^{\frac{1}{n}}. \qquad (57)$$

Среднюю скорость определим так

$$v_c = \frac{Q}{\pi R^2}. \qquad (58)$$

Введём безразмерную скорость и безразмерный радиус

$$V = \frac{v_x}{v_c}, \qquad \xi = \frac{r}{R}. \qquad (59)$$

Элиминируем из выражений (56), (57) касательное напряжение на стенке и с учётом обозначений (59), запишем выражение для безразмерной осевой скорости

$$V = \frac{(3n+1)}{(n+1)}\left(1 - |\xi|^{\frac{1}{n}+1}\right). \qquad (60)$$

В ньютоновском случае (n=1) получаем параболическую эпюру с максимальной скоростью на оси, равной 2

$$V = 2\left(1 - \xi^2\right). \qquad (61)$$

Важно отметить, что согласно выражению (60) эпюра не зависит от консистенции и касательного напряжения на стенке канала, а полностью определяется индексом течения. Форма эпюры определяется одним параметром.

Реологическая модель Эллиса. Сразу отметим, что в этом случае исключить касательное напряжение на стенке τ_w из расчётных выражений невозможно.

Согласно выражению (39) профиль осевой скорости

$$\upsilon_z = \frac{a}{2}\frac{|\tau_w|}{R}\left(R^2 - r^2\right) + \frac{b}{\alpha+1}\left|\frac{\tau_w}{R}\right|^{\alpha}\left(R^{\alpha+1} - r^{\alpha+1}\right). \qquad (62)$$

Объемный расход жидкости определяется выражением (41)

$$\frac{Q}{\pi R^3} = \frac{a|\tau_w|}{4} + \frac{b|\tau_w|^{\alpha}}{\alpha+3}. \qquad (63)$$

С учётом соотношений (58), (59) из выражений (62), (63) получим для безразмерной скорости следующее выражение

$$V=\left[\frac{a}{2}\left(1-\xi^2\right)+\frac{b\tau_w^{\alpha-1}}{\alpha+1}\left(1-|\xi|^{\alpha+1}\right)\right]\Big/\left(\frac{a}{4}+\frac{b\tau_w^{\alpha-1}}{\alpha+3}\right). \qquad (64)$$

Из выражения (64) видно, что эпюра скорости зависит не только от трёх реологических параметров, но и от касательного напряжения на стенке (или иными словами от градиента давления).

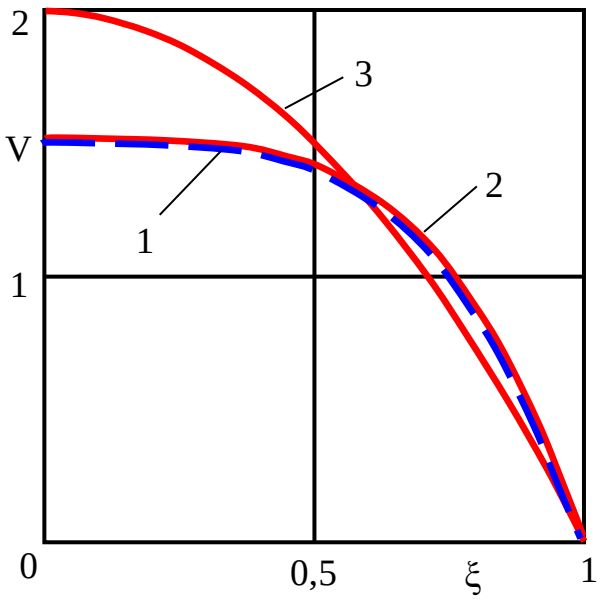


Рис.13. Эпюры безразмерной скорости при течении жидкости Оствальда – де Виля: 1 – n=0,346 и жидкости Эллиса: 2 – τ_w= 10 МПа, 3 – τ_w= 0,11 МПа.

На рис.13 представлены результаты численного анализа формул (60) и (64). Кривая 1 отвечает жидкости Оствальда – де Виля для всего интервала касательных напряжений. Она практически совпадает с эпюрой жидкости Эллиса для больших касательных напряжений на стенке τ_w=10 МПа.

Совершенно другое поведение наблюдается при течении жидкости Эллиса (линии красного цвета 2, 3). В интервале малых касательных напряжений на стенке канала τ_w=0,11 МПа (малых градиентов давления) профиль скоростей практически совпадает с ньютоновским (линия 3), который описывается зависимостью (61). При больших напряжениях на стенке (10 МПа) проявляются ярко аномальные свойства и кривая 2 близка к эпюре для Оствальда – де Виля (1).

1.5.6. Распределение эффективной вязкости в поперечном сечении канала

Жидкость Оствальда – де Виля. Эффективная вязкость описывается

выражением

$$\mu_{эф} = \mu \left(\frac{dv_x}{dy} \right)^{n-1} . \qquad (65)$$

Согласно уравнению (38) касательное напряжение распределяется по радиусу канала линейно

$$\tau = \tau_w \xi , \qquad (66)$$

где $\xi = r/R$ - безразмерный радиус.

С учётом введённых обозначений, выражение для скорости сдвига в (65) может быть записано так

$$\frac{dv_x}{dy} = \left(\frac{\tau_w \xi}{\mu} \right)^{\frac{1}{n}} . \qquad (67)$$

Следовательно, для эффективной вязкости (65), с учётом (67), имеем выражение

$$\mu_{эф} = \mu \left(\frac{\tau_w \xi}{\mu} \right)^{\frac{n-1}{n}} . \qquad (68)$$

Жидкость Эллиса. Эффективная вязкость описывается выражением

$$\mu_{эф} = \frac{1}{a + b\tau^{\alpha-1}} . \qquad (69)$$

С учётом соотношения (66), выражение (69) примет вид

$$\mu_{эф} = \frac{1}{a + b\left(\tau_w \xi\right)^{\alpha-1}} . \qquad (70)$$

На рис.14 представлены расчётные результаты численного анализа выражений (68), (70). Расчёты выполнены для двух крайних значений касательных напряжений на стенке, соответственно, для τ_w=0,11 МПа, и τ_w=10 МПа.

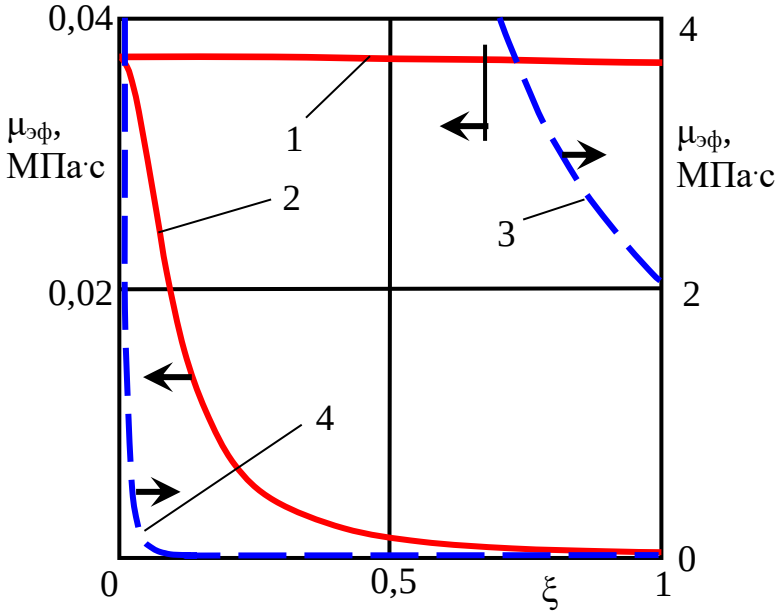


Рис.14. Распределение эффективной вязкости по радиусу канала при течении жидкостей Эллиса (1,2) и Оствальда – де Виля (3,4). Линии 1 и 3 отвечают касательному напряжению на стенке τ_w=0,11 МПа, а 2 и 4 – τ_w=10 МПа.

Из рисунка видно, что жидкость Эллиса при малых напряжениях на стенке ведёт себя подобно ньютоновской жидкости; эффективная вязкость практически постоянна по сечению канала (линия 1). При значительных напряжениях на стенке (линия 2) эффективная вязкость плавно уменьшается от ядра к стенке, и резко возрастает в области ядра, достигая на оси канала конечного значения.

Жидкость Оствальда – де Виля в случае псевдопластика (n<1) показывает на оси бесконечную эффективную вязкость, что в частности, непосредственно следует из расчётной формулы (68). Однако, с увеличением касательного напряжения на стенке увеличивается толщина пристенного слоя с малой вязкостью (линия 4).

Из рис.14 следует, что рассмотренные реологические модели жидкости демонстрируют весьма качественно различающуюся картину распределения эффективной вязкости. Причём модель Эллиса показывает поведение, наиболее согласующееся с физическими представлениями о течении псевдопластической жидкости.

Табл. 6.

Жидкость	τ_w, МПа	$\mu_{эф}$, МПа*с		γ, $с^{-1}$
		ξ=0	ξ=1	ξ=1
Оствальда – де Виля	0,11	∞	2,051	0,054
	10	∞	$4*10^{-4}$	$2,5*10^{4}$
Эллиса	0,11	0,03711	0,03667	3
	10	0,03711	$4*10^{-4}$	$2,5*10^{4}$

Градиент скорости сдвига на стенке для жидкости Эллиса определяется выражением

$$\gamma = \left.\frac{d\upsilon_x}{dy}\right|_{y=h} = \tau_w\left(a + b\tau_w^{\alpha-1}\right).$$

Соответственно, для жидкости Оствальда – де Виля

$$\gamma = \left.\frac{dv_x}{dy}\right|_{y=h} = \left(\frac{\tau_w}{\mu}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

С учётом формул (68), (70) и последних двух, а также результатов расчётов, представленных на рис.14, заполнена табл. 6. В последней графе представлены значения градиента скорости сдвига на стенке. Скорость сдвига на стенке пропорциональна расходу жидкости. Из таблицы видно, что при малых напряжениях на стенке (τ_w=0,11 МПа) расход жидкости Оствальда – де Виля значительно меньше расхода жидкости Эллиса (0,054 $с^{-1}$ << 3 $с^{-1}$). И, наоборот, при больших касательных напряжениях на стенке (τ_w=10 МПа), расходы жидкостей совпадают.

Именно различным характером эпюр скорости и эффективных вязкостей для рассматриваемых жидкостей и обусловлено различие расходных характеристик. Так в случае течения жидкости Оствальда – де Виля при малых перепадах давления (малых касательных напряжениях на стенке) большая средняя часть сечения потока движется с малыми скоростями сдвига

(линия 2 на рис.13). Согласно рис.11 этой области отвечают значительныё вязкости (отметим, что на оси вязкость равна бесконечности). В результате существенно возрастает сопротивление течению и расход уменьшается. В то же время жидкость Эллиса в области малых касательных напряжений на стенке показывает ньютоновский характер поведения с параболической эпюрой осевой скорости. Вязкость в области ядра течения повышена, но в меньшей степени, чем у жидкости Оствальда – де Виля (рис.11). В результате в области малых касательных напряжений на стенке расход жидкости Эллиса больше чем расход жидкости Оствальда – де Виля.

Табл. 7

Основные расчётные формулы

Модель Оствальда де Виля	Модель Эллиса
Реологическое уравнение	
$\tau = \mu\left(\dfrac{dv_z}{dr}\right)^n$	$\dfrac{d\upsilon_z}{dr} = \tau\left(a + b\lvert\tau\rvert^{\alpha-1}\right)$
Касательное напряжение на стенке	
$\tau_w = \dfrac{\Delta P}{\ell}\dfrac{R}{2}$	
Профиль скорости	
$v_z = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)\left\lvert\dfrac{\tau_w}{\mu R}\right\rvert^{\frac{1}{n}}\left(R^{\frac{1}{n}+1} - r^{\frac{1}{n}+1}\right)$	$\upsilon_z = \dfrac{a}{2}\dfrac{\lvert\tau_w\rvert}{R}\left(R^2 - r^2\right) + \dfrac{b}{\alpha+1}\left\lvert\dfrac{\tau_w}{R}\right\rvert^{\alpha}\left(R^{\alpha+1} - r^{\alpha+1}\right)$
Объёмный расход	
$\dfrac{Q}{\pi R^3} = \dfrac{n}{1+3n}\left\lvert\dfrac{\tau_w}{\mu}\right\rvert^{\frac{1}{n}}$	$\dfrac{Q}{\pi R^3} = \dfrac{a\lvert\tau_w\rvert}{4} + \dfrac{b\lvert\tau_w\rvert^{\alpha}}{\alpha+3}$
Эффективная вязкость	
$\mu_{эф} = \mu\left(\dfrac{\tau}{\mu}\right)^{\frac{n-1}{n}}$,	$\mu_{эф} = \dfrac{1}{a + b\tau^{\alpha-1}}$,

$\tau = \tau_w \xi\,,\ \ \xi = r/R$	$\tau = \tau_w \xi\,,\ \ \xi = r/R$

Основные расчётные формулы для обеих реологических моделей при течении в круглом канале представлены в таблице 7.

1.5.7. Диссипативный разогрев при течении неньютоновской жидкости в круглом канале. Выводы

При течении в трубах расплавов полимеров, обладающих высокой вязкостью, имеет место интенсивное тепловыделение, обусловленное внутренним трением. Интенсивность тепловыделения изменяется от нуля - в центре трубы до максимального значения у стенки трубы.

В настоящей работе предпринята попытка оценить погрешность степенной модели при решении сравнительно простой задачи теплообмена. Оценка выполнена путем сопоставления расчётных результатов для степенной модели с результатами для жидкости Эллиса. Модель Эллиса взята в качестве «эталона», поскольку хорошо описывает поведение реологически сложных жидкостей, как при малых, так и средних скоростях деформации. Необходимо отметить, что процесс теплообмена существенно зависит от профиля скорости.

Выше (пп.1.4) представлена постановка задачи течения в щели. Оставляем основные допущения в силе. Настоящее рассмотрение отличается от выше представленного геометрией канала и типом модельной жидкости.

Задача описывается следующей системой уравнений [1]:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r}, \tag{71}$$

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(\lambda r \frac{dT}{dr}\right) + \tau_{rz}\left(\frac{dv_z}{dr}\right) = 0\,, \tag{72}$$

$$r = 0, \quad \tau_{rz} = 0, \quad \frac{dv_z}{dr} = 0, \quad \frac{dT}{dr} = 0\,, \tag{73}$$

$$r = R, \quad \tau_{rz} = \tau_w, \quad v_z = 0, \quad T = T_w. \qquad (74)$$

Для замыкания задачи (71) – (74) используется одна из реологических моделей - Эллиса или Оствальда - де Виля

$$\frac{d\upsilon_z}{dr} = \tau_{rz}\left(a + b\tau_{rz}^{\alpha-1}\right), \qquad \frac{d\upsilon_z}{dr} = \left(\frac{\tau_w}{R\mu_o}\right)^{\frac{1}{n}} r^{\frac{1}{n}} \quad . \qquad (75)$$

Здесь p – давление; r, z – координаты; $\tau_{rz}(r)$ – касательное напряжение; $v_z(r)$ – осевая компонента скорости; T, T_w – температура жидкости и стенки канала; λ – коэффициент теплопроводности жидкости; a, b, α, n, μ_o – реологические константы.

Согласно выражению (38) и уравнению (71) распределение касательного напряжения линейное

$$\tau = \tau_w \frac{r}{R}, \quad \tau_w = \frac{dP}{dz}\frac{R}{2}.$$

Для жидкости Эллиса решение уравнения энергии (72) имеет вид

$$\theta_E = \frac{a\tau_w^2}{16}\left(1-\xi^4\right) + \frac{b\tau_w^{\alpha+1}}{\left(\alpha+3\right)^2}\left(1-\xi^{\alpha+3}\right). \qquad (76)$$

Соответственно, для модели Оствальда – де Виля (75), получим

$$\theta_{OV} = \frac{n^2\tau_w^{1+\frac{1}{n}}}{\left(1+3n\right)^2 \mu_o^{\frac{1}{n}}}\left(1-\xi^{3+\frac{1}{n}}\right). \qquad (77)$$

В выражениях (76), (77) приняты обозначения

$$\theta_E = \frac{\left(T_E - T_w\right)\lambda}{R^2}, \qquad \theta_{OV} = \frac{\left(T_O - T_w\right)\lambda}{R^2}, \qquad \xi = \frac{r}{R}, \qquad (78)$$

где θ_E (T_E), θ_{OV} (T_O) – модифицированные температуры при течении жидкости Эллиса и Оствальда – де Виля, соответственно, ξ - безразмерная поперечная координата.

Согласно выражениям (76), (77) эпюра температуры имеет максимум в точке ξ=0. При этом максимальные температуры составляют, соответственно,

для модели Эллиса (76)

$$\theta_{E,m} = \frac{a\tau_w^2}{16} + \frac{b\tau_w^{\alpha+1}}{(\alpha+3)^2}, \qquad (79)$$

и модели Оствальда – де Виля (77)

$$\theta_{OV,m} = \frac{n^2 \tau_w^{1+\frac{1}{n}}}{(1+3n)^2 \mu_0^{\frac{1}{n}}}. \qquad (80)$$

Здесь обозначено: $\theta_{E,m} = \theta_E(\xi = 0)$, $\theta_{OV,m} = \theta_{OV}(\xi = 0)$.

Для численного анализа полученных математических моделей используем модельную жидкость, описанную в пп.1.5.3. Кривая течения для выбранной жидкости показана на рис.10. Для выбранной жидкости имеем следующие значения реологических констант. Модель Эллиса: α=2,982; a=26,948 МПа$^{-1}$с$^{-1}$; b=25,793 МПа$^{-\alpha}$с$^{-1}$. Модель Оствальда – де Виля: n=0,346, μ=0,302 МПа*с^{0,346}.

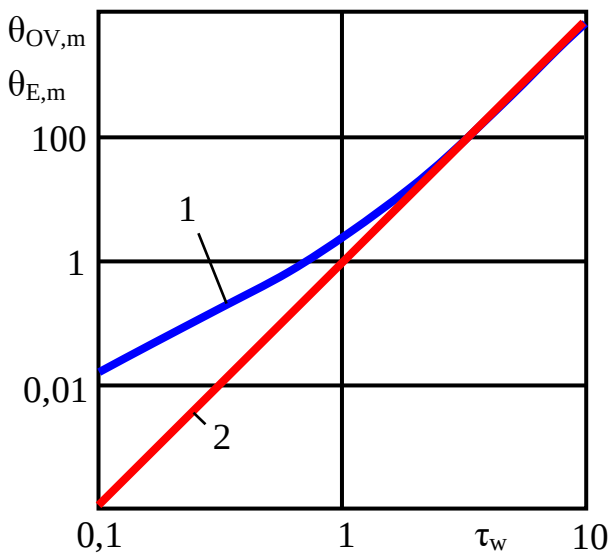


Рис. 15. Максимальный разогрев на оси канала при течении жидкости Эллиса (1) и Оствальда – де Виля (2).

Результаты расчёта с использованием формул (79), (80) представлены на рис.15. Используются двойные логарифмические координаты. Полученный график напоминает кривую течения, представленную на рис.10. В интервале касательных напряжений 1-10 МПа имеет место хорошая корреляция. С уменьшением напряжения на стенке, расхождение увеличивается, и при τ_w=0,1 МПа достигает двух порядков.

Предполагалось также рассмотреть осевое течение в коаксиальном канале, образованном двумя цилиндрическими поверхностями. Для этого

необходимо решить задачу течения для степенной жидкости (задача рассмотрена в работах [1], [49], [51]) и для модели Эллиса, далее, сопоставить решения для конкретной жидкости. Однако была обнаружена информация, что подобное исследование было выполнено раньше [51]. Поэтому можно ограничиться выразительной цитатой на эту тему из Н. Маковея [51]. «Необходимо подчеркнуть, что реологические постоянные степенной модели являются константами во всём диапазоне напряжений сдвига – от нуля до касательного напряжения на стенке. В действительности, когда $n<1$, модель Оствальда – де Виля неприемлема при напряжениях сдвига, близких к нулю, так как приводит к бесконечно большим значениям кажущейся вязкости. При течении в цилиндрической трубе отклонение от реального поведения жидкости имеет место только в центре трубы и его влияние на расчётное значение расхода незначительно. Но в кольцевом пространстве напряжения сдвига являются нулевыми при конечных значениях радиуса (радиуса цилиндрической поверхности с нулевыми касательными напряжениями). При этом отклонение вычисленных скоростей от реальных может привести к гораздо меньшему расходу, чем фактический; погрешности достигают 100 % при низких средних скоростях течения и для жидкостей с явным псевдопластичным поведением (малые показатели индекса течения). Наконец, расчётные потери давления будут выше фактических.»

Выводы

1. Выполнен сравнительный анализ применимости реологических моделей Эллиса и Оствальда - де Виля для описания течения расплава полиэтилена в круглом канале при формовании полимерной заготовки из расплава полиэтилена. Показано, что трёхпараметрическая модель Эллиса обеспечивает большую точность расчетов, чем двухпараметрическая модель Оствальда - де Виля. Это объясняется лучшей аппроксимацией вязкостных свойств жидкости в области малых скоростей деформаций и касательных

напряжений.

2. В результате исследования эффективной вязкости установлено, что при больших значениях касательного напряжения обе модели дают близкий прогноз. Однако при касательных напряжениях на стенке меньше 2 МПа эффективные вязкости моделей значительно расходятся: модель Эллиса показывает монотонно изменяющуюся вязкость и согласуется с экспериментальными результатами, модель Оствальда - де Виля показывает резкое возрастание вязкости с уменьшением напряжений, это, в частности следует из свойств реологического уравнения (при n<1, $\tau \to 0$, $\mu_{эф} \to \infty$).

3. Степенная модель предсказывает заниженные значения расходов, особенно при значениях касательного напряжения меньше 2 МПа. При больших касательных напряжениях на стенке, в окрестности 10 МПа, расхождение расходов незначительно. Полученные результаты вполне коррелируют с данными по реологическим исследованиям других авторов.

4. Для жидкости Оствальда - де Виля форма эпюры осевой скорости не зависит от консистенции и касательного напряжения на стенке канала, и полностью определяется индексом течения.

5. Для жидкости Эллиса эпюра скорости зависит не только от трёх реологических параметров, но и от касательного напряжения на стенке или градиента давления. При малых напряжениях на стенке эпюра скорости соответствует течению ньютоновской жидкости, а при больших – псевдопластику.

6. Реологическая модель Эллиса лучше описывает реологические свойства полимера, чем модель Оствальда - де Виля и с большей точностью прогнозирует параметры течения в канале.

Г Л А В А 2

ТЕЧЕНИЕ НЕНЬЮТОНОВСКОЙ ЖИДКОСТИ В ЗАЗОРЕ ВСТРЕЧНО ВРАЩАЮЩИХСЯ ВАЛКОВ

Для жидкостей Оствальда де Виля и Эллиса получено решение задачи течения неньютоновской жидкости в зазоре встречно вращающихся валков. При этом, модель Эллиса принята за «эталон», поскольку хорошо описывает эффективную вязкость полимеров при малых и средних скоростях деформации. Для одной и той же жидкости (ярко выраженного псевдопластика) выполнено сопоставление результатов расчётов математических моделей. Показано, что модель течения, построенная на реологической модели Оствальда – де Виля, даёт существенно искажённые результаты в распределении давления, касательных напряжений на стенке валка и прогнозе размера зоны течения. Кроме того, показано, что модель, построенная на степенном уравнении, приводит к существенным искажениям общей картины течения.

Несмотря на привлекательную простоту двухпараметрической модели Оствальда – де Виля, модель имеет существенный недостаток: бесконечно возрастающую вязкость при малых скоростях сдвига [3]. Тем не менее, степенная модель широко используется как в фундаментальных исследованиях, так и для инженерных расчётов технологического оборудования.

Математические модели основных типов течений и соответствующие расчётные методики были получены в 60-80 годах прошлого столетия [1], [8] - [13]. Из последних работ, посвящённых течению жидкости Оствальда – де Виля в валковом зазоре, можно указать [14]-[16], [42]-[45].

В условиях симметричного вальцевания псевдопластических жидкостей нулевые скорости сдвига имеют место на оси симметрии и в двух поперечных сечениях, отвечающих экстремумам давления («–-Н»

лотарингский крест, иногда «анжуйский крест»). Очевидно, что в этом течении степенная модель должна приводить к ошибочному значению интегральных параметров течения, поскольку в указанных сечениях эффективная вязкость степенной жидкости бесконечна.

В настоящей работе оценка погрешности модели Оствальда – де Виля выполнена путём сопоставления расчётных результатов решения задачи валкового течения с результатами для «эталонной» модели Эллиса. Трёхпараметрическая модель Эллиса хорошо описывает реологическое поведение полимеров в области малых и средних скоростей деформации. Насколько известно автору, для этой задачи подобных оценок не проводилось.

Исследование включает решение задачи для жидкости Эллиса, жидкости Оствальда - де Виля и сопоставление расчётных результатов полученных решений [50].

2.1. Формулировка задачи и получение расчётных выражений

Схема течения представлена на рис.16. Течение изотермическое, двумерное, ламинарное, установившееся. Среда несжимаема. Инерционные и массовые силы по сравнению с силами вязкого трения пренебрежимо малы. Скольжение на поверхностях валков отсутствует. На выходе валкового зазора используется условие Рейнольдса (кавитационное) для давления. Ось x лежит в плоскости, проходящей через середину минимального зазора между валками. Величина минимального зазора $2H_0$. Окружная скорость валков – U, радиус – R. Текущая полувысота зазора - h(x). Остаются в силе все допущения, характерные для квазиплоского приближения (одномерность давления и двухмерность поля скоростей).

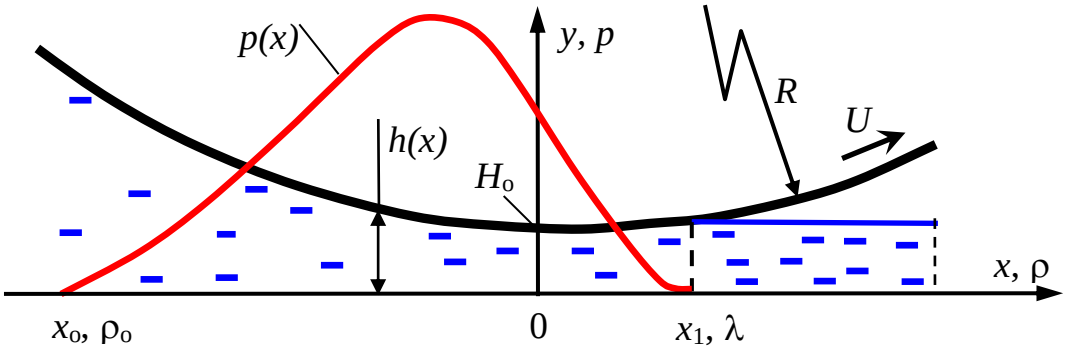


Рис.16. Схема течения.

Для обобщённой ньютоновской жидкости [10] течение описывается системой уравнений [1], [50]:

$$\frac{dp}{dx}=\frac{\partial\tau}{\partial y}, \qquad Q=2\int_0^h v_x \mathrm{d}y\ , \qquad \tau=\eta(\tau)\frac{\partial v_x}{\partial y}, \tag{81}$$

$$y=0, \qquad \partial v_x/\partial y=0, \qquad \tau=0\ ; \tag{82}$$

$$y=h(x), \quad v_x=U, \qquad \tau=\tau_w; \tag{83}$$

$$x=x_0, \quad p=0; \qquad x=x_1, \quad p=0\ , \quad \partial p/\partial x=0\,, \tag{84}$$

где Q – объёмный расход жидкости, отнесённый к единице ширины валка, м^2/с (Q=const); v_x - осевая скорость, м/с; р – давление, МПа, τ - касательное напряжение, МПа; τ_w - касательное напряжение на стенке, МПа; x, y – декартовы координаты, м; x_0, x_1 – координаты начала и окончания течения, м; U – окружная скорость поверхности валка, м/с; $2h$ - текущее расстояние между поверхностями валков, м; η - эффективная вязкость, МПа·с. Для упрощения индексы у компоненты тензора напряжения опускаются.

В результате интегрирования уравнения движения (81) по у с учётом условия (82), получим линейное распределение касательного напряжения в поперечном сечении канала

$$\tau=\frac{dp}{dx}y\,.$$

Напряжение у поверхности валка составляет

$$\tau_w=\frac{dp}{dx}h\,.$$

Рассматривая совместно уравнение движения и уравнение состояния в (81), можем записать

$$\mathrm{d}v_x = \frac{1}{\left(\dfrac{dp}{dx}\right)} \frac{\tau}{\eta(\tau)} \mathrm{d}\tau .$$

Выполним интегрирование этого выражения с учётом граничных условий (83)

$$v_x = \mathrm{U} - \frac{1}{\left(\dfrac{dp}{dx}\right)} \int_{\tau}^{\tau_w} \frac{\tau}{\eta(\tau)} \mathrm{d}\tau .$$

Согласно второму выражению в (81) и учитывая уравнение движения $\mathrm{d}\tau = \dfrac{dp}{dx}\mathrm{d}y$, объёмный расход жидкости можно найти по формуле

$$\mathrm{Q} = \frac{2}{\left(\dfrac{dp}{dx}\right)} \int_{\tau}^{\tau_w} v_x \mathrm{d}\tau .$$

Это уравнение носит общий характер и не зависит от природы жидкости. Подставим выражение скорости в уравнение для расхода

$$\mathrm{Q} = \frac{2\mathrm{U}\tau_w}{\left(\dfrac{dp}{dx}\right)} - \frac{2}{\left(\dfrac{dp}{dx}\right)^2} \int_0^{\tau_w} \int_{\tau}^{\tau_w} \frac{\tau}{\eta(\tau)} \mathrm{d}\tau \mathrm{d}\tau .$$

Принимая во внимание асимптотическое приближение для поверхности валка [1] $h = H_0(1+\rho^2)$ ($\rho = x/\sqrt{2RH_0}$, ρ – безразмерная продольная координата Гаскелла), можем записать для напряжения на стенке

$$\tau_w = H_0\left(1+\rho^2\right)\frac{dp}{dx} . \qquad (85)$$

С учётом соотношения (85) уравнение для расхода примет вид

$$Q = 2UH_0\left(1+\rho^2\right) - \frac{2}{\left(\frac{dp}{dx}\right)^2}\int_0^{\tau_w}\int_\tau^{\tau_w}\frac{\tau}{\eta(\tau)}d\tau d\tau .$$

В правой части для двойного интеграла выполним интегрирование по частям

$$\int_0^{\tau_w}\int_\tau^{\tau_w}\frac{\tau}{\eta(\tau)}d\tau d\tau = \tau\int_\tau^{\tau_w}\frac{\tau}{\eta(\tau)}d\tau\Bigg|_0^{\tau_w} + \int_0^{\tau_w}\frac{\tau^2}{\eta(\tau)}d\tau .$$

Первое слагаемое равно нулю, следовательно, уравнение связывающее давление с продольной координатой ρ, имеет вид

$$\rho^2 - \lambda^2 = \frac{1}{UH_0\left(\frac{dp}{dx}\right)^2}\int_0^{\tau_w}\frac{\tau^2}{\eta}d\tau , \qquad (86)$$

где $\lambda = x_1 \big/ \sqrt{2RH_0}$ - безразмерная координата окончания зоны течения. Параметр λ определяет положение точек экстремума давления [1], связан с расходом следующим соотношением $Q = 2UH_0\left(1+\lambda^2\right)$.

2.1.1. Расчётные выражения для модели Эллиса

Рассмотрим течение жидкости, реологические свойства которой описываются моделью Эллиса

$$\frac{dv_x}{dy} = a\tau + b\tau^\alpha .$$

Здесь a - константа модели Эллиса, $(\text{МПа}\cdot\text{с})^{-1}$; b - константа модели Эллиса, $(\text{МПа}^\alpha\cdot\text{с})^{-1}$; α - константа модели Эллиса.

Для этой реологической модели эффективная вязкость определяется выражением

$$\eta = \left(a + b\tau^{\alpha-1}\right)^{-1} .$$

Подставив это выражение в уравнение (86) с учётом (85), получим уравнение для напряжения на стенке

$$\frac{U\left(\rho^2\text{-}\lambda^2\right)}{H_0\left(1+\rho^2\right)}=\frac{a\tau_w}{3}+\frac{b\left|\tau_w\right|^{\alpha}}{\alpha+2}sign\left(\tau_w\right). \qquad (87)$$

Уравнения (85) и (87) описывают распределение давления и касательного напряжения по длине зоны течения. Сведём эти уравнения к задаче Коши, для чего продифференцируем уравнение (87). Для касательного напряжения у поверхности валка имеем уравнение

$$\frac{d\tau_w}{d\rho}=\frac{6\left(\alpha+2\right)\beta\rho\text{-}4\rho\left(1+\rho^2\right)\left[a\left(\alpha+2\right)\tau_w+3b\left|\tau_w\right|^{\alpha}sign\left(\tau_w\right)\right]}{\left(1+\rho^2\right)^2\left[a\left(\alpha+2\right)+3b\alpha\left|\tau_w\right|^{\alpha-1}\right]}. \qquad (88)$$

Запишем уравнение (85) так

$$\frac{d\overline{p}}{d\rho}=\frac{\tau_w}{\left(1+\rho^2\right)}. \qquad (89)$$

Граничные условия для уравнений (88), (89) имеют вид:

$$\rho=\lambda, \quad \overline{p}=0, \quad \frac{d\overline{p}}{d\rho}=0, \quad \tau_w=0; \qquad \rho=\rho_0, \quad \overline{p}=0. \qquad (90)$$

Здесь $\overline{p}=p\sqrt{H_0/\left(2R\right)}$ - модифицированное давление, МПа, $\beta=U/H_0$, β - параметр течения, 1/с, $\rho_0=x_0/\sqrt{2RH_0}$, ρ_0 - безразмерная координата начала течения.

Задача (88)-(90) решалась методом Рунге-Кутты, начиная с точки $\rho=\lambda$ (использовался отрицательный шаг). Величина λ задавалась априорно, а величина ρ_0 находилась в процессе вычисления при выполнении условия (90).

Распорное усилие (F) и потребляемую мощность (N), приходящиеся на единицу длины валка, можно найти с помощью уравнений

$$\frac{dF}{d\rho}=-2R\overline{p}, \qquad \frac{dN}{d\rho}=-2U\sqrt{2RH_0}\tau_w,$$

которые необходимо решать совместно с уравнениями (88) - (90), и при этом учитывать граничное условие: $\rho=\lambda$, $F=0$, $N=0$. Здесь F - распорное усилие, Н; N - потребляемая мощность, Вт.

Замечание. Поскольку ни в одном математическом справочнике нет информации о правилах интегрирования дробно-степенной функции со знакопеременным основанием, из собственного опыта можно дать следующий совет. Если полученное в результате интегрирования выражение в ньютоновском случае находится в чётной степени (0; 2; 4;…), то необходимо использовать функцию «модуль» (знак всегда плюс (+)), например, $|\tau_w|^\alpha$ при α=2. А если показатель степени число нечётное (1; 3; 5;…) – необходимо сохранять знак основания, например, $|\tau_w|^\alpha sign(\tau_w)$. Ньютоновскому случаю отвечает α=1. Это правило можно распространить и на степенную жидкость.

2.1.2. Расчётные выражения для модели Оствальда – де Виля

Рассмотрим течение жидкости Оствальда – де Виля, описываемой реологическим уравнением

$$\tau=\mu_0\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)^n,$$

где n – индекс течения модели Оствальда - де Виля, μ_o - постоянная реологической модели Оствальда - де Виля, МПа·с^n.

Эффективная вязкость для этой модели определяется выражением

$$\eta=\mu_0\left(\frac{\tau}{\mu_0}\right)^{\frac{n-1}{n}}.$$

Подставив это выражение в уравнение (86), получим дифференциальное уравнение для давления [1]

$$\frac{d\overline{p}}{d\rho}=\mu_0\left[\frac{\beta(2n+1)}{n}\right]^n\frac{\left|\rho^2-\lambda^2\right|^n}{\left(1+\rho^2\right)^{2n+1}}sign\left(\rho^2-\lambda^2\right).$$

Граничные условия для давления (90) остаются в силе и для последнего уравнения.

Согласно уравнению (89) касательное напряжение на стенке определяется выражением

$$\tau_w = \mu_0 \left[\frac{\beta(2n+1)\left|\rho^2 - \lambda^2\right|}{n\left(1+\rho^2\right)^2} \right]^n sign\left(\rho^2 - \lambda^2\right). \qquad (91)$$

В свете рассматриваемой модели, которая при n<1, τ=0 показывает бесконечную эффективную вязкость, необходимо указать на следующие особенности течения. В плоскости симметрии y=0 и в двух поперечных сечениях $\rho = \pm\lambda$ эффективная вязкость жидкости бесконечна. Указанные сечения имеют форму лотарингского креста «анджуйский крест» «--H». Отмеченное обстоятельство позволяет усомниться в правомерности применения степенного уравнения для описания течения.

2.2. Численный анализ математических моделей

Для численного анализа воспользуемся данными реологических исследований из работы [6]. Измерения выполнены на капиллярном вискозиметре плунжерного типа. Резиновая смесь на основе каучуков СКИ-3НТ и СКМС-30АРКПН [по 50 ч. (масс)] и содержащей в качестве наполнителей технический углерод ПМ-15 (35 ч.) и ПГМ-33 (38 ч.). В основной состав входили также: масло соляровое-18, сера-1,5, оксид цинка-3 ч. (масс). Диаметр плунжера и цилиндрической камеры термостатирования 9,52 мм, диаметр капилляра 2 мм, температура смеси при испытании 120 ^{o}C. Исследован интервал касательных напряжений от 0,123 МПа до 0,203 МПа.

В результате обработки кривой течения методом выбранных точек, получены следующие значения реологических констант для модели Эллиса: α=17,893, a=350,217 МПа$^{-1}$с$^{-1}$, b=2,373x10^{15} МПа$^{-\alpha}$с$^{-1}$. Соответственно, для модели Оствальда - де Виля: n=0,071, μ_o=0,124 МПа·с^{0,071}. Материал является ярко выраженным псевдопластиком. Подробности определения констант в пп. 1.2. Сопоставление расчётных результатов зависимости эффективной

вязкости от касательного напряжения с экспериментальными данными представлены на рис.2. Обработка реологических данных выполнена без учёта поправки Вайссенберга – Рабиновича [1], [3], [10], поскольку она качественно не влияет на результат. Выражения $\tau_w = hdp/dx$, $\tau = \tau_w y/h$ позволяют давление и касательное напряжение выражать в мегапаскалях (МПа), и соответственно, эффективную вязкость - в мегапаскаль секундах (МПа·с). При этом расчётные выражения не изменяются.

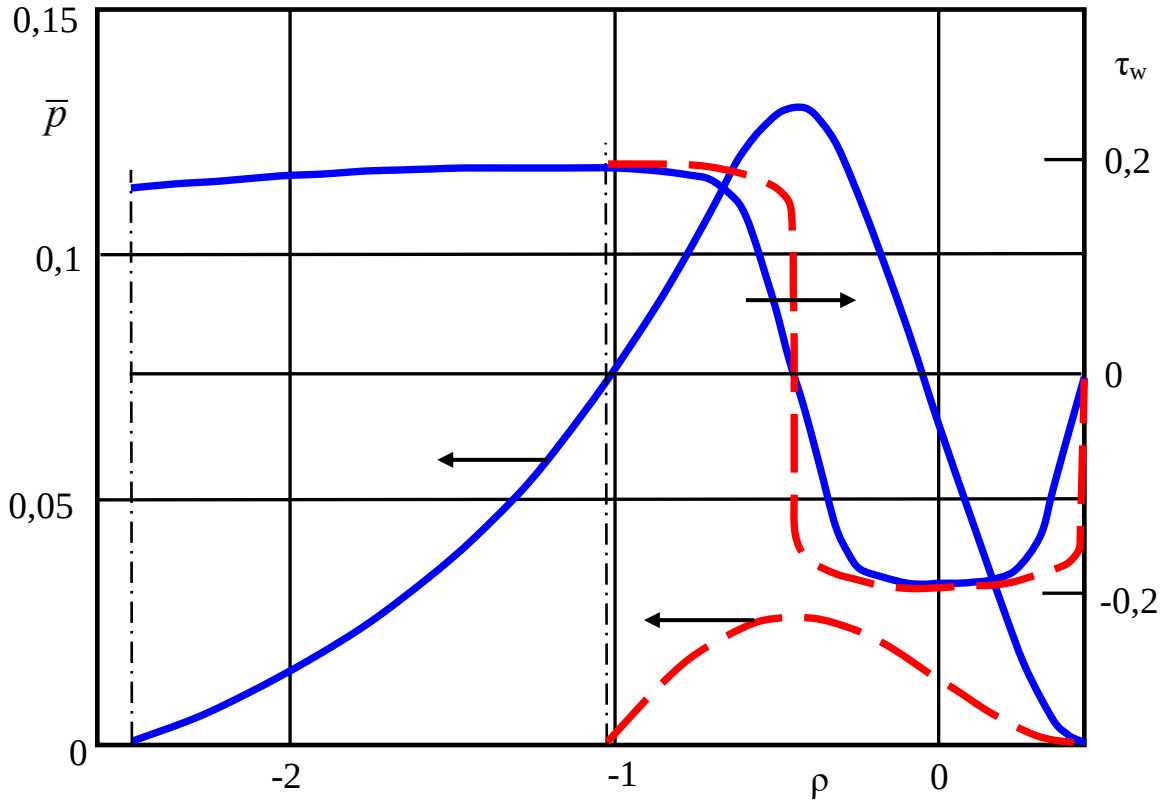


Рис.17. Распределение модифицированного давления ($\bar{p}$) и касательного напряжения (τ_w) по длине зоны течения: для жидкости Эллиса (сплошные линии) и для жидкости Оствальда – де Виля (штриховые линии).

На рис.17 представленные расчётные результаты, выполненные по уравнениям (88) - (90) – для жидкости Эллиса, и по уравнениям (90), (91) – для жидкости Оствальда – де Виля, соответственно. Представлены эпюры давления и касательного напряжения на стенке валка при идентичном значении параметров λ=0,45, β=200 $с^{-1}$. Ввиду идентичности параметра λ расход жидкостей одинаков. Значения давления и касательного напряжения даны в мегапаскалях. Вертикальными штрихпунктирными линиями указаны

границы зоны течения (ρ_o).

Из рисунка видно, что если эпюры касательных напряжений достаточно близки, то эпюры давления существенно отличаются. Максимальные давления: для жидкости Эллиса $\bar{p}(-\lambda)=0{,}129$ МПа, соответственно, для жидкости Оствальда – де Виля $\bar{p}(-\lambda)=0{,}026$ МПа. Расхождение в 4,96 раза! Кроме того, прогнозируемые протяжённости зоны течения существенно отличаются: для жидкости Эллиса координата начала течения ρ_0= -2,5, соответственно, для жидкости Оствальда – де Виля ρ_0= -1,03. Также эпюры давления отличаются характером начального участка нарастания давления: для жидкости Эллиса характерно плавное нарастание давления с острым экстремумом (пиком), а для жидкости Оствальда – де Виля характерно резкое нарастание давления и плавно очерченный экстремум. Из сопоставления эпюр давлений и касательных напряжений следует ожидать расхождения в определении интегральных параметров течения (распорного усилия, крутящего момента, потребляемой мощности). С каждым последующим интегрированием расхождение нарастает. Например, распорное усилие пропорционально площади эпюры давления.

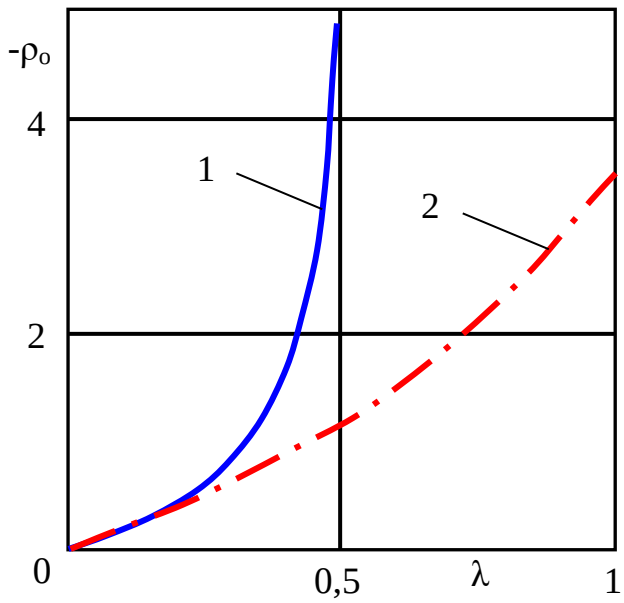


Рис.18. Зависимость координаты начала течения (ρ_o) от координаты выхода (λ): 1 – жидкость Эллиса, 2 – жидкость Оствальда – де Виля.

На рис.18 представлена зависимость координаты начала течения (ρ_o) от координаты окончания течения (λ). Расчёты выполнены для реологических свойств ранее принятой жидкости и β=200 c^{-1}. Из рисунка видно, что при малых размерах зоны течения (λ<0,2) (малых расходах) имеет место хорошее соответствие. Однако с увеличением размера зоны течения расхождение

увеличивается. Жидкость Оствальда – де Виля предсказывает явно заниженные размеры зоны течения. Кроме того, последняя точка на кривой 1 близка к асимптотическому значению параметра λ (λ=0,49), поскольку при дальнейшем увеличении этого параметра размеры зоны течения увеличиваются неограниченно (резко возрастает абсолютная величина ρ_o). Предельному значению координаты λ отвечает предельный расход жидкости.

Следовательно, величина λ=0,49 характеризует предельно возможный расход жидкости. Степенная модель тоже предсказывает увеличение параметра ρ_o, но при несколько больших значениях λ, а поскольку координата выхода λ непосредственно связана с расходом жидкости, следовательно, степенная модель предсказывает завышенный предельный расход жидкости.

Выводы

1. Ошибка прогноза модели Оствальда - де Виля обусловлена наличием в зоне течения областей с малыми или нулевыми значениями градиента скорости сдвига (или касательного напряжения). Погрешность в прогнозе интегральных параметров течения значительна, например, максимальное давление в зазоре занижено в 4,96 раза. С каждым повторным интегрированием ошибка возрастает. Также степенная модель даёт ошибочный прогноз относительно размеров зоны течения и границ асимптотики.

2. Погрешности модели Оствальда - де Виля возрастает с увеличением отклонения индекса течения от единицы (n<1).

4. Полученные результаты следует учитывать при использовании модели Оствальда – де Виля в задачах тепло – и массопереноса (стационарных и нестационарных), для которых точность расчёта интегральных параметров имеет решающее значение. В противном случае следует для построения математической модели использовать реологическое уравнение, предполагающее конечное значение наибольшей ньютоновской вязкости, например, Эллиса, Рабиновича, Де Хавена и др.

Г Л А В А 3

ТЕЧЕНИЕ НЕНЬЮТОНОВСКОЙ ЖИДКОСТИ В КАНАЛЕ ЭКСТРУДЕРА

Основная инженерная задача при проектировании экструдеров состоит в установлении связи между частотой вращения шнека производительностью машины и потребляемой мощностью для машины заданных геометрических размеров при переработке материала с известными реологическими свойствами. Далее могут рассматриваться более сложные задачи, такие как оптимизация технологического процесса, оценка качества получаемого продукта в зависимости от выбранного режима работы. При этом использование информации относительно реологических свойств материала составляет важную часть анализа перечисленных проблем.

Червячные машины широко применяются для переработки полимерных систем и композитных материалов со сложным реологическим поведением. Для описания течения перерабатываемых сред используются различные реологические модели. Широкое распространение получили математические модели течения, основанные на применении модели Оствальда – де Виля (степенная модель). Это объясняется её относительной простотой, наглядностью и лёгкостью определения реологических параметров.

Между тем известен недостаток степенной модели: завышенная вязкость при малых скоростях деформации. Следовательно, математические модели течений, базирующиеся на степенной модели, должны давать неточный прогноз в определении интегральных параметров.

В результате анализа результатов показано, что степенная модель приводит к существенным ошибкам при сравнительно низких скоростях течения.

Несмотря на привлекательную простоту двухпараметрического

уравнения Оствальда – де Виля, модель имеет существенный недостаток - бесконечно возрастающую вязкость при малых скоростях сдвига [3]. Тем не менее, степенная модель широко используется как в фундаментальных исследованиях, так и в инженерных расчётах течений в технологическом оборудовании, в частности, течения полимерных систем в червячных машинах (экструдерах) [8], [9], [22], [23], [24], [26-28], [42-45] и др.

Гидродинамическая теория переработки неньютоновских сред на червячных машинах базируется на течении Куэтта [1], [4]. В настоящей работе оценка погрешности модели Оствальда – де Виля выполнена путём сопоставления расчётных результатов с результатами, полученными с помощью «эталонной» модели, в качестве которой использовалась трёхпараметрическая реологическая модель Эллиса. Модель Эллиса хорошо описывает реологическое поведение полимерных растворов и расплавов в области малых и средних скоростей деформации. Насколько известно автору, подобных оценок не проводилось.

Рассмотрение включает общее решение задачи куэттовского течения обобщённой ньютоновской жидкости, получение расчётных формул для моделей Оствальда - де Виля и Эллиса, сопоставление расчётных результатов полученных решений [29].

3.1. Постановка и решение задачи куэттовского течения обобщённой ньютоновской жидкости

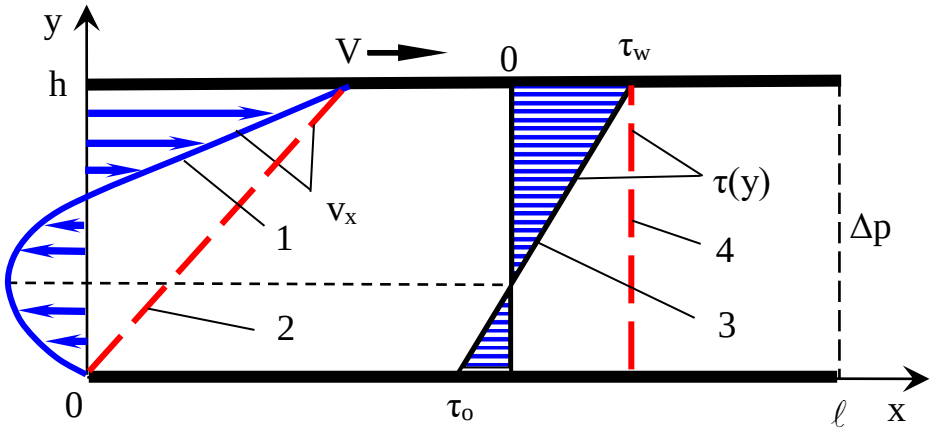


Рис.19. Схема течения: 1, 2 – профили скорости; 3, 4 – распределение касательного напряжения; 1, 3 – противоток; 2, 4 – безградиентное течение.

Расчётная схема с системой координат представлена на рис.19. Рассматривается течение обобщённой ньютоновской жидкости между двумя параллельными плоскими стенками (развёртка червяка), из которых одна покоится (нижняя), а другая (верхняя) движется в своей плоскости с постоянной скоростью V. Расстояние между стенками (глубина нарезки шнека) равна h. Течение ламинарное, установившееся, изотермическое. Среда несжимаемая. Инерционные и массовые силы по сравнению с силами вязкого трения пренебрежимо малы. Скольжение на поверхностях отсутствует. Ось x лежит на поверхности нижней пластины, ось y перпендикулярна пластины. В направлении оси x существует противодавление, созданное сопротивлением, расположенным на достаточном удалении от рассматриваемого сечения. Так, что существует некоторый постоянный градиент давления.

С учётом принятых допущений, течение описывается следующей системой уравнений

$$\frac{dp}{dx} = \frac{d\tau}{dy}, \qquad \tau = \eta(\tau)\frac{dv_x}{dy}, \qquad (92)$$

$$y=0, \quad v_x = 0, \quad \tau = \tau_o,$$

$$y=h, \quad v_x = V, \quad \tau=\tau_w,$$

где p - давление, τ, τ_0, τ_w - касательное напряжение текущее, на нижней стенке, на верхней стенке, η – эффективная вязкость, x, y – декартовы координаты, v_x – осевая скорость, V – скорость движения верхней стенки. Для упрощения индексы у компоненты тензора напряжения опущены.

В записи (92) первое уравнение – сохранения импульса, второе – реологического состояния обобщённой ньютоновской жидкости [10]. Левая часть уравнения движения (92) зависит только от x, а правая от y; это означает, что $dp/dx=const$ и $d\tau/dy=const$. Градиент давления постоянен по длине канала, и определяется соотношением $dp/dx=\Delta p/\ell$, где Δp - избыточное давление в конце зоны течение относительно начального сечения x=0 (давление на входе в фильеру), ℓ - длина канала (рис.19).

В результате интегрирования уравнения движения (92) по y, с учётом граничных условий, можем записать следующие соотношения:

$$\tau=\frac{dp}{dx}y+\tau_0, \quad \tau_w=\frac{dp}{dx}h+\tau_0,$$

$$\tau=(\tau_w-\tau_0)\frac{y}{h}+\tau_0, \quad d\tau=(\tau_w-\tau_0)\frac{dy}{h}. \qquad (93)$$

Согласно (93) касательное напряжение описывается линейной функцией, поэтому для описания течения, наравне с ординатой y можно использовать τ.

Можно выделить два предельных случая течения:

1) режим наибольшего градиента давления (нулевого расхода) – линии на рис.19: 1 - профиль скорости, 3 - распределение касательного напряжения;

2) режим нулевого градиента давления или безградиентное течение простого сдвига (расход наибольший). Линии на рис.19: 2 – профиль скорости, 4 – распределение касательного напряжения.

В первом режиме имеет место продольная циркуляция жидкости (противоток), эпюра скорости имеет экстремум. В сечении экстремума скорости касательное напряжение равно нулю ($\tau=0$). При этом на нижней

пластине касательное напряжение отрицательно ($dp/dx = \sup$, $\tau_0 < 0$).

Во втором режиме эпюра осевой скорости линейна (простой сдвиг), касательное напряжение однородно по высоте зазора, и соответствует напряжению на верхней пластине ($dp/dx = 0$, $\tau_0 = \tau_w$). Граница перехода от одного режима к другому характеризуется условием: y=0, $\tau_0 = 0$, $dv_x/dy = 0$.

Профиль скорости найдём, используя реологическое уравнение (92)

$$dv_x = \frac{\tau}{\eta} dy .$$

Используя четвёртое соотношение из (93) и граничные условия (92), можем записать

$$v_x = \int_0^{v_x} dv_x = \frac{h}{(\tau_w - \tau_0)} \int_{\tau_0}^{\tau} \frac{\tau}{\eta} d\tau . \qquad (94)$$

Граничное условие для верхней плоскости (92) позволяет записать уравнение, связывающее касательные напряжения τ_0 и τ_w

$$V = \frac{h}{(\tau_w - \tau_0)} \int_{\tau_0}^{\tau_w} \frac{\tau}{\eta} d\tau . \qquad (95)$$

Расход, приходящийся на единицу ширины канала Q, определяется интегралом

$$Q = \int_0^h v_x dy . \qquad (96)$$

Подставив в формулу (96) выражение (94), и интегрируя с учётом граничных условий (92) и соотношений (93), можем записать

$$Q = \frac{h^2}{(\tau_w - \tau_0)^2} \int_{\tau_0}^{\tau_w} \int_{\tau_0}^{\tau} \frac{\tau}{\eta} d\tau d\tau . \qquad (97)$$

Выполнив в выражении (97) интегрирование по частям, получим расчётную формулу для расхода

$$Q=\frac{h^2}{\left(\tau_w-\tau_0\right)^2}\int_{\tau_0}^{\tau_w}\left(\tau_w-\tau\right)\frac{\tau}{\eta}d\tau. \qquad (98)$$

Уравнение связи (95) позволяет несколько упростить формулу (98)

$$Q=\frac{Vh\tau_w}{\left(\tau_w-\tau_0\right)}-\frac{h^2}{\left(\tau_w-\tau_0\right)^2}\int_{\tau_0}^{\tau_w}\frac{\tau^2}{\eta}d\tau. \qquad (99)$$

Для расчёта расходной характеристики (99) необходимо задать функцию $\eta(\tau)$, т.е. выбрать конкретную реологическую модель.

3.2. Расчётные формулы для моделей Оствальда – де Виля и Эллиса.

Жидкость Оствальда – де Виля. Имеет место следующее соотношение между касательным напряжением и скоростью сдвига

$$\tau=\eta_0\left(dv_x/dy\right)^n.$$

При этом выражение эффективной вязкости

$$\eta=\eta_0\left(\tau/\eta_0\right)^{\frac{n-1}{n}},$$

где η_0, n – постоянные. Подставив последнюю формулу в выражения (95), (99) и выполнив интегрирование, получим уравнения, связывающие расход Q_s, давление q и касательное напряжение τ_0:

$$\gamma q=\frac{n}{(n+1)\eta_0^{\frac{1}{n}}}\left[\left(q+\tau_0\right)^{\frac{1}{n}+1}-\left|\tau_0\right|^{\frac{1}{n}+1}\right], \qquad (100)$$

$$Q_s=\frac{\left(q+\tau_0\right)}{q}-\frac{n}{(2n+1)\gamma q^2\eta_0^{\frac{1}{n}}}\left[\left(q+\tau_0\right)^{\frac{1}{n}+2}-\left|\tau_0\right|^{\frac{1}{n}+2}\operatorname{sign}\left(\tau_0\right)\right],$$

где $Q_s=Q/(Vh)$ - безразмерный расход, $q=h\,dp/dx$ - эквивалент градиента давления, $\gamma=V/h$ - эффективная скорость сдвига.

В случае отсутствия противодавления имеет место течение простого

сдвига, для которого справедливо соотношение: $q \to 0$, $Q_s \to 0{,}5$. Расход наибольший. При этом величина γ характеризует скорость простого сдвига. В случае нулевого расхода $Q_s=0$ давление максимально $q = q_m$. Величину q_m можно найти численно из решения уравнений (100).

Пусть моменту начала циркуляции (y=0, $\tau_0 = 0$, $dv_x/dy = 0$) отвечает значение модифицированного давления q_o. Условие наличия циркуляции: $\tau_o \leq 0$, $q \geq q_o$. При этом из первого уравнения (100) для величины q_o получаем простое соотношение

$$q_o = \eta_o \left[\gamma(1+n)/n\right]^n .$$

В ньютоновском случае: n=1, $q_o = 2\eta_o\gamma$.

В результате интегрирования (94), получим выражение для осевой скорости

$$\frac{v_x}{V} = \frac{n}{(n+1)\gamma q \eta_0^{\frac{1}{n}}}\left[\left|qY + \tau_0\right|^{\frac{1}{n}+1} - \left|\tau_0\right|^{\frac{1}{n}+1}\right].$$

Величины q и τ_o находятся их уравнений (100), Y=y/h – безразмерная координата.

Для реологической модели Эллиса

$$dv_x/dy = a\tau + b\tau^{\alpha}$$

эффективная вязкость определяется выражением

$$\eta = \left(a + b\tau^{\alpha-1}\right)^{-1},$$

где a, b, α – постоянные реологической модели.

Подставив выражение для эффективной вязкости в выражения (95), (99) и выполнив интегрирование, получим уравнения, связывающие расход Q_E, давление q и касательное напряжение τ_0:

$$\gamma q = \frac{a}{2} q\left(q + 2\tau_0\right) + \frac{b}{(\alpha+1)}\left[\left(q+\tau_0\right)^{\alpha+1} - \left|\tau_0\right|^{\alpha+1}\right], \qquad (101)$$

$$Q_E = \frac{(q+\tau_0)}{q} - \frac{1}{\gamma q^2}\left\{\frac{a}{3}\left[(q+\tau_0)^3 - \tau_0^3\right] + \frac{b}{\alpha+2}\left[(q+\tau_0)^{\alpha+2} - |\tau_0|^{\alpha+2}\,\mathrm{sign}(\tau_0)\right]\right\}.$$

Как уравнения (100), так и (101) решаются в следующей последовательности. Задаётся значение давления (q) и из первого трансцендентного уравнения находится соответствующее значение касательного напряжения τ_o. Далее, для расчёта расходов, величины q и τ_o необходимо подставить в соответствующие вторые уравнения. При решении трансцендентного уравнения начальное приближение для τ_0 выбиралось порядка 0,3.

Первое уравнение в (101) приводит к следующему соотношению для вычисления граничного значения модифицированного давления

$$\frac{b}{\alpha+1}q_o^{\alpha} + \frac{a}{2}q_o - \gamma = 0.$$

В ньютоновском случае (n=1, $\eta_o=\eta$, $a=\eta^{-1}$, b=0, где η – ньютоновская вязкость) обе модели (100), (101) сводятся к известному выражению [1] (линейной расходной характеристике)

$$Q_E = Q_s = \frac{1}{2} - \frac{q}{12\gamma\eta}, \quad q_m = 6\eta_o\gamma.$$

В результате интегрирования (94), получим выражение для осевой скорости

$$\frac{v_x}{V} = \frac{a}{2\gamma q}\left[(qY+\tau_0)^2 - \tau_0^2\right] + \frac{b}{(\alpha+1)\gamma q}\left[|qY+\tau_0|^{\alpha+1} - |\tau_0|^{\alpha+1}\right].$$

Величины q и τ_o находятся их уравнений (101), Y=y/h – безразмерная поперечная координата.

3.3. Численный анализ математических моделей.

Для численного анализа воспользуемся данными реологических исследований из работы [6]. Измерения выполнены на капиллярном вискозиметре плунжерного типа. Резиновая смесь на основе каучуков СКИ-3НТ и СКМС-30АРКПН [по 50 ч. (масс)] и содержащей в качестве наполнителей технический углерод ПМ-15 (35 ч.) и ПГМ-33 (38 ч.). В основной состав входили также: масло соляровое-18, сера-1,5, оксид цинка-3 ч. (масс). Диаметр плунжера и цилиндрической камеры термостатирования 9,52 мм, диаметр капилляра 2 мм, температура смеси при испытании 120 ^{o}C. Исследован интервал касательных напряжений от 0,123 МПа до 0,203 МПа.

В результате обработки кривой течения (методом выбранных точек) получены следующие значения реологических констант для модели Эллиса: α=17,893, a=350,217 МПа$^{-1}$с$^{-1}$, b=2,373x10^{15} МПа$^{-\alpha}$с$^{-1}$. Соответственно, для модели Оствальда - де Виля: n=0,071, μ_o=0,124 МПа·с^{0,071}. Материал является ярко выраженным псевдопластиком. Расчётные результаты зависимости эффективной вязкости от касательного напряжения представлены на рис.2. Обработка реологических данных выполнена без учёта поправки Вайссенберга – Рабиновича, поскольку она качественно не влияет на результат. Выражения (93) позволяют давление и касательное напряжение выражать в мегапаскалях (МПа), а эффективную вязкость в мегапаскаль секундах (МПа·с), соответственно. При этом расчётные выражения не изменяются.

Нельзя не отметить, что в своей известной монографии Р.В. Торнер [8], при подробном анализе течения степенной жидкости в канале шнека (автором приведено больное число расчётных графиков и таблиц, иллюстрирующих поведение малопонятных промежуточных параметров), так и не была представлена расходная характеристика для псевдопластика.

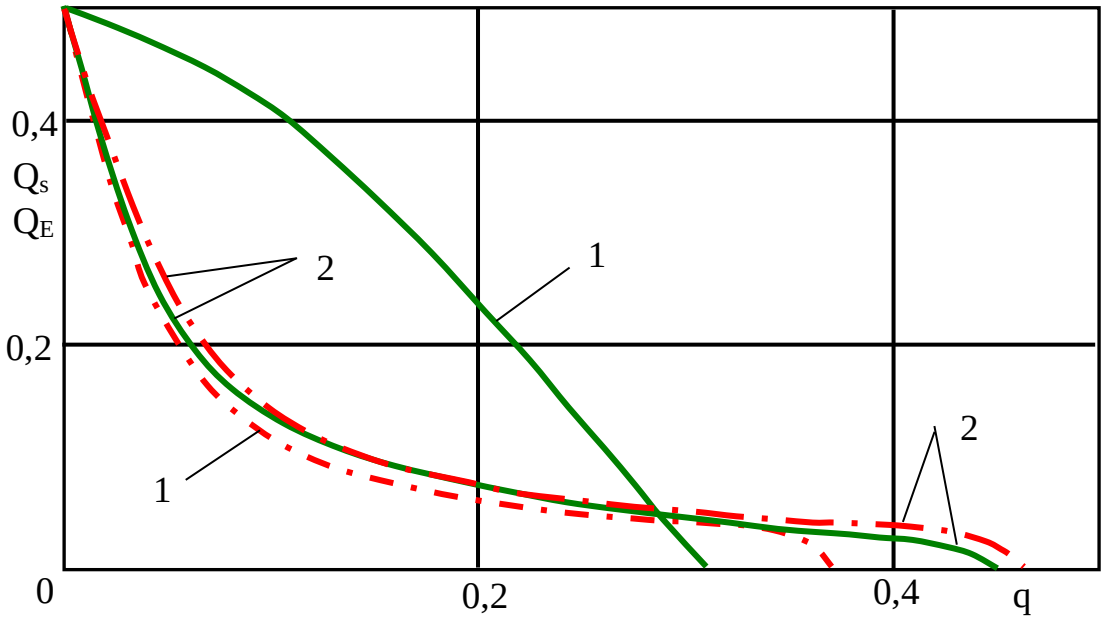


Рис.20. Расходные характеристики для жидкости Эллиса (сплошные линии) и Оствальда – де Виля (штрихпунктирные): 1 – γ=43 c^{-1}, 2 – γ=1000 c^{-1}.

На рис.20 представлены, рассчитанные с помощью уравнений (100) и (101), расходные характеристики. Расчёты выполнены для двух значений параметра γ: γ =43 c^{-1} и γ =1000 c^{-1}. Из рисунка видно, что при малых значениях параметра γ (малых скоростях вращения шнека) имеет место существенное расхождение расходных характеристик, полученных с использованием моделей Оствальда – де Виля и Эллиса. Одному и тому же давлению степенная модель на участке q<0,3 МПа предсказывает заниженный расход, например, при q=0,16 МПа расхождение достигает max(Q_E/Q_s) = 4,16. В области высоких давлений q>0,3 расходные характеристики отличаются величиной предельного давления: для модели Оствальда – де Виля q_m=0,36 МПа, соответственно, для модели Эллиса – q_m=0,308 МПа. Значения граничного давления начала циркуляции для модели Оствальда – де Виля q_o=0,196 МПа, соответственно, для модели Эллиса - q_o=0,186 МПа. Формы расходных характеристик существенно различаются: модель Оствальда – де Виля показывает заниженные давления

и расходы. При больших скоростях деформаций (γ =1000 c^{-1}) обе модели предсказывают близкий результат (линии 2), в частности, предельные точки:

для модели Оствальда – де Виля q_o=0,246 МПа, q_m=0,462 МПа, соответственно, для модели Эллиса - q_o=0,239 МПа, q_m=0,449 МПа. Следует отметить, что в случае жидкости Оствальда – де Виля конфигурация расходных характеристик мало меняется с изменением параметра γ, отличаясь величиной предельного давления.

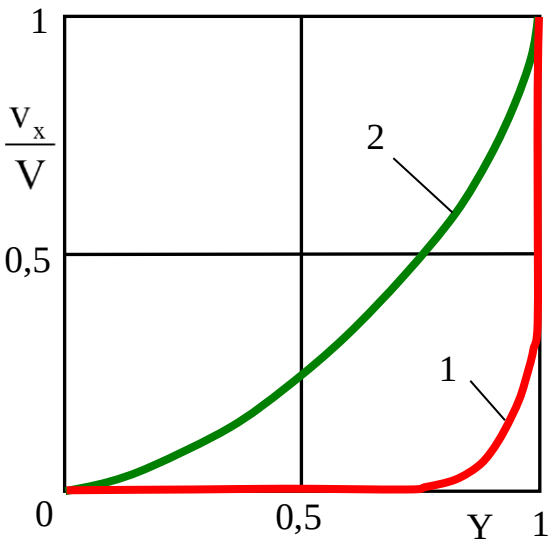


Рис.21. Профили скорости для жидкости Оствальда – де Виля (1) и Эллиса (2).

На рис.21 представлены расчётные профили скорости для случая наибольшего расхождения расходных характеристик, построенные для следующих значений параметров: γ =43 c^{-1} , q=0,16 МПа, τ_o=0,021 МПа. Циркуляция отсутствует, поскольку $q<q_o$ (q_o=0,196 МПа). Из графика видно, что, несмотря на сравнительно невысокую скорость деформации, жидкость Оствальда – де Виля проявляет ярко выраженные аномальные свойства: наиболее интенсивное течение имеет место в окрестности подвижной стенки, на участке 0,8<Y<1. Из сопоставления эпюр скорости видно, что расход жидкости Эллиса значительно превышает расход жидкости Оствальда – де Виля. В широком интервале изменения параметра γ жидкость Оствальда – де Виля имела эпюру скоростей, подобную представленной на рис.21. При этом изменялась лишь толщина участка интенсивного течения у подвижной пластины. В режиме противотока ядро занимало почти всё сечение, причём величина скорости ядра была сравнительно мала. Описанное поведение свидетельствует о недостаточной «гибкости» реологической модели Оствальда – де Виля.

Интерес представляет поведение жидкости Эллиса в широком интервале изменения параметра γ. При этом следует учитывать, что эта модель обеспечивает хорошую аппроксимацию реологических свойств, следовательно, прогноз этой модели предпочтителен по сравнению с моделью,

построенной на уравнении Оствальда – де Виля.

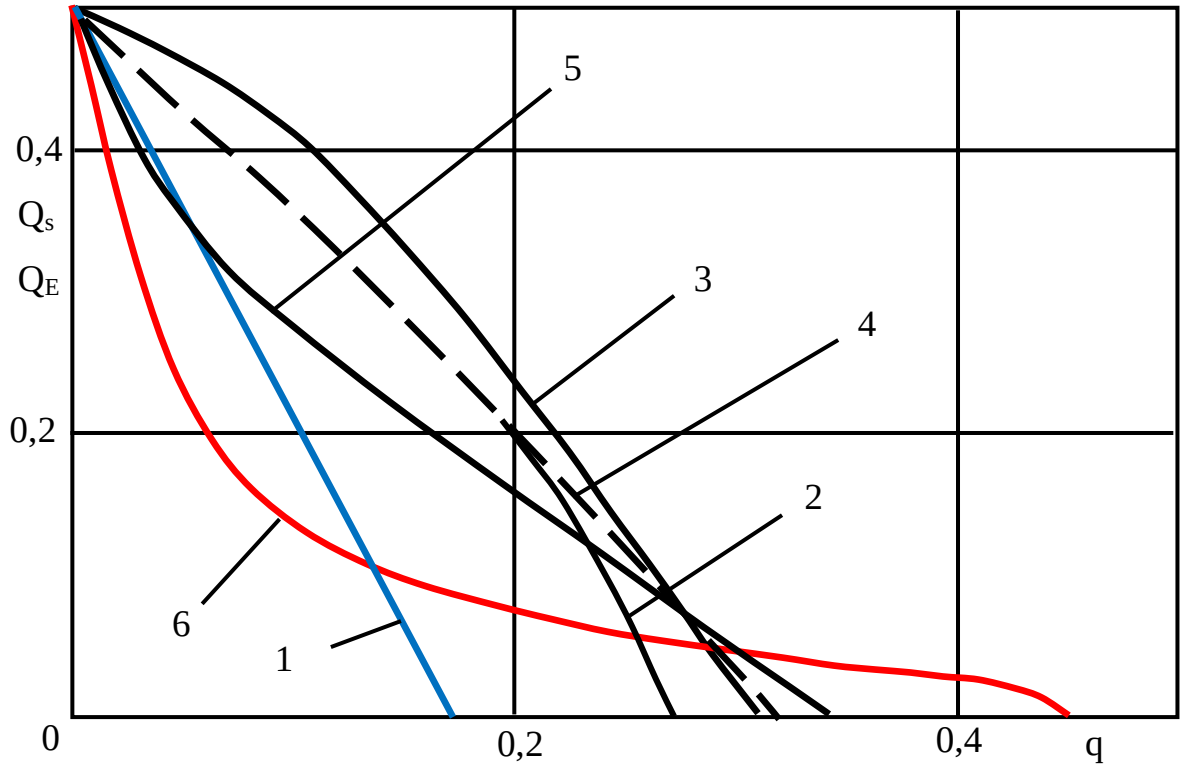


Рис.22. Расходные характеристики для жидкости Эллиса: 1 – γ=10 с$^{-1}$, 2 – γ=20 с$^{-1}$, 3 – γ=43 с$^{-1}$, 4 – γ=60 с$^{-1}$, 5 – γ=100 с$^{-1}$, 6 – γ=1000 с$^{-1}$.

На рис.22 представлены напорные характеристики для жидкости Эллиса. Если при больших скоростях (линия 6) «вогнутая» конфигурация напорной характеристики близка к прогнозу Оствальда – де Виля (рис.20), то с уменьшением скорости конфигурации напорных характеристик существенно меняются. Средняя часть характеристики поднимается, при γ=60 с$^{-1}$ (линия 4) принимает почти прямолинейную форму, а при γ=43 с$^{-1}$ (линия 3) становится даже «выпуклой». Наконец, при понижении скорости до γ=10 с$^{-1}$ (линия 1) принимает прямолинейную форму, что отвечает ньютоновскому поведению жидкости. Расходная характеристика в этом случае описывается уравнениями:

$$Q_E = 0{,}5 - q/(12\gamma\eta), \qquad q_m = 6\gamma\eta, \qquad q_0 = 2\gamma\eta,$$

где η=a^{-1} – наибольшая ньютоновская вязкость.

При дальнейшем уменьшении скорости прямолинейная форма сохраняется, только линия расходной характеристики поворачивается по

часовой стрелке. Общая закономерность напорно-расходных характеристик: с понижением скорости γ уменьшается величина предельного давления q_m.

Следует отметить, что при дальнейшем увеличении давления (выше q_m) вычислительная схема показывает отрицательный расход, т.е. обратное течение жидкости. В обычном экструдере это невозможно реализовать. Но можно создать такое течение, если вместо головки на выходе поставить встречно другой экструдер, способный создавать давление, превышающее q_m. При этом, будет иметь место интенсивное перемешивание и диссипативный разогрев жидкости, что потребует подвода большой мощности. В результате зона загрузки превратиться в зону выхода жидкости. Нечто подобное имеет практическую реализацию в виде шнека, на конце которого выполнена обратная навивка витков [8], [21]. Такая конструкция шнека значительно улучшает перемешивание жидкости. Ещё лучше, если часть шнека с обратной навивкой имела бы отдельный привод.

Из рис.21 видно, что модели показывают сильно различающиеся градиенты скорости сдвига у стенки. Из этого обстоятельства можно предположить существенно различие в прогнозе потребляемой мощности. Получим расчётную формулу для мощности, подводимой к жидкости верхней (подвижной) пластиной. Согласно уравнению движения в (92) значение касательного напряжения постоянно по длине канала, но меняется по высоте. Подведённая мощность затрачивается на разогрев жидкости в канале.

Для канала единичной ширины можем записать

$$N = \ell V \tau\big|_h = \ell V \tau_w .$$

В соответствии с реологическим уравнением касательное напряжение измеряется в МПа, поэтому размерность мощности МВт/м.

В записанной формуле величина τ_w зависит от противодавления (93), которое в свою очередь, связано с расходом. Учитывая вторую формулу в (93), запишем выражение для мощности следующим образом

$$\bar{N} = q + \tau_0 ,$$

где $\bar{N} = N/(\ell V)$ - нормированная мощность, обеспечивающая сопоставимость результатов обеих моделей. Имеет размерность МПа.

Для практических расчётов мощности необходимо полученное последнее выражение рассматривать совместно с первым уравнением из (100) – в случае степенной реологической модели, и с первым уравнением из (101) – в случае модели Эллиса. Если представляет так же расход, то необходимо использовать соответствующие вторые уравнения в (100) и (101).

Также может представлять интерес величина затрат мощности, приходящаяся на единицу расхода жидкости на выходе из канала. Расчётные формулы для степенной жидкости имеют вид

$$\frac{N}{Q} = \frac{\ell(q+\tau_0)}{Q_s h}, \qquad \frac{Nh}{Q\ell} = \frac{(q+\tau_0)}{Q_s}.$$

Последнее выражение характеризует удельные затраты мощности в безразмерной форме. Для жидкости Эллиса формулы выглядят аналогично.

При длительном пребывании жидкости в канале, что имеет место в случае интенсивной циркуляции, в случае высоковязкой жидкости имеет место её сильный диссипативный разогрев. При этом реологические свойства жидкости существенно меняются. Время пребывания жидкости в канале (в зоне течения) τ для степенной жидкости можно найти по формуле

$$\tau = h\ell/Q = (\dot{\gamma} Q_s)^{-1}.$$

Согласно полученной формуле, при наибольшей циркуляции время пребывания бесконечно ($Q_s \to 0$, $\tau \to \infty$) и при отсутствии теплоотвода имеет место неограниченное повышение температуры.

На рис.23 представлена зависимость нормированной мощности от

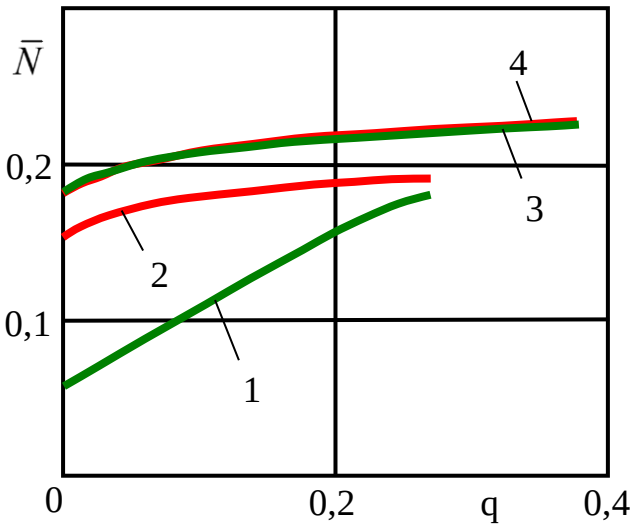


Рис.23. Зависимость нормированной мощности от модифицированного давления: для степенной модели (2,4) и модели Эллиса (1,3). Линии 1 и 2 отвечают γ=20 с$^{-1}$, линии 3, 4 – γ=200 с$^{-1}$.

модифицированного давления для двух значений скорости сдвига 20 и 200 с$^{-1}$. Меньшей скорости сдвига отвечают линии 1 и 2. Видно, что степенная модель предсказывает явно завышенную мощность (линия 2), особенно при малых давлениях. Крайние точки на кривых отвечают нулевому значению расхода. При высокой скорости сдвига (большая скорость вращения шнека) обе модели показывают близкий результат (линии 3 и 4).

Из графиков видно, что нулевому значению давления на выходе (q=0) отвечает начальное, не равное нулю, значение мощности. При этом противодавление отсутствует, следовательно: $\tau_0 = \tau_w$, $\bar{N}_0 = \tau_0$, $dv_x/dy = \gamma$, $\gamma = V/h$. Найдём величину $\bar{N}_0$, используя соответствующее реологическое уравнение. Степенная модель даёт явную форму выражения $\bar{N}_0 = \eta_0 \gamma^n$. Для модели Эллиса имеем неявное уравнение $\gamma = a\bar{N}_0 + b\bar{N}_0^{\alpha}$

3.4. Альтернативное решение задачи. Выводы

Безусловно рассматриваемая задача имеет единственное решение. Тем не менее, возможность анализа математической модели зависит от формы решения. Рассмотрим другой способ решения, который несколько расширяет возможности анализа.

Пусть, полученные выше соотношения (92) – (99) остаются в силе. Введём безразмерный параметр β, который характеризует соотношение касательных напряжений на стенках: $\tau_0 = \beta \tau_w$. При этом, в силу соотношений

(93) можем записать следующее соотношение для модифицированного давления $\tau_w = \frac{q}{1-\beta}$. Параметр β может принимать как положительные, так и отрицательные значения.

Степенная модель. Выполнив интегрирование уравнений (95), (99), получим

$$\gamma\left(\frac{\eta_0}{\tau_w}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{n}{(n+1)(1-\beta)}\left[1-|\beta|^{\frac{1}{n}+1}\right],$$

$$Q_s = \frac{1}{(1-\beta)} - \frac{n}{(2n+1)\gamma(1-\beta)^2}\left(\frac{\tau_w}{\eta_0}\right)^{\frac{1}{n}}\left[1-|\beta|^{\frac{1}{n}+2}\operatorname{sign}(\beta)\right],$$

где $Q_s = Q/(Vh)$ - безразмерный расход, $q = h\,dp/dx$ - эквивалент градиента давления, $\gamma = V/h$ - эффективная скорость сдвига.

После несложных преобразований, можем записать решение задачи в явной форме:

$$q = \eta_0(1-\beta)\left[\frac{\gamma(n+1)(1-\beta)}{n\left(1-|\beta|^{\frac{1}{n}+1}\right)}\right]^n, \qquad Q_s = \frac{1}{(1-\beta)} - \frac{(n+1)\left[1-|\beta|^{\frac{1}{n}+2}\operatorname{sign}(\beta)\right]}{(2n+1)(1-\beta)\left[1-|\beta|^{\frac{1}{n}+1}\right]}.$$

Согласно полученным выражениям, имеем параметрическое описание напорно-расходной характеристики: $Q_s(\beta)$, $q(\beta)$. Параметр β изменяется в пределах $\beta_{min}<\beta<1$. Нижняя граница параметра β_{min} ($\beta_{min}<0$) отвечает развитому противотоку (или циркуляции) жидкости, когда $q=q_{sup}$, $Q_s=0$. Граничное значение β_{min} находится из уравнения $|\beta_{min}|^{\frac{1}{n}+1}\left[2n+1-(n+1)\beta_{min}\right]-n=0$. Соответственно, величина наибольшего развиваемого при этом давления q_{sup}, составляет

$$q_{sup} = \eta_0 \left(1-\beta_{min}\right)\left[\frac{\gamma\left(n+1\right)\left(1-\beta_{min}\right)}{n\left(1-\left|\beta_{min}\right|^{\frac{1}{n}+1}\right)}\right]^n .$$

В ньютоновском случае (n=1) для нижней границы параметра β имеем кубическое уравнение $\beta_{min}^2\left(3-2\beta_{min}\right)-1=0$ и для наибольшего давления $q_{sup} = \eta_0\gamma\left(1-\beta_{min}\right)\left(3-2\beta_{min}\right)$. Действительный корень кубического уравнения β_{min} =-0,5, следовательно $q_{sup} = 6\eta_0\gamma$.

Моменту начала циркуляции отвечает значение параметра β=0. При этом безразмерный расход составит $Q_{s0} = n/\left(2n+1\right)$, соответственно, давление $q_0 = \eta_0\left[\gamma\left(n+1\right)/n\right]^n$. В ньютоновском случае (n=1) значения этих параметров: $Q_{s0} = 1/3$, $q_0 = 2\eta_0\gamma$ характеризует точку на напорной характеристике, разделяющей зону циркуляции (интенсивного объёмного перемешивания) и зону, когда жидкость в канале течёт прямотоком и обратный поток отсутствует.

Рассмотрим альтернативное решение этой задачи для модели Эллиса. С учётом введённого параметра β, решение задачи (92) – (99) имеет вид:

$$\gamma\left(1-\beta\right) = \frac{a\left(1+\beta\right)q}{2} + \frac{b}{\left(\alpha+1\right)}\left[\frac{q}{\left(1-\beta\right)}\right]^{\alpha}\left[1-\left|\beta\right|^{\alpha+1}\right],$$

$$Q_E = \frac{1}{\left(1-\beta\right)} - \frac{1}{\gamma\left(1-\beta\right)^2}\left\{\frac{aq}{3\left(1-\beta\right)}\left(1-\beta^3\right) + \frac{b}{\alpha+2}\left(\frac{q}{1-\beta}\right)^{\alpha}\left[1-\left|\beta\right|^{\alpha+2}\operatorname{sign}\left(\beta\right)\right]\right\}.$$

Из сопоставления полученных выражений с выражениями (101) следует, что альтернативное решение для модели Эллиса не даёт видимых преимуществ в анализе, хотя вполне пригодно для численного расчёта. Неявный характер зависимостей существенно затрудняет получение оценочных выражений для наибольшего расхода, наибольшее развиваемое давление и т.д.

Выводы

1. При описании течения Куэтта математическая модель, построенная на уравнении Оствальда – де Виля, показывает существенную ошибку прогноза при малых скоростях движения пластины (низких числах оборотов шнека). Для расчётных условий занижение расхода достигало 4,16 раза. При высоких скоростях движения рабочей поверхности (высокой скорости вращения шнека) прогноз модели Оствальда – де Виля вполне приемлемый.

2. Степенное уравнение обуславливает существенные искажения напорно-расходной характеристики с изменением скорости.

3. Погрешность возрастает с усилением аномально вязких свойств жидкости, т.е. с увеличением отклонения индекса течения от единицы.

4. При малых скоростях движения пластины (малых скоростях вращения шнека) степенная модель предсказывает сильно завышенное значение потребляемой мощности.

ГЛАВА 4

ВЫТЕСНЕНИЕ НЕНЬЮТОНОВСКОЙ ЖИДКОСТИ В ТРУБЕ

Большинство химико-технологических процессов проводятся в потоке жидкости или газа. Характеристики потока существенно влияют на ход процессов, и построить хорошую модель процесса без учёта этого обстоятельства невозможно.

Реакционные среды различаются реологическими свойствами. В первом приближении будем считать их неньютоновскими аномально вязкими. При этом качество протекающих химических и тепловых процессов в существенной степени определяется профилем скорости реакционной массы.

Подавляющее большинство опубликованных до настоящего времени

работ по неньютоновским жидкостям полностью либо частично опираются на степенную модель. Например, известный специалист в области реологии А.Я. Малкин даёт следующую оценку степенному уравнению: «Аппроксимация кривой течения степенной зависимостью даёт вполне удовлетворительные результаты применительно к расчёту зависимости расхода от давления в трубопроводе. Максимальная ошибка при таком расчёте не превышает 2,3 %. При расчёте транспортных характеристик трубопроводов определяющую роль играет высокоскоростная часть кривой течения, так что можно не стремиться к очень точному описанию области низких скоростей на кривые течения» [42, 43].

4.1. Течение жидкости Оствальда – де Виля

В химической технологии наиболее распространены аппараты непрерывного действия. Наличие поля скоростей обусловливает неравномерность времени пребывания частиц жидкости в аппарате. Так в частицах с малым временем пребывания реакция пройдёт недостаточно глубоко, зато в частицах, долго находящихся в рабочей зоне, глубина протекания реакции велика.

При этом усреднять по объёму свойства не вполне корректно. Например, при малом времени пребывания в печи хлебобулочное изделие оказывается не пропеченным, и, наоборот, при излишне продолжительном времени пребывания имеет место термодеструкция.

4.1.1. Ступенчатое возмущение температуры

Смысл задачи можно пояснить следующим образом. Путь имеем трубопровод с горячей водой. Если долгое время им не пользовались, например, ночью, то вода в трубопроводе остывает до температуры

окружающей среды. При открытии крана сначала поступает холодная вода из остывшего участка трубопровода, далее температура воды начинает повышаться. Происходит процесс вымывания горячей водой холодной. Иногда эту проблему называют задачей вытеснения. Близкая по смыслу проблема переработки неньютоновских сред в трубчатых реакторах рассмотрена профессором Голованчиковым А.Б. в серии работ [17] - [20].

Следует отметить, имеем задачу вытеснения одной и той же жидкости, но различающуюся температурой. Можно эту задачу распространить на вытеснение жидкости с одной концентрацией растворённого компонента той же жидкостью, но отличающейся концентрацией. При этом формулировка задачи сохраняется, требуется лишь во всех выражениях вместо температуры использовать концентрацию. В теории фильтрации подобная задача называется «задачей о разноцветных жидкостях». Так же можно рассматривать трубу как трубчатый реактор, в котором протекает какая-либо химическая реакция без изменения физических свойств жидкости. Следовательно, рассматриваемая задача имеет достаточно широкое приложение.

Поперечное сечение рассматриваемого участка трубы радиусом R представлено на рис.24. Рассмотрим участок трубы длиной равной или несколько превышающий ℓ. Поступающая в трубопровод жидкость имеет постоянную температуру T_o. Температура жидкости на участке $z>0$ однородна по сечению и в начальный момент равна T_1 ($T_1 \neq T_o$). Теплообмен со стенками трубы не учитываем. Поперечную и продольную теплопроводность также не учитываем, что вполне приемлемо при высокой скорости течения и малой теплопроводности жидкости.

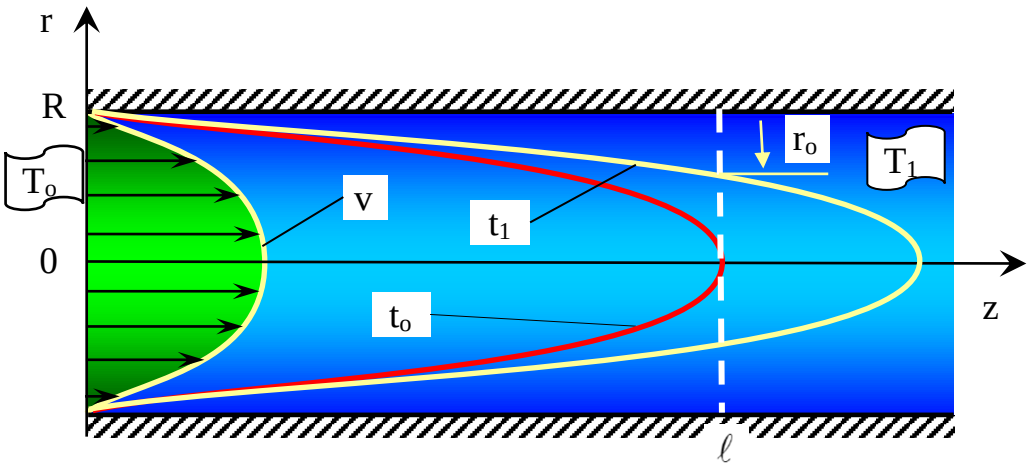


Рис.24. Расчётная схема течения.

Задача состоит в определении изменения средней по сечению температуры жидкости на выходе, т.е. в сечении, удалённом от входа на расстояние z = ℓ.

Пусть реологические свойства жидкости описываются уравнением состояния Оствальда – де Виля

$$\tau_{rz} = \eta_o \left(\frac{\partial v}{\partial r} \right)^n ,$$

где τ_{rz} – касательное напряжение, η_o - консистентность, n – индекс течения, v – осевая скорость, r - радиус.

Течение слоистое ламинарное, характеризуется параболическим поперечным профилем скорости [1]

$$v = v_o \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^{\frac{n+1}{n}} \right], \qquad (102)$$

где v_o=v(r=0) – скорость на оси. Для ламинарного течения ньютоновской жидкости (n=1) характерно соотношение $v_o = 2v_+$ ($v_+ = V/(\pi R^2)$ - среднерасходная скорость жидкости, V = const – объёмный расход).

Согласно (102) максимальную скорость осевого перемещения имеют частицы жидкости на оси трубы (v_o). У стенки (условие прилипания) скорость равна нулю и время пребывания частиц бесконечное.

Очевидно, что время достижения частицей жидкости, находящейся на

оси, выходного (контрольного) сечения z = ℓ составляет $t_o = \ell / v_o$. При этом средняя по сечению z = ℓ температура равна T_1. Для этого времени (первый период) можно записать

$$t \le t_0, \quad T = T_1. \qquad (103)$$

Далее, для всех времён ($t > t_0$) в контрольном сечении z = ℓ, учитывая формулу (102), можем записать следующее уравнение зависимости радиуса параболоида жидкости с температурой T_o от времени (см. рис. 26)

$$t = \ell \left\{ v_o \left[1 - \left(\frac{r_o}{R} \right)^{\frac{n+1}{n}} \right] \right\}^{-1}. \qquad (104)$$

Здесь r_o – радиус границы раздела жидкостей, имеющих разную температуру, в сечении z = ℓ. Из соотношения (104) следует

$$\left(\frac{r_o}{R} \right)^2 = \left(1 - \frac{\ell}{v_o t} \right)^{\frac{2n}{n+1}}, \qquad (105)$$

Найдём средне расходную температуру в контрольном сечении для произвольного времени t ($t > t_0$). Жидкость несжимаемая, теплофизические свойства постоянны и не зависят от температуры. В контрольном сечении жидкость интенсивно перемешивается, и температура выравнивается. «Объёмную» температуру можно в принципе измерить, если обрезать трубу, по которой течёт теплоноситель, в сечении z=ℓ, собрать жидкость, вытекающую из трубы, в контейнер и тщательно её смешать. По этой причине среднюю температуру иногда называют «температурой идеального смешения» или «температурой, осреднённой по потоку».

Сечение условно можно разбить на ядро, радиусом $r_o(t)$ с температурой жидкости T_o и кольцевое сечение ($r_o(t)<r<R$) температурой T_1.

Тепловой поток ядра и кольцевого сечения

$$Q_0 = C\rho T_o 2\pi \int_0^{r_0} vrdr, \qquad Q_1 = C\rho T_1 2\pi \int_{r_0}^{R} vrdr \qquad (106)$$

Жидкость после контрольного сечения интенсивно перемешивается, поэтому результирующий тепловой поток соответствует средней температуре

$$Q_+ = C\rho T_+ 2\pi \int_0^R vrdr\,, \qquad (107)$$

где C, ρ – теплоёмкость и плотность жидкости, соответственно.

Уравнение теплового баланса в контрольном сечении

$$Q_+ = Q_o + Q_1. \qquad (108)$$

Подставив составляющие (106), (107) в уравнение (108) и выполнив интегрирование, получим выражение для средней по сечению температуры жидкости в контрольном сечении

$$T_+ = T_1 + (T_o - T_1)\frac{2(3n+1)}{(n+1)}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{r_0(t)}{R}\right)^2 - \frac{n}{(3n+1)}\left(\frac{r_0(t)}{R}\right)^{3+\frac{1}{n}}\right]. \qquad (109)$$

С учётом соотношения (105), выражение (109) примет вид

$$T_+ = T_1 + (T_o - T_1)\frac{2(3n+1)}{(n+1)}\left[\frac{1}{2}\left(1-\frac{\ell}{v_o t}\right)^{\frac{2n}{n+1}} - \frac{n}{(3n+1)}\left(1-\frac{\ell}{v_o t}\right)^{\frac{3n+1}{n+1}}\right],\ \ t > t_0. \quad (110)$$

Согласно полученному выражению средняя температура на выходе трубы изменяется по гиперболическому закону, и при бесконечно большом времени стремиться к температуре на входе ($t \to \infty$, $T_+ \to T_o$).

Введём безразмерные переменные

$$\theta = \frac{T_+ - T_1}{T_o - T_1}\,, \qquad \tau = \frac{t}{t_o}. \qquad (111)$$

С учётом обозначений (111) решение задачи (103), (110) примет более компактный вид

$$\theta = \begin{cases} 0, & если \quad \tau \le 1 \\ \dfrac{2(3n+1)}{(n+1)}\left(1-\dfrac{1}{\tau}\right)^{\frac{2n}{n+1}}\left[\dfrac{1}{2} - \dfrac{n}{(3n+1)}\left(1-\dfrac{1}{\tau}\right)\right] & если \quad \tau > 1. \end{cases} \qquad (112)$$

Вид решения (112) не зависит от соотношения температур T_o и T_1. Как было отмечено выше, вместо температур в первой формуле в (111) могут

стоять концентрации.

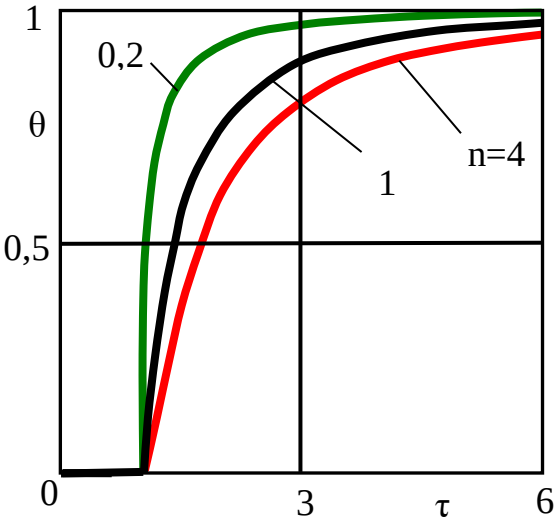


Рис.25. Изменение средней безразмерной температуры в контрольном сечении.

График функции θ(τ) показан на рис.25. Представлена так называемая кривая разгона – реакция системы на ступенчатое возмущение входного параметра. Имеем объект с транспортным запаздыванием. Зависимость носит асимптотический характер. Вид разгонной кривой однозначно определяется профилем скорости. В свою очередь профиль скорости однозначно определяется индексом течения. При ламинарном течении неньютоновских жидкостей профиль скорости отличен от параболического, поэтому кривая разгона неньютоновских жидкостей определяется степенью аномалии вязкости. В случае ярко выраженных псевдопластических свойств жидкости (n<1) режим течения приближается к поршневому, а профиль скорости к прямоугольному.

4.1.2. Кривая отклика при импульсном возмущении.

Рассмотрим более сложный вариант задачи - реакцию системы на импульсной возмущение. В этом случае кривую отклика получают при подаче на вход конечного количества индикатора, в нашем случае жидкости отличной температуры. Следует отметить, в качестве возмущения используются также концентрация растворённого вещества, оптическая плотность, радиоактивное излучение.

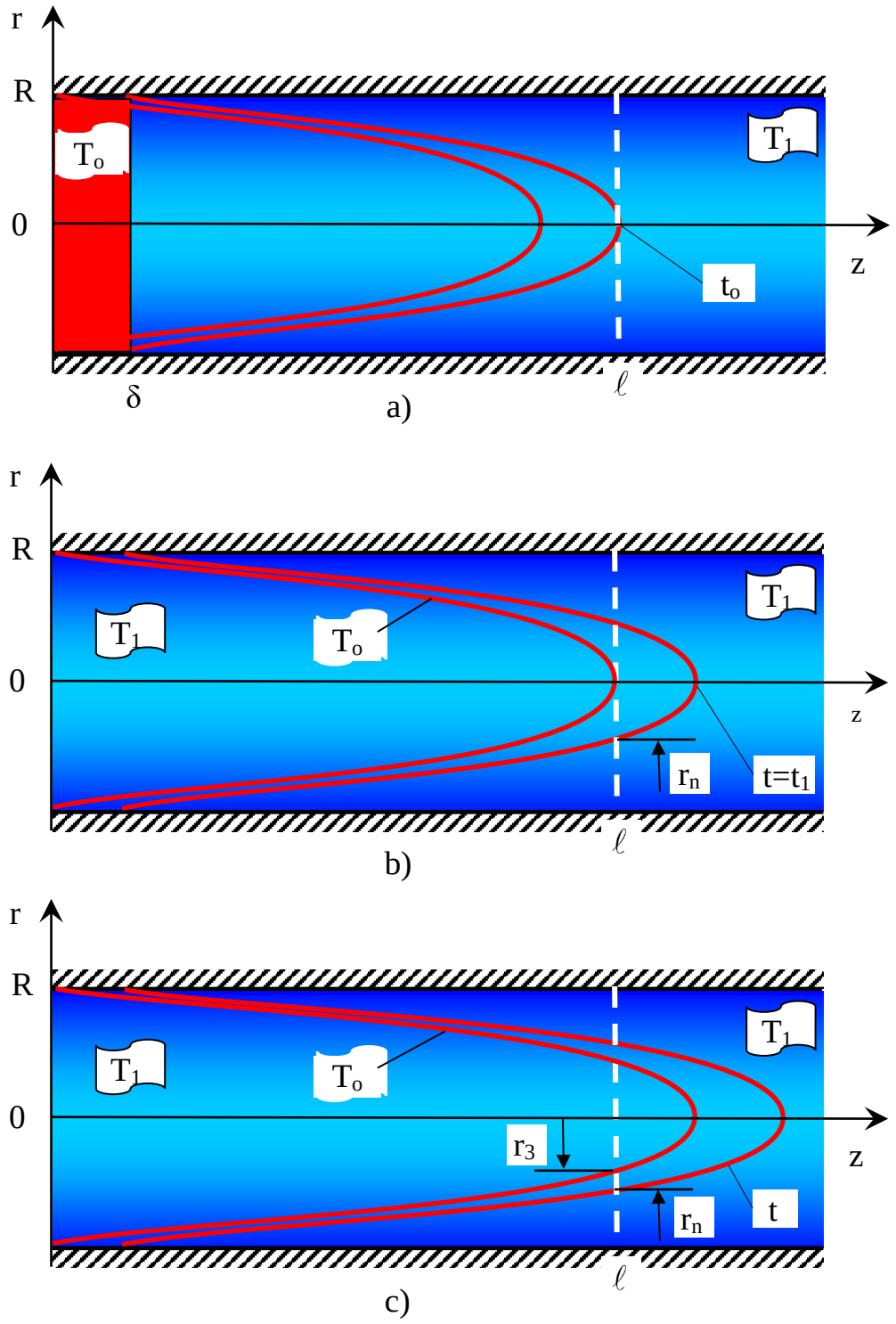


Рис.26. Три стадии движения фронта индикатора.

Расчётная схема с тремя вариантами ситуации представлена на рис.26. Имеем установившийся поток жидкости в трубопроводе температурой T_1. В момент времени t=0 в окрестности начала координат возникает цилиндрический объём жидкости $\pi R^2\delta$ температурой T_o. Технически это можно реализовать нагревом жидкости электрическим током. С течением

времени цилиндрический объём индикатора трансформируется в параболоид вращения. Теплопроводность жидкости не учитывается.

Условно движение индикатора можно разбить на 3 периода. Первый период (рис.26, а) начинается в нулевой момент времени и заканчивается в момент $t=t_o$, когда вершина переднего фронта индикатора касается контрольного сечения $z = \ell$. В течении первого периода температура на выходе постоянна $T=T_1$. Для первого периода можем записать

$$t<t_o, \qquad T=T_1. \qquad (113)$$

Продолжительность первого периода можно найти по известной формуле механики $t_o=(\ell - \delta)/v_o$.

Второму периоду отвечает интервал времени $t_o<t<t_1$. Он заканчивается ($t=t_1$), когда экстремум заднего фронта индикатора достигнет контрольного сечения в точке $r=0$, $z=\ell$.

Граничное значение времени окончания второго периода t_1 можно найти по формуле $t_1=\ell/v_o$. При этом средняя температура на выходе увеличивается, и достигает наибольшего значения, поскольку увеличивается радиус r_n (рис.26, b).

Учитывая эпюру скорости (102), можем записать уравнение кинетики роста радиуса сечения переднего фронта $r_n(t)$ в сечении $z=\ell$

$$t=(\ell-\delta)\left\{v_o\left[1-\left(\frac{r_n}{R}\right)^{\frac{n+1}{n}}\right]\right\}^{-1}, \qquad t>t_0. \qquad (114)$$

Соответственно, кинетика роста радиуса сечения заднего фронта параболоида индикатора $r_3(t)$ в третьем периоде описывается уравнением

$$t=\ell\left\{v_o\left[1-\left(\frac{r_3}{R}\right)^{\frac{n+1}{n}}\right]\right\}^{-1}, \qquad t>t_1. \qquad (115)$$

Согласно выражению (114) для интервала времени второго периода ($t_1>t> t_0$) можем записать соотношение

$$\left(\frac{r_n}{R}\right)^2 = \left(1-\frac{\ell-\delta}{v_o t}\right)^{\frac{2n}{n+1}}, \qquad t>t_0. \qquad (116)$$

Для определения средней температуры в контрольном сечении используем уравнение теплового баланса

$$Q_+ = Q_o + Q_1, \qquad (117)$$

где $Q_0 = C\rho T_o 2\pi\int_0^{r_n} vrdr$, $Q_1 = C\rho T_1 2\pi\int_{r_n}^{R} vrdr$, $Q_+ = C\rho T_+ 2\pi\int_0^{R} vrdr$.

Из уравнения (117) получим следующее выражение для средней температуры в контрольном сечении

$$T_+ = T_1 + (T_o - T_1)\frac{2(3n+1)}{(n+1)}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{r_n(t)}{R}\right)^2 - \frac{n}{3n+1}\left(\frac{r_n(t)}{R}\right)^{3+\frac{1}{n}}\right].$$

С учётом соотношения (116), последнее выражение можно записать так

$$T_+ = T_1 + (T_o - T_1)\frac{2(3n+1)}{(n+1)}\left[\frac{1}{2}\left(1-\frac{\ell-\delta}{v_o t}\right)^{\frac{2n}{n+1}} - \frac{n}{3n+1}\left(1-\frac{\ell-\delta}{v_o t}\right)^{\frac{(3n+1)}{(n+1)}}\right], \quad t_1>t>t_0. \quad (118)$$

В третьем периоде ($t>t_1$) в контрольном сечении имеем три зоны: центральную ($r_3>r>0$), среднюю ($r_3<r<r_n$) и периферийную ($r_n<r<R$) (рис.26, с). Соответственно, составляющие теплового баланса (117) имеют вид:

$$Q_0 = C\rho T_o 2\pi\int_{r_3}^{r_n} vrdr, \quad Q_1 = C\rho T_1 2\pi\int_0^{r_3} vrdr + C\rho T_1 2\pi\int_{r_n}^{R} vrdr, \quad Q_+ = C\rho T_+ 2\pi\int_0^{R} vrdr.$$

Подставив эти выражения в уравнение (117), найдём изменение температуры в третьем периоде

$$T_+ = T_1 + (T_o - T_1)\frac{2(3n+1)}{(n+1)}\left[\begin{array}{l}\frac{1}{2}\left(\frac{r_n(t)}{R}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{r_3(t)}{R}\right)^2 + \\ + \frac{n}{3n+1}\left(\frac{r_3(t)}{R}\right)^{3+\frac{1}{n}} - \frac{n}{3n+1}\left(\frac{r_n(t)}{R}\right)^{3+\frac{1}{n}}\end{array}\right], \qquad t>t_1.$$

Рассматривая эту формулу совместно с (114), (115), перейдём к переменной t

$$T_+ = T_1 + \left(T_o - T_1\right)\frac{2\left(3n+1\right)}{\left(n+1\right)}\left[\begin{array}{l}\frac{1}{2}\left(1-\frac{\ell-\delta}{v_0 t}\right)^{\frac{2n}{n+1}} - \frac{1}{2}\left(1-\frac{\ell}{v_0 t}\right)^{\frac{2n}{n+1}} + \\ + \frac{n}{3n+1}\left(1-\frac{\ell}{v_0 t}\right)^{\frac{3n+1}{n+1}} - \frac{n}{3n+1}\left(1-\frac{\ell-\delta}{v_0 t}\right)^{\frac{3n+1}{n+1}}\end{array}\right], \; t>t_1. \quad (119)$$

Введём безразмерные переменные

$$\theta = \frac{T_+ - T_1}{T_o - T_1}, \qquad \tau = \frac{t}{t_o}, \qquad \varepsilon = \frac{\delta}{\ell}.$$

Здесь $t_o=(\ell - \delta)/v_o$ – масштаб времени (продолжительность первого периода).

При этом расчётные формулы (113), (118), (119) можно записать так (общее решение задачи)

$$\theta = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad \tau \le 1 \\ \frac{\left(3n+1\right)}{\left(n+1\right)}\left(1-\frac{1}{\tau}\right)^{\frac{2n}{n+1}} - \frac{2n}{n+1}\left(1-\frac{1}{\tau}\right)^{\frac{\left(3n+1\right)}{\left(n+1\right)}} & \text{если} \quad 1<\tau<\frac{1}{1-\varepsilon} \\ \frac{2\left(3n+1\right)}{\left(n+1\right)}\left[\begin{array}{l}\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\tau}\right)^{\frac{2n}{n+1}} - \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\tau\left(1-\varepsilon\right)}\right)^{\frac{2n}{n+1}} + \\ + \frac{n}{3n+1}\left(1-\frac{1}{\tau\left(1-\varepsilon\right)}\right)^{\frac{3n+1}{n+1}} - \frac{n}{3n+1}\left(1-\frac{1}{\tau}\right)^{\frac{3n+1}{n+1}}\end{array}\right] & \text{если} \quad \tau \ge \frac{1}{1-\varepsilon}. \end{cases} \quad (120)$$

Независимо от соотношения температур основной жидкости и индикатора в течение переходного периода выполняется условие θ<1. В ньютоновском случае (n=1) решение этой задачи несколько упрощается

$$\theta = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad \tau \le 1 \\ 2\left(1-\frac{1}{\tau}\right) - \left(1-\frac{1}{\tau}\right)^2 & \text{если} \quad 1<\tau<\frac{1}{1-\varepsilon} \\ 4\left[\begin{array}{l}-\frac{1}{2}\frac{1}{\tau} + \frac{1}{2}\frac{1}{\tau\left(1-\varepsilon\right)} + \\ + \frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{\tau\left(1-\varepsilon\right)}\right)^2 - \frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{\tau}\right)^2\end{array}\right] & \text{если} \quad \tau \ge \frac{1}{1-\varepsilon}. \end{cases} \quad (121)$$

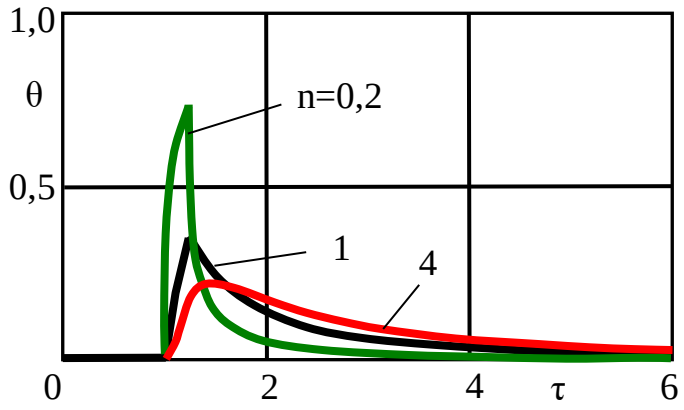


Рис.27. Кривые отклика при импульсном возмущении при течении различных неньютоновских жидкостей (цифры у кривых – значения индекса течения).

Расчётные кривые отклика для различных значений индекса течения, полученные согласно выражению (120), представлены на рис.27. Значение геометрического симплекса (относительной толщины индикатора) составляло ε=0,2. Величине ε=0,2 отвечает граничное значение безразмерного комплекса $\tau_1=(1-\varepsilon)^{-1}=1,25$. Расчёты выполнены для трёх значений индекса течения. Значение n=1 отвечает течению ньютоновской жидкости.

Из рисунка видно, что эффекты аномалии вязкости существенно влияют на характер кривой отклика. В частности, существенно изменяется величина наибольшего всплеска температуры на выходе. С понижением псевдопластических свойств (увеличение индекса течения n) снижается интенсивность вымывания индикатора. Этот результат вполне согласуется с результатом первой задачи о вытеснении (рис.25). На стыке второго и третьего периодов в точке $\tau=(1-\varepsilon)^{-1}$ имеет место разрыв производной, следовательно, это точка излома. Наиболее заметен излом при течении псевдопластика, для дилатантной жидкости излом становится малозаметным. В случае дилатантной жидкости (n=4) продолжается рост температуры даже после того как вершина заднего фронта миновала контрольное сечение, поскольку максимум соответствующей кривой находится за абсциссой границы τ=1,25.

4.1.3. О форме кривой отклика

Решение задачи (120) представляет функцию, заданную несколькими формулами. Остановимся подробней на стыке второго и третьего режимов.

Иными словами, рассмотрим решение в окрестности точки с абсциссой $\tau=(1-\varepsilon)^{-1}$. Слева и справа от рассматриваемой точки решение описывается различными алгебраическими выражениями. В этой точке второе и третье выражения в (120) дают идентичный результат:

$$\theta=\frac{\left(3n+1-2n\varepsilon\right)}{n+1}\varepsilon^{\frac{2n}{n+1}}.$$

Следовательно, разрыв отсутствует, функция равномерно непрерывна.

Рассмотрим поведение первой производной в этой точке. Производная слева равна

$$\frac{d\theta}{d\tau}=\frac{2n\left(3n+1\right)}{\left(n+1\right)^2}\varepsilon^{\frac{n-1}{n+1}}\left(1-\varepsilon\right)^3.$$

Производная справа определяется выражением

$$\frac{d\theta}{d\tau}=\lim_{\tau\to\frac{1}{(1-\varepsilon)}+0}\frac{d}{d\tau}\left\{\frac{2\left(3n+1\right)}{\left(n+1\right)}\left[\begin{array}{l}\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\tau}\right)^{\frac{2n}{n+1}}-\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\tau\left(1-\varepsilon\right)}\right)^{\frac{2n}{n+1}}+\\+\frac{n}{3n+1}\left(1-\frac{1}{\tau\left(1-\varepsilon\right)}\right)^{\frac{3n+1}{n+1}}-\frac{n}{3n+1}\left(1-\frac{1}{\tau}\right)^{\frac{3n+1}{n+1}}\end{array}\right]\right\}. \qquad (122)$$

Выполнив дифференцирование, приходим к неопределённости типа «0^0». Для раскрытия неопределённости введём новую бесконечно малую положительную величину Δ как слагаемое параметра ε, входящего в граничное значение τ. При этом получим вместо (122) следующее предельное соотношение

$$\frac{d\theta}{d\tau}=\lim_{\substack{\tau\to\frac{1}{(1-\varepsilon-\Delta)}\\ \Delta\to 0}}\frac{d}{d\tau}\left\{\frac{2\left(3n+1\right)}{\left(n+1\right)}\left[\begin{array}{l}\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\tau}\right)^{\frac{2n}{n+1}}-\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\tau\left(1-\varepsilon\right)}\right)^{\frac{2n}{n+1}}+\\+\frac{n}{3n+1}\left(1-\frac{1}{\tau\left(1-\varepsilon\right)}\right)^{\frac{3n+1}{n+1}}-\frac{n}{3n+1}\left(1-\frac{1}{\tau}\right)^{\frac{3n+1}{n+1}}\end{array}\right]\right\}.$$

После несложных преобразований, приходим к следующему результату

$$\lim_{\Delta\to 0}\frac{d\theta}{d\tau}=\begin{cases}-\infty, & n<1\\ \dfrac{2n(3n+1)}{(n+1)^2}(1-\varepsilon)^3\varepsilon^{\frac{n-1}{n+1}}, & n>1.\end{cases}$$

При течении псевдопластика (n<1) первая производная терпит разрыв второго рода. Линия, отвечающая n=0,2, в точке стыковки двух кривых имеет излом, что подтверждает график на рис.27. В случае дилатантной жидкости излом отсутствует (линия, отвечающая n=4 на графике рис.27). Это обусловлено предсказанием степенным уравнением острого профиля скоростей при течении этой жидкости, что в реальности не может иметь места. Следовательно, расчётная кривая отклика для дилатантной жидкости является ошибочной.

Полученные формулы неприменимы для ньютоновской жидкости ($n\neq 1$). В ньютоновском случае (n=1) необходимо непосредственно выполнить дифференцирование выражений (121). При этом имеем: производная слева $d\theta/d\tau=2(1-\varepsilon)^3$, производная справа $d\theta/d\tau=-2\varepsilon(2-\varepsilon)(1-\varepsilon)$. Функция имеет излом на границе второго и третьего периодов.

Следует отметить, что расчётные результаты анализа данной задачи существенно зависят от точности аппроксимации профиля скорости. К сожалению, степенная модель приводит к существенным погрешностям аппроксимации профиля скорости, что иллюстрируется рис.3. В частности, выше было показано, что модель Оствальда – де Виля приводит к излишне гипертрофированным прогнозам эффектов аномалии вязкости математической моделью. Следовательно, полученные в этом разделе результаты носят по преимуществу качественный характер. Для получения более точного результата целесообразно использовать другую реологическую модель, например, модель Эллиса.

4.2. Течение жидкости Эллиса

Предварительно найдём профиль скорости для жидкости Эллиса. Схема

течения и система цилиндрических декартовых координат представлена на рис.24. Подробности решения задачи о течении жидкости Эллиса в цилиндрическом канале представлены в разделе 1.5.1. Напорное течение совершается только в направлении z. Реологические свойства жидкости описываются законом Эллиса. Течение изотермическое, ламинарное. Требуется найти профиль скорости и расход жидкости.

Уравнение движения для данного течения и реологическое уравнение жидкости Эллиса

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{1}{r}\frac{\partial\left(r\tau_{rz}\right)}{\partial r}, \qquad -\frac{d\upsilon}{dr} = \tau_{rz}\left(a + b\left|\tau_{rz}\right|^{\alpha-1}\right). \qquad (123)$$

Здесь P – давление; z – осевая координата; r – радиус; τ_{rz}(r) – касательное напряжение; v(r) – осевая компонента скорости; a, b, α – реологические константы. В реологическом уравнении минус перед градиентом скорости поставлен для того, чтобы величина касательного напряжения τ_{rz} была всегда положительна.

Градиент давления является величиной постоянной и определяется падением давления по длине канала

$$\frac{dP}{dz} = -\frac{\Delta P}{\ell},$$

где dP/dz - градиент давления, ℓ - длина канала, ΔP - избыточное давление на входе в канал относительно давления в выходном сечении (считаем на выходе канала давление атмосферное).

Граничные условия задачи включают: условие прилипания жидкости к стенкам канала и условие симметрии, или отсутствия касательных напряжений на оси

$$r=R, \quad \upsilon=0; \qquad r=0, \quad \partial\upsilon/\partial r = 0, \quad \tau_{rz}=0. \qquad (124)$$

Проинтегрировав уравнение движения в (123) с учётом условия симметрии (124), получим выражение для касательного напряжения

$$\tau_{rz} = \frac{dP}{dz}\frac{r}{2}.$$

Следовательно, напряжение на стенке

$$\tau_w = \frac{dP}{dz}\frac{R}{2}.$$

Согласно полученному выражению, градиент давления эквивалентен напряжению на стенке. Эти величины имеют идентичную размерность. Далее, из соображений удобства, будем оперировать напряжением на стенке. При этом, для касательного напряжения можем записать линейную зависимость

$$\tau_{rz} = \tau_w \frac{r}{R}. \qquad (125)$$

Из совместного рассмотрения полученного выражения (125) и уравнения состояния в (123), можем записать выражение для градиента скорости

$$\frac{d\upsilon}{dr} = a\tau_w \frac{r}{R} + b\left(\tau_w \frac{r}{R}\right)^{\alpha}.$$

В этом уравнении $\tau_w = \dfrac{\Delta PR}{2\ell}$ - касательное напряжение на стенке канала.

Учитывались соотношения: $\tau_w < 0$, $-\dfrac{d\upsilon}{dr} = a\left|\tau_w\right|\dfrac{r}{R}sign\left(\tau_w\right) + b\left|\tau_w \dfrac{r}{R}\right|^{\alpha} sign\left(\tau_w\right)$.

Разделив переменные и проинтегрировав с учётом условия (124), получим выражение для осевой скорости

$$\upsilon = \frac{a\tau_w R}{2}\left[1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right] + \frac{bR\tau_w{}^{\alpha}}{\alpha+1}\left[1-\left(\frac{r}{R}\right)^{\alpha+1}\right]. \qquad (126)$$

Видно, что эпюра осевой скорости (126) не является параболической.

Объемный расход жидкости определяется интегралом

$$Q = 2\pi\int_0^R \upsilon r dr.$$

Выполнив интегрирование с учётом выражения (126), получим

$$\frac{Q}{\pi R^3} = \frac{a\tau_w}{4} + \frac{b\tau_w{}^{\alpha}}{\alpha+3}.$$

Далее величину касательного напряжения на стенке будем считать положительной величиной.

4.2.1. Ступенчатое возмущение температуры

Расчётная схема рассматриваемого участка трубы радиусом R представлено на рис.24. Рассмотрим участок трубы длиной равной или несколько превышающий ℓ. Поступающая в трубопровод жидкость имеет постоянную температуру T_o. Температура жидкости на участке z>0 однородна по сечению и в начальный момент равна T_1 ($T_1 \neq T_o$). Теплообмен со стенками трубы не учитываем. Поперечную и продольную теплопроводность также не учитываем, что вполне приемлемо при высокой скорости течения и малой теплопроводности жидкости.

Задача состоит в определении изменения средней температуры жидкости на выходе, т.е. в сечении, удалённом от входа на расстояние z = ℓ.

Согласно (102) максимальную скорость осевого перемещения имеют частицы жидкости на оси трубы (r=0). У стенки (условие прилипания) скорость равна нулю.

Очевидно, что время достижения частицей жидкости, находящейся на оси, выходного (контрольного) сечения z = ℓ составляет $t_o = \ell / v_o$. Максимальная скорость на оси канала

$$\upsilon_0 = \frac{aR\tau_w}{2} + \frac{bR\tau_w{}^{\alpha}}{\alpha+1}.$$

При этом средняя по сечению z = ℓ температура равна T_1. Для первого периода можно записать

$$t \le t_0, \quad T = T_o. \qquad (127)$$

Далее, для всех времён $t > t_0$ в сечении z = ℓ, учитывая формулу (126),

можем записать следующее уравнение зависимости радиуса параболоида жидкости с температурой T_o от времени (рис.24)

$$t = \ell \left\{ \frac{aR\tau_w}{2} \left[1 - \left(\frac{r_0}{R} \right)^2 \right] + \frac{bR\tau_w{}^{\alpha}}{\alpha + 1} \left[1 - \left(\frac{r_0}{R} \right)^{\alpha+1} \right] \right\}^{-1},$$

Здесь r_o – радиус границы раздела жидкостей, имеющих разную температуру, в сечении z = ℓ.

В частности, продолжительность первого периода составляет

$$t_0 = \ell \left(\frac{aR\tau_w}{2} + \frac{bR\tau_w{}^{\alpha}}{\alpha + 1} \right)^{-1}.$$

Найдём среднюю температуру в контрольном сечении для произвольного времени t ($t > t_0$). Жидкость несжимаемая, теплофизические свойства постоянны и не зависят от температуры. Условно сечение можно разбить на ядро, радиусом r_o с температурой жидкости T_o и кольцевое сечение (r_o<r<R) температурой T_1.

Тепловой поток ядра и жидкости в кольцевом сечении:

$$Q_0 = C\rho T_o 2\pi \int_0^{r_0} vrdr, \qquad Q_1 = C\rho T_1 2\pi \int_{r_0}^{R} vrdr \qquad (128)$$

Допустим, жидкость за контрольным сечением интенсивно перемешивается, тогда её теплосодержание соответствует средней температуре

$$Q_+ = C\rho T_+ 2\pi \int_0^{R} vrdr, \qquad (129)$$

где C, ρ – теплоёмкость и плотность жидкости, соответственно.

Уравнение теплового баланса элементарного объёма контрольного сечения

$$Q_+ = Q_o + Q_1. \qquad (130)$$

Подставив составляющие (128), (129) в уравнение (130), после несложных преобразований можем записать

$$T_{+} = T_1 + \left(T_0 - T_1\right)\int_0^{r_0} vrdr \Big/ \int_0^{R} vrdr\,. \qquad (131)$$

Введём безразмерные переменные

$$\theta = \frac{T_{+} - T_1}{T_o - T_1}, \qquad \xi = \frac{r_o}{R}, \qquad \tau = \frac{t}{t_0} = \frac{taR\tau_w\left(1+K\right)}{2\ell}, \qquad K = \frac{2b\tau_w^{\ \alpha-1}}{a\left(\alpha+1\right)}. \qquad (132)$$

Выполнив интегрирование в (131) с учётом соотношений (126), (127), (132), получим выражение для средней по сечению безразмерной температуры жидкости в контрольном сечении

$$\begin{cases} \theta = 0, \qquad\qquad если \quad \tau \le 1 \\ \theta = \dfrac{2\xi^2 - \xi^4 + K\left[2\xi^2 - \dfrac{4}{\alpha+3}\xi^{\alpha+3}\right]}{1 + 2K\left(\dfrac{\alpha+1}{\alpha+3}\right)}, \\ \tau = \dfrac{1+K}{1-\xi^2 + K\left(1-\xi^{\alpha+1}\right)} \quad если \quad \tau > 1. \end{cases} \qquad (133)$$

Безразмерная продолжительность первого периода определяется путём применения к последнему уравнению (133) условия: $\theta=0$, $\xi=0$, $\tau=\tau_1$. Она равна $\tau_1=1$. Согласно (133) во втором периоде функция $\theta(\tau)$ записана в параметрической форме, при этом переменную ξ следует рассматривать как параметр ($0<\xi<1$). Имеет место предельное свойство: $\xi \to 1, \ \theta \to 1, \ \tau \to \infty$. Кривая разгона во втором периоде зависит от параметра К, который в свою очередь зависит от реологических постоянных и напряжения на стенке.

Вид решения (133) не зависит от соотношения температур T_o и T_1. Как было отмечено выше, вместо температур в первой формуле в (132) могут стоять концентрации.

Для численного анализа воспользуемся данными реологических исследований из главы 1.10. Резиновая смесь на основе каучуков СКИ-3НТ и СКМС-30АРКПН [по 50 ч. (масс)] и содержащей в качестве наполнителей технический углерод ПМ-15 (35 ч.) и ПГМ-33 (38 ч.). В основной состав

входили также: масло соляровое-18, сера-1,5, оксид цинка-3 ч. (масс). Температура смеси при испытании 120 ºС. Исследован интервал касательных напряжений от 0,123 МПа до 0,203 МПа.

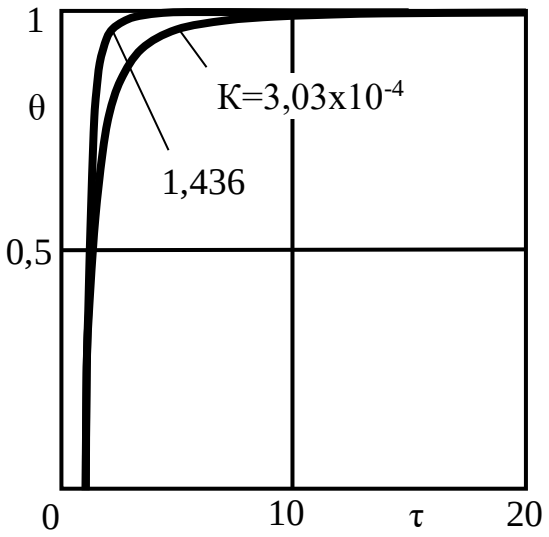


Рис.28. Кривые разгона жидкости Эллиса при различных значениях параметра К.

В результате обработки кривой течения (методом выбранных точек) получены следующие значения реологических констант для модели Эллиса: α=17,893, a=350,217 МПа$^{-1}$с$^{-1}$, b=2,373x10^{15} МПа$^{-\alpha}$с$^{-1}$. Находим согласно (132) значение параметра К. Исследованному интервалу касательных напряжений отвечает интервал изменений К от 3,03x10^{-4} до 1,436.

График функции θ(τ) показан на рис.28. Представлены кривые разгона – реакция системы на ступенчатое возмущение входного параметра для двух предельных параметров К. Имеем типичный объект с запаздыванием. Зависимость носит асимптотический характер. Вид разгонной кривой однозначно определяется профилем скорости, который в свою очередь зависит от напряжения на стенке (τ_w), входящего в К. При ламинарном течении неньютоновских жидкостей профиль скорости отличен от параболического, поэтому кривая разгона неньютоновских жидкостей определяется степенью аномалии вязкости. В случае ярко выраженных псевдопластических свойств жидкости (τ_w=0,203 МПа, К=1,436) режим течения приближается к поршневому. Нижняя кривая (τ_w=0,123 МПа, К=3,03x10^{-4}) отвечает ньютоновскому поведению жидкости, когда профиль скорости близок параболическому.

4.2.2. Импульсное возмущение температуры

Рассмотрим более сложный вариант задачи - реакцию системы на импульсной возмущение. В этом случае кривую отклика получают при подаче на вход конечного количества индикатора, в рассматриваемом случае жидкости отличной температуры.

Расчётная схема с тремя вариантами ситуации представлена на рис.26. Имеем установившийся поток жидкости в трубопроводе температурой T_1. В момент времени t=0 в окрестности начала координат возникает цилиндрический объём жидкости $\pi R^2\delta$ температурой T_o. Технически это можно реализовать путём нагрева жидкости электрическим током. С течением времени цилиндрический объём индикатора трансформируется в параболоид вращения. Теплопроводность жидкости не учитывается.

Условно движение индикатора можно разбить на 3 периода. Первый период (рис.26, а) начинается в нулевой момент времени и заканчивается в момент $t=t_o$, когда вершина переднего фронта индикатора касается контрольного сечения $z = \ell$. В этом периоде температура на выходе $T=T_1$. Для первого периода можем записать

$$t<t_o, \qquad T=T_1. \qquad (134)$$

Продолжительность первого периода можно найти по формуле механики $t_o=(\ell - \delta)/v_o$. Соответственно, окончанию второго периода отвечает момент времени $t_1= \ell /v_o$. Второму периоду отвечает интервал времени $t_o<t<t_1$. Он заканчивается ($t=t_1$), когда экстремум заднего фронта индикатора достигнет контрольного сечения в точке r=0, $z=\ell$. При этом средняя температура на выходе увеличивается, и достигает наибольшего значения, поскольку увеличивается радиус r_n (рис.26, b).

В развёрнутой форме

$$t_0 = (\ell - \delta)\left(\frac{aR\tau_w}{2} + \frac{bR\tau_w{}^{\alpha}}{\alpha+1}\right)^{-1}, \qquad t_1 = \ell\left(\frac{aR\tau_w}{2} + \frac{bR\tau_w{}^{\alpha}}{\alpha+1}\right)^{-1}.$$

Учитывая выражение для скорости (126), можем записать уравнение кинетики роста радиуса сечения переднего фронта $r_n(t)$ в сечении $z=\ell$

$$t=(\ell-\delta)\left\{\frac{aR\tau_w}{2}\left[1-\left(\frac{r_n}{R}\right)^2\right]+\frac{bR\tau_w{}^{\alpha}}{\alpha+1}\left[1-\left(\frac{r_n}{R}\right)^{\alpha+1}\right]\right\}^{-1}, \qquad t>t_0. \qquad (135)$$

Соответственно, кинетика роста радиуса сечения заднего фронта параболоида индикатора $r_3(t)$ описывается уравнением

$$t=\ell\left\{\frac{aR\tau_w}{2}\left[1-\left(\frac{r_3}{R}\right)^2\right]+\frac{bR\tau_w{}^{\alpha}}{\alpha+1}\left[1-\left(\frac{r_3}{R}\right)^{\alpha+1}\right]\right\}^{-1}, \qquad t>t_1. \qquad (136)$$

Для определения средней температуры в контрольном сечении во втором периоде используем уравнение теплового баланса

$$Q_+ = Q_o + Q_1, \qquad (137)$$

в котором $Q_0=C\rho T_o 2\pi\int_0^{r_n} vrdr$, $Q_1=C\rho T_1 2\pi\int_{r_n}^{R} vrdr$, $Q_+=C\rho T_+ 2\pi\int_0^{R} vrdr$.

Из уравнения (137) с учётом (126), получим следующее выражение для средней температуры в контрольном сечении

$$T_+=T_1+(T_o-T_1)\frac{\left[2(1+K)\left(\frac{r_n(t)}{R}\right)^2-\left(\frac{r_n(t)}{R}\right)^4-\frac{4K}{3+\alpha}\left(\frac{r_n(t)}{R}\right)^{\alpha+3}\right]}{1+2K\left(\frac{\alpha+1}{\alpha+3}\right)}.$$

К приведённым в (132) переменным добавим безразмерные радиусы границ переднего фронта индикатора и заднего

$$\xi_n=\frac{r_n}{R}, \quad \xi_3=\frac{r_3}{R}.$$

С учётом введённых обозначений, последнее выражение для температуры примет вид

$$\theta=\frac{2(K+1)\xi_n{}^2-\xi_n{}^4-\frac{4K}{3+\alpha}\xi_n{}^{\alpha+3}}{1+2K\left(\frac{\alpha+1}{\alpha+3}\right)}, \qquad \tau_1>\tau>\tau_0. \qquad (138)$$

С учётом (132) выражение для времени (135) примет вид

$$\tau=\frac{1+K}{1-\xi_n{}^2+K\left(1-\xi_n{}^{\alpha+1}\right)}, \qquad \tau>\tau_0. \qquad (139)$$

Выражения (138) и (139) в параметрической форме описывают безразмерную кривую разгона во втором периоде. Параметр ξ_n изменяется в пределах от 0 до $\xi_{n\,\mathrm{m}}$. Значение $\xi_{n\,\mathrm{m}}$ находится из условия: t= $t_1=\ell/v_o$. Для граничного значения параметра получаем трансцендентное уравнение

$$1-\xi_{nm}{}^{2}+K\left(1-\xi_{nm}{}^{\alpha+1}\right)=\left(1-\varepsilon\right)\left(1+K\right). \qquad (140)$$

Из сопоставления выражений (139) и (140) находим граничное значение безразмерного времени, соответствующее окончанию второго периода $\tau_1=(1-\varepsilon)^{-1}$. Расчётная формула (139) остаётся в силе и в третьем периоде.

В третьем периоде ($t>t_1$) в контрольном сечении имеем три зоны: центральную ($r_3>r>0$), среднюю ($r_3<r<r_n$) и периферийную ($r_n<r<R$) (рис.26, с). Соответственно, составляющие теплового баланса (130) имеют вид:

$$Q_0=C\rho T_o 2\pi\int_{r_3}^{r_n} vrdr\,,\ Q_1=C\rho T_1 2\pi\int_{0}^{r_3} vrdr+C\rho T_1 2\pi\int_{r_n}^{R} vrdr\,,\ Q_+=C\rho T_+ 2\pi\int_{0}^{R} vrdr\,.$$

Подставив эти выражения в уравнение (130), после несложных преобразований, можем записать для средней безразмерной температуры в третьем периоде

$$\theta=\frac{2\left(K+1\right)\left(\xi_n{}^{2}-\xi_3{}^{2}\right)-\xi_n{}^{4}+\xi_3{}^{4}-\dfrac{4K}{3+\alpha}\left(\xi_n{}^{\alpha+3}-\xi_3{}^{\alpha+3}\right)}{1+2K\left(\dfrac{\alpha+1}{\alpha+3}\right)}, \quad \tau>\tau_1. \qquad (141)$$

Запишем выражение (136) в безразмерной форме

$$\tau=\frac{1+K}{\left(1+\varepsilon\right)\left[1-\xi_3{}^{2}+K\left(1-\xi_3{}^{\alpha+1}\right)\right]}, \qquad \tau>\tau_1. \qquad (142)$$

Приравняв (139) и (142), получим уравнение связи параметров ξ_n и ξ_3

$$1-\xi_n{}^{2}+K\left(1-\xi_n{}^{\alpha+1}\right)=\left(1+\varepsilon\right)\left[1-\xi_3{}^{2}+K\left(1-\xi_3{}^{\alpha+1}\right)\right]. \qquad (143)$$

В третьем периоде между параметрами имеют место следующие соотношения: $\xi_{nm}<\xi_n<1$, $\xi_n>\xi_3>0$.

При численном анализе модели можно использовать такую

последовательность расчёта кинетики второго и третьего периодов. Считаем величины К, ε известными. Задаётся значение параметра ξ_n из интервала 0-0,999. Далее, с помощью выражения (139) находится значение безразмерного времени τ. С помощью трансцендентного уравнения (143) находится соответствующее значение параметра ξ_3. И наконец, с помощью выражения (141) находится соответствующая средняя температура θ.

Расчётные формулы (134), (138), (139), (141), (142) можно записать так (общее решение задачи)

$$\theta = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad \tau \le 1 \\ \dfrac{2(K+1)\xi_n^{\,2} - \xi_n^{\,4} - \dfrac{4K}{3+\alpha}\xi_n^{\,\alpha+3}}{1+2K\left(\dfrac{\alpha+1}{\alpha+3}\right)} & \text{если} \quad 1<\tau<\dfrac{1}{1-\varepsilon},\ 0\le\xi_n\le\xi_{nm} \\ \dfrac{2(K+1)\left(\xi_n^{\,2}-\xi_3^{\,2}\right)-\xi_n^{\,4}+\xi_3^{\,4}-\dfrac{4K}{3+\alpha}\left(\xi_n^{\,\alpha+3}-\xi_3^{\,\alpha+3}\right)}{1+2K\left(\dfrac{\alpha+1}{\alpha+3}\right)} & \text{если} \quad \tau\ge\dfrac{1}{1-\varepsilon},\ \xi_{nm}\le\xi_n\le 1. \end{cases}$$

$$\tau = \frac{1+K}{1-\xi_n^{\,2}+K\left(1-\xi_n^{\,\alpha+1}\right)} \ . \qquad (144)$$

Граничное значение параметра ξ_{nm} находится из уравнения

$$1-\xi_{nm}^{\,2}+K\left(1-\xi_{nm}^{\,\alpha+1}\right)=(1-\varepsilon)(1+K).$$

В третьем периоде параметры ξ_n и ξ_3 связаны уравнением

$$1-\xi_n^{\,2}+K\left(1-\xi_n^{\,\alpha+1}\right)=(1+\varepsilon)\left[1-\xi_3^{\,2}+K\left(1-\xi_3^{\,\alpha+1}\right)\right].$$

Независимо от соотношения температур основной жидкости и индикатора в течение переходного периода выполняется условие θ<1.

Расчётные кривые отклика для различных значений параметра К, полученные согласно выражению (144), представлены на рис.29. Значение геометрического симплекса (относительной толщины индикатора) составляло ε=0,2. Величине ε=0,2 отвечает граничное значение безразмерного комплекса $(1-\varepsilon)^{-1}$=1,25. Расчёты выполнены для той же жидкости, что и рис.28.

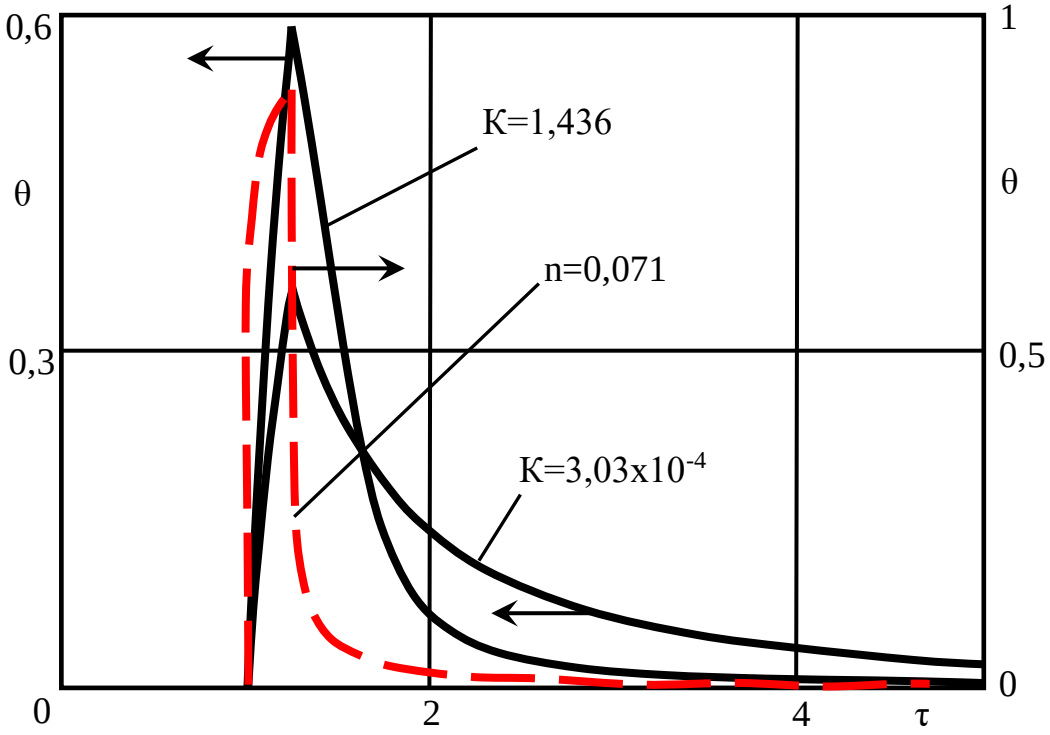


Рис.29. Сопоставление кривых отклика при течении жидкости Эллиса с параметрами K=1,436; K=3,03x10^{-4} и степенной с индексом течения n=0,071.

Из рисунка видно, что напряжение на стенке (K) существенно влияет на характер кривой отклика. В частности существенно изменяется величина наибольшего всплеска температуры на выходе. С понижением псевдопластических свойств снижается интенсивность вымывания индикатора. Этот результат вполне согласуется с результатом первой задачи о вытеснении (рис.28). На стыке второго и третьего периодов в точке $\tau=(1-\varepsilon)^{-1}$ имеет место разрыв производной, поскольку это точка излома.

Эта же модельная жидкость описана степенной реологической моделью. Реологические параметры для модели Оствальда - де Виля: n=0,071, μ_o=0,124 МПа·$c^{0,071}$. Также представлена на рис.29 (штриховой линией) кривая отклика для той же жидкости, идентичная представленной на рис.27. Видно, что характер переходного процесса несколько меняется, более резко происходит всплеск и спад температуры. Режим близок к вытеснению. Это объясняется более плоским фронтом ядра поля скоростей.

Для распространения полученных расчётных выражений на случай течения ньютоновской жидкости в модели Эллиса достаточно положить b=0, K=0, $a=\mu^{-1}$ (μ – динамическая вязкость).

В разделе 1.1 отмечалось, что модель Оствальда – де Виля приводит к излишне гипертрофированным расчётным значениям эффектов аномалии вязкости математической моделью. Это же подтверждает последний рисунок. Для получения более качественного, и близкого к реальной картине течения результата, целесообразно использовать реологическую модель Эллиса.

4.2.3. Импульсное изменение концентрации индикатора

Гидродинамику потока в аппарате интегрально описывает кривая отклика. В поток на входе его в аппарат вводят индикатор, а на выходе потока замеряют концентрацию индикатора как функцию времени (функцию отклика). В качестве индикатора используют красители, растворы солей и кислот, изотопы и другие вещества, существенно не влияющие на свойства жидкости.

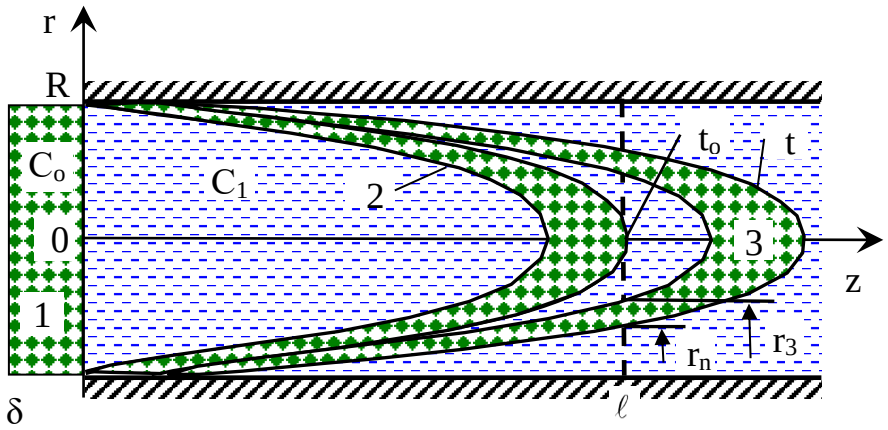


Рис.30. Эволюция профиля индикатора: 1 - начальный профиль индикатора, 2 - начало второго периода, 3 - третий период.

Расчётная схема с тремя вариантами ситуации представлена на рис.30. Имеем установившийся поток жидкости в трубопроводе с концентрацией

индикатора C_1. В момент времени t=0 на входе создаётся цилиндрический объём жидкости $\pi R^2\delta$ с концентрацией индикатора C_o ($C_1 \neq C_o$). С течением времени цилиндрический объём индикатора трансформируется в параболоид вращения. Диффузию индикатора радиальную и продольную не учитываем.

Принципиальное отличие рис.30 от рис.26 состоит в том, что в первом индикатор в начальный момент находился перед входом в трубопровод, а во втором – непосредственно в трубопроводе за входным сечением. Это обстоятельство влияет на вид расчётных формул и результаты. Также рассматриваемая постановка задачи отличается принятым масштабом времени (в качестве характерного времени используется время пребывания).

Предварительно найдём профиль скорости для жидкости Эллиса. Схема течения и система цилиндрических декартовых координат представлена на рис.30. Напорное стационарное течение совершается только в направлении z. Реологические свойства жидкости описываются законом Эллиса. Течение изотермическое, ламинарное. Жидкость несжимаемая, теплофизические и реологические свойства постоянны и не зависят от температуры.

Задача стационарного течения описывается системой уравнений:

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{1}{r}\frac{\partial\left(r\tau_{rz}\right)}{\partial r}, \qquad -\frac{d\upsilon}{dr} = \tau_{rz}\left(a + b\left|\tau_{rz}\right|^{\alpha-1}\right), \tag{145}$$

$$r=R, \quad \upsilon=0; \qquad r=0, \quad \partial\upsilon/\partial r = 0, \quad \tau_{rz}=0,$$

где P – давление; z – осевая координата; r – радиус; τ_{rz}(x,y) – касательное напряжение; v(r) – осевая компонента скорости; a, b, α – реологические константы, $dP/dz = -\Delta P/\ell$, ℓ - длина канала, ΔP - падение давления.

Введём безразмерные переменные и параметры:

$$\theta = \frac{C_+ - C_1}{C_o - C_1}, \qquad \left\{\xi, \xi_0, \xi_n, \xi_3\right\} = \frac{\left\{r, r_0, r_n, r_3\right\}}{R}, \qquad K = \frac{2b\tau_w^{\alpha-1}}{a\left(\alpha+1\right)},$$

$$\tau = \frac{t}{t_+} = \frac{taR\tau_w}{4\ell}\left[1 + 2K\frac{\left(1+\alpha\right)}{\left(3+\alpha\right)}\right]. \tag{146}$$

Здесь $\tau_w = 0{,}5R\Delta P/\ell$ - напряжение на стенке, t – время, t_+ – среднее время

пребывания жидкости в аппарате, C_+ - средняя концентрация на выходе, θ – средняя безразмерная концентрация индикатора на выходе, C_1 – концентрация индикатора в основной жидкости, C_o – концентрация индикатора на входе.

Среднее время пребывания жидкости в аппарате находится по известной формуле $t_+ = \pi R^2 \ell / Q$, где $Q = \pi R^3 \left(\frac{a\tau_w}{4} + \frac{b\tau_w{}^{\alpha}}{\alpha+3} \right)$.

В результате решения задачи (145) находим профиль скорости

$$\upsilon = 0{,}5 a\tau_w R \left[1 - \xi^2 + K\left(1 - \xi^{\alpha+1}\right) \right]. \qquad (147)$$

Условно движение индикатора можно разбить на 3 периода. Первый период (рис.30) начинается в момент времени t=0 и заканчивается в момент $t=t_o$, когда вершина переднего фронта индикатора касается контрольного сечения z = ℓ. В течение всего периода концентрация индикатора на выходе не изменяется $C=C_1$ (транспортное запаздывание). Для первого периода можем записать

$$t<t_o, \qquad C=C_1. \qquad (148)$$

Второму периоду отвечает интервал времени $t_o<t<t_1$. Он заканчивается ($t=t_1$), когда экстремум заднего фронта индикатора достигнет контрольного сечения в точке r=0, z=ℓ. При этом средняя концентрация индикатора на выходе увеличивается, и достигает наибольшего значения, поскольку увеличивается радиус r_n (рис.30).

Продолжительность первого периода, характеризующегося соотношением (148), можно найти по формуле $t_o=\ell/v_o$ ($v_o=v(\xi=0)$ - максимальная скорость на оси). Соответственно, окончанию второго периода отвечает момент времени $t_1=(\ell+\delta)/v_o$. В развёрнутой форме

$$t_0 = 2\ell\left[aR\tau_w\left(1+K\right)\right]^{-1}, \quad t_1 = 2\left(\ell+\delta\right)\left[aR\tau_w\left(1+K\right)\right]^{-1}. \qquad (149)$$

Учитывая выражение для скорости (147), можем записать следующую зависимость времени пребывания от радиуса переднего фронта индикатора

$$t=\frac{2\ell}{aR\tau_w\left[1-\xi_n^{\ 2}+K\left(1-\xi_n^{\ \alpha+1}\right)\right]}, \qquad t>t_0. \qquad (150)$$

Соответственно, радиус сечения заднего фронта параболоида индикатора $r_3(t)$ следующим образом зависит от времени

$$t=\frac{2\left(\ell+\delta\right)}{aR\tau_w\left[1-\xi_3^{\ 2}+K\left(1-\xi_3^{\ \alpha+1}\right)\right]}, \qquad t>t_1. \qquad (151)$$

Для определения средней концентрации на выходе во втором периоде используем уравнение материального баланса

$$Q_+ = Q_o + Q_1, \qquad (152)$$

слагаемые которого определяются интегралами: $Q_+ = C_+ 2\pi R^2 \int_0^1 v\xi d\xi$,

$$Q_0 = C_0 2\pi R^2 \int_0^{\xi_n} v\xi d\xi, \quad Q_1 = C_1 2\pi R^2 \int_{\xi_n}^1 v\xi d\xi.$$

В результате интегрирования для безразмерной концентрации на выходе получим выражение

$$\theta=\frac{2\left(K+1\right)\xi_n^{\ 2}-\xi_n^{\ 4}-\frac{4K}{3+\alpha}\xi_n^{\ \alpha+3}}{1+2K\left(\frac{\alpha+1}{\alpha+3}\right)}, \qquad \tau_1>\tau>\tau_0, \quad \xi_{nm}>\xi_n>0. \qquad (153)$$

С учётом обозначений (146) выражение для времени (151) примет вид

$$\tau=\frac{\left[1+2K\frac{\left(1+\alpha\right)}{\left(3+\alpha\right)}\right]}{2\left[1-\xi_n^{\ 2}+K\left(1-\xi_n^{\ \alpha+1}\right)\right]}, \qquad \tau_1>\tau>\tau_0, \quad \xi_{nm}>\xi_n>0. \qquad (154)$$

Выражения (153) и (154) в параметрической форме описывают безразмерную кривую отклика во втором периоде. Параметр ξ_n изменяется в пределах от 0 до $\xi_{n\,m}$. Граничное значение $\xi_{n\,m}$ находится из условия: $t=t_1$, $\tau=\tau_1$. Что приводит к уравнению

$$1-\xi_{nm}^{\ 2}+K\left(1-\xi_{nm}^{\ \alpha+1}\right)=\frac{\left(1+K\right)}{\left(1+\varepsilon\right)}. \qquad (155)$$

Из сопоставления выражений (154) и (155) с учётом (149), находим безразмерное время окончания второго периода

$$\tau_1 = (1+\varepsilon)\left[1+2K\frac{(1+\alpha)}{(3+\alpha)}\right]\Big/\left[2(1+K)\right].$$

В третьем периоде ($t>t_1$) в контрольном сечении имеем три зоны (рис.30): центральную ($r_3>r>0$), среднюю ($r_3<r<r_n$) и периферийную ($r_n<r<R$). При этом составляющие материального баланса (152) имеют вид:

$$Q_+ = C_+ 2\pi R^2 \int_0^1 v\xi d\xi, \quad Q_1 = C_1 2\pi R^2 \int_0^{\xi_3} v\xi d\xi + C_1 2\pi R^2 \int_{\xi_n}^1 v\xi d\xi, \quad Q_0 = C_o 2\pi R^2 \int_{\xi_3}^{\xi_n} v\xi d\xi .$$

В результате интегрирования получаем выражение для средней безразмерной концентрации в третьем периоде

$$\theta = \frac{2(K+1)\left(\xi_n^{\,2}-\xi_3^{\,2}\right)-\xi_n^{\,4}+\xi_3^{\,4}-\dfrac{4K}{3+\alpha}\left(\xi_n^{\,\alpha+3}-\xi_3^{\,\alpha+3}\right)}{1+2K\left(\dfrac{\alpha+1}{\alpha+3}\right)}, \quad \tau>\tau_1,\ 1>\xi_n>\xi_{nm}. \quad (156)$$

Из совместного рассмотрения выражений (150) и (151), получим уравнение, связывающее параметры ξ_n и ξ_3

$$1-\xi_3^{\,2}+K\left(1-\xi_3^{\,\alpha+1}\right)=(1+\varepsilon)\left[1-\xi_n^{\,2}+K\left(1-\xi_n^{\,\alpha+1}\right)\right], \quad 1>\xi_n>\xi_{nm}. \qquad (157)$$

В третьем периоде имеют место следующие соотношения: $\xi_{nm}<\xi_n<1$, $\xi_n>\xi_3>0$. Следует отметить, что выражение (154) остается в силе и в третьем периоде.

Расчётные формулы (148), (149), (151), (153), (154), (156) можно записать так (общее решение задачи)

$$\theta = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad \tau \le 1 \\ \dfrac{\left[1+2K\dfrac{(1+\alpha)}{(3+\alpha)}\right]}{2\left[1-\xi_n^{\,2}+K\left(1-\xi_n^{\,\alpha+1}\right)\right]} & \text{если} \quad 1<\tau<\tau_1,\ 0\le\xi_n\le\xi_{nm} \\ \dfrac{2(K+1)\left(\xi_n^{\,2}-\xi_3^{\,2}\right)-\xi_n^{\,4}+\xi_3^{\,4}-\dfrac{4K}{3+\alpha}\left(\xi_n^{\,\alpha+3}-\xi_3^{\,\alpha+3}\right)}{1+2K\left(\dfrac{\alpha+1}{\alpha+3}\right)} & \text{если} \quad \tau\ge\tau_1, \quad \xi_{nm}\le\xi_n\le 1. \end{cases}$$

$$\tau = \frac{1+K}{1-\xi_n^{\ 2} + K\left(1-\xi_n^{\ \alpha+1}\right)} \ . \qquad (158)$$

Граничное значение параметра ξ_{nm} находится из уравнения

$$1-\xi_{nm}^{\ \ 2} + K\left(1-\xi_{nm}^{\ \ \alpha+1}\right) = \frac{\left(1+K\right)}{\left(1+\varepsilon\right)}.$$

В третьем периоде параметры ξ_n и ξ_3 связаны уравнением

$$1-\xi_3^{\ 2} + K\left(1-\xi_3^{\ \alpha+1}\right) = \left(1+\varepsilon\right)\left[1-\xi_n^{\ 2} + K\left(1-\xi_n^{\ \alpha+1}\right)\right].$$

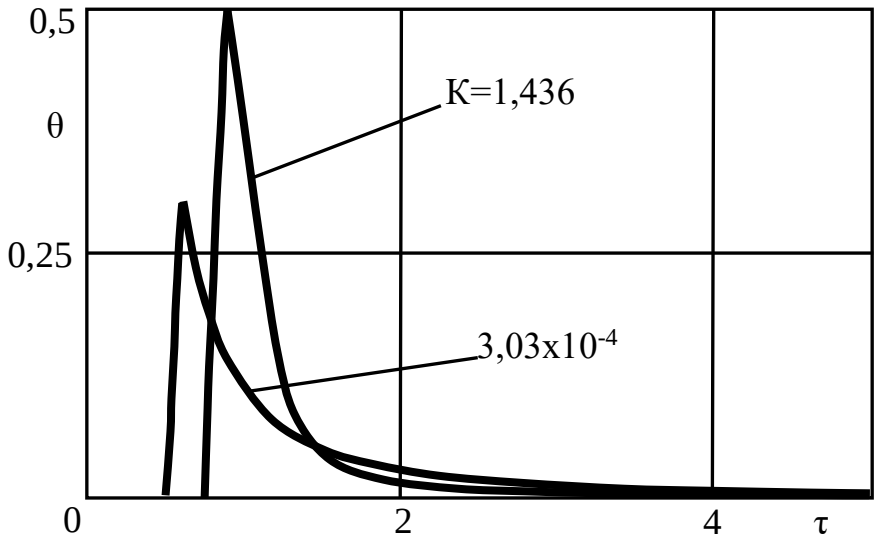


Рис.31. Кривые отклика при течении жидкости Эллиса.

Последовательность расчёта. Считаем величины К, ε известными. Первый период не представляет проблем (θ=0, 0<τ<1). Во втором периоде задаётся значение параметра ξ_n из интервала $0 \div 0{,}999$. Далее, с помощью последнего выражения в (158) находится значение безразмерного времени τ. И наконец, с помощью второго выражения в (158) находится средняя безразмерная концентрация на выходе θ. С помощью трансцендентного уравнения (157) находится соответствующее значение параметра ξ_3. При выполнении условия $\xi_{nm}<\xi_n$, наступает третий период, и расчёты концентрации выполняются по третьей формуле в (158). Следует отметить, что полученная математическая модель вполне пригодна для построения кривой разгона при ступенчатом возмущении, для чего достаточно в расчётных формулах положить ε>>1. При этом расчёты ограничены первым и вторым периодами, третий

– отсутствует. Можно отметить некоторое различие расчётных формул (144) и (158). Это обусловлено различным начальным положением индикатора и принятым характерным временем в этих задачах.

Для численного анализа воспользуемся данными реологических исследований работы [6]. Значения реологических констант для модели Эллиса: α=17,893, a=350,217 МПа$^{-1}$с$^{-1}$, b=2,373x10^{15} МПа$^{-\alpha}$с$^{-1}$. Подробности расчёта реологических констант представлены в гл.1.2. Интервалу касательных напряжений отвечает интервал К от 3,03x10^{-4} до 1,436.

Расчётные кривые отклика для двух значений К представлены на рис.31. Значение относительной толщины индикатора составляло ε=0,2. Из рисунка видно, что касательное напряжение на стенке (входит в комплекс К) существенно влияют на характер кривой отклика. В частности, существенно изменяется величина всплеска концентрации. С понижением псевдопластических свойств снижается интенсивность вымывания индикатора. Значение К=3,03x10^{-4} отвечает наибольшей ньютоновской вязкости, при этом профиль скорости близок к квадратичной параболе. На стыке второго и третьего периодов в точке τ_1 имеет место разрыв производной (точка излома функции).

ГЛАВА 5

ПЛЁНКА НЕНЬЮТОНОВСКОЙ ЖИДКОСТИ, СТЕКАЮЩАЯ ПО НАКЛОННОЙ ПОВЕРХНОСТИ

На смачиваемой поверхности текущая по ней жидкость образует сплошную плёнку. Основы теории таких течений созданы Нуссельтом (ламинарная плёнка с невозмущённой свободной границей, 1916 г.), Кольборном (турбулентная плёнка, 1934 г.), П.Л.Капицей (ламинарно-

волновая плёнка, 1948 г.).

Рассматриваемое течение достаточно широко применяется в технологиях для проведения массообменных и теплообменных процессов. Кроме того, стекающая по наклонной поверхности неньютоновская плёнка даёт пример ещё одного вискозиметрического течения. Для такого «модельного» течения из довольно простого опыта можно определить истинную и консистентную кривые установившегося течения любой реостабильной неупругой жидкости по независимым измерениям объёмного расхода и толщины плёнки при изменяющемся угле наклона поверхности. Подобно тому, как по углу наклона пластины можно оценить коэффициент трения твёрдых тел.

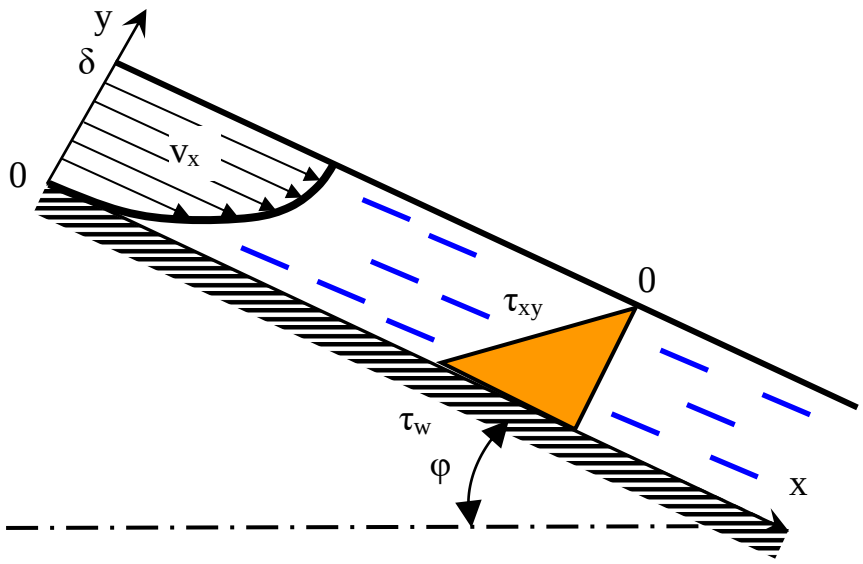


Рис.32. Расчётная схема течения плёнки жидкости

Следует отметить, что данная задача достаточно подробно проанализирована в работе Шульмана З.П. [3]. В частности, автор отмечает, что для рассматриваемого течения «использование степенного реологического уравнения может приводить к заведомо ошибочным результатам». Настоящее исследование именно посвящено выяснению степени ошибочности прогноза степенного уравнения при описании рассматриваемого течения.

При этом используются следующие допущения. Скорость сдвига является однозначной функцией локального напряжения сдвига. Скольжение на стенке отсутствует. На свободной границе плёнки отсутствуют волны и динамические взаимодействия с газом (воздухом): трение и краевые эффекты.

Инерционные эффекты пренебрежимо малы, течение стационарное, изотермическое. Схема плёнки, стекающей с наклонной поверхности, показана на рис.32.

Течение описывается следующей системой уравнений:

$$\frac{d\tau_{xy}}{dy} + \rho g \sin(\varphi) = 0; \qquad (159)$$

$y=0, \quad \tau_{xy}=\tau_w, \quad v_x=0; \qquad y=\delta, \quad \tau_{xy}=0,$

где y – поперечная координата, v_x – осевая скорость, τ_{xy}, τ_w – касательное напряжение в жидкости и на стенке, соответственно, δ – толщина плёнки, ρ – плотность жидкости, φ – угол наклона поверхности.

В результате интегрирования уравнения движения с учётом последнего граничного условия для касательного напряжения, получим

$$\tau_{xy} = G(1 - y/\delta), \qquad (160)$$

где $G = \rho g \delta \sin(\varphi)$ - гравитационный параметр течения. Согласно выражению (160) и граничному условию у стенки в (159), величина гравитационного параметра G численно равна касательному напряжению на стенке $G=\tau_w$ при Y=0.

Касательное напряжение по высоте плёнки распределяется линейно при течении любой жидкости (рис.32). Однако распределение осевой скорости определяется реологическим уравнением жидкости.

Последующий ход решения задачи зависит от вида реологического уравнения. Индексы у касательного напряжения опустим, поскольку имеем только одну компоненту тензора напряжений.

Рассмотрим случай течения жидкости Оствальда-де Виля

$$\tau = \mu\left(\frac{dv_x}{dy}\right)^n . \qquad (161)$$

В результате совместного рассмотрения уравнений (159) - (161) получим следующие интегральные характеристики течения:

$$\left.\frac{dv_x}{dy}\right|_{y=0} = \left(\frac{G}{\mu}\right)^{\frac{1}{n}}, \qquad \frac{v_x}{\delta} = \frac{n}{n+1}\left(\frac{G}{\mu}\right)^{\frac{1}{n}}\left[1-\left(1-Y\right)^{\frac{1}{n}+1}\right], \quad (162)$$

$$V_{os} = \frac{1+2n}{n+1}\left[1-\left(1-Y\right)^{\frac{1}{n}+1}\right],\ Q_{os} = \frac{Q_{os}^{\ *}}{\delta^2} = \frac{n}{2n+1}\left(\frac{G}{\mu}\right)^{\frac{1}{n}},\ v_{cos} = \frac{Q_{os}^{\ *}}{\delta} = \frac{n\delta}{2n+1}\left(\frac{G}{\mu}\right)^{\frac{1}{n}},$$

где $Q_{os}^{\ *} = \int_0^{\delta} v_x dy$ - расход жидкости Оствальда – де Виля, приходящийся на единицу ширины плёнки [м^2/с], Q_{os} - расход жидкости Оствальда – де Виля [с$^{-1}$], Y=y/δ – безразмерная ордината, $V_{os} = v_x \big/ \left(\delta Q_{os}\right)$ - безразмерная скорость, v_{cos} - средняя скорость.

Течение жидкости Эллиса

$$\frac{dv_x}{dy} = a\tau + b\tau^{\alpha} . \qquad (163)$$

В результате совместного рассмотрения уравнений (159), (160), (163) получим следующие интегральные характеристики течения:

$$\left.\frac{dv_x}{dy}\right|_{y=0} = aG + bG^{\alpha}, \qquad \frac{v_x}{\delta} = \frac{aG}{2}Y\left(2-Y\right) + \frac{bG^{\alpha}}{\alpha+1}\left[1-\left(1-Y\right)^{\alpha+1}\right],$$

$$V_E = \left\{\frac{aG}{2}Y\left(2-Y\right) + \frac{bG^{\alpha}}{\alpha+1}\left[1-\left(1-Y\right)^{\alpha+1}\right]\right\}\left(\frac{aG}{3} + \frac{bG^{\alpha}}{\alpha+2}\right)^{-1},$$

$$Q_E = \frac{Q_E^*}{\delta^2} = \frac{aG}{3} + \frac{bG^{\alpha}}{\alpha+2}, \qquad v_{cE} = \frac{Q_E^*}{\delta} = \delta\left(\frac{aG}{3} + \frac{bG^{\alpha}}{\alpha+2}\right). \qquad (164)$$

где $Q_E^{\ *} = \int_0^{\delta} v_x dy$ - расход жидкости Эллиса, приходящийся на единицу ширины

плёнки [м²/с], Q_E - расход жидкости Эллиса [с⁻¹], $V_E = v_x / (\delta Q_E)$ - безразмерная осевая скорость, v_{cE} - средняя скорость.

Анализ математической модели. К сожалению, рассмотренные выше модельные среды малопригодны для анализа рассматриваемого течения, поскольку имеют весьма высокую консистенцию, и для реализации приемлемых скоростей сдвига на стенке требуется плёнка значительной толщины.

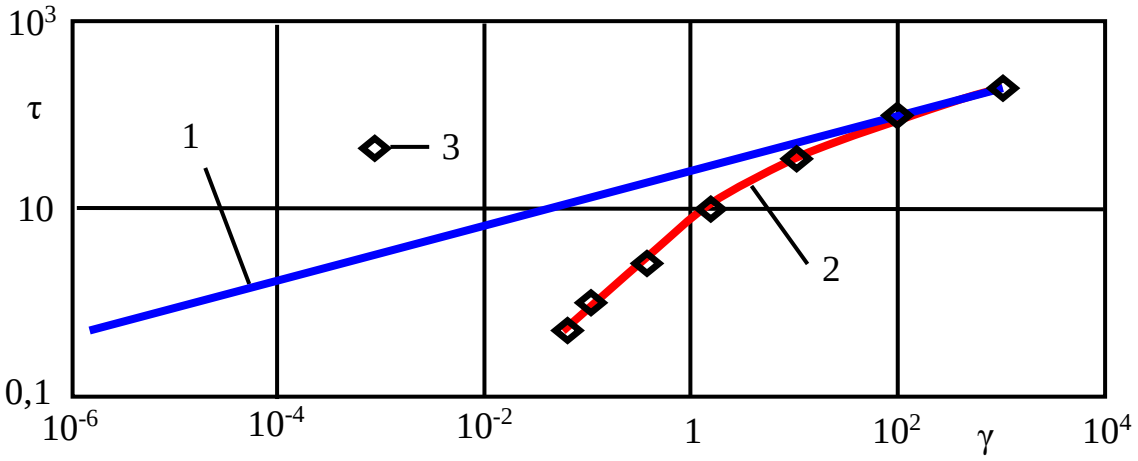


Рис.33. Аппроксимация кривой течения: 1 – модель Оствальда де Виля, 2 – модель Эллиса, 3 – экспериментальные точки.

Плотность наиболее распространённых жидкостей составляет величины порядка 1000 кг/м³. Поскольку наибольшее значение касательного напряжения на стенке составляет τ_w = 196,8 Па, то соответствующее наибольшее значение толщины плёнки жидкости будет составлять величину порядка 0,02 м. При горизонтальном положении пластины φ=0, G=0 и течение отсутствует.

В качестве модельной среды выберем 4 % масс раствор нитроцеллюлозы в бутилацетате [31]. Исследован интервал касательных напряжений от 0,508 Па до 196,8 Па. Соответствующий интервал скоростей сдвига от 0,06 с⁻¹ до 1000 с⁻¹. Реологические константы найдены методом выбранных точек и имели следующие численные значения: модель степенная n=0,294; μ=25,82 Па.с^n, модель Эллиса a=0,118 с⁻¹Па⁻¹; b=2,27x10⁻⁴ с⁻¹Па⁻$^{\alpha}$; α=2,892.

На рис.33 представлены экспериментальные точки и их аппроксимации моделями Эллиса и Оствальда – де Виля. По горизонтальной оси отложена скорость сдвига $\gamma = dv_x / dy$ в c^{-1}. По вертикальной оси – касательное напряжение в Па. Линия для модели Оствальда – де Виля проведена через последние две экспериментальные точки в области наибольших скоростей сдвига. Видно, что модель Эллиса обеспечивает лучшее приближение к экспериментальным точкам в области малых скоростей сдвига и напряжений.

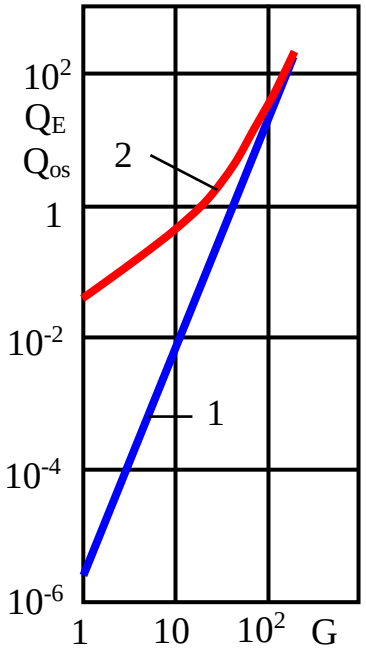


Рис.34. Зависимость расхода от параметра G для жидкости Оствальда де Виля (1) и жидкости Эллиса (2).

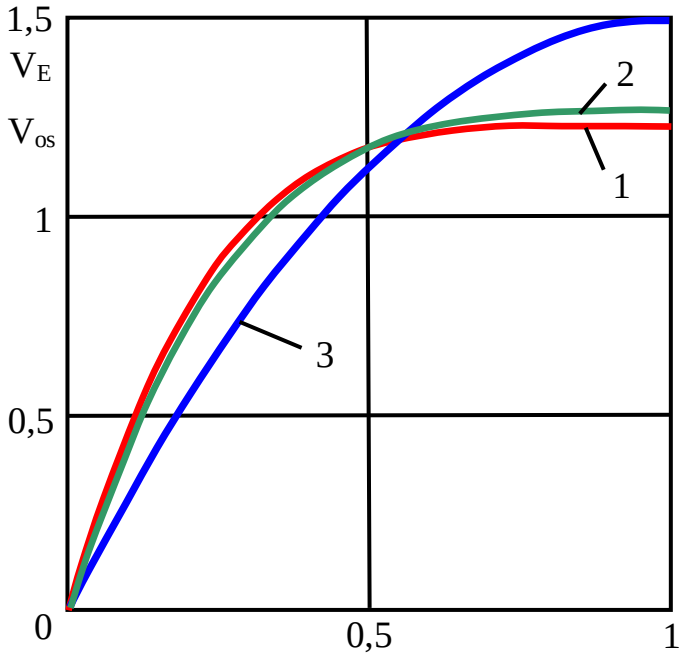


Рис.35. Эпюры скорости жидкости Оствальда – де Виля (1), жидкости Эллиса: (2) – G=300 Па , (3) – G=1 Па.

На рис.34 представлены расчётные зависимости расхода жидкостей от гравитационного параметра G. Расчёты выполнены с использованием соответствующих формул (162), (164). Видно, что на участке больших значений гравитационного параметра (G>100) обе реологические модели показывают близкий результат. Однако при малых значениях гравитационного параметра модель Оствальда - де Виля предполагает заниженные значения расхода. Так при G=1 расхождение достигает почти 4 десятичных порядков.

На рис.35 представлены расчётные профили безразмерной скорости в поперечном сечении плёнки жидкости. Расчёты выполнены по соответствующим формулам (162), (164). Необходимо отметить, что в случае степенной жидкости согласно (162) эпюра безразмерной скорости не зависит от гравитационного параметра, а полностью определяется индексом течения. Следовательно, при любых расходах профиль скорости имеет идентичную конфигурацию. Именно этот «универсальный» профиль показан на рисунке.

Существенно другое поведение показывает жидкость Эллиса. Её профиль существенно зависит от гравитационного параметра (или касательного напряжения на стенке). Очевидно, что при малых значениях гравитационного параметра свойства аномально-вязкой жидкости приближаются к ньютоновским с максимальной вязкостью. Этому случаю отвечает кривая (3). Кривая (2) отвечает умеренному проявлению аномально-вязких свойств. Наконец, при дальнейшем увеличении гравитационного параметра (до величин, превышающих 196,8 Па) жидкость Эллиса показывает профиль безразмерной скорости, совпадающий с линией (1). На рисунке этот случай не показан, поскольку линия Эллиса совпадает с уже показанной линией (1) для жидкости Оствальда – де Виля.

Полученные результаты относятся к ламинарному течению плёнки. Следует отметить, что при определенных скоростях и толщинах стекающей плёнки начинают проявляться инерционные и капиллярные эффекты (волнообразование на поверхности, потеря устойчивости, нарушение сплошности плёнки). Относительно области применимости полученных в этом разделе математических моделей подробно указано в справочнике [36].

5.1. Теплообмен стекающей плёнки неньютоновской жидкости. Приближённое решение задачи.

Рассмотрим продолжение задачи, представленной в разделе 5. Задача

теплообмена имеет техническое приложение, жидкое плёнки используются для нагрева и охлаждения поверхностей. Стекающая жидкость может быть ньютоновская либо неньютоновская. Характер термического взаимодействия жидкости с поверхностью зависит от поля скоростей в стекающей плёнке.

В данном разделе изучается правомерность применения модели Оствальда – де Виля для описания теплообмена стекающей плёнки неньютоновской жидкости, и погрешность этого описания. Как и ранее, оценка точности выполнена путём сопоставления расчётных результатов с результатами, полученными для «эталонной» среды – модели Эллиса.

Как сказал Стендаль: «Опереться можно на то, что оказывает сопротивление». Модели тепло - и массобмена, основанные на гидродинамике степенной жидкости уже по определению базируются на нечётком основании, и неудивительно, что их прогноз обречён на неточность. Каждое последующее интегрирование поля скоростей увеличивает ошибку. Также нельзя не отметить особенность современной науки – узкую специализацию учёных. Так теплофизик вынужден «принимать на веру» результаты исследований гидродинамика с его представлениями о течении и реологическом поведении жидкости, поскольку круг задач теплофизика специфичен: его больше интересуют теплофизические свойства жидкости и её термическое взаимодействие с окружением. Кроме того, математические модели теплофизики имеют иногда существенное отличие от гидродинамических, например, формулировкой и способами решения краевых задач.

5.1.1. Постановка задачи.

Схема течения и теплообмена представлена на рис.36. Для наглядности пластина изображена горизонтально. Течение совершается слева – направо. Толщина плёнки жидкости постоянная δ=const. Длина рассматриваемого участка ℓ. Начальная температура жидкости (на входе) однородна по сечению ($T = T_o$). Реологические и теплофизические свойства жидкости постоянны.

Температура поверхности пластины постоянна $T = T_c$, причём выполняется соотношение $T_c \neq T_o$. Имеет место граничное условие первого рода. На свободной поверхности жидкости теплообмен отсутствует, адиабатические условия. Используется граничное условие второго рода.

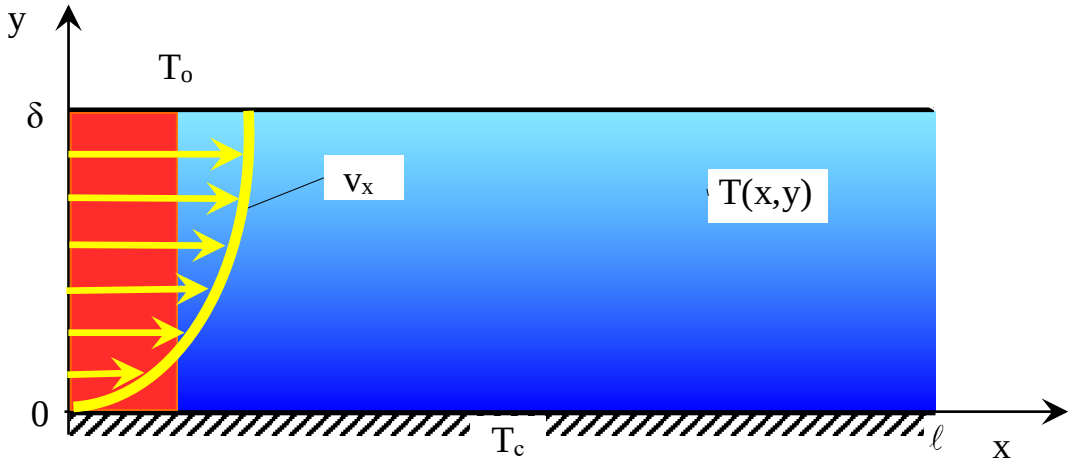


Рис.36. Расчётная схема теплообмена.

Диссипативное тепловыделение незначительно, и им можно пренебречь. В условиях слабой земной гравитации для заметного проявления эффекта диссипации потребовался бы слой высоковязкой жидкости, типа сырой резины, значительной толщины.

Поскольку справедливо соотношение $\partial^2/\partial y^2 >> \partial^2/\partial x^2$ продольной теплопроводностью жидкости пренебрегаем, учитываем только теплопроводность в поперечном направлении. Пренебрегаем тепловым потоком вдоль течения за счёт теплопроводности жидкости по сравнению с конвективным тепловым потоком. Процесс теплообмена принимается стационарным $(\partial T/\partial t = 0)$.

Температурное поле в жидкости описывается уравнением Фурье-Кирхгофа и граничными условиями

$$v_x(y)\frac{\partial T}{\partial x} = a_t \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \; ; \qquad (165)$$

x=0, $T=T_o$; y=0, $T=T_c$; y=δ, $\partial T/\partial y = 0$.

Здесь T=T(x,y) – температура жидкости, $a_t=\lambda/\rho C$ – коэффициент температуропроводности жидкости, $v_x(y)$ – профиль осевой скорости (зависит от выбранной реологической модели течения).

Задача (165) близка классической подробно исследованной задаче Гретца-Нуссельта с тем отличием, что профиль осевой скорости жидкости в рассматриваемом случае не параболический. Рассматриваемая задача превращается в задачу Гретца-Нуссельта для плоского канала, если дополнить сверху стенку на расстоянии 2δ и рассматривать уровень δ – как ось канала. Задача имеет большое прикладное значение, поэтому продолжает исследоваться [37]. Из последних работ, посвящённых исследованию этой задачи, можно указать [38, 39].

Имеем линейное уравнение параболического типа с переменным коэффициентом. Классические методы решения краевой задачи, например, метод разделения переменных Фурье, неприемлемы. Для получения приближённого решения, вполне пригодного для инженерных оценок, в том числе и сопоставления применимости реологических моделей, используем метод Канторовича [35].

5.1.2. Решение задачи.

Запишем задачу (165) в безразмерной форме, для чего введём следующие переменные:

$$\theta=\frac{T-T_c}{T_o-T_c},\quad Y=\frac{y}{\delta},\quad \{X,X_1\}=\frac{\{x,\ell\}a_t}{v_m\delta^2},\quad V(Y)=\frac{v_x}{v_m},\qquad (166)$$

где $v_m=v_x\big|_{y=\delta}$ - максимальная скорость на поверхности плёнки жидкости, $V(Y)$ - безразмерная осевая скорость жидкости ($0\le V(Y)\le 1$). Здесь X – аналог числа Фурье, также его можно записать в форме $X=x/(\delta Pe)$, где $Pe=v_m\delta/a_t$ - число Пекле.

С учётом обозначений (166), задача (165) примет вид

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial Y^2} - V(Y)\frac{\partial\theta}{\partial X} = 0 \ ; \qquad (167)$$

X=0, θ=1; Y=0, θ=0; Y=1, $\partial\theta/\partial Y = 0$.

Согласно методу Канторовича приближённое решение задачи (167) ищем в семействе функций, точно удовлетворяющих граничным условиям задачи

$$\theta(X,Y) = \sum_{i=1}^{n} f_i(X)\varphi_i(Y).$$

Коэффициенты $f_i(X)$ определяются из условия ортогональности невязки уравнения (167) к каждой из координатных функций $\varphi_i(Y)$.

В первом приближении положим

$$\theta(X,Y) = f(X)\left(2Y - Y^2\right). \qquad (168)$$

Координатная функция $\left(2Y - Y^2\right)$ удовлетворяет граничным условиям по Y (167) . Найдена методом неопределённых коэффициентов.

Подставим выражение (168) в уравнение (167) и потребуем выполнения условия ортогональности невязки к функции $\left(2Y - Y^2\right)$. В развёрнутой форме

$$\int_0^1 \left[-2f - V\left(2Y - Y^2\right)f'\right]\left(2Y - Y^2\right)dY = 0.$$

Получим дифференциальное уравнение первого порядка

$$J\frac{df}{dX} = -\frac{4}{3}f \ , \qquad (169)$$

где $J = \int_0^1 V(Y)\left(2Y - Y^2\right)^2 dY$ - постоянная.

Разделяя переменные в уравнении (169) и интегрируя, получим

$$f = f_o \exp\left(-\frac{4X}{3J}\right). \qquad (170)$$

Определим постоянную интегрирования f_o из начального условия задачи (167), записанного в интегральной форме

X=0, $\int_0^1 \theta dY = 1$, $f_0 = \frac{3}{2}$.

Таким образом, функция f(X) имеет вид

$$f = \frac{3}{2}\exp\left(-\frac{4X}{3J}\right). \qquad (171)$$

Подставим значение (171) в выражение (168) и получим формулу для определения безразмерной температуры в первом приближении

$$\theta(X,Y) = \frac{3}{2}\exp\left(-\frac{4X}{3J}\right)\left(2Y - Y^2\right). \qquad (172)$$

Изменение температуры поверхностного слоя жидкости (Y=1) описывается выражением

$$\theta(X,Y) = \frac{3}{2}\exp\left(-\frac{4X}{3J}\right).$$

Найдём изменение средней температуры жидкости по длине пластины. Средняя безразмерная температура в любом сечении определяется формулой

$$\theta_c = \int_0^1 \theta dY = \exp\left(-\frac{4X}{3J}\right). \qquad (172а)$$

5.1.3. Анализ решения.

Из решения (172) видно, что при прочих равных условиях темп изменения температуры жидкости зависит от численного значения интеграла J, который в свою очередь зависит от используемой реологической модели. Так, например, с увеличением J, что характерно для «выпуклого профиля скорости, интенсивность термического воздействия стенки на жидкость снижается и кривая изменения температуры жидкости с расстоянием становится более пологой. Следует отметить, что согласно выражению для безразмерной температуры в (166), полученное расчётное выражение (172) приемлемо как для нагрева жидкости от горячей стенки, так и для её охлаждения.

Решение (172) в начальный момент показывает завышенное значение температуры свободной поверхности жидкости. Однако на достаточном удалении от начального сечения, когда наступает так называемый «регулярный режим», распределение температуры в поперечном сечении достаточно близко к истинному значению [34].

Тепловой поток от стенки к жидкости (или наоборот) характеризует теплосъём жидкости (теплоотдачу). Для пластины единичной ширины (1 м) согласно закону Фурье, можем записать выражение для локального количества тепла, снимаемого с элемента поверхности

$$dQ = -\lambda \left.\frac{dT}{dy}\right|_{y=0} dx .$$

Запишем это выражение в безразмерной форме с учётом обозначений (166)

$$d\bar{Q} = -\left.\frac{d\theta}{dY}\right|_{Y=0} dX .$$

Здесь $\bar{Q} = \dfrac{Q}{\rho C\left(T_o - T_c\right) v_m \delta}$ - безразмерный тепловой поток.

Найдём полный тепловой поток по всей поверхности пластины

$$\bar{Q} = -\int_0^{X_1} \left.\frac{d\theta}{dY}\right|_{Y=0} dX .$$

С учётом выражения (172) в результате интегрирования получим

$$\bar{Q} = -\frac{9}{4}\left[1 - \exp\left(-\frac{4X_1}{3J}\right)\right]. \qquad (173)$$

Безразмерный поток отрицательный, поскольку начальная безразмерная температура была принята больше температуры пластины. Поэтому тепловой поток направлен от жидкости к пластине, т.е. в противоположную сторону от направления оси y.

Выполним численный анализ выражения для конкретной жидкости, реологические свойства которой описаны в разделе 5.

Рассмотрим модель Оствальда – де Виля. Согласно формулам (162) для

безразмерной скорости имеем выражение

$$V = 1 - \left(1 - Y\right)^{\frac{1}{n}+1}.$$

Интеграл J запишем для этой модели с индексом «os» имеет вид

$$J_{os} = \int_0^1 \left[1 - \left(1 - Y\right)^{\frac{1}{n}+1}\right]\left(2Y - Y^2\right)^2 dY. \qquad (174)$$

Согласно (162) максимальная скорость на поверхности жидкости

$$v_m = \delta \frac{n}{n+1}\left(\frac{G}{\mu}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Кроме того, из результатов раздела 5 можно записать выражение для толщины плёнки жидкости

$$\delta = \frac{G}{\rho g \sin\varphi}.$$

Напомним, для гравитационного параметра выполняется равенство $G=\tau_w$. Поэтому во всех расчётных выражениях правомерно вместо G использовать касательное напряжение на стенке τ_w.

С учётом указанных соотношений выражение координаты конца хоны течения (166) примет вид (записана как функция гравитационного параметра)

$$X_{1os} = \frac{\left(n+1\right)\ell a_t \left(\rho g \sin\varphi\right)^3}{nG^3}\left(\frac{\mu}{G}\right)^{\frac{1}{n}}. \qquad (175)$$

Аналогично, используя формулы (164) можем записать для модели Эллиса. Выражение для безразмерной скорости

$$V = \frac{\frac{aG}{2}Y\left(2 - Y\right) + \frac{bG^{\alpha}}{\alpha+1}\left[1 - \left(1 - Y\right)^{\alpha+1}\right]}{\frac{aG}{2} + \frac{bG^{\alpha}}{\alpha+1}}.$$

Интеграл J снабдим для этой модели индексом «E». Он имеет вид

$$J_E = \int_0^1 \left[\frac{\frac{aG}{2} Y\left(2-Y\right) + \frac{bG^{\alpha}}{\alpha+1}\left[1-\left(1-Y\right)^{\alpha+1}\right]}{\frac{aG}{2} + \frac{bG^{\alpha}}{\alpha+1}} \right] \left(2Y - Y^2\right)^2 dY \ . \quad (176)$$

Сопоставляя это выражение с выражением (174) видно, что в случае степенной реологической модели интеграл зависит только от реологического параметра – индекса течения, но не зависит от условий течения, в частности от касательного напряжения на стенке ($G=\tau_w$). Это существенный недостаток степенной модели.

Расчётное выражение для продольной координаты конца зоны течения имеет вид

$$X_{1E} = \frac{\ell a_t \left(\rho g \sin\varphi\right)^3}{G^3 \left(\frac{aG}{2} + \frac{bG^{\alpha}}{\alpha+1}\right)} . \quad (177)$$

Примем следующие оценочные значения физических свойств жидкости: ρ=1000 кг/м^3, ℓ=1 м, g=9,81 м/с^2, a_t= 1,4x10^{-7} м^2/с, $\varphi=\pi/2$. Аппроксимация реологических свойств моделью Оствальда – де Виля: n=0,294, μ=25,82 Па.с ^{n}, моделью Эллиса: a=0,118 с$^{-1}$Па$^{-1}$; b=2,27x10^{-4} с$^{-1}$Па$^{-\alpha}$; α=2,892.

Исследуем влияние реологической модели на изменение средней температуры слоя жидкости по длине зоны течения. Используем расчётную формулу (172а), записанную, соответственно, для модели Оствальда – де Виля и Эллиса

$$\theta_{\cos} = \exp\left(-\frac{4X}{3J_{os}}\right), \qquad \theta_{cE} = \exp\left(-\frac{4X}{3J_E}\right). \quad (178)$$

Для вычисления интегралов использовались формулы (174), (176). Расчёты выполнены для двух значений гравитационного параметра. Но поскольку интеграл J_{os} не зависит от гравитационного параметра (полностью определяется численным значением индекса течения), то оба случая для жидкости Оствальда – де Виля ложатся на одну кривую.

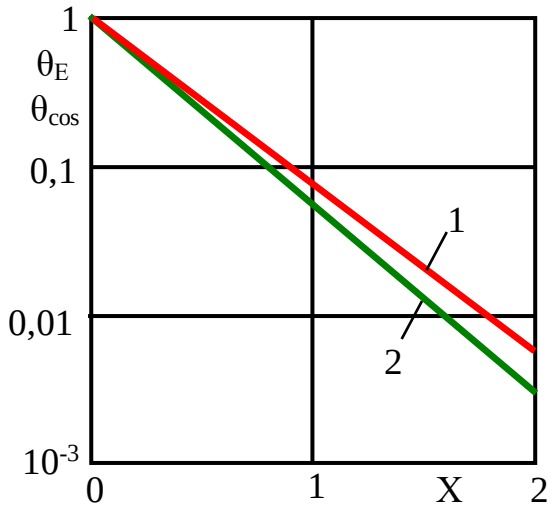


Рис.37. Распределение средней безразмерной температуры по длине зоны течения при G=0,5: 1 – модель Оствальда – де Виля, 2 – модель Эллиса.

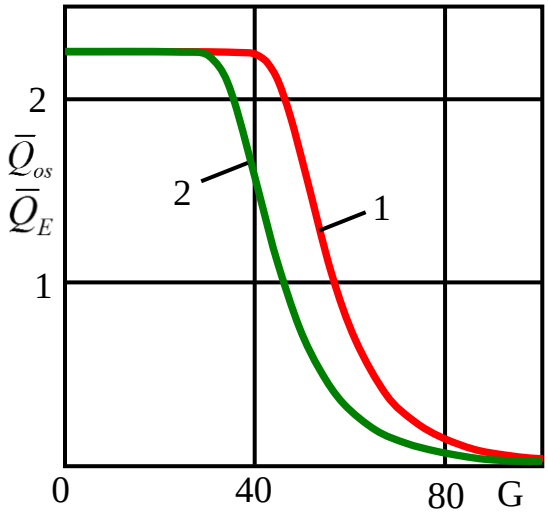


Рис.38. Зависимости теплового потока от гравитационного параметра: 1 – модель Оствальда – де Виля, 2 – модель Эллиса.

Результаты расчёта по формулам (178) представлены на рис.37. Численные значения интегралов следующие: J_{os}=0,512; J_E(0,5)=0,457; J_E(200)=0,505. Значение G=200 Па отвечает участку кривой течения с минимальной вязкостью, поэтому кривая средней температуры, отвечающая модели Эллиса будет приближаться к кривой для модели Оствальда – де Виля. Линия, отвечающая G=200 Па, не показана, поскольку практически сливается с линией для степенной жидкости. Видно, что модель Оствальда – де Виля показывает заниженный темп прогрева по сравнению с моделью Эллиса, которую мы приняли за «эталон».

Также изучим влияние вида реологической модели на безразмерный поток тепла от жидкости к пластине. Последнее определяется соотношением температур жидкости и пластины. Для каждой из моделей расчётное выражение (173) принимает вид

$$\bar{Q}_{os} = -\frac{9}{4}\left[1-\exp\left(-\frac{4X_{1os}}{3J_{os}}\right)\right], \qquad \bar{Q}_E = -\frac{9}{4}\left[1-\exp\left(-\frac{4X_{1E}}{3J_E}\right)\right]. \quad (179)$$

Исследуются зависимости $\bar{Q}_{os}(G)$, $\bar{Q}_E(G)$. Следует учитывать, что величина X_1 зависит от гравитационного параметра и вида реологической модели. Расчётные выражения (175), (177) после подстановки принятых численных значений параметров примут вид

$$X_{1os} = \frac{8{,}3844*10^9(n+1)}{nG^{3+\frac{1}{n}}}, \qquad X_{1E} = \frac{1{,}321*10^5}{G^3\left(\frac{aG}{2}+\frac{bG^{\alpha}}{\alpha+1}\right)}. \qquad (180)$$

Расчётные кривые, выполненные по формулам (179), (180) представлены на рис.38. На вертикальной оси отложены абсолютные значения безразмерных тепловых потоков $\bar{Q}_{os}$ и $\bar{Q}_E$. При малых значениях параметра G, что отвечает малым скоростям течения и большому времени пребывания на поверхности пластины, плёнка успевает полностью принять температуру стенки. При этом обе реологические модели предсказывают значение безразмерного теплового потока равным 2,25. По достижению некоторого порогового значения параметра G происходит резкое снижение интенсивности термического взаимодействия пластины с жидкостью. Для модели Эллиса пороговое значение находится в районе G=30 Па, а для модели Оствальда – де Виля G=40 Па. Далее следует участок экспоненциального спада интенсивности теплообмена. Причём модель Оствальда – де Виля относительно модели Эллиса показывает завышенные значения безразмерного теплового потока; расхождение достигает 100 % (в два раза).

5.2. Теплообмен стекающей плёнки неньютоновской жидкости. Уточнённое решение задачи. Выводы

Покажем теперь, что при другом выборе вида решения как функции «y», можно существенно повысить точность решения задачи. Используется метод лауреата Нобелевской премии по экономике Канторовича – метод приведения к обыкновенным дифференциальным уравнениям [40].

Будем разыскивать решение задачи (167) в виде

$$\theta = \sum_{s=0}^{\infty} f_s\left(X\right)\sin\left(kY\right).$$

Функция $\cos\left(kY\right)$ отпадает в силу граничного условия Y=0, θ=0. Используя граничное условие для свободной поверхности жидкости Y=1, $\partial\theta/\partial Y = 0$, получим уравнение для параметра k

$$k\cos\left(k\right) = 0.$$

Отсюда следует

$$k \neq 0, \qquad k = \frac{\pi}{2}; \quad \pi + \frac{\pi}{2}; \quad 2\pi + \frac{\pi}{2}; \ldots \quad \pi s + \frac{\pi}{2}.$$

Следовательно, решение ищем в форме

$$\theta = \sum_{s=0}^{\infty} f_s\left(X\right)\sin\left[\left(\pi s + \frac{\pi}{2}\right)Y\right]. \qquad (181)$$

Потребуем выполнения условия ортогональности невязки уравнения Фурье-Кирхгофа (167) к каждой координатной функции на интервале от 0 до 1

$$\int_0^1 L\left(\theta\right)\sin\left[\left(\pi s + \frac{\pi}{2}\right)Y\right]dY = 0 \qquad (s=0,1,2,\ldots).$$

В развёрнутой форме получаем бесконечную систему дифференциальных уравнений

$$\int_0^1 \left\{\begin{array}{l} -\sum_{k=0}^{\infty}\left(\pi k + \frac{\pi}{2}\right)^2 f_k \sin\left[\left(\pi k + \frac{\pi}{2}\right)Y\right] - \\ -V\left(Y\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{df_k}{dX}\sin\left[\left(\pi k + \frac{\pi}{2}\right)Y\right] \end{array}\right\}\sin\left[\left(\pi s + \frac{\pi}{2}\right)Y\right]dY = 0$$

(s=0,1,2,…).

Или после интегрирования по Y, принимая во внимание взаимную ортогональность функций $\sin\left[\left(\pi s + \frac{\pi}{2}\right)Y\right]$ (остаются только диагональные

элементы матрицы k=s), получаем систему в таком виде

$$\frac{df_s}{dX} = -\frac{J_{1s}}{J_{2s}} f_s \qquad (s=0,1,2,\ldots), \qquad (182)$$

где $J_{1s} = \left(\pi s + \frac{\pi}{2}\right)^2 \int_0^1 \sin^2\left[\left(\pi s + \frac{\pi}{2}\right)Y\right] dY = \frac{1}{2}\left(\pi s + \frac{\pi}{2}\right)^2$,

$$J_{2s} = \int_0^1 V(Y) \sin^2\left[\left(\pi s + \frac{\pi}{2}\right)Y\right] dY = 0.$$

Решая уравнение (182) при условии X=0, $f_s=f_{s0}$, находим

$$f_s = f_{s0} \exp\left(-\frac{J_{1s}}{J_{2s}} X\right).$$

Фурье коэффициенты начального профиля температуры (X=0, θ=1) находятся из уравнения

$$f_{s0} \int_0^1 \sin^2\left[\left(\pi s + \frac{\pi}{2}\right)Y\right] dY = \int_0^1 \sin\left[\left(\pi s + \frac{\pi}{2}\right)Y\right] dY \qquad (s=0,1,2,\ldots),$$

$$f_{s0} = \frac{2}{\pi s + \frac{\pi}{2}}.$$

Следовательно, выражение (181) имеет вид

$$\theta = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{2}{\pi s + \frac{\pi}{2}} \exp\left(-\frac{J_{1s}}{J_{2s}} X\right) \sin\left[\left(\pi s + \frac{\pi}{2}\right)Y\right]. \qquad (183)$$

Средняя по толщине плёнки жидкости температура описывается формулой

$$\theta_c = \int_0^1 \theta dY = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{2}{\left(\pi s + \frac{\pi}{2}\right)^2} \exp\left(-\frac{J_{1s}}{J_{2s}} X\right). \qquad (184)$$

Формулы (172а) и (184) описывают среднюю температуру при

различных способах решения одной и той же задачи. Имеет смысл их сопоставить.

Пусть рассматривается течение «эталонной жидкости Эллиса. Тогда для первого решения задачи имеем расчётные формулы:

$$\theta_{cE} = \exp\left(-\frac{4X}{3J_E}\right), \qquad J_E = \int_0^1 \left[\frac{\frac{aG}{2}Y(2-Y) + \frac{bG^{\alpha}}{\alpha+1}\left[1-(1-Y)^{\alpha+1}\right]}{\frac{aG}{2} + \frac{bG^{\alpha}}{\alpha+1}}\right]\left(2Y - Y^2\right)^2 dY .$$

Для точного решения расчётные формулы имеют вид:

$$\theta_{cEt} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{2}{\left(\pi s + \frac{\pi}{2}\right)^2} \exp\left(-\frac{J_{1s}}{J_{2s}} X\right), \qquad J_{1s} = \frac{1}{2}\left(\pi s + \frac{\pi}{2}\right)^2,$$

$$J_{2s} = \int_0^1 V_E(Y) \sin^2\left[\left(\pi s + \frac{\pi}{2}\right) Y\right] dY = 0, \quad V_E = \frac{\frac{aG}{2}Y(2-Y) + \frac{bG^{\alpha}}{\alpha+1}\left[1-(1-Y)^{\alpha+1}\right]}{\frac{aG}{2} + \frac{bG^{\alpha}}{\alpha+1}} .$$

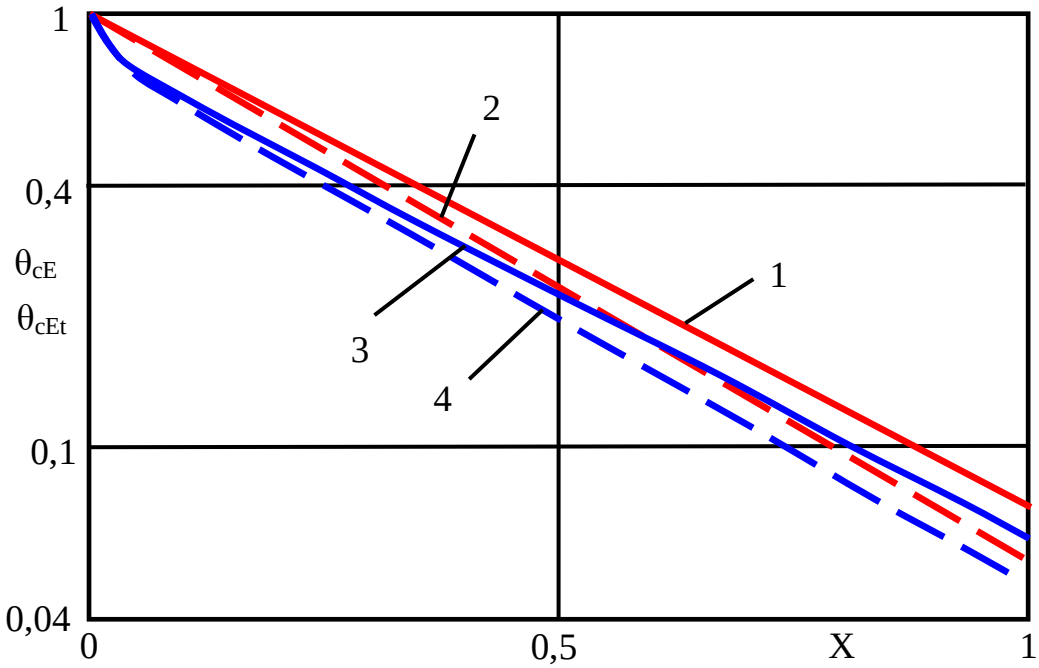


Рис.39. Распределение средней температуры по длине зоны течения, модель Эллиса: 1, 2 – приближённое решение, 3, 4 – точное. Значение G для линий: 1, 3 - G=200 Па; 2, 4 – G=0,5 Па.

Результаты расчёта распределения средней температуры по длине зоны течения для модели Эллиса представлены на рис.39. Видно, что в выбранной системе координат (полулогарифмические) линии, отвечающие приближённому решению (экспоненциальная функция), представляются прямыми. Точное решение (линии 3, 4) для модели Эллиса показывает вначале нелинейное изменение температур, далее наступает регулярный режим. Регулярный режим теплообмена наступает при X>0,1.

В регулярном режиме, согласно теории Кондратьева, процесс характеризуется темпом. В данном случае величина темпа связана со значением первого корня характеристического уравнения. Этот корень аппроксимирует множитель при X. При больших значениях X в ряде Фурье достаточно учитывать только первый член ряда. В точном решении темп характеризует множитель J_{10}/J_{20}. Соответственно, в приближённом, темп характеризует выражение $4/(3J_E)$. При значении гравитационного параметра G=0,5 указанные выражения имели близкие численные значения: $J_{10}/J_{20} = 2{,}838$ и $4/(3J_E)$=2,917. Так же они имели близкие значения при G=200 Па: $J_{10}/J_{20} = 2{,}598$ и $4/(3J_E)$=2,643. Систематическое расхождение (линии почти параллельны, но смещены по вертикали) обусловлено численным значением предэкспоненциального множителя.

На рис.40 показаны профили поперечного распределения температур для модели Эллиса на различном расстоянии от начала зоны течения при G=200 Па. При построении линий 2 и 4 учитывались первые 50 членов ряда Фурье. Видно, что на малом удалении от начального сечения приближённое решение (линия 1) предсказывает существенное искажение профиля. А точное решение (линия 2) чётко показывает глубину проникновения тепла (рост пограничного теплового слоя). На достаточном удалении от начального сечения наступает регулярный режим теплообмена и профили температур достаточно близки.

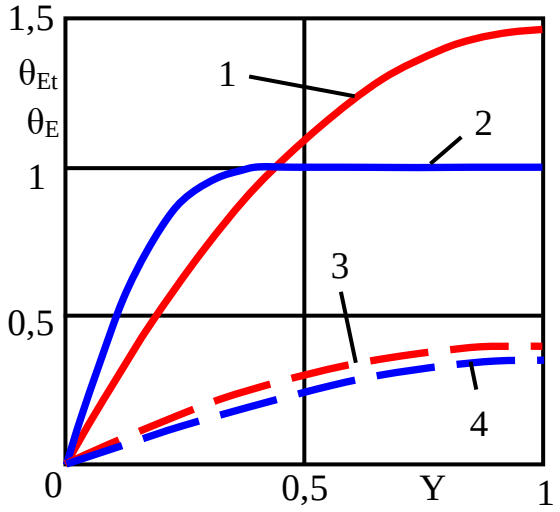


Рис.40. Поперечное распределение температур для модели Эллиса. Приближённое решение 1, 3. Точное решение 2, 4. Профили при значениях X: 1, 2 – X=0,01; 3, 4 – X=0,5.

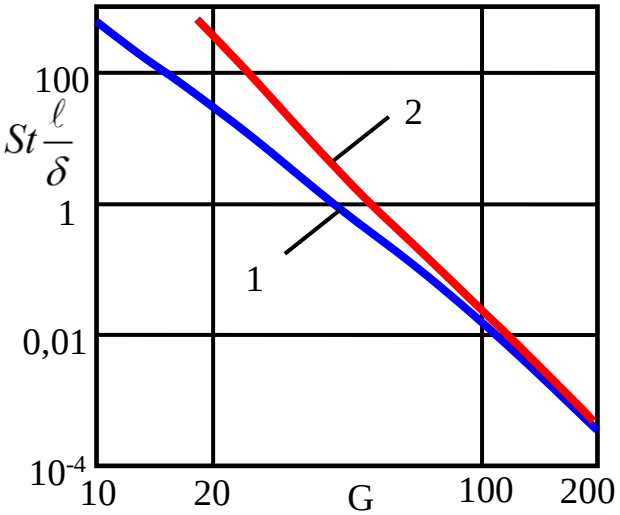


Рис.41. Зависимость числа Стантона от гравитационного параметра для модели Эллиса (линия 1) и модели Оствальда – де Виля (2).

Если непрерывно отбирать жидкость с поверхности плёнки жидкости, скорость на поверхности максимальна, но жидкость недостаточно изменила свою температуру по сравнению с начальной. С другой стороны, если отводить жидкость из области близкой к поверхности пластины, то расход будет минимальным, а температура близкой к температуре пластины. Если же весь поток жидкости отводить в адиабатическую ёмкость с последующим её перемешиванием, то температура жидкости будет отвечать среднемассовой.

Среднемассовую температуру для пластины единичной ширины можно найти по формуле

$$T_{cm} = \frac{1}{\delta v_c} \int_0^{\delta} T v_x dy .$$

В частности, в начальном сечении x=0 температура однородна по высоте плёнки и $T_{cm}(x=0) = T_0$.

Для участка течения можно составить уравнение теплового баланса. Примем условно $T_o > T_c$ (охлаждение жидкости), тогда

$$T_o v_c \rho C \delta = T_{cm}(x) v_c \rho C \delta - \lambda \int_0^x \left. \frac{dT}{dy} \right|_{y=0} dx . \qquad (185)$$

С другой стороны, учитывая формулу теплоотдачи Ньютона, можем записать

$$\alpha_x \left[T_{cm}(x) - T_c \right] = -\lambda \left. \frac{dT}{dy} \right|_{y=0} , \qquad (186)$$

где α_x - локальный коэффициент теплоотдачи. Следует отметить, что при дифференцировании в (186) температуры, представленной рядом Фурье, сходимость ряда ухудшается и даже может получиться расходящийся ряд. Поэтому вместо традиционного числа Нуссельта, получим выражение для числа Стантона.

Продифференцируем уравнение (185) по x

$$-\lambda \left. \frac{dT}{dy} \right|_{y=0} = -v_c \rho C \delta \frac{dT_{cm}(x)}{dx} .$$

Подставим это соотношение в уравнение (186)

$$\alpha_x \left[T_{cm}(x) - T_c \right] = -v_c \rho C \delta \frac{dT_{cm}(x)}{dx} .$$

Следовательно, для локального коэффициента теплоотдачи имеем выражение

$$\alpha_x = -\frac{v_c \rho C \delta \frac{dT_{cm}(x)}{dx}}{T_{cm}(x) - T_c} .$$

Среднее значение коэффициента теплоотдачи для всей пластины α, длиной ℓ, определяется интегралом

$$\alpha = -\frac{v_c \rho C \delta}{\ell} \int_0^{\ell} \left[\frac{\frac{dT_{cm}(x)}{dx}}{T_{cm}(x) - T_c} \right] dx .$$

Последовательно получаем

$$\alpha = -\frac{v_c \rho C \delta}{\ell} \int_{T_{cm0}}^{T_{cm\ell}} \frac{dT_{cm}}{T_{cm}(x) - T_c} = -\frac{v_c \rho C \delta}{\ell} \ln\left(\frac{T_{cm\ell} - T_c}{T_{cm0} - T_c} \right).$$

Здесь $T_{cm\ell} = \frac{1}{\delta v_c} \int_0^{\delta} T\big|_{x=0} v_x dy$, $T_{cm0} = T_0$.

Расчётная формула для числа Стантона

$$\frac{\alpha}{v_c \rho C} \frac{\ell}{\delta} = St \frac{\ell}{\delta} = -\ln\left(\frac{T_{cm\ell} - T_c}{T_{cm0} - T_c} \right), \qquad (187)$$

где $St = \frac{\alpha}{v_c \rho C}$ - число Стантона.

Учитывая соотношения (166), запишем $T_{cm\ell}$ в безразмерной форме

$$T_{cm\ell} = \int_0^1 \left[\theta\big|_{X=X_1} (T_0 - T_c) + T_c \right] V_c dY ,$$

где $V_c(Y) = \frac{v_x}{v_c}$ - безразмерная скорость. Масштаб скорости v_c – принципиальное отличие от формы, принятой в (166). Учитывая равенство $\int_0^1 V_c dY = 1$, можем записать

$$T_{cm\ell} = T_c + (T_0 - T_c) \int_0^1 \theta\big|_{X=X_1} V_c dY .$$

Подставим это выражение в формулу (187)

$$St \frac{\ell}{\delta} = -\ln\left(\int_0^1 \theta\big|_{X=X_1} V_c dY \right). \qquad (188)$$

Здесь

$$\theta\big|_{X=X_1} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{2}{\pi s + \frac{\pi}{2}} \exp\left(-\frac{J_{1s}}{J_{2s}} X_1 \right) \sin\left[\left(\pi s + \frac{\pi}{2} \right) Y \right].$$

Расчётные формулы для модели Эллиса:

$$J_{1s}=\frac{1}{2}\left(\pi s+\frac{\pi}{2}\right)^2,\qquad J_{2s}=\int_0^1 V_c\left(Y\right)\sin^2\left[\left(\pi s+\frac{\pi}{2}\right)Y\right]dY=0,\qquad (189)$$

$$V_c=\frac{\frac{aG}{2}Y\left(2-Y\right)+\frac{bG^{\alpha}}{\alpha+1}\left[1-\left(1-Y\right)^{\alpha+1}\right]}{\frac{aG}{3}+\frac{bG^{\alpha}}{\alpha+2}},\quad X_{1E}=\frac{1{,}321*10^5}{G^3\left(\frac{aG}{2}+\frac{bG^{\alpha}}{\alpha+1}\right)}.$$

Расчётные формулы для модели Оствальда – де Виля:

$$J_{1s}=\frac{1}{2}\left(\pi s+\frac{\pi}{2}\right)^2,\qquad J_{2s}=\int_0^1 V_{cos}\left(Y\right)\sin^2\left[\left(\pi s+\frac{\pi}{2}\right)Y\right]dY=0,\qquad (190)$$

$$V_{cos}=\frac{2n+1}{n+1}\left[1-\left(1-Y\right)^{\frac{1}{n}+1}\right],\qquad X_{1os}=\frac{1{,}321*10^5\left(n+1\right)}{G^3 n}\left(\frac{G}{\mu}\right)^{-\frac{1}{n}}.$$

При записи X_1 в (189), (190) использовались формулы (175), (177). Используемые численные значения расчётных параметров течения указаны выше, после формулы (177).

Результаты численного анализа математической модели (188) - (190) представлены на рис.41. График построен в двойных логарифмических координатах. По вертикальной оси отложено произведение числа Стантона на геометрический симплекс. Учитывались первые 20 членов ряда Фурье. К сожалению, ввиду наличия экспоненциальных и логарифмических функций, расчётные значения получены только для значений гравитационного параметра больше 10 Па. При меньших значениях G расчётная схема теряла устойчивость ввиду переполнения. Видно, что зависимости носят монотонный характер. Причём число Стантона изменяется в широких пределах, захватывающих 7 десятичных порядков. При значительных значениях гравитационного параметра G расчётные кривые сближаются. На интервале G<100 модель Оствальда – де Виля показывает завышенные значения числа Стантона.

Согласно графику, представленному на рис.38, для модели Эллиса при значениях G<30 Па имеет место полный прогрев жидкости ввиду низкой

скорости течения и большому времени пребывания. При этом число Стантона теряет смысл, поскольку в выражении (187) величина, стоящая под логарифмом, бесконечно близка к единице. Именно этим обстоятельством с физической точки объясняется потеря устойчивости математической модели при получении результатов для графика рис.41.

Выводы.

1. Реологическая модель степенной жидкости даёт ошибочный прогноз течения плёнки неньютоновской жидкости, стекающей по наклонной поверхности.
2. Погрешность модели возрастает с увеличение отклонения индекса течения от единицы.
3. Погрешность возрастает с уменьшением расхода жидкости или толщины плёнки.
4. При термическом взаимодействии жидкости с пластиной модель Оствальда – де Виля даёт заниженные значения интенсивности теплообмена.

ГЛАВА 6

ЗАДАЧА ГРЕТЦА-НУССЕЛЬТА

Хорошо известная задача Гретца—Нуссельта о теплоотдаче при течении несжимаемой жидкости с постоянными физическими свойствами в круглой трубе, с постоянной по длине температурой стенки и полностью развитым ламинарным профилем скорости решалась численно несколькими авторами [37].

Задачи о теплопереносе в условиях вынужденной конвекции допускают аналитическое решение лишь в некоторых наиболее простых

случаях. К их числу относится классическое решение Гретца— Нуссельта, описывающее распределение температуры в ламинарном потоке, текущем по трубе, в условиях, когда в некотором поперечном сечении температура стенки скачкообразно изменяется от одного фиксированного значения к другому, т. е. когда профиль температур на стенке трубы является ступенчатой функцией. Задача Гретца — Нуссельта подробно обсуждается в ряде учебников и обзорных статей.

Следует отметить, что сравнительно недавно аналогичная задача была решена для случая течения неньютоновских жидкостей [5, 41]. Ги и Лион [5] записали уравнения для течения жидкости Эллиса. Учитывалась также аррениусова зависимость вязкости от температуры. Нелинейную систему дифференциальных уравнений решали численно.

Несомненный интерес представляет также обсуждение задачи о конвективном теплопереносе в трубе при тепловыделении за счет вязкого трения внутри самой жидкости (диссипативный саморазогрев) [41]. Эту задачу в литературе иногда называют задачей Бринкмана. Из последних работ, посвящённых этой задаче, следует указать [38, 39].

Наиболее подробный анализ подходов различных авторов представлен в монографии Фройштетера Г.Б. [41]. Нельзя не отметить буквально «обожествление» или, по крайней мере, поклонение, граничащее с мистическим, степенному закону. И математически он удобен - всего два реологических параметра. Он и нагляден, и легко экспериментально определять реологические параметры. И даже при приближении индекса течения к единице «плавно» переходит в классический закон Ньютона. Относительно «плавности» перехода следует заметить следующее чисто математическое обстоятельство. Допустим необходимо проинтегрировать функцию x^{-n}. Если $n \neq 1$, интеграл представляет степенную функцию. Если же $n=1$, то интеграл уже является логарифмической функцией, которая по математическим свойствам принципиально отличается от степенной!

Впрочем, Фпойштетер Г.Б. отмечает, что предпринимались

многочисленные попытки устранить недостатки степенного закона – модели Эллиса, Сиско и др., однако эти модели, как и полуэмпирические модели Эйринга, Прандтля-Эйринга, Пауэлла-Эйринга и т.п., не получили сколько-нибудь заметного распространения. В монографии [41] основное внимание уделяется течению и теплообмену степенной жидкости и вязкопластической Шведова-Бингама. Последняя модель достаточно сложна (скорее громоздка) в анализе, но не имеет недостатков степенной модели.

Хотя классическая задача посвящена течению в круглой трубе, но и течение в плоской щели представляет не меньший прикладной интерес. Далее отдельно рассмотрим течение в плоском канале и течение в круглой трубе. Дело в том, что, несмотря на идентичность метода решения, расчётные результаты в различных геометриях канала существенно различаются.

Гидродинамика течения в плоском и круглом каналах рассмотрена выше в разделах 1.1, 1.4, 1.5. В разделах 1.4 и 1.5.7 рассмотрены близкие по смыслу задачи «о диссипативном саморазогреве жидкости на большом удалении от входа в канал». Будем по мере необходимости использовать полученные выше результаты.

В данном разделе изучается правомерность применения модели Оствальда – де Виля для описания теплообмена в задаче Гретца—Нуссельта. Выяснить погрешность соответствующей математической модели. Как и ранее, оценка точности выполнена путём сопоставления расчётных результатов с результатами, полученными для «эталонной» среды – модели Эллиса.

Даже для вязкой жидкости решение задачи Штурма-Лиувилля не представляется в элементарных функциях. Собственные функции записываются в виде степенного ряда, что порождает громоздкость и малопригодно для анализа. Поэтому для получения приближённого решения, вполне пригодного для инженерных оценок, в том числе и сопоставления применимости реологических моделей, используем метод Канторовича [35].

6.1. Течение в плоском канале

6.1.1. Постановка задачи

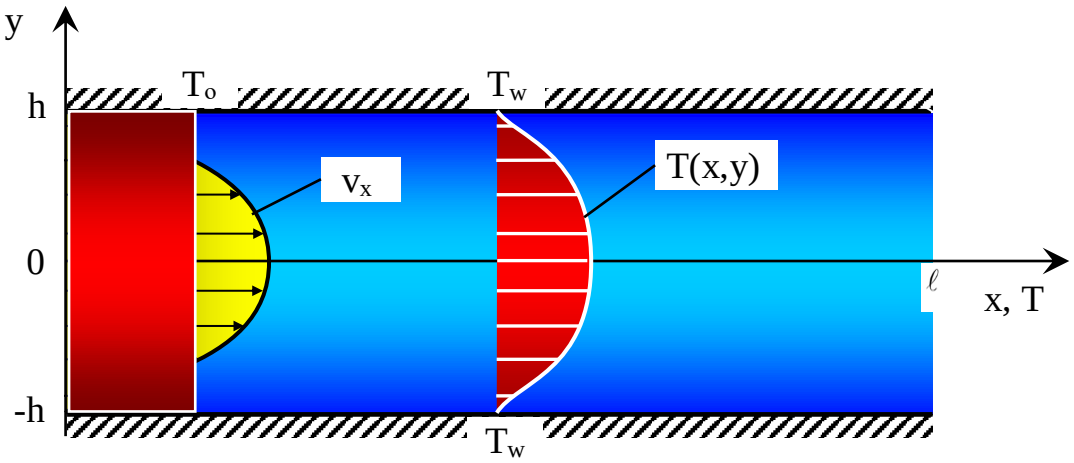


Рис.42. Расчётная схема течения и теплообмена

Схема течения и теплообмена представлена на рис.42. Высота плоского канала постоянна 2h=const. Длина рассматриваемого участка ℓ. Течение совершается вдоль оси x. Начальная температура жидкости (на входе) однородна по сечению ($T=T_o$). Реологические и теплофизические свойства жидкости постоянны. Температура стенок канала постоянна $T = T_w$, причём выполняется соотношение $T_w \neq T_o$. Для стенок канала используется граничное условие первого рода. Задача симметрична относительно оси x. Тепловой поток в поперечном направлении, перпендикулярном к плоскости рисунка отсутствует.

Поскольку справедливо соотношение $\partial^2/\partial y^2 >> \partial^2/\partial x^2$ продольной теплопроводностью жидкости пренебрегаем, учитываем только теплопроводность в поперечном направлении. Пренебрегаем тепловым потоком вдоль течения за счёт теплопроводности жидкости по сравнению с конвективным тепловым потоком. Процесс теплообмена принимается

стационарным $\left(\partial T/\partial t=0\right)$.

Температурное поле в жидкости описывается уравнением Фурье-Кирхгофа и граничными условиями

$$v_x\left(y\right)\frac{\partial T}{\partial x}=a_t\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{1}{\rho C}\tau\gamma\,; \qquad (191)$$

$$x=0,\ T=T_o; \qquad y=0,\ T=T_w; \qquad y=\pm h,\ \partial T/\partial y=0\,.$$

Здесь T=T(x,y) – температура жидкости, $a_t=\lambda/\rho C$ – коэффициент температуропроводности жидкости, $v_x(y)$ – профиль осевой скорости (зависит от выбранной реологической модели течения), τ – касательное напряжение, γ = dv_x/dy – скорость сдвига. Последнее слагаемое уравнения энергии, характеризующее тепловыделение в потоке за счёт внутреннего терния, всегда положительно.

Имеем линейное неоднородное уравнение параболического типа с переменным коэффициентом. Классические методы решения краевой задачи, например, метод разделения переменных Фурье, неприемлемы. Поскольку решение соответствующей задачи Штурма-Лиувилля не выражается через элементарные функции. Поэтому для получения приближённого решения используем метод Канторовича (метод приведения к обыкновенным дифференциальным уравнениям) [35, 40].

6.1.2. Решение задачи

Запишем задачу (165) в безразмерной форме, для чего введём следующие переменные:

$$\theta=\frac{T-T_w}{T_o-T_w},\quad Y=\frac{y}{h},\quad \left\{X,X_1\right\}=\frac{\left\{x,\ell\right\}a_t}{v_c h^2},\quad V\left(Y\right)=\frac{v_x}{v_c}, \qquad (192)$$

$$Br=\frac{h^2\tau_w\gamma_w}{\lambda\left(T_o-T_w\right)},\quad \Xi\left(Y\right)=\frac{\tau}{\tau_w},\quad \Gamma\left(Y\right)=\frac{\gamma}{\gamma_w}$$

где v_c - средняя скорость жидкости, V(Y) - безразмерная осевая скорость

жидкости, Br - число Бринкмана, τ_w - касательное напряжение на стенке, γ_w - скорость сдвига у стенки, λ – коэффициент теплопроводности жидкости. Безразмерная продольная координата X может быть представлена в виде $\{X,X_1\}=\{x,\ell\}/(hPe)$, $Pe=v_c h/a_t$ - число Пекле. В качестве масштаба скорости принята среднеобъёмная скорость $v_c=Q/(2Bh)$, Q – объёмный расход, B – ширина щели.

С учётом обозначений (192), задача (191) примет вид

$$V(Y)\frac{\partial\theta}{\partial X}=\frac{\partial^2\theta}{\partial Y^2}+Br\Xi(Y)\Gamma(Y); \qquad (193)$$

$$X=0,\quad \theta=1; \qquad Y=\pm1,\quad \theta=0; \qquad Y=0,\quad \partial\theta/\partial Y=0.$$

Граничные условия симметричны, следовательно, и температурное поле в жидкости должно быть симметричным относительно оси X. Функция температуры должна быть чётной $\theta(-Y)=\theta(Y)$. Будем разыскивать решение задачи (193) в виде произведения двух функций

$$\theta=\sum_{s=1,3,5.}^{\infty} f_s(X)\cos(0,5\pi sY). \qquad (194)$$

Принятая координатная функция косинус удовлетворяет граничным условиям и обладает свойством ортогональности.

Потребуем выполнения условия ортогональности невязки уравнения Фурье-Кирхгофа (193) к каждой координатной функции на интервале от 0 до 1

$$\int_0^1 L(\theta)\cos(0,5\pi sY)\,dY=0 \qquad (s=1,3,5,\ldots).$$

В развёрнутой форме получаем бесконечную систему дифференциальных уравнений

$$\int_0^1\left\{\begin{array}{l}\sum\limits_{k=1,3,5}^{\infty}\left(\frac{\pi k}{2}\right)^2 f_k\cos(0,5\pi kY)+\\ +V\sum\limits_{k=1,3,5}^{\infty}\frac{df_k}{dX}\cos(0,5\pi kY)-Br\Gamma\Xi\end{array}\right\}\cos(0,5\pi sY)\,dY=0 \qquad (s=1,3,5,\ldots).$$

Или после интегрирования по Y, принимая во внимание взаимную ортогональность функций $\cos\left(\frac{\pi s}{2}Y\right)$ на интервале интегрирования от 0 до 1 (ненулевыми являются только диагональные элементы матрицы, у которых k=s), получаем систему в таком виде

$$J_{1s}\frac{df_s}{dX}+J_{2s}f-BrJ_{3s}=0 \qquad (s=1,3,5,\ldots), \qquad (195)$$

где $J_{1s}=\int_0^1 V(Y)\cos^2\left(\frac{\pi s}{2}Y\right)dY$, $J_{2s}=\left(\frac{\pi s}{2}\right)^2\int_0^1 \cos^2\left(\frac{\pi s}{2}Y\right)dY=\frac{(\pi s)^2}{8}$,

$J_{3s}=\int_0^1 \Gamma(Y)\Xi(Y)\cos\left(\frac{\pi s}{2}Y\right)dY$.

Согласно (195) для функции $f_s(X)$ имеем линейное неоднородное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными. Решение уравнения (195) имеет вид

$$f_s=-\frac{C_s}{J_{2s}}\exp\left(-\frac{J_{2s}}{J_{1s}}X\right)+Br\frac{J_{3s}}{J_{2s}}.$$

Постоянную интегрирования C_s находим из начального условия (X=0, θ=1)

$$\sum_{s=1,3,5..}^{\infty}\left[-\frac{C_s}{J_{2s}}\exp\left(-\frac{J_{2s}}{J_{1s}}X\right)+Br\frac{J_{3s}}{J_{2s}}\right]\cos\left(\frac{\pi s}{2}Y\right)=1.$$

Положив здесь X=0, а далее умножив обе части этого равенства на координатную функцию и проинтегрировав, можем записать

$$\left(-\frac{C_s}{J_{2s}}+Br\frac{J_{3s}}{J_{2s}}\right)\int_0^1\cos^2\left(\frac{\pi s}{2}Y\right)dY=\int_0^1\cos\left(\frac{\pi s}{2}Y\right)dY \qquad (s=1,3,5,\ldots).$$

В результате интегрирования имеем

$$-\frac{C_s}{J_{2s}}=\frac{4}{\pi s}(-1)^{\frac{s+3}{2}}-Br\frac{J_{3s}}{J_{2s}}.$$

Следовательно, выражение (194) имеет вид

$$\theta = \sum_{s=1,3,5..}^{\infty} \left\{ \left[\frac{4}{\pi s}(-1)^{\frac{s+3}{2}} - Br\frac{J_{3s}}{J_{2s}} \right] \exp\left(-\frac{J_{2s}}{J_{1s}} X \right) + Br\frac{J_{3s}}{J_{2s}} \right\} \cos\left(\frac{\pi s}{2} Y \right). \quad (196)$$

6.1.3. Анализ математической модели

Согласно полученному выражению для температуры, если Br=0 то имеем обычный процесс охлаждения жидкости без внутренних источников.

На бесконечном удалении от начала течения ($X \to \infty$) профиль температуры описывается зависимостью

$$\lim_{X\to\infty} \theta = Br \sum_{s=1,3,5..}^{\infty} \frac{J_{3s}}{J_{2s}} \cos\left(\frac{\pi s}{2} Y \right).$$

В ньютоновском случае (степенная модель, n=1)

$$J_{2s} = \frac{(\pi s)^2}{8}, \qquad J_{3s} = \int_0^1 Y^2 \cos\left(\frac{\pi s}{2} Y \right) dY.$$

При этом ряд имеет вид

$$\lim_{X\to\infty} \theta = 16Br \sum_{s=1,3,5..}^{\infty} (-1)^{\frac{s+3}{2}} \frac{\left[\pi^2 s^2 - 8 \right]}{\pi^5 s^5} \cos\left(\frac{\pi s}{2} Y \right).$$

Далее используем известные равенства [46]

$$\sum_{s=1,3,5..}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{s+3}{2}}}{\pi^3 s^3} \cos\left(\frac{\pi s}{2} Y \right) = \frac{1}{\pi^3} \left\{ \frac{\pi}{32} \left[\pi^2 - 4\left(\frac{\pi Y}{2} \right)^2 \right] \right\},$$

$$\sum_{s=1,3,5..}^{\infty} \frac{8(-1)^{\frac{s+3}{2}}}{\pi^5 s^5} \cos\left(\frac{\pi s}{2} Y \right) = \frac{(-1)^2 \pi^5}{4\times(4)!} E_4\left(\frac{Y+1}{2} \right),$$

$$E_4\left(\frac{Y+1}{2} \right) = \left(\frac{Y+1}{2} \right)^4 - 2\left(\frac{Y+1}{2} \right)^3 + \left(\frac{Y+1}{2} \right).$$

После несложных преобразований, получаем

$$\lim_{X\to\infty}\theta=\frac{Br\left(1-Y^4\right)}{12}.$$

Действительно, в ньютоновском случае распределение температуры в поперечном сечении описывается уравнением параболы четвёртой степени ($1-Y^4$), что находится в полном качественном соответствии с результатами, полученными в главе 1.4 формула (32).

Среднеобъёмная температура жидкости в произвольном поперечном сечении определяется интегралом

$$T_m=\frac{1}{hv_c}\int_0^h Tv_x dy.$$

«Объёмную» температуру T_m можно измерить, если обрезать канал, по которому течёт теплоноситель, в сечении x, собрать жидкость вытекающую из трубы, в контейнер и тщательно её перемешать. По этой причине среднюю температуру T_m иногда называют «температурой идеального смешения» или «температурой, осреднённой по потоку».

На выходе из канала ($x=\ell$) среднемассовая температура будет равна

$$T_k=T_m\big|_{x=\ell}=\frac{1}{hv_c}\int_0^h T\big|_{x=\ell}v_x dy. \qquad (197)$$

Условно примем случай охлаждения жидкости ($T_o>T_w$), хотя все расчётные зависимости сохраняются и при нагреве жидкости. Согласно схеме, рис.43 средняя арифметическая разность температур (движущая сила процесса теплоотдачи) может быть найдена по формуле

$$\Delta T_c=\frac{T_o-T_w}{2}-T_w. \qquad (198)$$

Условие неразрывности теплового потока для среднего коэффициента теплоотдачи запишется

$$\alpha_c\Delta T_c=-\lambda\frac{\partial T}{\partial y}\bigg|_{y=h}, \qquad (199)$$

где α_c - средний коэффициент теплоотдачи, λ – коэффициент теплопроводности жидкости.

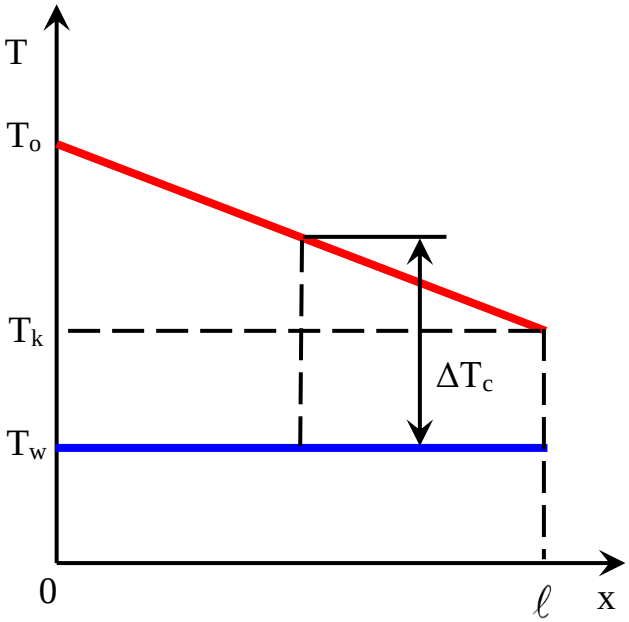


Рис.43. Определение средней разности температур

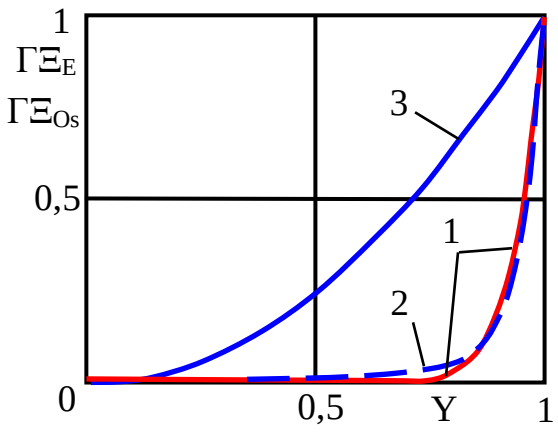


Рис.44. Распределение диссипативной функции в поперечном сечении канала: 1- модель Оствальда – де Виля; 2, 3 – модель Эллиса: 2 – τ_w=0,203 МПа; 3 - τ_w=0,123 МПа.

Переходя к безразмерным переменным (192), выражение (197) примет вид

$$T_k = \left(T_o - T_w\right)\int_0^1 V\theta_{X=X_1}\,dY + T_w\,.$$

При этом выражение для средней разности температур (198) примет вид

$$\Delta T_c = \frac{T_o - T_w}{2}\left(1 + \int_0^1 V\theta_{X=X_1}\,dY\right).$$

Подставив это выражение в формулу теплового потока (199), получим расчётную формулу для среднего числа Нуссельта

$$Nu_c = -2\left.\frac{\partial\theta}{\partial Y}\right|_{Y=1}\left(1 + \int_0^1 V\theta_{X=X_1}\,dY\right)^{-1}, \qquad (200)$$

где $Nu_c = \alpha_c h/\lambda$ - среднее число Нуссельта.

К сожалению, выражение для числа Нуссельта (200) содержит операцию дифференцирования функции температуры. Известно, что при

дифференцировании тригонометрического ряда его сходимость ухудшается, и даже возможен вариант расходящегося ряда. Поэтому используем другой подход в определении среднего коэффициента теплопередачи.

Запишем уравнение теплового баланса для верхней половины канала

$$Q = 2Bhv_c\rho C\left(T_o - T_k\right) = \alpha_c B\ell\Delta T_c\,, \qquad (201)$$

где B – ширина канала, Q – поток тепла от верхней стенки канала к жидкости.

Учитывая полученные выше выражения для T_k и ΔT_c, уравнение (201) примет вид

$$2hv_c\rho C\left(1-\int_0^1 V\theta_{X=X_1}dY\right) = \frac{1}{2}\alpha_c\ell\left(1+\int_0^1 V\theta_{X=X_1}dY\right),$$

откуда

$$St\frac{\ell}{h} = \frac{\alpha_c\ell}{hv_c\rho C} = \frac{4\left(1-\int_0^1 V\theta_{X=X_1}dY\right)}{\left(1+\int_0^1 V\theta_{X=X_1}dY\right)}\,. \qquad (202)$$

Здесь $St=\alpha_c(v_c\rho C)$ - среднее значение числа Стантона для канала протяжённостью X_1.

При большой протяжённости зоны течения $X_1\to\infty$ (последующие расчёты показали, что стабилизация наступает уже при $X_1>2$) имеет место предельное соотношение

$$\lim_{X_1\to\infty}\left(\int_0^1 V\theta_{X=X_1}dY\right) = Br\sum_{s=1,3,5..}^{\infty}\frac{J_{3s}}{J_{2s}}\int_0^1 V\cos\left(\frac{\pi s}{2}Y\right)dY\,.$$

Следовательно, предельное свойство числа Стантона

$$\lim_{X_1\to\infty} St\frac{\ell}{h} = \frac{4\left(1-Br\sum_{s=1,3,5..}^{\infty}\frac{J_{3s}}{J_{2s}}\int_0^1 V\cos\left(\frac{\pi s}{2}Y\right)dY\right)}{\left(1+Br\sum_{s=1,3,5..}^{\infty}\frac{J_{3s}}{J_{2s}}\int_0^1 V\cos\left(\frac{\pi s}{2}Y\right)dY\right)}\,.$$

В случае отсутствия внутренних источников тепла Br=0, $\lim\limits_{X_1 \to 0} St \frac{\ell}{h} = 4$.

Следует иметь в виду, что числа Стантона и Нуссельта связаны следующим соотношением $Nu = St \times Pe$, $Pe = v_c \ell / a_t$ - число Пекле.

Рассмотрим интеграл в выражении (202)

$$\int_0^1 V\theta_{X=X_1} dY = \int_0^1 V \sum_{s=1,3,5.}^{\infty} \left\{ \begin{array}{l} \left[\frac{4}{\pi s}(-1)^{\frac{s+3}{2}} - Br \frac{J_{3s}}{J_{2s}} \right] \times \\ \times \exp\left(-\frac{J_{2s}}{J_{1s}} X_1 \right) + Br \frac{J_{3s}}{J_{2s}} \end{array} \right\} \cos\left(\frac{\pi s}{2} Y \right) dY .$$

Выполнив почленное интегрирование ряда, получим более удобную для численных расчётов форму этого интеграла

$$\int_0^1 V\theta_{X=X_1} dY = \sum_{s=1,3,5.}^{\infty} \left\{ \begin{array}{l} \left[\frac{4}{\pi s}(-1)^{\frac{s+3}{2}} - Br \frac{J_{3s}}{J_{2s}} \right] \times \\ \times \exp\left(-\frac{J_{2s}}{J_{1s}} X_1 \right) + Br \frac{J_{3s}}{J_{2s}} \end{array} \right\} \int_0^1 V(Y) \cos\left(\frac{\pi s}{2} Y \right) dY . \quad (203)$$

На рис.44 представлено распределение диссипативной функции по сечению канала для обеих реологических моделей. Распределение объёмных источников тепла в случае модели Оствальда – де Виля не зависит от касательного напряжения на стенке и характеризуется одной 1 кривой. Видно, что наиболее интенсивное тепловыделение имеет место в непосредственной близости от стенки. В случае модели Эллиса распределение источников тепла существенно зависит от касательного напряжения на стенке. Если касательное напряжение на стенке отвечает высокоскоростному участку кривой течения (τ_w=0,203 МПа), то кривая располагается близко к кривой Оствальда – де Виля. Если касательное напряжение отвечает наибольшей ньютоновской вязкости (τ_w=0,123 МПа), то кривая имеет вид - линия 3. При этом источники тепла не локализованы у стенки. Кривой 3 также отвечает случай ньютоновской

жидкости (n=1 или b=0). Кроме того, площадь под кривой больше чем в случае степенной жидкости, следовательно, имеет место более интенсивный разогрев.

Для практических расчётов воспользуемся данными реологических исследований резины, полученными выше. В результате обработки кривой течения (раздел 1.2) получены следующие значения реологических констант для модели Эллиса: α=17,893, a=350,217 МПа$^{-1}$с$^{-1}$, b=2,373x10^{15} МПа$^{-\alpha}$с$^{-1}$. Соответственно, при аппроксимации кривой течения моделью Оствальда - де Виля: n=0,071, μ_o=0,124 МПа*с^{0,071}. Минимальная скорость сдвига γ= 43,2 с$^{-1}$ максимальная скорость сдвига γ=1035 с$^{-1}$. Соответствующие касательные напряжения 0,123 МПа и 0,203 МПа. Температура смеси при реологическом испытании 120 ^{o}С. Рассматриваемый материал - ярко выраженный псевдопластик.

Необходимо сделать замечания относительно размерности физических величин. Кривая течения для высоковязкой резины строилась в координатах $\gamma - \tau$, причём величина касательного напряжения выражалась в МПа. Полученные реологические константы также отвечают касательному напряжению, выраженному в МПа. Возникает вопрос: как сохранить эту размерность в рассматриваемой задаче? Если все слагаемые уравнения энергии в (191) разделить на постоянную величину 10^6, то уравнение сохранится в силе. Это даёт возможность касательное напряжение в диссипативном слагаемом выражать в МПа. Однако при этом коэффициент теплопроводности λ (множитель перед первым слагаемым правой части) должен быть выражен в МВт/(мК). Например, если коэффициент теплопроводности жидкости λ = 0,4 Вт/(мК) = 0,4x10^{-6} МВт/(мК). Объёмная теплоёмкость ρС (множитель левой части уравнения) должна быть выражена в МДж/(м^{3}К). Это необходимо учитывать при расчёте, например, безразмерных комплексов Бринкмана, Стантона. При этом коэффициент температуропроводности сохраняет размерность, соответствующую системе СИ (a_t= λ/ρС [м^2/с]).

Используем основные кинематические закономерности течения жидкостей рассматриваемых моделей, полученные в разделе 1.1. Профиль скорости и другие параметры при течении жидкости Эллиса (5), (6):

$$V_E\left(Y\right)=\frac{\frac{a\tau_w}{2}\left(1-Y^2\right)+\frac{b\tau_w^{\alpha}}{1+\alpha}\left(1-Y^{1+\alpha}\right)}{\frac{a\tau_w}{3}+\frac{b\tau_w^{\alpha}}{2+\alpha}}\ ,\ \Gamma=\frac{a\tau_w Y+b\left(\tau_w Y\right)^{\alpha}}{a\tau_w+b\tau_w{}^{\alpha}},\quad \Xi=\frac{\tau}{\tau_w}=Y\ ,$$

$$\Gamma\Xi_E=Y\frac{a\tau_w Y+b\left(\tau_w Y\right)^{\alpha}}{a\tau_w+b\tau_w{}^{\alpha}}\ ,\ Br_E=\frac{h^2\tau_w\left(a\tau_w+b\tau_w{}^{\alpha}\right)}{\lambda\left(T_0-T_w\right)}\ ,\ v_{cE}=h\left(\frac{a\tau_w}{3}+\frac{b\tau_w^{\alpha}}{2+\alpha}\right).$$

Параметр течения $\tau_w=h\Delta p/\ell$ (касательное напряжение на стенке) на кривой течения варьировался в следующих пределах 0,123 МПа < τ_w <0,203 МПа. Последним дано выражение для средней скорости.

Профиль скорости и другие кинематические параметры при течении жидкости Оствальда – де Виля (1), (3), (4):

$$V_{Os}\left(Y\right)=\frac{1+2n}{1+n}\left(1-Y^{1+\frac{1}{n}}\right),\qquad \Gamma_{Os}=\left(\frac{\tau}{\tau_w}\right)^{\frac{1}{n}}=\left(Y\right)^{\frac{1}{n}},\quad \Xi_{Os}=\frac{\tau}{\tau_w}=Y\ ,$$

$$\Gamma\Xi_{Os}=\left(Y\right)^{1+\frac{1}{n}},\qquad Br_{Os}=\frac{h^2\tau_w\left(\tau_w/\mu_0\right)^{\frac{1}{n}}}{\lambda\left(T_0-T_w\right)}\ ,\ v_{cOs}=\frac{Q}{2Bh}=\frac{1+2n}{1+n}\left(\frac{\tau_w}{\mu_0}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Необходимо отметить, как профиль скорости, так и диссипативная функция ($\Gamma\Xi_{Os}$) в случае степенной модели не зависят от касательного напряжения на стенке, которое в свою очередь связано с гидравлическим сопротивлением канала ($\tau_w=h\Delta p/\ell$) и расходом жидкости. В определённом смысле для степенной жидкости эти параметры «застывшие». Последним дано выражение для средней скорости.

Во всех вышеприведённых формулах операция суммирования предполагается по нечётным индексам (s=1, 3, 5,…). Запишем эти формулы в традиционной форме, с обычным суммированием (s=1, 2, 3,…). Поле температур

при течении жидкости Оствальда – де Виля (нижний индекс Os) описывается формулами (196):

$$\theta_{Os}=\sum_{s=1}^{\infty}\left\{\left[\frac{4}{\pi(2s-1)}(-1)^{s+1}-Br\frac{J_{3s}}{J_{2s}}\right]\exp\left(-\frac{J_{2s}}{J_{1s}}X\right)+Br\frac{J_{3s}}{J_{2s}}\right\}\cos\left(\frac{\pi(2s-1)}{2}Y\right),$$

$$J_{1s}=\int_0^1 V_{Os}(Y)\cos^2\left[\frac{\pi(2s-1)}{2}Y\right]dY, \qquad J_{2s}=\frac{\left[\pi(2s-1)\right]^2}{8},$$

$$J_{3s}=\int_0^1 \Gamma\Xi_{Os}\cos\left[\frac{\pi(2s-1)}{2}Y\right]dY, \qquad V_{Os}(Y)=\frac{1+2n}{1+n}\left(1-Y^{1+\frac{1}{n}}\right),$$

$$\Gamma\Xi_{Os}=(Y)^{1+\frac{1}{n}}, \qquad Br_{Os}=\frac{h^2\tau_w(\tau_w/\mu_0)^{\frac{1}{n}}}{\lambda(T_0-T_w)}. \qquad (204)$$

Соответственно, температурное поле при течении жидкости Эллиса (нижний индекс E) описывается формулами:

$$\theta_{E}=\sum_{s=1}^{\infty}\left\{\left[\frac{4}{\pi(2s-1)}(-1)^{s+1}-Br\frac{J_{3s}}{J_{2s}}\right]\exp\left(-\frac{J_{2s}}{J_{1s}}X\right)+Br\frac{J_{3s}}{J_{2s}}\right\}\cos\left(\frac{\pi(2s-1)}{2}Y\right),$$

$$J_{1s}=\int_0^1 V_{E}(Y)\cos^2\left[\frac{\pi(2s-1)}{2}Y\right]dY, \qquad J_{3s}=\int_0^1 \Gamma\Xi_{E}\cos\left[\frac{\pi(2s-1)}{2}Y\right]dY,$$

$$J_{2s}=\frac{\left[\pi(2s-1)\right]^2}{8}, \qquad V_E(Y)=\frac{\frac{a\tau_w}{2}\left(1-Y^2\right)+\frac{b\tau_w^{\alpha}}{1+\alpha}\left(1-Y^{1+\alpha}\right)}{\frac{a\tau_w}{3}+\frac{b\tau_w^{\alpha}}{2+\alpha}},$$

$$\Gamma\Xi_E=Y\frac{a\tau_wY+b\left(\tau_wY\right)^{\alpha}}{a\tau_w+b\tau_w{}^{\alpha}}, \qquad Br_E=\frac{h^2\tau_w\left(a\tau_w+b\tau_w{}^{\alpha}\right)}{\lambda(T_0-T_w)}. \qquad (205)$$

Результаты численного анализа математических моделей (204), (205) представлены на рис.45. Учитывались первые 20 членов рядов Фурье. Расчёты выполнены для $Br_E=Br_{Os}=5$, $\tau_w=0{,}123$ МПа. Профили построены для трёх сечений, отвечающих X=0,1; 0,5; 2. Последнее сечение X=2 близко к участку стабилизации температурного поля.

Из рисунка видно, что распределение температур носит параболический характер. Имеет место существенное расхождение полученных результатов рассматриваемых реологических моделей. Модель, построенная на реологическом уравнении Оствальда – де Виля, при прочих равных условиях, показывает заниженные значения температур. При меньших значениях касательного напряжения на стенке (модель Эллиса) положение линий практически не изменяется (на кривой течения – это низкоскоростной участок максимальной ньютоновской вязкости). Однако если касательное напряжение на стенке повысить до τ_w=0,203 МПа, то линии, отвечающие модели Эллиса практически сольются с линиями для модели Оствальда – де Виля. Действительно, касательное напряжение на стенке τ_w=0,203 МПа отвечает структурной (высокоскоростной) ветви кривой течения, при этом аппроксимации обоих моделей достаточно близки. Следует отметить, что касательное напряжение на стенке не входит в выражения (204), следовательно, на распределение температур при течении жидкости Оствальда – де Виля не влияет.

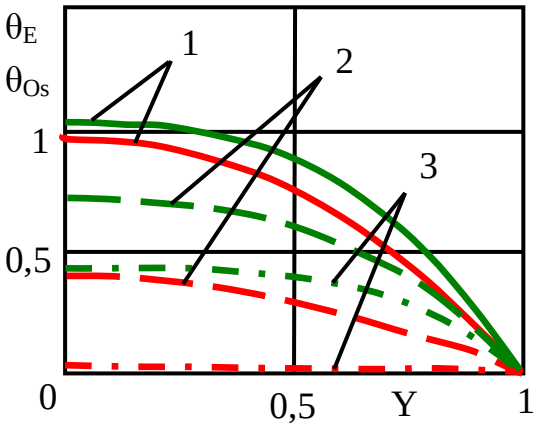


Рис.45. Распределение температур на различных расстояниях: 1 – X=0,1; 2 – 0,5; 3 – 2. В каждой паре верхние линии отвечают модели Эллиса, нижние – Оствальда – де Виля.

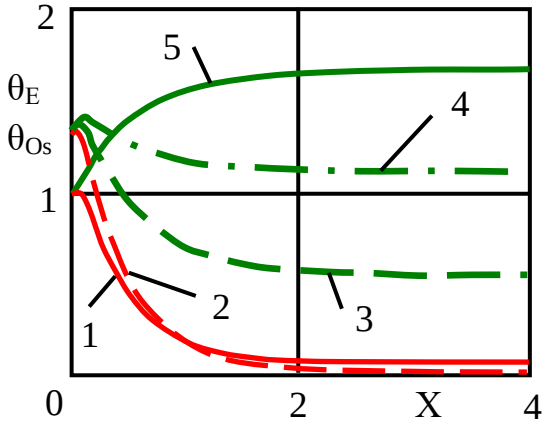


Рис.46. Распределение максимальной температуры по длине канала для степенной модели (линии 1, 2) и модели Эллиса (3-5) при различных значениях числа Бринкмана: 1, 3 – Br=5; 4 – 10; 2, 5 – 20.

Обнаружено, что увеличение числа Бринкмана, которое характеризует интенсивность объёмного выделения тепла, почти не влияет на эпюру температур жидкости Оствальда – де Виля (максимальная температура не превышает единицу). В тоже время модель теплообмена для жидкости Эллиса существенно зависит от числа Бринкмана и с его повышением максимальная температура на оси канала растёт, превышая начальное значение, равное единице.

На рис.46 представлено распределение максимальной температуры по длине зоны течения при различных значениях числа Бринкмана для τ_w=0,123 МПа. Под максимальной температурой понимается значение температуры на оси канала, т.е при Y=0 (рис.45). Число Бринкмана мало влияет на распределение максимальной температуры в случае модели Оствальда – де Виля: при малых числах Бринкмана кривая носит монотонно убывающий характер. При больших числах Бринкмана появляется начальный всплеск, при этом температура превышает единицу.

Модель Эллиса показывает всплеск температуры, начиная с Br=5. При Br>20 имеет место асимптотический рост температуры. Величина горизонтальной асимптоты зависит от числа Бринкмана. Стабилизация температурного поля наступает при X>2. Число Бринкмана может изменяться в широких пределах с высотой канала, поскольку $Br \approx h^2$. Данные, представленные на рис.46 красноречиво свидетельствуют, что в пределах данной постановки задачи, степенная модель не позволяет раскрыть фундаментальный физический эффект саморазогрева жидкости в отличие от модели Эллиса.

Следует отметить, что в высокоскоростной части кривой течения, когда обе реологические модели показывают близкий прогноз (τ_w=0,203 МПа), температура для модели Эллиса (θ_E) близка температуре (θ_{Os}) – подобна линии 2 на рис.46. Именно модель Эллиса иллюстрирует сильное влияние реологических свойств на характер термического взаимодействия жидкости и нагретой стенки.

К сожалению, в число Бринкмана входят реологические параметры, поэтому это число зависит от выбранной реологической модели. Поставим задачу: найти размер канала для реализации идентичного значения числа Бринкмана для обеих реологических моделей. Если τ_w находится в пределах аппроксимации, то выражения Br_E и Br_{Os} предсказывают близкие значения h_E и h_{Os}. Выполним расчёт для значения τ_w, отвечающем низкоскоростной области кривой течения, описывающей участок наибольшей ньютоновской вязкости. Пусть τ_w=0,05 МПа. Найдём размер канал, для которого Br_E = Br_{Os}=20, $\left(T_0 - T_w\right) = 100\ ^oK$. Жидкость Эллиса

$$h_E = \sqrt{\frac{Br_E \lambda \left(T_0 - T_w\right)}{\tau_w \left(a\tau_w + b\tau_w{}^{\alpha}\right)}} =$$

$$= \sqrt{\frac{20 \times 0,4 \times 10^{-6} \times 100}{0,05\left(350,217 \times 0,05 + 2,373 \times 10^{15} \times 0,05^{17,893}\right)}} = 0,030227\ м.$$

Жидкость Оствальда – де Виля

$$h_{Os} = \sqrt{\frac{Br_{Os} \lambda \left(T_0 - T_w\right)}{\tau_w \left(\tau_w / \mu_0\right)^{\frac{1}{n}}}} = \sqrt{\frac{20 \times 0,4 \times 10^{-6} \times 100}{0,05\left(0,05/0,124\right)^{1/0,071}}} = 75,838\ м.$$

Видно, что расчётные размеры канала существенно различаются. Причём, степенная модель предсказывает сильно преувеличенный размер канала.

Полагая ширину канала B=1 м, и используя расчётную формулу (6), найдём расход жидкости Эллиса

$$Q_E = 2Bh_E{}^2 \left(\frac{a\tau_w}{3} + \frac{b\tau_w^{\alpha}}{2+\alpha}\right) = 2 \times 1 \times 0,03^2 \left(\frac{350 \times 0,05}{3}\right) = 1,05 \times 10^{-2}\ м^3/с.$$

Расход жидкости Оствальда – де Виля найдём по формуле (4)

$$Q_{Os} = 2Bh_{Os}^2 \frac{n}{1+2n}\left(\frac{\tau_w}{\mu_0}\right)^{\frac{1}{n}} = 2 \times 1 \times 75,83^2 \left(\frac{0,05}{0,124}\right)^{\frac{1}{0,071}} = 1,989 \times 10^{-3}\ м^3/с.$$

Видно, что расходы различаются приблизительно в 5 раз.

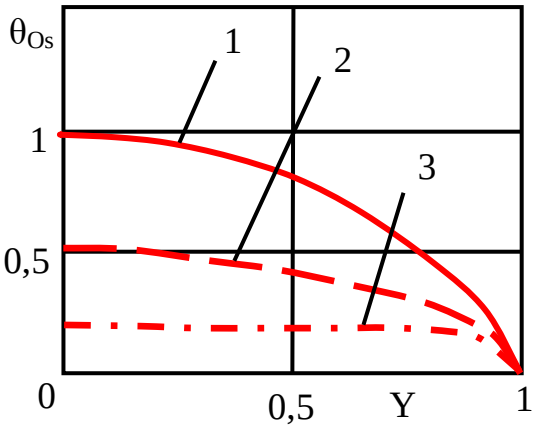


Рис.47. Эпюры температур на различных расстояниях для жидкости Оствальда – де Виля при Br=50: 1 – X=0,1; 2 – 0,5; 3 – 2.

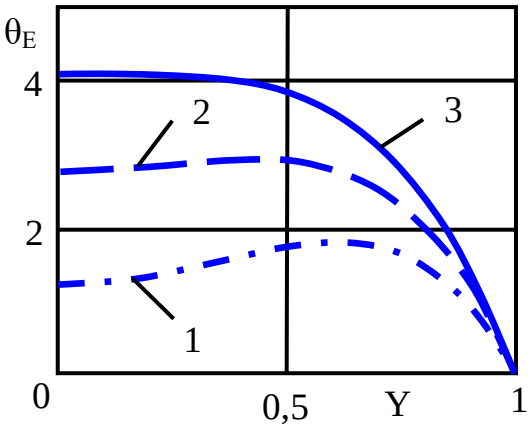


Рис.48. Эпюры температур на различных расстояниях для жидкости Эллиса при Br=50: 1 – X=0,1; 2 – 0,5; 3 – 2.

Графики, представленные на рис.47 и рис.48 иллюстрируют эволюцию поперечного распределения температур при высокой интенсивности тепловыделения (Br=50). Видно принципиальное отличие прогнозов этих реологических моделей. Модель, построенная на уравнении Оствальда – де Виля показывает параболический профиль и плавное понижение температуры. Экстремумов и точек перегиба эпюра не имеет, исключая экстремум на оси канала. Модель же, построенная на уравнении Эллиса (рис.48) показывает монотонный рост температуры, причём на начальном участке (X<2) в области интенсивного тепловыделения у стенки появляется локальный максимум температур.

Расчётные формулы числа Стантона в случае течения жидкости Оствальда – де Виля имеют вид (202), (203):

$$St_{Os}\frac{\ell}{h}=\frac{4\left(1-\int\limits_0^1 V_{Os}\theta_{Os(X=X_1)}dY\right)}{\left(1+\int\limits_0^1 V_{Os}\theta_{Os(X=X_1)}dY\right)}, \qquad (206)$$

$$\int\limits_0^1 V_{Os}\theta_{Os(X=X_1)}dY=\sum_{s=1}^{\infty}\left\{\left[\frac{4}{\pi(2s-1)}(-1)^{s+1}-Br\frac{J_{3s}}{J_{2s}}\right]\exp\left(-\frac{J_{2s}}{J_{1s}}X\right)+Br\frac{J_{3s}}{J_{2s}}\right\}\times$$

$$\times\int_0^1 V_{Os}(Y)\cos\left(\frac{\pi(2s-1)}{2}Y\right)dY,\quad J_{1s}=\frac{1+2n}{1+n}\int_0^1\left(1-Y^{1+\frac{1}{n}}\right)\cos^2\left[\frac{\pi(2s-1)}{2}Y\right]dY,$$

$$J_{2s}=\frac{\left[\pi(2s-1)\right]^2}{8},\quad J_{3s}=\int_0^1 (Y)^{1+\frac{1}{n}}\cos^2\left[\frac{\pi(2s-1)}{2}Y\right]dY,\quad Br_{Os}=\frac{h^2\tau_w\left(\tau_w/\mu_0\right)^{\frac{1}{n}}}{\lambda\left(T_0-T_w\right)}.$$

Согласно выражениям (206) произведение числа Стантона на геометрический симплекс зависит от протяжённости зоны течения (X_1), числа Бринкмана, но не зависит от касательного напряжения на стенке.

Соответственно, расчётные формулы числа Стантона при течении жидкости Эллиса имеют вид:

$$St_E\frac{\ell}{h}=\frac{4\left(1-\int_0^1 V_E\theta_{E(X=X_1)}dY\right)}{\left(1+\int_0^1 V_E\theta_{E(X=X_1)}dY\right)},\qquad(207)$$

$$\int_0^1 V_E\theta_{E(X=X_1)}dY=\sum_{s=1}^{\infty}\left\{\left[\frac{4}{\pi(2s-1)}(-1)^{s+1}-Br\frac{J_{3s}}{J_{2s}}\right]\exp\left(-\frac{J_{2s}}{J_{1s}}X\right)+Br\frac{J_{3s}}{J_{2s}}\right\}\times$$

$$\times\int_0^1 V_E(Y)\cos\left(\frac{\pi(2s-1)}{2}Y\right)dY,$$

$$J_{1s}=\int_0^1 V_E(Y)\cos^2\left[\frac{\pi(2s-1)}{2}Y\right]dY,\qquad J_{2s}=\frac{\left[\pi(2s-1)\right]^2}{8},$$

$$J_{3s}=\int_0^1\Gamma\Xi_E\cos\left[\frac{\pi(2s-1)}{2}Y\right]dY,\qquad V_E(Y)=\frac{\frac{a\tau_w}{2}\left(1-Y^2\right)+\frac{b\tau_w^{\alpha}}{1+\alpha}\left(1-Y^{1+\alpha}\right)}{\frac{a\tau_w}{3}+\frac{b\tau_w^{\alpha}}{2+\alpha}},$$

$$\Gamma\Xi_E=Y\frac{a\tau_wY+b\left(\tau_wY\right)^{\alpha}}{a\tau_w+b\tau_w{}^{\alpha}},\quad Br_E=\frac{h^2\tau_w\left(a\tau_w+b\tau_w{}^{\alpha}\right)}{\lambda\left(T_0-T_w\right)}.$$

Согласно выражениям (207) произведение числа Стантона на геометрический симплекс зависит от протяжённости зоны течения (X_1), числа

Бринкмана и от касательного напряжения на стенке.

Примем ориентировочно коэффициент теплопроводности резиновой смеси λ = 0,4 Вт/(мК) = 0,4x10^{-6} МВт/(мК). Пусть разность температур $\left(T_0 - T_w\right) = 100 \quad {}^{o}K$. Остальные теплофизические свойства: ρ=1475 кГ/м^3, a_t=2,205x10^{-7} м^2/с, ρС=1,814 МДж/(м^{3}К). Полувысота канала h=10^{-3} м. Число Бринкмана:

$$Br_E = \frac{h^2 \tau_w \gamma_w}{\lambda\left(T_0 - T_w\right)}.$$

Минимальная скорость сдвига γ_w= 43,2 с$^{-1}$ максимальная скорость сдвига γ=1035 с$^{-1}$. Соответствующие касательные напряжения τ_w=0,123 МПа и τ_w=0,203 МПа. В указанных условиях предельным точкам кривой течения исследуемой модельной среды отвечает диапазон изменений числа Бринкмана от Br=0,132 до Br=5,252. Число Бринкмана зависит от касательного напряжения на стенке и может изменяться в указанном диапазоне в соответствии с принятым реологическим законом.

Результаты численного анализа математических моделей (206), (207) представлены на рис.49 и рис.50. Представлены зависимости числа Стантона от протяжённости зоны течения для двух значений числа Бринкмана. При малых числах Бринкмана Br=5 (рис.49) зависимости носят монотонно возрастающий характер с асимптотой, зависящей от касательного напряжения на стенке (для модели Эллиса). Модель, построенная на уравнении Эллиса, с уменьшение касательного напряжения на стенке показывает замедленный темп роста числа Стантона. Линия 2 модели Эллиса, отвечающая высокоскоростному участку кривой течения (τ_w=0,203 МПа) близка к линии 1, соответствующей модели Оствальда – де Виля. Из представленного рисунка следует вывод, что большим недостатком степенной модели является её индифферентность относительно касательного напряжения на стенке. Стабилизация теплообмена (регулярная фаза теплообмена) наступает при X_1>2.

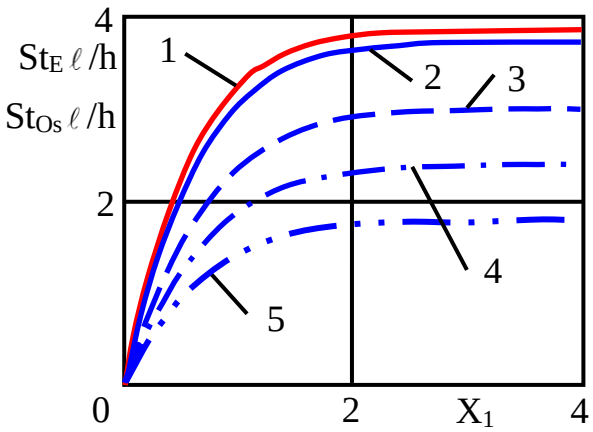


Рис.49. Зависимость числа Стантона от длины зоны течения при Br=5: 1 – для модели Оствальда – де Виля; 2-5 – для модели Эллиса: 2 – τ_w=0,203 МПа; 3 - τ_w=0,18 МПа; 4 - τ_w=0,1676 МПа; 5 - τ_w=0,123 МПа.

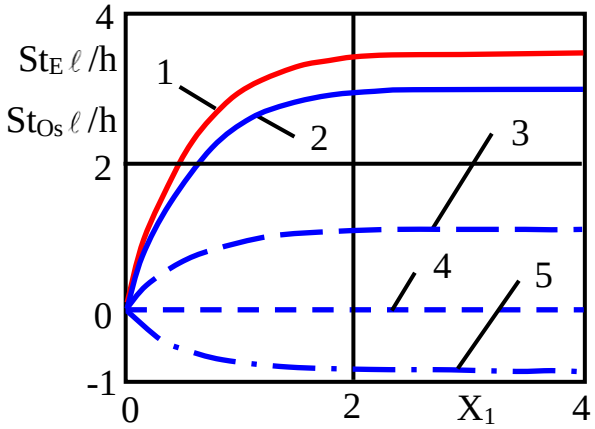


Рис.50. Зависимость числа Стантона от длины зоны течения при Br=20: 1 – для модели Оствальда – де Виля; 2-5 – для модели Эллиса: 2 – τ_w=0,203 МПа; 3 - τ_w=0,18 МПа; 4 - τ_w=0,1676 МПа; 5 - τ_w=0,123 МПа.

Рис.50 отвечает случаю существенного (Br=20) проявления диссипативных эффектов. При этом линия 1, отвечающая модели Оствальда – де Виля, сохраняет монотонно возрастающий характер с асимптотой меньше четырёх. В случае же модели теплообмена, построенной на уравнении Эллиса, характер изменения числа Стантона существенно зависит от касательного напряжения на стенке. Линия 2 отвечает высокоскоростному участку кривой течения, поэтому её расположение близко к линии 1. С понижением касательного напряжения на стенке рабочая точка на кривой течения смещается в низкоскоростную зону, эффективная вязкость жидкости возрастает и линия, характеризующая зависимость числа Стантона от длины зоны течения, смещаются вниз. В окрестности τ_w=0,1676 МПа число Стантона близко к нулю. При этом теплообмен между жидкостью и стенкой отсутствует (коэффициент теплообмена равен нулю). При меньших значениях касательного напряжения число Стантона отрицательно, имеет место инверсия теплового потока. При этом линия 5 близка к асимптотическому значению: дальнейшее уменьшение касательного напряжения существенно не

влияет на положение линии. Например, если начальная температура жидкости меньше температуры стенки, то в случае инверсии теплового потока жидкость будет отдавать энергию стенке. Это обусловлено высоким тепловыделением за счёт диссипации.

Полученные расчётные результаты опровергают представления Фройштетера и других исследователей. Так в своей монографии Фройштетер пишет [41]: «Если диссипация энергии не учитывается, то полученные результаты (по теплообмену) для различных реологических моделей мало отличаются друг от друга». О принципе «взаимозаменяемости» реологических моделей Фройштетер пишет: «В принципе это объяснение имеет под собой основание и по существу сводится к тому, что физические величины, такие, например, как интенсивность теплообмена, не могут зависеть от того, каким реологическим уравнением аппроксимируется кривая течения чисто вязких жидкостей, не проявляющих упругих свойств». Фройштетер не учёл особенность степенной модели показывать бесконечную вязкость при малых скоростях деформации. А это обстоятельство существенно изменяет поведение математической модели, построенной на степенном уравнении.

6.2. Течение в круглом канале.

В классической задаче Гретца-Нуссельта рассматривалось течение жидкости в круглой трубе. Проблема восходит к работам Гретца (1885 г.), Нуссельта (1910 г.), Л.С. Лейбензона (1924 г.), Левека (1928 г.) [36]. Хотя все качественные закономерности течения подробно рассмотрены в разделе 6.1, посвящённом течению в плоской щели, рассмотрим также течение неньютоновской жидкости в круглой трубе. Эффективность применяемого приближённого метода иллюстрируется решением задачи Гретца-Нуссельта для течения вязкопластической жидкости в разделе 6.2.5.

6.2.1. Постановка задачи.

Схема течения и теплообмена представлена на рис.51. Радиус канала R. Длина рассматриваемого участка ℓ. Течение совершается вдоль оси z. Начальная температура жидкости (на входе) однородна по сечению ($T=T_o$). Реологические и теплофизические свойства жидкости постоянны. Температура стенок канала постоянна $T=T_w$, причём выполняется соотношение $T_w \neq T_o$, T_o – начальная температура жидкости. Для стенок канала используется граничное условие первого рода. Задача осесимметричная.

Поскольку справедливо соотношение $\partial^2/\partial r^2 >> \partial^2/\partial z^2$ ($R << \ell$) продольной теплопроводностью жидкости пренебрегаем, учитываем только теплопроводность в поперечном направлении. Пренебрегаем тепловым потоком вдоль течения за счёт теплопроводности жидкости по сравнению с конвективным тепловым потоком. Процесс теплообмена принимается стационарным $\left(\partial T/\partial t = 0\right)$.

Температурное поле в жидкости описывается уравнением Фурье-Кирхгофа и граничными условиями

$$v_z\left(r\right)\frac{\partial T}{\partial z} = a_t\left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{1}{\rho C}\tau\gamma\,, \qquad (208)$$

$z=0, \quad T=T_o,$

$r=0, \quad T=T_w,$

$r=R, \quad T<\infty, \quad \dfrac{\partial T}{\partial r} = 0\,.$

Здесь $T=T(z,r)$ – температура жидкости; $a_t=\lambda/\rho C$, λ, ρ, C – коэффициент температуропроводности, коэффициент теплопроводности, плотность и теплоёмкость жидкости; $v_z(r)$ – профиль осевой скорости (зависит от выбранной реологической модели течения); τ – касательное напряжение; $\gamma = dv_z/dr$ – скорость сдвига. Последнее слагаемое справа уравнения энергии, характеризующее тепловыделение в потоке за счёт внутреннего терния (диссипативное), всегда положительно.

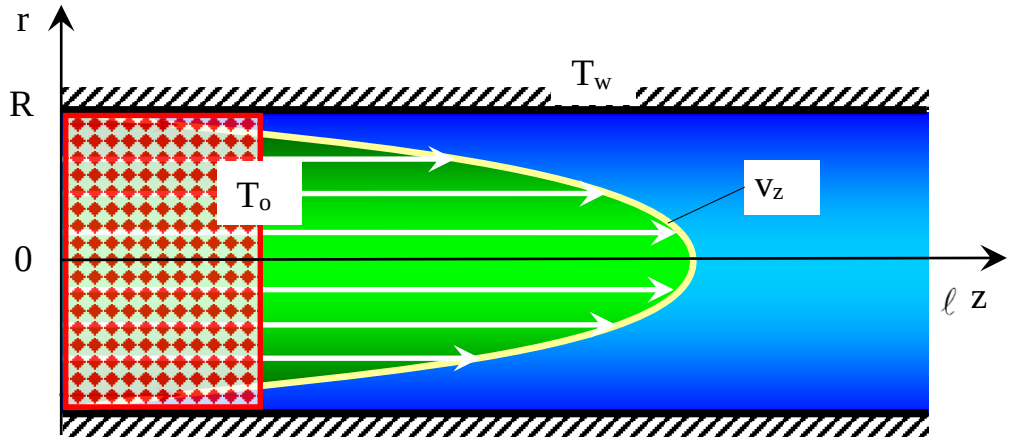


Рис.51. Расчётная схема течения и теплообмена.

Имеем уравнение параболического типа с источником. Классические методы решения краевой задачи, например, метод разделения переменных Фурье, неприемлемы. Поскольку решение соответствующей задачи Штурма-Лиувилля для произвольного профиля осевой скорости не выражается через элементарные функции. Для получения приближённого решения используем метод Канторовича (метод приведения к обыкновенным дифференциальным уравнениям) [35, 40]. Метод Канторовича в случае использования ряда по координатным функциям позволяет получить достаточно точное решение задачи, хотя и выраженное в других, априорно заданных, функциях.

6.2.2. Решение задачи

Запишем задачу (165) в безразмерной форме, для чего введём следующие переменные:

$$\theta = \frac{T - T_w}{T_o - T_w}, \quad \xi = \frac{r}{R}, \quad Z = \frac{z a_t}{v_c R^2}, \quad V(\xi) = \frac{v_z}{v_c}, \qquad (209)$$

$$Br = \frac{R^2 \tau_w \gamma_w}{\lambda (T_o - T_w)}, \quad \Xi(\xi) = \frac{\tau}{\tau_w}, \quad \Gamma(\xi) = \frac{\gamma}{\gamma_w}$$

где v_c - средняя скорость жидкости (масштаб скорости), $V(\xi)$ - безразмерная осевая скорость жидкости, Br - число Бринкмана, τ_w - касательное

напряжение на стенке (масштаб касательного напряжения), γ_w - скорость сдвига у стенки (масштаб скорости сдвига), λ – коэффициент теплопроводности жидкости. Безразмерная продольная координата Z может быть представлена в виде $Z = z/(RPe)$, $Pe = v_c R/a_t$ - число Пекле.

С учётом обозначений (209), задача (208) примет вид

$$V(\xi)\frac{\partial\theta}{\partial Z} = \frac{\partial^2\theta}{\partial\xi^2} + \frac{1}{\xi}\frac{\partial\theta}{\partial\xi} + Br\Xi(\xi)\Gamma(\xi); \qquad (210)$$

Z=0, θ=1; ξ=1, θ=0; ξ =0, $\partial\theta/\partial\xi = 0$, θ<<∞.

Ввиду осевой симметрии граничных условий температурное поле в жидкости должно быть также осесимметричным относительно оси Z. Температура описывается ограниченной и чётной функцией θ(-ξ)=θ(ξ). Собственные функции классической задачи Гретца-Нуссельта периодические убывающие функции [37] графически похожи на функцию Бесселя нулевого порядка. Кроме того, нестационарное поле температур неограниченного цилиндра описывается функциями Бесселя [35], [36], [49]. Именно эти обстоятельства обусловили выбор координатных функций приближённого решения.

Будем разыскивать решение задачи (210) в виде произведения двух функций

$$\theta = \sum_{s=1}^{\infty} f_s(Z) J_o(k_s\xi), \qquad (211)$$

где $J_o(k_s\xi)$ - функция Бесселя нулевого порядка. Собственные числа задачи определяются из граничного условия ξ=1, θ=0; которое приводит к уравнению $J_o(k_s)=0$. Здесь k_1, k_2,k_3,… - положительные корни функции $J_o(k_s)$. Принятые координатные функции удовлетворяют граничным условиям, обладают свойством ортогональности на интервале ξ [0,1] с весом ξ и очертаниями подобны собственным функциям задачи.

Потребуем выполнения условия ортогональности невязки уравнения

Фурье-Кирхгофа (193) к каждой координатной функции на интервале от 0 до 1

$$\int_0^1 L(\theta) J_o(k_s\xi)\xi d\xi = 0 \qquad \text{(s=1,2,…).}$$

Невязка уравнения энергии (210) имеет вид

$$L(\theta) = V\sum_{m=1}^{\infty}\frac{df_m}{dZ}J_o(k_m\xi) - \sum_{m=1}^{\infty} f_m\left[J_o(k_m\xi)\right]'' - \sum_{m=1}^{\infty}\frac{f_m}{\xi}\left[J_o(k_m\xi)\right]' - Br\Gamma\Xi .$$

В развёрнутой форме получаем бесконечную систему дифференциальных уравнений первого порядка

$$\int_0^1\left\{V\sum_{m=1}^{\infty}\frac{df_m}{dZ}J_o(k_m\xi) - \sum_{m=1}^{\infty} f_m\left[J_o(k_m\xi)\right]'' - \sum_{m=1}^{\infty}\frac{f_m}{\xi}\left[J_o(k_m\xi)\right]' - Br\Gamma\Xi\right\}\times$$

$$\times J_o(k_s\xi)\xi d\xi = 0 \qquad \text{(s=1,2,...).}$$

Или после интегрирования по ξ, принимая во внимание взаимную ортогональность функций $J_o(k_s\xi)$ на интервале интегрирования от 0 до 1 (ненулевыми являются только диагональные элементы матрицы, у которых m=s), получаем систему в таком виде

$$A_{1s}\frac{df_s}{dZ} + A_{2s}f - A_{3s}Br = 0 \qquad \text{(s=1,2,…),} \qquad (212)$$

где $A_{1s} = \int_0^1 V(\xi)J_o^2(k_s\xi)\xi d\xi$, $\quad A_{3s} = \int_0^1 \Gamma(\xi)\Xi(\xi)J_o(k_s\xi)\xi d\xi$,

$$A_{2s} = -\int_0^1\left\{\left[J_o(k_s\xi)\right]'' + \frac{1}{\xi}\left[J_o(k_s\xi)\right]'\right\}J_o(k_s\xi)\xi d\xi .$$

Постоянные A_{1s} и A_{3s} определяются параметрами течения, в частности, используемой реологической моделью. Следует отметить, что используемый метод решения задачи может быть распространён на течение вязкопластических жидкостей Шведова-Бингама, Гершеля-Балкли и др., для которых эпюра скорости складывается из зоны ядра и зона градиентного

течения. При этом интегралы A_{1s} и A_{3s} будут состоять из сумы двух интегралов: для зоны ядра (скорость постоянна, градиент скорости равен нулю) и зоны градиентного течения (скорость и градиент скорости ненулевые), т.е.

$$\int_0^1 ...\xi d\xi = \int_0^{\text{граница ядра}} ...\xi d\xi + \int_{\text{граница ядра}}^1 ...\xi d\xi \ .$$

В уравнении (212) интеграл J_{2s} имеет аналитическое представление

$$A_{2s} = 0,5k_s^{\,2}\left[J_o^{\,2}\left(k_s\right) + J_1^{\,2}\left(k_s\right)\right].$$

Учитывались следующие соотношения:

$$\frac{d^2}{d\xi^2}\left[J_o\left(k_s\xi\right)\right] = -k_s^{\,2}\left[J_o\left(k_s\xi\right) - \frac{J_1\left(k_s\xi\right)}{\xi k_s}\right], \quad \frac{d\left[J_o\left(k_s\xi\right)\right]}{d\xi} = -k_s J_1\left(k_s\xi\right),$$

$$-\int_0^1 \left\{-k_s^{\,2}\left[J_o\left(k_s\xi\right) - \frac{J_1\left(k_s\xi\right)}{\xi k_s}\right] + \frac{1}{\xi}\left[-k_s J_1\left(k_s\xi\right)\right]\right\} J_o\left(k_s\xi\right)\xi d\xi =$$

$$= 0,5k_s^{\,2}\left[J_o^{\,2}\left(k_s\right) + J_1^{\,2}\left(k_s\right)\right].$$

Но учитывая, что в рассматриваемой задаче $J_o\left(k_s\right) = 0$, можем записать

$$A_{2s} = 0,5k_s^{\,2} J_1^{\,2}\left(k_s\right).$$

Согласно (212) для функций $f_s(\xi)$ (s=1,2,…) имеем бесконечное множество линейных дифференциальных уравнений первого порядка с разделяющимися переменными. Решение уравнения (212) имеет вид

$$f_s = Br\frac{A_{3s}}{A_{2s}} - \frac{C_s}{A_{2s}}\exp\left(-\frac{A_{2s}}{A_{1s}}Z\right).$$

Постоянную интегрирования C_s находим из начального условия (Z=0, θ=1)

$$\sum_{s=1}^{\infty}\left(Br\frac{A_{3s}}{A_{2s}} - \frac{C_s}{A_{2s}}\right) J_o\left(k_s\xi\right) = 1 \ .$$

Умножив обе части этого равенства на координатную функцию и

проинтегрировав, учитывая взаимную ортогональность координатных функций, можем записать

$$\left(Br\frac{A_{3s}}{A_{2s}} - \frac{C_s}{A_{2s}} \right) \int_0^1 J_o^{\,2}\left(k_s\xi\right)\xi d\xi = \int_0^1 J_o\left(k_s\xi\right)\xi d\xi \qquad \text{(s=1,2,…).}$$

Здесь

$$\int_0^1 J_o^{\,2}\left(k_s\xi\right)\xi d\xi = \frac{J_o^{\,2}\left(k_s\right) + J_1^{\,2}\left(k_s\right)}{2}, \quad \int_0^1 J_o\left(k_s\xi\right)\xi d\xi = \frac{J_1\left(k_s\right)}{k_s}.$$

Но из граничных условий следует равенство $J_o\left(k_s\right) = 0$. Поэтому, окончательно имеем

$$-\frac{C_s}{A_{2s}} = -Br\frac{A_{3s}}{A_{2s}} + \frac{2}{k_s J_1\left(k_s\right)}.$$

Следовательно, выражение для температуры (211) имеет вид

$$\theta = \sum_{s=1}^{\infty} \left\{ \left[\frac{2}{k_s J_1\left(k_s\right)} - Br\frac{A_{3s}}{A_{2s}} \right] \exp\left(-\frac{A_{2s}}{A_{1s}} Z \right) + Br\frac{A_{3s}}{A_{2s}} \right\} J_o\left(k_s\xi\right). \qquad (213)$$

Можно записать выражение для температуры с разделением по физическим факторам

$$\theta = Br\sum_{s=1}^{\infty} \frac{A_{3s}}{A_{2s}} \left[1 - \exp\left(-\frac{A_{2s}}{A_{1s}} Z \right) \right] J_o\left(k_s\xi\right) + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{2}{k_s J_1\left(k_s\right)} \exp\left(-\frac{A_{2s}}{A_{1s}} Z \right) J_o\left(k_s\xi\right)$$

Первое слагаемое - диссипативная составляющая температуры, нарастает по длине канала от нуля до конечного значения. Второе слагаемое описывает экспоненциальное охлаждение жидкости по длине канала без внутренних источников тепла.

6.2.3. Анализ математической модели

Согласно полученному выражению для температуры (213), если Br=0, то имеем обычный процесс охлаждения жидкости без внутренних источников

$$\theta = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{2}{k_s J_1(k_s)} \exp\left(-\frac{A_{2s}}{A_{1s}} Z\right) J_o(k_s \xi).$$

При Br>0 на бесконечном удалении от начала течения ($Z \to \infty$) профиль температуры стабилизируется и описывается зависимостью

$$\theta_\infty = \lim_{Z \to \infty} \theta = Br \sum_{s=1}^{\infty} \frac{A_{3s}}{A_{2s}} J_o(k_s \xi).$$

В частном случае, положив n=1 или b=0, получим известное выражение для ньютоновской жидкости

$$\theta_{\infty N} = \frac{Br}{16}\left(1 - \xi^4\right).$$

Среднеобъёмная температура жидкости в произвольном поперечном сечении определяется интегралом

$$T_m = \frac{2\pi}{\pi R^2 v_c} \int_0^R T v_z r dr \ . \qquad (214)$$

«Объёмную» температуру T_m можно измерить, если обрезать трубу, по которой течёт теплоноситель, в сечении z, собрать жидкость вытекающую из трубы в контейнер и тщательно её перемешать. По этой причине среднюю температуру T_m иногда называют «температурой идеального смешения» или «температурой, осреднённой по потоку». Согласно выражению (214) среднеобъёмная температура является функцией продольной координаты.

Форма безразмерной температуры применима как для охлаждения жидкости, так и для нагрева. В случае отсутствия внутренних источников тепловыделения (Br=0) как процесс охлаждения, так и процесс нагревания жидкости описывается идентичной кривой безразмерной температуры, убывающей от единицы до нуля. А.В. Лыковым было предложено для наглядности при описании процесса нагрева использовать безразмерную температуру в форме 1-θ, что даёт более «физически правдоподобную» кривую, возрастающую от нуля до единицы.

Совсем другая ситуация имеет место при наличии объёмных

источников тепловыделения. Дело в том, что в знаменатель числа Бринкмана входит разность температур (T_o-T_w). Поэтому случаю охлаждения жидкости отвечают положительные значения числа Бринкмана (Br>0), а нагреву – отрицательные (Br<0). Во втором случае сама безразмерная температура в принятой форме может принимать как положительные, так и отрицательные значения. Отрицательные значения отвечают случаю значительных интенсивностей тепловыделения. График температуры имеет вид монотонной функции. При этом становится проблематичным расчёт числа Нуссельта, поскольку стоящий в знаменателе температурный напор может принимать нулевые значения (деление на ноль). Следовательно, функция Нуссельта будет иметь разрыв в точке нулевых температур. В указанных точках локальный температурный напор (216) инвертирует свой знак, соответственно, число Нуссельта имеет бесконечный разрыв второго рода. С физической точки зрения, число Нуссельта не должно иметь разрыва. Таким образом, для случая нагрева математическая модель нуждается в технической доработке. Как будет показано ниже, на бесконечности асимптотическое значение числа Нуссельта автомодельно по числу Бринкмана (и не зависит от его знака), следовательно, независимо от нагрева- или охлаждения жидкости, число Нуссельта всегда имеет положительное значение. Для задачи сопоставления реологических моделей вполне достаточно рассмотреть случай охлаждения жидкости (T_o>T_w).

Условие неразрывности теплового потока для локального коэффициента теплоотдачи α_+ имеет вид

$$\alpha_+ \Delta T = -\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=R} . \qquad (215)$$

Здесь локальный температурный напор

$$\Delta T = T_m - T_w . \qquad (216)$$

Локальный коэффициент теплоотдачи даёт значительно больше информации о теплообмене, чем средний коэффициент теплоотдачи

(например, построенный на среднелогарифмической разности температур), поскольку он показывает, как тепловой поток распределён по длине канала [49].

Переходя к безразмерным переменным (209), выражение (214) примет вид

$$T_m = 2\left(T_o - T_w\right)\int_0^1 V\theta\xi d\xi + T_w .$$

Здесь учитывалось соотношение $2\int_0^1 V\xi d\xi = 1$.

С учётом выражений (215), (216) для локального числа Нуссельта можем записать

$$Nu = -\left.\frac{\partial\theta}{\partial\xi}\right|_{\xi=1} \theta_m^{-1}, \qquad (217)$$

где $Nu = \alpha_+ R/\lambda$ - локальное число Нуссельта, $\theta_m = \left(T_m - T_w\right)/\left(T_o - T_w\right)$ - безразмерная среднеобъёмная температура, определяемая выражением $\theta_m = 2\int_0^1 V\theta\xi d\xi$.

В развёрнутой форме с учётом выражения для безразмерной температуры (213), можем записать

$$Nu = \frac{\sum_{s=1}^{\infty}\left\{\begin{array}{l}\left[\dfrac{2}{k_s J_1\left(k_s\right)} - Br\dfrac{A_{3s}}{A_{2s}}\right]\times \\ \times\exp\left(-\dfrac{A_{2s}}{A_{1s}}Z\right) + Br\dfrac{A_{3s}}{A_{2s}}\end{array}\right\} k_s J_1\left(k_s\right)}{2\int_0^1 V\theta\xi d\xi} . \qquad (218)$$

Для интеграла в знаменателе используем почленное интегрирование ряда

$$2\int_0^1 V\theta\xi d\xi =$$

$$= 2\sum_{s=1}^{\infty}\left\{\left[\frac{2}{k_s J_1(k_s)} - Br\frac{A_{3s}}{A_{2s}}\right]\exp\left(-\frac{A_{2s}}{A_{1s}}Z\right) + Br\frac{A_{3s}}{A_{2s}}\right\}\int_0^1 VJ_0(k_s\xi)\xi d\xi \quad .$$

В развёрнутой форме выражение для локального числа Нуссельта имеет вид

$$Nu = \frac{\sum_{s=1}^{\infty}\left\{\begin{array}{l}\left[\frac{2}{k_s J_1(k_s)} - Br\frac{A_{3s}}{A_{2s}}\right]\times \\ \times\exp\left(-\frac{A_{2s}}{A_{1s}}Z\right) + Br\frac{A_{3s}}{A_{2s}}\end{array}\right\}k_s J_1(k_s)}{2\sum_{s=1}^{\infty}\left\{\begin{array}{l}\left[\frac{2}{k_s J_1(k_s)} - Br\frac{A_{3s}}{A_{2s}}\right]\times \\ \times\exp\left(-\frac{A_{2s}}{A_{1s}}Z\right) + Br\frac{A_{3s}}{A_{2s}}\end{array}\right\}\int_0^1 VJ_0(k_s\xi)\xi d\xi} .$$

Без учёта диссипативного саморазогрева (Br=0) расчётное выражение числа Нуссельта упрощается

$$Nu = \frac{\sum_{s=1}^{\infty} 2\exp\left(-\frac{A_{2s}}{A_{1s}}Z\right)}{2\sum_{s=1}^{\infty}\frac{2}{k_s J_1(k_s)}\exp\left(-\frac{A_{2s}}{A_{1s}}Z\right)\int_0^1 VJ_0(k_s\xi)\xi d\xi} .$$

На участке стабилизированного теплообмена (Z>>1) как плотность теплового потока $\left(-\lambda\left.\frac{\partial T}{\partial r}\right|_{r=R}\right)$, так и температурный напор (ΔT) с ростом Z уменьшаются по одному и тому же экспоненциальному закону (первая мода ряда Фурье-Бесселя). Поэтому здесь α не зависит от Z ($\alpha = \alpha_\infty$), а определяется профилем осевой скорости.

Для практических расчётов воспользуемся данными реологических

исследований резины, полученными выше. В результате обработки кривой течения (раздел 1.2) получены следующие значения реологических констант для модели Эллиса: α=17,893, a=350,217 МПа$^{-1}$с$^{-1}$, b=2,373x10^{15} МПа$^{-\alpha}$с$^{-1}$. Соответственно, при аппроксимации кривой течения моделью Оствальда - де Виля: n=0,071, μ_o=0,124 МПа*с^{0,071}. Минимальная скорость сдвига γ= 43,2 с$^{-1}$ максимальная скорость сдвига γ=1035 с$^{-1}$. Соответствующие касательные напряжения 0,123 МПа и 0,203 МПа. Температура смеси при реологическом испытании 120 ºС. Рассматриваемый материал - ярко выраженный псевдопластик. Из условия идентичности размерности всех слагаемых уравнения Фурье-Кирхгофа следует, что при использовании касательного напряжения и давления с размерностью МПа, для теплопроводности λ следует использовать размерность МВт/(мК) и для объёмной теплоёмкости ρС – МДж/(м^{3}К).

Используем основные кинематические закономерности течения жидкостей рассматриваемых моделей, полученные в разделе 1.5. Профиль скорости и другие параметры при течении жидкости Эллиса (39), (41):

$$V_E = \frac{\frac{a}{2}\left(1-\xi^2\right)+\frac{b\tau_w^{\alpha-1}}{1+\alpha}\left(1-\xi^{1+\alpha}\right)}{\frac{a}{4}+\frac{b\tau_w^{\alpha-1}}{3+\alpha}}, \quad \Gamma_E = \frac{a\tau_w\xi+b\left(\tau_w\xi\right)^\alpha}{a\tau_w+b\tau_w{}^\alpha}, \quad \Xi_E=\xi,$$

$$\Gamma_E\Xi_E = \xi\frac{a\tau_w\xi+b\left(\tau_w\xi\right)^\alpha}{a\tau_w+b\tau_w{}^\alpha}, \quad Br_E = \frac{R^2\tau_w\left(a\tau_w+b\tau_w{}^\alpha\right)}{\lambda\left(T_0-T_w\right)}, \quad v_{cE} = R\left(\frac{a\tau_w}{4}+\frac{b\tau_w^\alpha}{3+\alpha}\right).$$

Входящий в расчётные выражения параметр течения $\tau_w = 0,5R\Delta p/\ell$ (касательное напряжение на стенке) на кривой течения изменялся в следующих пределах 0,123 МПа < τ_w <0,203 МПа. Последним дано выражение для средней скорости.

Профиль скорости и другие кинематические параметры при течении жидкости Оствальда – де Виля (36), (60), раздел 1.5.1:

$$V_{Os}=\frac{1+3n}{1+n}\left(1-\xi^{1+\frac{1}{n}}\right),\qquad \Gamma_{Os}=\left(\frac{\tau}{\tau_w}\right)^{\frac{1}{n}}=\xi^{\frac{1}{n}},\quad \Xi_{Os}=\xi,\qquad \Gamma_{Os}\Xi_{Os}=\xi^{1+\frac{1}{n}},$$

$$Br_{Os}=\frac{R^2\tau_w\left(\tau_w/\mu_0\right)^{\frac{1}{n}}}{\lambda\left(T_0-T_w\right)},\ v_{cOs}=\frac{Rn}{1+n}\left(\frac{\tau_w}{\mu_o}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Необходимо отметить, как профиль скорости, так и диссипативная функция ($\Gamma\Xi_{Os}$) в случае степенной модели не зависят от касательного напряжения на стенке, которое в свою очередь связано с гидравлическим сопротивлением канала ($\tau_w=0,5R\Delta p/\ell$) и расходом жидкости. В определённом смысле для степенной жидкости эти параметры «застывшие». Указанное обстоятельство делает принципиально отличной математическую модель теплообмена, построенную на степенном уравнении от модели, построенной на основе реологической модели Эллиса. Последним дано выражение для средней скорости.

К сожалению, в число Бринкмана входят реологические параметры, поэтому это число зависит от выбранной реологической модели и касательного напряжения на стенке.

Расчётные формулы для температуры (213) и числа Нуссельта (218) при течении жидкости Оствальда – де Виля (индекс Os) примут вид:

$$\theta_{Os}=\sum_{s=1}^{\infty}\left\{\left[\frac{2}{k_sJ_1\left(k_s\right)}-Br_{Os}\frac{A_{Os3s}}{A_{2s}}\right]\exp\left(-\frac{A_{2s}}{A_{Os1s}}Z\right)+Br_{Os}\frac{A_{Os3s}}{A_{2s}}\right\}J_o\left(k_s\xi\right),$$

$$Nu_{Os}=\frac{\sum\limits_{s=1}^{\infty}\left\{\begin{array}{l}\left[\dfrac{2}{k_s J_1(k_s)}-Br_{Os}\dfrac{A_{Os3s}}{A_{2s}}\right]\times\\ \times\exp\left(-\dfrac{A_{2s}}{A_{Os1s}}Z\right)+Br_{Os}\dfrac{A_{Os3s}}{A_{2s}}\end{array}\right\}k_s J_1(k_s)}{2\left(\dfrac{1+3n}{1+n}\right)\sum\limits_{s=1}^{\infty}\left\{\begin{array}{l}\left[\dfrac{2}{k_s J_1(k_s)}-Br_{Os}\dfrac{A_{Os3s}}{A_{2s}}\right]\times\\ \times\exp\left(-\dfrac{A_{2s}}{A_{Os1s}}Z\right)+Br_{Os}\dfrac{A_{Os3s}}{A_{2s}}\end{array}\right\}\int\limits_0^1\left(1-\xi^{1+\frac{1}{n}}\right)J_0(k_s\xi)\xi d\xi},$$

$$A_{Os1s}=\left(\frac{1+3n}{1+n}\right)\int\limits_0^1\left(1-\xi^{1+\frac{1}{n}}\right)J_o^2(k_s\xi)\xi d\xi,\qquad A_{Os3s}=\int\limits_0^1\xi^{1+\frac{1}{n}}J_o(k_s\xi)\xi d\xi,$$

$$A_{2s}=\frac{k_s^{\,2}J_1^{\,2}(k_s)}{2},\qquad Br_{Os}=\frac{R^2\tau_w(\tau_w/\mu_0)^{\frac{1}{n}}}{\lambda(T_0-T_w)}.\qquad(219)$$

В ньютоновском случае достаточно во всех выражениях (219) положить n=1.

Соответственно, температурное поле и число Нуссельта при течении жидкости Эллиса (индекс E) описывается формулами:

$$\theta_E=\sum_{s=1}^{\infty}\left\{\left[\frac{2}{k_s J_1(k_s)}-Br_E\frac{A_{E3s}}{A_{2s}}\right]\exp\left(-\frac{A_{2s}}{A_{E1s}}Z\right)+Br_E\frac{A_{E3s}}{A_{2s}}\right\}J_o(k_s\xi),$$

$$Nu_E = \frac{\left(\frac{a}{4}+\frac{b\tau_w^{\alpha-1}}{3+\alpha}\right)\sum_{s=1}^{\infty}\left\{\begin{array}{l}\left[\frac{2}{k_s J_1(k_s)} - Br_E\frac{A_{E3s}}{A_{2s}}\right]\times \\ \times\exp\left(-\frac{A_{2s}}{A_{E1s}}Z\right)+Br_E\frac{A_{E3s}}{A_{2s}}\end{array}\right\}k_s J_1(k_s)}{\left\langle \begin{array}{l} 2\sum_{s=1}^{\infty}\left\{\begin{array}{l}\left[\frac{2}{k_s J_1(k_s)} - Br_E\frac{A_{E3s}}{A_{2s}}\right]\times \\ \times\exp\left(-\frac{A_{2s}}{A_{E1s}}Z\right)+Br_E\frac{A_{E3s}}{A_{2s}}\end{array}\right\}\times \\ \times\int_0^1\left[\frac{a}{2}\left(1-\xi^2\right)+\frac{b\tau_w^{\alpha-1}}{1+\alpha}\left(1-\xi^{1+\alpha}\right)\right]J_0(k_s\xi)\xi d\xi \end{array}\right\rangle},$$

$$A_{E1s} = \frac{\int_0^1\left[\frac{a}{2}\left(1-\xi^2\right)+\frac{b\tau_w^{\alpha-1}}{1+\alpha}\left(1-\xi^{1+\alpha}\right)\right]J_o^2(k_s\xi)\xi d\xi}{\left(\frac{a\tau_w}{4}+\frac{b\tau_w^{\alpha-1}}{3+\alpha}\right)},\ A_{2s} = \frac{k_s{}^2 J_1{}^2(k_s)}{2},$$

$$A_{E3s} = \frac{\int_0^1\left[a\tau_w\xi + b\left(\tau_w\xi\right)^{\alpha}\right]J_o(k_s\xi)\xi d\xi}{\left(a\tau_w + b\tau_w{}^{\alpha}\right)},\ Br_E = \frac{R^2\tau_w\left(a\tau_w + b\tau_w{}^{\alpha}\right)}{\lambda\left(T_0 - T_w\right)}.$$

(220)

Принципиальное отличие математической модели для реологического уравнения Эллиса (220) от модели (219) состоит в том, что на тепловой режим существенно влияет касательное напряжение на стенке τ_w. Дело в том, что касательное напряжение на стенке существенно меняет характер течения жидкости Эллиса в круглом канале.

В ньютоновском случае достаточно во всех выражениях (220) положить b=0. При этом реологический параметр «a» следует рассматривать как обратную ньютоновскую вязкость (μ=1/a).

В ньютоновском случае (n=1, b=0) обе математические модели (219), (220) дают идентичные расчётные формулы. Реологическое уравнение

ньютоновской жидкости $\tau = \mu\gamma$. Течение и теплообмен ньютоновской жидкости можно рассматривать как тестовую проверку полученных математических моделей (219), (220). Расчётные выражения для течения и теплообмена ньютоновской жидкости:

$$\theta_N = \sum_{s=1}^{\infty}\left\{\left[\frac{2}{k_s J_1(k_s)} - Br_N \frac{A_{N3s}}{A_{2s}}\right]\exp\left(-\frac{A_{2s}}{A_{N1s}} Z\right) + Br_N \frac{A_{N3s}}{A_{2s}}\right\} J_o(k_s\xi),$$

$$Nu_N = \frac{\sum_{s=1}^{\infty}\left\{\begin{matrix}\left[\frac{2}{k_s J_1(k_s)} - Br_N \frac{A_{N3s}}{A_{2s}}\right]\times \\ \times\exp\left(-\frac{A_{2s}}{A_{N1s}} Z\right) + Br_N \frac{A_{N3s}}{A_{2s}}\end{matrix}\right\} k_s J_1(k_s)}{4\sum_{s=1}^{\infty}\left\{\begin{matrix}\left[\frac{2}{k_s J_1(k_s)} - Br_N \frac{A_{N3s}}{A_{2s}}\right]\times \\ \times\exp\left(-\frac{A_{2s}}{A_{N1s}} Z\right) + Br_N \frac{A_{N3s}}{A_{2s}}\end{matrix}\right\}\int_0^1 \left(1-\xi^2\right) J_0(k_s\xi)\xi d\xi},$$

$$A_{N1s} = 2\int_0^1 \left[\left(1-\xi^2\right)\right] J_o^2(k_s\xi)\xi d\xi, \qquad A_{2s} = \frac{k_s{}^2 J_1{}^2(k_s)}{2},$$

$$A_{N3s} = \int_0^1 \xi^2 J_o(k_s\xi) d\xi, \qquad Br_N = \frac{R^2 \tau_w{}^2}{\lambda\mu_0(T_0 - T_w)}. \qquad (221)$$

В процессе вычисления формул (221) учитывались первые 50 членов рядов Фурье-Бесселя. Корни характеристического уравнения $J_o(k_s) = 0$ взяты из справочников [47, 48]: k_1=2,4048255577; k_2=5,5200781103;… k_{50}=156,295. Результаты численного анализа математической модели (221), представлены на рис.52 и рис.53. Поперечное распределение температуры рис.52 эволюционирует от начальной прямоугольной формы (θ=1) к параболической, плавно уменьшаясь до нуля. На рис.54 показано изменение температуры на оси канала (θ(ξ=1)) по длине при различных числах Бринкмана. Интересно отметить, что даже при отсутствии внутренних источников тепла (Br=0) имеет

место начальный всплеск температуры в окрестности Z=0,06. Физических причин для начального всплеска нет, следовательно, его происхождение чисто математическое, вероятно, связанное со сходимостью рядов Фурье-Бесселя. Если без источников тепла, температура – функция, убывающая до нуля, то при наличии источников тепла (Br>0) температура убывает асимптотически к постоянному, зависящему от числа Бринкмана, значению.

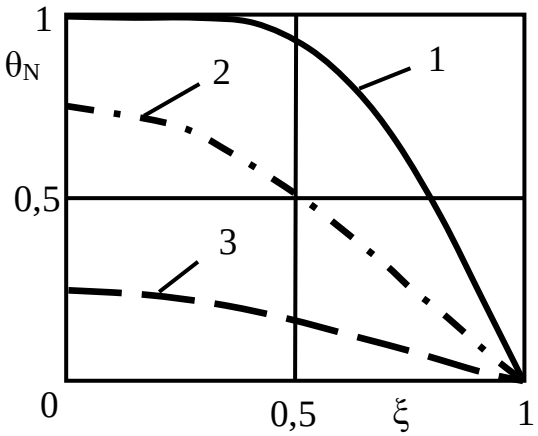


Рис.52. Распределение температур на различных расстояниях при течении ньютоновской жидкости (Br=0): 1 – Z=0,05; 2 – 0,2; 3 – 0,5.

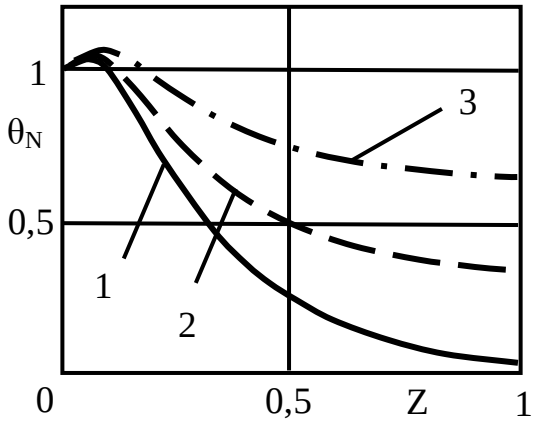


Рис.53. Распределение максимальной температуры по длине канала для ньютоновской жидкости: 1 – Br=0; 2 - 5; 3 – 10.

Показатель экспоненты характеризует собственные числа задачи. Показатель степени экспоненты $A_{21}/A_{N11} = 3,6979$. Согласно данным Кутателадзе С.С. [36] показатель равен 3,6567. Расхождение 1.12 %.

На рис.54 представлены кривые распределения локального числа Нуссельта по длине зоны течения при различных значениях числа Бринкмана. Без источников тепла (линия 1) имеет место стабилизация числа Нуссельта при Z>0,2. Начальное значение числа Нуссельта равно бесконечности ($Z \to 0, \quad Nu_N \to \infty$). Расчётное асимптотическое значение числа Нуссельта ($Z \to \infty, \quad Nu_{N\infty} = 2,09$) отличается приблизительно в два раза от известного в литературе [41] Nu=4,36. Это объясняется различным принятым масштабом линейного размера. В работе [41] за расчётный размер взят диаметр трубы

Nu=αD/λ, D=2R, а при расчёте результатов, необходимых для построения рис.54, в качестве характерного размера использовался радиус $Nu_N=\alpha R/\lambda$. Локальное число Нуссельта, приведенное к актуальному масштабу длины (R), составляет 2,18. Расхождение 4.12 %.

Следовательно, используемый метод решение обеспечивает достаточную точность результатов. Его можно распространить на анализ теплообмена при течении степенной жидкости и жидкости Эллиса.

Можно показать, что при больших протяжённостях зоны течения число Нуссельта не зависит от числа Бринкмана. Согласно (218) можем записать выражение для асимптотического значения числа Нуссельта

$$\lim_{Z\to\infty} Nu_N = Nu_{N\infty} = \frac{Br_N \sum_{s=1}^{\infty} \frac{A_{N3s}}{A_{2s}} k_s J_1(k_s)}{2Br_N \sum_{s=1}^{\infty} \frac{A_{N3s}}{A_{2s}} \int_0^1 V J_0(k_s\xi)\xi d\xi}.$$

Видно, что число Бринкмана сокращается.

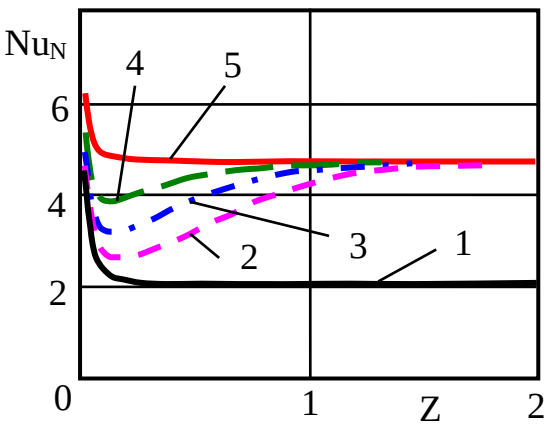


Рис.54. Распределение числа Нуссельта по длине зоны течения при различных числах Бринкмана: 1 – Br=0; 2 – 2; 3 – 5; 4 – 10; 5 – 20.

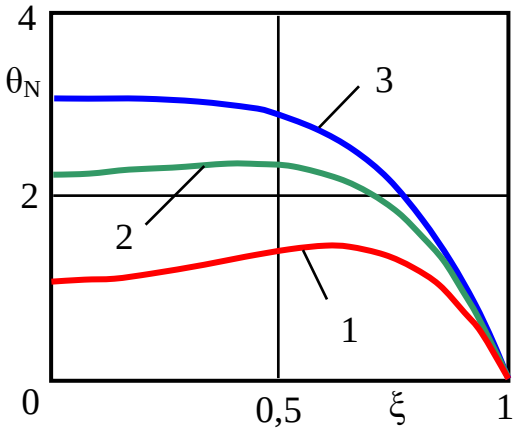


Рис.55. Эпюры безразмерной температуры при Br=50: 1 – Z=0,05; 2 – 0,3; 3 – 1.

Расчёты показывают, что при любом числе Бринкмана имеет место предельное соотношение $Z\to\infty$, $Nu_{N\infty}=4,722$. По данным Кутателадзе [36] значение приблизительно в два раза больше $Z\to\infty$, $Nu_{\infty}=9,6$ (здесь

характерный размер – диаметр трубы). Рис.54 иллюстрирует влияние числа Бринкмана на зависимость числа Нуссельта от безразмерной длины трубы. Видно, что кривые имеют экстремум, который с ростом числа Бринкмана вырождается, и при Br>20 описывается монотонной асимптотической кривой (асимптота $Z \to \infty, \quad Nu_{N\infty} = 4,722$). Расхождение 1.6 %.

На рис.55 представлены эпюры безразмерной температуры при высокой интенсивности диссипативного тепловыделения Br=50. Имеет место быстрое нарастание температуры, начиная с начального сечения. Видно, что на небольшом удалении от входного сечения появляется локальный экстремум температуры, обусловленный интенсивным тепловыделением у стенки. После сечения Z=1 наступает стабилизация температурного профиля. Стабилизированный профиль температуры по форме близок параболе с экстремумом в центре сечения трубы.

Таким образом, математическая модель течения и теплообмена ньютоновской жидкости (221) показывает результаты, вполне согласующиеся с известными литературными данными.

Выполним сопоставление моделей (219) и (220) путём сравнения расчётных результатов. Далее представлены результаты сопоставления математических моделей теплообмена, построенных на основании реологического уравнения степенной жидкости и жидкости Эллиса.

Выполним инженерную оценку числа Бринкмана. Примем ориентировочно коэффициент теплопроводности резиновой смеси λ = 0,4 Вт/(мК) = 0,4x10^{-6} МВт/(мК). Пусть разность температур $\left(T_0 - T_w\right) = 100\,K$. Остальные теплофизические свойства: ρ=1475 кГ/м^3, a_t=2,205x10^{-7} м^2/с, ρC=1,814 МДж/(м^{3}К). Радиус трубы R=10^{-3} м. Расчётная формула для числа Бринкмана

$$Br_E = \frac{R^2 \tau_w \gamma_w}{\lambda\left(T_0 - T_w\right)}.$$

Минимальная скорость сдвига γ_w= 43,2 с$^{-1}$ максимальная скорость сдвига

γ_w=1035 c^{-1}. Соответствующие касательные напряжения τ_w=0,123 МПа и τ_w=0,203 МПа. В указанных условиях предельным точкам кривой течения исследуемой модельной среды отвечает диапазон изменений числа Бринкмана от Br=0,132 до Br=5,252. Число Бринкмана зависит от касательного напряжения на стенке и может изменяться в указанном диапазоне в соответствии с принятым реологическим законом. Кроме того, можно существенно изменять число Бринкмана, варьируя радиус трубы.

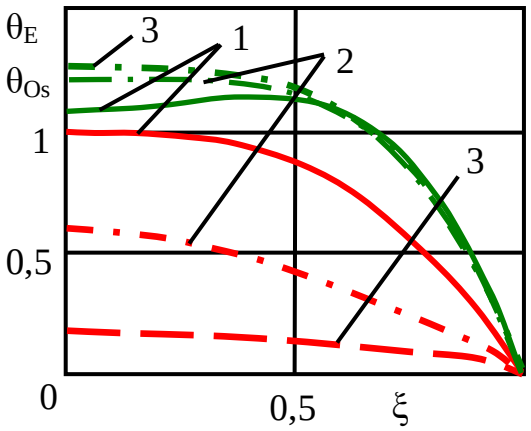


Рис.56. Распределение температур на различных расстояниях при Br=20: 1 – Z=0,05; 2 – 0,2; 3 – 0,5. В каждой паре верхние линии отвечают модели Эллиса, нижние – Оствальда – де Виля.

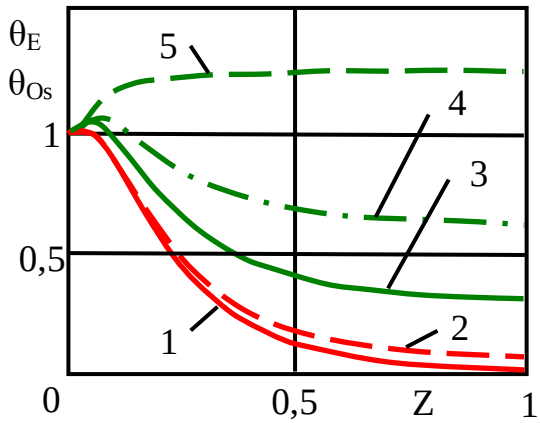


Рис.57. Распределение максимальной температуры по длине канала для степенной модели (линии 1, 2) и модели Эллиса (3-5) при различных значениях числа Бринкмана: 1, 3 – Br=5; 4 – 10; 2, 5 – 20.

На рис.56 представлены расчётные эпюры температур для двух реологических моделей. Расчёты выполнены для Br_E=Br_{Os}=20, τ_w=0,05 МПа. Профили построены для трёх сечений, отвечающих Z=0,05; 0,2; 0,5. Последнее сечение Z=0,5 близко к участку стабилизации температурного поля.

Из рисунка видно, что распределение температур в случае степенной жидкости носит параболический характер. Имеет место существенное расхождение полученных результатов рассматриваемых реологических моделей. Модель, построенная на реологическом уравнении Оствальда – де Виля, при прочих равных условиях, показывает существенно заниженные значения температур. При меньших значениях касательного напряжения на стенке (модель Эллиса) положение линий практически не изменяется (на

кривые течения – это низкоскоростной участок, отвечающий максимальной ньютоновской вязкости). Однако если касательное напряжение на стенке повысить до τ_w=0,203 МПа, то линии, отвечающие модели Эллиса практически сливаются с линиями для модели Оствальда – де Виля.

Действительно, касательное напряжение на стенке τ_w=0,203 МПа отвечает структурной (высокоскоростной) ветви кривой течения, при этом аппроксимации обоих моделей достаточно близки. Следует отметить, что касательное напряжение на стенке не входит в выражения (219), следовательно, касательное напряжение на стенке на распределение температур при течении жидкости Оствальда – де Виля не влияет, что также свидетельствует о недостатке реологической модели. Сам характер изменения эпюр с расстоянием у этих моделей противоположный: у модели Эллиса с увеличением расстояния температура повышается, а у Оствальда – де Виля – понижается. Температура в окрестности оси у модели Эллиса превышает начальную (θ_E>1), что связано с диссипативным тепловыделением. Модель Оствальда – де Виля показывает монотонное охлаждение жидкости (θ_{Os}<1).

На рис.57 представлено распределение максимальной температуры по длине зоны течения при различных значениях числа Бринкмана для τ_w=0,123 МПа. Под максимальной температурой понимается значение температуры на оси канала, т.е при ξ=0 (рис.56). Число Бринкмана мало влияет на распределение максимальной температуры в случае модели Оствальда – де Виля: кривая носит монотонно убывающий характер. С увеличением числа Бринкмана незначительно повышается температура на участке стабилизации.

Модель Эллиса показывает всплеск температуры, начиная с Br=5. При Br>20 имеет место дальнейший рост температуры. Величина горизонтальной асимптоты зависит от числа Бринкмана. Стабилизация температурного поля наступает при Z>1,5. Число Бринкмана может изменяться в широких пределах с высотой канала, поскольку $Br \approx R^2$. Данные, представленные на рис.57 красноречиво свидетельствуют, что в пределах данной постановки задачи, степенная модель не позволяет адекватно раскрыть фундаментальный

физический эффект саморазогрева жидкости в отличие от модели Эллиса.

Следует отметить, что в высокоскоростной части кривой течения, когда обе реологические модели показывают близкий прогноз (τ_w=0,203 МПа), температура для модели Эллиса (θ_E) близка температуре (θ_{Os}) – подобна линии 2 на рис.57. Именно модель Эллиса иллюстрирует сильное влияние реологических свойств на характер термического взаимодействия жидкости и нагретой стенки.

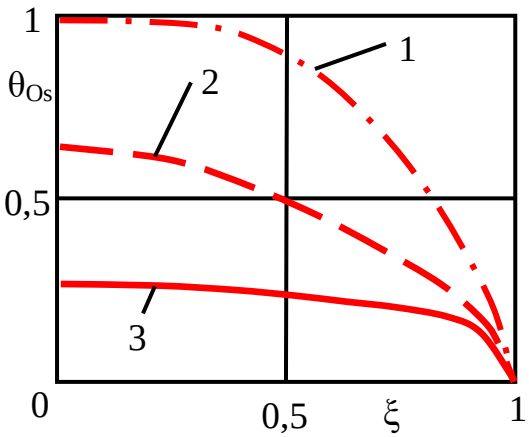


Рис.58. Эпюры температур на различных расстояниях для жидкости Оствальда – де Виля при Br=50: 1 – Z=0,05; 2 – 0,2; 3 – 0,5.

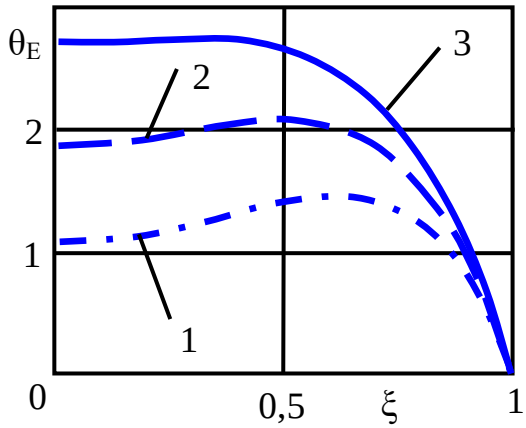


Рис.59. Эпюры температур на различных расстояниях для жидкости Эллиса при Br=50: 1 – Z=0,05; 2 – 0,2; 3 – 0,5.

Рис.58 и рис.59 иллюстрируют эволюцию поперечного распределения температур при высокой интенсивности тепловыделения (Br=50). Касательное напряжение на стенке, необходимое для модели Эллиса, составляло τ_w=0,123 МПа. Видно принципиальное отличие прогнозов этих реологических моделей. Модель, построенная на уравнении Оствальда – де Виля показывает параболический профиль и плавное понижение температуры до некоторого конечного значения на участке стабилизации (линия 3). Экстремумов и точек перегиба эпюра не имеет, исключая экстремум на оси канала. Модель же, построенная на уравнении Эллиса (рис.59) показывает монотонный рост температуры, причём на начальном участке (Z<0,5) в области интенсивного тепловыделения у стенки появляется локальный максимум температур.

При расчётах числа Нуссельта следует учитывать, что в случае модели Оствальда – де Виля его величина зависит от координаты Z и числа Бринкмана $Nu_{Os}(Z, Br)$. В случае же модели Эллиса число Нуссельта зависит от координаты Z, числа Бринкмана и касательного напряжения на стенке $Nu_E(Z, Br, \tau_w)$.

Результаты расчёта локального числа Нуссельта для обеих моделей представлены на рис.60. В случае степенной модели число Нуссельта (Nu_{Os}) может иметь одну из двух асимптот. При отсутствии внутренних источников тепловыделения (Br=0) асимптотическое значение числа Нуссельта на участке тепловой стабилизации Nu_{Os}=2,604. При наличии источников тепловыделения асимптотическое значение числа Нуссельта Nu_{Os}=16,791. С возрастанием числа Бринкмана быстрее наступает стабилизация теплового режима (линии 2 и 3), но не меняется положение асимптоты.

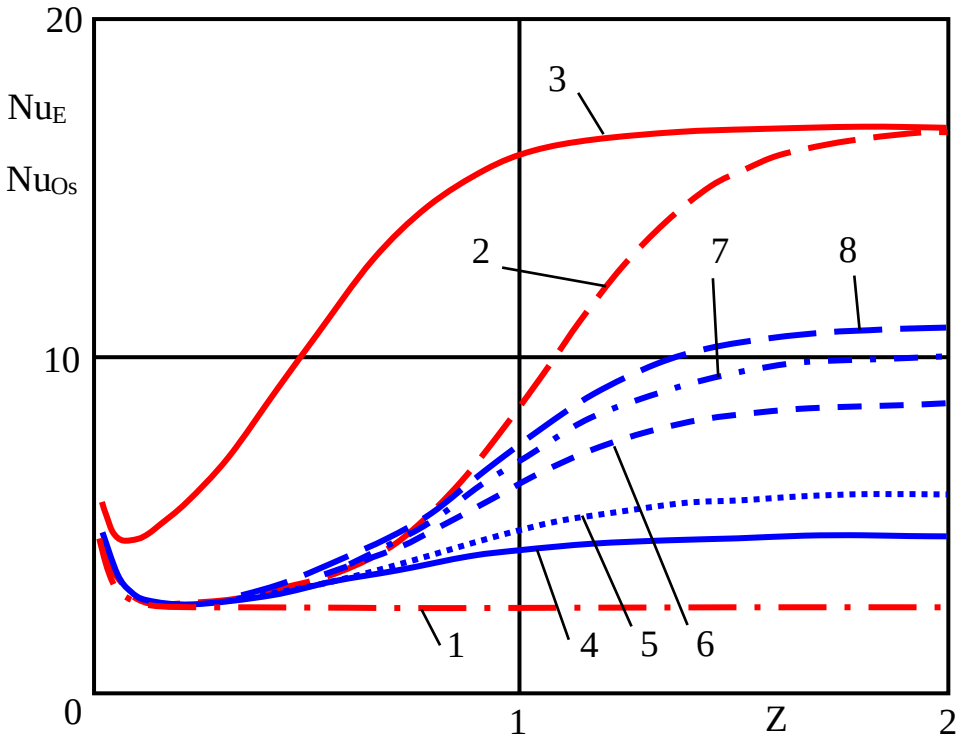


Рис.60. Распределение локального числа Нуссельта по длине зоны течения для модели Оствальда – де Виля (линии 1-3: 1 – Br=0; 2 – 1; 3 - 20) и модели Эллиса при Br=2 (4-8): 4 – τ_w=0,123 МПа; 5 - 0,18 МПа; 6 - 0,195 МПа; 7 - 0,2 МПа; 8 - 0,203 МПа.

Начальный участок зависимости числа Нуссельта от расстояния описывается степенной зависимостью. Для иллюстрации этого обстоятельства, важного для приложений, график, представленный на рис.60, продублирован в двойных логарифмических координатах для интервала $0{,}01<Z<10$. Модификация графика представлена на рис.61. Представленные зависимости, особенно для модели Эллиса, напоминают зависимость гидравлического сопротивления трубопровода от числа Рейнольдса и шероховатости стенки канала (график Никурадзе), хотя эти явления различной физической природы. При этом нижняя линия ($Br=0$) напоминает линию гидравлически гладких труб с нулевой шероховатостью поверхности. Вероятно, существует нечто общее между механизмом возникновения турбулентности и кинетикой диссипативного саморазогрева неньютоновской жидкости.

Для модели Эллиса на этом рисунке представлены результаты исследования влияния касательного напряжения на стенке на поведение числа Нуссельта. Интенсивность тепловыделения принята фиксированной $Br=2$. Следует отметить, что при отсутствии тепловыделений распределение числа Нуссельта близко к линии 1. Видно, что все зависимости (линии 6-9) носят асимптотический характер, при этом, значение асимптоты зависит от касательного напряжения на стенке: с увеличением касательного напряжения асимптотическое значение числа Нуссельта увеличивается. Линия 5, отвечающая наибольшей ньютоновской вязкости, по очертаниям близка линии 2 на рис.54 и показывает близкое асимптотическое значение числа Нуссельта.

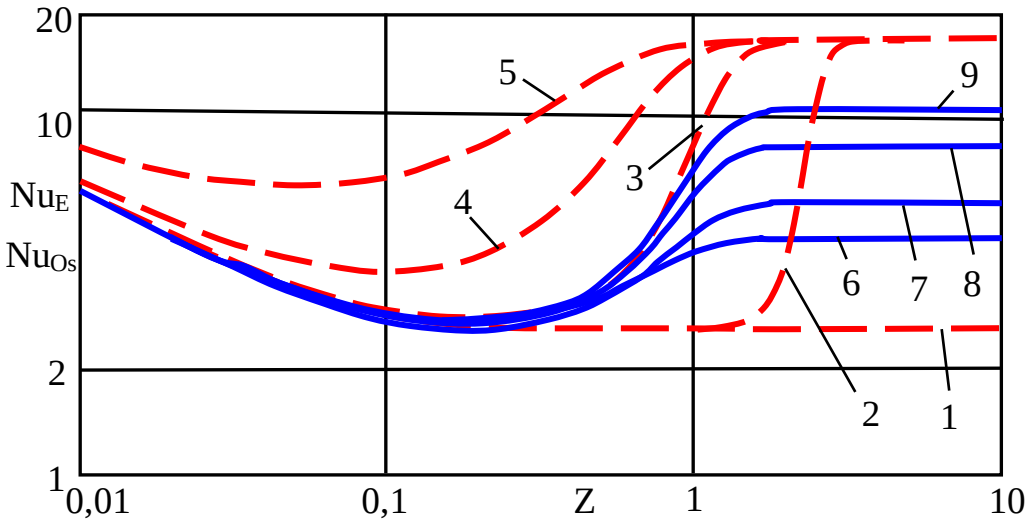


Рис.61. Распределение локального числа Нуссельта по длине зоны течения для модели Оствальда – де Виля (линии 1– 5: 1 – Br=0; 2 – 0.001; 3 – 1; 4 – 10; 5 – 50) и модели Эллиса при Br=2 (6–9): 6 – τ_w=0,123 МПа; 7 – 0,18 МПа; 8 – 0,195 МПа; 9 – 0,203 МПа.

Вид графиков, представленных на рис.54 и рис.61, естественно ставит вопрос поведения решения при малых числах Бринкмана. В результате вычислительных экспериментов обнаружено, что при весьма малых числах Бринкмана (Br=0,001) кривая также имеет верхнюю асимптоту (Nu_{Os}=16,791), но переход к ней наступает с «запаздыванием» в районе Z=3,5 (линия 2). При этом следует отметить, что рассматриваемая проблема непосредственно связана с точностью вычисления.

То, что при малых числах Бринкмана система хотя и с существенным запаздыванием, но всё же переходит в новое состояние (число Нуссельта на так называемую «верхнюю асимптоту» Nu_{Os}=16,791) имеет фундаментальное значение для маловязких жидкостей. В частности, отсюда следует требование рассчитывать теплообмен при ламинарном течении маловязкой жидкости в длинном трубопроводе с помощью числа Нуссельта, отвечающего не «нижней» (Nu_{Os}=2,604), а «верхней диссипативной» асимптоте (Nu_{Os}=16,791). Среднеинтегральное число Нуссельта должно быть построено для верхней асимптоты. Согласно точному решению (226) значение $Nu_{Os\infty}$=18,029. Расхождение обусловлено операцией дифференцирования приближённого

решения при получении числителя числа Нуссельта.

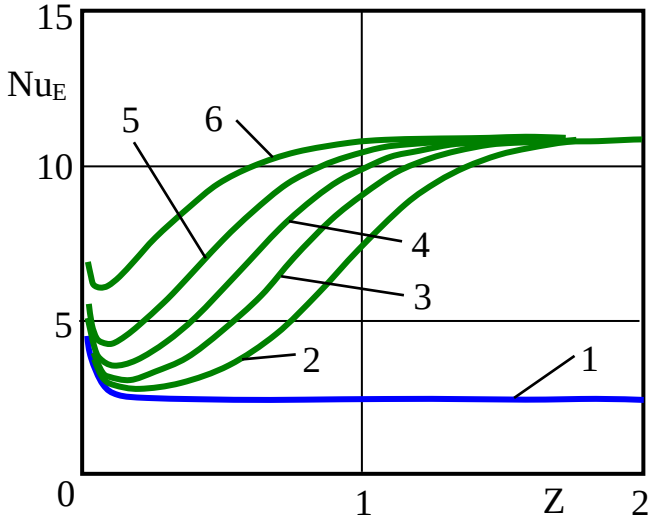


Рис.62. Распределение числа Нуссельта по длине зона течения в зависимости от числа Бринкмана при постоянном касательном напряжении на стенке τ_w=0,203 МПа: 1 – Br=0; 2 – 2; 3 – 5; 4 – 10; 5 – 20; 6 – 50.

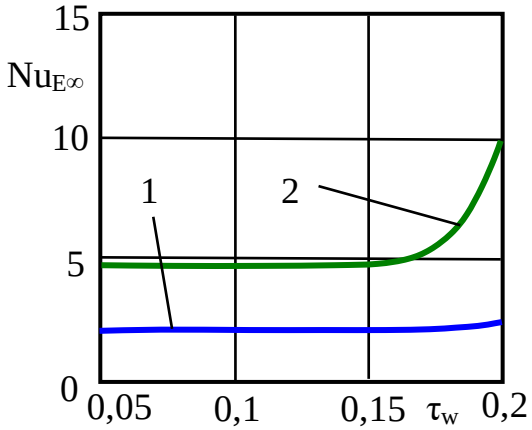


Рис.63. Зависимость асимптотического значения числа Нуссельта от касательного напряжения на стенке: 1 – Br=0; 2 – Br>0. Касательное напряжение в мегапаскалях.

Инженерная оценка. Рассмотрим в качестве примера течение типичной маловязкой ньютоновской жидкости – воды. Условия расчёта: $\mu_o=10^{-3}$ Па*с; n=1; λ=0,6 Вт/мК; $\rho=10^3$ кг/м^3; T_o-T_c=10 К; Re=2300; C=4190 Дж/кгК. Течение воды осуществляется в капилляре диаметром $d=2R=10^{-3}$ м. Найдём среднюю скорость, обеспечивающую заданное число Рейнольдса, по формуле $v_c = \mathrm{Re}\,\mu_o/(d\rho)$=2,3 м/с. Касательное напряжение на стенке найдём по формуле $\tau_w = 12\mu_o v_c/R$ =55,2 Па. Для расчёта числа Бринкмана использовалась формула $Br_N = R^2\tau_w{}^2/\left[\lambda\mu_0\left(T_0 - T_w\right)\right]$. Расчётное число Бринкмана Br_N=0,1269. Стабилизация числа Нуссельта наступает при Z=3,5. Используя формулу $Z = \ell\lambda/\left(v_c R^2 \rho C\right)$, находим соответствующую длину трубопровода $\ell = Zv_c R^2 \rho C/\lambda$ =14,05 м. Гидравлическое сопротивление можно найти по формуле $\Delta P = 2\ell\tau_w/R$. Оно составляет ΔP=3,1 МПа ($\approx$31 атм.). Приведённый пример показывает, что даже для воды число Бринкмана значительно

превышает величину Br_N=0,001, следовательно, при расчёте протяжённых трубопроводов необходимо учитывать тепловыделение, или, по крайней мере, выполнить оценку.

На рис.62 изучается влияние числа Бринкмана на продольное распределение числа Нуссельта при постоянном касательном напряжении на стенке (τ_w=0,203 МПа). Линия 1 отвечает случаю отсутствия внутренних источников тепла. При этом асимптотическое значение числа Нуссельта составляет Nu_E=2,466. Асимптотическое значение числа Нуссельта для всех Br>0 (линии 2-6) составляло Nu_E=10,926. Видно, что с увеличением числа Бринкмана ускоряется переход числа Нуссельта к асимптотическому значению и увеличивается величина минимума в начале зоны течения.

Рис.60 и рис.61 показывают, что для модели Эллиса касательное напряжение на стенке существенно влияет на асимптотическое значение числа Нуссельта на участке термической стабилизации. Для уточнения этого обстоятельства было более подробно изучено влияние касательного напряжения на число Нуссельта. Рис.63 иллюстрирует влияние касательного напряжения на стенке на асимптотическое значение числа Нуссельта на участке термической стабилизации. Расчёты выполнены для сечения Z=100. Линия 1 отвечает случаю отсутствия объёмных источников тепла. Представляет почти горизонтальную линию с небольшим подъёмом в области наибольших касательных напряжений на стенке. Линия 2 расположена выше и при малых значениях касательного напряжения, отвечающих наибольшей ньютоновской вязкости, изменяется незначительно. Однако, при τ_w>0,16 МПа (структурная часть кривой течения) происходит резкое увеличение асимптотического значения числа Нуссельта.

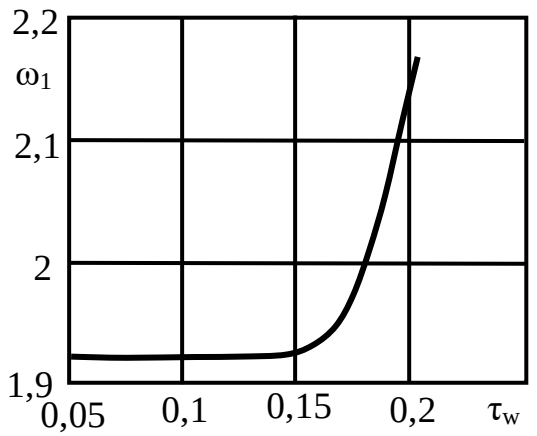


Рис.64. Зависимость первого собственного числа от касательного напряжения на стенке для модели Эллиса. Касательное напряжение в мегапаскалях.

Для модели Эллиса характерна зависимость реологических свойств от касательного напряжения на стенке. Это в частности существенно влияет на профиль скорости. Согласно формулам (220) собственные числа задачи зависят от профиля скорости. Исследуем влияние касательного напряжения на величину первого собственного числа задачи

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{A_{21}}{A_{E11}}}\,.$$

Результаты численного анализа представлены математической модели представлены на рис.64. Видно, что на участке, отвечающем наибольшей ньютоновской вязкости модели Эллиса (τ_w<0,15 МПа) первое собственное число сохраняет постоянное значение ω_1 =1,923. При увеличении касательного напряжения на стенке (τ_w>0,15 МПа) наблюдается рост первого собственного числа. Указанное касательное напряжение соответствует структурному участку кривой течения. При этом темп изменения температуры (показатель экспоненты) с продольной координатой увеличивается. Интересно отметить, что расчётная кривая рис.64 находится в качественном соответствии со второй кривой, представленной на рис.63

6.2.4. Теплообмен на большом удалении от входа

Речь пойдёт об асимптотических свойствах решения рассматриваемой задачи. Расчётную формулу для θ_∞ можно непосредственно получить из задачи (210), положив в уравнении энергии $\partial\theta/\partial Z = 0$, что отвечает случаю игнорирования конвективного переноса на бесконечном удалении от сечения

входа $Z \to \infty$. При этом имеем стационарную задачу диссипативного саморазогрева для функции $\theta_\infty(\xi)$

$$\frac{1}{\xi}\frac{d}{d\xi}\left(\xi\frac{d\theta_\infty}{d\xi}\right) = -Br\Xi(\xi)\Gamma(\xi); \qquad (222)$$

$\xi=1, \quad \theta_\infty=0; \qquad \xi=0, \quad d\theta_\infty/d\xi = 0.$

Квадратурное решение задачи (222) для любой реологической модели имеет вид

$$\theta_\infty = Br\int_\xi^1 \frac{1}{\xi}\int_0^\xi \Xi(\xi)\Gamma(\xi)d\xi d\xi. \qquad (223)$$

Необходимо отметить, что решение (223) является точным. Соответственно, и все полученные ниже результаты являются точными решениями упрощённой задачи (222).

Для рассматриваемых реологических моделей диссипативная функция описывается степенными уравнениями, поэтому полученное расчётное выражение (223) предпочтительнее ряда Фурье-Бесселя, поскольку позволяет получить аналитические выражения для равновесной температуры.

Безразмерная диссипативная функция для модели Эллиса

$$\Gamma\Xi_E = \xi\frac{a\tau_w\xi + b\left(\tau_w\xi\right)^\alpha}{a\tau_w + b\tau_w{}^\alpha}.$$

Подставив это выражение в формулу (223) и выполнив повторное интегрирование находим соответствующую равновесную температуру

$$\theta_{E\infty} = \frac{Br_E}{a\tau_w + b\tau_w{}^\alpha}\left[\frac{a\tau_w\left(1-\xi^4\right)}{16} + \frac{b\tau_w^\alpha\left(1-\xi^{\alpha+3}\right)}{\left(\alpha+3\right)^2}\right]. \qquad (224)$$

Для модели Оствальда-де Виля, соответственно, имеем

$$\Gamma\Xi_{Os} = \xi^{1+\frac{1}{n}}, \qquad \theta_{Os\infty} = Br_{Os}\left(\frac{n}{1+3n}\right)^2\left(1-\xi^{3+\frac{1}{n}}\right). \qquad (225)$$

Сопоставляя полученные выражения для $\theta_{E\infty}$ и $\theta_{Os\infty}$ видно, что в случае

модели Эллиса эпюра температуры зависит от касательного напряжения на стенке. При течении жидкости, реологические свойства которой описываются моделью Оствальда-де Виля, форма эпюры температур (225) однозначно определяется индексом течения и не зависит от касательного напряжения на стенке.

В частном случае, положив n=1 в выражении температуры для степенной жидкости или b=0 – для модели Эллиса, получим известное выражение для ньютоновской жидкости

$$\theta_{\infty N} = \frac{Br}{16}\left(1-\xi^4\right).$$

Выполнен численный анализ для Br=50, τ_w=0,203, ξ=0. Принятое касательное напряжение отвечает структурной ветви кривой течения, т.е. области, в которой обе реологические модели хорошо согласуются. При этом для безразмерной температуры на оси (максимальной) получены следующие значения: согласно (224) $\theta_{E\infty} = 0{,}321$, согласно (225) $\theta_{Os\infty} = 0{,}027$. Расхождение в 11,88 раз! Следует отметить, что при уменьшении касательного напряжения на стенке расхождение между температурами $\theta_{E\infty}$ и $\theta_{Os\infty}$ возрастает. Распределение температуры в поперечном сечении, вычисленное с помощью ряда Фурье-Бесселя (220) для Z=1000, практически совпадает с $\theta_{E\infty}$, которое вычислено по формуле (224). Это свидетельствует в пользу достаточно высокой точности приближённого решения (220).

Используя формулу (217) найдём число Нуссельта. Для модели Оствальда-де Виля с учётом (225) последовательно находим

$$\theta_{Osm} = 2\int_0^1 V_{Os}\theta_{Os\infty}\xi d\xi, \qquad V_{Os} = \frac{1+3n}{1+n}\left(1-\xi^{1+\frac{1}{n}}\right),$$

$$\theta_{Osm} = \frac{Br_{Os}n^2\left[\left(1+3n\right)^2 - n\left(1+5n\right)\right]}{\left(1+n\right)\left(1+3n\right)^2\left(1+5n\right)}, \qquad \left.\frac{d\theta_{Os\infty}}{d\xi}\right|_{\xi=1} = -\frac{Br_{Os}n}{\left(1+3n\right)}.$$

Следовательно, для модели Оствальда-де Виля число Нуссельта на

большом удалении от точки входа может быть найдено по формуле

$$Nu_{Os\infty} = -\left.\frac{d\theta_{Os\infty}}{d\xi}\right|_{\xi=1} \theta_{Osm}{}^{-1}, \qquad Nu_{Os\infty} = \frac{(1+n)(1+3n)(1+5n)}{n\left[(1+3n)^2 - n(1+5n)\right]}. \qquad (226)$$

В частности, в ньютоновском случае (n=1) выражение (226) даёт результат $Nu_{Os\infty} = 4{,}8$, который совпадает с данными Кутателадзе [36]. Для рассмотренного примера n=0.071 расчётное значение числа Нуссельта составляет $Nu_{Os\infty} = 18{,}029$. Вычисленное с помощью ряда (219) (рис.60) число Нуссельта Nu_{Os}=16,791. Расхождение составляет 6,9 %. Расхождение можно объяснить ухудшением сходимости ряда при дифференцировании (числитель числа Нуссельта) и приближённым способом решения задачи.

Для модели Эллиса числитель числа Нуссельта получается путём дифференцирования выражения (224)

$$\left.\frac{d\theta_{E\infty}}{d\xi}\right|_{\xi=1} = -\frac{Br_E}{a\tau_w + b\tau_w{}^{\alpha}}\left[\frac{a\tau_w}{4} + \frac{b\tau_w^{\alpha}}{(\alpha+3)}\right].$$

Знаменатель числа Нуссельта рассчитывается по формулам

$$\theta_{Em} = 2\int_0^1 V_E \theta_{E\infty} \xi d\xi, \qquad \theta_{E\infty} = \frac{Br_E}{a\tau_w + b\tau_w{}^{\alpha}}\left[\frac{a\tau_w\left(1-\xi^4\right)}{16} + \frac{b\tau_w^{\alpha}\left(1-\xi^{\alpha+3}\right)}{(\alpha+3)^2}\right],$$

$$V_E = \left[\frac{a}{2}\left(1-\xi^2\right) + \frac{b\tau_w^{\alpha-1}}{1+\alpha}\left(1-\xi^{1+\alpha}\right)\right]\left(\frac{a}{4} + \frac{b\tau_w^{\alpha-1}}{3+\alpha}\right)^{-1}.$$

В результате интегрирования степенных функций, опустив громоздкие преобразования, окончательно имеем

$$\theta_{Em} = \frac{Br_E}{\left(a\tau_w + b\tau_w{}^{\alpha}\right)\left(\frac{a}{4} + \frac{b\tau_w^{\alpha-1}}{3+\alpha}\right)}\left[\begin{array}{l}\dfrac{ab\tau_w{}^{\alpha}\left(\alpha^4 + 22\alpha^3 + 90\alpha^2 + 378\alpha + 207\right)}{24(\alpha+1)(\alpha+3)^2(\alpha+5)(\alpha+7)} + \\ + \dfrac{b^2\tau_w{}^{2\alpha-1}\left(\alpha^2 + 5\alpha + 4\right)}{(\alpha+1)(\alpha+3)^3(\alpha+5)} + \dfrac{5a^2\tau_w}{384}\end{array}\right].$$

Подставив полученные результаты в расчётную формулу числа Нуссельта

(217), получим следующее выражение асимптотического значения числа Нуссельта для жидкости Эллиса

$$Nu_{E\infty} = \tau_w \left(\frac{a}{4} + \frac{b\tau_w^{\alpha-1}}{3+\alpha} \right)^2 \left[\begin{array}{l} \dfrac{ab\tau_w{}^{\alpha}\left(\alpha^4 + 22\alpha^3 + 90\alpha^2 + 378\alpha + 207\right)}{24(\alpha+1)(\alpha+3)^2(\alpha+5)(\alpha+7)} + \\ + \dfrac{b^2\tau_w{}^{2\alpha-1}\left(\alpha^2 + 5\alpha + 4\right)}{(\alpha+1)(\alpha+3)^3(\alpha+5)} + \dfrac{5a^2\tau_w}{384} \end{array} \right]^{-1}.$$

Видно, что при течении жидкости Эллиса асимптотическое число Нуссельта зависит от касательного напряжения на стенке и не зависит от числа Бринкмана.

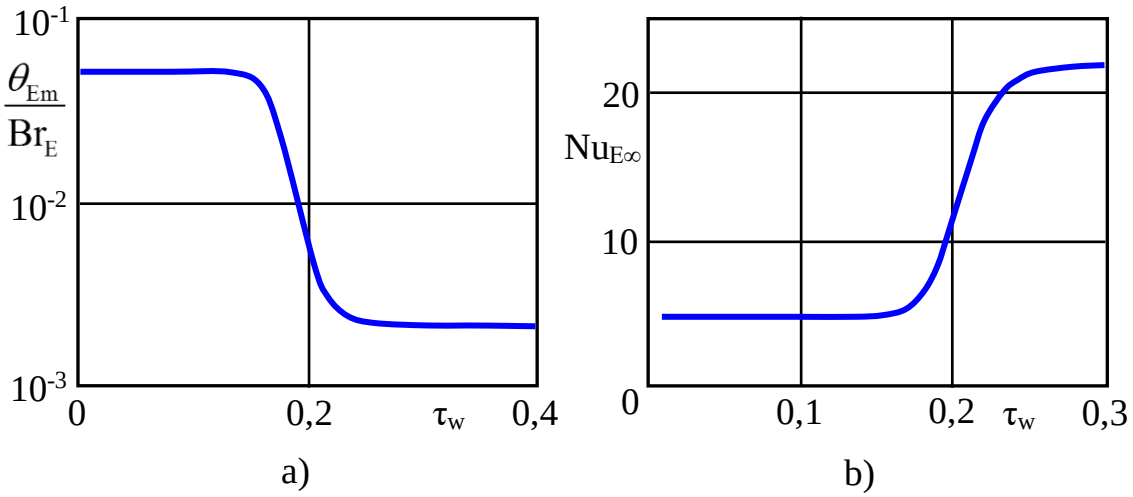


Рис.65. Зависимость среднеобъёмной температуры (a) и числа Нуссельта (b) от касательного напряжения на стенке для модели Эллиса. Касательное напряжение в мегапаскалях.

На рис.65 представлена рассчитанная по последним выражениям зависимость среднемассовой безразмерной температуры (a) и числа Нуссельта (b) на участке тепловой стабилизации от касательного напряжения на стенке. Зависимость (b) подобна зависимости представленной на рис.63, которая была построена с использованием ряда Фурье, но для более широкого диапазона касательных напряжений. В области малых касательных напряжений (τ_w<0,15 МПа), отвечающих наибольшей ньютоновской вязкости, число Нуссельта составляет $Nu_{E\infty}$=4,8. Далее наступает структурная ветвь кривой течения и

число Нуссельта возрастает. Интересно появление второй асимптоты в области (τ_w>0,25 МПа).

Следует напомнить, что в области больших касательных напряжений модель Эллиса ведёт себя подобно степенной модели и обеспечивает вполне достоверные реологические характеристики. Жаль, модель Эллиса неприменима в области наименьшей ньютоновской вязкости. Возможно, там можно было бы наблюдать падение числа Нуссельта к начальной асимптоте. Можно этот график сопоставить с представленным на рис.63. Характер изменения числа Нуссельта на этих графиках идентичен. Если на рис.63 значению τ_w=0.3 МПа отвечает асимптотическое значение $Nu_{E\infty}$=19.985, вычисленное по формуле (220), то согласно последней формуле точное значение $Nu_{E\infty}$=19.985=21.821. Расхождение -8.414 %. Расхождение объясняется тем, что метод Канторовича обеспечивает среднеинтегральное приближение собственных функций задачи Гретца-Нуссельта, но не производных от собственных функций. Дифференцирование приближённой функции всегда связано с увеличением погрешности.

Трудно объяснить появление второй асимптоты на рис.65, b. Так даже при увеличении τ_w до 0,4 МПа число Нуссельта сохраняло постоянное значение, точнее, незначительно увеличивалось. Однако расчёты показывают значительное понижение температуры (рис.65,a) с увеличением касательного напряжения на стенке, обусловленное существенным понижением вязкости; при повышении τ_w от 0,2 до 0,3 МПа вязкость уменьшается на 3 десятичных порядка, соответственно, настолько же увеличивается скорость сдвига. Например, безразмерная температура при τ_w=0 МПа составляла $\theta_{E\infty}/Br_E$=0,052; при τ_w=0,2 МПа - $\theta_{E\infty}/Br_E$=0,007504; при τ_w=0,4 МПа - $\theta_{E\infty}/Br_E$=0,002191.

6.2.5. О нагреве жидкости с учётом диссипации

Выше отмечалось, что решение задачи Гретца-Нуссельта и анализ проведены для случая охлаждения жидкости (температура стенки трубы ниже

начальной температуры жидкости). Это относится к аномально вязким жидкостям (разделы 6.1. – 6.2.4). Между тем, задача нагревания неньютоновских сред достаточно распространена в промышленности. Ввиду указанного обстоятельства остановимся на этом вопросе подробнее.

При отсутствии источников тепловыделения (Br=0) все полученные результаты могут быть распространены на случай нагрева жидкости ($T_o<T_w$). Вариант $T_o<T_w$, $Br\neq0$ требует отдельного рассмотрения, поскольку в этом случае уравнение конвективного теплообмена Ньютона малопригодно для описания процесса. Это обусловлено наличием в знаменателе выражения, определяющего число Нуссельта разности температур. Разность температур в сечении инверсии направления теплового потока на стенке трубы обращается в нуль. Имеется в виду точка пересечения кривой среднеобъемной температуры с изотермой, отвечающей температуре стенки. Соответственно, число Нуссельта в указанном сечении терпит разрыв второго рода (локальная сингулярность). Между тем, отсутствуют физические предпосылки для разрыва или неопределённости параметров теплообмена. Остаются две возможности расчёта количества тепла: по изменению энтальпии потока (теплового баланса) либо по тепловому потоку от стенки (закон Фурье).

Найдём количество тепла, получаемое жидкостью. Теплосодержание протекающей жидкости складывается из теплового потока от стенок трубы и выделения тепла за счёт вязкого трения. Повышение энтальпии жидкости на участке канала, протяжённостью от 0 до z, можно найти по формуле

$$Q=\rho C\pi R^2 v_c (T_m - T_m\big|_{z=0}) . \qquad (227)$$

Здесь учитывалось условие положительных значений теплового потока (Q>0), поэтому разность среднеобъёмных температур записана так $(T_m - T_m\big|_{z=0})>0$.

Согласно определению среднеобъёмной температуры (214) можем записать для начального сечения

$$T_m\big|_{z=0}=\frac{2}{R^2 v_c}\int_0^R T_0 v_z r dr = T_0 .$$

Безразмерная среднеобъёмная температура определяется выражением $\theta_m = (T_m - T_w)/(T_o - T_w)$. Следовательно, формула (227) примет вид

$$Q = \rho C \pi R^2 v_c (T_w - T_o)(1 - \theta_m).$$

Перейдём к безразмерному расходу тепла Q_+

$$Q_+ = \frac{Q}{\rho C \pi R^2 v_c (T_w - T_o)} = 1 - \theta_m . \qquad (228)$$

Поскольку при нагревании имеет место условие T_w-T_o>0, то для теплосодержания всегда будет выполняться неравенство Q_+>0. Произведение $\pi R^2 \rho v_c$ характеризует массовый расход жидкости, соответственно, произведение $\pi R^2 \rho C v_c (T_w - T_o)$ характеризует затраты тепла, необходимого для нагрева жидкости от начальной температуры T_o до температуры стенки канала T_w без учёта диссипативного тепловыделения. Следовательно, при отсутствии объёмного тепловыделения имеет место асимптотическое свойство $Z \to \infty, Q_+ \to 1$.

Будем использовать полученные выше расчётные формулы. Так для среднеобъёмной температуры используется интеграл

$$\theta_m = 2\int_0^1 V\theta\xi d\xi ,$$

который необходимо рассматривать совместно с выражением для температуры (213) и выражением для безразмерной скорости, которое зависит от рассматриваемой реологической модели.

Число Бринкмана имеют идентичную структуру. Рассмотрим, например, выражение числа Бринкмана для модели Эллиса

$$Br_E = \frac{R^2 \tau_w \left(a\tau_w + b\tau_w{}^{\alpha} \right)}{\lambda \left(T_0 - T_w \right)} .$$

В знаменателе стоит разность температур $(T_0 - T_w)$. В условиях нагрева жидкости от стенок трубы эта разность отрицательна. Следовательно, для расчёта нагрева можно использовать все ранее полученные формулы для

случая охлаждения, но число Бринкмана записывать со знаком «минус».

На рис.66 представлены расчётные линии распределения безразмерного теплосодержания в жидкости по длине трубы. Нижние две линии отвечают жидкости Оствальда – де Виля, причём, самая нижняя – случаю отсутствия тепловыделения. Чётко видно, что при отсутствии тепловыделения ордината горизонтальной асимптоты функции Q_+ равна единице. Тепловая стабилизация наступает после Z=0,6. При этом вся жидкость в поперечном течении принимает температуру нагретой стенки трубы T_w. С учётом объёмных тепловыделений за счёт вязкого трения среднеобъёмная температура жидкости превышает температуру стенки трубы, поэтому для линии 2 асимптота находится выше единицы. Величина касательного напряжения на стенке не влияет на течение и теплообмен степенной жидкости (таково свойство этой реологической модели).

В случае течения жидкости Эллиса (линии 3, 4) значение тепловыделении, характеризуемое числом Бринкмана, было идентично, и составляло Br_E=-30. Линия 3 отвечает касательному напряжению на стенке τ_w=0,205 МПа, т.е. жидкость описывается структурной ветвью кривой течения. Именно поэтому линия 3 близка к линии 2. Линия 4 (касательное напряжение на стенке τ_w=0,05 МПа) отвечает наибольшей ньютоновской вязкости системы, поэтому тепловыделение значительно. Стабилизация температурного поля наступает приблизительно после Z=1.

В условиях диссипативного тепловыделения ($Br \neq 0$) точка пересечения линии Q_+ с горизонтальной линией Q_+=1 является точкой инверсии теплового потока, поскольку в этой точке среднеобъёмная температура жидкости равна температуре стенки. Дальше по направлению течения температура жидкости повышается и превосходит температуру стенки. При этом тепловой поток направлен от жидкости к стенке.

Как видно из рис.66 линии описываются гладкими монотонными функциями, и в отличие от зависимости числа Нуссельта, не имеют сингулярностей. Следовательно, предложенная методика вполне приемлема

для инженерных расчётов.

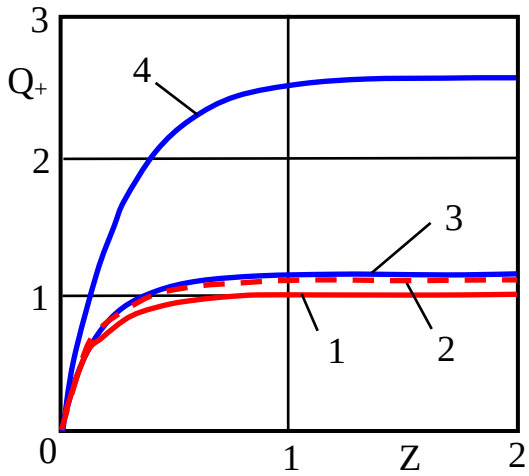


Рис.66. Распределение теплосодержания нагреваемой жидкости по длине трубы. Модель Оствальда – де Виля: 1 – Br_{Os}=0, 2 – Br_{Os}=-30; модель Эллиса Br_E=-30: 3 – τ_w=0,205 МПа, 4 - τ_w=0,05 МПа.

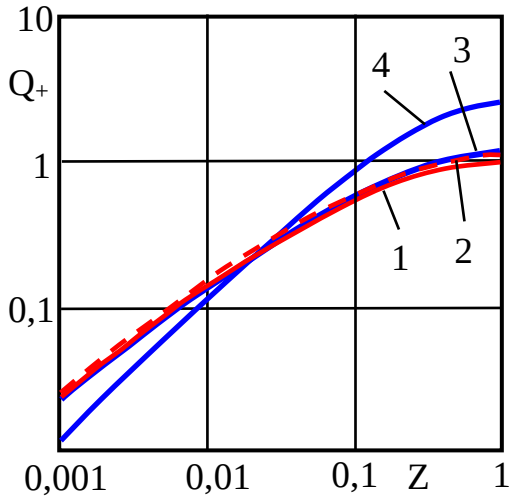


Рис.67. Распределение теплосодержания нагреваемой жидкости по длине трубы на начальном участке. Модель Оствальда – де Виля: 1 – Br_{Os}=0, 2 – Br_{Os}=-30; модель Эллиса Br_E=-30: 3 – τ_w=0,205 МПа, 4 - τ_w=0,05 МПа.

Представляет прикладной интерес расчёт теплообмена при малых значениях безразмерной длины. Поскольку время пребывания жидкости в трубопроводе может быть незначительным. Поэтому график рис.66 был продублирован для малых длин в двойных логарифмических координатах. Результаты представлены на рис.67. Кривые обозначены идентично рис.66. Видно, что при малых длительностях термического взаимодействия диссипативные эффекты практически не проявляются, поэтому линии 1-3 близки. В то же время реологический фактор весьма существенен, поэтому положение линии 4 значительно отличается от остальных.

Линия 4 отвечает ньютоновскому состоянию системы. Она в первом приближении описывается линейной функцией: $1-\theta_m=7Z$. Аппроксимация справедлива для условий: $Z<0,1$ и Br_E=-30.

Кроме указанной формулы (227) теплосодержание можно найти и по другим формулам. Например, используя средний коэффициент теплоотдачи

$$Q = 2\pi R\alpha_c (T_w - T_m) z \ .$$

Либо проинтегрировав кондуктивный тепловой поток у стенки трубы

$$Q = -2\pi R\lambda \int_0^z \left.\frac{\partial T}{\partial r}\right|_{r=R} dz \ .$$

Необходимо отметить, что операция дифференцирования ряда ухудшает его сходимость. Поскольку температура определяется из решения краевой задачи, то тепловыделение за счёт вязкого трения учитывается автоматически.

О числе Нуссельта. Согласно выражению (217) локальное число Нуссельта в безразмерной форме определяется дробью

$$Nu = -\left.\frac{\partial\theta}{\partial\xi}\right|_{\xi=1} \theta_m^{-1}, \quad Nu = \alpha_+ R/\lambda \ .$$

Рассмотрим изменение числителя и знаменателя по длине трубы при отрицательном значении числа Бринкмана (нагрев жидкости). Согласно выражению (218) можем записать

$$-\left.\frac{\partial\theta}{\partial\xi}\right|_{\xi=1} = \sum_{s=1}^{\infty} \left\{ \begin{array}{l} \left[\dfrac{2}{k_s J_1(k_s)} - Br\dfrac{A_{3s}}{A_{2s}} \right] \times \\ \times \exp\left(-\dfrac{A_{2s}}{A_{1s}} Z \right) + Br\dfrac{A_{3s}}{A_{2s}} \end{array} \right\} k_s J_1(k_s) \ , \qquad (229)$$

$$\theta_m = 2\int_0^1 V\theta\xi d\xi =$$

$$= 2\sum_{s=1}^{\infty} \left\{ \begin{array}{l} \left[\dfrac{2}{k_s J_1(k_s)} - Br\dfrac{A_{3s}}{A_{2s}} \right] \times \\ \times \exp\left(-\dfrac{A_{2s}}{A_{1s}} Z \right) + Br\dfrac{A_{3s}}{A_{2s}} \end{array} \right\} \int_0^1 V J_0(k_s\xi)\xi d\xi \ .$$

На рис.68 представлены характерные расчётные распределения по длине трубы среднеобъёмной температуры (линия 1) и градиента температуры у стенки (линия 2) при нагреве жидкости Оствальда – де Виля. Использовались формулы (229). Число Бринкмана было равно Br_{Os}=-30. Из

рисунка видно, что среднеобъёмная температура (знаменатель числа Нуссельта) в окрестности абсциссы Z=0,5 принимает нулевое значение, переходя от положительных значений к отрицательным (точка инверсии направления теплового потока). Следовательно, в этом сечении число Нуссельта претерпевает разрыв второго рода (от -∞ до +∞). Также видно, что на малых расстояниях от входа (Z<0,1) число Нуссельта положительно. При наступлении тепловой стабилизации (Z>1) число Нуссельта принимает положительное постоянное значение. Таким образом, на участке промежуточных значений длины трубы число Нуссельта не может использоваться для инженерных расчётов процесса нагрева жидкости.

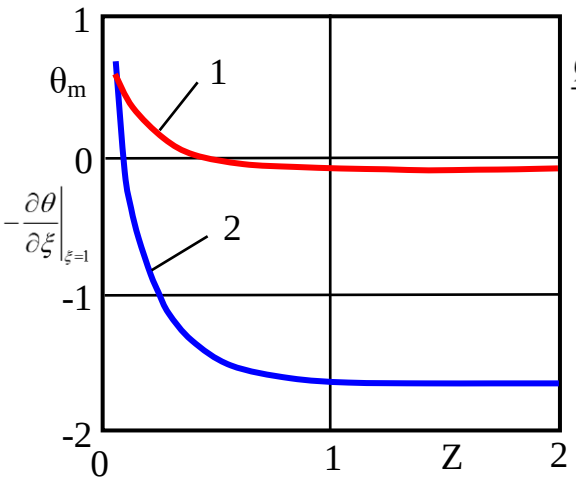


Рис.68. Распределение среднеобъёмной температуры (линия 1) и градиента температуры на стенке (2) при нагревании (Br_{Os}=-30) жидкости Оствальда – де Виля.

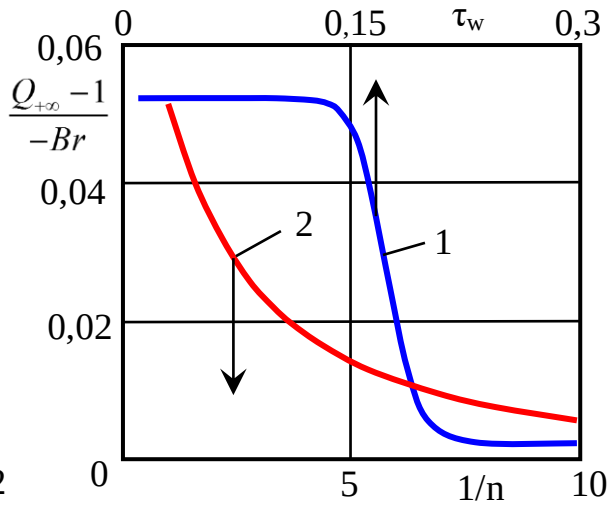


Рис.69. Зависимость расхода тепла на участке стабилизации от напряжения на стенки (1 - модель Эллиса) и индекса течения (2 - степенная модель).

Согласно результатам раздела 6.2.4 в условиях термической стабилизации (Z>>1) для модели Эллиса имеем соотношения:

$$\theta_{Em} = 2\int_0^1 V_E \theta_{E\infty} \xi d\xi, \qquad \theta_{E\infty} = \frac{Br_E}{a\tau_w + b\tau_w{}^{\alpha}}\left[\frac{a\tau_w\left(1-\xi^4\right)}{16} + \frac{b\tau_w^{\alpha}\left(1-\xi^{\alpha+3}\right)}{\left(\alpha+3\right)^2}\right],$$

$$V_E=\left[\frac{a}{2}\left(1-\xi^2\right)+\frac{b\tau_w^{\alpha-1}}{1+\alpha}\ \left(1-\xi^{1+\alpha}\right)\right]\left(\frac{a}{4}+\frac{b\tau_w^{\alpha-1}}{3+\alpha}\right)^{-1},$$

$$\theta_{Em}=\frac{Br_E}{\left(a\tau_w+b\tau_w{}^{\alpha}\right)\left(\frac{a}{4}+\frac{b\tau_w^{\alpha-1}}{3+\alpha}\right)}\left[\begin{array}{l}\dfrac{ab\tau_w{}^{\alpha}\left(\alpha^4+22\alpha^3+90\alpha^2+378\alpha+207\right)}{24(\alpha+1)(\alpha+3)^2(\alpha+5)(\alpha+7)}+\\ +\dfrac{b^2\tau_w{}^{2\alpha-1}\left(\alpha^2+5\alpha+4\right)}{(\alpha+1)(\alpha+3)^3(\alpha+5)}+\dfrac{5a^2\tau_w}{384}\end{array}\right].$$

Поэтому на участке тепловой стабилизации (Z>>1) значение безразмерного расхода тепла $Q_{+\infty}$ (228) при течении жидкости, подчиняющейся реологической модели Эллиса, можно найти по формуле

$$\frac{Q_{+\infty}-1}{-Br_E}=\frac{1}{\left(a\tau_w+b\tau_w{}^{\alpha}\right)\left(\frac{a}{4}+\frac{b\tau_w^{\alpha-1}}{3+\alpha}\right)}\left[\begin{array}{l}\dfrac{ab\tau_w{}^{\alpha}\left(\alpha^4+22\alpha^3+90\alpha^2+378\alpha+207\right)}{24(\alpha+1)(\alpha+3)^2(\alpha+5)(\alpha+7)}+\\ +\dfrac{b^2\tau_w{}^{2\alpha-1}\left(\alpha^2+5\alpha+4\right)}{(\alpha+1)(\alpha+3)^3(\alpha+5)}+\dfrac{5a^2\tau_w}{384}\end{array}\right]. \tag{230}$$

При отсутствии тепловыделения $Br_E=0$, $Q_{+\infty}=1$.

Соответственно, согласно результатам раздела 6.2.4 для модели Оствальда - де Виля имеем следующие соотношения:

$$\theta_{Osm}=2\int_0^1 V_{Os}\theta_{Os\infty}\xi d\xi, \qquad V_{Os}=\frac{1+3n}{1+n}\left(1-\xi^{1+\frac{1}{n}}\right), \tag{231}$$

$$\theta_{Osm}=\frac{Br_{Os}n^2\left[(1+3n)^2-n(1+5n)\right]}{(1+n)(1+3n)^2(1+5n)}, \qquad \frac{Q_{+\infty}-1}{-Br_{Os}}=\frac{n^2\left[(1+3n)^2-n(1+5n)\right]}{(1+n)(1+3n)^2(1+5n)}.$$

При этом, безразмерный расход тепла зависит от числа Бринкмана и индекса течения.

Формулы (230), (231) можно использовать при расчёте протяжённых трубопроводов, для которых выполняется условие Z>1.

Результаты анализа формул (230), (231) представлены на рис.69. Ось ординат отвечает асимптотическим значениям тепловой нагрузки. Для модели Эллиса (линия 1) зависимость напоминает изменение эффективной вязкости с изменением касательного напряжения на стенке. Отчётливо виден участок наибольшей ньютоновской вязкости (при τ_w<0,15 МПа). Далее идёт структурная ветвь кривой течения, соответственно, понижение эффективной вязкости. Зависимость имеет две асимптоты.

В случае степенной жидкости степень аномалии вязкости характеризует индекс течения. Для получения качественного соответствия с линией 1 по оси абсцисс отложена обратная величина индекса течения. Таким образом, с увеличением 1/n псевдопластические свойства степенной жидкости усиливаются. Зависимость носит характер убывающей функции. Из сопоставления линий 1 и 2 можно сделать вывод, что модель Эллиса можно в какой-то степени имитировать степенной жидкостью, если положить индекс течения, зависящим от касательного напряжения на стенке.

Все представленные в этом разделе подходы к анализу процесса нагрева могут быть распространены на течение и теплообмен вязкопластичной жидкости Бингама.

Исследования этого раздела показали, что формула конвективного теплообмена Ньютона неприменима в случае нагрева жидкости с учётом вязкой диссипации. Поскольку в некотором сечении канала имеет место инверсия теплового потока у стенки, и как следствие – число Нуссельта терпит бесконечный разрыв второго рода.

Следует отметить, что в научной литературе имеются работы, посвященные критике «закона Ньютона». В качестве примера можно указать на серию работ Давидзона М.И. [52]. Автор рассмотрел частный случай теплового нагружения - постоянная плотность теплового потока на стенке трубы. Показана возможность решения инженерных задач конвективного теплообмена без использования формулы Ньютона.

Выводы.

1. В пределах данной постановки задачи, степенная модель в отличие от модели Эллиса не позволяет раскрыть фундаментальный физический эффект саморазогрева жидкости. Именно модель Эллиса иллюстрирует сильное влияние реологических свойств на характер термического взаимодействия жидкости и нагретой стенки.

2. Именно в задаче конвективного переноса с учётом тепловыделений проявились наиболее существенные недостатки степенной модели, в частности, её независимость от касательного напряжения на стенке. Соответствующая математическая модель даёт весьма искажённую картину теплообмена. Так при высокой интенсивности тепловыделения модель Эллиса показывает рост температуры с расстоянием, а степенная – понижение.

4. Полученные результаты убедительно опровергают «принцип взаимозаменяемости» реологических моделей, предложенный в монографии Фройштетера [41].

5. Степенная модель не только искажает физическую картину явления, но иногда исключает саму возможность обнаружить эффекты, обусловленные аномалией вязкости. Например, для модели Эллиса обнаружена вторая асимптота числа Нуссельта на участке стабилизации температурного поля, которая появляется при существенном увеличении касательного напряжения на стенке. Первая асимптота отвечает малым касательным напряжениям на стенке, т.е наибольшей ньютоновской вязкости.

6. Предложен эффективный метод приближённого решения задачи Гретца-Нуссельта (метод Канторовича), обеспечивающий инженерно приемлемую точность решения.

7. Показано, что даже в случае маловязких (малые числа Бринкмана), в том числе ньютоновских, жидкостей, при расчёте теплообмена в протяжённых трубопроводах необходимо учитывать диссипативный эффект разогрева.

8. Предложено понятие «диссипативная асимптота числа Нуссельта».

9. Показано, что при нагреве с учётом диссипации локальное число

Нуссельта терпит разрыв второго рода. При этом, расчёты удобно выполнять, используя безразмерную тепловую нагрузку.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мак-Келви Д.М. Переработка полимеров. – М.: Химия, 1965. –444с.
2. Виноградов Г.В., Малкин А.Я. Реология полимеров. – М.: Химия,1977. – 440с.
3. Шульман З.П. Конвективный тепломассоперенос реологически сложных жидкостей. – М.: Энергия, 1975.
4. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. – М.:Наука,1969.–744с.
5. Уилкинсон У.Л. Неньютоновские жидкости. Гидромеханика, перемешивание и теплообмен. – М.: Мир. 1964. - 217 с.
6. Красовский В.Н., Воскресенский А.М., Харчевников В.М. Примеры и задачи по технологии переработки эластомеров. – Л.: Химия, 1984. – 240 с.
7. Шаповалов В.М. Течение аномально вязкой жидкости в клинообразном зазоре с упругой стенкой/В.М.Шаповалов//Известия ВолгГТУ: межвуз. сб. научн. ст./ ВолгГТУ. - Волгоград, 2010. – (Серия «Реология, процессы и аппараты химической технологии»). –С.74-77.
8. Торнер Р.В. Теоретические основы переработки полимеров. –М.: Химия,1977.–464 с.
9. Самойлов А.В. Тепловые расчёты червячных и валковых машин, Москва: Машиностроение, 1978.
10. Астарита Дж., Марручи Дж. Основы гидромеханики неньютоновских жидкостей, Москва: Мир, 1978. (Giovanni Astarita, G. Marrucci. Principles of Non-Newtonian Fluid Mechanics, McGraw-Hill Inc.,US (May 1974))
11. Лукач Ю.Е., Рябинин Д.Д., Метлов Б.Н. Валковые машины для переработки пластмасс и резиновых смесей, Москва: Машиностроение, 1967.
12. Бекин Н.Г. Валковые машины для переработки резиновых смесей (основы теории). Ярославль: ЯТИ, 1969.

13. Рябинин Д.Д., Лукач С.Е. Смесительные машины для пластмасс и резиновых смесей, Москва: Машиностроение, 1972.
14. Шерышев М.А. Математическое описание процессов переработки пластмасс, Москва: РХТУ им. Д.И. Менделеева, 2005.
15. Клинков А.С., Кочетов В.И., Соколов М.В., Беляев П.С., Однодолько В.Г. Проектирование и расчёт валковых машин для полимерных материалов, Тамбов, Издательство ТГТУ, 2005.
16. Андреев А.Н. Математическое моделирование течения неньютоновской жидкости в зазоре вращающихся валков и методика расчёта энергосиловых параметров раскатки теста. Научный журнал НИУ ИТМО (Электронный вариант). Серия: «Процессы и аппараты пищевых производств». 2011. Вып. №2.
17. Голованчиков А.Б., Тябин Н.В. Расчёт реактора вытеснения по кинетическим и реологическим данным//Известия вузов. Химия и хим. Технология. – 1988. – Т.31. – вып.11. – С.119-123.
18. Голованчиков А.Б., Рябчук Г.В., Дулькина Н.А. Расчёт и проектирование политропных реакторов вытеснения с учётом реологических свойств реакционной массы//Известия ВолгГТУ. – 2004. – №5. – С.23-27.
19. Голованчиков А. Б., Дулькина Н. А., Ильин А. В., Ильина Л. А. Расчёт трубчатого реактора с неньютоновской реакционной массой и маловязким пристенным слоем//Известия Волгоградского государственного технического университета. 2010.- № 3 . - том 1. –С.16-20.
20. Пат. № 2007702 Российская Федерация, МПК: 5G 01N 11/00 A. Способ определения реологических свойств жидкостей / А.Б. Голованчиков, Е.А. Брифф, Н.В. Тябин, Ю.О. Болотин, З. Лаки; заявитель и патентообладатель «Волгоградский политехнический институт». - № 4949347/25; заявл. 26.06.1991; опубл. 15.02.1994.
21. Бернхардт Э. Переработка термопластичных материалов. – М.: Химия, 1965.–747с.

22. Шенкель Г. Шнековые прессы для пластмасс. – М.: Госхимиздат, 1962. -466с.
23. Ким В.С. Теория и практика экструзии полимеров. – М.: Химия, КолосС, 2005. – 568с.
24. Труфанова Н.М., Щербинин А.Г., Янков В.И. Плавление полимеров в экструдерах. – М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика». Институт комплексных исследований. 2009. – 336с.
25. Демидович Б.П., Марон И.А., Шувалова Э.З. Численные методы анализа. – М.: Наука, 1967. - 368с.
26. Бортников В.Г. Производство изделий из пластических масс. Том 3. Проектирование и расчет технологической оснастки. - Казань: Дом печати, 2004.
27. Хаметова М.Г. Описание стационарного, неизотермического течения неньютоновской жидкости в одношнековом экструдере//Вестник Саратовского государственного технического университета. Проблемы естественных наук. Математика, 2с(64), том 1, 2012. - С.15-19.
28. Пономарёва М.А., Филина М.П., Якутёнок В.А. Циркуляционное течение высоковязкой неньютоновской жидкости в канале одношнекового экструдера// Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2016. №2(40). – С.97-106.
29. Шаповалов В.М., Харитонов В.Н. О применении модели Оствальда – де Виля для анализа течения Куэтта//Механика композитных материалов и конструкций. Том 23. №3. 2017. -С. 322-330.
30. Шаповалов В.М. О применимости модели Оствальда – де Виля для решения прикладных задач//Инженерно-физический журнал. Том 90, №5. 2017. - С. 1275-1281.
31. Зябицкий А. Теоретические основы формования волокон. – М.: Химия, 1979.
32. Шаповалов В.М. Влияние реологической модели на решение задачи диссипативного разогрева неньютоновской жидкости// Энерго- и ресурсосбережение: промышленность и транспорт. Н.-т. журнал. Издательство ВолгГТУ. №1 (18). 2017. - С.50-53.

33. Shapovalov V. M. On the applicability of the Ostwald – de Waele model in solving applied problems// Journal of Engineering Physics and Thermophysics, Vol. 90, No. 5, September, 2017. S.1213-1218.
34. Цой П.В. Методы расчёта задач тепло - массопереноса. – М.: Энергоатомиздат, 1984. - 416 с.
35. Беляев Н.М., Рядно А.А. Методы нестационарной теплопроводности. – М.: Высш. школа, 1978. – 328с.
36. Кутателадзе С.С. Теплопередача и гидродинамическое сопротивление: Справочное пособие. – М.: Энергоатомиздат, 1990. – 367с.
37. Петухов Б.С. Теплообмен и сопротивление при ламинарном течении жидкости в трубах. М.: Энергия, 1967. - 411с.
38. Ерёмин А.В., Будыльников Н.М. Об одном методе получения аналитического решения задачи Гретца-Нуссельта//Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2010. №3(24). С.193-198.
39. Еремин А.В., Кудинов И.В., Жуков В.В. Об одном методе решения задач теплообмена при течении жидкостей в плоских каналах// Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2016. Т.20, №1. С.109-120.
40. Канторович Л.В., Крылов В.И. Приближённые методы высшего анализа. – Л.: Физматгиз, 1962. – 708с.
41. Фройштетер Г.Б., Данилевич С.Ю., Радионова Н.В. Течение и теплообмен неньютоновских жидкостей в трубах. – Киев, Наук. думка, 1990. – 216с.
42. Малкин А.Я., Исаев А.И. Реология: концепции, методы, приложения/Пер. с англ. СПб.: Профессия, 2007. – 560с.
43. Malkin A.Y., Isayev A.I. Rheology: conceptions, methods, applications. Chem. Tec Publishing, Toronto, Canada. 2005.
44. Тадмор З., Гогос К. Теоретические основы переработки полимеров. Пер. с англ. – М.: Химия, 1984. 632с., - Нью-Йорк. 1979.
45. Tadmor Z., Gogos C. Principles of polymer processing. Wiley-Interscience, USA. 1979.
46. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. – М.:

Наука, 1981.
47. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами. Под редакцией Абрамовица М., Стиган И. – М.: Наука, 1979.
48. Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф. Специальные функции. – М.: Наука, 1964.
49. Берд Р., Стьюарт В., Лайтфут Е. Явления переноса. – М.: Химия, 1974. – 688с.
50. Шаповалов В.М. О применении модели Оствальда–де Виля для описания течения неньютоновской жидкости в зазоре встречно вращающихся валков. Инженерно-физический журнал. Том 91, №2. 2018. - С. 2652-2660. (Shapovalov V. M. A Comparative Analysis of the Ostwald–De Waele and Ellis Rheological Equations in Solving the Graetz–Nusselt Problem// Journal of Engineering Physics and Thermophysics, 2019. Vol. 92, No. 6, November. pp. 1603-1611)
51. Маковей Н. Гидравлика бурения. – М.: Недра, 1986.-536 с.
52. Давидзон М.И. //Вестн. Иван. гос. ун-та. Сер.: Биология. Химия. Физика. Математика. 2011. Вып. 2. С. 79-94.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Краткие сведения о реологических моделях Оствальда – де Виля и Эллиса

Реология – наука о деформациях и текучести вещества возникла в первой половине XX в. и выделилась в самостоятельную область механики сплошных сред. Роль и значение реологии в прикладном аспекте прогрессивно возрастают в связи с интенсивным развитием энергетики, технологии, особенно химической, строительной индустрии, нефтедобычи и др. Для описания течений материалов, например, путём составления математической модели, необходимо знать зависимость их текучих свойств от приложенных напряжений. Указанная зависимость, в частности, позволяет рассчитывать потребляемую мощность (или затраты энергии) при движении жидкости.

С середины 19 века появилась и постепенно укреплялась теория вязкой жидкости, основанная на модели Ньютона, устанавливающей линейную связь между касательными напряжениями и соответствующими скоростями необратимой деформации сдвига.

Для условий одномерного сдвигового течения несжимаемой жидкости закон Ньютона формулируется в виде

$$\tau = -\mu \frac{\partial \upsilon_x}{\partial y} = -\mu \dot{\gamma}$$

где τ - касательное напряжение, μ - динамическая вязкость, $\partial \upsilon_x / \partial y$ - скорость сдвига. Часто скорость сдвига обозначают так $\partial \upsilon_x / \partial y = \gamma$.

Реологические свойства исследуют с помощью специальных приборов - вискозиметров. Основные типы вискозиметров: капиллярные и ротационные. В первых исследуемую жидкость пропускают сквозь капилляр, контролируя расход и гидравлическое сопротивление капилляра. Во втором случае жидкость подвергается сдвиговым деформациям в коаксиальном зазоре двух соосных цилиндров, из которых один вращается, а другой – неподвижен. Течение простого сдвига поясняется рис. 1. Жидкость заключена между двумя горизонтальными пластинками: нижняя – неподвижна, а верхняя перемещается с постоянной скоростью. На поверхность верхней пластинки со стороны жидкости действует касательное напряжение.

График зависимости касательного напряжения от скорости сдвига, называемый кривой течения, для ньютоновской жидкости имеет вид прямой линии, проходящей через начало координат (рис.2). Тангенс угла наклона к оси γ совпадает с величиной μ - единственным реологическим параметром. Величина μ не зависит от кинематических

(скорости, ускорения, смещения) и динамических (силы, напряжения) характеристик движения.

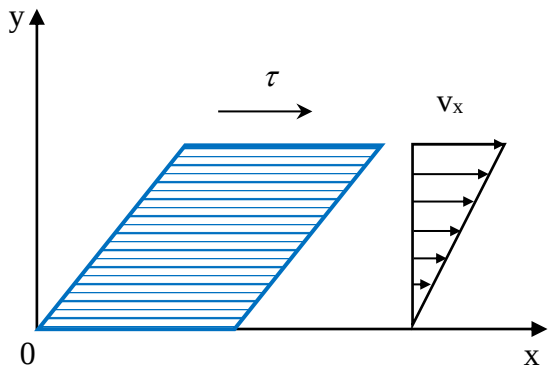


Рис. 1.

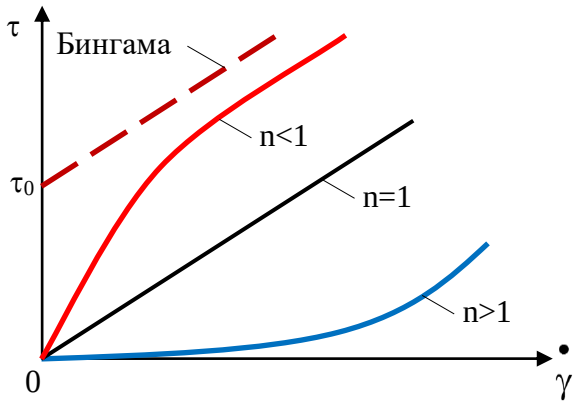


Рис. 2.

Линейному закону Ньютона хорошо повинуются все газы и однофазные низкомолекулярные, т.е. простые жидкости. Однако более сложные по структуре жидкости, например растворы и расплавы полимеров, дисперсные текучие системы (суспензии, эмульсии, пасты и др.), в большинстве случаев имеют кривую течения, отличную от ньютоновской.

Аномально вязкие жидкости подразделяются на псевдопластичные с кривой течения, обращённой выпуклостью в сторону оси напряжений, и дилатантные с кривой течения, обращённой выпуклостью в сторону оси скоростей сдвига.

Вязкопластичные среды с линейной кривой течения (рис.2) называются жидкостями Шведова-Бингама. Примерами вязкопластичных систем могут служить концентрированные топлива, смазки, буровые и промывочные жидкости, пульпы, пасты, строительные растворы, краски, пищевые, кондитерские и фармацевтические массы, наполненные ракетные топлива, кровь и т.д.

Реологическое уравнение для таких систем имеет вид

$$\tau>\tau_0, \quad \tau=\tau_0+\mu\gamma\ ,$$

$$\tau<\tau_0, \quad \gamma=0,$$

где τ_0-начальное напряжение сдвига, μ- пластическая вязкость. Согласно уравнениям, течение начинается ($\gamma\neq0$), если напряжение сдвига превышает некоторое значение τ_0. При меньших напряжениях течение отсутствует ($\gamma=0$).

Если предел текучести равен нулю $\tau_0=0$ то модель Шведова-Бингама переходит в ньютоновскую.

Подавляющее большинство опубликованных до настоящего времени работ по неньютоновским жидкостям полностью либо частично опираются на степенную модель.

Для описания аномальных свойств предложено и широко используется в инженерных приложениях «степенное уравнение» или жидкость Оствальда- де Виля

$$\tau = \mu_0 \gamma^n ,$$

где n- индекс течения жидкости, μ_0 - реологическая константа.

Впервые это уравнение для описания кривых течения было опубликовано в 1923 году в статье Де Виля [6] и затем в 1925, 1926 годах в публикациях Оствальда [7, 8].

Модуль знака зависит от скорости сдвига.

1. Если dv_x/dy положительно, то эффективная вязкость $\eta = \mu_0 \gamma^{n-1}$.

2. Если dv_x/dy отрицательно, то эффективная вязкость $\eta = \mu_0 (-\gamma)^{n-1}$.

Реологические константы находят экспериментальным путем с помощью вискозиметров. Вискозиметры бывают ротационными и капиллярными.

Рассмотрим упрощенную методику реологического исследования на примере степенной жидкости. Т.е. когда реологические свойства аппроксимируются степенной зависимостью. Измеряют экспериментально методом капиллярной или ротационной вискозиметрии значения τ и γ. Далее строят в двойных логарифмических координатах кривую течения. Требуется найти реологические параметры: μ_0 и n. Если прологарифмировать степенной закон, то получим линейную зависимость логарифма касательного напряжения от логарифма скорости сдвига

$$\ln \tau = \ln \mu_0 + n \ln \gamma \ .$$

Если в этой зависимости положить γ=1, то получим значение реологической константы $\mu_0=\tau$. Эта операция выполняется на графике рис.2.

Возьмем две произвольные точки на графике. Если их координаты подставить в прологарифмированный степенной закон, то получим систему алгебраических уравнений

$$\begin{cases} \ln \tau_1 = \ln \mu_0 + n \ln \gamma_1 \\ \ln \tau_2 = \ln \mu_0 + n \ln \gamma_2 \end{cases} .$$

Вычтем из первого уравнения системы второе

$$\ln \tau_1 - \ln \tau_2 = n(\ln \gamma_1 - \ln \gamma_2).$$

Отсюда получим выражение для расчета индекса течения

$$n = \ln(\tau_1 / \tau_2) / \ln(\gamma_1 / \gamma_2) \ .$$

В зависимости от численного значения индекса течения, различают:

n<1 - псевдопластики (большинство полимеров, резиновые смеси и т.д.), с увеличением скорости деформации эффективная вязкость таких жидкостей снижается, n=1- ньютоновские жидкости (низкомолекулярные жидкости: вода, керосин, глицерин, спирт)

их вязкость постоянна в изотермических условиях течения с любой скоростью деформации, n>1- дилатантные жидкости. У последних, с увеличением скорости деформации вязкость повышается. Встречаются редко. В качестве примера такой среды – мокрый песок.

Реологические параметры μ_o и n постоянны для данной жидкости в некотором ограниченном диапазоне изменения скорости сдвигаю. Параметр n характеризует степень неньютоновского поведения материала. Чем сильнее n отличается от единицы (в большую или меньшую сторону), тем отчётливее проявляется аномалия вязкости и нелинейность кривой течения.

Для реальных жидкостей реологические параметры непостоянны, если диапазон напряжений (скоростей) сдвига велик. Это не препятствует исключительно широкому практическому использованию степенного реологического уравнения, так как в действительных приложениях приходится иметь дело с довольно ограниченным диапазоном скоростей сдвига [1].

Степенные формулы с изменяемыми показателями степени распространены не только в реологии, но и в экспериментальной гидродинамике и теплофизике [2]-[4]. В работе [5] представлено много решений прикладных задач с использованием степенного уравнения.

Рассмотрим недостатки и ограничения степенного реологического уравнения. Размерности переменных τ и γ фиксированы. Следовательно, для материалов с различными n параметр μ_o изменяется не только количественно, но и качественно, т.е. по своей размерности. Отсюда вытекает, что степенное уравнение не есть единый физический закон, а является эмпирической формулой.

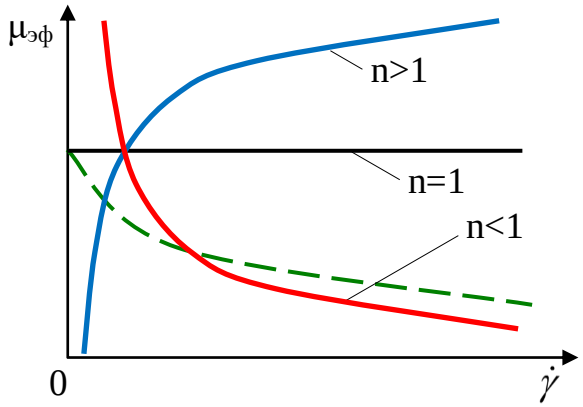


Рис. 3. Эффективная вязкость жидкости Оствальда – де Виля (сплошные линии) и жидкости Эллиса (пунктирная линия).

Из выражения для кажущейся вязкости $\mu_{эф} = \mu_0 \gamma^{n-1}$ можно вывести некоторые следствия. Влияние индекса течения на эффективную вязкость иллюстрирует рис.3. Для псевдопластичных веществ при $\gamma \to 0$, $\lim \mu_{эф} = \infty$, а для n>1 имеем $\lim \mu_{эф} = 0$. С другой стороны, при $\gamma \to \infty$, $\lim \mu_{эф} = 0$ для n<1 и $\lim \mu_{эф} = \infty$ для n>1. Эти следствия противоречат опыту. Любая покоящаяся жидкость, всё же обладает определённой конечной по величине вязкостью, которую она проявляет сразу же после

начала течения.

Бесконечно малая вязкость также вызывает возражение. В природе не существует жидкости, полностью лишённой вязкости.

Каждое из возражений, но не все одновременно, можно устранить путём определённых модификаций степенного уравнения. Так, например, «нулевое» возражение снимается в реологическом уравнении Эллиса.

В реальных технологических процессах скорости деформации конечны, кроме того существует большой класс течений, содержащих участки с нулевой скоростью деформации (например, экстремумы поля скоростей). Поэтому от реологической модели следует требовать хорошей аппроксимации вязкости на участке от нулевой до некоторой предельной скорости деформации. В подобных случаях применение степенной зависимости проблематично. Предпочтение в этих случаях следует отдать, например модели Эллиса.

В литературе встречаются несколько формулировок этой весьма гибкой трёхпараметрической реологической модели.

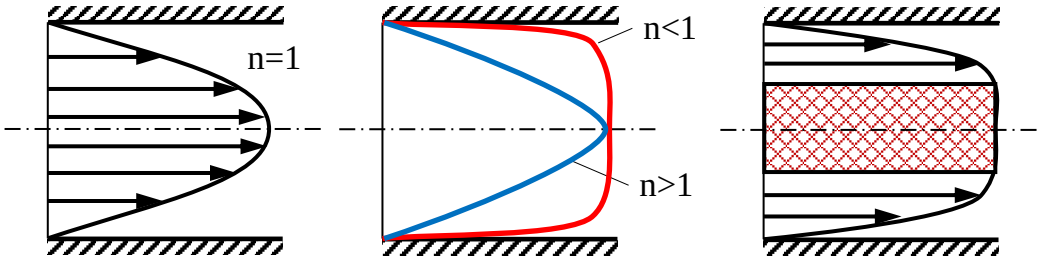
Оригинальная форма модели Эллиса

$$\gamma = \left(a + b|\tau|^{\alpha-1}\right)\tau$$

где a, b, α – реологические параметры.

В случае, когда α>1 имеем жидкость с псевдопластическим поведением. При этом, величина a^{-1} характеризует ньютоновскую вязкость в диапазоне малых величин напряжения сдвига. Реологический параметр «b» является мерой консистенции в нелинейной области умеренных напряжений сдвига τ (структурная часть кривой течения). Модель обычно используется для описания реологических свойств псевдопластиков, когда α>1. При b=0 модель Эллиса описывает чисто вязкую (ньютоновскую) жидкость, при этом параметр «a» характеризует текучесть.

Следует отметить, что в математическом плане модель Эллиса гораздо сложнее степенной модели. Получающиеся при этом математические модели, как правило, нелинейные, либо содержат трансцендентные уравнения. Поэтому число решённых прикладных задач, базирующихся на этой модели, крайне невелико.



а) б) в)

Рис. 4.

При течении в канале профиль скорости существенно зависит от реологических свойств жидкости. На рис.4 представлены профили скорости: при течении ньютоновской жидкости (а), псевдопластика и дилатантной жидкости (б) и вязкопластика (в). В последнем случае в средней части канала с постоянной скоростью движется ядро, которое от стенок отделено зоной градиентного течения.

В таблице представлены теплофизические и реологические свойства наиболее распространенных полимеров, необходимые для технологических расчетов. В скобках указаны температуры, при которых измерены параметры.

В зависимости от вязкости материала применяется различное перерабатывающее оборудование. Так, роторные смесители – для материалов с вязкостью 7-1000 Па·с, шнековые – для 2-1000 Па·с, валковые – для 10-10000 Па·с.(имеется ввиду эффективная вязкость).

В условиях переработки большинство полимеров ведет себя как аномально-вязкие (псевдопластические) жидкости. При инженерных расчетах широко используют эффективную вязкость $\mu_{эф}$, которая определяется так

$$\mu_{эф}=\mu_o\gamma_c^{n-1}$$

где γ_c – среднее значение градиента скорости сдвига (см. табл.). При этом степенной закон превращается в ньютоновский

$$\tau=\mu_{эф}\gamma.$$

Таблица

Ориентировочные технологические свойства полимеров

Показатель	Резина	ПЭНП	ПЭВП	ПП	ПС	ПКА
n	0,21 (60°С)	0,4 (190°С)	0,47 (230°С)	0,27 (200°С)	0,4 (260°С)	0,8 (288°С)
μ_o, Пас^n	$5x10^4$	$1,4x10^4$ (190°С)	$6,6x10^3$ (230°С)	$1,9x10^4$	4000 (260°С)	300 (288°С)

плотность ρ, кг/м^3	1200	920	951	900	1100	970 (288°C)
Температуро-проводность а$\times10^7$, м^2/с	1	1,2	1,5	1	1,1	1(220°C)
Тепло-проводность λ, Вт/мК	0,14	0,3	0,4	0,24	0,15	0,24 (240°C)
теплоёмкость С, кДж/кгК	2	2,8-3	2,5-3	3,2 (170°C)	1,5	2,6 (240°C)
Е, кДж/моль	34-70 (40°C-140°C)	50	50	43	94	44
Температура, в зоне дозирования, ^{o}C		150-180	170-190	170-250	190-240	300
Температура в головке, ^{o}C		160-210	170-210	190-260	220-260	280
Средний градиент скорости при экструзии (с$^{-1}$)		50-240	50-230	55-110	50-200	50-110

Это открывает возможность использовать ньютоновское приближение для расчетов течения материала в перерабатывающем оборудовании. Следует отметить, что вопрос о среднем значении градиента скорости сдвига γ_c достаточно сложен и $\mu_{эф}$ сильно отличается от параметра μ_o.

В таблице представлены теплофизические и реологические свойства ряда полимеров. Так же представлены рекомендуемые технологические параметры переработки.

Если течение имеет неизотермический характер, то необходимо учитывать зависимость текучих свойств жидкости от температуры. Широко используется закон Аррениуса

$$\mu = \mu_o\left[\frac{E}{R}\left(\frac{1}{T}+\frac{1}{T_0}\right)\right],$$

где E – энергия активации вязкого течения (табл.), R=8,3 Дж/моль – универсальная газовая постоянная, μ_o - вязкость (или показатель консистенции) при температуре T_o. В формуле используются абсолютные температуры в градусах Кельвина.

Пример.

Найти эффективную вязкость резины при ее переработке на червячной машине, если реологические константы степенной модели $\mu_o=10^5$ Пас^n, n=0,25. Средний градиент скорости $\gamma=100$ с$^{-1}$.

Решение.

Используем формулу

$\mu_{эф}=\mu_o\gamma^n=10^5*100^{0,25}=3,16*10^5$ Па·с.

Задачи.

1. При исследовании на вискозиметре вязкопластической жидкости получены следующие данные: $\gamma_1=50$ с$^{-1}$, $\tau_1=10^3$ Па, $\gamma_2=100$ с$^{-1}$, $\tau_2=1,5*10^3$ Па. Найти начальное напряжение сдвига.
2. Чему равно касательное напряжение при течении степенной жидкости если: $\mu_o=10^4$ Пас^n, n=0,5, $\gamma=200$ с$^{-1}$?

ЛИТЕРАТУРА ПРИЛОЖЕНИЯ

1. Шульман З.П. Конвективный тепломассоперенос реологически сложных жидкостей. – М.: Энергия, 1975.
2. Лыков А.В., Михайлов Ю.А. Теория переноса энергии и вещества. – М.: Энергия, 1965.
3. Седов Л.И. Методы подобия и размерности в механике. – М.: Физматгиз, 1964.
4. Bird R.B., Stewart W., Lightfoot J. Transport phenomena. New York. Academic Press, 1963, vol. I-III.
5. Skelland A. H. P. Non-Newtonian Flow and Heat Transfer, Wiley, New York, 1966. xvi + 469 pp.
6. DE Waele A. Oil Color Chem. Fss. J. 6.23 (1923).
7. Ostwald W. Kolloid Z. 36, 99 (1925).
8. Ostwald W. Kolloid Z. 38, 261 (1926).

ОБ АВТОРАХ

Шаповалов Владимир Михайлович (г. рожд. 1951) – доктор технических наук, профессор кафедры «Процессы и аппараты химических производств» Волжского политехнического института ВолгГТУ (svm-5@mail.ru). Область научных интересов – Течение и теплообмен реологически сложных жидкостей. В 1980 году защитил диссертацию на соискание учёной степени кандидата технических наук, в 1996 году - диссертацию на соискание учёной степени доктора технических наук. Научные работы опубликованы в академических рецензируемых журналах: «Инженерно-физический журнал», «Механика жидкости и газа», «Прикладная механика и техническая физика», «Прикладная механика и математика», «Механика композиционных материалов и конструкций». Автор более 140 научных публикаций и патентов в России и за рубежом и четырёх монографий:

1. Шаповалов В.М., Лапшина С. В. Введение в механику течения волокнонаполненных композитов. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006.–176 с.
2. Шаповалов В.М. Механика элонгационного течения полимеров. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007.–176с.
3. Шаповалов В.М. Валковые течения неньютоновских жидкостей. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2011. – 168 с.
4. Шаповалов В.М. Процессы тепло – и массопереноса технологическом оборудовании: монография/В.М. Шаповалов, ВПИ (филиал) ВолгГТУ, - Волгоград: ИУНЛ ВолгГТУ, 2015. – 305 с.
5. Шаповалов В.М. Тепло – и массоперенос в процессах переработки полимеров; 2019. – 449 с.(Электронная версия)

Каблов Виктор Федорович (г. рожд. 1948) – доктор технических наук, профессор кафедры «Химическая технология полимеров и промышленная экология» Волжского политехнического института (филиала) ВолгГТУ (vkablov5@gmail.com).

Область научных интересов – технология переработки полимеров. В 1977 году защитил диссертацию на соискание учёной степени кандидата технических наук, в 1991 году - диссертацию на соискание учёной степени доктора технических наук. Научные работы опубликованы в рецензируемых отечественных и зарубежных журналах. Каблов – автор более 1700 научных публикаций, в том числе, 247 изобретений, 57 учебных пособий, 14 монографий, в том числе:

1. Каблов, В.Ф. Физика и механика армированных пластиков и резинокордных композитов: монография / В.Ф. Каблов, Ю.А. Гамлицкий, В.Н. Тышкевич; ВПИ ВолгГТУ – Волгоград, 2020 – 472 с.
2. Каблов, В.Ф. Проблемы современной технологии полимеров: монография/В.Ф. Каблов; ВПИ (филиал) ВолгГТУ. – Волгоград, 2019 – 325 с.
3. Каблов, В.Ф. Полимерные материалы с функционально-активными компонентами. Исследования и технологии (часть 1): монография / В.Ф. Каблов, Н.А. Кейбал; ВПИ (филиал) ВолгГТУ. – Волгоград, 2018. – 406 с.
4. Каблов, В.Ф., Огнетеплозащитные полимерные материалы с функционально-активными компонентами: монография // В.Ф.Каблов, Н.А. Кейбал, О.М. Новопольцева. – Волгоград: ИУНЛ ВолгГТУ, 2016. – 203 с.
5. Каблов, В.Ф. Модификация эластичных клеевых составов и покрытий элементсодержащими промоторами адгезии: монография / В.Ф. Каблов, С.Н. Бондаренко, Н.А. Кейбал; ВПИ (филиал) ВолгГТУ. - Волгоград, 2010. - 237 с.
6. Каблов, В.Ф. Информационные технологии в разработке и в производстве эластомерных материалов: монография / В.Ф. Каблов, И.М. Агаянц; ВПИ (филиал) ВолгГТУ. - Волгоград, 2009. - 408 с.

Научное издание

Владимир Михайлович **Шаповалов**
Виктор Фёдорович **Каблов**

СТЕПЕННОЕ РЕОЛОГИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ В ПРИКЛАДНЫХ ЗАДАЧАХ НЕНЬЮТОНОВСКОЙ ГИДРОМЕХАНИКИ

Монография

Редактор *Матвеева Н.И.*

Темплан 2020 г. Поз. № 4В
Подписано в печать 21.09.2020 г. Формат 60×84 1/16. Бумага офсетная.
Гарнитура Times. Печать офсетная. Усл. печ. л. 14,38 Уч.-изд. л. 10.
Тираж 100 экз. Заказ №554

Волгоградский государственный технический университет
400005, г. Волгоград, пр. Ленина, 28, корп. 1.

Отпечатано в Издательстве ВолгГТУ
Волгоградского государственного технического университета.
400005, г. Волгоград, пр. Ленина, 28, корп. 7.