

**ЖОРДАНОВА
КЛАССИФИКАЦИЯ
КОНЕЧНОМЕРНЫХ
ЛИНЕЙНЫХ
ОПЕРАТОРОВ**

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
К НОВОМУ МЕТОДУ ПОСТРОЕНИЯ
ЖОРДАНОВОЙ БАЗЫ ДЛЯ
ЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРА**

1991



ГОСУДАРСТВЕННЫЙ КОМИТЕТ РСФСР ПО ДЕЛАМ НАУКИ И ВЫСШЕЙ ШКОЛЫ
НОВОСИБИРСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Механико-математический факультет

Кафедра алгебры и математической логики

ЖОРДАНОВА КЛАССИФИКАЦИЯ КОНЕЧНОМЕРНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Методические указания
к новому методу построения жордановой базы
для линейного оператора

Новосибирск
1991

Представлен с полными доказательствами и примерами новый простой способ построения жордановой базы для линейного оператора с известным спектром, в частности, способ отыскания баз подпространств собственных векторов.

Для преподавателей линейной алгебры и для студентов, изучающих её.

Автор-составитель

кандидат физико-математических наук, доцент В.А.Чуркин

Рецензент

доктор физико-математических наук, профессор В.Д.Мазуров

© Новосибирский государственный университет, 1991

ПРЕДИСЛОВИЕ

Теорема Жордана классифицирует с точностью до подобия квадратные матрицы или линейные операторы конечномерных векторных пространств при условии, что их характеристические числа содержатся в поле скаляров. Типичные применения связаны с геометризацией линейных операторов и решением систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Важна теорема Жордана и для теории матриц.

Известны различные доказательства теоремы Жордана ([1], приводящие к разным практическим рецептам отыскания жордановой базы для линейного оператора. Наиболее громоздкие опираются на теорию λ -матриц (см., например, [3], гл.13, [4], гл.1) или связаны с решением больших систем линейных уравнений ([2], с.71). Часто употребляется геометрический метод, основанный на вычислении ядер операторов ([6], задача 1529, [8], с.333-341) или на вычислении образов ([9], [5], с.153-162). Разработаны и двухэтапные способы ([1], [10], с.148-158), когда сначала стремятся триангулировать матрицу, а потом разными приемами привести к жордановой форме уже треугольную матрицу.

Цель этой работы - познакомить изучающих и преподающих линейную алгебру с новым способом отыскания жордановой базы линейного оператора. Основная идея - параллельное вычисление ядер и образов с помощью элементарных преобразований строк. Решение задачи, особенно в нильпотентном случае, сильно упрощается за счет параллельности и однородности вычислений. Наш метод легче запоминается и программируется.

Мы считаем известными вычисление ранга матрицы и базы линейной оболочки её векторов-строк посредством приведения матрицы к ступенчатому виду элементарными преобразованиями строк (метод исключения неизвестных в системе линейных уравнений по Гауссу). Предполагается знание первых понятий теории линейных операторов конечномерных пространств: матрица оператора в базисе, связь матриц оператора в разных базисах, определения характеристического многочлена, характеристических корней, собственных чисел и собственных векторов оператора, инвариантных подпространств и сужений оператора на них.

прямой умно подпространств. Поскольку нам привычно записывать текст по строкам слева направо, то здесь используется система записи "вектор-строка". В приложениях часто встречается система записи "вектор-столбец". Переход из одной системы в другую достигается с помощью транспонирования матриц. При этом порядок сомножителей в произведении меняется на противоположный.

Каждая тема ниже, кроме последней, разделена на лекционный материал и материал для практических занятий. По-новому доказана теорема о корневом разложении и теорема о существовании канонической базы для nilпотентного оператора. Алгоритмы из практической части основаны на изложенной ранее теории.

ОБРАЗ И ЯДРО

ТЕОРЕМ. Пусть φ — левый оператор в векторном пространстве V над полем K . Множества $V\varphi = \{\varphi v | v \in V\}$ и $\text{Ker } \varphi = \{v \in V | \varphi v = 0\}$ называются соответственно образом и ядром оператора φ . Легко проверить, что образ и ядро — линейные подпространства, поэтому каждое из них вполне задается выбором некоторой базы. Размерности образа и ядра называются соответственно рангом и дефектом оператора φ и обозначаются $r(\varphi)$, $d(\varphi)$.

ТЕОРЕМА 1. Сумма ранга и дефекта линейного оператора равна размерности пространства.

Доказательство. Пусть $u_1, \dots, u_r, \dots, u_n$ — база образа, $w_1, \dots, w_s$ — база ядра оператора φ . Достаточно доказать, что $u_1, \dots, u_r, w_1, \dots, w_s$ — база пространства V .

Линейная независимость. Пусть $\sum \alpha_i u_i + \sum \beta_j w_j = 0$, где α_i, β_j из K . Действуя на обе части этого равенства оператором φ , получим, что $\sum \alpha_i u_i = 0$. Но $u_1, \dots, u_r$ — база, значит, $\alpha_1 = \dots = \alpha_r = 0$ и, откуда, $\sum \beta_j w_j = 0$. Так как $w_1, \dots, w_s$ — база, то $\beta_1 = \dots = \beta_s = 0$.

Максимальность. Пусть v — произвольный вектор. Тогда из $v \in V\varphi$, $v\varphi = \sum \alpha_i u_i$ при некоторых α_i из K и $v - \sum \alpha_i u_i \in \text{Ker } \varphi$. Поскольку $v = \sum \beta_j w_j$, следовательно, $v = \sum \alpha_i u_i + \sum \beta_j w_j$.

Теорема доказана.

УПР. 1. Доказать, что $V = V\varphi \oplus \text{Ker } \varphi$ в том и только том случае, когда $V\varphi^2 = V\varphi$.

ПРАКТИКА. Укажем способ параллельного по троям баз образа и ядра из доказательства теоремы 1. Пусть оператор φ задан матрицей A в базе $e_1, \dots, e_n$, то есть, если $e_i \varphi = \sum a_{ij} e_j$, то $A = (a_{ij})$. Можно считать, что $V = K^n$, $e_1, \dots, e_n$ — строки единичной матрицы, $\varphi: x \rightarrow Ax$, $x \in K^n$.

Допишем слева от матрицы A единичную матрицу E . Полученную матрицу $(E|A)$ размера $n \times 2n$ элементарными преобразованиями длинных строк (короче — слов) приведем к виду $(B|C)$, где C — ступенчатая $n \times n$ -матрица. Тогда ненулевые строки $u_1, \dots, u_r$ матрицы C образуют базу образа, а все строки $w_1, \dots, w_s$ матрицы B , имеющие нулевое продолжение в матрице C , образуют базу ядра.

$$(E|A) \xrightarrow{\text{эл. пр.}} (B|C) = \left\{ \begin{array}{c|c} & \begin{array}{ccc} & \text{00} & \\ \hline & \text{0} & \dots & \text{0} \\ \hline \text{00} & \dots & \text{00} \end{array} \end{array} \right\} \text{ база } V\varphi$$

База $\text{Ker } \varphi$

В самом деле, элементарные преобразования слов равносильны умножению на элементарные и невырожденные диагональные матрицы $T_1, \dots, T_m$ слева:

$$T_m \dots T_1 (E|A) = (B|C) = T_m \dots T_1 E = B, \quad T_m \dots T_1 A = C, \\ \det B \neq 0, BA = C.$$

Поэтому строки матрицы B образуют базу пространства $V = K^n$, а i -я строка матрицы C получается из i -й строки матрицы B умножением на матрицу A , т.е. $v_i A = u_i$, $i = 1, \dots, r$, $w_j A = 0$, $j = 1, \dots, s$. Очевидно, что образ $V\varphi$ — линейная оболочка строк $u_1, \dots, u_r$, их линейная независимость вытекает из ступенчатости матрицы C . Система строк $w_1, \dots, w_s$ принадлежит ядру и линейно независима как подсистема строк невырожденной матрицы B . Ее максимальность следует из теоремы 1 или может быть доказана непосредственно: если $v = \sum \alpha_i u_i + \sum \beta_j w_j$ и $vA = 0$, то $\sum \alpha_i u_i = 0$, $\alpha_1 = \dots = \alpha_r = 0$, $v = \sum \beta_j w_j$.

Пример. $(E|A) =$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 1 & 0 & 3 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & -1 & -2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & -2 & -4 & 6 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 3 & 0 \end{array} \right] \sim \left\{ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & -1 & -2 & 3 & 0 \\ -3 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\}$$

База ядра

База образа

Ведущие элементы матриц при элементарных преобразованиях выделены здесь курсивом.

КОРНЕВОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ

ТЕОРИЯ. Приведенное ниже доказательство теоремы о корневом разложении несколько длиннее обычного доказательства, основанного на решении линейных уравнений в многочленах, однако практически поиск корневых подпространств нашим способом существенно быстрее.

ТЕОРЕМА 1. Пусть φ — линейный оператор в векторном пространстве V над полем K , имеющий в некоторой базе матрицу A , и пусть все корни его характеристического многочлена $\chi_\varphi(\lambda) = \det(A - \lambda E)$ содержатся в поле K . Тогда

1) пространство V является прямой суммой корневых подпространств $V_\alpha = \text{Ker}(\varphi - \alpha E)^{h_\alpha}$, где α — корень $\chi(\lambda)$, E — тождественный оператор, $h_\alpha = h_\alpha$ — минимальное число с условием $V(\varphi - \alpha E)^{h_\alpha} = V(\varphi - \alpha E)^{h_\alpha+1}$.

2) многочлен $\mu(\lambda) = \prod (\lambda - \alpha)^{h_\alpha}$ делит $\chi(\lambda)$, аннулирует оператор φ и является минимальным по степени ненулевым многочленом со свойством $\mu(\varphi) = 0$.

СЛЕДСТВИЕ (теорема Гамильтона-Кэли). $\chi(\varphi) = 0$.

Доказательство проведем индукцией по $n = \dim V$. При $n = 1$ существует такой скаляр α , что $\varphi v = \alpha v$ при всех $v \in V$, т.е. $V = V_\alpha$, $h_\alpha = 1$, $\mu(\lambda) = \lambda - \alpha = \chi(\lambda)$.

Пусть $n \geq 2$ и теорема верна для пространств размерности меньше, чем n . Положим $\psi = \varphi - \alpha E$. Тогда $\det \psi = 0$ и $V \supset V_\psi$. Пусть

$$V \supset V_\psi \supset \dots \supset \psi^k V = V_\psi^{k+1}. \quad (*)$$

Положим $W = V_\psi^k$, $V_\alpha = \text{Ker} \psi^k$. Тогда W и V_α инвариантны относительно операторов ψ и $\varphi = \psi + \alpha E$. Сужения $\psi|_W$ и, значит, $\psi^k|_W$, невырождены ввиду равенства $W = \psi^k W$. Если $u \in V_\alpha$, то $\psi^k u = 0$; если добавок $v \in W$, то $\psi^k v = 0$ в том и только том случае, когда $v = 0$. Поэтому $V_\alpha \cap W = \{0\}$. Так как $\dim V_\alpha + \dim W = n$ по теореме 1, то, следовательно, $V = V_\alpha \oplus W$.

Пусть α — сужение оператора φ на V_α , τ — сужение φ на W . В базе пространства V , состоящей из баз пространств V_α и W , имеем

$$[\varphi] = \begin{bmatrix} [\alpha] & 0 \\ 0 & [\tau] \end{bmatrix}, \quad \chi_\varphi = \chi_\alpha \chi_\tau.$$

Поэтому корни многочленов χ_α и χ_τ являются корнями многочлена χ_φ и содержатся в поле K . Если β — корень χ_α , то существует вектор $u \in V_\alpha$, $u \neq 0$, $\psi u = \beta u$. Тогда $u(\varphi - \alpha E) = \beta u - \alpha u = (\beta - \alpha)u$, $u(\varphi - \alpha E)^k = (\beta - \alpha)^k u = 0$, $(\beta - \alpha)^k = 0$ и $\beta = \alpha$. Следовательно, $\chi_\alpha(\lambda) = (\lambda - \alpha)^{n_\alpha}$, где $n_\alpha = \dim V_\alpha = \dim \text{Ker} \psi^k = n - \dim V_\psi^k \geq k = h_\alpha$ ввиду (*).

Оператор $\varphi - \alpha E$ невырожден на подпространстве W , поэтому α не является собственным числом для сужения $\tau = \varphi|_W$, многочлены χ_α и χ_τ взаимно просты. n_α — кратность корня α в многочлене χ_φ . Поскольку $\dim W = n - n_\alpha \leq n-1$, то по предположению индукции W является прямой суммой корневых подпространств $W_\beta = V_\beta$, где β — корень многочлена χ_τ , т.е. корень многочлена χ_φ , не равный α . Следовательно, и пространство $V = V_\alpha \oplus W$ разлагается в прямую сумму корневых подпространств.

Так как $h_\alpha \leq n_\alpha$, то $\mu(\lambda) = \prod (\lambda - \alpha)^{h_\alpha}$ делит мно. член $\chi(\lambda) = \prod (\lambda - \alpha)^{n_\alpha}$. Из разложения $V = V_\alpha \oplus W$ следует, что $\mu(\varphi) = \mu(\varphi - \alpha E)^{h_\alpha} = 0$.

Если $f(\varphi) = 0$ для некоторого приведенного многочлена $f(\lambda)$ минимальной степени, то $f(\lambda)$ делит $\mu(\lambda)$, иначе остаток от деления $\mu(\lambda)$ на $f(\lambda)$ имеет меньшую степень и тоже аннулирует φ . Поэтому $f(\lambda) = \prod (\lambda - \alpha)^{m_\alpha}$, $m_\alpha \leq h_\alpha$. Достаточно доказать, что $m_\alpha \geq h_\alpha = k_\alpha$. Поскольку $V(\varphi - \alpha E)^{k_\alpha+1} \supset V(\varphi - \alpha E)^{k_\alpha}$, то отсюда $\text{Ker}(\varphi - \alpha E)^{k_\alpha+1} \subset \text{Ker}(\varphi - \alpha E)^{k_\alpha} = V_\alpha$ и существует вектор $v \in V_\alpha$, такой, что $v(\varphi - \alpha E)^{k_\alpha+1} \neq 0$. Тогда

$$0 = v f(\varphi) = [v(\varphi - \alpha E)^{m_\alpha}] \Pi(\varphi - \beta E)^{m_\beta}.$$

Так как произведение после квадратных скобок — невырожденный оператор на V_α , то $v(\varphi - \alpha E)^{m_\alpha} = 0$ и $m_\alpha \geq k_\alpha$. Теорема доказана.

УПР.2. Найти минимальные многочлены, корневые разложения и выписать геометрический смысл для операторов в пространстве $\mathbb{R}^n$ с условиями 1) $\varphi^2 = \varphi$, 2) $\varphi^2 = E$, 3) $\varphi^3 = \varphi$.

УПР.3. Пусть оператор в пространстве V над полем K аннулирует

руется многочленом $f(\lambda)$ и известно разложение $f(\lambda)$ в произведение неразложимых многочленов над полем K . Сформулировать и доказать аналог корневого разложения пространства V , заменяя в теореме 2 оператор φ - $\alpha\epsilon$ на оператор $p(\varphi)$, где $p(\lambda)$ - неразложимый делитель многочлена $f(\lambda)$.

ПРАКТИКА. Найдем корневое разложение пространства в соответствии с доказательством теоремы 2 и способом параллельного отыскания баз образа и ядра оператора.

Матрицу назовем n -слоистой или просто слоистой, если ее длинные строки (слои) разбиты на строки длины n . Элементарными преобразованиями слоистых матриц назовем 1) прибавление к слою другого слоя, умноженного на число, 2) умножение слоя на ненулевое число.

Пусть A - $n \times n$ -матрица над полем K , все характеристические корни которой известны и принадлежат K . Пусть $\varphi: x \rightarrow Ax$ - линейный оператор в пространстве $V = K^n$ строк над полем K . Следующий **R-алгоритм** позволяет последовательно строить базы корневых подпространств.

Пусть $B_0 := E$ - единичная матрица, $N := A - \alpha E$, где α - характеристический корень матрицы A .

Слоистую матрицу $(B_0 | B_0 N)$ элементарными преобразованиями привести к виду $(B_1 | C_1)$, где C_1 - ступенчатая $n \times n$ -матрица.

Вычислить произведение $C_1 N$ и слоистую матрицу $(B_1 | C_1 | C_1 N)$ элементарными преобразованиями привести к виду $(B_2 | C_2)$, где B_2 и C_2 - $n \times n$ -матрицы, при этом C_2 ступенчатая.

Вычислить произведение $C_2 N$ и т.д. Вычисления закончить, на матрице $(B_k | \dots | C_k)$, если ранги $C_k N$ и C_k совпадают, или, равносильно, если число нулевых строк в C_k равно кратности корня α в характеристическом многочлене.

Тогда строки матрицы B_k , начинающие "ниль-слои" (которые кончатся нулевыми строками в матрице C_k), образуют базу корневого подпространства V_α , а ненулевые строки из C_k образуют базу прямой суммы W остальных корневых подпространств.

Далее полагают $B_0 := C_k$, $N := A - \beta E$, где β - другой характеристический корень матрицы A , и продолжают вычисления в соответствии с описанными выше правилами.

Конечно, за счет появления нулевых строк в матрицах C_i , вычислять произведения $C_i N$ с ростом индекса i становится все легче. Более того, исключая из матриц C_i нулевые строки, без потери информации эти матрицы можно считать прямоугольными.

Пример.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{bmatrix}, \chi(\lambda) = -(\lambda+1)^2(\lambda-3), \alpha = -1, N = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 4 & -6 & 8 \\ 6 & -7 & 8 \end{bmatrix}.$$

$$(E|N) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -6 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -7 & 8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & -3 & 4 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & -3 & 4 \\ -2 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Умножая последнюю матрицу на N и учитывая, что размерность корневого пространства равна кратности соответствующего корня в характеристическом многочлене, получим

$$\text{База } V_{-1} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 4 & -6 & 8 \\ 6 & -7 & 8 \end{bmatrix} \right\} \text{ База } V_3.$$

Минимальный многочлен в данном случае совпадает с характеристическим и равен $(\lambda+1)^2(\lambda-3)$.

Замечание 1. R-алгоритм с небольшими изменениями можно применить к отысканию баз подпространств собственных векторов линейного оператора. Для этого надо вычисления с собственным значением α остановить на матрице $(B_1 | C_1)$, затем продолжить вычисления с новым значением β , полагая $B_0 := C_1$ и т.д.

Найдем, например, базу из собственных векторов для оператора $\varphi: x \rightarrow Ax$ в пространстве $V = \mathbb{R}^3$, если

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \chi(\lambda) = -(\lambda-2)(\lambda-3)(\lambda-4).$$

В соответствии с R-алгоритмом при $\alpha = 2$ имеем $(E|A-2E) =$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ база } V_2 \left(\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \right) \text{ база } V_3 \oplus V_4.$$

Далее, при $\beta = 3$ подействуем на базу $V_3 \oplus V_4$ матрицей $A-3E$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ база } V_3 \left(\begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \right) \text{ база } V_4.$$

Таким образом, оператор φ имеет базу из собственных векторов $(1, -1, -1)$, $(-2, 3, -2)$, $(1, -1, 1)$ с собственными значениями 2, 3, 4 соответственно.

З а м е ч а н и е 2. Перечень корней характеристического многочлена линейного оператора или матрицы (иногда с повторением корня столько раз, какова его кратность) называется *спектром* оператора или матрицы. Мы не обсуждаем здесь трудную задачу отыскания спектра. При малых степенях матрицы удовлетворительный подсчет характеристического многочлена дает формула из задачи 1070 [6], однако при больших степенях, за исключением треугольных матриц, корни этого многочлена найти точно практически невозможно. Для упражнений конкретные матрицы можно получить в соответствии с работой [12], где указан простой способ построения всех целочисленных квадратных матриц с целочисленным спектром. Каждая такая матрица степени n имеет вид

$$A = u_1^T v_1 + \dots + u_{n-1}^T v_{n-1} + \alpha E,$$

где u_i, v_i — целочисленные строки длины n , причем строка u_i ортогональна v_j при условии, что $i \neq j$; E — единичная матрица степени n , α — произвольное целое число. Спектр матрицы A — это $\lambda_1 = \alpha, \lambda_2 = \alpha + u_1^T v_1, \dots, \lambda_n = \alpha + u_{n-1}^T v_{n-1}$. Таким образом, выберем $u_1, \dots, u_{n-1}$ и v_1 практически произвольно, затем строку v_2 ортогональную u_1 , далее строку v_3 ортогональную u_1 и u_2 ; v_4 ортогональную $u_1, u_2, v_3, \dots$. Продолжая в том же духе и выбирая еще α , при небольших n можно легко построить матрицу A . Если добавок выбрать ортогональными некоторые строки u_i, v_i или добиться, чтобы $u_i v_i^T = u_i v_i^T$ при некоторых $i \neq j$, то в спектре матрицы A появятся кратные корни.

З а м е ч а н и е 3. R-алгоритм допускает обобщение на случай, когда известно только разложение на неразложимые множители для многочлена, аннулирующего матрицу (см. упр. 3).

ЖОРДАНОВО РАЗЛОЖЕНИЕ

ТЕОРИЯ. Пусть $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_s$ — корневое разложение пространства V относительно оператора ϕ с характеристическими корнями $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ соответственно. Каждый вектор v имеет единственную запись $v = v_1 + \dots + v_s, v_i \in V_i, i = 1, \dots, s$. Ввиду инвариантности корневых подпространств получаем следующую запись вектора ψv в разложении пространства: $\psi v = \psi_1 v_1 + \dots + \psi_s v_s, \psi_i \in V_i$. Значит, действие оператора ϕ на пространстве V восстанавливается из

10

действия оператора ϕ на корневых подпространствах V_i .

Пусть $\psi_i = \phi - \lambda_i \varepsilon|_{V_i}$ — сужение оператора $\phi - \lambda_i \varepsilon$ на подпространстве V_i . Так как $V_i = \text{Ker}(\phi - \lambda_i \varepsilon)^{k_i}$, то $\psi_i^{k_i} = 0$. Такой оператор ψ_i называется *нильпотентным*. Рассмотрим эту ситуацию отдельно, опуская индекс i . Итак, пусть далее ψ — nilпотентный оператор на пространстве V . Приведем простое доказательство разложимости пространства относительно nilпотентного оператора в прямую сумму циклических подпространств (жорданово разложение).

Ниль-слоем длины l назовем систему векторов $u, \psi u, \dots, \psi^{l-1} u$ если $\psi^l u = 0$. Систему векторов, составленную из ниль-слоев, назовем *жордановой*. Запись жордановой системы в форме таблицы, строки которой составлены из ниль-слоев и все они имеют общую правую вертикальную границу, назовем *жордановой таблицей*. Элементарными преобразованиями жордановой таблицы назовем

- 1) прибавление к слою длины l расположенного под ним или над ним отрезка длины l из другого слоя, умноженного на число;
- 2) умножение слоя на ненулевое число;
- 3) перестановку слоев;
- 4) исключение нулевых векторов сдвигом слоя вправо.

Отметим, что эти преобразования сохраняют и свойство таблицы быть жордановой, и линейную оболочку жордановой системы.

ЛЕММА. Если система векторов, составляющих правый столбец жордановой таблицы, линейно независима, то вся жорданова система линейно независима.

Доказательство. Пусть $\sum_j \alpha_j u_j \psi^j = 0$ и α_{pq} — ненулевой коэффициент при самом левом векторе из жордановой таблицы. Подеяствуем на эту комбинацию преобразованием ψ^r , где r — число столбцов жордановой таблицы правее этого вектора. Тогда получим нулевую комбинацию векторов из последнего столбца с ненулевым коэффициентом α_{pq} при одном из векторов. Противоречие. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 3. Векторное пространство V относительно nilпотентного оператора ϕ имеет жорданову базу. Число k_i ниль-слоев длины k_i в этой базе не зависит от выбора базы и равно $r_{k_i} - 2r_{k_i+1} + r_{k_i+2}$, где $r_i := \dim V \psi^i$.

11

Доказательство. Пусть $e_1, \dots, e_n$ — некоторая база пространства V . Составим жорданову таблицу из ниль-слоев с началами $e_1, \dots, e_n$ и заменим в ней векторы на их координатные строки в этой базе. Элементарными преобразованиями 1)–4) можно перестроить таблицу так, что система строк её правого столбца будет линейно независима, например, перестановочно ступенчатая и без нулевых строк. Утверждается, что соответствующая этой таблице система векторов образует жорданову базу. В самом деле, линейная независимость следует из леммы, а максимальность — из сохранения линейной оболочки при элементарных преобразованиях и из того, что исходная жорданова система включала базу пространства.

Пусть дана произвольная жорданова база и s_k — число ниль-слоев длины k из неё. Тогда легко указать базы пространств $V\phi, V\phi^2, \dots$ и подсчитать их размерности:

$$\begin{cases} r_0 = \dim V = s_1 + 2s_2 + 3s_3 + 4s_4 + \dots \\ r_1 = \dim V\phi = s_2 + 2s_3 + 3s_4 + \dots \\ r_2 = \dim V\phi^2 = s_3 + 2s_4 + \dots \end{cases}$$

Вычитая из каждого уравнения следующее, а затем из каждой размерности следующую, получим, что $s_k = r_{k-1} - 2r_k + r_{k+1}$. Теорема 3 доказана.

ПРАКТИКА. Пусть e_i — i -я строка единичной матрицы степени l и N — нильпотентная $l \times l$ -матрица над полем K . Построим жорданову базу пространства $V = K^l$ относительно нильпотентного оператора $v \rightarrow vN$. Смоделируем доказательство теоремы 3 с единственным изменением — не будем вычислять образы всех базисных векторов e_i сразу. Следующий J-алгоритм приведет нас к цели быстрее.

1. Вычислить ниль-слои с началом e_1 . Пусть $e_1, e_1 N, e_1 N^2, \dots, e_1 N^{k-1} \neq 0$ и $e_1 N^k = 0$. Тогда предыдущая строка образует жорданову таблицу. Перейти к шагу 4.

2. Дополнить полученную таблицу ниль-слоем с началом e_i , которое ранее не использовалось. Перейти к шагу 3.

3. Элементарными преобразованиями жорданову таблицу перестроить так, чтобы система строк последнего столбца таблицы была линейно независима, например, перестановочно ступенчатая и не содержала нулевых строк. Перейти к шагу 4.

4. Если число векторов в таблице равно размерности пространства, то они и образуют жорданову базу, вычисления закончить. Иначе перейти к шагу 2.

Пример 1.

$$N = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & -2 \\ 8 & 4 & -4 \end{bmatrix}, \quad e_1 N = (1, 0, 0), e_2 N = (2, 1, -1), e_3 N^2 = 0, 2 < 3;$$

$$e_2 N = (0, 1, 0), e_3 N = (4, 2, -2), e_3 N^2 = (1, 0, 0).$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \left| \begin{array}{c} 2 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & -2 \end{array} \right| \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \left| \begin{array}{c} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right| \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

жорданова база

Пример 2.

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (1 \ 0 \ 0 \ 0 \mid 0 \ 2 \ 3 \ 4 \mid 0 \ 0 \ 4 \ 12 \mid 0 \ 0 \ 0 \ 0)$$

жорданова база

МАТРИЦНАЯ ФОРМА ТЕОРЕМЫ ЖОРДАНА

ТЕОРИЯ. Пусть $e_1, \dots, e_n$ — база пространства V над полем K , содержащим спектр оператора ϕ , который действует на V , и пусть A — матрица оператора ϕ в этой базе. Фиксируем в корневом подпространстве V_α жорданову базу относительно оператора $\phi = \phi - \alpha E|_{V_\alpha}$, занумеруем ее векторы, составлявшие жорданову таблицу, по ниль-слоям слева направо, перечисляя сами ниль-слои сверху вниз. Объединение таких баз называем жордановой базой для оператора ϕ . Вычислим матрицу оператора в жордановой базе.

Если f_i — последний вектор ниль-слоя в пространстве V_α , то $f_i \phi = 0$ и, значит, $f_i \phi = f_i (\phi + \alpha E) = f_i \phi + \alpha f_i = \alpha f_i$. Если f_i — не последний вектор в ниль-слое, то $f_i \phi = f_{i+1}$, и $f_i \phi = \alpha f_i + f_{i+1}$. Следовательно, координатная строка вектора $f_i \phi$ в базе $f_1, \dots, f_n$ имеет вид $(0, \dots, 0, \alpha, 0, \dots, 0)$ или $(0, \dots, 0, \alpha, 1, 0, \dots, 0)$ соответственно, где α — i -я компонента строки. Поэтому матрица A_i оператора ϕ в этой базе жордановой диагональна и диагональные "жордановы" клетки имеют вид

$$\begin{bmatrix} \alpha & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha \end{bmatrix},$$

размер k и отвечают ниль-слою длины k в жордановой базе корневого подпространства V_α . Отсюда максимальный размер клетки

Жордана с числом α на диагонали равен кратности корня α в минимальном многочлене, а сумма размеров таких клеток равна размерности пространства V_α , т.е. кратности корня α в характеристическом многочлене оператора Φ . Кроме того, ввиду теоремы 3 число a_k жордановых клеток размера k с характеристическим корнем α на диагонали равно $r_{k-1}(\Phi) - 2r_k(\Phi) + r_{k+1}(\Phi)$, где $r_i(\Phi) = \dim V_\alpha \Phi^i = \dim V_\alpha (\Phi - \alpha E)^i$. Ввиду разложения $V = V_\alpha \oplus W$ из теоремы 2 имеем $V_\alpha (\Phi - \alpha E)^i = V_\alpha \oplus W$ и, если $r_i = \dim V_\alpha (\Phi - \alpha E)^i = \text{rang}(A - \alpha E)^i$, $d = \dim W$, то $r_i(\Phi) = r_i - d$ и $a_k = r_{k-1} - 2r_k + r_{k+1}$, где $r_i = \text{rang}(A - \alpha E)^i$. Следовательно, матрица A_J линейного оператора Φ в жордановой базе определяется по матрице A оператора Φ в некоторой базе единственным способом с точностью до перестановки жордановых клеток по диагонали. Она называется жордановой формой исходной матрицы.

Пусть T — матрица перехода от базы $e_1, \dots, e_n$ к базе $f_1, \dots, f_n$. Тогда, как известно, $A_J = TAT^{-1}$ ввиду связи между матрицами оператора в разных базах. Следовательно, всякая матрица подобна матрице в жордановой форме над полем, содержащим ее спектр.

ПРАКТИКА. Найдем жорданову форму A_J и сопрягающую к ней матрицу T , применяя сначала R -алгоритм, а затем J -алгоритм, для

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 2 \\ 6 & 5 & -1 & -4 \\ -2 & -1 & 1 & 4 \\ -2 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \chi(\lambda) = \lambda(\lambda-2)^3. \quad (E|A-2E) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & | & -2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & 6 & 3 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & -2 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 2 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & | & -2 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & | & 2 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 & | & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & | & -2 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & | & 2 & 1 & -1 & 0 \\ -4 & -1 & 1 & 0 & | & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & | & -2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & | & 4 & 2 & 0 & -2 \\ -4 & -1 & 1 & 0 & | & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ база } V_0$$

Преобразуем теперь жорданову таблицу корневого пространства V_2 , зависящую в трех нижних слоях этой матрицы, в жорданову базу с помощью J -алгоритма. Второй слой содержит два ненулевых вектора $(1, 1, 0, 0)$, $(4, 2, 0, -2)$, $\dim V_2 = 3$. Значит, нужно дополнить его третьим слоем, исключая нулевые векторы сдвигом слоя вправо:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & -2 \\ -4 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Векторы последнего столбца этой жордановой таблицы линейно

независимы, число векторов в таблице равно размерности корневого пространства V_2 , следовательно, векторы $f_1 = (1, 1, 0, 0)$, $f_2 = (4, 2, 0, -2)$, $f_3 = (-4, -1, 1, 0)$ составляют жорданову базу для V_2 . Корневое пространство V_0 одномерно, вектор $f_4 = (4, 2, 2, -4)$ образует его жорданову базу. Имеем

$$\begin{aligned} f_1(A - 2E) &= f_2, & f_1 A &= 2f_1 + f_2, \\ f_2(A - 2E) &= 0, & f_2 A &= 2f_2, \\ f_3(A - 2E) &= 0, & f_3 A &= 2f_3, \\ f_4(A - 0E) &= 0, & f_4 A &= 0f_4. \end{aligned} \quad A_J = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Сопрягающая матрица T составлена из строк f_1, f_2, f_3, f_4 :

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & -2 \\ -4 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 2 & -4 \end{bmatrix}.$$

Конечно, эти подробные объяснения можно опустить и ответ просто вiden в итоговой матрице при поиске корневых подпространств.

Отметим еще, что жорданову форму A_J можно было указать и раньше, используя числа r_k и $a_k = r_{k-1} - 2r_k + r_{k+1}$. Для корня 2 и корня 0 соответственно ввиду той же матрицы имеем

$$\begin{array}{l} r_k \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \dots \\ r_k \quad 4 \quad 2 \quad 1 \quad 1 \dots \\ s_k \quad 1 \quad 1 \quad 0 \dots \end{array} \quad \begin{array}{l} r_k \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \dots \\ r_k \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \dots \\ s_k \quad 1 \quad 0 \quad 0 \dots \end{array}$$

Здесь числа r_k второй таблицы сформированы по действию оператора $x \rightarrow x(A - 0E)$ на подпространстве $W = V_0$. Следовательно, имеется по одной жордановой клетке размера 1 и 2 с числом 2 на главной диагонали и одна жорданова клетка размера 1 с числом 0 на диагонали, что соответствует ранее найденной матрице A_J . Выигрыш по времени будет лишь в случае, когда приходится использовать J -алгоритм по существу.

ПРИМЕНЕНИЯ

Покажем на нескольких примерах, каким образом теория Жордана используется в разных областях математики.

Дифференциальные уравнения. Пусть в трехмерном евклидовом пространстве выбрана система координат и в ней координаты движущейся материальной точки $(x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ и компоненты вектора скорости $(\dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t), \dot{x}_3(t))$ связаны системой уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + 4x_2 + 6x_3 \\ \dot{x}_2 = -3x_1 - 7x_2 - 7x_3 \\ \dot{x}_3 = 4x_1 + 8x_2 + 7x_3 \end{cases}$$

Точка над функцией обозначает взятие производной по времени t . В начальный момент $t = 0$ точка имеет координаты $(1, -2, 2)$. Требуется определить параметрическое уравнение движения точки.

Перепишем систему в матричном виде $\dot{X} = AX$, где

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \dot{X} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ -3 & -7 & -7 \\ 4 & 8 & 7 \end{pmatrix}.$$

Как изменяется матрица A при изменении системы координат? Если новая система координат $Y = (y_1, y_2, y_3)^T$ связана со старой X с помощью невырожденной матрицы перехода Q , т.е. $X = QY$, то имеем

$$\dot{X} = Q\dot{Y} = AX = A QY, \quad \dot{Y} = Q^{-1} A Q Y.$$

Следовательно, матрица A заменяется на подобную $Q^{-1} A Q$ и можно подобрать Q так, что матрица новой системы уравнений в координатах Y имеет жорданову форму, т.е. более простой вид.

Имеем $\chi(\lambda) = -(\lambda+1)^2(\lambda-3)$. Считаем в системе "вектор-столбец", используя R -алгоритм при $\alpha = -1$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -2 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Первый столбец дает жорданову базу корневого подпространства, отвечающего корню -1 , в конце третьего расположения база V_3 . Если сократить на 16, то получаем:

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ -3 & -6 & -7 \\ 4 & 8 & 8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -16 \\ 0 & -16 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_J = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{cases} \dot{y}_1 = -y_1 \\ \dot{y}_2 = y_1 - y_2 \\ \dot{y}_3 = 3y_3 \end{cases}$$

Общее решение этой системы имеет вид

$$y_1 = c_1 e^{-t}, \quad y_2 = (c_1 t + c_2) e^{-t}, \quad y_3 = c_3 e^{3t}.$$

Ввиду связи $X = QY$, получаем общее решение исходной системы

$$\begin{cases} x_1 = -2c_1 e^{-t} + 2(c_1 t + c_2) e^{-t} - c_3 e^{3t}, \\ x_2 = -(c_1 t + c_2) e^{-t} + c_3 e^{3t}, \\ x_3 = c_1 e^{-t} - c_3 e^{3t}. \end{cases}$$

Подстановка $t = 0$ приводит к системе линейных уравнений относи-

тельно параметров c_1, c_2, c_3 . Решая её, получим требуемый закон движения материальной точки.

Теория квадратичных форм. Найдем ортогональную замену переменных, приводящую действительную квадратичную форму $f(X) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$ к каноническому виду.

Пусть

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad X = (x_1, x_2, x_3).$$

Тогда $f(X) = XAX^T$. При замене $X = YQ$, $Y = (y_1, y_2, y_3)$, $Q^{-1} = Q^T$ получаем каноническую форму $g(Y) = f(YQ) = YQAQ^T Y^T$, если и только если матрица $D = QAQ^T = QAQ^{-1}$ диагональна, причем набор коэффициентов при $y_1^2, \dots, y_n^2$ совпадает со спектром матрицы A . Равенство $QA = DQ$ означает, что система строк Q — ортонормированная база из собственных векторов для симметрического оператора $\varphi: x \rightarrow Ax$, $x \in V = \mathbb{R}^3$. Найдем сначала нашим методом базу из собственных векторов, потом ортогонализуем её методом Грам-Шмидта и нормируем. Легко найти спектр матрицы A : $-1, -1, 5$. Поэтому канонический вид формы: $-y_1^2 - y_2^2 + 5y_3^2$. Далее,

$$(E|A+E) = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 2 \end{array} \right] \text{ база } V_1, \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} \text{ база } V_5$$

Ортогонализуя и нормируя базу V_1 , получим $u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1, 0)$, $u_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, -1, 2)$. Нормируя базу V_5 , получим $u_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$. Матрица замены Q составлена из строк u_1, u_2, u_3 . Искомая замена —

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}y_1 - \frac{1}{\sqrt{6}}y_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}y_3 \\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}y_1 - \frac{1}{\sqrt{6}}y_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}y_3 \\ x_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}y_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}y_3 \end{cases}$$

Отметим, что ортогонализации системы векторов можно добиться применением подходящих элементарных преобразований.

Отметим ещё, что получать нули в соседних матрицах можно не только элементарными преобразованиями, но и умножением слева на матрицы плоских поворотов или отражений (см., например, [7], с.336-337; [10], с.94-95), которые сохраняют ортонормированность системы векторов.

Жорданова форма над полем действительных чисел. [9], [10]. Теория Жордана применима для всякого оператора, если поле ска-

ляров содержит корни любого непостоянного многочлена с коэффициентами из этого поля, в частности, она верна для любых операторов в комплексных пространствах. Что можно сказать в случае поля действительных чисел?

Пусть $\lambda \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, $V = \mathbb{C}^n$, $\varphi: x \rightarrow \lambda x$ - линейный оператор в $\mathbb{C}^n$. Спектр φ разбивается на действительные числа $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ и на пары

$\lambda_1, \bar{\lambda}_1, \dots, \lambda_s, \bar{\lambda}_s$ различных комплексно сопряженных чисел. Комплексное сопряжение индуцирует на пространстве $V = \mathbb{C}^n$ полулинейный изоморфизм $v = (v_1, \dots, v_n) \rightarrow \bar{v} = (\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n)$ со свойствами $\bar{v + w} = \bar{v} + \bar{w}$, $\overline{av} = a\bar{v}$, $\bar{v} = v$, $\bar{0} = 0 = v = 0$, который переводит корневое пространство $V_{\lambda_j} = \{v \in V | v(A - \lambda_j E)^k = 0\}$ в корневое пространство $\bar{V}_{\lambda_j} = \{v \in V | v(A - \bar{\lambda}_j E)^k = 0\}$ изоморфно, причем образ жордановой базы - жорданова база. Опуская индексы, предположим, что $\lambda = p + iq$ - характеристический корень и $v = a + ib$ - вектор жордановой базы, здесь $a = \frac{1}{2}(v + \bar{v})$, $b = \frac{1}{2i}(v - \bar{v})$ - действительная и мнимая часть вектора v . Если v - собственный вектор, т.е. $Av = \lambda v$, то, подставив значения v и λ и вспомнив, что A - действительная матрица, получим

$$\begin{cases} aA = pa - qb \\ bA = qa + pb. \end{cases}$$

Если же вектор v неособенный и $w = p + id$ - следующий за ним в базе, то $Aw = \lambda w + v$ и аналогичным приемом получим равенства

$$\begin{cases} aA = pa - qb + c \\ bA = qa + pb + d. \end{cases}$$

Пусть $\{u_i | i \in I\}$ - действительная жорданова база суммы корневых пространств с действительными собственными числами $\alpha_1, \dots, \alpha_r$, $\{v_j, \bar{v}_j | j \in J\}$ - жорданова база суммы корневых пространств с комплексными характеристическими числами $\lambda_1, \bar{\lambda}_1, \dots, \lambda_s, \bar{\lambda}_s$. Тогда система $\{u_i, a_j, b_j | i \in I, j \in J\}$, где a_j, b_j - действительная и мнимая часть вектора v_j , линейно эквивалентна базе $\{u_i, v_j, \bar{v}_j | i \in I, j \in J\}$, содержит n векторов и потому является базой для $\mathbb{C}^n$ и одновременно базой для $\mathbb{R}^n$. В ней матрица оператора φ имеет "действительную жорданову форму", т.е. клеточно-диагональна и диагональные клетки имеют вид либо основной действительной клетки Жордана, либо

$$\begin{bmatrix} p-q & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & p-q & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & p-q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & p \end{bmatrix}$$

причем действительная жорданова форма матрицы A единственна с точностью до перестановки клеток по диагонали.

УПР.4. Исследовать сначала комплексную, а потом действительную жорданову форму матрицы и выяснить геометрический смысл для оператора φ в пространстве $\mathbb{R}^n$ с условием $\varphi^k = e$ при $k \geq 3$.

УПР.5. Доказать, что две квадратные действительные матрицы, подобные над полем комплексных чисел, будут подобны и над полем действительных чисел.

Библиографический список

1. Бекисев Г.А. Об одном методе приведения матриц к нормальной форме Жордана // Учен. зап. кн.-почт. матем. физ. физ. 1965. Т.5, № 4, С. 722-726.
2. Кострикин А.И., Манин П.И. Линейная алгебра и геометрия. М.: МГУ, 1980.
3. Курш А.Г. Курс высшей алгебры. М.: Наука, 1975.
4. Мальцев А.И. Основы линейной алгебры. М.: Наука, 1975.
5. Постников М.М. Линейная алгебра и дифференциальная геометрия. М.: Наука, 1979.
6. Проскуряков И.Б. Сборник задач по линейной алгебре. М.: Наука, 1974.
7. Стронг Г. Линейная алгебра и ее приложения. М.: Мир, 1980.
8. Федеев Д.К. Лекции по алгебре. М.: Наука, 1984.
9. Филиппов А.Ф. Краткое доказательство теоремы о приведении матрицы к жордановой форме // Вест. Моск. ун-та. Сер. математика, механика. 1977. № 2, с.18.
10. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. М.: Мир, 1989.
11. Jordan C. Traité des substitutions et des équations algébriques. Paris: Gauthier-Villars, 1910.
12. Benard J.-C. Matrices with integer entries and integer eigenvalues // Amer. Math. Monthly. 1983. V.90, № 3, P. 204-207.

ЖОРДАНОВА КЛАССИФИКАЦИЯ КОНЕЧНОМЕРНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Методические указания

Автор-составитель

кандидат физико-математических наук, доцент В.А.Чуркин

Редактор Л.А.Горелова

Подписано в печать 23.05.91	Формат 60x84, 1/16.
Оффсетная печать. Уч.-изд.л. I.	Усл.печ.л. I,25.
Тираж 1000 экз. Заказ № 421	Цена 50 к.

Редакционно-издательский отдел Новосибирского университета;
участок оперативной полиграфии НГУ; 630090, Новосибирск, 90,
ул. Пирогова, 2.