Министерство образования и науки РФ

Волгодонский институт сервиса (филиал)
ФГБОУ ВПО «Донского государственного
технического университета» (ДГТУ)

Многомерная алгебра. Многомерная физика. Многомерные технологии: Монография

Новочеркасск НОК 2014

УДК 001.8:512.7
ББК 87я73
М 73

Рецензенты: Логинов В.Т., докт. техн. наук, профессор,
Иванов С.А., канд. техн. наук, доцент.

М 73 Многомерная алгебра. Многомерная физика. Многомерные технологии: Монография / А.В. Коротков, П.Д. Кравченко, В.Е. Мешков, В.С. Чураков, Н.В. Кочковая, Т.А. Брыкина, Г.С. Вересников, Ю.В. Веприков. – (Серия «Семимерная парадигма А.В. Короткова в информатике, искусственном интеллекте и когнитологии». Вып. 2.) – Новочеркасск: Изд-во ‹‹НОК››, 2014. – 286 с.

ISBN 978-5-8431-0299-9

В монографии показано, что разделы математического знания, применяемого в математике, физике, информатике, нейроинформатике и криптологии, могут иметь альтернативный вариант по отношению к общеприменимому варианту, основанному на трёхмерной векторной алгебре. Разрабатываемая авторами многомерная парадигма даёт совершенно новые методы и способы получения знаний (в данном случае они разрабатываются в рамках семимерной/многомерной парадигмы А.В.Короткова). Авторы определяют данную парадигму *как открытую систему, т.е. любой и каждый может внести свой вклад в её развитие.*

Монография предназначена для научных работников, специалистов, преподавателей вузов, аспирантов, магистрантов и студентов вузов.

УДК 001.8:512.7
ББК 87я73

ISBN 978-5-8431-0299-9

ВМЕСТО ВВЕДЕНИЯ:
КОРОТКОВ А.В.
МЫ ЖИВЕМ В СЕМИМЕРНОМ МИРЕ

Уже в древности необходимость измерения площадей, а вслед за этим объемов, различных предметов привели сначала к развитию двумерных, а затем и трехмерных геометрических представлений о строении мира. К середине прошлого века был установлен ряд экспериментальных физических законов. При этом обнаружилось, что самые разнообразные операции, производимые в геометрии, алгебре, механике, физике над различными объектами нечисловой природы удобнее всего рассматривать с позиций алгебры.

По этой причине именно здесь начался поиск математического аппарата для описания уже известных физических закономерностей в попытке поставить исследования на рельсы теоретической физики. Так под влиянием задач трехмерной геометрии и механики в сороковых годах прошлого столетия была создана трехмерная векторная алгебра (Гамильтона-Грассмана), где приходится иметь дело с трехмерными векторными величинами, характеризующимися не только своими числовыми значениями, но и направлениями в трехмерном пространстве.

Вслед за этим в короткий промежуток времени были построены основы трехмерной аналитической и дифференциальной геометрии, а также теории электромагнитного поля, в которых идеи трехмерного векторного исчисления играли решающую роль. Этот факт привлек внимание многих ученых – и в их трудах оно приобрело к началу XX, ушедшего столетия современную форму.

С этого времени трехмерное векторное исчисление становится математической базой теоретической физики и на его основе строятся все современные курсы теоретической механики, газо-, гидро-, термо-, электродинамики, квантовой механики, атомной и ядерной физики, другие курсы естественных наук, а сама наука добивается потрясающих результатов в описании физических явлений. В частности, была установлена пространственно-временная подоплека законов сохранения и то, что теоретическая физика также предполагает наличие трех законов сохранения: энергии, импульса и момента импульса. Именно тогда большинство ученых утвердилось в концепции трёхмерности физического мира и неприемлемости теоретических воззрений, предусматривающих большую размерность. Даже теория относительности не поколебала сложившихся представлений, хотя и внесла коренные изменения в математическую и физическую интерпретацию теперь уже пространственно-временных соотношений.

Гром прогремел только во второй половине двадцатого столетия. Лавинообразно нарастает число открытых элементарных частиц, а попытки описания их свойств в рамках трехмерных пространственных представлений (О3-, и SU2-симметрии) безнадежно проваливаются. Более того, в микромире обнаружились неизвестные ранее законы сохранения (например, закон сохранения барионного заряда) и уже это предполагало увеличение числа измерений физического пространства. Сразу же всерьез заговорили о многомерном мире, параллельных мирах и других многомерных понятиях. Ведущие физики и математики всех стран начали активно изучать свойства отвергнутых ранее многомерных физических пространств. Был выполнен колоссальный объем исследований, достигнут ряд важнейших результатов, присвоено немало Нобелевских премий и иных высоких наград, но не был получен ответ на два принципиальных вопроса:

– какое число измерений (или какое число законов сохранения) соответствует физическому миру?
– какими математическими средствами описывать закономерности такого физического пространства?

Первым серьезным результатом теории явилось применение к физическим проблемам (восьмимерной) SU3-симметрии. Она в значительной (хотя и не полной) степени отвечает экспериментальным данным по сильным (ядерным) взаимодействиям. Другим реальным достижением явилось комбинирование пространств относительно малой размерности (например, SU3-, SU2- и U1- симметрий) для описания свойств сильных, слабых и электромагнитных взаимодействий в стремлении построить **единую теорию поля**. Но многочисленные попытки увеличения числа измерений физического пространства не привели в дальнейшем к достижению желаемого результата. Более того, наметился определенный спад активности исследований в этой области – число предполагаемых законов сохранения становится абсурдно большим.

Подводя итог этих исследований, можно заявить, что простой перебор вариантов построения многомерных теорий поля не дает решения поставленной задачи и приводит к цейтнотной ситуации. В интенсивном изучении многомерных физических пространств присутствуют не только элементы перебора размерностей пространства, но и оторванность от исходной предпосылки – использования трехмерной физической теории в качестве частного случая многомерной. Достаточно сказать, что на этом пути пришлось бы рассмотреть бесконечно большое число возможных размерностей физических пространств с массой вариантов задания структурных констант алгебры для каждой из них. Многие ученые упустили из вида исторический факт построения физических теорий на основе предварительно созданной трехмерной векторной алгебры и продолжают искать закономерности многомерной физики путем перебора физических предпосылок.

Выход из сложившейся ситуации найден в соответствии с историческим опытом – необходимо было сначала должным образом построить многомерную алгебру и далее применить ее для построения многомерной физики. Правилом отбора алгебры явилось использование трехмерной физики как частного случая многомерной. На языке математики это означает, что трехмерная векторная алгебра (Гамильтона-Грассмана) должна быть подалгеброй многомерной векторной алгебры. На этом пути мы неизбежно придем к замечательному, но малоизвестному выводу Новосибирской алгебраической школы Мальцева о том, что единственным расширением трехмерной векторной алгебры (Гамильтона-Грассмана) является семимерная векторная алгебра, причем с конкретными структурными константами, так что здесь скрыт ответ сразу на оба поставленных выше вопроса.

Дальнейшее развитие исследований очевидно. Необходимо было изучить закономерности найденной семимерной векторной алгебры в части определения операций умножения векторов, построить основы семимерной аналитической и дифференциальной геометрий, рассмотреть закономерности семимерного поля и восьмимерного пространства-времени, что явилось бы математической базой для пересмотра всех курсов теоретической физики в семимерном изложении, а также соответствующих разделов математики.

Значительная часть этого тернистого пути уже пройдена автором статьи. Результаты двадцатилетнего труда изложены им в ряде работ и наиболее полно представлены в двух монографиях [1; 2].

В первой монографии последовательно рассмотрены основополагающие моменты теории поля для элементарных частиц с целым спином, а во второй – для частиц с полуцелым спином. В частности показано, что семимерное векторное поле является совокупностью семи однотипных в математическом отношении трехмерных векторных полей, что позволяет прогнозировать свойства трех пока неизвестных и уточнить свойства четырех уже известных полей. Последнее показано на примере теории гравитационно-гироскопного поля, где температура выступает в роли скалярного, а скорость – в роли векторного потенциала поля. При этом видоизменяется, например, запись второго закона Ньютона, приобретающей форму силы Лоренца.

Для частиц с целым спином найдена семипараметровая группа вращений Q7 как подгруппа ортогональной группы O7, матрицы вращений вокруг координатных осей, генераторы группы, определены правила коммутации в Q7-симметрии, получены решения основных уравнений семимерной математической физики. Аналогично, для частиц с полуцелым спином найдена семипараметровая группа вращений SV6 как подгруппа специальной унитарной группы SU6, матрицы вращений вокруг координатных осей, генераторы группы, параметры (Кэли), параметры (Эйлера), уравнение (Дирака), матрицы (Паули) в семимерном варианте, правила коммутации в SV6-симметрии.

Так, в частности, впервые получены основные соотношения семимерной векторной алгебры, пригодные для решения математических, физических и технических задач в семимерном евклидовом пространстве:

– определены основные соотношения семимерной дифференциальной геометрии линии и пространства, а также семимерного векторного анализа, включающие соотношения трёхмерного векторного исчисления как частный случай;
– получены основные соотношения теории восьмимерного пространства-времени и указан способ построения теории плохо изученных и неизвестных трёхмерных полей в системе семимерных полей;
– впервые найден способ семимерных вращений, построены изовекторная и спинорная семимерные алгебры [3], найдена соответствующая группа симметрии и её представление.

Разработаны основы семимерного векторного исчисления в разделах семимерной векторной алгебры, дифференциальной геометрии и векторного анализа, способные быть основой для описания обобщённой теории полей, установления новых физических явлений и связей между ними. Они могут найти широкое применение в семимерном тензорном исчислении, теории групп, других отраслях математики, физики, химии, в ряде естественных наук и технических приложений, например при классификации элементарных частиц, моделировании семимерных кристаллических решёток твёрдых тел и химических веществ, классификации кристаллов и кристаллических структур в геологических исследованиях, в многомерной рентгенографии, для повышения точности гироскопических и других технических устройств, для построения новых алгоритмов и программного обеспечения систем многомерной графики, для разработки семимерных векторных процессоров, для получения и обработки информации при управлении сложными объектами, для множества других задач. Результаты работы могут быть использованы, в частности, при математическом моделировании нейрокибернетических систем и систем искусственного интеллекта.

Кроме того, «новая парадигма семимерного пространства необходима, прежде всего, в изучении гравитации, слабого и сильного ядерных взаимодействий (а также пространства и времени (пространства-времени)). Парадигма семимерного пространства позволит максимально отработать направления, в которых развивались ведущие трёхмерные технологии XX века: ядерные, химические и биологические – и эффективно вести работы по трём основным технологиям века XXI-го: нанотехологии, генной инженерии (биоинформатике) и робототехнике. А также предлагаемая парадигма может быть полезна в криптологии (криптографии и криптоанализе) и в информатике – для разработки новых алгоритмов и программного обеспечения, описании кристаллических структур, классификации химических веществ, в когнитивной науке, системной комплексной физике, а также в анализе и моделировании экстраординарных ситуаций и аномальных явлений, а также ещё целому ряду технических приложений» [4, с.4].

Каждый физик уже по перечню рассмотренных задач оценит возможности полученного математического аппарата. Столь подробные исследования удалось выполнить только в рамках трехмерных представлений о строении физического мира. При этом соответствующие трехмерные решения задач всегда возникают как частный случай семимерных решений. Более того, результаты исследования семимерных преобразований (Q7- и SV6-симметрии) весьма близки аналогичным результатам SU3-симметрии и, следовательно, имеют достаточно прочное экспериментальное обоснование. Таким образом, можно говорить об адекватности Q7- и SV6-симметрий свойствам нашего физического мира и о необходимости их активного использования.

Совершенно необозримы возможности новой семимерной теоретической физики. С ее помощью, прежде всего, следует уточнить законы физики элементарных частиц и дать их классификацию. Очередным (или одновременным) этапом работ является исследование прогнозируемых семимерной теорией поля эффектов. Наконец, необходимо переосмыслить все курсы физики, ряд разделов математики, многие естественные науки, технические средства и вообще мировоззрение. И это уже отнюдь не мечта, а реальность сегодняшнего дня. Кроме того, многомерная физика – новая семимерная теоретическая физика совокупно с новым математическим аппаратом открывают путь к **многомерным технологиям.**

Мы живем в мире семи измерений, с семью законами сохранения, в котором трехмерный мир выступает лишь как частный случай. Вдохновляющие результаты уже получены. В новом тысячелетии мы вошли в малознакомый, но уже понятный и близкий «семимерный» мир.

Литература

1. *А.В. Коротков,* Элементы семимерного векторного исчисления. Алгебра. Геометрия. Теория поля, *Изд-во Набла, Новочеркасск, (1996).*

2. *А.В.Коротков,* Семимерное спинорное и векторное исчисления в задачах теории поля, *Изд-во Набла, Новочеркасск, (1997).*

3. *А.В.Коротков,* Элементы трех-и семимерных изовекторных и спинорных псевдоевклидовых исчислений, *Изд-во УПЦ «Набла» ЮРГТУ (НПИ), Новочеркасск (2008).*

4. *А.В.Коротков, В.С.Чураков,* Теоретико-философские аспекты трехмерного и семимерного пространств (евклидова и псевдоевклидова), *Изд-во УПЦ «Набла» ЮРГТУ (НПИ), Новочеркасск (2007).*

КОРОТКОВ А.В.
НАЧАЛА НЕЕВКЛИДОВЫХ СЕМИМЕРНЫХ ВЕКТОРНЫХ АЛГЕБР

В [1] изучены основные свойства евклидовой семимерной векторной алгебры, а в [2] показано, что кроме евклидовых алгебр возможно построение неевклидовых векторных алгебр в трехмерном и семимерном вариантах.

Рассмотрим свойства неевклидовых семимерных векторных алгебр.

Таблица умножения базисных элементов семимерных неевклидовых векторных алгебр может быть представлена в виде:

	$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_3$	$\mathbf{e}_4$	$\mathbf{e}_5$	$\mathbf{e}_6$	$\mathbf{e}_7$	
$\mathbf{e}_1$	0	$\mathbf{e}_3$	$\alpha\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_5$	$\alpha\mathbf{e}_4$	$-\mathbf{e}_7$	$-\alpha\mathbf{e}_6$	
$\mathbf{e}_2$	$-\mathbf{e}_3$	0	$-\alpha\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_6$	$\mathbf{e}_7$	$\alpha\mathbf{e}_4$	$\alpha\mathbf{e}_5$	
$\mathbf{e}_3$	$-\alpha\mathbf{e}_2$	$\alpha\mathbf{e}_1$	0	$\mathbf{e}_7$	$\alpha\mathbf{e}_6$	$-\alpha\mathbf{e}_5$	$-\alpha^2\mathbf{e}_4$	
$\mathbf{e}_4$	$-\mathbf{e}_5$	$-\mathbf{e}_6$	$-\mathbf{e}_7$	0	$-\alpha\mathbf{e}_1$	$-\alpha\mathbf{e}_2$	$-\alpha\mathbf{e}_3$	
$\mathbf{e}_5$	$-\alpha\mathbf{e}_4$	$-\mathbf{e}_7$	$-\alpha\mathbf{e}_6$	$\alpha\mathbf{e}_1$	0	$\alpha\mathbf{e}_3$	$\alpha^2\mathbf{e}_2$	
$\mathbf{e}_6$	$\mathbf{e}_7$	$-\alpha\mathbf{e}_4$	$\alpha\mathbf{e}_5$	$\alpha\mathbf{e}_2$	$-\alpha\mathbf{e}_3$	0	$-\alpha^2\mathbf{e}_1$	
$\mathbf{e}_7$	$\alpha\mathbf{e}_6$	$-\alpha\mathbf{e}_5$	$\alpha^2\mathbf{e}_4$	$\alpha\mathbf{e}_3$	$-\alpha^2\mathbf{e}_2$	$\alpha^2\mathbf{e}_1$	0	

где α принимает значения ±1 или 0. Здесь $\alpha=-1$ соответствует евклидовой семимерной векторной алгебре (Гамильтона-Грассмана), $\alpha=1$ – алгебре, отвечающей восьмимерному расширению двойных чисел, а $\alpha=0$ – алгебре, отвечающей восьмимерному расширению дуальных чисел.

Целью настоящей работы является изучение выражений, которые можно составлять из векторов и скаляров при помощи операций неевклидовых семимерных векторных алгебр. Основными и простейшими являются линейные комбинации векторов, скалярные и векторные произведения, а также произведения нескольких векторов.

Линейными операциями над векторами являются сложение векторов и умножение вектора на скаляр, определяемые свойствами семимерного линейного векторного пространства:

1. Ассоциативность сложения векторов

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}=\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C});$$

2. Коммутативность сложения векторов

A+**B**=**B**+**A**;

3. Наличие нулевого вектора

A+**0**=**A**;

4. Наличие противоположного вектора

A+(-**A**)=**0**.

При векторном сложении результат не зависит от порядка слагаемых и, сумму более чем двух векторов можно писать без скобок.

Действие умножение вектора на скаляр обладает следующими свойствами:

1. a**A**=**A**a;
2. (ab)**A**=a(b**A**);
3. (a+b)**A**=a**A**+b**A**;
4. a(**A**+**B**)=a**A**+a**B**.

В основе векторной алгебры лежат определения скалярного и векторного произведений двух векторов.

Скалярным произведением **(AB)** двух векторов **A** и **B** назовем скаляр
$(\mathbf{AB})=(A_i\mathbf{e}_i B_\kappa \mathbf{e}_\kappa)=A_i B_k(\mathbf{e}_i\mathbf{e}_k)=g_{ik}A_iB_k$,
определяемый матрицей скалярных произведений векторов базиса вида:

$$
g_{ik}=(\mathbf{e}_i\mathbf{e}_k)=\left\|\begin{array}{ccc|cccc}
-\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & -\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & \alpha^2 & 0 & 0 & 0 & 0\\
\hline
0 & 0 & 0 & -\alpha & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & \alpha^2 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha^2 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha^3
\end{array}\right\|
$$

так что
$(\mathbf{AB})=g_{ik}A_iB_k=g_{ii}A_iB_i$,
т.е. $(\mathbf{AB})=-\alpha A_1B_1-\alpha A_2B_2+\alpha^2A_3B_3-\alpha A_4B_4+\alpha^2A_5B_5+\alpha^2A_6B_6-\alpha^3A_7B_7$.

Скалярный квадрат вектора **A** определяется соответственно равенством

$$(\mathbf{AA})=-\alpha A_1^2-\alpha A_2^2+\alpha^2 A_3^2-\alpha A_4^2+\alpha^2 A_5^2+\alpha^2 A_6^2-\alpha^3 A_7^2=\mathbf{A}^2,$$

так что скалярный квадрат вектора равен квадрату модуля этого вектора, причем модуль вектора

$$A=\sqrt{-\alpha A_1^2-\alpha A_2^2+\alpha^2 A_3^2-\alpha A_4^2+\alpha^2 A_5^2+\alpha^2 A_6^2-\alpha^3 A_7^2}.$$

Очевидны свойства скалярного произведения двух векторов:

1. $(a\mathbf{AB})=a(\mathbf{AB})$;
2. $(\mathbf{AB})=(\mathbf{BA})$;
3. $(\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C}))=(\mathbf{AB})+(\mathbf{AC})$;
4. Два вектора **A** и **B** ортогональны, если выполняется условие $(\mathbf{AB})=0$.

Векторное произведение **[AB]** двух векторов **A** и **B** определяется матрицей векторных произведений векторов базиса, причем его можно записать в виде:

$$[\mathbf{AB}]=[(A_1\mathbf{e}_1+A_2\mathbf{e}_2+\ldots+A_7\mathbf{e}_7)(B_1\mathbf{e}_1+B_2\mathbf{e}_2+\ldots+B_7\mathbf{e}_7)]=$$

$$=(-\alpha(A_2B_3-A_3B_2)-\alpha\ (A_4B_5-A_5B_4)+\alpha^2(A_7B_6-A_6B_7))\mathbf{e}_1+$$

$$+(-\alpha(A_4B_6-A_6B_4)+\alpha^2(A_5B_7-A_7B_5)-\alpha\ (A_3B_1-A_1B_3))\mathbf{e}_2+$$

$$+(-\alpha(A_6B_5-A_5B_6)+\ (A_1B_2-A_2B_1)-\alpha\ (A_4B_7-A_7B_4))\mathbf{e}_3+$$

$$+(-\alpha(A_5B_1-A_1B_5)+\alpha^2(A_7B_3-A_3B_7)-\alpha\ (A_6B_2-A_2B_6))\mathbf{e}_4+$$

$$+(-\alpha(A_7B_2-A_2B_7)-\alpha\ (A_3B_6-A_6B_3)+\ (A_1B_4-A_4B_1))\mathbf{e}_5+$$

$$+(-\alpha(A_1B_7-A_7B_1)+\ (A_2B_4-A_4B_2)-\alpha\ (A_5B_3-A_3B_5))\mathbf{e}_6+$$

$$+(\ (A_3B_4-A_4B_3)+\ (A_6B_1-A_1B_6)+\ (A_2B_5-A_5B_2))\mathbf{e}_7.$$

Векторное произведение двух векторов удобно записать в виде суммы определителей:

$$[\mathbf{AB}]=\begin{vmatrix} -\alpha e_1 & -\alpha e_2 & e_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} -\alpha e_2 & -\alpha e_4 & e_6 \\ A_2 & A_4 & A_6 \\ B_2 & B_4 & B_6 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} -\alpha e_3 & -\alpha e_6 & -\alpha e_5 \\ A_3 & A_6 & A_5 \\ B_3 & B_6 & B_5 \end{vmatrix}+$$

$$+\begin{vmatrix} -\alpha e_4 & e_5 & -\alpha e_6 \\ A_4 & A_5 & A_6 \\ B_4 & B_5 & B_6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -\alpha e_5 & e_7 & \alpha^2 e_2 \\ A_5 & A_7 & A_2 \\ B_5 & B_7 & B_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -\alpha e_6 & \alpha^2 e_1 & e_7 \\ A_6 & A_1 & A_7 \\ B_6 & B_1 & B_7 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e_7 & -\alpha e_3 & \alpha^2 e_4 \\ A_7 & A_3 & A_4 \\ B_7 & B_3 & B_4 \end{vmatrix}.$$

Из свойств определителей следует, что:

1. **[**a**AB]**=a**[AB]**;
2. **[AB]**=-**[BA]**;
3. **[A(B**+**C**)**]**=**[AB]**+**[AC]**;
4. **[**a**AA]**=**0**.

Все произведения трех векторов можно получить умножением произведения двух векторов на третий вектор. В соответствии с этим возможны лишь следующие типы произведений:

1. **A(BC)** – простейшее произведение трех векторов;
2. **(A[BC])** – смешанное произведение трех векторов;
3. **[A[BC]]** – двойное векторное произведение трех векторов.

Простейшее произведение **A(BC)** трех векторов **A**, **B** и **C** получается умножением скалярного произведения двух векторов на третий вектор. В результате получается вектор, коллинеарный с третьим вектором. Из этого в общем случае вытекает неравенство

A(BC)≠(AB)C,

так что рассматриваемое векторное исчисление не ассоциативно.

Смешанное произведение **(A[BC])=(ABC)** трех векторов **A**, **B** и **C** получается скалярным умножением векторного произведения двух векторов на третий вектор. В результате получаем антисимметричную по перестановке любой пары векторов скалярную функцию

$\mathbf{(A[BC])}=-\alpha A_1[BC]_1-\alpha A_2[BC]_2+\alpha^2 A_3[BC]_3-A_4[BC]_4+\alpha^2 A_5[BC]_5+\alpha^2 A_6[BC]_6-\alpha^3 A_7[BC]_7=$

$$\begin{aligned}
&=-\alpha\ A_1(-\alpha(B_2C_3-B_3C_2)-\alpha(B_4C_5-B_5C_4)+\alpha^2(B_7C_6-B_6C_7))+\\
&\ -\alpha\ A_2(-\alpha(B_4C_6-B_6C_4)+\alpha^2(B_5C_7-B_7C_5)-\alpha(B_3C_1-B_1C_3))+\\
&\ +\alpha^2 A_3(-\alpha(B_6C_5-B_5C_6)+\quad(B_1C_2-B_2C_1)-\alpha(B_4C_7-B_7C_4))+\\
&\ -\alpha\ A_4(-\alpha(B_5C_1-B_1C_5)+\alpha^2(B_7C_3-B_3C_7)-\alpha(B_6C_2-B_2C_6))+\\
&\ +\alpha^2 A_5(-\alpha(B_7C_2-B_2C_7)-\alpha(B_3C_6-B_6C_3)+\quad(B_1C_4-B_4C_1))+\\
&\ +\alpha^2 A_6(-\alpha(B_1C_7-B_7C_1)+\quad(B_2C_4-B_4C_2)-\alpha(B_5C_3-B_3C_5))+\\
&\ -\alpha^3 A_7(\quad(B_3C_4-B_4C_3)+\quad(B_6C_1-B_1C_6)+\quad(B_2C_5-B_5C_2)).
\end{aligned}$$

Смешанное произведение трех векторов можно представить в виде суммы определителей:

$$(\mathbf{ABC})=\alpha^2\begin{vmatrix}A_1 & A_2 & A_3\\ B_1 & B_2 & B_3\\ C_1 & C_2 & C_3\end{vmatrix}+\alpha^2\begin{vmatrix}A_2 & A_4 & A_6\\ B_2 & B_4 & B_6\\ C_2 & C_4 & C_6\end{vmatrix}-\alpha^3\begin{vmatrix}A_3 & A_6 & A_5\\ B_3 & B_6 & B_5\\ C_3 & C_6 & C_5\end{vmatrix}+$$

$$+\alpha^2\begin{vmatrix}A_4 & A_5 & A_1\\ B_4 & B_5 & B_1\\ C_4 & C_5 & C_1\end{vmatrix}-\alpha^3\begin{vmatrix}A_5 & A_7 & A_2\\ B_5 & B_7 & B_2\\ C_5 & C_7 & C_2\end{vmatrix}-\alpha^3\begin{vmatrix}A_6 & A_1 & A_7\\ B_6 & B_1 & B_7\\ C_6 & C_1 & C_7\end{vmatrix}-\alpha^3\begin{vmatrix}A_7 & A_3 & A_4\\ B_7 & B_3 & B_4\\ C_7 & C_3 & C_4\end{vmatrix}.$$

Из свойств определителей следует, что:

1. $(a\mathbf{ABC})= a(\mathbf{ABC})$;
2. Смешанное произведение трех векторов изменяет знак при перестановке любой пары векторов;
3. $(\mathbf{AB}(\mathbf{C}+\mathbf{D}))=(\mathbf{ABC})+(\mathbf{ABD})$;
4. Если два вектора **A** и **B** в смешанном произведении трех векторов коллинеарные, то это произведение равно нулю. В частности, если два вектора в смешанном произведении трех векторов равны, то оно обращается в нуль. Так что, векторное произведение двух векторов ортогонально каждому из входящих в него векторов $([\mathbf{AB}]\mathbf{A})=\mathbf{0}$. Если три вектора **A**, **B** и $\mathbf{C}=\mathbf{A}+\mathbf{B}$ компланарны, то выполняется равенство $(\mathbf{ABC})=(\mathbf{AB}(\mathbf{A}+\mathbf{B}))=\mathbf{0}$.

Двойное векторное произведение $[\mathbf{A}[\mathbf{BC}]]$ трех векторов **A**, **B** и **C** получается векторным умножением векторного произведения двух векторов на третий вектор. В результате имеем вектор

$$[\mathbf{A}[\mathbf{BC}]]=[\mathbf{AD}]=\mathbf{E}=E_1\mathbf{e}_1+E_2\mathbf{e}_2+\ldots+E_7\mathbf{e}_7.$$

В координатной форме записи для первой координаты двойного векторного произведения имеет место соотношение

$$E_1= -\alpha(A_2D_3-A_3D_2)-\alpha(A_4D_5-A_5D_4)+\alpha^2(A_7D_6-A_6D_7) =$$

$$= -\alpha A_2(-\alpha(B_6C_5-B_5C_6)+\ \ (B_1C_2-B_2C_1)-\alpha(B_4C_7-B_7C_4)) +$$

$$+\alpha A_3(-\alpha(B_4C_6-B_6C_4)+\alpha^2(B_5C_7-B_7C_5)-\alpha(B_3C_1-B_1C_3)) -$$

$$-\alpha A_4(-\alpha(B_7C_2-B_2C_7)-\alpha(B_3C_6-B_6C_3)+(B_1C_4-B_4C_1)) +$$

$+\alpha A_5\ (-\alpha(B_5C_1-B_1C_5)+\alpha^2(B_7C_3-B_3C_7)-\alpha(B_6C_2-B_2C_6))\ +$

$+\alpha^2 A_7(-\alpha(B_1C_7-B_7C_1)+\ \ (B_2C_4-B_4C_2)-\alpha(B_5C_3-B_3C_5))\ -$

$-\ \alpha^2 A_6(\ \ (B_3C_4-B_4C_3)+\ \ (B_6C_1-B_1C_6)+\ (B_2C_5-B_5C_2)),$

т.е. $E_1 = B_1\mathbf{(CA)}-C_1\mathbf{(AB)}+\mathbf{[ABC]}_1,$

где

$$\mathbf{[ABC]}_1=\alpha^2\begin{vmatrix} A_2 & A_4 & A_7 \\ B_2 & B_4 & B_7 \\ C_2 & C_4 & C_7 \end{vmatrix} -\alpha^3\begin{vmatrix} A_3 & A_7 & A_5 \\ B_3 & B_7 & B_5 \\ C_3 & C_7 & C_5 \end{vmatrix} +\alpha^2\begin{vmatrix} A_4 & A_3 & A_6 \\ B_4 & B_3 & B_6 \\ C_4 & C_3 & C_6 \end{vmatrix} +\alpha^2\begin{vmatrix} A_6 & A_5 & A_2 \\ B_6 & B_5 & B_2 \\ C_6 & C_5 & C_2 \end{vmatrix}.$$

Аналогично, для других координат

$E_2 = B_2\mathbf{(CA)}-C_2\mathbf{(AB)}\ +\mathbf{[ABC]}_2,$

где

$$\mathbf{[ABC]}_2=\alpha^2\begin{vmatrix} A_4 & A_5 & A_3 \\ B_4 & B_5 & B_3 \\ C_4 & C_5 & C_3 \end{vmatrix} -\alpha^3\begin{vmatrix} A_6 & A_3 & A_7 \\ B_6 & B_3 & B_7 \\ C_6 & C_3 & C_7 \end{vmatrix} +\alpha^2\begin{vmatrix} A_5 & A_6 & A_1 \\ B_5 & B_6 & B_1 \\ C_5 & C_6 & C_1 \end{vmatrix} +\alpha^2\begin{vmatrix} A_1 & A_7 & A_4 \\ B_1 & B_7 & B_4 \\ C_1 & C_7 & C_4 \end{vmatrix},$$

$E_3 = B_3\mathbf{(CA)}-C_3\mathbf{(AB)}\ +\mathbf{[ABC]}_3,$

где

$$\mathbf{[ABC]}_3=-\alpha\begin{vmatrix} A_6 & A_1 & A_4 \\ B_6 & B_1 & B_4 \\ C_6 & C_1 & C_4 \end{vmatrix} -\alpha\begin{vmatrix} A_5 & A_4 & A_2 \\ B_5 & B_4 & B_2 \\ C_5 & C_4 & C_2 \end{vmatrix} +\alpha^2\begin{vmatrix} A_1 & A_5 & A_7 \\ B_1 & B_5 & B_7 \\ C_1 & C_5 & C_7 \end{vmatrix} +\alpha^2\begin{vmatrix} A_7 & A_2 & A_6 \\ B_7 & B_2 & B_6 \\ C_7 & C_2 & C_6 \end{vmatrix},$$

$E_4 = B_4\mathbf{(CA)}-C_4\mathbf{(AB)}\ +\mathbf{[ABC]}_4,$

где

$$\mathbf{[ABC]}_4=-\alpha^3\begin{vmatrix} A_5 & A_7 & A_6 \\ B_5 & B_7 & B_6 \\ C_5 & C_7 & C_6 \end{vmatrix} +\alpha^2\begin{vmatrix} A_1 & A_6 & A_3 \\ B_1 & B_6 & B_3 \\ C_1 & C_6 & C_3 \end{vmatrix} +\alpha^2\begin{vmatrix} A_7 & A_1 & A_2 \\ B_7 & B_1 & B_2 \\ C_7 & C_1 & C_2 \end{vmatrix} +\alpha^2\begin{vmatrix} A_2 & A_3 & A_5 \\ B_2 & B_3 & B_5 \\ C_2 & C_3 & C_5 \end{vmatrix},$$

$E_5 = B_5\mathbf{(CA)}-C_5\mathbf{(AB)}\ +\mathbf{[ABC]}_5,$

где

$$\mathbf{[ABC]}_5 = \alpha^2 \begin{vmatrix} A_7 & A_3 & A_1 \\ B_7 & B_3 & B_1 \\ C_7 & C_3 & C_1 \end{vmatrix} - \alpha \begin{vmatrix} A_2 & A_1 & A_6 \\ B_2 & B_1 & B_6 \\ C_2 & C_1 & C_6 \end{vmatrix} - \alpha \begin{vmatrix} A_3 & A_2 & A_4 \\ B_3 & B_2 & B_4 \\ C_3 & C_2 & C_4 \end{vmatrix} + \alpha^2 \begin{vmatrix} A_4 & A_6 & A_7 \\ B_4 & B_6 & B_7 \\ C_4 & C_6 & C_7 \end{vmatrix},$$

$E_6 = B_6\mathbf{(CA)}\text{-}C_6\mathbf{(AB)} + \mathbf{[ABC]}_6$,

где

$$\mathbf{[ABC]}_6 = -\alpha \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_5 \\ B_1 & B_2 & B_5 \\ C_1 & C_2 & C_5 \end{vmatrix} + \alpha^2 \begin{vmatrix} A_7 & A_5 & A_4 \\ B_7 & B_5 & B_4 \\ C_7 & C_5 & C_4 \end{vmatrix} + \alpha^2 \begin{vmatrix} A_2 & A_7 & A_3 \\ B_2 & B_7 & B_3 \\ C_2 & C_7 & C_3 \end{vmatrix} - \alpha \begin{vmatrix} A_3 & A_4 & A_1 \\ B_3 & B_4 & B_1 \\ C_3 & C_4 & C_1 \end{vmatrix},$$

$E_7 = B_7\mathbf{(CA)}\text{-}C_7\mathbf{(AB)} + \mathbf{[ABC]}_7$,

где

$$\mathbf{[ABC]}_7 = -\alpha \begin{vmatrix} A_3 & A_6 & A_2 \\ B_3 & B_6 & B_2 \\ C_3 & C_6 & C_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A_4 & A_2 & A_1 \\ B_4 & B_2 & B_1 \\ C_4 & C_2 & C_1 \end{vmatrix} - \alpha \begin{vmatrix} A_6 & A_4 & A_5 \\ B_6 & B_4 & B_5 \\ C_6 & C_4 & C_5 \end{vmatrix} - \alpha \begin{vmatrix} A_5 & A_1 & A_3 \\ B_5 & B_1 & B_3 \\ C_5 & C_1 & C_3 \end{vmatrix}.$$

Таким образом, окончательно запишем

$$\mathbf{[A[BC]] = B(CA)\text{-}C(AB)+[ABC]},$$

где вектор **[ABC]** можно представить в виде суммы определителей:

$$\mathbf{[ABC]} = \begin{vmatrix} \alpha^2\mathbf{e}_1 & \alpha^2\mathbf{e}_2 & \alpha^2\mathbf{e}_4 & \mathbf{e}_7 \\ A_1 & A_2 & A_4 & A_7 \\ B_1 & B_2 & B_4 & B_7 \\ C_1 & C_2 & C_4 & C_7 \end{vmatrix} +$$

$$+\begin{vmatrix} \alpha^2\mathbf{e}_2 & \alpha^2\mathbf{e}_4 & -\alpha\mathbf{e}_5 & -\alpha\mathbf{e}_3 \\ A_2 & A_4 & A_5 & A_3 \\ B_2 & B_4 & B_5 & B_3 \\ C_2 & C_4 & C_5 & C_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -\alpha\mathbf{e}_3 & -\alpha\mathbf{e}_6 & \alpha^2\mathbf{e}_1 & \alpha^2\mathbf{e}_4 \\ A_3 & A_6 & A_1 & A_4 \\ B_3 & B_6 & B_1 & B_4 \\ C_3 & C_6 & C_1 & C_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -\alpha^3\mathbf{e}_4 & \alpha^2\mathbf{e}_5 & -\alpha\mathbf{e}_7 & \alpha^2\mathbf{e}_6 \\ A_4 & A_5 & A_7 & A_6 \\ B_4 & B_5 & B_7 & B_6 \\ C_4 & C_5 & C_7 & C_6 \end{vmatrix} +$$

$$+\begin{vmatrix} \alpha^2\mathbf{e}_5 & -\alpha\mathbf{e}_7 & \alpha^2\mathbf{e}_3 & -\alpha^3\mathbf{e}_1 \\ A_5 & A_7 & A_3 & A_1 \\ B_5 & B_7 & B_3 & B_1 \\ C_5 & C_7 & C_3 & C_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -\alpha\mathbf{e}_6 & \alpha^2\mathbf{e}_1 & \alpha^2\mathbf{e}_2 & -\alpha\mathbf{e}_5 \\ A_6 & A_1 & A_2 & A_5 \\ B_6 & B_1 & B_2 & B_5 \\ C_6 & C_1 & C_2 & C_5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -\alpha\mathbf{e}_7 & \alpha^2\mathbf{e}_3 & \alpha^2\mathbf{e}_6 & -\alpha^3\mathbf{e}_2 \\ A_7 & A_3 & A_6 & A_2 \\ B_7 & B_3 & B_6 & B_2 \\ C_7 & C_3 & C_6 & C_2 \end{vmatrix} .$$

Подобным образом можно получить соотношение

[[AB]C] = **[C[BA]]** = **B(CA)-A(BC)-[ABC]**.

Антисимметричная по перестановке любой пары векторов векторная функция трех векторов **[ABC]** является векторным произведением трех векторов.

Из свойств определителей следует, что:

1. Векторное произведение трех векторов не изменится, если вынести за скобки скалярный множитель, т.е.

   [a**ABC]** = a**[ABC];**

2. Векторное произведение трех векторов изменяет знак при перестановке любой пары векторов;
3. Векторное произведение трех векторов дистрибутивно, т.е.

   [AB(C+D)] = **[ABC]**+**[ABD]**;

4. Если два вектора в векторном произведении трех векторов коллинеарны, то это произведение равно нулю. В частности, если два вектора в векторном произведении трех векторов равны, то оно обращается в нуль. Если любой из векторов **A**, **B** или **C** раскладывается по двум векторам, то выполняется условие **[ABC]** = **0**.

Используя циклические подстановки векторов, получим

$$[\mathbf{A}[\mathbf{BC}]]+[\mathbf{B}[\mathbf{CA}]]+[\mathbf{C}[\mathbf{AB}]]= 3[\mathbf{ABC}]$$

и $$[[\mathbf{AB}]\mathbf{C}]+[[\mathbf{BC}]\mathbf{A}]+[[\mathbf{CA}]\mathbf{B}]=-3[\mathbf{ABC}],$$

так что, в рассматриваемых алгебрах не выполняется соотношение Якоби, они не ассоциативны и не относятся к классу алгебр Ли.

Все произведения четырех векторов можно получить следующими двумя способами:

- умножением произведения трех векторов на четвертый вектор;
- умножением произведения двух векторов на произведение двух векторов.

В соответствии с этим, возможны следующие типы произведений:

((AB)CD)	**(AB)(CD)**	**(ABC)D.**
[(AB)CD]	**(AB)[CD]**	
([[AB]C]D)	**([AB][CD])**	
[[[AB]C]D]	**[[AB][CD]]**	

Не все девять получившихся произведений различны между собой. Действительно, во-первых, мы знаем, что скалярный множитель можно выносить за знак скалярного и векторного произведений двух векторов. Поэтому

((AB)CD) = (AB)(CD)

[(AB)CD] =(AB)[CD].

Во-вторых, считая векторное произведение **[AB]** за один вектор, мы можем рассматривать **([[AB]C]D)** как смешанное произведение трех векторов **[AB], C** и **D.** Применив к нему закон сочетательности, получим

([[AB]C]D) = ([AB][CD]).

Итак, остаются только шесть типов произведений четырех векторов

1. **((AB)CD) = (AB)(CD)**;
2. **[(AB)CD] = (AB)[CD]**;
3. **([[AB]C]D) = ([AB][CD])**;
4. **([AB]C)D = (ABC)D**;
5. **[[AB][CD]]**;
6. **[[[AB]C]D]**.

Мы покажем теперь, что четыре последних произведения не являются линейными комбинациями из произведений первых двух типов, которые считались основными в трехмерном случае.

Скалярное произведение двух векторов **[AB]** и **[CD]**, как уже отмечалось, является смешанным произведением трех векторов **([[AB]C]D)**. На основании закона сочетательности мы можем для вычисления этого произведения перемножить векторно два первых множителя **[AB]** и **C** и результат умножить скалярно на третий множитель, следовательно

$$([AB][CD]) = ([[AB]C]D).$$

Развернув получившееся в скобках двойное векторное произведение трех векторов по формуле разложения, мы получим

$$([AB][CD]) = ((B(AC)-A(BC)-[ABC])D)$$

или, раскрыв скобки

$$([AB][CD]) = \begin{vmatrix} (AC) & (BC) \\ (AD) & (BD) \end{vmatrix} - ([ABC]D).$$

Таким образом, скалярное произведение двух векторных произведений, т.е. произведение третьего типа не выражается только через произведения первого типа, что имеет место в трехмерной алгебре.

Назовем второе слагаемое в правой части тождества смешанным произведением четырех векторов и обозначим его через

$$(ABCD) = ([ABC]D).$$

Используя координатную запись векторного произведения трех векторов **[ABC]**, получим координатную запись смешанного произведения четырех векторов в виде:

$$-(ABCD) = -\alpha^3 \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_4 & A_7 \\ B_1 & B_2 & B_4 & B_7 \\ C_1 & C_2 & C_4 & C_7 \\ D_1 & D_2 & D_4 & D_7 \end{vmatrix} -$$

$$-\alpha^3 \begin{vmatrix} A_2 & A_4 & A_5 & A_3 \\ B_2 & B_4 & B_5 & B_3 \\ C_2 & C_4 & C_5 & C_3 \\ D_2 & D_4 & D_5 & D_3 \end{vmatrix} -\alpha^3 \begin{vmatrix} A_3 & A_6 & A_1 & A_4 \\ B_3 & B_6 & B_1 & B_4 \\ C_3 & C_6 & C_1 & C_4 \\ D_3 & D_6 & D_1 & D_4 \end{vmatrix} +\alpha^4 \begin{vmatrix} A_4 & A_5 & A_7 & A_6 \\ B_4 & B_5 & B_7 & B_6 \\ C_4 & C_5 & C_7 & C_6 \\ D_4 & D_5 & D_7 & D_6 \end{vmatrix} +$$

$$+\alpha^4 \begin{vmatrix} A_5 & A_7 & A_3 & A_1 \\ B_5 & B_7 & B_3 & B_1 \\ C_5 & C_7 & C_3 & C_1 \\ D_5 & D_7 & D_3 & D_1 \end{vmatrix} -\alpha^3 \begin{vmatrix} A_6 & A_1 & A_2 & A_5 \\ B_6 & B_1 & B_2 & B_5 \\ C_6 & C_1 & C_2 & C_5 \\ D_6 & D_1 & D_2 & D_5 \end{vmatrix} +\alpha^4 \begin{vmatrix} A_7 & A_3 & A_6 & A_2 \\ B_7 & B_3 & B_6 & B_2 \\ C_7 & C_3 & C_6 & C_2 \\ D_7 & D_3 & D_6 & D_2 \end{vmatrix}.$$

Из свойств определителей следует:

1. Смешанное произведение четырех векторов не изменится, если вынести за скобки скалярный множитель, т.е.

$(a\mathbf{ABCD}) = a(\mathbf{ABCD})$;

2. Смешанное произведение четырех векторов изменяет знак при перестановке любой пары его векторов.

3. Смешанное произведение четырех векторов дистрибутивно, т.е.

$(\mathbf{ABC}(\mathbf{D}+\mathbf{E})) = (\mathbf{ABCD})+(\mathbf{ABCE})$;

4. Если два вектора в векторном произведении четырех векторов колинеарны, то это произведение равно нулю. В частности, если два вектора в смешанном произведении четырех векторов равны, то оно обращается в нуль, так что векторное произведение трех векторов ортогонально каждому из входящих в него векторов $([\mathbf{ABC}]\mathbf{A}) = \mathbf{0}$. Если четыре вектора **A**, **B**, **C** и **D** компланарны, либо разложены по трем векторам, то выполняется условие $(\mathbf{ABCD}) = \mathbf{0}$.

При этом из уравнения

$$([\mathbf{AB}][\mathbf{CD}])+(\mathbf{ABCD})= \begin{vmatrix} (\mathbf{AC}) & (\mathbf{BC}) \\ (\mathbf{AD}) & (\mathbf{BD}) \end{vmatrix}$$

следует соотношение

$$([\mathbf{AB}][\mathbf{CD}]) +([\mathbf{BC}][\mathbf{AD}]) + ([\mathbf{CA}][\mathbf{BD}]) = -3(\mathbf{ABCD}),$$

и как частный случай, при **C**=**A** и **D**=**B** - основное тождество для двух векторов

$$[\mathbf{AB}]^2 = \begin{vmatrix} (\mathbf{AA}) & (\mathbf{BA}) \\ (\mathbf{AB}) & (\mathbf{BB}) \end{vmatrix}.$$

Векторное произведение двух векторных произведений $[[\mathbf{AB}][\mathbf{CD}]]$ можно преобразовать двумя способами: во-первых, рассматривая это произведение как двойное векторное произведение трех векторов **[AB]**, **C** и **D** мы получим

$$[[\mathbf{AB}][\mathbf{CD}]] = \mathbf{C}(\mathbf{D}[\mathbf{AB}])-\mathbf{D}([\mathbf{AB}]\mathbf{C})+[[\mathbf{AB}]\mathbf{CD}].$$

Во-вторых, рассматривая то же произведение как двойное векторное произведение трех векторов **A**, **B** и **[CD]**, мы получим:

$$[[\mathbf{AB}][\mathbf{CD}]] = \mathbf{B}([\mathbf{CD}]\mathbf{A})-\mathbf{A}(\mathbf{B}[\mathbf{CD}])-[\mathbf{AB}[\mathbf{CD}]].$$

Таким образом, векторное произведение двух векторных произведений, т.е. произведение пятого типа, не выражается только через произведения четвертого типа. Сравнив оба выражения для одного и того же произведения **[[AB][CD]]**, мы получим

$$\mathbf{C(D[AB])-D([AB]C)+[[AB]CD]} = \mathbf{B([CD]A)-A(B[CD])-[AB[CD]]}$$

или

$$\mathbf{A(BCD) - B(CDA) + C(DAB)-D(ABC) = -[[AB]CD]-[AB[CD]]}.$$

При этом отпадает возможность разложения вектора по трем векторам.

Выражение в правой части тождества является векторным произведением четырех векторов **[ABCD]**, т.е.

$$\mathbf{[ABCD] = -[[AB]CD]-[AB[CD]] = A(BCD) - B(CDA) + C(DAB)-D(ABC) =}$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{(ACD)} & \mathbf{(BCD)} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{D} \\ \mathbf{(CAB)} & \mathbf{(DAB)} \end{vmatrix} .$$

Используя координатную запись смешанных произведений трех векторов, можно получить векторное произведение четырех векторов в виде **[ABCD]** =

$$=(-\alpha^3 \begin{vmatrix} A_1 & A_5 & A_7 & A_2 \\ B_1 & B_5 & B_7 & B_2 \\ C_1 & C_5 & C_7 & C_2 \\ D_1 & D_5 & D_7 & D_2 \end{vmatrix} -\alpha^3 \begin{vmatrix} A_1 & A_7 & A_3 & A_4 \\ B_1 & B_7 & B_3 & B_4 \\ C_1 & C_7 & C_3 & C_4 \\ D_1 & D_7 & D_3 & D_4 \end{vmatrix} -\alpha^3 \begin{vmatrix} A_1 & A_3 & A_6 & A_5 \\ B_1 & B_3 & B_6 & B_5 \\ C_1 & C_3 & C_6 & C_5 \\ D_1 & D_3 & D_6 & D_5 \end{vmatrix} +\alpha^2 \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_4 & A_6 \\ B_1 & B_2 & B_4 & B_6 \\ C_1 & C_2 & C_4 & C_6 \\ D_1 & D_2 & D_4 & D_6 \end{vmatrix})\mathbf{e}_1+$$

$$+(-\alpha^3 \begin{vmatrix} A_2 & A_7 & A_3 & A_4 \\ B_2 & B_7 & B_3 & B_4 \\ C_2 & C_7 & C_3 & C_4 \\ D_2 & D_7 & D_3 & D_4 \end{vmatrix} -\alpha^3 \begin{vmatrix} A_2 & A_3 & A_6 & A_5 \\ B_2 & B_3 & B_6 & B_5 \\ C_2 & C_3 & C_6 & C_5 \\ D_2 & D_3 & D_6 & D_5 \end{vmatrix} -\alpha^3 \begin{vmatrix} A_2 & A_6 & A_1 & A_7 \\ B_2 & B_6 & B_1 & B_7 \\ C_2 & C_6 & C_1 & C_7 \\ D_2 & D_6 & D_1 & D_7 \end{vmatrix} +\alpha^2 \begin{vmatrix} A_2 & A_4 & A_5 & A_1 \\ B_2 & B_4 & B_5 & B_1 \\ C_2 & C_4 & C_5 & C_1 \\ D_2 & D_4 & D_5 & D_1 \end{vmatrix})\mathbf{e}_2+$$

$$+(\alpha^2 \begin{vmatrix} A_3 & A_2 & A_4 & A_6 \\ B_3 & B_2 & B_4 & B_6 \\ C_3 & C_2 & C_4 & C_6 \\ D_3 & D_2 & D_4 & D_6 \end{vmatrix} +\alpha^2 \begin{vmatrix} A_3 & A_4 & A_5 & A_1 \\ B_3 & B_4 & B_5 & B_1 \\ C_3 & C_4 & C_5 & C_1 \\ D_3 & D_4 & D_5 & D_1 \end{vmatrix} -\alpha^3 \begin{vmatrix} A_3 & A_5 & A_7 & A_2 \\ B_3 & B_5 & B_7 & B_2 \\ C_3 & C_5 & C_7 & C_2 \\ D_3 & D_5 & D_7 & D_2 \end{vmatrix} -\alpha^3 \begin{vmatrix} A_3 & A_6 & A_1 & A_7 \\ B_3 & B_6 & B_1 & B_7 \\ C_3 & C_6 & C_1 & C_7 \\ D_3 & D_6 & D_1 & D_7 \end{vmatrix})\mathbf{e}_3+$$

$$+(-\alpha^3 \begin{vmatrix} A_4 & A_3 & A_6 & A_5 \\ B_4 & B_3 & B_6 & B_5 \\ C_4 & C_3 & C_6 & C_5 \\ D_4 & D_3 & D_6 & D_5 \end{vmatrix} -\alpha^3 \begin{vmatrix} A_4 & A_6 & A_1 & A_7 \\ B_4 & B_6 & B_1 & B_7 \\ C_4 & C_6 & C_1 & C_7 \\ D_4 & D_6 & D_1 & D_7 \end{vmatrix} +\alpha^2 \begin{vmatrix} A_4 & A_1 & A_2 & A_3 \\ B_4 & B_1 & B_2 & B_3 \\ C_4 & C_1 & C_2 & C_3 \\ D_4 & D_1 & D_2 & D_3 \end{vmatrix} -\alpha^3 \begin{vmatrix} A_4 & A_5 & A_7 & A_2 \\ B_4 & B_5 & B_7 & B_2 \\ C_4 & C_5 & C_7 & C_2 \\ D_4 & D_5 & D_7 & D_2 \end{vmatrix})\mathbf{e}_4+$$

$$+\left(-\alpha^3\begin{vmatrix} A_5 & A_6 & A_1 & A_7 \\ B_5 & B_6 & B_1 & B_7 \\ C_5 & C_6 & C_1 & C_7 \\ D_5 & D_6 & D_1 & D_7 \end{vmatrix} +\alpha^2\begin{vmatrix} A_5 & A_1 & A_2 & A_3 \\ B_5 & B_1 & B_2 & B_3 \\ C_5 & C_1 & C_2 & C_3 \\ D_5 & D_1 & D_2 & D_3 \end{vmatrix} +\alpha^2\begin{vmatrix} A_5 & A_2 & A_4 & A_6 \\ B_5 & B_2 & B_4 & B_6 \\ C_5 & C_2 & C_4 & C_6 \\ D_5 & D_2 & D_4 & D_6 \end{vmatrix} -\alpha^3\begin{vmatrix} A_5 & A_7 & A_3 & A_4 \\ B_5 & B_7 & B_3 & B_4 \\ C_5 & C_7 & C_3 & C_4 \\ D_5 & D_7 & D_3 & D_4 \end{vmatrix}\right)\mathbf{e}_5+$$

$$+\left(\alpha^2\begin{vmatrix} A_6 & A_4 & A_5 & A_1 \\ B_6 & B_4 & B_5 & B_1 \\ C_6 & C_4 & C_5 & C_1 \\ D_6 & D_4 & D_5 & D_1 \end{vmatrix} -\alpha^3\begin{vmatrix} A_6 & A_5 & A_7 & A_2 \\ B_6 & B_5 & B_7 & B_2 \\ C_6 & C_5 & C_7 & C_2 \\ D_6 & D_5 & D_7 & D_2 \end{vmatrix} -\alpha^3\begin{vmatrix} A_6 & A_7 & A_3 & A_4 \\ B_6 & B_7 & B_3 & B_4 \\ C_6 & C_7 & C_3 & C_4 \\ D_6 & D_7 & D_3 & D_4 \end{vmatrix} +\alpha^2\begin{vmatrix} A_6 & A_1 & A_2 & A_3 \\ B_6 & B_1 & B_2 & B_3 \\ C_6 & C_1 & C_2 & C_3 \\ D_6 & D_1 & D_2 & D_3 \end{vmatrix}\right)\mathbf{e}_6+$$

$$+\left(\alpha^2\begin{vmatrix} A_7 & A_1 & A_2 & A_3 \\ B_7 & B_1 & B_2 & B_3 \\ C_7 & C_1 & C_2 & C_3 \\ D_7 & D_1 & D_2 & D_3 \end{vmatrix} +\alpha^2\begin{vmatrix} A_7 & A_2 & A_4 & A_6 \\ B_7 & B_2 & B_4 & B_6 \\ C_7 & C_2 & C_4 & C_6 \\ D_7 & D_2 & D_4 & D_6 \end{vmatrix} +\alpha^2\begin{vmatrix} A_7 & A_4 & A_5 & A_1 \\ B_7 & B_4 & B_5 & B_1 \\ C_7 & C_4 & C_5 & C_1 \\ D_7 & D_4 & D_5 & D_1 \end{vmatrix} -\alpha^3\begin{vmatrix} A_7 & A_3 & A_6 & A_5 \\ B_7 & B_3 & B_6 & B_5 \\ C_7 & C_3 & C_6 & C_5 \\ D_7 & D_3 & D_6 & D_5 \end{vmatrix}\right)\mathbf{e}_7.$$

Из свойств определителей следует, что:

1. Векторное произведение четырех векторов не изменится, если вынести за скобки скалярный множитель, т.е.

[a**ABCD]** = a**[ABCD];**

2. Векторное произведение четырех векторов изменяет знак при перестановке любой пары векторов;

3. Векторное произведение четырех векторов дистрибутивно, т.е.

[ABC(D+E)] = **[ABCD]**+**[ABCE]**;

4. Если два вектора в векторном произведении четырех векторов колинеарны, то это произведение равно нулю. В частности, если два вектора в векторном произведении четырех векторов равны, то оно обращается в нуль. Если любой из векторов **A**, **B**, **C** и **D** раскладывается по двум или трем векторам, то выполняется условие

[ABCD] = **0**.

Тройное векторное произведение четырех векторов **[[[AB]C]D]** можно также преобразовать двумя способами. Во-первых, разложив двойное векторное произведение внутри скобок и умножив векторно на четвертый вектор **D**, получим

[[[AB]C]D] = **(CA)[BD] – (CB)[AD] – [[ABC]D].**

Во-вторых, разложив тройное векторное произведение четырех векторов, получим

$$[[\mathbf{AB}]\mathbf{C}]\mathbf{D}] = \mathbf{C}(\mathbf{D}[\mathbf{AB}]) - (\mathbf{CD})[\mathbf{AB}] - [[\mathbf{AB}]\mathbf{CD}].$$

Сравнив оба выражения, получаем

$$(\mathbf{CA})[\mathbf{BD}] - (\mathbf{CB})[\mathbf{AD}] - [[\mathbf{ABC}]\mathbf{D}] = \mathbf{C}(\mathbf{D}[\mathbf{AB}]) - (\mathbf{CD})[\mathbf{AB}] - [[\mathbf{AB}]\mathbf{CD}].$$

Отсюда найдем

$$\mathbf{C}(\mathbf{ABD}) = (\mathbf{CA})[\mathbf{BD}] + (\mathbf{CB})[\mathbf{DA}] + (\mathbf{CD})[\mathbf{AB}] + [[\mathbf{AB}]\mathbf{CD}] - [[\mathbf{ABC}]\mathbf{D}].$$

Эта формула очевидно не выражает произведение четвертого типа только через произведения второго типа. При этом отпадает возможность разложения векторов по трем векторным произведениям пар векторов.

Итак, мы показали, что все произведения четырех векторов не выражаются линейно через произведения только двух типов $(\mathbf{AB})(\mathbf{CD})$ и $(\mathbf{AB})[\mathbf{CD}]$.

Последнее тождество при циклической подстановке векторов позволяет получить полезное соотношение

$$[\mathbf{ABCD}] = (\mathbf{BCD})\mathbf{A} - (\mathbf{CDA})\mathbf{B} + (\mathbf{DAB})\mathbf{C} - (\mathbf{ABC})\mathbf{D} =$$
$$= -2[\mathbf{ABCD}] + [[\mathbf{BCD}]\mathbf{A}] - [[\mathbf{CDA}]\mathbf{B}] + [[\mathbf{DAB}]\mathbf{C}] - [[\mathbf{ABC}]\mathbf{D}]$$

а также соотношение

$$-[[\mathbf{ABC}]\mathbf{D}] + [[\mathbf{BCD}]\mathbf{A}] - [[\mathbf{CDA}]\mathbf{B}] + [[\mathbf{DAB}]\mathbf{C}] = 3[\mathbf{ABCD}].$$

Анализ соотношения был бы неполным, если бы не удалось установить выражение тройного векторного произведения (или величины $[[\mathbf{ABC}]\mathbf{D}]$) через более простые произведения. Выразив, например, ее первую координату как векторное произведение двух векторов

$$[[\mathbf{ABC}]\mathbf{D}]_1 = -\alpha([\mathbf{ABC}]_2 D_3 - [\mathbf{ABC}]_3 D_2) - \alpha([\mathbf{ABC}]_4 D_5 - [\mathbf{ABC}]_5 D_4) +$$
$$+\alpha^2([\mathbf{ABC}]_7 D_6 - [\mathbf{ABC}]_6 D_7),$$

в координатной форме записи можно получить

$$[[\mathbf{ABC}]\mathbf{D}]_1 =$$
$$=(-A_1(\mathbf{BCD}) - B_1(\mathbf{CAD}) - C_1(\mathbf{ABD}) + [\mathbf{AB}]_1(\mathbf{CD}) + [\mathbf{BC}]_1(\mathbf{AD}) + [\mathbf{CA}]_1(\mathbf{BD}))\mathbf{e}_1$$

и аналогично остальные шесть координат этого произведения.

В результате имеем

$$[[\mathbf{ABC}]\mathbf{D}] = \begin{vmatrix} [\mathbf{AB}] & \mathbf{C} \\ (\mathbf{ABD}) & (\mathbf{CD}) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} [\mathbf{BC}] & \mathbf{A} \\ (\mathbf{BCD}) & (\mathbf{AD}) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} [\mathbf{CA}] & \mathbf{B} \\ (\mathbf{CAD}) & (\mathbf{BD}) \end{vmatrix}$$

и кроме того

$$[[\mathbf{AB}]\mathbf{CD}] = -\begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ (\mathbf{ACD}) & (\mathbf{BCD}) \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} (\mathbf{AC}) & (\mathbf{BC}) \\ [\mathbf{AD}] & [\mathbf{BD}] \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} [\mathbf{AC}] & [\mathbf{BC}] \\ (\mathbf{AD}) & (\mathbf{BD}) \end{vmatrix}$$

при этом

$$[[\mathbf{AB}]\mathbf{CD}] + [[\mathbf{BC}]\mathbf{AD}] + [[\mathbf{CA}]\mathbf{BD}] = [[\mathbf{ABC}]\mathbf{D}].$$

Таким образом, рассматриваемые произведения сводятся к линейной комбинации произведений второго и четвертого типа. Поэтому следует считать основными четыре типа произведений четырех векторов:

1. (AB)(CD);
2. (AB)[CD];
3. (ABC)D;
4. (ABCD).

Нетрудно показать, что при этом выполняются тождества Мальцева

$$[[\mathbf{ABC}]\mathbf{A}] = [\mathbf{AB}[\mathbf{AC}]]$$

и Сейгла

$$[[[\mathbf{AB}]\mathbf{C}]\mathbf{D}] + [[[\mathbf{BC}]\mathbf{D}]\mathbf{A}] + [[[\mathbf{CD}]\mathbf{A}]\mathbf{B}] + [[[\mathbf{DA}]\mathbf{B}]\mathbf{C}] = [[\mathbf{AC}][\mathbf{BD}]],$$

так что рассматриваемые алгебры относятся к алгебрам Мальцева, причем

$$[[\mathbf{ABC}]\mathbf{A}] = [\mathbf{AB}](\mathbf{CA}) + [\mathbf{BC}](\mathbf{AA}) + [\mathbf{CA}](\mathbf{BA}) - (\mathbf{ABC})\mathbf{A}$$

и

$$[[\mathbf{AC}][\mathbf{BD}]] = \begin{vmatrix} \mathbf{A} & [\mathbf{BC}] \\ (\mathbf{AD}) & (\mathbf{BCD}) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{B} & [\mathbf{CD}] \\ (\mathbf{BA}) & (\mathbf{CDA}) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{C} & [\mathbf{DA}] \\ (\mathbf{CB}) & (\mathbf{DAB}) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{D} & [\mathbf{AB}] \\ (\mathbf{DC}) & (\mathbf{ABC}) \end{vmatrix}$$

причем, при $\alpha = 0$, функция Мальцева равна нулю.

В результате можно предложить модифицированную запись соотношения Мальцева на случай четырех произвольных векторов

$$- [[\mathbf{ABC}]\mathbf{D}] + [[\mathbf{BCD}]\mathbf{A}] - [[\mathbf{CDA}]\mathbf{B}] + [[\mathbf{DAB}]\mathbf{C}] =$$

$$=-3([\mathbf{AB}[\mathbf{CD}]] + [[\mathbf{AB}]\mathbf{CD}]) = 3[\mathbf{ABCD}].$$

Найдем квадрат смешанного произведения трех векторов, т.е.

$$(\mathbf{ABC})^2 = ([\mathbf{AB}]\mathbf{C})^2 .$$

Его можно рассматривать как квадрат скалярного произведения двух векторов **[AB]** и **C**.

Согласно основному тождеству для двух векторов квадрат скалярного произведения двух векторов равен произведению квадратов этих векторов минус квадрат их векторного произведения, поэтому

$$(\mathbf{ABC})^2 = [\mathbf{AB}]^2\mathbf{C}^2-[[\mathbf{AB}]\mathbf{C}]^2.$$

Квадрат векторного произведения $\mathbf{[AB]}^2$ мы найдем, пользуясь основным тождеством для двух векторов

$$\mathbf{[AB]}^2 = \mathbf{A}^2\mathbf{B}^2 - \mathbf{(AB)}^2.$$

Для вычисления квадрата двойного векторного произведения $\mathbf{[[AB]C]}^2$ воспользуемся формулой разложения

$$\mathbf{[[AB]C]}^2 = (\mathbf{B(CA)}-\mathbf{A(BC)}-\mathbf{[ABC]})^2 = \mathbf{B}^2\mathbf{(CA)}^2 - 2\mathbf{(AB)(BC)(CA)} + \mathbf{A}^2\mathbf{(BC)}^2-$$

$$-2(\mathbf{[ABC]}(\mathbf{B(CA)}-\mathbf{A(BC)}))+\mathbf{[ABC]}^2=\mathbf{A}^2\mathbf{(BC)}^2+\mathbf{B}^2\mathbf{(CA)}^2-2\mathbf{(AB)(BC)(CA)} + \mathbf{[ABC]}^2.$$

Подставив все это в выражение для квадрата смешанного произведения, мы получим

$$\mathbf{(ABC)}^2 = \mathbf{A}^2\mathbf{B}^2\mathbf{C}^2 - \mathbf{(AB)}^2\mathbf{C}^2 - \mathbf{A}^2\mathbf{(BC)}^2 - \mathbf{B}^2\mathbf{(CA)}^2 + 2\mathbf{(AB)(BC)(CA)}-\mathbf{[ABC]}^2.$$

Эта формула является по существу искомой. Мы только приведем ее к более удобному для запоминания виду. Для этого перегруппируем члены так:

$$\mathbf{(ABC)}^2+\mathbf{[ABC]}^2=\mathbf{A}^2(\mathbf{B}^2\mathbf{C}^2-\mathbf{(BC)}^2)-\mathbf{(AB)}(\mathbf{(BA)C}^2-\mathbf{(BC)(CA)})+\mathbf{(AC)}(\mathbf{(BA)(CB)}-\mathbf{(CA)B}^2).$$

Нетрудно видеть, что правая часть составляет определитель третьего порядка

$$\mathbf{(ABC)}^2+\mathbf{[ABC]}^2 = \begin{vmatrix} \mathbf{(AA)} & \mathbf{(AB)} & \mathbf{(AC)} \\ \mathbf{(BA)} & \mathbf{(BB)} & \mathbf{(BC)} \\ \mathbf{(CA)} & \mathbf{(CB)} & \mathbf{(CC)} \end{vmatrix}.$$

Как мы видим, эта замечательная формула вместе с формулой двойного векторного произведения позволяет сводить многие вычисления к нахождению скалярных произведений.

Литература

1. **Коротков А.В.** Элементы семимерного векторного исчисления. Новочеркасск: Набла, 1996. – 244 с.
2. **Коротков А.В**. Неевклидовые трехмерные векторные алгебры, 2003. – 10 с.– См. в наст.издании.

КОРОТКОВ А.В.
НЕЕВКЛИДОВЫЕ ТРЕХМЕРНЫЕ ВЕКТОРНЫЕ АЛГЕБРЫ

В начале XIX века обнаружилось, что самые разнообразные операции, производимые в алгебре, геометрии, механике, физике, над различными объектами нечисловой природы, подчиняются законам обычной арифметики: сочетательности, переместительности и распределительности, и что эти объекты можно рассматривать как величины, к которым применимы алгебраические методы изучения. В связи с этим, системы объектов любой природы, над которыми установлены операции, сходные с арифметическими действиями над числами, стали рассматривать с позиции алгебры. Изучением одной из таких систем объектов занимается трехмерная векторная алгебра. Она возникла под влиянием задач евклидовой геометрии и механики, а затем получила широкое развитие в связи с учениями об электричестве и магнетизме, где приходится иметь дело с векторными величинами, которые характеризуются не только своими числовыми значениями, но и направлениями в пространстве. В связи с этим, евклидовые геометрии нашли свои аналоги в векторном исчислении.

Вместе с тем, наряду с евклидовой геометрией, в девятнадцатом веке были созданы неевклидовые геометрические системы Лобачевского и Римана. Соответствующие этим геометриям векторные алгебры до сих пор не изучены, хотя эти геометрии широко используются в физических приложениях. Поэтому представляет значительный интерес рассмотрение векторных алгебр, не соответствующих геометрии Евклида, и, прежде всего, изучение процедур удвоения по отношению к двойным и дуальным числам [1].

На этом пути мы неизбежно придем к трем таблицам умножения базисных элементов трехмерных векторных алгебр в виде:

1.

	$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_3$
$\mathbf{e}_1$	0	$\mathbf{e}_3$	$\alpha\mathbf{e}_2$
$\mathbf{e}_2$	$-\mathbf{e}_3$	0	$-\alpha\mathbf{e}_1$
$\mathbf{e}_3$	$-\alpha\mathbf{e}_2$	$\alpha\mathbf{e}_1$	0

,

2.

	$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_3$
$\mathbf{e}_1$	0	$-\alpha\mathbf{e}_3$	$-\mathbf{e}_2$
$\mathbf{e}_2$	$\alpha\mathbf{e}_3$	0	$\alpha^2\mathbf{e}_1$
$\mathbf{e}_3$	$\mathbf{e}_2$	$-\alpha^2\mathbf{e}_1$	0

,

3.

	$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_3$
$\mathbf{e}_1$	0	$-\alpha\mathbf{e}_3$	$\alpha\mathbf{e}_2$
$\mathbf{e}_2$	$\alpha\mathbf{e}_3$	0	$-\alpha\mathbf{e}_1$
$\mathbf{e}_3$	$-\alpha\mathbf{e}_2$	$\alpha\mathbf{e}_1$	0

,

где α принимает значения ±1 или 0. Здесь $\alpha=-1$ соответствует трехмерным векторным алгебрам Гамильтона-Грассмана, $\alpha=1$ – алгебрам, отвечающим четырехмерному расширению двойных чисел, а $\alpha=0$ – алгебрам, отвечающим четырехмерному расширению дуальных чисел. Дальнейшим развитием рассматриваемых алгебраических схем могут быть восьмимерные расширения [2].

Целью настоящей работы является изучение выражений, которые можно составлять из векторов и скаляров при помощи операций трехмерной векторной алгебры. Основными и простейшими являются линейные комбинации векторов, скалярные и векторные произведения, а также произведения нескольких векторов.

Линейными операциями над векторами являются сложение векторов и умножение вектора на скаляр, определяемые свойствами трехмерного линейного векторного пространства:

5. Ассоциативность сложения векторов
$(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}=\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C})$;

6. Коммутативность сложения векторов
$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{A}$;

7. Наличие нулевого вектора
$\mathbf{A}+\mathbf{0}=\mathbf{A}$;

8. Наличие противоположного вектора
$\mathbf{A}+(-\mathbf{A})=\mathbf{0}$.

При векторном сложении результат не зависит от порядка слагаемых и, сумму более чем двух векторов можно писать без скобок.

Действие умножение вектора на скаляр обладает следующими свойствами:

5. $a\mathbf{A}=\mathbf{A}a$;
6. $(ab)\mathbf{A}=a(b\mathbf{A})$;
7. $(a+b)\mathbf{A}=a\mathbf{A}+b\mathbf{A}$;
8. $a(\mathbf{A}+\mathbf{B})=a\mathbf{A}+a\mathbf{B}$.

В основе векторной алгебры лежат определения скалярного и векторного произведений двух векторов.

Скалярным произведением **(AB)** двух векторов **A** и **B** назовем скаляр

$(\mathbf{AB})=(A_i\mathbf{e}_i B_k\mathbf{e}_k)=A_iB_k(\mathbf{e}_i\mathbf{e}_k)=g_{ik}A_iB_k,$

определяемый матрицами скалярных произведений векторов базиса вида:

$$1.\quad \| g_{ik} \| = \left\| \begin{matrix} -\alpha & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha^2 \end{matrix} \right\|,$$

$$2.\quad \| g_{ik} \| = \left\| \begin{matrix} -\alpha & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha^3 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha^2 \end{matrix} \right\|,$$

$$3.\quad \| g_{ik} \| = \left\| \begin{matrix} \alpha^2 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha^2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha^2 \end{matrix} \right\|,$$

так что

$(\mathbf{AB})=g_{ik}A_iB_k=g_{ii}A_iB_i,$

т.е. 1. $(\mathbf{AB})=-\alpha A_1B_1-\alpha A_2B_2+\alpha^2A_3B_3.$

2. $(\mathbf{AB})=-\alpha A_1B_1-\alpha^3A_2B_2+\alpha^2A_3B_3.$

3. $(\mathbf{AB})=\alpha^2A_1B_1+\alpha^2A_2B_2+\alpha^2A_3B_3.$

Скалярный квадрат вектора **A** определяется соответственно равенством

$(\mathbf{AA})=-\alpha A_1^2-\alpha A_2^2+\alpha^2A_3^2=\mathbf{A}^2,$

так что скалярный квадрат вектора равен квадрату модуля этого вектора, причем модуль вектора

1. $A=\sqrt{-\alpha A_1^2-\alpha A_2^2+\alpha^2A_3^2},$
2. $A=\sqrt{-\alpha A_1^2-\alpha^3A_2^2+\alpha^2A_3^2},$
3. $A=\sqrt{\alpha^2A_1^2+\alpha^2A_2^2+\alpha^2A_3^2}.$

Очевидны свойства скалярного произведения двух векторов:

5. $(a\mathbf{AB})=a(\mathbf{AB});$

6. **(AB)**=**(BA)**;

7. **(A(B+C))**=**(AB)**+**(AC)**;

8. Два вектора **A** и **B** ортогональны, если выполняется условие **(AB)**=0.

Векторное произведение **[AB]** двух векторов **A** и **B** определяется матрицей векторных произведений векторов базиса, причем его можно записать в виде:

$$[\mathbf{AB}]=[(A_1\mathbf{e}_1+A_2\mathbf{e}_2+A_3\mathbf{e}_3)(B_1\mathbf{e}_1+B_2\mathbf{e}_2+B_3\mathbf{e}_3)].$$

1. $[\mathbf{AB}]=-\alpha(A_2B_3-A_3B_2)\mathbf{e}_1-\alpha(A_3B_1-A_1B_3)\mathbf{e}_2+(A_1B_2-A_2B_1)\mathbf{e}_3$,
2. $[\mathbf{AB}]=\alpha^2(A_2B_3-A_3B_2)\mathbf{e}_1+(A_3B_1-A_1B_3)\mathbf{e}_2-\alpha(A_1B_2-A_2B_1)\mathbf{e}_3$,
3. $[\mathbf{AB}]=-\alpha(A_2B_3-A_3B_2)\mathbf{e}_1-\alpha(A_3B_1-A_1B_3)\mathbf{e}_2-\alpha(A_1B_2-A_2B_1)\mathbf{e}_3$.

Векторное произведение двух векторов удобно записать в виде определителей:

1. $$[\mathbf{AB}]=\begin{vmatrix} -\alpha e_1 & -\alpha e_2 & e_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix},$$

2. $$[\mathbf{AB}]=\begin{vmatrix} \alpha^2 e_1 & e_2 & -\alpha e_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix},$$

3. $$[\mathbf{AB}]=\begin{vmatrix} -\alpha e_1 & -\alpha e_2 & -\alpha e_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix}.$$

Из свойств определителей следует, что:

5. **[**a**AB]**=a**[AB]**;
6. **[AB]**=-**[BA]**;
7. **[A(B+C)]**=**[AB]**+**[AC]**;
8. **[**a**AA]**=**0**.

Все произведения трех векторов можно получить умножением произведения двух векторов на третий вектор. В соответствии с этим возможны лишь следующие типы произведений:

4. **A(BC)** – простейшее произведение трех векторов;

5. **(A[BC])** – смешанное произведение трех векторов;
6. **[A[BC]]** – двойное векторное произведение трех векторов.

Простейшее произведение **A(BC)** трех векторов **A**, **B** и **C** получается умножением скалярного произведения двух векторов на третий вектор. В результате получается вектор, коллинеарный с третьим вектором. Из этого в общем случае вытекает неравенство

$$\mathbf{A(BC)}\neq\mathbf{(AB)C},$$

так что рассматриваемое векторное исчисление не ассоциативно.

Смешанное произведение **(A[BC])=(ABC)** трех векторов **A**, **B** и **C** получается скалярным умножением векторного произведения двух векторов на третий вектор. В результате получаем антисимметричную по перестановке любой пары векторов скалярную функцию

1. $\mathbf{(A[BC])}=-\alpha A_1[BC]_1-\alpha A_2[BC]_2+\alpha^2 A_3[BC]_3.$

   $\mathbf{(ABC)}=\alpha^2 A_1(B_2C_3-B_3C_2)+\alpha^2 A_2(B_3C_1-B_1C_3)+\alpha^2 A_3(B_1C_2-B_2C_1),$
2. $\mathbf{(A[BC])}=-\alpha A_1[BC]_1-\alpha^3 A_2[BC]_2+\alpha^2 A_3[BC]_3.$

   $\mathbf{(ABC)}=-\alpha^3 A_1(B_2C_3-B_3C_2)-\alpha^3 A_2(B_3C_1-B_1C_3)-\alpha^3 A_3(B_1C_2-B_2C_1),$
3. $\mathbf{(A[BC])}=-\alpha A_1[BC]_1-\alpha A_2[BC]_2-\alpha A_3[BC]_3.$

   $\mathbf{(ABC)}=-\alpha^3 A_1(B_2C_3-B_3C_2)-\alpha^3 A_2(B_3C_1-B_1C_3)-\alpha^3 A_3(B_1C_2-B_2C_1).$

Смешанное произведение трех векторов можно представить в виде определителей:

1. $$\mathbf{(ABC)}=\alpha^2\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix},$$

2. $$\mathbf{(ABC)}=-\alpha^3\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix},$$

3. $\mathbf{(ABC)}=-\alpha^3 \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix}.$

Из свойств определителей следует, что:

5. (a**ABC**)= a(**ABC**);
6. Смешанное произведение трех векторов изменяет знак при перестановке любой пары векторов;
7. **(AB(C+D))=(ABC)+(ABD);**
8. Если два вектора **A** и **B** в смешанном произведении трех векторов коллинеарные, то это произведение равно нулю. В частности, если два вектора в смешанном произведении трех векторов равны, то оно обращается в нуль, так что векторное произведение двух векторов ортогонально каждому из входящих в него векторов **([AB]A)=0**. Если три вектора **A**, **B** и **C=A+B** компланарны, то выполняется равенство **(ABC)=(AB(A+B))=0**.

   Двойное векторное произведение **[A[BC]]** трех векторов **A**, **B** и **C** получается векторным умножением векторного произведения двух векторов на третий вектор. В результате имеем вектор

   $\mathbf{[A[BC]]=[AD]=E}=E_1\mathbf{e}_1+E_2\mathbf{e}_2+E_3\mathbf{e}_3.$

В координатной форме записи для первой координаты двойного векторного произведения имеет место соотношение

1. $E_1= -\alpha(A_2D_3-A_3D_2) = -\alpha A_2(B_1C_2-B_2C_1)-\alpha^2A_3(B_3C_1-B_1C_3) =$

   $= B_1(-\alpha C_1A_1- \alpha C_2A_2+\alpha^2C_3A_3)-C_1(-\alpha A_1B_1-\alpha A_2B_2+\alpha^2A_3B_3),$

2. $E_1= \alpha^2(A_2D_3-A_3D_2) = -\alpha^3A_2(B_1C_2-B_2C_1)-\alpha^2A_3(B_3C_1-B_1C_3) =$

   $= B_1(-\alpha C_1A_1- \alpha^3C_2A_2+\alpha^2C_3A_3)-C_1(-\alpha A_1B_1-\alpha^3A_2B_2+\alpha^2A_3B_3),$

3. $E_1= -\alpha(A_2D_3-A_3D_2) = \alpha^2A_2(B_1C_2-B_2C_1)-\alpha^2A_3(B_3C_1-B_1C_3) =$

   $= B_1(\alpha^2C_1A_1+\alpha^2C_2A_2+\alpha^2C_3A_3)-C_1(\alpha^2A_1B_1+\alpha^2A_2B_2+\alpha^2A_3B_3),$

т.е. $E_1 = B_1\mathbf{(CA)}- C_1\mathbf{(AB)}.$

Аналогично, для других координат:

$E_2 = B_2\mathbf{(CA)}-C_2\mathbf{(AB)}$

$E_3 = B_3\mathbf{(CA)}-C_3\mathbf{(AB)}.$

Таким образом, окончательно запишем

[A[BC]] = **B(CA)-C(AB)**.

Подобным образом можно получить соотношение

[[AB]C] = **[C[BA]]** = **B(CA)-A(BC)**.

Используя циклические подстановки векторов, получим

[A[BC]]+**[B[CA]]**+**[C[AB]]**=**0**

и **[[AB]C]**+**[[BC]A]**+**[[CA]B]**=**0,**

так что, в рассматриваемых алгебрах выполняется соотношение Якоби, они не ассоциативны и относятся к классу алгебр Ли.

Все произведения четырех векторов можно получить следующими двумя способами:

- умножением произведения трех векторов на четвертый вектор;

- умножением произведения двух векторов на произведение двух векторов.

В соответствии с этим, возможны следующие типы произведений:

((AB)CD)	**(AB)(CD)**	**(ABC)D.**
[(AB)CD]	**(AB)[CD]**	
([[AB]C]D)	**([AB][CD])**	
[[[AB]C]D]	**[[AB][CD]]**	

Не все девять получившихся произведений различны между собой. Действительно, во-первых, мы знаем, что скалярный множитель можно выносить за знак скалярного и векторного произведений двух векторов. Поэтому

((AB)CD) = **(AB)(CD)**

[(AB)CD] =**(AB)[CD]**.

Во-вторых, считая векторное произведение **[AB]** за один вектор, мы можем рассматривать **([[AB]C]D)** как смешанное произведение трех векторов
[AB], **C** и **D**. Применив к нему закон сочетательности, получим

([[AB]C]D) = **([AB][CD])**.

Итак, остаются только шесть типов произведений четырех векторов

1. $\mathbf{((AB)CD) = (AB)(CD)}$;

2. $\mathbf{[(AB)CD] = (AB)[CD]}$;

3. $\mathbf{([[AB]C]D) = ([AB][CD])}$;

4. $\mathbf{([AB]C)D = (ABC)D}$;

5. $\mathbf{[[AB][CD]]}$;

6. $\mathbf{[[[AB]C]D]}$.

Мы покажем теперь, что четыре последних произведения являются линейными комбинациями из произведений первых двух типов, которые следует считать основными.

Скалярное произведение двух векторов $\mathbf{[AB]}$ и $\mathbf{[CD]}$, как уже отмечалось, является смешанным произведением трех векторов $\mathbf{([[AB]C]D)}$. На основании закона сочетательности мы можем для вычисления этого произведения перемножить векторно два первых множителя $\mathbf{[AB]}$ и $\mathbf{C}$ и результат умножить скалярно на третий множитель, следовательно

$$\mathbf{([AB][CD]) = ([[AB]C]D)}.$$

Развернув получившееся в скобках двойное векторное произведение трех векторов по формуле разложения, мы получим

$$\mathbf{([AB][CD]) = ((B(AC)-A(BC))D)}$$

или, раскрыв скобки

$$\mathbf{([AB][CD])} = \begin{vmatrix} \mathbf{(AC)} & \mathbf{(BC)} \\ \mathbf{(AD)} & \mathbf{(BD)} \end{vmatrix}.$$

Таким образом, скалярное произведение двух векторных произведений, т.е. произведение третьего типа выражается через произведение первого типа.

При этом, циклическая подстановка векторов дает:

$$\mathbf{([AB][CD]) + ([BC][AD]) + ([CA][BD]) = 0}.$$

Как частный случай, при $\mathbf{C=A}$ и $\mathbf{D=B}$, мы имеем основное тождество для двух векторов

$$[\mathbf{AB}]^2 = \begin{vmatrix} (\mathbf{AA}) & (\mathbf{BA}) \\ (\mathbf{AB}) & (\mathbf{BB}) \end{vmatrix}.$$

Векторное произведение двух векторных произведений **[[AB][CD]]** можно преобразовать двумя способами: во-первых, рассматривая это произведение как двойное векторное произведение трех векторов **[AB]**, **C** и **D** мы получим

[[AB][CD]] = **C(D[AB])-D([AB]C)**.

Во-вторых, рассматривая то же произведение как двойное векторное произведение трех векторов, **A**, **B** и **[CD]**, мы получим:

[[AB][CD]] = **B([CD]A)-A(B[CD])**.

Таким образом, векторное произведение двух векторных произведений, т.е. произведение пятого типа, выражается через произведение четвертого типа. Сравнив оба выражения для одного и того же произведения **[[AB][CD]]**, мы получим

C(D[AB])-D([AB]C) = **B([CD]A)-A(B[CD])**

или

A(BCD) - B(CDA) + C(DAB)-D(ABC) = 0.

При этом появляется возможность разложения вектора по трем векторам

D = **(ABC)**$^{-1}$(**A(BCD) - B(CDA) + C(DAB)**).

Тройное векторное произведение четырех векторов **[[[AB]C]D]** можно также преобразовать двумя способами.

Во-первых, разложив двойное векторное произведение внутри скобок и умножив векторно на четвертый вектор, получим

[[[AB]C]D] = **(CA)[BD] – (CB)[AD].**

Во-вторых, разложив тройное векторное произведение четырех векторов, получим

[[[AB]C]D] = **C(D[AB]) – (CD)[AB]**.

Сравнив оба выражения, получаем

(CA)[BD] – (CB)[AD] = **C(D[AB]) – (CD)[AB]**.

Отсюда найдем

$$\mathbf{C(ABD) = (CA)[BD] + (CB)[DA] + (CD)[AB]}.$$

Эта формула очевидно выражает произведение четвертого типа только через произведения второго типа.

Итак, мы показали, что все произведения четырех векторов выражаются линейно через произведения только двух типов:

$\mathbf{(AB)(CD)}$ и $\mathbf{(AB)[CD]}$.

Нетрудно показать, что при этом выполняется тождество Сейгла

$$\mathbf{[[[AB]C]D]} + \mathbf{[[BC]D]A]} + \mathbf{[[[CD]A]B]} + \mathbf{[[[DA]B]C]} = \mathbf{[[AC][BD]]},$$

причем

$$\mathbf{[[AC][BD]]} = \begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{[BC]} \\ \mathbf{(AD)} & \mathbf{(BCD)} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{[CD]} \\ \mathbf{(BA)} & \mathbf{(CDA)} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{[DA]} \\ \mathbf{(CB)} & \mathbf{(DAB)} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{[AB]} \\ \mathbf{(DC)} & \mathbf{(ABC)} \end{vmatrix}.$$

Найдем квадрат смешанного произведения трех векторов, т.е.

$$\mathbf{(ABC)}^2 = \mathbf{([AB]C)}^2.$$

Его можно рассматривать как квадрат скалярного произведения двух векторов **[AB]** и **C**.

Согласно основному тождеству для двух векторов квадрат скалярного произведения двух векторов равен произведению квадратов этих векторов минус квадрат их векторного произведения, поэтому

$$\mathbf{(ABC)}^2 = \mathbf{[AB]}^2\mathbf{C}^2 - \mathbf{[[AB]C]}^2.$$

Квадрат векторного произведения $\mathbf{[AB]}^2$ мы найдем, пользуясь основным тождеством для двух векторов

$$\mathbf{[AB]}^2 = \mathbf{A}^2\mathbf{B}^2 - \mathbf{(AB)}^2.$$

Для вычисления квадрата двойного векторного произведения $\mathbf{[[AB]C]}^2$ воспользуемся формулой разложения

$$\mathbf{[[AB]C]}^2 = (\mathbf{B(CA)} - \mathbf{A(BC)})^2 = \mathbf{B}^2\mathbf{(CA)}^2 - 2\mathbf{(AB)(BC)(CA)} + \mathbf{A}^2\mathbf{(BC)}^2.$$

Подставив все это в выражение для квадрата смешанного произведения, мы получим

$$\mathbf{(ABC)}^2 = \mathbf{A}^2\mathbf{B}^2\mathbf{C}^2 - \mathbf{(AB)}^2\mathbf{C}^2 - \mathbf{A}^2\mathbf{(BC)}^2 - \mathbf{B}^2\mathbf{(CA)}^2 + 2\mathbf{(AB)(BC)(CA)}.$$

Эта формула является по существу искомой. Мы только приведем ее к более удобному для запоминания виду. Для этого перегруппируем члены так:

$$\mathbf{(ABC)}^2 = \mathbf{A}^2(\mathbf{B}^2\mathbf{C}^2\mathbf{-(BC)}^2)\mathbf{–(AB)}((\mathbf{BA})\mathbf{C}^2\mathbf{-(BC)(CA)})+\mathbf{(AC)}((\mathbf{BA})\mathbf{(CB)}\mathbf{-(CA)B}^2).$$

Нетрудно видеть, что правая часть составляет определитель третьего порядка

$$\mathbf{(ABC)}^2 = \begin{vmatrix} \mathbf{(AA)} & \mathbf{(AB)} & \mathbf{(AC)} \\ \mathbf{(BA)} & \mathbf{(BB)} & \mathbf{(BC)} \\ \mathbf{(CA)} & \mathbf{(CB)} & \mathbf{(CC)} \end{vmatrix}.$$

Как мы видим, эта замечательная формула вместе с формулой двойного векторного произведения позволяет сводить многие вычисления к нахождению скалярных произведений.

Всякое произведение пяти векторов мы можем получить одним из двух способов:

- умножением произведения четырех векторов на пятый вектор;
- умножением произведения трех векторов на произведение двух векторов.

Можно показать, что всякое произведение пяти векторов линейно выражается через произведения следующих трех типов:

1. **(AB)(CD)E**;
2. **(ABC)(DE)**;
3. **(ABC)[DE]**.

Соответственно, всякое произведение шести векторов получается одним из трех способов:

- умножением произведения пяти векторов на шестой вектор;
- умножением произведения четырех векторов на произведение двух векторов;
- умножением произведения трех векторов на произведение трех векторов.

Можно показать также, что всякое произведение шести векторов является линейной комбинацией из произведений следующих типов:

1. **(AB)(CD)(EF)**;
2. **(AB)(CD)[EF]**;
3. **(ABC)(DEF)**.

Покажем, например, что произведения пяти векторов **(ABC)[DE]** и шести векторов **(ABC)(DEF)** линейно выражаются через соответствующие произведения **(AB)(CD)E** и **(AB)(CD)(EF)**. Имеем:

$$\mathbf{(ABC)[DE] = A([BC][DE])-B([AC][DE])+C([AB][DE])}.$$

Отсюда, на основании формулы для скалярного произведения двух векторных произведений следует:

$$\mathbf{(ABC)[DE]} = \begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{C} \\ \mathbf{(AD)} & \mathbf{(BD)} & \mathbf{(CD)} \\ \mathbf{(AE)} & \mathbf{(BE)} & \mathbf{(CE)} \end{vmatrix}.$$

Таким образом, это произведение действительно выражается через произведение первого типа **(AB)(CD)E**.

Если векторы **A**, **B**, **C** не компланарны, то из этой формулы получается формула разложения векторного произведения **[DE]** по трем некомпланарным векторам

$$\mathbf{[DE]} = \mathbf{(ABC)}^{-1} \begin{vmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{C} \\ \mathbf{(AD)} & \mathbf{(BD)} & \mathbf{(CD)} \\ \mathbf{(AE)} & \mathbf{(BE)} & \mathbf{(CE)} \end{vmatrix}.$$

Полученная формула является обобщением формулы, выражающей векторное произведение двух векторов через координатные орты $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$.

Умножив скалярно на вектор **F** обе части полученной формулы, будем иметь:

$$\mathbf{(ABC)(DEF)} = \begin{vmatrix} \mathbf{(AF)} & \mathbf{(BF)} & \mathbf{(CF)} \\ \mathbf{(AD)} & \mathbf{(BD)} & \mathbf{(CD)} \\ \mathbf{(AE)} & \mathbf{(BE)} & \mathbf{(CE)} \end{vmatrix}.$$

Эта формула является обобщением полученной выше формулы для квадрата смешанного произведения $\mathbf{(ABC)}^2$, если положить **F**=**A**, **D**=**B**, **E**=**C**.

Найдем также коэффициенты разложения любой векторной функции **D** по трем некомпланарным векторам **A**, **B**, **C**, т.е.

$\mathbf{D} = D_1\mathbf{A}+D_2\mathbf{B}+D_3\mathbf{C}.$

Умножим скалярно обе части этой формулы на **[BC]**.

Учитывая, что смешанное произведение трех векторов, содержащее два одинаковых множителя равно нулю, мы получим

$\mathbf{(BCD)} = D_1\mathbf{(ABC)}.$

Отсюда находим

$D_1 = \mathbf{(ABC)}^{-1}\ \mathbf{(BCD)}.$

Аналогично получим

$D_2 = \mathbf{(BCA)}^{-1}\ \mathbf{(CAD)}.$

$D_3 = \mathbf{(CAB)}^{-1}\ \mathbf{(ABD)}.$

Таким образом, искомое разложение имеет вид

$\mathbf{D} = \mathbf{(ABC)}^{-1}\ (\mathbf{(BCD)A}+\mathbf{(CAD)B}+\mathbf{(ABD)C}).$

Таким образом, основные соотношения полученных алгебр воспроизводят соотношения векторной алгебры Гамильтона-Грассмана [3]. В то же время, в координатной форме все соотношения этих алгебр расписываются совершенно иным способом.

Отметим, что для алгебр, соответствующих $\alpha = 0$, имеет место ненулевое значение в двух из них лишь для векторного произведения двух векторов, причем они изоморфны. Остальные функции при этом обращаются в нуль. В то же время алгебры, соответствующие $\alpha = \pm 1$, вообще говоря, не изоморфны в силу отличия знаков смешанного произведения трех векторов и характеризуют левые и правые евклидовые или псевдоевклидовые индекса два трехмерные векторные алгебры.

Литература

1. **Кантор И.Л., Солодовников А.С**. Гиперкомплексные числа. – М.: Наука, 1973. – 144 с.

2. **Коротков А.В**. Элементы семимерного векторного исчисления. – Новочеркасск: Набла, 1996. – 244 с.

3. **Лаптев Г.Ф**. Элементы векторного исчисления. – М.: Наука, 1975. –336 с.

КОРОТКОВ А.В.

СКАЛЯРНЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ 2К-ВЕКТОРОВ

В обычной геометрии на плоскости в трехмерном пространстве существеннейшую роль играют метрические понятия, связанные с измерением. К ним относятся: длина вектора и угол между векторами. Длина вектора не является линейной функцией от вектора и угол между векторами не является линейной функцией одного из векторов при фиксированном втором. Несмотря на это, из длин двух векторов и угла между ними при помощи действий далеких от линейности строят так называемое скалярное произведение двух векторов, являющееся билинейной функцией от векторов, т.е. линейной по каждому из векторов при фиксированном втором. Именно скалярным произведением двух векторов называется произведение их длин и косинуса угла между ними. Все сказанное дает основание при введении метрических понятий в теорию многомерных вещественных пространств исходить из понятия скалярного произведения двух векторов.

Скалярным произведением **(AB)** двух векторов вещественного n-мерного векторного пространства называют функцию от векторов **A** и **B** с вещественными значениями, удовлетворяющую требованиям:

1) линейности по одному из аргументов

$(\mathbf{A}, \alpha\mathbf{B}+\beta\mathbf{C}) = \alpha(\mathbf{AB})+ \beta(\mathbf{AC});$

2) симметрии по паре векторов

$(\mathbf{AB})=(\mathbf{BA});$

3) положительной определенности

$(\mathbf{AA}) >0$ при $\mathbf{A}\neq 0$.

Из линейности по одному из аргументов и симметрии следует линейность по другому аргументу:

$(\alpha\mathbf{A}+ \beta\mathbf{B}, \mathbf{C}) = \alpha(\mathbf{AC})+\beta(\mathbf{BC}).$

Для скалярного произведения двух векторов выполняется неравенство Коши

$$(\mathbf{AB})=|\mathbf{A}||\mathbf{B}|\mathrm{Cos}\varphi_{AB},$$

т.е. $$(\mathbf{AB})^2 \le |\mathbf{A}|^2|\mathbf{B}|^2.$$

Это неравенство делает осмысленным определение угла φ_{AB}, образованного двумя векторами **A** и **B**, посредством формулы

$\mathrm{Cos}\varphi_{AB} = (\mathbf{AB})/|\mathbf{A}||\mathbf{B}|,$

как тригонометрической функции угла между парой векторов. Условием перпендикулярности двухгранного угла является $\mathrm{Cos}\varphi_{AB} = 0$, что имеет место при перпендикулярности одного из векторов другому вектору.

Определение 1. Скалярным произведением **(ABCD)** четырех векторов вещественного n-мерного векторного пространства назовем функцию от векторов **A, B, C** и **D** с вещественными значениями, удовлетворяющую требованиям:

1) линейности по одному из аргументов

$(\mathbf{ABC}, \alpha\mathbf{D}+\beta\mathbf{E}) = \alpha(\mathbf{ABCD})+\beta(\mathbf{ABCE});$

2) симметрии по любой паре векторов

$(\mathbf{ABCD})=(\mathbf{BACD})=\ldots=(\mathbf{ABDC});$

3) положительной определенности

$(\mathbf{AAAA}) > 0$ при $\mathbf{A} \neq 0$.

Из линейности по одному из аргументов и симметрии следует линейность по любому аргументу. Перечисленным условиям удовлетворяет скалярное произведение четырех векторов вида:

$$(\mathbf{ABCD}) = 1/3\,((\mathbf{AB})(\mathbf{CD}) + (\mathbf{BC})(\mathbf{AD}) + (\mathbf{CA})(\mathbf{BD})).$$

Действительно:

1) $(\mathbf{ABC},\alpha\mathbf{D}+\beta\mathbf{E})=1/3((\mathbf{AB})(\mathbf{C},\alpha\mathbf{D}+\beta\mathbf{E})+(\mathbf{CA})(\mathbf{B},\alpha\mathbf{D}+\beta\mathbf{E})+(\mathbf{AB})(\mathbf{C},\alpha\mathbf{D}+\beta\mathbf{E}))=$

$=\alpha/3((\mathbf{AB})(\mathbf{CD})+(\mathbf{BC})(\mathbf{AD})+(\mathbf{CA})(\mathbf{BD}))+\beta/3((\mathbf{AB})(\mathbf{CE})+(\mathbf{BC})(\mathbf{AE})+(\mathbf{CA})(\mathbf{BE}))=$

$=\alpha(\mathbf{ABCD})+\beta(\mathbf{ABCE});$

2) **(ABCD)** – не изменяется при перестановке любой пары векторов;

3) $(\mathbf{AAAA})= (\mathbf{AA})(\mathbf{AA}) > 0$ при $\mathbf{A}\neq 0$.

Для скалярного произведения четырех векторов выполняется неравенство (Коши)

$(\mathbf{ABCD})=|\mathbf{A}||\mathbf{B}||\mathbf{C}||\mathbf{D}|(1/3)(\mathrm{Cos}\varphi_{AB}\mathrm{Cos}\varphi_{CD}+\mathrm{Cos}\varphi_{BC}\mathrm{Cos}\varphi_{AD}+\mathrm{Cos}\varphi_{CA}\mathrm{Cos}\varphi_{BD})$

т.е. $\quad (\mathbf{ABCD})^2 \leq |\mathbf{A}|^2|\mathbf{B}|^2|\mathbf{C}|^2|\mathbf{D}|^2.$

Это неравенство делает осмысленным определение угла φ_{ABCD}, образованного четырьмя векторами **A**, **B**, **C** и **D** посредством формулы

$$\mathrm{Cos}\varphi_{ABCD}=(\mathbf{ABCD})/|\mathbf{A}||\mathbf{B}||\mathbf{C}||\mathbf{D}|=(1/3)(\mathrm{Cos}\varphi_{AB}\mathrm{Cos}\varphi_{CD}+\mathrm{Cos}\varphi_{BC}\mathrm{Cos}\varphi_{AD}+\mathrm{Cos}\varphi_{CA}\mathrm{Cos}\varphi_{BD}),$$

как тригонометрической функции шести углов между парами векторов. Условием перпендикулярности четырехгранного угла является $\mathrm{Cos}\varphi_{ABCD}=0$, что имеет место, например, при перпендикулярности одного из векторов трем другим векторам.

Примерами ортогональности в семимерной алгебре, например, являются:

$$(\mathbf{ABC[ABC]}) = 0 \quad \text{и} \quad (\mathbf{[AB][BC][CA][ABC]}) = 0.$$

Определение 2. Скалярным произведением **(ABCDEF)** шести векторов вещественного n-мерного векторного пространства назовем функцию от векторов **A, B, C, D, E** и **F** с вещественными значениями, удовлетворяющую требованиям:

1) линейности по одному из аргументов

$$(\mathbf{ABCDE}, \alpha\mathbf{F}+\beta\mathbf{G}) = \alpha(\mathbf{ABCDEF})+\beta(\mathbf{ABCDEG});$$

2) симметрии по любой паре векторов

$$(\mathbf{ABCDEF})=(\mathbf{BACDEF})=...=(\mathbf{ABCDFE});$$

3) положительной определенности

$$(\mathbf{AAAAAA}) >0 \text{ при } \mathbf{A}\neq 0.$$

Из линейности по одному из аргументов и симметрии следует линейность по любому аргументу. Перечисленным условиям удовлетворяет скалярное произ-ведение шести векторов вида:

$$(\mathbf{ABCDEF}) =$$
$$= 1/15((\mathbf{AB})(\mathbf{CD})(\mathbf{EF})+(\mathbf{BC})(\mathbf{DE})(\mathbf{AF})+(\mathbf{CD})(\mathbf{EA})(\mathbf{BF})+(\mathbf{DE})(\mathbf{AB})(\mathbf{CF})+$$

$$(\mathbf{EA})(\mathbf{BC})(\mathbf{DF}) + (\mathbf{BC})(\mathbf{AD})(\mathbf{EF})+(\mathbf{CD})(\mathbf{BE})(\mathbf{AF})+(\mathbf{DE})(\mathbf{CA})(\mathbf{BF})+(\mathbf{EA})(\mathbf{DB})(\mathbf{CF})+$$

$$+(\mathbf{AB})(\mathbf{EC})(\mathbf{DF}) +$$
$$+(\mathbf{CA})(\mathbf{BD})(\mathbf{EF})+(\mathbf{DB})(\mathbf{CE})(\mathbf{AF})+(\mathbf{EC})(\mathbf{DA})(\mathbf{BF})+(\mathbf{AD})(\mathbf{EB})(\mathbf{CF})+$$

$$+(\mathbf{BE})(\mathbf{AC})(\mathbf{DF})).$$

Действительно:

1) $(\mathbf{ABCDE},\alpha\mathbf{F}+\beta\mathbf{G})=1/15**((\mathbf{AB})(\mathbf{CD})(\mathbf{E},\alpha\mathbf{F}+\beta\mathbf{G})+(\mathbf{BC})(\mathbf{DE})(\mathbf{A},\alpha\mathbf{F}+\beta\mathbf{G})+$

$+(\mathbf{CD})(\mathbf{EA})(\mathbf{B},\alpha\mathbf{F}+\beta\mathbf{G})+(\mathbf{DE})(\mathbf{AB})(\mathbf{C},\alpha\mathbf{F}+\beta\mathbf{G})+(\mathbf{EA})(\mathbf{BC})(\mathbf{D},\alpha\mathbf{F}+\beta\mathbf{G})+$

$\mathbf{+(BC)(AD)(E,\alpha F+\beta G)+(CD)(BE)(A,\alpha F+\beta G)+(DE)(CA)(B,\alpha F+\beta G)+}$

$\mathbf{+(EA)(DB)(C,\alpha F+\beta G)+(AB)(EC)(D,\alpha F+\beta G)+(CA)(BD)(E,\alpha F+\beta G)+}$

$\mathbf{+(DB)(CE)(A,\alpha F+\beta G)+(EC)(DA)(B,\alpha F+\beta G)+(AD)(EB)(C,\alpha F+\beta G)+}$

$\mathbf{+(BE)(AC)(D,\alpha F+\beta G)})=\alpha/15(\mathbf{(AB)(CD)(EF)+(BC)(DE)(AF)+(CD)(EA)(BF)+}$

$\mathbf{+(DE)(AB)(CF)+(EA)(BC)(DF)+(BC)(AD)(EF)+(CD)(BE)(AF)+(DE)(CA)(BF)+}$

$\mathbf{+(EA)(DB)(CF)+(AB)(EC)(DF)+(CA)(BD)(EF)+(DB)(CE)(AF)+(EC)(DA)(BF)+}$

$\mathbf{+(AD)(EB)(CF)+(BE)(AC)(DF)})+\beta/15(\mathbf{(AB)(CD)(EG)+(BC)(DE)(AG)+}$

$\mathbf{+(CD)(EA)(BG)+(DE)(AB)(CG)+(EA)(BC)(DG)+(BC)(AD)(EG)+}$

$\mathbf{+(CD)(BE)(AG)+(DE)(CA)(BG)+(EA)(DB)(CG)+(AB)(EC)(DG) +}$

$\mathbf{+(CA)(BD)(EG)+(DB)(CE)(AG)+(EC)(DA)(BG)+(AD)(EB)(CG)+}$

$\mathbf{+(BE)(AC)(DG)})=\alpha\mathbf{(ABCDEF)}+\beta\mathbf{(ABCDEG)}$;

2) **(ABCDEF)** – не изменяется при перестановке любой пары векторов;

3) $\mathbf{(AAAAAA)= (AA)(AA)(AA)} >0$ при $\mathbf{A}\neq 0$.

Для скалярного произведения шести векторов выполняется неравенство (Коши)

$\mathbf{(ABCDEF)}=|\mathbf{A}||\mathbf{B}||\mathbf{C}||\mathbf{D}||\mathbf{E}||\mathbf{F}|(1/15)_*(\mathrm{Cos}\varphi_{AB}\mathrm{Cos}\varphi_{CD}\mathrm{Cos}\varphi_{EF}+\mathrm{Cos}\varphi_{BC}\mathrm{Cos}\varphi_{DE}\mathrm{Cos}\varphi_{AF}+$

$+\mathrm{Cos}\varphi_{CD}\mathrm{Cos}\varphi_{EA}\mathrm{Cos}\varphi_{BF}+\mathrm{Cos}\varphi_{DE}\mathrm{Cos}\varphi_{AB}\mathrm{Cos}\varphi_{CF}+\mathrm{Cos}\varphi_{EA}\mathrm{Cos}\varphi_{BC}\mathrm{Cos}\varphi_{DF}+$

$+\mathrm{Cos}\varphi_{BC}\mathrm{Cos}\varphi_{AD}\mathrm{Cos}\varphi_{EF}+\mathrm{Cos}\varphi_{CD}\mathrm{Cos}\varphi_{BE}\mathrm{Cos}\varphi_{AF}+\mathrm{Cos}\varphi_{DE}\mathrm{Cos}\varphi_{CA}\mathrm{Cos}\varphi_{BF}+$

$+\mathrm{Cos}\varphi_{EA}\mathrm{Cos}\varphi_{DB}\mathrm{Cos}\varphi_{CF}+\mathrm{Cos}\varphi_{AB}\mathrm{Cos}\varphi_{EC}\mathrm{Cos}\varphi_{DF}+\mathrm{Cos}\varphi_{CA}\mathrm{Cos}\varphi_{BD}\mathrm{Cos}\varphi_{EF}+$

$+\mathrm{Cos}\varphi_{DB}\mathrm{Cos}\varphi_{CE}\mathrm{Cos}\varphi_{AF}+\mathrm{Cos}\varphi_{EC}\mathrm{Cos}\varphi_{DA}\mathrm{Cos}\varphi_{BF}+\mathrm{Cos}\varphi_{AD}\mathrm{Cos}\varphi_{EB}\mathrm{Cos}\varphi_{CF}+$

$+\mathrm{Cos}\varphi_{BE}\mathrm{Cos}\varphi_{AC}\mathrm{Cos}\varphi_{DF})$,

т.е. $\mathbf{(ABCDEF)}^2 \leq |\mathbf{A}|^2|\mathbf{B}|^2|\mathbf{C}|^2|\mathbf{D}|^2|\mathbf{E}|^2|\mathbf{F}|^2$.

Это неравенство делает осмысленным определение угла φ_{ABCDEF}, образованного шестью векторами **A**,**B**,**C**,**D**,**E** и **F** посредством формулы

$\mathrm{Cos}\varphi_{ABCDEF}=\mathbf{(ABCDEF)}/|\mathbf{A}||\mathbf{B}||\mathbf{C}||\mathbf{D}||\mathbf{E}||\mathbf{F}|=(1/15)_*(\mathrm{Cos}\varphi_{AB}\mathrm{Cos}\varphi_{CD}\mathrm{Cos}\varphi_{EF}+$

$+\mathrm{Cos}\varphi_{BC}\mathrm{Cos}\varphi_{DE}\mathrm{Cos}\varphi_{AF}+\mathrm{Cos}\varphi_{CD}\mathrm{Cos}\varphi_{EA}\mathrm{Cos}\varphi_{BF}+\mathrm{Cos}\varphi_{DE}\mathrm{Cos}\varphi_{AB}\mathrm{Cos}\varphi_{CF}+$

$+\mathrm{Cos}\varphi_{EA}\mathrm{Cos}\varphi_{BC}\mathrm{Cos}\varphi_{DF}+\mathrm{Cos}\varphi_{BC}\mathrm{Cos}\varphi_{AD}\mathrm{Cos}\varphi_{EF}+\mathrm{Cos}\varphi_{CD}\mathrm{Cos}\varphi_{BE}\mathrm{Cos}\varphi_{AF}+$

$+\cos\varphi_{DE}\cos\varphi_{CA}\cos\varphi_{BF}\cos\varphi_{EA}\cos\varphi_{DB}\cos\varphi_{CF}+\cos\varphi_{AB}\cos\varphi_{EC}\cos\varphi_{DF}+$

$+\cos\varphi_{CA}\cos\varphi_{BD}\cos\varphi_{EF}+\cos\varphi_{DB}\cos\varphi_{CE}\cos\varphi_{AF}+\cos\varphi_{EC}\cos\varphi_{DA}\cos\varphi_{BF}+$

$+\cos\varphi_{AD}\cos\varphi_{EB}\cos\varphi_{CF}+\cos\varphi_{BE}\cos\varphi_{AC}\cos\varphi_{DF})$,

как тригонометрической функции пятнадцати углов между парами векторов. Условием перпендикулярности шестигранного угла является $\cos\varphi_{ABCDEF}=0$, что имеет место, например, при перпендикулярности одного из векторов пяти другим векторам.

С помощью билинейных скалярных функций можно задать скалярное произведение четного числа 2к-векторов ($2к \leq n$). Определить симметрические по перестановке любой пары векторов скалярные функции нечетного числа векторов без сопоставления векторам линейных скалярных функций не возможно.

Литература

1. **Фаддеев Д.К.** Лекции по алгебре. –М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1984. – 416с.

КОРОТКОВ А. В.

СИММЕТРИЧЕСКИЕ СКАЛЯРНЫЕ И ВЕКТОРНЫЕ ФУНКЦИИ В СЕМИМЕРНОЙ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЕ

Наряду с антисимметрическими скалярными и векторными функциями
n-векторов, в семимерной векторной алгебре [1] можно определить симметрические скалярные и векторные функции n-векторов ($n \le 7$). Таковой является, в частности, билинейная скалярная функция – скалярное произведение двух векторов (**AB**), определяющее модули |**A**| и |**B**| обоих векторов, расстояние d (**A, B**) = |**A** - **B**| между двумя точками и угол между двумя векторами

$$\mathrm{Cos}\,(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = (\mathbf{AB}) / |\mathbf{A}|\,|\mathbf{B}|.$$

Эта скалярная функция двух векторов полностью определяет метрические свойства пространства, условия ортогональности векторов, обладает свойствами линейности и дистрибутивности. Антисимметрическая векторная функция двух векторов – векторное произведение двух векторов **[AB]**, завершает круг функций над двумя векторами, поскольку в них задействованы все 7+42 = 49 комбинаций двух единичных векторов.

Для произведений трех векторов в семимерной векторной алгебре также определены антисимметрические скалярные и векторные функции трех векторов – смешанное **(ABC)** и векторное **[ABC]** произведения трех векторов. Циклическая подстановка над простейшим произведением трех векторов
(**AB**)**C** определяет также симметрическую по перестановке любой пары векторов векторную функцию трех векторов.

$$[\mathbf{ABC}] = 1/3\,((\mathbf{AB})\mathbf{C} + (\mathbf{BC})\mathbf{A} + (\mathbf{CA})\mathbf{B}).$$

В то же время определить симметрическую по перестановке любой пары векторов скалярную функцию трех векторов не удается, поскольку в перечисленных функциях задействованы все 42+168+133=343 комбинации трех единичных векторов.

Для произведений четырех векторов в семимерной векторной алгебре определены антисимметрические скалярные и векторные функции четырех векторов – смешанное **(ABCD)** и векторное **[ABCD]** произведения четырех векторов. Вместе с тем в смешанном и векторном произведениях четырех векторов задействованы лишь 168+672=840 комбинаций четырех единичных векторов, так что возможно построение симметрических функций. Таковой, в частности, является скалярная симметрическая функция четырех векторов

$$(\mathbf{ABCD}) = ([\mathbf{ABC}]\mathbf{D}) = 1/3\ ((\mathbf{AB})(\mathbf{CD}) + (\mathbf{BC})(\mathbf{AD}) + (\mathbf{CA})(\mathbf{BD})),$$

определяемая произведениями скалярных билинейных функций, повторяющая их свойства в части линейности и дистрибутивности, определяющая модули каждого из четырех векторов и обращающаяся в нуль, когда три из них ортогональны четвертому. В ней задействованы 133 комбинации единичных векторов, поэтому можно вести речь также об определении симметрической векторной функции четырех векторов. Таковой является функция

$$[\mathbf{ABCD}] = [[\mathbf{ABC}]\mathbf{D}] + [[\mathbf{BCD}]\mathbf{A}] + [[\mathbf{CDA}]\mathbf{B}] + [[\mathbf{DAB}]\mathbf{C}] =$$

$$= 1/3\ ((\mathbf{AB})[\mathbf{CD}] + (\mathbf{BC})[\mathbf{AD}] + (\mathbf{CA})[\mathbf{BD}] +$$

$$+ (\mathbf{BC})[\mathbf{DA}] + (\mathbf{CD})[\mathbf{BA}] + (\mathbf{DB})[\mathbf{CA}] +$$

$$+ (\mathbf{CD})[\mathbf{AB}] + (\mathbf{DA})[\mathbf{CB}] + (\mathbf{AC})[\mathbf{DB}] +$$

$$+ (\mathbf{DA})[\mathbf{BC}] + (\mathbf{AB})[\mathbf{DC}] + (\mathbf{BD})[\mathbf{AC}]) = 0.$$

В ней задействованы остальные 1428 комбинаций четырех единичных векторов (168+672+133+1428=2401), причем симметрическая векторная функция четырех векторов равна нулю.

Для произведений пяти векторов в семимерной векторной алгебре определены антисимметрические скалярные и векторные функции пяти векторов – смешанное **(ABCDE)** и векторное **[ABCDE]** произведения пяти векторов, причем **(ABCDE)** = 0. Вместе с тем в смешанном и векторном произведениях пяти векторов задействованы не все из 16807 комбинаций единичных векторов, так что возможно построение симметрических скалярных и векторных функций. Таковой, в частности, является симметрическая векторная функция пяти векторов

$$[\mathbf{ABCDE}] = 1/5((\mathbf{ABCD})\mathbf{E}+(\mathbf{BCDE})\mathbf{A}+(\mathbf{CDEA})\mathbf{B}+(\mathbf{DEAB})\mathbf{C}+(\mathbf{EABC})\mathbf{D} =$$

$$= 1/15((\mathbf{AB})(\mathbf{CD})\mathbf{E}+(\mathbf{BC})(\mathbf{DE})\mathbf{A}+(\mathbf{CD})(\mathbf{EA})\mathbf{B}+(\mathbf{DE})(\mathbf{AB})\mathbf{C}+(\mathbf{EA})(\mathbf{BC})\mathbf{D}+$$

$$+ (\mathbf{BC})(\mathbf{AD})\mathbf{E}+(\mathbf{CD})(\mathbf{BE})\mathbf{A}+(\mathbf{DE})(\mathbf{CA})\mathbf{B}+(\mathbf{EA})(\mathbf{DB})\mathbf{C}+(\mathbf{AB})(\mathbf{EC})\mathbf{D}+$$

$$+ (\mathbf{CA})(\mathbf{BD})\mathbf{E}+(\mathbf{DB})(\mathbf{CE})\mathbf{A}+(\mathbf{EC})(\mathbf{DA})\mathbf{B}+(\mathbf{AD})(\mathbf{EB})\mathbf{C}+(\mathbf{BE})(\mathbf{AC})\mathbf{D}).$$

В антисимметрической и симметрической векторных функциях пяти векторов задействованы 2520+637=3157 единичных векторов. Остальные 13650 комбинаций единичных векторов задействованы в определении смешанного произведения пяти векторов, так что скалярную симметрическую функцию пяти векторов определить невозможно.

Для произведений шести векторов в семимерной векторной алгебре определены антисимметрические скалярные и векторные функции шести векторов – смешанное **(ABCDEF)** и векторное **[ABCDEF]** произведения шести векторов. Вместе с тем в смешанном и векторном произведениях шести векторов задействованы не все из 117649 комбинаций шести единичных векторов, так что возможно построение скалярных и векторных симметрических функций шести векторов. Таковой, в частности, является скалярная симметрическая функция шести векторов

$$
\begin{aligned}
(\mathbf{ABCDEF}) &= ([\mathbf{ABCDE}]\mathbf{F}) = (1/15)\times \\
&\times((\mathbf{AB})(\mathbf{CD})(\mathbf{EF})+(\mathbf{BC})(\mathbf{DE})(\mathbf{AF})+(\mathbf{CD})(\mathbf{EA})(\mathbf{BF})+(\mathbf{DE})(\mathbf{AB})(\mathbf{CF})+(\mathbf{EA})(\mathbf{BC})(\mathbf{DF})+ \\
&+(\mathbf{BC})(\mathbf{AD})(\mathbf{EF})+(\mathbf{CD})(\mathbf{BE})(\mathbf{AF})+(\mathbf{DE})(\mathbf{CA})(\mathbf{BF})+(\mathbf{EA})(\mathbf{DB})(\mathbf{CF})+(\mathbf{AB})(\mathbf{EC})(\mathbf{DF})+ \\
&+(\mathbf{CA})(\mathbf{BD})(\mathbf{EF})+(\mathbf{DB})(\mathbf{CE})(\mathbf{AF})+(\mathbf{EC})(\mathbf{DA})(\mathbf{BF})+(\mathbf{AD})(\mathbf{EB})(\mathbf{CF})+(\mathbf{BE})(\mathbf{AC})(\mathbf{DF})),
\end{aligned}
$$

определяемая произведениями скалярных билинейных функций, повторяющая их свойства в части линейности и дистрибутивности, определяющая модули каждого из шести векторов и обращающаяся в нуль, когда пять из них ортогональны шестому. Можно вести речь также об определении симметрической векторной функции шести векторов. Таковой является функция

$$
\begin{aligned}
[\mathbf{ABCDEF}] &= [[\mathbf{ABCDE}]\mathbf{F}]+[[\mathbf{BCDEF}]\mathbf{A}]+[[\mathbf{CDEFA}]\mathbf{B}]+[[\mathbf{DEFAB}]\mathbf{C}]+[[\mathbf{EFABC}]\mathbf{D}]+[[\mathbf{FABCD}]\mathbf{E}] = \\
&= 1/105((\mathbf{ABCD})[\mathbf{EF}]+(\mathbf{BCDE})[\mathbf{FA}]+(\mathbf{CDEF})[\mathbf{AB}]+(\mathbf{DEFA})[\mathbf{BC}]+(\mathbf{EFAB})[\mathbf{CD}]+(\mathbf{FABC})[\mathbf{BE}]+ \\
&+(\mathbf{BCDE})[\mathbf{AF}]+(\mathbf{CDEF})[\mathbf{BA}]+(\mathbf{DEFA})[\mathbf{CB}]+(\mathbf{EFAB})[\mathbf{DC}]+(\mathbf{FABC})[\mathbf{ED}]+(\mathbf{ABCD})[\mathbf{CE}]+ \\
&+(\mathbf{CDEA})[\mathbf{BF}]+(\mathbf{DEFB})[\mathbf{CA}]+(\mathbf{EFAC})[\mathbf{DB}]+(\mathbf{FFBD})[\mathbf{EC}]+(\mathbf{ABCE})[\mathbf{FD}]+(\mathbf{BCDF})[\mathbf{DE}]+ \\
&+(\mathbf{DEAB})[\mathbf{CF}]+(\mathbf{EFBC})[\mathbf{DA}]+(\mathbf{FACD})[\mathbf{EB}]+(\mathbf{ABDE})[\mathbf{FC}]+(\mathbf{BCEF})[\mathbf{AD}]+(\mathbf{CDFA})[\mathbf{FE}]+ \\
&+(\mathbf{EABC})[\mathbf{DF}]+(\mathbf{FBCD})[\mathbf{EA}]+(\mathbf{ACDE})[\mathbf{FB}]+(\mathbf{BDEF})[\mathbf{AC}]+(\mathbf{CEFA})[\mathbf{BD}]+(\mathbf{DFAB})[\mathbf{AE}])=0,
\end{aligned}
$$

обращающаяся, однако, в нуль.

Для произведений семи векторов в семимерной векторной алгебре определены антисимметрические скалярные и векторные функции семи векторов – смешанное **(ABCDEFG)** и векторное **[ABCDEFG]** произведения семи векторов, причем **[ABCDEFG]** = 0. Вместе с тем в смешанном и векторном произведениях семи векторов задействованы не все из 823543 комбинаций единичных векторов, так что возможно построение симметрических скалярных и векторных функций. Таковой, в частности, является симметрическая векторная функция семи векторов

$$[\mathbf{ABCDEFG}]=1/7((\mathbf{ABCDEF})\mathbf{G}+(\mathbf{BCDEFG})\mathbf{A}+(\mathbf{CDEFGA})\mathbf{B}+(\mathbf{DEFGAB})\mathbf{C}+$$

$$+(\mathbf{EFGABC})\mathbf{D}+(\mathbf{FGABCD})\mathbf{E}+(\mathbf{GABCDE})\mathbf{F}),$$

состоящая из 105 слагаемых вида (**AB**)(**CD**)(**EF**)**G**, определяемая скалярными произведениями пар векторов. Построить симметрическую скалярную функцию семи векторов не удается.

Таким образом, в семимерной векторной алгебре имеется следующая классификация произведений векторов

<table>
<tr><td colspan="3">число векторов</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td></tr>
<tr><td rowspan="4">функции</td><td rowspan="2">скал.</td><td>сим.</td><td>(AB)</td><td>-</td><td>(ABCD)</td><td>-</td><td>(ABCDEF)</td><td>-</td></tr>
<tr><td>антисим.</td><td>-</td><td>(ABC)</td><td>(ABCD)</td><td>(ABCDE)=0</td><td>(ABCDEF)=0</td><td>(ABCDEFG)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">вект.</td><td>сим.</td><td>-</td><td>[ABC]</td><td>[ABCD]=0</td><td>[ABCDE]</td><td>[ABCDEF]=0</td><td>[ABCDEFG]</td></tr>
<tr><td>антисим.</td><td>[AB]</td><td>[ABC]</td><td>[ABCD]</td><td>[ABCDE]</td><td>[ABCDEF]</td><td>[ABCDEFG]=0</td></tr>
</table>

Отметим, что полилинейные симметрические скалярные и векторные функции являются функциями билинейной симметрической формы – скалярного произведения двух векторов, полностью определяющей метрические свойства векторного пространства. По этой причине им не следует отводить фундаментальную роль в определении метрики пространств. Более того, полилинейные симметрические скалярные функции определены лишь для четного числа векторов, а симметрические полилинейные скалярные функции для нечетного числа векторов определить невозможно.

Литература

1. **Коротков А.В**. Элементы семимерного векторного исчисления. Алгебра. Геометрия. Теория поля. – Новочеркасск: Набла, 1996. – 244с.

КОРОТКОВ А.В.

ПОЛИКВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ

Предпосылкой и основанием для определения поликвадратичных форм является наличие в семимерной векторной алгебре симметрических скалярных функций не только двух векторов – скалярного произведения двух векторов **(AB),** но также четырех **(ABCD)** и шести **(ABCDEF)** векторов. При этом скалярные произведения четырех и шести векторов соответственно имеют вид:

(ABCD) = 1/3 (**(AB)(CD)** + **(BC)(AD)** + **(CA)(BD)**)

И

(ABCDEF) = 1/15(**(AB)(CD)(EF)+(BC)(DE)(AF)+(CD)(EA)(BF)+**

+(DE)(AB)(CF)+(EA)(BC)(DF) +(BC)(AD)(EF)+(CD)(BE)(AF)+

(DE)(CA)(BF)+(EA)(DB)(CF)+(AB)(EC)(DF) +(CA)(BD)(EF)+

+(DB)(CE)(AF)+(EC)(DA)(BF)+(AD)(EB)(CF)+(BE)(AC)(DF)),

а скалярные четвертая и шестая степени векторов

(AAAA) = **(AA)(AA)**

и **(AAAAAA)** = **(AA)(AA)(AA)**

определяются второй и третьей степенями скалярных квадратов векторов, т.е. в конечном итоге степенями квадратичной формы.

В линейном векторном пространстве большей размерности могут быть получены симметрические скалярные функции большего числа векторов, также определяемые произведением скалярных произведений пар векторов. Аналогичным образом соответственно должны быть определены большие степени квадратичных форм.

Биквадратичной формой назовем однородный многочлен четвертой степени от нескольких букв, образованный произведением двух однородных многочленов второй степени от тех же букв. Обозначим эти буквы через $x_1, x_2, \ldots, x_n$. В общем виде биквадратичная форма может быть записана так:

$f^2(x_1, x_2, \ldots, x_n)=(d_{11}x_1x_1+d_{12}x_1x_2+\ldots+d_{1n}x_1x_n+$
$(d_{11}x_1x_1+d_{12}x_1x_2+\ldots+d_{1n}x_1x_n+$

$+d_{22}x_2x_2+\ldots+d_{2n}x_2x_n+$
$+d_{22}x_2x_2+\ldots+d_{2n}x_2x_n+$ ....*...................................

$+d_{nn}x_nx_n)$ $\qquad$ $+d_{nn}x_nx_n)$.

Коэффициенты в этой форме записи образуют треугольную матрицу, однако эта форма записи неудобна. Если в поле (или в кольце), из которого берутся коэффициенты формы выполнимо деление на два, то удобнее каждый недиагональный коэффициент разделить на два и записать два раза, при произведениях букв в обоих порядках. Запись примет вид:

$f^2(x_1, x_2, \ldots, x_n)=(a_{11}x_1x_1+a_{12}x_1x_2+\ldots+a_{1n}x_1x_n+$ $\qquad$ $(a_{11}x_1x_1+a_{12}x_1x_2+\ldots+a_{1n}x_1x_n+$

$+a_{21}x_2x_1+a_{22}x_2x_2+\ldots+a_{2n}x_2x_n+$ $\qquad$ $+a_{21}x_2x_1+a_{22}x_2x_2+\ldots+a_{2n}x_2x_n+$

....*....................................

$+a_{n1}x_nx_1+a_{n2}x_nx_2+\ldots+a_{nn}x_nx_n)$ $\qquad$ $+a_{n1}x_nx_1+a_{n2}x_nx_2+\ldots+a_{nn}x_nx_n)$,

причем $a_{ij} = a_{ji}$. Такую запись биквадратичной формы назовем правильной.

Матрица $A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{Vmatrix}$ является матрицей квадратичной формы.

Она симметрична, т.е. $A^т=A$.

Биквадратичная форма может быть записана более компактно, если использовать матричные обозначения. Вынося x_i из i-той строки, получим

$$f^2(x_1, x_2, \ldots, x_n)= (X^тAX)*(X^тAX),$$

где через X обозначена матрица-столбец $(x_1, x_2, \ldots, x_n)^т$, а через $X^тAX$ – квадратичная форма $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Пусть в биквадратичной форме $f^2(x_1, x_2, \ldots, x_n)= (X^тAX)*(X^тAX)$ делается линейное преобразование переменных с невырожденной матрицей: X=BY. Тогда биквадратичная форма от букв $x_1,x_2,\ldots,x_n$ преобразуется в биквадратичную форму от букв $y_1, y_2,\ldots,y_n$ (компонент столбца Y), а именно в $f_1^2(Y)=Y^т(B^тAB)Y*Y^т(B^тAB)Y$.

Покажем, что форма $f_1^2(Y)$ автоматически получилась правильно записанной. Для этого достаточно убедиться в том, что матрица $B^тAB$ симметрична, что легко проверяется:

$$(B^тAB)^т = B^тAB.$$

Отметим, что квадратичная форма $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = X^{т}AX$ линейным преобразованием переменных X=BY приводится к каноническому виду:

$B^T AB = \mathrm{diag}.\ (b_1, b_2, \ldots, b_n)$. Если к тому же квадратичная форма положительно определена, т.е. коэффициенты b_i положительны, то преобразованием Y=CZ, где $C = \mathrm{diag}.\ (b_1^{-1/2}, b_2^{-1/2}, \ldots, b_n^{-1/2})$, квадратичная форма приводится к сумме квадратов букв, а биквадратичная к ее квадрату, т.е.

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = X^{т}AX = Y^T(B^T AB)Y = Z^T C^T(B^T AB)CZ = z_1^2 + z_2^2 + \ldots + z_n^2$$

и следовательно

$$f^2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (f(x_1, x_2, \ldots, x_n))^2 = (z_1^2 + z_2^2 + \ldots + z_n^2)^2.$$

Аналогичным образом можно построить триквадратичную форму:

$$f^3(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (f(x_1, x_2, \ldots, x_n))^3 = (z_1^2 + z_2^2 + \ldots + z_n^2)^3.$$

Вообще для поликвадратичной формы при тех же допущениях имеем:

$$f^к(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (f(x_1, x_2, \ldots, x_n))^к = (z_1^2 + z_2^2 + \ldots + z_n^2)^к,$$

при этом $2к \le n$.

Отметим, что с помощью полилинейных скалярных функций – скалярных произведений n-векторов, можно определять многогранные углы многомерных геометрических фигур, например, так:

$$\mathrm{Cos}(\mathbf{A}_1,\mathbf{A}_2,\ldots,\mathbf{A}_n) = (\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2\ldots\mathbf{A}_n)/|\mathbf{A}_1||\mathbf{A}_2|\ldots|\mathbf{A}_n|.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. **Фаддеев Д.К.** Лекции по алгебре. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1984.

КОРОТКОВ А.В.

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ТЕНЗОРОВ СИММЕТРИЧНЫХ ПОЛИЛИНЕЙНЫХ СКАЛЯРНЫХ ФУНКЦИЙ И ФОРМ

1. Преобразование векторов двух базисов с общим началом

Пусть в некоторой точке выбраны два векторных базиса $\mathbf{e}_1,...,\mathbf{e}_n$ и $\mathbf{e}_1',...,\mathbf{e}_n'$. Любой из векторов первого базиса можно разложить по векторам второго базиса и наоборот. Обозначим через $e^1{}_{i'},e^2{}_{i'},...,e^n{}_{i'}$ (i=1,2,...,n) коэффициенты разложения вектора $\mathbf{e}_i'$ по векторам базиса $\mathbf{e}_1,...,\mathbf{e}_n$ эти n^2-величин называют коэффициентами прямого преобразования. Имеем

$\mathbf{e}_1' = e^1{}_{1'}\mathbf{e}_1 + e^2{}_{1'}\mathbf{e}_2 + \ldots + e^n{}_{1'}\mathbf{e}_n = \sum e^k{}_{1'}\mathbf{e}_k;$

$\mathbf{e}_2' = e^1{}_{2'}\mathbf{e}_1 + e^2{}_{2'}\mathbf{e}_2 + \ldots + e^n{}_{2'}\mathbf{e}_n = \sum e^k{}_{2'}\mathbf{e}_k;$

....

$\mathbf{e}_n' = e^1{}_{n'}\mathbf{e}_1 + e^2{}_{n'}\mathbf{e}_2 + \ldots + e^n{}_{n'}\mathbf{e}_n = \sum e^k{}_{n'}\mathbf{e}_k,$

или в общем виде

$\mathbf{e}_i' = \sum e^k{}_{i'}\mathbf{e}_k, \qquad k=1,2,...,n.$

Аналогично, коэффициенты разложения вектора $\mathbf{e}_i$ по векторам $\mathbf{e}_1',...,\mathbf{e}_n'$ обозначим через $e^{1'}{}_i, e^{2'}{}_i,...,e^{n'}{}_i$ (i=1,2,..,n). Эти n^2-величин называют коэффициентами обратного преобразования:

$\mathbf{e}_1 = e^{1'}{}_1\mathbf{e}_1' + e^{2'}{}_1\mathbf{e}_2' + \ldots + e^{n'}{}_1\mathbf{e}_n' = \sum e^{k'}{}_1\mathbf{e}_k';$

$\mathbf{e}_2 = e^{1'}{}_2\mathbf{e}_1' + e^{2'}{}_2\mathbf{e}_2' + \ldots + e^{n'}{}_2\mathbf{e}_n' = \sum e^{k'}{}_2\mathbf{e}_k';$

....

$\mathbf{e}_n = e^{1'}{}_n\mathbf{e}_1' + e^{2'}{}_n\mathbf{e}_2' + \ldots + e^{n'}{}_n\mathbf{e}_n' = \sum e^{k'}{}_n\mathbf{e}_k',$

или в общем виде

$\mathbf{e}_i = \sum e^{k'}{}_i\mathbf{e}_k', \qquad k=1,2,...,n.$

Между коэффициентами прямого и обратного преобразования существует связь. Подставив разложение каждого вектора $\mathbf{e}_k$ из второй группы формул в первую, найдем

$\mathbf{e}_i' = e^1{}_{i'}\mathbf{e}_1 + e^2{}_{i'}\mathbf{e}_2 + \ldots + e^n{}_{i'}\mathbf{e}_n =$

$=e^{1}_{i'}(e^{1'}_{1}\mathbf{e}_1'+\ldots+e^{n'}_{1}\mathbf{e}_n')+\ldots+e^{n}_{i'}(e^{1'}_{n}\mathbf{e}_1'+\ldots+e^{n'}_{n}\mathbf{e}_n')=$

$=(e^{1}_{i'}e^{1'}_{1}+\ldots+e^{n}_{i'}e^{1'}_{n})\mathbf{e}_1'+\ldots+(e^{1}_{i'}e^{n'}_{1}+\ldots+e^{n}_{i'}e^{n'}_{n})\mathbf{e}_n'=$

$=\mathbf{e}_1'\sum e^{m}_{i'}e^{1'}_{m}+\ldots+\mathbf{e}_n'\sum e^{m}_{i'}e^{n'}_{m}=\sum \mathbf{e}_k'\sum e^{m}_{i'}e^{k'}_{m}$ k,m=1,2,...,n.

Аналогичным путем получим

$\mathbf{e}_i=e^{1'}_{1}\mathbf{e}_1'+e^{2'}_{1}\mathbf{e}_2'+\ldots+e^{n'}_{1}\mathbf{e}_n'=$

$=e^{1'}_{1}(e^{1}_{1'}\mathbf{e}_1+\ldots+e^{n}_{1'}\mathbf{e}_n)+\ldots+e^{n'}_{1}(e^{1}_{n'}\mathbf{e}_1+\ldots+e^{n}_{n}\mathbf{e}_n)=$

$=(e^{1'}_{1}e^{1}_{1'}+\ldots+e^{n'}_{1}e^{1}_{n'})\mathbf{e}_1+\ldots+(e^{1'}_{1}e^{n}_{1'}+\ldots+e^{n'}_{1}e^{n}_{n'})\mathbf{e}_n=$

$=\mathbf{e}_1\sum e^{m'}_{i}e^{1}_{m'}+\ldots+\mathbf{e}_n\sum e^{m'}_{i}e^{n}_{m'}=\sum \mathbf{e}_k\sum e^{m'}_{i}e^{k}_{m'}$ k,m=1,2,...,n.

Таким образом, для каждого значения индекса i (i=1,2,...,n) имеют место $2n^2$ соотношений:

$\sum e^{m}_{i'}e^{k'}_{m}=\delta^{k'}_{i'}$ и $\sum e^{m'}_{i}e^{k}_{m'}=\delta^{k}_{i}$, равных 0 при $i\neq k$ и 1 при i=k.

2. Преобразование координат векторов при изменении базиса

Один и тот же вектор **a** можно представить разложенным по векторам исходного и преобразованного базисов, т.е.

$\mathbf{a}=a^1\mathbf{e}_1+a^2\mathbf{e}_2+\ldots+a^n\mathbf{e}_n=$

$=a^1(e^{1'}_{1}\mathbf{e}_1'+e^{2'}_{1}\mathbf{e}_2'+\ldots+e^{n'}_{1}\mathbf{e}_n')+\ldots+a^n(e^{1'}_{n}\mathbf{e}_1'+e^{2'}_{n}\mathbf{e}_2'+\ldots+e^{n'}_{n}\mathbf{e}_n')=$

$=(a^1e^{1'}_{1}+\ldots+a^ne^{1'}_{n})\mathbf{e}_1'+\ldots+(a^1e^{n'}_{1}+\ldots+a^ne^{n'}_{n})\mathbf{e}_n'=$

$=a^{1'}\mathbf{e}_1'+a^{2'}\mathbf{e}_2'+\ldots+a^{n'}\mathbf{e}_n'$,

другими словами,

$a^{1'}=a^1e^{1'}_{1}+a^2e^{1'}_{2}+\ldots+a^ne^{1'}_{n}$

$a^{2'}=a^1e^{2'}_{1}+a^2e^{2'}_{2}+\ldots+a^ne^{2'}_{n}$

....

$a^{n'}=a^1e^{n'}_{1}+a^2e^{n'}_{2}+\ldots+a^ne^{n'}_{n}$

или

$a^{i'}=\sum e^{i'}_{k}a^k$, k=1,2,...,n

Аналогично

$\mathbf{a}=a^{1'}\mathbf{e}_1'+a^{2'}\mathbf{e}_2'+...+a^{n'}\mathbf{e}_n'=$

$=a^{1'}(e^1_{1'}\mathbf{e}_1+e^2_{1'}\mathbf{e}_2+\ldots+e^n_{1'}\mathbf{e}_n)+\ldots+a^{n'}(e^1_{n'}\mathbf{e}_1+e^2_{n'}\mathbf{e}_2+\ldots+e^n_{n'}\mathbf{e}_n)=$

$=(a^{1'}e^1_{1'}+\ldots+a^{n'}e^1_{n'})\mathbf{e}_1+\ldots+(a^{1'}e^n_{1'}+\ldots+a^{n'}e^n_{n'})\mathbf{e}_n=$

$=a^1\mathbf{e}_1+a^2\mathbf{e}_2+...+a^n\mathbf{e}_n,$

другими словами,

$a^1=a^{1'}e^1_{1'}+a^{2'}e^1_{2'}+\ldots+a^{n'}e^1_{n'}$

$a^2=a^{1'}e^2_{1'}+a^{2'}e^2_{2'}+\ldots+a^{n'}e^2_{n'}$

....

$a^n=a^{1'}e^n_{1'}+a^{2'}e^n_{2'}+\ldots+a^{n'}e^n_{n'}$

или $\quad a^i=\sum e^i_{k'}a^{k'}, \qquad k=1,2,...,n.$

3. Линейные функции и формы от одного переменного

Чтобы задать линейную функцию от одного переменного $l(\mathbf{a})$, необходимо задать набор ее коэффициентов $l(\mathbf{e}_i)=l_i$ ($i=1,2,...,n$), т.е. ее матрицу-строку $L_1=(l_1,l_2,\ldots, l_n)$.

Спрашивается: как при переходе от базиса $\mathbf{e}_1,...,\mathbf{e}_n$ к новому базису $\mathbf{e}_1',...,\mathbf{e}_n'$ преобразуется матрица L_1 линейной функции от одного переменного.

Пусть линейная функция от одного переменного $l(\mathbf{a})$ записывается относительно базиса $\mathbf{e}_1,...,\mathbf{e}_n$ в виде линейной формы от одного переменного $l(\mathbf{a})=\sum l_i a^i=L_1A$ при $\mathbf{a}=a^1\mathbf{e}_1+...+a^n\mathbf{e}_n$ с матрицей $L_1=(l_1,l_2,\ldots, l_n)$, а относительно базиса $\mathbf{e}_1',...,\mathbf{e}_n'$ в виде линейной формы от одного переменного $l(\mathbf{a})=\sum l_i' a^{i'}=L_1'A'$ при $\mathbf{a}=a^{1'}\mathbf{e}_1'+...+a^{n'}\mathbf{e}_n'$ с матрицей $L_1'=(l_1',l_2',\ldots, l_n')$. При этом $\mathbf{e}_i'=\sum e^k_{i'}\mathbf{e}_k$ и $a^i=\sum e^i_{k'}a^{k'}$, $k=1,...,n$, что соответствует матрице преобразования координат векторов

$$H=\left\|\begin{matrix} e^1_{1'} & e^1_{2'} & \ldots & e^1_{n'} \\ e^2_{1'} & e^2_{2'} & \ldots & e^2_{n'} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ e^n_{1'} & e^n_{2'} & \ldots & e^n_{n'} \end{matrix}\right\| ,$$

т.е. преобразованию $A=HA'$.

Тогда имеем $\quad l(\mathbf{a})=L_1A=L_1HA'=L_1'A'$,

т.е. $\quad L_1'=L_1H$.

4. Линейные функции и формы от двух переменных

Чтобы задать линейную функцию от двух переменных $l(\mathbf{a},\mathbf{b})$, достаточно задать набор ее коэффициентов $l(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)=l_{ij}$ (i,j=1,2,...,n), т.е. ее матрицу

$$L_2=\left\| \begin{matrix} l_{11} & l_{12} & ... & l_{1n} \\ l_{21} & l_{22} & ... & l_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ l_{n1} & l_{n2} & ... & l_{nn} \end{matrix} \right\| .$$

Спрашивается: как при переходе от базиса $\mathbf{e}_1,...,\mathbf{e}_n$ к новому базису $\mathbf{e}_1',...,\mathbf{e}_n'$ преобразуется матрица L_2 линейной функции от двух переменных.

Пусть линейная функция от двух переменных $l(\mathbf{a},\mathbf{b})$ записывается относительно базиса $\mathbf{e}_1,...,\mathbf{e}_n$ в виде линейной формы от двух переменных $l(\mathbf{a},\mathbf{b})=\sum\sum l_{ij}a^ib^j=A^TL_2B$ при $\mathbf{a}=a^1\mathbf{e}_1+...+a^n\mathbf{e}_n$, $\mathbf{b}=b^1\mathbf{e}_1+...+b^n\mathbf{e}_n$ с матрицей L_2, а относительно базиса $\mathbf{e}_1',...,\mathbf{e}_n'$ в виде линейной формы от двух переменных $l(\mathbf{a},\mathbf{b})=\sum\sum l_{ij}'a^{i'}b^{j'}=A'^TL_2'B'$ при $\mathbf{a}=a^{1'}\mathbf{e}_1'+...+a^{n'}\mathbf{e}_n'$, $\mathbf{b}=b^{1'}\mathbf{e}_1'+...+b^{n'}\mathbf{e}_n'$ с матрицей L_2' . При этом $\mathbf{e}_i'=\sum e^k_{i'}e_k$ и $a^i=\sum e^i_{k'}a^{k'}$, k=1,...,n, что соответствует матрице преобразования координат векторов

$$H=\left\| \begin{matrix} e^1_{1'} & e^1_{2'} & ... & e^1_{n'} \\ e^2_{1'} & e^2_{2'} & ... & e^2_{n'} \\ ... & ... & ... & ... \\ e^n_{1'} & e^n_{2'} & ... & e^n_{n'} \end{matrix} \right\| ,$$

т.е. преобразованиям $A=HA'$ и $B=HB'$, т.е. $A^T=A'^TE^T$, $B^T=B'^TE^T$.

Тогда имеем $l(\mathbf{a},\mathbf{b})=A^TL_2B=A'^TE^TL_2HB'=A'^T(E^TL_2H)B'=A'^TL_2'B'$,

т.е. $L_2'=E^TL_2H$.

Линейная функция второй степени аргумента, определенная в L^n соответственно записывается относительно базиса $\mathbf{e}_1,...,\mathbf{e}_n$ формой $l(\mathbf{a},\mathbf{a})=\sum\sum l_{ij}a^ia^j=A^TL_2A$, а относительно базиса $\mathbf{e}_1',...,\mathbf{e}_n'$ формой $l(\mathbf{a},\mathbf{a})=\sum\sum l_{ij}'a^{i'}a^{j'}= =A'^TL_2'A'$, где $L_2'=H^TL_2H$.

5. Линейные функции и формы от трех переменных

Чтобы задать линейную функцию от трех переменных $l(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})=1/3(l(\mathbf{a},\mathbf{b})l(\mathbf{c})+l(\mathbf{b},\mathbf{c})l(\mathbf{a})+l(\mathbf{c},\mathbf{a})l(\mathbf{b}))$, достаточно задать набор ее коэффициентов $1/3(l(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j)l(\mathbf{e}_k)+l(\mathbf{e}_j,\mathbf{e}_k)l(\mathbf{e}_i)+l(\mathbf{e}_k,\mathbf{e}_i)l(\mathbf{e}_j))=1/3(l_{ij}l_k+l_{jk}l_i+l_{ki}l_j)=l_{ijk}$, т.е. тензор полилинейной формы от трех переменных L_3.

Спрашивается: как при переходе от базиса $\mathbf{e}_1,...,\mathbf{e}_n$ к новому базису $\mathbf{e}_1',...,\mathbf{e}_n'$ преобразуется тензор L_3 линейной функции от трех переменных.

Пусть линейная функция от трех переменных $l(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})$ записывается относительно базиса $\mathbf{e}_1,...,\mathbf{e}_n$ в виде линейной формы от трех переменных $l(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})=\sum\sum\sum l_{ijk}a^ib^jc^k=1/3(A^TL_2B\cdot L_1C+B^TL_2C\cdot L_1A+C^TL_2A\cdot L_1B)$ при $\mathbf{a}=a^1\mathbf{e}_1+...+a^n\mathbf{e}_n$, $\mathbf{b}=b^1\mathbf{e}_1+...+b^n\mathbf{e}_n$, $\mathbf{c}=c^1\mathbf{e}_1+...+c^n\mathbf{e}_n$ с тензором L_3, определяемым тензорами L_2 и L_1 а относительно базиса $\mathbf{e}_1',...,\mathbf{e}_n'$ в виде линейной формы от трех переменных $l(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})=\sum\sum\sum l_{ijk}'a^{i'}b^{j'}c^{k'}=1/3(A'^TL_2'B'\cdot L_1'C'+B'^TL_2'C'\cdot L_1'A'+C'^TL_2'A'\cdot L_1'B')$ при $\mathbf{a}=a^{1'}\mathbf{e}_1'+...+a^{n'}\mathbf{e}_n'$, $\mathbf{b}=b^{1'}\mathbf{e}_1'+...+b^{n'}\mathbf{e}_n'$, $\mathbf{c}=c^{1'}\mathbf{e}_1'+...+c^{n'}\mathbf{e}_n'$ с тензором L_3', определяемым тензорами L_2' и L_1'.

При этом $\mathbf{e}_i'=\sum e^k{}_{i'}e_k$ и $a^i=\sum e^i{}_{k'}a^{k'}$, $k=1,...,n$, что соответствует матрице преобразования векторов

$$H=\begin{Vmatrix} e^1{}_{1'} & e^1{}_{2'} & \dots & e^1{}_{n'} \\ e^2{}_{1'} & e^2{}_{2'} & \dots & e^2{}_{n'} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ e^n{}_{1'} & e^n{}_{2'} & \dots & e^n{}_{n'} \end{Vmatrix},$$

т.е. преобразованиям $A=HA'$, $B=HB'$, $C=HC'$, т.е. $A^T=A'^TE^T$, $B^T=B'^TE^T$, $C^T=C'^TE^T$.

Тогда имеем

$$l(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})=1/3(A^TL_2B\cdot L_1C+B^TL_2C\cdot L_1A+C^TL_2A\cdot L_1B)=$$

$$=1/3(A'^TE^TL_2HB'\cdot L_1HC'+B'^TE^TL_2HC'\cdot L_1HA'+C'^TE^TL_2HA'\cdot L_1HB')=$$

$$=1/3(A'^TL_2'B'\cdot L_1'C'+B'^TL_2'C'\cdot L_1'A'+C'^TL_2'A'\cdot L_1'B'),$$

т.е. $L_2'=E^TL_2H$ и $L_1'=L_1H$.

Линейная функция третьей степени аргумента, определенная в L^n соответственно записывается относительно базиса $\mathbf{e}_1,...,\mathbf{e}_n$ формой $l(\mathbf{a},\mathbf{a},\mathbf{a})=\sum\sum\sum l_{ijk}a^ia^ja^k=A^TL_2A\cdot L_1A$, определяемой тензорами L_2 и L_1, а относительно базиса $\mathbf{e}_1',...,\mathbf{e}_n'$ формой $l(\mathbf{a},\mathbf{a},\mathbf{a})=\sum\sum\sum l_{ijk}'a^{i'}a^{j'}a^{k'}=A'^TH^TL_2HA'\cdot L_1HA'$, определяемой тензорами L_2' и L_1', причем $L_2'=H^TL_2H$, а $L_1'=L_1H$.

6. Линейные функции и формы от четырех переменных

Чтобы задать линейную функцию от четырех переменных $l(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{d})=1/3(l(\mathbf{a},\mathbf{b})l(\mathbf{c},\mathbf{d})+l(\mathbf{b},\mathbf{c})l(\mathbf{a},\mathbf{d})+l(\mathbf{c},\mathbf{a})l(\mathbf{b},\mathbf{d}))$, достаточно задать набор ее коэффициентов
$1/3(l(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j)l(\mathbf{e}_k,\mathbf{e}_l)+l(\mathbf{e}_j,\mathbf{e}_k)l(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_l)+l(\mathbf{e}_k\mathbf{e}_i)l(\mathbf{e}_j,\mathbf{e}_l))=1/3(l_{ij}l_{kl}+l_{jk}l_{il}+l_{ki}l_{jl})=l_{ijkl}$, т.е. тензор полилинейной формы от четырех переменных L_4.

Спрашивается: как при переходе от базиса $\mathbf{e}_1,...,\mathbf{e}_n$ к новому базису $\mathbf{e}_1{}',...,\mathbf{e}_n{}'$ преобразуется тензор L_4 линейной функции от четырех переменных.

Пусть линейная функция от четырех переменных $l(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{d})$ записывается относительно базиса $\mathbf{e}_1,...,\mathbf{e}_n$ в виде линейной формы от четырех переменных
$l(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{d})=\sum\sum\sum\sum l_{ijkl}a^ib^jc^kd^l=1/3(A^TL_2B\cdot C^TL_2D+B^TL_2C\cdot A^TL_2D+C^TL_2A\cdot B^TL_2D)$
при $\mathbf{a}=a^1\mathbf{e}_1+...+a^n\mathbf{e}_n$, $\mathbf{b}=b^1\mathbf{e}_1+...+b^n\mathbf{e}_n$, $\mathbf{c}=c^1\mathbf{e}_1+...+c^n\mathbf{e}_n$, $\mathbf{d}=d^1\mathbf{e}_1+...+d^n\mathbf{e}_n$ с тензором L_4, определяемым тензором L_2, а относительно базиса $\mathbf{e}_1{}',...,\mathbf{e}_n{}'$ в виде линейной формы от четырех переменных

$l(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{d})=\sum\sum\sum\sum l_{ijkl}{}'a^{i'}b^{j'}c^{k'}d^{l'}=1/3(A'^TL_2{}'B'\cdot C'^TL_2{}'D'+B'^TL_2{}'C'\cdot A'^TL_2{}'D'+C'^TL_2{}'A'\cdot B'^TL_2{}'D')$

при $\mathbf{a}=a^{1'}\mathbf{e}_1{}'+...+a^{n'}\mathbf{e}_n{}'$, $\mathbf{b}=b^{1'}\mathbf{e}_1{}'+...+b^{n'}\mathbf{e}_n{}'$, $\mathbf{c}=c^{1'}\mathbf{e}_1{}'+...+c^{n'}\mathbf{e}_n{}'$, $\mathbf{d}=d^{1'}\mathbf{e}_1{}'+...+d^{n'}\mathbf{e}_n{}'$ с тензором $L_4{}'$, определяемым тензором $L_2{}'$.

При этом $\mathbf{e}_i{}'=\sum e^k{}_{i'}e_k$ и $a^i=\sum e^i{}_{k'}a^{k'}$, $k=1,...,n$, что соответствует матрице преобразования векторов

$$H=\begin{Vmatrix} e^1{}_{1'} & e^1{}_{2'} & ... & e^1{}_{n'} \\ e^2{}_{1'} & e^2{}_{2'} & ... & e^2{}_{n'} \\ ... & ... & ... & ... \\ e^n{}_{1'} & e^n{}_{2'} & ... & e^n{}_{n'} \end{Vmatrix},$$

т.е. преобразованиям $A=HA'$, $B=HB'$, $C=HC'$, $D=HD'$ т.е. $A^T=A'^TH^T$, $B^T=B'^TH^T$, $C^T=C'^TH^T$, $D^T=D'^TH^T$.

Тогда имеем

$l(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{d})=1/3(A^TL_2B\cdot C^TL_2D+B^TL_2C\cdot A^TL_2D+C^TL_2A\cdot B^TL_2D)=$

$=1/3(A'^TH^TL_2EB'\cdot C'^TH^TL_2ED'+B'^TH^TL_2EC'\cdot A'^TH^TL_2ED'+C'^TH^TL_2EA'\cdot B'^TH^TL_2ED')$

$=1/3(A'^TL_2{}'B'\cdot C'^TL_2{}'D'+B'^TL_2{}'C'\cdot A'^TL_2{}'D'+C'^TL_2{}'A'\cdot B'^TL_2{}'D')$, т.е. $L_2' = H^T L_2 H$.

Линейная функция четвертой степени аргумента, определенная в L^n соответственно записывается относительно базиса $\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n$ формой $l(\mathbf{a},\mathbf{a},\mathbf{a},\mathbf{a}) = = \sum\sum\sum\sum l_{ij\kappa l} a^i a^j a^\kappa a^l = A^T L_2 A \cdot A^T L_2 A$, определяемой тензором L_2, а относительно базиса $\mathbf{e}_1',\dots,\mathbf{e}_n'$ формой $l(\mathbf{a},\mathbf{a},\mathbf{a},\mathbf{a}) = \sum\sum\sum\sum l_{ij\kappa l}' a^{i'} a^{j'} a^{\kappa'} a^{l'} = A'^T L_2' A' \cdot A'^T L_2' A'$, определяемой тензором L_2', причем $L_2' = H^T L_2 H$.

6. Линейные функции и формы от пяти переменных

Чтобы задать линейную функцию от пяти переменных

$$l(a,b,c,d,e) = 1/15((l(a,b)l(c,d)+l(b,c)l(a,d)+l(c,a)l(b,d))l(e)+$$

$$+(l(b,c)l(d,e)+l(c,d)l(b,e)+l(d,b)l(c,e))l(a)+$$

$$+(l(c,d)l(e,a)+l(d,e)l(c,a)+l(e,c)l(d,a))l(b)+$$

$$+(l(d,e)l(a,b)+l(e,a)l(d,b)+l(a,d)l(e,b))l(c)+$$

$$+(l(e,a)l(b,c)+l(a,b)l(e,c)+l(b,e)l(a,c))l(d))$$

достаточно задать набор ее коэффициентов

$$1/15((l(e_i,e_j)l(e_k,e_l)+l(e_j,e_k)l(e_i,e_l) + l(e_k,e_i)\, l(e_j,e_l))\, l(e_m)+$$

$$+(l(e_j,e_k)l(e_l,e_m)+l(e_k,e_l)l(e_j,e_m)+l(e_l,e_j)\, l(e_k,e_m))l(e_i)+$$

$$+(l(e_k,e_l)l(e_m,e_i)+l(e_l,e_m)l(e_k,e_i)+l(e_m,e_k)l(e_l,e_i))\, l(e_j)+$$

$$+(l(e_l,e_m)l(e_i,e_j)+l(e_m,e_i)l(e_l,e_j) +l(e_i,e_l)\, l(e_m,e_j))\, l(e_k)+$$

$$+(l(e_m,e_i)l(e_j,e_k)+l(e_i,e_j)l(e_m,e_k)+l(e_j,e_m)l(e_i,e_k))\, l(e_l))=$$

$$=1/15((l_{ij}l_{kl}+l_{jk}l_{il}+l_{ki}l_{jl})l_m+(l_{jk}l_{lm}+l_{kl}l_{jm}+l_{lj}l_{km})l_i+(l_{kl}l_{mi}+l_{lm}l_{ki}+l_{mk}l_{li})l_j+(l_{lm}l_{ij}+l_{mi}l_{lj}+l_{il}l_{mj})l_k+(l_{mi}l_{jk}+l_{ij}l_{mk}+l_{jm}l_{ik})l_l)=1/5(l_{ijkl}l_m+l_{jklm}l_i+l_{klmi}l_j+l_{lmij}l_k+l_{mijk}l_l)=l_{ijklm}.,$$

т.е. тензор полилинейной формы от пяти переменных L_5.

Спрашивается: как при переходе от базиса $\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n$ к новому базису $\mathbf{e}_1',\dots,\mathbf{e}_n'$ преобразуется тензор L_5 линейной функции от пяти переменных.

Пусть линейная функция от пяти переменных $l(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{d},\mathbf{e})$ записывается относительно базиса $\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n$ в виде линейной формы от пяти переменных $l(a,b,c,d,e) = \sum\sum\sum\sum\sum l_{ijklm} a^i b^j c^k d^l e^m = 1/15\cdot$

$$\cdot(A^T L_2 B \cdot C^T L_2 D + B^T L_2 C \cdot A^T L_2 D + C^T L_2 A \cdot B^T L_2 D)\cdot L_1 E+$$

$$+(B^T L_2 C \cdot D^T L_2 E + C^T L_2 D \cdot B^T L_2 E + D^T L_2 B \cdot C^T L_2 E)\cdot L_1 A+$$

$+(C^TL_2D\cdot E^TL_2A+D^TL_2E\cdot C^TL_2A+E^TL_2C\cdot D^TL_2A)\cdot L_1B+$

$+(D^TL_2E\cdot A^TL_2B+E^TL_2A\cdot D^TL_2B+A^TL_2D\cdot E^TL_2B)\cdot L_1C+$

$+(E^TL_2A\cdot B^TL_2C+A^TL_2B\cdot E^TL_2C+B^TL_2E\cdot A^TL_2C)\cdot L_1D)$

при $a=a^1e_1+...+a^ne_n$, $b=b^1e_1+...+b^ne_n$, $c=c^1e_1+...+c^ne_n$, $d=d^1e_1+...+d^ne_n$, $e=e^1e_1+...+e^ne_n$ с тензором L_5, определяемым тензорами L_2 и L_1, а относительно базиса $e_1',...,e_n'$ в виде линейной формы от пяти переменных

$l(a,b,c,d,e)=\sum\sum\sum\sum\sum l_{ijklm}'a^{i'}b^{j'}c^{k'}d^{l'}e^{m'}=1/15\cdot$

$\cdot(A'^TL_2'B'\cdot C'^TL_2'D'+B'^TL_2'C'\cdot A'^TL_2'D'+C'^TL_2'A'\cdot B'^TL_2'D')\cdot L_1'E'+$

$+(B'^TL_2'C'\cdot D'^TL_2'E'+C'^TL_2'D'\cdot B'^TL_2'E'+D'^TL_2'B'\cdot C'^TL_2'E')\cdot L_1'A'+$

$+(C'^TL_2'D'\cdot E'^TL_2'A'+D'^TL_2'E'\cdot C'^TL_2'A'+E'^TL_2'C'\cdot D'^TL_2'A')\cdot L_1'B'+$

$+(D'^TL_2'E'\cdot A'^TL_2'B'+E'^TL_2'A'\cdot D'^TL_2'B'+A'^TL_2'D'\cdot E'^TL_2'B')\cdot L_1'C'+$

$+(E'^TL_2'A'\cdot B'^TL_2'C'+A'^TL_2'B'\cdot E'^TL_2'C'+B'^TL_2'E'\cdot A'^TL_2'C')\cdot L_1'D')$

при $a=a^{1'}e_1'+...+a^{n'}e_n'$, $b=b^{1'}e_1'+...+b^{n'}e_n'$, $c=c^{1'}e_1'+...+c^{n'}e_n'$, $d=d^{1'}e_1'+...+d^{n'}e_n'$, $e=e^{1'}e_1'+...+e^{n'}e_n'$ с тензором L_5', определяемым тензорами L_2' и L_1'.

При этом $e_i'=\sum e^k_{i'}e_k$ и $a^i=\sum e^i_{k'}a^{k'}$, $k=1,...,n$, что соответствует матрице преобразования векторов

$$H=\left\|\begin{matrix} e^1_{1'} & e^1_{2'} & ... & e^1_{n'} \\ e^2_{1'} & e^2_{2'} & ... & e^2_{n'} \\ ... & ... & ... & ... \\ e^n_{1'} & e^n_{2'} & ... & e^n_{n'} \end{matrix}\right\| ,$$

т.е. преобразованиям $A=HA'$, $B=HB'$, $C=HC'$, $D=HD'$, $E=HE'$, т.е. $A^T=A'^TH^T$, $B^T=B'^TH^T$, $C^T=C'^TH^T$, $D^T=D'^TH^T$, $E^T=E'^TH^T$

Тогда имеем

$l(a,b,c,d,e)=\cdot$

$=1/15(A^TL_2B\cdot C^TL_2D+B^TL_2C\cdot A^TL_2D+C^TL_2A\cdot B^TL_2D)\cdot L_1E+$

$+(B^TL_2C\cdot D^TL_2E+C^TL_2D\cdot B^TL_2E+D^TL_2B\cdot C^TL_2E)\cdot L_1A+$

$+(C^TL_2D\cdot E^TL_2A+D^TL_2E\cdot C^TL_2A+E^TL_2C\cdot D^TL_2A)\cdot L_1B+$

$+(D^TL_2E\cdot A^TL_2B+E^TL_2A\cdot D^TL_2B+A^TL_2D\cdot E^TL_2B)\cdot L_1C+$

$$+(E^{T}L_2A\cdot B^{T}L_2C+A^{T}L_2B\cdot E^{T}L_2C+B^{T}L_2E\cdot A^{T}L_2C)\cdot L_1D)=$$

$$=1/15((A'^{T}H^{T}L_2HB'\cdot C'^{T}H^{T}L_2HD'+B'^{T}H^{T}L_2HC'\cdot A'^{T}H^{T}L_2HD'+C'^{T}H^{T}L_2HA'\cdot B'^{T}H^{T}L_2HD')\cdot L_1HE'$$

$$+(B'^{T}H^{T}L_2HC'\cdot D'^{T}H^{T}L_2HE'+C'^{T}H^{T}L_2HD'\cdot B'^{T}H^{T}L_2HE'+D'^{T}H^{T}L_2HB'\cdot C'^{T}H^{T}L_2HE')\cdot L_1HA'+$$

$$+(C'^{T}H^{T}L_2HD'\cdot E'^{T}H^{T}L_2HA'+D'^{T}H^{T}L_2HE'\cdot C'^{T}H^{T}L_2HA'+E'^{T}H^{T}L_2HC'\cdot D'^{T}H^{T}L_2HA')\cdot L_1HB'+$$

$$+(D'^{T}H^{T}L_2HE'\cdot A'^{T}H^{T}L_2HB'+E'^{T}H^{T}L_2HA'\cdot D'^{T}H^{T}L_2HB'+A'^{T}H^{T}L_2HD'\cdot E'^{T}H^{T}L_2HB')\cdot L_1HC'+$$

$$+(E'^{T}H^{T}L_2HA'\cdot B'^{T}H^{T}L_2HC'+A'^{T}H^{T}L_2HB'\cdot E'^{T}H^{T}L_2HC'+B'^{T}H^{T}L_2HE'\cdot A'^{T}H^{T}L_2HC')\cdot L_1HD'))=$$

$$=1/15\cdot(A'^{T}L_2'B'\cdot C'^{T}L_2'D'+B'^{T}L_2'C'\cdot A'^{T}L_2'D'+C'^{T}L_2'A'\cdot B'^{T}L_2'D')\cdot L_1'E'+$$

$$+(B'^{T}L_2'C'\cdot D'^{T}L_2'E'+C'^{T}L_2'D'\cdot B'^{T}L_2'E'+D'^{T}L_2'B'\cdot C'^{T}L_2'E')\cdot L_1'A'+$$

$$+(C'^{T}L_2'D'\cdot E'^{T}L_2'A'+D'^{T}L_2'E'\cdot C'^{T}L_2'A'+E'^{T}L_2'C'\cdot D'^{T}L_2'A')\cdot L_1'B'+$$

$$+(D'^{T}L_2'E'\cdot A'^{T}L_2'B'+E'^{T}L_2'A'\cdot D'^{T}L_2'B'+A'^{T}L_2'D'\cdot E'^{T}L_2'B')\cdot L_1'C'+$$

$$+(E'^{T}L_2'A'\cdot B'^{T}L_2'C'+A'^{T}L_2'B'\cdot E'^{T}L_2'C'+B'^{T}L_2'E'\cdot A'^{T}L_2'C')\cdot L_1'D'),$$

т.е. $L_2'=H^{T}L_2H$ и $L_1'=L_1H$.

Линейная функция пятой степени аргумента, определенная в L^n соответственно записывается относительно базиса $e_1,\dots,e_n$ формой $l(a,a,a,a,a)=\sum\sum\sum\sum\sum l_{ij\kappa lm}a^{i}a^{j}a^{\kappa}a^{l}a^{m}=A^{T}L_2A\cdot A^{T}L_2A\cdot L_1A$, определяемой тензорами L_2 и L_1 а относительно базиса $e_1',\dots,e_n'$ формой $l(a,a,a,a,a)=\sum\sum\sum\sum\sum l_{ij\kappa lm}'a^{i'}a^{j'}a^{\kappa'}a^{l'}a^{m'}=$

$=A'^{T}L_2'A'\cdot A'^{T}L_2'A'\cdot L_1'A'$, определяемой тензорами L_2' и L_1', причем $L_2'=H^{T}L_2H$ и $L_1'=L_1H$.

7. Линейные функции и формы от шести переменных

Чтобы задать линейную функцию от шести переменных

$$l(a,b,c,d,e,f)=1/15((l(a,b)l(c,d)+l(b,c)l(a,d)+l(c,a)l(b,d))l(e,f)+$$

$$+(l(b,c)l(d,e)+l(c,d)l(b,e)+l(d,b)l(c,e))l(a,f)+$$

$$+(l(c,d)l(e,a)+l(d,e)l(c,a)+l(e,c)l(d,a))l(b,f)+$$

$$+(l(d,e)l(a,b)+l(e,a)l(d,b)+l(a,d)l(e,b))l(c,f)+$$

$$+(l(e,a)l(b,c)+l(a,b)l(e,c)+l(b,e)l(a,c))l(d,f))$$

достаточно задать набор ее коэффициентов

$$1/15\big((l(e_i,e_j)l(e_k,e_l)+l(e_j,e_k)l(e_i,e_l) + l(e_k,e_i)\, l(e_j,e_l)\big)\, l(e_m,e_n)+$$

$$+\big(l(e_j,e_k)l(e_l,e_m)+l(e_k,e_l)l(e_j,e_m)+l(e_l,e_j)\, l(e_k,e_m)\big)l(e_i,e_n)+$$

$$+\big(l(e_k,e_l)l(e_m,e_i)+l(e_l,e_m)l(e_k,e_i)+l(e_m,e_k)l(e_l,e_i)\big)\, l(e_j,e_n)+$$

$$+\big(l(e_l,e_m)l(e_i,e_j)+l(e_m,e_i)l(e_l,e_j) +l(e_i,e_l)\, l(e_m,e_j)\big)\, l(e_k,e_n)+$$

$$+\big(l(e_m,e_i)l(e_j,e_k)+l(e_i,e_j)l(e_m,e_k)+l(e_j,e_m)l(e_i,e_k)\big)\, l(e_l,e_n))=$$

$$=1/15((l_{ij}l_{kl}+l_{jk}l_{il}+l_{ki}l_{jl})l_{mn}+(l_{jk}l_{lm}+l_{kl}l_{jm}+l_{lj}l_{km})l_{in}+(l_{kl}l_{mi}+l_{lm}l_{ki}+l_{mk}l_{li})l_{jn}+(l_{lm}l_{ij}+l_{mi}l_{lj}+l_{il}l_{mj})l_{kn}+(l_{mi}l_{jk}+l_{ij}l_{mk}+l_{jm}l_{ik})l_{ln})=1/5(l_{ijkl}l_{mn}+l_{jklm}l_{in}+l_{klmi}l_{jn}+l_{lmij}l_{kn}+l_{mijk}l_{ln})=l_{ijklmn},$$

т.е. тензор полилинейной формы от шести переменных L_6.

Спрашивается: как при переходе от базиса $\mathbf{e}_1,...,\mathbf{e}_n$ к новому базису $\mathbf{e}_1{}',...,\mathbf{e}_n{}'$ преобразуется тензор L_6 линейной функции от шести переменных.

Пусть линейная функция от шести переменных $l(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{d},\mathbf{e},\mathbf{f})$ записывается относительно базиса $\mathbf{e}_1,...,\mathbf{e}_n$ в виде линейной формы от шести переменных $l(a,b,c,d,e,f)=\sum\sum\sum\sum\sum\sum l_{ijklmn}a^i b^j c^k d^l e^m f^n=1/15\cdot$

$$\cdot(A^TL_2B\cdot C^TL_2D+B^TL_2C\cdot A^TL_2D+C^TL_2A\cdot B^TL_2D)\cdot E^TL_2F+$$

$$+(B^TL_2C\cdot D^TL_2E+C^TL_2D\cdot B^TL_2E+D^TL_2B\cdot C^TL_2E)\cdot A^TL_2F +$$

$$+(C^TL_2D\cdot E^TL_2A+D^TL_2E\cdot C^TL_2A+E^TL_2C\cdot D^TL_2A)\cdot B^TL_2F+$$

$$+(D^TL_2E\cdot A^TL_2B+E^TL_2A\cdot D^TL_2B+A^TL_2D\cdot E^TL_2B)\cdot C^TL_2F+$$

$$+(E^TL_2A\cdot B^TL_2C+A^TL_2B\cdot E^TL_2C+B^TL_2E\cdot A^TL_2C)\cdot D^TL_2F)$$

при $a=a^1e_1+...+a^ne_n$, $b=b^1e_1+...+b^ne_n$, $c=c^1e_1+...+c^ne_n$, $d=d^1e_1+...+d^ne_n$, $e=e^1e_1+...+e^ne_n$, $f=f^1e_1+...+f^ne_n$ с тензором L_6, определяемым тензором L_2, а относительно базиса $e_1{}',...,e_n{}'$ в виде линейной формы от шести переменных

$$l(a,b,c,d,e,f)=\sum\sum\sum\sum\sum\sum l_{ijklmn}{}'a^{i'}b^{j'}c^{k'}d^{l'}e^{m'}e^{n'}=1/15\cdot$$

$$\cdot(A'^TL_2'B'\cdot C'^TL_2'D'+B'^TL_2'C'\cdot A'^TL_2'D'+C'^TL_2'A'\cdot B'^TL_2'D')\cdot E'^TL_2'F'+$$

$$+(B'^TL_2'C'\cdot D'^TL_2'E'+C'^TL_2'D'\cdot B'^TL_2'E'+D'^TL_2'B'\cdot C'^TL_2'E')\cdot A'^TL_2'F'+$$

$$+(C'^TL_2'D'\cdot E'^TL_2'A'+D'^TL_2'E'\cdot C'^TL_2'A'+E'^TL_2'C'\cdot D'^TL_2'A')\cdot B'^TL_2'F'+$$

$$+(D'^TL_2'E'\cdot A'^TL_2'B'+E'^TL_2'A'\cdot D'^TL_2'B'+A'^TL_2'D'\cdot E'^TL_2'B')\cdot C'^TL_2'F'+$$

$$+(E'^TL_2'A'\cdot B'^TL_2'C'+A'^TL_2'B'\cdot E'^TL_2'C'+B'^TL_2'E'\cdot A'^TL_2'C')\cdot D'^TL_2'F')$$

при $a=a^{1'}e_1{}'+...+a^{n'}e_n{}'$, $b=b^{1'}e_1{}'+...+b^{n'}e_n{}'$, $c=c^{1'}e_1{}'+...+c^{n'}e_n{}'$, $d=d^{1'}e_1{}'+...+d^{n'}e_n{}'$, $e=e^{1'}e_1{}'+...+e^{n'}e_n{}'$, $f=f^{1'}e_1{}'+...+f^{n'}e_n{}'$ с тензором $L_6{}'$, определяемым тензором $L_2{}'$.

При этом $e_i' = \sum e^k_{i'} e_k$ и $a^i = \sum e^i_{k'} a^{k'}$, $k=1,...,n$, что соответствует матрице преобразования векторов

$$H=\begin{Vmatrix} e^1_{1'} & e^1_{2'} & \dots & e^1_{n'} \\ e^2_{1'} & e^2_{2'} & \dots & e^2_{n'} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ e^n_{1'} & e^n_{2'} & \dots & e^n_{n'} \end{Vmatrix},$$

т.е. преобразованиям $A=HA'$, $B=HB'$, $C=HC'$, $D=HD'$, $E=HE'$, $F=HF'$ т.е. $A^T=A'^TH^T$, $B^T=B'^TH^T$, $C^T=C'^TH^T$, $D^T=D'^TH^T$, $E^T=E'^TH^T$, $F^T=F'^TH^T$.

Тогда имеем

$$l(a,b,c,d,e,f)=$$

$$=1/15(A^TL_2B\cdot C^TL_2D+B^TL_2C\cdot A^TL_2D+C^TL_2A\cdot B^TL_2D)\cdot E^TL_2F+$$

$$+(B^TL_2C\cdot D^TL_2E+C^TL_2D\cdot B^TL_2E+D^TL_2B\cdot C^TL_2E)\cdot A^TL_2F+$$

$$+(C^TL_2D\cdot E^TL_2A+D^TL_2E\cdot C^TL_2A+E^TL_2C\cdot D^TL_2A)\cdot B^TL_2F+$$

$$+(D^TL_2E\cdot A^TL_2B+E^TL_2A\cdot D^TL_2B+A^TL_2D\cdot E^TL_2B)\cdot C^TL_2F+$$

$$+(E^TL_2A\cdot B^TL_2C+A^TL_2B\cdot E^TL_2C+B^TL_2E\cdot A^TL_2C)\cdot D^TL_2F)=$$

$$=1/15((A'^TH^TL_2HB'\cdot C'^TH^TL_2HD'+B'^TH^TL_2HC'\cdot A'^TH^TL_2HD'+C'^TH^TL_2HA'\cdot B'^TH^TL_2HD')\cdot E'^TH^TL_2HF'+$$

$$+(B'^TH^TL_2HC'\cdot D'^TH^TL_2HE'+C'^TH^TL_2HD'\cdot B'^TH^TL_2HE'+D'^TH^TL_2HB'\cdot C'^TH^TL_2HE')\cdot A'^TH^TL_2HF'+$$

$$+(C'^TH^TL_2HD'\cdot E'^TH^TL_2HA'+D'^TH^TL_2HE'\cdot C'^TH^TL_2HA'+E'^TH^TL_2HC'\cdot D'^TH^TL_2HA')\cdot B'^TH^TL_2HF'+$$

$$+(D'^TH^TL_2HE'\cdot A'^TH^TL_2HB'+E'^TH^TL_2HA'\cdot D'^TH^TL_2HB'+A'^TH^TL_2HD'\cdot E'^TH^TL_2HB')\cdot C'^TH^TL_2HF'+$$

$$+(E'^TH^TL_2HA'\cdot B'^TH^TL_2HC'+A'^TH^TL_2HB'\cdot E'^TH^TL_2HC'+B'^TH^TL_2HE'\cdot A'^TH^TL_2HC')\cdot E'^TH^TL_2HF'))=$$

$$=1/15\cdot(A'^TL_2'B'\cdot C'^TL_2'D'+B'^TL_2'C'\cdot A'^TL_2'D'+C'^TL_2'A'\cdot B'^TL_2'D')\cdot E'^TL_2'F'+$$

$$+(B'^TL_2'C'\cdot D'^TL_2'E'+C'^TL_2'D'\cdot B'^TL_2'E'+D'^TL_2'B'\cdot C'^TL_2'E')\cdot A'^TL_2'F'+$$

$$+(C'^TL_2'D'\cdot E'^TL_2'A'+D'^TL_2'E'\cdot C'^TL_2'A'+E'^TL_2'C'\cdot D'^TL_2'A')\cdot B'^TL_2'F'+$$

$$+(D'^TL_2'E'\cdot A'^TL_2'B'+E'^TL_2'A'\cdot D'^TL_2'B'+A'^TL_2'D'\cdot E'^TL_2'B')\cdot C'^TL_2'F'+$$

$$+(E'^TL_2'A'\cdot B'^TL_2'C'+A'^TL_2'B'\cdot E'^TL_2'C'+B'^TL_2'E'\cdot A'^TL_2'C')\cdot D'^TL_2'F'),$$

т.е. $L_2'=H^TL_2H$.

Линейная функция шестой степени аргумента, определенная в L^n соответственно записывается относительно базиса $e_1,...,e_n$ формой $l(a,a,a,a,a,a)=\sum\sum\sum\sum\sum\sum l_{ij\kappa lmn}a^ia^ja^\kappa a^la^ma^n=A^TL_2A\cdot A^TL_2A\cdot A^TL_2A$, определяемой тензором L_2, а относительно базиса $e_1',...,e_n'$ формой $l(a,a,a,a,a,a)=\sum\sum\sum\sum\sum\sum l_{ij\kappa lmn}' a^{i'}a^{j'}a^{\kappa'}a^{l'}a^{m'}a^{n'}=A'^{T}L_2'A'\cdot A'^{T}L_2'A'\cdot A'^{T}L_2'A'$, определяемой тензором L_2', причем $L_2'=H^{T}L_2H$.

8. Линейные функции и формы от семи переменных

Чтобы задать линейную функцию от семи переменных

$l(a,b,c,d,e,f,g)= 1/105\bullet$

$\bullet((l(a,b)l(c,d)l(e,f)+l(b,c)l(d,e)l(a,f)+l(c,d)l(e,a)l(b,f)+l(d,e)l(a,b)l(c,f)+l(e,a)l(b,c)l(d,f)+$

$+ l(b,c)l(a,d)l(e,f)+l(c,d)l(b,e)l(a,f)+l(d,e)l(c,a)l(b,f)+l(e,a)l(d,b)l(c,f)+l(a,b)l(e,c)l(d,f)+$

$+ l(c,a)l(b,d)l(e,f)+l(d,b)l(c,e)l(a,f)+l(e,c)l(d,a)l(b,f)+l(a,d)l(e,b)l(c,f)+l(b,e)l(a,c)l(d,f))l(g)+$

$+ (l(b,c)l(d,e)l(f,g)+l(c,d)l(e,f)l(b,g)+l(d,e)l(f,b)l(c,g)+l(e,f)l(b,c)l(d,g)+l(f,b)l(c,d)l(e,g)+$

$+ l(c,d)l(b,e)l(f,g)+l(d,e)l(c,f)l(b,g)+l(e,f)l(d,b)l(c,g)+l(f,b)l(e,c)l(d,g)+l(b,c)l(f,d)l(e,g)+$

$+ l(d,b)l(c,e)l(f,g)+l(e,c)l(d,f)l(b,g)+l(f,d)l(e,b)l(c,g)+l(b,e)l(f,c)l(d,g)+l(c,f)l(b,d)l(e,g))l(a)+$

$+ (l(c,d)l(e,f)l(g,a)+l(d,e)l(f,g)l(c,a)+l(e,f)l(g,c)l(d,a)+l(f,g)l(c,d)l(e,a)+l(g,c)l(d,e)l(f,a)+$

$+ l(d,e)l(c,f)l(g,a)+l(e,f)l(d,g)l(c,a)+l(f,g)l(e,c)l(d,a)+l(g,c)l(f,d)l(e,a)+l(c,d)l(g,e)l(f,a)+$

$+ l(e,c)l(d,f)l(g,a)+l(f,d)l(e,g)l(c,a)+l(g,e)l(f,c)l(d,a)+l(c,f)l(g,d)l(e,a)+l(d,g)l(c,e)l(f,a))l(b)+$

$+ (l(d,e)l(f,g)l(a,b)+l(e,f)l(g,a)l(d,b)+l(f,g)l(a,d)l(e,b)+l(g,a)l(d,e)l(f,b)+l(a,d)l(e,f)l(g,b)+$

$+ l(e,f)l(d,g)l(a,b)+l(f,g)l(e,a)l(d,b)+l(g,a)l(f,d)l(e,b)+l(a,d)l(g,e)l(f,b)+l(d,e)l(a,f)l(g,b)+$

$+ l(f,d)l(e,g)l(a,b)+l(g,e)l(f,a)l(d,b)+l(a,f)l(g,d)l(e,b)+l(d,g)l(a,e)l(f,b)+l(e,a)l(d,f)l(g,b))l(c)+$

$+ (l(e,f)l(g,a)l(b,c)+l(f,g)l(a,b)l(e,c)+l(g,a)l(b,e)l(f,c)+l(a,b)l(e,f)l(g,c)+l(b,e)l(f,g)l(a,c)+$

$+ l(f,g)l(e,a)l(b,c)+l(g,a)l(f,b)l(e,c)+l(a,b)l(g,e)l(f,c)+l(b,e)l(a,f)l(g,c)+l(e,f)l(b,g)l(a,c)+$

$+ l(g,e)l(f,a)l(b,c)+l(a,f)l(g,b)l(e,c)+l(b,g)l(a,e)l(f,c)+l(e,a)l(b,f)l(g,c)+l(f,b)l(e,g)l(a,c))l(d)+$

$+ (l(f,g)l(a,b)l(c,d)+l(g,a)l(b,c)l(f,d)+l(a,b)l(c,f)l(g,d)+l(b,c)l(f,g)l(a,d)+l(c,f)l(g,a)l(b,d)+$

$+ l(g,a)l(f,b)l(c,d)+l(a,b)l(g,c)l(f,d)+l(b,c)l(a,f)l(g,d)+l(c,f)l(b,g)l(a,d)+l(f,g)l(c,a)l(b,d)+$

$+ l(a,f)l(g,b)l(c,d)+l(b,g)l(a,c)l(f,d)+l(c,a)l(b,f)l(g,d)+l(f,b)l(c,g)l(a,d)+l(g,c)l(f,a)l(b,d))l(e)+$

$+ (l(g,a)l(b,c)l(d,e)+l(a,b)l(c,d)l(g,e)+l(b,c)l(d,g)l(a,e)+l(c,d)l(g,a)l(b,e)+l(d,g)l(a,b)l(c,e)+$

$+ l(a,b)l(g,c)l(d,e)+l(b,c)l(a,d)l(g,e)+l(c,d)l(b,g)l(a,e)+l(d,g)l(c,a)l(b,e)+l(g,a)l(d,b)l(c,e)+$

$+ l(b,g)l(a,c)l(d,e)+l(c,a)l(b,d)l(g,e)+l(d,b)l(c,g)l(a,e)+l(g,c)l(d,a)l(b,e)+l(a,d)l(g,b)l(c,e))l(f))$

достаточно задать набор ее коэффициентов

$1/105(((l(e_i,e_j)l(e_k,e_l)+l(e_j,e_k)l(e_i,e_l) +l(e_k,e_i)\, l(e_j,e_l))\ \ l(e_m,e_n)+$

$+(l(e_j,e_k)l(e_l,e_m)+l(e_k,e_l)l(e_j,e_m)+l(e_l,e_j)\ \ l(e_k,e_m))l(e_i,e_n) +$

$$+(l(e_k,e_l)l(e_m,e_i)+l(e_l,e_m)l(e_k,e_i)+l(e_m,e_k)l(e_l,e_i))\ l(e_j,e_n)+$$

$$+(l(e_l,e_m)l(e_i,e_j)+l(e_m,e_i)l(e_l,e_j)+l(e_i,e_l)\ l(e_m,e_j))\ l(e_k,e_n)+$$

$$+(l(e_m,e_i)l(e_j,e_k)+l(e_i,e_j)l(e_m,e_k)+l(e_j,e_m)l(e_i,e_k))\ l(e_l,e_n))l(e_o)+$$

$$+((l(e_j,e_k)l(e_l,e_m)+l(e_k,e_l)\ l(e_j,e_m)+l(e_l,e_j)\ l(e_k,e_m))l(e_n,e_o)+$$

$$+(l(e_k,e_l)l(e_m,e_n)+l(e_l,e_m)\ l(e_k,e_n)+l(e_m,e_k)l(e_l,e_m))l(e_j,e_o)+$$

$$+(l(e_l,e_m)l(e_n,e_j)+l(e_m,e_n)l(e_l,e_j)+l(e_n,e_l)\ l(e_m,e_j))\ l(e_k,e_o)+$$

$$+(l(e_m,e_n)l(e_j,e_k)+l(e_m,e_j)\ l(e_n,e_k)+l(e_j,e_m)l(e_n,e_k))\ l(e_l,e_o)+$$

$$+(l(e_n,e_j)\ l(e_k,e_l)+l(e_j,e_k)\ l(e_n,e_l)+l(e_k,e_n)l(e_j,e_l))\ l(e_m,e_o))l(e_i)+$$

$$+((l(e_k,e_l)\ l(e_m,e_n)+l(e_l,e_m)l(e_k,e_n)+l(e_m,e_k)l(e_l,e_n))\ l(e_o,e_i)+$$

$$+(l(e_l,e_m)l(e_n,e_o)+l(e_m,e_n)l(e_l,e_o)+l(e_n,e_l)\ l(e_m,e_o))l(e_k,e_i)+$$

$$+(l(e_m,e_n)l(e_o,e_k)+l(e_n,e_o)\ l(e_m,e_k)+l(e_o,e_m)l(e_n,e_k))l(e_l,e_i)+$$

$$+(l(e_n,e_o)l(e_k,e_l)+l(e_o,e_k)\ l(e_n,e_l)+l(e_k,e_n)l(e_o,e_l))\ l(e_m,e_i)+$$

$$+(l(e_o,e_k)l(e_l,e_m)+l(e_k,e_l)\ l(e_o,e_m)+l(e_l,e_o)\ l(e_k,e_m))l(e_n,e_i))l(e_j)+$$

$$+((l(e_l,e_m)\ l(e_n,e_o)+l(e_m,e_n)l(e_l,e_o)+l(e_n,e_l)l(e_m,e_o))l(e_i,e_j)+$$

$$+(l(e_m,e_n)l(e_o,e_i)+l(e_n,e_o)l(e_m,e_i)+l(e_o,e_m)l(e_n,e_i))l(e_l,e_j)+$$

$$+(l(e_n,e_o)\ l(e_i,e_l)+l(e_o,e_i)\ l(e_n,e_l)+l(e_i,e_n)\ l(e_o,e_l))l(e_m,e_j)+$$

$$+(l(e_o,e_i)\ l(e_l,e_m)+l(e_i,e_l)\ l(e_o,e_m)+l(e_l,e_o)\ l(e_i,e_m))l(e_n,e_j)+$$

$$+(l(e_i,e_l)\ l(e_m,e_n)+l(e_l,e_m)l(e_i,e_n)+l(e_m,e_i)l(e_l,e_n))l(e_o,e_j))l(e_k)+$$

$$+((l(e_m,e_n)l(e_o,e_i)+l(e_n,e_o)l(e_m,e_i)+l(e_o,e_m)l(e_n,e_i))l(e_j,e_k)+$$

$$+(l(e_n,e_o)l(e_i,e_j)+l(e_o,e_i)\ l(e_n,e_j)+l(e_i,e_n)\ l(e_o,e_j))l(e_m,e_k)+$$

$$+(l(e_o,e_i)\ l(e_j,e_m)+l(e_i,e_j)\ l(e_o,e_m)+l(e_j,e_o)\ l(e_i,e_m))l(e_n,e_k)+$$

$$+(l(e_i,e_j)\ l(e_m,e_n)+l(e_j,e_m)l(e_i,e_n)+l(e_m,e_i)l(e_j,e_n))\ l(e_o,e_k)+$$

$$+(l(e_j,e_m)l(e_n,e_o)+l(e_m,e_n)l(e_j,e_o)+l(e_n,e_j)l(e_m,e_o))l(e_i,e_k))l(e_l)+$$

$$+((l(e_n,e_o)l(e_i,e_j)+l(e_o,e_i)\ l(e_n,e_j)+l(e_i,e_n)l(e_o,e_j))l(e_k,e_l)+$$

$$+(l(e_o,e_i)l(e_j,e_k)+l(e_i,e_j)\ l(e_o,e_k)+l(e_j,e_o)l(e_i,e_k))l(e_n,e_l)+$$

$$+(l(e_i,e_j)\ l(e_k,e_n)+l(e_j,e_k)l(e_i,e_n)+l(e_k,e_i)l(e_j,e_n))l(e_o,e_l)+$$

$$+(l(e_j,e_k)l(e_n,e_o)+l(e_k,e_n)l(e_j,e_o)+l(e_n,e_j)l(e_k,e_o))l(e_i,e_l)+$$

$$+(l(e_k,e_n)l(e_o,e_i)+l(e_n,e_o)l(e_k,e_i)+l(e_o,e_k)l(e_n,e_i))l(e_j,e_l))l(e_m)+$$

$$+\big((l(e_o,e_i)l(e_j,e_k)+l(e_i,e_j)l(e_o,e_k)+l(e_j,e_o)l(e_i,e_k)\big)l(e_l,e_m)+$$

$$+\big(l(e_i,e_j)l(e_k,e_l)+l(e_j,e_k)l(e_i,e_l)+l(e_k,e_i)l(e_j,e_l)\big)\,l(e_o,e_m)+$$

$$+\big(l(e_j,e_k)l(e_l,e_o)+l(e_k,e_l)l(e_j,e_o)+l(e_l,e_j)\,l(e_k,e_o)\big)l(e_i,e_m)+$$

$$+\big(l(e_k,e_l)l(e_o,e_i)+l(e_l,e_o)l(e_k,e_i)+l(e_o,e_k)l(e_l,e_i)\big)\,l(e_j,e_m)+$$

$$+\big(l(e_l,e_o)l(e_i,e_j)+l(e_o,e_i)l(e_l,e_j)+l(e_i,e_l)\,l(e_o,e_j)\big)\,l(e_k,e_m))l(e_n))=1/105\bullet$$

$$\bullet(((l_{ij}l_{kl}+l_{jk}l_{il}+l_{ki}l_{jl})\,l_{mn}+(l_{jk}l_{lm}+l_{kl}l_{jm}+l_{lj}l_{km})\,l_{in}+(l_{kl}l_{mi}+l_{lm}l_{ki}+l_{mk}l_{li})\,l_{jn}+(l_{lm}l_{ij}+l_{mi}l_{lj}+l_{il}l_{mj})\,l_{kn}+(l_{mi}l_{jk}+l_{ij}l_{mk}+l_{jm}l_{ik})\,l_{ln})\;l_o+$$

$$+((l_{jk}l_{lm}+l_{kl}l_{jm}+l_{lj}l_{km})l_{no}+(l_{kl}l_{mn}+l_{lm}l_{kn}+l_{mk}l_{ln})l_{jo}+(l_{lm}l_{nj}+l_{mn}l_{lj}+l_{nl}l_{mj})\,l_{ko}+(l_{mn}l_{jk}+l_{nj}l_{mk}+l_{jm}l_{nk})l_{lo}+(l_{nj}l_{kl}+l_{jk}l_{nl}+l_{kn}l_{jl})\;l_{mo})l_i+$$

$$+((l_{kl}l_{mn}+l_{lm}l_{kn}+l_{mk}l_{ln})l_{oi}+(l_{lm}l_{no}+l_{mn}l_{lo}+l_{nl}l_{mo})l_{ki}+(l_{mn}l_{ok}+l_{no}l_{mk}+l_{om}l_{nk})l_{li}+(l_{no}l_{kl}+l_{ok}l_{nl}+l_{kn}l_{ol})l_{mi}+(l_{ok}l_{lm}+l_{kl}l_{om}+l_{lo}l_{km})l_{ni})\,l_j+$$

$$+((l_{lm}l_{no}+l_{mn}l_{lo}+l_{nl}l_{mo})l_{ij}+(l_{mn}l_{oi}+l_{no}l_{mi}+l_{om}l_{ni})l_{lj}+(l_{no}l_{il}+l_{oi}l_{nl}+l_{in}l_{ol})\;l_{mj}+(l_{oi}l_{lm}+l_{il}l_{om}+l_{lo}l_{im})l_{nj}+(l_{il}l_{mn}+l_{lm}l_{in}+l_{mi}l_{ln})\,l_{oj})\,l_k+$$

$$+((l_{mn}l_{oi}+l_{no}l_{mi}+l_{om}l_{ni})l_{jk}+(l_{no}l_{ij}+l_{oi}l_{nj}+l_{in}l_{oj})\,l_{mk}+(l_{oi}l_{jm}+l_{ij}l_{om}+l_{jo}l_{im})\,l_{nk}+(l_{ij}l_{mn}+l_{jm}l_{in}+l_{mi}l_{jn})l_{ok}+(l_{jm}l_{no}+l_{mn}l_{jo}+l_{nj}l_{mo})l_{ik})\,l_l+$$

$$+((l_{no}l_{ij}+l_{oi}l_{nj}+l_{in}l_{oj})\;l_{kl}+(l_{oi}l_{jk}+l_{ij}l_{ok}+l_{jo}l_{ik})\,l_{nl}+(l_{ij}l_{kn}+l_{jk}l_{in}+l_{ki}l_{jn})\;l_{ol}+(l_{jk}l_{no}+l_{kn}l_{jo}+l_{nj}l_{ko})l_{il}+(l_{kn}l_{oi}+l_{no}l_{ki}+l_{ok}l_{ni})\,l_{jl})\;l_m+$$

$$+((l_{oi}l_{jk}+l_{ij}l_{ok}+l_{jo}l_{ik})\;l_{lm}+(l_{ij}l_{kl}+l_{jk}l_{il}+l_{ki}l_{jl})\,l_{om}+(l_{jk}l_{lo}+l_{kl}l_{jo}+l_{lj}l_{ko})\,l_{im}+(l_{kl}l_{oi}+l_{lo}l_{ki}+l_{ok}l_{li})\,l_{jm}+(l_{lo}l_{ij}+l_{oi}l_{lj}+l_{il}l_{oj})\;l_{km})l_n)=$$

$$=1/15((l_{ijkl}\;l_{mn}+l_{jklm}l_{in}+l_{klmi}\,l_{jn}+l_{lmij}\,l_{kn}+l_{mijk}\,l_{ln})\,l_o+$$

$$+(l_{jklm}\,l_{no}+l_{klmn}l_{jo}+l_{lmnj}\,l_{ko}+l_{mnjk}l_{lo}+l_{njkl}\;l_{mo})l_i+$$

$$+(l_{klmn}l_{oi}+l_{lmno}l_{ki}+l_{mnok}l_{li}+l_{nokl}\,l_{mi}+l_{oklm}l_{ni})\,l_j+$$

$$+(l_{lmno}l_{ij}+l_{mnoi}l_{lj}+l_{noil}\;l_{mj}+l_{oilm}\,l_{nj}+l_{ilmn}\,l_{oj})\,l_k+$$

$$+(l_{mnoi}l_{jk}+l_{noij}\;l_{mk}+l_{oijm}\,l_{nk}+l_{ijmn}l_{ok}+l_{jmno}\,l_{ik})\,l_l+$$

$$+(l_{noij}\;l_{kl}+l_{oijk}\;l_{nl}+l_{ijkn}\;l_{ol}+l_{jkno}\,l_{il}+l_{knoi}\;l_{jl})\;l_m+$$

$$+(l_{oijk}\;l_{lm}+l_{ijkl}\;l_{om}+l_{jklo}\;l_{im}+l_{kloi}\,l_{jm}+l_{loij}\;l_{km})\,l_n)=$$

$$=1/15(l_{ijklmn}l_o+l_{jklmno}l_i+l_{klmnoi}l_j+l_{lmnoij}l_k+l_{mnoijk}l_l+l_{noijkl}l_m+l_{oijklm}l_n)=l_{oijklmn},$$

т.е. тензор полилинейной формы от семи переменных L_7.

Спрашивается: как при переходе от базиса $\mathbf{e}_1,...,\mathbf{e}_n$ к новому базису $\mathbf{e}_1{}',...,\mathbf{e}_n{}'$ преобразуется тензор L_7 линейной функции от семи переменных.

Пусть линейная функция от семи переменных $l(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{d},\mathbf{e},\mathbf{f},\mathbf{g})$ записывается относительно базиса $\mathbf{e}_1,...,\mathbf{e}_n$ в виде линейной формы от семи переменных $l(a,b,c,d,e,f,g)=\sum\sum\sum\sum\sum\sum\sum l_{ijklmno}a^ib^jc^kd^le^mf^ng^o=1/105\cdot$

$$\cdot(((A^TL_2B\cdot C^TL_2D+B^TL_2C\cdot A^TL_2D+C^TL_2A\cdot B^TL_2D)\cdot E^TL_2F+$$

$$+(B^TL_2C\cdot D^TL_2E+C^TL_2D\cdot B^TL_2E+D^TL_2B\cdot C^TL_2E)\cdot A^TL_2F+$$

$$+(C^TL_2D\cdot E^TL_2A+D^TL_2E\cdot C^TL_2A+E^TL_2C\cdot D^TL_2A)\cdot B^TL_2F+$$

$$+(D^TL_2E\cdot A^TL_2B+E^TL_2A\cdot D^TL_2B+A^TL_2D\cdot E^TL_2B)\cdot C^TL_2F+$$

$+(E^TL_2A\cdot B^TL_2C+A^TL_2B\cdot E^TL_2C+B^TL_2E\cdot A^TL_2C)\cdot D^TL_2F)\cdot L_1G+$

………………………………………………………….

$+(G^TL_2A\cdot B^TL_2C+A^TL_2B\cdot G^TL_2C+B^TL_2G\cdot A^TL_2C)\cdot D^TL_2E+$

$+(A^TL_2B\cdot C^TL_2D+B^TL_2C\cdot A^TL_2D+C^TL_2A\cdot B^TL_2D)\cdot G^TL_2E+$

$+(B^TL_2C\cdot D^TL_2G+C^TL_2D\cdot B^TL_2G+D^TL_2B\cdot C^TL_2G)\cdot A^TL_2E+$

$+(C^TL_2D\cdot G^TL_2A+D^TL_2G\cdot C^TL_2A+G^TL_2C\cdot D^TL_2A)\cdot B^TL_2E+$

$+(D^TL_2G\cdot A^TL_2B+G^TL_2A\cdot D^TL_2B+A^TL_2D\cdot G^TL_2B)\cdot C^TL_2E)\cdot L_1F)$

при $a=a^1e_1+...+a^ne_n$, $b=b^1e_1+...+b^ne_n$, $c=c^1e_1+...+c^ne_n$, $d=d^1e_1+...+d^ne_n$, $e=e^1e_1+...+e^ne_n$, $f=f^1e_1+...+f^ne_n$, $g=g^1e_1+...+g^ne_n$ с тензором L_7, определяемым тензорами L_2 и L_1, а относительно базиса $e_1',...,e_n'$ в виде линейной формы от семи переменных

$l(a,b,c,d,e,f,g)=\sum\sum\sum\sum\sum\sum\sum l_{ijklmno}{}'a^{i'}b^{j'}c^{k'}d^{l'}e^{m'}f^{n'}g^{o'}=1/105\cdot$

$\cdot(((A'^TL_2'B'\cdot C'^TL_2'D'+B'^TL_2'C'\cdot A'^TL_2D'+C'^TL_2A'\cdot B'^TL_2'D')\cdot E'^TL_2'F'+$

$+(B'^TL_2'C'\cdot D'^TL_2'E'+C'^TL_2'D'\cdot B'^TL_2'E'+D'^TL_2'B'\cdot C'^TL_2'E')\cdot A'^TL_2'F'+$

$+(C'^TL_2'D'\cdot E'^TL_2'A'+D'^TL_2'E'\cdot C'^TL_2'A'+E'^TL_2'C'\cdot D'^TL_2'A')\cdot B'^TL_2'F'+$

$+(D'^TL_2'E'\cdot A'^TL_2'B'+E'^TL_2'A'\cdot D'^TL_2'B'+A'^TL_2'D'\cdot E'^TL_2'B')\cdot C'^TL_2'F'+$

$+(E'^TL_2'A'\cdot B'^TL_2'C'+A'^TL_2'B'\cdot E'^TL_2'C'+B'^TL_2'E'\cdot A'^TL_2'C')\cdot D'^TL_2'F')\cdot L_1'G'+$

……………………………………………………………………..

$+(G'^TL_2'A'\cdot B'^TL_2'C'+A'^TL_2'B'\cdot G'^TL_2'C'+B'^TL_2'G'\cdot A'^TL_2'C')\cdot D'^TL_2'E'+$

$+(A'^TL_2'B'\cdot C'^TL_2'D'+B'^TL_2'C'\cdot A'^TL_2'D'+C'^TL_2'A'\cdot B'^TL_2'D')\cdot G'^TL_2'E'+$

$+(B'^TL_2'C'\cdot D'^TL_2'G'+C'^TL_2'D'\cdot B'^TL_2'G'+D'^TL_2'B'\cdot C'^TL_2'G')\cdot A'^TL_2'E'+$

$+(C'^TL_2'D'\cdot G'^TL_2'A'+D'^TL_2'G'\cdot C'^TL_2'A'+G'^TL_2'C'\cdot D'^TL_2'A')\cdot B'^TL_2'E'+$

$+(D'^TL_2'G'\cdot A'^TL_2'B'+G'^TL_2'A'\cdot D'^TL_2'B'+A'^TL_2'D'\cdot G'^TL_2'B')\cdot C'^TL_2'E')\cdot L_1'F')$

при $a=a^{1'}e_1'+...+a^{n'}e_n'$, $b=b^{1'}e_1'+...+b^{n'}e_n'$, $c=c^{1'}e_1'+...+c^{n'}e_n'$, $d=d^{1'}e_1'+...+d^{n'}e_n'$, $e=e^{1'}e_1'+...+e^{n'}e_n'$, $f=f^{1'}e_1'+...+f^{n'}e_n'$, $g=g^{1'}e_1'+...+g^{n'}e_n'$ с тензором L_7, определяемым тензорами L_2' и L_1'.

При этом $e_i'=\sum e^k{}_{i'}e_k$ и $a^i=\sum e^i{}_{k'}a^{k'}$, $k=1,...,n$, что соответствует матрице преобразования векторов

$$H=\left\| \begin{matrix} e^1{}_{1'} & e^1{}_{2'} & ... & e^1{}_{n'} \\ e^2{}_{1'} & e^2{}_{2'} & ... & e^2{}_{n'} \\ ... & ... & ... & ... \end{matrix} \right\|,$$

$$\begin{Vmatrix} e^{n}{}_{1'} & e^{n}{}_{2'} & \dots & e^{n}{}_{n'} \end{Vmatrix}$$

т.е. преобразованиям $A=HA'$, $B=HB'$, $C=HC'$, $D=HD'$, $E=HE'$, $F=HF'$, $G=HG'$ т.е. $A^T=A'^TH^T$, $B^T=B'^TH^T$, $C^T=C'^TH^T$, $D^T=D'^TH^T$, $E^T=E'^TH^T$, $F^T=F'^TH^T$, $G^T=G'^TH^T$.

Тогда имеем

$l(a,b,c,d,e,f,g)= 1/105\cdot$

$\cdot((A^TL_2B\cdot C^TL_2D+B^TL_2C\cdot A^TL_2D+C^TL_2A\cdot B^TL_2D)\cdot E^TL_2F+$

$+(B^TL_2C\cdot D^TL_2E+C^TL_2D\cdot B^TL_2E+D^TL_2B\cdot C^TL_2E)\cdot A^TL_2F+$

$+(C^TL_2D\cdot E^TL_2A+D^TL_2E\cdot C^TL_2A+E^TL_2C\cdot D^TL_2A)\cdot B^TL_2F+$

$+(D^TL_2E\cdot A^TL_2B+E^TL_2A\cdot D^TL_2B+A^TL_2D\cdot E^TL_2B)\cdot C^TL_2F+$

$+(E^TL_2A\cdot B^TL_2C+A^TL_2B\cdot E^TL_2C+B^TL_2E\cdot A^TL_2C)\cdot D^TL_2F)\ \cdot L_1G+$

……………………………………………………………

$+(G^TL_2A\cdot B^TL_2C+A^TL_2B\cdot G^TL_2C+B^TL_2G\cdot A^TL_2C)\cdot D^TL_2E+$

$+(A^TL_2B\cdot C^TL_2D+B^TL_2C\cdot A^TL_2D+C^TL_2A\cdot B^TL_2D)\cdot G^TL_2E+$

$+(B^TL_2C\cdot D^TL_2G+C^TL_2D\cdot B^TL_2G+D^TL_2B\cdot C^TL_2G)\cdot A^TL_2E+$

$+(C^TL_2D\cdot G^TL_2A+D^TL_2G\cdot C^TL_2A+G^TL_2C\cdot D^TL_2A)\cdot B^TL_2E+$

$+(D^TL_2G\cdot A^TL_2B+G^TL_2A\cdot D^TL_2B+A^TL_2D\cdot G^TL_2B)\cdot C^TL_2E)\cdot L_1F)=1/105\cdot$

$(((A'^TH^TL_2HB'\cdot C'^TH^TL_2HD'+B'^TH^TL_2HC'\cdot A'^TH^TL_2HD'+C'^TH^TL_2HA'\cdot B'^TH^TL_2HD')\cdot E'^TH^TL_2HF'+$

$+(B'^TH^TL_2HC'\cdot D'^TH^TL_2HE'+C'^TH^TL_2HD'\cdot B'^TH^TL_2HE'+D'^TH^TL_2HB'\cdot C'^TH^TL_2HE')\cdot A'^TH^TL_2HF'+$

$+(C'^TH^TL_2HD'\cdot E'^TH^TL_2HA'+D'^TH^TL_2HE'\cdot C'^TH^TL_2HA'+E'^TH^TL_2HC'\cdot D'^TH^TL_2HA')\cdot B'^TH^TL_2HF'+$

$+(D'^TH^TL_2HE'\cdot A'^TH^TL_2HB'+E'^TH^TL_2HA'\cdot D'^TH^TL_2HB'+A'^TH^TL_2HD'\cdot E'^TH^TL_2HB')\cdot C'^TH^TL_2HF'+$

$+(E'^TH^TL_2HA'\cdot B'^TH^TL_2HC'+A'^TH^TL_2HB'\cdot E'^TH^TL_2HC'+B'^TH^TL_2HE'\cdot A'^TH^TL_2HC')\cdot E'^TH^TL_2HF')\cdot L_1HG'$

……………………………………………………………………………………………………

$+(G'^TH^TL_2HA'\cdot B'^TH^TL_2HC'+A'^TH^TL_2HB'\cdot G'^TH^TL_2HC'+B'^TH^TL_2HG'\cdot A'^TH^TL_2HC')\cdot D'^TH^TL_2HE'+$

$+(A'^TH^TL_2HB'\cdot C'^TH^TL_2HD'+B'^TH^TL_2HC'\cdot A'^TH^TL_2HD'+C'^TH^TL_2HA'\cdot B'^TH^TL_2HD')\cdot G'^TH^TL_2HE'+$

$+(B'^TH^TL_2HC'\cdot D'^TH^TL_2HG'+C'^TH^TL_2HD'\cdot B'^TH^TL_2HG'+D'^TH^TL_2HB'\cdot C'^TH^TL_2HG')\cdot A'^TH^TL_2HE'+$

$+(C'^TH^TL_2HD'\cdot G'^TH^TL_2HA'+D'^TH^TL_2HG'\cdot C'^TH^TL_2HA'+G'^TH^TL_2HC'\cdot D'^TH^TL_2HA')\cdot B'^TH^TL_2HE'+$

$+(D'^TH^TL_2HG'\cdot A'^TH^TL_2HB'+G'^TH^TL_2HA'\cdot D'^TH^TL_2HB'+A'^TH^TL_2HD'\cdot G'^TH^TL_2HB')\cdot C'^TH^TL_2HE')\cdot L_1H$
$F')=$

$=1/105\cdot(((A'^TL_2'B'\cdot C'^TL_2'D'+B'^TL_2'C'\cdot A'^TL_2'D'+C'^TL_2'A'\cdot B'^TL_2'D')\cdot E'^TL_2'F'+$

$+(B'^TL_2'C'\cdot D'^TL_2'E'+C'^TL_2'D'\cdot B'^TL_2'E'+D'^TL_2'B'\cdot C'^TL_2'E')\cdot A'^TL_2'F'+$

$+(C'^TL_2'D'\cdot E'^TL_2'A'+D'^TL_2'E'\cdot C'^TL_2'A'+E'^TL_2'C'\cdot D'^TL_2'A')\cdot B'^TL_2'F'+$

$$+(D^{T}L_2'E'\cdot A^{T}L_2'B'+E^{T}L_2'A'\cdot D^{T}L_2'B'+A^{T}L_2'D'\cdot E^{T}L_2'B')\cdot C^{T}L_2'F'+$$

$$+(E^{T}L_2'A'\cdot B^{T}L_2'C'+A^{T}L_2'B'\cdot E^{T}L_2'C'+B^{T}L_2'E'\cdot A^{T}L_2'C')\cdot D^{T}L_2'F')\cdot L_1G+$$

………………………………………………………………..

$$+(G'^{T}L_2'A'\cdot B'^{T}L_2'C'+A'^{T}L_2'B'\cdot G'^{T}L_2'C'+B'^{T}L_2'G'\cdot A'^{T}L_2'C')\cdot D'^{T}L_2'E'+$$

$$+(A'^{T}L_2'B'\cdot C'^{T}L_2'D'+B'^{T}L_2'C'\cdot A'^{T}L_2'D'+C'^{T}L_2'A'\cdot B'^{T}L_2'D')\cdot G'^{T}L_2'E'+$$

$$+(B'^{T}L_2'C'\cdot D'^{T}L_2'G'+C'^{T}L_2'D'\cdot B'^{T}L_2'G'+D'^{T}L_2'B'\cdot C'^{T}L_2'G')\cdot A'^{T}L_2'E'+$$

$$+(C'^{T}L_2'D'\cdot G'^{T}L_2'A'+D'^{T}L_2'G'\cdot C'^{T}L_2'A'+G'^{T}L_2'C'\cdot D'^{T}L_2'A')\cdot B'^{T}L_2'E'+$$

$$+(D'^{T}L_2'G'\cdot A'^{T}L_2'B'+G'^{T}L_2'A'\cdot D'^{T}L_2'B'+A'^{T}L_2'D'\cdot G'^{T}L_2'B')\cdot C'^{T}L_2'E')\cdot L_1'F'),$$

т.е. $L_2'=H^{T}L_2H$ и $L_1'=L_1H$.

Линейная функция седьмой степени аргумента, определенная в L^n соответственно записывается относительно базиса $e_1,...,e_n$ формой $l(a,a,a,a,a,a,a)=\sum\sum\sum\sum\sum\sum\sum l_{ijкlmno}a^{i}a^{j}a^{к}a^{l}a^{m}a^{n}a^{o}=A^{T}L_2A\cdot A^{T}L_2A\cdot A^{T}L_2A\cdot L_1A$, определяемой тензорами L_2 и L_1, а относительно базиса $e_1',...,e_n'$ формой $l(a,a,a,a,a,a,a)=\sum\sum\sum\sum\sum\sum\sum l_{ijкlmno}'a^{i'}a^{j'}a^{к'}a^{l'}a^{m'}a^{n'}a^{o'}=A^{T}L_2'A'\cdot A^{T}L_2'A'\cdot A^{T}L_2'A'\cdot L_1'A'$, определяемой тензорами L_2' и L_1', причем $L_2'=H^{T}L_2H$ и $L_1'=L_1H$.

Отметим, что тензоры симметрических полилинейных скалярных функций являются функциями тензоров билинейных и линейных симметрических функций, в полной мере определяющих метрические свойства векторного пространства. В работе рассмотрены тензоры симметрических скалярных функций одного, двух,..., семи векторов, определенных в рамках семимерной векторной алгебры. В случае n>7 в линейных векторных пространствах L^n возможно определение тензоров симметрических скалярных функций большего числа векторов.

Литература

1. **Александров П.С**. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. – М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1979.– 512с.

КОРОТКОВ А.В.

СОСТАВНЫЕ СЕМИМЕРНЫЕ ВЕКТОРНЫЕ АЛГЕБРЫ

Операторы электрического-, барионного-, гиперзаряда- и странности в Q7- и SV6 симметриях имеют более сложную "составную" структуру в сравнении с операторами момента импульса. Это создает предпосылки для изучения свойств составных векторных алгебр, соответствующих семипараметровым семимерным ортогональным и шестимерным унитарным преобразованиям. В результате выявлены три семимерные векторные алгебры, отличающиеся в координатной форме записи от изученной ранее алгебры [1].

1. Векторная алгебра с векторным произведением двух векторов вида:

$$[AB] = [(A_1e_1+A_2e_2+\ldots+A_7e_7)(B_1e_1+B_2e_2+\ldots+B_7e_7)] =$$

$$= (A_6B_4-A_4B_6+A_3B_7-A_7B_3+A_5B_2-A_2B_5)\mathbf{e}_1+$$

$$+ (A_1B_5-A_5B_1+A_6B_3-A_3B_6+A_7B_4-A_4B_7)\mathbf{e}_2+$$

$$+ (A_7B_1-A_1B_7+A_5B_4-A_4B_5+A_2B_6-A_6B_2)\mathbf{e}_3+$$

$$+ (A_2B_7-A_7B_2+A_1B_6-A_6B_1+A_3B_5-A_5B_3)\mathbf{e}_4+$$

$$+ (A_4B_3-A_3B_4+A_2B_1-A_1B_2+A_6B_7-A_7B_6)\mathbf{e}_5+$$

$$+ (A_3B_2-A_2B_3+A_7B_5-A_5B_7+A_4B_1-A_1B_4)\mathbf{e}_6+$$

$$+ (A_5B_6-A_6B_5+A_4B_2-A_2B_4+A_1B_3-A_3B_1)\mathbf{e}_7.$$

Векторное произведение двух векторов удобно записать в виде суммы определителей:

$$[AB] = |164| + |215| + |371| + |427| + |543| + |632| + |756|,$$

где символом $|ijk|$ обозначен определитель вида:

$$|ijk| = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_i & \mathbf{e}_j & \mathbf{e}_k \\ A_i & A_j & A_k \\ B_i & B_j & B_k \end{vmatrix}.$$

В результате векторное произведение двух векторов, а также смешанное (A[BC]) и двойное векторное [A[BC]] произведения векторов (а вслед за этим их иные комбинации) сохраняют свойства семимерной векторной алгебры. Изменяется лишь координатное значение величин. Так, для рассматриваемой алгебры

$$[ABC] = |3752|+|6374|+|5426|+|1635|+|2167|+|7541|+|4213|,$$

где символом $|ijkl|$ обозначен определитель вида:

$$|ijkl| = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_i & \mathbf{e}_j & \mathbf{e}_k & \mathbf{e}_l \\ A_i & A_j & A_k & A_l \\ B_i & B_j & B_k & B_l \\ C_i & C_j & C_k & C_l \end{vmatrix}.$$

При этом, как обычно,

$$\mathbf{[A[BC]] = (CA)B\text{-}(AB)C+[ABC].}$$

Следующие семь ортогональных матриц преобразования описывают правые вращения на угол φ вокруг i-той координатной оси:

$$A_{1(\varphi)} = \left\| \begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{Cos}\varphi & 0 & 0 & \mathrm{Sin}\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{Cos}\varphi & 0 & 0 & 0 & -\mathrm{Sin}\varphi \\ \hline 0 & 0 & 0 & \mathrm{Cos}\varphi & 0 & \mathrm{Sin}\varphi & 0 \\ 0 & -\mathrm{Sin}\varphi & 0 & 0 & \mathrm{Cos}\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mathrm{Sin}\varphi & 0 & \mathrm{Cos}\varphi & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{Sin}\varphi & 0 & 0 & 0 & \mathrm{Cos}\varphi \end{array} \right\|$$

$$A_{2(\varphi)} = \left\| \begin{array}{ccc|cccc} \mathrm{Cos}\varphi & 0 & 0 & 0 & -\mathrm{Sin}\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{Cos}\varphi & 0 & 0 & \mathrm{Sin}\varphi & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \mathrm{Cos}\varphi & 0 & 0 & \mathrm{Sin}\varphi \\ \mathrm{Sin}\varphi & 0 & 0 & 0 & \mathrm{Cos}\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mathrm{Sin}\varphi & 0 & 0 & \mathrm{Cos}\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mathrm{Sin}\varphi & 0 & 0 & \mathrm{Cos}\varphi \end{array} \right\|$$

$$A_{3(\varphi)} = \left\| \begin{array}{ccc|cccc} \mathrm{Cos}\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathrm{Sin}\varphi \\ 0 & \mathrm{Cos}\varphi & 0 & 0 & 0 & -\mathrm{Sin}\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \mathrm{Cos}\varphi & \mathrm{Sin}\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mathrm{Sin}\varphi & \mathrm{Cos}\varphi & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{Sin}\varphi & 0 & 0 & 0 & \mathrm{Cos}\varphi & 0 \\ -\mathrm{Sin}\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathrm{Cos}\varphi \end{array} \right\|$$

$$A_{4(\varphi)} = \left\| \begin{array}{lll|llll} \mathrm{Cos}\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & -\mathrm{Sin}\varphi & 0 \\ 0 & \mathrm{Cos}\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & -\mathrm{Sin}\varphi \\ 0 & 0 & \mathrm{Cos}\varphi & 0 & -\mathrm{Sin}\varphi & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{Sin}\varphi & 0 & \mathrm{Cos}\varphi & 0 & 0 \\ \mathrm{Sin}\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathrm{Cos}\varphi & 0 \\ 0 & \mathrm{Sin}\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathrm{Cos}\varphi \end{array} \right\|$$

$$A_{5(\varphi)} = \left\| \begin{array}{ccc|cccc} \mathrm{Cos}\varphi & \mathrm{Sin}\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\mathrm{Sin}\varphi & \mathrm{Cos}\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{Cos}\varphi & \mathrm{Sin}\varphi & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -\mathrm{Sin}\varphi & \mathrm{Cos}\varphi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathrm{Cos}\varphi & -\mathrm{Sin}\varphi \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathrm{Sin}\varphi & \mathrm{Cos}\varphi \end{array} \right\|$$

$$A_{6(\varphi)} = \left\| \begin{array}{ccc|cccc} \mathrm{Cos}\varphi & 0 & 0 & \mathrm{Sin}\varphi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{Cos}\varphi & \mathrm{Sin}\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mathrm{Sin}\varphi & \mathrm{Cos}\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -\mathrm{Sin}\varphi & 0 & 0 & \mathrm{Cos}\varphi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathrm{Cos}\varphi & 0 & \mathrm{Sin}\varphi \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\mathrm{Sin}\varphi & 0 & \mathrm{Cos}\varphi \end{array} \right\|$$

$$A_{7(\varphi)} = \left\| \begin{array}{ccc|cccc} \cos\varphi & 0 & -\sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & 0 & \sin\varphi & 0 & 0 & 0 \\ \sin\varphi & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right\|$$

При этом:

$$A_{i(\varphi)}^{-1} = A_i(\varphi)', \qquad (i=1,2,...,7).$$

Вращение на бесконечно малый угол $d\delta$ вокруг оси с направляющими косинусами C_1, …., C_7 определяется антисимметричной матрицей

$$dA=(\partial a_{ik}/\partial\delta\,|_{\delta=0})d\delta = \left\| \begin{array}{ccc|cccc} 0 & C_5 & -C_7 & C_6 & -C_2 & -C_4 & C_3 \\ -C_5 & 0 & C_6 & C_7 & C_1 & -C_3 & -C_4 \\ C_7 & -C_6 & 0 & C_5 & -C_4 & C_2 & -C_1 \\ \hline -C_6 & -C_7 & -C_5 & 0 & C_3 & C_1 & C_2 \\ C_2 & -C_1 & C_4 & -C_3 & 0 & -C_7 & C_6 \\ C_4 & C_3 & -C_2 & -C_1 & C_7 & 0 & -C_5 \\ -C_3 & C_4 & C_1 & -C_2 & -C_6 & C_5 & 0 \end{array} \right\| d\delta.$$

При этом

$$d\mathbf{x}'=(dA)\mathbf{x}=[\mathbf{cx}]\,d\delta,$$

где $\mathbf{c}= C_1\mathbf{e}_1+\ldots+ C_7\mathbf{e}_7$ – единичный вектор в направлении положительной оси вращения, а $[\mathbf{cx}]$ - векторное произведение векторов **c** и **x**.

Матрицы бесконечно малых вращений вокруг осей (генераторы группы)

$$L_j=i(\partial/\partial\varphi_j)A_{j(\varphi)}\,|_{\varphi=0}$$

имеют вид:

$$L_5=\left\|\begin{array}{ccc|cccc} -i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 \end{array}\right\|, \quad L_6=\left\|\begin{array}{ccc|cccc} 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 \end{array}\right\|,$$

$$L_4=\left\|\begin{array}{ccc|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right\|, \quad L_2=\left\|\begin{array}{ccc|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i \\ i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 & 0 \end{array}\right\|,$$

$$L_1=\left\|\begin{array}{ccc|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right\|, \quad L_3=\left\|\begin{array}{ccc|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right\|,$$

$$
L_7 = \left\|\begin{array}{ccc|cccc}
0 & 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 \\
i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right\| .
$$

Непосредственными вычислениями можно убедиться, что генераторы группы удовлетворяют (перестановочным) соотношениям:

$$L_6L_4-L_4L_6+L_3L_7-L_7L_3+L_5L_2-L_2L_5 = -3iL_1,$$

$$L_1L_5-L_5L_1+L_6L_3-L_3L_6+L_7L_4-L_4L_7 = -3iL_2,$$

$$L_7L_1-L_1L_7+L_5L_4-L_4L_5+L_2L_6-L_6L_2 = -3iL_3,$$

$$L_2L_7-L_7L_2+L_1L_6-L_6L_1+L_3L_5-L_5L_3 = -3iL_4,$$

$$L_4L_3-L_3L_4+L_2L_1-L_1L_2+L_6L_7-L_7L_6 = -3iL_5,$$

$$L_3L_2-L_2L_3+L_7L_5-L_5L_7+L_4L_1-L_1L_4 = -3iL_6,$$

$$L_5L_6-L_6L_5+L_4L_2-L_2L_4+L_1L_3-L_3L_1 = -3iL_7.$$

При этом симметричная матрица $L^2 = \sum L_i^2 = 6I$ коммутирует со всеми генераторами L_i, так что L^2 представляет собой оператор Казимира. Он не нарушает сохранение изоспина и отвечает сохраняющейся физической величине.

Матрицы L_i аналогичны матрицам (Паули) и им соответствуют уравнения (Дирака) в изовекторном представлении. Волновая функция мультиплета частиц представляет при этом совокупность двух семикомпонентных 8-изовекторов 1-го ранга ψ^α и φ^β [2], а операторный 8-изовектор 2-го ранга $p^{\alpha\beta}$ имеет вид:

$$
p^{\alpha\,\beta\cdot} = \left\|\begin{array}{ccc|cccc}
p^0 & ip^5 & -ip^7 & ip^6 & -ip^2 & -ip^4 & ip^3 \\
-ip^5 & p^0 & ip^6 & ip^7 & ip^1 & -ip^3 & -ip^4 \\
ip^7 & -ip^6 & p^0 & ip^5 & -ip^4 & ip^2 & -ip^1 \\
\hline
-ip^6 & -ip^7 & -ip^5 & p^0 & ip^3 & ip^1 & ip^2 \\
ip^2 & -ip^1 & ip^4 & -ip^3 & p^0 & -ip^7 & ip^6
\end{array}\right\| .
$$

$$\left\| \begin{array}{ccc|cccc} ip^4 & ip^3 & -ip^2 & -ip^1 & ip^7 & p^0 & -ip^5 \\ -ip^3 & ip^4 & ip^1 & -ip^2 & -ip^6 & ip^5 & p^0 \end{array} \right\|$$

Действуя оператором $p^{\alpha\beta}$ на 8-изовекторы ψ^α и φ^β, образовывая скалярное произведение по индексам:

$$\left.\begin{array}{l} \psi^1 p^{1\beta} +\ldots+ \psi^7 p^{7\beta}= m\varphi^\beta , \\ \varphi^1 p^{\alpha 1} +\ldots+ \varphi^7 p^{\alpha 7}= m\psi^\alpha , \end{array}\right\}$$

получим

$$\left.\begin{array}{l}
\psi^1 p^0 + i\,\psi^6 p^4 - i\,\psi^4 p^6 + i\,\psi^3 p^7 - i\,\psi^7 p^3 + i\,\psi^5 p^2 - i\,\psi^2 p^5 = m\varphi^1, \\
\psi^2 p^0 + i\,\psi^1 p^5 - i\,\psi^5 p^1 + i\,\psi^6 p^3 - i\,\psi^3 p^6 + i\,\psi^7 p^4 - i\,\psi^4 p^7 = m\varphi^2, \\
\psi^3 p^0 + i\,\psi^7 p^1 - i\,\psi^1 p^7 + i\,\psi^5 p^4 - i\,\psi^4 p^5 + i\,\psi^2 p^6 - i\,\psi^6 p^2 = m\varphi^3, \\
\psi^4 p^0 + i\,\psi^2 p^7 - i\,\psi^7 p^2 + i\,\psi^1 p^6 - i\,\psi^6 p^1 + i\,\psi^3 p^5 - i\,\psi^5 p^3 = m\varphi^4, \\
\psi^5 p^0 + i\,\psi^4 p^3 - i\,\psi^3 p^4 + i\,\psi^2 2^1 - i\,\psi^1 p^2 + i\,\psi^6 p^7 - i\,\psi^7 p^6 = m\varphi^5, \\
\psi^6 p^0 + i\,\psi^3 p^2 - i\,\psi^2 p^3 + i\,\psi^7 p^5 - i\,\psi^5 p^7 + i\,\psi^4 p^1 - i\,\psi^1 p^4 = m\varphi^6, \\
\psi^7 p^0 + i\,\psi^5 p^6 - i\,\psi^6 p^5 + i\,\psi^4 p^2 - i\,\psi^2 p^4 + i\,\psi^1 p^3 - i\,\psi^3 p^1 = m\varphi^7,
\end{array}\right\}$$

$$\begin{array}{l}
\varphi^1 p^0 - i\,\varphi^6 p^4 + i\,\varphi^4 p^6 - i\,\varphi^3 p^7 + i\,\varphi^7 p^3 - i\,\varphi^5 p^2 + i\,\varphi^2 p^5 = m\psi^1, \\
\varphi^2 p^0 - i\,\varphi^1 p^5 + i\,\varphi^5 p^1 - i\,\varphi^6 p^3 + i\,\varphi^3 p^6 - i\,\varphi^7 p^4 + i\,\varphi^4 p^7 = m\psi^2, \\
\varphi^3 p^0 - i\,\varphi^7 p^1 + i\,\varphi^1 p^7 - i\,\varphi^5 p^4 + i\,\varphi^4 p^5 - i\,\varphi^2 p^6 + i\,\varphi^6 p^2 = m\psi^3, \\
\varphi^4 p^0 - i\,\varphi^2 p^7 + i\,\varphi^7 p^2 - i\,\varphi^1 p^6 + i\,\varphi^6 p^1 - i\,\varphi^3 p^5 + i\,\varphi^5 p^3 = m\psi^4, \\
\varphi^5 p^0 - i\,\varphi^4 p^3 + i\,\varphi^3 p^4 - i\,\varphi^2 2^1 + i\,\varphi^1 p^2 - i\,\varphi^6 p^7 + i\,\varphi^7 p^6 = m\psi^5, \\
\varphi^6 p^0 - i\,\varphi^3 p^2 + i\,\varphi^2 p^3 - i\,\varphi^7 p^5 + i\,\varphi^5 p^7 - i\,\varphi^4 p^1 + i\,\varphi^1 p^4 = m\psi^6, \\
\varphi^7 p^0 - i\,\varphi^5 p^6 + i\,\varphi^6 p^5 - i\,\varphi^4 p^2 + i\,\varphi^2 p^4 - i\,\varphi^1 p^3 + i\,\varphi^3 p^1 = m\psi^7.
\end{array}$$

Две пары этих уравнений можно записать в виде уравнений (Дирака) с помощью найденных выше матриц (Паули)

$$\left.\begin{array}{l} (p^0 - pL)\psi= m\varphi, \\ (p^0 + pL)\varphi= m\psi. \end{array}\right\}$$

Им соответствует представление 14-типлета частиц со спином J=1 в виде

$$\left\{\begin{matrix}\psi^1, \psi^2, \psi^3, \psi^4, \psi^5, \psi^6, \psi^7 \\ \varphi^1, \varphi^2, \varphi^3, \varphi^4, \varphi^5, \varphi^6, \varphi^7 .\end{matrix}\right\}$$

Волновая функция мультиплета частиц в спинорном представлении определяется совокупностью двух шестикомпонентных 8-спиноров 1-го ранга
ψ^{α} и φ^{β}, а операторный 8-спинор 2-го ранга $p^{\alpha\beta}$ имеет вид:

$$p^{\alpha\beta}= \left\|\begin{array}{cc|cccc} -p^1+ip^3 & 0 & p^0+p^7 & -p^5+ip^6 & -p^4+ip^2 & 0 \\ 0 & p^4+ip^2 & p^5+ip^6 & -p^0+p^7 & 0 & p^1+ip^3 \\ \hline -p^0+p^7 & p^5+ip^6 & p^1+ip^3 & 0 & 0 & p^4+ip^2 \\ -p^5+ip^6 & p^0+p^7 & 0 & -p^4+ip^2 & -p^1+ip^3 & 0 \\ -p^4+ip^2 & 0 & 0 & -p^1+ip^3 & -p^5+ip^6 & p^0+p^7 \\ 0 & p^1+ip^3 & p^4+ip^2 & 0 & -p^0+p^7 & p^5+ip^6 \end{array}\right\| .$$

Действуя оператором $p^{\alpha\beta}$ на 8-спиноры ψ^{α} и φ^{β}, образовывая скалярное произведение по индексам:

$$\left.\begin{aligned}(p^{5\beta}\psi^6 + p^{4\beta}\psi^2 + p^{1\beta}\psi^3) - (p^{6\beta}\psi^5 + p^{2\beta}\psi^4 + p^{3\beta}\psi^1) = m\varphi^{\beta}, \\ (p^{\alpha 6}\varphi^5 + p^{\alpha 2}\varphi^4 + p^{\alpha 3}\varphi^1) - (p^{\alpha 5}\varphi^6 + p^{\alpha 4}\varphi^2 + p^{\alpha 1}\varphi^3) = m\psi^{\alpha}.\end{aligned}\right\}$$

получим:

$$\left.\begin{aligned}
\psi^1p^0 + i\,\psi^6p^2 - \psi^3p^1 - \psi^2p^5 + i\,\psi^2p^6 + i\,\psi^3p^3 - \psi^6p^4 - \psi^1p^7 = m\varphi^1, \\
\psi^2p^0 - i\,\psi^4p^2 - \psi^5p^1 - \psi^1p^5 - i\,\psi^1p^6 - i\,\psi^5p^3 - \psi^4p^4 + \psi^2p^7 = m\varphi^2, \\
\psi^3p^0 - i\,\psi^5p^2 - \psi^1p^1 - \psi^4p^5 - i\,\psi^4p^6 - i\,\psi^1p^3 - \psi^5p^4 + \psi^3p^7 = m\varphi^3, \\
\psi^4p^0 + i\,\psi^2p^2 - \psi^6p^1 - \psi^3p^5 + i\,\psi^3p^6 + i\,\psi^6p^3 - \psi^2p^4 - \psi^4p^7 = m\varphi^4, \\
\psi^5p^0 + i\,\psi^3p^2 - \psi^2p^1 - \psi^6p^5 + i\,\psi^6p^6 + i\,\psi^2p^3 - \psi^3p^4 - \psi^5p^7 = m\varphi^5, \\
\psi^6p^0 - i\,\psi^1p^2 - \psi^4p^1 - \psi^5p^5 - i\,\psi^5p^6 - i\,\psi^4p^3 - \psi^1p^4 + \psi^6p^7 = m\varphi^6,
\end{aligned}\right\}$$

$$
\begin{aligned}
&\varphi^1 p^0 - i\,\varphi^6 p^2 + \varphi^3 p^1 + \varphi^2 p^5 - i\,\varphi^2 p^6 - i\,\varphi^3 p^3 + \varphi^6 p^4 + \varphi^1 p^7 = m\psi^1,\\
&\varphi^2 p^0 + i\,\varphi^4 p^2 + \varphi^5 p^1 + \varphi^1 p^5 + i\,\varphi^1 p^6 + i\,\varphi^5 p^3 + \varphi^4 p^4 - \varphi^2 p^7 = m\psi^2,\\
&\varphi^3 p^0 + i\,\varphi^5 p^2 + \varphi^1 p^1 + \varphi^4 p^5 + i\,\varphi^4 p^6 + i\,\varphi^1 p^3 + \varphi^5 p^4 - \varphi^3 p^7 = m\psi^3,\\
&\varphi^4 p^0 - i\,\varphi^2 p^2 + \varphi^6 p^1 + \varphi^3 p^5 - i\,\varphi^3 p^6 - i\,\varphi^6 p^3 + \varphi^2 p^4 + \varphi^4 p^7 = m\psi^4,\\
&\varphi^5 p^0 - i\,\varphi^3 p^2 + \varphi^2 p^1 + \varphi^6 p^5 - i\,\varphi^6 p^6 - i\,\varphi^2 p^3 + \varphi^3 p^4 + \varphi^5 p^7 = m\psi^5,\\
&\varphi^6 p^0 + i\,\varphi^1 p^2 + \varphi^4 p^1 + \varphi^5 p^5 + i\,\varphi^5 p^6 + i\,\varphi^4 p^3 + \varphi^1 p^4 - \varphi^6 p^7 = m\psi^6.
\end{aligned}
$$

Две пары этих уравнений можно записать в виде уравнений (Дирака)

$$
\left.
\begin{aligned}
(p^0 - p\sigma)\psi &= m\varphi,\\
(p^0 + p\sigma)\varphi &= m\psi
\end{aligned}
\right\}
$$

с помощью матриц (Паули) вида:

$$
\sigma_5 = \left\| \begin{array}{cc|cccc}
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
\hline
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{array} \right\| , \quad
\sigma_6 = \left\| \begin{array}{cc|cccc}
0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0\\
i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
\hline
0 & 0 & 0 & i & 0 & 0\\
0 & 0 & -i & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i\\
0 & 0 & 0 & 0 & i & 0
\end{array} \right\| ,
$$

$$
\sigma_4 = \left\| \begin{array}{cc|cccc}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array} \right\| , \quad
\sigma_2 = \left\| \begin{array}{cc|cccc}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i\\
0 & 0 & 0 & i & 0 & 0\\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & i & 0\\
0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & -i & 0 & 0 & 0\\
i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array} \right\| ,
$$

$$\sigma_1 = \left\| \begin{array}{cc|cccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right\|, \quad \sigma_3 = \left\| \begin{array}{cc|cccc} 0 & 0 & -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 \\ \hline i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 \end{array} \right\|,$$

$$\sigma_7 = \left\| \begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right\|.$$

Следующие семь унитарных матриц преобразований описывают вращения на угол φ вокруг i-той координатной оси:

$$U_{1(\varphi)} = \left\| \begin{array}{cc|cccc} \mathrm{Cos}\varphi/2 & 0 & i\mathrm{Sin}\varphi/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{Cos}\varphi/2 & 0 & 0 & i\mathrm{Sin}\varphi/2 & 0 \\ \hline i\mathrm{Sin}\varphi/2 & 0 & \mathrm{Cos}\varphi/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{Cos}\varphi/2 & 0 & i\mathrm{Sin}\varphi/2 \\ 0 & i\mathrm{Sin}\varphi/2 & 0 & 0 & \mathrm{Cos}\varphi/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i\mathrm{Sin}\varphi/2 & 0 & \mathrm{Cos}\varphi/2 \end{array} \right\|,$$

$$U_{2(\varphi)} = \left\| \begin{array}{cc|cccc} \mathrm{Cos}\varphi/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathrm{Sin}\varphi/2 \\ 0 & \mathrm{Cos}\varphi/2 & 0 & -\mathrm{Sin}\varphi/2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \mathrm{Cos}\varphi/2 & 0 & -\mathrm{Sin}\varphi/2 & 0 \\ 0 & \mathrm{Sin}\varphi/2 & 0 & \mathrm{Cos}\varphi/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{Sin}\varphi/2 & 0 & \mathrm{Cos}\varphi/2 & 0 \\ -\mathrm{Sin}\varphi/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathrm{Cos}\varphi/2 \end{array} \right\|,$$

$$U_{3(\varphi)} = \left\| \begin{array}{cc|cccc} \mathrm{Cos}\varphi/2 & 0 & \mathrm{Sin}\varphi/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{Cos}\varphi/2 & 0 & 0 & -\mathrm{Sin}\varphi/2 & 0 \\ \hline -\mathrm{Sin}\varphi/2 & 0 & \mathrm{Cos}\varphi/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{Cos}\varphi/2 & 0 & \mathrm{Sin}\varphi/2 \\ 0 & \mathrm{Sin}\varphi/2 & 0 & 0 & \mathrm{Cos}\varphi/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mathrm{Sin}\varphi/2 & 0 & \mathrm{Cos}\varphi/2 \end{array} \right\| ,$$

$$U_{4(\varphi)} = \left\| \begin{array}{cc|cccc} \mathrm{Cos}\varphi/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & i\mathrm{Sin}\varphi/2 \\ 0 & \mathrm{Cos}\varphi/2 & 0 & i\mathrm{Sin}\varphi/2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \mathrm{Cos}\varphi/2 & 0 & i\mathrm{Sin}\varphi/2 & 0 \\ 0 & i\mathrm{Sin}\varphi/2 & 0 & \mathrm{Cos}\varphi/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i\mathrm{Sin}\varphi/2 & 0 & \mathrm{Cos}\varphi/2 & 0 \\ i\mathrm{Sin}\varphi/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathrm{Cos}\varphi/2 \end{array} \right\| ,$$

$$U_{5(\varphi)} = \left\| \begin{array}{cc|cccc} \mathrm{Cos}\varphi/2 & i\mathrm{Sin}\varphi/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ i\mathrm{Sin}\varphi/2 & \mathrm{Cos}\varphi/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \mathrm{Cos}\varphi/2 & i\mathrm{Sin}\varphi/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i\mathrm{Sin}\varphi/2 & \mathrm{Cos}\varphi/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathrm{Cos}\varphi/2 & i\mathrm{Sin}\varphi/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & i\mathrm{Sin}\varphi/2 & \mathrm{Cos}\varphi/2 \end{array} \right\| ,$$

$$U_{6(\varphi)} = \left\| \begin{array}{cc|cccc} \mathrm{Cos}\varphi/2 & \mathrm{Sin}\varphi/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\mathrm{Sin}\varphi/2 & \mathrm{Cos}\varphi/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \mathrm{Cos}\varphi/2 & -\mathrm{Sin}\varphi/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{Sin}\varphi/2 & \mathrm{Cos}\varphi/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathrm{Cos}\varphi/2 & \mathrm{Sin}\varphi/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\mathrm{Sin}\varphi/2 & \mathrm{Cos}\varphi/2 \end{array} \right\| ,$$

$$U_{7(\varphi)} = \left\| \begin{array}{cc|cccc} e^{i\varphi/2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi/2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cline{3-6} 0 & 0 & e^{-i\varphi/2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{i\varphi/2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{i\varphi/2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{-i\varphi/2} \end{array} \right\| .$$

Запись уравнений (Дирака) в спинорном представлении можно осуществить в виде:

$$\left.\begin{array}{l} (p^0 - p^7)\,\psi^{541} - (p^{541} - ip^{623})\,\psi^{623} = m\varphi^{541}, \\ (p^0 + p^7)\,\psi^{623} - (p^{541} + ip^{623})\,\psi^{541} = m\varphi^{623}, \end{array}\right\}$$

$$\begin{array}{l} (p^0 + p^7)\,\varphi^{541} + (p^{541} - ip^{623})\,\varphi^{623} = m\psi^{541}, \\ (p^0 - p^7)\,\varphi^{623} + (p^{541} + ip^{623})\,\varphi^{541} = m\psi^{623}, \end{array}$$

чему соответствует представление 12-типлета частиц со спином J=1/2 в форме (Глэшоу)

$$\left\{\begin{matrix} \psi^5\ \psi^6 \\ \varphi^5\ \varphi^6 \end{matrix}\right\},\ \left\{\begin{matrix} \psi^4\ \psi^2 \\ \varphi^4\ \varphi^2 \end{matrix}\right\},\ \left\{\begin{matrix} \psi^1\ \psi^3 \\ \varphi^1\ \varphi^3 \end{matrix}\right\}.$$

Здесь символом ψ^{ijk} обозначена сумма вида $\psi^{ijk} = \psi^i + \psi^j + \psi^k$.

2. Векторная алгебра с векторным произведением двух векторов вида:

$$[AB] = [(A_1e_1+A_2e_2+\ldots+A_7e_7)(B_1e_1+B_2e_2+\ldots+B_7e_7)] =$$

$$= \tfrac{1}{2}(A_{245.6}B_3-A_{364.7}B_2+A_{476.3}B_5-A_{537.2}B_4+A_{723.5}B_6-A_{652.4}B_7)e_1+$$

$$+ (A_{457.1}B_6-A_{615.3}B_4+A_{531.6}B_7-A_{763.4}B_5+A_{346.7}B_1-A_{174.5}B_3)e_2+$$

$$+ (A_{612.7}B_5-A_{571.4}B_6+A_{147.5}B_2-A_{254.6}B_1+A_{465.2}B_7-A_{726.1}B_4)e_3+$$

$+ (A_{573.2}B_1-A_{127.6}B_5+A_{762.1}B_3-A_{316.5}B_7+A_{651.3}B_2-A_{235.7}B_6)e_4+$

$+ (A_{736.4}B_2-A_{243.1}B_7+A_{314.2}B_6-A_{621.7}B_3+A_{172.6}B_4-A_{467.3}B_1)e_5+$

$+ (A_{124.3}B_7-A_{732.5}B_1+A_{253.7}B_4-A_{475.1}B_2+A_{517.4}B_3-A_{341.2}B_5)e_6+$

$+ (A_{361.5}B_4-A_{456.2}B_3+A_{625.4}B_1-A_{142.3}B_6+A_{234.1}B_5-A_{513.6}B_2)e_7.$

Здесь символом $A_{ijk.l}$ обозначена сумма вида $A_{ijk.l} = A_i + A_j + A_k - A_l$.

Векторное произведение двух векторов удобно записать в виде суммы определителей:

$$[AB] = ½(|123| + |246| + |365| + |451| + |572| + |617| + |734| +$$

$$+ |735| + |367| + |452| + |613| + |126| + |574| + |241| +$$

$$+ |276| + |431| + |647| + |562| + |714| + |153| + |325| +$$

$$+ |651| + |172| + |723| + |234| + |465| + |346| + |517|).$$

В результате векторное произведение двух векторов, а также смешанное (A[BC]) и двойное векторное [A[BC]] произведения векторов (а вслед за этим их иные комбинации) сохраняют свойства семимерной векторной алгебры. Изменяется лишь координатное значение величин. Так, для рассматриваемой алгебры

$$[ABC] =½(|576(132.4)|+|731(264.5)|+|247(356.1)|+|362(415.7)|+|614(527.3)|+$$

$$+ |453(671.2)|+|125(743.6)|).$$

При этом, как обычно,

$$[A[BC]] = (CA)B-(AB)C+[ABC].$$

Следующие семь ортогональных матриц преобразования описывают правые вращения на угол φ вокруг i-той координатной оси:

-

$$A_{1(\varphi)} = \tfrac{1}{2} \left\| \begin{array}{ccc|cccc}
2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 2\mathrm{Cos}\varphi & -\mathrm{Sin}\varphi & -\mathrm{Sin}\varphi & 0 & -\mathrm{Sin}\varphi & \mathrm{Sin}\varphi \\
0 & \mathrm{Sin}\varphi & 2\mathrm{Cos}\varphi & \mathrm{Sin}\varphi & \mathrm{Sin}\varphi & -\mathrm{Sin}\varphi & 0 \\
\hline
0 & \mathrm{Sin}\varphi & -\mathrm{Sin}\varphi & 2\mathrm{Cos}\varphi & -\mathrm{Sin}\varphi & 0 & -\mathrm{Sin}\varphi \\
0 & 0 & -\mathrm{Sin}\varphi & \mathrm{Sin}\varphi & 2\mathrm{Cos}\varphi & \mathrm{Sin}\varphi & \mathrm{Sin}\varphi \\
0 & \mathrm{Sin}\varphi & \mathrm{Sin}\varphi & 0 & -\mathrm{Sin}\varphi & 2\mathrm{Cos}\varphi & \mathrm{Sin}\varphi \\
0 & -\mathrm{Sin}\varphi & 0 & \mathrm{Sin}\varphi & -\mathrm{Sin}\varphi & -\mathrm{Sin}\varphi & 2\mathrm{Cos}\varphi
\end{array} \right\|$$

$$A_{2(\varphi)} = \tfrac{1}{2} \left\| \begin{array}{ccc|cccc}
2\mathrm{Cos}\varphi & 0 & \mathrm{Sin}\varphi & \mathrm{Sin}\varphi & 0 & \mathrm{Sin}\varphi & -\mathrm{Sin}\varphi \\
0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\mathrm{Sin}\varphi & 0 & 2\mathrm{Cos}\varphi & -\mathrm{Sin}\varphi & \mathrm{Sin}\varphi & 0 & -\mathrm{Sin}\varphi \\
\hline
-\mathrm{Sin}\varphi & 0 & \mathrm{Sin}\varphi & 2\mathrm{Cos}\varphi & -\mathrm{Sin}\varphi & -\mathrm{Sin}\varphi & 0 \\
0 & 0 & -\mathrm{Sin}\varphi & \mathrm{Sin}\varphi & 2\mathrm{Cos}\varphi & -\mathrm{Sin}\varphi & -\mathrm{Sin}\varphi \\
-\mathrm{Sin}\varphi & 0 & 0 & \mathrm{Sin}\varphi & \mathrm{Sin}\varphi & 2\mathrm{Cos}\varphi & \mathrm{Sin}\varphi \\
\mathrm{Sin}\varphi & 0 & \mathrm{Sin}\varphi & 0 & \mathrm{Sin}\varphi & -\mathrm{Sin}\varphi & 2\mathrm{Cos}\varphi
\end{array} \right\|$$

$$A_{3(\varphi)} = \tfrac{1}{2} \left\| \begin{array}{ccc|cccc}
2\mathrm{Cos}\varphi & -\mathrm{Sin}\varphi & 0 & -\mathrm{Sin}\varphi & -\mathrm{Sin}\varphi & \mathrm{Sin}\varphi & 0 \\
\mathrm{Sin}\varphi & 2\mathrm{Cos}\varphi & 0 & \mathrm{Sin}\varphi & -\mathrm{Sin}\varphi & 0 & \mathrm{Sin}\varphi \\
0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
\mathrm{Sin}\varphi & -\mathrm{Sin}\varphi & 0 & 2\mathrm{Cos}\varphi & 0 & -\mathrm{Sin}\varphi & -\mathrm{Sin}\varphi \\
\mathrm{Sin}\varphi & \mathrm{Sin}\varphi & 0 & 0 & 2\mathrm{Cos}\varphi & \mathrm{Sin}\varphi & -\mathrm{Sin}\varphi \\
-\mathrm{Sin}\varphi & 0 & 0 & \mathrm{Sin}\varphi & -\mathrm{Sin}\varphi & 2\mathrm{Cos}\varphi & -\mathrm{Sin}\varphi \\
0 & -\mathrm{Sin}\varphi & 0 & \mathrm{Sin}\varphi & \mathrm{Sin}\varphi & \mathrm{Sin}\varphi & 2\mathrm{Cos}\varphi
\end{array} \right\|$$

$$A_{4(\varphi)} = \tfrac{1}{2} \left\| \begin{array}{ccc|cccc}
2\mathrm{Cos}\varphi & -\mathrm{Sin}\varphi & \mathrm{Sin}\varphi & 0 & \mathrm{Sin}\varphi & 0 & \mathrm{Sin}\varphi \\
\mathrm{Sin}\varphi & 2\mathrm{Cos}\varphi & -\mathrm{Sin}\varphi & 0 & \mathrm{Sin}\varphi & \mathrm{Sin}\varphi & 0 \\
-\mathrm{Sin}\varphi & \mathrm{Sin}\varphi & 2\mathrm{Cos}\varphi & 0 & 0 & \mathrm{Sin}\varphi & \mathrm{Sin}\varphi \\
\hline
0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\
-\mathrm{Sin}\varphi & -\mathrm{Sin}\varphi & 0 & 0 & 2\mathrm{Cos}\varphi & \mathrm{Sin}\varphi & -\mathrm{Sin}\varphi \\
0 & -\mathrm{Sin}\varphi & -\mathrm{Sin}\varphi & 0 & -\mathrm{Sin}\varphi & 2\mathrm{Cos}\varphi & \mathrm{Sin}\varphi \\
-\mathrm{Sin}\varphi & 0 & -\mathrm{Sin}\varphi & 0 & \mathrm{Sin}\varphi & -\mathrm{Sin}\varphi & 2\mathrm{Cos}\varphi
\end{array} \right\|$$

$$A_{5(\varphi)}=\tfrac{1}{2}\left\|\begin{array}{ccc|cccc}
2\mathrm{Cos}\varphi & 0 & \mathrm{Sin}\varphi & -\mathrm{Sin}\varphi & 0 & -\mathrm{Sin}\varphi & -\mathrm{Sin}\varphi \\
0 & 2\mathrm{Cos}\varphi & \mathrm{Sin}\varphi & -\mathrm{Sin}\varphi & 0 & \mathrm{Sin}\varphi & \mathrm{Sin}\varphi \\
-\mathrm{Sin}\varphi & -\mathrm{Sin}\varphi & 2\mathrm{Cos}\varphi & 0 & 0 & -\mathrm{Sin}\varphi & \mathrm{Sin}\varphi \\
\hline
\mathrm{Sin}\varphi & \mathrm{Sin}\varphi & 0 & 2\mathrm{Cos}\varphi & 0 & -\mathrm{Sin}\varphi & \mathrm{Sin}\varphi \\
0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\
\mathrm{Sin}\varphi & -\mathrm{Sin}\varphi & \mathrm{Sin}\varphi & \mathrm{Sin}\varphi & 0 & 2\mathrm{Cos}\varphi & 0 \\
\mathrm{Sin}\varphi & -\mathrm{Sin}\varphi & -\mathrm{Sin}\varphi & -\mathrm{Sin}\varphi & 0 & 0 & 2\mathrm{Cos}\varphi
\end{array}\right\|$$

$$A_{6(\varphi)}=\tfrac{1}{2}\left\|\begin{array}{rrr|rrrr}
2\mathrm{Cos}\varphi & -\mathrm{Sin}\varphi & -\mathrm{Sin}\varphi & 0 & \mathrm{Sin}\varphi & 0 & -\mathrm{Sin}\varphi \\
\mathrm{Sin}\varphi & 2\mathrm{Cos}\varphi & 0 & -\mathrm{Sin}\varphi & -\mathrm{Sin}\varphi & 0 & -\mathrm{Sin}\varphi \\
\mathrm{Sin}\varphi & 0 & 2\mathrm{Cos}\varphi & -\mathrm{Sin}\varphi & \mathrm{Sin}\varphi & 0 & \mathrm{Sin}\varphi \\
\hline
0 & \mathrm{Sin}\varphi & \mathrm{Sin}\varphi & 2\mathrm{Cos}\varphi & \mathrm{Sin}\varphi & 0 & -\mathrm{Sin}\varphi \\
-\mathrm{Sin}\varphi & \mathrm{Sin}\varphi & -\mathrm{Sin}\varphi & -\mathrm{Sin}\varphi & 2\mathrm{Cos}\varphi & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\
\mathrm{Sin}\varphi & \mathrm{Sin}\varphi & -\mathrm{Sin}\varphi & \mathrm{Sin}\varphi & 0 & 0 & 2\mathrm{Cos}\varphi
\end{array}\right\|$$

$$A_{7(\varphi)}=\tfrac{1}{2}\left\|\begin{array}{ccc|cccc}
2\mathrm{Cos}\varphi & \mathrm{Sin}\varphi & 0 & -\mathrm{Sin}\varphi & \mathrm{Sin}\varphi & \mathrm{Sin}\varphi & 0 \\
-\mathrm{Sin}\varphi & 2\mathrm{Cos}\varphi & -\mathrm{Sin}\varphi & 0 & -\mathrm{Sin}\varphi & \mathrm{Sin}\varphi & 0 \\
0 & \mathrm{Sin}\varphi & 2\mathrm{Cos}\varphi & -\mathrm{Sin}\varphi & -\mathrm{Sin}\varphi & -\mathrm{Sin}\varphi & 0 \\
\hline
\mathrm{Sin}\varphi & 0 & \mathrm{Sin}\varphi & 2\mathrm{Cos}\varphi & -\mathrm{Sin}\varphi & \mathrm{Sin}\varphi & 0 \\
-\mathrm{Sin}\varphi & \mathrm{Sin}\varphi & \mathrm{Sin}\varphi & \mathrm{Sin}\varphi & 2\mathrm{Cos}\varphi & 0 & 0 \\
-\mathrm{Sin}\varphi & -\mathrm{Sin}\varphi & \mathrm{Sin}\varphi & -\mathrm{Sin}\varphi & 0 & 2\mathrm{Cos}\varphi & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2
\end{array}\right\|$$

При этом:

$$A_{i(\varphi)}^{-1} = A_i(\varphi)', \qquad (i=1,2,...,7).$$

Вращение на бесконечно малый угол $d\delta$ вокруг оси с направляющими косинусами C_1, …., C_7 определяется антисимметричной матрицей

$$dA=(\partial a_{ik}/\partial\delta\,|_{\delta=0})d\delta=\tfrac{1}{2}\left\|\begin{array}{ccc|cccc} 0 & -C_{364.7} & C_{245.6} & -C_{537.2} & C_{476.3} & C_{723.5} & -C_{652.4} \\ C_{346.7} & 0 & -C_{174.5} & -C_{615.3} & -C_{763.4} & C_{457.1} & C_{531.6} \\ -C_{254.6} & C_{147.5} & 0 & -C_{726.1} & C_{612.7} & -C_{571.4} & C_{465.2} \\ \hline C_{573.2} & C_{651.3} & C_{762.1} & 0 & -C_{127.6} & -C_{235.7} & -C_{316.5} \\ -C_{467.3} & C_{736.4} & -C_{621.7} & C_{172.6} & 0 & C_{314.2} & -C_{243.1} \\ -C_{732.5} & -C_{475.1} & C_{517.4} & C_{253.7} & -C_{341.2} & 0 & C_{124.3} \\ C_{625.4} & -C_{513.6} & -C_{456.2} & C_{361.5} & C_{234.1} & -C_{142.3} & 0 \end{array}\right\| d\delta.$$

При этом

$$dx'=(dA)x=[cx\,]\,d\delta,$$

где $\mathbf{c}= C_1\mathbf{e}_1+\ldots+ C_7\mathbf{e}_7$ – единичный вектор в направлении положительной оси вращения, а **[cx] –** векторное произведение векторов **c** и **x**.

Матрицы бесконечно малых вращений вокруг осей (генераторы группы)

$$L_j=i(\partial/\partial\varphi_j)A_{j(\varphi)}\,|_{\varphi=0}$$

имеют вид:

$$L_3=\tfrac{1}{2}\left\|\begin{array}{ccc|cccc} 0 & -i & 0 & -i & -i & i & 0 \\ i & 0 & 0 & i & -i & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline i & -i & 0 & 0 & 0 & -i & -i \\ i & i & 0 & 0 & 0 & i & -i \\ -i & 0 & 0 & i & -i & 0 & -i \\ 0 & -i & 0 & i & i & i & 0 \end{array}\right\|, \quad L_4=\tfrac{1}{2}\left\|\begin{array}{ccc|cccc} 0 & -i & i & 0 & i & 0 & i \\ i & 0 & -i & 0 & i & i & 0 \\ -i & i & 0 & 0 & 0 & i & i \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i & -i & 0 & 0 & 0 & i & -i \\ 0 & -i & -i & 0 & -i & 0 & i \\ -i & 0 & -i & 0 & i & -i & 0 \end{array}\right\|,$$

$$L_6=\tfrac{1}{2}\left\|\begin{array}{ccc|cccc} 0 & -i & -i & 0 & i & 0 & -i \\ i & 0 & 0 & -i & -i & 0 & -i \\ i & 0 & 0 & -i & i & 0 & i \\ \hline 0 & i & i & 0 & i & 0 & -i \\ -i & i & -i & -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & i & -i & i & 0 & 0 & 0 \end{array}\right\|, \quad L_1=\tfrac{1}{2}\left\|\begin{array}{ccc|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & -i & 0 & -i & i \\ 0 & i & 0 & i & i & -i & 0 \\ \hline 0 & i & -i & 0 & -i & 0 & -i \\ 0 & 0 & -i & i & 0 & i & i \\ 0 & i & i & 0 & -i & 0 & i \\ 0 & -i & 0 & i & -i & -i & 0 \end{array}\right\|,$$

$$L_2=\tfrac{1}{2}\left\|\begin{array}{ccc|cccc} 0 & 0 & i & i & 0 & i & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & -i & i & 0 & -i \\ \hline -i & 0 & i & 0 & -i & -i & 0 \\ 0 & 0 & -i & i & 0 & -i & -i \\ -i & 0 & 0 & i & i & 0 & i \\ i & 0 & i & 0 & i & -i & 0 \end{array}\right\|, \quad L_5=\tfrac{1}{2}\left\|\begin{array}{ccc|cccc} 0 & 0 & i & -i & 0 & -i & -i \\ 0 & 0 & i & -i & 0 & i & i \\ -i & -i & 0 & 0 & 0 & -i & i \\ \hline i & i & 0 & 0 & 0 & -i & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & -i & i & i & 0 & 0 & 0 \\ i & -i & -i & -i & 0 & 0 & 0 \end{array}\right\|,$$

$$L_7=\tfrac{1}{2}\left\|\begin{array}{ccc|cccc} 0 & i & 0 & -i & i & i & 0 \\ -i & 0 & -i & 0 & -i & i & 0 \\ 0 & i & 0 & -i & -i & -i & 0 \\ \hline i & 0 & i & 0 & -i & i & 0 \\ -i & i & i & i & 0 & 0 & 0 \\ -i & -i & i & -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right\| .$$

Непосредственными вычислениями можно убедиться, что генераторы группы удовлетворяют (перестановочным) соотношениям:

$$L_{245.6}L_3-L_{364.7}L_2+L_{476.3}L_5-L_{537.2}L_4+L_{723.5}L_6-L_{652.4}L_7= -3iL_1,$$

$$L_{457.1}L_6-L_{615.3}L_4+L_{531.6}L_7-L_{763.4}L_5+L_{346.7}L_1-L_{174.5}L_3= -3iL_2,$$

$$L_{612.7}L_5-L_{571.4}L_6+L_{147.5}L_2-L_{254.6}L_1+L_{465.2}L_7-L_{726.1}L_4= -3iL_3,$$

$$L_{573.2}L_1-L_{127.6}L_5+L_{762.1}L_3-L_{316.5}L_7+L_{651.3}L_2-L_{235.7}L_6= -3iL_4,$$

$$L_{736.4}L_2-L_{243.1}L_7+L_{314.2}L_6-L_{621.7}L_3+L_{172.6}L_4-L_{467.3}L_1= -3iL_5,$$

$$L_{124.3}L_7-L_{732.5}L_1+L_{253.7}L_4-L_{475.1}L_2+L_{517.4}L_3-L_{341.2}L_5= -3iL_6,$$

$$L_{361.5}L_4-L_{456.2}L_3+L_{625.4}L_1-L_{142.3}L_6+L_{234.1}L_5-L_{513.6}L_2= -3iL_7.$$

При этом симметричная матрица $\mathbf{L}^2=\sum L_i^2 = 6I$ коммутирует со всеми генераторами L_i, так что $\mathbf{L}^2$ представляет собой оператор Казимира. Он не нарушает сохранение изоспина и отвечает сохраняющейся физической величине.

Матрицы L_i аналогичны матрицам (Паули) и им соответствуют уравнения (Дирака) в изовекторном представлении. Волновая функция мультиплета частиц представляет при этом совокупность двух семикомпонентных

8-изовекторов 1-го ранга ψ^{α} и φ^{β} [2], а операторный 8-изовектор 2-го ранга $p^{\alpha\beta}$ имеет вид:

$$
p^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left\|\begin{array}{ccc|cccc}
2p^{0} & -ip^{364.7} & ip^{245.6} & -ip^{537.2} & ip^{467.3} & ip^{723.5} & -ip^{652.4} \\
ip^{346.7} & 2p^{0} & -ip^{174.5} & -ip^{615.3} & -ip^{763.4} & ip^{457.1} & ip^{531.6} \\
-ip^{254.6} & ip^{147.5} & 2p^{0} & -ip^{726.1} & ip^{612.7} & -ip^{571.4} & ip^{465.2} \\
\hline
ip^{573.2} & ip^{651.3} & ip^{762.1} & 2p^{0} & -ip^{127.6} & -ip^{235.7} & -ip^{316.5} \\
-ip^{467.3} & ip^{736.4} & -ip^{621.7} & ip^{172.6} & 2p^{0} & ip^{314.2} & -ip^{243.1} \\
-ip^{732.5} & -ip^{475.1} & ip^{517.4} & ip^{253.7} & -ip^{341.2} & 2p^{0} & ip^{124.3} \\
ip^{625.4} & -ip^{513.6} & -ip^{456.2} & ip^{361.5} & ip^{234.1} & -ip^{142.3} & 2p^{0}
\end{array}\right\| .
$$

Действуя оператором $p^{\alpha\beta}$ на 8-изовекторы ψ^{α} и φ^{β}, образовывая скалярное произведение по индексам:

$$
\left.\begin{aligned}
&\psi^{1} p^{1\beta} + \ldots + \psi^{7} p^{7\beta} = m\varphi^{\beta} , \\
&\varphi^{1} p^{\alpha 1} + \ldots + \varphi^{7} p^{\alpha 7} = m\psi^{\alpha} ,
\end{aligned}\right\}
$$

получим

$$
\left.\begin{aligned}
&\tfrac{1}{2}(2\psi^{1}p^{0} + i\,\psi^{245.6}p^{3} - i\,\psi^{364.7}p^{2} + i\,\psi^{476.3}p^{5} - i\,\psi^{537.2}p^{4} + i\,\psi^{723.5}p^{6} - i\,\psi^{652.4}p^{7}) = m\varphi^{1}, \\
&\tfrac{1}{2}(2\psi^{2}p^{0} + i\,\psi^{457.1}p^{6} - i\,\psi^{615.3}p^{4} + i\,\psi^{531.6}p^{7} - i\,\psi^{763.4}p^{5} + i\,\psi^{346.7}p^{1} - i\,\psi^{174.5}p^{3}) = m\varphi^{2}, \\
&\tfrac{1}{2}(2\psi^{3}p^{0} + i\,\psi^{612.7}p^{5} - i\,\psi^{571.4}p^{6} + i\,\psi^{147.5}p^{2} - i\,\psi^{254.6}p^{1} + i\,\psi^{465.2}p^{7} - i\,\psi^{726.1}p^{4}) = m\varphi^{3}, \\
&\tfrac{1}{2}(2\psi^{4}p^{0} + i\,\psi^{573.2}p^{1} - i\,\psi^{127.6}p^{5} + i\,\psi^{762.1}p^{3} - i\,\psi^{316.5}p^{7} + i\,\psi^{651.3}p^{2} - i\,\psi^{235.7}p^{6}) = m\varphi^{4}, \\
&\tfrac{1}{2}(2\psi^{5}p^{0} + i\,\psi^{736.4}p^{2} - i\,\psi^{243.1}p^{7} + i\,\psi^{314.2}p^{6} - i\,\psi^{621.7}p^{3} + i\,\psi^{172.6}p^{4} - i\,\psi^{467.3}p^{1}) = m\varphi^{5}, \\
&\tfrac{1}{2}(2\psi^{6}p^{0} + i\,\psi^{124.3}p^{7} - i\,\psi^{732.5}p^{1} + i\,\psi^{253.7}p^{4} - i\,\psi^{475.1}p^{2} + i\,\psi^{517.4}p^{3} - i\,\psi^{341.2}p^{5}) = m\varphi^{6}, \\
&\tfrac{1}{2}(2\psi^{7}p^{0} + i\,\psi^{361.5}p^{4} - i\,\psi^{456.2}p^{3} + i\,\psi^{625.4}p^{1} - i\,\psi^{142.3}p^{6} + i\,\psi^{234.1}p^{5} - i\,\psi^{513.6}p^{2}) = m\varphi^{7},
\end{aligned}\right\}
$$

$$
\begin{aligned}
&\tfrac{1}{2}(2\varphi^{1}p^{0} - i\,\varphi^{245.6}p^{3} + i\,\varphi^{364.7}p^{2} - i\,\varphi^{476.3}p^{5} + i\,\varphi^{537.2}p^{4} - i\,\varphi^{723.5}p^{6} + i\,\varphi^{652.4}p^{7}) = m\psi^{1}, \\
&\tfrac{1}{2}(2\varphi^{2}p^{0} - i\,\varphi^{457.1}p^{6} + i\,\varphi^{615.3}p^{4} - i\,\varphi^{531.6}p^{7} + i\,\varphi^{763.4}p^{5} - i\,\varphi^{346.7}p^{1} + i\,\varphi^{174.5}p^{3}) = m\psi^{2}, \\
&\tfrac{1}{2}(2\varphi^{3}p^{0} - i\,\varphi^{612.7}p^{5} + i\,\varphi^{571.4}p^{6} - i\,\varphi^{147.5}p^{2} + i\,\varphi^{254.6}p^{1} - i\,\varphi^{465.2}p^{7} + i\,\varphi^{726.1}p^{4}) = m\psi^{3}, \\
&\tfrac{1}{2}(2\varphi^{4}p^{0} - i\,\varphi^{573.2}p^{1} + i\,\varphi^{127.6}p^{5} - i\,\varphi^{762.1}p^{3} + i\,\varphi^{316.5}p^{7} - i\,\varphi^{651.3}p^{2} + i\,\varphi^{235.7}p^{6}) = m\psi^{4}, \\
&\tfrac{1}{2}(2\varphi^{5}p^{0} - i\,\varphi^{736.4}p^{2} + i\,\varphi^{243.1}p^{7} - i\,\varphi^{314.2}p^{6} + i\,\varphi^{621.7}p^{3} - i\,\varphi^{172.6}p^{4} + i\,\varphi^{467.3}p^{1}) = m\psi^{5}, \\
&\tfrac{1}{2}(2\varphi^{6}p^{0} - i\,\varphi^{124.3}p^{7} + i\,\varphi^{732.5}p^{1} - i\,\varphi^{253.7}p^{4} + i\,\varphi^{475.1}p^{2} - i\,\varphi^{517.4}p^{3} + i\,\varphi^{341.2}p^{5}) = m\psi^{6}, \\
&\tfrac{1}{2}(2\varphi^{7}p^{0} - i\,\varphi^{361.5}p^{4} + i\,\varphi^{456.2}p^{3} - i\,\varphi^{625.4}p^{1} + i\,\varphi^{142.3}p^{6} - i\,\varphi^{234.1}p^{5} + i\,\varphi^{513.6}p^{2}) = m\psi^{7}.
\end{aligned}
$$

Две пары этих уравнений можно записать в виде уравнений (Дирака) с помощью найденных выше матриц (Паули)

$$\left.\begin{aligned}(p^0 - pL)\psi &= m\varphi,\\ (p^0 + pL)\varphi &= m\psi.\end{aligned}\right\}$$

Им соответствует представление 14-типлета частиц со спином J=1 в виде

$$\left\{\begin{matrix}\psi^1, \psi^2, \psi^3, \psi^4, \psi^5, \psi^6, \psi^7\\ \varphi^1, \varphi^2, \varphi^3, \varphi^4, \varphi^5, \varphi^6, \varphi^7 .\end{matrix}\right\}$$

Волновая функция мультиплета частиц в спинорном представлении определяется совокупностью двух шестикомпонентных 8-спиноров 1-го ранга
ψ^α и φ^β, а операторный 8-спинор 2-го ранга $p^{\alpha\beta}$ имеет вид:

$$p^{\alpha\beta}=\frac{1}{2}\left\Vert\begin{array}{cc|cccc}
p^{6.2}+ip^{15} & p^{362}-ip^{415} & p^{362}+ip^{415} & p^{2.3}+ip^{54} & p^{3.6}+ip^{41} & 2(-p^0+p^7)\\
p^{362}-ip^{415} & -p^{2.3}+ip^{54} & -p^{6.2}+ip^{15} & p^{362}+ip^{415} & 2(p^0+p^7) & -p^{3.6}+ip^{41}\\
\hline
p^{362}+ip^{415} & -p^{6.2}+ip^{15} & -p^{3.6}+ip^{41} & 2(p^0+p^7) & p^{362}-ip^{415} & -p^{2.3}+ip^{54}\\
p^{2.3}+ip^{54} & p^{362}+ip^{415} & 2(-p^0+p^7) & p^{3.6}+ip^{41} & p^{6.2}+ip^{15} & p^{362}-ip^{415}\\
p^{3.6}+ip^{41} & 2(-p^0+p^7) & p^{362}-ip^{415} & p^{6.2}+ip^{15} & p^{2.3}+ip^{54} & p^{362}+ip^{415}\\
2(p^0+p^7) & -p^{3.6}+ip^{41} & -p^{2.3}+ip^{54} & p^{362}-ip^{415} & p^{362}+ip^{415} & -p^{6.2}+ip^{15}
\end{array}\right\Vert .$$

Действуя оператором $p^{\alpha\beta}$ на 8-спиноры ψ^α и φ^β, образовывая скалярное произведение по индексам:

$$\left.\begin{aligned}(p^{3\beta}\psi^4 + p^{6\beta}\psi^1 + p^{2\beta}\psi^5) - (p^{4\beta}\psi^3 + p^{1\beta}\psi^6 + p^{5\beta}\psi^2) &= m\varphi^\beta,\\ (p^{\alpha4}\varphi^3 + p^{\alpha1}\varphi^6 + p^{\alpha5}\varphi^2) - (p^{\alpha3}\varphi^4 + p^{\alpha6}\varphi^1 + p^{\alpha2}\varphi^5) &= m\psi^\alpha,\end{aligned}\right\}$$

получим:

$$
\left.\begin{aligned}
&\tfrac12(2\psi^1p^0 - i\,\psi^{625.4}p^1 + \psi^{456.3}p^2 + \psi^{453.2}p^3 - i\,\psi^{235.4}p^4 - i\,\psi^{365.4}p^5 + \psi^{452.6}p^6 + 2\psi^1p^7) = m\varphi^1,\\
&\tfrac12(2\psi^2p^0 + i\,\psi^{416.3}p^1 - \psi^{365.4}p^2 - \psi^{361.5}p^3 + i\,\psi^{156.3}p^4 + i\,\psi^{546.3}p^5 - \psi^{364.1}p^6 - 2\psi^2p^7) = m\varphi^2,\\
&\tfrac12(2\psi^3p^0 + i\,\psi^{542.6}p^1 - \psi^{621.5}p^2 - \psi^{624.1}p^3 + i\,\psi^{412.6}p^4 + i\,\psi^{152.6}p^5 - \psi^{625.4}p^6 - 2\psi^3p^7) = m\varphi^3,\\
&\tfrac12(2\psi^4p^0 - i\,\psi^{231.5}p^1 + \psi^{512.6}p^2 + \psi^{516.3}p^3 - i\,\psi^{361.5}p^4 - i\,\psi^{621.5}p^5 + \psi^{513.2}p^6 + 2\psi^4p^7) = m\varphi^4,\\
&\tfrac12(2\psi^5p^0 - i\,\psi^{364.1}p^1 + \psi^{143.2}p^2 + \psi^{142.6}p^3 - i\,\psi^{624.1}p^4 - i\,\psi^{234.1}p^5 + \psi^{146.3}p^6 + 2\psi^5p^7) = m\varphi^5,\\
&\tfrac12(2\psi^6p^0 + i\,\psi^{153.2}p^1 - \psi^{234.1}p^2 - \psi^{235.4}p^3 + i\,\psi^{543.2}p^4 + i\,\psi^{413.2}p^5 - \psi^{231.5}p^6 - 2\psi^6p^7) = m\varphi^6.
\end{aligned}\right\}
$$

$$
\begin{aligned}
&\tfrac12(2\varphi^1p^0 + i\,\varphi^{625.4}p^1 - \varphi^{456.3}p^2 - \varphi^{453.2}p^3 + i\,\varphi^{235.4}p^4 + i\,\varphi^{365.4}p^5 - \varphi^{452.6}p^6 - 2\varphi^1p^7) = m\psi^1,\\
&\tfrac12(2\varphi^2p^0 - i\,\varphi^{416.3}p^1 + \varphi^{365.4}p^2 + \varphi^{361.5}p^3 - i\,\varphi^{156.3}p^4 - i\,\varphi^{546.3}p^5 + \varphi^{364.1}p^6 + 2\varphi^2p^7) = m\psi^2,\\
&\tfrac12(2\varphi^3p^0 - i\,\varphi^{542.6}p^1 + \varphi^{621.5}p^2 + \varphi^{624.1}p^3 - i\,\varphi^{412.6}p^4 - i\,\varphi^{152.6}p^5 + \varphi^{625.4}p^6 + 2\varphi^3p^7) = m\psi^3,\\
&\tfrac12(2\varphi^4p^0 + i\,\varphi^{231.5}p^1 - \varphi^{512.6}p^2 - \varphi^{516.3}p^3 + i\,\varphi^{361.5}p^4 + i\,\varphi^{621.5}p^5 - \varphi^{513.2}p^6 - 2\varphi^4p^7) = m\psi^4,\\
&\tfrac12(2\varphi^5p^0 + i\,\varphi^{364.1}p^1 - \varphi^{143.2}p^2 - \varphi^{142.6}p^3 + i\,\varphi^{624.1}p^4 + i\,\varphi^{234.1}p^5 - \varphi^{146.3}p^6 - 2\varphi^5p^7) = m\psi^5,\\
&\tfrac12(2\varphi^6p^0 - i\,\varphi^{153.2}p^1 + \varphi^{234.1}p^2 + \varphi^{235.4}p^3 - i\,\varphi^{543.2}p^4 - i\,\varphi^{413.2}p^5 + \varphi^{231.5}p^6 + 2\varphi^6p^7) = m\psi^6.
\end{aligned}
$$

Две пары этих уравнений можно записать в виде уравнений (Дирака)

$$
\left.\begin{aligned}
(p^0 - p\sigma)\psi &= m\varphi,\\
(p^0 + p\sigma)\varphi &= m\psi
\end{aligned}\right\}
$$

с помощью матриц (Паули) вида:

$$
\sigma_3=\tfrac12\left\|\begin{array}{cc|cccc}
0 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0\\
1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1\\
\hline
-1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1\\
-1 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1\\
-1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1\\
0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0
\end{array}\right\|,\qquad
\sigma_4=\tfrac12\left\|\begin{array}{cc|cccc}
0 & i & i & -i & i & 0\\
-i & 0 & i & 0 & -i & -i\\
\hline
-i & -i & 0 & -i & 0 & i\\
i & 0 & i & 0 & -i & i\\
-i & i & 0 & i & 0 & i\\
0 & i & -i & -i & -i & 0
\end{array}\right\|,
$$

$$\sigma_6=\tfrac{1}{2}\left\|\begin{array}{cc|cccc} 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right\|, \quad \sigma_1=\tfrac{1}{2}\left\|\begin{array}{cc|cccc} 0 & i & 0 & -i & i & i \\ -i & 0 & i & -i & 0 & -i \\ \hline 0 & -i & 0 & -i & -i & i \\ i & i & i & 0 & -i & 0 \\ -i & 0 & i & i & 0 & i \\ -i & i & -i & 0 & -i & 0 \end{array}\right\|,$$

$$\sigma_2=\tfrac{1}{2}\left\|\begin{array}{cc|cccc} 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right\|, \quad \sigma_5=\tfrac{1}{2}\left\|\begin{array}{cc|cccc} 0 & 0 & i & -i & i & i \\ 0 & 0 & i & -i & -i & -i \\ \hline -i & -i & 0 & 0 & -i & i \\ i & i & 0 & 0 & -i & i \\ -i & i & i & i & 0 & 0 \\ -i & i & -i & -i & 0 & 0 \end{array}\right\|,$$

$$\sigma_7=\left\|\begin{array}{cc|cccc} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right\|.$$

Следующие семь унитарных матриц преобразований описывают вращения на угол φ вокруг i-той координатной оси:

$$U_{1(\varphi)}=\tfrac{1}{2}\left\|\begin{array}{cc|cccc} 2\mathrm{Cos}\varphi/2 & -\mathrm{Sin}\varphi/2 & 0 & \mathrm{Sin}\varphi/2 & -\mathrm{Sin}\varphi/2 & -\mathrm{Sin}\varphi/2 \\ \mathrm{Sin}\varphi/2 & 2\mathrm{Cos}\varphi/2 & -\mathrm{Sin}\varphi/2 & \mathrm{Sin}\varphi/2 & 0 & \mathrm{Sin}\varphi/2 \\ \hline 0 & \mathrm{Sin}\varphi/2 & 2\mathrm{Cos}\varphi/2 & \mathrm{Sin}\varphi/2 & \mathrm{Sin}\varphi/2 & -\mathrm{Sin}\varphi/2 \\ -\mathrm{Sin}\varphi/2 & -\mathrm{Sin}\varphi/2 & -\mathrm{Sin}\varphi/2 & 2\mathrm{Cos}\varphi/2 & \mathrm{Sin}\varphi/2 & 0 \\ \mathrm{Sin}\varphi/2 & 0 & -\mathrm{Sin}\varphi/2 & -\mathrm{Sin}\varphi/2 & 2\mathrm{Cos}\varphi/2 & -\mathrm{Sin}\varphi/2 \\ \mathrm{Sin}\varphi/2 & -\mathrm{Sin}\varphi/2 & \mathrm{Sin}\varphi/2 & 0 & \mathrm{Sin}\varphi/2 & 2\mathrm{Cos}\varphi/2 \end{array}\right\|,$$

$$U_{2(\varphi)} = \frac{1}{2} \left\| \begin{array}{cc|cccc} 2Cos\varphi/2 & 0 & iSin\varphi/2 & -iSin\varphi/2 & -iSin\varphi/2 & -iSin\varphi/2 \\ 0 & 2Cos\varphi/2 & iSin\varphi/2 & -iSin\varphi/2 & iSin\varphi/2 & iSin\varphi/2 \\ \hline iSin\varphi/2 & iSin\varphi/2 & 2Cos\varphi/2 & 0 & -iSin\varphi/2 & iSin\varphi/2 \\ -iSin\varphi/2 & -iSin\varphi/2 & 0 & 2Cos\varphi/2 & -iSin\varphi/2 & iSin\varphi/2 \\ -iSin\varphi/2 & iSin\varphi/2 & -iSin\varphi/2 & -iSin\varphi/2 & 2Cos\varphi/2 & 0 \\ -iSin\varphi/2 & iSin\varphi/2 & iSin\varphi/2 & iSin\varphi/2 & 0 & 2Cos\varphi/2 \end{array} \right\| ,$$

$$U_{3(\varphi)} = \frac{1}{2} \left\| \begin{array}{cc|cccc} 2Cos\varphi/2 & iSin\varphi/2 & -iSin\varphi/2 & -iSin\varphi/2 & -iSin\varphi/2 & 0 \\ iSin\varphi/2 & 2Cos\varphi/2 & iSin\varphi/2 & 0 & -iSin\varphi/2 & iSin\varphi/2 \\ \hline -iSin\varphi/2 & iSin\varphi/2 & 2Cos\varphi/2 & iSin\varphi/2 & 0 & iSin\varphi/2 \\ -iSin\varphi/2 & 0 & iSin\varphi/2 & 2Cos\varphi/2 & -iSin\varphi/2 & -iSin\varphi/2 \\ -iSin\varphi/2 & -iSin\varphi/2 & 0 & -iSin\varphi/2 & 2Cos\varphi/2 & iSin\varphi/2 \\ 0 & iSin\varphi/2 & iSin\varphi/2 & -iSin\varphi/2 & iSin\varphi/2 & 2Cos\varphi/2 \end{array} \right\| ,$$

$$U_{4(\varphi)} = \frac{1}{2} \left\| \begin{array}{cc|cccc} 2Cos\varphi/2 & -Sin\varphi/2 & -Sin\varphi/2 & Sin\varphi/2 & -Sin\varphi/2 & 0 \\ Sin\varphi/2 & 2Cos\varphi/2 & -Sin\varphi/2 & 0 & Sin\varphi/2 & Sin\varphi/2 \\ \hline Sin\varphi/2 & Sin\varphi/2 & 2Cos\varphi/2 & Sin\varphi/2 & 0 & -Sin\varphi/2 \\ -Sin\varphi/2 & 0 & -Sin\varphi/2 & 2Cos\varphi/2 & Sin\varphi/2 & -Sin\varphi/2 \\ Sin\varphi/2 & -Sin\varphi/2 & 0 & -Sin\varphi/2 & 2Cos\varphi/2 & -Sin\varphi/2 \\ 0 & -Sin\varphi/2 & Sin\varphi/2 & Sin\varphi/2 & Sin\varphi/2 & 2Cos\varphi/2 \end{array} \right\| ,$$

$$U_{5(\varphi)} = \frac{1}{2} \left\| \begin{array}{cc|cccc} 2Cos\varphi/2 & -Sin\varphi/2 & -Sin\varphi/2 & Sin\varphi/2 & -Sin\varphi/2 & 0 \\ Sin\varphi/2 & 2Cos\varphi/2 & -Sin\varphi/2 & 0 & Sin\varphi/2 & Sin\varphi/2 \\ \hline Sin\varphi/2 & Sin\varphi/2 & 2Cos\varphi/2 & Sin\varphi/2 & 0 & -Sin\varphi/2 \\ -Sin\varphi/2 & 0 & -Sin\varphi/2 & 2Cos\varphi/2 & Sin\varphi/2 & -Sin\varphi/2 \\ Sin\varphi/2 & -Sin\varphi/2 & 0 & -Sin\varphi/2 & 2Cos\varphi/2 & -Sin\varphi/2 \\ 0 & -Sin\varphi/2 & Sin\varphi/2 & Sin\varphi/2 & Sin\varphi/2 & 2Cos\varphi/2 \\ 2Cos\varphi/2 & -iSin\varphi/2 & 0 & -iSin\varphi/2 & -iSin\varphi/2 & iSin\varphi/2 \\ -iSin\varphi/2 & 2Cos\varphi/2 & iSin\varphi/2 & iSin\varphi/2 & 0 & iSin\varphi/2 \\ \hline \end{array} \right\| ,$$

$$U_{6(\varphi)} = \frac{1}{2}\left\|\begin{array}{cc|cccc} 0 & i\mathrm{Sin}\varphi/2 & 2\mathrm{Cos}\varphi/2 & -i\mathrm{Sin}\varphi/2 & i\mathrm{Sin}\varphi/2 & i\mathrm{Sin}\varphi/2 \\ -i\mathrm{Sin}\varphi/2 & i\mathrm{Sin}\varphi/2 & -i\mathrm{Sin}\varphi/2 & 2\mathrm{Cos}\varphi/2 & -i\mathrm{Sin}\varphi/2 & 0 \\ -i\mathrm{Sin}\varphi/2 & 0 & i\mathrm{Sin}\varphi/2 & -i\mathrm{Sin}\varphi/2 & 2\mathrm{Cos}\varphi/2 & -i\mathrm{Sin}\varphi/2 \\ i\mathrm{Sin}\varphi/2 & i\mathrm{Sin}\varphi/2 & i\mathrm{Sin}\varphi/2 & 0 & -i\mathrm{Sin}\varphi/2 & 2\mathrm{Cos}\varphi/2 \end{array}\right\| ,$$

$$U_{7(\varphi)} = \left\|\begin{array}{cc|cccc} e^{-i\varphi/2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\varphi/2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & e^{i\varphi/2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-i\varphi/2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{-i\varphi/2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{i\varphi/2} \end{array}\right\| .$$

Запись уравнений (Дирака) в спинорном представлении можно осуществить в виде:

$$\left.\begin{aligned} (p^0 - p^{7362})\,\psi^{362} + ip^{415}\,\psi^{415} &= m\varphi^{362}, \\ (p^0 + p^{7362})\,\psi^{415} - ip^{415}\,\psi^{362} &= m\varphi^{415}, \end{aligned}\right\}$$

$$\begin{aligned} (p^0 + p^{7362})\,\varphi^{362} - ip^{415}\,\varphi^{415} &= m\psi^{362}, \\ (p^0 - p^{7362})\,\varphi^{415} + ip^{415}\,\varphi^{362} &= m\psi^{415}, \end{aligned}$$

чему соответствует представление 12-типлета частиц со спином J=1/2 в форме (Глэшоу)

$$\begin{Bmatrix} \psi^3\ \psi^4 \\ \varphi^3\ \varphi^4 \end{Bmatrix}, \begin{Bmatrix} \psi^6\ \psi^1 \\ \varphi^6\ \varphi^1 \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \psi^2\ \psi^5 \\ \varphi^2\ \varphi^5 \end{Bmatrix}.$$

3. Векторная алгебра с векторным произведением двух векторов вида:

$$[AB] = [(A_1e_1+A_2e_2+\ldots+A_7e_7)(B_1e_1+B_2e_2+\ldots+B_7e_7)] =$$

$$= \tfrac{1}{2}(A_{637.2}B_4-A_{423.5}B_6+A_{352.4}B_7-A_{745.6}B_3+A_{564.7}B_2-A_{276.3}B_5)e_1+$$

$$+ (A_{163.4}B_5-A_{546.7}B_1+A_{674.5}B_3-A_{357.1}B_6+A_{715.3}B_4-A_{431.6}B_7)e_2+$$

$$+ (A_{754.6}B_1-A_{165.2}B_7+A_{526.1}B_4-A_{412.7}B_5+A_{271.4}B_6-A_{647.5}B_2)e_3+$$

$$+ (A_{216.5}B_7-A_{751.3}B_2+A_{135.7}B_6-A_{673.2}B_1+A_{327.6}B_5-A_{562.1}B_3)e_4+$$

$$+ (A_{421.7}B_3-A_{372.6}B_4+A_{267.3}B_1-A_{136.4}B_2+A_{643.1}B_7-A_{714.2}B_6)e_5+$$

$$+ (A_{375.1}B_2-A_{217.4}B_3+A_{741.2}B_5-A_{524.3}B_7+A_{432.5}B_1-A_{153.7}B_4)e_6+$$

$$+ (A_{542.3}B_6-A_{634.1}B_5+A_{413.6}B_2-A_{261.5}B_4+A_{156.2}B_3-A_{325.4}B_1)e_7.$$

Векторное произведение двух векторов удобно записать в виде суммы определителей:

$$[AB] = ½(|164| + |215| + |371| + |427| + |543| + |632| + |756| +$$

$$+ |547| + |753| + |214| + |376| + |631| + |425| + |162| +$$

$$+ |652| + |174| + |726| + |235| + |467| + |341| + |513| +$$

$$+ |271| + |432| + |643| + |564| + |715| + |156| + |327|).$$

В результате векторное произведение двух векторов, а также смешанное (A[BC]) и двойное векторное [A[BC]] произведения векторов (а вслед за этим их иные комбинации) сохраняют свойства семимерной векторной алгебры. Изменяется лишь координатное значение величин. Так, для рассматриваемой алгебры

$$[ABC] =½(|374(251.6)|+|635(472.1)|+|541(623.7)|+|167(534.2)|+|213(765.4)|+$$

$$+ |752(146.3)|+|426(317.5)|),$$

При этом, как обычно,

$$[A[BC]] = (CA)B-(AB)C+[ABC].$$

Следующие семь ортогональных матриц преобразования описывают правые вращения на угол φ вокруг i-той координатной оси:

$$\left\| \begin{array}{ccc|cccc} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\mathrm{Cos}\varphi & 0 & \mathrm{Sin}\varphi & \mathrm{Sin}\varphi & \mathrm{Sin}\varphi & -\mathrm{Sin}\varphi \\ 0 & 0 & 2\mathrm{Cos}\varphi & -\mathrm{Sin}\varphi & -\mathrm{Sin}\varphi & \mathrm{Sin}\varphi & -\mathrm{Sin}\varphi \end{array} \right\|$$

$$A_{1(\varphi)}=\tfrac{1}{2}\left\|\begin{array}{ccc|cccc}
0 & -Sin\varphi & Sin\varphi & 2Cos\varphi & 0 & Sin\varphi & Sin\varphi \\
0 & -Sin\varphi & Sin\varphi & 0 & 2Cos\varphi & -Sin\varphi & -Sin\varphi \\
0 & -Sin\varphi & -Sin\varphi & -Sin\varphi & Sin\varphi & 2Cos\varphi & 0 \\
0 & Sin\varphi & Sin\varphi & -Sin\varphi & Sin\varphi & 0 & 2Cos\varphi
\end{array}\right\|$$

$$A_{2(\varphi)}=\tfrac{1}{2}\left\|\begin{array}{ccc|cccc}
2Cos\varphi & 0 & 0 & -Sin\varphi & -Sin\varphi & -Sin\varphi & Sin\varphi \\
0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 2Cos\varphi & Sin\varphi & -Sin\varphi & Sin\varphi & Sin\varphi \\
\hline
Sin\varphi & 0 & -Sin\varphi & 2Cos\varphi & Sin\varphi & 0 & Sin\varphi \\
Sin\varphi & 0 & Sin\varphi & -Sin\varphi & 2Cos\varphi & Sin\varphi & 0 \\
Sin\varphi & 0 & -Sin\varphi & 0 & -Sin\varphi & 2Cos\varphi & -Sin\varphi \\
-Sin\varphi & 0 & -Sin\varphi & -Sin\varphi & 0 & Sin\varphi & 2Cos\varphi
\end{array}\right\|$$

$$A_{3(\varphi)}=\tfrac{1}{2}\left\|\begin{array}{ccc|cccc}
2Cos\varphi & 0 & 0 & Sin\varphi & Sin\varphi & -Sin\varphi & Sin\varphi \\
0 & 2Cos\varphi & 0 & -Sin\varphi & Sin\varphi & -Sin\varphi & -Sin\varphi \\
0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
-Sin\varphi & Sin\varphi & 0 & 2Cos\varphi & Sin\varphi & Sin\varphi & 0 \\
-Sin\varphi & -Sin\varphi & 0 & -Sin\varphi & 2Cos\varphi & 0 & Sin\varphi \\
Sin\varphi & Sin\varphi & 0 & -Sin\varphi & 0 & 2Cos\varphi & Sin\varphi \\
-Sin\varphi & Sin\varphi & 0 & 0 & -Sin\varphi & -Sin\varphi & 2Cos\varphi
\end{array}\right\|$$

$$A_{4(\varphi)}=\tfrac{1}{2}\left\|\begin{array}{ccc|cccc}
2Cos\varphi & Sin\varphi & -Sin\varphi & 0 & 0 & -Sin\varphi & -Sin\varphi \\
-Sin\varphi & 2Cos\varphi & Sin\varphi & 0 & -Sin\varphi & 0 & -Sin\varphi \\
Sin\varphi & -Sin\varphi & 2Cos\varphi & 0 & -Sin\varphi & -Sin\varphi & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\
0 & Sin\varphi & Sin\varphi & 0 & 2Cos\varphi & -Sin\varphi & Sin\varphi \\
Sin\varphi & 0 & Sin\varphi & 0 & Sin\varphi & 2Cos\varphi & -Sin\varphi \\
Sin\varphi & Sin\varphi & 0 & 0 & -Sin\varphi & Sin\varphi & 2Cos\varphi
\end{array}\right\|$$

$$A_{5(\varphi)}=\frac{1}{2}\left\|\begin{array}{ccc|cccc}
2\text{Cos}\varphi & \text{Sin}\varphi & -\text{Sin}\varphi & 0 & 0 & \text{Sin}\varphi & \text{Sin}\varphi\\
-\text{Sin}\varphi & 2\text{Cos}\varphi & -\text{Sin}\varphi & \text{Sin}\varphi & 0 & -\text{Sin}\varphi & 0\\
\text{Sin}\varphi & \text{Sin}\varphi & 2\text{Cos}\varphi & \text{Sin}\varphi & 0 & 0 & -\text{Sin}\varphi\\
\hline
0 & -\text{Sin}\varphi & -\text{Sin}\varphi & 2\text{Cos}\varphi & 0 & \text{Sin}\varphi & -\text{Sin}\varphi\\
0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0\\
-\text{Sin}\varphi & \text{Sin}\varphi & 0 & -\text{Sin}\varphi & 0 & 2\text{Cos}\varphi & -\text{Sin}\varphi\\
-\text{Sin}\varphi & 0 & \text{Sin}\varphi & \text{Sin}\varphi & 0 & \text{Sin}\varphi & 2\text{Cos}\varphi
\end{array}\right\|$$

$$A_{6(\varphi)}=\frac{1}{2}\left\|\begin{array}{ccc|cccc}
2\text{Cos}\varphi & \text{Sin}\varphi & \text{Sin}\varphi & \text{Sin}\varphi & -\text{Sin}\varphi & 0 & 0\\
-\text{Sin}\varphi & 2\text{Cos}\varphi & \text{Sin}\varphi & 0 & \text{Sin}\varphi & 0 & \text{Sin}\varphi\\
-\text{Sin}\varphi & -\text{Sin}\varphi & 2\text{Cos}\varphi & \text{Sin}\varphi & 0 & 0 & -\text{Sin}\varphi\\
\hline
-\text{Sin}\varphi & 0 & -\text{Sin}\varphi & 2\text{Cos}\varphi & -\text{Sin}\varphi & 0 & \text{Sin}\varphi\\
\text{Sin}\varphi & -\text{Sin}\varphi & 0 & \text{Sin}\varphi & 2\text{Cos}\varphi & 0 & \text{Sin}\varphi\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0\\
0 & -\text{Sin}\varphi & \text{Sin}\varphi & -\text{Sin}\varphi & -\text{Sin}\varphi & 0 & 2\text{Cos}\varphi
\end{array}\right\|$$

$$A_{7(\varphi)}=\frac{1}{2}\left\|\begin{array}{ccc|cccc}
2\text{Cos}\varphi & -\text{Sin}\varphi & -\text{Sin}\varphi & \text{Sin}\varphi & -\text{Sin}\varphi & 0 & 0\\
\text{Sin}\varphi & 2\text{Cos}\varphi & \text{Sin}\varphi & \text{Sin}\varphi & 0 & -\text{Sin}\varphi & 0\\
\text{Sin}\varphi & -\text{Sin}\varphi & 2\text{Cos}\varphi & 0 & \text{Sin}\varphi & \text{Sin}\varphi & 0\\
\hline
-\text{Sin}\varphi & -\text{Sin}\varphi & 0 & 2\text{Cos}\varphi & \text{Sin}\varphi & -\text{Sin}\varphi & 0\\
\text{Sin}\varphi & 0 & -\text{Sin}\varphi & -\text{Sin}\varphi & 2\text{Cos}\varphi & -\text{Sin}\varphi & 0\\
0 & \text{Sin}\varphi & -\text{Sin}\varphi & \text{Sin}\varphi & \text{Sin}\varphi & 2\text{Cos}\varphi & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2
\end{array}\right\|$$

При этом: $A_{i(\varphi)}^{-1} = A_i(\varphi)'$, $(i=1,2,...,7)$.

Вращение на бесконечно малый угол $d\delta$ вокруг оси с направляющими косинусами C_1, …., C_7 определяется антисиметричной матрицей

$$dA=(\partial a_{ik}/\partial\delta\,\big|_{\delta=0})d\delta=\tfrac{1}{2}\left\|\begin{array}{ccc|cccc}
0 & C_{564.7} & -C_{745.6} & C_{637.2} & -C_{276.3} & -C_{423.5} & C_{352.4} \\
-C_{546.7} & 0 & C_{674.5} & C_{715.3} & C_{163.4} & -C_{357.1} & -C_{431.6} \\
C_{754.6} & -C_{647.5} & 0 & C_{526.1} & -C_{412.7} & C_{271.4} & -C_{165.2} \\
\hline
-C_{673.2} & -C_{751.3} & -C_{562.1} & 0 & C_{327.6} & C_{135.7} & C_{216.5} \\
C_{267.3} & -C_{136.4} & C_{421.7} & -C_{372.6} & 0 & -C_{714.2} & C_{643.1} \\
C_{432.5} & C_{375.1} & -C_{217.4} & -C_{153.7} & C_{741.2} & 0 & -C_{524.3} \\
-C_{325.4} & C_{413.6} & C_{156.2} & -C_{261.5} & -C_{634.1} & C_{542.3} & 0
\end{array}\right\| d\delta.$$

При этом

$$dx'=(dA)x=[cx\,]\,d\delta,$$

где $c= C_1e_1+\ldots+ C_7e_7$ – единичный вектор в направлении положительной оси вращения, а $[cx\,]$ - векторное произведение векторов c и x.

Матрицы бесконечно малых вращений вокруг осей (генераторы группы)

$$L_j=i(\partial/\partial\varphi j)A_{j(\varphi)}\big|_{\varphi=0}$$

имеют вид:

$$L_5=\tfrac{1}{2}\left\|\begin{array}{ccc|cccc}
0 & i & -i & 0 & 0 & i & i \\
-i & 0 & -i & i & 0 & -i & 0 \\
i & i & 0 & i & 0 & 0 & -i \\
\hline
0 & -i & -i & 0 & 0 & i & -i \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-i & i & 0 & -i & 0 & 0 & -i \\
-i & 0 & i & i & 0 & i & 0
\end{array}\right\|,\quad
L_6=\tfrac{1}{2}\left\|\begin{array}{ccc|cccc}
0 & i & i & i & -i & 0 & 0 \\
-i & 0 & i & 0 & i & 0 & i \\
-i & -i & 0 & i & 0 & 0 & -i \\
\hline
-i & 0 & -i & 0 & -i & 0 & i \\
i & -i & 0 & i & 0 & 0 & i \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -i & i & -i & -i & 0 & 0
\end{array}\right\|,$$

$$L_4=\tfrac{1}{2}\left\|\begin{array}{ccc|cccc}
0 & i & -i & 0 & 0 & -i & -i \\
-i & 0 & i & 0 & -i & 0 & -i \\
i & -i & 0 & 0 & -i & -i & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & i & i & 0 & 0 & -i & i \\
i & 0 & i & 0 & i & 0 & -i \\
i & i & 0 & 0 & -i & i & 0
\end{array}\right\|,\quad
L_2=\tfrac{1}{2}\left\|\begin{array}{ccc|cccc}
0 & 0 & 0 & -i & -i & -i & i \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & i & -i & i & i \\
\hline
i & 0 & -i & 0 & i & 0 & i \\
i & 0 & i & -i & 0 & i & 0 \\
i & 0 & -i & 0 & -i & 0 & -i \\
-i & 0 & -i & -i & 0 & i & 0
\end{array}\right\|,$$

$$L_1=\frac{1}{2}\left\|\begin{array}{ccc|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i & i & i & -i \\ 0 & 0 & 0 & -i & -i & i & -i \\ \hline 0 & -i & i & 0 & 0 & i & i \\ 0 & -i & i & 0 & 0 & -i & -i \\ 0 & -i & -i & -i & i & 0 & 0 \\ 0 & i & i & -i & i & 0 & 0 \end{array}\right\|, \quad L_3=\frac{1}{2}\left\|\begin{array}{ccc|cccc} 0 & 0 & 0 & i & i & -i & i \\ 0 & 0 & 0 & -i & i & -i & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -i & i & 0 & 0 & i & i & 0 \\ -i & -i & 0 & -i & 0 & 0 & i \\ i & i & 0 & -i & 0 & 0 & i \\ -i & i & 0 & 0 & -i & -i & 0 \end{array}\right\|,$$

$$L_7=\frac{1}{2}\left\|\begin{array}{ccc|cccc} 0 & -i & -i & i & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & i & i & 0 & -i & 0 \\ i & -i & 0 & 0 & i & i & 0 \\ \hline -i & -i & 0 & 0 & i & -i & 0 \\ i & 0 & -i & -i & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & -i & i & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right\|.$$

Непосредственными вычислениями можно убедиться, что генераторы группы удовлетворяют (перестановочным) соотношениям:

$$L_{637.2}L_4-L_{423.5}L_6+L_{352.4}L_7-L_{745.6}L_3+L_{564.7}L_2-L_{276.3}L_5= -3iL_1,$$

$$L_{163.4}L_5-L_{546.7}L_1+L_{674.5}L_3-L_{357.1}L_6+L_{715.3}L_4-L_{431.6}L_7= -3iL_2,$$

$$L_{754.6}L_1-L_{165.2}L_7+L_{526.1}L_4-L_{412.7}L_5+L_{271.4}L_6-L_{647.5}L_2= -3iL_3,$$

$$L_{216.5}L_7-L_{751.3}L_2+L_{135.7}L_6-L_{673.2}L_1+L_{327.6}L_5-L_{562.1}L_3= -3iL_4,$$

$$L_{421.7}L_3-L_{372.6}L_4+L_{267.3}L_1-L_{136.4}L_2+L_{643.1}L_7-L_{714.2}L_6= -3iL_5,$$

$$L_{375.1}L_2-L_{217.4}L_3+L_{741.2}L_5-L_{524.3}L_7+L_{432.5}L_1-L_{153.7}L_4= -3iL_6,$$

$$L_{542.3}L_6-L_{634.1}L_5+L_{413.6}L_2-L_{261.5}L_4+L_{156.2}L_3-L_{325.4}L_1= -3iL_7,$$

При этом симметричная матрица $L^2= \sum L_i^2 = 6I$ коммутирует со всеми генераторами L_i, так что L^2 представляет собой оператор Казимира. Он не нарушает сохранение изоспина и отвечает сохраняющейся физической величине.

Матрицы L_i аналогичны матрицам (Паули) и им соответствуют уравнения (Дирака) в изовекторном представлении. Волновая функция мультиплета частиц представляет при этом совокупность двух семикомпонентных

8-изовекторов 1-го ранга ψ^{α} и φ^{β} [2], а операторный 8-изовектор 2-го ранга $p^{\alpha\beta}$ имеет вид:

$$p^{\alpha\beta\cdot} = \frac{1}{2}\left\|\begin{array}{ccc|cccc}
2p^{0} & ip^{564.7} & -ip^{745.6} & ip^{637.2} & -ip^{276.3} & -ip^{423.5} & ip^{352.4} \\
-ip^{546.7} & 2p^{0} & ip^{674.5} & ip^{715.3} & ip^{163.4} & -ip^{357.1} & -ip^{431.6} \\
ip^{754.6} & -ip^{647.5} & 2p^{0} & ip^{526.1} & -ip^{412.7} & ip^{271.4} & -ip^{165.2} \\
\hline
-ip^{673.2} & -ip^{751.3} & -ip^{562.1} & 2p^{0} & ip^{327.6} & ip^{135.7} & ip^{216.5} \\
ip^{267.3} & -ip^{136.4} & ip^{421.7} & -ip^{372.6} & 2p^{0} & -ip^{714.2} & ip^{643.1} \\
ip^{432.5} & ip^{375.1} & -ip^{217.4} & -ip^{153.7} & ip^{741.2} & 2p^{0} & -ip^{524.3} \\
-ip^{325.4} & ip^{413.6} & ip^{156.2} & -ip^{261.5} & -ip^{634.1} & ip^{542.3} & 2p^{0}
\end{array}\right\| .$$

Действуя оператором $p^{\alpha\beta}$ на 8-изовекторы ψ^{α} и φ^{β}, образовывая скалярное произведение по индексам:

$$\left.\begin{aligned}
&\psi^{1} p^{1\beta} + \ldots + \psi^{7} p^{7\beta} = m\varphi^{\beta}\ , \\
&\varphi^{1} p^{\alpha 1} + \ldots + \varphi^{7} p^{\alpha 7} = m\psi^{\alpha}\ ,
\end{aligned}\right\}$$

получим

$$\left.\begin{aligned}
&\tfrac{1}{2}(2\psi^{1}p^{0} + i\,\psi^{637.2}p^{4} - i\,\psi^{423.5}p^{6} + i\,\psi^{352.4}p^{7} - i\,\psi^{745.6}p^{3} + i\,\psi^{564.7}p^{2} - i\,\psi^{276.3}p^{5}) = m\varphi^{1}, \\
&\tfrac{1}{2}(2\psi^{2}p^{0} + i\,\psi^{163.4}p^{5} - i\,\psi^{546.7}p^{1} + i\,\psi^{674.5}p^{3} - i\,\psi^{357.1}p^{6} + i\,\psi^{715.3}p^{4} - i\,\psi^{431.6}p^{7}) = m\varphi^{2}, \\
&\tfrac{1}{2}(2\psi^{3}p^{0} + i\,\psi^{754.6}p^{1} - i\,\psi^{165.2}p^{7} + i\,\psi^{526.1}p^{4} - i\,\psi^{412.7}p^{5} + i\,\psi^{271.4}p^{6} - i\,\psi^{647.5}p^{2}) = m\varphi^{3}, \\
&\tfrac{1}{2}(2\psi^{4}p^{0} + i\,\psi^{216.5}p^{7} - i\,\psi^{751.3}p^{2} + i\,\psi^{135.7}p^{6} - i\,\psi^{673.2}p^{1} + i\,\psi^{327.6}p^{5} - i\,\psi^{562.1}p^{3}) = m\varphi^{4}, \\
&\tfrac{1}{2}(2\psi^{5}p^{0} + i\,\psi^{421.7}p^{3} - i\,\psi^{372.6}p^{4} + i\,\psi^{267.3}p^{1} - i\,\psi^{136.4}p^{2} + i\,\psi^{643.1}p^{7} - i\,\psi^{714.2}p^{6}) = m\varphi^{5}, \\
&\tfrac{1}{2}(2\psi^{6}p^{0} + i\,\psi^{375.1}p^{2} - i\,\psi^{217.4}p^{3} + i\,\psi^{741.2}p^{5} - i\,\psi^{524.3}p^{7} + i\,\psi^{432.5}p^{1} - i\,\psi^{153.7}p^{4}) = m\varphi^{6}, \\
&\tfrac{1}{2}(2\psi^{7}p^{0} + i\,\psi^{542.3}p^{6} - i\,\psi^{634.1}p^{5} + i\,\psi^{413.6}p^{2} - i\,\psi^{261.5}p^{4} + i\,\psi^{156.2}p^{3} - i\,\psi^{325.4}p^{1}) = m\varphi^{7},
\end{aligned}\right\}$$

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{2}(2\varphi^{1}p^{0} - i\,\varphi^{637.2}p^{4} + i\,\varphi^{423.5}p^{6} - i\,\varphi^{352.4}p^{7} + i\,\varphi^{745.6}p^{3} - i\,\varphi^{564.7}p^{2} + i\,\varphi^{276.3}p^{5}) = m\psi^{1}, \\
&\tfrac{1}{2}(2\varphi^{2}p^{0} - i\,\varphi^{163.4}p^{5} + i\,\varphi^{546.7}p^{1} - i\,\varphi^{674.5}p^{3} + i\,\varphi^{357.1}p^{6} - i\,\varphi^{715.3}p^{4} + i\,\varphi^{431.6}p^{7}) = m\psi^{2}, \\
&\tfrac{1}{2}(2\varphi^{3}p^{0} - i\,\varphi^{754.6}p^{1} + i\,\varphi^{165.2}p^{7} - i\,\varphi^{526.1}p^{4} + i\,\varphi^{412.7}p^{5} - i\,\varphi^{271.4}p^{6} + i\,\varphi^{647.5}p^{2}) = m\psi^{3}, \\
&\tfrac{1}{2}(2\varphi^{4}p^{0} - i\,\varphi^{216.5}p^{7} + i\,\varphi^{751.3}p^{2} - i\,\varphi^{135.7}p^{6} + i\,\varphi^{673.2}p^{1} - i\,\varphi^{327.6}p^{5} + i\,\varphi^{562.1}p^{3}) = m\psi^{4}, \\
&\tfrac{1}{2}(2\varphi^{5}p^{0} - i\,\varphi^{421.7}p^{3} + i\,\varphi^{372.6}p^{4} - i\,\varphi^{267.3}p^{1} + i\,\varphi^{136.4}p^{2} - i\,\varphi^{643.1}p^{7} + i\,\varphi^{714.2}p^{6}) = m\psi^{5}, \\
&\tfrac{1}{2}(2\varphi^{6}p^{0} - i\,\varphi^{375.1}p^{2} + i\,\varphi^{217.4}p^{3} - i\,\varphi^{741.2}p^{5} + i\,\varphi^{524.3}p^{7} - i\,\varphi^{432.5}p^{1} + i\,\varphi^{153.7}p^{4}) = m\psi^{6}, \\
&\tfrac{1}{2}(2\varphi^{7}p^{0} - i\,\varphi^{542.3}p^{6} + i\,\varphi^{634.1}p^{5} - i\,\varphi^{413.6}p^{2} + i\,\varphi^{261.5}p^{4} - i\,\varphi^{156.2}p^{3} + i\,\varphi^{325.4}p^{1}) = m\psi^{7}.
\end{aligned}$$

Две пары этих уравнений можно записать в виде уравнений (Дирака) с помощью найденных выше матриц (Паули)

$$\left.\begin{aligned} (p^0 - pL)\psi &= m\varphi, \\ (p^0 + pL)\varphi &= m\psi. \end{aligned}\right\}$$

Им соответствует представление 14-типлета частиц со спином J=1 в виде

$$\left\{\begin{matrix} \psi^1, \psi^2, \psi^3, \psi^4, \psi^5, \psi^6, \psi^7 \\ \varphi^1, \varphi^2, \varphi^3, \varphi^4, \varphi^5, \varphi^6, \varphi^7 . \end{matrix}\right\}$$

Волновая функция мультиплета частиц в спинорном представлении определяется совокупностью двух шестикомпонентных 8-спиноров 1-го ранга ψ^α и φ^β, а операторный 8-спинор 2-го ранга $p^{\alpha\beta}$ имеет вид:

$$p^{\alpha\beta}=½ \left\| \begin{array}{cc|cccc} -p^{1.5}+ip^{36} & p^{541}-ip^{623} & 2(p^0+p^7) & -p^{5.4}+ip^{62} & -p^{4.1}+ip^{23} & p^{541}+ip^{623} \\ p^{541}-ip^{623} & p^{4.1}+ip^{23} & p^{5.4}+ip^{62} & 2(-p^0+p^7) & p^{541}+ip^{623} & p^{1.5}+ip^{36} \\ \hline 2(-p^0+p^7) & p^{5.4}+ip^{62} & p^{1.5}+ip^{36} & p^{541}+ip^{623} & p^{541}-ip^{623} & p^{4.1}+ip^{23} \\ -p^{5.4}+ip^{62} & 2(p^0+p^7) & p^{541}+ip^{623} & -p^{4.1}+ip^{23} & -p^{1.5}+ip^{36} & p^{541}-ip^{623} \\ -p^{4.1}+ip^{23} & p^{541}+ip^{623} & p^{541}-ip^{623} & -p^{1.5}+ip^{36} & -p^{5.4}+ip^{62} & 2(p^0+p^7) \\ p^{541}+ip^{623} & p^{1.5}+ip^{36} & p^{4.1}+ip^{23} & p^{541}-ip^{623} & 2(-p^0+p^7) & p^{5.4}+ip^{62} \end{array} \right\| .$$

Действуя оператором $p^{\alpha\beta}$ на 8-спиноры ψ^α и φ^β, образовывая скалярное произведение по индексам:

$$\left.\begin{aligned} (p^{5\beta}\psi^6 + p^{4\beta}\psi^2 + p^{1\beta}\psi^3) - (p^{6\beta}\psi^5 + p^{2\beta}\psi^4 + p^{3\beta}\psi^1) &= m\varphi^\beta, \\ (p^{\alpha 6}\varphi^5 + p^{\alpha 2}\varphi^4 + p^{\alpha 3}\varphi^1) - (p^{\alpha 5}\varphi^6 + p^{\alpha 4}\varphi^2 + p^{\alpha 1}\varphi^3) &= m\psi^\alpha, \end{aligned}\right\}$$

получим:

$$\left.\begin{aligned}
&\tfrac12(2\psi^1p^0 + i\,\psi^{624.5}p^2 - \psi^{453.6}p^1 - \psi^{452.3}p^5 + i\,\psi^{234.5}p^6 + i\,\psi^{364.5}p^3 - \psi^{456.2}p^4 - 2\psi^1p^7) = m\varphi^1,\\
&\tfrac12(2\psi^2p^0 - i\,\psi^{413.6}p^2 + \psi^{364.5}p^1 + \psi^{365.1}p^5 - i\,\psi^{153.6}p^6 - i\,\psi^{543.6}p^3 + \psi^{361.4}p^4 + 2\psi^2p^7) = m\varphi^2,\\
&\tfrac12(2\psi^3p^0 - i\,\psi^{546.2}p^2 + \psi^{625.1}p^1 + \psi^{621.4}p^5 - i\,\psi^{416.2}p^6 - i\,\psi^{156.2}p^3 + \psi^{624.5}p^4 + 2\psi^3p^7) = m\varphi^3,\\
&\tfrac12(2\psi^4p^0 + i\,\psi^{235.1}p^2 - \psi^{516.2}p^1 - \psi^{513.6}p^5 + i\,\psi^{365.1}p^6 + i\,\psi^{625.1}p^3 - \psi^{512.3}p^4 - 2\psi^4p^7) = m\varphi^4,\\
&\tfrac12(2\psi^5p^0 + i\,\psi^{361.4}p^2 - \psi^{142.3}p^1 - \psi^{146.2}p^5 + i\,\psi^{621.4}p^6 + i\,\psi^{231.4}p^3 - \psi^{143.6}p^4 - 2\psi^5p^7) = m\varphi^5,\\
&\tfrac12(2\psi^6p^0 - i\,\psi^{152.3}p^2 + \psi^{231.4}p^1 + \psi^{234.5}p^5 - i\,\psi^{542.3}p^6 - i\,\psi^{412.3}p^3 + \psi^{235.1}p^4 + 2\psi^6p^7) = m\varphi^6,
\end{aligned}\right\}$$

$$\begin{aligned}
&\tfrac12(2\varphi^1p^0 - i\,\varphi^{624.5}p^2 + \varphi^{453.6}p^1 + \varphi^{452.3}p^5 - i\,\varphi^{234.5}p^6 - i\,\varphi^{364.5}p^3 + \varphi^{456.2}p^4 + 2\varphi^1p^7) = m\psi^1,\\
&\tfrac12(2\varphi^2p^0 + i\,\varphi^{413.6}p^2 - \varphi^{364.5}p^1 - \varphi^{365.1}p^5 + i\,\varphi^{153.6}p^6 + i\,\varphi^{543.6}p^3 - \varphi^{361.4}p^4 - 2\varphi^2p^7) = m\psi^2,\\
&\tfrac12(2\varphi^3p^0 + i\,\varphi^{546.2}p^2 - \varphi^{625.1}p^1 - \varphi^{621.4}p^5 + i\,\varphi^{416.2}p^6 + i\,\varphi^{156.2}p^3 - \varphi^{624.5}p^4 - 2\varphi^3p^7) = m\psi^3,\\
&\tfrac12(2\varphi^4p^0 - i\,\varphi^{235.1}p^2 + \varphi^{516.2}p^1 + \varphi^{513.6}p^5 - i\,\varphi^{365.1}p^6 - i\,\varphi^{625.1}p^3 + \varphi^{512.3}p^4 + 2\varphi^4p^7) = m\psi^4,\\
&\tfrac12(2\varphi^5p^0 - i\,\varphi^{361.4}p^2 + \varphi^{142.3}p^1 + \varphi^{146.2}p^5 - i\,\varphi^{621.4}p^6 - i\,\varphi^{231.4}p^3 + \varphi^{143.6}p^4 + 2\varphi^5p^7) = m\psi^5,\\
&\tfrac12(2\varphi^6p^0 + i\,\varphi^{152.3}p^2 - \varphi^{231.4}p^1 - \varphi^{234.5}p^5 + i\,\varphi^{542.3}p^6 + i\,\varphi^{412.3}p^3 - \varphi^{235.1}p^4 - 2\varphi^6p^7) = m\psi^6.
\end{aligned}$$

Две пары этих уравнений можно записать в виде уравнений (Дирака)

$$\left.\begin{aligned}
(p^0 - p\sigma)\psi &= m\varphi,\\
(p^0 + p\sigma)\varphi &= m\psi
\end{aligned}\right\}$$

с помощью матриц (Паули) вида:

$$\sigma_5 = \tfrac12\left\|\begin{array}{cc|cccc}
0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0\\
1 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1\\
\hline
-1 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1\\
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1\\
1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1\\
0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0
\end{array}\right\|,\qquad
\sigma_6 = \tfrac12\left\|\begin{array}{cc|cccc}
0 & -i & -i & -i & i & 0\\
i & 0 & i & 0 & i & -i\\
\hline
i & -i & 0 & i & 0 & i\\
i & 0 & -i & 0 & -i & -i\\
-i & -i & 0 & i & 0 & -i\\
0 & i & -i & i & i & 0
\end{array}\right\|,$$

$$\sigma_4=\tfrac{1}{2}\left\|\begin{array}{cc|cccc} 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ \hline 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right\|, \quad \sigma_2=\tfrac{1}{2}\left\|\begin{array}{cc|cccc} 0 & -i & 0 & -i & i & -i \\ i & 0 & i & i & 0 & -i \\ \hline 0 & -i & 0 & i & i & i \\ i & -i & -i & 0 & -i & 0 \\ -i & 0 & -i & i & 0 & -i \\ i & i & -i & 0 & i & 0 \end{array}\right\|,$$

$$\sigma_1=\tfrac{1}{2}\left\|\begin{array}{cc|cccc} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ \hline 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right\|, \quad \sigma_3=\tfrac{1}{2}\left\|\begin{array}{cc|cccc} 0 & 0 & -i & -i & i & -i \\ 0 & 0 & i & i & i & -i \\ \hline i & -i & 0 & 0 & i & i \\ i & -i & 0 & 0 & -i & -i \\ -i & -i & -i & i & 0 & 0 \\ i & i & -i & i & 0 & 0 \end{array}\right\|,$$

$$\sigma_7=\left\|\begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right\|.$$

Следующие семь унитарных матриц преобразований описывают вращения на угол φ вокруг i-той координатной оси:

$$U_{1(\varphi)}=\tfrac{1}{2}\left\|\begin{array}{cc|cccc} 2\mathrm{Cos}\varphi/2 & 0 & i\mathrm{Sin}\varphi/2 & i\mathrm{Sin}\varphi/2 & i\mathrm{Sin}\varphi/2 & -i\mathrm{Sin}\varphi/2 \\ 0 & 2\mathrm{Cos}\varphi/2 & -i\mathrm{Sin}\varphi/2 & -i\mathrm{Sin}\varphi/2 & i\mathrm{Sin}\varphi/2 & -i\mathrm{Sin}\varphi/2 \\ \hline i\mathrm{Sin}\varphi/2 & -i\mathrm{Sin}\varphi/2 & 2\mathrm{Cos}\varphi/2 & 0 & -i\mathrm{Sin}\varphi/2 & -i\mathrm{Sin}\varphi/2 \\ i\mathrm{Sin}\varphi/2 & -i\mathrm{Sin}\varphi/2 & 0 & 2\mathrm{Cos}\varphi/2 & i\mathrm{Sin}\varphi/2 & i\mathrm{Sin}\varphi/2 \\ i\mathrm{Sin}\varphi/2 & i\mathrm{Sin}\varphi/2 & -i\mathrm{Sin}\varphi/2 & i\mathrm{Sin}\varphi/2 & 2\mathrm{Cos}\varphi/2 & 0 \\ -i\mathrm{Sin}\varphi/2 & -i\mathrm{Sin}\varphi/2 & -i\mathrm{Sin}\varphi/2 & i\mathrm{Sin}\varphi/2 & 0 & 2\mathrm{Cos}\varphi/2 \end{array}\right\|,$$

$$U_{2(\varphi)} = \tfrac{1}{2}\left\|\begin{array}{cc|cccc}
2\mathrm{Cos}\varphi/2 & \mathrm{Sin}\varphi/2 & 0 & \mathrm{Sin}\varphi/2 & -\mathrm{Sin}\varphi/2 & \mathrm{Sin}\varphi/2 \\
-\mathrm{Sin}\varphi/2 & 2\mathrm{Cos}\varphi/2 & -\mathrm{Sin}\varphi/2 & -\mathrm{Sin}\varphi/2 & 0 & \mathrm{Sin}\varphi/2 \\
\hline
0 & \mathrm{Sin}\varphi/2 & 2\mathrm{Cos}\varphi/2 & -\mathrm{Sin}\varphi/2 & -\mathrm{Sin}\varphi/2 & -\mathrm{Sin}\varphi/2 \\
-\mathrm{Sin}\varphi/2 & \mathrm{Sin}\varphi/2 & \mathrm{Sin}\varphi/2 & 2\mathrm{Cos}\varphi/2 & \mathrm{Sin}\varphi/2 & 0 \\
\mathrm{Sin}\varphi/2 & 0 & \mathrm{Sin}\varphi/2 & -\mathrm{Sin}\varphi/2 & 2\mathrm{Cos}\varphi/2 & \mathrm{Sin}\varphi/2 \\
-\mathrm{Sin}\varphi/2 & -\mathrm{Sin}\varphi/2 & \mathrm{Sin}\varphi/2 & 0 & -\mathrm{Sin}\varphi/2 & 2\mathrm{Cos}\varphi/2
\end{array}\right\| ,$$

$$U_{3(\varphi)} = \tfrac{1}{2}\left\|\begin{array}{cc|cccc}
2\mathrm{Cos}\varphi/2 & 0 & \mathrm{Sin}\varphi/2 & \mathrm{Sin}\varphi/2 & -\mathrm{Sin}\varphi/2 & \mathrm{Sin}\varphi/2 \\
0 & 2\mathrm{Cos}\varphi/2 & -\mathrm{Sin}\varphi/2 & -\mathrm{Sin}\varphi/2 & -\mathrm{Sin}\varphi/2 & \mathrm{Sin}\varphi/2 \\
\hline
-\mathrm{Sin}\varphi/2 & \mathrm{Sin}\varphi/2 & 2\mathrm{Cos}\varphi/2 & 0 & -\mathrm{Sin}\varphi/2 & -\mathrm{Sin}\varphi/2 \\
-\mathrm{Sin}\varphi/2 & \mathrm{Sin}\varphi/2 & 0 & 2\mathrm{Cos}\varphi/2 & \mathrm{Sin}\varphi/2 & \mathrm{Sin}\varphi/2 \\
\mathrm{Sin}\varphi/2 & \mathrm{Sin}\varphi/2 & \mathrm{Sin}\varphi/2 & -\mathrm{Sin}\varphi/2 & 2\mathrm{Cos}\varphi/2 & 0 \\
-\mathrm{Sin}\varphi/2 & -\mathrm{Sin}\varphi/2 & \mathrm{Sin}\varphi/2 & -\mathrm{Sin}\varphi/2 & 0 & 2\mathrm{Cos}\varphi/2
\end{array}\right\| ,$$

$$U_{4(\varphi)} = \tfrac{1}{2}\left\|\begin{array}{cc|cccc}
2\mathrm{Cos}\varphi/2 & -i\mathrm{Sin}\varphi/2 & 0 & i\mathrm{Sin}\varphi/2 & i\mathrm{Sin}\varphi/2 & i\mathrm{Sin}\varphi/2 \\
-i\mathrm{Sin}\varphi/2 & 2\mathrm{Cos}\varphi/2 & -i\mathrm{Sin}\varphi/2 & i\mathrm{Sin}\varphi/2 & 0 & -i\mathrm{Sin}\varphi/2 \\
\hline
0 & -i\mathrm{Sin}\varphi/2 & 2\mathrm{Cos}\varphi/2 & -i\mathrm{Sin}\varphi/2 & i\mathrm{Sin}\varphi/2 & -i\mathrm{Sin}\varphi/2 \\
i\mathrm{Sin}\varphi/2 & i\mathrm{Sin}\varphi/2 & -i\mathrm{Sin}\varphi/2 & 2\mathrm{Cos}\varphi/2 & i\mathrm{Sin}\varphi/2 & 0 \\
i\mathrm{Sin}\varphi/2 & 0 & i\mathrm{Sin}\varphi/2 & i\mathrm{Sin}\varphi/2 & 2\mathrm{Cos}\varphi/2 & -i\mathrm{Sin}\varphi/2 \\
i\mathrm{Sin}\varphi/2 & -i\mathrm{Sin}\varphi/2 & -i\mathrm{Sin}\varphi/2 & 0 & -i\mathrm{Sin}\varphi/2 & 2\mathrm{Cos}\varphi/2
\end{array}\right\| ,$$

$$U_{5(\varphi)} = \tfrac{1}{2}\left\|\begin{array}{cc|cccc}
2\mathrm{Cos}\varphi/2 & i\mathrm{Sin}\varphi/2 & -i\mathrm{Sin}\varphi/2 & i\mathrm{Sin}\varphi/2 & i\mathrm{Sin}\varphi/2 & 0 \\
i\mathrm{Sin}\varphi/2 & 2\mathrm{Cos}\varphi/2 & -i\mathrm{Sin}\varphi/2 & 0 & -i\mathrm{Sin}\varphi/2 & -i\mathrm{Sin}\varphi/2 \\
\hline
-i\mathrm{Sin}\varphi/2 & -i\mathrm{Sin}\varphi/2 & 2\mathrm{Cos}\varphi/2 & i\mathrm{Sin}\varphi/2 & 0 & -i\mathrm{Sin}\varphi/2 \\
i\mathrm{Sin}\varphi/2 & 0 & i\mathrm{Sin}\varphi/2 & 2\mathrm{Cos}\varphi/2 & i\mathrm{Sin}\varphi/2 & -i\mathrm{Sin}\varphi/2 \\
i\mathrm{Sin}\varphi/2 & -i\mathrm{Sin}\varphi/2 & 0 & i\mathrm{Sin}\varphi/2 & 2\mathrm{Cos}\varphi/2 & i\mathrm{Sin}\varphi/2 \\
0 & -i\mathrm{Sin}\varphi/2 & -i\mathrm{Sin}\varphi/2 & -i\mathrm{Sin}\varphi/2 & i\mathrm{Sin}\varphi/2 & 2\mathrm{Cos}\varphi/2
\end{array}\right\| ,$$

$$
U_{6(\varphi)} = \frac{1}{2}\left\|\begin{array}{cc|cccc}
2\mathrm{Cos}\varphi/2 & \mathrm{Sin}\varphi/2 & \mathrm{Sin}\varphi/2 & \mathrm{Sin}\varphi/2 & -\mathrm{Sin}\varphi/2 & 0 \\
-\mathrm{Sin}\varphi/2 & 2\mathrm{Cos}\varphi/2 & -\mathrm{Sin}\varphi/2 & 0 & -\mathrm{Sin}\varphi/2 & \mathrm{Sin}\varphi/2 \\
\hline
-\mathrm{Sin}\varphi/2 & \mathrm{Sin}\varphi/2 & 2\mathrm{Cos}\varphi/2 & -\mathrm{Sin}\varphi/2 & 0 & -\mathrm{Sin}\varphi/2 \\
-\mathrm{Sin}\varphi/2 & 0 & \mathrm{Sin}\varphi/2 & 2\mathrm{Cos}\varphi/2 & \mathrm{Sin}\varphi/2 & \mathrm{Sin}\varphi/2 \\
\mathrm{Sin}\varphi/2 & \mathrm{Sin}\varphi/2 & 0 & -\mathrm{Sin}\varphi/2 & 2\mathrm{Cos}\varphi/2 & \mathrm{Sin}\varphi/2 \\
0 & -\mathrm{Sin}\varphi/2 & \mathrm{Sin}\varphi/2 & -\mathrm{Sin}\varphi/2 & -\mathrm{Sin}\varphi/2 & 2\mathrm{Cos}\varphi/2
\end{array}\right\|,
$$

$$
U_{7(\varphi)} = \left\|\begin{array}{cc|cccc}
e^{i\varphi/2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & e^{-i\varphi/2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & e^{-i\varphi/2} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & e^{i\varphi/2} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & e^{i\varphi/2} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{-i\varphi/2}
\end{array}\right\|.
$$

Запись уравнений (Дирака) в спинорном представлении можно осуществить в виде:

$$
\left.\begin{array}{l}
(p^0 - p^{7541})\,\psi^{541} + ip^{623}\,\psi^{623} = m\varphi^{541}, \\
(p^0 + p^{7541})\,\psi^{623} - ip^{623}\,\psi^{541} = m\varphi^{623},
\end{array}\right\}
$$

$$
\begin{array}{l}
(p^0 + p^{7541})\,\varphi^{541} - ip^{623}\,\varphi^{623} = m\psi^{541}, \\
(p^0 - p^{7541})\,\varphi^{623} + ip^{623}\,\varphi^{541} = m\psi^{623},
\end{array}
$$

чему соотвепствует представление 12-типлета частиц со спином J=1/2 в форме (Глэшоу)

$$
\left\{\begin{array}{cc} \psi^5 & \psi^6 \\ \varphi^5 & \varphi^6 \end{array}\right\},
\left\{\begin{array}{cc} \psi^4 & \psi^2 \\ \varphi^4 & \varphi^2 \end{array}\right\},
\left\{\begin{array}{cc} \psi^1 & \psi^3 \\ \varphi^1 & \varphi^3 \end{array}\right\}.
$$

Приведем также выражение тензоров полей, соответствующих каждой из четырех семимерных векторных алгебр:

- для известной алгебры:

$$F^0_{ik}=\left\Vert\begin{array}{cccc|cccc}
0 & E^1 & E^2 & E^3 & E^4 & E^5 & E^6 & E^7 \\
-E^1 & 0 & -H^3 & H^2 & -H^5 & H^4 & H^7 & -H^6 \\
-E^2 & H^3 & 0 & -H^1 & -H^6 & -H^7 & H^4 & H^5 \\
-E^3 & -H^2 & H^1 & 0 & -H^7 & H^6 & -H^5 & H^4 \\
\hline
-E^4 & H^5 & H^6 & H^7 & 0 & -H^1 & -H^2 & -H^3 \\
-E^5 & -H^4 & H^7 & -H^6 & H^1 & 0 & H^3 & -H^2 \\
-E^6 & -H^7 & -H^4 & H^5 & H^2 & -H^3 & 0 & H^1 \\
-E^7 & H^6 & -H^5 & -H^4 & H^3 & H^2 & -H^1 & 0
\end{array}\right\Vert,$$

- для полученных алгебр:

$$F^1_{ik}=\left\Vert\begin{array}{cccc|cccc}
0 & E^1 & E^2 & E^3 & E^4 & E^5 & E^6 & E^7 \\
-E^1 & 0 & H^5 & -H^7 & H^6 & -H^2 & -H^4 & H^3 \\
-E^2 & -H^5 & 0 & H^6 & H^7 & H^1 & -H^3 & -H^4 \\
-E^3 & H^7 & -H^6 & 0 & H^5 & -H^4 & H^2 & -H^1 \\
\hline
-E^4 & -H^6 & -H^7 & -H^5 & 0 & H^3 & H^1 & H^2 \\
-E^5 & H^2 & -H^1 & H^4 & -H^3 & 0 & -H^7 & H^6 \\
-E^6 & H^4 & H^3 & -H^2 & -H^1 & H^7 & 0 & -H^5 \\
-E^7 & -H^3 & H^4 & H^1 & -H^2 & -H^6 & H^5 & 0
\end{array}\right\Vert,$$

$$F^2_{ik}=\tfrac{1}{2}\left\Vert\begin{array}{cccc|cccc}
0 & 2E^1 & 2E^2 & 2E^3 & 2E^4 & 2E^5 & 2E^6 & 2E^7 \\
-2E^1 & 0 & -H^{364.7} & H^{245.6} & -H^{537.2} & H^{476.3} & H^{723.5} & -H^{652.4} \\
-2E^2 & H^{346.7} & 0 & -H^{174.5} & -H^{615.3} & -H^{763.4} & H^{457.1} & H^{531.6} \\
-2E^3 & -H^{254.6} & H^{147.5} & 0 & -H^{726.1} & H^{612.7} & -H^{571.4} & H^{465.2} \\
\hline
-2E^4 & H^{573.2} & H^{651.3} & H^{762.1} & 0 & -H^{127.6} & -H^{235.7} & -H^{316.5} \\
-2E^5 & -H^{467.3} & H^{736.4} & -H^{621.7} & H^{172.6} & 0 & H^{314.2} & -H^{243.1} \\
-2E^6 & -H^{732.5} & -H^{475.1} & H^{517.4} & H^{253.7} & -H^{341.2} & 0 & H^{124.3} \\
-2E^7 & H^{625.4} & -H^{513.6} & -H^{456.2} & H^{361.5} & H^{234.1} & -H^{142.3} & 0
\end{array}\right\Vert,$$

$$F^3{}_{ik}=\tfrac{1}{2}\left\|\begin{array}{cccc|cccc}
0 & 2E^1 & 2E^2 & 2E^3 & 2E^4 & 2E^5 & 2E^6 & 2E^7 \\
-2E^1 & 0 & H^{564.7} & -H^{745.6} & H^{637.2} & -H^{276.3} & -H^{423.5} & H^{352.4} \\
-2E^2 & -H^{546.7} & 0 & H^{674.5} & H^{715.3} & H^{163.4} & -H^{357.1} & -H^{431.6} \\
-2E^3 & H^{754.6} & -H^{647.5} & 0 & H^{526.1} & -H^{412.7} & H^{271.4} & -H^{165.2} \\
\hline
-2E^4 & -H^{673.2} & -H^{751.3} & -H^{562.1} & 0 & H^{327.6} & H^{135.7} & H^{216.5} \\
-2E^5 & H^{267.3} & -H^{136.4} & H^{421.7} & -H^{372.6} & 0 & -H^{714.2} & H^{643.1} \\
-2E^6 & H^{432.5} & H^{375.1} & -H^{217.4} & -H^{153.7} & H^{741.2} & 0 & -H^{524.3} \\
-2E^7 & -H^{325.4} & H^{413.6} & H^{156.2} & -H^{261.5} & -H^{634.1} & H^{542.3} & 0
\end{array}\right\|,$$

Таким образом, в семипараметровых семимерных ортогональных и шестимерных унитарных преобразованиях вращения прогнозируются четыре поля и соответствующие им мультиплеты частиц: из 14-ти в двух группах по семь частиц при J=1 и из 12-ти в двух группах по шесть частиц при J=1/2. Эти преобразования применением операции умножения матриц позволяют получить описание полей и совокупностей частиц с произвольным спином. Вместе с тем, в семимерной алгебре имеют место операции векторного умножения трех -, четырех-, пяти- и шести векторов с антисимметричными тензорами структурных констант, дающие соответствующие поля и мультиплеты частиц. Они обеспечивают соблюдение свойств симметрии семипараметровых преобразований векторных величин, свойственных алгебре семимерных векторов.

В заключение отметим, что число экспериментально выявленных барионов со спином J=1/2 и мезонов со спином J=1 близко к прогнозируемому семимерным исчислением (соответственно 30 из 36 и 42 из 49) [3], так что в ближайшем будущем мы станем свидетелями подтверждения либо опровержения применимости семимерной алгебры к описанию картины физического мира. В частности, в последнее время найдена предсказанная раннее частица с очарованием C=2.

Литература

1. **Коротков А.В.** Элементы семимерного векторного исчисления. Алгебра. Геометрия. Теория поля. – Новочеркасск: Набла, 1996. – 244с.
2. **Коротков А.В**. Элементы трех- и семимерного изовекторного и спинорного исчислений. – Новочеркасск: Набла, 1999. –100с.
3. **Caso C. et al.** Review of Particle Physics. (Particle Data Group), European Physical Journal C3, 1., 1998.

КОРОТКОВ А. В.
ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ТЕНЗОРОВ СИММЕТРИЧНЫХ ПОЛИЛИНЕЙНЫХ СКАЛЯРНЫХ ФУНКЦИЙ И ФОРМ

1. Преобразование векторов двух базисов с общим началом

Пусть в некоторой точке выбраны два векторных базиса $\mathbf{e}_1,...,\mathbf{e}_n$ и $\mathbf{e}_1{}',...,\mathbf{e}_n{}'$. Любой из векторов первого базиса можно разложить по векторам второго базиса и наоборот. Обозначим через $e^1{}_{i'},e^2{}_{i'},...,e^n{}_{i'}$ (i=1,2,...,n) коэффициенты разложения вектора $\mathbf{e}_i{}'$ по векторам базиса $\mathbf{e}_1,...,\mathbf{e}_n$ эти n^2-величин называют коэффициентами прямого преобразования. Имеем

$$\mathbf{e}_1{}'=e^1{}_{1'}\mathbf{e}_1+e^2{}_{1'}\mathbf{e}_2+\ldots+e^n{}_{1'}\mathbf{e}_n=\sum e^k{}_{1'}\mathbf{e}_k;$$

$$\mathbf{e}_2{}'=e^1{}_{2'}\mathbf{e}_1+e^2{}_{2'}\mathbf{e}_2+\ldots+e^n{}_{2'}\mathbf{e}_n=\sum e^k{}_{2'}\mathbf{e}_k;$$

....

$$\mathbf{e}_n{}'=e^1{}_{n'}\mathbf{e}_1+e^2{}_{n'}\mathbf{e}_2+\ldots+e^n{}_{n'}\mathbf{e}_n=\sum e^k{}_{n'}\mathbf{e}_k,$$

или в общем виде

$$\mathbf{e}_i{}'=\sum e^k{}_{i'}\mathbf{e}_k, \qquad k=1,2,...,n.$$

Аналогично, коэффициенты разложения вектора $\mathbf{e}_i$ по векторам $\mathbf{e}_1{}',...,\mathbf{e}_n{}'$ обозначим через $e^{1'}{}_i,e^{2'}{}_i,...,e^{n'}{}_i$ (i=1,2,..,n). Эти n^2-величин называют коэффициентами обратного преобразования:

$$\mathbf{e}_1=e^{1'}{}_1\mathbf{e}_1{}'+e^{2'}{}_1\mathbf{e}_2{}'+\ldots+e^{n'}{}_1\mathbf{e}_n{}'=\sum e^{k'}{}_1\mathbf{e}_k{}';$$

$$\mathbf{e}_2=e^{1'}{}_2\mathbf{e}_1{}'+e^{2'}{}_2\mathbf{e}_2{}'+\ldots+e^{n'}{}_2\mathbf{e}_n{}'=\sum e^{k'}{}_2\mathbf{e}_k{}';$$

....

$$\mathbf{e}_n=e^{1'}{}_n\mathbf{e}_1{}'+e^{2'}{}_n\mathbf{e}_2{}'+\ldots+e^{n'}{}_n\mathbf{e}_n{}'=\sum e^{k'}{}_n\mathbf{e}_k{}',$$

или в общем виде

$$\mathbf{e}_i=\sum e^{k'}{}_i\mathbf{e}_k{}', \qquad k=1,2,...,n.$$

Между коэффициентами прямого и обратного преобразования существует связь. Подставив разложение каждого вектора $\mathbf{e}_k$ из второй группы формул в первую, найдем

$$\mathbf{e}_i{}'=e^1{}_{i'}\mathbf{e}_1+e^2{}_{i'}\mathbf{e}_2+\ldots+e^n{}_{i'}\mathbf{e}_n=$$

$$=e^1{}_{i'}(e^{1'}{}_1\mathbf{e}_1{}'+\ldots+e^{n'}{}_1\mathbf{e}_n{}')+...+e^n{}_{i'}(e^{1'}{}_n\mathbf{e}_1{}'+\ldots+e^{n'}{}_n\mathbf{e}_n{}')=$$

$$=(e^1{}_{i'}e^{1'}{}_1+...+e^n{}_{i'}e^{1'}{}_n)\mathbf{e}_1{}'+...+(e^1{}_{i'}e^{n'}{}_1+...+e^n{}_{i'}e^{n'}{}_n)\mathbf{e}_n{}'=$$

$$=\mathbf{e}_1'\sum e^m{}_{i'}e^{1'}{}_m+...+\mathbf{e}_n'\sum e^m{}_{i'}e^{n'}{}_m=\sum\mathbf{e}_k'\sum e^m{}_{i'}e^{k'}{}_m \qquad k,m=1,2,...,n.$$

Аналогичным путем получим

$$\mathbf{e}_i=e^{1'}{}_1\mathbf{e}_1'+e^{2'}{}_1\mathbf{e}_2'+\ldots+e^{n'}{}_1\mathbf{e}_n'=$$

$$=e^{1'}{}_1(e^1{}_{1'}\mathbf{e}_1+\ldots+e^n{}_{1'}\mathbf{e}_n)+\ldots+e^{n'}{}_1(e^1{}_{n'}\mathbf{e}_1+\ldots+e^n{}_n\mathbf{e}_n)=$$

$$=(e^{1'}{}_1e^1{}_{1'}+...+e^{n'}{}_1e^1{}_{n'})\mathbf{e}_1+...+(e^{1'}{}_1e^n{}_{1'}+...+e^{n'}{}_1e^n{}_{n'})\mathbf{e}_n=$$

$$=\mathbf{e}_1\sum e^{m'}{}_ie^1{}_{m'}+...+\mathbf{e}_n\sum e^{m'}{}_ie^n{}_{m'}=\sum\mathbf{e}_k\sum e^{m'}{}_ie^k{}_{m'} \qquad k,m=1,2,...,n.$$

Таким образом, для каждого значения индекса i (i=1,2,...,n) имеют место $2n^2$ соотношений:

$\sum e^m{}_{i'}e^{k'}{}_m=\delta^{k'}{}_{i'}$ и $\sum e^{m'}{}_ie^k{}_{m'}=\delta^k{}_i$, равных 0 при $i\neq k$ и 1 при i=k.

2. Преобразование координат векторов при изменении базиса

Один и тот же вектор **a** можно представить разложенным по векторам исходного и преобразованного базисов, т.е.

$$\mathbf{a}=a^1\mathbf{e}_1+a^2\mathbf{e}_2+...+a^n\mathbf{e}_n=$$

$$=a^1(e^{1'}{}_1\mathbf{e}_1'+e^{2'}{}_1\mathbf{e}_2'+\ldots+e^{n'}{}_1\mathbf{e}_n')+...+a^n(e^{1'}{}_n\mathbf{e}_1'+e^{2'}{}_n\mathbf{e}_2'+\ldots+e^{n'}{}_n\mathbf{e}_n')=$$

$$=(a^1e^{1'}{}_1+...+a^ne^{1'}{}_n)\mathbf{e}_1'+...+(a^1e^{n'}{}_1+...+a^ne^{n'}{}_n)\mathbf{e}_n'=$$

$$=a^{1'}\mathbf{e}_1'+a^{2'}\mathbf{e}_2'+...+a^{n'}\mathbf{e}_n',$$

другими словами,

$$a^{1'}=a^1e^{1'}{}_1+a^2e^{1'}{}_2+...+a^ne^{1'}{}_n$$

$$a^{2'}=a^1e^{2'}{}_1+a^2e^{2'}{}_2+...+a^ne^{2'}{}_n$$

....

$$a^{n'}=a^1e^{n'}{}_1+a^2e^{n'}{}_2+...+a^ne^{n'}{}_n$$

или

$$a^{i'}=\sum e^{i'}{}_ka^k, \qquad k=1,2,...,n$$

Аналогично

$$\mathbf{a}=a^{1'}\mathbf{e}_1'+a^{2'}\mathbf{e}_2'+...+a^{n'}\mathbf{e}_n'=$$

$$=a^{1'}(e^1{}_{1'}\mathbf{e}_1+e^2{}_{1'}\mathbf{e}_2+\ldots+e^n{}_{1'}\mathbf{e}_n)+\ldots+a^{n'}(e^1{}_{n'}\mathbf{e}_1+e^2{}_{n'}\mathbf{e}_2+\ldots+e^n{}_{n'}\mathbf{e}_n)=$$

$=(a^{1'}e^{1}_{1'}+\ldots+a^{n'}e^{1}_{n'})\mathbf{e}_1+\ldots+(a^{1'}e^{n}_{1'}+\ldots+a^{n'}e^{n}_{n'})\mathbf{e}_n=$

$=a^1\mathbf{e}_1+a^2\mathbf{e}_2+\ldots+a^n\mathbf{e}_n,$

другими словами,

$a^1=a^{1'}e^{1}_{1'}+a^{2'}e^{1}_{2'}+\ldots+a^{n'}e^{1}_{n'}$

$a^2=a^{1'}e^{2}_{1'}+a^{2'}e^{2}_{2'}+\ldots+a^{n'}e^{2}_{n'}$

....

$a^n=a^{1'}e^{n}_{1'}+a^{2'}e^{n}_{2'}+\ldots+a^{n'}e^{n}_{n'}$

или $\quad a^i=\sum e^{i}_{k'}a^{k'}, \qquad k=1,2,\ldots,n.$

3. Линейные функции и формы от одного переменного

Чтобы задать линейную функцию от одного переменного $l(\mathbf{a})$, необходимо задать набор ее коэффициентов $l(\mathbf{e}_i)=l_i$ (i=1,2,...,n), т.е. ее матрицу-строку $L_1=(l_1,l_2,\ldots, l_n)$.

Спрашивается: как при переходе от базиса $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n$ к новому базису $\mathbf{e}_1',\ldots,\mathbf{e}_n'$ преобразуется матрица L_1 линейной функции от одного переменного.

Пусть линейная функция от одного переменного $l(\mathbf{a})$ записывается относительно базиса $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n$ в виде линейной формы от одного переменного $l(\mathbf{a})=\sum l_i a^i=L_1A$ при $\mathbf{a}=a^1\mathbf{e}_1+\ldots+a^n\mathbf{e}_n$ с матрицей $L_1=(l_1,l_2,\ldots, l_n)$, а относительно базиса $\mathbf{e}_1',\ldots,\mathbf{e}_n'$ в виде линейной формы от одного переменного $l(\mathbf{a})=\sum l_i' a^{i'}=L_1'A'$ при $\mathbf{a}=a^{1'}\mathbf{e}_1'+\ldots+a^{n'}\mathbf{e}_n'$ с матрицей $L_1'=(l_1',l_2',\ldots, l_n')$. При этом $\mathbf{e}_i'=\sum e^{k}_{i'}e_k$ и $a^i=\sum e^{i}_{k'}a^{k'}$, k=1,...,n, что соответствует матрице преобразования координат векторов

$$H=\begin{Vmatrix} e^{1}_{1'} & e^{1}_{2'} & \ldots & e^{1}_{n'} \\ e^{2}_{1'} & e^{2}_{2'} & \ldots & e^{2}_{n'} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ e^{n}_{1'} & e^{n}_{2'} & \ldots & e^{n}_{n'} \end{Vmatrix},$$

т.е. преобразованию $A=HA'$.

Тогда имеем $\quad l(\mathbf{a})=L_1A=L_1HA'=L_1'A'$,

т.е. $\quad L_1'=L_1H$.

4. Линейные функции и формы от двух переменных

Чтобы задать линейную функцию от двух переменных $l(\mathbf{a},\mathbf{b})$, достаточно задать набор ее коэффициентов $l(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)=l_{ij}$ $(i,j=1,2,...,n)$, т.е. ее матрицу

$$L_2=\begin{Vmatrix} l_{11} & l_{12} & ... & l_{1n} \\ l_{21} & l_{22} & ... & l_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ l_{n1} & l_{n2} & ... & l_{nn} \end{Vmatrix}.$$

Спрашивается: как при переходе от базиса $\mathbf{e}_1,...,\mathbf{e}_n$ к новому базису $\mathbf{e}_1',...,\mathbf{e}_n'$ преобразуется матрица L_2 линейной функции от двух переменных.

Пусть линейная функция от двух переменных $l(\mathbf{a},\mathbf{b})$ записывается относительно базиса $\mathbf{e}_1,...,\mathbf{e}_n$ в виде линейной формы от двух переменных $l(\mathbf{a},\mathbf{b})=\sum\sum l_{ij}a^i b^j=A^T L_2 B$ при $\mathbf{a}=a^1\mathbf{e}_1+...+a^n\mathbf{e}_n$, $\mathbf{b}=b^1\mathbf{e}_1+...+b^n\mathbf{e}_n$ с матрицей L_2, а относительно базиса $\mathbf{e}_1',...,\mathbf{e}_n'$ в виде линейной формы от двух переменных $l(\mathbf{a},\mathbf{b})=\sum\sum l_{ij}' a^{i'} b^{j'}=A'^T L_2' B'$ при $\mathbf{a}=a^{1'}\mathbf{e}_1'+...+a^{n'}\mathbf{e}_n'$, $\mathbf{b}=b^{1'}\mathbf{e}_1'+...+b^{n'}\mathbf{e}_n'$ с матрицей L_2'. При этом $\mathbf{e}_i'=\sum e^k{}_{i'} e_k$ и $a^i=\sum e^i{}_{k'} a^{k'}$, $k=1,...,n$, что соответствует матрице преобразования координат векторов

$$H=\begin{Vmatrix} e^1{}_{1'} & e^1{}_{2'} & ... & e^1{}_{n'} \\ e^2{}_{1'} & e^2{}_{2'} & ... & e^2{}_{n'} \\ ... & ... & ... & ... \\ e^n{}_{1'} & e^n{}_{2'} & ... & e^n{}_{n'} \end{Vmatrix},$$

т.е. преобразованиям $A=HA'$ и $B=HB'$, т.е. $A^T=A'^T E^T$, $B^T=B'^T E^T$.

Тогда имеем $l(\mathbf{a},\mathbf{b})=A^T L_2 B=A'^T E^T L_2 H B'=A'^T(E^T L_2 H)B'=A'^T L_2' B'$,

т.е. $L_2'=E^T L_2 H$.

Линейная функция второй степени аргумента, определенная в L^n соответственно записывается относительно базиса $\mathbf{e}_1,...,\mathbf{e}_n$ формой $l(\mathbf{a},\mathbf{a})=\sum\sum l_{ij}a^i a^j=A^T L_2 A$, а относительно базиса $\mathbf{e}_1',...,\mathbf{e}_n'$ формой $l(\mathbf{a},\mathbf{a})=\sum\sum l_{ij}' a^{i'} a^{j'}= =A'^T L_2' A'$, где $L_2'=H^T L_2 H$.

5. Линейные функции и формы от трех переменных

Чтобы задать линейную функцию от трех переменных $l(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})=1/3(l(\mathbf{a},\mathbf{b})l(\mathbf{c})+l(\mathbf{b},\mathbf{c})l(\mathbf{a})+l(\mathbf{c},\mathbf{a})l(\mathbf{b}))$, достаточно задать набор ее коэффициентов $1/3(l(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j)l(\mathbf{e}_k)+l(\mathbf{e}_j,\mathbf{e}_k)l(\mathbf{e}_i)+l(\mathbf{e}_k,\mathbf{e}_i)l(\mathbf{e}_j))=1/3(l_{ij}l_k+l_{jk}l_i+l_{ki}l_j)=l_{ijk}$, т.е. тензор полилинейной формы от трех переменных L_3.

Спрашивается: как при переходе от базиса $\mathbf{e}_1,...,\mathbf{e}_n$ к новому базису $\mathbf{e}_1',...,\mathbf{e}_n'$ преобразуется тензор L_3 линейной функции от трех переменных.

Пусть линейная функция от трех переменных $l(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})$ записывается относительно базиса $\mathbf{e}_1,...,\mathbf{e}_n$ в виде линейной формы от трех переменных $l(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})=\sum\sum\sum l_{ijk}a^ib^jc^k=1/3(A^TL_2B\cdot L_1C+B^TL_2C\cdot L_1A+C^TL_2A\cdot L_1B)$ при $\mathbf{a}=a^1\mathbf{e}_1+...+a^n\mathbf{e}_n$, $\mathbf{b}=b^1\mathbf{e}_1+...+b^n\mathbf{e}_n$, $\mathbf{c}=c^1\mathbf{e}_1+...+c^n\mathbf{e}_n$ с тензором L_3, определяемым тензорами L_2 и L_1 а относительно базиса $\mathbf{e}_1',...,\mathbf{e}_n'$ в виде линейной формы от трех переменных $l(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})=\sum\sum\sum l_{ijk}'a^{i'}b^{j'}c^{k'}=1/3(A'^TL_2'B'\cdot L_1'C'+B'^TL_2'C'\cdot L_1'A'+C'^TL_2'A'\cdot L_1'B')$ при $\mathbf{a}=a^{1'}\mathbf{e}_1'+...+a^{n'}\mathbf{e}_n'$, $\mathbf{b}=b^{1'}\mathbf{e}_1'+...+b^{n'}\mathbf{e}_n'$, $\mathbf{c}=c^{1'}\mathbf{e}_1'+...+c^{n'}\mathbf{e}_n'$ с тензором L_3', определяемым тензорами L_2' и L_1'.

При этом $\mathbf{e}_i'=\sum e^k{}_{i'}e_k$ и $a^i=\sum e^i{}_{k'}a^{k'}$, $k=1,...,n$, что соответствует матрице преобразования векторов

$$H=\begin{Vmatrix} e^1{}_{1'} & e^1{}_{2'} & ... & e^1{}_{n'} \\ e^2{}_{1'} & e^2{}_{2'} & ... & e^2{}_{n'} \\ ... & ... & ... & ... \\ e^n{}_{1'} & e^n{}_{2'} & ... & e^n{}_{n'} \end{Vmatrix},$$

т.е. преобразованиям $A=HA'$, $B=HB'$, $C=HC'$, т.е. $A^T=A'^TE^T$, $B^T=B'^TE^T$, $C^T=C'^TE^T$.

Тогда имеем

$$l(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})=1/3(A^TL_2B\cdot L_1C+B^TL_2C\cdot L_1A+C^TL_2A\cdot L_1B)=$$

$$=1/3(A'^TE^TL_2HB'\cdot L_1HC'+B'^TE^TL_2HC'\cdot L_1HA'+C'^TE^TL_2HA'\cdot L_1HB')=$$

$$=1/3(A'^TL_2'B'\cdot L_1'C'+B'^TL_2'C'\cdot L_1'A'+C'^TL_2'A'\cdot L_1'B'),$$

т.е. $L_2'=E^TL_2H$ и $L_1'=L_1H$.

Линейная функция третьей степени аргумента, определенная в L^n соответственно записывается относительно базиса $\mathbf{e}_1,...,\mathbf{e}_n$ формой $l(\mathbf{a},\mathbf{a},\mathbf{a})=\sum\sum\sum l_{ijк}a^ia^ja^к=A^TL_2A\cdot L_1A$, определяемой тензорами L_2 и L_1, а относительно базиса $\mathbf{e}_1',...,\mathbf{e}_n'$ формой $l(\mathbf{a},\mathbf{a},\mathbf{a})=\sum\sum\sum l_{ijк}'a^{i'}a^{j'}a^{к'}=A'^TH^TL_2HA'\cdot L_1HA'$, определяемой тензорами L_2' и L_1', причем $L_2'=H^TL_2H$, а $L_1'=L_1H$.

6. Линейные функции и формы от четырех переменных

Чтобы задать линейную функцию от четырех переменных $l(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{d})=1/3(l(\mathbf{a},\mathbf{b})l(\mathbf{c},\mathbf{d})+l(\mathbf{b},\mathbf{c})l(\mathbf{a},\mathbf{d})+l(\mathbf{c},\mathbf{a})l(\mathbf{b},\mathbf{d}))$, достаточно задать набор ее коэффициентов $1/3(l(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j)l(\mathbf{e}_k,\mathbf{e}_l)+l(\mathbf{e}_j,\mathbf{e}_k)l(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_l)+l(\mathbf{e}_k\mathbf{e}_i)l(\mathbf{e}_j,\mathbf{e}_l))=1/3(l_{ij}l_{kl}+l_{jk}l_{il}+l_{ki}l_{jl})=l_{ijkl}$, т.е. тензор полилинейной формы от четырех переменных L_4.

Спрашивается: как при переходе от базиса $\mathbf{e}_1,...,\mathbf{e}_n$ к новому базису $\mathbf{e}_1',...,\mathbf{e}_n'$ преобразуется тензор L_4 линейной функции от четырех переменных.

Пусть линейная функция от четырех переменных $l(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{d})$ записывается относительно базиса $\mathbf{e}_1,...,\mathbf{e}_n$ в виде линейной формы от четырех переменных $l(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{d})=\sum\sum\sum\sum l_{ijkl}a^ib^jc^kd^l=1/3(A^TL_2B\cdot C^TL_2D+B^TL_2C\cdot A^TL_2D+C^TL_2A\cdot B^TL_2D)$ при $\mathbf{a}=a^1\mathbf{e}_1+...+a^n\mathbf{e}_n$, $\mathbf{b}=b^1\mathbf{e}_1+...+b^n\mathbf{e}_n$, $\mathbf{c}=c^1\mathbf{e}_1+...+c^n\mathbf{e}_n$, $\mathbf{d}=d^1\mathbf{e}_1+...+d^n\mathbf{e}_n$ с тензором L_4, определяемым тензором L_2, а относительно базиса $\mathbf{e}_1',...,\mathbf{e}_n'$ в виде линейной формы от четырех переменных

$l(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{d})=\sum\sum\sum\sum l_{ijkl}'a^{i'}b^{j'}c^{k'}d^{l'}=1/3(A'^TL_2'B'\cdot C'^TL_2'D'+B'^TL_2'C'\cdot A'^TL_2'D'+C'^TL_2'A'\cdot B'^TL_2'D')$

при $\mathbf{a}=a^{1'}\mathbf{e}_1'+...+a^{n'}\mathbf{e}_n'$, $\mathbf{b}=b^{1'}\mathbf{e}_1'+...+b^{n'}\mathbf{e}_n'$, $\mathbf{c}=c^{1'}\mathbf{e}_1'+...+c^{n'}\mathbf{e}_n'$, $\mathbf{d}=d^{1'}\mathbf{e}_1'+...+d^{n'}\mathbf{e}_n'$ с тензором L_4', определяемым тензором L_2'.

При этом $\mathbf{e}_i'=\sum e^k_{i'}e_k$ и $a^i=\sum e^i_{k'}a^{k'}$, $k=1,...,n$, что соответствует матрице преобразования векторов

$$H=\begin{Vmatrix} e^1_{1'} & e^1_{2'} & ... & e^1_{n'} \\ e^2_{1'} & e^2_{2'} & ... & e^2_{n'} \\ ... & ... & ... & ... \\ e^n_{1'} & e^n_{2'} & ... & e^n_{n'} \end{Vmatrix},$$

т.е. преобразованиям $A=HA'$, $B=HB'$, $C=HC'$, $D=HD'$ т.е. $A^T=A'^TH^T$, $B^T=B'^TH^T$, $C^T=C'^TH^T$, $D^T=D'^TH^T$.

Тогда имеем

$l(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{d})=1/3(A^TL_2B\cdot C^TL_2D+B^TL_2C\cdot A^TL_2D+C^TL_2A\cdot B^TL_2D)=$

$=1/3(A'^TH^TL_2EB'\cdot C'^TH^TL_2ED'+B'^TH^TL_2EC'\cdot A'^TH^TL_2ED'+C'^TH^TL_2EA'\cdot B'^TH^TL_2ED')=$

$=1/3(A'^TL_2'B'\cdot C'^TL_2'D'+B'^TL_2'C'\cdot A'^TL_2'D'+C'^TL_2'A'\cdot B'^TL_2'D')$,

т.е. $L_2'=H^TL_2H$.

Линейная функция четвертой степени аргумента, определенная в L^n соответственно записывается относительно базиса $\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n$ формой $l(\mathbf{a},\mathbf{a},\mathbf{a},\mathbf{a})= =\sum\sum\sum\sum l_{ij\kappa l}a^i a^j a^\kappa a^l=A^TL_2A\cdot A^TL_2A$, определяемой тензором L_2, а относительно базиса $\mathbf{e}_1',\dots,\mathbf{e}_n'$ формой $l(\mathbf{a},\mathbf{a},\mathbf{a},\mathbf{a})=\sum\sum\sum\sum l_{ij\kappa l}' a^{i'} a^{j'} a^{\kappa'} a^{l'}=A'^TL_2'A'\cdot A'^TL_2'A'$, определяемой тензором L_2', причем $L_2'=H^TL_2H$.

6. Линейные функции и формы от пяти переменных

Чтобы задать линейную функцию от пяти переменных

$$l(a,b,c,d,e)= 1/15((l(a,b)l(c,d)+l(b,c)l(a,d)+l(c,a)l(b,d))l(e)+$$
$$+(l(b,c)l(d,e)+l(c,d)l(b,e)+l(d,b)l(c,e))l(a)+$$
$$+(l(c,d)l(e,a)+l(d,e)l(c,a)+l(e,c)l(d,a))l(b)+$$
$$+(l(d,e)l(a,b)+l(e,a)l(d,b)+l(a,d)l(e,b))l(c)+$$
$$+(l(e,a)l(b,c)+l(a,b)l(e,c)+l(b,e)l(a,c))l(d))$$

достаточно задать набор ее коэффициентов

$$1/15((l(e_i,e_j)l(e_k,e_l)+l(e_j,e_k)l(e_i,e_l) + l(e_k,e_i)\, l(e_j,e_l))\, l(e_m)+$$
$$+(l(e_j,e_k)l(e_l,e_m)+l(e_k,e_l)l(e_j,e_m)+l(e_l,e_j)\, l(e_k,e_m))l(e_i)+$$
$$+(l(e_k,e_l)l(e_m,e_i)+l(e_l,e_m)l(e_k,e_i)+l(e_m,e_k)l(e_l,e_i))\, l(e_j)+$$
$$+(l(e_l,e_m)l(e_i,e_j)+l(e_m,e_i)l(e_l,e_j) +l(e_i,e_l)\, l(e_m,e_j))\, l(e_k)+$$
$$+(l(e_m,e_i)l(e_j,e_k)+l(e_i,e_j)l(e_m,e_k)+l(e_j,e_m)l(e_i,e_k))\, l(e_l))=$$

$$=1/15((l_{ij}l_{kl}+l_{jk}l_{il}+l_{ki}l_{jl})l_m+(l_{jk}l_{lm}+l_{kl}l_{jm}+l_{lj}l_{km})l_i+(l_{kl}l_{mi}+l_{lm}l_{ki}+l_{mk}l_{li})l_j+(l_{lm}l_{ij}+l_{mi}l_{lj}+l_{il}l_{mj})l_k+(l_{mi}l_{jk}+l_{ij}l_{mk}+l_{jm}l_{ik})l_l)=1/5(l_{ijkl}l_m+l_{jklm}l_i+l_{klmi}l_j+l_{lmij}l_k+l_{mijk}l_l)=l_{ijklm}.,$$

т.е. тензор полилинейной формы от пяти переменных L_5.

Спрашивается: как при переходе от базиса $\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n$ к новому базису $\mathbf{e}_1',\dots,\mathbf{e}_n'$ преобразуется тензор L_5 линейной функции от пяти переменных.

Пусть линейная функция от пяти переменных $l(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{d},\mathbf{e})$ записывается относительно базиса $\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n$ в виде линейной формы от пяти переменных $l(a,b,c,d,e)=\sum\sum\sum\sum\sum l_{ijklm}a^ib^jc^kd^le^m=1/15\cdot$

$$\cdot(A^TL_2B\cdot C^TL_2D+B^TL_2C\cdot A^TL_2D+C^TL_2A\cdot B^TL_2D)\cdot L_1E+$$
$$+(B^TL_2C\cdot D^TL_2E+C^TL_2D\cdot B^TL_2E+D^TL_2B\cdot C^TL_2E)\cdot L_1A+$$
$$+(C^TL_2D\cdot E^TL_2A+D^TL_2E\cdot C^TL_2A+E^TL_2C\cdot D^TL_2A)\cdot L_1B+$$

$+(D^T L_2 E\cdot A^T L_2 B+E^T L_2 A\cdot D^T L_2 B+A^T L_2 D\cdot E^T L_2 B)\cdot L_1 C+$

$+(E^T L_2 A\cdot B^T L_2 C+A^T L_2 B\cdot E^T L_2 C+B^T L_2 E\cdot A^T L_2 C)\cdot L_1 D)$

при $a=a^1e_1+...+a^ne_n$, $b=b^1e_1+...+b^ne_n$, $c=c^1e_1+...+c^ne_n$, $d=d^1e_1+...+d^ne_n$, $e=e^1e_1+...+e^ne_n$ с тензором L_5, определяемым тензорами L_2 и L_1, а относительно базиса $e_1^{\prime},...,e_n^{\prime}$ в виде линейной формы от пяти переменных

$l(a,b,c,d,e)=\sum\sum\sum\sum\sum l_{ijklm}{}^{\prime}a^{i'}b^{j'}c^{k'}d^{l'}e^{m'}=1/15\cdot$

$\cdot(A'^T L_2' B'\cdot C'^T L_2' D'+B'^T L_2' C'\cdot A'^T L_2' D'+C'^T L_2' A'\cdot B'^T L_2' D')\cdot L_1' E'+$

$+(B'^T L_2' C'\cdot D'^T L_2' E'+C'^T L_2' D'\cdot B'^T L_2' E'+D'^T L_2' B'\cdot C'^T L_2' E')\cdot L_1' A'+$

$+(C'^T L_2' D'\cdot E'^T L_2' A'+D'^T L_2' E'\cdot C'^T L_2' A'+E'^T L_2' C'\cdot D'^T L_2' A')\cdot L_1' B'+$

$+(D'^T L_2' E'\cdot A'^T L_2' B'+E'^T L_2' A'\cdot D'^T L_2' B'+A'^T L_2' D'\cdot E'^T L_2' B')\cdot L_1' C'+$

$+(E'^T L_2' A'\cdot B'^T L_2' C'+A'^T L_2' B'\cdot E'^T L_2' C'+B'^T L_2' E'\cdot A'^T L_2' C')\cdot L_1' D')$

при $a=a^{1'}e_1'+...+a^{n'}e_n'$, $b=b^{1'}e_1'+...+b^{n'}e_n'$, $c=c^{1'}e_1'+...+c^{n'}e_n'$, $d=d^{1'}e_1'+...+d^{n'}e_n'$, $e=e^{1'}e_1'+...+e^{n'}e_n'$ с тензором L_5', определяемым тензорами L_2' и L_1'.

При этом $e_i'=\sum e^k{}_{i'}e_k$ и $a^i=\sum e^i{}_{k'}a^{k'}$, $k=1,...,n$, что соответствует матрице преобразования векторов

$$H=\begin{Vmatrix} e^1{}_{1'} & e^1{}_{2'} & ... & e^1{}_{n'} \\ e^2{}_{1'} & e^2{}_{2'} & ... & e^2{}_{n'} \\ ... & ... & ... & ... \\ e^n{}_{1'} & e^n{}_{2'} & ... & e^n{}_{n'} \end{Vmatrix},$$

т.е. преобразованиям $A=HA'$, $B=HB'$, $C=HC'$, $D=HD'$, $E=HE'$, т.е. $A^T=A'^TH^T$, $B^T=B'^TH^T$, $C^T=C'^TH^T$, $D^T=D'^TH^T$, $E^T=E'^TH^T$

Тогда имеем

$l(a,b,c,d,e)=\cdot$

$=1/15(A^T L_2 B\cdot C^T L_2 D+B^T L_2 C\cdot A^T L_2 D+C^T L_2 A\cdot B^T L_2 D)\cdot L_1 E+$

$+(B^T L_2 C\cdot D^T L_2 E+C^T L_2 D\cdot B^T L_2 E+D^T L_2 B\cdot C^T L_2 E)\cdot L_1 A+$

$+(C^T L_2 D\cdot E^T L_2 A+D^T L_2 E\cdot C^T L_2 A+E^T L_2 C\cdot D^T L_2 A)\cdot L_1 B+$

$+(D^T L_2 E\cdot A^T L_2 B+E^T L_2 A\cdot D^T L_2 B+A^T L_2 D\cdot E^T L_2 B)\cdot L_1 C+$

$+(E^T L_2 A\cdot B^T L_2 C+A^T L_2 B\cdot E^T L_2 C+B^T L_2 E\cdot A^T L_2 C)\cdot L_1 D)=$

$=1/15((A'^T H^T L_2 H B'\cdot C'^T H^T L_2 H D'+B'^T H^T L_2 H C'\cdot A'^T H^T L_2 H D'+C'^T H^T L_2 H A'\cdot B'^T H^T L_2 H D')\cdot L_1 H E'+$

$+(B'^{T}H^{T}L_2HC'\cdot D'^{T}H^{T}L_2HE'+C'^{T}H^{T}L_2HD'\cdot B'^{T}H^{T}L_2HE'+D'^{T}H^{T}L_2HB'\cdot C'^{T}H^{T}L_2HE')\cdot L_1HA'+$

$+(C'^{T}H^{T}L_2HD'\cdot E'^{T}H^{T}L_2HA'+D'^{T}H^{T}L_2HE'\cdot C'^{T}H^{T}L_2HA'+E'^{T}H^{T}L_2HC'\cdot D'^{T}H^{T}L_2HA')\cdot L_1HB'+$

$+(D'^{T}H^{T}L_2HE'\cdot A'^{T}H^{T}L_2HB'+E'^{T}H^{T}L_2HA'\cdot D'^{T}H^{T}L_2HB'+A'^{T}H^{T}L_2HD'\cdot E'^{T}H^{T}L_2HB')\cdot L_1HC'+$

$+(E'^{T}H^{T}L_2HA'\cdot B'^{T}H^{T}L_2HC'+A'^{T}H^{T}L_2HB'\cdot E'^{T}H^{T}L_2HC'+B'^{T}H^{T}L_2HE'\cdot A'^{T}H^{T}L_2HC')\cdot L_1HD'))$
=

$=1/15\cdot(A'^{T}L_2'B'\cdot C'^{T}L_2'D'+B'^{T}L_2'C'\cdot A'^{T}L_2'D'+C'^{T}L_2'A'\cdot B'^{T}L_2'D')\cdot L_1'E'+$

$+(B'^{T}L_2'C'\cdot D'^{T}L_2'E'+C'^{T}L_2'D'\cdot B'^{T}L_2'E'+D'^{T}L_2'B'\cdot C'^{T}L_2'E')\cdot L_1'A'+$

$+(C'^{T}L_2'D'\cdot E'^{T}L_2'A'+D'^{T}L_2'E'\cdot C'^{T}L_2'A'+E'^{T}L_2'C'\cdot D'^{T}L_2'A')\cdot L_1'B'+$

$+(D'^{T}L_2'E'\cdot A'^{T}L_2'B'+E'^{T}L_2'A'\cdot D'^{T}L_2'B'+A'^{T}L_2'D'\cdot E'^{T}L_2'B')\cdot L_1'C'+$

$+(E'^{T}L_2'A'\cdot B'^{T}L_2'C'+A'^{T}L_2'B'\cdot E'^{T}L_2'C'+B'^{T}L_2'E'\cdot A'^{T}L_2'C')\cdot L_1'D'),$

т.е. $L_2'=H^{T}L_2H$ и $L_1'=L_1H$.

Линейная функция пятой степени аргумента, определенная в L^n соответственно записывается относительно базиса $e_1,...,e_n$ формой $l(a,a,a,a,a)=\sum\sum\sum\sum\sum l_{ij\kappa lm}a^{i}a^{j}a^{\kappa}a^{l}a^{m}=A^{T}L_2A\cdot A^{T}L_2A\cdot L_1A$, определяемой тензорами L_2 и L_1 а относительно базиса $e_1',...,e_n'$ формой $l(a,a,a,a,a)=\sum\sum\sum\sum\sum l_{ij\kappa lm}'a^{i'}a^{j'}a^{\kappa'}a^{l'}a^{m'}=$

$=A'^{T}L_2'A'\cdot A'^{T}L_2'A'\cdot L_1'A'$, определяемой тензорами L_2' и L_1', причем $L_2'=H^{T}L_2H$ и $L_1'=L_1H$.

7. Линейные функции и формы от шести переменных

Чтобы задать линейную функцию от шести переменных

$l(a,b,c,d,e,f)= 1/15((l(a,b)l(c,d)+l(b,c)l(a,d)+l(c,a)l(b,d))l(e,f)+$

$+(l(b,c)l(d,e)+l(c,d)l(b,e)+l(d,b)l(c,e))l(a,f)+$

$+(l(c,d)l(e,a)+l(d,e)l(c,a)+l(e,c)l(d,a))l(b,f)+$

$+(l(d,e)l(a,b)+l(e,a)l(d,b)+l(a,d)l(e,b))l(c,f)+$

$+(l(e,a)l(b,c)+l(a,b)l(e,c)+l(b,e)l(a,c))l(d,f))$

достаточно задать набор ее коэффициентов

$1/15((l(e_i,e_j)l(e_k,e_l)+l(e_j,e_k)l(e_i,e_l) + l(e_k,e_i)\, l(e_j,e_l))\, l(e_m,e_n)+$

$$+\big(l(e_j,e_k)l(e_l,e_m)+l(e_k,e_l)l(e_j,e_m)+l(e_l,e_j)\,l(e_k,e_m)\big)l(e_i,e_n)+$$

$$+\big(l(e_k,e_l)l(e_m,e_i)+l(e_l,e_m)l(e_k,e_i)+l(e_m,e_k)l(e_l,e_i)\big)\,l(e_j,e_n)+$$

$$+\big(l(e_l,e_m)l(e_i,e_j)+l(e_m,e_i)l(e_l,e_j)+l(e_i,e_l)\,l(e_m,e_j)\big)\,l(e_k,e_n)+$$

$$+\big(l(e_m,e_i)l(e_j,e_k)+l(e_i,e_j)l(e_m,e_k)+l(e_j,e_m)l(e_i,e_k)\big)\,l(e_l,e_n))=$$

$$=1/15((l_{ij}l_{kl}+l_{jk}l_{il}+l_{ki}l_{jl})l_{mn}+(l_{jk}l_{lm}+l_{kl}l_{jm}+l_{lj}l_{km})l_{in}+(l_{kl}l_{mi}+l_{lm}l_{ki}+l_{mk}l_{li})l_{jn}+(l_{lm}l_{ij}+l_{mi}l_{lj}+l_{il}l_{mj})l_{kn}+$$
$$+(l_{mi}l_{jk}+l_{ij}l_{mk}+l_{jm}l_{ik})l_{ln})=1/5\big(l_{ijkl}l_{mn}+l_{jklm}l_{in}+l_{klmi}l_{jn}+l_{lmij}l_{kn}+l_{mijk}l_{ln}\big)=l_{ijklmn},$$

т.е. тензор полилинейной формы от шести переменных L_6.

Спрашивается: как при переходе от базиса $\mathbf{e}_1,...,\mathbf{e}_n$ к новому базису $\mathbf{e}_1',...,\mathbf{e}_n'$ преобразуется тензор L_6 линейной функции от шести переменных.

Пусть линейная функция от шести переменных $l(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{d},\mathbf{e},\mathbf{f})$ записывается относительно базиса $\mathbf{e}_1,...,\mathbf{e}_n$ в виде линейной формы от шести переменных $l(a,b,c,d,e,f)=\sum\sum\sum\sum\sum\sum l_{ijklmn}a^ib^jc^kd^le^mf^n=1/15\cdot$

$$\cdot(A^TL_2B\cdot C^TL_2D+B^TL_2C\cdot A^TL_2D+C^TL_2A\cdot B^TL_2D)\cdot E^TL_2F+$$

$$+(B^TL_2C\cdot D^TL_2E+C^TL_2D\cdot B^TL_2E+D^TL_2B\cdot C^TL_2E)\cdot A^TL_2F+$$

$$+(C^TL_2D\cdot E^TL_2A+D^TL_2E\cdot C^TL_2A+E^TL_2C\cdot D^TL_2A)\cdot B^TL_2F+$$

$$+(D^TL_2E\cdot A^TL_2B+E^TL_2A\cdot D^TL_2B+A^TL_2D\cdot E^TL_2B)\cdot C^TL_2F+$$

$$+(E^TL_2A\cdot B^TL_2C+A^TL_2B\cdot E^TL_2C+B^TL_2E\cdot A^TL_2C)\cdot D^TL_2F)$$

при $a=a^1e_1+...+a^ne_n$, $b=b^1e_1+...+b^ne_n$, $c=c^1e_1+...+c^ne_n$, $d=d^1e_1+...+d^ne_n$, $e=e^1e_1+...+e^ne_n$, $f=f^1e_1+...+f^ne_n$ с тензором L_6, определяемым тензором L_2, а относительно базиса $e_1',...,e_n'$ в виде линейной формы от шести переменных

$l(a,b,c,d,e,f)=\sum\sum\sum\sum\sum\sum l_{ijklmn}'a^{i'}b^{j'}c^{k'}d^{l'}e^{m'}e^{n'}=1/15\cdot$

$$\cdot(A'^TL_2'B'\cdot C'^TL_2'D'+B'^TL_2'C'\cdot A'^TL_2'D'+C'^TL_2'A'\cdot B'^TL_2'D')\cdot E'^TL_2'F'+$$

$$+(B'^TL_2'C'\cdot D'^TL_2'E'+C'^TL_2'D'\cdot B'^TL_2'E'+D'^TL_2'B'\cdot C'^TL_2'E')\cdot A'^TL_2'F'+$$

$$+(C'^TL_2'D'\cdot E'^TL_2'A'+D'^TL_2'E'\cdot C'^TL_2'A'+E'^TL_2'C'\cdot D'^TL_2'A')\cdot B'^TL_2'F'+$$

$$+(D'^TL_2'E'\cdot A'^TL_2'B'+E'^TL_2'A'\cdot D'^TL_2'B'+A'^TL_2'D'\cdot E'^TL_2'B')\cdot C'^TL_2'F'+$$

$$+(E'^TL_2'A'\cdot B'^TL_2'C'+A'^TL_2'B'\cdot E'^TL_2'C'+B'^TL_2'E'\cdot A'^TL_2'C')\cdot D'^TL_2'F')$$

при $a=a^{1'}e_1'+...+a^{n'}e_n'$, $b=b^{1'}e_1'+...+b^{n'}e_n'$, $c=c^{1'}e_1'+...+c^{n'}e_n'$, $d=d^{1'}e_1'+...+d^{n'}e_n'$, $e=e^{1'}e_1'+...+e^{n'}e_n'$, $f=f^{1'}e_1'+...+f^{n'}e_n'$ с тензором L_6', определяемым тензором L_2'.

При этом $e_i'=\sum e^k_{i'}e_k$ и $a^i=\sum e^i_{k'}a^{k'}$, $k=1,...,n$, что соответствует матрице преобразования векторов

$$
H=\begin{Vmatrix} e^1{}_{1'} & e^1{}_{2'} & \dots & e^1{}_{n'} \\ e^2{}_{1'} & e^2{}_{2'} & \dots & e^2{}_{n'} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ e^n{}_{1'} & e^n{}_{2'} & \dots & e^n{}_{n'} \end{Vmatrix},
$$

т.е. преобразованиям $A=HA'$, $B=HB'$, $C=HC'$, $D=HD'$, $E=HE'$, $F=HF'$ т.е. $A^T=A'^TH^T$, $B^T=B'^TH^T$, $C^T=C'^TH^T$, $D^T=D'^TH^T$, $E^T=E'^TH^T$, $F^T=F'^TH^T$.

Тогда имеем

$l(a,b,c,d,e,f)=$

$=1/15(A^TL_2B\cdot C^TL_2D+B^TL_2C\cdot A^TL_2D+C^TL_2A\cdot B^TL_2D)\cdot E^TL_2F+$

$+(B^TL_2C\cdot D^TL_2E+C^TL_2D\cdot B^TL_2E+D^TL_2B\cdot C^TL_2E)\cdot A^TL_2F+$

$+(C^TL_2D\cdot E^TL_2A+D^TL_2E\cdot C^TL_2A+E^TL_2C\cdot D^TL_2A)\cdot B^TL_2F+$

$+(D^TL_2E\cdot A^TL_2B+E^TL_2A\cdot D^TL_2B+A^TL_2D\cdot E^TL_2B)\cdot C^TL_2F+$

$+(E^TL_2A\cdot B^TL_2C+A^TL_2B\cdot E^TL_2C+B^TL_2E\cdot A^TL_2C)\cdot D^TL_2F)=$

$=1/15((A'^TH^TL_2HB'\cdot C'^TH^TL_2HD'+B'^TH^TL_2HC'\cdot A'^TH^TL_2HD'+C'^TH^TL_2HA'\cdot B'^TH^TL_2HD')\cdot E'^TH^TL_2HF'+$

$+(B'^TH^TL_2HC'\cdot D'^TH^TL_2HE'+C'^TH^TL_2HD'\cdot B'^TH^TL_2HE'+D'^TH^TL_2HB'\cdot C'^TH^TL_2HE')\cdot A'^TH^TL_2HF'+$

$+(C'^TH^TL_2HD'\cdot E'^TH^TL_2HA'+D'^TH^TL_2HE'\cdot C'^TH^TL_2HA'+E'^TH^TL_2HC'\cdot D'^TH^TL_2HA')\cdot B'^TH^TL_2HF'+$

$+(D'^TH^TL_2HE'\cdot A'^TH^TL_2HB'+E'^TH^TL_2HA'\cdot D'^TH^TL_2HB'+A'^TH^TL_2HD'\cdot E'^TH^TL_2HB')\cdot C'^TH^TL_2HF'+$

$+(E'^TH^TL_2HA'\cdot B'^TH^TL_2HC'+A'^TH^TL_2HB'\cdot E'^TH^TL_2HC'+B'^TH^TL_2HE'\cdot A'^TH^TL_2HC')\cdot E'^TH^TL_2HF'))=$

$=1/15\cdot(A'^TL_2'B'\cdot C'^TL_2'D'+B'^TL_2'C'\cdot A'^TL_2'D'+C'^TL_2'A'\cdot B'^TL_2'D')\cdot E'^TL_2'F'+$

$+(B'^TL_2'C'\cdot D'^TL_2'E'+C'^TL_2'D'\cdot B'^TL_2'E'+D'^TL_2'B'\cdot C'^TL_2'E')\cdot A'^TL_2'F'+$

$+(C'^TL_2'D'\cdot E'^TL_2'A'+D'^TL_2'E'\cdot C'^TL_2'A'+E'^TL_2'C'\cdot D'^TL_2'A')\cdot B'^TL_2'F'+$

$+(D'^TL_2'E'\cdot A'^TL_2'B'+E'^TL_2'A'\cdot D'^TL_2'B'+A'^TL_2'D'\cdot E'^TL_2'B')\cdot C'^TL_2'F'+$

$+(E'^TL_2'A'\cdot B'^TL_2'C'+A'^TL_2'B'\cdot E'^TL_2'C'+B'^TL_2'E'\cdot A'^TL_2'C')\cdot D'^TL_2'F'),$

т.е. $L_2'=H^TL_2H$.

Линейная функция шестой степени аргумента, определенная в L^n соответственно записывается относительно базиса $e_1,\dots,e_n$ формой $l(a,a,a,a,a,a)=\sum\sum\sum\sum\sum\sum l_{ij\kappa lmn}a^ia^ja^\kappa a^la^ma^n=A^TL_2A\cdot A^TL_2A\cdot A^TL_2A$, определяемой тензором L_2, а относительно базиса $e_1',\dots,e_n'$ формой

$l(a,a,a,a,a,a)=\sum\sum\sum\sum\sum\sum l_{ij\kappa lmn}{}' a^{i'} a^{j'} a^{\kappa'} a^{l'} a^{m'} a^{n'}=A'^{T}L_2{}'A'\cdot A'^{T}L_2{}'A'\cdot A'^{T}L_2{}'A'$, определяемой тензором $L_2{}'$, причем $L_2{}'=H^{T}L_2H$.

8. Линейные функции и формы от семи переменных

Чтобы задать линейную функцию от семи переменных

$$l(a,b,c,d,e,f,g)=1/105\bullet$$

$$\bullet((l(a,b)l(c,d)l(e,f)+l(b,c)l(d,e)l(a,f)+l(c,d)l(e,a)l(b,f)+l(d,e)l(a,b)l(c,f)+l(e,a)l(b,c)l(d,f)+$$

$$+l(b,c)l(a,d)l(e,f)+l(c,d)l(b,e)l(a,f)+l(d,e)l(c,a)l(b,f)+l(e,a)l(d,b)l(c,f)+l(a,b)l(e,c)l(d,f)+$$

$$+l(c,a)l(b,d)l(e,f)+l(d,b)l(c,e)l(a,f)+l(e,c)l(d,a)l(b,f)+l(a,d)l(e,b)l(c,f)+l(b,e)l(a,c)l(d,f))l(g)+$$

$$+(l(b,c)l(d,e)l(f,g)+l(c,d)l(e,f)l(b,g)+l(d,e)l(f,b)l(c,g)+l(e,f)l(b,c)l(d,g)+l(f,b)l(c,d)l(e,g)+$$

$$+l(c,d)l(b,e)l(f,g)+l(d,e)l(c,f)l(b,g)+l(e,f)l(d,b)l(c,g)+l(f,b)l(e,c)l(d,g)+l(b,c)l(f,d)l(e,g)+$$

$$+l(d,b)l(c,e)l(f,g)+l(e,c)l(d,f)l(b,g)+l(f,d)l(e,b)l(c,g)+l(b,e)l(f,c)l(d,g)+l(c,f)l(b,d)l(e,g))l(a)+$$

$$+(l(c,d)l(e,f)l(g,a)+l(d,e)l(f,g)l(c,a)+l(e,f)l(g,c)l(d,a)+l(f,g)l(c,d)l(e,a)+l(g,c)l(d,e)l(f,a)+$$

$$+l(d,e)l(c,f)l(g,a)+l(e,f)l(d,g)l(c,a)+l(f,g)l(e,c)l(d,a)+l(g,c)l(f,d)l(e,a)+l(c,d)l(g,e)l(f,a)+$$

$$+l(e,c)l(d,f)l(g,a)+l(f,d)l(e,g)l(c,a)+l(g,e)l(f,c)l(d,a)+l(c,f)l(g,d)l(e,a)+l(d,g)l(c,e)l(f,a))l(b)+$$

$$+(l(d,e)l(f,g)l(a,b)+l(e,f)l(g,a)l(d,b)+l(f,g)l(a,d)l(e,b)+l(g,a)l(d,e)l(f,b)+l(a,d)l(e,f)l(g,b)+$$

$$+l(e,f)l(d,g)l(a,b)+l(f,g)l(e,a)l(d,b)+l(g,a)l(f,d)l(e,b)+l(a,d)l(g,e)l(f,b)+l(d,e)l(a,f)l(g,b)+$$

$$+l(f,d)l(e,g)l(a,b)+l(g,e)l(f,a)l(d,b)+l(a,f)l(g,d)l(e,b)+l(d,g)l(a,e)l(f,b)+l(e,a)l(d,f)l(g,b))l(c)+$$

$$+(l(e,f)l(g,a)l(b,c)+l(f,g)l(a,b)l(e,c)+l(g,a)l(b,e)l(f,c)+l(a,b)l(e,f)l(g,c)+l(b,e)l(f,g)l(a,c)+$$

$$+l(f,g)l(e,a)l(b,c)+l(g,a)l(f,b)l(e,c)+l(a,b)l(g,e)l(f,c)+l(b,e)l(a,f)l(g,c)+l(e,f)l(b,g)l(a,c)+$$

$$+l(g,e)l(f,a)l(b,c)+l(a,f)l(g,b)l(e,c)+l(b,g)l(a,e)l(f,c)+l(e,a)l(b,f)l(g,c)+l(f,b)l(e,g)l(a,c))l(d)+$$

$$+(l(f,g)l(a,b)l(c,d)+l(g,a)l(b,c)l(f,d)+l(a,b)l(c,f)l(g,d)+l(b,c)l(f,g)l(a,d)+l(c,f)l(g,a)l(b,d)+$$

$$+l(g,a)l(f,b)l(c,d)+l(a,b)l(g,c)l(f,d)+l(b,c)l(a,f)l(g,d)+l(c,f)l(b,g)l(a,d)+l(f,g)l(c,a)l(b,d)+$$

$$+l(a,f)l(g,b)l(c,d)+l(b,g)l(a,c)l(f,d)+l(c,a)l(b,f)l(g,d)+l(f,b)l(c,g)l(a,d)+l(g,c)l(f,a)l(b,d))l(e)+$$

$$+(l(g,a)l(b,c)l(d,e)+l(a,b)l(c,d)l(g,e)+l(b,c)l(d,g)l(a,e)+l(c,d)l(g,a)l(b,e)+l(d,g)l(a,b)l(c,e)+$$

$$+l(a,b)l(g,c)l(d,e)+l(b,c)l(a,d)l(g,e)+l(c,d)l(b,g)l(a,e)+l(d,g)l(c,a)l(b,e)+l(g,a)l(d,b)l(c,e)+$$

$$+l(b,g)l(a,c)l(d,e)+l(c,a)l(b,d)l(g,e)+l(d,b)l(c,g)l(a,e)+l(g,c)l(d,a)l(b,e)+l(a,d)l(g,b)l(c,e))l(f))$$

достаточно задать набор ее коэффициентов

$$1/105(((l(e_i,e_j)l(e_k,e_l)+l(e_j,e_k)l(e_i,e_l)+l(e_k,e_i)\,l(e_j,e_l))\;l(e_m,e_n)+$$

$$+(l(e_j,e_k)l(e_l,e_m)+l(e_k,e_l)l(e_j,e_m)+l(e_l,e_j)\;l(e_k,e_m))l(e_i,e_n)+$$

$$+(l(e_k,e_l)l(e_m,e_i)+l(e_l,e_m)l(e_k,e_i)+l(e_m,e_k)l(e_l,e_i))\;l(e_j,e_n)+$$

$+\big(l(e_l,e_m)l(e_i,e_j)+l(e_m,e_i)l(e_l,e_j)+l(e_i,e_l)\,l(e_m,e_j)\big)\,l(e_k,e_n)+$

$+\big(l(e_m,e_i)l(e_j,e_k)+l(e_i,e_j)l(e_m,e_k)+l(e_j,e_m)l(e_i,e_k)\big)\,l(e_l,e_n))l(e_o)+$

$+\big(\big(l(e_j,e_k)l(e_l,e_m)+l(e_k,e_l)\,l(e_j,e_m)+l(e_l,e_j)\,l(e_k,e_m)\big)l(e_{n,}e_o)+$

$+\big(l(e_k,e_l)l(e_m,e_n)+l(e_l,e_m)\,l(e_k,e_n)+l(e_m,e_k)l(e_l,e_m)\big)l(e_j,e_o)+$

$+\big(l(e_l,e_m)l(e_n,e_j)+l(e_m,e_n)l(e_l,e_j)+l(e_n,e_l)\,l(e_m,e_j)\big)\,l(e_k,e_o)+$

$+\big(l(e_m,e_n)l(e_j,e_k)+l(e_m,e_j)\,l(e_n,e_k)+l(e_j,e_m)l(e_n,e_k)\big)\,l(e_l,e_o)+$

$+\big(l(e_n,e_j)\,l(e_k,e_l)+l(e_j,e_k)\,l(e_n,e_l)+l(e_k,e_n)l(e_j,e_l)\big)\,l(e_m,e_o))l(e_i)+$

$+\big(\big(l(e_k,e_l)\,l(e_m,e_n)+l(e_l,e_m)l(e_k,e_n)+l(e_m,e_k)l(e_l,e_n)\big)\,l(e_{o,}e_i)+$

$+\big(l(e_l,e_m)l(e_n,e_o)+l(e_m,e_n)l(e_l,e_o)+l(e_n,e_l)\,l(e_m,e_o)\big)l(e_k,e_i)+$

$+\big(l(e_m,e_n)l(e_o,e_k)+l(e_n,e_o)\,l(e_m,e_k)+l(e_o,e_m)l(e_n,e_k)\big)l(e_l,e_i)+$

$+\big(l(e_n,e_o)l(e_k,e_l)+l(e_o,e_k)\,l(e_n,e_l)+l(e_k,e_n)l(e_o,e_l)\big)\,l(e_m,e_i)+$

$+\big(l(e_o,e_k)l(e_l,e_m)+l(e_k,e_l)\,l(e_o,e_m)+l(e_l,e_o)\,l(e_k,e_m)\big)l(e_n,e_i))l(e_j)+$

$+\big(\big(l(e_l,e_m)\,l(e_n,e_o)+l(e_m,e_n)l(e_l,e_o)+l(e_n,e_l)l(e_m,e_o)\big)l(e_{i,}e_j)+$

$+\big(l(e_m,e_n)l(e_o,e_i)+l(e_n,e_o)l(e_m,e_i)+l(e_o,e_m)l(e_n,e_i)\big)l(e_l,e_j)+$

$+\big(l(e_n,e_o)\,l(e_i,e_l)+l(e_o,e_i)\,l(e_n,e_l)+l(e_i,e_n)\,l(e_o,e_l)\big)l(e_m,e_j)+$

$+\big(l(e_o,e_i)\,l(e_l,e_m)+l(e_i,e_l)\,l(e_o,e_m)+l(e_l,e_o)\,l(e_i,e_m)\big)l(e_n,e_j)+$

$+\big(l(e_i,e_l)\,l(e_m,e_n)+l(e_l,e_m)l(e_i,e_n)+l(e_m,e_i)l(e_l,e_n)\big)l(e_o,e_j))l(e_k)+$

$+\big(\big(l(e_m,e_n)l(e_o,e_i)+l(e_n,e_o)l(e_m,e_i)+l(e_o,e_m)l(e_n,e_i)\big)l(e_{j,}e_k)+$

$+\big(l(e_n,e_o)l(e_i,e_j)+l(e_o,e_i)\,l(e_n,e_j)+l(e_i,e_n)\,l(e_o,e_j)\big)l(e_m,e_k)+$

$+\big(l(e_o,e_i)\,l(e_j,e_m)+l(e_i,e_j)\,l(e_o,e_m)+l(e_j,e_o)\,l(e_i,e_m)\big)l(e_n,e_k)+$

$+\big(l(e_i,e_j)\,l(e_m,e_n)+l(e_j,e_m)l(e_i,e_n)+l(e_m,e_i)l(e_j,e_n)\big)\,l(e_o,e_k)+$

$+\big(l(e_j,e_m)l(e_n,e_o)+l(e_m,e_n)l(e_j,e_o)+l(e_n,e_j)l(e_m,e_o)\big)l(e_i,e_k))l(e_l)+$

$+\big(\big(l(e_n,e_o)l(e_i,e_j)+l(e_o,e_i)\,l(e_n,e_j)+l(e_i,e_n)l(e_o,e_j)\big)l(e_{k,}e_l)+$

$+\big(l(e_o,e_i)l(e_j,e_k)+l(e_i,e_j)\,l(e_o,e_k)+l(e_j,e_o)l(e_i,e_k)\big)l(e_n,e_l)+$

$+\big(l(e_i,e_j)\,l(e_k,e_n)+l(e_j,e_k)l(e_i,e_n)+l(e_k,e_i)l(e_j,e_n)\big)l(e_o,e_l)+$

$+\big(l(e_j,e_k)l(e_n,e_o)+l(e_k,e_n)l(e_j,e_o)+l(e_n,e_j)l(e_k,e_o)\big)l(e_i,e_l)+$

$+\big(l(e_k,e_n)l(e_o,e_i)+l(e_n,e_o)l(e_k,e_i)+l(e_o,e_k)l(e_n,e_i)\big)l(e_j,e_l))l(e_m)+$

$+\big(\big(l(e_o,e_i)l(e_j,e_k)+l(e_i,e_j)l(e_o,e_k)+l(e_j,e_o)l(e_i,e_k)\big)l(e_{l,}e_m)+$

$$+\big(l(e_i,e_j)l(e_k,e_l)+l(e_j,e_k)l(e_i,e_l)+l(e_k,e_i)l(e_j,e_l)\big)\, l(e_o,e_m)+$$

$$+\big(l(e_j,e_k)l(e_l,e_o)+l(e_k,e_l)l(e_j,e_o)+l(e_l,e_j)\, l(e_k,e_o)\big)l(e_i,e_m)+$$

$$+\big(l(e_k,e_l)l(e_o,e_i)+l(e_l,e_o)l(e_k,e_i)+l(e_o,e_k)l(e_l,e_i)\big)\, l(e_j,e_m)+$$

$$+\big(l(e_l,e_o)l(e_i,e_j)+l(e_o,e_i)l(e_l,e_j)+l(e_i,e_l)\, l(e_o,e_j)\big)\, l(e_k,e_m))l(e_n))=1/105\bullet$$

$$\bullet(((l_{ij}l_{kl}+l_{jk}l_{il}+l_{ki}l_{jl})\, l_{mn}+(l_{jk}l_{lm}+l_{kl}l_{jm}+l_{lj}l_{km})\, l_{in}+(l_{kl}l_{mi}+l_{lm}l_{ki}+l_{mk}l_{li})\, l_{jn}+(l_{lm}l_{ij}+l_{mi}l_{lj}+l_{il}l_{mj})\, l_{kn}+(l_{mi}l_{jk}+l_{ij}l_{mk}+l_{jm}l_{ik})\, l_{ln})\ l_o+$$

$$+((l_{jk}l_{lm}+l_{kl}l_{jm}+l_{lj}l_{km})l_{no}+(l_{kl}l_{mn}+l_{lm}l_{kn}+l_{mk}l_{ln})l_{jo}+(l_{lm}l_{nj}+l_{mn}l_{lj}+l_{nl}l_{mj})\, l_{ko}+(l_{mn}l_{jk}+l_{nj}l_{mk}+l_{jm}l_{nk})l_{lo}+(l_{nj}l_{kl}+l_{jk}l_{nl}+l_{kn}l_{jl})\ l_{mo})l_i+$$

$$+((l_{kl}l_{mn}+l_{lm}l_{kn}+l_{mk}l_{ln})l_{oi}+(l_{lm}l_{no}+l_{mn}l_{lo}+l_{nl}l_{mo})l_{ki}+(l_{mn}l_{ok}+l_{no}l_{mk}+l_{om}l_{nk})l_{li}+(l_{no}l_{kl}+l_{ok}l_{nl}+l_{kn}l_{ol})l_{mi}+(l_{ok}l_{lm}+l_{kl}l_{om}+l_{lo}l_{km})l_{ni})\, l_j+$$

$$+((l_{lm}l_{no}+l_{mn}l_{lo}+l_{nl}l_{mo})l_{ij}+(l_{mn}l_{oi}+l_{no}l_{mi}+l_{om}l_{ni})l_{lj}+(l_{no}l_{il}+l_{oi}l_{nl}+l_{in}l_{ol})\ l_{mj}+(l_{oi}l_{lm}+l_{il}l_{om}+l_{lo}l_{im})l_{nj}+(l_{il}l_{mn}+l_{lm}l_{in}+l_{mi}l_{ln})\, l_{oj})\, l_k+$$

$$+((l_{mn}l_{oi}+l_{no}l_{mi}+l_{om}l_{ni})l_{jk}+(l_{no}l_{ij}+l_{oi}l_{nj}+l_{in}l_{oj})\, l_{mk}+(l_{oi}l_{jm}+l_{ij}l_{om}+l_{jo}l_{im})\, l_{nk}+(l_{ij}l_{mn}+l_{jm}l_{in}+l_{mi}l_{jn})l_{ok}+(l_{jm}l_{no}+l_{mn}l_{jo}+l_{nj}l_{mo})l_{ik})\, l_l+$$

$$+((l_{no}l_{ij}+l_{oi}l_{nj}+l_{in}l_{oj})\ l_{kl}+(l_{oi}l_{jk}+l_{ij}l_{ok}+l_{jo}l_{ik})\, l_{nl}+(l_{ij}l_{kn}+l_{jk}l_{in}+l_{ki}l_{jn})\ l_{ol}+(l_{jk}l_{no}+l_{kn}l_{jo}+l_{nj}l_{ko})l_{il}+(l_{kn}l_{oi}+l_{no}l_{ki}+l_{ok}l_{ni})\, l_{jl})\ l_m+$$

$$+((l_{oi}l_{jk}+l_{ij}l_{ok}+l_{jo}l_{ik})\ l_{lm}+(l_{ij}l_{kl}+l_{jk}l_{il}+l_{ki}l_{jl})\, l_{om}+(l_{jk}l_{lo}+l_{kl}l_{jo}+l_{lj}l_{ko})\, l_{im}+(l_{kl}l_{oi}+l_{lo}l_{ki}+l_{ok}l_{li})\, l_{jm}+(l_{lo}l_{ij}+l_{oi}l_{lj}+l_{il}l_{oj})\ l_{km})l_n)=$$

$$=1/15((l_{ijkl}\ l_{mn}+l_{jklm}l_{in}+l_{klmi}\, l_{jn}+l_{lmij}\, l_{kn}+l_{mijk}\, l_{ln})\, l_o+$$

$$+(l_{jklm}\, l_{no}+l_{klmn}l_{jo}+l_{lmnj}\, l_{ko}+l_{mnjk}l_{lo}+l_{njkl}\ l_{mo})l_i+$$

$$+(l_{klmn}l_{oi}+l_{lmno}l_{ki}+l_{mnok}l_{li}+l_{nokl}\, l_{mi}+l_{oklm}l_{ni})\, l_j+$$

$$+(l_{lmno}l_{ij}+l_{mnoi}l_{lj}+l_{noil}\ l_{mj}+l_{oilm}\, l_{nj}+l_{ilmn}\, l_{oj})\, l_k+$$

$$+(l_{mnoi}l_{jk}+l_{noij}\ l_{mk}+l_{oijm}\, l_{nk}+l_{ijmn}l_{ok}+l_{jmno}\, l_{ik})\, l_l+$$

$$+(l_{noij}\ l_{kl}+l_{oijk}\ l_{nl}+l_{ijkn}\ l_{ol}+l_{jkno}\, l_{il}+l_{knoi}\ l_{jl})\ l_m+$$

$$+(l_{oijk}\ l_{lm}+l_{ijkl}\ l_{om}+l_{jklo}\ l_{im}+l_{kloi}\, l_{jm}+l_{loij}\ l_{km})\, l_n)=$$

$$=1/15(l_{ijklmn}l_o+l_{jklmno}l_i+l_{klmnoi}l_j+l_{lmnoij}l_k+l_{mnoijk}l_l+l_{noijkl}l_m+l_{oijklm}l_n)=l_{oijklmn},$$

т.е. тензор полилинейной формы от семи переменных L_7.

Спрашивается: как при переходе от базиса $\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n$ к новому базису $\mathbf{e}_1',\dots,\mathbf{e}_n'$ преобразуется тензор L_7 линейной функции от семи переменных.

Пусть линейная функция от семи переменных $l(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{d},\mathbf{e},\mathbf{f},\mathbf{g})$ записывается относительно базиса $\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n$ в виде линейной формы от семи переменных $l(a,b,c,d,e,f,g)=\sum\sum\sum\sum\sum\sum\sum l_{ijklmno}a^ib^jc^kd^le^mf^ng^o=1/105\cdot$

$$\cdot(((A^TL_2B\cdot C^TL_2D+B^TL_2C\cdot A^TL_2D+C^TL_2A\cdot B^TL_2D)\cdot E^TL_2F+$$

$$+(B^TL_2C\cdot D^TL_2E+C^TL_2D\cdot B^TL_2E+D^TL_2B\cdot C^TL_2E)\cdot A^TL_2F+$$

$$+(C^TL_2D\cdot E^TL_2A+D^TL_2E\cdot C^TL_2A+E^TL_2C\cdot D^TL_2A)\cdot B^TL_2F+$$

$$+(D^TL_2E\cdot A^TL_2B+E^TL_2A\cdot D^TL_2B+A^TL_2D\cdot E^TL_2B)\cdot C^TL_2F+$$

$$+(E^TL_2A\cdot B^TL_2C+A^TL_2B\cdot E^TL_2C+B^TL_2E\cdot A^TL_2C)\cdot D^TL_2F)\cdot L_1G+$$

………………………………………………………………….

$+(G^TL_2A\cdot B^TL_2C+A^TL_2B\cdot G^TL_2C+B^TL_2G\cdot A^TL_2C)\cdot D^TL_2E+$

$+(A^TL_2B\cdot C^TL_2D+B^TL_2C\cdot A^TL_2D+C^TL_2A\cdot B^TL_2D)\cdot G^TL_2E+$

$+(B^TL_2C\cdot D^TL_2G+C^TL_2D\cdot B^TL_2G+D^TL_2B\cdot C^TL_2G)\cdot A^TL_2E+$

$+(C^TL_2D\cdot G^TL_2A+D^TL_2G\cdot C^TL_2A+G^TL_2C\cdot D^TL_2A)\cdot B^TL_2E+$

$+(D^TL_2G\cdot A^TL_2B+G^TL_2A\cdot D^TL_2B+A^TL_2D\cdot G^TL_2B)\cdot C^TL_2E)\cdot L_1F)$

при $a=a^1e_1+...+a^ne_n$, $b=b^1e_1+...+b^ne_n$, $c=c^1e_1+...+c^ne_n$, $d=d^1e_1+...+d^ne_n$, $e=e^1e_1+...+e^ne_n$, $f=f^1e_1+...+f^ne_n$, $g=g^1e_1+...+g^ne_n$ с тензором L_7, определяемым тензорами L_2 и L_1, а относительно базиса $e_{1'},...,e_{n'}$ в виде линейной формы от семи переменных

$l(a,b,c,d,e,f,g)=\sum\sum\sum\sum\sum\sum\sum l_{ijklmno}{}' a^{i'}b^{j'}c^{k'}d^{l'}e^{m'}f^{n'}g^{o'}=1/105\cdot$

$\cdot(((A'^TL_2'B'\cdot C'^TL_2'D'+B'^TL_2'C'\cdot A'^TL_2D'+C'^TL_2A'\cdot B'^TL_2'D')\cdot E'^TL_2'F'+$

$+(B'^TL_2'C'\cdot D'^TL_2'E'+C'^TL_2'D'\cdot B'^TL_2'E'+D'^TL_2'B'\cdot C'^TL_2'E')\cdot A'^TL_2'F'+$

$+(C'^TL_2'D'\cdot E'^TL_2'A'+D'^TL_2'E'\cdot C'^TL_2'A'+E'^TL_2'C'\cdot D'^TL_2'A')\cdot B'^TL_2'F'+$

$+(D'^TL_2'E'\cdot A'^TL_2'B'+E'^TL_2'A'\cdot D'^TL_2'B'+A'^TL_2'D'\cdot E'^TL_2'B')\cdot C'^TL_2'F'+$

$+(E'^TL_2'A'\cdot B'^TL_2'C'+A'^TL_2'B'\cdot E'^TL_2'C'+B'^TL_2'E'\cdot A'^TL_2'C')\cdot D'^TL_2'F')\cdot L_1'G'+$

…………………………………………………………………………..

$+(G'^TL_2'A'\cdot B'^TL_2'C'+A'^TL_2'B'\cdot G'^TL_2'C'+B'^TL_2'G'\cdot A'^TL_2'C')\cdot D'^TL_2'E'+$

$+(A'^TL_2'B'\cdot C'^TL_2'D'+B'^TL_2'C'\cdot A'^TL_2'D'+C'^TL_2'A'\cdot B'^TL_2'D')\cdot G'^TL_2'E'+$

$+(B'^TL_2'C'\cdot D'^TL_2'G'+C'^TL_2'D'\cdot B'^TL_2'G'+D'^TL_2'B'\cdot C'^TL_2'G')\cdot A'^TL_2'E'+$

$+(C'^TL_2'D'\cdot G'^TL_2'A'+D'^TL_2'G'\cdot C'^TL_2'A'+G'^TL_2'C'\cdot D'^TL_2'A')\cdot B'^TL_2'E'+$

$+(D'^TL_2'G'\cdot A'^TL_2'B'+G'^TL_2'A'\cdot D'^TL_2'B'+A'^TL_2'D'\cdot G'^TL_2'B')\cdot C'^TL_2'E')\cdot L_1'F')$

при $a=a^{1'}e_{1'}+...+a^{n'}e_{n'}$, $b=b^{1'}e_{1'}+...+b^{n'}e_{n'}$, $c=c^{1'}e_{1'}+...+c^{n'}e_{n'}$, $d=d^{1'}e_{1'}+...+d^{n'}e_{n'}$, $e=e^{1'}e_{1'}+...+e^{n'}e_{n'}$, $f=f^{1'}e_{1'}+...+f^{n'}e_{n'}$, $g=g^{1'}e_{1'}+...+g^{n'}e_{n'}$ с тензором L_7, определяемым тензорами $L_{2'}$ и $L_{1'}$.

При этом $e_{i'}=\sum e^k{}_{i'}e_k$ и $a^i=\sum e^i{}_{k'}a^{k'}$, $k=1,...,n$, что соответствует матрице преобразования векторов

$$H=\begin{Vmatrix} e^1{}_{1'} & e^1{}_{2'} & ... & e^1{}_{n'} \\ e^2{}_{1'} & e^2{}_{2'} & ... & e^2{}_{n'} \\ ... & ... & ... & ... \\ e^n{}_{1'} & e^n{}_{2'} & ... & e^n{}_{n'} \end{Vmatrix},$$

т.е. преобразованиям $A=HA'$, $B=HB'$, $C=HC'$, $D=HD'$, $E=HE'$, $F=HF'$, $G=HG'$ т.е. $A^{T}=A'^{T}H^{T}$, $B^{T}=B'^{T}H^{T}$, $C^{T}=C'^{T}H^{T}$, $D^{T}=D'^{T}H^{T}$, $E^{T}=E'^{T}H^{T}$, $F^{T}=F'^{T}H^{T}$, $G^{T}=G'^{T}H^{T}$.

Тогда имеем

$l(a,b,c,d,e,f,g)= 1/105\cdot$

$\cdot((A^{T}L_2B\cdot C^{T}L_2D+B^{T}L_2C\cdot A^{T}L_2D+C^{T}L_2A\cdot B^{T}L_2D)\cdot E^{T}L_2F+$

$+(B^{T}L_2C\cdot D^{T}L_2E+C^{T}L_2D\cdot B^{T}L_2E+D^{T}L_2B\cdot C^{T}L_2E)\cdot A^{T}L_2F+$

$+(C^{T}L_2D\cdot E^{T}L_2A+D^{T}L_2E\cdot C^{T}L_2A+E^{T}L_2C\cdot D^{T}L_2A)\cdot B^{T}L_2F+$

$+(D^{T}L_2E\cdot A^{T}L_2B+E^{T}L_2A\cdot D^{T}L_2B+A^{T}L_2D\cdot E^{T}L_2B)\cdot C^{T}L_2F+$

$+(E^{T}L_2A\cdot B^{T}L_2C+A^{T}L_2B\cdot E^{T}L_2C+B^{T}L_2E\cdot A^{T}L_2C)\cdot D^{T}L_2F)\ \cdot L_1G+$

…………………………………………………………

$+(G^{T}L_2A\cdot B^{T}L_2C+A^{T}L_2B\cdot G^{T}L_2C+B^{T}L_2G\cdot A^{T}L_2C)\cdot D^{T}L_2E+$

$+(A^{T}L_2B\cdot C^{T}L_2D+B^{T}L_2C\cdot A^{T}L_2D+C^{T}L_2A\cdot B^{T}L_2D)\cdot G^{T}L_2E+$

$+(B^{T}L_2C\cdot D^{T}L_2G+C^{T}L_2D\cdot B^{T}L_2G+D^{T}L_2B\cdot C^{T}L_2G)\cdot A^{T}L_2E+$

$+(C^{T}L_2D\cdot G^{T}L_2A+D^{T}L_2G\cdot C^{T}L_2A+G^{T}L_2C\cdot D^{T}L_2A)\cdot B^{T}L_2E+$

$+(D^{T}L_2G\cdot A^{T}L_2B+G^{T}L_2A\cdot D^{T}L_2B+A^{T}L_2D\cdot G^{T}L_2B)\cdot C^{T}L_2E)\cdot L_1F)=1/105\cdot$

$\cdot(((A'^{T}H^{T}L_2HB'\cdot C'^{T}H^{T}L_2HD'+B'^{T}H^{T}L_2HC'\cdot A'^{T}H^{T}L_2HD'+C'^{T}H^{T}L_2HA'\cdot B'^{T}H^{T}L_2HD')\cdot E'^{T}H^{T}L_2HF'+$

$+(B'^{T}H^{T}L_2HC'\cdot D'^{T}H^{T}L_2HE'+C'^{T}H^{T}L_2HD'\cdot B'^{T}H^{T}L_2HE'+D'^{T}H^{T}L_2HB'\cdot C'^{T}H^{T}L_2HE')\cdot A'^{T}H^{T}L_2HF'+$

$+(C'^{T}H^{T}L_2HD'\cdot E'^{T}H^{T}L_2HA'+D'^{T}H^{T}L_2HE'\cdot C'^{T}H^{T}L_2HA'+E'^{T}H^{T}L_2HC'\cdot D'^{T}H^{T}L_2HA')\cdot B'^{T}H^{T}L_2HF'+$

$+(D'^{T}H^{T}L_2HE'\cdot A'^{T}H^{T}L_2HB'+E'^{T}H^{T}L_2HA'\cdot D'^{T}H^{T}L_2HB'+A'^{T}H^{T}L_2HD'\cdot E'^{T}H^{T}L_2HB')\cdot C'^{T}H^{T}L_2HF'+$

$+(E'^{T}H^{T}L_2HA'\cdot B'^{T}H^{T}L_2HC'+A'^{T}H^{T}L_2HB'\cdot E'^{T}H^{T}L_2HC'+B'^{T}H^{T}L_2HE'\cdot A'^{T}H^{T}L_2HC')\cdot E'^{T}H^{T}L_2HF')\cdot L_1HG'+$

……………………………………………………………………………………………………

$+(G'^{T}H^{T}L_2HA'\cdot B'^{T}H^{T}L_2HC'+A'^{T}H^{T}L_2HB'\cdot G'^{T}H^{T}L_2HC'+B'^{T}H^{T}L_2HG'\cdot A'^{T}H^{T}L_2HC')\cdot D'^{T}H^{T}L_2HE'+$

$+(A'^{T}H^{T}L_2HB'\cdot C'^{T}H^{T}L_2HD'+B'^{T}H^{T}L_2HC'\cdot A'^{T}H^{T}L_2HD'+C'^{T}H^{T}L_2HA'\cdot B'^{T}H^{T}L_2HD')\cdot G'^{T}H^{T}L_2HE'+$

$+(B'^{T}H^{T}L_2HC'\cdot D'^{T}H^{T}L_2HG'+C'^{T}H^{T}L_2HD'\cdot B'^{T}H^{T}L_2HG'+D'^{T}H^{T}L_2HB'\cdot C'^{T}H^{T}L_2HG')\cdot A'^{T}H^{T}L_2HE'+$

$+(C'^{T}H^{T}L_2HD'\cdot G'^{T}H^{T}L_2HA'+D'^{T}H^{T}L_2HG'\cdot C'^{T}H^{T}L_2HA'+G'^{T}H^{T}L_2HC'\cdot D'^{T}H^{T}L_2HA')\cdot B'^{T}H^{T}L_2HE'+$

$+(D'^{T}H^{T}L_2HG'\cdot A'^{T}H^{T}L_2HB'+G'^{T}H^{T}L_2HA'\cdot D'^{T}H^{T}L_2HB'+A'^{T}H^{T}L_2HD'\cdot G'^{T}H^{T}L_2HB')\cdot C'^{T}H^{T}L_2HE')\cdot L_1HF')=$

$=1/105\cdot(((A'^{T}L_2'B'\cdot C'^{T}L_2'D'+B'^{T}L_2'C'\cdot A'^{T}L_2'D'+C'^{T}L_2'A'\cdot B'^{T}L_2'D')\cdot E'^{T}L_2'F'+$

$+(B'^{T}L_2'C'\cdot D'^{T}L_2'E'+C'^{T}L_2'D'\cdot B'^{T}L_2'E'+D'^{T}L_2'B'\cdot C'^{T}L_2'E')\cdot A'^{T}L_2'F'+$

$+(C'^{T}L_2'D'\cdot E'^{T}L_2'A'+D'^{T}L_2'E'\cdot C'^{T}L_2'A'+E'^{T}L_2'C'\cdot D'^{T}L_2'A')\cdot B'^{T}L_2'F'+$

$+(D'^{T}L_2'E'\cdot A'^{T}L_2'B'+E'^{T}L_2'A'\cdot D'^{T}L_2'B'+A'^{T}L_2'D'\cdot E'^{T}L_2'B')\cdot C'^{T}L_2'F'+$

$+(E'^{T}L_2'A'\cdot B'^{T}L_2'C'+A'^{T}L_2'B'\cdot E'^{T}L_2'C'+B'^{T}L_2'E'\cdot A'^{T}L_2'C')\cdot D'^{T}L_2'F')\cdot L_1G+$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$$+(G'^TL_2'A'\cdot B'^TL_2'C'+A'^TL_2'B'\cdot G'^TL_2'C'+B'^TL_2'G'\cdot A'^TL_2'C')\cdot D'^TL_2'E'+$$

$$+(A'^TL_2'B'\cdot C'^TL_2'D'+B'^TL_2'C'\cdot A'^TL_2'D'+C'^TL_2'A'\cdot B'^TL_2'D')\cdot G'^TL_2'E'+$$

$$+(B'^TL_2'C'\cdot D'^TL_2'G'+C'^TL_2'D'\cdot B'^TL_2'G'+D'^TL_2'B'\cdot C'^TL_2'G')\cdot A'^TL_2'E'+$$

$$+(C'^TL_2'D'\cdot G'^TL_2'A'+D'^TL_2'G'\cdot C'^TL_2'A'+G'^TL_2'C'\cdot D'^TL_2'A')\cdot B'^TL_2'E'+$$

$$+(D'^TL_2'G'\cdot A'^TL_2'B'+G'^TL_2'A'\cdot D'^TL_2'B'+A'^TL_2'D'\cdot G'^TL_2'B')\cdot C'^TL_2'E')\cdot L_1'F'),$$

т.е. $L_2'=H^TL_2H$ и $L_1'=L_1H$.

Линейная функция седьмой степени аргумента, определенная в L^n соответственно записывается относительно базиса $e_1,\ldots,e_n$ формой $l(a,a,a,a,a,a,a)=\sum\sum\sum\sum\sum\sum\sum l_{ij\kappa lmno}a^ia^ja^\kappa a^la^ma^na^o=A^TL_2A\cdot A^TL_2A\cdot A^TL_2A\cdot L_1A$, определяемой тензорами L_2 и L_1, а относительно базиса $e_1',\ldots,e_n'$ формой $l(a,a,a,a,a,a,a)=\sum\sum\sum\sum\sum\sum\sum l_{ij\kappa lmno}'a^{i'}a^{j'}a^{\kappa'}a^{l'}a^{m'}a^{n'}a^{o'}=A'^TL_2'A'\cdot A'^TL_2'A'\cdot A'^TL_2'A'\cdot L_1'A'$, определяемой тензорами L_2' и L_1', причем $L_2'=H^TL_2H$ и $L_1'=L_1H$.

Отметим, что тензоры симметрических полилинейных скалярных функций являются функциями тензоров билинейных и линейных симметрических функций, в полной мере определяющих метрические свойства векторного пространства. В работе рассмотрены тензоры симметрических скалярных функций одного, двух,..., семи векторов, определенных в рамках семимерной векторной алгебры. В случае n>7 в линейных векторных пространствах L^n возможно определение тензоров симметрических скалярных функций большего числа векторов.

Литература

1.**Александров П.С**. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. – М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1979. –512с.

КОРОТКОВ А. В.

СЕМИМЕРНЫЕ СПИНОРНЫЕ АЛГЕБРЫ

Волновая функция мультиплета частиц в спинорном представлении определяется совокупностью двух шестикомпонентных 8-спиноров 1-го ранга
ψ^{α} и φ^{β}, а операторный 8-спинор 2-го ранга $p^{\alpha\beta}$ имеет вид:

$$p^{\alpha\beta}=\left\Vert\begin{array}{cc|cccc}
p^6+ip^1 & 0 & 0 & p^2+ip^5 & p^3+ip^4 & -p^0+p^7 \\
0 & -p^2+ip^5 & -p^6+ip^1 & 0 & p^0+p^7 & -p^3+ip^4 \\
\hline
0 & -p^6+ip^1 & -p^3+ip^4 & p^0+p^7 & 0 & -p^2+ip^5 \\
p^2+ip^5 & 0 & -p^0+p^7 & p^3+ip^4 & p^6+ip^1 & 0 \\
p^3+ip^4 & -p^0+p^7 & 0 & p^6+ip^1 & p^2+ip^5 & 0 \\
p^0+p^7 & -p^3+ip^4 & -p^2+ip^5 & 0 & 0 & -p^6+ip^1
\end{array}\right\Vert .$$

Действуя оператором $p^{\alpha\beta}$ на 8-спиноры ψ^{α} и φ^{β}, образовывая скалярное произведение по индексам:

$$\left.\begin{array}{l}
(p^{361.5\beta}\psi^4 + p^{625.4\beta}\psi^1 + p^{234.1\beta}\psi^5) - (p^{456.2\beta}\psi^3 + p^{142.3\beta}\psi^6 + p^{513.6\beta}\psi^2) = m\varphi^{\beta}, \\
(p^{\alpha 456.2}\varphi^3 + p^{\alpha 142.3}\varphi^6 + p^{\alpha 513.6}\varphi^2) - (p^{\alpha 361.5}\varphi^4 + p^{\alpha 625.4}\varphi^1 + p^{\alpha 234.1}\varphi^5) = m\psi^{\alpha}.
\end{array}\right\}$$

получим:

$$\left.\begin{array}{l}
(p^0+p^7)\psi^{142.3} - (p^3+ip^4)\psi^{234.1} - (p^6+ip^1)\psi^{625.4} - (p^2+ip^5)\psi^{361.5} = m\varphi^1, \\
(p^0-p^7)\psi^{234.1} - (p^3-ip^4)\psi^{142.3} - (p^6-ip^1)\psi^{456.2} - (p^2-ip^5)\psi^{513.6} = m\varphi^2, \\
(p^0-p^7)\psi^{361.5} - (p^3-ip^4)\psi^{456.2} - (p^6-ip^1)\psi^{513.6} - (p^2-ip^5)\psi^{142.3} = m\varphi^3, \\
(p^0+p^7)\psi^{456.2} - (p^3+ip^4)\psi^{361.5} - (p^6+ip^1)\psi^{234.1} - (p^2+ip^5)\psi^{625.4} = m\varphi^4, \\
(p^0+p^7)\psi^{513.6} - (p^3+ip^4)\psi^{625.4} - (p^6+ip^1)\psi^{361.5} - (p^2+ip^5)\psi^{234.1} = m\varphi^5, \\
(p^0-p^7)\psi^{625.4} - (p^3-ip^4)\psi^{513.6} - (p^6-ip^1)\psi^{142.3} - (p^2-ip^5)\psi^{456.2} = m\varphi^6,
\end{array}\right\}$$

$$(p^0 - p^7)\varphi^{142.3} + (p^3 + ip^4)\varphi^{234.1} + (p^6 + ip^1)\varphi^{625.4} + (p^2 + ip^5)\varphi^{361.5} = m\psi^1,$$
$$(p^0 + p^7)\varphi^{234.1} + (p^3 - ip^4)\varphi^{142.3} + (p^6 - ip^1)\varphi^{456.2} + (p^2 - ip^5)\varphi^{513.6} = m\psi^2,$$
$$(p^0 + p^7)\varphi^{361.5} + (p^3 - ip^4)\varphi^{456.2} + (p^6 - ip^1)\varphi^{513.6} + (p^2 - ip^5)\varphi^{142.3} = m\psi^3,$$
$$(p^0 - p^7)\varphi^{456.2} + (p^3 + ip^4)\varphi^{361.5} + (p^6 + ip^1)\varphi^{234.1} + (p^2 + ip^5)\varphi^{625.4} = m\psi^4,$$
$$(p^0 - p^7)\varphi^{513.6} + (p^3 + ip^4)\varphi^{625.4} + (p^6 + ip^1)\varphi^{361.5} + (p^2 + ip^5)\varphi^{234.1} = m\psi^5,$$
$$(p^0 + p^7)\varphi^{625.4} + (p^3 - ip^4)\varphi^{513.6} + (p^6 - ip^1)\varphi^{142.3} + (p^2 - ip^5)\varphi^{456.2} = m\psi^6,$$

Здесь символом $\psi^{ijk.l}$ обозначена сумма вида $\psi^{ijk.l} = \psi^i + \psi^j + \psi^k - \psi^l$.

Две пары этих уравнений можно записать в виде уравнений (Дирака)

$$\left.\begin{array}{l} (p^0 - p\sigma)\psi = m\varphi, \\ (p^0 + p\sigma)\varphi = m\psi \end{array}\right\}$$

с помощью матриц (Паули) вида:

$$\sigma_3 = 1/2 \left\| \begin{array}{cc|cccc} -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right\|, \quad \sigma_4 = 1/2 \left\| \begin{array}{cc|cccc} -i & i & i & i & 0 & 0 \\ -i & -i & i & -i & 0 & 0 \\ \hline 0 & i & 0 & -i & -i & -i \\ i & 0 & i & 0 & -i & i \\ 0 & i & 0 & -i & i & i \\ -i & 0 & -i & 0 & -i & i \end{array} \right\|,$$

$$\sigma_6 = 1/2 \left\| \begin{array}{cc|cccc} 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right\|, \quad \sigma_1 = 1/2 \left\| \begin{array}{cc|cccc} 0 & i & 0 & -i & i & i \\ 0 & i & 0 & -i & -i & -i \\ \hline -i & 0 & -i & 0 & -i & i \\ -i & i & i & i & 0 & 0 \\ i & 0 & i & 0 & -i & i \\ -i & -i & i & -i & 0 & 0 \end{array} \right\|,$$

$$\sigma_6=1/2\left\|\begin{array}{cc|cccc} 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right\|, \quad \sigma_1=1/2\left\|\begin{array}{cc|cccc} 0 & i & 0 & -i & i & i \\ 0 & i & 0 & -i & -i & -i \\ \hline -i & 0 & -i & 0 & -i & i \\ -i & i & i & i & 0 & 0 \\ i & 0 & i & 0 & -i & i \\ -i & -i & i & -i & 0 & 0 \end{array}\right\|,$$

$$\sigma_2=1/2\left\|\begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ \hline 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right\|, \quad \sigma_5=1/2\left\|\begin{array}{cc|cccc} i & 0 & i & 0 & -i & i \\ -i & 0 & -i & 0 & -i & i \\ \hline -i & -i & i & -i & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & -i & i & i \\ -i & i & i & i & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & -i & -i & -i \end{array}\right\|,$$

$$\sigma_7=1/2\left\|\begin{array}{cc|cccc} -1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right\|.$$

Следующие семь унитарных матриц преобразований описывают вращения на угол φ вокруг i-той координатной оси:

$$U_{1(\varphi)}=1/2\left\|\begin{array}{cc|cccc} 2\mathrm{Cos}\varphi/2 & \mathrm{Sin}\varphi/2 & 0 & -\mathrm{Sin}\varphi/2 & \mathrm{Sin}\varphi/2 & \mathrm{Sin}\varphi/2 \\ 0 & 2\mathrm{Cos}\varphi/2+\mathrm{Sin}\varphi/2 & 0 & -\mathrm{Sin}\varphi/2 & -\mathrm{Sin}\varphi/2 & -\mathrm{Sin}\varphi/2 \\ \hline -\mathrm{Sin}\varphi/2 & 0 & 2\mathrm{Cos}\varphi/2-\mathrm{Sin}\varphi/2 & 0 & -\mathrm{Sin}\varphi/2 & \mathrm{Sin}\varphi/2 \\ -\mathrm{Sin}\varphi/2 & \mathrm{Sin}\varphi/2 & \mathrm{Sin}\varphi/2 & 2\mathrm{Cos}\varphi/2+\mathrm{Sin}\varphi/2 & 0 & 0 \\ \mathrm{Sin}\varphi/2 & 0 & \mathrm{Sin}\varphi/2 & 0 & 2\mathrm{Cos}\varphi/2-\mathrm{Sin}\varphi/2 & \mathrm{Sin}\varphi/2 \\ -\mathrm{Sin}\varphi/2 & -\mathrm{Sin}\varphi/2 & \mathrm{Sin}\varphi/2 & -\mathrm{Sin}\varphi/2 & 0 & 2\mathrm{Cos}\varphi/2 \end{array}\right\|.$$

$$U_{2(\varphi)}=1/2\left\|\begin{array}{cc|cccc}2\mathrm{Cos}\varphi/2+i\mathrm{Sin}\varphi/2 & 0 & i\mathrm{Sin}\varphi/2 & 0 & -i\mathrm{Sin}\varphi/2 & i\mathrm{Sin}\varphi/2\\ i\mathrm{Sin}\varphi/2 & 2\mathrm{Cos}\varphi/2 & i\mathrm{Sin}\varphi/2 & 0 & i\mathrm{Sin}\varphi/2 & -i\mathrm{Sin}\varphi/2\\ \hline i\mathrm{Sin}\varphi/2 & i\mathrm{Sin}\varphi/2 & 2\mathrm{Cos}\varphi/2-i\mathrm{Sin}\varphi/2 & i\mathrm{Sin}\varphi/2 & 0 & 0\\ 0 & i\mathrm{Sin}\varphi/2 & 0 & 2\mathrm{Cos}\varphi/2-i\mathrm{Sin}\varphi/2 & i\mathrm{Sin}\varphi/2 & i\mathrm{Sin}\varphi/2\\ -i\mathrm{Sin}\varphi/2 & i\mathrm{Sin}\varphi/2 & i\mathrm{Sin}\varphi/2 & i\mathrm{Sin}\varphi/2 & 2\mathrm{Cos}\varphi/2 & 0\\ 0 & -i\mathrm{Sin}\varphi/2 & 0 & i\mathrm{Sin}\varphi/2 & i\mathrm{Sin}\varphi/2 & 2\mathrm{Cos}\varphi/2+i\mathrm{Sin}\varphi/2\end{array}\right\|,$$

$$U_{3(\varphi)}=1/2\left\|\begin{array}{cc|cccc}2\mathrm{Cos}\varphi/2-i\mathrm{Sin}\varphi/2 & i\mathrm{Sin}\varphi/2 & i\mathrm{Sin}\varphi/2 & i\mathrm{Sin}\varphi/2 & 0 & 0\\ i\mathrm{Sin}\varphi/2 & 2\mathrm{Cos}\varphi/2+i\mathrm{Sin}\varphi/2 & -i\mathrm{Sin}\varphi/2 & i\mathrm{Sin}\varphi/2 & 0 & 0\\ \hline 0 & -i\mathrm{Sin}\varphi/2 & 2\mathrm{Cos}\varphi/2 & i\mathrm{Sin}\varphi/2 & i\mathrm{Sin}\varphi/2 & i\mathrm{Sin}\varphi/2\\ i\mathrm{Sin}\varphi/2 & 0 & i\mathrm{Sin}\varphi/2 & 2\mathrm{Cos}\varphi/2 & -i\mathrm{Sin}\varphi/2 & i\mathrm{Sin}\varphi/2\\ 0 & i\mathrm{Sin}\varphi/2 & 0 & -i\mathrm{Sin}\varphi/2 & 2\mathrm{Cos}\varphi/2+i\mathrm{Sin}\varphi/2 & i\mathrm{Sin}\varphi/2\\ i\mathrm{Sin}\varphi/2 & 0 & i\mathrm{Sin}\varphi/2 & 0 & i\mathrm{Sin}\varphi/2 & 2\mathrm{Cos}\varphi/2-i\mathrm{Sin}\varphi/2\end{array}\right\|,$$

$$U_{4(\varphi)}=1/2\left\|\begin{array}{cc|cccc}2\mathrm{Cos}\varphi/2-\mathrm{Sin}\varphi/2 & \mathrm{Sin}\varphi/2 & \mathrm{Sin}\varphi/2 & \mathrm{Sin}\varphi/2 & 0 & 0\\ -\mathrm{Sin}\varphi/2 & 2\mathrm{Cos}\varphi/2-\mathrm{Sin}\varphi/2 & 0 & -\mathrm{Sin}\varphi/2 & 0 & 0\\ \hline 0 & \mathrm{Sin}\varphi/2 & 2\mathrm{Cos}\varphi/2 & -\mathrm{Sin}\varphi/2 & -\mathrm{Sin}\varphi/2 & -\mathrm{Sin}\varphi/2\\ \mathrm{Sin}\varphi/2 & 0 & \mathrm{Sin}\varphi/2 & 2\mathrm{Cos}\varphi/2 & -\mathrm{Sin}\varphi/2 & \mathrm{Sin}\varphi/2\\ 0 & \mathrm{Sin}\varphi/2 & 0 & -\mathrm{Sin}\varphi/2 & 2\mathrm{Cos}\varphi/2+\mathrm{Sin}\varphi/2 & \mathrm{Sin}\varphi/2\\ -\mathrm{Sin}\varphi/2 & 0 & -\mathrm{Sin}\varphi/2 & 0 & -\mathrm{Sin}\varphi/2 & 2\mathrm{Cos}\varphi/2+\mathrm{Sin}\varphi/2\end{array}\right\|,$$

$$U_{5(\varphi)}=1/2\left\|\begin{array}{cc|cccc}2\mathrm{Cos}\varphi/2+\mathrm{Sin}\varphi/2 & 0 & \mathrm{Sin}\varphi/2 & 0 & -\mathrm{Sin}\varphi/2 & \mathrm{Sin}\varphi/2\\ -\mathrm{Sin}\varphi/2 & 2\mathrm{Cos}\varphi/2 & -\mathrm{Sin}\varphi/2 & 0 & -\mathrm{Sin}\varphi/2 & \mathrm{Sin}\varphi/2\\ \hline -\mathrm{Sin}\varphi/2 & -\mathrm{Sin}\varphi/2 & 2\mathrm{Cos}\varphi/2+\mathrm{Sin}\varphi/2 & -\mathrm{Sin}\varphi/2 & 0 & 0\\ 0 & \mathrm{Sin}\varphi/2 & 0 & 2\mathrm{Cos}\varphi/2-\mathrm{Sin}\varphi/2 & \mathrm{Sin}\varphi/2 & \mathrm{Sin}\varphi/2\\ -\mathrm{Sin}\varphi/2 & \mathrm{Sin}\varphi/2 & \mathrm{Sin}\varphi/2 & \mathrm{Sin}\varphi/2 & 2\mathrm{Cos}\varphi/2 & 0\\ 0 & \mathrm{Sin}\varphi/2 & 0 & -\mathrm{Sin}\varphi/2 & -\mathrm{Sin}\varphi/2 & 2\mathrm{Cos}\varphi/2-\mathrm{Sin}\varphi/2\end{array}\right\|,$$

$$U_{6(\varphi)}=1/2\left\|\begin{array}{cc|cccc}2\mathrm{Cos}\varphi/2 & i\mathrm{Sin}\varphi/2 & 0 & -i\mathrm{Sin}\varphi/2 & i\mathrm{Sin}\varphi/2 & i\mathrm{Sin}\varphi/2\\ 0 & 2\mathrm{Cos}\varphi/2-i\mathrm{Sin}\varphi/2 & 0 & i\mathrm{Sin}\varphi/2 & i\mathrm{Sin}\varphi/2 & i\mathrm{Sin}\varphi/2\\ \hline i\mathrm{Sin}\varphi/2 & 0 & 2\mathrm{Cos}\varphi/2+i\mathrm{Sin}\varphi/2 & 0 & i\mathrm{Sin}\varphi/2 & -i\mathrm{Sin}\varphi/2\\ -i\mathrm{Sin}\varphi/2 & i\mathrm{Sin}\varphi/2 & i\mathrm{Sin}\varphi/2 & 2\mathrm{Cos}\varphi/2+i\mathrm{Sin}\varphi/2 & 0 & 0\\ i\mathrm{Sin}\varphi/2 & 0 & i\mathrm{Sin}\varphi/2 & 0 & 2\mathrm{Cos}\varphi/2-i\mathrm{Sin}\varphi/2 & i\mathrm{Sin}\varphi/2\\ i\mathrm{Sin}\varphi/2 & i\mathrm{Sin}\varphi/2 & -i\mathrm{Sin}\varphi/2 & i\mathrm{Sin}\varphi/2 & 0 & 2\mathrm{Cos}\varphi/2\end{array}\right\|,$$

$$U_{7(\varphi)}=1/2\left\|\begin{array}{cc|cccc}
2\mathrm{Cos}\varphi/2-i\mathrm{Sin}\varphi/2 & -i\mathrm{Sin}\varphi/2 & i\mathrm{Sin}\varphi/2 & -i\mathrm{Sin}\varphi/2 & 0 & 0 \\
-i\mathrm{Sin}\varphi/2 & 2\mathrm{Cos}\varphi/2+i\mathrm{Sin}\varphi/2 & i\mathrm{Sin}\varphi/2 & i\mathrm{Sin}\varphi/2 & 0 & 0 \\
\hline
i\mathrm{Sin}\varphi/2 & 0 & 2\mathrm{Cos}\varphi/2+i\mathrm{Sin}\varphi/2 & 0 & -i\mathrm{Sin}\varphi/2 & i\mathrm{Sin}\varphi/2 \\
0 & i\mathrm{Sin}\varphi/2 & 0 & 2\mathrm{Cos}\varphi/2-i\mathrm{Sin}\varphi/2 & -i\mathrm{Sin}\varphi/2 & -i\mathrm{Sin}\varphi/2 \\
-i\mathrm{Sin}\varphi/2 & 0 & -i\mathrm{Sin}\varphi/2 & 0 & 2\mathrm{Cos}\varphi/2-i\mathrm{Sin}\varphi/2 & i\mathrm{Sin}\varphi/2 \\
0 & i\mathrm{Sin}\varphi/2 & 0 & -i\mathrm{Sin}\varphi/2 & i\mathrm{Sin}\varphi/2 & 2\mathrm{Cos}\varphi/2+i\mathrm{Sin}\varphi/2
\end{array}\right\|.$$

Записи уравнений (Дирака) в спинорном представлении соответствует представление 12-типлета частиц со спином J=1/2 в форме

$$\left\{\begin{array}{l}\psi^1,\psi^2,\psi^3,\psi^4,\psi^5,\psi^6 \\ \varphi^1,\varphi^2,\varphi^3,\varphi^4,\varphi^5,\varphi^6.\end{array}\right\}$$

Литература

1. **Коротков А. В**. Элементы составного семимерного векторного исчисления. –Новочеркасск: Набла, 2004.– 40 с.

КОРОТКОВ А.В.

ПЯТНАДЦАТИМЕРНАЯ ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

$$\left\| \begin{matrix} \boldsymbol{3\text{-}D} & \boldsymbol{2^m\text{-}1} & \boldsymbol{2n+1} \\ \boldsymbol{2n+1} & \boldsymbol{7\text{-}D} & \boldsymbol{2^m\text{-}1} \\ \boldsymbol{2^m\text{-}1} & \boldsymbol{2n+1} & \boldsymbol{15\text{-}D} \end{matrix} \right\|$$

На практике широко используется трехмерное векторное исчисление во многих отраслях науки и техники. Менее известно, но хорошо изучено семимерное векторное исчисление. Оно разработано в последнюю четверть XX – го столетия и рассмотрено в плане векторного семимерного анализа, спинорного и изовекторного исчислений [1, 2].

Трехмерное и семимерное векторные исчисления обладают рядом замечательных свойств и выделяются среди евклидовых векторных пространств наличием операции векторного умножения двух векторов. Другим свойством этих алгебр является отсутствие обратного вектора и деления двух векторов друг на друга. Это, казалось бы, неприятное свойство, однако, дало трехмерные и семимерные векторные алгебры, широко используется и дает возможность дальнейшего расширения размерности векторных алгебр.

Векторным алгебрам в принципе не свойственно наличие обратных величин и процедуры деления векторов, а, следовательно, полученный в XIX веке замечательный результат в отношении гиперкомплексных чисел с делением не является ограничением для получения многомерных векторных алгебр. Рассмотрим в связи с этим порядок получения пятнадцатимерной векторной алгебры, используя известную процедуру удвоения чисел, которая дала возможность получить из алгебры одномерных чисел (действительных чисел), алгебры двух-, четырех- и восьмимерных чисел – комплексных чисел, кватернионов и октонионов Кэли.

Порядок получения комплексных чисел кватернионов и октонионов связан с процедурой удвоения. Отметим, что задача нахождения пятнадцатимерных векторных алгебр имеет неоднозначное решение. Каждое решение определяется видом процедуры удвоения, так, например, при удвоении действительных чисел можно получить двухмерные комплексные числа

$$\boldsymbol{ab}=(a_0b_0-b_1a_1,\ a_0b_1+b_0a_1),$$

т.е. $$\boldsymbol{ab}=(a_0,\ a_1)(b_0,\ b_1)=(a_0b_0-b_1a_1,\ a_0b_1+b_0a_1).$$

В координатной форме записи операция умножения двух двумерных чисел может быть представлена в виде:

$$\boldsymbol{ab}= \begin{array}{l|l} \underline{(a_0b_0} & -b_1a_1, \\ a_0b_1 & +b_0a_1) \end{array}$$

При удвоении комплексных чисел можно получить четырехмерные кватернионы. При этом произведением двух пар вещественных чисел $\boldsymbol{a}=(a_0,a_1)$ и $\boldsymbol{b}=(b_0,b_1)$ назовем пару

$$\boldsymbol{ab}=(a_0b_0-b_1\bar{a}_1,\ \bar{a}_0b_1+b_0a_1),$$

т.е. $$\boldsymbol{ab}=(a_0,a_1)(b_0,b_1)=(a_0b_0-b_1\bar{a}_1,\bar{a}_0b_1+b_0a_1).$$

В координатной форме записи операция умножения двух четырехмерных кватернионов может быть представлена в виде:

$$\boldsymbol{ab}=\begin{array}{cc|cc}
a_0b_0 & -b_1a_1 & -b_2a_2 & -a_3b_3, \\
a_0b_1 & +b_0a_1 & +b_2a_3 & -a_2b_3, \\
\hline
a_0b_2 & +b_3a_1 & +b_0a_2 & -a_3b_1, \\
a_0b_3 & -b_2a_1 & +b_0a_3 & +a_2b_1.
\end{array}$$

При удвоении кватернионов можно получить восьмимерные октонионы. При этом произведением пар $\boldsymbol{a}=(a_0,\ a_1)$ и $\boldsymbol{b}=(b_0,\ b_1)$ называется пара

$$\boldsymbol{ab}=(a_0b_0-b_1\bar{a}_1,\ \bar{a}_0b_1+b_0a_1),$$

т.е. $$\boldsymbol{ab}=(a_0,\ a_1)(b_0,\ b_1)=(a_0b_0-b_1\bar{a}_1,\ \bar{a}_0b_1+b_0a_1).$$

В координатной форме записи операция умножения двух восьмимерных октонионов может быть представлена в виде:

$$\boldsymbol{ab}=\begin{array}{cccc|cccc}
(a_0b_0 & -b_1a_1 & -b_2a_2 & -a_3b_3 & -b_4a_4 & -a_5b_5 & -a_6b_6 & -b_7a_7, \\
a_0b_1 & +b_0a_1 & +b_2a_3 & -a_2b_3 & +b_4a_5 & -a_4b_5 & +a_6b_7 & -b_6a_7, \\
a_0b_2 & +b_3a_1 & +b_0a_2 & -a_3b_1 & +b_4a_6 & +a_7b_5 & -a_4b_6 & -b_7a_5, \\
a_0b_3 & -b_2a_1 & +b_0a_3 & +a_2b_1 & +b_4a_7 & -a_6b_5 & -a_4b_7 & +b_6a_5, \\
\hline
a_0b_4 & +b_5a_1 & +b_6a_2 & +a_3b_7 & +b_0a_4 & -a_5b_1 & -a_6b_2 & -b_3a_7, \\
a_0b_5 & -b_4a_1 & -b_6a_3 & +a_2b_7 & +b_0a_5 & +a_4b_1 & +a_6b_3 & -b_2a_7, \\
a_0b_6 & -b_7a_1 & -b_4a_2 & +a_3b_5 & +b_0a_6 & +a_7b_1 & +a_4b_2 & -b_3a_5, \\
a_0b_7 & +b_6a_1 & -b_4a_3 & -a_2b_5 & +b_0a_7 & -a_6b_1 & +a_4b_3 & +b_2a_5).
\end{array}$$

Указанная процедура удвоения – одна из процедур, позволяющих получать комплексные числа, кватернионы и октонионы. Эта процедура не позволяет получить другие многомерные числовые системы с делением, что было определено еще в XIX веке. Более того, отсутствует не только деление, но также и наличие обратных векторов, а вместе с тем кватернионы теряют свойство коммутативности произведения, а октонионы – также свойство ассоциативности. Это резко ограничивает возможности использования этих систем на практике.

Вместе с тем, получаемые из комплексных чисел, кватернионов и октонионов одно-, трех- и семимерные векторные алгебры, как отмечалось, не требуют наличия свойств деления и обратных векторов, так что, применение той же процедуры удвоения приводит к возможности получения шестнадцатимерной алгебры, из которой выделяется пятнадцатимерная векторная алгебра. Применим процедуру удвоения к октонионам. При удвоении октонионов можно получить шестнадцатимерные числа. При этом произведением двух пар октонионов $\boldsymbol{a}=(a_0,a_1)$ и $\boldsymbol{b}=(b_0,b_1)$ назовем пару

$$\boldsymbol{ab}=(a_0b_0-b_1\bar{a}_1,\ \bar{a}_0b_1+b_0a_1),$$

т.е. $\boldsymbol{ab}=(a_0, a_1)(b_0, b_1)=(a_0b_0-b_1\bar{a}_1,\ \bar{a}_0b_1+b_0a_1)$.

В координатной форме записи операция умножения 16-ти мерных ***ab***

a_0b_0	$-a_1b_1$	$-a_2b_2$	$-a_3b_3$	$-a_4b_4$	$-a_5b_5$	$-a_6b_6$	$-a_7b_7$	$-a_8b_8$	$-a_9b_9$	$-a_{10}b_{10}$	$-a_{11}b_{11}$	$-a_{12}b_{12}$	$-a_{13}b_{13}$	$-a_{14}b_{14}$	$-a_{15}b_{15}$
a_0b_1	$+a_1b_0$	$-a_2b_3$	$+a_3b_2$	$-a_4b_5$	$+a_5b_4$	$-a_7b_6$	$+a_6b_7$	$-a_8b_9$	$+a_9b_8$	$-a_{11}b_{10}$	$+a_{10}b_{11}$	$-a_{13}b_{12}$	$+a_{12}b_{13}$	$-a_{14}b_{15}$	$+a_{15}b_{14}$
a_0b_2	$+a_2b_0$	$-a_4b_6$	$+a_6b_4$	$-a_5b_7$	$+a_7b_5$	$-a_3b_1$	$+a_1b_3$	$-a_8b_{10}$	$+a_{10}b_8$	$-a_{14}b_{12}$	$+a_{12}b_{14}$	$-a_{15}b_{13}$	$+a_{13}b_{15}$	$-a_9b_{11}$	$+a_{11}b_9$
a_0b_3	$+a_3b_0$	$-a_6b_5$	$+a_5b_6$	$-a_1b_2$	$+a_2b_1$	$-a_4b_7$	$+a_7b_4$	$-a_8b_{11}$	$+a_{11}b_8$	$-a_{13}b_{14}$	$+a_{14}b_{13}$	$-a_{10}b_9$	$+a_9b_{10}$	$-a_{15}b_{12}$	$+a_{12}b_{15}$
a_0b_4	$+a_4b_0$	$-a_5b_1$	$+a_1b_5$	$-a_7b_3$	$+a_3b_7$	$-a_6b_2$	$+a_2b_6$	$-a_8b_{12}$	$+a_{12}b_8$	$-a_9b_{13}$	$+a_{13}b_9$	$-a_{11}b_{15}$	$+a_{15}b_{11}$	$-a_{10}b_{14}$	$+a_{14}b_{10}$
a_0b_5	$+a_5b_0$	$-a_7b_2$	$+a_2b_7$	$-a_3b_6$	$+a_6b_3$	$-a_1b_4$	$+a_4b_1$	$-a_8b_{13}$	$+a_{13}b_8$	$-a_{10}b_{15}$	$+a_{15}b_{10}$	$-a_{14}b_{11}$	$+a_{11}b_{14}$	$-a_{12}b_9$	$+a_9b_{12}$
a_0b_6	$+a_6b_0$	$-a_1b_7$	$+a_7b_1$	$-a_2b_4$	$+a_4b_2$	$-a_5b_3$	$+a_3b_5$	$-a_8b_{14}$	$+a_{14}b_8$	$-a_{15}b_9$	$+a_9b_{15}$	$-a_{12}b_{10}$	$+a_{10}b_2$	$-a_{11}b_{13}$	$+a_{13}b_{11}$
a_0b_7	$+a_7b_0$	$-a_3b_4$	$+a_4b_3$	$-a_6b_1$	$+a_1b_6$	$-a_2b_5$	$+a_5b_2$	$-a_8b_{15}$	$+a_{15}b_8$	$-a_{12}b_{11}$	$+a_{11}b_{12}$	$-a_9b_{14}$	$+a_{14}b_9$	$-a_{13}b_{10}$	$+a_{10}b_{13}$
a_0b_8	$+a_8b_0$	$-a_9b_1$	$+a_1b_9$	$-a_{10}b_2$	$+a_2b_{10}$	$-a_{11}b_3$	$+a_3b_{11}$	$-a_{12}b_4$	$+a_4b_{12}$	$-a_{13}b_5$	$+a_5b_{13}$	$-a_{14}b_6$	$+a_6b_{14}$	$-a_{15}b_7$	$+a_7b_{15}$
a_0b_9	$+a_9b_0$	$-a_3b_{10}$	$+a_{10}b_3$	$-a_5b_{12}$	$+a_{12}b_5$	$-a_6b_{15}$	$+a_{15}b_6$	$-a_1b_8$	$+a_8b_1$	$-a_{11}b_2$	$+a_2b_{11}$	$-a_{13}b_4$	$+a_4b_{13}$	$-a_{14}b_7$	$+a_7b_{14}$
a_0b_{10}	$+a_{10}b_0$	$-a_6b_{12}$	$+a_{12}b_6$	$-a_7b_{13}$	$+a_{13}b_7$	$-a_1b_{11}$	$+a_{11}b_1$	$-a_2b_8$	$+a_8b_2$	$-a_{14}b_4$	$+a_4b_{14}$	$-a_{15}b_5$	$+a_5b_{15}$	$-a_9b_3$	$+a_3b_9$
a_0b_{11}	$+a_{11}b_0$	$-a_5b_{14}$	$+a_{14}b_5$	$-a_2b_9$	$+a_9b_2$	$-a_7b_{12}$	$+a_{12}b_7$	$-a_3b_8$	$+a_8b_3$	$-a_{13}b_6$	$+a_6b_{13}$	$-a_{10}b_1$	$+a_1b_{10}$	$-a_{15}b_4$	$+a_4b_{15}$
a_0b_{12}	$+a_{12}b_0$	$-a_1b_{13}$	$+a_{13}b_1$	$-a_3b_{15}$	$+a_{15}b_3$	$-a_2b_{14}$	$+a_{14}b_2$	$-a_4b_8$	$+a_8b_4$	$-a_9b_5$	$+a_5b_9$	$-a_{11}b_7$	$+a_7b_{11}$	$-a_{10}b_6$	$+a_6b_{10}$
a_0b_{13}	$+a_{13}b_0$	$-a_2b_{15}$	$+a_{15}b_2$	$-a_6b_{11}$	$+a_{11}b_6$	$-a_4b_9$	$+a_9b_4$	$-a_5b_8$	$+a_8b_5$	$-a_{10}b_7$	$+a_7b_{10}$	$-a_{14}b_3$	$+a_3b_{14}$	$-a_{12}b_1$	$+a_1b_{12}$
a_0b_{14}	$+a_{14}b_0$	$-a_7b_9$	$+a_9b_7$	$-a_4b_{10}$	$+a_{10}b_4$	$-a_3b_{13}$	$+a_{13}b_3$	$-a_6b_8$	$+a_8b_6$	$-a_{15}b_1$	$+a_1b_{15}$	$-a_{12}b_2$	$+a_2b_{12}$	$-a_{11}b_5$	$+a_5b_{11}$
a_0b_{15}	$+a_{15}b_0$	$-a_4b_{11}$	$+a_{11}b_4$	$-a_1b_{14}$	$+a_{14}b_1$	$-a_5b_{10}$	$+a_{10}b_5$	$-a_7b_8$	$+a_8b_7$	$-a_{12}b_3$	$+a_3b_{12}$	$-a_9b_6$	$+a_6b_9$	$-a_{13}b_2$	$+a_2b_{13}$

(ab)=

$-a_1b_1\quad -a_2b_2\quad -a_3b_3\quad -a_4b_4\quad -a_5b_5\quad -a_6b_6\quad -a_7b_7\quad -a_8b_8\quad -a_9b_9\quad -a_{10}b_{10}\quad -a_{11}b_{11}\quad -a_{12}b_{12}\quad -a_{13}b_{13}\quad -a_{14}b_{14}\quad -a_{15}b_{15}$

[ab]=

$-a_2b_3$	$+a_3b_2$	$-a_4b_5$	$+a_5b_4$	$-a_7b_6$	$+a_6b_7$	$-a_8b_9$	$+a_9b_8$	$-a_{11}b_{10}$	$+a_{10}b_{11}$	$-a_{13}b_{12}$	$+a_{12}b_{13}$	$-a_{14}b_{15}$	$+a_{15}b_{14}$
$-a_4b_6$	$+a_6b_4$	$-a_5b_7$	$+a_7b_5$	$-a_3b_1$	$+a_1b_3$	$-a_8b_{10}$	$+a_{10}b_8$	$-a_{14}b_{12}$	$+a_{12}b_{14}$	$-a_{15}b_{13}$	$+a_{13}b_{15}$	$-a_9b_{11}$	$+a_{11}b_9$
$-a_6b_5$	$+a_5b_6$	$-a_1b_2$	$+a_2b_1$	$-a_4b_7$	$+a_7b_4$	$-a_8b_{11}$	$+a_{11}b_8$	$-a_{13}b_{14}$	$+a_{14}b_{13}$	$-a_{10}b_9$	$+a_9b_{10}$	$-a_{15}b_{12}$	$+a_{12}b_{15}$
$-a_5b_1$	$+a_1b_5$	$-a_7b_3$	$+a_3b_7$	$-a_6b_2$	$+a_2b_6$	$-a_8b_{12}$	$+a_{12}b_8$	$-a_9b_{13}$	$+a_{13}b_9$	$-a_{11}b_{15}$	$+a_{15}b_{11}$	$-a_{10}b_{14}$	$+a_{14}b_{10}$
$-a_7b_2$	$+a_2b_7$	$-a_3b_6$	$+a_6b_3$	$-a_1b_4$	$+a_4b_1$	$-a_8b_{13}$	$+a_{13}b_8$	$-a_{10}b_{15}$	$+a_{15}b_{10}$	$-a_{14}b_{11}$	$+a_{11}b_{14}$	$-a_{12}b_9$	$+a_9b_{12}$
$-a_1b_7$	$+a_7b_1$	$-a_2b_4$	$+a_4b_2$	$-a_5b_3$	$+a_3b_5$	$-a_8b_{14}$	$+a_{14}b_8$	$-a_{15}b_9$	$+a_9b_{15}$	$-a_{12}b_{10}$	$+a_{10}b_2$	$-a_{11}b_{13}$	$+a_{13}b_{11}$
$-a_3b_4$	$+a_4b_3$	$-a_6b_1$	$+a_1b_6$	$-a_2b_5$	$+a_5b_2$	$-a_8b_{15}$	$+a_{15}b_8$	$-a_{12}b_{11}$	$+a_{11}b_{12}$	$-a_9b_{14}$	$+a_{14}b_9$	$-a_{13}b_{10}$	$+a_{10}b_{13}$
$-a_9b_1$	$+a_1b_9$	$-a_{10}b_2$	$+a_2b_{10}$	$-a_{11}b_3$	$+a_3b_{11}$	$-a_{12}b_4$	$+a_4b_{12}$	$-a_{13}b_5$	$+a_5b_{13}$	$-a_{14}b_6$	$+a_6b_{14}$	$-a_{15}b_7$	$+a_7b_{15}$
$-a_3b_{10}$	$+a_{10}b_3$	$-a_5b_{12}$	$+a_{12}b_5$	$-a_6b_{15}$	$+a_{15}b_6$	$-a_1b_8$	$+a_8b_1$	$-a_{11}b_2$	$+a_2b_{11}$	$-a_{13}b_4$	$+a_4b_{13}$	$-a_{14}b_7$	$+a_7b_{14}$
$-a_6b_{12}$	$+a_{12}b_6$	$-a_7b_{13}$	$+a_{13}b_7$	$-a_1b_{11}$	$+a_{11}b_1$	$-a_2b_8$	$+a_8b_2$	$-a_{14}b_4$	$+a_4b_{14}$	$-a_{15}b_5$	$+a_5b_{15}$	$-a_9b_3$	$+a_3b_9$
$-a_5b_{14}$	$+a_{14}b_5$	$-a_2b_9$	$+a_9b_2$	$-a_7b_{12}$	$+a_{12}b_7$	$-a_3b_8$	$+a_8b_3$	$-a_{13}b_6$	$+a_6b_{13}$	$-a_{10}b_1$	$+a_1b_{10}$	$-a_{15}b_4$	$+a_4b_{15}$
$-a_1b_{13}$	$+a_{13}b_1$	$-a_3b_{15}$	$+a_{15}b_3$	$-a_2b_{14}$	$+a_{14}b_2$	$-a_4b_8$	$+a_8b_4$	$-a_9b_5$	$+a_5b_9$	$-a_{11}b_7$	$+a_7b_{11}$	$-a_{10}b_6$	$+a_6b_{10}$
$-a_2b_{15}$	$+a_{15}b_2$	$-a_6b_{11}$	$+a_{11}b_6$	$-a_4b_9$	$+a_9b_4$	$-a_5b_8$	$+a_8b_5$	$-a_{10}b_7$	$+a_7b_{10}$	$-a_{14}b_3$	$+a_3b_{14}$	$-a_{12}b_1$	$+a_1b_{12}$
$-a_7b_9$	$+a_9b_7$	$-a_4b_{10}$	$+a_{10}b_4$	$-a_3b_{13}$	$+a_{13}b_3$	$-a_6b_8$	$+a_8b_6$	$-a_{15}b_1$	$+a_1b_{15}$	$-a_{12}b_2$	$+a_2b_{12}$	$-a_{11}b_5$	$+a_5b_{11}$
$-a_4b_{11}$	$+a_{11}b_4$	$-a_1b_{14}$	$+a_{14}b_1$	$-a_5b_{10}$	$+a_{10}b_5$	$-a_7b_8$	$+a_8b_7$	$-a_{12}b_3$	$+a_3b_{12}$	$-a_9b_6$	$+a_6b_9$	$-a_{13}b_2$	$+a_2b_{13}$

чисел (при такой процедуре удвоения) может быть представлена в виде произведения ***ab***, приведенного на альбомном листе. Там же показаны скалярное ***(ab)*** и векторное ***[ab]*** произведения двух векторов.

Векторное произведение двух векторов можно представить в виде суммы:

$$\boldsymbol{[ab]} = \boldsymbol{[}(a_1\mathbf{e}_1+a_2\mathbf{e}_2+\ldots+a_{15}\mathbf{e}_{15})(b_1\mathbf{e}_1+b_2\mathbf{e}_2+\ldots+b_{15}\mathbf{e}_{15})\boldsymbol{]},$$

т. е. $\boldsymbol{[ab]}=$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_8 & \mathbf{e}_9 \\ a_1 & a_8 & a_9 \\ b_1 & b_8 & b_9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_{11} & \mathbf{e}_{10} \\ a_1 & a_{11} & a_{10} \\ b_1 & b_{11} & b_{10} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_{13} & \mathbf{e}_{12} \\ a_1 & a_{13} & a_{12} \\ b_1 & b_{13} & b_{12} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_{14} & \mathbf{e}_{15} \\ a_1 & a_{14} & a_{15} \\ b_1 & b_{14} & b_{15} \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_4 & \mathbf{e}_6 \\ a_2 & a_4 & a_6 \\ b_2 & b_4 & b_6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_8 & \mathbf{e}_{10} \\ a_2 & a_8 & a_{10} \\ b_2 & b_8 & b_{10} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_{14} & \mathbf{e}_{12} \\ a_2 & a_{14} & a_{12} \\ b_2 & b_{14} & b_{12} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_{15} & \mathbf{e}_{13} \\ a_2 & a_{15} & a_{13} \\ b_2 & b_{15} & b_{13} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_9 & \mathbf{e}_{11} \\ a_2 & a_9 & a_{11} \\ b_2 & b_9 & b_{11} \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} \mathbf{e}_3 & \mathbf{e}_6 & \mathbf{e}_5 \\ a_3 & a_6 & a_5 \\ b_3 & b_6 & b_5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{e}_3 & \mathbf{e}_8 & \mathbf{e}_{11} \\ a_3 & a_8 & a_{11} \\ b_3 & b_8 & b_{11} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{e}_3 & \mathbf{e}_{13} & \mathbf{e}_{14} \\ a_3 & a_{13} & a_{14} \\ b_3 & b_{13} & b_{14} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{e}_3 & \mathbf{e}_{10} & \mathbf{e}_9 \\ a_3 & a_{10} & a_9 \\ b_3 & b_{10} & b_9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{e}_3 & \mathbf{e}_{15} & \mathbf{e}_{12} \\ a_3 & a_{15} & a_{12} \\ b_3 & b_{15} & b_{12} \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} \mathbf{e}_4 & \mathbf{e}_5 & \mathbf{e}_1 \\ a_4 & a_5 & a_1 \\ b_4 & b_5 & b_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{e}_4 & \mathbf{e}_8 & \mathbf{e}_{12} \\ a_4 & a_8 & a_{12} \\ b_4 & b_8 & b_{12} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{e}_4 & \mathbf{e}_9 & \mathbf{e}_{13} \\ a_4 & a_9 & a_{13} \\ b_4 & b_9 & b_{13} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{e}_4 & \mathbf{e}_{11} & \mathbf{e}_{15} \\ a_4 & a_{11} & a_{15} \\ b_4 & b_{11} & b_{15} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{e}_4 & \mathbf{e}_{10} & \mathbf{e}_{14} \\ a_4 & a_{10} & a_{14} \\ b_4 & b_{10} & b_{14} \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} \mathbf{e}_5 & \mathbf{e}_7 & \mathbf{e}_2 \\ a_5 & a_7 & a_2 \\ b_5 & b_7 & b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{e}_5 & \mathbf{e}_8 & \mathbf{e}_{13} \\ a_5 & a_8 & a_{13} \\ b_5 & b_8 & b_{13} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{e}_5 & \mathbf{e}_{10} & \mathbf{e}_{15} \\ a_5 & a_{10} & a_{15} \\ b_5 & b_{10} & b_{15} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{e}_5 & \mathbf{e}_{14} & \mathbf{e}_{11} \\ a_5 & a_{14} & a_{11} \\ b_5 & b_{14} & b_{11} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{e}_5 & \mathbf{e}_{12} & \mathbf{e}_9 \\ a_5 & a_{12} & a_9 \\ b_5 & b_{12} & b_9 \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} \mathbf{e}_6 & \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_7 \\ a_6 & a_1 & a_7 \\ b_6 & b_1 & b_7 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{e}_6 & \mathbf{e}_8 & \mathbf{e}_{14} \\ a_6 & a_8 & a_{14} \\ b_6 & b_8 & b_{14} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{e}_6 & \mathbf{e}_{15} & \mathbf{e}_9 \\ a_6 & a_{15} & a_9 \\ b_6 & b_{15} & b_9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{e}_6 & \mathbf{e}_{12} & \mathbf{e}_{10} \\ a_6 & a_{12} & a_{10} \\ b_6 & b_{12} & b_{10} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{e}_6 & \mathbf{e}_{11} & \mathbf{e}_{13} \\ a_6 & a_{11} & a_{13} \\ b_6 & b_{11} & b_{13} \end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix} e_7 & e_3 & e_4 \\ a_7 & a_3 & a_4 \\ b_7 & b_3 & b_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e_7 & e_8 & e_{15} \\ a_7 & a_8 & a_{15} \\ b_7 & b_8 & b_{15} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e_7 & e_{12} & e_{11} \\ a_7 & a_{12} & a_{11} \\ b_7 & b_{12} & b_{11} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e_7 & e_9 & e_{14} \\ a_7 & a_9 & a_{14} \\ b_7 & b_9 & b_{14} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e_7 & e_{13} & e_{10} \\ a_7 & a_{13} & a_{10} \\ b_7 & b_{13} & b_{10} \end{vmatrix}$$

тридцати пяти определителей третьего порядка, заданных таблицей в немых индексах:

орт	коммутатор $[a_i b_j]= a_i b_j - a_j b_i$					
e_1	[2.3]	[4.5]	[7.6]	[8.9]	[11.10]	[13.12]	[14.15]
e_2	[4.6]	[5.7]	[3.1]	[8.10]	[14.12]	[15.13]	[9.11]
e_3	[6.5]	[1.2]	[4.7]	[8.11]	[13.14]	[10.9]	[15.12]
e_4	[5.1]	[7.3]	[6.2]	[8.12]	[9.13]	[11.15]	[10.14]
e_5	[7.2]	[3.6]	[1.4]	[8.13]	[10.15]	[14.11]	[12.9]
e_6	[1.7]	[2.4]	[5.3]	[8.14]	[15.9]	[12.10]	[11.13]
e_7	[3.4]	[6.1]	[2.5]	[8.15]	[12.11]	[9.14]	[13.10]
e_8	[9.1]	[10.2]	[11.3]	[12.4]	[13.5]	[14.6]	[15.7]
e_9	[11,2]	[13,4]	[14,7]	[1.8]	[3,10]	[5,12]	[6,15]
e_{10}	[14,4]	[15,5]	[9,3]	[2.8]	[6,12]	[7,13]	[1,11]
e_{11}	[13,6]	[10,1]	[15,4]	[3.8]	[5,14]	[2, 9]	[7,12]
e_{12}	[9,5]	[11,7]	[10,6]	[4.8]	[1,13]	[3,15]	[2,14]
e_{13}	[10,7]	[14,3]	[12,1]	[5.8]	[2,15]	[6,11]	[4, 9]
e_{14}	[15,1]	[12,2]	[11,5]	[6.8]	[7, 9]	[4,10]	[3,13]
e_{15}	[12,3]	[9,6]	[13,2]	[7.8]	[4,11]	[1,14]	[5,10]

Здесь индексом i,j-обозначена величина

$$[a_i b_j]=a_i b_j - a_j b_i,$$

а все элементы суммируются покоординатно.

Та же таблица может быть представлена в виде суммы 35 -ти определителей третьего порядка:

[a,b]= *|1,2,3| + |1,8, 9| + |1,11,10| + |1,13,12| + |1,14,15| +*
+|2,4,6| + |2,8,10| + |2,14,12| + |2,15,13| + |2, 9,11 | +
+|3,6,5| + |3,8,11| + |3,13,14| + |3,10, 9| + |3,15,12| +
+|4,5,1| + |4,8,12| + |4, 9,13| + |4,11,15| + |4,10,14| +
+|5,7,2| + |5,8,13| + |5,10,15| + |5,14,11| + |5,12, 9 | +
+|6,1,7| + |6,8,14| + |6,15, 9| + |6,12,10| + |6,11,13| +
+|7,3,4| + |7,8,15| + |7,12,11| + |7, 9,14| + |7,13,10| .

явно определяющем трех-, семи-, и 15-ти мерные варианты, или же просто:

1,2,3	1,4,5	1,7,6	1,8,9	1,11,10	1,13,12	1,14,15
2,4,6	2,5,7	2,3,1	2,8,10	2,14,12	2,15,13	2,9,11
3,6,5	3,1,2	3,4,7	3,8,11	3,13,14	3,10,9	3,15,12
4,5,1	4,7,3	4,6,2	4,8,12	4,9,13	4,11,15	4,10,14
5,7,2	5,3,6	5,1,4	5,8,13	5,10,15	5,14,11	5,12,9
6,1,7	6,2,4	6,5,3	6,8,14	6,15,9	6,12,10	6,11,13
7,3,4	7,6,1	7,2,5	7,8,15	7,12,11	7,9,14	7,13,10
8,9,1	8,10,2	8,11,3	8,12,4	8,13,5	8,14,6	8,15,7
9,3,10	9,5,12	9,6,15	9,1,8	9,11,2	9,13,4	9,14,7
10,6,12	10,7,13	10,1,11	10,2,8	10,14,4	10,15,5	10,9,3
11,5,14	11,2,9	11,7,12	11,3,8	11,13,6	11,10,1	11,15,4

12,1,13	***12,3,15***	***12,2,14***	***12,4,8***	***12,9,5***	***12,11,7***	***12,10,6***
13,2,15	***13,6,11***	***13,4,9***	***13,5,8***	***13,10,7***	***13,14,3***	***13,12,1***
14,7,9	***14,4,10***	***14,3,13***	***14,6,8***	***14,15,1***	***14,12,2***	***14,11,5***
15,4,11	***15,1,14***	***15,5,10***	***15,7,8***	***15,12,3***	***15,9,6***	***15,13,2***

Операторы момента импульса $\boldsymbol{L}$ (матриц Паули) удовлетворяют соотношениям:

$m([L_2L_3]$	$+[L_4L_5]$	$+[L_7L_6]$	$+n[L_8L_9]$	$+[L_{11}L_{10}]$	$+[L_{13}L_{12}]$	$+[L_{14}L_{15}])$	=	$-iL_1;$
$m([L_4L_6]$	$+[L_5L_7]$	$+[L_3L_1]$	$+n[L_8L_{10}]$	$+[L_{14}L_{12}]$	$+[L_{15}L_{13}]$	$+[L_9L_{11}])$	=	$-iL_2;$
$m([L_6L_5]$	$+[L_1L_2]$	$+[L_4L_7]$	$+n[L_8L_{11}]$	$+[L_{13}L_{14}]$	$+[L_{10}L_9]$	$+[L_{15}L_{12}])$	=	$-iL_3;$
$m([L_5L_1]$	$+[L_7L_3]$	$+[L_6L_2]$	$+n[L_8L_{12}]$	$+[L_9L_{13}]$	$+[L_{11}L_{15}]$	$+[L_{10}L_{14}])$	=	$-iL_4;$
$m([L_7L_2]$	$+[L_3L_6]$	$+[L_1L_4]$	$+n[L_8L_{13}]$	$+[L_{10}L_{15}]$	$+[L_{14}L_{11}]$	$+[L_{12}L_9])$	=	$-iL_5;$
$m([L_1L_7]$	$+[L_2L_4]$	$+[L_5L_3]$	$+n[L_8L_{14}]$	$+[L_{15}L_9]$	$+[L_{12}L_{10}]$	$+[L_{11}L_{13}])$	=	$-iL_6;$
$m([L_3L_4]$	$+[L_6L_1]$	$+[L_2L_5]$	$+n[L_8L_{15}]$	$+[L_{12}L_{11}]$	$+[L_9L_{14}]$	$+[L_{13}L_{10}])$	=	$-iL_7;$
$k([L_9L_1]$	$+[L_{10}L_2]$	$+[L_{11}L_3]$	$+[L_{12}L_4]$	$+[L_{13}L_5]$	$+[L_{14}L_6]$	$+[L_{15}L_7])$	=	$-iL_8;$
$m([L_3L_{10}]$	$+[L_5L_{12}]$	$+[L_6L_{15}]$	$+n[L_1L_8]$	$+[L_{11}L_2]$	$+[L_{13}L_4]$	$+[L_{14}L_7])$	=	$-iL_9;$
$m([L_6L_{12}]$	$+[L_7L_{13}]$	$+[L_1L_{11}]$	$+n[L_2L_8]$	$+[L_{14}L_4]$	$+[L_{15}L_5]$	$+[L_9L_3])$	=	$-iL_{10};$
$m([L_5L_{14}]$	$+[L_2L_9]$	$+[L_7L_{12}]$	$+n[L_3L_8]$	$+[L_{13}L_6]$	$+[L_{10}L_1]$	$+[L_{15}L_4])$	=	$-iL_{11};$
$m([L_1L_{13}]$	$+[L_3L_{15}]$	$+[L_2L_{14}]$	$+n[L_4L_8]$	$+[L_9L_5]$	$+[L_{11}L_7]$	$+[L_{10}L_6])$	=	$-iL_{12};$
$m([L_2L_{15}]$	$+[L_6L_{11}]$	$+[L_4L_9]$	$+n[L_5L_8]$	$+[L_{10}L_7]$	$+[L_{14}L_3]$	$+[L_{12}L_1])$	=	$-iL_{13};$
$m([L_7L_9]$	$+[L_4L_{10}]$	$+[L_3L_{13}]$	$+n[L_6L_8]$	$+[L_{15}L_1]$	$+[L_{12}L_2]$	$+[L_{11}L_5])$	=	$-iL_{14};$
$m([L_4L_{11}]$	$+[L_1L_{14}]$	$+[L_5L_{10}]$	$+n[L_7L_8]$	$+[L_{12}L_3]$	$+[L_9L_6]$	$+[L_{13}L_2])$	=	$-iL_{15},$

где $[L_iL_j]=L_iL_j-L_jL_i$,, коммутатор, причем $n=11/3$, $m=3/25$, $k=1/11$.

Трехмерная и семимерная векторные алгебры являются частным случаем пятнадцатимерной. Таблица подстановки индексов в ней имеет вид:

1	***2***	***3***	***4***	***5***	***6***	***7***	***8***	***9***	***10***	***11***	***12***	***13***	***14***	***15***
2	***4***	***6***	***5***	***7***	***1***	***3***	***8***	***10***	***12***	***14***	***13***	***15***	***9***	***11***
3	***6***	***5***	***1***	***2***	***7***	***4***	***8***	***11***	***14***	***13***	***9***	***10***	***15***	***12***
4	***5***	***1***	***7***	***3***	***2***	***6***	***8***	***12***	***13***	***9***	***15***	***11***	***10***	***14***
5	***7***	***2***	***3***	***6***	***4***	***1***	***8***	***13***	***15***	***10***	***11***	***14***	***12***	***9***
6	***1***	***7***	***2***	***4***	***3***	***5***	***8***	***14***	***9***	***15***	***10***	***12***	***11***	***13***
7	***3***	***4***	***6***	***1***	***5***	***2***	***8***	***15***	***11***	***12***	***14***	***9***	***13***	***10***

Матрицы пятнадцатого порядка L_i приведены в [3]. С целью упрощения записи лучше использовать сумму операторов момента импульсов, вида:

-iL	***1***	***2***	***3***	***4***	***5***	***6***	***7***	***8***	***9***	***10***	***11***	***12***	***13***	***14***	***15***
1	***0***	***-1***	***1***	***-1***	***1***	***1***	***-1***	***-1***	***1***	***1***	***-1***	***1***	***-1***	***-1***	***1***
2	***1***	***0***	***-1***	***-1***	***-1***	***1***	***1***	***-1***	***-1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***-1***	***-1***
3	***-1***	***1***	***0***	***-1***	***1***	***-1***	***1***	***-1***	***1***	***-1***	***1***	***1***	***-1***	***1***	***-1***
4	***1***	***1***	***1***	***0***	***-1***	***-1***	***-1***	***-1***	***-1***	***-1***	***-1***	***1***	***1***	***1***	***1***
5	***-1***	***1***	***-1***	***1***	***0***	***1***	***-1***	***-1***	***1***	***-1***	***1***	***-1***	***1***	***-1***	***1***
6	***-1***	***-1***	***1***	***1***	***-1***	***0***	***1***	***-1***	***1***	***1***	***-1***	***-1***	***1***	***1***	***-1***
7	***1***	***-1***	***-1***	***1***	***1***	***-1***	***0***	***-1***	***-1***	***1***	***1***	***-1***	***-1***	***1***	***1***
8	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***0***	***-1***	***-1***	***-1***	***-1***	***-1***	***-1***	***-1***
9	***-1***	***1***	***-1***	***1***	***-1***	***-1***	***1***	***1***	***0***	***1***	***-1***	***1***	***-1***	***-1***	***1***

10	***-1***	***-1***	***1***	***1***	***1***	***-1***	***-1***	***1***	***-1***	***0***	***1***	***1***	***1***	***-1***	***-1***
11	***1***	***-1***	***-1***	***1***	***-1***	***1***	***-1***	***1***	***1***	***-1***	***0***	***1***	***-1***	***1***	***-1***
12	***-1***	***-1***	***-1***	***-1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***-1***	***-1***	***-1***	***0***	***1***	***1***	***1***
13	***1***	***-1***	***1***	***-1***	***-1***	***-1***	***1***	***1***	***1***	***-1***	***1***	***-1***	***0***	***-1***	***1***
14	***1***	***1***	***-1***	***-1***	***1***	***-1***	***-1***	***1***	***1***	***1***	***-1***	***-1***	***1***	***0***	***-1***
15	***-1***	***1***	***1***	***-1***	***-1***	***1***	***-1***	***1***	***-1***	***1***	***1***	***-1***	***-1***	***1***	***0***

или расширенный вариант записи:

-iL_r	***1***	***2***	***3***	***4***	***5***	***6***	***7***	***8***	***9***	***10***	***11***	***12***	***13***	***14***	***15***
1	***0***	***-3***	***2***	***-5***	***4***	***7***	***-6***	***-9***	***8***	***11***	***-10***	***13***	***-12***	***-15***	***14***
2	***3***	***0***	***-1***	***-6***	***-7***	***4***	***5***	***-10***	***-11***	***8***	***9***	***14***	***15***	***-12***	***-13***
3	***-2***	***1***	***0***	***-7***	***6***	***-5***	***4***	***-11***	***10***	***-9***	***8***	***15***	***-14***	***13***	***-12***
4	***5***	***6***	***7***	***0***	***-1***	***-2***	***-3***	***-12***	***-13***	***-14***	***-15***	***8***	***9***	***10***	***11***
5	***-4***	***7***	***-6***	***1***	***0***	***3***	***-2***	***-13***	***12***	***-15***	***14***	***-9***	***8***	***-11***	***10***
6	***-7***	***-4***	***5***	***2***	***-3***	***0***	***1***	***-14***	***15***	***12***	***-13***	***-10***	***11***	***8***	***-9***
7	***6***	***-5***	***-4***	***3***	***2***	***-1***	***0***	***-15***	***-14***	***13***	***12***	***-11***	***-10***	***9***	***8***
8	***9***	***10***	***11***	***12***	***13***	***14***	***15***	***0***	***-1***	***-2***	***-3***	***-4***	***-5***	***-6***	***-7***
9	***-8***	***11***	***-10***	***13***	***-12***	***-15***	***14***	***1***	***0***	***3***	***-2***	***5***	***-4***	***-7***	***6***
10	***-11***	***-8***	***9***	***14***	***15***	***-12***	***-13***	***2***	***-3***	***0***	***1***	***6***	***7***	***-4***	***-5***
11	***10***	***-9***	***-8***	***15***	***-14***	***13***	***-12***	***3***	***2***	***-1***	***0***	***7***	***-6***	***5***	***-4***
12	***-13***	***-14***	***-15***	***-8***	***9***	***10***	***11***	***4***	***-5***	***-6***	***-7***	***0***	***1***	***2***	***3***
13	***12***	***-15***	***14***	***-9***	***-8***	***-11***	***10***	***5***	***4***	***-7***	***6***	***-1***	***0***	***-3***	***2***
14	***15***	***12***	***-13***	***-10***	***11***	***-8***	***-9***	***6***	***7***	***4***	***-5***	***-2***	***3***	***0***	***-1***
15	***-14***	***13***	***12***	***-11***	***-10***	***9***	***-8***	***7***	***-6***	***5***	***4***	***-3***	***-2***	***1***	***0***

определяющий координаты моментов импульса.

Специфичны свойства суммы операторов моментов импульса:

-во –первых, сумма чисел в каждой строке и в каждом столбце равна нулю;

-во- вторых, число разных знаков в каждой строке и в каждом столбце одинаково;

-матрицы нечётных степеней антисимметричны, а четных - симметричны;

-размерность матрицы (как совершенного числа) определяется числом 2^n-

-все нечетные степени матрицы пропорциональны L, а четные-L^2;

-целые степени матрицы определяются лишь двумя числами;

-матрица L определяет векторное произведение двух векторов;

-определитель матрицы L (и всех её степеней) равен нулю.

Приведем несколько примеров.

-L²	***1***	***2***	***3***	***4***	***5***	***6***	***7***	***8***	***9***	***10***	***11***	***12***	***13***	***14***	***15***
1	***-14***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***
2	***1***	***-14***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***
3	***1***	***1***	***-14***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***
4	***1***	***1***	***1***	***-14***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***
5	***1***	***1***	***1***	***1***	***-14***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***
6	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***-14***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***
7	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***-14***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***

8	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***-14***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***
9	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***-14***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***
10	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***-14***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***
11	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***-14***	***1***	***1***	***1***	***1***
12	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***-14***	***1***	***1***	***1***
13	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***-14***	***1***	***1***
14	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***-14***	***1***
15	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***-14***

$-iL^3/15^1$	***1***	***2***	***3***	***4***	***5***	***6***	***7***	***8***	***9***	***10***	***11***	***12***	***13***	***14***	***15***
1	***0***	***-1***	***1***	***-1***	***1***	***1***	***-1***	***-1***	***1***	***1***	***-1***	***1***	***-1***	***-1***	***1***
2	***1***	***0***	***-1***	***-1***	***-1***	***1***	***1***	***-1***	***-1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***-1***	***-1***
3	***-1***	***1***	***0***	***-1***	***1***	***-1***	***1***	***-1***	***1***	***-1***	***1***	***1***	***-1***	***1***	***-1***
4	***1***	***1***	***1***	***0***	***-1***	***-1***	***-1***	***-1***	***-1***	***-1***	***-1***	***1***	***1***	***1***	***1***
5	***-1***	***1***	***-1***	***1***	***0***	***1***	***-1***	***-1***	***1***	***-1***	***1***	***-1***	***1***	***-1***	***1***
6	***-1***	***-1***	***1***	***1***	***-1***	***0***	***1***	***-1***	***1***	***1***	***-1***	***-1***	***1***	***1***	***-1***
7	***1***	***-1***	***-1***	***1***	***1***	***-1***	***0***	***-1***	***-1***	***1***	***1***	***-1***	***-1***	***1***	***1***
8	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***0***	***-1***	***-1***	***-1***	***-1***	***-1***	***-1***	***-1***
9	***-1***	***1***	***-1***	***1***	***-1***	***-1***	***1***	***1***	***0***	***1***	***-1***	***1***	***-1***	***-1***	***1***
10	***-1***	***-1***	***1***	***1***	***1***	***-1***	***-1***	***1***	***-1***	***0***	***1***	***1***	***1***	***-1***	***-1***
11	***1***	***-1***	***-1***	***1***	***-1***	***1***	***-1***	***1***	***1***	***-1***	***0***	***1***	***-1***	***1***	***-1***
12	***-1***	***-1***	***-1***	***-1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***-1***	***-1***	***-1***	***0***	***1***	***1***	***1***
13	***1***	***-1***	***1***	***-1***	***-1***	***-1***	***1***	***1***	***1***	***-1***	***1***	***-1***	***0***	***-1***	***1***
14	***1***	***1***	***-1***	***-1***	***1***	***-1***	***-1***	***1***	***1***	***1***	***-1***	***-1***	***1***	***0***	***-1***
15	***-1***	***1***	***1***	***-1***	***-1***	***1***	***-1***	***1***	***-1***	***1***	***1***	***-1***	***-1***	***1***	***0***

$L^4/15^1$	***1***	***2***	***3***	***4***	***5***	***6***	***7***	***8***	***9***	***10***	***11***	***12***	***13***	***14***	***15***
1	***-14***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***
2	***1***	***-14***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***
3	***1***	***1***	***-14***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***
4	***1***	***1***	***1***	***-14***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***
5	***1***	***1***	***1***	***1***	***-14***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***
6	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***-14***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***
7	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***-14***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***
8	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***-14***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***
9	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***-14***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***
10	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***-14***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***
11	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***-14***	***1***	***1***	***1***	***1***
12	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***-14***	***1***	***1***	***1***
13	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***-14***	***1***	***1***

14	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***-14***	***1***
15	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***-14***

$-iL^5/15^2$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	***0***	***-1***	***1***	***-1***	***1***	***1***	***-1***	***-1***	***1***	***1***	***-1***	***1***	***-1***	***-1***	***1***
2	***1***	***0***	***-1***	***-1***	***-1***	***1***	***1***	***-1***	***-1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***-1***	***-1***
3	***-1***	***1***	***0***	***-1***	***1***	***-1***	***1***	***-1***	***1***	***-1***	***1***	***1***	***-1***	***1***	***-1***
4	***1***	***1***	***1***	***0***	***-1***	***-1***	***-1***	***-1***	***-1***	***-1***	***-1***	***1***	***1***	***1***	***1***
5	***-1***	***1***	***-1***	***1***	***0***	***1***	***-1***	***-1***	***1***	***-1***	***1***	***-1***	***1***	***-1***	***1***
6	***-1***	***-1***	***1***	***1***	***-1***	***0***	***1***	***-1***	***1***	***1***	***-1***	***-1***	***1***	***1***	***-1***
7	***1***	***-1***	***-1***	***1***	***1***	***-1***	***0***	***-1***	***-1***	***1***	***1***	***-1***	***-1***	***1***	***1***
8	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***0***	***-1***	***-1***	***-1***	***-1***	***-1***	***-1***	***-1***
9	***-1***	***1***	***-1***	***1***	***-1***	***-1***	***1***	***1***	***0***	***1***	***-1***	***1***	***-1***	***-1***	***1***
10	***-1***	***-1***	***1***	***1***	***1***	***-1***	***-1***	***1***	***-1***	***0***	***1***	***1***	***1***	***-1***	***-1***
11	***1***	***-1***	***-1***	***1***	***-1***	***1***	***-1***	***1***	***1***	***-1***	***0***	***1***	***-1***	***1***	***-1***
12	***-1***	***-1***	***-1***	***-1***	***1***	***1***	***1***	***1***	***-1***	***-1***	***-1***	***0***	***1***	***1***	***1***
13	***1***	***-1***	***1***	***-1***	***-1***	***-1***	***1***	***1***	***1***	***-1***	***1***	***-1***	***0***	***-1***	***1***
14	***1***	***1***	***-1***	***-1***	***1***	***-1***	***-1***	***1***	***1***	***1***	***-1***	***-1***	***1***	***0***	***-1***
15	***-1***	***1***	***1***	***-1***	***-1***	***1***	***-1***	***1***	***-1***	***1***	***1***	***-1***	***-1***	***1***	***0***

Очевидно, что, чётные и нечетные степени матрицы суммы операторов момента импульса, образуют числовые величины, аналогичные **единицам комплексных чисел**, при этом числа приобретают 2^n-1 -мерный векторный характер среди, которых выделяется четыре класса вычетов, определяемых степенями мнимой единицы. Особо отметим, что любое нарушение суммы операторов момента импульса ведет к нарушению симметрии всей совокупности чисел. Каждая из $3,7,15,31,63,127,\ldots,\ 2^n\text{-}1,\ldots$-мерных векторных алгебр имеют сумму операторов момента импульса совершенно аналогичного вида.

У пятнадцатимерной алгебры коммутирующих между собой операторов нет, и подалгебры Картана отсутствуют. Её ранг равен единице и, следовательно, можно образовать лишь один оператор Казимира, коммутирующий со всеми операторами. Он соответствует скалярному квадрату оператора момента импульса

$$L^2=L_1^2+L_2^2+\ldots+L_{15}^2=14I,$$

где I-единичная матрица. Скалярный квадрат оператора момента импульса, следовательно, сохраняется, что соответствует закону сохранения момента импульса.

Таким образом, удается построить антисимметричную векторную алгебру, определяемую векторами с пятнадцатью координатами в каждой из них. Свойства этой алгебры следует изучить, но можно заранее сказать, что она соответствует линейному векторному пространству, анти коммутативна, не ассоциативна по умножению и не альтернативна. Она имеет нуль, единицу, противоположный элемент, коммутативна и ассоциативна по сложению. Выполняется свойство дистрибутивности. Эта алгебра следует из аналогичной шестнадцатимерной не коммутативной по умножению и не ассоциативной алгебры, определяемой гиперкомплексными числами без деления и обратных элементов.

Нулевая координата шестнадцатимерной алгебры определяет скалярное произведение двух пятнадцатимерных векторов. Скалярное произведение двух векторов соответствует единичному метрическому 15-тензору. Таким образом, определено как векторное, так и скалярное произведение векторов одной из пятнадцатимерных алгебр.

Чтобы говорить предметно о свойствах пятнадцатимерной алгебры, можно проанализировать пятнадцати рядные квадратные матрицы L_i (Паули). С их помощью, как известно, записываются уравнения (Дирака) [1]. Трехмерные и семимерные матрицы (Паули) при этом характеризуют момент импульса в указанных алгебрах меньшей размерности.

Непосредственным умножением этих операторов можно получить приведенные выше соотношения для операторов момента импульса.

Обратим внимание читателей на существование не только одномерной и трехмерной векторной алгебры, но также семимерной, а теперь и векторных алгебр пятнадцатимерной, тридцатиодномерной и более высоких размерностей. Это, в свою очередь, ребром ставит вопрос о размерности физического пространства. Я считаю, что “**Размерность физического пространства неопределённа.** Она характеризуется лишь свойствами алгебры (симметрии), используемой для описания процессов, и может быть как угодно большой”!

Более симметричны алгебры большей размерности; алгебры меньшей размерности соответствуют той или иной степени нарушения симметрии определяющих соотношений.

Литература

1. **Коротков А. В**. Элементы семимерного векторного исчисления. Алгебра. Геометрия. Теория поля. – Новочеркасск: Набла, 1996. –244 с.

2. **Коротков А. В**. Элементы трех- и семимерного изовекторного и спинорного исчислений. –Новочеркасск: Набла, 1999. – 100 с.

3. **Коротков А. В**. Элементы пятнадцатимерного векторного исчисления. – Новочеркасск: Изд-во “НОК“, 2011. – 36с.

КОРОТКОВ А.В.

ДВОЙНОЕ ВЕКТОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ В ПЯТНАДЦАТИ МЕРНОЙ АЛГЕБРЕ

Обозначим определитель третьего порядка символом

$$|i,j,k|=\begin{vmatrix} e_i & e_j & e_k \\ a_i & a_j & a_k \\ b_i & b_j & b_k \end{vmatrix}$$

тогда векторное произведение двух векторов [**a,b]**

-в ***одномерном*** случае **равно |1,0,0|=0**;

-в ***трехмерном*** случае

$$[a,b]=|1,2,3|=\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix};$$

или в координатной форме записи

$$\begin{aligned}[a,b]= \quad & (a_2b_3 \ \ -b_2a_3) \ \ e_1, \\ & (a_3b_1 \ \ -b_3a_1) \ \ e_2, \\ & (a_1b_2 \ \ -b_1a_2) \ \ e_3.\end{aligned}$$

Тензор структурных констант $\sigma^{ijk}=\pm 1$ - является совершенно анти-симметричным единичным *3*-тензором, в котором компоненты меняют знак при перестановке любых двух индексов, причем отличные от нуля компоненты равны ± 1.

Отметим, что подстановки на множестве индексов ***1,2,3*** дают взаимно однозначное отображение векторного произведения двух векторов на себя [1,2]:

1	*2*	*3*
2	*3*	*1*
3	*1*	*2*

т. е. в тензоре структурных констант векторных произведений двух векторов:

- в ***трехмерном*** случае

$$[a,b]=[a_ie_ib_je_j]=a_ib_j[e_ie_k]=\sigma_{ij}^{\ \ k}a_ib_je_k;$$

при последовательности чисел $e_ia_jb_k$ = ***1,2,3; 2,3,1; 3,1,2;***

$$\sigma_{ij}^{\ \ k}=1;$$

при обратной последовательности $\sigma_{ij}^{\ \ k}=-1;$

для других наборов чисел $\sigma_{ij}^{\ \ k}=0.$

- в ***семимерном*** случае [1]:

$$[ab]=\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} e_2 & e_4 & e_6 \\ a_2 & a_4 & a_6 \\ b_2 & b_4 & b_6 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} e_3 & e_6 & e_5 \\ a_3 & a_6 & a_5 \\ b_3 & b_6 & b_5 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} e_4 & e_5 & e_1 \\ a_4 & a_5 & a_1 \\ b_4 & b_5 & b_1 \end{vmatrix}+$$

$$+\begin{vmatrix} e_5 & e_7 & e_2 \\ a_5 & a_7 & a_2 \\ b_5 & b_7 & b_2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} e_6 & e_1 & e_7 \\ a_6 & a_1 & a_7 \\ b_6 & b_1 & b_7 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} e_7 & e_3 & e_4 \\ a_7 & a_3 & a_4 \\ b_7 & b_3 & b_4 \end{vmatrix},$$

т. е. в тензоре структурных констант векторных произведений двух векторов

$$[a,b]=[a_i e_i b_j e_j]=a_i b_j [e_i e_k]=\sigma_{ij}^{k} a_i b_j e_k;$$

при последовательностях чисел $e_i a_j b_k$ =

$$1,2,3;\quad 2,4,6;\quad 3,6,5;\quad 4,5,1;\quad 5,7,2;\quad 6,1,7;\quad 7,3,4;$$

$$\sigma_{ij}^{k}= 1;$$

при обратной последовательности $\sigma_{ij}^{k}=-1;$

для других наборов чисел $\sigma_{ij}^{k}= 0.$

Тензор структурных констант $\sigma^{ijk}=\pm 1$ - является совершенно антисимметричным единичным 7- тензором, в котором компоненты меняют знак при перестановке любых двух индексов, причем отличные от нуля компоненты равны ± 1. Из анти симметричности следует, что все компоненты тензора, у которых хотя бы два индекса совпадают, равны нулю, так что отличны от нуля лишь те, у которых все три индекса различны.

Векторное произведение двух семимерных векторов удобно записать в виде суммы семи определителей

$$[a,b]=|1,2,3|+|2,4,6|+|3,6,5|+|4,5,1|+|5,7,2|+|6,1,7|+|7,3,4|,$$

или в координатной форме записи

$$\begin{aligned}[a,b]= & (\ (a_2b_3\ -b_2a_3)\ +(a_4b_5\ -b_4a_5)\ +(b_6a_7,\ -a_6b_7))\ e_1,\\ & (+(a_4b_6\ -b_4a_6)\ +(a_5b_7\ -b_5a_7)\ +(b_1a_3,\ -a_1b_3))\ e_2,\\ & (+(a_6b_5\ -b_6a_5)\ +(a_1b_2\ -b_1a_2)\ +(b_7a_4,\ -a_7b_4))\ e_3,\\ & (+(a_5b_1\ -b_5a_1)\ +(a_7b_3\ -b_7a_3)\ +(b_2a_6,\ -a_2b_6))\ e_4,\\ & (+(a_7b_2\ -b_7a_2)\ +(a_3b_6\ -b_3a_6)\ +(b_4a_1,\ -a_4b_1))\ e_5,\\ & (+(a_1b_7\ -b_1a_7)\ +(a_2b_4\ -b_2a_4)\ +(b_3a_5,\ -a_3b_5))\ e_6,\\ & (+(a_3b_4\ -b_3a_4)\ +(a_6b_1\ -b_6a_1)\ +(b_5a_2,\ -a_5b_2))\ e_7.\end{aligned}$$

Отметим, что подстановки на множестве индексов $1,2,3,\ldots,7$ дают взаимно однозначное отображение векторного произведения двух векторов на себя, причем имеет место следующая таблица системы подстановки индексов

1	2	3	4	5	6	7
2	4	6	5	7	1	3
3	6	5	1	2	7	4
4	5	1	7	3	2	6
5	7	2	3	6	4	1
6	1	7	2	4	3	5
7	3	4	6	1	5	2

Первые три столбца (или строки) этой таблицы характеризуют значения индексов определителей в векторном произведении двух векторов.

В пятнадцати мерной векторной алгебре векторное произведение двух векторов можно записать в виде суммы ста пяти величин вида:

$$(a_i b_j - a_j b_i)\boldsymbol{e}_k,$$

по семь компонент для каждой координаты (7*15=105) в соответствии с таблицей

1,2,3	**1**,4,5	**1**,7,6	**1**,8,9	**1**,11,10	**1**,13,12	**1**,14,15
2,4,6	**2**,5,7	**2**,3,1	**2**,8,10	**2**,14,12	**2**,15,13	**2**,9,11
3,6,5	**3**,1,2	**3**,4,7	**3**,8,11	**3**,13,14	**3**,10,9	**3**,15,12
4,5,1	**4**,7,3	**4**,6,2	**4**,8,12	**4**,9,13	**4**,11,15	**4**,10,14
5,7,2	**5**,3,6	**5**,1,4	**5**,8,13	**5**,10,15	**5**,14,11	**5**,12,9
6,1,7	**6**,2,4	**6**,5,3	**6**,8,14	**6**,15,9	**6**,12,10	**6**,11,13
7,3,4	**7**,6,1	**7**,2,5	**7**,8,15	**7**,12,11	**7**,9,14	**7**,13,10
8,9,1	**8**,10,2	**8**,11,3	**8**,12,4	**8**,13,5	**8**,14,6	**8**,15,7
9,11,2	**9**,13,4	**9**,14,7	**9**,1,8	**9**,3,10	**9**,5,12	**9**,6,15
10,14,4	**10**,15,5	**10**,9,3	**10**,2,8	**10**,6,12	**10**,7,13	**10**,1,11
11,13,6	**11**,10,1	**11**,15,4	**11**,3,8	**11**,5,14	**11**,2,9	**11**,7,12
12,9,5	**12**,11,7	**12**,10,6	**12**,4,8	**12**,1,13	**12**,3,15	**12**,2,14
13,10,7	**13**,14,3	**13**,12,1	**13**,5,8	**13**,2,15	**13**,6,11	**13**,4,9
14,15,1	**14**,12,2	**14**,11,5	**14**,6,8	**14**,7,9	**14**,4,10	**14**,3,13
15,12,3	**15**,9,6	**15**,13,2	**15**,7,8	**15**,4,11	**15**,1,14	**15**,5,10

где ***i**,j,k* циклически повторяются для каждой величины, так что они создают определители третьего порядка вида:

$$|\boldsymbol{i,j,k}| = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_i & \boldsymbol{e}_j & \boldsymbol{e}_k \\ a_i & a_j & a_k \\ b_i & b_j & b_k \end{vmatrix},$$

например, три величины ***1,2,3; 2,3,1; 3,1,2*** дают определитель ***|1,2,3|.*** В результате векторное произведение двух векторов в пятнадцати мерной алгебре может быть записано в виде суммы сорока девяти определителей третьего порядка, семь из которых (с восьмой координатой, например ***1, 8, 9***) повторяются трижды (49=28+3*7). При этом орт $\boldsymbol{e}_8$ является общим ортом для всех семи пространств, так что, имеется 35 не примитивных определителей

[ab]=

$$\begin{array}{llllllllllllll}
= & |1,\ 2,\ 3| & + & |2,\ 8,10| & + & |3,10,\ 9| & + & |8,\ 9,\ 1| & + & |9,11,\ 2| & + & |10,\ 1,11| & + & |11,\ 3,\ 8| \\
+ & |2,\ 4,\ 6| & + & |4,\ 8,12| & + & |6,12,10| & + & |8,10,\ 2| & + & |10,14,4| & + & |12,\ 2,14| & + & |14,\ 6,\ 8| \\
+ & |3,\ 6,\ 5| & + & |6,\ 8,14| & + & |5,14,11| & + & |8,11,\ 3| & + & |11,13,6| & + & |14,\ 3,13| & + & |13,\ 5,\ 8| \\
+ & |4,\ 5,\ 1| & + & |5,\ 8,13| & + & |1,13,12| & + & |8,12,\ 4| & + & |12,\ 9,\ 5| & + & |13,\ 4,\ 9| & + & |9,\ 1,\ 8| \\
+ & |5,\ 7,\ 2| & + & |7,\ 8,15| & + & |2,15,13| & + & |8,13,\ 5| & + & |13,10,\ 7| & + & |15,\ 5,10| & + & |10,\ 2,\ 8| \\
+ & |6,\ 1,\ 7| & + & |1,\ 8,\ 9| & + & |7,\ 9,14| & + & |8,14,\ 6| & + & |14,15,\ 1| & + & |9,\ 6,15| & + & |15,\ 7,\ 8| \\
+ & |7,\ 3,\ 4| & + & |3,\ 8,11| & + & |4,11,15| & + & |8,15,\ 7| & + & |15,12,\ 3| & + & |11,\ 7,12| & + & |12,\ 4,8|
\end{array}$$

Векторным произведением ***[ab]*** двух векторов ***a,b*** можно назвать вектор

$$\boldsymbol{[a,b]}=[a_i\boldsymbol{e_i}b_j\boldsymbol{e_j}]=a_ib_j\boldsymbol{[e_ie_j]}=\sigma_{ij}^{\ k}a_ib_j\boldsymbol{e_k},$$

как совокупность векторных произведений двух векторов семи семимерных пространств

[ab]=

=	$([a_2b_3] + [a_8b_9] + [a_{11}b_{10}])$	$\boldsymbol{e_1}$	+	+	$([a_7b_2] + [a_8b_{13}] + [a_{10}b_{15}])$	$\boldsymbol{e_5}$	+
+	$([a_8b_{10}] + [a_9b_{11}] + [a_3b_1])$	$\boldsymbol{e_2}$	+	+	$([a_8b_{15}] + [a_{13}b_{10}] + [a_2b_5])$	$\boldsymbol{e_7}$	+
+	$([a_{10}b_9] + [a_1b_2] + [a_8b_{11}])$	$\boldsymbol{e_3}$	+	+	$([a_{15}b_{13}] + [a_5b_7] + [a_8b_{10}])$	$\boldsymbol{e_2}$	+
+	$([a_9b_1] + [a_{11}b_3] + [a_{10}b_2])$	$\boldsymbol{e_8}$	+	+	$([a_{13}b_5] + [a_{10}b_2] + [a_{15}b_7])$	$\boldsymbol{e_8}$	+
+	$([a_{11}b_2] + [a_3b_{10}] + [a_1b_8])$	$\boldsymbol{e_9}$	+	+	$([a_{10}b_7] + [a_2b_{15}] + [a_5b_8])$	$\boldsymbol{e_{13}}$	+
+	$([a_3b_8] + [a_{10}b_1] + [a_2b_9])$	$\boldsymbol{e_{11}}$	+	+	$([a_2b_8] + [a_{15}b_5] + [a_7b_{13}])$	$\boldsymbol{e_{10}}$	+
+	$([a_1b_{11}] + [a_2b_8] + [a_9b_3])$	$\boldsymbol{e_{10}}$	+	+	$([a_5b_{10}] + [a_7b_8] + [a_{13}b_2])$	$\boldsymbol{e_{15}}$	+
+	$([a_4b_6] + [a_8b_{10}] + [a_{14}b_{12}])$	$\boldsymbol{e_2}$	+	+	$([a_1b_7] + [a_8b_{14}] + [a_{15}b_9])$	$\boldsymbol{e_6}$	+
+	$([a_8b_{12}] + [a_{10}b_{14}] + [a_6b_2])$	$\boldsymbol{e_4}$	+	+	$([a_8b_9] + [a_{14}b_{15}] + [a_7b_6])$	$\boldsymbol{e_1}$	+
+	$([a_{12}b_{10}] + [a_2b_4] + [a_8b_{14}])$	$\boldsymbol{e_6}$	+	+	$([a_9b_{14}] + [a_6b_1] + [a_8b_{15}])$	$\boldsymbol{e_7}$	+
+	$([a_{10}b_2] + [a_{14}b_6] + [a_{12}b_4])$	$\boldsymbol{e_8}$	+	+	$([a_{14}b_6] + [a_{15}b_7] + [a_9b_1])$	$\boldsymbol{e_8}$	+
+	$([a_{14}b_4] + [a_6b_{12}] + [a_2b_8])$	$\boldsymbol{e_{10}}$	+	+	$([a_{15}b_1] + [a_7b_9] + [a_6b_8])$	$\boldsymbol{e_{14}}$	+
+	$([a_6b_8] + [a_{12}b_2] + [a_4b_{10}])$	$\boldsymbol{e_{14}}$	+	+	$([a_7b_8] + [a_9b_6] + [a_1b_{14}])$	$\boldsymbol{e_{15}}$	+
+	$([a_2b_{14}] + [a_4b_8] + [a_{10}b_6])$	$\boldsymbol{e_{12}}$	+	+	$([a_6b_{15}] + [a_1b_8] + [a_{14}b_7])$	$\boldsymbol{e_9}$	+
+	$([a_6b_5] + [a_8b_{11}] + [a_{13}b_{14}])$	$\boldsymbol{e_3}$	+	+	$([a_3b_4] + [a_8b_{15}] + [a_{12}b_{11}])$	$\boldsymbol{e_7}$	+
+	$([a_8b_{14}] + [a_{11}b_{13}] + [a_5b_3])$	$\boldsymbol{e_6}$	+	+	$([a_8b_{11}] + [a_{15}b_{12}] + [a_4b_7])$	$\boldsymbol{e_3}$	+
+	$([a_{14}b_{11}] + [a_3b_6] + [a_8b_{13}])$	$\boldsymbol{e_5}$	+	+	$([a_{11}b_{15}] + [a_7b_3] + [a_8b_{12}])$	$\boldsymbol{e_4}$	+
+	$([a_{11}b_3] + [a_{13}b_5] + [a_{14}b_6])$	$\boldsymbol{e_{8,}}$	+	+	$([a_{15}b_7] + [a_{12}b_4] + [a_{11}b_3])$	$\boldsymbol{e_8}$	+
+	$([a_{13}b_6] + [a_5b_{14}] + [a_3b_8])$	$\boldsymbol{e_{11}}$	+	+	$([a_{12}b_3] + [a_4b_{11}] + [a_7b_8])$	$\boldsymbol{e_{15}}$	+
+	$([a_5b_8] + [a_{14}b_3] + [a_6b_{11}])$	$\boldsymbol{e_{13}}$	+	+	$([a_4b_8] + [a_{11}b_7] + [a_3b_{15}])$	$\boldsymbol{e_{12}}$	+
+	$([a_3b_{13}] + [a_6b_8] + [a_{11}b_5])$	$\boldsymbol{e_{14}}$	+	+	$([a_7b_{12}] + [a_3b_8] + [a_{15}b_4])$	$\boldsymbol{e_{11}}$	,
+	$([a_5b_1] + [a_8b_{12}] + [a_9b_{13}])$	$\boldsymbol{e_4}$	+				
+	$([a_8b_{13}] + [a_{12}b_9] + [a_1b_4])$	$\boldsymbol{e_5}$	+				
+	$([a_{13}b_{12}] + [a_4b_5] + [a_8b_9])$	$\boldsymbol{e_1}$	+				
+	$([a_{12}b_4] + [a_9b_1] + [a_{13}b_5])$	$\boldsymbol{e_8}$	+				
+	$([a_9b_5] + [a_1b_{13}] + [a_4b_8])$	$\boldsymbol{e_{12}}$	+				
+	$([a_1b_8] + [a_{13}b_4] + [a_5b_{12}])$	$\boldsymbol{e_9}$	+				
+	$([a_4b_9] + [a_5b_8] + [a_{12}b_1])$	$\boldsymbol{e_{13}}$	+				

Здесь $[a_ib_j]=a_ib_j-a_jb_i$ - коммутатор.

Возможна также укороченная (не симметричная) запись векторного произведения двух векторов, которая имеет вид:

$$\begin{array}{lccccccccccc}
\boldsymbol{[a,b]}= & \vert 1,2,3\vert & + & 3^*\vert 1,8,\ 9\vert & + & \vert 1,11,10\vert & + & \vert 1,13,12\vert & + & \vert 1,14,15\vert & + \\
 & \vert 2,4,6\vert & + & 3^*\vert 2,8,10\vert & + & \vert 2,14,12\vert & + & \vert 2,15,13\vert & + & \vert 2,\ 9,11\vert & + \\
 & \vert 3,6,5\vert & + & 3^*\vert 3,8,11\vert & + & \vert 3,13,14\vert & + & \vert 3,10,\ 9\vert & + & \vert 3,15,12\vert & + \\
 & \vert 4,5,1\vert & + & 3^*\vert 4,8,12\vert & + & \vert 4,\ 9,13\vert & + & \vert 4,11,15\vert & + & \vert 4,10,14\vert & + \\
 & \vert 5,7,2\vert & + & 3^*\vert 5,8,13\vert & + & \vert 5,10,15\vert & + & \vert 5,14,11\vert & + & \vert 5,12,\ 9\vert & + \\
 & \vert 6,1,7\vert & + & 3^*\vert 6,8,14\vert & + & \vert 6,15,\ 9\vert & + & \vert 6,12,10\vert & + & \vert 6,11,13\vert & + \\
 & \vert 7,3,4\vert & + & 3^*\vert 7,8,15\vert & + & \vert 7,12,11\vert & + & \vert 7,\ 9,14\vert & + & \vert 7,13,10\vert & ,
\end{array}$$

поскольку

$$|1, 8, 9|+|8, 9, 1|+|9, 1, 8|=3*|1, 8, 9|,$$
$$|2, 8,10|+|8,10, 2|+|10, 2, 8|=3*|2, 8, 10|,$$
$$|3, 8,11|+|8,11, 3|+|11, 3, 8|=3*|3, 8, 11|,$$
$$|4, 8,12|+|8,12, 4|+|12, 4, 8|=3*|4, 8,12|,$$
$$|5, 8,13|+|8,13, 5|+|13, 5, 8|=3*|5, 8,13|,$$
$$|6, 8,14|+|8,14, 6|+|14, 6, 8|=3*|6, 8,14|,$$
$$|7, 8,15|+|8,15, 7|+|15, 7, 8|=3*|7, 8, 15|.$$

Порядок записи соотношений пятнадцати мерной алгебры удобно определять с помощью таблицы подстановки индексов

1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*	*12*	*13*	*14*	*15*
2	*4*	*6*	*5*	*7*	*1*	*3*	*8*	*10*	*12*	*14*	*13*	*15*	*9*	*11*
3	*6*	*5*	*1*	*2*	*7*	*4*	*8*	*11*	*14*	*13*	*9*	*10*	*15*	*12*
4	*5*	*1*	*7*	*3*	*2*	*6*	*8*	*12*	*13*	*9*	*15*	*11*	*10*	*14*
5	*7*	*2*	*3*	*6*	*4*	*1*	*8*	*13*	*15*	*10*	*11*	*14*	*12*	*9*
6	*1*	*7*	*2*	*4*	*3*	*5*	*8*	*14*	*9*	*15*	*10*	*12*	*11*	*13*
7	*3*	*4*	*6*	*1*	*5*	*2*	*8*	*15*	*11*	*12*	*14*	*9*	*13*	*10*

В пятнадцати мерной алгебре восьмая компонента не распределена по всей таблице, а сосредоточена в столбике или строке.

Трехмерное и семимерное векторные исчисления являются частным случаем пятнадцати мерной векторной алгебры в основе, которой лежат определения не только векторного произведения, но и скалярного. Скалярное произведение двух векторов определяется скаляром:

$$(\mathbf{ab})=(a_i\mathbf{e_i}b_k\mathbf{e_k})=a_ib_k(\mathbf{e_i}\mathbf{e_k})=g_{ik}a_ib_k,$$

где g_{ik}-метрический 15-тензор, равный единичной матрице.

Очевидно, что свойства пятнадцати мерной векторной алгебры определяются векторным произведением двух векторов, которое повторяет свойства определителей т.е.:

1. векторное произведение двух векторов не изменится, если вынести за скобки скалярный множитель;

2. векторное произведение двух векторов изменяет знак при перестановке векторов;

3. векторное произведение двух векторов дистрибутивно;

$$[a(b+c)]=[ab]+[ac]$$

4. если два вектора в векторном произведении компланарны, то это произведение равно нулю и т. д.

Модулю векторного произведения двух векторов ***a*** и ***b*** можно сопоставить скаляр, равный площади построенного на них параллелограмма

$$[\mathbf{ab}]=ab\sin(\mathbf{a},\mathbf{b}).$$

Скалярное и векторное произведения двух векторов в координатной форме записи представлены в таблице на альбомном листе, приведенном ниже.

В 15-тензоре структурных констант векторных произведений двух векторов

$$[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]=[a_i\boldsymbol{e_i}b_j\boldsymbol{e_j}]=a_ib_j[\boldsymbol{e_i}\boldsymbol{e_k}]=\sigma_{ij}^{\ k}a_ib_j\boldsymbol{e_k};$$

для положительных последовательностей чисел $\boldsymbol{e_i}a_jb_k$

$$\sigma_{ij}^{\ k}=1;$$

при обратной последовательности $\sigma_{ij}^{\ k}=-1;$

для других наборов чисел $\sigma_{ij}^{\ k}=0.$

Эта таблица фиксирует также покоординатную запись пятнадцати операторов момента импульса L_i $(i=1, 2,\dots, 15)$, как показано ниже.

(ab)= $-a_1b_1$ $-a_2b_2$ $-a_3b_3$ $-a_4b_4$ $-a_5b_5$ $-a_6b_6$ $-a_7b_7$ $-a_8b_8$ $-a_9b_9$ $-a_{10}b_{10}$ $-a_{11}b_{11}$ $-a_{12}b_{12}$ $-a_{13}b_{13}$ $-a_{14}b_{14}$ $-a_{15}b_{15}$

[ab]=

-	$+a_3b$	-	$+a_5b$	-	$+a_6b$	-	$+a_9b$	-	$+a_{10}b$	-	$+a_{12}b$	-	$+a_{15}b$
-	$+a_6b$	-	$+a_7b$	-	$+a_1b$	-	$+a_{10}$	-	$+a_{12}b$	-	$+a_{13}b$	-	$+a_{11}b$
-	$+a_5b$	-	$+a_2b$	-	$+a_7b$	-	$+a_{11}$	-	$+a_{14}b$	-	$+a_9b_1$	-	$+a_{12}b$
-	$+a_1b$	-	$+a_3b$	-	$+a_2b$	-	$+a_{12}$	-	$+a_{13}b$	-	$+a_{15}b$	-	$+a_{14}b$
-	$+a_2b$	-	$+a_6b$	-	$+a_4b$	-	$+a_{13}$	-	$+a_{15}b$	-	$+a_{11}b$	-	$+a_9b_1$
-	$+a_7b$	-	$+a_4b$	-	$+a_3b$	-	$+a_{14}$	-	$+a_9b_1$	-	$+a_{10}b$	-	$+a_{13}b$
-	$+a_4b$	-	$+a_1b$	-	$+a_5b$	-	$+a_{15}$	-	$+a_{11}b$	-	$+a_{14}b$	-	$+a_{10}b$
-	$+a_1b$	-	$+a_{10}$	-	$+a_3b$	-	$+a_{12}$	-	$+a_5b_1$	-	$+a_6b_1$	-	$+a_7b_1$
-	$+a_2b$	-	$+a_{13}$	-	$+a_7b$	-	$+a_1b$	-	$+a_{10}b$	-	$+a_4b_1$	-	$+a_7b_1$
-	$+a_4b$	-	$+a_{15}$	-	$+a_3b$	-	$+a_2b$	-	$+a_{12}b$	-	$+a_5b_1$	-	$+a_3b_9$
-	$+a_6b$	-	$+a_{10}$	-	$+a_4b$	-	$+a_3b$	-	$+a_{14}b$	-	$+a_1b_1$	-	$+a_4b_1$
-	$+a_5b$	-	$+a_{11}$	-	$+a_6b$	-	$+a_4b$	-	$+a_{13}b$	-	$+a_7b_1$	-	$+a_6b_1$
-	$+a_7b$	-	$+a_{14}$	-	$+a_1b$	-	$+a_5b$	-	$+a_{15}b$	-	$+a_3b_1$	-	$+a_1b_1$
-	$+a_1b$	-	$+a_{12}$	-	$+a_5b$	-	$+a_6b$	-	$+a_9b_7$	-	$+a_2b_1$	-	$+a_5b_1$
-	$+a_3b$	-	$+a_9b$	-	$+a_2b$	-	$+a_7b$	-	$+a_{11}b$	-	$+a_6b_9$	-	$+a_2b_1$

причем $\boldsymbol{L}$ =

$m[L_2L_3]$	+	$[L_4L_5$	+	$[L_7L_6$	+	$n[L_8L_9$	+	$[L_{11}L_1$	+	$[L_{13}L_1$	+	$[L_{14}L_1$	=	-	$3iL_1$
$m[L_4L_6]$	+	$[L_5L_7$	+	$[L_3L_1$	+	$n[L_8L_1$	+	$[L_{14}L_1$	+	$[L_{15}L_1$	+	$[L_9L_{11}$	=	-	$3iL_2$
$m[L_6L_5]$	+	$[L_1L_2$	+	$[L_4L_7$	+	$n[L_8L_1$	+	$[L_{13}L_1$	+	$[L_{10}L_9$	+	$[L_{15}L_1$	=	-	$3iL_3$
$m[L_5L_1]$	+	$[L_7L_3$	+	$[L_6L_2$	+	$n[L_8L_1$	+	$[L_9L_{13}$	+	$[L_{11}L_1$	+	$[L_{10}L_1$	=	-	$3iL_4$
$m[L_7L_2]$	+	$[L_3L_6$	+	$[L_1L_4$	+	$n[L_8L_1$	+	$[L_{10}L_1$	+	$[L_{14}L_1$	+	$[L_{12}L_9$	=	-	$3iL_5$
$m[L_1L_7]$	+	$[L_2L_4$	+	$[L_5L_3$	+	$n[L_8L_1$	+	$[L_{15}L_9$	+	$[L_{12}L_1$	+	$[L_{11}L_1$	=	-	$3iL_6$
$m[L_3L_4]$	+	$[L_6L_1$	+	$[L_2L_5$	+	$n[L_8L_1$	+	$[L_{12}L_1$	+	$[L_9L_{14}$	+	$[L_{13}L_1$	=	-	$3iL_7$
$(1/n[L_9L$	+	$[L_{10}L$	+	$[L_{11}L$	+	$[L_{12}L_4$	+	$[L_{13}L_5$	+	$[L_{14}L_6$	+	$[L_{15}L_7$	=	-	$3iL_8$
$m[L_3L_{10}$	+	$[L_5L_1$	+	$[L_6L_1$	+	$n[L_1L_8$	+	$[L_{11}L_2$	+	$[L_{13}L_4$	+	$[L_{14}L_7$	=	-	$3iL_9$
$m[L_6L_{12}$	+	$[L_7L_1$	+	$[L_1L_1$	+	$n[L_2L_8$	+	$[L_{14}L_4$	+	$[L_{15}L_5$	+	$[L_9L_3]$	=	-	$3iL_1$
$m[L_5L_{14}$	+	$[L_2L_9$	+	$[L_7L_1$	+	$n[L_3L_8$	+	$[L_{13}L_6$	+	$[L_{10}L_1$	+	$[L_{15}L_4$	=	-	$3iL_1$
$m[L_1L_{13}$	+	$[L_3L_1$	+	$[L_2L_1$	+	$n[L_4L_8$	+	$[L_9L_5]$	+	$[L_{11}L_7$	+	$[L_{10}L_6$	=	-	$3iL_1$
$m[L_2L_{15}$	+	$[L_6L_1$	+	$[L_4L_9$	+	$n[L_5L_8$	+	$[L_{10}L_7$	+	$[L_{14}L_3$	+	$[L_{12}L_1$	=	-	$3iL_1$
$m[L_7L_9]$	+	$[L_4L_1$	+	$[L_3L_1$	+	$n[L_6L_8$	+	$[L_{15}L_1$	+	$[L_{12}L_2$	+	$[L_{11}L_5$	=	-	$3iL_1$
$m[L_4L_{11}$	+	$[L_1L_1$	+	$[L_5L_1$	+	$n[L_7L_8$	+	$[L_{12}L_3$	+	$[L_9L_6]$	+	$[L_{13}L_2$	=	-	$3iL_1$

$$L_1=\left\|\begin{array}{ccccccc|cccccccc}
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&-i&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&i&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&-i&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&i&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&i&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&-i&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
\hline
0&0&0&0&0&0&0&0&-i&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&i&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&i&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&-i&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&i&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-i&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-i\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&i&0
\end{array}\right\|
\quad
L_2=\left\|\begin{array}{ccccccc|cccccccc}
0&0&i&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
-i&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&-i&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&-i&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&i&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&i&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
\hline
0&0&0&0&0&0&0&0&0&-i&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-i&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&i&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&i&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&i&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&i\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-i&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-i&0&0
\end{array}\right\|$$

$$L_3=\left\|\begin{array}{ccccccc|cccccccc}
0&-i&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
i&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&-i&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&i&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&-i&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&i&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
\hline
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-i&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&i&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&-i&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&i&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&i\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-i&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&i&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-i&0&0&0
\end{array}\right\|
\quad
L_4=\left\|\begin{array}{ccccccc|cccccccc}
0&0&0&0&i&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&i&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&i&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
-i&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&-i&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&-i&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
\hline
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-i&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-i&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-i&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-i\\
0&0&0&0&0&0&0&i&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&i&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&i&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&i&0&0&0&0
\end{array}\right\|$$

$$L_5=\left\|\begin{array}{ccccccc|cccccccc}
0&0&0&-i&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&i&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&-i&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
i&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&i&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&-i&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
\hline
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-i&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&i&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-i\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&i&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&-i&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&i&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-i&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&i&0&0&0&0&0
\end{array}\right\|
\quad
L_6=\left\|\begin{array}{ccccccc|cccccccc}
0&0&0&0&0&0&-i&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&-i&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&i&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&i&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&-i&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
i&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
\hline
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-i&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&i\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&i&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-i&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&-i&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&i&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&i&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&-i&0&0&0&0&0&0
\end{array}\right\|$$

$$L_7=\left\|\begin{array}{ccccccc|cccccccc}
0&0&0&0&0&i&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&-i&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&-i&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&i&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&i&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
-i&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
\hline
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-i\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-i&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&i&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&i&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-i&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&-i&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&i&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&i&0&0&0&0&0&0&0
\end{array}\right\|
\quad
L_8=\left\|\begin{array}{ccccccc|cccccccc}
0&0&0&0&0&0&0&0&i&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&i&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&i&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&i&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&i&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&i&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&i\\
\hline
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
-i&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&-i&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&-i&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&-i&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&-i&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&-i&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&-i&0&0&0&0&0&0&0&0
\end{array}\right\|$$

L_9

$$\left\| \begin{array}{ccccccc|cccccccc}
0&0&0&0&0&0&0&-i&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&i&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&-i&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&i&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-i&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-i\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&i&0\\
\hline
i&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&i&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&-i&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&i&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&-i&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&-i&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&i&0&0&0&0&0&0&0&0&0
\end{array} \right\|$$

L_{10}

$$\left\| \begin{array}{ccccccc|cccccccc}
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-i&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&-i&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&i&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&i&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&i\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-i&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-i&0&0\\
\hline
0&i&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&-i&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
i&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&i&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&i&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&-i&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&-i&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0
\end{array} \right\|$$

L_{11}

$$\left\| \begin{array}{ccccccc|cccccccc}
0&0&0&0&0&0&0&0&0&i&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&-i&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&-i&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&i\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-i&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&i&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-i&0&0&0\\
\hline
0&0&i&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&i&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
-i&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&i&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&-i&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&i&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&-i&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0
\end{array} \right\|$$

L_{12}

$$\left\| \begin{array}{ccccccc|cccccccc}
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-i&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-i&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-i\\
0&0&0&0&0&0&0&-i&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&i&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&i&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&i&0&0&0&0\\
\hline
0&0&0&i&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&-i&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&-i&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&-i&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
i&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&i&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&i&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0
\end{array} \right\|$$

L_{13}

$$\left\| \begin{array}{ccccccc|cccccccc}
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&i&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-i\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&i&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&-i&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&-i&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-i&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&i&0&0&0&0&0\\
\hline
0&0&0&0&i&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&i&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&-i&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&i&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
-i&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&-i&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&i&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0
\end{array} \right\|$$

L_{14}

$$\left\| \begin{array}{ccccccc|cccccccc}
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&i\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&i&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-i&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&-i&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&i&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&-i&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&-i&0&0&0&0&0&0\\
\hline
0&0&0&0&0&i&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&i&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&i&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&-i&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&-i&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&i&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
-i&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0
\end{array} \right\|$$

L_{15}

$$\left\| \begin{array}{ccccccc|cccccccc}
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-i&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&i&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&i&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-i&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&-i&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&i&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&-i&0&0&0&0&0&0&0\\
\hline
0&0&0&0&0&0&i&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&-i&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&i&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&i&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&-i&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&-i&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
i&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0
\end{array} \right\|$$

где L_i- антисимметричные матрицы операторов момента импульса,

$$[L_iL_j]=L_iL_j-L_jL_i$$

-коммутаторы, n=11/3, m=(3/5)^2.

Матрицы, составляющие операторы момента импульса, также антисимметричны. В свою очередь пятнадцать операторов L_i составляют оператор квадрата 15- момента импульса

$$\boldsymbol{L}^2= L_1{}^2 + L_2{}^2 +\ldots+ L_{15}{}^2=14I,$$

что характеризует закон сохранения момента импульса при матрице I равной единичной матрице.

Этот оператор коммутативен с каждым из операторов L_i

$$\boldsymbol{L}^2 L_i{}^2 - L_i \boldsymbol{L}^2=0 \qquad (i=1,2,\ldots,15),$$

что характеризует закон сохранения момента импульса. Отметим, что подстановки на множестве индексов $(1,2,..,15)$ дают взаимно однозначное отображение векторного произведения двух векторов на себя.

Знаки компонент векторного произведения двух векторов определяются совершенно анти симметричным единичным 15-тензором второго ранга σ^{ijk}, компоненты которого меняют знак при перестановке любых двух индексов, причем отличные от нуля компоненты равны ± 1. Из анти симметричности следует, что все компоненты тензора, у которых хотя бы два индекса совпадают, равны нулю, так что отличны от нуля лишь те, у которых все три индекса различны. Задать осмысленно параметры совершенно анти симметричного 15-тензора второго ранга, однако, не возможно, поэтому желательно найти симметричную схему подстановки индексов. Выход, однако, можно найти, если рассмотреть пятнадцати мерное пространство, как совокупность семимерных пространств. Такая возможность, как показано выше, существует.

Это характеризует анти симметричное пятнадцати мерное векторное произведение двух векторов, как совокупность семи (в краткой форме записи -пяти) семимерных произведений, т. е. 35-ти трех мерных пространств.

Произведения трех векторов

Все произведения трех векторов можно получить умножением произведения двух векторов на третий вектор. В соответствии с этим возможны следующие типы произведений:

1. ***a(bc)***- простейшее произведение трех векторов;
2. ***(a[bc])***- смешанное произведение трех векторов;
3. ***[a[bc]]***- двойное векторное произведение трех векторов.

Простейшее произведение трех векторов ***a(bc)*** компланарно с третьим вектором

т. е. ***a(bc)≠(ab)c,***

так что векторные n-мерные $(n=1,3,7,15,\ldots)$ алгебры не ассоциативны.

Смешанное произведение

$$\boldsymbol{(a[bc])=(abc)}$$

получается скалярным умножением векторного произведения двух векторов на третий вектор. В результате получаем антисимметричную по перестановке любой пары векторов скалярную функцию:

$$\boldsymbol{(abc)}=((a_1\boldsymbol{e}_1+a_2\boldsymbol{e}_2+\ldots+a_n\boldsymbol{e}_n)*\sigma_{ij}^{\ k}b_ic_j\boldsymbol{e}_k);$$

т. е. смешанное произведение трех векторов в одномерном случае равно нулю, в трех мерном случае - определяется одним определителем третьего порядка, в семи мерном - суммой семи определителей, а в пятнадцати мерном - суммой тридцати пяти определителей третьего порядка причем

- в ***трехмерном*** случае

$$\boldsymbol{(abc)} = \quad |1,2,3|,$$

- в ***семимерном*** случае

$$\boldsymbol{(abc)} = |1,2,3| \; +|2,4,6| \; +|3,6,5| \; +|4,5,1| \; +|5,7,2| \; +|6,1,7| \; +|7,3,4|,$$

- в ***пятнадцатимерном*** случае

(abc)=

=	|1, 2,	+	|2, 8,10|	+	|3,10,9 |	+	|8, 9, 1 |	+	|9,11, 2 |	+	|10,1,11|	+	|11,3, 8 |
+	|2, 4,	+	|4, 8,12|	+	|6,12,10|	+	|8,10, 2|	+	|10,14,4|	+	|12,2,14|	+	|14, 6, 8|
+	|3, 6,	+	|6, 8,14|	+	|5,14,11|	+	|8,11, 3|	+	|11,13,6|	+	|14,3,13|	+	|13, 5, 8|
+	|4, 5, 1	+	|5, 8,13|	+	|1,13,12|	+	|8,12, 4|	+	|12,9, 5|	+	|13,4, 9|	+	| 9, 1, 8|
+	|5, 7,	+	|7, 8,15|	+	|2,15,13|	+	|8,13, 5|	+	|13,10,7|	+	|15,5,10|	+	|10, 2,8 |
+	|6, 1	+	| 1, 8, 9 |	+	| 7, 9,14|	+	| 8,14, 6|	+	|14,15,1|	+	| 9,6,15|	+	|15, 7, 8|
+	|7, 3,	+	|3, 8,11|	+	|4,11,15|	+	| 8,15, 7|	+	|15,12,3|	+	|11,7,12|	+	|12, 4, 8|

или в сокращенной записи:

(abc) =	|1,2,3|	+3*|1,8, 9|	+|1,11,10|	+|1,13,12|	+|1,14,15|
	+|2,4,6|	+3*|2,8,10|	+|2,14,12|	+|2,15,13|	+|2, 9,11 |
	+|3,6,5|	+3*|3,8,11|	+|3,13,14|	+|3,10, 9|	+|3,15,12|
	+|4,5,1|	+3*|4,8,12|	+|4, 9,13|	+|4,11,15|	+|4,10,14|
	+|5,7,2|	+3*|5,8,13|	+|5,10,15|	+|5,14,11|	+|5,12, 9 |
	+|6,1,7|	+3*|6,8,14|	+|6,15, 9|	+|6,12,10|	+|6,11,13|
	+|7,3,4|	+3*|7,8,15|	+|7,12,11|	+|7, 9,14|	+|7,13,10|

В этой таблице символом $|i,j,k|$ обозначен определитель вида:

$$|i,j,k|=\begin{vmatrix} a_i & a_j & a_k \\ b_i & b_j & b_k \\ c_i & c_j & c_k \end{vmatrix}.$$

Из свойств определителей следует:

- смешанное произведение трех векторов не изменится, если вынести за скобки скалярный множитель,

$$\boldsymbol{(\alpha abc)=\alpha(abc)};$$

- смешанное произведение трех векторов изменяет знак при перестановке любой пары его векторов;

- циклическая подстановка векторов не изменяют смешанного произведения трех векторов;

- смешанное произведение трех векторов дистрибутивно, т. е.

$$\boldsymbol{(ab(c+d))=(abc)+(abd)};$$

- если два вектора в смешанном произведении трех векторов компланарны, то это произведение равно нулю, в частности, если два вектора в смешанном произведении трех векторов равны, то оно обращается в нуль, так что векторное произведение двух векторов ортогонально каждому из входящих в него векторов для всех рассмотренных алгебр

$$\boldsymbol{([ab]a)=([ba]b)=0}$$

и т. д.

Модулю смешанного произведения ***(abc)*** трех векторов ***a,b*** и ***c*** можно сопоставить скаляр, равный объему построенного на них параллелепипеда.

Вместе с тем пятнадцати мерное пространство можно рассматривать как совокупность пяти семимерных пространств. При этом векторное произведение двух векторов не существенно отличается коэффициентом (3 при 8-ой координате), который зачастую мы не будем учитывать. Запись скалярного произведения двух векторов остается в прежнем виде так, что смешанное произведение трех векторов представляется аналогично формуле векторного произведения двух векторов.

Оно содержит *(49=28+3*7)* определителей третьего порядка, в случае представления 15-мерного пространства семимерными пространствами, что равносильно использованию тридцати пяти не повторяющихся определителей.

Двойное векторное произведение ***[a[bc]]*** трех векторов ***a,b*** и ***c*** получается векторным умножением векторного произведения двух векторов на третий вектор. В результате имеем вектор такой, что

$$\boldsymbol{[a[bc]]=[ad]=f=}f_1\boldsymbol{e}_1+f_2\boldsymbol{e}_2+\ldots+f_{15}\boldsymbol{e}_{15}.$$

В координатной форме записи для двойного векторного произведения имеет место соотношение:

- в ***трехмерном*** случае

$$f_1=a_2d_3-d_2a_3=a_2(b_1c_2-b_2c_1);$$
$$f_2=a_3d_1-d_3a_1=a_3(b_2c_3-b_3c_2);$$
$$f_3=a_1d_2-d_1a_2=a_1(b_3c_1-b_1c_3);$$

т.е. $$\boldsymbol{[a[bc]]=b(ca)-(ab)c};$$

- в ***семимерном*** случае для первой координаты

$$f_1=a_2d_3-a_3d_2+a_4d_5-a_5d_4+a_7d_6-a_6d_7=$$
$$=a_2(b_6c_5-b_5c_6+b_1c_2-b_2c_1+b_4c_7-b_7c_4)-a_3(b_4c_6-b_6c_4+b_5c_7-b_7c_5+b_3c_1-b_1c_3)+$$
$$+a_4(b_7c_2-b_2c_7+b_3c_6-b_6c_3+b_1c_4-b_4c_1)-a_5(b_5c_1-b_1c_5+b_7c_3-b_2c_6+b_6c_2-b_2c_6)+$$
$$+a_7(b_1c_7-b_7c_1+b_2c_4-b_4c_2+b_5c_3-b_3c_5)-a_6(b_3c_4-b_4c_3+b_6c_1-b_1c_6+b_2c_5-b_5c_2),$$

т.е. $f_1=b_1\boldsymbol{(ca)}-\boldsymbol{(ab)}c_1+\boldsymbol{[abc]}_1$ где $\boldsymbol{[abc]}_1=|2,4,7|+|3,7,5|+|4,3,6|+|6,5,2|$.

Аналогично для других координат

$f_2=b_2\boldsymbol{(ca)}-\boldsymbol{(ab)}c_2+\boldsymbol{[abc]}_2$, $\boldsymbol{[abc]}_2=|4,5,3|+|6,3,7|+|5,6,1|+|1,7,4|$,

$f_3=b_3\boldsymbol{(ca)}-\boldsymbol{(ab)}c_3+\boldsymbol{[abc]}_3$, $\boldsymbol{[abc]}_3=|6,1,4|+|5,4,2|+|1,5,7|+|7,2,6|$,

$f_4=b_4\boldsymbol{(ca)}-\boldsymbol{(ab)}c_4+\boldsymbol{[abc]}_4$, $\boldsymbol{[abc]}_4=|5,7,6|+|1,6,3|+|7,1,2|+|2,3,5|$,

$f_5=b_5\boldsymbol{(ca)}-\boldsymbol{(ab)}c_5+\boldsymbol{[abc]}_5$, $\boldsymbol{[abc]}_5=|7,3,1|+|2,1,6|+|3,2,4|+|4,6,7|$,

$f_6=b_6\boldsymbol{(ca)}-\boldsymbol{(ab)}c_6+\boldsymbol{[abc]}_6$, $\boldsymbol{[abc]}_6=|1,2,5|+|7,5,4|+|2,7,3|+|3,4,1|$,

$$f_7=b_7\boldsymbol{(ca)}\text{-}\boldsymbol{(ab)}c_7+\boldsymbol{[abc]_7}, \qquad \boldsymbol{[abc]_7}=|3,6,2|+|4,2,1|+|6,4,5|+|5,1,3|.$$

Таким образом, в семимерном случае, окончательно напишем

$$\boldsymbol{[a[bc]]=b(ca)\text{-}(ab)c+[abc],}$$

где вектор ***[abc]*** определяется суммой *28*-ми определителей третьего порядка, причем имеет место соотношение Якоби в виде:

$$\boldsymbol{[a[bc]]=b(ca)\text{-}(ab)c+[abc],}$$

$$\boldsymbol{[b[ca]]=c(ab)\text{-}(bc)a+[bca],}$$

$$\boldsymbol{[c[ab]]=a(bc)\text{-}(ca)b+[cab],}$$

т.е. $$\boldsymbol{[a[bc]]+ [b[ca]]+[c[ab]]=3[abc].}$$

Обозначим сумму четырех определителей третьего порядка через

$$\boldsymbol{|i,j,k,h|}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{e_i} & \boldsymbol{e_j} & \boldsymbol{e_k} & \boldsymbol{e_h} \\ \boldsymbol{a_i} & \boldsymbol{a_j} & \boldsymbol{a_k} & \boldsymbol{a_h} \\ \boldsymbol{b_i} & \boldsymbol{b_j} & \boldsymbol{b_k} & \boldsymbol{b_h} \\ \boldsymbol{c_i} & \boldsymbol{c_j} & \boldsymbol{c_k} & \boldsymbol{c_h} \end{vmatrix}$$

тогда ***[abc]*** определяется суммой семи определителей четвертого порядка причем

$$\boldsymbol{[abc]=|1,2,4,7|+|2,4,5,3|+|3,6,1,4|+|4,5,7,6|+|5,7,3,1|+|6,1,2,5|+|7,3,6,2|.}$$

Следует отметить, что подстановки

1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*
2	*4*	*6*	*5*	*7*	*1*	*3*
3	*6*	*5*	*1*	*2*	*7*	*4*
4	*5*	*1*	*7*	*3*	*2*	*6*
5	*7*	*2*	*3*	*6*	*4*	*1*
6	*1*	*7*	*2*	*4*	*3*	*5*
7	*3*	*4*	*6*	*1*	*5*	*2*

на множестве индексов *(1,2,3,4,5,6,7)* дают взаимно однозначное отображение векторного произведения трех векторов на себя. Аналогичным образом получим соотношение Якоби в виде:

$$\boldsymbol{[[ab]c]=b(ac)\text{-}(cb)a+[cba]=b(ac)\text{-}(cb)a\text{-}3[abc],}$$

Назовем анти симметричную по перестановке любой пары векторов функцию трех векторов ***[abc]*** векторным произведением трех векторов при этом двойное векторное произведение трех векторов сводится к линейной комбинации двух простейших и векторного произведения трех векторов. Из свойств определителей следует, что

- векторное произведение трех векторов не изменится, если вынести за скобки скалярный множитель, т. е.

$$\boldsymbol{[\alpha abc]=[\alpha abc];}$$

- векторное произведение трех векторов изменяет знак при перестановке любой пары векторов;
- векторное произведение трех векторов дистрибутивно т.е.

$$\boldsymbol{[ab(c+d)]=[abc]+[abd]};$$

- если два вектора в векторном произведении трех векторов компланарны, то это произведение равно нулю, в частности, если два вектора в векторном произведении трех векторов равны, то оно обращается в нуль и т. д..

Векторным произведением ***[abc]*** трех векторов ***a,b*** и ***c*** можно назвать вектор

$$[\mathbf{abc}]=[a_i\mathbf{e_i}b_j\mathbf{e_j}c_k\mathbf{e_k}]=a_ib_jc_k[\mathbf{e_ie_je_k}]=\sigma_{ijk}{}^{k}a_ib_jc_k\mathbf{e}_k,$$

определяемый совершенно анти симметричным единичным 7-тензором третьего ранга σ^{ijk} компоненты, которого меняют знак при перестановке любых двух индексов, причем отличные от нуля компоненты равны ± 1. Из анти симметрии следует, что все компоненты 7-тензора, у которых хотя бы два индекса совпадают, равны нулю, так что отличны от нуля лишь те, у которых все три индекса различны. Вектор ***[abc]*** в семимерном случае определяется суммой *28*-ми определителей третьего порядка (по четыре в каждой координате), дополняющих совокупность из (*35=7+7*4)* возможных комбинаций как число сочетаний C_7^3=(5*6*7)/(2*3)=35. Компоненты совершенно анти симметричного единичного 7-тензора третьего ранга σ^{ijk} не изменяются по отношению к вращению семимерной системы координат.

Соотношение Якоби в семимерной алгебре не выполняется, она не ассоциативна и не является алгеброй Ли. В [1] показано, что она удовлетворяет соотношению Мальцева.

Скалярное произведение двух векторов в 15-мерной алгебре определяется скаляром:

$$(\mathbf{ab})=(a_i\mathbf{e_i}b_k\mathbf{e_k})=a_ib_k(\mathbf{e_ie_k})=g_{ik}a_ib_k,$$

где g_{ik}-метрический 15-тензор, равный единичной матрице. Согласно сказанному выше имеем:

[ab]=

<table>
<tr><td>=</td><td>|1, 2,</td><td>+</td><td>|2,</td><td>+</td><td>| 3,10,</td><td>+</td><td>|8, 9, 1|</td><td>+</td><td>| 9,11,</td><td>+</td><td>|10,</td><td>+</td><td>|11, 3,</td></tr>
<tr><td>+</td><td>|2, 4,</td><td>+</td><td>|4,</td><td>+</td><td>|</td><td>+</td><td>|8,10,</td><td>+</td><td>|10,14</td><td>+</td><td>|12,</td><td>+</td><td>|14, 6,</td></tr>
<tr><td>+</td><td>|3, 6,</td><td>+</td><td>|6,</td><td>+</td><td>|</td><td>+</td><td>|8,11,</td><td>+</td><td>|11,13</td><td>+</td><td>|14,</td><td>+</td><td>|13, 5,</td></tr>
<tr><td>+</td><td>|4, 5, 1</td><td>+</td><td>|5,</td><td>+</td><td>|</td><td>+</td><td>|8,12,</td><td>+</td><td>|12, 9,</td><td>+</td><td>|13, 4,</td><td>+</td><td>| 9, 1,</td></tr>
<tr><td>+</td><td>|5, 7,</td><td>+</td><td>|7,</td><td>+</td><td>|</td><td>+</td><td>|8,13,</td><td>+</td><td>|13,10,</td><td>+</td><td>|15,</td><td>+</td><td>|10, 2</td></tr>
<tr><td>+</td><td>| 6, 1,</td><td>+</td><td>| 1, 8,</td><td>+</td><td>| 7,</td><td>+</td><td>| 8,14,</td><td>+</td><td>|14,15,</td><td>+</td><td>| 9,</td><td>+</td><td>|15, 7,</td></tr>
<tr><td>+</td><td>|7, 3,</td><td>+</td><td>|3,</td><td>+</td><td>|</td><td>+</td><td>| 8,15,</td><td>+</td><td>|15,12,</td><td>+</td><td>|11,</td><td>+</td><td>|12,</td></tr>
</table>

Для первой координаты f_1 двойного векторного произведения двух векторов получим таблицу приведенную, на альбомном листе

Здесь 10 компонентов суммы имеют отрицательные знаки перед скобками. Величины вида a_i, b_j, c_k будем обозначать цифрами, например, так. a_2*(b_6*c_5 – b_5*c_6)=2, 6, 5.

Из неё следует, что:

3,6,4	3,7,5	3, 1,3	3*(3,10,8)	3,12,14	3,13,15	3,11,9
2,6,5	2,1,2	2,4,7	3*(2,8,11)	2,14,13	2, 10,9	2,12,15
5, 1,5	5,3,7	5,2, 6	3*(5,12,8)	5,13,9	5,15,11	5,14,10
4,7,2	4,3, 6	4, 1,4	3*(4,8,13)	4,15,10	4,11,14	4,12,9
7, 1,7	7,2,4	7,5,3	3*(7,8,14)	7,15,9	7,10,12	7,13,11
6,4,3	6, 1, 6	6,5,2	3*(6,15,8)	6,11,12	6,14,9	6,10,13

<table>
<tr><td>9,1,9</td><td>9,2,10</td><td>9,3,11</td><td>(9,4,12)</td><td>9,5,13</td><td>9,6,14</td><td>9,7,15</td></tr>
<tr><td>3*(8,11,2)</td><td>3*(8,13,4)</td><td>3*(8,14,7)</td><td>(8,1,8)</td><td>3*(8,3,10)</td><td>3*(8,5,12)</td><td>3*(8,6,15)</td></tr>
<tr><td>11,14,4
10,13,6
13,9,5
12,7,10
15,1,15
14,3,12</td><td>11,5,15
10,1,10
13,11,7
12,14,3
15, 2,12
14,9,6</td><td>11,9,3
10,4,15
13,6,10
12,1,12
15,11,5
14,13,2</td><td>3*(11,3,8)
3*(10,8,2)
3*(13,5,8)
3*(12,8,4)
3*(15,8,6)
3*(14,7,8)</td><td>11,12,6
10,5,14
13,1,13
12,15,2
15,9,7
14,4,11</td><td>11,7,13
10,9,2
13,15,3
12,6,11
15,10,4
14,1,14</td><td>11,1,11
10,12,7
13,2,14
12,9,4
15,3,13
14,10,5</td></tr>
<tr><td colspan="3">т.е.[abc]$_1$=</td><td></td><td colspan="3"></td></tr>
<tr><td>=|2,4,7|
+|3,7,5|
+|4,3,6|
+|6,5,2|</td><td>+3*|4,8,13|
+|5,13,9|
+3*|8,5,12|
+|12,9,4|</td><td>+3*|8,11,2|
+|9,2,10|
+|11,9,3|
+3*|3,10,8|</td><td>+|11,14,4|
+|10,4,15|
-|14,10,5|
-|5,15,11|</td><td>+3*|14,7,8|
+3*|15,8,6|
+|7,15,9|
+|9,6,14|</td><td>+|7,13,11|
+|6,11,12|
-|13,6,10|
-|10,12,7|</td><td>+|13,2,14|
+|12,14,3|
-|2,12,15|
-|15,3,13|</td></tr>
</table>

$f_1=$ =	$((a_2d_3-a_3d_2)$	$+(a_4d_5-a_5d_4)$	$+(a_7d_6-a_6d_7)$	$+3(a_8d_9-a_9d_8)$	$+(a_{11}d_{10}-a_{10}d_{11})$	$+(a_{13}d_{12}-a_{12}d_{13})$	$+(a_{14}d_{15}-a_{15}d_{14}))$
$-a_3*$	$((b_4c_6-b_6c_4)$	$+(b_5c_7-b_7c_5)$	$+(b_3c_1-b_1c_3)$	$+3(b_8c_{10}-b_{10}c_8)$	$+(b_{14}c_{12}-b_{12}c_{14})$	$+(b_{15}c_{13}-b_{13}c_{15})$	$+(b_9c_{11}-b_{11}c_9))$
$+a_2*$	$((b_6c_5-b_5c_6)$	$+(b_1c_2-b_2c_1)$	$+(b_4c_7-b_7c_4)$	$+3(b_8c_{11}-b_{11}c_8)$	$-(b_{13}c_{14}-b_{14}c_{13})$	$+(b_{10}c_9-b_9c_{10})$	$+(b_{15}c_{12}-b_{12}c_{15}))$
$-a_5*$	$((b_5c_1-b_1c_5)$	$+(b_7c_3-b_3c_7)$	$+(b_6c_2-b_2c_6)$	$+3(b_8c_{12}-b_{12}c_8)$	$+(b_9c_{13}-b_{13}c_9)$	$+(b_{11}c_{15}-b_{15}c_{11})$	$+(b_{10}c_{14}-b_{14}c_{10}))$
$+a_4*$	$((b_7c_2-b_2c_7)$	$+(b_3c_6-b_6c_3)$	$+(b_1c_4-b_4c_1)$	$+3(b_8c_{13}-b_{13}c_8)$	$-(b_{10}c_{15}-b_{15}c_{10})$	$-(b_{14}c_{11}-b_{11}c_{14})$	$+(b_{12}c_9-b_9c_{12}))$
$+a_7*$	$((b_1c_7-b_7c_1)$	$+(b_2c_4-b_4c_2)$	$+(b_5c_3-b_3c_5)$	$+3(b_8c_{14}-b_{14}c_8)$	$+(b_{15}c_9-b_9c_{15})$	$+(b_{12}c_{10}-b_{10}c_{12})$	$-(b_{11}c_{13}-b_{13}c_{11}))$
$-a_6*$	$((b_3c_4-b_4c_3)$	$+(b_6c_1-b_1c_6)$	$+(b_2c_5-b_5c_2)$	$+3(b_8c_{15}-b_{15}c_8)$	$+(b_{12}c_{11}-b_{11}c_{12})$	$+(b_9c_{14}-b_{14}c_9)$	$+(b_{13}c_{10}-b_{10}c_{13}))$
$-a_9*$	$((b_9c_1-b_1c_9)$	$+(b_{10}c_2-b_2c_{10})$	$+(b_{11}c_3-b_3c_{11})$	$+(b_{12}c_4-b_4c_{12})$	$+(b_{13}c_5-b_5c_{13})$	$+(b_{14}c_6-b_6c_{14})$	$+(b_{15}c_7-b_7c_{15}))$
$+a_8*$	$(3(b_{11}c_2-b_2c_{11})$	$+3(b_{13}c_4-b_4c_{13})$	$+3(b_{14}c_7-b_7c_{14})$	$+(b_1c_8-b_8c_1)$	$+3(b_3c_{10}-b_{10}c_3)$	$+3(b_5c_{12}-b_{12}c_5)$	$+3(b_6c_{15}-b_{15}c_6))$
$+a_{11}*$	$((b_{14}c_4-b_4c_{14})$	$+(b_{15}c_5-b_5c_{15})$	$+(b_9c_3-b_3c_9)$	$+3(b_3c_8-b_8c_3)$	$-(b_6c_{12}-b_{12}c_6)$	$+(b_7c_{13}-b_{13}c_7)$	$+(b_1c_{11}-b_{11}c_1))$
$-a_{10}*$	$((b_{13}c_6-b_6c_{13})$	$+(b_{10}c_1-b_1c_{10})$	$+(b_{15}c_4-b_4c_{15})$	$+3(b_2c_8-b_8c_2)$	$+(b_5c_{14}-b_{14}c_5)$	$+(b_2c_9-b_9c_2)$	$-(b_7c_{12}-b_{12}c_7))$
$+a_{13}*$	$((b_9c_5-b_5c_9)$	$+(b_{11}c_7-b_7c_{11})$	$+(b_{10}c_6-b_6c_{10})$	$+3(b_5c_8-b_8c_5)$	$+(b_1c_{13}-b_{13}c_1)$	$+(b_3c_{15}-b_{15}c_3)$	$+(b_2c_{14}-b_{14}c_2))$
$-a_{12}*$	$((b_{10}c_7-b_7c_{10})$	$-(b_{14}c_3-b_3c_{14})$	$+(b_{12}c_1-b_1c_{12})$	$+3(b_4c_8-b_8c_4)$	$-(b_2c_{15}-b_{15}c_2)$	$-(b_6c_{11}-b_{11}c_6)$	$+(b_4c_9-b_9c_4))$
$-a_{15}*$	$((b_{15}c_1-b_1c_{15})$	$+(b_{12}c_2-b_2c_{12})$	$+(b_{11}c_5-b_5c_{11})$	$+3(b_6c_8-b_8c_6)$	$+(b_7c_9-b_9c_7)$	$+(b_4c_{10}-b_{10}c_4)$	$+(b_3c_{13}-b_{13}c_3))$
$+a_{14}*$	$(-(b_{12}c_3-b_3c_{12})$	$+(b_9c_6-b_6c_9)$	$+(b_{13}c_2-b_2c_{13})$	$+3(b_7c_8-b_8c_7)$	$+(b_4c_{11}-b_{11}c_4)$	$+(b_1c_{14}-b_{14}c_1)$	$+(b_5c_{10}-b_{10}c_5))$

$$f_1=b_1(ca)-(ab)c_1+[abc]_1.$$

Аналогично для остальных координат (без учета коэффициентов пропорциональности и знаков сложения определителей):

$f_1=b_1(ca)-(ab)c_1+[abc]_1$

$[abc]_1$						
|2,4,7|	|8,11,2|	|8,13,4|	|8,14,7|	|13,14,2|	|14,11,4|	|11,13,7|
|3,7,5|	|9,2,10|	|9,4,12|	|9,7,15|	|12,2,15|	|15,4,10|	|10,7,12|
|4,3,6|	|11,9,3|	|13,9,5|	|14,9,6|	-|14,12,3|	-|11,15,5|	-|13,10,6|
|6,5,2|	|3,10,8|	|5,12,8|	|6,15,8|	-|3,15,13|	-|5,10,14|	-|6,12,11|

$f_2=b_2(ca)-(ab)c_2+[abc]_2$

$[abc]_2$						
|4,5,3|	|8,14, 4|	| 8, 15, 5|	|8, 9, 3|	|15, 9, 4|	|9, 14,5|	|14,15,3|
|6,3,7|	|10,4,12|	|10,5,13|	|10,3,11|	|13,4,11|	|11,5,12|	|12,3,13|
|5,6,1|	|14,10,6|	|15,10,7|	|9, 10, 1|	-|9,13, 6|	-|14,11,7|	-|15,12,1|
|1,7,4|	| 6, 12, 8|	|7, 13, 8|	| 1, 11,8|	-|6,11,15|	-|7,12, 9|	-|1,13,14|

$f_3=b_3(ca)-(ab)c_3+[abc]_3$

$[abc]_3$						
|6,1,4|	|8,13, 6|	|8, 10, 1|	|8 ,15, 4|	|10,15,6|	|15,13,1|	|13,10,4|
|5,4,2|	|11,6,14|	|11, 1 ,9|	|11,4,12|	|9, 6,12|	|12,1,14|	|14, 4, 9|
|1,5,7|	|13,11,5|	|10,11,2|	|15,11,7|	-|15,9, 5|	-|13,12,2|	-|10, 14,7|
|7,2,6|	|5, 14,8|	|2, 9, 8|	|7, 12, 8|	-|5,12,10|	-|2,14,15|	-|7, 9, 13|

$f_4=b_4(ca)-(ab)c_4+[abc]_4$

$[abc]_4$						
|5,7,6|	|8 ,9, 5|	|8, 11, 7|	|8, 10, 6|	|11,10,5|	|10, 9,7|	|9,11, 6|
|1,6,3|	|12,5,13|	|12,7,15|	|12,6,14|	|15,5,14|	|14,7,13|	|13,6,15|
|7,1,2|	|9, 12, 1|	|11,12,3|	|10,12,2|	-|10,15,1|	-|9,14, 3|	-|11,13,2|
|2,3,5|	|1,13, 8|	|3, 15, 8|	|2, 14, 8|	-|1,14,11|	-|3,13,10|	-|2, 15, 9|

$f_5=b_5(ca)-(ab)c_5+[abc]_5$

$[abc]_5$						
|7,3,1|	|8,10, 7|	|8, 14,3|	| 8,12, 1|	|14,12,7|	|12, 10,3|	|10,14,1|
|2,1,6|	|13,7,15|	|13,3,11|	|13,1, 9|	|11, 7, 9|	| 9, 3,15|	|15,1,11|
|3,2,4|	|10,13,2|	|14,13,6|	|12,13,4|	- |12,11, 2|	-|10, 9,6|	-|14,15,4|
|4,6,7|	|2 ,15, 8|	|6, 11, 8|	|4, 9,8|	-|2, 9,14|	-|6, 15,12|	-|4,11,10|

$f_6=b_6(ca)-(ab)c_6+[abc]_6$

$[abc]_6$						
|1,2,5|	|8, 15, 1|	|8,12, 2|	|8,11, 5|	|12,11,1|	|11,15,2|	|15,12,5|
|7,5,4|	|14,1, 9|	|14,2,10|	|14,5,13|	|10, 1,13|	|13,2, 9|	|9, 5, 10|
|2,7,3|	|15,14,7|	|12,14,4|	|11,14,3|	-|11,10,7|	-|15,13,4|	-|12, 9, 3|
|3,4,1|	|7 , 9, 8|	|4, 10, 8|	|3, 13,8|	-|7,13,12|	-|4, 9, 11|	-|3,10,15|

$f_7=b_7(ca)-(ab)c_7+[abc]_7$

$[abc]_7$						
|3,6,2|	|8, 12, 3|	|8, 9, 6|	|8, 13, 2|	|9, 13, 3|	|13,12,6|	|12, 9, 2|
|4,2,1|	|15,3,11|	|15,6,14|	|15,2,10|	|14,3,10|	|10,6,11|	|11, 2,14|
|6,4,5|	|12,15,4|	|9, 15, 1|	|13,15,5|	-|13,14,4|	-|12,10,1|	-|9, 11, 5|
|5,1,3|	|4, 11, 8|	|1, 14, 8|	|5, 10, 8|	-|4, 10, 9|	-|1,11,13|	-|5,14,12|

$f_8=b_8(ca)-(ab)c_8+[abc]_8$

$[abc]_8$						
|11,13,14|	|14,15,9|	|13,10,15|	|9,11,10|	|10,14,12|	|15,12,11|	|12,9,13|

<table>
<tr><td>|3,14,5|</td><td>|6, 9,7|</td><td>|5,15,2|</td><td>|1,10,3|</td><td>|2,12,6|</td><td>|7,11,4|</td><td>|4,13,1|</td></tr>
<tr><td>|13,3,6|</td><td>|15,6,1|</td><td>|10,5,7|</td><td>|11,1,2|</td><td>|14,2,4|</td><td>|12,7,3|</td><td>| 9, 4,5|</td></tr>
<tr><td>|6,5,11|</td><td>|1, 7,14|</td><td>|7,2,13|</td><td>|2, 3, 9|</td><td>|4,6,10|</td><td>|3,4,15|</td><td>|5,1,12|</td></tr>
</table>

$f_9=b_9(ca)-(ab)c_9+[abc]_9$

<table>
<tr><th colspan="7">[abc]9</th></tr>
<tr><td>|10,12,15|</td><td>|8,10,11|</td><td>|8,12,13|</td><td>|8,15,14|</td><td>|5,6,10|</td><td>|6,3,12|</td><td>|3,5,15|</td></tr>
<tr><td>|11,15,13|</td><td>|1,11, 3|</td><td>|1,13, 5|</td><td>|1,14, 6|</td><td>|4,10,7|</td><td>|7,12,2|</td><td>|2,15,4|</td></tr>
<tr><td>|12,11,14|</td><td>-|10,1, 2|</td><td>-|12,1, 4|</td><td>-|15,1, 7|</td><td>-|6,4,11|</td><td>-|3,7,13|</td><td>-|5,2,14|</td></tr>
<tr><td>|14,13,10|</td><td>-|2, 3, 8|</td><td>-|4, 5, 8|</td><td>-|7, 6, 8|</td><td>-|11,7,5|</td><td>-|13,2,6|</td><td>-|14,4,3|</td></tr>
</table>

$f_{10}=b_{10}(ca)-(ab)c_{10}+[abc]_{10}$

<table>
<tr><th colspan="7">$[abc]_{10}$</th></tr>
<tr><td>|12,13,11|</td><td>|8,12,14|</td><td>|8,13,15|</td><td>|8,11, 9|</td><td>|7,1,12|</td><td>|1,6,13|</td><td>|6,7,11|</td></tr>
<tr><td>|14,11,15|</td><td>|2,14, 6|</td><td>|2, 15, 7|</td><td>|2, 9, 1|</td><td>|5,12,3|</td><td>|3,13,4|</td><td>|4,11,5|</td></tr>
<tr><td>|13,14, 9|</td><td>-|12, 2, 4|</td><td>-|13,2, 5|</td><td>-|11,2, 3|</td><td>-|1,5,14|</td><td>-|6,3,15|</td><td>-|7, 4, 9|</td></tr>
<tr><td>|9, 15,12|</td><td>-|4, 6, 8|</td><td>-|5, 7, 8|</td><td>-|3, 1, 8|</td><td>-|14,3,7|</td><td>-|15,4,1|</td><td>-|9, 5, 6|</td></tr>
</table>

$f_{11}=b_{11}(ca)-(ab)c_{11}+[abc]_{11}$

<table>
<tr><th colspan="7">$[abc]_{11}$</th></tr>
<tr><td>|14, 9,12|</td><td>|8,14,13|</td><td>|8,9,10|</td><td>|8,12,15|</td><td>|2,7,14|</td><td>|7,5, 9|</td><td>|5,2,12|</td></tr>
<tr><td>|13,12,10|</td><td>|3, 13,5|</td><td>|3,10,2|</td><td>|3, 15,7|</td><td>|1,14,4|</td><td>|4,9, 6|</td><td>|6,12,1|</td></tr>
<tr><td>|9, 13,15|</td><td>-|14,3,6|</td><td>-|9, 3,1|</td><td>-|12, 3,4|</td><td>-|7,1,13|</td><td>-|5,4,10|</td><td>-|2,6,15|</td></tr>
<tr><td>|15,10,14|</td><td>-|6, 5,8|</td><td>-|1, 2,8|</td><td>-|4, 7,8|</td><td>-|13,4,2|</td><td>-|10,6,7|</td><td>-|15,1,5|</td></tr>
</table>

$f_{12}=b_{12}(ca)-(ab)c_{12}+[abc]_{12}$

<table>
<tr><th colspan="7">$[abc]_{12}$</th></tr>
<tr><td>|13,15,14|</td><td>|8,13, 9|</td><td>|8,15,11|</td><td>|8,14,10|</td><td>|3,2,13|</td><td>|2,1,15|</td><td>|1,3,14|</td></tr>
<tr><td>|9, 14,11|</td><td>|4, 9, 1|</td><td>|4,11, 7|</td><td>|4,10, 6|</td><td>|7,13,6|</td><td>|6,15,5|</td><td>|5,14,7|</td></tr>
<tr><td>|15, 9,10|</td><td>-|13,4, 5|</td><td>-|15,4, 3|</td><td>-|14,4, 2|</td><td>-|2, 7, 9|</td><td>-|1,6,11|</td><td>-|3,5,10|</td></tr>
<tr><td>|10,11,13|</td><td>-|5, 1, 8|</td><td>-|3, 7, 8|</td><td>-|2, 6, 8|</td><td>-|9,6, 3|</td><td>-|11,5,2|</td><td>-|10,7,1|</td></tr>
</table>

$f_{13}=b_{13}(ca)-(ab)c_{13}+[abc]_{13}$

<table>
<tr><th colspan="7">$[abc]_{13}$</th></tr>
<tr><td>|15,11, 9|</td><td>|8,15,10|</td><td>|8,11,14|</td><td>|8, 9,12|</td><td>|6,4,15|</td><td>|4,2,11|</td><td>|2,6, 9|</td></tr>
<tr><td>|10, 9,14|</td><td>|5,10, 2|</td><td>|5,14, 3|</td><td>|5,12, 1|</td><td>|3,15,1|</td><td>|1,11,7|</td><td>|7, 9,3|</td></tr>
<tr><td>|11,10,12|</td><td>-|15,5, 7|</td><td>-|11,5, 6|</td><td>-|9, 5, 4|</td><td>-|4,3,10|</td><td>-|2,1,14|</td><td>-|6,7,12|</td></tr>
<tr><td>|12,14,15|</td><td>-|7, 2, 8|</td><td>-|6, 3, 8|</td><td>-|4, 1, 8|</td><td>-|10,1,6|</td><td>-|14,7,4|</td><td>-|12,3,2|</td></tr>
</table>

$f_{14}=b_{14}(ca)-(ab)c_{14}+[abc]_{14}$

<table>
<tr><th colspan="7">$[abc]_{14}$</th></tr>
<tr><td>|9, 10,13|</td><td>|8,9,15|</td><td>|8,10,12|</td><td>|8,13,11|</td><td>|4, 3, 9|</td><td>|3,7,10|</td><td>|7,4,13|</td></tr>
<tr><td>|15,13,12|</td><td>|6,15,7|</td><td>|6,12, 2|</td><td>|6,11, 5|</td><td>|2,9, 5|</td><td>|5,10,1|</td><td>|1,13,2|</td></tr>
<tr><td>|10,15,11|</td><td>-|9, 6, 1|</td><td>-|10,6, 4|</td><td>-|13,6, 3|</td><td>-|3,2,15|</td><td>-|7,5,12|</td><td>-|4,1,11|</td></tr>
<tr><td>|11,12, 9|</td><td>-|1, 7, 8|</td><td>-|4, 2, 8|</td><td>-|3, 5, 8|</td><td>-|15,5,4|</td><td>-|12,1,3|</td><td>-|11,2,7|</td></tr>
</table>

$f_{15}=b_{15}(ca)-(ab)c_{15}+[abc]_{15}$

<table>
<tr><th colspan="7">$[abc]_{15}$</th></tr>
<tr><td>|11,14,10|</td><td>|8,11,12|</td><td>|8,14,9|</td><td>|8,10,13|</td><td>|1,5,11|</td><td>|5,4,14|</td><td>|4,1,10|</td></tr>
<tr><td>|12,10 ,9|</td><td>|7, 12, 4|</td><td>|7, 9,6|</td><td>|7, 13, 2|</td><td>|6,11,2|</td><td>|2,14,3|</td><td>|3,10,6|</td></tr>
<tr><td>|14,12,13|</td><td>-|11, 7,3|</td><td>-|14,7,1|</td><td>-|10,7, 5|</td><td>-|5,6,12|</td><td>-|4, 2,9|</td><td>-|1,3,13|</td></tr>
<tr><td>|13, 9,11|</td><td>-|3, 4, 8|</td><td>-|1, 6,8|</td><td>-|5, 2, 8|</td><td>-|12,2,1|</td><td>-|9, 3,5|</td><td>-|13,6,4|</td></tr>
</table>

Таким образом, окончательно напишем

$$[a[bc]]=b(ca)-(ab)c+[abc],$$

где каждая компонента пятнадцатимерного вектора векторного произведения трех векторов $[abc]_i$ определяется суммой 28 определителей третьего порядка, так что этот вектор характеризуется (28*15=420) определителями третьего порядка, отличающимися друг от друга. С учетом 35 определителей, используемых для векторного произведения двух векторов, получаем 455 определителей третьего порядка, как полное число сочетаний из 15 по 3.

$$C_{15}^{3}=(15*14*13)/(2*3)=455.$$

Последняя таблица характеризуется высокой степенью симметрии. Достаточно сказать, что каждая i-тая координата входит в неё ровно 84 раза (по 6 раз в каждой координате f_i, $(j=1,2,\ldots,15)$ кроме $i=j$, при этом очевидна симметрия в построении семи совокупностей из четырех определителей в каждой координате. Из этой таблицы следует также наличие четырех типов совокупностей определителей, составляющих векторное произведение трех векторов.

Четверки определителей третьего порядка объединяются в определитель четвертого порядка. Это сильно упрощает запись векторного произведения трех векторов. Так, сумма 28 определителей третьего порядка

e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
$+\|2,4,7\|$	$+\|4,5,3\|$	$+\|6,1,4\|$	$+\|5,7,6\|$	$+\|7,3,1\|$	$+\|1,2,5\|$	$+\|3,6,2\|$
$+\|3,7,5\|$	$+\|6,3,7\|$	$+\|5,4,2\|$	$+\|1,6,3\|$	$+\|2,1,6\|$	$+\|7,5,4\|$	$+\|4,2,1\|$
$+\|4,3,6\|$	$+\|5,6,1\|$	$+\|1,5,7\|$	$+\|7,1,2\|$	$+\|3,2,4\|$	$+\|2,7,3\|$	$+\|6,4,5\|$
$+\|6,5,2\|$	$+\|1,7,4\|$	$+\|7,2,6\|$	$+\|2,3,5\|$	$+\|4,6,7\|$	$+\|3,4,1\|$	$+\|5,1,3\|$

образует сумму семи определителей четвертого порядка

$$|1,\ 2,\ 4,\ 7| + |2,\ 4,\ 5,\ 3| + |3,\ 6,\ 1,\ 4| + |4,\ 5,\ 7,\ 6| + |5,\ 7,\ 3,\ 1| + |6,\ 1,\ 2,\ 5| + |7,\ 3,\ 6,\ 2|.$$

Обозначим сумму четырех определителей третьего порядка через

$$|i,j,k,h| = \begin{vmatrix} e_i & e_j & e_k & e_h \\ a_i & a_j & a_k & a_h \\ b_i & b_j & b_k & b_h \\ c_i & c_j & c_k & c_h \end{vmatrix}$$

тогда векторное произведение трех векторов образует сумма 105-ти определителей четвертого порядка:

<table>
<tr><td>|1,2,4,7|</td><td>|1,8,11,2|</td><td>|1,8,13,4|</td><td>|1,8,14,7|</td><td>|1,13,14,2|</td><td>|1,14,11,4|</td><td>|1,11,13,7|</td></tr>
<tr><td>|2,4,5,3|</td><td>|2,8,14,4|</td><td>|2,8,15,5|</td><td>|2,8, 9,3|</td><td>|2,15, 9,4|</td><td>|2, 9,14,5|</td><td>|2,14,15,3|</td></tr>
<tr><td>|3, ,1,4|</td><td>|3,8,13,6|</td><td>|3,8,10,1|</td><td>|3,8 ,15,4|</td><td>|3,10,15,6|</td><td>|3,15,13,1|</td><td>|3,13,10,4|</td></tr>
<tr><td>|4,5,7,6|</td><td>|4,8, 9,5|</td><td>|4,8, 11,7|</td><td>|4,8,10, 6|</td><td>|4,11,10,5|</td><td>|4,10, 9,7|</td><td>|4, 9,11,6|</td></tr>
<tr><td>|5,7,3,1|</td><td>|5,8,10,7|</td><td>|5,8, 14,3|</td><td>|5,8,12, 1|</td><td>|5,14,12,7|</td><td>|5,12,10,3|</td><td>|5,10,14,1|</td></tr>
<tr><td>|6,1,2,5|</td><td>|6,8, 15,1|</td><td>|6,8,12, 2|</td><td>|6,8,11, 5|</td><td>|6,12,11,1|</td><td>|6,11,15,2|</td><td>|6,15,12,5|</td></tr>
<tr><td>|7,3,6,2|</td><td>|7,8, 12, 3|</td><td>|7,8, 9,6|</td><td>|7,8, 13, 2|</td><td>|7, 9,13, 3|</td><td>|7,13,12,6|</td><td>|7,12, 9,2|</td></tr>
<tr><td>|8,11,13,14|</td><td>|8,14,15,9|</td><td>|8,13,10,15|</td><td>|8,9,11,10|</td><td>|8,10,14,12|</td><td>|8,15,12,11|</td><td>|8,12,9,13|</td></tr>
<tr><td>|9, 10,12,15|</td><td>|9, 10,2,1|</td><td>|9, 12,4,1|</td><td>|9 ,15,7,1|</td><td>|9, 5,6,10|</td><td>|9, 6,3,12|</td><td>|9, 3,5,15|</td></tr>
<tr><td>|10,12,13,11|</td><td>|10,12,4,2|</td><td>|10,13,5,2|</td><td>|10,11,3,2|</td><td>|10,7,1,12|</td><td>|10,1,6,13|</td><td>|10,6,7,11|</td></tr>
<tr><td>|11,14, 9,12|</td><td>|11,14,6,3|</td><td>|11, 9,1,3|</td><td>|11,12,4,3|</td><td>|11,2,7,14|</td><td>|11,7,5, 9|</td><td>|11,5,2,12|</td></tr>
<tr><td>|12,13,15,14|</td><td>|12,13,5,4|</td><td>|12,15,7,4|</td><td>|12,14,6,4|</td><td>|12,3,2,13|</td><td>|12,2,1,15|</td><td>|12,1,3,14|</td></tr>
<tr><td>|13,15,11, 9|</td><td>|13,15,7,5|</td><td>|13,11,3,5|</td><td>|13, 9,1,5|</td><td>|13,6,4,15|</td><td>|13,4,2,11|</td><td>|13,2,6, 9|</td></tr>
<tr><td>|14,9, 10,13|</td><td>|14, 9,1,6|</td><td>|14,10,2,6|</td><td>|14,13,5,6|</td><td>|14,4, 3, 9|</td><td>|14,3,7,10|</td><td>|14,7,4,13|</td></tr>
<tr><td>|15,11,14,10|</td><td>|15,11,3,7|</td><td>|15, 14,6,7|</td><td>|15,10,2,7|</td><td>|15,1,5,11|</td><td>|15,5,4,14|</td><td>|15,4,1,10|</td></tr>
</table>

строго фиксируемого состава. Очевидна симметрия построения таблицы.

Во-первых – по всем 28-ми рядам четко соблюдаются найденные выше подстановки индексов:

1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*	*12*	*13*	*14*	*15*
2	*4*	*6*	*5*	*7*	*1*	*3*	*8*	*10*	*12*	*14*	*13*	*15*	*9*	*11*
3	*6*	*5*	*1*	*2*	*7*	*4*	*8*	*11*	*14*	*13*	*9*	*10*	*15*	*12*
4	*5*	*1*	*7*	*3*	*2*	*6*	*8*	*12*	*13*	*9*	*15*	*11*	*10*	*14*
5	*7*	*2*	*3*	*6*	*4*	*1*	*8*	*13*	*15*	*10*	*11*	*14*	*12*	*9*
6	*1*	*7*	*2*	*4*	*3*	*5*	*8*	*14*	*9*	*15*	*10*	*12*	*11*	*13*
7	*3*	*4*	*6*	*1*	*5*	*2*	*8*	*15*	*11*	*12*	*14*	*9*	*13*	*10*

во-вторых - все 28 столбиков включают по 15 определителей с двумя семиэлементными и одной одноэлементной структурами;

в-третьих - все координаты входят в таблицу ровно 28 раз. В результате векторное произведение трёх векторов определяется суммой 105-ти не повторяющихся определителей 4-го порядка и может рассматриваться как совокупность 420=28*15 трехмерных пространств.

Равенства

$$[a[bc]]=b(ca)-(ab)c+[abc]$$

или $$[a[bc]]+[b[ca]]+[c[ab]]=3[abc]$$

указывают на то, что 15-ти мерная алгебра не является алгеброй Ли. Можно показать, что она удовлетворяет соотношению Мальцева.

Из свойств определителей следует, что

- векторное произведение трех векторов не изменится, если вынести за скобки скалярный множитель, т. е.

$$[\alpha abc]=[\alpha abc];$$

- векторное произведение трех векторов изменяет знак при перестановке любой пары векторов;

- векторное произведение трех векторов дистрибутивно т.е.

$$[ab(c+d)]=[abc]+[abd];$$

- если два вектора в векторном произведении трех векторов компланарны, то это произведение равно нулю, в частности, если два вектора в векторном произведении трех векторов равны, то оно обращается в нуль.

Векторным произведением ***[abc]*** трех векторов ***a,b*** и ***c*** можно назвать вектор

$$[abc]=[a_i e_i b_j e_j c_k e_k]=a_i b_j c_k [e_i e_j e_k]=\sigma_{ijk}{}^k a_i b_j c_k e_k,$$

определяемый совершенно анти симметричным единичным 15-тензором третьего ранга σ^{ijk} компоненты, которого меняют знак при перестановке любых двух индексов, причем отличные от нуля компоненты равны ± 1. Из анти симметричности следует, что все компоненты 15-тензора, у которых хотя бы два индекса совпадают, равны нулю, так что отличные от нуля лишь те у которых все три индекса различны, так что вектор ***[abc]*** определяется суммой *420*-ти определителей третьего порядка. Компоненты тензора не изменяются по отношению к вращению трехмерной системы координат.

Подчеркнем что подстановки на множестве индексов ***(1,2,…,15)*** дают взаимно однозначное отображение векторного произведения трех векторов на себя, например, при указанной подстановке индексов:

3	6	5	1	2	7	4	8	11	14	13	9	10	15	12
6	1	7	2	4	3	5	8	14	9	15	10	12	11	13

т. е. последовательности индексов преобразуются в иные последовательности индексов той же системы. Подчеркнем еще раз, что

- в ***трех мерном*** случае

$$[a[bc]]=b(ca)-(ab)c,$$

и
$$[a[bc]]+[b[ca]]+[c[ab]]=0,$$

- в ***семи мерном*** случае

$$[a[bc]]=b(ca)-(ab)c+[abc],$$

и
$$[a[bc]]+[b[ca]]+[c[ab]]=3[abc],$$

- в ***пятнадцати мерном*** случае

$$[a[bc]]=b(ca)-(ab)c+[abc],$$

и
$$[a[bc]]+[b[ca]]+[c[ab]]=3[abc],$$

причем вектор ***[abc]*** сохраняет соответствующие свойства у 3-х, 7-ми и 15-ти мерной алгебр, а, следовательно, сохраняется вид уравнений семи мерной и пятнадцати мерной алгебр для совокупностей из **(2,3,..,7**) векторов, представленных в векторной форме записи. Координатная форма записи при этом кардинально видоизменяется, однако свойства алгебр от этого не зависят, т.е. векторные соотношения семи мерной и пятнадцати мерной алгебр совпадают при рассмотрении произведений векторов от двух до семи. Вместе с тем, произведения векторов от восьми до пятнадцати имеют место лишь в пятнадцати мерной алгебре, только 16-ый вектор в пятнадцати мерной алгебре раскладывается по пятнадцати векторам.

Можно прогнозировать, что будут иметь место векторные алгебры соответствующие 31-ой, 63-ех, 127-ми,… и вообще 2^n-1 координатам, вплоть до бесконечно мерных алгебр и, следовательно, стоит ребром вопрос о размерности физического пространства, поскольку трех мерная векторная алгебра определила в XIX веке название трех мерной физики.<< **Физическое пространство не имеет размерности**>>. Оно лишь отражает ту или иную степень симметрии выражений, используемых для описания явлений физического пространства.

Более симметричны алгебры высокой размерности, алгебры меньшей размерности могут рассматриваться, как та или иная степень нарушения симметрии и являются их частным случаем.

Приведём таблицу структуры многомерных алгебр, отметив высокую интенсивность увеличения числа составляющих их трехмерных пространств.

$x_{n+1}=2*x_n+1$	[ab], $z_{n+1}=4*z_n+x_n$	[abc]$_i$, $y_{n+1}=4*z_n$	[abc], x_n*y_n	$C_n^3=x_n*y_n+z_n$
1	0	0	0	0
3	1	0	0	1
7	7	4	28	35
15	35	28	420	455
31	155	140	4340	4495
63	651	620	39060	39711
127	2667	2604	330708	333375
255	10795	10668	2720340	2731135
511	43435	43180	22064980	22108415
1023	174251	173740	177736020	177910271

Важным свойством векторных алгебр является то, что их размерность часто совпадает с рядом простых чисел Мерсенна, соответствующим совершенным числам, и, следовательно, по крайней мере, отдельные векторные алгебры имеют прямое отношение к совершенным числам. Так, например, сумма индексов систем подстановки индексов зачастую определяется совершенным числом:

-в трехмерной алгебре:

1	2	3	6
2	3	1	6
3	1	2	6
6	6	6	∑

-в семимерной алгебре:

1	2	3	4	5	6	7	28
2	4	6	5	7	1	3	28
3	6	5	1	2	7	4	28
4	5	1	7	3	2	6	28
5	7	2	3	6	4	1	28
6	1	7	2	4	3	5	28

7	*3*	*4*	*6*	*1*	*5*	*2*	*28*
28	*28*	*28*	*28*	*28*	*28*	*28*	∑

-в 15-мерной алгебре, однако, размерность –составное число; в результате:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	120
2	4	6	5	7	1	3	8	10	12	14	13	15	9	11	120
3	6	5	1	2	7	4	8	11	14	13	9	10	15	12	120
4	5	1	7	3	2	6	8	12	13	9	15	11	10	14	120
5	7	2	3	6	4	1	8	13	15	10	11	14	12	9	120
6	1	7	2	4	3	5	8	14	9	15	10	12	11	13	120
7	3	4	6	1	5	2	8	15	11	12	14	9	13	10	120
28	28	28	28	28	28	28	56	84	84	84	84	84	84	84	∑

причем таблица векторного произведения двух векторов:

1	2	3	4	5	7	6	8	9	11	10	13	12	14	15	120
2	4	6	5	7	3	1	8	10	14	12	15	13	9	11	120
3	6	5	1	2	4	7	8	11	13	14	10	9	15	12	120
4	5	1	7	3	6	2	8	12	9	13	11	15	10	14	120
5	7	2	3	6	1	4	8	13	10	15	14	11	12	9	120
6	1	7	2	4	5	3	8	14	15	9	12	10	11	13	120
7	3	4	6	1	2	5	8	15	12	11	9	14	13	10	120
8	9	1	10	2	11	3	12	4	13	5	14	6	15	7	120
9	3	10	5	12	6	15	1	8	11	2	13	4	14	7	120
10	6	12	7	13	1	11	2	8	14	4	15	5	9	3	120
11	5	14	2	9	7	12	3	8	13	6	10	1	15	4	120
12	1	13	3	15	2	14	4	8	9	5	11	7	10	6	120
13	2	15	6	11	4	9	5	8	10	7	14	3	12	1	120
14	7	9	4	10	3	13	6	8	15	1	12	2	11	5	120
15	4	11	1	14	5	10	7	8	12	3	9	6	13	2	120
120	65	113	66	114	67	115	96	144	181	117	182	118	183	119	∑

Совершенные числа $s_n=2^{n-1}(2^n-1)$ можно определять по совпадению простых чисел натурального ряда чисел n и простых чисел ряда Мерсенна $m_n=2^n-1$, причем для упрощения вычислений ряду Мерсенна следует сопоставить рекуррентное соотношение $m_{n+1}=2m_n+1$. Оказывается, что совершенные числа также можно найти, используя укороченный ряд чисел $k_{n+1}=4k_n+3$. В этом случае $k_n=s_n+m_{n-1}$ и, следовательно,

$$s_n=k_{n+1}-m_{n-1},$$

что определяется таблицей:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
m	1	3	7	15	31	63	127	255	511	1023	2047	4095	8191
s	1	6	28	120	496	2016	8128	32640	130816	523776	2096128	8386560	33550336
k	1	7	31	127	511	2047	8191	32767	131071	524287	2097151	8388607	33554431

Указанный порядок нахождения размерности векторных алгебр и совершенных чисел относительно простой, поскольку ряд k является черестрочной разверткой ряда m, где последовательно используются операции умножения и сложения с целыми числами. Совершенные числа отвечают простым числам ряда чисел Мерсенна. Сдвигом влево на одну позицию рядов ***s*** и ***k*** получим эту таблицу в удобной форме записи.

m	*1*	*3*	*7*	*15*	*31*	*63*	*127*	*255*	*511*	*1023*	*2047*	*4095*	*8191*
		2	*12*	*49*	*201*	*812*	*3264*	*13081*	*52377*	*209612*	*838656*	*3355033*	*13420953*
s	*6*	*8*	*0*	*6*	*6*	*8*	*0*	*6*	*6*	*8*	*0*	*6*	*6*
		3	*12*	*51*	*204*	*819*	*3276*	*13107*	*52428*	*209715*	*838860*	*3355443*	*13421772*
k	*7*	*1*	*7*	*1*	*7*	*1*	*7*	*1*	*7*	*1*	*7*	*1*	*7*

Таким образом совершенные числа являются разностью двух значений $s_{ji}=2(m_j-m_i)$ ряда чисел Мерсена:

$$7-1=6,$$
$$31-3=28,$$
$$511-15=496,$$
$$8191-63=8128,$$
$$33554431-4095=33550336,$$
$$\dots$$

Литература

1. **Коротков А. В**. Элементы семимерного векторного исчисления. Алгебра. Геометрия. Теория поля. – Новочеркасск: Набла, 1996. – 244с.

2. **Коротков А. В**. Пятнадцати мерная векторная алгебра. См. Настоящее издание.

1,8,9	**2,8,10**	**3,8,11**	**4,8,12**	**5,8,13**	**6,8,14**	**7,8,15**
8,11,3	**8,14,6**	**8,13,5**	**8,9,1**	**8,10,2**	**8,15,7**	**8,12,4**
9,3,10	**10,6,12**	**11,5,14**	**12,1,13**	**13,2,15**	**14,7,9**	**15,4,11**
11,10,1	**14,12,2**	**13,14,3**	**9,13,4**	**10,15,5**	**15,9,6**	**12,11,7**
10,2,8	**12,4,8**	**14,6,8**	**13,5,8**	**15,7,8**	**9,1,8**	**11,3,8**
3,1,2	**6,2,4**	**5,3,6**	**1,4,5**	**2,5,7**	**7,6,1**	**4,7,3**
2,9,11	**4,10,14**	**6,11,13**	**5,12,9**	**7,13,10**	**1,14,15**	**3,15,12**

1,8,9	**2,8,10**	**3,8,11**	**4,8,12**	**5,8,13**	**6,8,14**	**7,8,15**	**1,2,3**
8,13,5	**8,15,7**	**8,10,2**	**8,11,3**	**8,14,6**	**8,12,4**	**8,9,1**	**2,4,6**
9,5,12	**10,7,13**	**11,2,9**	**12,3,15**	**13,6,11**	**14,4,10**	**15,1,14**	**3,6,5**
13,12,1	**15,13,2**	**10,9,3**	**11,15,4**	**14,11,5**	**12,10,6**	**9,14,7**	**4,5,1**
12,4,8	**13,5,8**	**9,1,8**	**15,7,8**	**11,3,8**	**10,2,8**	**14,6,8**	**5,7,2**
5,1,4	**7,2,5**	**2,3,1**	**3,4,7**	**6,5,3**	**4,6,2**	**1,7,6**	**6,1,7**
4,9,13	**5,10,15**	**1,11,10**	**7,12,11**	**3,13,14**	**2,14,12**	**6,15,12**	**7,3,4**

1,8,9	**2,8,10**	**3,8,11**	**4,8,12**	**5,8,13**	**6,8,14**	**7,8,15**
8,14,6	**8,9,1**	**8,15,7**	**8,10,2**	**8,12,4**	**8,11,3**	**8,13,5**
9,6,15	**10,1,11**	**11,7,12**	**12,2,14**	**13,4,9**	**14,3,13**	**15,5,10**
14,15,1	**9,11,2**	**15,12,3**	**10,14,4**	**12,9,5**	**11,13,6**	**13,10,7**
15,7,8	**11,3,8**	**12,4,8**	**14,6,8**	**9,1,8**	**13,5,8**	**10,2,8**
6,1,7	**1,2,3**	**7,3,4**	**2,4,6**	**4,5,1**	**3,6,5**	**5,7,2**
7,9,14	**3,10,9**	**4,11,15**	**6,12,10**	**1,13,12**	**5,14,11**	**2,15,13**

КОРОТКОВ А.В.

ВРАЩЕНИЯ В ПЯТНАДЦАТИМЕРНОЙ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЕ

$$\begin{Vmatrix} 3\text{-}D & 2^m\text{-}1 & 2n+1 \\ 2n+1 & 7\text{-}D & 2^m\text{-}1 \\ 2^m\text{-}1 & 2n+1 & 15\text{-}D \end{Vmatrix}$$

Каждое ортогональное линейное преобразование

$$x' = Ax(A'A = AA' = I) \qquad (1)$$

в пятнадцатимерной векторной алгебре сохраняет модули векторов и углы между векторами. Такое преобразование является (собственным) вращением, если оно сохраняет также векторное произведение двух векторов и

$\det\|A\| = 1$. Преобразование $c\det\|A\| = -1$ является несобственным вращением или вращением с отражением.

Пусть $e_1, e_2, ..., e_{15}$ – любой ортогональный базис, и пусть

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + ... + x_{15} e_{15}$$

$$x' = x'_1\, e_1 + x'_2\, e_2 + ... + x'_{15}\, e_{15}.$$

Каждое преобразование (1) задается формулами

$$x'_1 = a_{1,1} x_1 + a_{1,2} x_2 + ... + a_{15,1} x_{15}$$

$$x'_2 = a_{2,1} x_1 + a_{2,2} x_2 + ... + a_{15,2} x_{15}$$

$$\dots$$

$$x'_1 = a_{15,1} x_1 + a_{15,2} x_2 + ... + a_{15,15} x_{15}$$

или в матричной форме

$$x' = Ax$$

где для собственных вращений

$$\det(A) = \det\|a_{i,k}\| = 1$$

Так как рассматриваемая система координат является ортогональной, действительная матрица $A = \|a_{i,k}\|$, описывающая каждое вращение, ортогональна $(A'A = AA' = I)$, т.е.

$$\sum_{j=1}^{15} a_{ij} a_{kj} = \sum_{j=1}^{15} a_{ij} a_{jk} = \begin{cases} 0, i \neq k \\ 1, i = k \end{cases} (i, k = 1, 2, ..., 15$$

и каждый коэффициент a_{ik} равен алгебраическому дополнению элемента a_{ki} в определителе $\det\|a_{ik}\|$. Любые 105 из коэффициентов a_{ik} матрицы ортогональных преобразований определяют все 225, коэффициент a_{ik} есть косинус угла между базисным вектором $\mathbf{e_i}$ и повернутым базисным вектором

$$e_k' = Ae_k = \sum_{j=1}^{15} a_{ij} e_j$$

$$a_{ik} = (e_i e'_k) = (e_i (Ae_k))$$

Сохранение векторного произведения двух векторов при преобразовании вращения требует 90 дополнительных условий, так что лишь 15 из коэффициентов независимы и определяют все остальные.

Преобразование вращения поворачивает радиус-вектор x каждой точки

15-мерного евклидова пространства на угол δ вокруг направленной оси вращения, точки которой инварианты. Угол поворота δ и направляющие косинусы $c_1, c_2, \ldots, c_{15}$ положительной оси вращения определяются формулами:

$$\cos\delta = \frac{Tr(A) - 1}{14} = \frac{a_{1,1} + a_{2,2} + \ldots + a_{15,15} - 1}{14}$$

$$c_1 = -\frac{(a_{2,3} - a_{3,2} + a_{4,5} - a_{5,4} + a_{7,6} - a_{6,7} + a_{8,9} - a_{9,8} + a_{11,10} - a_{10,11} + a_{13,12} - a_{12,13} + a_{14,15} - a_{15,14})}{14\sin\delta}$$

$$c_2 = -\frac{(a_{4,6} - a_{6,4} + a_{5,7} - a_{7,5} + a_{3,1} - a_{1,3} + a_{8,10} - a_{10,8} + a_{14,12} - a_{12,14} + a_{15,13} - a_{13,15} + a_{11,9} - a_{9,11})}{14\sin\delta}$$

$$c_3 = -\frac{(a_{6,5} - a_{5,6} + a_{1,2} - a_{2,1} + a_{4,7} - a_{7,4} + a_{8,11} - a_{11,8} + a_{13,14} - a_{14,13} + a_{10,9} - a_{9,10} + a_{12,15} - a_{15,12})}{14\sin\delta}$$

$$c_4 = -\frac{(a_{5,1} - a_{1,5} + a_{7,3} - a_{3,4} + a_{6,2} - a_{2,6} + a_{8,12} - a_{12,88} + a_{9,13} - a_{13,9} + a_{11,15} - a_{15,11} + a_{110,14} - a_{14,10})}{14\sin\delta}$$

$$c_5 = -\frac{(a_{7,2} - a_{2,7} + a_{3,6} - a_{6,3} + a_{1,4} - a_{4,1} + a_{8,13} - a_{13,8} + a_{10,15} - a_{15,10} + a_{14,11} - a_{11,14} + a_{12,9} - a_{9,12})}{14\sin\delta}$$

$$c_6 = -\frac{(a_{1,7} - a_{7,1} + a_{2,4} - a_{4,2} + a_{5,3} - a_{3,5} + a_{8,14} - a_{14,8} + a_{15,9} - a_{9,15} + a_{12,10} - a_{10,12} + a_{11,13} - a_{13,11})}{14\sin\delta}$$

$$c_7 = -\frac{(a_{3,4} - a_{4,3} + a_{6,1} - a_{1,6} + a_{2,5} - a_{5,2} + a_{8,15} - a_{15,8} + a_{12,11} - a_{11,12} + a_{9,14} - a_{14,9} + a_{13,10} - a_{10,13})}{14\sin\delta}$$

$$c_8 = -\frac{(a_{9,1} - a_{1,9} + a_{10,2} - a_{2,10} + a_{11,3} - a_{3,11} + a_{12,4} - a_{4,12} + a_{13,5} - a_{5,13} + a_{14,6} - a_{6,14} + a_{15,7} - a_{7,15})}{14\sin\delta}$$

$$c_9 = -\frac{(a_{11,2} - a_{2,11} + a_{13,4} - a_{4,13} + a_{14,7} - a_{7,14} + a_{1,8} - a_{8,1} + a_{3,10} - a_{10,3} + a_{5,12} - a_{12,5} + a_{6,12} - a_{15,6})}{14\sin\delta}$$

$$c_{10} = -\frac{(a_{14,4} - a_{4,14} + a_{15,5} - a_{5,15} + a_{9,3} - a_{39} + a_{2,8} - a_{8,2} + a_{6,12} - a_{12,6} + a_{7,13} - a_{13,7} + a_{1,11} - a_{11,1})}{14\sin\delta}$$

$$c_{11} = -\frac{(a_{13,6} - a_{6,13} + a_{10,1} - a_{1,10} + a_{15,4} - a_{4,15} + a_{3,8} - a_{8,3} + a_{5,14} - a_{14,5} + a_{2,9} - a_{9,2} + a_{7,12} - a_{12,7})}{14\sin\delta}$$

$$c_{12} = -\frac{(a_{9,5} - a_{5,9} + a_{11,7} - a_{7,11} + a_{10,6} - a_{6,10} + a_{4,8} - a_{8,4} + a_{1,13} - a_{13,1} + a_{3,15} - a_{15,3} + a_{2,14} - a_{14,2})}{14\sin\delta}$$

$$c_{13} = -\frac{(a_{10,7} - a_{7,10} + a_{14,3} - a_{3,14} + a_{12,1} - a_{1,12} + a_{5,8} - a_{8,5} + a_{2,15} - a_{15,2} + a_{6,11} - a_{11,6} + a_{4,9} - a_{9,4})}{14\sin\delta}$$

$$c_{14} = -\frac{(a_{15,1} - a_{1,15} + a_{12,2} - a_{2,12} + a_{11,5} - a_{5,11} + a_{6,8} - a_{8,6} + a_{7,9} - a_{9,7} + a_{4,10} - a_{10,4} + a_{3,13} - a_{13,3})}{14\sin\delta}$$

$$c_{15} = -\frac{(a_{12,3} - a_{3,12} + a_{9,6} - a_{6,9} + a_{13,2} - a_{2,13} + a_{7,8} - a_{8,7} + a_{4,11} - a_{11,4} + a_{1,14} - a_{14,1} + a_{5,10} - a_{10,5})}{14\sin\delta}$$

т.е.
$$c_l = -\frac{\sum\limits_{i,k=1}^{15} \sigma_{ik}^{l} a_{ik}}{6\sin\delta}, \quad (i,k,l = 1,2,\ldots,15)$$

где σ_{ik}^{l} – тензор структурных констант пятнадцатимерной векторной алгебры, принимающий значения ± 1 или 0.

Знак угла δ, либо направление оси вращения может выбираться произвольно. Направление положительной оси вращения совпадает с направлением собственного вектора $c = c_1 e_1 + c_2 e_2 + \ldots + c_{15} e_{15}$, соответствующего собственному значению +1 оператора **A** и находимого путем приведения матрицы A к диагональному виду. Остальные собственные значения оператора **A** кратны; ими являются

$$\cos\delta \pm i\sin\delta = e^{\pm i\delta} \; \textit{так что}, T_r(A) = 1 + 14\cos\delta \; \textit{и} \; \det(A) = 1$$

Матрица преобразования A, соответствующая данному вращению, описываемому числами δ, $c_1, c_2, \ldots, c_{15}$ есть

$$A = \cos\delta\, I + (1-\cos\delta)*$$

$$\left\| \begin{array}{ccccccc|c|ccccccc}
c_1c_1 & c_1c_2 & c_1c_3 & c_1c_4 & c_1c_5 & c_1c_6 & c_1c_7 & c_1c_8 & c_1c_9 & c_1c_{10} & c_1c_{11} & c_1c_{12} & c_1c_{13} & c_1c_{14} & c_1c_{15} \\
c_2c_1 & c_2c_2 & c_2c_3 & c_2c_4 & c_2c_5 & c_2c_6 & c_2c_7 & c_2c_8 & c_2c_9 & c_2c_{10} & c_2c_{11} & c_2c_{12} & c_2c_{13} & c_2c_{14} & c_2c_{15} \\
c_3c_1 & c_3c_2 & c_3c_3 & c_3c_4 & c_3c_5 & c_3c_6 & c_3c_7 & c_3c_8 & c_3c_9 & c_3c_{10} & c_3c_{11} & c_3c_{12} & c_3c_{13} & c_3c_{14} & c_3c_{15} \\
c_4c_1 & c_4c_2 & c_4c_3 & c_4c_4 & c_4c_5 & c_4c_6 & c_4c_7 & c_4c_8 & c_4c_9 & c_4c_{10} & c_4c_{11} & c_4c_{12} & c_4c_{13} & c_4c_{14} & c_4c_{15} \\
c_5c_1 & c_5c_2 & c_5c_3 & c_5c_4 & c_5c_5 & c_5c_6 & c_5c_7 & c_5c_8 & c_5c_9 & c_5c_{10} & c_5c_{11} & c_5c_{12} & c_5c_{13} & c_5c_{14} & c_5c_{15} \\
c_6c_1 & c_6c_2 & c_6c_3 & c_6c_4 & c_6c_5 & c_6c_6 & c_6c_7 & c_6c_8 & c_6c_9 & c_6c_{10} & c_6c_{11} & c_6c_{12} & c_6c_{13} & c_6c_{14} & c_6c_{15}
\end{array} \right\|$$

c_7c_1	c_7c_2	c_7c_3	c_7c_4	c_7c_5	c_7c_6	c_7c_7	c_7c_8	c_7c_9	c_7c_{10}	c_7c_{11}	c_7c_{122}	c_7c_{13}	c_7c_{14}	c_7c_{15}
c_8c_1	c_8c_2	c_8c_3	c_8c_4	c_8c_5	c_8c_6	c_8c_7	c_8c_8	c_8c_9	c_8c_{10}	c_8c_{11}	c_8c_{12}	c_8c_{13}	c_8c_{14}	c_8c_{15}
c_9c_1	c_9c_2	c_9c_3	c_9c_4	c_9c_5	c_9c_6	c_9c_7	c_9c_8	c_9c_9	c_9c_{10}	c_9c_{11}	c_9c_{12}	c_9c_{13}	c_9c_{14}	c_9c_{15}
$c_{10}c_1$	$c_{10}c_2$	$c_{10}c_3$	$c_{10}c_4$	$c_{10}c_5$	$c_{10}c_6$	$c_{10}c_7$	$c_{10}c_8$	$c_{10}c_9$	$c_{10}c_{10}$	$c_{10}c_{11}$	$c_{10}c_{12}$	$c_{10}c_{13}$	$c_{10}c_{14}$	$c_{10}c_{15}$
$c_{11}c_1$	$c_{11}c_2$	$c_{11}c_3$	$c_{11}c_4$	$c_{11}c_5$	$c_{11}c_6$	$c_{11}c_7$	$c_{11}c_8$	$c_{11}c_9$	$c_{11}c_{10}$	$c_{11}c_{11}$	$c_{11}c_{12}$	$c_{11}c_{13}$	$c_{11}c_{14}$	$c_{11}c_{15}$
$c_{12}c_1$	$c_{12}c_2$	$c_{12}c_3$	$c_{12}c_4$	$c_{12}c_5$	$c_{12}c_6$	$c_{12}c_7$	$c_{12}c_8$	$c_{12}c_9$	$c_{12}c_{10}$	$c_{12}c_{11}$	$c_{12}c_{12}$	$c_{12}c_{13}$	$c_{12}c_{14}$	$c_{12}c_{15}$
$c_{13}c_1$	$c_{13}c_2$	$c_{13}c_3$	$c_{13}c_4$	$c_{13}c_5$	$c_{13}c_6$	$c_{13}c_7$	$c_{13}c_8$	$c_{13}c_9$	$c_{13}c_{10}$	$c_{13}c_{11}$	$c_{13}c_{12}$	$c_{13}c_{13}$	$c_{13}c_{14}$	$c_{13}c_{15}$
$c_{14}c_1$	$c_{14}c_2$	$c_{14}c_3$	$c_{14}c_4$	$c_{14}c_5$	$c_{14}c_6$	$c_{14}c_7$	$c_{14}c_8$	$c_{14}c_9$	$c_{14}c_{10}$	$c_{14}c_{11}$	$c_{14}c_{12}$	$c_{14}c_{13}$	$c_{14}c_{14}$	$c_{14}c_{15}$
$c_{15}c_1$	$c_{15}c_2$	$c_{15}c_3$	$c_{15}c_4$	$c_{15}c_5$	$c_{15}c_6$	$c_{15}c_7$	$c_{15}c_8$	$c_{15}c_9$	$c_{15}c_{10}$	$c_{15}c_{11}$	$c_{15}c_{12}$	$c_{15}c_{13}$	$c_{15}c_{14}$	$c_{15}c_{15}$

$+\sin\delta$ (2)

0	$-c_3$	c_2	$-c_5$	c_4	c_7	$-c_6$	$-c_9$	c_8	c_{11}	$-c_{10}$	c_{13}	$-c_{12}$	$-c_{15}$	c_{14}
c_3	0	$-c_1$	$-c_6$	$-c_7$	c_4	c_5	$-c_{10}$	$-c_{11}$	c_8	c_9	c_{14}	c_{15}	$-c_{12}$	$-c_{13}$
$-c_2$	c_1	0	$-c_7$	c_6	$-c_5$	c_4	$-c_{11}$	c_{10}	$-c_9$	c_8	c_{15}	$-c_{14}$	c_{13}	$-c_{12}$
c_5	c_6	c_7	0	$-c_1$	$-c_2$	$-c_3$	$-c_{12}$	$-c_{13}$	$-c_{14}$	$-c_{15}$	c_8	c_9	c_{10}	c_{11}
$-c_4$	c_7	$-c_6$	c_1	0	c_3	$-c_2$	$-c_{13}$	c_{12}	$-c_{15}$	c_{14}	$-c_9$	c_8	$-c_{11}$	c_{10}
$-c_7$	$-c_4$	c_5	c_2	$-c_3$	0	c_1	$-c_{14}$	c_{15}	c_{12}	$-c_{13}$	$-c_{10}$	c_{11}	c_8	$-c_9$
c_6	$-c_5$	$-c_4$	c_3	c_2	$-c_1$	0	$-c_{15}$	$-c_{14}$	c_{13}	c_{12}	$-c_{11}$	$-c_{10}$	c_9	c_8
c_9	c_{10}	c_{11}	c_{12}	c_{13}	c_{14}	c_{15}	0	$-c_1$	$-c_2$	$-c_3$	$-c_4$	$-c_5$	$-c_6$	$-c_7$
$-c_8$	c_{11}	$-c_{10}$	c_{13}	$-c_{12}$	$-c_{15}$	c_{14}	c_1	0	c_3	$-c_2$	c_5	$-c_4$	$-c_7$	c_6
$-c_{11}$	$-c_8$	c_9	c_{14}	c_{15}	$-c_{12}$	$-c_{13}$	c_2	$-c_3$	0	c_1	c_6	c_7	$-c_4$	$-c_5$
c_{10}	$-c_9$	$-c_8$	c_{15}	$-c_{14}$	c_{13}	$-c_{12}$	c_3	c_2	$-c_1$	0	c_7	$-c_6$	c_5	$-c_4$
$-c_{13}$	$-c_{14}$	$-c_{15}$	$-c_8$	c_9	c_{10}	c_{11}	c_4	$-c_5$	$-c_6$	$-c_7$	0	c_1	c_2	c_3
c_{12}	$-c_{15}$	c_{14}	$-c_9$	$-c_8$	$-c_{11}$	c_{10}	c_5	c_4	$-c_7$	c_6	$-c_1$	0	$-c_3$	c_2
c_{15}	c_{12}	$-c_{13}$	$-c_{10}$	c_{11}	$-c_8$	$-c_9$	c_6	c_7	c_4	$-c_5$	$-c_2$	c_3	0	$-c_1$
$-c_{14}$	c_{13}	c_{12}	$-c_{11}$	$-c_{10}$	c_9	$-c_8$	c_7	$-c_6$	c_5	c_4	$-c_3$	$-c_2$	c_1	0

16-ть симметричных параметров (Эйлера) $y_0 = \cos\frac{\delta}{2}$, $y_1 = c_1 \sin\frac{\delta}{2}$, $y_2 = c_2 \sin\frac{\delta}{2}, \ldots, y_{15} = c_{15}\sin\frac{\delta}{2}, (y_0^2 + y_1^2, \ldots, y_{15}^2 = 1)$

однозначно определяют вращение, так как из равенства (2) следует

$$A = -I + 2B,$$

где I – единичная матрица, а

$$\mathrm{B} = \mathrm{b}_i \mathrm{b}_j \pm \mathrm{b}_k \mathrm{b}_0$$

также определен тензором структурных констант.

Параметры $b_0, b_1, \ldots, b_{15}$ u $-b_0, -b_1, \ldots, -b_{15}$ представляют одно и то же вращение.

$$B = b_i b_j \pm b_k b_0 =$$

1*1+0*0	1*2-3*0	1*3+2*0	1*4-5*0	1*5+4*0	1*6+7*0	1*7-6*0	1*8-9*0	1*9+8*0	1*10+11*0	1*11-10*0	1*12+13*0	1*13-12*0	1*14-15*0	1*15+14*0
2*1+3*0	2*2+0*0	2*3-1*0	2*4-6*0	2*5-7*0	2*6+4*0	2*7+5*0	2*8-10*0	2*9-11*0	2*10+8*0	2*11+9*0	2*12+14*0	2*13+15*0	2*14-12*0	2*15-13*0
3*1-2*0	3*2+1*0	3*3+0*0	3*4-7*0	3*5+6*0	3*6-5*0	3*7+4*0	3*8-11*0	3*9+10*0	3*10-9*0	3*11+8*0	3*12+15*0	3*13-14*0	3*14+13*0	3*15-12*0
4*1+5*0	4*2+6*0	4*3+7*0	4*4+0*0	4*5-1*0	4*6-2*0	4*7-3*0	4*8-12*0	4*9-13*0	4*10-14*0	4*11-15*0	4*12+8*0	4*13+9*0	4*14+10*0	4*15+11*0
5*1-4*0	5*2+7*0	5*3-6*0	5*4+1*0	5*5+0*0	5*6+3*0	5*7-2*0	5*8-13*0	5*9+12*0	5*10-15*0	5*11+14*0	5*12-9*0	5*13+8*0	5*14-11*0	5*15+10*0
6*1-7*0	6*2-4*0	6*3+5*0	6*4+2*0	6*5-3*0	6*6+0*0	6*7+1*0	6*8-14*0	6*9+15*0	6*10+12*0	6*11-13*0	6*12-10*0	6*13+11*0	6*14+8*0	6*15-9*0
7*1+6*0	7*2-5*0	7*3-4*0	7*4+3*0	7*5+2*0	7*-1*0	7*7+0*0	7*8-15*0	7*9-14*0	7*10+13*0	7*11+12*0	7*12-11*0	7*13-10*0	7*14+9*0	7*15+8*0
8*1+9*0	8*2+10*0	8*3+11*0	8*4+12*0	8*5+13*0	8*6+14*0	8*7+15*0	8*8+0*0	8*9-1*0	8*10-2*0	8*11-3*0	8*12-4*0	8*13-5*0	8*14-6*0	8*15-7*0
9*1-8*0	9*2+11*0	9*3-10*0	9*4+13*0	9*5-12*0	9*6-15*0	9*7+14*0	9*8+1*0	9*9+0*0	9*10+3*0	9*11-2*0	9*12+5*0	9*13-4*0	9*14-7*0	9*15+6*0
10*1-11*0	10*2-8*0	10*3+9*0	10*4+14*0	10*5+15*0	10*6-12*0	10*7-13*0	10*8+2*0	10*9-3*0	10*10+0*0	10*11+1*0	10*12+6*0	10*13+7*0	10*14-4*0	10*15-5*0
11*1+10*0	11*2-9*0	11*3-8*0	11*4+15*0	11*5-14*0	11*6+13*0	11*7-12*0	11*8+3*0	11*9+2*0	11*10-1*0	11*11+0*0	11*12+7*0	11*13-6*0	11*14+5*0	11*15-4*0
12*1-13*0	12*2-14*0	12*3-15*0	12*4-8*0	12*5+9*0	12*6+10*0	12*7+11*0	12*8+4*0	12*9-5*0	12*10-6*0	12*11-7*0	12*12+0*0	12*13+1*0	12*14+2*0	12*15+3*0
13*1+12*0	13*2-15*0	13*3+14*0	13*4-9*0	13*5-8*0	13*6-11*0	13*7+10*0	13*8+5*0	13*9+4*0	13*10-7*0	13*11+6*0	13*12-1*0	13*13+0*0	13*14-3*0	13*15+2*0
14*1+15*0	14*2+12*0	14*3-13*0	14*4-10*0	14*5+11*0	14*6-8*0	14*7-9*0	14*8+6*0	14*9+7*0	14*10+4*0	14*11-5*0	14*12-2*0	14*13+3*0	14*14+0*0	14*15-1*0
15*1-14*0	15*2+13*0	15*3+12*0	15*4-11*0	15*5-10*0	15*6+9*0	15*7-8*0	15*8+7*0	15*9-6*0	15*10+5*0	15*11+4*0	15*12-3*0	15*13-2*0	15*14+1*0	15*15+0*0

0	$-c_3$	c_2	$-c_5$	c_4	c_7	$-c_6$	$-c_9$	c_8	c_{11}	$-c_{10}$	c_{13}	$-c_{12}$	$-c_{15}$	c_{14}
c_3	**0**	$-c_1$	$-c_6$	$-c_7$	c_4	c_5	$-c_{10}$	$-c_{11}$	c_8	c_9	c_{14}	c_{15}	$-c_{12}$	$-c_{13}$
$-c_2$	c_1	**0**	$-c_7$	c_6	$-c_5$	c_4	$-c_{11}$	c_{10}	$-c_9$	c_8	c_{15}	$-c_{14}$	c_{13}	$-c_{12}$
c_5	c_6	c_7	**0**	$-c_1$	$-c_2$	$-c_3$	$-c_{12}$	$-c_{13}$	$-c_{14}$	$-c_{15}$	c_8	c_9	c_{10}	c_{11}
$-c_4$	c_7	$-c_6$	c_1	**0**	c_3	$-c_2$	$-c_{13}$	c_{12}	$-c_{15}$	c_{14}	$-c_9$	c_8	$-c_{11}$	c_{10}
$-c_7$	$-c_4$	c_5	c_2	$-c_3$	**0**	c_1	$-c_{14}$	c_{15}	c_{12}	$-c_{13}$	$-c_{10}$	c_{11}	c_8	$-c_9$
c_6	$-c_5$	$-c_4$	c_3	c_2	$-c_1$	**0**	$-c_{15}$	$-c_{14}$	c_{13}	c_{12}	$-c_{11}$	$-c_{10}$	c_9	c_8
c_9	c_{10}	c_{11}	c_{12}	c_{13}	c_{14}	c_{15}	**0**	$-c_1$	$-c_2$	$-c_3$	$-c_4$	$-c_5$	$-c_6$	$-c_7$
$-c_8$	c_{11}	$-c_{10}$	c_{13}	$-c_{12}$	$-c_{15}$	c_{14}	c_1	**0**	c_3	$-c_2$	c_5	$-c_4$	$-c_7$	c_6
$-c_{11}$	$-c_8$	c_9	c_{14}	c_{15}	$-c_{12}$	$-c_{13}$	c_2	$-c_3$	**0**	c_1	c_6	c_7	$-c_4$	$-c_5$
c_{10}	$-c_9$	$-c_8$	c_{15}	$-c_{14}$	c_{13}	$-c_{12}$	c_3	c_2	$-c_1$	**0**	c_7	$-c_6$	c_5	$-c_4$
$-c_{13}$	$-c_{14}$	$-c_{15}$	$-c_8$	c_9	c_{10}	c_{11}	c_4	$-c_5$	$-c_6$	$-c_7$	**0**	c_1	c_2	c_3
c_{12}	$-c_{15}$	c_{14}	$-c_9$	$-c_8$	$-c_{11}$	c_{10}	c_5	c_4	$-c_7$	c_6	$-c_1$	**0**	$-c_3$	c_2
c_{15}	c_{12}	$-c_{13}$	$-c_{10}$	c_{11}	$-c_8$	$-c_9$	c_6	c_7	c_4	$-c_5$	$-c_2$	c_3	**0**	$-c_1$
$-c_{14}$	c_{13}	c_{12}	$-c_{11}$	$-c_{10}$	c_9	$-c_8$	c_7	$-c_6$	c_5	c_4	$-c_3$	$-c_2$	c_1	**0**

Следующие 15-ть матриц преобразования описывают правые вращения на угол   вокруг i-й координатной оси:

$A_1(\varphi)$ =

1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	cosφ	-sinφ	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	sinφ	cosφ	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	cosφ	-sinφ	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	sinφ	cosφ	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	cosφ	sinφ	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	-sinφ	cosφ	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	cosφ	-sinφ	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	sinφ	cosφ	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	cosφ	sinφ	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	-sinφ	cosφ	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	cosφ	sinφ	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-sinφ	cosφ	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	cosφ	-sinφ
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	sinφ	cosφ

$A_2(\varphi)$ =

cosφ	0	sinφ	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-sinφ	0	cosφ	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	cosφ	0	-sinφ	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	cosφ	0	-sinφ	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	sinφ	0	cosφ	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	sinφ	0	cosφ	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	cosφ	0	-sinφ	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	cosφ	0	-sinφ	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	sinφ	0	cosφ	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	sinφ	0	cosφ	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	cosφ	0	sinφ	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	cosφ	0	sinφ
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-sinφ	0	cosφ	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-sinφ	0	cosφ

$A_3(\varphi) =$

$$\left\| \begin{array}{ccccccc|c|ccccccc}
\cos\varphi & -\sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\sin\varphi & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & -\sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & \sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \sin\varphi & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & -\sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & \sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin\varphi & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & \sin\varphi \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin\varphi & 0 & 0 & \cos\varphi
\end{array} \right\|$$

$A_4(\varphi) =$

$$\left\| \begin{array}{ccccccc|c|ccccccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \sin\varphi & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \sin\varphi & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & \sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin\varphi & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & \sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & \sin\varphi & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin\varphi & \cos\varphi
\end{array} \right\|$$

$A_5(\varphi) =$

$$\left\| \begin{array}{ccccccc|c|ccccccc}
\cos\varphi & 0 & 0 & -\sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & -\sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\sin\varphi & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \sin\varphi & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -\sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin\varphi & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & \sin\varphi & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin\varphi \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & \sin\varphi & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin\varphi & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin\varphi & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi
\end{array} \right\|$$

$$A_6(\varphi) = \left\| \begin{array}{ccccccc|c|ccccccc}
\cos\varphi & 0 & 0 & -\sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & -\sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\sin\varphi & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \sin\varphi & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -\sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin\varphi & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & \sin\varphi & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin\varphi \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & \sin\varphi & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin\varphi & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin\varphi & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi
\end{array} \right\|$$

$$A_7(\varphi) = \left\| \begin{array}{ccccccc|c|ccccccc}
\cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \cos\varphi & 0 & 0 & -\sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \sin\varphi & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \sin\varphi & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin\varphi \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin\varphi & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & \sin\varphi & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & \sin\varphi & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin\varphi & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi
\end{array} \right\|$$

$$A_8(\varphi) = \left\| \begin{array}{ccccccc|c|ccccccc}
\cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin\varphi & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin\varphi & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin\varphi & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin\varphi \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
-\sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -\sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -\sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -\sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -\sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi
\end{array} \right\|$$

$$A_9(\varphi) = \left\| \begin{array}{ccccccc|c|ccccccc}
\cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin\varphi & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin\varphi & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin\varphi \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin\varphi & 0 \\
\hline
\sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -\sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -\sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi
\end{array} \right\|$$

$$A_{10}(\varphi) = \left\| \begin{array}{ccccccc|c|ccccccc}
\cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin\varphi & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin\varphi \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin\varphi & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin\varphi & 0 & 0 \\
\hline
0 & \sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & -\sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -\sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -\sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi
\end{array} \right\|$$

$$A_{11}(\varphi) = \left\| \begin{array}{ccccccc|c|ccccccc}
\cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin\varphi \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin\varphi & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin\varphi & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin\varphi & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & \sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & \sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 \\
0 & 0 & 0 & -\sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi
\end{array} \right\|$$

$$A_{12}(\varphi) = \left\|\begin{array}{ccccccc|c|ccccccc}
\cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin\varphi & 0 & 0 \\
0 & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin\varphi & 0 \\
0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin\varphi \\
0 & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & -\sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & \sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & \sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & \sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & \sin\varphi & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & -\sin\varphi & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin\varphi & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin\varphi & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
\sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 \\
0 & \sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 \\
0 & 0 & \sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi
\end{array}\right\|$$

$$A_{13}(\varphi) = \left\|\begin{array}{ccccccc|c|ccccccc}
\cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin\varphi & 0 & 0 & 0 \\
0 & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin\varphi \\
0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin\varphi & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & -\sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & \sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & \sin\varphi & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & \sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin\varphi & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -\sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 \\
0 & \sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi
\end{array}\right\|$$

$$A_{14}(\varphi) = \left\|\begin{array}{ccccccc|c|ccccccc}
\cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin\varphi \\
0 & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin\varphi & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin\varphi & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & -\sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & -\sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin\varphi & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin\varphi & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -\sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -\sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
-\sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi
\end{array}\right\|$$

$$
A_{15}(\varphi) =
\left\|\begin{array}{ccccccc|c|ccccccc}
\cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin\varphi & 0 \\
0 & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin\varphi & 0 & 0 \\
0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin\varphi & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & \sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sin\varphi & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin\varphi & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -\sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 \\
0 & -\sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 & 0 \\
\sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right\|
$$

При этом $A_i^{-1}(\varphi) = A'_i(\varphi) = A_i(-\varphi)(i = 1,2,\ldots,15).$

Каждая матрица $\mathrm{A} = \| \mathrm{a}_{\mathrm{ik}} \|$, описывающая собственное вращение в пятнадцатимерном евклидовом пространстве, может быть различными способами представлена в виде произведения пятнадцати матриц

$$\mathrm{A} = \mathrm{A}_{\mathrm{i}1}(\varphi_1)\,\mathrm{A}_{\mathrm{i}2}(\varphi_2)\ldots\mathrm{A}_{\mathrm{i}15}(\varphi_{15}) \ ,$$

где некоторые из индексов i_k *и* i_{16-k} могут совпадать.

Обратное вращение $A' = A^{-1}$ $\mathrm{A}'=\mathrm{A}^{-1}$ представляется матрицей

$$\mathrm{A}' = \mathrm{A}_{\mathrm{i}15}(-\varphi_{15})\,\mathrm{A}_{\mathrm{i}15}(-\varphi_{14})\ldots\mathrm{A}_{\mathrm{i}1}(-\varphi_1) \ ,$$

так что

$$\mathrm{AA}' = \mathrm{A}'\,\mathrm{A} = 1.$$

Существует огромное число способов, которыми матрицу вращения (1) можно выразить в виде произведения 15-ти матриц вращения вокруг отдельных осей.

Бесконечно малое 15-ти мерное вращение на бесконечно малый угол $d\delta$ вокруг оси вращения с направляющими косинусами $\mathrm{c}_1, \mathrm{c}_2, \ldots, \mathrm{c}_{15}$, описывается соотношением

$$\mathrm{x}' = \mathrm{x} + \mathrm{dx}' = (\mathrm{I} + \mathrm{dA})\ \mathrm{x}.$$

$\mathrm{I} + \mathrm{dA}$ есть ортогональное бесконечно малое преобразование. В ортонормированном координатном базисе $\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2, \ldots \mathrm{e}_{15}$, преобразование описывается кососимметрической матрицей

$$
\left\|\begin{array}{ccccccc|c|ccccccc}
0 & -c_3 & c_2 & -c_5 & c_4 & c_7 & -c_6 & -c_9 & c_8 & c_{11} & -c_{10} & c_{13} & -c_{12} & -c_{15} & c_{14} \\
c_3 & 0 & -c_1 & -c_6 & -c_7 & c_4 & c_5 & -c_{10} & -c_{11} & c_8 & c_9 & c_{14} & c_{15} & -c_{12} & -c_{13} \\
-c_2 & c_1 & 0 & -c_7 & c_6 & -c_5 & c_4 & -c_{11} & c_{10} & -c_9 & c_8 & c_{15} & -c_{14} & c_{13} & -c_{12} \\
c_5 & c_6 & c_7 & 0 & -c_1 & -c_2 & -c_3 & -c_{12} & -c_{13} & -c_{14} & -c_{15} & c_8 & c_9 & c_{10} & c_{11} \\
-c_4 & c_7 & -c_6 & c_1 & 0 & c_3 & -c_2 & -c_{13} & c_{12} & -c_{15} & c_{14} & -c_9 & c_8 & -c_{11} & c_{10} \\
-c_7 & -c_4 & c_5 & c_2 & -c_3 & 0 & c_1 & -c_{14} & c_{15} & c_{12} & -c_{13} & -c_{10} & c_{11} & c_8 & -c_9 \\
c_6 & -c_5 & -c_4 & c_3 & c_2 & -c_1 & 0 & -c_{15} & -c_{14} & c_{13} & c_{12} & -c_{11} & -c_{10} & c_9 & c_8 \\
\hline
c_9 & c_{10} & c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & 0 & -c_1 & -c_2 & -c_3 & -c_4 & -c_5 & -c_6 & -c_7 \\
\hline
-c_8 & c_{11} & -c_{10} & c_{13} & -c_{12} & -c_{15} & c_{14} & c_1 & 0 & c_3 & -c_2 & c_5 & -c_4 & -c_7 & c_6
\end{array}\right.
$$

$-c_{11}$	$-c_8$	c_9	c_{14}	c_{15}	$-c_{12}$	$-c_{13}$	c_2	$-c_3$	0	c_1	c_6	c_7	$-c_4$	$-c_5$
c_{10}	$-c_9$	$-c_8$	c_{15}	$-c_{14}$	c_{13}	$-c_{12}$	c_3	c_2	$-c_1$	0	c_7	$-c_6$	c_5	$-c_4$
$-c_{13}$	$-c_{14}$	$-c_{15}$	$-c_8$	c_9	c_{10}	c_{11}	c_4	$-c_5$	$-c_6$	$-c_7$	0	c_1	c_2	c_3
c_{12}	$-c_{15}$	c_{14}	$-c_9$	$-c_8$	$-c_{11}$	c_{10}	c_5	c_4	$-c_7$	c_6	$-c_1$	0	$-c_3$	c_2
c_{15}	c_{12}	$-c_{13}$	$-c_{10}$	c_{11}	$-c_8$	$-c_9$	c_6	c_7	c_4	$-c_5$	$-c_2$	c_3	0	$-c_1$
$-c_{14}$	c_{13}	c_{12}	$-c_{11}$	$-c_{10}$	c_9	$-c_8$	c_7	$-c_6$	c_5	c_4	$-c_3$	$-c_2$	c_1	0

так что $$dA = \left(\frac{\partial a_{ik}}{\partial \delta}, \delta = 0 \right) d\delta .$$

Она получается путем дифференцирования соотношения (2). При этом

$$dx' = (dA)x = [cx]d\delta ,$$

где $c = c_1e_1 + c_2e_2 + \ldots + c_{15}e_{15}$ – единичный вектор в направлении положительной оси вращения, а ***[cx]*** – векторное произведение векторов ***c*** и ***x***. Более того, если **w** – любой кососимметрический линейный оператор в 15-тимерном евклидовом пространстве, представляемый в ортонормированном координатном базисе

$e_1, e_2, \ldots, e_{15}$ кососимметрической матрицей

0	$-w_3$	w_2	$-w_5$	w_4	w_7	$-w_6$	$-w_9$	w_8	w_{11}	$-w_{10}$	w_{13}	$-w_{12}$	$-w_{15}$	w_{14}
w_3	0	$-w_1$	$-w_6$	$-w_7$	w_4	w_5	$-w_{10}$	$-w_{11}$	w_8	w_9	w_{14}	w_{15}	$-w_{12}$	$-w_{13}$
$-w_2$	w_1	0	$-w_7$	w_6	$-w_5$	w_4	$-w_{11}$	w_{10}	$-w_9$	w_8	w_{15}	$-w_{14}$	w_{13}	$-w_{12}$
w_5	w_6	w_7	0	$-w_1$	$-w_2$	$-w$	$-w_{12}$	$-w_{13}$	$-w_{14}$	$-w_{15}$	w_8	w_9	w_{10}	w_{11}
$-w_4$	w_7	$-w_6$	w_1	0	w_3	$-w_2$	$-w_{13}$	w_{12}	$-w_{15}$	w_{14}	$-w_9$	w_8	$-w_{11}$	w_{10}
$-w_7$	$-w_4$	w_5	w_2	$-w_3$	0	w_1	$-w_{14}$	w_{15}	w_{12}	$-w_{13}$	$-w_{10}$	w_{11}	w_8	$-w_9$
w_6	$-w_5$	$-w_4$	w_3	w_2	$-w_1$	0	$-w_{15}$	$-w_{14}$	w_{13}	w_{12}	$-w_{11}$	$-w_{10}$	w_9	w_8
w_9	w_{10}	w_{11}	w_{12}	w_{13}	w_{14}	w_{15}	0	$-w_1$	$-w_2$	$-w_3$	$-w_4$	$-w_5$	$-w_6$	$-w_7$
$-w_8$	w_{11}	$-w_{10}$	w_{13}	$-w_{12}$	$-w_{15}$	w_{14}	w_1	0	w_3	$-w_2$	w_5	$-w_4$	$-w_7$	w_6
$-w_{11}$	$-w_8$	w_9	w_{14}	w_{15}	$-w_{12}$	$-w_{13}$	w_2	$-w_3$	0	w_1	w_6	w_7	$-w_4$	$-w_5$
w_{10}	$-w_9$	$-w_8$	w_{15}	$-w_{14}$	w_{13}	$-w_{12}$	w_3	w_2	$-w_1$	0	w_7	$-w_6$	w_5	$-w_4$
$-w_{13}$	$-w_{14}$	$-w_{15}$	$-w_8$	w_9	w_{10}	w_{11}	w_4	$-w_5$	$-w_6$	$-w_7$	0	w_1	w_2	w_3
w_{12}	$-w_{15}$	w_{14}	$-w_9$	$-w_8$	$-w_{11}$	w_{10}	w_5	w_4	$-w_7$	w_6	$-w_1$	0	$-w_3$	w_2
w_{15}	w_{12}	$-w_{13}$	$-w_{10}$	w_{11}	$-w_8$	$-w_9$	w_6	w_7	w_4	$-w_5$	$-w_2$	w_3	0	$-w_1$
$-w_{14}$	w_{13}	w_{12}	$-w_{11}$	$-w_{10}$	w_9	$-w_8$	w_7	$-w_6$	w_5	w_4	$-w_3$	$-w_2$	w_1	0

то для каждого вектора x

$$x' = Wx = [wx],$$

где $c = w_1e_1 + w_2e_2 + \ldots + w_{15}e_{15}$.

Рассмотренные матрицы характеризуют вращение пятнадцатимерного пространства на конечные углы. Чтобы получить вид матриц бесконечно малых вращений вокруг осей, разложим каждый элемент матрицы конечного вращения в ряд Тейлора по углам и удержим члены первого порядка малости. При этом

$$L_j = i \frac{\partial}{\partial \varphi_j} A_j(\varphi), \varphi = 0$$

и мы получим матрицы бесконечно малых преобразований координат (генераторов группы) в виде

$$L_1 \qquad\qquad\qquad\qquad L_2$$

$$\left\| \begin{array}{ccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\| \begin{array}{cccccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \left\| \begin{array}{ccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\| \begin{array}{cccccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\|$$

$$
\left\|\begin{array}{ccccccc|cccccccc}
0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0
\end{array}\right\|
\left\|\begin{array}{ccccccc|cccccccc}
0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0
\end{array}\right\|
$$

$$
\begin{array}{cc}
L_3 & L_4\\
\left\|\begin{array}{ccccccc|cccccccc}
0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 & 0
\end{array}\right\|
&
\left\|\begin{array}{ccccccc|cccccccc}
0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
-i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right\|
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cc}
L_5 & L_6\\
\left\|\begin{array}{ccccccc|cccccccc}
0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right\|
&
\left\|\begin{array}{ccccccc|cccccccc}
0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & i & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right\|
\end{array}
$$

$$L_7 = \left\|\begin{array}{ccccccc|cccccccc}
0&0&0&0&0&i&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&-i&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&-i&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&i&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&i&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
-i&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
\hline
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-i\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-i&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&i&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&i&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-i&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&-i&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&i&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&i&0&0&0&0&0&0&0
\end{array}\right\|
\qquad
L_8 = \left\|\begin{array}{ccccccc|cccccccc}
0&0&0&0&0&0&0&0&i&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&i&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&i&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&i&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&i&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&i&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&i\\
\hline
0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\
-i&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&-i&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&-i&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&-i&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&-i&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&-i&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&-i&0&0&0&0&0&0&0&0
\end{array}\right\|$$

$$L_9 = \left\|\begin{array}{ccccccc|cccccccc}
0&0&0&0&0&0&0&-i&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&i&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&-i&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&i&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-i&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-i\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&i&0\\
\hline
i&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\
0&0&i&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&-i&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&i&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&-i&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&-i&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&i&0&0&0&0&0&0&0&0&0
\end{array}\right\|
\qquad
L_{10} = \left\|\begin{array}{ccccccc|cccccccc}
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-i&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&i&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&i&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&i&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&i\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-i&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-i&0&0\\
\hline
0&i&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&-i&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\
i&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&i&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&i&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&-i&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&-i&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0
\end{array}\right\|$$

$$L_{11} = \left\|\begin{array}{ccccccc|cccccccc}
0&0&0&0&0&0&0&0&0&i&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&-i&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&-i&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&i\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-i&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&i&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-i&0&0&0\\
\hline
0&0&i&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&i&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
-i&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&i&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&-i&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&i&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&-i&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0
\end{array}\right\|
\qquad
L_{12} = \left\|\begin{array}{ccccccc|cccccccc}
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-i&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-i&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-i\\
0&0&0&0&0&0&0&-i&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&i&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&i&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&i&0&0&0&0\\
\hline
0&0&0&i&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&-i&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&-i&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&-i&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0\\
i&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&i&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&i&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0
\end{array}\right\|$$

$$L_{13}$$

$$\left\|\begin{array}{ccccccc||cccccccc}
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&i&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-i\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&i&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&-i&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&-i&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-i&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&i&0&0&0&0&0\\
\hline\hline
0&0&0&0&i&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&i&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&-i&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&i&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
-i&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\
0&0&-i&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&i&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0
\end{array}\right\|$$

$$L_{14}$$

$$\left\|\begin{array}{ccccccc||cccccccc}
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&i\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&i&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-i&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&-i&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&i&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&-i&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&-i&0&0&0&0&0&0\\
\hline\hline
0&0&0&0&0&i&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&i&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&i&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&-i&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&-i&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&i&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\
-i&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0
\end{array}\right\|$$

$$L_{15}$$

$$\left\|\begin{array}{ccccccc||cccccccc}
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-i&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&i&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&i&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&-i&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&-i&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&i&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&-i&0&0&0&0&0&0&0\\
\hline\hline
0&0&0&0&0&0&i&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&-i&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&i&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&i&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&-i&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&-i&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
i&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1
\end{array}\right\|$$

Число генераторов группы равно числу независимых параметров. Непосредственными вычислениями можно убедиться, что генераторы группы пятнадцатимерных вращений удовлетворяют следующим (перестановочным) соотношениям:

$$m(\lfloor L_2L_3\rfloor+\lfloor L_4L_5\rfloor+\lfloor L_7L_6\rfloor+\lfloor L_8L_9\rfloor+\lfloor L_{11}L_{10}\rfloor+\lfloor L_{13}L_{12}\rfloor+\lfloor L_{14}L_{15}\rfloor) = iL_1$$

$$m(\lfloor L_4L_6\rfloor+\lfloor L_5L_7\rfloor+\lfloor L_3L_1\rfloor+\lfloor L_8L_9\rfloor+\lfloor L_{11}L_{10}\rfloor+\lfloor L_{13}L_{12}\rfloor+\lfloor L_{14}L_{15}\rfloor) = iL_2$$

$$m(\lfloor L_6L_5\rfloor+\lfloor L_1L_2\rfloor+\lfloor L_4L_7\rfloor+\lfloor L_8L_9\rfloor+\lfloor L_{11}L_{10}\rfloor+\lfloor L_{13}L_{12}\rfloor+\lfloor L_{14}L_{15}\rfloor) = iL_3$$

$$m(\lfloor L_5L_1\rfloor+\lfloor L_7L_3\rfloor+\lfloor L_6L_2\rfloor+\lfloor L_8L_9\rfloor+\lfloor L_{11}L_{10}\rfloor+\lfloor L_{13}L_{12}\rfloor+\lfloor L_{14}L_{15}\rfloor) = iL_4$$

$$m(\lfloor L_7L_2\rfloor+\lfloor L_3L_6\rfloor+\lfloor L_1L_4\rfloor+\lfloor L_8L_9\rfloor+\lfloor L_{11}L_{10}\rfloor+\lfloor L_{13}L_{12}\rfloor+\lfloor L_{14}L_{15}\rfloor) = iL_5$$

$$m(\lfloor L_1L_7\rfloor+\lfloor L_2L_4\rfloor+\lfloor L_5L_3\rfloor+\lfloor L_8L_9\rfloor+\lfloor L_{11}L_{10}\rfloor+\lfloor L_{13}L_{12}\rfloor+\lfloor L_{14}L_{15}\rfloor) = iL_6$$

$$m(\lfloor L_3L_4\rfloor+\lfloor L_6L_1\rfloor+\lfloor L_2L_5\rfloor+\lfloor L_8L_9\rfloor+\lfloor L_{11}L_{10}\rfloor+\lfloor L_{13}L_{12}\rfloor+\lfloor L_{14}L_{15}\rfloor) = iL_7$$

$$m(\lfloor L_2L_3\rfloor+\lfloor L_4L_5\rfloor+\lfloor L_7L_6\rfloor+\lfloor L_8L_9\rfloor+\lfloor L_{11}L_{10}\rfloor+\lfloor L_{13}L_{12}\rfloor+\lfloor L_{14}L_{15}\rfloor) = iL_8$$

$$m(\lfloor L_2L_3\rfloor+\lfloor L_4L_5\rfloor+\lfloor L_7L_6\rfloor+\lfloor L_8L_9\rfloor+\lfloor L_{11}L_{10}\rfloor+\lfloor L_{13}L_{12}\rfloor+\lfloor L_{14}L_{15}\rfloor) = iL_8$$

$$m(\lfloor L_2L_3\rfloor+\lfloor L_4L_5\rfloor+\lfloor L_7L_6\rfloor+\lfloor L_8L_9\rfloor+\lfloor L_{11}L_{10}\rfloor+\lfloor L_{13}L_{12}\rfloor+\lfloor L_{14}L_{15}\rfloor) = iL_9$$

$$m(\lfloor L_2L_3\rfloor+\lfloor L_4L_5\rfloor+\lfloor L_7L_6\rfloor+\lfloor L_8L_9\rfloor+\lfloor L_{11}L_{10}\rfloor+\lfloor L_{13}L_{12}\rfloor+\lfloor L_{14}L_{15}\rfloor)= \quad iL_{10}$$
$$m(\lfloor L_2L_3\rfloor+\lfloor L_4L_5\rfloor+\lfloor L_7L_6\rfloor+\lfloor L_8L_9\rfloor+\lfloor L_{11}L_{10}\rfloor+\lfloor L_{13}L_{12}\rfloor+\lfloor L_{14}L_{15}\rfloor)= \quad iL_{11}$$
$$m(\lfloor L_2L_3\rfloor+\lfloor L_4L_5\rfloor+\lfloor L_7L_6\rfloor+\lfloor L_8L_9\rfloor+\lfloor L_{11}L_{10}\rfloor+\lfloor L_{13}L_{12}\rfloor+\lfloor L_{14}L_{15}\rfloor)= \quad iL_{12}$$
$$m(\lfloor L_2L_3\rfloor+\lfloor L_4L_5\rfloor+\lfloor L_7L_6\rfloor+\lfloor L_8L_9\rfloor+\lfloor L_{11}L_{10}\rfloor+\lfloor L_{13}L_{12}\rfloor+\lfloor L_{14}L_{15}\rfloor)= \quad iL_{13}$$
$$m(\lfloor L_2L_3\rfloor+\lfloor L_4L_5\rfloor+\lfloor L_7L_6\rfloor+\lfloor L_8L_9\rfloor+\lfloor L_{11}L_{10}\rfloor+\lfloor L_{13}L_{12}\rfloor+\lfloor L_{14}L_{15}\rfloor)= \quad iL_{14}$$
$$m(\lfloor L_2L_3\rfloor+\lfloor L_4L_5\rfloor+\lfloor L_7L_6\rfloor+\lfloor L_8L_9\rfloor+\lfloor L_{11}L_{10}\rfloor+\lfloor L_{13}L_{12}\rfloor+\lfloor L_{14}L_{15}\rfloor)= \quad iL_{15}$$

где $\mathrm{m}=15$, которые соответствуют соотношениям пятнадцатимерной векторной алгебры [1]. (Пятнадцатимерная векторная алгебра является развитием темы многомерных векторных алгебр. См. предыдущие работы [2;3]).

У группы пятнадцатимерных вращений, коммутирующих между собой, генераторов нет: её ранг равен единице и подалгебры Картана отсутствуют. Из генераторов группы пятнадцатимерных вращений, следовательно, можно образовать лишь один оператор Казимира, коммутирующий со всеми генераторами

$$L^2=L_1^2+L_2^2+\ldots+L_{15}^2=14I$$

так, что скалярный квадрат оператора момента импульса сохраняется.

В случае пятнадцатимерных вращений оператор Казимира сопоставляется квадрату момента 15-импульса. Совокупность всех вращений пятнадцатимерного пространства обладает следующими свойствами.

1. Два последовательных вращения (произведение вращений) есть снова вращение; произведению вращений соответствует произведение матриц, которое снова является матрицей того же типа.

2. Среди вращений имеется такое, при котором пространство переходит само в себя (единичное вращение); такому вращению соответствует единичная матрица.

3. Каждому вращению $\mathrm{A_i}$ можно сопоставить обратное вращение A_i^{-1}, которое задается углами $-\varphi_i$. Произведение исходного и обратного вращений эквивалентно единичному вращению $A_iA_i^{-1}=1$. Обратному вращению соответствует матрица A_i^{-1}, обратная исходной.

Совокупность вращений, обладающих тремя перечисленными свойствами, образуют подгруппу Q_{15} ортогональной группы O_{15}. Матрицы пятнадцатимерных вращений образуют также группу.

Литература

4. **Коротков А. В**. Элементы пятнадцатимерного векторного исчисления. –Новочеркасск: Изд-во “НОК“, 2011. –36 с.

5. **Коротков А. В.** Элементы трех- и семимерного изовекторного и спинорного исчислений. –Новочеркасск: Набла, 1999. –100 с.

6. **Коротков А. В.** Элементы семимерного векторного исчисления. Алгебра. Геометрия. Теория поля. –Новочеркасск: Набла, 1996. – 244 с.

КОРОТКОВ А.В
КЛАССИФИКАЦИЯ БАРИОНОВ СО СПИНОМ ½ В СЕМИМЕРНОЙ ФИЗИКЕ

Семипараметровые шестимерные унитарные SV6 преобразования вращения [1] прогнозируют наличие частиц с пространственным спином J=1/2, определяемых совокупностями мультиплетов по шесть частиц. Известные частицы со спином J=1/2 сосредоточены в мультиплетах из шести лептонов и шести кварков, а также в группе из тридцати барионов [2]. Прогнозируется наличие еще шести барионов со спином J=1/2. Их свойства можно пытаться оценить, если проанализировать свойства известных частиц как комбинацию шестикомпонентного мультиплета лептонов и шестикомпонентного мультиплета барионов со спином J=1/2. Вместе с тем квантовые числа лептонов не зафиксированы, чего нельзя сказать, например, в отношении кварков (табл. 1):

Квантовые числа кварков и лептонов **Таблица 1.**

Кварки						Лептоны					
назв.	I	P	S	C	B	назв.	I	P	S	C	B
u	½	+	0	0	0	ν_e					
d	½	+	0	0	0	e					
s	0	+	-1	0	0	μ					
c	0	+	0	1	0	ν_μ					
b	0	+	0	0	-1	τ					
t	0	+	0	0	0	ν_τ					

В табл. 1 приведены общепринятые обозначения частиц и квантовых чисел. Не заполненные клетки таблицы соответствуют неизвестным или подлежащих уточнению значениям величин. Квантовые числа лептонов, очевидно, образуют "чистое поле". Основание для анализа свойств составных частиц могут дать лишь кварки. Для них имеем следующее распределение частиц по квантовым числам (табл. 2):

Распределение кварков по квантовым числам Таблица 2.

Квантовые числа	Распределение кварков
I	$4_0 + 2_{1/2}$
P	6_+
S	$5_0 + 1_{-1}$
C	$5_0 + 1_1$
B	$5_0 + 1_{-1}$

Семимерное спинорное исчисление [1] дает основание полагать, что то же самое распределение квантовых чисел имеет место для лептонов. Принимая это во внимание, рассмотрим квантовые числа известных барионов со спином J=1/2 (табл. 3):

Квантовые числа известных барионов со спином J=1/2 Таблица 3.

I=0					I=1/2					I=1					I=3/2				
наим.	P	S	C	B	наим.	P	S	C	B	наим.	P	S	C	B	наим.	P	S	C	B
Λ_{1115}	+	-1	0	0	p^+_{938}	+	0	0	0	Σ^+_{1189}	+	-1	0	0	Δ_{1620}	-	0	0	0
Λ_{1405}	-	-1	0	0	n^0_{939}	+	0	0	0	Σ^0_{1192}	+	-1	0	0	Δ_{1910}	+	0	0	0
Λ_{1600}	+	-1	0	0	Ξ^0_{1314}	+	-2	0	0	Σ^-_{1197}	+	-1	0	0					
Λ_{1670}	-	-1	0	0	Ξ^-_{1321}	+	-2	0	0	Σ_{1660}	+	-1	0	0					
Λ_{1800}	-	-1	0	0	N_{1440}	+	0	0	0	Σ_{1750}	-	-1	0	0					
Λ_{1810}	+	-1	0	0	N_{1535}	-	0	0	0	Σ^0_{c2455}	+	0	1	0					
Λ^+_{c2284}	+	0	1	0	N_{1650}	-	0	0	0	Σ^+_{c2455}	+	0	1	0					
Λ^+_{c2593}	-	0	1	0	N_{1710}	+	0	0	0	Σ^{++}_{c2455}	+	0	1	0					
Ω^0_{c2704}	+	-2	1	0	Ξ^+_{c2465}	+	-1	1	0										
Λ^0_{b5624}	+	0	0	-1	Ξ^0_{c2470}	+	-1	1	0										

Имеем следующее распределение известных барионов с J=1/2 по квантовым числам (табл. 4):

Распределение известных барионов с J=1/2 по квантовым числам Таблица 4

Квантовые числа	Распределение барионов
I	$10_0 + 10_{1/2} + 8_1 + 2_{3/2}$
P	$22_+ + 8_-$
S	$14_0 + 13_{-1} + 3_{-2}$
C	$22_0 + 8_1$
B	$29_0 + 1_{-1}$

Составим прогноз распределения барионов с J=1/2 по квантовым числам, исходя из условия взаимодействия шестикомпонентного мультиплета лептонов и шестикомпонентного мультиплета барионов с J=1/2 с пока не установленным распределением частиц по квантовым числам.

Для прогноза распределения барионов с J=1/2 по изотопическому спину отметим, что четыре группы таких частиц может образовать лишь взаимодействие двух по изотопическому спину групп лептонов $I \to (4_0 + 2_{1/2})$ и трех по изотопическому спину групп барионов вида $I \to (m_0 + n_{1/2} + k_1)$. Распределение известных барионов по изотопическому спину допускает лишь m=3, n=2, k=1. При этом имеем

$$I \to (4_0 + 2_{1/2})(3_0 + 2_{1/2} + 1_1) = 12_0 + 14_{1/2} + 8_1 + 2_{3/2}.$$

Следовательно, следует считать завершенными мультиплеты барионов с J=1/2, имеющие I=1 и I=3/2, а в мультиплеты с I=0 и I=1/2 необходимо ввести соответственно 2 и 4 неизвестные частицы.

Для прогноза распределения барионов с J=1/2 по четности отметим, что две группы таких частиц может образовать лишь взаимодействие одной по четности группы лептонов $P \to 6_+$ и двух по четности групп барионов вида $P \to (m_+ + n_-)$. Распределение известных барионов с J=1/2 по четности допускает лишь m=4, n=2. При этом имеем

$$P \to 6_+ (4_+ + 2_-) = 24_+ + 12_-.$$

Следовательно, нет завершенных мультиплетов известных барионов с J=1/2,а в мультиплеты с P_+ и P_- необходимо ввести соответственно 2 и 4 неизвестные частицы.

Для прогноза распределения барионов с J=1/2 по странности отметим, что три группы таких частиц может образовать лишь взаимодействие двух по странности групп лептонов вида $S \to (5_0 + 1_{-1})$ и двух по странности групп барионов вида $S \to (m_0 + n_{-1})$. Распределение известных барионов по странности допускает лишь m=3, n=3. При этом имеем

$$S \to (5_0 + 1_{-1})(3_0 + 3_{-1}) = 15_0 + 18_{-1} + 3_{-2}.$$

Следовательно, следует считать завершенным мультиплет известных барионов с J=1/2, имеющий S=-2, а в мультиплеты с S=0 и S=-1 необходимо ввести соответственно 1 и 5 неизвестных частиц.

Для прогноза распределения барионов с J=1/2 по очарованию отметим, что три по очарованию группы частиц может образовать лишь взаимодействие двух по очарованию групп лептонов $C \to (5_0 + 1_1)$ и двух по очарованию групп барионов вида $C\rightarrow(m_0 + n_1)$. Распределение известных барионов по очарованию допускает лишь m=5, n=1 . При этом имеем

$$C\rightarrow(5_0 + 1_1)(5_0 + 1_1) = 25_0 + 10_1 + 1_2.$$

Следовательно, нет завершенных по очарованию мультиплетов известных барионов с J=1/2, а в мультиплеты с C=0, C=1 и C=2 необходимо ввести соответственно 3, 2 и 1 неизвестные частицы.

Для прогноза распределения барионов с J=1/2 по боттому отметим, что две группы таких частиц может образовать лишь взаимодействие двух по боттому групп лептонов $B\rightarrow(5_0 + 1_{-1})$ и одной по боттому группы барионов вида $B\rightarrow 6_0$. При этом имеем

$$B\rightarrow(5_0 + 1\text{-}_1)\ 6_0 = 30_0 + 6_{-1}.$$

Следовательно, нет завершенных мультиплетов известных барионов с J=1/2, а в мультиплеты с B=0 и B=-1 необходимо ввести соответственно 1 и 5 неизвестных частиц.

Распределение барионов со спином J=1/2 по квантовым числам приведено в табл. 5.

Распределение барионов со спином J=1/2 по квантовым числам Таблица 5.

Квантовые числа	Распределение известных барионов	Распределение неизвестных барионов	Распределение группы барионов
I	$10_0 + 10_{1/2} + 8_1 + 2_{3/2}$	$2_0 + 4_{1/2}$	$12_0 + 14_{1/2} + 8_1 + 2_{3/2}$
P	$22_+ + 8_-$	$2_+ + 4_-$	$24_+ + 12_-$
S	$14_0 + 13_{-1} + 3_{-2}$	$1_0 + 5_{-1}$	$15_0 + 18_{-1} + 3_{-2}$
C	$22_0 + 8_1$	$3_0 + 2_1 + 1_2$	$25_0 + 10_1 + 1_2$
B	$29_0 + 1_{-1}$	$1_0 + 5_{-1}$	$30_0 + 6_{-1}$

Распределим прогнозируемую совокупность квантовых чисел по неизвестным частицам. Для этого отметим, что частицы с I=1/2 образует нечетная совокупность кварков u и d, а с I=0 – четная. Это фиксирует значение квантовых чисел неизвестных частиц (табл.6):

Распределение неизвестных барионов с J=1/2 по квантовым числам

Таблица 6.

I=0				I=1/2				I=1	I=3/2
наим.	S	C	B	наим.	S	C	B		
Λ^0scb	-1	1	-1	$N^{(++,+)}$(u,d)cc	0	2	0		
Λ^0scb	-1	1	-1	$N^{(-,0)}$(d,u)sb	-1	0	-1		
				Ξ^0usb	-1	0	-1		
				Ξ^-dsb	-1	0	-1		

В табл. 4 символом (i, j) обозначены значения величин, которые могут соответствовать лишь одному из столбцов в парах частиц, причем первые значения предпочтительнее. Остается уточнить их распределение по двум N неизвестным частицам.

Возможно построение двух типов мультиплетов из шести известных барионов с J=1/2 с найденным распределением квантовых чисел:

1. С очарованной Σ_c частицей (S=0, C=1, B=0), тремя Λ (S=-1, C=0, B=0) и двумя N (S=0, C=0, B=0) частицами;
2. С очарованной Λ^+_c частицей (S=0, C=1, B=0), двумя Λ частицами (S=-1, C=0, B=0), двумя N частицами (S=0, C=0, B=0) и не очарованной Σ частицей (S=-1, C=0, B=0).

Таким образом, SV6 преобразования прогнозируют наличие в природе шести неизвестных частиц со спином J=1/2 с конкретными значениями основных квантовых чисел. Они не традиционны по совокупности значений квантовых чисел, пяти из них соответствуют значения боттома B=-1, три частицы с очарованием, одна из них с двойным, пять частиц – странных.

Остается надеяться, что эксперимент подтвердит эти прогнозы. Это зафиксировало бы также распределение квантовых чисел шестерки взаимодействующих бозонов. Отметим, что некоторые известные, но малоизученные частицы, например, Λ_b, Ξ^0_b, Ξ^-_b, Ω_b, могли бы являться претендентами на включение в табл. 6 для шести неизвестных частиц. Квантовые числа C и B могут обусловить значительные массы неизвестных частиц ($\approx$ 3-7 Гэв).

Тот же подход к классификации барионов со спином J=3/2, где имеет место распределение 16-ти известных частиц по изотопическому спину вида

$$I \to 4_0 + 5_{1/2} + 3_1 + 4_{3/2}$$

дает двузначное решение:

1. $I \to (4_0 + 2_{1/2})(2_0 + 2_{1/2} + 2_1) = 8_0 + 12_{1/2} + 12_1 + 4_{3/2}$;
2. $I \to (4_0 + 2_{1/2})(3_0 + 1_{1/2} + 2_1) = 12_0 + 10_{1/2} + 10_1 + 4_{3/2}$,

так что заполнена лишь группа частиц с I=3/2 и преждевременно предвидеть результат до заполнения хотя бы одной из первых трех групп частиц. То же самое относится к барионам с большим спином.

Литература

1. **Korotkov A.V**. Elements of hepto-dimensional vector and spinor calculus. – Novocherkassk: "Nok", 2000. – 321 p.
2. **Caso C**. **et al**. Review of Particle Physics. (Particle Data Group), European Physical Journal C3, 1., 1998.

КОРОТКОВ А.В
К ВОПРОСУ КЛАССИФИКАЦИИ МЕЗОНОВ СО СПИНОМ 1 В СЕМИМЕРНОЙ ФИЗИКЕ

Семипараметровые семимерные ортогональные Q7 преобразования вращения [1] прогнозируют наличие 63 частиц с пространственным спином J=1, определяемых совокупностями мультиплетов по 7 частиц. Известные частицы со спином J=1 сосредоточены в мультиплете из 14-ти GAUGE и HIGGS бозонов, а также в группе из 42-х мезонов [2]. Прогнозируется наличие еще 7 мезонов со спином J=1. Их свойства можно пытаться оценить, если проанализировать свойства известных частиц как комбинации семикомпонентного мультиплета из GAUGE и HIGGS бозонов и семикомпонентного мультиплета мезонов со спином J=1. Вместе с тем квантовые числа GAUGE и HIGGS бозонов не зафиксированы и они не распределены по двум семикомпонентным мультиплетам с одинаковыми квантовыми числами (табл. 1):

Квантовые числа GAUGE и HIGGS бозонов Таблица 1.

назв.	I	P	S	C	B	назв.	I	P	S	C	B
γ	(0,1)	-				g_7	0	-			
g_1	0	-				g_8	0	-			
g_2	0	-				W					
g_3	0	-				Z					
g_4	0	-				H^0					
g_5	0	-				H^+					
g_6	0	-				H^-					

В табл. 1 приведены общепринятые обозначения частицы квантовых чисел. Не заполненные клетки таблицы соответствуют неизвестным или подлежащим уточнению значениям величин. Квантовые числа GAUGE и HIGGS бозонов, очевидно, образуют чистое поле и основание для анализа свойств составных частиц дать не могут. Отметим, однако, что в каждом из двух семикомпонентных мультиплетов GAUGE и HIGGS бозонов присутствуют по крайней мере по четыре частицы с I=0 и по пять частиц с отрицательной четностью.

Принимая во внимание это обстоятельство, рассмотрим квантовые числа известных мезонов со спином J=1 (табл. 2):

Квантовые числа известных мезонов со спином J=1 Таблица 2.

I=0					I=1/2					I=1					I=3/2				
наим.	P	S	C	B	наим.	P	S	C	B	наим.	P	S	C	B	наим.	P	S	C	B
ω_{782}	-	0	0	0	K^{*+}_{892}	-	±1	0	0	ρ_{770}	-	0	0	0					
$\varnothing_{1020}$	-	0	0	0	K^{*-}_{892}	-	±1	0	0	$b_{1\ 1235}$	+	0	0	0					
$h_{1\ 1170}$	+	0	0	0	K^{*0}_{892}	-	±1	0	0	$a_{1\ 1260}$	+	0	0	0					
$f_{1\ 1285}$	+	0	0	0	K_{1270}	+	±1	0	0	ρ_{1450}	-	0	0	0					
$f_{1\ 1420}$	+	0	0	0	K_{1400}	+	±1	0	0	ρ_{1700}	-	0	0	0					
ω_{1420}	-	0	0	0	K^{*}_{1410}	-	±1	0	0										
ω_{1650}	-	0	0	0	K^{*}_{1680}	-	±1	0	0										
$\varnothing_{1680}$	-	0	0	0	D^{*0}_{2007}	-	0	±1	0										
$D^{+}_{S1\ 2536}$	+	±1	±1	0	D^{*+}_{2010}	-	0	±1	0										
$D^{-}_{S1\ 2536}$	+	±1	±1	0	D^{*-}_{2010}	-	0	±1	0										
j/ψ_{3096}	-	0	±1	0	D^{10}_{2420}	+	0	±1	0										
$\chi_{C1\ 3910}$	+	0	±1	0	B^{*}_{5325}	-	0	0	±1										
наим.	P	S	C	B	наим.	P	S	C	B	наим.	P	S	C	B	наим.	P	S	C	B
$\psi_{2s\ 3685}$	-	0	±1	0															
ψ_{3770}	-	0	±1	0															
ψ_{4040}	-	0	±1	0															
ψ_{4160}	-	0	±1	0															
ψ_{4415}	-	0	±1	0															
$\gamma_{1s\ 9460}$	+	0	0	±1															
$\chi_{b1\ 9892}$	-	0	0	±1															
$\gamma_{2s\ 10023}$	+	0	0	±1															
$\chi_{b1\ 10255}$	-	0	0	±1															
$\gamma_{3s\ 10355}$	-	0	0	±1															
$\gamma_{4s\ 10580}$	-	0	0	±1															
γ_{10860}	-	0	0	±1															
γ_{11020}	-	0	0	±1															

Имеем следующее распределение известных мезонов с J=1 по квантовым числам (табл. 3):

Распределение известных мезонов с J=1 по квантовым числам Таблица 3.

Квантовые числа	Распределение мезонов
I	$25_0 + 12_{1/2} + 5_1$
P	$29_- + 13_+$
S	$33_0 + 9_{\pm 1}$
C	$29_0 + 13_{\pm 1}$
B	$33_0 + 9_{\pm 1}$

Составим прогноз распределения мезонов с J=1 по квантовым числам, исходя из условия взаимодействия семикомпонентного мультиплета GAUGE и HIGGS бозонов и семикомпонентного мультиплета мезонов с J=1 с пока не установленным распределением частиц по квантовым числам.

Для прогноза распределения мезонов с J=1 по изотопическому спину отметим, что распределению известных мезонов с J=1 по изотопическому спину может соответствовать лишь взаимодействие двух по изотопическому спину групп бозонов вида $I \rightarrow (5_0 + 2_{1/2})$ и трех по изотопическому спину групп мезонов вида $I \rightarrow (m_0 + n_{1/2} + k_1)$. Распределение известных мезонов по изотопическому спину допускает лишь m=5, n=1, k=1. При этом имеем

$$I \rightarrow (5_0 + 2_{1/2})(5_0 + 1_{1/2} + 1_1) = 25_0 + 15_{1/2} + 7_1 + 2_{3/2}.$$

Следовательно, следует считать завершенным мультиплет известных мезонов с J=1, имеющий I=0, а в мультиплеты с I=1/2, I=1 и I=3/2 необходимо ввести соответственно 3, 2 и 2 неизвестные частицы. Из 14-ти GAUGE и HIGGS бозонов 10 частиц должны иметь I=0, а 2 или 4 частицы I=1/2.

Для прогноза распределения мезонов с J=1 по четности отметим, что распределению известных мезонов с J=1 по четности может соответствовать лишь взаимодействие двух по четности групп частиц вида $P \rightarrow (5_\pm + 2_+)$ и одной по четности группы вида $P \rightarrow 7_+$. При этом имеем

$$P \rightarrow 7_+ (5_\pm + 2_+) = 35- + 14_+.$$

Следовательно, нет завершенных мультиплетов известных мезонов с J=1 по четности, а в мультиплеты с P_+ и P_- необходимо ввести соответственно 1 и 6 неизвестные частицы. Вероятно, все 14-ть GAUGE и HIGGS бозонов имеют отрицательную четность. Менее вероятно, что 10 частиц имеют отрицательную, а 4 частицы – положительную четность.

Для прогноза распределения мезонов с J=1по странности отметим, что распределению известных мезонов с J=1 по странности могут соответствовать взаимодействия двух типов:

1. $S \rightarrow (6_0 + 1_{\pm 1})(6_0 + 1_{\pm 1}) = 36_0 + 12_{\pm 1} + 1_{\pm 2}$;
2. $S \rightarrow (5_0 + 2_{\pm 1})7_0 = 35_0 + 14_{\pm 1}$.

Следовательно, преждевременно предвидеть результат до заполнения хотя бы одной из трех групп частиц. Во всяком случае, нет завершенных мультиплетов известных мезонов с J=1 по странности, а в мультиплеты с S=0 и S=±1 необходимо ввести не менее двух и трех неизвестных частиц соответственно. Вероятно, две или четыре частицы из числа GAUGE и HIGGS бозонов имеют значение S=±1, хотя не исключен вариант отсутствия в их составе странных частиц.

Для прогноза распределения мезонов с J=1 по очарованию отметим, что распределению известных мезонов с J=1 по очарованию может соответствовать лишь взаимодействие:

$C \to (5_0 + 2_{\pm 1})7_0 = 35_0 + 14_{\pm 1}$.

Следовательно, нет завершенных мультиплетов известных мезонов с J=1 по очарованию, а в мультиплеты с C=0 и C=±1 необходимо ввести соответственно 6 и 1 неизвестные частицы. Вероятно, четыре частицы из числа GAUGE и HIGGS бозонов имеют значение C=±1, хотя не исключен вариант отсутствия в их составе очарованных частиц.

Для прогноза распределения мезонов с J=1 по боттому отметим, что распределение известных мезонов с J=1 по боттому могут соответствовать взаимодействия двух типов:

1. $B \to (6_0+1_{\pm 1})(6_0+1_{\pm 1}) = 36_0 + 12_{\pm 1} + 1_{\pm 2}$;
2. $B \to (5_0+2_{\pm 1})7_0 = 35_0 + 14_{\pm 1}$.

Следовательно, преждевременно предвидеть результат до заполнения хотя бы одной из трех групп частиц. Во всяком случае, нет завершенных мультиплетов известных мезонов с J=1 по боттому, а в мультиплеты с B=0 и B=±1 необходимо ввести не менее двух и трех неизвестных частиц соответственно. Вероятно, две или четыре частицы из числа GAUGE и HIGGS бозонов, имеют значение B=±1, хотя не исключен вариант отсутствия в их составе боттомных частиц.

Отметим, что построение мультиплетов из семи взаимодействующих известных мезонов с J=1 также преждевременно до уточнения распределения мезонов по квантовым числам.

Литература

3. **Korotkov A.V**. Elements of hepto-dimensional vector and spinor calculus. – Novocherkassk: "Nok", 2000. – 321 p.
4. **Caso C. et al.** Review of Particle Physics. (Particle Data Group), European Physical Journal C3, 1, 1998.

КОРОТКОВ А.В.
ВОСЬМИМЕРНОЕ ПСЕВДОЕВКЛИДОВО ПРОСТРАНСТВО - ВРЕМЯ

Частица в восьмимерном псевдоевклидовом пространстве-времени

В теоретической физике, в частности в механике и электродинамике, широко используется понятие четырехмерного псевдоевклидового пространства-времени индекса три, которое характеризуется тремя отрицательными пространственными компонентами квадрата интервала

$$S^2 = c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2$$

между событиями, определяемыми совокупностью координат (ct, x, y, z). Эти координаты рассматриваются как компоненты четырехмерного радиус-вектора $x^i = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z) = (ct, r)$, квадрат длины которого определяется выражением

$$x^i x_i = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2$$

так, что $x^i = (ct, -r)$.

По нашему мнению, представляет интерес изучение свойств восьмимерного псевдоевклидового пространства-времени индекса семь, которое характеризуется семью отрицательными пространственными компонентами квадрата интервала между событиями, определяемыми совокупностью компонент восьмимерного радиус-вектора

$$x^i = (x^0, x^1, \ldots, x^7) = (ct, r),$$

квадрат длины которого определяется выражением

$$x^i x_i = (x^0)^2 - (x^1)^2 - \ldots - (x^7)^2$$

так, что $x^i x_i = (ct, -r)$.

Рассмотрим свойства восьмимерного псевдоевклидового пространства-времени, полагая квадрат интервала между событиями инвариантом по отношению к преобразованию от одной инерциальной системы отсчета к любой другой.

Пусть $x_1^0, x_1^1, \ldots, x_1^7$ и $x_2^0, x_2^1, \ldots, x_2^7$ координаты двух событий в некоторой системе K. Спрашивается, существует ли также система K′, в которой оба эти события происходили в одном и том же месте пространства? Введем обозначение

$$(x_2^0 - x_1^0)^2 = c^2(t_2 - t_1) = c^2 t_{12}^2 \text{ и } (x_2^1 - x_1^1) + \ldots + (x_2^7 - x_1^7) = l_{12}^2$$

Тогда квадрат интервала между событиями в системе $K\ S_{12}^2 = c^2 t_{12}^2 - l'^2_{12}$ и в системе $K'\ S_{12}^2 = c^2 t'^2_{12} - l'^2_{12}$, причем в силу инвариантности квадрата интервала

$$c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2 = c^2 t'^2_{12} - l'^2_{12}.$$

Мы хотим, чтобы в системе К′ оба события произошли в одной точке, т.е. чтобы $l'^2_{12} = 0$; тогда $S_{12}^2 = c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2 = c^2 t_{12}^2$. Следовательно, система отсчета с требуемым свойством существует. Расстояние между точками, где произошли события в этой системе отсчета, равно $ct'_{12} = \sqrt{c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2}$.

Собственное время

Предположим, что мы наблюдаем из некоторой инерциальной семимерной системы отсчета К движущиеся относительно нас часы. Введем также инерциальную семимерную систему отсчета K', движущуюся относительно K со скоростью, совпадающей с семимерной скоростью V движения часов в данный момент времени.

В течение бесконечно малого промежутка времени по неподвижным часам движущиеся часы проходят расстояние $dl = ((dx^1)^2 + (dx^2)^2 + \ldots + (dx^7)^2)^{1/2}$.

В системе K', связанной с движущимися часами, последние в данный момент времени покоятся, т.е.

$$dx'^1 = dx'^2 = \ldots = dx'^7.$$

В силу инвариантности квадрата интервала

$$dS^2 = c^2 dt^2 - dl^2 = c^2 dt'_2,$$

откуда промежуток времени, зафиксированный движущимися часами

$$dt' = \sqrt{1 - V^2 / c^2 dt}.$$

Промежуток времени, показываемый движущимися часами, если по неподвижным часам пройдет время $\Delta t = t_2 - t_1$,

$$\Delta t' = t'_2 - t'_1 = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - V^2 / c^2 dt}$$

Очевидно, что собственное время движущегося объекта всегда меньше, чем соответствующий промежуток времени в неподвижной системе. Другими словами, движущиеся часы идут медленнее неподвижных и интеграл $\frac{1}{c}\int_a^b dS$, взятый между двумя точками, имеет максимальное значение, если часы неподвижны.

Преобразование координат восьмимерного пространства-времени

Найдем формулы преобразования координат при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой в восьмимерном псевдоевклидовом пространстве-времени. Искомое преобразование математически выражается, как собственное вращение восьмимерной системы координат $ct, x^1, x^2, ..., x^7$. Всякое вращение в восьмимерном пространстве можно разложить на двадцать восемь вращений в плоскостях. Рассматривая поворот в плоскости tx^1 при неизменяемых координатах $x^2, x^3, ..., x^7$ и квадрате интервала от точки ct, x до начала координат, получим связь между старыми и новыми координатами в этом преобразовании в виде

$$\begin{matrix} ct \\ x^1 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ x^7 \end{matrix} = \left\| \begin{matrix} Ch & Sh & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ Sh & Ch & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right\| \text{x} \begin{matrix} ct' \\ x^{1\prime} \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ x^{7\prime} \end{matrix}$$

$$ct = ct' ch\psi + c'^1 sh\psi,$$

$$x^1 = ct' ch\psi + x'^1 ch\psi,$$

где ψ – угол поворота, причем $c^2t^2-(x^1)^2=c^2t'^2-(x'^1)^2$. Остается определить угол ψ, который может зависеть только от относительной скорости V двух инерциальных семимерных систем отсчета.

Рассмотрим движение в системе K. Тогда $x'^1=0$ и, следовательно:

$$ct=ct'ch\psi,$$

$$x^1=ct'sh\psi,$$

или, разделив одно на другое:

$$\frac{x^1}{ct}=th\psi$$

Но $x^{1/t}$ есть, очевидно, семимерная скорость V системы относительно K', таким образом,

$$\mathrm{th}\psi=\frac{V}{c},$$

отсюда

$$\mathrm{sh}\psi=\frac{V/c}{\sqrt{1-V^2/c^2}},\quad ch\psi=\frac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}}$$

В результате находим:

$$t=\frac{t'+\frac{V}{c^2}x'^1}{\sqrt{1-V^2/c^2}},\ x^1=\frac{x'^1+Vt'}{\sqrt{1-V^2/c^2}},\ x^2=x'^2,\ldots,x^7=x'^7,\ x^2=x'^2,\ldots,\ x^7=x'^7\ .$$

Это искомые формулы преобразования. Они близки преобразованиям Лоренца и имеют для дальнейшего фундаментальное значение.

Формулы, выражающие $t', x'^1, x'^2, \ldots\ldots x'^7$ через $t, x^1, x^2, \ldots\ldots, x^7$ получаются заменой V на $-V$. При предельном переходе $c\to\infty$ эти формулы переходят в преобразование, близкое преобразованию Галилея.

Из преобразований координат объектов в восьмимерном псевдоевклидовом пространстве-времени можно оценить изменения длин и промежутков времени. Пусть длина покоящейся в системе K линейки $\Delta x^1=x_2^1-x_1^1$; координаты концов линейки в системе K' в один и тот же момент времени t´

$$x_2^1=\frac{x'^1_2+Vt'}{\sqrt{1-V^2/c^2}},\; x_1^1=\frac{x'^1_1+Vt'}{\sqrt{1-V^2/c^2}}$$

так, что

$$\Delta t=\frac{\Delta t'}{\sqrt{1-V^2/c^2}}$$

что полностью соответствует ранее полученным результатам.

Преобразование скорости

Найдем формулы, связывающие скорость движущейся частицы в одной системе отсчета со скоростью той же частицы в другой системе. Для этого рассмотрим систему *K′*, движущуюся относительно системы К с семимерной скоростью *V* вдоль оси x^1, тогда

$$dt=\frac{dt'+\frac{V}{c^2}dx'^1}{\sqrt{1-V^2/c^2}},\; dx^1=\frac{dx'^1+Vdt'}{\sqrt{1-V^2/c^2}}, dx^2=dx'^2,\ldots,dx^7=dx'^7.$$

Разделив на первое равенство остальные, находим:

$$\upsilon^1=\frac{dx^1}{dt}=\frac{dx'^1+Vdt'}{dt'+\frac{V}{c^2}dx'^1}=\frac{\upsilon'^1+V}{1+\frac{V\upsilon'}{c^2}}$$

$$\upsilon^2=\frac{dx^2}{dt}=\frac{dx'^2\sqrt{1-V^2/c^2}}{dt'+\frac{V}{c^2}dx'^1}=\frac{\upsilon'^2\sqrt{1-V^2/c^2}}{1+\frac{V\upsilon'^1}{c^2}},$$

…

$$\upsilon^7=\frac{dx^7}{dt}=\frac{dx'^7\sqrt{1-V^2/c^2}}{dt'+\frac{V}{c^2}dx'^1}=\frac{\upsilon'^7\sqrt{1-V^2/c^2}}{1+\frac{V\upsilon'^1}{c^2}}.$$

Эти формулы и определяют преобразование скоростей, представляя собой закон сложения скоростей. В предельном случае $c\to\infty$ они переходят в формулы, близкие формулам классической механики $v^1=v'^1+V, v^2=v'^2,\ldots,v^7=v'^7$. В частном случае движения частицы параллельно оси $x^1 v^1=v, v^2=v^3=v^7=0$. Тогда $v'^2=v'^3=\ldots=v'^7=0$, а $v'^1=v'$ причем,

$$\upsilon = \frac{\upsilon' + V}{1 + \frac{V\upsilon'}{c^2}}.$$

Легко убедиться в том, что сумма двух скоростей меньших или равных скорости *c*, есть снова скорость, не большая скорости c.

Выберем оси так, чтобы скорость частицы в данный момент лежала в плоскости x^1x^2, тогда скорость частицы в системе K имеет компоненты

$v^1 = v\cos Q$, $v^2 = v\sin Q$, а в системе K' имеем $v'^1 = v'\cos Q'$, $v'^2 = v\sin Q'$ $(v, v'\ u\ Q, Q')$ – абсолютные величины скоростей и углы, образованные семимерными скоростями с осями x^1 и x'^1 соответственно в системах K и K'). Тогда находим

$$tgQ = \frac{\upsilon^2}{\upsilon^1} = \frac{\upsilon'^2\sqrt{1 - V^2/c^2}}{\upsilon'1 + V} = \frac{\upsilon'\sin Q'\sqrt{1 - V^2/c^2}}{\upsilon'\cos Q' + V}.$$

Эта формула определяет изменение направления скорости при переходе от одной системы отсчета к другой.

Рассмотрим изменение направления скорости частиц, движущихся со скоростью *c* (явление аберрации). В этом случае $v = v' = c$ и

$$tgQ = \frac{\sqrt{1 - V^2/c^2}}{\cos Q' + V/c}\sin Q'.$$

В случае V<<c находим с точностью до членов порядка V/c

$$tgQ = tgQ'\left(1 - \frac{V}{c\cos Q'}\right).$$

Вводя угол $\Delta Q = Q' - Q$ (аберрации), находим с той же точностью:

$$\Delta Q = \frac{V}{c}\sin Q'$$

т.е. элементарную формулу для аберрации света.

Энергия и импульс свободной частицы

Для вывода уравнения движения частиц будем исходить из принципа наименьшего действия. Начнем с нахождения интеграла действия для свободной частицы.

Интеграл действия для свободной частицы должен быть инвариантом относительно преобразований координат и поэтому должен быть взят от скаляра, причем под интегралом должны стоять дифференциалы в первой степени. Таким скаляром для свободной частицы является величина const $dS = McdS$, где M – некоторая постоянная, так что

$$\mathrm{Sm} = -\mathrm{Mc}\int \mathrm{d\,S},$$

причем интеграл $\int \mathrm{d\,S}$ имеет максимальное значение в той системе отсчета, где часы неподвижны, следовательно:

$$Sm = -Mc\int dS = -Mc^2\int_{t1}^{t2}\sqrt{1-V^2/c^2}\,dt = \int_{t1}^{t2} Ldt,$$

где $L = -Mc^2\sqrt{1-V^2/c^2}$ – функция Лагранжа.

Разложим ее в ряд по степеням V/c и, опустив члены высших порядков, получим:

$$L = -Mc^2 + \frac{MV^2}{2}.$$

Постоянный член в функции Лагранжа может быть опущен. После этого мы вернемся к классическому выражению $L = MV^2/2$. В то же время выясняется смысл постоянной M, которая как производная $p = \partial L/\partial V$, т.е.

$$p = \frac{MV}{\sqrt{1-V^2/c^2}}$$

При малых скоростях $(V \langle\langle c)$ это выражение переходит в классическое $p = MV$.

Производная от импульса по времени есть сила, действующая на частицу. Пусть скорость частицы изменяется только по направлению, т.е. сила направлена перпендикулярно к скорости, тогда

$$\frac{dp}{dt} = \frac{M}{\sqrt{\left(1-V^2/c^2\right)^3}}\frac{dV}{dt}.$$

Энергия частицы определяется уравнением $\varepsilon = \dfrac{\partial L}{\partial V}V - L$, т.е.

$$\varepsilon = \frac{Mc^2}{\sqrt{1-V^2/c^2}}.$$

Здесь и далее скалярные произведения даны без скобок.

Энергия свободной частицы не обращается в нуль при $V=0$, а остается конечной величиной, равной $\varepsilon = Mc^2$.

При малых скоростях $(V \langle\langle c)$ имеем, разлагая по степеням V/c,

$$\varepsilon = Mc^2 + \frac{MV^2}{2},$$

т.е., за вычетом энергии покоя, классическое выражение для кинетической энергии частицы.

Из выражения для энергии и импульса частицы, найдем следующие соотношения между ними

$$\frac{\varepsilon^2}{c^2} - p^2 = (Mc)^2$$

и $p = \dfrac{\varepsilon V}{c^2}$

При V=c импульс и энергия частицы обращаются в бесконечность, так что частица с отличной от нуля массой не может двигаться со скоростями, равными скоростям света. В случае M=0 при этом имеем

$$p = \frac{\varepsilon}{c}.$$

Восьмимерный импульс

Уточним закон преобразования энергии и импульса частицы при переходе от одной системы отсчета к другой.

Восьмимерной скоростью при этом является 8 - вектор

$$U^i = \frac{dx^i}{dS} = \frac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}}\frac{dx^i}{cdt}$$

с компонентами

$$U^i = \left(\frac{1}{\sqrt{1 - V^2 / c^2}}, \frac{V}{c\sqrt{1 - V^2 / c^2}} \right)$$

так, что при $dx^i dx_i = dS^2$ находим $U^i U_i = 1$, причем восьмимерным импульсом является 8 - вектор

$$p^i = McU^i = \left(\frac{\varepsilon}{c}, p \right).$$

Таким образом, энергия и импульс частицы в восьмимерном псевдоевклидовом пространстве-времени индекса семь является компонентами 8-вектора, что дает формулы преобразования этих величин в виде

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon' + Vp'^1}{\sqrt{1 - V^2 / c^2}}, \; p^1 = \frac{p'^1 + \frac{V}{c^2}\varepsilon'}{\sqrt{1 - V^2 / c^2}}, \; p^2 = p'^2, \ldots, p^7 = p'^7.$$

Для квадрата 8- импульса свободной частицы в результате имеем

$$p^i p_i = M^2 c^2.$$

Очевидно, что уравнения классической и релятивистской механики вытекают из уравнений механики восьмимерного пространства-времени индекса семь в пренебрежении четырьмя координатами векторов.

Отметим, что трехмерная векторная алгебра позволила получить теоретическую физику, использующую её как математическую базу во всех разделах, в том числе для построения частной теории относительности. Трехмерная векторная алгебра явилась основой для построения векторных алгебр размерности (1, 3), 7, 15, 31, 63, 127, …, 2047, …, 2^n-1, … Данная работа является примером построения одного из многочисленных разделов теоретической физики (многомерной теоретической физики). Она показывает, что многомерные соотношения расширяют пространственные представления, причем они видоизменятся лишь в координатной форме. В векторной записи оба представления, как показано выше, на базе трехмерного пространства и четырехмерного пространства-времени полностью совпадают с семимерным векторным вариантом. Специалисты, владеющие трехмерным векторным исчислением, без труда освоят многомерное векторное исчисление во всех разделах теоретической физики. В векторной форме записи семимерное исчисление полностью воспроизводит законы трехмерного векторного исчисления. Отличия возникают лишь для взаимосвязи четырех и большего числа векторов, когда трехмерное исчисление уже не действует. При этом появляется значительное число многомерных инвариантных скалярных и векторных величин, характеризующих новые законы сохранения, отсутствующие в трёхмерном исчислении.

Литература

1.**Коротков А. В.** Элементы семимерного векторного исчисления. Алгебра. Геометрия. Теория поля. –Новочеркасск: Набла, 1996. –244 с.

2.**Ландау Л. Д., Лившиц Е. М.** Краткий курс теоретической физики. – М.: Наука, 1969. Кн.1. Механика. Электродинамика. –359 с.

ЧУРАКОВ В.С.
БЕСЕДА С А.В.КОРОТКОВЫМ О МНОГОМЕРНОСТИ

– Анатолий Васильевич, прежде всего хотелось бы отметить очень неприятный факт общекультурного обнищания, куда как частный случай входит катастрофическое понижение или вернее, даже падение уровня математической культуры… Ваши работы, скорее всего, либо мало кто понимает, либо понимает превратно - извращённо, либо – вообще не понимает… Как Вы это воспринимаете? Как Вы к этому относитесь?

-Да, я это всё прекрасно понимаю… это всё, к сожалению, так…

В настоящее время появилось новое векторное трёхмерное исчисление, но не собственно евклидово, как у Евклида, а псевдоевклидово индекса 2, в котором фигурируют две отрицательные компоненты квадрата интервала, квадрата вектора. Это исчисление позволило показать, что оно вводит в формальные записи векторное исчисление Гамильтона-Грассмана, которое однако, собственно евклидово без отрицательных компонентов в квадрате вектора, но в координатной записи это различные вещи и совершенно новая алгебра со своим векторным и своим скалярным произведением двух векторов. Отсюда появляются и своеобразные функции, такие как: смешанное произведение трёх векторов, или двойное векторное произведение векторов.

Надо отметить, что эта алгебра также является алгеброй Ли, что немало важно для физиков. Так вот алгебра есть, на ней построены уже основы аналитической геометрии и основы теории поля. Надо сказать, что геометрия при этом не собственно евклидова, а трёхмерная геометрия Лобачевского индекса 2. Т.е. это совсем другая геометрия, совсем другая алгебра и самое главное, что ***есть алгебраическая основа геометрии Лобачевского***. Хотелось бы найти специалистов, которые занимаются векторным анализом в плане преподавания в высших учебных заведениях. Для того, чтобы квалифицированно написать учебник, аналогичный учебнику Тарапова и Борисенко по векторному анализу и теории поля. В Харьковском университете должны бы найтись последователи Тарапова и Борисенко, которые по его учебнику дают учебный материал студентам на мехмате и на физмате.

Тарапов теорию поля преподавал на основе тензорного анализа, а иначе её и не изложишь в доступной форме. Принципиальное отличие нового учебника от предыдущего должно быть, а совпадение в том, что это также векторная алгебра со скалярным векторным произведением векторов, алгеброй Ли, но алгебра псевдоевклидового типа с двумя отрицательными компонентами квадрата вектора. Это – принципиальное отличие: координатная форма записи совсем иная.

А, следовательно, теория поля на её основе будет давать совсем иные результаты, нежели теория электромагнитного поля. Хотя формальная запись большинства соотношений теории поля векторной алгебры будет тем же самым, что и в трёхмерном собственно евклидовом случае алгебры Гамильтона-Грассмана. Но не хотелось бы тензорное исчисление излагать так, как я его представляю. Потому, что я не преподавал никогда тензорного исчисления и знаком с ним только лишь по учебникам.

Я не слушал никогда лекций по тензорному анализу – т.е. я не крупный специалист в плане тензорного анализа. А мне хотелось бы, чтобы книга была квалифицированная, профессиональная. …..

Дело в том, что векторное исчисление сейчас излагается очень слабо в университетских курсах – можно сказать, что практически не излагается. Даже в МГУ на кафедре алгебры плохо представляют скалярное произведение, векторное произведение двух векторов, – будь я не прав, это было бы замечательно. Но будучи там, я это почувствовал, общаясь со специалистами на кафедрах математики МГУ.

Математические школы в ведущих университетах формализованы. Излагаются основы высшей алгебры, забывая при этом о том, что высшая алгебра была создана на основе векторной алгебры. А ведь векторная алгебра лежит в основе тензорного исчисления и высшей алгебры. И высшая алгебра – это вовсе уже не векторный аппарат и даже не тензорный аппарат. А там, где занимались векторным исчислением основательно – научные школы Кочина, Лаптева, Тарапова, – это единичные школы, которые сохранили исторический путь развития векторного анализа и тензорного анализа на его основе. Поэтому пути должны вести в Харьковский университет.

Теория новых полей очень редко возникает. Наиболее сильная теория – этотеория электормагнитного поля – в теоретическом отношении – единственная теория на данный момент. Лишь потому, что она использует сильный векторный аппарат в своей математической базе. Сейчас есть уже и другие векторные аппараты и основы для создания других теорий полей тоже есть.

-А в отношении ошибок?

-В отношении ошибок следовало бы сказать вот что…

В качестве примера можно использовать наше с Вами замечание по статье Орлова ‹‹Структура памяти человека голографическая модель›› из сборника научных работ под редакцией А.Н.Берёзы за 2008 год. В статье вышеупомянутого автора **не ошибка**. Здесь речь идёт о том, что процесс запоминания информации человеком удовлетворяет записи с помощью унитарной матрицы, причем унитарная берется квазидиагонально. Она состоит из матриц меньшей размерности также унитарных. И эти матрицы стоят по диагонали. Вот, собственно, форма записи матрицы. Она представлена на 81-й странице в этом сборнике. Если это так, то следует задать вопрос: почему, во-первых матрица должна быть унитарная? И второй вопрос: почему она должна быть квазидиагональная? И третий вопрос: почему она должна иметь произвольную размерность? Произвольной размерности, в таком случае, должна быть и соответствующая форма организации мозга человека. Нам представляется, что это не совсем оптимальный вариант (что мы и отметили в нашем замечании на данную статью).

На эти вопросы я попытался бы ответить так: первое. Класс унитарных матриц, конечно своеобразен и великолепен, он обладает замечательными свойствами, но в то же время он не единственный, есть не менее интересный класс матриц ортогональных. Т.е. если описывать работу мозга с помощью квазидиагональных унитарных матриц, то следует задать вопрос: а почему не рассмотреть ортогональные матрицы? Тем более, что например, SO2 специальные унитарные матрицы второго порядка изоморфны O3 матрицам ортогональным третьего порядка с действительными коэффициентами, а не комплексными коэффициентами, т.о. они обладают свойствами достаточно близкими. Это, во-первых. Следовало бы ввести в это рассмотрение также класс ортогональных матриц. Следующий вопрос: какого порядка ортогональные матрицы надо рассматривать?

В природе много физических явлений, описываемых с помощью ортогональных матриц третьего порядка – O3 группы преобразований. Я уже отметил выше, что ей, изоморфна SO2 матрица специальных унитарных преобразований. Но это не просто унитарные матрицы, а матрицы конкретно второго порядка и, кроме того, обладающие специальными свойствами по значению определителя этой матрицы. Т.е. в природе выделены эти матрицы определенным образом и широко используются в физике, как O3, так и SO2.

Матрицы более высокого порядка рассматриваются, но применяются значительно реже. Хотя многие вещи с помощью матриц малого порядка описать не удается. SO3, SO2 матрицы преобразователей и O3 матрица обладают тремя действительными независимыми параметрами и соответствуют описанию трёхмерного физического пространства. Поэтому широко используются на практике. По этой причине у этой квазиунитарной матрицы, квазидиагональной, прежде всего, должны фигурировать SO2 матрицы, если эта матрица унитарная, а если ортогональная – то O3 матрица.

Задаём вопрос: какая матрица должна иметь значительно большую размерность? Таким матрицам, исходя из моих работ, вот тут собранным, выделяются два типа матриц более высокого порядка. Это прежде всего, O7 матрица ортогональная семимерная (порядка семь). Но с ней не просто

O7 группа преобразований, а я ввёл группу Q7 – матрица как группа, определенная как O7 группа, но имеющая значительно меньшее число независимых параметров, а именно равное семи и двадцать один независимый параметр как O7 группа. Семь только независимых параметров.

Свойства таких матриц мною изучены и описаны в литературе. В частности, в работе А.В.Короткова и В.С.Чуракова и в значительно более ранних работах – в частности псевдоевклидов вариант вот в этой работе – собственно евклидов вариант – ‹‹Элементы семимерного векторного исчисления›› – (основная работа А.В.Короткова. – прим. ВЧ.). В этой работе в **Приложении I** описаны свойства ортогональных Q7 матриц и их преобразований. В частности, матрицы размерности семь на семь имеют только семь независимых параметров. Это описано на стр. 206 -207 и т.д. Это в собственно евклидовом варианте. Такие же работы проделаны в плане псевдоевклидова варианта. В частности, группа O3 преобразований (стр.62-63) и группа Q7 преобразований. Речь идёт о семимерных псевдоевклидовых пространствах SO4.

Основным достоинством этих матриц – по сравнению с трёхмерными матрицами преобразования – является следующее: трёхмерные группы Q3 являются подгруппой семимерной Q7 группы. Т.е. все свойства трёхмерного мира отображаются свойствами этой матрицы, этой группы преобразований. Кроме того, она имеет не 21 независимый параметр как у O7 группы, а только 7 независимых параметров. И это очень важно: при большой размерности матрицы могут иметь только семь независимых параметров – это замечательный факт.

Давайте вспомним аналогию из природы: в природе очень много случаев использования семимерных величин. Прежде всего – радуга. Человек видит радугу в семи цветах. Это не означает, что радуга не содержит других цветов. Это означает, прежде всего, то, что органы чувств человека настроены на восприятие семи различных длин волн – цветовых волн. Т.е. органы чувств обладают семимерной градацией. Трёхмерность является частным случаем. Аналог: трёхмерный цветной телевизор. В нём используются три цвета. Не семь, а только три. Телевизионное изображение получает довольно приличное качество изображения, по сравнению с чёрно-белым, где всего один луч даёт двухмерное изображение. Качество несравненно более высокое. Но, в то же время, семимерное телевидение по цветовому качеству было бы несравненно более богаче.

Художники используют значительное количество красок, но я бы сказал, что это неоправданно. Было бы достаточно и семи красок, потому, что глаз человека настроен на семимерное восприятие цветов. И соответственно, воспринимает комбинации семи различных цветов. Следующий пример. Проблема музыкального ряда. Звуки не потому собраны в семь нот музыкальной гаммы, что не удалось придумать большее число (можно придумать большее число), а потому, что органы слуха человека воспринимают именно семирядный нотный звукоряд. Музыкальная гамма состоит из семи нот. Можно приводить и другие примеры. Например, запахи. Как выяснилось, запахи тоже имеют волновую природу. Если выделить семь основных запахов, то они могли бы создать разнообразие запахов. И для этого не требуется слишком много различных приспособлений в органах чувств человека для их различения и ощущения, потому, что, слишком большое разнообразие чересчур бы усложнило человеческую систему восприятия запахов.

Если перечислить известные вкусовые ощущения – то удастся понять, что в целом они укладываются в семёрку вкусов: горький, кислый, сладкий, солёный, пресный –и может ещё какие… Но семь вкусовых ощущений вполне достаточно для восприятия всех вкусовых ощущений. Самое главное, что все эти перечисленные примеры можно было бы продолжать дальше.

Здесь дело в том, что они имеют математическую подоплёку, математическое описание. Это описание обладает следующими важными качествами (свойствами). Это в отношении ортогональных матриц. В отношении унитарных матриц можно найти изоморфные матрицы к перечисленным ортогональным матрицам. В частности, для O3 группы преобразований SO2 группа, для Q7 группы преобразований можно было бы привести SV7 изоморфную матрицу. Такие способы описания унитарными матрицами шестого порядка, причем семипараметровыми SU6 также описаны в литературе. Т.е. что я бы хотел сказать? Q7 и SU6 матрицы преобразований вполне претендуют на роль матриц, описывающих получение человеком информации из внешнего мира, при восприятии и запоминании образов с помощью механизмов памяти и воспроизведения образов.

Какие элементы ещё могли бы присутствовать в этом описании? Я отметил только ортогональные и унитарные матрицы. Но, описан также аналогичным образом способ получения псевдоортогональных PQ7 матриц и псевдоунитарных PU6 матриц преобразований. Они соответствуют преобразованию псевдоевклидового характера. Не собственно евклидова, а псевдоевклидова и также составляют групповые свойства. Эти четыре типа преобразований? в первую очередь, претендуют на роль многомерных матриц для получения информации, запоминания и воспроизведения информации с помощью мозга человека. Вот, собственно, что я хотел бы отметить.

Матрицы должны иметь необязательно унитарный вид, а также ортогональный. Не обязательно квазидиагональный вид, а вполне могут описывать полностью заполненную ненулевую матрицу и кроме того, матрицы должны иметь определенную размерность, а не произвольную. Именно трёхмерную либо семимерную. Это соответствовало бы наилучшим способам организации работы мозга по приему, хранению, переработке и воспроизведению информации.

В частности, когда человек говорит, то при этом он не имеет бесконечное число воспроизводящих звуковых устройств. Это система так же ограничена, как и слух, так и воспроизведение звуков, и видимо, так же семирядна как семирядная гамма звуков – это вполне удачно описано в нотной грамоте.

Какие матрицы лучше всего бы подошли для описания вкуса, цвета и образов? – Для этого лучше всего использовать матрицы седьмого порядка. Человек воспроизводит то, что видит. А видит, к примеру, радугу – она семицветная. Воспроизводит человек в своей деятельности то же самое. То, что он увидел, запомнил, сохранил – то он и воспроизводит. Т.е. соответствующий семимерный образ он и воспроизводит (цветовые образы). Либо – трёхмерные. Но трёхмерные недостаточны. Я бы сказал, что трёхмерный вариант, а может быть даже одномерный вариант, который присущ для ребенка. Сначала человек видит в одномерии только черно-белое (тени) – это напоминает черно-белое телевидение. С развитием человека развиваются органы чувств. Добавляются культурная и социальная составляющие, что и делает человека человеком. Появляется в чувствах восприятия трехмерный вариант – аналог цветного телевидения. И наконец, развившийся человек полномерно видит семимерную радугу, слышит семь нот в музыкальной гамме, ощущает весь вкусовой спектр… воспринимает мир в максимально полной его красоте – с помощью семимерных матриц. Я хотел бы сказать, что это не квазиунитарные матрицы произвольной размерности, а если унитарные, то строго определённой размерности – семипараметровые, либо ортогональные – но также семипараметровые. Именно семь параметров – это минимум тех параметров, количество которых позволяет создать семимерную матрицу. Двадцать один параметр потребовал бы слишком большое количество разнообразных органов для восприятии информации: это и в цвете и в звуке, ощущениях, запахах и наверное, этим список не исчерпывался бы, а нашлось ещё что-то. Т.е. не может быть наделён человек большим количеством разнообразных органов чувств. Слишком сложная в этом случае была бы система.

-А если это искусственный интеллект? У него ведь может быть много входов? Много датчиков и сенсоров? Может быть, и двадцать один и больше, ведь так? В принципе – сколько угодно! Но вот будет ли это рационально?

-Вполне рационально, ведь *ИИ предназначен не для того, чтобы копировать человека, а чтобы его превосходить!* Сделать более высокоразвитую систему. У него может быть значительное количество анализаторов со множеством входов, и соответственно – синтезаторов (в одном блоке).

Дело в том, что способы организации систем ИИ также ограничены. На пример, семимерная матрица – двадцатиоднапараметровая O7 группа с помощью двадцатиодного параметра – можно внести информацию, пеработать, выдать семимерную группу с сорокодевятью коэффициентами семь на семь. Но – будет ли это оптимально? Оптимально с т.з. качества функционирования сложности устройств? Скорости обработки информации? Объёмов памяти, используемой для хранения информации? Выходных органов – также двадцать один параметр выводить надо. И оказывается, что та же семимерная матрица даёт двадцать один параметр, а не семь. Что проще принять, обработать, сохранить, выдать: семь параметров или двадцать один?

При сомнительном улучшении качества (в чисто техническом отношении), потому, что семимерная матрица уже значительно более высокий способ организации, чем трёхмерная матрица. Трёхмерный мир вполне удачно описывается трёхмерными ортогональными матрицами.

Мы хотим расширять матрицы. Но расширять матрицы следует по оптимальному пути. Человек выбрал оптимальный путь восприятия, хранения, переработки и выдачи информации – большого объёма информации с помощью ортогональных семимерных семипараметровых матриц, либо унитарных шестимерных также семипараметровых матриц, которые изоморфны относительно Q7 систем групп преобразований.

Специалисты в области нейрокибернетики, нейроинформатики и информатики вряд ли знакомы с унитарными и ортогональными группами преобразований седьмого порядка семипараметровых матриц. Это – ортогональные матрицы.

Вот эти группы преобразований нигде в мире больше не описаны. Человек знает либо то, что изучил, либо то, до чего сам дошёл.

Одномерная алгебра получается из четырехмерной, трёхмерная векторная алгебра из семимерной… а из восьмимерной семимерная алгебра. Таковы свойства теории чисел. Нет других векторных алгебр!

- Анатолий Васильевич, что Вы могли бы сказать о математическом содержании многомерных пространств?

-Начну по порядку − начиная от алгебр с делением и кончая алгебрами без деления. Алгебры с делением в многомерных пространствах, криволинейные там и т.д. и плюс алгебры без деления.

Это вот алгебры с делением и без деления…. Это лучше назвать «алгебраические основания физики нашего пространства-времени», − или лучше сказать − многомерной физики. Дело в том, что трёхмерная физика − это тоже много.

Конечно, много…

Почему бы не воспользоваться одномерным пространством? Пространство уподоблено линейке, сила – ускорению. Всё прекрасно. Никаких тебе головных болей, забот, хлопот… всё великолепно! Но это всё – одномерно. В принципе, если сила и ускорение одномерны, то они одномерны. Это движение без ускорения. Движение по прямой линии т.н. одной координаты вполне достаточно для описания процессов. Но, выяснилось, что симметрия для этого пространства недостаточна. Для восприятия многих объектов физического мира люди всегда старались расширить пространство.

Первым удачным моментом после одномерного случая одномерной алгебры было создание трёхмерной векторной алгебры Гамильтона-Грассмана в 1844 году. Грасман и Гамильтон. Немец и ирландец. Способом векторным способом физических пространств физических законов привело к тому, что но очень быстро уже в 1863 году были разработаны: аналитическая трёхмерная геометрия, теория поля была создана Максвеллом, и получены предсказания целого ряда явлений и эффектов. В частности, заключительным этапом было то, что Максвелл представляет свет в качестве электромагнитной волны, распространяющейся с конкретной скоростью, когда её окончательно измерили 300000 км в сек.

Т.е. трёхмерная математика, приложенная к физике, физическим явлениям, именно трёхмерное векторное исчисление дало всё: дало новую физику, поставило на ноги с головы, создало новые разделы физики: газо-и гидродинамику, квантовую механику, атомную и ядерную физику, и т.д. Всё шло своим чередом. Все разделы физики очень удачно описывались трёхмерными векторными алгебрами. Какие же особенности у трёхмерной векторной алгебры ? Основные свойства её такие: она не ассоциативна, не коммутативна, она антикоммутативна по умножению, не имеет деления, она не имеет обратных векторов, ну и что? Это математиков смутило (такая алгебра с такими свойствами никому не нужна в математическом мире), а в физическом мире оказалась самым подходящим инструментом для описания трёхмерного физического пространства мало что изменилось с А. Эйнштейном. Во времена Эйнштейна трёхмерную физику переложили на четырёхмерное физическое пространство-время, трёхмерное физическое пространство и одномерное время.

Четырехмерный вариант пространства-времени лишь изгладил слегка морщины на трехмерном векторном исчислении, но мало что добавил к нему. Хотя и четырехмерное пространство-время Минковского-Эйнштейна привело к целому ряду замечательных достижений, замечательных эффектов. Итак, трёхмерная алгебра победоносно шла по стопам диалектического развития. Начиная от ньютоновских одномерных времен и кончая эйнштейновским четырехмерным пространством-временем СТО. Подчеркиваю: СТО, а не общей теории относительности, с которой до сих пор слишком много непонятного и нужно продолжать исследования, хотя криволинейные пространства очень уверенно расширяют линейные пространства. Но пространственная размерность сохраняется и в ОТО – т.е. там вектор и поле сводятся в четырехмерном варианте пространства-времени: трёхмерное пространство и одномерное время. Удивительный гибрид! Замечательный результат!

Трёхмерная математика дала всю механику, всю теорию электрического поля, всю теорию электромагнитного поля, – и целый ряд предсказаний, а также открытие радио, телевидения, и т.д.

Всё было прекрасно, но только до тех пор, пока не стали работать физики-ядерщики. Это начало работы в тридцатых годах двадцатого века, экспериментальные работы вплоть до шестидесятых годов двадцатого столетия. Проявился целый ряд новых эффектов, и если раньше трёхмерная физика всех устраивала, во всех разделах физики, во всех исключительно во всех и даже в физике атомного ядра то стали обращать внимание на пробелы в трёхмерном физическом мире, в трёхмерном физическом пространстве. Первый пробел связан с тем, что трёхмерная векторная алгебра может дать только-только-подчеркиваю-три закона сохранения: энергии, импульса и момента импульса. Что ни будь более серьезное выудить из трехмерной векторной алгебры не удастся и не удаётся. Трёхмерная алгебра при всём своем величии по сравнению с одномерной алгеброй сложна, очень сложна. Но физически предсказуема и доказуема. Трёхмерное пространство является родоначальником одномерного пространства, пренебрегая двумя координатами, в трёхмерном пространстве, что сказывается на одномерных физических вариантах. **В этом случае векторное произведение двух векторов равно нулю.** То есть это – другая алгебра с нулевыми, можно сказать, возможностями по сравнению с трёхмерной векторной алгеброй. …

Но похоже, что физики забыли, что в математическом отношении трёхмерные пространства не являются окончательным вариантом. Трехмерные пространства, а вместе с ними четырёхмерное пространство-время, могут быть родоначальниками частных случаев более серьёзных математических и физических структур, многомерных математических и физических пространств.

В этом плане идут серьезные работы. В плане физических, прежде всего, математических разработок. В шестидесятых годах двадцатого века в физике грянул гром: оказалось, что кроме трёх законов сохранения, есть ещё законы сохранения, которые подлежат математическому описанию, нет ёще многих законов, и соответственно, нет математического описания. Это законы сохранения барионного числа, лептонного числа, чётности, странности, массы элементарных частиц, но классифицировать элементарные частицы созданием какой-либо таблицы типа Менделеева, ввести так сказать, ядерную химию, построенную уже на элементарных частицах – такой таблицы Менделеева нет до сих пор. И не скоро, наверное, появится.

А многомерные алгебры применение себе найдут. В физическом отношении в вариантах, которые были, таковой считается теория струн. Эта теория действительно, многомерная, это уже не одно и не три измерения, это многомерная теория. **Но она не имеет математической (ал-**

гебраической) базы. Математическая (алгебраическая) база в теории струн отсутствует. Серьёзная математическая база, которая бы трёхмерную векторную алгебру трёхмерного пространства содержала бы как частный вариант с пренебрежением некоторыми координатами.

В связи с этим стоит вопрос: где выход из создавшегося положения? Бьются десятки лет физики всего мира. Десятки лет, подчеркиваю. А каков же результат? Результат такой: надежда на запуск большого андронный коллайдера: а вдруг, что- нибудь удастся уловить в экспериментах. Но на всякое действие всегда находится соответствующее противодействие. Т.е. это не выход из создавшегося положения. Можно строить сколь угодно большие коллайдеры и ни получать никакой реальной отдачи. А ведь строительство коллайдеров обходится в многомиллиардные колоссальные финансовые затраты.

Выход из создавшегося положения есть: пересмотреть представления на трёхмерное физическое пространство и, следовательно, использования трёхмерных векторных алгебр. Это – единственный выход. Потому, что если и узнаем размерность многомерного пространства, то не узнаем алгебры этого пространства. Этим путем пошел Гамильтон при создании трехмерного векторного исчисления. Он получил сперва четырехмерные октанионы Гамильтона путем применения процедуры удвоения действительных чисел в отношении к комплексным числам и получил пары комплексных чисел − кватернионы. Они двухмерны: это гиперкомплексные числа с единицей. Кватернионы были не очень хороши для математиков, по крайней мере, они не ассоциативны, а математики привыкли, что **а** на **в** равняется **це**. Ну и так далее… Читайте и изучайте историю науки – это реально полезное знание!

Уже октанионы Гамильтона Кэли не имеют коммутативности. Это − второе убийственное обстоятельство для математиков они отказались от рассмотрения таких чисел и даже не называли их числами. Стоит вопрос: что они признавали за числа: алгебру действительных чисел? Что называть числами? Алгебру Ли? Алгебру сравнений? Вот и зашли в тупик. ..

Всё это оттолкнуло математиков от работ в области расширения многомерных алгебр. Вслед за этим вторым ограничением была предпринята попытка сохранить деление. Сохранить хотя бы деление. Были исследования после Кэли и по многомерным структурам. Но как выяснилось, все эти структуры не имеют обратных векторов и не имеют деления. Это еще тем более отвернуло математиков от рассмотрения этих систем и признания их в роли чисел…

Это напоминает недавнее решение астрономов: планету Плутон вычеркнули из списков планет Солнечной системы… Очень демократично постановили: считать планету Плутон инородным телом, поскольку очень плохо поддается изучению из-за удаленности расположения. Так и тут оказалось. Гурвиц вместе с Фробениусом разработали (раздельно), что деление в свою очередь, скалярно и имеется только четыре системы с делением: система гиперкомплексных чисел, чисел с единицей, это система действительных чисел; вторая система – это система комплексных чисел двумерных псевдо система. Следует сказать, что эти две системы комплексных и действительных чисел дали очень плодотворные выходы в математическом отношении, в плане получения теории поля и комплексного переменного. Но кроме них с делением еще две системы: неудобная система кватернионов и печально знаменитая система октанионов. Гурвиц и Фробениус показали, что все более широкие системы шестнадцати-, тридцати двух- или какие либо другие системы с делением отсутствуют. Сто с лишним лет назад. Срок не малый. И за это время остыли математики по отношению к многомерным числам, многомерным алгебрам и многомерным пространствам. А физикам требуется многомерие. *Трёхмерие не описывает все законы сохранения, которые они экспериментально нашли – экспериментально, подчеркиваю, − не теоретически.* Однако, **эксперимент охватывает только поверхность, но не проникает в глубину**. Оптически мы не увидим законы сохранения. А ведь выявился целый ряд новых эффектов …

Самое основное в физике – да и Великой Науке XX века – это изучение строения атома. Здесь выход единственный: уточнить не только размерность, но уточнить и алгебру, сразу построить алгебру, описывающую физические процессы, создать высокую размерность, следует построить многомерную векторную алгебру, – подчеркиваю – векторную алгебру с векторным произведением двух векторов, включающую трёхмерную векторную алгебру и одномерную нуль-алгебру, булеву алгебру как частный случай.

На примере трёхмерной алгебры было показано, что такой подход к построению физической теории очень оправдан. Трёхмерная алгебра − величие физики девятнадцатого века. Но сейчас уже век двадцать первый − и об этом старом величии стали забывать. Стали стремительно забывать, как получилась эта векторная алгебра и как её использовали…

Многие современные специалисты и учёные-исследователи, учившиеся в институтах, даже не знают, что такое векторное произведение двух векторов и что такое смешанное произведение двух векторов. А зачем? Есть теории матанализа и т. д. − трёхмерного опять-таки. .. А чтобы дать в конце - концов векторное исчисление, полученное векторное исчисление – надо написать тензор третьего ранга, например, это означает, что следует уточнить векторное произведение двух векторов. Векторное произведение может быть самое разнообразное... А тензорное исчисление не дает значения структурных констант. Алгебра даёт, то что O3 пространство расширили до O7 пространства − ортогонально-семимерная группа. В университетах не изучают подгруппы этой группы: O3, O4, O5, O6… 129 .. 151. Это тупиковый путь…

-А об эволюции представлений о n-мерных пространствах?

- Но только в сжатой форме, поскольку мой ответ на этот вопрпос перекликается с предущим ответом и повторяет в кратце всё, что относится к многомерному пространству… Но в данном случае мы уже подойдём к пятнадцатимерному пространству…

Многомерное пространство может быть математическим, либо физическим. Математические пространства описываются линейными векторными пространствами, определяющимися операциями сложение и умножение вектора на скаляр. Если оно имеет характер евклидового пространства, то вводится скалярное произведение двух векторов. Это пространство может иметь любую размерность, конкретное, определяемое натуральным рядом чисел вплоть до бесконечномерных пространств,− изучаются и такие формы. В отношении физических пространств − менее многообразное значение физических размерностей пространственных. В частности, как я уже говорил, в качестве общепризнанной очень широко используется трёхмерная векторная алгебра, которая имеет кроме восьми линейных операций, также скалярное произведение евклидового характера и векторное произведение двух векторов, которое было установлено Гамильтоном. И включает векторное произведение трёхмерных векторов, то есть шесть характерных действительных величин для значения векторного произведения двух векторов.

Напомню, что с некоторых моментов, возникших в 60-е годы двадцатого века, возникла задача описания элементарных частиц, которых оказалось столь много, что потребовалось создавать классификацию элементарных частиц наподобие таблицы Менделеева. Но тут возникли нюансы: оказалось, что числа элементарных частиц пока недостаточно для выявления основных физических закономерностей. Но вместе с тем стало понятно, что, по крайней мере, кроме трёх законов сохранения: момента импульса, импульса и энергии возникают принципиально новые законы сохранения: лептонного числа, барионного числа, гиперзаряда, заряда и многих других значений.

Т.е. трёхмерная алгебра не в состоянии обеспечить описание совокупности этих элементарных частиц. Но даже трёхмерная алгебра для частиц с полуцелым и единичным спином дает трёхкомпанентную волновую функцию в трёхмерии. Т.о. частица определяется тремя частицами иного характера. Например, *кварками.* А спинорная алгебра трехмерного типа даёт компоненты четырёх частиц, определяемых *двумя комплексными величинами*. Это характерные группы О2 и О3. Это группы, описывающие частицы в трёхмерном пространстве. Опять трёхмерие не дает законов сохранения более трёх, что и заставляет физиков искать выход в многомерных пространственных структурах. Более серьезно развита многомерная физика в плане теории струн. 11- мерная физика либо ищет варианты выхода на 10- мерный вариант, но не трёхмерный. И даже не четырёх, а

10-и и 11-мерный варианты. Имеются также изыскания пространственных структур, числом более 11-и. Но они не так сильно изучены и столь же мало признаны.

Итак, речь идет о многомерной физике. Говоря о размерности физического пространства, следует не только уточнить его размерность (n-мерность), но и алгебру, в которой эта многомерная физика описывается. Могу смело заявить, что ***11-мерной алгебры* – векторной алгебры – *нет***! А семимерная алгебра есть! И все сколь-нибудь значимые результаты в физике полученные с помощью трёхмерной векторной алгебры. С помощью 11-и мерной теории струн не получено столь много достижений, как в стандартном трёхмерии! Столь много существенных достижений, как в трёхмерии. Всё определяется наличием трёхмерной векторной алгебры. В таком случае, следует строить 11-мерную алгебру. Пусть кто построит 11-мерную алгебру, а я посмотрю, порадуюсь успехам.

Но с другой стороны, занимаясь этим вопросом, я считаю, что есть выход из положения. Есть семимерие − расширение трёхмерной алгебры до семимерной алгебры, при этом алгебра семимерная следует из октанионов Кэли применением той же процедуры выделения векторной алгебры, как Гамильтон получил из четырехмерия кватернионов трёхмерную векторную алгебру. Самая трудная задача в трёхмерном исчислении – это получения результатов в координатной форме. Т.е. записать векторное произведение двух векторов в координатной форме. Так же в семимерии эта задача была трудоёмкой. Но результаты получены. Векторное произведение двух семимерных векторов известно. Оно дало возможность построить векторное произведение трёх векторов, четырёх векторов, 5, 6, 7 – и векторов. Смешанное произведение трёх векторов. И произведения трёх векторов, четырёх векторов, семи векторов…. Затем целый ряд скалярных симметрических функций, не свойственных трёхмерию. Все эти величины инварианты, т.е. с ними сопряжены определенные законы сохранения величин. Т.е. если применять семимерную физику, то там будут новые законы сохранения величин, которые следуют из этой математики.

Семимерное векторное исчисление расписано в форме векторной алгебры, дифференциальной геометрии, теории поля, а также изовекторной алгебры для частиц с единичным спином, и спинорной алгебры для частиц с полуцелым спином, с полуединичным спином одна вторая. Этой алгебре уже двадцать лет. Но, к сожалению, воз и ныне там. Физики и тем более математики не очень хорошо относятся к координатным формам записи. Им более удобно обходиться физической философией − «метафизикой природы». Без математических результатов. Если же становиться на эту почву, то векторная трёхмерная алгебра обладает следующими свойствами: она антикоммутативна, т.е. не коммутативна по умножению. Она не ассоциативна, не имеет деления, не имеет обратных величин − для математиков это убийственные выводы. Для физиков наоборот, эти результаты вполне приемлемы. Трехмерная алгебра нашла широчайшее применение в физике и дала замечательные результаты. Во всех разделах физики от механики до физики элементарных частиц. Еще более замечательные результаты может дать семимерная векторная алгебра. Она тем более сложная, чем трёхмерная векторная алгебра, особенно − в координатной форме записи. Но даёт пять инвариантных величин, т.е. может дать ряд законов сохранения дополнительно к трехмерным законам сохранения: энергии, импульса, и момента импульса.

И так я отметил, что семимерная алгебра, как и трёхмерная векторная алгебра, без деления, не имеет обратных элементов, от единицы, но без обратных элементов нельзя получить. Не ассоциативна. Антикоммутативна. Это для математиков очень плохие свойства. А физиков они устраивают в трёхмерии. Почему не заняться этим вопросом в семимерии? Хотя бы по той причине, что при этом задается не только размерность, но и пространства семимерного физического пространства. Причем, сразу уточняется алгебра этого пространства в координатной форме. Т.е. все законы, которые я перечислил, инвариантны. векторные произведения двух-трёх векторов, 4.5,6 векторов…смешанное произведение. Другие симметрические скалярные функции. Это даёт очень много вариантов, используемых в разных физических задачах. И поскольку мы теперь отказались от операции деления и наличия обратного элемента, то можно пренебречь выводами Гурвица и Фробениуса по отношению к завершенности размерности алгебр с делением, к которым относятся четыре замечательные алгебры: действительных чисел, комплексных чисел, кватернионов и октанионов. И идти дальше.

Дальнейшим расширением этой алгебры будут 8-и мерные алгебры Кэли, будет 16-и мерная тернарная алгебра, со скалярным и векторным произведением двух векторов, которые выделяются… Такая алгебра будет иметь размерность 15 и будет повторять свойства семимерной векторной алгебры. Но, в некоторых нюансах будет отличаться от неё. Отличаться будет таким образом, что это уже не алгебра Мальцева и тем более не алгебра Ли, а алгебра с совершенно пока еще не понятного свойства, с качествами, которые характеризуют соотношения Якоби. Это надо оценить по отношению к Якоби. Используя векторное произведение двух векторов и двойное векторное произведение двух векторов, эти пункты еще требуется отыскать. Двойное векторное произведение трёх векторов даёт соотношение расширение Якоби, от которого следует тип алгебр. В настоящий момент получено векторное произведение двух векторов. На его базе смешанное произведение трёх векторов. Изучается свойство двойного векторного произведения для трёх векторов. И это даст возможность получить соотношение Якоби для 15-и мерной векторной алгебры.

Свойства этой алгебры, тем не менее, уже проясняются. Удалось получить коммутационное соотношение для оператора момента импульса. Эти соотношения применяют для векторного умножения двух векторов но только в операторной форме записи, где используются не действительные 15-координатные числа векторные, а числа, определяемые матрицами размерности 15*15 квадратными матрицами с четырнадцатью величинами, характеризуемыми векторным произведением двух векторов в каждой координате. Т.е. мы имеем дело с пятнадцатью мерными операторами момента импульса. Очень важно, что получены коммутационные соотношения, которые определяют операторы момента импульса, с одной стороны, и соответствуют определенным формулам. Эти формулы в случае трёхмерия или семимерия имеют частный вид 15-и мерных операторов. Эти операторы позволяют уточнить некоторые соотношения между различными операторами координат момента импульса. Эти соотношения имеют привлекательный вид. И трёхмерные соотношения подобного типа являются частным случаем точно так же, как и семимерные соотношения подобного типа. Эти очень сложные зависимости имеют замечательное представление и настраивают на мысль о ценностях 15-мерного векторного исчисления. Эти исчисления – на ряду с семимерным исчислением – которые являются частным случаем 15-мерного. Позволят расширить наши представления о размерности физических пространств.

Итак, размерности определенной одномерной алгебры без векторного произведения двух векторов равно нулю… а алгебра без векторного произведения двух векторов была равно нулю. Трёхмерная векторная с векторным произведением двух векторов. Семимерная −с семимерным произведением двух семимерных векторов, 15-и мерное векторное произведение двух 15-и мерных векторов. Но тут же встаёт вопрос: а какой размерности вообще может быть пространство? Нет никаких ограничений для построения 31-ого мерного пространства векторной алгебры. Также нет никаких ограничений для построения 61-и мерной векторной алгебры.

Это расширение можно продолжать: сто двадцать семь измерений, 255 измерений, и т.д. очень возможно, что эта цепочка непрерывно возрастает до бесконечности. В таком случае изменятся физические пространственные представления могут быть полностью изменены. Т.е. физическое пространство не трёхмерное, не семимерное, не пятнадцати мерное, а может оказаться вплоть до бесконечно мерного. Пространство, подчеркиваю, без понятия времени. Время как было, так и остается одномерным и строится восьмимерное пространство-время, шестнадцати мерное пространство-время, и т.д. Т.е. время – одномерное, а пространство может иметь очень большую размерность вплоть до бесконечно-мерных. Конечно, свойства пространства меняются. Что же тогда понимать строго под пространством? В математическом плане **пространство – это способ симметрии. Т.е. способ построения симметричных структур.** Трёхмерных структур, семимерных структур, пятнадцатимерных структур. **Структуры имеют**

различную степень симметрии, а, следовательно, различную размерность.

Вот к каким философским взглядам приводит задача о расширении пространственных физических форм. Пространство может оказаться имеющим n-мерную размерность, при этом свойства симметрии совсем другие. Трёхмерные свойства симметрии − это частный случай семерной и пятнадцати мерной симметрии. Семимерная симметрия − это частный случай пятнадцати мерной структур и т.д. симметрии, **с усложнением размерности, с увеличением размерности структур , степень симметрии возрастает, степень нарушения симметрии уменьшается.** Нарушение уменьшается. И наоборот. ***Уменьшение размерности приводит к нарушению симметрии, уменьшению степени симметрии.***

- А что бы Вы могли бы сказать в отношении многомерной алгебры логики?

- В отношении многомерной алгебры логики я могу сказать только то, что уже говорил… Повторюсь, но для пользы дела…

Итак, в отношении многомерной алгебры логики. В принципе, булева алгебра может быть расширена до многомерного варианта, до N – мерного, где N – произвольное число, путем применения операции умножения. Умножение в этой алгебре прямое – умножение двух чисел. Эта работа уже была мною опубликована. Там показано, что булева алгебра может быть N – мерна, то есть число может быть записано в N- мерной форме. Операнды в N- мерной форме есть результаты операций в N- мерной форме. Это создает возможности использования этой алгебры по ряду назначений, в частности, при построении логических многомерных устройств, либо логически-арифметических многомерных устройств. Однако, прямое произведение двух величин, все- таки, обладает некоторыми существенными недостатками, поэтому в практике действительных чисел используют не только прямое произведение двух величин, но и произведение многомерных величин, построенных не по способу прямого произведения.

Такими числами, кроме действительных одномерных чисел, являются комплексные числа, например, двумерные числа, кватернионные четырехмерные числа, октанионы восьмимерные числа, а также числа, характеризующие векторные алгебры, одномерные векторные алгебры, трехмерные векторные алгебры, семимерные векторные алгебры. То есть в алгебре действительных чисел имеется целый ряд возможностей расширения, но уж, поскольку, система сравнений классов вычетов по модулю обладает свойствами, близкими к свойствам действительных чисел, в частности, обладает вычитанием, то можно строить алгебры логики многомерной, используя те же процедуры для произведения чисел, что и алгебры многомерной для действительных чисел. В частности, процедура удвоения Гамильтона может быть использована для построения двумерной алгебры логики и одномерной векторной алгебры. Та же процедура удвоения Гамильтона, примененная к комплексным, логическим числам даст четырехмерные логические числа и трехмерную векторную алгебру. Та же процедура удвоения Гамильтона, примененная к кватернионным числам, даст октанионную систему чисел – логических чисел и семимерную векторную алгебру логики, то есть, известная процедура умножения по отношению к числам классов вычетов по модулю дает возможность построить целый ряд совершенно новых алгебр. Следовало бы отметить еще одно важное применение – речь идет о дискретных алгебрах с бесконечным модулем в данном случае, вернее, это – алгебра действительных чисел, но только расширена она до четырех восьмимерных (одно-трех и семимерный вариант).

Дело в том, что в векторных алгебрах, алгебрах кватернионов, комплексных чисел и октанионов используются операции сложения и умножения, а также операции скалярного произведения и векторного произведения двух векторов векторной алгебры. Если числа занимают чисто дискретный ряд значений, например, приобретают только целые значения, то результаты всех практических операций будут принимать целые значения. То есть, эта алгебра в значительной степени воспроизводит дискретную алгебру, если речь не идет об извлечении квадратного корня. Скалярное произведение, векторное произведение, смешанное произведение трех векторов, двойное векторное произведение трех векторов, – есть и другие многомерные операции, которые будут иметь целочисленные значения, многомерные целочисленные значения, это может иметь существенное применение для описания дискретных величин, которые, в последнее время, на протяжении уже, пожалуй, ста лет широко используется физиками.

-А больше ничего не хотите добавить? Вы ведь разработали свои подходы к алгебрам логики?

-Здесь я опять-таки, наверное, повторюсь в отношении собственных алгебр логики…

Итак, неевклидовы алгебры – это дополнительный момент, который не так прост. Что можно сказать о булевых алгебрах? Алгебра Буля была создана в годы великого научного подъёма в середине XIX-го столетия. Она определяет двоичную логику с двумя состояниями: нуль и один. И двумя существенными операциями – операциями сложения этих величин и умножения этих величин. Собственно, от способа задания операций сложения и умножения зависят те или иные свойства алгебр. Характерна операция сложения в булевой алгебре. Здесь, если нуль складывать с единицей, либо с нулём, то проблем не возникает: присутствуют те же самые свойства, что и в алгебре действительных чисел. А вот сложение единицы и единицы даёт в булевой алгебре единицу. Это не совсем традиционный подход, вернее можно сказать совсем не традиционный подход, но он выдал замечательные свойства булевых алгебр. По крайней мере, в них действуют операции поглощения, функции де-Моргана, целый ряд других процедур, симметрия в отношении дистрибутивности умножения и дистрибутивности типа сложения – в общем, ряд замечательных свойств. Именно это и обусловило широкое применение булевой алгебры в качестве алгебры логики.

Это обусловило ход развития алгебры логики, во-первых. Во-вторых, её применимость для выполнения логических операций, арифметических операций, а вслед за этим – обеспечило появление вычислительных устройств, логических устройств. Все они действуют на основе алгебры логики Буля – двухпозиционной алгебры с операцией сложения, о которой уже было сказано. Необходимо отметить, что в течение многих лет, прошедших со времён работы Буля и его последователей, не анализировался критически подход к построению алгебры логики. Вместе с тем, вызывает некоторые сомнения операция сложения двух единиц. Это с одной стороны.

С другой стороны, операция сложения или умножения, в принципе, может быть задана иными способами – какими, следует проанализировать. Первым способом несоответствующей операции сложения булевой алгебры может быть двоичная алгебра – но алгебра, построенная по способу теории сравнения по модулю два. В этой алгебре все числа – целые числа, лучше сказать, натуральный ряд чисел делится на два класса: первый класс – сложения по модулю два, дающее нуль, это класс чётных чисел, и второй класс – класс нёчетных чисел. То есть, два класса чётных и нечётных чисел дают соответствующую алгебру. Каковы свойства этой алгебры? Легко доказать, что операция умножения такова, как и в алгебре Буля, вернее операция умножения. А операция сложения, если нуль и один складывать друг с другом, дают единицу, нуль и нуль дают нуль, то единица плюс единица даёт в данном случае нуль, потому что единица соответствует нечётным числам в этой алгебре, а сложение двух нечётных чисел всегда даёт чётное число, то есть, число иного класса.

Пока идёт речь об одномерном варианте, небулевом.

Итак, операция сложения в этой алгебре совсем иная, нежели в булевой алгебре. Это создает прецедент для построения алгебр логики. Алгебры логики могут быть построены совершенно иначе, нежели булевы алгебры. А, следовательно, и процедуры выполнения логических функций, логических операций, а также арифметических операций будут иные, а вслед за этим будут иными по способу построения сами вычислительные устройства. Они будут существенно отличаться от вычислительных устройств, построенных в булевом варианте.

Итак, это первое направление – направление построения небулевых алгебр логики одномерных. Второе, существенно важное направление – это алгебры многомерные, в частности булевы и небулевы, то есть необходимо рассмотреть процесс расширения булевых и небулевых алгебр логики одномерных до многомерного варианта. Если рассматривать булеву алгебру, то в булевой алгебре нет операции вычитания. Поэтому традиционный способ расширения алгебр, который даёт вместо алгебры действительных чисел алгебру комплексных чисел кватернионов и октанионов, не срабатывает. Потому что нет операции вычитания. Однако тут возможны двухмерные, а также и n-мерные варианты построения алгебр, построенных по способу внешнего произведения двух векторов. То есть, по сути дела, прямое произведение алгебр может давать многомерные алгебры. (Этот способ изложен в литературе и о нём можно прочитать). Там возможно построение многомерных булевых алгебр, построенных по способу прямого произведения двух величин. Однако, если рассматривать не только булевы алгебры, но и не булев вариант – то, в которых алгебрах есть так называемая операция вычитания двух величин – то это существенно меняет возможность, кроме алгебр, построенных по способу построения путём создания прямого произведения алгебр, возможно расширение по традиционному способу. То есть, построение комплексных небулевых алгебр: двухмерных, четырехмерных кватернионных небулевых алгебр и восьмимерных октанионных небулевых алгебр. Этот способ возможен при применении схемы сравнения по модулю, в частности по модулю два, а также по любому другому модулю. Необходимо отметить, что, кроме модуля два, принципиально могут быть другие модули – в частности модули три и четыре . Чем они характерны? Модуль три даёт трёхпозиционную алгебру. С тремя устойчивыми состояниями: нуль, один и два. Это алгебра может быть использована для построения логики устройств не с двумя состояниями, а с большими, например, если рассматриваются функции «ДА-НЕТ» и третья из них «МОЖЕТ БЫТЬ». То есть, включение дополнительной процедуры «МОЖЕТ БЫТЬ» совершенно меняет свойства логических систем и логических устройств.

Необходимо отметить серьезную сложность таких логических устройств. В частности, две переменные с тремя состояниями имеют уже не четыре состояния, как в двузначной логике, а девять состояний. А количество функций, построенных на двух переменных с двумя состояниями, будет уже не два в четвёртой степени, а три в девятой степени, то есть число функций не шестнадцать, а колоссальное количество функций. Это уже трёхзначная логика. Трёхзначная логика, построенная на способе сравнения по модулю три, обладает совершенно другими, колоссальными по своим возможностям процедурами и операциями. Ещё большими возможностями обладает алгебра логики, построенная путём сравнения по модулю четыре.

Почему важен этот способ? Модуль четыре принципиален в плане многих показателей элементов. В частности, во-первых, чётные модули 2 и 4 дают чётное, класс чётных чисел, а нечётные элементы – классы 1 и 3 – дают класс нечётных чисел. Но это не столь важно. Это и в двоичной логике так. Но, например, модуль четыре принципиален вот чем: нечётные числа содержат класс простых чисел, нечётных чисел. И этот класс делится на два класса. Как известно, нечётные числа простые делятся на класс с модулем один и класс с модулем три. В частности, класс с модулем, вернее класс один по модулю четыре, даёт все нечётные числа, которые представимы в виде суммы квадратов двух величин.

В частности – следует повторить ещё раз – класс по модулю один, содержащий простые числа, вернее класс один по модулю четыре, содержащий простые числа, позволяет представлять эти числа в виде суммы квадратов двух величин.

В то же время класс по модулю четыре, дающий класс чисел три, непредставим в виде суммы квадратов, причём никогда, что было доказано ещё Эйлером. То есть, класс по модулю три существенно отличается от величин класса по модулю один, вернее класса один по модулю четыре. Это позволяет применять модуль четыре для построения различных величин, в частности, алгебр логики. Итак, алгебра логики построена путём сравнений по модулю четыре. Она принципиально важна и следует её внимательно проанализировать и изучить. Необходимо отметить ещё большую сложность этой алгебры. Так, две переменных с четырьмя состояниями дают шестнадцать функций. *А число разнообразных функций, которые можно построить в алгебре логики – в алгебре сравнений по модулю четыре, вырастает до шестнадцатой степени*, то есть – это колоссальное число функций, разнообразных и требующих применения в тех или иных вариантах теории. Именно большая сложность логических систем, построенных путём сравнения величин по модулю четыре и также по модулю три –то есть, трёхзначные и четырёхзначные алгебры логики не применялись до сих пор ввиду своей существенной сложности.

Таким образом, подводя итог, следует сказать о том, что принципиально важными для дальнейшего изучения являются алгебры логики – многомерные, с одной стороны, и многозначные, с другой стороны. В частности, трёх- и четырёхзначные алгебры логики. Это как в дальнейшем, так и в ближайшее время возможный путь развития систем логических устройств и логических величин. Вслед за этим, должен последовать анализ многомерных логических устройств – например, нейрокибернетических, потому что двухпозиционные нейрокибернетические алгебры логики уже достаточно серьёзно изучены и используются для моделирования, (например, в когнитивной психологии процессов сознания и мышления, протекающих в мозгу человека), а также для построения кибернетических устройств.

КРАВЧЕНКО П.Д., МЕШКОВ В.Е, ЧУРАКОВ В.С., ВЕРЕСНИКОВ Г.С.

ЭВОЛЮЦИЯ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ О N-МЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Многомерное пространство может быть математическим, либо физическим [1;2]. Математические пространства описываются линейными векторными пространствами, определяющимися операциями сложения и умножения вектора на скаляр. Если оно имеет характер евклидового пространства, то вводится скалярное произведение двух векторов. Это пространство может иметь любую размерность, конкретно определяемую натуральным рядом чисел, вплоть до бесконечномерных пространств,– изучаются и такие формы.

В отношении физических пространств следует сказать, что там задействовано менее многообразное значение физических пространственных размерностей. В частности, в физике используется трехмерная векторная алгебра, которая имеет, кроме восьми линейных операций, также скалярное произведение евклидового характера и векторное произведение двух векторов, которое было найдено Гамильтоном. И оно также включает векторное произведение трёхмерных векторов, то есть шесть характерных действительных величин для значения векторного произведения двух векторов.

В шестидесятые годы двадцатого века возникла задача описания элементарных частиц, которых оказалось столь много, что потребовалось давать их классификацию наподобие таблицы Менделеева. Но тут возникли нюансы: оказалось, что числа элементарных частиц недостаточно для выявления основных физических закономерностей. Но стало понятно, что, по крайней мере, кроме трёх законов сохранения – момента импульса, импульса и энергии – возникают принципиально новые законы сохранения: лептонного числа, барионного числа, гиперзаряда, заряда и других значений [3].

Т.е. трёхмерная алгебра не в состоянии обеспечить описание совокупности этих элементарных частиц. Но даже трёхмерная алгебра для частиц с полуцелым и единичным спином дает трехкомпонентную волновую функцию в трёхмерии (3D). Т.о. частица определяется тремя частицами иного характера. Например, *кварками.* А спинорная алгебра трехмерного типа даёт компоненты четырёх частиц, определяемых *двумя комплексными величинами*. Это характерные группы O_2 и $O_{3,}$ – группы, описывающие частицы в трёхмерном пространстве. Но, как было сказано выше, трёхмерие не дает новых законов сохранения.

И это заставляет физиков искать выход в многомерных пространственных структурах. Более серьезно развита многомерная физика в теории сустеструн [4;5;6;7;8;9]. В теории суперструн одиннадцатимерная физика ищет варианты выхода на десятимерный вариант, (но не трёхмерный). И даже не четырехмерный, а следует ещё раз повторить, что ищутся десяти- и одиннадцатимерные варианты. Имеются также изыскания пространственных структур больших размерностей. Но они не так сильно изучены и столь же мало признаны.

Итак, речь идет о *многомерной физике*[10;11], *открывающей путь к многомерным технологиям (технологиям 2^n-1* [12;13]). Говоря о размерности физического пространства, следует не только уточнить его размерность (n-мерность), но и алгебру, которой эта многомерная физика описывается. Можно смело заявить, что **одиннадцати*мерной алгебры*** (векторной алгебры) ***нет***! А семимерная алгебра есть! [14].В семимерной алгебре сохраняются все результаты, полученные с помощью трёхмерной векторной алгебры [14;15]. С помощью одиннадцати- мерных геометрических представлений в теории струн не получено столь много достижений, как в стандартном трёхмерии! Всё определяется наличием трёхмерной векторной алгебры. Т.е. нужно строить в данном случае одиннадцатимерную алгебру, если так. Пусть кто построит одиннадцатимерную алгебру, − можно было бы порадоваться успехам.

Но, с другой стороны, занимаясь этой тематикой, следует сказать, что есть выход из положения. Есть семимерие − расширение трёхмерной алгебры до семимерной алгебры, при этом алгебра семимерная следует из октанионов Кэли применением той же процедуры выделения векторной алгебры, как Гамильтон получил из четырехмерия кватернионов трёхмерную векторную алгебру. Самая трудная задача в трёхмерном исчислении – это получения результатов в координатной форме. Т.е. записать векторное произведение двух векторов в координатной форме.

Так же в семимерии эта задача была трудоёмкой. Но она получена. Векторное произведение двух семимерных векторов известно. Оно дало возможность построить векторное произведение трёх векторов, четырёх векторов, пяти, шести, семи векторов. Смешанное произведение трёх векторов, а также произведения трёх векторов, четырёх векторов, семи векторов…. Затем целый ряд скалярных симметрических функций, не свойственных трёхмерию. Все эти величины инварианты, т.е. с ними сопряжены определенные законы сохранения величин. Т.о. если применять семимерную физику, то там будут новые законы сохранения величин, которые следуют из этой математики (семимерного векторного исчисления). Оно расписано в форме векторной алгебры, дифференциальной геометрии, теории поля, а также изовекторной алгебры для частиц с единичным спином, и спинорной алгебры для частиц с полуцелым спином, с полуединичным спином одна вторая [14;15;16].

Физики и тем более математики не очень хорошо относятся к координатным формам записи. Им более удобно обходиться физической философией − «метафизикой природы». Без конкретных физических результатов. Если же становиться на эту почву, то векторная трёхмерная алгебра обладает следующими свойствами: она антикоммутативна, т.е. не коммутативна по умножению. Она не ассоциативна, не имеет деления, не имеет обратных величин − для математиков это убийственные выводы. Для физиков наоборот, эти результаты вполне приемлемы. Трехмерная алгебра нашла широчайшее применение в физике и дала замечательные результаты. Во всех разделах физики от механики до физики элементарных частиц. Еще более замечательные результаты может дать семимерная векторная алгебра. Она тем более сложная, чем трёхмерная векторная алгебра, особенно − в координатной форме записи. Но она даёт пять инвариантных величин, т.е. может дать ряд законов сохранения дополнительно к трехмерным законам сохранения: энергии, импульса, и момента импульса.

Семимерная алгебра, как и трёхмерная векторная алгебра, без деления, не имеет обратных элементов, от единицы, но без обратных элементов её нельзя получить. Она не ассоциативна. Она антикоммутативна. Это в математическом плане не очень хорошие свойства. При этом задается не только размерность, но и пространство – семимерное физическое пространство (7D). Но сразу уточняется алгебра этого пространства в координатной форме. Т.е. все вышеперечисленные законы сохранения инвариантны. Всё также выполняется в отношении векторного произведения двух и трёх векторов, четырех, пяти, шести векторов, смешанного произведения и других симметрических скалярных функций [14;15].

Это даёт очень много вариантов, используемых в разных физических задачах. И поскольку мы теперь отказались от операции деления и наличия обратного элемента, то можно пренебречь выводами Гурвица и Фробениуса по отношению к завершенности размерности алгебр с делением, к которым относятся четыре замечательные алгебры: действительных чисел, комплексных чисел, кватернионов и октанионов. И идти дальше. Дальнейшим расширением этой алгебры будут: восьмимерные алгебры Кэли, шестнадцатимерная тернарная алгебра, со скалярным и векторным произведением двух векторов. Такая алгебра будет иметь размерность пятнадцать и будет во многом повторять свойства семимерной векторной алгебры [17]. Но, в некоторых нюансах будет отличаться от неё. Отличаться будет таким образом, что это уже не алгебра Мальцева и тем более не алгебра Ли, а алгебра с совершенно пока еще не понятными свойствами, с качествами, которые характеризуют соотношения Якоби. (Это надо оценить по отношению к Якоби). Используя векторное произведение двух векторов и двойное векторное произведение двух векторов, эти пункты еще требуется отыскать. Двойное векторное произведение трёх векторов даёт соотношение расширение Якоби, от которого следует тип алгебр. В настоящий момент получено векторное произведение двух векторов и на его базе − смешанное произведение трёх векторов. Изучается свойство двойного векторного произведения для трёх векторов. И это, следует повторить ещё раз, даёт возможность получить соотношение Якоби для пятнадцатимерной векторной алгебры [17].

Свойства этой алгебры, тем не менее, уже проясняются. Удалось получить коммутационное соотношение для оператора момента импульса. Эти соотношения применяют для векторного умножения двух векторов, но только в операторной форме записи, где используются не действительные пятнадцатикоординатные векторные числа, а числа, определяемые матрицами размерности 15*15 квадратными матрицами с четырнадцатью величинами, характеризуемыми векторным произведением двух векторов в каждой координате. Т.е. мы имеем дело с пятнадцатьюмерными операторами момента импульса [17].

Очень важно, что получены коммутационные соотношения, которые определяют операторы момента импульса, с одной стороны, и соответствуют определенным формулам. Эти формулы в случае трёхмерия или семимерия имеют частный вид пятнадцатимерных операторов. Эти операторы позволяют уточнить некоторые соотношения между различными операторами координат момента импульса. Эти соотношения имеют привлекательный вид. И трёхмерные соотношения подобного типа являются частным случаем точно так же, как и семимерные соотношения подобного типа. Эти очень сложные зависимости имеют замечательное представление и настраивают на мысль о ценностях пятнадцатимерного векторного исчисления [17]. Эти исчисления – на ряду с семимерным исчислением – которые являются частным случаем пятнадцатимерного и исчислений больших размерностей, позволят расширить наши представления о размерности физических пространств.

Итак, размерность определенной одномерной алгебры без векторного произведения двух векторов равна нулю… а алгебра без векторного произведения двух векторов была равно нулю. Трёхмерная векторная алгебра – с векторным произведением двух векторов. Семимерная −с семимерным произведением двух семимерных векторов, пятнадцатимерное векторное произведение двух пятнадцатимерных векторов. Но тут резонно возникает вопрос: а какой размерности вообще может быть пространство? Нет никаких ограничений для построения тридцатиодногомерного пространства векторной алгебры. Также нет никаких ограничений для построения шестидесятиодномерной векторной алгебры. Это расширение можно продолжать: сто двадцать семь измерений, двести пятьдесят пять измерений, и т.д. – и очень возможно, что эта цепочка непрерывно возрастает до бесконечности. В таком случае, физические пространственные представления могут быть полностью изменены. Т.е. физическое пространство не трёхмерное, не семимерное, не пятнадцатимерное, а может возрастать вплоть до бесконечно мерного. Пространство, следует ещё раз подчеркнуть, без понятия времени. Время как было, так и остаётся в данном подходе одномерным и строится восьмимерное пространство-время, шестнадцатимерное пространство- время, и т.д. Т.е. время – одномерное, а пространство может иметь очень большую размерность вплоть до бесконечномерного.

Конечно, свойства пространства меняются. Что же тогда понимать строго под пространством? Можно сказать так: *пространство − это способ симметрии. Т.е. способ построения симметричных структур*. Трёхмерных структур, семимерных структур, пятнадцатимерных структур, тридцатиодномерных структур [18]. *Структуры имеют различную степень симметрии, а, следовательно, различную размерность*. Вот к каким философским взглядам приводит задача о расширении пространственных физических форм. Пространство может оказаться имеющим n-мерную размерность, при этом свойства симметрии будут совсем другие.

Трёхмерные свойства симметрии − это частный случай семимерной и пятнадцатимерной симметрии. Семимерная симметрия −это частный случай пятнадцати мерной структур и т.д. симметрии, с усложнением размерности, с увеличением размерности структур степень симметрии возрастает, степень нарушения симметрии уменьшается. Уменьшение размерности приводит к нарушению симметрии, уменьшению степени адекватности симметрии.

Литература

1.*Костицын В.И*. Теория многомерных пространств. М.: КомКнига, 2007. 72с.

2.*Розенфельд Б.А*. Многомерные пространства. М.: Изд-во «Наука». Главная редакция физико-математической литературы, 1966. 648с.

3.*Шмутцер Э*. Симметрии и законы сохранения в физике/Пер. с нем. М.: «Мир», 1974. 159 с.

4. *Грин Б*. Ткань космоса: Пространство, время и текстура реальности. Пер. с англ./Под ред. В.О.Малышенко и А.Д.Панова. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009. 608с.

5.*Грин Б*. Элегантная Вселенная. Суперструны, скрытые размерности и поиски окончательной гипотезы. Пер. с англ. /Общ. Ред. В.О.Малышенко. М.: Едиториал УРСС, 2004. 288с.

6.*Грин Б*. Скрытая реальность. Параллельные миры и глубинные законы космоса. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2013. 400с.

7.*Владимиров Ю.С.* Пространство-время: явные и скрытые размерности. М.: Книжный дом ЛИБРОКОМ, 2010. 208с.

8.Пенроуз *Р.* Путь к реальности, или законы, управляющие Вселенной. Полный путеводитель. М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2007. 912с.

9.*Рэндалл Л.* Закрученные пассажи: Проникая в тайны скрытых размерностей пространства. Пер. с англ./Научн. ред. И.П.Волобуев. М.: УРСС: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2011. 400с.

10.*Кравченко П. Д., Мешков В. Е., Чураков В. С.* Многомерная физика на основе семимерной парадигмы А. В. Короткова как основа для изучения гравитационного, сильного и слабого ядерных взаимодействий, изучения элементарных частиц и формирования основ квантованной (дискретной) физики // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. 2012. № 5. (С. 51-56).

11.*Кравченко П. Д., Мешков В. Е., Чураков В. С.,Вересников Г.С*. Пифагоровы числа в атоме//Альманах современной науки и образования.2013.№1. (С.78-90).

12.*Кравченко П. Д., Мешков В. Е., Чураков В. С., Брыкина Т.А., Веприков Ю.А.* Многомерные технологии//Альманах современной науки и образования.2012.№8. (С.91-97).

13.*Кочковая Н.В., Мешков В.Е., Чураков В.С., Брыкина Т.А*. Концепция 3D компьютера//Альманах современной науки и образования.2012.№8.(С.84-89).

14.*Коротков А.В*. Элементы семимерного векторного исчисления. Алгебра. Геометрия. Теория поля. Новочеркасск: Набла, 1996. 244с.

15.*Коротков А.В., Чураков В.С.* Теоретико-философские аспекты трехмерного и семимерного пространств (собственно евклидового и псевдоевклидова). Новочеркасск: УПЦ «Набла» ЮРГТУ (НПИ), 2010. 266с.

16.*КоротковА.В.*Элементы трех- и семимерных изовектроных и спинорных псевдоевклидовых исчислений. Новочеркасск: УПЦ «Набла» ЮРГТУ (НПИ), 2008. 60с.

17.*КоротковА.В*. Элементы пятнадцатимерного векторного исчисления. – Новочеркасск: Издательство «НОК», 2011. 36с.

18.*Коротков А.В.* Элементы многомерного (15-и 31-мерного) векторного исчисления. Новочеркасск: Издательство «НОК», 2012. 76с.

КРАВЧЕНКО П.Д., МЕШКОВ В.Е., ЧУРАКОВ В.С., ВЕРРЕСНИКОВ Г.С.

ПИФАГОРОВЫ ЧИСЛА В АТОМЕ

Статья является продолжением и развитием наших работ по теме «Многомерная физика», начатой в предыдущей статье [8].

Время от времени некоторые физики-теоретики обращаются к наследию древних авторов – Пифагора, Аристотеля и др. – и тогда появляются публикации вроде следующих: Л. Б. Окунь «Теория относительности и теорема Пифагора», А. В. Шепелев «Космический микроволновый фон и аристотелевы представления о движении» – в журнале «Успехи физических наук» [9; 12]. Кроме того, работы Пифагора и пифагорейцев привлекают и нетривиально мыслящих авторов – это, прежде всего, В. И. Сяхович [11] и А. В. Коротков [5]. Что касается работ Сяховича и Короткова, то они различаются методами. Методы В. И. Сяховича традиционны, но с их помощью получены новые интересные и нетривиальные результаты. Метод А. В. Короткова – компьютерный (т.е. с использованием программ **МатКад** (Mathcad – это система компьютерной алгебры из класса систем автоматизированного проектирования, ориентированная на подготовку интерактивных документов с вычислениями и визуальным сопровождением); **МатЛаб** (MATLAB – сокр. от англ. *«Matrix Laboratory»* в русском языке произносится как Матла́б – пакет прикладных программ для решения задач технических вычислений и одноимённый язык программирования, используемый в этом пакете); таблиц Эксель (Microsoft Excel (также иногда называется **Microsoft Office** Excel) – программа для работы с электронными таблицами, созданная корпорацией Microsoft для Microsoft Windows, Windows NT и Mac OS. Она предоставляет возможности экономико-статистических расчетов, графические инструменты. *Microsoft Excel* входит в состав *Microsoft Office,* и на сегодняшний день *Excel* является одним из наиболее популярных приложений в мире, т.к. находится в русле современных исследований по пифагоровым числам. Кроме того, А. В. Коротковым разработана *семимерная парадигма*, в рамках которой получены оригинальные результаты [5; 6].

Исследования по пифагоровым точкам также находятся в рамках данной *семимерной парадигмы А. В. Короткова*. В настоящей статье рассмотрим несколько работ А. В. Короткова по пифагорейской тематике, в которых исследуются вопросы применимости уравнений второй степени в целых числах и их решений в применимости к задачам атомной физики, к проблемам физики вообще, к вопросам естествознания, и следующие из них нестандартные выводы и нетривиальные выводы [2; 6].

Нас больше всего интересует атомная физика, поскольку это - основа всего.

Что же касается собственно пифагорейского математического наследия (важнейшим результатом которого является то, что иррациональные числа получаются из отношения рациональных), то в результате многолетних исследований А. В. Короткова и ряда других авторов выяснилось, что особую роль в нём играют пифагорейские тройки. Оказалось, что они есть и в макромире и что особенно важно – в микромире. Пифагорейские тройки чисел могут быть определены двояким образом. Первый из них по формуле: $(2Kn)^2 + (K^2 - n^2)^2 = (K^2 + n^2)^2$, здесь фигурируют три квадрата числа, т.е. сумма квадратов двух чисел равняется третьему квадрату. Пифагорейская тройка – это не произвольный набор трёх чисел, а строго определенный набор трёх чисел, причём каждое из этих трёх чисел является функцией всего двух переменных: K и n. Т.е., получается, что три числа пифагорейской тройки есть набор функций двух переменных. Задавая K и n произвольным образом, можно задавать произвольные пифагорейские тройки, а так как K и n могут занимать положение от единицы до бесконечности, то число троек, – что и без доказательства видно, бесконечно большое. Тем не менее, конечные значения K и n, особенно незначительные по величине, широко используются на практике. В частности, известная формула $3^2+4^2=5^2$, – формула прямоугольного треугольника, она используется при строительстве зданий, прежде всего, при возведении прямоугольных сооружений.

Рассмотрим свойства пифагоровых троек. Про бесконечность их мы уже говорили, но можно выделить простые пифагоровы тройки.

Под простыми пифагорейскими тройками подразумевают взаимно простые числа, возведённые в квадрат, т.е. в дальнейшем эти числа не могут быть сокращены ни на какое промежуточное значение. Можно доказать, что если два числа пифагоровой тройки простые, то и третье число тоже обязательно простое, и таким образом, два числа должны быть обязательно простыми. Но числа K и n, определяющие каждое из чисел пифагоровой тройки не обязательно могут давать простую пифагорову тройку, даже если они сами простые. Например, $K=2$, $n=1$, даст пифагорову тройку 6, 8, 10. Как видно, эту пифагорову тройку можно сократить на *2*. Получим 3, *4*, 5, т.е. простую пифагорову тройку (первая пифагорова тройка не простая, а вторая простая).

Чтобы пифагорейская тройка оказалась простой, необходимо, чтобы простыми были не только числа K и n, а также взаимно простыми должны быть значения и *(К-n)* и *(К+ n)*. Таким образом, можно выделить набор пифагорейских простых троек с взаимно простыми числами. Это значительно меньший круг пифагоровых троек, но, тем не менее, он так же бесконечно велик. *Множество этих троек бесконечно большое.* Это важное свойство пифагоровых троек означает, что в основе вещей окружающего мира лежат, по сути, взаимно простые числа. Взаимно простые числа, которые приводят к появлению простых пифагоровых троек. Простые пифагорейские тройки – это кладезь простых чисел, взаимно простых чисел. Среди них очень много чисто простых чисел.

Числа чисто простые – это исключительно важное значение чисел натурального ряда. Очень важно, что можно найти бесконечное множество таких чисел, причём как в области малых значений чисел, так и в области очень больших значений чисел. Очень большие значения чисел могут использоваться, например, в *криптографии*. Это очень важная область математических знаний. Пифагоровы тройки могут быть построены как для целых чисел, так и для дробных. Задавая соответственно значения *К* и *n* произвольными по величине, мы получаем набор целых значений чисел пифагоровых троек. Однако надо отметить вторую немаловажную область значений пифагоровых троек, хотя Пифагор, видимо, не занимался такими числами (заметим, что из тринадцати книг по арифметике Диофанта, по которым известна пифагорейская математика, сохранилось только шесть. Что было в остальных книгах, остаётся открытым вопросом, может быть, там были и значения дробных пифагоровых чисел). Поэтому если взять обратные значения целых чисел как $\frac{1}{n}+n+\frac{1}{k}$, то все формулы сохраняют свой вид. Но только при этом получается, что $\frac{(2Kn)^2+(K^2-n^2)^2}{K^2n^2}=\frac{(K^2+n^2)^2}{K^2n^2}$, т.е. оказывается, что те же самые формулы применимы для построения пифагоровых троек дробных чисел, но при этом нужно каждое из чисел пифагоровой тройки, каждое из трёх чисел разделить на *Kn,* где *Kn* – целые числа. Таким образом, получается, что пифагоровы тройки имеют место не только для целых чисел, но и для обратных значений чисел $\frac{1}{K}u\frac{1}{n}$, и это весьма примечательный факт, потому что он имеет самое непосредственное отношение к действительной природе. Не говоря о музыкальном нотном ряде, можно привести очень важный пример. Например, такими дробными значениями чисел могут быть описаны радиусы и величины энергии электронов, находящихся на орбитах атомов по теории Бора.

Теория Бора – это есть не что иное, как пифагоровы тройки с обратными значениями чисел, т.е. теория атома Бора - это дробные значения пифагоровых троек. Вот так далеко ушёл Пифагор со своей школой в своих исследованиях! Он создал математический аппарат, можно сказать, для атомной физики ещё 2500 лет назад, что является фактом не только интересным, но и очень серьёзным.

Серии Бальмера и Лаймона могут быть описаны с помощью пифагоровых троек квадратных значений. Следовало бы отметить, что на этот факт никто не обращает внимания, а совершенно напрасно. Потому, что кроме дробных значений имеются и значения целые. Целые значения пифагоровых троек ещё пока не нашли серьёзного отображения в области физики – физики элементарных частиц, но очень возможно, что найдут. Почему? Дело в том, что *теория Бора описывает радиусы орбит электронов и энергии на орбитах в обратных значениях пифагоровых троек*. На значительно больших расстояниях, – следует пояснить, – поскольку численное значение константы Ридберга, рекомендованное CODATA в 2010 году, составляет

R= 109737,31568539 см$^{-1}$.

А на малых расстояниях, расстояниях меньше одного ангстрема, удовлетворительной теории строения атома и ядра практически нет.

Если обратные значения пифагоровых троек нашли применение для использования в теории атома на расстояниях больше константы Ридберга, то целые значения пифагоровых троек могут найти применение на расстояниях, меньше константы Ридберга, то есть на расстояниях, определяемых значениями от нуля – от центра до константы Ридберга, ориентировочно один ангстрем (но это уже чисто техническая сторона дела: можно уточнить по физическим справочникам). То есть значения пифагоровых троек в целых числах могут дать описание расстояний орбит в оболочечной материи ядра – уже ядра, а не атома и энергии на этих орбитах для ядерных расстояний, т.е. *для получения значений ядерных сил*. Это, конечно, **гипотеза**, *но если обратные значения пифагоровых троек нашли применение в атомной физике, то прямые значения, целые значения чисел, конечно, могут найти ещё большее применение в области ядерной физики для описания силовых взаимодействий, на расстояниях меньше константы Ридберга.*

Конечно, обратные значения пифагоровых троек используются не только в теории Бора, но также и в производных теории Бора. Например, в теории получения рентгеновских лучей задействованы те же самые обратные значения пифагоровых троек. Т.о. если классифицировать применение пифагоровых троек, то можно создать своего рода таблицу пифагоровых троек в целых значениях. Прежде всего, это значения трёх чисел в целых величинах, как сумма квадратов, равная квадрату целой величины. Надо отметить, что эта же таблица могла бы быть применима для обратных значений чисел, поскольку матрица пифагоровых троек в этом случае могла бы представляться в виде набора чисел, расположенных на линии пересечения *K* и *n* с каждой строки например, *n*-го столбца матрицы, а элемент этой матрицы делится на *Kn,* и получается значение пифагоровых троек в обратных величинах..

Очень примечателен тот факт, что пифагоровы тройки дают катеты и гипотенузы прямоугольных треугольников, поэтому в геометрическом отношении эти числа могут быть очень важны для построения прямых углов – с одной стороны и с другой стороны – для определения таких чисел, как отношение катета к гипотенузе, то есть синус, косинус. Отношение катета к катету, то есть тангенс, котангенс и т.д., – эти числа в целых значениях дают определение тригонометрических функций. Это с одной стороны, а с другой стороны – эти числа для пифагоровых троек в целых значениях получаются не только целыми, но и рациональными. По отношению к катету, например, тангенс, может представляться рациональной величиной, если в числителе или знаменателе использованы значения пифагоровых троек. Значение тангенса – это необязательно значение величин в рациональных числах. Между рациональными значениями найдутся иррациональные, но они уже будут описаны не значениями целых чисел, не отношением целых чисел, а некоторым другим значением, другой функцией, другой величиной.

Итак, отметим ещё раз, что пифагоровы тройки могут дать, прежде всего, в целых значениях значения функций: синуса, косинуса, тангенса, котангенса, секанса, косеканса, с одной стороны. С другой стороны, пифагоровы тройки могут указать рациональные значения этих функций, т.е. в математическом плане это очень широкая область применения. Например, пифагоровы тройки могут дать последовательный ряд для значений тангенса, если сохранить разность между длиной катета, равную единице, а катет увеличивать беспредельно. Интересно, что такие значения чисел для получающихся так называемых «хромых» треугольников очень быстро возрастают. Например, первым значением являются три, четыре, пять, вторым уже является значение двадцать, двадцать один, двадцать девять, очередным сто девятнадцать, сто двадцать, сто шестьдесят девять, т.е. значение в этой числовой последовательности возрастает очень быстро. Целое число с тридцатью двумя значениями получается всего лишь в двух десятках интервалов. Это колоссальные числа, которые так быстро достижимы. Но суть даже не в этом, суть в том, что при этом удаётся выявить некоторые закономерности пифагоровых троек в таком ряду. Например, в ряду «хромых» треугольников (следует напомнить, что, как пишет Саймон Сингх, «При чтении II-й книги «Арифметики» Ферма наткнулся на целую серию наблюдений, задач и решений, связанных с теоремой Пифагора и пифагоровыми тройками.

Например, Диофант рассматривал существование особых троек, образующих так называемые «хромые треугольники», у которых две более короткие стороны *x* и *y* отличаются по длине только на единицу (например, x = 20, y = 21, z = 29 и 202 + 212 = 292» [10]).

Эти закономерности очень важны, и видимо, не даром привлекали внимание такого замечательного ученого-математика как Ферма. Дело в том, что отношения этих чисел в приведенной последовательности, в каждом шагу приближает прямоугольный треугольник к равностороннему. И если число шагов достаточно велико, то значение угла практически не отличается от 45 градусов. Причём, чем более высокое число, тем мы ближе приближаемся к значению 45 градусов. О чём это говорит? Это говорит о том, что тангенс 45 градусов равен $\frac{\sqrt{2}}{2}$ или $\frac{1}{\sqrt{2}}$ – т.е. $\frac{1}{\sqrt{2}}$, это значение может быть получено как корень из двух чисел, как предел числовой последовательности рациональных чисел, отношение двух целых чисел.

При достижении этих пределов бесконечно больших значений чисел K либо n получается иррациональное число, корень из двух может быть получен как предел числовой последовательности рациональных чисел. Это важное замечание, поскольку оно касается описания природы иррациональных чисел, которая до сих пор не достаточно исследована и подлежит дальнейшему изучению. Надо отметить, что в том же ряду «хромых» треугольников отношение двух соседних значений треугольников очень близко значению пять и восемь. Например, в первом отношении первые две тройки дают 29/5=5,8 и уже в первом приближении с каждым увеличением значения K и n это число все более уточняется, оно является рациональным значением. Это рациональное значение приближается к значению $\sqrt{34}$, т.е. с учетом того, что $\sqrt{2}$ задействован в этой же тройке. В этом же ряду троек появляется принципиальное значение $\sqrt{17}$ – не менее важное число, чем $\sqrt{2}$.

Ведь именно $\sqrt{17}$ был камнем преткновения при построении многогранной равносторонней фигуры с числом сторон равным $\sqrt{17}$. Эту задачу решил Гаусс. Надо отметить, что уже две иррациональные величины $\sqrt{2}$ и $\sqrt{17}$ наблюдаются только в одном наборе ‹‹хромых›› треугольников. Таких же треугольников, только уже не ‹‹хромых››, а несколько другого содержания, с разницей катетов прямоугольного треугольника в две величины, в пять, семь и так далее, может быть бесконечно большое число. Т.е. эти значения точно так же дадут функции иррациональных величин, как предел последовательности числовых рациональных рядов – рациональных рядов для получения значений иррациональных величин, но уже не $\sqrt{2}$, $\sqrt{17}$, а несколько иных. Очень возможно, что в ряду этих значений окажутся такие функции, как число Непера *e*, либо число π. Поэтому данный вопрос нужно изучать и анализировать.

Уравнение Шрёдингера можно привязать к размерности пространства. Уравнение Шрёдингера даёт решение для волновых функций, которыми пользуются для обозначения целого ряда атомных характеристик в теории ядра, в теории атома, в квантовой механике и т.д. *Решение уравнения Шрёдингера – это решение волновой функции от этой величины X.* ***Надо отметить, что уравнение Шрёденгера решаемо уже не для линейного уравнения X, а для трёх величин X, У, Z линейного векторного пространства.*** Решение уравнения Шрёдингера даёт значения не только квантовых чисел главного квантового числа, но, также, побочного спинового и побочного магнитно-спинового числа.

Таким образом, решение уравнения Шредингера в трёхмерии – трёхмерном пространстве (3D) даёт четыре квантовых числа, которые, в конечном итоге, характеризуют теорию атома, теорию ядра, теорию химических соединений и т.д. Уравнение Шрёдингера характеризует расположение элементов в таблице Менделеева. Поэтому с увеличением размерности, применяемом в решении уравнения Шрёденгера, возрастает число квантовых чисел, характеризующих эту систему. Если в одномерном случае только два числа характеризуют систему – *n* и *l* , то в трёхмерном – уже четыре числа. Следовательно, в многомерном случае будет значительно больше квантовых чисел, и чем больше размерность, тем мы точнее описываем свойства частиц, свойства атомов, свойства ядер и т.д.

Конечно, можно этим не заниматься, а можно остановиться на достигнутом, скажем на теории Бора, на одномерном уравнении Шрёдингера, но физику – атомную, ядерную, физику элементарных частиц, такой подход уже не устраивает. Появляется уравнение Дирака, позволяющее описывать расщепление слоя орбитальных оболочек на подслои, вводится постоянная тонкой структуры $\alpha = 7{,}2973525698(24)\cdot 10^{-3} = {}^{1}\!/_{137{,}035\,999\,074(44)}$, (ПТС) – безразмерная величина, образованная комбинацией фундаментальных констант (её численное значение не зависит от выбранной системы единиц), – и все это для того, чтобы уточнить свойства атомов, либо ядер атомов. *Многомерные системы повышают точность при измерении тех или иных величин при их анализе. Трёхмерные или одномерные случаи являются лишь частными случаями многомерных.*

И поскольку следующим шагом после трёхмерных векторных алгебр является *семимерная векторная алгебра* [5; 6], то конечно, следует изучить семимерную векторную алгебру досконально. Семимерная векторная алгебра, т.е. аппарат семимерной математической физики уже создан, что открывает перспективу очень точного рассмотрения величин квантовомеханического характера и позволяет найти ему новые применения в области квантовой физики, физики элементарных частиц, а также атомной и ядерной физики. Можно отметить, что следующим этапом после семимерия [5], будет пятнадцатимерие [4] и далее тридцати одно, шестидесяти трёх и т.д. по нарастающей **n-мерных значений.**

Эти функции могут всё более точно характеризовать свойства изучаемых величин, объектов, причём если мы снижаем размерность, то точность ухудшается, но если она превышает значение каких-то практических задач, то можно ограничиться малой размерностью. Если требуется повышать точность решения задач, то нужно идти по пути увеличения размерности физического пространства. Математическая основа для этого уже существует [4; 5; 6].

Необходимо отметить ещё два принципиально важных момента. Говоря о пифагоровых тройках чисел, мы не задумываемся о значении пифагоровых четвёрок чисел, пятерок, шестерок, *вообще чисел n-ной размерности.* Т.е. не только сумма двух квадратов может быть выражена квадратом целого числа, но и сумма трёх квадратов, четырёх, …., n квадратов может быть представлено квадратом целого числа. Это говорит о том, что очень важным направлением в развитии применения пифагоровых чисел являются *многомерные пифагоровы числа*. $3^2 + 4^2 + 12^2$ дают 13^2, а это сумма трёх квадратов, а не двух. Точно так же эту последовательность можно продолжить до бесконечно больших значений. Это первое замечание. И второе замечание. Пифагорову тройку можно представлять не только как сумму двух квадратов, но и как разность двух квадратов, например, $3^2=5^2-4^2$. Вообще-то, эта величина может служить основанием для построения псевдоевклидовых геометрий, точно так же, как сумма двух квадратов послужила основой для построения евклидовых геометрий: вначале проанализировали сумму двух квадратов, затем сумму трёх квадратов, затем сумму n квадратов и получили *многомерные евклидовы геометрии.*

Таким же образом можно строить *многомерные псевдоевклидовы геометрии*. Можно построить не сумму двух квадратов величин равную квадрату величины, а алгебраическую сумму трёх квадратов, где одна из величин будет со знаком минус, а это уже трёхмерная псевдоевклидова величина. Важно то, что пифагоровы тройки чисел могут послужить основой для построения не только евклидовых геометрий, но и для построения псевдоевклидовых геометрий. Такая работа в настоящий момент проводится, но она не завершена, хотя толчком для её выполнения послужило создание псевдоевклидовых алгебр в трёхмерии и в семимерии. Трёхмерные и семимерные псевдоевклидовы алгебры уже построены и требуется более досконально изучать свойства, лежащие в основе построения этих алгебр, т.е. *свойства комплексных числовых систем, которые в конечном итоге, так или иначе, связаны с пифагоровыми значениями чисел* [5; 6].

Итак, можно сказать, что: *во-первых,* ***пифагоровы тройки чисел определяют, в конечном итоге, геометрическую евклидову природу физических явлений, и с этой геометрией связано очень много различных вещей, чисто физических, чисто химических, механических, музыкальных и т.д.*** То есть, *речь идет о всеобщем применении пифагоровых троек в физике или в природе вещей*. Наконец, некоторые вещи весьма принципиальны. Тот же спектр атома водорода – это уже атомные явления, природу которых следовало бы изучить, возможно, более подробно и полно. Физические эксперименты дают очень много, но арифметика, подведенная под этой базой физических экспериментов, может дать значительно больше.

Во-вторых, по замечанию А. В. Короткова «вопрос классификации пифагоровых чисел, по-видимому, связан с классификацией физических величин. В одной из моих работ отмечалось, что числа *x* и *y* имеют прямое отношение к классификации волновых чисел излучения атомов. Отметим к тому же, что четверки чисел также фигурируют в трехмерном спинорном исчислении при классификации элементарных частиц с полуединичным спином. Эти четверки чисел характеризуют две пары частиц, так что имеется прямая аналогия с парами чисел *z* и *c, p* и *t* определяемых уравнением Диофанта из четверки чисел *z, c, p* и *t*. Это, между прочим, говорит о возможном бесконечном числе элементарных частиц с полуединичным спином» [1, с. 22].

Но нас больше всего интересует атомная физика, поскольку, повторим ещё раз – это основа всего.

В работе «К нахождению решений полиноминальных уравнений второй степени в целых» [1] рассмотрены (Таблица 1) вопросы решения уравнений Пифагора в целых числах [1, с. 3-14] .

Оказывается, что решения в целых числах, как известно, определяются уравнением Пифагора: $X^2+У^2=Z^2$ для уравнения с двумя независимыми переменными, но эти уравнения могут быть рассмотрены несколько иначе. В частности, X представляется как чётное число 2mn, где mn – собственно целые числа взаимно простые, второй катет У определяется как m^2-n^2, и собственно, гипотенуза определяется суммой квадратов m^2+n^2, повторим ещё раз: m и n − взаимно простые числа разной чётности, одно из них чётное X, второе У обязательно нечётное. В **Таблице 1** представлены тройки пифагоровых чисел, начиная от m и n, до 21, соответственно, и, кончая всего лишь 16-ой позицией, где m и n равняются по 16. Это было бы мало интересно для физики, хотя надо отметить, что вопросы физики тесно связаны с вопросами геометрии, причем наиболее четко зависимость проявляется в связи с евклидовой геометрией, а евклидова геометрия опирается на теорему Пифагора. Поэтому следует отыскать применимость пифагоровых троек чисел к отдельным разделам физики в частности, а также к естествознанию вообще. Оказывается, что такая возможность существует. Это - вопрос применимости к объяснению спектров атомов водорода. Спектр атома водорода разбивается на серии спектральных линий, в которые включены группы спектральных линий. (См.: тонкая структура спектральных линий атомов водорода [7, с. 350]; теория атомов водорода по Бору [7, с. 346]).

В начале XX века стало понятно, что все или значительная часть, по крайней мере, физических величин квантовано, то есть определяется не непрерывным значением числа, а дискретным значением чисел. В частности, Бор показал на основе спектра атома водорода, описанным Бальмером, что волновые линии, волновые числа определяются разностью отношений единицы к квадрату простых чисел. Волновое число пропорционально постоянной Ридберга. Минус в скобках единица 2 в квадрате минус n^2. Это то, что касается атома водорода спектральной линии, вернее спектральной серии Бальмера. Здесь n^2 занимает дискретный ряд значений 3, 4, 5, 6 и т.д., т.е. является целым числом.

Этот знаменательный факт привел к появлению теории атома водорода, которую разработал Бор, на её основе создали квантовую механику. Эту формулу можно несколько видоизменить. Во-первых, число два в квадрате касается серии Бальмера. Здесь число два не обязательно, здесь могут быть и другие целые числа: 1 в частности, 3 и т.д., взятые в квадрат. В результате будут получены, кроме серии Бальмера, серии Пашена, серии Лаймана, серия Лаймана в ультрафиолете, серия Пашена инфракрасная,– и все они характеризуют переход электронов с отдаленных орбит на первую для Лаймана серии, на вторую для серии Бальмера, на третью для серии Пашена и т.д. орбиты электронных оболочек. Поэтому формулу для волнового числа можно несколько видоизменить как величину постоянной Ридберга, умноженной на выражение: в числителе n^2 минус k^2 разделить на k^2 n^2. Эта формула несколько иная. Во-первых, в числителе появляется разность квадратов чисел, целых чисел. Это соответствует тройкам пифагоровых чисел, взятых для одного из катетов с нечетным значением 3, 5, 7 и т.д. Величина квадрата определяется нечетным числом разности квадратов, а в знаменателе получается n^2 на k^2, но это не что иное, как X^2, разделенное пополам. То есть, 2 mn, взятое в квадрате разделить пополам [4, с. 3-14]. Если точнее, то X пополам в квадрате. Т.е., знаменатель для волнового числа и формулы волнового числа также определяются половиной второго катета, взятой в квадрат, и таким образом, мы имеем величину волнового числа как величину, пропорциональную постоянной Ридберга, умноженной на У и разделенной на Х пополам в квадрате. То есть, совершенно неожиданным образом пифагоровы тройки чисел из катетов Х и У и гипотенузы Z оказались увязанными с соотношениями для волновых чисел спектральных серий атомов водорода и не только водорода, но в частности лучше вести речь пока об идеализированном случае, об атоме водорода.

Что это даёт? Это, во-первых, это говорит о геометрической природе физических явлений в области атома, которую можно выразить математическими средствами и о применимости её к спектрам атома водорода, в частности. То есть, пифагоровы тройки чисел, чисто арифметические операции, оказались применимы для описания спектров атома водорода, причем, отыскивать закономерности спектров из физических опытов значительно сложнее, нежели изучать закономерности тех же спектров по арифметическим операциям, то есть, изучая классификацию пифагоровых троек чисел, в частности, серии Лаймана, Бальмера и Пашена (это не единственные серии).

Эти операции могут быть продолжены на серии с электронными числами, характеризующими радиусы первой, второй, третьей орбиты, а также четвертой, пятой, вплоть до бесконечности, и все эти числа представляются пифагоровыми значениями числовых троек с одной стороны. В частности, «для примера в Таблице 1 выделенные жирным шрифтом тройки целых чисел соответствуют прямоугольным треугольникам с целыми длинами сторон. Значения m и n могут занимать бесконечный ряд чисел. Вместе с тем можно попытаться классифицировать значения m и n, а, следовательно, x, y, z по определенным признакам. Одним из таких признаков может являться величина разности между длинами катетов x и y» [2, с. 3].

Таблица 1.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	2 0 2															
2	**4** **3** **5**	8 0 8														
3	6 8 10	**12** **5** **13**	18 0 18													
4	**8** **15** **17**	16 12 20	**24** **7** **25**	32 0 32												
5	10 24 26	**20** **21** **29**	30 16 34	**40** **9** **41**	50 0 50											
6	**12** **35** **37**	24 32 40	36 27 45	48 20 52	**60** **11** **61**	72 0 72										
7	14 48 50	**28** **45** **53**	42 40 58	**56** **33** **65**	70 24 74	**84** **13** **85**	98 0 98									
8	**16** **63** **65**	32 60 68	**48** **55** **73**	64 48 80	**80** **39** **89**	96 28 100	**112** **15** **113**	128 0 128								
9	18 80 82	**36** **77** **85**	54 72 90	**72** **65** **97**	90 56 106	108 45 117	126 32 130	**144** **17** **145**	162 0 162							
10	**20** **99** **101**	40 96 104	**60** **91** **109**	80 84 116	100 75 125	120 64 136	**140** **51** **149**	160 36 164	**180** **19** **181**	200 0 200						
11	22 120 122	**44** **117** **125**	66 112 130	**88** **105** **137**	110 96 146	**132** **85** **157**	154 72 170	**176** **57** **185**	198 40 202	**220** **21** **221**	242 0 242					
12	**24** **143** **145**	48 140 148	72 135 153	96 128 160	**120** **119** **169**	144 108 180	**168** **95** **193**	192 80 208	216 63 225	240 44 244	**264** **23** **265**	288 0 288				
13	26 168 170	**52** **165** **173**	78 160 178	**104** **153** **185**	130 144 194	**156** **133** **205**	182 120 218	**208** **105** **233**	234 88 250	**260** **69** **269**	286 48 290	**312** **25** **313**	338 0 338			
14	**28** **195** **197**	56 192 200	**84** **187** **205**	112 180 212	**140** **171** **221**	168 160 232	196 147 245	224 132 260	**252** **115** **277**	280 96 296	**308** **75** **317**	336 52 340	**364** **27** **365**	392 0 392		
15	30 224 226	**60** **221** **229**	90 216 234	**120** **209** **241**	150 200 250	180 189 261	210 176 274	**240** **161** **289**	270 144 306	300 125 325	330 104 346	360 81 369	390 56 394	**420** **29** **421**	450 0 450	
16	**32** **255** **257**	64 252 260	**96** **247** **265**	128 240 272	**160** **231** **281**	192 220 292	**224** **207** **305**	256 192 320	**288** **175** **337**	320 156 356	**352** **135** **377**	384 112 400	**416** **87** **425**	448 60 452	**480** **31** **481**	512 0 512

В Таблице 1 серия Лаймана определяется вертикальным столбцом под номером 1, Бальмера под номером 2, Пашена под номером 3 и т.д., вплоть до номеров чрезвычайно больших, но эти серии характеризуют переходы с разных орбит на одну из избранных орбит, например первую для Лаймана. Однако можно рассматривать серии иначе. Например, с одной из орбит переход на различные орбиты электрона, например, с четвертой орбиты на первую, вторую, третью. Это иной подход, и этим числам будут соответствовать серии чисел, определяемые горизонтальными столбцами, вернее, строками в Таблице 1. В этом случае, первая серия будет определяться одним извечным числом Х4У3. Вторая серия – третья строка – две величины, две спектральных линии, третья с тремя, n-я – с n-1, и эти серии будут определять переход с одной из орбит на близлежащие орбиты разного номера. Это с одной стороны.

С другой стороны, пифагоровы числа оказываются очень тесно связаны в классификации чисел. В Таблице 2 представлены тройки пифагоровых чисел, соответствующие величине модуля разности между длинами катетов x и y равной 1, 7, 23, 47, 79 в каждом из столбцов таблицы. Первая строка этой таблицы соответствует пифагоровым тройкам чисел, представленным в Таблице 1 в первом столбце.

Необходимо отметить удивительную закономерность построения рядов пифагоровых троек в каждом из классов, а именно:

$z_{k+1}=6z_k- z_{k-1}$,

где z_{k+1} и z_{k-1} соответственно гипотенузы следующего и предыдущего z_k прямоугольных треугольников в столбце.

Второй, не менее удивительной, закономерностью построения рядов пифагоровых троек в каждом из классов является:

$(x+y)_{k+1}=6(x+y)_k-(x+y)_{k-1}$.

Это соотношение выполняется для суммы длин катетов и не выполняется для катетов в отдельности. Вместе с тем для катетов выполнимы следующие рекуррентные соотношения:

$x_{k+1}=5(x_k+x_{k-1})-x_{k-2}$

$y_{k+1}=5(y_k+y_{k-1})-y_{k-2}$.

Естественно, что каждому прямоугольному треугольнику с целочисленными значениями сторон x, y, z соответствуют определенные целочисленные значения m и n. Поскольку удается классифицировать прямоугольные треугольники по величине разности между длинами катетов, то этому способу классификации должен соответствовать определенный способ классификации значений m и n. Этот способ классификации приведен в Таблице 3, в которой каждому столбцу значений пифагоровых троек из Таблицы 2 соответствует определенный столбец значений, определяющих эти тройки величин m и n в Таблице 3 [2].

Таблица 2 .

4 3 5	8 15 17	12 35 37	16 63 65	20 99 101
20 21 29	72 65 97	156 133 205	272 225 353	420 341 541
120 119 169	396 403 565	832 855 1193	1428 1475 2053	2184 2263 3145
696 697 985	2332 2325 3293	4928 4905 6953	8484 8437 11965	13000 12921 18329
4060 4059 5741	13568 13575 19193	28644 28667 40525	49288 49335 69737	75500 75579 106829
23660 23661 33461	79104 79097 111865	167028 167005 236197	287432 287385 406457	440316 440237 622645
137904 137903 195025	461028 461035 651997	973432 973455 1376657	1675116 1675163 2369005	2566080 2566159 3629041
803760 803761 1136689	2687092 2687085 3800117	5673656 5673633 8023745	9763452 9763405 13807573	14956480 14956401 21151601
4684660 4684659 6625109	15661496 15661503 22148705	33068412 33068435 46765813	56905408 56905455 80476433	87172484 87172563 123280565
27304196 27304197 38613965	91281912 91281905 129092113	192736908 192736885 272571133	331669184 331669137 469051025	508078740 508078661 718531789
159140520 159140519 225058681	532029948 532029955 752403973	1123352944 1123352967 1588660985	1933109508 1933109555 2733829717	2961299640 2961299719 4187910169
927538920 927538921 1311738121	3100897804 3100897797 4385331725	6547380848 6547380825 9259394777	11266988052 11266988005 15933927277	17259719416 17259719337 24408929225
5406093004 5406093003 7645370045	18073356848 18073356855 25559586377	38160932052 38160932075 53967707677	65668818616 65668818663 92869733945	100597016540 100597016619 142265665181
31509019100 31509019101 44560482149	105339243312 105339243305 148972186537	222418211556 222418211533 314546851285	382745923832 382745923785 541284476393	586322380140 586322380061 829185061861
183648021600 183648021599 259717522849	613962102996 613962103003 868273532845	1296348337192 1296348337215 1833313400033	2230806724188 2230806724235 3154837124413	3417337263984 3417337264063 4832844705985
1070379110496 1070379110497 1513744654945	3578433374692 3578433374685 5060669010533	7555671811688 7555671811665 10685333548913	13002094421484 13002094421437 18387738270085	19917701204080 19917701204001 28167883174049
6238626641380 6238626641379 8822750406821	20856638145128 20856638145135 29495740530353	44037682532844 44037682532867 62278687893445	75781759804528 75781759804575 107171592496097	116088869960180 116088869960259 164174454338309
36361380737780 36361380737781 51422757785981	121561395496104 121561395496097 171913774171585	256670423385468 256670423385445 362986793811757	441688464405872 441688464405825 624641816706497	676615518557316 676615518557237 956878842855805

«В Таблице 3 каждой последовательной паре значений чисел соответствует определенная пифагорова тройка из Таблицы 2. Так значениям $n=1$ и $m=2$ в верхнем левом углу Таблицы 3 соответствуют значения $x=2mn=4$, $y=m^2-n^2=3$, $z=m^2+n^2=5$ в верхнем левом углу Таблицы 2. В каждой последовательной паре значений чисел столбцов Таблицы 3 величина m следует за величиной n» [2].

Таблица 3

1	1	1	1	1
2	4	6	8	10
5	9	13	17	21
12	22	32	42	52
29	53	77	101	125
70	128	186	244	302
169	309	449	589	729
408	746	1084	1422	1760
985	1801	2617	3433	4249
2378	4348	6318	8288	10258
5741	10497	15253	20009	24765
13860	25342	36824	48306	59788
33461	61181	88901	116621	144341
80782	147704	214626	281548	348470
195025	356589	518153	679717	841281
470832	860882	1250932	1640982	2031032
1136689	2078353	3020017	3961681	4903345
2744210	5017588	7290966	9564344	11837722
6625109	12113529	17601949	23090369	28578789
15994428	29244646	42494864	55745082	68995300
38613965	70602821	102591677	134580533	166569389
93222358	170450288	247678218	324906148	402134078
225058681	411503397	597948113	784392829	970837545
543339720	993457082	1443574444	1893691806	2343809168
1311738121	2398417561	3485097001	4571776441	5658455881
3166815962	5790292204	8413768446	11037244688	13660720930
7645370045	13979001969	20312633893	26646265817	32979897741
18457556052	33748296142	49039036232	64329776322	79620516412
44560482149	81475594253	118390706357	155305818461	192220930565
107578520350	196699484648	285820448946	374941413244	464062377542
259717522849	474874563549	690031604249	905188644949	1120345685649
627013566048	1146448611746	1665883657444	2185318703142	2704753748840
1513744654945	2767771787041	4021798919137	5275826051233	6529853183329
3654502875938	6681992185828	9709481495718	12736970805608	15764460115498
8822750406821	16131756158697	23440761910573	30749767662449	38058773414325
21300003689580	38945504503222	56591005316864	74236506130506	91882006944148

В Таблице 4 отмечается, «что число рядов пифагоровых троек, как и само число троек, бесконечно велико. Бессмысленно перечислять все ряды троек. Однако, чтобы продемонстрировать применимость приведенных выше рекуррентных соотношений в общем случае в Таблице 4 представлены значения пифагоровых троек для верхнего (диагонального) ряда троек из Таблицы 1. В Таблице 4 оказываются представленными тройки пифагоровых чисел, соответствующие величине разности между длинами катетов x и y равной 1, 7, 17, 31, 49 в каждом из столбцов таблицы. Все приведенные выше рекуррентные соотношения оказываются выполнимыми для троек из Таблицы 4» [2].

Таблица 4

4 3 5	12 5 13	24 7 25	40 9 41	60 11 61
20 21 29	48 55 73	88 105 137	140 171 221	204 253 325
120 119 169	304 297 425	572 555 797	924 893 1285	1360 1311 1889
696 697 985	1748 1755 2477	3276 3293 4645	5280 5311 7489	7760 7809 11009
4060 4059 5741	10212 10205 14437	19152 19135 27073	30880 30849 43649	45396 45347 64165
23660 23661 33461	59496 59503 84145	111568 111585 157793	179876 179907 254405	264420 264469 373981
137904 137903 195025	346792 346785 490433	650324 650307 919685	1048500 1048469 1482781	1541320 1541271 2179721
803760 803761 1136689	2021228 2021235 2858453	3790308 3790325 5360317	6111000 6111031 8642281	8983304 8983353 12704345
4684660 4684659 6625109	11780604 11780597 16660285	22091592 22091575 31242217	35617624 35617593 50370905	52358700 52358651 74046349
27304196 27304197 38613965	68662368 68662375 97103257	128759176 128759193 182092985	207594620 207594651 293583149	305168700 305168749 431573749
159140520 159140519 225058681	400193632 400193625 565959257	750463532 750463515 1061315693	1209950220 1209950189 1711127989	1778653696 1778653647 2515396145
927538920 927538921 1311738121	2332499396 2332499403 3298652285	4374021948 4374021965 6185801173	7052106576 7052106607 9973184785	10366753280 10366753329 14660803121
5406093004 5406093003 7645370045	13594802772 13594802765 19225954453	25493668224 25493668207 36053491345	41102689360 41102689329 58127980721	60421866180 60421866131 85449422581
31509019100 31509019101 44560482149	79236317208 79236317215 112057074433	148587987328 148587987345 210135146897	239564029460 239564029491 338794699541	352164443604 352164443653 498035732365
183648021600	461823100504	866034255812	1396281487524	2052564795640

183648021599	461823100497	866034255795	1396281487493	2052564795591
259717522849	653116492145	1224757390037	1974640216525	2902764971609
1070379110496	2691702285788	5047617547476	8138124895560	11963224330040
1070379110497	2691702285795	5047617547493	8138124895591	11963224330089
1513744654945	3806641878437	7138409193325	11509046599609	16918554097289
6238626641380	15688390614252	29419671029112	47432467885960	69726781184796
6238626641379	15688390614245	29419671029095	47432467885929	69726781184747
8822750406821	22186734778477	41605697769913	67079639381129	98608559612125
36361380737780	91438641399696	171470408627128	276456682420076	406397462778540
36361380737781	91438641399703	171470408627145	276456682420107	406397462778589
51422757785981	129313766792425	242495777426153	390968789687165	574732803575461

Причем, эти тройки чисел связаны между собой, то есть, можно говорить о серии чисел, о серии спектральных линий, формируемых модулем разности двух катетов, катета У нечетного и четного катета Х. Это позволяет классифицировать спектральные линии атома водорода совершенно по иному признаку. Это представляет практический интерес, потому что классификация чисел при этом легко позволяет построить серию чисел, а следовательно, серию спектральных линий. Это очередной момент.

Наконец, взаимосвязь в рекуррентных соотношениях. Между собой связаны величины Х и величины У в трех последовательных, вернее, в четырех последовательных тройках пифагоровых чисел (в статье об этом упоминается). Значение XN+1 определяется как пять значений суммы XN + N - 1 без значения X N минус второго, точно так для У. Это очень специфическая зависимость, которая может дать некоторые физические мысли и эффекты. Наконец, необходимо отметить, что число 6 совершенно не случайное число. Это число, в конечном итоге, характеризует отношение не двух близлежащих пифагоровых троек, а отношение, стремящееся к определенному числу при возрастании числа N. В частности, при возрастании числа N число 6 определяет отношение двух гипотенуз соседних треугольников с одним и тем же модулем разности как 5,828 и т.д., бесконечный ряд значений, то есть рекуррентное число. Это рекуррентное число связано с извлечением корня.

Таким образом, это число является отношением двух гипотенуз соседних треугольников с одним и тем же модулем разности катетов и определяется иррациональным числом 5,82842. Анализ показывает, что это число есть не что иное, как 3+2 корня из 2, то есть это число определяется корнем из 2. Это очень привлекающий момент, потому что корень из двух сам по себе принципиально важное число. Причем рекуррентные соотношения позволяют найти числовое значение корня из двух как отношение величины гипотенузы к величине одного из катетов при возрастании числа N, причем корень из двух очень быстро принимает значение большим числом разрядов, то есть его значение легко вычисляемо. Это, пожалуй, самый быстрый способ вычисления значений корня из двух. Ряды пифагоровых троек связаны между собой строго определенным образом. Во-первых, модуль разности катетов двух сторон прямоугольного треугольника определяется дискретным рядом значений. Он принимает значения: 1, 7, 17, 23, 31, 41, 47, то есть занимает значения, определяемые простыми числами. Факт очень привлекательный с точки зрения многих дисциплин, в частности для кодирования и декодирования, в криптологии и т.д.

Наконец, числа гипотенуз пифагоровых троек встречаются в двух числовых последовательностях, например, число 13 (см. Таблица 2) встречается при значении разницы модуля двух величин равным 7 (См. второй столбец (таблицы 4) первая строка).,. То есть два столбца можно рассматривать не как линейку бесконечной протяженности в одном и в другом направлении, а как пару линеек, пересекающихся в данном конкретном числе, например, в числе 13. При этом получается уже рассмотрение не линеек, а плоскостей числовых последовательностей пифагоровых троек. Трудно сказать без соответствующего рассмотрения и анализа, какое это применение найдет в области физики, но сам факт очень знаменательный.

Дело в том, что такая структура определяет своего рода «кристаллы» числовых последовательностей, то есть математические величины в какой-то степени могут характеризовать кристаллическую структуру различного рода веществ. Можно говорить о применимости пифагоровых троек не только в физике, но и в химии. Очевидно, что этот числовой ряд повторяет последовательность значений числа электронов в электронных оболочках химических веществ, распределение по группам 2, 8, 18, 32, 50, 72. Каждый химик знает эту последовательность чисел. Более того, этот числовой ряд меняется от двух до бесконечности в числовом варианте, то есть можно говорить, что химические вещества образуют бесконечный ряд химических соединений. Собственно химических элементов не 8, не 9, не 10 групп в периодической системе таблицы Менделеева, а значительно больше. Таким образом, вполне вероятно, что существует бесконечно большое количество групп химических элементов (по крайней мере – чисто теоретически). То есть химики могут рассматривать вопрос о том, какое количество химических элементов в природе – это не 101, не 104, не 117, не 120, либо 130 – характеризует так называемая плата в химических свойствах веществ, но это бесконечно большой ряд элементов.

Другое дело, в каких условиях эти элементы и химические соединения могут быть получены, при каких физических соотношениях, давлениях, температурах и т.д.,– т.е. это совсем иной вопрос. Мы не знаем, что происходит в недрах Земли, в недрах звезд, какие химические элементы формируются в тех непредставимых условиях по нашим понятиям. Это в отношении применения даннного математического подхода к химии.

Можно говорить о пифагоровых тройках чисел в применимости к степенным рядам и рассматривать степенные ряды как множество целых чисел, а степенные числа в иррациональных соотношениях и рядах иррациональных чисел. Эти числа как множество целых степеней действительных чисел, включающих целые рациональные и иррациональные числа и т.д., характеризуют формирование параметрических рядов размеров рельс, объёмов гидромашин, мощностей трансформаторов и т.д., в том числе музыкальную гамму, – равномерно темперированный строй музыкальной грамоты. Даже здесь можно найти приложения пифагоровых троек к этим математическим процедурам, например, в работе «Степенные числа в музыкальной гамме» **приведены** в таблице частот (Таблица 5) [см. табл.1 в 3]:

Таблица 5.

100	1,000000000000000000000000000000…		
		112	1,1220184543019634355910389464779…
125	1,2589254117941672104239541063958…		
		140	1,4125375446227543021556078639302…
160	1,5848931924611134852021013733915…		
		180	1,7782794100389228012254211951927…
200	1,9952623149688796013524553967395…		
		224	2,2387211385683396119549508524657…
250	2,5118864315095801110850320677993…		
		280	2,8183829312644538191019236991551…
316	3,1622776601683793319988935444327…		
		355	3,5481338923357545843321870226449…
400	3,9810717055349725077025230508775…		
		450	4,4668359215096311855625052431938…
500	5,0118723362727228500155418688495…		
		560	5,6234132519034908039495103977648…
630	6,3095734448019324943436013662234…		
		710	7,0794578438413791080221494218931…
800	7,9432823472428150206591828283639…		
		900	8,912509381337455299531086810783…

и в Таблице 6 [см.табл.3 в 3]:

Таблица 6.

	такт	частота, гц		такт	частота, гц
a^0	1,00000000000000…	16,3515978312881…	a^{60}	32,0000000000000…	523,2511306012190…
a^1	1,05946309435929…	17,3239144360551…	a^{61}	33,90281901949730…	554,3652619537650…
a^2	1,12246204830936…	18,3540479948385…	a^{62}	35,91878554589960…	587,3295358348340…
a^3	1,18920711500270…	19,4454364826305…	a^{63}	38,05462768008650…	622,2539674441790…
a^4	1,25992104989485…	20,6017223070549…	a^{64}	40,31747359663510…	659,2551138257540…
a^5	1,33483985417000…	21,8267644645631…	a^{65}	42,71487533344000…	698,4564628660200…
a^6	1,41421356237305…	23,1246514194774…	a^{66}	45,25483399593770…	739,9888454232780…
a^7	1,49830707687663…	24,4997147488595…	a^{67}	47,94582646005210…	783,9908719635040…

	такт	частота, гц		такт	частота, гц
a^{8}	1,58740105196814…	25,9565435987467...	a^{68}	50,79683366298040…	830,6093951598920…
a^{9}	1,68179283050735…	27,5000000000000…	a^{69}	53,81737057623530…	880,0000000000000…
a^{10}	1,78179743628059…	29,1352350948803…	a^{70}	57,01751796097890…	932,3275230361720…
a^{11}	1,88774862536328…	30,8677063285073…	a^{71}	60,40795601162510…	987,7666025122350…
a^{12}	2,00000000000000…	32,7031956625762…	a^{72}	64,00000000000000…	1046,5022612024400…
a^{13}	2,11892618871858…	34,6478288721103…	a^{73}	67,80563803899460…	1108,7305239075300…
a^{14}	2,24492409661872…	36,7080959896771…	a^{74}	71,83757109179910…	1174,6590716696700…
a^{15}	2,37841423000541…	38,8908729652612…	a^{75}	76,10925536017300…	1244,5079348883600…
a^{16}	2,51984209978970…	41,2034446141096…	a^{76}	80,63494719327030…	1318,5102276515100…
a^{17}	2,66967970834000…	43,6535289291262…	a^{77}	85,42975066688010…	1396,9129257320400…
a^{18}	2,82842712474611…	46,2493028389549…	a^{78}	90,50966799187540…	1479,9776908465600…
a^{19}	2,99661415375326…	48,9994294977190…	a^{79}	95,89165292010430…	1567,9817439270100…
a^{20}	3,17480210393627…	51,9130871974932…	a^{80}	101,59366732596100…	1661,2187903197800…
a^{21}	3,36358566101471…	55,0000000000000…	a^{81}	107,63474115247100…	1760,0000000000000…
a^{22}	3,56359487256118…	58,2704701897608…	a^{82}	114,03503592195800…	1864,6550460723400…
a^{23}	3,77549725072657…	61,7354126570147…	a^{83}	120,81591202325000…	1975,5332050244700…
a^{24}	4,00000000000000…	65,4063913251524…	a^{84}	128,00000000000000…	2093,0045224048800…
a^{25}	4,23785237743716…	69,2956577442206…	a^{85}	135,61127607798900…	2217,4610478150600…
a^{26}	4,48984819323745…	73,4161919793542…	a^{86}	143,67514218359800…	2349,3181433393400…
a^{27}	4,75682846001081…	77,7817459305223…	a^{87}	152,21851072034600…	2489,0158697767100…
a^{28}	5,03968419957939…	82,4068892282193…	a^{88}	161,26989438654100…	2637,0204553030200…
a^{29}	5,33935941668000…	87,3070578582524…	a^{89}	170,85950133376000…	2793,8258514640800…
a^{30}	5,65685424949221…	92,4986056779097…	a^{90}	181,01933598375100…	2959,9553816931100…
a^{31}	5,99322830750652…	97,9988589954380…	a^{91}	191,78330584020900…	3135,9634878540200…
a^{32}	6,34960420787254…	103,8261743949860…	a^{92}	203,18733465192100…	3322,4375806395700…
a^{33}	6,72717132202941…	110,0000000000000…	a^{93}	215,26948230494100…	3520,0000000000000…
a^{34}	7,12718974512236…	116,5409403795220…	a^{94}	228,07007184391500…	3729,3100921446900…
a^{35}	7,55099450145313…	123,4708253140290…	a^{95}	241,63182404650000…	3951,0664100489400…
a^{36}	8,00000000000000…	130,8127826503050…	a^{96}	256,00000000000000…	4186,0090448097500…

	такт	частота, гц		такт	частота, гц
a^{37}	8,47570475487432…	138,5913154884410…	a^{97}	271,22255215597800…	4434,9220956301200…
a^{38}	8,97969638647489…	146,8323839587080…	a^{98}	287,35028436719700…	4698,6362866786700…
a^{39}	9,51365692002163…	155,5634918610450…	a^{99}	304,43702144069200…	4978,0317395534300…
a^{40}	10,07936839915880…	164,8137784564390…	a^{100}	322,53978877308100…	5274,0409106060400…
a^{41}	10,67871883336000…	174,6141157165050…	a^{101}	341,71900266752000…	5587,6517029281600…
a^{42}	11,31370849898440…	184,9972113558190…	a^{102}	362,03867196750200…	5919,9107633862200…
a^{43}	11,98645661501300…	195,9977179908760…	a^{103}	383,56661168041700…	6271,9269757080300…
a^{44}	12,69920841574510…	207,6523487899730…	a^{104}	406,37466930384300…	6644,8751612791300…
a^{45}	13,45434264405880…	220,0000000000000…	a^{105}	430,53896460988200…	7040,0000000000000…
a^{46}	14,25437949024470…	233,0818807590430…	a^{106}	456,14014368783100…	7458,6201842893800…
a^{47}	15,10198900290630…	246,9416506280590…	a^{107}	483,26364809300100…	7902,1328200978800…
a^{48}	16,00000000000000…	261,6255653006100…	a^{108}	512,00000000000000…	8372,0180896195100…
a^{49}	16,95140950974860…	277,1826309768820…	a^{109}	542,44510431195600…	8869,8441912602300…
a^{50}	17,95939277294980…	293,6647679174170…	a^{110}	574,70056873439300…	9397,2725733573400…
a^{51}	19,02731384004330…	311,1269837220890…	a^{111}	608,87404288138400…	9956,0634791068600…
a^{52}	20,15873679831760…	329,6275569128770…	a^{112}	645,07957754616200…	10548,0818212121000…
a^{53}	21,35743766672000…	349,2282314330100…	a^{113}	683,43800533504100…	11175,3034058563000…
a^{54}	22,62741699796880…	369,9944227116390…	a^{114}	724,07734393500300…	11839,8215267724000…
a^{55}	23,97291323002610…	391,9954359817520…	a^{115}	767,13322336083400…	12543,8539514161000…
a^{56}	25,39841683149020…	415,3046975799460…	a^{116}	812,74933860768600…	13289,7503225583000…
a^{57}	26,90868528811770…	440,0000000000000…	a^{117}	861,07792921976500…	14080,0000000000000…
a^{58}	28,50875898048940…	466,1637615180860…	a^{118}	912,28028737566200…	14917,2403685788000…
a^{59}	30,20397800581250…	493,8833012561180…	a^{119}	966,52729618600100…	15804,2656401958000…

Например, если рассмотреть значение ноты a9, умноженной на значение ноты a16, то это обязательно дает значение ноты 25. Это говорит о том, что опять повторяются числа 9, 16, 25, то есть три в квадрате, четыре в квадрате равняется пять в квадрате. Таким образом, как это уже было отмечено выше, даже в музыкальной грамоте можно найти приложения пифагоровых троек.

Кроме того, теорему Пифагора можно интерпретировать таким образом: площадь квадрата, построенного на гипотенузе как стороне квадрата, равняется сумме площадей двух квадратов, построенных на катетах как сторонах квадрата. Т.е. в случае, если это прямоугольный треугольник, то квадрат, построенный на его гипотенузе, будет равен сумме площадей квадратов, построенных на одном катете, плюс площадь квадрата, построенного на втором катете. Это – известный факт, хорошо описанный и изученный.

Но теорема Пифагора может быть применима не только к квадрату, но и к фигурам других конфигураций. В частности, если мы умножим обе стороны равенства икс квадрат плюс игрек квадрат равняется зет квадрат на величину, например пи разделить на четыре, то это получится следующая интерпретация: сумма площадей кругов, построенных на катетах как гипотенузах, вернее как диаметры кругов, будет равняться площади круга, построенного на гипотенузе как диаметре круга.

Т.е. это будет касаться уже площадей других фигур, нежели рассмотренные выше. В частности, таким образом, можно подойти к вычислению площадей кругов. Эту мысль можно развивать дальше. Если мы умножим обе стороны вышеуказанного равенства (по теореме Пифагора) на величину четыре пи, то получим площади поверхностей шаров. Причем сумма поверхностей двух шаров, построенных на катетах как радиусах, будет равняться поверхности шара, построенного на гипотенузе – радиусе этого шара. Т.о. ***теорему Пифагора можно применить не только к площадям кругов и квадратов, но и к площадям шаров – площадям поверхностей шаров.*** (Объёмам это как раз не будет соответствовать, поскольку идёт нарушение теоремы Ферма. Сумма кубов не может равняться кубу, если есть целочисленные значения). Т.е. *речь идёт о площадях иных геометрических фигур, нежели квадрат, а рассматриваются площади кругов, либо площади поверхностей шаров.* Кроме того, применять полученные соотношения можно не только к круговым либо шаровым поверхностям. Можно также рассматривать площади поверхностей не просто квадрата, а площадь поверхности шести квадратов, из которых составлен куб, т.е. поверхности кубов. *Сумма площадей поверхностей двух кубов будет равняться площади поверхности третьего куба.*

Т.о. получается, что теорема Пифагора применима в геометрическом плане не только к квадратам как фигурам, но и к кубам, а также кругам и шарам.

Насколько нам известно, такая интерпретация нигде не описана. Вполне возможно, что где-то, когда-то она рассматривалась, однако, нам такое описание в литературе найти не удалось. Кроме того, *можно* *говорить не только о площадях, но и о длинах некоторых конфигураций*. Например, длине окружности. В данном случае она также определяется пифагоровыми тройками. Можно показать, что длина окружности связана с пифагоровыми числами. Такой нетрадиционный подход к рассмотрению геометрических конфигураций применительно к теореме Пифагора крайне интересен, потому что шаровые поверхности либо круговые поверхности очень широко распространены в тех же физических приложениях.

Вывод из всего вышесказанного можно сделать следующий: *пифагоровы тройки чисел определяют, в конечном итоге, геометрическую евклидову природу физических явлений и с этой геометрией связано очень много различных явлений, чисто физических, чисто химических, механических, музыкальных и т.д. То есть, речь идет о всеобщем применении пифагоровых троек в физике или (лучше сказать) в природе вещей.* Наконец, некоторые вещи весьма принципиальны. Спектр атома водорода относится к атомным явлениям, природу которых следовало бы изучить, возможно, более подробно и полно. Физические эксперименты дают очень много, но арифметика, подведенная под этой базой физических экспериментов, может дать значительно больше.

Литература

1. **Коротков А. В**. К нахождению решений полиноминальных уравнений второй степени в целых числах // Коротков А. В. Элементы классификации пифагоровых чисел. Новочеркасск: Набла, 2009. 73 с.
2. **Коротков А. В**. Пифагоровы тройки чисел и классификация спектральных линий атомов // Сознание и физическая реальность. 2009. № 11. Том 14. С. 17-31.
3. **Коротков А. В**. Степенные числа в музыкальной гамме // Коротков А. В., Чураков В. С. Теоретико-философские аспекты трехмерного и семимерного пространств (собственно евклидова и псевдоевклидова). Новочеркасск: УПЦ «Набла» ЮРГТУ (НПИ), 2010. С. 222-227.
4. **Коротков А. В**. Элементы пятнадцати мерного векторного исчисления. Новочеркасск: Издательство «НОК», 2011.
5. **Коротков А. В**. Элементы семимерного векторного исчисления. Алгебра. Геометрия. Теория поля. Новочеркасск: Набла, 1996. 244 с.
6. **Коротков А. В., Чураков В. С.** Теоретико-философские аспекты трехмерного и семимерного пространств (собственно евклидова и

псевдоевклидова). Новочеркасск: УПЦ «Набла» ЮРГТУ (НПИ), 2010. 266 с.

7. **Корякин Н. И., Быстров Н. И., Киреев П. С**. Краткий справочник по физике. М.: Высшая школа, 1963.
8. **Кравченко П. Д., Мешков В. Е., Чураков В. С**. Многомерная физика на основе семимерной парадигмы А. В. Короткова как основа для изучения гравитационного, сильного и слабого ядерных взаимодействий, изучения элементарных частиц и формирования основ квантованной (дискретной) физики // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. 2012. № 5. С. 51-56.
9. **Окунь Л. Б**. Теория относительности и теорема Пифагора // Успехи физических наук. 2008. Т. 178. № 6. С. 653-663.
10. **Сингх С.** Великая теорема Ферма / пер. с англ. М.: МЦНМО, 2000.
11. **Сяхович В. И**. Пифагоровы точки. Минск: БГУ, 2007. 288 с.
12. **Шепелев А. В**. Космический микроволновый фон и аристотелевы представления о движении // Успехи физических наук. 2005. Т. 175. № 1. С. 105-106.

КРАВЧЕНКО П.Д., МЕШКОВ В.Е., ЧУРАКОВ В.С.

МНОГОМЕРНАЯ ФИЗИКА НА ОСНОВЕ СЕМИМЕРНОЙ ПАРАДИГМЫ А.В.КОРОТКОВА КАК ОСНОВА ДЛЯ ИЗУЧЕНИЯ ГРАВИТАЦИОННОГО, СИЛЬНОГО И СЛАБОГО ЯДЕРНЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ, ИЗУЧЕНИЯ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ И ФОРМИРОВАНИЯ ОСНОВ КВАНТОВАННОЙ (ДИСКРЕТНОЙ) ФИЗИКИ

Предлагаемая нами многомерная физика базируется на семимерной парадигме А.В.Короткова [1]. Семимерная парадигма А.В.Короткова представляет собой семимерное пространство (собственно евклидово и псевдоевклидово). Оно обусловлено тем обстоятельством, что математики Новосибирской школы показали, что трёхмерная алгебра является подалгеброй только семимерной алгебры. Только семимерной алгебры – нужно было рассматривать семимерный вариант со скалярным и векторным произведением двух векторов, т.е. семимерную векторную алгебру – в отношении множества многомерных концепций пространства. (Следует обратить внимание на ошибочное понимание некоторыми специалистами семимерной парадигмы (в особенности к приложениям всякого рода, в частности – поля) вроде следующего пассажа: "семимерное поле есть совокупность семи трехмерных полей", вообще не верно. Если рассматривать каждое из полей как трехмерное линейное пространство, то их ортогональная сумма будет двадцатиодномерной, а если они – подмножества обычного трехмерного пространства, то и их объединение остается трехмерным.

В действительности – составные алгебры, которые очень сложны, в векторных произведениях двух векторов, отличаются, и составные алгебры дают теорию составных полей – полей семимерных. Они отличаются как небо и земля от теории семимерных полей, но не составного характера, а простых).

Кроме того, кватернионы организуют координацию векторизованных явлений в трёхмерном пространстве, в котором существует лишь семь различных систем координат. Это − исходная *эпистемологическая парадигма, которой мы будем следовать* [2]. Причем сами авторы определяют данную парадигму *как открытую систему, т.е. любой и каждый может внести вклад в её развитие.*

В настоящий момент известно четыре типа твёрдо установленных физических взаимодействий: это гравитационное, электромагнитное, сильное и слабое ядерные взаимодействия. Т.е. эти четыре типа физических взаимодействий твёрдо установлены и достаточно неплохо описаны, хотя это не относится ко всем взаимодействиям, в частности, гравитационное взаимодействие описано неудовлетворительно. В изучении гравитации физическая наука в реальности не очень далеко продвинулась со времён И.Ньютона, хотя релятивистская теория А.Эйнштейна многое поменяла в физических воззрениях, но по существу, мало что прояснила (она сильно математизирована и на её основе существуют всевозможные логически противоречивые исследовательские программы).

Основным недостатком изучения гравитационного взаимодействия является то, что нет описания взаимодействия между двумя движущимися телами (частицами). Т.е. если в статике эксперименты Этвеша подтвердили ньютоновские законы: сила взаимодействия обратно пропорциональна квадрату расстояния и пропорциональна произведению масс, то в плане динамики, когда система движется и тем более изменяется во времени и в пространстве, то здесь описание очень слабое, поскольку отсутствует аналог закона *Био-Савара-Лапласа* в электродинамике. В электродинамике существуют три основных закона: закон Кулона – закон взаимодействия между неподвижными зарядами – это по сути, ньютоновский закон (ньютоновские воззрения, воспринятые Кулоном) и закон, описывающий силу взаимодействия между двумя движущимися зарядами, т.е. между токами –это закон Ампера, и уже поминавшийся закон *Био-Савра -Лапласа*. Три этих закона определяют всё остальное в электродинамике: образование волн, характер возбуждения колебаний, передачи и приёма электрической энергии и т.д. Всё это описывают в основном указанные выше законы.

Поэтому, пишет А.В. Коротков, существует «Необходимость построения теории полей, включающих в себя теорию гравитационных явлений, каждый раз возвращает нас к теории тяготения Ньютона, которую до сих пор не смогли сколь- нибудь существенно обобщить, несмотря на многочисленные попытки, определенные успехи и почтенный возраст учения. При этом выявлены некоторые вопросы, которые не вписываются в его рамки. Во-первых, если планеты в поле тяготения Солнца уравновешены лишь центробежной силой, то почему бы им не иметь обратное направление орбитальной скорости и не устроить разнонаправленный хоровод планет? Во-вторых, какова физическая сущность центробежных сил? Наконец, какова величина силы между движущимися гравитирующими массами? Имеется ли элементарная гравитирующая масса? Список вопросов, оставшихся без надлежащего ответа, можно продолжить.

Понятен в связи с этим неослабевающий интерес к построению более полных теорий гравитационных сил, нежели теория Ньютона и к экспериментам в этой области знаний. При этом выявляется, прежде всего, зависимость гравитационных явлений от тепловых взаимодействий и гироскопических эффектов.

Анализ явлений в области макро- и микромира, требующих рассмотрения в связи с гравитационными явлениями, приводит к выводу о том, что к таковым явлениям должны быть отнесены, в первую очередь, тепловые явления. Действительно, все наблюдаемые тела, планеты и звезды нагреты. Поэтому гравитационные явления не следовало бы рассматривать вне связи с тепловыми. Кроме того, все наблюдаемые тела, планеты и звезды находятся в непрерывном и, прежде всего, вращательном движении. Поэтому гравитационные явления не следовало бы рассматривать также вне связи с гироскопическими явлениями.

Мы попытаемся построить теорию гравитационного поля, определяемого такими явлениями. Мы будем исходить из того положения, что в рамках семимерного пространства семимерное поле определяется как совокупность семи однотипных по конфигурации трехмерных полей, одним из которых является электромагнитное поле. Таким образом, теория гравитационно-гироскопического поля также может строиться в рамках четырехмерного псевдоевклидового пространства-времени Минковского, а само поле должно определяться гравитационными зарядами – массой тел и 4-потенциалом.

Данные опытов по измерению температуры поверхности планет солнечной системы приводят нас к установлению важного факта. Оказывается, что эффективная температура T_i поверхности i-ой планеты определяется расстоянием r_i от планеты до центра солнечной системы так, что

$$T_i^2 r_i = \text{const}$$

для всех планет солнечной системы.

Трудно при этом не вспомнить аналогичное соотношение ньютоновской теории тяготения

$$U_i^2 r_i = \text{const},$$

где в роли U_i выступает орбитальная скорость планет солнечной системы. Квадрат эффективной температуры поверхности планет солнечной системы оказывается пропорциональным квадрату орбитальной скорости планеты и связан с ней соотношением

$$b^2 T_i^2 = U_i^2,$$

где константа связи $b \approx 1{,}06 \cdot 10^2 mc^{-1}K^{-1}$.

Это соотношение указывает на неразрывную связь понятий эффективной температуры и орбитальной скорости планеты как составляющих одного и того же четырехмерного вектора – 4-потенциала гравитационногироскопного поля $U^i = (bT, U)$ в псевдоевклидовом пространстве-времени Минковского. Оно определяет исключительную зависимость гравитационных явлений от скалярного потенциала T и векторного потенциала U гравитационногироскопного поля.

В рамках представлений о гравитационногироскопном поле желательно иметь величину элементарного гравитационного заряда – наименьшей величины массы тела. Мы теперь располагаем возможностью ее вычисления как величины

$$Mv = \frac{k}{cb},$$

где M_v – элементарная масса, $к$ – постоянная Больцмана, c – скорость света, b – введенная нами константа связи. Вычисления дают

$$M_v = 4{,}344 \cdot 10^{-34} кг = \frac{M_e}{2{,}097 \cdot 10^3}$$

где M_e – масса электрона.

Она близка экспериментальным данным по определению массы нейтрино. В таком случае элементарной гравитационной массой является масса нейтрино, а масса нейтрино с константой связи b приобретает статус фундаментальных констант» [1, с.163-165].

Надо отметить, что существует следующая проблема – все гравитирующие тела нагреты: это предметы на Земле, сама Земля, планеты Солнца, Солнце, звёзды, – все объекты нагреты. Тем не менее, в теории тяготения нагрев тел совершенно не фигурирует, совершенно не используется. Более того, когда ставят эксперименты с гравитирующими массами, то стараются стабилизировать температуру, чтобы исключить влияние температуры на малые значения измеряемых величин. И это тоже не совсем правильно. Надо, наоборот, изучить влияние температуры тел, т.е. нагрева тел на гравитирующие массы, на силу между гравитирующими массами. Так вот, уже известен факт, можно сказать, феномен, что квадрат эффективной температуры поверхности любой планеты на расстоянии до Солнца, до центра солнечной системы практически является константой в пределах погрешности измерений. Причём, эта константа для всех планет солнечной системы. Известен также со времен Ньютона, и даже Кеплера, закон, что квадрат орбитальной скорости планеты, любой планеты, на расстоянии до Солнца, также есть константа. Таким образом, получается, что эти две величины могут быть приравнены с исключением расстояния, то есть получается, что некоторая константа на квадрат эффективной температуры поверхности планеты – есть квадрат орбитальной скорости планеты. Причём константа получена из наблюдений и экспериментов и равна сто шесть метров в секунду на кельвин.

То есть, при изменении температуры на один кельвин орбитальная скорость должна поменяться на сто шесть метров в секунду. Величина существенная. Можно сказать, что это соотношение указывает на неразрывную связь понятий эффективной температуры и орбитальной скорости планет как составляющих одного и того же четырёхмерного радиуса вектора, то есть его аналога со скалярной величиной – температурой, и векторной величиной – орбитальной скоростью, то есть, четыре компоненты, 4-потенциала гравитационногироскопного поля есть $U^i = (bT, U)$, где $b \approx 1{,}06 \cdot 10^2 mc^{-1}K^{-1}$ – названная константа (см. [1, с.163-165]) в псевдоевклидовом пространстве-времени Минковского. Это очень важное соотношение, говорящее о том, что все взаимосвязи теории тяготения должны быть связаны с понятием температуры и четырёхмерного радиуса- вектора – скорость, орбитальная скорость, которые практически не учтены.

Что это даёт в математическом отношении и физическом плане? Во-первых, теперь можно ставить вопрос об элементарной массе. То есть, мы знаем, что масса дробится, но дробится ли она до предела, до нуля – совершенно не понятно. Можно это осуществить или нет? Известные массы очень малы, и в частности масса элементарных частиц, например, электрона, но наличие константы В позволяет найти массу и фундаментальных констант. Константу Больцмана разделить на скорость света и на константу В. Эта масса оказывается равной где-то в две тысячи сто раз меньше массы электрона. И по некоторым экспериментальным данным совпадает с массой нейтрино. То есть, масса нейтрино может оказаться в две тысячи сто раз меньше массы электрона, и масса нейтрино будет являться фундаментальной элементарной гравитирующей массой. Это, во-первых.

Во-вторых, видоизменяются некоторые законы в статике и динамике гравитирующих тел. В частности, сила, действующая на массу в гравитационном поле, будет определяться не силой Ньютона – она дополнена динамической составляющей, и по форме совпадает с формой закона Лоренца. Сила Лоренца в данном случае состоит из двух частей – части, связанной с силой, действующей на неподвижную массу, и это видоизмененный закон Ньютона. Он дополнен величиной, пропорциональной градиенту температуры поля, и динамической составляющей – это величина пропорциональна векторному произведению скорости на ускорение. Если говорить более точно, то на ротор орбитальной скорости. Вот что важно отметить.

Уже это говорит о том, что понятие гравитационного поля ещё очень слабо проанализировано, вообще поле рассмотрено только в статике, а динамика полей не затронута. Если же дополнить динамическую составляющую, пойти по этому пути, то мы построим, в конце концов, теорию гравитационных волн. При этом окажется, что гравитационные волны связаны с изменением массы либо скорости движения масс, и на всю теорию тяготения можно будет наложить серьёзный отпечаток теории электромагнитных волн, то есть теории Максвелла.

Итак, на движение планет по эллипсу воздействует не только скорость, но и сила гравитации и температура [3]. Надо отметить, что в гравитационных исследованиях как правило, стараются поддерживать постоянную температуру и тем самым утрачивают сущность проводимого исследования. Т.е. *температура и её изменение меняет гравитационную силу. В свою очередь, напряженность гравитационного поля напрямую связана с изменением температуры.* Вот важный вывод относительно гравитации.

Отсюда в практическом плане –«просматривается возможность использовать гравитационные волны в качестве потенциального средства связи (как носителя информации)» [4].

Что можно сказать в отношении *сильного и слабого ядерных взаимодействий?* Прежде всего, здесь много ещё неясного. Слабые взаимодействия описаны в рамках трёхмерных представлений, и сильные взаимодействия также описаны в рамках трёхмерных представлений. Поэтому единственно здесь можно сказать, что кроме трёх основных законов сохранения, которые существуют в трёхмерной физике: закон сохранения энергии, закон сохранения импульса и закон сохранения момента импульса, – три закона сохранения, – в многомерии, при возрастании размерности, число законов сохранения возрастает. В многомерии, в частности, в семимерии, существует значительно большее число законов сохранения.

Так, в семимерном пространстве будет не три физических закона сохранения, а значительно больше: например, – смешанное произведение четырёх векторов, смешанное произведение семи векторов, векторное произведение трёх векторов, четырёх векторов, пяти векторов, шести векторов. Всё это – инвариантные величины. Это всё новые законы сохранения, которые в трёхмерной физике отсутствуют. Т.е. переход к многомерию настоятельно вызван использованием числа законов сохранения больше трёх. Поэтому в семимерной физике элементарных частиц следует рассматривать не три кварка, а значительно большее число кварков. В частности, спиноры будут не двухкомпонентные, как в трёхмерной физике, а шестикомпонентные. Если учитывать, что со спинором связан другой спинор, эквивалентный первому, но только другого направления вращения, то семимерная спинорная алгебра будет использовать двенадцать частиц, которые укладываются в три группы по четыре частицы.

Т.е. трёхмерная физика спинорная (спинорная алгебра) существенно уточняет спинорые взаимодействия. Спиноры семимерные – это двенадцати компонентные величины. Точно так можно говорить о векторных преобразованиях. Векторные преобразования в трёхмерии будем называть *изовекторной алгеброй* . С помощью O_3 преобразований группы O_3 ортогональной группы трёхмерных преобразований добавляются три новые величины, т.е. частицы рассматриваются как трёхкомпонентые величины, если их спин равен единице. Это – *изовекторная алгебра.* В семимерии спин также определяется ± 1 по нескольким координатам и спинорная алгебра в этом случае двенадцатикомпонентная. Изовекторная алгебра должна содержать семь величин для прямого изовекторного преобразования.

В отношении изовекторной алгебры и её применения в физике элементарных частиц см.[5]. В данном случае речь идёт о псевдоевклидовом аспекте. Причем показано, что псевдоевклидовы алгебры трёхмерные индекса два и семимерные индекса четыре могут быть рассмотрены вплоть до анализа уравнений физики элементарных частиц. Т.е. показана применимость псевдоевклидовой алгебры для физических приложений. Этого ещё никем не было сделано. А поскольку А.В.Коротковым были построены трехмерная и семимерная псевдоевклидовы алгебры [6, 7], то вполне логично построить их приложения к физике.

Интересный момент здесь заключается в том, что уравнения изовекторных и спинорных алгебр как в евклидовом, так и в псевдоевклидовом варианте практически могут быть записаны в однотипной форме. Разница заключается в значении параметров: альфа, бета, гамма, которые могут принимать значения единица для евклидового варианта либо некоторые из них минус единица для псевдоевклидового варианта. Т.о. речь идёт о разнице в знаках. А по большому счёту, *это может быть алгебра, описывающая поведение античастиц*. Если аналогичная евклидова алгебра применяется для описания поведения частиц, то есть речь идёт о теории античастиц, в данном случае. Это весьма обнадёживающий фактор. Кроме того, симметричность – удивительная симметричность – различного рода выражений и уравнений позволяет говорить о наличии семимерных суперсимметрических теорий. Тем самым можно смело заявлять о том, что построена теория суперсимметрий семимерных преобразований, что имеет прямое отношение к теории струн. Но теория струн не имеет столь серьёзной математической подоплёки, в то время как здесь математика построена вплоть до спинорных выражений, начиная от уравнений элементарной алгебры и геометрии. (Заметим в скобках: следует в философском отношении рассмотреть семимерную суперсимметрию. Т.е. вопросы теории струн для 11-и мерной например, схемы рассмотреть в философском плане в семимерной схеме. Потому, что алгебра есть и она действует, работоспособна. Надо бы посмотреть семимерную суперсимметрию. Трёхмерная симметрия будет являться частным случаем семимерной суперсимметрии. Следует напомнить, что исходным предположением в теории струн является суперсимметрия).

Таких выражений, как например, уравнение Дирака, присутствующее в семимерном варианте – в суперсимметричных схемах нету. А в данном случае, уравнение Дирака применимо не только для трёхмерной евклидовой схемы или трёхмерной псевдоевклидовой схемы, но и в семимерной евклидовой и семимерной псевдоевклидовой схемах. Причем, как в изовекторном случае, так и в спинорном случае. Т.е. для построения частиц с целым спином и полуцелым спином. Таких выражений не найти в теории струн. А это очень обнадёживающий фактор: уравнение Дирака дало, в частности, предсказание позитрона. А позитрон – это античастица, причем античастица электрона – фундаментальной частицы.

Это следует показать именно в философском плане, поскольку в алгебраическом отношении это развито. Алгебраические решения есть. Тенденции понятны, структуры алгебр понятны, уравнения понятны…

Подобные симметричные структуры нигде не описаны. Их нет. Поэтому можно смело заявлять о симметрии. Причем не просто симметрии, а о суперсимметрии, которая нигде раньше не была подмечена. Точно так в спинорных выражениях, в спинорном варианте для матриц шесть на шесть, комплексных матриц шесть на шесть действуют эти же самые уравнения.

Это уравнение – одно из семи для семи компонент, причём для всех них – во всех них использована комплексная матрица размера шесть на шесть. Столь симметричных структур для комплексных схем также не было раньше отмечено. Но это подмечено в трёхмерном варианте, а трёхмерный вариант является частным случаем. Т.о. можно говорить не просто о симметрии алгебраических выражений, а о суперсимметрии, о сверхсимметрии – в алгебраическом плане. И о применимости к физике элементарных частиц.

Семикомпонетная частица должна состоять из семи кварков и иметь семь компонент для сопряженной частицы. Т.е. всего четырнадцать частиц образуют семимерную изовекторную алгебру. Четырнадцать частиц – это не шесть частиц, как в трёхмерной физике, а четырнадцать – т.е. свойства частиц определяются группами из четырнадцати частиц, а в трёхмерии это группы из шести частиц: три плюс три. В семимерии – из четырнадцати: семь плюс семь. Т.е. частицы, составляющие любую частицу, разбиваются на значительно более комплектные группы частиц. Надо сказать, что семимерные преобразования изовекторные описываются семимерной векторной алгеброй – это преобразования O_7. Причем O_7 преобразование даёт 21 независимую величину подгруппу O_7 преобразований. Она уже построена и содержит преобразования семи величин. Т.е. это не O_7 преобразования, а подгруппа Q_7 группы O_7. Найдены сейчас уже параметры вращений семимерных координат см.[1, с.208] через косинусы и синусы углов поворота вокруг каждой из семи осей – и найдены в результате: генераторы группы Q_7 – это семь квадратных матриц седьмого порядка.

Показано, что выполняется соотношение, определяемое векторным произведением трёх векторов для матриц седьмого порядка, для семи матриц седьмого порядка. Установлено, что сохраняется квадрат момента импульса и эта величина равна сумме квадратов семи координат – семи компонент момента импульса E_6 единичных матриц. Т.е. эта величина сохраняется. И это, конечно, лежит в основе всей атомной, ядерной физики и физики элементарных частиц. Т.о. использование семимерных способов вращений, семимерных представлений теории групп, даёт совершенно иные соотношения для физики элементарных частиц. Это надо оценить, прежде всего, физикам.

И по крайней мере знать, что есть такие векторные алгебры. Семимерные представления уже понемногу входят в научный обиход. Физики не могут почему-то воспринять, что наше пространство на самом деле в математическом плане не имеет никакой размерности. Наше пространство стало трёхмерным только со времён, не столь от нас отдалённых, с Гамильтона – это 1843 год, когда появились аналитические способы представления трёхмерности. Так вот только со времён Гамильтона физика стала трёхмерной как таковой, и теоретической. Физика стала трёхмерной потому, что восприняла трёхмерный векторный инструмент для своего описания (есть также трехмерный математический вариант для экономической науки, для экономической математики [8, 9]) . Сейчас появляется семимерный векторный инструмент, созданный А.В.Коротковым в девяностые годы двадцатого века. Физика стала постмодернистской наукой, в которой успехом пользуется модная постмодернистская теория суперструн, на которую возлагались и возлагаются необоснованные надежды. Физика должна базироваться на адекватном её проблемам и задачам математическом инструменте, а не на представлениях о струнах, пластинах, либо каких - то еще мистических структурах.

Квантованная (дискретная) физика определяется квантованием математических преобразований (для такой физики можно использовать дискретные алгебры [10]). В частности, мы знаем, что основой нашего математического представления о мире является натуральный ряд чисел. Целых чисел. Или можно сказать, чисел, определяемых единицей и нулём и двумя операциями: сложением и умножением. Т.е. линейное векторное пространство, которым описываются действительные числа, одномерно и квантовано: 0, 1, 2, 3, 4… и т.д. до бесконечности. Вот эта схема является основой для квантования всех систем. В частности, векторной алгебры – трёхмерной векторной алгебры, в которой используются три действительных числа, три координаты трёхмерных величин. Если (числа) величины квантованы, то есть, содержат только целые числа, отрицательные или положительные – но целые, то они определяют (не только определяют) не только одномерный ряд натуральных чисел, но и можно сказать, что квантовано и трехмерное представление – т.е. три координаты квантуются с помощью системы чисел натурального ряда. А именно: рассматриваются положения частиц, поведение частиц в трехмерном пространстве и не в непрерывно распределенном (континуальном), а изменяющемся от нуля до бесконечности квантованном (или дискретном) пространстве.

Это в конечном итоге приведет к тому, что отдельные физические величины, например расстояние электрона от ядра атома, т.е. формула Бора квантована. Это значит, что электрон не может находиться на произвольном расстоянии от центра своего движения от ядра. Но может принимать только дискретные значения, определяемые расстоянием от электрона до ядра. Т.е. величины обратно пропорциональны квадрату расстояния величины энергии. Расстояние определяет то, что энергия квантована [11]. Потому что расстояния от электрона до ядра постоянны и меняются дискретным образом. Ступенчато. В процессе изменения состояние электрона сопровождается излучением либо приемом энергии. А если состояние стабильно, то энергия не излучатся и не воспринимается. Только переход с одной орбиты на другую сопровождается излучением либо поглощением энергии. Т.е. величины, описывающие этот процесс, должны быть квантованы. В частности, если частицы движутся в трёхмерном пространстве, то сохраняются основные величины: квадрат расстояния от частицы до центра системы координат, это величина стабильна, $x^2 + y^2 + z^2 = const$ есть константа.

В четырёхмерном пространстве-времени добавляется ct в квадрате, где c – скорость света. Но опять-таки эта константа это инвариант преобразований $x^2 + y^2 + z^2 = ct^2$ всё это инвариантная величина. Закон выполнения процедуры векторного произведения двух векторов трёхмерной векторной алгебры, определяется только двумя операциями: законом сложения и умножения действительных чисел. Закон вычитания можно рассматривать как закон сложения с обратным знаком. Т.е. только две операции: закон сложения и умножения действительных чисел. Процедура деления не задействована в векторном трёхмерном исчислении. Нельзя получить также обратный вектор 1/A – есть вектор в трёхмерном пространстве. Т.е. отношения умножения целых чисел дают целые числа, а математические процедуры над различными квантованными системами дают квантованные величины. Т.о. трёхмерная векторная алгебра может рассматриваться как алгебра над дискретными значениями чисел, в том числе не только над действительными значениями чисел, а над целыми числами, операциями с целыми числами. Результатом операций также являются целые числа. Т.е. векторное произведение $A \times B$ для дискретных чисел натурального ряда даёт в трёхмерии целые числа – три целых числа. И это очень важно, поскольку трёхмерная алгебра приспособлена не только для действительных чисел, непрерывных, включающих в частности, рациональные и иррациональные числа, трансцендентные числа, но и для целых чисел. Результаты операций есть целые числа. Т.е. квантованные величины. Вот что можно сказать об этом.

Семимерная алгебра точно так же как трёхмерная, действует, только системы сложения и умножения действительных величин если вместо действительных величин использовать дискретные числа, то есть ряд натуральных чисел или целых чисел, то и результаты операций определяются числами натурального ряда, либо ряда целых чисел. Обратная процедура деления векторов, либо получения обратного вектора 1/A не используется: не требуется этой операции для семимерных преобразований. Точно так же как и в алгебрах трёхмерных величин. Квантованная физика – это физика над дискретным рядом чисел. Подчеркнём ещё раз: не над непрерывным, а именно над дискретным. Трёхмерная и семимерные алгебры удовлетворяют этим величинам. Т.е. могут быть алгебры построены не над полем целых чисел, а над кольцом чисел, к примеру, натурального ряда. Не полем целых чисел, а кольцом целых чисел. Т.о. процедура получения рациональных либо иррациональных чисел отсутствует.

Литература

1.*Коротков А.В***.** Элементы семимерного векторного исчисления. Алгебра. Геометрия. Теория поля. Новочеркасск, 1996. 244с.

2. *Коротков А.В., Чураков В.С.* Теоретико-философские аспекты трехмерного и семимерного пространств (собственно евклидова и псевдоевклидова). Новочеркасск, 2010. 266с.

3.*Изнар А.Н., Павлов А.В., Федоров Б.Ф***.** Оптико-электронные приборы космических аппаратов. М., 1977. 368с.

4.*Коротков А.В., Чураков В.С*. Семимерная парадигма: новый подход к реальному изучению гравитации и её связи со временем//Время и человек (Человек в пространстве концептуальных времен): сб.научн. трудов/Под ред. В.С.Чуракова (серия «Библиотека времени». Вып.5). Новочеркасск, 2008. 316с.

5.*Коротков А.В.* Элементы трех- и семимерных изовекторных и спинорных псевдоевклидовых исчислений. Новочеркасск, 2008. 60с.

6.*Коротков А.В.* Элементы составного семимерного векторного исчисления. Новочеркасск, 2004. 40с.

7.*Коротков А.В***.** Элементы псевдоевклидового трех- и семимерного векторного исчислений. Новочеркасск, 2004. 79 с.

8.*Коротков А.В*. Товарно-денежное поле в экономике//Формы и смыслы времени (философский, теоретический и практический аспекты изучения времени): сб.научн. тр./под ред. В.С.Чуракова (Серия «Библиотека времени». Вып.7). Новочеркасск, 2011. 496с.

9.*Гусев Н.И., Чураков В.С*. Теоретико-методологические аспекты применения в российской модели экономической науки новых математических направлений и методов теоретической физики//Гуманитарные и социально-экономические науки. 2011. №5. – (С.148-151).

10. *Коротков А.В., Чураков В.С.* Дискретные алгебры (многомерные целочисленные алгебры)// Коротков А.В., Мешков В.Е., Чураков В., Бабкина Т.А., Козоброд А.В., Прудий А.В. Многозначные и многомерные булевы и небулевы алгебры логики А.В.Короткова и пифагоровы числа в искусственном интеллекте и криптографических системах: монография. – (Серия «Семимерная парадигма А.В.Короткова в информатике, искусственном интеллекте и когнитологии»). – Новочеркасск, 2011.

11. *Быстров К.Н*. Квантовый принцип и дискретные законы физического мира. М., 2005. 210с.

КРАВЧЕНКО П. Д., МЕШКОВ В. Е., ЧУРАКОВ В. С., БРЫКИНА Т. А., ВЕПРИКОВ Ю.В.

МНОГОМЕРНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

Введение

Данная статья посвящена анализу вопросов оптимизации размерности технических систем. Она является продолжением и развитием предыдущих работ по теме «Программа исследований в области информационных технологий, искусственного интеллекта и когнитологии» [12], «Многомерная физика на основе семимерной парадигмы А.В.Короткова как основа для изучения гравитационного, сильного и слабого ядерных взаимодействий, изучения элементарных частиц и формирования основ квантованной (дискретной) физики» [11] и также является *программной статьёй.*

Постановка задачи

Рассмотреть применение свойств симметрии, прежде всего законов сохранения (момента импульса, квадратов векторных величин и т.д.) в векторных алгебрах различной размерности и их реализации в современной технологии. Многомерная физика базируется на многомерной алгебре [9; 10; 11]. Не трёхмерная, а большей размерности, многомерная. *В совокупности многомерная алгебра с многомерной физикой образуют теоретический фундамент для многомерных технологий.* Пожалуй, следовало бы уточнить это название: $2^n - 1$ технологии (это также название *научного направления* и *возможной организации*). Это даёт направление развития мысли: что очень многие структуры должны быть одномерные, двухмерные, трёхмерные, семимерные, пятнадцати мерные и т.д. (это касается самых разных отраслей знания: например, есть предложения по увеличению размерности в математизированной экономической науке [4; 8]). Например, можно рассматривать одномерный чёрно-белый телевизор, цветной телевизор трёхмерный. Следующий телевизор будет семикомпонентный – состоять из семи цветов. Если необходимо улучшить структуру, то следует заниматься пятнадцатимерной структурой. И ни какими другими. Имеется математическая база для описания этих структур [9; 7].

Очень важно то, что эти структуры относятся ко многим вещам. Математика – это инструмент для описания физических явлений. Например, предположим, что у нас есть гидронасос и гидромотор. Каждое из этих технических устройств может быть построено как в одномерном, так и в трёхмерном вариантах. Следующий вариант должен быть семимерным, потом – пятнадцатимерным. Т.е. строить гидромашину восьмитактной – бессмысленно. И опыт в гидравлике показал, что числа – чётные для числа плунжеров – например, для гидромотора и гидронасоса аксиальнопоршневого типа или радиально-поршневого типа **должен быть нечётным.** Опыт показал: все гидромашины с чётной структурой выходили из строя моментально. Они строились как опытно- экспериментальные образцы и моментально разрушались под высоким давлением в сотни атмосфер. Почему это происходило? Это происходило потому, что *четырехмерие не может сохранить момент импульса. Момент импульса характеризуется законом сохранения момента импульса, т.е. отсутствием колебаний.* По крайней мере, наименьшие колебания давления и расходов пульсации отсутствуют.

Пульсации приводят к разрушению гидромашин. Более того, ухудшается коэффициент полезного действия, потому что на создание пульсаций давления требуется затрата энергии, что ухудшает все показатели гидромашины, прежде всего, срок службы [14].

В автотехнике преимущественно производятся четырёхтактные двигатели. Во всём мире строятся четырёхтактные автомобили. Четырёхтактный двигатель, работающий на четырехтактном принципе цикла Отто [2], производится во всем мире. Четырёхтактный двигатель шумит и имеет невысокий коэффициент полезного действия. (Следует отметить, что есть трёхтактные двигатели внутреннего сгорания: «Фольксваген» имеет трёхцилиндровый двигатель). Пятитактный двигатель был бы значительно лучше, а ещё более лучший вариант – семитактный двигатель. А что же есть в реальности? Семи-, четырёх- плунжерная машина, шестиплунжерный двигатель, восьмицилиндровый двигатель – потому, что на шесть и восемь легко делить круг, а на семь делить труднее. Так вот, эта машина пропущена. Следует строить двигатели не шести- и восьмицилиндровые, а семицилиндровые. И забыть о шести- и восьмицилиндровых двигателях. Либо три, либо пять, либо семь. Но лучше всего – семь. Машина будет мощнее, с плавной малошумной работой.

В семимерной векторной алгебре сохраняется момент импульса, закон сохранения момента импульса [3], в пятнадцати мерной алгебре [7] тоже сохраняется момент импульса, т.е. выполняется закон сохранения импульса, точно так и все остальные законы физики.

В современной электротехнике используются трехфазные электродвигатели. Двухфазные электродвигатели пытались использовать, но ничего из этого не получилось. Есть даже однофазные электрические машины. Но самые лучшие электрические *машины трёхфазные, они сохраняют квадрат момента импульса*. Следующая электрическая машина – это машина постоянного тока. Процесс изучения системы электропривода идет от машины постоянного тока с двумя либо с четырьмя полюсами. Их удобно располагать на схеме. Но такая машина во многих отношениях малоэффективна. В реальности используются многофазные машины: восемь фаз, шестнадцать фаз и двадцать четыре фазы…Создаются многофазные электромашинные структуры [5; 13].

Семифазный электродвигатель пропущен, а ведь он должен быть следующим за трёхфазным, поскольку он сохраняет квадрат момента импульса, т.е. уменьшает шум, вибрации, и уменьшает степень снижения КПД и в целом улучшает рабочие характеристики электромашины. Следует ли кому объяснять, что двигатель подводной лодки не должен шуметь? Так вот: с целью подавления шумов он должен быть семифазным.

Многомерные семи- и пятнадцати мерные алгебры не патентуются, но выводы этих алгебр дают сохранение квадрата момента импульса, т.е. закон сохранения момента импульса существует в этих алгебрах, в этих размерностях. В других размерностях он отсутствует. Там нет закона сохранения квадрата момента импульса. А в семимерной [9] и в пятнадцати мерной алгебре есть [7] .

Матрицы размерности пятнадцать на пятнадцать умножаются друг на друга. Четырнадцать таких произведений со знаками плюс и минус дают одну величину. Координаты таких отношений для пятнадцати координат выполняются – и все эти пятнадцать матриц дают квадрат момента импульса, который постоянен – т.е. закон сохранения момента импульса в пятнадцатимерии и семимерии выполняется точно так же, как и в трёхмерии. Всем остальным размерностям надо еще попытаться сделать уменьшение вибраций, колебаний давления, колебаний нагрузки, шума, вибраций и т.д.– всё это даёт возможность патентовать технические разработки $2^n - 1$ в степени структуры.

Т.е. формулы – это основание для технических решений, для разработки соответствующих технологий. Техника – это конкретное заполнение содержания этих формул, конкретная реализация этих формул. Трёхфазной электрической машины, к примеру, не было до получения трёхмерной векторной алгебры, а как только появилась трёхмерная векторная алгебра и появилась на её базе теория полей, то стало понятно, что трёхмерная электрическая машина должна работать на переменном токе. Теоретическое представление о переменном трёхфазном токе позволило разработать самые разнообразные электрические машины: синхронные машины, асинхронные машины, трёхмерные трёхфазные трансформаторы, трёхфазные двигатели – и далее техническая мысль породила различные технические структуры. Надо отметить, что числа большой размерности могут быть задействованы, но не для технических решений – например, электродвигатель не может содержать сто двадцать миллионов фаз – это нереально и нерентабельно (пока), но системы преобразования информации, системы получения информации, а также преобразования, кодирования, декодирования, передачи информации – т.е. источники сигналов, приём, хранение, переработка, выдача отображения информации – это всё звенья одной цепи и тут могут быть задействованы структуры очень большой размерности, не говоря уж о том, что здесь можно найти применения числам очень большой разрядности (стоит этот подход применить для дальней космической связи: в результате должны повыситься скорость передачи и объём информации). Это, прежде всего, переработка чисел большой разрядности в вычислительной технике. Т.е. вычислительную машину следует строить не на базе байта восьмибитового, разрядного или позиционного, а на базе семипозиционных машин можно строить значительно лучшие вычислительные системы для преобразования информации.

Следующая разрядность должна быть не шестнадцать, а пятнадцать, последующая разрядность не тридцать два, а тридцать один, далее не шестьдесят четыре, а шестьдесят три – эти небольшие изменения дают совершенно новую возможность процесса преобразования информации, причем как программно, так и фактически натуральным образом аппаратно разно оформленные решения, для чего можно создать семиразрядный компьютер, пятнадцатиразрядный компьютер, мобильный телефон – и можно очень долго перечислять прочие технические устройства.

Конечно, можно перенести запятую и получить несколько иной результат – дело не в запятой, а в трёхмерном пространстве, точнее, в совокупности трёхмерных пространств. Не говоря уже о том, что в философском плане давно пора рассмотреть пространства как совокупность трёхмерных пространств и следует обосновать содержание трёхмерной физики, содержание семимерной физики, содержание физики одна тысяча двадцати трёх измерений… Всё меньшие размерности входят в более крупные, но варианты их представления совершенно различны. Большая размерность не должна сейчас никого страшить: есть компьютеры – и не мозг человека будет перерабатывать числа, а компьютер с производительностью миллион операций в секунду, что позволяет получить любой результат.

Возможная перспективная разработка

В Институте высоких температур РАН в результате исследований шаровой молнии было установлено, что в её ядре находится многомерный объект. Планируется использовать искусственно образованную шаровую молнию на носу высокоскоростного самолета для улучшения летно-технических характеристик путем воздействия на окружающую среду [12, с.292] – вот одно из перспективных направлений для применения многомерных технологий на базе многомерной физики и алгебр различной размерности.

Два из возможных вариантов реализации многомерных технологий

Рассмотрим два из возможных вариантов реализации многомерных технологий на следующих примерах:

I) решения задач поиска и преследования подвижных объектов [6] и на

II) семифазной электромашине.

I.Существуют различные подходы к формализации и решению задач поиска подвижных объектов, например, основанный на использовании усредненной характеристики средств наблюдения, позволивших представить условие обнаружения при круговом и секторном обзоре (геометрический метод определения вероятности обнаружения), основанный на численных методах расчета информационных множеств, при помощи полей расстояний и др.

Хотя с момента начала разработки теории поиска прошло достаточно много времени, она еще далека от завершения. Кроме того, число работ по проблеме поиска подвижных объектов сравнительно невелико, причем большинство из них посвящено решению частных задач [3; 6; 15].

Можно в этой области выделить задачи двух видов:

задачи поиска,

задачи преследования.

Принципиальное отличие задач преследования от задач поиска состоит в том, что при преследовании используется текущая информация. Но, тем не менее, в некоторых случаях методы решения одних задач могут быть использованы при решении других. В частности, если преследование осуществляется по текущей информации, которая поступает в дискретные моменты времени с большими интервалами, то при синтезе алгоритмов преследования могут быть использованы методы теории поиска.

Управляемое движение, т.е. движение одной управляемой системы С1 к другой управляемой или неуправляемой системе (объекту) С2, возможно как по полной априорной или неполной априорной и текущей информации, так и только по неполной априорной информации. В зависимости от этого задачи управления сближением (задачи сближения) можно разбить на два типа: задачи наведения (встречи) и задачи поиска. Характерной чертой задачи поиска является то, что поисковая система (система С1) в процессе поиска никакой текущей информации о местоположении и движении искомого объекта (системы С2) не получает, и алгоритм поиска, т.е. алгоритм управления движением поисковой системы, формируется только на основе априорной информации.

Примерами задач наведения являются задачи преследования цели, встречи и стыковки двух космических аппаратов, посадки космического аппарата на какую-либо планету и т.п. Примерами задач поиска являются задачи поиска потерпевшего крушение корабля, подводной лодки, спутника и т.д.

Если же мы используем при решении задач поиска семимерную евклидову векторную алгебру с семью ортами ортогональной системы координат, то сразу возникает целый ряд новых для алгебры понятий, таких как: векторное произведение не только двух векторов, но и трех, четырех, пяти, шести векторов. То есть появляется возможность получения совершенно новых методов (теоретическую базу см.: [9;10]) . Например, *положение спутника при этом можно описать как вектор с семью координатами, три из которых показывают положение в пространстве по трем осям, три – вращение вокруг оси, и одна – время*. Его можно представить графом, вершины которого соответствуют элементам пространства, а ребра соединяют вершины, соответствующие соседним элементам. Такой граф называют *многомерным кубом* (рисунок 1).

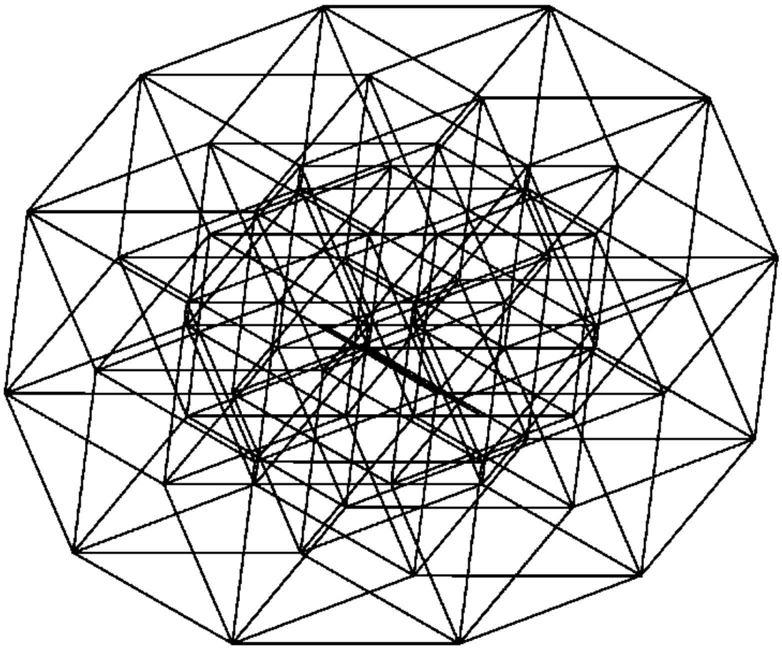

Рис.1. Пример многомерного куба

При этом точность априорной или неполной априорной и текущей информации возрастает, как и скорость расчетов, при реализации алгоритма решения задачи на ЭВМ.

II.Следующий из возможных вариантов реализации многомерных технологий – семифазная электромашина. (В этом случае наиболее наглядно проявляется **симметрия семимерных пространств** [9]). В данном случае, расчеты производятся, для изменения величины тока либо напряжения в семифазном электродвигателе, в случае трёхфазного электродвигателя расчёты определяются значениями величин тока в различные моменты времени по трём фазам. Эти значения дают возможность построить графики трёхфазной системы переменного тока – это три синусоиды, смещённые на угол сто двадцать градусов между каждой парой фаз. В результате круг в 360° , в котором размещаются три синусоиды, делится на три части. Потом синусоиды циклически повторяются. Нужно рассчитать значение токов. Например, в трёхфазной системе бессмысленно использовать сложение переменных токов по двум фазам. Сложение переменных токов по фазам первой плюс второй дают амплитуду, равную единице. Т.е. это всё равно, что использовать одну фазу.

Процесс прохождения тока по двум фазам сопряжен с потерями во второй фазе и потери на перемагничивание стали в машине трёхфазного переменного тока. *Поэтому сумма двух фаз определяется единичным значением, так же как и значение в одной фазе – это максимальное значение, равное единице.*

В семимерном варианте этот процесс отличается от предыдущего. Возьмем семь фаз, сдвинутых между собой на определенный угол. 360° следует разделить на семь – это получится угол в 52 градуса, или, если точнее, – то 51 градус с большим рядом чисел после запятой. Т.е. это иррациональное значение величины угла, это значение, неудобное для использования в технике при конструировании машин. Поэтому семифазные машины практически не задействованы. На практике используются трёхфазные машины с четырёх-, шести-, восьми-, но не семи фазами. Потому, что сложно проводить расчеты, сложно чертить, делить круг на семь частей значительно сложнее, чем делить круг на три части. Это привело к тому, что семифазные машины не используются ни как электродвигатели, ни как электрогенераторы переменного тока. Не только семифазные, но и девятифазные и одиннадцати фазные тоже. Следует повторить вышесказанное: в гидравлике, где действуют большие силы давления, удалось уточнить, что системы с нечетным числом фаз: 1, 3, 5, 7, 9 и т.д. работают устойчиво в отличие от систем с чётным числом фаз. Гидравлические системы с чётным числом фаз быстро выходят из строя, имеют заниженный кпд, поэтому гидравлические машины строят только с нечетным числом фаз.

Векторные алгебры, которые могут быть – одномерные, трёхмерные, семимерные и пятнадцати мерные – говорят о том, что в этих системах действует довольно симметричная схема сил, определяемая тремя фазами (или тактами), семью фазами (или тактами), пятнадцатью фазами (или тактами), а не четырьмя или восемью, или шестнадцатью, например. Что в однофазной машине, что в трехфазной, семифазной или пятнадцати фазной – *сохраняется сумма квадратов моментов импульса.* Это сумма квадратов семи компонентов семимерной системы координат семимерной физики или семимерной алгебры. Сумма квадратов пятнадцати величин, причем величины – это матрицы пятнадцать на пятнадцать. Сумма квадратов этих пятнадцати матриц пятнадцать на пятнадцать даёт величину четырнадцати единичных матриц. Т.е. эта величина сохраняется в векторных алгебрах: одно-, трёх-, семи-, пятнадцатимерных и так далее. Это приводит к тому, что уменьшаются динамические потери, уменьшаются пульсации токов, напряжений либо расходов давлений, уменьшается нагрузка и динамические воздействия, вызывающие шум, вибрацию, биения, повышается кпд – и всё это в относительно малых размерах (объёмах). Не до максимума повышается кпд, но повышается. Меньше шума, вибраций, плавная работа. Т.е. семифазные машины могут строиться так же, как и трёхфазные – и они предпочтительнее четырёх-, шести-, либо восьмифазных машин. Если выполнить соответствующие расчеты, то по этим расчетам можно построить таблицы и графики. Графики получатся весьма симметричные… (Например, изменения токов первой и второй фазы совпадают в точке, определяемой значением, равным изменению в 51 градус с небольшими числовыми значениями).

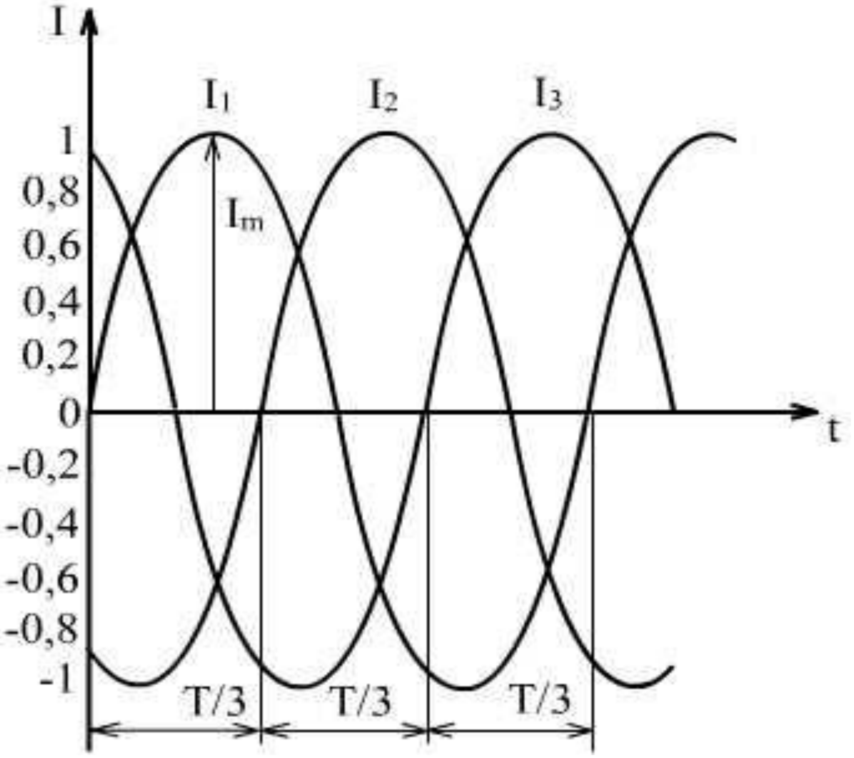

Рис 2. Стандартная трехфазная система

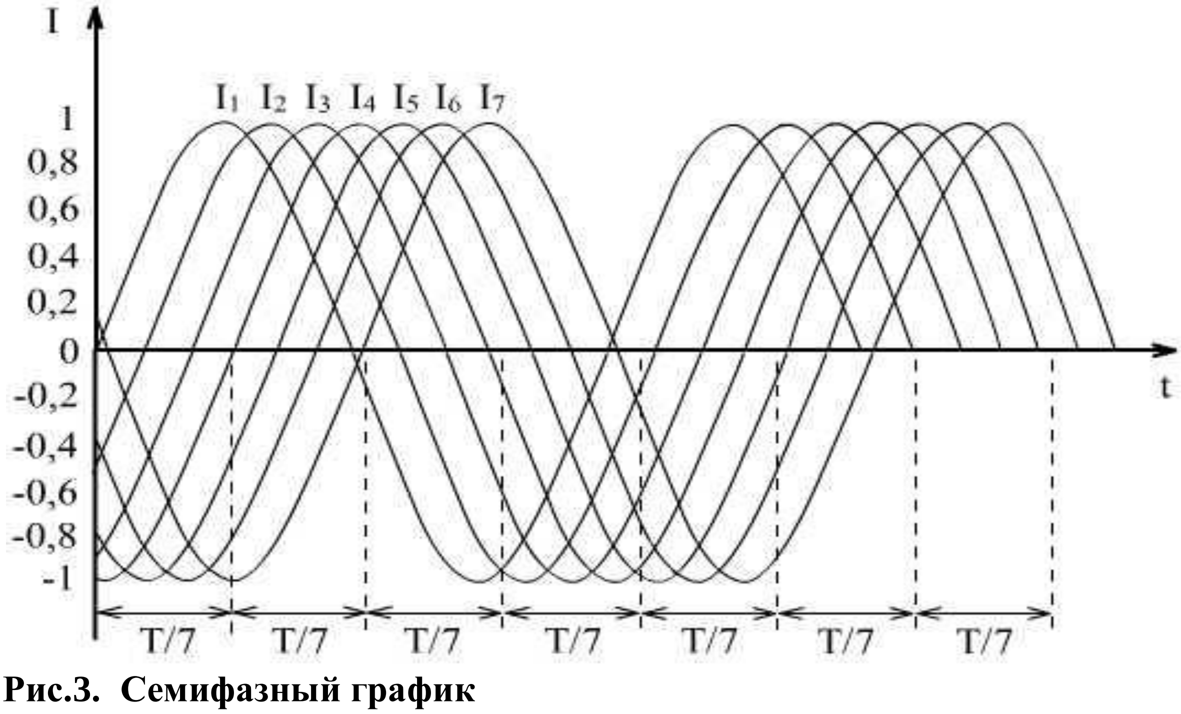

Рис.3. Семифазный график

Все заметные пересечения связаны с расположением на одной вертикальной оси. Например, амплитуда значения токов во второй плюс третьей и минус шестой фазах, т.е. обратного направления токов в шестой фазе – амплитуда совпадает по углу, связанному с системой оси икс, т.е. оси абсцисс, совпадают с пересечением величин 1, 2, 3, 4 – первой, второй, третьей, четвертой фаз –и два, три минус шесть, три, четыре, минус семь, два, три, – и обратные значения величин: семь, один, минус четыре, пять, минус один…. А также целого ряда других величин. По крайней мере, одна, вторая, третья, четвертая, девятая – десять величин совпадают по одной вертикальной оси. Причем в семифазных машинах можно комплектовать совокупности токов в фазах. Например, пропускать не только как в трёхфазной машине переменного тока ток отдельно по первой, отдельно по второй, отдельно по третьей фазе, а включать одновременно, например: первую, вторую и третью фазы. Это приведет к повышению амплитуды до значения 2,247 от значения в первой либо во второй фазе. При включении трёх величин видно, что первая, вторая, третья фазы дают значение 2, 247 амплитуды в одной фазе. А если просуммировать первую, вторую, и пропустить ток по пятой фазе в обратном направлении, то амплитуда пятой фазы, пропущенная в обратном направлении, совпадает с амплитудой суммы двух величин первой и второй фаз. Пропускание тока в первой и второй фазе в прямом направлении и в пятой фазе в обратном направлении, приводит к тому, что амплитуда становится уже не 2, 252 – как для суммы трёх величин (1, 2, 3), а 2,8019. Т.е. это значительно большая величина, по крайней мере, на 15 процентов амплитуда больше. Т.о. это приводит к повышению эффективности семифазных машин (или семимерных) по сравнению с эффективностью трёхфазных машин.

Здесь появляется возможность путем переключения фаз регулировать мощность электрических систем. Включаем одну фазу – одна мощность, включаем две фазы – другая мощность (можно провести соответствующие расчеты), три фазы (1, 2, 3) в прямом направлении (дают указанную выше амплитуду 2, 247), либо две фазы (1, 2,-5) из трёх в прямом направлении и минус одна – пятая фаза в обратном направлении по отношению к первой и второй дают значение 2, 807. Т.е. *это регулирование мощности путем переключения числа включенных фаз.*

Это достаточно важная задача регулирования мощности. Потому что не просто отрегулировать мощность машин переменного тока, если иметь в виду трёхфазные машины переменного тока. Поскольку в таких машинах сложение фаз не даёт повышения амплитуды в трёхфазной системе. А в семифазной дают. Расчеты, выполненные с помощью вычислительных средств, дают возможность построить графики по фазам и графики по комбинации фаз. Например: 1, 2, 3, 1, 2, -5, 2, 3,-6 , 3, 4, -7 и т.д. Видно, что амплитуда при включении фаз: 1, 2, 5 будет 2, 80193077 .

Если включить последовательно фазы: 2, 3, -6 – то амплитуда будет сдвинута по фазе на 51 градус, но всё равно она будет равняться 2,8019 т.е. тому же самому значению. Т.о. в последовательности значение амплитуды не меняется по величине, но меняется только по фазе на 51 градус. На графике показана, какая высокая степень симметрии в семифазных системах. Она несколько улучшает систему симметрии трёхфазных систем. Трёхфазная система хорошая, простая, и требует всего лишь три провода, семифазная в конструктивном плане будет несколько сложнее, но семифазный трансформатор будет работать более устойчиво, чем трёхфазный. Прежде всего, пульсации тока будут значительно меньше, а это означает, что и пульсации электромагнитных полей тоже будут меньше. Меньше потери на нагрев, меньше потери мощности.

Заключение

Т.о., многомерные технологии вполне можно применять для разработки как силовых машин (электро-, гидро- и пневмо- [14]), так и счётно-решающих приборов (аналоговых), вычислительных машин (аналоговых и цифровых электронно-вычислительных машин) и автоматики на различных физических принципах: электромагнитном, пневмо- и гидро- [1] и использовать в различных технических приложениях – на примерах, рассмотренных выше: в задачах поиска и преследования подвижных объектов, семифазной электромашине.

Литература

1. Башта Т.М. Гидропривод и гидропневмоавтоматика/Учебн. для специальности «Гидропнемоавтоматика и гидропривод» для вузов/ М.: Машиностоение, 1972.

2.Википедия, Свободная энциклопедия [Электронный ресурс]: URL: http://ru.wikipedia.org/wiki/ (дата обращения: 03.02.2012).

3.Воронин П.Ю. О новом подходе к расчёту и визуализации информационных множеств в задачах динамического поиска//Труды 18-ой международной конференции ГрафиКон. Московский Государственный Университет, 2008.

4.Гусев Н.И., Чураков В.С. Теоретико-методологические аспекты применения в российской модели экономической науки новых математических направлений и методов теоретической физики//Гуманитарные и социально-экономические науки. 2011. №5. (С.148-151).

5.Иванов-Смоленский А. В. Электрические машины. М., Энергия, 1980.

6. Ким Д.М. Методы поиска и преследования подвижных объектов. М., Наука. Гл. ред. Физ.-мат. лит., 1989. 336 с.

7.Коротков А.В. Элементы пятнадцати мерного векторного исчисления. Новочеркасск: Изд-во «НОК», 2011. 36с.

8.Коротков А.В. Товарно-денежное поле в экономике//Формы и смыслы времени (философский, теоретический и практический аспекты изучения времени): сб.научн. тр./Под ред В.С.Чуракова (серия «Библиотека времени». Вып.7). Новочеркасск, 2010.

9.Коротков А.В. Элементы семимерного векторного исчисления. Алгебра. Геометрия. Теория поля. Новочеркасск: Набла, 1996. 244с.

10.Коротков А.В., Чураков В.С. Теоретико-философские аспекты трёхмерного и семимерного пространств (собственно евклидова и псевдоевклидова). – Изд.2-е, испр. и доп. Новочеркасск: УПЦ «Набла» ЮРГТУ (НПИ), 2010. 266с.

11.Кравченко П.Д., Мешков В.Е., Чураков В.С. Многомерная физика на основе семимерной парадигмы А.В.Короткова как основа для изучения гравитационного, сильного и слабого ядерных взаимодействий, изучения элементарных частиц и формирования основ квантованной (дискретной) физики//Известия вузов. Северо-кавказский регион. Естественные науки. 2012. №5.

12.Мешков В.С., Чураков В.С. Программа исследований в области информационных технологий, искусственного интеллекта и когнитологии//Коротков А.В., Мешков В.Е., Чураков В.С., Бабкина Т.А., Козоброд А.В., Прудий А.В. Многозначные и многомерные булевы и небулевы алгебры логики А.В. Короткова и пифагоровы числа в искусственном интеллекте и криптографических системах: монография.− (Серия «Семимерная парадигма А.В. Короткова в информатике, искусственном интеллекте и когнитологии». Вып.1). Новочеркасск: Изд-во ‹‹НОК››, 2011. 488с.

13.Пат. RU (11) 2044388 (13) C1. Многополюсная коллекторная электрическая машина с нечетным числом пар полюсов.

14.Схиртладзе А. Г., Иванов В. И., Кареев В. Н. Гидравлические и пневматические системы. – Издание 2-е, дополненное. М.: ИЦ МГТУ «Станкин», «Янус-К», 2003. 544 с.

15.L. Yatziv, A. Bartesaghi, G. Sapiro. O(n) implementation of the fast marching algorithm. Journal of Computational Physics, vol. 212, no.2, pp. 393-399, 2006.

КОЧКОВАЯ Н. В., МЕШКОВ В. Е., ЧУРАКОВ В. С., БРЫКИНА Т.А.

КОНЦЕПЦИЯ 3D КОМПЬЮТЕРА

Введение

Настоящая статья посвящена заявленной теме. В ней формулируется концепция 3D компьютера, которая включает аппаратную составляющую и троичную вычислительную среду. Она является продолжением и развитием работ по теме «**Многомерные технологии**», которые строятся на основе многомерной алгебры А.В.Короткова («алгебры высоких технологий») [6] и *многомерной физики* [12]. Семимерная парадигма А.В.Короткова – это исходная эпистемологическая парадигма, которой мы следуем [9; 11].

Аппаратная составляющая 3D компьютера

Что должно представлять собою «железо» 3D компьютера?

Печатная плата является основой вычислительной техники, сердцевиной компьютера. Она представляет собою пластину из диэлектрика, на поверхности и/или в объеме которой сформированы электропроводящие цепи электронной схемы. Предназначение печатной платы – электрическое и механическое соединения различных электронных компонентов, которые на печатной плате соединяются своими выводами с элементами проводящего рисунка, как правило, пайкой.

Трёхмерные печатные платы могут быть точно так же разработаны, как и двухмерные печатные платы. Можно называть эти печатные платы двухслойными или двухсторонними, – в любом случае они содержат две плоскости. Это интересный вариант и более сложный, нежели односторонние печатные платы или чем однослойные печатные платы. Односторонние/ однослойные печатные платы можно рассматривать как частный случай двусторонних / двухслойных печатных плат. Что же касается многослойных печатных плат, то многослойные печатные платы точно так же задействуются, как однослойные и двухслойные.

Или, другими словами, можно сказать, что «в зависимости от количества слоёв с электропроводящим рисунком, печатные платы подразделяют на односторонние (ОПП, имеется только один слой фольги), двухсторонние (ДПП, два слоя фольги) и многослойные (МПП, фольга не только на двух сторонах платы но и во внутренних слоях диэлектрика). Многослойные печатные платы (сокращённо МПП, англ. *multilayer printed circuit board*) применяются в случаях, когда разводка соединений на двусторонней плате становится слишком сложной. По мере роста сложности проектируемых устройств и плотности монтажа увеличивается количество слоёв на платах. Для соединения проводников между слоями используются переходные металлизированные отверстия» [5]. Всё это – хорошо известные вещи.

Но – многосторонних печатных плат никто не предлагает. Только односторонние и двусторонние. Но мы понимаем, что односторонние и двусторонние печатные платы являются частным случаем трёхмерного варианта. Т.е. вполне возможно построить печатную плату не только одностороннюю и двустороннюю, но и трёхстороннюю и, т.о., задействовать глубину печатной платы или толщину печатной платы. *Это будет не что иное, как две поверхности с одной стороны и глубина с другой стороны.*

Всё это будет формировать трёхслойные (трёхсторонние) печатные платы, т.е. *печатные платы, которые строятся в объёме*. ***В пространственном объёме, в объёме твердого тела (впрочем, не обязательно твёрдого тела, но обязательно в объёме физического тела)***. Одна сторона плоская, вторая сторона плоская, третья плоскость сформирует трехстороннюю печатную плату – трёхмерное физическое пространство и трёхмерный кристалл.

Т.о. вполне возможно построить трёхмерную компьютерную составляющую в виде печатной кубической платы (подчеркнем ещё раз: не односторонней, не двусторонней, а кубической – трехсторонней). Кубические платы смогли бы значительно сэкономить пространство, это одна из возможностей получения многослойных элементов вычислительной техники. Таких элементов, в частности, как элементов памяти, логических элементов различных устройств, элементов логико-арифметических устройств, – а в результате элементов трёхмерных компьютеров – компьютеров, которые не только программно перерабатывают трёхмерную информацию, т.е. по программе ведут последовательно расчёт одной, второй и третьей координаты, а компьютеров, которые решают проблему аппаратно. Компьютеры, которые строились бы на трёхмерных кубических структурах – и это вполне реальная уже техническая задача. Вполне реально построить арифметико-логическое устройство (компьютер) на базе трёхмерного кубического логического элемента, элемента памяти, и т.д. (всё что угодно). Пришло время разработки не только плоских структур, но и структур трёхмерных. Аппаратных. Не только программных, но именно аппаратных.

(Кстати, почему наш мозг не плоский? Почему он кубический? Да потому, что он использует информацию не только по плоскостям (по поверхности), но и по толщине мозга. Т.о. человеческий мозг – *это трёхмерный куб, который содержит информацию по всему объёму – не по плоскостям, а по трёхмерному пространству*).

Таким образом, 3D компьютер будет представлять собою небольшой кубик со стороной в несколько сантиметров (а в пределе – в один сантиметр и меньше). Это очень важно в плане занимаемого 3D компьютером пространственного объема: прежде всего, это очень важно для различного рода *бортовых систем*. Борт − понятие растяжимое… (Борт – это: вертолёт, самолёт (в том числе – роботы и беспилотники), ракета, подводная лодка, космический корабль, космический спутник, автомобиль или единица военной бронетехники… Иначе говоря *борт − это автономная управляемая система*).

Это – аппаратное решение (аппаратная составляющая) 3D компьютера.

Программное решение

Что можно сказать о компьютерах, реализующих 3D информацию? Т.е. работающих в троичной вычислительной среде? Трёхмерные вычислительные среды, реализованные на *машинных (компьютерных) арифметиках*, давно известны: они применяются для переработки трёхмерной информации и используются там, где нужно особо быстро производить вычисления − вычисления в реальном масштабе времени – такие троичные вычислительные среды используются главным образом, опять-таки по преимуществу в т.н. *бортовых системах*: в авиации, ракетной технике, в космической технике. Там используется параллельная переработка информации, потому что все три координаты определяются практически одинаковыми по форме и выражению − по содержанию различными, а по форме одинаковыми. Т.о., в программном отношении 3D компьютер должен быть реализован (или может быть реализован) на программном обеспечении, в котором используются *не булевы алгебры логики.*

Необходимо отметить, что в истории электронно-вычислительных машин был прецедент: в 1958 г. Брусенцовым Н.П. в СССР была создана первая и единственная в мире *троичная ЭВМ «Сетунь»* и том же году [4]. И.Я.Акушским была создана супер производительная специализированная ЭВМ с использованием системы счисления в остатках [1]. Для этого была использована специфическая машинная арифметика. Реализовать ЭВМ на многозначных/многомерных булевых и небулевых алгебрах логики можно на любых физических и технологических принципах [13]. Самый простой − на феррит-диодных (от ферритового кольца можно сделать сколько угодно отводов-проводников), на полупроводниковых элементах, это также биомолекулярный компьютер (ДНК-компьютер), оптоэлектронный, оптический, на сверхпроводящих элементах, нейрооптические, нано − во всех мыслимых вариантах и т.д. [13]).

Что касается многозначных логик, то они разрабатываются относительно давно. Как уже было выше сказано, во второй половине XX века предпринимались попытки реализации многозначных логик в вычислительной среде электронно-вычислительных машин второго поколения феррито-диодных. (Впоследствии это привело к машинным арифметикам Н.П. Брусенцова и И.Я.Акушского) [1;4]. Для этого необходимо создать соответствующую физическую среду. На логических магнитных элементах пытались построить десятичную систему исчисления. Намагничивали железо - ферритовые элементы − небольшими «ступеньками». В результате уровень повышался. Но суть в том, что большое число разрядов − вернее не разрядов, а ***позиций*** приводило к сбою в работе электронно-вычислительной машины. И это вынудило прекратить эксперименты подобного рода и обратиться к двузначной, а вернее – двоичной алгебре логики − булевой алгебре логики: 0 и 1. Это лучше в том плане, что обеспечивается высокая точность и надежность результатов вычислений. Это − в отношении двоичной логики. Но двоичная логика, как выясняется, не единственная: алгебра Буля само собой, а, к примеру, алгебра логики вычетов по модулю два (mod=2) − также само собой [8]. Алгебру логики вычетов по модулю два, насколько нам известно, никто не рассматривал в таком плане, поскольку считали, что это просто функция иного характера − функция сложения по модулю два в булевой алгебре. Т.е. рассматривали это как функцию булевой алгебры, а не как самостоятельную алгебру. По крайней мере, нам такое рассмотрение неизвестно.

Там, например, − в алгебре вычетов по модулю два − видоизменяются законы де Моргана, и целый ряд других соотношений булевой алгебры. Это совсем другая алгебра, потому, что у неё иначе задана операция сложения. Все алгебры характеризуются набором основных операций: сложения и умножения. И в данном случае алгебра будет иной, нежели булева, потому, что у неё совсем другой вариант сложения (операция сложения). В отношении троичной логики всё ещё более многообразно. Существует множество троичных логик. Но, например троичная логика, соответствующая алгебре вычетов по модулю три (mod=3), пока что неизвестна: о ней никто ничего не говорит на научных конференциях и конгрессах, нет ничего в литературе и в Интернете. Т.е. собственно троичных логик много, в результате много троичных алгебр, но все эти алгебры разнятся, как это отмечалось выше, операциями сложения и умножения. Операция сложения по модулю три даёт совершенно новый вариант алгебры. Точно так же алгебры по модулю N (mod=N) − это алгебры вычетов − класс вычетов по модулю N. Таких алгебр много и все они отличаются модулем… но было бы замечательно использовать хотя бы трёхпозиционную алгебру! Толком до этого дело пока что не дошло, хотя трёхпозиционные алгебры изучались, но все они, как было отмечено выше, разнятся операциями сложения и умножения, а поэтому все различны и никто их не сводил в систему класса вычетов по модулю три.

Многозначные булевы и небулевы алгебры логики [7, с.17-23] – это как раз алгебры логики, которые используют классы сравнения по модулю и это изложено в достаточном объеме [10]. Сначала идет определение простейшего свойства различных многозначных алгебр логики, использующих классы сравнения по модулю 2, 3, 4, в частности. Показано, что найденные свойства этих алгебр, причем, это, – хорошо изученные свойства, и они есть в литературе. По крайней мере, двузначные алгебры логики вычетов по модулю два обладают основными свойствами линейных алгебр. Это ассоциативное сложение, коммутативное сложение, наличие нуля, наличие противоположных действий, дистрибутивность левое-правое, коммутативность умножения, а также наличие единицы и наличие обратных элементов.

Кроме того, расписаны функции 2, 3, 4- значных алгебр логики классов сравнения по модулю 2, 3 и 4. В табл.1– из см. в [10, с.225] приведены свойства алгебр логики классов сравнения по модулю 2.

Таблица 1

a	0	0	1	1
b	0	1	0	1
0	0	0	0	0
$\mathbf{a \cdot b}$	0	0	0	1
$\mathbf{a \cdot \overline{b}}$	0	0	1	0
a	0	0	1	1
$\mathbf{\overline{a} \cdot b}$	0	1	0	0
b	0	1	0	1
$\mathbf{a+b}$	0	1	1	0
$\mathbf{\overline{\overline{a} \cdot \overline{b}}}$	0	1	1	1
$\mathbf{\overline{a} \cdot \overline{b}}$	1	0	0	0
$\mathbf{\overline{\overline{a} + \overline{b}}}$	1	0	0	1
$\mathbf{\overline{b}}$	1	0	1	0
$\mathbf{\overline{\overline{a} \cdot b}}$	1	0	1	1
$\mathbf{\overline{a}}$	1	1	0	0
$\mathbf{\overline{a \cdot \overline{b}}}$	1	1	0	1
$\mathbf{\overline{a \cdot b}}$	1	1	1	0
1	1	1	1	1

Это собственно классы чётных и нечётных чисел. Здесь показаны все 16 функций в табл.1, которые возникают в этой алгебре. Эти функции отличаются от булевых функций, но, тем не менее, они весьма близки, потому, что операция умножения сохраняется. И операция инверсирования тоже сохраняется. А это уже говорит о том, что данные алгебры логики могут быть реализованы с помощью одного элемента И-НЕ. И – операция умножения, НЕ – инверсия. Единственная сложность – это операция сложения. Операция сложения может быть также реализована с помощью элементов И – НЕ. Проблем при этом не возникает. Т.е. *техническая реализация алгебр при построении логических устройств такого типа затруднений не вызывает*. **Достаточно одного функционального элемента И – НЕ, чтобы реализовать любую логическую задачу в этой алгебре.**

Алгоритм, реализуемый логическим элементом, при этом может иметь вид, представленный на рисунке 1.

Согласно алгоритму, можно разработать структурные модели, отражающие работу логических элементов с двумя входами и одним выходом, следующего вида (на примере элемента ИЛИ) – рисунок 2.

Также можно реализовать модели вычислительных устройств, например, сумматора и пр. Такая алгоритмическая модель представлена на рисунке 3. (Рис. 1, 2, 3 – см. [2;3]).

Трехзначной логикой можно заниматься в двухзначной системе по классу сравнений модуля два. Почему? Потому, что там, в отличие от булевых алгебр, есть противоположный элемент. Т.е. используется операция минус единица – чего нет в булевой алгебре. Т.о. получается, что алгебра сравнений по модулю два класса сравнений по модулю два имеет значения: 0, 1, -1. Т.е. три значения использованы. В булевой алгебре это ввести и использовать нельзя, потому что там нет противоположного элемента. А в этом случае есть! Т.е. алгебра сравнений по модулю два, вообще говоря, трёхзначная, если используется операция вычитания. Тем самым она имеет не только операции сложения и умножения, но и противоположную операции сложения операцию вычитания. **Она сразу реализует трёхзначную логику.** Вот, собственно, «***квазиквантовый» компьютер.***

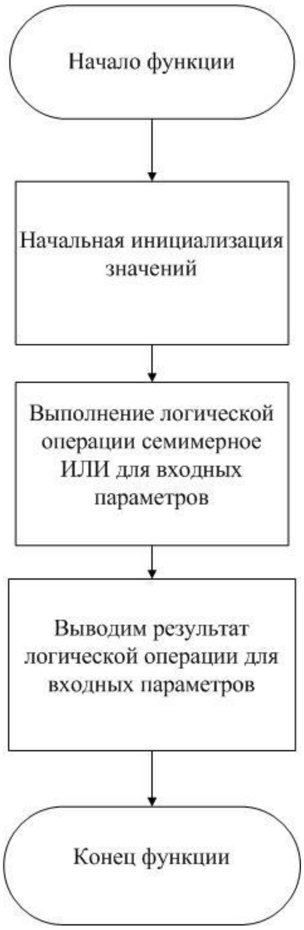

Рисунок 1 – Алгоритм работы модели логического элемента на примере элемента, реализованного на небулевой алгебре – семимерное ИЛИ

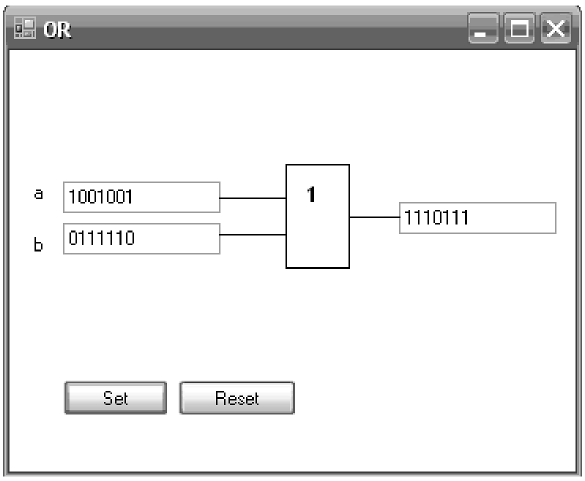

Рисунок 2 – Структурная схема элемента, реализованного на небулевой алгебре – семимерное ИЛИ (OR)

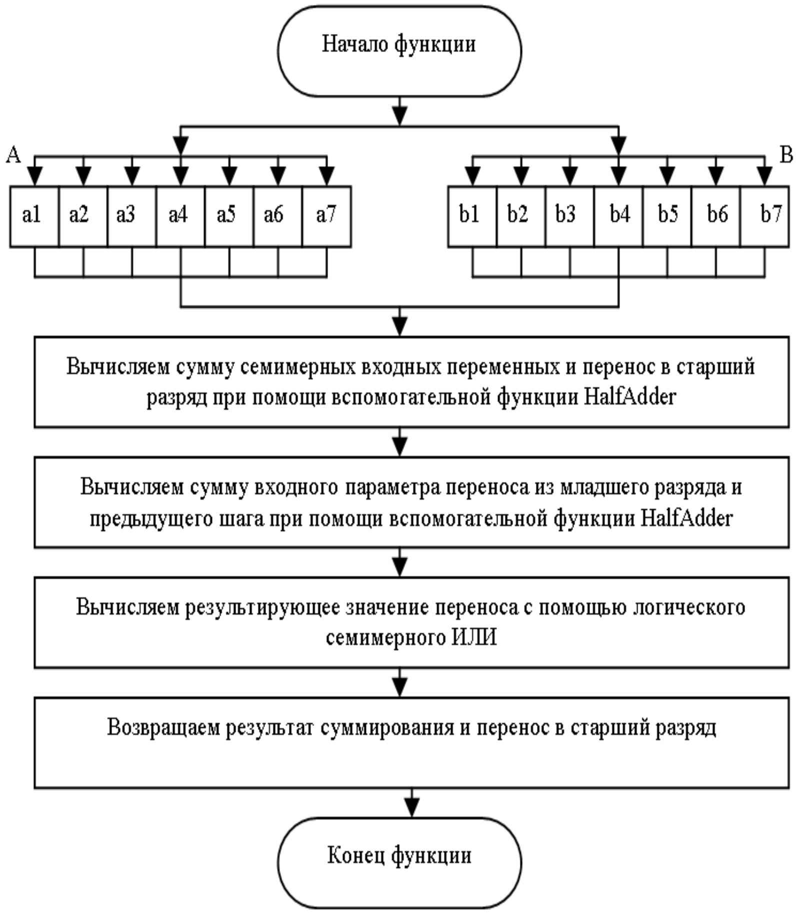

Рисунок 3 – Алгоритм работы функции семимерный сумматор

Заключение

Многозначные и многомерные булевы и небулевы алгебры логики [7;8] позволяют делать очень и очень много вещей, которые не позволяет булева алгебра. Достаточно сказать, что наличие операции вычитания в алгебре класса сравнений по модулю два, например, либо вообще по произвольному модулю даёт совершенно новые возможности. В частности, это позволяет построить собственно комплексные, собственно кватернионные, собственно октанионные алгебры – двухмерные, четырёхмерные, восьмимерные алгебры логики [6;9;11] – потому, что они задействуют наличие операции вычитания. Ничего подобного в булевой алгебре сделать невозможно. Т.е. здесь расширяется класс используемых операций вычислений. Классы операций вычислений здесь уже совсем иные.

Кроме того, двумерная комплексная алгебра, кватернионно четырехмерная и восьмимерная октанионная алгебры – дискретны. Они позволяют построить алгебры векторные, в частности трёхмерные и семимерные логические дискретные алгебры. Это совершенно новые классы объектов дискретной математики. Причем широко используемый класс объектов для непрерывных математик, а в дискретных математиках совершенно не используемый. Наличие операции вычитания позволяет этого достигнуть. Это совершенно новый класс алгебр, совершенно новый класс логических устройств, а, следовательно, совершенно новый пласт знаний, позволяющий реализовать концепцию 3D компьютера.

Литература

1.Акушский И.Я., Юдицкий Д.И. Машинная арифметика в остаточных классах. – М.: Сов.Радио, 1968.

2.Бабкина Т.А. Моделирование основных логических элементов на основе семимерной булевой алгебры логики//Естественные и технические науки. №3. М.: Спутник+, 2011. 528 с. (с.322-325).

3.Бабкина Т.А. Построение логического базиса на основе не булевой алгебры логики//Естественные и технические науки. №6. М.: Спутник+, 2011. 636 с. (с.542-545).

4.Брусенцов Н.П. Опыт разработки троичной вычислительной машины//Вестник Московского университета. 1965. №2. (с.39-48).

5.Википедия, Свободная энциклопедия [Электронный ресурс]: URL: http://ru.wikipedia.org/wiki/ (дата обращения: 23.06.2012).

6.Коротков А.В. Элементы семимерного векторного исчисления. Алгебра. Геометрия. Теория поля. Новочеркасск: Набла, 1996. 244с.

7. Коротков А.В. Многозначные алгебры логики//Информационные системы и технологии. Теория и практика. Шахты: Изд-во ЮРГУЭС, 2008.

8.Коротков А.В. Многомерные алгебры полей сравнения по mod=2 // Коротков А.В., Мешков В.Е., Чураков В.С, Бабкина Т.А., Козоброд А.В., Прудий А.В. Многозначные и многомерные булевы и небулевы алгебры логики А.В.Короткова и пифагоровы числа в искусственном интеллекте и криптографических системах: монография. (Серия «Семимерная парадигма А.В.Короткова в информатике, искусственном интеллекте и когнитологии»). Новочеркасск: Издательство «НОК», 2011. (с.46-52).

9. Коротков А.В., Чураков В.С. Теоретико-философские аспекты трёхмерного и семимерного пространств (собственно евклидова и псевдоевклидова). Изд.2-е, испр. и доп. Новочеркасск: УПЦ «Набла» ЮРГТУ (НПИ), 2010. 266с.

10.Коротков А.В., Чураков В.С. Многозначные и многомерные булевы и небулевы алгебры логики в искусственном интеллекте// Коротков А.В., Мешков В.Е., Чураков В., Бабкина Т.А., Козоброд А.В., Прудий А.В. Многозначные и многомерные булевы и небулевы алгебры логики А.В.Короткова и пифагоровы числа в искусственном интеллекте и криптографических системах: монография. (Серия «Семимерная парадигма А.В.Короткова в информатике, искусственном интеллекте и когнитологии»). Новочеркасск: Издательство «НОК», 2011. (с.220-231).

11.Коротков А.В., Мешков В.Е., Чураков В., Бабкина Т.А., Козоброд А.В., Прудий А.В. Многозначные и многомерные булевы и небулевы алгебры логики А.В.Короткова и пифагоровы числа в искусственном интеллекте и криптографических системах: монография. (Серия «Семимерная парадигма А.В.Короткова в информатике, искусственном интеллекте и когнитологии»). Новочеркасск: Издательство «НОК», 2011. 488с.

12. Кравченко П.Д., Мешков В.Е., Чураков В.С., Брыкина Т.А., Веприков Ю.В. Многомерная физика на основе семимерной парадигмы А.В.Короткова как основа для изучения гравитационного, сильного и слабого ядерных взаимодействий, изучения элементарных частиц и формирования основ квантованной (дискретной) физики//Известия вузов. Северо-кавказский регион. Естественные науки. 2012. №5.

13.Мешков В.С., Чураков В.С. Программа исследований в области информационных технологий, искусственного интеллекта и когнитологии//Коротков А.В., Мешков В.Е., Чураков В.С., Бабкина Т.А., Козоброд А.В., Прудий А.В. Многозначные и многомерные булевы и небулевы алгебры логики А.В. Короткова и пифагоровы числа в искусственном интеллекте и криптографических системах: монография. (Серия «Семимерная парадигма А.В. Короткова в информатике, искусственном интеллекте и когнитологии». Вып.1). Новочеркасск: Изд-во ‹‹НОК››, 2011. 488с.

БРЫКИНА Т.А., МЕШКОВ В. Е., ЧУРАКОВ В.С.

РАЗРАБОТКА ГЕНЕРАТОРА ПСЕВДОСЛУЧАЙНЫХ СЕМИМЕРНЫХ ДВОИЧНЫХ ЧИСЕЛ

Известно, что возможно использование в специализированных вычислительных системах в качестве системы счисления числа Фибоначчи. Это позволяет существенно сократить время выполнения арифметических операций и, как следствие, повысить производительность указанных вычислителей.

Решим задачу о получении 32-битных двоичных чисел с помощью описанного выше генератора, каждое чисел будет семимерным, т.е. будет состоять из семи пространственных координат [1; 2; 3].

Дадим основные понятия и определения, необходимые для получения алгоритма.

Генератор псевдослучайных чисел (ГПСЧ, англ. *Pseudorandom number generator, PRNG*) — *алгоритм*, порождающий последовательность *чисел*, элементы которой подчиняются заданному *распределению* (например, *равномерному*) и почти независимы при этом друг от друга.

Качество получаемых при решении различных задач результатов напрямую зависит от качества используемых ГПСЧ.

Источники настоящих случайных чисел найти трудно. Ими могут быть физические *шумы*, такие как детекторы событий ионизирующей *радиации, дробовой шум* в резисторе или *космическое излучение*.

Однако применяются такие устройства в приложениях сетевой безопасности редко, т.к. вызывают грубые атаки на подобные устройства.

Альтернативным решением представляется создание набора из большого количества случайных чисел, опубликованного в некотором *словаре*. Но и наборы обеспечивают очень ограниченный источник чисел по сравнению с тем количеством, которое требуется приложениям сетевой безопасности. Хотя при этом действительно обеспечивают статистическую случайность. Узкое место – противник может получить копию словаря [4].

Большинство простых арифметических генераторов страдают от следующих недостатков:

- Последовательные значения не являются независимыми;
- Слишком короткий период/периоды;
- Неравномерное одномерное распределение;
- Некоторые биты «менее случайны», чем другие;
- Обратимость.

Но их достоинством при этом является высокая скорость работы.

В частности, алгоритм *RANDU*, используемый в мейнфреймах оказался ненадежным, что вызвало сомнения в достоверности результатов многих исследований, использовавших этот алгоритм.

Для получения псевдослучайных числе распространены *линейный конгруэнтный метод, метод Фибоначчи с запаздываниями, регистр сдвига с линейной обратной связью, регистр сдвига с обобщённой обратной связью*.

Широкое распространение также получил «*вихрь Мерсенна*», предложенный в 1997 году Мацумото и Нисимурой. Его достоинствами являются: равномерное распределение в 623 измерениях, период ($2^{19937}-1$), быстрая генерация случайных чисел. Однако, существуют алгоритмы, распознающие последовательность, порождаемую вихрем Мерсенна, как неслучайную.

Наравне с существующей необходимостью генерировать легко воспроизводимые последовательности случайных чисел, также существует необходимость генерировать совершенно непредсказуемые или попросту абсолютно случайные числа. Такие генераторы называются *генераторами случайных чисел* (ГСЧ – англ. *random number generator, RNG*). Так как такие генераторы чаще всего применяются для генерации уникальных симметричных и асимметричных ключей для шифрования, они чаще всего строятся из комбинации криптостойкого ГПСЧ и внешнего источника *энтропии*.

Почти все крупные производители микрочипов поставляют аппаратные ГСЧ с различными источниками энтропии, используя различные методы для их очистки от неизбежной предсказуемости. Однако на данный момент скорость сбора случайных чисел всеми существующими микрочипами (несколько тысяч бит в секунду) не соответствует быстродействию современных процессоров.

В современных исследованиях осуществляются попытки использования измерения физических свойств объектов (например, *температуры*) или даже *квантовых флуктуаций вакуума* в качестве источника энтропии для ГСЧ.

В персональных компьютерах авторы программных ГСЧ используют гораздо более быстрые источники энтропии, такие, как шум звуковой карты или *счётчик тактов процессора*. Сбор энтропии являлся наиболее уязвимым местом ГСЧ. Эта проблема до сих пор полностью не разрешена во многих устройствах (например, *смарт-картах* [5;6]), которые таким образом остаются уязвимыми. Многие ГСЧ используют традиционные испытанные, хотя и медленные, методы сбора энтропии вроде измерения реакции пользователя (движение *мыши* и т. п.), как, например, в *PGP* и Yarrow, или взаимодействия между *потоками*, как, например, в *Java* SecureRandom.

Если в качестве источника энтропии использовать текущее время, то для получения *натурального числа* от 0 до *N* достаточно вычислить *оста-*

ток_от деления текущего времени в *миллисекундах* на число *N*+1. Недостатком этого ГСЧ является то, что в течение одной миллисекунды он выдает одно и то же число [4].

Разновидностью ГПСЧ являются ГПСБ (PRBG) – генераторы псевдослучайных бит, а также различных *поточных шифров*. ГПСЧ, как и поточные шифры, состоят из внутреннего состояния (обычно размером от 16 бит до нескольких мегабайт), функции инициализации внутреннего состояния *ключом* или *зерном* (англ. *seed*), функции обновления внутреннего состояния и функции вывода. ГПСЧ подразделяются на простые арифметические, сломанные криптографические и криптостойкие. Их общее предназначение – генерация последовательностей чисел, которые невозможно отличить от случайных вычислительными методами.

Хотя многие криптостойкие ГПСЧ или поточные шифры предлагают гораздо более «случайные» числа, такие генераторы гораздо медленнее обычных арифметических и могут быть непригодны во всякого рода исследованиях, требующих, чтобы процессор был свободен для более полезных вычислений.

Примерами известных криптостойких ГПСЧ являются *RC4, ISAAC, SEAL, Snow*, теоретический *алгоритм Блюма, Блюма и Шуба*, а также счётчики с криптографическими хеш-функциями или криптостойкими блочными шифрами вместо функции вывода.

При циклическом шифровании используется способ генерации ключа сессии из мастер-ключа. Счетчик с периодом N используется в качестве входа в шифрующее устройство. Например, в случае использования 56-битного ключа *DES* может использоваться счетчик с периодом 256. После каждого созданного ключа значение счетчика повышается на 1. Таким образом, псевдослучайная последовательность, полученная по данной схеме, имеет полный период: каждое выходное значение X0, X1,…XN-1 основано на разных значениях счетчика, поэтому X0 ≠ X1 ≠ XN-1. Так как мастер-ключ является секретным, легко показать, что любой секретный ключ не зависит от знания одного или более предыдущих секретных ключей.

ГПСЧ из стандарта ANSI *X9.17* используется во многих приложениях финансовой безопасности и *PGP*. В основе этого ГПСЧ лежит *тройной DES*. Генератор ANSI X9.17 состоит из следующих частей: вход, ключи, выход.

DTi — значение даты и времени на начало i-ой стадии генерации.

Vi — начальное значение для i-ой стадии генерации.

Ri — псевдослучайное число, созданное на i-ой стадии генерации.

K1, K2 — ключи, используемые на каждой стадии.

Тогда:
Ri = EDEK1,K2 [EDEK1,K2 [DTi] Vi]

Vi+1 = EDEK1,K2 [EDEK1,K2 [DTi] Ri]

Схема включает использование 112-битного ключа и трех EDE-шифрований. На вход даются два псевдослучайных значения: значение даты и времени и начальное значение текущей итерации, на выходе получаются начальное значение для следующей итерации и очередное псевдослучайное значение. Даже если псевдослучайное число Ri будет скомпрометировано, вычислить Vi+1 из Ri не является возможным за разумное время, и, следовательно, следующее псевдослучайное значение Ri+1, так как для получения Vi+1 дополнительно выполняются три операции EDE.

Линейный конгруэнтный метод – один из *алгоритмов генерации псевдослучайных чисел*. Применяется в простых случаях и не обладает *криптографической стойкостью*. Входит в стандартные библиотеки различных *компиляторов*.

Этот метод заключается в вычислении членов *линейной рекуррентной последовательности* по модулю некоторого натурального числа *m*, задаваемой следующей формулой:

$$X_{k+1} = (aX_k + c) \mod m,$$

где *a* и *c* – некоторые целочисленные коэффициенты. Получаемая последовательность зависит от выбора стартового числа X_0и при разных его значениях получаются различные последовательности случайных чисел. В то же время, многие свойства этой последовательности определяются выбором коэффициентов в формуле и не зависят от выбора стартового числа.

Последовательность чисел, порождаемая линейным конгруэнтным методом, периодична с *периодом*, не превышающим *m*. При этом длина периода в точности равна *m* тогда и только тогда, когда:

НОД(*c*,*m*) = 1 (то есть, *c* и *m взаимно просты*);

a-1 кратно *p* для всех *простых делителей p* числа *m*;

a-1 кратно 4, если *m* кратно 4.

Статистические свойства получаемой последовательности случайных чисел полностью определяются выбором коэффициентов *a* и *c*. Для этих констант выписаны условия, гарантирующие удовлетворительное качество получаемых случайных чисел.

При реализации выгодно выбирать $m = 2^e$, где *e* – число *битов* в *машинном слове*, поскольку это позволяет избавиться от относительно медленной операции приведения по модулю.

Младшие двоичные разряды сгенерированных таким образом случайных чисел демонстрируют поведение, далёкое от случайного, поэтому рекомендуется использовать только старшие разряды. Кроме того, при использовании этого генератора для выбора точек в *d*-мерном пространстве, точки ложатся не более, чем на $m^{1/d}$ *гиперплоскостей*, что ограничивает применение генератора для решения некоторых задач.

В таблице ниже приведены наиболее часто используемые параметры линейных конгруэнтных генераторов, в частности, в стандартных библиотеках различных *компиляторов* (функция *rand()*).

Source	m	a	c	выдаваемые биты результата в *rand()* / *Random(L)*
Numerical Recipes	2^{32}	1664525	1013904223	
MMIX by Donald Knuth	2^{64}	6364136223846793005	1442695040888963407	
Borland C/C++	2^{32}	22695477	1	биты 30..16 в *rand()*, 30..0 в *lrand()*
GNU Compiler Collection	2^{32}	69069	5	биты 30..16
MMIX by Donald Knuth	2^{64}	6364136223846793005	1442695040888963407	
Borland C/C++	2^{32}	22695477	1	биты 30..16 в *rand()*, 30..0 в *lrand()*
GNU Compiler Collection	2^{32}	69069	5	биты 30..16
ANSI C: Open Watcom, Digital Mars, Metrowerks, IBM VisualAge C/C++	2^{32}	1103515245	12345	биты 30..16
Borland Delphi, Virtual Pascal	2^{32}	134775813	1	биты 63..32 числа (seed * L)
Microsoft Visual/Quick C/C++	2^{32}	214013	2531011	биты 30..16
Apple CarbonLib	2^{31} - 1	16807	0	см. Метод Лемера

Особенностью линейного конгруэнтного метода является то, что если сомножитель и модуль соответствующим образом подобраны, то результирующая последовательность чисел будет статистически неотличима от случайной последовательности элементов множества {0, 1, 2, …, m-1}. Однако, все элементы этой последовательности однозначно определяются четырьмя параметрами: X_0, a, c, m.

Если *криптоаналитик* знает об использовании линейного конгруэнтного метода с известными параметрами, то известной становится вся последовательность чисел. В то же время, даже если криптоаналитик знает только лишь об использовании линейного конгруэнтного метода, то информация о небольшой части последовательности достаточна для выявления параметров метода и всех последующих элементов последовательности. В частности, если криптоаналитику известны значения X_0, X_1, X_2, X_3, то они удовлетворяют системе уравнений:

$$\begin{cases} X_1 = (a \cdot X_0 + c) \bmod m \\ X_2 = (a \cdot X_1 + c) \bmod m \\ X_3 = (a \cdot X_2 + c) \bmod m \end{cases}$$

из которой можно получить значения параметров *a, c* и *m*.

Поэтому, хотя линейный конгруэнтный метод порождает статистически хорошую псевдослучайную последовательность чисел, он не является криптографически стойким [4].

Разработаем ГПСЧ, используя метод Фибоначчи с запаздываниями, т.к. он наиболее подходит для решения нашей задачи.

Математическая модель построена с использованием многомерной алгебры логики в рамках семимерной парадигмы А.В.Короткова [7] и в продолжение темы, обозначенной в работах [1; 8]. Элементы массива задаются по типу **a**=($a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7$), **b**=($b_1,b_2,b_3,b_4,b_5,b_6,b_7$), **c**=($c_1,c_2,c_3,c_4,c_5,c_6,c_7$) и так далее [1; 2].

Опишем метод реализации алгоритма подробнее. Метод Фибоначчи с запаздываниями (*Lagged Fibonacci generator*) – один из методов *генерации псевдослучайных чисел.*

Особенности распределения случайных *чисел*, генерируемых *линейным конгруэнтным алгоритмом*, делают невозможным их использование в статистических *алгоритмах,* требующих высокого разрешения.

В связи с этим линейный конгруэнтный алгоритм постепенно потерял свою популярность и его место заняло семейство *фибоначчиевых* алгоритмов, которые могут быть рекомендованы для использования в алгоритмах, критичных к качеству случайных чисел. В англоязычной литературе фибоначчиевы датчики такого типа называют обычно «Subtract-with-borrow Generators» (SWBG).

Наибольшую популярность фибоначчиевы датчики получили в связи с тем, что скорость выполнения арифметических операций с вещественными числами сравнялась со скоростью целочисленной арифметики, а фибоначчиевы датчики естественно реализуются в вещественной арифметике. Впрочем, ничего не мешает вместо вещественных чисел из диапазона $[0, 1)$ брать 32-битное целое число.

В качестве алгебраической модели используются следующие соотношения:

$$X_k = \begin{cases} X_{k-a} - X_{k-b}, & \text{if } X_{k-a} \geq X_{k-b}; \\ X_{k-a} - X_{k-b} + 1, & \text{if } X_{k-a} < X_{k-b}; \end{cases}$$

где X_k— вещественные числа из диапазона $[0,1)$, a, b – целые положительные числа, называемые лагами. При реализации через целые числа достаточно формулы $X_k = X_{k-a} - X_{k-b}$ (при этом будут происходить арифметические переполнения). Для работы фибоначчиеву датчику требуется знать $\max\{a, b\}$ предыдущих сгенерированных случайных чисел. При программной реализации для хранения сгенерированных случайных чисел используется конечная циклическая очередь на базе массива. Для старта фибоначчиевому датчику требуется $\max\{a, b\}$ случайных чисел, которые могут быть сгенерированы простым конгруэнтным датчиком.

Получаемые случайные числа обладают хорошими статистическими свойствами, причём все биты случайного числа равнозначны по статистическим свойствам. Период фибоначчиева датчика может быть оценен по следующей формуле:

$T = (2^{\max\{a,b\}} - 1) \cdot 2^{\ell}$,

где ℓ – число битов в мантиссе вещественного числа.

Лаги a и b – «магические» и их не следует выбирать произвольно. Рекомендуются следующие значения лагов: $(a, b) = (55, 24)$, $(17, 5)$ или $(97, 33)$. Качество получаемых случайных чисел зависит от значения константы, a, чем оно больше, тем выше размерность пространства, в котором сохраняется равномерность случайных векторов, образованных из полученных случайных чисел. В то же время, с увеличением величины константы *a* увеличивается объём используемой алгоритмом памяти.

Значения $(a, b) = (17, 5)$ можно рекомендовать для простых приложений, не использующих векторы высокой размерности со случайными компонентами. Значения $(a, b) = (55, 24)$ позволяют получать числа, удовлетворительные для большинства алгоритмов, требовательных к качеству случайных чисел. Значения $(a, b) = (97, 33)$ позволяют получать очень качественные случайные числа и используются в алгоритмах, работающих со случайными векторами высокой размерности. Описанный фибоначчиев датчик случайных чисел (с лагами 20 и 5) используется в широко известной системе *Matlab* (автором первой версии этой системы был Д. Каханер) [4].

На рисунке 1 представлена структурная схема разработанного генератора. Число элементов массива определяет максимальный из двух лаг.

Именно их этих номеров элементов массива берутся величины, и из одной вычитается другая. Когда получается значение, весь массив сдвигается в начало на один элемент, с потерей первого элемента, потом в конец массива устанавливается полученное значение, и оно же выводится в качестве случайного. В полях текущего генератора при запуске появляются значения лагов и *K*. Лаги не могут быть двоичными, так как это, по сути, индексы. В вычислениях лаги напрямую не участвуют и нужны для получения элементов массива по номеру. Задаются лаги в полях – Лаги.

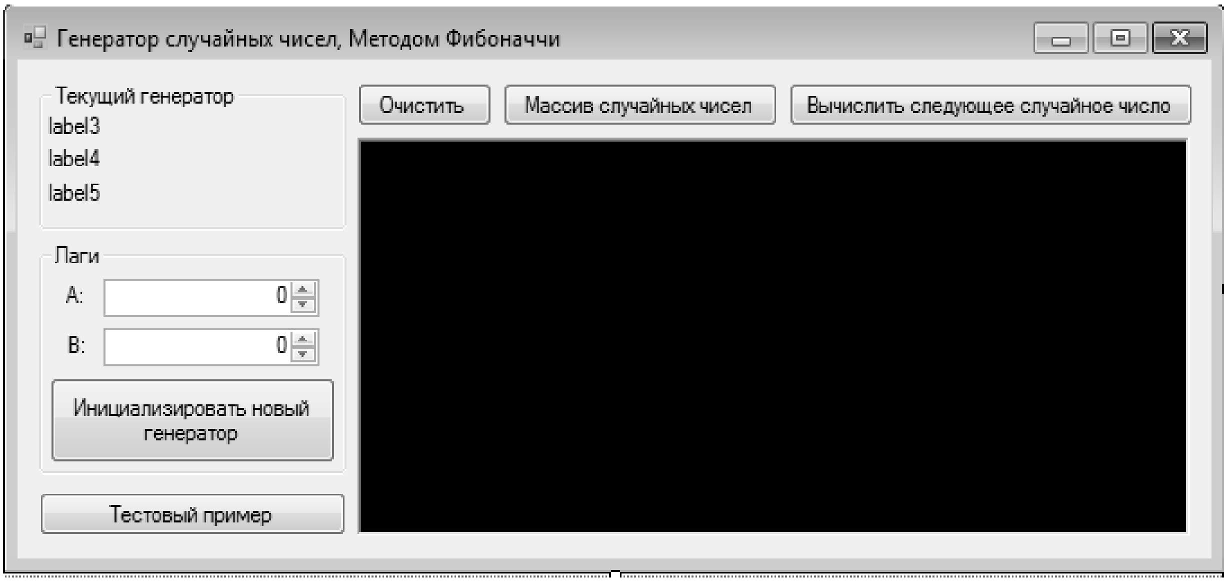

Рисунок 1 – Структурная схема генератора случайных чисел методом Фибоначчи.

При нажатии кнопки **Массив случайных чисел** результат генерации выводится в центральном поле, как показано на рисунке 2. При нажатии кнопки **Очистить** – форма очищается. Лаги, как было замечено выше, можно назначать любые целочисленные десятичные числа. При нажатии **Тестовый пример** появится тестовый массив чисел.

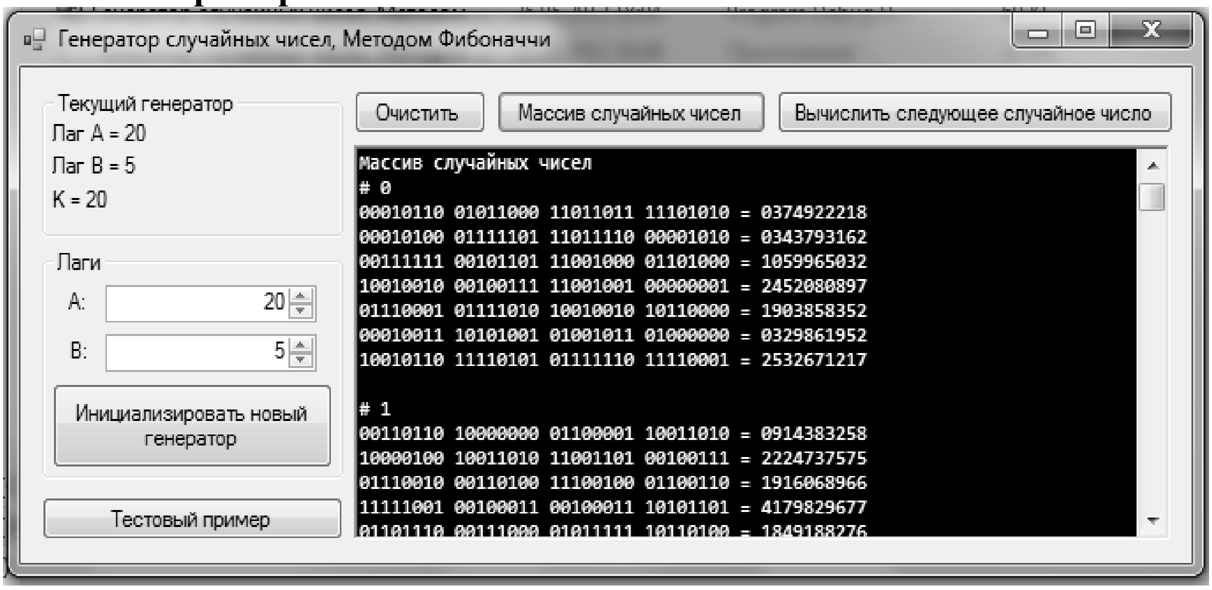

Рисунок 2 – Структурная схема генератора случайных чисел методом Фибоначчи в работе. Генерация массива случайных чисел.

Сумма после знака равенства не есть конечный продукт работы генератора, это текстовое представление целочисленного многомерного типа данных UInt32Element. В памяти ЭВМ – это объект, который в себе содержит 32 элемента, семимерных битов/объектов, которые сами по себе тоже содержат 7 отдельных битов каждый. На дальнейших расчетах текстовое представление не сказывается [2].

Литература

1. Коротков А.В., Мешков В.Е., Чураков В.С., Бабкина Т.А., Козоброд А.В., Прудий А.В. Многозначные и многомерные булевы и небулевы алгебры логики А.В. Короткова и пифагоровы числа в искусственном интеллекте и криптографических системах: монография. – (Серия «Семимерная парадигма А.В. Короткова в информатике, искусственном интеллекте и когнитологии». Вып.1). – Новочеркасск: Изд-во «НОК», 2011. – 488с.

2. Мешков В.Е., Брыкина Т.А. Разработка моделей сумматоров на базе многомерной алгебры логики в рамках семимерной парадигмы А.В.Короткова// Естественные и технические науки. 2012. № 2. – М.: Спутник+ – 513с. – (с. 423-428)

Брыкина Т.А. Анализ влияния на темпоральность процессов в вычислительных системах многомерной алгебры логики//Информационные технологии в науке и образовании. Международная научно-практическая конференция (март-июнь 2012 года). V Всеросийский семинар «Применение MOODLE в сетевом обучении» (Железноводск, 29-31 мая 2012 года): материалы/редкол. А.Э.Попов [и др.]. – Шахты: ФГБОУ ВПО «ЮРГУЭС», 2012. – 192 с. – (с. 84-86)

4. Шахов В.В. Обзор и сравнительный анализ библиотек генераторов псевдослучайных чисел// Проблемы информатики. 2010. № 2. – (С. 66-74).

5. Жикун Чен. Технология Java CardTM для смарт-карт: архитектура и руководство программиста. – М.: ЗАО РИЦ «Техносфера», 2008. – 344с.

6. Крэндалл Р., Померанс К. Простые числа: Криптографические вычислительные аспекты. Пер. англ./Под ред. и с предисл.В.Н. Чубрикова. – М.: УРСС; Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2011.– 694с.

7. Коротков А.В., Чураков В.С. Теоретико-философские аспекты трехмерного и семимерного пространств (собственно евклидова и псевдоевклидова).– Новочеркасск: УПЦ «Набла» ЮРГТУ (НПИ), 2010. –266с.

8. Кравченко П.Д., Мешков В.Е., Чураков В.С., Брыкина Т.А., Веприков Ю.В. Многомерные технологии//Альманах современной науки и образования. 2012. №8 (63).– (с.91-97).

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Брыкина (Бабкина) Татьяна Александровна, базовое образование: экономист по специальности «Информационные системы в экономике», ВИ (ф) ЮРГТУ в 2002 году; старший преподаватель кафедры «Информационные технологии», Волгодонский институт сервиса (филиал) ФГБОУ ВПО «Донского государственного технического университета» (ДГТУ), аспирантка В.Е.Мешкова по специальности «Моделирование, численные методы и комплексы программ» по кафедре «Информатика» ВИС ФБГОУ ВПО «ЮРГУЭС». Область научных интересов: нечеткое моделирование и управление, многозначные и многомерные булевы и небулевы алгебры логики А.В.Короткова в информатике и искусственном интеллекте, альтернативные подходы к изучению искусственного интеллекта.

Веприков Юрий Владимирович, аспирант, кафедра «Радиоэлектронные системы» Южно-Российского государственного университета экономики и сервиса.

Вересников Георгий Сергеевич, канд. техн. наук, старший научный сотрудник.

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова Российской академии наук.

Коротков Анатолий Васильевич, базовое образование: инженер-электрик, НПИ в 1967 году, кандидат технических наук, доктор физико-математических наук, доцент. Длительное время работал в ОКТБ «Старт» и «Орбита» в г. Новочеркасске. Область научных интересов − обоснование семимерного векторного исчисления (семимерной векторной алгебры, семимерной дифференциальной геометрии и семимерной теории поля) − как многомерной базы семимерной физической теории.

Кочковая Наталья Владимировна, кандидат технических наук, доцент кафедры «Информационные технологии» Волгодонский институт сервиса (филиал) ФГБОУ ВПО «Донского государственного технического университета» (ДГТУ). Базовое образование: закончила ЮРГТУ (НПИ) в 1994 году по специальности «Вычислительные машины, комплексы и сети». Защитила кандидатскую диссертацию на тему «Математическое моделирование начальной стадии роста полупроводниковых соединений A3B5» в ЮРГТУ в 2002 году. Область научных интересов: применение информационных технологий в практической деятельности.

Кравченко Павел Давидович – доктор технических наук, профессор. Кафедра «Технический сервис», Волгодонский институт сервиса (филиал)

ФГБОУ ВПО «Донского государственного технического университета» (ДГТУ).

Базовое образование: окончил НПИ в 1964 году по специальности горный инженер-механик (горные машины); кандидат технических наук в 1971 году по специальности «Горные машины». Доктор технических наук (ВНИИАМ, г.Москва, 1999 год) – специальность «Атомное машиностроение». Сфера научных интересов: изобретательство – новые подходы в атомном машиностроении, спасательных и аварийно-восстановительных работах при чрезвычайных ситуациях (ЧС).

Мешков Владимир Евгеньевич, базовое образование: инженер-системотехник, НПИ в 1975 году, кандидат технических наук, профессор кафедры «Информационные технологии», Волгодонский институт сервиса (филиал) ФГБОУ ВПО «Донского государственного технического университета» (ДГТУ), член Российской ассоциации искусственного интеллекта, индивидуальный член Европейской координационной комиссии по искусственному интеллекту. Область научных интересов: разработка теоретических основ применения бионических методов в решении задач синтеза сложных топологий, применение гибридных нейросетевых технологий в решении задач автоматической классификации и распознавании смыслов текстов, многозначные и многомерные булевы и небулевы алгебры логики А.В.Короткова в информатике и искусственном интеллекте.

Чураков Вадим Сергеевич, базовое образование: горный инженер-электрик, Шахтинский филиал НПИ в 1987 году, кандидат философских наук, доцент. Область научных интересов: изучение феномена времени, многозначные и многомерные булевы и небулевы алгебры логики А.В.Короткова в информатике и искусственном интеллекте,социально-философский анализ онлайновых социальных сетей.

СОДЕРЖАНИЕ

Только для научных библиотек

Научное издание

МНОГОМЕРНАЯ АЛГЕБРА.
МНОГОМЕРНАЯ ФИЗИКА. МНОГОМЕРНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

А.В. Коротков, П.Д. Кравченко, В.Е. Мешков,
В.С. Чураков, Н.В. Кочковая, Т.А. Брыкина,
Г.С. Вересников, Ю.В. Веприков.

Серия «Семимерная парадигма А.В. Короткова
в информатике, искусственном интеллекте и когнитологии».
Под науч. ред. В.С. Чуракова
Вып. 2.

Техн. ред.: Г.А. Еримеев

Издательство «**Н**аука**О**бразование**К**ультура»
346430 Новочеркасск, ул. Дворцовая, 1.
Подписано в печать 07.03.2014 г.
Формат 60x84 1/16. Бумага офсетная. Печать цифровая.
Печ. л. 18. Тир. 500 экз.
Отпечатано ООО НПП «НОК»
346428 Новочеркасск, ул. Просвещения, 155А.