

А.Г. Чхартишвили

**ТЕОРЕТИКО-ИГРОВЫЕ МОДЕЛИ
ИНФОРМАЦИОННОГО
УПРАВЛЕНИЯ**

Москва
ЗАО «ПМСОФТ»
2004

УДК 519.8

ББК 22.18

Чх 97

Чх 97 **Чхартишвили А.Г. Теоретико-игровые модели
информационного управления. М.: ЗАО
«ПМСОФТ», 2004. – 227 с.**

ISBN 5-9900281-6-4

Работа содержит результаты исследований теоретических и прикладных теоретико-игровых моделей управления поведением агентов, принимающих решения на основе иерархии представлений о существенных параметрах, представлениях оппонентов, представлениях о представлениях и т. д. В том числе, рассматриваются задачи информационного управления в области экономики, маркетинга, политики и т. д.

Приведенные общие теоретические и частные прикладные результаты отражают единую методологию построения и изучения математических моделей информационного управления, которая может быть эффективно использована при решении широкого класса задач управления социально-экономическими системами.

Работа рассчитана на специалистов (теоретиков и практиков) по управлению социально-экономическими системами.

Рецензент: д.т.н., проф. Д.А. Новиков

ISBN 5-9900281-6-4

© А.Г. Чхартишвили, 2004

© ЗАО «ПМСОФТ», оформление, 2004

СОДЕРЖАНИЕ

Введение.....	5
Глава 1. Теория игр и проблемы информационного управления социально-экономическими системами	12
1.1. Теоретико-игровые модели в экономике и управлении ...	12
1.2. Индивидуальное принятие решений: модель рационального поведения	14
1.3. Интерактивное принятие решений: игры и равновесия ...	17
1.4. Классификация управлений социально-экономическими системами	26
1.5. Общая постановка задачи информационного управления	28
Глава 2. Рефлексивные игры	32
2.1. Информационная структура игры	33
2.2. Информационное равновесие	41
2.3. Граф рефлексивной игры.....	46
2.4. Регулярные структуры информированности	52
Приложение к главе 2. Рефлексия в художественных произведениях	60
Глава 3. Информационные равновесия	66
3.1. Стабильные информационные равновесия	67
3.2. Истинные и ложные равновесия	70
3.3. Случай наблюдаемых действий агентов	74
3.4. Рефлексивные игры и байесовы игры	79
Глава 4. Информационные воздействия.....	89
4.1. Проблемы моделирования информационного воздействия.....	90
4.2. Информационное регулирование и рефлексивное управление.....	92
4.3. Активный прогноз	95
Глава 5. Информационное управление	102
5.1. Классификация задач информационного управления ...	103
5.2. Рефлексивные отображения	106
5.3. Стационарность линейных рефлексивных отображений	113
5.4. Рефлексивная неманипулируемость механизмов планирования	115
5.5. Технология исследования задач информационного управления.....	123

Глава 6. Прикладные модели информационного управления	126
6.1. Игры поиска	133
6.2. Производитель и посредник	139
6.3. «Принцип дефицита»	143
6.4. Совместное производство	146
6.5. Конкуренция на рынке	152
6.6. Аккордная оплата труда	156
6.7. Продавец и покупатель	164
6.8. Заказчик и исполнитель	169
6.9. Коррупция	171
6.10. Биполярный выбор	173
6.11. Активная экспертиза	178
6.12. Олигополия Курно	186
6.13. Распределение ресурса	189
6.14. Страхование	193
6.15. Реклама товара	201
6.16. Предвыборная борьба	207
6.17. Конкурс	208
Заключение	212
Литература	214

ВВЕДЕНИЕ

Настоящая работа посвящена рассмотрению математических моделей информационного управления социально-экономическими системами. *Управлением* называется воздействие на управляемую систему с целью обеспечения требуемого ее поведения. *Социально-экономические системы* включают в себя людей (отдельных индивидуумов, их группы и коллективы), поэтому управление такой системой заключается в побуждении людей к требуемому поведению. Однако человек самостоятельно принимает решения, значит, для того, чтобы влиять на его поведение, необходимо иметь модель принятия им решений.

Модели принятия решений. Господствующая в науке на протяжении последнего полувека модель принятия субъектом решений (*гипотеза рационального поведения*) заключается в следующем: субъект стремится выбрать наилучшую в рамках имеющейся у него информации альтернативу. При этом в *модель принятия решений* входят, как минимум, множество альтернатив, из которого производится выбор, а также предпочтения субъекта на этом множестве, которые обычно описываются функцией полезности [33].

В случае, когда имеется только один субъект, дело обстоит достаточно просто – считается, что он выбирает из множества допустимых альтернатив такую альтернативу, на которой достигается максимум его функции полезности (выигрыша, предпочтения и т.д.) [27, 33, 63]. Отметим, что при этом существенной является *информированность* субъекта – та информация, которой он обладает на момент принятия решений о допустимых альтернативах, их предпочтительности, последствиях выбора той или иной альтернативы и т.д.

Если субъектов несколько и выигрыш каждого зависит от выборов всех, то ситуация усложняется – для того чтобы выбрать собственное действие, субъект должен «предсказать», какие действия выберут его *оппоненты*. Моделями совместного принятия решений субъектами, интересы которых не совпадают, занимается *теория игр* [33, 180], одной из основных задач которой является предсказание *решения игры* – устойчивого в том или ином смысле исхода взаимодействия рациональных субъектов (*игроков, агентов*).

Попробуем промоделировать ход рассуждений субъекта, принимающего решения. Пусть он считает, что его оппоненты выберут определенные действия. Тогда он должен выбрать свое действие, являющееся наилучшим при сложившейся обстановке. Если он считает своих оппонентов такими же рациональными, как и он сам, то он должен предположить, что при выборе своих действий они будут ожидать соответствующего выбора от него. Но тогда он должен учитывать и то, что оппоненты знают о том, что он считает их рациональными и так далее – получаем бесконечную цепочку «вложенных» рассуждений. Как же замкнуть эту бесконечную цепочку, какое решение принять в ситуации выбора? Наиболее распространенным способом такого «замыкания» является концепция так называемого *равновесия Нэша*. Равновесие Нэша – это такая ситуация, от которой никому из участников игры невыгодно отклоняться в одностороннем порядке. Иными словами: «Если все оппоненты выбирают именно эту ситуацию, то и я ничего не выигрываю, отклоняясь от нее» – и так для каждого игрока.

Разумеется, тут есть много нюансов. Например: что, если равновесия Нэша не существует? или их несколько, и одни более выгодны для одного игрока, а другие – для другого? Бывает, как известно, и так, что ситуация равновесия оказывается для всех участников игры хуже, чем какая-то другая ситуация, не являющаяся равновесной. Все эти вопросы уже более полувека интенсивно обсуждаются специалистами, однако их анализ выходит за рамки настоящей работы.

Рефлексия. Описанный выше процесс и результат размышлений агента о принципах принятия решений оппонентами и о выбираемых ими действиях называется *стратегической рефлексией* [128]. В отличие от стратегической рефлексии, в рамках *информационной рефлексии* субъект анализирует свои представления об информированности субъектов, представления об их представлениях и так далее до бесконечности.

Большинство концепций решения в теории игр (в том числе и равновесие Нэша) подразумевает, что игра, в которую играют участники (т.е. состав участников игры, множества их стратегий, функции выигрыша), является *общим знанием*, то есть игра известна всем игрокам (агентам); всем известно, что игра всем известна; всем известно, что всем известно, что игра всем известна и так далее, опять же, до бесконечности.

Конечно, общее знание (или, иначе говоря, *симметричное* общее знание) является частным случаем, а в общем случае представления агентов, представления о представлениях и т.д. могут различаться. Например, возможно *асимметричное* общее знание, при котором игроки понимают игру по-разному, но само это различное понимание является общим знанием. Возможно также *субъективное* общее знание, когда игрок считает, что имеет место общее знание (а на самом деле его может не быть).

В общем случае *иерархия представлений* агентов называется *структурой информированности*. Моделью принятия агентами решений на основании иерархии их представлений является *рефлексивная игра* [81, 128, 182], в которой каждый агент моделирует в рамках своих представлений поведение оппонентов (тем самым порождаются *фантомные агенты* первого уровня – агенты, существующие в сознании реальных агентов). Фантомные агенты первого уровня моделируют поведение своих оппонентов, то есть в их сознании существуют фантомные агенты второго уровня и т.д. Другими словами, каждый агент выбирает свои действия, моделируя свое взаимодействие с фантомными агентами, ожидая от оппонентов выбора определенных действий. Устойчивый исход такого взаимодействия называется *информационным равновесием* [81, 128].

После выбора реальными агентами своих действий, они получают информацию, по которой можно явно или косвенно судить о том, какие действия выбрали оппоненты. Поэтому информационное равновесие может быть как *стабильным* (когда все агенты – реальные и фантомные – получают подтверждение своих ожиданий), так и *нестабильным* (когда чьи-то ожидания не оправдываются). Кроме того, стабильные равновесия можно, в свою очередь, подразделить на *истинные* (те стабильные информационные равновесия, которые остаются равновесиями, если агенты оказываются адекватно и полностью информированными) и *ложные*.

Информационное управление. Вернемся к рассмотрению информационного управления. Равновесие рефлексивной игры агентов зависит от структуры их информированности. Изменяя эту структуру, можно соответственно менять информационное равновесие. Поэтому *информационным управлением* будем называть воздействие на структуру информированности агентов, осуществляемое с целью изменения информационного равновесия.

Задача информационного управления может быть на качественном уровне сформулирована следующим образом: найти такую структуру информированности агентов, чтобы информационное равновесие их рефлексивной игры было наиболее предпочтительно с точки зрения *центра* – субъекта, осуществляющего управление.

Сделаем важное терминологическое замечание. Под информационным управлением иногда понимают информационное воздействие – сообщение определенной информации. Мы же рассматриваем «информацию» как объект управления, а не как средство управления. Иными словами, мы исходим из того, что центр может сформировать у агентов ту или иную структуру информированности (из некоторого множества структур), и исследуем, что в результате этого получается. За рамками наших рассмотрений остается вопрос о том, как именно следует формировать эту структуру.

Проблема максимального ранга рефлексии. Структура информированности агентов представляет собой бесконечное дерево, на первом уровне которого находятся представления реальных агентов о существенных параметрах, на втором уровне – представления реальных агентов о представлениях оппонентов (т.е. фантомные агенты первого уровня), на третьем – представления о представлениях о представлениях (т.е. фантомные агенты второго уровня) и т.д.

Если начинающееся на каком-то уровне поддереву совпадает с поддеревом, имеющимся на более высоком уровне, то первое поддереву (и все его поддеревья) можно не рассматривать. Число попарно различных поддеревьев, входящих в информационную структуру, называется ее *сложностью*, а максимальная глубина дерева, получающегося после отбрасывания, начиная снизу, всех «повторяющихся» поддеревьев, – *глубиной* структуры информированности [81, 128]. Глубина поддерева, соответствующего некоторому реальному агенту, характеризует (на единицу превосходит) его *ранг рефлексии*.

Проблема максимального ранга рефлексии заключается в следующем: существуют ли ограничения (и какие в каждом конкретном случае) на ранг рефлексии агентов, такие, что увеличение ранга рефлексии сверх этого ограничения не имеет смысла. Выражение «не имеет смысла» требует пояснений.

Во-первых, известно, что возможности человека по переработке информации ограничены, и при принятии решений ни один

человек не сможет рефлексировать «до бесконечности». Строгих результатов в этой области на сегодняшний день нет, а практика свидетельствует, что люди редко осуществляют рефлексии глубже второго-третьего уровня.

Во-вторых, во многих математических моделях удается показать, что увеличение глубины структуры информированности сверх некоторого уровня не приводит к появлению новых информационных равновесий [81]. С точки зрения агентов это означает, что увеличивать ранг рефлексии сверх этого уровня бессмысленно. А с точки зрения центра это означает, что при решении задачи информационного управления без потери эффективности можно ограничиться классом структур информированности, глубина которых ограничена данным уровнем.

Поэтому одним из результатов исследования задач информационного управления является определение максимального ранга рефлексии агентов (называемого *максимальным целесообразным рангом*), влиянием на который достаточно ограничиться центру при формировании структуры их информированности.

Перечисленные выше аспекты – модели принятия решений, рефлексия, информационное управление, его стабильность, сложность (характеризуемая глубиной структуры информированности) и т.д. – рассматриваются с теоретической точки зрения в первых пяти главах настоящей работы. В шестой главе описан, на основе общих результатов, ряд прикладных моделей информационного управления.

Содержание работы. В первой главе рассматривается общий подход к моделированию принятия решения. Приведены наиболее общераспространенные концепции, как в случае индивидуального, так и в случае интерактивного принятия решений. Описана классификация управлений социально-экономическими системами, одним из которых является информационное управление. Сформулирована общая постановка задачи информационного управления.

Во второй главе для описания информированности принимающего решение агента вводится понятие структуры информированности, включающей в себя иерархию представлений о неопределенном параметре, а также о представлениях оппонентов, представлений о представлениях и т.д. Игра, в которой игроки принимают решение на основе своих структур информированности, называется рефлексивной игрой. Исследуется ряд свойств

структуры информированности. Формулируется концепция информационного равновесия как решения рефлексивной игры. Определяется удобное вспомогательное понятие графа рефлексивной игры – конструкции, позволяющей в наглядной форме изображать взаимную информированность агентов. Вводятся взаимосвязанные понятия регулярной структуры информированности и регулярного конечного дерева (РКД). Показывается на ряде примеров, что язык графов рефлексивной игры может служить средством описания эффектов информационной рефлексии в художественных произведениях.

В третьей главе исследуются специфические типы информационных равновесий. Рассматривается свойство стабильности равновесия, состоящее в том, что каждый агент наблюдает именно тот результат игры, который ожидает в момент выбора действия (тем самым, информационная структура игры не меняется). Стабильные информационные равновесия подразделяются на истинные и ложные. Формулируется достаточное условие, при выполнении которого все стабильные равновесия являются истинными. Отдельно рассматривается случай, когда агенты в результате игры наблюдают действия друг друга. Доказывается ряд утверждений, проясняющих взаимосвязь стабильности равновесия и свойств структуры информированности игры. Проводится аналогия между рефлексивными играми и байесовыми играми – альтернативным способом моделирования принятия решения в ситуации с неполной информированностью.

В четвертой главе обсуждается проблематика моделирования информационного воздействия. Выделены некоторые способы осуществления центром информационного воздействия на агентов с целью формирования той или иной структуры информированности: информационное регулирование, рефлексивное управления, активный прогноз.

В пятой главе дается постановка и классификация задач информационного управления. Задача информационного управления понимается как поиск структуры информированности игры, при которой действия агентов оказываются выгодными для центра. Для формулировки условий, при которых область поиска решения задачи информационного управления можно сузить, вводится вспомогательное понятие рефлексивных отображений, позволяющих описать множество информационных равновесий при всевоз-

можных структурах информированности. Для случая двух агентов и линейных рефлексивных отображений доказано достаточное условие стационарности отображений. Обобщено хорошо известное свойство неманипулируемости механизмов планирования. Именно, вводится понятие рефлексивной неманипулируемости – свойства механизма планирования, при котором существуют такие структуры информированности участников игры, что сообщение достоверной информации является компонентой информационного равновесия.

В шестой главе рассматривается набор независимых друг от друга прикладных моделей информационного управления. Большинство из них отражают воздействия на информированность экономических агентов (производителей и покупателей продукции, заказчиков и исполнителей работ и т.д.), некоторые же – на информированность участников предвыборной борьбы, избирателей и т.д.

ГЛАВА 1. ТЕОРИЯ ИГР И ПРОБЛЕМЫ ИНФОРМАЦИОННОГО УПРАВЛЕНИЯ СОЦИАЛЬНО-ЭКОНОМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ

1.1. ТЕОРЕТИКО-ИГРОВЫЕ МОДЕЛИ В ЭКОНОМИКЕ И УПРАВЛЕНИИ

Теория игр относится к числу тех немногих наук, момент «оформления» которых в отдельную дисциплину известен достаточно точно. В 1944 г. вышла монография Дж. фон Неймана и О. Моргенштерна «Теория игр и экономическое поведение» (см. русский перевод [65]), в которой были изложены известные на то время результаты. Монография положила начало бурному развитию этой науки, не прекращающемуся и по сей день¹.

Хотя и не сразу, но теоретико-игровое моделирование заняло прочное место в арсенале методов экономического анализа. Завершение этого процесса можно отнести, по-видимому, к 1990-м годам. В 1994 г. Нобелевскую премию по экономике получили Дж. Нэш, Дж. Харшаньи и Р. Зельтен, внесшие большой вклад в развитие теории игр. В 1995 г. вышел учебник по микроэкономике [176], который до сих пор признается одним из наиболее авторитетных и в котором теории игр уделяется большое внимание. С тех пор это является необходимым требованием к любому изложению основ экономической теории (см., например, [91, 97]).

Интеграция теории игр в теорию управления социально-экономическими системами состоялась в конце 1960-х годов. Именно тогда на фоне бурного развития математической теории управления и интенсивного внедрения ее результатов при создании новых и модернизации существующих технических систем практически одновременно во многих научных центрах как в СССР, так и за рубежом начали предприниматься попытки применения общих подходов теории управления для разработки математических моделей социальных и экономических систем.

Одним из направлений исследований, учитывающих при анализе и синтезе моделей и механизмов управления целенаправленность поведения участников организационной (активной) системы,

¹ Обзор теории игр, ее основных разделов – см., например, [33, 34, 167, 180].

стала теория активных систем (ТАС) [8, 9, 15, 19], основным центром зарождения и развития которой является Институт проблем управления РАН (бывший Институт автоматики и телемеханики). Основным методом теоретического исследования в теории активных систем является как раз теоретико-игровое моделирование.

По основным своим подходам и используемым методам исследований ТАС чрезвычайно тесно связана с такими разделами теории управления социально-экономическими системами, как: теория иерархических игр [27, 29, 30, 48]; теория контрактов, развиваемая в основном зарубежными учеными и исследующая задачи стимулирования в условиях вероятностной неопределенности [10, 75, 171, 176]; теория реализуемости, также развиваемая в основном зарубежными учеными и исследующая задачи реализуемости соответствий группового выбора механизмами планирования, а также их свойства – неманипулируемость и др. [11, 71, 176].

Отметим также, что элементы теории игр в настоящее время являются необходимым компонентом не только экономического, но и управленческого образования (см., например, [147, 148, 149, 152, 153, 154]).

С теоретико-игровой точки зрения задача управления состоит в том, чтобы создать для управляемых субъектов (агентов) игру с такими правилами, чтобы исход игры был как можно более благоприятным для управляющего органа (центра). Центр является как бы метаигроком, он делает первый ход, формируя правила игры для агентов. После этого агенты выбирают свою стратегию поведения тем или иным образом, с учетом выбора центра.

Исходя из этого, необходимым предварительным этапом решения задачи управления социально-экономической (или, иначе говоря, активной) системой является теоретико-игровой анализ, позволяющий центру спрогнозировать реакцию управляемой системы на те или иные управляющие воздействия. И только после осуществления такого анализа центр может обоснованно осуществлять то или иное воздействие. Предметом настоящей работы является вполне определенное управляющее воздействие – информационное, т. е. целенаправленное влияние на информированность агентов.

Дальнейшее изложение в первой главе построено следующим образом. В разделе 1.2 обсуждается модель индивидуального

принятия решения рациональным агентом. В разделе 1.3 обсуждается интерактивное принятие решений, т. е., собственно, принятие решений в ситуации игрового взаимодействия агентов. В разделе 1.4 содержится переход к формулировке задачи управления, а именно дается классификация управлений, одним из которых является информационное управление. Наконец, раздел 1.5 содержит общую постановку задачи информационного управления.

1.2. ИНДИВИДУАЛЬНОЕ ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ: МОДЕЛЬ РАЦИОНАЛЬНОГО ПОВЕДЕНИЯ

Опишем, следуя [33, 71, 78, 81], модель принятия решений единственным агентом. Пусть агент способен выбирать некоторое действие x из множества X допустимых действий. В результате выбора действия $x \in X$ агент получает выигрыш $f(x)$, где $f: X \rightarrow \mathcal{R}^1$ – действительнoзначная *целевая функция*, отражающая предпочтения агента.

Примем *гипотезу рационального поведения*, заключающуюся в том, что агент с учетом всей имеющейся у него информации выбирает действия, которые наиболее предпочтительны с точки зрения значений своей целевой функции (данная гипотеза не является единственно возможной – см., например, концепцию ограниченной рациональности [106]). В соответствии с гипотезой рационального поведения агент выбирает альтернативу из множества «лучших» альтернатив. В рассматриваемом случае это множество является множеством альтернатив, на которых достигается максимум целевой функции.

Следовательно, выбор действия агентом определяется *правилом индивидуального рационального выбора* $P(f, X) \subseteq X$, которое выделяет множество наиболее предпочтительных с точки зрения агента действий²:

$$P(f, X) = \operatorname{Arg} \max_{x \in X} f(x).$$

² При использовании максимумов и минимумов подразумевается, что они достигаются.

Усложним модель, а именно предположим, что выигрыш агента определяется не только его собственными действиями, но и значением неопределенного параметра $\theta \in \Omega$ – *состояния природы*. Таким образом, в результате выбора действия $x \in X$ и реализации состояния природы $\theta \in \Omega$ агент получает выигрыш $f(\theta, x)$, где $f: \Omega \times X \rightarrow \mathbb{R}^1$.

Если выигрыш агента зависит, помимо его действий, от неопределенного параметра – состояния природы, то в общем случае не существует однозначно «лучшего» действия – принимая решение о выбираемом действии, агент должен «предсказывать» состояние природы.

Поэтому введем *гипотезу детерминизма*, заключающуюся в том, что агент стремится устранить с учетом всей имеющейся у него информации существующую неопределенность и принимать решения в условиях полной информированности [33, 43] (другими словами, окончательный критерий, которым руководствуется агент, принимающий решения, не должен содержать неопределенных параметров). В соответствии с гипотезой детерминизма агент должен устранить неопределенность относительно не зависящих от него параметров (быть может, путем введения определенных предположений об их значениях).

В зависимости от той *информации* I , которой обладает агент о неопределенных параметрах, различают [33, 75]:

- *интервальную неопределенность* (когда известно только множество Ω возможных значений неопределенных параметров);

- *вероятностную неопределенность* (когда, помимо множества Ω возможных значений неопределенных параметров, известно их вероятностное распределение $p(\theta)$);

- *нечеткую неопределенность* (когда, помимо множества Ω возможных значений неопределенных параметров, известна функция принадлежности их значений).

Относительно используемых агентом процедур устранения неопределенности обычно принимаются следующие предположения: интервальная неопределенность устраняется вычислением *максимального гарантированного результата* (МГР), вероятност-

ная – ожидаемого значения целевой функции, нечеткая – множества максимально недоминируемых альтернатив¹.

Обозначим $f \Rightarrow_I \hat{f}$ – процедуру устранения неопределенности, то есть процесс перехода от целевой функции $f(\theta, x)$ к целевой функции $\hat{f}(x)$, которая не зависит от неопределенных параметров. В соответствии с введенным предположением в случае интервальной неопределенности $\hat{f}(x) = \min_{\theta \in \Omega} f(\theta, x)$, в случае вероятностной неопределенности $\hat{f}(x) = \int_{\Omega} f(x, \theta) p(\theta) d\theta$ и т.д. [71, 75].

Устранив неопределенность, получаем детерминированную модель, то есть правило индивидуального рационального выбора имеет вид:

$$P(f, X, I) = \text{Arg} \max_{x \in X} \hat{f}(x),$$

где I – информация, используемая агентом при устранении неопределенности $f \Rightarrow_I \hat{f}$.

В настоящей работе в основном рассматривается простейший – «точечный» – случай, когда агенты имеют представления о конкретном значении состоянии природы.

До сих пор мы рассматривали индивидуальное принятие решений. Рассмотрим теперь *игровую неопределенность*, в рамках которой существенными являются предположения агента о множестве возможных значений *обстановки игры* (действий других агентов, выбираемых ими в рамках тех или иных неточно известных рассматриваемому агенту принципов поведения).

¹ Введенные предположения не являются единственно возможными. Использование других предположений (например, гипотезу об использовании МГР можно заменить гипотезой оптимизма или гипотезой «взвешенного оптимизма-пессимизма» и т.д.) приведет к другим концепциям решения, однако процесс их получения будет следовать реализуемой ниже общей схеме.

1.3. ИНТЕРАКТИВНОЕ ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ: ИГРЫ И РАВНОВЕСИЯ

Модель игры. Для описания коллективного поведения агентов недостаточно определить их предпочтения и правила индивидуального рационального выбора по отдельности. Как отмечалось выше, в случае, когда в системе имеется единственный агент, гипотеза его рационального (индивидуального) поведения предполагает, что агент ведет себя таким образом, чтобы выбором действия максимизировать значение своей целевой функции. В случае, когда агентов несколько, необходимо учитывать их взаимное влияние: в этом случае возникает *игра* – взаимодействие, в котором выигрыш каждого агента зависит как от его собственного действия, так и от действий других агентов. Если в силу гипотезы рационального поведения каждый из агентов стремится выбором действия максимизировать свою целевую функцию, то понятно, что в случае нескольких агентов индивидуально рациональное действие каждого из них зависит от действий других агентов.

Рассмотрим теоретико-игровую модель взаимодействия между n агентами. Каждый агент осуществляет выбор *действия* x_i , принадлежащего *допустимому множеству* X_i , $i \in N = \{1, 2, \dots, n\}$ – *множеству агентов*. Выбор действий агентами осуществляется **однократно, одновременно и независимо**.

Выигрыш i -го агента зависит от его собственного действия $x_i \in X_i$, от вектора действий

$$x_{-i} = (x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \in X_{-i} = \prod_{j \in N \setminus \{i\}} X_j$$

оппонентов $N \setminus \{i\}$ и от *состояния природы*² $\theta \in \Omega$ и описывается действительной функцией *выигрыша* $f_i = f_i(\theta, x)$, где $x = (x_i, x_{-i}) = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in X' = \prod_{j \in N} X_j$ – вектор действий всех

агентов. При фиксированном значении состояния природы совокупность $\Gamma = (N, \{X_i\}_{i \in N}, \{f_i(\cdot)\}_{i \in N})$ множества агентов, множеств их допустимых действий и целевых функций называется *игрой в*

² Состояние природы может быть, в том числе, вектором, компоненты которого отражают индивидуальные характеристики агентов.

нормальной форме. Решением игры (равновесием) называется множество устойчивых в том или ином смысле векторов действий агентов [21, 33, 93, 96, 121, 167, 176, 180].

В силу гипотезы рационального поведения каждый агент будет стремиться выбрать наилучшие для него (с точки зрения значения его целевой функции) действия при заданной обстановке. При этом *обстановкой* для него будет совокупность обстановки игры $x_{-i} \in X_{-i}$ и состояния природы $\theta \in \Omega$. Следовательно, принцип принятия им решения о выбираемом действии можно записать следующим образом (BR обозначает наилучший ответ – best response):

$$(1) \quad BR_i(\theta, x_{-i}) = \text{Arg} \max_{x_i \in X_i} f_i(\theta, x_i, x_{-i}), \quad i \in N.$$

Рассмотрим возможные принципы принятия решений агентами, каждый из которых порождает соответствующую концепцию равновесия, то есть определяет, в каком смысле устойчивым должен быть прогнозируемый исход игры. Параллельно будем обсуждать ту информированность, которая необходима для реализации равновесия.

Равновесие в доминантных стратегиях. Если для некоторого агента множество (1) не зависит от обстановки, то оно составляет множество его доминантных стратегий. Совокупность доминантных стратегий агентов называется *равновесием в доминантных стратегиях* – РДС [33]. Если у каждого из агентов существует доминантная стратегия, то они могут принимать решения независимо, то есть выбирать действия, не имея никакой информации и не делая никаких предположений об обстановке. К сожалению, РДС существует далеко не во всех играх.

Для реализации агентами равновесия в доминантных стратегиях, если последнее существует, достаточно знания каждым из них только своей целевой функции и допустимых множеств X' и Ω .

Гарантирующее равновесие. Той же информированностью должны обладать агенты для реализации *гарантирующего (максиминного) равновесия*, которое существует почти во всех играх:

$$(2) \quad x_i^* \in \text{Arg} \max_{x_i \in X_i} \min_{x_{-i} \in X_{-i}} \min_{\theta \in \Omega} f_i(\theta, x_i, x_{-i}), \quad i \in N.$$

Если хотя бы для одного из агентов множество (1) зависит от обстановки (то есть не существует РДС), то дело обстоит более

сложным образом. Для исследования соответствующих случаев нам понадобится важное вспомогательное понятие *общего знания*.

Роль информированности. Общее знание. В теории игр, философии, психологии, распределенных системах и других областях науки (см. обзор в [168, 179]) существенны не только *представления* (beliefs) агентов о существенных параметрах, но и их представления о представлениях других агентов и т.д. Совокупность этих представлений называется *иерархией представлений* (hierarchy of beliefs) и в настоящей работе моделируется деревом информационной структуры рефлексивной игры (см. раздел 2.1). Другими словами, в ситуациях интерактивного принятия решений (моделируемых в теории игр) каждый агент перед выбором своего действия должен предсказать поведение оппонентов. Для этого у него должны быть определенные представления о видении игры оппонентами. Но оппоненты должны проделать то же самое, поэтому неопределенность относительно той игры, которая будет разыграна, порождает бесконечную иерархию представлений участников игры.

Приведем пример иерархии представлений. Предположим, что имеются два агента – A и B . Каждый из них может иметь собственные нерефлексивные представления о неопределенном параметре θ , который мы будем в дальнейшем называть *состоянием природы* (state of nature, state of the world). Обозначим эти представления θ_A и θ_B соответственно. Но каждый из агентов в рамках процесса *рефлексии первого ранга* может задуматься о представлениях оппонента. Эти представления (*представления второго порядка*) обозначим θ_{AB} и θ_{BA} , где θ_{AB} – представления агента A о представлениях агента B , θ_{BA} – представления агента B о представлениях агента A . Но этим дело не ограничивается – каждый из агентов в рамках процесса дальнейшей рефлексии (*рефлексии второго ранга*) может задуматься над тем, каковы представления оппонента о его представлениях. Так порождаются представления *третьего порядка* – θ_{ABA} и θ_{BAB} . Процесс порождения представлений более высоких порядков может продолжаться до бесконечности (никаких логических ограничений увеличению ранга рефлексии не существует). Совокупность всех представлений – θ_A , θ_B , θ_{AB} , θ_{BA} , θ_{ABA} , θ_{BAB} и т.д. – образует иерархию представлений.

Частным случаем информированности – когда все представления, представления о представлениях и т.д. до бесконечности совпадают – является *общее знание*. Более корректно, термин «общее знание» (common knowledge) введен в [175] для обозначения факта, удовлетворяющего следующим требованиям:

- 1) о нем известно всем агентам;
- 2) всем агентам известно 1;
- 3) всем агентам известно 2 и т.д. до бесконечности.

Формальная модель общего знания предложена в [159] и получила развитие во множестве работ – см. [160, 161, 164, 165, 166, 169, 178, 179, 186 и др.].

В теории игр, как правило, предполагается, что все параметры игры являются общим знанием, то есть каждому агенту известны все параметры игры, а также то, что это известно всем агентам, и так далее до бесконечности. Такое предположение соответствует *объективному описанию игры* и дает возможность использовать концепцию равновесия Нэша [181] как прогнозируемого исхода некооперативной игры (то есть игры, в которой невозможны переговоры между агентами с целью создания коалиций, обмена информацией, совместных действий, перераспределения выигрышей и т.д.). Таким образом, предположение об общем знании позволяет утверждать, что все агенты знают, в какую игру они играют, и их представления об игре совпадают.

Равновесие Нэша. Определим многозначное отображение

$$(3) \quad BR(\theta, x) = (BR_1(\theta, x_1); BR_2(\theta, x_2), \dots, BR_n(\theta, x_n)).$$

Равновесием Нэша [33, 96, 167, 180] при состоянии природы θ (точнее – *параметрическим равновесием Нэша*) называется точка $x^*(\theta) \in X'$, удовлетворяющая следующему условию:

$$(4) \quad x^*(\theta) \in BR(\theta, x^*(\theta)).$$

Вложение (4) можно также записать в виде:

$$\forall i \in N, \quad \forall y_i \in X_i \quad f_i(\theta, x^*(\theta)) \geq f_i(\theta, y_i, x_{-i}^*(\theta)).$$

Множество $E_N(\theta)$ всех точек вида (4) можно описать следующим образом:

$$(5) \quad E_N(\theta) = \{x \in X' \mid x_i \in BR_i(\theta, x_{-i}), i \in N\}.$$

Для случая двух агентов альтернативным эквивалентным способом определения множества $E_N(\theta)$ является его задание в виде множества пар точек $(x_1^*(\theta), x_2^*(\theta))$, одновременно

множества пар точек $(x_1^*(\theta), x_2^*(\theta))$, одновременно удовлетворяющих следующим условиям соотношениям [167, 180]:

$$(6) \quad x_1^*(\theta) \in BR_1(\theta, BR_2(\theta, BR_1(\theta, \dots BR_2(\theta, x_2^*(\theta)) \dots))),$$

$$(7) \quad x_2^*(\theta) \in BR_2(\theta, BR_1(\theta, BR_2(\theta, \dots BR_1(\theta, x_1^*(\theta)) \dots))).$$

Рассмотрим, какой информированностью должны обладать агенты, чтобы реализовать равновесие Нэша путем одновременно и независимого выбора своих действий.

По определению равновесие Нэша является той точкой, одностороннее отклонение от которой невыгодно ни для одного из агентов (при условии, что остальные агенты выбирают соответствующие компоненты равновесного по Нэшу вектора действий). Если агенты многократно осуществляют выбор действий, то точка Нэша является в определенном смысле (см. подробности в [92]) устойчивой и может считаться реализуемой (как и в случае с РДС) в рамках знания каждым агентом только своей целевой функции и множеств X' и Ω . При этом, правда, необходимо введение дополнительных предположений о принципах принятия агентами решений о выборе действия в каждый момент в зависимости от истории игры [167, 180].

В настоящей работе рассмотрение ограничивается одношаговыми играми, поэтому в случае однократного выбора агентами своих действий знания ими только своих целевых функций и множеств X' и Ω для реализации равновесия Нэша уже недостаточно. Поэтому введем следующее **предположение**, которое будем считать выполненным в ходе всего последующего изложения: информация об игре Γ , множестве Ω и рациональности агентов является общим знанием.

Содержательно введенное предположение означает, что каждый из агентов рационален, знает множество участников игры, целевые функции и допустимые множества всех агентов, а также знает множество возможных значений состояний природы. Кроме того, он знает, что другие агенты знают это, а также то, что они знают, что он это знает и т.д. до бесконечности (см. выше). Такая информированность может, в частности, достигаться публичным (то есть одновременно всем агентам, собранным вместе) сообщением соответствующей информации, что обеспечивает возможное достижение всеми агентами бесконечного *ранга информационной*

рефлексии. Отметим, что введенное предположение ничего не говорит об информированности агентов относительно конкретного значения состояния природы.

Если значение состояния природы является общим знанием, то этого оказывается достаточно для реализации равновесия Нэша. В качестве обоснования этого утверждения промоделируем на примере игры двух лиц ход рассуждений первого агента (второй агент рассуждает полностью аналогично, и его рассуждения будут рассматриваться отдельно только в том случае, если они отличаются от рассуждений первого агента). Он рассуждает следующим образом (см. выражение (6)): «Мое действие, в силу (1), должно быть наилучшим ответом на действие второго агента при заданном состоянии природы. Следовательно, мне надо промоделировать его поведение. Мне известно (в силу предположения о том, что целевые функции и допустимые множества являются общим знанием), что он будет действовать в рамках (1), то есть будет искать наилучший ответ на мои действия при заданном состоянии природы (см. (7)). Для этого ему необходимо промоделировать мои действия. При этом он будет (опять же, в силу введенных предположений о том, что целевые функции и допустимые множества являются общим знанием) рассуждать так же, как и я, и т.д. до бесконечности (см. (6))». В теории игр для подобных рассуждений используется удачная физическая аналогия отражения в двух параллельных зеркалах.

Таким образом, для реализации равновесия Нэша достаточно, чтобы все параметры игры, а также значение состояния природы были общим знанием (ослабление этого предположения рассмотрено в [161]). Рассматриваемые в настоящей работе рефлексивные игры характеризуются тем, что значение состояния природы не является общим знанием и каждый агент в общем случае имеет собственные представления об этом значении, представлениях других агентов и т.д.

Субъективное равновесие. Рассмотренные виды равновесия являются частными случаями *субъективного равновесия*, которое определяется как вектор действий агентов, каждая компонента которого является наилучшим ответом соответствующего агента на ту обстановку игры, которая может реализоваться с его субъективной точки зрения. Рассмотрим возможные случаи.

Предположим, что i -ый агент рассчитывает на реализацию обстановки игры $\hat{x}_{-i}^B$ (« B » обозначает beliefs; иногда используются термины «предположение», «догадка» – conjecture) и состояния природы $\hat{\theta}_i$, тогда он выберет

$$(8) \quad x_i^B \in BR_i(\hat{\theta}_i, \hat{x}_{-i}^B), \quad i \in N.$$

Вектор x^B является *точечным субъективным равновесием*.

Отметим, что при таком определении «равновесия» не требуется *обоснованности* предположений агентов о действиях оппонентов, то есть может оказаться, что $\exists i \in N: \hat{x}_{-i}^B \neq x_{-i}^B$. Обоснованное субъективное равновесие, то есть такое, что $\hat{x}_{-i}^B = x_{-i}^B$, $i \in N$, является равновесием Нэша (для этого, в частности, достаточно, чтобы все параметры игры были общим знанием и чтобы каждый агент при построении $\hat{x}_{-i}^B$ моделировал рациональное поведение оппонентов). В частном случае, если наилучший ответ каждого агента не зависит от предположений об обстановке, то субъективное равновесие является равновесием в доминантных стратегиях.

В более общем случае i -ый агент может рассчитывать на выбор оппонентами действий из множества $X_{-i}^B \subseteq X_{-i}$ и реализацию состояния природы из множества $\hat{\Omega}_i \subseteq \Omega$ $i \in N$. Тогда наилучшим ответом будет *гарантирующее субъективное равновесие*:

$$(9) \quad x_i(X_{-i}^B, \hat{\Omega}_i) \in \text{Arg max}_{x_i \in X_i} \min_{x_{-i} \in X_{-i}^B} \min_{\theta \in \hat{\Omega}_i} f_i(\theta, x_i, x_{-i}), \quad i \in N.$$

Если $X_{-i}^B = X_{-i}$, $\hat{\Omega}_i = \Omega$, $i \in N$, то $x_i(X_{-i}^B) = x_i^*$, $i \in N$, то есть гарантирующее субъективное равновесие является «классическим» гарантирующим равновесием. Разновидностью гарантирующего субъективного равновесия является П-равновесие, подробно описанное в [16].

В еще более общем случае в качестве наилучшего ответа i -го агента можно рассматривать распределение вероятностей $p_i(x_i)$, где $p_i(\cdot) \in \Delta(X_i)$ – множеству всевозможных распределений на X_i . Распределение $p_i(\cdot)$ максимизирует ожидаемый выигрыш агента с учетом его представлений о распределении вероятностей $\mu_i(x_{-i}) \in \Delta(X_{-i})$ действий, выбираемых другими агентами, и распределении

вероятностей $q_i(\theta) \in \Delta(\Omega)$ состояния природы. Получим *байесов принцип принятия решений*:

$$(10) \quad p_i(\mu_i(\cdot), q_i(\cdot), \cdot) = \arg \max_{p_i \in \Delta(X_i)} \int_{X', \Omega} f_i(\theta, x_i, x_{-i}) p_i(x_i) q_i(\theta) \mu_i(x_{-i}) d\theta dx, \quad i \in N.$$

Таким образом, для реализации субъективного равновесия требуется минимальная информированность агентов – каждый из них должен знать свою целевую функцию $f_i(\cdot)$ и допустимые множества Ω и X' . Однако при такой информированности совокупность предположений агентов о состоянии природы и о поведении оппонентов могут быть *несогласованными*. Для достижения согласованности, то есть для того, чтобы предположения оправдывались, необходимы дополнительные предположения о взаимной информированности агентов. Наиболее сильным является предположение об общем знании, которое превращает субъективное точечное равновесие в равновесие Нэша, а совокупность байесовых принципов принятия решений – в равновесие Байеса–Нэша.

Равновесие Байеса–Нэша. Если в игре имеется неполнота информированности (см. [170]), то байесова игра описывается следующим набором:

- множеством N агентов;
- множествами R_i возможных типов агентов, где тип i -го агента $r_i \in R_i$, $i \in N$, вектор типов $r = (r_1, r_2, \dots, r_n) \in R' = \prod_{i \in N} R_i$;
- множеством $X' = \prod_{i \in N} X_i$ допустимых векторов действий агентов;
- набором целевых функций $f_i: R' \times X' \rightarrow \mathbb{R}^1$ (целевая функция агента зависит в общем случае от типов и действий всех агентов);
- представлениями $F_i(\cdot | r_i) \in \Delta(R_{-i})$, $i \in N$, агентов (здесь через R_{-i} обозначено множество всевозможных наборов типов всех агентов, кроме i -го, $R_{-i} = \prod_{j \in N \setminus \{i\}} R_j$, а через $\Delta(R_{-i})$ обозначено множество всевозможных вероятностных распределений на R_{-i}).

Решением байесовой игры является *равновесие Байеса–Нэша*, определяемое как набор стратегий агентов вида $x_i^* : R_i \rightarrow X_i$, $i \in N$, которые максимизируют математические ожидания соответствующих целевых функций:

$$(11) \quad \forall i \in N \quad x_i^*(r_i) \in \mathop{\text{Arg max}}_{x_i \in X_i} \int_{r_{-i} \in \prod_{j \neq i} R_j} f_i(r, x_i, x_{-i}^*(r_{-i})) dF_i(r_{-i} | r_i),$$

где $x_{-i}^*(r_{-i})$ обозначает набор стратегий всех агентов, кроме i -го.

В байесовых играх, как правило, предполагается, что представления $\{\mu_i(\cdot|\cdot)\}_{i \in N}$ являются общим знанием. Для этого, в частности, достаточно, чтобы они были *согласованы*, то есть выводились каждым из агентов по формуле Байеса из распределения $\mu(r) \in \Delta(R')$, которое является общим знанием.

Для байесовых игр, в которых $\{\mu_i(\cdot|\cdot)\}_{i \in N}$ является общим знанием, в [162, 183] введено понятие *рационализируемых стратегий* (*rationalizable strategies*) $D_i \subseteq \Delta(X_i)$, $i \in N$, таких, что $D_i \subseteq BR_i(D_{-i})$, $i \in N$. В играх двух лиц множество рационализируемых стратегий совпадает с множеством стратегий, полученным в результате итеративного исключения строго доминируемых стратегий¹ [180]. Обобщение рационализируемых стратегий на случай максиминного (гарантирующего) равновесия осуществлено в [158]. Возможно усложнение конструкций субъективного равновесия за счет введения запретов на определенные комбинации действий агентов и т.д.

Таким образом, реализация РДС, гарантирующего и субъективного равновесия (если они существуют) требует, чтобы каждый агент обладал, как минимум, информацией о своей целевой функции и всех допустимых множествах, а реализация равновесия Нэша, если оно существует, дополнительно требует, чтобы значения всех существенных параметров являлись общим знанием.

¹ Напомним, что строго доминируемой (strongly dominated) называется такая стратегия агента, что найдется другая его стратегия, которая при любой обстановке обеспечивает этому агенту строго больший выигрыш. Итеративное исключение (iterative elimination) строго доминируемых стратегий заключается в последовательном (в общем случае бесконечном) их исключении из множества рассматриваемых стратегий агентов, что приводит к нахождению «слабейшего» решения игры – множества недоминируемых стратегий.

Еще раз отметим, что реализуемость равновесия Нэша подразумевает возможность агентов (и управляющего органа – *центра*, или исследователя операций, если они обладают соответствующей информацией) априори и независимо рассчитать равновесие Нэша, и в одношаговой игре сразу выбрать равновесные по Нэшу действия. (При этом отдельный вопрос заключается в том, какое из равновесий выберут агенты и центр, если равновесий Нэша несколько [121].) Качественно, общее знание необходимо для того, чтобы каждый из агентов (и центр) мог промоделировать принципы принятия решений другими агентами, в том числе учитывающими его собственные принципы принятия решений и т.д.

Следовательно, можно сделать вывод о том, что **концепция решения игры тесно связана с информированностью агентов**. Такие концепции решения, как РДС и равновесие Нэша, являются в некотором смысле предельными случаями – первая требует минимальной информированности, вторая – бесконечности ранга информационной рефлексии всех агентов.

1.4. КЛАССИФИКАЦИЯ УПРАВЛЕНИЙ СОЦИАЛЬНО-ЭКОНОМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ

С точки зрения системного анализа любая система задается перечислением ее состава, структуры и функций. Поэтому модель организационной (активной) системы (ОС) определяется заданием [17, 33] (см. также [78]):

- *состава* ОС (участников, входящих в ОС, то есть ее элементов);
- *структуры* ОС (совокупности информационных, управляющих, технологических и других связей между участниками ОС);
- *множеств допустимых стратегий* участников ОС, отражающих, в том числе, институциональные, технологические и другие ограничения их совместной деятельности;
- *целевых функций* участников ОС, отражающих их предпочтения и интересы;
- *информированности* – той информации, которой обладают участники ОС на момент принятия решений о выбираемых стратегиях;

- *порядка функционирования*: последовательности получения информации и выбора стратегий участниками ОС.

Состав определяет, «кто» входит в систему, структура – «кто с кем взаимодействует» (с этой точки зрения порядок функционирования тесно связан со структурой системы, так как первый определяет причинно-следственные связи и порядок взаимодействия), допустимые множества – «кто что может», целевые функции – «кто что хочет», информированность – «кто что знает».

Управление ОС, понимаемое как воздействие на управляемую систему с целью обеспечения требуемого ее поведения, может затрагивать каждый из шести перечисленных параметров ее модели. Следовательно, первым основанием системы классификаций механизмов управления ОС (процедур принятия управленческих решений) является предмет управления – изменяемая в процессе и результате управления компонента ОС. По этому основанию можно выделить: управление составом [41, 67, 74, 76], управление структурой [23, 72], институциональное управление (управление «допустимыми множествами») [69, 76], мотивационное управление (управление предпочтениями и интересами) [74, 76], информационное управление (управление информацией, которой обладают участники ОС на момент принятия решений) [78, 79, 81, 80, 126, 127] и управление порядком функционирования (управление последовательностью получения информации и выбора стратегий участниками ОС) [72]. Отметим, что обычно в рамках теоретико-игровых моделей управление порядком функционирования рассматривается как управление структурой, поэтому можно и не рассматривать отдельно этот тип управления.

Обсудим кратко специфику некоторых типов управлений¹.

Институциональное управление является наиболее жестким и заключается в том, что центр целенаправленно ограничивает множества возможных действий и результатов деятельности агента. Такое ограничение может осуществляться явными или неявными воздействиями – правовыми актами, распоряжениями, приказами и т.д. или морально-этическими нормами, корпоративной культурой и т.д.

¹ Естественно, на практике иногда трудно выделить в явном виде управление того или иного типа, так как они используются (и должны использоваться!) одновременно.

Мотивационное управление является более «мягким», чем институциональное, и заключается в целенаправленном изменении предпочтений (функции полезности) агента. Такое изменение может осуществляться введением системы штрафов и/или поощрений за выбор тех или иных действий и/или достижение определенных результатов деятельности. Широкий класс примеров моделей мотивационного управления составляют задачи планирования и стимулирования [74, 94]. В случае, например, задачи стимулирования, мотивационное управление заключается в непосредственном (входящем в функцию полезности аддитивно) вознаграждении агента за выбор определенных действий.

Наиболее «мягким» (косвенным), по сравнению с институциональным и мотивационным, и в то же время наименее исследованным (с точки зрения формальных моделей) является информационное управление, которое является основным предметом рассмотрения в данной работе.

1.5. ОБЩАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ИНФОРМАЦИОННОГО УПРАВЛЕНИЯ

Предметом настоящей работы является вполне определенное управляющее воздействие – информационное, т. е. целенаправленное влияние на информированность агентов. Отметим, что, помимо теоретико-игровых, существуют и другие подходы к моделированию информационного управления (см. [49, 56]).

Предлагаемая модель информационного управления представлена на рис. 1.

Модель включает в себя агента (агентов) и управляющий орган – центр. Каждый агент характеризуется циклом «информированность агента → действие агента → наблюдаемый агентом результат → информированность агента», и у разных агентов эти три компоненты цикла являются, вообще говоря, различными. В то же время, и это отражает надпись «Агент(ы)» на рис. 1, можно считать этот цикл общим для всей управляемой подсистемы, т. е. для всего набора агентов.

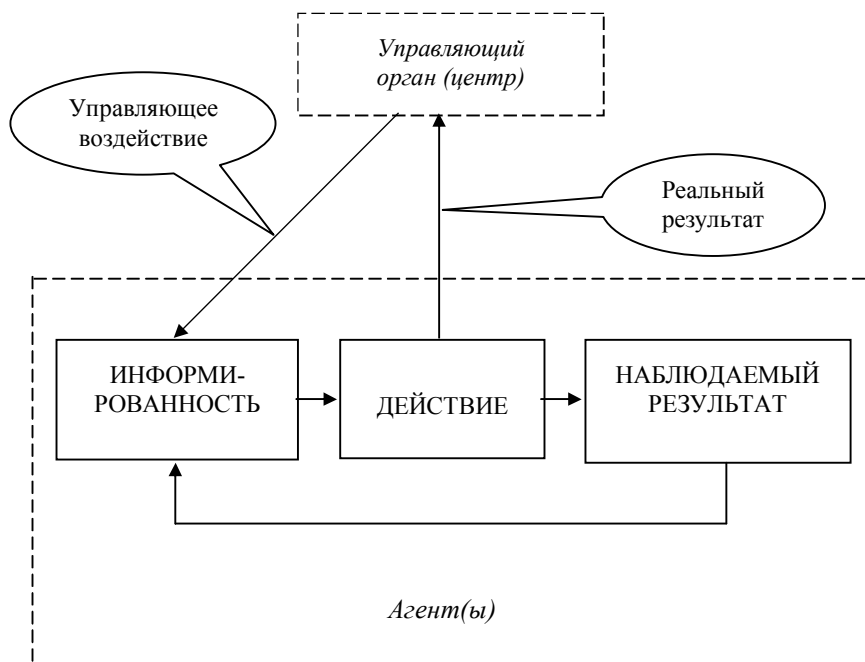


Рис. 1. Модель информационного управления

Что касается взаимодействия агента (агентов) и центра, то оно характеризуется:

- информационным воздействием центра, формирующим ту или иную информированность агента (агентов)¹;
- реальным результатом действия агента (агентов), который оказывает влияние на интересы центра.

Обсудим модель, изображенную на рис. 1, более подробно.

Математическим аппаратом, моделирующим теоретико-игровое взаимодействие агентов, являются *рефлексивные игры* (см. главу 2), в которых агенты выбирают действия на основе своих *структур информированности* – иерархии представлений о существенных параметрах ситуации («состоянии природы»), пред-

¹ Отметим, что можно рассматривать и воздействие центра на наблюдаемый агентом (агентами) результат, т. е. «центр → наблюдаемый результат» на рис. 1. Однако это рассмотрение (в некотором смысле сближающее информационное управление с мотивационным) выходит за рамки настоящей работы.

ставлений о представлениях оппонентов (других агентов) и т. д. Таким образом, в терминах рефлексивных игр информированность агента моделируется при помощи его структуры информированности (соответственно, информированность всей управляемой подсистемы моделируется при помощи *структуры информированности игры*, являющейся объединением структур информированности агентов).

Исходя из своей структуры информированности, агент выбирает то или иное действие. Для заданной структуры информированности действия агентов являются компонентами *информационного равновесия*, являющегося решением рефлексивной игры. Информационное равновесие является обобщением равновесия Нэша – наиболее распространенной концепции решения некооперативных игр.

Информированность агента о ситуации и о представлениях оппонентов может быть, вообще говоря, неадекватной. Поэтому наблюдаемый агентом результат рефлексивной игры может как соответствовать его ожиданиям, так и не соответствовать им. Соответствие определяется двумя факторами:

- 1) насколько адекватно информирован агент на момент выбора своего действия;
- 2) насколько подробную информацию о результатах игры он наблюдает.

Например, наблюдаемым результатом может быть значение его целевой функции, действия оппонентов, истинное значение неопределенного параметра и пр. В общем случае агент наблюдает значение некоторой функции, зависящей от состояния природы и действий оппонентов. Эта функция называется *функцией наблюдения*, и воздействие ее значения на информированность отображено на рисунке фрагментом «наблюдаемое действие → информированность». Если все агенты наблюдают именно тот результат, на какой рассчитывают (т. е. реальное значение функции наблюдения каждого агента равно ожидаемому), то естественным является предположение о том, что структура информированности не меняется. В этом случае информационное равновесие является *стабильным* (см. раздел 3.1).

Рассмотрим теперь взаимодействие агентов с центром. Осуществляя информационное управление, центр стремится к максимизации своей полезности (разумеется, это относится и к другим

типам управления). Если считать, что центр может сформировать любую структуру информированности из некоторого допустимого множества, то задачу информационного управления можно сформулировать следующим образом: найти такую структуру информированности из допустимого множества структур, чтобы полезность центра в информационном равновесии была максимальной (быть может, с учетом затрат центра на формирование структуры). Более формальная постановка задачи информационного управления содержится в разделе 5.1.

Подчеркнем следующее важное обстоятельство: в рамках предлагаемой модели мы исходим из предположения о том, что центр может сформировать у агентов *любую* структуру информированности. За рамками наших рассуждений остается вопрос о том, каким образом центру следует «убедить» агентов в том, что имеют место те или иные состояния природы и представления оппонентов. Вопрос о том, *как* центру надлежит формировать соответствующую структуру, требует особого рассмотрения с привлечением данных психологии и социологии – см., например, [38, 122].

Можно, однако, в рамках рассматриваемой модели классифицировать способы управляющего воздействия на информированность агентов для формирования той или иной структуры. Как будет показано в главе 5, такими способами являются:

- *информационное регулирование* – целенаправленное влияние на информацию о состоянии природы;
- *рефлексивное управление* – целенаправленное влияние на информацию о представлениях оппонентов;
- *активный прогноз* – целенаправленное сообщение информации о будущих значениях параметров, зависящих от состояния природы и действий агентов.

В главе 6 приведен ряд примеров осуществления этих управляющих воздействий.

ГЛАВА 2. РЕФЛЕКСИВНЫЕ ИГРЫ

В данной главе для описания информированности агента вводится понятие структуры информированности, включающей в себя иерархию представлений о неопределенном параметре, а также о представлениях оппонентов, представлений о представлениях и т. д. Игра, в которой игроки принимают решение на основе своих структур информированности, называется рефлексивной игрой. Исследуется ряд свойств структуры информированности (раздел 2.1).

Далее формулируется концепция решения рефлексивной игры – информационное равновесие (раздел 2.2).

В разделе 2.3 определяется удобное вспомогательное понятие графа рефлексивной игры – конструкции, позволяющей в наглядной форме изображать взаимную информированность агентов. Здесь же приводится ряд примеров вычисления информационного равновесия.

В разделе 2.4 вводятся взаимосвязанные понятия регулярной структуры информированности и регулярного конечного дерева (РКД). С одной стороны, РКД является еще одним способом описания взаимной информированности агентов, с другой – регулярные структуры информированности обладают «хорошими» свойствами, которых нет у произвольных структур информированности.

Наконец, в разделе 2.5 показано, что язык графов рефлексивной игры может служить средством описания эффектов информационной рефлексии в художественных произведениях.

В контексте описанной в разделе 1.4 модели информационного управления материал данной главы охватывает цепь «информированность → действие» (см. рис. 2).

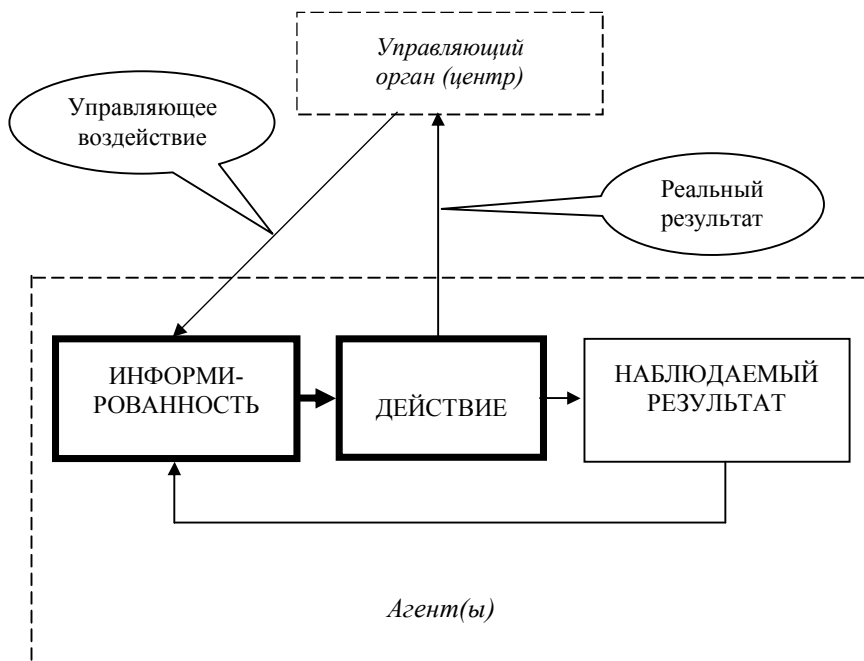


Рис. 2. Предмет исследования в главе 2

2.1. ИНФОРМАЦИОННАЯ СТРУКТУРА ИГРЫ

Рассмотрим множество $N = \{1, 2, \dots, n\}$ агентов.

Если в ситуации присутствует неопределенный параметр $\theta \in \Omega$ (будем считать, что множество Ω является общим знанием), то структура информированности I_i (как синоним будем употреблять термины *информационная структура* и иерархия представлений) i -го агента включает в себя следующие элементы. Во-первых, представление i -го агента о параметре θ – обозначим его θ_i , $\theta_i \in \Omega$. Во-вторых, представления i -го агента о представлениях других агентов о параметре θ – обозначим их θ_{ij} , $\theta_{ij} \in \Omega$, $j \in N$. В-третьих, представления i -го агента о представлении j -го агента о представлении k -го агента – обозначим их θ_{ijk} , $\theta_{ijk} \in \Omega$, $j, k \in N$. И так далее.

Таким образом, структура информированности I_i i -го агента задается набором всевозможных значений вида $\theta_{ij_1 \dots j_l}$, где l пробегает множество целых неотрицательных чисел, $j_1, \dots, j_l \in N$, а $\theta_{ij_1 \dots j_l} \in \Omega$.

Аналогично задается структура информированности I игры в целом – набором значений $\theta_{i_1 \dots i_l}$, где l пробегает множество целых неотрицательных чисел, $j_1, \dots, j_l \in N$, а $\theta_{ij_1 \dots j_l} \in \Omega$. Подчеркнем, что структура информированности I «недоступна» наблюдению агентов, каждому из которых известна лишь некоторая ее часть (а именно – I_i).

Таким образом, структура информированности – бесконечное n -дерево (то есть тип структуры постоянен и является n -деревом), вершинам которого соответствует конкретная информированность реальных и фантомных агентов.

Рефлексивной игрой Γ_I назовем игру, описываемую следующим кортежем:

$$(1) \quad \Gamma_I = \{N, (X_i)_{i \in N}, f_i(\cdot)_{i \in N}, \Omega, I\},$$

где N – множество реальных агентов, X_i – множество допустимых действий i -го агента, $f_i(\cdot): \Omega \times X' \rightarrow \mathbb{R}^1$ – его целевая функция, $i \in N$, Ω – множество возможных значений неопределенного параметра, I – структура информированности.

Таким образом, рефлексивная игра [81, 82, 89] является обобщением понятия игры в нормальной форме, задаваемой кортежем $\{N, (X_i)_{i \in N}, f_i(\cdot)_{i \in N}\}$, на случай, когда информированность агентов отражена иерархией их представлений (информационной структурой I). В рамках принятого определения «классическая» игра в нормальной форме является частным случаем рефлексивной игры – игры с общим знанием. В «предельном» случае – когда состояние природы является общим знанием – предлагаемая в настоящей работе концепция решения рефлексивной игры (информационное равновесие – см. раздел 2.2) переходит в равновесие Нэша.

Совокупность связей между элементами информированности агентов можно изобразить в виде дерева (см. рис. 3). При этом структура информированности i -го агента изображается поддеревом, исходящим из вершины θ_i .

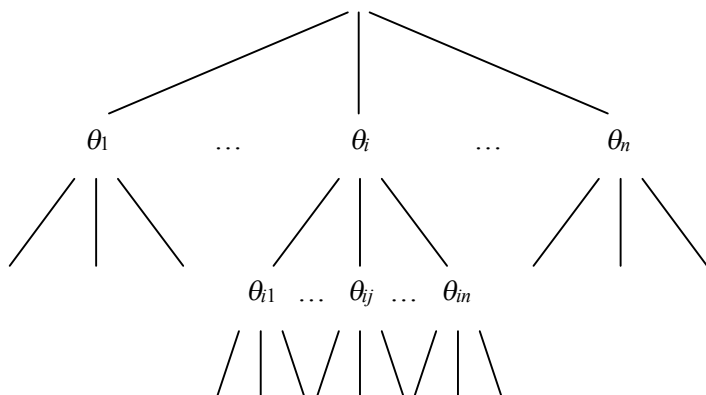


Рис. 3. Дерево информационной структуры

Сделаем важное замечание: в настоящей работе мы ограничимся рассмотрением «точечной» структуры информированности, компоненты которой состоят лишь из элементов множества Ω . (Более общим случаем является, например, интервальная или вероятностная информированность.)

Итак, рефлексивной является игра, в которой информированность игроков не является общим знанием. С точки зрения теории игр и рефлексивных моделей принятия решений целесообразно разделять стратегическую (см. ниже) и информационную рефлекссию [128, 130, 131, 133].

Информационная рефлексия – процесс и результат размышлений игрока о том, каковы значения неопределенных параметров, что об этих значениях знают и думают его оппоненты (другие игроки). При этом собственно «игровая» компонента отсутствует, так как никаких решений игрок не принимает.

Иными словами, информационная рефлексия относится к информированности агента о природной реальности (какова игра), и о рефлексивной реальности (какой видят игру другие).

Информационная рефлексия логически предшествует рефлексии несколько иного рода – стратегической рефлексии.

Стратегическая рефлексия – процесс и результат размышлений игрока о том, какие принципы принятия решений используют его оппоненты (другие игроки) в рамках той информированности, которую он им приписывает в результате информационной рефлексии.

Таким образом, информационная рефлексия имеет место только в условиях неполной информированности, и ее результат используется при принятии решений (в том числе – при стратегической рефлексии). Стратегическая рефлексия имеет место даже в случае полной информированности, предвзято принимая решение о выборе действия (стратегии). Другими словами, информационная и стратегическая рефлексии могут изучаться независимо, однако в условиях неполной информированности обе они имеют место.

Далее для формулировки некоторых определений и свойств нам понадобятся следующие обозначения:

Σ_+ – множество всевозможных конечных последовательностей индексов из N ;

Σ – объединение Σ_+ с пустой последовательностью;

$|\sigma|$ – количество индексов в последовательности σ (для пустой последовательности принимается равным нулю), которое выше было названо длиной последовательности индексов.

Если θ_i – представления i -го агента о неопределенном параметре, а θ_{ii} – представления i -го агента о собственном представлении, то естественно считать, что $\theta_{ii} = \theta_i$. Иными словами, i -й агент правильно информирован о собственных представлениях, а также считает, что таковы и другие агенты и т. д. Формально это означает, что выполнена *аксиома автоинформированности*, которую далее будем предполагать выполненной.

Аксиома автоинформированности:

$$\forall i \in N \quad \forall \tau, \sigma \in \Sigma \quad \theta_{\tau i \sigma} = \theta_{\tau i \sigma}.$$

Эта аксиома означает, в частности, что, зная θ_τ для всех $\tau \in \Sigma_+$ таких, что $|\tau| = \gamma$, можно однозначно найти θ_τ для всех $\tau \in \Sigma_+$ таких, что $|\tau| < \gamma$.

Наряду со структурами информированности I_i , $i \in N$, можно рассматривать структуры информированности I_{ij} (структура информированности j -го агента в представлении i -го агента), I_{ijk} и т.д. отождествляя структуру информированности с характеризуемым ею агентом, можно сказать, что, наряду с n реальными агентами (i -агентами, где $i \in N$) со структурами информированности I_i , в игре участвуют **фантомные агенты** (τ -агенты, где $\tau \in \Sigma_+$, $|\tau| \geq 2$) со структурами информированности $I_\tau = \{\theta_{\tau \sigma}\}$, $\sigma \in \Sigma$. Фантомные

агенты, существуя в сознании реальных агентов, влияют на их действия, о чем пойдет речь далее.

Определим фундаментальное для дальнейших рассмотрений понятие тождественности структур информированности.

Структуры информированности I_λ и I_μ ($\lambda, \mu \in \Sigma_+$) называются *тождественными*, если выполнены два условия:

- 1) $\theta_{\lambda\sigma} = \theta_{\mu\sigma}$ для любого $\sigma \in \Sigma$;
- 2) последние индексы в последовательностях λ и μ совпадают.

Будем обозначать тождественность структур информированности следующим образом: $I_\lambda = I_\mu$.

Первое из двух условий в определении тождественности структур прозрачно, второе же требует некоторых пояснений. Дело в том, что далее мы будем обсуждать действие τ -агента в зависимости от его структуры информированности I_τ и целевой функции f_i , которая как раз определяется последним индексом последовательности τ . Поэтому удобно считать, что тождественность структур информированности означает в том числе и тождественность целевых функций.

Утверждение 1. $I_\lambda = I_\mu \Leftrightarrow \forall \sigma \in \Sigma \quad I_{\lambda\sigma} = I_{\mu\sigma}$.

Доказательство. $I_\lambda = I_\mu \Rightarrow \forall \sigma, \kappa \in \Sigma \quad \theta_{\lambda\sigma\kappa} = \theta_{\mu\sigma\kappa} \Rightarrow \forall \sigma \in \Sigma \quad I_{\lambda\sigma} = I_{\mu\sigma}$. Обратная импликация очевидна: достаточно положить σ равной пустой последовательности. •¹

Содержательный смысл утверждения 1 состоит в том, что тождественность двух структур информированности в точности означает тождественность всех их подструктур.

Следующее утверждение является, по сути, иной формулировкой аксиомы автоинформированности.

Утверждение 2. $\forall i \in N \quad \forall \tau, \sigma \in \Sigma \quad I_{\tau i i \sigma} = I_{\tau i \sigma}$.

Доказательство. $\forall i \in N \quad \forall \tau, \sigma \in \Sigma \quad \theta_{\tau i i \sigma} = \theta_{\tau i \sigma} \Leftrightarrow \forall i \in N \quad \forall \tau, \sigma, \kappa \in \Sigma \quad \theta_{\tau i i \sigma \kappa} = \theta_{\tau i \sigma \kappa} \Leftrightarrow \forall i \in N \quad \forall \tau, \sigma \in \Sigma \quad I_{\tau i i \sigma} = I_{\tau i \sigma}$. •

Определение тождественности структур информированности (как и последующие, приводимые в настоящем разделе) можно переформулировать так, чтобы соответствующее свойство структуры информированности выполнялось не объективно, а *τ -субъективно* – в представлении τ -агента ($\tau \in \Sigma_+$): структуры информиро-

¹ Символ «•» здесь и далее обозначает окончание примера, доказательства и т.д.

ванности I_λ и I_μ ($\lambda, \mu \in \Sigma_+$) называются *τ -субъективно тождественными*, если $I_{\tau\lambda} = I_{\tau\mu}$.

В дальнейшем будем формулировать определения и утверждения сразу τ -субъективно для $\tau \in \Sigma$, имея в виду, что если τ – пустая последовательность индексов, то « τ -субъективно» означает «объективно».

Назовем λ -агента *τ -субъективно адекватно информированным* о представлениях μ -агента (или, короче, о μ -агенте), если

$$I_{\tau\lambda\mu} = I_{\tau\mu} \quad (\lambda, \mu \in \Sigma_+, \tau \in \Sigma).$$

Будем обозначать τ -субъективную адекватную информированность λ -агента о μ -агенте следующим образом: $I_\lambda >_\tau I_\mu$.

Утверждение 3. Каждый реальный агент τ -субъективно считает себя адекватно информированным о любом агенте, то есть

$$\forall i \in N \quad \forall \tau \in \Sigma \quad \forall \sigma \in \Sigma_+ \quad I_i >_{\tau i} I_\sigma.$$

Доказательство. В силу утверждения 2 справедливо тождество $I_{\tau i i \sigma} = I_{\tau i \sigma}$, что по определению τ -субъективно тождественных структур информированности означает, что $I_i >_{\tau i} I_\sigma$. •

Содержательно утверждение 3 отражает тот факт, что рассматриваемая точечная структура информированности подразумевает наличие у каждого агента уверенности в своей адекватной информированности о всех элементах этой структуры.

Будем говорить, что λ -агент и μ -агент являются *τ -субъективно взаимно информированными*, если одновременно выполнены тождества

$$I_{\tau\lambda\mu} = I_{\tau\mu}, \quad I_{\tau\mu\lambda} = I_{\tau\lambda} \quad (\lambda, \mu \in \Sigma_+, \tau \in \Sigma).$$

Обозначим τ -субъективную взаимную информированность λ -агента и μ -агента следующим образом: $I_\lambda >_{\tau} < I_\mu$.

Будем говорить, что λ -агент и μ -агент являются *τ -субъективно одинаково информированными о σ -агенте*, если

$$I_{\tau\lambda\sigma} = I_{\tau\mu\sigma} \quad (\sigma, \lambda, \mu \in \Sigma_+, \tau \in \Sigma).$$

Обозначим τ -субъективную одинаковую информированность λ -агента и μ -агента о σ -агенте следующим образом:

$$I_\lambda >_{\sigma} <_{\tau} I_\mu.$$

Назовем λ -агента и μ -агента *τ -субъективно одинаково информированными*, если

$$\forall i \in N \quad I_{\tau\lambda i} = I_{\tau\mu i} \quad (\lambda, \mu \in \Sigma_+, \tau \in \Sigma).$$

Будем обозначать τ -субъективную одинаковую информированность λ -агента и μ -агента следующим образом: $I_\lambda \sim_\tau I_\mu$.

Отметим, что отношения одинаковой информированности о каком-либо агенте и одинаковой информированности являются отношениями эквивалентности, т.е. рефлексивны, симметричны и транзитивны на множестве агентов.

Покажем, что одинаковая информированность равносильна одинаковой информированности о любом агенте.

Утверждение 4. $I_\lambda \sim_\tau I_\mu \Leftrightarrow \forall \sigma \in \Sigma_+ I_\lambda >_\sigma I_\mu$.

Доказательство. $I_\lambda \sim_\tau I_\mu \Leftrightarrow \forall i \in N I_{\tau\lambda i} = I_{\tau\mu i} \Leftrightarrow \{\text{в силу утверждения 1}\} \Leftrightarrow \forall i \in N \forall \kappa \in \Sigma I_{\tau\lambda i\kappa} = I_{\tau\mu i\kappa} \Leftrightarrow \{\text{полагая } \sigma = i\kappa\} \Leftrightarrow \forall \sigma \in \Sigma_+ I_{\tau\lambda\sigma} = I_{\tau\mu\sigma} \Leftrightarrow \forall \sigma \in \Sigma_+ I_\lambda >_\sigma I_\mu$. •

Приведенные определения показывают, что описание ситуации в содержательных терминах адекватной, взаимной и одинаковой информированности опирается на тождество соответствующих структур информированности. Следующее утверждение касается связи введенных понятий друг с другом.

Утверждение 5. Для любого $\tau \in \Sigma$ следующие три условия равносильны:

- 1) любые два реальных агента τ -субъективно являются взаимно информированными;
- 2) все реальные агенты τ -субъективно являются одинаково информированными;
- 3) для любого $i \in N$ значение $I_{\sigma i}$ τ -субъективно зависит только от i .

Иными словами, для любого $\tau \in \Sigma$ выполнено:

$$(\forall i, j \in N I_i >_\tau I_j) \Leftrightarrow (I_1 \sim_\tau \dots \sim_\tau I_n) \Leftrightarrow (\forall i \in N \forall \sigma \in \Sigma I_{\tau\sigma i} = I_{\tau i}).$$

Доказательство. Докажем для трех условий утверждения импликацию $1 \Rightarrow 2, 2 \Rightarrow 3, 3 \Rightarrow 1$.

$1 \Rightarrow 2$. Для любых $i, j, m \in N$ имеем $I_i >_\tau I_m, I_j >_\tau I_m$, что означает выполнение тождеств $I_{\tau i m} = I_{\tau m}, I_{\tau j m} = I_{\tau m}$. Отсюда $I_{\tau i m} = I_{\tau j m}$, что доказывает условие 2 (с учетом утверждения 4).

$2 \Rightarrow 3$. Для пустой последовательности σ условие 3 тривиально, поэтому возьмем произвольную непустую последовательность $\sigma \in \Sigma_+$. Тогда $\sigma = i_1 \dots i_l$ ($i_k \in N, k = 1, \dots, l$), при этом для любого $i \in N$ справедливы следующие соотношения:

$I_{\tau i} = \{\text{в силу утверждения 2}\} = I_{\tau ii} = \{\text{поскольку } I_i \sim_{\tau} I_{i_l}\} =$
 $I_{\tau i_l i} = \{\text{в силу утверждения 2}\} = I_{\tau i_l i_l i} = \{\text{поскольку } I_{i_l} \sim_{\tau} I_{i_{l-1}} \text{ и в}$
 $\text{силу утверждения 4}\} = I_{\tau i_{l-1} i_l i} = \dots = I_{\tau i_1 \dots i_l i} = I_{\tau \sigma i}.$

$3 \Rightarrow 1$. Для любых $i, j \in N$ имеем $I_{\tau ij} = I_{\tau j}$, $I_{\tau ji} = I_{\tau i}$, что означает $I_i >_{\tau} I_j$. •

Понятие тождественности структур информированности позволяет определить их важное свойство – сложность. Заметим, что наряду со структурой I имеется счетное множество структур I_{τ} , $\tau \in \Sigma_+$, среди которых можно при помощи отношения тождественности выделить классы попарно нетождественных структур. Количество этих классов естественно считать *сложностью структуры информированности*.

Будем говорить, что структура информированности I имеет *конечную сложность* $v = v(I)$, если существует такой конечный набор попарно нетождественных структур $\{I_{\tau_1}, I_{\tau_2}, \dots, I_{\tau_v}\}$, $\tau_l \in \Sigma_+$, $l \in \{1, \dots, v\}$, что для любой структуры I_{σ} , $\sigma \in \Sigma_+$, найдется тождественная ей структура I_{τ_l} из этого набора. Если такого конечного набора не существует, будем говорить, что структура I имеет бесконечную сложность: $v(I) = \infty$.

Структуру информированности, имеющую конечную сложность, будем называть *конечной* (еще раз отметим, что при этом дерево структуры информированности все равно остается бесконечным). В противном случае структуру информированности будем называть *бесконечной*.

Ясно, что минимально возможная сложность структуры информированности в точности равна числу участвующих в игре реальных агентов (напомним, что по определению тождественности структур информированности они попарно различаются у реальных агентов).

Любой набор (конечный или счетный) попарно нетождественных структур I_{τ} , $\tau \in \Sigma_+$, такой, что любая структура I_{σ} , $\sigma \in \Sigma_+$, тождественна одной из них, назовем *базисом* структуры информированности I .

Если структура информированности I имеет конечную сложность, то можно определить максимальную длину последователь-

ности индексов γ такую, что, зная все структуры I_τ , $\tau \in \Sigma_+$, $|\tau| = \gamma$, можно найти и все остальные структуры. Эта длина в определенном смысле характеризует ранг рефлексии, необходимый для описания структуры информированности.

Будем говорить, что структура информированности I , $\nu(I) < \infty$, имеет *конечную глубину* $\gamma = \gamma(I)$, если

1) для любой структуры I_σ , $\sigma \in \Sigma_+$, найдется тождественная ей структура I_τ , $\tau \in \Sigma_+$, $|\tau| \leq \gamma$;

2) для любого целого положительного числа ξ , $\xi < \gamma$, существует структура I_σ , $\sigma \in \Sigma_+$, не тождественная никакой из структур I_τ , $\tau \in \Sigma_+$, $|\tau| = \xi$.

Если $\nu(I) = \infty$, то и глубину будем считать бесконечной: $\gamma(I) = \infty$.

Понятия сложности и глубины структуры информированности игры можно рассматривать τ -субъективно. В частности, глубину структуры информированности игры с точки зрения τ -агента, $\tau \in \Sigma_+$, будем называть *рангом рефлексии τ -агента*.

Имея описание структуры информированности, можно рассматривать процесс совместного принятия решений реальными и фантомными агентами, что приводит к понятию информационного равновесия.

2.2. ИНФОРМАЦИОННОЕ РАВНОВЕСИЕ

Если задана структура I информированности игры, то тем самым задана и структура информированности каждого из агентов (как реальных, так и фантомных). Выбор τ -агентом своего действия x_τ в рамках гипотезы рационального поведения определяется его структурой информированности I_τ , поэтому, имея перед собой эту структуру, можно смоделировать его рассуждения и определить это его действие. Выбирая свое действие, агент моделирует действия других агентов (осуществляет рефлексии). Поэтому при определении исхода игры необходимо учитывать действия как реальных, так и фантомных агентов.

Набор действий x_τ^* , $\tau \in \Sigma_+$, назовем **информационным равновесием** [83, 128, 129], если выполнены следующие условия:

1) структура информированности I имеет конечную сложность v ;

$$2) \forall \lambda, \mu \in \Sigma \quad I_{\lambda i} = I_{\mu i} \Rightarrow x_{\lambda i}^* = x_{\mu i}^* ;$$

$$3) \forall i \in N, \forall \sigma \in \Sigma$$

$$(1) \quad x_{\sigma i}^* \in \operatorname{Arg} \max_{x_i \in X_i} f_i(\theta_{\sigma i}, x_{\sigma i 1}^*, \dots, x_{\sigma i, i-1}^*, x_i, x_{\sigma i, i+1}^*, \dots, x_{\sigma i, n}^*).$$

Первое условие в определении информационного равновесия означает, что в рефлексивной игре участвует конечное число реальных и фантомных агентов.

Второе условие отражает требование того, что одинаково информированные агенты выбирают одинаковые действия.

И, наконец, третье условие отражает рациональное поведение агентов – каждый из них стремится выбором собственного действия максимизировать свою целевую функцию, подставляя в нее действия других агентов, которые оказываются рациональными с точки зрения рассматриваемого агента в рамках имеющихся у него представлений о других агентах.

Необходимость третьего условия в определении информационного равновесия, по-видимому, не вызывает сомнений. Приведем два примера, показывающих важность первых двух условий.

Примеры 1-2. В этих примерах участвуют два агента с целевыми функциями следующего вида:

$$f_1(\theta, x_1, x_2) = (\theta - x_2)x_1 - \frac{x_1^2}{2}, \quad f_2(\theta, x_1, x_2) = (\theta - x_1)x_2 - \frac{x_2^2}{2},$$

где $x_i \in \mathcal{R}^1$, $i = 1, 2$. Различие лишь в структурах информированности.

Пример 1. Пусть структура информированности имеет следующий вид (напомним, что в силу аксиомы автоинформированности можно не рассматривать элементы с идущими подряд одинаковыми индексами):

$$\theta_1 = 1, \quad \theta_{12} = 3, \quad \theta_{121} = 5, \quad \theta_{1212} = 7, \dots;$$

$$\theta_2 = 2, \quad \theta_{21} = 4, \quad \theta_{212} = 6, \quad \theta_{2121} = 8, \dots$$

Она имеет бесконечную сложность. Система уравнений (1) в данном случае принимает следующий вид:

$$\begin{array}{ll}
x_1 = 1 - x_{12}, & x_2 = 2 - x_{21}, \\
x_{12} = 3 - x_{121}, & x_{21} = 4 - x_{212}, \\
x_{121} = 5 - x_{1212}, & x_{212} = 6 - x_{2121}, \\
x_{1212} = 7 - x_{12121}, & x_{2121} = 8 - x_{21212}, \\
\text{и т.д.;} & \text{и т.д.}
\end{array}$$

Видно, что в системе счетное число уравнений, причем решений у нее бесконечно много – произвольно выбирая значения x_1 и x_2 , можно выразить через них остальные переменные. •

Пример 2. Пусть структура информированности имеет следующий вид: $\theta_\sigma = 1$ для любого $\sigma \in \Sigma_+$. Если при этом условие 2 определения информационного равновесия не выполнено, то в системе (1) оказывается счетное число уравнений:

$$\begin{array}{ll}
x_1 = 1 - x_{12}, & x_2 = 1 - x_{21}, \\
x_{12} = 1 - x_{121}, & x_{21} = 1 - x_{212}, \\
x_{121} = 1 - x_{1212}, & x_{212} = 1 - x_{2121}, \\
x_{1212} = 1 - x_{12121}, & x_{2121} = 1 - x_{21212}, \\
\text{и т.д.;} & \text{и т.д.}
\end{array}$$

И здесь, как и в примере 1, решений бесконечно много – произвольно выбирая значения x_1 и x_2 , можно выразить через них остальные переменные. •

В соответствии с условием 2, для определения информационного равновесия требуется решить, казалось бы, бесконечное (счетное) число уравнений и получить столько же значений x_τ^* . Однако оказывается, что на самом деле число уравнений и значений конечно.

Утверждение 6. Если информационное равновесие x_τ^* , $\tau \in \Sigma_+$, существует, то оно состоит из не более чем v попарно различных действий, а в системе (1) содержится не более чем v попарно различных уравнений.

Доказательство. Пусть x_τ^* , $\tau \in \Sigma_+$, – информационное равновесие. Тогда из конечности структуры информированности и условия 2 сразу следует, что попарно различных чисел x_τ^* не более v .

Рассмотрим две любые тождественные структуры информированности: $I_\lambda = I_\mu$. Соответственно, имеем $\theta_\lambda = \theta_\mu$ и $x_\lambda^* = x_\mu^*$. Далее, для любого $i \in N$ справедливо $I_{\lambda i} = I_{\mu i}$, следовательно, $x_{\lambda i}^* = x_{\mu i}^*$. Поэтому два уравнения системы (1), у которых в левой части стоят действия x_λ^* и x_μ^* , тождественно совпадают. Так как имеется v

попарно различных структур информированности, количество попарно различных условий (1) не превышает v . •

Таким образом, для нахождения информационного равновесия x_τ^* , $\tau \in \Sigma_+$, достаточно записать v условий (1) для каждого из v попарно различных значений x_τ^* , отвечающих попарно различным структурам информированности I_τ .

Если все агенты являются одинаково информированными, то сложность структуры информированности минимальна и равна числу агентов. В этом случае система (1) переходит в определение равновесия Нэша, а информационное равновесие – в равновесие Нэша.

Итак, в случае, когда все реальные агенты являются одинаково информированными (то есть рефлексивная реальность является общим знанием), информационное равновесие переходит в равновесие Нэша (фантомных агентов «не возникает»). Однако и в общем случае между информационным равновесием и равновесием Нэша существует тесная связь.

Пусть имеется структура информированности I конечной сложности v с базисом $\{I_{\tau_1}, \dots, I_{\tau_v}\}$. Тогда в информационном равновесии участвуют реальные и фантомные агенты из множества $\Xi = \{\tau_1, \dots, \tau_v\}$, каждый из которых выбирает действие $\{x_{\tau_1}, \dots, x_{\tau_v}\}$ соответственно, $x_{\tau_l} \in X_{\omega(\tau_l)}$, $l \in \{1, \dots, v\}$ – здесь и далее в этом разделе будем обозначать $\omega(\sigma)$ последний индекс в последовательности σ , где $\sigma \in \Sigma_+$.

Запишем целевую функцию каждого из агентов из множества Ξ следующим образом:

$$(2) \quad \varphi_{\tau_l}(x_{\tau_1}, \dots, x_{\tau_v}) = f_{\omega(\tau_l)}(\theta_{\tau_l}, x_{\sigma_1}, \dots, x_{\sigma_n}),$$

где $I_{\tau_l i} = I_{\sigma_i}$, $\sigma_i \in \Xi$ для всех $i \in N$, $l \in \{1, \dots, v\}$. Заметим, что $I_{\sigma_{\omega(\tau_l)}} = I_{\tau_l \omega(\tau_l)} = I_{\tau_l}$, поэтому соотношение (2) можно записать более подробно в следующем виде:

$$(3) \quad \varphi_{\tau_l}(x_{\tau_1}, \dots, x_{\tau_{l-1}}, x_{\tau_l}, x_{\tau_{l+1}}, \dots, x_{\tau_v}) = \\ = f_{\omega(\tau_l)}(\theta_{\tau_l}, x_{\sigma_1}, \dots, x_{\sigma_{\omega(\tau_l)-1}}, x_{\tau_l}, x_{\sigma_{\omega(\tau_l)-1}}, \dots, x_{\sigma_n}).$$

Содержательно соотношения (2) и (3) означают следующее: целевая функция, которую τ_l -агент ($\tau_l \in \Xi$) максимизирует в реф-

лексивной игре, субъективно зависит от его представлений о параметре θ , от его действия и от действий $(n - 1)$ агента из множества Ξ . Иными словами, функция φ_{τ_l} существенно зависит лишь от переменных $\{x_{\tau_1}, \dots, x_{\tau_v}\}$ (и от величины θ_{τ_l} как от параметра), причем эта зависимость совпадает с функцией f_i , где $i = \omega(\tau_l)$. Поэтому функция φ_{τ_l} «наследует» свойства функции $f_{\omega(\tau_l)}$.

Несколько забегаая вперед, приведем следующий пример. Пусть граф рефлексивной игры (см. следующий раздел) выглядит как на рисунке 5 (см. пример 4), а целевые функции реальных агентов — $f_i(\theta, x_1, x_2, x_3)$, $x_i \in X_i$, $i \in \{1, 2, 3\}$. Тогда в информационном равновесии участвуют пять агентов из множества $\Xi = \{1, 2, 3, 31, 32\}$ со следующими целевыми функциями:

$$\begin{aligned}\varphi_1(x_1, x_2, x_3, x_{31}, x_{32}) &= f_1(\theta_1, x_1, x_2, x_3); \\ \varphi_2(x_1, x_2, x_3, x_{31}, x_{32}) &= f_2(\theta_2, x_1, x_2, x_3); \\ \varphi_3(x_1, x_2, x_3, x_{31}, x_{32}) &= f_3(\theta_3, x_{31}, x_{32}, x_3); \\ \varphi_{31}(x_1, x_2, x_3, x_{31}, x_{32}) &= f_1(\theta_{31}, x_{31}, x_{32}, x_3); \\ \varphi_{32}(x_1, x_2, x_3, x_{31}, x_{32}) &= f_2(\theta_{32}, x_{31}, x_{32}, x_3).\end{aligned}$$

С учетом соотношения (3) система уравнений (1) для определения информационного равновесия $(x_{\tau_1}^*, \dots, x_{\tau_v}^*)$ представима в виде:

$$x_{\tau_l}^* = \arg \max_{x_{\tau_l} \in X_{\omega(\tau_l)}} \varphi_{\tau_l}(x_{\tau_{l-1}}^*, \dots, x_{\tau_{l-1}}^*, x_{\tau_l}^*, x_{\tau_{l+1}}^*, \dots, x_{\tau_v}^*),$$

где l пробегает все значения от 1 до v . Нетрудно видеть, что это не что иное, как система соотношений для определения равновесия Нэша в игре с одинаковой информированностью τ_l -агентов, $l \in \{1, \dots, v\}$. Это обстоятельство позволяет применять к информационному равновесию (соответствующим образом модифицировав) достаточные условия существования, известные для равновесия Нэша.

Например, известен следующий факт (см. [33, с. 74]): если в непрерывной игре множества действий X_i — выпуклые компактные подмножества линейных метрических пространств, для каждого агента целевая функция f_i непрерывна по всем переменным и строго вогнута по переменной x_i , то в этой игре существует равновесие Нэша в чистых стратегиях.

Этот факт можно переформулировать, получив достаточное условие существования информационного равновесия в рефлексивной игре.

Утверждение 7. Пусть в рефлексивной игре со структурой информированности конечной сложности множества действий X_i – выпуклые компактные подмножества линейных метрических пространств, для каждого агента целевая функция $f_i(\theta, x_1, \dots, x_n)$ при любом $\theta \in \Omega$ непрерывна по всем переменным и строго вогнута по переменной x_i . Тогда в этой игре существует информационное равновесие.

Доказательство. Непрерывность по всем аргументам функции f_i и ее строгая вогнутость по переменной x_i означает непрерывность по всем аргументам функций φ_{τ_i} (где $\tau_i \in \Xi$, $\omega(\tau_i) = i$), определяемых соотношениями (3), и строгую вогнутость каждой из них по x_{τ_i} . Поэтому утверждение сразу вытекает из приведенного выше факта [33, с. 74]. •

Информационное равновесие (см. (1)) является достаточно громоздкой конструкцией, и сразу увидеть связь между информационной структурой и информационным равновесием зачастую бывает затруднительно. Удобным языком описания взаимной информированности агентов и выразительным средством анализа свойств информационного равновесия является граф рефлексивной игры, к описанию которого мы и переходим.

2.3. ГРАФ РЕФЛЕКСИВНОЙ ИГРЫ

Если структура информированности имеет конечную сложность, то можно построить **граф рефлексивной игры**, наглядно показывающий взаимосвязь между действиями агентов (как реальных, так и фантомных), участвующих в равновесии.

Вершинами этого ориентированного графа являются действия x_τ , $\tau \in \Sigma_+$, отвечающие попарно нетождественным структурам информированности I_τ , или компоненты структуры информированности θ_τ , или просто номер τ реального или фантомного агента, $\tau \in \Sigma_+$.

Между вершинами проведены дуги по следующему правилу: к каждой вершине $x_{\sigma i}$ проведены дуги от $(n - 1)$ вершин, отвечающих структурам $I_{\sigma ij}$, $j \in N \setminus \{i\}$. Если две вершины соединены двумя противоположно направленными дугами, будем изображать одно ребро с двумя стрелками.

Подчеркнем, что граф рефлексивной игры соответствует системе уравнений (1) (то есть определению информационного равновесия), в то время как решения ее может и не существовать.

Итак, граф G_I рефлексивной игры Γ_I (см. определение рефлексивной игры в предыдущем разделе), структура информированности которой имеет конечную сложность, определяется следующим образом:

- вершины графа G_I соответствуют реальным и фантомным агентам, участвующим в рефлексивной игре, то есть попарно нетождественным структурам информированности;

- дуги графа G_I отражают взаимную информированность агентов: если от одного агента (реального или фантомного) существует путь к другому агенту, то второй адекватно информирован о первом.

Если в вершинах графа G_I изображать представления соответствующего агента о состоянии природы, то рефлексивная игра Γ_I с конечной структурой информированности I может быть задана кортежем $\Gamma_I = \{N, (X_i)_{i \in N}, f_i(\cdot)_{i \in N}, G_I\}$, где N – множество реальных агентов, X_i – множество допустимых действий i -го агента, $f_i(\cdot): \Omega \times X' \rightarrow \mathbb{R}^1$ – его целевая функция, $i \in N$, G_I – граф рефлексивной игры.

Отметим, что во многих случаях рефлексивную игру более удобно (и наглядно) описывать именно в терминах графа G_I , а не дерева информационной структуры.

Рассмотрим несколько примеров нахождения информационного равновесия.

Примеры 3-5. В этих примерах участвуют три агента с целевыми функциями следующего вида:

$$f_i(\theta, x_1, x_2, x_3) = (\theta - x_1 - x_2 - x_3)x_i - \frac{x_i^2}{2},$$

где $x_i \geq 0$, $i \in N = \{1, 2, 3\}$; $\theta \in \Omega = \{1, 2\}$.

Содержательно, x_i – объем выпуска продукции i -м агентом, θ – спрос на производимую продукцию. Тогда первое слагаемое в

целевой функции может интерпретироваться как произведение цены на объем продаж – выручка от продаж (см. модели олигополии Курно в [1, 176, 180]), а второе слагаемое – как затраты на производство.

Для краткости будем называть агента, считающего, что спрос низкий ($\theta = 1$), пессимистом, а считающего, что спрос высокий ($\theta = 2$) – оптимистом. Таким образом, в примерах 3-5 ситуации различаются лишь вследствие различных структур информированности.

Пример 3. Пусть первые два агента оптимисты, а третий – пессимист, причем все трое одинаково информированы. Тогда, в соответствии с утверждением 5, для любого $\sigma \in \Sigma$ выполняются тождества $I_{\sigma 1} = I_1$, $I_{\sigma 2} = I_2$, $I_{\sigma 3} = I_3$.

В соответствии со свойством 2 определения информационного равновесия, аналогичные соотношения выполняются для равновесных действий x_{σ}^* .

Видно, что любая структура информированности тождественна одной из трех, образующих базис: $\{I_1, I_2, I_3\}$. Поэтому сложность данной структуры информированности равна трем, а глубина равна единице. Граф рефлексивной игры изображен на рис. 4.

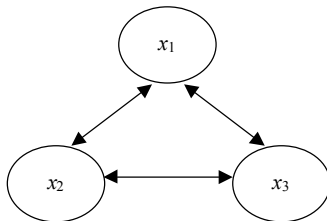


Рис. 4. Граф рефлексивной игры в примере 3

Для нахождения информационного равновесия надо решить следующую систему уравнений (см. выражение (1) раздела 2.2):

$$\begin{cases} x_1^* = \frac{2 - x_2^* - x_3^*}{3}, \\ x_2^* = \frac{2 - x_1^* - x_3^*}{3}, \\ x_3^* = \frac{1 - x_1^* - x_2^*}{3}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1^* = \frac{1}{2}, \\ x_2^* = \frac{1}{2}, \\ x_3^* = 0. \end{cases}$$

Таким образом, действия агентов в ситуации информационного равновесия будут следующими:

$$x_1^* = x_2^* = 1/2, \quad x_3^* = 0. \bullet$$

Пример 4. Пусть первые два агента оптимисты, а третий – пессимист, который считает всех трех агентов одинаково информированными пессимистами. Первые два агента одинаково информированы, причем оба они адекватно информированы о третьем агенте.

Имеем: $I_1 \sim I_2$, $I_1 > I_3$, $I_2 > I_3$, $I_1 \sim_3 I_2 \sim_3 I_3$.

Эти условия можно записать в виде следующих тождеств, имеющих место для любого $\sigma \in \Sigma$ (воспользуемся соответствующими определениями и утверждениями 1, 2, 5):

$$I_{12\sigma} = I_{2\sigma}, \quad I_{13\sigma} = I_{3\sigma}, \quad I_{21\sigma} = I_{1\sigma}, \quad I_{23\sigma} = I_{3\sigma}, \quad I_{3\sigma 1} = I_{31}, \quad I_{3\sigma 2} = I_{32}, \quad I_{3\sigma 3} = I_3.$$

Аналогичные соотношения выполняются для равновесных действий x_σ^* . Левые части этих тождеств показывают, что любая структура I_σ при $|\sigma| > 2$ тождественна некоторой структуре I_τ , $|\tau| < |\sigma|$. Поэтому глубина структуры I не превосходит двух и, следовательно, она имеет конечную сложность. Правые части показывают, что базис образуют следующие структуры: $\{I_1, I_2, I_3, I_{31}, I_{32}\}$ (нетрудно убедиться, что они попарно различны).

Таким образом, сложность данной структуры информированности равна пяти, а глубина равна двум. Граф рефлексивной игры изображен на рис. 5.

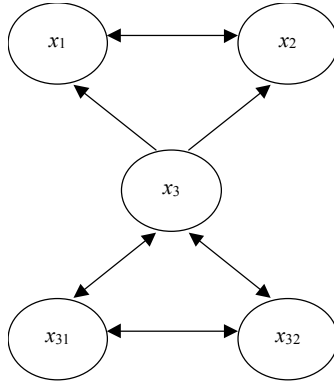


Рис. 5. Граф рефлексивной игры в примере 4

Для нахождения информационного равновесия надо решить следующую систему уравнений (см. выражение (1) раздела 2.2):

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1^* = \frac{2 - x_2^* - x_3^*}{3}, \\ x_2^* = \frac{2 - x_1^* - x_3^*}{3}, \\ x_3^* = \frac{1 - x_{31}^* - x_{32}^*}{3}, \\ x_{31}^* = \frac{1 - x_{32}^* - x_3^*}{3}, \\ x_{32}^* = \frac{1 - x_{31}^* - x_3^*}{3}, \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1^* = \frac{9}{20}, \\ x_2^* = \frac{9}{20}, \\ x_3^* = \frac{1}{5}, \\ x_{31}^* = \frac{1}{5}, \\ x_{32}^* = \frac{1}{5}. \end{array} \right.$$

Таким образом, действия реальных агентов в ситуации информационного равновесия будут следующими: $x_1^* = x_2^* = 9/20$, $x_3^* = 1/5$. •

Пример 5. Пусть все трое агентов оптимисты, первый и второй взаимно информированы, второй и третий также взаимно информированы. По мнению первого агента, третий считает всех троих одинаково информированными пессимистами; также и первый агент, по мнению третьего, считает всех троих одинаково информированными пессимистами.

Имеем: $I_1 \succ I_2$, $I_2 \succ I_3$, $I_1 \sim_{13} I_2 \sim_{13} I_3$, $I_1 \sim_{31} I_2 \sim_{31} I_3$.

Эти условия можно записать в виде следующих тождеств, имеющих место для любого $\sigma \in \Sigma$ (воспользуемся соответствующими определениями и утверждениями 1, 2, 5):

$$I_{12\sigma} = I_{2\sigma}, \quad I_{13\sigma 1} = I_{131}, \quad I_{13\sigma 2} = I_{132}, \quad I_{13\sigma 3} = I_{13}, \quad I_{21\sigma} = I_{1\sigma},$$

$$I_{23\sigma} = I_{3\sigma}, \quad I_{31\sigma 1} = I_{31}, \quad I_{31\sigma 2} = I_{312}, \quad I_{31\sigma 3} = I_{313}, \quad I_{32\sigma} = I_{2\sigma}.$$

Аналогичные соотношения выполняются для равновесных действий x_σ^* .

Левые части этих тождеств показывают, что любая структура I_σ при $|\sigma| > 3$ тождественна некоторой структуре I_τ , $|\tau| < |\sigma|$. Поэтому глубина структуры I не превосходит трех и, следовательно, она имеет конечную сложность. Правые части тождеств показывают, что в базис могут входить лишь следующие структуры информированности: $I_1, I_2, I_3, I_{31}, I_{13}, I_{131}, I_{132}, I_{312}, I_{313}$.

Далее, для любого $\sigma \in \Sigma$ справедливы соотношения $\theta_{131\sigma} = \theta_{31\sigma} = \theta_{313\sigma} = \theta_{13\sigma} = \theta_{132\sigma} = \theta_{312\sigma} = 1$, из которых вытекают тождества $I_{131} = I_{31}, I_{313} = I_{13}, I_{132} = I_{312}$.

Таким образом, базис образуют следующие попарно различные структуры: $\{I_1, I_2, I_3, I_{31}, I_{13}, I_{132}\}$. Сложность данной структуры информированности равна шести, а глубина равна трем. Граф соответствующей рефлексивной игры изображен на рисунке 6.

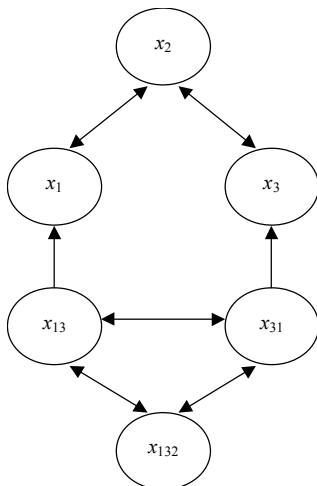


Рис. 6. Граф рефлексивной игры в примере 5

Для нахождения информационного равновесия надо решить следующую систему уравнений (см. выражение (1) раздела 2.2):

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1^* = \frac{2 - x_2^* - x_{13}^*}{3}, \\ x_2^* = \frac{2 - x_1^* - x_3^*}{3}, \\ x_3^* = \frac{2 - x_{31}^* - x_2^*}{3}, \\ x_{31}^* = \frac{1 - x_{132}^* - x_{13}^*}{3}, \\ x_{13}^* = \frac{1 - x_{31}^* - x_{132}^*}{3}, \\ x_{132}^* = \frac{1 - x_{31}^* - x_{13}^*}{3}, \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1^* = \frac{17}{35}, \\ x_2^* = \frac{12}{35}, \\ x_3^* = \frac{17}{35}, \\ x_{31}^* = \frac{1}{5}, \\ x_{13}^* = \frac{1}{5}, \\ x_{132}^* = \frac{1}{5}. \end{array} \right.$$

Таким образом, действия реальных агентов в ситуации информационного равновесия будут следующими: $x_1^* = x_3^* = 17/35$, $x_2^* = 12/35$. •

Завершив описание графа рефлексивной игры, рассмотрим еще один способ наглядного представления информационной структуры игры.

2.4. РЕГУЛЯРНЫЕ СТРУКТУРЫ ИНФОРМИРОВАННОСТИ

В разделе 2.1 было введено понятие структуры информированности – бесконечного дерева, отражающего иерархию представлений агентов в рефлексивной игре. В разделе 2.2 определено информационное равновесие (как решение рефлексивной игры), существующее в случае, когда структура информированности конечна. Конечность информационной структуры по своему определению означает не конечность ее дерева, а существование конечного базиса, в рамках которого рассмотрение фантомных агентов, имеющих ту же информированность, что и другие реальные

или фантомные агенты, не дает новой информации и поэтому нецелесообразно.

Если априори имеется (например, построено исходя из содержательных соображений) конечное дерево, отражающее несколько первых уровней представлений агентов, то в общем случае нельзя однозначно сказать, какой бесконечной информационной структуре оно соответствует. Другими словами, может существовать множество информационных структур, любое конечное число верхних уровней которых совпадает.

Поэтому для определения информационного равновесия по конечному дереву представлений агентов необходимо введение дополнительных предположений. Например, можно постулировать, что каждый фантомный агент, соответствующий нижнему уровню конечного дерева представлений, при определении своего действия считает, что агент, соответствующий предыдущему уровню иерархии, адекватно информирован о нем (см. предположения Π_m в [78] и субъективные байесовы равновесия в [184]).

В настоящем разделе рассматриваются регулярные структуры информированности, обладающие, в частности, тем свойством, что, если задано конечное дерево представлений и известно, что информационная структура регулярна, то информационное равновесие определяется однозначно. Для регулярных структур информированности удастся получить конструктивные условия существования информационного равновесия; кроме того, они оказываются полезны при решении задачи информационного управления (см. главу 4).

Как отмечалось выше, понятие структуры информированности является довольно общим и объемлет, в том числе, случаи, содержательная интерпретация которых представляется затруднительной. Поэтому введем в рассмотрение класс *регулярных структур информированности*, который, с одной стороны, является достаточно широким и охватывает множество реальных ситуаций, а с другой — легко описывается. Для задания этих структур введем вспомогательное понятие *регулярного конечного дерева* (РКД), которое определим рекуррентно.

Пусть в игре участвуют n агентов. Если (в простейшем случае) все агенты одинаково информированы, то структура информированности имеет сложность n и единичную глубину. Будем изображать эту ситуацию в виде дерева, состоящего из корневой верши-

ны, n ребер и n висячих вершин. На рисунке 7 изображено такое дерево для случая трех агентов (здесь и далее будем для большей наглядности отмечать в вершинах дерева вместо θ_1 , θ_2 , θ_{12} и т.д. просто 1, 2, 12 и т.д.).

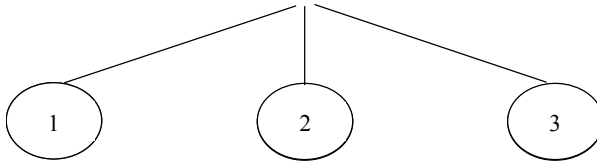


Рис. 7. Регулярное конечное дерево

Данному РКД соответствует граф рефлексивной игры, приведенный на рис. 8.

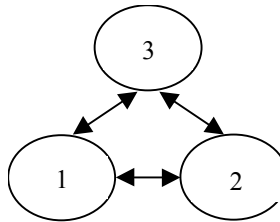


Рис. 8. Граф рефлексивной игры для РКД, приведенного на рис. 7

Далее РКД может «расти» следующим образом: к каждой висячей вершине τi , $\tau \in \Sigma$, присоединяется ровно $n - 1$ ребро, при этом возникает $n - 1$ висячая вершина τij , $j = 1, \dots, i - 1, i + 1, \dots, n$. Построенное РКД будем интерпретировать так: если имеется висячая вершина τi , $\tau \in \Sigma$, то τi -агент одинаково информирован с τ -агентом (если τ – пустая последовательность, то τi -агент является реальным, и его субъективные представления совпадают с объективными).

В качестве примеров регулярных структур информированности приведем все возможные (с точностью до перенумерации агентов) структуры глубины 2.

Начнем с РКД, изображенного на рис. 9.

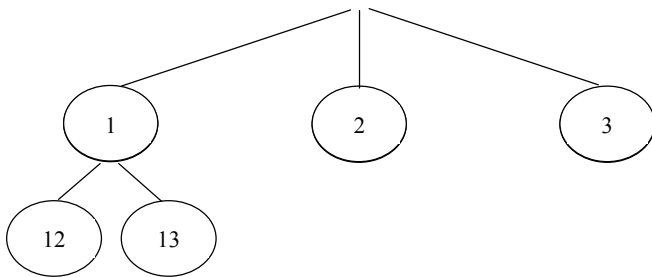


Рис. 9. Пример РКД глубины 2

Если $\theta_{12} = \theta_2$ и $\theta_{13} = \theta_3$, то опять получаем граф, приведенный на рис. 8. Если же хотя бы одно из этих равенств нарушено, получается граф рефлексивной игры, изображенный на рис. 10.

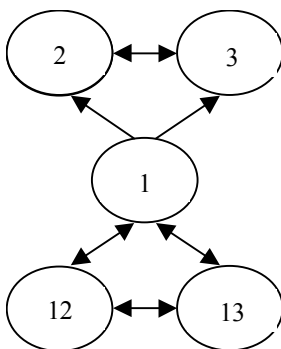


Рис. 10. Граф рефлексивной игры для РКД, приведенного на рис. 9

Следующий случай РКД изображен на рис. 11.

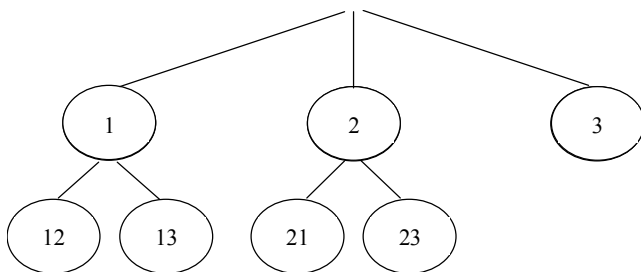


Рис. 11. Пример РКД глубины 2

Здесь возможны два варианта графов рефлексивной игры, не сводимых к предыдущим – см. рисунки 12 и 13.

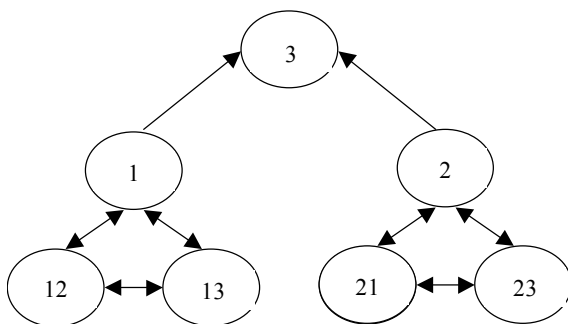


Рис. 12. Граф рефлексивной игры для РКД, приведенного на рис. 11

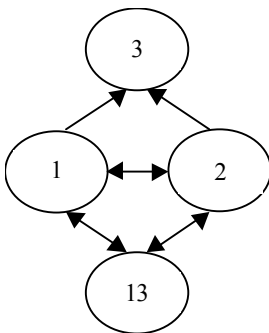


Рис. 13. Граф рефлексивной игры для РКД, приведенного на рис. 11

Наконец, последний случай РКД изображен на рис. 14.

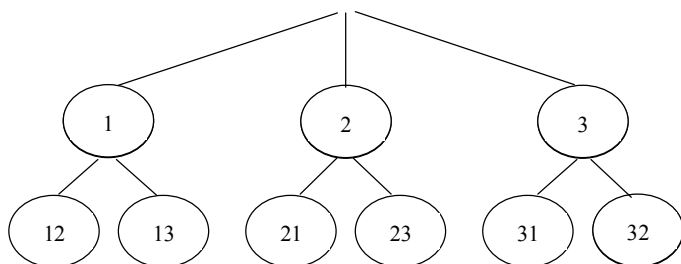


Рис. 14. Пример РКД глубины 2

Этому случаю соответствуют три варианта графов рефлексивной игры, не сводимых к предыдущим – см. рисунки 15, 16 и 17. Как видим, графы на рисунках 15 и 16 являются несвязными.

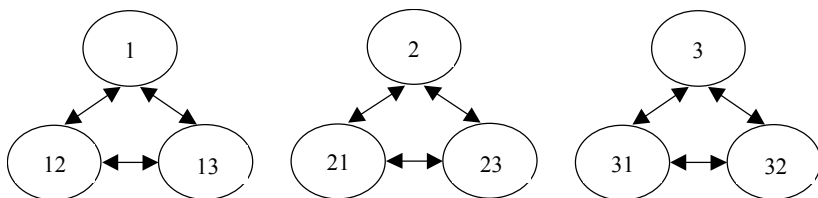


Рис. 15. Граф рефлексивной игры для РКД, приведенного на рис. 14

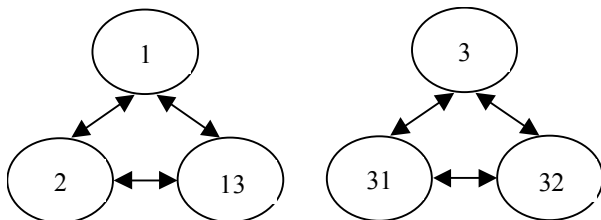


Рис. 16. Граф рефлексивной игры для РКД, приведенного на рис. 14

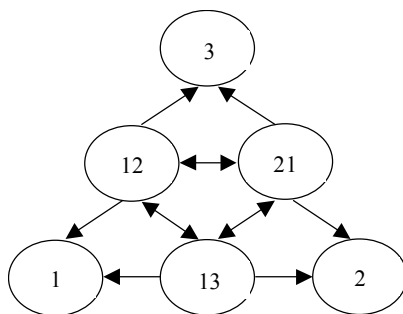


Рис. 17. Граф рефлексивной игры для РКД, приведенного на рис. 14

Содержательная интерпретация каждой из семи возможных структур информированности глубины не более двух (см. рисунки 8, 10, 12, 13, 15-17) не вызывает затруднений. Остановимся на трех симметричных структурах (см. рисунки 8, 15 и 17).

Рис. 8 соответствует, как отмечалось выше, одинаковой информированности агентов. Их рефлексивные реальности совпадают. Можно сказать, агенты играют в одну игру, правила которой являются общим знанием.

Рис. 15 соответствует в некотором смысле противоположной ситуации. У агентов искаженные и попарно несогласованные представления друг о друге. Каждый из них считает, что все одинаково информированы, но все агенты заблуждаются. На самом деле каждый играет в свою игру.

Рис. 17 соответствует ситуации, когда каждый агент считает себя более информированным, чем остальные. Например: агенты провели переговоры, сообщив друг другу свои представления о неизвестном параметре, однако все трое скрыли свои истинные представления, считая при этом, что остальные двое были правдивы и поверили своим оппонентам. Возможна и несколько иная интерпретация того же рис. 17: агенты заключили договор, но каждый собирается его нарушить, считая при этом, что оппоненты считают договор стабильным – не собираются его нарушать, не ждут этого от оппонентов и т.д.

Рассмотрим теперь вопрос о существовании информационного равновесия для регулярных структур информированности.

Из построения РКД видно, что равновесные действия агентов (если они существуют) могут быть найдены «снизу вверх», то есть от висячих вершин к корню РКД. Пусть, например, для некоторого $\tau \in \Sigma_+$ висячими являются $n - 1$ вершин τij , $j \in N \setminus \{i\}$. Тогда, по определению РКД, n агентов из множества $\{\tau ij\}$, $j \in N$, являются одинаково информированными (напомним, что в силу аксиомы автоинформированности (см. раздел 3.2) мы отождествляем τi - и τii -агентов). Поэтому для их равновесных действий справедливы соотношения $x_{\tau ij}^* = x_{\tau ik}^*$, $j, k \in N$,

$$(1) \quad x_{\tau ij}^* \in \text{Arg} \max_{x_{\tau ij} \in X_i} f_j(\theta_{\tau ij}, x_{\tau i1}^*, \dots, x_{\tau i, j-1}^*, x_{\tau ij}, x_{\tau i, j+1}^*, \dots, x_{\tau in}^*), j \in N.$$

Отметим, что остальные агенты находятся «вне поля зрения» рассматриваемых нами n агентов $\{\tau ij\}$, $j \in N$.

Система (1) является записью «обычного» равновесия Нэша в игре с общим знанием. Если она имеет решение, из нее, в частности, можно найти действие τi -агента.

Далее, рассмотрим вершину τ , $\tau \in \Sigma_+$, и вершины τm , $m \in N \setminus \{\omega(\tau)\}$ (напомним, что $\omega(\tau)$ – последний индекс в последовательности τ), среди которых находится и вершина τi . Все τm -агенты делятся на два множества: одинаково информированные с τ -агентом и прочие (к последним относится и τi -агент). Чтобы удобнее было их разделять, введем обозначение:

$$\overline{N}_\tau = \{k \in N \mid I_{\tau k} \sim I_\tau\}.$$

Как мы видели, равновесное действие τi -агента (и, аналогично, действия всех τm -агентов, $m \notin \overline{N}_\tau$) определяется независимо от действия прочих τm -агентов, $m \in N$. Поэтому все τk -агенты, $k \in \overline{N}_\tau$, могут просто подставить действия $x_{\tau m}^*$, $m \notin \overline{N}_\tau$, в свои целевые функции. Таким образом, для вычисления равновесных действий $x_{\tau k}^*$, $k \in \overline{N}_\tau$, надо решить систему уравнений

$$(2) \quad x_{\tau k}^* = \arg \max_{x_{\tau k} \in X_k} f_k(\theta_{\tau k}, x_{\tau 1}^*, \dots, x_{\tau, k-1}^*, x_{\tau k}, x_{\tau, k+1}^*, \dots, x_{\tau n}^*), \quad k \in \overline{N}_\tau.$$

Система (2) является записью равновесия Нэша в игре τk -агентов, $k \in \overline{N}_\tau$. Ее решение (если оно существует), позволяет найти равновесное действие x_τ^* .

Двигаясь от висячих вершин к корню, можно последовательно найти все равновесные действия. Для этого все системы типа (1) и (2) должны иметь решение. Таким образом, можно сформулировать следующее достаточное условие существования информационного равновесия для регулярных структур информированности (множество реальных агентов N , их целевые функции $\{f_i\}$, множества допустимых действий $\{X_i\}$, а также множество возможных значений Ω неопределенного параметра считаем фиксированными).

Утверждение 8. Пусть для любого непустого множества $\overline{N} \subseteq N$ справедлив следующий факт: для любых $\theta_k \in \Omega$, $k \in \overline{N}$, и любых $x_m^* \in X_m$, $m \notin \overline{N}$, существует равновесие Нэша в игре с общим знанием k -агентов, то есть существуют x_k^* , $k \in \overline{N}$, удовлетворяющие

$$x_k^* \in \text{Arg max}_{x_k \in X_k} f_k(\theta_k, x_1^*, \dots, x_{k-1}^*, x_k^*, x_{k+1}^*, \dots, x_n^*), \quad k \in \overline{N}.$$

Тогда для любой конечной структуры информированности существует информационное равновесие.

В заключение настоящего раздела отметим, что описанные свойства регулярных информационных структур будут использованы ниже (в главе 4) при исследовании задач информационного управления.

ПРИЛОЖЕНИЕ К ГЛАВЕ 2. **РЕФЛЕКСИЯ В ХУДОЖЕСТВЕННЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЯХ**

Как было показано в главе 2, взаимную информированность реальных и фантомных агентов удобно описывать при помощи ориентированного графа рефлексивной игры, в котором вершины соответствуют реальным и фантомным агентам, а стрелки обозначают информированность одного агента (к которому направлена стрелка) о другом (от которого направлена стрелка). Например, граф $1 \leftrightarrow 2$ означает, что агенты 1 и 2 одинаково и адекватно информированы друг о друге, а граф $1 \leftarrow 2 \leftrightarrow 21$ означает, что агент 1 информирован адекватно, а агент 2 заблуждается – неадекватно представляет себе оппонента.

Если для вычисления информационного равновесия необходимо знание функций выигрыша участников игры, то граф рефлексивной игры может быть построен и без конкретизации целевых функций агентов. При этом он отражает не количественное соотношение интересов, а качественное соотношение информированности рефлексизирующих агентов.

Покажем на примерах, что граф рефлексивной игры является, в частности, способом отражения эффектов рефлексии в художественных произведениях [139].

Пример 1 («Детектив»). Пусть имеются преступник и следователь. Обозначим их, соответственно 1 и 2. Тогда процессу раскрытия преступления соответствует граф рефлексивной игры $1 \leftarrow 2 \leftrightarrow 21$ (компонента 21 соответствует преступнику, которого следователь на данном этапе считает невиновным), а факту раскрытия преступления – переход к графу $1 \leftrightarrow 2$.

Аналогичная по сложности ситуация имеет место в романе Ф.М. Достоевского «Преступление и наказание». Раскольников не знает, что следователю известно, что он убийца. Обозначая их, соответственно, 1 и 2, получим, что с точки зрения Раскольникова имеет место $1 \leftarrow 12 \leftrightarrow 121$, в то время как полный граф рефлексивной игры имеет вид, приведенный на рис. 18.

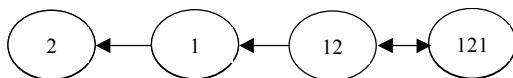
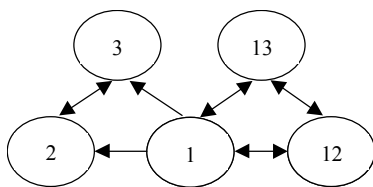


Рис. 18. Граф рефлексивной игры в сюжете «Детектив»

Пример 2 («Шпионские страсти-1»). Пусть в ситуации участвуют два государства (A и B) и агент, который, будучи высокопоставленным чиновником государства A является одновременно осведомителем государства B , о чем государству A неизвестно. Граф рефлексивной игры описанной ситуации изображен на рис. 19.



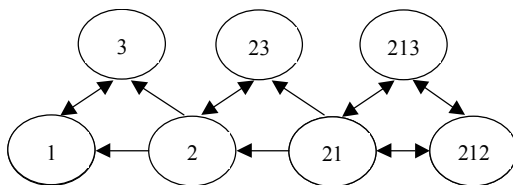
*Рис. 19. Граф рефлексивной игры в сюжете
«Шпионские страсти-1»*

Вершинам графа соответствуют следующие реальные и фантомные агенты: 1 – государство *A*; 2 – государство *B*; 3 – агент; 12 – государство *B*, которое воспринимает агента как чиновника, верного государству *A*; 13 – агент – чиновник, верный государству *A*. •

Легко видеть, что ситуация в сюжете «Любовный треугольник» также описывается структурой на рис. 19.

Рассмотрим несколько усложненную версию предыдущего сюжета.

Пример 3 («Шпионские страсти-2»). Ситуация похожа на описанную в примере 2, различие в том, что агент на самом деле работает на государство *A*, а государству *B* передает лишь соответствующим образом обработанные сведения. Граф рефлексивной игры для этой, более сложной, ситуации изображен на рис. 20.



*Рис. 20. Граф рефлексивной игры в сюжете
«Шпионские страсти-2»*

Вершинам графа соответствуют следующие реальные и фантомные агенты: 1 – государство *A*; 2 – государство *B*; 3 – агент; 21 – государство *A*, которое ошибочно полагает, что агент – его чиновник, не входивший ни в какие контакты с *B*; 23 – агент, работающий в пользу государства *B*; 212 – государство *B*, которое

тающий в пользу государства B ; 212 – государство B , которое не входило ни в какие контакты с агентом – чиновником государства A ; 213 – агент – чиновник, верный государству A и не входивший ни в какие контакты с государством B .

Отметим, что во всех рассмотренных выше примерах ранг рефлексии (который на единицу меньше длины максимальной последовательности индексов) не превышает двух. Более высокие ранги рефлексии в художественных произведениях встречаются чрезвычайно редко, однако их можно найти, о чем свидетельствует следующий пример.

Пример 4. В фильме «Император и убийца» (1999, режиссер – Чен Кайге) описывается ситуация, основными участниками которой являются два человека – китайский император и убийца. Убийцу посылают к императору под видом посла соседнего государства. Император, между тем, осведомлен о том, что посол на самом деле является убийцей. Однако убийца знает о том, что император знает, что он собирается убить его.

Граф рефлексивной игры для этой ситуации изображен на рисунке 21.

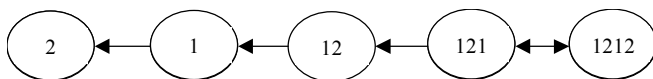
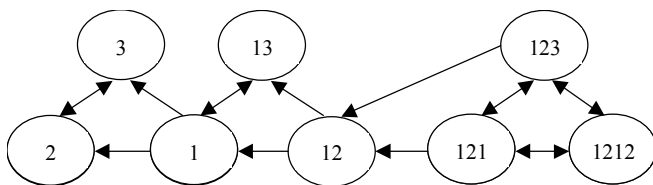


Рис. 21. Граф рефлексивной игры в фильме «Император и убийца»

Вершинам графа соответствуют следующие реальные и фантомные агенты: 1 – император; 2 – убийца; 12 – убийца, который считает императора неосведомленным; 121 – император, который считает пришедшего к нему человека послом соседнего государства; 1212 – посол соседнего государства.

Роль жены императора в интриге фильма читатель может увидеть из графа рефлексивной игры, приведенного на рисунке 22, в котором она обозначена номером 3.

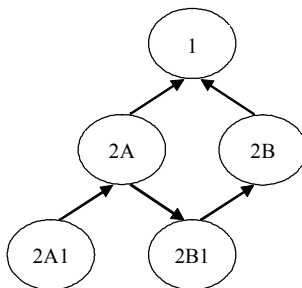


*Рис. 22. Роль жены императора в фильме
«Император и убийца»*

Отметим, что в последнее время наличие нескольких рефлексивных (виртуальных, быть может, вложенных друг в друга) реальностей лежит в основе сюжетов многих художественных фильмов – «Матрица», «Авалон», «Шоу Трумэна» и др.

Наконец, заключительный пример – несколько иного жанра.

Пример 5. Приведем полностью текст эпиграммы «О поцелуе» (см.: С.Я. Маршак. Избранное. – М.: Художественная литература, 1964 (раздел «Из английских эпиграмм»)): «– Он целовал вас, кажется? / – Боюсь, что это так. / – Но как же вы позволили? / – Ах, он такой чудак! / Он думал, что уснула я / И все во сне стерплю, / Иль думал, что я думала, / Что думал он: я сплю!»



*Рис. 23. Структура информированности барышни в эпиграмме
«О поцелуе»*

На рис. 23 изображена структура информированности барышни, которую поцеловал кавалер (оставшийся в эпиграмме за кадром). Вершинам графа соответствуют следующие реальные и фантомные агенты: 1 – барышня (поскольку она не уверена, какая

из двух возможностей имела место, к данной вершине направлены две стрелки); 2А – кавалер, считающий барышню спящей; 2В – кавалер, считающий, что барышня думает, что он считает ее спящей; 2А1 – спящая барышня (поскольку она спит и не рефлексировать, то стрелка, направленная к данной вершине, отсутствует); 2В1 – барышня, которая думает, что кавалер считает ее спящей.

Таким образом, язык графов рефлексивной игры является удобным средством единообразного описания эффектов информационной рефлексии в художественных произведениях.

ГЛАВА 3. ИНФОРМАЦИОННЫЕ РАВНОВЕСИЯ

В данной главе исследуются специфические типы информационных равновесий. В разделе 3.1 рассматривается свойство стабильности равновесия, состоящее в том, что каждый агент наблюдает именно тот результат игры, который ожидает в момент выбора действия. Тем самым, информационная структура игры не меняется.

В разделе 3.2 стабильные информационные равновесия подразделяются на истинные и ложные. Формулируется достаточное условие, при выполнении которого все стабильные равновесия являются истинными (утверждение 12).

В разделе 3.3 рассматривается случай, когда агенты в результате игры наблюдают действия друг друга. Доказывается ряд утверждений, проясняющих взаимосвязь стабильности равновесия и свойств структуры информированности игры.

В разделе 3.4 проводится аналогия между рефлексивными играми и байесовыми играми – альтернативным способом моделирования принятия решения в ситуации с неполной информированностью. Доказывается теорема, в определенном смысле математически обосновывающая необходимость ограничения ранга рефлексии агента.

В контексте описанной в разделе 1.4 модели информационного управления материал данной главы охватывает цепь «действие → наблюдаемый результат → информированность» (рис. 24).

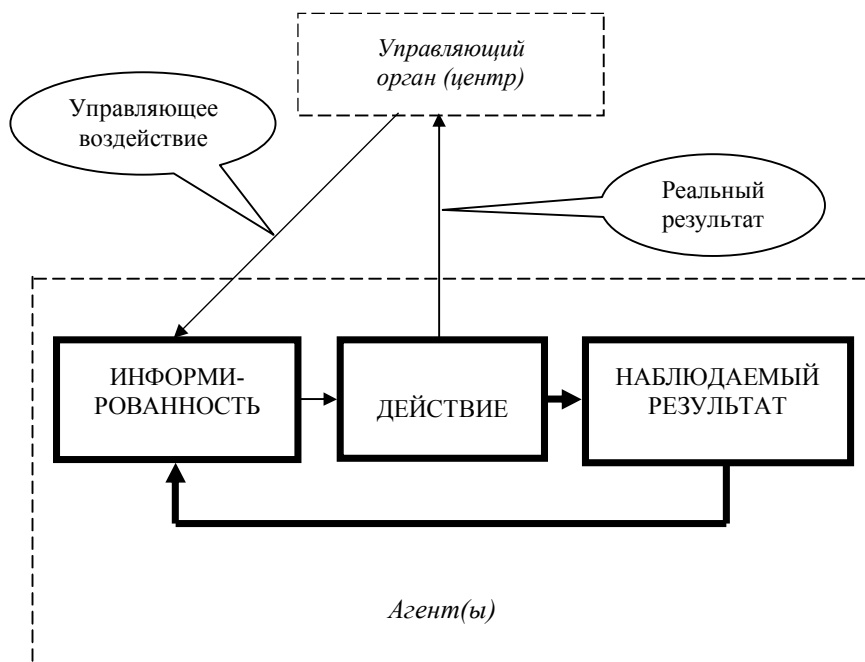


Рис. 24. Предмет исследования в главе 3

3.1. СТАБИЛЬНЫЕ ИНФОРМАЦИОННЫЕ РАВНОВЕСИЯ

Одной из особенностей «классического» равновесия Нэша является его самоподдерживающийся характер – если игра повторяется несколько раз и все игроки, кроме i -го, выбирают одни и те же равновесные действия, то и i -му нет резона отклоняться от своего равновесного действия. Это обстоятельство очевидным образом связано с тем, что представления всех игроков о реальности адекватны – значение состояния природы является общим знанием.

В случае информационного равновесия ситуация, вообще говоря, может быть иной. Действительно, в результате однократного разыгрывания игры может оказаться, что какие-то из игроков (или даже все) наблюдают не тот результат, на который они рассчитывали. Это может быть связано как с неверным представлением о состоянии природы, так и с неадекватной информированностью о

представлениях оппонентов. В любом случае, самоподдерживающийся характер равновесия нарушается – если игра повторяется, действия игроков могут измениться.

Однако в некоторых случаях самоподдерживающийся характер равновесия может иметь место и при различных (и, вообще говоря, неверных) представлениях агентов. Говоря неформально, это происходит тогда, когда каждый агент (как реальный, так и фантомный) наблюдает тот результат игры, которого ожидает. Для формального изложения нам понадобится дополнить описание рефлексивной игры.

Напомним, что рефлексивная игра задается кортежем $\{N, (X_i)_{i \in N}, f_i(\cdot)_{i \in N}, \Omega, I\}$, где $N = \{1, 2, \dots, n\}$ – множество участников игры (игроков, агентов), X_i – множество допустимых действий i -го агента, $f_i(\cdot): \Omega \times X' \rightarrow \mathbb{R}^1$ – его целевая функция, $i \in N$, I – структура информированности. Дополним эту конструкцию набором функций $w_i(\cdot): \Omega \times X' \rightarrow W_i$, $i \in N$, каждая из которых отображает вектор (θ, x) в элемент w_i некоторого множества W_i . Этот элемент w_i и есть то, что i -й агент наблюдает в результате разыгрывания игры.

Функцию $w_i(\cdot)$ будем называть *функцией наблюдения i -го агента* [138]. Будем считать, что функции наблюдения являются общим знанием среди агентов.

Если $w_i(\theta, x) = (\theta, x)$, т. е. $W_i = \Omega \times X'$, то i -й агент наблюдает как состояние природы, так и действия всех агентов. Если, напротив, множество W_i состоит из одного элемента, то i -й агент ничего не наблюдает.

Пусть в рефлексивной игре существует информационное равновесие x_τ , $\tau \in \Sigma_+$ (напомним, что τ – произвольная непустая конечная последовательность индексов из N). Зафиксируем $i \in N$ и рассмотрим i -го агента. Он ожидает в результате игры пронаблюдать величину

$$(1) \quad w_i(\theta_b, x_{i1}, \dots, x_{i,i-1}, x_b, x_{i,i+1}, \dots, x_{in}).$$

На самом же деле он наблюдает величину

$$(2) \quad w_i(\theta, x_1, \dots, x_{i-1}, x_b, x_{i+1}, \dots, x_n).$$

Поэтому требование стабильности для i -агента означает совпадение величин (1) и (2) (напомним, что эти величины являются элементами некоторого множества W_i).

Пусть величины (1) и (2) равны, т. е. i -агент и после разыгрывания игры не сомневается в истинности своих представлений. Однако является ли это достаточным основанием для того, чтобы он и в следующий раз выбрал то же действие x_i ? Ясно, что ответ отрицательный, что продемонстрируем на следующем примере.

Пример 1. Пусть в рефлексивной биматричной игре, где $\Omega = \{1, 2\}$, выигрыши заданы биматрицами (агент 1 выбирает строку, агент 2 – столбец, то есть $X_1 = X_2 = \{1; 2\}$), приведенными на рис. 25,

$$\begin{array}{cc} \theta = 1 & \theta = 2 \\ \left(\begin{array}{cc} (1,1) & (0,0) \\ (0,1) & (2,0) \end{array} \right) & \left(\begin{array}{cc} (0,1) & (1,2) \\ (1,1) & (2,2) \end{array} \right) \end{array}$$

Рис. 25. Матрицы выигрышей в примере 1

а граф рефлексивной игры имеет вид, изображенный на рис. 26.



Рис. 26. Граф рефлексивной игры в примере 1

Пусть при этом $\theta = \theta_1 = 1$, $\theta_2 = \theta_{21} = 2$, и каждый агент наблюдает свой выигрыш (т.е. функция наблюдения агента совпадает с его функцией выигрыша). Ясно, что информационным равновесием является набор $x_1 = x_2 = x_{21} = 2$, т. е. первый и второй агенты, а также 21-агент и все прочие фантомные агенты выбирают вторые действия. Однако реальное состояние природы $\theta = 1$ становится известным второму агенту после розыгрыша игры (и получения им выигрыша 0 вместо ожидаемого 2). Поэтому в следующий раз второй агент выберет действие $x_2 = 1$, что побуждает и первого агента изменить свое действие (выбрать $x_1 = 1$). •

Таким образом, для стабильности равновесия необходимо чтобы и ij -агент, $i, j \in N$, наблюдал «нужную» величину. Он ожидает в результате игры пронаблюдать

$$(3) \quad w_j(\theta_{ij}, x_{ij1}, \dots, x_{ij,j-1}, x_{ij}, x_{ij,j+1}, \dots, x_{ijn}).$$

На самом же деле (т. е. i -субъективно, ведь ij -агент существует в сознании i -агента) он наблюдает величину

$$(4) \quad w_j(\theta_i, x_{i1}, \dots, x_{i,j-1}, x_{ij}, x_{i,j+1}, \dots, x_{in}).$$

Поэтому требование стабильности для ij -агента означает совпадение величин (3) и (4).

В общем случае, т. е. для ti -агента, $ti \in \Sigma_+$, условие стабильности определим следующим образом.

Определение. Информационное равновесие x_{ti} , $ti \in \Sigma_+$, будем называть *стабильным* при заданной структуре информированности I , если для любого $ti \in \Sigma_+$ выполняется

$$(5) \quad w_i(\theta_{ti}, x_{ti1}, \dots, x_{ti,i-1}, x_{ti}, x_{ti,i+1}, \dots, x_{tin}) = \\ = w_i(\theta_i, x_{i1}, \dots, x_{i,i-1}, x_{ti}, x_{i,i+1}, \dots, x_{in}).$$

Информационное равновесие, не являющееся стабильным, будем называть *нестабильным*. В частности, информационное равновесие в примере 1 является нестабильным.

Утверждение 9. Пусть структура информированности I имеет сложность v и существует информационное равновесие x_{ti} , $ti \in \Sigma_+$. Тогда система соотношений (5) содержит не более чем v попарно различных условий.

Доказательство. Рассмотрим две любые тождественные [81] структуры информированности: $I_{\lambda i} = I_{\mu i}$. Поскольку x_{ti} – равновесие, имеем $\theta_{\lambda i} = \theta_{\mu i}$, $x_{\lambda i} = x_{\mu i}$, $I_{\lambda ij} = I_{\mu ij}$, $x_{\lambda ij} = x_{\mu ij}$ для любого $j \in N$. Поэтому условия стабильности (5) для λi - и μi -агентов тождественно совпадают. Так как имеется v попарно различных структур информированности, количество попарно различных условий (5) не превышает v . •

3.2. ИСТИННЫЕ И ЛОЖНЫЕ РАВНОВЕСИЯ

Стабильные информационные равновесия будем разделять на два класса – истинные и ложные равновесия. Определение предва-
рим примером.

Пример 2. Рассмотрим игру, в которой участвуют три агента с целевыми функциями

$$f_i(r_i, x_1, x_2, x_3) = x_i - \frac{x_i(x_1 + x_2 + x_3)}{r_i},$$

где $x_i \geq 0$, $i \in N = \{1, 2, 3\}$. Целевые функции являются общим знанием с точностью до типов агентов – параметров $r_i > 0$. Вектор $r = (r_1, r_2, r_3)$ типов агентов может интерпретироваться как состояние природы. При этом здесь и далее подразумевается, что свой собственный тип известен каждому агенту достоверно.

Граф рефлексивной игры имеет вид, изображенный на рисунке 27, при этом $r_2 = r_3 = r$, $r_{21} = r_{23} = r_{31} = r_{32} = c$. Общим знанием является следующее: каждый игрок знает свой тип и наблюдает сумму действий оппонентов.

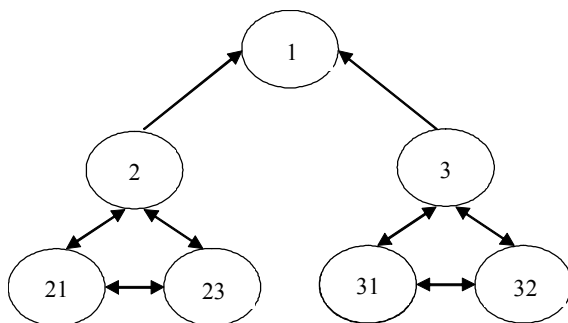


Рис. 27. Граф рефлексивной игры в примере 2

Нетрудно вычислить единственное информационное равновесие этой игры:

- (1) $x_2 = x_3 = (3r - 2c) / 4$,
 $x_{21} = x_{23} = x_{31} = x_{32} = (2c - r) / 4$,
 $x_1 = (2r_1 - 3r + 2c) / 4$.

Условия стабильности (см. выражение (5) предыдущего раздела) в данном случае выглядят следующим образом:

- (2) $x_{21} + x_{23} = x_1 + x_3$, $x_{31} + x_{32} = x_1 + x_2$.

Записаны условия для 2- и 3-агентов, поскольку для 1-, 21-, 23-, 31-, 32-агентов они тривиальны.

Подставляя (1) в (2), получаем, что необходимым и достаточным условием стабильности является равенство

$$(3) \quad 2c = r_1 + r.$$

Пусть условие (3) выполнено. Тогда равновесные действия реальных агентов таковы:

$$(4) \quad x_2 = x_3 = (3r - r_1) / 4, \quad x_1 = (3r_1 - 2r) / 4.$$

Предположим теперь, что типы агентов стали общим знанием (см. рис. 28).

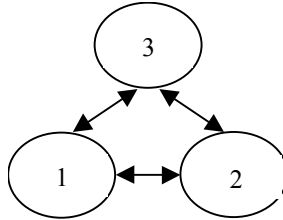


Рис. 28. Общее знание в примере 2

Нетрудно убедиться, что в случае общего знания единственным равновесием будет (4). •

Таким образом, при выполнении условия (3) имеет место несколько парадоксальная ситуация. Представления второго и третьего агентов не соответствуют действительности (рис. 27), однако их равновесные действия (4) в точности такие, как были бы в случае одинаковой информированности (рис. 28). Назовем такое стабильное информационное равновесие истинным.

Определение. Пусть набор действий x_{ti} , $ti \in \Sigma_+$, является стабильным информационным равновесием. Будем называть его *истинным* равновесием, если набор $(x_1, \dots, x_n)$ является равновесием в условиях общего знания о состоянии природы θ (или о наборе $(r_1, \dots, r_n)$ типов агентов).

Из определения, в частности, следует, что в условиях общего знания любое информационное равновесие является истинным. Рассмотрим еще один случай, когда этот факт имеет место.

Утверждение 12. Пусть целевые функции агентов имеют вид

$$f_i(r_i, x_1, \dots, x_n) = \varphi_i(r_i, x_i, y_i(x_{-i})),$$

а функции наблюдения – вид $w_i(\theta, x) = y_i(x_{-i})$, $i \in N$. Содержательно это означает следующее: выигрыш каждого агента зависит от его типа, его действия и функции наблюдения, зависящей от действий остальных агентов (но не от их типов).

Тогда любое стабильное равновесие является истинным.

Доказательство. Пусть x_{ti} , $ti \in \Sigma_+$, – стабильное информационное равновесие, и условия утверждения выполнены. Тогда для любого $i \in N$ имеем:

$$x_i \in \text{Arg max}_{y_i \in X_i} f_i(r_i, y_i, x_{i,-i}) = \text{Arg max}_{y_i \in X_i} \varphi_i(r_i, y_i, y_i(x_{i,-i})).$$

В силу стабильности справедливо равенство

$$y_i(x_{i,-i}) = y_i(x_{-i}),$$

поэтому

$$x_i \in \text{Arg max}_{y_i \in X_i} \varphi_i(r_i, y_i, y_i(x_{-i})) = \text{Arg max}_{y_i \in X_i} f_i(r_i, y_i, x_{-i}).$$

Последнее соотношение означает (в силу произвольности $i \in N$), что набор $(x_1, \dots, x_n)$ является равновесным при полной информированности. •

Определение. Стабильное информационное равновесие, не являющееся истинным, назовем *ложным*.

Таким образом, ложное равновесие – это такое стабильное информационное равновесие, которое не является равновесием в случае одинаковой информированности агентов (в условиях общего знания).

Пример 3. Пусть в рефлексивной биматричной игре, где $\Omega = \{1, 2\}$, выигрыши заданы биматрицами (агент 1 выбирает строку, агент 2 – столбец, то есть $X_1 = X_2 = \{1; 2\}$) на рисунке 29.

$$\begin{array}{cc} \theta = 1 & \theta = 2 \\ \left(\begin{array}{cc} (2,2) & (4,1) \\ (1,4) & (3,3) \end{array} \right) & \left(\begin{array}{cc} (2,2) & (0,3) \\ (3,0) & (1,1) \end{array} \right) \end{array}$$

Рис. 29. Матрицы выигрышей в примере 3

Пусть, далее, в реальности $\theta = 2$, однако оба агента считают общим знанием $\theta = 1$. Каждый агент наблюдает пару (x_1, x_2) , которая и является функцией наблюдения.

Информационным равновесием является выбор каждым агентом действия 1. Если бы общим знанием было бы реальное состояние природы, равновесным был бы выбор каждым агентом действия 2. Таким образом, выигрыши агентов в информационном равновесии оказываются большими, чем если бы общим знанием было реальное состояние природы. •

3.3. СЛУЧАЙ НАБЛЮДАЕМЫХ ДЕЙСТВИЙ АГЕНТОВ

В разделе 2.2 приведено определение информационного равновесия, которое может интерпретироваться как набор субъективных равновесий – i -й (реальный) агент, $i \in N$, обладающий структурой информированности I_i , определяет набор действий $(x_{i\sigma}^*(I_{i\sigma}))_{\sigma \in \Sigma}$, который является равновесием с его субъективной точки зрения. В частности, он ожидает от j -го реального агента, $j \in N$, выбора действия $x_{ij}^*(I_{ij})$ (напомним, что фантомный ij -агент является образом j -го агента в представлениях i -го).

В этом разделе мы рассмотрим случай, когда функцией наблюдения является вектор действий всех агентов:

$$w_i(\theta, x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n).$$

Тогда *стабильным* является информационное равновесие $x^* = (x_{\sigma i}^*)_{i \in N, \sigma \in \Sigma}$, удовлетворяющее следующему соотношению:

$$(1) \quad \forall i \in N, \forall \sigma \in \Sigma \quad x_{\sigma i}^* = x_i^*.$$

Соотношение (1) означает, что действие любого реального агента совпадает с действием, ожидаемым от него любым другим (реальным или фантомным) агентом.

Введем следующее предположение относительно целевых функций $f_i(\cdot)$ и множеств Ω, X_i :

A1. Для любых $i \in N, \sigma \in \Sigma$, любых представлений $\theta_{\sigma i} \in \Omega$ и $\theta'_{\sigma i} \in \Omega$ таких, что $\theta_{\sigma i} \neq \theta'_{\sigma i}$, и для любой обстановки игры $x_{\sigma i, -i}^* \in X_{-i} = \prod_{j \neq i} X_j$

$$(2) \quad BR_i(\theta_{\sigma i}, x_{\sigma i, -i}^*) \cap BR_i(\theta'_{\sigma i}, x_{\sigma i, -i}^*) = \emptyset,$$

где $BR_i(\theta_{\sigma i}, x_{\sigma i, -i}^*) = \text{Arg max}_{y_i \in X_i} f_i(\theta_{\sigma i}, x_{\sigma i 1}^*, \dots, x_{\sigma i, i-1}^*, y_i, x_{\sigma i, i+1}^*, \dots, x_{\sigma i n}^*)$.

Утверждение 13. Пусть выполнено предположение A1 и существует информационное равновесие x^* . Тогда x^* является стабильным информационным равновесием в том и только том случае, если структура информированности игры такова, что

$$(3) \quad \forall i \in N, \forall \sigma \in \Sigma \quad \theta_{\sigma i} = \theta_i.$$

Доказательство. Пусть выполнено (3). Тогда структура информированности игры имеет единичную глубину и $\forall i \in N$, $\forall \sigma \in \Sigma$ $I_{\sigma i} = I_i$, откуда сразу следует равенство $x_{\sigma i}^* = x_i^*$ (см. второе условие в определении информационного равновесия). Необходимость доказана.

Докажем достаточность. Пусть выполнено условие (1), но существуют такие $i \in N$ и $\sigma \in \Sigma$, что $\theta_{\sigma i} \neq \theta_i$.

Поскольку x_i^* и $x_{\sigma i}^*$ являются компонентами информационного равновесия x^* , они удовлетворяют соотношениям

$$\begin{cases} x_i^* \in BR_i(\theta_i, x_{i,-i}^*), \\ x_{\sigma i}^* \in BR_i(\theta_{\sigma i}, x_{\sigma i,-i}^*). \end{cases}$$

С учетом (1) последнюю систему можно записать в виде

$$\begin{cases} x_i^* \in BR_i(\theta_i, x_{-i}^*), \\ x_i^* \in BR_i(\theta_{\sigma i}, x_{-i}^*), \end{cases}$$

откуда следует, что $BR_i(\theta_i, x_{-i}^*) \cap BR_i(\theta_{\sigma i}, x_{-i}^*) \neq \emptyset$.

Пришли к противоречию с (2). •

Следствие. Если выполнено предположение A1, то стабильные информационные равновесия могут возникать только в рамках структур информированности, удовлетворяющих (3), то есть в рамках структур информированности единичной глубины. При этом, в частности, невозможны ложные равновесия.

Уместно отметить аналогию между условием A1 и «условием равноправия функций предпочтения» в [16, с. 259].

При ослаблении требования (1) результат утверждения 13 теряет силу. Например, если считать «стабильным» информационное равновесие x^* , удовлетворяющее свойству

$$(4) \quad \forall i, j \in N \quad x_{ji}^* = x_i^*$$

(действие любого реального агента совпадает с действием, ожидаемым от него любым другим реальным агентом), то в рамках предположения A1 существуют структуры информированности, не удовлетворяющие (3), при которых соответствующие информационные равновесия «стабильны» в смысле (4).

Утверждение 13 важно как с точки зрения задач анализа, так и с точки зрения задач синтеза. Действительно, оно позволяет при

исследовании свойств информационных равновесий для определенного класса ситуаций (определяемых предположением A1) выделять при помощи условия (3) множества информационных структур, при которых информационные равновесия могут быть стабильными. С точки зрения задачи информационного управления, утверждение 13 накладывает ограничения на множество управляющих воздействий, приводящих к стабильному равновесию игры управляемых субъектов.

Пусть теперь по-прежнему действия агентов наблюдаемы, т.е. стабильность определяется условием (1). Однако каждый из n агентов характеризуется своим типом $r_i \geq 0$, $i \in N$, и тип агента достоверно ему известен, но, вообще говоря, не известен остальным агентам. Будем считать, что целевая функция i -го агента имеет вид $f_i(r_i, x)$, т.е. зависит от его собственного типа, но не от типов оппонентов. Относительно типов каждый из агентов имеет иерархию представлений I_i , состоящую из следующих компонент: r_{ij} – представление i -го агента о типе j -го агента, r_{ijk} – представление i -го агента о представлениях j -го агента о типе k -го агента и т.д., $i, j, k \in N$.

Содержательное различие между обсуждениями в терминах неопределенного параметра θ и в терминах вектора типов $r = (r_1, r_2, \dots, r_n) \in \mathfrak{R}_+^n$ состоит в следующем. В первом случае более естественным является предположение о том, что значение θ (состояние природы) так или иначе наблюдается агентом (является значимым аргументом функции наблюдения). Во втором случае, напротив, типы оппонентов, предположительно, не являются наблюдаемыми (не являются аргументами функции наблюдения). При этом, согласно утверждению 12, все стабильные равновесия являются истинными. Поэтому сосредоточим внимание на исследовании стабильности.

В рассматриваемом случае предположение A1 и утверждение 13 перепишем следующим образом.

A1^r. Для любых $i \in N$, $\sigma \in \Sigma$, любых представлений $r_{\sigma i}$ и $r'_{\sigma i}$ таких, что $r_{\sigma i} \neq r'_{\sigma i}$, и для любой обстановки игры $x_{\sigma i, -i}^* \in X_{-i}$

$$BR_i(r_{\sigma i}, x_{\sigma i, -i}^*) \cap BR_i(r'_{\sigma i}, x_{\sigma i, -i}^*) = \emptyset,$$

где $BR_i(r_{\sigma i}, x_{\sigma i, -i}^*) = \text{Arg max}_{y_i \in X_i} f_i(r_{\sigma i}, x_{\sigma i 1}^*, \dots, x_{\sigma i, i-1}^*, y_i, x_{\sigma i, i+1}^*, \dots, x_{\sigma i n}^*)$.

Утверждение 13^Г. Пусть выполнено предположение A1^Г и существует информационное равновесие x^* . Тогда x^* является стабильным информационным равновесием в том и только в том случае, если структура информированности игры такова, что

$$\forall i \in N, \quad \forall \sigma \in \Sigma \quad r_{\sigma i} = r_i.$$

Доказательство утверждения 13^Г дословно повторяет доказательство утверждения 13, надо лишь заменить θ на r и A1 на A1^Г.

Определим следующие множества:

- множество Ψ пар (x, I) таких, что $x \in X'$, $I \in \mathfrak{I}$ и вектор действий реальных агентов x является равновесным¹ при структуре информированности I , где $\mathfrak{I}$ – множество всевозможных структур информированности.
- множество $\Psi_X(I) \subseteq X'$ векторов действий реальных агентов, являющихся равновесными при структуре информированности I ;
- множество $\Psi_I(x) \subseteq \mathfrak{I}$ информационных структур, при которых вектор действий реальных агентов x является равновесным (решение обратной задачи).

Определим также подмножества этих множеств, выделяемые требованием стабильности информационного равновесия:

- множество Ψ^s пар (x, I) таких, что $x \in X'$, $I \in \mathfrak{I}$ и вектор x является стабильно-равновесным² при структуре информированности I ;
- множество $\Psi_X^s(I) \subseteq X'$ векторов действий агентов, являющихся стабильно-равновесными при структуре информированности I ;
- множество $\Psi_I^s(x) \subseteq \mathfrak{I}$ информационных структур, при которых вектор действий реальных агентов x является стабильно-равновесным.

Обозначим через I_0 структуру информированности единичной глубины, которая соответствует тому, что вектор r истинных типов агентов является общим знанием. Заметим, что $\Psi_X^s(I_0) = \Psi_X(I_0)$ –

¹ То есть является «реальной» частью информационного равновесия, являющегося набором действий как реальных, так и фантомных агентов.

² То есть является «реальной» частью стабильного информационного равновесия.

любой равновесный вектор, соответствующий общему знанию, — является стабильно-равновесным.

В терминах введенных множеств *истинное равновесие* образует любая пара $(x, I) \in \Psi^s$ такая, что $(x, I_0) \in \Psi$. Содержательно это означает, что вектор действий x останется (стабильно-)равновесным, если вектор типов станет общим знанием.

Ложное равновесие образует любая пара $(x, I) \in \Psi^s$ такая, что $(x, I_0) \notin \Psi$. Содержательно это означает, что вектор действий x перестанет быть равновесным, если вектор типов станет общим знанием.

Пусть вектор $x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$ является стабильно-равновесным. Определим для каждого $i \in N$ следующие множества:

$$\rho_i = \{r_i \in \mathfrak{R}_+ \mid x_i^* \in BR_i(r_i, x_{-i}^*)\}.$$

Эти множества не зависят от структуры информированности. Поэтому они позволяют сформулировать два утверждения, проясняющие связь между структурой информированности и стабильностью равновесия.

Утверждение 14. Пусть x^* — стабильно-равновесный вектор действий реальных агентов. Если для любого $i \in N$ множество ρ_i состоит ровно из одного элемента, то вектор типов является общим знанием (и, соответственно, равновесие истинное).

Доказательство. Пусть x^* — стабильно-равновесный вектор и для любого $i \in N$ множество ρ_i состоит ровно из одного элемента. Предположим, что существуют такие i и σ , что $r_{\sigma i} \neq r_i$. Из стабильности равновесия вытекает, что

$$\begin{cases} x_i^* \in BR_i(r_i, x_{-i}^*), \\ x_i^* \in BR_i(r_{\sigma i}, x_{-i}^*), \end{cases}$$

откуда по определению множества ρ_i вытекает, что несовпадающие $r_{\sigma i}$ и r_i принадлежат этому множеству. Получили противоречие с тем, что оно состоит из одного элемента. •

Утверждение 15. Если вектор действий реальных агентов x^* является стабильно-равновесным при некоторой структуре информированности, то для элементов этой структуры при любых $i \in N$ и $\sigma \in \Sigma$ выполняется $r_{\sigma i} \in \rho_i$.

Доказательство. Пусть равновесие является стабильным. Тогда $\forall i \in N \forall \sigma \in \Sigma$ выполняется $x_i^* \in BR_i(r_{\sigma i}, x_{-i}^*)$, т. е. $r_{\sigma i} \in \rho_i$. •

Утверждение 15 накладывает довольно жесткие требования на структуру информированности: если равновесие является стабильным, то все типы реальных агентов, а также представления о типах принадлежат множествам ρ_i .

3.4. РЕФЛЕКСИВНЫЕ ИГРЫ И БАЙЕСОВЫ ИГРЫ

Наряду с рефлексивными играми возможным методом теоретико-игрового моделирования в условиях неполной информированности являются *байесовы игры*, предложенные в конце 60-х годов XX в. Дж. Харшаньи [170]. В байесовых играх вся частная (т.е. не являющаяся общим знанием) информация, имеющаяся у агента на момент выбора им своего действия, называется *типом* агента. При этом каждый агент, зная свой тип, имеет и предположения о типах остальных агентов (в виде вероятностного распределения). Формально байесова игра описывается следующим набором:

- множеством N агентов;
- множествами R_i возможных типов агентов, где тип i -го агента $r_i \in R_i$, $i \in N$, вектор типов $r = (r_1, r_2, \dots, r_n) \in R' = \prod_{i \in N} R_i$;
- множеством $X' = \prod_{i \in N} X_i$ допустимых векторов действий агентов;

- набором целевых функций $f_i: R' \times X' \rightarrow \mathfrak{R}^1$ (целевая функция агента зависит в общем случае от типов и действий всех агентов);
- представлениями $F_i(\cdot|r_i) \in \Delta(R_i)$, $i \in N$, агентов (здесь через R_i обозначено множество всевозможных наборов типов всех агентов, кроме i -го, $R_i = \prod_{j \in N \setminus \{i\}} R_j$, а через $\Delta(R_i)$ обозначено множество всевозможных вероятностных распределений на R_i).

Решением байесовой игры является *равновесие Байеса–Нэша*, определяемое как набор стратегий агентов вида $x_i^*: R_i \rightarrow X_i$, $i \in N$, которые максимизируют математические ожидания соответствующих целевых функций:

$$(1) \quad \forall i \in N \quad x_i^*(r_i) \in \mathop{\text{Arg max}}_{x_i \in X_i} \int_{r_{-i} \in \prod_{j \neq i} R_j} f_i(r, x_i, x_{-i}^*(r_{-i})) dF_i(r_{-i}|r_i),$$

где $x_{-i}^*(r_{-i})$ обозначает набор стратегий всех агентов, кроме i -го. Подчеркнем, что в байесовой игре стратегией агента является не действие, а функция зависимости действия агента от его типа.

Модель Дж. Харшаньи можно интерпретировать различным образом (см. [170]). В соответствии с одной интерпретацией все агенты знают априорное распределение типов $F(r) \in \Delta(R')$ и, узнав собственный тип, вычисляют из него по формуле Байеса условное распределение $F_i(r_{-i}|r_i)$. В этом случае представления агентов $\{F_i(\cdot|r_i)\}_{i \in N}$ называются *согласованными* (и, в частности, являются общим знанием – каждый агент может их вычислить, знает, что это могут сделать остальные и т. д.).

Другая интерпретация состоит в следующем. Пусть существует некоторый набор потенциальных участников игры всевозможных типов. Каждый такой «потенциальный» агент выбирает свою стратегию в зависимости от своего типа, после чего случайным образом выбирается n «актуальных» участников игры. В этом случае представления агентов, вообще говоря, не обязательно согласованы (хотя и являются общим знанием). Отметим, что в [170] эта интерпретация названа *игрой Зельтена* (Р. Зельтен – лауреат Нобелевской премии по экономике 1994 года, вместе с Дж. Нэшем и Дж. Харшаньи).

Теперь рассмотрим ситуацию, когда условные распределения не обязательно являются общим знанием. Удобно описывать ее следующим образом. Пусть выигрыши агентов зависят от их действий и от некоторого параметра $\theta \in \Omega$ («состояния природы», которое может интерпретироваться и как набор типов агентов), значение которого не является общим знанием, т. е. целевая функция i -го агента имеет вид $f_i(\theta, x_1, \dots, x_n) : \Omega \times X' \rightarrow \mathfrak{R}^1$, $i \in N$. Как было отмечено во второй главе данной работы, выбору агентом своей стратегии логически предшествует информационная рефлексия – размышления агента о том, что каждый агент знает (предполагает) о параметре θ , а также о предположениях других агентов и пр. Тем самым, мы приходим к понятию структуры информированности агента, отражающей его информированность о неизвестном параметре, о представлениях других агентов и т. д.

В [177] в рамках вероятностной информированности (представления агентов включают в себя следующие компоненты: вероятностное распределение на множестве состояний природы; вероятностное распределение на множестве состояний природы и распределениях на множестве состояний природы, характеризующих представления остальных агентов, и т. д.) было построено универсальное пространство возможных взаимных представлений (universal beliefs space). При этом игра формально сводится к некоей «универсальной» байесовой игре, в которой типом агента является вся его структура информированности. Однако предложенная в [177] конструкция настолько громоздка, что найти решение «универсальной» байесовой игры в общем случае, по-видимому, невозможно.

В данном разделе мы ограничимся рассмотрением игр двух лиц, при этом представления агентов задаются точечной структурой информированности (у агентов имеются вполне определенные представления о значении неопределенного параметра; о том, каковы представления (также вполне определенные) оппонента, и т. д.) С учетом этих упрощений нахождение равновесия Байеса–Нэша сводится к решению системы двух соотношений, определяющих две функции, каждая из которых зависит от счетного числа переменных (см. ниже).

Итак, пусть в игре участвуют два агента с целевыми функциями

$$(2) \quad f_i(\theta, x_1, x_2), \quad \theta \in \Omega, \quad x_i \in X_i, \quad i=1, 2,$$

причем функции f_i и множества X_i , Ω являются общим знанием. Первый агент имеет следующие представления: неопределенный параметр равен $\theta_1 \in \Omega$; второй агент считает, что неопределенный параметр равен $\theta_{12} \in \Omega$; второй агент считает, что первый агент считает, что неопределенный параметр равен $\theta_{121} \in \Omega$ и т. д. Таким образом, точечная структура информированности первого агента I_1 задается бесконечной последовательностью элементов множества Ω ; пусть, аналогично, и у второго агента имеется точечная структура информированности I_2 :

$$(3) \quad I_1=(\theta_1, \theta_{12}, \theta_{121}, \dots), \quad I_2=(\theta_2, \theta_{21}, \theta_{212}, \dots).$$

Посмотрим теперь на рефлексивную игру (2)–(3) с «байесовой» точки зрения. Типом агента в данном случае является его структура информированности I_i , $i=1, 2$. Для нахождения равновесия Байеса–Нэша необходимо найти равновесные действия агентов всевозможных типов, а не только некоторых фиксированных типов (3).

Легко видеть, какими будут в данном случае распределения $F_i(\cdot|\cdot)$ из определения равновесия (1). Если, например, тип первого агента $I_1=(\theta_1, \theta_{12}, \theta_{121}, \dots)$, то распределение $F_1(\cdot|I_1)$ приписывает вероятность 1 типу оппонента $I_2=(\theta_{12}, \theta_{121}, \theta_{1212}, \dots)$ и вероятность 0 остальным типам. Соответственно, если тип второго агента $I_2=(\theta_2, \theta_{21}, \theta_{212}, \dots)$, то распределение $F_2(\cdot|I_2)$ приписывает вероятность 1 типу оппонента $I_1=(\theta_{21}, \theta_{212}, \theta_{2121}, \dots)$ и вероятность 0 остальным типам.

Для упрощения записи будем использовать в дальнейшем следующие обозначения (BR означает наилучший ответ – best response):

$$BR_1(\theta, x_2) = \text{Arg max}_{x_1 \in X_1} f_1(\theta, x_1, x_2),$$

$$BR_2^{-1}(\theta, x_2) = \{x_1 \in X_1 \mid x_2 \in BR_2(\theta, x_1)\},$$

$$BR_2(\theta, x_1) = \text{Arg max}_{x_2 \in X_2} f_2(\theta, x_1, x_2),$$

$$BR_1^{-1}(\theta, x_1) = \{x_2 \in X_2 \mid x_1 \in BR_1(\theta, x_2)\}.$$

Введем также обозначения $\varphi(\cdot)$ и $\psi(\cdot)$ для функций, ставящих в соответствие типу равновесное действие:

$$x_1^*(I_1)=\varphi(I_1)=\varphi(\theta_1, \theta_{12}, \theta_{121}, \dots), \quad x_2^*(I_2)=\psi(I_2)=\psi(\theta_2, \theta_{21}, \theta_{212}, \dots).$$

В этих обозначениях *точечное* равновесие Байеса–Нэша (1) записывается как пара функций $(\varphi(\cdot), \psi(\cdot))$, удовлетворяющих условиям

$$(4) \quad \begin{cases} \varphi(\theta_1, \theta_{12}, \theta_{121}, \dots) \in BR_1(\theta_1, \psi(\theta_{12}, \theta_{121}, \dots)), \\ \psi(\theta_2, \theta_{21}, \theta_{212}, \dots) \in BR_2(\theta_2, \varphi(\theta_{21}, \theta_{212}, \dots)). \end{cases}$$

Заметим, что в рамках точечной структуры информированности i -й агент уверен, что значение неопределенного параметра равно θ_i (вне зависимости от представлений оппонента).

Таким образом, для нахождения равновесия необходимо решить систему функциональных уравнений (4) для определения функций $\varphi(\cdot)$ и $\psi(\cdot)$, каждая из которых зависит от счетного числа переменных.

Возможные структуры информированности могут иметь конечную либо бесконечную глубину. Покажем, что применение концепции равновесия Байеса–Нэша к агентам со структурой информированности бесконечной глубины дает парадоксальный результат – для них равновесным является любое допустимое действие.

Определим понятие конечности глубины структуры информированности применительно к случаю игры с двумя участниками, когда структура информированности каждого из них является бесконечной последовательностью элементов из Ω .

Пусть даны последовательность $T = \{t_i\}_{i=1}^{\infty}$ элементов из Ω и целое неотрицательное число k . Последовательность $\omega_k(T) = \{t_i\}_{i=k+1}^{\infty}$ будем называть *k-окончанием* последовательности T .

Будем говорить, что последовательность T имеет *бесконечную глубину*, если для любого n найдется $k > n$ такое, что последовательность $\omega_k(T)$ не совпадает (имеется в виду обычное поэлементное совпадение) ни с одной из последовательностей набора $\omega_0(T)=T, \omega_1(T), \dots, \omega_n(T)$. В противном случае последовательность T имеет *конечную глубину*.

Иначе говоря, последовательность конечной глубины имеет конечное число попарно различных окончаний, в то время как у последовательности бесконечной глубины их бесконечно много.

Например, последовательность $(1, 2, 3, 4, 5, \dots)$ имеет бесконечную глубину, а последовательность $(1, 2, 3, 2, 3, 2, 3, \dots)$ – конечную.

Рассмотрим игру (2), в которой целевые функции f_1, f_2 и множества X_1, X_2, Ω обладают следующим свойством:

(5) для любых $x_1 \in X_1, x_2 \in X_2, \theta \in \Omega$ множества $BR_1(\theta, x_2), BR_2(\theta, x_1), BR_2^{-1}(\theta, x_2)$ и $BR_1^{-1}(\theta, x_1)$ непусты.

Условия (5) означают, что для любого $\theta \in \Omega$ и любого действия $x_1 \in X_1$ у второго агента существует хотя бы один наилучший ответ и, в свою очередь, само действие x_1 является наилучшим ответом на какое-то действие второго агента; аналогично и любое действие $x_2 \in X_2$.

Оказывается, что при выполнении условий (5) в игре (2) *любое* действие агента со структурой информированности бесконечной глубины является равновесным (т. е. является компонентой некоторого равновесия (4)). Это справедливо для обоих агентов; для определенности сформулируем и докажем утверждение для первого.

Утверждение 16 [132, 134]. Пусть в игре (2), в которой выполнены условия (5), существует хотя бы одно точечное равновесие Байеса–Нэша (4). Тогда для любой структуры информированности бесконечной глубины I_1 и любого $\chi \in X_1$ существует равновесие $(x_1^*(\cdot), x_2^*(\cdot))$, в котором $x_1^*(I_1) = \chi$.

Идея доказательства состоит в конструктивном построении соответствующего равновесия. Зафиксируем произвольное равновесие $(\varphi(\cdot), \psi(\cdot))$ и произвольную структуру информированности бесконечной глубины I_1 . В силу условий (4) значение функции $\varphi(\cdot)$ на структуре I_1 связано со значениями функций $\varphi(\cdot)$ и $\psi(\cdot)$ на ряде других структур. Определим заново значения функций на этих структурах таким образом, чтобы условия (4) не нарушались (оставив неизменными значения на остальных структурах) и при этом «определенная заново» функция $\tilde{\varphi}(\cdot)$ принимала на структуре I_1 значение χ .

Доказательству утверждения 16 предположим четыре леммы, для формулировки которых введем обозначение: если $p = (p_1, \dots, p_n)$ – конечная, а $T = \{t_i\}_{i=1}^\infty$ – бесконечная последовательности элементов из Ω , то $pT = (p_1, \dots, p_n, t_1, t_2, \dots)$.

Лемма 1. Если последовательность T имеет бесконечную глубину, то для любой конечной последовательности p и любого k последовательность $p\omega_k(T)$ также имеет бесконечную глубину.

Доказательство. Поскольку T имеет бесконечную глубину, у нее бесконечное множество попарно различных окончаний. При переходе от T к $\omega_k(T)$ их число уменьшается не более, чем на k , все равно оставаясь бесконечным. При переходе от $\omega_k(T)$ к $p\omega_k(T)$ число попарно различных окончаний, очевидно, не уменьшается. •

Лемма 2. Пусть последовательность T представима в виде $T=ppp\dots$, где p – некоторая непустая конечная последовательность. Тогда T имеет конечную глубину.

Доказательство. Пусть p имеет вид $p=(p_1, \dots, p_n)$. Тогда элементы последовательности T связаны соотношениями $t_{i+nk}=t_i$ для всех целых $i \geq 1$ и $k \geq 0$. Возьмем произвольное j -окончание, $j \geq n$. Число j единственным образом представимо в виде $j=i+nk$, где $i \in \{1, \dots, n\}$, $k \geq 0$. Нетрудно показать, что $\omega_j(T)=\omega_i(T)$: для любого целого $m \geq 0$ выполняется $t_{j+m}=t_{i+nk+m}=t_{i+m}$.

С учетом произвольности j мы показали, что у последовательности T не более n попарно различных окончаний, т. е. ее глубина конечна. •

Лемма 3. Пусть для последовательности T выполняется тождество $T=pT$, где p – некоторая непустая конечная последовательность. Тогда T имеет конечную глубину.

Доказательство. Пусть $p=(p_1, \dots, p_n)$. Имеем: $T=pT=ppT=pppT=ppppT=\dots$. Таким образом, для любого целого $k \geq 0$ фрагмент $(t_{nk+1}, \dots, t_{nk+n})$ совпадает с $(p_1, \dots, p_n)$. Поэтому T представима в виде $T=ppp\dots$ и согласно лемме 2 имеет конечную глубину. •

Лемма 4. Пусть для последовательности T выполняется тождество $pT=qT$, где p и q – некоторые нетождественные непустые конечные последовательности. Тогда T имеет конечную глубину.

Доказательство. Пусть $p=(p_1, \dots, p_n)$ и $q=(q_1, \dots, q_k)$. Если $n=k$, то, очевидно, тождество $pT=qT$ не может выполняться. Поэтому рассмотрим случай $n \neq k$. Пусть для определенности $n > k$. Тогда $p=(q_1, \dots, q_k, p_{k+1}, \dots, p_n)$, и из условия $pT=qT$ следует, что $dT=T$, где $d=(p_{k+1}, \dots, p_n)$. Применяя лемму 3, получаем, что глубина последовательности T конечна. •

Доказательство утверждения 16. Пусть имеется произвольная структура информированности первого агента бесконечной глубины – для единообразия с леммами 1–4 будем обозначать ее не I_1 , а $T=(t_1, t_2, \dots)=\{t_i\}_{i=1}^{\infty}$. По условию теоремы, существует по крайней мере одна пара функций $(\varphi(\cdot), \psi(\cdot))$, удовлетворяющая соотношениям (4); зафиксируем любую из таких пар. Положим значение функции $\tilde{\varphi}(\cdot)$ на последовательности T равным χ : $\tilde{\varphi}(T)=\chi$ (здесь и далее для «заново определяемых» функций будем применять обозначения $\tilde{\varphi}(\cdot)$ и $\tilde{\psi}(\cdot)$). Подставляя T в качестве аргумента функции $\tilde{\varphi}(\cdot)$ в соотношения (4), получаем, что значение $\tilde{\varphi}(T)=\chi$ связано (в силу (4)) со значениями функции $\tilde{\psi}(\cdot)$ на последовательности $\omega_1(T)$, а также на всех таких последовательностях T' , для которых $\omega_1(T')=T$.

Выберем значения функции $\tilde{\psi}(\cdot)$ на этих последовательностях таким образом, чтобы выполнялись условия (4):

$$\tilde{\psi}(t_2, t_3, t_4, \dots) \in BR_1^{-1}(t_1, \chi), \quad \tilde{\psi}(t_1^1, t_1, t_2, \dots) \in BR_2(t_1^1, \chi),$$

где $t_1^1 \in \Omega$; из (5) вытекает, что это можно сделать. Если множество $BR_1^{-1}(t_1, \chi)$ или $BR_2(t_1^1, \chi)$ содержит более одного элемента, возьмем любой из них.

Далее, подставляя в (4) последовательность $(t_2, t_3, \dots)$ в качестве аргумента функции $\tilde{\psi}(\cdot)$, выберем

$$\tilde{\varphi}(t_3, t_4, \dots) \in BR_2^{-1}(t_2, \tilde{\psi}(t_2, t_3, \dots)), \quad \tilde{\varphi}(t_2^1, t_2, t_3, \dots) \in BR_1(t_2^1, \tilde{\psi}(t_2, t_3, \dots)),$$

а подставляя $(t_1^1, t_2, t_3, \dots)$, выберем

$$\tilde{\varphi}(t_1^2, t_1^1, t_1, t_2, \dots) \in BR_1(t_1^2, \tilde{\psi}(t_1^1, t_1, t_2, \dots))$$

(здесь $t_2^1, t_1^2 \in \Omega$).

Продолжая подставлять уже полученные значения в соотношения (4), можно последовательно определить значения функции $\tilde{\varphi}(\cdot)$ на всех последовательностях вида

$$(6) \quad (t_m^k, t_m^{k-1}, \dots, t_m^2, t_m^1, t_m, t_{m+1}, \dots), \quad t_m^k, t_m^{k-1}, \dots, t_m^2, t_m^1 \in \Omega,$$

где $(m+k)$ – нечетное, и значения функции $\tilde{\psi}(\cdot)$ на последовательностях вида (6) с четным $(m+k)$. Далее будем считать, что в (6) при

$m > 1$ выполняется $t_m^1 \neq t_{m-1}$ – тогда представление в виде (6) является однозначным.

Алгоритм определения значения функций на последовательностях вида (6) состоит из двух этапов. На первом этапе полагаем $\tilde{\varphi}(T) = \chi$ и определяем значения соответствующих функций на последовательностях $\omega_m(T) = (t_m, t_{m+1}, \dots)$, $m > 1$ (т. е. при $k=0$), попеременно применяя отображения BR_1^{-1} и BR_2^{-1} .

На втором этапе для определения значения соответствующих функций на последовательностях (6) при $k \geq 1$ исходим из определенного на первом этапе значения на последовательности $(t_m, t_{m+1}, \dots)$, применяя попеременно отображения BR_1 и BR_2 .

Согласно лемме 1 все последовательности вида (6) имеют бесконечную глубину. Согласно лемме 4 все они попарно различны (если бы какие-либо две последовательности вида (6) совпадали, это противоречило бы бесконечности глубины). Поэтому, определяя значения функций $\tilde{\varphi}(\cdot)$ и $\tilde{\psi}(\cdot)$, мы не рискуем присвоить одному и тому же аргументу разные значения функций.

Таким образом, мы определили значения функций $\tilde{\varphi}(\cdot)$ и $\tilde{\psi}(\cdot)$ на последовательностях вида (6) таким образом, что эти функции по-прежнему удовлетворяют условиям (4) (т. е. являются точечным равновесием Байеса–Нэша) и при этом $\tilde{\varphi}(T) = \chi$. Утверждение 16 доказано. •

В данном разделе введено понятие точечного равновесия Байеса–Нэша. Доказано, что при выполнении дополнительных условий (5) любое допустимое действие агента, имеющего структуру информированности бесконечной глубины, является равновесным. (Все рассмотрения проводились для игры с двумя участниками, однако можно выдвинуть гипотезу о том, что полученный результат допускает обобщение на случай игры с произвольным числом участников.) Это обстоятельство, по-видимому, свидетельствует о нецелесообразности рассмотрения структур бесконечной глубины как в терминах информационного равновесия, так и в терминах равновесия Байеса–Нэша.

В более общем плане можно отметить, что доказанное утверждение является аргументом (причем не единственным, см., например, [85]) в пользу неизбежной ограниченности ранга информационной рефлексии принимающих решение субъектов.

ГЛАВА 4. ИНФОРМАЦИОННЫЕ ВОЗДЕЙСТВИЯ

В данной главе выделены некоторые способы осуществления центром информационного воздействия на агентов с целью формирования той или иной структуры информированности. Эти способы – информационное регулирование, рефлексивное управления, активный прогноз – обсуждаются в разделах 4.2 и 4.3. Предварительно, в разделе 4.2, обсуждается проблематика моделирования информационного воздействия на реальных людей и на модельных «умных и рациональных» агентов.

В контексте описанной в разделе 1.4 модели информационного управления материал данной главы охватывает цепь «центр → информированность агента (агентов)» (см. рис. 30).

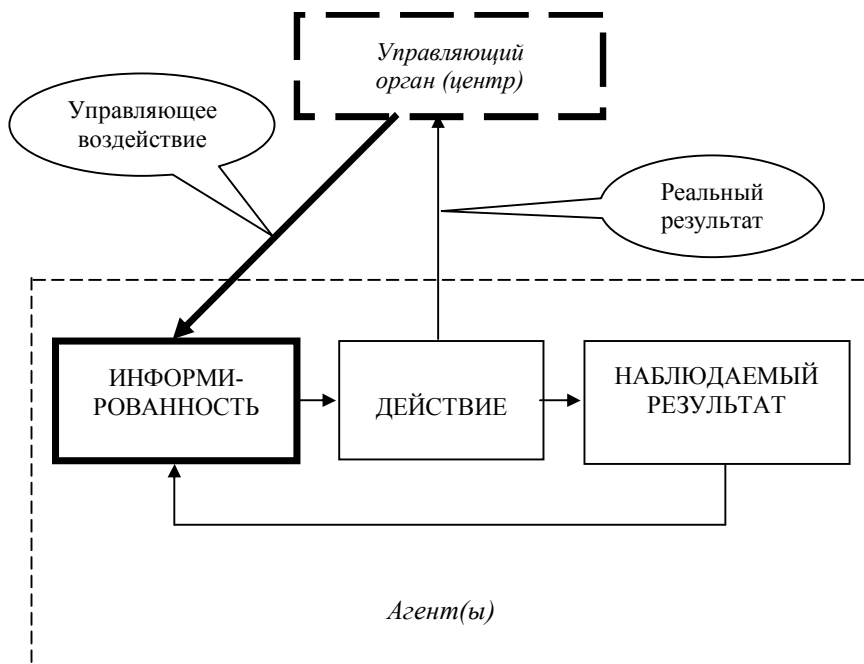


Рис. 30. Предмет исследования в главе 4

4.1. ПРОБЛЕМЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ ИНФОРМАЦИОННОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ

В рамках принятой в данной работе модели принятия решений действия агента определяются не чем иным, как его информированностью о состоянии природы и представлениях оппонентов (других агентов). Поэтому весьма важным является вопрос о том, каким образом информационные воздействия центра влияют на эти представления. Иными словами, вопрос состоит в следующем: как формируется информационная структура игры в зависимости от тех или иных информационных воздействий центра.

Здесь необходимо признать, что сколько-нибудь исчерпывающий ответ на этот вопрос, по видимому, невозможно получить, оперируя исключительно математическими (и, в частности, теоретико-игровыми) моделями. Это обусловлено в первую очередь тем, что процесс усвоения человеком той или иной информации в очень большой степени обусловлен факторами социально-психологического порядка. Как отмечено в [39, с. 81], «секрет высокоэффективного информационного управления – обращение к бессознательному, в использовании приемов снятия барьеров восприятия и преодоления естественной толерантности человека к восприятию нового».

Понятно, с какими трудностями связана формализация этого процесса, когда речь идет о принятии решения умным и рациональным агентом (*intelligent rational decision-maker* [180, p. 1]) – «главным героем» работ по теории игр. Все разработанные на данный момент концепции решения игры основываются, явно или неявно, на уже существующей к моменту начала игры структуре информированности¹. Что было «до начала игры», как сложилась та или иная информированность – этот вопрос остается за рамками обсуждения. По-видимому, здесь проходит некая граница между

¹ Не являются исключением и многошаговые игры, где в ходе разыгрывания игры может происходить изменение информированности участников (в том числе в силу информационного обмена между ними) – ведь и у многошаговой игры существует некий начальный момент и, соответственно, начальная информированность участников.

реальным человеком и модельным «умным рациональным агентом».

Отдавая себе отчет в тех ограничениях, которые присущи математическому моделированию человеческого поведения (и, в частности, теоретико-игровому подходу к информационному управлению), рассмотрим возможные виды информационных воздействий.

В [101, с. 133] приведена следующая классификация информационных воздействий:

- (1) входные данные – «сухие» факты;
- (2) входные данные – логически обоснованные выводы, аналитические суждения, опирающиеся на определенный набор фактов;
- (3) входные данные – эмоционально окрашенные утверждения, опирающиеся на «хорошо/плохо», «морально/аморально», «нравственно/безнравственно» и т. п.

Согласно [105, с. 203], новая информация, на основании которой агенты принимают решения, делится на

- (4) жесткую, содержащую только реальные данные и факты;
- (5) мягкую, которая включает прогнозы и оценки.

Очевидна аналогия между пунктами (1) и (4), а также (2) и (5). О них речь пойдет несколько ниже, а сейчас остановимся подробнее на пункте (3).

В пункте (3) речь идет, по сути дела, об этическом аспекте информации и, соответственно, об этическом аспекте тех или иных решений. По-видимому, единственной пока попыткой формального описания этого аспекта являются работы В.А. Лефевра, а также других авторов, развивающих предложенную им модель этического выбора – см. [46, 51-56, 115, 151, 155] и др. В этих работах предполагается, что принимающий решение агент осуществляет *рефлексию первого рода* [81], т.е. занимает позицию наблюдателя по отношению к своему поведению, своим мыслям и чувствам. В агенте существует несколько соотнесенных друг с другом уровней, в частности, уровень, «отвечающий» за этический аспект выбора. Итоговое решение агента определяется как влиянием внешней среды, так и состоянием этих уровней.

В теории игр (а также и в данной работе) агент понимается как индивид, т.е. «неделимый», и осуществляет *рефлексию второго рода* – относительно принятия решений оппонентами. Поэтому,

оставив пункт (3) за рамками наших рассмотрений, обратимся к пунктам (1), (4) и (2), (5).

Структура информированности i -го агента (см. раздел 3.1) включает в себя представления:

- о состоянии природы (θ_i);
- о представлениях оппонентов ($\theta_{i\sigma}$, $\sigma \in \Sigma_+$).

Сообщение как первого, так и второго может быть элементом информационного воздействия. Иными словами, центр может сообщить агенту (агентам) информацию как о состоянии природы (т. е. о значении неопределенного параметра), так и о представлениях оппонентов.

Соответственно, мы получаем следующие виды информационных воздействий (см. [78]):

- (i) *информационное регулирование*;
- (ii) *рефлексивное управление*.

Они примерно соответствуют пунктам (1), (4).

Что касается пунктов (2), (5), то им примерно соответствует такой вид информационного воздействия, как

- (iii) *активный прогноз*,

представляющий собой сообщение информации о будущих значениях неких параметров, зависящих от состояния природы и действий агентов [24, 78, 136].

В последующих разделах мы рассмотрим указанные три вида информационных воздействий (i–iii) более подробно.

4.2. ИНФОРМАЦИОННОЕ РЕГУЛИРОВАНИЕ И РЕФЛЕКСИВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

Простейшим случаем информационного воздействия является следующий: центр собрал вместе всех агентов и во всеуслышание сообщил им значение неизвестного параметра θ – величину $\tilde{\theta}$. В этом случае естественно предположить, что образовавшаяся структура информированности игры имеет глубину 1 и состоит из единственного элемента $\tilde{\theta}$, т. е. для любых $i \in N$ и $\sigma \in \Sigma$ выполняется равенство $\theta_{i\sigma} = \tilde{\theta}$. Иными словами, общим знанием

равенство $\theta_{i\sigma} = \tilde{\theta}$. Иными словами, общим знанием среди агентов становится то, что неопределенный параметр равен $\tilde{\theta}$.

Такое **информационное регулирование** называется *однородным* [30, 78]. Предположение о том, что при сообщении центром единственной величины $\tilde{\theta}$ она становится общим знанием, назовем **предположением Π_0** . Собственно говоря, предположение Π_0 означает, что агенты доверяют центру, и это является общим знанием.

Более сложным случаем информационного регулирования является следующий: центр сообщает i -му агенту θ_i – значение неизвестного параметра θ . В этом случае примем **предположение Π_1** , состоящее в том, что образовавшаяся структура информированности игры состоит из n элементов и при этом для любых $i \in N$ и $\sigma \in \Sigma$ выполняется равенство $\theta_{i\sigma} = \theta_i$. Иными словами, каждый i -й агент считает общим знанием, что неопределенный параметр равен θ_i . Образующаяся при этом структура информированности имеет, вообще говоря, глубину 2.

Такое **информационное регулирование** называется *неоднородным* [30, 78]. Ясно, что однородное информационное регулирование является частным случаем неоднородного (при этом $\theta_1 = \theta_2 = \dots = \theta_n = \tilde{\theta}$ и структура информированности имеет глубину 1).

Пусть теперь центр сообщает i -му агенту не только значение неизвестного параметра, но и то, что о значении параметра думают другие агенты. Таким образом, i -му агенту сообщается набор чисел θ_{ij} ($j = 1, 2, \dots, n$) – представлений о неизвестном параметре каждого j -го агента. Примем в этом случае **предположение Π_2** , состоящее в следующем: i -й агент считает, что каждый j -й агент, $j \neq i$, субъективно считает значение неопределенного параметра θ_{ij} общим знанием. В этом случае образовавшаяся структура информированности игры имеет глубину 3 и любых $i, j \in N, j \neq i$, и $\sigma \in \Sigma$ выполняется равенство $\theta_{ij\sigma} = \theta_{ij}$.

Эта ситуация является примером **рефлексивного управления**.

Рассмотрим иллюстративный пример. В [122, с. 235] описан психологический эксперимент, проведенный изучавшим психологию бизнесменом, владельцем компании, импортирующей в США

говядину. «Торговые агенты позвонили, как обычно, постоянным клиентам компании – закупщикам говядины для супермаркетов и других точек, торгующих продуктами в розницу, и одним из трех способов предложили им сделать заказ. Одни клиенты услышали предложение, сделанное в стандартной форме. Другим клиентам дополнительно была предоставлена информация о том, что поставки импортной говядины будут сокращены в ближайшие несколько месяцев. Третья группа клиентов получила те же сведения, что и вторая группа, а также информацию о том, что мало кто узнает о предстоящем сокращении поставок, так как эти сведения поступили из надежного, но засекреченного источника.

...По сравнению с клиентами, которым было сделано торговое предложение в стандартной форме, те клиенты, которым было также сказано о дефиците говядины, заказали ее в два раза больше... Клиенты, которые решили, что владеют «исключительной» информацией... приобрели в шесть раз больше говядины, чем клиенты, которым было сделано торговое предложение в стандартной форме».

В этом примере (более подробно он рассмотрен в разделе 6.3) отчетливо видно осуществление информационного регулирования («поставки импортной говядины будут сокращены») и рефлексивного управления («поставки импортной говядины будут сокращены... мало кто узнает о предстоящем сокращении поставок»).

Ряд модельных примеров осуществления информационного регулирования и рефлексивного управления приведен в главе 6. Отметим, что более детальная классификация и исследование рефлексивного управления представляется перспективным направлением дальнейших исследований.

В заключение данного раздела отметим, что на сегодняшний день существует несколько трактовок терминов «рефлексия» и «рефлексивное управление». В том числе, в рамках подходов школы В.А. Лефевра (см. [46, 51-56, 115, 151, 155] и др.), подходов «методологической школы» [4, 5, 31, 156], подходов «психолого-педагогического» направления [7, 64, 110, 119, 120] и др., «рефлексивности по Дж. Соросу» [35, 36, 37, 112] и многих других (см., например, [102, 103, 104]).

4.3. АКТИВНЫЙ ПРОГНОЗ

Общее понятие об активном прогнозе. Люди всегда стремились и стремятся к уменьшению влияния неконтролируемых ими факторов на результаты деятельности за счет получения дополнительной информации о том, что им неизвестно вообще или известно неточно. Этим, наверное, качественно объясняется широкая распространенность в нашей жизни всевозможных прогнозов – погоды, состояния рынка, экономического развития, научно-технического прогресса и т.д.

Информация, получаемая субъектом (в том числе – коллективным) в результате прогноза, может быть просто принята им к сведению, а может изменить его поведение по сравнению с тем как он вел бы себя в отсутствии этой информации. В первом случае говорят о пассивном прогнозе, во втором случае – об активном. Такое разделение условно, так как в принципе любой прогноз может рассматриваться как активный, поэтому активным обычно считается прогноз, в результате которого целенаправленное изменение поведения субъекта проявляется достаточно ярко.

Рассмотрим основные известные подходы к определению пассивного и активного прогнозов. Следует сразу отметить, что мы не будем обсуждать технологию и методы прогнозирования, подробно описанные в [22, 26, 59, 62, 107, 113, 116, 117, 118, 157] и других работах.

В энциклопедическом словаре приводится следующее определение [111, С. 1063]: «*Прогноз* (от греческого *prognosis* – предвидение, предсказание) – конкретное предсказание, суждение о состоянии какого-либо явления в будущем». В [108] прогноз определяется как «некоторое суждение относительно неизвестных, особенно – будущих событий. Термины «суждение» и «событие» получают здесь свободное толкование. Совершенно необязательно, чтобы это «суждение» появилось в письменной форме, было опубликовано или сообщено каким-либо иным способом. Описываемое событие может выражать даже отсутствие некоторых явлений».

В [6] выделяется позитивный конструктивный подход к прогнозированию как активному воздействию на будущее путем планирования, программирования, проектирования и управления явлениями и процессами. В рамках этого подхода прогнозирование не является самоцелью, а составляет основу для принятия решений

[174]. В прогнозе в качестве параметров должны фигурировать управляющие переменные (то есть должны анализироваться различные сценарии), и для характеристики места прогноза в принятии решений¹ можно выделить следующую цепочку: «прогноз–план–программа–проект–управление» [6, с.21].

Взаимоотношение между прогнозом и принятием решений рассматривается также в [118]: 1) знание лицом, принимающим решение (ЛПР), настоящего состояния описывается в некоторых переменных. Далее, 2) выделяются инструментальные (управляемые) и неуправляемые переменные. 3) Осуществляется предсказание будущих значений неуправляемых переменных в зависимости от значений управляемых переменных – получаются условные прогнозы (сценарии). 4) Оцениваются результаты, то есть сравниваются исходы третьего пункта. 5) Производится выбор значений управляемых переменных, то есть осуществляется принятие решений. Другими словами, формулирование решения в зависимости от текущего состояния отражает политику ЛПР (т.е. механизм принятия решений). Таким образом, в рассматриваемом случае имеет место игра одного активного игрока с пассивным игроком, называемым в исследовании операций «природой». Влияние его прогноза на поведение других субъектов не учитывается (точнее, учитывается пассивно – через прогноз неуправляемых переменных), то есть прогноз в этом случае является не методом управления, а методом устранения неопределенности (условного по стратегии).

В [99, 100] выделяются поисковый и нормативный прогнозы. Под *поисковым прогнозом* понимается определение возможных состояний объекта прогнозирования в будущем. Задача *нормативного прогноза* заключается в определении путей и сроков достижения желаемых состояний прогнозируемого объекта в будущем. Другими словами нормативный прогноз – предсказания, «цель которых заключается в том, чтобы вызвать интерес и побудить к действию» [157, с. 58]. Поэтому нормативный прогноз может рассматриваться как управление в явном виде.

¹ Вообще, прогнозирование является неотъемлемым этапом управления. В настоящей работе акцент делается, в основном, на тех случаях, когда собственно управление заключается в целенаправленном сообщении прогнозной или какой-либо другой информации.

В [62] подчеркивается, что специалист, принимающий решения на основании прогноза, пытается предотвратить осуществление неблагоприятного прогноза и увеличить вероятность осуществления благоприятного. Существуют две «крайности» во влиянии прогноза на управление [62, с. 21]: «*Самоосуществляющийся прогноз* – это такой прогноз, который оказывается достоверным только потому, что был сделан. *Самоаннулирующийся прогноз* – такой прогноз, который, наоборот, становится недостоверным только потому, что был сделан». Аналогичные свойства политических прогнозов обсуждаются в [109].

В [22] выделяется *активный и пассивный прогноз* и обсуждаются проблемы априорной и апостериорной оценки качества прогноза. «Пассивный прогноз – такой, для которого результат прогноза не влияет и, по сути, не может влиять на объект прогнозирования. Если же воздействием прогноза на объект прогнозирования нельзя пренебречь (такой прогноз называется активным), то логика прогнозирования резко меняется и усложняется, так как сам прогноз должен учесть эффект результатов прогнозирования». Следовательно, активным является любой нормативный прогноз, а также такие поисковые прогнозы, которые используются при принятии управленческих решений. Для активного прогноза совпадение прогнозных показателей с реальными не является доказательством высокого качества прогноза [22, с. 19]. Влияние прогноза на предсказываемое событие в [98] было предложено называть Эдиповым эффектом, однако этот термин не прижился.

Пассивный и активный прогнозы различаются, в числе прочего, в следующем аспекте. Рассмотрим сначала, что понимается под точностью пассивного прогноза. Предположим, что имеется некоторая система, относительно будущих состояний которой делается прогноз. Этот прогноз производится на основе той или иной модели системы (модели прогнозируемого объекта), и вычисляемая апостериори разность

$$||\text{прогноз} - \text{факт}||,$$

где $||\cdot||$ отражает используемое «расстояние» между состояниями системы, может трактоваться и как *точность пассивного прогноза*, и как критерий адекватности используемой при прогнозе модели моделируемой системе.

Если система является пассивной (не содержит активных элементов, которые могут изменять свое поведение при получении

новой информации) или если прогноз не становится известным участникам активной системы, то любой прогноз будет пассивным.

В случае, когда имеет место активный прогноз, использовать для определения его точности приведенную выше разность невозможно, так как невозможно оценить «фактическое» («чистое» – каким оно было бы без информационного воздействия) состояние системы и сравнить его с прогнозным.

Приведем пример активного прогноза. В [60, с. 162] описывается следующий эффект. «Вечером 6 января 1981 года Джозеф Гранвилл, известный советник по капиталовложениям во Флориде, отправил своим клиентам телеграмму: «Цены на акции резко упадут; продавайте завтра». Очень скоро все узнали о совете Гранвилла, и 7 января стало самым черным днем во всей истории Нью-Йоркской фондовой биржи. По общему мнению, акции потеряли в цене около 40 миллиардов долларов».

Еще пример активного прогноза [109, с. 51]: «Если влиятельные эксперты, выполняя заказ главы государства, находящегося в конфликтных отношениях с высшим органом законодательной власти, спрогнозировали неизбежность досрочного роспуска парламента, то это могло подвигнуть заказчика именно к такому развитию событий, хотя реально оставались возможности для реализации иного сценария».

Обсудив проблему активного прогнозирования на качественном уровне, перейдем к теоретико-игровому анализу.

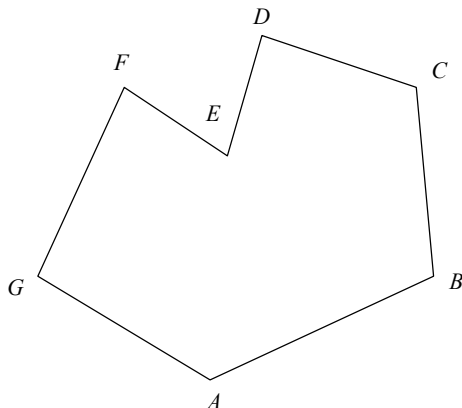
Активный прогноз как способ отбора равновесий. Во всех предыдущих рассмотрениях мы обходили стороной следующий важный вопрос: какое действие выберет агент в случае, когда равновесий больше одного? Этот вопрос дискутируется в теории игр с самого ее возникновения, точнее, со времени формулировки Дж. Нэшем концепции равновесия [181]. Существует обширная литература, посвященная отбору (рафинированию, *refinement*) равновесий, однако ее анализ выходит за рамки данной работы¹.

Мы рассмотрим, в связи с активным прогнозированием, лишь одну концепцию, так называемый *эффект фокальной точки* (термин введен в работе [185]). Эффект этот состоит в следующем: если в игре существует несколько равновесий, то игроки выберут

¹ Упомянем лишь специально посвященную этому вопросу монографию [121], написанную двумя лауреатами Нобелевской премии.

то из них, которое выделяется среди прочих в том или ином смысле (так называемое *фокальное равновесие*).

Приведем пример, следуя [56, с. 42]. Пусть в каземате, проекция сверху которого изображена на рис. 31, находится узник, а вне каземата – его партнер, который желает освободить узника. Каждый из них в отдельности не может пробить стенку, но если они будут пробивать стенку одновременно навстречу друг другу, то отверстие будет проделано. Толщина стенки всюду одинакова.



*Рис. 31. Эффект фокальной точки:
вершина E выделяется среди прочих.*

Представим себе, что пробить стенку можно только в углах A , B , C , D , E , F , G . Пусть контакт в процессе работы и до нее между партнерами невозможен, т. е. ни один из них до конца работы достоверно не знает, какое решение принял его партнер. Как будут вести себя умные и рациональные партнеры?

Ясно, что у каждого участника игры имеется по семь стратегий – пробивать стенку в точке A , точке B , ..., точке G . И равновесий тоже ровно семь: (A, A) , (B, B) , ..., (H, H) . Однако взгляд на рис. 31 показывает, что фокальным будет равновесие (E, E) : умные и рациональные партнеры наверняка будут пробивать стену именно в этом углу.

Вернемся к общему случаю ситуации с множеством равновесий. Если некто – например, центр – объявил о том, что исходом

игры будет некое конкретное равновесие, то сам факт такого прогноза выделил это равновесие среди прочих. Таким образом, «спрогнозированное» равновесие оказывается фокальным и, скорее всего, именно оно будет реализовано.

Активный прогноз как вид информационного воздействия. Рассмотрим теперь случай, когда в ситуации имеется неопределенный параметр, от которого зависят целевые функции агентов (хотя бы одного из них). Если при осуществлении информационного регулирования и рефлексивного управления центр сообщает агенту некий «факт» (информацию о неопределенном параметре либо о представлениях оппонентов), то в задаче активного прогнозирования сообщается прогноз – некая величина $z \in Z$, общеизвестным образом зависящая от неопределенного параметра и действий агентов (например, суммарное действие агентов). Центр как бы сообщает агентам: «Если вы будете действовать рационально, т. е. выберете равновесные действия, то результат будет таким, как я прогнозирую». В этом смысле прогнозом, сообщаемым агенту, может быть и его (агента) собственное действие.

Далее каждый агент на основании прогноза может «восстановить» информацию о состоянии природы и использовать эту информацию (как и при информационном регулировании) при вычислении равновесных действий (в том числе и собственного действия).

Запишем сказанное более формально. Рефлексивная игра задается кортежем $\{N, (X_i)_{i \in N}, f_i(\cdot)_{i \in N}, \Omega, I\}$, где $N = \{1, 2, \dots, n\}$ – множество участников игры (игроков, агентов), X_i – множество допустимых действий i -го агента, $f_i(\cdot): \Omega \times X' \rightarrow \mathbb{R}^1$ – его целевая функция, $i \in N$, I – структура информированности. Пусть, кроме этого, имеется функция $z(\cdot): \Omega \times X' \rightarrow Z$, $i \in N$, отображающая вектор (θ, x) в элемент z некоторого множества прогнозов Z . Элемент $z \in Z$ и есть прогноз, который центр сообщает агентам¹.

После получения прогноза z агенты решают систему $n + 1$ уравнений

$$\begin{aligned} x_i &\in BR_i(\theta, x_{-i}), \quad i \in N, \\ z(\theta, x) &= z, \end{aligned}$$

¹ Здесь мы предполагаем, что центр осуществляет однородную стратегию, т.е. всем агентам сообщается один и тот же прогноз.

определяя значения неопределенного параметра θ и одновременно вычисляя информационное равновесие¹ $(x_1, \dots, x_n)$. При этом формируется структура информированности единичной глубины, состоящая из единственного элемента.

Модельные примеры осуществления активного прогноза приведены в разделах 6.4 и 6.5.

¹ Будем считать, что система имеет единственное решение.

ГЛАВА 5. ИНФОРМАЦИОННОЕ УПРАВЛЕНИЕ

В данной главе в разделе 5.1 дается постановка и классификация задач информационного управления. Задача информационного управления понимается как поиск структуры информированности игры, при которой действия агентов оказываются выгодными для центра.

Множество структур информированности является, вообще говоря, довольно обширным. Поэтому важным является нахождение условий, при которых область поиска решения задачи информационного управления можно сузить. Для этого в разделе 5.2 вводится важное вспомогательное понятие рефлексивных отображений, позволяющих описать множество информационных равновесий при всевозможных структурах информированности. Оказывается, что если рефлексивные отображения являются стационарными, можно ограничиться рассмотрением структур глубины два.

В разделе 5.3 для случая двух агентов и линейных рефлексивных отображений доказано достаточное условие стационарности отображений.

В разделе 5.4 обобщается хорошо известное свойство неманипулируемости механизмов планирования. Именно, вводится понятие рефлексивной неманипулируемости – свойства механизма планирования, при котором существуют такие структуры информированности участников игры, что сообщение достоверной информации является компонентой информационного равновесия.

В контексте описанной в разделе 1.4 модели информационного управления материал разделов 5.1-5.4 данной главы охватывает цепь «информированность агента (агентов) → действие(-я) агента(-ов) → центр» (рис. 32).

Наконец, в разделе 5.5 приведена технология поэтапного исследования задач информационного управления.

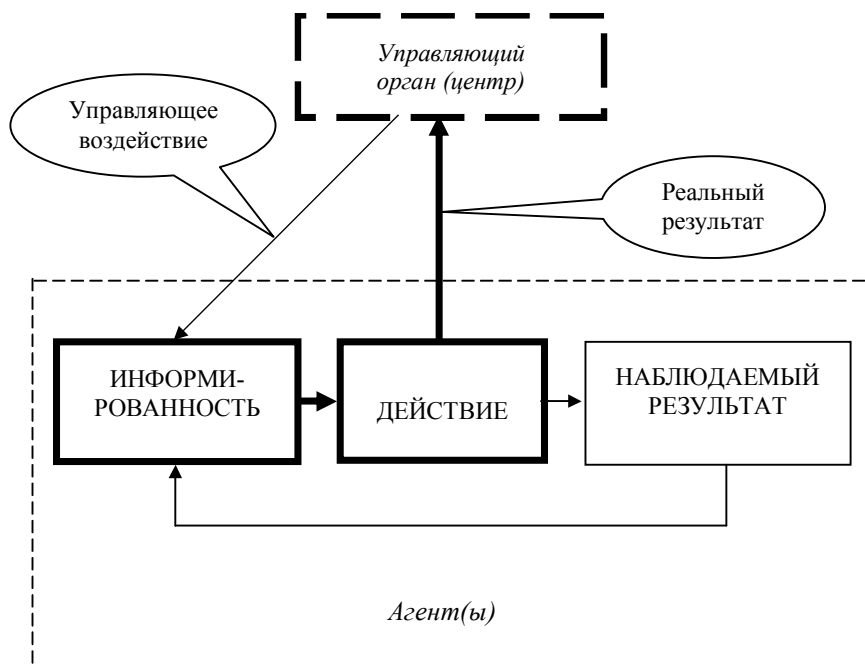


Рис. 32. Предмет исследования в главе 5

5.1. КЛАССИФИКАЦИЯ ЗАДАЧ ИНФОРМАЦИОННОГО УПРАВЛЕНИЯ

Управлением, в соответствии с определением, приведенным в [17, 33], называется воздействие на управляемую систему с целью обеспечения требуемого ее поведения. Управляемая система – множество рациональных агентов, принимающих самостоятельные решения о выбираемых действиях – в рамках теоретико-игровой модели (см. раздел 1.3) описывается множеством агентов N , совокупностью их целевых функций $(f_i(\cdot))_{i \in N}$, допустимых множеств $(X_i)_{i \in N}$ и информированностью I . Значит, управление фиксированным множеством агентов может заключаться в воздействии на: целевые функции (*мотивационное управление* [74]), допустимые

множества (*институциональное управление* [69]) и информированность (*информационное управление* [78, 81]). Так как настоящая работа посвящена прикладным моделям именно информационного управления, рассмотрим его более подробно.

С теоретико-игровой точки зрения задача управления состоит в том, чтобы сформировать для управляемых субъектов (агентов) такую игру, чтобы ее исход был наиболее благоприятным для управляющего органа (центра). Соответственно, задачу информационного управления можно неформально (качественно) сформулировать следующим образом: найти такую структуру информированности, чтобы исход рефлексивной игры агентов (информационное равновесие) был бы наиболее благоприятен для центра.

Отметим, что за рамками наших рассмотрений остается вопрос о том, каким образом центру следует «убедить» агентов в том, что имеют место те или иные состояния природы и представления оппонентов. Различные способы такого убеждения рассмотрены, например, в [38, 49, 81, 122] (см. также принцип доверия в [78] и ссылки и обсуждение в [81]).

Перейдем к формальной постановке задачи. Пусть на множестве действий реальных агентов и структур информированности задана целевая функция центра $\Phi(x, I)$. Пусть, далее, центр может сформировать любую структуру информированности из некоторого множества $\mathfrak{I}'$. При структуре информированности $I \in \mathfrak{I}'$ вектор действий реальных агентов является элементом множества равновесных векторов¹ $\Psi_X(I)$. Множество $\Psi_X(I)$ может быть пустым, тогда центр, ввиду отсутствия равновесия, не может рассчитывать на тот или иной исход игры. Поэтому введем множество допустимых структур, для которых существует хотя бы одно равновесие: $\mathfrak{I} = \{I \in \mathfrak{I}' \mid \Psi_X(I) \neq \emptyset\}$.

Если при заданной структуре $I \in \mathfrak{I}$ множество равновесных векторов $\Psi_X(I)$ состоит более чем из одного элемента, то обычно (см., например, [32]) принимается одно из следующих двух предположений:

¹ Напомним, что это и некоторые другие упоминаемые ниже множества введены в разделе 3.3.

1. *гипотеза благожелательности* (ГБ), состоящая в том, что у центра есть возможность обеспечить выбор агентами «нужного» равновесия;
2. *принцип максимального гарантированного результата* (МГР), состоящий в том, что центр рассчитывает на наихудшее для себя равновесие игры агентов.

В соответствии с ГБ и МГР получаем, соответственно, постановку задачи информационного управления в двух вариантах:

$$(1) \max_{x \in \Psi_X(I)} \Phi(x, I) \xrightarrow{I \in \mathfrak{I}} \max;$$

$$(2) \min_{x \in \Psi_X(I)} \Phi(x, I) \xrightarrow{I \in \mathfrak{I}} \max.$$

Разумеется, в случае, когда для любого $I \in \mathfrak{I}$ множество $\Psi_X(I)$ состоит ровно из одного элемента, (1) и (2) совпадают.

Задачу (1) (либо (2)) будем называть *задачей информационного управления в форме целевой функции*.

Опишем теперь задачу информационного управления в несколько иной постановке, не зависящей от целевой функции центра. Пусть центр стремится добиться от агентов выбора вектора действий $x \in X'$. Зададимся вопросом: для каких векторов x и каким образом (т. е. при помощи формирования какой структуры I) центр может это сделать? Иначе говоря, вторая возможная постановка задачи информационного управления состоит в нахождении *множества достижимости* — множества векторов $x \in X'$, для каждого из которых множество структур $\Psi_I(x) \cap \mathfrak{I}$

(3) непусто, либо

(4) состоит ровно из одного элемента,

а также соответствующих допустимых структур информированности $I \in \Psi_I(x) \cap \mathfrak{I}$ для каждого такого вектора x . Условие (3) соответствует ГБ, условие (4) — МГР.

Задачу (3) (либо (4)) будем называть *задачей информационного управления в форме множества достижимости*.

Еще раз подчеркнем, что вторая постановка не зависит от целевой функции центра и отражает лишь его возможность при помощи информационного управления привести систему в то или иное состояние.

Как в первой, так и во второй постановке центр может либо интересоваться, либо не интересоваться стабильностью получившегося информационного равновесия. Если требуется осуществить

стабильное информационное управление, т. е. привести систему в стабильное информационное равновесие, то в приведенных выше постановках требуется заменить Ψ на Ψ^s , а термины «равновесие» и «равновесный» – на «стабильное равновесие» и «стабильно-равновесный» соответственно.

Подытожим вышесказанное. Задачу информационного управления будем рассматривать

- в форме целевой функции либо множества достижимости;
- с использованием гипотезы благожелательности (ГБ) либо принципа максимально гарантированного результата (МГР);
- с требованием стабильности или без требования стабильности.

Выбор одного из этих восьми вариантов определяется конкретной моделируемой ситуацией. Однако в любом случае необходимым (и, как показывает опыт, наиболее сложным и трудоемким для исследователя) этапом является установление связи между структурой информированности и вектором действий агентов, т. е. исследование информационного равновесия.

В шестой главе рассмотрен ряд частных моделей информационного управления в различных прикладных областях, и для каждой модели мы будем оговаривать наиболее адекватную (с точки зрения автора) постановку задачи.

5.2. РЕФЛЕКСИВНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

В предыдущем разделе была сформулирована задача информационного управления. Ее решение означает, так или иначе, нахождение наилучшей структуры информированности игры из заданного множества структур. Проблема нахождения такой структуры в общем случае представляется довольно сложной. Поэтому в данном разделе мы рассмотрим вспомогательную конструкцию, которая позволяет в ряде случаев существенно упростить ситуацию.

Для начала сделаем следующее предположение: структура информированности является конечной регулярной (см. раздел 3.5). Напомним, что для конечной регулярной структуры можно последовательно найти все равновесные действия раль-

ных и фантомных агентов, двигаясь от висячих вершин РКД к корню.

Обозначим множество параметрических (параметр – вектор $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n) \in \Omega^n$) равновесий Нэша

$$(1) \quad E_N(\theta) = \{ \{x_i\}_{i \in N} \in X' \mid \forall i \in N, \forall y_i \in X_i, f_i(\theta_i, x_1, \dots, x_n) \geq f_i(\theta_i, x_1, \dots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \dots, x_n) \}.$$

Предположим, что на нижнем уровне $\{\theta_{tij}\}_{j \in N}$ конечной регулярной структуры информированности имеет место субъективное общее знание фантомных агентов. Тогда с точки зрения ti -агента возможными являются равновесия их игры из множества $E_N(\{\theta_{tij}\}_{j \in N})$. Введем множество наилучших ответов i -го агента на выбор оппонентами действий из множества X_i при множестве Ω возможных состояний природы:

$$(2) \quad BR_i(\Omega, X_{-i}) = \bigcup_{x_{-i} \in X_{-i}, \theta \in \Omega} \text{Arg max}_{x_i \in X_i} f_i(\theta, x_i, x_{-i}), \quad i \in N,$$

а также следующие величины и множества

$$(3) \quad E_N = \bigcup_{\theta \in \Omega^n} E_N(\theta),$$

$$(4) \quad X_i^0 = \text{Proj}_i E_N, \quad i \in N,$$

$$(5) \quad X_{-i}^k = \prod_{j \neq i} X_j^k, \quad i \in N, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

где

$$(6) \quad X_i^k = BR_i(\Omega, X_{-i}^{k-1}), \quad k = 1, 2, \dots, \quad i \in N.$$

Отображение $BR_i(\cdot, \cdot): \Omega \times X_{-i} \rightarrow X_i$ называется *рефлексивным отображением* i -го агента, $i \in N$ [81].

Утверждение 17. Для любых $k = 0, 1, \dots$ и $i \in N$ имеет место соотношение $X_i^k \subseteq X_i^{k+1}$, то есть с ростом ранга рефлексии i -го агента множества (6) его возможных наилучших ответов не сужаются.

(Напомним (см. раздел 2.1), что рангом рефлексии i -го агента является глубина дерева I_i .)

Доказательство проведем индукцией по k .

1) Пусть $k = 0$. Тогда для любого $i \in N$ справедливы импликации

$$x_i \in X_i^0 \Rightarrow \exists \theta \in \Omega \exists x_{-i} \in X_{-i}^0 \quad x_i \in BR_i(\theta, x_{-i}) \Rightarrow x_i \in X_i^1.$$

2) Пусть вложение множеств имеет место для всех $i \in N$ при $k = m - 1$, т. е. справедливо соотношение

$$X_i^{m-1} \subseteq X_i^m.$$

Тогда выполняется и

$$X_{-i}^{m-1} \subseteq X_{-i}^m,$$

а также

$$x_i \in X_i^m \Leftrightarrow x_i \in BR_i(\Omega, X_{-i}^{m-1}) \Rightarrow x_i \in BR_i(\Omega, X_{-i}^m) \Leftrightarrow x_i \in X_i^{m+1}. \bullet$$

Исследование свойств рефлексивных отображений оказываются существенными при рассмотрении задачи о *максимальном целесообразном ранге рефлексии*, в рамках которой для каждого реального агента требуется определить минимальный ранг рефлексии, при котором множество его равновесных действий охватывает все многообразие своих равновесных действий в рефлексивной игре (при различных вариантах структуры информированности). Данная задача является математической формулировкой вопроса о том, насколько сложную структуру информированности требуется сформировать управляющему органу – центру – при осуществлении информационного управления.

Рефлексивное отображение i -го агента называется *стационарным*, если $X_i^k = X_i^{k+1}$, $k = 0, 1, \dots$.

Утверждение 18. Если рефлексивные отображения всех агентов стационарны, то множество действий i -го агента, которые могут быть реализованы как компоненты информационного равновесия, реализуется в рамках структуры информированности глубины не более двух и составляет X_i^0 , $i \in N$. При этом ранг рефлексии каждого агента равен единице, а множество равновесных действий реальных агентов составляет $E = \prod_{i \in N} X_i^0$.

Доказательство. Поскольку рефлексивные отображения стационарны, все равновесные (при любых структурах информированности) действия i -го агента содержатся в множестве X_i^0 . Пока-

жем, что набор равновесных действий реальных агентов $E = \prod_{i \in N} X_i^0$ достигается в рамках структуры информированности глубины не более 2.

Возьмем произвольный набор действий $x = (x_1, \dots, x_n) \in E = \prod_{i \in N} X_i^0$ и зафиксируем $i \in N$. Из того, что $x_i \in X_i^0$, следует, что существуют наборы $(\theta_{i1}, \dots, \theta_{i,i-1}, \theta_i, \theta_{i,i+1}, \dots, \theta_{in}) \in \Omega^n$ и $x_{i,-i} \in X_{-i}$ такие, что

$$(x_{i1}, \dots, x_{i,i-1}, x_i, x_{i,i+1}, \dots, x_{in}) \in E_N(\theta_{i1}, \dots, \theta_{i,i-1}, \theta_i, \theta_{i,i+1}, \dots, \theta_{in}).$$

Для любого $\sigma \in \Sigma$ положим $\theta_{i\sigma j} = \theta_{i\sigma j}$, тогда структура I_i имеет единичную глубину, т. е. субъективно (с точки зрения i -го агента) имеет место общее знание о наборе $(\theta_1, \dots, \theta_n)$.

Формируя для каждого $i \in N$ свою структуру I_i единичной глубины (т. е. «свое» i -субъективное общее знание), можно реализовать весь набор $x = (x_1, \dots, x_n)$. При этом структура информированности игры I имеет глубину не более двух. Заметим, что единичная глубина имеет место при $x \in E_N$, т. е. когда набор $(\theta_1, \dots, \theta_n)$ является общим знанием среди всех агентов. •

Таким образом, если рефлексивные отображения стационарны, то при осуществлении информационного управления увеличение ранга рефлексии свыше первого не приводит к появлению новых информационных равновесий.

В общем случае возможны три варианта:

1) если рефлексивные отображения стационарны, то множество субъективных равновесий есть $\prod_{i \in N} X_i^0 \subseteq X'$, то есть является

подмножеством (быть может, собственным – см. далее пример 1) множества X' допустимых действий агентов;

2) если рефлексивные отображения не стационарны, то множество субъективных равновесий может совпадать с множеством X' допустимых действий агентов – см. пример 2;

3) если рефлексивные отображения не стационарны, то множество субъективных равновесий может быть строго шире $\prod_{i \in N} X_i^0$,

но не совпадать (быть уже) с множеством X' допустимых действий агентов – см. пример 3.

В приводимых далее примерах 1–3 фигурируют два агента.

Пример 1. Пусть $f_i(\theta, x_1, x_2) = x_i - x_i^2 / 2 (\theta + \alpha x_j)$, где $\alpha \in (0; 1)$, $j = 3 - i$, $i = 1, 2$, $\Omega = [0; 1]$. Тогда $BR_i(\theta_i, x_j) = \theta_i + \alpha x_j$, $j = 3 - i$, $i = 1, 2$.

Вычислим равновесие Нэша: $x_i^*(\theta_i, \theta_j) = (\theta_i + \alpha \theta_j) / (1 - \alpha^2)$, $j = 3 - i$, $i = 1, 2$. Определим $X_i^0 = [0; 1 / (1 - \alpha)]$, $i = 1, 2$. Легко проверить, что рефлексивное отображение в рассматриваемом примере является стационарным, то есть $X_i^k = X_i^0$, $k = 1, 2, \dots, i = 1, 2$ – см. рис. 33.

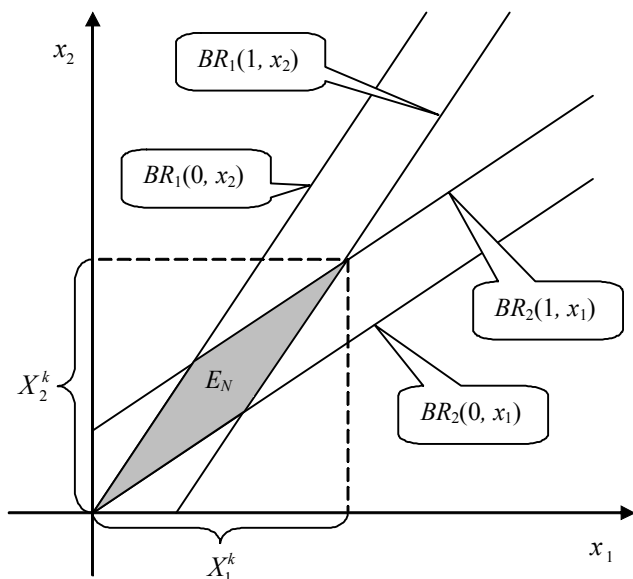


Рис. 33. Множество субъективных равновесий в примере 1

Изменяя θ_i и θ_j , т.е. осуществляя информационное регулирование, центр может реализовать как субъективное равновесие любую точку из множества $[0; 1 / (1 - \alpha)]^2$. •

В общем случае (при нестационарных рефлексивных отображениях) с увеличением глубины структуры информированности множество субъективных равновесий не сужается, поэтому из

анализа теоретико-игровой модели нельзя априори ограничить максимальный целесообразный ранг рефлексии агентов. Приведем пример.

Пример 2. Пусть $f_1(\theta, x_1, x_2) = \theta(1 - x_2)x_1 - x_1^2/2$, $f_2(\theta, x_1, x_2) = \theta x_1 x_2 - x_2^2/2$, где $\Omega = [1/2; 1]$, $X_1 = X_2 = (0; 1)$. Тогда $BR_1(\theta, x_2) = \theta(1 - x_2)$, $BR_2(\theta, x_1) = \theta x_1$.

Легко проверить, что множеством E_N является четырехугольник с вершинами $(2/5, 1/5)$, $(2/3, 1/3)$, $(1/2, 1/2)$ и $(1/3, 1/3)$, поэтому $X_1^0 = [1/3; 2/3]$, $X_2^0 = [1/5; 1/2]$ (см. рис. 34).

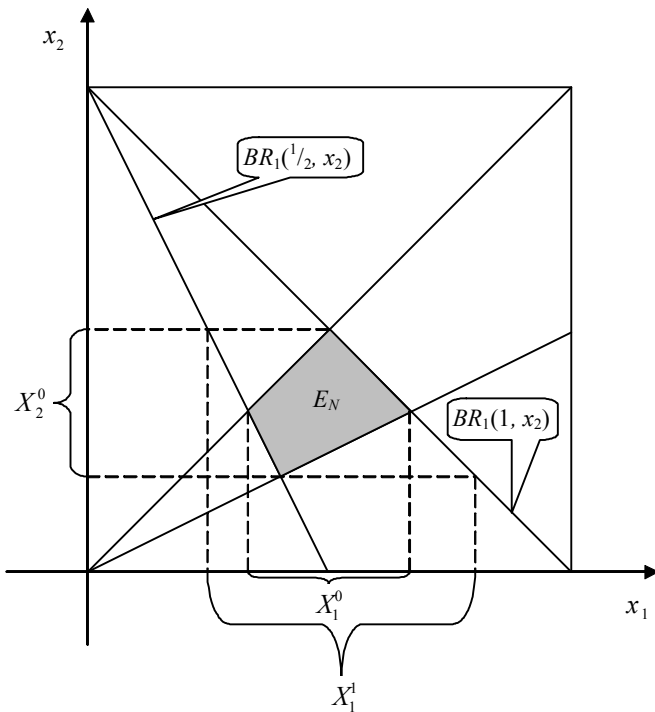


Рис. 34. Множество субъективных равновесий в примере 2

Обозначим левую и правую границы отрезка X_i^k за $\alpha_{i,k}$ и $\beta_{i,k}$ соответственно, $i = 1, 2$. Тогда имеем следующие соотношения:

$$\alpha_{1,0} = 1/3, \quad \beta_{1,0} = 2/3, \quad \alpha_{2,0} = 1/5, \quad \beta_{2,0} = 1/2;$$

$\alpha_{2,k+1} = \frac{1}{2} \alpha_{1,k}$, $\beta_{2,k+1} = \beta_{1,k}$, $\alpha_{1,k+1} = \frac{1}{2} (1 - \beta_{2,k})$, $\beta_{1,k+1} = 1 - \alpha_{2,k}$,
где $k = 0, 1, \dots$. Из последних соотношений нетрудно вывести следующие:

$$\alpha_{i,k+4} = \frac{1}{4} \alpha_{i,k}, \quad \beta_{i,k+4} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \beta_{i,k}, \quad i = 1, 2, \quad k = 0, 1, \dots$$

Таким образом, $\alpha_{i,k} \rightarrow 0$, $\beta_{i,k} \rightarrow 1$ при $k \rightarrow \infty$, где $i = 1, 2$. Поэтому $\bigcup_{k \geq 0} X_i^k = (0; 1) = X_i$, $i = 1, 2$. Это означает, что, надлежащим образом увеличив глубину рефлексии агента, можно добиться любого его допустимого действия. •

Примеры 1 и 2 показывают, что множество субъективно равновесных действий i -го агента (при всевозможных его структурах информированности) $\bigcup_{k \geq 0} X_i^k$ может как совпадать с X_i^0 , то есть

быть достаточно узким, так и совпадать с X_i , то есть быть максимально широким. Убедимся, что возможны и «промежуточные» варианты, то есть ситуации, в которых множество субъективных равновесий строго шире исходного множества E_N равновесий Нэша, но строго уже множества допустимых действий.

Пример 3. Пусть целевые функции агентов и множество Ω такие же, как и в предыдущем примере. Изменим лишь множества допустимых действий: $X_1 = X_2 = (-c; 1 + c)$, $c > 0$. Тогда по-прежнему $\bigcup_{k \geq 0} X_i^k = (0; 1)$, $i = 1, 2$, но теперь $(0; 1) \subset X_i$. •

В заключение настоящего раздела отметим, что, по-видимому, существует определенная аналогия между рефлексивными играми и информационными расширениями игр [20, 47, 48], в том числе – метаиграми Н. Ховарда [172, 173]. В информационных расширениях игр предполагается, что существует упорядочение агентов, в рамках которого агент, принимающий решение о выбираемом действии, может рассчитывать на знание действий агентов, которые производят свой выбор раньше (в заданном упорядочении) него. Такие игры – с фиксированной последовательностью ходов – называются *иерархическими играми* [27, 29, 30, 44, 48]. В рамках этой модели доказано [48], что любой вектор действий, обеспечивающий агентам выигрыши не меньше соответствующих максимумов в исходной игре, может быть реализован как равновесие в некотором информационном расширении исходной игры. Для рефлексивных игр с регулярными структурами информированно-

сти это, вообще говоря, не так – пример 1 показывает, что для некоторых случаев множество информационных равновесий остается достаточно узким. В то же время, «иерархичность» и «рефлексивность» игр не противоречат друг другу – например, иерархическая игра может быть рефлексивной. Синтез результатов исследования метаигр и рефлексивных игр представляется перспективной задачей будущих исследований.

5.3. СТАЦИОНАРНОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ РЕФЛЕКСИВНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

В настоящем разделе рассмотрен случай взаимодействия двух агентов, имеющих квадратичные по своему действию целевые функции. Для этого случая будут сформулированы достаточные условия стационарности рефлексивных отображений, что, согласно утверждению 18, позволяет при решении задачи информационного управления ограничиться вторым рангом рефлексии агентов [40].

Пусть целевые функции агентов являются многочленами второй степени по действиям этих агентов:

$$(1) \quad f_i(\theta, x_1, x_2) = \varphi_i(\theta)x_i^2 + \psi_i(\theta)x_ix_j + \eta_i(\theta)x_i + \xi_i(\theta, x_j),$$

$$j = 3 - i, \quad i = 1, 2,$$

причем функции φ_i , ψ_i , и η_i непрерывны. При этом

$$(2) \quad \theta \in \Omega = [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}^1,$$

$$(3) \quad x_i \in X_i = [L_i, R_i] \subset \mathbb{R}^1, \quad i = 1, 2.$$

Потребуем также, чтобы для любых $\theta_1, \theta_2 \in \Omega$ выполнялись следующие условия:

$$(4) \quad \varphi_i(\theta_i) < 0,$$

$$(5) \quad L_i \leq \frac{\psi_i(\theta_i)\eta_j(\theta_j) - 2\varphi_j(\theta_j)\eta_i(\theta_i)}{4\varphi_i(\theta_i)\varphi_j(\theta_j) - \psi_i(\theta_i)\psi_j(\theta_j)} \leq R_i, \quad i = 1, 2,$$

$$(6) \quad 0 < \frac{\psi_1(\theta_1)}{2\varphi_1(\theta_1)} \frac{\psi_2(\theta_2)}{2\varphi_2(\theta_2)} < 1.$$

Утверждение 19. Рефлексивное отображение игры (1)–(3) при выполнении условий (4)–(6) является стационарным.

Доказательство. В случае структуры информированности единичной глубины, т. е. когда θ_1 и θ_2 являются общим знанием, равновесием является пара (x_1, x_2) , являющаяся решением системы уравнений

$$(7) \quad x_2 = BR_2(\theta_2, x_1) = -\frac{\psi_2(\theta_2)x_1 + \eta_2(\theta_2)}{2\varphi_2(\theta_2)},$$

$$(8) \quad x_1 = BR_1(\theta_1, x_2) = -\frac{\psi_1(\theta_1)x_2 + \eta_1(\theta_1)}{2\varphi_1(\theta_1)}$$

(в силу условия (4) у каждой целевой функции максимум достигается в одной точке).

Как нетрудно убедиться, единственным решением этой системы является следующее:

$$(9) \quad x_i = \frac{\psi_i(\theta_i)\eta_j(\theta_j) - 2\varphi_j(\theta_j)\eta_i(\theta_i)}{4\varphi_i(\theta_i)\varphi_j(\theta_j) - \psi_i(\theta_i)\psi_j(\theta_j)}, \quad j = 3 - i, \quad i = 1, 2.$$

С учетом условия (5) компоненты решения (9) принадлежат соответствующим допустимым множествам действий агентов.

Таким образом, множества всевозможных равновесных действий (при различных значениях θ_1 и θ_2) описываются соотношениями

$$(10) \quad X_i^0(\theta_i, \theta_j) = \frac{\psi_i(\theta_i)\eta_j(\theta_j) - 2\varphi_j(\theta_j)\eta_i(\theta_i)}{4\varphi_i(\theta_i)\varphi_j(\theta_j) - \psi_i(\theta_i)\psi_j(\theta_j)}, \quad j = 3 - i, \quad i = 1, 2.$$

Отметим, что в силу условий (1)–(3) множества X_i^0 являются отрезками.

Подставляя (10) в (7), (8), получаем следующие соотношения для описания множеств X_i^1 :

$$(11) \quad X_i^1(\theta_i, \theta_j, \theta_j^1) = -\frac{\psi_i(\theta_i^1)}{2\varphi_i(\theta_i^1)} X_j^0(\theta_i, \theta_j) - \frac{\eta_i(\theta_i^1)}{2\varphi_i(\theta_i^1)}, \quad \theta_i, \theta_j, \theta_j^1 \in \Omega.$$

Далее, подставляя (11) в (7), (8), получаем выражение для преобразования множества X_i^0 в X_i^2 :

$$\begin{aligned}
 (12) \quad X_i^2(\theta_i, \theta_j, \theta_j^1, \theta_i^2) &= -\frac{\psi_i(\theta_i^2)}{2\varphi_i(\theta_i^2)} X_j^1 - \frac{\eta_i(\theta_i^2)}{2\varphi_i(\theta_i^2)} = \\
 &= -\frac{\psi_i(\theta_i^2)}{2\varphi_i(\theta_i^2)} \left(-\frac{\psi_j(\theta_j^1)}{2\varphi_j(\theta_j^1)} X_i^0 - \frac{\eta_j(\theta_j^1)}{2\varphi_j(\theta_j^1)} \right) - \frac{\eta_i(\theta_i^2)}{2\varphi_i(\theta_i^2)} = \\
 &= \frac{\psi_i(\theta_i^2)}{2\varphi_i(\theta_i^2)} \frac{\psi_j(\theta_j^1)}{2\varphi_j(\theta_j^1)} X_i^0(\theta_i, \theta_j) + X_i^0(\theta_i^2, \theta_j^1) \left(1 - \frac{\psi_i(\theta_i^2)}{2\varphi_i(\theta_i^2)} \frac{\psi_j(\theta_j^1)}{2\varphi_j(\theta_j^1)} \right), \\
 \theta_i, \theta_j, \theta_j^1, \theta_i^2 &\in \Omega.
 \end{aligned}$$

Множества X_i^k являются отрезками $\mathfrak{R}^1$ и, следовательно, выпуклы. С учетом условия (6), преобразование (12) отображает множества X_i^0 в себя. Поэтому $X_i^2 = X_i^0$, и рефлексивные отображения являются стационарными. •

5.4. РЕФЛЕКСИВНАЯ НЕМАНИПУЛИРУЕМОСТЬ МЕХАНИЗМОВ ПЛАНИРОВАНИЯ

Механизмы планирования. На сегодняшний день известно [11], что манипулируемость *процедур принятия решений* может быть обусловлена либо стратегическим *манипулированием* со стороны агентов (искажением ими своих сообщаемых предпочтений [3, 17, 45, 63, 94]), либо манипулированием алгоритмом обработки мнений агентов (так называемая *теория агенды* [50]).

В *механизмах планирования* [17, 94] (принятия центром решений на основании сообщаемой агентами информации) считается, что предпочтения агентов являются для них общим знанием (см. раздел 1.3) т.е. предпочтения каждого агента известны всем агентам, всем агентам это известно и т.д. до бесконечности. При этом механизм называется *неманипулируемым*, если каждому агенту, каковы бы ни были его предпочтения, при любой обстановке игры (любых предпочтениях оппонентов) выгодно сообщение достоверной информации о своих предпочтениях.

В настоящем разделе мы обсудим возможность ослабления требования неманипулируемости при условии, что центр имеет возможность осуществлять информационное управление, т.е. формировать у агентов ту или иную систему представлений о типах оппонентов, об их представлениях и т.д.

Рассмотрим организационную систему, состоящую из управляющего органа – центра – и n управляемых субъектов – агентов. Стратегией i -го агента является сообщение центру некоторой информации $s_i \in S_i$, $i \in N = \{1, 2, \dots, n\}$ – множеству агентов. Центр на основании сообщенной ему информации назначает агентам планы $x_i = h_i(s) \in X_i \subseteq \mathfrak{R}^1$, где $h: S \rightarrow X$ – процедура (механизм) планирования, $h_i: S \rightarrow X_i$, $i \in N$, $s = (s_1, s_2, \dots, s_n) \in S = \prod_{i \in N} S_i$ – вектор сообщений всех агентов, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in X = \prod_{i \in N} X_i$ – вектор планов.

Функция предпочтения (целевая функция) агента, отражающая интересы агента в задачах планирования: $f_i(x_i, r_i): X_i \times \mathfrak{R}^1 \rightarrow \mathfrak{R}^1$, зависит от соответствующей компоненты назначенного центром плана и параметра $r_i \in \mathfrak{R}^1$ – типа агента.

Как правило, при исследовании механизмов планирования, то есть в организационных системах с сообщением информации, вводится предположение, что функции предпочтения агентов *однопиковые* [71] с точками пика $\{r_i\}_{i \in N}$, то есть функция $f_i(x_i, r_i)$ непрерывна, строго монотонно возрастает по x_i до единственной точки максимума r_i и строго монотонно убывает после нее, $i \in N$. Это предположение означает, что предпочтения агента на множестве допустимых планов таковы, что существует единственное наилучшее для него значение плана – точка пика, степень же предпочтительности остальных планов монотонно убывает по мере удаления от точки пика. Поэтому под типом агента будем понимать точку максимума (*идеальную точку, точку пика*) его функции предпочтения, то есть наиболее выгодное с его точки зрения значение плана.

Случай общего знания («классическая» неманипулируемость). Пусть на момент принятия решений общим знанием для агентов являются: процедура планирования, целевые функции и допустимые множества всех агентов, а также вектор типов

$r = (r_1, r_2, \dots, r_n) \in \mathfrak{R}^n$. Центру известны зависимости $f_i(x_i, \cdot)$ и множества $\{S_i\}_{i \in N}$ возможных сообщений агентов, но не известны точные значения типов агентов.

Последовательность функционирования следующая: центр выбирает процедуру планирования $h(s) = (h_1(s), h_2(s), \dots, h_n(s))$ и сообщает ее агентам, агенты при известной процедуре планирования одновременно и независимо сообщают центру информацию $\{s_i\}$, на основании которой и формируются планы.

Так как решение, принимаемое центром (назначаемые агентам планы), зависит от сообщаемой агентами информации, последние могут воспользоваться возможностью своего влияния на эти решения, сообщая такую информацию, чтобы получить наиболее выгодные для себя планы. Понятно, что при этом полученная центром информация в общем случае может не быть истинной. Следовательно, возникает *проблема манипулирования*.

Будем считать, что агенты ведут себя некооперативно, выбирая доминантные или равновесные по Нэшу стратегии. Пусть s^* – вектор равновесных по Нэшу стратегий:

$$(1) \quad \forall i \in N, \forall s_i \in S_i \quad f_i(h_i(s_{-i}^*, s_i^*), r_i) \geq f_i(h_i(s_{-i}^*, s_i), r_i).$$

Очевидно, точка равновесия в общем случае зависит от вектора типов всех агентов: $s^* = s^*(r) = (s_1^*(r), s_2^*(r), \dots, s_n^*(r))$.

Если при любых предпочтениях агентов $r \in \mathfrak{R}^n$ сообщение ими достоверной информации является равновесием Нэша,

$$(2) \quad \forall i \in N \quad \forall r \in \mathfrak{R}^n \quad \forall s \in \mathfrak{R}^1 \quad f_i(h_i(r), r_i) \geq f_i(h_i(r_{-i}, s), r_i),$$

то такой механизм называется *неманипулируемым* механизмом. Данное свойство далее будем называть *неманипулируемостью*.

Казалось бы, более сильным, чем (2), является требование того, чтобы сообщение каждым агентом достоверной информации было его доминантной стратегией:

$$(3) \quad \forall i \in N \quad \forall r_{-i} \quad s_i \in \mathfrak{R}^1 \quad \forall s_{-i} \in \mathfrak{R}^{n-1} \quad f_i(h_i(s_{-i}, r_i), r_i) \geq f_i(h_i(s_{-i}, s_i), r_i).$$

Однако легко видеть, что определения (2) и (3) эквивалентны [94, 163]. Это означает, что так как в определениях (2) и (3) неманипулируемости механизмов планирования вектор $r \in \mathfrak{R}^n$ типов агентов является «параметром», то неманипулируемость можно интерпретировать следующим образом: механизм является неманипулируемым, если, каковы бы ни были истинные типы агентов,

сообщение достоверной информации является доминантной стратегией каждого из них.

Рефлексивная неманипулируемость. Откажемся от предположения о том, что вектор типов агентов является общим знанием, и обобщим на этот случай задачу о неманипулируемости механизма планирования. Пусть информированность i -го агента описывается деревом I_i с элементами вида $r_{i\sigma} \in \mathfrak{R}^1$, $\sigma \in \Sigma$, причем r_i – истинный тип i -го агента – достоверно ему известен, $i \in N$.

В этом случае агенты играют в рефлексивную игру, информационное равновесие которой в данном случае определяется следующими условиями (см. раздел 2.2):

1) структура информированности I имеет конечную сложность;

$$2) \forall \lambda, \mu \in \Sigma \quad I_{\lambda i} = I_{\mu i} \Rightarrow x_{\lambda i}^* = x_{\mu i}^*;$$

$$3) \forall i \in N, \forall \sigma \in \Sigma$$

$$(4) \quad s_{\sigma i}^* \in \operatorname{Arg} \max_{s_i \in \mathfrak{R}^1} f_i(h_i(s_{\sigma i 1}^*, \dots, s_{\sigma i, i-1}^*, s_i, s_{\sigma i, i+1}^*, \dots, s_{\sigma i n}^*), r_{\sigma i}).$$

В соответствии с (4) равновесное сообщение i -го агента (реального) зависит от структуры его информированности I_i , то есть

$$(5) \quad s_i^* = s_i^*(I_i), \quad i \in N.$$

В частном случае – если имеет место общее знание – выражение (4) совпадает с определением равновесия Нэша.

Обозначим $s^*(I) = (s_1^*(I_1), s_2^*(I_2), \dots, s_n^*(I_n))$. Решение x , принимаемое в соответствии с механизмом $h(\cdot)$, будет зависеть от всей структуры информированности I :

$$(6) \quad x = h(s^*(I)).$$

Обсудим теперь, что следует понимать под манипулируемостью в случае отсутствия общего знания.

Напомним, что в соответствии с (2) и (3) в условиях общего знания механизм является неманипулируемым, если, каковы бы ни были истинные типы агентов, сообщение достоверной информации является доминантной стратегией каждого агента.

Попробуем обобщить это определение на случай информационного равновесия – потребуем, чтобы какова бы ни была структура информированности реального агента, сообщение достоверной информации являлось бы для него компонентой информационного равновесия (4):

$$(7) \quad \forall r \in \mathfrak{R}^n, \forall i \in N, \forall I_i$$

$$r_i \in \operatorname{Argmax}_{s_i \in \mathfrak{R}^1} f_i(h_i(s_{i1}^*(I_i), \dots, s_{i,i-1}^*(I_i), s_i, s_{i,i+1}^*(I_i), \dots, s_{in}^*(I_i)), r_i).$$

Легко видеть, что, если выполнено (3) (механизм является неманипулируемым), то имеет место и (7). В другую сторону: так как множество всевозможных структур информированности включает и структуру, соответствующую общему знанию, то, если выполнено (7), то механизм является неманипулируемым (должно иметь место (3)). Получили, что определения (3) и (7) эквивалентны.

Итак, можно сделать следующий качественный вывод: если в рассматриваемом механизме у каждого агента при любом его типе существует доминантная стратегия (а это – очень сильное требование, и класс удовлетворяющих ему механизмов чрезвычайно узок), то принимаемые им решения не зависят от структуры информированности.

Ослабления требования неманипулируемости можно добиться, введя определение рефлексивной неманипулируемости – существования подструктур информированности $r_{i\sigma} \in \mathfrak{R}^1$, $i \in N$, $\sigma \in \Sigma_+$, таких, что при любых типах реальных агентов сообщение ими достоверной информации является информационным равновесием.

Формально: будем называть механизм $h(\cdot)$ *рефлексивно неманипулируемым*, если существуют *подструктуры информированности* $r_{i\sigma} \in \mathfrak{R}^1$, $\sigma \in \Sigma_+$, реальных агентов ($i \in N$), такие, что, каков бы ни был тип реального агента, сообщение достоверной информации является для него компонентой информационного равновесия:

$$(9) \quad \forall i \in N \quad \forall r_i \in \mathfrak{R}^1$$

$$r_i \in \operatorname{Argmax}_{s_i \in \mathfrak{R}^1} f_i(h_i(s_{i1}^*, \dots, s_{i,i-1}^*, s_i, s_{i,i+1}^*, \dots, s_{in}^*), r_i),$$

$$(10) \quad \forall \sigma \in \Sigma \quad \forall j \in N$$

$$s_{i\sigma j}^* \in \operatorname{Argmax}_{s_j \in \mathfrak{R}^1} f_j(h_j(s_{i\sigma j 1}^*, \dots, s_{i\sigma j, j-1}^*, s_j, s_{i\sigma j, j+1}^*, \dots, s_{i\sigma j n}^*), r_{i\sigma j}).$$

Понятно, что множество рефлексивно неманипулируемых механизмов не уже множества неманипулируемых механизмов (любой неманипулируемый механизм является рефлексивно неманипулируемым), поэтому их характеристика (в том числе – поиск соответствующих подструктур информированности) является актуальной задачей.

Обозначим E_I – множество всевозможных (при всех допустимых структурах информированности) равновесных наборов действий реальных агентов, $E_{-i} = Proj_{-i} E_b$, $i \in N$. Определение (9)–(10) можно сформулировать в следующем виде: механизм является рефлексивно неманипулируемым, если для i -го агента существует обстановка $\tilde{r}_{-i} \in E_{-i}$ такая, что:

$$(11) \quad \forall r_b, \tilde{r}_i \in \mathfrak{R}^1 \quad f_i(h_i(\tilde{r}_{-i}, r_i), r_i) \geq f_i(h_i(\tilde{r}_{-i}, \tilde{r}_i), r_i), \quad i \in N.$$

Обозначим множество равновесий Нэша

$$(12) \quad E_N = \{r \in \mathfrak{R}^n \mid \forall i \in N \quad \forall \tilde{r}_i \in \mathfrak{R}^1 \quad f_i(h_i(r), r_i) \geq f_i(h_i(r_{-i}, \tilde{r}_i), r_i)\},$$

$$(13) \quad X_i^0 = Proj_i E_N, \quad i \in N.$$

Далее до конца данного раздела будем предполагать, что структура информированности агентов является конечной регулярной.

Справедливо следующее утверждение – достаточное условие рефлексивной неманипулируемости (необходимым условием является (11)).

Утверждение 20. Для того, чтобы механизм планирования являлся рефлексивно неманипулируемым, достаточно, чтобы для любого i -го агента, $i \in N$, существовал набор типов $\tilde{r} = (\tilde{r}_1, \dots, \tilde{r}_n) \in E_N$ такой, что выполнено (11). При этом для построения рефлексивно неманипулируемых механизмов достаточно ограничиться рассмотрением агентов с не более чем вторым рангом рефлексии.

Доказательство. Достаточно сформировать структуру информированности i -го агента I_i (отметим, что структуры информированности различных агентов можно строить независимо) такую, что:

$$(14) \quad r_{ij\sigma k} = \tilde{r}_k, \quad j \neq i, \quad \text{для любого } \sigma \in \Sigma.$$

Это означает, что с точки зрения i -го агента все остальные считают, что имеет место общее знание (см. рис. 35).

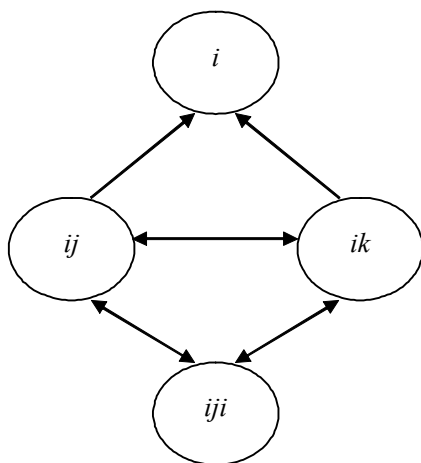


Рис. 35. Граф рефлексивной игры с точки зрения i -го агента.

Легко видеть, что с точки зрения i -го агента сообщение достоверной информации является равновесием игры его фантомных агентов, следовательно, выполнено (10), что с учетом (11) приводит к выполнению (9). •

Содержательно, представления i -го агента о типах оппонентов и их представлениях должны быть следующими. Агент должен быть, во-первых, уверен, что типы оппонентов таковы, что выполнено условие (11), обеспечивающее выгодность сообщения ими достоверной информации. Во-вторых, представления оппонентов с точки зрения рассматриваемого агента должны быть таковы, что сообщение именно данной информации является равновесием их игры (см. условие (10)). Для этого достаточно, чтобы на нижнем уровне структуры информированности имело место субъективное общее знание фантомных агентов.

Отметим конструктивность приведенного доказательства — оно содержит алгоритм построения конкретной структуры информированности (14), обеспечивающей рефлексивную неманипулируемость.

Приведем пример механизма планирования, который является манипулируемым но при этом рефлексивно неманипулируемым.

Пример. Пусть имеются два агента с неотрицательными типами r_1 и r_2 . (Напомним, что типом агента в данном случае является оптимальный для него план.) Рассмотрим механизм, который в зависимости от сообщений агентов s_1 и s_2 назначает им планы x_1 и x_2 соответственно по следующим формулам:

$$(21) \quad x_1 = s_1 - s_2 / 2, \quad x_2 = s_2 - s_1 / 2, \quad s_1, s_2 \geq 0.$$

Решая систему уравнений

$$\begin{cases} s_1 - \frac{s_2}{2} = r_1, \\ s_2 - \frac{s_1}{2} = r_2, \end{cases}$$

получаем равновесные по Нэшу стратегии (заявки) агентов:

$$s_1^*(r_1, r_2) = \frac{2}{3}(2r_1 + r_2), \quad s_2^*(r_1, r_2) = \frac{2}{3}(2r_2 + r_1).$$

Легко видеть, что механизм (21) является манипулируемым – при любых типах агентов, не равных одновременно нулю, по крайней мере один из агентов сообщает заявку, не совпадающую с его типом. Однако при $r_1, r_2 \geq 0$ механизм является рефлексивно неманипулируемым. Действительно, достаточно убедить каждого агента в том, что с точки зрения его оппонента общим знанием является равенство нулю обоих типов. Иными словами, достаточно сформировать структуру информированности $r_{i\sigma} = 0, i=1, 2, \sigma \in \Sigma_+$. Тогда единственным информационным равновесием является набор

$$s_i^* = r_i, \quad s_{i\sigma}^* = 0, \quad i=1, 2, \quad \sigma \in \Sigma_+.$$

Таким образом, в равновесии оба агента сообщают свои истинные типы.

В то же время, при $r_1, r_2 > 0$ механизм (21) не является рефлексивно неманипулируемым, так как какова бы ни была структура информированности (и, в частности, какова бы ни была ее глубина), каждый из агентов будет уверен в том, что сообщение оппонента будет отлично от нуля. •

5.5. ТЕХНОЛОГИЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ЗАДАЧ ИНФОРМАЦИОННОГО УПРАВЛЕНИЯ

В данном разделе приводится общая схема исследования задач информационного управления. Не претендуя на исчерпывающий охват всех возможных случаев, эта схема описывает общую логику теоретико-игрового анализа (см. рис. 36).

- **Этап 1.** Описание множества управляемых субъектов (агентов), их допустимых действий и целевых функций. Заметим, что этот этап является необходимым при теоретико-игровом подходе к управлению (не только информационному) социально-экономическими системами.
- **Этап 2.** Формализация имеющейся в ситуации неопределенности – неопределенного параметра, значение которого не является общим знанием (см. раздел 1.3) между агентами. Если не накладывать заранее ограничения на множество возможных значений неопределенного параметра, то всегда можно считать (см., например., [180, с. 77]), что этот параметр является аргументом целевых функций агентов.
- **Этап 3.** Определение множества информационных структур (см. раздел 2.1), которые могут быть сформированы управляющим органом (центром).

В результате этих трех этапов, составляющих **предварительную стадию** исследования, мы получаем теоретико-игровое описание ситуации. Отметим, что в настоящей работе, как правило, принимается предположение о том, что центру известно истинное значение неопределенного параметра.

- **Этап 4.** Вычисление (для структур, определенных на предыдущем этапе) информационного равновесия – зависимости между информационной структурой и действиями агентов (глава 2).

- **Этап 5.** Исследование стабильности информационного равновесия. Если равновесие стабильно – установление его истинности либо ложности (глава 3).
- **Этап 6.** Определение наиболее целесообразной постановки задачи информационного управления и нахождение информационной структуры, являющейся ее решением. Нахождение этого решения, как правило, облегчается в случае, когда рефлексивные отображения являются стационарными и, следовательно, нужная информационная структура довольно проста (глава 5).

В результате этапов 4–6, составляющих **основную стадию** исследования, мы получаем информационную структуру, которую надлежит сформировать у агентов для достижения стоящих перед управляющим органом целей.

- **Этап 7.** Разработка информационного воздействия на агентов, приводящего к формированию найденной на этапе 6 информационной структуры.

Этап 7, составляющий **завершающую стадию** исследования, в значительной степени лежит за рамками теоретико-игрового подхода (см. обсуждение в разделе 4.1) и относится к области психологии и социологии. В данной работе описаны лишь некоторые виды информационных воздействий, меняющих те или иные компоненты информационной структуры игры (глава 4).

Таким образом, содержанием этой и предыдущих глав настоящей работы является анализ вышеперечисленных этапов. Далее, в главе 6, приводится ряд модельных примеров исследования задач информационного управления.



Рис. 36. Этапы исследования задач информационного управления

ГЛАВА 6. ПРИКЛАДНЫЕ МОДЕЛИ **ИНФОРМАЦИОННОГО УПРАВЛЕНИЯ**

В настоящей главе рассматривается набор независимых друг от друга прикладных моделей информационного управления (см. [25, 57, 58, 78, 81, 84, 86, 87, 88, 90, 135, 137]). Большинство из них отражают воздействия на информированность экономических агентов (производителей и покупателей продукции, заказчиков и исполнителей работ и т.д.), некоторые же – на информированность участников предвыборной борьбы, избирателей и т.д.

Перечислим кратко рассматриваемые модели.

«Игры поиска» (раздел 6.1) рассматривают взаимодействие двух игроков, являющихся подвижными точками в ограниченном с одной стороны «коридоре» (т.е. в области, представляющей собой полуполосу), – уклоняющегося (например, подводная лодка) и ищущего (например, вертолет или противолодочный корабль). Уклоняющийся игрок выбирает точку, где он «прячется», ищущий игрок выбирает свою скорость. Каждый из них имеет свои представления о таком параметре, как минимальное расстояние между ними, при котором происходит обнаружение. Кроме того, каждый из игроков имеет определенные представления о представлениях оппонента, представлениях о представлениях и т.д. Оказывается, что максимальный целесообразный ранг рефлексии ищущего игрока равен трем, а уклоняющегося – двум. При этом у уклоняющегося, в зависимости от структуры информированности, имеются лишь две равновесные стратегии – «стоять на месте, пытаясь отсрочить момент обнаружения» и «пытаться прорваться как можно раньше».

В разделе 6.2 рассматривается модель **«Производитель и посредник»**, в которой участвуют агент, являющийся производителем некоторого вида продукции, и центр, выступающий в роли посредника между агентом и рынком. Предполагается, что посредник точно знает рыночную цену, а производитель – нет.

Производитель и посредник заранее оговаривают пропорцию, в которой они будут делить доход, затем посредник сообщает производителю информацию (не обязательно достоверную) о рыночной цене, и, наконец, производитель выбирает объем производства.

Выбор посредником сообщения о рыночной цене может трактоваться как информационное управление. Стабильным будет такое информационное управление, при котором реальный доход производителя равен тому доходу, на который он и рассчитывал, исходя из сообщения посредника.

Оказывается, что, выбирая надлежащим образом информационное управление, посредник обеспечивает себе максимум дохода независимо от пропорции дележа (иными словами, посредник может соглашаться на любую долю, свой выигрыш он получит в любом случае). Интересно, что при этом в некоторых случаях производитель получает большую прибыль, чем получил бы, если бы посредник сообщал истинное значение цены.

В разделе 6.3 (**«Принцип дефицита»**) описана модель, объясняющая случай кажущейся нерациональности поведения экономических агентов, описанный в [122]. Агентов (клиентов компании, занимающейся оптовыми поставками говядины) разделили на три категории. После этого каждой категории сообщили «свою» информацию. В результате действия агентов различных типов (т. е. попавших в разные категории) оказались различными.

Оказывается, что действия агентов можно объяснить, если предположить, что различные информационные воздействия формируют у агентов различные структуры информированности.

Модель **«Совместное производство»** рассмотрена в разделе 6.4. Агенты производят однородную продукцию, реализуемую на внешнем рынке. Затем суммарный доход распределяется между агентами в соответствии с фиксированными долями. Каждый агент стремится максимизировать прибыль (доход минус затраты), а центр заинтересован в максимизации суммарной прибыли агентов. Неопределенным параметром в данном случае является рыночная цена продукции.

Рассмотрены различные способы формирования структуры информированности игры – информационное регулирование, активный прогноз, рефлексивное управление. Оказывается, что в данном случае эффективность этих трех способов одинакова: формирование центром более сложных структур информированности агентов не дает увеличения эффективности по сравнению с информационным регулированием и активным прогнозом. При этом интересно, что выигрыш каждого из агентов будет меньше

ожидаемого, но больше того выигрыша, который он получил бы в случае сообщения центром истинной цены.

В модели **«Конкуренция на рынке»** (раздел 6.5) цена на продукцию агентов зависит от суммарного объема производства. В качестве неопределенного параметра выступают характеристики агентов (их эффективности). Рассмотрена задача активного прогнозирования, когда центр, стремясь минимизировать рыночную цену, сообщает агентам суммарный объем производства (т. е. сумму их действий). Оказывается, что при некоторых предположениях сообщение точного прогноза минимизирует цену.

Модель **«Аккордная оплата труда»** (раздел 6.6) отражает ситуацию, в которой вознаграждение коллектива агентов за работу имеет следующий вид: каждый агент получает фиксированное вознаграждение, если агрегированный результат деятельности агентов (например, сумма их действий) превышает заданный норматив; вознаграждение равно нулю, если норматив не выполнен.

Агенты имеют иерархию представлений о нормативе. Помимо общего знания рассматриваются следующие варианты:

- представления агентов о нормативе попарно различны; тогда либо никто из агентов не работает, либо один агент выполняет весь объем работ;
- если структура информированности имеет глубину два, и каждый из агентов субъективно считает, что играет в игру с асимметричным общим знанием, то множество возможных равновесных ситуаций максимально и совпадает со множеством индивидуально рациональных действий;
- если структура информированности имеет глубину два, и на ее нижнем уровне имеет место симметричное общее знание, то и в этом случае множество информационных равновесий является максимально возможным.

Полученные результаты полностью подтверждают интуитивно правдоподобный качественный вывод: в коллективе работников совместная работа возможна (является равновесием) лишь в том случае, когда имеется общее знание о том, какой объем работ необходимо выполнить для получения вознаграждения. Кроме того, незначительное изменение информационной структуры приводит к существенному изменению информационного равновесия.

Интересно, что возможно следующее стабильное информационное равновесие: каждый агент считает, что именно за счет его усилий выполнен весь объем работ и это всем известно (и даже является общим знанием).

В модели **«Продавец и покупатель»** (раздел 6.7) продавец и покупатель, имеющие иерархию взаимных представлений о ценности продаваемого товара, должны прийти к соглашению о цене, по которой произойдет сделка купли-продажи.

Необходимым условием заключения сделки оказывается следующее: с точки зрения обоих участников субъективные цены всех реальных и фантомных продавцов не превышают субъективных цен каждого из реальных и фантомных покупателей.

Наиболее простой структурой информированности, которую следует сформировать у покупателя и продавца для того, чтобы сделка произошла по требуемой для центра цене, является следующая – они должны быть уверены, что для всех их фантомных агентов (покупателя с точки зрения продавца, продавца с точки зрения покупателя и т.д.) ценность товара в точности равна цене, требуемой для центра.

В разделе 6.8 рассмотрена модель **«Заказчик и исполнитель»**, в которой неопределенным для заказчика параметром является известная исполнителю эффективность его работы. В этом случае, варьируя представления заказчика об эффективности работы исполнителя (то есть в рамках структуры информированности глубины два), любую стоимость договора (из определенного промежутка) можно сделать стабильным информационным равновесием.

В модели **«Коррупция»** (раздел 6.9) каждый из чиновников имеет субъективные представления о силе штрафов, накладываемых в случае обнаружения факта взяточничества и зависящих от «среднего уровня коррумпированности». Оказывается, что, если чиновники наблюдают средний уровень коррумпированности, то этот средний уровень в стабильной ситуации не зависит от взаимных представлений коррупционеров о типах друг друга. При этом не важно, являются ли сами эти представления истинными или ложными.

Отсюда вытекает, что невозможно повлиять на уровень коррумпированности лишь путем изменения взаимных представлений чиновников друг о друге, и любое стабильное информационное

управление приводит к одному и тому же уровню коррумпированности.

В разделе 6.10 описана модель **«Биполярный выбор»**, в которой рассматривается ситуация, когда агенты осуществляют выбор между двумя альтернативами, которые для общности называются позитивным и негативным полюсами. Например: кандидат на выборах (голосовать «за» или «против»), продукт или услуга (покупать или нет), этический выбор (поступить «хорошо» или «плохо») и пр.

Пусть имеются агенты трех типов: первые безусловно выбирают положительный полюс, вторые – выбирают положительный или отрицательный полюс в зависимости от того, как с их точки зрения поведут себя остальные агенты, третьи безусловно выбирают отрицательный полюс.

Предположим теперь, что центр имеет возможность повлиять на ситуацию и стремится увеличить вероятность позитивного выбора в «популяции» в целом. Для этого центр может повлиять на агентов второй и третьей группы (агенты первой группы и так производят требуемый выбор). Во-первых, центр может повлиять на третью группу, затратив некий ресурс (например, финансовый) и переведя некоторую долю ее членов во вторую. Во-вторых, центр может повлиять на вторую группу, изменив представления ее членов о доле агентов третьего типа. В последнем случае влияние состоит в формировании у второй группы следующего представления: «определенная доля членов третьей группы перешла во вторую». Формирование такого представления также требует определенных затрат.

Иными словами, центр может изменить либо реальную, либо «фантомную», воображаемую, долю агентов третьего типа. При этом совокупный ресурс (бюджет), которым располагает центр, фиксирован. Задача центра состоит в следующем: распределить фиксированный ресурс на реализацию информационных воздействий таким образом, чтобы доля агентов, осуществивших позитивный выбор, была максимальной.

Оказывается, что если ресурса у центра «не очень много», то оптимальным управлением является, в зависимости от соотношения между параметрами, вложить весь этот ресурс либо в реальное, либо в «воображаемое» (происходящее в сознании агентов второго типа) изменение доли агентов третьего типа.

В модели «**Активная экспертиза**», рассматриваемой в разделе 6.11, описывается ситуация принятия решений коллективом экспертов, каждый из которых имеет собственные представления о том, каким должен быть результат экспертизы, и стремится соответствующим образом на него повлиять. Проблема манипулирования информацией со стороны агентов является традиционной в теории выбора [63, 94], задача же манипулирования результатами экспертизы со стороны центра – организатора экспертизы – до сегодняшнего дня не рассматривалась.

Пусть центр имеет возможность сформировать у экспертов представления о мнениях оппонентов. Тогда оказывается, что достаточно широкий диапазон коллективных решений может быть реализован как информационное равновесие (а иногда и единое решение) рефлексивной игры экспертов.

В модели «**Олигополия Курно**», рассматриваемой в разделе 6.12, агенты выбирают объемы производства. Рыночная цена на продукцию убывает с ростом суммарного объема производства и зависит от спроса.

Если неопределенным параметром является спрос и относительно него каждый из агентов имеет собственную иерархию представлений, то информационное равновесие существенным образом зависит от взаимных представлений агентов.

Если неопределенным параметром являются затраты агентов, то оказывается, что, наблюдая выбираемые действия, агенты могут в динамике прийти к истинному информационному равновесию.

Модель «**Распределение ресурса**» (раздел 6.13) описывает ситуацию распределения центром ограниченного ресурса между агентами на основании заявок последних. В силу активности агентов, они способны к искажению информации, и в равновесии часть агентов (так называемые *диктаторы* [94]) получают оптимальное для себя количество ресурса, а остальные агенты – меньше оптимального.

Предположим, что агенты имеют иерархию представлений о том, кому из них какое количество ресурса необходимо. Оказывается, что во многих механизмах распределения ресурса стабильные неадекватные представления могут существовать только относительно агентов, не входящих в число диктаторов. При этом, однако, вектор распределяемых ресурсов оказывается таким же, как и в случае полного знания.

В модели **«Страхование»** (раздел 6.14) страхователи имеют иерархию взаимных представлений о вероятностях наступления страховых случаев и сообщают страховщику желательные размеры своих страховых взносов.

Оказывается, что информационным равновесием является любой набор заявок, обладающий следующим свойством: с точки зрения любого агента (как реального, так и фантомного) сумма заявок (реальных) страхователей равна ожидаемым суммарным потерям от страховых случаев, а каждая из заявок не превосходит ожидаемого страхового возмещения. При этом все равновесные действия реальных страхователей достигаются в рамках их субъективного общего знания друг о друге.

В разделе 6.15 рассматривается модель **«Реклама товара»**, в которой агент принимает решение о приобретении товара не только в зависимости от собственных предпочтений, но и от того, какая часть других агентов, с его точки зрения, собирается приобрести товар или ожидает от него приобретения данного товара.

Оказывается, что большинство реальных рекламных кампаний могут быть описаны в рамках модели информационного управления с первым или вторым рангом рефлексии агентов.

Раздел 6.16 посвящен рассмотрению модели **«Предвыборная борьба»**, в которой информационное управление заключается в убеждении избирателей, поддерживающих определенных кандидатов, что их кандидаты не будут избраны и следует поддержать других кандидатов.

Оказывается, что получающееся в итоге такого управления информационное равновесие может быть стабильным, и более того – истинным.

Основная идея модели **«Конкурс»**, рассматриваемой в разделе 6.17, заключается в том, что, влияя на представления участников конкурса о параметрах оппонентов, центр (организатор конкурса) может влиять на его результаты. Однако стабильным это информационное управление будет лишь в том случае, когда действия агентов совпадают с их действиями в условиях общего знания.

6.1. ИГРЫ ПОИСКА

Игра поиска в условиях общего знания. Поиск активно уклоняющегося объекта является типичным примером конфликтного взаимодействия, который может быть исследован методами теории игр. Простейшие игровые задачи поиска были исследованы в конце 60-х годов XX в. (в частности, в монографии [1]). Общей теории игр поиска на данный момент не существует; ряд частных результатов изложен в работе [95]; см. также [146] и обзор в монографии [42].

Рассмотрим *игру поиска*, в которой участвуют два игрока, управляющие точечными объектами: ищущим объектом 1 и уклоняющимся объектом 2 (в дальнейшем будем отождествлять игроков и управляемые ими объекты). Поисковой областью, где перемещаются объекты, является прямоугольник евклидовой плоскости $\{(x, y) \mid 0 \leq x \leq D, 0 \leq y \leq 2L\}$, $D, L > 0$. Ищущий объект начинает движение из точки (D, L) и движется по отрезку $y = L$ с выбранной им скоростью α , $0 \leq \alpha \leq A$, $A > 0$. Он обнаруживает объект 2 в некоторый момент, если расстояние между объектами в этот момент сократилось до величины $l = \theta - k\alpha$, $k > 0$. Содержательно величина l интерпретируется как «зоркость» ищущего (которая уменьшается с ростом его скорости) – расстояние, на котором он может обнаружить уклоняющегося. Уклоняющийся объект может выбрать точку в прямоугольнике для своего местоположения. Ясно, что это должна быть точка на отрезке $y = 0$ либо на отрезке $y = L$. Поэтому можно считать, что выбор объекта 2 определяется одним числом δ , $0 \leq \delta \leq D$, – абсциссой точки, где он «прячется».

Ищущий объект стремится обнаружить уклоняющегося, причем за как можно меньшее время. Если обнаружение не происходит, то для ищущего более выгодно, чтобы уклоняющийся находился от него на как можно меньшем расстоянии (это расстояние характеризуется выбором δ).

С учетом вышесказанного целевую функцию ищущего зададим следующим образом:

$$(1) \quad f(\alpha, \delta) = \begin{cases} M - \frac{D-\delta}{\alpha}, & \theta \geq L + k\alpha, \\ -\frac{D}{\alpha} - c(\delta), & \theta < L + k\alpha, \end{cases}$$

где $M > 0$ – «премия» за обнаружение (которое происходит, если $l \geq L$), а $c(\delta)$ – возрастающая функция, для которой $c(0) = 0$, характеризующая потери игрока 1 в случае, если обнаружение не происходит. Игра является антагонистической, так что интересы игрока 1 строго противоположны интересам игрока 2.

Таким образом, игра полностью характеризуется целевой функцией $f(\alpha, \delta)$, положительными параметрами D, L, A, M, k, θ и функцией $c(\delta)$, которые будем считать общим знанием для первого и второго игроков.

Для нахождения седловой точки игры (1) найдем $\max_{\alpha} \min_{\delta} f(\alpha, \delta)$. Имеем:

$$\min_{\delta} f(\alpha, \delta) = \begin{cases} M - \frac{D}{\alpha}, & \theta \geq L + k\alpha, \\ -\frac{D}{\alpha} - c(D), & \theta < L + k\alpha, \end{cases}$$

$$\max_{\alpha} \min_{\delta} f(\alpha, \delta) = \max \left\{ M - \frac{D}{\alpha^0}, -\frac{D}{A} - c(D) \right\},$$

где $\alpha^0 = (\theta - L)/k$ – скорость, при которой $l = L$, т. е. обнаружение происходит наиболее «экономным» образом.

Далее будем считать выполненными следующие условия:

$$(2) \quad \alpha^0 \leq A, \quad M - \frac{D}{\alpha^0} \geq -\frac{D}{A}.$$

Первое из условий (2) означает, что скорость α^0 является возможной для объекта 1; второе условие означает, что обнаружение дает объекту 1 достаточно существенную прибавку к выигрышу. Отметим, что первое условие является техническим, оно упрощает дальнейшие выкладки. Второе же является принципиальным, обеспечивая существование равновесия в игре (1).

При выполнении условий (2) имеем:

$$\max_{\alpha} \min_{\delta} f(\alpha, \delta) = M - \frac{D}{\alpha^0} = f(\alpha^0, 0).$$

Аналогично:

$$\max_{\alpha} f(\alpha, \delta) = \max \left\{ M - \frac{D-\delta}{\alpha^0}, -\frac{D}{A} - c(\delta) \right\}.$$

В силу (2) справедлива цепочка неравенств

$$M - \frac{D-\delta}{\alpha^0} \geq M - \frac{D}{\alpha^0} \geq -\frac{D}{A} \geq -\frac{D}{A} - c(\delta),$$

поэтому

$$\max_{\alpha} f(\alpha, \delta) = M - \frac{D-\delta}{\alpha^0}$$

и

$$\min_{\delta} \max_{\alpha} f(\alpha, \delta) = M - \frac{D}{\alpha^0} = f(\alpha^0, 0).$$

Таким образом, у игры (1) при условии (2) существует единственная точка равновесия $(\alpha^0, 0)$.

Информационная рефлексия. В этом подразделе мы рассмотрим возможность информационной рефлексии [81] в игре поиска (1). Будем считать, что функция $f(\alpha, \delta)$ и параметры D, L, A, M, k являются общим знанием, а относительно параметра θ у игроков 1 и 2 существуют точечные регулярные структуры информированности $I_1 = (\theta_1, \theta_{12}, \theta_{121}, \dots)$ и $I_2 = (\theta_2, \theta_{21}, \theta_{212}, \dots)$ соответственно (подробнее о понятиях «регулярности» и «точечности» см. [81], см. также раздел 1.1). Будем также считать, что общим знанием является выполнение условий (2), которые можно переписать в виде следующего двойного неравенства:

$$(3) \quad L + \frac{k}{MD^{-1} + A^{-1}} \leq \theta \leq L + kA.$$

Что касается функции $c(\delta)$, то достаточно, чтобы общим знанием было ее возрастание и тот факт, что $c(0) = 0$.

Рассмотрим принятие решений игроками в порядке возрастания ранга их рефлексии, начиная со второго ранга.

а) Пусть представления игрока 1 характеризуются графом $1 \leftarrow 12 \leftrightarrow 121$ (подробнее о графе рефлексивной игры см. [81]), что соответствует второму рангу рефлексии. Тогда 12-игрок (игрок 2 в представлении игрока 1) выбирает действие $\delta_{12} = 0$. Наилучшим ответом на это со стороны игрока 1 является выбор скорости

$$(4) \quad \alpha_1^0 = \frac{\theta_1 - L}{k}.$$

б) Пусть представления игрока 2 характеризуются графом $2 \leftarrow 21 \leftrightarrow 212$, что соответствует второму рангу рефлексии. Тогда 21-игрок выбирает скорость $\alpha_{21}^0 = \frac{\theta_{21} - L}{k}$. Действие игрока 2 зависит от того, состоится ли, с его точки зрения, обнаружение. Если оно состоится, т. е. выполнено условие

$$\theta_2 - k\alpha_{21}^0 \geq L,$$

что равносильно $\theta_2 \geq \theta_{21}$, то лучшим ответом является выбор $\delta_2 = 0$. В противном случае, т. е. при $\theta_2 < \theta_{21}$, наилучший выбор $\delta_2 = D$

(индекс «2» поставлен для обозначения того, что это действие реального игрока 2).

в) Пусть представления игрока 1 характеризуются графом $1 \leftarrow 12 \leftarrow 121 \leftrightarrow 1212$, что соответствует третьему рангу рефлексии. Тогда, в соответствии с результатом б), возможны два случая: $\theta_{12} \geq \theta_{121}$, $\delta_{12} = 0$ и $\theta_{12} < \theta_{121}$, $\delta_{12} = D$. В первом случае наилучшим ответом является α_1^0 , определяемое соотношением (4), во втором – любое $\alpha_1 \in [0, \alpha_1^0]$.

В результате получаем:

$$(5) \quad \alpha_1 \begin{cases} = \alpha_1^0 = \frac{\theta_{12} - L}{k}, & \theta_{12} \geq \theta_{121}, \\ \in [0, \alpha_1^0], & \theta_{12} < \theta_{121}. \end{cases}$$

з) Пусть представления игрока 2 характеризуются графом $2 \leftarrow 21 \leftarrow 212 \leftrightarrow 2121$, что соответствует третьему рангу рефлексии. Тогда, в соответствии с предыдущими рассмотрениями, имеем:

$$\alpha_{2121} = \alpha_{2121}^0, \delta_{212} = 0, \alpha_{21} = \alpha_{21}^0 = \frac{\theta_{21} - L}{k},$$

$$(6) \quad \delta_2 = \begin{cases} 0, & \theta_2 \geq \theta_{21}, \\ D, & \theta_2 < \theta_{21}. \end{cases}$$

Результат аналогичен б).

д) Пусть представления игрока 1 характеризуются графом $1 \leftarrow 12 \leftarrow 121 \leftarrow 1212 \leftrightarrow 12121$, что соответствует четвертому рангу рефлексии. Тогда, аналогично в), возможны два случая: $\theta_{12} \geq \theta_{121}$, $\delta_{12} = 0$, $\alpha_1 = \alpha_1^0 = \frac{\theta_{12} - L}{k}$ и $\theta_{12} < \theta_{121}$, $\delta_{12} = D$, $\alpha_1 \in [0, \alpha_1^0]$.

е) Пусть представления игрока 2 характеризуются графом $2 \leftarrow 21 \leftarrow 212 \leftarrow 2121 \leftrightarrow 21212$, что соответствует четвертому рангу рефлексии. Тогда, в соответствии с результатом в), возможны два случая: $\theta_{212} \geq \theta_{2121}$, $\delta_{212} = 0$, $\alpha_{21} = \alpha_{21}^0 = \frac{\theta_{21} - L}{k}$ и $\theta_{212} < \theta_{2121}$, $\delta_{212} = D$, $\alpha_{21} \in [0, \alpha_{21}^0]$. В первом случае наилучший ответ определяется (6).

Второй случай несколько сложнее для анализа, поскольку игрок 2 может ожидать от игрока 1 любого действия из отрезка $[0, \alpha_{21}^0]$. Здесь мы имеем дело с интервальной неопределенностью, наиболее распространенным способом устранения которой являет-

ся нахождение максимального гарантированного результата (см., например, [33]). В данном случае, как нетрудно видеть,

$$\max_{\alpha \in [0, \alpha_{21}^0]} f(\alpha, \delta) = \begin{cases} M - \frac{D-\delta}{\alpha_{21}^0}, & \theta_2 \geq \theta_{21}, \\ -\frac{D}{\alpha_{21}^0} - c(\delta), & \theta_2 < \theta_{21}. \end{cases}$$

Поэтому гарантирующее действие $\delta_2 = \arg \min_{\delta} \max_{\alpha \in [0, \alpha_{21}^0]} f(\alpha, \delta)$ будет определяться теми же соотношениями (6).

Видно, что с увеличением ранга рефлексии игроков множество их субъективно равновесных действий не увеличивается по сравнению со вторым рангом для игрока 2 и третьим рангом для игрока 1. В соответствии с терминологией, предложенной в [81], ранги 3 для игрока 1 и 2 для игрока 2 называются *максимальными целесообразными* рангами рефлексии. Сформулируем соответствующее утверждение.

Утверждение 21. Максимальные целесообразные ранги рефлексии в рефлексивной игре поиска (1) равны 3 для ищущего игрока и 2 для уклоняющегося игрока.

Доказательство проведем по индукции. Базис индукции: если ранг игрока 1 равен 3, то его действие определяется соотношениями (5); если ранг игрока 2 равен 2 или 3, то его действие определяется соотношениями (6). Эти случаи рассмотрены выше.

Рассмотрим теперь принятие решений игроком 1 с n -м рангом рефлексии, $n \geq 4$. Ранг 12-игрока равен $n - 1$, и его действие по предположению определяется соотношениями (6). Соответственно, наилучший ответ игрока 1, как было показано в в), определяется соотношениями (5). Теми же соотношениями (5) определяется наилучший ответ игрока 1 с третьим рангом рефлексии, откуда вытекает первая часть утверждения (об игроке 1).

Если же принимает решение игрок 2 с рангом n , то, по предположению, действие 21-игрока с рангом $n - 1$ определяется соотношениями (5). Наилучший ответ игрока 2 на эти действия определяется, как было показано в е), соотношениями (6). Теми же соотношениями (6) определяется наилучший ответ игрока 2 со вторым или третьим рангом рефлексии, откуда вытекает вторая часть утверждения (об игроке 2). •

Содержательно доказанное утверждение означает, что игрок 2 либо занимает положение как можно дальше от игрока 1, выбирая

$\delta_2 = 0$ (если считает, что его обнаружат), либо пытается сразу осуществить «прорыв», выбирая $\delta_2 = D$. Стратегия $0 < \delta_2 < D$ не является равновесной ни при каких структурах информированности.

Равновесные стратегии игрока 1 либо $\alpha_1 = \alpha_1^0 = \frac{\theta_1 - L}{k}$ (если $\delta_{12} = 0$), либо любая из отрезка $[0, \alpha_1^0]$ (если $\delta_{12} = D$).

Возможности информационного управления вторым игроком на этом исчерпываются, и оба равновесия достижимы в рамках ранга 2. Если центр может воздействовать на представления игрока 1 о своих возможностях (которые отражает параметр θ), все определяется тем, переоценивает ли их игрок 1. Если не переоценивает, то обнаружение состоится, если переоценивает – не состоится.

Предположим, что по результатам игры игроки наблюдают факт обнаружения (либо необнаружения), а также – в случае обнаружения – выбор игрока 2 (т. е. δ_2). Тогда информационное равновесие будет стабильным в случае $\theta_2 \geq \theta_{21}$, $\theta_1 \leq \theta$. Содержательно это означает:

1) игрок 2 считает, что игрок 1 не переоценивает свои возможности;

2) так оно на самом деле и есть (хотя и не обязательно игрок 2 оценивает возможности игрока 1 адекватно).

Некоторые обобщения. Обсудим качественно возможные обобщения полученных результатов на случай более сложных поисковых ситуаций. Во многих случаях поиск так или иначе сводится к «прочесыванию» поискового множества. Даже если уклоняющийся игрок может перемещаться в процессе игры (а не только в ее начале выбирать свое местоположение), при соответствующих условиях на скорости игроков и параметры поискового множества обнаружение возможно в результате планомерного «прочесывания» (поисковые задачи второго типа по классификации, предложенной в [145]). Стратегии (траектории) «прочесывания» (а также уклонения) на ряде поисковых множеств были предложены в работах [124, 140, 141, 143, 144, 145]. Отметим, что построение этих траекторий опирается на свойства переменных информационных множеств, характеризующих информирован-

ность ищущего игрока о местоположении уклоняющегося (см. [123, 142]).

При применении ищущим игроком этих стратегий у уклоняющегося игрока имеются, по сути, те же две альтернативы, что и в рассмотренном выше случае – либо «скрываться», либо «прорываться». Увеличение ранга рефлексии не приводит к появлению «промежуточных» равновесных стратегий.

6.2. ПРОИЗВОДИТЕЛЬ И ПОСРЕДНИК

Рассмотрим ситуацию [125], в которой участвуют агент, являющийся производителем некоторого вида продукции, и центр, являющийся посредником. Они взаимодействуют следующим образом:

1) оговариваются доли λ и $(1 - \lambda)$, в соответствии с которыми доход делится между производителем и посредником соответственно, $\lambda \in (0; 1)$;

2) посредник сообщает производителю оценку $\tilde{\theta}$ рыночной цены θ ;

3) производитель производит некоторый объем продукта $y \geq 0$ и передает его посреднику;

4) посредник реализует его по рыночной цене и передает производителю оговоренную долю дохода $\lambda \theta y$, а себе забирает $(1 - \lambda) \theta y$.

Предполагается, что посредник в точности знает рыночную цену, а производитель, напротив, не обладает никакой априорной информацией о ней.

Производитель характеризуется функцией издержек $c(y)$, которая связывает объем продукции и затраты на его производство (будем считать, что ограничения на мощность отсутствуют, то есть может производиться любой объем продукции).

В описанной ситуации ключевую роль играют три параметра – доля λ , цена θ и объем продукции y . О доле участники договариваются заранее, цену сообщает посредник, объем продукции выбирает производитель.

Теперь рассмотрим вопрос о том, как будут вести себя участники ситуации после того, как они договорились о долях λ и

$(1 - \lambda)$. Производитель, стремясь максимизировать свою прибыль, выбирает объем производства y^* в зависимости от своей функции издержек, причитающейся ему доли дохода и сообщаемой посредником рыночной цены. Предположим, что производитель изначально доверяет посреднику, причем у производителя нет возможности проверить, насколько сообщение посредника соответствует действительности. В этом случае посредник может сообщить значение $\tilde{\theta}$, не совпадающее, вообще говоря, с истинным значением рыночной цены θ . Выбор посредником сообщения $\tilde{\theta}$ можно трактовать как осуществление информационного управления.

Наконец, предположим, что посредник стремится проводить стабильное информационное управление, то есть обеспечивать производителю тот доход, который он ожидает получить, исходя из значения $\tilde{\theta}$.

В рамках описанных выше предположений целевые функции посредника и производителя выглядят, соответственно, следующим образом:

$$f_0(y, \tilde{\theta}) = \theta y - \tilde{\theta} \lambda y, \quad f(y, \tilde{\theta}) = \tilde{\theta} \lambda y - c(y).$$

Подчеркнем, что эти целевые функции записаны с учетом стабилизации, то есть перераспределения доходов центром (в качестве центра здесь выступает посредник), с целью добиться стабильности равновесия игры (см. раздел 3.1).

Наложим на функцию издержек ограничения таким образом, чтобы прибыль производителя (равная разности дохода и издержек) принимала максимальное значение ровно в одной точке $y^* = y^*(\tilde{\theta}) > 0$. Для этого достаточно потребовать, чтобы она была дважды дифференцируемой и выполнялись условия:

$$c(0) = c'(0) = 0, \quad c'(y) > 0, \quad c''(y) > 0 \quad \text{при } y > 0, \\ c'(y) \rightarrow \infty \quad \text{при } y \rightarrow \infty.$$

Потребуем также выполнения следующего свойства: функция $(y c'(y))'$ является непрерывной, возрастающей и стремится к бесконечности при $y \rightarrow \infty$.

При этих условиях справедливо следующее утверждение.

Утверждение 22.

1) Выбирая оптимальное для себя значение $\tilde{\theta}$, посредник может обеспечить максимальное значение своей целевой функции независимо от значения λ .

2) Существует $\lambda^* = \lambda^*(\theta)$ такое, что

- а) если $\lambda = \lambda^*$, то оптимальным для посредника является сообщение истинного значения цены (то есть $\tilde{\theta} = \theta$),
- б) если $\lambda < \lambda^*$ ($\lambda > \lambda^*$), то производитель получает большую (меньшую) прибыль по сравнению с той, которую он получил бы при $\tilde{\theta} = \theta$ (то есть в случае сообщения посредником истинного значения цены).

3) Для степенных функций издержек $c(y) = ky^\alpha$ ($k > 0$, $\alpha > 1$), и только для них, вышеупомянутое значение λ^* является константой (не зависит от цены θ): $\lambda^* = 1/\alpha$.

Доказательство. Получив от посредника сообщение $\tilde{\theta}$, производитель максимизирует свою целевую функцию, выбирая объем производства $\tilde{y} = \arg \max_{y \in A} f(y, \tilde{\theta})$ из условия $c'(\tilde{y}) = \tilde{\theta} \lambda$.

Подставим $\tilde{y}$ в целевую функцию посредника и, с учетом соотношения $\frac{d\tilde{y}}{d\tilde{\theta}} = \frac{\lambda}{c''(\tilde{y})}$, приравняем нулю ее производную. После преобразований получаем уравнение

$$(1) \quad c'(\tilde{y}) + \tilde{y} c''(\tilde{y}) = \theta.$$

Это уравнение имеет единственное решение $\tilde{y}$ (подчеркнем, что объем производства $\tilde{y}$ зависит только от реальной цены на рынке θ), которому соответствует оптимальное для посредника сообщение

$$(2) \quad \tilde{\theta} = \frac{c'(\tilde{y})}{\lambda}.$$

При этом функция полезности посредника

$$f_0(\tilde{y}, \tilde{\theta}) = \tilde{y} (\theta - c'(\tilde{y})),$$

очевидно, не зависит от доли λ . Пункт 1 утверждения доказан. Заметим, что при этом прибыль производителя также не зависит от λ :

$$(3) \quad f(\tilde{y}, \tilde{\theta}) = \tilde{y} c'(\tilde{y}) - c(\tilde{y}).$$

Определим долю λ^* следующим образом:

$$(4) \quad \lambda^* = \frac{c'(\tilde{y})}{\theta}.$$

Сопоставляя (2) и (4), видим, что при $\lambda = \lambda^*$ оптимальным для посредника является сообщение $\tilde{\theta} = \theta$.

Пусть теперь $\lambda < \lambda^*$. Тогда для оптимального сообщения посредника имеем (из (2) и (4)):

$$(5) \quad \tilde{\theta} = \frac{\lambda^*}{\lambda} \theta > \theta.$$

Если бы посредник сообщил θ , то производитель выбрал бы y^* , решив уравнение

$$(6) \quad c'(y^*) = \theta \lambda$$

и получил бы прибыль

$$(7) \quad f(y^*, \tilde{\theta}) = y^* c'(y^*) - c(y^*).$$

Сопоставляя (2), (5) и (6), получаем (с учетом возрастания $c'(y)$), что $\tilde{y} > y^*$. Далее, нетрудно убедиться, что функция $y c'(y) - c(y)$ возрастает. Поэтому сравнение (3) и (7) показывает, что при сообщении θ прибыль производителя меньше, чем при сообщении $\tilde{\theta}$.

Аналогично доказывается, что при $\lambda > \lambda^*$ имеет место обратное – прибыль производителя при сообщении θ больше, чем при сообщении $\tilde{\theta}$. Пункт 2 доказан.

Проверим, при каком условии на функцию издержек $c(y)$ правая часть (4) не зависит от θ . Из (1) видно, что для этого необходимо совместное выполнение соотношений

$$\frac{c'(y)}{\theta} = k_1, \quad \frac{y c''(y)}{\theta} = 1 - k_1 \quad (k_1 - \text{константа}).$$

Деля второе из них на первое, получаем дифференциальное уравнение

$$(8) \quad y c''(y) - k_2 c'(y) = 0,$$

где $k_2 = (1 - k_1)/k_1$ – произвольная константа. Решая уравнение (8), получаем (с учетом условий на функцию $c(y)$): $c(y) = k y^\alpha$, где $k > 0$, $\alpha > 1$. Нетрудно убедиться (воспользовавшись соотношениями (1) и (4)), что при этом $\lambda^* = 1/\alpha$. •

6.3. «ПРИНЦИП ДЕФИЦИТА»

Книга американского психолога Р. Чалдини [122] посвящена описанию и классификации стереотипов поведения, которым зачастую следуют люди, принимая те или иные решения. Эти стереотипы представляют собой некие «программы», которые «включаются» при определенных обстоятельствах и предопределяют действия человека, в том числе и явно иррациональные действия. Р. Чалдини выделяет шесть «фундаментальных психологических принципов, которые лежат в основе человеческого поведения»: принцип последовательности, принцип взаимного обмена, принцип социального доказательства, принцип авторитета, принцип благорасположения, принцип дефицита (с. 13 – здесь и далее до конца раздела 6.3 будем ссылаться на работу [122], указывая лишь страницу). Остановимся на последнем из этих принципов.

Суть принципа дефицита состоит в следующем: «ценность чего-либо позитивного в наших глазах существенно увеличивается, если оно становится недоступным» (с. 222). В частности, это относится к дефицитной информации, причем «эксклюзивная информация является более убедительной (с. 235). В качестве одного из подтверждений этого тезиса приводится следующий эксперимент, проведенный изучавшим психологию бизнесменом, владельцем компании, импортирующей в США говядину.

«Торговые агенты позвонили, как обычно, постоянным клиентам компании – закупщикам говядины для супермаркетов и других точек, торгующих продуктами в розницу, и одним из трех способов предложили им сделать заказ. Одни клиенты услышали предложение, сделанное в стандартной форме. Другим клиентам дополнительно была предоставлена информация о том, что поставки импортной говядины будут сокращены в ближайшие несколько месяцев. Третья группа клиентов получила те же сведения, что и вторая группа, а также информацию о том, что мало кто узнает о предстоящем сокращении поставок, так как эти сведения поступили из надежного, но засекреченного источника.

...По сравнению с клиентами, которым было сделано торговое предложение в стандартной форме, те клиенты, которым было также сказано о дефиците говядины, заказали ее в два раза больше... Клиенты, которые решили, что владеют «исключительной»

информацией...приобрели в шесть раз больше говядины, чем клиенты, которым было сделано торговое предложение в стандартной форме. Очевидно, сообщение о том, что информация о дефиците сама является дефицитной, сделала данную информацию особенно убедительной» (с. 235–236).

Не подвергая сомнению справедливость выводов Р. Чалдини, попробуем взглянуть на ситуацию несколько по-иному и объяснить действия клиентов компании, исходя из теоретико-игровой модели.

Итак, пусть имеется n клиентов компании – далее будем называть их агентами – принимающих решение об объемах закупки говядины. Будем считать, что число агентов n достаточно велико, все агенты идентичны и конкурируют по Курно при линейной зависимости цены от предложения. Это означает, что целевые функции агентов выглядят следующим образом:

$$f_i(x_1, \dots, x_n) = (Q - \sum_{j \in N} x_j) x_i - c x_i,$$

где $x_i \geq 0$, $i \in N = \{1, \dots, n\}$, $c \geq 0$. Содержательно, x_i – объем продаж агента за рассматриваемый период времени, $(Q - \sum_{j \in N} x_j)$ –

цена, которая при этом устанавливается на рынке, c – оптовая цена, по которой агенты закупают товар. Тогда первое слагаемое в целевой функции может интерпретироваться как произведение цены на объем продаж – выручка от продаж, а второе слагаемое – как затраты на закупку товара.

Дифференцируя целевые функции, приравнявая производные к нулю и решая получившуюся систему, можно найти равновесные действия агентов в условиях общего знания:

$$(1) \quad x_i = \frac{Q - c}{n + 1}, \quad i \in N$$

(по предположению все агенты идентичны, поэтому их равновесные действия одинаковы). Такова ситуация в отсутствии информационного воздействия. Агенты первого типа, которым было сделано предложение в стандартной форме, закупили товар в объеме (1), рассчитывая реализовать его в данный период времени.

Рассмотрим теперь поведение агентов второго типа, которым было сообщено, что поставки будут сокращены. Можно предпо-

ложить, что они считали этот факт общим знанием (см. предположение Π_1 в разделе 4.2). В таком случае для них рациональным действием было закупить в два раза больше товара, чтобы иметь возможность реализовать его в следующий период времени в том же равновесном количестве (1) (и одновременно заниматься поисками других поставщиков).

Наконец, рассмотрим поведение агентов третьего типа, которым было сообщено, что поставки будут сокращены и эта информация доступна лишь некоторому числу агентов. Для таких агентов, возможно, рационально предположить следующее. Существуют два типа агентов – неинформированные и информированные (инсайдеры), к которым агенты третьего типа относят себя. Неинформированные агенты в данном периоде будут реализовывать товар в объеме (1), а в следующем, не имея товара, прекратят участие в игре. Таким образом, число игроков в следующем периоде (равное числу инсайдеров) сократится с n до некоторого числа kn , $k < 1$, где k – доля инсайдеров. Тогда в следующем периоде равновесным будет действие

$$(2) \quad x'_i = \frac{Q - c}{kn + 1}.$$

Сравнивая (1) и (2) легко видеть, что при больших n имеет место соотношение

$$\frac{x'_i}{x_i} = \frac{n+1}{kn+1} \approx \frac{1}{k}.$$

Поэтому агенты третьего типа закупали товар в объеме $(x_i + x'_i)$, т. е. в $\frac{1}{k} + 1$ раз больше, чем агенты первого типа. Если доля инсайдеров составляет, с точки зрения агентов третьего типа, пятую часть от общего числа агентов (т. е. $k = \frac{1}{5}$ и этот факт субъективно является общим знанием), то получаем:

$$x_i + x'_i = 6x_i.$$

В этом случае рациональным для агентов третьего типа является закупка в 6 раз большего объема товара, чем для агентов первого типа. Таким образом, при сделанных предположениях мы получаем именно тот результат, который описан в книге [122].

6.4. СОВМЕСТНОЕ ПРОИЗВОДСТВО

Рассмотрим многоэлементную двухуровневую систему, состоящую из центра и n агентов. Стратегией каждого агента является выбор действия, стратегией центра – выбор сообщений агентам.

Обозначим $x_i \in X_i = \mathfrak{R}_+^1$ – действие i -го агента, $i \in N =$

$\{1, 2, \dots, n\}$ – множество агентов, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in X' = \prod_{i \in N} X_i$ –

вектор действий агентов, $x_{-i} = (x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \in X_{-i}$, $X_i = \prod_{j \neq i} X_j$ – обстановка игры для i -го агента.

Интересы и предпочтения участников системы – центра и агентов – выражены их целевыми функциями. Целевая функция i -го агента $f_i(x, r_i)$ представляет собой разность между доходом $h_i(x)$ от совместной деятельности и затратами $c_i(x, r_i)$, где r_i – параметр эффективности (тип) агента, то есть $f_i(x, r_i) = h_i(x) - c_i(x, r_i)$, $i \in N$.

Выберем следующий вид функций дохода и затрат:

$$(1) \quad h_i(x) = \lambda_i \theta X, \quad i \in N,$$

$$(2) \quad c_i(x, r_i) = \frac{x_i^2}{2(r_i \pm \beta_i \sum_{j \neq i} x_j)}, \quad i \in N,$$

где $X = \sum_{i \in N} x_i$, $\sum_{i \in N} \lambda_i = 1$. Для случая, когда в знаменателе выраже-

ния (2) стоит знак «–», предполагается, что $\sum_{j \neq i} x_j < \frac{r_i}{\beta_i}$.

Содержательно набор агентов может интерпретироваться как некоторая фирма, подразделения которой (агенты) производят однородную продукцию, реализуемую на рынке по цене θ . Суммарный доход θX распределяется между агентами в соответствии с фиксированными долями $\{\lambda_i\}$. Затраты агента возрастают по его действиям, а эффективность деятельности (знаменатель выражения (2)) определяется типом агента. Взаимодействие агентов моделируется зависимостью затрат (эффективности деятельности) каждого из них от действий всех (других) агентов. Знак «+» в знаменателе выражения (2) соответствует эффективному взаимодействию агентов (убыванию затрат на масштаб) – чем большие действия

выбирают другие агенты, тем меньше затраты (выше эффективность деятельности) рассматриваемого агента, что на практике может соответствовать снижению удельных постоянных издержек, обмену опытом, технологиями и т.д. Знак « $\rightarrow$ » в знаменателе выражения (2) соответствует неэффективному взаимодействию агентов (возрастанию затрат на масштаб) – чем большие действия выбирают другие агенты, тем больше затраты (ниже эффективность деятельности) рассматриваемого агента, что на практике может соответствовать нехватке основных фондов, ограничениям на побочные показатели (например, загрязнение окружающей среды) и т.д. Коэффициенты $\{\beta_i \geq 0\}$ отражают степень взаимозависимости агентов.

Пусть рыночная цена θ известна всем участникам системы. Тогда, дифференцируя целевые функции агентов, приравнявая производные нулю и складывая получившиеся при этом выражения

$$x_i = \lambda_i \theta (r_i \pm \beta_i \sum_{j \neq i} x_j), \quad i \in N,$$

получим следующую зависимость суммарных действий от параметра θ :

$$X(\theta) = \frac{\sum_{i \in N} \frac{\lambda_i \theta r_i}{1 \pm \lambda_i \theta \beta_i}}{1 \mp \sum_{i \in N} \frac{\lambda_i \theta \beta_i}{1 \pm \lambda_i \theta \beta_i}}.$$

Пусть $n = 2$, $\lambda_i = \beta_i = 1/2$, $i = 1, 2$, тогда суммарное действие и равновесные по Нэшу действия агентов равны, соответственно:

$$(3) \quad X(\theta) = 2 \theta R / (4 \mp \theta),$$

$$(4) \quad x_i^*(\theta) = \frac{2\theta}{16 - \theta^2} (4 r_i \pm \theta r_{-i}), \quad i = 1, 2.$$

Зависимости суммарного действия $X(\theta)$ от цены θ приведены на рис. 37 и 38 соответственно (знак « $+$ » или « $\rightarrow$ » соответствуют знаку в знаменателе выражения (2)). В случае « $\rightarrow$ » предполагается, что $\theta < 4$ (при $\theta \geq 4$ равновесия Нэша не существует).

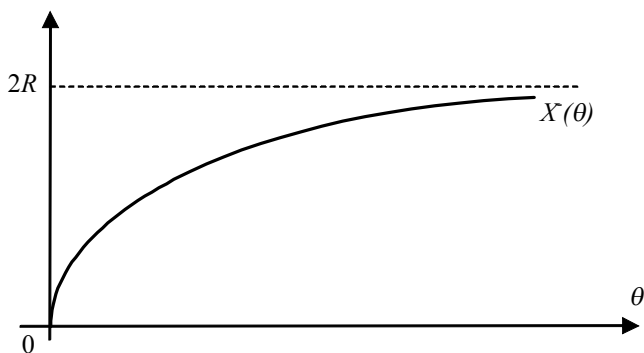


Рис. 37. Зависимость суммарного действия от цены

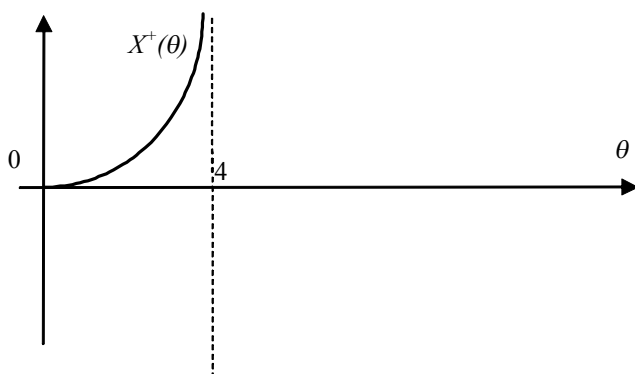


Рис. 38. Зависимость суммарного действия от цены

Из выражения (3) можно выразить зависимость параметра θ от суммарных действий X :

$$(5) \quad \theta = \Theta(X) = \frac{4X}{2R \pm X}.$$

Введем в моделируемой системе управление. Примем следующий порядок функционирования системы. Центру и агентам на момент принятия решения о выбираемых стратегиях (соответственно – управления и действиях) известны целевые функции и допустимые множества всех участников системы. Центр, обладая правом первого хода, выбирает значения управляющих перемен-

ных и сообщает их агентам, после чего агенты при известном управлении принимают решения о выбираемых действиях.

Институциональному управлению соответствует, например, введение центром квот – ограничений на максимальные значения действий, за нарушение которых на агентов могут быть наложены значительные штрафы.

Мотивационному управлению соответствует изменение параметров $\{\lambda_i\}$, которые могут интерпретироваться как внутренние (внутрифирменные, трансфертные и т.д.) цены. Примеры подобного управления приведены в [16, 70, 71] как для задач планирования (когда центр назначает цены на основании сообщений агентов о неизвестных ему эффективности их деятельности), так и для задач стимулирования (когда доход агента рассматривается как вознаграждение, получаемое от центра).

Информационному управлению соответствует целенаправленное изменение центром информации, используемой агентами при принятии решений. Действительно, величины (3)–(5) могут быть вычислены и центром, и агентами на основании имеющейся у них априори информации. При этом оценка состояния природы – рыночная цена θ – входит в них параметрически, следовательно, в зависимости от информированности участника системы, вычисляемые им значения параметров (3)–(5) могут различаться.

Пусть рыночная цена неизвестна агентам или известна неточно. **Информационное регулирование** в рассматриваемой модели заключается в сообщении центром агентам оценки $\theta_0 \in \Omega$ состояния природы (то есть центр использует однородную стратегию). В силу принципа доверия (который, как отмечалось выше, заключается в том, что агенты полностью доверяют сообщенной центром информации и используют ее при принятии своих решений) агенты выберут действия $\{x_i^*(\theta_0)\}$, определяемые (4), что приведет к суммарному действию $X(\theta_0)$, определяемому (3).

Пусть $\Phi(x, \theta)$ – целевая функция центра, θ_0 – его информация о состоянии природы (будем считать, что информация верна). Тогда задача информационного регулирования заключается в максимизации сообщением $\theta^* \in \Omega$ гарантированного значения целевой функции центра на множестве равновесных при данном сообщении состояний агентов:

$$(6) \quad \Phi(x^*(\theta^*), \theta_0) \rightarrow \max_{\theta^* \in \Omega}.$$

Активное прогнозирование в рассматриваемой модели заключается в сообщении центром агентам информации о будущих значениях результатов их деятельности – например, о суммарном действии.

Пусть $X^* \in \mathfrak{R}_+^1$ – сообщение центра. Тогда, воспользовавшись (5), агенты могут однозначно восстановить значение состояния природы на которое должен был ориентироваться центр, рассчитывая на сообщенное им суммарное действие.

Задача активного прогнозирования заключается в максимизации сообщением X^* значения целевой функции центра на множестве равновесных при данном сообщении состояний агентов:

$$(7) \quad \Phi(x^*(\Theta(X^*)), \theta_0) \rightarrow \max_{X^* \in \mathfrak{R}_+^1}.$$

При известных зависимостях (3)–(5) задачи (6) и (7) являются стандартными задачами оптимизации.

Отметим, что в данном примере эффективности активного прогноза и информационного регулирования одинаковы, так как оценка состояния природы восстанавливается по результату деятельности однозначно.

Рассмотрим случай, когда затраты каждого агента возрастают по действиям других агентов (этому соответствует знак «минус» в знаменателе функции затрат (2)).

Пусть центру достоверно известно, что внешняя цена θ_0 равна единице, агенты знают лишь, что $\theta \in \Omega = [0; 3]$. Будем считать, что целевая функция центра определяется суммарным доходом $1 \cdot X$ за вычетом суммарных затрат агентов.

Тогда задача (6) имеет вид:

$$(8) \quad X(\theta) - c_1(x^*(\theta), r_1) - c_2(x^*(\theta), r_2) \rightarrow \max_{\theta \in [0; 3]},$$

где $X(\theta)$ и $x^*(\theta)$ определяются соответственно выражениями (3) и (4). Предполагая, что агенты одинаковы ($r_1 = r_2 = 1$) и подставляя (3) и (4) в (8), получим, что целевая функция центра следующим образом зависит от его сообщения:

$$(9) \quad \Phi(x^*(\theta), \theta) = \frac{\theta(4 - \theta)}{4 + \theta}.$$

Максимум выражения (9) на отрезке $[0; 3]$ достигается в точке $\theta^* = 4(\sqrt{2} - 1)$. Следовательно, решение задачи информационного регулирования – сообщение центром агентам оценки θ^* . Отметим, что эта оценка отличается от «истинной» оценки $\theta_0 = 1$, то есть центру выгодно искажать информацию.

Небезынтересно рассмотреть вопрос о том, каковы будут выигрыши агентов в случае единичной истинной цены и сообщения центра $\theta^* = 4(\sqrt{2} - 1)$. Нетрудно убедиться, что выигрыш каждого из них будет меньше ожидаемого, но больше того выигрыша, который он получил бы в случае сообщения центром истинной цены. Вывод несколько парадоксальный – агентам выгодно, чтобы от них скрыли истинное значение цены! Объясняется это тем, что равновесие Нэша не является в данном случае Парето-оптимальным, и центр своим сообщением «сдвигает» точку информационного равновесия к Парето-оптимуму.

Рассмотрим теперь задачу активного прогнозирования (7). Ее решение заключается в вычислении на основании информации о θ^* по выражению (5) величины $X(\theta^*)$ и сообщение ее агентам в качестве прогноза X_0 их суммарных действий. Легко подсчитать, что сообщение центром $X_0 = 2(2 - \sqrt{2})$ побуждает агентов восстановить оценку θ^* состояния природы и выбрать требуемые для центра действия.

Если бы центру было невыгодно искажать информацию, то это значило бы, что именно сообщение агентам истинного состояния природы побуждает их прийти в наиболее выгодное для центра состояние. Другими словами, совпадение θ^* и θ_0 является частным случаем и может рассматриваться как «случайное».

Отметим, что целевая функция центра при единичной истинной цене имеет вид

$$\Phi(x, 1) = x_1 + x_2 - \frac{x_1^2}{2 - x_2} - \frac{x_2^2}{2 - x_1}.$$

Максимум этой функции на множестве $0 \leq x_1 < 2, 0 \leq x_2 < 2$ достигается в точках $x_1 = x_2 = 2 - \sqrt{2}$, которые и достигаются при помощи описанных информационных воздействий – информационного регулирования и приводящего к тому же результату активного прогноза (для того, чтобы в этом убедиться, достаточно найти

максимум целевой функции центра по всем парам (x_1, x_2)). Поэтому это управление, состоящее в формировании структуры информированности единичной глубины, является оптимальным на множестве всех структур информированности. Это означает, в частности, что формирование центром более сложных структур информированности агентов (т. е. осуществление рефлексивного управления) не дает увеличения эффективности по сравнению с информационным регулированием и активным прогнозом.

6.5. КОНКУРЕНЦИЯ НА РЫНКЕ

Если в разделе 6.4 рынок был ненасыщен и подразделения рассматриваемой фирмы могли продавать на рынке любое количество продукции по фиксированной цене, которая являлась неопределенным параметром (состоянием природы), то в данной модели предполагается, что спрос задан экзогенно в виде $X(\lambda)$, где X – суммарный выпуск (суммарное действие агентов), а λ – рыночная цена. Если $X(\cdot)$ – строго монотонно убывающая непрерывная функция, то существует обратная ей функция $\lambda(X)$, отражающая зависимость рыночной цены от предложения, которая также строго монотонно убывает и непрерывна.

Предположим, что агентам объективно не известны эффективности (параметры функций затрат) друг друга. Однако для каждого $i \in N$ i -й агент знает свой тип r_i , имеет представления о типах оппонентов r_{ij} , $j \in N$, и считает известный ему набор типов общим знанием. Иными словами, информационная структура игры задается соотношениями

$$r_{i\sigma j} = r_{ij}, \quad i, j \in N, \quad \sigma \in \Sigma.$$

Целевая функция j -го агента с точки зрения i -го агента есть:

$$(1) \quad f_j(x, r_{ij}) = \lambda(X) x_j - \frac{x_j^2}{2r_{ij}}, \quad i, j \in N,$$

где $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in X'$ – вектор действий агентов, имеющих сепарабельные затраты $c_j(x) = x_j^2 / 2 r_j$, $j \in N$.

Каждый агент считает, что играет в игру с общим знанием. Из условий равновесия получаем действия агентов:

$$(2) \quad x_{ij}^* = \frac{r_{ij}\lambda(X)}{1 - \lambda'(X)r_{ij}}, \quad i, j \in N.$$

Далее рассмотрим два варианта конкретизации функции $\lambda(X)$.

Пусть $\lambda(X) = \lambda_0 - \gamma X$, $\lambda_0, \gamma > 0$. Тогда если подставить $\lambda(X)$ в (2), получаем:

$$(3) \quad x_{ij}^* = \frac{r_{ij}\lambda_0}{(1 + \gamma r_{ij})(1 + \gamma \alpha_i)}, \quad i, j \in N,$$

где

$$(4) \quad \alpha_i = \sum_{j \in N} \frac{r_{ij}}{1 + \gamma r_{ij}}, \quad i \in N.$$

Исследуем информационное равновесие для случая двух агентов ($n = 2$) при условии, что центр осуществляет активный прогноз. Пусть при этом $r_1 = r_2 = \lambda_0 = \gamma = 1$.

Из (3) получаем, что суммарное действие в зависимости от предположений агентов о типе партнера равно

$$(5) \quad X(r_{12}, r_{21}) = \frac{2 + \alpha_1 + \alpha_2}{2(1 + \alpha_1)(1 + \alpha_2)},$$

где $\alpha_1 = \frac{1}{2} + r_{12} / (1 + r_{12})$, $\alpha_2 = \frac{1}{2} + r_{21} / (1 + r_{21})$.

Пусть задача центра заключается в обеспечении суммарного действия равного X . Рассмотрим, какой прогноз X_0 решает эту задачу.

С точки зрения первого агента, которому сообщен прогноз X_0 , целевые функции выглядят следующим образом:

$$f_1(x_1, x_2) = (1 - x_1 - x_2) x_1 - \frac{x_1^2}{2},$$

$$f_2(x_1, x_2) = (1 - x_1 - x_2) x_2 - \frac{x_2^2}{2r_2},$$

где параметр r_2 ему неизвестен. Для нахождения равновесия Нэша первый агент приравнивает к нулю производные этих функций, что приводит (с учетом прогноза) к следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} 1 - x_2 - 3x_1 = 0, \\ 1 - x_1 - \left(\frac{1}{r_2} + 2\right)y_2 = 0, \\ x_1 + x_2 = X_0. \end{cases}$$

Эта система имеет единственное решение

$$x_1 = \frac{1 - X_0}{2}, \quad x_2 = \frac{3X_0 - 1}{2}, \quad r_2 = \frac{3X_0 - 1}{3 - 5X_0}.$$

Заметим, что по смыслу ситуации эти три значения должны быть положительны. Это накладывает естественное ограничение на возможные сообщения центра:

$$\frac{1}{3} < X_0 < \frac{3}{5}.$$

В итоге получаем, что равновесная стратегия первого агента такова:

$$x_1^* = \frac{1 - X_0}{2}.$$

Рассуждая аналогично с точки зрения второго агента, получаем его равновесную стратегию:

$$x_2^* = \frac{1 - X_0}{2}.$$

Таким образом, сообщая прогноз X_0 , центр добивается суммарного действия $X = x_1^* + x_2^* = 1 - X_0$. Очевидно, единственным точным прогнозом центра в описываемой ситуации является $X_0 = 1/2$.

Пусть теперь зависимость цены от суммарного действия двух агентов задается соотношением $\lambda(X) = 1/X$. Тогда целевые функции агентов имеют вид

$$f_1(x_1, x_2) = \frac{x_1}{x_1 + x_2} - \frac{x_1^2}{2}, \quad f_2(x_1, x_2) = \frac{x_2}{x_1 + x_2} - \frac{x_2^2}{2r_2}.$$

Дифференцируя эти функции по соответствующим переменным и приравнявая производные к нулю, найдем равновесные стратегии агентов:

$$x_1^* = \frac{\sqrt[4]{r_1 r_2}}{\sqrt{r_1} + \sqrt{r_2}} \sqrt{r_1}, \quad x_2^* = \frac{\sqrt[4]{r_1 r_2}}{\sqrt{r_1} + \sqrt{r_2}} \sqrt{r_2}.$$

Предположим, что $r_1 = r_2 = 1$, и каждому агенту известен свой тип, но неизвестен тип другого агента, то есть первому агенту неизвестно значение r_2 , а второму – значение r_1 .

Будем считать, что центр стремится минимизировать цену, сообщая агентам ее прогноз. Выясним, какой прогноз является оптимальным (то есть минимизирующим реальное значение цены).

Если центр сообщает прогноз цены λ , то первый агент может определить тип второго агента $\tilde{r}_2$ из уравнения

$$\frac{1}{\lambda} = x_1^* + x_2^* = \sqrt[4]{r_1 \tilde{r}_2} = \sqrt[4]{\tilde{r}_2}.$$

Имеем: $\tilde{r}_2 = \frac{1}{\lambda^4}$, откуда

$$x_1^* = \frac{\sqrt[4]{\tilde{r}_2}}{1 + \sqrt{\tilde{r}_2}} = \frac{1/\lambda}{1 + 1/\lambda^2} = \frac{\lambda}{\lambda^2 + 1}.$$

Повторяя эти же рассуждения для второго агента, получаем его равновесную стратегию: $x_2^* = \frac{\lambda}{\lambda^2 + 1}$.

Таким образом, при сообщении центром прогноза цены λ истинное значение цены Λ окажется следующим:

$$\Lambda(\lambda) = \frac{1}{x_1^* + x_2^*} = \frac{\lambda^2 + 1}{2\lambda}.$$

Легко видеть, что минимум функции $\Lambda(\lambda)$ достигается в точке $\lambda = 1$. Это значение и будет оптимальным. При этом $\Lambda(1) = 1$, то есть оптимальный прогноз центра является точным прогнозом, а агенты получают именно те выигрыши, на которые рассчитывали при выборе стратегии.

6.6. АККОРДНАЯ ОПЛАТА ТРУДА

Рассмотрим организационную систему, состоящую из центра и n агентов, осуществляющих совместную деятельность.

Стратегией i -го агента является выбор действия $y_i \in X_i = \mathfrak{R}_+^1$, $i \in N$, стратегией центра – выбор системы стимулирования, определяющей размер вознаграждения каждого агента в зависимости от результата их совместной деятельности. Предположим, что технология взаимодействия агентов такова, что для достижения требуемого результата необходимо, чтобы сумма их действий была не меньше заданной величины $\theta \in \Omega$. В этом случае i -й агент получает от центра фиксированное вознаграждение σ_i , $i \in N$, в случае же $\sum_{i \in N} y_i < \theta$ вознаграждение каждого агента равно нулю.

Реализация действия $y_i \geq 0$ требует от i -го агента затрат $c_i(y, r_i)$, где $r_i > 0$ – его тип (параметр, описывающий индивидуальные характеристики), $i \in N$.

Относительно функций затрат агентов предположим, что $c_i(y, r_i)$ – непрерывная возрастающая по y_i и убывающая по r_i функция, причем $\forall y_{-i} \in X_{-i} = \prod_{j \in N \setminus \{i\}} X_j$, $\forall r_i > 0$ $c_i(0, y_{-i}, r_i) = 0$, $i \in N$.

Описанную модель взаимодействия будем далее называть игрой «Аккордная оплата труда».

Определим множество индивидуально рациональных действий агентов

$$IR = \{y \in X' = \prod_{i \in N} X_i \mid \forall i \in N \sigma_i \geq c_i(r_i)\}.$$

Если затраты агентов сепарабельны, то есть затраты $c_i(y_{-i}, r_i)$ каждого агента зависят только от его собственных действий и не зависят от действий других агентов, получаем, что $IR = \prod_{i \in N} [0; y_i^+]$, где

$$y_i^+ = \max \{y_i \geq 0 \mid c_i(y_{-i}, r_i) \leq \sigma_i\}, \quad i \in N.$$

Обозначим

$$Y(\theta) = \{y \in X' \mid \sum_{i \in N} y_i = \theta\},$$

$$Y^*(\theta) = \text{Arg} \min_{y \in Y(\theta)} \sum_{i \in N} c_i(y, r_i).$$

Рассмотрим последовательно различные варианты информированности агентов о значении параметра $\theta \in \Omega$. Как мы увидим, даже небольшое усложнение структуры информированности может существенно изменить множество информационных равновесий рассматриваемой рефлексивной игры.

Вариант I. Предположим, что значение $\theta \in \Omega$ является общим знанием. Тогда равновесием игры агентов является параметрическое равновесие Нэша, принадлежащее множеству

$$(1) E_N(\theta) = IR \cap Y(\theta).$$

Определим также множество эффективных по Парето действий агентов:

$$(2) Par(\theta) = IR \cap Y^*(\theta).$$

Так как $\forall \theta \in \Omega \quad Y^*(\theta) \subseteq Y(\theta)$, то из (1) и (2) следует, что множество эффективных по Парето действий является одним из равновесий Нэша. Но множество равновесий Нэша может оказаться шире – в частности, при $\theta \geq \max_{i \in N} y_i^+$ оно всегда содержит вектор нулевых действий.

Пусть функции затрат агентов являются функциями затрат типа Кобба–Дугласа: $c_i(y_i, r_i) = r_i \varphi(y_i / r_i)$, где $\varphi(\cdot)$ – гладкая монотонно возрастающая выпуклая функция, удовлетворяющая равенству $\varphi(0) = 0$.

Тогда (см., например [17, с. 97]) эффективной по Парето является единственная точка: $y^*(\theta) = \{y_i^*(\theta)\}$, где $y_i^*(\theta) = \theta r_i / \sum_{j \in N} r_j$, $i \in N$.

Вычислим $y_i^+ = r_i \varphi^{-1}(\sigma_i / r_i)$, $i \in N$, тогда при

$$(7) \quad \sigma_i \geq r_i \varphi(\theta / \sum_{j \in N} r_j), \quad i \in N,$$

множество Парето не пусто.

Множества равновесий Нэша в игре $n = 2$ агентов для двух значений θ : $\theta_2 > \theta_1$ приведены на рис. 39 (точка $(0; 0)$ является равновесием Нэша в обоих случаях).

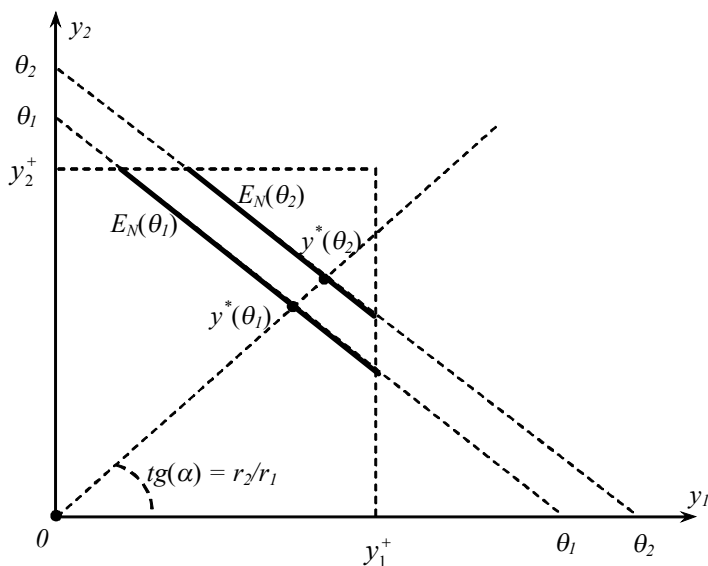


Рис. 39. Параметрическое равновесие Нэша игры агентов

Итак, мы рассмотрели простейший вариант информированности агентов, соответствующий ситуации, когда значение параметра $\theta \in \Omega$ является общим знанием. Рассмотрим следующий (в порядке возрастания сложности структуры информированности агентов) вариант информированности, в рамках которого общим знанием являются индивидуальные представления $\{\theta_i\}$ агентов о значении параметра $\theta \in \Omega$.

Вариант II. Предположим, что представления агентов о неопределенном параметре попарно различны, но при этом являются общим знанием. Иными словами, имеет место асимметричное общее знание.

Не ограничивая общности, занумеруем агентов таким образом, чтобы их представления возрастали: $\theta_1 < \dots < \theta_n$. Структура возможных равновесий в этой ситуации описывается следующим утверждением.

Утверждение 23. В игре «Аккордная оплата труда», для которой $\theta_i \neq \theta_j$ при $i \neq j$, равновесными (в зависимости от соотношения между параметрами) могут быть следующие $n + 1$ исходов:

$\{y^* \mid y_i^* = 0, i \in N\}$; $\{y^* \mid y_k^* = \theta_k, y_i^* = 0, i \in N, i \neq k\}$, $k \in N$. Содержательно это означает следующее: либо никто не работает, либо работает один k -й агент, выбирая действие θ_k .

Доказательство. Пусть вектор действий $y^* = (y_1^*, \dots, y_n^*)$ является равновесием (очевидно, при этом $y_i^* \leq y_i^+$ для любого $i \in N$). Пусть существует такое $k \in N$, что $y_k^* > 0$. Покажем, что в этом случае $\sum_{i \in N} y_i^* = \theta_k$.

Действительно, если $\sum_{i \in N} y_i^* < \theta_k$, то k -й агент не рассчитывает на получение вознаграждения и, следовательно, может увеличить свой (субъективно ожидаемый) выигрыш с отрицательного до нулевого, выбрав нулевое действие. Если же $\sum_{i \in N} y_i^* > \theta_k$, то k -й агент рассчитывает на получение вознаграждения, однако он может увеличить свой выигрыш, выбрав вместо y_k^* действие $\max \{0, \theta_k - \sum_{i \in N \setminus \{k\}} y_i^*\} < y_k^*$. Таким образом, при $\sum_{i \in N} y_i^* \neq \theta_k$ k -й агент может увеличить свой выигрыш, что противоречит равновесности вектора y^* .

Мы показали, что, если $y_k^* > 0$, то $\sum_{i \in N} y_i^* = \theta_k$. Но в силу условия $\theta_i \neq \theta_j$, $i \neq j$, это равенство может выполняться лишь для одного $k \in N$. Поэтому если $y_k^* > 0$, то $y_i^* = 0$ для всех $i \neq k$. При этом, очевидно, $y_k^* = \theta_k$. •

Рассмотрим теперь вопрос о том, при каких соотношениях между параметрами θ_i , y_i^+ , $i \in N$, реализуется каждое из равновесий, перечисленных в формулировке утверждения 23.

Вектор $(0, \dots, 0)$ является равновесным в случае, когда никакой i -й агент не может собственными усилиями выполнить достаточную (с его точки зрения) для получения вознаграждения работу (либо это усилие составляет в точности y_i^+ , так что выигрыш i -го

агента остается нулевым). Это условие формально записывается следующим образом: $y_i^+ \leq \theta_i$ для любого i .

Вектор $\{y^* \mid y_k^* = \theta_k, y_i^* = 0, i \neq k\}$ является равновесным, если $\theta_k \leq y_k^+$, а все агенты с номерами $i > k$, считая, что вознаграждения не будет, являются недостаточно эффективными, чтобы собственными усилиями компенсировать величину $\theta_i - \theta_k$. Формально: $\theta_k + y_i^+ \leq \theta_i$ для любого $i > k$.

Возможные равновесия в игре двух агентов изображены на рис. 40. Заметим, что, в отличие от варианта I, существует область, в которой равновесие отсутствует.

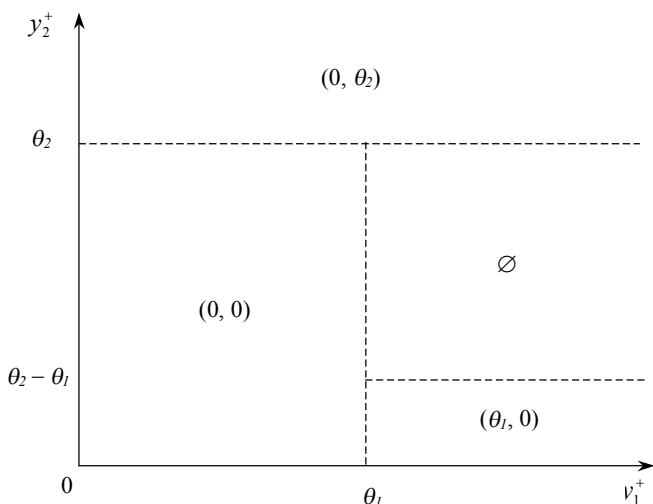


Рис. 40. Равновесия в игре двух агентов
(область, где равновесия нет, обозначена символом « $\emptyset$ »)

Рассмотрим теперь общий случай, когда представления агентов могут и совпадать: $\theta_1 \leq \dots \leq \theta_n$. В этом случае может появиться целая область равновесий, аналогично варианту I. Пусть, например, выполняются соотношения $\theta_m = \theta_{m+1} = \dots = \theta_{m+p}$, $\theta_i \neq \theta_m$ при $i \notin \{m, \dots, m+p\}$. Тогда при выполнении условий $\sum_{k=m}^{m+p} y_k^* \geq \theta_m$ и

$\theta_m + y_i^+ \leq \theta_i$, $i > m$, равновесным является любой вектор y^* , для которого

$$\sum_{k=m}^{m+p} y_k^* = \theta_m, \quad y_k^* \leq y_k^+, \quad k \in \{m, \dots, m+p\};$$

$$y_i^* = 0, \quad i \notin \{m, \dots, m+p\}.$$

Содержательно это означает, что в равновесии всю работу выполняют агенты, которые одинаково представляют себе необходимый для получения вознаграждения объем работы.

Вариант III. Пусть теперь структура информированности игры имеет глубину 2, но каждый агент считает, что играет в игру с асимметричным общим знанием. В этом случае множество возможных равновесных ситуаций становится максимально возможным: $\prod_{i \in N} [0; y_i^+]$. Более того, справедливо следующее утверждение.

Утверждение 24. В игре «Аккордная оплата труда» для любого вектора действий $y^* \in \prod_{i \in N} [0; y_i^+)$ существует такая структура информированности глубины два (при которой каждый агент субъективно играет в игру с асимметричным общим знанием), что вектор y^* является единственным равновесием.

Доказательство. Достаточно для каждого $i \in N$ положить

$$\theta_i = \begin{cases} y_i^*, & y_i^* > 0; \\ y_i^+ + \varepsilon, & y_i^* = 0 \end{cases}$$

(здесь ε – произвольное положительное число) и выбрать любые $\theta_{ij} > \sum_{i \in N} y_i^+$, $j \in N \setminus \{i\}$. Тогда i -й агент ожидает от оппонентов нулевых действий, а его собственным субъективно равновесным действием является y_i^* . •

Замечание 1. Построенное в доказательстве утверждения 24 равновесие является (объективно) Парето-эффективным, если сумма $\sum_{i \in N} y_i^*$ равна истинному значению неопределенного параметра θ .

Замечание 2. Действие $y_i^* = y_i^+$ является равновесным, если $\theta_i = y_i^+$. Однако при этом равновесным будет и действие $y_i^* = 0$ – в обоих случаях субъективно ожидаемый i -м агентом выигрыш равен нулю.

Вариант IV. Пусть теперь структура информированности игры имеет глубину два, и на нижнем уровне имеется симметричное общее знание. Иными словами, каждый фантомный агент считает: неопределенный параметр равен θ , и это общее знание.

Оказывается, что и в этом случае множество равновесных ситуаций является максимально возможным: $\prod_{i \in N} [0; y_i^+]$. Более того, справедливо следующее утверждение.

Утверждение 25. В игре «Аккордная оплата труда» для любого вектора действий $y^* \in \prod_{i \in N} [0; y_i^+)$ существует такая структура информированности глубины два с симметричным общим знанием на нижнем уровне, что вектор y^* является единственным равновесием.

Доказательство. Возьмем любое значение $\theta > \sum_{i \in N} y_i^+$ и будем считать, что это значение является общим знанием среди фантомных агентов. Тогда единственным равновесием в игре фантомных агентов является выбор каждым из них нулевого действия.

Далее, для каждого $i \in N$ положим

$$\theta_i = \begin{cases} y_i^*, & y_i^* > 0, \\ y_i^+ + \varepsilon, & y_i^* = 0, \end{cases}$$

где ε – произвольное положительное число. Тогда, как нетрудно видеть, наилучшим ответом i -го агента на ожидаемые им нулевые действия оппонентов является выбор действия y_i^* . •

Замечания 1 и 2, сделанные при анализе варианта III, можно повторить дословно и для варианта IV.

Таким образом, мы исследовали структуру информационных равновесий игры «Аккордная оплата труда» при различных вариантах информированности агентов. Полученные результаты полностью подтверждают интуитивно правдоподобный качественный вывод: в коллективе работников совместная работа возможна

(является равновесной) лишь в том случае, когда имеется общее знание о том, какой объем работ необходимо выполнить для получения вознаграждения.

Рассмотрим теперь вопрос о стабильности информационного равновесия. Анализ проведем для варианта II, когда имеет место асимметричное общее знание. Будем считать, что в результате игры общим знанием среди агентов становится факт выплаты или невыплаты вознаграждения.

Равновесие $(0, \dots, 0)$, очевидно, стабильно в любом случае: никто не работает, не ожидает получить вознаграждение и не получает его.

Равновесие вида $\{y^* \mid y_k^* = \theta_k, y_i^* = 0, i \in N, i \neq k\}, k \in N$, в случае $\theta_1 < \dots < \theta_n$ возможно, как было показано выше, при $\theta_k \leq y_k^+, \theta_k + y_i^+ \leq \theta_i$ для любого $i > k$. Тогда i -агенты с номерами $i \leq k$ ожидают выплаты вознаграждения, а с номерами $i > k$ – не ожидают. Поэтому единственная возможность стабильности – условие $k = n$. Таким образом, получаем условие стабильности

$$(8) \quad \theta_n \leq y_n^+.$$

Аналогично при $\theta_1 \leq \dots \leq \theta_{m-1} < \theta_m = \dots = \theta_n$ стабильным является любой набор $\{y^* \mid \sum_{k=m}^n y_k^* = \theta_m, y_k^* \leq y_k^+, k \in \{m, \dots, n\}; y_i^* = 0, i \notin \{m, \dots, m+p\}\}$.

В соответствии с утверждением 24, центр может при помощи информационного управления (в частности, путем формирования структуры, при которой каждый агент субъективно играет в игру с асимметричным общим знанием) добиться от агентов любого набора действий $y^* \in \prod_{i \in N} [0; y_i^+)$. Оказывается, что существует и стабильное информационное управление, обеспечивающее этот результат. Покажем это для $y_i^* > 0$.

Пусть задан набор $y^* \in \prod_{i \in N} (0; y_i^+)$, $\sum_{i \in N} y_i^* \geq \theta$. Положим для каждого $i \in N$ $\theta_i = y_i^*$ и для каждого $j \in N \setminus \{i\}$ возьмем любые θ_{ij} такие, что $\theta_{ij} < \theta_i$. Тогда для i -агента субъективно выполнено усло-

вие стабильности (8) и y_i^* – его единственное равновесное действие. При этом

- 1) работа будет выполнена и агенты получают вознаграждение;
- 2) получение вознаграждения будет ожидаемым исходом для всех реальных и фантомных агентов.

Содержательно, ситуация при этом возникает следующая: каждый агент считает, что именно он выполнил всю работу и что это – общее знание.

6.7. ПРОДАВЕЦ И ПОКУПАТЕЛЬ

Пусть продавец и покупатель (которых будем обозначать s – «seller» и b – «buyer» соответственно) должны прийти к компромиссу относительно стоимости некоторого товара, услуги, работ по договору и т.д.

Обозначим: θ_b – представления покупателя о ценности для него товара (максимальную цену, которую он готов за него заплатить); θ_s – представления продавца о ценности для него товара (минимальную цену, за которую он готов продать товар); θ_{bs} – представления покупателя о представлениях продавца, θ_{sb} – представления продавца о представлениях покупателя; θ_{sbs} – представления продавца о том, что о его представлениях думает покупатель, и т.д. Будем считать, что $\theta_\tau \in \mathfrak{R}_+^1$, где τ – произвольная конечная последовательность индексов (в том числе, пустая) из множества участников сделки $\{s; b\}$. Напомним, что множество всевозможных конечных последовательностей индексов обозначается Σ_+ , а объединение Σ_+ с пустой последовательностью обозначается Σ .

Рассмотрим, какими свойствами должны обладать взаимные представления покупателя и продавца для того, чтобы сделка была возможна. Из условия того, что сделка может произойти, только если ценность товара для покупателя не ниже, чем для продавца, получаем следующую систему неравенств:

$$(1) \quad \forall \tau \in \Sigma \quad \theta_{tb} \geq \theta_\tau, \quad \theta_{ts} \leq \theta_\tau.$$

Из (1) следует, что субъективный размер области компромисса может быть представлен в виде:

(2) $\Delta_\tau = \theta_{tb} - \theta_{ts}$, $\tau \in \Sigma$,
 причем $\forall \tau \in \Sigma \Delta_\tau \geq 0$.

Обсудим теперь возможные механизмы компромисса. При заданных субъективных представлениях и, следовательно, заданной области компромисса, которая не пуста в силу (1) и (2), возможны различные процедуры дележа «прибыли» Δ (определения точки компромисса).

Первый вариант (дележ прибыли) заключается в задании отображения $\pi = (\pi_s, \pi_b): \mathfrak{R}_+^2 \rightarrow \mathfrak{R}_+^2$, удовлетворяющего для всех $\theta_b \geq \theta_s$ следующим свойствам:

$$\begin{aligned} \pi_s(\theta_s, \theta_b) + \pi_b(\theta_s, \theta_b) &= \Delta, \\ \frac{\partial \pi_s(\theta_s, \theta_b)}{\partial \theta_s} &\leq 0, \quad \frac{\partial \pi_s(\theta_s, \theta_b)}{\partial \theta_b} \geq 0, \\ \frac{\partial \pi_b(\theta_s, \theta_b)}{\partial \theta_s} &\leq 0, \quad \frac{\partial \pi_b(\theta_s, \theta_b)}{\partial \theta_b} \geq 0, \end{aligned}$$

содержательные интерпретации которых очевидны. Примером является инвариантный относительно аддитивного сдвига представлений механизм компромисса

$$\pi_s = \alpha (\theta_b - \theta_s), \quad \pi_b = (1 - \alpha) (\theta_b - \theta_s),$$

где $\alpha \in [0; 1]$. Как отмечалось выше, аксиоматическая характеристика различных механизмов компромисса является перспективной задачей, выходящей, однако, за рамки настоящего исследования.

Второй вариант (непосредственное определение точки компромисса) заключается в задании отображения $\pi: \mathfrak{R}_+^2 \rightarrow \mathfrak{R}_+^1$, удовлетворяющего для всех $\theta_b \geq \theta_s$ следующим свойствам:

$$\theta_s \leq \pi(\theta_s, \theta_b) \leq \theta_b, \quad \frac{\partial \pi(\theta_s, \theta_b)}{\partial \theta_s} \geq 0, \quad \frac{\partial \pi(\theta_s, \theta_b)}{\partial \theta_b} \geq 0,$$

содержательные интерпретации которых также очевидны. Примером является инвариантный относительно аддитивного сдвига представлений механизм компромисса $\pi = \alpha \theta_b + (1 - \alpha) \theta_s$, где $\alpha \in [0; 1]$.

Ясно, что эти два варианта механизмов эквивалентны, поэтому в дальнейшем для определенности будем иметь в виду второй вариант.

Рефлексивную игру продавца и покупателя формализуем следующим образом. Допустимым действием каждого из игроков – продавца и покупателя – является сообщение (одновременно с оппонентом и независимо от него) «своей» цены – x_s и x_b соответственно. На основании сообщений игроков сделка либо не совершается (при $x_s > x_b$), либо совершается по цене $\pi(x_s, x_b)$ (при $x_s \leq x_b$). Функции выигрыша в этой игре имеют следующий вид:

$$f_s(\theta_s, x_s, x_b) = \begin{cases} \pi(x_s, x_b) - \theta_s, & x_s \leq x_b, \\ -\varepsilon_1, & x_s > x_b, \end{cases}$$

$$f_b(\theta_b, x_s, x_b) = \begin{cases} \theta_b - \pi(x_s, x_b), & x_s \leq x_b, \\ -\varepsilon_2, & x_s > x_b, \end{cases}$$

где ε_1 и ε_2 – произвольные положительные числа (затраты на подачу заявки в случае, если сделка не состоится). Кроме того, будем считать, что каждый из агентов может вообще отказаться от переговоров; при этом сделка не совершается и агент, не подавший заявку, получает нулевой выигрыш.

Опишем теперь информированность участников игры. Будем считать, что допустимые действия и целевые функции являются общим знанием с точностью до величин θ_s и θ_b . Пусть, далее, продавец и покупатель обладают точечной структурой информированности конечной сложности следующего вида: $I_s = (\theta_s, \theta_{sb}, \theta_{sbs}, \dots)$, $I_b = (\theta_b, \theta_{bs}, \theta_{bsb}, \dots)$ – напомним, что в силу аксиомы автоинформированности индексы s и b чередуются.

Рассмотрим вопрос о том, каковы возможные информационные равновесия в описанной рефлексивной игре. Для определенности будем сначала вести рассуждения для одного из агентов – продавца.

Для того чтобы определить равновесное действие продавца x_s^* , необходимо определить равновесные действия всех фантомных агентов, существующих в его представлении. Таким образом, для нахождения x_s^* необходимо найти все $x_{s\tau}^*$, $\tau \in \Sigma$. Справедливо следующее утверждение.

Лемма 1. Набор действий $x_{s\tau}^*$, $\tau \in \Sigma$, является (с точки зрения продавца) информационным равновесием (и продавец не откажется от переговоров), если и только если $x_{s\tau}^* \equiv x_s^*$ для любого $\tau \in \Sigma$ и $\theta_s' \leq x_s^* \leq \theta_s''$ где $\theta_s' = \max_{\tau \in \Sigma} \theta_{s\tau}$, $\theta_s'' = \min_{\tau \in \Sigma} \theta_{s\tau}$.

Доказательство. ($\Rightarrow$) Пусть $x_{s\tau}^*$, $\tau \in \Sigma$, – информационное равновесие. Рассмотрим произвольное непустое τ и равновесное действие $x_{s\tau b}^*$. По определению информационного равновесия действие $x_{s\tau s}^*$ максимизирует по $x_{s\tau s}$ функцию $f_s(\theta_{s\tau s}, x_{s\tau s}, x_{s\tau b}^*)$. Иначе говоря, $s\tau s$ -агент (продавец) ожидает от $s\tau b$ -агента (покупателя) действие $x_{s\tau b}^*$. Далее, соотношение $\theta_{s\tau s} > x_{s\tau b}^*$ означает, что $s\tau s$ -агент (продавец) ожидает от оппонента заявки, меньшей его субъективной цены; следовательно, субъективно оптимальным для него будет отказ от переговоров и сделка не состоится, что противоречит предположению. Значит, $\theta_{s\tau s} \leq x_{s\tau b}^*$ (субъективная цена продавца не превосходит заявленной цены покупателя). Но тогда, очевидно, $x_{s\tau s}^* = x_{s\tau b}^*$ – для продавца оптимально назвать цену, совпадающую с ценой покупателя.

Аналогично показывается, что, если $x_{s\tau b}^*$ – равновесное действие, то $\theta_{s\tau b} \geq x_{s\tau s}^*$ и $x_{s\tau b}^* = x_{s\tau s}^*$.

Таким образом, для произвольного τ справедливы соотношения $x_{s\tau}^* = x_s^*$, $\theta_{s\tau s} \leq x_s^* \leq \theta_{s\tau b}$. Поскольку структура информированности имеет конечную сложность, попарно различных элементов $\theta_{s\tau}$ конечное число. Поэтому из последнего неравенства следует, что $\theta_s' \leq x_s^* \leq \theta_s''$.

($\Leftarrow$) Пусть число x_s^* таково, что $\theta_s' \leq x_s^* \leq \theta_s''$. Тогда для любого $\tau \in \Sigma$ имеем $\theta_{s\tau} \leq x_s^* \leq \theta_{s\tau b}$, $\theta_{s\tau s} \leq x_s^* \leq \theta_{s\tau}$. Поэтому набор действий $x_{s\tau}^* = x_s^*$, $\tau \in \Sigma$, является (с точки зрения продавца) информационным равновесием и продавец не откажется от переговоров (заметим, что соотношения (1) выполнены). •

Аналогичный факт, как нетрудно проверить, справедлив и для покупателя. Объединяя эти два факта, получаем следующее утверждение.

Утверждение 26. Набор действий x_σ^* , $\sigma \in \Sigma_+$, является информационным равновесием (и сделка будет совершена), если и только если для любого $\tau \in \Sigma$ справедливы соотношения $x_{s\tau}^* = x_s^*$, $x_{b\tau}^* = x_b^*$ и $\theta_s' \leq x_s^* \leq \theta_s''$, $\theta_b' \leq x_b^* \leq \theta_b''$, где $\theta_s' = \max_{\tau \in \Sigma} \theta_{s\tau}$, $\theta_s'' = \min_{\tau \in \Sigma} \theta_{s\tau}$, $\theta_b' = \max_{\tau \in \Sigma} \theta_{b\tau}$, $\theta_b'' = \min_{\tau \in \Sigma} \theta_{b\tau}$.

Утверждение 26, в частности, показывает, каким образом следует сформировать структуру информированности игры в случае, когда управляющий орган (центр), во-первых, имеет возможность формировать любую структуру и, во-вторых, стремится обойтись наиболее простой.

Пусть, например, центр стремится обеспечить заключение сделки по цене, где $\theta_s \leq \theta^* \leq \theta_b$, т.е. сделать θ^* единственной равновесной ценой. Тогда достаточно сформировать у агентов структуры информированности следующего вида: $I_s = (\theta_s, \theta^*, \theta^*, \theta^*, \dots)$, $I_b = (\theta_b, \theta^*, \theta^*, \theta^*, \dots)$. Нетрудно видеть, что при этом $\theta_s' = \theta_s'' = \theta_b' = \theta_b'' = \theta^*$. Поэтому, согласно утверждению, единственным информационным равновесием будет то, для которого $x_s^* = x_b^* = \theta^*$. Заметим, что это информационное равновесие является стабильным – сделка будет заключена именно по той цене, на которую рассчитывали агенты, делая свои заявки.

Сделаем следующее важное замечание (см. также введение к настоящей работе): мы исходим из предположения о том, что центр может сформировать у агентов *любую* структуру информированности. В рамках этого предположения нас интересует следующий вопрос: *какой* должна быть эта структура. Вопрос о том, *как* центру надлежит ее формировать, выходит за рамки настоящей работы и требует особого рассмотрения с привлечением данных психологии, социологии и пр.

Рассмотрим следующий пример: пусть субъективная цена продавца составляет 20, покупателя – 50, и центр стремится обеспечить совершение сделки по цене 40. Тогда ему следует сообщить

продавцу следующее: «Покупатель считает: субъективные цены покупателя и продавца равны 40, и это – общее знание», а покупателю – следующее: «Продавец считает: субъективные цены продавца и покупателя равны 40, и это – общее знание». Тем самым, формируются следующие структуры информированности агентов: $I_s = (20, 40, 40, 40, \dots)$, $I_b = (50, 40, 40, 40, \dots)$. Оба агента подадут заявки 40, и сделка состоится.

6.8. ЗАКАЗЧИК И ИСПОЛНИТЕЛЬ

Настоящая модель наиболее тесно связана с рассмотренными, например, в [74] нерефлексивными теоретико-игровыми моделями определения параметров договора на основании анализа оптимального действия исполнителя, т.е. действия, максимизирующего разность между доходом заказчика и затратами исполнителя.

Предположим, что заказчик имеет целевую функцию

$$\Phi(y, \sigma) = H(y) - \sigma(y),$$

представляющую собой разность между его доходом $H(y)$ от деятельности (действия) $y \in A = \mathcal{R}_+^1$ исполнителя и стимулированием, выплачиваемым исполнителю.

Относительно целевой функции исполнителя предположим, что она имеет вид:

$$f(y, \sigma, \theta) = \sigma(y) - c(y, \theta),$$

то есть определяется разностью между стоимостью договора и затратами $c(y, \theta)$, зависящими от действия исполнителя $y \in A$ и скалярного параметра $\theta \in \Omega \subseteq \mathcal{R}_+^1$, причем $\forall \theta \in \Omega \quad c(0, \theta) = 0$ и $\forall y \in A \quad c(y, \theta)$ является невозрастающей функцией $\theta \in \Omega$. Другими словами, содержательно параметр θ может интерпретироваться как квалификация (эффективность деятельности) исполнителя.

Таким образом, в настоящей модели присутствует единственный неопределенный параметр – эффективность деятельности исполнителя $\theta \in \Omega$, значение которого достоверно известно исполнителю, но неизвестно заказчику.

Если бы значение θ было общим знанием, то оптимальным было бы следующее действие исполнителя (см., например, [74]):

$$(1) \quad y^*(\theta) = \arg \max_{y \in A} [H(y) - c(y, \theta)].$$

Например, если $H(y) = y$, $c(y, \theta) = y^2 / 2 \theta$, то $y^*(\theta) = \theta$.

Если истинное значение эффективности исполнителя, которое ему самому достоверно известно, неизвестно заказчику, то заказчик вынужден использовать ту или иную процедуру устранения неопределенности. Перечислим некоторые возможные варианты.

Во-первых, заказчик может использовать принцип максимального гарантированного результата:

$$y^c = \arg \max_{y \in A} [H(y) - \max_{\theta \in \Omega} c(y, \theta)],$$

рассчитывая на прибыль $\max_{y \in A} [H(y) - \max_{\theta \in \Omega} c(y, \theta)]$.

Во-вторых, заказчик может использовать те или иные механизмы с сообщением информации исполнителем относительно эффективности его деятельности [1, 94], или предлагать последнему меню договоров в соответствии с результатами, приведенными в [42, 170].

Третий вариант поведения заказчика заключается в том, чтобы либо сделать конкретные предположения о свойствах функции затрат исполнителя и подставить их в выражение (1), либо осуществлять информационную рефлексия по поводу значений параметра $\theta \in \Omega$. Рассмотрим последний случай более подробно.

Информационная структура рассматриваемой рефлексивной игры имеет вид $I_s = (\theta_s, \theta_{sb}, \theta_{bs}, \dots)$, $I_b = (\theta_b, \theta_{bs}, \theta_{bsb}, \dots)$, однако не все компоненты являются независимыми. Дело в том, что истинное значение параметра θ достоверно известно исполнителю ($\theta_s = \theta$), и это является общим знанием. Поэтому для любого $\tau \in \Sigma$ выполнено равенство $\theta_{ts} = \theta$.

Так как модель с общим знанием рассматривалась выше (см. выражение (1); граф рефлексивной игры для этого случая имеет вид: $B \leftrightarrow S$), то рассмотрим несколько более сложную модель, для которой граф иерархической рефлексивной игры имеет вид $S \leftarrow B \leftrightarrow BS$. Если «первый ход» делает заказчик, он предлагает исполнителю договор стоимостью $c(y^*(\theta_b), \theta_b)$. В соответствии с выражением (1), в данной модели заказчик соглашается в случае, если выполнено

$$(2) \quad \theta_b \leq \theta.$$

При этом заказчик получает прибыль

$$u_b^0 = H(y^*(\theta_b)) - c(y^*(\theta_b), \theta_b),$$

а прибыль исполнителя равна

$$(3) \quad u_s^0 = c(y^*(\theta_b), \theta_b) - c(y^*(\theta_b), \theta),$$

где значение $y^*(\cdot)$ определяются выражением (1).

Если же $\theta_b > \theta$, то взаимодействие между данными заказчиком и исполнителем невозможно, так как последний (в силу условия его индивидуальной рациональности) откажется заключать договор, стоимость которого не компенсирует затрат.

Итак, в рассматриваемой модели можно, варьируя $\theta_b \leq \theta$, любую точку θ_b сделать информационным равновесием. Заметим, что и здесь, как и в модели купли-продажи, информационное равновесие является стабильным – заказчик ожидает от исполнителя принятия договора, что и будет реализовано.

Рассмотрение более сложных структур информированности является в данной модели неоправданным – оно не дает ничего нового по сравнению с соотношениями (1) – (3). Это связано с тем, что исполнитель является по существу пассивным участником ситуации – он может лишь принять или отвергнуть тот единственный контракт, который «навязывает» ему делающий первый ход заказчик. При этом величины θ_{sb} , θ_{bs} и т. д. не играют роли.

С другой стороны, заказчик также знает об этой «пассивности» исполнителя, поэтому при определении договора он учитывает лишь θ_b , но не величины, соответствующие более высокому рангу рефлексии – θ_{bs} , θ_{bsb} и т.д.

6.9. КОРРУПЦИЯ

Рассмотрим следующую теоретико-игровую модель коррупции. Пусть имеются n агентов – чиновников, дополнительный доход каждого из которых пропорционален сумме полученных им взяток $x_i \geq 0$, предложение которых будем считать неограниченным, $i \in N = \{1, \dots, n\}$. Пусть каждый из n агентов характеризуется своим типом $r_i > 0$, $i \in N$, и тип агента достоверно ему известен, но не известен остальным агентам. Содержательно тип агента может интерпретироваться как субъективное восприятие им «силы» штрафов.

За коррупционную деятельность ($x_i \geq 0$), вне зависимости от ее размера, на агента может быть наложен штраф $\chi_i(x, r_i)$, зависящий от действий $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathfrak{R}_+^n$ всех агентов и типа данного агента.

Таким образом, целевая функция i -го агента имеет вид:

$$(1) \quad f_i(x, r_i) = x_i - \chi_i(x, r_i), \quad i \in N.$$

Относительно функции штрафов предположим, что она имеет вид

$$(2) \quad \chi_i(x, r_i) = \varphi_i(x_i, Q_i(x_{-i}), r_i).$$

Содержательно предположение (2) означает, что штраф, накладываемый на i -го агента, зависит от его действия и от агрегированной обстановки $Q_i(x_{-i})$ (которая может интерпретироваться как «общий уровень коррумпированности остальных чиновников» с точки зрения i -го агента).

Предположим, что число агентов и общий вид целевых функций являются общим знанием, а относительно параметра $r = (r_1, r_2, \dots, r_n) \in \mathfrak{R}_+^n$ каждый из агентов имеет иерархию представлений: r_{ij} – представление i -го агента о типе j -го агента, r_{ijk} – представление i -го агента о представлениях j -го агента о типе k -го агента и т.д., $i, j, k \in N$.

Предположим также, что агенты наблюдают общий уровень коррумпированности. Поэтому стабильность информационного равновесия будет иметь место при любых представлениях о типах реальных или фантомных оппонентов, таких, что соответствующее информационное равновесие приводит к одному и тому же значению агрегата $Q_i(\cdot)$ для любого $i \in N$.

Тогда, как нетрудно видеть, для целевых функций агентов (1), (2) выполнены условия утверждения 12 раздела 1.3. Поэтому для любого числа агентов и любой структуры информированности все стабильные равновесия в рассматриваемой игре являются истинными (частный пример игры трех агентов рассмотрен в разделе 1.3). Таким образом, справедливо следующее

Утверждение 27. Пусть набор действий x_τ^* , $\tau \in \Sigma_+$, – стабильное информационное равновесие в игре (1), (2). Тогда это истинное равновесие.

Следствие. Уровень коррумпированности в стабильной ситуации не зависит от взаимных представлений коррупционеров о

типах друг друга. При этом не важно, являются ли сами эти представления истинными или ложными.

Отсюда вытекает, что невозможно повлиять на уровень коррумпированности лишь путем изменения взаимных представлений. Поэтому любое стабильное информационное управление приводит к одному и тому же уровню коррумпированности.

Предположим, что

$$\varphi_i(x_i, Q_i(x_{-i}), r_i) = x_i (Q_i(x_{-i}) + x_i) / r_i, Q_i(x_{-i}) = \sum_{j \neq i} x_j, i \in N,$$

и все типы одинаковы: $r_1 = \dots = r_n = r$.

Тогда, как нетрудно убедиться, равновесные действия агентов таковы: $x_i = \frac{r}{n+1}$, $i \in N$, а общий уровень коррумпированности

составляет
$$\sum_{i \in N} x_i = \frac{nr}{n+1}.$$

Изменить последнюю величину можно, лишь повлияв непосредственно на типы агентов.

6.10. БИПОЛЯРНЫЙ ВЫБОР

Рассмотрим ситуацию, когда агенты из бесконечно большой «популяции» осуществляют выбор между двумя альтернативами, которые будем для общности называть позитивным и негативным полюсами. Это может быть кандидат на выборах (голосовать «за» или «против»), продукт или услуга (покупать или нет), этический выбор (поступить «хорошо» или «плохо») и пр.

В силу бесконечности числа агентов будем считать, что при решении задачи управления всей «популяцией» выбор каждого конкретного агента не играет роли, а важна доля агентов, выбирающих позитивный полюс. Иначе это можно сформулировать следующим образом: действием «агрегированного» агента является вероятность x выбора им позитивного полюса.

Примем следующие предположения.

1. Существует n различных типов агентов.
2. Доля агентов i -го типа составляет α_i , $0 \leq \alpha_i \leq 1$.

3. Действие агента i -го типа задается *функцией реакции на ожидание*

$$\pi(p), \pi : [0, 1] \rightarrow [0, 1],$$

где p – ожидаемая агентами вероятность выбора позитивного полюса произвольным агентом из «популяции». Иными словами, если агент ожидает, что доля выбравших позитивный полюс составляет p , то его действие x_i определяется следующим образом:

$$x_i = \pi_i(p).$$

4. Пункты 1–3 являются общим знанием среди агентов.

Пусть $x_i \in [0, 1]$ – действие агента i -го типа. Тогда доля выбравших позитивный полюс составляет

$$p = \sum_{j=1}^n \alpha_j x_j.$$

Определим *равновесие биполярного выбора* как набор действий x_i , удовлетворяющих системе соотношений

$$(1) \quad x_i = \pi_i\left(\sum_{j=1}^n \alpha_j x_j\right), \quad i = 1, \dots, n.$$

В качестве отступления заметим, что соотношения (1) являются одной из возможностей описания биполярного выбора. Другие возможные подходы обсуждаются, например, в работах В.А. Лефевра [55], Т.А. Таран [115] и др. В этих работах предполагается, что принимающий решение агент осуществляет *рефлексию первого рода* [81], т.е. занимает позицию наблюдателя по отношению к своему поведению, своим мыслям и чувствам. Иными словами, в нем существует несколько соотнесенных друг с другом уровней, а итоговое решение определяется как влиянием внешней среды, так и состоянием этих уровней. В данной же работе агент понимается как индивид, т.е. «неделимый», и осуществляет *рефлексию второго рода* – относительно принятия решений оппонентами.

Вернемся к обсуждению равновесия биполярного выбора. Заметим, что выражения (1) задают отображение единичного гиперкуба $[0, 1]^n$ на себя:

$$(2) \quad (x_1, \dots, x_n) \rightarrow (\pi_1(\sum_{j=1}^n \alpha_j x_j), \dots, \pi_n(\sum_{j=1}^n \alpha_j x_j)).$$

Если функции $\pi_i(\cdot)$ непрерывны (что представляется довольно естественным предположением), то и отображение (2) непрерывно. Тогда по теореме о неподвижной точке (см., например, [92]) у системы (1) имеется хотя бы одно решение.

Приведем пример. Пусть существуют агенты трех типов ($n = 3$), действия которых определяются следующими функциями:

$$\pi_1(p) \equiv 1, \quad \pi_2(p) = p, \quad \pi_3(p) \equiv 0.$$

Содержательно: агенты первого типа независимо ни от чего выбирают позитивный полюс, агенты третьего типа – негативный. Что касается агентов второго типа, то они колеблются, и их действия совпадают с ожидаемым действием «популяции» в целом.

Система (1) в данном случае сводится к соотношениям

$$x_1 = 1, \quad x_2 = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3, \quad x_3 = 0,$$

откуда (здесь и далее полагаем, что $0 < \alpha_i < 1$, $i = 1, 2, 3$)

$$x_1 = 1, \quad x_2 = \frac{\alpha_1}{1 - \alpha_2}, \quad x_3 = 0.$$

При этом

$$(3) \quad p = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = \alpha_1 + \alpha_2 \frac{\alpha_1}{1 - \alpha_2}.$$

Предположим теперь, что некий управляющий орган – центр – имеет возможность повлиять на ситуацию и стремится увеличить вероятность позитивного выбора в «популяции» в целом (т.е. величину p). Для этого центр может повлиять на агентов второй либо третьей группы (агенты первой группы и так выбирают $x_1 = 1$). Пусть центр может повлиять на третью группу, переведя долю y ее членов во вторую и затратив некий ресурс (например, финансовый) в объеме $C_2 y$. Центр может также повлиять на вторую группу, изменив представления ее членов об α_3 (независимо от фактического значения этого параметра). Именно, влияние состоит в формировании у второй группы следующего представления: «доля x членов третьей группы перешли во вторую». Затраты на формирование такого представления составляют $C_1 x$.

Иными словами, центр может изменить либо реальную, либо «фантомную», воображаемую долю агентов третьего типа. При этом совокупный ресурс (бюджет), которым располагает центр, составляет C .

Задача центра состоит в следующем: распределить ресурс C (т.е. выбрать доли x и y) таким образом, чтобы вероятность p была максимальной. Формально оптимизационная задача центра ставится следующим образом (см. (3)):

$$(4) \quad p(x, y) = \alpha_1 + (\alpha_2 + y \alpha_3) \frac{\alpha_1}{1 - (\alpha_2 + x \alpha_3)} \rightarrow \max$$

при ограничениях

$$(5) \quad C_1 x + C_2 y \leq C, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1.$$

Легко видеть, что задача (4) сводится к максимизации функции $\varphi(x, y) = \frac{\alpha_2 + y \alpha_3}{1 - (\alpha_2 + x \alpha_3)}$.

Функция $\varphi(x, y)$ возрастает по обоим аргументам x и y , поэтому первое из ограничений (5) обращается в равенство. Поэтому задача свелась к нахождению максимума функции

$$\psi(x) = \frac{\alpha_2 + \alpha_3(C - C_1 x)/C_2}{1 - (\alpha_2 + x \alpha_3)} = \frac{1}{C_1 C_2} \frac{\alpha_2 C_2 / C_1 + \alpha_3 C / C_1 - x \alpha_3}{1 - \alpha_2 - x \alpha_3}.$$

Нетрудно видеть, что функция $\psi(x)$ является монотонно возрастающей (соответственно, монотонно убывающей или константой), если выражение

$$(6) \quad \frac{\alpha_2 C_2}{C_1} + \frac{\alpha_3 C}{C_1} - (1 - \alpha_2)$$

положительно (соответственно, отрицательно или равно нулю).

Введем обозначения: $k_1 = \frac{C_1}{C}$, $k_2 = \frac{C_2}{C}$. Тогда условие положительности выражения (6) запишется в виде

(7) $\alpha_3 > k_1 - \alpha_2 (k_1 + k_2)$.

Далее будем предполагать, что $C_1 > C$ и $C_2 > C$. Содержательно это означает, что у центра не так много ресурсов, чтобы всех агентов третьего типа «превратить» в агентов второго типа. При этом оптимальным будет такой выбор центра, когда весь ресурс вкладывается в увеличение либо реальной, либо воображаемой (при выполнении (7)) доли агентов второго типа.

Зависимость оптимального выбора центра от параметров (α_2, α_3) изображена на рис. 41.

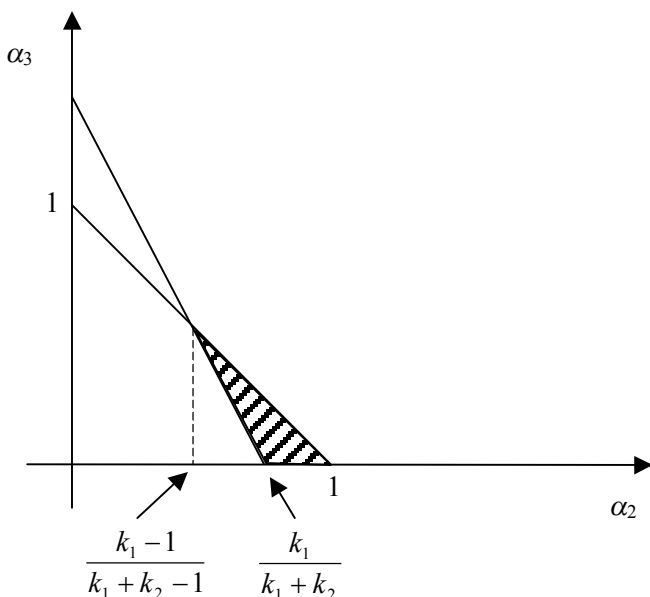


Рис. 41. Оптимальный выбор центра

На рис. 41 заштрихована область, где выполнено условие (7), т.е. оптимально для центра весь ресурс направить на изменение представлений:

$$(8) \quad x = \frac{C}{C_1}, \quad y = 0.$$

Решение (8) отвечает ситуации, когда доля α_2 агентов второго типа достаточно велика. Из рис. 41 видно, что если $\alpha_2 > \frac{k_1}{k_1 + k_2}$, то решение (8) всегда оптимально. Если же

$$(9) \quad \frac{k_1 - 1}{k_1 + k_2 - 1} < \alpha_2 < \frac{k_1}{k_1 + k_2},$$

то решение (8) оптимально при достаточно больших α_3 . Содержательно последний случай означает следующее: при некотором диапазоне значений параметра α_2 (т.е. при выполнении (9)) оптимально влиять на представления, когда они слишком пессимистич-

ны (т.е. когда α_3 достаточно велико и, следовательно, велика вероятность p выбора негативного полюса).

В заключение отметим, что рассмотрен простейший случай информационного управления в условиях биполярного выбора. Дальнейшее развитие модели (увеличение числа типов агентов, усложнение структуры информированности, усложнение функций реакции на ожидание) и ее сопоставление с наблюдаемыми результатами действий экономических (покупатели) и политических (избиратели) агентов представляется перспективным направлением дальнейших исследований.

6.11. АКТИВНАЯ ЭКСПЕРТИЗА

Рассмотрим пример рефлексивного управления агентами со стороны центра в модели активной экспертизы. Сначала приведем описание модели и известные результаты исследования [17, 71] *механизмов экспертизы* – получения и обработки информации от экспертов – специалистов в предметных областях.

Пусть имеются n экспертов (далее – агентов), оценивающих какой-либо объект по скалярной шкале (объектом может быть кандидат на пост руководителя, вариант финансирования, эффективность проекта и т.д.). Каждый агент сообщает оценку $s_i \in [d; D]$, $i \in N$, где d – минимальная, а D – максимальная оценка. Итоговая оценка – *коллективное решение* $x = \pi(s)$ – является функцией оценок, сообщенных агентами, $s = (s_1, s_2, \dots, s_n)$. Обозначим $r_i \in [d; D]$ – субъективное мнение i -го агента, то есть его истинное представление об оцениваемом объекте. Предположим, что процедура $\pi(s)$ формирования итоговой оценки является строго возрастающей по всем переменным непрерывной функцией, удовлетворяющей *условию единогласия*: $\forall a \in [d, D] \pi(a, a, \dots, a) = a$.

Обычно предполагается, что агенты сообщают свои истинные мнения $\{r_i\}_{i \in N}$. При этом если каждый из агентов немного ошибается (несознательно и в зависимости от своей квалификации), то,

например, средняя оценка $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n r_i$ достаточно объективно и точно оценивает объект. Однако если агенты заинтересованы в результа-

тах экспертизы, то они не обязательно будут сообщать свое истинное мнение, то есть механизм $\pi(\cdot)$ может быть подвержен манипулированию.

Формализуем интересы агента. Предположим, что каждый агент, будучи специалистом в своей области, заинтересован в том, чтобы результат экспертизы x был максимально близок к его мнению r_i .

Приведем пример манипулирования. Пусть $n = 3$, $d = 0$, $D = 1$, $r_1 = 0,4$, $r_2 = 0,5$, $r_3 = 0,6$ (агенты упорядочены по возрастанию точек пика), и центр использует следующий механизм обработки

оценок: $x = \pi(s) = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 s_i$. Если $s_i \equiv r_i$, $i = \overline{1,3}$, то есть если все

агенты сообщают правду, то $x = 0,5$. При этом итоговая оценка совпала с истинным представлением второго агента, и он полностью удовлетворен коллективным решением. Остальные же агенты (первый и третий) не удовлетворены, так как $r_1 < 0,5$, а $r_3 > 0,5$. Легко вычислить $s^* = (0; 0,5; 1)$ – равновесие Нэша при данном векторе типов.

Определим следующие числа: $w_1 = \pi(d, D, D) = \pi(0, 1, 1) = 2/3$; $w_2 = \pi(d, d, D) = \pi(0, 0, 1) = 1/3$ (отметим, что $\pi(0, 0, 0) = 0$ и $\pi(1, 1, 1) = 1$). При этом $w_2 \leq r_2 \leq w_1$ ($1/3 \leq 1/2 \leq 2/3$) – на отрезке $[w_2; w_1]$ второй агент является «диктатором с ограниченными полномочиями» (его полномочия ограничены границами отрезка). Построим теперь для рассматриваемого примера механизм, в котором всем агентам выгодно сообщить достоверную информацию, и коллективное решение в котором будет то же, что и в механизме $\pi(\cdot)$.

Организатор экспертизы – центр – может попросить агентов сообщить истинные значения $r = \{r_i\}_{i \in I}$ и использовать их следующим образом (эквивалентный прямой механизм): упорядочить агентов в порядке возрастания сообщенных точек пика; если существует число $q \in \overline{2, n}$, такое, что $w_{q-1} \geq r_{q-1}$; $w_q \leq r_q$ (легко показать, что существует единственный агент с таким номером q), то $x^* = \min(w_{q-1}, r_q)$. В нашем примере $q = 2$ и $1/2 = \min(2/3; 1/2)$.

При этом, очевидно, $s_i^* = d, i < q, s_i^* = D, i > q$. Итак, по сообщению r центр, воспользовавшись числами w_1 и w_2 , восстановил равновесие Нэша s^* .

Можно проверить, что в построенном прямом механизме сообщение достоверной информации является равновесием Нэша для агентов, причем итоговая оценка та же, что и в исходном механизме.

Опишем, следуя [17], общий случай (произвольного числа агентов). Пусть все r_i различны и упорядочены в порядке возрастания, то есть $r_1 < r_2 < \dots < r_n$ и s^* – равновесие Нэша ($x^* = \pi(s^*)$). По аналогии с рассмотренным выше примером можно показать, что если $x^* > r_i$, то $s_i^* = d$, если $x^* < r_i$, то $s_i^* = D$. Если же $d < s_i^* < D$, то $x^* = r_i$. При этом если $x^* = r_q$, то $\forall j < q \quad s_j^* = d, \quad \forall j > q \quad s_j^* = D$, а сама величина s_q^* определяется из условия

$$\pi \left(\underbrace{d, d, \dots, d}_{q-1}, s_q^*, \underbrace{D, D, \dots, D}_{n-q} \right) = r_q.$$

Таким образом, для определения ситуации равновесия достаточно найти номер q . Для этого введем $n - 1$ число:

$$w_i = \pi \left(\underbrace{d, d, \dots, d}_i, \underbrace{D, D, \dots, D}_{n-i} \right), i = \overline{1, n}.$$

Видно, что $w_0 = D > w_1 > w_2 > \dots > w_n = d$, и если $w_i \leq r_i \leq w_{i-1}$, то $x^* = r_i$, то есть i -ый агент является диктатором на отрезке $[w_i; w_{i-1}]$. Легко показать, что существует единственный агент q , для которого выполнено $w_{q-1} \geq r_{q-1}, w_q \leq r_q$.

Определив таким образом q , можно найти итоговую оценку в равновесии: $x^* = \min(w_{q-1}; r_q)$. Сообщение достоверной информации $(\tilde{r}_i \equiv r_i)_{i \in N}$ при этом является доминантной стратегией [17].

Отказавшись от предположения о том, что вектор типов агентов является общим знанием, получаем, что к стабильному информационному равновесию приводят следующие представления реальных и фантомных агентов:

$$\begin{aligned} r_{\sigma q(r)} &\in [\min \{w_{q(r)-1}; r_{q(r)}\}; r_{q(r)}], \quad \sigma \in \Sigma, \\ r_{\sigma i} &\leq \min \{w_{q(r)-1}; r_{q(r)}\}, \quad \sigma \in \Sigma, \quad i < q(r), \end{aligned}$$

$$r_{\sigma i} \geq \min \{w_{q(r)-1}, r_{q(r)}\}, \quad \sigma \in \Sigma, \quad i > q(r).$$

Рассмотрим пример. Пусть $n = 3$, $r_1 = 0,4$, $r_2 = 0,5$, $r_3 = 0,6$, и центр использует следующий механизм обработки оценок:

$$x = \pi(s) = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^n s_i. \text{ Если } s_i \equiv r_i, i = \overline{1,3}, \text{ то есть если все эксперты}$$

сообщают правду, то $x = 0,5$. При этом итоговая оценка совпала с истинным представлением второго эксперта, и он удовлетворен результатом полностью. Остальные же эксперты (первый и третий) не удовлетворены, так как $r_1 < 0,5$, а $r_3 > 0,5$. Следовательно, они попытаются сообщить другие s_1 и s_3 . Пусть они сообщают $s_1^* = 0$, $s_2^* = 0,5$, $s_3^* = 1$. Тогда $x^* = \pi(s_1^*, s_2^*, s_3^*) = 0,5$. Итоговая оценка не изменилась, но «новый» вектор сообщений является уже равновесием Нэша, то есть в рассматриваемом примере $w_0 = 1$, $w_1 = 2/3$, $w_2 = 1/3$, $w_3 = 0$, следовательно, $q = 2$ и

$$r_2 = 1/2 = \min (2/3; 1/2).$$

Таким образом, к стабильному информационному равновесию приводят следующие представления реальных и фантомных агентов: $r_{\sigma 2} = 1/2$, $r_{\sigma 1} \leq 1/2$, $r_{\sigma 3} \geq 1/2$, $\sigma \in \Sigma$.

Выше мы фактически доказали, что для любого механизма экспертизы $\pi(\cdot)$ можно построить эквивалентный прямой механизм, в котором сообщение достоверной информации является равновесием Нэша. Этот результат позволяет говорить, что если центр заинтересован в получении достоверной информации от агентов, то он может этого добиться, используя неманипулируемый прямой механизм. Однако интересы центра могут быть другими.

Предположим, например, что центр заинтересован в том, чтобы результат экспертизы был как можно ближе к значению $x_0 \in [d; D]$. Пусть центру известны мнения агентов $\{r_i \in [d; D]\}_{i \in N}$, но никому из них не известны достоверно мнения остальных. Информационное управление в данной ситуации заключается в формировании у агентов таких структур информированности (представлений о представлениях оппонентов), чтобы сообщаемая ими как субъективное информационное равновесие информация приводила бы к принятию наиболее выгодного для центра (наиболее близкого к x_0) решения.

Обозначим $x_{0i}(a_i, r_i)$ – решение уравнения

$$(1) \pi(a_i, \dots, a_i, x_0, a_i, \dots, a_i) = r_i,$$

в котором x_0 стоит на i -м месте, $i \in N$.

Содержательно, условие (1) – наилучший ответ i -го агента на единогласное сообщение остальными агентами величины a_i .

В силу монотонности и непрерывности механизма $\pi(\cdot)$ при фиксированном типе r_i i -го агента $x_{0i}(a_i, r_i)$ – непрерывная убывающая функция a_i . Потребуем, чтобы $x_0 \in [d; D]$, тогда $\forall a_i \in \mathfrak{R}^1$, $\forall r_i \in [d; D]$

$$(2) x_0 \in [d_i(r_i); D_i(r_i)], \quad i \in N,$$

где

$$(3) d_i(r_i) = \max \{d; x_{0i}(D, r_i)\}, \quad D_i(r_i) = \min \{D; x_{0i}(d, r_i)\}, \quad i \in N.$$

Утверждение 28. Если тип каждого эксперта известен организатору экспертизы, но неизвестен другим экспертам, то за счет рефлексивного управления любой результат x_0 , для которого выполнено

$$(4) x_0 \in [\max_{i \in N} d_i(r_i); \min_{i \in N} D_i(r_i)]$$

может быть реализован как единогласное коллективное решение.

Доказательство. В силу описанной выше структуры равновесия Нэша в механизме активной экспертизы множество информационных равновесий есть $[d; D]^n$.

Рассмотрим следующую структуру информированности i -го агента: $r_{ij} = a_i$, $j \neq i$, $r_{ijk} = a_i$, $k \in N$, то есть все оппоненты с точки зрения i -го агента имеют одинаковые точки пика, равные a_i (см. выражение (1)), считают, что он сам имеет такую же точку пика, и считают этот факт общим знанием.

Таким образом, i -й агент ожидает от всех оппонентов сообщения a_i как информационного равновесия их игры (отметим, что при этом центру не нужно строить сложные и глубокие структуры информированности и вычислять для них информационные равновесия). Его наилучшим ответом (в силу определения (1) величины a_i) является сообщение $x_{0i}(a_i, r_i)$, диапазон возможных значений которого определяется выражениями (2)–(3). Получили, что $X_i(r_i) = [d_i(r_i); D_i(r_i)]$, $i \in N$.

Так как требуется единогласное принятие решения, то следует вычислить пересечение множеств (2)–(3) по все агентам, что дает выражение (4).

Итак, все агенты сообщают x_0 и в силу условия единогласия это решение принимается (сторонним наблюдателям невозможно придаться к «демократичности» механизма принятия решений и результатам его использования). •

Применим утверждение 28 к линейному анонимному (напомним, что *анонимным* называется механизм принятия решений, симметричный относительно перестановок агентов [63, 70]) механизму экспертизы $\pi(s) = \frac{1}{n} \sum_{i \in N} s_i$, $s_i, r_i \in [0; 1]$, $i \in N$. Вычисляем

$$a_i = \frac{n r_i - x_0}{n - 1}, \quad i \in N. \text{ Получаем из условия } a_i \in [0; 1] \text{ (или из (2))}$$

(4)) границы диапазона единогласно реализуемых коллективных решений:

$$(5) \max \{0; n (\max_{i \in N} r_i - 1) + 1\} \leq x_0 \leq \min \{1; n \min_{i \in N} r_i\}.$$

Интересно отметить, что из (5) следует ограничение

$$\max_{i \in N} r_i - \min_{i \in N} r_i \leq 1 - \frac{1}{n}$$

на разброс мнений экспертов, при котором существует хотя бы один результат x_0 , реализуемый за счет рефлексивного управления как единогласно принятое коллективное решение.

С другой стороны, из (5) следует, что $x_0 \in [0; 1]$, если

$$\max_{i \in N} r_i \leq 1 - \frac{1}{n}, \quad \min_{i \in N} r_i \geq \frac{1}{n}.$$

Последнее условие свидетельствует, что в линейном анонимном механизме экспертизы достаточным условием единогласной реализации любого коллективного мнения в результате рефлексивного управления является следующее: не должно существовать экспертов как с очень низкими оценками, так и с очень высокими оценками.

Откажемся теперь от требования единогласного принятия коллективного решения. Введем два вектора:

$$d(r) = (d_1(r_1), d_2(r_2), \dots, d_n(r_n)), \quad D(r) = (D_1(r_1), D_2(r_2), \dots, D_n(r_n)).$$

Утверждение 29. Если тип каждого эксперта известен организатору экспертизы, но неизвестен другим экспертам, то за счет рефлексивного управления любой результат x_0 , для которого выполнено

(6) $x_0 \in [\pi(d(r)); \pi(D(r))]$.

может быть реализован как коллективное решение.

Доказательство. Утверждение 29 отличается от утверждения 28 тем, что в нем, с одной стороны, отсутствует одинаковость равновесных сообщений агентов, с другой стороны – расширяется ограничение на реализуемое как информационное равновесие коллективное решение (условие (4) заменено на (6)).

Фиксируем вектор $r \in [d; D]^n$ точек пика агентов. В соответствии со структурой равновесия, описанной выше, каждый агент в равновесии сообщает либо минимальную заявку (ноль), либо максимальную (единицу), либо свой истинный тип (если данный агент является диктатором). Так как у каждого агента можно сформировать произвольные представления о типах остальных агентов и их представлениях и т.д., то каждого из них можно убедить в том, что множество возможных обстановок игры составляет $[d; D]^{n-1}$.

Для этого достаточно сформировать, например, следующую структуру информированности глубины три: ij -ый агент должен быть диктатором и этот факт должен быть общим знанием для ijk -агентов.

В ходе доказательства утверждения 28 установлено, что $X_i(r_i) = [d_i(r_i); D_i(r_i)]$, $i \in N$. В силу того, что информационные структуры агентов формируются независимо, получаем, что вектор минимальных равновесных заявок есть $d(r)$, максимальных – $D(r)$. Из монотонности и непрерывности процедуры $\pi(\cdot)$ принятия решений следует (6). •

Применим утверждение 29 к линейному анонимному механизму экспертизы $\pi(s) = \frac{1}{n} \sum_{i \in N} s_i$, $s_i, r_i \in [0; 1]$, $i \in N$. Вычислим, какое сообщение s_i i -го агента является для него субъективно оптимальным при обстановке s_{-i} (обозначим $S_{-i} = \sum_{j \neq i} s_j \in [0; n-1]$):

$$(7) \quad s_i(r_i, S_{-i}) = n r_i - S_{-i}, \quad i \in N.$$

Следовательно, $X_i(r_i) = [\max \{0; 1 - n(1 - r_i)\}; \min \{1; n r_i\}]$, $i \in N$. Подставляя с учетом (7) левые и правые границы множеств $X_i(r_i)$ в линейный анонимный механизм планирования, получаем:

$$(8) \quad x_0 \in \left[\sum_{i \in N} \frac{1}{n} \max \{0; 1 - n(1 - r_i)\}; \sum_{i \in N} \frac{1}{n} \min \{1; n r_i\} \right].$$

Из утверждений 28 и 29 (см. их доказательства, содержащие описание вида минимальной структуры информированности, реализующей заданное коллективное решение) можно сделать следующий вывод.

Следствие. При решении задач рефлексивного управления в механизмах активной экспертизы достаточно ограничиться вторым рангом рефлексии экспертов.

Рассмотрим приведенный выше числовой пример с тремя агентами, имеющими точки пика: $r_1 = 0,4$, $r_2 = 0,5$, $r_3 = 0,6$. Пусть $x_0 = 0,8$. Если все агенты сообщают правду, то в непрямом механизме $x = 0,5$; в соответствующем прямом (неманипулируемом) механизме будет принято то же решение. Иными словами, центру хотелось бы, чтобы каждый из агентов сообщил большую оценку, приблизив тем самым итоговое решение к 0,8.

Условие (5) в рассматриваемом примере выполнено. Вычислим следующие величины:

$$0,8 + 2 a_1 = 3 \times 0,4 \rightarrow a_1 = 0,2,$$

$$0,8 + 2 a_2 = 3 \times 0,5 \rightarrow a_2 = 0,35,$$

$$0,8 + 2 a_3 = 3 \times 0,6 \rightarrow a_3 = 0,5.$$

Центр формирует у первого агента убеждение, что типы остальных агентов равны 0,2, они считают, что его тип также равен 0,2 и с их точки зрения этот факт – общее знание. Аналогичные «убеждения» – соответственно 0,35 и 0,5 – формируются у второго и третьего агентов.

Наилучшим ответом первого агента (приводящим к тому, что коллективное решение совпадает с его точкой пика) на сообщение 0,2 остальными агентами является сообщение 0,8. Это же сообщение (в силу определения a_i) является наилучшим ответом всех остальных агентов (второго и третьего). Итак, все сообщают 0,8, и это решение единогласно принимается.

В рассматриваемом числовом примере условие (8) выполнено для любого $x_0 \in [0; 1]$, то есть $n (\max_{i \in N} r_i - 1) + 1 \leq 0$ и

$$n \min_{i \in N} r_i \geq 1.$$

Рассмотрим другой пример: пусть $n = 2$, $r_1 = 0,2$, $r_2 = 0,7$. Тогда из (5) получаем, что существует единственное x_0 , равное 0,4, которое реализуемо как единоголасное коллективное решение. В то же время, множество реализуемых в соответствии с утверждением 29 коллективных решений составляет отрезок $[0,2; 0,7]$.

Совпадение границ этого отрезка с типами агентов случайно: например, при $r_1 = 0,1$, $r_2 = 0,5$ единоголасно реализуемы коллективные решения из отрезка $[0; 0,2]$, а в рамках утверждения 29 – из отрезка $[0; 0,6]$.

В заключение рассмотрения рефлексивного управления в механизмах активной экспертизы отметим, что результаты утверждений 28 и 29 были получены в предположении, что тип каждого эксперта известен организатору экспертизы, но неизвестен другим экспертам. Более реалистичным является предположение, что каждый из участников (центр и эксперты) имеет свои представления о диапазонах типов оппонентов, то есть управленческие возможности центра ограничены. Анализ множества коллективных решений, которые могут быть реализованы в этом случае как информационные равновесия, представляется перспективной задачей будущих исследований.

6.12. ОЛИГОПОЛИЯ КУРНО

Рассмотрим организационную систему, в которой участвуют n агентов с целевыми функциями следующего вида:

$$(1) \quad f_i(r_i, x) = (Q - \alpha \sum_{j \in N} x_j) x_i - \frac{x_i^2}{2r_i},$$

где $x_i \geq 0$, $i \in N$, $\alpha > 0$.

Содержательно, x_i – объем выпуска продукции i -ым агентом, Q – спрос на производимую продукцию. Тогда первое слагаемое в целевой функции может интерпретироваться как произведение цены на объем продаж – выручка от продаж (см. модели олигополии Курно в [78, 81, 176]), а второе слагаемое – как затраты на производство. Параметр r_i (тип i -го агента) характеризует эффективность (квалификацию) его деятельности.

Наилучший ответ i -го агента имеет следующий вид:

$$(2) \quad BR_i(x_{-i}, r_i) = (Q - \alpha \sum_{j \neq i} x_j) / (2\alpha + 1/r_i), \quad i \in N.$$

Предположим, что каждый агент наблюдает цену $(Q - \alpha \sum_{j \neq i} x_j)$. Тогда выполнены условия утверждения 12, поэтому

в рассматриваемой модели ложных равновесий не возникает, т.е. возможно только истинное стабильное информационное равновесие. Приведем иллюстративный численный пример.

Пусть $n = 2$, $\alpha = 1$, $Q = 5$, $r_1 = r_2 = 1$. Вычисляем параметрическое равновесие Нэша:

$$(3) \quad x_1(r_1, r_2) = \frac{[1 - \frac{2r_2 + 1}{r_2}]Q}{1 - \frac{(2r_1 + 1)(2r_2 + 1)}{r_1 r_2}},$$

$$(4) \quad x_2(r_1, r_2) = \frac{[1 - \frac{2r_1 + 1}{r_1}]Q}{1 - \frac{(2r_1 + 1)(2r_2 + 1)}{r_1 r_2}}.$$

Из выражений (3) и (4) можно найти типы агентов, при которых наблюдаемый вектор действий (x_1, x_2) будет стабильным информационным равновесием:

$$(5) \quad r_1(x_1, x_2) = 1 / [(Q - x_2) / x_1 - 2],$$

$$(6) \quad r_2(x_1, x_2) = 1 / [(Q - x_1) / x_2 - 2].$$

Рассмотрим модель динамики представлений агентов о типах друг друга. Пусть каждый из них независимо выбирает действие, подставляя в (3) или (4) свой тип и свои представления о типах оппонента. Затем, после наблюдения выбора оппонента, каждый агент вычисляет в соответствии с (5) или (6) новую оценку типа оппонента и в соответствии с гипотезой индикаторного поведения корректирует свои представления. Затем выбор повторяется и т.д.

На рисунках 42-44 приведены графики динамики представлений агентов.

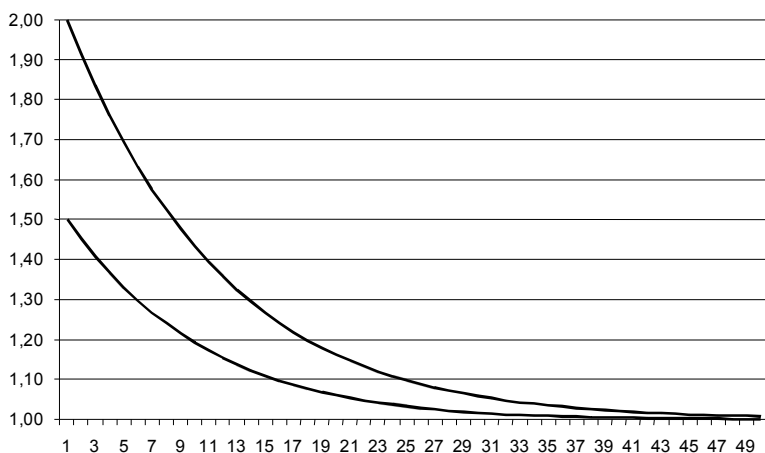


Рис. 42. Оба агента первоначально переоценивают друг друга ($r_{12} = 2, r_{21} = 1,5$)

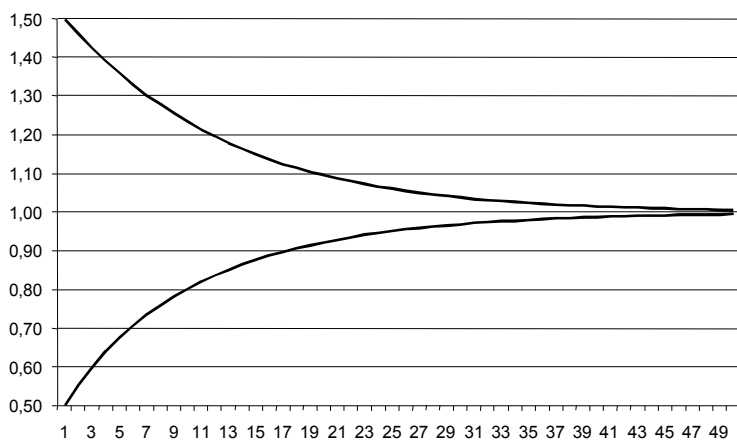
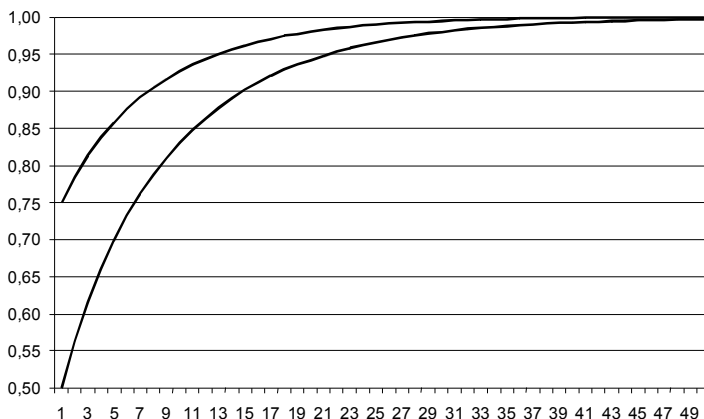


Рис. 43. Первый агент первоначально переоценивает второго, а второй – недооценивает первого ($r_{12} = 1,5, r_{21} = 0,5$)



*Рис. 44. Оба агента первоначально недооценивают друг друга
($r_{12} = 0.75$, $r_{21} = 0.5$)*

Видно, что представления каждого агента о типах оппонента монотонно сходятся к соответствующему истинному значению (1; 1), а действия агентов стремятся к истинному информационному равновесию – параметрическому равновесию Нэша со значениями параметров, равными истинным типам агентов.

6.13. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ РЕСУРСА

В рассмотренных выше моделях исследовалась стабильность информационного равновесия, которое является обобщением равновесия Нэша. В ряде моделей оказывается, что существует более сильное равновесие – равновесие в доминантных стратегиях (РДС), определяемое как вектор абсолютно оптимальных (то есть не зависящих от обстановки и вектора типов остальных агентов) действий агентов.

Утверждение 30. РДС является стабильным информационным равновесием.

Справедливость утверждения 30 вытекает из определений РДС и информационного равновесия. Из него следует, что в системах, в которых существует РДС, задача исследования информационного равновесия отчасти вырождается. Однако это не значит, что вырождается задача исследования стабильности равновесия –

как показывают рассматриваемые ниже модели механизмов распределения ресурса и активной экспертизы, выбор агентами доминантных стратегий может производиться в рамках широкого диапазона их взаимных представлений друг о друге.

Рассмотрим множество $N = \{1, 2, \dots, n\}$ агентов, имеющих целевые функции $f_i(x_i, r_i)$, где $x_i \geq 0$ – количество выделяемого i -му агенту ресурса, $r_i \geq 0$ – его тип – оптимальное для него количество ресурса, то есть будем считать, что $f_i(x_i, \cdot)$ – однопиковая функция [71] с точкой пика r_i , $i \in N$.

Будем считать, что каждый агент достоверно знает свою точку пика (свой тип), тогда как центр не имеет об этих точках никакой информации.

Задачей центра является распределение ресурса R на основании заявок $s_i \in [0; R]$, $i \in N$, агентов (то есть действиями агентов в рассматриваемой модели являются выбираемые ими сообщения центру). Принцип принятия решений центром: $x_i = \pi_i(s)$, $i \in N$, где $s = (s_1, s_2, \dots, s_n)$, называется *механизмом (процедурой) планирования*.

Относительно свойств процедуры планирования, следуя [17, 18, 71], предположим:

- 1) $\pi_i(s)$ непрерывна и строго монотонно возрастает по s_i , $i \in N$;
- 2) $\pi_i(0, s_{-i}) = 0 \quad \forall s_{-i} \in [0; R]^{n-1}, \quad i \in N$;

3) механизм распределения ресурса анонимен, то есть произвольная перестановка номеров агентов приводит к соответствующей перестановке количеств получаемых ими ресурсов.

В [18, 70, 71] доказано, что в случае, когда типы агентов являются общим знанием, во-первых, ситуация равновесия Нэша $s^*(r)$ игры агентов имеет (для механизмов, удовлетворяющих свойствам 1 и 2) следующую структуру: $\forall i \in N, \forall r \in \mathfrak{R}^n$

$$(1) \quad \pi_i(s^*(r)) < r_i \Rightarrow s_i^*(r) = R,$$

$$(2) \quad s_i^*(r) < R \Rightarrow \pi_i(s^*(r)) < r_i,$$

и, во-вторых, все механизмы распределения ресурса, удовлетворяющие свойствам 1–3, эквивалентны (то есть приводят к тем же равновесиям) механизму пропорционального распределения: агенты получают ресурс в количестве

$$(3) \quad \pi_i(s) = \begin{cases} s_i, & \text{если } \sum_{j=1}^n s_j \leq R \\ \min \left\{ s_i, R s_i / \sum_{j=1}^n s_j \right\}, & \text{если } \sum_{j=1}^n s_j > R \end{cases},$$

Последнее утверждение позволяет сконцентрировать внимание на механизме (3).

В [18, 70] изложен алгоритм поиска равновесия Нэша игры агентов, основывающийся на *процедуре последовательного распределения ресурса*¹. Ее идея заключается в следующем:

0. Агенты упорядочиваются по возрастанию точек пика. Множество диктаторов (т.е. агентов, получающих оптимальное для себя количество ресурса) является пустым.

1. Весь ресурс распределяется между агентами поровну.

2. Если $r_1 < R/n$, то первый агент включается в множество диктаторов, и всем агентам выделяется ресурс в количестве r_1 (если $r_1 < R/n$, то множество *диктаторов*² пусто и все агенты в равновесии сообщают одинаковые заявки и получают одинаковое количество ресурса, на этом алгоритм останавливается).

3. Положив $r_i := r_i - r_1$, $i := i - 1$, $R := R - n r_1$, повторяем шаг 2 (число повторений второго шага, очевидно, не превосходит числа агентов).

В результате применения процедуры последовательного распределения ресурса определяется множество $D(r) \subseteq N$ диктаторов, получающих ресурс в оптимальном для себя объеме (определяемом точками пика). Остальные агенты (не диктаторы) получают в силу анонимности механизма распределения ресурса одинаковое его количество:

$$x_0(r) = (R - \sum_{j \in D(r)} r_j) / (n - |D(r)|).$$

¹ Отметим, во-первых, что процедура последовательного распределения ресурса является прямым механизмом – использует непосредственно информацию о точках пика агентов. Во-вторых, данная процедура является неманипулируемой, т.е. каждому агенту выгодно сообщать центру достоверную информацию о своей точке пика при условии, что центр обязуется использовать процедуру последовательного распределения.

² Напомним, что диктатором называется агент, получающий абсолютно оптимальный для себя план ($x_i = r_i$).

Откажемся теперь от предположения о том, что типы агентов являются общим знанием, и исследуем информационные равновесия и их стабильность. Будем считать, что функцией наблюдения каждого агента является вектор действий оппонентов (см. раздел 1.4). Тогда, согласно утверждению 10 из раздела 3.2, возможны лишь истинные информационные равновесия. При этом, однако, представления о типах оппонентов могут быть как адекватными, так и не адекватными.

Рассмотрим следующие варианты:

Случай 1. Пусть вектор истинных типов агентов таков, что

$$D(r) = N.$$

Такое возможно, если $\sum_{j \in N} r_j \leq R$.

Тогда истинные типы агентов являются общим знанием.

Случай 2. Пусть вектор истинных типов агентов таков, что

$$D(r) = \emptyset.$$

Такое возможно, если

$$(4) \min_{i \in N} \{r_i\} > R/n.$$

Тогда наилучший ответ каждого агента не зависит от его субъективных представлений, удовлетворяющих (4), и любая комбинация таких представлений агентов будет образовывать истинное равновесие.

Большой интерес представляет промежуточный случай, когда существуют как агенты-диктаторы, так и агенты-недиктаторы.

Случай 3. Пусть вектор истинных типов агентов таков, что

$$D(r) \neq \emptyset, \quad D(r) \neq N.$$

Тогда, с учетом наблюдаемости выбираемых действий, агент-диктатор по определению в равновесии получает ресурс, в точности равный его типу. Следовательно, относительно их типов ни у кого из агентов стабильных неадекватных представлений быть не может (см. случай 1):

$$(5) \quad r_{\sigma i} = r_i, \quad \sigma \in \Sigma, \quad i \in D(r).$$

Относительно же типов агентов из множества $N \setminus D(r)$ стабильные неадекватные представления могут существовать:

$$(6) \quad r_{\sigma i} \geq \min_{j \in N \setminus D(r)} r_j, \quad \sigma \in \Sigma, \quad i \in N \setminus D(r).$$

Приведем пример. Пусть $n = 3$, $R = 1$, $r_1 = 0,2$, $r_2 = 0,3$, $r_3 = 0,6$. Тогда

$$s_1^* = 0,4, s_2^* = 0,6, s_3^* = 1,$$

$$x_1^* = r_1 = 0,2, x_2^* = r_2 = 0,6, x_3^* = 0,5.$$

Из (5) и (6) получаем, что имеет место: $\forall \sigma \in \Sigma$

$$r_{\sigma 1} = r_1, r_{\sigma 2} = r_2, r_{\sigma 3} \geq 0,5.$$

Таким образом, в монотонных анонимных механизмах распределения ресурса стабильные неадекватные представления могут существовать только относительно типов агентов, не входящих в число диктаторов. При этом, однако, вектор распределяемых ресурсов оказывается таким же, как и в случае полного знания.

6.14. СТРАХОВАНИЕ

В формальных моделях управления риском, в том числе – страхования (актуарная математика), как правило, не учитываются свойства активности страхователей и страховщиков, проявляющиеся в рефлексии, способности искажать информацию и т.д. Исключение составляют работы [12, 18], рассматривающие модели взаимного и смешанного страхования, в которых страховщик использует информацию, сообщаемую страхователями, для определения параметров страховых контрактов, и предлагается «механизм скидок», в котором каждому страхователю выгодно сообщение достоверной информации. В настоящем разделе рассматриваются модели взаимного страхования, в которых агенты – участники системы взаимного страхования – имеют иерархию представлений о вероятностях наступления страховых случаев для каждого из них.

Рассмотрим объединение из n страхователей (которое в модели взаимного страхования будем считать страховщиком) – агентов, имеющих целевые функции (определяемые ожидаемыми полезностями)

$$(1) \quad Ef_i = g_i - r_i + p_i [h_i - Q_i], \quad i \in N,$$

где g_i отражает детерминированную прибыль от хозяйственной деятельности i -го страхователя; r_i – страховой взнос; h_i – страховое возмещение; p_i – вероятность наступления страхового случая (будем считать, что страховые случаи у различных агентов – независимые события); Q_i – потери при наступлении страхового слу-

чая, $N = \{1, 2, \dots, n\}$ – множество страхователей. Для простоты ограничимся описанием взаимодействия страхователей в течение одного промежутка времени, на протяжении которого однократно производится сбор взносов и компенсация ущерба.

В соответствии с (1) предполагается, что все страхователи одинаково относятся к риску, но в общем случае различаются вероятностями наступления страхового случая и соответствующими потерями. Известно (см. [12, 18] и др.), что перераспределение риска взаимовыгодно только для агентов, отличающихся отношением к риску. Поэтому, с одной стороны, можно считать, что все страхователи нейтральны к риску, а с другой стороны, что основными эффектами, требующими исследования в рассматриваемой модели взаимного страхования, являются рефлексия страхователей и неполная их информированность – так как все страхователи одинаково относятся к риску, то при условии, что все они обладают полной информацией друг о друге, допустимо произвольное его перераспределение между ними; если же информированность неполная или отсутствует общее знание, то возможно нарушение требования сбалансированности взносов и ожидаемых выплат.

В условиях полной информированности суммарный страховой взнос равен $R = \sum_{i \in N} r_i$, а ожидаемое страховое возмещение равно

$$H = \sum_{i \in N} p_i h_i. \text{ Так как рассматривается взаимное (некоммерческое)}$$

страхование, то в силу принципа эквивалентности [12] должно иметь место $R = H$, то есть

$$(2) \quad \sum_{i \in N} r_i = \sum_{i \in N} p_i h_i.$$

Отметим, что условие (2) отражает равенство суммарного страхового взноса математическому ожиданию выплат, т.е. задачи о разорении фонда взаимного страхования не рассматриваются.

Если осуществляется полное возмещение ущерба (предположение о неполном возмещении ущерба, т.е. априорная фиксация предполагаемого уровня страхового возмещения, не изменит качественно основных результатов анализа механизмов взаимного страхования) при наступлении страхового случая ($h_i = Q_i$, $i \in N$, $H = \sum_{i \in N} p_i Q_i$), то в условиях полной информированности можно

было бы использовать следующий механизм взаимного страхования:

$$(3) \quad r_i = p_i Q_i, \quad i \in N,$$

в рамках которого страховой взнос каждого страхователя в точности равен его ожидаемому ущербу (страховая сумма совпадает с потерями, а страховой тариф, равный нетто-ставке, определяется соответствующей вероятностью наступления страхового случая).

Однако, если индивидуальные параметры страхователей известны только им самим (и не наблюдаются другими страхователями), то использование механизма (3) невозможно. Поэтому рассмотрим две альтернативы. Первая – сообщение страхователями информации о вероятностях наступления страховых случаев [12]. Вторая – анализ механизма взаимного страхования, удовлетворяющего системе взаимных представлений агентов о существенных параметрах.

Механизмы с сообщением информации. Если оценки $\{s_i\}$ вероятностей наступления страховых случаев могут сообщаться страхователями друг другу, то все страхователи будут стремиться занижить вероятности наступления страхового случая, следовательно, одним из равновесий будет сообщение минимальных оценок. Поэтому рассмотрим несколько альтернативных механизмов взаимного страхования.

Обозначим $s = (s_1, s_2, \dots, s_n)$ – вектор сообщений агентов. Пусть в страховом договоре оговаривается, что страховой взнос каждого страхователя определяется сообщенными оценками вероятностей наступления страхового случая, то есть $r_i(s_i) = s_i Q_i$, а после наступления страховых случаев возмещение осуществляется пропорционально собранному страховому фонду $R(s) = \sum_{i \in N} r_i(s)$,

то есть

$$(4) \quad h_i(s) = \alpha(s) Q_i, \quad i \in N,$$

где $\alpha(s)$ – единая доля страхового возмещения (отношение страхового возмещения $h_i(s)$ к страховой сумме Q_i), определяемая исходя из соотношения между страховым фондом $R(s)$ и необходимым объемом страхового возмещения H . Выбор зависимости $\alpha(\cdot)$ является стратегией управления.

Подставляя (4) в (1), получаем, что условие выгодности участия во взаимном страховании для i -го страхователя можно записать в виде:

$$(5) \quad s_i \leq \alpha(s) p_i, \quad i \in N.$$

Если используется следующая стратегия управления:

$$(6) \quad \alpha(s) = \min \{R(s) / H; 1\},$$

то получаем, что балансовое условие (2) выполнено всегда, а из (5) следует, что сообщение страхователя не превышает истинного значения вероятности наступления страхового случая: $s_i \leq \alpha(s) p_i$, $i \in N$.

Подставляя (4) и (6) в (1) и вычисляя производную по s_i , получим, что механизм (6) является манипулируемым, то есть сообщение достоверной информации невыгодно страхователям. Содержательно, каждый из страхователей стремится занижить вероятность наступления страхового случая, так как данное занижение сильнее уменьшает размер страхового взноса, чем долю страхового возмещения.

Альтернативой для (5) является использование следующего механизма взаимного страхования. Пусть страхователи заключают договор, в котором оговаривается, что в начале рассматриваемого периода они должны сообщить оценки вероятностей наступления страхового случая (страховые взносы в начале периода не собираются!), а затем в конце рассматриваемого периода (когда реализовались страховые случаи) они полностью компенсируют «пострадавшим» ущерб, а размер взноса каждого из страхователей определяется на основании сообщенных в начале периода оценок. Ожидаемое возмещение при этом равно $H = \sum_{i \in N} p_i Q_i$, следовательно,

сумма взносов должна равняться H , то есть

$$(7) \quad \sum_{i \in N} r_i(s) = H,$$

где зависимости $r_i(\cdot)$ являются механизмом управления. Ожидаемое значение целевой функции страхователя имеет вид:

$$(8) \quad Ef_i = g_i - r_i(s), \quad i \in N,$$

а условие выгодности участия во взаимном страховании:

$$(9) \quad r_i(s) \leq p_i Q_i, \quad i \in N.$$

Если выбрать следующий механизм управления, при котором взнос каждого страхователя пропорционален сообщенному им ожидаемому ущербу:

$$(10) \quad r_i(s) = \frac{s_i Q_i}{\sum_{i \in N} s_i Q_i} H, \quad i \in N,$$

то максимум (8) достигается при минимальных сообщениях, то есть механизм (10) также является манипулируемым.

Анализ условий (9)-(10) подсказывает, что для того чтобы уменьшить искажение информации, следует выбрать такой механизм управления, в котором размер страхового взноса убывал бы с ростом заявки страхователя. Примером может служить механизм

$$(11) \quad r_i(s) = \frac{1/s_i}{\sum_{i \in N} (1/s_i)} H, \quad i \in N.$$

Подставляя (11) в (8), получаем, что механизм (11) не побуждает страхователей занижать заявки, но он и не обеспечивает сообщения достоверной информации.

Таким образом, каждый из механизмов (10) и (11) обладает своими преимуществами: механизм (10) сбалансирован и обеспечивает выполнение условия (7), но при его использовании страхователи занижают заявки; а механизм (11) побуждает страхователей завышать заявки, но не обеспечивает «сбалансированности» в смысле (7). Для того чтобы построить механизм, который одновременно обладал бы всеми этими привлекательными свойствами, наверное, следует пытаться добиться рационального баланса между возрастанием и убыванием целевой функции страхователя по его сообщению. Однако для взаимного страхования такой баланс невозможен по следующим причинам. Взаимное страхование, в силу своей некоммерческой направленности, является с точки зрения страхователей «игрой с нулевой суммой» (из условия (2) следует, что суммарные взносы должны быть равны ожидаемому суммарному возмещению), поэтому занижение страхового взноса одним из страхователей приводит к тому, что это занижение компенсируется всеми страхователями (в том числе и искажившим информацию, но в меньшей пропорции – см. (10) или (11)). Поэтому для «борьбы» с искажением информации необходимо привлечение дополнительных ресурсов, зависимость объема которых от

сообщений страхователей должна побуждать их к сообщению достоверной информации. Примером таких ресурсов могут служить ресурсы третьих (по отношению к рассматриваемым выше участникам страхового контракта) лиц, используемые в смешанном страховании, анализ которого проведен в работе [1].

Рефлексивная модель. Рассмотрим ситуацию, когда координирующий орган (центр) обладает некоторой информацией о потерях от страховых случаев $\{\tilde{Q}_i\}$ и вероятностях их наступления $\{\tilde{p}_i\}$, причем величины $\{\tilde{Q}_i\}$ и $\{\tilde{p}_i\}$ являются общим знанием (при этом не обязательно $\tilde{Q}_i = Q_i$ и $\tilde{p}_i = p_i$). Каждый страхователь сообщает центру свой взнос s_i либо отказывается от страхования. Если все страхователи сообщают свои взносы, центр проверяет, выполняется ли соотношение

$$(12) \quad \sum_{i \in N} s_i \geq H = \sum_{i \in N} \tilde{p}_i \tilde{Q}_i.$$

Если (12) выполнено, заключается договор о взаимном страховании. Если хотя бы один страхователь отказался либо неравенство (12) не выполнено, договор не заключается.

В описанной ситуации целевая функция i -го страхователя имеет следующий вид:

$$f_i(p_i, s_i, \dots, s_n) = \begin{cases} p_i \tilde{Q}_i - s_i, & \sum_{i \in N} s_i \geq H, \\ -\varepsilon_i, & \sum_{i \in N} s_i < H, \end{cases}$$

где ε_i – произвольная положительная константа (организационные затраты в случае, если договор о страховании не будет заключен). Будем также считать, что в случае отказа страхователя от участия он получает нулевой выигрыш.

Информация участников игры описывается их представлениями о параметрах p_i – вероятностях наступления страховых случаев. Обозначим за p_{ij} – представления i -го агента (страхователя) о значении p_j , p_{ijk} – представления i -го агента о представлениях j -го агента о значении p_k , и т. д., $i, j, k \in N$. В совокупности эти представления образуют структуру информированности.

Информационные равновесия в этой рефлексивной игре страхователей описываются следующим утверждением (напомним, что

за Σ обозначено множество всевозможных конечных последовательностей индексов из N , в том числе пустая последовательность).

Утверждение 31. Пусть страхователи обладают структурой информированности конечной сложности. Набор действий $s_{\sigma i}^*$, $\sigma \in \Sigma$, $i \in N$, является информационным равновесием (и договор о взаимном страховании будет заключен), если и только если условия

$$\sum_{j \in N} s_j^* = H, \quad \forall i \in N \quad s_i^* \leq p_i \tilde{Q}_i$$

являются общим знанием. Последнее означает по определению, что для любого $\sigma \in \Sigma$ выполнено

$$(13) \quad \forall i \in N \quad \sum_{j \in N} s_{\sigma ij}^* = H, \quad s_{\sigma i}^* \leq p_{\sigma i} \tilde{Q}_i.$$

Доказательство. Пусть набор действий $s_{\sigma i}^*$, $\sigma \in \Sigma$, $i \in N$, является информационным равновесием (и договор о взаимном страховании будет заключен). Зафиксируем произвольные значения $\sigma \in \Sigma$ и $i \in N$. Действие $s_{\sigma i}^*$ максимизирует по $s_{\sigma i}$ целевую функцию σi -агента $f_i(p_{\sigma i}, s_{\sigma i1}^*, \dots, s_{\sigma i, i-1}^*, s_{\sigma i}, s_{\sigma i, i+1}^*, \dots, s_{\sigma i1}^*)$. Поэтому он выбрал минимальное действие, при котором выполняется условие $\sum_{j \in N} s_{\sigma ij}^* \geq H$; очевидно, при этом неравенство обращается в равенство. Целевая функция должна принимать неотрицательное значение (иначе σi -агенту лучше было бы отказаться от участия в договоре), откуда получаем условие $p_{\sigma i} \tilde{Q}_i - s_{\sigma i}^* \geq 0$.

Далее, пусть для любого $\sigma \in \Sigma$ выполнено (13). Тогда каждое действие $s_{\sigma i}^*$ максимизирует целевую функцию σi -агента $f_i(p_{\sigma i}, s_{\sigma i1}^*, \dots, s_{\sigma i, i-1}^*, s_{\sigma i}, s_{\sigma i, i+1}^*, \dots, s_{\sigma i1}^*)$. Поэтому набор действий $s_{\sigma i}^*$, $\sigma \in \Sigma$, $i \in N$, является информационным равновесием. •

Отметим, что если хотя бы один реальный или фантомный (существующий в чьих-то представлениях) агент откажется от участия, то договор не будет заключен. При этом отказ всех агентов формально также будет равновесием – отсюда необходимость оговорки в скобках в формулировке утверждения 31.

Ранги рефлексии страхователей и равновесия. Рассмотрим вопрос о том, насколько сложными должны быть субъективные представления страхователя, чтобы были достижимы все возможные информационные равновесия. В работе [81] эта задача была названа задачей о нахождении максимального целесообразного ранга рефлексии. Следующее утверждение показывает, что в данном случае этот ранг равен единице.

Утверждение 32. Все возможные действия i -го реального агента, $i \in N$, в рефлексивной игре страхователей достигаются в рамках его субъективного общего знания о наборе $(p_1, \dots, p_n)$, т. е. в рамках структуры информированности, для которой $\forall \sigma \in \Sigma \forall j \in N \ p_{i\sigma j} = p_{ij}$.

Доказательство. Для действия, состоящего в неучастии агента, утверждение очевидно (достаточно объявить в качестве общего знания $p_{ij} = 0$ для всех $j \in N$).

Далее будем рассматривать ситуацию с точки зрения i -го агента, $i \in N$. Пусть его действие s_i^* субъективно является равновесным в некотором равновесии $s_{i\sigma j}^*$, $\sigma \in \Sigma$, $j \in N$. Тогда, согласно утверждению 31, для всех $j \in N$ выполняются соотношения $\sum_{j \in N} s_{ij}^* = H$, $0 \leq s_{ij}^* \leq \tilde{Q}_j$.

Положим $p_{i\sigma j} = 1$ для всех $\sigma \in \Sigma$, $j \in N$ (т. е. сформируем структуру информированности, при которой с точки зрения i -го агента имеет место общее знание). Тогда, как нетрудно видеть, для набора действий $w_{i\sigma j}^* = s_{ij}^*$ субъективно (с точки зрения i -го агента) выполнено условие (13). Поэтому набор $w_{i\sigma j}^*$, $\sigma \in \Sigma$, $i, j \in N$, субъективно является информационным равновесием, причем действие i -го агента в этом равновесии совпадает с его действием в исходном равновесии $s_{i\sigma j}^*$. •

Таким образом, в настоящем разделе исследована модель взаимного страхования с информационной рефлексией страхователей. Описано множество информационных равновесий, в которых может состояться договор о страховании. Показано, что все равновесные действия страхователя достигаются в условиях субъективного общего знания страхователей друг о друге.

6.15. РЕКЛАМА ТОВАРА

В настоящем разделе рассматриваются модели информационного управления, осуществляемого средствами массовой информации (СМИ), на примере рекламы и предвыборных технологий.

1. Предположим, что имеется агент – объект информационного воздействия. Цель воздействия – сформировать у агента определенное отношение к конкретному объекту или субъекту.

В случае рекламы агентом является потребитель, а объектом – товар или услуга [114]. Требуется, чтобы потребитель приобрел данный товар или услугу.

В случае предвыборных технологий агентом является избиратель, а субъектом – кандидат. Требуется, чтобы избиратель проголосовал за данного кандидата [150].

Рассмотрим i -го агента. Всех остальных агентов объединим в одного, для обозначения которого будем использовать индекс j . Пусть $\theta \in \Omega$ – объективная характеристика объекта, неизвестная достоверно ни одному из агентов. В качестве характеристик могут выступать потребительские свойства товаров, качества кандидатов и т.д.

Обозначим $\theta_i \in \Omega$ – представления i -го агента об объекте, $\theta_{ij} \in \Omega$ – его представления о представлениях об объекте j -го агента, и т.д.

Предположим для простоты, во-первых, что множество возможных действий каждого агента состоит из двух действий: $X_i = X_j = \{a; r\}$, где действие a (accept) соответствует приобретению товара или услуги, голосованию за рассматриваемого кандидата и т.д., а действие r (reject) – отказу от приобретения товара или услуги, голосованию за других кандидатов и т.д. Во-вторых, предположим, что множество Ω состоит из двух элементов, характеризующих качества объекта – g (good) и b (bad), то есть $\Omega = \{g; b\}$.

Рассмотрим последовательно (в порядке усложнения) ряд моделей поведения агента.

Модель 0 (рефлексия отсутствует). Предположим, что поведение рассматриваемого агента описывается отображением $B_i(\cdot)$ множества Ω свойств объекта во множество X_i действий агента, то

есть $B_i: \Omega \rightarrow X_i$. Примером такого отображения может служить следующее: $B_i(g) = a$, $B_i(b) = r$, т.е. если агент считает, что товар (кандидат) хороший, то он его приобретает (отдает за него свой голос), и отвергает в противном случае.

В данной модели информационное управление заключается в формировании у агента представлений об объекте, приводящих к требуемому выбору. В рассматриваемом примере для того, чтобы агент приобрел товар (проголосовал за требуемого кандидата), необходимо сформировать у него следующие представления: $\theta_i = g$. (Напомним, что в настоящей работе технологии информационного воздействия (т.е. способы формирования требуемых представлений) не рассматриваются – см. их описание в [38, 114, 150].)

Модель 1 (первый ранг рефлексии). Предположим, что поведение рассматриваемого агента описывается отображением $B_i(\cdot)$ множеств $\Omega \ni \theta_i$ свойств объекта и $\Omega \ni \theta_{ij}$ – представлений агента о представлениях других агентов – во множество X_i его действий, то есть $B_i: \Omega \times \Omega \rightarrow X_i$. Примерами такого отображения могут служить следующие:

$$B_i(g, g) = a, \quad B_i(g, b) = a, \quad B_i(b, g) = r, \quad B_i(b, b) = r,$$

и

$$B_i(g, g) = a, \quad B_i(g, b) = r, \quad B_i(b, g) = a, \quad B_i(b, b) = r.$$

В первом случае агент ориентируется на собственное мнение, во втором – на мнение других агентов («общественное мнение»).

В данной модели информационное воздействие является рефлексивным управлением (см. раздел 4.2). Посредством него у агента формируются представления об объекте и о представлениях других агентов, приводящих к требуемому выбору. В рассматриваемом примере для того, чтобы агент приобрел товар (проголосовал за требуемого кандидата), необходимо в первом случае сформировать у него следующие представления: $\theta_i = g$, θ_{ij} – любое, а во втором случае – $\theta_{ij} = g$, θ_i – любое.

Следует подчеркнуть, что в информационном управлении посредством СМИ не всегда воздействие направлено на формирование непосредственно θ_{ij} – в большинстве случаев воздействие осуществляется косвенно – у агента формируются представления о поведении (выбираемых действиях) других агентов, по которым данный агент может восстановить их представления. Примерами

косвенного формирования представлений θ_{ij} могут служить рекламные лозунги «Новое поколение выбирает Pepsi», «В то время, когда все настоящие мужики ...», обращение к мнению авторитетных людей и т.д.; информация о том, что по опросам общественного мнения значительное число избирателей собирается поддержать данного кандидата и т.д.

Модель 2 (второй ранг рефлексии). Предположим, что поведение рассматриваемого агента описывается отображением $B_i(\cdot)$ множеств $\Omega \ni \theta_i$ свойств объекта, $\Omega \ni \theta_{ij}$ – представлений агента о представлениях других агентов и $\Omega \ni \theta_{iji}$ – представлений агента о представлениях других агентов о его собственных представлениях – во множество X_i его действий, т.е. $B_i: \Omega \times \Omega \times \Omega \rightarrow X_i$. Примером такого отображения, в котором проявляются отличные от нулевой и первой моделей свойства, может служить следующее:

$$\forall \theta \in \Omega \quad B_i(\theta, \theta, g) = a, \quad B_i(\theta, \theta, b) = r.$$

В данном случае агент следует своей «социальной роли» и производит выбор, которого от него ожидают другие агенты.

В рассматриваемой модели информационное воздействие является рефлексивным управлением и заключается в формировании у агента представлений о представлениях других агентов о его собственных представлениях, приводящих к требуемому выбору. В рассматриваемом примере для того, чтобы агент приобрел товар (проголосовал за требуемого кандидата), необходимо сформировать у него следующие представления: $\theta_{iji} = g$.

Следует подчеркнуть, что информационное воздействие не всегда направлено на формирование непосредственно θ_{iji} – в большинстве случаев воздействие осуществляется косвенно: у агента формируются представления о том, что другие агенты ожидают от него определенных действий. Речь идет о так называемом социальном влиянии, многочисленные примеры которого можно найти в учебниках по социальной психологии [38].

Примерами косвенного формирования представлений θ_{iji} могут служить лозунги «Ты записался добровольцем?», «А ты купил (сделал) ...?», «В Вашем положении (при Вашем статусе) ...?» и т.д.; информация о том, что по опросам общественного мнения большинство представителей социальной группы, к которой принадлежит (или с которой идентифицирует себя) агент, собирается поддержать данного кандидата и т.д.

Таким образом, мы рассмотрели простейшие модели информационного управления посредством СМИ, сформулированные в терминах рефлексивных моделей принятия решений и структур информированности. Во всех этих моделях ранг рефлексии не превышал двух (исключением является, наверное, очень редко встречающаяся на практике ситуация, когда информационное воздействие направлено на формирование сразу всей информационной структуры, например путем навязывания «общего знания» – «Голосуй сердцем!», «... – наш выбор!» и т.д.).

Представить себе реальные ситуации, в которых информационное воздействие направлено на более глубокие компоненты структуры информированности, затруднительно. Поэтому перспективным направлением дальнейших исследований является изучение формальных моделей информационного управления (и технологий этого управления) агентами, осуществляющими коллективное принятия решений в условиях взаимосвязанной информированности.

2. Предположим теперь, что имеется два типа агентов: агенты первого типа склонны приобретать товар независимо от его рекламы, агенты второго типа в отсутствии рекламы приобретать товар не склонны. Обозначим $\theta \in [0; 1]$ – долю агентов первого типа.

Агенты второго типа, доля которых есть $1 - \theta$, подвержены влиянию рекламы, но не осознают этого. Социальное влияние [38] отразим следующим образом: будем считать, что агенты второго типа с вероятностью $p(\theta)$ выбирают действие a и с вероятностью $1 - p(\theta)$ выбирают действие r . Зависимость $p(\cdot)$ – вероятности выбора – от доли агентов, склонных приобретать товар, отражает нежелание агентов быть «белыми воронами».

Если истинная доля θ агентов первого типа является общим знанием, то агенты ожидают, что именно θ агентов приобретут товар, а фактически наблюдают, что товар приобрели

$$(1) \quad x(\theta) = \theta + (1 - \theta) p(\theta)$$

агентов (напомним, что мы предположили, что влияние рекламы не осознается агентами). Так как $\forall \theta \in [0; 1] \quad \theta \leq x(\theta)$, то косвенное социальное влияние оказывается самоподтверждающим – «Смотрите, оказывается, склонны приобретать товар больше людей, чем мы считали!».

Проанализируем теперь асимметричную информированность. Так как агенты первого типа выбирают свои действия независимо, то можно считать их адекватно информированными как о параметре θ , так и о представлениях агентов второго типа.

Рассмотрим модель информационного регулирования, в которой центр, проводящий рекламную акцию, формирует у агентов второго типа представления θ_2 о значении параметра θ .

Сделав маленькое отступление, обсудим свойства функции $p(\theta)$. Будем считать, что $p(\cdot)$ – неубывающая на $[0; 1]$ функция, такая, что $p(0) = \varepsilon$, $p(1) = 1 - \gamma$, где ε и δ – константы, принадлежащие единичному отрезку, такие, что $\varepsilon \leq 1 - \delta$. Содержательно ε соответствует тому, что некоторые агенты второго типа «ошибаются» и, даже если считают, что все остальные агенты имеют второй тип, то приобретают товар. Константа δ характеризует в некотором смысле подверженность агентов влиянию – у агента второго типа имеется шанс быть самостоятельным и, даже если он считает, что все остальные агенты приобретут товар, отказаться от покупки. Частный случай $\varepsilon = 0$, $\delta = 1$ соответствует независимым агентам второго типа, отказывающимся от приобретения товара.

Так как агенты не подозревают о наличии манипуляции со стороны центра (см. принцип доверия в [78]), то они ожидают увидеть, что θ_2 агентов приобретут товар. Фактически же его приобретут

$$(2) \quad x(\theta, \theta_2) = \theta + (1 - \theta)p(\theta_2).$$

Если доход центра пропорционален доле агентов, приобретающих товар, а затраты на рекламу $c(\theta, \theta_2)$ являются неубывающей функцией θ_2 , то целевая функция центра (разность между доходом и затратами) в отсутствии рекламы равна (1), а в ее присутствии:

$$(3) \quad \Phi(\theta, \theta_2) = x(\theta, \theta_2) - c(\theta, \theta_2).$$

Следовательно, эффективность информационного регулирования можно определить как разность между (3) и (1), а задачу информационного регулирования записать в виде:

$$(4) \quad \Phi(\theta, \theta_2) - x(\theta) \rightarrow \max_{\theta_2}.$$

Обсудим теперь ограничения задачи (4). Первое ограничение: $\theta_2 \in [0; 1]$, точнее: $\theta_2 \geq \theta$.

Рассмотрим пример: пусть $p(\theta) = \sqrt{\theta}$, $c(\theta, \theta_2) = (\theta_2 - \theta) / 2 \sqrt{r}$, где $r > 0$ – размерная константа. Тогда задача (4) имеет вид:

$$(5) \quad (1 - \theta) (\sqrt{\theta_2} - \sqrt{\theta}) - (\theta_2 - \theta) / 2 \sqrt{r} \rightarrow \max_{\theta_2 \in [\theta; 1]}.$$

Решение задачи (5) имеет вид: $\theta_2(\theta) = \max \{ \theta; r(1 - \theta)^2 \}$, т.е. при $\theta \geq \frac{(2r+1) - \sqrt{4r+1}}{2r}$ информационное регулирование для центра не имеет смысла (затраты на рекламу не окупаются, так как достаточная доля агентов приобретает товар в отсутствие рекламы).

Наложим теперь дополнительно к $\theta_2 \in [\theta; 1]$ требование стабильности информационного регулирования, а именно, в предположении наблюдаемости доли агентов, приобретающих товар, будем считать, что агенты второго типа должны наблюдать значение доли агентов, приобретающих товар, не меньшее, чем им сообщил центр, то есть условие стабильности имеет вид:

$$x(\theta, \theta_2) \geq \theta_2.$$

Подставляя (2), получим:

$$(6) \quad \theta + (1 - \theta) p(\theta_2) \geq \theta_2.$$

Следовательно, оптимальным стабильным решением задачи информационного регулирования будет решение задачи максимизации (4) при ограничении (6).

В заключение настоящего раздела отметим, что в рассматриваемом примере любое информационное регулирование будет стабильным в смысле (6). Если же понимать под стабильностью полное совпадение ожидаемых и наблюдаемых агентами результатов (то есть потребовать выполнение (6) как равенства), то единственным стабильным информационным регулированием будет сообщение центра, что все агенты являются агентами первого типа, то есть $\theta_2 = 1$ (что чаще всего и имеет место в рекламе).

6.16. ПРЕДВЫБОРНАЯ БОРЬБА

Рассмотрим пример рефлексивного управления в предвыборной борьбе. Пусть имеются три кандидата – a , b и c , и выборы проводятся по принципу простого большинства (кандидату для победы достаточно получить поддержку половины избирателей плюс один голос). Если ни один из кандидатов не набрал большинства голосов, то состоится следующий тур с другими кандидатами, которых обозначим d . Допустим, что имеются три группы избирателей, доли которых составляют α_1 , α_2 и α_3 ($\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$). Предпочтения групп избирателей, являющиеся общим знанием, приведены в таблице 1.

Таблица 1

Предпочтения групп избирателей		
α_1	α_2	α_3
a	b	c
b	c	a
c	a	b
d	d	d

Вычислим для каждого попарного сравнения кандидатов число (долю) избирателей, считающих, что один кандидат лучше другого: $S_{ab} = \alpha_1 + \alpha_3$, $S_{ac} = \alpha_1$, $S_{ba} = \alpha_2$, $S_{bc} = \alpha_1 + \alpha_2$, $S_{ca} = \alpha_2 + \alpha_3$, $S_{cb} = \alpha_3$.

Рассмотрим игру избирателей, в которой множество стратегий каждого из них есть $A = \{a, b, c\}$. Предполагая, что вектор $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (1/3, 1/3, 1/3)$ является общим знанием, получаем, что множество равновесий Нэша составляют шесть векторов:

$$(a, a, a) \rightarrow a, \quad (b, b, b) \rightarrow b, \quad (c, c, c) \rightarrow c, \\ (a, b, a) \rightarrow a, \quad (a, c, c) \rightarrow c, \quad (b, b, c) \rightarrow b.$$

Рассмотрим теперь рефлексивную игру, считая, что активные действия по навязыванию структуры информированности второму и третьему агенту предпринимает первый агент, цель которого – «избрать» кандидата a . Пусть структура информированности соответствует графу рефлексивной игры, приведенному на рис. 45.

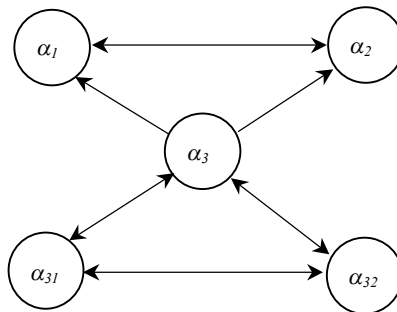


Рис. 45. Граф рефлексивной игры «Выборы»

Цель первой группы – во-первых, убедить третью группу, что наиболее предпочтительный с ее точки зрения кандидат c «не пройдет» (и это якобы является общим знанием), и следует поддерживать кандидата a . Для этого достаточно выполнения соотношений

$$\alpha_{32} + \alpha_3 < 1/2, \alpha_{31} + \alpha_3 > 1/2, \alpha_{31} + \alpha_3 + \alpha_{32} = 1.$$

Во-вторых, первой группе следует убедить вторую, что будет избран кандидат a и от ее действий ничего не зависит (поддерживать кандидата a вторая группа будет в последнюю очередь). Для этого достаточно, чтобы она была адекватно информирована о представлениях третьей группы (см. рис. 45).

Так как от второй группы исход выборов не зависит, то можно считать, что она проголосует за наиболее предпочтительного с ее точки зрения кандидата b , то есть информационным равновесием будет вектор (a, b, a) . Этот вектор является стабильным информационным равновесием. Более того, так как (a, b, a) – одно из равновесий Нэша в условиях полного знания (см. выше), то это – истинное равновесие (хотя представления третьей группы могут быть ложными).

6.17. КОНКУРС

Рассмотрим, следуя [17], следующий конкурсный механизм (аукцион). Пусть центр обладает R_0 единицами ресурса. Размер возможной заявки от каждого из агентов фиксирован и равен x_0 (для простоты будем считать, что $k = R_0 / x_0$ – целое число, меньшее

числа n агентов, участвующих в конкурсе – так называемая *гипотеза дефицитности*). Агенты сообщают центру цену $\{y_i\}$, по которой они готовы приобрести ресурс, затем центр упорядочивает агентов по убыванию предложенных цен и продает ресурс по заявленным ценам – сначала агенту, предложившему максимальную цену, затем – следующему за ним и т.д., пока не закончится весь ресурс.

Обозначим x_i – количество ресурса, получаемого i -м агентом, $i \in N$. Пусть $\varphi_i(x_i, r_i)$ – доход i -го агента от использования ресурса (возрастающая по x_i гладкая вогнутая функция, удовлетворяющая условию $\varphi_i(0, r_i) = 0$), где r_i – тип агента, характеризующий эффективность использования им ресурса, т.е. $\varphi_i(\cdot)$ возрастает по r_i , $i \in N$. Из условия индивидуальной рациональности (неотрицательности целевой функции)¹ $f_i(y, x_i, r_i) = \varphi_i(x_i, r_i) - y_i x_i$ получаем максимальную цену $p_i(r_i) = \varphi_i(x_0, r_i) / x_0$, которую готов заплатить i -й агент за получение «порции» x_0 ресурса, $i \in N$.

Упорядочим агентов по убыванию типов²: $r_1 \geq r_2 \geq \dots \geq r_n$. В силу введенных предположений упорядочение агентов по максимальным ценам будет такое же: $p_1 \geq p_2 \geq \dots \geq p_n$.

В условиях полной информированности равновесными будут следующие сообщения (так называемое аукционное решение):

$$y_i^*(r) = p_{k+1} + \delta, \quad i = \overline{1, k}, \quad y_i^*(r) = 0, \quad i = \overline{k+1, n},$$

где δ – сколь угодно маленькая строго положительная константа, то есть первые k агентов – победители аукциона – приобретут ресурс почти по цене первого проигравшего, а все проигравшие откажутся от участия в аукционе.

Эффективность аукциона с точки зрения агентов, определяемая отношением суммарного полученного ими эффекта к количеству распределенного ресурса, равна:

$$(1) \quad K(r, R_0) = \sum_{i=1}^k \varphi_i(x_0, r_i) / R_0.$$

¹ Отказываясь от участия в аукционе, агент всегда может обеспечить себе нулевое значение целевой функции.

² Будем считать, что если типы двух агентов совпадают, то существует правило, по которому они упорядочиваются.

Эффективность аукциона с точки зрения центра, определяемая отношением полученной им суммы к количеству распределенного ресурса, равна:

$$(2) \quad K_0(r, R_0) = p_{k+1} + \delta.$$

и не возрастает с ростом числа агентов.

В качестве отступления сравним эффективность аукциона с эффективностью *механизма внутренних цен* для случая

$$\varphi_i(x_i, r_i) = 2 \sqrt{r_i x_i} :$$

$$(3) \quad \lambda(s) = \sqrt{\frac{\sum_{i \in N} s_i}{R_0}},$$

$$(4) \quad x_i(s) = \frac{s_i}{\sum_{j \in N} s_j} R_0, j \in N,$$

в рамках которого центр устанавливает внутреннюю цену (3) за единицу ресурса, а целевые функции агентов имеют вид:

$$(5) \quad f_i(x_i, r_i) = \varphi_i(x_i, r_i) - \lambda x_i, \quad i \in N.$$

Для данного конкретного вида целевых функций агентов эффективности (1) и (2) примут вид:

$$(6) \quad K(r, R_0) = 2 \sum_{i=1}^k \sqrt{r_i} / \sqrt{k R_0},$$

$$(7) \quad K_0(r, R_0) = 2 \sqrt{\frac{(k+1)r_{k+1}}{R_0}},$$

где $R = \sum_{i \in N} r_i$.

По аналогии с (6) и (7) вычислим эффективности механизма внутренних цен:

$$(8) \quad K(r, R_0) = \sqrt{\frac{R}{R_0}},$$

$$(9) \quad K_0(r, R_0) = \sqrt{\frac{R}{R_0}}.$$

Сравнивая (6) с (8) и (7) с (9), получаем, что с точки зрения агентов эффективность конкурсного механизма выше по сравнению с эффективностью механизма внутренних цен, если:

$$(10) \quad \sum_{i \in N} r_i \leq 4(k+1)r_{k+1},$$

а с точки зрения центра, если:

$$(11) \quad \sum_{i=1}^k \sqrt{r_i/k} \geq \sqrt{\sum_{i \in N} r_i} / 2.$$

Вернемся к анализу аукционного механизма. Построенное аукционное решение будет реализовано, только если истинные значения типов всех агентов являются общим знанием. Рассмотрим, что произойдет в случае, когда агенты не имеют достоверной информации о типах друг друга.

Анализ информационного равновесия для рассматриваемой модели аукциона приведен в [78], поэтому сконцентрируем внимание на стабильности информационного равновесия. Исходом аукциона (при заданных R_0 и k) является множество победителей аукциона и цена p_{k+1} , по которой центр будет продавать агентам ресурс (см. выше). Следовательно, при заданном множестве $Q \subseteq N$ победителей и цене p стабильным будет любая совокупность представлений, во-первых, приводящая к тому, что агенты из множества Q являются первыми в упорядочении представлений о типах по убыванию, и, во-вторых, такая, что представления всех (реальных и фантомных) агентов о типе агента, занявшего $(k+1)$ -е место в этом упорядочении, равны p .

Нетрудно видеть, что все охарактеризованные информационные равновесия являются истинными: каковы бы ни были взаимные представления агентов, победители назначают цену p , а остальные отказываются от участия в конкурсе.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основе выполненного исследования автором выработан единый методологический подход и теоретические основы разработки и исследования моделей информационного управления в социально-экономических системах.

Основные результаты состоят в следующем:

- 1) сформулирована общая теоретико-игровая модель информационного управления как целенаправленного формирования у управляемых субъектов информационной структуры, предопределяющей желательные для управляющего органа действия;
- 2) разработана концепция информационной структуры, описывающей информированность субъектов о существенных параметрах ситуации и о представлениях оппонентов; определены и исследованы адекватность, взаимность, одинаковость информированности агентов, а также глубина и сложность структуры информированности;
- 3) для описания зависимости между информационной структурой и набором действий участников игры предложена концепция информационного равновесия, являющегося обобщением равновесия Нэша в некооперативных играх; сформулированы и доказаны достаточные условия существования информационного равновесия;
- 4) исследовано свойство стабильности информационного равновесия, при выполнении которого управляемые субъекты не меняют своих представлений в результате наблюдения результатов игры; выделен класс ложных информационных равновесий – ситуаций, в которых неадекватные взаимные представления агентов не меняются в результате взаимодействия;
- 5) показано, что ограниченность ранга рефлексии в определенном смысле является необходимым условием рационального принятия решения: если ранг бесконечен, любое допустимое действие является равновесным;
- 6) описаны и классифицированы способы осуществления центром информационного воздействия на агентов с целью формирования той или иной структуры информированности

- информационное регулирование, рефлексивное управление и активный прогноз;
- 7) на основании анализа рефлексивных отображений сформулированы условия, при выполнении которых нужный управляющему органу результат рефлексивной игры достигается посредством формирования структуры информированности управляемых субъектов, соответствующей не более чем второму рангу их рефлексии;
 - 8) исследовано свойство рефлексивной неманипулируемости механизмов планирования, состоящее в существовании таких подструктур информированности, что при любых типах управляемых субъектов сообщение ими достоверной информации является информационным равновесием;
 - 9) исследован ряд модельных прикладных задач информационного управления в области экономики, маркетинга, политики и т.д.

Таким образом, в настоящей работе рассмотрен ряд теоретико-игровых моделей информационного управления социально-экономическими системами. Проведенный анализ свидетельствует, что целенаправленное воздействие на информированность управляемых субъектов является эффективным средством управления, которое может и должно использоваться на практике наряду с такими «традиционными» типами управления, как институциональное и мотивационное.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Автономов В.С. Модель человека в экономической науке. СПб.: Экономическая школа, 1998. – 230 с.
- 2 Айзекс Р. Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967.
- 3 Айзерман М.А., Алескеров Ф.Т. Выбор вариантов: основы теории. М.: Наука, 1990. – 236 с.
- 4 Анисимов О.С. Методологическая культура педагогической деятельности и мышления. Москва, 1991. – 168 с.
- 5 Анисимов О.С. Методология: функции, сущность, становление. М.: РАГС, 1996. – 380 с.
- 6 Бестужев-Лада И.В. Окно в будущее. М.: Мысль, 1970. – 269 с.
- 7 Бондаревская Е.В., Кульневич С.В. Педагогика: личность в гуманистических теориях и системах воспитания. Ростов н/Д: Творческий центр «Учитель», 1999. – 560 с.
- 8 Бурков В.Н. Основы математической теории активных систем. М.: Наука, 1977. – 255 с.
- 9 Бурков В.Н., Данев Б., Еналеев А.К. и др. Большие системы: моделирование организационных механизмов. М.: Наука, 1989. – 245 с.
- 10 Бурков В.Н., Еналеев А.К., Новиков Д.А. Механизмы стимулирования в вероятностных моделях социально-экономических систем // Автоматика и Телемеханика. 1993. № 11. С. 3 – 30.
- 11 Бурков В.Н., Еналеев А.К., Новиков Д.А. Механизмы функционирования социально-экономических систем с сообщением информации // Автоматика и Телемеханика. 1996. № 3. С. 3 – 25.
- 12 Бурков В.Н., Заложнев А.Ю., Кулик О.С., Новиков Д.А. Механизмы страхования в социально-экономических системах. М.: ИПУ РАН, 2001.
- 13 Бурков В.Н., Заложнев А.Ю., Новиков Д.А. Теория графов в управлении организационными системами. М.: СИНТЕГ, 2001.
- 14 Бурков В.Н., Заложнев А.Ю., Новиков Д.А. Управление риском: механизмы взаимного и смешанного страхования // Автоматика и Телемеханика. 2001. № 10. С. 125 – 131.

- 15 Бурков В.Н., Ириков В.А. Модели и методы управления организационными системами. М.: Наука, 1994. – 270 с.
- 16 Бурков В.Н., Кондратьев В.В. Механизмы функционирования организационных систем. М.: Наука, 1981.
- 17 Бурков В.Н., Новиков Д.А. Как управлять организациями. М.: СИНТЕГ, 2003.
- 18 Бурков В.Н., Новиков Д.А. Как управлять проектами. М.: СИНТЕГ, 1997.
- 19 Бурков В.Н., Новиков Д.А. Теория активных систем: состояние и перспективы. М.: СИНТЕГ, 1999.
- 20 Васин А.А., Гурвич В.А. Коалиционные ситуации равновесия в метаиграх / Вестник МГУ. Вычислительная математика и кибернетика. 1980. № 3. С. 38 – 44.
- 21 Вилкас Э.Й. Оптимальность в играх и решениях. М.: Наука. 1990. – 256 с.
- 22 Вишнев С.М. Основы комплексного прогнозирования. М.: Наука, 1977. – 289 с.
- 23 Воронин А.А., Мишин С.П. Оптимальные иерархические структуры. М.: ИПУ РАН, 2003. – 210 с.
- 24 Выборнов Р.А., Чхартишвили А.Г. Активный прогноз как средство управления // Труды XLV научной конференции МФТИ. 29-30 ноября 2002 г., Долгопрудный: МФТИ, 2002, часть I – с. 61.
- 25 Выборнов Р.А., Чхартишвили А.Г. Рефлексивная модель коррупции // Современные сложные системы управления (HTCS'2004): Материалы IV международной конференции. – Тверь: ТГТУ, 2004. – С. 186–189.
- 26 Гвишиани Д., Лисичкин В. Прогностика. М.: Знание, 1968. – 112 с.
- 27 Гермейер Ю.Б. Игры с непротивоположными интересами. М.: Наука, 1976.
- 28 Гламаздин Е.С., Новиков Д.А., Цветков А.В. Механизмы управления корпоративными программами: информационные системы и математические модели. М.: Спутник+, 2003.
- 29 Горелик В.А., Горелов М.А., Кононенко А.Ф. Анализ конфликтных ситуаций в системах управления. М.: Радио и связь, 1991. – 288 с.
- 30 Горелик В.А., Кононенко А.Ф. Теоретико-игровые модели принятия решений в эколого-экономических системах. М.: Радио и связь, 1982. – 144 с.

31 Громыко Ю.В. Оргдеятельностные игры и развитие образования / Технология прорыва в будущее. М.: Независимый методологический университет, 1992. – 191 с.

32 Губко М.В. Механизмы управления организационными системами с коалиционным взаимодействием участников. М.: ИПУ РАН, 2003.

33 Губко М.В., Новиков Д.А. Теория игр в управлении организационными системами. М.: СИНТЕГ, 2002. – 148 с.

34 Данилов В.И. Лекции по теории игр. М.: Российская экономическая школа, 2002. – 140 с.

35 Ерешко Ф.И., Лохныгина Ю.В. Рефлексивные стратегии в системах управления / Труды Юбилейной международной научно-практической конференции «Теория активных систем». Общая редакция – В.Н.Бурков, Д.А.Новиков. М.: СИНТЕГ, 1999. С. 211 – 213.

36 Ерешко Ф.И., Лохныгина Ю.В. Исследование моделей рефлексивных стратегий в управляемых системах. М.: ВЦ РАН, 2001. – 37 с.

37 Ерешко Ф.И. Моделирование рефлексивных стратегий в управляемых системах. М.: ВЦ РАН, 2001. – 37 с.

38 Зимбардо Ф., Ляйппе М. Социальное влияние. СПб.: Питер, 2000.

39 Информационное общество: Информационные войны. Информационное управление. Информационная безопасность / Под ред. М.А. Вуса. СПб.: Издательство С.-Петербургского университета, 1999. – 212 с.

40 Казанцев С.Б., Чхартишвили А.Г. О достаточных условиях стационарности рефлексивных отображений // Труды XLVI научной конференции МФТИ. 28-29 ноября 2003 г., Долгопрудный: МФТИ, 2003, часть I – с. 83.

41 Караваев А.П. Модели и методы управления составом активных систем. М.: ИПУ РАН, 2003.

42 Ким Д.П. Методы поиска и преследования подвижных объектов. М.: Наука, 1989.

43 Козелецкий Ю. Психологическая теория решений. М.: Прогресс, 1979. – 504 с.

44 Кононенко А.Ф., Халезов А.Д., Чумаков В.В. Принятие решений в условиях неопределенности. М.: ВЦ АН СССР, 1991. – 197 с.

- 45 Коргин Н.А. Неманипулируемые механизмы обмена в активных системах. М.: ИПУ РАН, 2003.
- 46 Крылов В.Ю. Методологические и теоретические проблемы математической психологии. М.: Янус-К, 2000.
- 47 Кукушкин Н.С. Роль взаимной информированности сторон в играх двух лиц с непротивоположными интересами // ЖВМ и МФ. 1972. Т. 12. № 4. С. 1029 – 1034.
- 48 Кукушкин Н.С., Морозов В.В. Теория неантагонистических игр. М.: МГУ, 1984.
- 49 Кульба В.В., Малюгин В.Д., Шубин А.Н., Вус М.А. Введение в информационное управление. СПб.: Изд-во С.-Петербургского ун-та, 1999.
- 50 Лезина З.М. Манипулирование выбором вариантов: теория агенды // Автоматика и телемеханика. 1985. № 4. С. 5 – 22.
- 51 Лефевр В.А. Исходные идеи логики рефлексивных игр /Материалы конференции «Проблемы исследования систем и структур». М.: Издание АН СССР, 1965.
- 52 Лефевр В.А. Конфликтующие структуры. М.: Советское радио, 1973. – 158 с.
- 53 Лефевр В.А. Комический субъект. М.: Институт психологии РАН, 1997.
- 54 Лефевр В.А. Формула человека. Контуры фундаментальной психологии. М.: Прогресс, 1991. – 108 с.
- 55 Лефевр В.А. Алгебра совести. М.: «Когито-Центр», 2003. – 426 с.
- 56 Лефевр В.А. Рефлексия. М.: «Когито-Центр», 2003. – 496 с.
- 57 Лысаков А.В., Новиков Д.А., Чхартишвили А.Г. Рефлексивные модели переговоров / Раздел 6.2 в «Договорные отношения в управлении проектами». М.:ИПУ РАН, 2004. – С. 74–86.
- 58 Лысаков А.В., Чхартишвили А.Г. Рефлексивные модели переговоров // Системы управления и информационные технологии – 2003. – № 1-2(12). – С. 53-57.
- 59 Мазманова Б.Г. Основы теории и практики прогнозирования. Екатеринбург: ИПК УГТУ, 1998. – 128 с.
- 60 Майерс Д. Социальная психология. СПб.: Питер, 2001. – 752 с.
- 61 Малишевский А.В. Качественные модели в теории сложных систем. М.: Наука, 1998.

62 Martino Д. Технологическое прогнозирование. М.: Прогресс, 1977. – 591 с.

63 Мулен Э. Кооперативное принятие решений: аксиомы и модели. М.: Мир, 1991.

64 Найн А.Я. Рефлексивное управление образовательным учреждением. Шадринск: Исеть, 1999. – 328 с.

65 Нейман Дж. фон, Моргенштерн О. Теория игр и экономическое поведение. М.: Наука, 1970. – 708 с.

66 Новиков Д.А. Динамика поведения систем с большим числом целенаправленных элементов // Автоматика и Телемеханика. 1996. № 4. С. 187 – 189.

67 Новиков Д.А. Механизмы стимулирования в динамических и многоэлементных социально-экономических системах // Автоматика и Телемеханика. 1997. № 6. С. 3 – 26.

68 Новиков Д.А. Закономерности итеративного научения. М.: ИПУ РАН, 1998.

69 Новиков Д.А. Институциональное управление организационными системами. М.: ИПУ РАН, 2003.

70 Новиков Д.А. Механизмы функционирования многоуровневых организационных систем. М.: Фонд «Проблемы управления», 1999.

71 Новиков Д.А., Петраков С.Н. Курс теории активных систем. М.: СИНТЕГ, 1999.

72 Новиков Д.А. Сетевые структуры и организационные системы. М.: ИПУ РАН, 2003.

73 Новиков Д.А., Смирнов И.М., Шохина Т.Е. Механизмы управления динамическими активными системами. М.: ИПУ РАН, 2002.

74 Новиков Д.А. Стимулирование в организационных системах. М.: СИНТЕГ, 2003.

75 Новиков Д.А. Стимулирование в социально-экономических системах (базовые математические модели). М.: ИПУ РАН, 1998.

76 Новиков Д.А., Цветков А.В. Механизмы стимулирования в многоэлементных организационных системах. М.: Апостроф, 2000.

77 Новиков Д.А., Цветков А.В. Механизмы функционирования организационных систем с распределенным контролем. М.: ИПУ РАН, 2001.

78 Новиков Д.А., Чхартишвили А.Г. Активный прогноз. М.: ИПУ РАН, 2002.

79 Новиков Д.А., Чхартишвили А.Г. Математические модели информационного управления // Когнитивный анализ и управление развитием ситуаций (CASC'2002). Труды 2-ой Международной конференции в 2-х томах. Том 1 / Сост. В. И. Максимов. – М.: ИПУ РАН, 2002. – С. 13–20.

80 Новиков Д.А., Чхартишвили А.Г. Стабилизация информационного управления активными системами // Труды II Международной конференции «Идентификация систем и задачи управления» SICPRO '03. Москва 29-31 января 2003 г. Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН. – М.: ИПУ РАН, 2003. – С. 1180-1183.

81 Новиков Д.А., Чхартишвили А.Г. Рефлексивные игры. М.: СИНТЕГ, 2003.

82 Новиков Д.А., Чхартишвили А.Г. Рефлексивные игры: математическое моделирование // Рефлексивные процессы и управление. Тезисы IV международного симпозиума 7-9 октября 2003 г., Москва. – М.: Изд-во «Институт психологии РАН», 2003. – С. 108-111.

83 Новиков Д.А., Чхартишвили А.Г. Информационное равновесие: точечные структуры информированности // Автоматика и Телемеханика – 2003. – № 10. – С. 111–122.

84 Новиков Д.А., Чхартишвили А.Г. СМИ и информационное управление // Современные сложные системы управления (СССУ/HTCS'2003): Сборник трудов научно-практической конференции – Воронеж, ВГАСУ – Т. 2. – 2003. – С. 383–385.

85 Новиков Д.А., Чхартишвили А.Г. Нелинейные рефлексивные отображения // Труды Международной научно-практической конференции «Нелинейная динамика технологических процессов и систем». Липецк: ЛГТУ, 22-24 декабря 2003 года. С. 31-37.

86 Новиков Д.А., Чхартишвили А.Г. Роль информированности агентов / Раздел 5.4 в «Институциональное управление организационными системами». М.:ИПУ РАН, 2004. – С. 40–54.

87 Новиков Д.А., Чхартишвили А.Г. Пример управления нормами деятельности / Раздел 5.5 в «Институциональное управление организационными системами». М.:ИПУ РАН, 2004. – С. 54–61.

88 Новиков Д.А., Чхартишвили А.Г. Модель формирования команды // Информационная экономика и управление динамикой сложных систем: Сборник научных трудов. М.: Изд-во «Бизнес-Юнитек», 2004. – С. 26-39.

89 Новиков Д.А., Чхартишвили А.Г. Рефлексия и ее математическое моделирование // Информационная экономика и управление динамикой сложных систем: Сборник научных трудов / Под ред. Е.Ю. Иванова, Р.М. Нижегородцева. Москва-Барнаул: Изд-во «Бизнес-Юнитек», 2004. – С. 281-284.

90 Овчинникова Т.И., Чхартишвили А.Г. Рефлексивные модели страхования / Управление большими системами. Сборник трудов. Выпуск 6. М.: ИПУ РАН, 2004. – С. 96–104.

91 Олейник А.Н. Институциональная экономика. – М.: ИНФРА-М, 2000. – 416 с.

92 Опойцев В.И. Равновесие и устойчивость в моделях коллективного поведения. М.: Наука, 1977.

93 Оуэн Г. Теория игр. М.: Мир, 1971. – 230 с.

94 Петраков С.Н. Механизмы планирования в активных системах: неманипулируемость и множества диктаторства. М.: ИПУ РАН, 2001.

95 Петросян Л.А., Гарнаев А.Ю. Игры поиска. СПб., Изд-во С.-Пб. ун-та, 1992.

96 Петросян Л.А., Зенкевич Н.А., Семина Е.А. Теория игр. М.: Высшая школа, 1998. – 304 с.

97 Пиндайк Р., Рубинфельд Д. Микроэкономика. М.: Дело, 2001 – 808 с.

98 Поппер К. Нищета историзма. М., 1993.

99 Прогностика. Терминология. М., 1990.

100 Рабочая книга по прогнозированию / Под ред. И.В. Бестужева-Лады. М., 1982.

101 Расторгуев С.П. Философия информационной войны. М.: Вузовская книга, 2001. – 468 с.

102 Рефлексивное управление / Сборник статей Международного симпозиума. М.: Институт психологии РАН. 17-19 октября. 2000 г. – 192 с.

103 Рефлексивные процессы / спецвыпуск журнала «Прикладная эргономика». 1994. № 1.

- 104 Рефлексивные процессы и управление / Тезисы III Международного симпозиума 8-10 октября 2001 г., М.: ИП РАН, 2001. – 242 с.
- 105 Рудык Н.Б. Поведенческие финансы или между страхом и алчностью. М.: Дело, 2004, – 272 с.
- 106 Саймон Г. Науки об искусственном. М.: Мир, 1972. – 147 с.
- 107 Саркисян С.А., Голованов Л.В. Прогнозирование развития больших систем. М.: Статистика, 1975. – 192 с.
- 108 Сидельников Ю.В. Теория и практика экспертного прогнозирования. М.: ИМЭМО РАН, 1990. – 195 с.
- 109 Симонов К.В. Политический анализ. – М.: Логос, 2002. – 152 с.
- 110 Сластенин В.А., Подымова Л.С. Педагогика: инновационная деятельность. М.: Магистр, 1997. – 224 с.
- 111 Советский Энциклопедический словарь. М.: Советская энциклопедия, 1988. – 1599 с.
- 112 Сорос Д. Алхимия финансов. М.: ИНФРА-М, 1999. – 416 с.
- 113 Статистическое моделирование и прогнозирование / Под ред. А.Г. Гранберга. М.: Финансы и статистика, 1990. – 383 с.
- 114 Сэндидж Ч., Фрайбургер В., Ротцолл К. Реклама: теория и практика. М.: Прогресс, 1989.
- 115 Таран Т.А. Логические модели рефлексивного выбора // Автоматика и Телемеханика. 2001. № 10. С. 103 – 117.
- 116 Твисс Б. Прогнозирование для технологов и инженеров. М.: 2000. – 255 с.
- 117 Тейл Г. Прикладное экономическое прогнозирование. М.: Прогресс. 1970. – 509 с.
- 118 Тейл Г. Экономические прогнозы и принятие решений. М.: Статистика, 1971. – 488 с.
- 119 Тырсигов Д.В. Методика развития интеллектуальной рефлексии у школьников. Ставрополь: ИРО, 1999. – 32 с.
- 120 Тюков А.А. Рефлексия в науке и в обучении. Новосибирск: НГУ, 1984. – 124 с.
- 121 Харшаньи Д., Зельтен Р. Общая теория выбора равновесия в играх. СПб.: Экономическая школа, 2001. – 405 с.

122 Чалдини Р. Психология влияния. СПб.: Питер, 2001. – 288 с.

123 Чхартишвили А.Г. Об одном геометрическом свойстве следящей области в задачах поиска // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. – 1992. – № 3. – С. 7–10.

124 Чхартишвили А.Г. О траекториях уклонения на плоскости // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика. Механика. 2000. № 3. – С. 64–66.

125 Чхартишвили А.Г. Стабильное информационное управление // Современные сложные системы управления СССР/НТСС'2002: Сборник трудов международной научно-технической конференции. – Липецк, 2002. – С. 115–117.

126 Чхартишвили А.Г. Моделирование информационного управления // Современные сложные системы управления СССР/НТСС'2002: Сборник трудов международной научно-технической конференции. – Старый Оскол, 2002. – С. 130.

127 Чхартишвили А.Г. О некоторых аспектах информационного управления социально-экономическими системами // Проблемы управления безопасностью сложных систем: Труды X международной конференции. Москва, декабрь 2002 г. Часть 1. – М.: РГГУ–Издательский дом МПА-Пресс, 2002. – С. 94–96.

128 Чхартишвили А.Г. Информационное равновесие / Управление большими системами. Сборник трудов молодых ученых. Выпуск 3. М.: ИПУ РАН, 2003. С. 100 – 119.

129 Чхартишвили А.Г. Рефлексивные игры и информационное равновесие в активных системах // Современные сложные системы управления (СССУ/НТСС'2003): Сборник трудов научно-практической конференции – Воронеж, ВГАСУ – Т. 1. – 2003. – С. 21–25.

130 Чхартишвили А.Г. Информационная и стратегическая рефлексия в интерактивном принятии решений // Вторая международная конференция по проблемам управления (17–19 июня 2003 г.): Тезисы докладов в двух томах. Т. 1. – М.: ИПУ, 2003. – С. 113.

131 Чхартишвили А.Г. Моделирование информационной рефлексии в активных системах // Теория активных систем / Труды международной научно-практической конференции. (17–19 ноября 2003 г., Москва, Россия). Т. 1. – М.: ИПУ РАН, 2003. – С. 80–82.

132 Чхартишвили А.Г. Структуры информированности бесконечной глубины и равновесие Байеса–Нэша // Когнитивный анализ и управление развитием ситуаций (CASC'2002). Труды 3-й Международной конференции в 2-х томах. Том 2. – М.: ИПУ РАН, 2003. – С. 109–115.

133 Чхартишвили А.Г. Информационная рефлексия и ее влияние на безопасность функционирования социально-экономических систем / Труды международной научно-практической конференции «Проблемы управления безопасностью сложных систем». М.: ИПУ РАН, 2003. Часть 1. С. 183–185.

134 Чхартишвили А.Г. Равновесие Байеса–Нэша: точечные структуры информированности бесконечной глубины // Автоматика и Телемеханика – 2003. – № 12.

135 Чхартишвили А.Г. Об одной рефлексивной игре поиска / Управление большими системами. Сборник трудов. Выпуск 5. М.: ИПУ РАН, 2003. – С. 123 – 128.

136 Чхартишвили А.Г. Информационное управление и принятие решений // Современные проблемы информатизации в промышленности и экономике: Сб. трудов. Вып. 9. Воронеж: Изд-во «Научная книга», 2004. – С. 51–52.

137 Чхартишвили А.Г. Рефлексивная игра «аккордная оплата труда» / Управление большими системами. Сборник трудов. Выпуск 6. М.: ИПУ РАН, 2004. – С. 143–149.

138 Чхартишвили А.Г. Стабильное информационное равновесие // Современные сложные системы управления (HTCS'2004): Материалы IV международной конференции. – Тверь: ТГТУ, 2004. – С. 477–479.

139 Чхартишвили А.Г. Рефлексия в художественных произведениях // Современные сложные системы управления (HTCS'2004): Материалы V международной конференции. – Краснодар, 2004. – С. 26–29.

140 Чхартишвили А.Г., Шикин Е.В. Метод следящих областей в задачах поиска // Математический сборник. – 1993. – Т. 184, № 10. – С. 107–134.

141 Чхартишвили А.Г., Шикин Е.В. Динамические задачи поиска и обнаружения на некоторых замкнутых поверхностях // Дифференциальные уравнения. – 1993. – Т. 29, № 11. – С. 1948–1957.

142 Чхартишвили А.Г., Шикин Е.В. Следящая область в пространстве Лобачевского // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. – 1994. – № 2. – С. 36–41.

143 Чхартишвили А.Г., Шикин Е.В. Об одном геометрическом подходе к решению динамических игр поиска // Дифференциальные уравнения. – 1994. – Т. 30, № 6. – С. 1097–1098.

144 Чхартишвили А.Г., Шикин Е.В. О простых играх поиска на бесконечном круглом цилиндре // Математические заметки. – 1995. – Т. 58, № 5. – С. 762–772.

145 Чхартишвили А.Г., Шикин Е.В. Динамический поиск объектов. Геометрический взгляд на проблему // Фундаментальная и прикладная математика. – 1995. – Т. 1, Вып. 4. – С. 827–862.

146 Чхартишвили А.Г., Шикин Е.В. Геометрия поисковых задач с информационной дискриминацией // ВИНТИ, серия «Современная математика и приложения. Тематические обзоры». 1996. Т. 32. Динамические системы.

147 Чхартишвили А.Г., Шикин Е.В. О математических курсах в ИГУиСИ // Вестник Московского университета. Серия 18. Социология и политология. – 1997. – № 1. – С. 69–74.

148 Чхартишвили А.Г., Шикин Е.В. Математические методы в управлении. – М.: УГЛ, 1997 г.

149 Чхартишвили А.Г., Шикин Е.В. Математические методы и модели в управлении. – М.: УГЛ, 1997 г.

150 Шейнов В.П. Скрытое управление человеком (психология манипулирования). М.: ООО «Издательство АСТ», 2002. – 848 с.

151 Шеманов А.Ю. Самоидентификация на пороге «осевых времен» (к интерпретации модели рефлексии В. Лефевра) / От философии жизни к философии культуры. СПб., 2001. С. 137 – 158.

152 Шикин Е.В., Чхартишвили А.Г. Математические методы и модели в управлении. – М.: Дело, 2000 г. – 440 с.

153 Шикин Е.В., Чхартишвили А.Г. Математические методы и модели в управлении. – 2-е изд, испр. – М.: Дело, 2002 г. – 440 с.

154 Шикин Е.В., Чхартишвили А.Г. Математические методы и модели в управлении. – 3-е изд, испр. – (Сер. «Классический университетский учебник») – М.: Дело, 2004 г. – 440 с.

155 Шрейдер Ю.А. Человеческая рефлексия и две системы этического сознания. // Вопросы философии. 1990. № 7. С. 32 – 42.

- 156 Щедровицкий Г.П. Принципы и общая схема методологической организации системно-структурных исследований и разработок / Системные исследования. М., 1981. С. 193 – 227.
- 157 Эйрес Р. Научно-техническое прогнозирование и долгосрочное планирование. М.: Мир, 1971. – 295 с.
- 158 Ambroszkiewicz S. On the concepts of rationalizability in games // *Annals of Operations Research*. 2000. № 97. P. 55 – 68.
- 159 Aumann R.J. Agreeing to disagree // *The Annals of Statistics*. 1976. Vol. 4. № 6. P. 1236 – 1239.
- 160 Aumann R.J. Interactive epistemology I: Knowledge // *International Journal of Game theory*. 1999. № 28. P. 263 – 300.
- 161 Aumann R.J., Brandenburger A. Epistemic conditions for Nash equilibrium // *Econometrica*. 1995. Vol. 63. № 5. P. 1161 – 1180.
- 162 Bernheim D. Rationalizable strategic behavior // *Econometrica*. 1984. № 5. P. 1007 – 1028.
- 163 Dasgupta P., Hammond P., Maskin E. The implementation of social choice rules: some general results on incentive compatibility // *Review of Economic Studies*. 1979. Vol. 46. № 2. P. 185 – 216.
- 164 Fagin R., Halpern J., Moses Y., Vardi M.Y. Reasoning about knowledge. Cambridge: MIT Press, 1995.
- 165 Fagin R., Halpern J., Moses Y., Vardi M.Y. Common knowledge revisited // *Annals of Pure and Applied Logic*. 1999. Vol. 96. P. 89 – 105.
- 166 Fagin R., Halpern J., Vardi M.Y. A model-theoretic analysis of knowledge // *Journal of Assoc. Comput. Mach.* 1991. Vol. 38. № 2. P. 382 – 428.
- 167 Fudenberg D., Tirole J. Game theory. Cambridge: MIT Press, 1995. – 579 p.
- 168 Geanakoplos J. Common Knowledge / *Handbook of Game Theory*. Vol. 2. Amsterdam: Elsevier, 1994. P. 1438 – 1496.
- 169 Halpern J., Moses Y.O. Knowledge and common knowledge in a distributed environment // *Journal of Assoc. Comput. Mach.* 1990. Vol. 37. № 3. P. 549 – 587.
- 170 Harsanyi J. Games with incomplete information played by "Bayesian" players // *Management Science*. Part I: 1967. Vol. 14. № 3. P. 159 – 182. Part II: 1968. Vol. 14. № 5. P. 320 – 334. Part III: 1968. Vol. 14. № 7. P. 486 – 502.

171 Hart O.D., Holmstrom B. Theory of contracts // Advances in economic theory. 5-th World Congress. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1987. P. 71 – 155.

172 Howard N. Theory of meta-games / General systems. 1966. № 11. P. 187 – 200.

173 Howard N. “General” metagames: an extension of the meta-game concept / Game theory as a theory of conflict resolution. Dordrecht: Reidel, 1974. P. 258 – 280.

174 Jenkins G.M. Some practical aspects of forecasting in organizations // Journal of forecasting. 1982. Vol. 1. P. 3 – 21.

175 Lewis D. Convention: a philosophical study. Cambridge: Harvard University Press, 1969.

176 Mas-Colell A., Whinston M.D., Green J.R. Microeconomic theory. N.Y.: Oxford Univ. Press, 1995.

177 Mertens J.-F., Zamir S. Formulation of Bayesian analysis for games with incomplete information // Int. J. Game Theory. 1985. № 14. P. 1 – 29.

178 Morris S. Approximate common knowledge revisited // International Journal of Game Theory. 1999. Vol. 28. P. 385 – 408.

179 Morris S., Shin S.S. Approximate common knowledge and coordination: recent lessons from game theory // Journal of Logic, Language and Information. 1997. Vol. 6. P. 171 – 190.

180 Myerson R.B. Game theory: analysis of conflict. London: Harvard Univ. Press, 2001. – 4th printing – 568 p.

181 Nash J.F. Non-cooperative games / Ann. Math. 1951. Vol. 54. P. 286 – 295.

182 Novikov D.A., Chkhartishvili A.G. Models of reflexive decision-making / Proceedings of 15th International Conference on Systems Science. Wroclaw, 2004. Volume 2. P. 295 – 306.

183 Pearce D.G. Rationalizable strategic behavior and the problem of perfection // Econometrica. 1984. № 5. 1029 – 1050.

184 Sakovics J. Games of incomplete information without common knowledge priors // Theory and decision. 2001. № 50. P. 347 – 366.

185 Schelling T.S. The Strategy of Conflict. Cambridge, Mass.: Harvard University Press/

186 Simon R.S. The difference of common knowledge of formulas as sets // International Journal of Game Theory. 1999. Vol. 28. P. 367 – 384.

Чхартишвили Александр Гедеванович

**Теоретико-игровые модели информационного
управления**

Редактор Т.Л. Коробкова

Подписано в печать 7.10.2004 Формат 60×90/16

Печать офсетная. Бумага офсетная № 1.

П. л. 14,5. Тираж 500 экз. Заказ

ЗАО «ПМСОФТ»
117909, Москва, 2-й Спасоналивковский пер., д. 6
www.pmssoft.ru

Отпечатано в ФГУП «Полиграфические ресурсы»