А. М. ЧЕРЕПАЩУК

ТЕСНЫЕ ДВОЙНЫЕ ЗВЕЗДЫ

часть

I

МОСКВА
ФИЗМАТЛИТ®
2013

УДК 524.4
ББК 22.65
Ч 46

Издание осуществлено при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований по проекту 12-02-07104, не подлежит продаже

Черепащук А. М. **Тесные двойные звезды.** В 2 ч. **Часть I.** — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2013. — 560 с. — ISBN 978-5-9221-1416-5.

Благодаря успехам рентгеновской астрономии проблема тесных двойных звезд стала одной из центральных в астрофизике. В монографии изложены современные методы и результаты исследований тесных двойных звезд и сведения об их фундаментальных характеристиках — массах, радиусах и температурах. Это делает тесные двойные звезды мощным инструментом для исследования физики и эволюции звезд, а также для открытия и изучения принципиально новых объектов Вселенной — нейтронных звезд и черных дыр.

Монография может быть полезна студентам и аспирантам, профессорам и преподавателям университетов, а также научным работникам, интересующимся проблемами физики звезд и релятивистской астрофизики.

ISBN 978-5-9221-1416-5 (Ч. I)
ISBN 978-5-9221-1522-3

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие

Проблема тесных двойных звездных систем очень многогранна. Различные аспекты этой проблемы были отражены в ряде специальных монографий. Из последних монографий на эту тему можно отметить работы Шора и др. (Shor et al., 1994), Каллраха и Милоне (Kallrath and Milone, 1999), Уорнера (Warner, 1995), Боярчука и др. (Boyarchuk et al., 2002), Игглтона (Eggleton, 2008), Милоне и др. (Milone, et al., 2008), Конти и др. (Conti et al., 2008), Колпи и др. (Colpi et al., 2009), Хильдича (Hilditch, 2001).

В то же время, к настоящему времени назрела необходимость написания монографии, которая охватывала бы, по возможности, большинство аспектов проблемы тесных двойных систем (ТДС). Примером такой монографии является замечательная книга Копала (Kopal, 1959). К настоящему времени наука о ТДС сильно продвинулась вперед, поэтому автор задался целью написать монографию, по структуре подобную книге Копала, но в которой были бы отражены современные и наиболее актуальные достижения в области исследования ТДС разных типов. При этом в нашей монографии, как и в книге Копала, мы постарались отразить не только результаты исследований ТДС, но и методы этих исследований, которые в настоящее время сильно прогрессируют, благодаря возможности использования мощных компьютерных средств.

В нашей книге мы стремились показать, как всеволновой характер современной астрономии в сочетании с возможностью использования современных методов математического моделирования ТДС позволяет получать научные результаты первостепенного значения, важные как для астрофизики, так и для фундаментальной физики.

Книга разделена на две части. Здесь мы предлагаем читателю первую часть книги, посвященную методам и результатам исследований тесных двойных систем, содержащих звезды с тонкими атмосферами.

Во второй части книги изложены методы и результаты исследований тесных двойных систем, содержащих звезды с протяженными атмосферами, а также описаны эволюционные аспекты тесных двойных систем и результаты статистических исследований.

Нумерация формул, таблиц и рисунков в обеих частях книги сквозная.

Книга может быть полезной студентам и аспирантам, а также профессорам, преподавателям университетов и научным работникам, интересующимся исследованиями в области астрономии и астрофизики.

Введение

В Галактике насчитывается около ста миллиардов звезд. Свыше половины из них — двойные и кратные. Двойные звезды представляют собой естественные лаборатории, в которых происходят движения и взаимодействия компонент. Изучая эти движения и взаимодействия, можно определять важнейшие характеристики звезд, и, прежде всего их массы и радиусы. Кроме того, поскольку приливное взаимодействие компонент ограничивает эволюционные изменения радиусов звезд, эволюция звезд в двойных системах может резко отличаться от эволюции одиночных звезд. Все это делает проблему исследования двойных звезд особенно актуальной.

Двойной системой (или, как говорят, физической двойной) называется гравитационно-связанная система из двух звезд, обращающихся вокруг общего центра масс под действием взаимного притяжения. Мы не будем рассматривать так называемые оптические двойные звезды, взаимная близость которых на небе вызвана случайной проекцией двух физически не связанных звезд, удаленных от наблюдателя на разные расстояния. Доля кратных (тройных, четверных и т. п.) систем из общего числа двойных и кратных звезд составляет не менее 10% (Бэттен, 1976, Токовинин, 1997, 2004). Мы будем рассматривать в основном двойные звезды.

По способам обнаружения, двойные звезды подразделяются на три класса.

1. Визуально-двойные звезды, у которых компоненты видны раздельно. Это позволяет непосредственно измерять перемещения звезд на картинной плоскости, вызванные их орбитальным движением (характерные периоды — от года до сотен тысяч лет). Используя закон тяготения Ньютона и вытекающие из него законы Кеплера, в случае визуально-двойной системы можно определять массы звезд (см., например, Дейч, 1962, Куто, 1981).

2. Спектрально-двойные звезды, у которых двойственность выявляется по периодическим доплеровским смещениям линий в спектре (см., например, Бэттен, 1976).

3. Затменные двойные звезды (Копал, 1959, Мартынов, 1981), у которых наблюдаются периодические уменьшения блеска, вызванные взаимными затмениями компонент (в случаях, когда угол между плоскостью орбиты и лучом зрения наблюдателя близок к нулю).

К затменным двойным тесно примыкает класс систем, у которых главной причиной орбитальной переменности блеска являются эффекты взаимной близости компонент — эффект эллипсоидальности, «отражения», а также эффекты, связанные с поглощением света звезд околозвездными газовыми структурами.

Отнесение двойной звезды к тому или иному типу часто зависит от способа наблюдения. Например, применение современных методов повышения углового разрешения (спекл-интерферометрия на крупных телескопах, наземные и космические интерферометры) позволяет исследовать некоторые спектрально-двойные звезды как визуально-двойные. Кроме того, все затменные двойные системы, очевидно, являются также и спектрально-двойными, но не наоборот.

Важно подчеркнуть, что в составе двойных звезд встречаются любые комбинации компонент: имеются пары, состоящие из двух звезд главной последовательности; звезда главной последовательности часто соседствует с субгигантом, гигантом или сверхгигантом; встречаются системы, состоящие из двух гигантов, двух белых карликов, двух нейтронных звезд; нормальная оптическая звезда иногда соседствует с резко пекулярным объектом — звездой Вольфа–Райе, белым карликом, нейтронной звездой, черной дырой. Это делает аппарат теории двойных звезд мощным инструментом для изучения физики и эволюции звезд, в том числе, исследования релятивистских объектов.

В подавляющем большинстве случаев звезды — компоненты спектрально-двойной и затменно-двойной системы раздельно не видны. Наблюдения таких систем регистрируют лишь их суммарный блеск и спектр. В этом случае, по орбитальной переменности лучевых скоростей и по изменениям блеска системы (затмениям) удается определить массы и радиусы звезд в абсолютных единицах. Важно то, что эти характеристики звезд определяются независимо от расстояния до исследуемой двойной системы: система может находиться даже в другой галактике. Более того, в последнее время ТДС все чаще используются как «стандартные свечи» для независимого определения расстояний до звездных скоплений и галактик. Поэтому двойные звезды играют важную роль в развитии астрофизики.

Мы будем изучать тесные двойные звездные системы (ТДС). Величины радиусов звезд в таких системах сравнимы с размерами больших полуосей звездных орбит, а орбитальные периоды сравнительно короткие — не превышают нескольких лет. Поэтому ТДС сравнительно легко изучать. В начале 70-х годов двадцатого века появилось строгое эволюционное определение понятия «тесная двойная система» (Paczynski, 1973). По современным представлениям, двойная система называется тесной, если на некотором этапе эволюции в системе происходит обмен масс — перетекание вещества от одной компоненты на другую (см., например, Масевич и Тутуков, 1988).

Радиус звезды в процессе ее эволюции и выгорания водорода в ядре в среднем возрастает (если не происходит перемешивания вещества в ее недрах, вызванного, например, быстрым осевым вращением звезды и связанной с этим вращением меридиональной циркуляцией вещества — см. ниже). Для звезд с массами более $0{,}7M_\odot$ время ядерной эволюции короче возраста Вселенной $\sim 1{,}4 \cdot 10^{10}$лет. Радиус одиночной звезды в процессе ее эволюционного расширения ничем не ограничен. В то же время, радиус звезды в двойной системе ограничен размерами так называемой внутренней критической полости Роша, которая во вращающейся системе отсчета определяет область, где притяжение звезды преобладает. Поэтому эволюция звезды в двойной системе может резко отличаться от эволюции одиночной звезды. В тесной двойной системе эволюционное увеличение радиуса более массивной звезды (которая эволюционирует быстрее своего менее массивного спутника) приводит к заполнению ею своей внутренней критической полости Роша (далее — просто полости Роша) и перетеканию вещества на соседний спутник. Перетекание вещества на первичном этапе обмена масс носит самоподдерживающийся характер, поскольку расстояние между компонентами системы при перетекании вещества от более массивной к менее массивной звезде убывает. Кроме того, звезда, теряющая массу, не находится в тепловом равновесии. В случае достаточно продвинутой стадии горения водорода в центре (содержание водорода $X_c \leqslant 0{,}2$) ее равновесный радиус возрастает, когда она теряет массу. Все это стимулирует процесс обмена масс и приводит к тому, что более массивная звезда в тесной двойной системе может потерять свыше 50% своей массы за относительно короткое время, по порядку величины равное времени тепловой релаксации звезды, которое почти на три порядка короче времени ядерной эволюции звезды. Для массивных ТДС время первичного обмена масс составляет всего $\sim 10^4$ лет.

В силу столь быстрого и эффективного обмена масс, наблюдать массивную ТДС непосредственно в процессе обмена масс чрезвычайно маловероятно. Поэтому в подавляющем большинстве случаев в ТДС наблюдаются лишь конечные продукты первичного обмена масс: субгиганты, звезды Вольфа–Райе, белые карлики, нейтронные звезды, черные дыры. Число же известных ТДС, в которых непосредственно наблюдается первичный обмен масс, очень мало — порядка десятка при полном числе известных ТДС $\sim 10^4$.

Современные представления об эволюции ТДС с обменом масс позволяют объяснить так называемый парадокс алголей. Одна из самых ярких и хорошо изученных затменных двойных систем — Алголь (β Per) оказалась пекулярной системой. Здесь более проэволюционировавшая звезда-субгигант имеет меньшую массу, чем ее спутник — звезда главной последовательности. Оказалось, что практически все системы типа Алголя обладают такой же странной, на первый взгляд, особенностью: менее массивные звезды в данном случае оказываются значительно более продвинутыми в эволюционном отношении, чем их более массивные спутники. Скорость ядерной эволюции звезды примерно пропорциональна квадрату ее массы. Поэтому возникает вопрос (и он составляет суть парадокса алголей): как в системах типа Алголя менее массивная звезда смогла обогнать в своем эволюционном развитии более массивного спутника? Ведь возраст обеих звезд пары, очевидно, должен быть одинаковым. В модели с обменом масс парадокс алголей легко объясняется. Полагают, что наблюдаемая ныне менее массивная звезда-субгигант ранее была более массивной звездой системы. Она эволюционировала быстрее своей соседки, расширилась, первой заполнила свою полость Роша и потеряла в процессе обмена масс значительную часть своей массы, превратившись в конце концов в менее массивную звезду-субгигант в двойной системе. Такое объяснение парадокса алголей было дано на качественном уровне Кроуфордом в 1955 г. (Crawford, 1955). Эволюционные расчеты, выполненные в 1960–70 гг. (Morton, 1960, Paczynski, 1966, Снежко, 1967, Kippenhahn and Weigert, 1967), дали строгое количественное объяснение парадоксу алголей. С этих пор теория эволюции ТДС с обменом масс стала интенсивно развиваться (см., например, монографии: Масевич и Тутуков, 1988, Shore, Livio and van den Heuvel, 1994, и приведенные там ссылки).

Развитие теории эволюции ТДС совпало с созданием теории аккреции вещества на релятивистские объекты (нейтронные звезды и черные дыры) в ТДС (Novikov and Zeldovich, 1966, Шакура, 1972, Shakura and Sunyaev, 1973, Pringle and Rees, 1972, Novikov and Thorne, 1973) и с запуском первого американского специализированного рентгеновского спутника UHURU (руководитель программы — R. Giacconi, удостоенный в 2002 г. Нобелевской премии). С борта спутника UHURU было открыто около сотни рентгеновских двойных систем, состоящих из нормальной оптической звезды — донора вещества и аккрецирующего релятивистского объекта. Были открыты рентгеновские пульсары — аккрецирующие, сильно намагниченные нейтронные звезды в затменных рентгеновских двойных системах (Her X-1, Cen X-3, Vela X-1 и др.), а также первые кандидаты в черные дыры (например, в рентгеновской двойной системе Cyg X-1). Оптические отождествления рентгеновских двойных систем и исследования их оптических проявлений позволили развить надежные методы определения масс релятивистских объектов. Дальнейшие запуски специализированных рентгеновских спутников, таких как «Einstein», ROSAT, GINGA, ASKA, «Мир–Квант», «Гранат», CHANDRA, XMM, INTEGRAL и др., привели к открытию свыше тысячи рентгеновских двойных систем и измерению масс свыше двух десятков черных дыр в двойных системах (см., например, обзоры: Charles, 2001, Черепащук, 2003, и ссылки в них). По движению газа и звезд в ядрах галактик измерены массы многих сотен сверхмассивных черных дыр ($m = 10^6$–$10^{10} M_\odot$). Измерены также массы нескольких десятков нейтронных звезд — рентгеновских пульсаров и радиопульсаров в двойных системах. В итоге родилась новая область астрофизики — демография черных дыр, изучающая статистические характеристики черных дыр и осуществляющая сравнение характеристик черных дыр с параметрами звезд и галактик. В центре нашей Галактики открыта черная дыра массой $4 \cdot 10^6 M_\odot$, вокруг которой по эллиптической орбите с периодом 15,2 года обращается нормальная оптическая звезда. Недавно с помощью радиоинтерферометрических наблюдений со сверхдлинной базой (VLBI-интерферометрии) на коротких волнах ($\sim 1{,}3$ мм) удалось показать, что радиус компактного сверхмассивного тела в центре нашей Галактики массой $\sim 4 \cdot 10^6\ M_8$ практически совпадает с его гравитационным радиусом (Doeleman et al., 2008). На повестке дня стоит задача исследования структуры, движения (и переменности) неоднородностей плазмы вблизи горизонта событий этого объекта на длине волны $\sim 0{,}3 \div 0{,}5$ мм (Doeleman et al., 2008), что позволит оценить метрику пространства-времени вблизи горизонта событий. Такая быстрая (характерное время ~1 часа) квазипериодическая переменность интенсивности рентгеновского излучения недавно была обнаружена у ядра активной галактики REJ 1034+396 (Gierlinski et al., 2008). Отсюда следует, что радиус соответствующего компактного сверхмассивного объекта не превышает трех гравитационных радиусов. Недавно были открыты квазипериодические осцилляции радиоизлучения с периодами 16,8, 22,2, 34,1 и 56,4 мин от окрестностей черной дыры в центре нашей Галактики (Miyoshi et al., 2009). Таким образом, открыт новый класс визуально-двойных систем, содержащих в качестве компонент сверхмассивную черную дыру и нормальную звезду массой около $10 M_\odot$.

В последние годы достигнут существенный прогресс в понимании физики и эволюции ТДС с маломассивными спутниками. В случае, если масса спутника менее $0{,}7 M_\odot$, время его ядерной эволюции больше возраста Вселенной. Поэтому заполнение полости Роша спутником с последующим обменом масс происходит не в результате его эволюционного расширения, а в связи с уменьшением расстояния между компонентами системы, вызванным потерей энергии и углового момента системой под влиянием излучения потока гравитационных волн и истечения из спутника намагниченного звездного ветра.

Все ТДС, в которых завершился первичный обмен масс, принято называть ТДС на поздних стадиях эволюции, (или просто — поздними ТДС — см. Каталог: Cherepashchuk et al., 1996). Принципиальное значение поздних ТДС для науки состоит как в возможности открытия и исследования объектов принципиально новой природы (например, черных дыр), так и в перспективе изучения эволюции звезд с переменной массой, что позволяет осуществлять строгий контроль наших представлений о внутреннем строении и эволюции звезд.

Но не только поздние ТДС привлекают в настоящее время пристальное внимание исследователей. Изучение классических ТДС, содержащих непроэволюционировавшие звезды главной последовательности, дает неоценимую информацию о фундаментальных параметрах звезд, их возрасте и даже об их внутренней структуре и вращении. Следует подчеркнуть, что недавнее открытие осцилляций нейтрино в лабораторных экспериментах позволило достичь строгого количественного согласия между наблюдаемым и теоретическим потоками нейтрино разных энергий от Солнца. Это вселяет в нас уверенность в том, что мы правильно понимаем природу источников термоядерной энергии Солнца и его внутреннее строение.

Следует отметить большую перспективность для исследования переменных звезд запусков космических оптических телескопов (проекты COROT и «Kepler»), предназначенных для поиска затмений звезд окружающими их планетами. В этих проектах предполагается получить сверхвысокоточные фотометрические наблюдения (с точностью до 10^{-5} звездной величины) сотен тысяч звезд, при этом попутно будут получены очень точные кривые блеска множества переменных звезд разных типов, включая затменные переменные звезды. Это должно сильно стимулировать развитие науки о тесных двойных и затменных двойных звездах. Запуск проекта

COROT (Франция, Европейское Космическое Агентство) осуществлен в декабре 2006 г. Запуск проекта «Kepler» (США, NASA) осуществлен в 2009 г.

Очень большие перспективы в исследовании тесных двойных звезд открываются в связи с предстоящим запуском космической астрометрической обсерватории «Gaia» (Европейское Космическое Агентство), с помощью которой будут получены параллаксы сотен миллионов звезд Галактики с точностью вплоть до 10 микросекунд дуги. Это позволит дать надежные определения расстояний для большинства тесных двойных систем, что значительно улучшит надежность определения фундаментальных характеристик звезд из интерпретации их кривых блеска и кривых лучевых скоростей.

Важная роль ТДС выясняется в последнее время в связи с поисками потоков гравитационных волн (Abbott et al., 2009): слияние нейтронных звезд и черных дыр в ТДС рассматривается как главный источник гравитационно-волновых всплесков, которые, как можно надеяться, могут быть зарегистрированы гравитационно-волновыми антеннами нового поколения (LIGO, VIRGO, LISA и др.). В последнее время выявляется важная роль массивных короткопериодических ТДС в формировании предельно быстро вращающихся, керровских черных дыр и связанных с ними пока загадочных космических гамма-всплесков, когда за время в несколько секунд в гамма-диапазоне выделяется гигантская энергия $\sim 10^{51}$–10^{53} эрг.

Таким образом, исследования ТДС — это передний фронт современной астрофизики. В нашей книге мы рассказываем об увлекательных и чрезвычайно перспективных исследованиях тесных двойных систем. Книга написана на основе курса лекций «Тесные двойные звезды», читаемого автором на протяжении более четверти века на физическом факультете Московского Государственного университета имени М. В. Ломоносова. Автор в данной книге старался уделять внимание не только физическим результатам, полученным в области исследования ТДС разных типов, но и современным методам их исследования.

Из монографий по ТДС, предшествующих нашей книге, следует отметить фундаментальные труды Копала (Kopal, 1959, 1978), Мартынова (1981), коллективную монографию под редакцией Цесевича (1971), Пулковский курс астрофизики и звездной астрономии под редакцией Михайлова (1962), книгу Шульберта (1971), монографию Бэттена (1976), книгу Каллраха и Милоне (Kallrath and Milone, 1999), коллективную монографию под редакцией Милоне (Milone, 1993), а также ряд специальных монографий по различным типам тесных двойных систем: Warner (1995), Shore et al. (1994), Boyarchuk et al. (2002), Eggleton (2006), Milone et al. (2008), Conti et al. (2008), Colpi et al. (2009), Hilditch (2001).

Глава I
ПРОСТЫЕ МОДЕЛИ

1. Спектральные наблюдения ТДС

Изучение спектров ТДС в разных фазах орбитального периода позволяет по доплеровским смещениям линий построить кривую лучевых скоростей звезды пары — зависимость от времени проекции вектора полной скорости звезды на луч зрения. В настоящее время в качестве приемников излучения при спектральных наблюдениях используются ПЗС-матрицы с квантовой эффективностью до 80–90 % и большим диапазоном линейности. Точность регистрации спектров с помощью ПЗС-матриц при прочих равных условиях на порядок выше, чем при использовании фотоэмульсий. Ввиду сравнительно малых ожидаемых смещений линий в спектрах ТДС, спектральное разрешение спектрографа при изучении лучевых скоростей должно быть весьма высоким: $R = \lambda/\Delta\lambda = 10^3$–$10^5$, где λ — центральная длина волны линии, $\Delta\lambda$ — элемент спектрального разрешения. Обычно для исследования лучевых скоростей ТДС используются спектрографы с дифракционной решеткой, работающие по схеме Эшеле. Кривая лучевых скоростей вначале строится в шкале длин волн путем кросс-корреляционного анализа спектра исследуемой ТДС и спектра сравнения. Затем смещения линий, определенные в шкале длин волн, переводятся в шкалу скоростей с помощью формулы для эффекта Доплера:

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{v_r}{c}, \tag{1}$$

где $\Delta\lambda$ — смещение линии, λ — центральная длина волны линии, v_r — лучевая скорость звезды — компоненты ТДС, $c = 299792458 \pm 1{,}2$ м/с — скорость света в вакууме. В подавляющем большинстве случаев (кроме двойных радиопульсаров и уникального объекта SS 433) достаточно использование формулы (1), описывающей классический (нерелятивистский) эффект Доплера, поскольку лучевые скорости v_r обычно не превышают 1000 км/с.

Точность определения лучевых скоростей ТДС по оптическим спектрам составляет в среднем ~ 1 км/с. В последние годы, в связи с успехами в поисках планет вокруг звезд, техника измерения лучевых скоростей звезд сильно продвинулась вперед, и точность измерения лучевых скоростей в отдельных случаях составляет порядка нескольких метров в секунду. Это достигается благодаря впечатыванию спектра сравнения непосредственно в спектр исследуемой звезды, что исключает различные виды систематических ошибок при кросс-корреляционном анализе. Точность измерения лучевых скоростей радиопульсаров в двойных системах достигает ~ 1 см/с, что позволило открыть у некоторых пульсаров планеты с массой порядка массы Земли. Такая высокая точность измерения лучевых скоростей достигается благодаря чрезвычайно высокой стабильности периода прихода радиоимпульсов от одиночного пульсара — быстро вращающейся, сильно намагниченной нейтронной звезды.

Существуют принципиальные пределы точности измерения лучевых скоростей звезд, обусловленные разного рода нестабильностями их атмосфер. Например, для звезд поздних спектральных классов предел точности измерения лучевых скоростей определяется конвективными движениями в их атмосферах, амплитуда скоростей которых достигает 0,3–1 км/с. Поскольку количество конвективных ячеек на диске звезды составляет несколько миллионов (по аналогии с солнечной грануляцией), возмущения лучевой скорости звезды, вызванные конвективными движениями, усредняются, однако при этом получить точность определения лучевой скорости звезды лучше нескольких метров в секунду представляется проблематичным. Исследования показали, что амплитуда скоростей конвективных движений максимальна у молодых звезд с быстрым вращением. Поскольку скорость вращения звезд убывает с их возрастом, можно полагать, что для молодых звезд с возрастом $\sim 10^8$ лет предельная точность определения лучевых скоростей Δv_r составляет ~ 15 м/с, а для старых звезд, с возрастом в миллиарды лет, величина $\Delta v_r \cong 1$ м/с. В тесных двойных системах с короткими орбитальными периодами скорость вращения может быть большой даже для старых звезд и в данном случае предел точности определения лучевых скоростей не может быть лучше 10 м/с.

У звезд ранних спектральных классов, особенно у сверхгигантов, обнаружены многочисленные виды нестабильности их атмосфер (Де Ягер, 1984): макротурбулентные движения со скоростями в десятки км/с, полуправильные изменения лучевых скоростей с амплитудой до 10 км/с и с характерными временами в десятки и сотни дней, в основе которых, по-видимому, лежат нерадиальные пульсации или движения больших областей звездных атмосфер. Эти изменения лучевых скоростей, обусловленные физикой атмосфер звезд, могут существенно понижать результирующую точность определения кривых лучевых скоростей звезд. В случае ТДС с сильно эксцентричными орбитами в атмосферах звезд переменными приливными силами могут возбуждаться различные волновые движения (типа гравитационных волн на поверхности) амплитудой в десятки км/с (van Kerkwijk et al., 1995). Это тоже ограничивает точность определения кривых лучевых скоростей.

Кроме того, наличие звездного ветра, особенно сильного у звезд-сверхгигантов ранних спектральных классов, а также нестационарные процессы в ветре приводят к переменности профилей линий в спектрах звезд, что затрудняет точное определение лучевой скорости. Следует отметить также эффект «бальмеровского прогресса» в спектрах горячих звезд: ядра водородных линий поглощения серии Бальмера показывают систематический отрицательный сдвиг относительно лабораторных длин волн линий, по модулю максимальный для линии H_α и прогрессивно уменьшающийся с увеличением номера серии (Hutchings, 1980, Crampton et al., 1985). Это вызвано тем, что ядро линии H_α формируется в самых верхних слоях атмосферы звезды, где уже начинается радиальное истечение вещества в виде ветра (характерные скорости ~ 10–20 км/с), а линии более высоких номеров серии формируются в более низких слоях звездной атмосферы, где скорости радиального истечения меньше. Этот эффект должен учитываться, когда кривая лучевых скоростей строится по нескольким линиям поглощения бальмеровской серии. Подобная зависимость сдвига линии от потенциала возбуждения линии наблюдается и для других химических элементов. В тесной двойной системе, когда горячая массивная звезда близка к заполнению своей полости Роша и при наличии эффекта прогрева ее поверхности излучением спутника (эффекта «отражения»), от звезды наблюдается несимметричный звездный ветер. Селективное поглощение света звезды в этом несимметричном ветре, а также в газовых потоках в двойной системе может приводить к значительному искажению орбитальной кривой лучевых скоростей и появлению, например, ложного эксцентриситета орбиты. Искажения орбитальной кривой лучевых скоростей наблюдаются также при затмении вращающейся звезды спутником в ТДС (Rossiter, 1924).

Наконец, следует упомянуть также и об ошибках в определении кривых лучевых скоростей, связанных с блендированием линий различных компонент в спектрах ТДС (особенно сильным, когда компоненты ТДС имеют близкие спектральные классы), а также с трудностями измерения кривой лучевых скоростей более слабой компоненты ТДС. В случае, если светимости компонент ТДС различаются более, чем на порядок величины, измерить кривую лучевых скоростей более слабой компоненты практически не представляется возможным. В этом случае в распоряжении наблюдателя имеется кривая лучевых скоростей лишь одной, более яркой компоненты системы. Подробнее о специфических проблемах, связанных с измерением спектров ТДС и построением кривых лучевых скоростей звезд в ТДС можно прочесть в книге Бэттена (1976).

В последние годы развиты методы разделения спектров компонент ТДС, использующие информацию об орбитальной переменности суммарного спектра системы (Hadrava, 2004).

Измеренные значения лучевых скоростей звезд — компонент ТДС должны быть исправлены за различные типы движения земного наблюдателя: орбитальное движение Земли вокруг Солнца, осевое вращение Земли, движение Земли относительно центра масс системы Земля–Луна и т. п. Особенно аккуратно процедура приведения наблюдаемых лучевых скоростей к барицентру Солнечной системы должна быть выполнена в случае наблюдения изменений лучевых скоростей звезд, вызванных присутствием планет, а также при построении кривых лучевых скоростей радиопульсаров в двойных системах, содержащих в качестве спутников массивные B-звезды, белые карлики, нейтронные звезды и планеты (см., например, обзор: Lorimer, 2005).

В большинстве случаев, когда точность определения лучевых скоростей ТДС не экстремально высока, можно ограничиться приведением измеренных лучевых скоростей ТДС к центру Солнца. Чтобы определить лучевую скорость V_r относительно центра Солнца надо учесть по крайней мере два движения, в которых принимает участие земной наблюдатель (см., например, Куликовский, 1985):

1) орбитальное движение Земли вокруг Солнца. Соответствующая лучевая скорость равна

$$V_a = V_{\oplus} \cos\beta[\sin(\odot - \lambda) - e\sin(\Pi - \lambda)], \tag{2}$$

где $V_{\oplus} = 29{,}79$ км/с — средняя орбитальная скорость Земли, λ, β — эклиптические координаты исследуемой звезды (ТДС), $\odot$ и Π — долготы Солнца и перигея, $e = 0{,}0167$ — эксцентриситет земной орбиты;

2) вращение Земли вокруг своей оси (суточное движение). Соответствующая лучевая скорость задается выражением

$$V_b = -0{,}47 \sin t \cos\delta \cos\varphi \text{ (км/с)}, \tag{2'}$$

где φ — широта места наблюдения, δ — склонение звезды (ТДС), t — часовой угол (поправка положительна при восточном часовом угле t). Внеся поправки V_a и V_b в наблюдаемую лучевую скорость звезды в ТДС, находят лучевую скорость V_r, приведенную к центру Солнца. Иногда оказывается необходимой третья поправка — за движение наблюдателя вокруг барицентра системы Земля–Луна с периодом около месяца (она находится в пределах ± 14 м/с). Кроме того, Солнце также движется вокруг барицентра Солнечной системы со скоростью ~ 13 м/с. В эту величину 12,5 м/с вносят гравитационные возмущения от Юпитера. При очень высоких точностях определения лучевых скоростей требуется также учет орбитального движения Солнца и приведение наблюдаемых лучевых скоростей ТДС к барицентру Солнечной системы.

В работе Дорошенко и Копейкина (1990) развит алгоритм высокоточного фазового анализа наблюдений одиночных радиопульсаров. Развитый метод обработки моментов прихода импульсов от одиночных пульсаров обеспечивает временную точность порядка 10 нс (соответствующая ошибка в измеряемом расстоянии ~ 3 м). Алгоритм основан на использовании релятивистской теории астрономических систем координат. Эта теория включает в себя построение барицентрической, геоцентрической и топоцентрической систем координат. В работе выполнен анализ процедуры регистрации моментов прихода импульсов, а также релятивистских шкал времени, используемых при обработке наблюдений пульсаров: международного атомного времени, земного и барицентрического времен. Здесь приведена формула, описывающая связь пульсарного времени с барицентрическим. Эта формула включает учет поправки Ремера, параллакса пульсара и его собственного движения, учет запаздывания радиосигнала в межзвездной и межпланетной средах, а также учет релятивистского эффекта Шапиро. Исследована также зависимость наблюдаемой частоты вращения пульсара и ее производных по времени от трансверсальной и радиальной составляющих барицентрической скорости пульсара, радиального ускорения и его производной.

Подробнее о методах наблюдений радиопульсаров в двойных системах и их высокоточной редукции можно прочесть в трудах недавней международной конференции (Bailes, Nice and Thorsett, 2002), а также в обзоре (Lorimer, 2005). См. также классические работы: Манчестер и Тейлор (1980), Blanford and Teukolsky (1976), Damour and Deruelle (1985).

2. Анализ кривых лучевых скоростей ТДС

Рассмотрим параметры, определяющие орбиту звезды в двойной системе (их называют элементами орбиты). Начнем со случая визуально двойной системы, поскольку некоторые спектрально двойные системы при использовании методов повышения углового разрешения могут рассматриваться как визуально двойные. Как известно, в случае двух точечных гравитирующих масс, притягивающихся по закону Ньютона, абсолютные орбиты компонент представляют собой замкнутые финитные кривые — подобные друг другу эллипсы, фокусы которых совпадают с центром масс двойной системы. Всего насчитывается семь элементов абсолютной орбиты звезды в визуально двойной системе. Первые четыре элемента принято называть динамическими. Это наблюдаемый орбитальный период P, связанный с истинным периодом P_0 соотношением
$$P_0 = \frac{P}{1+\gamma/c}, \tag{3}$$
где γ — лучевая скорость центра масс системы (эта связь обусловлена конечностью величины скорости света и эффектом Доплера); T — момент прохождения звезды через периастр, e — эксцентриситет орбиты, a — большая полуось орбиты звезды. Остальные три элемента орбиты характеризуют ее ориентацию в пространстве относительно наблюдателя. Это наклонение i плоскости орбиты к картинной плоскости (для визуально двойных систем величина i меняется от 0 до $\pm 90^\circ$) и позиционный угол ζ линии пересечения плоскости орбиты и картинной плоскости, которая называется линией узлов (точки пересечения истинной орбиты звезды с картинной плоскостью называются узлами орбиты, причем в восходящем узле звезда удаляется от наблюдателя, а в нисходящем — приближается к нему). Позиционный угол ζ линии узлов считается от 0° до 180° против движения часовой стрелки, если смотреть изнутри небесной сферы, причем отсчет идет от плоскости небесного меридиана. Следует подчеркнуть, что наклонение орбиты звезды в визуально двойной системе определяется неоднозначно, с точностью до знака $\pm$, поскольку из одних позиционных наблюдений нельзя различить, какая часть орбиты звезды расположена впереди картинной плоскости, а какая — позади. Знание лучевой скорости движения звезды по орбите позволяет определить знак наклонения орбиты i. Ориентировка истинной орбиты эллипса в плоскости орбиты системы характеризуется долготой периастра ω — углом между линией узлов и большой осью эллипса орбиты. Долгота

периастра ω отсчитывается в направлении движения звезды от узла до периастра орбиты в пределах от 0° до 360°.

В случае спектрально двойной системы элементы орбиты следующие (предполагается, что абсолютная орбита каждой звезды-точки представляет собой кеплеровский эллипс с фокусом в центре масс системы): наблюдаемый орбитальный период P, связанный с истинным периодом P_0 формулой (3), момент прохождения звездой через периастр ее орбиты T, эксцентриситет орбиты e, долгота периастра орбиты первой, более яркой звезды ω_1 (долгота периастра орбиты второй звезды $\omega_2 = \omega_1 + 180^\circ$), a — большая полуось орбиты. В модели двух точечных звезд на кеплеровских орбитах величины a и i отдельно из кривой лучевых скоростей не определяются, а находится лишь произведение $a \sin i$. Это связано с тем, что две орбиты с разными наклонениями i и с разными большими полуосями a могут иметь одинаковые проекции этих полуосей на луч зрения. Из кривой лучевых скоростей спектрально двойной системы нельзя определить позиционный угол линии узлов орбиты ζ (этот угол может быть определен с привлечением данных поляризационных наблюдений).

Таким образом, в модели двух точечных масс на кеплеровских орбитах искомыми элементами спектроскопической орбиты системы являются величины P, T, e, ω и $a \sin i$. Если наблюдается кривая лучевых скоростей одной (более яркой) компоненты системы, то из ее анализа можно найти пять элементов: P, T, e, ω_1, $a_1 \sin i$. Если наблюдаются спектры обеих компонент и построены соответствующие кривые лучевых скоростей, то можно найти элементы орбит обеих компонент: P, T, e, ω_1, $\omega_2 = \omega_1 + 180^\circ$, $a_1 \sin i$, $a_2 \sin i$. В этом случае можно определить также величину $a \sin i = (a_1 + a_2) \sin i$, где a — большая полуось относительной орбиты. Забегая вперед, отметим, что поскольку величины больших полуосей орбит вычисляются (с точностью до множителя $\sin i$) в абсолютных единицах, использование третьего закона Кеплера позволяет найти массы звезд в абсолютных единицах (с точностью до множителя $\sin^3 i$) или (в случае, если наблюдается спектр только одной компоненты), так называемую функцию масс. Если система является затменной двойной, из анализа кривой блеска можно определить наклонение орбиты i и найти массы звезд в абсолютных единицах.

Следует отметить важный случай, когда визуально двойную систему можно изучать как спектрально двойную (при достаточно большом наклонении орбиты i и коротком орбитальном периоде). Позиционные наблюдения орбиты такой системы позволяют найти большую полуось орбиты в секундах дуги a'', наклонение орбиты i (с точностью до знака) и другие элементы визуальной орбиты. Спектральные же наблюдения такой визуально двойной системы дают величину $a \sin i$ в километрах и позволяют определить знак параметра i. Сопоставляя те и другие данные, можно найти величину a в километрах и a в секундах дуги. Отсюда можно найти тригонометрический параллакс системы π'' (в секундах дуги).

$$\pi'' = \frac{a''}{a_{\text{а.е.}}}, \tag{4}$$

где $a_{\text{а.е.}}$ — большая полуось орбиты в астрономических единицах. Далее, можно определить расстояние до системы в парсеках

$$r_{\text{пс}} = \frac{1}{\pi''}. \tag{5}$$

Таким методом удалось независимо определить расстояние до центра нашей Галактики $d = (8{,}4 \pm 0{,}4)$ кпк (Ghez et al., 2008, Gillessen et al., 2008) путем измерения лучевых скоростей звезды S2, вращающейся вокруг центральной сверхмассивной черной дыры массой $4 \cdot 10^6 M_\odot$ с периодом 15,2 г. и эксцентриситетом орбиты $e = 0{,}87$.

В заключение отметим, что все рассуждения проводились нами в предположении, что звезды — материальные точки, а их орбиты в двойной системе — кеплеровские, т. е. замкнутые подобные эллипсы, фокусы которых совпадают с центром масс системы. Если орбиты звезд не кеплеровские (например, в случае двойных радиопульсаров, где часто требуется учет релятивистских эффектов в движении пульсара) или сами звезды неточечные и приливно деформированы, из анализа кривой лучевых скоростей можно независимо найти наклонение орбиты i (см. ниже). В таких случаях, элементами спектральной орбиты системы можно считать следующие параметры: P, T, e, ω_1, $\omega_2 = \omega_1 + 180°$, a_1, a_2, i.

Рассмотрим модель ТДС как системы из двух точечных масс, двигающихся по кеплеровским орбитам — замкнутым и подобным эллипсам. Совместим картинную плоскость с центром масс системы. Обратимся к рис. 1, где изображена орбита одной из компонент системы. Здесь Ω_1 — восходящий узел орбиты (звезда при орбитальном движении удаляется от наблюдателя), Ω_2 — нисходящий узел, ω — долгота периастра — угол между направлениями из центра масс системы на восходящий узел и на периастр орбиты (отсчитывается от восходящего узла в направлении орбитального движения звезды). Пусть s — звезда на орбите, r — ее радиус-вектор, v — истинная аномалия радиуса-вектора звезды (отсчитывается от периастра в направлении орбитального движения звезды). Величины r и v — полярные координаты звезды в плоскости орбиты. Лучевая скорость звезды — это проекция вектора ее полной скорости на луч зрения, которая складывается из двух составляющих: скорости движения звезды по орбите и скорости центра масс системы (которую с хорошим приближением можно считать постоянной). Рассмотрим движение звезды относительно центра масс системы. Чтобы определить соответствующую лучевую скорость звезды, мы вначале спроецируем ее радиус-вектор r на луч зрения, а затем продифференцируем эту проекцию по времени. Обозначим проекцию радиуса-вектора r на луч зрения через z. Из рассмотрения рис. 1 видно, что

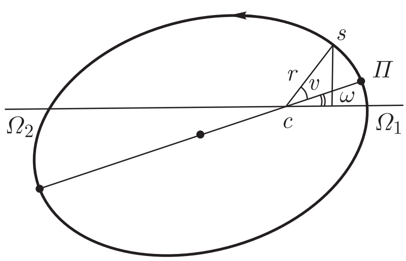


Рис. 1. Орбита одной из компонент спектральной двойной системы

$$z = r\sin(v+\omega)\sin i. \tag{6}$$

Здесь, чтобы получить z, мы сначала проецируем радиус-вектор r в плоскости обриты на направление, перпендикулярное к линии узлов, т. е. умножаем r на $\sin(v+\omega)$, а затем полученный отрезок проецируем на луч зрения, то есть умножаем его на $\sin i$.

В формуле (6) величины r и v зависят от времени t, а параметры ω и i от времени не зависят (в модели двух точечных звезд на кеплеровских орбитах). Лучевая скорость звезды относительно центра масс системы c есть производная dz/dt, а полная лучевая скорость равна $V_r = dz/dt + \gamma$, где γ — лучевая скорость центра масс системы (называемая γ-скоростью). Естественно предположить, что центр масс системы c движется в пространстве равномерно и прямолинейно. Выведем формулу, связывающую между собой наблюдаемую лучевую скорость V_r и элементы орбиты. Найдем производную

$$\frac{dz}{dt} = \sin i\,\sin(v+\omega)\,\frac{dr}{dt} + r\sin i\,\cos(v+\omega)\,\frac{dv}{dt}. \tag{6'}$$

Производные dr/dt и dv/dt могут быть исключены с использованием уравнения орбиты-эллипса звезды и уравнения, выражающего второй закон Кеплера:

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos v}, \tag{7}$$

$$r^2\frac{dv}{dt} = \frac{2\pi ab}{P} = \frac{2\pi a^2\sqrt{1-e^2}}{P}. \tag{7$'$}$$

Обозначим

$$\frac{2\pi}{P} = \mu. \tag{8}$$

Тогда уравнение (7′) перепишется в виде

$$r^2\frac{dv}{dt} = \mu a^2\sqrt{1-e^2}\,. \tag{9}$$

Продифференцируем уравнение (7) по времени:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{a(1-e^2)e}{(1+e\cos v)^2}\sin v\,\frac{dv}{dt}. \tag{10}$$

Производная dv/dt содержится в уравнении (9), нужно только исключить из него величину радиуса-вектора r с помощью уравнения (7), которое мы возведем в квадрат:

$$r^2 = \frac{a^2(1-e^2)^2}{(1+e\cos v)^2}. \tag{11}$$

Подставляя (11) в (9), находим:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\mu a^2\sqrt{1-e^2}\,(1+e\cos v)^2}{a^2(1-e^2)^2} = \frac{\mu(1+e\cos v)^2}{(1-e^2)^{3/2}}. \tag{12}$$

Подстановка (12) в (10) дает производную от радиуса-вектора r по времени:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{a(1-e^2)e\sin v\,\mu(1+e\cos v)^2}{(1+e\cos v)^2(1-e^2)^{3/2}} = \frac{\mu ae\sin v}{(1-e^2)^{1/2}}. \tag{13}$$

Подставляя в уравнение (6′) выражения для dr/dt и dv/dt и используя (7), имеем:

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dt} &= \sin i\sin(v+\omega)\frac{\mu ae\sin v}{\sqrt{1-e^2}} + \frac{a(1-e^2)}{(1+e\cos v)}\sin i\cos(v+\omega)\frac{\mu(1+e\cos v)^2}{(1-e^2)^{3/2}} = \\ &= \frac{\mu a\sin i}{\sqrt{1-e^2}}\,[\sin(v+\omega)e\sin v + \cos(v+\omega)(1+e\cos v)] = \\ &= K[\cos(v+\omega) + e[\sin(v+\omega)\sin v + \cos(v+\omega)\cos v]] = \\ &= K[e\cos\omega + \cos(v+\omega)],\end{aligned} \tag{14}$$

где мы положили

$$K = \frac{\mu a\sin i}{\sqrt{1-e^2}}. \tag{15}$$

Здесь мы учли, что выражение в квадратных скобках, перед которым стоит эксцентриситет e, представляет собой косинус разности углов: $\cos[(v+\omega)-v] = \cos\omega$.

Окончательно, лучевая скорость звезды

$$V_r = \gamma + K[e\cos\omega + \cos(v+\omega)]. \tag{16}$$

Таким образом, основное уравнение для интерпретации наблюдаемой кривой лучевых скоростей $V_r(t)$ в рамках модели двух точечных масс на кеплеровских орбитах записывается в виде:

$$V_r(t) = \gamma + K\{e\cos\omega + \cos[v(t) + \omega]\}. \tag{17}$$

Простота этого уравнения лишь кажущаяся. Истинная аномалия $v(t)$ зависит от времени сложным образом через уравнения эллиптического движения, связывающие между собой среднюю, эксцентрическую и истинную аномалии.

Средняя аномалия M линейно зависит от времени:

$$M = \frac{2\pi}{P}(t - T), \tag{18}$$

где T — момент прохождения звезды через периастр орбиты. Эксцентрическая аномалия E вычисляется по формуле:

$$E - e\sin E = M. \tag{19}$$

Для истинной аномалии v имеем

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}v = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\,\operatorname{tg}\frac{1}{2}E. \tag{20}$$

Решая уравнения (17)–(20), например, методом наименьших квадратов, можно найти элементы спектроскопической орбиты e, ω, T, и в том числе, γ-скорость.

Исследуем свойства основного уравнения (17). Прежде всего, выясним, в каких точках на орбите лучевая скорость звезды достигает своего экстремума — максимума или минимума (как обычно, считаем, что лучевая скорость положительна, когда звезда удаляется от наблюдателя). Зависящий от времени член $\cos[v(t) + \omega]$ в уравнении (17) меняется от $+1$ до -1, этим двум значениям будут соответствовать экстремумы лучевой скорости. Обозначим через A величину $\left|\max\frac{dz}{dt}\right|$ и через B — величину $\left|\min\frac{dz}{dt}\right|$. Тогда

$$A = \left|\max\frac{dz}{dt}\right| = K(1 + e\cos\omega), \tag{21}$$

$$B = \left|\min\frac{dz}{dt}\right| = K(1 - e\cos\omega). \tag{22}$$

Уравнения (21) и (22) соответствуют случаям, когда $\cos(v + \omega) = +1$ и $\cos(v + \omega) = -1$ или, что то же самое, когда суммарный угол $v + \omega = 0$ или 180°, что соответствует восходящему и нисходящему узлу (см. рис. 1). Таким образом, хотя полная пространственная скорость звезды достигает своих экстремумов в периастре и апоастре орбиты, лучевая скорость звезды достигает своего максимума и минимума в узлах орбиты. Эта замечательная особенность кривой лучевой скоростей ТДС позволяет легко сопоставлять каждой точке на кривой лучевых скоростей положение звезды на орбите, исходя из того, что в максимуме кривой лучевых скоростей звезда находится в восходящем узле, т. е. она пересекает картинную плоскость и удаляется от наблюдателя, а в минимуме кривой лучевых скоростей звезда находится в нисходящем узле — пересекает картинную плоскость, приближаясь к наблюдателю. Основываясь на этих принципах и используя второй закон Кеплера, легко осуществлять качественное построение кривой лучевых скоростей для любой ориентации орбиты ТДС относительно наблюдателя. Прежде всего, если орбита круговая ($e = 0$), то, следуя уравнению (17) и принимая во внимание, что при $e = 0$ истинная аномалия $v(t)$ совпадает со средней аномалией $M(t)$, кривая лучевых скоростей — косинусоида, и в этом случае параметры ω и T не определены. Рассмотрим случай эллиптической орбиты ($e \neq 0$) и построим качественную кривую лучевых скоростей для различных ориентаций орбиты относительно наблюдателя, т. е. разных значений долготы периастра ω (рис. 2).

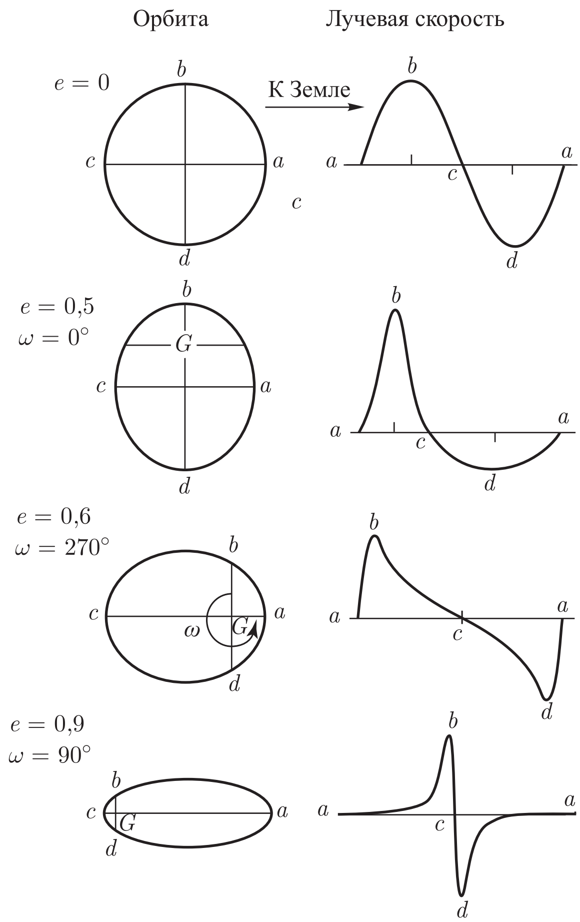


Рис. 2. Кривые лучевых скоростей при различных значениях элементов спектроскопической орбиты тесной двойной системы

Пусть $\omega = 0°$, т. е. периастр совпадает с восходящим узлом (орбита расположена «боком» по отношению к наблюдателю). Предположим, для простоты, что γ-скорость равна нулю. Нанесем на зависимость $V_r(t)$ точку, соответствующую максимуму лучевой скорости. Этой точке соответствует положение звезды в восходящем узле, т. е. в периастре орбиты. Поскольку, согласно второму закону Кеплера, в периастре пространственная скорость звезды максимальна, лучевая скорость при орбитальном движении звезды будет быстро спадать от максимума и затем, по мере приближения к апоастру (т. е. нисходящему узлу) замедлять скорость своего уменьшения. В окрестности минимума лучевая скорость будет медленно меняться. Результирующая кривая лучевых скоростей будет качественно подобна циклоиде (см. рис. 2). Если рассмотреть другую ориентацию орбиты, например, взять $\omega = 270°$ (орбита «смотрит» своим периастром на наблюдателя), то легко видеть, что в этом случае кривая лучевых скоростей будет иметь пилообразный характер (предлагаем читателю самому осуществить построение соответствующей кривой лучевых скоростей). Из этих построений следует, что форма кривой лучевых скоростей ТДС сильно меняется с изменением параметров спектроскопической орбиты, что обеспечивает надежность результатов решения обратной задачи — нахождения элементов спектроскопической орбиты по кривой лучевых скоростей, описываемой уравнениями (17)–(20).

С использованием уравнений (21) и (22) можно накладывать ограничения на спектроскопические элементы ТДС по характерным точкам кривой лучевых скоростей. Такой быстрый способ оценки элементов орбиты позволяет получать начальное приближение для искомых элементов, которое можно использовать при окончательном поиске элементов методом наименьших квадратов. Складывая уравнения (21) и (22), получаем

$$K = \frac{\mu a \sin i}{\sqrt{1-e^2}} = \frac{A+B}{2}. \tag{23}$$

Вычитая уравнение (22) из (21), имеем:

$$K e \cos\omega = \frac{A-B}{2}. \tag{24}$$

Отсюда находим, с использованием (23):

$$e\cos\omega = \frac{A-B}{A+B}. \tag{25}$$

Подставляя (23), (24) в основное уравнение (17), имеем:

$$V_r(t) = \gamma + \frac{A-B}{2} + \frac{A+B}{2}\cos\left[v(t)+\omega\right]. \tag{26}$$

Величины A и B при известной γ-скорости непосредственно определяются по кривой лучевых скоростей — они являются экстремальными значениями лучевой скорости звезды относительно центра масс двойной системы. Поэтому величину $K = (A+B)/2$ называют полуамплитудой кривой лучевых скоростей. Таким образом, простое использование характерных точек кривой лучевых скоростей (точек ее максимума и минимума) позволяет наложить ограничения на значения элементов спектроскопической орбиты ТДС (см. формулы (15), (23), (25)). Для однозначного нахождения элементов необходимо, помимо использования экстремальных значений лучевых скоростей ТДС, использовать также информацию о форме кривой лучевых скоростей. Существует, по крайней мере, десяток методов определения элементов спектроскопических орбит (см., например, Lehmann–Files, 1894, Russell, 1914, Irwin, 1952, Крат, 1962). Все они имеют лишь исторический интерес, в связи с возможностями использования современных компьютеров и применения мощных методов решения обратных параметрических задач. Мы опишем широко употребляемый метод Лемана–Филеса (1894) для оценки предварительных значений элементов спектроскопических орбит ТДС, которые могут в дальнейшем уточняться с использованием всей мощи современных вычислительных средств.

Рассмотрим кривую лучевых скоростей ТДС (рис. 3). Предположим, что γ-скорость (лучевая скорость центра масс системы) нам известна. Пусть максимум лучевой скорости достигается в точке a, а минимум — в точке b. Тогда величина $A = \left|\max\dfrac{dz}{dt}\right|$ равна длине отрезка a_1a, а величина $B = \left|\min\dfrac{dz}{dt}\right|$ — длине отрезка b_1b. Как видно из рис. 3, при известной γ-скорости из графика кривой лучевых скоростей находятся величины A и B и, следовательно, полуамплитуда кривой лучевых скоростей $K = (A + B)/2$. Очевидно, из графика кривой лучевых скоростей также находится орбитальный период P.

Разместим орбиту звезды ТДС между двумя плоскостями, параллельными картинной плоскости (которая проходит через центр масс системы) и касательными к орбите.

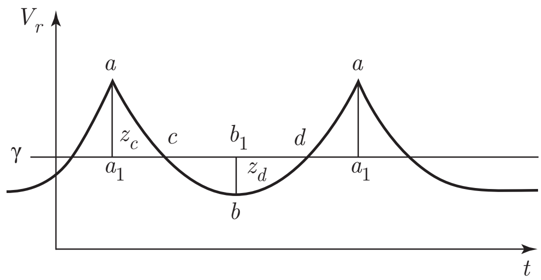


Рис. 3. Кривая лучевых скоростей одной из компонент спектрально-двойной системы

На рис. 4 показана орбита звезды в ТДС и три прямые: прямая *2* — линия узлов, проходит через центр масс системы C, прямая *1* — линия пересечения плоскости орбиты системы с «задней» плоскостью, касательной к орбите, прямая *3* — линия пересечения орбиты с «передней» плоскостью, касательной к орбите (касательной плоскостью). Все три прямые *1*, *2*, *3*, очевидно, лежат в плоскости орбиты. Поскольку мы рассматриваем движение звезды по абсолютной орбите относительно центра масс

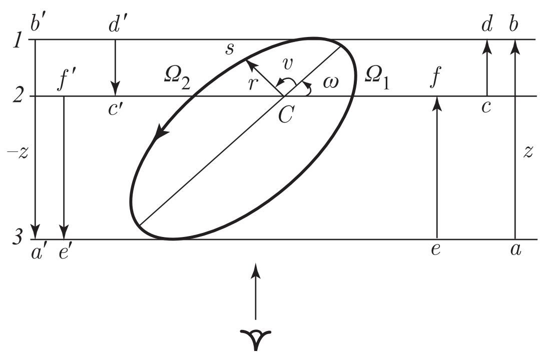


Рис. 4. Орбита одной из компонент спектрально-двойной системы, заключенная между двумя касательными плоскостями

системы, орбита звезды — замкнутая траектория — эллипс (с точки зрения земного наблюдателя траектория движения звезды незамкнута ввиду поступательного движения центра масс системы в пространстве, которое характеризуется γ-скоростью). В силу замкнутости орбиты звезды относительно центра масс системы, путь z, пройденный звездой вдоль луча зрения от «передней» до «задней» касательной плоскости, равен пути, пройденному ею от «задней» до «передней» плоскости. Но путь z вдоль луча зрения — это интеграл по времени от лучевой скорости:

$$z = \int\limits_{t_0}^{t} \frac{dz}{dt} dt = \int\limits_{t_0}^{t} dz = z_t - z_{t_0}. \tag{27}$$

На кривой лучевых скоростей путь вдоль луча зрения, пройденный звездой — это площадь, ограниченная соответствующей кривой лучевых скоростей. При этом путь, пройденный от «передней» к «задней» касательной плоскости — положительный (так как соответствует удалению от наблюдателя), а обратный путь — отрицательный. Отсюда следует, что положительная площадь, ограниченная кривой лучевых скоростей и прямой, соответствующей γ-скорости, должна равняться (по модулю) соответствующей отрицательной площади (относительно прямой, соответствующей γ-скорости). Таким образом, мы получаем метод определения величины γ-скорости: необходимо на графике кривой лучевых скоростей провести прямую, параллельную оси времени так, чтобы соответствующие положительная и отрицательная площади были равны. Эти рассуждения наглядно иллюстрируются рис. 4, где показаны пути вдоль луча зрения, пройденные звездой на орбите в случае, когда луч зрения лежит в плоскости орбиты (наклонение орбиты $i = 90°$, очевидно, что все выводы о замкнутости орбиты и равенстве положительных и отрицательных путей вдоль луча зрения справедливы для любых i). Из рис. 4, видно, что пути ab и $a'b'$ равны между собой, в силу замкнутости орбиты звезды. Математически условие замкнутости орбиты звезды в ТДС можно сформулировать так:

$$\int\limits_{t}^{t+p} \frac{dz}{dt} dt = z_{t+p} - z_t = 0, \tag{28}$$

т. е. сумма площадей, взятых с соответствующим знаком и ограниченных кривой лучевых скоростей и прямой, соответствующей γ-скорости в интервале времени, равном орбитальному периоду, равна нулю. Следовательно, отрицательная площадь по модулю равна положительной. Эти рассуждения можно продолжить дальше.

В силу замкнутости орбиты, путь вдоль луча зрения, пройденный звездой от картинной плоскости до «задней» касательной плоскости, равен пути, пройденному в противоположном направлении (см. рис. 4, где $cd = c'd'$). То же самое можно сказать и про путь вдоль луча зрения, пройденный от «передней» касательной плоскости к картинной плоскости и обратно (рис. 4, здесь $ef = e'f'$). Таким образом, на кривой лучевых скоростей площади фигур aa_1c и cb_1b равны друг другу по модулю, также равны друг другу по модулю и площади фигур b_1bd и daa_1. Эти замечательные свойства кривой лучевых скоростей позволяют проверять модель ТДС, уточнять значения γ-скорости и величин A и B (в рамках других моделей, например, модели пульсирующей звезды, кривая лучевых скоростей не обладает такими свойствами). Указанное свойство попарного равенства смежных площадей для кривой лучевых скоростей ТДС может быть выведено аналитически.

Мы знаем, что dz/dt достигает экстремальных значений A и B в узлах орбиты, когда $v + \omega = 0°$ и $v + \omega = 180°$. Поскольку при этих значениях $v + \omega$ $\sin(v + \omega) = 0$, то, как следует из (6), $z_a = z_b = 0$. Но тогда

$$\begin{aligned} &\int\limits_{t_{a_1}}^{t_c} \frac{dz}{dt} dt = z_c - z_a = z_c, \quad &&\int\limits_{t_{b_1}}^{t_d} \frac{dz}{dt} dt = z_d - z_b = z_d, \\ &\int\limits_{t_c}^{t_{b_1}} \frac{dz}{dt} dt = z_b - z_c = -z_c, \quad &&\int\limits_{t_d}^{t_{a_1}} \frac{dz}{dt} dt = z_a - z_d = -z_d. \end{aligned} \tag{29}$$

Как видно из рис. 3, интегралы (29) описывают площади фигур a_1ac, cb_1b, b_1bd, daa_1 и, как следует из (29), эти площади попарно равны между собой по модулю.

Формула (25) дает нам величину $e\cos\omega = \dfrac{A-B}{A+B}$. Чтобы определить e и ω раздельно, мы должны иметь еще одну связь между ними, вытекающую из кривой лучевых скоростей. Выразим величину $e\sin\omega$ через параметры, характеризующие форму и амплитуду кривой лучевых скоростей. Как мы убедились выше, из кривой лучевых скоростей можно непосредственно определить величины γ, A, B, z_c и z_d. Как видно из рис. 3, в точках c и d лучевая скорость системы равна γ-скорости, т. е. $dz/dt = 0$. Следовательно, в этих точках $e\cos\omega = -\cos(v+\omega)$ — см. формулу (14). Тогда из (25) следует, что в точках c и d

$$\cos(v+\omega) = -\frac{A-B}{A+B}. \tag{30}$$

Таким образом, в точках c и d имеем:

$$\cos(v_c+\omega) = \cos(v_d+\omega). \tag{31}$$

Рассмотрим решения этого тригонометрического уравнения:

1) $v_c+\omega = v_d+\omega$.

Это решение нефизично, поскольку, очевидно, что $v_c \neq v_d$. Поэтому это решение должно быть отброшено.

2) $v_c+\omega = 360^\circ - v_d - \omega$ (поскольку, как известно, $\cos\alpha = \cos(360^\circ - \alpha)$).

Это решение мы принимаем. Поскольку $\sin\alpha = -\sin(360^\circ - \alpha)$, можно записать, что

$$\sin(v_c+\omega) = -\sin(v_d+\omega). \tag{32}$$

Таким образом, $\sin(v_c+\omega) = -\sin(v_d+\omega)$.

Поскольку в точке c

$$\cos(v_c+\omega) = -\frac{A-B}{A+B}, \quad \text{то} \quad \sin(v_c+\omega) = \sqrt{1-\cos^2(v_c+\omega)} = \frac{2\sqrt{AB}}{A+B},$$

тогда

$$\sin(v_d+\omega) = -\frac{2\sqrt{AB}}{A+B}. \tag{33}$$

Выражения для площадей z_c и z_d запишем в виде (см. (6))

$$z_c = r_c\sin(v_c+\omega)\sin i,$$

$$z_d = -r_d\sin(v_c+\omega)\sin i.$$

Поделим z_c на z_d и используем уравнение эллипса (7):

$$-\frac{z_c}{z_d} = \frac{1+e\cos v_d}{1+e\cos v_c}.$$

Чтобы выделить искомый член $e\sin\omega$, член $\cos v$ заменим на $\cos[(v+\omega)-\omega]$ и раскроем косинусы разностей углов:

$$\frac{1+e\cos[(v_d+\omega)-\omega]}{1+e\cos[(v_c+\omega)-\omega]} = \frac{1+e\cos(v_d+\omega)\cos\omega + e\sin(v_d+\omega)\sin\omega}{1+e\cos(v_c+\omega)\cos w + e\sin(v_c+\omega)\sin\omega} =$$

$$= \frac{1-\cos^2(v_c+\omega) - e\sin(v_c+\omega)\sin\omega}{1-\cos^2(v_c+\omega) + e\sin(v_c+\omega)\sin\omega},$$

где мы учли, что $e\cos\omega = -\cos(v+\omega)$, $\cos^2(v_d+\omega) = \cos^2(v_c+\omega)$, $\sin(v_d+\omega) = -\sin(v_c+\omega)$.

Таким образом, находим отношение площадей

$$-\frac{z_c}{z_d}=\frac{\sin(v_c+\omega)[\sin(v_c+\omega)-e\sin\omega]}{\sin(v_c+\omega)[\sin(v_c+\omega)+e\sin\omega]}=\frac{\sin(v_c+\omega)-e\sin\omega}{\sin(v_c+\omega)+e\sin\omega}.$$

Решая это уравнение относительно $e\sin\omega$, получаем

$$e\sin\omega=\frac{z_d+z_c}{z_d-z_c}\sin(v_c+\omega),$$

подставляя сюда (32) и (33), получаем окончательную формулу для нахождения $e\sin\omega$:

$$e\sin\omega=\frac{2\sqrt{AB}}{A+B}\frac{z_d+z_c}{z_d-z_c}. \tag{34}$$

Совместное решение уравнений (25) и (34) дает значения e и ω.

Сделаем два замечания. 1) Величина $e\cos\omega=\dfrac{A-B}{A+B}$ определяется амплитудой кривой лучевых скоростей, в то время как величина $e\sin\omega=\dfrac{2\sqrt{AB}}{A+B}\dfrac{z_d+z_c}{z_d-z_c}$ определяется как амплитудой, так и формой кривой лучевых скоростей, которая характеризуется площадями z_d и z_c. 2) В выражении для $e\sin\omega$ в знаменателе стоит разность z_d-z_c. Эта разность никогда не обращается в нуль, поскольку площади z_d и z_c должны браться с соответствующими знаками (в нашем случае z_d отрицательна, а z_c — положительна).

Зная e и K, мы можем определить $a\sin i$ из выражения

$$K=\frac{\mu a\sin i}{\sqrt{1-e^2}},\quad \mu=\frac{2\pi}{P}.$$

Отсюда получаем

$$a\sin i=\frac{KP}{2\pi}\sqrt{1-e^2}\,. \tag{35}$$

Обычно орбитальный период спектрально-двойных звезд выражается в сутках, а лучевая скорость V_r — в км/с. Если выразить P в секундах, а V_r в км/с, то получаем $a\sin i$ в километрах:

$$a\sin i=8{,}64\cdot10^4\frac{KP}{2\pi}\sqrt{1-e^2}\ \text{км}. \tag{36}$$

Зная e и ω, можно найти момент T прохождения звезды через периастр орбиты. В периастре истинная аномалия звезды равна нулю: $v=0$. Тогда из уравнения (14) имеем:

$$\left(\frac{dz}{dt}\right)_{\text{пер.}}=K(1+e)\cos\omega. \tag{37}$$

Поскольку K, e и ω известны, правая часть уравнения (37) нам известна. Вычислив ее, находим $(dz/dt)_{\text{пер}}$ — ординату кривой лучевых скоростей, соответствующую моменту T прохождения звездой через периастр орбиты. Найденной ординате соответствуют две точки на кривой лучевых скоростей и, соответственно, два момента T. Поскольку ω известно, эта неоднозначность легко устраняется. Как мы выяснили ранее, в точках a и b кривой лучевых скоростей (экстремумах) угол $v+\omega$ равен 0 и 180° соответственно. Следовательно, между точками a и b угол $v+\omega$ меняется от 0 до 180°, а между точками b и a — от 180 до 360°. Найденные нами две точки на кривой лучевых скоростей (соответствующие найденной ординате $(dz/dt)_{\text{пер}}$) соответствуют случаю $v=0$, т. е. в этих точках $v+\omega=\omega$. Поскольку ω нам известно, выбираем ту точку на кривой лучевых скоростей, которая соответствует найденному значению ω. Абсцисса этой точки есть искомый момент T прохождения звездой через периастр орбиты.

Таким образом, мы полностью решили задачу и нашли искомые элементы спектроскопической орбиты: P, e, ω, T, $a \sin i$, а также величину γ-скорости. Для проверки правильности найденных элементов необходимо построить соответствующую теоретическую кривую лучевых скоростей и сравнить ее с наблюдаемой кривой. Для этого запишем уравнение Кеплера:

$$M = \frac{2\pi}{P}(t - T) = E - e \sin E. \tag{38}$$

Задаваясь рядом значений моментов времени t_1, $t_2, \ldots, t_n$ и решая уравнение Кеплера (38), находим соответствующие значения эксцентрической аномалии $E_1, E_2, \ldots, E_n$. Подставив найденные значения E_i в формулу

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} v_i = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{1}{2} E_i, \tag{39}$$

получим соответствующие величины истинной аномалии звезды на орбите v_i. Подставив эти значения v_i в основное уравнение (17):

$$V_r(t_i) = \gamma + K\{e \cos \omega + \cos[v_i(t_i) + \omega]\}, \tag{40}$$

находим величины $V_r(t_i)$ и строим соответствующую теоретическую кривую лучевых скоростей. Если теоретическая кривая лучевых скоростей удовлетворительно описывает наблюдения, можно считать, что мы нашли вполне надежные элементы. Эти элементы могут использоваться как начальное приближение для поиска окончательных значений элементов и их ошибок, например, методом наименьших квадратов. Плохое соответствие между теоретической и наблюдаемой кривыми лучевых скоростей говорит о том, что процедура предварительного определения элементов спектроскопической орбиты выполнена не вполне аккуратно, и ее следует повторить, обратив особое внимание на точное определение площадей z_c, z_d и величины γ-скорости. Поскольку здесь мы описали простой метод Лемана–Филеса для предварительной оценки элементов, мы пока не касаемся проблемы количественной оценки соответствия теоретической и наблюдаемой кривых лучевых скоростей и определения ошибок элементов. Это мы сделаем ниже при описании современных методов решения обратных параметрических задач.

Мы описали метод Лемана–Филеса определения элементов спектроскопической орбиты, который основан на измерении характерных площадей, ограничиваемых кривой лучевых скоростей. Процедура измерения площади — весьма деликатная операция, которая требует, чтобы кривая лучевых скоростей была хорошо измерена во всех фазах орбитального периода. Однако на практике это не всегда удается сделать, например, из-за влияния взаимного блендирования линий в спектре системы. Часто лучевые скорости компонент удается надежно измерить лишь в квадратурах, когда линии, принадлежащие разным компонентам системы, максимально раздвинуты. Вблизи соединений компонент лучевые скорости каждой из них часто измеряются со значительными ошибками ввиду влияния эффектов блендирования. Так что во многих случаях наблюдатель сталкивается с ситуацией, когда элементы спектроскопической орбиты должны быть определены не по всей кривой лучевых скоростей, а только по ее части. Более того, в реальной ситуации даже при надежном измерении кривой лучевых скоростей во всех фазах орбитального периода, не вся кривая лучевых скоростей может быть использована для определения элементов спектроскопической орбиты в рамках модели двух точечных масс на кеплеровских орбитах. Если наклонение орбиты не сильно отличается от 90°, вблизи моментов соединения компонент могут сказываться два эффекта: эффект быстрого вращения звезды и эффект асимметричного звездного ветра от приливно деформированной звезды в двойной системе. Эффект быстрого вращения звезды в затменных двойных системах (Росситер, 1924) приводит к тому, что вблизи момента соединения компонент кривая лучевых скоростей испытывает резкий подъем и спад, вызванный затмением быстро вращающейся звезды. При затмении быстро вращающейся звезды наблюдатель видит линию в ее спектре, формирующуюся в основном сначала на удаляющемся крае диска звезды, а затем — на приближающемся, что приводит к характерному «зигзагу» в изменении лучевой скорости звезды в момент соединения (затмения) — см. рис. 5. Если скорость вращения затмеваемой звезды велика, амплитуда такого «зигзага», который не имеет отношения к орбитальной скорости звезды, может превосходить амплитуду самой орбитальной кривой лучевых скоростей (рис. 5). Ясно, что наличие такого эффекта не позволяет использовать всю кривую лучевых скоростей для определения элементов спектроскопической орбиты в рамках модели двух точечных масс. Следует отметить, что применение современных методов синтеза профилей линий и кривых лучевых скоростей для реальных ТДС позволяет корректно описывать эффекты вращения компонент (см. ниже).

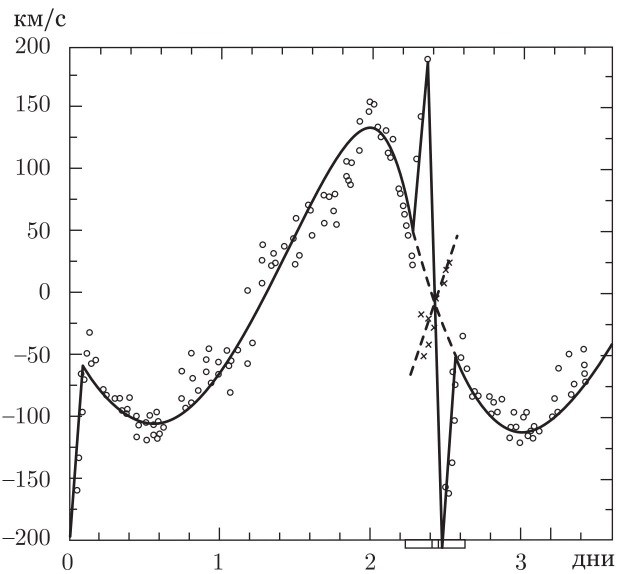


Рис. 5. Кривая лучевых скоростей главной компоненты системы U Cep. Область затмения отмечена горизонтальной чертой на оси абсцисс. Крестиками обозначена часть кривой лучевых скоростей слабого спутника-субгиганта

Эффект асимметричного звездного ветра от приливно-деформированной звезды (звезда интенсивнее истекает со стороны, обращенной к спутнику) приводит к тому, что вблизи моментов соединений компонент наблюдаются отклонения лучевых скоростей от регулярной кривой лучевых скоростей, обусловленных орбитальным движением компонент. Это также не позволяет использовать всю кривую лучевых скоростей ТДС для определения элементов спектроскопической орбиты. В этой связи следует подчеркнуть, что эффекты асимметрии звездного ветра и эффекты селективного поглощения света звезды в частотах линий газовыми потоками могут приводить к появлению ложных эксцентриситетов орбиты и к значительным ошибкам в определении других элементов орбиты. Поскольку коэффициент поглощения в частотах линий на много порядков выше, чем в континууме, влияние газовых потоков в ТДС на кривую лучевых скоростей значительно сильнее, чем на кривую блеска при затмении.

Учитывая описанные трудности, полезно рассмотреть метод анализа кривой лучевых скоростей, не требующий измерения площадей. Один из таких методов был предложен Макаренко (1962). Он также может быть использован для нахождения элементов орбиты по неполной кривой лучевых скоростей. Этот метод может рассматриваться как независимый метод оценки предварительных элементов орбиты ТДС в случае не очень больших значений эксцентриситетов орбит ($e < 0{,}50$), что как раз наблюдается в большинстве затменных двойных систем.

Пусть орбитальный период P системы известен. В уравнении (17) выделим член $V_m = \gamma + Ke\cos\omega$, тогда уравнение (17) перепишется в виде

$$V_r(t) = V_m + K\cos[v(t) + \omega]. \tag{41}$$

Поскольку $\cos[v(t) + \omega]$ меняется от $+1$ до -1, максимальное значение лучевой скорости $V_r^{\max} = V_m + K$, минимальное $V_r^{\min} = V_m - K$.

Отсюда имеем:

$$V_m = \frac{V_r^{\max} + V_r^{\min}}{2}, \quad K = \frac{V_r^{\max} - V_r^{\min}}{2}. \tag{42}$$

Рассмотрим кривую лучевых скоростей (рис. 6) в переменных V_r, φ, где $\varphi = (t - t_0)/P$ — фаза орбитального периода (t_0 — произвольно выбранный начальный

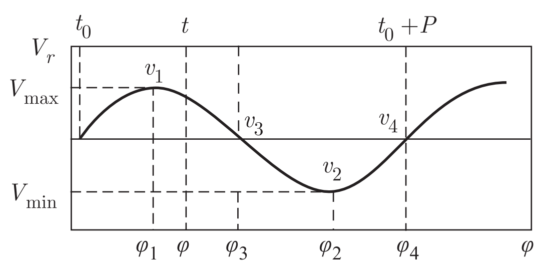


Рис. 6. Кривая лучевых скоростей с характерными точками

момент). Пусть экстремумы лучевой скорости достигаются в фазах φ_1 (соответствующая лучевая скорость $V_r^{\max}$) и φ_2 (лучевая скорость $V_r^{\min}$). Экстремумы лучевой скорости соответствуют нахождению звезды в узлах орбиты, следовательно, в фазах φ_1 и φ_2

$$v_1 = -\omega, \quad v_2 = \pi - \omega. \tag{43}$$

Пусть фазы φ_3 и φ_4 соответствуют случаю, когда $V_r = V_m$. Тогда, как следует из уравнения (41),

$$v_3 = \frac{\pi}{2} - \omega, \quad v_4 = \frac{3\pi}{2} - \omega. \tag{44}$$

Фазы φ_1, φ_2, φ_3, и φ_4 находятся из графика кривой лучевых скоростей. Эти фазы и могут быть использованы для нахождения элементов спектроскопической орбиты, поскольку соответствующие значения истинной аномалии v для них известны.

Запишем известное разложение средней аномалии M по истинной (см., например, Субботин, 1937):

$$M = v + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}\beta\left(1 + n\sqrt{1-e^2}\right)\sin nv, \tag{45}$$

где $\beta = \dfrac{e}{1+\sqrt{1-e^2}}$.

Ряд (45) равномерно сходится при $e < 0{,}66274\ldots$. Перепишем ряд (45) в виде

$$M = v - 2e\sin v + \frac{3}{4}\,e^2\sin 2v - \frac{1}{2}\,e^3\sin 3v + \ldots. \tag{46}$$

Обозначим через ψ фазу в момент T прохождения звезды через периастр. Тогда

$$M = 2\pi(\varphi - \psi). \tag{47}$$

Подставим в разложение (46) значения v для выделенных нами фаз φ_1, φ_2, φ_3, φ_4 ($v_1 = -\omega$, $v_2 = \pi - \omega$, $v_3 = \dfrac{\pi}{2} - \omega$, $v_4 = \dfrac{3\pi}{2} - \omega$) и ограничимся членами, содержащими e в степени не более второй. Мы получим четыре значения средней аномалии M, которые она имеет в фазах φ_1, φ_2, φ_3, φ_4:

$$\begin{aligned} M_1 &= -\omega + 2e\sin\omega - \frac{3}{4}\,e^2\sin 2\omega,\\ M_2 &= \pi - \omega - 2e\sin\omega - \frac{3}{4}\,e^2\sin 2\omega,\\ M_3 &= \frac{\pi}{2} - \omega - 2e\cos\omega + \frac{3}{4}\,e^2\sin 2\omega,\\ M_4 &= \frac{3}{2}\,\pi - \omega + 2e\cos\omega + \frac{3}{4}\,e^2\sin 2\omega. \end{aligned} \tag{48}$$

Найдем разности (чтобы не было зависимости от начальной фазы):

$$M_2 - M_1 = \pi - 4e\sin\omega, \tag{49}$$

$$M_4 - M_3 = \pi + 4e\cos\omega, \tag{50}$$

$$M_4 - M_2 = \frac{\pi}{2} + 2e\sin\omega + 2e\cos\omega + \frac{3}{2}e^2\sin 2\omega. \tag{51}$$

Эти разности, совместно с равенством (47), определяют элементы e и ω. В зависимости от того, какие части кривой лучевых скоростей надежно определены, можно использовать разные выражения из (49)–(51).

1. Пусть вся кривая лучевых скоростей надежно определена и имеются уверенные определения всех выделенных нами четырех фаз φ_1, φ_2, φ_3, φ_4. В этом случае, используя уравнения (49) и (50), находим:

$$e\sin\omega = \frac{\pi}{2}\left[0{,}5 - (\varphi_2 - \varphi_1)\right], \tag{52}$$

$$e\cos\omega = \frac{\pi}{2}\left[(\varphi_4 - \varphi_3) - 0{,}5\right]. \tag{53}$$

2. Надежно измерена лишь восходящая ветвь кривой лучевых скоростей, т. е. уверенно определены три фазы: φ_1, φ_2 и φ_4. В этом случае $e\sin\omega$ находится из уравнения (49): $e\sin\omega = (\pi/2)\,[0{,}5 - (\varphi_2 - \varphi_1)]$, а $e\cos\omega$ определяется из уравнения (51):

$$e\cos\omega = \frac{2\varphi_4 - \varphi_2 - \varphi_1 - 1}{3/4 + 2\pi - (3/2)(\varphi_2 - \varphi_1)}. \tag{54}$$

3. Надежно измерена лишь нисходящая ветвь кривой лучевых скоростей (уверенно определены фазы φ_1, φ_2, φ_3). В этом случае, как и ранее, $e\sin\omega$ определяется из уравнения (49): $e\sin\omega = (\pi/2)\,[0{,}5 - (\varphi_2 - \varphi_1)]$, а $e\cos\omega$ находится из разности $M_3 - M_1$, куда следует подставить значение $e\sin\omega = (\pi/2)\,[0{,}5 - (\varphi_2 - \varphi_1)]$:

$$e\cos\omega = \frac{\varphi_1 + \varphi_2 - 2\varphi_3}{2/\pi + 3/4 + (3/2)(\varphi_2 - \varphi_1)}. \tag{55}$$

4. Одна из фаз, соответствующих экстремуму кривой лучевых скоростей (φ_1 или φ_2) определяется неуверенно. В этом случае, применяя описанную методику, получаем, что $e\sin\omega$ определяется по одной из двух формул:

$$e\sin\omega = \frac{\varphi_4 + \varphi_3 - 2\varphi_2}{2/\pi - 3/4 + (3/2)(\varphi_4 - \varphi_3)}, \tag{56}$$

$$e\sin\omega = \frac{1 + 2\varphi_1 - \varphi_3 - \varphi_4}{2/\pi + 3/4 - (3/2)(\varphi_4 - \varphi_3)}. \tag{56$'$}$$

Величина $e\cos\omega$ в этом случае находится по формуле (53). Формулы (42) и (52)–(56) позволяют определить величины V_m, K, e, ω. Используя их, находим величину γ-скорости:

$$\gamma = V_m - Ke\cos\omega,$$

и величину $a\sin i$:

$$a\sin i = \frac{KP}{2\pi}\sqrt{1-e^2}\,.$$

Фаза ψ, соответствующая моменту T прохождения звезды через периастр орбиты, находится из разложения (46) средней аномалии M по истинной v. Подставив вместо M в формулу (46) ее выражение через ψ (см. (47)), получим:

$$\psi = \varphi - \frac{v}{2\pi} + \frac{e\sin v}{\pi} - \frac{3e^2\sin 2v}{8\pi} + \frac{e^3\sin 3v}{4\pi} - \ldots\,. \tag{57}$$

Подставляя сюда какое-либо значение φ с известным значением v (например φ_1 и v_1) находим искомое значение ψ.

Таким образом, мы нашли все элементы спектроскопической орбиты, используя четыре характерные точки на кривой лучевых скоростей, соответствующие фазам φ_1, φ_2, φ_3, φ_4. Следует помнить, что этот метод использует разложение средней аномалии по истинной (46), которое сходится лишь для не очень больших значений эксцентриситета орбиты ($e < 0{,}66274\ldots$). Это ограничивает область применимости метода, хотя следует заметить, что подавляющее большинство ТДС имеют эксцентриситеты орбит $e < 0{,}5$, и для них описанный метод нахождения элементов вполне применим. Тем более, что найденные элементы можно считать лишь начальными приближениями, которые должны быть положены в основу окончательного поиска элементов методом наименьших квадратов.

Был предложен ряд методов уточнения предварительных элементов спектроскопических орбит, основанных на использовании метода дифференциальных поправок (см. соответствующий обзор в книге Шульберга (1971)). В настоящее время эти методы имеют лишь исторический интерес. Современные компьютеры и математические методы решения обратных параметрических задач позволяют осуществлять эффективный поиск параметров и их ошибок как для линейных, так и нелинейных задач (см. ниже).

С найденными элементами спектроскопической орбиты можно определить абсолютные размеры ТДС и массы компонент. В модели двух точечных масс на кеплеровских орбитах из кривой лучевых скоростей наклонение орбиты i не определяется, поэтому большие полуоси абсолютных орбит звезд-компонент ТДС определяются с точностью до $\sin i$, а массы компонент находятся с точностью до $\sin^3 i$. Если система является не только спектрально двойной, но и затменной, то из анализа кривой блеска (см. ниже) находится наклонение орбиты i и радиусы компонент в долях большой полуоси относительной орбиты $a = a_1 + a_2$: r_1/a и r_2/a. Зная i, можно найти большие полуоси абсолютных орбит компонент и, соответственно, большую полуось относительной орбиты a и далее, найти радиусы звезд r_1 и r_2 в абсолютных единицах.

Как уже отмечалось, наблюдать спектры обеих компонент в суммарном спектре системы и измерять лучевые скорости каждой из компонент удается не всегда: для этого необходимо, чтобы светимости звезд различались не более, чем на 1–2 звездных величин (в случае использования современных ПЗС-приемников).

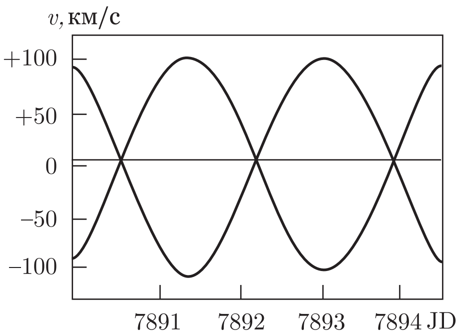


Рис. 7. Кривые лучевых скоростей обеих компонент спектрально-двойной системы BV241

Пусть мы имеем систему, в спектре которой линии каждой из компонент хорошо видны, и измерены кривые лучевых скоростей обеих компонент (см. рис. 7). Кривые лучевых скоростей должны находиться в противофазе друг к другу и пересекаться в точках, соответствующих γ-скорости. Можно определить элементы спектроскопической орбиты отдельно по каждой кривой лучевых скоростей. При этом величины P, γ, e, T, найденные по разным кривым лучевых скоростей, должны совпадать, а значения $a_1 \sin i$, $a_2 \sin i$, ω_1 и $\omega_2 = \omega_1 + 180^\circ$ являются специфичными для каждой из компонент. Возможность определения масс компонент связана с тем, что из кривых лучевых скоростей определяются (с точностью до множителя $\sin i$) большие полуоси абсолютных орбит, а период двойной системы хорошо известен. Тогда, используя третий закон Кеплера, можно найти массы звезд-компонент ТДС (с точностью до множителя $\sin^3 i$).

Рассмотрим вначале определение больших полуосей абсолютных орбит ТДС:

$$a_1 \sin i = \frac{K_1 P}{2\pi}\sqrt{1-e^2}\,, \tag{58}$$

$$a_2 \sin i = \frac{K_2 P}{2\pi}\sqrt{1-e^2}\,. \tag{59}$$

Большая полуось относительной орбиты системы выражается так:

$$(a_1 + a_2)\sin i = (K_1 + K_2)\frac{P}{2\pi}\sqrt{1-e^2}\,. \tag{60}$$

Запишем третий закон Кеплера в виде

$$m_1 + m_2 = \frac{(a_1 + a_2)^3}{P^2}, \tag{61}$$

где a_1 и a_2 выражены в астрономических единицах, P — в годах, m_1 и m_2 в массах Солнца ($M_\odot$). Большие полуоси абсолютных орбит компонент связаны с массами компонент соотношением, определяющим положение центра масс двойной системы:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{a_2}{a_1}. \tag{62}$$

Совместное решение уравнений (61) и (62) дает:

$$m_1 = a_2\left(\frac{a_1+a_2}{P}\right)^2, \tag{63}$$

$$m_2 = a_1\left(\frac{a_1+a_2}{P}\right)^2. \tag{64}$$

Подставляя сюда $(a_1 + a_2)$ из выражения (60) и a_1, a_2 из выражений (58), (59), находим:

$$m_1 \sin^3 i = \frac{P}{8\pi^3}(1-e^2)^{3/2}K_2(K_1+K_2)^2, \tag{65}$$

$$m_2 \sin^3 i = \frac{P}{8\pi^3}(1-e^2)^{3/2}K_1(K_1+K_2)^2. \tag{66}$$

Напомним, что в этих формулах предполагается, что расстояния выражены в астрономических единицах, время — в годах, массы — в $M_\odot$. Обычно полуамплитуда кривой лучевых скоростей K выражается в км/с, а период P — в сутках. Чтобы, используя эти единицы, получить массы m_1, m_2 в солнечных массах, нужно P выразить в годах, а K — в астрономических единицах в год. Тогда получаем рабочие формулы для определения масс компонент:

$$m_1 \sin^3 i = 1{,}038\cdot 10^{-7}P(1-e^2)^{3/2}K_2(K_1+K_2)^2, \tag{67}$$

$$m_2 \sin^3 i = 1{,}038\cdot 10^{-7}P(1-e^2)^{3/2}K_1(K_1+K_2)^2, \tag{68}$$

где K выражено в км/с, P — в сутках, а массы — в $M_\odot$. В этих же единицах формулы (58)–(60) могут быть переписаны в следующем виде:

$$a_1 \sin i = 1{,}375\cdot 10^4 K_1 P(1-e^2)^{1/2}, \tag{69}$$

$$a_2 \sin i = 1{,}375\cdot 10^4 K_2 P(1-e^2)^{1/2}, \tag{70}$$

$$(a_1+a_2)\sin i = 1{,}375\cdot 10^4 P(1-e^2)^{1/2}(K_1+K_2). \tag{71}$$

Здесь, как и в формулах (67), (68) K — в км/с, P — в сутках, а величины a_1, a_2 выражены в километрах.

Если в суммарном спектре двойной системы наблюдаются линии только одной, более яркой компоненты, то можно построить только одну кривую лучевых скоростей. В этом случае из ее анализа находим лишь

$$a_1 \sin i = \frac{K_1 P}{2\pi}(1-e^2)^{1/2}.$$

Если мы подставим величину $a_1 = \dfrac{K_1 P}{2\pi \sin i}(1-e^2)^{1/2}$ в уравнения (63) и (64), которые выведены на основе использования третьего закона Кеплера, то получим два уравнения, содержащие один неизвестный параметр a_2. Далее, мы можем исключить параметр a_2, решая совместно эти два уравнения. Тогда мы получим одно уравнение, не содержащее параметры a_1, a_2, в котором некоторая комбинация из масс m_1 и m_2 выражается через элементы спектроскопической орбиты. Эта комбинация называется функцией масс более яркой звезды $f_1(m)$:

$$f_1(m) = \frac{m_2^3 \sin^3 i}{(m_1+m_2)^2} = \frac{K_1^3 P}{8\pi^3}(1-e^2)^{3/2}. \tag{72}$$

Поскольку при выводе этой формулы использовался третий закон Кеплера в виде (61), здесь P выражается в годах, а K_1 — в астрономических единицах в год. Перевод в стандартную систему единиц приводит к следующей формуле:

$$f_1(m) = \frac{m_2^3 \sin^3 i}{(m_1 + m_2)^2} = 1{,}038 \cdot 10^{-7} K_1^3 P (1 - e^2)^{3/2}, \tag{73}$$

где P — в сутках, K_1 — в км/с, $f_1(m)$ — в $M_\odot$.

Если в спектре системы наблюдаются линии и второй, более слабой компоненты, можно найти функцию масс этой компоненты $f_2(m)$:

$$f_2(m) = \frac{m_1^3 \sin^3 i}{(m_1 + m_2)^2} = 1{,}038 \cdot 10^{-7} K_2^3 P (1 - e^2)^{3/2}. \tag{74}$$

Здесь также P — в сутках, K_2 — в км/с, $f_2(m)$ — в $M_\odot$.

Зная функции масс каждой из компонент, можно с точностью до множителя $\sin^3 i$ найти массы обеих компонент. Решая совместно уравнения (73), (74), получим выражения (67), (68).

В книге Шульберга (1971) приведен простой и изящный вывод формулы для функции масс. Запишем очевидные соотношения:

$$a_1 \sin i = \frac{K_1 P}{2\pi}(1 - e^2)^{1/2}, \tag{75}$$

$$m_1 + m_2 = \frac{(a_1 + a_2)^3}{P^2}, \tag{76}$$

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{a_2}{a_1}, \tag{77}$$

$$\frac{m_1 + m_2}{m_2} = \frac{a_1 + a_2}{a_1}. \tag{78}$$

Умножим обе части (76) на $\sin^3 i$ и заменим $a_1 + a_2$ его выражением из (78), получим:

$$(m_1 + m_2) \sin^3 i = \frac{1}{P^2} \left(\frac{m_1 + m_2}{m_2} \right)^3 a_1^3 \sin^3 i.$$

Подставим вместо $a_1^3 \sin^3 i$ его выражение (75) и сократим обе части равенства на $m_1 + m_2$, тогда получим:

$$\sin^3 i = \frac{(m_1 + m_2)^2}{m_2^3} \frac{K_1^3 P}{8\pi^3} (1 - e^2)^{3/2}.$$

Отсюда находим функцию масс $f_1(m)$:

$$f_1(m) = \frac{m_2^3 \sin^3 i}{(m_1 + m_2)^2} = \frac{K_1^3 P}{8\pi^3} (1 - e^2)^{3/2}. \tag{79}$$

Переведя выражение (79) в стандартную систему единиц, получим формулу (73). Совершенно аналогично выводится и выражение для функции масс второй звезды $f_2(m)$.

Функция масс обладает очень важными свойствами, о которых нужно сказать особо. Прежде всего, формула для функции масс более яркой звезды $f_1(m)$ содержит массу более слабой, невидимой звезды в третьей степени, а массу видимой звезды — лишь во второй:

$$f_1(m) = \frac{m_2^3 \sin^3 i}{(m_1 + m_2)^2}. \tag{80}$$

Это отражает тот факт, что движение видимой звезды несет информацию в основном о массе невидимой компоненты. Это свойство функции масс очень важно при исследовании рентгеновских источников в двойных системах. Более того, легко показать, что функция масс видимой звезды, которая имеет размерность массы, является абсолютным нижним пределом для массы невидимой компоненты. Действительно, разделим правую часть (80) на m_2^2:

$$f_1(m) = \frac{m_2 \sin^3 i}{(1 + 1/q)^2}, \tag{81}$$

где $q = m_2/m_1$.

Разрешим это уравнение относительно массы невидимой компоненты m_2:

$$m_2 = f_1(m) \cdot \left(1 + \frac{1}{q}\right)^2 \cdot \frac{1}{\sin^3 i}. \tag{82}$$

Поскольку $q > 0$, а $|\sin i| \leqslant 1$, множитель из двух членов перед $f_1(m)$ больше единицы. Следовательно, если мы уберем этот множитель, то равенство (82) превращается в неравенство:

$$m_2 > f_1(m). \tag{83}$$

Это очень важное свойство функции масс помогает оценивать массы невидимых компонент в ТДС по измеренной функции масс видимой звезды. Например, измеренная функция масс оптической звезды в рентгеновской двойной системе Cyg X-1 составляет $\sim$0,2$M_\odot$. Отсюда сразу можно заключить, что масса черной дыры в этой системе

$$m_2 > 0{,}2 M_\odot.$$

Разумеется, это слабая оценка, и для точного определения m_2 в данном случае требуется знание отношения масс q и наклонения орбиты i (см. формулу (82)). Учет конкретных значений этих параметров для системы Cyg X-1 приводит к массе черной дыры $\sim 10 M_\odot$. Еще более яркий пример эффективного использования функции масс для оценки массы невидимой компоненты предоставляют нам транзиентные рентгеновские двойные системы — рентгеновские новые в спокойном состоянии. Например, в рентгеновской новой V404 Cyg измеренная функция масс составляет $\sim 6 M_\odot$. Это означает, что масса невидимой в оптическом диапазоне компоненты

$$m_2 > 6 M_\odot,$$

что вдвое превышает абсолютный верхний предел для массы нейтронной звезды, предсказываемый общей теорией относительности (ОТО) Эйнштейна. Таким образом, в данном случае только знание одной функции масс оптической звезды позволяет заключить о наличии в системе V404 Cyg черной дыры.

Подчеркнем, что мы рассмотрели простую модель ТДС — модель двух точечных масс на кеплеровских орбитах. Поскольку в реальных ТДС компоненты неточечные, кривые лучевых скоростей могут быть искажены эффектами взаимной близости компонент — эффектом эллипсоидальности звезд и эффектом взаимного прогрева (эффектом «отражения»). Учет этих эффектов очень важен в случае рентгеновских двойных систем. Соответственно, функция масс оптической звезды, ввиду неточечности последней, должна быть скорректирована за эффекты взаимной близости компонент. Используя метод синтеза профилей линий и кривых лучевых скоростей (см. ниже), можно выполнить такую коррекцию и, более того, использовать эффекты взаимной близости компонент для получения дополнительных ограничений на элементы спектроскопической орбиты.

3. Анализ кривых блеска

Если наклонение орбиты системы не сильно отличается от 90°, в системе могут происходить взаимные затмения компонент. По форме соответствующей кривой блеска классические затменные двойные системы подразделяются на три типа: системы типа Алголя (β Персея), типа β Лиры и системы типа W Большой Медведицы (рис. 8). В системах типа Алголя наблюдаются главный и вторичный минимумы, обусловленные затмениями, и почти постоянные участки внезатменного блеска (рис. 8). Называется этот тип затменных систем по имени звезды β Per (Алголь), которая была первой открытой затменной двойной системой. Переменность блеска этой звезды была подмечена арабами еще в IX–X веках. Предполагается, что именно арабы дали этой звезде (звездная величина в максимуме которой $2{,}2^m$) имя Al-Chul (Алголь), что по-арабски означает «изменяющийся дух». Окончательно переменность блеска Алголя (β Персея) была установлена в 1669 г. итальянским астрономом Монтанари. Эта переменность была подтверждена четверть века спустя другим итальянцем — Маральди, проживающим в Париже. Однако ни Монтанари, ни Маральди не заметили, что блеск Алголя меняется периодически. Периодичность в изменениях блеска Алголя была открыта в ноябре 1782–мае 1783 г. двумя выдающимися английскими исследователями (кстати, любителями астрономии) Эдвардом Пиготтом (1750–1807) и Джоном Гудрайком (1764–1786). Гудрайк же высказал смелую гипотезу о том, что периодические уменьшения блеска Алголя вызваны наличием спутника у звезды и затмениями. Эта блестящая идея Гудрайка опережала время на целое столетие! Окончательно двойственность Алголя была доказана в 1889 г., когда Фогель обнаружил доплеровские смещения линий в спектре этой звезды, обусловленные орбитальным движением компонент.

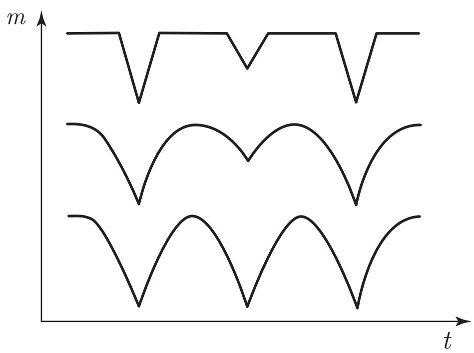


Рис. 8. Кривые блеска затменно-двойных систем типа Алголя, β Lyr и WUMa

В затменных переменных типа β Лиры блеск меняется не только во время затмений компонент, но и в промежутках вне затмений, что обусловлено тем, что звезды-компоненты систем этого типа сильно приливно деформированы и их фигуры значительно отличаются от сфер. Кстати, переменность блеска системы β Лиры была открыта также Гудрайком в сентябре 1784 г. Кроме того, Гудрайк открыл периодическую переменность δ Цефея, которая, как известно, является типичным представителем большого и очень важного класса физических переменных звезд — цефеид. Нельзя не отметить, что Джон Гудрайк за эти работы в начале 1786 г. (когда ему был 21 год) был избран членом английского Королевского общества (аналога Российской Академии наук), а две недели спустя он умер...

В системах типа W Большой Медведицы, как и в системах типа β Лиры, блеск плавно меняется со временем как во время затмений, так и вне затмений, причем глубины главного и вторичного минимумов почти одинаковые, что говорит о том, что компоненты системы имеют почти одинаковую поверхностную яркость.

Описанная классификация затменных переменных звезд по форме кривых блеска носит чисто феноменологический характер и не затрагивает эволюционных особенностей двойных систем. Копал (1959) впервые выделил характерные типы тесных двойных систем, основываясь на их эволюционных особенностях. По классификации Копала тесные двойные системы (в том числе и затменные) делятся на три класса: разделенные системы, у которых радиусы компонент значительно меньше радиусов соответствующих критических полостей Роша (далее — просто полостей Роша), полуразделенные системы, в которых одна компонента заполняет свою полость Роша, а вторая — нет, и контактные системы, у которых обе компоненты заполняют свои полости Роша. Поскольку радиус звезды в процессе ее ядерной эволюции в среднем растет, классификация Копала в основных чертах отражает эволюционную историю тесных двойных систем. Классификация Копала также хорошо увязывается с описанной выше классификацией затменных двойных звезд по кривым блеска. В настоящее время классификация тесных двойных систем, основанная на их эволюционных характеристиках, детально разработана, и существуют каталоги ТДС на разных стадиях эволюции (см., например, Свечников, 1969; Cherepashchuk et al., 1996).

Здесь мы будем изучать звезды с тонкими атмосферами, толщина которых много меньше радиуса звезды. Например, у Солнца геометрическая толщина атмосферы ~ 300 км. Рассмотрим простейшую модель затменной двойной системы, когда две сферические звезды с тонкими атмосферами вращаются вокруг общего центра масс по круговым орбитам. Эффекты взаимной близости компонент (эффект эллипсоидальности и эффект «отражения») предполагаем пренебрежимо малыми. Поскольку изменения блеска связаны с затмениями компонент, необходимо рассмотреть функцию распределения яркости по диску звезды. Нормированная на яркость в центре диска звезды функция распределения яркости называется функцией потемнения к краю. Запишем уравнение переноса излучения в непрерывном спектре в тонкой плоскопараллельной атмосфере звезды (Соболев, 1967):

$$\cos\theta \frac{dI_\nu(\theta,\tau_\nu)}{d\tau_\nu} = I_\nu(\theta,\tau_\nu) - S_\nu(\tau_\nu), \tag{84}$$

где θ — угол между нормалью к поверхности звезды и лучом зрения, $I_\nu(\theta,\tau_\nu)$ — интенсивность излучения, зависящая от частоты ν,

$$\tau_\nu = \int\limits_h^\infty \alpha_\nu dh \tag{85}$$

— оптическая глубина в атмосфере (α_ν — объемный коэффициент поглощения, h — геометрическая глубина точки в атмосфере),

$$S_\nu = \frac{\varepsilon_\nu}{\alpha_\nu} \tag{86}$$

— функция источников (ε_ν — объемный коэффициент излучения). Для простоты мы в уравнении переноса (84) пренебрегли членом, ответственным за рассеяние излучения.

Интегрируя дифференциальное уравнение (84), можно найти интенсивность излучения в атмосфере как функцию θ и τ_ν. Для нас наибольший интерес представляет интенсивность излучения $I_\nu(\theta,0)$, выходящего из звезды:

$$I_\nu(\theta,0) = \int\limits_0^\infty S_\nu(\tau_\nu) e^{-\tau_\nu \sec\theta} \sec\theta \, d\tau_\nu. \tag{87}$$

Физический смысл этого решения прозрачен: излучение от каждой точки в атмосфере, характеризуемое функцией источников $S_\nu(\tau_\nu)$, ослабляется за счет поглощения в вышележащих слоях, вклад от всех слоев атмосферы суммируется, что и дает интенсивность выходящего излучения. При заданной $S_\nu(\tau_\nu)$ формула (87) определяет угловую зависимость интенсивности выходящего излучения, т. е. распределение яркости по диску звезды, поскольку в случае сферической звезды угол θ связан с полярным расстоянием ξ точки на диске следующим очевидным соотношением:

$$\cos\theta = \sqrt{1 - \frac{\xi^2}{r^2}}\,, \tag{88}$$

где r — радиус звезды.

Вычисление функции источника $S(\tau)$ — отдельная проблема, которая решается путем совместного рассмотрения уравнения переноса и условия лучистого равновесия в атмосфере звезды. Используя уравнение переноса, проинтегрированное по всем частотам, условие лучистого равновесия и предположение о независимости коэффициента поглощения от частоты (серая модель атмосферы), можно получить явные выражения для $S(\tau)$ в приближении Шварцшильда–Шустера, Чандрасекара и т. п. (Подробнее, см. Соболев (1967)). В тонких звездных атмосферах часто с хорошим приближением может применяться предположение о локальном термодинамическом равновесии, когда характеристики газа и поля излучения в данной точке атмосферы определяются локальной температурой, которая меняется от точки к точке. Мы рассмотрим этот практически важный случай. Предположим, что в тонкой атмосфере выполняется условие локального термодинамического равновесия (ЛТР), т. е. параметры атмосферы слабо меняются на длине свободного пробега фотона. В этом случае функция источников равна функции Планка с локальной температурой T:

$$S_\nu(\tau_\nu) = B_\nu[T(\tau_\nu)].$$

Функция Планка — это интенсивность излучения абсолютно черного тела:

$$B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2}\frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1}, \tag{89}$$

где h — постоянная Планка (не путать с глубиной h в атмосфере), k — постоянная Больцмана, c — скорость света в вакууме. Поэтому в ЛТР-приближении интенсивность излучения, выходящего из атмосферы звезды, равна

$$I_\nu(\theta) = \int\limits_0^\infty B_\nu\,[T(\tau_\nu)]\, e^{-\tau_\nu \sec\theta} \sec\theta d\tau_\nu. \tag{90}$$

Для того, чтобы вычислить интеграл (90), необходимо знать распределение температуры в атмосфере звезды $T(\tau_\nu)$.

Для нахождения температурного распределения необходимо, наряду с уравнением переноса, использовать условие лучистого равновесия в атмосфере звезды:

$$\int\limits_{4\pi}\int\limits_0^\infty \varepsilon_\nu\, d\nu\, d\omega = \int\limits_{4\pi}\int\limits_0^\infty \alpha_\nu I_\nu\, d\nu\, d\omega, \tag{91}$$

где $d\omega$ — элемент телесного угла. Условие лучистого равновесия можно также записать в виде

$$\int\limits_{4\pi}\int\limits_0^\infty (\alpha_\nu I_\nu - \varepsilon_\nu)\, d\nu\, d\omega = 0. \tag{92}$$

Условие (91) выражает факт стационарности звездной атмосферы, когда полное количество лучистой энергии, поглощенной элементом объема, в точности равно полному количеству энергии, излученной этим объемом. Это и определяет температуру в данной точке атмосферы. Конвективный перенос энергии и перенос энергии посредством теплопроводности в уравнении (91) не рассматриваются. В большинстве случаев роль этих механизмов переноса энергии в атмосферах обычных, невырожденных звезд, мала. Конвективный перенос энергии существен лишь в нижних слоях фотосфер звезд поздних спектральных классов. Перенос энергии теплопроводностью важен в атмосферах белых карликов.

Проинтегрировав уравнение переноса (84) по всем телесным углам и частотам и используя соотношение (91), получаем хорошо известный результат для тонких звездных атмосфер:

$$\int\limits_{4\pi}\int\limits_{0}^{\infty} I_\nu(\theta)\cos\theta\, d\nu\, d\omega = \text{const} = \pi H. \qquad (92')$$

То есть интегральный поток излучения в тонкой звездной атмосфере сохраняется постоянным при прохождении через атмосферу.

В случае серой модели атмосферы (коэффициент поглощения α_ν не зависит от частоты) совместное решение уравнения переноса, проинтегрированного по всем частотам, и уравнения лучистого равновесия (см., например, Соболев, 1967) дает следующую связь между локальной температурой и оптической глубиной в атмосфере звезды:

$$T^4 = T_e^4\,\frac{3}{4}\,[\tau + q(\tau)], \qquad (93)$$

где T_e — эффективная температура звезды, определяемая соотношением

$$\pi H = \sigma T_e^4, \qquad (94)$$

$q(\tau)$ — функция Хопфа, которая хорошо известна и затабулирована (Михалас, 1980). Она монотонно меняется от $q(0) = 0{,}58$ до $q(\infty) = 0{,}71$.

Приближенное выражение для температурного распределения в серой модели атмосферы может быть записано в виде (Соболев, 1967)

$$T^4 = T_e^4\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\tau\right). \qquad (95)$$

Знание температурного распределения (см. формулы 93, 95) позволяет с использованием (90) вычислить интенсивность выходящего излучения в рамках серой модели атмосферы для любых направлений и частот:

$$I_\nu(\theta) = \frac{2h\nu^3}{c^2}\int\limits_0^\infty \frac{e^{-\tau\sec\theta}\sec\theta\, d\tau}{\exp\dfrac{h\nu}{kT_e[1/2 + (3/4)\tau]^{1/4}} - 1}. \qquad (96)$$

Выражение (96) для интенсивности излучения, выходящего из тонкой, серой атмосферы, в ЛТР-приближении дает нам искомую приближенную функцию распределения яркости по диску звезды и соответствующий закон потемнения к краю для любой частоты ν. В общем виде точный закон потемнения к краю выводится на основе детальной несерой модели атмосферы методом последовательных приближений, с использованием «серого» решения как начального приближения (см., например, Михалас, 1980, Сахибуллин, 1997).

Принято аппроксимировать функцию распределения яркости по диску звезды (см., например, (96)) законом, линейным по $\cos\theta$:

$$I(\theta) = I(0)(1 - x + x\cos\theta), \qquad (97)$$

где $I(0)$ — яркость в центре диска.

Тогда функция распределения яркости $I(\theta)$ может быть записана в виде

$$I(\theta) = I(0) f(x, \theta), \tag{98}$$

где функция

$$f(x, \theta) = 1 - x + x\cos\theta \tag{99}$$

определяет линейный (по $\cos\theta$) закон потемнения к краю. Здесь x — коэффициент потемнения. Величина $0 \leqslant x \leqslant 1$. Случай $x = 0$ соответствует однородному диску звезды, случай $x = 1$ — полному потемнению к краю. Линейный закон потемнения (99) удовлетворительно описывает закон потемнения, выведенный из несерых моделей атмосфер, в широком диапазоне изменения параметров звезд. Посчитаны детальные таблицы значений коэффициента потемнения x для широкого набора параметров g и T_e — ускорения силы тяжести и эффективной температуры звезды (см., например, Шульберг, 1971; Grygar et al., 1972; Рубашевский, 1991).

Основанием для применения закона (97) в качестве аппроксимации реального распределения яркости по диску звезды является то, что такой закон получается для углового распределения интегральной (по частотам) интенсивности излучения, выходящего из серой атмосферы. В этом случае функция источников (см., например, Соболев, 1967), получаемая из решения проинтегрированного по всем частотам уравнения переноса и условия лучистого равновесия

$$\begin{cases} \cos\theta \dfrac{dI}{d\tau} = I - S, \\ S = \displaystyle\int\limits_{4\pi} I \,\dfrac{d\omega}{4\pi}, \end{cases} \tag{100}$$

в приближении Эддингтона равна

$$S(\tau) = \frac{1}{2} H \left(1 + \frac{3}{2}\tau\right). \tag{101}$$

Тогда интегральная интенсивность выходящего излучения, с использованием (87), запишется в виде

$$I(\theta) = \frac{1}{2} H \int\limits_{o}^{\infty} \left(1 + \frac{3}{2}\tau\right) e^{-\tau\sec\theta} \sec\theta \, d\tau. \tag{102}$$

Выполнив интегрирование, получим

$$I(\theta) = \frac{H}{2}\left(1 + \frac{3}{2}\cos\theta\right),$$

а величина $I(0) = I_0 = \dfrac{5}{4} H$. Тогда, поскольку $H = \dfrac{4}{5} I_0$, имеем:

$$I(\theta) = I_0 \left(1 - \frac{3}{5} + \frac{3}{5}\cos\theta\right). \tag{103}$$

Таким образом, распределение интегральной (по частотам ν) яркости по диску звезды, полученное в рамках серой модели атмосферы, подчиняется линейному закону с коэффициентом потемнения $3/5 = 0{,}6$. Наблюдения Солнца дают величину 0,56, что хорошо согласуется с теоретической оценкой. Закон типа (103), в котором коэффициент потемнения является свободным параметром (см. (97), (99)), широко используется для аппроксимации реального распределения яркости по диску звезды не только в интегральном, но и в монохроматическом свете. Как уже отмечалось, этот линейный закон удовлетворительно аппроксимирует реальное распределение яркости по дискам звезд в широком диапазоне изменения параметров g и T_e.

Потемнение к краю диска звезды связано с тем, что температура в ее атмосфере возрастает с глубиной.

Оптическая глубина $\tau = 1$, с которой наблюдатель регистрирует основное излучение звезды, достигается в разных точках звездного диска на разных радиальных геометрических глубинах, соответствующих разным температурам. В центре диска уровню $\tau = 1$ соответствует слой с наибольшей радиальной геометрической глубиной. Поскольку температура в атмосфере возрастает с геометрической глубиной, наблюдатель регистрирует наибольшую яркость в центре звездного диска. На краю диска луч зрения идет под большим углом к нормали и пересекает атмосферу по хорде. При этом оптическая глубина $\tau = 1$ достигается вдоль хорды, а не вдоль радиуса, что соответствует меньшей радиальной геометрической глубине, т. е. точке, где температура ниже. Поэтому яркость на краю диска меньше, чем в его центре. Заметим, что если бы температура в атмосфере звезды не возрастала, а убывала с глубиной, то на звездном диске наблюдалось бы не потемнение, а поярчание к краю. Эффект поярчания к краю наблюдается в случае солнечной хромосферы, где из-за действия нетепловых механизмов нагрева температура убывает с глубиной.

Поскольку потемнение к краю связано с градиентом температуры в атмосфере звезды, наблюдается следующая закономерность: потемнение к краю для фиксированной длины волны λ наибольшее для звезд поздних спектральных классов, у которых непрозрачность вещества атмосферы наибольшая. Для звезд ранних спектральных классов, у которых вещество атмосфер более прозрачно, эффект потемнения к краю меньше, чем в случае холодных атмосфер звезд поздних спектральных классов. Кроме того, эффект потемнения к краю в среднем убывает с увеличением длины волны для звезд всех спектральных классов.

Мы рассмотрели приближенный закон потемнения к краю (96) в рамках модели серой атмосферы звезды, а также его аппроксимацию линейным законом потемнения (97).

Точный закон потемнения получается путем построения модели атмосферы звезды с последующим вычислением угловой зависимости выходящего излучения. Рассмотрим общую схему расчетов ЛТР-моделей атмосфер. Для вычисления закона потемнения в континууме в случае тонких звездных атмосфер ЛТР-приближение вполне достаточно. Не-ЛТР-модели атмосфер используются в основном для анализа линейчатых спектров звезд (см., например, Сахибуллин, 1997).

Схема расчетов ЛТР-модели атмосферы может быть описана следующим образом (Сахибуллин, 1997).

1. В качестве предварительного шага задается приближенное распределение температуры по глубине, например, в форме (93) (серая модель атмосферы).

2. С предварительным законом распределения температуры интегрируется уравнение гидростатического равновесия:

$$\frac{dP}{d\tau_R} = \frac{g}{\alpha_R}, \tag{104}$$

где P — полное давление, g — ускорение силы тяжести, α_R — росселандовский средний коэффициент поглощения (Соболев, 1967), τ_R — росселандовская средняя оптическая глубина в атмосфере.

3. После нахождения T и P (или N — полной концентрации частиц), можно с помощью формул Больцмана–Саха определить населенности уровней энергии атомов N_l , а затем определить коэффициент поглощения α_ν. При этом коэффициент излучения $\varepsilon_\nu = B_\nu(T)\alpha_\nu$.

4. Знание α_ν, ε_ν позволяет решить уравнение переноса (84) для любой частоты ν. В итоге находится интенсивность $I_\nu(\theta, \tau_\nu)$ для всех точек по глубине атмосферы.

5. Проверяется выполнение условия постоянства потока излучения по глубине:

$$\pi H = \sigma T_e^4. \tag{105}$$

Если поток по глубине постоянен, выбранное предварительное распределение температуры $T(\tau)$ удовлетворительно и вычисления заканчиваются. Если поток не постоянен по глубине, использованное предварительное распределение температуры требует коррекции. Методы уточнения распределения температуры изложены, например, в книге Сахибуллина (1997).

6. С новым законом распределения температуры можно вернуться к шагу 2 и повторить все последующие этапы заново. При этом можно учесть и более тонкие эффекты, например, давление излучения. Повторяя эти итерации до тех пор, пока величина непостоянства потока излучения в атмосфере будет достаточно мала, получаем окончательную модель атмосферы звезды.

Далее вычисляем интенсивность выходящего излучения $I_\nu(\theta, 0)$ и тем самым получаем окончательный закон потемнения к краю звездного диска. Для применения в теории затменных переменных звезд точный закон потемнения аппроксимируется либо линейным, либо более сложным параметрическим законом. Ввиду сравнительно слабой чувствительности затменной кривой блеска к конкретному закону потемнения, часто при анализе кривых блеска затменных двойных систем вполне достаточно использовать аппроксимацию точного закона линейным законом потемнения (97).

Следует отметить, что при описании схемы расчета ЛТР-модели атмосферы мы, для простоты изложения, не учли ряд важных факторов. Как уже упоминалось в уравнении переноса (84), мы пренебрегли членом в правой части, ответственным за рассеяние излучения (который пропорционален усредненной по углам интенсивности излучения I_ν). Кроме того, мы не учитывали покровный эффект от многих линий поглощения, важный для звезд поздних спектральных классов: излучение, рассеянное в частотах линий, возвращается частично назад, в атмосферу, дополнительно нагревая ее и меняя температурное распределение. К настоящему времени созданы эффективные компьютерные программы для расчета весьма совершенных моделей тонких звездных атмосфер (см., например, Сахибуллин, 1997). Более того, рассчитаны конкретные ЛТР-модели атмосфер звезд с учетом покровного эффекта миллионами линий в широком диапазоне изменения g и T_e (см., например, Kurucz, 1979, 1991). Эти расчеты дают как распределения энергии в спектрах звезд разных спектральных классов и классов светимостей, включая профили бальмеровских линий, так и распределения яркости по диску звезды. Аппроксимация этих распределений яркости линейным и нелинейным законами позволила создать детальные таблицы коэффициентов потемнения к краю в линейном законе и параметров нелинейного закона потемнения.

Как уже отмечалось, угловую зависимость интенсивности излучения, выходящего из тонкой звездной атмосферы, в первом приближении можно аппроксимировать линейным по $\mu=\cos\theta$ законом:

$$I(\mu) = I(1)(1 - x + x\mu) = I(1)[1 - x(1 - \mu)].$$

Поскольку $\mu = \sqrt{1 - \xi^2/r^2}$, это выражение определяет распределение яркости по диску звезды, где ξ — полярное расстояние точки на диске. Более точно интенсивность выходящего излучения можно аппроксимировать нелинейным по μ законом. Например, можно использовать разложение функции $I(\mu)$ в ряд по степеням $(1 - \mu)$:

$$I(\mu) = I(1)[1 - x_1(1 - \mu) - x_2(1 - \mu)^2 - x_3(1 - \mu)^3 - \ldots].$$

Поскольку закон потемнения к краю $I(\mu)$ используется для решения ряда обратных параметрических задач (интерпретация кривых блеска затменных систем, анализ покрытий звезд Луной, интерпретация интерферометрических наблюдений звезд), исследователи стремятся оптимально представить точный закон потемнения $I(\mu)$ приближенным законом, зависящим от небольшого числа параметров. Например, Вант-Вир (Van't Veer, 1975), используя модели серых звездных атмосфер, получил следующую аппроксимацию для функции $I(\mu)$:

$$I(\mu) = I(1)[1 - v(1-\mu) - v'(1-\mu)^3],$$

а Клинглесмит и Собески (Klinglesmith and Sobieski, 1970) нашли аппроксимацию

$$I(\mu) = I(1)[1 - A(1-\mu) - B\mu \lg \mu].$$

В этих формулах v, v', A, B — свободные параметры, аналогичные коэффициенту x в линейном законе потемнения. Они рассчитываются исходя из моделей тонких звездных атмосфер.

На необходимость аппроксимации нелинейным законом интенсивности выходящего излучения в случае тонких звездных атмосфер указывалось в работах Григара (Grygar, 1965) и Шульберга (1973). Некоторые авторы (Manduca et al., 1977, Wade and Rucinski, 1985, Claret and Gimenez, 1992) использовали квадратичную аппроксимацию:

$$I(\mu) = I(1)[1 - a(1-\mu) - b(1-\mu)^2].$$

Таблицы коэффициентов a и b рассчитывались на основе использования моделей тонких звездных атмосфер. В работе (Diaz-Cordoves and Gimenez, 1992) с использованием моделей тонких звездных атмосфер Куруца (Kurutz, 1979) было показано, что для горячих звезд с эффективными температурами выше 8500 K наилучшая аппроксимация теоретической интенсивности выходящего излучения достигается с помощью формулы

$$I(\mu) = I(1)[1 - \mathrm{c}(1-\mu) - d(1-\sqrt{\mu})].$$

В то же время для холодных звезд с конвективными оболочками наилучшим приближением является квадратичный закон потемнения. Линейный закон потемнения лучше всего подходит для звезд солнечного типа с эффективными температурами в интервале от 5500 до 6000 K.

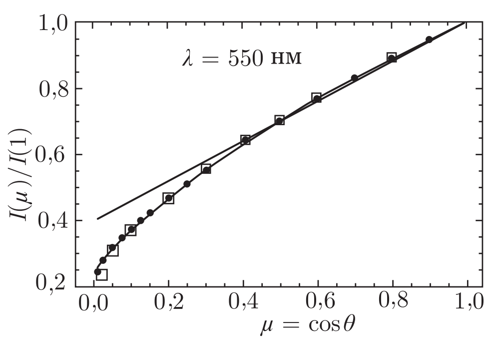


Рис. 9. Потемнение к краю диска Солнца на длине волны $\lambda = 5500\,\mathring{A}$. Квадраты соответствуют наблюдениям, точки описывают теоретический закон потемнения к краю в соответствии с моделью Куруца (Kurucz, 1991). Сплошные линии описывают линейный и нелинейный (логарифмический) аппроксимирующие законы потемнения (из статьи van Hamme, 1993)

В работе Ван Хамма (Van Hamme, 1993) с использованием наиболее современных моделей тонких звездных атмосфер (Kurucz, 1991, модели ATLAS) были рассчитаны подробные таблицы линейных и нелинейных коэффициентов потемнения для звезд солнечного химического состава в широком диапазоне эффективных температур и ускорений силы тяжести ($T_{\mathrm{ef}} = 3500$–50000 K, $\lg g = 0{,}0$–$5{,}0$). В этой работе приведены таблицы коэффициентов потемнения (для линейного, логарифмического законов и закона квадратного корня) как для болометрического излучения звезды, так и для монохроматического излучения, а также даны коэффициенты потемнения, усредненные по полосам пропускания известных фотометрических систем.

Знание болометрических коэффициентов потемнения необходимо для корректного расчета эффектов отражения в затменных двойных системах (см. ниже).

На рис. 9, взятом из работы Ван Хамма (Van Hamme, 1993), показано сравнение наблюдаемого потемнения к краю по диску Солнца для $\lambda = 5500\mathring{A}$ с теоретическим, рассчитанным в рамках модели Куруца (Kurutz, 1991), а также показаны аппроксимации этого закона потемнения линейным и логарифмическим законами. Видно, что логарифмический закон очень хорошо аппроксимирует как теоретический, так и наблюдаемый законы потемнения к краю. Линейная аппроксимация показывает значительные отличия от наблюдаемого и теоретического законов потемнения. Следует отметить, однако, что эти отличия значительны лишь на краю диска, когда $\mu = \cos\theta < 0{,}2$, что соответствует $\theta > 78^\circ$ и расстоянию от центра диска звезды $\xi > 0{,}98r$, где r — радиус звезды.

Ввиду того, что потемнение к краю влияет на кривую блеска при затмении значительно слабее, чем геометрические параметры (радиусы звезд и наклонение орбиты), использование линейного приближения для закона потемнения к краю по дискам звезд с тонкими атмосферами во многих случаях представляется удовлетворительным. Для поиска нелинейных законов потемнения из затменных кривых блеска необходимо повышение точности фотометрических наблюдений на порядок величины, что можно сделать с бортов специальных космических обсерваторий (например, фотометрических спутников Corot и Kepler).

4. Прямой метод интерпретации кривой блеска затменной системы двух сферических звезд на круговой орбите

Рассмотрим кривую блеска затменной системы двух сферических звезд на круговой орбите. Эффектами взаимной близости компонент пренебрегаем — блеск вне затмений постоянен. Актуальность рассмотрения такой модели обеспечивается открытием затмений звезд экзопланетами.

На рис. 10 приведена соответствующая кривая блеска в интенсивностях: $\ell = 2{,}512^{m_0 - m}$, где m — наблюдаемая звездная величина системы, m_0 — звездная величина вне затмений. Блеск вне затмения полагается равным единице. По оси абсцисс здесь отложен угол θ относительного поворота компонент (так называемый фазовый угол),

$$\theta = \frac{360^\circ}{P}(t - t_0),$$

где P — орбитальный период системы, t — текущее время, t_0 — момент времени, соответствующий соединению компонент в главном (более глубоком) минимуме.

В нашей модели мы будем рассматривать движение дисков звезд в проекции на картинную плоскость, т. е. плоскость, перпендикулярную лучу зрения.

На рис. 10 показана геометрия затмения дисков звезд. Здесь r_1 и r_2 — радиусы большей и меньшей звезды соответственно, Δ — расстояние между центрами дисков звезд, $S(\Delta)$ — область перекрытия дисков звезд, определяющая, при заданном распределении яркости по диску задней звезды, потерю блеска при затмении $1 - \ell(\theta)$.

Чтобы получить связь между величинами θ и Δ рассмотрим рис. 11. Пусть звезда S_1 движется по круговой орбите O_1N около звезды S. Плоскость орбиты O_1N образует угол i с картинной плоскостью. Кривая ON является проекцией орбиты O_1N на картинную плоскость. Начальный момент t_0, соответствующий

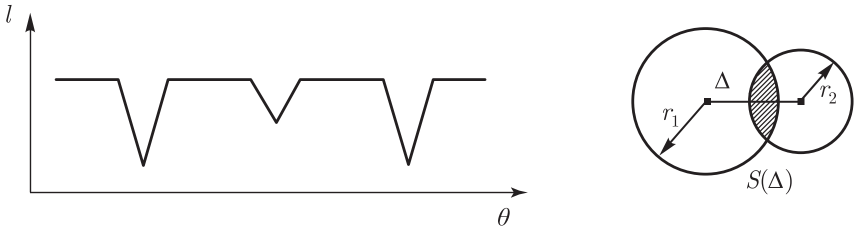


Рис. 10. Кривая блеска затменной системы. Справа приведена схема затмений. Уменьшение блеска при затмении определяется областью перекрытия дисков звезд S

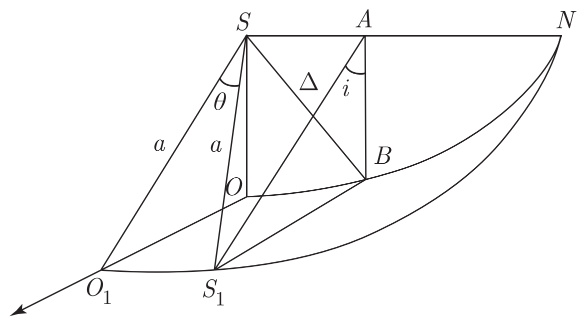


Рис. 11. К выводу зависимости между углом относительного поворота θ компонент ТДС на круговых орбитах и расстоянием Δ между центрами дисков звезд

моменту соединения компонент (расстояние между центрами дисков звезд S_1 и S минимально), соответствует положению центра диска звезды S_1 в точке O_1. Моменту соединения соответствует середина главного затмения (в случае круговой орбиты).

Выйдя из точки O_1, соответствующей моменту соединения, звезда S_1 за время $t - t_0$ прошла по орбите путь O_1S_1, а ее радиус-вектор $\mathbf{a}$ повернулся на фазовый угол θ. Как следует из рис. 11, текущее расстояние между центрами дисков звезд Δ выражается через стороны прямоугольного треугольника SAB, лежащего в картинной плоскости, следующим образом:

$$\Delta^2 = AS^2 + AB^2.$$

При этом, из прямоугольного треугольника SAS_1 (прямая AS_1 параллельна прямой SO_1) следует, что $AS = a\sin\theta$, где a — радиус относительной орбиты (модуль радиуса-вектора звезды $\mathbf{a}$). В то же время из прямоугольных треугольников SAS_1 и AS_1B следует, что $AB = a\cos\theta\cos i$.

Следовательно,

$$\Delta^2 = a^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta\cos^2 i).$$

Взяв величину радиуса орбиты a за единицу длины и проведя элементарные преобразования, получаем окончательную связь между Δ и θ:

$$\Delta^2 = \cos^2 i + \sin^2 i \sin^2\theta. \tag{106}$$

Рассмотрим затмения двух сферических звезд с тонкими атмосферами на круговой орбите. В качестве функций распределения яркости по дискам звезд возьмем теоретические функции, полученные в результате построения модели звездной атмосферы, аппроксимированные, например, линейным законом потемнения (см. (97) и (88)).

$$I_1(\xi) = I_0^{(1)} \left(1 - x_1 + x_1 \sqrt{1 - \frac{\xi^2}{r_1^2}} \right), \tag{107}$$

$$I_2(\rho) = I_0^{(2)} \left(1 - x_2 + x_2 \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{r_2^2}} \right). \tag{108}$$

Здесь r_1 и r_2 — радиусы звезд в долях радиуса относительной орбиты a; как уже отмечалось, индекс «1» приписывается звезде большого радиуса, а индекс «2» — звезде меньшего радиуса. $I_0^{(1)}, I_0^{(2)}$ — яркости в центрах дисков большей и меньшей звезды соответственно; ξ, ρ — полярные расстояния до текущей точки на диске большей и меньшей звезды (выраженные в долях радиуса относительной орбиты); x_1, x_2 — коэффициенты потемнения для большей и меньшей звезды соответственно. В дальнейшем всем величинам, соответствующим звезде большего радиуса будем приписывать индекс «1», а звезде меньшего радиуса — индекс «2». Искомыми параметрами в нашей модели являются: r_1, r_2, i, L_1, L_2, x_1, x_2, где i — наклонение орбиты, L_1, L_2 — светимости компонент (в интервале частот, соответствующем рассматриваемой кривой блеска), выраженные в долях суммарной светимости системы вне затмения. Таким образом, единицей длины в нашей модели является радиус относительной орбиты ($a = 1$), а единицей светимости — суммарная светимость компонент ($L_1 + L_2 = 1$). Мы предполагаем, что в системе отсутствует «третий свет», который мог бы быть обусловлен присутствием в системе третьей незатмевающейся звезды.

Запишем три уравнения, определяющие кривую блеска.

1. Условие нормировки суммарной светимости компонент на единицу, описывающее внезатменный блеск системы:

$$2\pi \int\limits_0^{r_1} I_1(\xi)\xi\, d\xi + 2\pi \int\limits_0^{r_2} I_2(\rho)\rho\, d\rho = 1. \tag{109}$$

2. Потеря блеска системы в главном минимуме, обусловленная взаимным перекрытием дисков звезд:

$$1 - l_1(\theta) = \iint\limits_{S(\Delta)} I_2(\rho)\, dS. \tag{110}$$

3. Потеря блеска во вторичном минимуме кривой блеска:

$$1 - l_2(\theta) = \iint\limits_{S(\Delta)} I_1(\xi)\, dS. \tag{111}$$

В уравнении (109), в силу круговой симметрии на дисках звезд, выполнено интегрирование по угловым переменным.

К уравнениям (109)–(111) необходимо приписать кинематическое соотношение, связывающее между собой переменные Δ и θ (см. (106)):

$$\Delta^2 = \cos^2 i + \sin^2 i \sin^2 \theta. \tag{112}$$

Угол $\theta = (2\pi/P)(t - t_0)$ описывает взаимную ориентацию звезд в пространстве, величина Δ описывает взаимное положение дисков звезд в картинной плоскости.

Уравнения (109)–(112) полностью описывают наблюдаемую кривую блеска и содержат семь искомых параметров: r_1, r_2, i, L_1, L_2, x_1, x_2. Если подставить под знаки интегрирования функции распределения яркости, аппроксимированные линейными законами потемнения (107), (108), и выполнить интегрирование, то получается система нелинейных алгебраических уравнений относительно семи параметров, которую можно решать стандартными методами, например, методом наименьших квадратов. Поскольку метод является прямым, т. е. при поиске искомых параметров минимизируется навязка между наблюдаемой и теоретической кривой блеска, а ошибки наблюдаемой кривой блеска можно считать распределенными по нормальному закону, в данном случае имеется возможность корректного нахождения как приближенных значений параметров r_1, r_2, i, L_1, L_2, x_1, x_2, так и их ошибок.

Подставив в уравнение для суммарной светимости компонент выражения для $I_1(\xi)$ и $I_2(\rho)$ (см. формулы (107), (108)) и выполнив соответствующее интегрирование, получим вместо (109):

$$I_0^{(1)}\pi r_1^2\left(1-\frac{x_1}{3}\right)+I_0^{(2)}\pi r_2^2\left(1-\frac{x_2}{3}\right)=1. \tag{113}$$

Для дальнейшего анализа представим условие нормировки (113) в ином виде:

$$I_0^{(1)}(1-x_1)\int\limits_0^{r_1}2\pi\xi d\xi+I_0^{(1)}x_1\int\limits_0^{r_1}2\pi\sqrt{1-\frac{\xi^2}{r_1^2}}\,\xi d\xi+I_0^{(2)}(1-x_2)\int\limits_0^{r_2}2\pi\rho d\rho+{}$$
$$+I_0^{(2)}x_2\int\limits_0^{r_2}2\pi\sqrt{1-\frac{\rho^2}{r_2^2}}\,\rho d\rho=1. \tag{114}$$

Введем новые параметры задачи:

$$X_0^{(1)}=I_0^{(1)}(1-x_1);\quad X_1^{(1)}=I_0^{(1)}x_1;\quad X_0^{(2)}=I_0^{(2)}(1-x_2);\quad X_1^{(2)}=I_0^{(2)}x_2\,. \tag{115}$$

Старые параметры выражаются через новые простыми формулами:

$$I_0^{(1)}=X_0^{(1)}+X_1^{(1)};\quad x_1=\frac{X_1^{(1)}}{X_0^{(1)}+X_1^{(1)}};\quad I_0^{(2)}=X_0^{(2)}+X_1^{(2)};\quad x_2=\frac{X_1^{(2)}}{X_0^{(2)}+X_0^{(2)}}. \tag{116}$$

Тогда, после взятия соответствующих интегралов, условие нормировки суммарной светимости компонент перепишется в следующем виде, куда новые параметры входят линейно:

$$X_0^{(1)}\pi r_1^2+X_1^{(1)}\cdot\frac{2}{3}\,\pi r_1^2+X_0^{(2)}\pi r_2^2+X_1^{(2)}\cdot\frac{2}{3}\,\pi r_2^2=1. \tag{117}$$

Предположим, что уравнение для потери блеска в главном минимуме кривой блеска (110) соответствует случаю, когда большая звезда впереди малой (случай Б $\to$ М, или случай покрытия — occultation). Преобразуем это уравнение:

$$1-l_1(\Delta)=\iint\limits_{S(\Delta)}I_0^{(2)}(1-x_2+x_2\sqrt{1-\frac{\rho^2}{r_2^2}}\,)\,dS=$$
$$=I_0^{(2)}(1-x_2)\iint\limits_{S(\Delta)}dS+I_0^{(2)}x_2\iint\limits_{S(\Delta)}\sqrt{1-\frac{\rho^2}{r_2^2}}\,dS. \tag{118}$$

Введем на диске малой, затмевающейся звезды полярную систему координат с началом в центре диска: ρ, ψ, где ρ — полярное расстояние точки P на диске, ψ — соответствующий полярный угол, отсчитываемый от линии центров дисков компонент (см. рис. 12). Уравнение лимба большей (затмевающей) звезды в этой системе координат запишется в виде $r_1^2 = \rho^2 + \Delta^2 - 2\rho\Delta\cos\psi_1$, где ψ_1 — полярный угол точки, лежащей на лимбе. Отсюда находим:

$$\psi_1 = \arccos\frac{\rho^2 + \Delta^2 - r_1^2}{2\rho\Delta}. \tag{119}$$

Рассмотрим случай $\Delta \geqslant r_1$ (лимб диска затмевающей звезды не переходит через центр диска малой звезды), $\Delta \geqslant r_1 - r_2$ (частные фазы затмения).

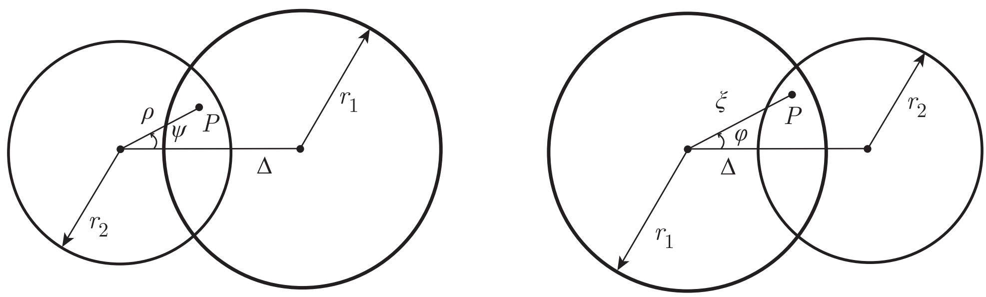


Рис. 12. К вычислению интегралов по области перекрытия дисков компонент. Здесь r_1, r_2 — радиусы компонент ξ, φ и ρ, ψ — полярные углы и расстояния на дисках звезд

В этом случае уравнение (118) может быть переписано следующим образом:

$$1 - l_1(\Delta) = I_0^{(2)}(1 - x_2)\int\limits_{\Delta - r_1}^{r_2}\int\limits_0^{\psi_1} 2\rho\, d\rho\, d\psi + I_0^{(2)} x_2 \int\limits_{\Delta - r_1}^{r_2}\int\limits_0^{\psi_1} 2\sqrt{1 - \frac{\rho^2}{r_2^2}}\,\rho\, d\rho\, d\psi. \tag{120}$$

После выполнения интегрирования по угловой переменной, имеем (введя новые параметры):

$$1 - l_1(\Delta) = X_0^{(2)}\int\limits_{\Delta - r_1}^{r_2} 2\rho\psi_1 d\rho + X_1^{(2)}\int\limits_{\Delta - r_1}^{r_2} 2\rho\sqrt{1 - \frac{\rho^2}{r_2^2}}\,\psi_1 d\rho; \quad \Delta \geqslant r_1; \quad \Delta \geqslant r_1 - r_2. \tag{121}$$

Рассмотрим теперь случай $\Delta < r_1$ (край диска большей звезды заходит за центр диска меньшей). В этом случае область интегрирования $\mathrm{S}(\Delta)$ разбивается на две подобласти, и уравнение (118) перепишется в виде:

$$1 - l_1(\Delta) = X_0^{(2)}\pi(r_1 - \Delta)^2 + X_0^{(2)}\int\limits_{r_1 - \Delta}^{r_2} 2\psi_1\rho d\rho +$$
$$+ X_1^{(2)}\frac{2}{3}\pi(r_1 - \Delta)^2 + X_1^{(2)}\int\limits_{r_1 - \Delta}^{r_2} 2\rho\sqrt{1 - \frac{\rho^2}{r_2^2}}\,\psi_1 d\rho, \quad \Delta < r_1, \quad \Delta \geqslant r_1 - r_2. \tag{122}$$

Рассмотрим теперь случай $\Delta < r_1 - r_2$ (фазы полного затмения малой звезды большой). В этом случае наблюдатель видит лишь большую звезду, и потеря блеска постоянна и равна светимости меньшей звезды:

$$1 - l_1(\Delta) = X_0^{(2)}\pi r_2^2 + X_1^{(2)}\cdot\frac{2}{3}\pi r_2^2; \quad \Delta < r_1 - r_2. \tag{123}$$

Преобразуем уравнение (111) для потери блеска во вторичном минимуме, соответствующее прохождению диска малой звезды по диску большой (случай М $\to$ Б, прохождение, transit):

$$1 - l_2(\Delta) = \iint\limits_{S(\Delta)} I_0^{(1)}\left(1 - x_1 + x_1\sqrt{1 - \frac{\xi^2}{r_1^2}}\right) dS =$$

$$= X_0^{(1)} \iint\limits_{S(\Delta)} dS + X_1^{(1)} \iint\limits_{S(\Delta)} \sqrt{1 - \frac{\xi^2}{r_1^2}}\, dS. \quad (124)$$

Введем полярную систему координат на диске затмеваемой, большей звезды с началом в центре этого диска: ξ, φ, где ξ — полярное расстояние, φ — полярный угол, отсчитываемый от линии, соединяющей центры дисков. Из уравнения лимба меньшей, затмевающей звезды имеем

$$\varphi_1 = \arccos \frac{\xi^2 + \Delta^2 - r_2^2}{2\xi\Delta}, \quad (125)$$

где φ_1 — полярный угол точки на лимбе меньшей звезды.

Рассуждения, аналогичные предыдущим, приводят к следующим результатам:

$$1 - l_2(\Delta) = X_0^{(1)} \int\limits_{\Delta - r_2}^{r_1} 2\varphi_1 \xi d\xi + X_1^{(1)} \int\limits_{\Delta - r_2}^{r_1} 2\xi\sqrt{1 - \frac{\xi^2}{r_1^2}}\,\varphi_1 d\xi; \quad \Delta \geqslant r_2, \quad \Delta \geqslant r_1 - r_2.$$

Это уравнение описывает частные фазы затмения в случае, когда лимб затмевающей (меньшей) звезды не переходит через центр диска большей звезды. Кольцевые фазы затмения ($\Delta < r_1 - r_2$) в этом случае описываются уравнением:

$$1 - l_2(\Delta) = X_0^{(1)} \int\limits_{\Delta - r_2}^{\Delta + r_2} 2\varphi_1 \xi d\xi + X_1^{(1)} \int\limits_{\Delta - r_2}^{\Delta + r_2} 2\xi\sqrt{1 - \frac{\xi^2}{r_1^2}}\,\varphi_1 d\xi; \quad \Delta \geqslant r_2, \quad \Delta < r_1 - r_2. \quad (126)$$

В случае $\Delta < r_2$ (лимб меньшей звезды заходит за центр диска большей) область интегрирования S(Δ) разбивается на две подобласти, и уравнения для частных и кольцевых фаз затмения имеют вид:

$$1 - l_2(\Delta) = X_0^{(1)}\pi(r_2 - \Delta)^2 + X_0^{(1)} \int\limits_{r_2 - \Delta}^{r_1} 2\varphi_1 \xi d\xi +$$

$$+ X_1^{(1)} \cdot \frac{2}{3}\pi(r_2 - \Delta)^2 + X_1^{(1)} \cdot \int\limits_{r_2 - \Delta}^{r_1} 2\xi\sqrt{1 - \frac{\xi^2}{r_1^2}}\,\varphi_1 d\xi; \quad \Delta < r_2, \quad \Delta \geqslant r_1 - r_2, \quad (127)$$

$$1 - l_2(\Delta) = X_0^{(1)}\pi(r_2 - \Delta)^2 + X_0^{(1)} \int\limits_{r_2 - \Delta}^{r_2 + \Delta} 2\varphi_1 \xi d\xi +$$

$$+ X_1^{(1)} \cdot \frac{2}{3}\pi(r_2 - \Delta)^2 + X_1^{(1)} \cdot \int\limits_{r_2 - \Delta}^{r_2 + \Delta} 2\xi\sqrt{1 - \frac{\xi^2}{r_1^2}}\,\varphi_1 d\xi; \quad \Delta < r_2, \quad \Delta < r_1 - r_2. \quad (128)$$

Таким образом, система уравнений, описывающая кривую блеска, записывается в виде:

$$1 - l_1(\Delta) = \begin{cases} X_0^{(2)} \int\limits_{\Delta - r_1}^{r_2} 2\rho\psi_1 d\rho + X_1^{(2)} \int\limits_{\Delta - r_1}^{r_2} 2\rho\sqrt{1 - \frac{\rho^2}{r_2^2}}\, \psi_1 d\rho; \quad \Delta \geqslant r_1, \quad \Delta \geqslant r_1 - r_2, \\ X_0^{(2)}\pi(r_1 - \Delta)^2 + X_0^{(2)} \int\limits_{r_1 - \Delta}^{r_2} 2\psi_1 \rho d\rho + \\ + X_1^{(2)} \frac{2}{3}\pi(r_1 - \Delta)^2 + X_1^{(2)} \int\limits_{r_1 - \Delta}^{r_2} 2\rho\sqrt{1 - \frac{\rho^2}{r_2^2}}\, \psi_1 d\rho; \quad \Delta < r_1,\ \Delta \geqslant r_1 - r_2, \\ X_0^{(2)}\pi r_2^2 + X_1^{(2)} \frac{2}{3}\pi r_2^2; \qquad \Delta < r_1 - r_2, \end{cases} \tag{129}$$

$$1 - l_2(\Delta) = \begin{cases} X_0^{(1)} \int\limits_{\Delta - r_2}^{r_1} 2\xi\varphi_1 d\xi + X_1^{(1)} \int\limits_{\Delta - r_2}^{r_1} 2\xi\sqrt{1 - \frac{\xi^2}{r_1^2}}\, \varphi_1 d\xi; \quad \Delta \geqslant r_2, \quad \Delta \geqslant r_1 - r_2, \\ X_0^{(1)} \int\limits_{\Delta - r_2}^{\Delta + r_2} 2\xi\varphi_1 d\xi + X_1^{(1)} \int\limits_{\Delta - r_2}^{\Delta + r_2} 2\xi\sqrt{1 - \frac{\xi^2}{r_1^2}}\, \varphi_1 d\xi; \quad \Delta \geqslant r_2, \quad \Delta < r_1 - r_2, \\ X_0^{(1)}\pi(r_2 - \Delta)^2 + X_0^{(1)} \int\limits_{r_2 - \Delta}^{r_1} 2\varphi_1 \xi d\xi + \\ + X_1^{(1)} \frac{2}{3}\pi(r_2 - \Delta)^2 + X_1^{(1)} \int\limits_{r_2 - \Delta}^{r_1} 2\xi\sqrt{1 - \frac{\xi^2}{r_1^2}}\, \varphi_1 d\xi; \quad \Delta < r_2, \quad \Delta \geqslant r_1 - r_2, \\ X_0^{(1)}\pi(r_2 - \Delta)^2 + X_0^{(1)} \int\limits_{r_2 - \Delta}^{r_2 + \Delta} 2\varphi_1 \xi d\xi + \\ + X_1^{(1)} \frac{2}{3}\pi(r_2 - \Delta)^2 + X_1^{(1)} \int\limits_{r_2 - \Delta}^{r_2 + \Delta} 2\xi\sqrt{1 - \frac{\xi^2}{r_1^2}}\, \varphi_1 d\xi; \quad \Delta < r_2, \quad \Delta < r_1 - r_2, \end{cases} \tag{130}$$

$$X_0^{(1)}\pi r_1^2 + X_1^{(1)} \frac{2}{3}\pi r_1^2 + X_0^{(2)}\pi r_2^2 + X_1^{(2)} \frac{2}{3}\pi r_2^2 = 1, \tag{131}$$

$$\Delta^2 = \cos^2 i + \sin^2 i \sin^2 \theta. \tag{132}$$

Легко видеть, что в эту систему уравнений параметры $X_0^{(1)}, X_1^{(1)}, X_0^{(2)}, X_1^{(2)}$ входят линейно. В коэффициенты при этих линейных параметрах нелинейным образом входят параметры r_1, r_2, i. Таким образом, неизвестными в нашем случае являются семь параметров, четыре из которых $(X_0^{(1)}, X_1^{(1)}, X_0^{(2)}, X_1^{(2)})$ входят в задачу интерпретации кривой блеска линейно и три $(r_1,\ r_2,\ i)$ — нелинейно.

Такая специфика задачи позволяет применить к ее решению современные статистические методы и не только определять искомые приближенные значения параметров, но и находить доверительные интервалы для них в точной статистической постановке задачи. Кроме того, при этом оказывается возможным осуществлять проверку статистической гипотезы об адекватности модели используемым наблюдательным данным (кривой блеска).

Запишем уравнения (129)–(131), описывающие кривую блеска, в следующем виде:

$$\begin{cases} 1 - l_1(\Delta) = X_0^{(2)} \sum\limits_P H_P(r_1, r_{2,} i) + X_1^{(2)} \sum\limits_q H_q(r_1, r_2, i), \\ 1 - l_2(\Delta) = X_0^{(1)} \sum\limits_P G_P(r_1, r_2, i) + X_1^{(1)} \sum\limits_q G_q(r_1, r_2, i), \\ X_0^{(1)} = \dfrac{1}{\pi r_1^2} - X_1^{(1)} \cdot \dfrac{2}{3} - X_0^{(2)} \left(\dfrac{r_2}{r_1}\right)^2 - X_1^{(2)} \dfrac{2}{3} \left(\dfrac{r_2}{r_1}\right)^2, \end{cases} \tag{133}$$

где мы выразили один искомый линейный параметр $X_0^{(1)}$ через другие параметры, используя условие нормировки (131). Тогда окончательная система уравнений, описывающих главный и вторичный минимумы кривой блеска, с учетом условия нормировки на единицу внезатменного блеска запишется в виде:

$$\begin{cases} 1 - l_1(\Delta) = X_0^{(2)} \sum\limits_P H_P + X_1^{(2)} \sum\limits_q H_q, \\ 1 - l_2(\Delta) = \left[\dfrac{1}{\pi r_1^2} - X_1^{(1)} \cdot \dfrac{2}{3} - X_0^{(2)} \left(\dfrac{r_2}{r_1}\right)^2 - X_1^{(2)} \cdot \dfrac{2}{3} \left(\dfrac{r_2}{r_1}\right)^2\right] \sum\limits_P G_P + X_1^{(1)} \sum\limits_q G_q, \end{cases}$$

$$\Delta^2 = \cos^2 i + \sin^2 i \sin^2 \theta. \tag{134}$$

В этой системе уравнений содержится шесть независимых искомых параметров: параметры $X_0^{(2)}, X_1^{(2)}, X_1^{(1)}$, которые входят в задачу линейно, и параметры r_1, r_2, i которые входят нелинейно в коэффициенты при линейных параметрах. Вид этих коэффициентов различен, в зависимости от соотношения величин Δ, r_1, r_2 (см. уравнения (129)–(131)). Как следует из уравнений (129)–(131), коэффициенты (функции) H_P, H_q, G_P, G_q имеют следующие выражения:

$$\begin{aligned} H_P &= \int\limits_{\Delta - r_1}^{r_2} 2\rho\psi_1 d\rho; \quad \pi(r_1 - \Delta)^2; \quad \int\limits_{r_1 - \Delta}^{r_2} 2\rho\psi_1 d\rho; \quad \pi r_2^2, \\ H_q &= \int\limits_{\Delta - r_1}^{r_2} 2\rho\sqrt{1 - \frac{\rho^2}{r_2^2}}\,\psi_1 d\rho; \quad \frac{2}{3}\pi(r_1 - \Delta)^2; \quad \int\limits_{r_1 - \Delta}^{r_2} 2\rho\sqrt{1 - \frac{\rho^2}{r_2^2}}\,\psi_1 d\rho; \quad \frac{2}{3}\pi r_2^2, \\ G_P &= \int\limits_{\Delta - r_2}^{r_1} 2\varphi_1 \xi d\xi; \quad \int\limits_{\Delta - r_2}^{\Delta + r_2} 2\xi\varphi_1 d\xi; \quad \pi(r_2 - \Delta)^2; \quad \int\limits_{r_2 - \Delta}^{r_1} 2\varphi_1 \xi d\xi; \quad \int\limits_{r_2 - \Delta}^{r_2 + \Delta} 2\xi\varphi_1 d\xi, \\ G_q &= \int\limits_{\Delta - r_2}^{r_1} 2\xi\sqrt{1 - \frac{\xi^2}{r_1^2}}\,\varphi_1 d\xi; \quad \int\limits_{\Delta - r_2}^{\Delta + r_2} 2\xi\sqrt{1 - \frac{\xi^2}{r_1^2}}\,\varphi_1 d\xi; \quad \frac{2}{3}\pi(r_2 - \Delta)^2; \\ &\int\limits_{r_2 - \Delta}^{r_1} 2\xi\sqrt{1 - \frac{\xi^2}{r_1^2}}\,\varphi_1 d\xi; \quad \int\limits_{r_2 - \Delta}^{r_2 + \Delta} 2\xi\sqrt{1 - \frac{\xi^2}{r_1^2}}\,\varphi_1 d\xi. \end{aligned} \tag{135}$$

То есть функции H_P, H_q, G_P, G_q представляются либо явными аналитическими выражениями через параметры r_1, r_2, i, либо выражаются в виде квадратур. Вычисление этих квадратур легко выполняется численно на современных компьютерах (с очень высокой точностью). В работах (Абубекеров и др., 2008а, 2009б) приведен вывод расчетных формул для классической затменной двойной системы, в том числе, в случае квадратичного закона потемнения к краю.

Таким образом, коэффициенты при линейных параметрах в уравнениях (134) легко вычисляются для любых r_1, r_2, i. При фиксированных r_1, r_2, i уравнения (134) — линейные алгебраические уравнения относительно параметров $X_0^{(2)}$, $X_1^{(2)}$, $X_1^{(1)}$. Поэтому при фиксированных r_1, r_2, i решение системы уравнений (134) можно легко найти стандартным методом наименьших квадратов. При этом, поскольку минимизация по линейным параметрам не изменяет закона статистического распределения соответствующей случайной величины (невязки), а лишь уменьшает число степеней свободы этого распределения, невязки, минимальные по линейным параметрам, могут быть использованы для нахождения доверительных областей нелинейных параметров r_1, r_2, i. Для этого надо, перебирая по параметрам r_1, r_2, i, построить поверхность функционала невязок, минимальных по линейным параметрам, а затем использовать соответствующие статистические критерии. Перебор по трем нелинейным параметрам при решении системы (134) — очень простая задача. Она легко может быть реализована на современных компьютерах. Таким образом, выбранный нами метод интерпретации кривой блеска позволяет оценивать значения искомых параметров модели и их доверительных интервалов в строгой статистической постановке.

Пусть блеск системы $l(\theta)$ измеряется в некоторых фазах $\{\theta_k\}_{k=1}^{M}$. Значение $l(\theta)$ в каждой фазе θ_k измеряется N_k раз. Будем считать, что при измерении блеска систематические ошибки отсутствуют, а случайные ошибки распределены нормально. Принято считать, что дисперсии σ_k^2 ошибок наблюдений в фазах θ_k пропорциональны величинам $l_k^q : \sigma_k^2 = l_k^q \sigma^2$, $q = 0, 1, 2$ (Linnel and Proctor, 1970), где l_k — величина истинного блеска (интенсивности) системы в фазе θ_k. Значение параметра q определяется способом регистрации излучения. При $q = 0$ имеем ошибки, постоянные в шкале интенсивностей, а при $q = 2$ — ошибки, постоянные в шкале звездных величин. Практически величины l_k неизвестны, но в случае достаточно больших N_k и точных наблюдений средние значения наблюдений в соответствующих фазах могут служить их хорошей оценкой. В соответствии с этим, в случаях $q = 1, 2$ мы традиционно будем использовать вместо l_k их оценки.

Целью интерпретации кривой блеска является получение оценок величин r_1, r_2, i, определяющих геометрию системы, а также области допустимых значений этих величин, при этом линейные параметры $X_0^{(1)}$, $X_1^{(1)}$, $X_0^{(2)}$, $X_1^{(2)}$также неизвестны. Задаваясь заранее некоторым уровнем доверия $0 < \gamma < 1$, например, $\gamma = 0{,}5$, по совокупности наблюдательных данных (кривой блеска) в трехмерном пространстве параметров r_1, r_2, i строится область D такая, что вероятность того, что область D содержит точные значения параметров $\overline{r}_1$, $\overline{r}_2$, $\overline{i}$, равна γ: $P\left(D \ni \left\{\overline{r}_1,\ \overline{r}_2, \overline{i}\right\}\right) = \gamma$.

Задача построения доверительной области D тесно связана с задачей проверки статистической гипотезы о том, что геометрические параметры системы равны заданным числам $r_1 = \overline{r}_1$, $r_2 = \overline{r}_2$, $i = \overline{i}$ при произвольных значениях параметров $X_0^{(1)}$, $X_1^{(1)}$, $X_0^{(2)}$, $X_1^{(2)}$, совокупность которых мы обозначим через X.

Пусть ξ_k^j — значение j-го измерения кривой блеска ($j = 1{,}2\ldots, N_k$) в фазе θ_k, независимо от того, к какому из двух минимумов блеска они относятся. Пусть $l_k(X, r_1, r_2, i)$ — величина теоретического блеска модельной двойной системы в фазе θ_k при геометрии r_1, r_2, i и параметрах X, вычисляемая по формулам (134). Пусть всего имеется M фаз.

Для проверки сложной гипотезы о равенстве геометрических параметров фиксированным значениям r_1, r_2, i против сложной гипотезы о независимости блеска в различных фазах можно применить метод отношения максимумов правдоподобия (см., например, Уилкс, 1967). Этот метод приводит к критерию, основанному на значении случайной величины

$$\Delta_1 = \frac{\sum\limits_{k=1}^{M} \frac{N_k}{l_k^q} \left[\overline{\xi}_k - l_k\left(\widehat{X},\ r_1,\ r_2,\ i\right)\right]^2}{\sum\limits_{k=1}^{M} \frac{N_k\,(N_k-1)}{l_k^q} \overline{\sigma}_k^2} \cdot \frac{N-M}{M-3}, \tag{136}$$

где $\overline{\xi}_k = \frac{1}{N_k}\sum\limits_{j=1}^{N_k} \xi_k^j$ — нормальные точки кривой блеска, величины $\overline{\sigma}_k^2 = \frac{1}{N_k\,(N_k-1)}\sum\limits_{j=1}^{N_k}\left(\xi_k^j - \overline{\xi}_k\right)^2$ — оценки дисперсий нормальных точек, $N = \sum N_k$ — полное число измерений, $\widehat{X}$ — значения линейных параметров X, при которых достигает своего минимума по X квадратичная форма

$$S = \sum_{k=1}^{M} \frac{N_k}{l_k^q} \left(\overline{\xi}_k - l_k\,(X,\ r_1,\ r_2,\ i)\right)^2 \tag{137}$$

при выполнении условия нормировки (131) (в уравнениях (134) условие нормировки (131) уже использовано для исключения одного линейного параметра $X_0^{(1)}$).

Гипотеза о равенстве $r_1 = \overline{r}_1,\ r_2 = \overline{r}_2,\ i = \overline{i}$ отвергается, если величина невязки (статистики) Δ_1 больше некоторого критического значения Δ_0 и принимается в противоположном случае. Величина критического уровня Δ_0 выбирается таким образом, чтобы вероятность отвергнуть гипотезу в случае ее истинности (т. е. сделать ошибку первого рода) была равна $\alpha = 1 - \gamma$, т. е. $P\left(\Delta_1 > \Delta_0 | r_1 = \overline{r}_1,\ r_2 = \overline{r}_2\ i = \overline{i}\right) = \alpha = 1 - \gamma$. Случайная величина Δ_1 имеет распределение Фишера $F_{M-3,N-M}$ (Уилкс, 1967). Степень свободы $M-3$ этого распределения, также как и множитель $(M-3)^{-1}$ в выражении для Δ_1 (см. (136)) обусловлены минимизацией квадратичной формы S на многообразии трех независимых линейных параметров $X_1^{(1)},\ X_0^{(2)},\ X_1^{(2)}$.

Зададимся величиной $0 < \gamma = 1 - \alpha < 1$ (величину α называют уровнем значимости статистического критерия). Пользуясь таблицами распределения Фишера, можно найти такое число Δ_0, что вероятность случайной величины Δ_1 быть больше Δ_0 равна α.

Рассмотрим теперь множество D тех совокупностей параметров $r_1,\ r_2,\ i$, для которых $\Delta_1 \leqslant \Delta_0 = F_{M-3,N-M,\alpha}$. Тогда, согласно известной теореме (Уилкс, 1967), множество D является доверительным множеством с уровнем доверия $\gamma = 1 - \alpha$ для параметров $\overline{r}_1,\ \overline{r}_2,\ \overline{i}$, т. е. случайная область D содержит истинные значения $\overline{r}_1,\ \overline{r}_2,\ \overline{i}$, с вероятностью γ. Таким образом, для построения доверительного множества D достаточно уметь минимизировать квадратичную форму (137) при условии нормировки (131) по линейным параметрам X при любых значениях $r_1,\ r_2,\ i$. Тогда перебором значений $r_1,\ r_2,\ i$ с использованием статистики Δ_1 (см. (136)) можно построить доверительное множество D для этих параметров.

Задача минимизации квадратичной формы (137) при условии нормировки (131) легко может быть решена, если, используя (131), выразить один параметр (например, $X_0^{(1)}$) через остальные (см. уравнения (133)), подставить в уравнения для кривой блеска (см. (134)) и затем найти безусловный минимум квадратичной формы (137) по трем остальным линейным параметрам $X_1^{(1)},\ X_0^{(2)},\ X_1^{(2)}$.

Заметим, что если множество D не пусто (используемая модель адекватна наблюдаемой кривой блеска), то оно содержит точку $\widehat{r}_1,\ \widehat{r}_2,\ \widehat{i}$, в которой достигает абсолютного минимума величина S (см. (137)) при условии нормировки (131), — оценку метода наименьших квадратов для параметров $r_1,\ r_2,\ i$, которые можно считать приближенными значениями параметров для данной системы. При этом размеры доверительного множества D дают величину ошибок определения этих параметров.

Этот метод интерпретации был предложен в работе (Гончарский, Степанов, Черепащук, 1986) и изложен в монографии (Гончарский, Романов, Черепащук, 1991).

В качестве примера рассмотрим обработку кривой блеска системы YZ Cas (Kron, 1942). Оценки дисперсий средних в шкале звездных величин равны $1{,}77 \cdot 10^{-6}$, $N_k = 12$. Число рассматриваемых фаз $M = 42$. Задаваясь уровнем доверия γ=0,5, по таблицам находим величину

$$F_{39,\ 462,\ 0{,}5} = 1{,}0,$$

т. е. доверительное множество D состоит из тех r_1, r_2, i, для которых $\Delta_1 \leqslant 1{,}0$, или, что то же самое, $d \leqslant 6 \cdot 10^{-5}$, где

$$d^2 = \sum_{k=1}^{M} \frac{1}{l_k^q} \left[\overline{\xi}_k - l_k\left(\widehat{X},\ r_1,\ r_2,\ i\right)\right]^2.$$

Анализ поведения функции $d(r_1, r_2, i)$ показывает, что она достигает своего минимального значения $d_{\min} = 4{,}4 \cdot 10^{-5}$ при $\widehat{r}_1 = 0{,}1440$, $\widehat{r}_2 = 0{,}0755$, $\widehat{i} = 88{,}^\circ3$. Эти значения могут быть приняты за приближенные значения истинных параметров системы. Простой перебор значений геометрических параметров показал, что доверительные интервалы для каждого из них есть $i \in [88{,}05^\circ;\ 88{,}55^\circ]$, $r_1 \in [0{,}143;\ 0{,}145]$, $r_2 \in [0{,}0750;\ 0{,}0762]$ или, в традиционных обозначениях: $i = 88{,}3^\circ \pm 0{,}25^\circ$, $r_1 = 0{,}144 \pm 0{,}001$, r_2=0,0756±0,0006. В работе Крона (1942) были указаны следующие значения параметров и их вероятных ошибок, полученных методом дифференциальных поправок: $i = 88{,}18^\circ \pm 0{,}057^\circ$, r_1=0,1443±0,00046, r_2=0,0756±0,00015. Таким образом, отсюда видно, что классические методы дают заниженные значения ошибок определения геометрических параметров. Этот вывод согласуется с результатами работ (Popper, 1984, Popper and Etzel, 1981), согласно которым стандартные методы оценок ошибок элементов орбит затменных двойных звезд дают значения ошибок, заниженные в 3–5 раз. Отметим, что метод доверительных интервалов широко используется в рентгеновской астрономии (см., например, Lampton, Margon and Bowyer, 1976). Изложенный метод интерпретации кривых блеска, классических затменных систем легко обобщается на случай наличия «третьего света» в системе, а также на случай эллиптической орбиты. Этот метод, основанный на статистическом подходе к интерпретации высокоточной кривой блеска кажется особенно перспективным в связи с запуском высокоточных космических фотометрических обсерваторий (миссии COROT и «Kepler»), с помощью которых будут получены кривые блеска тысяч затменных переменных с точностью $\sim 10^{-4}$–10^{-5} звездной величины. Главная цель этих экспериментов — обнаружение внесолнечных планет вокруг звезд по эффектам затмений. Изложенный метод интерпретации позволит определить из этих наблюдательных данных как параметры звезд и планет, так и надежные ошибки этих параметров.

Отметим еще раз, что в указанной постановке мы находим доверительные интервалы для r_1, r_2, i при неизвестных значениях параметров $I_0^{(1)}$, $I_0^{(2)}$, x_1, x_2. За оценку этих параметров, от которых задача зависит линейно, естественно принять значения, соответствующие минимуму невязки $S(X)$ (см. (137)) при найденных прямым перебором значениях нелинейных параметрах $r_1 = \widehat{r}_1$, $r_2 = \widehat{r}_2$, $i = \widehat{i}$.

В нашей постановке задача построения доверительного множества D для геометрических параметров системы решается сразу по обоим минимумам кривой блеска, при этом параметры $I_0^{(1)}$, $I_0^{(2)}$, x_1, x_2 остаются неизвестными, т. е. на самом деле задача построения доверительного множества D для трех нелинейных геометрических параметров решается с 7 неизвестными параметрами. Перебор нужно делать только по трем из них (r_1, r_2, i). Ясно, что этот перебор нужно осуществлять в окрестности минимума невязки $\Delta_1(r_1, r_2, i)$. Для отыскания приближенного положения точки минимума можно использовать существующие алгоритмы решения кривых блеска классических затменных систем (см. ниже). Предложенный метод легко обобщается и на случай нелинейного закона потемнения (Абубекеров и др., 2009б).

Сделаем ряд существенных замечаний.

1. При построении доверительного множества мы использовали случайную величину Δ_1, зависящую от оцениваемых параметров, так называемую статистику. Возможно использование и других статистик (см. ниже), при этом, вообще говоря, будут получаться разные доверительные интервалы. Хотелось бы, естественно, иметь такую статистику, для которой длина получаемого доверительного интервала в определенном смысле минимальна. Постановка такой задачи возможна (Уилкс, 1967), но решение ее даже для достаточно простой задачи, описанной нами, представляется очень сложным.

2. Определив множество D в пространстве параметров, обычно для оценки доверительных интервалов используют габариты этого множества и тем самым заменяют доверительное множество D объемлющим его параллелепипедом. Поэтому, если параметров больше одного, вероятность накрытия истинного значения параметров увеличивается и будет, вообще говоря, больше заданного уровня доверия γ.

3. Доверительные интервалы, найденные указанным выше способом, обычно оказываются больше, чем в традиционных методах (см., например, Budding, 1974, Kron, 1942). Последние, являясь приближенными, обычно используют процедуру линеаризации в окрестности точки минимума функционала невязки. Поэтому, если речь идет о важных физических выводах, сделанных из анализа ошибок интерпретации в рамках параметрических моделей, необходимо проводить анализ ошибок разными методами, сопоставляя результаты. При этом метод доверительных интервалов обеспечивает наиболее гарантированные результаты интерпретации. Поэтому применение этого метода особенно важно в тех случаях, когда необходимо делать ответственные заключения о параметрах используемой модели. Более подробное изложение различных методов оценки ошибок параметров дано ниже.

5. Учет влияния третьего света в системе

Если система является тройной, и третья звезда не затмевается, необходимо учитывать влияние третьего света, обусловленного светимостью третьей незатменной звезды. Устойчивое состояние тройной системы может реализоваться в том случае, если система устроена по иерархической модели: тесная двойная система, которая может быть затменной, и далекий спутник — третья звезда, не подверженный затмениям. Если третья звезда проявляет себя как визуальный спутник системы, ее блеск можно измерить и исключить при обработке наблюдений. Однако чаще всего, третья звезда раздельно не видна, и обнаруживается косвенными методами, либо из спектральных наблюдений, либо по изменениям орбитального периода, выявляемым с использованием кривой блеска (так называемое световое уравнение в моментах затменных минимумов).

Кроме того, при наблюдениях в плотных звездных полях совместно с исследуемой затменной двойной системой могут регистрироваться ближайшие звезды фона, которые также могут обусловливать некоторый эффективный «третий свет». Это часто бывает при наблюдениях затменных переменных звезд в других галактиках —

Большом и Малом Магеллановых облаках, галактике Андромеды, и т. п. Как уже отмечалось, изучение затменных переменных в других галактиках позволяет независимо определять расстояния до галактик, что важно для уточнения шкалы расстояний во Вселенной. Поэтому учет возможного «третьего света» при исследовании затменных двойных звезд в других галактиках представляет собой очень важную задачу.

Пусть имеется затменная система с третьим светом, обусловленным либо третьей звездой в системе, либо вкладом близких звезд фона. Как обычно, выразим кривую блеска в интенсивностях l и нормируем ее на единицу в максимуме. Условие нормировки внезатменного блеска запишется в виде

$$L_1 + L_2 + L_3 = 1, \tag{109'}$$

где L_3 — светимость, соответствующая третьему свету. Это условие нормировки должно заменить уравнение (109), причем третий свет L_3 — дополнительный неизвестный параметр. Решая уравнение (109′) совместно с уравнениями (110), (111), (112), можно определить искомые параметры системы, в том числе и третий свет L_3. Технически, это можно сделать следующим образом. Возьмем фиксированное значение третьего света L_3 и вычтем его из всех значений блеска $l(\theta)$:

$$l(\theta) - L_3.$$

Мы получили кривую блеска затменной двойной системы с устраненным вкладом третьего света, но с блеском вне затмений, меньшим единице. Далее нормируем новую кривую блеска, поделив все значения блеска $l(\theta)$ на блеск «уединенной» двойной затменной системы вне затмений $L_1 + L_2 = 1 - L_3$:

$$l_n(\theta) = \frac{l(\theta) - L_3}{1 - L_3}.$$

Эта кривая блеска соответствует «уединенной» затменной двойной системе, блеск которой вне затмений равен единице и соответствует суммарной светимости двух затменных компонент:

$$L_1 + L_2 = 1.$$

Глубина затменных минимумов на кривой блеска $l_n(\theta)$ будет больше, чем в случае исходной кривой блеска $l(\theta)$ ввиду того, что, устранив влияние третьего света, мы усилили контраст затменных изменений блеска. Действительно, поскольку $l(\theta) \leqslant 1$, легко показать, что

$$l_n(\theta) = \frac{l(\theta) - L_3}{1 - L_3} \leqslant l(\theta).$$

Например, если минимальный блеск системы с третьим светом равен $l^{\min} = 0{,}5$, глубина затмения $1 - l^{\min} = 0{,}5$, а $L_3 = 0{,}4$, то после учета третьего света имеем $l_n^{\min} = 0{,}17$, и глубина затмения для «уединенной» затменной двойной системы $1 - l_n^{\min} = 0{,}83$.

При фиксированном L_3 кривая блеска «уединенной» затменной двойной системы $l_n(\theta)$ может интерпретироваться стандартными методами, с использованием уравнений (109)–(112). При этом получаются значения параметров r_1, r_2, i, L_1, L_2, x_1, x_2, соответствующие фиксированному значению L_3, а также величина минимальной невязки между наблюдаемой и теоретической кривыми блеска η_1. Взяв другое значение L_3 и повторив процедуру интерпретации стандартным методом (см. выше), получим новые значения параметров r_1, r_2, i, L_1, L_2, x_1, x_2 и соответствующее значение минимальной невязки η_2. Перебор по параметру L_3 позволит по абсолютному минимуму невязки η определить полное решение задачи: параметры r_1, r_2, i, L_1, L_2, x_1, x_2 и величину третьего света L_3.

Таким образом, при учете третьего света в системе, помимо перебора по трем нелинейным параметрам r_1, r_2, i, необходимо также перебирать по четвертому параметру L_3. Высокая эффективность современных компьютеров позволяет легко реализовать перебор по четырем параметрам нашей задачи и получить значения параметров и их доверительные интервалы.

Иногда при интерпретации кривой блеска заранее неизвестно о наличии в системе третьего света. В этом случае используемая модель двойной затменной системы оказывается неадекватной наблюдениям, т. е. ни при каких параметрах не позволяет описать наблюдаемую кривую блеска с заданной точностью. В этом случае учет третьего света позволяет получить удовлетворительное решение задачи интерпретации кривой блеска.

6. Метод Рессела

Мы описали прямой метод интерпретации кривой блеска классической затменной двойной системы, основанный на минимизации функционала невязки между наблюдаемой и теоретической кривой блеска. Достоинством этого метода является то, что он позволяет оценивать доверительные интервалы для искомых параметров в точной статистической постановке задачи. Этот метод может быть эффективно реализован на современных компьютерах.

Исторически первым метод интерпретации кривой блеска затменной системы был предложен Ресселом (см., например, Russel, 1948, Russel and Merrill, 1952). Этот метод позволяет определять параметры затменной системы «вручную», без привлечения мощных вычислительных средств и дает возможность быстро находить предварительные параметры системы, которые могут использоваться в дальнейшем в качестве начального приближения при применении современных мощных компьютерных методов интерпретации кривых блеска затменных систем. Хотя метод Рессела в настоящее время имеет лишь исторический интерес, мы приведем краткое описание этого метода, ввиду его красоты и изящества.

Рессел рассматривает в качестве основного уравнения задачи не уравнение для потери блеска (типа (110)), а кинематическое соотношение (106) между переменными Δ и θ:

$$\Delta^2 = \cos^2 i + \sin^2 i \sin^2 \theta. \qquad (106')$$

В это соотношение искомый параметр i входит в явном виде и, как будет показано ниже, этот параметр может быть исключен до решения основной обратной задачи. Рессел подметил также, что если расстояние между центрами дисков звезд Δ выразить через радиусы звезд r_1, r_2 и ввести некоторую новую переменную $p = (\Delta - r_1)/r_2$ (так называемую геометрическую глубину затмения), то уравнение (106′) будет содержать также в явном виде параметр r_1:

$$r_1^2\,(1 + kp)^2 = \cos^2 i + \sin^2 i\ \sin^2 \theta, \qquad (138)$$

где $k = r_2/r_1$ отношение радиусов компонент. Если установить связь между геометрической глубиной p и блеском системы ℓ, то, взяв несколько точек на кривой блеска, можно записать несколько независимых уравнений типа (138) и исключить два искомых параметра: r_1, i. В итоге можно получить уравнение для нахождения единственного параметра $k = r_2/r_1$. Решение этого уравнения графическим методом позволяет найти полное решение задачи. Для нахождения связи между p и ℓ вводится понятие фотометрической фазы затмения α. Фотометрическая фаза — это отношение потери блеска в данный момент к той потере блеска, которую система показала бы в момент внутреннего касания дисков компонент. Таким образом, фотометрическая фаза α — это безразмерный блеск системы, она зависит от отношения радиусов компонент k и геометрической глубины затмения p: $\alpha = \alpha(k, p)$. Кроме того, фотометрическая фаза сравнительно слабо зависит от коэффициентов потемнения к краю дисков звезд: $\alpha = \alpha(k, p, x_1, x_2)$. В методе Рессела коэффициенты потемнения x_1, x_2 не ищутся при решении кривой блеска, а задаются, исходя из информации о спектральных классах звезд (см. выше). Фотометрические фазы затмения рассчитаны заранее с высокой точностью для широкого набора параметров k, p, x_1, x_2 и представлены в виде детальных таблиц (см., например, Цесевич, 1940, Russell and Merrill, 1952). При построении таблиц фотометрических фаз вычисляются интегралы по области перекрытия дисков звезд от функций распределения яркости по дискам (типа интегралов в уравнениях (110), (111)). В общем виде, при x_1, $x_2 \neq 0$ эти интегралы не берутся в конечном виде, а выражаются через эллиптические интегралы, точное вычисление которых представляет трудную задачу, которая в настоящее время, однако, легко решается на современных компьютерах. Имея таблицы фотометрических фаз $\alpha(k, p, x_1, x_2)$ можно, путем численного обращения этих таблиц, построить детальные высокоточные таблицы функции $p(k, \alpha, x_1, x_2)$, которые также опубликованы (Цесевич, 1940, Russell and Merrill, 1952). Таким образом, основное уравнение в методе Рессела может быть переписано в виде

$$r_1^2 \left[1 + kp\left(k,\ \alpha,\ x_1,\ x_2\right)\right]^2 = \cos^2 i + \sin^2 i\ \sin^2 \theta, \tag{139}$$

где функция $p(k, \alpha, x_1, x_2)$ затабулирована и известна с высокой точностью для любых k, α, x_1, x_2 (на практике имеются наборы таблиц функции $p(k, \alpha)$ для значений x_1, x_2 в интервале $[0, 1]$ с шагом в 0,1, что достаточно для практических целей). Если теперь установить связь между фотометрической фазой α и потерей блеска системы во время затмения $1 - l(\theta)$, то уравнение (139) позволяет, во-первых, исключить два параметра r_1, i до решения основной обратной задачи и, во-вторых, получить уравнение, содержащее лишь одно неизвестное — отношение радиусов k (коэффициенты потемнения x_1 и x_2, как уже отмечалось, фиксируются в соответствии со спектральными классами звезд).

Связь между α и $1 - l(\theta)$ устанавливается особенно просто в случае наличия полного затмения в системе.

Из определения понятия фотометрической фазы следует, что при наличии полного затмения $\alpha = \dfrac{1 - l\,(\theta)}{1 - \lambda_1}$, где $1 - \lambda_1$ — потеря блеска в фазах полного затмения (соответствующих остановке блеска в минимуме), которая равна потери блеска в момент внутреннего касания дисков. Таким образом, при полном затмении основное уравнение (139) может быть переписано в виде

$$r_1^2 \left\{1 + kp\left[k,\ \alpha\left(\theta\right)\right]\right\}^2 = \cos^2 i + \sin^2 i\ \sin^2 \theta, \tag{140}$$

где

$$\alpha\left(\theta\right) = \frac{1 - l\left(\theta\right)}{1 - \lambda_1}. \tag{141}$$

Чтобы исключить параметры r_1, i, входящие в явном виде в уравнение (140), Рессел выбрал три точки на кривой блеска в главном минимуме, соответствующие двум фиксированным значениям фотометрической фазы α_2=0,6, α_3=0,9 и одному текущему значению $\alpha = \alpha(\theta)$. Тогда, с использованием выражения (140), получаются три уравнения, совместное решение которых дает основное уравнение для нахождения k:

$$\frac{\sin^2\theta - \sin^2\theta_2}{\sin^2\theta_2 - \sin^2\theta_3} = \frac{[1 + kp\,(k, \alpha)]^2 - [1 + kp\,(k, \alpha_2)]^2}{[1 + kp\,(k, \alpha_2)]^2 - [1 + kp\,(k, \alpha_3)]^2}. \tag{142}$$

Это уравнение содержит единственный неизвестный параметр k, который входит в уравнение (142) в неявном, нелинейном виде через табличную функцию $p(k, \alpha)$. Решение этого уравнения может быть легко получено графическим методом. Берем текущую точку на кривой блеска, соответствующую фазовому углу $\theta = \theta_1$. С этим значением θ_1 вычисляем левую часть уравнения (142). Затем по формуле (141) вычисляем текущую фотометрическую фазу $\alpha = \alpha(\theta_1)$. При $\alpha = \alpha(\theta_1)$ правая часть уравнения (142) является однозначной функцией искомого параметра k. Затем, с использованием таблиц $p(k, \alpha)$ перебором по k добиваемся равенства значений левой и правой частей уравнения (142), что и позволяет найти k. С найденным значением отношения радиусов k входим в основное уравнение (140) и, используя несколько независимых точек на кривой блеска, находим параметры r_1, i, $r_2 = kr_1$. Светимости компонент в случае полного затмения, очевидно равны: $L_2 = 1 - \lambda_1$; $L_1 = 1 - L_2 = \lambda_1$. Задача решена. Для надежности, можно взять другую текущую точку на кривой блеска и повторить всю процедуру нахождения параметров k, r_1, i. Если используемая модель двойной системы адекватна, а кривая блеска не содержит систематических ошибок, значения k, найденные по разным точкам кривой блеска, должны получаться одинаковыми (в пределах некоторого разброса). Следует подчеркнуть, однако, что поскольку наблюдаемая потеря блеска $1 - l(\theta)$ входит в задачу сложным нелинейным образом через табличную функцию геометрических глубин $p(k, \alpha)$, распределение ошибок функции $p(k, \alpha)$, соответствующее ошибкам наблюдений, вообще говоря, не подчиняется нормальному закону. Поэтому среднее арифметическое из нескольких найденных значений k не является наиболее вероятной величиной k. По этой причине метод Рессела, будучи простым и изящным, не позволяет, однако, осуществлять оценку ошибок найденных параметров модели.

Метод Рессела принадлежит к классу так называемых обратных методов интерпретации кривых блеска затменных систем, когда для нахождения параметров модели используется не непосредственно кривая блеска $l(\Delta)$, а в некотором смысле обратная величина $\Delta(l)$, из которой вытекает основное уравнение задачи (140). Существует ряд версий обратных методов интерпретации кривых блеска (см., например, монографию под редакцией Цесевича, 1971, а также книгу (Kopal, 1959)). Их достоинство — изящество и простота, что позволяет проводить интерпретацию кривой блеска «вручную». Недостатком обратных методов является то, что в данном случае не удается надежно оценить ошибки найденных параметров модели. Компьютерные алгоритмы, реализующие обратные методы интерпретации кривых блеска затменных систем, описаны в обзоре Табачника (Табачник, 1971). В настоящее время при интерпретации кривых блеска затменных систем используются главным образом прямые методы.

Метод Рессела может применяться и в случае частных затмений в системе. В этом случае появляется дополнительный неизвестный параметр задачи — максимальная фотометрическая фаза затмения α_0 (в случае полного затмения $\alpha_0 = 1$). Поэтому интерпретация кривой блеска в случае частных затмений должна проводиться с использованием не одного минимума кривой блеска (как это мы сделали в случае полного затмения), а с использованием всей информации о системе: главного минимума кривой блеска, вторичного минимума и условия нормировки суммарной светимости компонент на единицу. Подробнее с этим можно ознакомиться в специальных книгах (Kopal, 1959, Цесевич, 1971, Шульберг, 1971). Используя условие нормировки суммарной светимости компонент, можно получить уравнение, связывающее глубины главного и вторичного минимумов (так называемое уравнение глубин):

$$1 - \lambda_2 + \frac{1 - \lambda_1}{Q\,(k, \alpha_0)} = \alpha_0, \tag{143}$$

где λ_1 — минимальный блеск во время затмения типа прохождения (случай М $\to$ Б), а λ_2 — минимальный блеск во время затмения типа покрытия (Б $\to$ М). Функция $Q(k, \alpha_0)$ заранее рассчитана для широкого диапазона параметров k, α_0 для различных x_1, x_2. В случае $x_{1,2} = 0$ (однородные диски звезд) уравнение глубин упрощается:

$$1 - \lambda_2 + \frac{1 - \lambda_1}{k^2} = \alpha_0\,(x_{1,2} = 0)\,. \tag{144}$$

Уравнения (143), (144) могут служить для определения максимальной фотометрической фазы α_0 во время частного затмения. Связь между фотометрической фазой α и кривой блеска в случае частных затмений дается формулой

$$n = \frac{\alpha}{\alpha_0} = \frac{1 - l\,(\theta)}{1 - \lambda}; \quad \text{так что} \quad \alpha = n\alpha_0.$$

Взяв точки на кривой блеска, соответствующие $n = 1/2$ и $n = 1$ (середина затмения), получаем основное уравнение задачи, аналогичное уравнению (142). Эти уравнения называются уравнениями формы:

$$\frac{\sin^2\theta\,(n)}{\sin^2\theta\,(1/2)} = \frac{\left[1 + kp_n\,(k, n\alpha_0)\right]^2 - \left[1 + kp_0\,(k, \alpha_0)\right]^2}{\left[1 + kp_{1/2}\left(k, \frac{1}{2}\,\alpha_0\right)\right]^2 - \left[1 + kp_0\,(k, \alpha_0)\right]^2}. \tag{145}$$

Решая уравнения (143), (145) совместно, находим искомые значения параметров k, α_0 и далее — значения остальных параметров.

7. Эллиптические орбиты

Рассмотрим двойную систему с шаровыми компонентами на эллиптической орбите. Пусть эффект отражения в системе отсутствует. В этом случае расстояние Δ между центрами дисков звезд в картинной плоскости описывается более сложной формулой, чем для круговой орбиты (см. уравнение (106)). В задаче появляются два новых параметра, характеризующие эллиптическую орбиту: эксцентриситет орбиты e и долгота периастра ω. При анализе кривой лучевых скоростей мы характеризовали положение звезды на орбите полярным углом — истинной аномалией v, которая отсчитывается от направления на периастр в сторону орбитального движения звезды. При анализе кривой блеска положение звезды на орбите характеризуется новым углом ν, называемым долготой звезды на орбите, который линейно связан с v, но отсчитывается не от периастра орбиты, а от верхнего соединения яркой компоненты (см. рис. 13). Как следует из рис. 13, связь между углами v и ν дается

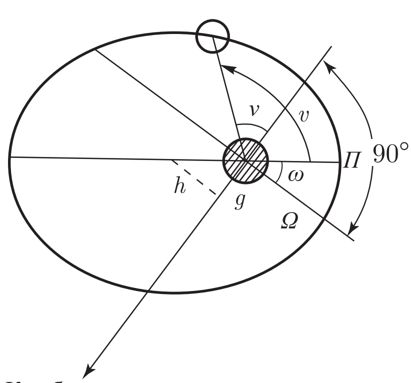


Рис. 13. К выводу соотношения между истинной аномалией v и долготой звезды ν на эллиптической орбите

следующим выражением:

$$v = 90^\circ + \nu - \omega. \tag{146}$$

Величина $\nu = 0$ в момент верхнего соединения яркой компоненты. Напомним, что моментом соединения называется момент совпадения направления радиуса-вектора звезды с нормальной проекцией луча зрения на плоскость орбиты. Долгота на орбите ν аналогична углу θ относительного поворота компонент в случае круговой орбиты, однако в отличие от угла θ, угол ν в случае эллиптической орбиты нелинейно зависит от времени. Найдем связь между расстоянием между центрами дисков компонент Δ и долготой звезды на орбите ν. Обратимся к рис. 14. Из треугольника $SS'P$ следует, что

$$\Delta^2 = r^2 - (SP)^2,$$

где r — длина радиуса-вектора звезды на орбите. Но, как следует из треугольника SIP, $SP = SI \sin i$, а из треугольника $S'SI$ находим $SI = r\cos\nu$. Следовательно,

$$\Delta^2 = r^2(1 - \sin^2 i \cos^2 \nu) = r^2(\cos^2 i + \sin^2 i \sin^2 \nu).$$

Это уравнение аналогично уравнению (106) для круговой орбиты с той лишь разницей, что здесь вместо постоянной величины — радиуса относительной орбиты (принятого равным единице) стоит переменная величина r — текущее относительное

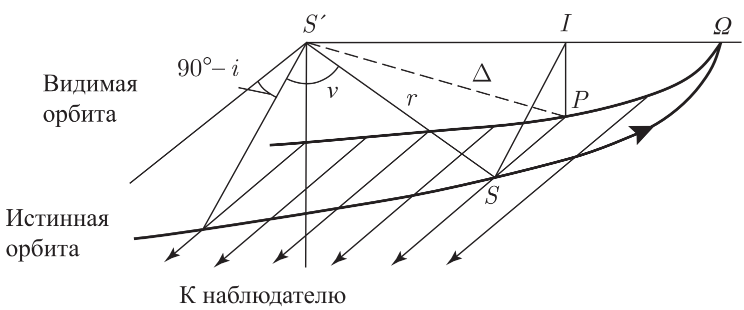


Рис. 14. К выводу зависимости между долготой звезды ν на эллиптической орбите и расстоянием Δ между центрами дисков звезд

расстояние между звездами-компонентами системы. Относительная орбита звезды в тесной двойной системе представляет собой эллипс, в фокусе которого находится вторая звезда (мы пренебрегаем вращением линии апсид — см. ниже). Уравнение эллипса в полярных координатах r, v записывается в виде

$$r = \frac{a\left(1 - e^2\right)}{1 + e\cos v}$$

или, с учетом соотношения (146), связывающего истинную аномалию v с долготой на орбите ν,

$$r = \frac{a\left(1 - e^2\right)}{1 - e\sin(\nu - \omega)},$$

где a — большая полуось относительной орбиты (она обычно принимается равной единице), r — длина радиус-вектора звезды, т. е. текущее расстояние между первой и второй звездой системы. Таким образом, в случае эллиптической орбиты расстояние между центрами дисков компонент выражается следующей простой формулой:

$$\Delta = \frac{a\left(1-e^2\right)}{1-e\sin\left(\nu-\omega\right)}\sqrt{\cos^2 i+\sin^2 i\sin^2\nu}\,. \tag{147}$$

Эта простота лишь кажущаяся, поскольку долгота на орбите ν сложным образом зависит от времени t через систему уравнений эллиптического движения:

$$\begin{cases} M = \dfrac{2\pi}{P}\left(t-T\right), \\ M = E - e\sin E, \\ \operatorname{tg}\dfrac{1}{2}\,v = \sqrt{\dfrac{1+e}{1-e}}\,\operatorname{tg}\dfrac{1}{2}\,E, \\ v = 90^\circ + \nu - \omega, \end{cases} \tag{148}$$

где M — средняя аномалия, E — эксцентрическая аномалия, P — орбитальный период системы, T — момент прохождения звезды через периастр орбиты. Уравнение (147) (совместно с уравнениями (148)) должно использоваться вместо уравнения (106) при интерпретации кривой блеска затменной системы с эллиптической орбитой. Остальные уравнения (уравнения для потери блеска (110), (111)) остаются без изменений, поскольку потеря блеска при фиксированных параметрах во время затмения сферических звезд однозначно определяется расстоянием между центрами дисков звезд, независимо от того, по какой орбите (круговой или эллиптической) движется звезда. Уравнение (147) может быть использовано для выявления основных особенностей кривой блеска затменной системы с эллиптической орбитой. Прежде всего, ввиду того, что движение звезды по эллиптической орбите, в силу второго закона Кеплера, неравномерно, вторичный минимум кривой блеска может быть смещен относительно середины расстояния между главными минимумами, причем это смещение может происходить в обе стороны, в зависимости от значения долготы периастра ω. Кроме того, в случае эллиптической орбиты ширины главного и вторичного минимумов могут не совпадать (для круговой орбиты и затмения звезд с тонкими атмосферами эти ширины совпадают). Мы уже отмечали выше, что в случае круговой орбиты середина затмения двух сферических звезд (момент соединения) совпадает с моментом перехода кривой лучевых скоростей через γ-скорость (лучевую скорость центра масс системы). В случае эллиптической орбиты, вообще говоря, это не так, поскольку в момент соединения компонент вектор полной скорости звезды на орбите может быть не перпендикулярен к лучу зрения. Более того, в общем случае, когда луч зрения наблюдателя не лежит в плоскости орбиты ($i < 90^\circ$) момент соединения компонент на эллиптической орбите ($\nu = 0$) не совпадает с минимумом блеска при затмении (Мартынов, 1948 a,b, 1971, Копал, 1959). Очевидно, в случае затмения двух шаровых звезд минимум блеска должен достигаться при минимуме расстояния Δ между центрами дисков звезд (для эллипсоидальных компонент это справедливо лишь приблизительно). Необходимым условием минимума Δ является равенство нулю первой производной $d\Delta/d\nu$ или, что, то же самое, $(1/\Delta)(d\Delta/d\nu)$. Достаточным условием минимума Δ, как известно, является положительность второй производной $d^2\Delta/d\nu^2$. Выражение для первой производной следующее:

$$\frac{1}{\Delta}\frac{d\Delta}{d\nu} = \frac{\sin^2 i\ \sin\nu\cos\nu\left[1-e\sin\left(\nu-\omega\right)\right] + e\cos\left(\nu-\omega\right)\left(\cos^2 i+\sin^2 i\ \sin^2\nu\right)}{\left(\cos^2 i+\sin^2 i\ \sin^2\nu\right)\left[1-e\sin\left(\nu-\omega\right)\right]}. \tag{149}$$

Приравнивая к нулю эту величину, имеем уравнение

$$\sin^2 i \sin 2\nu[1 - e\sin(\nu - \omega)] + 2e\cos(\nu - \omega)(\cos^2 i + \sin^2 i \sin^2 \nu) = 0. \tag{150}$$

Из этого уравнения следует, что в случае круговой орбиты ($e = 0$)

$$\sin^2 i \sin 2\nu = 0,$$

т. е. $\nu_1 = 0°$, $\nu_2 = 180°$ для любых i. При круговой орбите всегда минимумы блеска совпадают с моментами соединений компонент.

В случае $i = 90$ и $e \neq 0$ имеем:

$$\sin 2\nu[1 - e\sin(\nu - \omega)] + 2e\cos(\nu - \omega)\sin^2 \nu = 0,$$

откуда следует, что $\nu_1 = 0°$ и $\nu_2 = 180°$. То есть и в случае эллиптической орбиты, при $i = 90°$ минимумы блеска также совпадают с моментами соединений компонент. Как уже отмечалось, в общем случае ($i < 90°$, $e \neq 0$) это не так. Преобразуем уравнение (150):

$$\sin^2 i \sin 2\nu - \sin^2 i \sin 2\nu e(\sin\nu\cos\omega - \cos\nu\sin\omega) + \\ + 2e\cos^2 i(\cos\nu\cos\omega + \sin\nu\sin\omega) + 2e\sin^2 i\sin^2\nu(\cos\nu\cos\omega + \sin\nu\sin\omega) = 0. \tag{151}$$

Найдем корни этого уравнения в предположении, что они не сильно отличаются от 0 и 180°. Воспользуемся разложениями в ряд величин $\sin\nu$ и $\cos\nu$ вблизи значений $\nu = 0$ и $\nu = 180°$ и ограничимся первыми членами разложений. В случае $\nu \simeq 0$ положим $\sin\nu \approx \nu$, $\sin 2\nu \approx 2\nu$, $\cos\nu \approx 1$. Тогда, после преобразования уравнения (151), имеем следующее уравнение для определения ν_1, пренебрегая членами с ν^2 и ν^3:

$$\nu_1(\sin^2 i + g) = -h\cos^2 i, \quad \text{где} \quad g = e\sin\omega, h = e\cos\omega.$$

Отсюда находим:

$$\nu_1 = -\frac{h\operatorname{ctg}^2 i}{1 + g/\sin^2 i} \approx -h\operatorname{ctg}^2 i\left(1 - g\operatorname{cosec}^2 i\right) + \ldots . \tag{152}$$

В случае $\nu_2 \simeq 180° + \alpha$, $\sin(180° + \alpha) \approx -\alpha$, $\sin 2(180° + \alpha) \approx 2\alpha$, $\cos(180° + \alpha) \approx \approx -1$. Тогда из уравнения (151) находим:

$$\alpha(\sin^2 i - g) = h\cos^2 i,$$

откуда имеем:

$$\alpha = \frac{h\operatorname{ctg}^2 i}{1 - g\operatorname{cosec}^2 i} \approx h\operatorname{ctg}^2 i\left(1 + g\operatorname{cosec}^2 i\right) + \ldots . \tag{153}$$

Таким образом, долготы звезды на орбите в моменты минимумов блеска в главном и вторичным затмениях, когда $\Delta = \Delta_{\min}$, выражаются в следующем виде:

$$\nu_1 = -h\operatorname{ctg}^2 i(1 - g\operatorname{cosec}^2 i) + \ldots, \tag{154}$$

$$\nu_2 = \pi + h\operatorname{ctg}^2 i(1 + g\operatorname{cosec}^2 i) + \ldots . \tag{155}$$

Положительность второй производной $d^2\Delta/d\nu^2$ для этих значений ν_1 и ν_2 была доказана Мартыновым (1971). Из формул (154), (155) следует, что $\nu_1 = 0$ и $\nu_2 = \pi$ лишь при $i = 90°$.

Подставляя величины ν_1 и ν_2 в уравнение для Δ (147), находим минимальные расстояния между центрами дисков звезд в главном и вторичном минимумах кривой блеска $\Delta^{(1)}_{\min}$ и $\Delta^{(2)}_{\min}$. Простые приближенные формулы для $\Delta^{(1,2)}_{\min}$ получены Мартыновым (1971): $\Delta^{(1)}_{\min} \approx a\cos i\,(1-g)$; $\Delta^{(2)}_{\min} \approx a\cos i\,(1+g)$. Если $\Delta^{(1,2)}_{\min} < r_1 + r_2$, то в системе наблюдаются как главный, так и вторичный минимумы блеска. В случае эллиптической орбиты может оказаться, что $\Delta^{(1)}_{\min} < r_1 + r_2$, а $\Delta^{(2)}_{\min} > r_1 + r_2$. В этом случае наблюдается лишь один (главный) минимум блеска, а вторичный отсутствует. Аналогично, если $\Delta^{(2)}_{\min} < r_1 + r_2$, а $\Delta^{(1)}_{\min} > r_1 + r_2$, то в системе наблюдается лишь один вторичный минимум блеска. Если же $\Delta^{(1,2)}_{\min} > r_1 + r_2$, то в системе вообще не наблюдаются затмения.

Смещения долгот ν_1 и ν_2, соответствующих $\Delta_{\min}$, относительно моментов соединений компонент ($\nu = 0$, $\nu = 180^\circ$) вызваны чисто геометрической причиной и отражают особенности формы орбиты звезды. Эти смещения обычно невелики. Так, даже в крайнем случае, когда $i = 60^\circ$, $e = 0{,}3$, $\omega = 0$ по формулам (154), (155) находим: $\nu_1 = -5{,}7^\circ$, $\nu_2 = 185{,}7^\circ$, а для типичных величин $i = 80^\circ$, $e = 0{,}1$, $\omega = 0$ для ν_1 и ν_2 получаются значения $-0{,}2^\circ$ и $180{,}2^\circ$, которые лишь незначительно отличаются от 0 и 180°.

Рассмотрим теперь гораздо более существенные смещения минимумов, вызванные физическим фактором — неравномерностью движения звезды по орбите, обусловленной действием второго закона Кеплера.

Зная долготы звезды ν_1 и ν_2, соответствующие $\Delta^{(1)}_{\min}$ и $\Delta^{(2)}_{\min}$, можно вычислить моменты времени T_1 и T_2, соответствующие минимумам блеска в главном и вторичном затмениях. Это можно сделать разными способами.

Можно вычислить соответствующую теоретическую кривую блеска, используя уравнения (147), (148) и уравнения для потери блеска (134). Тогда положение вторичного минимума относительно середины между главными минимумами кривой блеска определяется автоматически.

Можно обойтись без вычисления кривой блеска, используя второй закон Кеплера (Kopal, 1959):

$$r^2 \frac{dv}{dt} = \frac{2\pi a^2 \sqrt{1-e^2}}{P},$$

где

$$r = \frac{a\left(1-e^2\right)}{1+e\cos v}.$$

Интегрируя это уравнение, имеем:

$$\frac{T_2 - T_1}{P} = \frac{1}{2\pi a^2\sqrt{1-e^2}} \int\limits_{v_1}^{v_2} r^2\,dv, \tag{156}$$

где v_1 и v_2 связаны с найденными нами ранее долготами ν_1 и ν_2 (см. (154), (155)) выражениями:

$$v_1 = 90^\circ + \nu_1 - \omega, \quad v_2 = 90^\circ + \nu_2 - \omega.$$

Выполнив интегрирование в этих пределах, и ограничившись членами первого порядка в соответствующих разложениях, получим:

$$(T_2 - T_1)\,\frac{\pi}{P} - \frac{\pi}{2} = h\left(1 + \operatorname{cosec}^2 i\right) + \ldots . \tag{157}$$

Эта формула определяет смещение минимумов, т. е. показывает, насколько промежуток времени между главным и вторичным минимумами отличается от полупериода. Формула (157) становится особенно наглядной в случае $i = 90$:

$$T_2 - T_1 - \frac{P}{2} = 2h\frac{P}{\pi}. \tag{158}$$

Таким образом, смещение минимумов определяется величиной $h = e\cos\omega$. Определяя смещение минимумов на наблюдаемой кривой блеска можно оценить величину $e\cos\omega$ и тем самым, наложить ограничения на параметры e и ω, используя лишь данные фотометрии.

Можно также получить выражение (157), используя разложение средней аномалии $M = \dfrac{2\pi}{P}(t-T)$ по истинной аномалии v, (см. формулу (46)):

$$M = v - 2e\sin v + \frac{3}{4}e^2\sin 2v - \ldots .$$

Введем вместо истинной аномалии v долготу ν:

$$M = \nu + 90^\circ - \omega - 2e\cos(\nu-\omega) - \frac{3}{4}e^2\sin 2(\nu-\omega) + \ldots . \tag{159}$$

Подставив сюда значения ν_1 и ν_2, соответствующие главному и вторичному минимумам (см. формулы (154), (155)) и вычтя одно выражение для M из другого, получим, пренебрегая членами высшего порядка малости, формулу (157). Детальное изложение этой процедуры дано Мартыновым (1971).

Таким образом, сдвиг вторичного минимума кривой блеска относительно середины между главными определяет величину $h = e\cos\omega$. Чтобы оценить e и ω раздельно только по фотометрическим данным, необходимо найти из кривой блеска величину $g = e\sin\omega$. Для этого рассмотрим соотношение ширин главного и вторичного минимумов кривой блеска. Ширина затмения определяется условием

$$r_1 + r_2 = \Delta,$$

где r_1, r_2 — радиусы звезд, Δ — расстояние между центрами дисков звезд задается формулой (147) и уравнениями (148).

Записывая это условие для первого контакта (когда диски звезд соприкасаются краями перед началом затмения) и для второго контакта (конец затмения) и, используя уравнения (147), (148), можно найти продолжительность затмения в главном минимуме блеска (вблизи долготы ν_1) и во вторичном минимуме (вблизи долготы ν_2). Из-за неравномерности движения звезды по орбите (см. уравнения (148)) длительность главного и вторичного минимумов кривой блеска может различаться. Кроме того, может иметь место некоторая асимметрия минимумов. Впрочем, величина этой асимметрии весьма мала (Kopal, 1959, Мартынов, 1971). Как показано Мартыновым (1971), отношение продолжительности D_2 вторичного минимума к продолжительности главного D_1 при $i = 90^\circ$ определяется следующей простой формулой:

$$\frac{D_2}{D_1} = \frac{1+g}{1-g} = \frac{1+e\sin\omega}{1-e\sin\omega}. \tag{160}$$

При $i < 90^\circ$ эта формула значительно усложняется, однако, в случае малых эксцентриситетов орбит и достаточно разделенных систем можно ограничиться введением в формулу (160) простого корректирующего множителя (Уиттердейк, 1932, Крат, 1933, 1938):

$$\delta\frac{D_2}{D_1} = \frac{1+g}{1-g}, \tag{161}$$

где

$$\delta = \sqrt{\frac{1-\left(\dfrac{r'}{r_1+r_2}\cos i\right)^2}{1-\left(\dfrac{r''}{r_1+r_2}\cos i\right)^2}}. \tag{162}$$

Здесь r' и r'' — длины радиусов-векторов звезды в минимумах блеска в главном и вторичном затмениях соответственно:

$$r' = \frac{a\left(1-e^2\right)}{1+g+h^2\operatorname{ctg}^2 i}, \quad r'' = \frac{a\left(1-e^2\right)}{1-g+h^2\operatorname{ctg}^2 i}. \tag{163}$$

Выражения (163) получены из уравнения эллипса-орбиты, куда подставлены долготы звезды ν_1 и ν_2 (см. формулы (154), (155)) и оставлены лишь первые члены (членами высшего порядка малости пренебрегаем). Чтобы использовать корректирующий множитель (162), необходимо иметь предварительные элементы орбиты, найденные в первом приближении.

Таким образом, смещение минимумов кривой блеска (см. формулы (157), (158)) определяет величину $h = e\cos\omega$, а отношение их длительностей (см. формулы (160), (161)) дает значение $g = e\sin\omega$. Это позволяет по одной кривой блеска, до выполнения процедуры ее полной интерпретации, оценить параметры e и ω, которые могут служить начальным приближением для окончательного решения задачи интерпретации кривой блеска.

Как уже отмечалось, в случае эллиптической орбиты минимум блеска при затмении может не совпадать с моментом перехода лучевых скоростей через γ-скорость. Если соответствующие точки на кривой лучевых скоростей обозначить через c и d, то поскольку в этих точках $dz/dt = 0$, имеем (см. уравнение (14)):

$$\begin{aligned} e\cos\omega = h = -\cos(v_c+\omega), \\ e\cos\omega = h = -\cos(v_d+\omega). \end{aligned} \tag{164}$$

Поскольку $v = 90^\circ + \nu - \omega$, можно записать:

$$h = \sin\nu_c,$$

$$h = \sin\nu_d.$$

Так как $v_c + \omega = 360^\circ - v_d - \omega$ (см. равенство (32)),

$$\nu_d = 180^\circ - \nu_c.$$

Ввиду малости величины ν_c, можно записать:

$$\nu_c \approx h; \quad \nu_d \approx \pi - h.$$

Минимумы блеска в главном и вторичном затмениях достигаются при долготах ν_1 и ν_2 (см. формулы (154), (155)). Поэтому полное смещение точек перехода кривой лучевых скоростей через γ-скорость относительно минимумов блеска равно:

$$\Delta\nu_1 = \nu_c - \nu_1 = h[1+\operatorname{ctg}^2 i(1-g\operatorname{cosec}^2 i)] \tag{165}$$

$$\Delta\nu_2 = \nu_d - \nu_2 = -h[1+\operatorname{ctg}^2 i(1+g\operatorname{cosec}^2 i)]. \tag{166}$$

Как видно, при i не сильно отличающемся от 90°, величина $\Delta\nu$ смещения точек c и d на кривой лучевых скоростей относительно минимумов блеска по модулю близка к $h = e\cos\omega$. При $e = 0{,}3$ и $\omega = 0$ (орбита расположена «боком» по отношению к наблюдателю) величина смещения $\Delta\nu_1$ составляет $\sim 17^\circ$, что сравнимо с шириной затмения. Чтобы пересчитать смещения долготы звезды на орбите $\Delta\nu_1$ и $\Delta\nu_2$ в наблюдаемые смещения средней аномалии ΔM_1 и ΔM_2, необходимо использовать уравнения эллиптического движения (148). Поскольку при малых e истинная аномалия v близка к средней M, в этом случае можно приближенно считать, что $\Delta\nu_1 \approx \Delta M_1$, $\Delta\nu_2 \approx \Delta M_2$.

Мы рассмотрели главные особенности кривой блеска затменной двойной системы с эллиптической орбитой. Опишем теперь процедуру интерпретации такой кривой блеска. За нулевую фазу ψ принимаем момент t_0 главного минимума, соответствующий затмению более яркой компоненты ($\psi = (t - t_0)/P$). Заметим, что определенная таким образом фаза $\psi = 0$ в общем случае не соответствует моменту соединения ($\nu = 0$) компонент (см. формулы (154), (155)). Для вычисления расстояния между центрами дисков звезд Δ необходимо для каждой фазы ψ (линейно зависящей от времени) найти соответствующую долготу звезды на орбите ν (см. формулы (148)). Для этого нужно найти среднюю аномалию M, содержащую момент T прохождения затмеваемой звезды, через периастр орбиты. Как следует из (148), для произвольной орбитальной фазы ψ средняя аномалия затмеваемой звезды $M = \psi - \psi_0$, где ψ_0 — фаза прохождения затмеваемой звезды через периастр. В момент главного минимума $\psi = 0$, и $M = -\psi_0$, при этом

$$v = 90^\circ + \nu_1 - \omega, \tag{167}$$

где значение долготы ν_1, соответствующей главному минимуму, дается формулой (154):

$$\nu_1 = -h \operatorname{ctg}^2 i (1 - g \operatorname{cosec}^2 i).$$

При $i \approx 90^\circ$ можно полагать $\nu_1 = 0$, однако, как отмечалось выше, при i существенно отличном от 90°, величина ν_1 отлична от нуля и должна быть оценена из предварительной информации о параметрах системы. Зная истинную аномалию затмеваемой звезды в фазе $\psi = 0$ (см. (167)), можно вычислить соответствующую ей эксцентричную аномалию E из соотношения

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}v = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\operatorname{tg}\frac{1}{2}E,$$

а затем, из уравнения Кеплера

$$M = E - e\sin E$$

найти соответствующее значение средней аномалии M. Тогда фаза прохождения затмеваемой звездой периастра орбиты равна

$$\psi = -M,$$

откуда находится момент T прохождения через периастр для затмеваемой звезды. Знание величины T позволяет для любой фазы ψ кривой блеска по формулам (148) рассчитать долготу ν затмеваемой звезды и далее, по формуле (147) вычислить расстояние между центрами дисков звезд Δ. С найденными значениями Δ можно решать систему уравнений (109)–(111) и эквивалентную ей систему (129)–(131), описывающую условие нормировки внезатменного блеска двойной системы и потерю блеска в главном и вторичном минимумах. Искомыми в случае эллиптической орбиты являются следующие девять параметров: r_1, r_2, i, x_1, x_2, L_1, L_2, e, ω. Значения этих параметров и их доверительные интервалы можно искать с помощью прямого метода, описанного выше (см. уравнения (134)). Поскольку параметры e и ω, так же как и параметры r_1, r_2, i, входят в задачу нелинейно, в случае эллиптической орбиты приходится осуществлять перебор по пяти нелинейным параметрам, что существенно усложняет задачу. Однако с помощью современных компьютеров обратная задача интерпретации кривой блеска легко решается и в такой постановке.

Разумеется, всегда остается возможность использовать для нашей обратной параметрической задачи интерпретации кривой блеска стандартные методы минимизации функционалов, в том числе и по нелинейным параметрам (см., например, Халиуллина и Халлиулин, 1984). Однако при этом следует иметь в виду, что минимизация по нелинейным параметрам задачи нарушает исходную статистику наблюдательных данных, что не позволяет осуществлять строгую оценку доверительных интервалов (ошибок) найденных параметров, а также не дает возможности строгого суждения об адекватности модели наблюдательным данным (см. ниже).

8. Вращение линии апсид

Как известно (см., например, Ландау и Лифшиц, 1958), лишь в двух случаях центральных полей все траектории финитных (т. е. ограниченных в пространстве) движений замкнуты. Это центральные поля, потенциальная энергия в которых пропорциональна $1/r$ или $1/r^2$. По этой причине, финитная орбита движения двух материальных точек, притягивающихся под действием закона тяготения Ньютона, является замкнутым эллипсом, ориентация которого не меняется со временем. Любые отклонения закона изменения потенциальной энергии с расстоянием от закона $1/r$ (или отличия силы притяжения от закона $1/r^2$) приводят к незамкнутости финитной траектории движения. В этом случае вместо замкнутого эллипса траектория движения тела имеет вид «розетки», в которой отдельные «петли» многократно огибают гравитирующий центр и при этом медленно поворачиваются в пространстве. Если скорость этого поворота относительно невелика, орбита может быть аппроксимирована замкнутым эллипсом, большая полуось которого медленно поворачивается в пространстве. В таком случае говорят о вращении линии апсид — повороте в пространстве большой полуоси эллипса, которым аппроксимируется орбита. Отличие гравитационного потенциала звезды от закона $1/r$ может быть связано с несферичностью звезды, вызванной приливной или вращательной деформацией ее фигуры в двойной системе. Кроме того, если в системе присутствует третья звезда, ее возмущающее действие также может приводить к тому, что орбита основной двойной системы будет изменяться как по размерам, так и по форме, и по расположению в пространстве. Известно, что в общей теории относительности (ОТО) Эйнштейна сила гравитационного притяжения зависит от расстояния сильнее, чем в законе тяготения Ньютона:

$$F \approx \frac{GMm}{r^2\sqrt{1-r_g/r}},$$

где $r_g = 2GM/c^2$ — гравитационный радиус тела массой M. Поэтому поворот линии апсид может иметь место даже в системе двух точечных гравитирующих масс, из-за влияния эффектов ОТО. Вращение линии апсид приводит к монотонному изменению долготы периастра ω со временем:

$$\omega = \omega_0 + \frac{d\omega}{dt}\,t, \tag{168}$$

причем поворот эллипса-орбиты происходит в направлении орбитального движения звезды. В затменной двойной системе это будет приводить к тому, что положение как главного, так и вторичного минимумов, а также их взаимное расположение будут меняться со временем по сравнению со случаем неподвижной орбиты. При этом, поскольку взаимное расположение главного и вторичного минимумов, а также соотношение их ширин зависят от ω, при апсидальном движении в затменной двойной системе меняются как положения, так и форма затменных минимумов (рис. 15). Оценить изменение взаимного расположения минимумов на кривой блеска при апсидальном движении можно с помощью формулы (157):

$$(T_2 - T_1)\,\frac{\pi}{P} - \frac{\pi}{2} = e\cos\omega\left(1 + \operatorname{cosec}^2 i\right),$$

куда следует подставить соотношение (168). Поскольку эта формула соответствует лишь первому члену в соответствующем разложении, она дает приближенное выражение для смещений минимумов блеска, обусловленных апсидальным вращением.

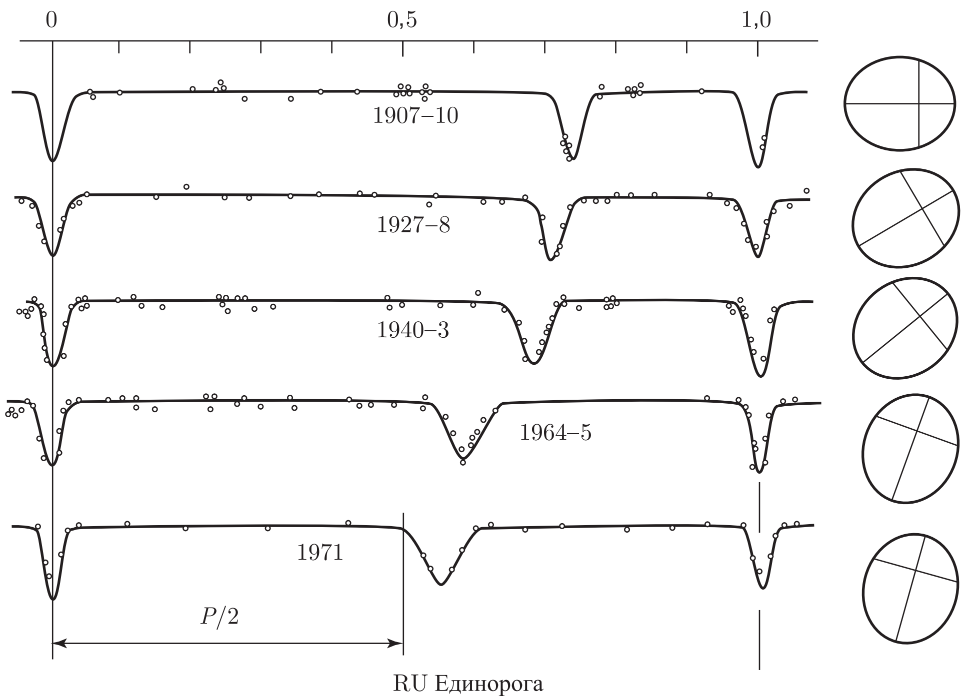


Рис. 15. Кривые блеска ТДС RU Mon за 1909–1971 гг., полученные Д. Я. Мартыновым, и соответствующий им поворот орбитального эллипса относительно наблюдателя

Апсидальные смещения главных и вторичных минимумов (они происходят в разные стороны) приводят к кажущемуся долгопериодическому изменению орбитального периода. Исследование изменений орбитального периода отдельно по главному и вторичному минимумам позволяет определить параметры апсидального движения и найти производную $d\omega/dt$.

Запишем долготы на орбите ν_1, ν_2 яркой звезды в главном и вторичном минимумах (см. (154), (155)):

$$\nu_1 = -e\cos\omega\,\mathrm{ctg}^2\, i(1 - e\sin\omega\,\mathrm{cosec}^2\, i), \tag{169}$$

$$\nu_2 = \pi + e\cos\omega\,\mathrm{ctg}^2\, i(1 + e\sin\omega\,\mathrm{cosec}^2\, i). \tag{170}$$

При апсидальном движении в системе долгота периастра ω линейно растет со временем (см. (168)), что приводит к смещениям долгот ν_1 и ν_2 в разные стороны (см. знак минус в формуле (169)), причем эти смещения происходят с периодом апсидального вращения. Для сравнения с наблюдениями необходимо долготы ν_1 и ν_2 перевести в средние аномалии M (см. уравнения (148)). В случае малых эксцентриситетов $e < 0{,}5$ можно выразить в явном виде среднюю аномалию M через долготу ν (см. разложение (159)):

$$M - 90^\circ + \omega = \nu - 2e\ \cos(\nu - \omega) - \frac{3}{4}\, e^2 \sin 2\,(\nu - \omega) + \ldots\,. \tag{171}$$

За один орбитальный период долгота на орбите ν яркой компоненты увеличивается на 2π, и условие для наступления N-го главного минимума блеска при затмении выглядит следующим образом:

$$\nu = 2\pi N + \nu_1. \tag{172}$$

Долгота ν_1, очевидно, также зависит от N, поскольку

$$\omega = \omega_0 + N\omega_1, \tag{173}$$

где ω_0 — долгота периастра начального главного минимума, а ω_1 — изменение долготы периастра яркой звезды за ее один оборот по орбите. Подставляя выражение для ν_1 (см. (169)) в разложение (171) и используя соотношения (172), (173), можно получить формулу, описывающую положение главного минимума кривой блеска, обусловленное апсидальным движением в системе, как функцию числа протекших орбитальных периодов (Мартынов, 1971):

$$\begin{aligned} T_1(N) = T_{01} + NP - \frac{Pe}{2\pi}\left(1 + \operatorname{cosec}^2 i\right)\cos\left(\omega_0 + N\omega_1\right) + \\ + \frac{3}{4}\,\frac{Pe^2}{2\pi}\left(1 + \frac{4}{3}\operatorname{ctg}^2 i + \frac{2}{3}\operatorname{ctg}^2 i\ \operatorname{cosec}^2 i\right)\sin 2\left(\omega_0 + N\omega_1\right). \end{aligned} \tag{174}$$

Аналогично, используя соотношения (170), (172), (173) и применяя разложение (171), получаем формулу, определяющую положение вторичного минимума:

$$\begin{aligned} T_2(N) = T_{02} + NP + \frac{Pe}{2\pi}\left(1 + \operatorname{cosec}^2 i\right)\cos\left(\omega_0 + N\omega_1\right) + \\ + \frac{3}{4}\,\frac{Pe^2}{2\pi}\left(1 + \frac{4}{3}\operatorname{ctg}^2 i + \frac{2}{3}\operatorname{ctg}^2 i\ \operatorname{cosec}^2 i\right)\sin 2\left(\omega_0 + N\omega_1\right). \end{aligned} \tag{175}$$

Учет членов, третьего порядка по e выполнен Стерном (Sterne, 1940). Вычитая (175) из (174), можно получить формулу для относительного смещения минимумов:

$$\left[T_2(N) - T_1(N) - \frac{1}{2}P\right]\frac{\pi}{P} = h\left(1 + \operatorname{cosec}^2 i\right),$$

которая тождественна выведенной нами ранее формуле (157).

Формулы (174), (175) дают эпохи главного и вторичного минимумов в виде

$$T(N) = A + NP + a\cos(\omega_0 + N\omega_1) + b\sin 2(\omega_0 + N\omega_1). \tag{176}$$

Знаки коэффициента a и величины A различны для главного и вторичного минимумов.

Если наблюдения главного и вторичного минимумов продолжительны и охватывают по крайней мере половину апсидального периода (что может составлять многие десятки, а иногда и сотни лет), определение величин A, P, a, b, ω_0, ω_1 из наблюдений не составляет особого труда. Для этого можно воспользоваться графическим методом. Зададимся предварительным приближенным значением орбитального периода P. Построим разности $O - C$ (наблюдаемые минус вычисленные моменты минимумов) как функцию N — числа протекших орбитальных периодов (рис. 16). Вторичные минимумы дадут $(O - C)_2$, противоположные по знаку величинам $(O - C)_1$, соответствующим главным минимумам. Полная волна разностей $(O - C)_{1,2}$ позволяет определить величину $N_{\rm aps}$ — число орбитальных периодов, протекших за время полного поворота линии апсид. Отсюда находим важнейший параметр

$$\omega_1 = \frac{360^\circ}{N_{\rm aps}}$$

(градусов за орбитальный период), характеризующий скорость изменения долготы периастра орбиты $d\omega/dt$.

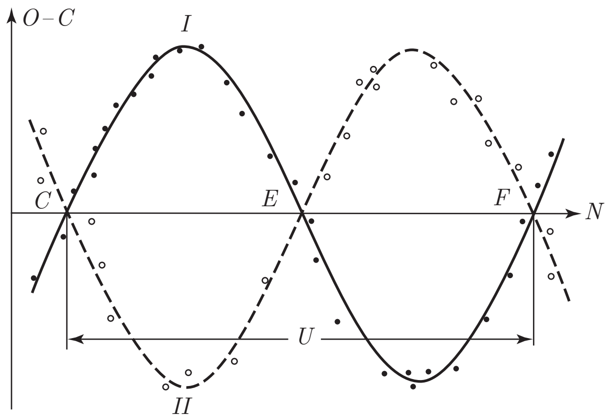


Рис. 16. Колебания остатков $O-C$, вызванные вращением линии апсид (Мартынов, 1971)

Точки C, E, F (рис. 16) соответствуют номерам эпох, при которых, $\omega = \pi/2$, $3\pi/2$. Это позволяет определить начальную долготу периастра ω_0. Однозначный выбор между этими двумя значениями может быть сделан лишь при наличии спектральных наблюдений или данных о продолжительностях D_1 и D_2 обоих минимумов кривой блеска.

Амплитуда синусоиды, представляющей $O-C$, дает величину

$$a = \frac{Pe}{2\pi}\left(1 + \operatorname{cosec}^2 i\right).$$

Наконец, коэффициент b может быть найден во втором приближении. Предварительное значение коэффициента может быть оценено при условии, что $i = 90^\circ$. Тогда

$$a \approx \frac{Pe}{2\pi}, \quad b \approx \frac{3}{4}\,\frac{Pe}{2\pi}.$$

(см. формулы (174) (175)).

Отсюда находим приближенное значение для b:

$$b \approx \frac{3\pi}{8}\,\frac{a^2}{P}.$$

Величина A для главного минимума равна T_{01}, для вторичного, T_{02}.

Имея значения параметров T_{01}, T_{02}, P, a, b, ω_0, ω_1, найденные по графикам $(O-C)_{1,2}$, можно их улучшить методом наименьших квадратов и найти их ошибки. Подробнее об этом, см. Мартынов (1971).

При высокой точности и большой продолжительности наблюдений, большом количестве отнаблюденных минимумов кривой блеска и значениях e, близких к 0,5, точность разложения средней аномалии по долготе ν до e^2 включительно может оказаться недостаточной.

В данном случае следует учитывать члены разложения более высокого порядка по e. Об этом см. в работах (Sterne, 1940, Мартынов, 1948 a, b, 1971).

Когда имеется лишь непродолжительный ряд наблюдений, и смещения минимумов только намечаются, приходится довольствоваться тем, что представить эпохи главного и вторичного минимумов T_1 и T_2 формулами с разными значениями периода:

$$T_1 = T_1(0) + NP_1,$$
$$T_2 = T_2(0) + NP_2.$$

Различие между периодами P_1 и P_2 несет информацию о параметрах апсидального движения в системе (см. третий и четвертый члены в разложениях (174) и (175)).

Для разности ΔP орбитальных периодов P_1 и P_2 можно записать соотношение (Rudkjobing, 1959):

$$\frac{\Delta P}{P} = \frac{2P\sqrt{1-e^2}}{\pi(1-e^2\sin^2\omega)^2} e(1-e^2)\sin\omega\frac{d\omega}{dt}. \tag{177}$$

Подставляя в это уравнение найденные значения $\Delta P = P_1 - P_2$, $P = (P_1 + P_2)/2$, e и ω (которые можно найти из решения кривой блеска), находим искомую скорость вращения линии апсид $\dot{\omega} = d\omega/dt$, а по ней — период апсидального вращения $U = 2\pi P/\dot{\omega}$.

Чаще всего для изучения вращения линии апсид используются затменные двойные системы с большими глубинами минимумов, в которых наклонение орбиты близко к 90°. В этих случаях, положив $i = 90°$, легко получить разложения для моментов минимумов T_1 и T_2 до весьма высокой степени эксцентриситета (Мартынов, 1971), взяв за основу разложение (Субботин, 1937)

$$M = v + 2\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j} e^j \frac{1+j\sqrt{1-e^2}}{(1+\sqrt{1-e^2}\,)^j} \sin jv. \tag{178}$$

Поскольку при $i = 90°$ моменты минимумов совпадают с моментами соединений компонент, мы можем положить $v = 90° - \omega$ для главного минимума и $v = 270° - \omega$ для вторичного. Тогда для моментов T_1 и T_2 получаем следующие формулы:

$$\begin{aligned} T_1 = T_1(0) + NP - \frac{Pe}{\pi}\cos\omega + \frac{Pe^2}{2\pi}\frac{1+2\sqrt{1-e^2}}{(1+\sqrt{1-e^2}\,)^2}\sin 2\omega + \\ + \frac{Pe^3}{3\pi}\frac{1+3\sqrt{1-e^2}}{(1+\sqrt{1-e^2}\,)^3}\cos 3\omega + \frac{Pe^4}{4\pi}\frac{1+4\sqrt{1-e^2}}{(1+\sqrt{1-e^2}\,)^4}\sin 4\omega, \end{aligned} \tag{179}$$

$$\begin{aligned} T_2 = T_2(0) + NP + \frac{Pe}{\pi}\cos\omega + \frac{Pe^2}{2\pi}\frac{1+2\sqrt{1-e^2}}{(1+\sqrt{1-e^2}\,)^2}\sin 2\omega - \\ - \frac{Pe^3}{3\pi}\frac{1+3\sqrt{1-e^2}}{(1+\sqrt{1-e^2}\,)^3}\cos 3\omega + \frac{Pe^4}{4\pi}\frac{1+4\sqrt{1-e^2}}{(1+\sqrt{1-e^2}\,)^4}\sin 4\omega. \end{aligned} \tag{180}$$

Эти формулы можно применять после того, как предварительные определения элементов e и ω уже выполнены.

9. Определение концентрации вещества в теле звезды по наблюдаемому вращению линии апсид в двойной системе

Как уже отмечалось, причинами поворота линии апсид в тесной двойной системе могут быть: приливная и вращательная деформация звезд, релятивистский эффект ОТО, наличие в системе третьего тела. Элементы орбиты тесной двойной системы могут меняться также из-за истечения вещества из звезд (звездный ветер, перетекание вещества при обмене масс), торможения звезд в общей оболочке или плотной околозвездной среде, а также под действием магнитогидродинамических эффектов, связанных с потерей массы в виде намагниченного ветра и даже излучением очень тесной двойной системой потока гравитационных волн. В подавляющем большинстве случаев скорость поворота линии апсид определяется приливно-вращательной деформацией звезд и, в меньшей степени, релятивистскими эффектами (мы пока не рассматриваем случай двойного радиопульсара). Поэтому наблюдения вращения линии апсид дают возможность оценивать приливно-вращательную деформацию звезд в тесной двойной системе и по ней судить о степени концентрации вещества в теле звезды. Действительно, если основная масса звезды сосредоточена в ее центре, то даже при сильной приливно-вращательной деформации звезды ее суммарный гравитационный потенциал будет не сильно отличаться от закона $1/r$, поскольку масса внешних, наиболее деформированных слоев звезды, относительно мала. Поэтому эллиптическая орбита такой двойной системы будет практически неизменной в пространстве, период ее апсидального движения будет очень большим. Если же степень концентрации вещества к центру звезды мала (например, звезда является однородным шаром), то даже при небольшой приливно-вращательной деформации звезды ее внешние деформированные части дают заметный вклад в суммарный гравитационный потенциал, который будет существенно отличаться от закона $1/r$. Это приведет к сравнительно быстрому повороту линии апсид в системе. Таким образом, чем меньше степень концентрации вещества в теле звезды, тем, при прочих равных условиях, короче период поворота линии апсид в двойной системе. Поэтому изучение вращения линии апсид в тесных двойных системах — это эффективный метод исследования внутренней структуры звезды. Забегая вперед, отметим, что к настоящему времени таким методом изучена степень концентрации вещества в недрах нескольких десятков звезд разных спектральных классов и классов светимости, что дает уникальную возможность дополнительной проверки теории эволюции и внутреннего строения звезд.

Теория вращения линии апсид, вызванного приливно-вращательной деформацией звезд, была развита в рамках ньютоновской механики Ресселом (Russell, 1928). Эта теория была уточнена и конкретизирована Чандрасекаром (Chandrasekhar, 1933), Каулингом (Cowling, 1938), Стерном (Sterne, 1939). Большой вклад в решение этой проблемы был сделан Мартыновым (1948, 1971) и Копалом (Kopal, 1965, 1978).

Рассмотрим основные идеи и результаты современной теории вращения линии апсид в тесных двойных системах (см., например, обзор Халиуллина, 1997).

Пусть в тесной двойной системе приливные и вращательные возмущения приводят к деформациям фигур звезд. Эти деформации можно разложить в ряд по сферическим гармоникам первого, второго, третьего и т. д. порядка. Эти сферические гармоники определяются параметрами k_1, k_2, $k_3\ldots$, которые зависят от внутреннего строения звезды и называются параметрами апсидального вращения. Параметры апсидального вращения k_j связаны с внутренней структурой звезды через дифференциальное уравнение первого порядка (так называемое уравнение Радо):

$$r\,\frac{d\eta_j}{dr} + 6\,\frac{\rho\,(r)}{\overline{\rho}\,(r)}\,(\eta_j + 1) + \eta_j\,(\eta_j - 1) = j\,(j+1)\,, \tag{181}$$

где j — определяет порядок параметра, r — расстояние от центра звезды до данного слоя, $\rho(r)$ — локальное значение плотности вещества в теле звезды, $\overline{\rho}\,(r)$ — средняя плотность вещества внутри сферы радиуса r, R — полный радиус звезды. Искомые функции $\eta_j(r)$, определяющие возмущение плотности вещества в теле звезды, равны нулю в центре звезды ($\eta(r) = 0$ при $r = 0$) и определяют параметры апсидального вращения k_j:

$$k_j = \frac{j + 1 - \eta_j\,(R)}{2\,(j + \eta_j\,(R))}, \tag{182}$$

где η_j(R) — значение функции η_j(r) на поверхности звезды, когда $r = R$.

Для заданного распределения плотности в теле звезды $\rho(r)$ (например, взятого из теоретических моделей внутреннего строения звезд) решение дифференциального уравнения Радо (181) позволяет найти функции $\eta_j(r)$ и затем, по формуле (182) определить параметры апсидального вращения k_j. В случае сильной концентрации вещества в теле звезды ($\rho\,(r)/\overline{\rho}\,(r) << 1$) для k_j можно получить простую приближенную формулу:

$$k_j \approx \frac{3\,(j+2)}{(2j+1)\,R^{2j+1}} \int\limits_0^R \frac{\rho\,(r)}{\overline{\rho}\,(r)} r^{2j}\,dr, \tag{183}$$

которая особенно наглядно показывает, что коэффициенты апсидального вращения k_j напрямую связаны с распределением плотности вещества в недрах звезды. Поэтому параметры апсидального вращения k_j часто называют также параметрами внутренней структуры звезды.

Наиболее сильно скорость апсидального вращения определяется параметром второго порядка k_2. Вклад остальных порядков можно считать пренебрежимо малым, поэтому на практике при исследовании вращения линии апсид используется лишь параметр k_2.

Если причина вращения линии апсид обусловлена деформацией компонент, то орбита-эллипс системы поворачивается в направлении орбитального движения и период U апсидального вращения связан с орбитальным (аномалистическим) периодом P следующим соотношением (Мартынов, 1971):

$$\begin{aligned}\frac{P}{U} = k_{2,1}\left(\frac{R_1}{a}\right)^5 &\left\{\frac{m_2}{m_1}15\,f_2\,(e) + \left(\frac{\omega_{r,1}}{\omega_k}\right)^2\left(1+\frac{m_2}{m_1}\right)\frac{1}{\left(1-e^2\right)^2}\right\} + \\ &+ k_{2,2}\left(\frac{R_2}{a}\right)^5 \left\{\frac{m_1}{m_2}15\,f_2\,(e) + \left(\frac{\omega_{r,2}}{\omega_k}\right)^2\left(1+\frac{m_1}{m_2}\right)\frac{1}{\left(1-e^2\right)^2}\right\} + \\ &+ 28\,f_3\,(e)\left\{k_{3,1}\left(\frac{R_1}{a}\right)^7\frac{m_2}{m_1} + k_{3,2}\left(\frac{R_2}{a}\right)^7\frac{m_1}{m_2}\right\} + \\ &+ 45\,f_4\,(e)\left\{k_{4,1}\left(\frac{R_1}{a}\right)^9\frac{m_2}{m_1} + k_{4,2}\left(\frac{R_2}{a}\right)^9\frac{m_1}{m_2}\right\} + \ldots .\end{aligned} \tag{184}$$

Здесь индексы у параметра $k_{j,i}$ обозначают порядок параметра и номер компоненты соответственно, m_1, m_2 — массы первой и второй компоненты, R_1, R_2 — радиусы первой и второй компоненты, a — большая полуось относительной орбиты, $\omega_{r,1}$, $\omega_{r,2}$ — угловые скорости осевого вращения первой и второй компоненты, ω_k — угловая скорость орбитального вращения (кеплеровская скорость), которая, обычно усредняется по орбитальному периоду. Функции $f(e)$ имеют вид (Мартынов, 1971):

$$\begin{aligned} f_2\,(e) &= \left(1-e^2\right)^{-5}\left(1+\frac{3}{2}e^2+\frac{1}{8}e^4\right), \\ f_3\,(e) &= \left(1-e^2\right)^{-7}\left(1+\frac{15}{4}e^2+\frac{15}{8}e^4+\frac{5}{64}e^6\right), \\ f_4\,(e) &= \left(1-e^2\right)^{-9}\left(1+7e^2+\frac{35}{4}e^4+\frac{35}{16}e^6+\frac{7}{128}e^8\right). \end{aligned}$$

В уравнении (184) члены, содержащие $\omega_{r,1}^2$ и $\omega_{r,2}^2$, соответствуют вращательной деформации звезд, а остальные члены — приливной деформации. Предполагается, что векторы осевого и орбитального вращения параллельны. Случаи непараллельности этих векторов и возникающие при этом эффекты рассмотрены, например, Копалом (Kopal, 1978) и Шакурой (1985). Отношения угловых скоростей осевого и орбитального вращения $\omega_{r,1}/\omega_k$ и $\omega_{r,2}/\omega_k$ — дополнительные параметры задачи, которые либо должны быть определены из наблюдений (например, путем измерения вращательного уширения линий поглощения в спектрах звезд), либо должны оцениваться, исходя из теоретических соображений. Теоретические оценки показывают, что диссипация из-за приливного трения должна приводить к синхронизации осевого и орбитального вращения. В случае эллиптической орбиты, как показывают статистические исследования (Swings, 1936, Claret and Gimenez, 1993), синхронизация наступает при значении орбитальной угловой скорости $\omega_k(v)$ для периастра ($v = 0$). Поэтому, если $\omega_{r,1}$ и $\omega_{r,2}$ неизвестны, можно положить

$$\left(\frac{\omega_{r,1}}{\omega_k}\right)^2 = \left(\frac{\omega_{r,2}}{\omega_k}\right)^2 = \frac{1+e}{(1-e)^3}. \tag{185}$$

На практике, при интерпретации наблюдений вращения линии апсид используются лишь первые два члена разложения (184):

$$\frac{P}{U} = C_1 k_{2,1} + C_2 k_{2,2}\ , \tag{186}$$

где

$$C_1 = \left(\frac{R_1}{a}\right)^5 \left\{\frac{m_2}{m_1} 15\, f_2(e) + \left(\frac{\omega_{r,1}}{\omega_k}\right)^2 \left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right) \frac{1}{\left(1-e^2\right)^2}\right\}, \tag{187}$$

$$C_2 = \left(\frac{R_2}{a}\right)^5 \left\{\frac{m_1}{m_2} 15\, f_2(e) + \left(\frac{\omega_{r,2}}{\omega_k}\right)^2 \left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right) \frac{1}{\left(1-e^2\right)^2}\right\}. \tag{188}$$

Как видно из уравнения (186), невозможно определить коэффициенты апсидального вращения для каждой из компонент. Поэтому обычно делают допущение о подобии звезд в изучаемой тесной двойной системе и вычисляют средневзвешенное наблюдаемое значение k_2:

$$\overline{k}_2^{\,\mathrm{obs}} = \frac{P}{U} \cdot \frac{1}{C_1 + C_2}. \tag{189}$$

Если апсидальный период U измерен, а параметры двойной системы (m_1, m_2, R_1, R_2, e и др.) определены из спектральных и фотометрических данных, то величина $\overline{k}_2^{\,\mathrm{obs}}$ находится из (189). С другой стороны, из модельных расчетов в теории внутреннего строения звезд можно найти теоретическое распределение плотности в теле звезды $\rho(r)$ и после решения дифференциального уравнения Радо (181) найти соответствующую функцию $\eta_2(r)$ и по ней определить теоретическое значение параметра апсидального вращения k_2^{th} (см. формулу (182)). Разумеется, чтобы корректно сравнить с наблюдаемой величиной k_2^{obs}, необходимо посчитать средневзвешенное по обеим компонентам теоретическое значение коэффициента апсидального вращения:

$$\overline{k}_2^{\,\mathrm{th}} = \frac{C_1 k_{2,1}^{\mathrm{th}} + C_2 k_{2,2}^{\mathrm{th}}}{C_1 + C_2}. \tag{190}$$

Сравнивая наблюдаемое значение $\overline{k}_2^{\text{obs}}$ с теоретическим $\overline{k}_2^{\text{th}}$, можно проверять теорию внутреннего строения звезд. В этом состоит главная ценность для науки исследований вращения линии апсид в тесных двойных системах.

Для однородной модели звезды ($\rho(r) = \text{const}$) теоретические коэффициенты апсидального вращения равны: $k_2 = 3/4$, $k_3 = 3/8$, $k_4 = 1/4$, а для модели Роша (вся масса звезды сосредоточена в ее центре) $k_2 = k_3 = k_4 = 0$. Результаты исследования апсидального вращения у многих двойных систем показывают, что вещество в недрах звезд сильно концентрируется к центру: плотность в центре звезды на два порядка выше ее средней плотности.

Рассмотрим теперь учет релятивистского вращения линии апсид, которое может иметь место даже в случае системы, состоящей из двух точечных масс. Согласно ОТО (см., например, Levi-Civita, 1937), апсидальное вращение, вызванное релятивистскими эффектами, описывается формулой:

$$\frac{P}{U_{\text{rel}}} = 6{,}37 \cdot 10^{-6} \frac{m_1 + m_2}{a\left(1 - e^2\right)}, \tag{191}$$

где U_{rel} — период апсидального вращения, обусловленный ОТО, m_1, m_2 — массы компонент (в солнечных массах), $a = a_1 + a_2$ — большая полуось относительной орбиты (в радиусах Солнца). Для астрономических приложений формулу (191) обычно записывают в виде

$$U_{\text{rel}}\,[\text{годы}] = 1{,}81 \cdot 10^3 \frac{P^{5/3}\left(1 - e^2\right)}{(m_1 + m_2)^{2/3}}, \tag{192}$$

где орбитальный период P выражен в сутках, а массы m_1, m_2 — в солнечных массах. Релятивистский поворот линии апсид происходит в том же направлении, что и вращение за счет действия классического эффекта приливно-вращательной деформации звезд. Оба эффекта приводят к вращению линии апсид в направлении орбитального движения. Как следует из формул (191), (192), релятивистское вращение линии апсид происходит тем быстрее, чем больше сумма масс компонент, больше эксцентриситет орбиты и меньше орбитальный период системы. Если обозначить наблюдаемую скорость вращения линии апсид

$$\dot{\omega}_{\text{obs}} = \frac{2\pi P}{U_{\text{obs}}},$$

а скорость вращения линии апсид, обусловленную релятивистскими эффектами

$$\dot{\omega}_{\text{rel}} = \frac{2\pi P}{U_{\text{rel}}},$$

то скорость вращения линии апсид, обусловленная приливно-вращательными эффектами $\dot{\omega}_{\text{class}} = 2\pi P/U$, может быть представлена как разность:

$$\dot{\omega}_{\text{class}} = \dot{\omega}_{\text{obs}} - \dot{\omega}_{\text{rel}}. \tag{193}$$

Таким образом, учет релятивистского вращения линии апсид всегда уменьшает полную наблюдаемую скорость вращения линии апсид. В то же время, как отмечено Мартыновым (1971), гравитационное влияние третьего тела в системе может приводить как к прямому, так и обратному вращению линии апсид, в зависимости от взаимной ориентации орбит компонент тройной системы.

Впервые систематический поиск релятивистских членов в апсидальном вращении у ряда массивных тесных двойных систем с большими экцентриситетами орбит был выполнен Мартыновым и Халиуллиным (см. обзор Халиуллина, 1997, и ссылки в нем). Оказалось, что в системе DI Her, где предполагаемый релятивистский член в апсидальном движении должен превышать классический, наблюдаемый эффект релятивистского апсидального вращения близок к нулю (Martynov and Khaliullin, 1980). Исследования ряда других систем показали, что здесь наблюдаемый и теоретический релятивистские члены в апсидальном вращении близки друг к другу (Халиуллин, 1983а, б, Khaliullin, 1985, Халиуллина и Халиуллин, 1989, Gimenez and Scaltriti, 1982). По-видимому противоречия между теорией и наблюдениями в системе DI Her связаны с присутствием в этой системе третьей звезды (Khaliullin, Khodykin, Zakharov, 1991).

Недавно в работе (Albrecht et al., 2009) в результате тщательных спектроскопических исследований системы DIHer, было показано, что оси вращения звезд в этой системе почти лежат в плоскости орбиты. Вызванная быстрым осевым вращением деформация звезд приводит к повороту линии апсид в сторону, противоположную орбитальному обращению. Это вызывает компенсацию релятивистского члена в скорости поворота линии апсид, в соответствии с выводами работы Н. И. Шакуры (1985).

Рассмотрим пример определения параметра апсидального вращения из наблюдений затменной переменной системы MZ Lac (Козырева, Кусакин, Вольф, 2005). Затменная система MZ Lac (Sp A9.5V+F3.5V, $V_{\max} = 11{,}56^m$) имеет орбитальный период $P = 3{,}1588204^{\rm d}$, эксцентриситет орбиты $e = 0{,}421 \pm 0{,}005$ и период апсидального вращения $U = (444 \pm 25)$ лет (Вольф и др., 1998). В работе Козыревой и др. (2005) были получены новые высокоточные кривые блеска MZ Lac, вычислены параметры этой системы на основе интерпретации кривых блеска, определена скорость вращения линии апсид и дано сравнение результатов интерпретации наблюдений с теоретической оценкой параметра апсидального вращения, полученного на основе эволюционных звездных моделей. Поскольку наклонение орбиты в системе $i \simeq 88^\circ$, можно считать, что моменты главного и вторичного минимумов ($\Delta_{1,2} = \min$) здесь практически совпадают с моментами соединений компонент ($\nu_1 = 0$, $\nu_2 = 180^\circ$). Из анализа положений 12 моментов главного и вторичного минимумов в этой системе, охватывающих интервал времени ~ 20 лет, построена диаграмма остатков $(O-C)_{1,2}$ от линейных эфемерид для главного и вторичного минимумов (см. рис. 17). Из рис. 17 видно, что периоды P_1 и P_2 следования главного и вторичного затмений заметно различаются, поскольку значения $(O-C)_{1,2}$ для разных эпох начинают сильно расходиться. Это отражает вращение линии апсид в двойной системе, при котором долгопериодические колебания положений главного и вторичного минимумов происходят в противофазе. Поскольку период вращения линии апсид много больше орбитального периода и значительно превосходит интервал наблюдений 20 лет, изменения $(O-C)_{1,2}$ можно приближенно представить в виде линейных зависимостей и методом наименьших квадратов найти эфемериды главного и вторичного минимумов:

$$\begin{aligned} T_1 &= \mathrm{JD}_\odot 2446354{,}08\underset{\pm 2}{45} + 3{,}15877\underset{\pm 2}{64}{}^{\rm d} \cdot E, \\ T_2 &= \mathrm{JD}_\odot 2446356{,}06\underset{\pm 4}{06} + 3{,}15874\underset{\pm 12}{73}{}^{\rm d} \cdot E\,. \end{aligned} \tag{194}$$

Согласно этим эфемеридам, различие периодов главного и вторичного минимумов

$$\Delta P = P_1 - P_2 = 0{,}0000291^{\rm d} = 2{,}51^{\rm s} \pm 0{,}1^{\rm s}. \tag{195}$$

Подстановка в формулу (177) найденных значений ΔP, P, $e = 0{,}420(3)$, $\omega_{1985} = 64{,}6^\circ(3)$, $\omega_{2003} = 76{,}5^\circ(6)$ (индекс у ω означает год наблюдений) дает скорость вращения линии апсид

$$\dot\omega_{\rm obs} = (75^\circ \pm 6^\circ)/100\,\text{лет}.$$

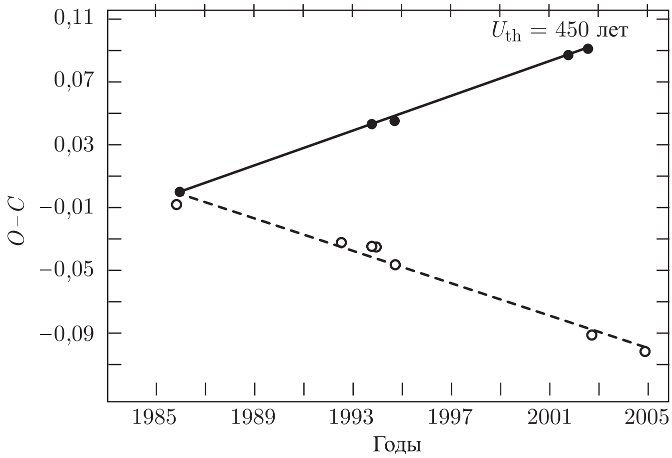


Рис. 17. Зависимость отклонений $(O-C)_{1,2}$ от времени для моментов главного и вторичного минимумов в системе MZ Lac. Точки $(O-C)_1$ — отклонения наблюдаемых моментов главного минимума от линейных эфемерид, светлые кружки — отклонения для вторичного минимума (из работы Козыревой и др., (2005)

Теоретическая ожидаемая скорость вращения линии апсид, вычисленная с параметрами, найденными из интерпретации кривой блеска, для системы MZ Lac

$$\dot{\omega}_{\rm theor} = \dot{\omega}_{\rm class} + \dot{\omega}_{\rm rel} = (80^\circ \pm 7^\circ)/100\,\text{лет}.$$

Поскольку теоретическая скорость вращения линии апсид определяется относительными радиусами компонент в высокой степени $(R_{1,2}/{\rm a})^5$ (см. формулу (184)), необходимо знать относительные радиусы звезд с высокой точностью (лучше 1%), что может обеспечить лишь высокоточная фотоэлектрическая кривая блеска.

Средний наблюдательный параметр апсидального вращения в системе MZ Lac (см. формулу (189)) получается равным

$$\overline{k}_2^{\rm obs} = 0{,}0051 \pm 0{,}0005.$$

Теоретические параметры апсидального движения для компонент системы MZ Lac (Claret and Gimenez, 1992) составляют $k_{2,1}^{\rm th} = 0{,}0032$ и $k_{2,2}^{\rm th} = 0{,}0059$. Соответственно, средневзвешенное значение теоретического коэффициента апсидального вращения (см. формулу (190)) равно (величины $C_1 = 2{,}74$, $C_2 = 3{,}18$):

$$\overline{k}_2^{\rm th} = 0{,}0047 \pm 0{,}0005.$$

Таким образом, Козыревой и др. (2005) было показано, что в системе MZ Lac наблюдаемый и теоретический коэффициенты апсидального вращения хорошо согласуются между собой, что подкрепляет модель внутреннего строения звезд, основанную на механизме термоядерного выделения энергии в их недрах.

Сделаем важное замечание. Величины e и ω могут быть найдены независимо из интерпретации высокоточной кривой блеска затменной системы (см. выше). Если имеется серия кривых блеска, охватывающих большой промежуток времени, то по результатам их интерпретации можно определить ω для разных эпох и тем самым найти скорость вращения линии апсид $d\omega/dt$. Однако анализ кривой блеска использует, наряду с данными о различии в ширинах затмений, информацию лишь об относительном смещении вторичного минимума по отношению к главному. В то же время, анализ разностей $(O - C)_{1,2}$ в положениях главного и вторичного затмений использует информацию об абсолютных смещениях главного и вторичного минимумов. Поэтому оба метода определения $d\omega/dt$ (по кривой блеска и по разностям $(O - C)_{1,2}$) хорошо дополняют друг друга. Совместное использование обоих методов дает наиболее надежное определение скорости вращения линии апсид в двойной системе.

Из-за скоррелированности величин e и ω, которые входят в кривую блеска в виде произведений $e\cos\omega$ и $e\sin\omega$, точность определения ω по кривой блеска может оказаться недостаточно высокой для надежного определения $d\omega/dt$. В этом случае, как отмечено Халиуллиным (1997), разумно определять e и ω из кривой блеска в гипотезе о том, что величина e для разных эпох постоянна, а меняется лишь ω. Это позволяет существенно улучшить точность определения ω по кривой блеска. Однако здесь нужно соблюдать осторожность ввиду того, что при наличии третьего тела в системе могут изменяться со временем как ω, так и e. Подробнее со спецификой исследования апсидального вращения в затменных системах можно ознакомиться в обзоре Халиуллина (1997).

Число затменных систем с обнаруженным апсидальным вращением к настоящему времени превышает сотню (см., например, Петрова и Орлов, 1999). Список из 50 затменных двойных систем с надежно выявленным вращением линии апсид приведен в обзоре Халиуллина (1997). Периоды апсидального вращения U в затменных двойных системах лежат в пределах от 29000–46000 лет (системы DI Her и α CrB) до 21,3–26,3 года (системы U Oph и V478 Cyg). Наиболее типичное значение U составляет несколько сотен лет. Наблюдаемые значения коэффициента апсидального вращения $\overline{k}_2^{\mathrm{obs}}$ лежат в пределах 10^{-2}–10^{-3}. Соответствующее отношение плотности в центре звезды ρ_c к ее средней плотности $\overline{\rho}$ составляет $\rho_c/\overline{\rho} \sim 10^2$. С использованием новых таблиц коэффициентов поглощения звездного вещества (Rogers and Iglesias, 1992), Claret and Gimenez (1992) рассчитали новую сетку моделей звезд

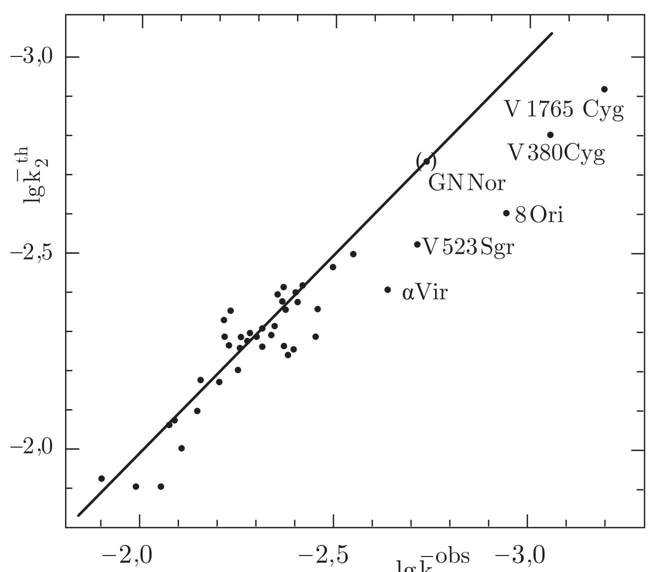


Рис. 18. Сравнение наблюдаемых величин $\lg\overline{k}_2^{\mathrm{obs}}$ и теоретических средневзвешенных $\lg\overline{k}_2^{\mathrm{th}}$ значений параметра апсидального вращения для двойных систем (из работы Халиуллина, 1997)

разных масс, разного химсостава и различных стадий эволюции. Авторы вычислили также для всех моделей теоретические параметры апсидального вращения $k_2^{\rm th}$. На рис. 18, заимствованном из обзора Халиуллина (1997), приведено сравнение наблюдаемых коэффициентов апсидального вращения $\overline{k}_2^{\rm obs}$ и соответствующих им средневзвешенных теоретических значений $\overline{k}_2^{\rm th}$, рассчитанных на основе результатов работы Кларе и Гименеза (Claret and Gimenez, 1992). Как видно из рис. 18, для звезд V–IV классов светимости имеется удовлетворительное согласие между $\overline{k}_2^{\rm obs}$ и $\overline{k}_2^{\rm th}$. Однако для звезд, находящихся на более поздней стадии эволюции (I–III классы светимости) теоретические модели Кларе и Гименеза (1992) дают систематически меньшую концентрацию вещества к центру звезды, чем та концентрация, которая определяется наблюдаемыми значениями $\overline{k}_2^{\rm obs}$ (точки, соответствующие этим звездам, расположены в правом верхнем углу рис. 18). Кроме того, самые молодые звезды начальной главной последовательности также показывают несколько большую концентрацию вещества к центру, чем теоретические модели. Дальнейшее накопление наблюдательных данных по вращению линии апсид в затменных двойных, детальный анализ индивидуальных моделей звезд и уточнение наблюдаемых параметров двойных систем представляются очень перспективными для проверки современных моделей внутреннего строения звезд.

10. Влияние третьего тела на моменты минимумов затменной системы

Мы рассмотрели вращение линии апсид в двойной системе, обусловленное приливно-вращательной деформацией звезд и эффектами ОТО. Как уже отмечалось, вращение линии апсид может быть обусловлено также наличием третьего тела в системе. При наличии третьего тела могут меняться и другие параметры орбиты тесной двойной системы — величина эксцентриситета орбиты двойной, ее наклонение, положение линии узлов этой орбиты и т. п. Задача о движении компонент тройной и кратной системы очень сложна и должна решаться с применением всего аппарата небесной механики. Эта задача решалась Мартыновым (1948, 1971) и Копалом (Kopal, 1978). Мы рассмотрим лишь один аспект этой проблемы, связанный с определением из наблюдений параметров третьего тела в затменной системе.

Выше мы рассмотрели фотометрические проявления третьего тела в системе как третьего света. Рассмотрим теперь динамические проявления третьего тела в системе и изучим его влияние на моменты минимумов кривой блеска. Долгопериодические смещения (неравенства) в моментах минимумов кривой блеска затменной системы, обусловленные присутствием третьего тела, подробно рассмотрены Мартыновым (1948, 1971) и Копалом (Kopal, 1978). Предположим, как это чаще всего бывает в случае устойчивых тройных систем, что система построена по иерархической схеме: размеры орбиты третьей звезды много больше размеров орбиты затменной тесной двойной системы. Пусть третья звезда не участвует в затмениях и проявляет себя лишь как «третий свет» в системе.

Орбитальное движение центра масс тесной двойной затменной системы вокруг центра масс тройной системы приводит к долгопериодическим неравенствам в моментах минимумов затменной пары. Это связано с конечностью скорости света. Проведем картинную плоскость через центр масс тройной системы. Когда затменная пара находится перед картинной плоскостью, главный и вторичный затменные минимумы будут наступать раньше, чем в случае, когда затменная пара находится за картинной плоскостью, поскольку в первом случае свету от затменной пары потребуется меньше времени, чтобы достичь земного наблюдателя. Причем, поскольку орбитальный период и размеры орбиты тесной затменной пары много меньше соответствующих величин для тройной системы, это опережение будет происходить практически на одну и ту же величину как для главного, так и вторичного минимумов кривой блеска. В этом состоит радикальное отличие характера периодических неравенств, обусловленных присутствием третьего тела, от периодических неравенств, обусловленных вращением линии апсид в двойной системе. Если в случае вращения линии апсид смещения главного и вторичного затменных минимумов происходят в противофазе, то влияние третьего тела приводит к тому, что и главный, и вторичный минимумы смещаются в фазе, в одну сторону.

Рассмотрим простейшую модель тройной системы, когда долгопериодическая орбита третьего тела круговая. Очевидно, в этом случае центр тяжести затменной пары также описывает круговую орбиту вокруг центра тяжести тройной системы. В этом случае эпохи главных затменных минимумов тесной двойной системы подчиняются синусоидальным отклонениям от линейного закона для этих минимумов:

$$T_{N_1} = T_{01} + NP + \frac{a' \sin i'}{c} \sin\left(\mu_1 + 2\pi m N\right), \tag{196}$$

где $\mu_1 = q + \omega'$ — начальная фаза, q — средняя аномалия в момент нулевого минимума, ω' — долгота периастра абсолютной орбиты центра тяжести затменной пары (в случае круговой долгопериодической орбиты ω' не определена, и можно положить $\omega' = 0$), величина $2\pi m$ — среднее перемещение центра тяжести затменной пары в долгопериодической орбите за один оборот в короткопериодической орбите (удобно счет времени вести не сутками, а минимумами затменной переменной), N — число протекших коротких периодов затменной пары, a' — большая полуось (в случае круговой орбиты — радиус) абсолютной орбиты, описываемой центром тяжести затменной пары вокруг центра тяжести тройной системы, c — скорость света, i' — наклонение долгопериодической орбиты к картинной плоскости. В уравнении (196) последний член соответствует так называемому световому уравнению, описывающему долгопериодические смещения затменных минимумов кривой блеска, обусловленные конечной скоростью света. Чтобы вывести световое уравнение z/c, необходимо спроектировать радиус-вектор долгопериодической орбиты на луч зрения и использовать разложения радиуса-вектора и истинной аномалии в ряды по средней аномалии (см. Мартынов, 1948). Проекция радиуса-вектора долгопериодической орбиты z, поделенная на скорость света c определяет световое уравнение z/c. Моменты вторичных затменных минимумов при наличии светового уравнения будут описываться таким же уравнением, как и уравнение (196).

Период синусоиды в уравнении (196) определяет период обращения в долгопериодической орбите P', а полуамплитуда синусоиды дает величину $a' \sin i'/c$, т. е., при известной c, $a' \sin i'$. В разумном предположении о том, что движения в короткопериодической и долгопериодической орбитах происходят в одной плоскости (компланарны), можно из решения затменной кривой блеска оценить величину $i = i'$ и таким образом, найти большую полуось (радиус) a' абсолютной долгопериодической орбиты центра тяжести затменной двойной системы. Массу третьего тела m_3 представим в относительном виде:

$$\lambda = \frac{m_3}{m_1 + m_2 + m_3}, \tag{197}$$

где m_1 и m_2 — массы компонент затменной пары. Тогда большая полуось (радиус) относительной долгопериодической орбиты A выразится в виде:

$$A = \frac{a'}{\lambda}. \tag{198}$$

Используя третий закон Кеплера, имеем:

$$\frac{A^3}{(P')^2} = m_1 + m_2 + m_3, \tag{199}$$

где A выражено в астрономических единицах, P' — в годах, m_1, m_2, m_3 — в массах Солнца.

Подставляя в (199) выражения (197), (198), получаем формулу для оценки массы третьего тела m_3:

$$\frac{m_3^3}{(m_1 + m_2 + m_3)^2} = \frac{(a')^3}{(P')^2}. \tag{200}$$

Если из интерпретации кривой блеска и кривых лучевых скоростей затменной пары массы ее компонент m_1 и m_2 известны, то уравнение (200) позволяет найти массу третьего тела m_3. Дополнительная информация о массе m_3 может быть получена после нахождения из интерпретации кривой блеска затменной пары величины третьего света L_3 и использования зависимости «масса–светимость» для звезд.

Если величина наклонения долгопериодической орбиты i' неизвестна, то вместо (200) имеем выражение для функции масс тройной системы:

$$\frac{m_3^3 \sin^3 i'}{(m_1 + m_2 + m_3)^2} = \frac{(a' \sin i')^3}{(P')^2}, \tag{201}$$

где величина $a'\sin i'$ определяется полуамплитудой синусоидальных отклонений в эпохах затменных минимумов от линейного закона (см. формулу (196)).

Если эксцентриситет долгопериодической орбиты e' не равен нулю, отклонения эпох затменных минимумов от линейного закона (определяющие световое уравнение z/c) носят несинусоидальный характер, и формула (196) заменяется на более сложное выражение, выведенное Мартыновым (Зверев и др., 1947):

$$\begin{aligned} T_{N1} = T_{01} + NP + \alpha \sin(\mu_1 + 2\pi m N) + \beta \sin(\mu_2 + 2\pi m N) +{}& \\ + \gamma \sin 2(\mu_3 + 2\pi m N) + \delta \sin 3(\mu_4 + 2\pi m N),& \end{aligned} \tag{202}$$

где

$$\mu_1 = q + \omega', \quad \mu_2 = q - \omega', \quad \mu_3 = q + \frac{\omega'}{2}, \quad \mu_4 = q + \frac{\omega'}{3},$$
$$\alpha = \frac{a' \sin i'}{c} \left(1 - \frac{1}{2}\,(e')^2\right), \quad \beta = \frac{1}{8}\,(e')^2\;\frac{a' \sin i'}{c},$$
$$\gamma = \frac{1}{2}\,e'\;\frac{a' \sin i'}{c} \quad \delta = \frac{3}{8}\,(e')^2\;\frac{a' \sin i'}{c}.$$

Формула (202) получена после проектирования радиуса-вектора долгопериодической орбиты на луч зрения и использования известных разложений радиуса-вектора долгопериодической эллиптической орбиты и соответствующей истинной аномалии через среднюю аномалию, с точностью до вторых степеней эксцентриситета e' включительно. Проекция радиуса-вектора долгопериодической орбиты r' на луч зрения равна: $z = r' \sin i' \sin(v' + \omega')$, где v' — истинная аномалия центра тяжести затменной пары на долгопериодической орбите, ω' — долгота периастра долгопериодической орбиты.

Заметим, что в формулах (196), (202) P — наблюдаемый период, который связан с истинным орбитальным периодом P_0 формулой: $P = (1 + \gamma/c)\,P_0$, где γ — лучевая скорость центра масс системы. Используя наблюдаемые отклонения $(O - C)$ моментов затменных минимумов относительно линейных элементов, можно с помощью уравнения (202) определить (например, методом наименьших квадратов) величины

$a' \sin i'/c$, e', ω', q и P'. С найденными значениями P' и $a'\sin i'$ по формуле (201) оценивается масса третьего тела m_3. Подробнее об этом см. в книге Зверева и др. (1947).

В качестве примера, рассмотрим интерпретацию многолетних фотометрических наблюдений затменной двойной системы HS Her с вращением линии апсид и световым уравнением. В работе Халиуллина и Халиуллиной (2006) выполнен анализ 22-летнего однородного ряда фотоэлектрических UBV-измерений блеска системы HS Her и изучено влияние вращения линии апсид, а также влияние третьего тела на моменты затменных минимумов этой системы.

Затменная система HS Her имеет орбитальный период $P_{\text{orb}} \simeq 1{,}6^{\text{d}}$, массы главной и вторичной компоненты 5,0 и $1{,}6M_\odot$ и эксцентриситет орбиты $e \simeq 0{,}02$. Авторами (Халиуллин и Халиуллина, 2006) были собраны все известные моменты середин главного и вторичного минимумов этой системы. На рис. 19 приведены отклонения наблюдаемых (O) фотоэлектрических моментов минимумов HS Her от теоретических (C), вычисленных с линейными эфемеридами:

$$C(\text{MinI}) = \text{JD}_\odot 2450267{,}5812 + 1{,}637434016^{\text{d}} T,$$

$$C(\text{MinII}) = \text{JD}_\odot 2450267{,}5812 + \frac{P_s}{2} + 1{,}637434016^{\text{d}} T,$$

где P_s — среднее за апсидальный цикл значение сидерического орбитального периода системы. Начальная эпоха для MinI соответствует эпохе T, когда долгота периастра затменной системы $\omega_0 = 3\pi/2$. Как видно из рис. 19, отклонения $O - C$ для главного и вторичного минимумов меняются в противофазе (эффект вращения линии апсид), однако эти отклонения имеют явно выраженный несимметричный характер. Наблюдаются отклонения значений $O - C$ как в главном, так и во вторичном минимумах преимущественно в одну сторону от квазисинусоиды (эффект светового уравнения, обусловленный наличием третьего тела в системе).

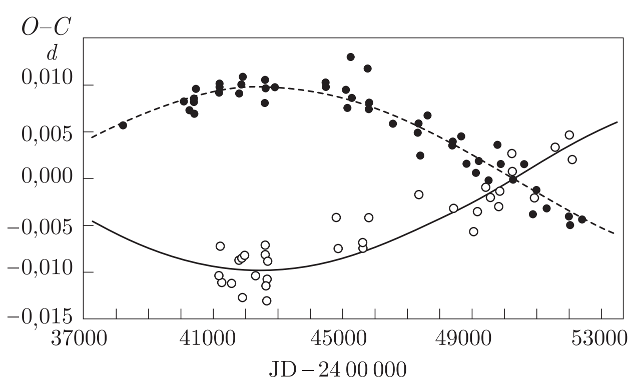


Рис. 19. Отклонения наблюдаемых (O) фотоэлектрических моментов минимумов системы HS Her от вычисленных (C) с линейными эфемеридами C(MinI) и C(MinII) соответственно для MinI (темные кружки) и MinII (светлые кружки) (из статьи Халиуллина и Халиуллиной, 2006)

Теоретические моменты минимумов, обусловленные вращением линии апсид, описываются известными соотношениями (см. формулы (179), (180)):

$$C_1(\text{MinI}) = \text{HJD}_0 + P_s \cdot T + \pi_1(\omega, e),$$

$$C_1(\text{MinII}) = \text{HJD}_0 + \frac{P_s}{2} + P_s \cdot T + \pi_2(\omega, e),$$

где долгота периастра $\omega = \omega_0 + \dot{\omega}_{\rm obs} \cdot T$, $\dot{\omega}$ — поворот линии апсид за один орбитальный период, а периодические члены π_1 и π_2 определяются выражением

$$\pi_{1,2}(\omega, e) = \mp \frac{P}{\pi} e \cos\omega \pm \frac{P}{2\pi} e^2 \frac{1 + 2\sqrt{1-e^2}}{(1+\sqrt{1-e^2}\,)^2} \cdot \sin 2\omega \pm \frac{P}{3\pi} e^3 \frac{1+3\sqrt{1-e^2}}{(1+\sqrt{1-e^2}\,)^3} \cos 3\omega.$$

Представление наблюдаемых значений $O - C$ теоретическими дано на рис. 19 сплошной линией. Отклонения наблюдаемых моментов (O) минимумов от вычисленных моментов (C_1) с учетом вращения линии апсид представлены на рис. 20. Видно, что в остатках ($O - C_1$) после учета вращения линии апсид имеются хорошо заметные систематические нелинейные изменения, происходящие синфазно в обоих минимумах кривой блеска (световое уравнение). Это свидетельствует о наличии в системе третьего тела с долгопериодической орбитой ($P_3 > 50$ лет). Для описания светового уравнения z/c можно использовать формулу (202), в которой истинная аномалия долгопериодической орбиты приближенно выражается через среднюю аномалию с помощью разложения в ряд по степеням эксцентриситета e' долгопериодической орбиты. Можно также использовать точное выражение для светового уравнения (Мартынов, 1948, Irwin, 1959). Например, как показано Мартыновым (1948), световое уравнение можно выразить формулой

$$\frac{z}{c} = \frac{a' \sin i'}{c} (1 - e' \cos E') \sin(v' + \omega')\ ,$$

где v' и E' — истинная и эксцентрическая аномалия для долгопериодической орбиты, a' — большая полуось, i' — наклонение, e' — эксцентриситет, ω' — долгота периастра долгопериодической орбиты центра масс затменной двойной системы относительно центра масс тройной системы.

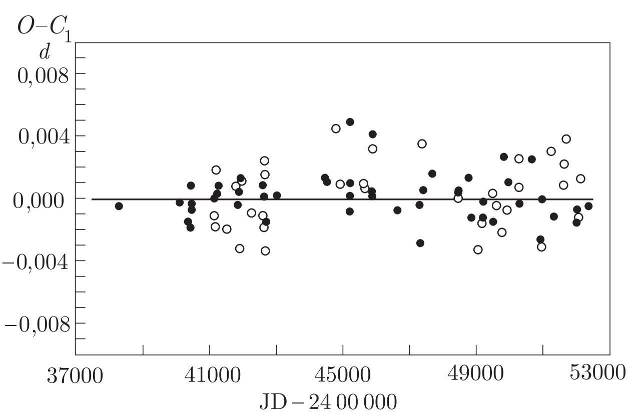


Рис. 20. Отклонения наблюдаемых (O) фотоэлектрических моментов минимумов системы HS Her от вычисленных (C_1) после учета вращения линии апсид в системе (из статьи Халиуллина и Халиуллиной, 2006)

Считая, что влияние далекого третьего тела на апсидальное движение в затменной двойной системе относительно слабо (Мартынов, 1948), авторы (Халиуллин и Халиуллина, 2006) заключили, что теоретические моменты минимумов определяются простым сложением соотношений для апсидального движения со световым уравнением:

$$C_2(\text{MinI}) = \text{HJD}_0 + P_s \cdot T + \pi_1(\omega) + \frac{a' \sin i'}{c} (1 - e' \cos E') \sin(v' + \omega'),$$

$$C_2(\text{MinII}) = \text{HJD}_0 + P_s \cdot T + \frac{P_s}{2} + \pi_2(\omega) + \frac{a' \sin i'}{c}(1 - e' \cos E') \sin(v' + \omega').$$

Как видно, теоретические моменты главного и вторичного минимумов иерархической тройной системы являются функцией 10 параметров:

$$C_2 = f(\text{HJD}_0, P_s, e, U, \omega_0, T', P', e', \omega', A'),$$

где $A' = a' \sin i'/c$, T' — момент прохождения через периастр большой орбиты, U — период апсидального движения. Халиуллиным и Халиуллиной (2006) были определены следующие параметры апсидального движения в затменной двойной системе HS Her: $U = 89{,}7$ лет, средневзвешенное значение параметра апсидального движения $\overline{k}_2^{\text{obs}}$ за вычетом эффекта релятивистского поворота линии апсид составляет $\lg \overline{k}_2^{\text{obs}} = -2{,}33$, что несколько меньше соответствующего теоретического значения $\lg \overline{k}_2^{\text{th}} = -2{,}21$. После исправления наблюдаемых моментов минимумов (O) за вращение линии апсид из анализа остаточных отклонений:

$$O' = O - \pi_{1,2},$$

было показано, что эксцентриситет орбиты третьего тела очень большой, $e' > 0{,}70$, а период долгопериодической орбиты $P' > 30\,000$ сут (82,2 г.). Функция масс тройной системы равна

$$f(m) = \frac{(a')^3 \sin^3 i'}{(P')^2} = \frac{(m')^3 \sin^3 i'}{(m_1 + m_2 + m')^2} = 0{,}017\text{–}0{,}10 M_\odot.$$

Соответствующее значение минимальной массы третьего тела для

$$\omega' = 90^\circ \quad \text{и} \quad m_1 + m_2 = (5{,}0 + 1{,}6) M_\odot$$

равно

$$m' = (1\text{–}2) M_\odot.$$

Напомним, что в выражении для функции масс $f(m)$ массы звезд выражены в солнечных массах, a' — в астрономических единицах, P' — в годах.

Движение центра тяжести тесной затменной двойной системы относительно центра тяжести тройной системы приводит к видимому перемещению затменной пары на небесной сфере. В будущих высокоточных космических астрометрических экспериментах (например, проект GAIA Европейского космического агентства) такие перемещения затменных систем-компонент тройных систем можно будет уверенно наблюдать. Соответствующие формулы для интерпретации этого явления выведены Мартыновым (Зверев и др., 1947).

Мы рассмотрели лишь один эффект, обусловленный влиянием третьего тела в системе — долгопериодические смещения эпох затменных минимумов кривой блеска относительно линейных элементов, вызванные конечной скоростью света (световое уравнение). В общем случае влияние третьего тела, наряду со световым уравнением, приводит к повороту линии апсид затменной пары (которое будет складываться с поворотом линии апсид, обусловленным приливно-вращательной деформацией компонент), а также к изменению положения линии узлов орбиты затменной пары, изменению эксцентриситета орбиты этой пары и даже к изменению наклонения орбиты затменной системы (если короткопериодическая и долгопериодическая орбиты не компланарны). Подробное изложение решения этой сложной задачи дано в работах Мартынова (1948) и Копала (Kopal, 1978).

11. О возможных механизмах изменения эксцентриситета орбиты в тесных двойных системах

Рассмотрим причины изменения эксцентриситета орбиты ТДС, не связанные с присутствием третьего тела в системе, а обусловленные действием различных физических механизмов (приливное трение, обмен масс и т. п.). Статистика ТДС свидетельствует о том, что ТДС с короткими орбитальными периодами ($p < 1^d$), как правило, имеют круговые орбиты, а у долгопериодических ТДС часто встречаются значительные эксцентриситеты орбит.

Рассмотрим кратко различные причины изменения эксцентриситета орбиты в ТДС (подробнее, см. Zahn, 1977, 1989, Soker, 2000, Hurley et al., 2002).

На стадии разделенной системы звезд главной последовательности (РГП) в ТДС действуют два основных механизма округления орбиты (Zahn, 1977, 1989). Для звезд солнечного типа ($M < 1{,}5$–$1{,}6M_{\odot}$), содержащих мощные конвективные оболочки, к округлению орбиты приводит механизм турбулентной диссипации энергии орбитального движения звезд в равновесных приливах, который является очень эффективным. Из-за вязкости вещества оболочки звезды равновесные приливные горбы ориентированы не вдоль линии центров компонент, а вдоль прямой, составляющей некоторый угол с линией центров. Это приводит к передаче момента вращения и энергии вращения звезды в орбиту и обратно. Эффективность этого механизма сильно зависит от величины радиуса звезды R, выраженного в долях большой полуоси относительной орбиты a: характерное время округления орбиты

$$t_{\rm circ} \sim \left(\frac{R}{a}\right)^{-8}. \tag{203}$$

Эта эффективность округления орбиты слабо зависит от конкретных значений масс компонент, если они не превышают $1{,}6M_{\odot}$ (Zahn, 1977).

Для массивных ($M > 1{,}6M_{\odot}$) звезд с лучистыми оболочками и конвективными ядрами главной причиной округления орбиты в ТДС является диссипация энергии орбитального движения звезд в динамических приливах с радиативным демпфированием (Zahn, 1977). В этом случае приливный потенциал формирует гравитационные волны в звезде, которые не являются стоячими, поскольку во внешних слоях звезды время радиативного охлаждения сравнимо с приливным периодом. Это приводит к подавлению динамических приливов и диссипации энергии, что обусловливает передачу углового момента от вращающейся звезды в орбитальное движение и обратно. Время округления орбиты в этом случае очень сильно зависит от относительного радиуса звезды:

$$t_{\rm circ} \sim \left(\frac{R}{a}\right)^{-10{,}5}. \tag{204}$$

Поэтому эффективность округления орбиты этим механизмом на много порядков меньше, чем в случае звезд с конвективными оболочками (Zahn, 1977). Например, время округления орбиты $t_{\rm circ}$ для звезды с массой $1M_{\odot}$ и большой полуосью орбиты $a = 10R_{\odot}$ составляет $2{,}5 \cdot 10^8$ лет, в то время как для звезды с массой $2M_{\odot}$ (лучистая оболочка) в ТДС с $a = 10R_{\odot}$ $t_{\rm circ} = 1{,}8 \cdot 10^{10}$ лет (Hurley et al., 2002), что на порядок превышает время ядерной эволюции этой звезды. Относительное разделение a/R компонент ТДС с одинаковыми массами (R — радиус звезды, a — большая полуось относительной орбиты), при котором время округления орбиты равно $1/4$ от времени жизни звезды на главной последовательности, составляет (Hurley et al., 2002, Zahn, 1977) $(a/R)_{\rm circ} = 32{,}76$ для $M = 0{,}5M_{\odot}$, $20{,}36$ для $M = 1M_{\odot}$, $14{,}71$ для $M = 1{,}2M_{\odot}$, $3{,}94$ для $M = 1{,}6M_{\odot}$, $3{,}92$ для $M = 2M_{\odot}$, $3{,}88$ для $M = 5M_{\odot}$, 3,91 для $M = 7M_\odot$ и 3,98 для $M = 10M_\odot$. Таким образом, для массивных звезд с лучистыми оболочками критический относительный радиус звезды в ТДС R/a, при котором эллиптическая орбита успевает округлиться за время ядерной эволюции звезды, слабо зависит от звездной массы и составляет $\sim 0{,}25$. В то же время, для маломассивных звезд с конвективными оболочками величина критического относительного радиуса зависит от массы звезды и составляет весьма малую величину: $R/a = 0{,}03$–$0{,}07$ для $M = (0{,}5$–$1{,}2)M_\odot$.

Важно отметить, что скорость округления эллиптической орбиты в ТДС меняется при отклонениях от синхронности осевого и орбитального вращения звезд. Для значительной асинхронности, когда $\Omega/\omega > 2{,}07$ (Ω — угловая скорость осевого вращения звезды, ω — средняя угловая скорость ее орбитального движения), эксцентриситет орбиты при радиативной диссипации в динамических приливах не уменьшается, а растет (Zahn, 1977). Такой же эффект возрастания эксцентриситета орбиты имеет место при асинхронности в ТДС в случае равновесных приливов и вязкой (турбулентной) диссипации: соответствующее критическое значение параметра асинхронности составляет $\Omega/\omega = 1{,}636$ (Darwin, 1879, Zahn, 1977).

Согласно Zahn (1977), синхронизация осевого и орбитального вращения компонент в ТДС из-за приливных эффектов происходит раньше, чем округление орбиты. Времена синхронизации зависят от относительного радиуса звезды R/a как $t_{\text{сync}} \sim (R/a)^{-6}$ для звезд с конвективными оболочками и как $t_{\text{сync}} \sim (R/a)^{-8{,}5}$ для звезд с лучистыми оболочками.

Массивные OB-звезды на стадии РГП, а также звезды Вольфа-Райе в двойных системах теряют массу в виде радиального звездного ветра. Это также может приводить к изменению эксцентриситета орбиты (Soker, 2000). Темп потери массы $\dot{M}$ звездой в виде симметричного звездного ветра в периастре орбиты возрастает. Это приводит к возрастанию эксцентриситета орбиты по закону

$$\frac{1+e}{1+e_0} = \left(\frac{M_0}{M}\right)^{\beta}, \tag{205}$$

где M_0, e_0 — начальная суммарная масса и начальный эксцентриситет орбиты системы, параметр $\beta \leqslant 1$ представляет собой отношение дополнительной массы, потерянной в виде ветра в периастре, к полной потерянной массе за орбитальный период. Изменения e, связанные с этим эффектом, наиболее существенны в системах со звездами больших радиусов, имеющих невысокие скорости ветра, например, в двойных системах, содержащих звезды асимптотической ветви гигантов. В случае массивных двойных систем с быстрым ветром (например, двойных содержащих звезды Вольфа–Райе) значение параметра β сравнительно невелико.

Когда одна из компонент ТДС заполнит свою полость Роша, в системе начинается обмен масс через внутреннюю точку Лагранжа L_1. Во многих случаях (Hurley et al., 2002) до стадии заполнения полости Роша и начала обмена масс в ТДС приливное трение в оболочке звезды успевает округлить эллиптическую орбиту (см. приведенные выше критические значения относительных радиусов компонент в ТДС). Если же полного округления орбиты не произошло, обмен масс происходит на эллиптической орбите, и в случае, когда истекающая звезда приходит в периастр орбиты, интенсивность обмена масс возрастает. При этом, изменение эксцентриситета орбиты δe, связанное с усиленным обменом масс в периастре, может быть оценено по формуле (Soker, 2000)

$$\delta e = 2\delta M_{\text{tran}}\left(\frac{1}{M_1} - \frac{1}{M_2}\right)(e + \cos\theta), \tag{206}$$

где M_1 и M_2 — массы компонент ТДС, θ — полярный угол радиуса-вектора звезды ($\theta = 0$ в периастре). Поскольку в периастре обмен масс усилен ($\delta M_{\rm tran} > 0$), видно, что если $M_1 < M_2$, δe положительно (эксцентриситет возрастает), а в случае $M_1 > M_2$ δe отрицательно (эксцентриситет убывает). Поэтому, если обмен масс начался на эллиптической орбите, в начальной стадии обмена, когда более массивная звезда перетекает на менее массивную, орбита округляется, а при дальнейшем обмене масс, когда произойдет перемена ролей компонент, перетекание вещества с менее массивной звезды на более массивную может привести к возрастанию эксцентриситета орбиты (если за время начальной стадии обмена орбита не успеет полностью округлиться).

Рассмотрим теперь начальные условия формирования ТДС с сильно эллиптическими орбитами. В работах Артимовича и др. (Artymowicz et al., 1991, 1994) рассмотрен механизм формирования эллиптической орбиты молодой ТДС в результате резонансного взаимодействия между сформировавшейся двойной системой и внешним диском из первичного вещества, расположенного на расстоянии $\sim 6a$ от двойной системы (a — большая полуось начальной относительной орбиты системы). В этом случае эксцентриситет орбиты возрастает со скоростью (Artymowicz et al., 1991)

$$\dot{e} \approx 1{,}9 \cdot 10^{-3} \left(\frac{M_{\rm disk}}{M}\right) \frac{2\pi}{P}, \tag{207}$$

где $M_{\rm disk}$ — масса реликтового диска на расстоянии $\sim 6a$ от системы, M — полная масса двойной системы. Таким образом, если величина $M_{\rm disk}$ достаточно велика, резонансное взаимодействие молодой двойной системы с внешним диском может привести к формированию у системы эллиптической орбиты со значительным эксцентриситетом. Быстрое осевое вращение молодой звезды — компоненты только что сформировавшейся ТДС может приводить к значительной асинхронности осевого и орбитального движения в двойной системе. В этом случае передача энергии и момента вращения этой звезды в орбиту также может привести к увеличению эксцентриситета орбиты. После синхронизации осевого и орбитального движения и рассеяния внешней реликтовой оболочки вступает в силу механизм приливной диссипации энергии орбитального движения компонент системы, который стремится эффективно округлить орбиту. Особенно эффективно округляется орбита в случае, когда молодая звезда солнечного типа еще не достигла главной последовательности и проходит стадию полностью конвективной звезды, находясь на треке Хаяши (Zahn and Bouchet, 1989). Суммарное действие трех описанных механизмов (резонансное взаимодействие молодой ТДС с реликтовым диском, диссипация энергии быстрого вращения молодой звезды с передачей момента вращения в орбиту, приливная диссипация на стадии синхронизма) приводит к формированию наблюдаемых эксцентриситетов орбит РГП-систем.

12. Возможные причины изменения орбитальных периодов тесных двойных систем

Изменения орбитального периода несут ценную информацию о параметрах ТДС. Выше мы рассмотрели периодические неравенства в эпохах минимумов ТДС, вызванные вращением линии апсид и присутствием в системе третьего тела. Рассмотрим теперь изменения орбитального периода ТДС, вызванные другими физическими причинами: потерей массы системой, обменом веществом между компонентами и т. п. Как правило, такие причины приводят к непериодическим и вековым изменениям орбитального периода ТДС.

При анализе изменений периодов переменных звезд широко используется метод построения диаграммы $O-C$. Пусть имеется ряд наблюденных эпох, например моментов главного минимума ТДС

$$T_0, T_1, T_2, \ldots, T_E,$$

и пусть P — средний приближенный период, который надежнее всего находится по формуле

$$P = \frac{T_E - T_0}{E},$$

где E — число периодов протекших между начальным и конечным моментами минимумов T_0 и T_E. Для каждой i-й эпохи минимума можно вычислить теоретический момент минимума

$$T_c = T_0 + E_i P$$

и сравнить его с реально наблюденным для того же значения i моментом минимума T_i. Разность $T_i - T_c$ представляет собой отклонение момента наблюденного минимума от вычисленного (по латыни это означает «observatus minus computatus») или, как принято сокращенно писать, $O-C$. Нанесем разности $T_i - T_c$ на график как функцию от числа эпох E_i. В зависимости от характера расположения точек на этой диаграмме $O-C$ можно делать вывод о постоянстве или изменении периода.

Если точки на диаграмме $O-C$ располагаются в среднем вдоль прямой линии, и эпохи T_i хорошо представляются линейными элементами вида $T = T_0 + EP$, то можно заключить, что период в рассматриваемом интервале времени постоянен. Сдвиг соответствующей прямой на диаграмме $O-C$ вдоль оси ординат определяет поправку к начальной эпохе T_0, а наклон этой прямой к оси абсцисс дает возможность найти поправку к орбитальному периоду P. Если же точки на диаграмме $O-C$ располагаются вдоль кривой линии, то можно сделать вывод, что период P переменен. Для описания переменности периода можно использовать какую-либо аппроксимационную формулу, например:

$$T = T_0 + EP + qE^2, \tag{208}$$

$$T = T_0 + EP + a\sin(\beta E - \varphi), \tag{209}$$

$$T = T_0 + EP + qE^2 + a\sin(\beta E - \varphi). \tag{210}$$

Изменение периода, описываемое формулой (208), интерпретируется как вековое изменение периода, приращение которого за один период равно $2q$. Формула (209) описывает периодическое изменение периода P, а формула (210) соответствует комбинации векового и периодического изменений периода.

Такая процедура анализа изменения периода законна в том случае, если период P не подвержен значительным случайным колебаниям на коротких временах. Это справедливо для затменных переменных звезд, где стабильность периода на коротких временах поддерживается орбитальным обращением компонент, а периодические и вековые изменения орбитального периода происходят на временах, много больших орбитального периода. В случае физических переменных звезд, например, цефеид, переменных типа RR Лиры, типа Миры Кита и т. п. наблюдаются существенные изменения периодов изменения блеска на коротких временах. В этих случаях, влияние случайных колебаний индивидуальных периодов (их называют кумулятивными ошибками) сказывается на диаграмме $O-C$ таким образом, что индивидуальные точки не будут лежать на одной прямой, даже если наблюдения абсолютно точны, а средний период на больших интервалах времени не меняется. Это может привести к ложным выводам об изменениях периода на больших временных интервалах. Подробнее о влиянии кумулятивных ошибок на диаграмму $O-C$ см. в работах

Эддингтона и Плакидиса (Eddington and Plakidis, 1929), Стерна (Sterne, 1934), а также в монографии Зверева и др. (1947). Таким образом, кумулятивные ошибки на диаграмме O–C проявляются как результат суммирования случайных отклонений индивидуальных циклов от средней величины цикла. Их необходимо принимать во внимание при анализе изменений периодов физических переменных звезд. В случае затменных переменных звезд влияние кумулятивных ошибок на диаграмму O–C, по-видимому, незначительно.

Рассмотрим возможные причины изменения орбитального периода ТДС. Динамика ТДС с переменными массами компонент рассмотрена Копалом (Kopal, 1978). Если уравнение движения тела записать в виде

$$\frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = \mathbf{F}, \tag{211}$$

где $m\mathbf{v}$ — полный импульс тела, $\mathbf{F}$ — равнодействующая всех сил, действующих на него, то можно показать, что движение тела переменной массы описывается уравнением Мещерского (Mescerskü, 1902):

$$m(t)\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} + \mathbf{u}\frac{dm}{dt}, \tag{212}$$

где $\mathbf{u}$ — представляет собой вектор относительной скорости материи, покидающей тело или втекающей в него, а член $\mathbf{u}(dm/dt)$ — реактивную силу. В случае изотропного истечения материи из тела сумма всех реактивных сил, действующих на тело, равна нулю, и уравнение Мещерского (212) сводится к уравнению Гильдена (Gylden, 1884):

$$m(t)\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}. \tag{213}$$

Если же тело аккрецирует материю из стационарного облака, тогда скорость аккрецируемой материи равна скорости движения тела с обратным знаком:

$$\mathbf{u} = -\mathbf{v}.$$

В этом случае, имеем уравнение Леви-Чивита (Levi-Civita, 1906):

$$\frac{d}{dt}[m(t)\mathbf{v}] = \mathbf{F}. \tag{214}$$

Уравнения Гильдена и Леви-Чивита являются частными случаями уравнения Мещерского (212). Уравнения (212)–(214) описывают динамику одного тела. Рассмотрим теперь движение двух гравитирующих тел под действием взаимного притяжения по закону Ньютона. Если массы тел не меняются со временем, то как известно из классической механики, абсолютные орбиты тел представляют собой конические сечения с фокусами, расположенными в центре масс двойной системы, а движения гравитационно связанных тел описываются первым, вторым и третьим законами Кеплера. В случае, если двойная система, состоящая из тел постоянной массы, является замкнутой, а осевое вращение компонент пренебрежимо мало, в ней сохраняются полный угловой момент орбитального движения и полная энергия. В случае двойной системы тел переменной массы это, вообще говоря, может быть не так, и интегралы движения могут быть другими. Следует подчеркнуть, что первичны именно уравнения движения, а интегралы движения и связанные с ними законы сохранения являются лишь следствиями уравнений движения.

Рассмотрим случай изотропной потери массы двойной системой. В этом случае предполагается, что каждая из компонент двойной системы теряет массу изотропно относительно своего центра масс. Тогда движения компонент системы описываются уравнением Гильдена (213):

$$m_1 \frac{d^2\mathbf{r}_1}{dt^2} = \frac{Gm_1m_2}{|r_1 - r_2|^3} (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1), \tag{215}$$

$$m_2 \frac{d^2\mathbf{r}_2}{dt^2} = -\frac{Gm_1m_2}{|r_1 - r_2|^3} (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1), \tag{216}$$

где $\mathbf{r}_{1,2}$ — радиусы-векторы для масс $m_{1,2}$, направленные из центра масс двойной системы. Вычитая (215) из (216), имеем:

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{G(m_1 + m_2)}{r^3}\mathbf{r}, \tag{217}$$

где $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ — радиус-вектор относительной орбиты двух тел, массы которых могут быть функциями времени. Из уравнения (217) следует, что хотя m_1 и m_2, а также полная масса $m = m_1 + m_2$ являются функциями времени, в случае изотропной потери массы абсолютные орбиты компонент двойной системы представляют собой кеплеровские квазиэллипсы, причем все три закона Кеплера для них выполняются. Это связано с тем, что эволюция параметров орбиты двойной системы в случае изотропной потери массы каждой из компонент (так называемая Джинсовская мода) зависит только от полной массы системы $m = m_1 + m_2$, а также с тем, что изотропная потеря массы меняет лишь силу гравитационного притяжения между компонентами. Как показал Hadjidemetriou (1963), в случае изотропной потери массы двойной системой из дифференциального уравнения (217) могут быть получены следующие уравнения для возмущений элементов орбит:

$$\frac{dA}{dt} = -A^2\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{A}\right)\frac{\dot{m}}{m}, \tag{218}$$

$$\frac{de}{dt} = -(e + \cos v)\frac{\dot{m}}{m}, \tag{219}$$

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{\sin v}{e}\frac{\dot{m}}{m}, \tag{220}$$

где истинная аномалия v определяется уравнением

$$\frac{dv}{dt} = \frac{nA^2\sqrt{1 - e^2}}{r^2} + \frac{\sin v}{e}\frac{\dot{m}}{m}, \tag{221}$$

представляющим собой обобщение второго закона Кеплера на случай переменной массы. Уравнения (218)–(220) определяют так называемые оскулирующие элементы возмущенной орбиты A, e, ω, медленно зависящие от времени и описывающие оскулирующий эллипс.

Комбинация уравнений (218) и (220) позволяет записать

$$\frac{d}{dt}\left[mA\left(1 - e^2\right)\right] = 0, \tag{222}$$

откуда следует интеграл движения в случае изотропной потери массы двойной системой:

$$mA(1 - e^2) = \text{const}. \tag{223}$$

Таким образом, при изотропной потере массы из системы размер большой полуоси относительной орбиты A (в случае $e = 0$) вековым образом возрастает. В то же время, как показано Хаджидеметриу (Hadjidemetriou, 1963, 1966), эксцентриситет орбиты e и долгота периастра ω при изотропной потере массы двойной системой испытывают не вековое, а сложные периодические возмущения.

Из третьего закона Кеплера $A^3/P^2 \sim m$ следует, что изменение орбитального периода P двойной системы может быть вызвано либо изменением большой полуоси относительной орбиты A, либо изменением суммарной массы $m = m_1 + m_2$.

Зная зависимость большой полуоси относительной орбиты A от времени, которая в случае изотропной потери массы и круговой орбиты описывается формулой

$$Am(t) = \text{const}, \tag{224}$$

можно, используя третий закон Кеплера, найти соответствующее изменение орбитального периода. Поскольку $A = \text{const}/m$, из третьего закона Кеплера следует, что

$$\frac{\text{const}}{m^3 P^2} = m,$$

откуда находим

$$m^2 P = \text{const}. \tag{225}$$

Дифференцируя это равенство, получаем

$$2m\, dmP + m^2\, dP = 0,$$

откуда следует, что

$$\frac{dP}{P} = -\frac{2dm}{m}. \tag{226}$$

В случае, если большая полуось относительной орбиты не меняется со временем (что может реализоваться при специальном подборе неизотропного изменения масс компонент) из третьего закона Кеплера следует, что

$$P^2 m = \text{const}, \tag{227}$$

и выражение для изменения орбитального периода получается следующим:

$$\frac{dP}{P} = -\frac{1}{2}\,\frac{dm}{m}. \tag{228}$$

Гипотеза об изотропной потере массы двойной системой хорошо применима к системам, в которых наблюдается высокоскоростной звездный ветер у компонент. Это имеет место в двойных типа WR+O, содержащих звезду Вольфа–Райе (WR) и горячую массивную звезду спектрального класса O. В этом случае скорость звездных ветров компонент составляет тысячи км/с, в то время как скорость орбитального движения компонент порядка 100 км/с. Поэтому приливные эффекты от компонент слабо возмущают изотропию истечения вещества из компонент системы. В то же время, область взаимодействия (столкновения) сверхзвуковых звездных ветров от O- и WR-компонент имеет малый телесный угол (порядка нескольких процентов от 4π стерадиан), что также слабо сказывается на изотропии истечения вещества из двойной системы. Поэтому формула (226) хорошо применима к исследованию изменений орбитальных периодов двойных WR+O-систем. Впервые влияние высокоскоростного изотропного истечения звезд в двойной системе на параметры ее орбиты было изучено Джинсом (Jeans, 1928). В затменной двойной WR+O-системе V444 Cyg (WN5+O6, $P = 4{,}2^{\text{d}}$) Халиуллиным (1974) было обнаружено вековое увеличение орбитального периода и впервые дана динамическая оценка темпа потери массы звездой WN5 $\dot{M} = 10^{-5} M_{\odot}$/год.

Рассмотрим теперь случай неизотропной потери массы в двойной системе. Как отмечено Копалом (Kopal, 1978), в этом случае необходимо рассмотреть три процесса в двойной системе:

1. Потерю массы звездой.

2. Возмущение орбиты двойной системы, вызванное движущейся материей между компонентами системы.

3. Аккрецию выброшенной материи на одну или обе звезды системы.

Процессы 1–3 рассматривались Пиотровским (Piotrowski, 1964 a,b, 1967) и Крушевским (Kruszewski, 1966) в рамках модели ограниченной задачи трех тел, когда материя, движущаяся в двойной системе, аппроксимируется совокупностью отдельных маломассивных частиц, и давлением межкомпонентной материи пренебрегается. В случае круговой орбиты ($e = 0$) для такой модели с учетом процессов 1–3 получается следующая формула для изменения орбитального периода двойной системы:

$$\frac{\delta P}{P} = \frac{3}{\mu(1-\mu)} \Big\{ (x_1+\mu)^2 + y_1^2 + (x_1+\mu)\,\nu_1 - y_1 u_1 - (x_2+\mu-1)^2 - \\ - y_2^2 - (x_2+\mu-1) + 2\mu - 1 \Big\} \frac{|\delta m_1|}{m}, \qquad (229)$$

где $m = m_1 + m_2$, принято, что $A = 1$, $Gm = 1$, $\mu = m_2/(m_1+m_2)$, x_1, y_1 — прямоугольные координаты материальной частицы массой δm_1, покидающей звезду с массой m_1, $u_1 = \dot{x}_1$, $\nu_1 = \dot{y}_1$ — компоненты скорости этой частицы. Предполагается, что межкомпонентная материя расположена в орбитальной плоскости. Координаты x_1, y_1 в плоскости орбиты рассматриваются в системе отсчета, связанной с центром масс двойной системы, ось x имеет положительное направление к массе m_2.

Если предположить, что обе компоненты двойной системы являются материальными точками, то $x_1 = -\mu$, $x_2 = 1-\mu$, $y_1 = 0$, $y_2 = 0$, и уравнение (229) переписывается в виде:

$$\frac{dP}{P} = \frac{3\,(2\mu-1)}{\mu\,(1-\mu)}\frac{\delta m_1}{m} = 3\left(1 - \frac{m_1}{m_2}\right)\frac{|\delta m_1|}{m}. \qquad (230)$$

Из уравнения (230) следует, что если $m_1 > m_2$, т. е. когда истекающая звезда более массивна, и истечение происходит с более массивной на менее массивную звезду, $dP < 0$, и орбитальный период системы уменьшается со временем. Если же $m_1 < m_2$, то dP/P положительна, и орбитальный период системы возрастает. То есть если истечение вещества происходит с менее массивной звезды на более массивную, орбитальный период системы увеличивается. Если теперь предположить, что полная масса системы во время обмена веществом сохраняется ($m_1 + m_2 = \mathrm{const}$), то из третьего закона Кеплера

$$\frac{A^3}{P^2} \sim m_1 + m_2,$$

используя (230), можно заключить, что при перетекании вещества от более массивной к менее массивной звезде расстояние между компонентами сокращается, а при перетекании от менее массивной звезды к более массивной это расстояние возрастает. Этот вывод имеет важное значение для теории эволюции ТДС с обменом масс.

В работах Пачинского (Paczynski, 1966) и Хуана (Huang, 1966 a,b) вывод о сокращении расстояния между компонентами двойной системы при перетекании от более массивной к менее массивной звезде в случае консервативного обмена масс ($m_1 + m_2 = \mathrm{const}$) был сделан на основе анализа закона сохранения момента количества движения системы. Предполагается, что угловой момент двойной системы равен ее орбитальному угловому моменту:

$$j_{\mathrm{orb}} = j_1 + j_2 = m_1 m_2 \left(\frac{GA}{m_1+m_2}\right)^{1/2}, \qquad (231)$$

где j_1, j_2 — орбитальные угловые моменты компонент (осевым вращением компонент пренебрегается). Формула (231) легко выводится следующим образом. Запишем выражение для полного орбитального углового момента двойной системы в случае круговой орбиты:

$$j_{\rm orb} = j_1 + j_2 = m_1 v_1 a_1 + m_2 v_2 a_2 = \frac{2\pi}{P}(m_1 a_1^2 + m_2 a_2^2),$$

где v_1, v_2 — орбитальные скорости центров масс звезд, a_1, a_2 — радиусы их абсолютных орбит. Поскольку радиус относительной орбиты

$$A = a_1 + a_2$$

и $a_1/a_2 = m_2/m_1$, имеем

$$a_1 = \frac{m_2 A}{m_1 + m_2}, \quad a_2 = \frac{m_1 A}{m_1 + m_2}.$$

Полный орбитальный угловой момент системы равен

$$j_{\rm orb} = \frac{2\pi}{P} A^2 \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}.$$

Используя третий закон Кеплера

$$\frac{A^3}{P^2} = \frac{G}{4\pi^2}(m_1 + m_2),$$

получаем выражение (231). Из выражения (231) следует, что расстояние A между центрами масс компонент равно

$$A = \frac{j_{\rm orb}^2 (m_1 + m_2)}{G m_1^2 m_2^2}. \tag{232}$$

Таким образом, при консервативном обмене масс $(m_1 + m_2) = {\rm const}$, $j_{\rm orb} = {\rm const}$ расстояние между компонентами системы выражается через массы компонент:

$$A = \frac{\rm const}{m_1^2 m_2^2}. \tag{233}$$

Легко показать, что эта функция имеет минимум при $m_1 = m_2$, т. е. когда отношение масс компонент $q = m_2/m_1$ равно единице. При q, отличном от единицы, A возрастает. Если перетекание вещества происходит с более массивной звезды на менее массивную, то отличие q от единицы уменьшается, и, как следует из формулы (233) расстояние A между компонентами сокращается. Если же перетекание происходит с менее массивной звезды на более массивную, то отличие q от единицы нарастает, и, следовательно, расстояние A между компонентами увеличивается. Эти выводы качественно подобны выводам, сделанным на основе рассмотрения динамической модели взаимодействующей ТДС и решения соответствующих уравнений движения в рамках ограниченной задачи трех тел (см. формулы (229), (230)). Несмотря на такое совпадение, проблема динамики тесных двойных звезд с переменными массами компонент пока не может считаться окончательно решенной по двум причинам:

1. Исследование динамики ТДС на основе решения ограниченной задачи трех тел (см. формулы (229), (230)) представляется весьма упрощенным, поскольку плотность вещества в газовых потоках при перетекании вещества от одной компоненты к другой весьма велика, и в данном случае необходимо гидродинамическое рассмотрение с учетом эффектов газового давления. В последние годы такое гидродинамическое рассмотрение эволюционных процессов с обменом масс в ТДС началось проводиться (см., например, Boyarchuk et al., 2002, D'Souza et al., 2005). Получен ряд новых

результатов. Например, показано (D'Souza et al., 2005), что в случае обмена масс в динамической шкале времени на начальной стадии обмена масс большая полуось относительной орбиты системы меняется не монотонно, а в колебательном режиме.

2. Исследование динамики ТДС на основе использования закона сохранения орбитального углового момента системы $j_{\rm orb} = j_1 + j_2$ (см. формулу (231)) в консервативной модели обмена масс ($m_1 + m_2 = \rm const$), по-видимому, не вполне правомерно (Лукьянов, 2008). Формула (231) справедлива для модели ТДС с постоянными массами компонент. В случае ТДС с переменными массами компонент вместо классических уравнений задачи двух тел должны использоваться уравнения движения компонент, основанные на применении уравнения Мещерского (212), где учитываются реактивные силы. Между тем задача двух тел переменной массы, основанная на использовании уравнения Мещерского, не имеет интеграла движения, соответствующего закону сохранения орбитального углового момента системы (Лукьянов, 2008), и использование формулы (231) в данном случае необоснованно. Кажется удивительным, что для замкнутой системы двух звезд с переменными массами компонент и постоянной суммарной массой не выполняется такой фундаментальный закон сохранения, как закон сохранения момента количества движения. Хорошо известно, что закон сохранения момента импульса или, как говорят, углового момента, связан с фундаментальным свойством пространства — его изотропией (Ландау и Лифшиц, 1958). Для замкнутой ТДС, суммарная масса которой не меняется, и на которую не действуют никакие внешние силы, этот фундаментальный закон обязан выполняться. Все дело в том, что формула (231) описывает лишь орбитальный угловой момент, а в случае ТДС с переменными массами компонент даже при сохраняющейся их суммарной массе орбитальный угловой момент и полный угловой момент системы (учитывающий как орбитальное движение компонент, так и движение газовых потоков) — не одно и то же. При переносе массы от одной компоненты к другой часть орбитального углового момента неизбежно аккумулируется в газовых потоках, в осевом вращении компонент, в дискообразной оболочке вокруг звезды — аккретора и т. п. Поэтому полный угловой момент замкнутой ТДС с сохраняющейся суммарной массой, который безусловно сохраняется, состоит по крайне мере из двух частей — орбитального углового момента $j_{\rm orb} = j_1 + j_2$ и углового момента, $j_{\rm gas}$ аккумулированного в газовых структурах, переносящих материю с одной звезды на другую. Какая доля полного углового момента системы аккумулируется в газовых потоках, зависит от конкретной модели ТДС и деталей гидродинамики переноса масс от одной компоненты к другой. Для разных моделей ТДС эта доля может быть разной. По-видимому, с этим обстоятельством и связано то, на первый взгляд, странное обстоятельство, что задача двух тел переменной массы не имеет интеграла движения, соответствующего закону сохранения углового орбитального момента даже в случае сохраняющейся суммарной массы компонент. Ведь в этой чисто небесно-механической задаче не учитываются детали процесса переноса массы от одной компоненты к другой. Лишь гидродинамическое описание процессов переноса массы от одной компоненты к другой во взаимодействующей ТДС позволяет учесть соотношение между орбитальным угловым моментом звезд и угловым моментом газовых потоков, дисков, струй и т. п. В будущем, когда гидродинамика ТДС станет достаточно продвинутой наукой, можно надеяться, что законы изменения расстояния между компонентами взаимодействующей ТДС, описанные выше (см. формулы (230), (233)) найдут достаточное обоснование.

Очевидно, что влияние газовых потоков на орбитальный угловой момент двойной системы наиболее сильно в случае, когда обмен масс происходит в динамической шкале времени, когда плотность газовых потоков велика (сравнима с плотностью вещества звезд). В этом случае в газовых потоках аккумулируется значительная часть орбитального углового момента системы, и полный угловой момент системы j_{tot} может быть описан формулой

$$j_{\text{tot}} = j_{\text{orb}} + j_{\text{gas}},$$

где j_{gas} — угловой момент газовых потоков, дисков и т. п. Как уже отмечалось, новые гидродинамические расчеты обмена масс в ТДС в динамической шкале времени (D'Souza et al., 2005) показали, что в начале динамического обмена масс расстояние A между компонентами двойной системы меняется в колебательном режиме и в среднем уменьшается со временем. При этом отношение $j_{\text{orb}}/j_{\text{tot}}$ уменьшается от 0,90 до 0,57 в течение 12 орбитальных периодов. Значительная часть орбитального углового момента системы (до 20%) аккумулируется в осевом вращении компонент. В случае переноса масс в ТДС в тепловой или ядерной шкале времени отношение $j_{\text{orb}}/j_{\text{tot}}$ для фиксированного момента времени близко к единице ввиду того, что плотность газовых потоков в данном случае в миллиарды раз меньше плотности вещества звезд, и доля углового момента, запасенная в газовых потоках, в этом случае очень мала. Однако поскольку характерные времена обмена масс в данном случае очень велики по сравнению с динамической шкалой, величина $j_{\text{orb}}/j_{\text{tot}}$, проинтегрированная по всему времени обмена масс, может быть также значительно меньше единицы. Тем не менее, можно предполагать, что обмен масс в тепловой и ядерной шкале времени качественно происходит в соответствии с формулой (233). Таким образом, дальнейшие гидродинамические расчеты обмена масс в ТДС очень важны для корректного описания эволюции ТДС.

13. Эффекты эллипсоидальности и отражения

До сих пор мы рассматривали модели двух сферических звезд на круговых и эллиптических орбитах, пренебрегая эффектами взаимной близости компонент.

Важнейшие из них — это эффект эллипсоидальности и эффект отражения, точнее, переработки излучения спутника в атмосфере облучаемой звезды. Эффекты эллипсоидальности и отражения обусловливают непостоянство блеска двойной системы в фазах вне затмений.

Эффект эллипсоидальности связан с приливной деформацией фигуры звезды в гравитационном поле спутника. Ввиду несферичности приливно деформированной звезды ее проекция на картинную плоскость меняется с фазой орбитального обращения, поэтому блеск звезды испытывает периодическую переменность в виде двойной волны за орбитальный период (два максимума в квадратурах и два минимума в соединениях).

Эффект отражения обусловлен прогревом атмосферы звезды излучением спутника. Благодаря этому прогреву, температура частей звезды, обращенных к спутнику, повышается. При орбитальном обращении звезды наблюдатель видит то прогретую, то непрогретую части звезды, что приводит к периодической переменности блеска облучаемой звезды в форме одной волны за орбитальный период (один минимум и один максимум, оба в соединениях).

Во многих случаях эффекты эллипсоидальности и отражения составляют лишь малую долю (несколько процентов) от глубины затменных минимумов, что позволяет приближенно учесть их влияние путем применения процедуры ректификации кривой блеска (см. ниже). Однако часто, особенно в случае рентгеновских двойных систем (см., например, Лютый и др., 1973, 1974), эффекты эллипсоидальности и отражения являются определяющими в оптической переменности двойной системы. Применение современных методов синтеза кривых блеска и кривых лучевых скоростей ТДС (см. ниже) позволяет осуществить точный учет этих эффектов.

Рассмотрим влияние эффекта эллипсоидальности на кривую блеска ТДС. В случае малых приливных деформаций звезды в ТДС ее фигура может быть аппроксимирована трехосным эллипсоидом. Расчеты Чандрасекара (Chandrasekhar,1933 a,b) в применении к газовым звездам, вращающимся как твердое тело синхронно с орбитальным периодом, дают следующие выражения для приливных деформаций звезды в ТДС с точностью до малых членов высшего порядка:

$$\frac{a-b}{\nu}=\frac{3}{2}\frac{M'}{M}\Delta_2\nu^3, \quad \frac{b-c}{\nu}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{M'}{M}\right)\Delta_2\nu^3,$$

где M — масса рассматриваемой звезды, M' — масса возмущающей звезды, ν — радиус равнообъемного с эллипсоидом шара, выраженный в долях радиуса относительной орбиты, a, b, c — полуоси эллипсоида, $\Delta_2 = 1{,}007$ для звезды с сильной концентрацией вещества к центру (индекс политроны для звезды $n = 3$).

При $M' = M$ имеем $b-c = 2/3(a-b)$. Для $\nu = 0{,}2$ величина относительной деформации звезды составляет $(a-b)/\nu = 0{,}012$ (при $M' = M$), т. е. около 1 %. Как показано Робертсом (Roberts,1906), кривая блеска затменной переменной, состоящей из двух эллипсоидальных звезд, имеющих форму трехосных эллипсоидов, ничем не отличается от кривой блеска затменной переменной, состоящей из двухосных эллипсоидов вращения с осями симметрии, расположенными вдоль линии центров компонент, если наклонение орбиты системы слегка изменить по закону

$$\operatorname{ctg} i_1 = \gamma \operatorname{ctg} i,$$

где $\gamma = g_2/g_1$, $g_1 = b/a$, $g_2 = c/a$, a, b, c — большая, средняя и малая полуоси трехосного эллипсоида. Поэтому, для простоты будем рассматривать модель приливно деформированной звезды в форме двухосного эллипсоида вращения с большой полуосью a, ориентированной вдоль линии центров компонент и малой полуосью b, ей перпендикулярной. Легко показать (см., например, Зверев и др. 1947), что площадь проекции двухосного эллипсоида на картинную плоскость равна πbd, где

$$d = a\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2 i\cos^2\theta}\,. \tag{234}$$

Здесь $\varepsilon = \sqrt{1-b^2/a^2}$ — эксцентриситет меридианного сечения эллипсоида, i — наклонение орбиты системы, θ — угол относительного поворота компонент. Очевидно, что блеск проекции этого эллипсоида на картинную плоскость в случае, если эллипсоид имеет однородную поверхностную яркость, равен

$$l(\theta) = l_0\sqrt{1-z\cos^2\theta} \approx l_0\left(1-\frac{1}{2}z\cos^2\theta\right), \tag{235}$$

где $z = \varepsilon^2\sin^2 i$ — так называемый геометрический фактор эллипсоидальности, l_0 — блеск эллипсоида в квадратуре. Поскольку $\cos^2\theta = (1/2)(1+\cos 2\theta)$, из формулы (235) следует, что изменения блеска, вызванные эффектом эллипсоидальности, представляют собой двойную волну за орбитальный период. Если же приливно деформированная звезда имеет потемнение к краю, т. е. излучение, выходящее из атмосферы звезды неизотропно, и степень этой анизотропии характеризуется линейным законом потемнения (97), то блеск эллипсоида меняется по закону (Мартынов, 1971)

$$l = l_0\left(1-\frac{1}{2}Nz\cos^2\theta\right), \tag{236}$$

где Nz — фотометрический фактор эллипсоидальности,

$$N = \frac{15+x}{15-5x}\,(1+y)\,, \tag{237}$$

x — коэффициент потемнения к краю, y — так называемый коэффициент гравитационного потемнения (см. ниже), который в рэлей-джинсовской области спектра ($h\nu \ll kT$) стремится к значению 0,25. Сравнивая формулы (235) и (236), убеждаемся, что при прочих равных условиях амплитуда эллипсоидальной переменности блеска больше для потемненного к краю эллипсоида, чем для эллипсоида однородной яркости. При полном потемнении к краю ($x = 1$) величина $N = 2$, т. е. полностью потемненный эллипсоид имеет амплитуду переменности блеска вдвое большую, чем однородный.

Рассмотрим теперь случай больших приливных деформаций звезды, когда фигура звезды отличается от эллипсоида и становится грушевидной. Расчет точной фигуры равновесия вращающейся звезды под действием приливных сил со стороны второй звезды двойной системы в случае произвольного закона распределения плотности в теле звезды представляет собой сложную задачу, требующую решения соответствующего уравнения Пуассона

$$\Delta\psi + 4\pi G\rho = 2\omega^2 \tag{238}$$

совместно с уравнением гидростатического равновесия

$$\operatorname{grad} p = -\rho \operatorname{grad}\psi, \tag{239}$$

где $\rho(x,y,z)$ — плотность вещества в теле звезды, G — постоянная тяготения, ω — угловая скорость осевого вращения звезды, $\psi = U + V + V'$ — полный потенциал, состоящий из внутреннего потенциала звезды U, ее внешнего потенциала V и возмущающего потенциала V', обусловленного вращением и приливными эффектами со стороны второй звезды. Решение задачи о фигуре равновесия звезды в ТДС проводилось Дарвиным (Darwin, 1900), Чандрасекаром (Chandrasekhar, 1933 a,b), Копалом (Kopal, 1978). При решении этой задачи уравнения (238), (239) для заданного уравнения состояния вещества звезды решаются совместно: деформация звезды вызывает изменение потенциала ψ, что, в свою очередь, влияет на распределение плотности вещества ρ в звезде. Эта задача очень сложна, и ее приближенное решение получено лишь в некоторых идеализированных случаях (см. выше).

Если учесть, однако, что вещество в теле звезды очень сильно концентрировано к центру (как следует из анализа вращения линии апсид, отношение $\rho_c/\overline{\rho} \approx 10^2$), то задачу о вычислении фигуры равновесия звезды в ТДС можно сильно упростить. В этом случае к звездам в ТДС может быть с хорошим приближением применена модель Роша (Roche,1873), в которой предполагается, что вся масса звезд в ТДС сосредоточена в их центрах, т. е. звезды аппроксимируются материальными точками. Модель Роша хорошо применима к ТДС, содержащим звезды с сильной концентрацией вещества к центру и с осевым вращением, синхронным с орбитальным обращением. Кроме того, в модели Роша обычно предполагается, что орбита звезд в ТДС круговая. Если звезды сильно концентрированы к центру, то, поскольку вклад внешних частей звезды в ее полную массу незначителен, приливная и вращательная деформация оболочки звезды практически не меняет суммарный потенциал ТДС. В этом случае фигуры равновесия звезд определяются поверхностями равного потенциала в суммарном потенциале ТДС, который включает в себя как потенциалы гравитационных сил притяжения обеих звезд, так и потенциал центробежных сил, обусловленный орбитальным вращением ТДС.

Рассмотрим модель Роша для ТДС: две точечные массы m_1, m_2 вращаются по круговым орбитам вокруг общего центра масс O (см. рис. 21). Поместим начало прямоугольной декартовой системы координат в центр масс системы O и рассмотрим систему координат, вращающуюся синхронно с орбитальным обращением. Ось Ox

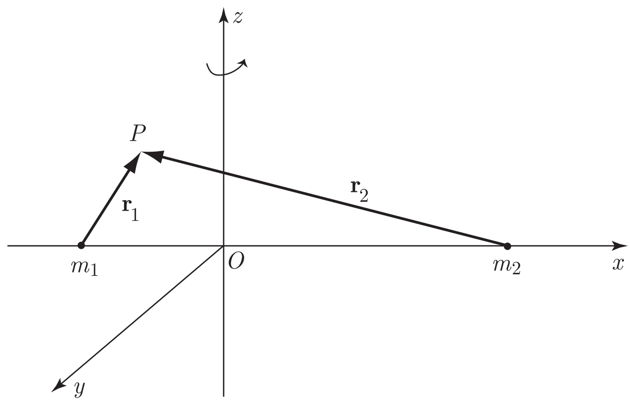


Рис. 21. Модель Роша для тесной двойной системы. Система состоит из двух точечных масс на круговых орбитах. Начало координат выбрано в центре масс системы

проходит через массы m_1, m_2 (координаты которых x_1 и x_2), ось Oy лежит в плоскости орбиты, ось Oz перпендикулярна плоскости орбиты. Суммарный потенциал в точке P гравитационных и центробежных сил во вращающейся системе отсчета с началом в центре масс системы запишется в виде:

$$U = \frac{Gm_1}{r_1} + \frac{Gm_2}{r_2} + \frac{1}{2}\,\omega^2\left(x^2 + y^2\right), \tag{240}$$

где $r_1 = \sqrt{(x - x_1)^2 + y^2 + z^2}$, $r_2 = \sqrt{(x - x_2)^2 + y^2 + z^2}$ — расстояния от точки P до притягивающих масс m_1 и m_2, $\omega = 2\pi / P_{\rm orb}$ — угловая скорость орбитального обращения компонент, $P_{\rm orb}$ — период.

Подчеркнем, что все члены в потенциал (240) входят с одинаковыми знаками (нормировка потенциала U выбрана так, что эти знаки положительны), а сам потенциал не зависит от деформации звезд ввиду того, что вклад внешних деформированных частей звезд пренебрежимо мал. Поверхности, определяемые уравнением (240) при фиксированном значении потенциала U называются эквипотенциальными поверхностями Роша. При больших значениях U (когда r_1, r_2 близки к нулю) формы эквипотенциальных поверхностей близки к шаровым, при уменьшении потенциала U они становятся эллипсоидальными, а при дальнейшем уменьшении U формы эквипотенциалей становятся грушевидными. При некотором критическом значении потенциала $U = U_1$ эквипотенциальные поверхности соприкасаются в одной точке, внутренней точке Лагранжа L_1, а при значениях U, меньших критического, эквипотенциальные поверхности включают в себя обе звезды m_1 и m_2 (рис. 22). Наконец, при дальнейшем уменьшении U эквипотенциальные поверхности пересекаются во внешних точках Лагранжа L_2, L_3 и уходят на бесконечность. Полости, соответствующие критическому значению потенциала U_1, называются внутренними критическими полостями Роша (часто, для краткости, их называют просто «полости Роша»). Поверхности, соответствующие критическому значению U_1, называются внутренними критическими поверхностями Роша. Существуют также внешние критические точки Лагранжа L_4 и L_5, форма потенциала вблизи которых имеет седлообразный характер (см. рис. 22). Если звезда в ТДС находится внутри своей полости Роша, то, поскольку ее поверхность является поверхностью равного потенциала, фигура звезды

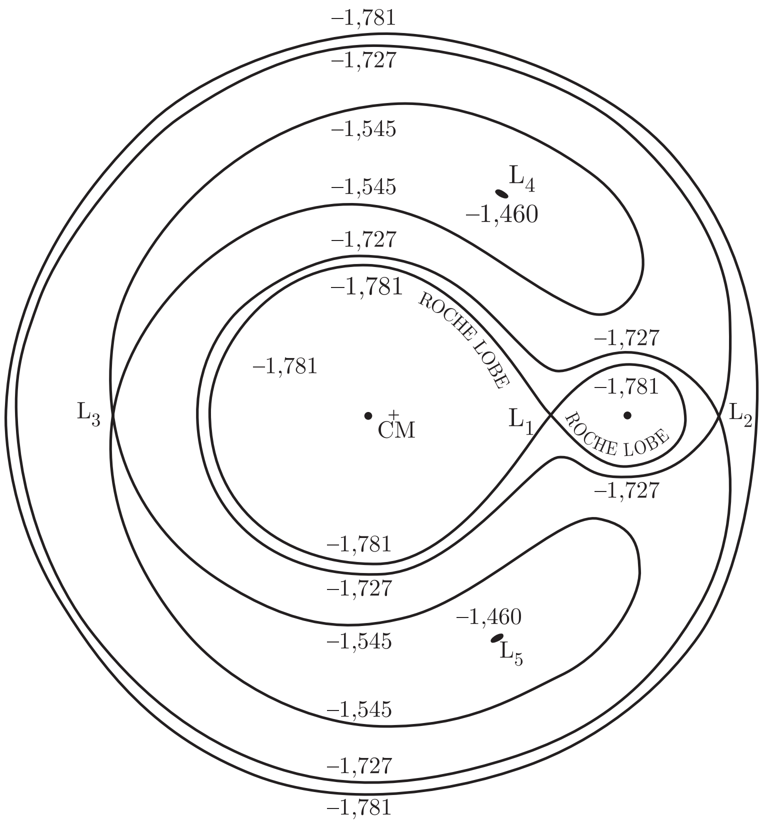


Рис. 22. Фигуры Роша. Сечение плоскостью орбиты. Орбита круговая. Указаны критические точки L_1, L_2, L_3, L_4, L_5. Отношение масс в системе $q = 0{,}1$ (из работы Novikov and Thorne, 1973)

совпадает с фигурой соответствующей эквипотенциальной поверхности: она может быть шаровой, эллипсоидальной или грушевидной, в зависимости от степени заполнения звездой своей полости Роша. Если внешние части звезды выходят за границы полости Роша, соответствующая материя может перемещаться, не совершая работы, от одной звезды к другой и даже выходить за пределы ТДС на бесконечность (если вещество находится в коротации с орбитальным обращением — см. ниже), поскольку перемещение вещества вдоль эквипотенциальной поверхности, если вещество находится в коротации с системой, не требует затрат энергии. Наличие критических точек Лагранжа L_2 и L_3 и возможность ухода эквипотенциальных поверхностей на бесконечность при достаточно малом значении потенциала U связаны с вращением ТДС и ролью центробежных сил. Если бы двойная система не вращалась ($\omega = 0$), третий член в потенциале (240) был бы равен нулю, и потенциал U на бесконечности ($r \gg r_1,\ r_2$) был бы подобен гравитационному потенциалу материальной точки, а эквипотенциальные поверхности имели бы замкнутую квазисферическую форму. В этом случае для ухода из системы на бесконечность веществу потребовалось бы совершать работу по преодолению сил притяжения звезд.

Эквипотенциальные поверхности Роша, введенные уравнением (240), тесно связаны с классом поверхностей нулевой скорости в круговой ограниченной задаче трех тел (Субботин, 1937, Лукьянов и Ширмин, 2009). Во вращающейся системе координат X, Y, Z, введенной выше, если положить расстояние a между точечными массами m_1, m_2 равным единице, сумму масс компонент $m_1 + m_2$ также положить равной единице, а измерение времени выбрать так, чтобы постоянная тяготения $G = 1$, уравнения движения частицы бесконечно малой массы запишутся в виде

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 2\frac{dy}{dt} = \frac{dU}{dx}, \tag{241}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} = \frac{dU}{dy}, \tag{242}$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{dU}{dz}. \tag{243}$$

Здесь потенциал U аналогичен потенциалу (240):

$$U = \frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2} + \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right), \tag{244}$$

где r_1, r_2 — расстояния от пробной массы до тяготеющих масс m_1, m_2, а величина

$$\mu = \frac{m_2}{m_1 + m_2}. \tag{245}$$

Умножим уравнения (241), (242), (243) соответственно на $2\frac{dx}{dt}$, $2\frac{dy}{dt}$, $2\frac{dz}{dt}$, сложим эти уравнения и проинтегрируем, получим:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = \mathbf{V}^2 = 2U(x, y, z) - C, \tag{246}$$

где C — постоянная интегрирования. Поверхности, на которых скорость $\mathbf{V}$ пробной частицы достигает нулевого значения, описываются уравнением:

$$\frac{2(1-\mu)}{r_1} + \frac{2\mu}{r_2} + x^2 + y^2 = C. \tag{247}$$

Это уравнение совпадает с уравнением (240), определяющим эквипотенциальные поверхности Роша и лишь выражено в другой системе единиц.

Таким образом, эквипотенциальные поверхности Роша идентичны поверхностям нулевой скорости в круговой ограниченной задаче трех тел.

Ограниченная задача трех тел в небесной механике впервые была рассмотрена Эйлером (Euler, 1766) в 1766 г. при исследовании движения Луны. Термин «ограниченная задача» был введен позднее Пуанкаре (Poinceare, 1892, 1893, 1899). В своей работе (Euler, 1766) Эйлер для ограниченной эллиптической задачи Солнце–Земля–Луна показал существование двух прямолинейных решений в окрестности Земли. Годом позже Эйлер (Euler, 1767) показал, что три аналогичных решения существуют в общей задаче трех тел, но при условии движения тел по неизменной прямой. Эти решения принято называть эйлеровыми.

В 1772 г. Лагранж (Lagrange, 1772) показал, что результаты Эйлера остаются справедливыми в задаче трех тел без всяких ограничений и, кроме того, получил новые — треугольные (лагранжевы) решения.

Таким образом, критические точки L_1–L_3 правильнее было бы называть точками Эйлера–Лагранжа. Ввиду установившейся традиции, а также для краткости изложения, мы будем называть точки L_1–L_3 точками Лагранжа.

В 1836 г. Якоби (Jacobi, 1836) для ограниченной круговой задачи трех тел доказал существование первого интеграла — интеграла Якоби. В 1936 г. Сигель (Sigel, 1936) доказал, что в ограниченной круговой задаче трех тел не существуют другие алгебраические интегралы, кроме интеграла Якоби. Используя интеграл Якоби, в 1878 г. Хилл (Hill, 1878) при построении теории движения Луны, впервые рассмотрел поверхности нулевой скорости, ограничивающие области возможных движений тела малой массы. В честь первого исследователя эти поверхности называют также поверхностями Хилла. Благодаря использованию поверхностей Хилла существенно продвинулось качественное изучение ограниченной круговой задачи трех тел. Эти поверхности нашли широкие приложения в астрономии, небесной механике, астродинамике, в том числе, в исследованиях тесных двойных звездных систем.

Выше уже упоминалось, что атмосфера эллипсоидальной звезды может обладать анизотропией выходящего излучения, что характеризуется законом потемнения к краю, а также иметь гравитационное потемнение. Гравитационное потемнение у деформированной звезды (Zeipel, 1924), возникает от того, что интегральный поток лучистой энергии F_n в данной точке уровенной поверхности вращающейся и приливно деформированной звезды пропорционален градиенту лучистого давления $P_{\text{луч}} = (1/3)aT^4$ в этой точке:

$$F_n = -\frac{c}{\kappa\rho}\frac{dP_{\text{луч}}}{dn} = -\frac{4caT^3}{3\kappa\rho}\frac{dT}{dn}.$$

Здесь c — скорость света, κ — коэффициент непрозрачности звездного вещества, ρ — плотность.

У звезды, находящейся в гидростатическом равновесии, полное давление и плотность постоянны на уровенной поверхности (поверхности равного потенциала). Поэтому на уровенной поверхности постоянна температура T, а также непрозрачность, зависящая от температуры и плотности. Таким образом, поверхности равной температуры совпадают с эквипотенциальными поверхностями, а градиент температуры dT/dn пропорционален градиенту потенциала, т. е. локальному ускорению силы тяжести. Таким образом, согласно фон Цейпелю (Zeipel, 1924), болометрический поток с единичной площадки (интегральная светимость единичной площадки) деформированной звезды пропорционален локальному ускорению силы тяжести:

$$F_{\text{bol}} \sim g. \tag{248}$$

Связь (248) между болометрическим потоком, выходящим на поверхность звезды и локальным ускорением силы тяжести может быть качественно пояснена следующим образом. Из-за огромной непрозрачности вещества внутри звезды в данном случае перенос излучения в теле звезды хорошо описывается в диффузионном приближении. В уравнении диффузии, как известно, поток переносимого тепла (в случае звезды определяемый главным образом потоком излучения) пропорционален градиенту температуры. Поскольку в гидростатически равновесной звезде поверхности равного потенциала совпадают с поверхностями одинаковой температуры, градиент температуры в данном случае пропорционален градиенту потенциала g. Отсюда непосредственно вытекает соотношение (248).

Следует подчеркнуть, что из теоремы фон Цейпеля (Zeipel, 1924) следует, что вращательно и приливно деформированная звезда, находящаяся в лучистом равновесии, не может вращаться как твердое тело, и в звезде возникает медленная меридиональная циркуляция вещества (см., например, Шварцшильд, 1961, Тассуль, 1982, Бисноватый-Коган, 1989). Меридиональная циркуляция может влиять на эволюцию звезды и проявляется в возможности медленного перемешивания звездного вещества и выравнивании его химического состава (см., например, Шварцшильд, 1961, Maeder and Zahn, 1998, Maeder and Meynet, 2000a, b).

Выражение (248) записано для болометрического потока с единичной площадки поверхности звезды. Выразим болометрический поток через соответствующую эффективную температуру: $F_{\mathrm{bol}} = \sigma T^4$. Тогда имеем:

$$T_{\mathrm{ef}} \sim g^{1/4}, \tag{249}$$

т. е. для звезды, оболочка которой находится в лучистом равновесии, согласно теореме фон Цейпеля (Zeipel, 1924), локальная эффективная температура пропорциональна локальному ускорению силы тяжести в степени 0,25.

Для звезд, оболочки которых находятся в конвективном равновесии (звезды, спектральный класс которых более поздний, чем A0), формула, описывающая гравитационное потемнение, была выведена Люси (Lucy,1967):

$$T_{\mathrm{ef}} \sim g^{0,08}. \tag{250}$$

Следует отметить, что высокая точность аппроксимации фигуры равновесия звезды в рамках модели Роша проверена прямыми численными расчетами фигуры равновесия реальной звезды в двойной системе путем решения уравнений (238), (239) (см., например, Plavec, 1958, Орлов, 1960).

Рассмотрим теперь особенности эллипсоидальной переменности блеска сильно деформированной звезды, близкой к заполнению своей полости Роша. Прежде всего, из-за наличия потемнения к краю, кривая эллипсоидальной переменности грушевидной звезды может иметь неодинаковые глубины минимумов в фазах $\varphi = 0$ (звезда повернута «носиком» от наблюдателя) и $\varphi = 0{,}5$ («носик» звезды, соответствующий внутренней точке Лагранжа L_1, расположен впереди). В силу грушевидности фигуры звезды, наблюдатель в фазе $\varphi = 0$ видит излучение атмосферы звезды, идущее в среднем под меньшим углом по отношению к нормали, чем в фазе $\varphi = 0{,}5$, когда звезда видна с «носика». Поэтому, из-за потемнения к краю, в фазе $\varphi = 0{,}5$ суммарный блеск звезды меньше, чем в фазе $\varphi = 0$. Таким образом, в случае грушевидной формы звезды глубины главного и вторичного минимумов эллипсоидальной кривой блеска могут различаться. При прочих равный условиях это различие тем выше, чем больше коэффициент потемнения к краю для звезды, т. е. оно максимально для звезд поздних спектральных классов.

Амплитуда эллипсоидальной переменности зависит от длины волны ввиду того, что коэффициент потемнения к краю меняется с длиной волны. Кроме того, из-за влияния гравитационного потемнения (см. формулы (249), (250)) амплитуда эллипсоидальной переменности разная в разных диапазонах спектра. Предположим, для простоты, что звезда излучает как абсолютно черное тело. В рэлей-джинсовской области спектра ($h\nu \ll kT$), т. е. когда наблюдения ведутся для горячих звезд в видимом и ИК-диапазонах, поток чернотельного излучения пропорционален температуре:

$$F_\nu = \frac{2\pi k}{c^2}\nu^2 T.$$

В этом случае, в соответствии с теоремой фон Цейпеля, монохроматическая светимость единичной площадки звезды равна (см. формулу (249)):

$$F_\nu \sim g^{0,25}, \tag{251}$$

а в случае формулы Люси (см. (250))

$$F_\nu \sim g^{0,08}. \tag{252}$$

Поскольку ускорение силы тяжести g входит в формулы (251) и (252) в малой степени, поверхностная яркость звезды слабо меняется с изменением g. Поэтому в рэлей-джинсовской области спектра эллипсоидальная переменность блеска обусловлена главным образом геометрическим фактором: изменением площади проекции звезды, на картинную плоскость, вызванным ее орбитальным обращением. Геометрическая сплюснутость фигуры звезды даже при заполнении ею своей полости Роша не может быть очень высокой, поскольку в противном случае звезда теряет устойчивость и истекает. Расчеты параметров полости Роша (см., например, Цесевич, 1971) показывают, что при отношении масс $q = m_2/m_1 = 1$, характерная сплюснутость полости Роша составляет 21 %, а при $q = 0{,}1$ сплюснутость полости Роша менее массивной звезды равна 26 %. С учетом того, что потемнение к краю увеличивает амплитуду эллипсоидальной переменности блеска звезды, можно считать, что в рэлей-джинсовской области спектра даже для звезд позднего спектрального класса с большим значением коэффициента потемнения к краю (~ 1) амплитуда эллипсоидальной переменности блеска не превышает 0,5 звездной величины. Этот вывод подтверждается наблюдениями рентгеновских двойных систем, где эффект эллипсоидальности оптической звезды наблюдается в «чистом» виде.

В виновской области спектра ($h\nu \gg kT$), т. е. когда наблюдаются холодные звезды в синей и ультрафиолетовой области спектра, поток чернотельного излучения экспоненциально зависит от температуры:

$$F_\nu = \frac{2\pi h}{c^2}\nu^3 \exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right).$$

Подстановка в эту формулу выражений для локальной температуры (249) и (250) (с точностью до коэффициента пропорциональности k_0) дает следующие выражения для монохроматической светимости единичной площадки звезды:

$$F_\nu \sim e^{-h\nu/k_0 g^{0,25}} \tag{253}$$

и

$$F_\nu \sim e^{-h\nu/k_0 g^{0,08}}. \tag{254}$$

Таким образом, в виновской области спектра монохроматическая светимость единичной площадки звезды сильно (экспоненциально) зависит от локального ускорения силы тяжести g. Поэтому в эллипсоидальных изменениях блеска в данном случае доминирует не геометрический, а физический фактор — сильная зависимость поверхностной яркости от ускорения силы тяжести на поверхности звезды. В этом случае амплитуда эллипсоидальной переменности ничем не ограничена и может быть сколь угодно большой. В виновской области спектра наиболее темными частями приливно деформированной звезды являются области с малыми значениями g: область вблизи «носика» звезды и симметричная ей «тыльная» часть звезды. Наиболее яркой частью звезды в этом случае является «пояс», включающий ее полярные участки. В тесной двойной системе, состоящей из двух нормальных звезд, эффект эллипсоидальности наблюдается в суммарном виде от двух компонент, причем поскольку степень заполнения полости Роша для каждой из компонент может быть разной, вклад от каждой компоненты в суммарный эффект эллипсоидальности может различаться (подробнее об этом см., Мартынов, 1971). Современные методы синтеза кривых блеска тесных двойных систем позволяют учесть этот эффект (см. ниже).

Рассмотрим влияние эффекта отражения на кривую блеска тесной двойной системы. Прежде всего, отметим, что эффект отражения в системе из двух нормальных звезд проявляется в разностном виде. Это связано с тем, что когда одна звезда двойной системы обращена к наблюдателю прогретой стороной, прогретая часть второй звезды скрыта от наблюдателя (прогретая часть каждой звезды в проекции на картинную плоскость меняется с фазой орбитального периода подобно фазам Луны).

В простейшем виде эффект отражения может быть описан следующим образом (см. Мартынов, 1971).

Пусть имеем две сферические звезды на круговой орбите. Пусть светимости невозмущенных звезд равны L_1 и L_2. Обозначим дополнительную поверхностную яркость первой звезды, обусловленную прогревом ее излучением спутника, через δ_1, а соответствующую величину для второй звезды — через δ_2. Для простоты будем считать, что δ_1 и δ_2 постоянны по всем прогретым частям звезд. Рассмотрим вначале расположение звезд в квадратуре ($\theta = 90°$, θ — угол относительного поворота компонент), поскольку суммарный блеск системы обычно нормируется на единицу именно в квадратуре (рис. 23). Блеск системы в квадратуре равен:

$$l\,(\theta = 90°) = L_1 + \frac{1}{2}\,\pi r_1^2 \delta_1 + L_2 + \frac{1}{2}\,\pi r_2^2 \delta_2. \tag{255}$$

В квадратуре видимые терминаторы прогреваемых звезд являются в первом приближении прямолинейными и проходят через центры их дисков. В других фазах θ видимые терминаторы представляют собой подобные полуэллипсы, ограничивающие фигуры β_1 и β_2. Площади фигур β_1 и β_2 пропорциональны произведению $\sin i \cdot \cos\theta$, где i — наклонение орбиты системы. Важно отметить, что фигура β_1 увеличивает прогретую часть диска первой звезды, а фигура β_2 — уменьшает прогретую часть диска второй звезды.

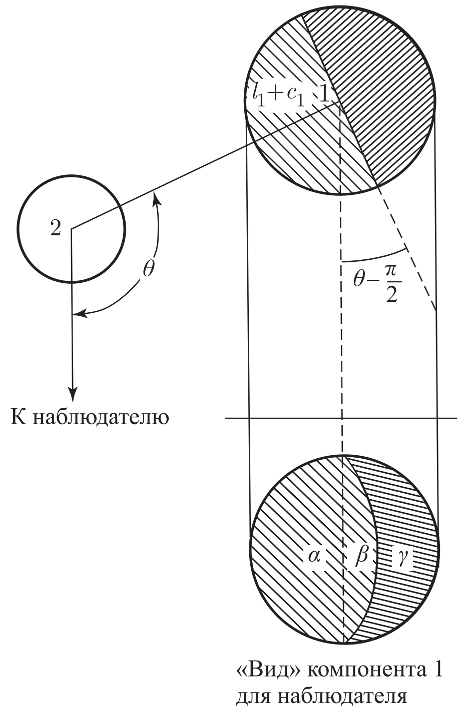


Рис. 23. К вычислению эффекта отражения в тесных двойных системах. Показаны части прогретой полусферы звезды α, β и ее непрогретой полусферы γ. Для первой звезды это $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$, для второй — $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$

Именно поэтому, как уже отмечалось выше, эффект отражения входит в кривую блеска в разностном виде. Блеск системы в фазе θ вне затмений запишется в виде

$$\begin{aligned} l\,(\theta) &= L_1 + \frac{1}{2}\,\pi r_1^2 \delta_1 + \frac{1}{2}\,\pi r_1^2 \delta_1 \sin i \cos\theta + L_2 + \frac{1}{2}\,\pi r_2^2 \delta_2 - \frac{1}{2}\,\pi r_2^2 \delta_2 \sin i \cos\theta = \\ &= L_1 + \frac{1}{2}\,\pi r_1^2 \delta_1 + L_2 + \frac{1}{2}\,\pi r_2^2 \delta_2 + \left(\frac{1}{2}\,\pi r_1^2 \delta_1 - \frac{1}{2}\,\pi r_2^2 \delta_2\right) \sin i \cos\theta. \end{aligned} \tag{256}$$

Таким образом:

$$l(\theta) = l(\theta = 90°) + b\cos\theta, \tag{257}$$

где $b = \left(\frac{1}{2}\,\pi r_1^2 \delta_1 - \frac{1}{2}\,\pi r_2^2 \delta_2\right) \sin i$ — коэффициент отражения, описывающий амплитуду суммарного эффекта отражения.

Поскольку в первом приближении эффект отражения пропорционален $\cos\theta$ (а не $\cos 2\theta$ или $\cos^2\theta$, что имеет место для эффекта эллипсоидальности), он проявляет себя изменениями блеска вне затмений, которые имеют вид одной волны за орбитальный период, имеющей минимум и максимум в моменты соединений. Если, как это часто бывает на практике, светимость одной компоненты значительно больше, чем другой, блеск, обусловленный эффектом отражения, монотонно нарастает от главного ко вторичному минимуму кривой блеска. Поскольку эффект отражения и эффект эллипсоидальности проявляют себя вне затмений качественно по-разному, их можно в первом приближении определить раздельно, используя внезатменные изменения блеска (Мартынов, 1971). Если кривая блеска симметрична, то, перегибая ее относительно фазы $\theta = 90^\circ$ (или фазы $\theta = 270^\circ$), т. е. перенося каждую точку кривой блеска зеркально относительно фазы перегиба, обнаруживаем, что между прямой и отраженной ветвями кривой блеска есть систематическая разница, обусловленная эффектом отражения (см. формулу (257)). Эта разность Δl должна быть равна $2b\cos\theta$. Поэтому, если отложить величины Δl на графике против $|\cos\theta|$, то точки должны лечь на прямую с угловым коэффициентом, равным $2b$. При этом важно не использовать точки кривой блеска, затронутые затмениями. После нахождения амплитуды эффекта отражения b, можно, используя формулу для эффекта эллипсоидальности (236) для внезатменных изменений блеска, оценить фотометрический фактор эллипсоидальности Nz. Далее, аппроксимируя блеск системы вне затмений формулой

$$l_{\text{вн}} = a - b\cos\theta - c\cos^2\theta \tag{258}$$

и используя оцененные величины b и Nz как начальные приближения, можно методом наименьших квадратов найти параметры a, b, c и их среднеквадратичные ошибки.

Параметры a, b, c называются константами ректификации и используются в процедуре ректификации кривой блеска (т. е. очищения ее от эффектов эллипсоидальности и отражения) для того, чтобы свести задачу интерпретации кривой блеска реальной системы к идеализированному случаю двух сферических звезд. Можно также аппроксимировать блеск системы вне затмений полиномом вида:

$$l_{\text{вн}} = A_0 + A_1\cos\theta + A_2\cos 2\theta \tag{259}$$

и находить из внезатменных участков кривой блеска значения констант ректификации A_0, A_1, A_2 с их ошибками (подробнее об этом, см. Мартынов, 1971).

Разумеется, описанный метод учета влияния эффекта отражения на кривую блеска двойной системы слишком упрощенно трактует физику эффекта отражения. В частности, из-за сильного потемнения к краю для отраженного излучения, предположение о постоянстве поверхностных яркостей δ_1 и δ_2 на прогретых поверхностях звезд является очень грубым. Расчет болометрического эффекта отражения (Eddington, 1926) дает следующую формулу для функции $f(\varphi)$, выражающей изменение количества отраженного света L_{r1} с фазой φ: $L_{r1}(\varphi) = L_2 r_1^2 f(\varphi)$, где

$$f(\varphi) = \frac{1}{\pi}(\sin\varphi - \varphi\cos\varphi). \tag{260}$$

Здесь φ — угол между линией центров компонент и направлением на наблюдателя. При $i \neq 90$ имеем

$$\cos\varphi = \cos\theta\cos i.$$

Согласно формуле (260), болометрический поток, отраженный звездой 1 в направлении центра звезды 2, равен $(17/24)L_2 r_1^2$, а в фазе φ этот поток равен

$$\Delta L_1 = L_2 r_1^2 f(\varphi). \tag{261}$$

Более точное выражение для функции $f(\varphi)$ получено (в болометрическом случае) Милном (Milne, 1926):

$$f(\varphi) = \frac{(1-\cos\varphi)(1-3\cos\varphi)}{32\cos(\varphi/2)}\ln\frac{1+\cos(\varphi/2)}{\sin(\varphi/2)} + \frac{1+5\cos\varphi}{16} + \frac{\sin\varphi + (\pi-\varphi)\cos\varphi}{3\pi}. \tag{262}$$

Формулы Эддингтона и Милна получены в предположении, что освещающая звезда — бесконечно удаленный точечный источник. Если спектральные классы и, соответственно, температуры звезд-компонент двойной системы, различаются не сильно, формулы для $f(\varphi)$, полученные для болометрических потоков, могут с удовлетворительным приближением описывать и монохроматические потоки. Более того, в этом случае можно ожидать, что относительная величина амплитуды эффекта отражения сравнительно невелика, поскольку телесный угол звезд мал:

$$\Omega \approx \frac{\pi r_1^2}{4\pi A^2} = \frac{1}{4}\left(\frac{r_1}{A}\right)^2,$$

где A — радиус относительной орбиты системы. Даже в случае $r_1/A = 0{,}5$ имеем $\Omega \simeq 0{,}06$, т. е. в случае, когда температуры звезд различаются не сильно, амплитуда эффекта отражения не превышает нескольких сотых звездной величины.

В случае, когда температуры звезд в двойной системе сильно различаются, необходим детальный расчет монохроматических потоков для отраженного излучения, что сильно усложняет задачу. Кроме того, в этом случае амплитуда эффекта отражения может быть сколь угодно велика, поскольку, несмотря на малый телесный угол холодной звезды, абсолютная величина перехваченного ею болометрического потока от горячего спутника может сильно превышать поток ее собственного излучения, выходящего из атмосферы наружу. В этом случае температура прогретой части холодной звезды сильно возрастает и, поскольку горячий спутник светит главным образом в диапазоне, невидимом для наблюдателя (ультрафиолетовом, рентгеновском), амплитуда монохроматического эффекта отражения в видимом диапазоне спектра сильно возрастает. Такая ситуация реализуется, например, в рентгеновской двойной системе Her X-1 = HZ Her, где оптическая A7-звезда прогревается рентгеновским излучением аккрецирующей нейтронной звезды. Поскольку болометрическая светимость A7-звезды $L_v \simeq 10^{35}$ эрг/с, а рентгеновская светимость компактного объекта $L_x \simeq 10^{37}$ эрг/с, температура полусферы звезды, обращенной к компактному объекту составляет в среднем $\sim 30\,000$ K, в то время как температура непрогретой части звезды близка к 8000 K. Это приводит к сильному эффекту отражения амплитудой до 2^m в фильтре U системы UBV (Cherepashchuk et al., 1972).

В случае рентгеновских двойных систем для расчета эффекта отражения можно с хорошим приближением использовать простую формулу, учитывающую сложение падающего снаружи и выходящего изнутри звезды потоков излучения:

$$\sigma T_{\text{ef}}^4 = \sigma T_0^4 + \frac{\kappa L_x \cos\alpha}{4\pi\rho^2}, \tag{263}$$

где σ — постоянная Стефана–Больцмана, T_{ef} — результирующая температура рассматриваемой площадки на поверхности облучаемой звезды, T_0 — температура площадки невозмущенной звезды, L_x — рентгеновская светимость компактного объекта, ρ — расстояние от компактного объекта до площадки, α — угол между нормалью к площадке и направлением на компактный объект, κ — коэффициент переработки рентгеновского излучения в тепло в атмосфере облучаемой звезды (из-за процессов рассеяния часть рентгеновского потока, в случае горячих звезд, может не испытывать термализацию, рассеиваться без изменения частоты квантов и оставаться в рентгеновском диапазоне). Смысл формулы (263) очень прост: из-за большой проникающей способности жестких рентгеновских квантов, они глубоко проникают внутрь атмосферы звезды, где оптическая толща по оптическому излучению весьма велика. Там рентгеновские кванты термализуются и нагревают внутренние части звездной атмосферы. Образованное дополнительное излучение смешивается с излучением невозмущенной звезды, что и определяет результирующую эффективную температуру площадки, испытавшей рентгеновский нагрев:

$$T_{\mathrm{ef}} = \sqrt[4]{T_0^4 + \frac{\kappa L_x \cos\alpha}{4\pi\sigma\rho^2}}. \tag{264}$$

В случае рентгеновских двойных систем при исследовании кривых блеска в непрерывном спектре применение формулы (264) вполне оправдано.

Если система состоит из двух оптических звезд, то в данном случае для расчета монохроматического эффекта отражения необходимо для каждой площадки звезды решать уравнение переноса с внешним облучением, поскольку, в отличие от рентгеновских квантов, которые почти не возмущают внешние слои атмосферы звезды, оптические и ультрафиолетовые кванты внешнего излучения постепенно поглощаются в атмосфере облучаемой звезды. Кроме того, в системе двух нормальных звезд необходимо учитывать, что облучающая звезда не является точечным источником (как уже отмечалось, формулы Эддингтона и Милна — см. (260), (262), получены в модели точечной облучающей звезды). Все это значительно усложняет точный учет эффекта отражения в двойных системах. В случае, когда величина эффекта отражения в непрерывном спектре невелика по сравнению с глубинами затмений, можно с некоторыми оговорками использовать формулу (264) даже для двойных систем, состоящих из нормальных звезд. Возникающие при этом неизбежные ошибки обычно незначительны по сравнению с глубинами затмений.

Особенно тонкая процедура — расчет эффекта отражения в линиях. В этом случае даже для рентгеновских двойных систем использование простой формулы (264) может приводить к значительным ошибкам в вычислении профилей линий в спектре прогреваемой звезды. Из-за поглощения мягких рентгеновских квантов в верхней части атмосферы прогреваемой звезды формируется инверсное распределение температуры, что приводит к формированию эмиссионной компоненты в суммарном профиле линии поглощения. Формула (264) не позволяет учесть этот эффект. В последние годы развиты методы точного учета эффекта отражения в рентгеновских двойных системах, позволяющие детально исследовать орбитальную переменность профилей линий в спектре оптической звезды и строить корректные кривые лучевых скоростей (см. ниже).

14. О ректификации кривых блеска затменных систем

Мы кратко опишем процедуру ректификации, не вдаваясь в детали, поскольку в настоящее время, благодаря применению методов синтеза кривых блеска затменных систем, имеется возможность корректного учета эффектов взаимной близости компонент совместно с эффектами затмений. Поэтому теория ректификации, развитая в работах Рессела и значительно усовершенствованная в работах других авторов (см. монографию Зверева и др., 1947 и ссылки в ней), в настоящее время имеет лишь исторический интерес. Вместе с тем, даже в настоящее время иногда приходится применять процедуру ректификации кривой блеска, особенно в случае использования сложных, нетрадиционных моделей тесных двойных систем (например, при анализе кривых блеска затменных систем с протяженными атмосферами).

Цель ректификации — очищение кривой блеска от эффектов отражения и эллипсоидальности до решения основной задачи интерпретации кривой блеска. Такая возможность разделения задачи на две части следует из того, что внезатмные участки кривой блеска содержат информацию только об эффектах взаимной близости компонент, а затменные части кривой блеска включают в себя как влияние эффектов затмений, так и эффектов близости компонент. Из анализа кривой блеска вне затмений определяются константы ректификации a, b, c или A_0, A_1, A_2 (см. выше) и, с использованием некоторой дополнительной предварительной информации о системе, строятся формулы ректификации для пересчета интенсивностей и фазовых углов в каждой точке кривой блеска. В итоге получается кривая блеска с постоянным блеском вне затмений, которую можно интерпретировать в модели двух сферических звезд. Полученные параметры такой идеализированной тесной двойной системы затем, с помощью специальных формул, корректируются, что позволяет получить параметры близкие к параметрам реальной двойной системы.

В простейших моделях эффектов взаимной близости компонент, рассмотренных выше, эффект отражения пропорционален $\cos\theta$, а эффект эллипсоидальности — $\cos^2\theta$ (или $\cos 2\theta$). В реальной ситуации это не совсем так. Ввиду того, что отраженное излучение имеет сильную угловую зависимость (см. формулы (260), (262)), в формуле для эффекта отражения, помимо члена $\cos\theta$, появляется член $\cos^2\theta$ (с меньшим коэффициентом). Поэтому эффект отражения «перекрывается» с эффектом эллипсоидальности, и константа ректификации b включает в себя информацию не только об эффекте отражения, но и (в меньшей степени) об эффекте эллипсоидальности. Аналогично, поскольку фигура звезды при ее значительных деформациях отличается от эллипсоида, а также ввиду важной роли гравитационного потемнения и потемнения к краю, эффект эллипсоидальности может зависеть не только от $\cos^2\theta$, но и (в меньшей степени) от $\cos\theta$. Поэтому константа ректификации c содержит информацию как об эффекте эллипсоидальности, так и (в меньшей степени) об эффекте отражения. Поэтому в общем случае знание констант ректификации a, b, c, найденных из анализа внезатменных участков кривой блеска, оказывается недостаточным для построения формул ректификации, и необходимо использовать дополнительную информацию о параметрах системы. Можно сказать, что процедура ректификации кривой блеска — это искусство, состоящее, прежде всего, в правильном «угадывании» предварительных параметров рассматриваемой тесной двойной системы. Часто процедуру ректификации приходится осуществлять в два этапа: сначала с предварительными параметрами системы строится формула ректификации в первом приближении, и после интерпретации ректифицированной кривой блеска находятся первичные параметры системы. С найденными параметрами строится уточненная формула ректификации, применение которой к наблюдаемой кривой блеска позволяет найти параметры системы во втором приближении. Обычно двух итераций оказывается достаточно для нахождения окончательных параметров системы.

Подробно процедура ректификации кривой блеска изложена в книге Зверева и др. (1947). В книге Цесевича и др. (1971) приведены выведенные Мартыновым следующие формулы ректификации:

формула для ректификации интенсивностей:

$$l_{\text{rect}} = \frac{1}{a+b}\left[l_{\text{obs}} + b\,(0{,}5 + \cos\theta) + 0{,}5\,b\sin^2\theta\right] \cdot \left[1 + \left(\frac{c}{a} + \frac{b}{2}\right)\cos^2\theta\right]^{-1/2}; \tag{265}$$

формула для ректификации фазовых углов (Russell and Merrill, 1952):

$$\sin^2\theta_{\text{rect}} = \frac{\sin^2\theta_{\text{obs}}}{1 - z\cos^2\theta_{\text{obs}}}. \tag{266}$$

Формула (265) пригодна для ректификации кривых блеска затменных систем типа Алголя, когда светимости и радиусы компонент значительно различаются: $L_1 \ll L_2$, $r_1 > r_2$. В формулах (265), (266) l_{rect} и θ_{rect} — интенсивность и фазовый угол ректифицированной точки кривой блеска, l_{obs}, θ_{obs} — интенсивность и фазовый угол наблюдаемой точки кривой блеска, константы ректификации a, b, c находятся из внезатменных частей кривой блеска с применением формулы (258), z — геометрический фактор эллипсоидальности. Из константы ректификации c находится фотометрический фактор эллипсоидальности Nz (после вычитания из константы c члена, пропорционального $\cos^2\theta$ и обусловленного эффектом отражения). Знание коэффициента потемнения к краю x и коэффициента гравитационного потемнения y (см. формулу (237)) позволяет из фотометрического фактора эллипсоидальности Nz найти величину z.

Во втором приближении, когда величины i, L_1, L_2, r_1, r_2 приближенно известны, можно использовать следующую формулу ректификации интенсивностей, пригодную в общем случае (Мартынов, 1971):

$$l_{\text{rect}} = \frac{1}{a+A}\left(l_{\text{obs}} + Aa + b\cos\theta + C\cos^2\theta\right)\left[1 - 2\left(\frac{c}{a} - C\right)\cos^2\theta\right]^{-1/2}, \tag{267}$$

где

$$A = \frac{1}{2}\,\frac{(1 + G_2/G_1)\,b}{(1 - G_2/G_1)\sin i}, \quad C = A\sin^2 i,$$

а величины G_1 и G_2 пропорциональны значениям $L_2r_1^2$ и $L_1r_2^2$.

После интерпретации ректифицированной кривой блеска найденные параметры идеализированной модели двух сферических звезд должны быть пересчитаны следующим образом:

$$\cos^2 i = (1 - z)\cos^2 i_{\text{rect}}, \tag{268}$$

$$L_1 = L_1^{\text{rect}} - 0{,}8G_1, \tag{269}$$

$$L_2 = L_2^{\text{rect}} - 0{,}8G_2. \tag{270}$$

Параметры сплюснутости звезд оцениваются из геометрического фактора эллипсоидальности $z = \varepsilon^2\sin^2 i$ (см. формулу (235)). В формулах (268)–(270) i_{rect}, L_1^{rect} и L_2^{rect} — параметры, найденные из ректифицированной кривой блеска. Светимости L_1^{rect} и L_2^{rect} уменьшаются на величину $0{,}8G_1$ и $0{,}8G_2$ потому, что из ректифицированной кривой блеска находятся светимости, соответствующие прогретым сторонам звезд.

Подчеркнем еще раз, что современные методы синтеза кривых блеска затменных систем учитывают эффекты взаимной близости компонент совместно с эффектами затмений и не требуют применения процедуры предварительной ректификации кривой блеска.

Глава II

ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В ОБРАТНЫХ ЗАДАЧАХ АСТРОФИЗИКИ

1. Введение

Астрономам часто приходится решать обратные задачи, когда по наблюдаемым следствиям некоторого процесса (например, кривой блеска затменной системы) требуется определить причины, вызывающие этот процесс (например, найти параметры затменной системы). В общем случае обратная задача, как правило, является некорректно постановленной, т. е. малым возмущениям исходных данных (кривой блеска) соответствуют сколь угодно большие возмущения искомого решения. Для получения устойчивого приближения к точному решению некорректно постановленной задачи требуется использование дополнительной, априорной информации об искомом решении. А. Н. Тихонов (1963а, б) положил начало развитию современных, научно-обоснованных методов решения некорректных задач и ввел понятие регуляризирующего алгоритма, который гарантирует сходимость последовательности приближенных решений к точному решению некорректной задачи (Тихонов и др., 1983). Применение современных методов регуляризации к решению обратных задач астрофизики дано в монографиях Гончарского и др. (1978), (1985), (1991).

Важным частным случаем обратных задач являются параметрические задачи, когда требуется найти совокупность параметров, характеризующих рассматриваемую модель. В частности, рассмотренная выше задача интерпретации кривой блеска классической затменной системы является параметрической. Как показано Тихоновым (1943), если искомое решение обратной задачи принадлежит компактному множеству, то решение обратной задачи устойчиво, и задача является корректной: малым возмущениям исходных данных соответствуют малые возмущения решения. Отметим, что множество называется компактным, если из всякой последовательности элементов этого множества можно выделить сходящуюся подпоследовательность. К компактному множеству может принадлежать множество функций специальной структуры. Например, множество монотонных функций, ограниченных сверху и снизу некоторыми конечными константами, является компактным (Гончарский и Ягола, 1969). К классу компактных множеств принадлежит множество выпуклых функций, вогнутых функций и т. п. (Гончарский и др., 1985). К компактному множеству также принадлежит множество функций, зависящих от конечного числа параметров. Например, множество функций, описывающих линейный закон потемнения к краю на диске звезды с тонкой атмосферой (см. формулы (107), (108)), является параметрическим, т. е. зависит от конечного числа параметров $x_{1,2}$, $I_{1,2}(0)$, $r_{1,2}$. Таким образом, благодаря использованию детальной априорной информации из модели звездных атмосфер, множество искомых функций распределения яркости по дискам звезд с тонкими атмосферами является компактным. Следовательно, обратная задача интерпретации кривой блеска классической затменной системы является корректной, и для ее решения может быть использован любой алгоритм. Забегая вперед отметим, что в общем случае это не так: если для рассматриваемой обратной задачи имеющейся априорной информации о решении недостаточно, чтобы выделить компактное множество функций, необходимо использовать специальные (регуляризирующие) алгоритмы ее решения (Гончарский и др., 1978). Например, в задаче интерпретации кривой блеска затменной системы с протяженной атмосферой не удается выделить параметрическое множество функций. Решение этой задачи приходится проводить либо методом регуляризации, либо искать решение на компактном множестве функций специальной структуры, например, на множестве выпукло-вогнутых функций (см. ниже). Метод синтеза кривых блеска затменных систем также использует параметрическое представление закона потемнения к краю, поэтому соответствующая обратная задача является корректной.

Таким образом, параметрическое представление искомой функции является мощным способом решения обратных задач. Если число параметров конечно, в этом случае удается «победить» некорректность обратной задачи и получить ее устойчивое решение стандартными методами (см., например, Гончарский и др., 1978, 1985, 1991). Однако при этом возникают две проблемы.

1. Статистическое обоснование адекватности выбранной параметрической модели исходным наблюдательным данным. Как правило, обратная параметрическая задача является сильно переопределенной: число наблюдательных точек (измерений) много больше числа искомых параметров. Это позволяет не только осуществить поиск параметров, но и контролировать адекватность выбранной модели. Более того, в случае высокоточных наблюдательных данных и слишком упрощенной модели исследуемого процесса часто оказывается, что используемая параметрическая модель отвергается наблюдательными данными. Это свидетельствует о необходимости применения более совершенной модели процесса.

2. Статистическая оценка доверительных интервалов (ошибок) искомых параметров. Поскольку параметрическая задача, в случае конечного числа параметров является корректной, найденные приближенные значения параметров сходятся к точным значениям (при стремлении ошибок наблюдений к нулю), и, при фиксированных ошибках наблюдений, имеется возможность оценки ошибок приближенных значений параметров.

В книге Гончарского и др. (1991) описаны современные методы решения обратных параметрических задач и дано их применение к обратным задачам астрофизики. Идеология этих методов известна давно — см., например, (Уилкс, 1967), а также (Lampton at al., 1976), где приведены астрофизические аспекты проблемы. Широкое внедрение современных научно-обоснованных методов решения обратных параметрических задач в практику астрофизических исследований стало возможным лишь в последнее время, благодаря использованию мощных компьютеров. В этом случае обратная задача может быть решена прямым перебором по параметрам, что позволяет построить поверхность функционала невязки, найти его глобальный минимум, разрешить проблему единственности решения, выполнить проверку адекватности модели и построить доверительные области для ее параметров. Используя доверительные области, можно оценить доверительные интервалы (ошибки) параметров модели.

В данной главе, основываясь на работе (Черепащук, 1993), мы суммируем важнейшие методы решения обратных параметрических задач и опишем их применение в астрофизике. При этом мы будем опускать некоторые математические детали, отсылая читателей к книге (Гончарский, Романов, Черепащук, 1991).

2. Статистическая постановка конечно-параметрической обратной задачи

Рассмотрим конечно-параметрическое операторное уравнение

$$B\theta = u, \tag{271}$$

где B — известный оператор, u — наблюдательные данные, θ — искомый вектор-параметр: $\theta = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n)$. Пусть правая часть уравнения (271) получена с погрешностью $\varepsilon = \widetilde{u} - \overline{u}$, где ε — случайный вектор, $\overline{u}$ — неизвестное истинное значение, $\widetilde{u}$ — получаемый в наблюдениях случайный вектор; ε — будем называть погрешностью наблюдательных данных. Обычно наблюдательные данные являются несмещенными, т. е. математическое ожидание $\mathrm{E}\varepsilon_i = 0$. Будем считать, что ε_i, $i = 1, \ldots, k$, независимы и нормально распределены с математическим ожиданием, равным нулю ($\mathrm{E}\varepsilon_i = 0$), и одинаковой дисперсией ($\mathrm{D}\varepsilon_i = \sigma^2$). Приведенные ниже соображения легко обобщаются на случай, когда дисперсия σ^2 неодинакова для разных частей наблюдательных данных (см., например, Гончарский и др., 1991).

Таким образом, имеем следующее соотношение между случайными векторами $B\overline{\theta} + \varepsilon = \widetilde{u}$, где $\overline{\theta}$ — решение уравнения $B\theta = \overline{u}$. Оператор B считается известным точно. Постановка задачи может быть сформулирована следующим образом: требуется по известной реализации $\widetilde{u}$ найти оценку для истинного (точного) решения $\overline{\theta}$ и погрешность; кроме того, требуется проверить статистическую гипотезу об адекватности модели.

Конечно-параметрические задачи в статистической постановке можно разбить на следующие основные классы: задачи с линейными параметрами, задачи с нелинейными параметрами; возможен также смешанный случай, когда одновременно есть и линейные и нелинейные параметры. Все эти случаи рассмотрены в нашей книге (Гончарский и др., 1991).

3. Проверка статистических гипотез

Эта задача близко примыкает к проблеме построения доверительных областей. Пусть для описания некоторого физического явления выбрана конечно-параметрическая статистическая модель, описываемая операторным уравнением (271). Задача ставится следующим образом. По полученной реализации случайного вектора $\widetilde{u}$ требуется вынести суждение относительно адекватности используемой математической модели (271). Из постановки задачи следует, что гипотеза H об адекватности модели предполагает, во-первых, существование некоторого истинного значения вектор-параметра $\overline{\theta}$, при котором $B\overline{\theta} = \overline{u}$, и, во-вторых, независимость и нормальность распределения погрешностей ε_i с математическим ожиданием $\mathrm{E}\varepsilon_i = 0$ и дисперсией $\mathrm{D}\varepsilon_i = \sigma^2$.

Для проверки гипотезы обычно используют тот или иной критерий проверки гипотезы (Климов, 1983). Под критерием будем понимать правило, позволяющее по реализации случайного вектора $\widetilde{u}$ отвергнуть или принять гипотезу.

Отметим, что принятие или отбрасывание гипотезы согласно критерию не дает ее логического обоснования или опровержения. При этом возможны четыре случая: 1) гипотеза H верна и принимается по критерию; 2) гипотеза H неверна и отвергается по критерию; 3) гипотеза H верна, но не принимается по критерию (ошибка I рода); 4) гипотеза H неверна, но принимается по критерию (ошибка II рода).

Для выбранного критерия существует неотрицательная вероятность ошибки I рода, которую обозначим через $\alpha \geqslant 0$. Величина α называется уровнем значимости критерия. Тогда, очевидно, в случае адекватности модели вероятность события 1) равна $\gamma = 1 - \alpha$; величина γ называется уровнем доверия.

Можно использовать, например, следующий критерий проверки гипотезы. Выбирают некоторую случайную величину (статистику) $\Delta(\widetilde{u})$, зависящую от наблюдательных данных $\widetilde{u}$, причем распределение статистики $\Delta(\widetilde{u})$ известно. Априори задаются уровнем значимости α и вычисляют (или берут из статистических таблиц) число Δ_0 (квантиль), такое, что в случае правильности гипотезы H вероятность $P\{\Delta(\widetilde{u}) > \Delta_0\} = \alpha$. Если для конкретной реализации $\widetilde{u}$ получаем, что $\Delta(\widetilde{u}) > \Delta_0$, то гипотеза H отвергается (при этом вероятность совершить ошибку I рода равна α), в противном случае гипотеза H принимается. При этом необходимо помнить, что модель (гипотеза H) принимается не потому, что она верна, а лишь потому, что нет оснований ее отвергнуть.

Существует распространенное заблуждение, что можно доказать правильность модели до процедуры поиска ее параметров и их ошибок, а затем оценивать параметры и их ошибки для верной модели. Наблюдения не могут доказать верность модели. Наблюдения могут лишь помочь нам отвергнуть некоторое количество моделей. Очень часто, принимая модель на основе статистического критерия, мы совершаем ошибку II рода: мы принимаем модель, которая не вполне верна, и тем самым допускаем в погрешностях ε_i некоторую долю систематических уклонений. Можно полагать, что эта доля тем меньше, чем больше уровень значимости α, по которому выбранная модель может быть отвергнута. Например, принимая стандартную модель затменной двойной системы (две сферические звезды с линейными законами потемнения), мы не учитываем многих физических деталей: пятен на поверхностях звезд, активных областей и т. п. При типичной точности средней кривой блеска $\sim 0,^m 005$ такая простая модель обычно принимается согласно статистическому критерию. Однако если бы точность кривой блеска была на порядок выше, стандартная модель затменной двойной системы была бы отвергнута на основе статистического критерия.

Таким образом, мы оцениваем искомые параметры и их ошибки не для верной модели (которая практически никогда не бывает точно известной), а принимая гипотезу о том, что модель, выбранная согласно статистическому критерию, верна. Отсюда следует, что оценка параметров модели и их ошибок должна проводиться совместно со статистическим обоснованием адекватности модели.

4. Построение доверительных областей

Проверяя адекватность выбранной модели и не имея оснований ее отвергнуть согласно статистическому критерию, мы принимаем модель. В гипотезе об адекватности модели мы имеем основания считать, что наблюдаемая кривая блеска $\widetilde{u}$ оптимальным образом «натянута» на идеально точную кривую $\overline{u} = B\overline{\theta}$, соответствующую точным параметрам $\overline{\theta}$ выбранной модели (далее для определенности под наблюдаемой функцией $\widetilde{u}$ мы будем понимать кривую блеска, хотя $\widetilde{u}$ может представлять собой распределение энергии в спектре системы и т. п.). Таким образом, при оценке расстояния между идеально точной кривой блеска и теоретической кривой блеска мы «имеем право» заменить идеально точную кривую блеска (которая неизвестна) на наблюдаемую кривую блеска. Поэтому, измеряя расстояние (в какой-либо метрике, например, L_2) между наблюдаемой кривой блеска $\widetilde{u}$ и теоретической кривой $u = B\theta$, вычисленной для фиксированных значений параметров θ, мы в нашей гипотезе тем самым оцениваем расстояние между идеально точной кривой $\overline{u} = B\overline{\theta}$ и теоретической кривой блеска $u = B\theta$. Это и дает нам основания оценивать параметры θ модели и их ошибки, используя конкретную реализацию $\widetilde{u}$ случайного процесса (кривой блеска).

Для нахождения ошибки решения в задачах со статистической постановкой используется метод доверительных областей.

Доверительной областью с уровнем доверия γ оцениваемого вектор-параметра $\overline{\theta}$ в задаче (271) называется случайная область $D(\widetilde{u})$ в пространстве оцениваемого параметра, с вероятностью γ содержащая истинное значение параметра $\overline{\theta}$.

С вероятностью $\alpha = 1 - \gamma$ доверительная область D может не содержать $\overline{\theta}$. Исследователь, исходя из своих практических нужд, делает оптимальным выбором значения γ величину α достаточно малой. Однако при $\gamma \to 1$, вообще говоря, размеры D стремятся к бесконечности. Величину α, как уже отмечалось, принято называть уровнем значимости, а величину γ — уровнем доверия доверительной области D. Подчеркнем, что величину γ следует выбирать заранее, а не руководствуясь какими-либо апостериорными соображениями, возникающими в результате эксперимента.

В зависимости от конкретной задачи при оценке погрешности нелинейных параметров возможно применение точных и асимптотических методов построения доверительных областей. Асимптотические методы удобны тем, что в них доверительная область никогда не вырождается в пустое множество, однако заданный уровень доверия γ достигается лишь в пределе (когда число измерений функции u стремится к бесконечности), причем скорость сходимости зависит от конкретной задачи и остается неизвестной. Точные методы дают гарантированные результаты, поэтому их можно рекомендовать для тех задач, в которых требуется вынести особо ответственное суждение о природе исследуемого объекта. Недостатком точных методов для нелинейных параметров является то, что при некоторых реализациях эксперимента возможно вырождение доверительной области $D(\widetilde{u})$ (как случайного множества) в пустое множество.

Подчеркнем, что существуют различные методы построения доверительных областей. Получаемые различными методами доверительные области, вообще говоря, не совпадают, поскольку различные методы используют различные статистики $\Delta(\widetilde{u})$ (χ^2, Фишера, разное число точек наблюдаемой функции $\widetilde{u}$ и т. д.). В том числе, как уже отмечалось, существуют методы, в которых доверительная область (как случайное множество) при некоторых реализациях наблюдаемой кривой блеска $\widetilde{u}$ вырождается в пустое множество. Однако при любом методе построения строгое математическое утверждение состоит в следующем: доверительная область $D(\widetilde{u})$, полученная точным методом с уровнем доверия γ, с вероятностью γ содержит истинное решение $\overline{\theta}$. С вероятностью $\alpha = 1 - \gamma$ доверительная область $D(u)$ либо не содержит $\overline{\theta}$, либо (для некоторых методов построения) вырождается в пустое множество.

Широко используется следующая общая процедура построения доверительных областей — так называемый центральный метод (Уилкс, 1967, Крамер, 1975).

Пусть известна функция $\Delta(\widetilde{u}, \theta)$, такая, что распределение $F\left[\Delta\left(\widetilde{u},\, \overline{\theta}\right)\right]$ статистики $\Delta\left(\widetilde{u},\, \overline{\theta}\right) = \Delta\left(B\overline{\theta} + \varepsilon,\, \overline{\theta}\right)$ известно, непрерывно по $\Delta\left(\widetilde{u},\, \overline{\theta}\right)$, и не зависит от $\overline{\theta}$, т. е. распределение $F\left[\Delta\left(\widetilde{u},\, \overline{\theta}\right)\right]$ может быть вычислено, если известно распределение ε и ничего более. Здесь $\overline{\theta}$ — неизвестное истинное решение, $\widetilde{u}$ — случайный вектор исходных данных задачи (кривая блеска).

1. Задаются уровнем доверия γ и находят (например, из статистических таблиц, Уилкс, 1967) число (квантиль) Δ_0, такое, что $F\left(\Delta_0\right) = P\left\{\Delta\left(\widetilde{u},\, \overline{\theta}\right) \leqslant \Delta_0\right\} = \gamma$ (здесь и далее буквой P обозначена вероятность).

2. Объединяют в доверительную область $D(\widetilde{u})$ те θ, для которых выполняется неравенство $\Delta(\widetilde{u}, \theta) \leqslant \Delta_0$.

Тогда нетрудно видеть, что вероятность $P\left\{\overline{\theta} \in D\left(\widetilde{u}\right)\right\} = \gamma$. Таким образом, $D(\widetilde{u})$ есть случайное множество в пространстве параметров, с заданной вероятностью γ содержащее неизвестное истинное значение $\overline{\theta}$.

На практике строится реализация случайной доверительной области $D = D(\widetilde{u})$ при полученной из наблюдений реализации случайного вектора $\widetilde{u}$ (кривой блеска).

Завершая этот параграф, отметим, что конечно-параметрическая статистическая постановка обратной задачи в операторном виде (271) совпадает с постановкой задачи регрессионного анализа. В качестве приближенного решения регрессионных задач часто используют оценки наименьших квадратов (Айвазян и др., 1983, Собер, 1980).

Случайный вектор $\widehat{\theta}$ является оценкой наименьших квадратов для истинного параметра $\overline{\theta}$ в задаче (271), если

$$S\left(\widehat{\theta}\right) = \min_{\theta} S(\theta), \tag{272}$$

где

$$S\left(\theta\right) = \sum_{i=1}^{k} \left[\widetilde{u}_i - \left(B\theta\right)_i\right]^2. \tag{273}$$

Для задач в статистической постановке оценка наименьших квадратов $\widehat{\theta}$ в определенном смысле является оптимальной. Оценка $\widehat{\theta}$ обладает также свойствами несмещенности, состоятельности и эффективности. Поэтому в статистических задачах часто используют в качестве приближенного решения оценку наименьших квадратов. В то же время для статистических задач в приведенной постановке (271) существуют и другие методы построения приближенного решения (см., например, Мудров и др., 1983). Для определенности, мы будем рассматривать оценки наименьших квадратов θ.

5. Случай линейных параметров: выбор статистики $\Delta\left(\widetilde{u},\, \overline{\theta}\right)$

Рассмотрим линейную статистическую конечно-параметрическую задачу. Пусть имеется введенное ранее конечно-параметрическое операторное управление (271):

$$B\theta = u, \tag{274}$$

где B — линейный оператор, который предполагается известным точно.

Пусть вместо неизвестного детерминированного вектора $\overline{u}$ известна реализация $(\widetilde{u})$ случайного вектора $\widetilde{u}$, который отличается от $\overline{u}$ на случайную величину (погрешность) ε: $\widetilde{u} = \overline{u} + \varepsilon$. Таким образом, имеем следующее соотношение:

$$B\overline{\theta} + \varepsilon = \widetilde{u}. \tag{275}$$

где $\overline{\theta}$ — неизвестное решение точного уравнения $B\theta = \overline{u}$. Относительно случайной величины (погрешности) ε предполагается, что $\mathrm{E}\varepsilon_i = 0$, $\mathrm{D}\varepsilon_i = \sigma^2$, ε_i независимы.

Требуется по известному оператору B и реализации $(\widetilde{u})_p$ построить оценку для $\overline{\theta}$ и найти погрешность. Приведенная постановка является классической постановкой задач линейного регрессионного анализа. Проблемы решения таких задач в значительной степени исследованы (Собер, 1980, Айвазян и др., 1985). В качестве приближенного решения, как уже отмечалось, будем использовать оценку наименьших квадратов $\widehat{\theta}$. Алгоритмы получения оценки наименьших квадратов $\widehat{\theta}$ для линейных задач описаны в нашей книге (Гончарский и др., 1991). Отметим лишь важнейшие свойства $\widehat{\theta}$ для линейных задач. В линейном случае оценка наименьших квадратов аналитически выражается через случайный вектор $\widetilde{u}$ формулой

$$\widehat{\theta} = \left(B^{+}B\right)^{-1} B^{+}\widetilde{u}, \tag{276}$$

где B^{+} — оператор, сопряженный B. В линейном случае оператор B представляет собой матрицу размерности $k \times s$ (k — число измерений, s — число компонент искомого вектор-параметра θ). Таким образом, для построения оценки наименьших квадратов $\widehat{\theta}$ нет необходимости знать дисперсию σ^2 погрешностей ε_i, $i = 1, \ldots, k$: величина $\widehat{\theta}$ при заданном точно операторе B однозначно определяется лишь по случайному вектору $\widetilde{u}$.

Как видно из формулы (276), оценка наименьших квадратов является случайным вектором. Если оператор B инъективен, т. е. $\det(B^+B) \neq 0$, то математическое ожидание $\mathrm{E}\widehat{\theta} = \overline{\theta}$, а матрица моментов $\operatorname{var}\widehat{\theta} = \sigma^2\left(B^+B\right)^{-1}$ (напомним, что матрица моментов определяется для некоторого случайного вектора ξ следующим образом: $\operatorname{var}\xi = \mathrm{E}\{(\xi - \mathrm{E}\xi)(\xi - \mathrm{E}\xi)\}$). В случае нормально распределенных ε_i оценка наименьших квадратов $\widehat{\theta}$ распределена нормально с математическим ожиданием $\overline{\theta}$ и матрицей моментов $\sigma^2(B^+B)^{-1}$.

Важнейшим свойством оценки наименьших квадратов $\widehat{\theta}$ в случае инъективного оператора B является ее устойчивость по отношению к погрешностям в исходных данных. Оценка $\widehat{\theta}$ является несмещенной, т. е. $\mathrm{E}\widehat{\theta} = \overline{\theta}$, причем среди всех линейных несмещенных оценок оценка наименьших квадратов $\widehat{\theta}$ — «наилучшая» в том смысле, что она обладает минимальной дисперсией, является эффективной оценкой для $\overline{\theta}$ и при нормально распределенных ε_i совпадает с оценкой максимального правдоподобия (Крамер, 1975). Кроме того, в линейном невырожденном случае оценка наименьших квадратов $\widehat{\theta}$ при некоторых условиях является состоятельной оценкой $\overline{\theta}$, т. е. для любого $\delta > 0$ при $k \to \infty$ вероятность $P\left\{\left\|\theta^{(k)} - \overline{\theta}\right\| \geqslant \delta\right\} \to 0$.

Перейдем теперь к проблеме построения доверительных областей в линейных параметрических задачах. Покажем, как решается проблема выбора функций $\Delta(u,\theta)$ для линейных задач.

Существуют следующие теоремы. Пусть задача линейна, ε_i нормально распределены ($\varepsilon_i \sim N(0,\sigma^2)$) и независимы, $\det B^+B \neq 0$. Тогда

1) $\dfrac{1}{\sigma^2}\,S\left(\widehat{\theta}\right) \sim \chi^2_{k-s}$, (здесь знак $\sim$ означает «распределено»),

2) $\dfrac{1}{\sigma^2}\left[S\left(\overline{\theta}\right) - S\left(\widehat{\theta}\right)\right] \sim \chi^2_s$, где χ^2_m — распределение «хи»-квадрат с m степенями свободы,

3) случайные величины из пунктов 1), 2) независимы.

Пусть $\varepsilon_i \sim N(0,1)$, $i = 1,\ldots,k$, и независимы, тогда

$$\sum_{i=1}^{k}\varepsilon_i^2 \sim \chi^2_k.$$

Пусть $\xi \sim \chi^2_k$, $\eta \sim \chi^2_m$ и случайные величины ξ, η независимы. Тогда

$$\frac{\xi}{\eta}\frac{m}{k} \sim F_{k,m},$$

где $F_{k,m}$ — обозначение распределения Фишера с k и m степенями свободы.

Подчеркнем, что утверждения из пунктов 1) и 2) справедливы точно лишь для линейных параметрических задач. Для нелинейных параметрических задач утверждения из пунктов 1), 2) справедливы лишь в асимптотическом смысле, т. е. когда число измерений $k \to \infty$ (см. ниже); для конкретной реализации случайного вектора $\widetilde{u}$ в нелинейном случае эти утверждения не совсем точны.

Из приведенных теорем следует, что для построения доверительных областей можно выбрать, например, следующие функции:

$$\Delta_1\left(u,\ \theta\right) = \frac{1}{\sigma^2}\left[S\left(\theta\right) - S\left(\widehat{\theta}\right)\right], \tag{277}$$

$$\Delta_2(u,\ \theta) = \frac{S(\theta) - S\left(\widehat{\theta}\right)}{S\left(\widehat{\theta}\right)} \frac{k-s}{s}, \tag{278}$$

$$\Delta_3(u,\ \theta) = \frac{1}{\sigma^2} S(\theta), \tag{279}$$

$$\Delta_4(u,\ \theta) = \frac{1}{\widehat{\sigma}^2} S(\theta) \frac{m}{k}, \tag{280}$$

где $\widehat{\sigma}^2$ — некоторая независимая от $S\left(\overline{\theta}\right)$ оценка дисперсии σ^2, такая, что $\widehat{\sigma}^2/\sigma^2$ имеет распределение χ^2_m с m степенями свободы при некотором m ($\widehat{\sigma}^2$ можно находить, например, из дополнительных экспериментальных данных). Величины $S(\theta)$ и $S\left(\widehat{\theta}\right)$ в формулах (277)–(280) выражаются через $\widetilde{u}$ по формулам (272), (273).

Действительно, согласно описанным теоремам, имеем статистики $\Delta\left(\widetilde{u},\ \overline{\theta}\right)$, распределенные по следующим законам:

$$\Delta_1\left(\widetilde{u},\ \overline{\theta}\right) \sim \chi^2_s, \tag{281}$$

$$\Delta_2\left(\widetilde{u},\ \overline{\theta}\right) \sim F_{s,\ k-s}, \tag{282}$$

$$\Delta_3\left(\widetilde{u},\ \overline{\theta}\right) = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i^2 \sim \chi^2_k, \tag{283}$$

$$\Delta_4\left(\widetilde{u},\ \overline{\theta}\right) \sim F_{k,\ m}. \tag{284}$$

Следовательно, распределения $F\left[\Delta_i\left(\widetilde{u},\ \overline{\theta}\right)\right] = F\left[\Delta_i\left(B\overline{\theta} + \varepsilon,\ \overline{\theta}\right)\right]$ не зависят от $\overline{\theta}$, $i = 1, \ldots, 4$, и определяются лишь законом распределения ошибок наблюдений ε_i, который предполагается нормальным ($\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$) а величины ε_i — независимыми.

Процедура построения доверительной области была описана выше. Она состоит в том, что для выбранного уровня доверия γ в доверительную область D объединяются те значения параметра θ, для которых выполняется условие $\Delta_1(\widetilde{u},\ \theta) \leqslant \chi^2_{s,\ \gamma}$ или $\Delta_2(\widetilde{u}, \theta) \leqslant F_{s,k-s,\gamma}$, или $\Delta_3(\widetilde{u},\ \theta) \leqslant \chi^2_{k,\ \gamma}$, или $\Delta_4(\widetilde{u}, \theta) \leqslant F_{k,m,\gamma}$ (преимущества выбора той или иной статистики $\Delta\left(\widetilde{u},\ \overline{\theta}\right)$ будут рассмотрены ниже). Здесь $\chi^2_{s,\ \gamma}$, $F_{s,k-s,\gamma}$, $\chi^2_{k,\ \gamma}$, $F_{k,m,\gamma}$ — числа (квантили), для которых вероятность того, что случайная величина ξ имеет значение, не большее заданного квантиля, равна γ. Значения квантилей можно найти из статистических таблиц распределений Фишера и χ^2 (см., например, Уилкс, 1967). Построенная таким образом доверительная область $D(\widetilde{u})$ с вероятностью γ содержит точное значение вектор-параметра $\overline{\theta}$.

Вычисление доверительной области $D(u)$ в пространстве искомых параметров в случае линейной задачи не представляет труда, поскольку функции $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$ в этом случае являются квадратичными формами относительно θ. Поэтому доверительная область в линейных задачах имеет вид эллипсоида с его внутренними точками. Центр эллипсоида — $\overline{\theta}$. Уравнения эллипсоидов и матрицы их коэффициентов выписываются в явном виде (Гончарский и др., 1991).

Для квадратичной формы Δ_1 уравнение эллипсоида имеет вид

$$\Delta_1(\widetilde{u},\ \theta) = \frac{1}{\sigma^2}\left[S(\theta) - S\left(\widehat{\theta}\right)\right] = \frac{1}{\sigma^2}\left\|B\left(\theta - \widehat{\theta}\right)\right\|^2 = \chi^2_{s,\ \gamma}.$$

Центр эллипсоида — точка $\widehat{\theta}$, матрица коэффициентов равна

$$\frac{1}{\sigma^2} B^+ B \left(\chi^2_{s,\ \gamma}\right)^{-1}.$$

Как видно, в этом случае размеры доверительного эллипсоида не меняются, меняется лишь расположение центра в зависимости от случайного вектора $\widetilde{u}$.

Для квадратичной формы Δ_2 уравнение эллипсоида

$$\Delta_2\left(\widetilde{u},\ \theta\right) = \frac{k-s}{S\left(\widehat{\theta}\right)s}\left\|B\left(\theta-\widehat{\theta}\right)\right\|^2 = F_{s,\ k-s,\ \gamma}.$$

Центр эллипсоида — точка $\widehat{\theta}$. Матрица коэффициентов

$$\left(F_{s,\ k-s,\ \gamma}\right)^{-1}\frac{k-s}{sS\left(\widehat{\theta}\right)}B^{+}B.$$

$S\left(\widehat{\theta}\right)$ находится из формулы (272). Для построения доверительного эллипсоида в этом случае нет необходимости знать дисперсию σ^2 погрешности ε.

Для квадратичной формы Δ_3 уравнение эллипсоида

$$\Delta_3\left(\widetilde{u},\ \theta\right) = \frac{1}{\sigma^2}\left[S\left(\theta\right)-S\left(\widehat{\theta}\right)\right]+\frac{1}{\sigma^2}S\left(\widehat{\theta}\right) = \frac{1}{\sigma^2}\left\|B\left(\theta-\widehat{\theta}\right)\right\|^2+\frac{1}{\sigma^2}S\left(\widehat{\theta}\right) = \chi^2_{k,\ \gamma}.$$

Центр эллипсоида — точка $\widehat{\theta}$. Матрица коэффициентов

$$\left[\chi^2_{k,\ \gamma}-\frac{1}{\sigma^2}S\left(\widehat{\theta}\right)\right]^{-1}\frac{1}{\sigma^2}B^{+}B.$$

Данный случайный доверительный эллипсоид вырождается в пустое множество, когда

$$\chi^2_{k,\ \gamma} < \frac{1}{\sigma^2}S\left(\widehat{\theta}\right).$$

Для квадратичной формы Δ_4 уравнение эллипсоида

$$\Delta_4\left(\widetilde{u},\ \theta\right) = \frac{1}{\widehat{\sigma}^2}\frac{m}{s}\left[\left(S\left(\theta\right)-S\left(\widehat{\theta}\right)\right)+S\left(\widehat{\theta}\right)\right] =$$
$$= \frac{1}{\widehat{\sigma}^2}\frac{m}{s}\left\|B\left(\theta-\widehat{\theta}\right)\right\|^2+\frac{1}{\widehat{\sigma}^2}\frac{m}{s}S\left(\widehat{\theta}\right) = F_{k,\ m,\ \gamma}.$$

Центр эллипсоида — точка $\widehat{\theta}$. Матрица коэффициентов

$$\left[F_{k,\ m,\ \gamma}-\frac{1}{\widehat{\sigma}^2}\frac{m}{s}S\left(\widehat{\theta}\right)\right]^{-1}\frac{1}{\widehat{\sigma}^2}\frac{m}{s}B^{+}B.$$

Для построения данного доверительного эллипсоида не нужно знать значение дисперсии σ^2 погрешности ε. Если для оценок $\widehat{\theta}$ и $\widehat{\sigma}^2$ выполняется неравенство

$$F_{k,\ m,\ \gamma} < \frac{1}{\widehat{\sigma}^2}\frac{m}{s}S\left(\widehat{\theta}\right),$$

то доверительный эллипсоид вырождается в пустое множество.

Выбор конкретного алгоритма построения, т. е. выбор функции Δ в значительной степени зависит от исходных данных задачи и ее специфики.

Так, если неизвестна дисперсия σ^2 погрешностей ε_i, то использовать функции Δ_1 и Δ_3 для построения доверительных областей нельзя. Это связано с тем, что получаемые этим методом эллипсоиды зависят от σ^2. В то же время функции Δ_1 и Δ_2 даже в случае, если известна дисперсия σ^2, не могут быть использованы для проверки статистической гипотезы об адекватности модели, поскольку для построения этих функций используются не абсолютные, а относительные значения функционала невязки.

Следует подчеркнуть, что в случае линейной параметрической модели все доверительные интервалы, полученные с использованием функций Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4, являются «точными», т. е. они содержат точное решение $\overline{\theta}$ с заданной вероятностью γ для конкретной реализации наблюдаемой функции $\widetilde{u}$, а не только в бесконечном пределе, когда число измерений $k \to \infty$. В нелинейном случае для функций Δ_1, Δ_2 это утверждение справедливо лишь в асимптотическом смысле.

Следует помнить, что, используя для получения доверительных областей функции Δ_3 и Δ_4, при некоторых реализациях случайного вектора $\widetilde{u}$ можно получать пустое доверительное множество, поскольку для построения этих функций используются абсолютные значения функционала невязки. Однако функции Δ_3, Δ_4, в отличие от функций Δ_1, Δ_2, могут быть использованы для проверки статистической гипотезы об адекватности модели. Очень важно также, что функции Δ_3, Δ_4, в отличие от функций Δ_1, Δ_2, могут применяться для построения «точных» доверительных областей в случае задачи с нелинейными параметрами. Использование функций Δ_1, Δ_2 для построения доверительной области D в случае задачи с нелинейными параметрами возможно лишь в асимптотическом смысле, когда вероятность накрытия точного решения $\overline{\theta}$ не равна заданному уровню доверия γ для конкретной реализации наблюдаемой функции u, а лишь стремится к γ при $k \to \infty$. Сделаем еще одно очень важное замечание. Поскольку доверительная область $D(\widetilde{u})$ является областью в многомерном пространстве параметров, чтобы получить доверительные интервалы для параметров, мы вынуждены спроектировать доверительную область $D(\widetilde{u})$ на оси параметров. В этом случае доверительная область $D(\widetilde{u})$ заменяется объемлющим ее параллелепипедом, объем которого больше объема $D(\widetilde{u})$. Поэтому вероятность накрытия точного решения (если число искомых параметров больше одного) будет, вообще говоря, больше γ.

К задаче построения доверительных областей близко примыкает задача проверки статистической гипотезы об адекватности используемой математической модели (Гончарский и др., 1991).

Очевидно, если модель (274) физического явления адекватна, то существует некоторое неизвестное истинное значение параметра $\overline{\theta}$. Рассмотрим для определенности статистику $\Delta_3\left(\widetilde{u},\, \overline{\theta}\right)$, которая имеет распределение χ^2_k при условии, что погрешности ε_i независимы и имеют нормальное распределение с $\mathrm{E}\varepsilon_i = 0$ и $\mathrm{D}\varepsilon_i = \sigma^2$, $i = 1, \ldots, k$.

Зададимся уровнем значимости $0<\alpha<1$, из статистических таблиц для выбранного априори α находим квантиль $\chi^2_{k,\,1-\alpha}$. Тогда вероятность того, что $\Delta_3(\widetilde{u}, \theta)$ меньше $\chi^2_{k,\,1-\alpha}$, равна $1-\alpha$.

Далее вычислим функцию $\Delta_3(\widetilde{u}, \theta)$ на априори задаваемом множестве, содержащем $\overline{\theta}$. Допустим, что при полученных наблюдательных данных $\widetilde{u}$ функция $\Delta_3(\widetilde{u}, \theta)$ при всех θ больше $\chi^2_{k,\,1-\alpha}$. В этом случае гипотеза об адекватности рассматриваемой модели (274) отвергается с уровнем значимости, не большим α, т. е. вероятность ошибиться (отбросить адекватную модель) не больше α. Естественно, что для проверки адекватности модели следует выбирать малое значение уровня значимости α, например, $\alpha = 0{,}1$; $0{,}01$ и т. п.

Если же при некоторых θ $\Delta_3\,(\widetilde{u},\, \theta) \leqslant \chi^2_{k,\,1-\alpha}$, то это, вообще говоря, еще не означает, что модель адекватна. На практике, как уже отмечалось выше, в этом случае модель принимается, так как считается, что нет оснований ее отвергнуть.

Описанный метод проверки гипотезы об адекватности модели без изменений может быть использован в нелинейном случае.

6. Случай нелинейных параметров; «точные» доверительные области

По сравнению с линейным случаем в нелинейных задачах, как правило, не существует явных аналитических выражений для оценки наименьших квадратов $\widehat{\theta}$ и доверительных областей $D(\widetilde{u})$. Однако использование современных мощных компьютеров позволяет эффективно решать и нелинейные задачи.

Особенностью нелинейного случая является использование асимптотического подхода к задачам. В асимптотической постановке удается доказать важные свойства оценки наименьших квадратов и доверительных областей, близкие к свойствам линейных задач (Гончарский и др., 1991).

Пусть имеем конечно-параметрическое операторное уравнение (271), где B — известный точно нелинейный оператор.

Оценка наименьших квадратов $\widehat{\theta}$ минимизирует функционал невязки $S(\theta) = \|B\theta - \widetilde{u}\|^2_{R^k}$ на множестве $\Theta \subset R^s$ (см. формулы (272), (273)). В отличие от линейного случая, где оценка наименьших квадратов явно выражается через случайный вектор $\widetilde{u}$, в нелинейной задаче для нахождения $\widehat{\theta}$ требуется находить глобальный минимум на множестве $\Theta \subset R^s$. При этом точка $\widehat{\theta} \in \Theta$, в которой достигается глобальный минимум, может быть не единственной или вообще не существовать (для произвольного множества $\Theta \subset R^s$).

Для вычисления оценки наименьших квадратов невязку $S(\theta)$ минимизируют одним из методов минимизации функционалов (см., например, Гончарский и др., (1978), Васильев, (1980)). При небольшом числе параметров задачи и достаточно быстро вычисляемом прямом операторе B для минимизации $S(\theta)$ эффективен метод перебора по параметрам. С увеличением мощности компьютеров прямые методы перебора по параметрам становятся все более эффективными при решении обратных нелинейных параметрических задач.

Заметим, что для нахождения оценки наименьших квадратов $\widehat{\theta}$, как и в линейном случае, не нужно знать дисперсию σ^2 погрешности ε; значение $\widehat{\theta}$ при заданном точно нелинейном операторе B зависит от случайного вектора $\widetilde{u}$.

Асимптотическая постановка задачи поиска оценки наименьших квадратов и доверительной области изложена в нашей книге (Гончарский и др., 1991). Очень важно, что для последовательности оценок наименьших квадратов $\widehat{\theta}^{(k)}$ в нелинейной параметрической задаче удается доказать асимптотическую нормальность распределения; т. е. последовательность случайных векторов

$$\sqrt{k}\,\left(\widehat{\theta}^{(k)} - \overline{\theta}\right)$$

асимптотически при $k \to \infty$ (где k — число измерений наблюдаемой кривой блеска $\widetilde{u}$) имеет нормальное распределение $N\left(0,\ \sigma^2 J^{-1}\left(\overline{\theta}\right)\right)$ с математическим ожиданием 0 и ковариационной матрицей $\sigma^2 J^{-1}\left(\overline{\theta}\right)$, где матрица $J\left(\overline{\theta}\right)$ определена формулой (2.24) в нашей книге (Гончарский и др., 1991) и выражается через частные производные от функции $B\theta$ по компонентам вектор-параметра θ.

Следующим важным свойством оценки наименьших квадратов в асимптотической постановке задачи является ее сходимость почти наверное (Демиденко, 1981) к неизвестному параметру $\overline{\theta}$ при $k \to \infty$, т. е. $\widehat{\theta}^{(k)}$ строго состоятельна.

Таким образом, в нелинейной статистической задаче проблема построения оценки неизвестного вектор-параметра $\overline{\theta}$ не имеет такого простого решения, как в линейном случае. Оценка метода наименьших квадратов $\widehat{\theta}$ в нелинейном случае является лишь асимптотически нормальной.

Величины $\left(1/\sigma^2\right)\ S\left(\widehat{\theta}\right)$ и $\left(1/\sigma^2\right)\ \left[S\ \left(\overline{\theta}\right) - S\ \left(\widehat{\theta}\right)\right]$ в случае нелинейной задачи и конечной реализации наблюдаемой кривой блеска u (когда число измерений k конечно), строго говоря, не распределены по законам χ^2_{k-s} и χ^2_s соответственно.

Тем не менее асимптотическая нормальность оценки $\widehat{\theta}$ дает некоторые основания (при больших k) для использования матрицы ковариации как характеристики погрешности между оценкой $\widehat{\theta}^{(k)}$ и точным значением вектор-параметра $\overline{\theta}$.

Рассмотрим теперь процедуру построения «точных» доверительных областей. Как нетрудно заметить, функции $\Delta_3(u,\theta)$ и $\Delta_4(u,\theta)$ из формул (279), (280), используемые для построения доверительных областей в линейной задаче, могут быть применены и в нелинейном случае. Распределение статистик $\Delta_3\left(\widetilde{u},\ \overline{\theta}\right)$ и $\Delta_4\left(\widetilde{u},\ \overline{\theta}\right)$, как и в линейном случае, имеет следующий вид:

$$\Delta_3\left(\widetilde{u},\ \overline{\theta}\right) = \frac{1}{\sigma^2}\ S\left(\overline{\theta}\right) \sim \chi^2_k, \tag{285}$$

$$\Delta_4\left(\widetilde{u},\ \overline{\theta}\right) = \frac{1}{\widehat{\sigma}^2}\ S\left(\overline{\theta}\right)\frac{m}{k} \sim F_{k,\,m}, \tag{286}$$

где $\widehat{\sigma}^2$ — произвольная, независящая от $S\left(\overline{\theta}\right)$ оценка дисперсии σ^2, такая, что $\widehat{\sigma}^2/\sigma^2$ имеет распределение χ^2_m с m степенями свободы при некотором фиксированном m.

Однако доверительные области $D_3(\widetilde{u})$ и $D_4(\widetilde{u})$, определяемые с помощью функций $\Delta_3(u,\theta)$ и $\Delta_4(u,\theta)$ из соотношений

$$D_3 = \left\{\theta\ \in\ \Theta\ \subset\ R^s\ :\ \Delta_3\left(\widetilde{u},\ \theta\right) \leqslant \chi^2_{k,\,\gamma}\right\}, \tag{287}$$

$$D_4 = \{\theta \in \Theta \subset R^s : \Delta_4(\widetilde{u},\theta) \leqslant F_{k,m,\gamma}\}, \tag{288}$$

в отличие от линейного случая не являются эллипсоидами (здесь γ — выбранный уровень доверия). Для вычисления доверительных областей D_3, D_4 можно использовать метод перебора по компонентам вектор-параметра θ из области $\Theta \subset R^s$.

Легко видеть, что для вычисления доверительной области D_4 не нужно знать значение дисперсии σ^2 погрешностей ε_i, $i = 1,\ldots,k$. Однако необходимо вычислять (например, из дополнительных экспериментальных данных) величину $\widehat{\sigma}^2$ — не зависящую от $S\left(\overline{\theta}\right)$ оценку дисперсии.

В рассматриваемых ранее статистических конечно-параметрических постановках предполагалось, что имеется лишь одно измерение u_i с погрешностью ε_i неизвестного значения $\overline{u}$. Однако возможны постановки задач, в которых имеется несколько измерений u_i^j, $j = 1,\ \ldots,\ n_i$, с погрешностями ε_i^j неизвестного значения $\overline{u}_i$ (n_i — количество измерений в данной нормальной точке кривой блеска). Этот случай соответствует, например, средней кривой блеска затменной двойной системы, представленной k нормальными точками (см. ниже).

Рассмотрим следующую постановку задачи с многократными измерениями. Пусть, как и прежде, имеется конечно-параметрическое операторное уравнение (271). Оператор B взаимно однозначен и непрерывен из области Θ и известен точно.

Будем считать, что проводится несколько измерений u_i^j, $j = 1,\ \ldots,\ n_i$ (которые являются случайными величинами) со случайными погрешностями ε_i^j каждого неизвестного значения $\overline{u}_i$, $i = 1,\ \ldots,\ k$: $\overline{u}_i + \varepsilon_i^j = \widetilde{u}_i^j$, $i = 1,\ldots,k$: $j = 1,\ldots,n_i$,

n_i — количество измерений $\overline{u}_i$. Будем предполагать, что случайные величины ε_i^j, $i = 1, \ldots, k$, $j = 1, \ldots, n_i$, независимы и нормально распределены с $\mathrm{E}\varepsilon_i^j = 0$, $\mathrm{D}\varepsilon_i^j = \sigma^2$.

Таким образом, имеем следующее соотношение:

$$\left(B\overline{\theta}\right)_i + \varepsilon_i^j = \widetilde{u}_i^j,$$

где $\overline{\theta} \in \Theta \subset R^s$ — неизвестное решение уравнения $B\theta = \overline{u}$. Требуется построить доверительную область для $\overline{\theta}$.

Для построения доверительной области будем использовать процедуру, описанную выше. В процедуре построения используется функция $\Delta\left(u_i^j,\, \theta\right)$, $i = 1, \ldots, k$, $j = 1, \ldots, n_i$, такая, что распределение $F\left[\Delta\left(\widetilde{u}_i^j,\, \overline{\theta}\right)\right]$ известно и не зависит от $\overline{\theta}$, где $\widetilde{u}_i^j$ — случайные величины наблюдательных данных, $\overline{\theta}$ — истинное значение вектор-параметра θ.

Для задачи в приведенной постановке можно использовать, например, следующую функцию $\Delta_5\left(u_i^j,\, \theta\right)$ (Гончарский и др., 1991):

$$\Delta_5\left(u_i^j,\, \theta\right) = \frac{\sum\limits_{i=1}^{k}(n_i - 1)}{k} \frac{\sum\limits_{i=1}^{k} n_i \left[(u_i)_{\text{ср}} - (B\theta)_i\right]^2}{\sum\limits_{i=1}^{k}\sum\limits_{j=1}^{n_i}\left[u_i^j - (u_i)_{\text{ср}}\right]^2}, \tag{289}$$

где $(u_i)_{\text{ср}} = \dfrac{1}{n_i}\sum\limits_{j=1}^{n_i} u_i^j$ — среднее арифметическое u_i^j, $j = 1, \ldots, n_i$ при фиксированном i.

Статистика $\Delta_5\left(\widetilde{u}_i^j,\, \overline{\theta}\right)$ имеет распределение Фишера $F_{k,\, \sum\limits_{i=1}^{k}(n_i-1)}$ (Уилкс, 1967):

$$\Delta_5\left(\widetilde{u}_i^j,\, \overline{\theta}\right) \sim F_{k,\, \sum\limits_{i=1}^{k}(n_i-1)}. \tag{290}$$

Отметим, что статистика $\Delta_5\left(\widetilde{u}_i^j,\, \overline{\theta}\right)$ не требует знания дисперсии σ^2 погрешностей ε_i, $i = 1, \ldots, k$.

Таким образом, для построения «точных» доверительных областей в нелинейных обратных параметрических задачах можно использовать статистики $\Delta_3\left(\widetilde{u},\, \overline{\theta}\right)$, $\Delta_4\left(\widetilde{u},\, \overline{\theta}\right)$, $\Delta_5\left(\widetilde{u}_i^j,\, \overline{\theta}\right)$, описываемые выражениями (285), (286), (290).

Описанные точные методы построения доверительных областей D_3, D_4, D_5 позволяют даже в нелинейном случае находить доверительные области для параметра $\overline{\theta}$. Заметим, что эти доверительные области при некоторых реализациях наблюдательных данных могут вырождаться в пустое множество. Например, если для некоторой реализации случайного вектора $\widetilde{u}$ при любом значении параметра $\theta \in \Theta$

$$\Delta_3\left(\widetilde{u},\, \theta\right) > \chi^2_{k,\, \gamma},$$

то доверительная область D_3 становится пустым множеством.

Статистики $\Delta_3\left(\widetilde{u},\, \overline{\theta}\right)$, $\Delta_4\left(\widetilde{u},\, \overline{\theta}\right)$, $\Delta_5\left(\widetilde{u},\, \overline{\theta}\right)$ могут быть использованы также для проверки статистической гипотезы об адекватности модели. Эта задача тесно связана с задачей построения доверительных областей. Постановка задачи и методы решения в нелинейном случае совпадают с линейным (см. выше).

Рассмотрим методы построения асимптотических доверительных областей, которые всегда дают непустую область.

7. Случай нелинейных параметров; асимптотические доверительные области

Пусть в процессе наблюдений измеряют некоторую кривую $\overline{u}(t)$, где t — текущая переменная (время, длина волны и т. п.). Пусть для простоты изложения измерения проводят на равномерной сетке по t: t_i, $i = 1, \ldots, k$, причем количество измерений k, вообще говоря, не ограничивается и может быть сколь угодно большим: $k \to \infty$.

Для фиксированного аргумента t_i в ходе измерений получают вместо точного значения $\overline{u}(t_i)$ случайную величину $\widetilde{u}_i$ с ошибкой ε_i. Таким образом, получается последовательность случайных величин $\widetilde{u}_i$ и ε_i, $i = 1, \ldots, k$. Относительно распределения погрешностей ε_i будем предполагать, что для каждого конечного набора погрешностей ε_i, $i = 1, \ldots, k$, выполняются следующие свойства: ε_i независимы и одинаково (нормально) распределены с $\mathrm{E}\varepsilon_i$=0, $\mathrm{D}\varepsilon_i = \sigma^2$, $i = 1, \ldots, k$.

Пусть известно также, что наблюдаемая кривая может быть представлена параметрически. Тогда очевидно, что для каждого фиксированного k можно рассматривать конечно-параметрическую статистическую постановку с оператором $B^{(k)}$:

$$\left(B^{(k)}\overline{\theta}\right)_i + \varepsilon_i = \widetilde{u}_i,\ i = 1, \ldots, k. \tag{291}$$

В связи с этим для каждого фиксированного k можно ставить задачу об отыскании оценки наименьших квадратов $\widehat{\theta}^{(k)}$ и получения ошибки.

Приведем асимптотическую постановку в операторном виде. Введем последовательность операторов $B^{(k)}$, причем число параметров s фиксировано, а число наблюдений $k \to \infty$. Тогда для каждого фиксированного k можно записать равенство (291). Всюду далее операторы $B^{(k)}$ для каждого k будем считать взаимно однозначными и непрерывными на области определения вектор-параметра $\overline{\theta}$ и известными точно. Требуется найти оценку наименьших квадратов $\widehat{\theta}^{(k)}$ и полученные ошибки. Как уже отмечалось выше, оценка наименьших квадратов $\widehat{\theta}^{(k)}$ для нелинейных задач асимптотически нормальна.

Асимптотическими доверительными областями с уровнем доверия γ для параметра $\overline{\theta}$ называется последовательность случайных областей $D^{(k)}$ в пространстве параметров, уровень доверия которых стремится к γ, т. е.

$$\lim_{k\to\infty} P\left(\overline{\theta} \in D^{(k)}\right) = \gamma.$$

Метод построения асимптотических доверительных областей предполагает построение случайных областей $D^{(k)}$ в k-мерной задаче для каждого $k \geqslant s$ (s — число искомых параметров), причем уровень доверия этих областей при $k \to \infty$ стремится к выбранному априори значению γ.

Для построения асимптотических доверительных областей будем использовать следующую процедуру (Гончарский и др., 1991). Пусть известна последовательность функций $\Delta^{(k)}(u^{(k)}, \theta)$, $k \geqslant s$, такая, что статистика $\Delta^{(k)}\left(\widetilde{u}^{(k)}, \overline{\theta}\right)$ асимптотически имеет некоторое известное, не зависящее от $\overline{\theta}$ непрерывное распределение $F\left[\Delta^{(k)}\left(\widetilde{u}^{(k)}, \overline{\theta}\right)\right]$. Здесь случайный вектор $\widetilde{u}^{(k)}$ равен $(\widetilde{u}^{(1)}, \ldots, \widetilde{u}^{(k)})$.

1. Зададимся уровнем доверия γ и находим число (квантиль) Δ_0, такое, что

$$F\left(\Delta_0\right) = \lim_{k\to\infty} P\left\{\Delta^{(k)}\left(\widetilde{u}^{(k)}, \overline{\theta}\right) \leqslant \Delta_0\right\} = \gamma.$$

2. Объединяем в область $D^{(k)}$ при заданном k те θ, для которых выполняется неравенство

$$\Delta^{(k)}(\widetilde{u}^{(k)}, \theta) \leqslant \Delta_0.$$

Тогда нетрудно видеть, что

$$\lim_{k\to\infty} P\left\{\overline{\theta} \in D^{(k)}\right\} = \gamma.$$

Таким образом, $D^{(k)}$ есть последовательность случайных множеств в пространстве параметров, для которых вероятность накрытия неизвестного значения $\overline{\theta}$ стремится к γ.

Остановимся на проблеме выбора последовательности функций $\Delta^{(k)}(u^{(k)}, \theta)$. По-прежнему будем рассматривать асимптотическую нелинейную статистическую постановку задачи. Пусть, как и прежде $\widehat{\theta}^{(k)}$ — последовательность оценок точного значения $\overline{\theta}$, полученная методом наименьших квадратов по последовательности случайных векторов $\widetilde{u}^{(k)}$. Введем последовательность матриц $\mathrm{I}^{(k)}$ размерности $k \times s$, определяемых из соотношений

$$\left(\mathrm{I}^{(k)}\right)_{i,\,\beta} = \frac{\partial\left(B^{(k)}\widehat{\theta}^{(k)}\right)_i}{\partial\theta_\beta},$$

где $i = 1, \ldots, k$, $\beta = 1, \ldots, s$.

Существует теорема (Гончарский и др., 1991), что последовательность случайных величин

$$\frac{1}{\sigma^2}\left\|\mathrm{I}^{(k)}\left(\overline{\theta} - \widehat{\theta}^{(k)}\right)\right\|^2, \tag{292}$$

$$\frac{1}{\sigma^2}\left[S^{(k)}\ \left(\overline{\theta}\right) - S^{(k)}\ \left(\widehat{\theta}^{(k)}\right)\right] \tag{293}$$

асимптотически при $k \to \infty$ имеет распределение χ_s^2, где

$$S^{(k)}(\theta) = \left\|\widetilde{u}^{(k)} - B^{(k)}\theta\right\|^2 = \sum_{i=1}^{k}\left[\widetilde{u}_i^{(k)} - \left(B^{(k)}\theta\right)_i\right]^2.$$

Кроме того, асимптотические распределения (292), (293) останутся верными при замене дисперсии σ^2 на $(1/(k-s))\ S^{(k)}\ \left(\widehat{\theta}^{(k)}\right)$.

Из приведенной теоремы следует, что для построения асимптотических доверительных областей можно выбрать, например, следующие последовательности функций:

$${}_1\Delta^{(k)}(u,\ \theta) = \frac{1}{\sigma^2}\left\|\mathrm{I}^{(k)}\left(\theta - \widehat{\theta}^{(k)}\right)\right\|^2, \tag{294}$$

$${}_2\Delta^{(k)}(u,\ \theta) = \frac{1}{\sigma^2}\left[S^{(k)}(\theta) - S^{(k)}\left(\widehat{\theta}^{(k)}\right)\right], \tag{295}$$

$${}_3\Delta^{(k)}(u,\ \theta) = \frac{k-s}{S^{(k)}\left(\widehat{\theta}^{(k)}\right)}\left\|\mathrm{I}^{(k)}\left(\theta - \widehat{\theta}^{(k)}\right)\right\|^2, \tag{296}$$

$${}_4\Delta^{(k)}(u,\ \theta) = \frac{k-s}{S^{(k)}\left(\widehat{\theta}^{(k)}\right)}\left[S^{(k)}(\theta) - S^{(k)}\left(\widehat{\theta}^{(k)}\right)\right]. \tag{297}$$

(В асимптотическом случае индексы $\overline{\beta} = 1, \ldots, 4$ у функции ${}_{\overline{\beta}}\Delta^{(k)}(u,\ \theta)$ будем располагать слева.)

Действительно, согласно указанной теореме, последовательности случайных величин ${}_{\overline{\beta}}\Delta^{(k)}\left(\widetilde{u}^{(k)},\ \overline{\theta}\right)$, $\overline{\beta} = 1, \ldots, 4$, асимптотически при $k \to \infty$ имеют распределение χ_s^2.

Процедура вычисления асимптотических доверительных областей в пространстве параметров состоит в следующем. Пусть выбрана одна из вышеуказанных последовательностей ${}_{\overline{\beta}}\Delta^{(k)}\left(u^{(k)},\ \theta\right)$, $\overline{\beta} = 1, \ldots, 4$. Пусть априори задан уровень доверия $0 < \gamma < 1$. Последовательность доверительных областей ${}_{\overline{\beta}}D^{(k)}$ определим из следующего условия:

$$ {}_{\overline{\beta}}\Delta^{(k)}\left(\widetilde{u}^{(k)},\ \theta\right) \leqslant \chi^2_{s,\ \gamma}, \quad \overline{\beta} = 1, \ldots, 4. \tag{298}$$

Для приведенных последовательностей случайных областей ${}_{\overline{\beta}}D^{(k)}$ вероятность накрытия $\overline{\theta}$ стремится к γ при $k \to \infty$.

Асимптотические доверительные области ${}_1D^{(k)}$, ${}_3D^{(k)}$ являются эллипсоидами с центрами в точке $\widehat{\theta}^{(k)}$. Матрица коэффициентов квадратичной формы эллипсоида выписывается явно (Гончарский и др., 1991). Например, для области ${}_1D^{(k)}$ уравнение эллипсоида — границы доверительной области при фиксированном $\widetilde{u}^{(k)}$ имеет вид

$$ {}_1\Delta^{(k)}\left(\widetilde{u}^{(k)},\ \theta\right) = \frac{1}{\sigma^2}\left\|\mathrm{I}^{(k)}\left(\theta - \widehat{\theta}^{(k)}\right)\right\|^2 = \chi^2_{s,\ \gamma}.$$

Центр эллипсоида — точка $\widehat{\theta}^{(k)}$. Матрица коэффициентов квадратичной формы эллипсоида равна

$$\frac{1}{\sigma^2}\left(\mathrm{I}^{(k)}\right)\mathrm{I}^{(k)}\left(\chi^2_{s,\ \gamma}\right)^{-1}.$$

Асимптотические доверительные области ${}_3D^{(k)}$ определяются из аналогичных уравнений для эллипсоидов с заменой σ^2 на $(1/(k-s))\ S^{(k)}\left(\widehat{\theta}^{(k)}\right)$.

Для нахождения асимптотических доверительных областей ${}_1D^{(k)}$ и ${}_3D^{(k)}$ необходимо знать матрицу первых производных нелинейного оператора $B^{(k)}$. В тех случаях, когда найти эту матрицу сложно, целесообразно строить асимптотические доверительные области ${}_2D^{(k)}$ и ${}_4D^{(k)}$, которые уже не являются эллипсоидами. Для вычисления областей ${}_2D^{(k)}$ и ${}_4D^{(k)}$ можно использовать метод перебора по вектор-параметру $\theta \in \Theta \subset R^s$. Например, для построения ${}_2D^{(k)}$ при переборе по θ проверяется условие

$$\frac{1}{\sigma^2}\left[S^{(k)}(\theta) - S^{(k)}\left(\widehat{\theta}^{(k)}\right)\right] \leqslant \chi^2_{s,\ \gamma}.$$

В асимптотическую доверительную область ${}_2D^{(k)}$ объединяются те $\theta \in \Theta$, для которых это условие выполняется.

В отличие от описанных ранее доверительных областей D_3, D_4 и D_5 из формул (287), (288) и (290) рассмотренные доверительные области не вырождаются в пустое множество. Однако они имеют заданный уровень доверия γ лишь асимптотически при $k \to \infty$. Кроме того, статистики ${}_1\Delta^{(k)}(\widetilde{u},\ \theta) - {}_4\Delta^{(k)}(\widetilde{u},\ \theta)$ не могут быть использованы для проверки статистической гипотезы об адекватности модели.

Естественно, что на практике строится не последовательность доверительных областей, а доверительная область $D^{(k)}$ для k-мерной задачи при фиксированном k. В связи с этим встает вопрос о значении уровня доверия области $D^{(k)}$ при фиксированном k. Заметим, что скорость сходимости к заданной величине γ уровней доверия последовательности областей $D^{(k)}$ зависит от конкретной задачи и, как правило, неизвестна. Тем не менее сформулированные выше утверждения позволяют считать, что при больших k уровень доверия асимптотических доверительных областей $D^{(k)}$ «примерно» равен γ.

В тех случаях, когда требуется получать гарантированные значения ошибок в оценках нелинейных параметров, более оправдано использование техники построения «точных» доверительных областей D_3, D_4, D_5 (см. формулы (287), (288), (290)).

В нашей книге (Гончарский и др., 1991) изложены также методы решения параметрических обратных задач для смешанного случая, когда часть параметров входит в задачу линейно, а часть — нелинейно. Поскольку минимизация по линейным параметрам не нарушает исходную статистику $\Delta\left(\widetilde{u},\, \overline{\theta}\right)$, а лишь уменьшает число степеней свободы этой статистики, в такой постановке можно ограничиться прямым перебором лишь по нелинейным параметрам, а для линейных параметров использовать оценку наименьших квадратов. Это сильно облегчает задачу поиска всех параметров и позволяет получить «точную» доверительную область для них (см. выше).

8. Астрофизические приложения и практические рекомендации

Описанные методы решения параметрических обратных задач в статистической постановке использовались нами для решения ряда задач астрофизики (Гончарский и др., 1991): задачи определения параметров модели и их доверительных областей из анализа кривых блеска классических затменных двойных систем (Гончарский и др., 1991), рентгеновских двойных систем (см., например, Балог и др., 1981а,б, Антохина и Черепащук, 1987, Хрузина и Черепащук, 1986, Бочкарев и др., 1988), дифракционных кривых покрытия звезд Луной (Гончарский и др., 1986).

Сделаем ряд практических рекомендаций (см. рис. 24).

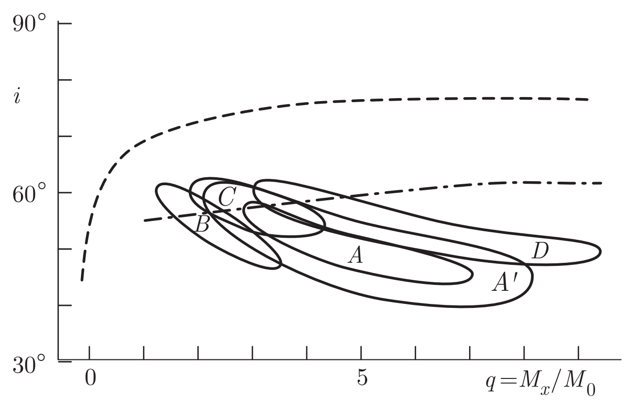


Рис. 24. Области допустимых значений параметров рентгеновской двойной системы LMCX-3 на плоскости (q, i). Здесь область A соответствует $\mu = 1$, $k_x = 40$; $B - \mu = 1$, $k_x = 20$; $C - \mu = 0{,}98$, $k_x = 20$; $D - \mu = 0{,}98$, $k_x = 40$. В область A' переходит область A при увеличении ошибок наблюдений в 1,5 раза

Для проверки адекватности модели следует выбирать малый уровень значимости, например, $\alpha = 0{,}1$; $0{,}01$ и т. п. Тогда вероятность ошибиться, т. е. отвергнуть модель в случае ее состоятельности, будет не более чем α. Степень соответствия модели наблюдательным данным определяется принятым статистическим критерием. Опыт показывает, что если модель может быть отвергнута на уровне значимости менее чем 0,1, то говорить о надежном определении значений параметров и их доверительных интервалов не приходится, поскольку в этом случае вклад систематических ошибок становится сравнимым с вкладом случайных ошибок наблюдений.

На практике, за неимением лучшей модели, иногда приходится определять параметры и их доверительные интервалы для случаев, когда модель отвергается на весьма малом уровне значимости ($\alpha \leqslant 0{,}01$). Это случается, когда точность наблюдений высока, а применяемая модель слишком упрощена. В этом случае статистический критерий подсказывает нам, что найденные значения параметров модели и их доверительных интервалов не следует слишком принимать всерьез и нужно позаботиться о построении новой, более совершенной модели. Хотя при этом не следует забывать о том, что на практике мы имеем дело не с полной случайной наблюдаемой функцией $\widetilde{u}$, а лишь с ее конкретной реализацией. Поэтому не исключена и возможность того, что возникшие трудности с интерпретацией связаны не с недостатками модели, а со случайным уклонением наблюдаемой функции $\widetilde{u}$; для другой реализации случайной функции $\widetilde{u}$ (например, кривой блеска, полученной в другую эпоху) применяемая модель может оказаться вполне удовлетворительной и будет отвергаться на достаточно высоком уровне значимости.

Для построения доверительных областей во многих случаях бывает разумно выбирать уровень значимости $\alpha = 0{,}5$ (соответствующий уровень доверия $\gamma = 1 - \alpha = 0{,}5$), поскольку после проектирования доверительной области на оси параметров в многомерном пространстве параметров и нахождения соответствующих доверительных интервалов вероятность накрытия точного решения увеличивается и становится больше заданного уровня доверия $\gamma = 0{,}5$, В то же время, если используемая модель позволяет найти «точную» доверительную область для параметров с уровнем доверия $\gamma = 0{,}5$, это означает, что модель может быть отвергнута лишь при больших значениях уровня значимости $\alpha > 0{,}5$. Это в свою очередь означает, что, отвергая модель, мы в более чем 50 % случаев совершаем ошибку I-го рода, т. е. отвергаем правильную модель. Следовательно, в этом случае у нас нет оснований отвергнуть модель, и модель может быть принята.

Если же уровень значимости α, по которому модель может быть отвергнута, существенно превышает 50 % (значение минимальной невязки соответствует приведенному хи-квадрат $\chi^2_{\mathrm{red}} < 1$, см. ниже), то в данном случае следует соблюдать осторожность в выводах. Дело в том, что этот случай ($\chi^2_{\mathrm{red}} < 1$) даже при идеально верной модели и при нормальном распределении ошибок наблюдений весьма маловероятен. Поэтому значение α, существенно превышающее 50 %, ($\chi^2_{\mathrm{red}} < 1$) может свидетельствовать о том, что используемые наблюдательные данные, скорее всего, не распределены по нормальному закону и сильно скоррелированы, что характерно для наблюдательных данных, отягощенных значительными систематическими ошибками.

Для построения доверительных областей в рамках статистик χ^2_M (M — число точек наблюдений) и статистики Фишера можно использовать разное количество точек наблюдаемой кривой блеска $\widetilde{u}$. Используя разное количество наблюдательных точек, мы будем получать при выбранном уровне доверия γ разные доверительные области, поскольку разному числу используемых наблюдательных точек соответствуют разные статистики $\Delta\left(\widetilde{u}, \overline{\theta}\right)$. Выбор оптимального числа наблюдательных точек зависит от специфических свойств задачи. Часто из физического смысла решаемой задачи бывает ясно, какие участки наблюдаемой кривой блеска наиболее чувствительны к изменению величин искомых параметров. Кроме того, эта чувствительность может быть исследована на модельных задачах. Например, при интерпретации дифракционной кривой покрытия звезды Луной можно использовать для определения значений параметров и их доверительных интервалов лишь те участки кривой блеска, где высоты дифракционных максимумов существенно превышают ошибки наблюдений; при анализе кривых блеска затменных систем можно ограничиться использованием лишь участков кривой блеска, существенно затронутых затмениями компонент, и т. п.

Наконец, следует подчеркнуть, что полученные описанными методами доверительные интервалы обычно бывают больше, чем ошибки параметров, найденные стандартными методами. Это связано с рядом причин (см. ниже). Во-первых, стандартные традиционные методы оценки ошибок параметров, как правило, используют процедуру линеаризации функционала невязки и потому являются приближенными. Во-вторых, традиционные методы часто обобщают результаты, справедливые для однопараметрических задач (например, хорошо известный метод изменения функционала невязки χ^2_P на единицу), на случай многопараметрических задач, что неправомерно. Исследование этой проблемы выполнено, например, в работе Лэмптона и др. (1976). Необходимо отметить, что, как следует из изложенного выше, многие результаты этой очень важной работы (Лэмптон и др., 1976), в случае нелинейных параметрических задач справедливы лишь в асимптотическом смысле, поскольку здесь используются значения функционала невязки, минимальные по искомым параметрам. Более подробно проблема оценки ошибок параметров рассмотрена в работах (Абубекеров и др., 2008а, 2009б).

Как показано в работах (Лэмптон и др., 1976, Поппер, 1984), ошибки параметров, найденные стандартными методами, обычно бывают занижены в 3–5 раз.

В работе Лэмптона и др. (1976) прямым численным экспериментом было показано, что распространенный метод оценки доверительного интервала для параметра обратной параметрической задачи, основанный на увеличении на единицу минимального значения невязки $\chi^2_{\min}$ (при фиксированных остальных параметрах), дает правильный результат лишь для однопараметрических обратных задач. В тех случаях, когда число искомых параметров больше одного, этот метод дает сильно заниженные доверительные интервалы. Например, если число искомых параметров равно трем, доверительные области для них, полученные путем последовательного увеличения на единицу невязки $\chi^2_{\min}$, накрывают точные значения параметров с вероятностью в 3,4 раза меньше, чем те доверительные области, которые получаются путем построения гиперповерхности функционала невязки в пространстве всех трех параметров и использования соответствующего статистического критерия.

Следует подчеркнуть, что у доверительной области (и доверительного интервала) есть две характеристики — ее размер и вероятность, с которой эта область накрывает точное решение обратной параметрической задачи (в рамках выбранной статистики). Если вероятность накрытия в 3,4 раза меньше и составляет, скажем, не 68 %, а всего лишь 20 %, то, несмотря на малый размер доверительной области, нельзя сказать, что точность определения параметров увеличилась.

Для увеличения точности определения параметров обратной задачи недостаточно получить меньшие значения соответствующих доверительных интервалов, нужно еще быть уверенным в том, что эти интервалы в рамках выбранной статистики накрывают точные значения параметров с достаточно большой вероятностью. В противном случае, эффект «повышения» точности, определения значений параметров является иллюзорным и вредным, поскольку результаты интерпретации, полученные разными авторами, могут сильно не согласовываться друг с другом в пределах недооцененных значений ошибок параметров.

Хорошей иллюстрацией этого является работа Поппера (1984), где выполнен анализ ошибок определения параметров разделенных затменных двойных систем с применением метода Монте-Карло. С наперед заданными значениями параметров были вычислены точные теоретические кривые блеска для 10 систем разных типов, и после внесения в эти кривые блеска случайных возмущений (со среднеквадратичной амплитудой $0{,}005^m$ и $0{,}01^m$) была многократно решена обратная задача для каждой кривой блеска. Были вычислены соответствующие «внутренние» среднеквадратичные ошибки параметров и проведено их сравнение с «внешними» ошибками параметров, полученными путем сравнения результатов интерпретации реальных наблюденных кривых блеска одной и той же системы в разные эпохи. Оказалось, что «внешние» ошибки параметров в 3–5 раз больше «внутренних». Таким образом, Поппером было показано, что широко распространенный метод Монте-Карло дает значения ошибок параметров обратной задачи, заниженные в 3–5 раз (в случае затменных систем). Научно-обоснованные методы, описанные выше, позволяют получать гарантированные результаты интерпретации в рамках параметрических моделей. Эти методы, в частности, широко используются при параметрическом представлении результатов рентгеновских наблюдений астрофизических объектов, когда необходимо делать ответственные выводы (см., например, Лэмптон и др., 1976). В случае затменных двойных систем широкое применение этих методов сдерживает то обстоятельство, что при высокой точности наблюдаемой средней кривой блеска (достигающей $\sim 0{,}003^m$) простая модель затменной системы часто оказывается не адекватной и отвергается по статистическому критерию на весьма малом уровне значимости. В таких случаях, если у исследователя нет возможности построить более совершенную модель системы, он часто ограничивается применением стандартного метода наименьших квадратов для нелинейных задач, чтобы найти параметры системы и их ошибки в рамках статистики нормального распределения. Иногда в таких случаях исследователи используют метод Монте-Карло для оценки ошибок параметров, в котором случайные возмущения вносятся в положения оптимальных теоретических точек кривой блеска. И в том, и в другом случаях следует помнить, что получаемые среднеквадратичные ошибки параметров модели сильно занижены. В этих случаях представляется разумным воспользоваться советом Поппера (1984), который отметил, что независимо от конкретных причин различия «внутренних» и «внешних» ошибок параметров затменной системы, можно допустить, что умножение «внутренних» ошибок на фактор 3 приведет к результату, который статистически не переоценит величину реальных ошибок параметров затменной системы.

С другой стороны, если рассматриваемая модель затменной системы отвергается наблюдениями на низком уровне значимости, например, $\alpha \leqslant 0{,}01$, даже в этом случае попытка статистической оценки доверительных областей для искомых параметров модели методами, описанными выше, не является безнадежной, если последовать старому мудрому правилу: «лучше иметь плохое решение задачи, чем не иметь никакого». Использовать статистики $\Delta_3(\widetilde{u},\ \theta)$, $\Delta_4(\widetilde{u},\ \theta)$, $\Delta_5(\widetilde{u},\theta)$ (см. формулы (285), (286) (289)) в этом случае не представляется возможным, поскольку «точная» доверительная область для искомых параметров вырождается в пустое множество. Однако, если число наблюдаемых точек на кривой блеска велико, можно оценить асимптотическую доверительную область для параметров, воспользовавшись статистиками (294)–(297). Основанием для осуществления такой оценки может служить отмеченная выше возможность того, что возникшие проблемы с интерпретацией могут быть связаны не с тем, что модель системы плохая, а с тем, что мы имеем дело с конкретной реализацией случайного процесса (кривой блеска, полученной в ограниченном интервале времени), которая случайно сильно уклонилась от полной случайной наблюдаемой кривой блеска.

В заключение, сделаем важное замечание. Иногда в научной литературе встречаются утверждения о том, что применение строгих, научно обоснованных методов к анализу ошибок параметров затменных систем не имеет смысла ввиду того, что ошибки в кривых блеска затменных двойных систем не распределены по нормальному закону.

Действительно, при малых глубинах затмений (как это имеет место в случае затмения звезд экзопланетами) влияние систематических ошибок на кривые блеска, обусловленных спецификой обработки наблюдательных данных (корректный учет фона и т. п.), может оказаться существенным. Однако для затменных систем с достаточно глубокими затмениями (более $0{,}1^m$) ошибки индивидуальных фотометрических наблюдений, полученных дифференциальным методом с линейным приемником излучения должны быть распределены по нормальному закону. Совсем другое дело, когда не по нормальному закону распределены остаточные уклонения между наблюдаемой и оптимальной теоретической кривыми блеска. Но то, что остаточные уклонения (невязки), полученные в процедуре интерпретации кривой блеска, распределены не по нормальному закону, свидетельствует лишь о том, что модель, используемая при интерпретации, не вполне адекватна наблюдательным данным и должна быть усовершенствована. При этом описанные выше строгие статистические критерии указывают нам количественную меру несовершенства используемой модели и дают оценку качества решения соответствующей обратной задачи и его доверительных интервалов (погрешностей). Например, если модель отвергается на уровне значимости 1 %, то это означает, что, отвергая модель, мы лишь в 1 % случаев делаем ошибку первого рода, т. е. отвергаем правильную модель. В 99 % случаев, отвергая модель, мы правы, т. е. не совершаем ошибки. Ясно, что в случае такой «плохой» модели, которая так легко может быть отвергнута, мы, в результате решения обратной задачи получаем «плохие» оценки параметров и «плохие» оценки их доверительных интервалов (ошибок). Но суть дела в том, что никакие другие методы в случае неадекватной модели не позволят получить более «хорошие» результаты интерпретации. Единственный способ улучшить качество получаемого решения и оценок его ошибок для заданной точности кривой блеска — это усовершенствовать модель.

Поэтому применение строгих статистических методов к определению параметров и их ошибок вполне правомерно к анализу кривых блеска затменных систем.

Разумеется, поскольку описанные выше статистические методы предполагают построение «поверхности» функционала невязки, т. е. решение обратной задачи методом прямого перебора по параметрам, это приводит к большим затратам компьютерного времени, по сравнению с направленными методами поиска параметров обратной задачи. Кроме того, в случае большого количества искомых параметров проектирование многомерной доверительной области решения обратной задачи на оси параметров (для определения их доверительных интервалов) также представляет собой отдельную математическую проблему. Однако, в связи со все возрастающей мощью современных компьютерных средств, решение задачи интерпретации кривой блеска затменной двойной системы методом прямого перебора по всем параметрам задачи представляется вполне реальным, что позволит эффективно реализовать описанные выше научно обоснованные статистические методы.

Если же исследователь предпочитает использовать для интерпретации кривой блеска затменной системы один из стандартных направленных методов поиска параметров модели (например, метод дифференциальных поправок), то он должен помнить, что получаемые в этом случае ошибки параметров сильно занижены. Поэтому, следуя рекомендации Поппера, ошибки параметров, полученные методом дифференциальных поправок или методом Монте-Карло, должны быть увеличены в 3 или даже 5 раз, в зависимости от степени ответственности суждения о найденных параметрах модели (см. ниже).

Более детальный анализ проблемы оценки ошибок параметров в обратных параметрических задачах опубликован в работах Абубекерова и др. (2008а, 2009б). Ниже излагаются основные результаты этих работ.

9. Оценка ошибок параметров; случай классической ТДС

Выше мы убедились, что ошибки параметров затменной системы, найденные методом дифференциальных поправок и методом Монте-Карло, при прочих равных условиях, в несколько раз меньше ошибок параметров, определенных методом доверительных областей. Для выяснения фундаментальных причин этого различия, в работах Абубекерова и др. (2008а, 2009б) были проведены специальные численные и аналитические исследования. Ниже излагаются результаты этих исследований. Показывается, что указанные различия в величинах ошибок параметров связаны главным образом с различием используемых статистик, а также с различным характером априорных модельных предположений.

Рассмотрим более детально особенности способов оценки параметров и их ошибок в методах дифференциальных поправок, Монте-Карло и доверительных областей. Прежде всего, подчеркнем, что методы дифференциальных поправок и Монте-Карло позволяют получать оценки лишь «внутренних» ошибок параметров, поскольку в этих методах используется «внутреннее» статистическое распределение найденных центральных значений искомых параметров (которые, если ошибки наблюдений распределены по нормальному закону и если модель линейна и адекватна, должны быть распределены по нормальному закону). Метод доверительных областей использует «внешнее» статистическое распределение наблюдаемых значений кривой блеска и позволяет находить оценки «внешних» ошибок параметров независимо от того, как распределены найденные центральные значения искомых параметров. В этом состоит главное преимущество метода доверительных областей.

Сначала кратко напомним основы метода наименьших квадратов для линейной и нелинейной модели (в последнем случае — это метод дифференциальных поправок).

Рассмотрим линейную модель, заданную последовательным набором функций $g_0(\theta,),\ldots,g_P(\theta)$ и линейно выражающейся через них функцией $f^{\text{lin}}(\theta,\alpha_1,\ldots,\alpha_P)$, определенными для действительных $\alpha_1,\ldots,\alpha_P$ и θ из множества $\{\theta_1,\ldots,\theta_M\}$:

$$f^{\text{lin}}\left(\theta,\alpha_1,\ldots,\alpha_P\right)=g_0\left(\theta\right)+\sum_{p=1}^{P}g_p\left(\theta\right)\alpha_p. \tag{299}$$

При этом множество $\{\theta_1,\ldots,\theta_M\}$ соответствует множеству из M точек на кривой блеска, в которых производятся наблюдения. Зададимся вектором $\left(\overline{\alpha}_1,\ldots,\overline{\alpha}_P\right)^T$, соответствующим набору истинных значений физических величин (здесь M — полное число точек наблюдения), и вектором $(w_1,\ldots,w_M)^T$ весовых коэффициентов, предполагая при этом, что матрица $A_{qp}=\sum\limits_{m=1}^{M}g_q\left(\theta_m\right)g_p\left(\theta_m\right)w_m$ является невырожденной. Также зададимся вектором случайных наблюдаемых величин $\xi=(\xi_1,\ldots,\xi_M)^T$, в отношении которых предполагается, что они статистически независимы, т. е. $\text{cov}(\xi_i,\xi_j)=0$ при $i\neq j$, и распределены по нормальному закону с математическими ожиданиями $M\left(\xi_k\right)=f^{\text{lin}}\left(\theta_k,\overline{\alpha}_1,\ldots,\overline{\alpha}_P\right)$. Кроме того, предполагается, что измерения случайных величин $\xi_1w_1,\ldots,\xi_Mw_M$ являются равноточными, т. е.

$$\sigma^2\left(\xi_1w_1\right)=\sigma^2\left(\xi_2w_2\right)=\ldots=\sigma^2\left(\xi_Mw_M\right)=\varepsilon_0^2,$$

где через $\sigma^2(\cdot)$ здесь и далее обозначается операция вычисления дисперсии, а ε_0^2 — заданная величина, называемая дисперсией единицы веса. Обозначая $\sigma^2\left(m\right)=\sigma_m^2$, получим, что $w_m=\varepsilon_0^2/\sigma_m^2$.

Зададим для данной модели функционал невязки выражением

$$\begin{aligned}R^{\text{lin}}\left(\alpha_1,\ldots,\alpha_P,\xi_1,\ldots,\xi_M\right)&=\sum_{m=1}^{M}\left(\xi_m-f^{\text{lin}}\left(\theta_m,\alpha_1,\ldots,\alpha_P\right)\right)^2w_m=\\&=\sum_{m=1}^{M}\left(\xi_m-g_0\left(\theta_m\right)-\sum_{p=1}^{P}g_p\left(\theta_m\right)\alpha_p\right)^2w_m.\end{aligned} \tag{300}$$

Значения параметров $\alpha_1^c(\xi), \ldots, \alpha_P^c(\xi)$ (которые мы будем называть центральными), доставляющие минимум функционалу невязки (300) при фиксированных $\xi_1, \ldots, \xi_M$, находятся как решения системы P линейных уравнений:

$$\frac{\partial R^{\text{lin}}(\alpha_1, \ldots, \alpha_P)}{\partial \alpha_q} = 2B_q - 2\sum_{p=1}^{P} A_{qp}\alpha_P = 0, \quad q = 1, \ldots, P, \tag{301}$$

где

$$A_{qp} = \sum_{m=1}^{M} g_q(\theta_m)\, g_p(\theta_m)\, w_m; \quad B_q = \sum_{m=1}^{M} (\xi_m - g_0(\theta_m))\, g_q(\theta_m)\, w_m, \tag{302}$$

и эти значения равны

$$\alpha_p^c(\xi) = \sum_{q=1}^{P} A_{qp}^{\text{inv}} B_q = \sum_{m=1}^{M} (\xi_m - g_0(\theta_m))\, w_m \sum_{q=1}^{P} A_{qp}^{\text{inv}} g_q(\theta_m), \quad p = 1, \ldots, P, \tag{303}$$

где через A_{qp}^{inv} обозначаются элементы матрицы, обратной к A: $A_{qp}^{\text{inv}} \equiv \left(A^{-1}\right)_{qp}$.

Таким образом, центральные значения параметров $\alpha_1^c(\xi), \ldots, \alpha_P^c(\xi)$ выражаются через линейную комбинацию $\xi_1, \ldots, \xi_M$ и, следовательно, являются нормально распределенными. Их математические ожидания равны $\overline{\alpha}_1, \ldots, \overline{\alpha}_P$ (что получается, если взять математическое ожидание от обеих частей (303) и подставить в него (299)). Используя линейность операции ковариации $\operatorname{cov}(\cdot,\cdot)$, статистическую независимость $\xi_1, \ldots, \xi_M$ и то, что $\operatorname{cov}(\xi_i, \xi_i) = \sigma^2(\xi_i) = \varepsilon_0^2/w_i$, найдем матрицу ковариаций параметров $\alpha_1^c, \ldots, \alpha_P^c$:

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}\left(\alpha_p^c(\xi), \alpha_q^c(\xi)\right) &= \sum_{m=1}^{M} \sigma^2(\xi_m)\, w_m^2 \left(\sum_{i,j=1}^{P} A_{ip}^{\text{inv}} A_{jq}^{\text{inv}} g_i(\theta_m)\, g_j(\theta_m)\right) = \\ &= \varepsilon_0^2 \sum_{i,j=1}^{P} A_{ip}^{\text{inv}} A_{jq}^{\text{inv}} \left(\sum_{m=1}^{M} w_m g_i(\theta_m)\, g_j(\theta_m)\right) = \varepsilon_0^2 A_{pq}^{\text{inv}}.\end{aligned} \tag{304}$$

Дисперсии центральных значений параметров $\alpha_1^c(\xi), \ldots, \alpha_P^c(\xi)$ находятся как диагональные элементы матрицы ковариаций:

$$\sigma^2(\alpha_P^c(\xi)) = \varepsilon_0^2 A_{pp}^{\text{inv}}. \tag{305}$$

В модели, получающейся с помощью линейной замены параметров с невырожденной матрицей C_p^i:

$$\alpha'_p = C_0 + \sum_{i=1}^{P} C_p^i \alpha_i,$$

дисперсии новых параметров $\alpha'_1, \ldots, \alpha'_p$ находятся по формуле

$$\sigma^2\left(\alpha_p^{\prime c}\right) = \sum_{i,j=1}^{P} C_p^i C_p^j \operatorname{cov}\left(\alpha_i^c, \alpha_j^c\right). \tag{306}$$

Зная дисперсию центрального значения параметра, можно построить интервал, в который с заданной вероятностью попадает истинное значение параметра. Для этого достаточно заметить что, исходя из нормального закона распределения центральных значений параметров следует, что

$$P\left(\left|\alpha_p^c(\xi) - \overline{\alpha}_p\right| \leqslant k(\gamma)\, \sigma\left(\alpha_p^c(\xi)\right)\right) = \gamma, \tag{307}$$

где символ P означает вероятность выполнения условия, а k зависит от выбранной вероятности попадания (уровня доверия) γ и находится как корень уравнения

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^k \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)dt = \gamma.$$

Например, при k равном 1, 2 и 3 уровень доверия γ равен 0,6827, 0,9545 и 0,9973 соответственно (правило одной, двух и трех сигм).

Когда неизвестно значение ε_0 (например, в случае реально наблюдаемой кривой блеска), для нахождения ошибок вместо формулы (305) используются формулы, получающиеся из (305) и (304) заменой ε_0 на величину v_0 (Щиголев, 1962):

$$v_0^2\left(\xi\right) = \frac{R^{\mathrm{lin}}\left(\alpha_1^c\left(\xi\right),\ldots,\alpha_P^c\left(\xi\right),\xi_1,\ldots,\xi_M\right)}{M-P}, \tag{308}$$

называемую среднеквадратичной оценкой дисперсии единицы веса. Полученные таким образом среднеквадратичные оценки для дисперсий (являющиеся случайными величинами):

$$\sigma_{\mathrm{est}}^2\left(\alpha_P^c\left(\xi\right)\right) \equiv v_0^2\left(\xi\right)A_{pp}^{\mathrm{inv}}. \tag{309}$$

При этом v_0 является случайной величиной, а величина $\dfrac{\left(\alpha_P^c\left(\xi\right)-\overline{\alpha}_P\right)}{\sigma_{\mathrm{est}}\left(\alpha_P^c\left(\xi\right)\right)}$ имеет распределение Стьюдента с $M-P$ степенями свободы. Однако при достаточно больших $M-P \gg 10$ оно уже достаточно близки к нормальному, и можно считать, что вероятность $P\left(\left|\alpha_p^c\left(\xi\right)-\overline{\alpha}_p\right| \leqslant k\sigma\left(\alpha_p^c\left(\xi\right)\right)\right) \simeq P\left(\left|\alpha_p^c\left(\xi\right)-\overline{\alpha}_p\right| \leqslant k\sigma_{\mathrm{est}}\left(\alpha_p^c\left(\xi\right)\right)\right)$, т. е. можно считать, что вероятность попадания истинного значения в интервал, построенный с помощью умножения среднеквадратичной оценки дисперсии на соответствующий коэффициент $k(\gamma)$ будет достаточно близка к γ. Отметим, что изменения среднеквадратичных оценок дисперсий (являющихся случайными величинами) от выборки к выборке, т. е. их разброс для разных измерений одной и той же кривой блеска, может быть значительно больше, чем различие между функциями распределения Стьюдента и Гаусса. Указанный разброс обратно пропорционален корню квадратному из числа измеренных точек на кривой блеска.

Рассмотрим теперь модель, задаваемую произвольной, в общем случае нелинейной функцией $f(\theta,\beta_1,\ldots,\beta_P)$, определенной для $\theta \in (\theta_1,\ldots,\theta_M)$ и для векторов $(\beta_1,\ldots,\beta_P)^T \in B$, где B — некоторая область действительного эвклидова пространства. При этом мы предполагаем функцию $f(\theta,\beta_1,\ldots,\beta_P)$ дифференцируемой по $\beta_1,\ldots,\beta_P$ во всей области определения.

При этом, так же как и для линейной модели, задаются $\overline{\beta}_1,\ldots,\overline{\beta}_P$, $w_1,\ldots,w_M$, нормально распределенные наблюдаемые случайные величины $\xi_1,\ldots,\xi_M$, дисперсия единицы веса ε_0 и функционал невязки. Случайные величины $\xi_1,\ldots,\xi_M$ имеют нормальное распределение и

$$\begin{gathered} M\left(\xi_k\right) = f\left(\theta_k,\overline{\beta}_1,\ldots\overline{\beta}_P\right), \\ \sigma^2\left(\xi_1 w_1\right) = \sigma^2\left(\xi_2 w_2\right) = \ldots = \sigma^2\left(\xi_M w_M\right) = \varepsilon_0^2, \end{gathered} \tag{310}$$

где $M(\xi_k)$ означает математическое ожидание величины ξ_k, а $\sigma^2(\cdot)$ — операцию нахождения дисперсии.

Также предположим, что матрица

$$A_{qp}\left(\beta_1,\ldots,\beta_P\right) = \sum_{m=1}^{M}\frac{\partial f\left(\theta_m,\beta_1,\ldots\beta_P\right)}{\partial\beta_q}\frac{\partial f\left(\theta_m,\beta_1,\ldots,\beta_P\right)}{\partial\beta_p}w_m \tag{311}$$

является невырожденной при $(\beta_1, \ldots, \beta_P)^T \in B$. При этом мы будем обозначать элементы матрицы, обратной матрице (311), как $A^{\text{inv}}_{qp}(\beta_1, \ldots, \beta_P)$. Функционал невязки задается следующим образом:

$$R(\beta_1, \ldots, \beta_P,\ \xi_1, \ldots, \xi_M) = \sum_{m=1}^{M} (\xi_m - f(\theta, \beta_1, \ldots, \beta_P))^2\, w_m, \tag{312}$$

и предполагается, что при фиксированных $\xi_1, \ldots, \xi_M$ он является выпуклым по переменным $\beta_1, \ldots, \beta_P$ и достигает по ним минимума в области B.

Метод дифференциальных поправок заключается в том, что функция f заменяется ее разложением в ряд Тейлора до линейного члена в точке минимума функционала невязки, и в качестве оценки дисперсий оптимальных значений $\beta_1, \ldots, \beta_P$ берутся дисперсии, найденные в рамках метода наименьших квадратов для соответствующей линейной модели.

Обозначим как $\beta^c_1(\xi), \ldots, \beta^c_P(\xi)$ значения параметров (которые назовем центральными), доставляющие минимум функционалу невязки $R(\beta_1, \ldots, \beta_P, \xi_1, \ldots, \xi_M)$ при фиксированных $\xi_1, \ldots, \xi_M$, и положим в (299), а затем в (302) и (303)

$$\begin{aligned} \alpha_p &= \beta_p - \beta^c_p(\xi), \\ g_0(\theta) &= f(\theta, \beta^c_1(\xi), \ldots, \beta^c_P(\xi)), \\ g_p(\theta) &= \frac{\partial f(\theta, \beta^c_1(\xi), \ldots, \beta^c_P(\xi))}{\partial \beta^c_p}, \end{aligned} \tag{313}$$

где $p = 1, \ldots, P$. Тогда величины

$$\operatorname{cov}_0\left(\beta^c_q(\xi), \beta^c_p(\xi)\right) \equiv \varepsilon_0^2 A^{\text{inv}}_{qp}(\beta^c_1(\xi), \ldots, \beta^c_P(\xi)) \tag{304$'$}$$

и

$$\sigma_0^2\left(\beta^c_p(\xi)\right) \equiv \varepsilon_0^2 A^{\text{inv}}_{pp}(\beta^c_1(\xi), \ldots, \beta^c_P(\xi)), \tag{305$'$}$$

полученные подстановкой (313) в формулы (304) и (305) для ковариаций и дисперсий центральных значений в линейной модели, берутся в качестве приближенной оценки ковариаций и дисперсий для $\beta^c_1(\xi), \ldots, \beta^c_P(\xi)$. В случае реально наблюдаемой кривой блеска, когда заранее неизвестно значение дисперсии единицы веса, аналогично линейному случаю, вместо значения ε_0 используется среднеквадратичная оценка дисперсии единицы веса

$$v_0^2(\xi) = \frac{R(\beta^c_1(\xi), \ldots, \beta^c_P(\xi), \xi_1, \ldots, \xi_M)}{M - P} \tag{308$'$}$$

и соответствующие приближенные среднеквадратичные оценки дисперсий параметров

$$\sigma^2_{\text{est}}\left(\beta^c_p(\xi)\right) \equiv v_0^2(\xi)\, A^{\text{inv}}_{pp}(\beta^c_1(\xi), \ldots, \beta^c_P(\xi)). \tag{309$'$}$$

Использование в расчетах такого приближения предполагает, что можно пренебречь изменением производных функции f в (311), вычисленных с центральными значениями параметров, при изменении ξ в окрестности их математических ожиданий.

Очевидно, что если $f(\theta,\ \beta_1, \ldots, \beta_P)$ линейна по $\beta_1, \ldots, \beta_P$, то (305′)–(309′) совпадают с (305)–(309), т. е. в случае линейной модели метод дифференциальных поправок тождествен методу наименьших квадратов. Отметим, что в описанных методах делается предположение, что используемая модель идеально верна, а для оценки ошибок параметров используется статистика «внутреннего» нормального распределения найденных центральных значений параметров.

В модели, получающейся с помощью обратимой замены параметров

$$\beta'_p = \varphi_p(\beta_1, \ldots, \beta_P), \tag{314}$$

где φ_P — гладкие функции, а матрицы $\dfrac{\partial \varphi_p(\beta_1, \ldots, \beta_P)}{\partial \beta_i}$ — невырожденные, выражение для приближенных оценок дисперсий центральных значений новых параметров $\beta_1'^c(\xi), \ldots, \beta_P'^c(\xi)$ можно получить путем замены правой части (314) ее разложением в ряд Тейлора до линейного члена в точке $(\beta_1^c(\xi), \ldots, \beta_P^c(\xi))^T$, полагая в формуле (306) $C_p^i = \dfrac{\partial \varphi_p(\beta_1^c(\xi), \ldots, \beta_P^c(\xi))}{\partial \beta_i^c}$ и заменяя в ней ковариации $\alpha_1^c(\xi), \ldots, \alpha_P^c(\xi)$ на соответствующие приближенные оценки ковариаций $(\beta_1^c(\xi), \ldots, \beta_P^c(\xi))$:

$$\sigma_0^2\left(\beta_p'^c(\xi)\right) = \sum_{i,j=1}^{P} \frac{\partial \varphi_p(\beta_1^c(\xi), \ldots, \beta_P^c(\xi))}{\partial \beta_i^c} \frac{\partial \varphi_p(\beta_1^c(\xi), \ldots, \beta_P^c(\xi))}{\partial \beta_j^c} \operatorname{cov}_0\left(\beta_i^c(\xi), \beta_j^c(\xi)\right). \tag{315}$$

Отметим, что в описанных методах наименьших квадратов и дифференциальных поправок делается предположение об адекватности модели наблюдательным данным. В большинстве случаев это предположение принимается автоматически, без специальной проверки адекватности модели. Между тем, поскольку число искомых параметров, как правило, много меньше числа наблюдательных точек на кривой блеска, обратная задача нахождения параметров модели сильно переопределена, что дает возможность не только определять значения параметров и их ошибок, но и проверять адекватность модели используемым наблюдательным данным. И часто бывает (особенно в случае затменных систем, где точность кривых блеска весьма высока), что адекватность модели заранее далеко не очевидна. Поэтому, как подчеркивалось выше, обратная задача нахождения параметров и их ошибок должна решаться совместно с процедурой статистической проверки адекватности модели. Выше отмечалось, что принятие или отбрасывание гипотезы H об адекватности модели согласно статистическому критерию не дает ее окончательного логического обоснования или опровержения (ввиду статистической природы критерия). Возможны четыре случая:

1) гипотеза H верна и принимается по критерию;
2) гипотеза H неверна и отвергается по критерию;
3) гипотеза H верна, но отвергается по критерию (ошибка I рода);
4) гипотеза H неверна, но принимается по критерию (ошибка II рода).

Для выбранного статистического критерия существует неотрицательная вероятность совершить ошибку I рода, которая обозначается $\alpha \geqslant 0$. Величина α называется уровнем значимости критерия. Очевидно, в случае адекватности модели, вероятность события 1 равна $\gamma = 1 - \alpha$.

Ранее мы отмечали, что можно использовать следующий критерий проверки гипотезы H. Выберем некоторую случайную величину (статистику) $\Delta(\widetilde{u})$, зависящую от экспериментальных данных $\widetilde{u}$, причем распределение $\Delta(\widetilde{u})$ известно (например, это распределение χ_M^2, где M — число наблюдательных точек на кривой блеска). Зададимся заранее некоторым уровнем значимости α и вычислим число Δ_0 (квантиль) такое, что в случае правильности гипотезы H вероятность $P\{\Delta(\widetilde{u}) > \Delta_0\} = \alpha$. Если для конкретной реализации экспериментальных данных (кривой блеска) $\widetilde{u}$ получаем, что $\Delta(\widetilde{u}) > \Delta_0$ для любых значений параметров модели, то гипотеза H отвергается. В противном случае $(\Delta(\widetilde{u}) \leqslant \Delta_0)$ гипотеза H принимается. При этом необходимо помнить, что модель принимается не потому, что она идеально верна, а потому что нет оснований ее отвергнуть.

В лучших случаях, при применении методов наименьших квадратов, дифференциальных поправок и Монте-Карло для нахождения значений параметров и их ошибок в качестве основания для принятия модели исследователи используют критерий близости к единице величины минимального приведенного хи-квадрат: $\frac{\chi^2_{M-P}}{M-P} \simeq 1$, где M — число точек на кривой блеска, P — число искомых параметров модели. Однако при этом не рассматривается количественная мера адекватности модели наблюдательным данным, а именно, уровень значимости α, на котором модель может быть отвергнута. Ниже будет показано, что значению приведенного хи-квадрат, близкому к единице, соответствует уровень значимости $\alpha \simeq 50\,\%$, т. е. в данном случае, отвергая модель, мы в $\sim 50\,\%$ случаев совершаем ошибку I рода (отвергаем правильную модель). Значит в каждом втором случае, отвергая модель, мы не правы. Поэтому у нас нет оснований для отбрасывания модели, и модель может быть принята.

Такое обоснование адекватности модели особенно важно для корректной оценки ошибок искомых параметров. Действительно, ошибка параметра характеризуется соотношением (307)

$$P\left(\left|\alpha_p^c - \overline{\alpha}_p\right| \leqslant k\sigma\left(\alpha_p^c\right)\right) = \gamma, \tag{307$'$}$$

где при $k = 1, 2, 3$ уровень доверия $\gamma = 0{,}6827$, $0{,}9545$ и $0{,}9973$ соответственно. Здесь P обозначает вероятность того, что разность между найденным центральным значением параметра α_p^c (случайной величиной) и его точным значением $\overline{\alpha}_p$ лежит в интервале $\pm k\sigma\left(\alpha_p^c\right)$ с вероятностью γ. Но точное значение параметра $\overline{\alpha}_p$ нам неизвестно. Для его определения необходимо знать точную кривую блеска, которая тоже неизвестна. Проверка адекватности модели позволяет нам судить, насколько оптимально наблюдаемая кривая блеска (реализация случайного процесса) «натянута» на идеально точную кривую блеска, соответствующую точным значениям параметров. Если модель, с помощью выбранного статистического критерия, может быть отвергнута на достаточно высоком уровне значимости (например, $\alpha > 0{,}1$), мы можем быть уверены, что наблюдаемая кривая блеска достаточно хорошо описывает идеально точную кривую блеска, и применение соотношения (307$'$) вполне оправдано. С другой стороны, в этом случае мы можем быть уверены и в том, что невязка R между наблюдаемой кривой блеска и теоретической кривой блеска (при фиксированных значениях параметров) близка к невязке между идеально точной кривой блеска и теоретической кривой блеска. То есть, минимизируя невязку R между наблюдаемой и теоретической кривыми блеска, мы приближаемся к идеально точной кривой блеска. Это дает нам основания считать, что найденные центральные значения параметров α_p^c (случайные величины) близки к точным значениям $\overline{\alpha}_p$ (в смысле соотношения (307$'$)).

Рассмотрим теперь основные особенности метода наименьших квадратов и (для нелинейных параметров) метода дифференциальных поправок.

Прежде всего, в методе дифференциальных поправок, из-за применения процедуры линеаризации, ищутся не «точные» величины ошибок параметров, а лишь их приближенные значения. Насколько эти приближенные значения ошибок параметров близки к «точным», можно оценить для конкретной задачи, используя численные методы (см. ниже). Численные эксперименты показывают (Абубекеров и др., 2008а, 2009б), что в случае обратной задачи интерпретации кривых блеска затменных систем при точности наблюдений лучше $0{,}01^m$ характер нелинейности задачи по искомым параметрам (радиусам звезд, наклонению орбиты, коэффициентам потемнения к краю) таков, что приближенные оценки ошибок параметров, полученные методом дифференциальных поправок (или методом Монте-Карло) сравнительно близки к «точным». Вторая особенность методов наименьших квадратов и дифференциальных поправок состоит в том, что в этом случае ошибки искомых параметров оцениваются по формуле сложения дисперсий для нормально распределенных независимых случайных наблюдаемых величин (см. формулы (305) и (305$'$)). Таким образом, в данном случае для оценки ошибок искомых параметров используется статистика «внутреннего» нормального распределения (т. е. распределения найденных центральных значений параметров). Третья особенность методов наименьших квадратов и дифференциальных поправок заключается в том, что при этом для поиска центральных значений параметров α_p^c и их ошибок используются разные статистики: ошибки параметров ищутся в рамках статистики нормального распределения, а центральные значения параметров находятся минимизацией суммы квадратов отклонений наблюдаемой кривой блеска от теоретической (см. формулы (300), (312)), которая распределена (как случайная величина) не по нормальному закону, а по закону, лишь порожденному нормальным распределением (например, по закону χ_M^2). Между тем, распределение точечных оценок параметров α_p^c, описываемое нормальным (гауссовым) законом, является более узким, чем, при прочих равных условиях, распределение соответствующих интервалов в статистике χ_M^2 (порожденной нормальным распределением). Именно поэтому «внутренние» ошибки параметров, полученные в статистике нормального распределения по формулам (305) и (305'), оказываются значительно меньше «внешних» ошибок, найденных методом доверительных областей с использованием статистики, соответствующей сумме квадратов отклонений наблюдаемой кривой блеска от теоретической.

Дополнительным фактором, приводящим к занижению «внутренних» ошибок параметров, является то, что в методах наименьших квадратов и дифференциальных поправок постулируется, что используемая модель идеально верна и тем самым исключается возможность совершить ошибку второго рода (модель неверна, но принимается по статистическому критерию).

Все эти описанные особенности, вместе взятые, и обусловливают тот факт, что ошибки параметров, найденные методом дифференциальных поправок и методом Монте-Карло, получаются значительно меньшими, чем ошибки параметров, найденные методом доверительных областей.

Представляется естественным желание исследователей получить как можно меньшие ошибки параметров при заданной точности кривой блеска, за счет специального выбора используемой статистики. Поэтому очень часто исследователи ограничиваются оценкой ошибок параметров в рамках методов дифференциальных поправок или Монте-Карло. Однако в случаях, когда необходимо делать ответственные суждения о параметрах модели и их ошибках, разумно применять метод доверительных областей, в котором для поиска центральных значений параметров и их ошибок используется одна и та же статистика (порожденная нормальным распределением).

Поскольку при обсуждении особенностей метода дифференциальных поправок мы упоминали также метод Монте-Карло, рассмотрим особенности этого метода.

В методе Монте-Карло оценка дисперсий центральных значений параметров проводится следующим образом. При заданных точных значениях параметров $\overline{\beta}_1, \ldots, \overline{\beta}_P$ вычисляются в фазах $\theta_1, \ldots, \theta_M$ значения кривой блеска $\overline{\xi}_1, \ldots, \overline{\xi}_M$. Далее, с заданной величиной дисперсии единицы веса ε_0 случайным образом генерируется последовательность нормально распределенных $\xi_1^{(n)}, \ldots, \xi_M^{(n)}$ $(n = 1, \ldots, N)$ с математическими ожиданиями, равными $\overline{\xi}_1, \ldots, \overline{\xi}_M$. Для каждой последовательности $\xi_1^{(n)}, \ldots, \xi_M^{(n)}$ $(n = 1, \ldots, N)$ находятся центральные значения $\beta_1^{c(n)}, \ldots, \beta_P^{c(n)}$, а их дисперсии оцениваются как

$$\sigma_{\text{MC}}^2\left(\beta_p^c\right) = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\left(\beta_p^{c(n)} - \overline{\beta}_p\right)^2, \tag{316}$$

с использованием статистики нормального распределения. Естественно, такой метод подразумевает, что значения $\overline{\beta}_1, \ldots, \overline{\beta}_P$ известны, что возможно в модельных задачах, целью которых является нахождение ошибок для сравнения с ошибками, найденными другими методами. В случае же обработки реальной наблюдаемой кривой блеска данный метод можно применять, используя вместо истинных значений параметров $\overline{\beta}_1, \ldots, \overline{\beta}_P$ их найденные центральные значения, полученные в результате интерпретации наблюдаемой кривой блеска. При этом делается предположение о том, что малые изменения величин $\overline{\beta}_1, \ldots, \overline{\beta}_p$ вызывают относительно малые изменения ошибок параметров. Также в этом методе, как и в методе дифференциальных поправок, делается предположение о том, что используемая модель идеально верна. Таким образом, метод Монте-Карло использует для оценки ошибок параметров статистику «внутреннего» нормального распределения найденных центральных значений параметров, а также применяет жесткое предположение о том, что модель идеально верна. Поэтому метод Монте-Карло для оценки ошибок параметров эквивалентен методу дифференциальных поправок. Важно отметить также, что в методах дифференциальных поправок и Монте-Карло ошибка одного параметра ищется независимо от того, каковы значения ошибок остальных параметров задачи, что не гарантирует совместного попадания всех искомых параметров во все интервалы ошибок. Этого серьезного недостатка лишен метод оценки ошибок параметров, основанный на использовании доверительных областей.

Рассмотрим метод доверительных областей. Пусть невязка R задается формулой (312). Тогда по теореме о χ^2-распределении

$$\frac{R\left(\overline{\beta}_1, \ldots, \overline{\beta}_P,\ \xi_1, \ldots, \xi_M\right)}{\varepsilon_0^2} \sim \chi_M^2, \tag{317}$$

где знак «$\sim$» означает «распределено как». Интегральная функция распределения χ_M^2 определяется выражением

$$\chi_m^2\left(t\right) = \frac{\Gamma\left(m/2, 0, t/2\right)}{\Gamma\left(m/2\right)}, \tag{318}$$

где $\Gamma\left(m/2, 0, t/2\right)$ — неполная обобщенная гамма-функция. Следовательно, если $\chi_M^2\left(\Delta_0\right) = \gamma$, т. е. Δ_0 — квантиль χ_M^2 распределения для некоторого уровня доверия $\gamma < 1$, то соответствующая вероятность

$$P\left(\frac{R\left(\overline{\beta}_1, \ldots, \overline{\beta}_P,\ \xi_1, \ldots, \xi_M\right)}{\varepsilon_0^2} \leqslant \Delta_0\right) = \gamma. \tag{319}$$

Пусть D_P — P-мерное множество значений вектора параметров $\beta_1, \ldots, \beta_P$, удовлетворяющее условию

$$\frac{R\left(\beta_1, \ldots, \beta_P,\ \xi_1, \ldots, \xi_M\ \right)}{\varepsilon_0^2} \leqslant \Delta_0. \tag{319$'$}$$

Тогда (319) эквивалентно утверждению: с вероятностью γ множество D_P не пусто и оно содержит истинные значения параметров $\beta_1, \ldots, \beta_P : \left(\overline{\beta}_1, \ldots, \overline{\beta}_P\right) \in D$. Множество D является доверительной областью для $\overline{\beta}_1, \ldots, \overline{\beta}_P$.

Отметим, что в данном случае нельзя использовать вместо ε_0 его среднеквадратичную оценку v_0, задаваемую формулой (308$'$), поскольку такая замена существенно нарушила бы закон распределения (317). В частности, пустой доверительной области не получалось бы при квантиле $\Delta_0 > M - P$, т. е. модель всегда была бы адекватна наблюдениям. Поэтому следует брать либо точное значение ε_0, известное в модельных задачах, либо его значение, полученное с большой точностью из независимых соображений в случае реальных наблюдений (например, используя внезатменные участки кривой блеска, где блеск ТДС меняется сравнительно слабо).

Поскольку на практике ε_0^2 не всегда известно, часто используется критерий, основанный на распределении Фишера. Пусть M — число «нормальных» точек, объединяющих измерения в группы для последующего усреднения. Пусть значение ξ_m в точке θ_m измеряется N_m раз $(m = 1, \ldots, M)$, т. е. в m-й группе содержится N_m точек. Обозначим через N полное число измерений: $N = \sum\limits_{m=1}^{M} N_m$. Пусть ξ_m^j — значение j-го измерения кривой блеска $(j = 1, 2, \ldots, N_m)$ в точке θ_m, т. е. ξ_m^j — случайная величина с нормальным законом распределения и математическим ожиданием $M\left(\xi_m^j\right) = f\left(\theta_k, \overline{\beta}_1, \ldots, \overline{\beta}_P\right)$. Пусть

$$\xi_m = \frac{1}{N_m} \sum_{j=1}^{N_m} \xi_m^j$$

— средние значения наблюдаемой величины ξ_m^j в пределах m-й группы. Их истинные дисперсии

$$\sigma^2\left(\xi_m\right) = \frac{\sigma^2\left(\xi_m^j\right)}{N_m},$$

а через $\left(\sigma_m^{\text{obs}}\right)^2 = \dfrac{1}{N_m\left(N_m - 1\right)} \sum\limits_{j=1}^{N_m} \left(\xi_m - \xi_m^j\right)^2$ обозначим оценки дисперсий наблюдений в этих точках (нормальных точках кривой блеска). Тогда

$$\frac{R\left(\overline{\beta}_1, \ldots, \overline{\beta}_P,\ \xi_1, \ldots, \xi_M\right)}{\sum\limits_{m=1}^{M} \left(N_m - 1\right) w_m \left(\sigma_m^{\text{obs}}\right)^2} \cdot \frac{N - M}{M} \sim F_{M,N-M}, \tag{320}$$

где $F_{M,N-M}$ — распределение Фишера (Уилкс, 1967). Его интегральная функция распределения определяется формулой

$$F_{n,m}\left(t\right) = \frac{B_{\frac{nt}{m+nt}}\left(n/2, m/2\right)}{B\left(n/2, m/2\right)}, \tag{321}$$

где $B_z\left(n/2, m/2\right)$ — неполная бета-функция. Процедура построения доверительной области для параметров $\overline{\beta}_1, \ldots, \overline{\beta}_P$ аналогична предыдущей (в случае статистики χ_M^2).

Выше отмечалось, что если в обратной задаче помимо нелинейных параметров присутствуют линейные параметры, это облегчает задачу построения доверительной области, поскольку минимизация по линейным параметрам не меняет закона распределения случайной величины (невязки R), а лишь уменьшает число степеней свободы этого распределения.

Рассмотрим случай, когда зависимость функции f от k $(k \leqslant P)$ параметров $\beta_1, \ldots, \beta_k$ линейная, а от остальных $P - K$ параметров — нелинейная. Пусть $\widehat{\beta}_1\left(\beta_{k+1}, \ldots, \beta_P\right), \ldots, \widehat{\beta}_k\left(\beta_{k+1}, \ldots, \beta_P\right)$ — значения линейных параметров, доставляющие минимум при фиксированных нелинейных параметрах $\beta_{k+1}, \ldots, \beta_P$ невязке $R(\beta_1, \ldots, \beta_P,\ \xi_1, \ldots, \xi_M)$, которая в данном случае является квадратичной формой по $\beta_1, \ldots, \beta_k$. Тогда, согласно работе (Уилкс, 1967),

$$\frac{R\left(\widehat{\beta}_1\left(\overline{\beta}_{k+1}, \ldots, \overline{\beta}_P\right), \ldots, \widehat{\beta}_k\left(\overline{\beta}_{k+1}, \ldots, \overline{\beta}_P\right), \overline{\beta}_{k+1}, \ldots, \overline{\beta}_P, \xi_1, \ldots, \xi_M\right)}{\sigma_0^2} \sim \chi_{M-K}^2 \tag{322}$$

и

$$\frac{R\left(\widehat{\beta}\left(\overline{\beta}_{k+1}, \ldots, \overline{\beta}_P\right), \ldots, \widehat{\beta}_k\left(\overline{\beta}_{k+1}, \ldots, \overline{\beta}_P\right), \overline{\beta}_{k+1}, \ldots, \overline{\beta}_P, \xi_1, \ldots, \xi_M\right)}{\sum\limits_{m=1}^{M} \left(N_m - 1\right) w_m \left(\sigma_m^{\text{obs}}\right)^2} \frac{N - M}{M - K} \sim F_{M-K,N-M}. \tag{323}$$

Эти статистики, минимизированные по k линейным параметрам, имеют число степеней свободы $M-K$ и могут использоваться для построения доверительных областей для нелинейных параметров $\overline{\beta}_{k+1},\ldots,\overline{\beta}_P$ на строгом математическом уровне (см. выше).

Часто исследователя интересует не только доверительная область D в пространстве искомых параметров (которую трудно изобразить на бумаге, если число параметров более двух), но и одномерные доверительные интервалы для каждого из параметров, получающиеся на основе использования доверительной области D. В этом случае, перебором по одному параметру осуществляют минимизацию невязки, минимальной по всем остальным параметрам. Соответствующая статистика для нахождения доверительного интервала для параметра β_k записывается в следующем виде:

$$\frac{R\left(\widehat{\beta}_1\left(\overline{\beta}_k\right),\ldots,\widehat{\beta}_{k-1}\left(\overline{\beta}_k\right),\overline{\beta}_k,\widehat{\beta}_{k+1}\left(\overline{\beta}_k\right),\ldots,\widehat{\beta}_P\left(\overline{\beta}_k\right),\xi_1\ldots,\xi_M\right)}{\varepsilon_0^2}\sim\chi^2_{M-P+1} \tag{324}$$

и

$$\frac{R\left(\widehat{\beta}_1\left(\overline{\beta}_k\right),\ldots,\widehat{\beta}_{k-1}\left(\overline{\beta}_k\right),\overline{\beta}_k,\widehat{\beta}_{k+1}\left(\overline{\beta}_k\right),\ldots,\widehat{\beta}_P\left(\overline{\beta}_k\right),\xi_1\ldots,\xi_M\right)}{\sum\limits_{m=1}^{M}\left(N_m-1\right)w_0\left(\sigma_m^{\text{obs}}\right)^2}\frac{N-M}{M-P+1}\sim \\ \sim F_{M-P+1,N-M}, \tag{325}$$

где $\widehat{\beta}_p\left(\beta_k\right)$ и $1\leqslant p\leqslant P$, $p\neq k$, минимизируют невязку R при фиксированном β_k. Соотношения (324), (325) позволяют построить одномерные, доверительные области (интервалы) для параметра β_k с заданным уровнем доверия γ.

Найдем теперь закон распределения разности между невязкой R в статистике χ^2_M, полученной при истинных значениях параметров, и этой же невязкой, полученной при центральных значениях параметров. Рассмотрим сначала случай, когда зависимость функции f от всех параметров линейная, так что, положив в (322) $K=P$, будем иметь закон распределения невязки, полученный при центральных значениях параметров:

$$\frac{R\left(\beta_1^c,\ldots,\beta_P^c,\ \xi_1,\ldots,\xi_M\right)}{\varepsilon_0^2}\sim\chi^2_{M-P}. \tag{326}$$

Отметим, что векторы β^c и $\widehat{\beta}$ зависят также и от наблюдаемых величин ξ. Данная зависимость, для краткости изложения, опущена.

Обозначим $R_{\min}\equiv R\left(\beta_1^c,\ldots,\beta_P^c,\ \xi_1,\ldots,\xi_M\right)$. Тогда с помощью известного утверждения $\left(\xi_a\sim\chi^2_a \text{ и } \xi_b\sim\chi^2_b\right)\to\xi_a+\xi_b\sim\chi^2_{a+b}$, получим:

$$\frac{R\left(\overline{\beta}_1,\ldots,\overline{\beta}_P,\ \xi_1,\ldots,\xi_M\right)-R_{\min}}{\varepsilon_0^2}\sim\chi^2_P. \tag{327}$$

Использование статистики (327) предполагает априорную адекватность модели, а доверительная область, полученная с помощью статистики (327), никогда не пуста. При $K=P-1$ из (322) и (326) получаем

$$\frac{R\left(\widehat{\beta}_1\left(\overline{\beta}_k\right),\ldots,\widehat{\beta}_{k-1}\left(\overline{\beta}_k\right),\overline{\beta}_k,\widehat{\beta}_{k+1}\left(\overline{\beta}_k\right),\ldots,\widehat{\beta}_P\left(\overline{\beta}_k\right),\xi_1\ldots,\xi_M\right)-R_{\min}}{\varepsilon_0^2}\sim\chi^2_1. \tag{328}$$

Статистика (328) также предполагает априорную адекватность модели, получаемые с помощью нее одномерные доверительные множества (интервалы) никогда не пусты.

Если же зависимость от параметров $\beta_1,\ldots,\beta_k$ не является линейной, то сделанные утверждения о распределениях (322), (323) и следующие из них формулы (324)–(328) выполняются в асимптотическом смысле — когда число измерений M

стремится к бесконечности. Одной из задач нашей работы (Абубекеров и др., 2008а) является численная проверка допустимости таких асимптотических приближений.

Заметим, что если доверительное множество не пусто (используемая модель адекватна наблюдательным данным), то оно содержит точку $\beta_1^c, \ldots, \beta_P^c$.

Приведем также интерпретацию невязок, минимальных по параметрам, в геометрических терминах. Если взять P-мерное множество

$$D_P = \{(\beta_1, \ldots, \beta_P) : R(\beta_1, \ldots, \beta_P) \leqslant C\},$$

где знак «:» означает «такое, что», то $(P-K)$-мерное множество

$$D_{P-K} = \Big\{(\beta_{k+1}, \ldots, \beta_P) : R\Big(\widehat{\beta}_1(\beta_{k+1}, \ldots, \beta_P), \ldots, \widehat{\beta}_k(\beta_{k+1}, \ldots, \beta_P), \beta_{k+1}, \ldots \\ \ldots, \beta_P, \xi_1, \ldots, \xi_M) \leqslant C\}$$

является проекцией D_P на $(P-K)$-мерную плоскость $\beta_{k+1}, \ldots, \beta_P$.

Так как проекции доверительной области D на оси параметров $\beta_1, \ldots, \beta_P$ вычисляются с помощью соответствующих невязок, минимизированных по всем параметрам, кроме одного, мы можем, зная закон распределения этих минимальных невязок (см. формулы (324), (325), (328)), найти вероятности попадания истинных значений параметров в соответствующие проекции доверительной области D (доверительные интервалы), построенной по заданному уровню доверия γ.

Если $\chi_M^2(\Delta_0) = \gamma$ и D_P является P-мерной доверительной областью с уровнем доверия γ, полученной с помощью квантиля Δ_0 статистики (317), то ее проекции $D_1^{(p)}$ на оси параметров β_P, $p = 1, \ldots, P$ являются одномерными доверительными областями для статистики (324) с уровнем доверия γ', который отличается от γ:

$$\gamma' = \chi_{M-P+1}^2(\Delta_0). \tag{329}$$

Напомним, что распределение $\chi_M^2(t)$ задается формулой (318).

Также, если $\chi_P^2(\Delta_0) = \gamma$ и D_P — P-мерная доверительная область с уровнем доверия γ, полученная с помощью квантиля Δ_0 для статистики (327), то ее проекция $D_1^{(p)}$ на оси параметров β_P, $p = 1, \ldots, P$ является одномерной доверительной областью (доверительным интервалом) для статистики (328) с уровнем доверия

$$\gamma' = \chi_1^2(\Delta_0). \tag{330}$$

Наконец, если $F_{M,N-M}(\Delta_0) = \gamma$ и D_P является P-мерной доверительной областью с уровнем доверия γ, полученной с помощью квантиля Δ_0 для статистики (320), то его проекции $D_1^{(p)}$ на оси параметров β_P, $p = 1, \ldots, P$ — одномерные доверительные области (доверительные интервалы) для статистики (323) с уровнем доверия

$$\gamma' = F_{M-P+1,N-M}\left(\frac{M}{M-P+1}\Delta_0\right), \tag{331}$$

где функция $F_{n,m}(t)$ задается формулой (321).

Как показывают численные расчеты, даже в нелинейном случае формулы (329)–(331) дают удовлетворительные результаты. Если вероятность накрытия точного решения P-мерной, доверительной областью D_P равна γ, то формулы (329)–(331) позволяют пересчитать вероятность γ в вероятность γ' накрытия точного значения отдельного параметра $\overline{\beta}_p$ соответствующей одномерной доверительной областью (доверительным интервалом).

В табл. 1 приведены значения вероятности γ' попадания точного значения параметра в одномерную проекцию доверительной области D_P при вероятности попадания в саму доверительную область $\gamma = 0{,}6827$ для двух-, трех- и четырех параметрических задач, рассчитанные с помощью формул (329)–(331). Забегая вперед, отметим, что, как показал численный эксперимент (см. ниже), число попаданий истинных значений в проекцию доверительной области D_P на ось параметра очень хорошо согласуется с приведенными в табл. 1 теоретическими значениями вероятностей γ' как в линейном так и в нелинейном случаях.

Таблица 1

Значения вероятности γ' при $\gamma = 0{,}6827$ для двух-, трех- и четырех параметрических задач

Статистика	$P = 2$	$P = 3$	$P = 4$
χ^2_P	0,8703	0,9396	0,9702
χ^2_M, $M = 101$	0,7072	0,7309	0,7536
$F_{M,N-M}$, $M = 101$, $N = 1212$	0,7046	0,7258	0,7464

Приведем коэффициенты k, на которые нужно домножить стандартное отклонение σ (см. формулу (307)), чтобы получить величину проекции доверительной области D_P на ось параметра, найденной в статистике χ^2_P при условии, что доверительная область D_P содержит истинные значения параметров с вероятностью $\gamma = 0{,}6827$. Значения этих коэффициентов равны $k = 1{,}51517$, $1{,}87796$ и $2{,}17244$ в случае двух-, трех- и четырех параметрических доверительных областей соответственно. Забегая вперед, отметим, что полученные в численном эксперименте дисперсии σ^2 и проекции доверительной области D_P в статистике χ^2_P хорошо удовлетворяют этому правилу. Также отметим, что в случае многопараметрических задач увеличение вероятности накрытия при проектировании строго одинаково для всех параметров (см. табл. 2 и табл. 3).

Таблица 2

Значения полуширины проекций доверительной области параметров линейных функций (332)–(335) в рамках статистики χ^2_P и число попаданий в проекции доверительных интервалов теоретических значений параметров

Функция	$\Delta_{\beta_1}/2$; $(N_{\Delta\beta_1})$	$\Delta_{\beta_2}/2$; $(N_{\Delta\beta_2})$	$\Delta_{\beta_3}/2$; $(N_{\Delta\beta_3})$	$\Delta_{\beta_4}/2$; $(N_{\Delta\beta_4})$	N_0
Формула (332)	0,00119; (681)	—	—	—	—
Формула (333)	0,00282; (878)	0,00225; (868)	—	—	686
Формула (334)	0,00353; (939)	0,00768; (944)	0,00149; (940)	—	685
Формула (335)	0,0910; (977)	0,0343; (969)	0,0119; (972)	0,0796; (976)	681

Таблица 3

Значения полуширины проекций доверительной области параметров нелинейных функций (336)–(339) в рамках статистики χ^2_P и число попаданий в проекции доверительных интервалов теоретических значений параметров

Функция	$\Delta_{\beta_1}/2$; $(N_{\Delta\beta_1})$	$\Delta_{\beta_2}/2$; $(N_{\Delta\beta_2})$	$\Delta_{\beta_3}/2$; $(N_{\Delta\beta_3})$	$\Delta_{\beta_4}/2$; $(N_{\Delta\beta_4})$	N_0
Формула (336)	0,00113; (682)	—	—	—	—
Формула (337)	0,0418; (870)	0,00169; (866)	—	—	668
Формула (338)	0,0155; (943)	0,00603; (937)	0,00132; (942)	—	697
Формула (339)	0,00921; (962)	0,0126; (976)	0,00322; (969)	0,0132; (973)	702

Приведем для уровня доверия $\gamma = 0{,}6827$ значения квантиля Δ_0 распределения χ_P^2 для одно-, двух-, трех- и четырех параметрических задач (табл. 4).

Таблица 4

Значение квантиля Δ_0 распределения χ_P^2 для одно-, двух-, трех- и четырехпараметрических задач для уровня доверия $\gamma = 0{,}6827$

Количество параметров P	Δ_0
1	1,0000
2	2,2957
3	3,5267
4	4,7195

Таким образом, например, в одномерных задачах, чтобы доверительная область накрывала точное значение параметра с вероятностью $\gamma = 0{,}6827$, необходимо отсекать значения
$$\frac{R(\beta_1, \xi_1, \ldots, \xi_M) - R_{\min}}{\varepsilon_0^2}$$
числом, на единицу большим, чем минимальное значение этой величины.

В практике статистических исследований часто используются термины «маргинальное распределение» и «маргинальная оценка» ошибки параметра. Под маргинальным распределением многомерной плотности вероятности для совокупности параметров понимается проекция этого многомерного распределения на ось одного параметра. Под маргинальной оценкой ошибки данного параметра понимается ошибка, выведенная на основе маргинального распределения. В нашем случае проекцию многомерной доверительной области на ось одного параметра можно назвать маргинальной оценкой ошибки данного параметра. По определению, маргинальные оценки гарантируют совместное попадание всех параметров из данного множества в соответствующую многомерную доверительную область с заданной вероятностью γ. Поэтому маргинальные оценки ошибок параметров являются наиболее консервативными и, как правило, значительно превосходят величины ошибок, найденные стандартными методами дифференциальных поправок или Монте-Карло. Маргинальные оценки используются в тех случаях, когда необходимо делать особо ответственные суждения о природе изучаемого объекта.

10. Численный эксперимент по оценке надежности методов дифференциальных поправок, Монте-Карло и метода доверительных областей

Прежде чем приступить к анализу наблюдаемых кривых блеска затменных систем, методы расчета ошибок параметров для большей наглядности апробированы на ряде простых функций. Использовались одно-, двух-, трех- и четырех-параметрические функции как с линейной (332)–(335), так и с нелинейной (336)–(339) зависимостью от параметров.

В численном эксперименте использовались следующие линейные относительно параметров функции:
$$f(\theta, \beta_1) = \cos\theta + \beta_1 \sin\theta, \tag{332}$$
где истинное значение параметра $\overline{\beta}_1 = 2$,
$$f(\theta, \beta_1, \beta_2) = \frac{\beta_1}{1+\theta^2} + \beta_2 \sin\theta, \tag{333}$$

где истинные значения параметров $\overline{\beta}_1 = 2$, $\overline{\beta}_2 = 3$,

$$f\,(\theta, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = \frac{\beta_1}{1+\theta^2} + \beta_2 \sin\theta + \beta_3 e^{\theta}, \tag{334}$$

где истинные значения параметров $\overline{\beta}_1 = 2$, $\overline{\beta}_2 = 3$, $\overline{\beta}_3 = 1$,

$$f\,(\theta, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4) = \frac{\beta_1}{1+\theta^2} + \beta_2 \sin\theta + \beta_3 e^{\theta} + \beta_4 \cos\theta, \tag{335}$$

где истинные значения параметров $\overline{\beta}_1 = 1$, $\overline{\beta}_2 = 1$, $\overline{\beta}_3 = 1$, $\overline{\beta}_4 = 1$.

Использовались следующие нелинейные относительно параметров и дифференцируемые по параметрам функции:

$$f(\theta, \beta_1) = \cos(\theta + \beta_1) + \sin\beta_1\theta, \tag{336}$$

где истинное значение параметра $\overline{\beta}_1 = 2$,

$$f\,(\theta, \beta_1, \beta_2) = \frac{1}{\beta_1\theta^2 + \beta_2} + \sin\beta_2\theta, \tag{337}$$

где истинные значения параметров $\overline{\beta}_1 = 2$, $\overline{\beta}_2 = 3$,

$$f\,(\theta, \beta_1, \beta_2, \beta_3) = \frac{1}{\beta_1\theta^2 + \beta_2} + \sin(\beta_2\theta + \beta_3) + e^{\beta_3\theta}, \tag{338}$$

где истинные значения параметров $\overline{\beta}_1 = 2$, $\overline{\beta}_2 = 3$, $\overline{\beta}_3 = 1$,

$$f\,(\theta, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4) = \frac{1}{\beta_1\theta^2 + \beta_2} + \sin(\beta_2\theta + \beta_1 - 1) + e^{\beta_3\theta} + \cos(\beta_4 + \beta_3 - 1)\,, \tag{339}$$

где истинные значения параметров $\overline{\beta}_1 = 1$, $\overline{\beta}_2 = 1, \overline{\beta}_3 = 1, \overline{\beta}_4 = 1$.

В ходе численного эксперимента в точках $\theta_1, \ldots, \theta_{101}$, равномерно расположенных на числовом отрезке абсциссы $[0, 2]$, при заданных истинных значениях параметров $\overline{\beta}_1, \overline{\beta}_2, \overline{\beta}_3, \overline{\beta}_4$ получены истинные значения функции $\overline{\xi}_1, \ldots, \overline{\xi}_{101}$. Далее, генерировалась выборка нормально распределенных случайных величин ξ_m $(m = 1, \ldots \ldots, 101)$ таких, что $\sigma\,(\xi_m) = \sigma_m = 0{,}03/\sqrt{12} = 0{,}008660$ и $M\,(\xi_m) = \overline{\xi}_m$. Генерация $\xi_1, \ldots, \xi_m$ производилась следующим образом. Сначала при j=1,...,12 генерировалась выборка нормально распределенных случайных величин $\xi_1^j, \ldots, \xi_{101}^j$ таких, что $M\,(\xi_m^j) = \overline{\xi}_m$ и $\sigma\,(\xi_m^j) = 0{,}03$, $m = 1, \ldots, 101$. Далее вычислялись величины $\xi_m = \frac{1}{12}\sum\limits_{j=1}^{12} \xi_m^j$. Кроме того, вычислялись величины $\left(\sigma_m^{\mathrm{obs}}\right)^2 = \frac{1}{12\,(12-1)}\sum\limits_{j=1}^{12}\left(\xi_m - \xi_m^j\right)^2$ для использования в методе со статистикой Фишера. В соответствии с этим, в выражении (320) полагалось $M = 101$, $w_m = N_m = 12$ и $\varepsilon_0 = 0{,}03$ (в этом случае значение стандартного отклонения $\sigma\,(\xi_m) = \sigma_m = 0{,}03/\sqrt{12} = 0{,}008660$). В дальнейшем данная процедура называется «возмущением» функции, а выборка $\xi_1^j, \ldots, \xi_{101}^j$, с помощью которой получаются ξ_m и $\left(\sigma_m^{\mathrm{obs}}\right)^2$, называется «возмущенной» кривой.

Данный метод генерации «возмущенной» функции эквивалентен тому, что мы имеем $M = 101$ возмущенную точку со стандартным отклонением $\sigma_m = 0{,}008660$, где $m = 1, \ldots, 101$. Описанный выше метод получения возмущенной «кривой блеска» используется в связи с применением статистики Фишера, где требуется разбиение точек по группам. Вышеописанный метод генерации «возмущенной» кривой позволяет произвести поиск параметров задачи в рамках статистики Фишера и статистики χ-квадрат по одной и той же реализации «возмущенной» кривой, что важно для чистоты численного эксперимента. При данном способе генерации размерность статистики χ-квадрат составляла $M = 101$, а размерность статистики Фишера — $F_{101,1012-101}$.

Далее вычислялись центральные значения параметров и размеры интервалов ошибок. Дополнительно, в качестве оценки надежности метода расчета интервалов ошибок, вычислялось число попаданий в него истинных значений параметров.

Поскольку центральные значения функций (332)–(339) практически совпадают с истинными, то для того, чтобы не загромождать основные результаты расчетов (интервалы ошибок), центральные значения параметров мы не приводим. В дальнейшем интервалы ошибок приведены на уровне доверия $\gamma = 68{,}2\,\%$, если это не оговорено особо.

а) Метод дифференциальных поправок. Получены центральные значения параметров $\beta_1^c, \beta_2^c, \beta_3^c, \beta_4^c$ и на основе выражения (305′) — оценки значений стандартных отклонений (среднеквадратичных ошибок) $\sigma\left(\beta_1^c\right), \sigma\left(\beta_2^c\right), \sigma\left(\beta_3^c\right), \sigma\left(\beta_4^c\right)$, как для линейных относительно параметров функций (332)–(335), так и для нелинейных функций (336)–(339). Результаты представлены в таблицах 5 и 6 соответственно.

Помимо этого проверена надежность интервалов ошибок параметров $\beta_1^c \pm \sigma\left(\beta_1^c\right)$, $\beta_2^c \pm \sigma\left(\beta_2^c\right)$, $\beta_3 \pm \sigma\left(\beta_3^c\right)$, $\beta_4 \pm \sigma\left(\beta_4^c\right)$. В данном случае оценка надежности интервалов ошибок выполнена следующим образом. Тысячу раз произведено описанное выше «возмущение» каждой функции с $\varepsilon_0 = 0{,}03$. Для каждой «возмущенной» функции получено решение — центральные значения параметров $\beta_1^c, \beta_2^c, \beta_3^c, \beta_4^c$. После этого подсчитывалось число попаданий (N_1), (N_2), (N_3) и (N_4) истинных значений параметров $\overline{\beta}_1, \overline{\beta}_2, \overline{\beta}_3$ и $\overline{\beta}_4$ (которые заранее известны) в интервал ошибок $\beta_1^c \pm \sigma\left(\beta_1^c\right)$, $\beta_2^c \pm \sigma\left(\beta_2^c\right)$, $\beta_3^c \pm \sigma\left(\beta_3^c\right)$, $\beta_4^c \pm \sigma\left(\beta_4^c\right)$. Также подсчитано число N_{all} одновременных попаданий значений параметров в свои интервалы ошибок. Результаты представлены в таблицах 5 и 6.

Таблица 5

Значения стандартных отклонений (среднеквадратичных ошибок) параметров линейных функций (332)–(335) и число попаданий в них, полученные в рамках метода дифференциальных поправок

Функция	$\sigma\left(\beta_1^c\right)$; (N_1)	$\sigma\left(\beta_2^c\right)$; (N_2)	$\sigma\left(\beta_3^c\right)$; (N_3)	$\sigma\left(\beta_4^c\right)$; (N_4)	N_{all}
Формула (332)	0,00111; (696)	—	—	—	—
Формула (333)	0,00186; (686)	0,00148; (675)	—	—	527
Формула (334)	0,00188; (666)	0,00409; (691)	0,000793; (684)	—	485
Формула (335)	0,0418; (669)	0,0158; (659)	0,00548; (665)	0,0366; (670)	606

Таблица 6

Значения стандартных отклонений (среднеквадратичных ошибок) параметров нелинейных функций (336)–(339) и число попаданий в них, полученные в рамках метода дифференциальных поправок

Функция	$\sigma\left(\beta_1^c\right)$; (N_1)	$\sigma\left(\beta_2^c\right)$; (N_2)	$\sigma\left(\beta_3^c\right)$; (N_3)	$\sigma\left(\beta_4^c\right)$; (N_4)	N_{all}
Формула (336)	0,00115; (697)	—	—	—	—
Формула (337)	0,0276; (683)	0,00112; (676)	—	—	469
Формула (338)	0,0837; (695)	0,00313; (673)	0,00068; (677)	—	587
Формула (339)	0,00412; (676)	0,00555; (679)	0,00143; (679)	0,00596;(687)	534

б) Метод Монте-Карло. Аналогичный численный эксперимент для функций (332)–(339) выполнен в рамках метода Монте-Карло. Произведено $N = 1000$ раз «возмущение» каждой из функций (332)–(339). Для каждой «возмущенной» функции находились центральные значения параметров $\beta_1^{c(n)}, \beta_2^{c(n)}, \beta_3^{c(n)}, \beta_4^{c(n)}$, $n = 1, \ldots, N$ и по формуле (316) оценивались их дисперсии.

Как и в предыдущем случае, подсчитано число попаданий истинных значений параметров $\overline{\beta}_1, \overline{\beta}_2, \overline{\beta}_3, \overline{\beta}_4$ в интервалы ошибок

$$\beta_1^c \pm \sigma_{mc}\left(\beta_1^c\right), \quad \beta_2^c \pm \sigma_{mc}\left(\beta_2^c\right), \quad \beta_3^c \pm \sigma_{mc}\left(\beta_3^c\right), \quad \beta_4^c \pm \sigma_{mc}\left(\beta_4^c\right).$$

Дополнительно проверено, насколько закон распределения центральных значений $\beta_1^c, \beta_2^c, \beta_3^c, \beta_4^c$ совпадает с нормальным для случая с нелинейной зависимостью от параметров (336)–(339) (в случае линейной зависимости он является в точности нормальным). Для этого, помимо числа попаданий в интервал с полушириной σ_{mc}, также подсчитано число попаданий истинных значений в интервалы с полушириной $1{,}5\sigma_{mc}$, $2\sigma_{mc}$, $3\sigma_{mc}$, для которых вероятности попадания в случае нормального закона распределения составляют 0,8664, 0,9545 и 0,9973. Для того чтобы не загромождать изложение излишним количеством таблиц, полученные числа попаданий мы не приводим, а только отметим, что они столь же близки к теоретическим вероятностям, как и в случае σ_{mc} (см. табл. 8). Это говорит о том, что распределение найденных центральных значений параметров и в нелинейном случае близко к нормальному (ввиду малости «ошибок наблюдений»).

Результаты численного эксперимента по оценке надежности интервалов ошибок для функций с линейной и нелинейной зависимостью от параметров представлены в таблицах 7 и 8 соответственно.

Таблица 7

Значения стандартных отклонений (среднеквадратичных ошибок) параметров линейных функций (332)–(335) и число попаданий в них, полученные в рамках метода Монте-Карло

Функция	$\sigma_{mc}(\beta_1^c)$; (N_1)	$\sigma_{mc}(\beta_2^c)$; (N_2)	$\sigma_{mc}(\beta_3^c)$; (N_3)	$\sigma_{mc}(\beta_4^c)$; (N_4)
Формула (332)	0,00114; (691)	—	—	—
Формула (333)	0,00154; (689)	0,00128; (683)	—	—
Формула (334)	0,00182; (674)	0,00394; (675)	0,000769; (672)	—
Формула (335)	0,0430; (684)	0,0161; (692)	0,00563; (692)	0,0376;(682)

Таблица 8

Значения стандартных отклонений (среднеквадратичных ошибок) параметров нелинейных функций (336)–(339) и число попаданий в них, полученные в рамках метода Монте-Карло

Функция	$\sigma_{mc}(\beta_1^c)$; (N_1)	$\sigma_{mc}(\beta_2^c)$; (N_2)	$\sigma_{mc}(\beta_3^c)$; (N_3)	$\sigma_{mc}(\beta_4^c)$; (N_4)
Формула (336)	0,00113; (670)	—	—	—
Формула (337)	0,0277; (684)	0,00108; (700)	—	—
Формула (338)	0,0818; (680)	0,00317; (689)	0,000689;(673)	—
Формула (339)	0,00415; (681)	0,00563; (677)	0,00146; (691)	0,00605;(687)

10.1. Метод доверительных областей. Аналогичный анализ проведен в рамках метода доверительных областей. Построение доверительной области проведено в рамках статистики χ^2_P (где P — число искомых параметров задачи), χ^2_M (где M — полное число точек «наблюдаемой» кривой) и статистики Фишера $F_{M,N-M}$. В отличие от метода дифференциальных поправок, метод доверительных областей позволяет не только вычислить доверительные интервалы для параметров, но и (в случае статистик χ^2_M и $F_{M,N-M}$) проверить гипотезу об адекватности модели наблюдательным данным.

На отрезке абсциссы [0,2] получены «возмущенные» кривые $\xi^j_1, \ldots, \xi^j_{101}$ для функций (332)–(339). Далее методом доверительных областей производился поиск доверительных интервалов ошибок $\left[\beta^{\min}_p, \beta^{\max}_p\right]$ $(p = 1, \ldots, 4)$. Доверительные интервалы вычислены как проекции на оси координат параметров β_1, β_2, β_3, β_4 доверительной области D_P, полученной с помощью статистик χ^2_P, χ^2_M, $F_{M,N-M}$ решением соответствующего неравенства относительно β_1, β_2, β_3, β_4.

Для большей наглядности результатов нами приводятся не значения границ доверительного интервала $\beta^{\min}_p$ и $\beta^{\max}_p$, а величина полуширины проекции доверительной области (доверительного интервала) $\Delta_{\beta_p}/2 = (\beta^{\max}_p - \beta^{\min}_p)/2$.

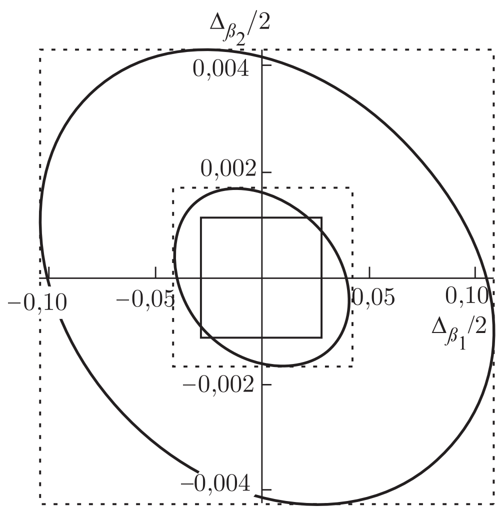


Рис. 25. Доверительная область параметров β_1 и β_2 функции $f(\theta, \beta_1, \beta_2) = 1/(\beta_1\theta^2 + \beta_2) + \sin\beta_2\theta$, построенная в рамках статистики χ^2_P (меньший эллипс) и статистики χ^2_M (больший эллипс). Прямоугольник из сплошных линий — доверительная область, построенная на основе метода дифференциальных поправок. Прямоугольники из точечных линий соответствуют объемлющим доверительные области параллелепипедам, габариты которых определяются проекциями доверительной области на оси параметров β_1 и β_2

Для оценки надежности полуширины проекции доверительной области $\Delta_{\beta_1}/2$, $\Delta_{\beta_2}/2$, $\Delta_{\beta_3}/2$, $\Delta_{\beta_4}/2$, как и в предыдущих случаях, проведен подсчет числа попаданий истинного значения $\overline{\beta}_p$ в полученные доверительные интервалы $\left[\beta^{\min}_p, \beta^{\max}_p\right]$ $(p = 1, \ldots, 4)$. Всего проведена тысяча испытаний. Помимо подсчета числа попаданий в проекцию доверительной области D_P, проведен подсчет числа попаданий N_0 в саму доверительную область D_P. Результаты представлены ниже.

а) Статистика χ^2_P. Интервалы ошибок вычислены как проекции на оси координат параметров β_1, β_2, β_3, β_4 доверительной области, полученной с помощью статистики (327) решением соответствующего неравенства относительно β_1, β_2, β_3, β_4. Так, например, для двухпараметрической функции доверительная область D_P имеет форму эллипса (см. рис. 25). Под проекцией доверительной области (доверительным интервалом) понимается проекция этого эллипса на соответствующие оси параметров — в данном случае β_1 и β_2.

Отметим, что при расчете доверительной области на основе статистики χ^2_P не осуществляется проверка гипотезы об адекватности модели наблюдательным данным; модель изначально полагается адекватной. В связи с тем, что квантиль Δ_0 откладывается от минимального значения невязки $R_{\min}$

(см. выражение (327)), значение полуширины проекции доверительной области устойчиво (в отличие от статистики χ^2_M, где M — полное число точек кривой).

Размеры проекций доверительной области параметров β_p функций (332)–(335) и функций (336)–(339), полученных в рамках статистики χ^2_P, и число попаданий в них представлены в таблицах 2 и 3. Заметим, что если потребовать, чтобы вероятность попадания точного решения в проекции доверительной области $\gamma' = 68{,}2\,\%$, то вероятность накрытия точного решения всей доверительной областью одновременно будет $\gamma < 68{,}2\,\%$ ($\gamma \sim 50\,\%$). В то же время величины проекций доверительных интервалов, указанные в таблицах 2 и 3, гарантируют попадание точного решения в доверительную область с заданной вероятностью $\gamma = 68{,}2\,\%$. Данная ситуация аналогична методу дифференциальных поправок (см. таблицы 5, 6).

Часто на практике вычисляют сечение доверительной области по одному из параметров задачи, а не ее проекцию на ось этого параметра (вычисление проекции — значительно более трудоемкая операция, чем вычисление сечения). Для того, чтобы оценить надежность подобного метода оценки ошибки параметра, нами был проведен дополнительный расчет размера сечения доверительной области и числа попаданий истинных значений в интервал сечения в статистике χ^2_P для линейной функции (333) и более скоррелированной по параметрам β_1, β_2 функции

$$f(x, \beta_1, \beta_2) = \beta_1 x + \beta_2 x^2. \tag{340}$$

Для функции (333) полуширина сечения для параметров β_1 и β_2 составила $S_{\beta_1}/2 = 0{,}003289$ (739) и $S_{\beta_2}/2 = 0{,}002627$ (750) (в скобках указано число попаданий истинного значения параметра в интервал сечения). Для функции (340) полуширина сечения для параметров β_1 и β_2 составила $S_{\beta_1}/2 = 0{,}001747$ (307) и $S_{\beta_2}/2 = 0{,}001122$ (311). В то же время, для функции (340) размеры проекций доверительной области на оси параметров β_1 и β_2 и число попаданий истинных значений составили $\Delta_{\beta_1}/2 = 0{,}006989$ (874) и $\Delta_{\beta_2}/2 = 0{,}0044896$ (879). Отсюда видно, что размер сечения доверительной области и, соответственно, число попаданий истинных значений параметров зависят от степени скоррелированности между параметрами функции, тогда как величина проекции доверительной области на ось параметра (доверительный интервал) и число попаданий истинных значений параметра в нее не зависят от степени скоррелированности параметров задачи.

При этом смысл проекций доверительной области, приведенных в таблицах 2, 3 (а также в других рассматриваемых ниже таблицах), следующий: если мы указываем величины проекций доверительной области (доверительные интервалы), то мы гарантируем одновременное попадание всех параметров задачи в соответствующую доверительную область с заданной вероятностью $\gamma = 68{,}2\,\%$, а в объемлющий доверительную область параллелепипед — с вероятностью $\gamma > 68{,}2\,\%$. Поэтому в случаях, когда необходимо делать ответственное суждение о значениях параметров обратной задачи и их ошибках, следует вычислять именно доверительные интервалы для параметров, как проекции доверительной области на оси параметров.

б) Статистика χ^2_M. Подобный численный эксперимент был также проведен в рамках статистики χ^2_M. Доверительные интервалы вычислены как проекции на оси координат параметров β_1, β_2, β_3, β_4 доверительной области, полученной с помощью статистики (317), т. е. являются решением неравенства (319′) относительно β_1, β_2, β_3, β_4.

В таблицах 9 и 10 приведены значения полуширины проекции доверительной области $\Delta_{\beta_1}/2$, $\Delta_{\beta_2}/2$, $\Delta_{\beta_3}/2$, $\Delta_{\beta_4}/2$. Напомним, что выбранный нами уровень доверия $\gamma = 68{,}2\,\%$.

Таблица 9

Значения полуширины проекций доверительной области параметров линейных функций (332)–(335) в рамках статистики χ^2_M и число попаданий в них теоретических значений параметров

Функция	$\Delta_{\beta_1}/2$; $(N_{\Delta\beta_1})$	$\Delta_{\beta_2}/2$; $(N_{\Delta\beta_2})$	$\Delta_{\beta_3}/2$; $(N_{\Delta\beta_3})$	$\Delta_{\beta_4}/2$; $(N_{\Delta\beta_4})$	N_0
Формула (332)	0,00344; (674)	—	—	—	—
Формула (333)	0,00915; (688)	0,00702; (694)	—	—	673
Формула (334)	0,00508; (740)	0,0110; (738)	0,00215; (739)	—	684
Формула (335)	0,2174; (726)	0,0820; (728)	0,0284; (727)	0,1900; (725)	674

Таблица 10

Значения полуширины проекций доверительной области параметров нелинейных функций (336)–(339) в рамках статистики χ^2_M и число попаданий в них теоретических значений параметров

Функция	$\Delta_{\beta_1}/2$; $(N_{\Delta\beta_1})$	$\Delta_{\beta_2}/2$; $(N_{\Delta\beta_2})$	$\Delta_{\beta_3}/2$; $(N_{\Delta\beta_3})$	$\Delta_{\beta_4}/2$; $(N_{\Delta\beta_4})$	N_0
Формула (336)	0,00354; (663)	—	—	—	—
Формула (337)	0,116; (707)	0,00436; (700)	—	—	680
Формула (338)	0,437; (718)	0,00159; (729)	0,00343; (723)	—	676
Формула (339)	0,0160; (746)	0,0220; (745)	0,00560; (746)	0,0229; (747)	680

В отличие от распределения χ^2_P и метода дифференциальных поправок, размер доверительной области меняется в зависимости от конкретной реализации «возмущенной» кривой $\xi_1^j, \ldots, \xi_{101}^j$. На рис. 26 приведена экспериментально полученная гистограмма плотности распределения величины полуширины доверительного интервала $\Delta_{\beta_1}/2$ для однопараметрической функции (332), найденная в результате 10^4 испытаний. Гистограмма имеет два четко выраженных максимума. Первый максимум (вблизи $\Delta_{\beta_1}/2$ близкой к нулю) связан с ошибкой 1-го рода — верное решение отвергается с вероятностью $\alpha = 1 - \gamma$, т. е. интервал ошибки не существует (вырождается в пустое множество). Второй максимум гистограммы (вблизи значения $\Delta_{\beta_1}/2 \cong 0{,}004$) демонстрирует плотность распределения интервалов ошибок для случаев, когда модель принимается. Видно, что, в зависимости от конкретной реализации случайного процесса («кривой блеска») размер доверительного интервала меняется в 7–8 раз. Поэтому в результате нашей работы приводится значение полуширины интервала в окрестностях второго максимума ее плотности распределения.

Размеры проекций доверительной области параметров β_p для функций (332)–(335) и функций (336)–(339), полученных в рамках статистики χ^2_M, и число попаданий в них истинных значений параметров представлены в таблицах 9 и 10. Эти размеры примерно в 2 раза больше, чем в случае статистики χ^2_P (см. также рис. 25).

в) Статистика Фишера $F_{M,N-M}$. Аналогичный численный эксперимент проведен в рамках статистики Фишера $F_{M,N-M}$. Доверительные интервалы вычислены как проекции на оси координат параметров β_1, β_2, β_3, β_4 доверительной области, полученной с помощью статистики (320), т. е. являются решением соответствующего неравенства относительно β_1, β_2, β_3, β_4.

Размеры проекций доверительной области параметров β_p функций (332)–(335) и функций (336)–(339), полученных в рамках статистики Фишера $F_{M,N-M}$, и число попаданий в них истинных значений параметров представлены в таблицах 11 и 12.

Таблица 11

Значения полуширины проекций доверительной области параметров линейных функций (332)–(335), полученные в рамках распределения Фишера $F_{M,N-M}$, и число попаданий в них теоретических значений параметров

Функция	$\Delta_{\beta_1}/2$; $(N_{\Delta\beta_1})$	$\Delta_{\beta_2}/2$; $(N_{\Delta\beta_2})$	$\Delta_{\beta_3}/2$; $(N_{\Delta\beta_3})$	$\Delta_{\beta_4}/2$; $(N_{\Delta\beta_4})$	N_0
Формула (332)	0,00294; (692)	—	—	—	—
Формула (333)	0,00746; (705)	0,00578; (706)	—	—	685
Формула (334)	0,00420; (728)	0,0093; (729)	0,00189; (730)	—	687
Формула (335)	0,1733; (753)	0,0677; (752)	0,0200; (752)	0,134; (753)	688

Таблица 12

Значения полуширины проекций доверительной области параметров нелинейных функций (336)–(339), полученные в рамках распределения Фишера $F_{M,N-M}$, и число попаданий в них теоретических значений параметров

Функция	$\Delta_{\beta_1}/2$; $(N_{\Delta\beta_1})$	$\Delta_{\beta_2}/2$; $(N_{\Delta\beta_2})$	$\Delta_{\beta_3}/2$; $(N_{\Delta\beta_3})$	$\Delta_{\beta_4}/2$; $(N_{\Delta\beta_4})$	N_0
Формула (336)	0,00315; (693)	—	—	—	—
Формула (337)	0,099; (700)	0,00432; (700)	—	—	678
Формула (338)	0,391; (723)	0,00140; (725)	0,00301; (723)	—	679
Формула (339)	0,0114; (749)	0,0192; (750)	0,00485; (749)	0,0193; (750)	680

11. Анализ результатов численного моделирования

Прежде всего, напомним, что методы дифференциальных поправок и Монте-Карло позволяют находить так называемые внутренние ошибки параметров обратной задачи в том смысле, что в данном случае для определения ошибок параметров используется «внутреннее» статистическое распределение найденных при решении задачи центральных значений параметров (распределение точечных оценок этих параметров). Если ошибки наблюдений распределены по нормальному закону, обратная задача линейна по искомым параметрам, а используемая модель идеально верна (исключаются ошибки второго рода), то это «внутреннее» распределение точечных оценок параметров является нормальным, и ошибки параметров можно вычислить по формулам (309 и (316). В том же случае, когда задача сильно нелинейна по параметрам и, особенно, в случае, когда модель не вполне адекватна наблюдательным данным, «внутреннее» распределение точечных оценок искомых параметров не обязано быть нормальным. В этом случае, с использованием формул (309′) и (316) получаются лишь формальные внутренние значения ошибок искомых параметров.

Достоинством метода доверительных областей является то, что ошибки параметров в данном случае находятся с использованием лишь информации о «внешнем» статистическом распределении наблюдательных данных (случайных величин ξ_m^j — измеренных значений «кривой блеска»); при этом информация о «внутреннем» статистическом распределении центральных значений (точечных оценок) искомых параметров не используется. Поэтому метод доверительных областей позволяет находить так называемые внешние ошибки параметров; он эффективно «работает», в том числе, и в случае сильно нелинейных задач.

Следует подчеркнуть, что даже в случае однопараметрической задачи, как линейной (332), так и нелинейной (336), значения полуширины интервала ошибки, полученной в рамках метода дифференциальных поправок, и метода доверительных областей в статистике χ^2_M и $F_{M,N-M}$, не совпадают. Значения полуширины интервала ошибки Δ_{β_1}, полученной в рамках статистики χ^2_M и $F_{M,N-M}$, могут превосходить значение полуширины интервала ошибки $\sigma\left(\beta_1^c\right)$ параметра β_1, полученное в рамках метода дифференциальных поправок, до 7–10 раз. Необходимо отметить, что в случае однопараметрической задачи (332) и (336) значения полуширины интервала ошибки β_1, полученной методом доверительных областей в статистике χ^2_P, очень близки к полуширине интервала ошибки, полученной методом дифференциальных поправок и методом Монте-Карло. Однако в случае двухпараметрической задачи и задачи с большим числом параметров проекции доверительных областей на оси параметров β_p превышают интервал ошибки, полученной методом дифференциальных поправок и методом Монте-Карло в 1,5–2 раза. При этом вероятность накрытия истинного значения параметров превышает 68 %.

Как показал численный эксперимент, полуширина интервала ошибки искомых параметров задачи зависит от выбранной статистики и априорной информации о модели. При этом надежность различных методов доверительных областей близка в том смысле, что число попаданий точного решения в найденную доверительную область соответствует заданной вероятности γ.

Значения полуширины интервалов ошибки в методе дифференциальных поправок $\left(\sigma\left(\beta_p^c\right)\right)$ и методе Монте-Карло $\left(\sigma_{mc}\left(\beta_p^c\right)\right)$ очень близки, и можно считать, что эти методы, в сущности, эквивалентны друг другу.

В методе доверительных областей значение полуширины интервала ошибки увеличивается с ростом неопределенности данных. Так, например, при использовании статистики χ^2_P, (где P — число параметров задачи) модель изначально полагается адекватной наблюдательным данным, а дисперсия наблюдательных данных предполагается известной априори, из независимых данных. Поэтому в методе доверительных областей в рамках статистики χ^2_P получаются относительно небольшие величины интервалов ошибок. Предположение об априорной верности модели ставит метод χ^2_P в один ряд с методами дифференциальных поправок и Монте-Карло. Как уже отмечалось, в случае однопараметрической задачи полуширина интервала ошибки $\Delta_{\beta_1}/2$, полученная в рамках статистики χ^2_P, очень близка к значению ошибки параметра, полученному в рамках метода дифференциальных поправок и метода Монте-Карло. Однако в случае многопараметрических задач это не так.

Если потребовать, чтобы вероятность накрытия точного решения проекциями доверительной области в рамках статистики χ^2_P составляла $\gamma' = 68{,}2\,\%$, то размеры таких проекций доверительной области примерно совпадают с величинами стандартных среднеквадратичных отклонений $(\pm\sigma\left(\beta_1^c\right))$, но при этом уже нет гарантии, что точное решение попадает в саму доверительную область с заданной вероятностью $\gamma = 68{,}2\,\%$ (реальная вероятность накрытия $\gamma < 68{,}2\,\%$).

В отличие от статистики χ^2_P, при использовании статистики χ^2_M (M — число значений «возмущенной» функции) и статистики Фишера $F_{M,N-M}$ осуществляется не только расчет доверительной области для параметров, но и проводится проверка адекватности модели. В связи с этим, размеры доверительной области зависят от конкретной индивидуальной реализации случайного процесса («возмущенной» кривой

$\xi_1^j, \ldots, \xi_{101}^j$). Размер доверительной области (в отличие от методов дифференциальных поправок, Монте-Карло и доверительных областей в статистике χ_P^2), полученной в рамках статистики χ_M^2 и $F_{M,N-M}$, меняется от одной реализации «кривой блеска» к другой. Распределение размеров доверительной области в одномерном случае показано на рис. 26. При этом размер области, соответствующей второму максимуму гистограммы, превышает значение интервала ошибок параметров, полученных методами дифференциальных поправок и Монте-Карло, в среднем в ~ 5 раз, а значение доверительного интервала, полученного в статистике χ_P^2, — в среднем в ~ 3 раза (см. рис. 25).

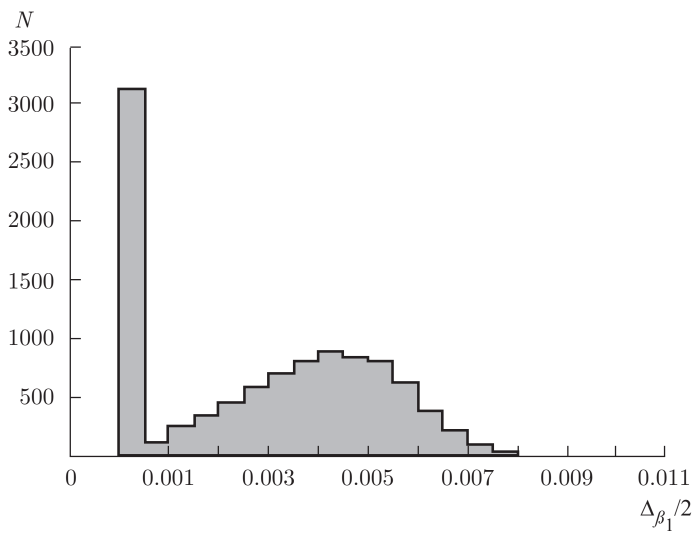


Рис. 26. Экспериментально полученная гистограмма плотности распределения полуширины доверительного интервала $\Delta_{\beta_1}/2$ функции $f(\theta, \beta_1) = \cos(\theta + \beta_1) + \sin \beta_1 \theta$. Интервалы получены в статистике χ_M^2 в результате 10^4 испытаний. N — количество значений полуширины доверительного интервала $\Delta_{\beta_1}/2$, попадающих в соответствующий шаг гистограммы

На рис. 27 представлены графики двухпараметрической линейной функции (333), построенные при значениях параметров $\overline{\beta}_1 - \sigma(\beta_1^c)$ и $\overline{\beta}_2 - \sigma(\beta_2^c)$, $\overline{\beta}_1$ и $\overline{\beta}_2, \overline{\beta}_1 + \sigma(\beta_1^c)$ и $\overline{\beta}_2 + \sigma(\beta_2^c)$, которые образуют так называемый «коридор ошибок». Видно, что при использовании метода дифференциальных поправок около половины точек $\xi_1^j, \ldots, \xi_{101}^j$ «возмущенной» функции выпадают из «коридора ошибок». В то же время, в аналогичном «коридоре ошибок», образуемом функцией (333) в методе доверительных областей с использованием статистики χ_M^2 со значениями параметров $\overline{\beta}_1^c - \Delta(\beta_1^c)/2$ и $\overline{\beta}_2^c - \Delta(\beta_2^c)/2$, $\overline{\beta}_1^c$ и $\overline{\beta}_2$, $\overline{\beta}_1^c + \Delta(\beta_1^c)/2$ и $\overline{\beta}_2^c + \Delta(\beta_2^c)/2$ (где $\overline{\beta}_p^c$ — значение середины интервала $[\beta_p^{\min}, \beta_p^{\max}]$), подавляющее большинство точек «возмущенной» функции заключено внутри «коридора ошибок») (см. рис. 28). Этим и объясняется то, что часто у разных авторов результаты интерпретации с ошибками, оцененными методами дифференциальных поправок или Монте-Карло, не согласуются между собой в пределах ошибок (см., например, работу (Popper, 1984), в которой показано, что внутренние и внешние ошибки параметров затменных систем различаются в 3–5 раз). Метод доверительных областей дает более надежные оценки ошибок параметров.

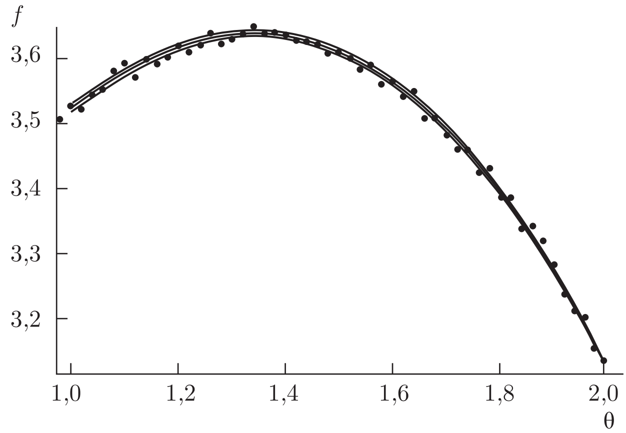


Рис. 27. Использование метода дифференциальных поправок. Приведена линейная (по параметрам β_1, β_2) функция $f(\theta, \beta_1, \beta_2) = \beta_1/(1+\theta^2) + \beta_2 \sin\theta$, построенная при значениях параметров $\beta_1 - \sigma$ и $\beta_2 - \sigma$, β_1, β_2, $\beta_1 + \sigma$ и $\beta_2 + \sigma$. Случайный разброс точек подчиняется гауссовой статистике с величиной $\sigma_{\text{theor}} = 0{,}03$. Приняты следующие численные значения параметров: $\beta_1 = 2{,}0000 \pm 0{,}001600$, $\beta_2 = 2{,}9991 \pm 0{,}001278$. Показан «коридор» теоретических кривых, соответствующих границам доверительных интервалов для параметров (кривые почти сливаются)

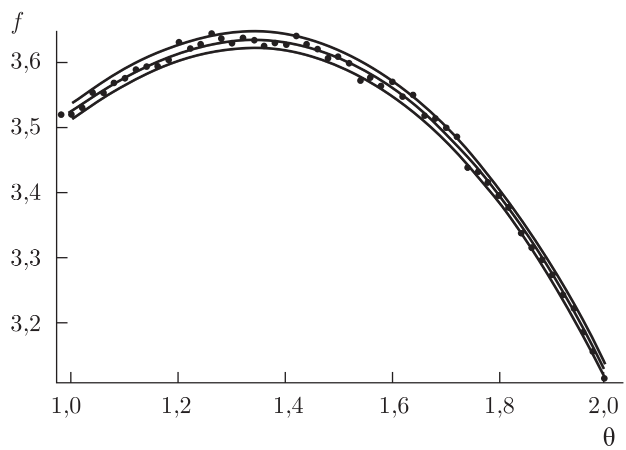


Рис. 28. Использование метода доверительных областей в статистике χ^2_M. Приведена линейная функция $f(\theta, \beta_1, \beta_2) = \beta_1/(1+\theta^2) + \beta_2 \sin\theta$, построенная при значениях параметров $\beta_1 - \Delta/2$, $\beta_2 - \Delta/2$, β_2, β_1, $\beta_1 + \Delta/2$, $\beta_2 + \Delta/2$. Случайный разброс точек подчиняется гауссовой статистике с $\sigma_{\text{theor}} = 0{,}03$. Приняты следующие численные значения параметров: $\beta_1 = 2{,}0000 \pm 0{,}01083$, $\beta_2 = 2{,}9991 \pm 0{,}008798$. Показан «коридор» теоретических кривых, соответствующих границам доверительных интервалов для параметров

Возвращаясь к надежности значений полуширины интервалов ошибок параметров, отметим, что в методах дифференциальных поправок и Монте-Карло число одновременных попаданий истинных значений параметров во все интервалы ошибок N_{all} заметно ниже (на ~ 20–$30\,\%$) числа попаданий, соответствующего заявленной вероятности γ. Тогда как число попаданий в индивидуальный интервал ошибки $\overline{\beta}^c_p \pm \sigma\left(\beta^c_p\right)$ в методах дифференциальных поправок и Монте-Карло соответствует заявленной вероятности γ. В то же время, в методе доверительных областей число попаданий в проекции доверительной области на оси параметров превышает заявленную вероятность γ, однако при этом гарантируется, что все точные значения параметров задачи одновременно попадают в доверительную область с заявленной вероятностью γ, а в объемлющий ее параллелепипед — с вероятностью больше γ.

Отметим, что нелинейность задачи относительно параметров приводит к тому, что доверительная область несимметрична относительно центрального значения, тогда как в линейном случае доверительная область строго симметрична относительно осей параметров β_p.

12. Интерпретация наблюдаемой кривой блеска классической затменной системы YZ Cas

Был проведен анализ кривой блеска затменной двойной системы YZ Cas, полученной в красном фильтре ($\lambda \cong 6700$ Å) Кроном (Kron, 1942). Наблюдаемая кривая блеска $\xi_1, \ldots, \xi_{42}$ включает в себя 42 нормальных точки. Центральное значение каждой нормальной точки получено усреднением $N_m{=}12$ индивидуальных измерений блеска ($m = 1, \ldots, 42$). За оценку дисперсии каждого измерения в шкале интенсивностей принято $\left(\sigma_m^{\text{obs}}\right)^2 = 1{,}5015 \cdot 10^{-6}$. В модели с линейным потемнением к краю в нашей постановке обратной задачи интерпретации кривой блеска имеется семь искомых параметров (см. выше). Три из них входят в задачу нелинейно: r_1, r_2, i, а четыре — линейно: $X_0^{(1)} = I_0^{(1)}\left(1 - x_1\right)$, $X_1^{(1)} = I_0^{(1)} x_1$, $X_0^{(2)} = I_0^{(2)}\left(1 - x_2\right)$, $X_1^{(2)} = I_0^{(2)} x_2$. Здесь r_1, r_2 — радиусы звезд в долях радиуса относительной орбиты, i — наклонение орбиты $I_0^{(1)}, I_0^{(2)}$ — центральные яркости на диске первой и второй компонент, x_1, x_2 — коэффициенты потемнения к краю дисков первой и второй компонент. Один из линейных параметров может быть исключен с помощью условия нормировки суммарной светимости компонент на единицу. Поэтому в нашей задаче имеется шесть независимых искомых параметров: три нелинейных и три линейных. Напомним, что в такой постановке задача нахождения ошибок нелинейных параметров может быть решена на строгом математическом уровне, поскольку минимизация функционала невязки R по линейным параметрам не меняет соответствующего статистического распределения, а лишь уменьшает число степеней свободы этого распределения.

Методом наименьших квадратов на основе анализа кривой блеска по всем шести параметрам получены центральные значения искомых параметров задачи. Далее, методом дифференциальных поправок получены среднеквадратичные оценки дисперсий с помощью формулы (309′). Найденная при этом по формуле (308′) среднеквадратичная оценка корня квадратного из дисперсии единицы веса составляет $v_0 = 0{,}003422904$. Методом доверительных областей с помощью статистики Фишера, минимизированной по линейным параметрам (323), получены одномерные проекции доверительной области на уровне доверия $\gamma = 0{,}6827$, с использованием формулы (для примера, выбран параметр r_1)

$$D_{r_1} = \left\{ r_1 : \widehat{R}\left(r_1, \widehat{r}_2\left(r_1\right), \widehat{i}\left(r_1\right)\right) \leqslant \Delta_0 \right\},$$

где $\widehat{r}_2\left(r_1\right)$, $\widehat{i}\left(r_1\right)$ — те значения r_2 и i, в которых достигает минимума функционал невязки $\widehat{R}\left(r_1, r_2, i\right)$ при фиксированном r_1, Δ_0 — квантиль распределения Фишера, соответствующий заданному уровню доверия $\gamma = 0{,}6827$. Результаты представлены в табл. 13.

Поскольку для исследования в рамках статистик χ_P^2 и χ_M^2 требуется знание дисперсии единицы веса, которая заранее точно неизвестна, была исследована модельная

Таблица 13

Параметры системы YZ Cas, полученные из анализа наблюдаемой кривой блеска $\lambda = 6700\,\AA$ (Kron, 1942)

Метод	r_1	r_2	i
Дифференциальных поправок	$0{,}14408 \pm 0{,}00023$	$0{,}07556 \pm 0{,}00038$	$88{,}27^\circ \pm 0{,}090^\circ$
Доверительных областей, статистика $F_{M-3,N-M}$ ($\gamma = 68{,}2\,\%$)	$0{,}1441 \pm 0{,}0021$	$0{,}07547 \pm 0{,}0012$	$88{,}36^\circ \pm 0{,}5225^\circ$

двойная система, в которой значения фаз $\theta_1, \ldots, \theta_{42}$ совпадали с фазами наблюдаемой кривой блеска YZ Cas. Истинные значения параметров двойной системы полагались равными центральным значениям, полученным при интерпретации кривой блеска. Корень квадратный из дисперсии единицы веса полагался равным его среднеквадратичной оценке v_0, полученной при интерпретации наблюдаемой кривой блеска: $\varepsilon_0 = 0{,}003422904$. Весовые коэффициенты w_m и количество измерений в каждой фазе $N_1, \ldots, N_{42}$ были положены равными 12. Для данной модельной системы методом дифференциальных поправок получены дисперсии σ с помощью формулы (309'). Далее, методом доверительных областей с помощью статистики χ^2_M, минимизированной по линейным параметрам (322), а также с помощью статистики χ^2_P $(p = 3)$ получены одномерные проекции доверительной области на уровне доверия $\gamma = 0{,}6827$. Полученные результаты приведены в табл. 14.

Таблица 14

Параметры модельной двойной системы YZ Cas

Метод	r_1	r_2	i
Дифференциальных поправок	$0{,}14422 \pm 0{,}00023$	$0{,}07557 \pm 0{,}00038$	$88{,}28^\circ \pm 0{,}091^\circ$
Монте-Карло	$0{,}14422 \pm 0{,}00023$	$0{,}07557 \pm 0{,}00038$	$88{,}28^\circ \pm 0{,}085^\circ$
Доверительных областей, статистика χ^2_P ($P = 3$, $\gamma = 68{,}27\,\%$)	$0{,}14450 \pm 0{,}00043$	$0{,}07579 \pm 0{,}00073$	$88{,}17^\circ \pm 0{,}17^\circ$
Доверительных областей, статистика χ^2_{M-3} ($\gamma = 68{,}27\,\%$)	$0{,}14448 \pm 0{,}0012$	$0{,}07564 \pm 0{,}0019$	$88{,}19^\circ \pm 0{,}46^\circ$

В ходе численного эксперимента, выполнена одна тысяча реализаций модельной кривой блеска YZCas $\xi_1^j, \ldots, \xi_{42}^j$. Проведена интерпретация каждой реализации модельной кривой блеска и подсчитано число попаданий истинных значений параметров $\overline{r}_1, \overline{r}_2, \overline{i}$ в интервалы ошибок, полученные в рамках каждого исследуемого метода.

Для наглядности сравнения результатов каждого метода задача интерпретации кривой блеска YZ Cas рассматривалась как двухпараметрическая (в этом случае двумерная доверительная область для искомых параметров может быть изображена на бумаге). Один параметр фиксировался и предполагался равным найденному центральному значению, а остальные два предполагались неизвестными, и проводилось построение соответствующей двумерной доверительной области (сечения соответствующей трехмерной, доверительной области).

Результаты анализа кривой блеска YZ Cas в рамках двухпараметрической модели представлены в таблицах 15 и 16.

Таблица 15

Результаты интерпретации кривой блеска YZ Cas из работы (Kron, 1942) по двум параметрам — радиусам компонент. Здесь N — число совместных попаданий в доверительную область

Метод	$\Delta r_1/2$; $(N_{\Delta r_1})$	$\Delta r_2/2$; $(N_{\Delta r_2})$	N
Дифференциальных поправок	$0{,}6687 \cdot 10^{-4}$ (687)	$0{,}1089 \cdot 10^{-3}$ (693)	543
Монте-Карло	$0{,}6639 \cdot 10^{-4}$ (683)	$0{,}1082 \cdot 10^{-3}$ (687)	535
Доверительных областей, статистики χ^2_P	$1{,}013 \cdot 10^{-4}$ (868)	$0{,}1649 \cdot 10^{-3}$ (870)	687
Доверительных областей, статистика χ^2_M	$2{,}284 \cdot 10^{-4}$ (714)	$0{,}3720 \cdot 10^{-3}$ (719)	681
Доверительных областей, статистика $F_{M,N-M}$	$2{,}294 \cdot 10^{-4}$ (717)	$0{,}3737 \cdot 10^{-3}$ (714)	685

Таблица 16

Результаты интерпретации кривой блеска YZ Cas из работы (Kron, 1942) по двум параметрам — радиусу второй звезды r_2 и наклонению орбиты. Здесь N — число совместных попаданий в доверительную область

Метод	$\Delta r_2/2$; $(N_{\Delta r_2})$	i; (N_i)	N
Дифференциальных поправок	$0{,}7920 \cdot 10^{-4}$ (675)	$88{,}2836° \pm 0{,}0305°$ (696)	472
Монте-Карло	$0{,}8021 \cdot 10^{-4}$ (686)	$88{,}2700° \pm 0{,}02851°$ (682)	491
Доверительных областей, статистики χ^2_P	$1{,}2030 \cdot 10^{-4}$ (868)	$88{,}2821° \pm 0{,}04663°$ (874)	676
Доверительных областей, статистика χ^2_M	$2{,}2260 \cdot 10^{-4}$ (711)	$88{,}2915° \pm 0{,}0862$ (717)	683
Доверительных областей, статистика $F_{M,N-M}$	$2{,}0630 \cdot 10^{-4}$ (720)	$88{,}2911° \pm 0{,}07988$ (716)	687

На рис. 29 приведена доверительная область для параметров r_1 и r_2, полученная при интерпретации наблюдаемой кривой блеска YZ Cas в рамках статистики χ^2_P и статистики χ^2_M. Сплошной внутренний квадрат здесь изображает доверительную область, построенную на основе методов дифференциальных поправок и Монте-Карло. На рис. 30 приведена доверительная область для параметров r_2, i, найденная при интерпретации наблюдаемой кривой блеска YZ Cas в рамках статистики χ^2_P и χ^2_M. Сплошной внутренний квадрат изображает доверительную область, полученную на основе методов дифференциальных поправок и Монте-Карло. Видно, что размеры доверительной области в статистике χ^2_M в среднем в ~ 2 раза больше, чем в статистике χ^2_P. Как показали численные эксперименты, число попаданий точных параметров в доверительные области, полученные в статистиках χ^2_P и χ^2_M, одинаково и соответствует заявленной вероятности $\gamma = 68{,}2\,\%$. В то же время, число попаданий в доверительную область, полученную на основе методов дифференциальных поправок и Монте-Карло, меньше заявленной вероятности $\gamma = 68{,}2\,\%$ (составляет $\sim 50\,\%$).

Следует отметить, что в случае затменных систем и высокоточных кривых блеска, нелинейность обратной параметрической задачи слабо влияет на отклонение числа

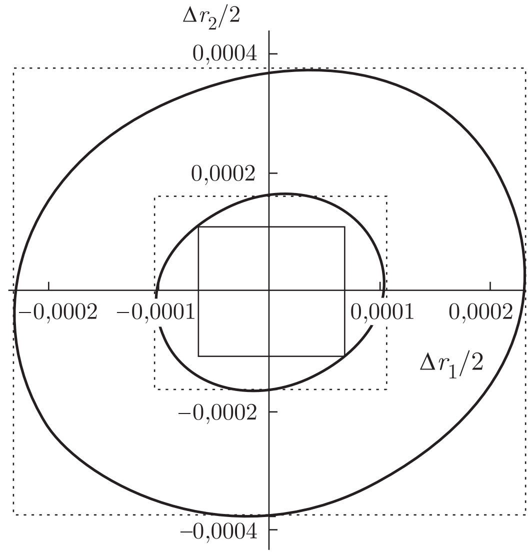


Рис. 29. Доверительная область для параметров r_1 и r_2, построенная при интерпретации наблюдаемой кривой блеска системы YZ Cas (Kron, 1942) в рамках статистики χ_P^2 (малый эллипс) и статистики χ_M^2 (большой эллипс). Прямоугольник из сплошных прямых — доверительная область, построенная на основе метода дифференциальных поправок. Прямоугольники из точечных линий соответствуют объемлющим доверительные области параллелепипедам, габариты которых определяются проекциями доверительной области на оси параметров r_1 и r_2

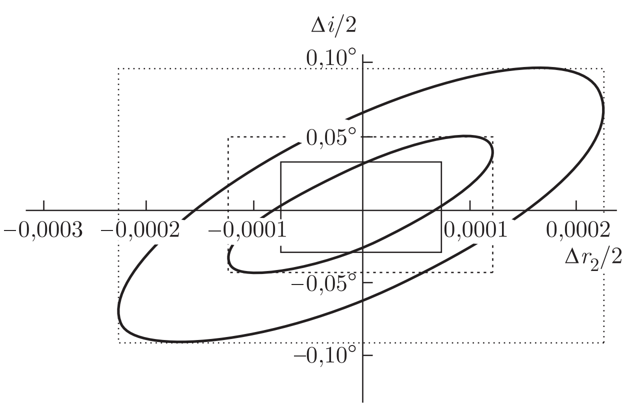


Рис. 30. Доверительная область для параметров r_2, i, полученная при интерпретации наблюдаемой кривой блеска системы YZ Cas (Kron, 1942) в рамках статистики χ_P^2 (малый эллипс) и статистики χ_M^2 (большой эллипс). Прямоугольник из сплошных линий соответствует доверительной области, построенной на основе метода дифференциальных поправок. Прямоугольники из точечных линий соответствуют объемлющим доверительные области параллелепипедам, габариты которых определяются проекциями доверительной области на оси параметров r_2, i

попаданий и, следовательно, приближение, в котором применяются формулы (309′), (305′) для оценки дисперсии $\sigma\left(\beta_p^c\right)$ в методе дифференциальных поправок, можно считать допустимым. Как уже отмечалось, нелинейность задачи относительно параметров проявляется в асимметричности доверительной области относительно центрального значения.

13. Поиск коэффициентов потемнения к краю компонент затменной системы YZ Cas

Мы описали результаты интерпретации кривой блеска системы YZ Cas, соответствующие случаю, когда ищутся значения нелинейных параметров r_1, r_2, i и их доверительные интервалы при произвольных значениях остальных трех линейных параметров, по которым проводится минимизация функционала невязки. В данном случае искомая шестимерная доверительная область для параметров проектируется на гиперплоскость нелинейных параметров r_1, r_2, i. Изящество такого подхода состоит в том, что в этом случае задача нахождения доверительной области для нелинейных параметров r_1, r_2, i решается точно, ввиду того, что минимизация функционала невязки по линейным параметрам не меняет соответствующего статистического распределения, а лишь уменьшает число степеней свободы этого распределения.

Если мы хотим найти доверительные интервалы для всех шести параметров задачи, мы должны иметь дело с невязками, минимальными не только по линейным, но и по нелинейным параметрам. Поскольку минимизация функционала невязки по нелинейным параметрам изменяет соответствующее статистическое распределение, получаемая при этом доверительная область (и соответствующие ей доверительные интервалы) является приближенной и должна пониматься в асимптотическом смысле: вероятность накрытия точного решения в данном случае лишь стремится к заданному уровню доверия $\gamma = 1 - \alpha$ при $M \to \infty$, где M — число точек на кривой блеска. В работе Абубекерова и др. (2009б) выполнена интерпретация наблюдаемой кривой блеска системы YZ Cas $\lambda = 6700$ Å в рамках шестипараметрической задачи. Найдены значения радиусов компонент, наклонения орбиты и коэффициентов потемнения к краю компонент, а также оценены их доверительные интервалы. Центральные значения искомых параметров и их доверительные интервалы представлены в табл. 17.

Таблица 17

Результаты интерпретации наблюдаемой кривой блеска системы YZ Cas (Kron, 1942) в рамках линейного закона потемнения к краю

Метод	r_1	r_2	i	x_1	x_2
Дифференциальных поправок (σ_{est})	$0{,}14408 \pm$ $\pm 0{,}00023$	$0{,}07556 \pm$ $\pm 0{,}00038$	$88{,}27° \pm 0{,}090°$	$0{,}2998 \pm$ $\pm 0{,}02115$	$0{,}4071 \pm$ $\pm 0{,}1172$
Доверительных областей, $F_{M,N-M}$ ($\gamma = 68{,}2\,\%$)	$0{,}1442 \pm$ $\pm 0{,}00217$	$0{,}07554 \pm$ $\pm 0{,}00114$	$88{,}37° \pm 0{,}57°$	$0{,}2917 \pm$ $\pm 0{,}1199$	$0{,}1959 \pm$ $\pm 0{,}7666$

Примечание: В случае метода доверительных областей приводятся значения параметров, соответствующих серединам доверительных интервалов (а не значения, определяемые минимумом функционала невязки).

Поскольку для исследования в рамках статистик χ^2_P и χ^2_M требуется знание дисперсии единицы веса, которая в случае реальной наблюдаемой кривой блеска точно неизвестна, была исследована модельная двойная система, в которой значения фаз $\theta_1, \ldots, \theta_{42}$ совпадали с фазами наблюдаемой кривой блеска YZ Cas. Истинные значения параметров системы полагались равными центральным значениям, полученным при интерпретации кривой блеска: $\overline{r}_1 = 0{,}14408$, $\overline{r}_2 = 0{,}07556$, $\overline{i} = 88{,}27°$, $\overline{x}_1 = 0{,}2998$, $\overline{x}_2 = 0{,}4071$. Корень квадратный из дисперсии единицы веса полагался равным его среднеквадратичной оценке, полученной при такой интерпретации наблюдаемой кривой блеска: $v_0 = 0{,}003422904$. Весовые коэффициенты w_m и количество измерений в каждой фазе $N_1, \ldots, N_{42}$ были положены равными 12. Далее данная модельная система именуется как «модельная».

Для этой модельной системы методом дифференциальных поправок, методом доверительных областей в рамках статистик χ^2_M, χ^2_P и в статистике Фишера $F_{N,M-N}$ получены интервалы ошибок параметров как одномерные проекции доверительной области на уровне доверия $\gamma = 0{,}6827$. Отметим, что интервалы ошибок параметров, полученные на основе модельной кривой блеска отличаются от соответствующих интервалов ошибок, полученных по наблюдаемой кривой блеска, вследствие разной реализации случайного процесса (кривой блеска), несмотря на то, что в модельной кривой блеска корень квадратный из дисперсии единицы веса v_0 был положен равным его среднеквадратичной оценке для наблюдаемой кривой блеска ($v_0 = 0{,}003422904$).

Результаты интерпретации модельной кривой блеска YZ Cas приведены в табл. 18. Отметим, что интервалы ошибок, полученные в рамках метода доверительных областей, зависят от реализации модельной кривой блеска. Результаты, приведенные в табл. 18, получены по одной и той же реализации модельной кривой блеска YZ Cas.

Таблица 18

Результаты интерпретации модельной кривой блеска YZ Cas в рамках линейного закона потемнения к краю. Значение корня квадратного из дисперсии единицы веса принято равным $v_0 = 0{,}003422904$

Параметр	Метод дифференциальных поправок	Метод доверительных областей χ^2_P	Метод доверительных областей χ^2_M	Метод доверительных областей $F_{M,N-M}$
r_1	$0{,}14422 \pm 0{,}00023$	$0{,}1439 \pm 0{,}00103$	$0{,}1439 \pm 0{,}001247$	$0{,}1445 \pm 0{,}0011$
r_2	$0{,}07557 \pm 0{,}00038$	$0{,}07538 \pm 0{,}000641$	$0{,}07539 \pm 0{,}0007767$	$0{,}07564 \pm 0{,}00070$
i	$88{,}28^\circ \pm 0{,}091^\circ$	$88{,}42^\circ \pm 0{,}27^\circ$	$88{,}43^\circ \pm 0{,}33^\circ$	$88{,}19^\circ \pm 0{,}30^\circ$
x_1	$0{,}3052 \pm 0{,}01442$	$0{,}3013 \pm 0{,}05321$	$0{,}3002 \pm 0{,}06488$	$0{,}3007 \pm 0{,}0589$
x_2	$0{,}3759 \pm 0{,}1184$	$0{,}3403 \pm 0{,}3280$	$0{,}3213 \pm 0{,}4015$	$0{,}3316 \pm 0{,}3637$

На рис. 31 и 32 представлены невязки, полученные в рамках метода χ^2_M при вычислении коэффициентов потемнения к краю x_1 и x_2 (невязки минимальны по всем остальным параметрам: $r_1, r_2, i, I_0^{(1)}/I_0^{(2)}$) на основе модельной кривой блеска YZ Cas. Из рисунков видно, что модель может быть отвергнута при весьма большом уровне значимости $\alpha = 0{,}3173$ (соответствующее минимальное значение приведенного хи-квадрат равно $\sim 1{,}1$). Поэтому модель с большими основаниями можно считать адекватной «наблюдениям», а также можно определить доверительную область для искомых параметров на уровне доверия $\gamma = 0{,}6827$, которая является непустой. Однако в случае коэффициента потемнения меньшей звезды x_2 (который находится из анализа вторичного минимума кривой блеска с полным затмением), значение x_2 простирается до отрицательных величин (x_2 заключено в интервале от $-0{,}0802$ до $0{,}7228$), что противоречит физической области значений $x_2 \geqslant 0$. Таким образом, данная точность наблюдаемой кривой блеска ($v_0 = 0{,}003423$) не позволяет надежно вычислить значение коэффициента линейного потемнения x_2 для звезды меньшего радиуса из анализа вторичного минимума кривой блеска (полное затмение). В то же время, коэффициент потемнения к краю большей звезды (кольцевое затмение) при данной точности наблюдаемой кривой блеска ($v_0 = 0{,}003423$) определяется надежно: $x_1 = 0{,}3002 \pm 0{,}06488$.

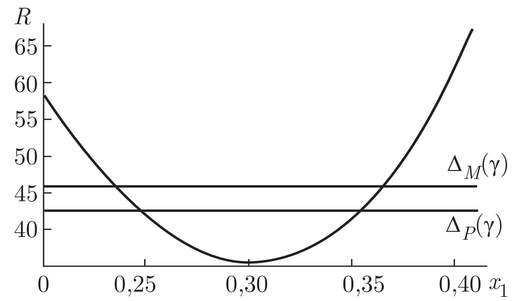


Рис. 31. Модельная «наблюдаемая» кривая блеска системы YZ Cas. Невязка R в рамках метода χ^2_M (M = 42) для коэффициента потемнения к краю x_1 первичной компоненты (звезды с большим радиусом), минимальная по всем остальным параметрам (r_1, r_2, i, x_2, $I_0^{(1)}/I_0^{(2)}$). Среднеквадратичная оценка корня квадратного из дисперсии единицы веса для кривой блеска $v_0 = 0{,}003423$. Горизонтальные прямые соответствуют квантилям статистик χ^2_M и χ^2_P для уровня доверия $\gamma = 0{,}6827$ (при использовании статистики χ^2_P квантиль $\Delta_P(\gamma)$ откладывается от минимума кривой невязок)

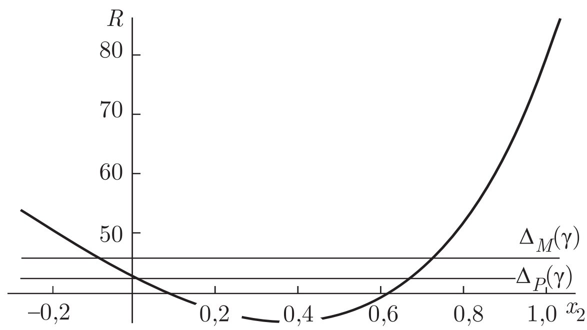


Рис. 32. Двойная система YZ Cas. Модельная «наблюдаемая» кривая блеска. Невязка R в рамках статистики с законом распределения χ^2_M ($M = 42$) для коэффициента потемнения к краю x_2 второй компоненты (звезда с меньшим радиусом), минимизированная по всем остальным параметрам задачи $\left(r_1, r_2, i, x_1, I_0^{(1)}/I_0^{(2)}\right)$. Корень квадратный из среднеквадратичной оценки дисперсии единицы веса кривой блеска соответствует $v_0 = 0{,}003423$. Прямые линии — квантили для законов распределения χ^2_M и χ^2_P для уровня доверия $\gamma = 0{,}6827$ (при использовании статистики χ^2_P величина $\Delta_P(\gamma)$ отсчитывается от минимума невязки)

Как следует из табл. 18, ошибки величин x_1, x_2, найденные методом дифференциальных поправок (в рамках «внутренней» статистики нормального распределения), значительно меньше, чем ошибки, найденные методом доверительных областей в рамках статистики χ^2_M (в данном случае указаны проекции шестимерной доверительной области на оси параметров x_1, x_2). Выбирая значения ошибок, найденных методами дифференциальных поправок или Монте-Карло, мы должны иметь в виду, что это всего лишь внутренние ошибки, которые могут быть значительно меньше внешних ошибок параметров, найденных из анализа другой реализации кривой блеска (например, полученной в другую эпоху).

Была также проверена надежность интервалов ошибок параметров x_1, x_2, вычисленных в рамках каждого метода. Для этого выполнено десять тысяч возмущений модельной кривой блеска YZ Cas (при $v_0 = 0{,}003422904$), вычисленной с «истинными» значениями параметров, за которые приняты найденные центральные значения (см. табл. 18): $\overline{r}_1 = 0{,}14422$, $\overline{r}_2 = 0{,}07557$, $i = 88^\circ 28$, $x_1 = 0{,}3052$, $x_2 = 0{,}3759$. Проведен подсчет числа попаданий «истинных» значений параметров в соответствующие доверительные области и их проекции. Доверительные интервалы вычислены как проекции на оси координат x_1, x_2 шестимерных доверительных областей, полученных с помощью статистик χ^2_P, χ^2_M и статистики Фишера $F_{M,N-M}$ путем решения соответствующих неравенств относительно $r_1, r_2, i, x_1, x_2, I_0^{(1)}/I_0^{(2)}$. Результаты представлены в табл. 19.

Таблица 19

Значения полуинтервалов ошибок коэффициентов потемнения к краю компонент затменной системы YZ Cas, полученные при интерпретации модельной кривой блеска в рамках линейного закона потемнения к краю, и количество попаданий $N_{\Delta x_1}$ и $N_{\Delta x_2}$ в данные интервалы «истинных» значений параметров

Метод	$N_{\Delta x_1}$	$x_1 \pm \Delta x_1$	$N_{\Delta x_2}$	$x_2 \pm \Delta x_2$	N
Дифференциальных поправок	6892	$0{,}3052 \pm 0{,}01942$	6957	$0{,}3759 \pm 0{,}1184$	4916
Монте-Карло	6899	$0{,}3009 \pm 0{,}02011$	6884	$0{,}4934 \pm 0{,}1056$	4871
Доверительных областей, χ^2_P	9722	$0{,}3013 \pm 0{,}05321$	9842	$0{,}3403 \pm 0{,}3280$	9634 (6898)
Доверительных областей, χ^2_M	8234	$0{,}3002 \pm 0{,}06488$	8413	$0{,}3213 \pm 0{,}4015$	8166 (6858)
Доверительных областей, $F_{M,N-M}$	8112	$0{,}3007 \pm 0{,}0589$	8306	$0{,}3316 \pm 0{,}3637$	8060 (6827)

N — число совместных попаданий «истинных» значений во все интервалы ошибок; $v_0 = 0{,}003422904$. В скобках указано число попаданий «истинных» значений в доверительную область D.

Из табл. 19 видно, что число попаданий «истинных» значений параметров в индивидуальные интервалы ошибок в случае методов дифференциальных поправок и Монте-Карло соответствует заявленной вероятности $\gamma = 68{,}2\,\%$, однако число совместных попаданий меньше заявленной вероятности γ ($N \simeq 4900$, что на $\sim 30\,\%$ меньше значения $N \simeq 6800$, соответствующего заявленной вероятности $\gamma = 0{,}6827$). Напомним, что доверительные интервалы параметров x_1, x_2 в данном случае являются проекцией шестимерной доверительной области D параметров $r_1, r_2, i, x_1, x_2, I_0^{(1)}/I_0^{(2)}$ на оси параметров x_1 и x_2. Попадание в шестимерную доверительную область D полностью соответствует заданному уровню доверия $\gamma = 68{,}2\,\%$. Поскольку двумерной проекцией доверительной области на плоскость параметров x_1, x_2 является вытянутый «эллипс», то число попаданий в проекцию «эллипса» на оси параметров x_1 и x_2 заметно превышает заданный уровень доверия $\gamma = 68{,}2\,\%$. Аналогичная ситуация имеет место и в случае статистики χ^2_P. Поэтому ошибки параметров, полученные методом доверительных областей соответствуют уровню доверия $\gamma' > \gamma$, и с точки зрения надежности результатов интерпретации являются наиболее предпочтительными. На рис. 33 приведено сравнение проекций доверительных областей для параметров r_1 и x_1, полученных разными методами. Здесь центральный квадрат соответствует доверительной области, полученной на основе методов дифференциальных поправок и Монте-Карло.

Используя верхние и нижние границы значений параметров r_1, r_2, x_1, x_2 из табл. 18 при фиксированном значении наклонения орбиты $i = 88{,}28^\circ$ (см. также рис. 33), построены соответствующие теоретические кривые блеска (рис.34). Данные

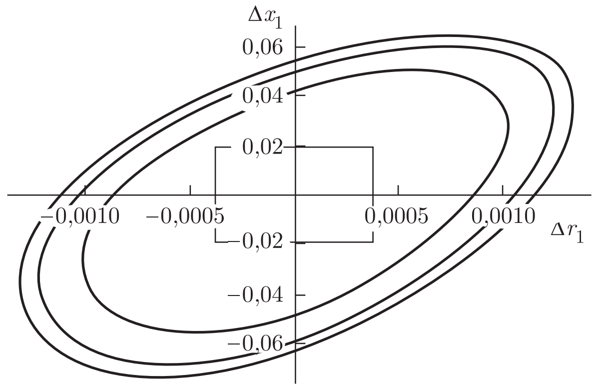


Рис. 33. Проекция шестимерной доверительной области параметров $r_1, r_2, i, x_1, x_2, I_0^1/I_0^2$ на плоскость параметров r_1, x_1, полученная при интерпретации модельной «наблюдаемой» кривой блеска системы YZ Cas в рамках статистики, распределенной по закону χ^2_P (малый «эллипс»), статистики с законом распределения Фишера $F_{M,N-M}$ (средний «эллипс») и χ^2_M (большой «эллипс»). Прямоугольник в центре — доверительная область, полученная в рамках метода дифференциальных поправок или метода Монте-Карло. Показаны отклонения параметров от центральных значений. Принят корень квадратный из дисперсии единицы веса кривой блеска $v_0 = 0{,}003423$. Доверительные интервалы полученные методами дифференциальных поправок или Монте-Карло (использующие статистику нормального распределения и жесткое предположение об идеальности модели) накрывают точные значения параметров с заданной вероятностью $\gamma = 0{,}68$, в то время как соответствующая доверительная область (прямоугольник в центре) накрывает точное решение (совокупность всех параметров) с вероятностью, меньшей γ, составляющей 0,49. Доверительные области D, полученные на основе статистик χ^2_P, $F_{M,N-M}$, χ^2_M, накрывают точное решение (совокупность всех параметров) с заданной вероятностью $\gamma = 0{,}68$, в то время как соответствующие доверительные интервалы (проекции доверительной области D на оси параметров r_1 и x_1) накрывают точные значения параметров с вероятностью, большей γ, а именно: соответственно 0,9904 и 0,9722 — для статистики χ^2_P, 0,8456 и 0,8234 — для статистики χ^2_M, 0,8368 и 0,8112 — для статистики $F_{M,N-M}$

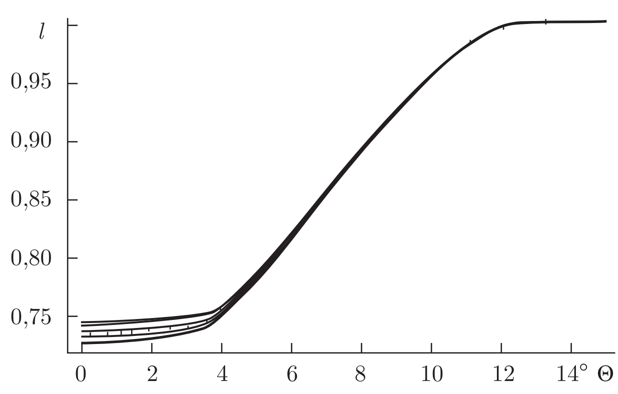


Рис. 34. Главный минимум (кольцевое затмение) «наблюдаемой» модельной кривой блеска системы YZ Cas. Показаны теоретические кривые блеска, вычисленные с максимальными и минимальными значениями параметров r_1, r_2, x_1, x_2, лежащими на концах доверительных интервалов, которые вычислены с использованием статистики χ^2_M (внешние кривые), χ^2_P (промежуточные кривые), а также методом дифференциальных поправок (внутренние кривые). Принятое значение среднеквадратичной оценки корня квадратного из дисперсии единицы веса $v_0 = 0{,}003423$

теоретические кривые блеска образовали «коридоры ошибок», в которых находятся «наблюдаемые» значения данной реализации кривой блеска. Из рис. 34 видно, что в случае метода дифференциальных поправок «коридор ошибок» достаточно узок, и некоторые «наблюдаемые» точки кривой блеска данной реализации плотно прилегают к стенкам «коридора ошибок». При следующей реализации «наблюдаемой» кривой блеска некоторые значения блеска могут выйти за пределы этого «коридора ошибок».

Аналогичный «коридор ошибок» для параметров r_1, r_2, x_1, x_2, полученный в рамках метода доверительных областей на основе статистики χ^2_M (рис. 34), значительно шире и позволяет учесть статистический разброс разных реализаций кривой блеска.

Подчеркнем еще раз, что, выбирая значения ошибок параметров, найденных методами дифференциальных поправок или Монте-Карло, мы должны помнить, что это всего лишь внутренние ошибки, которые могут не перекрываться с внутренними же ошибками параметров, найденными из анализа другой реализации кривой блеска (например, полученной в другую эпоху). Вероятность совместного попадания истинных значений параметров во все интервалы ошибок в методах дифференциальных поправок и Монте-Карло существенно (в $\sim 1{,}3$ раза) меньше, чем в каждый интервал ошибки в отдельности.

14. Аналитическое соотношение между интервалами ошибок, полученными с использованием статистик, распределенных по законам χ^2_M, χ^2_P, и методом дифференциальных поправок

Выше, на основе численного эксперимента, мы убедились, что в среднем величины интервала ошибки, полученного в методе доверительных областей на основе статистики, распределенной по закону χ^2_M, где M — число точек измерения (далее по тексту — метод χ^2_M), превышает интервал ошибки метода дифференциальных поправок в 3–5 раз. Также величина интервала ошибки, полученного в методе доверительных областей на основе статистики, распределенной по закону χ^2_M в среднем превышает величину интервала ошибки, полученного в методе доверительных областей на основе статистики, распределенной по закону χ^2_P, где P — число искомых параметров (далее по тексту — метод χ^2_P). При этом размеры доверительных интервалов, полученных в рамках метода наименьших квадратов с использованием точных значений дисперсии и на основе статистики с законом распределения χ^2_P, не зависят от выборки случайных величин, в отличие от доверительных интервалов, которые получены в рамках метода на основе статистики с законом распределения χ^2_M и которые сами являются случайными величинами. В работе (Абубекеров и др., 2009б) выведено строгое аналитическое соотношение между интервалами ошибок в рамках различных методов для линейной модели. Для нелинейной модели эти результаты справедливы лишь приближенно, в асимптотическом смысле (см. выше). Выведем функцию $a_p(t)$ распределения отношения случайной величины доверительного интервала в методе χ^2_M к величине доверительного интервала в методе χ^2_P. Величина доверительного интервала в методе χ^2_P для одномерной задачи ($P = 1$) совпадает с доверительным интервалом в рамках метода наименьших квадратов, а в случае произвольного P эти интервалы связаны определенной зависимостью (см. ниже). Также исследуем поведение функции $a_p(t)$ в зависимости от числа точек наблюдения M и выбранного уровня доверия γ.

Рассмотрим вначале одномерный случай. Выпишем невязку в однопараметрической линейной модели, квадратично зависящую от одного параметра α. Также положим, для удобства в нашей модели $\varepsilon_0 = 1$ (при этом все нижесказанное остается справедливым при любом значении ε_0). Указанную невязку можно записать в виде (что следует из выражения (300), где квадратичные по α члены не содержат случайных величин ξ):

$$R^{\text{lin}}(\alpha,\xi) = C\left(\alpha - \alpha^c(\xi)\right)^2 + R^{\text{lin}}_{\min}(\xi), \tag{341}$$

где $R^{\text{lin}}_{\min}(\xi)$ — минимальное значение невязки по α, достигаемое при $\alpha^c(\xi)$, а коэффициент C выражается определенным образом через заданные параметры модели (w и g) и не зависит от выборки случайных величин ξ.

Определим квантиль $\Delta_n(\gamma)$ для $\gamma \in (0.1)$ соотношением

$$\chi^2_n(\Delta_n(\gamma)) = \gamma,$$

т. е. как функцию, обратную χ^2_n.

Как показано выше, невязки распределены по следующим законам:

$$R^{\text{lin}}(\overline{\alpha},\xi) - R^{\text{lin}}_{\min}(\xi) \sim \chi^2_1, \tag{342}$$

$$R^{\text{lin}}(\overline{\alpha},\xi) \sim \chi^2_M, \tag{343}$$

$$R^{\text{lin}}_{\min}(\xi) \sim \chi^2_{M-1}, \tag{344}$$

где $\overline{\alpha}$ — истинное значение параметра α, а знак $\sim$ означает «распределено по закону».

Для наглядности, на рис. 35 изображена зависимость невязки $R(\alpha,\ \xi)$ от искомого параметра задачи α при фиксированной выборке случайных величин ξ и ее взаимосвязь с основными статистическими параметрами. Парабола, являющаяся графиком такой зависимости в случае линейной модели, при различных ξ может перемещаться в верхней полуплоскости, сохраняя при этом свою форму, так как коэффициент при квадратичном члене по α не зависит от ξ.

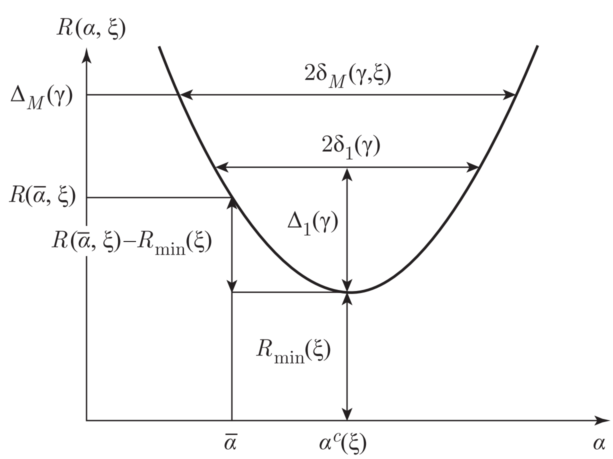


Рис. 35. Однопараметрическая обратная задача. Зависимость невязки $R(\alpha,\xi)$ от параметра задачи α при фиксированном значении вектора случайных величин ξ, а также основные статистические величины. $R_{\min}(\xi)$ — минимальное по параметру α значение невязки $R(\alpha,\xi)$. $\Delta_P(\gamma)$ $(P=1)$ — квантиль распределения χ^2_P $(P=1)$. $\Delta_M(\gamma)$ — квантиль распределения χ^2_M. $2\delta_1(\gamma)$, $2\delta_M(\gamma,\xi)$ — ширина доверительных интервалов, полученных методами, использующими статистики $[R(\overline{\alpha},\xi) - R_{\min}(\xi)]$, $R(\overline{\alpha},\xi)$ с законами распределения χ^2_P $(P=1)$ и χ^2_M соответственно

Величина интервала ошибки, полученного методом χ^2_1 при заданном уровне доверия γ, определяется как расстояние между корнями квадратного уравнения относительно α:

$$C\left(\alpha-\alpha^{c}(\xi)\right)^{2}+R_{\min}^{\mathrm{lin}}(\xi)=R_{\min}^{\mathrm{lin}}(\xi)+\Delta_{1}(\gamma). \tag{345}$$

Обозначим половину величины указанного интервала через $\delta_1(\gamma)$. Очевидно, что $\delta_1(\gamma)$ удовлетворяет соотношению

$$C\delta_{1}^{2}(\gamma)=\Delta_{1}(\gamma) \tag{346}$$

и не зависит от выборки случайных величин ξ. Отсюда находим константу C:

$$C=\frac{\Delta_{1}(\gamma)}{\delta_{1}^{2}(\gamma)}. \tag{347}$$

Величина интервала ошибки, полученного методом χ_M^2 при заданном уровне доверия γ, является расстоянием между корнями квадратного уравнения относительно α:

$$C\left(\alpha-\alpha^{c}(\xi)\right)^{2}+R_{\min}^{\mathrm{lin}}(\xi)=\Delta_{M}(\gamma). \tag{348}$$

Положим $\delta_M(\gamma,\ \xi)$ равным половине величины указанного интервала в том случае, когда последнее уравнение имеет положительные корни, (т. е. соответствующее доверительное множество не пустое) и нулю в противном случае. При этом для положительных значений $\delta_M(\gamma,\ \xi)$ справедливо соотношение

$$C\delta_{M}^{2}(\gamma,\xi)+R_{\min}^{\mathrm{lin}}(\xi)=\Delta_{M}(\gamma). \tag{349}$$

Величина $\delta_M(\gamma,\ \xi)$ зависит от случайных величин, и сама является случайной величиной. С учетом (344) можно записать:

$$\Delta_{M}(\gamma)-C\delta_{M}^{2}(\gamma,\xi)\sim\chi_{M-1}^{2}. \tag{350}$$

Последнее выражение означает, что вероятность

$$P\left(\left|\Delta_{M}(\gamma)-C\delta_{M}^{2}(\gamma,\xi)\right|<t\right)=\chi_{M-1}^{2}(t). \tag{351}$$

Путем несложных линейных и сдвиговых преобразований относительно t, а также используя (347), из последнего выражения получаем:

$$P\left(\frac{\delta_{M}^{2}(\gamma,\xi)}{\delta_{1}^{2}(\gamma)}>t\right)=\chi_{M-1}^{2}\left(\Delta_{M}(\gamma)-\Delta_{1}(\gamma)\,t\right). \tag{352}$$

При этом из (344) следует, что вероятность того, что $\delta_M(\gamma,\xi)>0$ (т. е. того, что доверительный интервал окажется непустым для заданного уровня доверия γ), равна $\chi_{M-1}^2\left(\Delta_M(\gamma)\right)$. Напомним, что $\Delta_M(\gamma)$ — это квантиль в рамках статистики χ_M^2, такой, что $\chi_M^2\left(\Delta_M(\gamma)\right)=\gamma$.

Соответствующая условная вероятность

$$P\left(\delta_{M}(\gamma,\xi)>0|\,\frac{\delta_{M}(\gamma,\xi)}{\delta_{1}(\gamma)}>t\right)=\frac{\chi_{M-1}^{2}\left(\Delta_{M}(\gamma)-\Delta_{1}(\gamma)\,t^{2}\right)}{\chi_{M-1}^{2}\left(\Delta_{M}(\gamma)\right)} \tag{353}$$

или

$$P\left(\delta_{M}(\gamma,\xi)>0|\,\frac{\delta_{M}(\gamma,\xi)}{\delta_{1}(\gamma)}\leqslant t\right)=1-\frac{\chi_{M-1}^{2}\left(\Delta_{M}(\gamma)-\Delta_{1}(\gamma)\,t^{2}\right)}{\chi_{M-1}^{2}\left(\Delta_{M}(\gamma)\right)}. \tag{354}$$

Правая часть последнего выражения представляет собой функцию распределения положительных значений величины $\delta_M(\gamma,\xi)/\delta_1(\gamma)$, являющейся отношением доверительного интервала, полученного на основе статистики, распределенной по закону χ_M^2, к соответствующему интервалу, полученному на основе статистики, распределенной по закону χ_1^2 для заданного уровня доверия γ. Соответствующая плотность распределения $a_1(t)$, полученная дифференцированием функции распределения (с точностью до нормировочного коэффициента A_1):

$$a_1(t) = A_1 \begin{cases} \exp\left[\frac{1}{2}\left(\Delta_1(\gamma)\, t^2 - \Delta_M(\gamma)\right)\right] t \left(\Delta_M(\gamma) - \Delta_1(\gamma)\, t^2\right)^{\frac{M-3}{2}} \\ \qquad\qquad \text{для } 0 < t < \sqrt{\dfrac{\Delta_M(\gamma)}{\Delta_1(\gamma)}}, \\ 0 \qquad\qquad \text{для } t \leqslant 0 \text{ или } t \geqslant \sqrt{\dfrac{\Delta_M(\gamma)}{\Delta_1(\gamma)}}. \end{cases}$$

Эта функция достигает максимума при

$$t_{\max,1} = \sqrt{\frac{2 - M + \Delta_M(\gamma) + \sqrt{(2-M)^2 + \Delta_M(\gamma)\left(-2M + \Delta_M(\gamma) + 8\right)}}{2\Delta_1(\gamma)}}. \qquad (355)$$

При этом, поскольку задача одномерная, доверительный интервал $\delta_1(\gamma)$ совпадает с интервалом, полученным методом наименьших квадратов для соответствующего уровня доверия γ.

Все выше сказанное можно обобщить для случая модели с P параметрами, получив распределение отношения проекции доверительной области, полученной методом χ_M^2 к соответствующей проекции области, полученной методом χ_P^2. Распределение соответствующих невязок:

$$R(\overline{\alpha}_1, \ldots, \overline{\alpha}_P, \xi) - R_{\min}(\xi) \sim \chi_P^2, \qquad (356)$$

$$R(\overline{\alpha}_1, \ldots, \overline{\alpha}_P, \xi) \sim \chi_M^2, \qquad (357)$$

$$R_{\min}(\xi) \sim \chi_{M-P}^2. \qquad (358)$$

Напомним, что под доверительным интервалом в методах χ_P^2 и χ_M^2 подразумевается проекция доверительной области, полученной на основе соответствующей статистики, на ось соответствующего параметра. Такая проекция находится как расстояние между корнями уравнения, полученного приравниванием невязки, минимизированной по всем параметрам кроме одного, к квантилю для выбранного уровня доверия.

Заменив во всем предыдущем выводе, кроме формул (342) и (343), $R(\alpha, \xi)$ на P — параметрическую невязку, минимизированную по всем параметрам α, кроме одного, а χ_1^2, χ_{M-1}^2, $\Delta_1(\gamma)$ и $\delta_1(\gamma)$ на χ_P^2, χ_{M-P}^2, Δ_P и $\delta_P(\gamma)$ соответственно, получим, что функция распределения равна

$$P\left(\delta_M(\gamma) > 0 \middle| \frac{\delta_M(\gamma, \xi)}{\delta_P(\gamma)} \leqslant t\right) = 1 - \frac{\chi_{M-P}^2\left(\Delta_M(\gamma) - \Delta_P(\gamma)\, t^2\right)}{\chi_{M-P}^2\left(\Delta_M(\gamma)\right)}, \qquad (359)$$

а плотность распределения положительных значений $\dfrac{\delta_M(\gamma, \xi)}{\delta_P(\gamma)}$ (с точностью до нормировочного коэффициента A_P):

$$\alpha_P(t) = A_P \begin{cases} \exp\left[\frac{1}{2}\left(\Delta_p(\gamma)\, t^2 - \Delta_M(\gamma)\right)\right] t \left(\Delta_M(\gamma) - \Delta_P(\gamma)\, t^2\right)^{\frac{M-P-2}{2}} \\ \qquad\qquad \text{для } 0 < t < \sqrt{\dfrac{\Delta_M(\gamma)}{\Delta_P(\gamma)}}, \\ 0 \qquad\qquad \text{для } t \leqslant 0 \text{ или } t \geqslant \sqrt{\dfrac{\Delta_M(\gamma)}{\Delta_P(\gamma)}}. \end{cases}$$

Максимума эта функция достигает при

$$t_{\max,P} = \sqrt{\frac{1+P-M+\Delta_M(\gamma)+\sqrt{(1+P-M)^2+\Delta_M(\gamma)\,(2P-2M-2+\Delta_M(\gamma)+8)}}{2\Delta_P(\gamma)}}. \tag{360}$$

На рис. 36 показано поведение функции плотности распределения $a_1(t)$ (одномерный случай) в зависимости от уровня доверия γ для метода χ^2_M. Напомним, что в случае однопараметрической задачи проекция доверительной области, полученной на основе статистики, с законом распределения χ^2_P, совпадает с доверительным интервалом, полученным методом наименьших квадратов. Из рис. 36 видно, что наиболее вероятное значение отношения величины доверительного интервала, полученного методом χ^2_M, к величине доверительного интервала, найденного методом наименьших квадратов, зависит от выбранного уровня доверия γ. Так, при уровне доверия $\gamma = 0{,}68$ наиболее вероятная величина доверительного интервала, полученного методом χ^2_M, превосходит величину доверительного интервала, найденного методом наименьших квадратов в ~ 4 раза, а при $\gamma = 0{,}99$ — в $\sim 2{,}1$ раза. Расчет выполнен для значения $M = 101$.

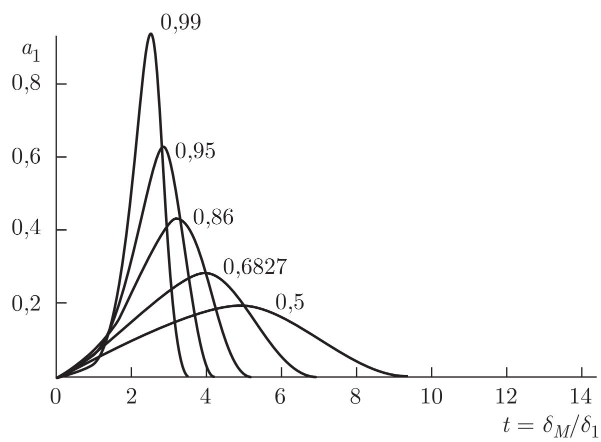


Рис. 36. Дифференциальная функция $a_1(t)$ плотности распределения отношения величины доверительного интервала $\Delta\left(\chi^2_M\right)$, полученного на основе статистики χ^2_M, при условии адекватности модели, к величине доверительного интервала, полученного методом дифференциальных поправок. Случай одномерной функции, $M = 101$, $\gamma = 0{,}5$, $0{,}6827$, $0{,}86$, $0{,}95$, $0{,}99$

Далее, исследовалось поведение максимума функции $a_p(t)$ в зависимости от уровня доверия γ и размерности M распределения χ^2_M. На рис. 37 представлен набор соответствующих зависимостей для значений $M = 10$, 50, 100, 500 и 1000. Отметим, что для линейной модели зависимость имеет универсальный характер, т. е. не зависит от коэффициентов исследуемой линейной функции. Из рис. 37 видно, что превышение величины наиболее вероятного доверительного интервала, полученного методом χ^2_M, по отношению к величине доверительного интервала, найденного методом наименьших квадратов, растет (сравнительно слабо) с ростом размерности M распределения χ^2_M (т. е. числа наблюдаемых точек кривой блеска). Из рис. 37 также следует, что с ростом уровня доверия γ значение отношения величины доверительного интервала, полученного методом χ^2_M, к величине доверительного интервала, полученного методом наименьших квадратов, убывает. Данная зависимость показана на рис. 38. Выше мы уже обсуждали причины занижения ошибок в методах наименьших квадратов, дифференциальных поправок и Монте-Карло. Рассмотрим эти причины более детально.

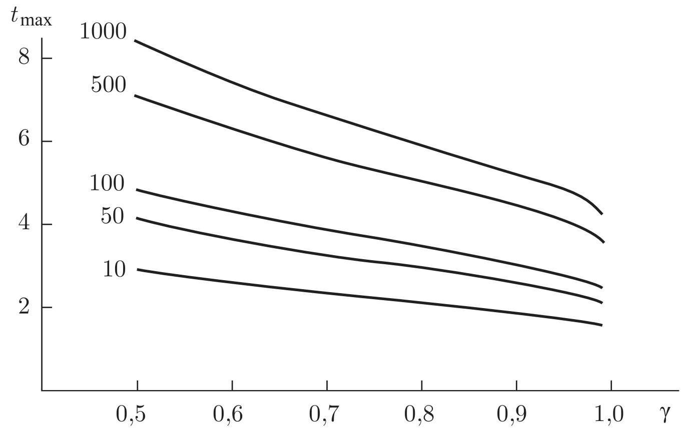


Рис. 37. Случай однопараметрической задачи. Зависимость максимума дифференциальной функции распределения отношения величины доверительного интервала в рамках статистики χ^2_M, к величине доверительного интервала, полученного методом дифференциальных поправок, от уровня доверия γ для числа наблюдаемых точек $M = 10$, 50, 100, 500, 1000. Получена на основе одномерной линейной модельной функции (вид функции не важен, зависимость — универсальная)

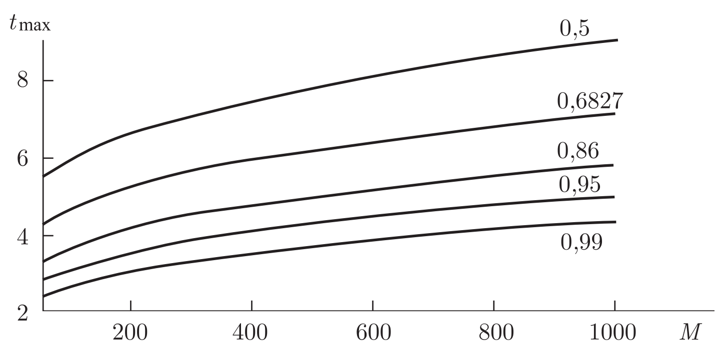


Рис. 38. Случай однопараметрической задачи. Зависимость максимума дифференциальной функции распределения отношения величины доверительного интервала, полученного на основе статистики χ^2_M, к величине доверительного интервала, полученного методом дифференциальных поправок, от числа точек M при фиксированном уровне доверия для γ=0,5, 0,6827, 0,86, 0,95, 0,99

1. При использовании статистики, распределенной по закону χ^2_M (т. е. невязки), не делается изначального предположения о том, что используемая модель идеально верна. На практике это означает, что поверхность функционала невязки (см. рис. 35) в методе χ^2_M для разных реализаций наблюдательных данных ξ может смещаться как вдоль оси параметра (в «горизонтальном» направлении), так и вдоль оси значений функционала невязки (в «вертикальном» направлении). Для некоторых реализаций наблюдательных данных при этом доверительная область может даже вырождаться в пустое множество (число таких случаев должно быть близко к значению принятого

уровня значимости $\alpha = 1 - \gamma$). В случае статистики, распределенной по закону χ^2_P, которая в одномерном случае дает оценки ошибок, совпадающие с результатами метода дифференциальных поправок, априори предполагается, что модель идеально верна. При этом поверхность функционала невязки (рис. 35) для разных реализаций наблюдательных данных может смещаться лишь вдоль оси параметра (в «горизонтальном» направлении). Соответствующая доверительная область никогда не вырождается в пустое множество и, в случае нелинейных задач, должна пониматься в асимптотическом смысле.

2. Распределение интервалов, построенных на основе статистики, распределенной по закону χ^2_M, полученное в условном предположении об адекватности модели в методе χ^2_M, при прочих равных условиях шире (см. рис. 36), чем нормальное распределение найденных центральных значений параметров, используемое в методе дифференциальных поправок (в котором модель изначально предполагается адекватной). При этом характерными параметрами этих распределений являются в первом случае наиболее вероятное значение интервала ошибок, полученного на основе статистики, распределенной по закону χ^2_M, а во втором — корень квадратный из дисперсии, умноженный на коэффициент $k(\gamma)$, соответствующий выбранному уровню доверия (что в случае одномерной модели совпадает с интервалом, полученным в методе χ^2_P). Параметр $t_{\max}$ является отношением первого из этих параметров ко второму.

3. В случае многопараметрической задачи ($P > 1$) к указанным причинам добавляется эффект, связанный с необходимостью проектирования многомерной (в пространстве параметров) доверительной области на оси параметров. Это необходимо делать для того, чтобы перейти от «точной» доверительной области к доверительным интервалам. Поскольку при таком проектировании многомерная доверительная область заменяется объемлющим ее параллелепипедом, объем которого больше, соответствующая вероятность накрытия точного решения дополнительно возрастает.

Таким образом, выбирая уровень доверия γ для доверительных интервалов, мы должны помнить, что вероятность P накрытия точного решения соответствующей доверительной областью в методе дифференциальных поправок (и в методе Монте-Карло) $P < \gamma$, а в методе χ^2_M вероятность накрытия точного решения соответствующим параллелепипедом, объемлющим доверительную область, $P > \gamma$. При этом в методе χ^2_M, как и в методе χ^2_P, вероятность накрытия точного решения соответствующей доверительной областью $P = \gamma$.

В случае нелинейной модели еще одной причиной занижения интервалов ошибок, полученных методом дифференциальных поправок, может быть применение процедуры линеаризации. Но в случае используемой нами модели при точности кривой блеска лучше $0{,}01^m$ указанный фактор не оказывает существенного влияния на полученные результаты — об этом говорит то, что оценки дисперсий параметров, полученные методом дифференциальных поправок и методом Монте-Карло, в нашем случае существенно не различаются.

Различие же в несколько раз величин интервалов ошибок, полученных разными методами, обусловлено именно использованием различных статистик, которые основаны на разных предположениях о верности модели.

15. Новый метод оценки ошибок параметров

Таким образом, в случае, если зависимость от параметров функции, описывающей модель, линейная, формулы (355) и (360) позволяют на основе метода Монте-Карло или дифференциальных поправок, путем домножения на коэффициент $t_{\max}$ (или $kt_{\max}$ см. ниже) получить тот размер интервала ошибки искомого параметра в рамках метода доверительных областей, построенных на основе статистики, распределенной по закону χ^2_M, который является наиболее вероятным среди случаев, в которых модель не может быть отвергнута. Получив размер интервала ошибки методом Монте-Карло или дифференциальных поправок и убедившись, что модель адекватна в рамках метода χ^2_M (для чего достаточно вычислить минимальное значение соответствующей невязки), мы можем сделать выводы вероятностного характера о размере доверительного интервала, полученного на основе статистики с законом распределения χ^2_M, не прибегая непосредственно к более трудоемкому определению размеров проекции доверительной области на ось параметра.

Подчеркнем еще раз, что параметр $t_{\max}$ является наиболее вероятным значением отношения проекции доверительной области, полученной методом χ^2_M, к соответствующей проекции области, полученной методом χ^2_P. Как уже отмечалось, в случае одномерной задачи величина проекции доверительной области, полученной методом χ^2_P, равна величине доверительного интервала, найденного методом дифференциальных поправок. Поэтому можно сказать, что значение параметра $t_{\max}$ для одномерной задачи — это наиболее вероятное значение отношения проекции доверительной области, построенной методом χ^2_M, к величине доверительного интервала, полученного методом дифференциальных поправок. Значения параметра $t_{\max}$ для одномерной задачи приведены в табл. 20.

Таблица 20

Параметр $t_{\max}$ для однопараметрической задачи в зависимости от числа наблюдаемых точек M и выбранного уровня доверия γ при $P = 1$

M	γ										
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95	0,99
10	8,49	5,20	3,98	3,32	2,89	2,58	2,33	2,11	1,89	1,76	1,58
20	10,4	6,21	4,68	3,87	3,35	2,98	2,68	2,42	2,16	2,01	1,79
30	11,7	6,89	5,16	4,25	3,67	3,25	2,92	2,64	2,35	2,18	1,94
40	12,7	7,41	5,53	4,54	3,92	3,47	3,11	2,81	2,50	2,31	2,05
50	13,5	7,84	5,84	4,79	4,12	3,64	3,27	2,95	2,62	2,42	2,15
60	14,1	8,22	6,10	5,00	4,30	3,80	3,41	3,07	2,73	2,52	2,23
70	14,7	8,54	6,34	5,18	4,45	3,93	3,53	3,17	2,82	2,60	2,31
80	15,3	8,84	6,55	5,35	4,59	4,06	3,63	3,27	2,90	2,68	2,37
90	15,8	9,11	6,74	5,50	4,72	4,17	3,73	3,36	2,98	2,75	2,43
100	16,2	9,35	6,92	5,64	4,84	4,27	3,82	3,44	3,05	2,81	2,49
200	19,5	11,1	8,20	6,67	5,70	5,02	4,49	4,03	3,57	3,29	2,90
300	21,7	12,3	9,06	7,36	6,29	5,53	4,94	4,44	3,93	3,61	3,18
400	23,3	13,3	9,73	7,89	6,74	5,93	5,29	4,75	4,20	3,87	3,40
500	24,7	14,0	10,3	8,33	7,11	6,25	5,58	5,01	4,43	4,08	3,58
600	25,9	14,7	10,8	8,71	7,44	6,54	5,83	5,23	4,63	4,26	3,74
700	26,9	15,3	11,2	9,05	7,72	6,78	6,06	5,43	4,80	4,41	3,88
800	27,9	15,8	11,6	9,35	7,98	7,01	6,25	5,61	4,96	4,56	4,00

Продолжение табл. 20

M	γ										
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95	0,99
900	28,7	16,3	11,9	9,63	8,21	7,21	6,43	5,77	5,10	4,69	4,12
1000	29,5	16,7	12,2	9,88	8,42	7,40	6,60	5,92	5,23	4,81	4,22
1500	32,7	18,5	13,5	10,9	9,31	8,17	7,29	6,53	5,77	5,30	4,65
2000	35,2	19,9	14,5	11,7	9,99	8,77	7,82	7,00	6,19	5,68	4,99
2500	37,2	21,0	15,3	12,4	10,6	9,26	8,26	7,39	6,53	6,00	5,27
3000	39,0	22,0	16,1	13,0	11,0	9,68	8,63	7,73	6,83	6,27	5,50
3500	40,5	22,9	16,7	13,5	11,5	10,1	8,97	8,03	7,09	6,52	5,71
4000	41,9	23,6	17,2	13,9	11,9	10,4	9,27	8,30	7,33	6,73	5,90
4500	43,2	24,4	17,8	14,3	12,2	10,7	9,54	8,54	7,54	6,93	6,08
5000	44,4	25,0	18,2	14,7	12,5	11,0	9,79	8,77	7,74	7,11	6,23
5500	45,4	25,6	18,7	15,1	12,8	11,2	10,0	8,98	7,93	7,28	6,38
6000	46,4	26,2	19,1	15,4	13,1	11,5	10,2	9,17	8,10	7,44	6,52
6500	47,4	26,7	19,5	15,7	13,4	11,7	10,4	9,35	8,26	7,58	6,65
7000	48,3	27,2	19,8	16,0	13,6	11,9	10,6	9,53	8,41	7,72	6,77
7500	49,1	27,7	20,2	16,3	13,9	12,1	10,8	9,69	8,56	7,86	6,89
8000	49,9	28,1	20,5	16,5	14,1	12,3	11,0	9,84	8,69	7,98	7,00
8500	50,7	28,6	20,8	16,8	14,3	12,5	11,2	9,99	8,82	8,10	7,10
9000	51,4	29,0	21,1	17,0	14,5	12,7	11,3	10,1	8,95	8,22	7,20
9500	52,1	29,4	21,4	17,3	14,7	12,9	11,5	10,3	9,07	8,33	7,30
10000	52,8	29,7	21,7	17,5	14,9	13,0	11,6	10,4	9,19	8,43	7,39

Из табл. 20 видно, что $t_{\max}$ значительно больше единицы, что говорит о занижении ошибки параметра, полученной в рамках метода дифференциальных поправок (в статистике нормального распределения).

В табл. 21–24 приведено значение $t_{\max}$ для многопараметрической задачи с $P = 3$, 6, 10 и 50. В случае многопараметрической задачи величина проекции доверительной области, построенной на основе статистики, распределенной по закону χ^2_P, не равна величине доверительного интервала, найденного методом дифференциальных поправок или методом Монте-Карло. Поэтому для удобства сравнения отношения проекции доверительной области, полученной методом χ^2_M, к величине доверительного интервала, найденного методом дифференциальных поправок, приведена табл. 25. В табл. 25 мы приводим соответствующие значения коэффициента $k_p(\gamma) = \sqrt{\Delta_p(\gamma)/\Delta_1(\gamma)}$ (такое выражение следует из (346) и аналогичного выражения для $\delta_p(\gamma)$), на который необходимо домножить значение $t_{\max}$ из табл. 21–24. Величина $k_p t_{\max}$, как и в описанном выше одномерном случае, в случае многомерной задачи есть отношение проекции доверительной области, полученной методом χ^2_M, к величине доверительного интервала, найденного методом дифференциальных поправок или методом Монте-Карло.

Таблица 21

Параметр $t_{\max}$ для многопараметрической задачи в зависимости от числа наблюдаемых точек M и выбранного уровня доверия γ при $P = 3$

M	γ										
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95	0,99
10	1,71	1,60	1,55	1,51	1,48	1,45	1,42	1,39	1,35	1,32	1,28
20	1,93	1,78	1,71	1,67	1,64	1,61	1,59	1,56	1,52	1,48	1,43
30	2,10	1,92	1,84	1,79	1,76	1,73	1,71	1,68	1,63	1,60	1,54
40	2,24	2,03	1,94	1,89	1,86	1,83	1,80	1,77	1,72	1,69	1,62
50	2,36	2,13	2,03	1,98	1,94	1,91	1,88	1,85	1,80	1,76	1,69
60	2,46	2,21	2,11	2,05	2,01	1,98	1,95	1,92	1,87	1,83	1,75
70	2,56	2,29	2,18	2,11	2,07	2,04	2,01	1,98	1,93	1,89	1,81
80	2,64	2,36	2,24	2,17	2,13	2,10	2,07	2,03	1,98	1,94	1,86
90	2,71	2,42	2,30	2,23	2,18	2,15	2,12	2,08	2,03	1,99	1,90
100	2,78	2,48	2,35	2,28	2,23	2,20	2,16	2,13	2,07	2,03	1,95
200	3,30	2,91	2,74	2,65	2,59	2,55	2,51	2,47	2,41	2,36	2,26
300	3,64	3,20	3,01	2,90	2,84	2,79	2,75	2,70	2,64	2,58	2,47
400	3,91	3,43	3,22	3,10	3,03	2,98	2,93	2,88	2,81	2,75	2,63
500	4,13	3,62	3,39	3,27	3,19	3,13	3,09	3,03	2,96	2,90	2,77
600	4,32	3,78	3,54	3,41	3,33	3,27	3,22	3,16	3,09	3,02	2,89
700	4,49	3,93	3,68	3,54	3,45	3,39	3,34	3,28	3,20	3,13	2,99
800	4,64	4,05	3,80	3,65	3,56	3,50	3,44	3,38	3,30	3,23	3,09
900	4,78	4,17	3,90	3,75	3,66	3,59	3,54	3,48	3,39	3,32	3,18
1000	4,91	4,28	4,00	3,85	3,75	3,68	3,63	3,57	3,48	3,40	3,25
1500	5,43	4,73	4,42	4,24	4,13	4,06	3,99	3,93	3,83	3,75	3,58
2000	5,83	5,07	4,74	4,55	4,43	4,35	4,28	4,20	4,10	4,01	3,84
2500	6,17	5,36	5,00	4,80	4,67	4,58	4,51	4,44	4,33	4,23	4,05
3000	6,45	5,60	5,23	5,02	4,88	4,79	4,71	4,64	4,52	4,42	4,23
3500	6,71	5,82	5,43	5,21	5,07	4,97	4,89	4,81	4,70	4,59	4,39
4000	6,93	6,02	5,61	5,38	5,24	5,14	5,05	4,97	4,85	4,74	4,53
4500	7,14	6,19	5,78	5,54	5,39	5,29	5,20	5,11	4,99	4,88	4,66
5000	7,33	6,36	5,93	5,68	5,53	5,42	5,34	5,25	5,12	5,01	4,78
5500	7,51	6,51	6,07	5,82	5,66	5,55	5,46	5,37	5,24	5,13	4,90
6000	7,67	6,65	6,20	5,94	5,78	5,67	5,58	5,48	5,35	5,24	5,00
6500	7,83	6,78	6,32	6,06	5,90	5,78	5,69	5,59	5,46	5,34	5,10
7000	7,97	6,91	6,44	6,17	6,01	5,89	5,79	5,69	5,56	5,44	5,19
7500	8,11	7,03	6,55	6,28	6,11	5,99	5,89	5,79	5,65	5,53	5,28

Продолжение табл. 21

M	γ										
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95	0,99
8000	8,24	7,14	6,65	6,38	6,21	6,08	5,99	5,88	5,74	5,62	5,37
8500	8,37	7,25	6,75	6,48	6,30	6,18	6,07	5,97	5,83	5,70	5,45
9000	8,49	7,35	6,85	6,57	6,39	6,26	6,16	6,06	5,91	5,78	5,52
9500	8,60	7,45	6,94	6,66	6,47	6,35	6,24	6,14	5,99	5,86	5,60
10000	8,72	7,55	7,03	6,74	6,56	6,43	6,32	6,21	6,06	5,93	5,67

Таблица 22

Параметр $t_{\max}$ для многопараметрической задачи в зависимости от числа наблюдаемых точек M и выбранного уровня доверия γ при $P = 6$

M	γ										
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95	0,99
10	1,23	1,22	1,21	1,20	1,19	1,18	1,17	1,16	1,15	1,14	1,13
20	1,22	1,24	1,25	1,26	1,27	1,27	1,27	1,27	1,27	1,26	1,24
30	1,26	1,28	1,30	1,32	1,33	1,34	1,35	1,35	1,35	1,34	1,33
40	1,31	1,32	1,34	1,36	1,38	1,39	1,40	1,41	1,41	1,41	1,39
50	1,35	1,36	1,39	1,41	1,43	1,44	1,45	1,46	1,47	1,46	1,45
60	1,40	1,40	1,42	1,45	1,47	1,48	1,50	1,51	1,52	1,51	1,50
70	1,43	1,44	1,46	1,48	1,50	1,52	1,54	1,55	1,56	1,56	1,54
80	1,47	1,47	1,49	1,51	1,54	1,56	1,57	1,59	1,60	1,60	1,58
90	1,50	1,50	1,52	1,54	1,57	1,59	1,61	1,62	1,63	1,63	1,62
100	1,54	1,53	1,55	1,57	1,60	1,62	1,64	1,65	1,67	1,66	1,65
200	1,78	1,75	1,76	1,79	1,82	1,84	1,87	1,89	1,91	1,91	1,90
300	1,94	1,91	1,92	1,94	1,97	2,00	2,03	2,06	2,08	2,08	2,07
400	2,08	2,03	2,04	2,06	2,09	2,12	2,16	2,19	2,21	2,22	2,20
500	2,19	2,14	2,14	2,16	2,19	2,23	2,26	2,30	2,32	2,33	2,31
600	2,28	2,23	2,23	2,25	2,28	2,32	2,35	2,39	2,42	2,42	2,41
700	2,37	2,30	2,31	2,33	2,36	2,40	2,44	2,47	2,50	2,51	2,49
800	2,44	2,38	2,38	2,40	2,43	2,47	2,51	2,55	2,58	2,59	2,57
900	2,51	2,44	2,44	2,46	2,50	2,54	2,58	2,61	2,65	2,66	2,64
1000	2,58	2,50	2,50	2,52	2,56	2,60	2,64	2,68	2,71	2,72	2,70
1500	2,84	2,75	2,74	2,77	2,80	2,85	2,89	2,94	2,98	2,99	2,97
2000	3,04	2,95	2,94	2,96	3,00	3,04	3,09	3,14	3,18	3,19	3,18
2500	3,21	3,11	3,09	3,12	3,16	3,20	3,26	3,31	3,35	3,37	3,35
3000	3,36	3,25	3,23	3,25	3,29	3,34	3,40	3,45	3,50	3,52	3,50
3500	3,49	3,37	3,35	3,37	3,42	3,47	3,52	3,58	3,63	3,65	3,63

Продолжение табл. 22

M	γ										
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95	0,99
4000	3,60	3,48	3,46	3,48	3,53	3,58	3,64	3,70	3,75	3,77	3,75
4500	3,71	3,58	3,56	3,58	3,63	3,68	3,74	3,80	3,86	3,87	3,85
5000	3,81	3,67	3,65	3,67	3,72	3,77	3,84	3,90	3,95	3,97	3,95
5500	3,90	3,76	3,74	3,76	3,80	3,86	3,92	3,99	4,05	4,06	4,04
6000	3,98	3,84	3,82	3,84	3,88	3,94	4,01	4,07	4,13	4,15	4,13
6500	4,06	3,91	3,89	3,91	3,96	4,02	4,08	4,15	4,21	4,23	4,21
7000	4,13	3,99	3,96	3,98	4,03	4,09	4,16	4,23	4,29	4,31	4,29
7500	4,20	4,05	4,03	4,05	4,10	4,16	4,23	4,30	4,36	4,38	4,36
8000	4,27	4,12	4,09	4,11	4,16	4,22	4,29	4,36	4,43	4,45	4,43
8500	4,34	4,18	4,15	4,17	4,22	4,29	4,36	4,43	4,49	4,51	4,49
9000	4,40	4,24	4,21	4,23	4,28	4,35	4,42	4,49	4,56	4,58	4,55
9500	4,46	4,29	4,27	4,29	4,34	4,40	4,48	4,55	4,62	4,64	4,61
10000	4,51	4,35	4,32	4,34	4,39	4,46	4,53	4,61	4,67	4,70	4,67

Таблица 23

Параметр $t_{\max}$ для многопараметрической задачи в зависимости от числа наблюдаемых точек M и выбранного уровня доверия γ при $P = 10$

M	γ										
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95	0,99
10	1,16	1,13	1,12	1,10	1,09	1,08	1,08	1,07	1,06	1,05	1,04
20	1,08	1,10	1,12	1,13	1,13	1,14	1,14	1,14	1,14	1,14	1,13
30	1,05	1,10	1,13	1,15	1,16	1,18	1,19	1,19	1,20	1,20	1,20
40	1,06	1,11	1,15	1,17	1,19	1,21	1,22	1,24	1,25	1,25	1,25
50	1,07	1,12	1,16	1,19	1,22	1,24	1,26	1,27	1,29	1,30	1,30
60	1,08	1,14	1,18	1,21	1,24	1,27	1,29	1,31	1,32	1,33	1,34
70	1,09	1,15	1,20	1,23	1,27	1,29	1,32	1,34	1,36	1,37	1,37
80	1,11	1,17	1,21	1,25	1,29	1,32	1,34	1,36	1,39	1,40	1,40
90	1,13	1,18	1,23	1,27	1,31	1,34	1,36	1,39	1,41	1,43	1,43
100	1,14	1,20	1,25	1,29	1,32	1,36	1,39	1,41	1,44	1,45	1,46
200	1,28	1,33	1,38	1,43	1,47	1,51	1,55	1,59	1,63	1,65	1,66
300	1,38	1,42	1,48	1,53	1,58	1,62	1,67	1,71	1,76	1,78	1,81
400	1,46	1,50	1,56	1,61	1,66	1,71	1,76	1,81	1,86	1,89	1,92
500	1,53	1,57	1,62	1,68	1,73	1,79	1,84	1,90	1,95	1,98	2,01
600	1,59	1,63	1,68	1,74	1,80	1,85	1,91	1,97	2,03	2,06	2,09
700	1,64	1,68	1,74	1,79	1,85	1,91	1,97	2,03	2,09	2,13	2,16

Продолжение табл. 23

M	γ										
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95	0,99
800	1,69	1,73	1,79	1,84	1,91	1,97	2,03	2,09	2,15	2,19	2,22
900	1,74	1,78	1,83	1,89	1,95	2,01	2,08	2,14	2,21	2,25	2,28
1000	1,78	1,82	1,87	1,93	2,00	2,06	2,12	2,19	2,26	2,30	2,34
1500	1,95	1,99	2,04	2,11	2,18	2,25	2,32	2,39	2,47	2,52	2,56
2000	2,08	2,12	2,18	2,24	2,32	2,39	2,47	2,55	2,64	2,69	2,73
2500	2,20	2,23	2,29	2,36	2,44	2,52	2,60	2,68	2,77	2,83	2,88
3000	2,29	2,33	2,39	2,46	2,54	2,62	2,71	2,80	2,89	2,95	3,00
3500	2,38	2,41	2,47	2,55	2,63	2,71	2,80	2,90	3,00	3,06	3,11
4000	2,46	2,49	2,55	2,63	2,71	2,80	2,89	2,99	3,09	3,15	3,21
4500	2,53	2,56	2,62	2,70	2,78	2,88	2,97	3,07	3,18	3,24	3,30
5000	2,59	2,62	2,69	2,77	2,85	2,95	3,04	3,15	3,26	3,32	3,39
5500	2,65	2,68	2,75	2,83	2,92	3,01	3,11	3,22	3,33	3,40	3,46
6000	2,71	2,74	2,80	2,89	2,98	3,07	3,18	3,28	3,40	3,47	3,54
6500	2,76	2,79	2,86	2,94	3,03	3,13	3,24	3,35	3,47	3,54	3,60
7000	2,81	2,84	2,91	2,99	3,09	3,19	3,29	3,41	3,53	3,60	3,67
7500	2,85	2,89	2,96	3,04	3,14	3,24	3,35	3,46	3,59	3,66	3,73
8000	2,90	2,93	3,00	3,09	3,18	3,29	3,40	3,51	3,64	3,72	3,79
8500	2,94	2,97	3,04	3,13	3,23	3,34	3,45	3,57	3,69	3,77	3,84
9000	2,98	3,01	3,09	3,17	3,27	3,38	3,49	3,61	3,75	3,82	3,90
9500	3,02	3,05	3,13	3,22	3,32	3,43	3,54	3,66	3,79	3,87	3,95
10000	3,06	3,09	3,16	3,26	3,36	3,47	3,58	3,71	3,84	3,92	4,00

Таблица 24

Параметр $t_{\max}$ для многопараметрической задачи в зависимости от числа наблюдаемых точек M и выбранного уровня доверия γ при $P = 50$

M	γ										
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95	0,99
50	1,03	1,02	1,02	1,02	1,02	1,02	1,02	1,02	1,02	1,01	1,01
60	1,01	1,02	1,02	1,02	1,02	1,02	1,02	1,02	1,03	1,03	1,03
70	1,00	1,01	1,02	1,02	1,02	1,03	1,03	1,03	1,04	1,04	1,04
80	0,991	1,00	1,01	1,02	1,03	1,03	1,03	1,04	1,04	1,05	1,05
90	0,982	1,00	1,01	1,02	1,03	1,03	1,04	1,05	1,05	1,06	1,07
100	0,973	0,996	1,01	1,02	1,03	1,04	1,04	1,05	1,06	1,07	1,08
200	0,913	0,967	1,00	1,03	1,05	1,07	1,08	1,10	1,12	1,14	1,16

Продолжение табл. 24

M	γ										
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95	0,99
300	0,881	0,953	0,998	1,03	1,06	1,09	1,11	1,14	1,17	1,19	1,22
400	0,864	0,947	1,00	1,04	1,08	1,11	1,14	1,17	1,21	1,24	1,27
500	0,856	0,945	1,00	1,05	1,09	1,13	1,16	1,20	1,24	1,27	1,32
600	0,852	0,946	1,01	1,06	1,11	1,15	1,18	1,22	1,27	1,30	1,35
700	0,852	0,948	1,02	1,07	1,12	1,16	1,20	1,25	1,30	1,33	1,39
800	0,854	0,952	1,02	1,08	1,13	1,18	1,22	1,27	1,32	1,36	1,42
900	0,857	0,956	1,03	1,09	1,14	1,19	1,24	1,29	1,34	1,38	1,44
1000	0,861	0,961	1,04	1,10	1,15	1,20	1,25	1,30	1,37	1,41	1,47
1500	0,886	0,989	1,07	1,14	1,20	1,26	1,32	1,38	1,45	1,50	1,58
2000	0,913	1,02	1,10	1,18	1,25	1,31	1,37	1,44	1,52	1,58	1,67
2500	0,939	1,04	1,13	1,21	1,28	1,35	1,42	1,49	1,58	1,65	1,74
3000	0,964	1,07	1,16	1,24	1,32	1,39	1,46	1,54	1,64	1,70	1,80
3500	0,987	1,,09	1,18	1,27	1,35	1,42	1,50	1,58	1,68	1,75	1,86
4000	1,01	1,12	1,21	1,29	1,37	1,45	1,53	1,62	1,72	1,80	1,91
4500	1,03	1,14	1,23	1,32	1,40	1,48	1,57	1,66	1,76	1,84	1,95
5000	1,05	1,16	1,25	1,34	1,43	1,51	1,60	1,69	1,80	1,88	2,00
5500	1,06	1,17	1,27	1,36	1,45	1,53	1,62	1,72	1,83	1,92	2,04
6000	1,08	1,19	1,29	1,38	1,47	1,56	1,65	1,75	1,87	1,95	2,07
6500	1,10	1,21	1,31	1,40	1,49	1,58	1,67	1,77	1,90	1,98	2,11
7000	1,11	1,22	1,32	1,42	1,51	1,60	1,70	1,80	1,92	2,01	2,14
7500	1,13	1,24	1,34	1,44	1,53	1,62	1,72	1,82	1,95	2,04	2,18
8000	1,14	1,25	1,36	1,45	1,55	1,64	1,74	1,85	1,98	2,07	2,21
8500	1,15	1,27	1,37	1,47	1,56	1,66	1,76	1,87	2,00	2,09	2,24
9000	1,17	1,28	1,39	1,48	1,58	1,68	1,78	1,89	2,02	2,12	2,26
9500	1,18	1,30	1,40	1,50	1,60	1,70	1,80	1,91	2,05	2,14	2,29
10000	1,19	1,31	1,41	1,51	1,61	1,71	1,82	1,93	2,07	2,17	2,32

В табл. 26 и на рис. 39 приведены значения $k_p t_{\max}$ для случая $P = 10$. Отметим, что характер числовых значений параметра $k_p t_{\max}$ из табл. 26 близок к значениям $t_{\max}$ из табл. 20, в которой показано отношение интервала ошибок, полученного методом доверительных областей в статистике χ^2_M, к интервалу ошибок, найденных методом дифференциальных поправок (случай одномерной задачи). Сравнение рисунков 38 и 39 хорошо иллюстрирует сказанное. Таким образом, и для случая многопараметрической задачи характер численного отношения интервала ошибок, полученного методом χ^2_M, к интервалу ошибок, найденному методом дифференциальных поправок, остается прежним. Точные же значения получаются по формулам (355) и (360) (см. также табл. 21–26).

Таблица 25

Коэффициент пересчета $k_P(\gamma)$ для параметра $t_{\max}$ из табл. 21–24 в отношение проекции доверительной области, полученной методом χ^2_M, к величине доверительного интервала, полученного методом дифференциальных поправок или методом Монте-Карло

P	γ										
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95	0,99
1	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
3	6,08	3,96	3,10	2,61	2,28	2,04	1,85	1,68	1,52	1,43	1,31
6	11,8	6,92	5,08	4,08	3,43	2,96	2,59	2,28	1,98	1,81	1,59
10	17,6	9,81	7,00	5,49	4,53	3,85	3,31	2,86	2,43	2,18	1,87
50	48,9	25,4	17,3	13,1	10,4	8,56	7,14	5,95	4,83	4,19	3,39

Таблица 26

Параметр $k_P t_{\max}$ для многопараметрической задачи в зависимости от числа наблюдаемых точек M и выбранного уровня доверия γ при $P = 10$ (см. также рис. 39)

M	γ										
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95	0,99
10	20,4	11,1	7,82	6,07	4,96	4,17	3,56	3,05	2,57	2,29	1,95
20	18,9	10,8	7,81	6,18	5,13	4,37	3,77	3,26	2,77	2,49	2,12
30	18,5	10,8	7,90	6,31	5,27	4,52	3,93	3,41	2,92	2,62	2,24
40	18,5	10,9	8,01	6,44	5,41	4,65	4,06	3,54	3,03	2,73	2,34
50	18,7	11,0	8,13	6,56	5,53	4,77	4,17	3,65	3,13	2,83	2,43
60	18,9	11,3	8,26	6,67	5,63	4,87	4,27	3,74	3,22	2,91	2,50
70	19,2	11,5	8,38	6,78	5,74	4,97	4,36	3,83	3,30	2,98	2,57
80	19,5	11,6	8,50	6,88	5,83	5,06	4,44	3,90	3,37	3,05	2,63
90	19,8	11,8	8,61	6,98	5,92	5,14	4,52	3,97	3,44	3,11	2,68
100	20,0	13,0	8,72	7,08	6,66	5,22	4,59	4,04	3,50	3,17	2,73
200	22,4	14,0	9,63	7,83	7,14	5,82	5,14	4,55	3,96	3,60	3,11
300	24,2	14,7	10,3	8,39	7,53	6,25	5,53	4,90	4,28	3,89	3,39
400	25,6	15,4	10,9	8,84	7,86	6,59	5,84	5,19	4,53	4,13	3,58
500	26,8	16,0	11,4	9,22	8,15	6,88	6,10	5,42	4,74	4,32	3,76
600	27,9	16,5	11,8	9,56	8,40	7,13	6,33	5,63	4,93	4,49	3,91
700	28,9	17,0	12,2	9,86	8,63	7,36	6,53	5,81	5,09	4,64	4,04
800	29,7	17,4	12,5	10,1	8,85	7,56	6,71	5,98	5,24	4,78	4,16
900	30,5	17,8	12,8	10,4	9,04	7,75	6,88	6,13	5,37	4,90	4,27
1000	31,2	19,5	13,1	10,6	9,86	7,92	7,04	6,27	5,49	5,02	4,37
1500	34,2	20,8	14,3	11,6	10,5	8,64	7,68	6,85	6,01	5,49	4,79
2000	36,6	21,9	15,2	12,3	11,0	9,20	8,18	7,30	6,41	5,86	5,11

Продолжение табл. 26

M	γ										
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95	0,99
2500	38,6	22,8	16,0	13,0	11,5	9,67	8,60	7,68	6,74	6,17	5,38
3000	40,2	23,7	16,7	13,5	11,9	10,1	8,97	8,00	7,03	6,44	5,62
3500	41,7	24,4	17,3	14,0	12,3	10,4	9,29	8,29	7,29	6,67	5,82
4000	43,1	25,1	17,8	14,4	12,6	10,8	9,58	8,55	7,52	6,88	6,01
4500	44,3	25,7	18,3	14,8	12,9	11,1	9,84	8,79	7,73	7,08	6,18
5000	45,5	26,3	18,8	15,2	13,2	11,3	10,1	9,00	7,92	7,42	6,33
5500	46,5	26,9	19,2	15,5	13,5	11,6	10,3	9,21	8,10	7,57	6,48
6000	47,5	27,4	19,6	15,8	13,7	11,8	10,5	9,40	8,27	7,72	6,61
6500	48,4	27,9	20,0	16,1	14,0	12,0	10,7	9,57	8,43	7,86	6,74
7000	49,3	28,3	20,3	16,4	14,2	12,3	10,9	9,71	8,58	7,99	6,86
7500	50,1	28,8	20,7	16,7	14,4	12,5	11,1	9,90	8,72	8,11	6,98
8000	50,9	29,2	21,0	17,0	14,6	12,6	11,3	10,1	8,85	8,23	7,09
8500	51,7	29,6	21,3	17,2	14,8	12,8	11,4	10,2	8,98	8,34	7,19
9000	52,4	30,0	21,6	17,4	15,0	13,0	11,6	10,3	9,10	8,45	7,29
9500	53,1	30,3	21,9	17,7	15,2	13,2	11,7	10,5	9,22	8,55	7,38
10000	53,7		22,1	17,9		13,3	11,9	10,6	9,34		7,48

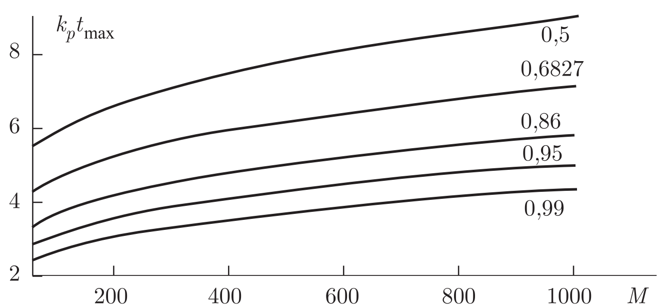


Рис. 39. Случай многопараметрической задачи. Параметр $k_p t_{\max}$ для многопараметрической задачи в зависимости от числа наблюдаемых точек M и уровня доверия γ при $P = 10$. Уровень доверия указан рядом с соответствующей кривой. Обращает на себя внимание то, что вероятность попадания истинного значения параметра в проекцию доверительной области, полученной в рамках статистики χ^2_M, выше заданного уровня доверия $\gamma = 0{,}6827$: она составляет $\sim 0{,}80$. В то же время, вероятность попадания истинного решения в интервал ошибки, полученной в рамках метода дифференциальных поправок, равна заданному уровню доверия $\gamma = 0{,}6827$. При этом вероятность одновременного попадания истинных значений параметров во все интервалы ошибок, полученных методом дифференциальных оправок, меньше заданного уровня доверия $\gamma = 0{,}6827$ (составляет $\sim 0{,}5$)

Следует помнить, что в случае одномерной задачи вероятность попадания истинного значения параметра в проекцию доверительной области, полученную методом χ^2_P, и вероятность попадания в доверительный интервал, полученный методом дифференциальных поправок, одинакова. Для случая же многопараметрической задачи вероятность попадания истинного значения параметра в проекцию доверительной области, полученную методом χ^2_P, выше по сравнению с доверительным интервалом, найденным методом дифференциальных поправок.

Отметим, что вышеприведенные результаты получены для линейной модели. При этом использование для построения доверительных интервалов статистики с законом распределения χ^2_P основано на том, что минимальное значение функционала невязки распределено по закону χ^2_{M-P}. Однако такое утверждение справедливо лишь для модели с линейной зависимостью от параметров. В случае, когда эта зависимость нелинейная, такое утверждение может быть справедливо лишь в асимптотическом смысле, когда число точек кривой блеска $M \to \infty$. Поэтому полученные выше результаты могут применяться и для нелинейной модели, но лишь приближенно, в указанном асимптотическом смысле.

16. Уровень значимости, соответствующий статистике приведенного хи-квадрат.

Часто об адекватности модели наблюдательным данным судят по близости к единице минимального значения невязки $\widehat{R} \equiv \dfrac{R}{M-P}$, распределенной по закону приведенного хи-квадрат $\widehat{\chi}^2_{M-P}$ (по которому распределена случайная величина $\dfrac{\xi}{M-P}$, если $\xi \sim \chi^2_{M-P}$), где P — число параметров, по которым проводится минимизация (или по близости значения невязки $R_{\min}$, распределенной по закону χ^2_{M-P}, к значению $M-P$). При этом упускается количественная характеристика адекватности модели, а именно, уровень значимости $\alpha_0 = 1-\gamma$, на котором модель может быть отвергнута (напомним, что уровень значимости α_0 — это количество ошибок первого рода, которое мы совершаем, отвергая модель). На рис. 40 представлено графическое изображение результатов решения уравнения

$$\frac{\Delta_{M-P}\,(1-\alpha_0)}{M-P} = q$$

относительно уровня значимости α_0, в зависимости от разности $M-P$ (M — число наблюдаемых точек, P — число искомых параметров задачи, а $\Delta_{M-P}(\gamma)$ — функция зависимости квантиля от уровня доверия $\gamma = 1-\alpha_0$), при заданном квантиле q для закона распределения $\widehat{\chi}^2_{M-P}$. Значение квантиля q было принято равным 0,5, 0,6, 0,7, 1,0, 1,1, 1,5 и 2,0. Такую зависимость можно записать в явном виде:

$$\alpha_0\,(M-P) = 1 - \chi^2_{M-P}\,(q\,(M-P))\,.$$

Из рис. 40 видно, что уровень значимости α_0 достаточно быстро (для $M \gtrsim 50$) начинает стремиться к своему асимптотическому пределу. Так, в случае значения квантиля $q=1$, асимптотический предел уровня значимости α_0 равен $\sim 50\,\%$, т.е. в данном случае, отвергая модель, мы в $\sim 50\,\%$ случаев совершаем ошибку 1-го рода (отвергаем правильную модель). Следовательно, в этом случае, отвергая модель, мы в каждом втором случае неправы, поэтому у нас нет серьезных оснований отвергнуть модель, и таким образом модель может быть принята.

В то же время, для значения квантиля $q = 1{,}5$ асимптотический предел уровня значимости α_0 уже близок к $\sim 0\,\%$. В данном случае, отвергая модель, мы в $\sim 0\,\%$ совершаем ошибку 1-го рода (отвергаем правильную модель). Следовательно, в этом случае, отвергая модель, мы почти всегда правы, поэтому у нас нет оснований для принятия модели, и следовательно модель должна быть отвергнута.

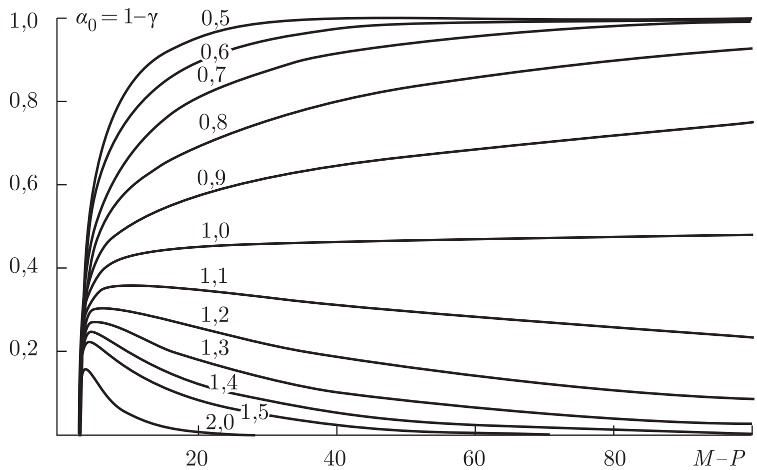


Рис. 40. Результаты решения уравнения $\dfrac{\Delta_{M-P}\,(1-\alpha_o)}{M-P} = q$ относительно уровня значимости при $P=3$ в зависимости от числа наблюдаемых точек M при заданном квантиле статистики приведенного $\widehat{\chi}^2_{M-P}$. Значение квантиля q указано рядом с соответствующей кривой. Видно, что когда минимальное значение приведенного хи-квадрат равно единице, соответствующий уровень значимости α_0 стремится к 0,5

Таким образом, можно заключить, что если при решении обратной параметрической задачи минимальное значение приведенного хи-квадрат $\gtrsim$1,5, то используемая модель заведомо неадекватна наблюдательным данным. Получаемые в этом случае значения искомых параметров и их доверительных интервалов (ошибок) являются «плохими». Исследователю необходимо позаботиться о построении более совершенной модели исследуемого процесса. Если же минимальное значение приведенного хи-квадрат близко к единице, то модель можно считать адекватной наблюдательным данным, а получаемые при этом значения параметров и их доверительных интервалов (ошибок) можно считать надежными.

17. Обсуждение результатов

Резюмируем основные выводы нашего исследования, касающиеся сравнения различных методов оценок ошибок параметров обратных параметрических задач.

Методы оценок ошибок параметров можно классифицировать в зависимости от выбранной статистики, априорной информации о дисперсии наблюдательных данных и априорной информации о достоверности используемой модели.

а) Метод дифференциальных поправок. Этот метод основан на использовании статистики нормального распределения. Дисперсии и, соответственно, среднеквадратичные ошибки параметров выражаются через дисперсию наблюдений с помощью формулы для сложения дисперсий наблюдательных данных. Метод априори предполагает, что используемая параметрическая модель идеально верна и адекватна наблюдательным данным. В методе необходимо знать дисперсию наблюдательных данных из независимых соображений.

Ошибки параметров, полученные в методе дифференциальных поправок, обычно весьма малы. Вероятность одновременного попадания точного решения во все интервалы ошибок параметров заметно ниже (на $\sim$ 15–30 %) заданной вероятности 68,2 %. Коридор теоретических кривых блеска, соответствующих концам доверительных интервалов параметров, является весьма узким — порядка среднеквадратичной ошибки одного измерения. Поэтому велика вероятность того, что результаты интерпретации наблюдательных данных, выполненных разными исследователями, будут значимо различаться. «Внешние» ошибки найденных параметров могут значительно превосходить «внутренние» ошибки, найденные методом дифференциальных поправок. Как уже отмечалось, в работе (Popper, 1984) на многочисленных примерах показано, что «внешние» ошибки параметров затменных систем могут в 3–5 раз превосходить «внутренние» ошибки параметров.

Отметим, что, как показали наши численные эксперименты, использование процедуры линеаризации в случае обратной задачи интерпретации кривых блеска затменных систем (которая является нелинейной по ряду параметров) при малых ошибках наблюдений лишь незначительно искажает доверительные интервалы, получаемые методом дифференциальных поправок.

б) Метод Монте-Карло. Этот метод аналогичен методу дифференциальных поправок и дает аналогичные результаты. В методе предполагается, что модель идеально верна и что из независимых соображений известна дисперсия наблюдательных данных. Метод использует статистику нормального распределения. Ошибки параметров в методе Монте-Карло, так же как и в методе дифференциальных поправок, являются «внутренними» и обычно весьма малы. Как уже упоминалось, в работе (Popper, 1984) путем численного эксперимента показано, что «внутренние» ошибки параметров кривых блеска затменных систем обычно в 3–5 раз меньше «внешних» ошибок.

Таким образом, и метод дифференциальных поправок, и метод Монте-Карло используют жесткие априорные предположения о правильности модели и применяют простейшую статистику нормального распределения с заранее известной дисперсией наблюдательных данных.

Именно в силу таких идеализированных модельных предположений в этих методах получаются весьма малые ошибки параметров.

В действительности, заранее неизвестно, верна ли используемая модель. Кроме того, параметры модели ищутся с использованием не статистики нормального распределения, а статистики, порожденной нормальным распределением (статистики χ^2_M, Фишера и т. п.). Дисперсия наблюдательных данных часто заранее неизвестна.

Поэтому естественно оценивать ошибки параметров не с использованием статистики нормального распределения или статистики χ^2_P, а с применением той статистики, в рамках которой ищутся сами параметры модели (статистики χ^2_M, Фишера и т. п.). Достоинством метода доверительных областей, основанного на использовании таких статистик, является то, что в данном случае оценка ошибок параметров осуществляется с использованием «внешней» статистики распределения наблюдательных данных независимо от того, как распределены полученные центральные значения искомых параметров. Поэтому метод доверительных областей, основанный на использовании статистик χ^2_M и Фишера, может с успехом применяться и для решения сильно нелинейных по искомым параметрам задач. Прежде, чем переходить к рассмотрению таких методов, рассмотрим особенности метода χ^2_P, который по своей идеологии близок к методам дифференциальных поправок и Монте-Карло, хотя и обладает определенными преимуществами по сравнению с этими методами.

в) Метод, основанный на использовании статистики χ^2_P. (P — число искомых параметров.) Поскольку в этом методе используются не абсолютные, а относительные изменения функционала невязки, метод предполагает, что используемая модель идеально верна. Кроме того, считается, что дисперсия наблюдательных данных известна априори. Доверительная область в данном методе никогда не вырождается в пустое множество и в случае нелинейной задачи должна пониматься в асимптотическом смысле: вероятность накрытия точного решения не равна заданной вероятности γ, а лишь стремится к γ при $M \to \infty$ (для линейных задач вероятность накрытия точно равна γ для заданного конечного значения M). Впрочем, как показывают наши численные эксперименты, в случае затменных систем вероятность накрытия точного решения асимптотической доверительной областью при достаточно большом M весьма близка к заданной вероятности γ.

В случае однопараметрической задачи метод доверительных областей, основанный на использовании статистики χ^2_P, дает результаты, близкие к результатам, полученным с использованием метода дифференциальных поправок и метода Монте-Карло. Это естественно, поскольку все три рассмотренных метода используют одинаковые, жесткие идеализированные априорные предположения о верности модели.

В случае как однопараметрических, так и многопараметрических задач, метод χ^2_P позволяет получить доверительную область, которая для линейных задач и, при достаточно больших M, для нелинейных задач, всегда накрывает точное решение с заданной вероятностью γ. В этом состоит значительное преимущество метода χ^2_P по сравнению с методами дифференциальных поправок и Монте-Карло, при использовании которых вероятность совместного попадания точного решения в доверительные интервалы всех параметров, как показывают численные расчеты, меньше заданной вероятности γ.

В случае многопараметрических задач в методе χ^2_P при оценке доверительных интервалов для параметров возникает необходимость проектирования доверительной области на оси параметров. При этом доверительная область, накрывающая точное решение с заданной вероятностью γ, заменяется объемлющим ее параллелепипедом, и вероятность накрытия точного решения возрастает.

Если положить вероятность попадания в проекцию на ось параметра $\gamma = 68{,}2\,\%$, то, как показали дополнительные расчеты на примере функции (333) и (340), величина проекции доверительной области на оси параметров Δ_{β_1} и Δ_{β_2}, полученной в статистике χ^2_P, совпадает с размером доверительного интервала, полученного методом дифференциальных поправок σ_{β_1} и σ_{β_2} для того же значения вероятности $\gamma = 68{,}2\,\%$. Однако при этом вероятность совместного попадания всех параметров задачи в доверительную область значительно ниже заявленной вероятности $\gamma = 68{,}2\,\%$ (она составляет $\sim 50\,\%$ и менее).

г) Метод, основанный на использовании статистики χ^2_M. (M — число точек на кривой блеска.) В этом методе также предполагается априорное знание дисперсии наблюдательных данных. Однако при этом не используется гипотеза о том, что применяемая модель идеально верна. Для нахождения доверительной области используются абсолютные значения функционала невязки. Поэтому размеры доверительной области получаются различными для разных реализаций случайного процесса (наблюдаемой кривой блеска). В ряде случаев, когда используемая модель отвергается по статистическому критерию, доверительная область вырождается в пустое множество. Тем не менее, строго доказано, и это подтверждается численными экспериментами, что найденная в методе χ^2_M доверительная область, как для линейных, так и для нелинейных задач, накрывает точное решение с заданной вероятностью.

В силу меньшего, по сравнению с методом χ^2_P, количества модельных предположений (отсутствия предположения о том, что модель идеально верна), получаемая методом χ^2_M доверительная область имеет большие размеры, чем в методе χ^2_P (при прочих равных условиях). Как показывают численные эксперименты, размеры доверительной области в статистике χ^2_M в ~ 2 раза больше, чем в статистике χ^2_P (см., например, рис. 29 и 30).

Для оценки доверительных интервалов параметров необходимо спроецировать доверительную область на оси параметров и учесть тот факт, что вероятность накрытия точного решения при этом возрастает. Тот факт, что доверительная область в статистике χ^2_M больше, чем в статистике χ^2_P, отнюдь не означает, что метод χ^2_M хуже. Просто, помимо всего прочего, метод χ^2_M учитывает также неопределенность результатов интерпретации, связанную с возможным несовершенством модели. Поэтому, если исследователю необходимо делать особо ответственные суждения о результатах интерпретации, для оценки ошибок искомых параметров исследуемой модели следует рекомендовать именно метод χ^2_M.

д) Метод, основанный на использовании статистики Фишера $F_{M,N-M}$. (N — полное число точек на кривой блеска, M — число групп точек.) В этом методе, как и в методе χ^2_M, не используется априорное предположение о том, что модель идеально верна и, кроме того, в отличие от метода χ^2_M, в этом методе не требуется априорное знание дисперсии наблюдений. Информация о дисперсии наблюдений получается из наблюдаемого рассеяния точек на самой исследуемой кривой блеска. На этом основании метод $F_{M,N-M}$ принято считать наиболее общим, использующим минимум модельных предположений. Единственным предположением в данном случае считается предположение о нормальном законе распределения наблюдаемых точек в окрестностях выбранных участков кривой блеска.

Методы построения доверительных областей, опирающиеся на статистику χ^2_M и статистику Фишера $F_{M,N-M}$, схожи. В обоих случаях размеры доверительной области варьируются в несколько раз для разных реализаций наблюдательных данных; количество случаев, когда доверительная область вырождается в пустое множество, составляет $\alpha = 1 - \gamma$. Тем не менее, величины доверительной области, полученные в статистиках χ^2_M и $F_{M,N-M}$, различны. Для более детального исследования различия величины доверительной области, полученной в рамках статистики $F_{M,N-M}$ и статистики χ^2_M, нами проведены дополнительные расчеты. А именно, выполнен поиск неизвестного параметра β_1 методом доверительных областей в сравниваемых статистиках для функции (332) и функции (332′)

$$f(\theta, \beta_1) = \cos\theta + \beta_1 e^{\theta}. \tag{332′}$$

В точках $\theta_1, \ldots, \theta_M$, равномерно расположенных на числовом отрезке абсциссы [0,2] при заданном истинном значении параметра $\overline{\beta}_1 = 2$, получены истинные значения функции $\overline{\xi}_1, \ldots, \overline{\xi}_{101}$. Далее, для $j = 1, \ldots, 12$ генерировалась выборка нормально распределенных случайных величин $\xi^j_1, \ldots, \xi^j_{101}$, таких, что математическое ожидание $M\,(\xi^j_m) = \overline{\xi}_m$ и $\sigma\,(\xi^j_m) = 0{,}03 \quad (m = 1, \ldots, 101)$.

Для статистики Фишера, как и прежде, вычислялись $\xi_m = \dfrac{1}{N_m}\sum\limits_{j=1}^{N_m}\xi^j_m$, $N_m = 12$.

В соответствии с этим, в выражениях (322) и (323) полагалось $M = 101$, $w_m = 12$ и $\varepsilon_0 = 0{,}03$ (в этом случае значение стандартного отклонения $\sigma\,(\xi_m) = \sigma_m = 0{,}03/\sqrt{12} = 0{,}008660$).

Для статистики же χ^2_M полагалось $M = 101 \cdot 12 = 1212$, вводились новые $\theta'_{12(m'-1)+j} = \theta_{m'}$ и ξ_m вычислялись так, что $\xi_{12m'+j} = \xi^j_m$, $(m' = 0, \ldots, 101$, $j = 1, \ldots, 12)$; это в наблюдательном аспекте равносильно утверждению, что каждая из групп по 12 значений $\xi_{1,\ldots,12}$, $\xi_{13,\ldots,24}$, $\ldots$, $\xi_{1200,\ldots,1212}$ получена в одной фазе θ. В соответствии с этим, полагаем $w_m = 1$ и $\varepsilon_0 = 0{,}03$ (в этом случае значение стандартного отклонения $\sigma(\xi_m) = \sigma_m$=0,03).

Далее, посредством каждой из сравниваемых статистик вычислялся размер интервала ошибок $\Delta(\beta_1)$. Расчет доверительного интервала $\Delta(\beta_1)$ выполнен по тем $\xi_1, \ldots, \xi_{1212}$ (в статистике χ^2_{1212}) и $\xi_1, \ldots, \xi_{101}$ (в статистике Фишера), которые получались каждый раз из одной выборки $\xi^j_1, \ldots, \xi^j_{101}$ описанными выше способами.

Гистограммы плотности распределения величины полуширины доверительного интервала $\Delta_{\beta_1}/2$ соответственно для функции (332) и функции (332′) в рамках статистики $F_{101,1212-101}$ и χ^2_{1212} представлены на рис. 41 *а* и *б*. Из рис. 41 *а*, *б* видно, что максимальная величина доверительного интервала, полученного в статистике χ^2_{1212}, превосходит размер максимального доверительного интервала, рассчитанного в статистике Фишера, примерно в 2 раза. Также видно, что в каждой из используемых статистик число ошибок первого рода (верная модель отвергается) находится в хорошем согласии с априорно заданным значением уровня значимости $\alpha = 100\,\% - 68{,}2\,\% = 31{,}8\,\%$.

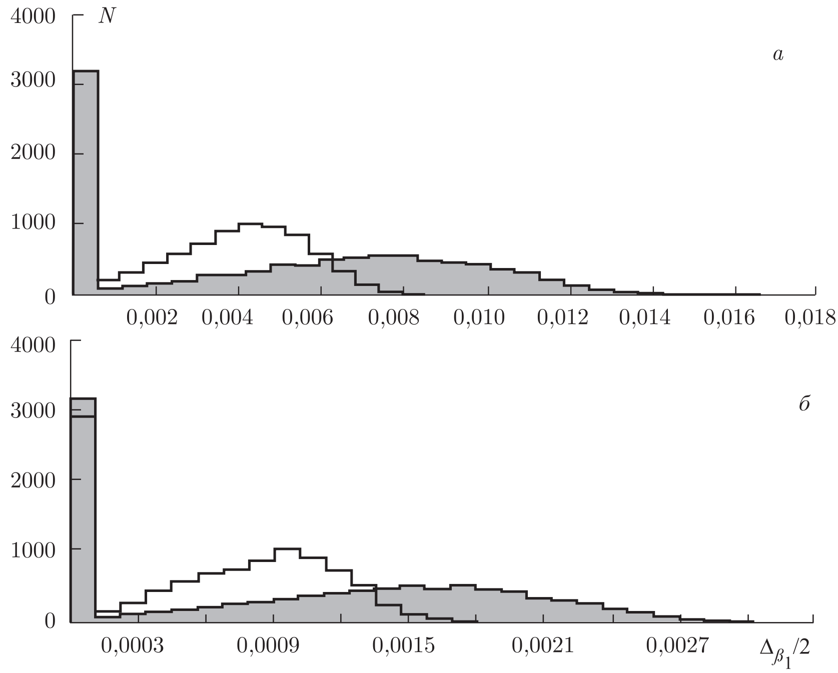


Рис. 41. Экспериментально полученная гистограмма плотности распределения полуширины доверительного интервала для функции $f(\theta, \beta_1) = \cos\theta + \beta_1 \sin\theta$ (*а*) и функции $f(\theta, \beta_1) = \cos\theta + \beta_1 e^{\theta}$ (*б*). Интервалы получены в статистике χ^2_M (серая гистограмма) и в статистике Фишера $F_{M,N-M}$ (светлая гистограмма) в результате 10^4 испытаний. Здесь N — количество значений полуширины доверительного интервала $\Delta_{\beta_1}/2$, попадающих в соответствующий шаг гистограммы

Реальная наблюдаемая «кривая блеска» неидеальна, т. е. в ней не содержатся значения ξ, полученные при одном и том же θ (в одной и то же фазе). В связи с этим, нами выполнен численный эксперимент по анализу реализаций $\xi_1, \ldots, \xi_{1212}$, в которых значения $\theta_1, \ldots, \theta_{1212}$ полагались равномерно распределенными по абсциссе. В этом случае статистика Фишера априорно неприменима (будем называть ее условной статистикой Фишера), но, тем не менее, на практике она используется. Правомочность использования условной статистики Фишера для подобной выборки ξ_m исследована на примерах функций (332) и (332′).

При расчете невязки в рамках условной статистики Фишера «возмущенная» «кривая блеска» $\xi_1, \ldots, \xi_{1212}$ разбивалась на 101 интервал равной величины по аргументу θ. В каждом интервале оказалось 12 точек. По данным 12 точкам, лежащим внутри интервала, вычислялось среднее значение абсциссы θ_k и ординаты ξ_k (где $k = 1, \ldots, 101$) внутри интервала, а также оценка стандартного отклонения σ^{obs}. Размерность распределения Фишера, как и в предыдущем численном эксперименте, составляла $F_{101,1212-101}$. При этом учитывалась неопределенность лишь в значениях ξ, а неопределенность в значениях аргумента θ не учитывалась (именно так чаще всего поступают разные авторы). Если учесть неопределенность по аргументу θ, то распределение доверительной области может несильно отклоняться от точного распределения Фишера.

На рис. 42 *а, б* приведены гистограммы плотности распределения величины полуширины интервала $\Delta_{\beta_1}/2$, полученного при решении функции в результате 10^4 испытаний в статистике χ^2_{1212} и статистике Фишера $F_{101,1212-101}$ для функций (332) и (332′) соответственно. Видно, что в то время как результат решения в статистике χ^2_{1212} согласуется с заявленной вероятностью ошибки первого рода $\alpha = 31{,}8\,\%$, результаты решения, полученного в рамках условной статистики Фишера, заметно отклоняются от теоретического значения α. Так, для функций (332) и (332′) значение параметра α составляет (по тысяче экспериментов) соответственно $\sim 20\,\%$ и $\sim 0\,\%$. Таким образом, усреднение точек внутри интервалов сказывается не только на величине доверительного интервала, но сильно влияет на выводы об адекватности модели. Напомним, что в случае интерпретации возмущенной кривой $\xi_{1,\ldots}, \xi_{1212}$, когда усредняемые значения ξ_j обладают одним и тем же значением θ_j, результаты интерпретации в рамках статистики Фишера полностью согласуются с априорно заданным значением α. Таким образом, при использовании статистики Фишера $F_{M,N-M}$ требуется минимальный разброс наблюдательных данных ξ_j по оси абсцисс

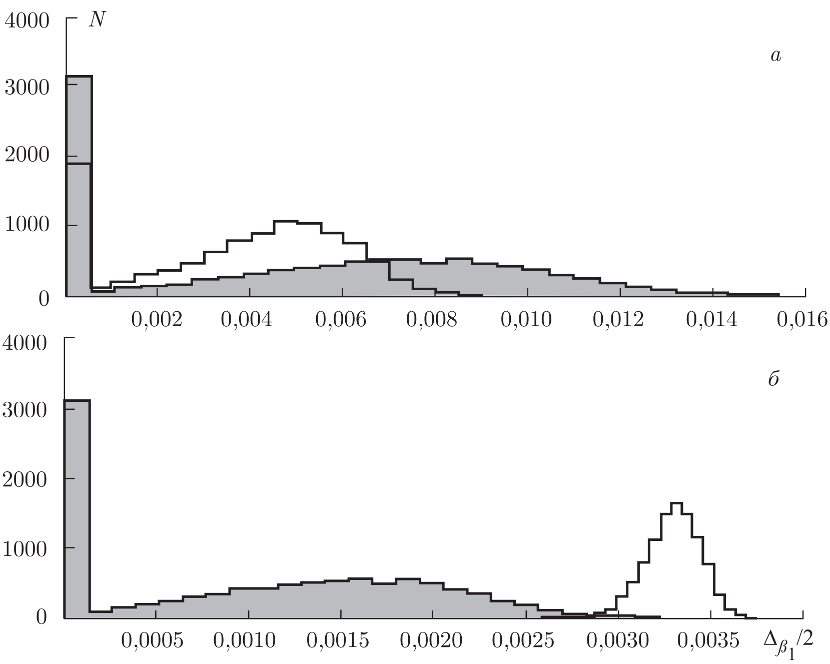


Рис. 42. Экспериментально полученная гистограмма распределения полуширины доверительного интервала для функции $f(\theta, \beta_1) = \cos\theta + \beta_1 \sin\theta$ (*а*) и функции $f(\theta, \beta_1) = \cos\theta + \beta_1 e^{\theta}$ (*б*). Интервалы получены в рамках статистики χ^2_M (серая истограмма) и условной статистики Фишера $F_{M,N-M}$ (светлая гистограмма) в результате 10^4 испытаний. Условная статистика Фишера $F_{M,N-M}$ является приближенной, так как она построена путем усреднения равномерно распределенных по оси абсцисс индивидуальных измерений внутри выбранных интервалов. Здесь N — количество значений полуширины доверительного интервала $\Delta_{\beta_1}/2$, попадающих в соответствующий шаг гистограммы

внутри одного интервала. Следует иметь в виду, что из-за разброса значений ξ_j внутри интервала вероятность адекватности модели наблюдательным данным при использовании условной статистики Фишера, а также размер доверительного интервала (в среднем) неправомочно повышаются. Необходимо отметить, что данное неправомочное повышение вероятности принятия гипотезы о правильности модели сильно зависит от вида функции $\xi(\theta)$. Для функции с более резкой зависимостью от θ это неправомочное повышение среднего размера доверительного интервала и вероятности принятия модели больше (см. рис. 42).

Так же, как и методы χ^2_P и χ^2_M, метод $F_{M,N-M}$ предполагает проектирование доверительной области (которая накрывает точное решение с заданной вероятностью γ) на оси параметров, что приводит к тому, что вероятность накрытия точного решения возрастает.

Резюмируя, можно заключить, что методы дифференциальных поправок и Монте-Карло дают нижние границы ошибок параметров модели (определяющие «внутренние» ошибки) и соответствуют весьма идеализированным априорным предположениям о верности модели. Метод χ^2_P дает промежуточные значения ошибок параметров и тоже основан на идеализированном предположении о том, что используемая модель идеально верна. Методы χ^2_M и $F_{M,N-M}$ дают верхние границы ошибок параметров модели (определяющие «внешние» ошибки). Эти методы свободны от искусственных идеализированных предположений о модели и потому дают наиболее гарантированные результаты интерпретации. Методы χ^2_M и $F_{M,N-M}$ можно рекомендовать к использованию в тех случаях, когда исследователь сталкивается с необходимостью делать наиболее ответственные суждения о результатах интерпретации наблюдательных данных.

Отметим также принципиальное преимущество метода доверительных областей, основанного на применении статистик χ^2_M и $F_{M,N-M}$ (метода χ^2_M и $F_{M,N-M}$), по сравнению с методами наименьших квадратов, дифференциальных поправок и Монте-Карло. В случае, когда модель неадекватна наблюдениям, метод χ^2_M и $F_{M,N-M}$ не позволяет найти доверительную область, которая вырождается в пустое множество. Тем самым метод χ^2_M и $F_{M,N-M}$ «честно» признает, что оценивать ошибки параметров в случае неадекватной модели бессмысленно, и нужно позаботиться об усовершенствовании модели. В то же время, методы наименьших квадратов, дифференциальных поправок и Монте-Карло позволяют непринужденно оценить «ошибки» параметров даже для неадекватной модели. Эти «ошибки» являются чисто формальными величинами, они вводят в заблуждение исследователя, вызывая у него иллюзию законченности решения задачи, что на самом деле далеко не так. Когда модель отвергается на низком уровне значимости («плохая» модель), ошибки параметров, оцениваемые методом χ^2_M и $F_{M,N-M}$, становятся заниженными и в пределе, когда модель неадекватна, они стремятся к нулю. Тем самым, метод χ^2_M и $F_{M,N-M}$ подсказывает нам, что что-то неладно с моделью, и она требует усовершенствования. Таким образом, метод доверительных областей χ^2_M и $F_{M,N-M}$ «чувствует» качество модели и информирует об этом исследователя. В то же время, методы наименьших квадратов, дифференциальных поправок и Монте-Карло при оценке ошибок параметров нечувствительны к качеству модели. Все сказанное позволяет заключить, что метод доверительных областей, основанный на использовании статистик χ^2_M и $F_{M,N-M}$, обеспечивает более строгий и, можно сказать, более научный анализ модели и ошибок параметров по сравнению с методами наименьших квадратов, дифференциальных поправок и Монте-Карло. Метод доверительных областей, основанный на использовании статистики χ^2_P (P — число искомых параметров) в определенном смысле аналогичен методам наименьших квадратов, дифференциальных поправок и Монте-Карло, поэтому все сказанное можно отнести и к методу χ^2_P.

Глава III
МОДЕЛЬ РОША

1. Безразмерный потенциал

Рассмотрим две звезды с массами m_1, m_2 ($m_1 > m_2$), вращающиеся вокруг общего центра масс на круговых орбитах. Пусть осевое вращение звезд синхронно с орбитальным обращением, а вещество в звездах сильно концентрировано к центру, так что к ним применима модель Роша.

Выше мы рассмотрели суммарный потенциал такой системы в системе координат, вращающейся синхронно вместе с двойной системой, поместив начало координат в ее центр масс (см. уравнение (240)).

При расчете фигуры равновесия звезды удобнее использовать выражение для суммарного потенциала (240) в системе координат с началом в центре масс одной из звезд. Введем прямоугольную вращающуюся систему координат X, Y, Z с началом в центре масс более массивной звезды с массой m_1 (см. рис. 43). Ось OX проходит

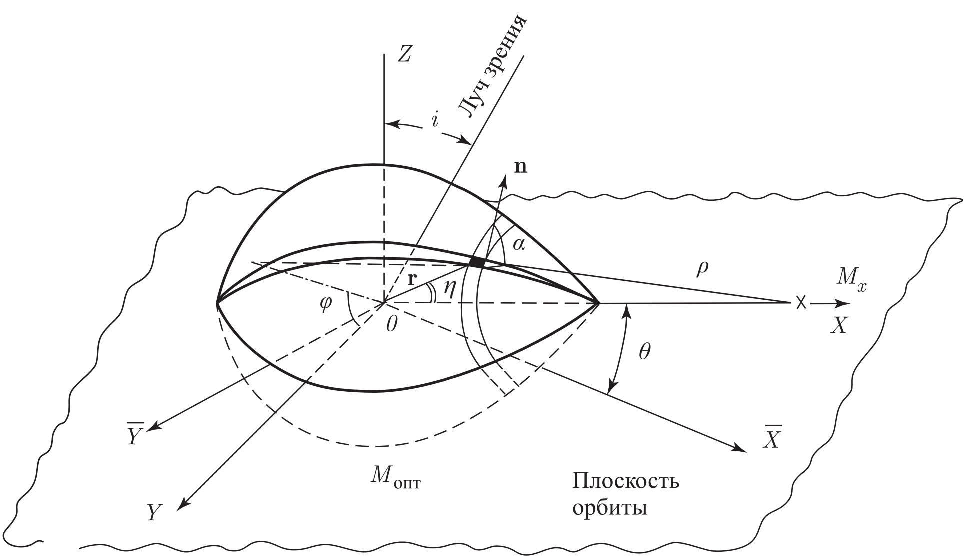


Рис. 43. Системы координат (O, X, Y, Z), $(O, \overline{X}, \overline{Y}, \overline{Z})$ и (r, η, φ), используемые для вычисления фигуры оптической звезды в рентгеновской двойной системе. Начало координат лежит в центре масс оптической звезды

через центры масс m_1, m_2, ось OY лежит в плоскости орбиты, ось OZ перпендикулярна плоскости орбиты (система координат — левая). Введем также сферическую систему координат с началом в центре масс первой звезды, вращающуюся синхронно с орбитальным обращением. Пусть $\mathbf{r}$ — радиус-вектор элементарной площадки dS с координатами X, Y, Z на поверхности звезды. В качестве оси вращения этой сферической системы координат можно брать разные координатные оси. Если взять в качестве оси вращения ось OX, то можно ввести полярные углы η и φ. Угол η в данном случае — это угол между осью OX и радиусом-вектором $\mathbf{r}$, угол φ —

угол между проекцией радиуса-вектора $\mathbf{r}$ на плоскость OYZ и осью OY. Проекции радиуса-вектора $\mathbf{r}$ на оси OX, OY, OZ запишутся в следующем виде:

$$x = r\cos\eta = r\lambda,$$

$$y = r\sin\eta\cos\varphi = r\mu,$$

$$z = r\sin\eta\sin\varphi = r\nu,$$

где r — модуль радиуса-вектора $\mathbf{r}$: $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$; λ, μ, ν — соответствующие направляющие косинусы.

Если в качестве оси вращения выбрать ось OZ, то, введя угол θ — как угол между радиусом-вектором $\mathbf{r}$ и осью OZ, а угол ψ — угол между проекцией радиуса-вектора $\mathbf{r}$ на плоскость OXY и осью OX, для проекций $\mathbf{r}$ на оси координат получим:

$$x = r\cos\psi\sin\theta = r\lambda,$$

$$y = r\sin\psi\sin\theta = r\mu,$$

$$z = r\cos\theta = r\nu.$$

Таким образом, в зависимости от выбора оси вращения в сферической системе координат, имеем следующие выражения для направляющих косинусов радиуса-вектора $\mathbf{r}$:

в случае, когда ось вращения — ось OX (этот случай реализован в наших программах):

$$\lambda = \cos\eta; \quad \mu = \sin\eta\cos\varphi, \quad \nu = \sin\eta\sin\varphi, \tag{361}$$

в случае, когда за ось вращения взята ось OZ (этот случай реализован, например, в программе Вильсона):

$$\lambda = \cos\psi\sin\theta, \quad \mu = \sin\psi\sin\theta, \quad \nu = \cos\theta. \tag{362}$$

В нашей вращающейся системе координат $OXYZ$ с началом в центре первой звезды выражение для суммарного потенциала имеет вид (см., например, Kopal, 1959, Лукьянов и Ширмин, 2009):

$$\psi = \frac{Gm_1}{r_1} + \frac{Gm_2}{r_2} + \frac{\omega^2}{2}\left[\left(x - \frac{m_2 a}{m_1 + m_2}\right)^2 + y^2\right], \tag{363}$$

где $r_1 = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $r_2 = \sqrt{(a-x)^2 + y^2 + z^2}$ (r_1, r_2 — расстояния площадки dS от масс m_1, m_2), $q = m_2/m_1$ — отношение масс, ω — угловая скорость орбитального обращения, a — расстояние между массами m_1, m_2 (радиус относительной орбиты). Если принять во внимание, что $\omega = \dfrac{2\pi}{P}$ (P — орбитальный период), а согласно третьему закону Кеплера

$$\frac{a^3}{P^2} = \frac{G}{4\pi^2}(m_1 + m_2),$$

то получим:

$$\omega^2 = \frac{G(m_1 + m_2)}{a^3}.$$

Чтобы выразить потенциал в безразмерном виде, поделим потенциал ψ на величину Gm_1/a :

$$\frac{a\psi}{Gm_1} = \frac{a}{r_1} + \frac{aq}{r_2} + \frac{m_1 + m_2}{2m_1 a^2}\left[x^2 - \frac{2m_2 a x}{m_1 + m_2} + \frac{m_2^2 a^2}{(m_1 + m_2)^2} + y^2\right].$$

Положим $a = 1$ и выразим r_2 через r_1: $r_2 = \sqrt{1 - 2x + r_1^2}$, тогда имеем:

$$\frac{\psi}{Gm_1} = \frac{1}{r_1} + q\frac{1}{\sqrt{1 - 2x + r_1^2}} + \frac{1}{2}\,(1+q)\left(x^2 + y^2\right) - qx + \frac{m_2^2}{2m_1\,(m_1 + m_2)}.$$

Обозначим расстояние от элементарной площадки dS до массы m_1 через r $(r_1 = r)$, получим:

$$\frac{\psi}{Gm_1} = \frac{1}{r} + q\left(\frac{1}{\sqrt{1 - 2x + r^2}} - x\right) + \frac{1}{2}\,(1+q)\left(x^2 + y^2\right) + \frac{m_2^2}{2m_1\,(m_1 + m_2)}.$$

Последний член в этом выражении при постоянных m_1, m_2 является константой. Поскольку потенциал определяется с точностью до произвольной константы, рассмотрим потенциал Ω:

$$\Omega = \frac{\psi}{Gm_1} - \frac{m_2^2}{2m_1\,(m_1 + m_2)} = \frac{1}{r} + q\left(\frac{1}{\sqrt{1 - 2x + r^2}} - x\right) + \frac{1}{2}\,(1+q)\left(x^2 + y^2\right). \tag{364}$$

Безразмерный потенциал Ω записан в декартовой системе координат. Чтобы выразить потенциал Ω в сферической системе координат, подставим вместо координат x, y их выражения через направляющие косинусы $x = r\lambda$, $y = r\mu$. Тогда получим:

$$\Omega = \frac{1}{r} + q\left(\frac{1}{\sqrt{1 + r^2 - 2r\lambda}} - r\lambda\right) + \frac{1}{2}\,(1+q)\;r^2\left(1 - \nu^2\right). \tag{365}$$

Здесь $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $q = m_2/m_1$, выражения для направляющих косинусов λ, μ, ν даны формулами (361), (362).

Разным значениям потенциала Ω соответствуют разные эквипотенциальные поверхности. Обычно параметром задачи является не значение потенциала Ω, а более наглядная величина, параметр μ — степень (или коэффициент) заполнения звездой своей критической полости Роша: $\mu = R_0/R_0^*$, где R_0 и R_0^* — полярные радиусы для частичного и полного заполнения критической полости Роша (далее — просто полости Роша). Связь между степенью заполнения полости Роша и потенциалом Ω находится следующим образом. Критическая поверхность Роша состоит из двух полостей, соприкасающихся в критической точке (внутренней точке Лагранжа) с координатами $(\xi^*, 0, 0)$. В этой точке

$$\frac{d\Omega}{dx} = -\frac{1}{\xi^2} - q\left[1 - \frac{1}{(\xi - 1)^2}\right] + (1+q)\,\xi = 0. \tag{366}$$

Решая это уравнение пятой степени, находим значение ξ^* как наименьший вещественный корень (Цесевич, 1971). Подставляя координаты точки $L_1(\xi^*,\ 0,\ 0)$ в формулу (365) для потенциала Ω, получаем значение критического потенциала:

$$\Omega^* = \frac{1}{\xi^*} + q\left(\frac{1}{1 - \xi^*} - \xi^*\right) + \frac{1+q}{2}\,(\xi^*)^2. \tag{367}$$

Значение полярного радиуса R_0^* критической полости Роша находится из уравнения (365) для потенциала Ω, где λ=0, $\nu = 1$, $\Omega = \Omega^*$. Задание параметра μ определяет значение полярного радиуса эквипотенциальной поверхности, описывающей фигуру первой звезды $R_{01} = \mu R_{01}^*$. Значение потенциала Ω_1, соответствующего данному μ, определяется по формуле (365) при $r = R_{01}$, λ=0, $\nu = 1$. Эквипотенциальная поверхность $r_1(\eta, \varphi)$, соответствующая заданному μ, находится из уравнения (365) для потенциала Ω при полученном значении $\Omega = \Omega_1$. При фиксированных значениях η и φ

и при заданном значении потенциала Ω_1, решая уравнение (365), можно определить значение радиуса-вектора $r(\eta, \varphi) = r_1(\eta, \varphi)$ для соответствующей эквипотенциальной поверхности, с которой совпадает поверхность первой звезды. Численное решение нелинейного алгебраического уравнения (365) при каждых фиксированных η и φ не представляет трудностей для современных компьютеров. Таким образом, задание двух параметров q и μ однозначно определяет форму первой оптической звезды.

Вычисление эквипотенциальной поверхности $r_2(\eta,\varphi)$ для второй звезды проводится аналогично тому, как это было сделано для первой звезды. Для этого переходим в систему координат (X', Y', Z') с началом в центре второй звезды, вращающуюся синхронно с орбитальным обращением. Соответствующие уравнения перехода следующие:

$$X' = 1 - X, \quad Y' = -Y, \quad Z' = Z.$$

Форма эквипотенциальной поверхности для второй звезды определяется из решения уравнения (365) для потенциала Ω (в новой системе координат), в котором участвует обратное отношение масс $q' = 1/q$.

Рассмотрим теперь случай эллиптической орбиты. Построение точных поверхностей нулевой скорости в ограниченной эллиптической задаче трех тел невозможно ввиду того, что в данном случае не существует интеграла Якоби. В работе Лукьянова (2006) дан вывод приближенных поверхностей минимальной энергии в ограниченной эллиптической задаче трех тел. Хотя в этой задаче интеграл Якоби не существует, известно некоторое интегральное инвариантное соотношение, с помощью которого Лукьяновым для ограниченной эллиптической задачи трех тел получен закон сохранения энергии, содержащий одну неизвестную периодическую функцию. На этой основе построены пульсирующие области возможных движений и ограничивающие их поверхности, на которых принимает минимальное значение левая часть инвариантного соотношения, имеющая смысл некоторой энергии тела малой массы. В том числе, на этих поверхностях обращается в нуль скорость движения малого тела. Эти поверхности Лукьянов называет поверхностями минимальной энергии (в отличие от поверхностей нулевой скорости в задаче Хилла). Важно то, что при стремлении к нулю эксцентриситета орбиты двойной системы эти поверхности приближаются к поверхностям нулевой скорости в круговой ограниченной задаче трех тел. Эти результаты открывают новые возможности для астрономических приложений (подробнее, см. монографию: Лукьянов и Ширмин, 2009).

В нашем случае, мы ограничимся лишь качественным рассмотрением фигур равновесия звезд на эллиптических орбитах в двойных системах. В тесной двойной системе с эллиптической орбитой поле сил меняется со временем, поэтому, как известно, в этом случае не существует потенциала, описывающего поле сил в двойной системе в произвольный момент времени. Вопрос о применимости модели Роша в случае эллиптической орбиты и несинхронного вращения звезд подробно обсуждался в работах Авни (Avni, 1976) и Вильсона (Wilson, 1979). Отметим, что учет несинхронности вращения звезд в случае круговой орбиты системы был выполнен Плавецом (Plavec, 1958), Лимбером (Limber, 1963) и Крушевским (Kruszewski, 1963). Как показано Авни (Avni, 1976), хотя в случае эллиптической орбиты поле сил в синхронно вращающейся системе отсчета зависит от времени, в случае небольшого эксцентриситета орбиты и короткого времени релаксации звезды можно ввести эффективный потенциал для любой точки орбиты. Если звезда успевает прийти в гидростатическое равновесие во временной шкале много меньшей, чем характерное время изменения сил, оказывается возможным рассматривать эффективный потенциал, зависящий от мгновенного расстояния D между центрами звезд — компонент двойной системы с эллиптической орбитой. Характерное время установления гидростатического равновесия в звезде очень короткое (Зельдович и Новиков, 1967). Действительно, пусть в звезде произошло отклонение от состояния гидростатического равновесия, и под действием нескомпенсированной силы притяжения вещество получило ускорение, сравнимое с ускорением свободного падения $g = GM/R^2$. При таком ускорении слои звезды сместятся на расстояние порядка радиуса звезды R за так называемое гидродинамическое время

$$t_{\text{H}} \approx \left(\frac{R}{g}\right)^{1/2} = \left(\frac{R^3}{GM}\right)^{1/2} \approx \frac{1}{G^{1/2}} M,$$

поскольку для звезд главной последовательности средних масс $R \sim M^{0,8} \sim M$. Для Солнца ($M_\odot = 2 \cdot 10^{33}$ г, $R_\odot = 7 \cdot 10^{10}$ см) имеем $t_{\text{H}} \approx 10^3$ с $= 17$ мин. Таким образом, гидродинамическое время равно

$$t_{\text{H}} \simeq 10^3 \frac{M}{M_\odot} \text{ с}, \tag{368}$$

и даже для очень массивных звезд с $M = 100 M_\odot$ $t_{\text{H}} = 28$ ч, т. е. порядка суток. Эти величины много меньше характерных орбитальных периодов для ТДС соответствующих масс, поэтому введение мгновенного потенциала в двойной системе с эллиптической орбитой представляется вполне разумным. Забегая вперед, отметим, что хотя звезда очень быстро реагирует на изменения внешних сил и приходит в гидростатическое равновесие, она при этом не достигает теплового равновесия, время которого весьма велико:

$$t_{\text{тепл.}} \simeq t_{\text{кельвин.}} \simeq \frac{GM^2}{RL} \simeq \frac{3 \cdot 10^7}{(M/M_\odot)^2} \text{ лет}, \tag{369}$$

и составляет от 10^8 до 10^3 лет для звезд разных масс. Поэтому в звезде, подвергающейся переменным приливным воздействиям в двойной системе с эллиптической орбитой могут нарастать тепловые неустойчивости (см., например, Горбацкий, 1977).

Таким образом, в двойной системе с эллиптической орбитой можно ввести понятие локального эффективного потенциала и вычислить эквипотенциальную поверхность для звезды в модели Роша для данного мгновенного расстояния D между компонентами так, как это делалось для круговой орбиты.

Будем считать, что массы m_1, m_2 обеих звезд сосредоточены в их центрах. Введем как и в случае круговой орбиты, вращающуюся синхронно вместе с двойной системой декартову систему координат X, Y, Z с началом в центре масс первой, более массивной звезды. Ось OX направлена вдоль линии центров компонент, ось OY лежит в плоскости орбиты, ось OZ перпендикулярна плоскости орбиты. Тогда записанный в безразмерном виде обобщенный потенциал для двух точечных масс на эллиптических орбитах имеет вид (Avni, 1976):

$$\Omega = \frac{1}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}} + q\frac{1}{\sqrt{(D-X)^2+Y^2+Z^2}} - \frac{qX}{D^2} + 0{,}5 f_1^2 (1+q)\left(X^2+Y^2\right). \tag{370}$$

Здесь $q = m_2/m_1$, D — мгновенное расстояние между центрами компонент, величины D, X, Y, Z выражены в единицах большой полуоси относительной орбиты a, $f_1 = \omega_{\text{rot}}/\omega_{\text{orb}}$ — параметр асинхронности осевого вращения первой звезды (ω_{rot}, ω_{orb} — угловые скорости осевого вращения звезды и орбитального обращения). Если ввести также соответствующую синхронную сферическую систему координат (см. выше), то направляющие косинусы λ, μ, ν радиуса-вектора $\mathbf{r}$ с осями OX, OY, OZ запишутся формулами (361) или (362). В системе координат (r, η, φ)

уравнение для обобщенного безразмерного потенциала (370) запишется в следующем виде:

$$\Omega = \frac{1}{r} + q\left(\frac{1}{\sqrt{D^2 + r^2 - 2Dr\lambda}} - \frac{r\lambda}{D^2}\right) + \frac{1}{2}\,(1+q)\,r^2 f_1^2\left(1-\nu^2\right). \tag{371}$$

Безразмерный потенциал (371) определяет форму эквипотенциальной поверхности. Как и ранее, введем понятие степени заполнения μ критической полости Роша звездой: $\mu = R/R^*$, где R и R^* — полярные радиусы для частичного и полного заполнения критической полости Роша. В случае круговой орбиты степень заполнения полости Роша μ постоянна. Для двойной системы с эллиптической орбитой величина μ меняется с фазой орбитального периода, так как меняются абсолютные размеры полостей Роша в зависимости от текущего расстояния D между звездами, а абсолютные размеры звезд остаются приблизительно постоянными. Размеры критических полостей Роша минимальны в периастре и максимальны в апоастре. Таким образом, в отличие от случая круговой орбиты, где вычисленное значение потенциала Ω в одной орбитальной фазе однозначно определяло поверхность звезды для всех орбитальных фаз, в случае эллиптической орбиты необходимо ввести дополнительное условие, определяющее эквипотенциальную поверхность звезды в произвольной орбитальной фазе. В ранее предложенных алгоритмах при рассмотрении эллиптической орбиты в качестве такого условия предполагалось постоянство среднего радиуса звезды (Avni, 1976, Hill and Rucinski, 1993) или ее объема (Wilson, 1979). Следуя Вильсону (Wilson,1979), будем использовать условие сохранения объема звезды в любой точке эллиптической орбиты. Строго говоря, это условие можно применять лишь в первом приближении. При движении звезды по эллиптической орбите, в силу изменения расстояния D между центрами звезд меняется не только величина приливной силы, но и, после усреднения приливных сил, среднее значение гравитационного потенциала. Последнее может менять условие гидростатического равновесия в недрах звезды, что будет приводить к изменению ее объема, поскольку динамическое время для звезды мало. Мы будем пренебрегать этим эффектом и рассматривать лишь приливные эффекты в звезде, считая объем звезды постоянным. В этом случае схема вычислений формы поверхностей звезд может быть следующей. Для выбранной фазы орбитального периода, соответствующей периастру орбиты, при известном расстоянии между центрами звезд $D = a(1-e)$ вычисляются размеры критической полости Роша (a — большая полуось относительной орбиты). Далее, при заданной степени заполнения полости Роша звездой в периастре μ_p определяется соответствующая эквипотенциальная поверхность самой звезды и ее объем. Для i-й орбитальной фазы и соответствующего расстояния D_i также вычисляется своя критическая полость Роша и при условии постоянства объема звезды методом итераций находится новое значение μ_i и форма поверхности звезды. Таким образом, входными параметрами в случае эллиптической орбиты являются степени заполнения первой и второй звездой своих полостей Роша в периастре μ_{p1} и μ_{p2}.

Рассмотрим момент периастра. В каждой орбитальной фазе мгновенная критическая эквипотенциальная поверхность состоит из двух полостей, соприкасающихся в критической точке — аналоге внутренней точки Лагранжа, с координатами $(\xi^*, 0, 0)$. В этой точке производная от потенциала (371) по x равна нулю:

$$\frac{d\Omega}{dx} = -\frac{1}{\xi^2} + q\left[\frac{1}{(D-\xi)^2} - \frac{1}{D^2}\right] + (1+q)\,f_1^2\xi = 0. \tag{372}$$

Решая уравнение (372) численно, например, методом Ньютона, находим значение ξ^* как наименьший вещественный корень. Подставляя координаты точки $(\xi^*, 0, 0)$

в формулу (371) для потенциала Ω, получаем значение потенциала для критической поверхности:

$$\Omega^* = \frac{1}{\xi^*} + q\left(\frac{1}{D-\xi^*} - \frac{\xi^*}{D^2}\right) + \frac{1+q}{2} f_1^2 \left(\xi^*\right)^2. \tag{373}$$

Далее, решая уравнение для потенциала (371) при $\Omega = \Omega^*$, $\lambda = 0$, $\nu = 1$, находим полярный радиус критической полости Роша первой звезды R_1^*. Обозначим для периастра полученный таким образом полярный радиус критической полости Роша первой звезды R_{p1}^*, а принятую степень заполнения ею полости Роша μ_{p1}. Тогда полярный радиус первой звезды в периастре равен $R_{p1} = \mu_{p1} R_1^*$. Значение соответствующего потенциала на поверхности звезды Ω_1 находится из уравнения (371) для потенциала Ω при $r = R_{p1}$, λ=0, $\nu = 1$. Затем, решая уравнение (371) при значении потенциала $\Omega = \Omega_1$, для каждой элементарной площадки на поверхности звезды находим радиус-вектор площадки как функцию углов η, φ и тем самым находим уравнение поверхности звезды $r(\eta, \varphi)$. Объем звезды равен

$$V = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1}{3} r^3(\eta,\ \varphi) \sin\eta \, d\eta \, d\varphi. \tag{374}$$

Обозначим вычисленный объем первой звезды в периастре как V_{p1}. Для i-й фазы орбитального периода методом итераций определяется значение потенциала Ω_i на поверхности звезды, объем которой равен V_{p1}. Затем из уравнения (371) для потенциала Ω при значении $\Omega = \Omega_i$ вычисляется радиус-вектор каждой элементарной площадки $r(\eta, \varphi)$, т. е. находится форма поверхности звезды для произвольной орбитальной фазы.

Вычисление поверхности второй звезды проводится аналогично тому, как это было сделано для первой звезды. Для этого переходим в синхронно вращающуюся систему координат с началом в центре масс второй звезды (X', Y', Z'). Соответствующие уравнения перехода следующие:

$$X' = D - X, \quad Y' = -Y, \quad Z' = Z. \tag{375}$$

Форма эквипотенциальной поверхности второй звезды определяется из уравнения (371) для потенциала Ω (в новой системе координат (X', Y', Z')), в котором участвует обратное отношение масс $q' = 1/q$ и параметр асинхронности f_2.

Таким образом, для любого мгновенного расстояния D между центрами масс компонент вычисляются поверхности первой и второй звезды, которые могут использоваться для нахождения соответствующей кривой блеска и кривой лучевых скоростей двойной системы.

Рассмотрим теперь связь между мгновенным расстоянием D между центрами звезд и параметрами эллиптической орбиты. Радиусы-векторы первой и второй звезд записываются в виде:

$$r_1 = \frac{a_1\left(1-e^2\right)}{1+e\cos v}, \quad r_2 = \frac{a_2\left(1-e^2\right)}{1+e\cos v}, \tag{376}$$

где a_1, a_2 — большие полуоси абсолютных орбит. Поскольку при движении по кеплеровским эллипсам радиусы-векторы абсолютных орбит r_1 и r_2 лежат на одной прямой, в уравнения (376) входит одна и та же истинная аномалия v. Тогда относительное расстояние D между центрами звезд равно:

$$D = r_1 + r_2 = (a_1 + a_2)\frac{1-e^2}{1+e\cos v} = \frac{a\left(1-e^2\right)}{1+e\cos v}, \tag{377}$$

где $a = a_1 + a_2$ — большая полуось относительной орбиты, которая обычно принимается равной единице.

Таким образом, для определения D необходимо знать истинную аномалию v как функцию времени t. Примем за орбитальную фазу $\psi = 0$ момент соединения компонент, когда первая, более массивная звезда находится впереди второй. Найдем фазу прохождения звезды через периастр орбиты ψ_0. При этом не следует забывать, что при $i \neq 90^\circ$ в случае эллиптической орбиты моменты соединения компонент (которые часто идентифицируются с моментами минимумов блеска) не совпадают с минимумами затменных изменений блеска (см. формулы (154), (155)). Для произвольной орбитальной фазы ψ (линейно зависящей от t) средняя аномалия звезды $M = \psi - \psi_0$. В момент соединения $\psi = 0$, следовательно, $M = -\psi_0$ и истинная аномалия $v = \pi/2 - \omega$. Зная v, из уравнения

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}E = \operatorname{tg}\frac{1}{2}v\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}$$

находим эксцентрическую аномалию E в момент соединения. Далее, из уравнения Кеплера

$$M = E - e\sin E$$

находим среднюю аномалию M в момент соединения, а затем определяем фазу прохождения звездой периастра орбиты $\psi_0 = -M$.

Зная ψ_0, можно для любой орбитальной фазы ψ вычислить среднюю аномалию $M = \psi - \psi_0$, а затем найти E, решая итерациями уравнение Кеплера. С найденной E находится истинная аномалия v, а затем, по формуле (377) определяется мгновенное расстояние D между центрами звезд (в долях большой полуоси относительной орбиты a). Найденное значение D входит в выражение (371) для безразмерного обобщенного потенциала Ω.

Мы рассмотрели выражения для безразмерного потенциала в модели Роша, принимая во внимание действие двух типов сил во вращающейся двойной системе: сил гравитационного притяжения и центробежных сил. Иногда делаются попытки обобщить потенциал в модели Роша путем включения в него члена, ответственного за давление радиации. Следует отметить, однако, что сила давления радиации — это поверхностная сила, а силы гравитационного притяжения и центробежные силы являются объемными. Поэтому их объединение в рамках единого потенциала не всегда правомерно. В областях с малой оптической толщей вещества в двойной системе градиент давления излучения и градиент гравитационного потенциала коллинеарны, и обе силы действуют по радиусу. Здесь объединение этих сил в рамках единого потенциала может быть оправдано. Однако в случае больших оптических толщин (например, в недрах звезд и у оснований их атмосфер) сила гравитационного притяжения действует по радиусу, а сила давления радиации — по нормали к уровненной поверхности, и действие силы давления радиации ничем не отличается от действия сил газового давления. При учете сил давления радиации суммарное давление увеличивается, и звезда «сядет» на другую эквипотенциальную поверхность в стандартной модели Роша (см. выражения (365) и (371) для потенциала Ω), но при этом уравнение для потенциала Ω останется прежним. Поскольку мы используем уравнения (365) и (371) для вычисления фигуры равновесия звезды, т. е. для случая больших оптических толщин, мы можем использовать стандартные выражения (365), (371) для потенциала Ω в том числе и в случае массивных горячих звезд, где роль давления радиации в гидростатическом равновесии звезды велика.

В областях же с малыми оптическими толщинами соответствующие «эквипотенциальные поверхности», полученные путем включения давления радиации, мало говорят о реальной динамике частиц газа, и в данном случае необходимо описание в рамках трехмерной радиационной газодинамики (см., например, Boyarchuk et al., 2002).

Приведем также важное замечание о физическом смысле эквипотенциальных поверхностей в классической модели Роша (van der Heuvel, 1994). Даже в случае звезд, вращающихся синхронно с орбитальным обращением, физический смысл эквипотенциальных поверхностей в модели Роша, расположенных за пределами второй и третьей критических точек L_2, L_3, часто интерпретируется некорректно. Поскольку в модели Роша рассматривается вращающаяся система координат, центробежные ускорения возрастают с удалением от системы, а гравитационные — убывают. Это приводит к тому, что эквипотенциальные поверхности в модели Роша при удалении от системы достигают максимальной высоты в окрестностях точек L_2 и L_3. При дальнейшем увеличении расстояния эквипотенциальные поверхности скатываются вниз (см. рис. 44, 45). Отсюда часто делают заключение о том, что вещество звезды, сильно переполняющей свою полость Роша, может самопроизвольно уйти на бесконечность от системы, двигаясь из точек L_2, L_3 по спадающим вниз эквипотенциальным поверхностям. Однако такое заключение некорректно.

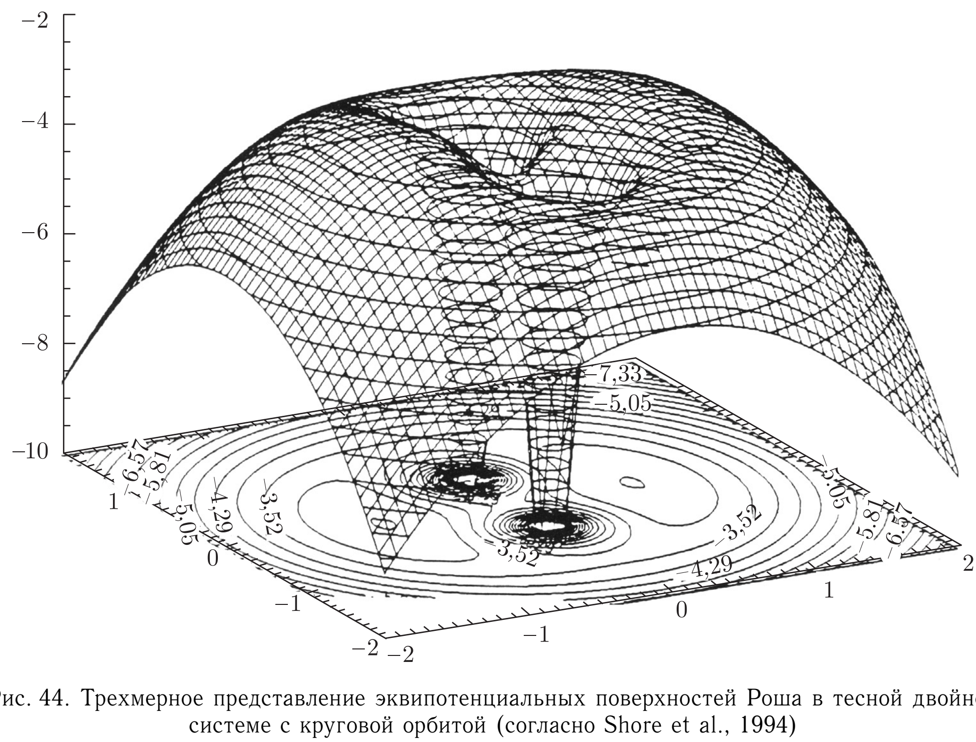


Рис. 44. Трехмерное представление эквипотенциальных поверхностей Роша в тесной двойной системе с круговой орбитой (согласно Shore et al., 1994)

Действительно, вещество смогло бы уйти на бесконечность по спадающим наружу эквипотенциальным поверхностям в том случае, если бы оно на больших расстояниях было в коротации с вращающейся системой координат (тогда действие центробежных сил помогало бы ему уходить на бесконечность). В объеме, ограниченном точками L_2 и L_3 вещество гравитационно связано со звездами и действительно может находиться в коротации с вращающейся системой координат. Однако, выйдя за пределы точек L_2, L_3, вещество уже не принадлежит звездам и не обязано находиться

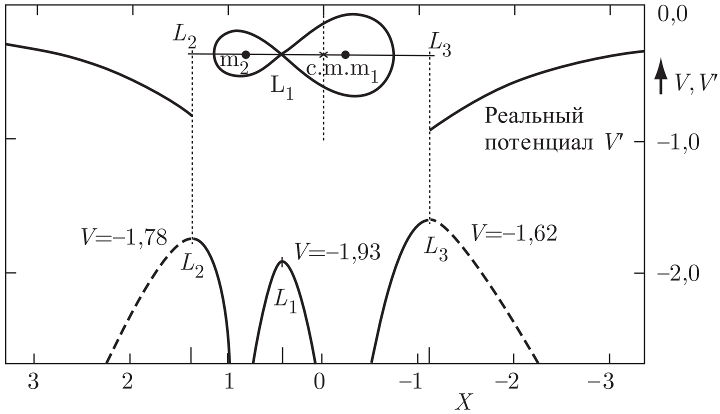


Рис. 45. Безразмерный потенциал Роша V (нормированный на величину $G\,(M_1 + M_2)/a$) в двойной системе и реальный потенциал V', который за пределами точек L_2 и L_3 приближенно может быть представлен как сумма гравитационных потенциалов двух звезд, вращающихся около общего центра тяжести ($V' \cong -a/r$). За пределами точек L_2 и L_3 потенциал Роша обозначен пунктирными линиями, а реальный потенциал V' — сплошными линиями (по материалам работы Shore et al., 1994)

в коротации с вращающейся системой координат. Поэтому действие центробежных сил ослабевает, поскольку, в отсутствие связи со звездами, истекающее вещество вращается гораздо медленнее, чем при коротации. Оно попадает в потенциальную яму за пределами точек L_2, L_3, образуя там околозвездную кольцевую структуру. Никакого самопроизвольного ухода вещества на бесконечность при истечении вещества из звезд через точки L_2 и L_3 не происходит. Как отмечает Ван ден Хейвел (van der Heuvel, 1994), части эквипотенциальных поверхностей, расположенные за пределами точек L_2, L_3, должны быть проигнорированы, если мы хотим иметь правильное представление о движении вещества в ТДС за пределами этих точек. Реальные эквипотенциальные поверхности, обусловливающие истинное движение вещества за пределами точек L_2, L_3, не спадают к бесконечности, а наоборот, медленно поднимаются при увеличении расстояния до системы. Рисунок 45 поясняет сказанное.

Сделанное замечание показывает, насколько рискованно делать заключения о возможном движении вещества в ТДС, основываясь лишь на одном виде эквипотенциальных поверхностей в модели Роша. Для правильного суждения о динамике газа в ТДС необходимо эквипотенциальные поверхности в модели Роша рассматривать совместно с уравнениями движения газа в ТДС.

2. Синтез оптических кривых блеска рентгеновских двойных систем

Мы переходим к изложению современных методов синтеза кривых блеска и кривых лучевых скоростей тесных двойных систем. Вначале рассмотрим простейший случай рентгеновской двойной системы, состоящей из оптической звезды-донора вещества и аккрецирующего релятивистского объекта. Хотя физика процессов в таких системах значительно сложнее и разнообразнее, чем в случае классических ТДС, с точки зрения методики синтеза кривой блеска рентгеновские двойные системы представляют собой наиболее простой случай.

Впервые метод синтеза кривых блеска ТДС был предложен Вильсоном и Девиннеем (Wilson and Devinney, 1971). Главная идея метода состоит в разбиении поверхности звезды на элементарные площадки с последующим вычислением для каждой из них выходящего потока излучения в направлении к наблюдателю с учетом эффектов взаимной близости компонент. Затем проводится проверка условий видимости каждой площадки для наблюдателя с учетом затмений площадок телом звезды и передней компонентой. После суммирования вклада (синтеза) всех видимых площадок получается наблюдаемый блеск двойной системы в каждой фазе орбитального периода. Таким образом, синтезируется теоретическая кривая блеска двойной системы при фиксированных параметрах модели. Многократное решение прямой задачи синтеза кривой блеска с применением современных методов минимизации функционала невязки (см., например, Гончарский и др., 1978) позволяет решить обратную задачу — найти параметры модели двойной системы из анализа ее наблюдаемой кривой блеска.

Следует подчеркнуть, что метод синтеза применим лишь к звездам с тонкими атмосферами, у которых толщина атмосферы H, где формируется видимый спектр излучения, мала по сравнению с радиусом звезды R. Например, для Солнца толщина атмосферы составляет $H \simeq 300$ км при его радиусе $\sim 700\,000$ км. Если поверхность Солнца разбить на площадки размером $\gtrsim 10H \simeq 3000$ км, то можно считать, что перенос излучения в горизонтальном направлении незначителен, и каждая элементарная площадка излучает наружу независимо от соседних площадок (число площадок размером $10H$ для Солнца составляет $\sim 6 \cdot 10^5$). Если же размер элементарной площадки менее $10H$, площадки уже нельзя считать независимыми, и в данном случае метод синтеза неприменим (в случае Солнца это соответствует числу элементарных площадок более $6 \cdot 10^5$). Для массивных горячих звезд-гигантов толщина атмосфер $\sim 10^4$ км, однако их радиусы много больше, чем у Солнца, поэтому в любом случае при применении метода синтеза можно считать, что число разбиений поверхности звезды на элементарные площадки не должно сильно превышать 10^5–10^6. К счастью, как показывает практика, уже при разбиении поверхности звезды на 10^3–10^4 площадок точность вычисления синтетической кривой блеска составляет $\sim 10^{-3}$ звездной величины, что вполне достаточно в большинстве случаев.

В случае протяженных атмосфер метод синтеза неприменим, поскольку здесь толщина атмосферы $H \sim R$. В этом случае, если протяженную атмосферу разбить на элементарные объемы с размером $< R$, эти объемы нельзя считать независимыми, и необходимо учитывать обмен излучением между ними. Сказанное относится главным образом к излучению в непрерывном спектре. В случае излучения в линиях при наличии значительных градиентов скоростей вещества протяженной атмосферы звезды, как показано Соболевым (1947), из-за влияния эффекта Доплера элементарные объемы в движущейся атмосфере во многих случаях можно считать независимыми.

Метод синтеза получил широкое распространение в последние годы в связи с наличием мощных компьютеров. На основе метода синтеза Вильсоном (Wilson, 1998) создана современная программа синтеза кривых блеска и кривых лучевых скоростей классических тесных двойных систем. Эта программа активно используется для интерпретации оптических кривых блеска тесных двойных систем разных типов и доступна в электронном виде. Кроме того, метод синтеза реализован в виде отдельных программ рядом авторов (см. монографию Kallrath and Milone, 1999, где приведены все необходимые ссылки).

Алгоритм синтеза кривой блеска рентгеновской двойной системы и соответствующая компьютерная программа на языке ФОТРАН опубликованы в нашей работе (Балог и др., 1982). Здесь мы изложим результаты этой работы.

Рассмотрим следующую модель (Балог и др., 1982). Тесная двойная система состоит из двух компонент на круговых орбитах, одна из которых — точечный рентгеновский источник (аккрецирующий релятивистский объект), окруженный диском, лежащим в плоскости орбиты, другая — оптическая звезда, форма которой совпадает с эквипотенциальной поверхностью в модели Роша. Осевое вращение оптической звезды синхронно с орбитальным обращением (звезда вращается твердотельно). Приливно деформированная поверхность оптической звезды прогревается рентгеновским излучением компактного объекта.

Интенсивность излучения элементарной площадки поверхности оптической звезды и ее угловая зависимость определяются собственной температурой площадки, потемнением к краю, гравитационным потемнением и прогревом излучением компактного объекта (эффектом отражения). Аккреционный диск вокруг компактного объекта в оптическом диапазоне — тонкое круглое образование с однородной яркостью, радиус которого r_d и оптическая светимость L_d — свободные параметры задачи. Во многих случаях такое приближение является удовлетворительным, поскольку в большинстве рентгеновских двойных систем вклад оптического аккреционного диска в полную оптическую светимость системы сравнительно мал.

Рассмотрим процедуру вычисления потока излучения от оптической звезды. Введем две декартовые системы координат: вращающуюся (X, Y, Z) и неподвижную $(\overline{X}, \overline{Y}, \overline{Z})$ с началом в центре масс оптической звезды (см. рис. 46). Радиус относительной орбиты принимаем за единицу. Ось OX направлена вдоль линии центров компонент, ось OY лежит в плоскости орбиты, ось OZ перпендикулярна плоскости орбиты. Оси $\overline{OX}$ и $\overline{OY}$ неподвижной системы координат лежат в плоскости орбиты, причем ось $\overline{OX}$ — направлена от наблюдателя (наблюдатель расположен в плоскости $\overline{OXZ}$) ось $\overline{OZ}$ совпадает с осью OZ. Введем угол относительного поворота компонент $\theta(t)$ — угол между осями OX и $\overline{OX}$. В нулевой фазе орбитального периода $(\theta = 0)$ впереди находится оптическая звезда. Введем наклонение орбиты i — угол между нормалью к плоскости орбиты (осью OZ) и направлением на наблюдателя.

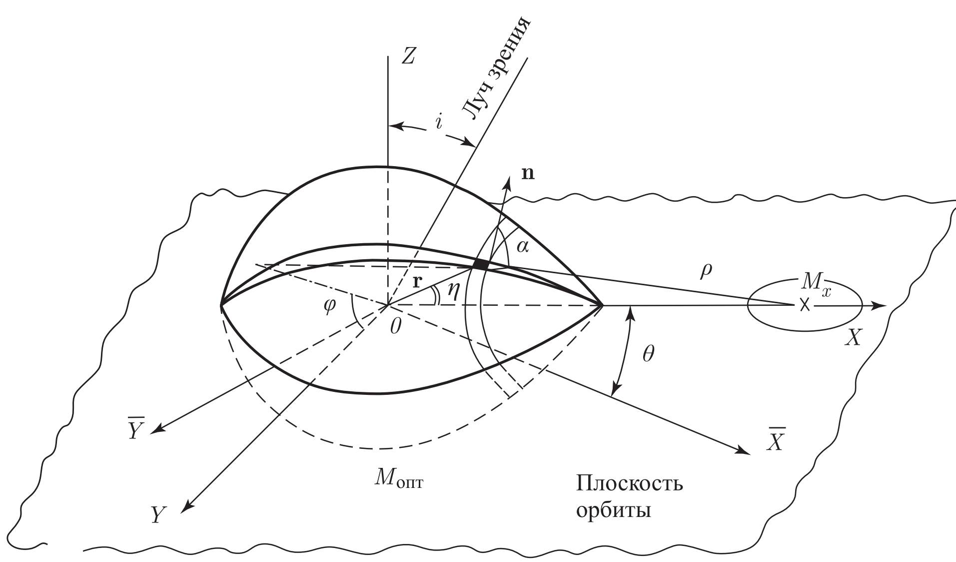


Рис. 46. Модель рентгеновской двойной системы с плоским круглым аккреционным диском, лежащим в плоскости орбиты

Как и ранее, введем синхронно вращающуюся сферическую систему координат с началом в центре масс оптической звезды $(r, \eta,\ \varphi)$, где $r = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$ — модуль радиуса-вектора элементарной площадки dS на поверхности звезды, η — угол между радиусом-вектором площадки $\mathbf{r}$ и осью OX, φ — угол между проекцией радиус-вектора $\mathbf{r}$ на плоскость OYZ и осью OY. Направляющие косинусы углов радиуса-вектора $\mathbf{r}$ с осями OX, OY, OZ вычисляются по формулам (361):

$$\lambda = \cos\eta, \quad \mu = \sin\eta\cos\varphi, \quad \nu = \sin\eta\sin\varphi.$$

Как следует из изложенного выше (см. формулу (365)), уравнение для эквипотенциальной поверхности в модели Роша с круговой орбитой записывается в виде

$$\Omega = \frac{1}{r} + q\left(\frac{1}{\sqrt{1 + r^2 - 2r\lambda}} - r\lambda\right) + \frac{1+q}{2} r^2 \left(1 - \nu^2\right), \tag{378}$$

где $q = m_x/m_v$, m_x, m_v — массы компактного объекта и оптической звезды. Разным значениям потенциала Ω соответствуют различные эквипотенциальные поверхности. Введем вместо потенциала Ω новый параметр задачи — степень заполнения оптической звездой своей полости Роша: $\mu = R_0/R_0^*$, где R_0 и R_0^* — полярные радиусы для частичного и полного заполнения полости Роша. Параметр μ является функцией потенциала Ω, способ вычисления μ при заданном Ω описан выше.

Для заданных $\mu(\Omega)$ и q уравнение (378) однозначно определяет фигуру оптической звезды, т. е. функцию $\mathrm{r}(\eta,\ \varphi)$. Численное решение уравнения (378) при фиксированных значениях $\mu(\Omega)$ и q и при данных η, φ не представляет трудностей для современных компьютеров.

Обозначим через $k = L_x/L_v$ отношение болометрических светимостей рентгеновского источника и оптической звезды. Разобьем поверхность звезды на элементарные площадки. Пусть dS — элементарная площадка на поверхности оптической звезды, имеющая координаты η, φ. Для «нарезания» элементарных площадок удобно использовать координатные поверхности в нашей сферической системе координат, например, координатную поверхность $\eta = \mathrm{const}$ (конусы с осью OX и с центром в центре звезды) и координатную поверхность $\varphi = \mathrm{const}$ (плоскости, проходящие через ось OX).

Интенсивность излучения, испускаемая площадкой dS в данной длине волны λ (не путать с направляющим косинусом λ) под углом γ к нормали выражается в виде

$$dI_\lambda = B_\lambda(T)[1 - x(\lambda, T)(1 - \cos\gamma)]\cos\gamma\, dS, \tag{379}$$

где $x(\lambda, T)$ — линейный коэффициент потемнения к краю, $T(\eta, \varphi, k)$ — температура площадки, $B_\lambda(T)$ — функция Планка. Здесь мы использовали линейный закон потемнения к краю для описания угловой зависимости интенсивности выходящего излучения. Кроме того, мы использовали общепринятое предположение в рамках стандартной модели (см., например, Avin and Bancall, 1974) о планковском характере излучения единицы поверхности звезды, что для наших целей является удовлетворительным приближением. Хотя, в принципе, можно воспользоваться основанными на моделях тонких звездных атмосфер результатами расчетов спектров звезд с различными эффективными температурами и ускорениями силы тяжести (см., например, Kurucz, 1979, 1991, Kurucz et al., 1974) и подставлять в формулу (379) вместо функции Планка $B_\lambda(T)$ реальный спектр звезды. То же самое можно сказать и об угловой зависимости выходящего излучения из атмосферы звезды; эта зависимость также может быть рассчитана теоретически на основе модели тонкой звездной атмосферы звезды. Ввиду того, что кривые блеска рентгеновских двойных систем отягощены значительной физической переменностью, применение формулы

(379) является вполне удовлетворительным приближением. Для вычисления значения коэффициента потемнения $x(\lambda, T)$ в каждой точке поверхности звезды можно использовать таблицы значений $x(\lambda, T)$, вычисленные на основе моделей тонких звездных атмосфер в широком диапазоне изменений λ и T (см., например, Grygar et al., 1972, Klinglesmith and Sobieski, 1970, Рубашевский, 1991, Van Hamme, 1993).

Температура излучения элементарной площадки dS, не возмущенной рентгеновским излучением компактного объекта, с учетом гравитационного потемнения равна

$$T_0\,(\eta,\ \varphi) = \overline{T}_0 \left[\frac{g\,(\eta,\ \varphi)}{g_0}\right]^{\beta}, \tag{380}$$

где $\overline{T}_0$ — среднее значение эффективной температуры оптической звезды, которое можно оценить по наблюдаемому спектральному классу звезды, $g(\eta, \varphi) = |\,\mathbf{grad}\,\Omega|$ — локальное ускорение силы тяжести на поверхности звезды, g_0 — среднее по поверхности оптической звезды значение силы тяжести, β — коэффициент гравитационного потемнения. Согласно фон Цейпелю (Zeipel, 1924), для оболочки звезды, находящейся в лучистом равновесии (звезды спектральных классов, более ранних, чем A0), $\beta = 0{,}25$. Согласно Люси (Luci, 1967), для конвективной оболочки звезды $\beta = 0{,}08$.

Для ближайших окрестностей внутренней точки Лагранжа L_1 формула (380) для $T_0(\eta,\varphi)$ неверна, однако вклад таких областей в полную светимость звезды пренебрежимо мал.

Рассмотрим эффект рентгеновского прогрева оптической звезды. Пусть α — угол между нормалью к элементарной площадке dS с координатами η, φ и направлением на рентгеновский источник (см. рис. 47), ρ — расстояние от элементарной площадки dS до рентгеновского источника, κ — коэффициент переработки рентгеновского

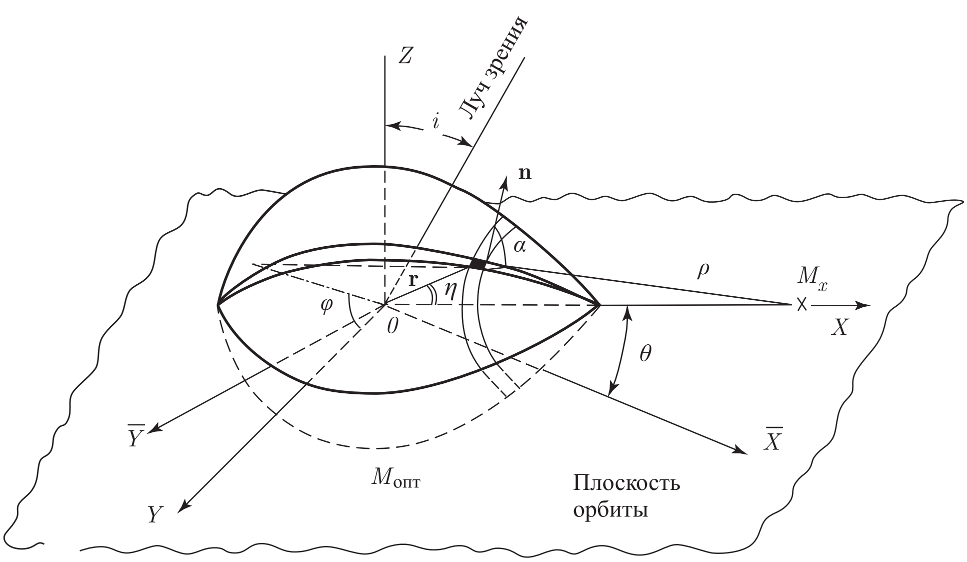


Рис. 47. Эффект рентгеновского прогрева в ТДС

излучения в атмосфере оптической звезды. Тогда в рамках естественного предположения о том, что жесткое ($h\nu > 1$ кэВ) рентгеновское излучение, падающее на оптическую звезду, термализуется на больших оптических глубинах и при прохождении через атмосферу слабо ее возмущает, легко записать условие баланса энергии, определяющее результирующую температуру T элементарной площадки (см. выше):

$$\sigma T^4(\eta,\ \varphi) = \sigma T_0^4(\eta,\ \varphi) + \frac{\kappa k L_v \cos\alpha}{4\pi\rho^2}. \tag{381}$$

Здесь L_v — полная болометрическая светимость оптической звезды в условных единицах (расстояние между центрами компонент принято равным единице):

$$L_v = \iint\limits_S \sigma T_0^4(\eta,\ \varphi)\, dS, \tag{382}$$

где интегрирование ведется по всей поверхности оптической звезды.

Таким образом, температура T площадки dS, возмущенной рентгеновским излучением компактного объекта, равна:

$$T(\eta,\ \varphi) = \sqrt[4]{T_0^4(\eta,\ \varphi) + \frac{\kappa k L_v \cos\alpha}{4\sigma\pi\rho^2}}. \tag{383}$$

Формула (383) учитывает эффект отражения, связанный с прогревом поверхности звезды рентгеновским излучением точечного компактного объекта и, как уже отмечалось, получена в разумном предположении о том, что рентгеновское излучение компактного объекта термализуется на больших оптических глубинах в теле оптической звезды и проходит вглубь практически не возмущая ее атмосферу. В случае, когда поверхность звезды прогревается оптическим излучением второй звезды (или излучением сверхкритического аккреционного диска, как, например, в случае объекта SS 433) такое предположение не вполне правомерно, поскольку падающее оптическое излучение второй звезды поглощается в атмосфере прогреваемой звезды, возмущая температурное распределение в ней (см. выше). Кроме того, формула (383) выведена в предположении, что освещающий источник — точечный, что для рентгеновских двойных систем справедливо, а для классических ТДС — нет. Поэтому при расчете эффекта отражения в классических ТДС необходимо учитывать прогрев звезды излучением всех площадок на части поверхности облучающего спутника, обращенной к звезде. При этом необходимо решать задачу о переносе оптического излучения спутника в атмосфере прогреваемой звезды, находить возмущенную функцию источника для каждой элементарной площадки поверхности звезды и с ней вычислять выходящий поток излучения (подробнее об учете эффекта отражения в ТДС см. Соболев, 1967, Сахибуллин, 1997). В то же время, ввиду того, что во многих классических ТДС, состоящих из звезд с не сильно различающимися температурами, амплитуда эффекта отражения мала по сравнению с глубинами затмений, формулу (383) часто применяют и для расчета эффекта отражения в классических ТДС, вводя корректирующий множитель, учитывающий ненулевые размеры освещающей звезды (Wilson, 1998, Антохина, 1988).

Следует также отметить, что возможны эффекты рассеяния падающего излучения (для горячих звезд), а также эффекты, связанные с перестройкой структуры подфотосферных слоев звезды под влиянием внешнего излучения в случае, если оптическая звезда — звезда позднего спектрального класса с конвективной оболочкой (Rucinski, 1969 a,b, 1970, 1973). Эти эффекты приводят к уменьшению амплитуды эффекта отражения и могут быть учтены с помощью введенного нами коэффициента κ (см. формулу (383)), который для звезд позднего спектрального класса можно положить равным 0,5.

Возвращаясь к формулам (379), (380), (383), мы имеем закон излучения от каждой элементарной площадки dS поверхности оптической звезды. Полное наблюдаемое излучение звезды получается суммированием (синтезированием) потоков от каждой видимой площадки в направлении на наблюдателя. Чтобы посчитать интенсивность dI_λ в формуле (379) необходимо знать величину площадки dS и угол γ между нормалью к поверхности звезды и направлением на наблюдателя. Пусть ось $O\overline{Z}$ нашей неподвижной системы координат составляет угол i с лучом зрения (угол i характеризует угол наклонения орбиты системы к картинной плоскости). Пусть θ — угол относительного поворота компонент (угол между осями $O\overline{X}$ и OX). Напомним, что $\theta = 0$, когда оптическая звезда спереди.

В подвижной системе координат (X, Y, Z) легко определяются координаты единичного вектора в направлении на наблюдателя:

$$\mathbf{a}_0 = (-\sin i\cos\theta,\ -\sin i\sin\theta,\ \cos i)\,. \tag{384}$$

Координаты единичного вектора, перпендикулярного к элементарной площадке (вектора единичной нормали) в подвижной системе координат (X, Y, Z) находятся по формуле

$$\mathbf{n}_1 = -\frac{\operatorname{grad}\Omega}{|\operatorname{grad}\Omega|} = (l,\ m,\ n)\,. \tag{385}$$

Косинус угла между нормалью к площадке и направлением на наблюдателя определяется как скалярное произведение:

$$\cos\gamma = (\mathbf{a}_0,\ \mathbf{n}_1)\,, \tag{386}$$

где $\mathbf{a}_0$ — единичный вектор в направлении на наблюдателя. Выражение для площади элементарной площадки dS дается формулой

$$dS = \frac{r^2(\eta,\ \varphi)\sin\eta d\eta d\varphi}{\lambda l + \mu m + \nu n}. \tag{387}$$

Подставляя выражения для $\cos\gamma$ и dS в формулу (379) и используя выражения для температуры (380) и (383), получаем поток, испускаемый площадкой dS в направлении наблюдателя. Для вычисления теоретической кривой блеска нужно просуммировать вклад всех площадок, которые видны наблюдателю. Площадка dS видна, если:

1) она не затмевается телом оптической звезды, т. е. $\cos\gamma > 0$ (угол между нормалью к площадке $\mathbf{n}$ и лучом зрения $\gamma < 90°$);

2) она не затмевается аккреционным диском.

Рассмотрим способ проверки условия затмения звезды аккреционным диском. Проведем через центр площадки dS на поверхности звезды прямую, параллельную лучу зрения. В параметрическом виде уравнение этой прямой следующее:

$$\begin{cases} X = X_s - t\sin i\cos\theta, \\ Y = Y_s - t\sin i\sin\theta, \\ Z = Z_s + t\cos i, \end{cases} \tag{388}$$

где $(X_s,\ Y_s,\ Z_s)$ — координаты центра площадки dS на звезде во вращающейся системе отсчета (X, Y, Z), t — текущий параметр прямой. Будем считать, что площадка dS закрыта аккреционным диском, если закрыт ее центр. Необходимо решить, пересекает ли прямая (388) поверхность аккреционного диска, лежащего в плоскости орбиты. Координаты точки пересечения $(x_0,\ y_0)$ прямой (388) с плоскостью $Z = 0$ вычисляются по следующим формулам:

$$\begin{cases} x_0 = r\cos\eta - r\sin\eta\sin\varphi\cos\theta\operatorname{tg} i \\ y_0 = r\sin\eta\cos\varphi - r\sin\eta\sin\varphi\sin\theta\operatorname{tg} i. \end{cases} \tag{389}$$

Площадки dS на звезде, которые не затмеваются диском, должны удовлетворять условию
$$(x_0-1)^2+y_0^2>r_d^2. \tag{390}$$

Итак, условиями, которыми надо руководствоваться при отборе «видимых» площадок dS на звезде, будут:
$$\begin{cases} \cos\gamma>0, \quad (x_0-1)^2+y_0^2>r_d^2, & 90^\circ<\theta<270^\circ,\\ \cos\gamma>0, & 270^\circ<\theta<90^\circ. \end{cases}$$

Как уже отмечалось, мы предполагаем, что в фазе $\theta=0$ впереди находится оптическая звезда.

Рассмотрим условие затмения диска звездой. Радиус диска r_d выражается в долях радиуса относительной орбиты, а его светимость L_d — в долях суммарной светимости системы в квадратуре (θ=90°). Согласно Пачинскому (Paczynski, 1977), можно положить $r_d=(1-\xi^*)/2$, где ξ^* — X-координата внутренней точки Лагранжа L_1. Кроме того, монохроматическую оптическую светимость аккреционного диска L_d можно оценить из спектрофотометрических наблюдений, сравнивая эквивалентные ширины линий поглощения в спектре оптической звезды в двойной системе с эквивалентными ширинами линий в спектре уединенной звезды того же спектрального класса и класса светимости.

Разобьем плоскость диска на площадки dS с равной площадью. В нашей модели однородного диска светимость площадки dS равна $(L_d/\pi r_d^2)\,dS\cos\gamma$. Пусть $(X_d,\ Y_d,\ Z_d)$ — координаты центра площадки на диске. Они легко вычисляются во вращающейся системе координат (X,Y,Z). Тогда уравнение прямой, проходящей через центр площадки dS и параллельной лучу зрения в параметрическом виде имеет вид
$$\begin{cases} X=X_d-t\sin i\cos\theta,\\ Y=Y_d-t\sin i\sin\theta, \quad -\infty<t<\infty,\\ Z=Z_d+t\cos i, \end{cases} \tag{391}$$

Условие пересечения этой прямой с поверхностью Роша (378) имеет вид
$$\begin{gathered}\Big[(X_d-t\sin i\cos\theta)^2+(Y_d-t\sin i\sin\theta)^2+(Z_d+t\cos i)^2\Big]^{-1/2}+\\ +q\bigg\{\Big[(1-X_d+t\sin i\cos\theta)^2+(Y_d-t\sin i\sin\theta)^2+(Z_d+t\cos i)^2\Big]^{-1/2}-X_d+\\ +t\sin i\cos\theta\bigg\}+\frac{1-q}{2}\Big[(X_d-t\sin i\cos\theta)^2+(Y_d-t\sin i\sin\theta)^2\Big]=\Omega. \end{gathered}\tag{392}$$

Это нелинейное алгебраическое уравнение относительно параметра t. Нас интересует вопрос о существовании решений этого уравнения. Если решение существует, то прямая (391) пересекается с поверхностью затмевающей звезды, т. е. площадка dS закрыта оптической звездой, и ее вклад в полную оптическую светимость системы учитывать не надо. Если же решение уравнения (392) не существует, площадка dS видна для наблюдателя, и ее вклад необходимо учитывать при расчете теоретической кривой блеска. Строгое решение этой задачи представляет значительные сложности, однако легко предложить метод, позволяющий просто и с достаточной точностью решать вопрос о существовании точек пересечения прямой (391) и поверхности звезды (378). Исходя из модели Роша, мы можем получить оценку сверху для координат точки, лежащей на поверхности звезды. Очевидно, что они будут также оценками сверху для координат точки пересечения прямой, параллельной лучу зрения, с поверхностью звезды. Пусть эти значения равны, соответственно, X_m, Y_m, Z_m. Подставляя их в формулы (391), можно получить оценку сверху T_m для параметра t:

$$T_m = \max\left(\frac{X_d - X_m}{\sin i \cos\theta}, \quad \frac{Y_d - Y_m}{\sin i \sin\theta}, \quad \frac{Z_m - Z_d}{\cos i}\right). \tag{393}$$

Используя условие, что в рассматриваемых нами фазах оптическая звезда находится спереди, получаем еще одно ограничение на параметр t: $t > 0$. Таким образом, имеем ограничение для t: $t \in [0, T_m]$. Пусть

$$\Delta t = \frac{T_m}{N_1}, \quad t_i = i\,\Delta t, \quad i = 1, \ldots, N_1.$$

Для каждого значения t_i вычисляем координаты $(X_i,\ Y_i,\ Z_i)$ по формулам (391). После этого проверяем, лежит ли точка $(X_i,\ Y_i,\ Z_i)$ внутри области ограниченной поверхностью Роша или нет, т. е. проверяем выполнение условия

$$\frac{1}{\sqrt{X_i^2 + Y_i^2 + Z_i^2}} + q\left(\frac{1}{\sqrt{(1 - X_i)^2 + Y_i^2 + Z_i^2}} - X_i\right) + \frac{1+q}{2}\left(X_i^2 + Y_i^2\right) > \Omega, \tag{394}$$

где Ω — потенциал на поверхности оптической звезды, который связан со степенью заполнения оптической звездой своей полости Роша $\mu = \mu(\Omega)$. Если для какого-либо значения t_i оказалось, что условие (394) выполняется, то прямая, заданная уравнениями (391), пересекает поверхность оптической звезды и, следовательно, площадка на аккреционном диске с координатами центра $(X_d,\ Y_d,\ Z_d)$ закрыта оптической звездой. Если же ни для одного $t \in [0,\ T_m]$ условие (394) не выполнено, то площадка не затмевается. Такой метод является приближенным, но при достаточно малом шаге Δt он позволяет находить корни уравнения (392) с любой наперед заданной точностью.

Просуммировав для данной длины волны потоки от всех видимых площадок звезды и аккреционного диска, получим:

1) теоретический поток от оптической звезды

$$f_v^T(\theta) = f_v^T\left(\theta,\ q,\ \mu,\ i,\ \overline{T}_0,\ x,\ \kappa,\ r_d\right), \tag{395}$$

2) теоретический поток от аккреционного диска

$$f_d^T(\theta) = f_d^T\left(\theta,\ i,\ q,\ \mu,\ r_d,\ L_d\right), \tag{396}$$

где μ — степень заполнения оптической звездой своей полости Роша, x — коэффициент потемнения к краю для звезды (вместо функции $x(\lambda, T)$ часто используют среднее значение коэффициента потемнения $\overline{x(\lambda,\ T)} = x$, поскольку влияние потемнения к краю относительно слабо), $\overline{T}_0$ — средняя эффективная температура оптической звезды, оцененная по ее спектральному классу, κ — коэффициент переработки рентгеновского излучения в атмосфере звезды, r_d и L_d — радиус и монохроматическая светимость аккреционного диска (напомним, что за единицу расстояния принят радиус относительной орбиты).

Складывая потоки (395) и (396), получаем полный поток от двойной системы как функцию $\theta(t)$ — точку на кривой блеска в интенсивностях:

$$f^T(\theta) = f^T\left(\theta,\ q,\ \mu,\ i,\ \overline{T}_0, x,\ \kappa,\ r_d,\ L_d\right). \tag{397}$$

Звездная величина системы

$$m(\theta) = -2{,}5 \lg\left(\frac{f^T(\theta)}{f^0}\right), \tag{398}$$

где f^0 — поток излучения от системы в фазе орбитального периода θ=90° (в квадратуре). Рассчитав таким образом звездную величину системы для всех значений орбитального фазового угла θ_j, $j = 1, \ldots, M$, получим орбитальную монохроматическую кривую блеска для данной длины волны λ.

Рассмотрим обобщение рассмотренной модели рентгеновской двойной системы с тонким аккреционным диском, лежащим в плоскости орбиты, на случай, когда аккреционный диск является геометрически толстым образованием, его плоскость наклонена к плоскости орбиты, а сам диск прецессирует. Такая модель применялась нами при интерпретации оптических кривых блеска объекта SS 433 (Антохина и Черепащук, 1985 1987). Пусть тесная двойная система состоит из двух компонент на круговых орбитах, одна из которых — оптическая звезда, форма которой совпадает с эквипотенциальной поверхностью в модели Роша, вторая — точечный рентгеновский источник (аккрецирующий релятивистский объект), окруженный прецессирующим геометрически толстым аккреционным диском. Осевое вращение оптической звезды синхронно с орбитальным обращением. Приливно деформированная поверхность оптической звезды прогревается излучением компактного объекта. Интенсивность излучения элементарной площадки поверхности оптической звезды и ее угловая зависимость определяются ее собственной температурой, потемнением к краю, гравитационным потемнением и прогревом излучением компактного объекта или геометрически толстого аккреционного диска. Аккреционный диск вокруг релятивистского объекта будем считать геометрически толстым образованием, толщина которого — свободный параметр задачи. При толщине диска равной нулю имеем классический докритический диск, который аппроксимируется плоским кругом (см. выше). В случае сверхкритического аккреционного диска, когда светимость аккрецирующего компактного объекта превышает эддингтоновский предел, под «диском» понимается сам диск вместе с оттекающей под действием давления излучения протяженной атмосферой. В этом случае толщина «диска» определяется уровнем в его оттекающей атмосфере, на котором оптическая толща вдоль луча зрения равна единице.

Фигура геометрически толстого диска аппроксимируется сплюснутым сфероидом со сжатием $b/a = k_1$, где b и a — малая и большая полуоси сфероида. Случай геометрически тонкого диска соответствует $k_1 = 0$. Экваториальная плоскость аккреционного диска наклонена по отношению к плоскости орбиты на угол θ_0 и прецессирует с периодом P_{prec}, много большим орбитального. Поскольку в случае геометрически толстого аккреционного диска рентгеновское излучение полностью перерабатывается в его внутренних частях, распределение температуры на поверхности диска-сфероида задается согласно рекомендации Вильсона (Wilson, 1974). Так как не имеется информации о внутренней структуре диска, будем считать, что его поверхностная яркость определяется болометрическим потоком излучения, идущего из центра диска к его поверхности. Примем простейший закон, по которому болометрический поток излучения, проходящий через единичную площадку поверхности диска, $H \sim 1/r^2$, где r — расстояние площадки от центра диска. Соответствующая эффективная температура по закону Стефана–Больцмана $T_e \sim H^{0{,}25} \sim 1/r^{0{,}5}$. Тогда распределение температуры по наблюдаемой поверхности диска задается законом

$$T\,(r) = \frac{T_p}{(r/b)^{1/2}}, \tag{399}$$

где T_p — температура диска на полюсе, r — расстояние площадки от центра диска. В случае геометрически тонкого диска рентгеновское излучение выходит наружу и прогревает внешние части диска, поэтому закон распределения температуры здесь иной (Shakura and Sunyaev, 1973). Выше мы, для простоты, использовали модель докритического аккреционного диска однородной яркости в оптическом диапазоне.

В рентгеновских двойных системах с O–B-сверхгигантами нагрев диска излучением оптической звезды сравним с эффектом прогрева внешних частей диска рентгеновским излучением центрального компактного объекта, что приводит к искажению температурного распределения. Поскольку оптические светимости докритических аккреционных дисков малы по сравнению со светимостью O–B-звезд, представляется разумным в этом случае считать оптический диск однородным со светимостью и радиусом — свободными параметрами задачи.

Непрозрачный светящийся аккреционный диск со сжатием $k_1 = b/a$ и распределением температуры по поверхности (399) считается погруженным в протяженную полупрозрачную поглощающую атмосферу, плотность вещества в которой спадает по закону $\rho \sim 1/r^2$, что соответствует расширению с постоянной скоростью. Основным механизмом поглощения в протяженной атмосфере диска считается рассеяние на свободных электронах. Нормировка закона изменения плотности в протяженной атмосфере проводится, исходя из заданного темпа радиальной потери массы из диска $\dot{M}$:

$$\rho(r) = \frac{\dot{M}}{4\pi r^2 v_0},$$

где v_0 — наблюдаемая скорость истечения вещества из диска.

Протяженная атмосфера, окружающая диск, моделирует истечение вещества из диска под действием давления радиации, что имеет место в случае сверхкритического режима аккреции (Shakura and Sunyaev, 1973). Следует отметить также, что различные модели внутренней структуры аккреционного диска и влияние газовых потоков, увеличивающих поглощение в плоскости орбиты, могут быть описаны более общим, по сравнению с (399) температурным распределением для геометрически толстого диска:

$$T(r) = \frac{T_p}{(r/b)^m}, \tag{400}$$

где $m \geqslant 0$ — свободный параметр задачи. В частности, как показали расчеты (Антохина и Черепащук, 1987), поглощение в газовых потоках хорошо учитывается распределением (400) при $m = 1$.

Процедура вычисления потока излучения от оптической звезды в новой модели совершенно аналогична описанной выше.

Рассмотрим процедуру вычисления потока от аккреционного диска. Введем декартову систему координат (X_1, Y_1, Z_1), связанную с прецессирующим диском с началом в центре аккреционного диска (см. рис. 48). Пусть O_1 — центр аккреционного диска, имеющий во вращающейся системе координат (X, Y, Z) координаты $(1, 0, 0)$. Ось O_1Z_1 перпендикулярна плоскости диска, ось O_1X_1 направлена вдоль линии пересечения плоскости орбиты и экваториальной плоскости диска. Координаты (X_1, Y_1, Z_1) и (X, Y, Z) связаны между собой соотношениями:

$$\begin{cases} X_1 = (X-1)\sin(\alpha_0+\theta) - Y\cos(\alpha_0+\theta), \\ Y_1 = (X-1)\cos(\alpha_0+\theta)\cos\theta_0 + Y\sin(\alpha_0+\theta)\cos\theta_0 + Z\sin\theta_0, \\ Z_1 = -(X-1)\cos(\alpha_0+\theta)\sin\theta_0 - Y\sin(\alpha_0+\theta)\sin\theta_0 + Z\cos\theta_0, \end{cases} \tag{401}$$

$$\begin{cases} X = X_1\sin(\alpha_0+\theta) + Y_1\cos(\alpha_0+\theta)\cos\theta_0 - Z_1\cos(\alpha_0+\theta)\sin\theta_0 + 1, \\ Y = -X_1\cos(\alpha_0+\theta) + Y_1\sin(\alpha_0+\theta)\cos\theta_0 - Z_1\sin(\alpha_0+\theta)\sin\theta_0, \\ Z = Y_1\sin\theta_0 + Z_1 cos\theta_0, \end{cases} \tag{402}$$

где θ_0 — угол наклона экваториальной плоскости аккреционного диска к плоскости орбиты (см. рис. 48), т.е. угол между нормалью к экваториальной плоскости аккреционного диска и нормалью к плоскости орбиты, $\alpha_0(t)$ — угол прецессии диска.

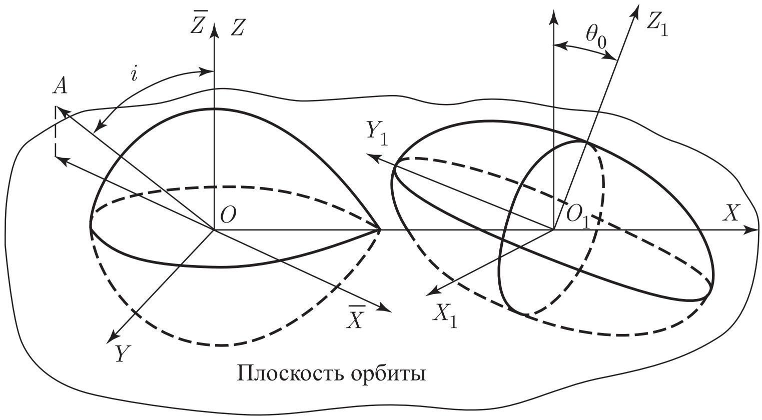


Рис. 48. Схематическая модель рентгеновской двойной системы с «прецессирующим» толстым аккреционным диском. Здесь OA — направление на наблюдателя (лежит в плоскости $O\overline{XZ}$), OZ — нормаль к плоскости орбиты, O_1Z_1 — нормаль к экваториальной плоскости диска

Он определяется как угол между проекцией нормали к экваториальной плоскости диска на плоскости орбиты и проекцией луча зрения на плоскость орбиты. При прецессионном движении диска угол $\alpha_0(t)$ меняется от 0 до 360°, причем $\alpha_0 = 0$ в момент максимального раскрытия диска для земного наблюдателя.

Уравнение поверхности аккреционного диска — сплюснутого сфероида с полуосями b и a в системе координат $(X_1,\, Y_1,\, Z_1)$ записывается в виде:

$$\frac{X_1^2 + Y_1^2}{a^2} + \frac{Z_1^2}{b^2} = 1. \tag{403}$$

Поверхность сплюснутого сфероида разбивается на элементарные площадки dS_1 по углам η_1 и φ_1, где η_1 — угол между радиусом-вектором $\mathbf{r}_1$ центра площадки dS_1 и осью O_1Z_1, φ_1 — угол между проекцией $\mathbf{r}_1$ на плоскость $O_1X_1Y_1$ и осью O_1X_1. Тогда модуль радиуса-вектора площадки dS_1 равен

$$r_1 = \frac{1}{\sqrt{\dfrac{\sin^2\eta_1}{a^2} + \dfrac{\cos^2\eta_1}{b^2}}}. \tag{404}$$

Координаты центра элементарной площадки $\mathrm{d}S_1$:

$$\begin{cases} X_1 = r_1\,(\eta_1)\sin\eta_1\cos\varphi_1, \\ Y_1 = r_1\,(\eta_1)\sin\eta_1\sin\varphi_1, \\ Z_1 = r_1\,(\eta_1)\cos\eta_1. \end{cases} \tag{405}$$

Единичный вектор нормали $\mathbf{n}_1$ в точке X_1, Y_1, Z_1 имеет координаты

$$\mathbf{n}_1\left(\frac{X_1}{Na^2},\quad \frac{Y_1}{Na^2},\quad \frac{Z_1}{Nb^2}\right), \tag{406}$$

где $N = \sqrt{\dfrac{X_1^2 + Y_1^2}{a^4} + \dfrac{Z_1^2}{b^4}}$.

Площадь элементарной площадки dS_1

$$dS_1 = \frac{r_1^2\,(\eta_1)\sin\eta_1 d\varphi_1 d\eta_1}{\cos\omega}, \tag{407}$$

где ω — угол между векторами $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{n}_1$:

$$\cos\omega = \frac{(\mathbf{r}_1,\,\mathbf{n}_1)}{|\mathbf{r}_1|} = \frac{1}{r_1^2\,(\eta_1)\sqrt{\dfrac{\sin^2\eta_1}{a^4} + \dfrac{\cos^2\eta_1}{b^4}}}. \tag{408}$$

Распределение температуры по поверхности сфероида описывается формулой (400). Для сфероида, как и для звезды, используется линейный закон потемнения со своим коэффициентом.

Интенсивность излучения элементарной площадки на сфероиде вычисляется, как и ранее, по формуле

$$dI_\lambda = B_\lambda(T)[1 - x(\lambda, T)(1 - \cos\gamma)]\cos\gamma\, dS_1. \tag{409}$$

Для получения полного потока излучения от наблюдаемой части диска проводится суммирование излучения элементарных площадок на обращенной к наблюдателю стороне диска (для которых $\cos\gamma = (\mathbf{a}_0,\,\mathbf{n}) > 0$) и не затемненных оптической звездой.

Способ проверки условия затмения звезды аккреционным диском аналогичен тому, как это было сделано выше для тонкого диска. Через центр площадки dS на звезде проводится прямая, параллельная лучу зрения. В параметрическом виде уравнение этой прямой следующее:

$$\begin{cases} X = X_s - t\sin i\cos\theta, \\ Y = Y_s - t\sin i\sin\theta, \\ Z = Z_s + t\cos i, \end{cases} \tag{410}$$

где $(X_s,\ Y_s,\ Z_s)$ — координаты центра площадки dS на звезде во вращающейся системе отсчета (X, Y, Z). По формулам (401) переводим координаты (X, Y, Z) в $(X_1,\ Y_1,\ Z_1)$. На каждом шаге по параметру t прямой (410) проверяем выполнение условия

$$\frac{X_1^2 + Y_1^2}{a^2} + \frac{Z_1^2}{b^2} \leqslant 1. \tag{411}$$

Если условие (411) выполняется, прямая, проходящая через центр площадки dS, пересекает сфероид, и следовательно, площадка затмевается телом аккреционного диска. Поэтому она не должна учитываться при суммировании полного наблюдаемого потока от звезды.

Рассмотрим теперь условие проверки затмения аккреционного диска оптической звездой. Для этого достаточно провести через центр площадки на диске прямую, параллельную лучу зрения и выяснить, пересекает ли эта прямая поверхность оптической звезды. Естественно, при этом необходимо рассматривать лишь фазы орбитального периода, для которых оптическая звезда находится впереди диска. Пусть $(X_{1d},\ Y_{1d},\ Z_{1d})$ — координаты центра площадки на диске в системе отсчета $(X_1,\ Y_1,\ Z_1)$. Перейдем по формулам (402) к координатам центра площадки (X_d, Y_d, Z_d) в системе отсчета (X, Y, Z). Уравнение прямой, параллельной лучу зрения и проходящей через точку с координатами $(X_d,\ Y_d,\ Z_d)$, в параметрическом виде записывается в следующем виде:

$$\begin{cases} X = X_d - t\sin i\cos\theta, \\ Y = Y_d - t\sin i\sin\theta, \quad -\infty < t < \infty, \\ Z = Z_d + t\cos i. \end{cases} \tag{412}$$

Условие пересечения этой прямой с поверхностью Роша описывается уравнением (392). Используя метод решения этого уравнения, описанный выше (см. формулы

(393), (394)), можно однозначно решить вопрос о пересечении прямой (412) с поверхностью оптической звезды и тем самым установить, затмевается или нет площадка dS_1 на поверхности аккреционного диска телом звезды.

Просуммировав потоки от всех видимых площадок звезды и диска в данной длине волны λ, получим:

1) теоретический поток излучения от оптической звезды

$$f_v^T(\theta,\ \alpha_0) = f_v^T\left(\theta,\ \alpha_0,\ q,\ \mu,\ i,\ \overline{T}_0,\ \kappa,\ x_1\right); \tag{413}$$

2) теоретический поток излучения от аккреционного диска

$$f_d^T(\theta,\ \alpha_0) = f_v^T(\theta,\ \alpha_0,\ a,\ b,\ i,\ \theta_0,\ T_p,\ x_2), \tag{414}$$

где μ — степень заполнения оптической звездой своей полости Роша, x_1, x_2 — коэффициенты потемнения к краю для звезды и диска, $\overline{T}_0$, T_p, — средняя эффективная температура оптической звезды и полярная температура диска. Складывая потоки (413) и (414), находим полный монохроматический поток от двойной системы:

$$f_v^T(\theta,\ \alpha_0) = f^T\left(\theta,\ \alpha_0,\ q,\ \mu,\ i,\ \theta_0,\ \overline{T}_0,\ T_p,\ \kappa,\ x_1,\ x_2,\ a,\ b\right). \tag{415}$$

Звездная величина системы

$$m^T(\theta,\ \alpha_0) = -2{,}5\lg\left(\frac{f^T(\theta,\ \alpha_0)}{f^0}\right), \tag{416}$$

где f^0 — поток монохроматического излучения от системы в квадратуре ($\theta = 90^\circ$) в фазе прецессионного периода $\alpha_0 = 0$, когда диск максимально раскрыт для наблюдателя.

Рассчитав таким образом блеск системы для всех значений орбитального фазового угла θ_j, $j = 1, \ldots, M$, при фиксированном угле прецессии α_{ok}, получим орбитальную кривую блеска системы в фазе прецессии диска α_{ok} (мы предполагаем, что прецессионный период много больше орбитального). Затем, синтезируя кривые блеска для всех значений угла прецессии диска α_{ok}, $k = 1, \ldots, N$, получим серию орбитальных кривых блеска:

$$l_{jk}^T = l^T(\theta_j,\ \alpha_{\mathrm{ok}}), \quad j = 1, \ldots, M; \quad k = 1, \ldots, N. \tag{417}$$

Если орбитальный и прецессионный периоды сравнимы, то за время орбитального периода фаза прецессии меняется значительно, и в данном случае необходимо для каждого θ_j использовать свое значение α_{ok}.

Наличие полупрозрачной протяженной атмосферы вокруг диска приводит к дополнительному ослаблению света от элементарных площадок на диске. В том случае, когда диск расположен впереди звезды, полупрозрачная протяженная атмосфера диска дополнительно ослабляет излучение видимых площадок на звезде. Рассмотрим способ учета эффекта протяженной атмосферы.

Как уже отмечалось, предполагается, что двойная система, состоящая из оптической звезды и толстого аккреционного диска, погружена в общую электронно рассеивающую сферически-симметричную протяженную атмосферу, центр которой совпадает с центром аккреционного диска. Эта атмосфера участвует в движении вокруг центра масс системы. Предполагается, что протяженная атмосфера (оболочка) состоит из полностью ионизированного водорода, и электронное рассеяние считается основанным механизмом ослабления света в оболочке. Плотность вещества спадает по закону $\rho \sim 1/r^2$, что соответствует расширению с постоянной скоростью v_0. Для заданного темпа потери массы диском $\dot{M}$

$$\rho(r) = \frac{\dot{M}}{4\pi r^2 v_0}.$$

Тогда коэффициент поглощения в оболочке

$$\alpha_T = \sigma_T n_e = \frac{\sigma_T \dot{M}}{4\pi v_0 m_p r^2}, \tag{418}$$

где m_p — масса протона, σ_T — томсоновское сечение рассеяния.

Рассмотрим элементарную площадку на обращенной к наблюдателю стороне одной из компонент. Интенсивность излучения площадки в направлении наблюдателя dI_λ изменится после прохождения излучения через поглощающую оболочку: $dI'_\lambda = dI_\lambda e^{-\tau}$, где τ — оптическая толща оболочки для данной площадки в направлении наблюдателя. Зная расстояние центра площадки от центра диска r_s и радиус оболочки $R_{\text{об}}$, можно аналитически вычислить величину τ:

$$\tau = \int_{z_1}^{z_2} \alpha_T dz = \frac{\sigma_T \dot{M}}{4\pi v_0 m_p} \frac{1}{p} \left\{ \operatorname{arctg} \frac{z_2}{p} - \operatorname{arctg} \frac{z_1}{p} \right\}, \tag{419}$$

где p — расстояние от центра площадки до прямой, проходящей через центр оболочки и параллельной лучу зрения, $z_1^2 = r_s^2 - p^2$, $z_2^2 = R_{\text{об}}^2 - p^2$. В наших расчетах мы брали $R_{\text{об}} = 10 a_{\text{орб}}(q)$, где $a_{\text{орб}}(q)$ — расстояние между центрами масс компонент двойной системы. Поскольку $a_{\text{орб}}(q)$ зависит от суммарной массы компонент системы, зная функцию масс $f_x(m)$, можно рассчитать для каждого q свое значение $a_{\text{орб}}(q)$.

Описанный алгоритм позволяет синтезировать теоретическую кривую блеска рентгеновской двойной системы в рамках весьма общей модели, когда оптическая звезда описывается фигурой Роша, а аккреционный диск вокруг релятивистского объекта является прецессирующим, геометрически толстым образованием, окруженным протяженной радиально расширяющейся электронно рассеивающей атмосферой. Фиксируя некоторые параметры, из этой модели можно получить более простые модели, например, модель с геометрически тонким прецессирующим диском, модель с геометрически толстым диском, лежащем в плоскости орбиты, модель с геометрически тонким диском, лежащим в плоскости орбиты (эта модель детально описана выше).

В ГАИШ МГУ создана компьютерная программа на языке ФОРТРАН, реализующая общую модель. Вместе с тем, для экономии компьютерного времени удобно воспользоваться специализированными алгоритмами и программами, реализующими более простые модели рентгеновской двойной системы. Например, как уже отмечалось выше, в работе (Балог и др., 1982) приведена программа для модели рентгеновской двойной с тонким диском, лежащим в плоскости орбиты, которая применялась нами при массовых определениях параметров рентгеновских двойных систем (см., например, Гончарский и др., 1985, 1991). В книге Гончарского и др. (1985), и в работе Гончарского и др.(1984) опубликован алгоритм, реализующий модель рентгеновской двойной системы с тонким прецессирующим диском. В работе Антохиной (1988) описан алгоритм, реализующий модель двойной системы с толстым не прецессирующим аккреционным диском, лежащим в плоскости орбиты.

Алгоритм и программы реализующие сложные, нетрадиционные модели ТДС, были созданы в отделе звездной астрофизики ГАИШ в последние годы. В работах Антохиной и др. (1992) и Черепащука и др. (Cherepashchuk et al., 2005) опубликован алгоритм, описывающий модель рентгеновской двойной системы SS 433 в рентгеновском диапазоне спектра, когда геометрически толстый прецессирующий аккреционный диск представляет собой «воронку» с центральной протяженной «короной», являющейся основанием релятивистских коллимированных выбросов-джетов. В этой модели приходится дополнительно учитывать самозатмение внутренних частей диска (поскольку поверхность диска вогнутая), а также затмение протяженной «короны» внешними частями прецессирующего толстого диска. Методы учета таких затмений аналогичны описанным выше. Эта модель и соответствующая компьютерная программа применялись нами для интерпретации рентгеновских наблюдений SS 433, полученных с бортов орбитальных обсерваторий «Гинга» и «Интеграл» (см. ниже).

В работе Хрузиной (2001) развит алгоритм синтеза кривых блеска ТДС с аккреционным диском сложной формы, лежащим в плоскости орбиты. В данном случае область взаимодействия газовой струи и диска носит безударный характер и моделируется протяженной областью («горячей линией») в районе касания струи и диска. Такая модель аккреционного диска с вогнутыми внутренними частями и с протяженной «горячей линией» также требует проверки нескольких условий затмений. Модель основана на результатах трехмерных газодинамических расчетов для ТДС (Boyarchuk et al., 2002). Эта модель и соответствующая компьютерная программа применялись нами для интерпретации оптических кривых блеска катаклизмических двойных систем (см. ниже). Метод синтеза позволяет также учитывать различные особенности на поверхности звезды: отдельные холодные и горячие пятна, группы пятен и т. п. (см., например, Хрузина и Черепащук, 1995, Djurašević, 1992 a,b).

Для интерпретации наблюдений рентгеновских двойных систем нам потребуются также точные расчеты длительности рентгеновского затмения точечного рентгеновского источника, когда фигура оптической звезды описывается эквипотенциальной поверхностью в модели Роша. Расчет длительности рентгеновских затмений точечного источника оптической звездой, описываемой фигурой Роша, проводится из условия касания оптической звезды лучом зрения, проходящим через компактный объект. В работе Хрузиной (1985) приведены таблицы длительностей рентгеновских затмений для широкого диапазона изменения параметров q, μ, i как для случая круговой, так и для эллиптической орбиты рентгеновской двойной системы, в случае небольшой величины эксцентриситета.

Таким образом, описанные алгоритмы позволяют решать прямую задачу синтеза теоретической кривой блеска рентгеновской двойной системы в рамках модели Роша, зависящей от конечного числа параметров. Определение физических характеристик рентгеновских двойных систем из наблюдений состоит в решении обратной задачи нахождения оценок этих параметров и их доверительных интервалов (ошибок). Не менее важная задача при этом — проверка адекватности выбранной модели рентгеновской двойной системы используемым наблюдательным данным. Методы решения обратных параметрических задач в статистической постановке были изложены выше. В книге Гончарского и др. (1991) суммированы результаты интерпретации наблюдений ряда рентгеновских двойных систем, а также приведены результаты решения соответствующих модельных задач, поясняющих основные особенности используемых моделей.

3. Синтез кривых блеска, профилей линий и кривых лучевых скоростей классических тесных двойных систем

В настоящее время метод синтеза практически повсеместно применяется при интерпретации наблюдений ТДС. Особенно широкую популярность приобрела соответствующая компьютерная программа, написанная Вильсоном и Девиннеем

(Wilson, 1998). Детальное описание этой программы, которая доступна в электронном виде, дано в книге Калраха и Милоне (Kallrakh and Milone, 1999). Мы изложим версию метода синтеза, развитую в ГАИШ МГУ. Наш алгоритм позволяет синтезировать как кривую блеска, так и профили линий поглощения в спектрах звезд, и по ним непосредственно строить теоретические кривые лучевых скоростей компонент. Эти кривые лучевых скоростей учитывают как приливно-вращательное искажение фигур компонент, так и эффекты их взаимного прогрева (эффект отражения), а также эффекты затмений компонент. В работе Антохиной и Черепащука (1994) впервые был развит метод синтеза профилей линий поглощения в спектрах звезд-компонент ТДС. При этом предполагалось, что орбита ТДС — круговая. В работе Антохиной (1996) метод синтеза профилей линий был обобщен на случай эллиптической орбиты ТДС. Отметим, что до этих работ построение синтетических кривых лучевых скоростей для компонент ТДС проводилось, в основном, не путем анализа соответствующих синтетических профилей линий, а с помощью определения фотометрического «центра тяжести» на звезде, дающего максимальный вклад в интенсивность линии. Ясно, что непосредственный синтез профилей линий дает возможность наиболее полно извлекать информацию из спектральных наблюдений ТДС.

Опишем алгоритмы синтеза кривой блеска, профилей линий и кривой лучевых скоростей для классических ТДС, развитые в работах Антохиной и Черепащука (1994) и Антохиной (1996). Рассмотрим сразу случай эллиптической орбиты ТДС (Антохина, 1996).

Пусть имеем ТДС, состоящую из двух оптических звезд, фигуры которых описываются эквипотенциальными поверхностями в модели Роша в случае эллиптической орбиты. Как уже отмечалось, поле сил во вращающейся системе отсчета, связанной с компонентами такой системы, зависит от времени. Однако, если эксцентриситет орбиты невелик, и оптическая звезда успевает прийти в гидростатическое равновесие на временной шкале, много меньшей, чем характерное время изменения сил, можно ввести эффективный потенциал для любой точки орбиты. В этом случае, как уже отмечалось выше, можно считать, что в каждый момент времени существует набор замкнутых эквипотенциальных поверхностей, аналогичных поверхностям Роша для круговой орбиты с синхронно вращающимися компонентами. Пусть осевое вращение звезд в среднем равномерно, степень его асинхронности задается параметрами $f_1 = \omega_{\text{rot}}^{(1)}/\omega_{\text{orb}}$ и $f_2 = \omega_{\text{rot}}^{(2)}/\omega_{\text{orb}}$, где $\omega_{\text{rot}}^{(1)}$ и $\omega_{\text{rot}}^{(2)}$ — угловые скорости осевого вращения первой и второй компоненты, $\omega_{\text{orb.}}$ — средняя угловая скорость орбитального обращения компонент: $\omega_{\text{orb}} = 2\pi/P$.

Рассмотрим полярную систему координат с началом в центре масс двойной системы. Модули радиусов-векторов r_1 и r_2 первой и второй звезды на их абсолютных орбитах равны (см. выше)

$$r_1 = \frac{a_1(1-e^2)}{1+e\cos v}, \qquad r_2 = \frac{a_2(1-e^2)}{1+e\cos v}, \tag{420}$$

где a_1, a_2 — большие полуоси абсолютных орбит первой и второй компонент. Поскольку при кеплеровском движении истинные аномалии первой и второй компонент равны между собой (модули радиусов-векторов r_1 и r_2 лежат на одной прямой), относительное расстояние между компонентами равно

$$D = r_1 + r_2 = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos v}, \tag{421}$$

где $a = a_1 + a_2$ — большая полуось относительной орбиты.

Кривая блеска затменной системы обычно строится как функция фазы орбитального периода, линейно зависящей от времени $\psi = 2\pi t/P$, где $t = 0$ — во время наблюдаемого момента середины главного минимума, P — орбитальный период. В случае эллиптической орбиты для анализа кривой блеска вводится понятие долготы ν звезды на орбите, которая равна нулю в момент верхнего соединения яркой компоненты, т. е. в момент, когда нормальная проекция луча зрения на плоскость орбиты совпадает по направлению с радиусом-вектором звезды на орбите. Связь между истинной аномалией v и долготой ν получена нами ранее (см. формулу (146)):

$$v = 90^\circ + \nu - \omega. \tag{422}$$

В момент соединения ν=0, однако в случае эллиптической орбиты и наклонении орбиты $i < 90^\circ$, этот момент не совпадает с моментом минимального блеска в затмении. Как показано ранее (см. формулы (154), (155)), долготы звезд на орбите в моменты минимумов блеска в главном минимуме (яркая компонента — в верхнем соединении) и во вторичном минимуме равны:

$$\nu_1 \simeq -h \operatorname{ctg}^2 i \left(1 - g \operatorname{cosec}^2 i\right) \tag{423}$$

$$\nu_2 \simeq \pi + h \operatorname{ctg}^2 i \left(1 + g \operatorname{cosec}^2 i\right), \tag{424}$$

где $h = e\cos\omega$, $g = e\sin\omega$.

Следует отметить, что значения ν_1 и ν_2 в формулах (423), (424) являются приближенными, поскольку они представляют собой лишь первые члены соответствующих разложений (см. ранее). Кроме того, они получены для шаровых звезд, для которых минимум блеска при затмении совпадает с минимумом расстояния Δ между центрами дисков компонент. Для приливно деформированных звезд это утверждение не совсем точно (об этом см. Мартынов, 1971). Как уже отмечалось, значения ν_1 и ν_2 в случае глубоких затмений, когда i близко к 90°, не сильно отличаются от 0 и π. Тем не менее, при анализе высокоточных кривых блеска введение величин ν_1 и ν_2 хотя бы в приближенном виде, с помощью формул (423), (424), необходимо для корректной интерпретации фотометрических наблюдений ТДС с эллиптической орбитой. Если из предварительного анализа кривой блеска или из спектроскопических данных величины e и ω оценены, задавая некоторое разумное значение i, можно посчитать величины ν_1 и ν_2 и использовать их при первой интерпретации кривой блеска. После нахождения параметров системы в первом приближении, с новыми значениями e, ω и i следует вычислить новые значения ν_1 и ν_2 и повторить процедуру интерпретации кривой блеска. Действуя таким методом итераций, можно найти оптимальные значения ν_1 и ν_2 и все параметры модели. При i близком к 90° обычно достаточно двух итераций.

Предположим, что мы знаем величины ν_1 и ν_2. Тогда в середине главного минимума кривой блеска (блеск минимален), когда орбитальная фаза $\psi = 0$, $\nu = \nu_1$, а в середине вторичного минимума $\nu = \nu_2$. Для определения расстояния между компонентами D (см. формулу (421)) необходимо для каждой фазы орбитального периода ψ знать истинную аномалию v. Определить v можно, зная среднюю аномалию $M = (2\pi/P)\,(t - T)$ и используя уравнения эллиптического движения (148). Сравнивая выражения для орбитальной фазы $\psi = 2\pi t/P$ и средней аномалии $M = (2\pi/P)\,(t - T)$, находим:

$$M = \psi - \psi_0, \tag{425}$$

где ψ_0 — орбитальная фаза, соответствующая прохождению звездой через периастр орбиты (напомним, что T — момент прохождения звезды через периастр). В середине главного минимума блеска (момент минимального блеска), когда $\psi = 0$,

$$M = -\psi_0. \tag{426}$$

В то же время, в момент минимального блеска при $\psi = 0$ имеем $\nu = \nu_1$ (см. формулу 423) и, как следует из соотношения (422),

$$v = 90^\circ + \nu_1 - \omega. \tag{427}$$

Зная истинную аномалию, соответствующую минимальному блеску во время главного затмения (427), можно, с помощью уравнений эллиптического движения (148) определить соответствующую величину M и с помощью соотношения (426) найти ψ_0. Сначала вычисляем эксцентрическую аномалию E:

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}E = \operatorname{tg}\frac{1}{2}v\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}, \tag{428}$$

затем из уравнения Кеплера находим соответствующую среднюю аномалию M, которая в момент минимального блеска равна $-\psi_0$:

$$M = E - e\sin E. \tag{429}$$

Зная величину ψ_0, можно для любой орбитальной фазы ψ вычислить среднюю аномалию M по формуле (425). С найденной M входим в уравнение Кеплера (429), решая которое методом итераций, находим эксцентрическую аномалию E. Входя с найденным значением E в уравнение (428), определяем искомое значение истинной аномалии v, а затем — по формуле (421) находим расстояние D между центрами компонент. Расстояние D измеряется в долях большой полуоси относительной орбиты a, т. е. принимается, что $a = a_1 + a_2 = 1$.

При дальнейших расчетах нам понадобится также значение лучевой скорости центра масс первой звезды относительно центра масс двойной системы для каждой фазы ψ орбитального периода. Оно находится по известной формуле (см. выше):

$$V_{c1} = \frac{2\pi a_1 \sin i}{P\sqrt{1-e^2}}\left[e\cos\omega + \cos\left(v+\omega\right)\right]. \tag{430}$$

Алгоритм вычисления v для орбитальной фазы ψ описан выше. Скорость центра масс второй звезды равна

$$V_{c2} = \frac{V_{c1}}{q}. \tag{431}$$

Переходим к вычислению поверхностей звезд, двигающихся по эллиптическим орбитам. Пусть ТДС состоит из двух звезд с тонкими атмосферами на эллиптических орбитах. Степень асинхронности вращения звезд определяется введенными нами параметрами f_1 и f_2 (см. выше). Для звезд, вращающихся синхронно с орбитальным обращением $f_{1,2} = 1$. Поместим начало вращающейся декартовой системы координат (X, Y, Z) в центре масс первой, более яркой звезды. Ось OX направлена вдоль линии центров компонент, ось OY лежит в плоскости орбиты, ось OZ перпендикулярна плоскости орбиты (система координат — левая). Введем, как и ранее, вращающуюся сферическую систему координат с началом в центре масс первой звезды и разобьем поверхность звезды на элементарные площадки dS. Пусть $\mathbf{r}$ — радиус-вектор площадки dS с координатами X, Y, Z. Угол между радиусом-вектором $\mathbf{r}$ и осью OX обозначим через η, угол между проекцией радиуса-вектора $\mathbf{r}$ на плоскости OYZ и осью OY — через φ. Направляющие косинусы λ, μ, ν для $\mathbf{r}$ с осями OX, OY, OZ даны выражениями (361):

$$\lambda = \cos\eta \quad, \mu = \sin\eta\cos\varphi, \quad \nu = \sin\eta\sin\varphi. \tag{432}$$

Во вращающейся системе координат (r, η, φ) уравнение для эквипотенциальной поверхности звезды имеет вид (371)

$$\Omega = \frac{1}{r} + q\left(\frac{1}{\sqrt{D^2 + r^2 - 2Dr\lambda}} - \frac{r\lambda}{D^2}\right) + \frac{1}{2}\,(1+q)\,r^2 f_1^2\left(1 - \nu^2\right). \qquad (433)$$

Здесь $q = m_2/m_1$ — отношение масс, $\Omega = \mathrm{const}$, D — мгновенное расстояние между центрами масс звезд, f_1 — параметр асинхронности вращения первой звезды, r измеряется в единицах большой полуоси относительной орбиты a. Безразмерный потенциал Ω определяет форму эквипотенциальной поверхности. Мы используем вместо Ω более наглядный параметр — степень заполнения звездой своей полости Роша $\mu = R/R^*$, где R и R^* — полярные радиусы для частичного и полного заполнения критической полости Роша.

В случае круговой орбиты степень заполнения полости Роша μ постоянна. Для системы с эллиптической орбитой величина μ меняется в течение орбитального периода. Ранее мы описали способ вычисления μ для каждой фазы орбитального периода, исходя из предположения о постоянстве объема звезды при ее орбитальном обращении по эллиптической орбите (см. формулы (372)–(374)). Схема вычисления поверхности звезды следующая. Для фазы периастра орбиты при известном расстоянии между центрами звезд $D = 1 - e$ вычисляются размеры критической полости Роша. При заданной степени заполнения звездой своей полости Роша в периастре μ_p определяется эквипотенциальная поверхность самой звезды и ее объем. Для i-й фазы и расстояния D_i также вычисляется своя критическая полость Роша и при условии постоянства объема звезды итерациями находится новое значение μ_i и поверхность звезды, включая координаты центров элементарных площадок dS, векторы нормали, локальные значения ускорения силы тяжести и т. п. Таким образом, входным параметром задачи является степень заполнения звездой своей полости Роша в периастре μ_p. На рис. 49, заимствованном из статьи Антохиной (1996), показан пример изменения формы звезд и расстояния между ними при движении по орбите с $e = 0{,}4$. Принятое значение $q = 0{,}5$. Принято, что в момент периастра $\mu_{p1} = \mu_{p2} = 1$, т. е. обе звезды заполняют свои полости Роша. В процессе движения к апоастру звезды удаляются друг от друга, размеры полостей Роша увеличиваются, степени заполнения полости Роша звездами уменьшаются и звезды становятся почти сферичными. В связи с этим интересно отметить, что поскольку при заданном объеме сфера обладает минимальной площадью поверхности, даже при $i = 90°$, когда наблюдатель

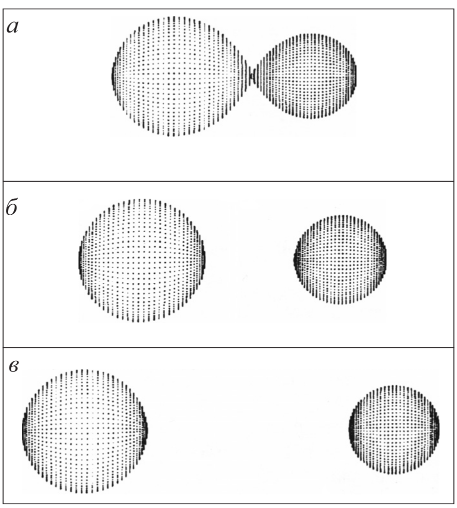


Рис. 49. Изменение формы звезд и расстояния между ними во время движения по орбите с эксцентриситетом $e = 0{,}4$. Отношение масс $q = M_2/M_1 = 0{,}5$: *а* — момент периастра, звезды заполняют свои полости Роша ($\mu_1 = \mu_2 = 1$), в процессе движения от периастра к апоастру расстояние между звездами возрастает, размеры полостей Роша увеличиваются, а коэффициенты заполнения полостей Роша уменьшаются; *б* — промежуточная фаза ($\mu_1 = 0{,}74$, $\mu_2 = 0{,}76$); *в* — апоастр орбиты, размеры полостей Роша максимальны ($\mu_1 = 0{,}55$, $\mu_2 = 0{,}53$)

смотрит перпендикулярно плоскости орбиты, можно ожидать орбитальной переменности блеска звезды на эллиптической орбите, обусловленной переменной приливной деформацией звезды. Классический эффект эллипсоидальности приливно деформированной звезды при $i = 90°$ отсутствует. Однако в случае эллиптической орбиты переменная приливная деформация звезды приводит к изменению ее площади поверхности, что вызывает орбитальную переменность блеска даже при $i = 90°$, когда амплитуда классического эффекта эллипсоидальности равна нулю. Такой эффект впервые был теоретически рассчитан в работе Хрузиной и Черепащука (1987) (рис. 50).

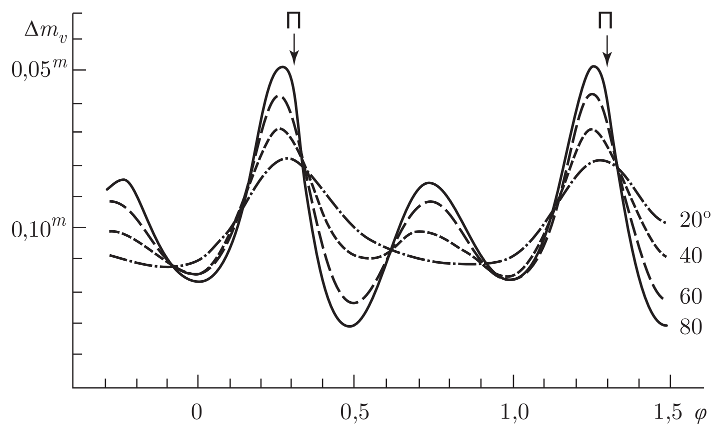


Рис. 50. Зависимость формы теоретической оптической кривой блеска рентгеновской двойной системы с эксцентрической орбитой при $e = 0{,}12$ и $\omega_v = 31°$ ($\psi_0 = 0{,}3$) от значения наклонения орбиты i, указанного цифрами на кривых. Стрелкой указан момент прохождения оптической звезды через периастр орбиты

Координаты единичного вектора нормали к площадке равны

$$\mathbf{n} = -\frac{\operatorname{grad}\Omega}{|\operatorname{grad}\Omega|} = -\left(\frac{\partial\Omega/\partial x}{|\operatorname{grad}\Omega|},\quad \frac{\partial\Omega/\partial y}{|\operatorname{grad}\Omega|},\quad \frac{\partial\Omega/\partial z}{|\operatorname{grad}\Omega|}\right) = (l,\ m,\ n)\,, \tag{434}$$

где $|\operatorname{grad}\Omega| = \sqrt{\left(\frac{\partial\Omega}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Omega}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Omega}{\partial z}\right)^2}$. Формулы для вычисления производных потенциала Ω приведены в работе Вильсона (Wilson, 1979).

Локальное ускорение силы тяжести в относительных единицах $g(\mathbf{r}) = |\operatorname{grad}\Omega|$. Температура площадки вычисляется с учетом гравитационного потемнения и прогрева поверхности звезды падающим излучением спутника («эффект отражения»). Необходимо иметь в виду, что в случае эллиптической орбиты при учете «эффекта отражения» расстояние между центрами звезд D меняется с орбитальной фазой, а не равно 1, как в случае круговой орбиты. Как уже отмечалось, расчет эффекта отражения в классических ТДС представляет собой сложную задачу: необходимо учитывать поглощение излучения спутника в атмосфере облучаемой звезды (решать соответствующее уравнение переноса), а также принимать во внимание неточечность облучающей звезды (суммировать эффект прогрева излучением от каждой точки поверхности спутника). Как отметил Вильсон (Wilson, 1990), теория эффекта отражения может быть разделена на четыре части: геометрическую (расчет геометрии облучения звезды), учет обмена болометрической энергией, расчет структуры прогретой и переизлучающей атмосферы звезды, расчет структуры оболочки звезды, возмущенной падающим излучением спутника (эффекты конвекции для звезд позднего спектрального класса и эффекты циркуляционных потоков).

Теорией эффекта отражения в ТДС занимались многие авторы (см. обзор Vaz (1985) и ссылки в нем, а также работу Вильсона (Wilson, 1990) и монографию Калраха и Милоне (Kallrath and Milone, 1999)). В простейшем виде эффект отражения описан выше.

В настоящее время при синтезе кривых блеска ТДС используется теория эффекта отражения для болометрических потоков (см. формулы (263), (264)). Точный расчет структуры атмосферы звезды с внешним облучением был выполнен в последние годы для рентгеновских, двойных систем (Антохина, Черепащук, Шиманский, 2003, 2005). Учет влияния внешнего облучения на структуру и динамику конвективных потоков в оболочке звезды позднего спектрального класса был выполнен Ручиньским (Rucinski, 1969a, b, 1970, 1973). Было показано, что из-за перестройки структуры конвективных потоков в оболочке облучаемой звезды болометрическое альбедо эффекта отражения становится меньше единицы (достигает 0,5) ввиду того, что часть энергии падающего излучения переходит не в тепло, а аккумулируется в механической энергии возмущенных конвективных движений. В работе Пустынского (Pustynski, 2007) развит метод учета эффекта отражения в монохроматическом приближении для ТДС-ядер планетарных туманностей с большой разницей температур звезд. В болометрическом приближении, когда рассматривается сложение болометрических потоков от звезды и спутника-облучателя, эффект отражения в классической ТДС может быть учтен аналогично тому, как это было сделано нами для рентгеновских двойных систем (см. формулу (383)) с той лишь разницей, что в случае классических ТДС необходимо суммировать эффект прогрева от всех точек поверхности спутника, обращенной к звезде. Перепишем формулу (383), определяющую температуру площадки dS на поверхности звезды, обусловленную эффектом гравитационного потемнения и прогревом излучением точечного рентгеновского источника:

$$T\left(\eta,\,\varphi\right) = \sqrt[4]{T_0^4\left(\eta,\,\varphi\right) + \frac{\kappa k L_v \cos\alpha}{4\sigma\pi\rho^2}}. \tag{435}$$

Второй член под знаком радикала пропорционален болометрическому потоку, падающему от точечного источника на элементарную площадку dS на поверхности звезды. Формулу, определяющую температуру площадки dS на звезде в случае прогрева излучением спутника ненулевых размеров, можно записать в следующем виде:

$$T\left(\eta,\,\varphi\right) = \sqrt[4]{T_0^4\left(\eta,\,\varphi\right) + \iint\limits_S \frac{\kappa \cos\alpha I_b\left(\cos\beta\right)\cos\beta\, dS'}{4\pi\sigma d^2}}, \tag{436}$$

где S — поверхность спутника, видимая со стороны звезды, dS' — площадь элементарной площадки на поверхности спутника, d — расстояние площадки dS на звезде от площадки dS' на спутнике (заменяет расстояние ρ в формуле (435)), β — угол между нормалью к площадке dS' и направлением к площадке dS, $I_b(\cos\beta)$ — интенсивность, проинтегрированная по всем длинам волн, которая испускается площадкой dS' в направлении площадки dS. В случае линейного закона потемнения

$$I_b\left(\cos\beta\right) = I_0^b\left(1 - x_b + x_b\cos\beta\right), \tag{437}$$

где I_0^b — болометрическая интенсивность, испускаемая площадкой dS' в направлении нормали, x_b — коэффициент потемнения для болометрического излучения спутника. На практике интегрирование в формуле (436) заменяется суммированием вклада всех элементарных площадок dS'. Это суммирование требует значительных затрат машинного времени. В случае круговой орбиты применение формулы (436) облегчается тем, что температура элементарной площадки dS не меняется с фазой орбитального периода, поэтому достаточно выполнить расчет $T(\eta, \varphi)$ для одной орбитальной фазы. В случае эллиптической орбиты функция $T(\eta, \varphi)$ должна рассчитываться для каждой фазы орбитального периода. Следует отметить, что все возрастающая мощь современных компьютеров делает вполне реальной возможность учета эффекта отражения по формуле (436). При этом в случае классических ТДС иногда приходится решать задачу о многократном отражении: спутник прогревает поверхность звезды, которая, нагреваясь, в свою очередь дополнительно прогревает поверхность спутника и так далее. Для решения задачи о многократном отражении приходится использовать метод итераций. Как показывают исследования (см., например, Wilson, 1990) такой итерационный процесс сходится на четвертой-пятой итерации.

Формула (436) описывает эффект прогрева первой звезды излучением спутника. Для расчета эффекта прогрева второй звезды можно также использовать формулу (436), заменив параметры первой звезды на параметры второй. Как уже отмечалось, эффект отражения в классических ТДС проявляется в разностном виде: когда видимая прогретая часть первой звезды увеличивается, видимая прогретая часть второй звезды уменьшается и наоборот.

В случае ТДС с глубокими затменными минимумами блеска часто оказывается вполне удовлетворительным применение простой формулы типа (435), описывающей прогрев звезды точечным источником. В этом случае каждая из прогревающих звезд системы заменяется точечным источником, расположенным в центре звезды. Как показано Вильсоном (Wilson, 1990), модель точечного источника особенно хорошо применима, если звезда-облучатель имеет сферическую форму. Поскольку поток излучения от сферической звезды, даже имеющей потемнение к краю, убывает с расстоянием r как $1/r^2$, различие в эффекте прогрева точечным и протяженным сферическим источником состоит лишь в отсутствии или наличии полутени в окрестности соответствующего терминатора. В программе Вильсона и Девиннея (Wilson and Devinney, 1971) при использовании модели точечного источника для расчета эффекта отражения в классических ТДС вводится дополнительный поправочный множитель, учитывающий наличие полутени при облучении звездой ненулевых размеров. Наличие полутени уменьшает контраст между прогретой и непрогретой частями звезды, что приводит к уменьшению амплитуды эффекта отражения. Поэтому применение формулы для точечного источника, как правило, дает слегка завышенную величину амплитуды эффекта отражения по сравнению со случаем источника ненулевых размеров. В случае глубоких затмений в ТДС, этой неточностью можно пренебречь. Подчеркнем еще раз, что высокая эффективность современных компьютеров позволяет сравнительно легко реализовать учет эффекта отражения для классических ТДС в точном виде (в болометрическом приближении — см. формулу (436)). В программе синтеза кривых блеска и кривых лучевых скоростей классических ТДС, разработанной Антохиной (1996) предусмотрен учет эффекта отражения как в модели точечного источника, так и в модели облучающего источника ненулевых размеров.

Интенсивность излучения элементарной площадки в данной длине волны λ в направлении наблюдателя определяется ее температурой и законом потемнения к краю (см. Антохина, 1988). В случае линейного закона потемнения интенсивность dI_λ описывается формулой (379):

$$dI_\lambda = B_\lambda(T)[1 - x(\lambda, T)(1 - \cos\gamma)] \cos\gamma dS, \tag{438}$$

где $B_\lambda(T)$ — функция Планка, γ — угол между лучом зрения и нормалью к поверхности звезды, $x(\lambda, T)$ — линейный коэффициент потемнения к краю. Как отмечалось выше, можно вместо функции Планка использовать теоретические спектры излучения звезды и теоретические законы потемнения к краю, используя результаты расчетов моделей тонких звездных атмосфер. Например, сравнительно недавно появились работы (Diaz-Cordoves and Gimenes, 1992, Diaz-Cordoves et al., 1995), где приводится новая эмпирическая формула для излучения, выходящего из атмосферы звезды, и даны соответствующие коэффициенты потемнения к краю (см. выше). Авторы также провели сравнительное исследование линейного, квадратичного и нового законов потемнения к краю и дали полезные рекомендации о применимости того или иного закона для различных спектральных классов звезд.

Для расчета излучения звезды в различных фазах орбитального периода введем неподвижную декартову систему координат $\left(\overline{X}, \overline{Y}, \overline{Z}\right)$, с началом в центре масс первой звезды. Оси $O\overline{X}$ и $O\overline{Y}$ лежат в плоскости орбиты, ось $O\overline{Z}$ совпадает с осью OZ подвижной системы отсчета. Наблюдатель размещается в плоскости $O\overline{X}\overline{Z}$. Угол между лучом зрения и осью OZ — наклонение орбиты i. Введем угол относительного поворота компонент $\theta(t)$ — угол между осями OX и $O\overline{X}$. В орбитальной фазе $\psi = 0$ первая звезда затмевает вторую, $\theta = 0°$, оси OX и $O\overline{X}$ совпадают. Луч зрения, расположенный в плоскости $O\overline{X}\overline{Z}$, направлен от наблюдателя к звезде. Координаты единичного вектора $\mathbf{a}_0$ в направлении наблюдателя в подвижной системе координат (X, Y, Z) равны

$$\mathbf{a}_0 = (-\sin i \cos\theta,\ -\sin i \sin\theta,\ \cos i)\,. \tag{439}$$

Косинус угла между нормалью к площадке и направлением на наблюдателя определяется как скалярное произведение

$$\cos\gamma = (\mathbf{a}_0,\ \mathbf{n})\,. \tag{440}$$

Площадь элементарной площадки дается формулой (387):

$$dS = \frac{r^2\,(\eta,\ \varphi) \sin\eta d\eta d\varphi}{\lambda l + \mu m + \nu n}. \tag{441}$$

Полное наблюдаемое излучение звезды получается в результате суммирования потоков от всех видимых площадок dS в направлении наблюдателя (см. формулу (438)). Площадка видна, если $\cos\gamma > 0$ (отсутствие затмения телом самой звезды), и если она не затмевается второй звездой. Критерий затмения проверяется подобно тому, как это делалось нами ранее (см. формулы (391), (392), (394)). Пусть площадка dS на поверхности первой звезды имеет координаты X_1, Y_1, Z_1. Уравнение прямой, параллельной лучу зрения и проходящей через центр площадки dS в параметрическом виде имеет вид (во вращающейся системе отсчета X, Y, Z)

$$\begin{cases} X = X_1 - t \sin i \cos\theta, \\ Y = Y_1 - t \sin i \sin\theta, \\ Z = Z_1 + t \cos i. \end{cases} \tag{442}$$

Потенциал в точках, лежащих на этой прямой, сравнивается с потенциалом второй звезды. Для такого сравнения удобнее перейти в систему координат (подвижную), связанную со второй звездой (X', Y', Z') (подробнее, см. работу Антохиной, 1988). Уравнения перехода запишутся в виде

$$X' = D - X, \quad Y' = -Y, \quad Z' = Z. \tag{443}$$

Потенциал в произвольной точке dS на прямой (442) определяется по формуле

$$\Omega = \frac{1}{\sqrt{(X')^2 + (Y')^2 + (Z')^2}} + q'\left[\frac{1}{\sqrt{(D - X')^2 + (Y')^2 + (Z')^2}} - \frac{X'}{D^2}\right] + \\ + \frac{1}{2}\,(1 + q')\, f_2^2 \left[(X')^2 + (Y')^2\right], \tag{444}$$

где $q' = 1/q = m_1/m_2$ — обратное отношение масс, f_2 — параметр асинхронности второй звезды. Площадка dS не затмевается, если прямая (442) не пересекает поверхности второй звезды с потенциалом Ω_2, который однозначно связан со степенью заполнения полости Роша второй звездой (см. выше). Если $\Omega < \Omega_2$ на каждом шаге по t для прямой (442), то площадка dS не затмевается второй звездой, и ее вклад необходимо учитывать при определении суммарного блеска системы. Чтобы сократить затраты компьютерного времени, геометрическую область, в которой проверяется критерий затмения, легко ограничить, зная оценки размеров звезд. Таким образом, для каждой фазы ψ орбитального периода проверяется критерий затмения, определяются площадки на первой звезде, видимые для наблюдателя, и находится суммарный поток излучения от первой звезды.

Вычисление поверхности второй звезды и ее потока излучения проводится аналогично описанным вычислениям для первой звезды. Для этого переходим во вращающуюся систему координат (X', Y', Z') с началом в центре масс второй звезды. Форма эквипотенциальной поверхности второй компоненты определяется из уравнения (433), в котором стоит обратное отношение масс $q' = 1/q$ и параметр асинхронности f_2 для второй звезды. В системе координат (X', Y', Z') вычисляются модули радиусов-векторов площадок, векторы нормалей, значения локальных ускорений силы тяжести и декартовы координаты центров площадок. Затем возвращаемся во вращающуюся систему координат (X, Y, Z) и вычисляем поток излучения второй звезды. Переход осуществляется по формулам перехода (443). Для проверки критерия затмения используется формула (444), куда следует подставить вместо q' и f_2 величины q и f_1. Потенциалы точек на прямой, проходящей через центр площадки на второй звезде и параллельной лучу зрения, сравниваются с потенциалом Ω_1 на поверхности первой звезды.

Далее, для каждой орбитальной фазы ψ суммируются вклады обеих звезд с учетом затмений и вычисляется полный поток излучения для данной длины волны λ. Нормируя полный поток на величину внезатменного потока излучения в фазе $\psi = 90°$, получаем кривую блеска в разностях звездных величин. Программа, созданная в ГАИШ Э. А. Антохиной, позволяет синтезировать одновременно набор многоцветных кривых блеска, при этом возможен учет вклада «третьего света» (см. выше), а также влияния на кривые блеска протяженной электронно-рассеивающей сферически-симметричной оболочки.

Рассмотрим теперь синтез профилей линий и кривых лучевых скоростей классических ТДС. Будем считать, что векторы угловых скоростей вращения звезд перпендикулярны плоскости орбиты. Разобьем поверхность первой звезды на элементарные площадки. Рассмотрим введенную нами ранее неподвижную систему координат $(\overline{X}, \overline{Y}, \overline{Z})$, а также подвижную (вращающуюся) систему координат (X, Y, Z) с началами в центре масс первой звезды. Пусть координаты центра элементарной площадки dS на поверхности первой звезды во вращающейся системе координат равны X, Y, Z.

Для вычисления профиля линии от всей первой звезды необходимо рассчитать лучевую скорость каждой элементарной площадки dS в неподвижной системе координат $(\overline{X}, \overline{Y}, \overline{Z})$, связанной с земным наблюдателем. Согласно теории поступательно-вращательного движения (Ландау и Лифшиц, 1958), скорость любой точки твердого тела в неподвижной системе отсчета, связанной с наблюдателем, равна

$$\mathbf{v} = \mathbf{V}_c + [\boldsymbol{\omega}, \ \mathbf{r}], \tag{445}$$

где $\mathbf{V}_c$ — скорость поступательного движения центра масс тела (в нашем случае, с некоторыми оговорками, можно принять, что это скорость орбитального движения звезды в ТДС), $\boldsymbol{\omega}$ — вектор угловой скорости вращения тела, $\mathbf{r}$ — мгновенный радиус-вектор рассматриваемой точки тела в подвижной системе отсчета с началом в его центре масс. Рассмотрим второй член в формуле (445). Выберем в качестве системы отсчета нашу подвижную систему координат (X, Y, Z) с началом в центре масс звезды. Тогда векторное произведение $[\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}]$, где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор площадки dS на звезде в подвижной системе координат X, Y, Z, определяет вектор линейной скорости вращения площадки $\mathbf{v}_0 = [\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}]$ в неподвижной системе координат $\overline{X}, \overline{Y}, \overline{Z}$. Проекция $\mathbf{v}_0$ на луч зрения в случае синхронного вращения звезды $(f_1 = 1)$ определяет лучевую скорость вращения площадки dS и определяется как скалярное произведение

$$v_0 = (-\mathbf{v}_0\,\mathbf{a}_0)\,, \tag{446}$$

где $\mathbf{a}_0$ — единичный вектор в направлении луча зрения (знак минус в скобках отражает тот факт, что луч зрения направлен от наблюдателя). Проекция вектора $\mathbf{V}_c$ на луч зрения в случае синхронного вращения звезды $(f_1 = 1)$ определяет лучевую скорость центра масс первой звезды V_{c1} относительно центра масс двойной системы, которая дается выражением (430). Полная лучевая скорость площадки dS относительно центра масс двойной системы равна

$$v_r = v_0 + V_{c1}. \tag{447}$$

В случае асинхронного осевого вращения звезды под вектором $\boldsymbol{\omega}$ в формуле (445) следует понимать угловую скорость вращения звезды (с индексом 1 или 2): $\boldsymbol{\omega}_{\text{rot}} = f\boldsymbol{\omega}_{\text{orb}}$, где $\boldsymbol{\omega}_{\text{orb}}$ — средняя угловая скорость орбитального вращения. Учтем также скорость площадки dS по нормали к поверхности звезды, обусловленную истечением радиального звездного ветра. Как уже отмечалось, в спектрах горячих звезд наблюдается эффект «бальмеровского прогресса», свидетельствующий о том, что ядра линий H_α, H_β, H_γ формируются в высоких слоях звездной атмосферы, у основания звездного ветра, где уже начинается радиальное истечение вещества со скоростью 10–20 км/с. Поэтому нужно учесть движение площадки dS по нормали к поверхности звезды. Будем считать, что элементарная площадка dS движется по нормали со скоростью $\mathbf{v}_w$, пропорциональной локальной скорости звука: $\mathbf{v}_w = k_s\mathbf{n}\,v_s$, $v_s = \sqrt{(\gamma R_0/\mu)T}$, где $\mathbf{n}$ — вектор единичной нормали к площадке dS, R_0 — универсальная газовая постоянная, μ — молекулярный вес, γ — показатель адиабаты, T — температура, k_s — коэффициент пропорциональности, который в первом приближении можно положить равным единице. Для одноатомного газа из водорода $v_s = 1{,}17 \cdot 10^4\sqrt{T}$ (см/с). При $T = 6000$ К имеем $v_s \simeq 9$ км/с, при $T = 30\,000$ К $v_s \simeq 20$ км/с. Поскольку температура по поверхности звезды в ТДС может существенно меняться, скорость ветра также может меняться. Особенно важно учитывать этот эффект для рентгеновских двойных систем, состоящих из массивных звезд раннего спектрального класса и нейтронных звезд. Такие системы обычно имеют малую полуамплитуду орбитальных кривых лучевых скоростей оптической звезды K_v. Например, для рентгеновских двойных систем 3U0900-40 и 3U1700-37 величина $K_v \simeq 20$ км/с, для системы Cen X-3 $K_v \simeq 20$ км/с. Разумеется, описанным способом мы учитываем звездный ветер лишь в первом приближении. Обычно в ТДС истечение в виде ветра несимметричное — наиболее сильные потоки вещества движутся в направлении спутника через окрестности внутренней точки Лагранжа. Если задать модель истечения, описанным методом можно учесть и несимметричный звездный ветер.

Проекция вектора $\mathbf{v}_w$ на луч зрения запишется в виде

$$v_w = -k_s v_s\,(\mathbf{n}\,\mathbf{a}_0)\,. \tag{448}$$

Результирующая лучевая скорость площадки dS относительно центра масс двойной системы равна

$$v_r = v_0 + V_{c1} + v_w. \qquad (449)$$

Векторы $\boldsymbol{\omega}$, $\mathbf{r}$, $\mathbf{a}_0$ и $\mathbf{n}$ будем рассматривать в подвижной системе координат (X, Y, Z). Тогда радиус-вектор площадки dS

$$\mathbf{r} = (x,\ y,\ z) = (r\lambda,\ r\mu,\ r\nu)\,, \qquad (450)$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, λ, μ, ν — направляющие косинусы (см. формулы (432)). Единичный вектор в направлении луча зрения (см. формулу (439))

$$\mathbf{a}_0 = (-\sin i \cos\theta,\ -\sin i \sin\theta,\ \cos i) = (a_x,\ a_y,\ a_z)\,. \qquad (451)$$

Единичный вектор нормали к площадке dS (см. формулу (434))

$$\mathbf{n} = -\frac{\operatorname{grad}\Omega}{|\operatorname{grad}\Omega|} = (l,\ m,\ n)\,. \qquad (452)$$

Вектор угловой скорости осевого вращения звезды

$$\boldsymbol{\omega} = (0,\ 0,\ \omega)\,. \qquad (453)$$

Подставляя компоненты векторов $\boldsymbol{\omega}$, $\mathbf{r}$, $\mathbf{a}_0$ и $\mathbf{n}$ в формулы (445), (446), (448) и проведя соответствующие преобразования, получаем:

$$\mathbf{v}_0 = [\boldsymbol{\omega}\,\mathbf{r}] = (\omega y,\ -\omega x,\ 0)\,, \qquad (454)$$

$$v_0 = (-\mathbf{v}_0\,\mathbf{a}_0) = (\omega y,\ -\omega x,\ 0)\,(-a_x,\ -a_y,\ -a_z) = -\omega y a_x + \omega x a_y, \qquad (455)$$

$$v_w = -k_s v_s\,(\mathbf{n}\,\mathbf{a}_0) = -k_s v_s\,(l a_x + m a_y + n a_z)\,. \qquad (456)$$

Подставляя выражения (454)–(456) в формулу (449), получаем полную лучевую скорость v_r площадки dS на поверхности первой звезды относительно центра масс двойной системы:

$$v_r = V_{c1} + \omega(x a_y - y a_x) - k_s v_s (l a_x + m a_y + n a_z), \qquad (457)$$

где множитель пропорциональности k_s — свободный параметр, который можно оценить, например, из наблюдений эффекта «бальмеровского прогресса» в спектре звезды, величина V_{c1} дана формулой (430).

Для второй звезды вычисления проводятся аналогично. Координаты площадки dS и нормаль к площадке вычисляются во вращающейся системе координат (X', Y', Z'), связанной с центром масс второй звезды. Пусть угловая скорость осевого вращения второй звезды $\omega' = f_2 \omega_{\text{orb}}$. Тогда проекция линейной скорости площадки dS на луч зрения с учетом вращения и радиального истечения равна

$$v'_r = V_{c2} + \omega'\,[(D - x)\,a_y + y a_x] - k_s v'_s\,(l a_x + m a_y + n a_z)\,, \qquad (458)$$

где $k_s v'_s$ — скорость радиального истечения у основания ветра второй звезды, V_{c2} — лучевая скорость орбитального движения центра масс второй звезды, которая дана формулой (431). Формула (458) дает полную лучевую скорость элементарной площадки dS на поверхности второй звезды относительно центра масс двойной системы. Чтобы учесть движение центра масс двойной системы относительно наблюдателя, необходимо в формулы (457), (458) прибавить величину γ-скорости системы. Таким образом, мы можем вычислить лучевые скорости всех элементарных площадок, на которые разбиты поверхности звезд. Теперь наша задача состоит в вычислении лучевых скоростей самих звезд. Они определяются по суммарным профилям линий для различных фаз орбитального периода. Пусть температура данной площадки dS T, а локальное ускорение силы тяжести g. В абсолютных единицах измерения

$$g = \frac{GM}{a^2} \left|\mathrm{grad}\,\Omega\right|, \tag{459}$$

где G — постоянная тяготения, M — масса звезды, $a = a_1 + a_2$ — большая полуось относительной орбиты. Суммируя локальные профили линий по поверхности звезды с учетом эффекта Доплера, и нормируя их на континуум для каждой площадки, получаем профиль линии от звезды. Таким образом, для каждой фазы орбитального периода при различных условиях видимости звезды мы имеем теоретический профиль линии и его эквивалентную ширину. Затем после проверки условий затмения (см. выше) профиль служит для вычисления лучевой скорости звезды (используя сечения профиля на разных уровнях) и построения теоретической кривой лучевых скоростей.

Рассмотрим процедуру вычисления суммарного профиля абсорбционной линии для звезды. Для этого нужно рассчитать локальный профиль линии для каждой площадки dS, решая соответствующее уравнение переноса с внешним облучением. Это реализовано в работах Антохиной и др. (2003, 2005) и изложено ниже. Однако для экономии компьютерного времени целесообразно использовать обширные теоретические расчеты, выполненные Куруцем (Kurucz, 1979) и представленные в удобном виде. В таблицах Куруца приведены теоретические профили линий H_α, H_β, H_γ и их эквивалентные ширины в широком диапазоне изменения параметров $T_{\mathrm{ef}} = 5000$–$50\,000$ K и $\lg g = 1{,}0$–$5{,}0$. Профили приведены в потоках, т. е. проинтегрированы по всему диску сферической звезды, в то время как нам необходимы профили, рассчитанные в интенсивностях. Специальные исследования (Абубекеров и др., 2005) показали, что замена локальных профилей, вычисленных в интенсивностях, на профили в потоках приводит к незначительному различию соответствующих теоретических кривых лучевых скоростей.

Для площадки dS с температурой T и ускорением силы тяжести g, путем двумерной интерполяции таблиц Куруца мы вычисляем локальный профиль линии $H_{\mathrm{Kur}}(n)$ на сетке длин волн $d\lambda(n)$ ($d\lambda$ отсчитывается от центральной длины волны λ_0). Значения $H_{\mathrm{Kur}}(n)$ нормированы на соседний континуум. Для площадки с локальной лучевой скоростью v_r профиль линии нужно сместить на

$$\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0 = \lambda_0 \frac{v_r}{c}, \tag{460}$$

где λ_0 — центральная длина волны несмещенного локального профиля линии.

Далее, по формуле (438) вычисляется поток излучения dI_λ от площадки dS:

$$dI_\lambda = B_\lambda(T)[1 - x(\lambda, T)(1 - \cos\gamma)]\cos\gamma\, dS.$$

Принимая dI_λ за континуум для данной площадки, перенормируем теоретический локальный профиль

$$H_p(n) = H_{\mathrm{Kur}}(n)\, dI_\lambda. \tag{461}$$

Здесь мы пренебрегаем эффектом «центр–край» для линии, который составляет, например, для Солнца $\sim 10\,\%$ (Мустель, 1960). Задаем сетку длин волн около центральной длины волны линии. Для каждой λ после проверки условий затмения суммируем по видимой поверхности звезды интенсивности локальных профилей линии, каждый из которых сдвинут по λ по формуле (460) в соответствии со своей лучевой скоростью. Получаем суммарный профиль линии от звезды:

$$H_{ps}(n) = \iint\limits_S H_P(n)\, dS, \tag{462}$$

где S — видимая поверхность звезды, с учетом затмения площадок dS телом самой звезды и спутником. Нормируем суммарный профиль $H_{ps}(n) = H_{ps}(\lambda)$ на суммарное излучение звезды I_λ и получаем результирующий профиль линии $H(n) = H(\lambda)$, эквивалентный профилю остаточных интенсивностей $r_\lambda = I_\lambda / I_\lambda^0$ (Мустель, 1960). В случае, когда система состоит из двух компонент, дающих вклад в оптическую светимость, нормировку следует осуществлять на суммарную монохроматическую интенсивность в соседнем континууме $I = I_1 + I_2$. Вычисляем эквивалентную ширину линии:

$$W = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left[1 - H_{ps}\left(\lambda\right)\right] d\lambda. \tag{463}$$

Таким образом, для каждой орбитальной фазы мы можем вычислить теоретический суммарный профиль от звезды, его центральную длину волны λ_0^c и его эквивалентную ширину W.

Рассмотрим теоретический суммарный профиль линии $H_{ps}(\lambda) = H(\lambda)$ (рис. 51). Здесь $R(\lambda)$ — глубина линии на длине волны λ. Глубина в центре линии R_0. Для определения лучевой скорости рассекаем профиль линии на трех уровнях: 1/3, 1/2, 2/3 от R_0. Находим ширину линии $\Delta\lambda$ на этих уровнях и определяем длины волн λ_1, λ_2, λ_3, соответствующие $\Delta\lambda/2$, и среднее значение λ. Средняя дина волны λ, соответствующая $\Delta\lambda/2$, и будет определять лучевую скорость звезды в данной фазе орбитального периода. Для второй звезды вычисления аналогичны.

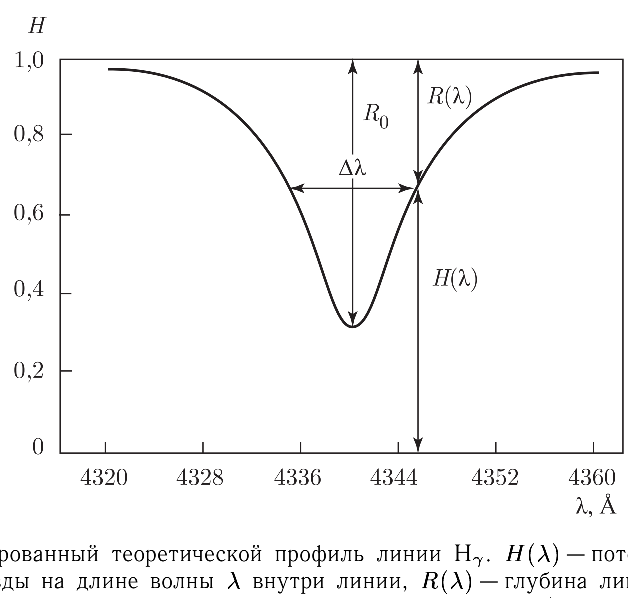


Рис. 51. Синтезированный теоретической профиль линии H_γ. $H(\lambda)$ — поток излучения, выходящего из звезды на длине волны λ внутри линии, $R(\lambda)$ — глубина линии, R_0 — глубина в центре линии, $\Delta\lambda$ — ширина линии на уровне 1/2 от R_0

Пусть $H_1(\lambda)$ и $H_2(\lambda)$ — синтетические профили линий первой и второй звезды, I_1, I_2 — соседние монохроматические потоки излучения от звезд в данной фазе орбитального периода. Тогда суммарный профиль обеих линий в спектре системы, нормированный на излучение обеих звезд, вычисляется по формуле

$$H\left(\lambda\right) = \frac{I_1}{I_1 + I_2} H_1\left(\lambda\right) + \frac{I_2}{I_1 + I_2} H_2\left(\lambda\right). \tag{464}$$

В итоге мы имеем теоретические профили абсорбционных линий каждой компоненты для различных орбитальных фаз, эквивалентные ширины этих линий и кривые лучевых скоростей обеих компонент. Многократно решая прямую задачу для различных параметров двойной системы и сравнивая теоретические вычисления с наблюдениями, можно определить параметры системы.

Из методических соображений мы приводим на рисунках профили линий от каждой звезды в отдельности, нормированные на излучение одной звезды. Это позволяет более наглядно показать зависимость формы и глубины профиля линии звезды от ее физических характеристик.

4. Решение модельных задач

Для проверки работы алгоритма и программы, а также изучения чувствительности задачи к изменению различных параметров было решено много модельных задач. Перечислим входные параметры прямой задачи синтеза теоретических кривых лучевых скоростей в модели Роша. В абсолютных единицах задаются массы компонент M_1, M_2 и период системы P. Входными параметрами также являются: μ_1, μ_2 — степени заполнения компонентами своих полостей Роша, T_1, T_2 — средние эффективные температуры компонент, β_1, β_2 — коэффициенты гравитационного потемнения, x_1, x_2 — коэффициенты потемнения к краю (для линейного закона потемнения или какого-либо другого закона), κ_1, κ_2 — коэффициенты переработки излучения спутника при «отражении», i — наклонение орбиты, λ_0 — длина волны центра линии (в модельных расчетах мы рассматривали линию $\mathrm{H}_\gamma 4340$ Å, которая представлена в таблицах Куруца). Для выбранной линии специальная подпрограмма «считывает» из занесенных в память компьютера таблиц Куруца (Kurucz, 1979) локальные профили линии и их эквивалентные ширины. Значение большой полуоси относительной орбиты, необходимое при вычислениях, определяется из третьего закона Кеплера:

$$\frac{a^3}{P^2} = (M_1 + M_2)\,\frac{G}{4\pi^2}.$$

Для начала рассмотрим случай круговой орбиты ($e = 0$).

На рис. 52 показаны кривые лучевых скоростей двойной системы в модели Роша, на рис. 53 — соответствующие профили линии H_γ для каждой из компонент в различных фазах орбитального периода. Как уже говорилось, приведенный профиль линии нормирован на излучение одной звезды. Следует также отметить, что профили линий соответствуют идеальному спектрографу, когда сглаживающее действие его аппаратной функции пренебрежимо мало.

Рассмотрим рис. 52 и 53 подробнее. На рис. 52 *а* приведены синтетические кривые лучевых скоростей для системы с параметрами $q = M_2/M_1 = 1{,}25$, $M_1 = 4M_\odot$, $M_2 = 5M_\odot$, $T_1 = 8000$ K, $T_2 = 15000$ K, $\mu_1 = 0{,}7$, $\mu_2 = 1$, $i = 90°$. Соответствующие профили линии H_γ показаны на рис. 53 *а*. Эквивалентные ширины линий компонент различаются главным образом из-за различия температур. Для бальмеровских линий (и линии H_γ, в частности) эквивалентные ширины максимальны для температур 8000–10 000 K. В фазе $\psi = 0$ первая компонента затмевает вторую, из-за этого профиль второй компоненты «уплощается», центральные части звезды затемнены. На рис. 53 профили компонент приведены раздельно, чтобы показать их смещения и различия в течение орбитального периода. В наблюдательных спектрах, из-за влияния аппаратной функции спектрографа, эти профили будут блендироваться.

На рис. 52 *б* приведены кривые лучевых скоростей системы с $q = 2$, $M_1 = 5M_\odot$, $M_2 = 10M_\odot$, $P = 5^{\mathrm{d}}$, $T_1 = 20\,000$ K, $T_2 = 10000$, $\mu_1 = \mu_2 = 1$, $i = 90°$. Заметно, что

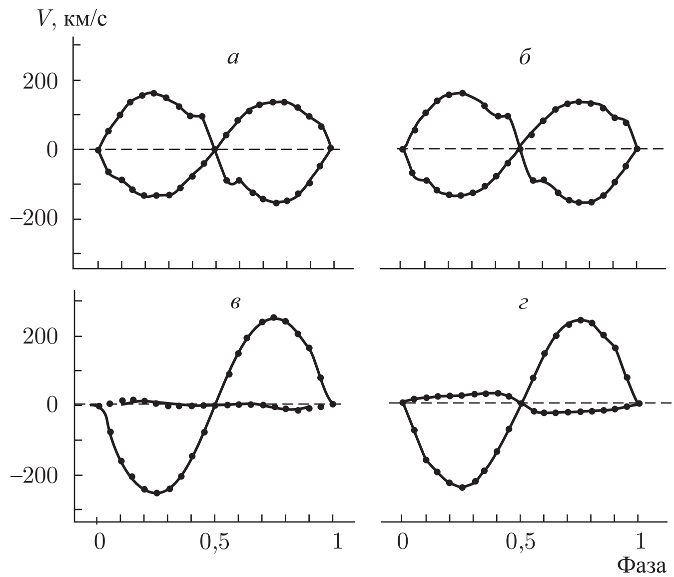


Рис. 52. Теоретические кривые лучевых скоростей систем в модели Роша для различных параметров. В фазе ψ=0 первая компонента затмевает вторую. *а* — $q = M_2/M_1 = 1{,}25$, $M_1 = 4M_\odot$, $M_2 = 5M_\odot$, $P = 3^d$, $T_1 = 8000$ К, $T_2 = 15\,000$ К, $\mu_1 = 0{,}7$, $\mu_2 = 1$, $i = 90^\circ$, *б* — $q = 2$, $M_1 = 5M_\odot$, $M_2 = 10M_\odot$, $P = 5^d$, $T_1 = 20\,000$ К, $T_2 = 10\,000$ К, $\mu_1 = \mu_2 = 1$, $i = 90^\circ$. Вблизи фаз $\psi = 0$ и $\psi = 0{,}5$ на кривые лучевых скоростей влияют эффекты затмений. *в* — $q = 0{,}1$, $M_1 = 10M_\odot$, $M_2 = 1M_\odot$, $P = 5^d$, $T_1 = 8000$ К, $T_2 = 25\,000$ К, $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 0{,}5$, $i = 90^\circ$; *г* — $q = 0{,}1$, $M_1 = 10M_\odot$, $M_2 = 1M_\odot$, $P = 5^d$, $T_1 = 10\,000$ К, $T_2 = 8000$ К, $\mu_1 = \mu_2 = 1$, $i = 80^\circ$

вблизи фаз $\psi = 0$ и $\psi = 0{,}5$ на кривые лучевых скоростей влияют эффекты затмений, проявляющиеся в виде резкого подъем и спада лучевых скоростей.

На рис. 52 *в* приведены кривые лучевых скоростей системы с $q = 0{,}1$, $M_1 = 10M_\odot$, $M_2 = 1M_\odot$, $P = 5^d$, $T_1 = 8000$ К, $T_2 = 25\,000$ К, $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 0{,}5$, $i = 90^\circ$. Для малых отношений масс $q \sim 0{,}1$ кривые лучевых скоростей могут искажаться очень сильно. Кроме того, из-за большой разницы температур звезд в системе должен присутствовать значительный эффект отражения. В рассматриваемом случае при заданном q центр масс системы лежит внутри тела более массивной звезды. Разные части звезды при орбитальном движении двигаются относительно центра масс системы в разные стороны, что приводит к искажению кривой лучевых скоростей этой звезды и уменьшению ее амплитуды. Это приводит к значительным ошибкам в определении масс компонент при использовании простейшей модели системы как двух точечных масс.

Рисунок 52 *г* соответствует параметрам системы $q = 0{,}1$, $M_1 = 10M_\odot$, $M_2 = 1M_\odot$, $P = 5^d$, $T_1 = 10\,000$ К, $T_2 = 8000$ К, $\mu_1 = \mu_2 = 1$, $i = 80^\circ$. Как и в предыдущем случае, амплитуда кривой лучевых скоростей более массивной звезды мала, кривая искажена (напомним, что орбита системы — круговая). Профили линий (рис. 53 *г*) для заданных температур звезд широкие и глубокие. В фазе $\psi = 0$ вторая компонента полностью затмевается первой, поэтому в спектре наблюдается лишь профиль одной линии.

На рис. 54 приведены профили линий первой компоненты для разных скоростей вращения звезды. Задавались следующие параметры системы: $q = 0{,}5$, $M_1 = 10M_\odot$, $M_2 = 5M_\odot$, $\mu_1 = 1$, $T_1 = 17\,000$ К. В одном случае $P = 5^d$ (более узкий профиль),

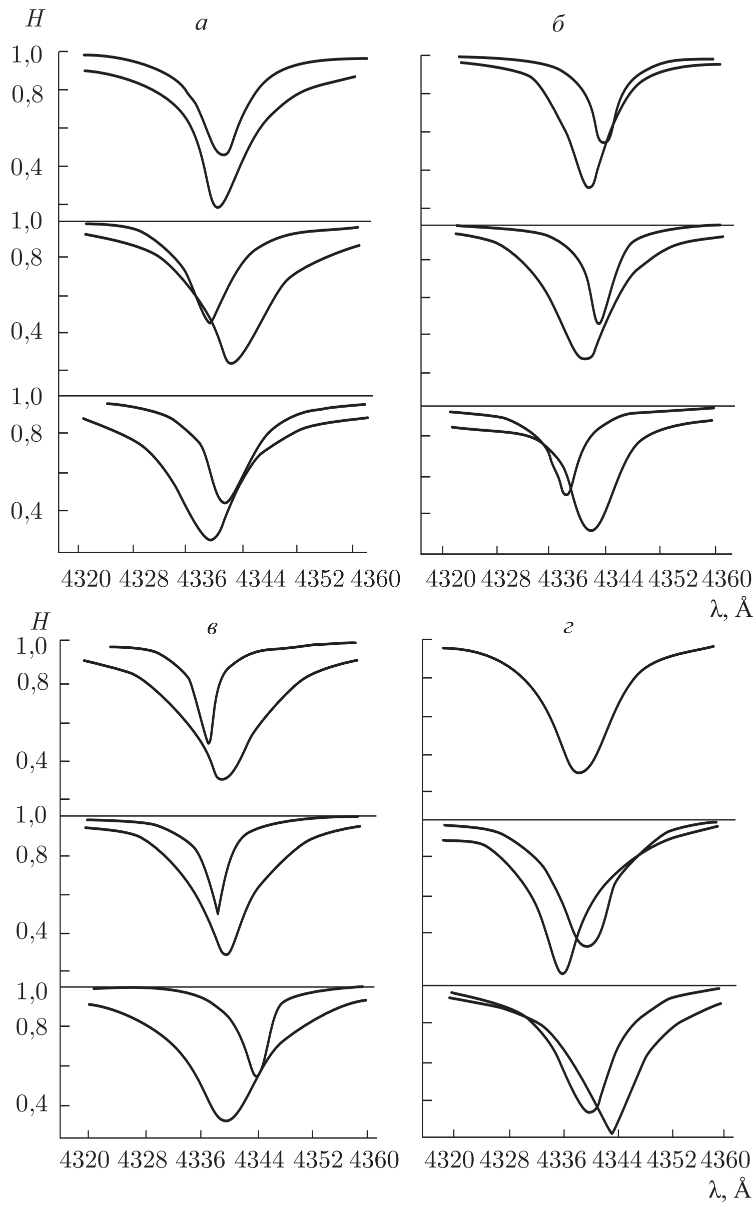


Рис. 53. Теоретические профили линии H_γ для звезд, входящих в тесные двойные системы, кривые лучевых скоростей которых показаны на рис. 52. Профили компонент приведены раздельно (в наблюдаемых спектрах двойных систем эти профили будут блендироваться). Случаи *а*, *б*, *в*, *г* соответствуют рисункам 52 *а*, 52 *б*, 52 *в*, 52 *г*. *а* — эквивалентные ширины линий компонент различаются главным образом из-за различия температур (8000 K и 15 000 K). Фазы орбитального периода (сверху вниз) $\psi = 0$; 0,30; 0,65. В фазе $\psi = 0$ первая компонента затмевает вторую, из-за этого профиль второй компоненты «уплощается», центральные части звезды затемнены. *б* — фазы $\psi = 0{,}1$; 0,45, 0,80; *в* — фазы $\psi = 0{,}1$; 0,45; 0,80; *г* — фазы $\psi = 0$; 0,30; 0,80. В фазе $\psi = 0$ вторая компоненты полностью затмевается первой, в спектре виден лишь один профиль линии

в другом случае $P = 1^{\mathrm{d}}$ (более широкий профиль). При уменьшении орбитального периода скорость осевого вращения звезды увеличивается (звезда вращается синхронно с орбитальным обращением) и профиль уширяется. Профили приведены для фаз орбитального периода $\psi = 0$ и $\psi = 0{,}5$ (кольцевое затмение второй компонентой). Рассмотрим теперь случай эллиптической орбиты ТДС.

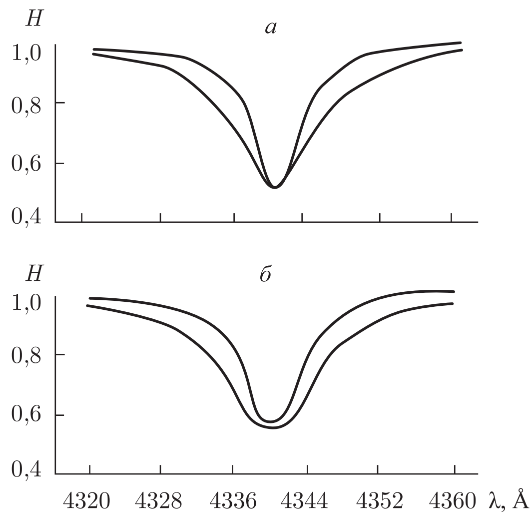


Рис. 54. Профили линий первой компоненты для разных скоростей вращения звезды. Параметры системы: $q = 0{,}5$, $M_1 = 10M_\odot$, $M_2 = 5M_\odot$, $\mu_1 = 1$, $T_1 = 17\,000$ K. Приведены профили для фаз орбитального периода $\psi = 0$ (*а*) и $\psi = 0{,}5$ (*б*). На фазе $\psi = 0{,}5$ происходит кольцевое затмение второй компонентой. Более узкий профиль соответствует орбитальному периоду $P = 5^{\mathrm{d}}$, более широкий профиль — $P = 1^{\mathrm{d}}$. При уменьшении орбитального периода системы скорость осевого вращения звезды увеличивается и профиль линии уширяется

На рис. 55 приведены теоретическая кривая блеска и кривые лучевых скоростей, а также эквивалентные ширины линии H_γ обеих компонент двойной системы с параметрами: $M_1 = 4M_\odot$, $M_2 = 10M_\odot$, $P = 5^{\mathrm{d}}$, $e = 0{,}15$, $\omega = 180°$, $i = 80°$, $\mu_1 = \mu_2 = 1$, $T_1 = 10\,000$K, $T_2 = 15\,000$ K. На кривых лучевых скоростей хорошо заметны эффекты затмений, приводящие к резким отклонениям лучевых скоростей от регулярных кривых вблизи моментов соединений компонент. Графики эквивалентных ширин линий двух звезд сильно различаются в своем поведении, что связано с различием эффективных температур звезд. Для первой звезды с температурой $T_1 = 10\,000$ K эквивалентные ширины локальных профилей сильно меняются по поверхности даже при небольших изменениях температуры. Кроме того, часть поверхности звезды прогрета падающим излучением более горячего спутника. В итоге эквивалентные ширины суммарных профилей линии первой звезды сильно зависят от фазы орбитального периода. Для второй звезды с температурой $T_2 = 15\,000$ K эквивалентные ширины линии H_γ практически постоянны.

В этой связи отметим работу Ван Хаме и Вильсона (Van Hamme and Wilson, 1994), где проведено сравнение различных методов вычисления кривых лучевых скоростей звезд в ТДС. Было показано, что для звезд с сильным градиентом эквивалентных ширин профилей линий по поверхности особенно важно использовать метод вычисления лучевых скоростей по теоретическим профилям линий, а другие способы, (см., например, Wilson and Sofia, 1976), основанные на оценке фотометрического

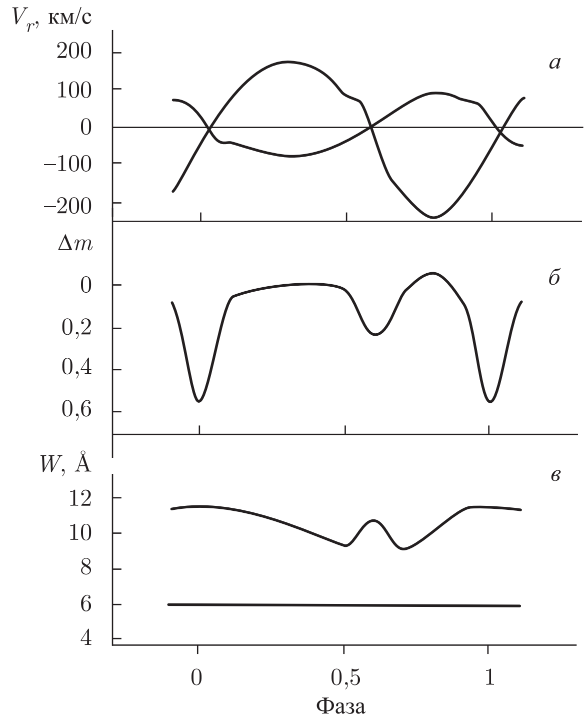


Рис. 55. Теоретические кривые лучевых скоростей (*а*), кривая блеска (*б*) и эквивалентные ширины линии H_γ двух звезд (*в*) для тестовой модели. На нижнем рисунке кривая соответствует звезде с температурой $T_1 = 10\,000$ К, прямая — $T_2 = 15\,000$ К. Параметры модели: $M_1 = 4M_\odot$, $M_2 = 10M_\odot$, $P = 5^\mathrm{d}$, $e = 0{,}15$, $\omega = 180°$, $i = 80°$, $\mu_1 = \mu_2 = 1$, $T_1 = 10000$ К, $T_2 = 15000$ К, ψ_0 (фаза периастра) $= 0{,}798$

«центра тяжести» линии на диске звезды, в этом случае могут давать заметные погрешности.

На рис. 56 приведены кривые лучевых скоростей компонент для трех наборов параметров ТДС. Для всех трех моделей $q = 2$, $M_1 = 5M_\odot$, $M_2 = 10M_\odot$, $P = 5^\mathrm{d}$, $\mu_1 = \mu_2 = 1$, $T_1 = 10\,000$ К, $T_2 = 15\,000$ К, $f_1 = f_2 = 1$. В случае рис. 56*а* $e = 0{,}3$, $\omega = 0$, $i = 50°$, фаза периастра $\psi_0 = 0{,}156$. Для рис. 56*б* $e = 0{,}3$, $\omega = 120°$, $i = 70°$, $\psi_0 = 0{,}642$. Для рис. 56*в* $e = 0{,}4$, $\omega = 290°$, $i = 80°$, $\psi_0 = 0{,}022$. Хорошо видно влияние значения долготы периастра ω на вид кривых лучевых скоростей. В случае рис. 56*в* заметны проявления эффектов затмений. Кривые блеска для этих же моделей показаны на рис. 57. Масштаб на рис. 57*а*, 57*б* и 57*в* различен. Некоторые кривые блеска имеют сложную форму.

Рисунок 58 иллюстрирует изменение формы теоретической кривой блеска ТДС с эллиптической орбитой в зависимости от угла наклонения орбиты ($i = 0°$, $45°$, $90°$) при следующих параметрах модели: $q = 0{,}5$, μ_1, $\mu_2 = 1$ (напомним, что в случае эллиптической орбиты μ_1 и μ_2 — степени заполнения полости Роша в периастре), $T_1 = 20\,000$ К, $T_2 = 10\,000$ К, $f_1 = f_2 = 1$, $e = 0{,}3$, $\omega = 50°$. На рис. 58*а* $i = 0$, т. е. орбита системы перпендикулярна лучу зрения, лучевые скорости при этом не меняются. Как уже отмечалось ранее, даже в этом случае возникает заметная орбитальная переменность блеска, связанная с переменной приливной деформацией звезд, с амплитудой $\sim 0{,}07^m$ ввиду того, что при постоянном объеме звезды площадь

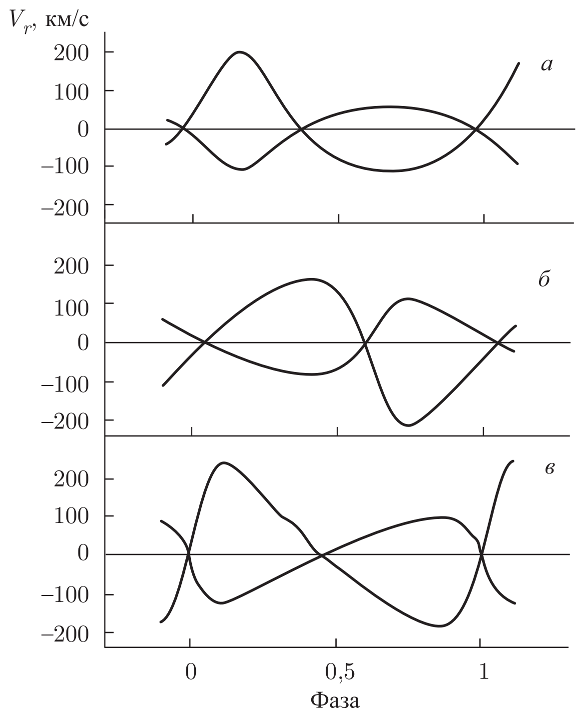


Рис. 56. Модельные теоретические кривые лучевых скоростей компонент для трех различных наборов параметров ТДС: *а* — $e = 0{,}3$, $\omega = 0°$, $i = 50°$, фаза периастра $\psi_0 = 0{,}156$; *б* — $e = 0{,}3$, $\omega = 120°$, $i = 70°$, $\psi_0 = 0{,}642$; *в* — $e = 0{,}4$, $\omega = 290°$, $i = 80°$, $\psi_0 = 0{,}022$. Для всех трех моделей $q = 2$, $M_1 = 5M_\odot$, $M_2 = 10M_\odot$, $P = 5^{\mathrm{d}}$, $\mu_1 = \mu_2 = 1$ (в периастре орбиты), $T_1 = 10000\,\mathrm{K}$, $T_2 = 15000\,\mathrm{K}$, $f_1 = f_2 = 1$. Соответствующие кривые блеска показаны на рис. 57

ее поверхности тем больше, чем сильнее ее приливная деформация. Поэтому вблизи периастра (фаза $\psi_0 = 0{,}315$) блеск системы максимален. С увеличением наклонения орбиты (рис. 58 *б*) проявляется уже не только эффект переменной приливной деформации звезд, но и эффект отражения. При $i = 90°$ (рис. 58 *в*) на кривой блеска видны глубокие затмения, при этом вторичный минимум не лежит посередине между главными, поскольку $e = 0{,}3$, $\omega = 50°$.

Таким образом, можно заключить, что ТДС с эллиптическими орбитами могут проявлять себя как переменные звезды даже при $i = 0$. С увеличением i амплитуда переменности возрастает. Это было продемонстрировано в работе Антохиной и др. (Antokhina et al., 2000) при анализе высокоточной кривой блеска двойной системы с сильно эллиптической орбитой HD 93205. Эта система включает в себя звезду O3V — звезду самого раннего спектрального класса в ТДС, и имеет необычную форму кривой блеска с малой амплитудой. Хотя компоненты являются звездами главной последовательности и далеки от заполнения полостей Роша, вблизи периастра возникает значимая приливная деформация, приводящая к наблюдаемой переменности. Как было показано, эта переменность не связана с затмениями, а вызвана переменностью приливной деформации звезд.

Описанные алгоритмы применимы для массовых расчетов и решения обратной задачи определения фотометрических и спектроскопических элементов самых разнообразных ТДС. В программе, составленной Антохиной, метод реализован как для

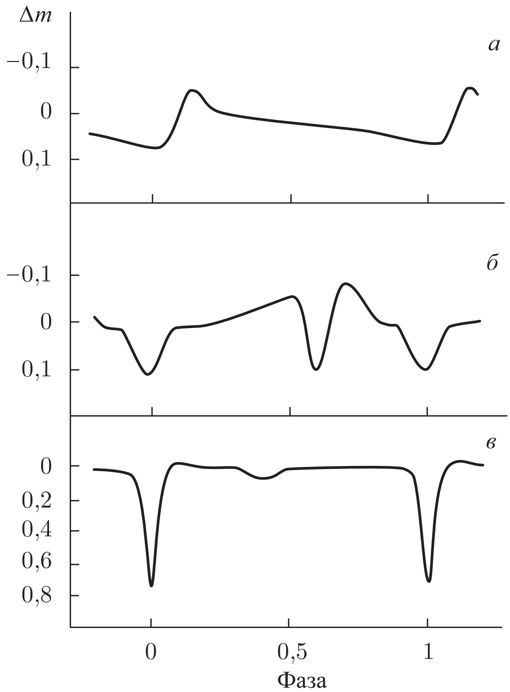


Рис. 57. Модельные теоретические кривые блеска для $\lambda = 4400$ Å. Соответствующие кривые лучевых скоростей приведены на рис. 56. В фазе 0,0 впереди находится первая звезда. Некоторые кривые имеют довольно необычную форму. Обратим внимание на различный масштаб по оси звездных величин первых двух графиков и третьего (сверху вниз)

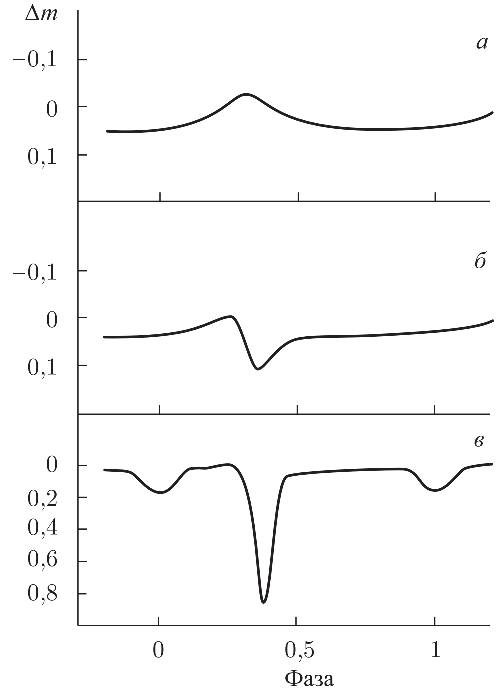


Рис. 58. Изменение формы теоретических кривых блеска ТДС с эксцентричной орбитой в зависимости от наклонения орбиты $i = 0^\circ$ (*а*), 45° (*б*), 90° (*в*) при следующих параметрах модели: $q = 0{,}5$, $\mu_1 = \mu_2 = 1$ (в периастре орбиты), $T_1 = 20000$ K, $T_2 = 10000$ K, $f_1 = f_2 = 1$, $e = 0{,}3$, $\omega = 50^\circ$

классических ТДС, так и для рентгеновских двойных систем. Он позволяет корректно вычислять лучевые скорости звезд и определять массы компонент двойных систем. Эффективный алгоритм Simplex для минимизации функционала невязки, который используется для решения обратной задачи, позволяет за сравнительно небольшое время на персональных компьютерах типа Pentium одновременно находить решение многоцветных кривых блеска и кривых лучевых скоростей ТДС.

Вместе с тем, с появлением современных мощных компьютеров становится возможным реализовать точный учет эффекта отражения в ТДС разных типов.

5. Синтез профилей линий и кривых лучевых скоростей оптических звезд в рентгеновских двойных системах

В большинстве рентгеновских двойных систем (кроме жестких транзиентов — рентгеновских двойных с Be-звездами) оптические звезды близки к заполнению своих полостей Роша или заполняют их. Поэтому оптические звезды в данном случае сильно приливно деформированы и при орбитальном движении значительно меняют свою проекцию на картинную плоскость. Кроме того, ввиду действия гравитационного потемнения и эффекта рентгеновского прогрева, на поверхности оптической звезды наблюдается сложное распределение температуры. Все это приводит к тому, что суммарный профиль линии поглощения в спектре оптической звезды-компоненты рентгеновской двойной системы меняется с фазой орбитального периода. Впервые искажение кривой лучевых скоростей оптической звезды в рентгеновской двойной системе, обусловленное эллипсоидальностью и грушевидностью звезды, было исследовано Вильсоном и София (Wilson and Sofia, 1976). Влияние эффекта рентгеновского прогрева на профили линий поглощения в рентгеновских двойных исследовалось Милгромом (Milgrom, 1976).

В работах Антохиной и Черепащука (1997б) и Шабаза (Shahbaz, 1998) был предложен новый метод определения параметров рентгеновской двойной системы (отношения масс $q = m_x/m_v$, и наклонения орбиты i) по наблюдаемой переменности профилей линий поглощения в спектре оптической звезды.

Как известно, в случае модели двойной системы как системы двух точечных масс профиль линии в спектре системы и форма ее кривой лучевых скоростей не зависят от наклонения орбиты i (от i зависит лишь амплитуда кривой лучевых скоростей). Поэтому из анализа кривой лучевых скоростей в данном случае i не может быть определено, а находятся лишь произведения $a_1 \sin i$, $a_2 \sin i$, $m_1 \sin^3 i$, $m_2 \sin^3 i$ (см. выше). Если же звезды в двойной системе имеют ненулевые размеры, сильно приливно деформированы и испытывают взаимный прогрев, форма профилей линий поглощения в их спектрах может заметно меняться с фазой орбитального периода, что приводит к зависимости формы кривой лучевых скоростей от параметров q, i. Эта зависимость, в принципе, может быть использована для независимой оценки параметров двойной системы.

Разумеется, на изменения формы профилей линий и кривой лучевых скоростей влияют также и другие факторы, которые обсуждались нами выше: селективное поглощение в газовых потоках (эффект Барра), приводящее к появлению ложного эксцентриситета орбиты, эффекты селективного поглощения в асимметричном звездном ветре, влияние дискообразной оболочки и т. п. (см. недавний обзор Гарманеца (Harmanec, 2003) на эту тему). Однако, в случае рентгеновских двойных систем, влияние эффектов грушевидности оптической звезды и ее прогрева рентгеновским излучением компактного объекта весьма значительно, и в ряде случаев может оказаться определяющим, особенно для линий высоких членов субординатных серий (H_γ, H_δ и т. п.), где селективное поглощение в центре линии относительно невелико, а влияние эмиссионной компоненты линии незначительно. Это продемонстрировано в недавней работе Абубекерова и др. (2004), где авторами по сводной высокоточной кривой лучевых скоростей рентгеновской двойной системы Cyg X-1 удалось оценить наклонение орбиты и массу черной дыры.

Кроме того, для корректного выявления эффектов селективного поглощения в околозвездном веществе и исследования учета влияния дополнительных эмиссионных компонент на наблюдаемый профиль линии, необходимо уметь аккуратно вычислять синтетические профили линий поглощения в собственных спектрах оптических звезд в ТДС с учетом грушевидности звезд и их взаимного прогрева.

В работах Антохиной и др. (2003, 2005) был развит метод синтеза профилей линий и кривых лучевых скоростей для рентгеновских двойных систем, в котором для каждой элементарной площадки dS на поверхности звезды решается уравнение переноса с внешним рентгеновским облучением. Метод применен для анализа наблюдений ряда рентгеновских двойных систем и определения масс релятивистских объектов (Абубекеров и др., 2004а,б 2005, 2006, Абубекеров, 2004).

Ранее мы описали метод синтеза профилей линий для приливно-деформированных звезд в двойных системах, используя теоретические профили бальмеровских линий водорода для различных $T_{\rm ef}$ и g, вычисленные Куруцем (Kurucz, 1979).

Эффект отражения в данном случае учитывался в простейшей модели сложения болометрических потоков от звезды и спутника, без рассмотрения переноса падающего излучения в атмосфере облучаемой звезды. Эта модель эффекта отражения не может учесть появление эмиссионной компоненты у линии поглощения в спектре облучаемой звезды, которая может возникать в случае сильного прогрева звезды рентгеновским излучением компактного источника. Сильное внешнее облучение приводит к инверсному распределению температуры в атмосфере звезды. Для рентгеновских двойных систем простая модель сложения болометрических потоков от звезды и рентгеновского источника может с удовлетворительным приближением применяться лишь при синтезе оптических кривых блеска в континууме. При расчете профилей линий эта простая модель может использоваться лишь для слабого рентгеновского прогрева, когда отношение болометрических светимостей компактного объекта (L_x) и звезды (L_v) меньше единицы: $k_x = L_x/L_v < 1$. В случае сильного рентгеновского прогрева ($k_x > 1$) при синтезе профилей линий необходим точный расчет структуры атмосферы прогреваемой звезды под действием внешнего облучения.

Рассмотрим рентгеновскую двойную систему, состоящую из оптической звезды, близкой к заполнению своей полости Роша и точечного рентгеновского источника — аккрецирующего релятивистского объекта. Рассмотрим общий случай эллиптической орбиты. Пусть отношение масс компонент $q = m_x/m_v$, (m_x, m_v — массы релятивистского объекта и оптической звезды). Поверхность звезды совпадает с эквипотенциальной поверхностью в модели Роша и определяется степенью заполнения полости Роша $\mu_v = R/R^*$, где R и R^* — полярные радиусы для частичного и полного заполнения полости Роша. Пусть степень асинхронности осевого вращения звезды $f = \omega/\omega_k$, где ω — угловая скорость осевого вращения звезды, ω_k — средняя угловая скорость кеплеровского орбитального движения ($\omega_k = 2\pi/P$), P — орбитальный период системы.

Введем, как и ранее, вращающуюся систему координат (X, Y, Z) с началом в центре масс звезды. Ось OX совпадает с линией центров компонент, ось OY лежит в плоскости орбиты, ось OZ перпендикулярна плоскости орбиты (система координат — левая, т. е. при наблюдении со стороны вдоль оси OX ось OY расположена слева). Введем также сферическую вращающуюся систему координат (r, η, φ) с началом в центре масс звезды. Поверхность звезды разбивается на элементарные площадки dS. Пусть $\mathbf{r}$ — радиус-вектор площадки dS во вращающейся системе координат (X, Y, Z), а λ и ν — его направляющие косинусы (см. формулы (432)). В сферической системе координат (r, η, φ) уравнение для эквипотенциальной поверхности для звезды запишется в виде (см. формулу (433))

$$\Omega = \frac{1}{r} + q\left(\frac{1}{\sqrt{D^2 + r^2 - 2Dr\lambda}} - \frac{r\lambda}{D^2}\right) + \frac{1}{2}\,(1+q)\,r^2 f^2\left(1-\nu^2\right). \qquad (465)$$

Здесь D — мгновенное расстояние между центрами масс компонент, двигающихся по эллиптическим орбитам, r — модуль радиуса-вектора $\mathbf{r}$, измеряется в долях D.

Уравнение для эквипотенциальной поверхности решается численно для каждой элементарной площадки для фиксированных η, φ и находится модуль радиуса-вектора r центра площадки dS и ее координаты X, Y, Z. Для каждой элементарной площадки вычисляется локальное ускорение силы тяжести $g(\mathbf{r}) = |\mathrm{grad}\,\Omega|$ (в относительных единицах, затем оно будет переведено в абсолютные единицы — см. формулу (459)). Также вычисляется вектор единичной нормали к площадке

$$\mathbf{n} = -\frac{\mathrm{grad}\,\Omega}{|\mathrm{grad}\,\Omega|}.$$

На первом этапе, рассмотрим температуру площадки dS обусловленную только гравитационным потемнением:

$$T_0(\mathbf{r}) = \overline{T}_0 \left[\frac{g(\mathbf{r})}{g_0}\right]^\beta,$$

где $\overline{T}_0$ — средняя эффективная температура звезды, $g(\mathbf{r})$ и g_0 — локальное ускорение силы тяжести и среднее ускорение, осредненное по поверхности звезды, β — коэффициент гравитационного потемнения. Для звезд с лучистыми оболочками $\beta = 0{,}25$, для звезд с конвективными оболочками $\beta = 0{,}08$.

Для каждой элементарной площадки dS мы можем вычислить параметр внешнего прогрева k_x^{loc}: отношение падающего рентгеновского потока H к полному потоку H_0, излучаемому соответствующей невозмущенной атмосферой звезды:

$$k_x^{\mathrm{loc}} = \frac{H}{H_0} = \frac{k_x L_v \cos\alpha}{4\pi\rho^2\sigma T_0^4(\mathbf{r})}, \tag{466}$$

где $k_x = L_x/L_v$, σ — постоянная Стефана–Больцмана, $T_0(r)$ — эффективная температура невозмущенной элементарной площадки dS, α — угол между нормалью к площадке и направлением на рентгеновский источник, ρ — расстояние от центра площадки dS до рентгеновского источника. Для площадок, на которые не падает рентгеновское излучение, $k_x^{\mathrm{loc}} = 0$. Величина k_x^{loc} является входным параметром для программы вычисления локальной модели атмосферы на площадке dS (см. ниже).

Чтобы вычислить излучение от звезды в различных фазах орбитального периода введем, как обычно, неподвижную декартову систему координат с началом в центре масс оптической звезды $\left(\overline{X},\ \overline{Y},\ \overline{Z}\right)$. Угол относительного поворота компонент $\theta(t)$ — угол между осями OX и $O\overline{X}$ (луч зрения лежит в плоскости $O\overline{X}\overline{Z}$). В фазе $\varphi = 0$, $\theta = 0$, т. е. звезда расположена впереди рентгеновского источника. Координаты единичного вектора $\mathbf{a}_0$ в направлении наблюдателя в подвижной системе координат (X, Y, Z) записываются в виде

$$\mathbf{a}_0 = (-\sin i\cos\theta,\ -\sin i\sin\theta,\ \cos i) = (a_x,\ a_y,\ a_z). \tag{467}$$

Косинус угла γ между нормалью $\mathbf{n}$ к элементарной площадке dS и направлением на наблюдателя определяется как скалярное произведение

$$\cos\gamma = (\mathbf{a}_0,\ \mathbf{n}).$$

Если $\cos\gamma > 0$, элементарная площадка видна для наблюдателя. Условия затмения звезды аккреционным диском и диска звездой (если диск существует), выписаны нами ранее. Полное наблюдаемое излучение от звезды получается суммированием вклада от всех видимых площадок (см. формулу (438)).

Рассмотрим процедуру вычисления лучевых скоростей элементарных площадок dS на поверхности звезды. Рассмотрим площадку dS с координатами центра (X, Y, Z). Скорость площадки dS относительно центра масс звезды в неподвижной системе координат $\left(\overline{X},\ \overline{Y},\ \overline{Z}\right)$ равна

$$\mathbf{v}_0 = [\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}] = (\omega y,\ -\omega x,\ 0), \tag{468}$$

где $\boldsymbol{\omega}$ — вектор угловой скорости вращения звезды вокруг своей оси $\omega = (0,\ 0,\ \omega_z = \omega)$, $\mathbf{r}$ — радиус-вектор центра площадки dS в подвижной системе координат (X, Y, Z): $\mathbf{r} = (x,\ y,\ z)$.Проекция скорости $\mathbf{v}_0$ на луч зрения, направленный от наблюдателя (лучевая скорость положительна, когда движение — от наблюдателя), равна

$$v_0 = (-\mathbf{v}\,\mathbf{a}_0) = (\omega y,\ -\omega x,\ 0)(-a_x,\ -a_y,\ -a_z) = -\omega y a_x + \omega x a_y. \tag{469}$$

Полная лучевая скорость площадки dS относительно центра масс двойной системы равна

$$v_r = v_0 + V_c, \tag{470}$$

где V_c — орбитальная лучевая скорость центра масс звезды, дана формулой (430):

$$V_c = \frac{2\pi a_1 \sin i}{P\sqrt{1-e^2}} \left[e\cos\omega + \cos(v+\omega) \right].$$

В выражение (470) можно также добавить компоненту лучевой скорости площадки, обусловленную ее движением по нормали, вызванным звездным ветром (см. формулу (456)).

Таким образом, можно вычислить лучевые скорости всех элементарных площадок на поверхности звезды. Затем, суммируя вклад всех локальных профилей линии с учетом их доплеровских сдвигов и учитывая условия видимости площадок для земного наблюдателя, можно посчитать полный (синтетический) профиль линии от звезды в разных фазах орбитального периода. Процедура вычисления суммарного профиля линии описана выше (см. формулы (460)–(464)).

Рассмотрим процедуру вычисления локального профиля линии поглощения для данной элементарной площадки dS с координатами (X, Y, Z), локальной эффективной температурой T, локальным ускорением силы тяжести g и локальным параметром внешнего прогрева k_x^{loc} (см. формулу (466)).

Чтобы корректно рассчитать излучение в континууме и профиль линии для локальной элементарной площадки dS, необходимо выполнить предварительную оценку структуры атмосферы звезды в присутствии внешнего облучения или без него. Такая задача, поставленная в общей форме, предусматривает решение уравнения переноса

$$\mu\frac{dI_\nu}{dr} = \alpha_\nu \left(S_\nu - I_\nu\right) \tag{471}$$

для набора частот ν, в некоторых из которых имеется падающий на атмосферу под углом θ ($\mu = \cos\theta$) поток излучения мощностью μI_ν^+.

Для каждого слоя атмосферы выполняются стандартные условия лучистого и гидростатического равновесия:

$$\int\limits_0^\infty \int\limits_{-1}^1 \alpha_\nu I_\nu d\mu d\nu = \int\limits_0^\infty \int\limits_{-1}^1 \alpha_\nu S_\nu d\mu d\nu, \tag{472}$$

$$\frac{dP}{dm} = g, \tag{473}$$

где m — масса столба газа единичной площади, отсчитываемая от верхней границы. Решение данной задачи стандартными программными комплексами, разработанными для вычисления необлучаемых атмосфер (например, ATLAS 9 (Kurucz, 1994)), вызывает большие трудности. Они связаны с зависимостью падающего излучения от угла θ, близкой к δ-функции. Это противоречит базовому предположению о гладком распределении интенсивности излучения от μ, используемому в процедурах численного решения уравнения переноса программных комплексов типа ATLAS.

В связи со сказанным, был предложен альтернативный подход к вычислению структуры облучаемой атмосферы, учитывающий отсутствие непосредственного взаимодействия полей падающего и собственного излучения звезды. Методы решения задач переноса излучения в рамках сложных моделей развиты в группе Сахибуллина (1997). При этом на первом этапе набор уравнений (471) решался с ненулевым верхним граничным условием, заданным значением μ и функцией источника S_ν, равной нулю. В результате получаем распределение средней интенсивности J_ν и потока H_ν от оптической глубины τ_ν в частоте ν в виде

$$J_\nu^+ (\tau_\nu) = I_\nu^+ \exp\left(-\frac{\tau_\nu}{\mu}\right), \tag{474}$$

$$H_\nu^+ (\tau_\nu) = \mu I_\nu^+ \exp\left(-\frac{\tau_\nu}{\mu}\right). \tag{475}$$

На втором этапе уравнения (471) решаются повторно, но с нулевым верхним граничным условием, набором значений μ и функцией источников, определенной суммой всего рассеянного излучения (в том числе и внешнего) и функцией Планка для каждого слоя

$$S_\nu = \frac{2\alpha'_\nu B_\nu (\tau_\nu) + \sigma_e \int\limits_{-1}^{1} I_\nu d\mu}{2\left(\alpha'_\nu + \sigma_e\right)}, \tag{476}$$

где α'_ν и σ_e — коэффициенты истинного поглощения и электронного рассеяния.

Простое выражение для распределения функции источников по оптической глубине найдено в работе Сахибуллина и Шиманского (1996) при решении описанной задачи в рамках двухцветной модели со средними коэффициентами непрозрачности в диапазонах внешнего и собственного излучения α_x и α_v:

$$S(\tau_v) = S^\circ(\tau_v) + I^+ \frac{\alpha_x}{\alpha_v} \exp\left(-\frac{\alpha_x \tau_v}{\alpha_v \mu}\right) + \frac{1}{2}\mu I^+ + \frac{3\mu\alpha_v}{4\alpha_x}\mu I^+ \left[1 - \exp\left(-\frac{\alpha_x \tau_v}{\alpha_v \mu}\right)\right] \tag{477}$$

или

$$S(\tau_v) = S^\circ(\tau_v) + a_2 S_2(\tau_v) + a_3 S_3(\tau_v) + a_4 S_4(\tau_v), \tag{478}$$

где $S^\circ(\tau_v) = \sigma T_e^4$ — распределение для необлученной атмосферы (τ_v — средняя оптическая толща в диапазоне собственного излучения звезды), a_2, a_3, a_4 — функции отношения средних коэффициентов непрозрачности α_x, α_v, а также μ.

Наличие в формуле (477) слагаемого $S_2(\tau_v)$, экспоненциально убывающего с глубиной, приводит к появлению отрицательного градиента $dS(\tau_v)/d\tau_v$ в верхних слоях атмосферы звезды, т. е. к формированию высокотемпературной хромосферы. В рассмотренной ранее простейшей модели эффекта отражения как сложения болометрических потоков предполагается, что внешнее излучение термализуется на больших оптических глубинах и дополнительный нагрев атмосферы звезды производится излучением с увеличенной температурой, идущим изнутри звезды, поэтому в этом случае инверсное распределение температуры в атмосфере и соответствующая хромосфера не появляются. Из уравнения (477) видно, что избыток функции источника в хромосфере пропорционален отношению α_x/α_v. Как было показано Сахибуллиным и Шиманским (1996), коэффициент поглощения звездного вещества в рентгеновской области спектра при температурах до $T_e = 100\,000$ К имеет степенную зависимость от ν с показателем около $-2{,}3$. Поэтому наличие в падающем потоке даже незначительной мягкой компоненты с $E < 2$ кэВ (для которой $\alpha_x/\alpha_v \gg 1$) вызывает быстрый рост температуры в хромосферных слоях и появление мощных эмиссионных деталей в излучаемых спектрах звезд (в ЛТР-приближении). Этот факт обусловливает необходимость корректного определения частотного распределения падающего излучения при выполнении моделирования. Впервые об этом упоминалось в работе Милгрома (Milgrom, 1976).

Последующие расчеты точных бланкетированных моделей атмосфер с внешним облучением (Сахибуллин и Шиманский (1996)) показали, что их температурная структура хорошо описывается формулой (478). При этом слагаемые S_2, S_3 и S_4 должны быть записаны в квадратурной форме:

$$S_2\left(\tau_v\right)=\int\limits_{\nu_1}^{\nu_2}\frac{dH_\nu^+\left(\tau_v\right)}{d\tau_v}d\nu_x, \tag{479}$$

$$S_3\left(\tau_v\right)=\int\limits_{\nu_1}^{\nu_2}H_\nu^+\left(\tau_v'=1\right)d\nu_x, \tag{480}$$

$$S_4\left(\tau_v\right)=\int\limits_{\nu_1}^{\nu_2}\int\limits_{0}^{\tau_v}\left[S_2\left(\tau_v'\right)+H_\nu^+\left(\tau_v'\right)d\tau_v'd\nu_x\right]. \tag{481}$$

Они легко находятся численно для используемого частотного распределения падающего потока H_ν^+, угла его падения θ и отношения определяемых в процессе вычислений коэффициентов непрозрачности в диапазонах внешнего и собственного излучения звезды $\alpha_x(\tau_v)/\alpha_v(\tau_v)$. В рамках нашей методики коэффициент непрозрачности α_x в частотах внешнего излучения рассчитывается с учетом поглощения при ионизациях с внешних и внутренних электронных оболочек водорода, гелия и 20 наиболее распространенных тяжелых элементов в 5 стадиях согласно данным Яковлева и др., (Yakovlev et al., 1990), а также томсоновского рассеяния. Как было показано Сахибуллиным и Шиманским (1996), коэффициент непрозрачности в диапазоне собственного излучения атмосферы звезды α_v с высокой точностью может быть описан комбинациями планковского α_p и росселандовского α_r коэффициентов поглощения. Согласование моделей облучаемых атмосфер, полученных по представленной методике, и точных бланкетированных моделей, рассчитанных по программе BINARY3 (Сахибуллин и Шиманский, 1996), позволило получить следующее выражение для α_v (Иванова и др., 2002):

$$\alpha_v=\left(\alpha_r^{(5{,}97+0{,}73\ \lg\tau_r)}\alpha_p\right)^{\frac{1}{6{,}97+0{,}73\ \lg\tau_r}}. \tag{482}$$

Одновременно были найдены значения весовых коэффициентов α_2=0,67, α_3=0,51 и α_4=0,63 при компонентах полной функции источника в выражении (478). Разработанная методика построения моделей облучаемых атмосфер создает ряд преимуществ при ее применении к анализу излучения тесных двойных звезд.

1. Определение температурной структуры облученной атмосферы основано на методе баланса функций нагрева и охлаждения газа, а не на стандартных методах температурной коррекции. Как отмечено Сахибуллиным и Шиманским (1996), процесс температурной коррекции при построении моделей облучаемых атмосфер оказывается расходящимся при больших градиентах потоков в высоких слоях. Поэтому методы коррекции, как правило, не позволяют получить модели атмосфер звезд с сильным облучением. В то же время, метод баланса функций нагрева и охлаждения остается устойчивым даже при отношении падающего потока к собственному излучению звезды $k_x^{\rm loc}$, в сотни раз превышающих единицу. Кроме того, отсутствие необходимости прямого решения уравнения переноса для частот оптического диапазона позволяет сократить время расчета атмосферы в 30–80 раз, что особенно важно для моделирования тесных двойных систем.

2. Функция источника облученной атмосферы $S(\tau_v)$ определяется изменением начальной функции источника обычной атмосферы $S^\circ(\tau_v)$ при появлении слагаемых S_2, S_3 S_4, линейно зависящих от H_ν^+. В результате при малых или нулевых значениях падающего потока сохраняется температурное распределение, характерное для необлученной атмосферы. Это позволяет использовать нашу методику для исследования

двойных систем и обычных звезд с малыми эффектами «отражения». Добавим, что начальные модели необлученных атмосфер находились путем интерполяции сеточных бланкетированных моделей Куруца (Kurucz, 1994) при заданных параметрах $T_{\rm ef}$ и $\lg g$ по методике, описанной в работе Сулейманова (1996).

3. Представленная методика дает возможность получать модели атмосфер звезд с рентгеновским, ультрафиолетовым и оптическим облучением с точностью, достаточной для количественного исследования тесных двойных систем. Анализ, выполненный в работе Ивановой и др. (2002), показал, что при расчете моделей атмосфер с падающим потоком, характеризующимся значением параметра $k_x^{\rm loc} < 100$ и спектральным диапазоном $0{,}30\,\text{Å} \leqslant \lambda \leqslant 50{,}0\,\text{Å}$, $250\,\text{Å} \leqslant \lambda \leqslant 3000\,\text{Å}$, ошибки температурного распределения не превосходят 4 %. Соответствующие ошибки в полных

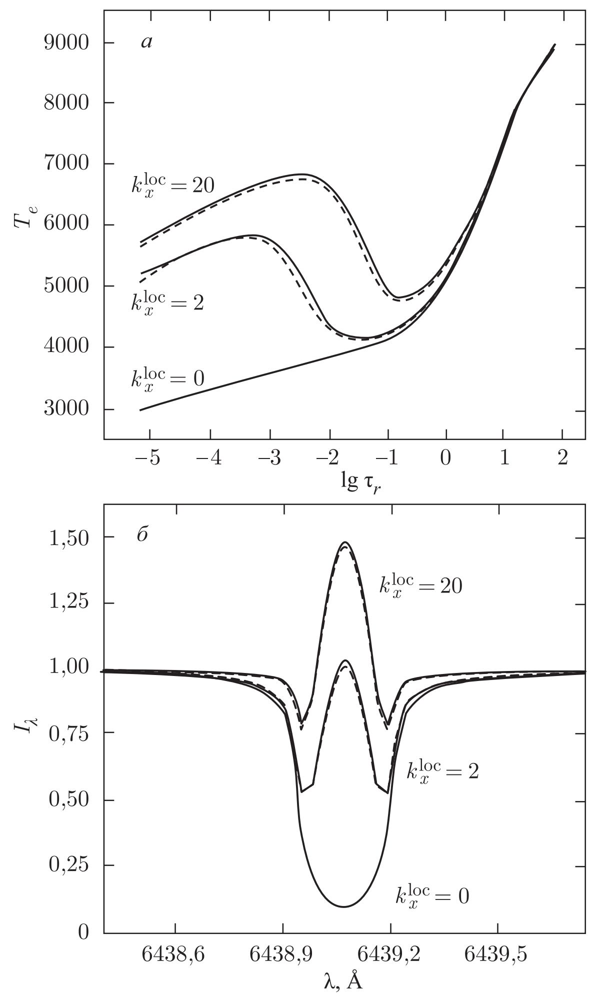


Рис. 59. *а* — сравнение распределения электронной температуры T_e в моделях, полученных методом баланса функций нагрева и охлаждения (штриховые линии), и в точных, бланкетированных моделях (сплошные линии) с параметрами атмосферы $T_{\rm ef} = 4752$ K, $\lg g = 2{,}63$ и с различной мощностью внешнего облучения $k_x^{\rm loc}$. *б* — сравнение локальных профилей линии Ca I 6439,075 Å, рассчитанных для данных моделей звездных атмосфер

излучаемых потоках в области бальмеровского и пашеновского континуумов составляют (1–3) %.

При выполнении настоящей работы мы провели тестовые сравнения моделей атмосфер, полученных по применяемой методике, и бланкетированных моделей, вычисленных с использованием программы BINARY3 (Сахибуллин и Шиманский, 1996). На рис. 59 результаты сравнения показаны для двух вариантов параметров атмосфер, непосредственно использованных при моделировании: $T_{\rm ef} = 4752$ K, $\lg g = 2{,}63$, $k_x^{\rm loc} = 2{,}0$, а также $k_x^{\rm loc} = 20{,}0$. На рис. 59 *а* приводятся температурные распределения в облучаемых и необлучаемой атмосферах, а на рис. 59 *б* — соответствующие профили спектральной линии Ca I 6439,075 Å. В результате сравнения ошибки температуры T_e оказываются меньше 4 % и отмечаются, главным образом, в модели с более слабым облучением $\left(k_x^{\rm loc} = 2{,}0\right)$ в узкой области перехода от хромосферных слоев к точке температурного минимума. Различия в профилях линии Ca I, возникающие при использовании двух методов расчетов, приводят к изменению ее эквивалентной ширины менее, чем на $\Delta W_\lambda = 8m$ Å. В результате мы пришли к выводу о полной пригодности используемой методики к выполняемому моделированию.

Для найденной модели атмосферы рассчитывались удельные интенсивности выходящего излучения в трех базовых углах θ' (для cos $\theta' = 0{,}11; 0{,}50; 0{,}89$) путем решения уравнения переноса методом эрмитта. Последующие вычисления излучения, уходящего в направлении наблюдателя, проводились путем интерполяции интенсивностей в трех углах θ' на реальный угол видимости площадки γ. Таким способом на основе модели атмосферы мы физически точно определяли значения выходящих потоков с учетом эффектов «потемнения к краю».

При решении уравнения переноса использовались все источники непрерывной непрозрачности, затабулированные в программных комплексах ATLAS5 (Kurucz, 1970), STARDISK (Suleymanov, 1992) и SPECTR (Сахибуллин и Шиманский, 1997), а также наиболее сильные линии и основные молекулярные полосы согласно теории Нерсисяна и др. (1989), данные для которых получены и любезно предоставлены нам Я. Павленко (ГАО НАНУ). При расчете бальмеровских линий H I применялась теория Грима (Grim, 1960), силы осцилляторов для линий He I были приняты согласно данным Ситона и др. (Seaton et al., 1992), Радцига и Смирнова (1986), а параметры уширения для них — в соответствии с аппроксимацией Барнарда и др. (Barnard et al., 1969) и Михаласа и др. (Mihalas et al., 1974). Силы осцилляторов линий тяжелых элементов задавались из списков Куруца (Kurucz, 1994), константы C_6 Ван-дер Ваальсовского уширения находились по классической формуле Унзольда (Unsold, 1955) с масштабирующим фактором, равным $\Delta \lg C_6 = 0{,}7$, а константы штарковского уширения C_4 — по аппроксимации Куруца–Фюренлинда (Kurucz and Furenlind, 1979). При вычислении профилей любых линий учитывалось доплеровское уширение от теплового движения и микротурбулентности (принятой постоянной с $\xi_{\rm turb} = 1{,}5$ км/с), а также естественное затухание. В расчетах применялась шкала солнечных содержаний химических элементов согласно данным Андерса и др. (Anders et al., 1989).

6. Моделирование теоретических профилей спектральных линий оптической звезды в рентгеновской двойной системе

Перечислим входные параметры задачи синтеза теоретических профилей линий в модели тесной двойной системы, состоящей из оптической звезды и точечного компактного объекта — источника рентгеновского излучения. В абсолютных единицах задаются масса оптической звезды M_v и рентгеновского источника M_x, период системы P. Входными параметрами также являются: μ_v — степень заполнения звездой своей полости Роша, T — средняя эффективная температура звезды без учета прогрева излучением спутника, k_x — отношение рентгеновской светимости компактного объекта к болометрической светимости «нормальной» звезды, β — коэффициент гравитационного потемнения на звезде, i — наклонение орбиты, e — ее эксцентриситет, ω — долгота периастра, f — степень асинхронности вращения звезды. Также задаются данные о спектральных линиях и спектре излучения компактного объекта.

Для моделирования теоретических профилей линий звезды мы выбрали параметры, близкие по значению к параметрам маломассивных рентгеновских двойных систем — рентгеновских новых, среди которых находится основное число открытых кандидатов в черные дыры. Были зафиксированы масса оптической звезды $M_v = 1M_\odot$ и ее «собственная» температура $T = 5000$ К. Коэффициент гравитационного потемнения на звезде задавался равным $\beta = 0{,}08$ (стандартное значение для звезд с конвективными оболочками). Вращение звезды предполагалось синхронным с орбитальным обращением ($f = 1$), рассматривался случай круговой орбиты. Период системы $P = 5^{\mathrm{d}}$ (при построении кривых лучевых скоростей предполагалось $P = 12^{\mathrm{d}}$). Спектр внешнего излучения компактного источника задавался формулой

$$I_x(\nu) = I_x^0 \nu^{-0{,}6}, \tag{483}$$

где излучение заключено в интервале длин волн от 12 до 0,5 Å (энергия квантов от 1 до 20 кэВ).

Мы исследовали поведение профилей линий оптической звезды в течение орбитального периода для разных значений параметра рентгеновского прогрева k_x. При этом также варьировались следующие параметры системы: отношение масс $q = M_x/M_v$, степень заполнения оптической звездой своей полости Роша μ_v, наклонение орбиты i. Вычислялись теоретические профили линии поглощения Ca I 6439,075 Å. При моделировании этой линии для звезды с $T = 5000$ К предполагалось выполнение условия локального термодинамического равновесия в атмосфере звезды, возможные не-ЛТР эффекты не учитывались. Недавно Ивановой, Сахибуллиным и Шиманским (Иванова и др., 2004) были опубликованы результаты исследования формирования линий тяжелых элементов в спектрах холодных звезд с рентгеновским облучением. Было показано, что при формировании линий в атмосферах холодных звезд не-ЛТР эффекты возникают, но они только корректируют на 10–20 % количественные характеристики, качественно же результаты, полученные в приближении ЛТР, остаются правильными.

На рис. 60 можно видеть изменение формы и интенсивности профилей линии в течение орбитального периода при значении $k_x = 10$ и двух значениях наклонения орбиты: $i = 45$, 90°; приведена частая сетка по фазе. Для наглядности сравнения профилей доплеровские смещения профилей устранены. Хорошо прослеживается эволюция суммарного профиля линии оптической звезды при повороте звезды к наблюдателю стороной, прогретой рентгеновским излучением спутника. В фазе $\varphi = 0$ впереди находится оптическая звезда, рентгеновский источник находится сзади, наблюдатель видит непрогретую внешним излучением часть звезды. Приблизительно с фазы $\varphi = 0{,}1$ наблюдатель начинает видеть область звезды, прогретую рентгеновским излучением. При $\varphi = 0{,}25$ (квадратура) звезда имеет максимальные размеры в проекции на картинную плоскость, видны как непрогретая, так и прогретая части звезды. В фазе $\varphi = 0{,}5$ звезда полностью повернута к наблюдателю стороной, обращенной к рентгеновскому источнику и максимально прогретой его излучением. При увеличении фазы φ от 0 до 0,5 эмиссионная компонента профиля, образующаяся в прогретой рентгеновским излучением области звезды, дает все больший вклад в суммарный профиль линии, после фазы $\varphi = 0{,}5$ вклад эмиссионной компоненты

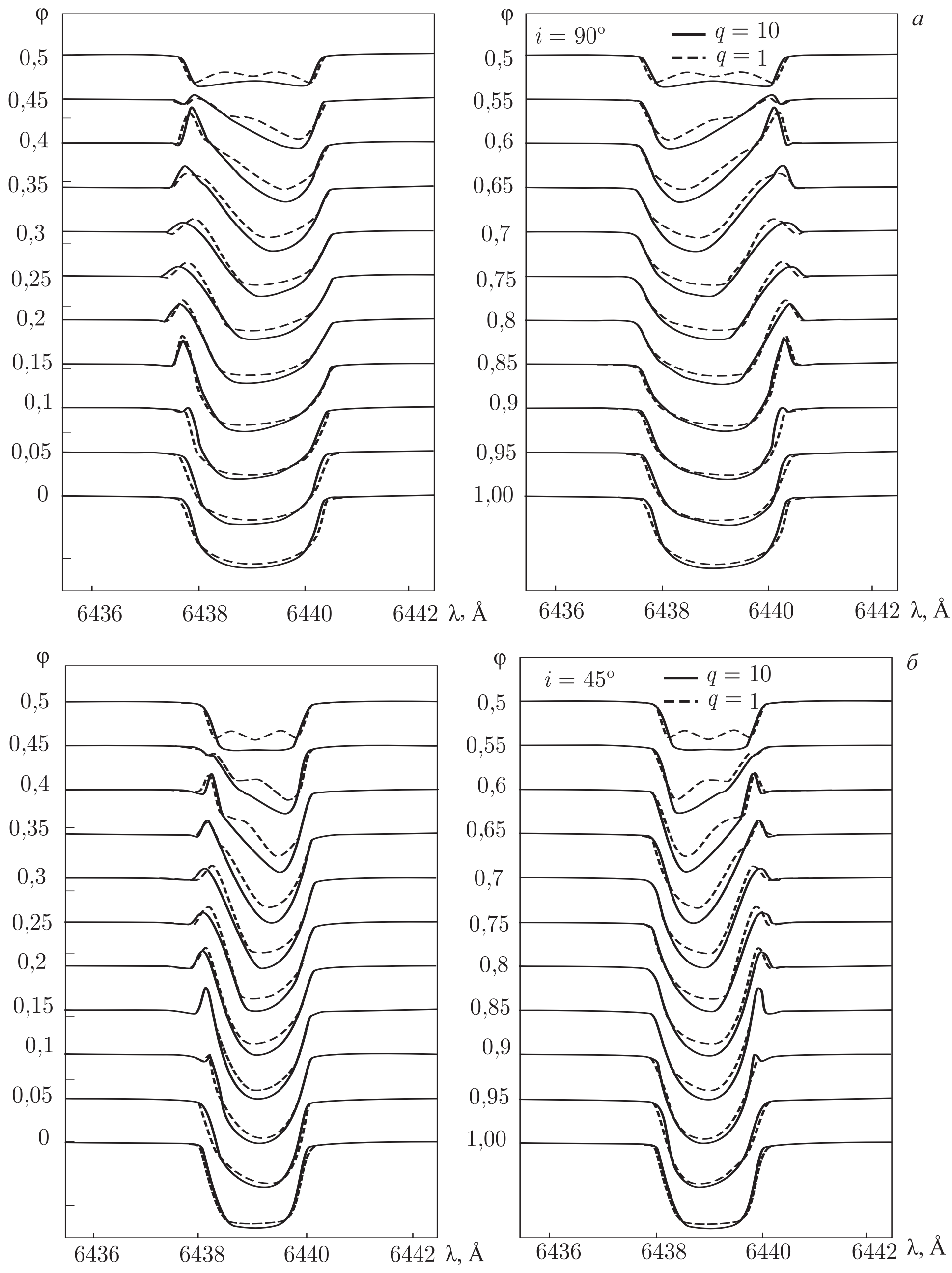


Рис. 60. Изменение профилей линии Ca I 6439 Å в спектре оптической звезды в течение орбитального периода при наличии рентгеновского прогрева ($k_x = 10$) для двух значений наклонения орбиты $i = 90°$ (*а*) и $i = 45°$ (*б*). Профили нормированы на континуум, доплеровские сдвиги вычтены. В фазе $\varphi = 0$ впереди находится оптическая звезда, рентгеновский источник расположен сзади. Параметры оптической звезды: $M_v = 1 M_\odot$, $\mu_v = 1$, $T = 5000$ K. Приведены профили линий для двух значений отношения масс: $q = 10$, $M_x = 10 M_\odot$ (сплошные линии), $q = 1$, $M_x = 1 M_\odot$ (штриховые линии)

начинает уменьшаться. Относительно фазы $\varphi = 0{,}5$ профили линии меняются симметрично. В тех фазах орбитального периода ($\varphi \simeq 0{,}25,\ 0{,}75$), где наблюдателю одновременно видны прогретая и непрогретая части звезды, движущиеся с разными скоростями, абсорбционный профиль линии звезды сужается из-за появления эмиссионной компоненты.

Подчеркнем, что в случае «чистого» эффекта эллипсоидальности оптической звезды без учета рентгеновского прогрева, ширина линии в квадратурах ($\varphi = 0{,}25,\ 0{,}75$) увеличивается, поскольку, когда звезда видна сбоку, она в этих фазах имеет максимальные видимые размеры вдоль линии центров компонент. Рентгеновский прогрев приводит к более сложному распределению температуры по поверхности звезды, и орбитальная переменность профиля линии становится более сложной за счет появления эмиссионной компоненты в линии. В итоге, при значительной относительной светимости рентгеновского источника, профиль линии в квадратуре не уширяется, а сужается.

Приведенные на рис. 60 профили линии показывают, что поведение профиля линии подобно при $q = 1$ и $q = 10$, но с возрастанием q глубина профиля увеличивается. При уменьшении наклонения орбиты с $i = 90°$ (рис. 60 *а*) до $45°$ (рис. 60 *б*) эмиссионная компонента профиля остается хорошо заметной.

На рис. 61, 62 и 63 приводятся результаты исследования профилей линии оптической звезды в зависимости от параметров двойной системы q, i, μ_v и параметра рентгеновского прогрева, характеризующего мощность рентгеновского потока.

Теоретические профили линий в зависимости от значения отношения масс в системе $q = M_x/M_v$ и значения параметра рентгеновского прогрева k_x представлены на рис. 61. Отношение масс варьировалось в диапазоне $q = 1$–20. Значение k_x менялось от 0 (отсутствие рентгеновского прогрева) до 50 (очень сильный рентгеновский прогрев). Звезда полностью заполняет свою полость Роша ($\mu_v = 1$). Задавались два значения угла наклонения орбиты: $i = 90°$ (рис. 61 *а*) и $45°$ (рис. 61 *б*). Для каждого набора параметров на рисунках приведены профили линии для трех характерных фаз орбитального периода: $\varphi = 0$ (рентгеновский источник сзади), 0,25 (квадратура), 0,5 (рентгеновский источник впереди звезды). Аналогично, на рис. 62, 63 представлены профили линии звезды для других параметров системы.

Приведенные на рис. 61 графики показывают, что ширина абсорбционного профиля в отсутствии рентгеновского прогрева практически одинакова для различных q (при данной орбитальной фазе) и только очень незначительно уменьшается с увеличением q от 1 до 20. Хорошо видно возрастание вклада эмиссионной компоненты профиля с увеличением параметра рентгеновского прогрева k_x от 0 до 50 для фиксированного значения q. При одном и том же значении k_x эмиссионная компонента профиля проявляется сильнее при меньших q. Этот эффект хорошо заметен уже при малом $k_x = 1$ (можно сравнить соответствующие профили для $q = 1$ и $q = 20$), с увеличением k_x эффект сначала возрастает ($k_x = 10$–20), но потом уменьшается. При очень значительном рентгеновском прогреве ($k_x = 50$) различие между видом профилей линии для различных q мало.

На рис. 62 показаны результаты моделирования профилей линии в зависимости от мощности рентгеновского прогрева ($k_x = 0, 1, 10$) и наклонения орбиты ($i = 30$, 60, $90°$). Расчеты выполнены для двух значений отношения масс: $q = 10$ (рис. 62 *а*) и $q = 1$ (рис. 62 *б*). Можно сделать следующие выводы: 1) с увеличением i ширина профиля увеличивается, глубина уменьшается; 2) переменность профилей в течение орбитального периода растет при увеличении i; 3) возникающая с ростом рентгеновского прогрева эмиссионная компонента профиля линии заметна даже при малом наклонении орбиты $i = 30°$; 4) при одном и том же значении i орбитальная переменность профилей линии больше для $q = 1$, чем для $q = 10$.

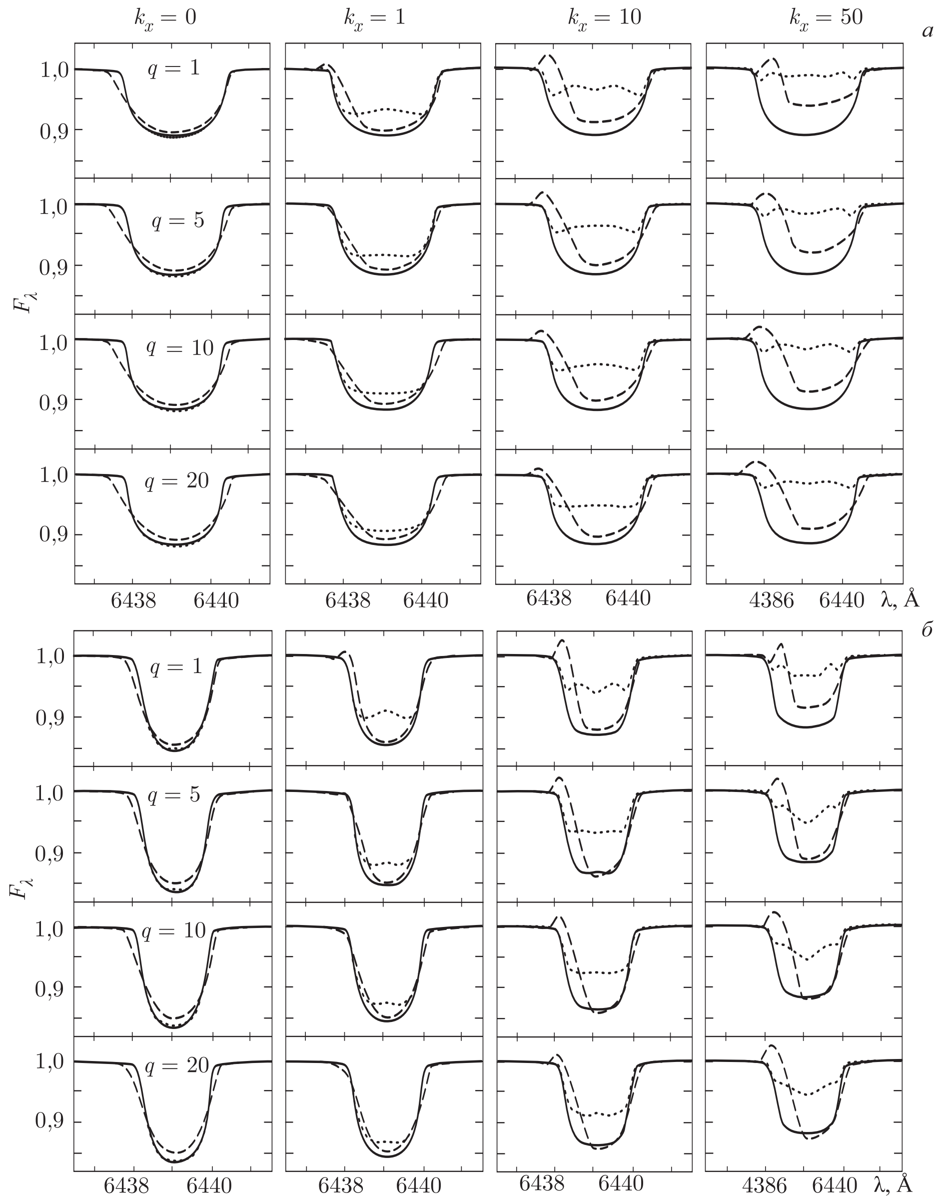


Рис. 61. Зависимость профилей линии Ca I 6439 Å от q и k_x для двух значений наклонения орбиты $i = 90°$ ($а$) и $i = 45°$ ($б$). Параметры модели: $q = 1$–20, $k_x = 0$–50, $\mu_v = 1$, $T = 5000$ K. Профили приведены для трех орбитальных фаз: сплошные линии — рентгеновский источник расположен сзади оптической звезды, штриховые — $\varphi = 0{,}25$, звезда вида «сбоку», точечные линии — $\varphi = 0{,}5$, рентгеновский источник впереди

На рис. 63 показаны результаты исследования профилей линии при изменении размеров звезды, определяемых степенью заполнения звездой своей полости Роша μ_v. Вращение звезды при $\mu_v = 1$ и $\mu_v < 1$ предполагается синхронным с орбитальным обращением. Приведены теоретические профили линии для трех значений

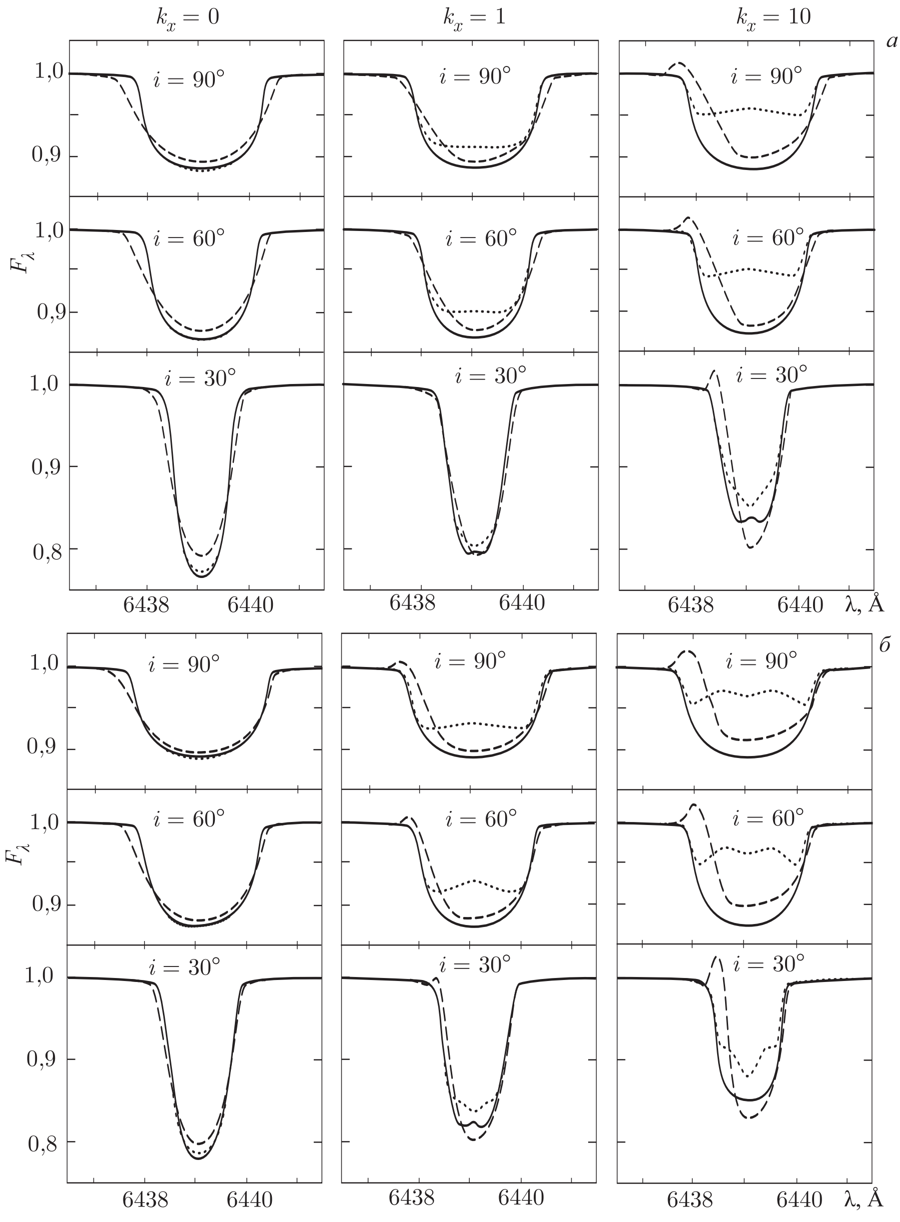


Рис. 62. Зависимость профилей линии Ca I 6439 Å от i и k_x для двух значений отношения масс $q = 1$ (*а*) и $q = 10$ (*б*). Параметры модели: $i = 30$–90, $k_x = 0$–10, $\mu_v = 1$, $T = 5000$ K. Профили приведены для орбитальных фаз $\varphi = 0$ (сплошные линии), 0,25 (штриховые линии), 0,5 (точечные линии)

$\mu_v = 0{,}7$, $0{,}9$, 1 и $k_x = 0, 1, 10$. На рис. 63 *а* данные приведены для наклонения орбиты $i = 90°$, на рис. 63 *б* — для $i = 45°$. Значение отношения масс в системе зафиксировано: $q = 10$. Можно сделать следующие выводы: 1) орбитальная переменность профилей линии увеличивается с увеличением степени рентгеновского

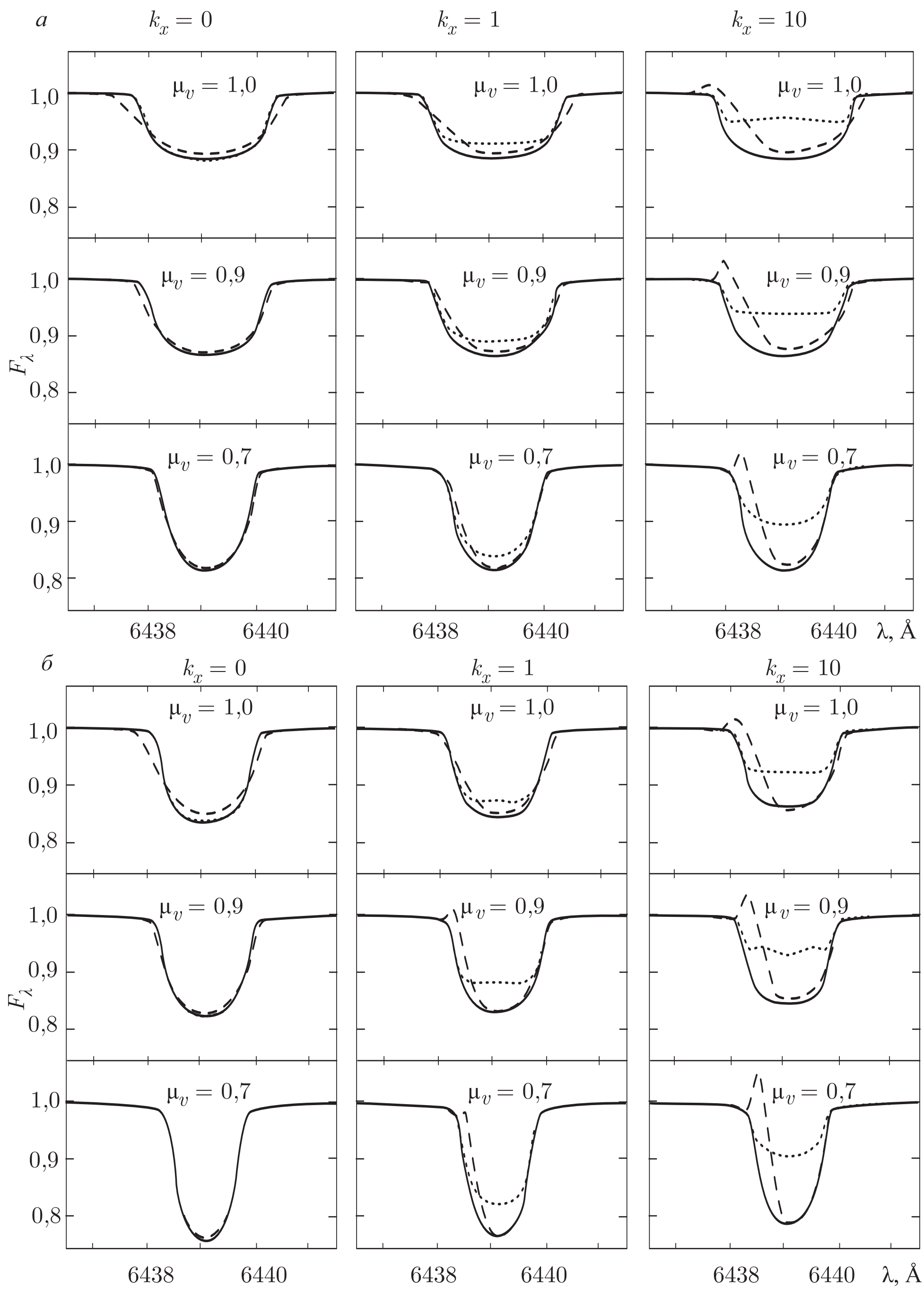


Рис. 63. Зависимость профилей линии Ca I 6439 Å от $\boldsymbol{\mu_v}$ и $\boldsymbol{k_x}$ для двух значений наклонения орбиты $i = 90^\circ$ (*а*) и $i = 45^\circ$ (*б*). Параметры модели: $\mu_v = 0{,}7$–$1{,}0$, $k_x = 0$–10, $q = 1$. Профили приведены для орбитальных фаз $\varphi = 0$ (сплошные линии), 0,25 (штриховые линии), 0,5 (точечные линии)

прогрева k_x для всех значений $\mu_v = 0{,}7$–1; 2) с увеличением μ_v профили уширяются (что объясняется увеличением размера звезды и, соответственно, увеличением разностей скоростей на ее поверхности); 3) интенсивность возникающей эмиссионной компоненты больше при недозаполнении звездой своей полости Роша. Последний результат можно объяснить тем, что при фиксированном k_x уменьшение величины μ_v и, соответственно, размеров звезды, приводят к относительному росту доли поверхности звезды, значительно прогретой рентгеновским излучением по отношению к площади всей поверхности. Поэтому вклад существенно прогретой части звезды в полное излучение возрастает.

Таким образом, моделирование теоретических профилей линии Ca I 6439 Å при различных параметрах рентгеновской двойной системы позволяет сделать следующие основные выводы.

1. При рентгеновском прогреве оптической звезды с температурой $T = 5000$ K возникает эмиссионная компонента в абсорбционном профиле линии Ca I 6439 Å. Профиль линии изменяется в течение орбитального периода. Интенсивность эмиссионной компоненты и орбитальная переменность профиля линии увеличивается с возрастанием мощности рентгеновского прогрева.

2. Получается следующая зависимость от отношения масс q. При одном и том же значении k_x эмиссионная компонента линии проявляется сильнее для малых q при небольшом и умеренном рентгеновском прогреве. При очень большом рентгеновском прогреве различия между видом профилей для разных q мало.

3. Получается следующая зависимость от i. Интенсивность эмиссионной компоненты линии и орбитальная переменность профилей возрастает с увеличением наклонения орбиты i, но даже при малых $i \sim 30^\circ$ эмиссионная компонента линии хорошо заметна.

4. Получается следующая зависимость от степени заполнения звездой полости Роша μ_v. При фиксированном k_x интенсивность возникающей эмиссионной компоненты линии больше при недозаполнении звездой своей полости Роша, чем при заполнении.

Следует отметить, что мы приводили теоретические профили линии Ca I 6439 Å без учета сглаживающего действия инструментального профиля спектрографа. Чтобы различия профилей были заметны на реальных спектрограммах, необходимо высокое спектральное разрешение $\lambda/\Delta\lambda \sim 30\,000$–$50\,000$ и отношение «сигнал–шум» не менее ~ 50. С таким разрешением можно получать спектры звезд до 20^m (типичный блеск рентгеновской новой в спокойном состоянии) лишь на крупнейших телескопах диаметром ~ 10 м. Но эквивалентные ширины не зависят от инструментального профиля (остается только проблема блендирования линий), поэтому анализ эквивалентных ширин возможен при меньшем спектральном разрешении $\sim 10\,000$.

На рис. 64 мы приводим изменения эквивалентных ширин линии Ca I 6439 Å в течение орбитального периода при различных параметрах рентгеновской двойной системы. Эквивалентные ширины вычислялись по всему теоретическому профилю, включая эмиссионную компоненту. Кривые изменения эквивалентных ширин линии в зависимости от мощности рентгеновского источника ($k_x = 0$–50) приведены для двух значений отношения масс в системе: $q = 10$ (рис. 64 *а*) и $q = 1$ (рис. 64 *б*). Как уже отмечалось, для меньших значений q орбитальная переменность больше при небольшом прогреве ($k_x = 1$). С ростом k_x этот эффект уменьшается, и при очень сильном прогреве ($k_x = 50$) орбитальная переменность профиля линии практически одинакова для малого и большого q.

Кривые изменения эквивалентных ширин линии в зависимости от отношения масс $q = 1$–20 приведены для небольшого ($k_x = 1$) и большого ($k_x = 10$) рентгеновского

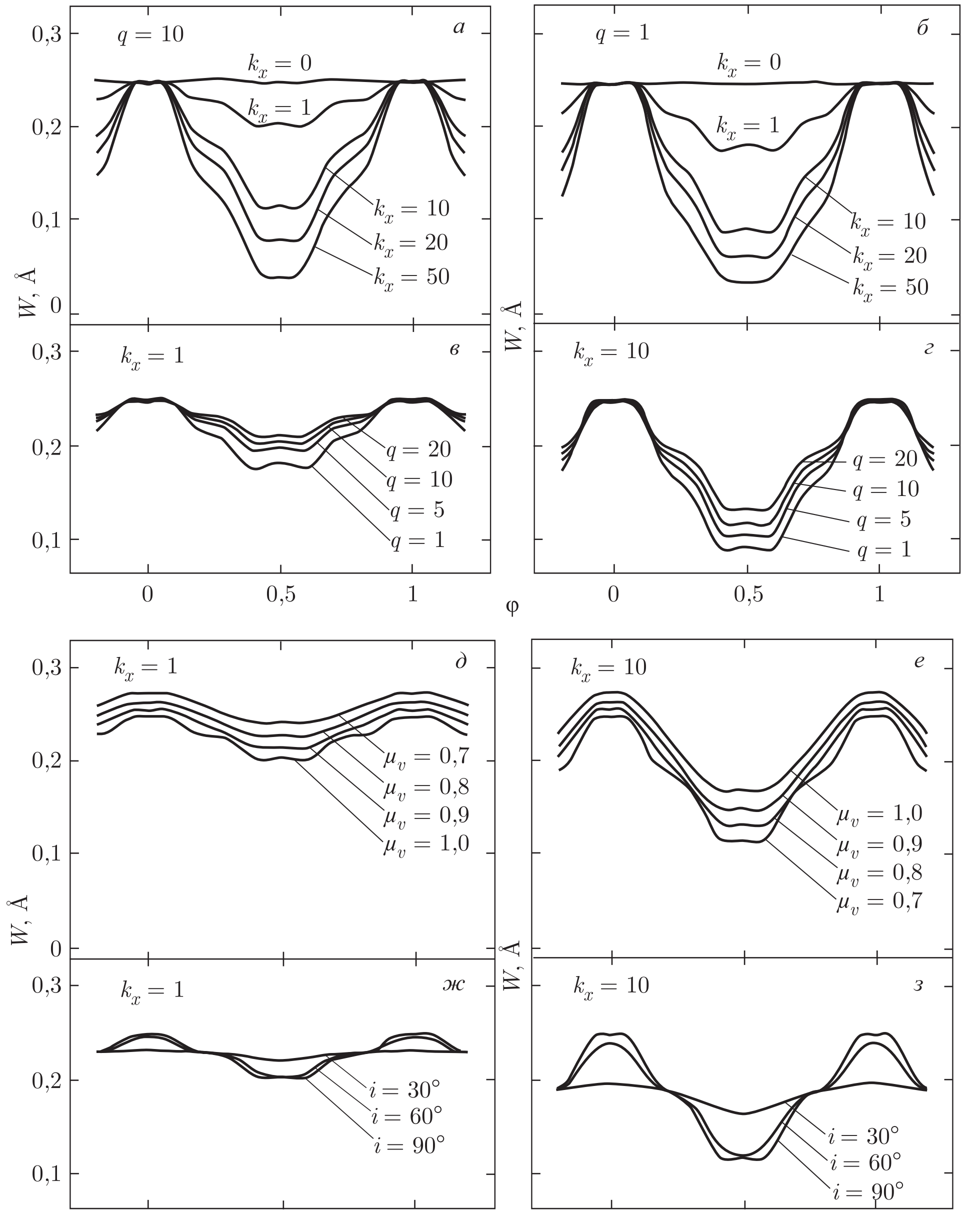


Рис. 64. Изменение эквивалентных ширин линии Ca I 6439 Å в спектре оптической звезды в течение орбитального периода для различных параметров системы: *а* — варьируется мощность рентгеновского прогрева $k_x = 0$–50 при $q = 10$, $\mu_v = 1$, $i = 90°$; *б* — то же, но для $q = 1$; *в* — варьируется отношение масс $q = M_x/M_v = 1$–20 при $k_x = 1$, $\mu_v = 1$, $i = 90°$; *г* — то же, но для $k_x = 10$; *д* — варьируется коэффициент заполнения полости Роша звездой $\mu_v = 0{,}7$–1 при $k_x = 1$, $q = 10$, $i = 90°$; *е* — то же, но для $k_x = 10$; *ж* — варьируется значение наклонения орбиты $i = 30°$, $60°$, $90°$ при $k_x = 1$, $q = 10$, $\mu_v = 1$; *з* — то же, но для $k_x = 10$. Температура звезды во всех моделях $T = 5000$ K

прогрева (рис. 64 *в*, 64 *г*). При большом $k_x = 10$ орбитальная переменность существенно возрастает и она также становится больше при уменьшении отношения масс.

Различие эквивалентных ширин линии в зависимости от степени заполнения звездой полости Роша μ_v показано на рис. 64 *д* ($k_x = 1$) и на рис. 64 *е* ($k_x = 10$). Эквивалентные ширины профиля линии в случае $k_x = 1$ для меньших μ_v больше, но амплитуда их переменности убывает с уменьшением μ_v.

Переменность эквивалентных ширин в зависимости от наклонения орбиты $i = 30^\circ$–90° показана на рис. 64 *ж* ($k_x = 1$) и на рис. 64 *з* ($k_x = 10$). Переменность присутствует даже при $i = 30^\circ$, с увеличением i она значительно возрастает.

Кривые лучевых скоростей в зависимости от степени рентгеновского прогрева k_x приведены на рис. 65 *а* для $q = 1$ (вверху) и $q = 10$ (внизу). Кривые построены по линии Ca I 6439,075 Å. На рис. 65 *б* показаны соответствующие изменения эквивалентных ширин линии в течение орбитального периода. Лучевые скорости определялись по профилю линии описанным выше способом (как среднее из определений по трем уровням: 1/3, 1/2, и 2/3 от значения глубины в центре линии). Амплитуда кривой лучевых скоростей возрастает с увеличением k_x, причем этот эффект больше для $q = 1$, чем для $q = 10$.

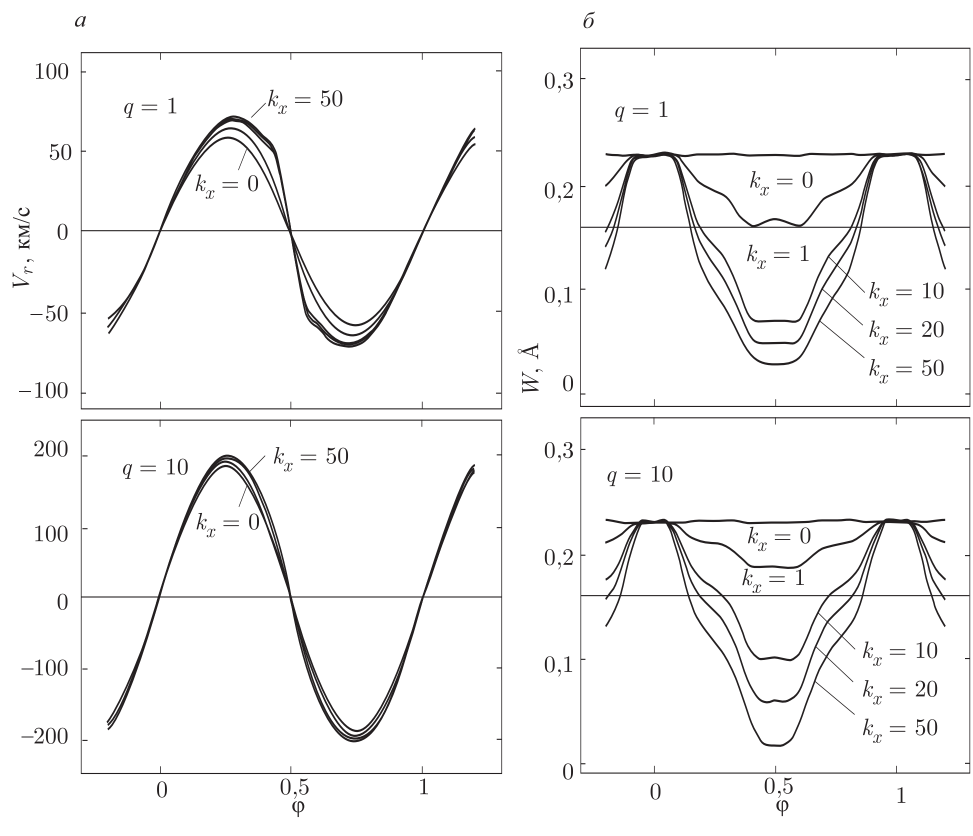


Рис. 65. Кривые лучевых скоростей оптической звезды (*а*) и эквивалентные ширины линии Ca I 6439 Å (*б*) в течение орбитального периода при различных мощностях рентгеновского прогрева $k_x = 0$, 1, 10, 20, 50. Приведены кривые для двух значений отношения масс $q = 1$ и 10. С возрастанием k_x амплитуда кривой лучевых скоростей увеличивается. Параметры модели: $\mu_v = 1$; $T = 5000$ K, $i = 90^\circ$, $P = 12^{\mathrm{d}}$

Возрастание амплитуды кривой лучевых скоростей при росте k_x связано с появлением эмиссионной компоненты профиля. Эмиссии возникают для площадок на прогретой части звезды, т. е. в области с меньшими лучевыми скоростями. Эффективно абсорбционный профиль линии сужается, и кажущаяся лучевая скорость возрастает. Этот эффект заметнее при малых q (т. е. меньших массах релятивистского объекта), так как в этом случае расстояние между релятивистским объектом и поверхностью оптической звезды меньше и, следовательно, относительно большая часть рентгеновского потока перехватывается поверхностью оптической звезды.

На рис. 66 приведена трехмерная зависимость интенсивности в профиле линии от длины волны и фазы орбитального периода при $k_x = 10$ и отношении масс $q = 10$. Показана половина орбитального периода. Сравнение этой трехмерной теоретической зависимости с соответствующей наблюдаемой трехмерной зависимостью профиля линии от фазы орбитального периода позволяет, в принципе, наиболее полно извлекать информацию о двойной системе из спектральных наблюдений и определять такие важнейшие параметры, как наклонение орбиты и массы компонент.

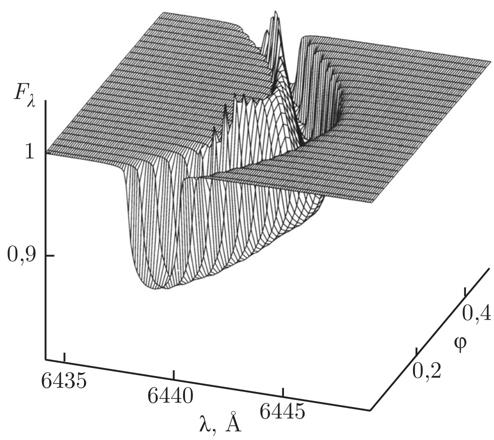


Рис. 66. Трехмерная зависимость интенсивности в профиле линии Ca I 6439 Å от длины волны и фазы орбитального периода при k_x=10, $M_v = 1M_\odot$, $M_x = 10M_\odot$, $\mu_v = 1$, $T = 5000$ K, $i = 90°$

Таким образом, развитый нами метод синтеза профилей линий поглощения для оптических звезд в рентгеновских двойных системах, позволяющий точно учитывать эффект прогрева атмосферы оптической звезды внешним рентгеновским излучением (в ЛТР-приближении), позволяет проводить детальный анализ спектров высокого разрешения рентгеновских двойных систем. Это дает дополнительные возможности для надежного определения физических характеристик рентгеновских двойных систем, и прежде всего, масс нейтронных звезд и черных дыр. Для реализации этих возможностей требуется получение оптических спектров рентгеновских двойных систем с высоким разрешением ($\lambda/\Delta\lambda \sim 30\,000$–$50\,000$) на современных крупных телескопах. Можно надеяться, что применение нашего метода к интерпретации таких спектров позволит уточнить массы релятивистских объектов и уменьшить ошибки их определения. Это важно для проверки и уточнения возможного бимодального распределения масс нейтронных звезд и черных дыр (Черепащук, 2003), что имеет значение как для понимания поздних стадий эволюции массивных звезд и физики коллапса их ядер, так и для проверки современных теорий гравитации (Постнов и Черепащук, 2003). Описанный метод синтеза профилей линий и кривых лучевых скоростей оптических звезд в рентгеновских двойных системах реализован в виде специальной компьютерной программы в отделе звездной астрофизики ГАИШ Э. А. Антохиной.

Переходим к изложению результатов применения описанных методов синтеза кривых блеска и кривых лучевых скоростей к анализу наблюдений тесных двойных систем разных типов. При этом, чтобы как можно шире охватить проблему тесных двойных систем мы будем приводить не только наши результаты исследований, но и результаты, полученные другими исследователями.

Глава IV
ПРИМЕНЕНИЯ МОДЕЛИ РОША

1. Введение

Описанные методы синтеза кривых блеска и кривых лучевых скоростей ТДС в рамках модели Роша широко применяются для исследования ТДС разных типов и определения из наблюдений фундаментальных характеристик звезд и релятивистских объектов. В связи с возможностью использования современных мощных компьютеров, эффективность этих методов очень велика. Особенно перспективно применение этих методов для анализа высокоточных кривых блеска затменных систем, которые получаются с бортов специализированных фотометрических космических телескопов типа COROT и «Kepler». В этих проектах, предназначенных в основном для поиска планет вокруг звезд методом наблюдения затмений, планируется получить оптические кривые блеска различных переменных звезд, включая затменные двойные системы, с точностью 10^{-4}–10^{-5} звездной величины. Число отнаблюденных затменных систем может достигать нескольких тысяч. Отметим, что запуск спутника с телескопом COROT на борту уже успешно произведен в декабре 2006 г., а запуск космического проекта «Kepler» реализован в 2009 г. Все это открывает широкие перспективы для массового исследования высокоточных кривых блеска затменных систем разных типов.

С другой стороны, к настоящему времени уже реализованы многолетние наземные программы массовых фотометрических наблюдений миллионов звезд в Большом и Малом Магеллановых облаках, а также в балдже Галактики (см., например, Alcock et al., 2000, Udalski et al., 1998, Wyrzykowski et al., 2004) с целью поиска эффектов гравитационного микролинзирования. Как сопутствующий результат, построены высококачественные кривые блеска десятков тысяч переменных звезд разных типов, включая затменные переменные. Поэтому программа массового анализа кривых блеска многих затменных систем с помощью методов синтеза уже начала реализовываться в последние годы (см., например, Clausen et al., 2003, Wyithe and Wilson, 2002, Graczyk, 2003, Harvies et al., 2003, Hilditch et al., 2005).

В настоящее время применение методов синтеза, основанных на использовании модели Роша, осуществляется преимущественно в трех направлениях:

1) массовые исследования большого числа классических ТДС разных типов с целью проверки современных представлений об эволюции ТДС с обменом масс;

2) детальное изучение отдельных классических ТДС, имеющих особый эволюционный статус или обладающих различными пекулярностями (системы типа W UMa и RS CVn, β Lyr и W Ser и т. п.);

3) исследование различных пекулярных ТДС (рентгеновские двойные системы, катаклизмические двойные и т. п.) в рамках сложных, нетрадиционных моделей, в основе которых лежит модель Роша.

Ниже мы приводим примеры решения таких задача, попутно излагая новейшие представления о физике и эволюции тесных двойных систем.

2. Проверка эволюционного статуса звезд в массивных ТДС

Мы изложим кратко новейшие результаты массовых исследований «классических» затменных двойных систем, которые дают надежный базис для проверки современных представлений об эволюции звезд и тесных двойных систем.

Из многочисленных исследований в этом направлении следует отметить работы Свечникова (1969), Свечникова и Перевозкиной (1999), Горды и Свечникова (1998), Ковалевой (2000), Каретникова (1991), Малкова (Malkov, 2003), Буддинга и др. (Budding et al., 2004), Дремовой и Свечникова (2002, 2007), Хильдича и др. (Hilditch et al., 2005), Ибаноглу и др. (Ibanoglu et al., 2006).

В работе Хильдича, Ховарта и Харриса (Hilditch et al., 2005) выполнена программа определения фундаментальных параметров нескольких десятков затменных двойных систем спектральных классов O-B в Малом Магеллановом Облаке (ММО). С помощью метода многощелевой спектроскопии на 3,9-метровом Англо-Австралийском телескопе авторами были получены одновременно спектры 40 затменных систем, кривые блеска которых были построены по результатам двухцветных фотометрических наблюдений, выполненных по программе наблюдений звездных полей в ММО с целью поиска явлений микролинзирования (эксперимент OGLE-II, Udalski ea al., 1998). Соответствующие кривые блеска некоторых затменных систем приведены на рис. 67. Использовались кривые блеска в фильтре I. Каждая кривая блеска включает в себя в среднем около 140 индивидуальных наблюдений со средней ошибкой $\sim 0{,}014$ звездной величины (Udalski ea al.,1998). В ряде случаев кривые блеска включают большее число индивидуальных наблюдений (~ 300) с более высокой средней точностью $\sim 0{,}011$ звездной величины (Wyrzykowski et al., 2004).

С помощью многощелевого спектрографа Англо-Австралийской обсерватории (two-degree field (2dF) multi-object spectrograph), установленного на 3,9-метровом телескопе, были получены спектры одновременно для 40 затменных систем, для которых имеются кривые блеска. Спектры получены для систем, блеск которых ярче 16^m. Спектральное разрешение $\sim 2\,\text{Å}$, отношение «сигнал-шум» составляет 20–50, спектральный диапазон $\lambda\,3855$–$4910\,\text{Å}$ (в этом диапазоне лежат линии H, He I и He II, характерные для голубых спектров звезд O-B). Спектральные наблюдения выполнены в течение 2001–2003 гг. (всего 5,5 ночей), что позволило построить надежные кривые лучевых скоростей для обеих компонент изучаемых 40 затменных систем. При обработке спектров использовался метод разделения спектров компонент (disentangling procedure) в суммарном спектре двойной системы (Hadrava, 2004, Holmgren, 2004, Ilijie, 2004). Соответствующие примеры разделенных спектров компонент приведены на рис. 68. По сравнению с традиционными кросс-корреляционными методами измерения спектров двойных систем, метод разделения спектров позволяет не только построить более надежные кривые лучевых скоростей компонент, но и выполнить их более точную спектральную классификацию.

Для каждой системы методом наименьших квадратов были найдены спектроскопические элементы орбиты, в том числе, полуамплитуды кривых лучевых скоростей K_1 и K_2. Значения K_1 лежат в интервале 76–317 км/с, K_2 — в интервале 179–375 км/с, средняя точность определения K_1, K_2 составляет ~ 10 км/с. Эти значения K_1, K_2 включают в себя «некеплеровские» поправки, обусловленные неточечностью звезд, их приливной деформацией и взаимным прогревом. С найденными спектроскопическими элементами орбит были вычислены массы компонент с точностью до $\sin^3 i$, а после нахождения фотометрических элементов орбит и определения наклонений орбит из анализа кривых блеска были найдены их массы. В большинстве случаев точность определения масс компонент составляет 5–10 %.

Для анализа кривых блеска использовалась компьютерная программа LIGHT2 (Hill, 1979, Hill and Rucinski, 1993), реализующая метод синтеза кривых блеска затменных систем. При интерпретации кривых блеска отношение масс компонент было зафиксировано на основе результатов анализа кривых лучевых скоростей, температура первичной, более яркой компоненты также фиксировалась в соответствии с ее спектральным классом. Для большинства кривых блеска рассматривалась

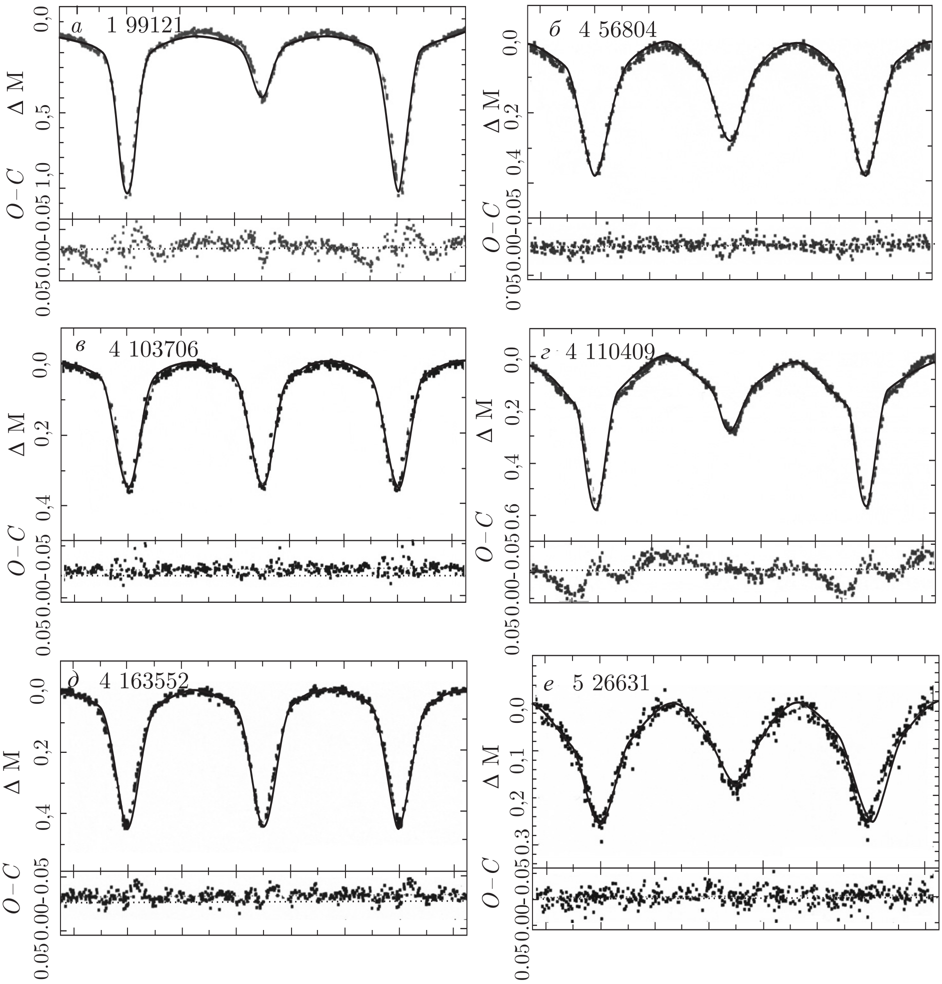


Рис. 67. Кривые блеска в фильтре I для затменных систем из обзора OGLE-II. Сплошные линии — теоретические кривые блеска. Внизу каждого рисунка приведены соответствующие разности $O - C$. (По материалам Hilditch et al., 2005)

модель ТДС с круговой орбитой. В некоторых случаях применялась модель с эллиптической орбитой и из анализа кривой блеска находились параметры e и ω. Искомыми параметрами были размеры звезд (в долях большой полуоси орбиты), наклонение орбиты i и температура T_2 вторичной компоненты. На рис. 67 приведены теоретические кривые блеска, соответствующие оптимальным параметрам, а также даны соответствующие разности $O - C$ между наблюдаемой и теоретической кривой блеска. В 90 % случаев величины $O - C$ не показывают систематического хода с фазой орбитального периода, что свидетельствует о хорошем согласии между моделью и наблюдениями. Приведенное, т. е. рассчитанное на одну степень свободы, значение χ^2_ν при этом во многих случаях близко к единице. Под приведенным χ^2_ν подразумевается отношение $\chi^2_{M-P}/(M - P)$, где M — число наблюдаемых точек, P — число параметров, по которым осуществлена минимизация невязки между наблюдаемой и теоретической кривой блеска. Ошибки определения наклонений орбит

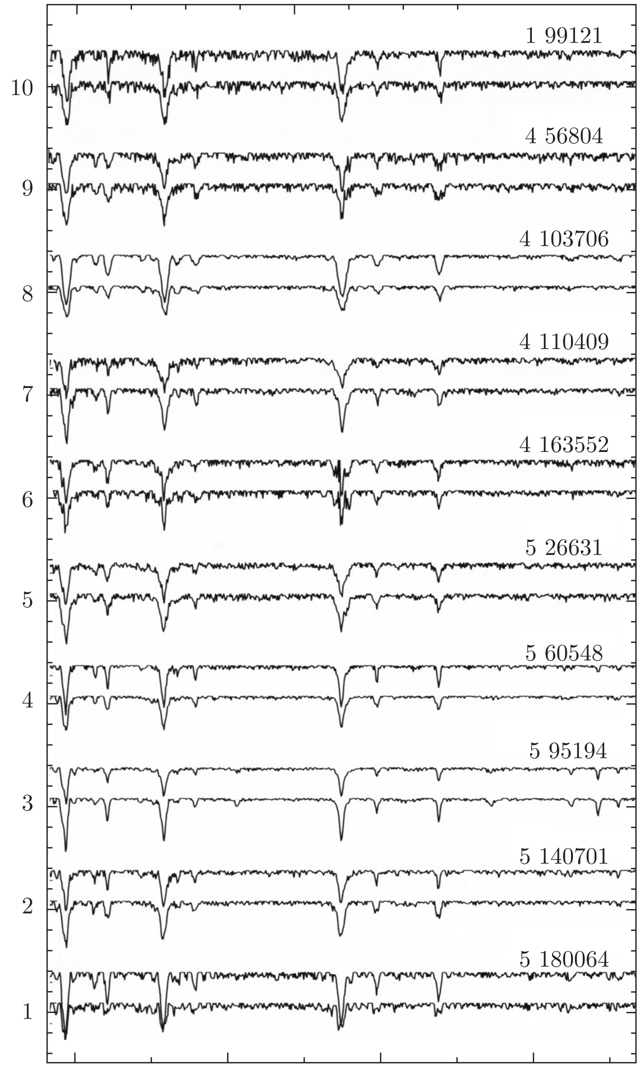


Рис. 68. Разделенные спектры обеих компонент для 10 затменных систем (По материалам Hilditch et al., 2005.)

составляют от 0,1° до 1,5° Средние относительные радиусы звезд определяются в среднем с точностью 1–7 % для первичных (более ярких) компонент и 2–15 % для вторичных компонент. Ошибки T_{ef} для вторичных компонент лежат в среднем в пределах 1–4 %.

На основе анализа спектральных и фотометрических наблюдений были вычислены массы и средние радиусы звезд в абсолютных единицах, а также эффективные температуры T_{ef} вторичных компонент (как уже отмечалось, величины T_{ef} для первичных компонент задавались, исходя из спектральных классов).

После вычисления астрофизических параметров систем (абсолютных масс M_1, M_2 и радиусов R_1, R_2 звезд, их эффективных температур $T_{\text{ef}}^{(1)}$, $T_{\text{ef}}^{(2)}$, болометрических светимостей $L_{1,2} = 4\pi R_{1,2}^2 \sigma T_{\text{ef}}^4$ и ускорений силы тяжести $g_{1,2} = GM_{1,2}/R_{1,2}^2$) авторами (Hilditch et al., 2005) был детально изучен эволюционный статус массивных звезд в разделенных и полуразделенных ТДС.

В табл. 27, 28 приведены характеристики звезд — компонент массивных ТДС в ММО (Hilditch et al., 2005, Harries et al., 2003). Анализ параметров разделенных систем привел авторов к следующим выводам. Используя эволюционные расчеты Girardi et al. (2000), авторы сравнили наблюдаемые характеристики массивных звезд в разделенных системах с теоретическими для случая металличности вещества звезд $Z = 0{,}004$, характерной для ММО. Было проведено сравнение положений первичных и вторичных компонент на диаграмме «масса звезды–логарифм ускорения силы тяжести».

Таблица 27

Астрофизические параметры разделенных систем (по материалам работы Hilditch et al., 2005)

Идентификатор OGLE-PSF	Масса, $M_\odot$	Радиус, $R_\odot$	$\log g$, dex cgs	$\log T_{\text{ef}}$, dex K
4 056804	$13{,}0 \pm 0{,}3$ $14{,}3 \pm 0{,}5$	$4{,}1 \pm 0{,}1$ $4{,}9 \pm 0{,}1$	$4{,}32 \pm 0{,}02$ $4{,}21 \pm 0{,}02$	$4{,}479 \pm 0{,}014$ $4{,}384 \pm 0{,}006$
4 103706	$17{,}5 \pm 0{,}6$ $9{,}9 \pm 0{,}5$	$5{,}4 \pm 0{,}1$ $4{,}0 \pm 0{,}1$	$4{,}22 \pm 0{,}03$ $4{,}22 \pm 0{,}04$	$4{,}444 \pm 0{,}016$ $4{,}432 \pm 0{,}007$
4 163552	$13{,}3 \pm 1{,}0$ $12{,}4 \pm 1{,}1$	$5{,}3 \pm 0{,}1$ $5{,}2 \pm 0{,}2$	$4{,}11 \pm 0{,}04$ $4{,}10 \pm 0{,}05$	$4{,}407 \pm 0{,}017$ $4{,}405 \pm 0{,}003$
5 095194	$20{,}3 \pm 4{,}5$ $23{,}3 \pm 5{,}0$	$8{,}1 \pm 0{,}6$ $9{,}5 \pm 0{,}7$	$3{,}93 \pm 0{,}11$ $3{,}85 \pm 0{,}11$	$4{,}529 \pm 0{,}013$ $4{,}513 \pm 0{,}001$
5 140701	$6{,}9 \pm 0{,}7$ $5{,}3 \pm 0{,}7$	$7{,}9 \pm 0{,}3$ $7{,}0 \pm 0{,}3$	$3{,}49 \pm 0{,}06$ $3{,}47 \pm 0{,}07$	$4{,}371 \pm 0{,}018$ $4{,}185 \pm 0{,}007$
5 180064	$10{,}7 \pm 0{,}4$ $7{,}0 \pm 0{,}3$	$5{,}6 \pm 0{,}3$ $4{,}5 \pm 0{,}3$	3. 97±0.04 $3{,}98 \pm 0{,}06$	$4{,}407 \pm 0{,}017$ $4{,}233 \pm 0{,}031$
5 255984	$11{,}6 \pm 2{,}0$ $7{,}0 \pm 2{,}7$	$4{,}2 \pm 0{,}4$ $3{,}4 \pm 0{,}3$	$4{,}27 \pm 0{,}12$ $4{,}23 \pm 0{,}19$	$4{,}407 \pm 0{,}017$ $4{,}399 \pm 0{,}016$
5 305884	$17{,}6 \pm 1{,}3$ $16{,}2 \pm 2{,}0$	$7{,}8 \pm 0{,}3$ $6{,}5 \pm 0{,}4$	$3{,}90 \pm 0{,}04$ $4{,}02 \pm 0{,}07$	$4{,}529 \pm 0{,}013$ $4{,}512 \pm 0{,}003$
5 311566	$12{,}8 \pm 0{,}6$ $10{,}2 \pm 0{,}8$	$4{,}4 \pm 0{,}1$ $3{,}2 \pm 0{,}2$	$4{,}26 \pm 0{,}03$ $4{,}43 \pm 0{,}06$	$4{,}479 \pm 0{,}014$ $4{,}458 \pm 0{,}010$
6 011141	$15{,}1 \pm 0{,}3$ $14{,}1 \pm 0{,}4$	$5{,}1 \pm 0{,}1$ $5{,}0 \pm 0{,}1$	$4{,}21 \pm 0{,}01$ $4{,}19 \pm 0{,}02$	$4{,}479 \pm 0{,}014$ $4{,}357 \pm 0{,}009$
6 180084	$16{,}2 \pm 1{,}3$ $13{,}8 \pm 2{,}3$	$5{,}9 \pm 0{,}2$ $5{,}7 \pm 0{,}2$	$4{,}11 \pm 0{,}05$ $4{,}07 \pm 0{,}08$	$4{,}444 \pm 0{,}016$ $4{,}446 \pm 0{,}005$
6 221543	$11{,}9 \pm 1{,}8$ $11{,}6 \pm 2{,}5$	$5{,}3 \pm 0{,}5$ $4{,}5 \pm 0{,}5$	$4{,}07 \pm 0{,}10$ $4{,}19 \pm 0{,}14$	$4{,}407 \pm 0{,}017$ $4{,}425 \pm 0{,}004$
7 120044	$12{,}5 \pm 0{,}5$ $12{,}4 \pm 0{,}6$	$4{,}8 \pm 0{,}1$ $4{,}7 \pm 0{,}1$	$4{,}18 \pm 0{,}02$ $4{,}19 \pm 0{,}03$	$4{,}407 \pm 0{,}017$ $4{,}408 \pm 0{,}007$
7 255621	$9{,}3 \pm 0{,}8$ $7{,}2 \pm 0{,}6$	$5{,}0 \pm 0{,}3$ $3{,}5 \pm 0{,}6$	$4{,}00 \pm 0{,}06$ $4{,}20 \pm 0{,}14$	$4{,}407 \pm 0{,}017$ $4{,}369 \pm 0{,}017$
8 087175	$12{,}0 \pm 1{,}0$ $10{,}7 \pm 1{,}6$	$4{,}5 \pm 0{,}2$ $4{,}4 \pm 0{,}2$	$4{,}21 \pm 0{,}06$ $4{,}18 \pm 0{,}08$	$4{,}407 \pm 0{,}017$ $4{,}393 \pm 0{,}009$

Продолжение табл. 27

Идентификатор OGLE-PSF	Масса, $M_\odot$	Радиус, $R_\odot$	$\log g$, dex cgs	$\log T_{\rm ef}$, dex K
8 104222	$13{,}1 \pm 0{,}9$ $12{,}1 \pm 1{,}3$	$5{,}2 \pm 0{,}4$ $5{,}2 \pm 0{,}4$	$4{,}11 \pm 0{,}07$ $4{,}09 \pm 0{,}08$	$4{,}407 \pm 0{,}017$ $4{,}402 \pm 0{,}014$
10 037156	$19{,}5 \pm 0{,}4$ $17{,}0 \pm 0{,}5$	$7{,}2 \pm 0{,}2$ $4{,}4 \pm 0{,}5$	$4{,}02 \pm 0{,}02$ $4{,}38 \pm 0{,}09$	$4{,}508 \pm 0{,}013$ $4{,}496 \pm 0{,}005$
10 110440	$10{,}8 \pm 2{,}1$ $5{,}9 \pm 2{,}3$	$4{,}0 \pm 0{,}4$ $3{,}7 \pm 0{,}3$	$4{,}27 \pm 0{,}12$ $4{,}08 \pm 0{,}19$	$4{,}407 \pm 0{,}017$ $4{,}330 \pm 0{,}011$

Таблица 28

Астрофизические параметры полуразделенных и контактных систем (по материалам работы Hilditch et al., 2005)

Идентификатор OGLE-PSF	Масса, $M_\odot$	Радиус, $R_\odot$	$\log g$, dex cgs	$\log T_{\rm ef}$, dex K
1 099121	$1{,}3 \pm 0{,}8$ $6{,}6 \pm 0{,}9$	$5{,}0 \pm 0{,}2$ $6{,}7 \pm 0{,}2$	$4{,}10 \pm 0{,}05$ $3{,}61 \pm 0{,}06$	$4{,}444 \pm 0{,}015$ $4{,}199 \pm 0{,}005$
4 110409	$13{,}7 \pm 0{,}8$ $8{,}9 \pm 1{,}1$	$4{,}3 \pm 0{,}2$ $8{,}4 \pm 0{,}3$	$4{,}30 \pm 0{,}05$ $3{,}54 \pm 0{,}06$	$4{,}407 \pm 0{,}017$ $4{,}187 \pm 0{,}045$
5 026631	$11{,}5 \pm 0{,}6$ $11{,}3 \pm 0{,}8$	$5{,}1 \pm 0{,}1$ $5{,}7 \pm 0{,}1$	$4{,}08 \pm 0{,}03$ $3{,}99 \pm 0{,}04$	$4{,}407 \pm 0{,}017$ $4{,}234 \pm 0{,}008$
5 060548	$10{,}8 \pm 0{,}4$ $8{,}7 \pm 0{,}4$	$8{,}4 \pm 0{,}1$ $9{,}6 \pm 0{,}2$	$3{,}62 \pm 0{,}02$ $3{,}41 \pm 0{,}03$	$4{,}479 \pm 0{,}014$ $4{,}243 \pm 0{,}006$
5 208049	$10{,}0 \pm 0{,}2$ $4{,}8 \pm 0{,}2$	$6{,}6 \pm 0{,}1$ $6{,}8 \pm 0{,}1$	$3{,}80 \pm 0{,}01$ $3{,}45 \pm 0{,}02$	$4{,}407 \pm 0{,}017$ $4{,}154 \pm 0{,}005$
5 243188	$27{,}3 \pm 1{,}5$ $18{,}7 \pm 1{,}9$	$7{,}3 \pm 0{,}2$ $7{,}9 \pm 0{,}2$	$4{,}15 \pm 0{,}03$ $3{,}91 \pm 0{,}05$	$4{,}550 \pm 0{,}012$ $4{,}507 \pm 0{,}001$
5 277080	$17{,}4 \pm 0{,}9$ $11{,}3 \pm 1{,}0$	$5{,}0 \pm 0{,}1$ $6{,}8 \pm 0{,}2$	$4{,}27 \pm 0{,}03$ $3{,}82 \pm 0{,}05$	$4{,}407 \pm 0{,}017$ $4{,}201 \pm 0{,}004$
5 300549	$25{,}4 \pm 1{,}0$ $17{,}4 \pm 1{,}1$	$6{,}4 \pm 0{,}1$ $6{,}1 \pm 0{,}1$	$4{,}24 \pm 0{,}02$ $4{,}10 \pm 0{,}03$	$4{,}479 \pm 0{,}014$ $4{,}205 \pm 0{,}007$
6 152981	$12{,}5 \pm 0{,}4$ $8{,}2 \pm 0{,}3$	$4{,}9 \pm 0{,}1$ $6{,}3 \pm 0{,}1$	$4{,}15 \pm 0{,}02$ $3{,}76 \pm 0{,}02$	$4{,}407 \pm 0{,}017$ $4{,}304 \pm 0{,}003$
6 251047	$8{,}1 \pm 0{,}2$ $5{,}5 \pm 0{,}2$	$4{,}6 \pm 0{,}1$ $6{,}4 \pm 0{,}1$	$4{,}02 \pm 0{,}02$ $3{,}57 \pm 0{,}02$	$4{,}371 \pm 0{,}018$ $4{,}131 \pm 0{,}003$
6 311225	$21{,}2 \pm 0{,}4$ $11{,}9 \pm 0{,}4$	$6{,}6 \pm 0{,}1$ $6{,}7 \pm 0{,}1$	$4{,}13 \pm 0{,}01$ $3{,}86 \pm 0{,}02$	$4{,}479 \pm 0{,}014$ $4{,}371 \pm 0{,}005$
6 319960	$10{,}6 \pm 0{,}8$ $6{,}7 \pm 1{,}0$	$4{,}5 \pm 0{,}2$ $9{,}4 \pm 0{,}3$	$4{,}16 \pm 0{,}05$ $3{,}32 \pm 0{,}07$	$4{,}407 \pm 0{,}017$ $4{,}212 \pm 0{,}004$
7 066175	$19{,}6 \pm 1{,}8$ $11{,}5 \pm 1{,}9$	$7{,}9 \pm 0{,}3$ $10{,}4 \pm 0{,}4$	$3{,}94 \pm 0{,}05$ $3{,}47 \pm 0{,}08$	$4{,}508 \pm 0{,}013$ $4{,}404 \pm 0{,}007$
7 142073	$12{,}6 \pm 1{,}2$ $6{,}3 \pm 0{,}9$	$9{,}6 \pm 0{,}3$ $7{,}8 \pm 0{,}3$	$3{,}58 \pm 0{,}05$ $3{,}46 \pm 0{,}07$	$4{,}479 \pm 0{,}014$ $4{,}322 \pm 0{,}006$

Продолжение табл. 28

Идентификатор OGLE-PSF	Масса, $M_\odot$	Радиус, $R_\odot$	$\log g$, dex cgs	$\log T_{\rm ef}$, dex K
7 189660	$15{,}3 \pm 1{,}2$ $10{,}2 \pm 1{,}0$	$5{,}3 \pm 0{,}2$ $6{,}0 \pm 0{,}2$	$4{,}17 \pm 0{,}04$ $3{,}89 \pm 0{,}05$	$4{,}407 \pm 0{,}017$ $4{,}228 \pm 0{,}004$
7 193779	$11{,}6 \pm 1{,}0$ $5{,}9 \pm 0{,}9$	$5{,}8 \pm 0{,}2$ $4{,}9 \pm 0{,}2$	$3{,}98 \pm 0{,}05$ $3{,}82 \pm 0{,}07$	$4{,}407 \pm 0{,}017$ $4{,}235 \pm 0{,}006$
8 209964	$18{,}8 \pm 0{,}9$ $14{,}5 \pm 1{,}0$	$7{,}7 \pm 0{,}2$ $10{,}7 \pm 0{,}2$	$3{,}94 \pm 0{,}03$ $3{,}54 \pm 0{,}03$	$4{,}560 \pm 0{,}012$ $4{,}423 \pm 0{,}004$
9 010098	$17{,}8 \pm 1{,}8$ $13{,}7 \pm 2{,}3$	$5{,}1 \pm 0{,}2$ $5{,}1 \pm 0{,}2$	$4{,}28 \pm 0{,}06$ $4{,}17 \pm 0{,}08$	$4{,}529 \pm 0{,}013$ $4{,}503 \pm 0{,}001$
9 047454	$12{,}6 \pm 2{,}3$ $9{,}2 \pm 2{,}0$	$4{,}2 \pm 0{,}3$ $5{,}6 \pm 0{,}3$	$4{,}29 \pm 0{,}10$ $3{,}91 \pm 0{,}11$	$4{,}444 \pm 0{,}016$ $4{,}228 \pm 0{,}008$
9 064498	$8{,}4 \pm 0{,}7$ $2{,}7 \pm 0{,}5$	$5{,}4 \pm 0{,}2$ $5{,}1 \pm 0{,}2$	$3{,}90 \pm 0{,}05$ $3{,}46 \pm 0{,}09$	$4{,}407 \pm 0{,}017$ $4{,}232 \pm 0{,}009$
10 094559	$12{,}0 \pm 1{,}0$ $10{,}0 \pm 1{,}4$	$4{,}7 \pm 0{,}2$ $6{,}2 \pm 0{,}3$	$4{,}18 \pm 0{,}05$ $3{,}85 \pm 0{,}07$	$4{,}479 \pm 0{,}014$ $4{,}378 \pm 0{,}065$
10 108086	$16{,}9 \pm 1{,}2$ $14{,}3 \pm 1{,}7$	$5{,}7 \pm 0{,}2$ $5{,}3 \pm 0{,}2$	$4{,}16 \pm 0{,}04$ $4{,}14 \pm 0{,}06$	$4{,}529 \pm 0{,}013$ $4{,}476 \pm 0{,}015$

В ТДС компоненты имеют одинаковый возраст, поэтому их характеристики должны соответствовать изохронам — линиям одинакового возраста. Причем, поскольку в разделенных ТДС не было обмена масс, каждая компонента системы в данном случае должна «лежать» на изохроне, соответствующей ее массе. Поскольку среднее отношение масс по всем 21 исследованным системам составляет 1,2, различием в скорости эволюции звезд можно пренебречь. Поэтому в большинстве случаев обе компоненты разделенной ТДС должны лежать на одной изохроне. Это и наблюдается: в подавляющем большинстве случаев обе компоненты системы в пределах ошибок соответствуют одной изохроне. Имеются лишь отдельные исключения из этого правила, соответствующие большому различию в массах компонент: системы 4 103706 ($18M_\odot$+$10M_\odot$), 5 255984 ($12M_\odot$+$7M_\odot$) и 10 110440 ($11M_\odot$+$6M_\odot$).

Авторы (Hilditch et al., 2005) нанесли параметры исследуемых звезд на диаграмму Герцшпрунга–Рессела и сравнили наблюдаемые динамические массы звезд M_d, определенные по кривым лучевых скоростей в ТДС, с их массами M_e, найденными по эволюционным трекам (см. рис. 69). Как видно из этого рисунка, в разделенных ТДС как главные, так и вторичные компоненты не очень далеко отошли от начальной главной последовательности. Разница ΔM между эволюционной массой M_e и наблюдаемой динамической массой M_d компонент для всех из 36 звезд (первичные и вторичные компоненты) в разделенных ТДС $\Delta M = M_e - M_d = (-0{,}8 \pm 2{,}1)M_\odot$. Если к этим данным добавить результаты анализа еще 6 звезд в разделенных системах из работы Харриса и др. (Harries et al., 2003), то эта разница $\Delta M = (-0{,}9 \pm 2{,}2)M_\odot$. Поскольку типичная неопределенность в наблюдаемых динамических массах составляет $\pm(1\text{–}2)M_\odot$, такое согласие между величинами M_e и M_d, как считают авторы (Hilditch et al., 2005), следует признать превосходным.

Еще одним строгим тестом для проверки теории звездной эволюции является сравнение положения звезд-компонент разделенных ТДС с соответствующими изохронами на зависимости «масса–светимость». В разделенных системах обе

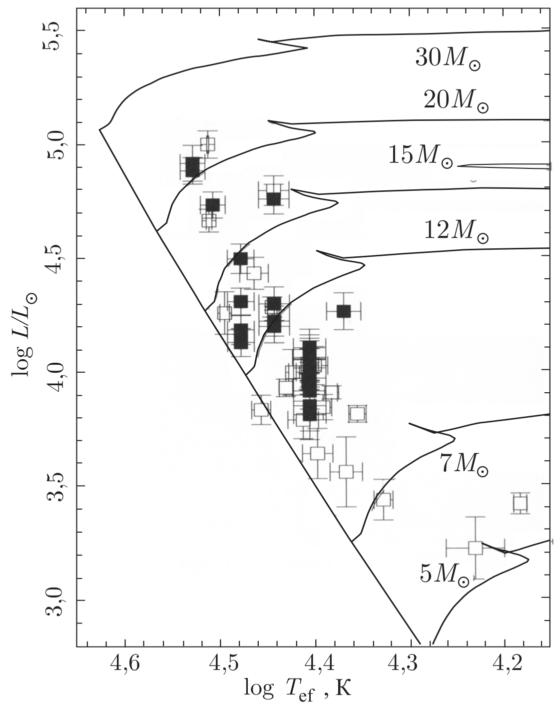


Рис. 69. Положение первичных и вторичных компонент разделенных систем (21 система в Малом Магеллановом облаке) на диаграмме Герцшпрунга–Рессела. Также отмечена начальная главная последовательность и эволюционные треки одиночных звезд с массами 5, 7, 12, 15, 20, $30M_\odot$ и $Z = 0{,}004$ (из работы Hilditch et al., 2005)

компоненты должны лежать не ниже последовательности нулевого возраста. В подавляющем большинстве случаев, в случае разделенных ТДС это имеет место: в пределах ошибок определения звездных параметров почти все звезды лежат либо на последовательности нулевого возраста, либо выше нее. Исключения составляют лишь три системы: 4 56804, 6 11141 и 10 37156, а также первичная компонента в системе 4 103706.

В целом, как заключают авторы (Hilditch et al., 2005), в случае разделенных ТДС, согласие между наблюдениями и теоретическими моделями (Girardi et al, 2000) является очень хорошим для 40 звезд из исследованных 44.

Анализ 28 массивных полуразделенных систем привел авторов (Hilditch et al., 2005) к следующим выводам. Распределение компонент полуразделенных ТДС на диаграмме «масса–логарифм ускорения силы тяжести» радикально отличается от соответствующего распределения для разделенных ТДС. Вторичные (проэволюционировавшие) компоненты–доноры имеют ускорения силы тяжести на поверхности, систематически меньше, по сравнению с первичными компонентами-реципиентами, что свидетельствует об избытках радиусов для проэволюционировавших компонент. На Г–Р-диаграмме (рис. 70) вторичные компоненты полуразделенных ТДС занимают положения, соответствующие значительно более проэволюционировавшим звездам, чем первичные компоненты (на основе моделей одиночных звезд) и имеют значительные избытки радиусов по сравнению с непроэволюционировавшими звездами таких же масс. Все это прямо свидетельствует о том, что вторичные компоненты в полуразделенных системах испытали быстрый первичный обмен масс в случае

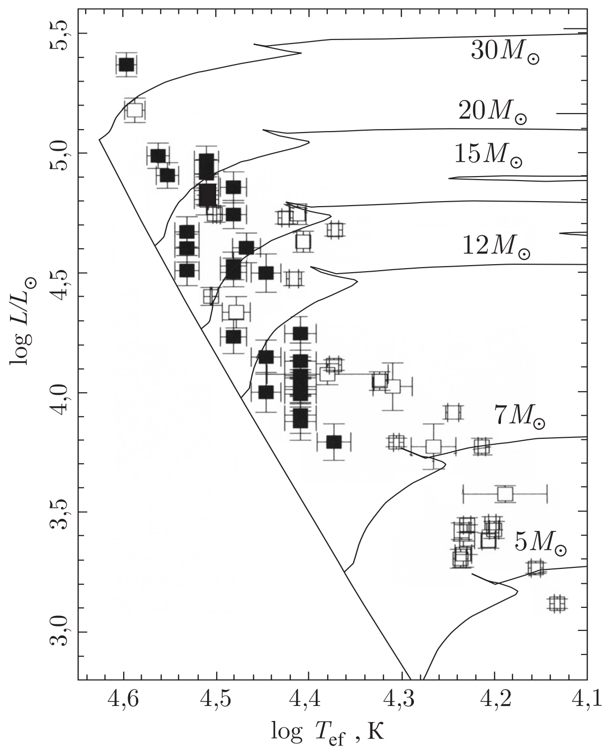


Рис. 70. Положение первичных и вторичных компонент полуразделенных систем (28 полуразделенных и одна компактная система в Малом Магеллановом облаке) на диаграмме Гершпруга–Рессела. Отмечена также начальная, главная последовательность и эволюционные треки одиночных звезд с массами 5, 7, 12, 15, 20, 30$M_\odot$ и $Z = 0{,}004$ (из работы Hilditch et al., 2005)

эволюции ТДС по типу А (заполнение полости Роша перовначально более массивной звездой на стадии горения водорода в ядре) и в настоящее время находятся на сравнительно длительной стадии менее интенсивной потери массы через внутреннюю точку Лагранжа в ядерной шкале времени эволюции (медленное перетекание вещества от менее массивной вторичной компоненты на более массивную первичную в случае эволюции ТДС типа А). В работах Харриса и др. (Harries et al., 2003) и Хильдича, Ховарта и Харриса (Hilditch et al., 2005) отмечалось, что на кривых блеска значительной части (∼40%) полуразделенных массивных ТДС перед началом главного минимума наблюдаются систематические понижения блеска глубиной $0{,}01^m$–$0{,}05^m$, что свидетельствует о поглощении света первичной звезды газовым потоком, истекающим через точку Лагранжа L_1 от вторичной компоненты, заполняющей свою полость Роша. Это является дополнительным свидетельством наличия медленного обмена масс в полуразделенных ТДС.

В то время как вторичные компоненты-доноры в полуразделенных ТДС показывают явные признаки того, что они являются проэволюционировавшими звездами, испытавшими обмен масс, наблюдаемые свойства первичных компонент-реципиентов на Г–Р-диаграмме занимают полосу, характерную для звезд, близких к главной последовательности (см. рис. 70). Первичные компоненты в полуразделенных ТДС нарастили свою массу за счет обмена масс. Интересно сравнить характеристики первичных компонент ($T_{\rm ef}$, $L/L_{\odot}$ и т. п.) с характеристиками одиночных звезд той же массы. Это позволит проверить, успели ли прийти в тепловое равновесие первичные компоненты после стадии быстрого обмена масс. С целью такой проверки авторы (Hilditch et al., 2005) сравнили динамические наблюдаемые массы M_d первичных компонент в полуразделенных ТДС с эволюционными массами M_e, найденными по эволюционным трекам на Г-Р-диаграмме. Разница получилась равной $\Delta M = M_e - M_d = (-1{,}0 \pm 4{,}4)M_{\odot}$. Если дополнительно учесть данные по первичным компонентам из работы Харриса и др. (Harries et al., 2003), эта разница существенно уменьшается $\Delta M = (-0{,}1 \pm 4{,}4)M_{\odot}$. Таким образом, светимости и эффективные температуры первичных компонент-реципиентов в полуразделенных системах с хорошей точностью согласуются со светимостями и температурами равновесных одиночных звезд тех же масс. Такое хорошее согласие свидетельствует о том, что первичные компоненты-реципиенты в полуразделенных ТДС после обмена масс, соответствующего случаю А, успели прийти в тепловое равновесие после быстрого наращивания массы. Авторы отмечают, что разброс величины ΔM для первичных компонент в случае массивных полуразделенных систем составляет $\pm 4{,}4M_{\odot}$, что вдвое больше соответствующей величины для первичных компонент массивных разделенных ТДС ($\pm 2{,}2M_{\odot}$). Поэтому не исключено, что некоторые первичные компоненты массивных полуразделенных ТДС показывают слабые аномалии в величинах светимостей и температур, обусловленные обменом масс. Однако в среднем у первичных компонент-реципиентов в массивных полуразделенных ТДС не наблюдается значимых избытков (или недостатков) светимости для их масс. Эти результаты, полученные для массивных полуразделенных ТДС в ММО, подобны результатам по массивным полуразделенным ТДС в нашей Галактике, полученным Хильдичем (Hilditch et al., 2004). Для 10 систем средняя разница $\Delta M = M_e - M_d = (+2 \pm 5)M_{\odot}$. То есть и для первичных звезд-реципиентов в массивных полуразделенных ТДС нашей Галактики (металличность которых равна $Z = 0{,}020$, т. е. в ~ 5 раз больше, чем для звезд ММО) не наблюдается значимого избытка (или недостатка) светимости. Авторы (Hilditch et al., 2005), с привлечением теоретических расчетов эволюции массивных ТДС с обменом масс (Wellstein and Langer, 1999), анализируют возможные отклонения в структуре и наблюдаемых характеристиках первичных компонент-реципиентов в полуразделенных ТДС от равновесных одиночных звезд, вызванные обменом масс, такие, как эффективность перемешивания полуконвекцией в звездах-реципиентах, «омоложение» ядра звезды-реципиента в процессе аккреции ею вещества донора и т. п.

В целом работы Харриса и др. (Harries et al., 2003) и Хильдича, Ховарта и Харриса (Hilditch et al., 2005) демонстрируют эффективность метода синтеза при массовых исследованиях ТДС. Особенно перспективны такие исследования при интерпретации высокоточных фотометрических наблюдений тысяч ТДС со спутников COROT и «Kepler».

Авторы (Harries et al., 2003, Hilditch and Harries, 2005) на основе результатов исследования 50 затменных двойных систем в ММО выполнили также независимое определение расстояния до этой галактики. Сравнивая наблюдаемые и вычисленные (на основе результатов интерпретации кривых блеска) звездные величины звезд-компонент исследованных 50 ТДС, и учитывая межзвездное поглощение по наблюдаемым показателям цвета (B-I), авторы определили модуль расстояния для ММО равным $18{,}91^m \pm 0{,}03^m \pm 0{,}1^m$ (указаны «внутренние» и «внешние» ошибки). Соответствующее расстояние для ММО равно $D = (60{,}6 \pm 1{,}0 \pm 2{,}8)$ кпк. Эта величина является одной из наиболее точной и надежной оценкой расстояния до ММО.

3. Проверка эволюционного статуса звезд умеренных масс в ТДС типа Алголя

В предыдущем параграфе мы описали результаты современных исследований массивных (суммарная масса компонент $M_1 + M_2 > 12M_\odot$) ТДС. Рассмотрим теперь результаты исследования ТДС умеренных масс ($M_1 + M_2 > 1M_\odot$). В работе Ибаноглу и др. (Ibanoglu et al., 2006) выполнены исследования 74 разделенных и 61 полуразделенных систем этого типа и изучена эволюция углового момента в них. Авторы выполнили компиляцию всех известных и надежно определенных сведений о разделенных и полуразделенных системах типа Алголя, взяв за основу Каталог Буддинга и др. (Budding et al., 2004). Во многих случаях определение параметров этих систем из кривых блеска выполнено методом синтеза.

В работе суммированы данные о 74 разделенных системах с измеренными кривыми лучевых скоростей для обеих компонент, для которых выполнены наиболее надежные определения масс, радиусов и температур. Кроме того, в работе суммированы данные о 61 полуразделенной системе (классических алголях), среди которых 38 принадлежат к типу систем с измеренными кривыми лучевых скоростей обеих компонент (SB2-системы) и 23 имеют кривые лучевых скоростей лишь одной, более яркой компоненты (SB1-системы). В табл. 29 приведены данные о разделенных системах, а в табл. 30 даны характеристики полуразделенных систем; эти таблицы приведены по материалам работы (Ibanoglu et al., 2006). Отметим, что статистический анализ данных по алголям проводился также в работах Каретникова (1991), Горды и Свечникова (1998), (см. также ранние работы Свечникова (1969) и работы Ковалевой (2000) и Малкова (Malkov, 2003)).

Таблица 29

Параметры разделенных алголей (по материалам работы Ibanoglu et al., 2006)

Объект	Спектр. класс	$P_{\rm orb}$, d	q	M_1, $M_\odot$	M_2, $M_\odot$	R_1, $R_\odot$	R_2, $R_\odot$	$\log T_1$ [K]	$\log T_2$ [K]
V805Aql	A2+(A9)	2,4082	0,773	2,11	1,63	2,11	1,75	3,912	3,855
BW Aqr	F7V+F8V	6,7197	0,932	1,48	1,38	2,08	1,81	3,800	3,807
V539Ara	B3V+B4V	3,1691	0,851	6,24	5,31	4,50	3,42	4,257	4,232
AR Aur	B8V+B9V	4,1347	0,925	2,48	2,29	1,78	1,82	4,038	4,014
B Aur	A1IV+A1IV	3,9600	0,969	2,38	2,31	2,77	2,63	3,970	3,964
HS Aur	G8V+K0V	4,9077	0,977	0,90	0,88	1,01	0,87	3,727	3,715
ZZ Boo	F2V+F2V	4,9918	0,969	1,62	1,57	2,15	2,15	3,830	3,830
AS Cam	B8V+B9.5V	3,4310	0,758	3,30	2,50	2,60	1,96	4,053	3,991
GL Car	B0.5+B1	2,4223	1,000	13,5	13,50	4,99	4,74	4,476	4,468
QX Car	B2V+B2V	4,4780	0,915	9,27	8,48	4,29	4,05	4,377	4,355
YZ Cas	Alm+F2V	4,4672	0,584	2,31	1,35	2,53	1,35	3,965	3,826
AR Cas	B4V+A6V	6,0663	0,315	5,90	1,86	5,05	1,60	4,233	3,909
IT Cas	F5+F5	3,8966	0,998	1,33	1,33	1,59	1,56	3,810	3,810
PV Cas	B9.5V+B9.5V	1,7505	1,018	2,76	2,81	2,25	2,30	4,008	4,008
SZ Cen	A7V+A7V	4,1080	1,018	2,28	2,32	3,62	4,55	3,918	3,903

Продолжение табл. 29

Объект	Спектр. класс	P_{orb}, d	q	M_1, $M_\odot$	M_2, $M_\odot$	R_1, $R_\odot$	R_2, $R_\odot$	$\log T_1$ [K]	$\log T_2$ [K]
V346Cen	B0.5-1V	6,3220	0,712	11,80	8,40	8,20	4,20	4,423	4,380
WX Cep	A5V+A2V	3,3785	1,090	2,33	2,54	2,71	4,00	3,947	3,910
CW Cep	B0.5V+B0.5V	2,7291	0,919	12,41	11,41	5,41	5,18	4,450	4,431
EI Cep	F3V+F1V	8,4394	1,054	1,68	1,77	2,33	2,90	3,842	3,829
EK Cep	A1.5V+G5V$_p$	4,4278	0,552	2,03	1,12	1,58	1,32	3,954	3,749
NY Cep	B0.5V	15,2757	0,709	13,00	9,00	6,80	5,40	4,455	4,364
TV Cet	F2V+F5V	9,1033	0,914	1,39	1,27	1,49	1,28	3,845	3,820
XY Cet	Am+Am	2,7807	0,926	1,76	1,63	2,14	1,61	3,933	3,902
RS Cha	A8V+A8V	1,6699	0,980	1,86	1,82	2,14	2,42	3,896	3,872
RZ Cha	F5V+F5V	2,8321	1,000	1,51	1,51	2,26	2,26	3,819	3,819
SW Cma	A5V+A5V	10,092	0,914	2,22	2,03	3,01	2,46	3,907	3,903
GZ Cma	A3m+A4V	4,8009	0,909	2,20	2,00	2,49	2,13	3,944	3,931
α CrB	B9.5IV+G5V	17,3599	0,357	2,58	0,92	3,04	0,90	3,987	3,762
Y Cyg	O9.8V+O9.8V	2,9963	0,97	17,57	17,04	5,93	5,78	4,538	4,534
V380 Cyg	B1.5II-III+B2V	12,4257	0,626	11,10	6,95	14,70	3,74	4,328	4,312
V442 Cyg	F1V+F2V	2,3859	0,902	1,56	1,41	2,07	1,66	3,836	3,831
V453 Cyg	B0.41V+B0.7IV	3,8898	0,773	14,36	11,11	8,55	5,49	4,468	4,451
V477 Cyg	A3V+F5V	2,3470	0,750	1,80	1,35	1,60	1,42	3,939	3,815
V478 Cyg	O9.5V+O9.5V	2,8809	0,978	16,67	16,31	7,42	7,42	4,485	4,485
V1143Cyg	F5V+F5V	7,6407	0,968	1,39	1,35	1,35	1,32	3,809	3,805
BS Dra	F5V+F5V	3,3640	1,000	1,37	1,37	1,45	1,41	3,805	3,812
CM Dra	M4V+M4V	1,2684	0,873	0,24	0,21	0,25	0,24	3,516	3,516
CW Eri	F2V+F2V	2,7284	0,836	1,59	1,33	2,08	1,56	3,835	3,817
TZ For	G8III+F7III	75,6675	1,051	1,95	2,05	3,96	8,32	3,803	3,699
YY Gem	M1V+M1V	0,8143	1,006	0,60	0,60	0,62	0,62	3,578	3,571
RX Her	B9V+A0V	1,7786	0,847	2,75	2,33	2,44	1,96	4,015	3,985
TX Her	A8V+F2V	2,0598	0,895	1,62	1,45	1,58	1,48	3,862	3,826
DI Her	B4V+B5V	10,5502	0,874	5,15	4,52	2,68	2,48	4,230	4,176
V624 Her	A3m+A7V	3,8950	0,824	2,27	1,87	3,03	2,21	3,910	3,899
VZ Hya	F6V+F6V	2,9043	0,911	1,23	1,12	1,35	1,12	3,811	3,797
AI Hya	F2m+F0V	8,2897	1,086	1,98	2,15	2,10	3,80	3,851	3,829
chi2 Hya	B8V+B8V	2,2677	0,730	3,61	2,64	4,39	2,16	4,077	4,089
HS Hya	F5V+F5V	1,5680	0,971	1,26	1,22	1,28	1,22	3,812	3,805
CM Lac	A2V+F0V	1,6047	0,782	1,88	1,47	1,59	1,42	3,934	3,855

Продолжение табл. 29

Объект	Спектр. класс	P_{orb}, d	q	M_1, $M_\odot$	M_2, $M_\odot$	R_1, $R_\odot$	R_2, $R_\odot$	$\log T_1$ [K]	$\log T_2$ [K]
UV Leo	G2V+G2V	0,6001	0,917	1,21	1,11	0,97	1,22	3,791	3,758
GG Lup	B7V+B9V	1,8496	0,610	4,12	2,51	2,38	1,73	4,168	4,040
RR Lyn	Am+F0V	9,9451	0,775	2,00	1,55	2,50	1,93	3,877	3,851
FL Lyr	F8V+G8V	2,1782	0,787	1,22	0,96	1,28	0,96	3,791	3,723
TZ Men	A0V+A8V	8,5690	0,604	2,49	1,50	2,02	1,43	4,016	3,856
UX Men	F8V+F8V	4,1811	0,968	1,24	1,20	1,35	1,27	3,791	3,789
FS Mon	F2V+F4V	1,9059	0,896	1,63	1,46	2,05	1,63	3,827	3,816
U Oph	B5V+B6V	1,6773	0,925	4,93	4,56	3,29	3,01	4,227	4,203
WZ Oph	F8V+F8V	4,1835	0,982	1,13	1,11	1,33	1,36	3,787	3,782
V451 Oph	B9V+A0V	2,1966	0,849	2,78	2,36	2,64	2,03	4,033	3,990
EW Ori	G0V+G5V	6,9368	0,970	1,19	1,15	1,14	1,09	3,775	3,761
GG Ori	A2+	6,6315	0,998	2,34	2,34	1,85	1,83	3,997	3,997
BK Peg	F8V+F8V	5,4899	1,117	1,28	1,43	1,57	1,97	3,786	3,781
EE Peg	A3m+F5V	2,6282	0,619	2,15	1,33	2,09	1,31	3,939	3,809
AG Per	B4V+B4V	2,0287	0,914	5,36	4,90	2,99	2,60	4,261	4,241
IQ Per	B8V+A6V	1,7436	0,487	3,53	1,72	2,47	1,53	4,099	3,889
zet Phe	B6V+B8V	1,6698	0,651	3,85	2,51	2,09	1,45	4,229	4,128
UV Psc	G5V+K3V	0,8610	0,733	1,10	0,81	1,14	0,85	3,761	3,677
PV Pup	A8V+A8V	1,6607	0,993	1,57	1,55	1,54	1,50	3,840	3,841
VV Pyx	A1V+A1V	4,5961	1,000	2,10	2,10	2,17	2,17	3,978	3,978
V526 Sgr	B9.5+A2	1,9194	0,740	2,27	1,68	1,89	1,56	4,005	3,940
V1647 Sgr	A1V+A1V	3,2828	0,901	2,19	1,97	1,83	1,67	3,981	3,958
CD Tau	F7V+F7V	3,4351	0,949	1,44	1,37	1,80	1,58	3,792	3,792
CV Vel	B2.5V+B2.5V	6,8895	0,983	6,10	5,99	4,10	3,95	4,259	4,259
DM Vir	F7V+F7V	4,6694	0,991	1,45	1,45	1,76	1,76	3,813	3,813

Таблица 30

Полуразделенные алголи (по материалам работы Ibanoglu et al., 2006)

Объект	Спектр. класс	P_{orb}, d	SB	q	M_1, $M_\odot$	M_2, $M_\odot$	R_1, $R_\odot$	R_2, $R_\odot$	$\log T_1$ [K]	$\log T_2$ [K]
TW And	F0V+K1-3III-IV	4,1228	SB2	0,210	1,68	0,32	2,19	3,37	3,857	3,622
WW And	A0+G5-K0	23,2852	SB1	0,100	2,84	0,28	2,04	9,45	4,077	3,731
KO Aql	A0V+(F8 IV)	2,8640	SB2	0,223	2,26	0,50	1,70	3,30	4,003	3,607
RY Aqr	A3+G8?	1,9666	SB2	0,230	1,30	0,30	1,50	1,70	3,908	3,699

Продолжение табл. 30

Объект	Спектр. класс	P_{orb}, d	SB	q	M_1, $M_\odot$	M_2, $M_\odot$	R_1, $R_\odot$	R_2, $R_\odot$	$\log T_1$ [K]	$\log T_2$ [K]
IM Aur	B9+K3IV	1,2473	SB1	0,311	2,24	0,76	2,57	1,74	4,016	3,701
Y Cam	A9IV+K0	3,3055	SB1	0,240	1,70	0,40	2,92	2,95	3,858	3,654
RZ Cas	A3V+G5IV	1,1952	SB2	0,351	2,10	0,74	1,67	1,94	3,930	3,658
SX Cas	B7+K3III	36,5668	SB2	0,300	5,10	1,50	3,00	23,50	3,929	3,602
TV Cas	A0V+G2	1,8126	SB2	0,470	3,78	1,53	3,15	3,29	4,020	3,718
U Cep	B7V+G8III-IV	2,4929	SB2	0,550	3,57	1,86	2,41	4,40	4,050	3,697
RS Cep	B9.7eV+G8III	12,4200	SB2	0,145	2,83	0,41	2,65	7,63	3,953	3,665
XX Cep	A8V+(G4IV)	2,3373	SB1	0,150	2,03	0,33	2,12	2,25	3,881	3,648
XY Cep	B9+(G4IV)	2,7745	SB1	0,250	4,70	1,20	3,20	3,80	4,086	3,666
GT Cep	B3V+(A0)	4,9088	SB2	0,430	4,60	2,00	4,10	7,00	4,279	4,001
R CMa	F2V+G8IV-V	1,1359	SB2	0,170	1,07	0,17	1,50	1,15	3,863	3,628
S Cnc	B9.5V+G8-9III-IV	9,4845	SB2	0,090	2,51	0,23	2,15	5,25	4,020	3,646
RZ Cnc	K2III+K4III	21,6431	SB2	0,170	3,20	0,54	10,20	12,20	3,636	3,578
U CrB	B6V+F8III-IV	3,4522	SB2	0,289	4,74	1,46	2,79	4,83	4,141	3,719
RW CrB	F0+K3	0,7264	SB1	0,220	1,60	0,40	1,54	1,10	3,862	3,626
SW Cyg	A2+K3	4,5729	SB1	0,190	2,50	0,50	2,60	4,30	3,956	3,689
VW Cyg	A3e+G5	8,4303	SB1	0,280	2,10	0,60	2,00	7,00	3,946	3,649
WW Cyg	B8+(G9)	3,3177	SB1	0,310	2,10	0,60	2,00	7,00	3,946	3,649
KU Cyg	F4p+K5eIII	38,4388	SB2	0,125	3,80	0,48	3,38	17,10	3,866	3,562
V548Cyg	A1V+F7	1,8052	SB1	0,220	3,90	1,10	3,70	2,70	3,990	3,732
TW Dra	A8V+K0III	2,8067	SB2	0,470	1,70	0,80	2,40	3,40	3,904	3,620
Al Dra	A0V+GV-IV	1,1988	SB1	0,429	2,86	1,34	2,17	2,42	4,003	3,737
S Equ	B9.5V+F7IV	3,4361	SB2	0,131	3,19	0,42	2,70	3,30	4,086	3,763
AS Eri	A0+G6IV	2,6642	SB2	0,110	1,92	0,21	1,57	2,19	3,928	3,708
RW Gem	B5V+F5	2,8655	SB1	0,290	5,60	1,60	3,40	4,50	4,113	3,807
RX Gem	A0V+K2?	12,2085	SB2	0,254	4,40	0,80	4,80	7,00	3,943	3,633
RY Gem	A2V+K0-3IV-V	9,3007	SB2	0,193	2,04	0,39	2,38	6,19	3,955	3,600
AF Gem	B9.5V+G0III-IV	1,2435	SB2	0,342	3,37	1,15	2,61	2,32	3,998	3,766
UX Her	A3V+K?	1,5489	SB1	0,210	2,70	0,60	1,82	1,86	3,954	3,652
AD Her	A4V+K2	9,7666	SB1	0,350	2,90	0,90	2,60	7,70	3,934	3,663
TT Hya	A3V+G6III	6,9535	SB2	0,224	2,63	0,59	1,95	5,87	3,989	3,637
δLib	A0V+K2IV	2,3274	SB2	0,345	4,70	1,70	4,12	3,88	3,974	3,690
T Lmi	A0-3V+G5III	3,0199	SB1	0,130	6,10	0,60	2,60	3,50	3,984	3,706
TU Mon	B5V+F3	5,0902	SB2	0,210	12,60	2,70	5,60	7,10	4,192	3,853

Продолжение табл. 30

Объект	Спектр. класс	$P_{\rm orb}$, d	SB	q	M_1, $M_\odot$	M_2, $M_\odot$	R_1, $R_\odot$	R_2, $R_\odot$	$\log T_1$ [K]	$\log T_2$ [K]
AU Mon	B5IV+F8-G0II-III	11,1130	SB2	0,199	5,93	1,18	5,28	10,04	4,190	3,778
BM Ori	B2V+A7IV	6,4705	SB2	0,310	5,90	1,80	3,00	7,00	4,340	3,967
AT Peg	A7V+G?	1,1461	SB2	0,484	2,50	1,21	1,91	2,11	3,918	3,694
RW Per	A5IIIe+G0III	14,1987	SB2	0,150	2,56	0,38	2,80	7,30	3,986	3,709
RY Per	B4:V+F7:II-III	6,8636	SB2	0,271	6,24	1,69	4,06	8,10	4,259	3,802
ST Per	A3+K1-2IV	2,6483	SB1	0,150	3,30	0,50	2,32	2,95	3,953	3,713
DM Per	B5V+A5III	2,7277	SB2	0,284	7,31	2,07	4,50	4,75	4,255	3,923
βPer	B7Ve+G8III	2,8673	SB2	0,217	3,70	0,81	2,74	3,60	4,077	3,630
Y Psc	A3+K0IV	3,7658	SB1	0,250	2,80	0,70	3,06	3,98	3,971	3,694
XZ Pup	A0+(K2IV)	2,1924	SB1	0,400	3,00	1,20	3,43	3,41	3,981	3,712
RZ Sct	B1Ib+A2IV	15,2000	SB1	0,216	5,50	1,50	11,00	14,00	4,353	3,873
U Sge	B7.5V+G4III-IV	3,3806	SB2	0,370	4,45	1,65	4,00	5,00	4,098	3,807
XZ Sgr	A3V+G5IV-V	3,2755	SB1	0,140	1,90	0,30	1,15	2,50	3,934	3,699
V356 Sgr	B3V+A1-2III	8,8961	SB1	0,380	12,20	4,70	8,50	15,40	4,304	4,087
V505 Sgr	A2V+F7IV	1,1829	SB2	0,520	2,68	1,23	2,24	2,17	3,939	3,713
HU Tau	B8V+F5III-IV	2,0563	SB2	0,256	4,43	1,14	2,57	3,21	4,079	3,738
λTau	B3V+A4IV	3,9530	SB2	0,263	7,18	1,89	6,40	5,30	4,253	3,902
TX Uma	B8V+G0III-IV	3,0633	SB2	0,248	4,76	1,18	2,83	4,24	4,110	3,740
W Umi	A3+(K0IV)	1,7012	SB1	0,490	2,40	1,20	3,39	2,67	3,949	3,760
S Vel	A5Ve+K5IIIe	5,9336	SB1	0,120	1,80	0,30	1,50	4,20	3,926	3,609
DL Vir	G8III+A3	1,3155	SB2	0,570	2,18	1,06	2,60	2,17	3,854	3,715
Z Vul	B3V+A2III	2,4549	SB2	0,430	5,40	2,30	4,30	4,50	4,274	3,954
RS Vul	B5V+G0III-IV	4,4777	SB2	0,310	4,40	1,40	5,50	4,20	4,189	3,790

Средние характеристики разделенных и полуразделенных систем типа Алголя, вычисленные по всем исследованным системам, оказались следующие (см. табл. 31).

В таблице приведены характеристики разделенных и полуразделенных ТДС типа Алголя (Ibanoglu et al., 2006).

Согласно данным (Ibanoglu et al., 2006), в подавляющем большинстве случаев как первичные, так и вторичные компоненты разделенных ТДС типа Алголя лежат в полосе Главной последовательности. Имеются лишь четыре системы из исследованных 74, которые уклоняются от этого правила: CM Dra (M4V+M4V) и YY Gem (M1V+M1V) (которые являются активными вспыхивающими звездами, содержащими маломассивные M-звезды с наименьшими радиусами) и TZ For и V 380 Cyg, компоненты которых имеют избытки радиусов. В системе TZ For (G8III+F7III) обе компоненты имеют избытки радиусов, причем вторичная компонента (имеющая меньшую яркость) здесь является гигантом, а первичная (имеющая меньшую массу и более высокую эффективную температуру) имеет характеристики субгиганта.

Таблица 31

Средние характеристики разделенных и полуразделенных систем типа Алголя

Тип	Число систем	Орбит. период $P_{\rm orb}$	$\langle q\rangle = \left\langle \frac{M_2}{M_1} \right\rangle$	$\langle M_1\rangle$ $\langle M_2\rangle$	$\langle M\rangle =$ $= \langle M_1\rangle + \langle M_2\rangle$	$\langle R_1\rangle$ $\langle R_2\rangle$	$\langle T_1\rangle$ $\langle T_2\rangle$	J'
Раздел. ТДС	72	$5\overset{d}{.}2$	0,88	$3{,}6M_\odot$ $3{,}1M_\odot$	$6{,}7M_\odot$	$2{,}8R_\odot$ $2{,}4R_\odot$	11242K 10400K	15,0
Полу-раздел. ТДС	61	$6\overset{d}{.}1$	0,27	$3{,}7M_\odot$ $1{,}0M_\odot$	$4{,}8M_\odot$	$3{,}2R_\odot$ $5{,}3R_\odot$	11066K 5441K	4,6

Примечание: Здесь $J' = J/k$, где $k = 1{,}24\cdot 10^{52}$, J — орбитальный угловой момент системы. $J = \left[G^2/2\pi\right]^{1/3} q\,(1+q)^{-2}\,M^{5/3}P^{1/3} = 1{,}24\cdot 10^{52} q\,(1+q)^{-2}\,M^{5/3}P^{1/3}$, где P — орбитальный период в сутках, M_1, M_2 — массы первичной и вторичной компонент в солнечных массах, $q = M_2/M_1$ — отношение масс, $M = M_1 + M_2$ — суммарная масса системы в солнечных массах.

Такие разделенные системы типа Алголя из двух проэволюционировавших звезд встречаются весьма редко, и их исследование особенно важно для проверки теории эволюции ТДС. Первичная компонента в системе V380Cyg (B1.5II-III+B2V) является проэволюционировавшей ($R = 14{,}7R_\odot$) сравнительно массивной звездой ($M = 11{,}1M_\odot$), в то время как вторичная компонента ($M = 6{,}95M_\odot$) принадлежит к типу звезд начальной главной последовательности ($R = 3{,}74R_\odot$).

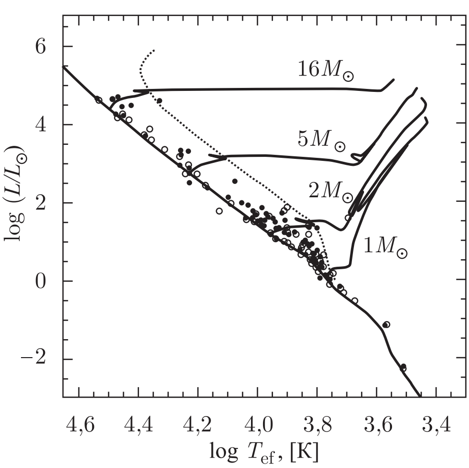


Рис. 71. Положение первичных и вторичных компонент разделенных систем типа Алголя на диаграмме Гершпрунга–Рессела (из работы Ibanoglu et al., 2006)

На рис. 71 показано положение первичных и вторичных компонент разделенных ТДС типа Алголя на Г–Р-диаграмме для одиночных звезд. Теоретические треки посчитаны в работе Pols et al. (1998). Видно, что подавляющее большинство звезд лежит в пределах полосы главной последовательности. Намечается также грубая корреляция между болометрическими светимостями звезд-компонент разделенных ТДС типа Алголя и их орбитальными периодами.

Рассмотрим теперь свойства полуразделенных ТДС типа Алголя. В то время, как первичные компоненты-реципиенты в большинстве случаев лежат внутри полосы главной последовательности (хотя со значительно большим разбросом, чем в случае разделенных ТДС типа Алголя), вторичные компоненты-доноры имеют значительные систематические избытки радиусов и светимостей. Вторичные компоненты имеют значительные избытки светимости по сравнению с одиночными звездами тех же масс, несмотря на то, что их температуры относительно низки. Интересно выяснить, за счет чего у вторичных компонент появляются эти избытки светимости. В области малых масс вторичных компонент (менее $1M_\odot$) их температуры убывают с массой звезды значительно медленнее, по сравнению с одиночными звездами тех же масс. Это и приводит к тому, что наблюдаемые избытки светимости особенно велики у маломассивных вторичных компонент, с массами менее $1M_\odot$. На Г–Р-диаграмме (рис. 72) первичные и вторичные компоненты для полуразделенных алголей также четко разделяются. В то время, как первичные компоненты-реципиенты лежат в полосе Главной последовательности, вторичные компоненты-доноры всегда соответствуют проэволюционировавшим звездам, отошедшим от главной последовательности в область субгигантов и гигантов. Грубая корреляция между болометрической светимостью компонент и орбитальным периодом наблюдается и для полуразделенных ТДС типа Алголя. Сравнение зависимостей «масса–светимость» для первичных и вторичных компонент в разделенных и полуразделенных ТДС типа Алголя показало, что в интервале масс $2M_\odot$–$17M_\odot$ зависимости M–L описываются степенными законами. Для главных компонент разделенных алголей

$$L_1 \sim M_1^{3,92(5)},$$

для главных компонент полуразделенных алголей

$$L_1 \sim M_1^{3,20(26)}.$$

Для вторичных компонент разделенных алголей,

$$L_2 \sim M_2^{3,86(5)}$$

для вторичных компонент полуразделенных алголей

$$L_2 \sim M_2^{1,48(26)}.$$

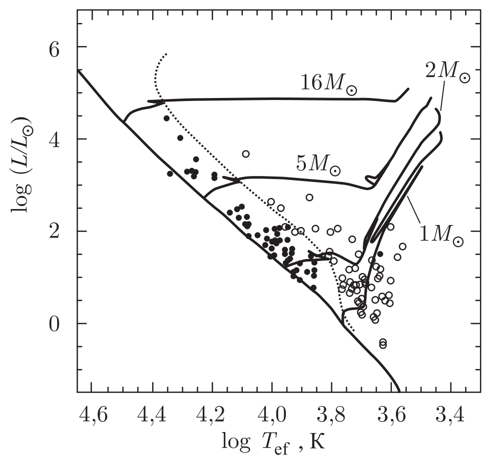


Рис. 72. Положение первичных и вторичных компонент полуразделенных систем типа Алголя на диаграмме Герцшпрунга–Рессела (из работы Ibanoglu et al., 2006)

Видно, что главные и вторичные компоненты разделенных ТДС типа Алголя описываются практически одинаковыми законами «масса–светимость» $\left(L_{1,2} \sim M_{1,2}^{3,9}\right)$. В то же время главные компоненты полуразделенных алголей подчиняются зависимости «масса–светимость» со значительно меньшим показателем степени $\left(L_1 \sim M_1^{3,2}\right)$, а вторичные компоненты полуразделенных алголей имеют еще меньший показатель степени в законе «масса–светимость» $\left(L_2 \sim M^{1,5}\right)$. Все эти особенности отражают различия в эволюционных путях разделенных и полуразделенных ТДС типа Алголя.

В работе (Ibanoglu et al., 2006) выполнен анализ распределений ТДС типа Алголя по угловым орбитальным моментам.

Угловой орбитальный момент ТДС в пренебрежении вращательными угловыми моментами компонент и угловым моментом запасенным в газовых потоках и дисках, записывается в виде

$$J = G^{1/2} q(1+q)^{-2} M^{3/2} A^{1/2} = 8{,}88 \cdot 10^{49} q(1+q)^{-2} M^{3/2} A^{1/2},$$

или

$$J = \left(\frac{G^2}{2\pi}\right)^{1/3} q(1+q)^{-2} M^{5/3} P^{1/3} = 1{,}24 \cdot 10^{52} q(1+q)^{-2} M^{5/3} P^{1/3},$$

где A — большая полуось относительной орбиты (орбита круговая) в солнечных радиусах, P — орбитальный период в сутках, M_1, M_2 — массы первичной и вторичной компонент в массах Солнца, $q = M_2/M_1$ — отношение масс, $M = M_1 + M_2$ — полная масса системы в массах Солнца, G — универсальная гравитационная постоянная. На рис. 73 приведена зависимость между орбитальным угловым моментом и суммарной массой компонент в разделенных ТДС типа Алголя. По оси ординат отложена величина $J'(P) = J(P)/1{,}24 \cdot 10^{52}$, т. е. нормированный орбитальный угловой момент системы. Эта зависимость хорошо аппроксимируется формулой

$$\lg J'(P) = 1{,}73(\pm 0{,}04) \lg M - 0{,}47(\pm 0{,}03),$$

т. е. связь между M и $J'(P)$ хорошо описывается степенной зависимостью

$$J'(P) \sim M^{1{,}73}.$$

Зависимости углового орбитального момента системы от массы каждой из компонент системы хорошо аппроксимируются степенными законами:

$$J'(P) \sim M_1^{1{,}68(5)}; \quad J'(P) \sim M_2^{1{,}74(4)}.$$

Удельный угловой орбитальный момент системы J_s, т. е. момент, рассчитанный на единицу суммарной массы ($J_s = J'(P)/M$), также хорошо описывается степенными зависимостями:

$$J_s \sim M_1^{0{,}71(4)}; \quad J_s \sim M_2^{0{,}74(4)}.$$

Характеристики орбитального углового момента в полуразделенных ТДС типа Алголя следующие. На рис. 74 (Ibanoglu et al., 2006) приведена зависимость $J'(P)$–M для полуразделенных ТДС типа Алголя. Точками отмечены системы с $P_{\text{orb}} > 5^{\text{d}}$,

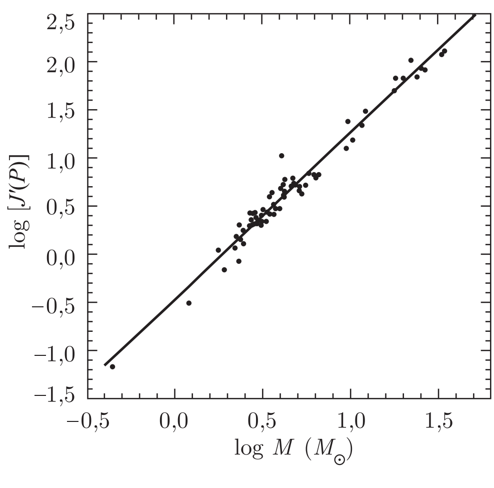


Рис. 73. Зависимость орбитального углового момента от суммарной массы для разделенных систем типа Алголя. Ординаты выражены в системе cgs, асбциссы — в массах Солнца (по материалам работы Ibanoglu et al., 2006)

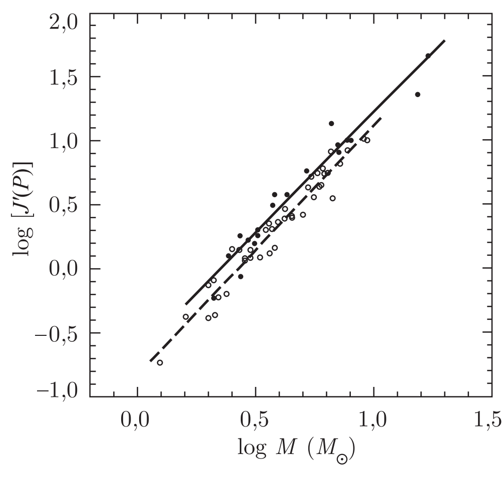


Рис. 74. Зависимость орбитального углового момента от суммарной массы компонент полуразделенных систем типа Алголя. Темные точки соответствуют системам с $P_{\text{orb}} > 5^{\text{d}}$, светлые кружки — системам с $P_{\text{orb}} < 5^{\text{d}}$ (по материалам работы Ibanoglu et al., 2006)

кружками — системы с $P_{\text{orb}} < 5^{\text{d}}$. Такое разделение по периодам связано с тем, что газовая струя, истекающая через точку Лагранжа L_1, в случае $P_{\text{orb}} < 5$–6^{d} непосредственно сталкивается с поверхностью первичной компоненты, а в случае $P_{\text{orb}} > 5$–6^{d}, газовая струя проходит мимо тела первичной звезды, образуя вокруг нее вращающийся газовый диск (Ibanoglu et al., 2006). Зависимость $J'(P){-}M$ хорошо аппроксимируется степенными законами:

$$J'(P) \sim M^{1,89(1)} \quad \text{для} \quad P_{\text{orb}} > 5^{\text{d}},$$
$$J'(P) \sim M^{1,94(7)} \quad \text{для} \quad P_{\text{orb}} < 5^{\text{d}}.$$

Орбитальный угловой момент для полуразделенных алголей с периодами $P_{\text{orb}} < 5^{\text{d}}$ и $P_{\text{orb}} > 5^{\text{d}}$ на 32 % и 80 % меньше (соответственно), чем орбитальный угловой момент разделенных алголей с суммарной массой $\sim 3M_{\odot}$. Зависимость орбитального углового момента от масс каждой из компонент системы также хорошо описывается степенными законами:

$$J'(P) \sim M_1^{1,98(15)} \quad \text{для} \quad P_{\text{orb}} > 5^{\text{d}} \quad \text{и} \quad J'(P) \sim M_1^{1,93(12)} \quad \text{для} \quad P_{\text{orb}} < 5^{\text{d}},$$
$$J'(P) \sim M_2^{1,35(9)} \quad \text{для} \quad P_{\text{orb}} > 5^{\text{d}} \quad \text{и} \quad J'(P) \sim M_2^{1,33(8)} \quad \text{для} \quad P_{\text{orb}} < 5^{\text{d}}.$$

Вторичные компоненты в полуразделенных ТДС типа Алголя с орбитальными периодами более 5^{d} имеют орбитальный угловой момент в два раза больший, чем вторичные компоненты тех же масс, но с орбитальными периодами менее 5^{d}. На рис. 75 приведены зависимости удельного углового момента J_s от массы каждой

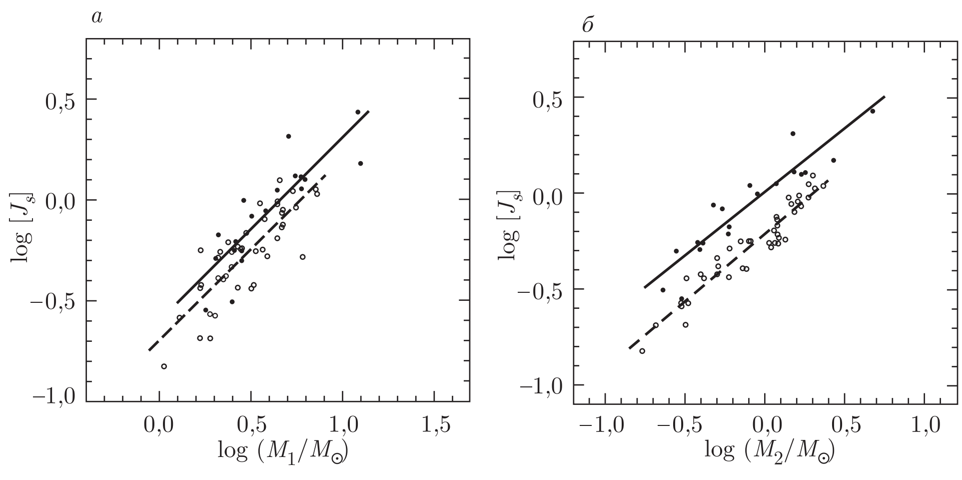


Рис. 75. Зависимость удельных угловых моментов от масс первичных (*а*) и вторичных (*б*) компонент полуразделенных систем, типа Алголя. Здесь темные точки соответствуют системам с $P_{\text{orb}} > 5^{\text{d}}$, светлые кружки — системам с $P_{\text{orb}} < 5^{\text{d}}$ (по материалам работы Ibanoglu et al., 2006)

из компонент в полуразделенных системах типа Алголя. Эти зависимости хорошо описываются степенными законами, причем удельный угловой момент для систем с $P_{\text{orb}} > 5^{\text{d}}$ больше на 24 %, чем удельный угловой момент для систем с $P_{\text{orb}} < 5^{\text{d}}$ в случае первичной компоненты одной и той же массы. В случае вторичных компонент это различие еще больше: удельный орбитальный угловой момент на 65 % больше для систем с $P_{\text{orb}} > 5^{\text{d}}$, чем для систем с $P_{\text{orb}} < 5^{\text{d}}$ при одной и той же массе вторичной компоненты.

Таким образом, распределения орбитальных угловых моментов в полуразделенных ТДС типа Алголя с периодами $P_{\text{orb}} > 5^{\text{d}}$ и $P_{\text{orb}} < 5^{\text{d}}$ различаются, что может быть связано с различием механизмов перетекания вещества вторичной звезды-донора на первичную звезду (образование вращающегося газового диска вокруг нее или прямой удар газовой струи о ее поверхность).

На рис. 76 приведена зависимость величины $J'(p)/M^{5/3}$ от отношения масс q для разделенных (крестики) и полуразделенных (точки и кружки) ТДС типа Алголя. Точки соответствуют полуразделенным алголям с $p > 5^{\rm d}$, кружки — полуразделенным алголям с $p < 5^{\rm d}$. Авторы (Ibanoglu et al., 2006) трактуют корреляцию на рис. 76 как имеющую эволюционный смысл, особенно в случае полуразделенных систем с $p < 5^{\rm d}$. Из рис. 76 можно заключить, что эволюция ТДС умеренных масс начинается с больших орбитальных периодов и больших отношений масс компонент $q \simeq 1$.

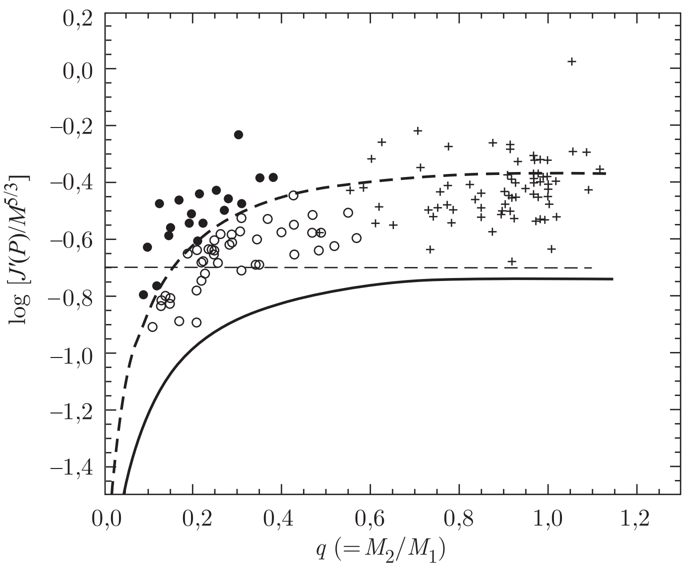


Рис. 76. Зависимость величины $\lg[J'(P)/M^{5/3}]$ от отношения масс q для разделенных и полуразделенных систем типа Алголя. Здесь крестики, темные точки и светлые кружки отражают разделенные и полуразделенные системы (с $P_{\rm orb} > 5^{\rm d}$ и $P_{\rm orb} < 5^{\rm d}$ соответственно). Жирная пунктирная и сплошная линии показывают зависимость $\lg[J'(P)/M^{5/3}]$ от q при постоянном орбитальном периоде $5^{\rm d}$ и $0{,}4^{\rm d}$. Пунктирная горизонтальная прямая отделяет разделенные и полуразделенные системы от контактных систем, которые расположены ниже этой прямой (по материалам работы Ibanoglu et al., 2006)

В течение ядерной эволюции компонент более массивная компонента заполняет свою полость Роша. В системе происходит перенос масс между компонентами и отношение масс q уменьшается. Как видно из рис. 76, в этом случае точки перемещаются справа налево, в область малых q. Пока отношение масс q не достигает достаточно малой величины $\sim 0{,}4$, эволюция ТДС происходит без существенной потери углового момента (точки на рис. 76 при уменьшении q до значения 0,4 перемещаются в горизонтальном направлении). Когда отношение масс становится менее 0,4, потеря орбитального углового момента из системы значительно возрастает, и полный угловой момент системы начинает убывать (точки на рис. 76 смещаются влево и вниз). Как видно из рис. 76, для ТДС с короткими орбитальными периодами $P_{\rm orb} < 5^{\rm d}$ потеря углового момента из системы в процессе ее эволюции является наибольшей. Для систем с длинными орбитальными периодами $P_{\rm orb} > 5^{\rm d}$ потеря орбитального углового момента из системы меньше, но, когда q достигает малых значений <0,2 она становится тоже значительной.

Возможные механизмы потери углового момента из ТДС — это потеря момента при неконсервативном обмене масс, потеря момента, обусловленная магнитным звездным ветром из компонент системы, потеря момента, связанная с излучением системой гравитационных волн (существенна лишь для наиболее коротко-периодических систем, главным образом, для катаклизмических двойных), а также потеря момента, связанная с взаимодействием ТДС (например, посредством магнитного звездного ветра) с околозвездной оболочкой, сформированной во время быстрой стадии первичного обмена масс, когда перетекание вещества происходило от более массивной к менее массивной компоненте. В этом случае расстояние между компонентами системы сокращалось, поэтому обмен масс происходил не в ядерной, а в тепловой шкале времени эволюции истекающей звезды.

Для катаклизмических двойных потеря углового момента системой, связанная с взаимодействием системы с околозвездной оболочкой, рассматривалась в работах (Spruit and Taam, 2001 и Taam and Spruit, 2001). Для ТДС типа Алголя такой механизм потери углового момента системой изучен в работе Chen et al. (2006).

Распределения по массам первичных и вторичных компонент в полуразделенных ТДС типа Алголя резко различаются: массы вторичных компонент в среднем сдвинуты относительно масс первичных в сторону меньших масс, что также свидетельствует о том, что в полуразделенных системах произошел обмен масс, приведший к перемене ролей компонент. Первоначально более массивная компонента, заполнив свою полость Роша, потеряла значительную часть своей массы, а бывшая менее массивная компонента нарастила свою массу за счет аккреции вещества истекающей звезды. В итоге бывшая более массивная компонента стала менее массивной (вторичной) звездой, значительно более продвинутой в своем эволюционном пути, по сравнению со спутником. Следует отметить, что распределения по массам первичных и вторичных компонент в ТДС могут быть сильно искажены эффектами наблюдательной селекции, поскольку маломассивный спутник низкой светимости трудно обнаружить в суммарном спектре двойной системы. Применение современных ПЗС-приемников излучения позволяет выявлять весьма слабые линии маломассивных спутников в спектрах ТДС, что дает возможность уменьшить роль эффектов наблюдательной селекции при анализе распределений масс компонент ТДС.

4. Оценка распределения угловой скорости вращения внутри звезды из анализа наблюдаемого поворота линии апсид в тесных двойных системах

В предыдущих главах мы описали методы и результаты определения концентрации вещества в недрах звезд по наблюдаемому вращению линии апсид в тесных двойных системах. Было отмечено, что результаты определения параметра апсидального вращения k_2 в двойных системах хорошо согласуются с теоретическими значениями k_2 для тесных двойных систем, состоящих из звезд главной последовательности. Этот факт, в совокупности с тем важным обстоятельством, что в последние годы теоретические модели внутреннего строения звезд главной последовательности достигли высокого совершенства (особенно в связи с улучшением коэффициентов непрозрачности звездного вещества — см., например, Rogers and Iglesias, 1992; Iglesias, Rogers and Wilson, 1992), позволяет по-новому поставить задачу интерпретации наблюдений вращения линии апсид в тесных двойных системах. В работе (Khaliullin and Khaliullina, 2007) эта задача впервые была поставлена в «перевернутом» виде. Если раньше при анализе вращения линии апсид угловые скорости вращения звезд ω_r задавались «руками» из независимых соображений (см. выше) и искался средневзвешенный по двум звездам коэффициент апсидального вращения $\overline{k}_2$, то авторы этой пионерской работы решили задать «руками» теоретические значения параметра k_2 и провели поиск угловых скоростей вращения звезд ω_r из анализа наблюдаемых скоростей вращения линии апсид для трех десятков затменных двойных систем. Важно отметить, что определенные таким образом угловые скорости вращения звезд ω_r отражают не только угловые скорости вращения поверхностных слоев звезд (которые могут быть оценены из наблюдаемых доплеровских уширений профилей линий в спектрах звезд), но также учитывают вклад внутренних слоев в теле звезды, т. е. получаемые в данном случае величины ω_r являются средневзвешенными по всем (в том числе и внутренним, недоступным прямым наблюдениям) слоям в недрах звезды. Таким образом, работа (Khaliullin and Khaliullina, 2007) открывает новые перспективы наблюдательного исследования степени дифференциальности вращения звезд, а также проверки теории синхронизации осевого и орбитального вращения звезд в ТДС. Ниже мы кратко излагаем результаты работы (Khaliullin and Khaliullina, 2007).

Как известно, апсидальный период U, зависящий от параметров затменной двойной системы, определяет соотношение

$$\frac{P}{U} = \frac{P}{U_{\rm cl}} + \frac{P}{U_{\rm rel}}, \tag{484}$$

где P — орбитальный период системы. Классический эффект поворота линии апсид, связанный с приливной и вращательной деформацией компонент, выражается через параметр апсидального вращения k_2, характеризующий концентрацию вещества в теле звезды, следующим соотношением (см. выше):

$$\frac{P}{U_{\rm cl}} = \sum_i C_i k_{2,\,i}. \tag{485}$$

Релятивистский эффект поворота линии апсид определяется формулой (Levi-Civita, 1937)

$$\frac{P}{U_{\rm rel}} = 3G\frac{M_1 + M_2}{c^2 a \left(1 - e^2\right)}, \tag{486}$$

где G — постоянная тяготения, a — большая полуось орбиты, M_1 и M_2 — массы компонент.

Величины C_i определяются параметрами двойной системы, которые находятся из анализа кривой блеска и кривой лучевых скоростей двойной системы:

$$C_i = \left(\frac{R_i}{a}\right)^5 \left[\frac{M_{3-i}}{M_i} 15 f\left(e\right) + \left(\frac{\omega_{r,\,i}}{\omega_k}\right)^2 \left(1 + \frac{M_{3-i}}{M_i}\right) g\left(e\right)\right], \tag{487}$$

где

$$f\left(e\right) = \left(1 + \frac{3}{2}\,e^2 + \frac{1}{8}\,e^4\right) \frac{1}{\left(1 - e^2\right)^5}, \quad g\left(e\right) = \frac{1}{\left(1 - e^2\right)^2}. \tag{488}$$

Здесь R_i, M_i, $\omega_{r,i}$ — радиусы, массы и угловые скорости осевого вращения компонент соответственно, a — большая полуось относительной орбиты, e — эксцентриситет орбиты, $\omega_k{=}2\pi/P$ — средняя угловая скорость орбитального вращения. Индекс $i = 1$ и название «первичная» относятся к более массивной компоненте. Соотношение (487) выведено в предположении, что векторы осевого и орбитального вращения звезд коллинеарны.

Соотношение

$$\frac{P}{U} = \frac{(2\pi/U)}{(2\pi/P)} = \frac{\omega_{\rm aps}}{\omega_{\rm orb}}$$

равно угловой скорости апсидального вращения ω_{aps}, выраженной в долях средней угловой скорости орбитального вращения ω_{orb}.

Параметр C_i состоит из двух частей

$$C_i = C_i^{\mathrm{tide}} + C_i^{\mathrm{rot}}, \tag{489}$$

где

$$C_i^{\mathrm{tide}} = r_i^5 \frac{M_{3-i}}{M_i} 15 f(e), \tag{490}$$

$$C_i^{\mathrm{rot}} = r_i^5 \left(1 + \frac{M_{3-i}}{M_i}\right) g\,(e) \left(\frac{\omega_{r,\,i}}{\omega_k}\right)^2. \tag{491}$$

Здесь $r_i = R_i/a$ — относительные радиусы компонент. Величины C_i^{tide} и C_i^{rot} описывают вклад в общее апсидальное движение эффектов приливной и вращательной деформации звезд соответственно.

Таким образом, следуя формулам (487)–(491), уравнение (485) может быть переписано в виде

$$\frac{P}{U_{\mathrm{cl}}} = \frac{P}{U_{\mathrm{tide}}} + \frac{P}{U_{\mathrm{rot}}}, \tag{492}$$

где

$$\frac{P}{U_{\mathrm{tide}}} = \sum_i k_{2,i} C_i^{\mathrm{tide}}, \quad \frac{P}{U_{\mathrm{rot}}} = \sum_i k_{2,i} C_i^{\mathrm{rot}}. \tag{493}$$

В итоге получаем основное уравнение для определения угловой скорости вращения звезд-компонент системы:

$$\sum_i A_i \left(\frac{\omega_{r,\,i}}{\omega_k}\right)^2 = \frac{P}{U_{\mathrm{rot}}^{\mathrm{obs}}}, \tag{494}$$

где

$$A_i = k_{2,\,i} r_i^5 \left(1 + \frac{M_{3-i}}{M_i}\right) g(e). \tag{495}$$

Правая часть уравнения (494) записывается в виде:

$$\frac{P}{U_{\mathrm{rot}}^{\mathrm{obs}}} = \frac{P}{U_{\mathrm{obs}}} - \frac{P}{U_{\mathrm{rel}}} - \frac{P}{U_{\mathrm{tide}}}, \tag{496}$$

где первый член правой части описывает полную относительную угловую скорость апсидального вращения, определяемую из наблюдений, второй член дает вклад релятивистского эффекта (рассчитывается теоретически по формуле (486)) и третий член описывает эффект, связанный с приливной деформацией компонент, который зависит как от параметров системы, так и от констант $k_{2,i}$ апсидального вращения (их можно задать априори, основываясь на современных продвинутых моделях внутреннего строения звезд главной последовательности). Важно подчеркнуть, что в основной формуле (494) для определения угловой скорости вращения звезд не учитывается влияние эффектов, связанных с наличием в системе третьего тела, с неколлинеарностью векторов угловой скорости осевого вращения компонент и вектора их орбитального вращения и т. п. (подробнее об этом — см. работы Martynov and Khaliullin, 1980, Шакура, 1985, Guinan and Maloney, 1985, Khaliullin et al., 1991).

Уравнение (494) содержит два неизвестных параметра: угловые скорости вращения первичной и вторичной компоненты. Поэтому для однозначного решения задачи необходимо либо ввести понятие средневзвешенного значения угловой скорости вращения $\overline{\omega}_r$ (подобно средневзвешенному значению $\overline{k}_2$ — см. выше):

$$\left(\frac{\overline{\omega}_r}{\omega_k}\right)^2 = \frac{P}{U_{\mathrm{rot}}^{\mathrm{obs}}} \frac{1}{A_1 + A_2}, \tag{497}$$

либо связать между собой угловые скорости вращения $\omega_{r,1}$ и $\omega_{r,2}$ соотношением, учитывающим различие времен синхронизации для компонент системы, обусловленное различием их физических характеристик (например, одна компонента может иметь лучистую оболочку, а вторая — конвективную). В работе (Khaliullin and Khaliullina, 2007) выбран второй, более реалистичный подход. По определению (Zahn, 1977), характерное время синхронизации t_{syn} определяется уравнением

$$\frac{d\left[\ln\left(\omega_t - \omega_{\text{syn}}\right)\right]}{dt} = -\frac{1}{t_{\text{syn}}}, \tag{498}$$

где t_{syn} — время синхронизации, ω_t — угловая скорость вращения звезды в текущий момент времени, ω_{syn} — угловая скорость вращения звезды, соответствующая ее псевдосинхронизации при движении по эллиптической орбите. Интегрирование соотношения (498) приводит к выражению.

$$\frac{x_t - 1}{x_0 - 1} = e^{-t/t_{\text{syn}}}, \tag{499}$$

где $x_t = \omega_t/\omega_{\text{syn}}$, $x_0 = \omega_0/\omega_{\text{syn}}$, ω_0 — угловая скорость вращения звезды в начальный момент времени $t = 0$ (для звезды, соответствующей начальной главной последовательности). Таким образом, в работе (Khaliullin and Khaliullina, 2007) введена следующая связь между угловыми скоростями вращения компонент двойной системы:

$$\omega_{r,2} = Q\omega_{r,1}, \tag{500}$$

где

$$Q = \frac{1 + (x_0 - 1)\ e^{-t/t_{\text{syn},2}}}{1 + (x_0 - 1)\ e^{-t/t_{\text{syn},1}}}. \tag{501}$$

Времена синхронизации $t_{\text{syn},1}$ и $t_{\text{syn},2}$ для первичной и вторичной компонент вычисляются при известных характеристиках звезд, по формулам соответствующей теории синхронизации (Zahn, 1977, Tassoul, 1987, 1988, 1995). Параметр x_0 не может быть определен индивидуально для каждой звезды. Поэтому для его статистической оценки используются результаты анализа многих затменных систем и выводится среднее значение x_0. Поскольку угловые скорости вращения $\omega_{r,1}$ и $\omega_{r,2}$ связаны между собой соотношением (500), из решения уравнения (494) получается однозначный результат:

$$\frac{\omega_{r,1}}{\omega_{\text{syn}}} = \sqrt{\frac{P}{U_{\text{rot}}^{\text{obs}}}\frac{1}{\omega_{sk}}\frac{1}{\left(A_1 + Q^2 A_2\right)}}, \tag{502}$$

где $\omega_{sk} = \omega_{\text{syn}}/\omega_k$ (напомним, что $\omega_k = \dfrac{2\pi}{P}$ — среднее значение кеплеровской орбитальной угловой скорости).

Очевидно, что для круговой орбиты $\omega_{sk} = 1$. Для эллиптической орбиты приливное взаимодействие наиболее эффективно в периастре орбиты, где мгновенная угловая скорость кеплеровского орбитального движения ω_p максимальна и определяется выражением

$$\frac{\omega_p}{\omega_k} = \sqrt{\frac{1+e}{(1-e)^3}}\,. \tag{503}$$

Для орбит с большим эксцентриситетом ω_p может значительно превосходить ω_k. Например, для $e = 0{,}5$ $\omega_p = 3{,}5\omega_k$. При исследовании апсидального вращения для систем с неизвестной из наблюдений угловой скоростью вращения звезд часто принимается, что $\omega_{\text{syn}} = \omega_p$ (см., например, Claret and Gimenez, 1993). Однако, как показано в работе (Hut, 1981), суммарное влияние приливных эффектов по всей эллиптической орбите двойной системы в случае равновесных приливов приводит к меньшей по сравнению с ω_p величине равновесной угловой скорости вращения звезды, соответствующей синхронизации, а точнее говоря, псевдосинхронизации:

$$\frac{\omega_{\rm syn}}{\omega_k} = \frac{1 + (15/2)\ e^2 + (45/8)\ e^4 + (5/16)\ e^6}{\left[1 + 3e^2 + (3/8)\ e^4\right]\ \left(1 - e^2\right)^{3/2}}. \tag{504}$$

В работе (Khaliullin, Khaliullina, 2007) принято это выражение для отношения $\omega_{\rm syn}/\omega_k$. В этой работе также использовались формулы для вычисления времен синхронизации, выведенные в работах (Zahn, 1977; Tassoul, 1987, 1988, 1995) для тесных двойных систем, содержащих звезды ранних спектральных классов (с лучистыми оболочками и конвективными ядрами: $M \geqslant 1{,}6 M_\odot$, $T_e \geqslant 6000$ K):

В теории Зана (Zahn, 1977), как уже отмечалось выше, предполагается, что главный механизм обмена угловым моментом между вращательным и орбитальным движением звезды является радиативное подавление динамических приливов во внешних слоях лучистой оболочки звезды. В альтернативной теории Тассуля (Tassoul, 1987, 1988, 1995) считается, что наиболее эффективным механизмом обмена между вращательным и орбитальным угловыми моментами являются крупномасштабные гидродинамические движения внутри тела приливно деформированной звезды с лучистой оболочкой. В теории Зана время синхронизации выражается через параметры двойной системы следующей формулой (Zahn, 1977):

$$t_{\rm syn} = \frac{1}{(52)^{5/3}\, q^2\, (1+q)^{5/6}\, E_2} \left(\frac{R^3}{GM}\right)^{1/2} \beta^2 \left(\frac{a}{R}\right)^{17/2}, \tag{505}$$

где $t_{\rm syn}$ — выражено в секундах, $q = M'/M$ — отношение масс (M' — масса спутника), R и M — радиус и масса звезды в абсолютных единицах, G — гравитационная постоянная, $\beta = \sqrt{J/(MR^2)}$ — так называемый радиус гирации (J — момент инерции звезды), E_2 — приливный коэффициент $(\sim R_c/R)^8$, где R_c– радиус конвективного ядра звезды. В теории Зана наиболее сильное приливное торможение происходит в течение сравнительно короткого времени, в начале стадии главной последовательности звезды. Поэтому параметры в формуле (505) должны соответствовать стадии главной последовательности. Зан затабулировал коэффициенты E_2 для звезд главной последовательности (Zahn, 1975). Величины радиусов гирации β были затабулированы для звезд главной последовательности в работах (Claret and Gimenez, 1989, 1992). Чтобы привести наблюдаемые M и R к их значениям на главной последовательности можно использовать, например, эволюционные модели для звезд (Claret and Gimenez, 1992) и учесть потерю массы звезды в виде ветра.

В теории Тассуля выводится следующая формула для времени синхронизации:

$$t_{\rm syn} = 5{,}35 \cdot 10^{2+\gamma-N/4} \frac{1+q}{q}\, L^{-1/4} M^{5/4} R^{-3} P^{11/4}, \tag{506}$$

где $t_{\rm syn}$ выражено в годах. Здесь $t_{\rm syn} \approx 10^\gamma t_{sd}$, где t_{sd} — характерное время выравнивания угловой скорости вращения звезды (так называемое «spin-down time»). Величина $\gamma \simeq 1$; M, L, R — масса, светимость и радиус звезды, выраженные в солнечных единицах, P — орбитальный период в сутках, $N = 0$ для радиативной оболочки, $q = M'/M$ — отношение масс компонент (M' — масса спутника).

В табл. 32 (Khaliullin, Khaliullina, 2007) представлены данные по 32 затменным двойным системам, у которых уверенно наблюдается вращение линии апсид, и которые состоят из звезд ранних спектральных классов главной последовательности (масса первичной компоненты $M_1 \geqslant 1{,}6 M_\odot$, ее эффективная температура $T_{\rm ef} \geqslant 6000$ K). Здесь даны массы компонент M_1, M_2, их радиусы R_1, R_2, эффективные температуры

Таблица 32

Параметры 32 затменных систем с известными апсидальными периодами и компонентами ранних спектральных классов($M \geqslant 1{,}6M_\odot$, $T_{\mathrm{ef}} \geqslant 6000$ K) (по материалам работы Khaliullin and Khaliullina, 2007)

№	Название	P^{d}	$\frac{M_1}{M_\odot}$	$\frac{M_2}{M_\odot}$	$\frac{R_1}{R_\odot}$	$\frac{R_2}{R_\odot}$	$\log T_1$ (K)	$\log T_2$ (K)	r_1	r_2	e	U_{obs}, годы	$\frac{P}{U_{\mathrm{obs}}}\cdot 10^5$	$\frac{P}{U^{\mathrm{th}}_{\mathrm{rel}}}\cdot 10^5$	$\frac{P}{U^{\mathrm{th}}_{\mathrm{tide}}}\cdot 10^5$	$\frac{P}{U^{\mathrm{obs}}_{\mathrm{rot}}}\cdot 10^5$
1	V 539 Ara	3,169	6,24	5,31	4,51	3,43	4,260	4,230	0,220	0,167	0,055	161,8	5,362	0,359	4,449	0,554
2	AS Cam	3,431	3,3	2,5	2,58	1,91	4,061	4,000	0,150	0,111	0,170	2420	0,388	0,221	0,662	−0,495
3	GL Car	2,422	13,5	13,0	4,98	4,74	4,476	4,468	0,220	0,209	0,146	25,22	26,293	0,762	17,936	7,595
4	QX Car	4,478	9,27	8,48	4,29	4,05	4,395	4,376	0,144	0,136	0,278	361	3,396	0,411	2,268	0,717
5	AR Cas	6,066	5,90	1,86	4,86	1,59	4,225	3,911	0,175	0,057	0,211	1099	1,511	0,187	0,444	0,880
6	OX Cas	2,489	7,20	6,30	4,69	4,54	4,380	4,373	0,255	0,247	0,042	37,3	18,269	0,468	14,753	3,049
7	PV Cas	1,750	2,82	2,756	2,30	2,25	4,032	4,027	0,212	0,208	0,032	91,3	5,248	0,328	5,192	−0,272
8	KT Cen	4,130	5,30	5,00	4,03	3,75	4,176	4,167	0,171	0,159	0,225	260	4,349	0,293	2,325	1,731
9	V 346 Cen	6,322	11,8	8,4	8,26	4,19	4,423	4,380	0,211	0,107	0,288	321	5,392	0,358	3,300	1,735
10	CW Cep	2,729	13,52	12,08	5,69	5,18	4,449	4,439	0,235	0,214	0,029	46,2	16,172	0,673	14,535	0,964
11	Y Cyg	2,996	17,57	17,04	5,92	5,78	4,485	4,485	0,208	0,203	0,146	47,8	17,160	0,790	14,241	2,129
12	V 453 Cyg	3,890	13,9	10,7	8,47	5,32	4,470	4,445	0,280	0,176	0,019	70,7	15,064	0,518	10,575	3,972
13	V 477 Cyg	2,347	1,79	1,35	1,57	1,27	3,941	3,815	0,144	0,117	0,307	350	1,836	0,203	1,038	0,595
14	V 478 Cyg	2,881	16,67	16,31	7,43	7,43	4,485	4,485	0,272	0,272	0,019	26,3	29,991	0,769	27,869	1,354
15	HS Her	1,637	5,0	1,61	2,79	1,59	4,190	3,892	0,254	0,145	0,019	89,7	4,997	0,384	4,748	−0,135
16	CO Lac	1,542	3,13	2,75	2,53	2,13	4,06	4,04	0,250	0,210	0,030	43,36	9,737	0,369	8,687	0,681
17	V 364 Lac	7,352	2,33	2,30	3,30	2,98	3,916	3,929	0,125	0,113	0,287	2800	0,719	0,121	0,308	0,290
18	GG Lup	1,850	4,12	2,52	2,38	1,73	4,164	4,041	0,200	0,145	0,155	101,6	4,985	0,363	3,398	1,224
19	RU Mon	3,585	3,60	3,33	2,55	2,29	4,11	4,10	0,136	0,122	0,385	348	2,820	0,275	1,536	1,009
20	U Oph	1,677	5,20	4,68	3,43	3,00	4,211	4,188	0,270	0,236	0,0032	21,22	21,637	0,493	17,134	4,010
21	V 451 Oph	2,197	2,78	2,36	2,54	1,86	4,033	3,991	0,207	0,152	0,012	181	3,323	0,266	2,446	0,611
22	AG Per	2,029	5,36	4,90	3,00	2,61	4,250	4,230	0,204	0,178	0,071	75,6	7,348	0,448	6,043	0,857
23	IQ Per	1,744	3,52	1,74	2,45	1,50	4,111	3,906	0,231	0,142	0,076	119	4,012	0,317	3,429	0,266
24	NO Pup	1,257	2,88	1,50	2,03	1,42	4,08	3,90	0,253	0,177	0,126	37,2	9,251	0,353	6,996	1,902
25	V760 Sco	1,731	4,98	4,62	3,02	2,64	4,228	4,212	0,234	0,205	0,027	38,5	12,310	0,474	10,237	1,599
26	YY Sgr	2,628	3,90	3,48	2,56	2,32	4,053	4,053	0,164	0,149	0,159	290,4	2,478	0,309	1,911	0,258
27	V 526 Sgr	1,919	2,27	1,68	1,89	1,56	3,982	3,918	0,184	0,152	0,220	155,2	3,385	0,257	2,266	0,862
28	V 1647 Sgr	3,283	2,19	1,97	1,83	1,67	3,982	3,959	0,123	0,112	0,414	531	1,693	0,214	0,899	0,580
29	AO Vel	1,585	4,4	3,6	2,45	2,21	4,161	3,892	0,214	0,193	0,074	54,4	7,977	0,447	7,465	0,064
30	DR Vul	2,251	13,2	12,1	4,81	4,37	4,462	4,447	0,227	0,206	0,098	36,3	16,978	0,766	18,239	−2,028
31	HV 2274	5,73	12,2	11,4	9,85	9,00	4,362	4,364	0,255	0,233	0,128	123	12,754	0,395	9,318	3,041
32	NSV 18773	5,049	20,0	14,0	6,50	5,01	4,498	4,431	0,162	0,125	0,365	150	9,216	0,622	4,984	3,609

$\lg T_1$, $\lg T_2$, относительные радиусы звезд r_1, r_2, эксцентриситет орбиты e, период апсидального вращения $U_{\rm obs}$, относительная угловая скорость апсидального вращения $P/U_{\rm obs}$, а также вычисленные теоретически значения $P/U^{\rm th}_{\rm rel}$, $P/U^{\rm th}_{\rm tide}$ и определенное из наблюдений значение параметра $P/U^{\rm obs}_{\rm rot}$. Мы не приводим ссылки на соответствующие оригинальные работы, которые можно найти в статье (Khaliullin and Khaliullina, 2007). Там же можно найти данные по ускорениям силы тяжести на поверхности звезд.

Четыре системы (HSHer, DRVul, ASCam и PVCas) показывают отрицательное значение величины $P/U^{\rm obs}_{\rm rot}$, которое не может быть положено в основу определения угловой скорости вращения звезды. Это означает, что для этих систем сумма теоретических значений релятивистских $\left(P/U^{\rm th}_{\rm rel}\right)$ и приливных $\left(P/U^{\rm th}_{\rm tide}\right)$ членов превышает наблюдаемую величину $P/U_{\rm obs}$, и для члена, обусловленного вращением компонент, не остается места. Это может быть связано с влиянием третьего и даже четвертого тела, наблюдаемых в системе HSHer (Wolf et al., 2002, Khaliullin and Khaliullina, 2006), системе AS Cam (Козырева и Халиуллин, 1999, Khaliullin et al., 1991, Khodykin and Vedeneyev 1997, Khodykin, Zakharov and Andersen, 2004), а также в системе DR Vul (Khaliullina, 1987, Wolf and Diethelm, 1993, Wolf et al., 1999). Для системы PV Cas в работе (Yildiz, 2005) была развита модель с дифференциальным вращением, которая объясняет многие аномалии этой системы. Кроме того, в кривой блеска системы PVCas были найдены изменения, характерные для пекулярных A_p звезд (Barembaum and Etzel, 1995).

Остальные 28 систем в таблице имеют положительные значения $P/U_{\rm rot}$, которые были использованы в работе (Khaliullin, Khaliullina, 2007) для определения угловых скоростей осевого вращения звезд $\omega_{r,1}$ и $\omega_{r,2}$ с помощью уравнения (502).

Вклад осевого вращения компонент в общую относительную угловую скорость апсидального вращения для систем, приведенных в таблице, лежит в интервале от 3 % (система V 541 Cyg) до 24 % (V 1765 Cyg). Это накладывает ограничения на точность определения наблюдаемой относительной угловой скорости апсидального вращения $\omega_{\rm aps} = P/U_{\rm obs}$, которая, соответственно, не должна быть хуже нескольких процентов. Кроме того, точность вычисления теоретических значений величин $P/U^{\rm th}_{\rm rel}$ и $P/U^{\rm th}_{\rm tide}$ также должна быть достаточно высока.

В работе (Khaliullin and Khaliullina, 2007) проведено сравнение найденных из анализа апсидального движения величин угловых скоростей осевого вращения компонент $\omega_{r,1}$ и $\omega_{r,2}$ с теориями синхронизации Зана и Тассуля.

На рис. 77 приведены относительные угловые скорости вращения первичной $(\omega_{r,1}/\omega_{\rm syn})$ и вторичной $(\omega_{r,2}/\omega_{\rm syn})$ компонент системы как функции относительного возраста компонент $t/t_{\rm syn}$, которые рассчитаны в соответствии с теорией Зана по формулам (500) и (502). Сплошная линия здесь представляет собой теоретическую кривую синхронизации (теоретическую зависимость между $\omega_{r,1}/\omega_{\rm syn}$ и $t_i/t_{\rm syn}$, $i = 1, 2$) посчитанную в рамках теории Зана с использованием уравнения

$$\frac{\omega_t}{\omega_{\rm syn}} = 1 + \left(\frac{\omega_0}{\omega_{\rm syn}} - 1\right) \exp\left(-\frac{t}{t_{\rm syn}}\right), \tag{507}$$

которое является следствием определения характерного времени синхронизации (см. формулу (498)). Времена синхронизации в формуле (507) посчитаны по формуле (505) в соответствии с теорией Зана.

Рисунок 77 показывает явную корреляцию между найденными из наблюдений величинами $\omega_{r,i}/\omega_{\rm syn}$ и относительным возрастом звезд $t/t_{\rm syn}$: чем меньше относительный возраст звезды в ТДС, тем больше ее относительная угловая скорость осевого вращения. Как подчеркивается в работе (Khaliullin and Khaliullina, 2007), это очень

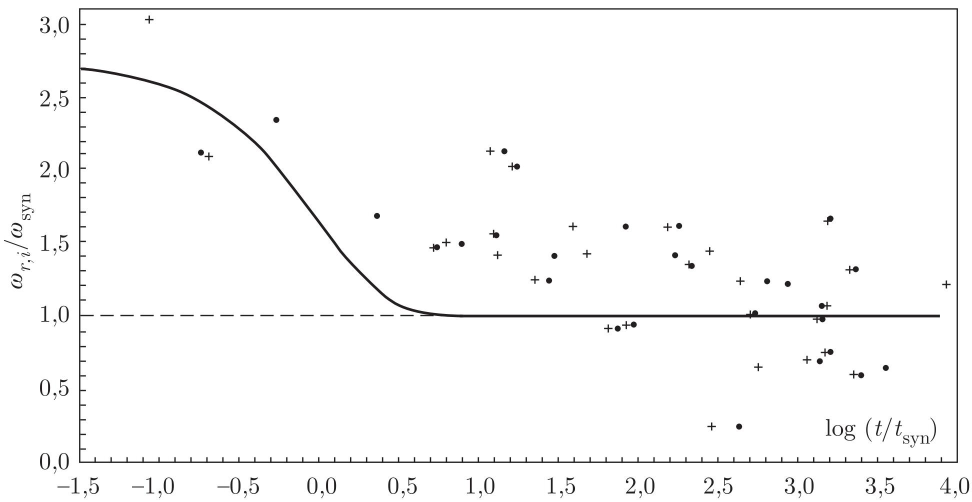


Рис. 77. Относительные угловые скорости осевого вращения первичных компонент (точки) и вторичных компонент (крестики) для 28 разделенных затменных систем ранних типов как функция относительного возраста систем. Время синхронизации $t_{\rm syn}$ посчитано в рамках теории Зана (Zahn, 1977) (по материалам работы Khaliullin and Khaliullina, 2007)

важный наблюдательный результат, имеющий большое значение для эволюционных теорий тесных двойных систем.

Как следует из рис. 77, большинство наблюдательных точек лежит систематически выше и смещено вправо (в сторону больших относительных возрастов) относительно теоретической кривой синхронизации. Из этого факта следуют два важных вывода.

1. Процесс синхронизации между осевым и орбитальным вращением продолжается в течение стадии главной последовательности звезды.

2. Время синхронизации осевого вращения внутренних слоев звезд в ТДС заметно превышает $t_{\rm syn}$, вычисленное по теории Зана (см. формулу (505)).

Как отмечалось Заном, ввиду значительной неопределенности в исходных параметрах, которые появляются в различных теориях синхронизации и циркуляризации орбит ТДС, численные значения коэффициентов в соответствующих выражениях для времен синхронизации и циркуляризации не должны использоваться непосредственно, а скорее всего, должны подбираться путем сравнения теории с наблюдениями.

Чтобы улучшить согласие теории синхронизации с наблюдениями, в работе (Khaliullin and Khaliullina, 2007) в формулу для времени синхронизации (505) был введен нормировочный постоянный множитель A_z, который подбирался методом наименьших квадратов из сравнения теории с наблюдениями. Одновременно с нормировочным множителем A_z методом наименьших квадратов искался также параметр x_0, соответствующий средней начальной угловой скорости вращения звезды. Сравнение наблюдаемых и теоретических величин, полученных после такой перенормировки формулы (505), приведено на рис. 78. Видно, что в данном случае удается значительно лучше согласовать наблюдения и теорию (величина остаточных уклонений в этом случае составляет $\sigma_{O-C} = 0{,}348$ против $\sigma_{O-C} = 0{,}482$ в первом случае). Найденная величина нормировочного множителя $A_z = 42$ свидетельствует о том, что все времена синхронизации, вычисленные по формуле Зана (505), должны быть, в действительности, увеличены более чем на порядок величины. В целом, как следует

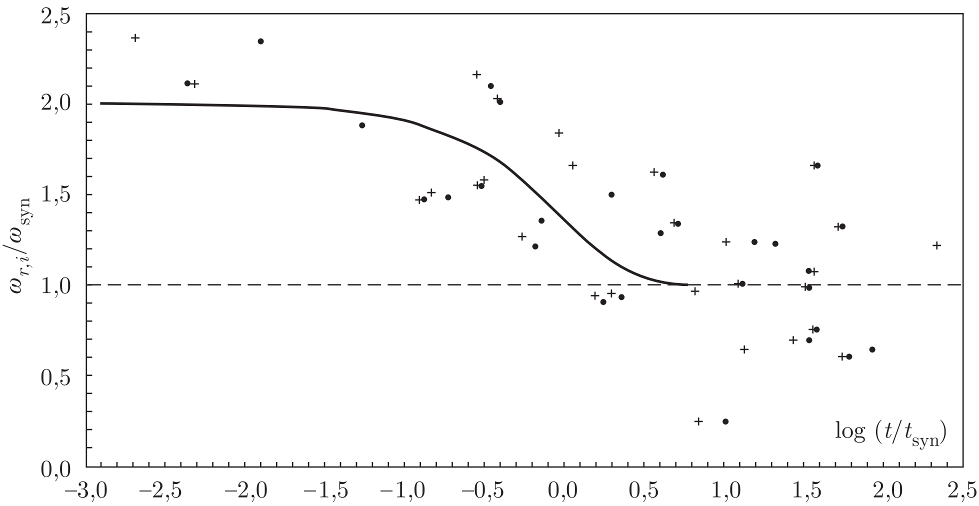


Рис. 78. То же, что на рис. 77, но время синхронизации t_{syn} в теории Зана (Zahn, 1977) посчитано с учетом константы A_z

из рис. 77, 78, теория синхронизации Зана (Zahn, 1977) для звезд с радиативными оболочками, удовлетворительно согласуется с результатами наблюдательных определений угловых скоростей осевого вращения звезд в ТДС, с точностью до нормировочного множителя A_z. Возможно также, что в теории Зана потребуется уточнить зависимость параметра E_2, учитывающего относительный размер конвективного ядра звезды, от ее массы. Как отмечалось Заном (Zahn, 1975), приливный коэффициент $E_2 \sim (R_c/R)^8$ в формуле (505) для времени синхронизации сильно зависит от радиуса конвективного ядра R_c, который вычисляется теоретически, и его величина зависит от массы звезды M. В работе (Khaliullin and Khaliullina, 2007) была предпринята попытка улучшить согласие между наблюдениями и теорией введением дополнительной зависимости радиуса конвективного ядра от M в виде фактора $(M/M_\odot)^\eta$, где η — параметр, который ищется методом наименьших квадратов из сравнения теоретической кривой синхронизации с наблюдениями (подчеркнем, что в формуле (505) масса выражена в абсолютных единицах, а в выражение $(M/M_\odot)^\eta$ входит масса M, выраженная в солнечных единицах). Минимизация $(O-C)^2$ привела в этом случае к некоторому улучшению согласия теории с наблюдениями (стандартное отклонение $\sigma_{o-c} = 0{,}326$, что на 7% меньше, чем в предыдущем случае), причем новое значение нормировочного множителя получилось существенно меньше: $A_z = 3{,}8$, а остальные параметры равны $x_0 = 2{,}02$, $\eta = 1{,}4$. Попытка таким же методом улучшить показатель в члене a/R (см. формулу (505)) показала, что теоретическое значение этого показателя 17/2 хорошо согласуется с наблюдениями.

Сравнение наблюдений с теорией синхронизации Тассуля привело авторов (Khaliullin and Khaliullina, 2007) к следующим результатам.

На рис. 79 приведена зависимость относительных угловых скоростей осевого вращения звезд в затменных двойных системах от относительного возраста этих звезд, рассчитанная на основе теории синхронизации Тассуля (Tassoul, 1987): времена синхронизации были посчитаны по формуле (506). Видно, что хотя разброс точек на этой зависимости значительно больше, чем в случае использования теории Зана (см. рис. 77), сохраняется выявленная ранее зависимость: чем меньше относительный возраст звезды в ТДС, тем больше относительная угловая скорость

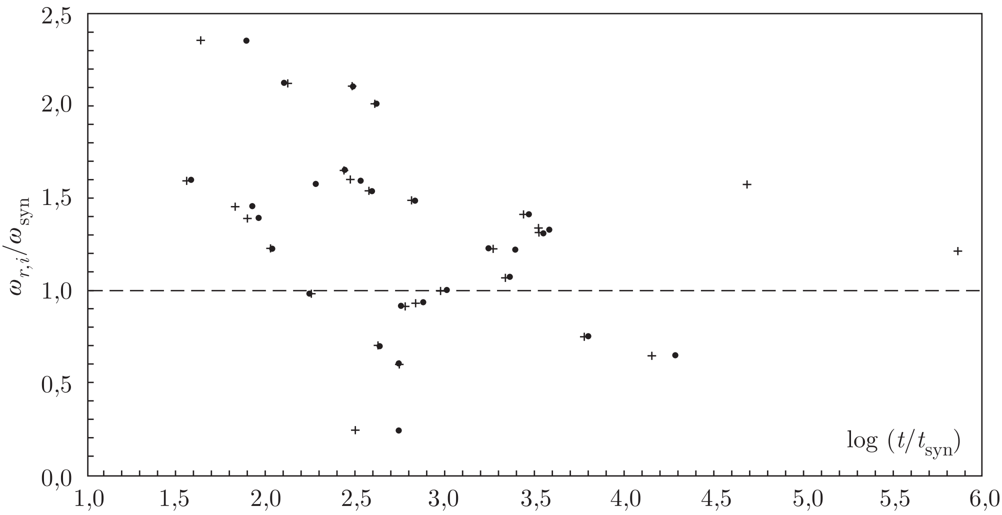


Рис. 79. То же, что на рис. 77, но время синхронизации $t_{\rm syn}$ посчитано в соответствии с теорией Тассуля (Tassoul, 1987)

ее осевого вращения. Этот результат очень важен, поскольку он демонстрирует, что наблюдаемый эффект увеличения угловой скорости вращения звезды в ТДС с уменьшением ее возраста не зависит от конкретной модели синхронизации, применяемой для вычисления времен синхронизации (см. формулы (505) и (506)). Введение нормировочного множителя A_T в формулу (506) для времени синхронизации и поиск его методом наименьших квадратов совместно с параметром x_0, характеризующим начальную угловую скорость вращения, приводят к удовлетворительному описанию наблюдений теоретической кривой синхронизации (см. рис. 80). Хотя величина остаточного уклонения $\sigma_{O-C} = 0{,}438$ существенно превышает соответствующую

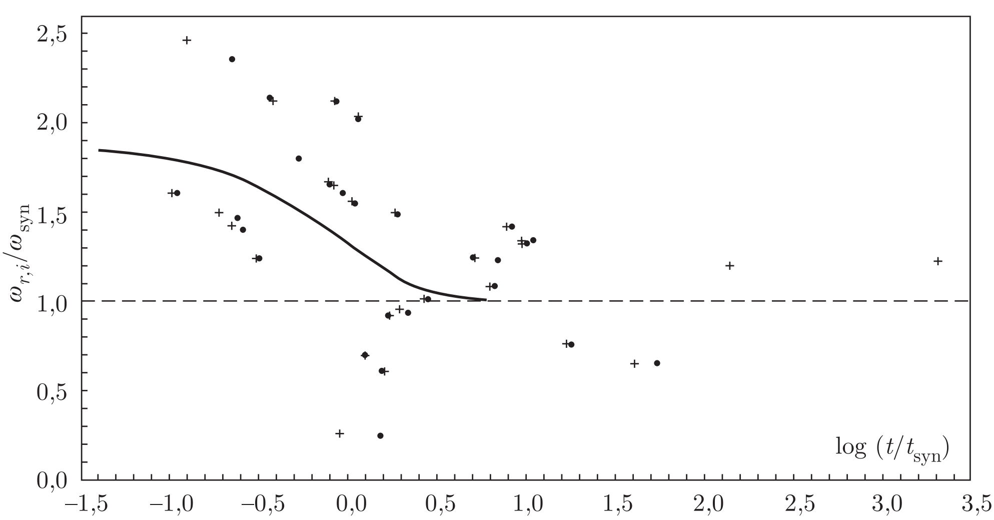


Рис. 80. То же, что на рис. 77, но время синхронизации $t_{\rm syn}$ посчитано в рамках теории Тассуля (Tassoul, 1987) с учетом константы A_T.

величину $\sigma_{O-C} = 0{,}348$, полученную с использованием теории Зана. Найденные таким способом значения параметров равны: $A_T = 1380$, $x_0 = 1{,}88$. То есть времена синхронизации, найденные с использованием формулы Тассуля (506) должны быть, в действительности, увеличены на три порядка величины, чтобы удовлетворительно согласовать наблюдения и теорию. Ведение фактора $(a/R)^{\mu}$ в формулу Тассуля (506) позволяет улучшить согласие теории и наблюдений ($\sigma_{O-C} = 0{,}345$). При этом получаются следующие параметры: $A_T = 0{,}055$, $x_0 = 1{,}94$, $\mu = 5{,}2$. Однако с таким дополнительным множителем $(a/R)^{5,2}$ уравнение Тассуля (506) становится похожим на уравнение Зана (505).

Таким образом, исследования, проведенные в работе (Khaliullin and Khaliullina, 2007) показали, что после введения нормировочных множителей A_Z и A_T в уравнения для времени синхронизации (505) и (506), оказывается возможным лучше согласовать с наблюдениями теорию Зана, чем теорию Тассуля. Главный параметр, определяющий время синхронизации, это показатель степени в отношении a/R. Величина этого показателя степени 17/2, данная теорией Зана (см. формулу (505)), хорошо согласуется с наблюдениями. Это может свидетельствовать о том, что радиативное подавление динамических приливов, рассматриваемое в теории Зана, является более реалистичным физическим процессом, ведущим к обмену между вращательным и орбитальным угловыми моментами, чем крупномасштабные гидродинамические движения в теле звезды, рассматриваемые в теории Тассуля. Проведенное исследование показало большую перспективность дальнейших исследований вращения линии апсид в затменных двойных системах для изучения распределения угловой скорости осевого вращения в недрах звезд и исследования эволюции ТДС. Приведем основные выводы, сделанные в работе (Khaliullin and Khaliullina, 2007).

1. Синхронизация осевого и орбитального вращения звезд ранних спектральных классов в ТДС продолжается в течение стадии главной последовательности. Время синхронизации для внутренних слоев звезд, дающих главный вклад в апсидальное движение, на 1,6 и 3,1 порядка величины больше, чем время синхронизации, предсказываемое теорией Зана и Тассуля соответственно (см. формулы (505), (506)).

2. Звезды ранних спектральных классов — компоненты ТДС, вступая на главную последовательность, имеют в среднем уже значительно меньшую начальную угловую скорость осевого вращения ω_0, чем одиночные звезды тех же типов. Это следует из того факта, что найденное в работе (Khaliullin and Khaliullina, 2007) значение $x_0 = \omega/\omega_{\rm syn} \simeq 2$ соответствует средней линейной скорости вращения звезды на экваторе $\overline{V}_r \sim 130$ км/с, в то время как среднее значение $\overline{V}_r$ для одиночных A-, B- и O-звезд составляет около 200 км/с (Tassoul, 1978). Однако, как подчеркнуто в работе (Khaliullin and Khaliullina, 2007) это еще не доказывает тот факт, что синхронизация в ТДС происходит частично во время стадии эволюции звезд до главной последовательности. Вполне возможно, что это есть результат значительной передачи вращательного углового момента звезд-компонент ТДС в орбитальный угловой момент системы, произошедшей во время образования ТДС.

3. Некоторые звезды-компоненты ТДС из таблицы, демонстрируют дифференциальное осевое вращение по радиусу. Это следует из того факта, что с одной стороны, как это следует из наблюдений вращательного уширения линий в спектрах компонент этих систем, внешние слои звезд вращаются синхронно с орбитальным обращением (см., например, Swings, 1936, Plaut, 1959, Koch et al., 1965, Plavec 1970, Levato, 1974, Claret et al., 1995a, Pan, 1997), с другой — как показано в работе (Khaliullin and Khaliullina, 2007), внутренние слои многих звезд из таблицы вращаются существенно (в 1,5–2 раза) быстрее, чем при осевом вращении

синхронно с орбитальным обращением (см. рис. 77, 80). Этот результат согласуется с теорией синхронизации Зана, согласно которой синхронизация осевого и орбитального вращения звезды в ТДС начинается с внешних слоев, где реализуется радиативное подавление динамических приливов. Внутренние слои звезды, согласно Зану, синхронизуются значительно позднее внешних, что согласуется с наблюдениями.

Естественно, как отмечено в работе (Khaliullin and Khaliullina, 2007), что ревизия угловых скоростей осевого вращения звезд ω_r потребует, во втором приближении, улучшения соответствующих параметров апсидального вращения k_2. Кроме того, следует иметь в виду, что параметры апсидального вращения k_2 для быстро вращающихся звезд значительно отличаются от таковых для невращающихся звезд (Stotherz, 1974, Claret and Gimenez, 1993, Claret, 1999). Поэтому, по мере накопления новых наблюдательных данных по апсидальному вращению в ТДС и уточнения периодов апсидального вращения, поиск параметров ω_r и k_2 из наблюдений ТДС с эллиптическими орбитами должен производиться самосогласованно. В недавней работе (Khaliullin and Khaliullina, 2010) дано развитие идей, описанных выше.

5. Определение возрастов звезд-компонент разделенных ТДС

Надежность современных определений масс и радиусов звезд из анализа кривых блеска и кривых лучевых скоростей затменных двойных систем весьма велика, а точность определения этих фундаментальных звездных параметров в настоящее время достигает 1–2%. Поэтому в последние годы значения масс и радиусов звезд-компонент ТДС используются для определения их возрастов. Для таких определений выбираются разделенные ТДС, в которых в первом приближении можно предполагать, что эволюция компонент происходит независимо друг от друга, подобно эволюции одиночной звезды той же массы. Эволюция одиночной звезды определяется ее начальной массой и начальным химическим составом. В процессе эволюции в пределах полосы главной последовательности радиус звезды возрастает. Можно рассчитать теоретические эволюционные треки на Г–Р-диаграмме для звезд различных масс при заданном (например, солнечном) начальном химическом составе звездного вещества, а также построить теоретические зависимости «масса–радиус» для звезд. Поскольку эти теоретические треки и зависимости прокалиброваны по времени, сравнивая наблюдаемые характеристики звезд с теоретическими, можно определить возраст звезд. Исследования показывают, что при точности определения масс и радиусов звезд в несколько процентов оказывается возможным достаточно уверенно оценивать их возраст. Контролем такой процедуры является естественное требование совпадения (в пределах ошибок определения) возрастов двух звезд-компонент одной и той же ТДС. Такой метод определения возрастов звезд, основанный на построении соответствующих изохрон, был развит в работах Дремовой и Свечникова (2002, 2007). В этих работах использовались теоретические модели одиночных звезд с учетом процесса конвективного проникновения (overshooting) и радиальной потери массы одиночной звезды (Maeder and Meynet, 1988, Claret and Gimenez, 1992). Однако представление о том, что звезды-компоненты разделенных ТДС эволюционируют независимо, подобно эволюции одиночных звезд, справедливо лишь в первом приближении. В действительности, даже в разделенных ТДС присутствует приливно-вращательная деформация звезд, которая вызывает поворот линии апсид в ТДС с эллиптическими орбитами. Эти искажения фигур звезд, хотя и малы, но они вызывают некоторые аномалии в распределении плотности вещества во внешних слоях звезд-компонент ТДС, обусловливающие константу k_2

апсидального движения. Кроме того, поскольку сразу после образования ТДС имеют, чаще всего, эллиптические орбиты со значительными эксцентриситетами, последующая приливная диссипация энергии орбитального движения компонент, приводящая к округлению орбиты, вызывает дополнительный нагрев внешних слоев оболочки звезды. Более того, даже в случае круговой орбиты и полной синхронизации осевого вращения звезд и орбитального обращения, последующая ядерная эволюция звезд в ТДС вызывает увеличение их радиусов, что приводит к асинхронности осевого и орбитального движений и последующей приливной диссипации энергии орбитального движения. Эволюционное увеличение радиусов звезд в ТДС приводит также к увеличению степени их приливной деформации и к дополнительным возмущениям плотности во внешних оболочках звезд. Как уже отмечалось выше, в оболочках маломассивных звезд ($M_1 \lesssim 1{,}5 M_\odot$) с конвективными оболочками работает механизм турбулентной диссипации энергии, а в оболочках более массивных звезд — механизм лучистого затухания. Аномалии в распределениях плотности и температуры, вызванные приливно-вращательной деформацией звезд в разделенных ТДС и эффектами приливной диссипации энергии орбитального движения компонент, должны быть учтены в соответствующих теоретических моделях звезд. Все эти механизмы приливного торможения были недавно учтены в работе Кларэ (Claret, 2004a) при расчете новых эволюционных звездных моделей в ТДС для начального химического состава, близкого к типичному химсоставу населения диска Галактики. Важно подчеркнуть, что для звезд небольших масс, как уже отмечалось выше (см. Черепащук и Каретников, 2003), характерное время округления орбиты, обусловленное приливной диссипацией энергии орбитального движения, короче времени ядерной эволюции этих звезд. Это подчеркивает важность проблемы учета эффектов приливной диссипации в ТДС при расчете эволюции ее компонент. Подробнее об этом см., например, (Тутуков и др., 2004).

В работе Дремовой и Свечникова (2007) с использованием новых эволюционных моделей звезд, выполненных Кларэ (Claret, 2004a) с учетом приливной эволюции звезд-компонент ТДС, метод изохрон был применен для определения возрастов звезд в 112 разделенных затменных двойных системах из Каталога Свечникова и Перевозкиной (1999). Кроме того, в этой работе выполнено сравнение полученных возрастов звезд с их возрастами, оцененными ранее (Dryomova and Svechnikov, 2003) на основе моделей-треков для одиночных звезд с учетом потери их массы (Maeder and Meynet, 1988, Claret and Gimenez, 1992). Учет эффектов приливной эволюции позволил авторам лучше согласовать возрасты главной и вторичной компонент разделенных ТДС, а также несколько уменьшить возрасты звезд, особенно для сравнительно маломассивных ТДС ($M_1 + M_2 \leqslant 3{,}5 M_\odot$). В табл. 33, заимствованной из работы Дремовой и Свечникова (2007), приведены параметры звезд-компонент разделенных ТДС и даны их возрасты (в миллионах лет), определенные двумя описанными методами.

Таблица 33

Параметры и возрасты разделенных ТДС (из работы Дремовой и Свечникова, 2007)

Обозначение		Масса, $M_\odot$ M_1 M_2	Радиус, $R_\odot$ R_1 R_2	t_1 (метод изохрон Кларэ)	t_2	t_1 (метод изохрон Медер, Мейнет)	t_2
1		2	3	4		5	
1	AN And	$1{,}90 \pm 0{,}05$	$4{,}00 \pm 0{,}10$	1370 ± 83	8360 ± 880	2103 ± 408	9400 ± 250
		$1{,}12 \pm 0{,}03$	$3{,}45 \pm 0{,}09$				
2	BW Aqr	$1{,}49 \pm 0{,}02$	$2{,}07 \pm 0{,}03$	2290 ± 126	2650 ± 152	4830 ± 180	5730 ± 136
		$1{,}39 \pm 0{,}02$	$1{,}79 \pm 0{,}03$				

Продолжение табл. 33

Обозначение		Масса, $M_\odot$ M_1 M_2	Радиус, $R_\odot$ R_1 R_2	t_1 (метод изохрон Кларэ)	t_2	t_1 (метод изохрон Медер, Мейнет)	t_2
1		2	3	4		5	
3	V 805 Aql	$2{,}12 \pm 0{,}04$	$2{,}18 \pm 0{,}04$	500 ± 16	$668 \pm 2{,}5$	839 ± 46	1750 ± 490
		$1{,}63 \pm 0{,}03$	$1{,}68 \pm 0{,}03$				
4	σ Aql	$6{,}80 \pm 0{,}17$	$4{,}20 \pm 0{,}11$	$26{,}9 \pm 1{,}74$	$29{,}6 \pm 0{,}69$	$28{,}7 \pm 0{,}39$	$36{,}6 \pm 0{,}56$
		$5{,}40 \pm 0{,}14$	$3{,}30 \pm 0{,}08$				
5	V 539 Ara	$6{,}25 \pm 0{,}09$	$4{,}41 \pm 0{,}07$	$39{,}1 \pm 0{,}83$	$47{,}4 \pm 1{,}14$	$39{,}1 \pm 0{,}51$	$51{,}7 \pm 0{,}67$
		$5{,}33 \pm 0{,}08$	$3{,}72 \pm 0{,}06$				
6	WW Aur	$1{,}99 \pm 0{,}03$	$1{,}89 \pm 0{,}03$	390 ± 3	670 ± 18	896 ± 32	1690 ± 228
		$1{,}80 \pm 0{,}03$	$1{,}88 \pm 0{,}03$				
7	AR Aur	$2{,}48 \pm 0{,}04$	$1{,}78 \pm 0{,}03$	до НГП	$84{,}7 \pm 9{,}1$	$36{,}3 \pm 3{,}87$	$169 \pm 25{,}6$:
		$2{,}29 \pm 0{,}04$	$1{,}82 \pm 0{,}03$				
8	EO Aur	$11{,}0 \pm 0{,}35$	$7{,}40 \pm 0{,}23$	$15{,}6 \pm 0{,}67$	$42{,}9 \pm 2{,}84$	$16{,}5 \pm 0{,}62$	$45{,}1 \pm 1{,}69$
		$7{,}00 \pm 0{,}22$	$7{,}05 \pm 0{,}22$				
9	HS Aur	$0{,}90 \pm 0{,}01$	$1{,}01 \pm 0{,}02$	13020 ± 230	9070 ± 390	8750 ± 1625	8750 ± 238
		$0{,}88 \pm 0{,}01$	$0{,}88 \pm 0{,}01$				
10	β Aur	$2{,}38 \pm 0{,}04$	$2{,}77 \pm 0{,}04$	490 ± 20	515 ± 20	689 ± 20	$747 \pm 18{,}6$
		$2{,}30 \pm 0{,}04$	$2{,}63 \pm 0{,}04$				
11	ZZ Boo	$1{,}71 \pm 0{,}03$	$2{,}26 \pm 0{,}04$	1300 ± 60	1230 ± 56	2741 ± 146	2710 ± 152
		$1{,}70 \pm 0{,}03$	$2{,}15 \pm 0{,}04$				
12	AD Boo	$1{,}36 \pm 0{,}02$	$1{,}62 \pm 0{,}03$	2360 ± 138	3790 ± 366	$5180 \pm 78{,}9$	$4640 \pm 77{,}8$
		$1{,}16 \pm 0{,}02$	$1{,}27 \pm 0{,}02$				
13	SZ Cam	$16{,}6 \pm 0{,}30$	$9{,}83 \pm 0{,}18$	$8{,}46 \pm 0{,}16$	$9{,}55 \pm 0{,}1$	$8{,}21 \pm 0{,}06$	$10{,}3 \pm 0{,}09$
		$11{,}8 \pm 0{,}21$	$5{,}85 \pm 0{,}11$				
14	TU Cam	$5{,}60 \pm 0{,}18$	$5{,}53 \pm 0{,}17$	$65{,}4 \pm 4{,}3$	224 ± 29	$64{,}6 \pm 1{,}44$	231 ± 130:
		$2{,}00 \pm 0{,}06$	$1{,}76 \pm 0{,}06$				
15	AN Cam	$1{,}40 \pm 0{,}04$	$2{,}30 \pm 0{,}06$	3410 ± 370	2200 ± 313	6940 ± 513	5060 ± 164
		$1{,}40 \pm 0{,}04$	$1{,}70 \pm 0{,}04$				
16	AS Cam	$3{,}30 \pm 0{,}07$	$2{,}55 \pm 0{,}06$	$104 \pm 0{,}8$	$101 \pm 2{,}7$	$153 \pm 12{,}5$	$186 \pm 8{,}26$
		$2{,}50 \pm 0{,}06$	$1{,}95 \pm 0{,}04$				
17	CW CMa	$2{,}09 \pm 0{,}03$	$1{,}89 \pm 0{,}03$	290 ± 2	290 ± 7	$620 \pm 7{,}5$	$595 \pm 12{,}9$
		$1{,}98 \pm 0{,}03$	$1{,}79 \pm 0{,}03$				
18	GZ CMa	$2{,}21 \pm 0{,}03$	$2{,}49 \pm 0{,}04$	550 ± 14	600 ± 18	$872 \pm 26{,}6$	$1230 \pm 38{,}2$
		$2{,}01 \pm 0{,}03$	$2{,}13 \pm 0{,}03$				
19	EM Car	$22{,}3 \pm 0{,}33$	$9{,}22 \pm 0{,}14$	$4{,}65 \pm 0{,}045$	$4{,}66 \pm 0{,}038$	$4{,}83 \pm 0{,}08$	$4{,}97 \pm 0{,}01$
		$20{,}3 \pm 0{,}3$	$8{,}23 \pm 0{,}12$				
20	QX Car	$9{,}27 \pm 0{,}15$	$4{,}29 \pm 0{,}07$	$7{,}50 \pm 0{,}16$	$8{,}40 \pm 0{,}16$	$9{,}03 \pm 0{,}01$	$10{,}8 \pm 0{,}17$
		$8{,}48 \pm 0{,}13$	$4{,}05 \pm 0{,}06$				
21	YZ Cas	$2{,}32 \pm 0{,}03$	$2{,}54 \pm 0{,}04$	475 ± 10	595 ± 84	$695 \pm 23{,}6$	1760 ± 455
		$1{,}35 \pm 0{,}02$	$1{,}35 \pm 0{,}02$				
22	CC Cas	$18{,}3 \pm 0{,}37$	$10{,}1 \pm 0{,}20$	$7{,}24 \pm 0{,}14$	$13{,}9 \pm 0{,}16$	$7{,}18 \pm 0{,}04$	$17{,}4 \pm 0{,}41$
		$7{,}60 \pm 0{,}15$	$4{,}00 \pm 0{,}08$				
23	AR Cas	$7{,}90 \pm 0{,}20$	$5{,}43 \pm 0{,}14$	$25{,}7 \pm 0{,}87$	$82{,}8 \pm 11{,}8$	$27{,}4 \pm 0{,}75$	$154 \pm 44{,}2$:
		$2{,}20 \pm 0{,}06$	$1{,}77 \pm 0{,}04$				
24	PV Cas	$2{,}81 \pm 0{,}05$	$2{,}30 \pm 0{,}04$	$153 \pm 2{,}2$	$153 \pm 2{,}6$	$240 \pm 6{,}8$	$248 \pm 6{,}84$
		$2{,}76 \pm 0{,}05$	$2{,}255 \pm 0{,}04$				

Продолжение табл. 33

Обозначение		Масса, $M_\odot$ M_1 M_2	Радиус, $R_\odot$ R_1 R_2	t_1 (метод изохрон Кларэ)	t_2	t_1 (метод изохрон Медер, Мейнет)	t_2
1		2	3	4		5	
25	V649 Cas	$8{,}74 \pm 0{,}17$ $3{,}07 \pm 0{,}06$	$3{,}46 \pm 0{,}07$ $3{,}56 \pm 0{,}07$	до НГП	275 ± 12	$314 \pm 10{,}5$:	$314 \pm 10{,}5$
26	SZ Cen	$2{,}32 \pm 0{,}04$ $2{,}28 \pm 0{,}04$	$4{,}56 \pm 0{,}07$ $3{,}63 \pm 0{,}06$	760 ± 21	720 ± 35	$934 \pm 23{,}1$	$974 \pm 25{,}2$
27	V346 Cen	$11{,}8 \pm 0{,}24$ $8{,}40 \pm 0{,}17$	$8{,}27 \pm 0{,}16$ $4{,}19 \pm 0{,}08$	$14{,}2 \pm 0{,}68$	$11{,}0 \pm 0{,}18$	$15{,}4 \pm 0{,}19$	$13{,}6 \pm 0{,}53$
28	WX Cep	$2{,}54 \pm 0{,}04$ $2{,}33 \pm 0{,}04$	$4{,}00 \pm 0{,}07$ $2{,}71 \pm 0{,}04$	540 ± 21	515 ± 21	$698 \pm 8{,}2$	$733 \pm 20{,}4$
29	ZZ Cep	$4{,}10 \pm 0{,}11$ $1{,}90 \pm 0{,}05$	$3{,}20 \pm 0{,}08$ $2{,}50 \pm 0{,}06$	$92{,}0 \pm 4{,}85$	980 ± 66	106 ± 2	1832 ± 336
30	AH Cep	$17{,}7 \pm 0{,}34$ $15{,}6 \pm 0{,}30$	$6{,}41 \pm 0{,}12$ $6{,}00 \pm 0{,}11$	$3{,}28 \pm 0{,}04$	$4{,}20 \pm 0{,}014$	$3{,}56 \pm 0{,}21$	$4{,}27 \pm 0{,}49$
31	CW Cep	$12{,}8 \pm 0{,}20$ $11{,}7 \pm 0{,}18$	$5{,}61 \pm 0{,}09$ $5{,}11 \pm 0{,}08$	$6{,}47 \pm 0{,}045$	$6{,}45 \pm 0{,}045$	$7{,}2 \pm 0{,}02$	$7{,}15 \pm 0{,}01$
32	EI Cep	$1{,}79 \pm 0{,}04$ $1{,}69 \pm 0{,}03$	$2{,}85 \pm 0{,}06$ $2{,}59 \pm 0{,}05$	1420 ± 94	1650 ± 102	2550 ± 89	3110 ± 124
33	EK Cep	$2{,}03 \pm 0{,}04$ $1{,}13 \pm 0{,}02$	$1{,}60 \pm 0{,}03$ $1{,}33 \pm 0{,}02$	до НГП	5750 ± 506	до ГП$\pm 1{,}5$	6380 ± 104
34	NY Cep	$12{,}9 \pm 0{,}33$ $9{,}40 \pm 0{,}24$	$6{,}86 \pm 0{,}18$ $5{,}70 \pm 0{,}15$	$10{,}5 \pm 0{,}33$	$17{,}1 \pm 0{,}6$	$10{,}5 \pm 0{,}19$	$16{,}8 \pm 0{,}4$
35	TV Cet	$1{,}39 \pm 0{,}02$ $1{,}27 \pm 0{,}02$	$1{,}49 \pm 0{,}02$ $1{,}28 \pm 0{,}02$	1260 ± 101	1180 ± 146	$2260 \pm 18{,}6$	$1005 \pm 48{,}4$
36	XY Cet	$1{,}76 \pm 0{,}03$ $1{,}64 \pm 0{,}03$	$2{,}13 \pm 0{,}04$ $1{,}75 \pm 0{,}03$	1040 ± 31	820 ± 20	$2300 \pm 73{,}1$	$2010 \pm 23{,}2$
37	RS Cha	$1{,}86 \pm 0{,}03$ $1{,}82 \pm 0{,}03$	$2{,}14 \pm 0{,}03$ $2{,}34 \pm 0{,}04$	835 ± 31	1060 ± 41	1790 ± 190	$2110 \pm 66{,}9$
38	RZ Cha	$1{,}52 \pm 0{,}02$ $1{,}51 \pm 0{,}02$	$2{,}27 \pm 0{,}03$ $2{,}27 \pm 0{,}04$	2390 ± 128	2480 ± 120	4700 ± 259	4850 ± 181
39	TY CrA	$3{,}18 \pm 0{,}14$ $1{,}64 \pm 0{,}07$	$1{,}90 \pm 0{,}08$ $1{,}90 \pm 0{,}09$	до НГП	1090 ± 95	$2520 \pm 96{,}4$:	$2520 \pm 96{,}4$
40	α CrB	$2{,}58 \pm 0{,}07$ $0{,}92 \pm 0{,}02$	$3{,}00 \pm 0{,}08$ $0{,}90 \pm 0{,}02$	415 ± 25	6810 ± 524	$546 \pm 18{,}5$	6570 ± 468:
41	Y Cyg	$17{,}0 \pm 0{,}29$ $16{,}4 \pm 0{,}28$	$5{,}91 \pm 0{,}10$ $5{,}91 \pm 0{,}10$	$2{,}25 \pm 0{,}075$	$2{,}70 \pm 0{,}08$	$2{,}59 \pm 0{,}2$	$3{,}1 \pm 0{,}24$
42	MR Cyg	$4{,}50 \pm 0{,}09$ $2{,}50 \pm 0{,}05$	$4{,}07 \pm 0{,}08$ $3{,}17 \pm 0{,}06$	$95{,}0 \pm 3{,}75$	490 ± 23	$104 \pm 1{,}13$	$630 \pm 15{,}9$
43	MY Cyg	$1{,}81 \pm 0{,}03$ $1{,}78 \pm 0{,}03$	$2{,}21 \pm 0{,}03$ $2{,}17 \pm 0{,}03$	1000 ± 40	1020 ± 40	$2060 \pm 68{,}1$	$2180 \pm 64{,}2$
44	V380 Cyg	$10{,}6 \pm 0{,}27$ $6{,}8 \pm 0{,}18$	$16{,}0 \pm 0{,}41$ $4{,}04 \pm 0{,}10$	$20{,}3 \pm 0{,}92$	$23{,}5 \pm 1{,}24$	$21{,}3 \pm 0{,}54$	$25{,}8 \pm 0{,}28$
45	V442 Cyg	$1{,}56 \pm 0{,}02$ $1{,}41 \pm 0{,}02$	$2{,}07 \pm 0{,}03$ $1{,}66 \pm 0{,}02$	1755 ± 77	1925 ± 134	3800 ± 129	$4570 \pm 95{,}1$
46	V453 Cyg	$13{,}9 \pm 0{,}22$ $10{,}7 \pm 0{,}17$	$8{,}78 \pm 0{,}14$ $5{,}30 \pm 0{,}08$	$11{,}0 \pm 0{,}19$	$10{,}2 \pm 0{,}18$	$11{,}1 \pm 0{,}14$	$11{,}2 \pm 0{,}37$

Продолжение табл. 33

Обозначение		Масса, $M_\odot$ M_1 M_2	Радиус, $R_\odot$ R_1 R_2	t_1 (метод изохрон Кларэ)	t_2	t_1 (метод изохрон Медер, Мейнет)	t_2
1		2	3	4		5	
47	V477 Cyg	$1{,}79 \pm 0{,}03$ $1{,}35 \pm 0{,}02$	$1{,}56 \pm 0{,}03$ $1{,}27 \pm 0{,}02$	до НГП	до НГП	170 ± 165:	170 ± 165:
48	V478 Cyg	$16{,}6 \pm 0{,}30$ $16{,}3 \pm 0{,}29$	$7{,}59 \pm 0{,}14$ $7{,}59 \pm 0{,}14$	$6{,}33 \pm 0{,}07$	$6{,}62 \pm 0{,}10$	$6{,}47 \pm 0{,}25$	$6{,}72 \pm 0{,}13$
49	V1143Cyg	$1{,}35 \pm 0{,}02$ $1{,}32 \pm 0{,}02$	$1{,}35 \pm 0{,}02$ $1{,}324 \pm 0{,}02$	550 ± 48	790 ± 134	$830 \pm 84{,}8$	$855 \pm 14{,}5$
50	V1765Cyg	$23{,}7 \pm 1{,}06$ $11{,}8 \pm 0{,}53$	$20{,}9 \pm 0{,}93$ $5{,}80 \pm 0{,}26$	$6{,}4 \pm 0{,}3$	$9{,}4 \pm 0{,}3$	$6{,}64 \pm 0{,}41$	$10{,}1 \pm 0{,}19$
51	UZ Dra	$1{,}34 \pm 0{,}02$ $1{,}23 \pm 0{,}02$	$1{,}31 \pm 0{,}02$ $1{,}14 \pm 0{,}02$	285 ± 72	до НГП	1190 ± 209	1190 ± 209:
52	BH Dra	$2{,}10 \pm 0{,}05$ $1{,}05 \pm 0{,}03$	$1{,}92 \pm 0{,}05$ $1{,}37 \pm 0{,}04$	310 ± 1	8850 ± 1100	$680 \pm 26{,}3$	8680 ± 303:
53	BS Dra	$1{,}36 \pm 0{,}02$ $1{,}36 \pm 0{,}02$	$1{,}44 \pm 0{,}02$ $1{,}42 \pm 0{,}02$	1270 ± 120	1100 ± 108	$1950 \pm 11{,}5$	$1740 \pm 29{,}6$
54	CM Dra	$0{,}23 \pm 0{,}004$ $0{,}21 \pm 0{,}003$	$0{,}25 \pm 0{,}004$ $0{,}24 \pm 0{,}004$	—	—	—	—
55	DE Dra	$3{,}05 \pm 0{,}14$ $1{,}08 \pm 0{,}05$	$2{,}93 \pm 0{,}13$ $1{,}11 \pm 0{,}05$	220 ± 20	4320 ± 1275	$273 \pm 19{,}8$	4110 ± 311:
56	CW Eri	$1{,}59 \pm 0{,}03$ $1{,}33 \pm 0{,}03$	$2{,}08 \pm 0{,}04$ $1{,}56 \pm 0{,}03$	1590 ± 98	2510 ± 322	3560 ± 143	$5150 \pm 68{,}6$
57	YY Gem	$0{,}59 \pm 0{,}01$ $0{,}59 \pm 0{,}01$	$0{,}60 \pm 0{,}01$ $0{,}60 \pm 0{,}01$	—	—	—	—
58	RX Her	$2{,}75 \pm 0{,}05$ $2{,}33 \pm 0{,}04$	$2{,}46 \pm 0{,}04$ $2{,}05 \pm 0{,}03$	220 ± 7	$245 \pm 4{,}5$	332 ± 14	$470 \pm 20{,}1$
59	TX Her	$1{,}62 \pm 0{,}03$ $1{,}45 \pm 0{,}03$	$1{,}59 \pm 0{,}03$ $1{,}47 \pm 0{,}03$	400 ± 39	510 ± 33	1244 ± 222	2105 ± 452
60	DI Her	$5{,}16 \pm 0{,}10$ $4{,}53 \pm 0{,}09$	$2{,}72 \pm 0{,}05$ $2{,}47 \pm 0{,}05$	$0{,}61 \pm 1{,}37$	до НГП	$11 \pm 0{,}42$	$9{,}78 \pm 0{,}67$
61	HS Her	$4{,}7 \pm 0{,}12$ $1{,}60 \pm 0{,}04$	$2{,}70 \pm 0{,}07$ $1{,}52 \pm 0{,}04$	$11{,}3 \pm 2{,}22$	126 ± 126	$24{,}8 \pm 0{,}52$	343 ± 276:
62	V624 Her	$2{,}27 \pm 0{,}04$ $1{,}87 \pm 0{,}03$	$3{,}03 \pm 0{,}05$ $2{,}21 \pm 0{,}04$	645 ± 29	870 ± 27	$865 \pm 26{,}5$	1717 ± 144
63	V819 Her	$1{,}53 \pm 0{,}07$ $1{,}11 \pm 0{,}05$	$1{,}87 \pm 0{,}08$ $1{,}28 \pm 0{,}10$	1560 ± 278	5640 ± 830	3770 ± 154	6120 ± 1655
64	V822 Her	$3{,}28 \pm 0{,}06$ $3{,}28 \pm 0{,}06$	$2{,}74 \pm 0{,}05$ $2{,}61 \pm 0{,}05$	$140 \pm 2{,}7$	$120 \pm 2{,}6$	$183 \pm 12{,}3$	$167 \pm 13{,}3$
65	VZ Hya	$1{,}23 \pm 0{,}02$ $1{,}12 \pm 0{,}02$	$1{,}36 \pm 0{,}02$ $1{,}14 \pm 0{,}02$	2930 ± 256	3150 ± 416	$4350 \pm 56{,}6$	$3340 \pm 93{,}1$
66	AI Hya	$2{,}15 \pm 0{,}03$ $1{,}98 \pm 0{,}03$	$3{,}92 \pm 0{,}06$ $2{,}77 \pm 0{,}04$	940 ± 23	946 ± 37	$1325 \pm 41{,}7$	$1581 \pm 50{,}2$
67	HS Hya	$1{,}34 \pm 0{,}02$ $1{,}29 \pm 0{,}02$	$1{,}30 \pm 0{,}02$ $1{,}28 \pm 0{,}02$	150 ± 75	790 ± 122	944 ± 225	1120 ± 238
68	KW Hya	$1{,}98 \pm 0{,}03$ $1{,}49 \pm 0{,}03$	$2{,}13 \pm 0{,}04$ $1{,}48 \pm 0{,}03$	630 ± 12	285 ± 31	$1320 \pm 41{,}2$	896 ± 19

Продолжение табл. 33

Обозначение		Масса, $M_\odot$ M_1 M_2	Радиус, $R_\odot$ R_1 R_2	t_1 (метод изохрон Кларэ)	t_2	t_1 (метод изохрон Медер, Мейнет)	t_2
1		2	3	4		5	
69	χ^2 Hya	$3{,}62 \pm 0{,}06$	$4{,}37 \pm 0{,}07$	190 ± 10	$153 \pm 1{,}3$	$199 \pm 5{,}16$	$273 \pm 8{,}29$
		$2{,}64 \pm 0{,}04$	$2{,}15 \pm 0{,}03$				
70	CM Lac	$1{,}88 \pm 0{,}03$	$1{,}52 \pm 0{,}03$	до НГП	271 ± 7	1840 ± 465:	1840 ± 465
		$1{,}47 \pm 0{,}02$	$1{,}46 \pm 0{,}02$				
71	CO Lac	$4{,}50 \pm 0{,}09$	$2{,}80 \pm 0{,}06$	$28{,}9 \pm 1{,}6$	$22{,}8 \pm 3{,}8$	$45{,}4 \pm 0{,}15$	$47{,}6 \pm 0{,}78$
		$3{,}70 \pm 0{,}07$	$2{,}38 \pm 0{,}05$				
72	EN Lac	$9{,}70 \pm 0{,}31$	$6{,}30 \pm 0{,}20$	$17{,}5 \pm 0{,}91$	416 ± 223	$18{,}7 \pm 0{,}95$	$5{,}26 \pm 23{,}1$:
		$1{,}25 \pm 0{,}04$	$1{,}20 \pm 0{,}14$				
73	TX Leo	$2{,}75 \pm 0{,}12$	$3{,}49 \pm 0{,}16$	390 ± 41	10500 ± 1960	$476 \pm 22{,}2$	10500 ± 513
		$1{,}05 \pm 0{,}05$	$2{,}10 \pm 0{,}09$				
74	GG Lup	$4{,}12 \pm 0{,}06$	$2{,}38 \pm 0{,}04$	до НГП	до НГП	$17 \pm 0{,}64$	$17 \pm 0{,}64$:
		$2{,}51 \pm 0{,}04$	$1{,}73 \pm 0{,}03$				
75	RR Lyn	$1{,}89 \pm 0{,}04$	$2{,}48 \pm 0{,}05$	995 ± 52	1740 ± 133	1860 ± 168	4080 ± 112
		$1{,}50 \pm 0{,}03$	$1{,}86 \pm 0{,}04$				
76	FL Lyr	$1{,}22 \pm 0{,}02$	$1{,}28 \pm 0{,}02$	2275 ± 220	6730 ± 572	2960 ± 133	5950 ± 246
		$0{,}96 \pm 0{,}02$	$0{,}96 \pm 0{,}02$				
77	V478 Lyr	$0{,}93 \pm 0{,}02$	$0{,}99 \pm 0{,}03$	10050 ± 540	—	8700 ± 330	8700 ± 330:
		$0{,}25 \pm 0{,}01$	$0{,}30 \pm 0{,}008$				
78	TZ Men	$2{,}49 \pm 0{,}04$	$2{,}02 \pm 0{,}03$	$146{,}7 \pm 0{,}4$	до НГП	276 ± 4	1254 ± 364:
		$1{,}50 \pm 0{,}02$	$1{,}43 \pm 0{,}02$				
79	UX Men	$1{,}24 \pm 0{,}02$	$1{,}35 \pm 0{,}02$	2610 ± 228	2765 ± 274	$3890 \pm 84{,}9$	$3690 \pm 82{,}7$
		$1{,}20 \pm 0{,}02$	$1{,}28 \pm 0{,}02$				
80	RU Mon	$3{,}60 \pm 0{,}06$	$2{,}55 \pm 0{,}05$	$64{,}0 \pm 2{,}2$	$41{,}6 \pm 1{,}7$	$92{,}8 \pm 0{,}5$	$77{,}9 \pm 0{,}38$
		$3{,}33 \pm 0{,}06$	$2{,}29 \pm 0{,}04$				
81	AO Mon	$5{,}55 \pm 0{,}11$	$3{,}53 \pm 0{,}07$	$35{,}8 \pm 0{,}94$	$34{,}4 \pm 0{,}64$	$39{,}6 \pm 0{,}64$	$41 \pm 0{,}48$
		$5{,}25 \pm 0{,}10$	$3{,}29 \pm 0{,}07$				
82	IM Mon	$8{,}40 \pm 0{,}26$	$3{,}80 \pm 0{,}12$	$4{,}60 \pm 0{,}71$	до НГП	$7{,}07 \pm 0{,}11$	$2{,}31 \pm 0{,}5$:
		$5{,}60 \pm 0{,}18$	$2{,}70 \pm 0{,}09$				
83	U Oph	$4{,}90 \pm 0{,}08$	$3{,}34 \pm 0{,}05$	$52{,}6 \pm 1{,}2$	$45{,}8 \pm 2{,}2$	$58{,}4 \pm 0{,}85$	$58{,}6 \pm 0{,}49$
		$4{,}55 \pm 0{,}07$	$2{,}99 \pm 0{,}05$				
84	WZ Oph	$1{,}13 \pm 0{,}02$	$1{,}31 \pm 0{,}02$	5230 ± 500	6190 ± 560	5980 ± 102	6880 ± 139
		$1{,}11 \pm 0{,}02$	$1{,}34 \pm 0{,}02$				
85	V451 Oph	$2{,}78 \pm 0{,}04$	$2{,}64 \pm 0{,}04$	255 ± 5	$207 \pm 2{,}5$	$355 \pm 15{,}6$	$400 \pm 7{,}88$
		$2{,}36 \pm 0{,}04$	$2{,}02 \pm 0{,}03$				
86	VV Ori	$10{,}8 \pm 0{,}19$	$5{,}03 \pm 0{,}09$	$8{,}52 \pm 0{,}19$	до НГП	$9{,}14 \pm 0{,}02$	$8{,}96 \pm 0{,}62$
		$4{,}50 \pm 0{,}08$	$2{,}45 \pm 0{,}04$				
87	EW Ori	$1{,}19 \pm 0{,}02$	$1{,}14 \pm 0{,}02$	810 ± 158	770 ± 182	$61{,}3 \pm 56{,}2$:	$61{,}3 \pm 56{,}2$:
		$1{,}16 \pm 0{,}02$	$1{,}09 \pm 0{,}02$				
88	V1031 Ori	$2{,}47 \pm 0{,}04$	$4{,}32 \pm 0{,}07$	630 ± 24	615 ± 25	762 ± 22	$847 \pm 26{,}2$
		$2{,}29 \pm 0{,}04$	$2{,}98 \pm 0{,}05$				
89	δOri	$23{,}0 \pm 1{,}03$	$17{,}0 \pm 0{,}76$	$6{,}4 \pm 0{,}2$	$27{,}2 \pm 2{,}3$	$6{,}51 \pm 0{,}21$	$28{,}9 \pm 0{,}94$
		$9{,}00 \pm 0{,}40$	$10{,}0 \pm 0{,}45$				
90	ηOri	$13{,}9 \pm 0{,}44$	$7{,}00 \pm 0{,}22$	$9{,}0 \pm 0{,}32$	$6{,}5 \pm 0{,}02$	$8{,}83 \pm 0{,}17$	$7{,}19 \pm 0{,}01$
		$11{,}9 \pm 0{,}38$	$5{,}20 \pm 0{,}16$				

Продолжение табл. 33

Обозначение		Масса, $M_\odot$ M_1 M_2	Радиус, $R_\odot$ R_1 R_2	t_1 (метод изохрон Кларэ)	t_2	t_1 (метод изохрон Медер, Мейнет)	t_2
1		2	3	4		5	
91	BK Peg	$1{,}43 \pm 0{,}03$ $1{,}27 \pm 0{,}02$	$1{,}97 \pm 0{,}04$ $1{,}57 \pm 0{,}03$	2700 ± 248	3685 ± 227	5650 ± 186	$6220 \pm 30{,}6$
92	EE Peg	$2{,}15 \pm 0{,}03$ $1{,}33 \pm 0{,}02$	$2{,}09 \pm 0{,}03$ $1{,}31 \pm 0{,}02$	400 ± 6	450 ± 87	714 ± 41	1200 ± 309
93	AG Per	$5{,}36 \pm 0{,}09$ $4{,}95 \pm 0{,}08$	$2{,}99 \pm 0{,}05$ $2{,}60 \pm 0{,}14$	$13 \pm 0{,}7$	до НГП	$21{,}9 \pm 0{,}11$	$8{,}17 \pm 0{,}41$
94	IQ Per	$3{,}51 \pm 0{,}06$ $1{,}73 \pm 0{,}03$	$2{,}45 \pm 0{,}04$ $1{,}50 \pm 0{,}02$	$54{,}1 \pm 2{,}1$	до НГП	$87 \pm 0{,}2$	$87 \pm 0{,}2$:
95	V467 Per	$2{,}00 \pm 0{,}09$ $0{,}38 \pm 0{,}02$	$3{,}40 \pm 0{,}15$ $0{,}57 \pm 0{,}03$	1085 ± 142	—	1730 ± 128	1730 ± 128:
96	ς Phe	$3{,}93 \pm 0{,}06$ $2{,}55 \pm 0{,}04$	$2{,}85 \pm 0{,}04$ $1{,}85 \pm 0{,}03$	$77{,}4 \pm 1{,}5$	до НГП	$94{,}1 \pm 0{,}62$	$64{,}5 \pm 3{,}58$:
97	PV Pup	$1{,}57 \pm 0{,}02$ $1{,}56 \pm 0{,}02$	$1{,}54 \pm 0{,}02$ $1{,}50 \pm 0{,}02$	350 ± 40	130 ± 82	1460 ± 146	1285 ± 390
98	TY Pyx	$1{,}22 \pm 0{,}02$ $1{,}20 \pm 0{,}02$	$1{,}59 \pm 0{,}02$ $1{,}68 \pm 0{,}03$	4790 ± 136	5255 ± 365	$6980 \pm 27{,}3$	$7500 \pm 97{,}6$
99	VV Pyx	$2{,}10 \pm 0{,}03$ $2{,}10 \pm 0{,}03$	$2{,}165 \pm 0{,}03$ $2{,}16 \pm 0{,}03$	510 ± 12	510 ± 14	$945 \pm 47{,}5$	$944 \pm 57{,}1$
100	V1647 Sqr	$2{,}19 \pm 0{,}03$ $1{,}97 \pm 0{,}03$	$1{,}83 \pm 0{,}03$ $1{,}67 \pm 0{,}03$	155 ± 13	100 ± 21	$277 \pm 34{,}5$	$72{,}6 \pm 16{,}8$:
101	V760 Sco	$4{,}69 \pm 0{,}07$ $4{,}42 \pm 0{,}07$	$2{,}96 \pm 0{,}05$ $2{,}60 \pm 0{,}04$	$33{,}5 \pm 0{,}36$	$12{,}2 \pm 1{,}4$	$48{,}1 \pm 0{,}28$	$27{,}9 \pm 0{,}42$
102	V906 Sco	$3{,}55 \pm 0{,}09$ $2{,}80 \pm 0{,}07$	$4{,}20 \pm 0{,}11$ $3{,}86 \pm 0{,}10$	200 ± 10	390 ± 25	$210 \pm 8{,}5$	$470 \pm 15{,}8$
103	AL Scl	$3{,}63 \pm 0{,}06$ $1{,}71 \pm 0{,}03$	$3{,}24 \pm 0{,}05$ $1{,}40 \pm 0{,}02$	143 ± 6	до НГП	$166 \pm 15{,}5$	$166 \pm 15{,}5$:
104	EG Ser	$1{,}1 \pm 0{,}05$ $1{,}0 \pm 0{,}04$	$1{,}73 \pm 0{,}08$ $1{,}57 \pm 0{,}07$	8270 ± 1575	12120 ± 1800	8700 ± 406	11500 ± 500
105	CD Tau	$1{,}40 \pm 0{,}02$ $1{,}31 \pm 0{,}02$	$1{,}72 \pm 0{,}03$ $1{,}63 \pm 0{,}03$	2280 ± 121	3235 ± 219	5180 ± 95	$6120 \pm 53{,}2$
106	V818 Tau	$1{,}08 \pm 0{,}02$ $0{,}77 \pm 0{,}01$	$0{,}90 \pm 0{,}02$ $0{,}77 \pm 0{,}01$	до НГП	—	НГП	НГП
107	DN UMa	$2{,}02 \pm 0{,}04$ $1{,}91 \pm 0{,}04$	$1{,}79 \pm 0{,}04$ $1{,}79 \pm 0{,}04$	250 ± 14	370 ± 5	520 ± 107	$758 \pm 19{,}4$
108	CV Vel	$6{,}10 \pm 0{,}09$ $6{,}00 \pm 0{,}09$	$4{,}09 \pm 0{,}06$ $3{,}95 \pm 0{,}06$	$37{,}1 \pm 0{,}2$	$35{,}7 \pm 0{,}16$	$38 \pm 0{,}6$	$37{,}8 \pm 0{,}59$
109	DM Vir	$1{,}46 \pm 0{,}02$ $1{,}45 \pm 0{,}02$	$1{,}77 \pm 0{,}03$ $1{,}77 \pm 0{,}03$	1815 ± 82	1860 ± 85	4380 ± 100	4460 ± 108
110	α Vir	$10{,}9 \pm 0{,}34$ $6{,}80 \pm 0{,}22$	$7{,}60 \pm 0{,}24$ $4{,}4 \pm 0{,}14$	$16{,}3 \pm 0{,}48$	$30{,}5 \pm 1{,}7$	$17{,}1 \pm 1$	$30{,}8 \pm 0{,}39$
111	HD84207	$0{,}97 \pm 0{,}02$ $0{,}95 \pm 0{,}02$	$1{,}10 \pm 0{,}03$ $1{,}07 \pm 0{,}03$	10120 ± 700	10850 ± 710	8820 ± 302	9220 ± 287
112	HD208095	$3{,}70 \pm 0{,}16$ $3{,}35 \pm 0{,}15$	$2{,}90 \pm 0{,}13$ $2{,}70 \pm 0{,}12$	$100 \pm 2{,}1$	122 ± 5	130 ± 14	$165 \pm 16{,}1$

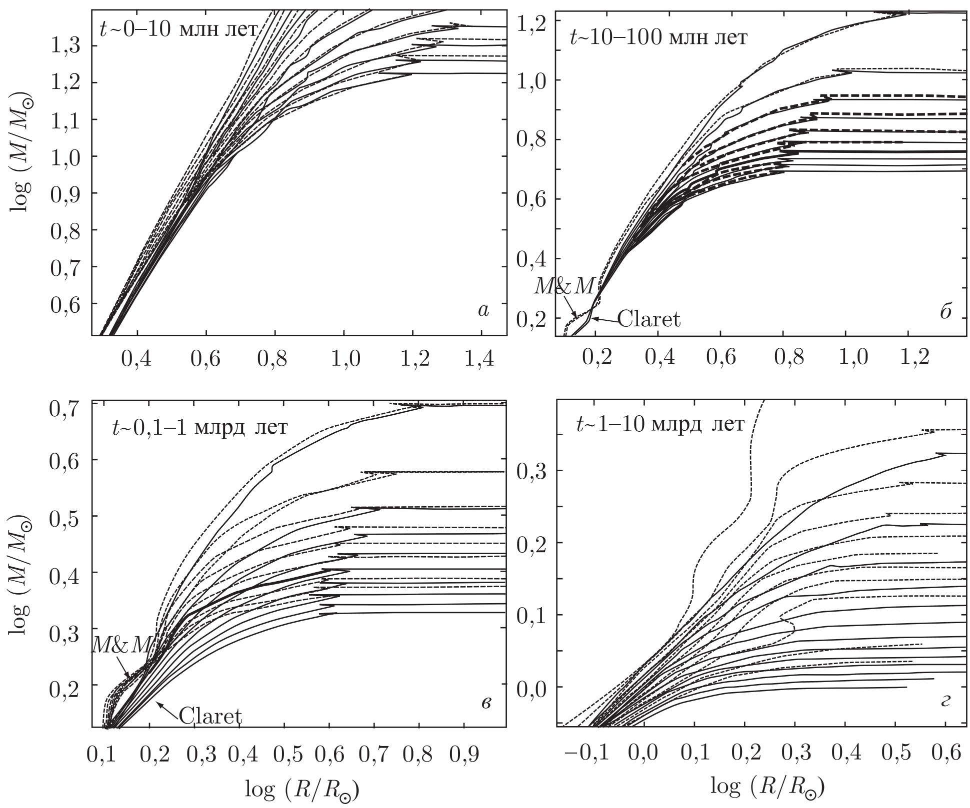


Рис. 81. Сравнение семейства изохрон, построенных на диаграмме «масса–радиус» на основе теоретических эволюционных моделей Кларэ (Claret, 2004a) с учетом приливных эффектов в ТДС (сплошные жирные линии), и семейства изохрон, вычисленных на базе теоретических эволюционных моделей одиночных звезд (Maeder and Meynet, 1988) с учетом потери массы и конвективного проникновения (штриховые линии): *а* — в диапазоне 0–10 млн лет, *б* — 10–100 млн лет, *в* — 0,1–1 гигалет, *г* — 1–13,5 гигалет (из работы Дремовой и Свечникова, 2007)

На рис. 81 приведены соответствующие изохроны для зависимости «масса–радиус» (Дремова и Свечников, 2007), по которым можно определять возрасты звезд в ТДС с использованием данных различных каталогов.

6. Абсолютные характеристики разделенной затменной двойной системы WW Aurigae, содержащей Am-звезды

Как пример тщательного современного анализа разделенной затменной двойной системы, рассмотрим работу Southworth et al. (2005a), посвященную интерпретации системы WW Aur. WW Aur — разделенная затменная двойная система, состоящая из двух звезд спектрального класса A с усиленными линиями металлов (Am-звезд). Орбитальный период системы $\sim 2{,}52$ суток.

Поскольку точность определения радиусов и масс компонент разделенных затменных систем может достигать $\sim 1\,\%$ (Andersen, 1991, Southworth et al., 2004a, b), анализ фотометрических и спектральных наблюдений таких систем является одним из самых эффективных методов изучения характеристик и эволюции одиночных звезд. Поскольку возраст и начальный химический состав звезд-компонент ТДС одинаков, а их массы могут значительно различаться, ТДС являются превосходными объектами для проверки теории внутреннего строения звезд и их эволюции. Наблюдения и анализ разделенных ТДС в звездных скоплениях и ассоциациях (а также в близких галактиках — см. выше) позволяют независимо определять расстояния до этих звездных агрегатов путем сравнения наблюдаемых звездных величин звезд с полученными из интерпретации кривых блеска и кривых лучевых скоростей абсолютными звездными величинами компонент ТДС (Southworth et al., 2005b). Более того, сравнение наблюдаемых масс и радиусов разделенных затменных систем с теоретическими звездными моделями позволяет определять возраст, металличность и обилие гелия как для звезд-компонент ТДС, так и в звездном скоплении в целом (Southworth et al., 2004a, b).

Особый интерес исследования разделенных затменных систем представляют для выяснения природы отдельных звезд, обладающих различными пекулярностями. В состав разделенных систем входят, в частности, такие пекулярные объекты, как медленно пульсирующие B-звезды (например, V539 Arae, см. Clausen, 1996), а также «металлические» звезды (например, KW Hydrae, см., Andersen and Vaz, 1984, 1987). Параметры ряда «металлических» звезд-компонент ТДС, представлены в обзоре Андерсена (Andersen, 1991).

Am-звезды имеют спектральные классы, лежащие в интервале между поздними B-звездами и ранними F-звездами. В спектрах этих звезд линии кальция и скандия аномально слабы, в то время как линии других металлов значительные усилены. Эти спектральные аномалии наблюдаются среди A-звезд со скоростями вращения менее 100 км/с (Abt and Morrell, 1995) и, по-видимому, вызваны радиативной диффузией химических элементов в поверхностных слоях звезд (Budaj, 1996, 1997, Turcotte et al., 2000, Michaud et al., 2004). Am-звезды часто встречаются в двойных системах (Abt, 1961), что, возможно, связано с тем, что приливная синхронизация осевого и вращательного движений звезды в двойной системе приводит к меньшим вращательным скоростям, по сравнению с одиночными звездами.

Были выдвинуты предположения, что Am-звезды имеют слегка большие радиусы по сравнению с обычными A-звездами (Kitamura and Kondo, 1978, Budaj, 1996). Однако эти предположения не были подтверждены последующими исследованиями Am-звезд в разделенных затменных системах (Lacy et al., 2002, 2004 a,b). Оказалось, что массы, радиусы и светимости Am-звезд в разделенных затменных системах в целом хорошо описываются в рамках теоретических эволюционных моделей нормальных звезд.

Спектральные наблюдения яркой затменной системы WW Aur ($m_V = 5{,}8$) выполнены авторами (Southworth et al., 2005a) на 2,5-метровом телескопе Исаака Ньютона в Ла Пальма. Используемый спектральный диапазон λ 4230–4500 Å содержит линию магния Mg II 4481 Å, которая является одной из лучших линий для измерения лучевых скоростей звезд ранних спектральных типов (Andersen, 1975). Было получено 59 спектров системы WW Aur с очень большим отношением сигнал-шум (450–700) и с высоким спектральным разрешением 0,2Å ($R \simeq 20\,000$). Лучевые скорости были определены путем двумерного кросс-корреляционного анализа (алгоритм TODCOR, см. Zucker and Mazeh, 1994) со спектрами нескольких звезд сравнения. Кривые лучевых скоростей обеих компонент были проинтерпретированы с помощью программы Этцеля (Etzel) Spectroscopic Binary Orbit Program, SBOP (см. сайт http://mintaka.sdsu.edu/faculty/etzel). Измеренные полуамплитуды кривых лучевых скоростей составляют $K_1 = (116{,}81 \pm 0{,}23)$ км/с, $K_2 = (126{,}49 \pm 0{,}28)$ км/с, для первичной (более массивной и более горячей) и вторичной компоненты соответственно.

Наблюдаемые и теоретические кривые лучевых скоростей приведены на рис. 82. Эксцентриситет орбиты системы WW Aur равен нулю. Это подтверждается и тем обстоятельством, что вторичный минимум кривой блеска этой системы расположен точно на фазе 0,5 орбитального периода.

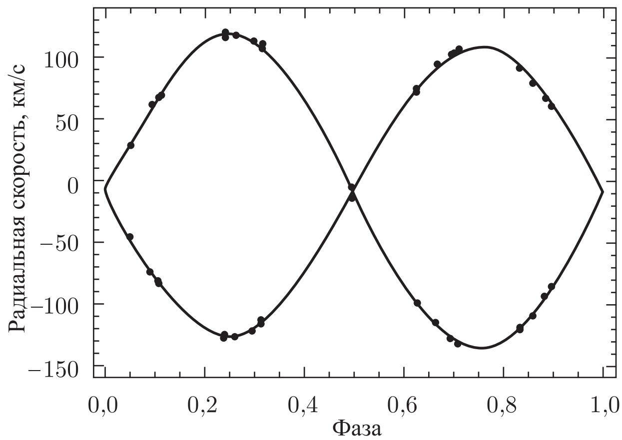


Рис. 82. Наблюдаемые и теоретические кривые лучевых скоростей затменной системы WW Aur (из работы Southworth et al., 2005a)

Для системы WW Aur всего было получено 7 высокоточных фотоэлектрических кривых блеска: uvby-кривые (в системе Стремгрена) содержащие по ~ 1000 индивидуальных наблюдений в каждой полосе (получены в 1973–1974 гг. Этцелем, см. Etzel, 1975), а также UBV-кривые блеска опубликованные в работе (Kiyokawa and Kitamura, 1975), также содержащие по ~ 1000 индивидуальных наблюдений в каждом фильтре. Значимых изменений орбитального периода в системе WW Aur авторами не обнаружено (см. также Базу данных по минимумам затменных переменных, Kreiner et al., 2001, а также сайт: http://www.as.ap.krakow.pl/). Кривые блеска приведены на рис. 83.

Семь высококачественных кривых блеска системы WW Aur с частными затмениями интерпретировались авторами (Southworth et al., 2005a) с помощью программы EBOP (Eclipsing Binary Orbit Program, см. сайт http://mintaka.sdsu.edu/faculty/etzel/), в которой диски звезд аппроксимируются двухосными эллипсоидами. С деталями описания этой модели ТДС и программы можно ознакомиться в работах (Etzel, 1981, Popper and Etzel, 1981, Nelson and Davis, 1972). Эта модель применима лишь к разделенным затменным системам, таким, как система WW Aur. При поиске параметров модели использовался алгоритм Левенберга–Марквардта для минимизации невязки между наблюдаемой и теоретической кривой блеска (Press et.al., 1992). Каждая из семи кривых блеска интерпретировалась независимо, использовались индивидуальные точки на кривых блеска без объединения их в нормальные точки. Коэффициент гравитационного потемнения в законе $F_{\text{bol}} \sim T_{\text{ef}}^4 \sim g^{\beta_1}$ задавался $\beta_1 = 1$ (что соответствует $\beta = 0{,}25$, т. е. лучистой оболочке звезды). Искомыми параметрами были относительные радиусы звезд, отношение их поверхностных яркостей, наклонение орбиты и линейные коэффициенты потемнения к краю для обеих звезд. Все эти 6 параметров искались независимо для каждой из семи наблюдаемых кривых блеска. Независимый анализ «желтой» кривой блеска (в фильтре y) с помощью другой программы (программа WINK, см. Wood, 1971) показал хорошее согласие с результатами,

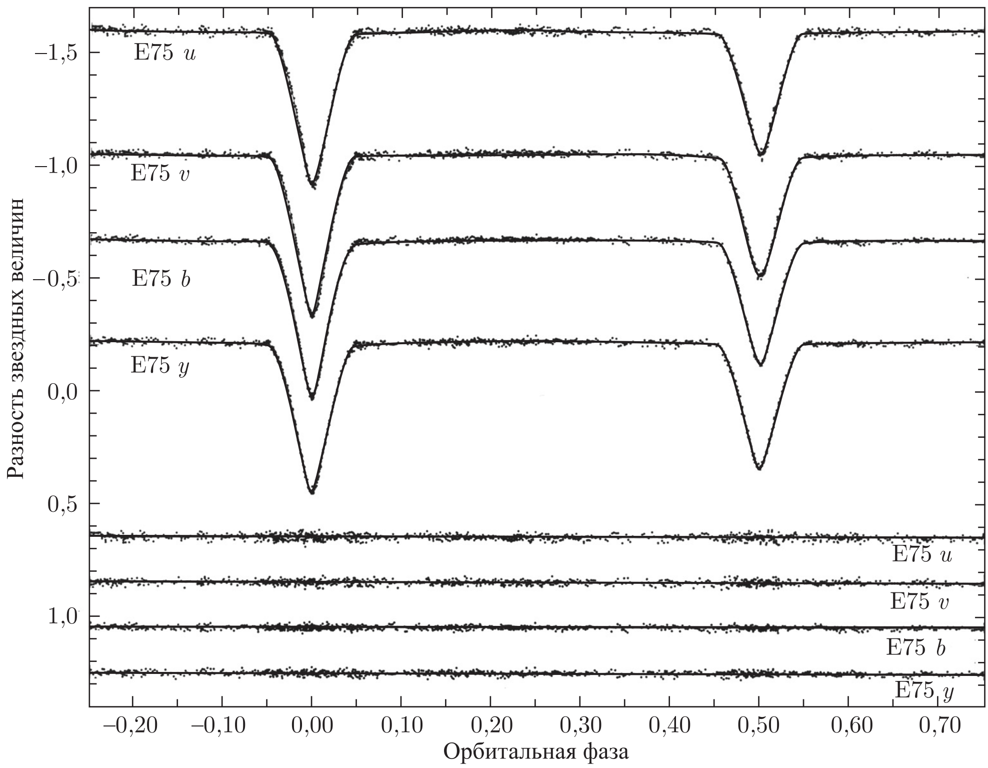


Рис. 83. Наблюдаемые и теоретические кривые блеска в системе $uvby$ затменной системы WW Aur. Внизу представлены отклонения блеска от оптимальных теоретических кривых (из работы Southworth et al., 2005b)

полученными с помощью программы EBOP. Были найдены средневзвешенные значения по всем семи кривым блеска для относительных радиусов звезд и наклонения орбиты (которые не должны зависеть от длины волны), а также определены среднеквадратичные ошибки для средних значений этих параметров, которые оказались следующими: $R_1 = 0{,}1586 \pm 0{,}0009$, $R_2 = 0{,}1515 \pm 0{,}0009$, $i = 87{,}55^\circ \pm 0{,}04^\circ$.

Особое внимание авторы уделили оценке ошибок параметров модели. Авторы отмечают, что формальные ошибки параметров, получаемые в применяемых алгоритмах минимизации функционала невязки неадекватны реальным ошибкам параметров (Popper, 1984, Southworth et al., 2005b), особенно, когда некоторые из искомых параметров сильно скоррелированы друг с другом. Например, в случае частных затмений в двойной системе отношение радиусов компонент может быть сильно скоррелировано с отношением их светимостей и, следовательно, с отношением поверхностных яркостей компонент.

Авторы использовали метод Монте-Карло для выявления скоррелированности искомых параметров (Southworth et al., 2004 b, c) и надежной оценки их ошибок. Для каждой из семи наблюдаемых кривых блеска была построена «синтетическая» кривая блеска, вычисленная с найденными оптимальными параметрами модели на тех же фазах орбитального периода, на которых имеются наблюдаемые точки. Затем в каждую точку «синтетической» кривой блеска вносились случайные возмущения, распределенные по гауссову закону со среднеквадратичной ошибкой, соответствующей наблюдениям. Затем эта сгенерированная кривая блеска интерпретировалась и находились новые оптимальные значения искомых параметров. Такая процедура многократного решения обратной задачи повторялась 10 000 раз для каждой из семи наблюдаемых кривых блеска. Затем были построены распределения найденных оптимальных значений параметров, которые позволили исследовать скоррелированность параметров (рис. 84). Как видно, особенно сильная корреляция в случае системы WW Aur наблюдается между отношением поверхностных яркостей компонент

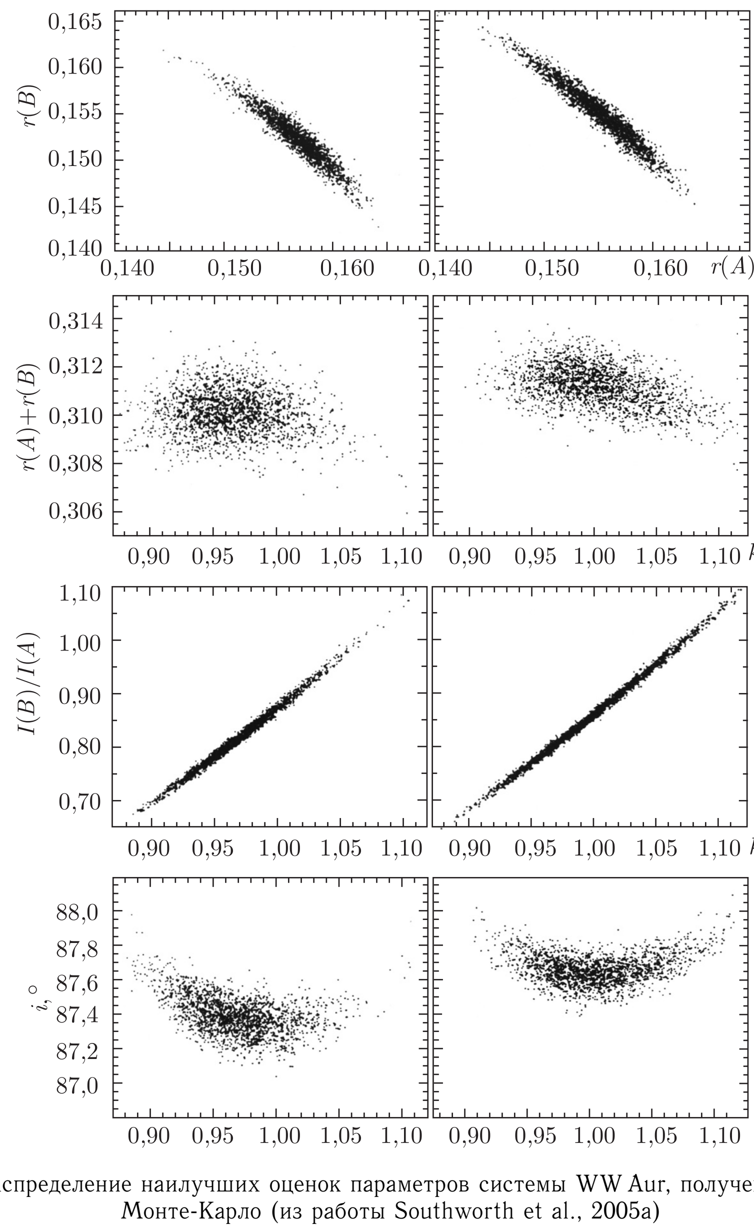


Рис. 84. Распределение наилучших оценок параметров системы WW Aur, полученное методом Монте-Карло (из работы Southworth et al., 2005a)

и отношением их радиусов. Авторы подчеркивают, что «внутренние» ошибки искомых параметров, вычисленные методом Монте-Карло для каждой из семи наблюдаемых кривых блеска, близки к «внешним» ошибкам параметров, определяемых путем сравнения оптимальных значений параметров, найденных при интерпретации каждой кривой блеска. На основе полученных распределений значений искомых параметров были вычислены среднеквадратичные ошибки параметров. Эти среднеквадратичные ошибки были использованы для вычисления средневзвешенных значений параметров R_1, R_2, i и их среднеквадратичных ошибок по всем семи наблюдаемым кривым блеска, которые были приведены выше.

Метод оценки ошибок параметров, основанный на возмущении с помощью случайных чисел оптимальной теоретической кривой блеска, можно обоснованно применять лишь в том случае, когда используемая модель адекватна наблюдательным данным, т. е. когда у исследователя есть уверенность в том, что теоретическая кривая блеска (соответствующая найденным оптимальным значениям искомых параметров) близка к точной кривой блеска, соответствующей идеально точным значениям параметров модели. В этом случае в остаточных невязках между наблюдаемой и оптимальной теоретической кривыми блеска нет систематической компоненты, и остаточные невязки распределены по случайному закону с нулевым средним. При этом приведенное значение χ^2_ν близко к единице, и используемая модель может быть отвергнута лишь на весьма высоком уровне значимости, порядка 50 %. Напомним, что уровень значимости статистического критерия — это количество ошибок I рода (модель верна, но отвергается по критерию), которое мы совершаем, отвергая модель. Если модель отвергается по уровню значимости более 50 %, это означает, что в более чем 50 % случаев, отвергая модель, мы совершаем ошибку I рода, т. е. отвергаем верную модель. Следовательно, у нас нет оснований отвергнуть модель, и используемая модель может быть принята. В этом случае можно считать, что оптимальная теоретическая кривая блеска близка к точной кривой блеска, соответствующей идеально точным значениям параметров, а сама оптимальная теоретическая кривая блеска наилучшим образом «натянута» на наблюдаемую кривую. Это «дает нам право» заменить наблюдаемую кривую блеска на оптимальную теоретическую кривую, возмущенную случайными числами с соответствующей среднеквадратичной амплитудой. Беря различные наборы случайных возмущений, мы искусственно генерируем множество возможных реализаций случайного процесса. Многократно решая соответствующую обратную задачу, мы получаем распределения искомых параметров, по которым можно оценить их ошибки. Так поступали авторы работы (Southworth et al., 2005a). Вместо значения минимального приведенного χ^2_ν они дают значения среднеквадратичного остаточного отклонении $O - C$ между наблюдаемой и оптимальной теоретической кривыми блеска, которые для всех семи используемых кривых блеска не превышают среднеквадратичной ошибки индивидуального наблюдения (значения $O - C$ равны $0{,}008^m$–$0{,}012^m$ для фильтров v, b, y, B, V и составляют $\sim 0{,}012^m$–$0{,}016^m$ для фильтров u и U соответственно). Отсюда следует, что минимальное приведенное χ^2_ν в данном случае близко к единице, т. е. модель адекватна наблюдениям, и процедура поиска ошибок параметров, основанная на применении метода Монте-Карло, вполне обоснована. Минимальное приведенное χ^2_ν может быть больше единицы даже для верной модели, если значение среднеквадратичной ошибки индивидуального наблюдения по каким-то причинам занижено или если в наблюдаемой кривой блеска присутствуют быстрые физические изменения блеска с характерным временем много меньше орбитального периода. Поэтому среднеквадратичная ошибка индивидуального наблюдения должна быть аккуратно определена из независимых наблюдений. Если же в кривой блеска затменной системы присутствует быстрая физическая переменность, обычно вводят эффективную среднеквадратичную ошибку индивидуального наблюдения ε, используя формулу сложения дисперсий двух независимых случайных величин $\varepsilon = \sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2}$, где ε_1 — среднеквадратичная ошибка индивидуального наблюдения, а ε_2 — среднеквадратичная амплитуда быстрой физической переменности.

В случае, если используемая модель неадекватна, в остаточных невязках появляется систематическая компонента, и приведенное χ^2_ν становится существенно больше единицы. В этом случае используемая модель может быть отвергнута лишь на весьма низком уровне значимости, например, <10%. Это означает, что, отвергая модель, мы совершаем ошибку I рода (т. е., отвергаем верную модель) лишь в менее 10 случаев из ста. В более чем 90% случаев отвергая модель по статистическому критерию, мы правы. Следовательно, мы имеем большие основания считать, что модель должна быть отвергнута, и у нас нет оснований ее принять. Ясно, что, как уже нами отмечалось выше, для такой «плохой» модели, решая обратную задачу, мы не можем получить надежные значения искомых параметров и их ошибок. В таких случаях, когда нет возможности усовершенствовать модель, исследователи чаще всего приводят найденные значения параметров без указания ошибок их определения и указывают соответствующее значение минимального приведенного χ^2_ν, подчеркивая тем самым неадекватность используемой модели.

Разумеется, можно пытаться определять ошибки параметров и в случае использования модели, не адекватной наблюдениям, когда минимальное приведенное значение $\chi^2_\nu > 1$. В этом случае, если мы хотим использовать метод Монте-Карло, мы должны вносить случайные возмущения в оптимальную теоретическую кривую блеска, которая далека от точной кривой блеска, соответствующей идеально точным значениям параметров модели. Поэтому в случае неадекватной модели мы получаем искусственно созданный набор реализаций случайного процесса (кривые блеска), который имеет весьма далекое отношение к реальной наблюдаемой кривой блеска. Ясно, что найденные при этом распределения значений искомых параметров и соответствующие ошибки параметров далеки от реальности и не могут служить надежными оценками реальных ошибок параметров модели. Метод Монте-Карло, примененный авторами (Southworth et al., 2005a) для оценки ошибок искомых параметров модели, весьма эффективен и дает наглядные результаты (см. рис. 84). В случае, если программа решения соответствующей обратной задачи достаточно быстродействующая, имеется возможность очень много раз решать обратную задачу и получать надежные распределения значений искомых параметров.

Метод Монте-Карло не позволяет строить поверхность функционала невязки, поскольку он ориентирован лишь на получение оптимальных значений параметров для многочисленных независимых искусственно созданных реализаций случайного процесса (кривой блеска). Поэтому применение метода Монте-Карло не дает возможности уверенно судить о единственности решения обратной задачи. Описанный выше метод доверительных областей, при котором перебором по искомым параметрам строится поверхность функционала невязки, а затем с применением выбранного статистического критерия отсекается часть этой поверхности, позволяет с одной стороны, обоснованно судить о единственности или неединственности искомого решения обратной задачи, с другой — находить оценки значений искомых параметров и их доверительных областей. Разумеется, в методе доверительных областей, как и в методе Монте-Карло, стоит проблема возможной скоррелированности отдельных параметров задачи, которая проявляется в наличии вытянутых «оврагов» на соответствующей поверхности функционала невязки. Наличие таких «оврагов» приводит к тому, что хотя найденная доверительная область сложной формы накрывает точное решение (весь набор искомых параметров) с заданной вероятностью γ, при проектировании доверительной области на оси параметров (вычислении ошибки каждого из параметров) мы вынуждены заменять найденную доверительную область сложной формы объемлющим ее параллелепипедом, объем которого больше. При этом вероятность накрытия точного решения возрастает. Такая же проблема стоит и в методе Монте-Карло (см. рис. 84). Таким образом, резюмируя методическую часть работы, можно заключить, что в методе Монте-Карло ошибки искомых параметров оцениваются по серии искусственно сгенерированных реализаций случайного процесса (кривой блеска). В методе доверительных областей, описанном выше, ошибки параметров оцениваются с использованием одной реализации случайного процесса (наблюдаемой кривой блеска) при известном законе распределения статистики, характеризующей расстояние между наблюдаемой и теоретической кривой блеска.

Следует подчеркнуть, что в методе Монте-Карло ошибки параметров ищутся в рамках статистики нормального распределения, а в методе доверительных областей — в рамках статистики, порожденной нормальным распределением ($\chi^2_M, \chi^2_P, F_{M,N-M}$ и т. п.). Кроме того, при решении обратных параметрических задач, если число искомых параметров больше одного, целесообразно указывать значение ошибки параметра не на уровне 1σ, а на уровне $k\sigma$, где k — коэффициент, зависящий от числа искомых параметров. Например, в случае статистики χ^2_P, для числа искомых параметров, равного четырем, величина $k = 2{,}2$ (см. выше). Это необходимо делать для того, чтобы гарантировать с заданной вероятностью одновременное попадание всех искомых параметров в соответствующую доверительную область. Указывая же в случае многопараметрической задачи величину 1σ, мы гарантируем попадание в соответствующий доверительный интервал лишь одного параметра, независимо от того, попадают или нет остальные параметры задачи в свои доверительные интервалы. В этом случае вероятность попадания всех искомых параметров одновременно в соответствующую доверительную область заведомо меньше заданной вероятности $\gamma = 68\,\%$. Подробнее об этом см. выше, а также в работах Абубекеров и др. (2008а, 2009б).

Для каждой из семи исследованных кривых блеска при точности наблюдений $\sim 0{,}01^m$ точность определения радиусов звезд составляет $\sim (1{,}3\text{–}3)\,\%$, точность определения наклонения орбиты $\sim 0{,}1^\circ\text{–}0{,}2^\circ$ точность определения отношения поверхностных яркостей $\sim (3\text{–}4)\,\%$. Коэффициенты потемнения к краю при этом находятся с точностью (15–25) %. Зависимость найденных коэффициентов потемнения от длины волны плохо согласуется с соответствующими теоретическими зависимостями, рассчитанными в работах Ван Хама (Van Hamme, 1993) и Кларэ (Claret, 2000b). Средневзвешенные по семи кривым блеска значения радиусов компонент, как уже отмечалось, определяются с точностью $\sim 0{,}6\,\%$. Окончательно принятые абсолютные значения масс и радиусов компонент следующие:

$$M_1 = (1{,}964 \pm 0{,}007)\,M_\odot, \quad M_2 = (1{,}814 \pm 0{,}007)\,M_\odot,$$
$$R_1 = (1{,}927 \pm 0{,}011)\,R_\odot, \quad R_2 = (1{,}841 \pm 0{,}011)\,R_\odot.$$

Эффективные температуры компонент были вычислены с использованием тригонометрического параллакса системы, измеренного со спутника HIPPARCOS, что дает расстояние до системы WW Aur $d = (84{,}3 \pm 7{,}6)$ пк. Используя опубликованные ультрафиолетовые, оптические и инфракрасные потоки от системы WW Aur авторы определили эффективные температуры:

$$T_1 = (7960 \pm 420)\text{ K}, \quad T_2 = (7670 \pm 410)\text{ K}.$$

Большое внимание авторы уделили сравнению наблюдаемых параметров компонент с теоретическими моделями эволюции звезд, используя расчеты разных групп: из Гранады (Claret, 1995, 2004a), Женевы (Schaller et al., 1992), Падовы (Girardi et al., 2000) и Кэмбриджа (Pols et al., 1998). Кроме того, использовались теоретические модели звезд на стадии до главной последовательности (Siess et al., 2000). Авторами показано, что найденные значения масс, радиусов и эффективных температур для компонент WW Aur удается согласовать лишь с эволюционными моделями Кларэ (Claret, 2004a), учитывающими приливную эволюцию звезд в ТДС, причем требуемое при этом начальное содержание металлов $z \simeq 0{,}06$ (в три раза больше солнечного), а возраст звезд ~ 90 миллионов лет. Это наибольшее содержание металлов, найденное среди хорошо изученных разделенных затменных двойных систем. Авторы подчеркивают, что такая высокая металличность звезд-компонент системы WW Aur, по-видимому, не имеет отношения к наблюдаемым аномалиям в спектрах компонент (усиленные линии одних металлов и ослабленные — других), которые, скорее всего, носят поверхностный характер и вызваны радиативной диффузией химических элементов в подповерхностных слоях звезд.

Орбита системы WW Aur круговая, причем авторы показали, что осевое вращение звезд здесь синхронно с орбитальным обращением. Однако время округления эллиптической орбиты в системе WW Aur весьма велико — порядка 1380 млн лет, а время синхронизации вращательного и орбитального движения звезд равно 1120 и 1280 млн лет для первой и второй компоненты соответственно (согласно теории Zhan, 1977, 1989). При расчетах времен синхронизации использовался метод, развитый в работах (Claret et al., 1995a и Claret and Cunha, 1977). Поскольку возраст системы ~ 90 млн лет, авторы предполагают, что округление и синхронизация в системе WW Aur вызваны либо процессами на стадии эволюции до главной последовательности, когда звезды были полностью конвективными, либо тем, что двойная система с самого момента образования имела круговую орбиту и синхронное вращение компонент.

В целом работа Саусворса и др. (Southwors et al., 2005a) демонстрирует эффективность современных методов исследований разделенных затменных двойных систем. Эти методы кажутся особенно перспективными для исследований высокоточных кривых блеска разделенных затменных двойных систем, выполняемых с помощью космических миссий COROT и «Kepler».

7. Анализ кривых блеска контактных затменных двойных систем типа W UMa

Мы рассмотрели пример интерпретации кривых блеска разделенной затменной двойной системы WW Aur. В этой интерпретации применялась модель ТДС как системы из двух звезд-эллипсоидов. Такая простая модель оказалась адекватной наблюдениям при интерпретации кривых блеска системы WW Aur, полученных с точностью $\sim 0{,}01^m$. Вместе с тем, ввиду высокого быстродействия компьютерной программы, реализующей эту модель, авторам (Southwors et al., 2005) удалось реализовать применение метода Монте-Карло для оценки ошибок определения искомых параметров модели. Разумеется, кривые блеска системы WW Aur могли бы успешно интерпретироваться и в рамках модели Роша (со значительно большими затратами компьютерного времени) с использованием одной из компьютерных программ (например, программы Вильсона), но, как оказалось, модель двух эллипсоидов вполне адекватна для системы WW Aur при точности наблюдений $\sim 0{,}01^m$. Дальнейшее повышение точности кривых блеска системы WW Aur (например, при наблюдениях с помощью космических миссий) может привести к тому, что модель двух эллипсоидов окажется неадекватной наблюдательным данным, что потребует использования более совершенной модели ТДС.

Рассмотрим теперь пример контактных затменных систем типа W UMa, когда даже при типичной точности индивидуального наблюдения $\sim 0{,}01^m$ не только модель двух эллипсоидов, но и модель Роша не является адекватной наблюдениям, и требуется усовершенствование модели Роша путем введения пятен на поверхностях звезд.

В работах группы Джурашевича (Djurašević et al., 2001, Albayrak et al., 2004) выполнена интерпретация кривых блеска систем типа W UMa U Peg и SW Lac. По наблюдениям, выполненным в течение 1950–1989 гг. кривая блеска U Peg ($P = 0{,}37^{\mathrm{d}}$, G3+G3) показывала медленно меняющуюся асимметрию амплитудой до $0{,}1^m$ при глубине затмений $0{,}6^m$. Это не позволяло удовлетворительно проинтерпретировать кривую блеска системы в рамках модели Роша.

Система SW Lac ($p \simeq 0{,}32^{\mathrm{d}}$, G3V+G3V) также показывает медленные изменения асимметрии кривой блеска амплитудой $\sim 0{,}1^m$ при глубине затмений $\sim 0{,}9^m$, на протяжении 1957–2003 гг.

Для описания этих особенностей в работах (Djurašević et al., 2001, Albayrak et al., 2004) была использована модель Роша для ТДС, в которой звезды — компоненты системы имеют пятна на поверхностях.

Для интерпретации кривых блеска использовалась программа Джурашевича (Djurašević et al., 1992a, b), реализующая модель Роша и обобщенная на случай переполнения звездами своих полостей Роша (сверхконтактные конфигурации) — см. Djurašević et al., (1998). Обратная задача в программе решается методом, основанным на алгоритме минимизации функционала невязки, предложенным в работе (Marquardt, 1963). В программе размеры звезд характеризуются степенью заполнения полости Роша $\mu_{1,2}$ первичной и вторичной компоненты. Для синхронного вращения звезд

$$\mu_{1,2} = \frac{R_{1,2}}{R^{(1,2)}_{\mathrm{Roche}}},$$

где $R_{1,2}$ — полярные радиусы первичной и вторичной компоненты, $R^{(1,2)}_{\mathrm{Roche}}$ — полярные радиусы критической полости Роша соответственно. В случае сверхконтактной конфигурации потенциал $\Omega_{1,2}$, характеризующий общую фотосферу системы, выражается через степень заполнения полости Роша $\mu_1 > 1$ для первичной компоненты, в то время как параметр μ_2 может быть исключен из рассмотрения. Степень сверхконтактности может быть выражена следующим образом (Lucy and Wilson, 1979):

$$f\,[\%] = \frac{100\,(\Omega_{1,2} - \Omega_i)}{\Omega_0 - \Omega_i},$$

где $\Omega_{1,2}$, Ω_i и Ω_0 — потенциалы общей фотосферы и внутренней и внешней контактных поверхностей соответственно.

При синтезе кривой блеска использовалась сетка из $72 \times 144 = 10368$ элементарных площадок на поверхности каждой звезды. Интенсивность и угловое распределение излучения от элементарной площадки определяется эффективной температурой площадки, потемнением к краю, гравитационным потемнением и эффектом «отражения». Для объяснения асимметрии и других аномалий кривых блеска в модель вводятся активные области (темные или яркие). Эти активные области аппроксимируются круглыми пятнами на поверхностях звезд. Пятна характеризуются температурным контрастом по отношению к фотосфере звезды ($A_s = T_s/T_*$), угловым размером (радиусом) пятна θ_s и координатами центра пятна — долготой λ_s и широтой φ_s. Оптимальные параметры модели находились путем минимизации $S = \sum(O - C)^2$, где $O - C$ — разность между наблюдаемой и теоретической кривыми блеска для данной орбитальной фазы. Минимизация функции S проводилась итеративным циклом коррекции искомых параметров модели. В этом методе минимизации находятся как оценки искомых параметров, так и их ошибок. Использовались индивидуальные наблюдения, нормальные точки на кривых блеска не вычислялись.

Согласно Люси (Lucy, 1967) и Ручиньскому (Rucinski, 1969a, b), коэффициент гравитационного потемнения для звезд и альбедо эффекта «отражения» принимались равными $\beta_{1,2} = 0{,}08$, $A_{1,2} = 0{,}5$, что характерно для конвективных оболочек звезд. В программе использовались как линейный, так и нелинейные законы потемнения к краю. В качестве модели излучения использовалась как модель абсолютно черного тела, так и реальные модели тонких звездных атмосфер в диапазоне эффективных температур $2000\,\mathrm{K} \leqslant T_{\mathrm{ef}} \leqslant 35\,000\,\mathrm{K}$, ускорений силы тяжести $3 \leqslant \lg g \leqslant 5$ и металличности $-1 \leqslant [\mathrm{Fe/H}] \leqslant 1$, где [Fe/H] — логарифм относительного содержания металлов.

Отношение масс компонент задавалось на основе спектральных измерений кривых лучевых скоростей: $q = m_c/m_h = 3{,}019$ для системы U Peg (Lu, 1985, Zhai et al., 1988) и $q = 1{,}255$ для системы SW Lac (Zhai and Lu, 1989).

Решение обратной задачи интерпретации кривых блеска совместно с результатами спектроскопических наблюдений позволило определить абсолютные характеристики систем, а также найти конфигурацию пятен на поверхностях звезд, обусловливающую асимметрию кривых блеска.

Для системы U Peg было найдено, что температура менее массивной, более горячей компоненты $T_h = 5800\,\mathrm{K}$, температура более массивной, более холодной компоненты $T_c = 5600\,\mathrm{K}$. Степень заполнения полости Роша более горячей компоненты (менее массивной) $\mu_h = 1{,}024$, наклонение орбиты $i = 76{,}1^\circ$, температурный контраст пятен на поверхности более массивной (более холодной) звезды $A_s = T_s/T_c \approx 0{,}65$–$0{,}76$ для различных эпох наблюдений, угловые радиусы пятен лежат в пределах 8°–31°. Массы компонент равны $M_h = 0{,}39 M_\odot$, $M_c = 1{,}17 M_\odot$, их радиусы $R_h = 0{,}75 R_\odot$, $R_c = 1{,}23 R_\odot$, ускорения силы тяжести на их поверхностях $\lg g_h = 4{,}27$, $\lg g_c = 4{,}32$, абсолютные болометрические звездные величины компонент

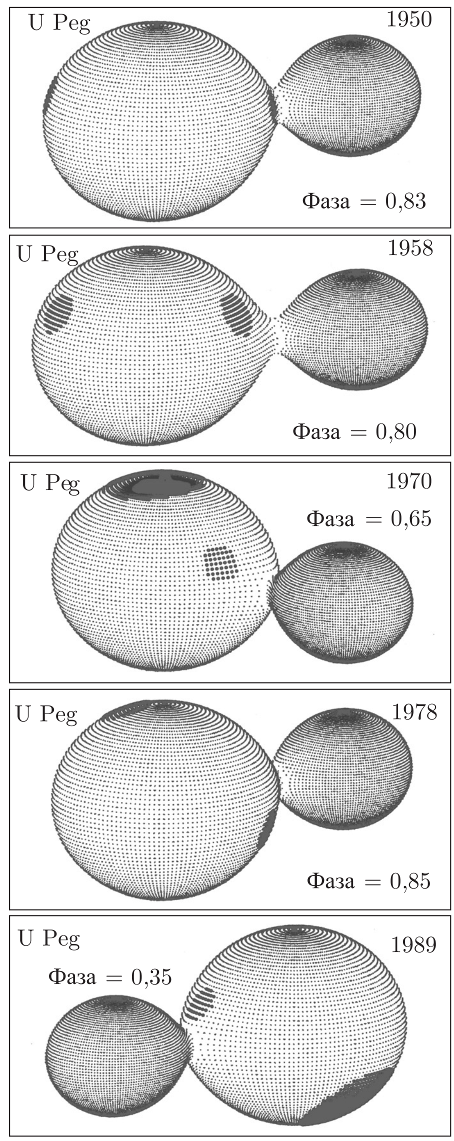


Рис. 85. Компьютерная модель системы U Peg типа W UMa, построенная для оптимальных параметров в разные эпохи наблюдений (из работы Djurašević et al., 2001)

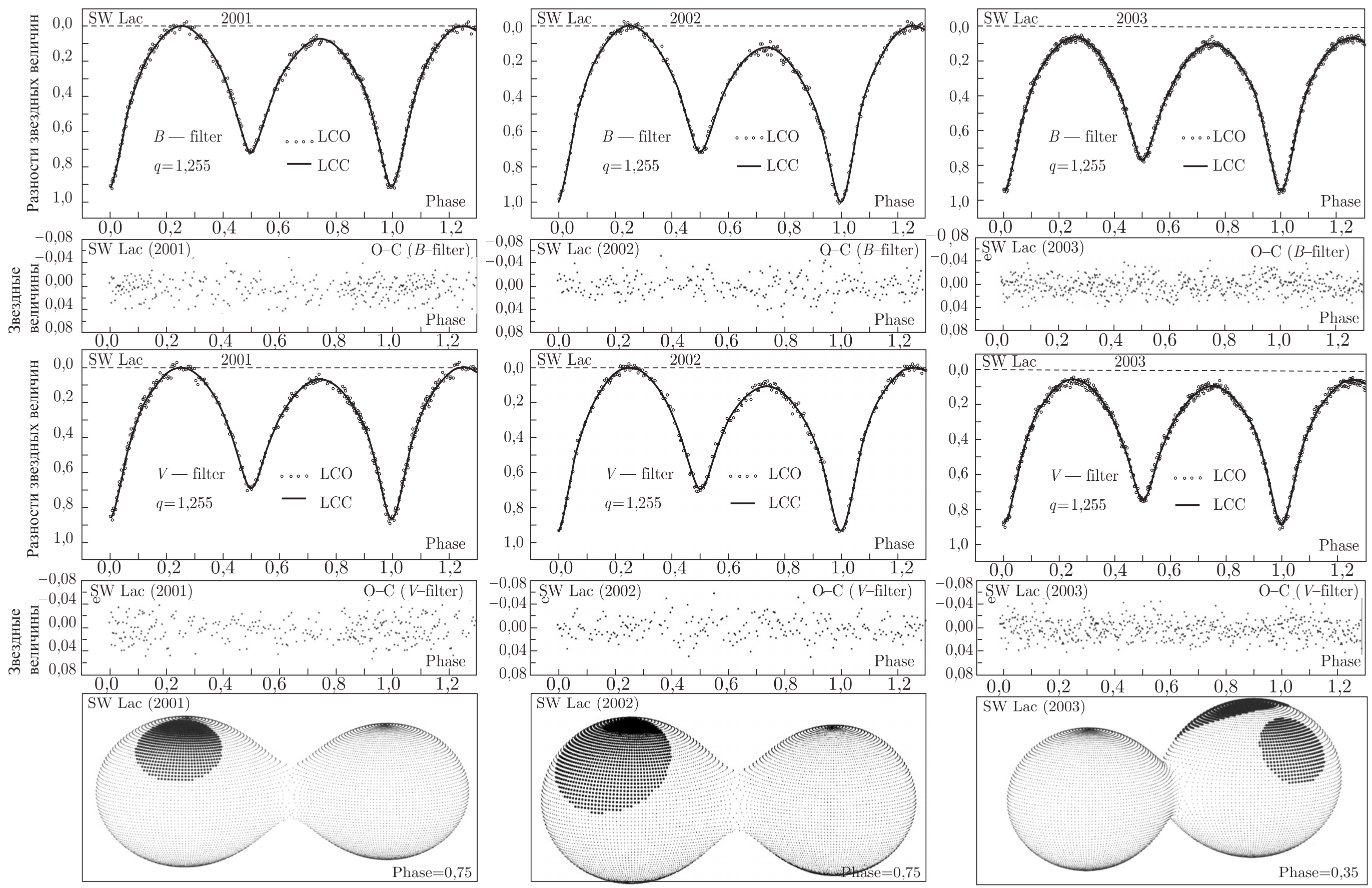


Рис. 86. Кривые блеска и соответствующие компьютерные модели системы типа W UMa SW Lac для разных эпох наблюдений: 2001 г. (слева), 2002 г. (в центре) и 2003 г. (справа) (из работы Albayrak et al., 2004)

равны $M_h^{\text{bol}} = 5{,}39$, $M_c^{\text{bol}} = 4{,}46$. В работе также приведены ошибки параметров, которые, по видимому, занижены ввиду того, что они получены в результате минимизации функционала невязки нелинейной версией метода наименьших квадратов (см. выше).

На рис. 85 приведена компьютерная модель системы U Peg для разных эпох и разных фаз орбитального периода. Эта модель удовлетворительно описывает все кривые блеска системы с 1950 по 1989 г.

По системе SW Lac получены следующие результаты. Температура менее массивной (более горячей) компоненты $T_h = 5630$ K, температура более массивной (более холодной) компоненты $T_c = 5347$ K. Степень заполнения полости Роша более горячей (менее массивной) звездой $\mu_h \simeq 1{,}06$, наклонение орбиты $i = 79{,}9^\circ$, температурный контраст пятен на поверхности более массивной (более холодной) компоненты $A_s = T_s/T_c \simeq 0{,}89$, угловой радиус пятен $\theta_s \simeq 26^\circ$–47°. Массы компонент равны $M_h = 0{,}78 M_\odot$, $M_c = 0{,}98 M_\odot$, их радиусы $R_h = 0{,}92 R_\odot$, $R_c = 1{,}02 R_\odot$, ускорения силы тяжести $\lg g_h = 4{,}4$, $\lg g_c = 4{,}4$, абсолютные болометрические звездные величины $M_h^{\text{bol}} = 5{,}07$, $M_c^{\text{bol}} = 5{,}09$. На рис. 86 приведена компьютерная модель системы SW Lac для разных эпох и разных фаз орбитального периода. Эта модель удовлетворительно описывает все кривые блеска SW Lac с 2001 по 2003 г.

Исследования этих систем показывают, что модель Роша с пятнами на поверхности более холодной звезды позволяет хорошо описать наблюдаемую долгопериодическую переменность кривых блеска. Эта переменность кривых блеска может быть объяснена развитием и миграцией пятен с температурой примерно на тысячу кельвинов ниже, чем поверхность более холодной компоненты. Важно подчеркнуть, что, несмотря на долгопериодическую переменность кривых блеска, все они могут быть удовлетворительно описаны одними и теми же геометрическими параметрами (наклонение орбиты и радиусы компонент), что подтверждает тот факт, что сложная долгопериодическая переменность этих систем связана с образованием и миграцией пятен на поверхности звезды.

Другим важным выводом является то, что обе изученные системы являются сверхконтактными со степенью сверхконтактности $f = 15$–$31\,\%$ и сравнительно небольшой разницей температур компонент $\Delta T = T_h - T_c = 200$–$280$ K. Все это может служить аргументом в пользу того, что звезды-компоненты этих систем находятся в тепловом контакте, осуществляемом движением вещества в общей фотосфере двойной системы.

В последние годы, благодаря применению роботизированных телескопов, работающих в режиме обзора неба, начались массовые исследования затменных систем, в том числе систем типа W UMa. Например, в работе (Deb and Singh, 2011) получены кривые блеска 62 затменных систем, определены их параметры и изучен эволюционный статус. Это обеспечивает значительный прогресс в исследованиях тесных двойных систем.

8. Эволюционный статус контактных затменных двойных систем

Впервые идея о том, что торможение разделенной ТДС магнитным звездным ветром может существенно сблизить компоненты и образовать контактную систему была высказана Хуангом (Huang, 1966), который применил к двойным системам механизм магнитного торможения, предложенный Шацманом (Schatsman, 1962) и развитый Местелем (Mestel, 1968). В дальнейшем эта идея развивалась в ряде работ (Van't Veer, 1979, Rahunen, 1981, Vilhu, 1982, Rucinski, 1985, Guinan and Bradstreet, 1988, Hilditch et al., 1988, Каретников, 1988, 1989, Van't Veer and Maceroni 1989).

Скуманич (Skumanicz, 1972), исследуя вращение звезд-карликов поздних спектральных классов с глубокими конвективными оболочками, являющихся членами рассеянных скоплений разного возраста, выявил эмпирическую зависимость между экваториальной скоростью вращения звезды V_e и ее возрастом t:

$$V_e = \lambda \cdot 10^{14} t^{-1/2} \ (\text{см/с})\,, \tag{508}$$

где t — в секундах, $\lambda \simeq 1$ — параметр. Согласно этой формуле, скорость осевого вращения звезды быстро уменьшается с возрастом, что, скорее всего, связано с уносом углового момента звезды магнитным звездным ветром. Следует подчеркнуть (см., например, Масевич и Тутуков, 1988), что хотя магнитный звездный ветер уносит угловой момент конвективной оболочки звезды, из условия устойчивости вращения аксиально симметричных тел (Tassoul, 1978) $d(\omega R^2)/dR > 0$ следует, что магнитный звездный ветер уносит также и угловой момент радиативного ядра звезды.

В случае ТДС, содержащей маломассивные звезды с конвективными оболочками, выравнивание осевых вращений звезд и орбитального обращения происходит за время, много меньшее времени ядерной эволюции звезд (см. выше). Поэтому торможение осевого вращения звезд при истечении магнитного звездного ветра обусловливает потерю орбитального углового момента ТДС. При этом, поскольку темп потери массы в виде магнитного звездного ветра очень мал (для Солнца $\dot{M} \simeq 10^{-14} M_\odot$/год), можно считать, что звезды-компоненты маломассивной ТДС эволюционируют при постоянной массе. В этом случае ТДС можно считать консервативной по массе и неконсервативной по угловому моменту. С учетом этих допущений на основе формулы Скуманича можно получить формулу, связывающую потерю орбитального углового момента магнитным звездным ветром с параметрами ТДС (Масевич и Тутуков, 1988):

$$\frac{d\ln J}{dt} = -10^{-14} \frac{R_2^4 \left(M_1 + M_2\right)^2 R_\odot}{\lambda^2 a^5 M_1 M_\odot} c^{-1}, \tag{509}$$

где R_2 и M_2 — радиус и масса компоненты с магнитным звездным ветром, M_1 — масса спутника, a — большая полуось относительной орбиты системы, $\lambda \simeq 1$ — параметр, характеризующий магнитный звездный ветер (см. формулу Скуманича). В литературе часто используется другое выражение для учета торможения магнитным звездным ветром (см., например, Verbunt and Zwaan, 1981, Vilhu, 1982, 1992, Catalano et al., 1988):

$$\frac{dJ}{dt} = -1{,}0 \cdot 10^{42} k^2 f^{-2} m r^\gamma P_3^{-\alpha} \ \left(\frac{\text{г} \cdot \text{см}^2}{\text{с} \cdot \text{год}}\right), \tag{510}$$

где $k^2 \simeq 0{,}1$ для звезд главной последовательности, за единицу орбитального периода P взято 3 дня, m и r — масса и радиус в солнечный единицах, f, γ и α — параметры модели. Когда уравнение (510) применяется для тесных двойных систем с компонентами — звездами поздних спектральных классов, предполагается, что имеется эффективный обмен между вращательным и орбитальным угловыми моментами. Разные авторы используют различные значения параметров f, γ и α. Например, Vilhu (1982) принимал значения $f = 1$, $\gamma = 4$ и $\alpha = 3$ для ТДС с орбитальными периодами длиннее трех дней и $\alpha = 1{,}5$ для более короткопериодических систем. Этот автор применял уравнение (510) для описания процесса образования ТДС типа W UMa из короткопериодических разделенных ТДС за счет уноса углового момента из системы магнитным звездным ветром. Эта модель хорошо объясняет среднюю пространственную плотность систем типа W UMa ($\sim 1\,\%$ от всех звезд данного спектрального класса — см. Van't Veer, 1975 Fleming et al., 1989, Vilhu, 1992), а также продолжительность контактной фазы ($\sim 5 \cdot 10^8$ лет). В этом сценарии объясняется также большой кинематический возраст систем типа W UMa $\sim (8\text{–}10) \cdot 10^9$ лет (Guinan and Bradstreet, 1988).

Verbunt and Zwaan (1981) использовали значения параметров $f = 0{,}73\text{–}1{,}78$, $\gamma = 4$, $\alpha = 3$ и применяли формулу (510) к маломассивному холодному спутнику в катаклизмических двойных системах и маломассивных рентгеновских двойных.

Необходимо подчеркнуть, что в выражения для потери углового момента (509), (510) не входит величина темпа потери массы в виде ветра, также в эти выражения не входит величина напряженности магнитного поля, уносимого ветром. Обе эти величины неявным образом учитываются в эмпирической формуле Скуманича (508). Если предположить, что ТДС состоит из двух компонент равной массы, которая составляет $1M_\odot$, то по формуле (509) легко найти характерное время T потери системой углового момента (Масевич и Тутуков, 1988): $T \approx 8 \cdot 10^5 \lambda^2 \left(a/R_\odot\right)^5$ лет. Отсюда следует, что за космологическое время все разделенные ТДС с большими полуосями орбит $a \lesssim 10R_\odot$ и $M_1 \approx M_2 = 1M_\odot$ должны стать контактными. Таким образом, можно заключить, что предельно тесные ТДС с невырожденными компонентами — звезды типа W UMa являются продуктами торможения магнитным звездным ветром относительно немногочисленной группы тесных двойных звезд с начальными величинами больших полуосей $(6\text{–}10)R_\odot$.

Другим механизмом потери углового момента для ТДС является излучение системой потока гравитационных волн (Kraft et al., 1962, Paczynski, 1967c). Темп потери углового момента за счет излучения гравитационных волн определяется формулой (Ландау и Лифшиц, 1962):

$$\frac{d\lg J}{dt} = -\frac{32G^3}{5c^5a^4} M_1 M_2 \left(M_1 + M_2\right).$$

Характерное время изменения углового момента системы за счет излучения гравитационных волн составляет (Масевич и Тутуков, 1988)

$$T_{\text{гр}} \approx 1{,}2 \cdot 10^9 \frac{a^4}{R_\odot^4} \frac{M_\odot^3}{M_1 M_2 \left(M_1 + M_2\right)} \text{ лет.}$$

Для систем, состоящих из двух солнечных масс, излучение гравитационных волн становится эффективным по сравнению с магнитным звездным ветром лишь в том случае, когда большая полуось системы не превышает $\sim 3R_\odot$. Таким образом, магнитный звездный ветер значительно превосходит по эффективности уноса углового момента излучение гравитационных волн. Поэтому в случае классических ТДС, состоящих из невырожденных компонент, если хотя бы одна компонента имеет магнитный звездный ветер, влиянием излучения гравитационных волн на эволюцию ТДС можно пренебречь.

Таким образом, конечным продуктом сближения компонент маломассивных ТДС с компонентами порядка солнечной массы под влиянием магнитного звездного ветра могут быть короткопериодические алголи, контактные системы типа W UMa и одиночные быстровращающиеся звезды. Слиянием компонент ТДС можно объяснить существование так называемых «голубых странников» типа FK Com — звезд, лежащих на продолжении главных последовательностей звездных скоплений. При слиянии маломассивных компонент в ТДС под действием магнитного звездного ветра масса конечного продукта удваивается, что позволяет объяснить наблюдаемые особенности «голубых странников».

Эволюция маломассивных ТДС под влиянием истечения магнитного звездного ветра может приводить также к формированию короткопериодических ТДС типа Алголя, у которых наблюдаются свидетельства потери орбитального углового момента (см., например, Свечников, 1969, Guiricin and Mardirossian, 1981 a,b) и различного вида активности компонент (Budding et al., 2006).

В течение контактной фазы эволюции тепловая структура вторичной компоненты системы типа W UMa сильно отличается от теплового равновесия. Несмотря на то, что температуры компонент близки друг к другу, конвективная оболочка вторичной компоненты гораздо менее глубокая по сравнению с первичной компонентой. Можно предполагать, что первичная компонента в контактной системе типа W UMa имеет более сильную магнитную активность на поверхности, поскольку механизм магнитного динамо работает более эффективно при наличии быстрого вращения и глубокой конвективной зоны. Другой механизм формирования короткопериодических тесных двойных систем был предположен в работах (Eggleton and Kisseleva, 2001, 2006). Он основан на использовании иерархической модели тройной системы и так называемого механизма Козаи (Kozai, 1962). Согласно механизму Козаи, если в тройной системе долгопериодическая орбита наклонена на угол более 39° по отношению к плоскости короткопериодической орбиты, возникают «циклы Козаи», в которых внутренняя орбита приобретает значительный эксцентриситет при почти неизменных периоде и большой полуоси этой орбиты. Тогда при прохождении звездой вблизи периастра сгенерированной эллиптической орбиты за счет увеличения приливной диссипации энергии орбитального движения происходит вековое уменьшение размеров орбиты внутренней двойной системы до тех пор, пока орбита не станет круговой с орбитальным периодом в несколько дней. Этот механизм работает как для звезд позднего, так и раннего спектрального класса, когда торможение магнитным звездным ветром не существенно. В случае, если компоненты внутренней системы — звезды позднего спектрального класса (F-M), торможение магнитным звездным ветром может дополнительно сблизить компоненты, что приводит к формированию контактной системы типа W UMa и далее, к слиянию компонент и образованию одиночной быстровращающейся звезды. Примером такой звезды может служить AB Dor — очень быстро вращающаяся звезда — карлик спектрального класса K с возрастом около $5 \cdot 10^7$ лет (Eggleton and Kisseleva, 2006).

Поскольку ТДС типа RS CVn показывают наибольшую поверхностную хромосферную и магнитную активность компонент обусловленную наличием магнитных полей, влияние торможения магнитным звездным ветром в данном случае является наибольшим (см обзор Rodono, 1992). Поэтому вполне вероятно, что именно из систем типа RS CVn и образуются контактные системы типа W UMa. Как показано в работе (Karatos et al., 2004), в вековом укорочении орбитального периода для хромосферно-активных ТДС (типа RS CVn и BY Dra, с пятнами на поверхностях компонент) наблюдается следующая закономерность: системы этого типа с короткими орбитальными периодами имеют больший возраст, по сравнению с системами с длинными орбитальными периодами. Более того, средний кинематический возраст $5{,}47 \cdot 10^9$ лет для ТДС типа W UMa в поле Галактики (Bilir et al., 2005), согласуется со сценарием образования систем типа W UMa из хромосферно-активных ТДС, поэтому средняя разница в возрасте систем типа W UMa и хромосферно-активных систем $(1{,}61 \cdot 10^9)$ лет может быть интерпретирована как оценка времени жизни системы на контактной стадии. Но, по-видимому, не все контактные системы произошли из разделенных предшественников. Как показано в работе (Bilir et al., 2005), около 20 % из изученных контактных систем имеют возраст менее $0{,}6 \cdot 10^9$ лет, что значительно короче, чем средняя продолжительность контактной стадии $(1{,}61 \cdot 10^9)$ лет. Поскольку предконтактная стадия длится в среднем $3{,}86 \cdot 10^9$ лет, можно предполагать, что молодые контактные системы типа W UMa могли сформироваться на начальном этапе образования ТДС, минуя стадию разделенной системы. По-видимому, оба механизма формирования контактных систем типа W UMa (с предконтактной стадией и без нее) могут реализоваться в природе.

В работе (Demircan et al., 2006) получены (в первом приближении) оценки темпа относительных уменьшений орбитального углового момента J_0, суммарной массы системы $M = M_1 + M_2$ и орбитального периода P для хромосферно-активных ТДС:

$$\frac{\dot{J}_0}{J_0} = -3{,}48 \cdot 10^{-10}\,\text{год}^{-1}, \quad \frac{\dot{M}}{M} = -1{,}30 \cdot 10^{-10}\,\text{год}^{-1}, \quad \frac{\dot{P}}{P} = -3{,}96 \cdot 10^{-10}\,\text{год}^{-1}.$$

В работе (Eker et al., 2006) на основе анализа наблюдательных данных по хромосферно-активным и контактным системам выполнен анализ динамической эволюции этих систем на диаграмме «$\lg J_0$–$\lg M$» и изучено формирование контактных систем. Было использовано 119 хромосферно-активных ТДС и 102 системы типа W UMa. Данные по этим системам приведены в таблицах 34 и 35.

Таблица 34

Параметры систем типа W UMa (по материалам статьи Eker et al., 2006)

Номер	Название	Спектр. класс	Тип	M_{tot}, $M_\odot$	q	P, d	R_1, $R_\odot$	R_2, $R_\odot$	$\log J_0$ (cgs)
1	44 Boo	K2V	W	1,339	0,487	0,2678	0,795	0,601	51,457
2	GZ And	G5V	W	1,625	0,514	0,3050	1,032	1,032	51,624
3	TW Cet	G5V	W	1,964	0,530	0,3117	1,048	0,819	51,768
4	SW Lac	K0Vvar	W	1,738	0,851	0,3207	0,997	0,925	51,724
5	RZ Com	F8V	W	1,592	0,437	0,3385	1,088	0,728	51,599
6	AC Boo	F8Vn	W	1,968	0,403	0,3524	1,314	0,572	51,744
7	V829 Her	G2V	W	1,795	0,408	0,3582	1,058	0,711	51,682
8	AH Cnc	F5V	W	1,830	0,419	0,3604	1,266	0,860	51,701
9	AE Phe	F8V	W	1,995	0,461	0,3624	1,269	0,843	51,781
10	AM Leo	F5V	W	2,009	0,449	0,3658	1,260	0,983	51,783
11	YY CrB	F8V	A	1,777	0,243	0,3766	1,426	0,805	51,565
12	TX Cnc	F8V	W	1,212	0,535	0,3829	1,019	0,793	51,450
13	BI CVn	F2V	A	2,325	0,413	0,3842	1,200	1,130	51,881
14	SS Ari	G0V	W	1,749	0,302	0,4060	1,351	0,795	51,618
15	AH Vir	G8V	W	1,772	0,303	0,4075	1,401	0,871	51,629
16	QX And	F5V	A	1,412	0,261	0,4118	1,632	0,804	51,430
17	UX Eri	F9V	A	1,876	0,373	0,4453	1,362	0,678	51,728
18	NN Vir	F0/F1V	A	2,676	0,491	0,4807	1,717	1,246	52,044
19	XZ Leo	A8V	A	2,551	0,348	0,4877	1,482	1,283	51,950
20	DN Cam	F2V	W	2,720	0,421	0,4983	1,775	1,224	52,036
21	V351 Peg	A8V	W	3,165	0,360	0,5933	1,875	1,192	52,141
22	UZ Leo	A9V	A	2,703	0,303	0,6180	2,024	0,851	51,995
23	BD+145016	F0V	A	1,918	0,253	0,6369	2,076	1,181	51,707
24	V753 Mon	A8V	W	3,296	0,970	0,6770	1,738	1,592	52,298
25	FN Cam	A9V	A	2,934	0,222	0,6771			51,988

Продолжение табл. 34

Номер	Название	Спектр. класс	Тип	M_{tot}, $M_\odot$	q	P, d	R_1, $R_\odot$	R_2, $R_\odot$	log J_0 (cgs)
26	II UMa	F5III	A	2,623	0,172	0,8250			51,861
27	CC Com	K5V	W	1,050	0,522	0,2211	0,669	0,507	51,263
28	V523 Cas	K4V	W	0,950	0,501	0,2337	0,695	0,522	51,193
29	RW Com	K0V	W	1,230	0,337	0,2373	0,717	0,441	51,310
30	VZ Psc	K5V	A	1,510	0,911	0,2613	0,776	0,746	51,594
31	VW Cep	G9V	W	1,144	0,275	0,2783	1,209	0,398	51,234
32	BX Peg	G4,5	W	1,400	0,373	0,2804	0,965	0,617	51,449
33	XY Leo	K0V	W	1,305	0,500	0,2841	0,899	0,654	51,451
34	RW Dor	K1V	W	1,070	0,672	0,2854	0,823	0,636	51,342
35	BW Dra	F8V	W	1,141	0,281	0,2923	0,963	0,542	51,244
36	OU Ser	F9/G0V	A	1,194	0,173	0,2968	0,918	0,426	51,145
37	TZ Boo	G2V	A	0,887	0,133	0,2972	1,050	0,318	50,846
38	FU Dra	F8V	W	1,461	0,251	0,3067	1,117	0,606	51,402
39	TY Boo	G5V	W	1,330	0,437	0,3171	1,072	0,761	51,459
40	YY Eri	G5V	W	2,160	0,403	0,3215	1,153	0,793	51,798
41	FG Hya	G2V	A	1,571	0,112	0,3278	1,371	0,670	51,216
42	AO Cam	G0V	W	1,680	0,413	0,3299	1,042	0,817	51,624
43	AB And	G8V	W	1,499	0,560	0,3319	1,041	0,755	51,589
44	W UMa	F8V	W	1,760	0,479	0,3336	1,126	0,813	51,684
45	EQ Tau	G2V	A	1,754	0,442	0,3413	1,139	0,786	51,672
46	VW Boo	G5V	W	1,400	0,428	0,3422			51,504
47	V757 Cen	F9V	W	1,690	0,690	0,3432	1,054	0,880	51,701
48	V508 Oph	F9V	A	1,530	0,515	0,3448	1,049	0,811	51,598
49	V781 Tau	G0V	W	1,738	0,405	0,3449	1,155	0,776	51,651
50	ET Leo	G8V	W	1,120	0,342	0,3465			51,301
51	BV Dra	F7V	W	1,398	0,402	0,3501	1,101	0,742	51,495
52	CK Boo	F8/7V	A	1,986	0,111	0,3552	1,097	0,815	51,394
53	QW Gem	F8V	W	1,700	0,334	0,3581	1,242	0,924	51,602
54	BB Peg	F5V	W	1,946	0,360	0,3615	1,286	0,833	51,717
55	LS Del	G0V	W	1,467	0,375	0,3638	1,046	0,800	51,522
56	V410 Aur	G0/2V	A	1,412	0,144	0,3663	1,397	0,605	51,239
57	V752 Cen	F7V	W	1,730	0,311	0,3702	1,280	0,754	51,604
58	V417 Aql	G2V	W	1,900	0,362	0,3703	1,290	0,825	51,705
59	XY Boo	F5V	A	1,081	0,158	0,3706	1,245	0,566	51,077
60	HV Aqr	F5V	A	1,564	0,145	0,3745			51,319
61	U Peg	G2V	W	1,528	0,330	0,3748	1,207	0,735	51,529

Продолжение табл. 34

Номер	Название	Спектр. класс	Тип	M_{tot}, $M_\odot$	q	P, d	R_1, $R_\odot$	R_2, $R_\odot$	$\log J_0$ (cgs)
62	RT Lmi	F7V	A	1,774	0,367	0,3749	1,272	0,838	51,659
63	HX UMa	F4V	A	1,720	0,291	0,3792			51,588
64	EE Cet	F2V	W	1,829	0,315	0,3799	1,350	0,820	51,651
65	AU Ser	K0V	A	1,567	0,701	0,3865	1,051	0,950	51,665
66	BH Cas	K4V	W	1,095	0,474	0,4059	1,114	0,751	51,367
67	HT Vir	F8V	A	2,280	0,812	0,4077	1,262	1,252	51,953
68	EX Leo	F6V	A	1,866	0,199	0,4086			51,557
69	V839 Oph	F7V	A	2,136	0,305	0,4090	1,462	0,989	51,766
70	V566 Oph	F4V	A	1,826	0,243	0,4096	1,515	0,769	51,597
71	UV Lyn	F6V	W	1,844	0,367	0,4150	1,387	0,889	51,702
72	RZ Tau	A7V	A	2,516	0,540	0,4157	1,594	1,055	51,992
73	BL Eri	G0V	W	0,939	0,542	0,4169	1,021	0,777	51,279
74	V842 Her	F9V	W	1,713	0,260	0,4190			51,571
75	Y Sex	F8	A	1,430	0,182	0,4198	1,240	0,620	51,341
76	V899 Her	F5V	A	2,875	0,566	0,4212	1,504	1,171	52,096
77	AK Her	F5V	A	1,610	0,229	0,4215	1,657	0,820	51,494
78	ER Ori	F7V	W	2,150	0,552	0,4234	1,388	1,130	51,883
79	EF Dra	F9V	A	2,102	0,160	0,4240	1,704	0,779	51,582
80	EF Boo	F5V	W	2,349	0,512	0,4295	1,090	1,460	51,939
81	AP Leo	F8V	A	1,916	0,297	0,4304	1,507	0,838	51,689
82	AW UMa	F2V	A	1,370	0,070	0,4387	1,692	0,560	50,988
83	V776 Cas	F2V	A	1,948	0,130	0,4404	1,710	0,710	51,465
84	TV Mus	F8V	A	1,473	0,119	0,4457	1,643	0,742	51,235
85	V502 Oph	G0V	W	1,778	0,335	0,4534	1,493	0,935	51,670
86	AA UMa	F9V	W	2,192	0,545	0,4680	1,356	1,101	51,910
87	DK Cyg	A8V	A	2,343	0,325	0,4707	1,789	0,987	51,868
88	V728 Her	F3V	W	1,949	0,178	0,4713	1,789	0,898	51,576
89	EL Aqr	F3V	A	1,880	0,203	0,4814	1,730	0,880	51,591
90	AH Aur	F7V	A	1,967	0,169	0,4943	1,856	0,897	51,573
91	OO Aql	G2V	A	1,920	0,846	0,5068	1,382	1,283	51,862
92	V401 Cyg	F0V	A	2,166	0,290	0,5827	1,950	1,170	51,816
93	ϵ Cra	F2V	A	1,940	0,128	0,5914	2,200	0,788	51,500
94	AQ Tuc	F2/5	A	2,620	0,358	0,5948	2,027	1,296	52,003
95	RR Cen	A9V	A	2,243	0,210	0,6057	2,188	0,974	51,762
96	V535 Ara	A8V	A	1,980	0,303	0,6293	1,847	1,121	51,772
97	AG Vir	A8V	A	2,120	0,317	0,6427			51,835

Продолжение табл. 34

Номер	Название	Спектр. класс	Тип	$M_{\rm tot}$, $M_\odot$	q	P, d	R_1, $R_\odot$	R_2, $R_\odot$	$\log J_0$ (cgs)
98	S Ant	A9V	A	2,700	0,392	0,6483	2,070	1,360	52,056
99	V1073 Cyg	F2V	A	2,110	0,319	0,7859	2,154	1,318	51,862
100	V2388 Oph	F3V	A	1,954	0,186	0,8023	2,373	1,368	51,668
101	TY Pup	F3V	A	2,920	0,183	0,8192	1,787	1,083	51,957
102	V921 Her	A7V	A	1,974	0,226	0,8774			51,744

Таблица 35

Параметры хромосферно-активных двойных (по материалам статьи Eker et al., 2006)

Номер	Название	Спектр. класс	Ст. эв.	$M_{\rm tot}$, $M_\odot$	q	P, d	R_1, $R_\odot$	R_2, $R_\odot$	$\log J_0$ (cgs)
1	V471 Tau	K2V+WD	MS	1,50	0,974	0,521	0,83	0,01	51,690
2	RT And	F8V+K0V	MS	2,14	0,739	0,630	0,92	1,26	51,965
3	CG Cyg	G9+K2	MS	1,75	0,865	0,631	0,82	0,90	51,826
4	ER Vul	G0V+G5V	MS	2,15	0,957	0,698	1,08	1,11	51,992
5	YY Gem	dM1e+dM1e	MS	1,19	0,924	0,815	0,60	0,60	51,585
6	UV Psc	G5V+K2V	MS	1,75	0,765	0,861	0,83	1,11	51,869
7	V1430 Aql	G5V+K0III-IV	SG	1,84	0,957	0,873	1,11	0,86	51,913
8	V772 Her	(G0V+?)+K7V	MS	1,63	0,567	0,879	0,58	0,90	51,792
9	II Com	F8V+F8V	MS	1,67	0,964	0,962	1,10	1,10	51,857
10	δCap	F1IV-III/K1V	SG	2,73	0,365	1,023			52,116
11	DH Leo	(K2V+K5V)+K5V	MS	1,44	0,675	1,072	0,67	0,97	51,748
12	G1841A	dM3-5e	MS	0,50	0,917	1,122	0,34	0,36	51,008
13	TZ CrB	F6V+G0V	MS	2,19	0,975	1,140	1,10	1,14	52,077
14	BD+23 2297	K1V+K1V	MS	1,85	0,993	1,528	0,78	0,78	51,997
15	V824 Ara	G7IV/V+K0IV/V	SG	2,12	0,909	1,683	1,42	1,55	52,110
16	13 Cet	F8V+G4V	MS	0,68	0,545	2,080			51,279
17	V478 Lyr	G8V+dK-M	MS	1,18	0,269	2,128	0,30	0,98	51,545
18	FF And	dM1e+dM1e	MS	1,10	0,970	2,173			51,670
19	V819 Her	(F2V+F8V)+G8IV-III	G	2,78	0,704	2,228	1,29	1,87	52,335
20	KZ And	dK2+dK2V	MS	1,29	0,949	3,034			51,836
21	BD+39 4529	F8V+K5V	MS	1,83	0,564	3,243	0,64	1,10	52,064
22	V835 Her	G8V+K7V	MS	1,43	0,700	3,304	0,60	0,90	51,911
23	HZ Com	G9+K4V	MS	1,37	0,957	3,556	1,10	0,85	51,903
24	GK Hya	F8+G8IV	SG	2,56	0,910	3,589	3,39	1,51	52,356
25	UX Com	K1(IV)+G2	SG	2,23	0,855	3,639	2,50	1,00	52,255
26	BU 163	(F9V/G0V)+?	MS	2,22	0,947	3,963			52,266
27	RS CVn	F6IV+G8IV	SG	2,82	0,958	4,797	4,00	1,99	52,468
28	SS Cam	F5V-IV+K0IV-III	G	3,58	0,954	4,820	6,40	2,20	52,641
29	RT CrB	G2IV	SG	2,83	0,991	5,117	3,00	2,60	52,480

Продолжение табл. 35

Номер	Название	Спектр. класс	Ст. эв.	M_{tot}, $M_{\odot}$	q	P, d	R_1, $R_{\odot}$	R_2, $R_{\odot}$	log J_0 (cgs)
30	VV Mon	G5V+G8IV	SG	2,91	0,942	6,053	6,20	1,80	52,525
31	RW UMa	F8IV+K0IV	SG	3,06	0,951	7,328	4,24	2,31	52,588
32	LX Per	G0V-IV+K0IV	SG	2,55	0,931	8,035	3,05	1,64	52,470
33	AW Her	G2IV+K2IV	SG	2,54	0,906	8,810	3,20	2,40	52,479
34	V1285 Aql	dM2e+dMe	MS	0,62	0,938	10,328	0,44	0,44	51,483
35	AE Lyn	F9IV-V+G5IV	SG	3,25	0,979	11,066	2,64	3,14	52,693
36	V829 Cen	G5V+K1IV	SG	0,57	0,979	11,722			51,446
37	V808 Tau	K3V+K3V	MS	1,58	0,950	11,940	0,80	0,80	52,181
38	II Hya	K1/2III/IV+G5V/IV	G	3,53	0,604	12,912			52,747
39	V1379 Aql	K0III+sdB	G	3,05	0,129	20,654			52,342
40	ADS11060C	K7V	G	1,04	0,951	25,763			51,990
41	ϵ UMi	G5III+A8-F0V	G	4,10	0,464	39,446	12,00	1,70	52,982
42	BD+64 487	K2-3V+K5V	MS	1,54	0,921	44,361			52,354
43	KX Peg	F5-8V+G8IV	SG	3,09	0,818	45,290			52,856
44	BD+44 2760	G7III/GV	G	2,75	0,833	45,604			52,773
45	GT Mus	K2-4III+(A0)	G	4,50	0,800	61,376			53,171
46	DQ Leo	G5IV-III+A6V	G	3,95	0,879	71,614	5,90	1,70	53,101
47	BD+17703	G2V+G8V	MS	1,99	0,881	75,683	1,00	1,00	52,614
48	BM Cam	K0III	G	1,70	0,545	80,910			52,472
49	5 Cet	K2III	G	2,50	0,786	96,383			52,810
50	αAur	G1III+K0III	G	5,09	0,951	103,992	12,80	8,70	53,341
51	V1817 Cyg	K2III-II+A0V	G	7,73	0,600	108,893			53,623
52	ηAnd	G8III/IV	G	4,93	0,904	115,611	11,00	11,00	53,333
53	SAO 23511	F9,5V+G0V	MS	1,85	0,682	122,180	0,75	1,00	52,616
54	XY UMa	G0V+K5V	MS	1,748	0,606	0,479	1,16	0,63	51,762
55	BI Cet	G6V/IV+G6V/IV	MS	1,840	0,916	0,515	0,90	0,90	51,836
56	SV Cam	F5V+K0V	MS	1,786	0,644	0,593	0,76	1,18	51,815
57	UV Leo	G0V+G2V	MS	2,214	0,970	0,600	1,19	1,08	51,992
58	BH Vir	F8V-IV+G2V	SG	2,021	0,981	0,817	1,11	1,25	51,971
59	WY Cnc	G0-8V+K2?	MS	1,601	0,495	0,830	0,58	0,93	51,752
60	CM Dra	M4V+M4V	MS	0,444	0,926	1,268	0,23	0,25	50,938
61	CC Eri	K7,5V+M3,5V	MS	0,876	0,537	1,563	0,41	0,64	51,419
62	V837 Tau	G2V+K5V	MS	1,670	0,673	1,932	0,74	1,00	51,941
63	EI Eri	G5IV	SG	1,060	0,379	1,945			51,531
64	AR Lac	G2IV+K0IV	SG	2,390	0,897	1,982	2,72	1,52	52,220
65	BK Psc	K5V+M4V	MS	1,040	0,552	2,168	0,45	0,72	51,594
66	BH CVn	F2IV+K2IV	SG	2,271	0,544	2,612	3,27	3,10	52,184
67	CF Tuc	G0V+K4IV	SG	2,266	0,880	2,799	4,60	1,50	52,231
68	V711 Tau	K1IV+G5IV	SG	2,531	0,821	2,838	3,80	1,76	52,310
69	PW Her	K0IV+F8-G2	SG	2,652	0,768	2,884	3,80	1,40	52,343
70	AD Cap	G5-8IV-V+G5	SG	1,624	0,526	2,958			51,955

Продолжение табл. 35

Номер	Название	Спектр. класс	Ст. эв.	M_{tot}, $M_\odot$	q	P, d	R_1, $R_\odot$	R_2, $R_\odot$	$\log J_0$ (cgs)
71	TY Pyx	G5V+G5-8V	MS	2,416	0,987	3,199	1,86	1,58	52,298
72	V1396 Cyg	M2V+M4Ve	MS	0,658	0,696	3,273			51,346
73	HZ Aqr	K3Ve+K7Ve	MS	1,234	0,804	3,758	0,45	0,55	51,830
74	SZ Psc	K1IV+F8IV	SG	2,861	0,766	3,963	5,10	1,50	52,444
75	Z Her	K0IV+F5	SG	2,864	0,843	3,990	2,73	1,85	52,450
76	SAO740653	G0V+G0V	MS	2,180	0,998	4,236			52,264
77	UZ Lib	K0III+A8?	G	1,440	0,309	4,764	21,00	1,00	51,839
78	RT Lac	G5V+G9IV	SG	2,082	0,405	5,070	4,81	4,41	52,171
79	AS Dra	G4V+G9V	MS	1,426	0,889	5,408			51,991
80	V1423 Aql	G5V+G5V	MS	2,040	1,000	5,433			52,252
81	BY Dra	K6Ve+K7V	MS	0,934	0,891	5,970			51,699
82	RS UMi	G0V+G-KV	MS	2,484	0,981	6,166			52,413
83	KT Peg	G2V+K5V	MS	1,545	0,671	6,209	0,60	1,00	52,053
84	UX Ari	A2/3V+K1/2V	SG	2,050	0,864	6,442	5,78	1,11	52,278
85	II Peg	K2IV+M0/3V	SG	1,200	0,500	6,730			51,848
86	LR Hya	K0/1V+K1/2V	MS	1,090	0,997	6,871	0,80	0,80	51,833
87	OU Gem	K2V+K5V	MS	1,180	0,831	6,998			51,889
88	SS Boo	G0V+K0IV	SG	1,928	0,988	7,603	3,30	1,30	52,260
89	MM Her	G2IV+KIV	SG	2,469	0,944	7,962	2,89	1,56	52,445
90	FF Aqr	G8III-IV+sdOB	G	3,100	0,240	9,205	6,00	0,15	52,427
91	RU Cnc	G8IV+F6-7	SG	2,930	0,993	10,163	4,90	1,90	52,605
92	CQ Aur	G8IV+F5V	G	3,764	0,882	10,617	9,91	1,93	52,791
93	RV Lib	G8IV-K3IV	SG	2,785	0,183	10,715			52,294
94	EZ Peg	G5IV+K0IV	SG	1,860	0,991	11,668			52,296
95	42 Cap	G2IV+G2V	SG	2,375	0,727	13,183			52,480
96	AR Psc	K1IV+G7V	SG	2,036	0,818	14,289	1,50	1,50	52,387
97	TZ Tri	K0III+F5	G	5,099	0,976	14,723			53,060
98	V350 Lac	K2IV-III	G	1,800	0,818	17,742			52,329
99	zein And	K1III	G	3,480	0,289	17,783	13,40	0,70	52,653
100	UV CrB	K2III	G	1,320	0,362	18,664			52,008
101	BL CVn	K1II+F1V	G	2,672	0,991	18,707	15,20	3,00	52,627
102	AR Mon	K2III+G8III	G	3,413	0,306	21,232	10,80	14,20	52,678
103	FG UMa	G9III	G	2,080	0,387	21,380			52,370
104	IS Vir	K2III	G	2,160	0,440	23,659			52,436
105	XX Tri	K0III	G	2,200	0,222	23,988			52,297
106	Al Phe	F7V+K0IV	SG	2,440	0,968	24,604	2,93	1,82	52,601
107	IM Peg	K2III-II	G	2,300	0,533	24,660			52,516
108	CS Cet	(G8-K1)III/IV+F	G	2,780	0,878	27,353			52,709
109	V792 Her	F3V+K0III	G	2,881	0,960	27,542	12,80	2,58	52,737
110	TW Lep	F6IV+K2III	G	1,990	0,951	28,314			52,473
111	V1702 Cyg	K2IV-III+G8V	G	2,810	0,892	28,576	6,20	0,90	52,723

Продолжение табл. 35

Номер	Название	Спектр. класс	Ст. эв.	M_{tot}, $M_\odot$	q	P, d	R_1, $R_\odot$	R_2, $R_\odot$	$\log J_0$ (cgs)
112	V965 Sco	F2IV+K1III	G	3,418	0,990	30,974	14,00	5,50	52,878
113	RZ Eri	F0IV+G5-8III	G	3,323	0,963	39,265	6,94	2,84	52,892
114	V4200 Ser	K2-3V+K2-3V	MS	1,700	0,998	46,774	0,80	0,80	52,432
115	EL Eri	G8III-IV	G	1,930	0,379	48,306			52,430
116	AY Cet	WD+G5IIIe	G	2,640	0,263	56,885	15,00	0,012	52,598
117	DK Dra	K1III+K1III	G	3,480	0,981	64,417	14,00	14,00	52,997
118	V1197 Ori	K4III	G	1,611	0,789	142,889			52,549
119	BD+44 801	G2III+F2V	G	2,780	0,853	963,829			53,223

На рис. 87, заимствованном из работы (Eker et al., 2006), приведена зависимость орбитального углового момента системы

$$J_0 = \frac{q}{(1+q)^2}\sqrt[3]{\frac{G^2}{2\pi}M^5P}\,, \quad \left(q = \frac{M_2}{M_1} < 1\right) \tag{511}$$

от ее орбитального периода P, построенная для хромосферно-активных и контактных систем. Пунктирные линии здесь соответствуют линиям постоянной массы $M = M_1 + M_2$, определяемым уравнением (511). Видно, что хромосферно-активные системы с наибольшими суммарными массами (системы типа G, содержащие гиганты) имеют наибольшие орбитальные периоды и, соответственно, наибольшие орбитальные угловые моменты. Системы, содержащие звезды главной последовательности (MS),

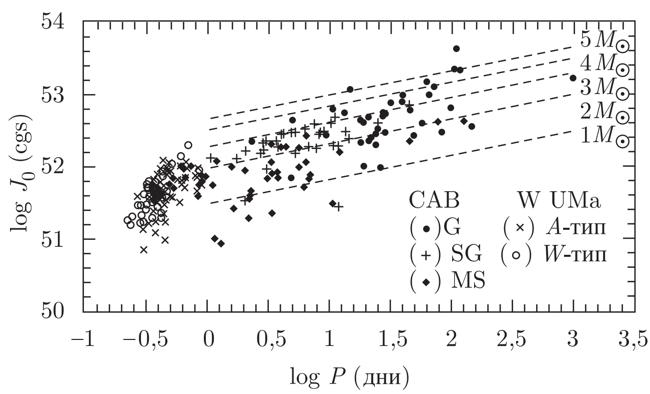


Рис. 87. Зависимость орбитальных угловых моментов хромосферно-активных двойных систем (CAB) и систем типа W UMa от орбитальных периодов. Точечные линии изображают линии постоянных суммарных масс, рассчитанные для отношения масс компонент $q = 0{,}88$ (из работы Eker et al., 2006)

и системы с субгигантами имеют соответственно меньшие орбитальные периоды и меньшие орбитальные угловые моменты. Контактные системы типа WUMa на рис. 87 расположены слева внизу, в области сравнительно малых орбитальных периодов и угловых моментов. При этом не обнаруживается различия между контактными системами типа A (в главном минимуме кривой блеска наблюдается прохождение диска звезды меньшего радиуса по диску звезды большего радиуса — см. Binnendijk, 1970) и системами типа W (в главном минимуме кривой блеска имеет место затмение типа покрытия). Статистические исследования (см., например, Vaňko et al., 2006) показали, что максимумы в распределениях орбитальных периодов контактных систем лежат в диапазоне $0{,}31^d$–$0{,}40^d$ для систем типа W и $0{,}35^d$–$0{,}40^d$ для систем типа A. Принято считать, что контактные системы типа A и W имеют радиативные и конвективные оболочки соответственно (Vaňko et al., 2006). Граничная температура для этих двух типов переноса энергии в оболочках звезд типа W UMa составляет $T \simeq 7200$ K.

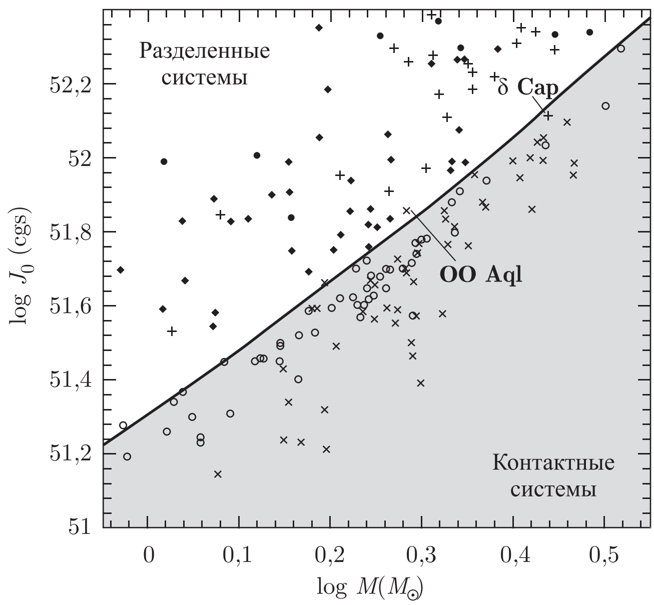


Рис. 88. Разделение контактных и разделенных систем на диаграмме «Суммарная масса–угловой орбитальный момент» (из работы Eker et al., 2006)

На рис. 88, заимствованном из работы (Eker et al., 2006), приведена зависимость между орбитальным угловым моментом J_0 и суммарной массой $M = M_1 + M_2$ для хромосферно-активных ТДС и контактных систем типа W UMa. Видна четкая граница между разделенными и контактными системами. Граница между этими двумя типами систем хорошо описывается уравнением (Eker et al., 2006).

$$\lg J_{\text{lim}} = 0{,}522(\lg M)^2 + 1{,}664(\lg M) + 51{,}315,$$

где M — в солнечных единицах, J_{lim} — в единицах cgs. Из рис. 88 видно, что контактные системы имеют систематически меньшие орбитальные угловые моменты для своих масс, по сравнению с разделенными системами. Это естественно связать с потерей орбитального углового момента разделенными системами при формировании контактных систем. По-видимому, главным механизмом потери орбитального момента системой является торможение магнитным звездным ветром. Однако вполне возможны и другие механизмы образования контактных систем, например, отмеченный выше механизм Козаи (Kozai, 1962) (см. работы Eggleton and Kisseleva, 2001, 2006), основанный на использовании модели иерархической тройной системы (см. также работу Paczynski et al., 2006). Следует подчеркнуть, что недавно в работе (Pribulla and Rucinski, 2006) было показано, что до 50 % двойных систем типа W UMa имеют компоненты-спутники. Учитывая эффекты наблюдательной селекции, можно предположить, что все системы типа W UMa являются тройными или кратными.

Отсюда следует, что формирование контактных систем типа W UMa происходит как под влиянием их тройственности, так и благодаря потере углового момента при истечении магнитного звездного ветра.

9. Анализ кривых блеска хромосферно-активной двойной системы SV Cam (типа RS CVn)

В предыдущем параграфе мы отмечали возможную тесную эволюционную связь между хромосферно-активными ТДС и контактными системами типа W UMa. Значительная хромосферная активность звезд-компонент типа RS CVn предполагает наличие магнитных полей у компонент этих систем и истечение значительных магнитных ветров, которые эффективно уносят орбитальный угловой момент системы и способствуют сближению компонент ТДС вплоть до образования контактной системы типа W UMa. Хромосферная активность ТДС типа RS CVn проявляется, в частности, в наличии пятен на поверхностях компонент, их перемещении по поверхности звезды и изменении их физических характеристик, к появлению переменного рентгеновского и радиоизлучения от этих систем. Это приводит к долгопериодической переменности систем типа RS CVn (см., например, обзор Rodono, 1992). Новейшие методы исследований ТДС типа RS CVn позволяют картировать поверхности компонент этих систем путем анализа кривых блеска и осуществлять доплеровскую томографию поверхностей звезд с использованием высококачественных спектральных наблюдений. Такие исследования позволяют получать свидетельства долгопериодической активности звезд-компонент ТДС типа RS CVn и систем других типов (например, ТДС типа W UMa — см. выше). Кроме того, из анализа спектро-поляризационных наблюдений ТДС типа RS CVn можно, по наблюдениям дифференциальных зеемановских смещений спектральных линий, измерять поверхностные магнитные поля на звездах. Как отмечает Родоно (Rodono, 1992), изучение ТДС типа RS CVn позволяет решать ряд важных астрофизических задач таких как: а) магнитогидродинамика звездной плазмы; б) структура и энергетический баланс звездных атмосфер; в) внутренняя структура звезды и ее эволюция; г) вращение звезды, ее эволюция и потеря углового момента; д) взаимодействие компонент двойной системы и ее эволюция.

Таким образом, исследования ТДС типа RS CVn в оптическом, ультрафиолетовом, рентгеновском и радиодиапазоне представляет собой очень перспективную задачу.

Мы опишем результаты анализа кривых блеска системы SV Cam типа RS CVn, выполненные в работе (Zboril and Djurašević, 2003). Хромосферно-активная затменная двойная система SV Cam (HD44982, $P \simeq 0{,}593^{\mathrm{d}}$, Sp. F5V+K0V) показывает хромосферную активность обеих компонент, обусловливающую долгопериодическую переменность кривых блеска как в фазах вне затмений, так и во время затмений (см. рис. 89, заимствованный из работы Zboril and Djurašević, 2003). Хромосферная активность проявляется в трех видах (Kjurkchieva et al., 2002): фотосферные пятна на первичной компоненте, хромосферные эмиссии на вторичной, а также дополнительная эмиссия от околозвездного газа.

Фотоэлектрические UBVR-наблюдения системы SV Cam были выполнены авторами (Zboril and Djurašević, 2003) в 2001–2002 гг. Для анализа асимметричных кривых блеска использовалась программа Джурашевича (Djurašević, 1992 a,b), реализующая синтез кривых блеска ТДС в рамках модели Вильсона–Девиннея (Wilson and Devinney, 1971) и решение соответствующей обратной задачи. Предполагалось, что асимметрия затменных кривых блеска вызвана наличием пятен на поверхностях компонент. Пятна аппроксимировались кругами и характеризовались температурным контрастом относительно окружающей фотосферы, угловым радиусом, долготой

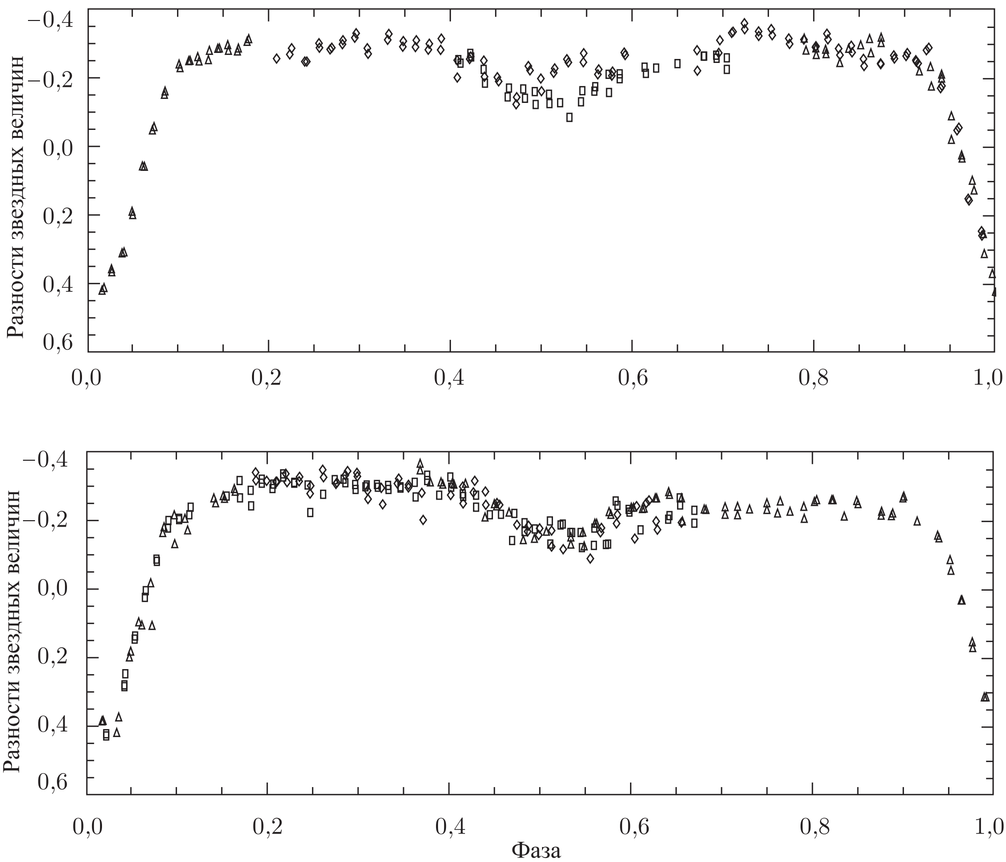


Рис. 89. Кривые блеска в фильтре V системы SV Cam в 2001 г. (вверху) и в 2002 г. (внизу), демонстрирующие значительную физическую переменность системы (из работы Zboril and Djurašević et al., 2003)

и широтой. Поскольку компоненты системы имеют поздний спектральный класс и обладают конвективными оболочками, по аналогии с Солнцем предполагалось, что пятна имеют более низкую температуру, чем фотосфера. Решение кривой блеска показывает, что первичная компонента близка к заполнению своей полости Роша и дает по крайней мере 90 % в полную светимость системы. Поэтому маловероятно, чтобы холодная компонента (со вкладом светимости менее 10 %) была ответственна за аномалии в кривой блеска системы. Отношение масс компонент фиксировалось на основе данных спектральных наблюдений (Pojmanski, 1998): $q = m_{\text{cool}}/m_{\text{hot}} = 0{,}56$. Использовались также новейшие спектральные определения отношения масс: $q = 0{,}593$ (Kjurkchieva et al., 2002) и $q = 0{,}641$ (Lehmann et al., 2002). Для потемнения к краю звезд применялись нелинейные законы (Van Hamme, 1993). На рис. 90 приведены результаты решения обратной задачи интерпретации кривых блеска, полученных в 2001 и 2002 гг. BVR-кривые блеска, полученные в разные эпохи, хорошо описываются принятой моделью ТДС с пятнами на поверхности первичной компоненты, несмотря на то, что кривые блеска 2001 и 2002 г. заметно различаются. Получены параметры компонент системы. В случае $q = 0{,}593$

$$R_1 = (1{,}37 \pm 0{,}03)R_\odot, \quad M_1 = (1{,}47 \pm 0{,}06)M_\odot, \quad T_1 = 6440\,\text{K},$$

$$R_2 = (0{,}87 \pm 0{,}03)\,R_\odot, \quad M_2 = (0{,}87 \pm 0{,}06)\,M_\odot, \quad T_2 = (4489 \pm 91)\,\text{K}.$$

В случае $q = 0{,}641$

$$R_1 = (1{,}26 \pm 0{,}02)\,R_\odot, \quad M_1 = (1{,}09 \pm 0{,}05)\,M_\odot, \quad T_1 = 6030\,K,$$

$$R_2 = (0{,}79 \pm 0{,}02)\,R_\odot, \quad M_2 = (0{,}70 \pm 0{,}02)\,M_\odot, \quad T_2 = (4337 \pm 75)\,\text{K}.$$

Модель с холодными пятнами на более массивной и более горячей компоненте хорошо описывает кривые блеска системы SV Cam во всех фильтрах и для всех эпох наблюдений. Главные свойства пятен могут быть суммированы следующим образом:

1. На поверхности более горячей компоненты имеются два более холодных пятна, каждое из которых покрывает $\sim 1{,}5\,\%$ площади звезды.

2. Пятна расположены на промежуточных широтах между $+20°$ и $-20°$.

3. Температура пятен на 1000 K ниже температуры окружающей фотосферы горячей звезды.

4. По сравнению с 2000 годом, абсолютное положение пятен, как по долготе, так и по широте в 2001–2002 гг. изменилось, изменилась также площадь пятен. Но взаимная ориентация пятен изменилась не сильно.

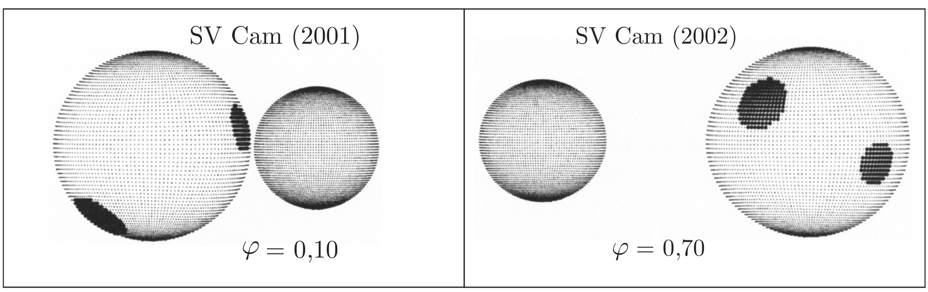


Рис. 90. Компьютерная модель системы SV Cam в орбитальных фазах 0,1 (2001 г. — слева) и 0,7 (2002 г. — справа), построенная с оптимальными параметрами, найденными при интерпретации кривых блеска (из работы Zboril and Djurašević et al., 2003)

Возможно, что на самом деле на поверхностях компонент имеется большее число малых пятен, но из анализа кривой блеска это выявить трудно. Авторы (Zboril and Djurašević, 2003) подчеркивают, что практически все типы активности, включая наличие пятен, наблюдаются не только у звезд-компонент двойных систем типа RS CVn, но и у звезд типа BYDra, T Tau, FK Com и т. п. Однако, в отличие от системы SV Cam, в большинстве случаев здесь распределение пятен сильно нестабильно и значительно меняется в течение нескольких вращательных циклов звезды.

10. Анализ кривых блеска массивной галактической затменной двойной системы CPD-41°7742 с наблюдаемым эффектом столкновения звездных ветров

Рассмотрим пример интерпретации кривых блеска массивной затменной системы. Система CPD-41°7742 ($P = 2{,}44070^{\text{d}}$, Sp.O9V+B1-1.5V, $e \simeq 0{,}027$) локализована в центре молодого рассеянного скопления NGC6231. В работе Sana et al., (2005) выполнены фотометрические узкополосные ($\Delta\lambda \cong 30$Å) наблюдения системы CPD-41°7742 в двух полосах: $\lambda\,6051$ Å и $\lambda\,4686$ Å и построены соответствующие кривые блеска. Кроме того, авторами этой работы построены детальные рентгеновские кривые блеска системы CPD-41°7742 на основе наблюдений в диапазоне (0,5–10) кэВ, выполненных с борта орбитальной рентгеновской обсерватории XMM-Newton. Объединенные спектральные и фотометрические наблюдения ТДС позволяют находить массы и радиусы звезд. В работе Sana et al., (2003) выполнены детальные спектроскопические наблюдения системы CPD-41°7742 и построены надежные кривые лучевых скоростей обеих компонент.

Авторы отмечают, что наши знания о массивных звездах весьма фрагментарны. Между тем, даже небольшое число массивных звезд ранних спектральных типов может иметь заметное влияние на эволюцию их окружения, поскольку массивные звезды обеспечивают мощное воздействие на окружающую среду посредством потока излучения и потока механической энергии звездного ветра. Например, массивные звезды играют важную роль в формировании менее массивных звезд в областях усиленного звездообразования или вблизи центральных областей OB-ассоциаций. К сожалению, только около сотни массивных звезд имеют достаточно надежно определенные параметры (Gies, 2003), найденные на основе наблюдений двойных систем. Проблема формирования массивных звезд пока окончательно не ясна (Zinnecker, 2003). До последнего времени наблюдаемые массы для массивных звезд, найденные на основе анализа моделей атмосфер, оказывались систематически меньше, чем массы, найденные на основе использования эволюционных моделей (Herrero, 2003). В последние годы, с использованием новых моделей атмосфер звезд, в которых учитывается покровный эффект многих линий и влияние звездного ветра, были получены новые значения эффективных температур массивных звезд и достигнуто лучшее согласие между спектроскопическими и эволюционными значениями масс горячих звезд (Crowther et al., 2002, Herrero et al., 2002, Bianchi and Garcia, 2002, Martins et al., 2002, Herrero, 2003). Таким образом, надежное определение фундаментальных звездных параметров из анализа спектральных и фотометрических наблюдений массивных ТДС представляет большой интерес. Массивные ТДС представляются особенно перспективными объектами для исследования рентгеновского излучения, формирующегося при столкновении сверхзвуковых звездных ветров (Черепащук, 1967а, б, 1976, Прилуцкий и Усов, 1975, 1976). В этой связи, работа Sana et al. (2005), где приведены результаты анализа оптических и рентгеновских наблюдений массивной ТДС CPD-41°7742, представляет большой интерес.

На рис. 91 приведены кривые блеска системы CPD-41°7742. Анализ этих кривых блеска проводился в рамках модели Роша (Антохина, 1988, 1996), подобной модели Вильсона (Wilson, 1979). Алгоритм позволяет рассчитать для каждой из компонент ТДС профили линий поглощения в их спектрах, кривые лучевых скоростей и монохроматические кривые блеска в случае круговой или эллиптической орбиты. Было зафиксировано спектроскопически определенное значение отношения масс компонент $q = M_1/M_2 = 1{,}803$, где M_1 и M_2 — массы главной и вторичной компонент системы. Фиксировалась также эффективная температура первичной компоненты $T_1 = 34\,000$ K в соответствии с ее спектральным классом и классом светимости O9V. Коэффициенты гравитационного потемнения для обеих компонент принимались равными $\beta_1 = \beta_2 = 0{,}25$, альбедо эффекта отражения бралось равным $A_1 = A_2 = 1$. Эти величины $\beta_{1,2}$ и $A_{1,2}$ характерны для звезд ранних спектральных классов. Использовался нелинейный закон потемнения к краю (закон квадратного корня, см. Dias-Cordowes and Gimenez, 1992, Dias-Cordowes et al., 1995, wan Hamme, 1993):

$$I(\cos\gamma) = I(1)\left[1 - x(1-\cos\gamma) - y(1-\sqrt{\cos\gamma})\right],$$

где γ — угол между лучом зрения и нормалью к поверхности звезды, $I(1)$ — интенсивность в направлении нормали, x, y — коэффициенты потемнения к краю (фиксировались в соответствии со спектральным классом и классом светимости звезды). Как

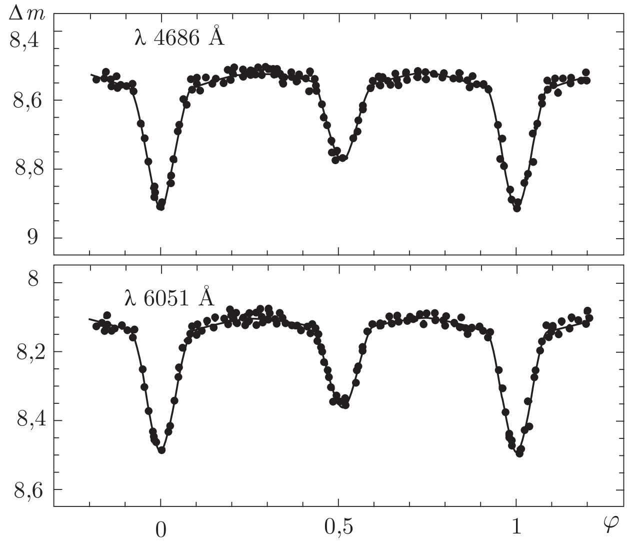


Рис. 91. Наблюдаемые и теоретические кривые блеска системы CPD-41°7742 (из работы Sana et al., 2005)

отмечено в работе (wan Hamme, 1993), это наиболее оптимальный закон потемнения в оптическом диапазоне спектра для температур звезд $T \geqslant 10\,000$ K. Осевое вращение обеих звезд предполагалось синхронным с их орбитальным обращением, $f_1 = f_2 = 1$.

Из анализа кривых блеска искались следующие параметры модели: степени заполнения звездами своих полостей Роша μ_1, μ_2, вычисленные для момента прохождения звездами периастра орбиты; средняя эффективная температура вторичной звезды T_2, наклонение орбиты i, эксцентриситет орбиты e, долгота периастра для первичной звезды ω. При минимизации невязки теоретическая кривая блеска сдвигалась вдоль оси звездных величин и вдоль оси орбитальных фаз, чтобы получить наилучшее представление наблюдений соответствующей теоретической кривой блеска. Для минимизации функционала невязки и поиска оптимальных значений параметров использовался симплекс-метод. В окрестности минимума функционала невязки путем перебора по параметрам было осуществлено построение поверхности функционала невязки в пространстве искомых параметров с целью оценки их ошибок. Решение задачи проводилось как отдельно для каждой из кривых блеска $\lambda\,6051$Å и $\lambda\,4686$Å, так и совместно для обеих кривых блеска. Расчеты показали, что модель может быть отвергнута при значении уровня значимости $\alpha > 0{,}01$, поэтому используемая модель может быть принята (хотя и с некоторыми оговорками), и на уровне значимости $\alpha = 0{,}01$ можно оценить ошибки параметров. Поскольку модель может быть отвергнута при небольших значениях уровня значимости (отвергая модель, мы совершаем относительно небольшое число ошибок первого рода, т. е. отвергаем правильную модель), «качество» используемой модели и, соответственно, надежность оцененных ошибок параметров сравнительно невелики. Тем не менее, результаты решения обратной задачи интерпретации кривых блеска можно признать вполне удовлетворительными, что подтверждается сходимостью результатов решения задачи, полученных для двух независимых кривых блеска $\lambda\,6051$ Å и $\lambda\,4686$ Å. То, что используемая модель может быть отвергнута лишь на низком уровне значимости может быть связано с физической нестабильностью системы, обусловленной взаимодействием звездных ветров (см. ниже).

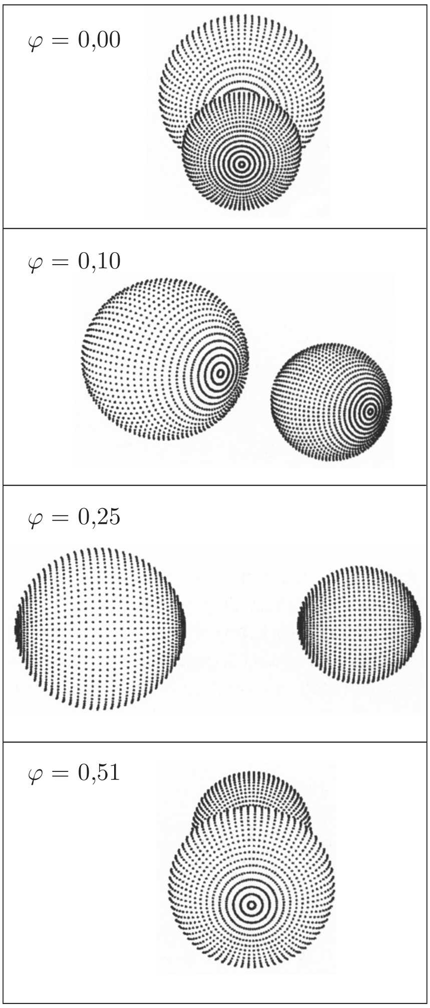


Рис. 92. Компьютерная модель системы CPD-41°7742, построенная с оптимальными параметрами, найденными из кривых блеска (из работы Sana et al., 2005)

На рис. 92, заимствованном из работы Sana et al. (2005), приведена компьютерная модель системы, соответствующая оптимальным параметрам. Абсолютные параметры компонент следующие: $R_1 = (7{,}45 \pm 0{,}45)R_\odot$, $M_1 = (17{,}97 \pm 0{,}45)M_\odot$, $T_1 = 34000\,\text{K}$; $R_2 = (5{,}39 \pm 0{,}43)R_\odot$, $M_2 = (9{,}96 \pm 0{,}22)M_\odot$, $T_2 = 26900\,\text{K}$. Большая полуось относительной орбиты равна $a = (23{,}18 \pm 0{,}18)R_\odot$, эксцентриситет орбиты $e = 0{,}20 \pm 0{,}006$, долгота периастра $\omega = 33^\circ \pm 19^\circ$. В работе обсуждаются также различия в параметрах кривых блеска, полученных в разные эпохи, что может быть вызвано физической переменностью системы, а также расхождение значений долготы периастра ω, полученных из кривых блеска и кривых лучевых скоростей. Возможно, что это различие связано с эффектом Барра (Barr, 1908), согласно которому долготы периастров орбит спектрально двойных звезд распределены неравномерно между 0 и 360°. Этот эффект был подтвержден на более полном наблюдательном материале Струве (Struve, 1948), Баттеном (Batten, 1983, 1988), Фракасторо (Fracastoro, 1979) и Ховартом (Howarth, 1993). Эффект Барра наиболее сильно проявляется в случае короткопериодических ТДС и состоит в том, что имеется избыток ТДС с $\omega = 0^\circ$ и плоский минимум в числе систем вблизи $\omega = 250^\circ$. Согласно Струве (Struve, 1948) и Ховарту (Howarth, 1993), это связано с селективным поглощением света звезд в газовых потоках, присутствующих в ТДС, что приводит к ложным значениям e и ω, определяемым по спектральным наблюдениям. Как уже отмечалось, значения e и ω, найденные из анализа кривых блеска, значительно более надежны, чем соответствующие спектроскопические значения e и ω, ввиду того, что эффекты поглощения в непрерывном спектре гораздо слабее, по сравнению с эффектами поглощения в спектральных линиях. По эволюционным трекам на Г–Р-диаграмме оцениваются начальные массы звезд $M_1^{(0)} = 23{,}7M_\odot$, $M_2^{(0)} = 11{,}1M_\odot$ и их возраст $t \simeq (3\text{–}8)\cdot 10^6$ лет. Ввиду малого возраста, наблюдаемые массы звезд должны быть близки к их начальным массам. Таким образом, эволюционные массы звезд получаются значительно большими, чем массы, найденные динамическим способом ($M_1 \simeq 18M_\odot M_2 \simeq 10M_\odot$). Поскольку система CPD-41°7742 разделенная, обмен масс в ней не происходил, и указанное различие в массах компонент требует специального объяснения, например, в привлечении моделей вращающихся звезд. С найденными параметрами системы CPD-41°7742 была сделана оценка расстояния до системы, которая прекрасно согласуется с оценкой расстояния до скопления NGC 6231, сделанной независимо по Г–Р-диаграмме этого скопления. Оцененный возраст звезд в системе CPD-41°7742 также согласуется с возрастом скопления NGC 6231. Большое внимание авторы уделили анализу рентгеновских наблюдений системы CPD-41°7742. Рентгеновское излучение от этой системы хорошо описывается моделью двухтемпературной тепловой плазмы с энергиями 0,6 и 1,0 кэВ, т. е. рентгеновский спектр в данном случае слегка более жесткий, чем спектр типичного рентгеновского излучения от одиночных звезд раннего спектрального типа. Рентгеновская кривая блеска показывает орбитальную переменность амплитудой ~ 2 раза, причем наблюдается минимум в рентгене, совпадающий

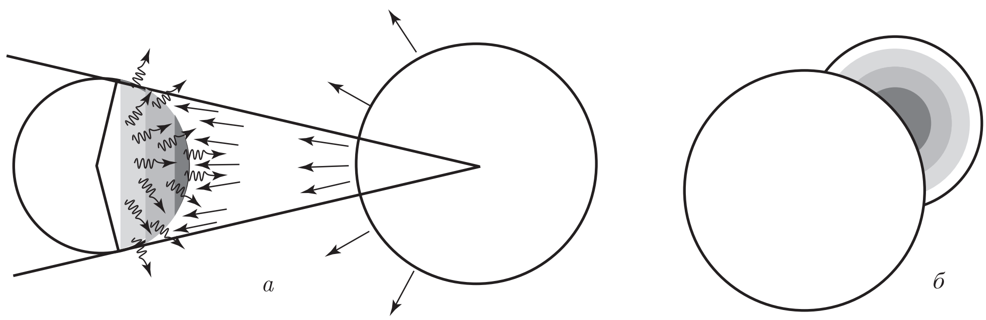


Рис. 93. Схематический вид взаимодействия ветра с фотосферой второй звезды в системе CPD-41°7742: *а* — вид по нормали к плоскости орбиты; *б* — вид вдоль луча зрения, близкого к плоскости орбиты (из работы Sana et al., 2005)

со вторичным минимумом оптической кривой блеска (случай, когда первичная, более массивная звезда впереди вторичной). Авторы интерпретируют этот рентгеновский минимум как затмение первичной звездой области столкновения ветра первичной звезды с поверхностью вторичной (см. рис. 93).

11. Анализ кривой блеска незатменной массивной ТДС HD 93205 (O3V+O8V) с эллиптической орбитой

В работе Антохиной и др. (2000) выполнена интерпретация кривой блеска незатменной массивной двойной системы HD 93205 ($P \simeq 6{,}08^{\rm d}$, $e = 0{,}46$, Sp.O3V+O8V). Эта система расположена внутри очень молодого рассеянного скопления Trumper 16, содержащего объект η Car, а также ряд массивных O- и WR-звезд. Главная компонента, O3V-звезда, здесь является звездой наиболее раннего спектрального класса из всех массивных звезд, входящих в изученные двойные системы. С использованием данных высокоточных ($\sim 0{,}003^m$) фотоэлектрических наблюдений авторами была построена средняя кривая блеска этой системы в узкополосном ($\Delta\lambda \cong 90$ Å) фильтре, центрированном на $\lambda = 5140$ Å. В течение 62 наблюдательных ночей было получено 186 индивидуальных наблюдений системы HD 93205. Кроме того, параллельно наблюдались три звезды сравнения, что обеспечило высокую точность результирующей кривой блеска. Амплитуда орбитальной переменности мала $\sim 0{,}02^m$ и, как показано в работе, обусловлена в основном переменной приливной деформацией звезд при их движении по сильно эллиптической орбите. Анализ кривой блеска выполнен в рамках модели Роша с использованием компьютерных программ Антохиной (1988, 1996). Для анализа кривых лучевых скоростей использовались программы синтеза профилей линий в спектрах звезд-компонент ТДС (Антохина и Черепащук, 1994, Антохина, 1996). Входными параметрами задачи были:

орбитальный период P, который уточнялся в процессе решения задачи, $M_1 \sin^3 i$ и $M_2 \sin^3 i$, e, ω, определенные из кривых лучевых скоростей, F_1, F_2 — параметры асинхронности осевого и орбитального вращения компонент, T_1, T_2 — эффективные температуры компонент, определяемые по их спектральным классам, β_1, β_2 — коэффициенты гравитационного потемнения компонент, $x_{1,2}$, $y_{1,2}$ — коэффициенты потемнения к краю компонент в нелинейном законе потемнения (закон квадратного корня) $I(\cos\gamma) = I(1)\left[1 - x(1-\cos\gamma) - y\left(1-\sqrt{\cos\gamma}\,\right)\right]$, A_1, A_2 — болометрические альбедо эффекта отражения, λ_1 — эффективная длина волны узкополосной кривой блеска, λ_0 — центральная длина волны вычисляемого профиля линии. Искомыми параметрами были наклонения орбиты i и степени заполнения звездами своих полостей Роша μ_1 и μ_2 в момент прохождения периастра. При поиске параметров минимизировалась также еще одна величина: параметр S — средняя разница в звездных величинах между наблюдаемой и теоретической кривыми блеска (выбор нуль пункта в шкале наблюдаемых звездных величин). Были заданы следующие значения фиксированных параметров: $M_1 \sin^3 i = 29{,}0 M_\odot$, $M_2 \sin^3 i = 12{,}9 M_\odot$, $P = 6{,}08075^{\mathrm{d}}$, $F_1 = F_2 = 1$, $T_1 = 49\,000$ K, $T_2 = 36\,500$ K, $\beta_1 = \beta_2 = 0{,}25$, $A_1 = A_2 = 1$, $x_1 = -0{,}138$, $y_1 = 0{,}479$, $x_2 = -0{,}166$, $y_2 = 0{,}589$, $\lambda_1 = 5140$ Å, $\lambda_0 = 4340$ Å (линия H_γ), $e = 0{,}46$, $\omega = 17{,}4^\circ$.

Величина невязки между наблюдаемой и теоретической кривыми блеска выбиралась так, чтобы можно было использовать статистику Фишера:

$$\Delta(i, \mu_1, \mu_2, S) = \frac{\sum\limits_{j=1}^{M}(n_j - 1)\sum\limits_{j=1}^{M} n_j \left[f_j^{\mathrm{obs}} - f_j^{\mathrm{theor}}(i, \mu_1, \mu_2, S)\right]^2}{M\sum\limits_{j=1}^{M} n_j(n_j-1)\,\overline{\sigma}_j^2},$$

где M — число нормальных точек средней кривой блеска, n_j — число индивидуальных наблюдений усредненных в j-й нормальной точке кривой блеска, f_j^{obs} — средний наблюдаемый блеск в j-й нормальной точке, f_j^{theor} — теоретический блеск в j-й точке кривой блеска, $\overline{\sigma}_j^2$ — оценка дисперсии f_j^{obs} в j-й нормальной точке.

В гипотезе о том, что модель адекватна, величина Δ распределена по закону Фишера $F_{M,\sum\limits_{j=1}^{M}(n_j-1),\,\alpha}$. При заданном уровне значимости α, доверительная область для искомых параметров i, μ_1, μ_2, S определяется по критерию Фишера:

$$\Delta(i, \mu_1, \mu_2, S) \leqslant F_{M,\sum\limits_{j=1}^{M}(n_j-1),\,\alpha}.$$

Невязки Δ, соответствующие уровням значимости 1% и 5%, равны $\Delta_{0{,}01} = 2{,}59$, $\Delta_{0{,}05} = 1{,}97$.

Поиск минимума невязки Δ и, соответственно, оптимальных значений μ_1, μ_2, S при фиксированном i проводился симплекс-методом (Himmelblau, 1971, Kallrach and Linnell, 1987). По параметру i осуществлялся перебор. В окрестности найденного минимума методом перебора по параметрам μ_1, μ_2, S были проведены дополнительные вычисления и была построена поверхность функционала невязки Δ, с использованием которой оценивались ошибки параметров.

На рис. 94 приведена средняя наблюдаемая кривая блеска и дана последовательность оптимальных (по параметрам μ_1, μ_2, S) теоретических кривых блеска для различных i. Видно, что для малых i совместное влияние эффектов эллипсоидальности и отражения приводит к тому, что суммарный блеск системы меняется симметрично относительно фазы прохождения периастра орбиты (фаза орбитального периода 0,148), поскольку прогретые эффектом отражения части звезд всегда видны для наблюдателя. С увеличением i роль эффекта отражения становится более существенной: в течение орбитального цикла наблюдатель видит то прогретые, то непрогретые части звезд, что приводит к асимметрии максимума на кривой блеска вблизи момента прохождения звездой периастра орбиты. При больших $i = 80^\circ$ становится существенным эффект затмения компонент.

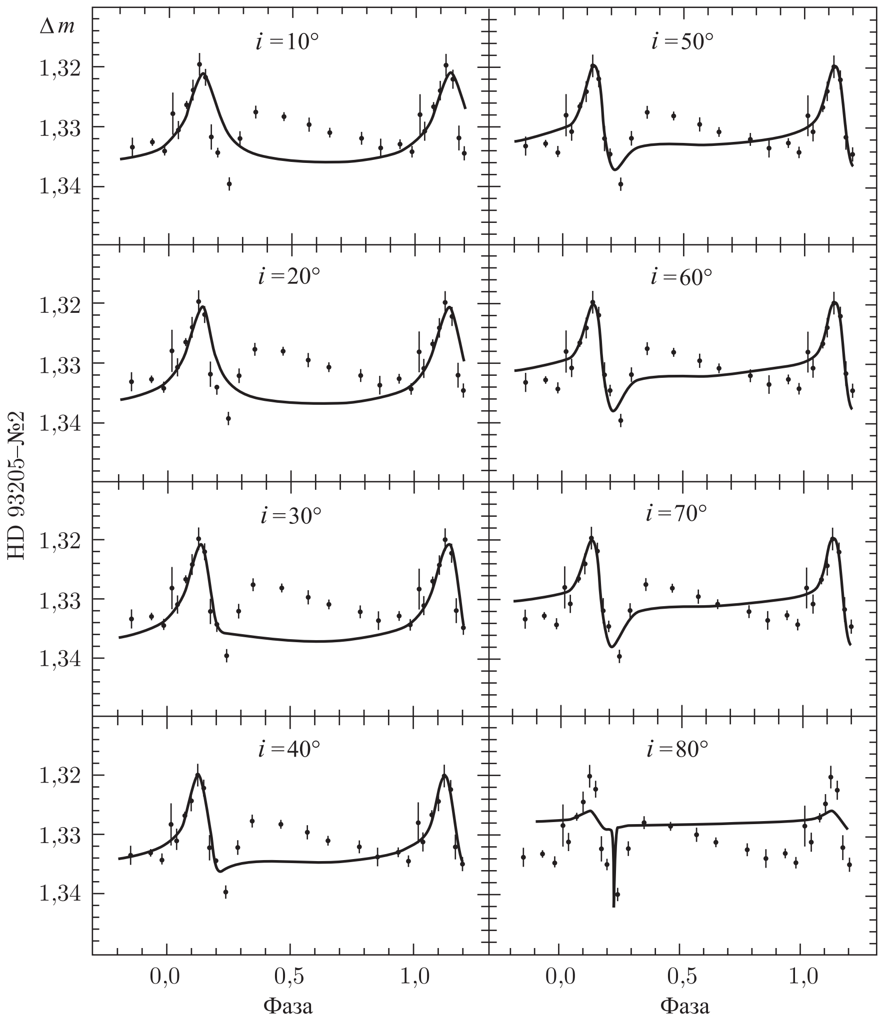


Рис. 94. Сетка модельных кривых блеска системы HD 93205 для различных значений наклонения орбиты i в сравнении с наблюдаемой кривой блеска этой системы (из работы Antokhina et al., 2000)

Следует подчеркнуть, что орбитальная переменность блеска при малых i, когда плоскость орбиты почти перпендикулярна лучу зрения, обусловлена переменной приливной деформацией звезд при их движении по эллиптической орбите (см. выше). Если бы орбита была круговой, орбитальная переменность блеска системы при i близком к нулю была бы пренебрежимо мала.

Как видно из рис. 94, для всех исследуемых значений i используемая модель не позволяет с достаточной точностью описать всю кривую блеска, поскольку наблюдаемая кривая показывает почти линейное уменьшение блеска в интервале фаз 0,35 и 1,0 (напомним, что орбитальные фазы, соответствующие прохождению главной звезды через периастр и апоастр орбиты, равны 0,148 и 0,648 соответственно). В то же время, теоретическая кривая блеска имеет примерно плоский участок в этом интервале фаз, для любых значений i. Следствием такого различия является то, что невязка Δ при использовании всех наблюдаемых точек кривой блеска всегда сильно превосходит значения, соответствующие 1% и 5% уровням значимости ($\Delta_{1\%} = 2{,}59$, $\Delta_{5\%} = 1{,}97$). Поэтому при попытке описать используемой моделью Роша всю кривую блеска, модель оказывается неадекватной. По-видимому, на классические эффекты эллипсоидальности и отражения, описываемые в рамках модели Роша, накладываются дополнительные, более тонкие эффекты, которые требуют отдельного исследования. Однако, для нахождения основных параметров задачи i, μ_1, μ_2, представляется разумным ограничиться анализом лишь части наблюдаемой кривой блеска в фазах 0,0–0,3 вблизи фазы прохождения периастра, где классические эффекты эллипсоидальности и отражения доминируют. Поэтому для нахождения оценок параметров i, μ_1, μ_2 величина невязки Δ вычислялась на участке фаз 0,0–0,3. Невязка Δ, рассчитанная на этом интервале фаз, имеет достаточно глубокий минимум и позволяет оценить доверительную область для параметров i, μ_1, μ_2, S на уровне доверия $\gamma = 95\%$. В частности, для доверительного интервала для i получается оценка

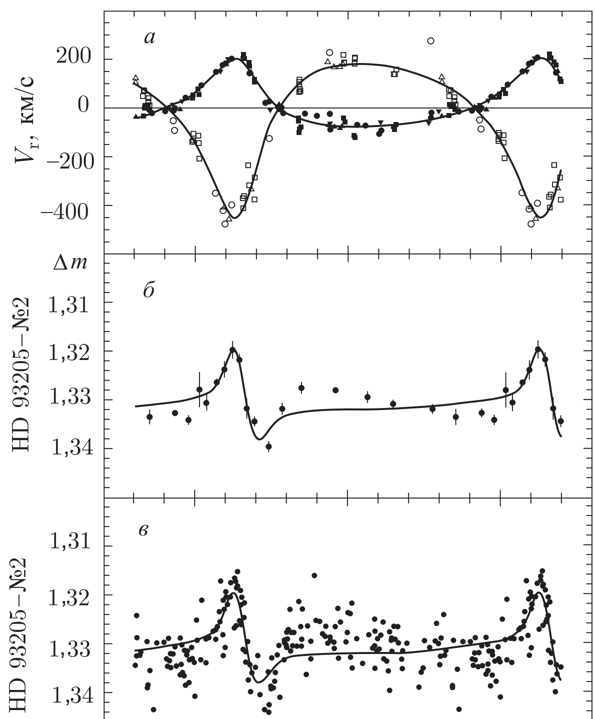


Рис. 95. Сравнение оптимальных теоретических кривых лучевых скоростей системы HD 93205 (вверху) и кривых блеска (внизу) с наблюдениями (из работы Antokhina et al., 2000)

(при $\gamma = 95\,\%$) $35° < i < 77°$, при этом оптимальное значение i, соответствующее минимуму невязки Δ, равно $60°$, хотя значения $i = 60°–70°$ практически неразличимы по величинам остаточных невязок. Для оптимального значения $i = 60°$ оценки доверительных интервалов на уровне доверия 95 % для параметров R_1 и R_2 (радиусы первичной и вторичной компонент) равны: $R_1 = (6{,}8–9{,}2)R_\odot$ и $R_2 = (5{,}7–7{,}0)R_\odot$ (величины μ_1 и μ_2 для $i = 60°$ составляют 0,56 и 0,66 соответственно).

На рис. 95 показаны кривые лучевых скоростей системы HD 93205, а также кривые блеска, рассчитанные для $i = 60°$, а также приведены данные наблюдений (точки).

На рис. 96 приведена компьютерная модель системы при $i = 60°$ для разных фаз орбитального периода.

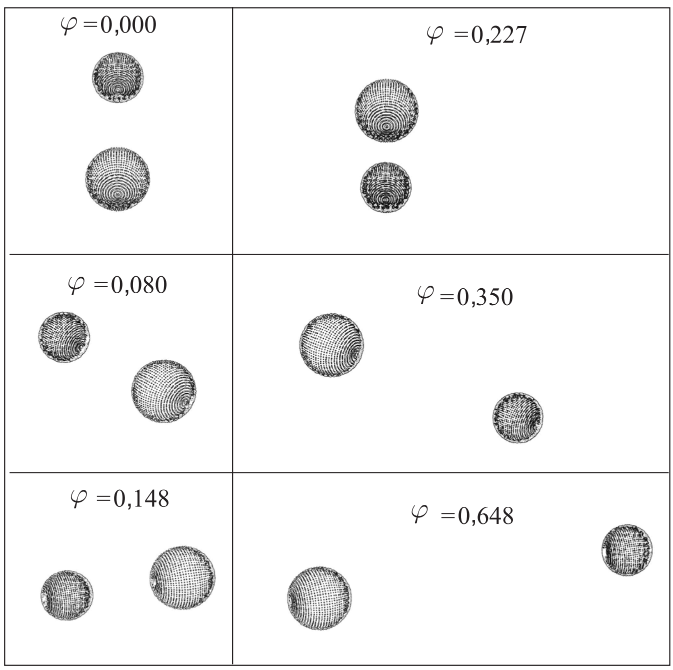


Рис. 96. Компьютерная модель системы HD 93205, построенная при оптимальных параметрах (из работы Antokhina et al., 2000)

Как видно из рис. 95, теоретическая кривая блеска, рассчитаная в рамках модели Роша, хорошо описывает изменения блеска системы в фазах, близких к моменту прохождения звезды через периастр орбиты (фазы 0,0–0,30). Важно также, что результаты интерпретации позволяют с определенностью заключить, что изменения блеска системы не связаны с затмениями компонент, а вызваны главным образом переменной приливной деформацией (и, соответственно, переменной площадью поверхности звезд), а также переменным эффектом отражения при движении звезд пары по эллиптической орбите.

В фазах 0,35–1,0 имеются расхождения между наблюдаемой и теоретической кривыми блеска, достигающие $0{,}005^m$, которые не могут быть объяснены в рамках модели Роша для ТДС. После обсуждения возможных причин такого расхождения, авторы (Antokhina et al., 2000) выдвинули несколько возможных объяснений: взаимодействие звездных ветров компонент, пятна на поверхностях компонент, влияние турбулентной вязкости вещества звезд, приводящее к тому, что оси симметрии звезд повернуты на некоторый угол по отношению к линии центров компонент, причем, ввиду эллиптичности орбиты этот угол переменен с фазой орбитального периода. Авторы считают последнее объяснение наиболее вероятным. На рис. 97 показано согласие между наблюдаемой и соответствующими теоретическими кривыми блеска, которое кажется вполне удовлетворительным.

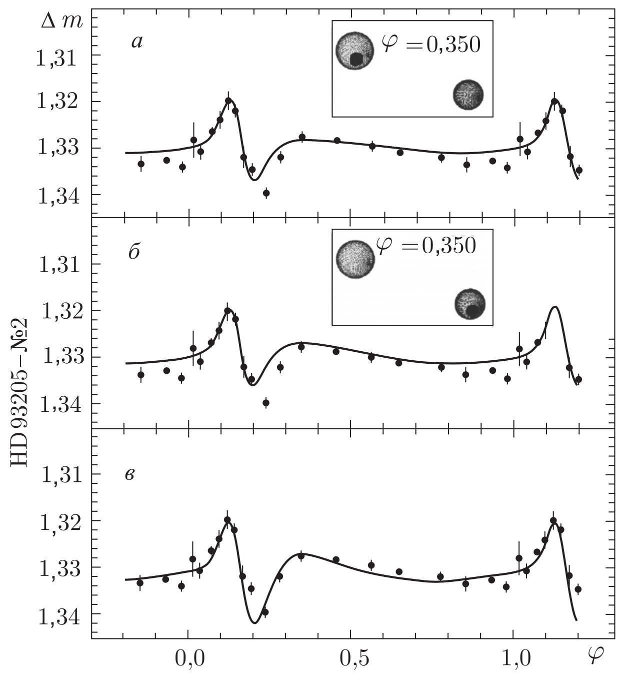


Рис. 97. Модифицированная модель системы HD 93205; *а* — учтено наличие пятна на поверхности O3-звезды; *б* — учтено наличие пятна на поверхности O8-звезды; *в* — учтен эффект турбулентной вязкости (из работы Antokhina et al., 2000)

С найденной оценкой для i $77° \geqslant i \geqslant 35°$ получаются следующие оценки для масс компонент: $31M_\odot \leqslant M_{O3V} \leqslant 154M_\odot$, $14M_\odot \leqslant M_{O8V} \leqslant 68M_\odot$ на уровне доверия 95%. Для оптимального значения $i = 60°$ получаются массы $M_{O3V} = 45M_\odot$, $M_{O8V} = 20M_\odot$.

Таким образом, в работе Антохиной и др. (2000) обнаружен и интерпретирован красивый и тонкий эффект оптической переменности системы HD 93205, связанный с переменной приливной деформацией звезд и переменным эффектом отражения при движении звезд пары по эллиптической орбите. Показано, что затмения в этой системе отсутствуют. Оценены фундаментальные параметры звезд в этой системе.

12. Определение коэффициентов гравитационного потемнения в полуразделенных ТДС

Мы описали тонкий эффект орбитальной переменности блеска разделенной ТДС, обусловленный переменной приливной деформацией и переменным эффектом отражения при движении звезд пары по эллиптической орбите. Рассмотрим теперь другой тонкий эффект в кривых блеска затменных систем — эффект гравитационного потемнения. Согласно фон Цейпелю (Zeipel, 1924) и Люси (Lucy, 1967) (см. выше), температура площадки на поверхности звезды выражается в виде

$$T \sim g^{\beta},$$

где g — локальное ускорение силы тяжести, $\beta = 0{,}25$ и $\beta = 0{,}08$ для лучистой и конвективной оболочки звезды соответственно. Значения параметра β выводятся теоретически из условий равновесия звезды. Представляет интерес определение значений β из наблюдений ТДС. Современные методы синтеза кривых блеска ТДС позволяют осуществлять такой поиск с использованием высокоточных кривых блеска затменных систем.

Определение коэффициентов гравитационного потемнения для компонент полуразделенных ТДС разных спектральных классов было выполнено в работах Джурашевича и др. (Djurašević et al., 2003, 2005) и Антохиной и др. (2005). Ранее в работах Китамуры и Накамуры (Kitamura and Nakamura, 1987a, 1987b) были предприняты попытки нахождения коэффициентов гравитационного потемнения для звезд-компонент затменных систем как разделенных (Kitamura and Nakamura, 1986), так и полуразделенных (Kitamura and Nakamura, 1987a,b). Для разделенных систем, применяя простую модель ТДС с использованием процедуры ректификации кривой блеска (метод Рессела–Мерилла), авторы нашли, что для звезд главной последовательности спектральных классов B1V-A2V величина коэффициента гравитационного потемнения составляет $\beta = 0{,}25$ в согласии с теорией для звезд, оболочки которых находятся в лучистом равновесии. В то же время, анализ кривых блеска полуразделенных ТДС в рамках простой модели с применением процедуры ректификации привел авторов к выводу, что коэффициенты гравитационного потемнения для звезд, заполняющих свои полости Роша, систематически выше теоретических ($\beta > 1$). Причем авторы утверждают, что такое завышение значения величины β для вторичных компонент полуразделенных ТДС не может быть устранено вариацией других параметров системы.

Для проверки этих утверждений в работе Антохиной и др. (2005) был предпринят поиск коэффициента гравитационного потемнения у компоненты B3, заполняющей свою полость Роша, в полуразделенной системе V Pup, которая изучалась Китамурой и Накамурой. Использовались высокоточные кривые блеска V Pup ($P = 1{,}454^{\mathrm{d}}$, спектр B1V+B3), полученные Андерсеном и др. (Andersen et al., 1983). В этой же работе получены спектральные наблюдения V Pup и определены массы компонент. Анализ кривых блеска V Pup в фильтрах v, b, y, выполненный Андерсеном и др. (Andersen et al., 1983) и Клаузеном и др. (Clausen et al.,1983) с использованием стандартного значения $\beta = 0{,}25$ и с применением модели Роша (программа Вильсона–Девиннея), показал, что удается хорошо описать все наблюдаемые кривые блеска V Pup, без каких-либо противоречий, что не согласуется с выводами Китамуры и Накамуры. В работе Антохиной и др. (2005) также применялась модель Роша (программа Антохиной (1996)) для интерпретации v, b, y-кривых блеска V Pup. Решение обратной задачи интерпретации v, b, y-кривых блеска позволило получить хорошее описание наблюдаемых кривых блеска теоретическими при значении коэффициента гравитационного потемнения для «холодной» звезды B3, заполняющей свою полость Роша, $\beta_c = 0{,}25$ (значение β_h для горячей звезды B1V, не заполняющей полость Роша, задавалось $\beta_h = 0{,}25$). На рис. 98 приведены соответствующие наблюдаемые средние кривые блеска и теоретические кривые. Чтобы проверить чувствительность задачи к изменению параметра β_c, был выполнен прямой перебор значений параметра β_c в диапазоне $\beta_c = -0{,}4 - +1{,}5$. Для каждого фиксированного значения β_c из этого диапазона проводилась минимизация невязки между наблюдаемой и теоретической кривыми блеска и искались оптимальные значения остальных

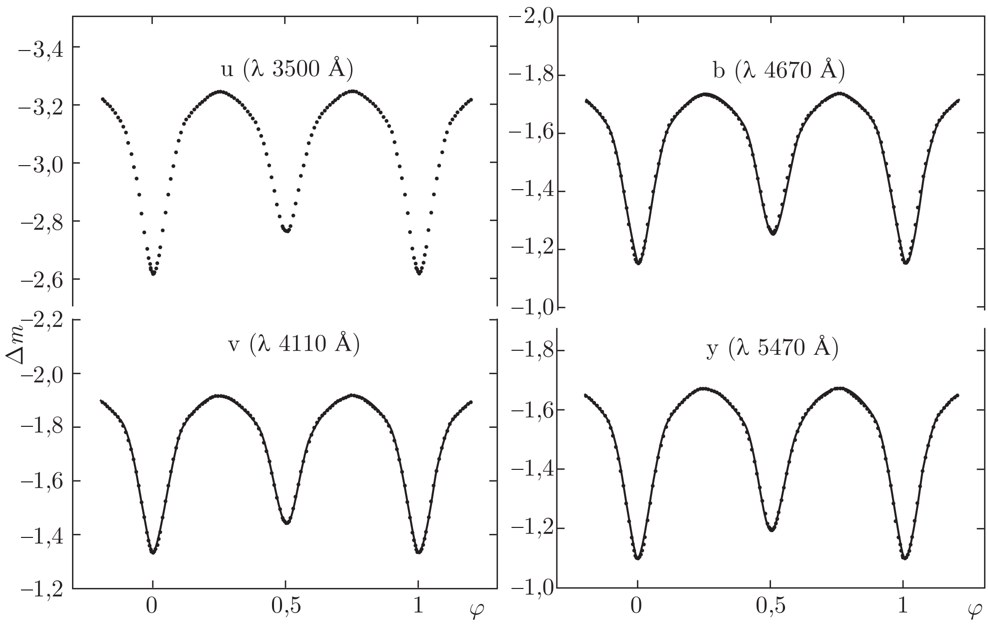


Рис. 98. Теоретические кривые блеска, наилучшим образом описывающие наблюдения полуразделенной двойной системы V Pup (сплошные линии). Точки — наблюдаемые кривые блеска, опубликованные в работе (Andersen et al., 1983). Оптимальные параметры, полученные в модели с нелинейным законом потемнения к краю (законом квадратного корня), следующие: $q = M_h/M_c = 0{,}53$, $i = 77{,}8^\circ$, $\mu_h = 0{,}90$, $\mu_c = 1{,}0$, $T_h = 27800\,$K, $T_c = 26600\,$K, $\beta_h = 0{,}25$, $\beta_c = 0{,}25$, $A_{h,c} = 1{,}0$ (из работы Антохиной и др., 2005)

параметров: степени заполнения полости Роша горячей звездой B1V μ_h, температуры «холодной» звезды B3 T_c и наклонения орбиты i (степень заполнения полости Роша «холодной» звездой B3 предполагалась равной $\mu_c = 1$, температура горячей звезды B1V задавалась по спектральному классу $T_h = 27\,800\,$K, величина коэффициента гравитационного потемнения для горячей звезды B1V задавалась $\beta_h = 0{,}25$). На рис. 99 приведена зависимость невязок, минимальных по трем параметрам (μ_h, T_c, i) от параметра β_c. Видно, что в широком диапазоне изменения параметра β_c (от 0 до 1) минимальные невязки меняются слабо, т. е. изменение величины β_c можно скомпенсировать изменением других параметров задачи. Важно подчеркнуть, что минимальная невязка для $\beta_c = 0{,}08$ всегда больше, чем для $\beta_c = 0{,}25$, т. е. значение $\beta_c = 0{,}25$ более предпочтительно, что согласуется с теорией для лучистой оболочки «холодной» звезды B3. Однако, кривая изменения минимальных невязок (см. рис. 99) не показывает четкого минимума при значении $\beta_c = 0{,}25$, а демонстрирует широкий плоский минимум в диапазоне значений $\beta_c = 0{,}1$–$0{,}8$. Тем не менее, можно утверждать, что значения $\beta_c > 1$, найденные в работе Китамуры и Накамуры, в нашем случае заведомо отвергаются наблюдениями системы V Pup, поскольку они приводят к значительным отклонениям соответствующей теоретической кривой блеска от наблюдаемой (см. рис. 100). По-видимому, вывод Китамуры и Накамуры об аномально большом значении коэффициента гравитационного потемнения $\beta > 1$ связан с использованием этими авторами слишком упрощенной модели ТДС и применением процедуры предварительной ректификации кривой блеска. Из рис. 100 следует, что хотя значение $\beta_c = 0{,}25$ для системы V Pup вполне приемлемо, для этой системы допустимы и бóльшие значения β_c вплоть до значений $\beta_c = 0{,}6$–$0{,}8$. Это может быть

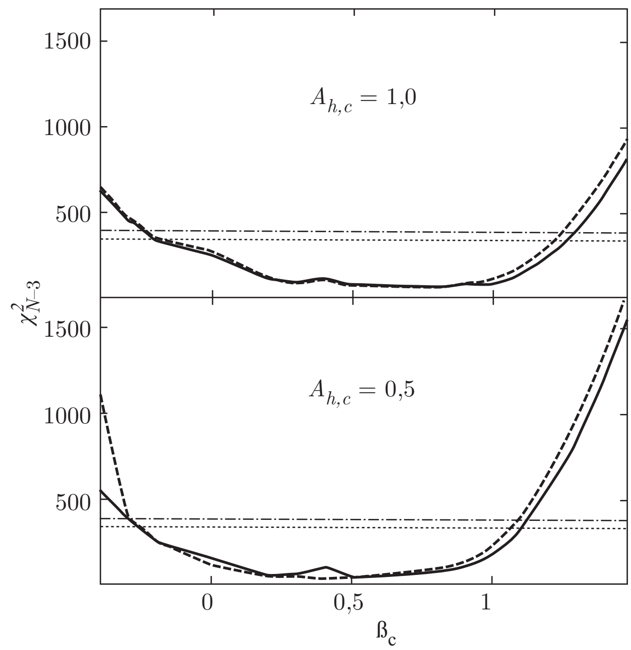


Рис. 99. Зависимость невязок χ^2_{N-3}, минимальных по параметрам i, T_h, μ_h, от величины коэффициента гравитационного потемнения холодной компоненты β_c в затменной системе V Pup. Вверху — для значения альбедо $A_{h,c} = 1{,}0$, внизу — для $A_{h,c} = 0{,}5$. Сплошная линия соответствует зависимости для нелинейного закона потемнения к краю, штриховая — для линейного. Штрих-пунктирной горизонтальной линией отмечено критическое значение невязки на уровне значимости $\alpha = 1\,\%$, точечной горизонтальной линией — на уровне значимости $\alpha = 33\,\%$

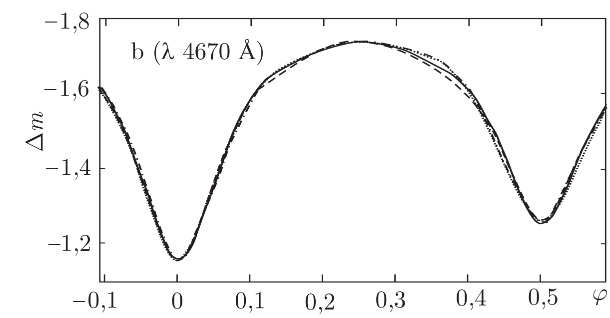


Рис. 100. Оптимальная теоретическая кривая блеска системы V Pup (сплошная линия) и теоретические кривые блеска, соответствующие концам доверительных интервалов. Точки — наблюдаемая кривая блеска. Параметры решения для концов доверительных интервалов следующие: $\beta_c = -0{,}24$ (штриховая линия), $i = 79{,}2^\circ$, $\mu_h = 0{,}98$, $T_h = 33400\,\text{K}$, $q = M_h/M_c = 0{,}53$, $\mu_c = 1{,}0$, $T_c = 26600\,\text{K}$, $\beta_h = 0{,}25$, $A_{h,c} = 1$; $\beta = 1{,}29$ (пунктирная линия) $i = 76{,}2^\circ$, $\mu_h = 0{,}84$, $T_h = 24500\,\text{K}$, $q = M_h/M_c = 0{,}53$, $\mu_c = 1{,}0$, $T_c = 26600\,\text{K}$, $\beta_h = 0{,}25$, $A_{h,c} = 1{,}0$

связано с влиянием поглощения газовым потоком, истекающим из «холодной» звезды B3, заполняющей свою полость Роша, которое вызывает переменное искажение внезатменного блеска системы. О таком искажении кривых блеска полуразделенных затменных систем сообщалось в работах ряда исследователей (см., например, Harris et al., 2003, Hilditch et al., 2005). Поэтому тенденция к увеличению формального значения величины β для полуразделенных ТДС может быть связана с эффектами поглощения газовой струей. Эти эффекты малы в случае разделенных ТДС. Поэтому в разделенных системах, содержащих звезды, испытывающие значительную приливную деформацию, но не заполняющие свои полости Роша, эффект гравитационного потемнения проявляется в более «чистом» виде, по сравнению с полуразделенными системами. Именно в таких разделенных системах наиболее перспективно искать коэффициент гравитационного потемнения из анализа кривых блеска. Однако, поскольку в данном случае ни одна из звезд не заполняет свою полость Роша, нет возможности зафиксировать степень заполнения полости Роша одной из компонент $\mu_2 = 1$, и необходимо искать оба параметра μ_1 и μ_2. Это значительно ухудшает возможности нахождения коэффициентов гравитационного потемнения из анализа кривой блеска разделенной системы. Впрочем, в связи с появлением высокоточных кривых блеска ТДС, получаемых с бортов космических обсерваторий COROT и «Kepler», можно надеяться, что задача надежного определения коэффициентов гравитационного потеменения звезд в разделенных ТДС будет успешно решена.

В работах Джурашевича и др. (Djurašević et al., 2003, 2005) был осуществлен систематический поиск коэффициента гравитационного потемнения у звезды, заполняющей свою полость Роша, в полуразделенных затменных двойных системах. Были проанализированы фотоэлектрические кривые блеска у 17 полуразделенных ТДС. Для анализа кривых блеска применялась модель Роша. Использовался нелинейный закон потемнения к краю. Для первичной компоненты, фигура которой близка к шаровой, значение β_1 задавалось из теории ($\beta_1 = 0{,}08$ для конвективной оболочки и $\beta_1 = 0{,}25$ — для лучистой оболочки звезды). Коэффициент гравитационного потемнения β_2 для звезды, заполняющей свою полость Роша (для которой принималось, что $\mu_2 = 1$), искался путем анализа кривых блеска совместно с остальными параметрами задачи (μ_1, T_2, i).

В частности, для системы V Pup авторами (Djurašević et al., 2003) было получено следующее значение коэффициента гравитационного потемнения для «холодной» звезды B3, заполняющей свою полость Роша: $\beta_c = 0{,}380 \pm 0{,}006$. Это значение β_c попадает в диапазон найденных нами значений $\beta_c = 0{,}1$–$0{,}8$. Ошибка значения β_c (0,006), однако, представляется сильно заниженной. В целом, для всех исследованных 17 затменных полуразделенных ТДС авторами (Djurašević et al., 2003, 2005) получены значения коэффициентов гравитационного потемнения для звезд, заполняющих свои полости Роша, которые качественно неплохо согласуются с теоретическими значениями, как для звезд с лучистыми ($\beta = 0{,}25$), так и с конвективными оболочками ($\beta = 0{,}08$). Как отмечают авторы, некоторое несоответствие между наблюдаемыми и теоретическими значениями β можно частично объяснить недостаточной точностью наблюдаемых кривых блеска, неточностью значений входных параметров модели (отношение масс компонент, температура горячей звезды и т. п.), искажающим действием на кривую блеска газовой струи, истекающей из «холодной» компоненты, физической переменностью компонент системы и т. п. С другой стороны, и теоретические значения коэффициента гравитационного потемнения нуждаются в некотором уточнении. Как показано в работах (Claret, 2000a,b), коэффициент гравитационного потемнения зависит от внутренней структуры звезды, в частности, от закона распределения угловой скорости осевого вращения в ее теле и от распределения непрозрачности вещества звезды. Например, дифференциальное вращение звезды может обусловливать аномальные значения коэффициента гравитационного потемнения для звезд раннего спектрального класса.

В этой связи, получение высокоточных спутниковых фотометрических наблюдений для разделенных затменных систем со значительно приливно деформированными компонентами представляется очень перспективным для корректного определения из наблюдений коэффициентов гравитационного потемнения и проверки современных теоретических звездных моделей.

13. Возможности анализа распределений яркости для компонент затменных систем по данным высокоточной спутниковой фотометрии

Рассмотрим еще один тонкий эффект в кривых блеска затменных двойных систем, связанный с учетом распределения яркости по дискам звезд (эффект потемнения к краю). Подробный анализ этой проблемы приведен в книге Шульберга (1971). Как уже отмечалось выше, к настоящему времени развиты весьма совершенные модели тонких звездных атмосфер, в рамках которых рассчитаны численные законы потемнения к краю звезд разных спектральных классов и классов светимости (см., например, Kurucz, 1979). Аппроксимация этих численных законов потемнения соответствующими аналитическими законами (как линейными, так и нелинейными по $\mu = \cos\theta$) дает таблицы теоретических коэффициентов потемнения, которые широко используются при интерпретации кривых блеска затменных систем (см. выше). Опыт применения этих аналитических законов к интерпретации кривых блеска затменных систем разных типов показывает, что эффект влияния линейного потемнения к краю ($0 \leqslant x \leqslant 1$) на кривые блеска затменных систем не превышает нескольких сотых звездной величины и наиболее надежно выявляется у разделенных систем с полными затмениями, имеющих круговые орбиты и пренебрежимо малые внезатменные изменения блеска (например, таких, как YZ Cas, U Sge, S Cnc, RW Tau, AR Cas и др.). Из анализа фотоэлектрических высокоточных кривых блеска таких систем (с точностью нормальной точки средней кривой блеска $\sim 0{,}001^m$–$0{,}003^m$), полученных в разных фильтрах, удается определить значения линейных коэффициентов потемнения к краю для звезд с относительной точностью до 10% (см., например, Лавров, 1971). Влияние эффектов нелинейности в законе потемнения к краю на кривые блеска затменных систем, согласно оценкам Шульберга (1971), в лучшем случае не превышает нескольких тысячных звездной величины, и их определение из кривых блеска, полученных наземными телескопами, представляется практически безнадежной задачей. Это, разумеется, не мешает успешно применять нелинейные законы потемнения к анализу кривых блеска затменных систем разными методами, в том числе и методом синтеза. В таких случаях линейный и нелинейные коэффициенты потемнения к краю задаются в соответствии со спектральным классом и классом светимости звезды или для фиксированной площадки на звезде (у которой известны локальная эффективная температура и локальное ускорение силы тяжести). Новые высокоточные спутниковые фотометрические наблюдения (спутники COROT и «Kepler») позволяют по крайней мере на порядок увеличить точность кривых блеска затменных систем. Это открывает реальные перспективы для детального изучения распределения яркости по дискам звезд из анализа высокоточных затменных кривых блеска. Недавно из анализа высокоточной кривой затмения планетой звезды HD209458, полученной с борта космического телескопа имени Хаббла, удалось определить коэффициенты нелинейного потемнения к краю с достаточной точностью (см., например, Gimenez, 2006). Это доказывает перспективность анализа высокоточных спутниковых наблюдений затменных систем. Разумеется, с повышением точности наблюдений на порядок, в кривых блеска могут становиться заметными эффекты пятен и факелов на поверхностях звезд, эффекты их нестабильности и пульсационной микропеременности, а также эффекты взаимной близости компонент-эффекты отражения и эллипсоидальности (даже для сильно разделенных систем). Это может привести к тому, что используемые стандартные модели затменных систем будут неадекватны наблюдениям. Оценки степени влияния некоторых из этих эффектов на высокоточную кривую блеска затменной системы приведены в недавней работе (Maceroni and Ribas, 2006). На рис. 101 показаны рассчитанные в этой работе в рамках модели Вильсона–Девиннея различия теоретических кривых блеска для различных законов потемнения к краю и гравитационного потемнения. Видно, что

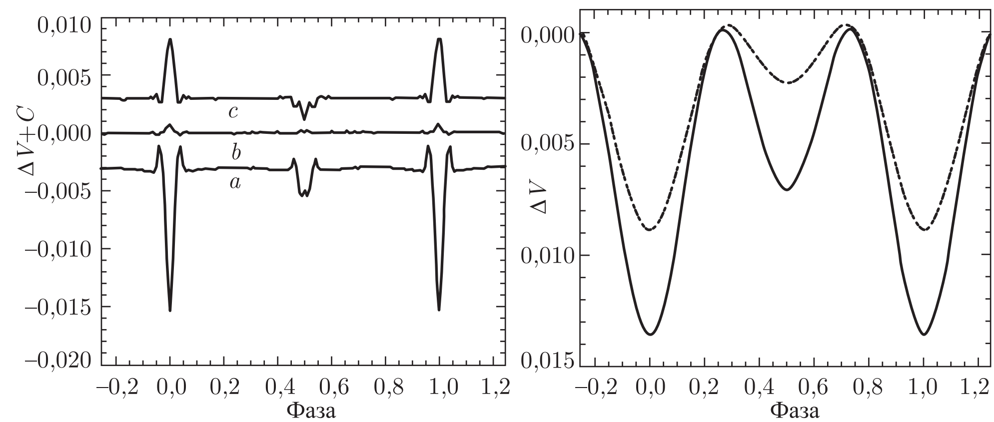


Рис. 101. Слева: разность между синтетическими модельными кривыми блеска с различными предположениями о законе потемнения к краю: a — линейный ($x = 0{,}57$) минус линейный ($x = 0{,}67$), b — линейный ($x = 0{,}57$) минус логарифмический, c — логарифмический закон потемнения минус закон квадратного корня. Параметры нелинейных законов взяты из работы (van Hamme, 1993) для соответствующих температур и ускорений силы тяжести звезд-компонент ТДС. Для лучшей видимости, кривые a и c сдвинуты относительно нулевой линии. Справа: влияние гравитационного потемнения на кривую блеска затменной системы с параметрами, такими, как у системы V805 Aql, но с $i = 65°$. Сплошная линия соответствует радиативной оболочке звезды, пунктирная линия — конвективной оболочке звезды (из работы Maceroni and Ribas, 2006)

отклонения в линейном законе потемнения на 0,1 (от $x = 0{,}57$ до $x = 0{,}67$) вызывают изменения в кривой блеска до $0{,}015^m$, а различие между линейным и нелинейным (логарифмическим) законами потемнения приводит к различию в кривых блеска $\sim 0{,}001^m$. Различие между двумя нелинейными законами потемнения (логарифмическим законом и законом квадратного корня) приводит к различию в кривых блеска до $0{,}005^m$. Эффект влияния гравитационного потемнения на кривую блеска достигает $0{,}014^m$, а различие в кривых блеска, соответствующих коэффициентам гравитационного потемнения $\beta = 0{,}08$ (конвективная оболочка звезды) и $\beta = 0{,}25$ (лучистая оболочка) достигает $0{,}005^m$. Все это позволяет с оптимизмом смотреть на возможности анализа высокоточных спутниковых наблюдений затменных систем для получения новой информации о физике звезд и звездных атмосфер. Эффекты пятен и факелов на поверхностях звезд и физическая микропеременность компонент затменной системы могут быть существенно ослаблены путем усреднения наблюдений, выполненных в течение многих орбитальных периодов. Это позволяет надеяться на то, что точность средних кривых блеска затменных систем в 10^{-4} звездной величины будет реализована в космических миссиях. После анализа средних высокоточных кривых блеска и определения важнейших средних характеристик компонент можно вернуться к анализу индивидуальных кривых блеска и изучать локальные эффекты на поверхностях звезд.

В связи с предстоящим значительным повышением точности кривых блеска затменных систем имеет смысл рассмотреть следующую постановку задачи: восстановить распределение яркости по дискам звезд с тонкими атмосферами, не опираясь на детальные модели тонких звездных атмосфер и не используя аналитические представления закона потемнения к краю. Такая постановка задачи была сформулирована в работе Черепащука и др. (1968) и развита в работах (Гончарский и др., 1985, 1986). Задача восстановления функции распределения яркости по диску звезды связана с решением интегрального уравнения Фредгольма I рода и является некорректно поставленной. Для получения устойчивого решения такой задачи необходимо использовать априорную информацию об искомой функции. Если априорной информации об искомой функции достаточно для выделения компактного множества функций, то решение интегрального уравнения на этом множестве представляет собой корректную задачу. Использование параметрических законов (линейного и нелинейных) для потемнения к краю делает задачу решения интегрального уравнения корректной, поскольку множество функций, зависящих от конечного числа параметров, является компактным. Однако, для выделения компактного множества вовсе не обязательно пользоваться параметрическим представлением искомой функции. В работе Черепащука и др. (1968) интегральное уравнение для потери блеска при затмении решалось в предположении о том, что искомая функция, описывающая распределение яркости по диску звезды с тонкой атмосферой, принадлежит множеству монотонных неотрицательных функций, которое является компактным. В работах Гончарского и др. (1985, 1986) было сделано предположение о принадлежности искомой функции распределения яркости компактному множеству монотонных выпуклых вверх и неотрицательных функций. В этих работах была показана эффективность современных методов решения обратных задач на компактных множествах функций и развиты соответствующие алгоритмы (описание этих алгоритмов и соответствующие компьютерные программы на языке ФОРТРАН даны в книге Гончарского и др., 1985).

В работе Богданова и Черепащука (2007) эти алгоритмы использовались для оценки возможностей нахождения функций распределения яркости по дискам звезд с тонкими атмосферами из анализа высокоточных кривых блеска. Предположения о монотонности, выпуклости и неотрицательности для функций распределения яркости по дискам звезд с тонкими атмосферами являются естественными. Они являются качественными, практически не зависят от конкретной физической модели тонкой атмосферы звезды и отражают тот факт, что температура в тонкой атмосфере звезды возрастает с глубиной. Поэтому восстановление из затменной кривой блеска функции распределения яркости на множестве монотонных, выпуклых и неотрицательных функций дает возможность оценки реальной ошибки в законе потемнения к краю, не связанной с конкретной физической моделью тонкой звездной атмосферы. С другой стороны, надежное восстановление функции распределения яркости на множестве монотонных выпуклых и неотрицательных функций позволит осуществить прямое сравнение наблюдаемого закона потемнения к краю с численным теоретическим законом потемнения, получаемым из модели тонкой звездной атмосферы и тем самым осуществить прямой контроль модели атмосферы звезды.

В первой части работы Богданова и Черепащука (2007) исследована точность определения линейного коэффициента потемнения к краю звезд-компонент классической затменной системы из двух сферических звезд на круговых орбитах при отсутствии эффектов отражения и эллипсоидальности. Для анализа была выбрана модель затменной переменной со следующими параметрами: $i = 89{,}0^\circ$, $r_1 = 0{,}30$,

$L_1 = 0{,}3$, $x_1 = 0{,}50$, $r_2 = 0{,}20$, $L_2 = 0{,}70$, $x_2 = 0{,}30$. Здесь радиусы компонент r_1, r_2 выражены в долях радиуса относительной орбиты, их светимости L_1, L_2 — в долях суммарной светимости компонент. С этими параметрами вычислена точная теоретическая кривая блеска (относительная погрешность вычисления потерь блеска при затмении достигает 10^{-6}).

В качестве исходных данных бралась модельная кривая блеска (рис. 102) с полным затмением в главном минимуме. Эта кривая искажалась влиянием случайного шума с дисперсией, постоянной в шкале звездных величин, для различных значений относительной среднеквадратичной погрешности ε. Для генерации шума использовались псевдослучайные гауссовские числа Δl_j с нулевым средним и единичной дисперсией. При этом отсчеты искаженной кривой блеска получались как $l_j^0 = l_j^c\,(1 + \varepsilon\Delta l_j)$, где l_j^c — отсчеты модельной кривой блеска. С целью сравнения точности оценки геометрических параметров модели по разным минимумам кривой блеска был проведен подбор модели отдельно для главного и вторичного минимумов. В каждом из минимумов кривой блеска рассматривалось по $N = 100$ отсчетов на равномерных сетках θ_j.

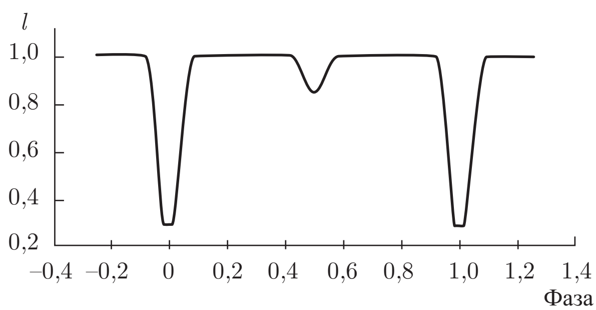


Рис. 102. Кривая блеска для рассматриваемой модели затменной системы.

Нахождение значений параметров модели, минимизирующих сумму квадратов уклонений «наблюдаемой» кривой блеска от теоретической, приводит к решению нелинейных задач оптимизации для главного минимума кривой блеска:

$$\sum_{j=1}^{N} \left[l^{\circ}(\theta_j) - l^{c}(i,\ r_1,\ r_2,\ L_2,\ x_2,\ \theta_j)\right]^2 = \min,$$

и для вторичного минимума:

$$\sum_{j=1}^{N} \left[l^{\circ}(\theta_j) - l^{c}(i,\ r_1,\ r_2,\ L_1,\ x_1,\ \theta_j)\right]^2 = \min.$$

При решении этих задач использовалась подпрограмма DNLSI библиотеки SLATEC, минимизирующая сумму квадратов уклонений нелинейных функций с помощью модифицированного алгоритма Левенберга–Марквардта (Денис и Шнабель, 1988). Был проведен подбор модели к возмущенным кривым блеска для трех значений $\varepsilon = 10^{-5}$, 10^{-4}, 10^{-3}. Диски звезд разбивались по радиусу равномерной сеткой, содержащей 1000 узлов. В каждом случае анализировалось по 100 кривых блеска с различными реализациями случайного шума. Полученные средние значения параметров модели и значения стандартных отклонений приведены в табл. 36 и 37.

Как видно из этих таблиц, значения геометрических параметров и коэффициентов потемнения к краю по данным космической фотометрии могут быть оценены

Таблица 36

Средние значения и стандартные отклонения параметров модели затменной системы, определенные из главного минимума для различных величин погрешности задания кривой блеска

Параметр	Точное значение	$\varepsilon = 10^{-5}$	$\varepsilon = 10^{-4}$	$\varepsilon = 10^{-3}$
i	89,00°	88,9992° $\pm$ 0,0034°	89,001° $\pm$ 0,035°	89,09° $\pm$ 0,41°
r_2	0,20	0,1999989 $\pm$ 0,0000081	0,200002 $\pm$ 0,000085	0,20006 $\pm$ 0,00073
L_2	0,70	0,70000000 $\pm$ 0,00000072	0,7000002 $\pm$ 0,0000074	0,700018 $\pm$ 0,000078
x_2	0,30	0,29998 $\pm$ 0,00024	0,3001 $\pm$ 0,0027	0,302 $\pm$ 0,023
r_1	0,30	0,3000007 $\pm$ 0,0000028	0,300000 $\pm$ 0,000030	0,30000 $\pm$ 0,00028

Таблица 37

Средние значения и стандартные отклонения параметров модели затменной системы, определенные из вторичного минимума для различных величин погрешности задания кривой блеска

Параметр	Точное значение	$\varepsilon = 10^{-5}$	$\varepsilon = 10^{-4}$	$\varepsilon = 10^{-3}$
i	89,00°	88,994° $\pm$ 0,018°	88,99° $\pm$ 0,15°	88,69° $\pm$ 0,99°
r_1	0,30	0,300001 $\pm$ 0,000029	0,30000 $\pm$ 0,00026	0,3002 $\pm$ 0,0028
L_1	0,30	0,300025 $\pm$ 0,000085	0,30005 $\pm$ 0,00074	0,3035 $\pm$ 0,0069
x_1	0,50	0,49989 $\pm$ 0,00055	0,4995 $\pm$ 0,0052	0,487 $\pm$ 0,056
r_2	0,20	0,199996 $\pm$ 0,000017	0,20000 $\pm$ 0,00016	0,1995 $\pm$ 0,0015

весьма точно. Значения геометрических параметров, полученные из анализа разных минимумов, хорошо согласуются между собой. При этом точность оценки геометрических параметров для главного минимума существенно выше. Стандартные отклонения параметров уменьшаются примерно линейно при уменьшении погрешности регистрации кривой блеска. Для главного минимума кривой блеска относительные среднеквадратичные ошибки для радиусов r_1 и r_2 составляют 0,1 % и 0,4 % для $\varepsilon = 10^{-3}$; 0,01 % и 0,04 % для $\varepsilon = 10^{-4}$; 0,001 % и 0,004 % для $\varepsilon = 10^{-5}$. Относительные среднеквадратичные ошибки для линейных коэффициентов потемнения к краю составляют 8 % и 10 % для $\varepsilon = 10^{-3}$; 1 % и 1 % для $\varepsilon = 10^{-4}$; 0,1 % и 0,1 % для $\varepsilon = 10^{-5}$ соответственно. Таким образом, если точность кривой блеска достигнет величины 10^{-4} (на порядок выше точности наземной фотометрии), то коэффициент линейного потемнения к краю в случае полного затмения в системе может быть оценен с относительной среднеквадратичной ошибкой в 1 %. Естественно, в случае столь высокоточной кривой блеска ($\varepsilon = 10^{-4}$) имеет смысл искать и коэффициенты в нелинейных параметрических законах потемнения к краю.

Альтернативная подбору параметрических моделей методика восстановления распределения яркости по дискам компонент затменных систем, свободная от жестких модельных предположений, состоит в решении интегральных уравнений для потери блеска в главном и вторичном минимумах на компактном множестве монотонных выпуклых и неотрицательных функций (Черепащук и др., 1968, Гончарский и др., 1985, 1986). Пусть $I(\xi)$ $(0 \leqslant \xi \leqslant r_1)$ и $I(\rho)$ $(0 \leqslant \rho \leqslant r_2)$ — функции распределения яркости по дискам первой и второй компоненты, соответственно. Тогда, в предположении шарообразности компонент и отсутствии эффектов отражения и эллипсоидальности, потери блеска могут быть записаны следующим образом. Для главного минимума

$$1 - l_1(\Delta) = \int\limits_{\Delta - r_2}^{\Delta + r_2} 2\xi \arccos \frac{\xi^2 + \Delta^2 - r_2^2}{2\xi\Delta} I(\xi)\, d\xi$$

при $r_2 \leqslant \Delta \leqslant r_1 + r_2$ и $\Delta - r_2 \leqslant \xi \leqslant r_2 + \Delta$,

$$1 - l_1(\Delta) = \int\limits_0^{r_2 - \Delta} 2\pi\xi\, I(\xi)\, d\xi$$

при $\cos i \leqslant \Delta \leqslant r_2$ и $0 < \xi \leqslant r_2 - \Delta$,

$$1 - l_1(\Delta) = \int\limits_{r_2 - \Delta}^{r_2 + \Delta} 2\xi \arccos \frac{\xi^2 + \Delta^2 - r_2^2}{2\xi\Delta}\, I(\xi)\, d\xi$$

при $\cos i \leqslant \Delta < r_2$ и $r_2 - \Delta < \xi \leqslant r_2 + \Delta$.

Для вторичного минимума

$$1 - l_2(\Delta) = \int\limits_{\Delta - r_1}^{r_2} 2\rho \arccos \frac{\rho^2 + \Delta^2 - r_1^2}{2\rho\Delta} I(\rho)\, d\rho$$

при $r_1 \leqslant \Delta \leqslant r_1 + r_2$ и $\Delta - r_1 \leqslant \rho \leqslant r_2$,

$$1 - l_2(\Delta) = \int\limits_0^{r_2} 2\pi\rho\, I(\rho)\, d\rho$$

при $\cos i \leqslant \Delta < r_1 - r_2$ и $0 \leqslant \rho \leqslant r_2$,

$$1 - l_2(\Delta) = \int\limits_0^{r_1 - \Delta} 2\pi\rho I(\rho)\, d\rho$$

при $r_1 - r_2 \leqslant \Delta < r_1$ и $0 \leqslant \rho \leqslant r_1 - \Delta$,

$$1 - l_2(\Delta) = \int\limits_{r_1 - \Delta}^{r_2} 2\rho \arccos \frac{\rho^2 + \Delta^2 - r_1^2}{2\rho\Delta} I(\rho)\, d\rho$$

при $r_1 - r_2 \leqslant \Delta < r_1$ и $r_1 - \Delta \leqslant \rho \leqslant r_2$,

$$\Delta^2 = \cos^2 i + \sin^2 i \sin^2 \theta.$$

Введя в рассмотрение соответствующие ядра $K_1(\xi, \Delta, r_2)$ и $K_2(\rho, \Delta, r_1)$, приведенные выше выражения можно записать в виде двух интегральных уравнений Фредгольма 1-го рода:

$$1 - l_1(\Delta) = \int\limits_0^{r_1} K_1(\xi,\, \Delta,\, r_2)\; I(\xi)\, d\xi, \tag{512}$$

$$1 - l_2(\Delta) = \int\limits_0^{r_2} K_2(\rho,\, \Delta,\, r_1)\; I(\rho)\, d\rho. \tag{513}$$

Таким образом, задача восстановления распределений яркости $I(\xi)$ и $I(\rho)$ сводится к совместному решению уравнений (512) и (513) при условии нормировки суммарной светимости компонент. Поиск распределений яркости на выбранном компактном множестве функций приводит к минимизации функционалов невязки, представляющих собой расстояние в метрике пространства L_2 наблюдаемых потерь блеска от вычисленных в главном и вторичном минимумах:

$$\Phi_1\left[I(\xi),\, r_1,\, r_2,\, i\right] = \left\| \int\limits_0^{r_1} K_1\left(\xi,\, \Delta,\, r_2\right) I\left(\xi\right) d\xi - \left[1 - l_1\left(\Delta\right)\right] \right\|_{L_2},$$

$$\Phi_2\left[I(\rho),\, r_1,\, r_2,\, i\right] = \left\| \int\limits_0^{r_2} K_2\left(\rho, \Delta,\, r_1\right) I\left(\rho\right) d\rho - \left[1 - l_2\left(\Delta\right)\right] \right\|_{L_2}.$$

При требовании минимизации суммарной невязки для обоих минимумов кривой блеска восстановление распределений яркости сводится к нахождению двух монотонно невозрастающих, выпуклых вверх неотрицательных функций $I(\xi)$, $I(\rho)$, а также значений трех геометрических параметров r_1, r_2, i, дающих решение задачи оптимизации

$$\Phi_1[I(\xi), r_1, r_2, i] + \Phi_2[I(\rho), r_1, r_2, i] = \min. \tag{514}$$

Оценка погрешностей вычислений интегралов в зависимости от числа точек разбиений равномерных сеток по радиусам звезд при интегрировании по формуле Симпсона показала, что набор числа точек разбиения $M = 1001$ гарантирует относительную погрешность вычисления потери блеска менее 10^{-6}, что при ожидаемой точности наблюдаемых кривых блеска 10^{-4}–10^{-5} представляется вполне достаточным. В дальнейшем значение $M = 1001$ использовалось при нахождении распределений яркости по дискам звезд. При решении задачи оптимизации (514), реализующей поиск функций $I(\xi)$, $I(\rho)$ на выбранном компактном множестве функций для различных значений геометрических параметров, применялась модифицированная компьютерная подпрограмма PTISR (Гончарский и др., 1985), написанная на языке ФОРТРАН и реализующая минимизацию функционала невязки методом проекции сопряженных градиентов на заданное множество функций. Для уменьшения влияния погрешностей округления соответствующие переменные подпрограммы были переведены в тип двойной точности с 16 десятичными знаками в мантиссе при записи числа в форме с плавающей запятой. Поиск глобального минимума функционала невязки (514) проводился путем перебора по геометрическим параметрам r_1, r_2, i.

Для оценки точности восстановления распределений яркости и нахождения значений геометрических параметров был проведен анализ модельной кривой блеска, использованной ранее, при нахождении решения задачи в модели с линейным законом потемнения ($i = 89^\circ.0$, $r_1 = 0{,}30$, $L_1 = 0{,}30$, $x_1 = 0{,}50$, $r_2 = 0{,}20$, $L_2 = 0{,}70$, $x_2 = 0{,}30$). Эта модельная кривая блеска искажалась влиянием случайного шума при $\varepsilon = 10^{-4}$. Глобальный минимум невязки получился при следующих значениях параметров: $i = 89{,}16^\circ \pm 0{,}02^\circ$, $r_1 = 0{,}29990 \pm 0{,}00002$, $r_2 = 0{,}20005 \pm 0{,}00002$, которые близки к точным, наперед заданным значениям. Погрешности параметров оценены формально и равны шагам сеток, использованных при переборе их значений.

Восстановленное распределение яркости по диску первой компоненты показано кружками на рис. 103, а распределение яркости по диску второй компоненты — на рис. 104 (кружки). С целью устранения переналожения между кружками показан только каждый десятый отсчет восстановленных распределений. Сплошными линиями на рис. 103, 104 приведены точные, наперед заданные распределения яркости, соответствующие линейным законам при $x_1 = 0{,}50$ и $x_2 = 0{,}30$. В целом,

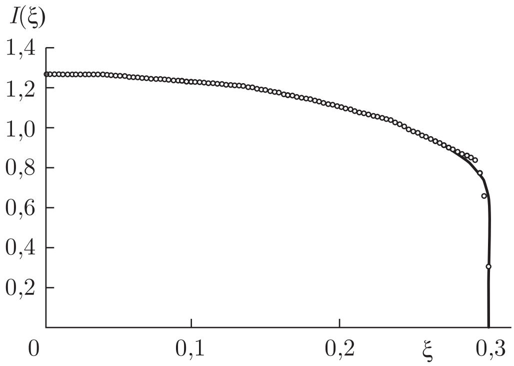


Рис. 103. Распределение яркости по диску первой компоненты, восстановленное на множестве выпуклых неотрицательных функций (кружки). Сплошная линия — точное распределение яркости (из статьи Богданова и Черепащука, 2007)

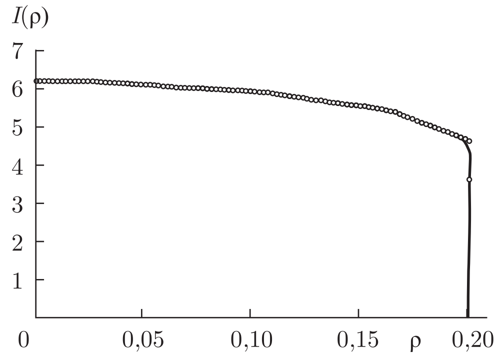


Рис. 104. То же, что на рис. 103 для второй компоненты (из статьи Богданова и Черепащука, 2007)

восстановленные функции $I(\xi)$ и $I(\rho)$ оказываются достаточно близкими к точным, при точности кривой блеска $\varepsilon = 10^{-4}$. Исключения составляют края дисков. Здесь в интервалах $\Delta\xi = 0{,}015$ ($\sim 5\,\%$ от радиуса r_1) и $\Delta\rho = 0{,}006$ ($\sim 3\,\%$ от радиуса r_2) наблюдаются значительные (до (5–10) %) отклонения восстановленных функций распределения яркости от точных функций. Подчеркнем, что это имеет место, когда наблюдаемая и соответствующая теоретическая кривые блеска различаются в среднем на величину $\varepsilon = 10^{-4}$. Таким образом, даже при очень высокой точности кривой блеска при затмении ($\sim 10^{-4}$) распределение яркости по диску звезды хорошо (с точностью $\sim 1\,\%$) восстанавливается лишь в области, составляющей 95–97 % от радиуса звезды. Во внешних частях диска ($\Delta r = (3–5\,\%)$) точность восстановления распределения яркости при точности кривой блеска $\varepsilon = 10^{-4}$ остается не очень высокой, и составляет $\sim (5–10)\,\%$. Это, по-видимому, связано с тем, что функция распределения яркости по диску звезды с тонкой атмосферой имеет на краю диска разрыв непрерывности первого рода.

Полученные результаты дают оценку реальной точности восстановления из высокоточных затменных кривых блеска эффектов нелинейности потемнения к краю диска звезды с тонкой атмосферой, которые, как известно, наиболее сильно проявляются в краевых зонах диска толщиной в несколько процентов от его радиуса.

14. RY Sct — массивная двойная система на стадии превращения в систему WR+OB

Мы рассмотрели применение модели Роша к анализу кривых блеска классических ТДС, когда обе компоненты являются «нормальными» звездами. Рассмотрим теперь обобщение модели Роша на случай неклассических ТДС, когда одна из компонент системы является пекулярной. Пекулярная ТДС RY Sct ($P = 11{,}12471^{\mathrm{d}}$, Sp. B0V+?) принадлежит к классу двойных систем типа W Ser, главной особенностью которых является то, что в спектре системы видны линии только одной компоненты, причем эта видимая компонента имеет меньшую массу, а линии более массивной компоненты не видны (или плохо видны) в суммарном спектре системы. Список ТДС типа W Ser приведен в Каталоге поздних ТДС (Cherepashchuk et al., 1996). В этот список, состоящий из 12 систем, входят такие известные системы, как β Lyr, SX Cas и т. п. Предполагается, что эти системы находятся на стадии завершения первичного обмена масс, когда видимая звезда меньшей массы (которая ранее была более массивной звездой системы) заполняет свою полость Роша, истекает на вторую, ныне более массивную звезду, вокруг которой образовался геометрически толстый непрозрачный диск. Этот диск экранирует фотосферу более массивной звезды, что объясняет невидимость ее линий в суммарном спектре системы. Надежные определения параметров таких систем представляют большой интерес для проверки современных представлений об эволюции ТДС.

Система RY Sct (B0pe) имеет спектральные пекулярности такие, как эмиссионная линия He II 4686 Å. В спектре системы наблюдаются также сильные запрещенные линии [FeIII], [SiIII], эмиссионные линии водорода, гелия и других элементов. Система является также источником радиоизлучения. Все это свидетельствует о том, что система RY Sct, подобно системе β Lyr, окружена небольшой туманностью из выброшенного вещества — зоны H II (King and Jemeson, 1979). Система имеет сильное покраснение ($A_V = 4{,}12^m$), что, по-видимому, вызвано тем, что она погружена в мощную газопылевую оболочку (Grasdalen et al., 1979). На основе спектроскопических наблюдений Каули и Хатчинге (Cowley and Hutchings, 1976) нашли отношение масс компонент $q = M_2/M_1 = 1{,}25$. Кинг и Джеймсон (King and Jemeson, 1979) предложили следующую модель RY Sct: главная, более яркая компонента B0V заполняет свою полость Роша и интенсивно перетекает на вторичную компоненту большей массы, но меньшей светимости. Гирисин и Мардироссиан (Giuricin and Mardirossian, 1981) высказали предположение, что вторичная, более массивная компонента системы RY Sct окружена геометрически толстым аккреционным диском, что может объяснить ее аномально низкую светимость. В этом смысле RY Sct подобна пекулярной системе β Lyr; можно предполагать, что она превращается в двойную систему WR+OB, состоящую из звезды спектрального класса OB и звезды Вольфа–Райе.

В рамках кооперативной программы исследований на основе нового спектрального материала Р. Веста (Южно-Европейская Обсерватория) было найдено новое, более надежное отношение масс в системе RY Sct: $q = M_2/M_1 = 3{,}3$ (Скульский, 1985).

С этим новым значением отношения масс компонент $q = 3{,}3$ Антохина и Черепащук (1988) методом синтеза выполнили интерпретацию всех имеющихся фотометрических наблюдений RY Sct в фильтре V. Рассматривались две модели: модель Роша для обеих звезд системы и модель, в которой одна компонента описывается моделью Роша, другая — геометрически толстым диском. Было показано, что модель с геометрически толстым аккреционным диском более предпочтительна, и было сделано заключение, что по своим характеристикам система RY Sct очень близка к двойным системам типа WR+OB, если предположить, что менее массивная звезда заканчивает стадию первичного обмена масс в двойной системе, находится на стадии обнажения гелиевого ядра и превращения в звезду WR. Основанием для такого предположения является усиленное обилие гелия у менее массивной звезды, выражающееся, в частности, в наличии в ее спектре весьма интенсивной эмиссионной линии He II 4686 Å. Уточнение этой модели и эволюционного статуса системы RY Sct осуществлено в работе Антохиной и Кумсиашвили (1999) на основе анализа новых фотометрических наблюдений этой системы, выполненных Кумсиашвили в среднеполосной фотометрической системе Стремгрена и в линии H_β.

Вначале рассмотрим решение обратной задачи интерпретации V-кривой блеска системы RY Sct в рамках модели Роша (Антохина и Черепащук, 1988). Для интерпретации использовалась средняя кривая блеска RY Sct в фильтре V, объединяющая наблюдения Чиатти и др. (Ciatti et al., 1980), Кумсиашвили (1985) и Закирова (1985). В результате усреднения ~ 1630 индивидуальных фотоэлектрических наблюдений было получено 40 нормальных точек средней V-кривой блеска (Черепащук, 1985). Применялись алгоритмы синтеза теоретической кривой блеска, описанные в работах Антохиной (1988, 1996). В модели Роша предполагается, что поверхности звезд совпадают с эквипотенциальными поверхностями. Учитывается вращательное и приливное искажение формы компонент, потемнение к краю, гравитационное потемнение и эффект «отражения». Теоретическая монохроматическая кривая блеска ТДС в такой модели является функцией следующих параметров: отношения масс компонент $q = M_2/M_1$, степеней заполнения полостей Роша μ_1, μ_2 (или поверхностных потенциалов Ω_1, Ω_2), эффективных температур компонент T_1, T_2, коэффициентов гравитационного потемнения β_1, β_2, коэффициентов потемнения к краю x_1, x_2, коэффициентов «отражения» A_1, A_2, наклонения орбиты i и длины волны λ. С использованием имеющейся дополнительной информации о системе были зафиксированы следующие параметры: $q = 3{,}3$, $T_1 = 28\,000$ К (B0), $\beta_1 = \beta_2 = 0{,}25$, $x_1 = x_2 = 0{,}3$ (для $\lambda = 5500$Å) и $A_1 = A_2 = 1$. Искомые параметры: μ_1, μ_2, T_2, i. Поиск решения проводился методом Пауэлла путем минимизации функционала невязки без вычисления производных. Теоретические кривые блеска сравнивались с наблюдениями с использованием критерия Фишера (см. выше). Оказалось, что даже минимальная невязка, соответствующая оптимальным параметрам, превышает в несколько раз критический уровень Фишера на уровне значимости 1 %. Это можно понять, приняв во внимание, что средняя кривая блеска RY Sct слегка асимметрична и имеет пекулярности (что, возможно, связано с влиянием газовых потоков в системе), а каждая нормальная точка на средней V-кривой блеска объединяет большое число индивидуальных наблюдений и имеет весьма малую формальную ошибку. Поэтому не удалось сделать заключение о значимости найденных параметров системы и их доверительных интервалов ошибок.

Фотометрические элементы и абсолютные величины, характеризующие компоненты системы в рамках модели Роша, приведены в табл. 38.

Соответствующая модель и теоретическая V-кривая блеска показаны на рис. 105, 106. Для расчета абсолютных размеров компонент использовались значения полуамплитуд их лучевых скоростей $K_1 = 260$ км/с и $K_2 = 80$ км/с. Из рис. 106 видно, что даже при полном заполнении компонентами своих полостей Роша главный минимум теоретической кривой блеска RY Sct остается более узким, чем наблюдаемый. Это означает, что размеры второй компоненты в экваториальной плоскости должны превосходить размеры полости Роша. Кроме того, в главном минимуме теоретической кривой блеска происходит полное затмение первой, более яркой компоненты, что не согласуется с наблюдениями. Для заданного значения $q = 3{,}3$ размеры второй компоненты, заполняющей полость Роша, значительно превосходят размеры первой, что приводит к полному затмению в главном минимуме. И хотя первая звезда более горячая, вклад второй звезды во внезатменный блеск системы составляет ~ 67 %. Это противоречит наблюдениям, так как вторая компонента имеет меньшую светимость, и ее спектральные линии трудно обнаружимы. Таким образом, параметры RY Sct, полученные в рамках стандартной модели Роша, в которой обе компоненты — нормальные звезды, противоречит наблюдательным данным. Эта модель не в состоянии объяснить все наблюдаемые особенности системы RY Sct.

Поскольку вторичная компонента имеет аномально низкую светимость для своей массы, ее нельзя считать нормальной звездой, и аппроксимация ее формы обычной фигурой равновесия (фигурой Роша) не вполне правомерна. Указания на наличие мощной дискообразной оболочки вокруг вторичной компоненты заставляют предполагать, что фигура вторичной компоненты (звезда плюс толстый диск), скорее всего, подобна сплюснутому сфероиду. Такая модель была применена Вильсоном (Wilson, 1974) для интерпретации кривых блеска системы β Lyr и нами

Таблица 38

Параметры RY Sct в модели Роша

Параметр	1-я звезда	2-я звезда
$q = M_2/M_1$	3,3	
i	82,1°	
$a_{\rm orb}$, см	$5{,}2 \cdot 10^{12}$	
M, $M_\odot$	10,7	35,0
μ	1,0	1,0
Ω	7,011	7,011
T, K	28000	22700
A	1,0	1,0
β	0,25	0,25
x	0,3	0,3
r (pole)	0,262	0,455
r (point)	0,378	0,617
r (side)	0,273	0,489
r (back)	0,305	0,514
$\overline{R}\,(R_\odot)$	21	36
$L/(L_1 + L_2)$	0,33	0,67
$L_{\rm bol}$, эрг/с	$9{,}5 \cdot 10^{38}$	$1{,}2 \cdot 10^{39}$
$L_{\rm bol}/L_{\rm Ed}$	0,38	0,29

Примечание: L_1, L_2 — монохроматические потоки излучения звезд в направлении наблюдателя в фразе $\varphi = 0{,}25$, $L_{\rm Ed}$ — критическая эддингтоновская светимость, $a_{\rm orb}$ — большая полуось орбиты, $\overline{R}$ — средний радиус звезды, r — характерные размеры полости Роша.

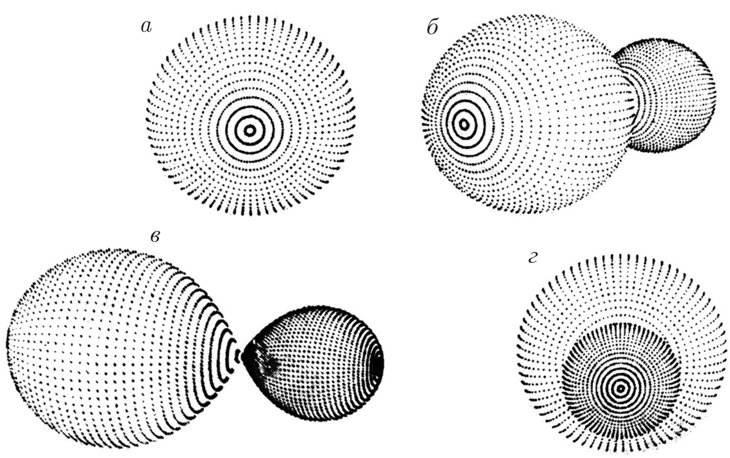


Рис. 105. Картина затмений в системе RY Sct в модели Роша. Здесь $q = M_2/M_1 = 3{,}3$, $\mu_1 = \mu_2 = 1$, $i = 82{,}1^\circ$. Фазы орбитального периода φ=0, 0,1, 0,3, 0,5 (*а*, *б*, *в*, *г* соответственно)

для исследования объекта SS 433 (Антохина и Черепащук, 1985, 1987). Здесь мы применяем аналогичную модель для анализа кривой блеска RY Sct.

В модели с геометрически толстым диском форма первой, более яркой компоненты совпадает с эквипотенциальной поверхностью в модели Роша, а поверхность второй дискообразной компоненты аппроксимируется сплюснутым сфероидом, экватор которого лежит в плоскости орбиты (рис. 107). Для вычисления теоретической монохроматической кривой блеска следует задать параметры q, μ_1, T_1, β_1, x_1, x_2, A_1, A_2 (они совпадают по смыслу с параметрами, задаваемыми для RY Sct ранее, в модели Роша), а также параметры толстого диска: экваториальную и полярную полуоси a и b, полярную температуру диска T_p, параметр β_2 в законе распределения температуры по диску (см. Антохина, 1988). Мы получили, что наилучшим образом наблюдениям соответствует значение $\beta_2 = 0{,}25$, что соответствует закону $T\,(r) = T_p\,(b/r)^{1/2}$ (Wilson, 1974). Данный закон распределения температуры по диску получен в предположении, что болометрический поток излучения с элемента поверхности $H \sim r^{-2}$. Опираясь на результаты решения обратной задачи в первой модели (модели Роша), мы зафиксировали значение $\mu_1 = 1$. Искомыми параметрами задачи были: полуоси сфероида a, b, полярная температура T_p, наклонение орбиты i и параметр β_2. В процессе решения задачи поиск по параметру a (экваториальный радиус) был ограничен положением внутренней точки Лагранжа, т. е. экваториальный радиус диска не мог превышать расстояние от центра второй компонента до точки Лагранжа. Полученные фотометрические элементы системы и абсолютные размеры компонент приведены в табл. 39.

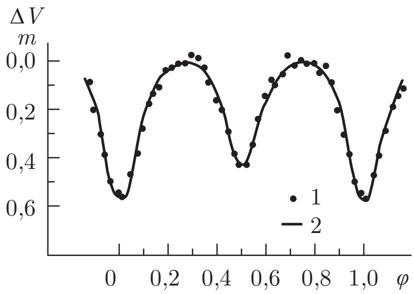


Рис. 106. Средняя кривая блеска RY Sct в фильтре V (1) и теоретическая кривая блеска в модели Роша (2). Здесь $q = M_2/M_1 = 3{,}3$, $\mu_1 = \mu_2 = 1$, $i = 82{,}1^\circ$, $T_1 = 28000$ K, $T_2 = 22700$ K, $\beta_1 = \beta_2 = 0{,}25$, $A_1 = A_2 = 1$, $x_1 = x_2 = 0{,}3$, $\lambda = 5500$ Å. В главном минимуме впереди вторая компонента

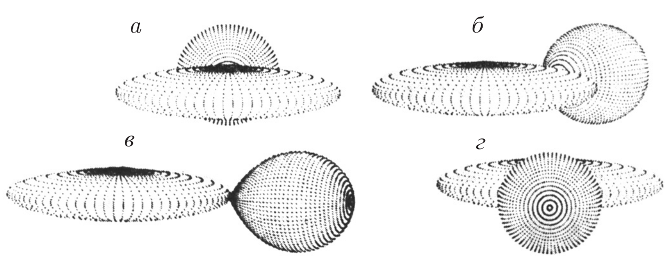


Рис. 107. Картина затмений в системе RY Sct в модели с геометрически толстым диском вокруг второй компоненты. Здесь $q = M_2/M_1 = 3{,}3$, $\mu_1 = 1$, $a = 0{,}600$, $b = 0{,}126$, $i = 84{,}6^\circ$. Фазы орбитального периода $\varphi = 0$, 0,1, 0,3, 0,5 (*а*, *б*, *в*, *г* соответственно)

Соответствующая теоретическая V-кривая блеска и модель системы RY Sct показаны на рис. 108, 109. В модели с диском удается неплохо описать наблюдения RY Sct, в том числе, и главный минимум. Величина минимальной невязки уменьшилась по сравнению с моделью Роша на 20 %, хотя по прежнему она сильно превышает критический уровень Фишера на значимости 1 %. По-видимому, большой вклад в невязку вносят точки, находящиеся на асимметричных ветвях вторичного

Таблица 39

Параметр	Звезда	Диск
$q = M_2/M_1$	3,3	
i	84,6°	
A	1,0	1,0
β	0,25	0,25
x	0,3	0,3
$L/(L_1 + L_2)$	0,62	0,38
L_{bol}, эрг/с	$9{,}5 \cdot 10^{38}$	$1{,}8 \cdot 10^{39}$
$L_{\mathrm{bol}}/L_{\mathrm{Ed}}$	0,38	0,43
μ	1,0	—
Ω	7,011	—
r (pole)	0,262	—
r (point)	0,378	—
r (side)	0,273	—
r (back)	0,305	—
T_1, K	28000	—
$\overline{R}$,$\mathrm{R}_\odot$	21	—
a	—	0,600
b	—	0,126
R_d, $R_\odot$	—	44,7
T_p, K	—	43000
T_{Eq}, K	—	19700
$\overline{T}_2$, K	—	26100

Примечание: $\overline{R}$ — средний радиус звезды, для звезды β — коэффициент гравитационного потемнения, для диска β — показатель в законе распределения температуры по поверхности, a, b — экваториальная и полярная полуоси диска, R_d — экваториальный радиус диска в $R_\odot$, T_{p}, T_{eq}, $\overline{T}_2$ — полярная, экваториальная и средняя температура диска соответственно.

минимума, а также точки вблизи максимумов. В наших моделях такие пекулярности кривой блеска описать не удается.

Полученное решение соответствует следующей модели (рис. 109): горячая (B0) менее массивная звезда заполняет свою полость Роша и истекает на вторую компоненту, которая окружена толстой дискообразной оболочкой. Диск имеет большой радиус и сильно сплюснут ($b/a \simeq 0{,}21$), его средняя температура $\overline{T}_2 \approx 26\,000$ K меньше эффективной температуры первой звезды. Основная часть болометрического потока от диска излучается с горячих ($T \sim 40\,000$ K) полярных областей, а так как наклонение орбиты i близко к 90°, наблюдатель видит сравнительно холодные ($\sim 20\,000$ K) экваториальные области. Предположим, что радиус второй (более массивной) звезды приблизительно равен полярному радиусу окружающей ее дискообразной

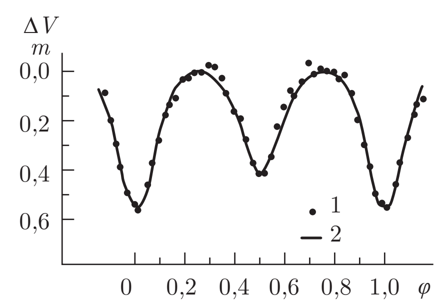


Рис. 108. Средняя кривая блеска системы RY Sct в фильтре V (1) и теоретическая кривая блеска системы в модели с диском (2). Здесь $q = M_2/M_1 = 3{,}3$, $\mu_1 = 1$, $a = 0{,}600$, $b = 0{,}126$, $T_1 = 28000$ K, $T_p = 43000$ K, $\beta_1 = 0{,}25$, параметр в законе распределения температуры по диску $\beta_2 = 0{,}25$, $A_1 = A_2 = 1$, $x_1 = x_2 = 0{,}3$, $\lambda = 5500$ Å. В главном минимуме впереди находится диск

оболочки, тогда получим $R_2 \simeq 10R_{\odot}$. Для звезды, находящейся вблизи главной последовательности, эта величина согласуется с оценкой массы $M_2 \simeq 35M_{\odot}$. Можно оценить температуру звезды в предположении, что ее болометрическая светимость приблизительно равна болометрической светимости диска. Заметим, что дополнительная светимость, приобретаемая звездой за счет аккреции вещества диска, составляет $\sim 1\,\%$ от общей светимости второй компоненты. Получаем температуру второй звезды $T_2 \simeq 48\,000$ К. Она близка к температуре полярной области диска, но несколько превосходит температуру нормальной звезды данной массы и радиуса. Это может быть следствием того, что радиус второй звезды в рамках нашей модели оценен весьма грубо.

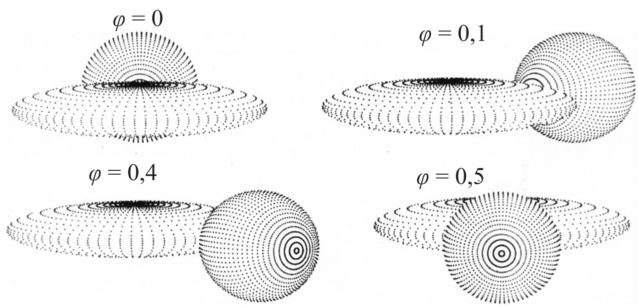


Рис. 109. Картина затмений в системе RY Sct в модели с геометрически толстым диском вокруг второй звезды (из работы Антохиной и Кумсиашвили, 1999)

Таким образом, основываясь на параметрах модели ТДС с толстым диском, можно предполагать, что система RY Sct по своим характеристикам близка к двойным типа WR+OB, если предположить, что менее массивная звезда (массой ~ 8–$10M_{\odot}$) заканчивает стадию первичного обмена масс в двойной системе и находится на стадии обнажения гелиевого ядра (о чем, в частности, свидетельствует усиленная линия излучения He II 4686 Å) и превращения в звезду типа Вольфа–Райе. Масса OB-спутника в этой системе составляет $\sim 35M_{\odot}$. В этом смысле система RY Sct является уникальной, находящейся на очень кратковременной и важной для понимания физики звезд стадии эволюции.

В работе Джурашевича и др. (Djurašević et al., 2005) в рамках модели ТДС с дискообразной оболочкой выполнено исследование DL Cyg — другой затменной системы типа W Ser.

15. Исследование затменных кривых блеска катаклизмических двойных систем в рамках модели аккреционного диска с «горячей линией»

Катаклизмические двойные принадлежат к типу ТДС, находящихся на поздней стадии эволюции. Информация об этом типе систем суммирована, например, в Каталоге поздних ТДС (Cherepashchuk et al., 1996). В системах данного типа «нормальная», сравнительно маломассивная оптическая звезда заполняет свою полость Роша и истекает через внутреннюю точку Лагранжа L_1 на вторую компоненту системы — белый карлик, вокруг которого формируется аккреционный диск с горячей областью на внешней границе, обусловленной взаимодействием газовой струи и диска. Вспышки излучения в катаклизмических двойных (наличие этих вспышек и определяет название систем данного типа) связаны с присутствием в системе аккреционного диска, в котором могут развиваться разного рода нестабильности.

Особенностью абсолютного большинства затменных орбитальных кривых блеска катаклизмических двойных систем является наличие в районе орбитальных фаз $\varphi \sim 0{,}8$ (т. е. перед входом в затмение) так называемого «орбитального горба». Для его объяснения Горбацким (1967) и Смаком (Smak, 1970) было высказано предположение, что «горб» представляет собой излучение от «горячего пятна», возникающего на внешней границе аккреционного диска, из-за столкновения струи вещества из точки L_1 с внешней границей диска. Модель «горячего пятна» как горячей области — ударной волны, лежащей на внешней границе диска, в течение многих лет повсеместно использовалась при интерпретации орбитальных кривых блеска катаклизмических двойных систем (см., например, монографию, Warner, 1995).

Трехмерные газодинамические расчеты течения газа в полуразделенных ТДС (Boyarchuk et al., 2002) показали, что струя и аккреционный диск представляют собой морфологически единое образование, и их взаимодействие носит безударный характер. В частности, для случая «холодного» аккреционного диска ($T \simeq 10^4$ К) в работах Бисикало и др. (2004) и Бисикало (Bisikalo, 2005) было показано, что область усиленного выделения энергии (так называемая «горячая линия») локализована вне диска и возникает в результате взаимодействия вращающегося околодискового гало и газовой струи, истекающей из оптической звезды через внутреннюю точку Лагранжа L_1 (см. рис. 110). В этом случае область ударной волны, возникающей из-за взаимодействия вещества струи и околодискового гало имеет весьма сложную форму (см. рис. 111), поскольку плотность вещества вращающегося околодискового гало по мере приближения к внешней границе «собственно диска» сильно возрастает. Те части околодискового гало, которые расположены сравнительно далеко от внешней границы «собственно диска», имеют сравнительно низкую плотность вещества, и ударная волна, возникающая из-за взаимодействия струи и гало, расположена вдоль края струи (а не на внешней границе «собственно диска», как это предполагалось в модели классического «горячего пятна»). По мере приближения к внешней границе «собственно диска» плотность вещества в гало возрастает, ударная волна искривляется и в конце концов вытягивается вдоль края «собственно диска». В случае «холодного» ($T \simeq 10^4$ К) диска (который наблюдается в «спокойном» состоянии между вспышками у катаклизмических двойных и рентгеновских новых) «собственно аккреционный диск» имеет квазикруговую форму, плотность вещества в нем значительно превышает плотность вещества в струе, диск имеет относительно малую толщину. Во внешних частях «собственно диска» в этом случае ($T \simeq 10^4$ К) формируются две спиральные ударные волны, обусловленные приливным гравитационным воздействием со стороны спутника, звезды-донора вещества. Внутренняя часть аккреционного диска (зона А — см. рис. 111), куда приливные возмущения со стороны спутника и эффекты взаимодействия струи и диска не доходят, соответствует невозмущенному аккреционному диску. Внутренняя часть аккреционного диска (зона А) радиусом 0,2–0,3 радиуса орбиты, где приливные и ударные возмущения слабы, может рассматриваться как слегка эллиптический внутренний диск в суммарном гравитационном поле двойной системы. Известно (см., например, Warner, 1995), что влияние спутника в двойной системе приводит к прецессии (повороту большой полуоси эллиптической орбиты) для орбит частиц, вращающихся вокруг второй компоненты системы (аккретора). Эта прецессия направлена против орбитального движения (ретроградная прецессия), и период прецессии увеличивается по мере приближения к аккретору. Как было показано Бисикало и др. (2004), прецессия с направлением противоположным орбитальному и со специфической зависимостью скорости прецессии от расстояния до аккретора приводит,

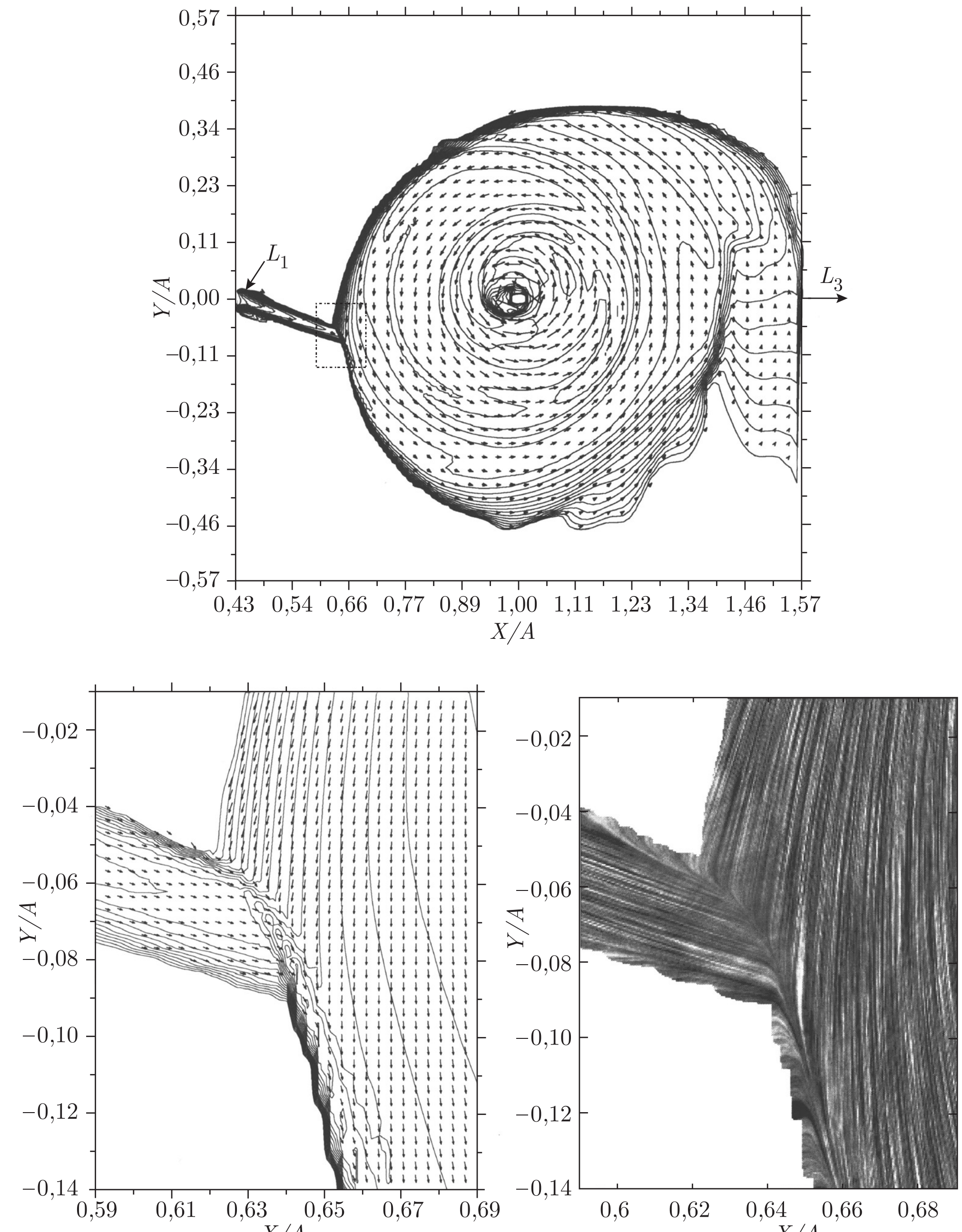


Рис. 110. Вверху: линии постоянной плотности и векторы скоростей в экваториальной плоскости XY двойной системы. Указана точка L_1 и газовая струя, формирующая аккреционный диск. Внизу: линии постоянной плотности и векторы скоростей в области взаимодействия струи и диска (слева). Справа показана визуализация поля скоростей в области взаимодействия струи и диска. Случай 3D-расчетов структуры «холодного» диска (из работы Bisikalo, 2005)

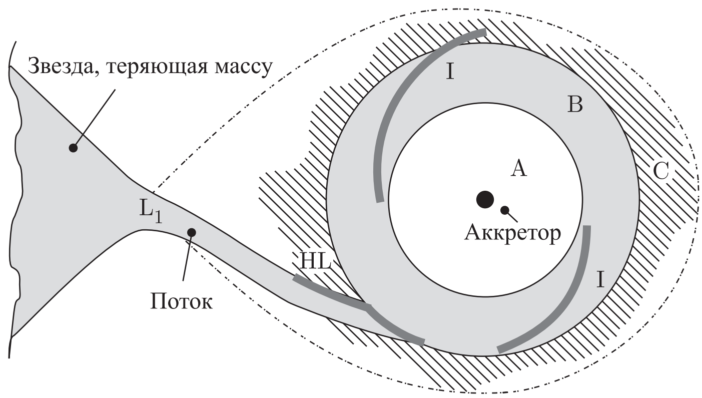


Рис. 111. Схематическое изображение основных особенностей и морфологии газовых структур в полуразделенной тесной двойной системе в случае газа низкой температуры. Здесь HL обозначает горячую линию (из работы Bisikalo, 2005)

в газодинамическом рассмотрении, к формированию спиральной волны плотности нового, «прецессионного» типа во внутренних частях аккреционного диска. Эта волна плотности формируется апоастрами линий тока. Появление такой волны приводит к увеличению радиальной компоненты потока массы на аккретор, благодаря увеличению как плотности вещества в волне, так и возрастанию его скорости. Возрастание радиального потока вещества после прохождения волны плотности приводит к росту скорости аккреции и формированию компактной зоны выделения гравитационной энергии на поверхности аккретора. Наличие такой яркой зоны проявляется в периодическом увеличении и уменьшении блеска в кривых блеска полуразделенных двойных систем. Эти особенности «прецессионной» спиральной волны позволяют рассмотреть новый механизм, объясняющий появление сверхвспышек (сверхгорбов) в катаклизмических двойных типа SU UMa (см., например, Bisikalo, 2005). Этот механизм объясняет как усиленное выделение энергии во время сверхвспышки, так и все наблюдательные проявления, связанные с ней. Модель хорошо воспроизводит формирование сверхгорбов на кривых блеска систем типа SU UMa, а также то, что период сверхгорбов на (3–7) % длиннее, чем орбитальный период. Модель также объясняет то, что сверхгорбы наблюдаются у систем типа SU UMa практически независимо от наклонения орбиты двойной системы. Представляет большой интерес сравнение результатов новых трехмерных газодинамических расчетов (Boyarchuk et al., 2002) с наблюдениями взаимодействующих тесных двойных систем.

В работах Хрузиной (2000, 2001) был развит метод синтеза затменных кривых блеска катаклизмических двойных систем в рамках модели аккреционного диска с «горячей линией», ориентированной вдоль газовой струи и расположенной вне диска. Впервые модель ТДС, в которой область взаимодействия струи и диска лежит вне диска, применялась для интерпретации взаимодействующих двойных систем в работах (Хрузина и Черепащук, 1994; Бисикало и др., 1998). В работе Хрузиной (2001) использовалась следующая модель взаимодействующей двойной системы.

1. Звезда-донор (вторичная компонента) полностью заполняет свою полость Роша, т. е. учитывается приливная и вращательная деформация.

2. Поверхность звезды-донора разбивается на 648 элементарных площадок, для каждой из которых вычисляется интенсивность излучения в направлении наблюдателя с учетом потемнения к краю, гравитационного потемнения и эффекта прогрева излучением белого карлика. Для каждого значения орбитальной фазы рассматриваются

лишь площадки, обращенные к наблюдателю, причем учитываются их затмения телами всех компонент, в том числе, телом диска и звездой-донором.

3. Белый карлик (первичная компонента) имеет сферическую форму и в общем случае расположен в фокусе эллиптического аккреционного диска. Эксцентриситет диска, т. е. его отклонение от круговой формы, является свободным параметром задачи, который определяется из наблюдений. Поэтому модель применима не только для «холодного» аккреционного диска ($T \simeq 10^4$ K), но и для «горячего» диска ($T \simeq 10^5$–10^6 K, см. Бисикало и др., 2003, 2004, Bisikalo, 2005), который может формироваться во время вспышек в катаклизмических двойных. Поверхность белого карлика также разбивается на 648 элементарных площадок. Принято, что эффективная температура площадок одинакова для всей поверхности белого карлика. При вычислении интенсивности излучения в направлении наблюдателя учитывается эффект потемнения к краю. Площадки на белом карлике могут затмеваться телом самой звезды, аккреционным диском, звездой-донором и горячей линией.

4. Эллиптический аккреционный диск описывается фигурой, определяемой следующим образом (Хрузина, 2001):

а) боковая (внешняя) поверхность диска задается эллипсоидом с полуосями a, b и c, полуоси a и b лежат в плоскости орбиты, причем $b^2 = a^2(1 - e^2)$, полуось c перпендикулярна плоскости орбиты;

б) в одном из фокусов этого эллипсоида расположен центр белого карлика;

в) внутренние поверхности диска получаются в результате вычитания из эллипсоида частей, попадающих во «внутренние» области двух параболоидов, заданных параметром A_p.

Оси параболоидов, определяющих внутреннюю поверхность диска, перпендикулярны плоскости орбиты. Значение параметра A_p изменяется в зависимости от угла поворота ψ радиуса-вектора, проведенного из вершины параболоида к краю диска, вокруг оси параболоида. В периастре диска $\psi = 0$, в апоастре, соответственно, $\psi = \pi$. Коэффициент $A_p(\psi)$ имеет вид:

$$A_p\left(\psi\right) = \frac{Ab^2}{a^2\left(1 + e\cos\psi\right)} = \frac{A\left(1 - e^2\right)}{1 + e\cos\psi},$$

где A — константа. При $e = 0$ она совпадает с постоянной параболоида A_{par} (Хрузина, 2000), описывающего форму внутренних поверхностей круглого диска: $A_p(\psi) = A = \text{const}$. В случае эллиптического диска для величины $A_p(\psi)$ в его периастре ($\psi = 0$) получаем $A_p(\psi) = A(1 - e)$, в апоастре ($\psi = \pi$) $A_p(\psi) = A(1 + e)$. Вершины параболоидов смещены относительно плоскости орбиты ТДС на величину $Z_0 = \pm\dfrac{R_w^2}{A^2\left(1 - e\right)^2}$: для верхнего параболоида — ниже плоскости орбиты, для нижнего, соответственно, выше плоскости орбиты. При таком выборе параметра Z_0 параболоиды при $\psi = 0$ (в периастре диска) пересекают плоскость орбиты на расстоянии R_w от центра белого карлика, где R_w — радиус белого карлика. Принято, что внутреннюю поверхность диска образует та часть поверхности параболоида, которая имеет неотрицательное значение координаты Z. Линии пересечения эллипсоида, описывающего боковую часть диска, и параболоидов, описывающих его внутренние части, определяют верхнюю и нижнюю границы диска. Они расположены на расстоянии h от плоскости орбиты:

$$h = \pm c\left(\sqrt{\frac{c^2A^2}{4b^2} - \frac{1}{b^2}\left[\frac{R_w^2}{\left(1 - e\right)^2} - a^2\right]} - \frac{cA^2}{2b^2}\right).$$

Ориентация большой полуоси диска задается углом α_e между направлением из его центра на периастр и прямой, соединяющей центры компонент ТДС. Величина α_e меняется от 0 до 2π и возрастает в направлении орбитального движения компонент. Подробное описание процедуры моделирования эллиптического аккреционного диска дано в работе Хрузиной (2001).

При вычислении температуры элементарной площадки на поверхности диска учитывалась ее зависимость от расстояния r между центром рассматриваемой площадки и поверхностью белого карлика. Вблизи поверхности белого карлика температура площадок на диске полагалась равной температуре T_{bw} поверхностного слоя, расположенного в районе экватора звезды, причем $T_{bw} > T_w$. В работах Хрузиной (2000, 2001) температура площадок на диске определялась температурой белого карлика T_w. Однако наблюдения показывают, что во многих катаклизмических двойных температура диска во внутренних областях значительно превышает T_w. Кроме того, наблюдаемый поток излучения от белого карлика относительно невелик и не в состоянии обеспечить наблюдаемый прогрев вторичной компоненты. Нагрев диска связан, главным образом, с выделением гравитационной энергии вещества, двигающегося от внешних частей диска к поверхности белого карлика. Обычно полагают, что температура поверхности диска T_g меняется с расстоянием r от центра белого карлика по следующему закону:

$$T_g = T_{bw}\left(\frac{R_w}{r}\right)^{\beta_g}.$$

Для параметра β_g обычно принимают значение $\beta_g = 3/4$ (Shakura and Sunyaev, 1973), предполагая, что каждая точка поверхности диска излучает как абсолютно черное тело. На практике, однако, оказывается, что распределение температуры вдоль радиуса диска более плоское, чем то, которое соответствует $\beta_g = 3/4$, особенно во время вспышек. Кроме того, температура площадки на диске может быть увеличена на несколько процентов за счет эффекта ее прогрева излучением центрального белого карлика и вторичной компоненты.

5. «Горячая линия», расположенная вдоль газовой струи, описывается частью эллипсоида с полуосями a_v, b_v, c_v, вытянутого в направлении внутренней точки Лагранжа L_1 (см. рис. 112). Боковая поверхность этого эллипсоида совпадает с касательной к эллиптическому диску при любых его ориентациях, а центр расположен в плоскости орбиты внутри внешних частей диска. Схематическое изображение основных частей ТДС, используемых в фотометрической модели, для наклонения орбиты $i = 0$ (вид «сверху») представлено на рис. 112. Стрелка на этом рисунке указывает направление движения газа в диске и в дисковом гало. Подробное описание процедуры построения фигуры «горячей линии» и алгоритма синтеза кривой блеска ТДС в рамках такой модели приведено в работе Хрузиной (2001).

Высвечивание энергии ударной волны может происходить на поверхности «горячей линии» как на фронте ударной волны, т. е. со стороны набегающего потока газа (будем называть эту сторону «наветренной»), так и с противоположной («подветренной») стороны, в зависимости от физических параметров и оптической толщи взаимодействующих потоков газа (скорости, плотности и т. п.). На рис. 112 условная граница между «наветренной» и «подветренной» сторонами «горячей линии» на поверхности усеченного эллипсоида показана жирной прямой линией. В нашей модели принято, что элементарные площадки на поверхности «горячей линии» излучают как абсолютно черное тело. Это предположение справедливо лишь в случае, когда оптическая толща «горячей линии» больше единицы. Температура i-й элементарной площадки на поверхности «горячей линии» вычисляется раздельно для каждой из ее

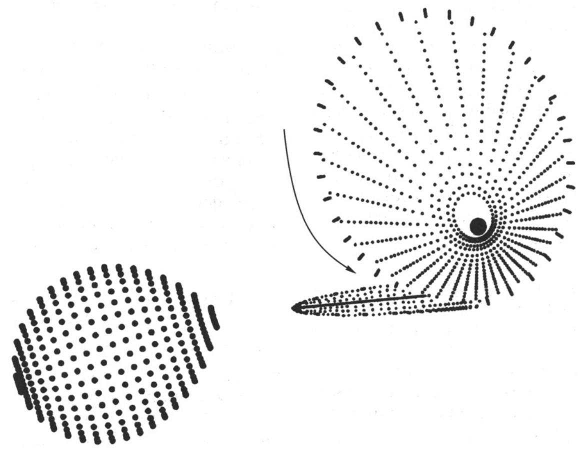


Рис. 112. Схематическое изображение основных элементов ТДС, используемых в фотометрической модели, в орбитальной фазе $\varphi = 0{,}8$ при $i = 0^\circ$ (вид на систему сверху). Стрелка указывает направление движения газа в диске, жирной линией обозначена условная граница между «наветренной» и «подветренной» сторонами «горячей линии».

сторон согласно принятой в модели зависимости:

$$T_i\,(y) = T_{\min} + T_{\max}\cos\left(\frac{\pi}{2}\Delta y_i\right),$$

где y — координата вдоль большой оси эллипсоида — «горячей линии», а

$$\Delta y_i = \frac{y_i - y_{\max}}{y_{\min} - y_{\max}}.$$

При принятом законе изменения температуры в точке с координатой $y_{\max}$ температура имеет максимальное приращение ($T_i(y) = T_{\min} + T_{\max}$), а в точке с координатой $y_{\min}$ приращение температуры равно нулю ($T_i(y) = T_{\min}$). В качестве $T_{\min}$ принимается та температура, которую имело бы вещество на расстоянии r от центра диска в соответствии с законом распределения температуры по нему. В случае близких значений параметров $y_{\min}$ и $y_{\max}$ реализуется ситуация, когда высвечивание ударной волны происходит в небольшой области, подобной классическому «горячему пятну», но расположенному не на боковой поверхности диска, а на части поверхности струи, остальные части которой остаются сравнительно холодными ($T \simeq 1500$–2000 К). На рис. 113 показано распределение температуры площадок вдоль большой оси эллипсоида — «горячей линии» с «наветренной» стороны (кривая *1*) и с «подветренной» стороны (кривая *2*). Буква D указывает y-координату точки пересечения эллипсоидом (горячей линией) боковой поверхности аккреционного диска, буква P — y-координату полюса этого эллипсоида. Максимальная температура горячей линии на «подветренной» стороне смещена в точку с y-координатой $y^{(2)}_{\max} = y^{(1)}_{\max} - dy$. Величина смещения dy — свободный параметр задачи. Несмотря на то, что температура вещества с «наветренной» стороны «горячей линии» выше, чем с ее «подветренной» стороны, площадь излучающей области здесь в два раза меньше. Кроме того, самые горячие области на поверхности «горячей линии» с «наветренной» стороны могут быть скрыты от наблюдателя из-за их затмения боковой поверхностью диска или телом звезды-донора.

6. Искомыми параметрами задачи являются: отношение масс компонент $q = M_w/M_2$ (M_w и M_2 — массы белого карлика и звезды-донора), i — наклонение орбиты системы, T_2 — эффективная температура звезды-донора (без учета ее прогрева излучением белого карлика), R_w и T_w — радиус и эффективная температура белого карлика, T_{bw} — температура поверхности слоя на экваторе белого карлика, где происходит аккреция вещества; параметры, описывающие размеры, фигуру и ориентацию эллиптического диска — e, a, A, α_e, а также параметры, описывающие фигуру «горячей линии» (a_v, b_v, c_v), параметры, характеризующие распределение температуры по ее поверхности, $y_{\min}$ и dy и значения температур $T_{\max}$ как с «наветренной», так и с «подветренной» стороны. Таким образом, в общем случае количество неизвестных параметров задачи достигает 17. Поэтому данная методика интерпретации может применяться лишь для тех двойных систем, в которых из независимых данных часть параметров можно считать известными, например, параметры q, i, T_2, T_w, R_w, a, A.

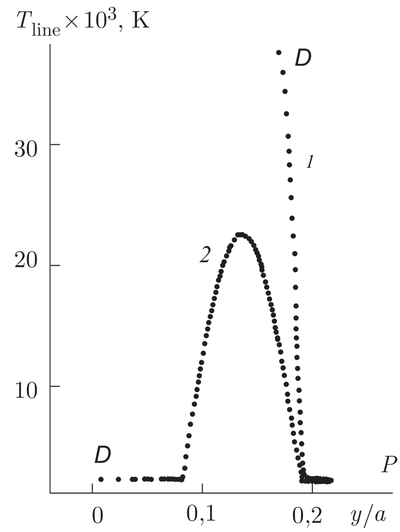


Рис. 113. Распределение температуры вдоль большой оси у эллипсоида, описывающего «горячую линию» с «наветренной» (кривая *1*) и с «подветренной» стороны (кривая *2*). Буква D указывает y-координату точки касания «горячей линией» боковой поверхности диска, буква P — координату полюса эллипсоида, описывающего «горячую линию»

При сравнении наблюдаемой и теоретической кривых блеска использовалась невязка

$$\Delta_N = \sum_{j=1}^{N} \frac{\left(m_j^{\rm obs} - m_j^{\rm theor}\right)^2}{\sigma_j^2},$$

где $m_j^{\rm obs}$ и $m_j^{\rm theor}$ — наблюдаемые и теоретические звездные величины в j-й орбитальной фазе, σ_j^2 — дисперсия наблюдений в j-й точке, N — число точек на кривой блеска. При точных значениях параметров Δ_N распределена по закону $\chi^2_{N,\alpha}$. Здесь α — уровень значимости (число ошибок первого рода, т. е. вероятность отбросить верную модель). Детальное описание метода синтеза, метода решения обратной задачи и результаты некоторых модельных расчетов приведены в работе Хрузиной (2001).

Для решения обратной задачи нахождения параметров модели из кривой блеска ТДС используется метод Нелдера–Мида (Химмельблау, 1975) минимизации функционала невязки. Принято считать решением задачи или доверительной областью для параметров такой их набор, при котором полученная в результате минимизации невязка оказывается ниже критического значения $\chi^2_{N,\alpha}$, где α — уровень значимости, N — количество точек на кривой блеска.

С помощью описанного алгоритма была выполнена интерпретация затменных кривых блеска ряда катаклизмических двойных систем на стадии между вспышками («спокойное» состояние), см. работы (Хрузина и др., 2001, 2003а, 2003б). Было показано, что модель «горячей линии» для области взаимодействия струи и диска в катаклизмических двойных системах значительно лучше согласуется с наблюдательными данными, чем модель классического горячего пятна.

Приведем результаты интерпретации затменных кривых блеска для двух типичных катаклизмических двойных: IP Peg и U Gem. Система IP Peg является карликовой новой. Карликовые новые показывают вспышки оптического излучения длительностью в несколько дней, во время которых светимость системы увеличивается на 3^m–5^m. Вспышки могут повторяться как через несколько недель, так и через несколько лет в зависимости от типа системы. Система IP Peg является затменной карликовой новой с орбитальным периодом $p \simeq 3{,}8$ часа. В системе наблюдаются острые и глубокие затмения, а также выраженный орбитальный горб на кривой блеска, предшествующий затмению и отражающий вклад излучения области взаимодействия между струей и диском, в центре которого находится аккрецирующий белый карлик (Липовецкий и Степанян, 1981, Goranskij et al., 1985). Результаты фотометрических наблюдений IP Peg приведены в работах (Szkody and Mateo, 1986, Wood and Crawford, 1986, Wood et al., 1989, Wolf et al., 1993, Bobinger et al., 1997). Спектральные наблюдения системы выполнены в работах (Marsh, 1988, Hessman, 1989, Martin et al., 1989, Marsh and Horne, 1990, Steeghs, 1996, Steeghs et al., 1997). Вторичная звезда проявляет себя эллипсоидальной переменностью, хорошо видимой в ИК-области спектра. По K-кривой блеска IP Peg Шкоди и Матео (Szkody and Mateo, 1986) получили оценки для наклонения орбиты системы ($i \simeq 75^\circ$) и расстояния до нее ($d \simeq 130$–142 пк). Спектральный класс вторичной компоненты, оцененный по показателям цвета, M4V. Параметры компонент системы, найденные из спектральных данных (Martin et al., 1989, Marsh, 1988): $q = M_w/M_2 = 1{,}70 \pm 0{,}11$, $i > 68^\circ$, $K_2 = (298 \pm 8)$ км/с, $M_w = (1{,}15 \pm 0{,}10)M_\odot$, $M_2 = (0{,}67 \pm 0{,}08)M_\odot$, $R_2 = (0{,}502 \pm 0{,}024)R_\odot$, где M_w — масса белого карлика, M_2, R_2 — масса и радиус красного карлика M4V.

Для проверки адекватности модели «горячей линии» в работе Хрузиной и др. (2001) была использована кривая блеска системы IP Peg в фильтре V, полученная в рамках международной кампании по наблюдениям карликовых новых (Harlaftis et al., 1994). Кривая объединяет наблюдения трех ночей за период с 6 по 26 декабря 1988 г., относящихся к спокойному состоянию системы (через 5 дней после последнего наблюдения зафиксирована очередная вспышка системы). Средняя кривая блеска представлена 26 нормальными точками (см. рис. 114). При решении задачи диапазон изменений некоторых параметров (q, i, R_w, T_w, T_2, a, R_2, x_2, β_2) был ограничен на основе независимых наблюдательных данных. Результаты решения обратной задачи интерпретации затменной кривой блеска IP Peg представлены в работе Хрузиной и др. (2001). На рис. 114 приведены наблюдаемые и оптимальные теоретические кривые блеска IP Peg, полученные в модели «горячей линии» (слева) и горячего пятна (справа). Также внизу рис. 114 приведены вклады в суммарный поток излучения различных компонент системы: белого карлика, звезды-донора M4V, диска и области энерговыделения — горячей линии или горячего пятна. Видно, что модель «горячей линии» позволяет значительно лучше описать наблюдаемую кривую блеска, чем модель горячего пятна. В частности, форма широкого горба перед входом в затмение описывается гораздо лучше в модели «горячей линии». Это связано с тем, что «горячая линия» является протяженным образованием, блеск которого «плавно» меняется с фазой орбитального периода. В модели плоского горячего пятна, лежащего на внешней границе диска, блеск меняется сравнительно быстро ввиду того, что площадь проекции горячего пятна на картинную плоскость быстро меняется с фазой орбитального периода. Поэтому теоретическая ширина горба в модели горячего пятна значительно меньше, чем наблюдаемая. Минимальная невязка χ^2 между наблюдаемой и теоретической кривыми блеска в модели горячего пятна составляет 1199 и сильно превышает критическое значение для уровня значимости $\alpha = 0{,}001$ и числа степеней свободы $N = 26$ $\chi^2_{26,0,001} = 54{,}1$. В модели горячей линии минимальное значение χ^2 составляет около 200. Хотя это значение также

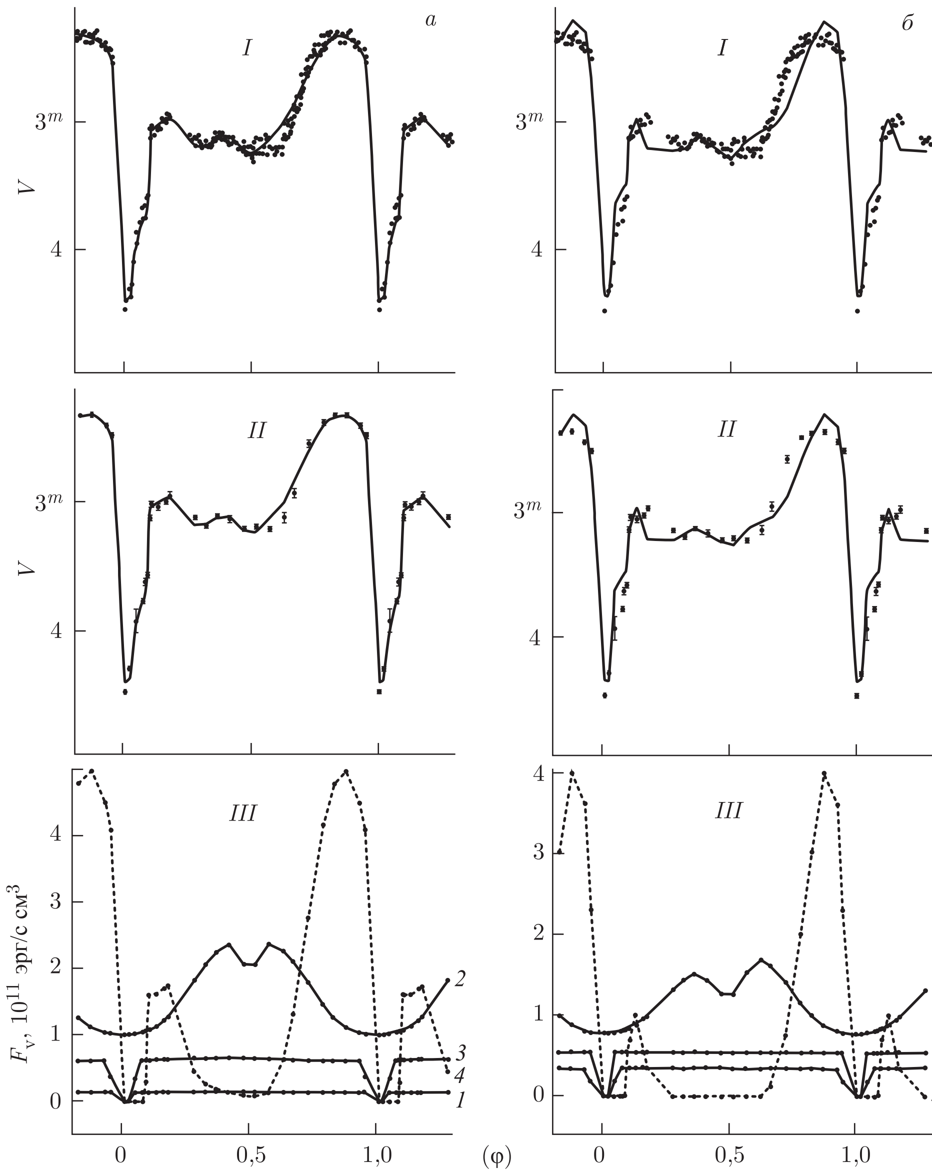


Рис. 114. Наблюдения системы IP Peg (*I*) и средняя кривая (*II*) в фильтре V в неактивном состоянии. Сплошными линиями показаны теоретические кривые блеска, синтезированные с оптимальными параметрами в рамках модели «горячей линии» (*а*) и в классической модели горячего пятна (*б*). На графиках (*III*) приведены вклады излучения компонент системы: белого карлика (*1*), звезды-донора (*2*), диска (*3*), и области энерговыделения (*4*) в «горячей линии» или горячем пятне

значительно превышает критическое значение $\chi^2_{26,0,001} = 54{,}1$, можно заключить, что модель «горячей линии» для системы IP Peg предпочтительнее, чем модель горячего пятна. Хотя следует иметь в виду, что обе рассмотренные нами модели («горячей линии» и «горячего пятна») отвергаются на очень низком уровне значимости

$\alpha = 0{,}001$ (отвергая модель, мы ошибаемся, т. е. отвергаем правильную модель, лишь в одном случае из тысячи, а в 999 случаях из 1000, отвергая модель, мы правы). Это связано со сложностью физических процессов, происходящих в системе IP Peg (газовые потоки, нестационарные процессы и т. п.), которые не учитываются в нашей идеализированной модели «горячей линии». Кроме того, в нашем случае используется модель «горячей линии», которая описывает свойства области взаимодействия струи и диска в рамках «горячей» модели диска ($T = 10^5$–10^6 К), в то время как наша интерпретация кривой блеска IP Peg приводит к выводу о том, что аккреционный диск вокруг белого карлика является «холодным» (температура его внутренних частей не превышает 10 000–15 000 К). Анализ распределения температуры по поверхности «горячей линии» показывает, что области энерговыделения на поверхности «линии» как с «наветренной», так и с «подветренной» стороны весьма компактны. Температура «горячей линии» в зоне энерговыделения в области ударной волны повышается до $\sim$ 24 100 К с «наветренной» стороны (стороны набегающего потока газа); максимальная температура с «подветренной» стороны достигает $\sim$ 23 400 К. Средние значения температуры «горячей линии» составляют соответственно $\sim$ 17 150 К и $\sim$ 10 900 К. Следует отметить, что эти значения температур получены в рамках модели излучения абсолютно черного тела, что приемлемо лишь в том случае, если оптическая толща «горячей линии» вблизи внешней границы аккреционного диска больше единицы.

В работе Хрузиной и др. (2003б) была выполнена интерпретация орбитальных кривых блеска системы U Gem, типичной катаклизмической двойной системы — карликовой новой. В отличие от системы IP Peg, где наблюдается так называемое двойное затмение (затмение спутником — красным карликом области взаимодействия струи и диска и затмение центрального белого карлика), в системе U Gem затмение центрального белого карлика не наблюдается, а имеет место лишь затмение части аккреционного диска и области взаимодействия струи и диска. Поскольку в системе U Gem затмение области взаимодействия струи и диска наблюдается в «чистом» виде, можно ожидать, что в данном случае применимость моделей «горячей линии» и горячего пятна будет надежно проверена. Параметры системы U Gem хорошо изучены (см., например, Каталог поздних ТДС (Cherepashchuk et, al, 1996)). Орбитальный период составляет $P \sim 0{,}18^{\mathrm{d}}$, спектральный класс нормальной звезды-донора, заполняющей свою полость Роша, M5V, расстояние до системы $\sim$ 76 пк.

Распределение энергии в спектре системы U Gem в ближнем ультрафиолете в спокойном состоянии соответствует температуре 26 000–30 000 К (Wu and Panek, 1982, Panek and Holm, 1984). Если этот поток приходит от белого карлика, то его абсолютная звездная величина составляет $10{,}7^m$, что соответствует нормальному белому карлику. Перед вспышкой или сразу вслед за падением оптического потока после вспышки наблюдаемая температура белого карлика повышается до $\sim$ 35 000–38 000 К (Sion et al., 1994, Cheng et al., 1997). В двухкомпонентной модели (Cheng et al., 1997, Long et al., 1993) ультрафиолетовый спектр наилучшим образом описывается совокупностью излучения белого карлика с температурой 29 100–31 400 К и пограничного слоя с температурой 54 000–58 000 К, причем источник излучения горячей компоненты занимает $\sim$ 15–18 % видимой поверхности белого карлика. При указанной температуре вклад излучения белого карлика в оптическом диапазоне в полную светимость системы составляет $\sim$ 18 %. Рентгеновское излучение в спокойном состоянии от системы U Gem не наблюдается (Mason et al., 1978, Swank et al., 1978). Вспышечная оптическая активность системы U Gem была детально изучена Кшеминским (Krzeminski, 1962) и Смаком (Smak, 1984). Во время оптической вспышки у системы U Gem наблюдается заметное переменное рентгеновское излучение в диапазоне 0,15–5 кэВ (Mason et al., 1978) и более слабый поток в диапазоне 2–10 кэВ (Swank et al., 1978). Наиболее заметной особенностью орбитальной оптической кривой блеска U Gem в спокойном состоянии системы является большой горб высотой до $0{,}5^m$ и длительностью до половины орбитального периода в интервале фаз 0,6–0,1. На его фоне наблюдается затмение продолжительностью $\sim 0{,}05$ от орбитального периода. Горб примерно симметричен относительно своего максимума, расположенного на фазе 0,85, на спадающей ветви горба наблюдается затмение. Затмение, по-видимому, полное, имеет почти плоское протяженное дно, вход в затмение длится около 100 с, выход — около 50 с, что говорит о достаточно больших размерах затмеваемой области. Вторичное затмение не обнаружено. Наблюдатели подчеркивают, что затмения нерегулярны по ширине, глубине ($\sim 0{,}1^m$) и орбитальной фазе, что говорит в пользу затмения не звезды, а области взаимодействия струи и диска. Во время полной фазы затмения излучение системы определяется в основном излучением в эмиссионных линиях от незатмеваемой части диска. Вклад как M-звезды, так и белого карлика в этих фазах относительно мал. Поскольку затмение связано не с перекрытием дисков звезд, а с покрытием горячей области между компонентами, смещенной относительно линии центров компонент, наблюдается смещение $\Delta\varphi$ между фотометрическим минимумом и моментом спектроскопического соединения компонент. Величина этого смещения варьируется по данным разных авторов от $\Delta\varphi = 0{,}025P$ до $\Delta\varphi = 0{,}050P$, где P — орбитальный период системы.

Для анализа использовались орбитальные кривые блеска U Gem, полученные Кшеминским (Krzeminski, 1962) и Уорнером и Назером (Warner and Nather, 1971). Кривая блеска в фильтре V была получена Кшеминским 1 января 1963 г. во время продолжительных UBV-наблюдений системы, выполненных в период с декабря 1961 г. по январь 1963 г. Средняя V-кривая блеска U Gem, использованная для определения параметров, приведена на рис. 115 *а*, *б*, а также на рис. 116 *б*. Уорнер и Назер (Warner and Nather, 1971) получили орбитальные кривые блеска U Gem в белом свете ($\lambda \simeq 5000$ Å) с высоким временным разрешением (~ 2 с). Средние кривые блеска приведены на рис. 115 *в*, *г*. Были рассмотрены три оптические орбитальные кривые блеска U Gem: кривая блеска Кшеминского и две кривые блеска Уорнера и Назера. Из-за отсутствия в системе взаимных затмений компонент орбитальная оптическая кривая блеска практически не содержит информации о таких параметрах системы, как q, i, T_{ef} ($q = M_1/M_2$ — отношение массы белого карлика к массе красного карлика, T_{ef} — эффективная температура красного карлика). Поэтому эти параметры были зафиксированы на основе данных спектроскопических наблюдений системы: $q = 1{,}94$–$2{,}24$, $i \simeq 64°$–$70°$, $T_{\text{ef}} = 2900$–3200 K. В работе Хрузиной и др. (2003б) приведены параметры системы U Gem, полученные с использованием модели «горячей линии» и модели горячего пятна. На рис. 115 приведены наблюдаемые и оптимальные теоретические орбитальные кривые блеска системы U Gem, а также вклады различных компонент системы в суммарный наблюдаемый поток. Приведенные здесь теоретические кривые соответствуют модели горячего пятна. В этой модели искомыми являются 5 параметров: параметры круглого диска r_d, T_d и параметры горячего пятна: f_{sp}, φ_{sp} и r_{sp} (подробности см. в работах Хрузиной, 2000, 2001). На рис. 115 *а* наглядно демонстрируется невозможность описать оптическую орбитальную кривую блеска системы U Gem в рамках модели горячего пятна. Необходимость описания затмения горячего пятна в орбитальной фазе $\varphi = 0{,}04$ в данной модели заставляет компьютерную программу искать компромисс между глубиной затмения на фазе $\varphi \simeq 0$ и отсутствием затмения на фазе $\varphi \simeq 0{,}4$–$0{,}5$. Поскольку горячее пятно расположено вдоль внешнего края диска, оно должно затмеваться как диском (в фазах 0,4–0,5), так и звездой-донором (в фазе $\varphi = 0{,}04$). При этом, поскольку в обоих случаях затмение полное, теоретический блеск системы в фазах $\varphi = 0{,}04$ и $\varphi = 0{,}4$–$0{,}5$ должен быть почти одинаков. Между тем, наблюдаемая кривая блеска

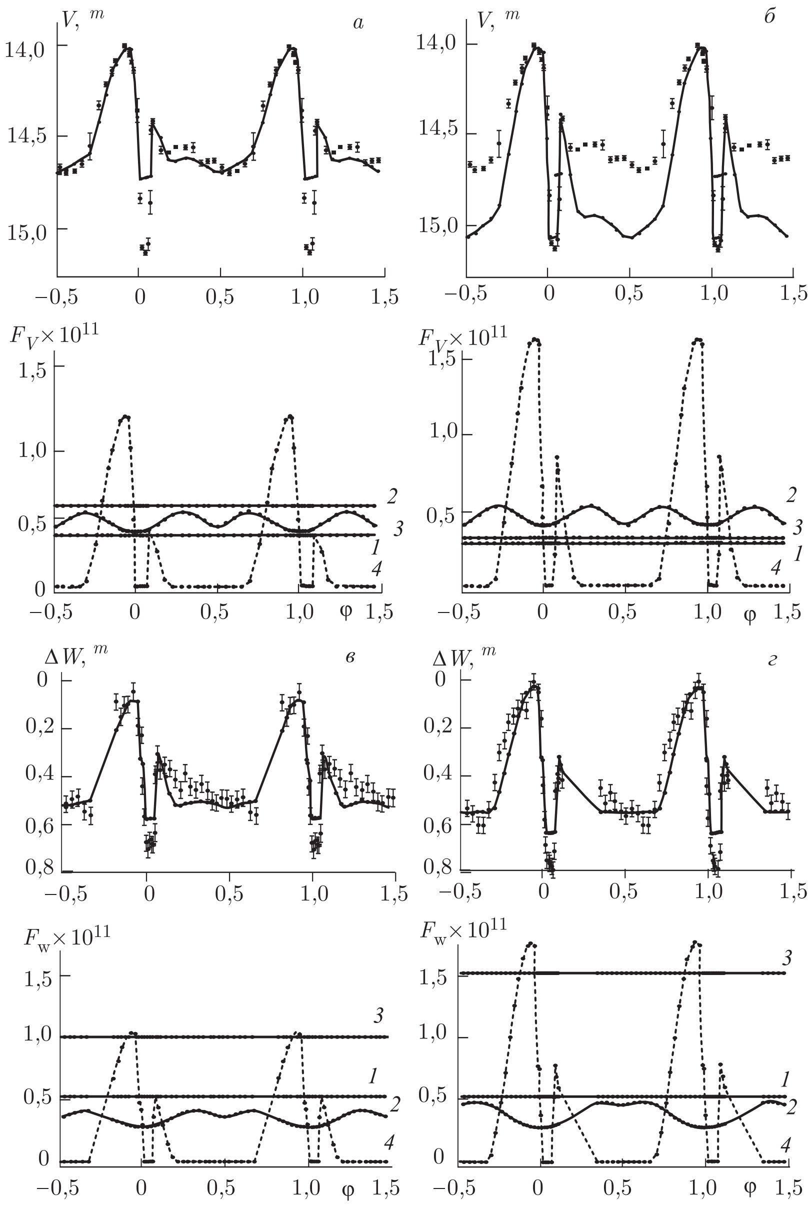


Рис. 115. Наблюдаемые орбитальные кривые блеска U Gem в спокойном состоянии, согласно работам (Krzeminski, 1962, Warner and Nather, 1971) и результаты расчетов в рамках модели горячего пятна. Вверху — наблюдения Кшеминского (*а*, *б*) и наблюдения Уорнера и Назера (*в*, *г*). Сплошными линиями показаны теоретические кривые блеска, вычисленные с оптимальными параметрами. На графике «*б*» сплошной линией обозначена теоретическая кривая блеска, вычисленная с параметрами $r_d/a_0 = 0{,}3842$, $r_{sp}/a_0 = 0{,}073$, $\varphi_{\rm sp} = 0{,}935$, $T_{\rm sp} = 11595\,$K, $T_b = 21900\,$K, $T_1 = 21\,883\,$K, остальные параметры те же, что и для теоретической кривой на графике «*а*». Внизу приведены вклады компонент в суммарный блеск системы: *1* — компактный объект, *2* — красный карлик, *3* — круглый аккреционный диск, *4* — горячее пятно

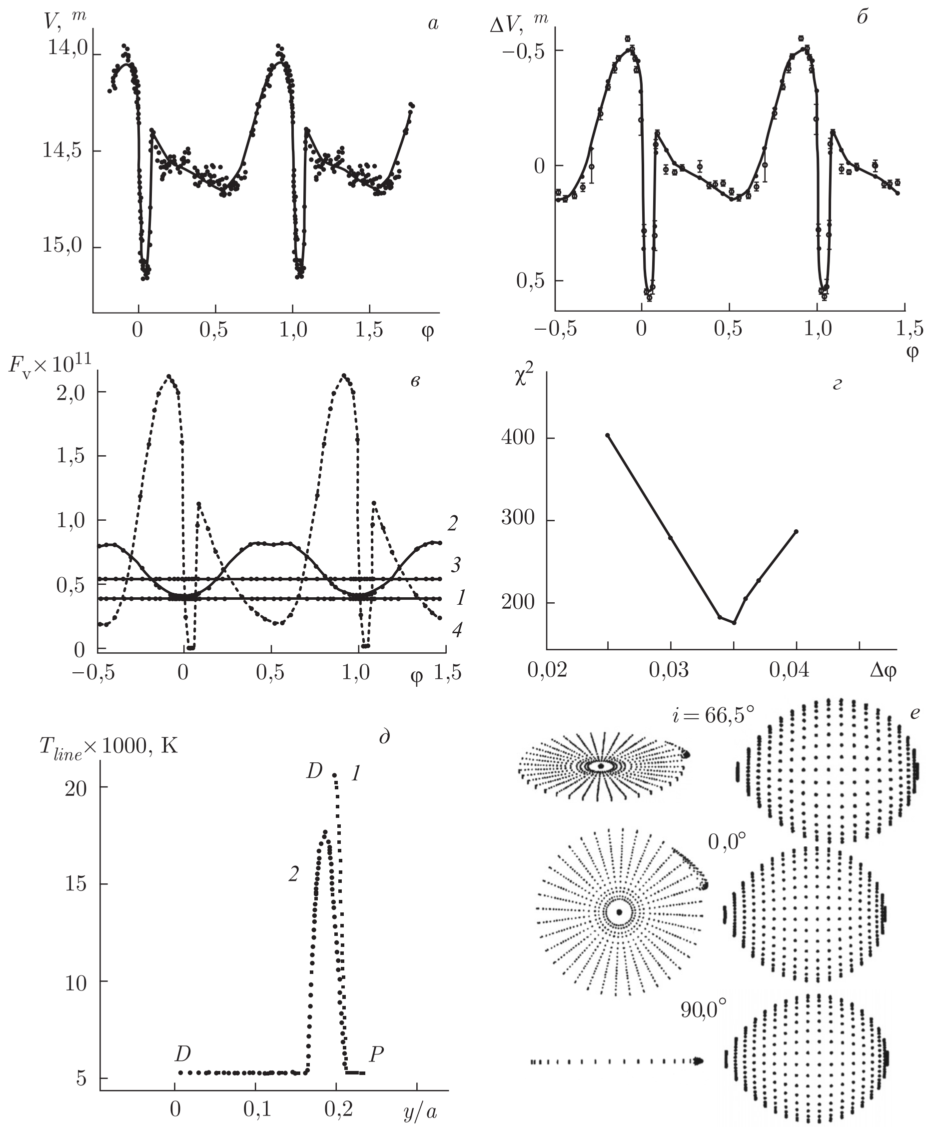


Рис. 116. Результаты расчетов для кривой блеска U Gem в спокойном состоянии в фильтре V, полученной Кшеминским, в рамках модели горячей линии. Здесь *а*, *б* — наблюдаемая (*а*, точки), средняя (*б*, точки) и теоретическая кривая блеска, синтезированная с оптимальными параметрами модели. Показаны вклады компонент в суммарный блеск системы (*в*): *1* — компактный объект, *2* — красный карлик, *3* — эллиптический аккреционный диск, *4* — горячая линия; *г* — зависимость невязки в рамках статистики χ^2 от пробного значения смещения $\Delta\varphi$ между фазой фотометрического минимума кривой блеска φ_0(фот) и фазой при которой имеет место соединение звезд φ_0(соед.); *д* — распределение яркостной температуры по поверхности горячей линии с наветренной (кривая *1*) и подветренной (кривая *2*) сторон. Буква D обозначает y-координаты точек касания телом горячей линии боковой поверхности диска, буква P — координату полюса эллипсоида, описывающего горячую линию; *е* — схематическое изображение компонент системы U Gem, наблюдаемых при углах наклонения орбиты $i = 66{,}5°$, $i = 0°$, и $i = 90°$

U Gem демонстрирует сильное различие блеска в фазах $\varphi = 0{,}04$ и $\varphi = 0{,}4$–$0{,}5$, что говорит о том, что в фазах $\varphi = 0{,}4$–$0{,}5$ полного затмения диском области взаимодействия струи и диска не происходит, т. е. эта область имеет характерную толщину, превышающую толщину внешнего края диска (что радикально отличает реальную область взаимодействия от модели горячего пятна). На рис. 115 *а* приведено одно из полученных решений с наименьшей невязкой между наблюдаемой и теоретической кривой блеска $\chi^2_{\min} = 2203$. Смещение наблюдаемой кривой блеска в данном случае составляет $\Delta\varphi = 0{,}035$. Видно, что попытка описать наблюдаемую кривую блеска в рамках горячего пятна приводит к тому, что хотя в фазах $\varphi = 0{,}4$–$0{,}5$ описание наблюдаемой кривой блеска теоретической кривой удовлетворительно, в фазе $\varphi = 0{,}035$ теоретическая глубина затмения пятна звездой много меньше наблюдаемой, что и приводит к большой невязке ($\chi^2_{\min} = 2203$). Если же потребовать, чтобы теоретическая кривая блеска в рамках модели горячего пятна удовлетворительно описывала наблюдаемую кривую блеска в фазе $\varphi \simeq 0{,}035$ (см. рис. 115 *б*), то наблюдаемая и теоретические кривые блеска сильно не согласуются между собой в фазах $\varphi = 0{,}4$–$0{,}5$, что приводит к еще большей остаточной невязке ($\chi^2_{\min} = 14623$). С такой же ситуацией мы сталкиваемся и при попытке в рамках модели горячего пятна интерпретировать орбитальные кривые блеска U Gem, полученные Уорнером и Назером — см. рис. 115 *в*, *г*. Нижние части рис. 115 иллюстрируют сказанное, показывая вклад излучения каждой компоненты системы в общий поток.

Иная ситуация имеет место в случае использования модели «горячей линии» (см. рис. 116). Наименьшее значение невязки в данном случае составляет $\chi^2_{\min} = 168$ (заметим, что даже в этом случае критическое значение $\chi^2_{N,\alpha}$ при $\alpha = 0{,}001$ и $N = 29$ $\chi^2_{29,0,001} = 58{,}9$ значительно меньше $\chi^2_{\min} = 168$ и модель «горячей линии» также отвергается). В то же время, оптимальная теоретическая кривая блеска удовлетворительно описывает наблюдаемую кривую как в фазах вне затмений, так и в фазах затмения «горячей линии» звездой-донором. Это связано с тем, что «горячая линия» имеет толщину, превышающую толщину внешнего края диска, и полного затмения области взаимодействия диском в модели «горячей линии» не происходит. В предыдущих работах (Хрузина и др., 1998, 2001, 2003а) соответствие модели «горячей линии» наблюдениям проверялось в основном по ее излучению на незатменной части кривой блеска (в области горба). В случае системы U Gem мы имеем возможность изучить свойства «горячей линии» как по ее излучению, так и по затмению ее красным карликом. На рис. 117 приведен участок наблюдаемой кривой блеска U Gem

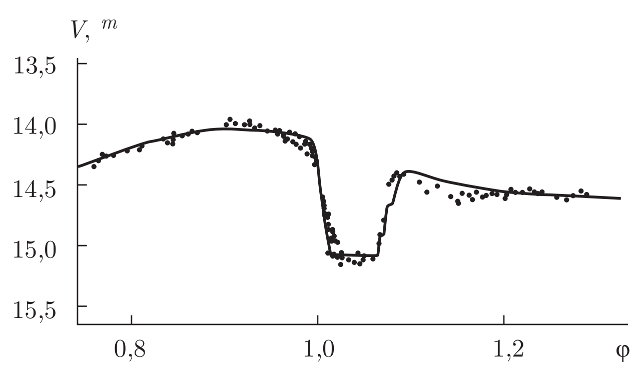


Рис. 117. Сравнение наблюдаемого затменного минимума на кривой блеска Кшеминского (Krzeminski, 1962) в системе U Gem (точки), и теоретической кривой блеска, вычисленной в рамках модели затмения горячей линии красным карликом (сплошная линия)

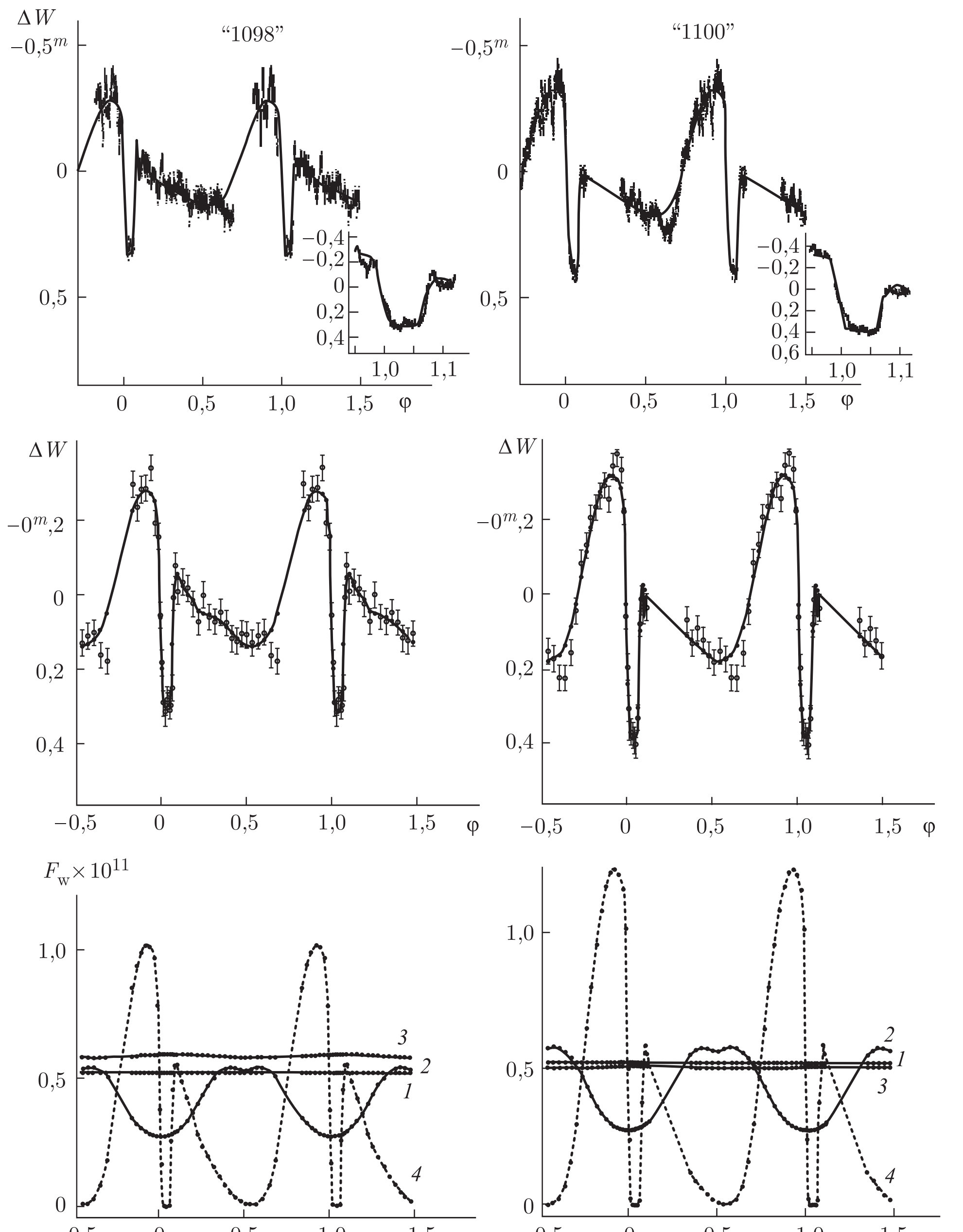


Рис. 118. Результаты расчетов для двух кривых блеска U Gem в спокойном состоянии в белом свете (обозначено буквой W), полученных Уорнером и Назерой (Warner and Nather, 1971) в рамках модели горячей линии. Приведены наблюдаемые (вверху) и средние (в центре) и соответствующие теоретические кривые блеска, синтезированные с оптимальными параметрами модели (сплошные линии). Внизу приведены вклады компонент в суммарный блеск системы: *1* — компактный объект, *2* — красный карлик, *3* — эллиптический аккреционный диск, *4* — горячая линия

в районе затмения. Видно, что и форма затмения, и его положение хорошо описываются оптимальной теоретической кривой, рассчитанной в рамках модели «горячей линии». На рис. 116 приведены схематические изображения компонент системы U Gem в видимой области спектра, для трех значений наклонения орбиты $i = 66{,}5^\circ$ (оптимальное значение), $i = 0^\circ$, $i = 90$. Эти изображения построены для найденных оптимальных параметров модели. Видно, что размеры диска, несмотря на спокойное состояние системы (наблюдения выполнены Кшеминским 1 января 1962 г.), довольно велики и диск почти круглый (его радиус $\sim 0{,}38$ от радиуса орбиты). Близкие размеры диска (0,37–0,41) были получены Стовером (Stover, 1981) из анализа спектральных наблюдений U Gem. Излучающая часть «горячей линии» выглядит как небольшой выступ на внешней границе аккреционного диска, толщина которого превышает толщину внешнего края диска. По всем характеристикам восстановленная «горячая линия» подобна области взаимодействии струи и диска, формирующейся для случая «холодного» диска. Сходные результаты получаются и при интерпретации в модели «горячей линии» орбитальных кривых блеска U Gem, полученных Уорнером и Назером (рис. 118).

Таким образом, выполненный нами анализ показал явное противоречие модели горячего пятна с наблюдаемыми орбитальными кривыми блеска системы U Gem. В то же время, модель «горячей линии» позволяет удовлетворительно описать оптические кривые блеска U Gem в спокойном состоянии. Минимальные значения χ^2 для моделей горячего пятна и «горячей линии» в случае оптической V-кривой блеска Кшеминского в спокойном состоянии составляют $\chi^2_{\min} = 2203$ и 168 соответственно, т. е. различаются в 13 раз. И это несмотря на то, что контроль модели «горячей линии» в случае системы U Gem проводится не только по орбитальной переменности ее блеска (горбу), но и по затмению «горячей линии» телом спутника — красного карлика. Несмотря на такой «двойной» контроль, модель «горячей линии» позволяет удовлетворительно описать все фазы наблюдаемых кривых блеска U Gem в спокойном состоянии.

В противоположность этому, модель горячего пятна для системы U Gem показывает, как и в случае других систем (Хрузина и др., 2001, 2003а) более узкие горбы и, главное, не позволяет описать большую наблюдаемую глубину затмения области взаимодействия струи и диска телом спутника. Все это позволяет заключить, что несмотря на то, что обе модели (горячего пятна и «горячей линии») отвергаются наблюдениями на весьма малом ($\alpha = 0{,}001$) уровне значимости (в силу сложных и нестационарных процессов в системе, не учитываемых нашими идеализированными моделями), модель «горячей линии» для системы U Gem является более предпочтительной, по сравнению с моделью горячего пятна. Математической причиной лучшего описания кривой блеска в рамках модели «горячей линии» является то, что эта модель описывается большим числом параметров (11 параметров), чем модель горячего пятна (5 параметров). Однако следует подчеркнуть, что модель «горячей линии» в случае «холодного» аккреционного диска более адекватно отражает физику области взаимодействия струи и диска и имеет физическое обоснование в рамках трехмерных газодинамических расчетов течения газа во взаимодействующих двойных системах (Бисикало и др., 2004, Bisikalo, 2005).

Таким образом, применение метода синтеза к кривым блеска катаклизмических двойных систем позволяет на качественном уровне отдать предпочтение модели «горячей линии». Для детального количественного анализа наблюдаемых характеристик «горячей линии» требуется разработка более совершенной математической модели ТДС и «горячей линии».

16. Параметры звезд-доноров в катаклизмических двойных системах

Катаклизмические двойные системы — это взаимодействующие двойные, в которых звезда-донор заполняет свою полость Роша и поставляет вещество на аккрецирующий белый карлик. Схожие свойства обнаруживают и рентгеновские новые (см. ниже), с той лишь разницей, что аккрецирующим объектом в данном случае является релятивистский объект — нейтронная звезда или черная дыра. Эволюция катаклизмических двойных систем и обмен масс в этих системах обусловлены главным образом потерей углового момента из системы, ввиду того, что в силу малой массы звезды-донора время ее ядерной эволюции больше возраста Вселенной. Известны два главных механизма потери углового момента в катаклизмических двойных: торможение системы за счет потери магнитного звездного ветра звездой-донором и потеря углового момента системой, обусловленная излучением ею потока гравитационных волн. В системах с относительно большими орбитальными периодами ($P > 3^{\mathrm{h}}$), преобладает механизм потери углового момента системой, обусловленный истечением магнитного звездного ветра. В стандартной теории эволюции ТДС (см., например, Масевич и Тутуков, 1988, Shore et al., 1994, Hellier, 2001) используется идея о прекращении торможения за счет истечения магнитного звездного ветра, согласно которой, когда орбитальный период двойной системы уменьшается до $P \simeq 3^{\mathrm{h}}$, звезда-донор становится полностью конвективной (в силу значительного уменьшения ее массы). Это приводит к уменьшению радиуса донора, отделению его от своей полости Роша и прекращению истечения в виде магнитного звездного ветра. В этом случае остается единственный механизм потери системой углового момента — это излучение потока гравитационных волн. После длительной эволюции двойной системы, обусловленной потерей углового момента за счет излучения гравитационных волн, когда орбитальный период сокращается до $P \simeq 2^{\mathrm{h}}$, полость Роша нормальной звезды-донора снова «садится» на звезду, что приводит к возобновлению истечения ее через точку Лагранжа, с последующей аккрецией вещества на белый карлик и к возрождению феномена катаклизмической переменной. Основанием для такого двухстадийного сценария эволюции катаклизмических двойных систем является хорошо известный наблюдательный факт: наличие так называемого провала в распределении катаклизмических двойных систем по орбитальным периодам в интервале периодов $P \simeq 2\text{–}3^{\mathrm{h}}$, где катаклизмические двойные системы практически отсутствуют; их число в интервале $P = 2\text{–}3^{\mathrm{h}}$ на порядок меньше, чем в других интервалах периодов.

В процессе эволюции катаклизмической двойной системы звезда-донор теряет массу. Если характерное время потери массы звездой $\tau_{\mathrm{loss}} \sim M_2/\dot{M}_2$ (M_2 — масса звезды-донора) много больше, чем тепловое время звезды $\tau_{\mathrm{th}} \sim (GM_2^2/R_2L_2)$, звезда-донор в состоянии поддерживать тепловое равновесие и должна иметь характеристики, типичные для одиночных звезд главной последовательности. Здесь мы всем характеристикам, описывающим свойства звезды-донора (M_2, L_2, R_2, $\dot{M}_2$) приписываем индекс «2». Если условие $\tau_{\mathrm{loss}} \gg \tau_{\mathrm{th}}$ не выполняется, звезда-донор отклоняется от состояния теплового равновесия (темп энерговыделения в ее центре не равен наблюдаемой светимости). Размеры такой неравновесной звезды превышают размеры соответствующей звезды главной последовательности той же массы.

Темп потери массы звездой-донором при заполнении ею своей полости Роша зависит от эффективности механизма потери углового момента системой. Для долгопериодических катаклизмических двойных с периодами $P > 3^{\mathrm{h}}$ «работают» оба механизма: потеря массы магнитным звездным ветром и излучение гравитационных волн. В этом случае темп потери массы звездой-донором относительно велик, характерное время потери массы звездой-донором $\tau_{\rm loss}$ мало, и условие $\tau_{\rm loss} \gg \tau_{\rm th}$ может не выполняться. Можно предполагать, что из-за неравновестности звезды-донора она при этом будет иметь избыток радиуса, по сравнению со звездой главной последовательности той же массы. В то же время, для катаклизмических двойных с $P < 2^{\rm h}$ механизм потери массы магнитным звездным ветром выключается, и темп потери массы, обусловленный излучением системой потока гравитационных волн, становится меньше. Это приводит к тому, что условие $\tau_{\rm loss} \gg \tau_{\rm th}$ выполняется, и звезда-донор в этом случае должна иметь характеристики звезд главной последовательности.

Таким образом, исследование характеристик звезд-доноров в катаклизмических двойных системах важно для понимания эволюции этих систем. Изучению звезд-доноров в катаклизмических двойных посвящено значительное число работ (см., например, Echevarria, 1983, Patterson, 1984, Friend et al., 1990, Smith and Dhillon, 1998, Beuermann et al., 1998, Patterson et al., 2005, Knigge, 2006, 2007). В частности, в работе (Beuermann et al., 1998) было показано, что по крайней мере для периодов $P > 3^{\rm h}$ (за пределами провала в распределении периодов) спектральные типы звезд-доноров в катаклизмических переменных являются существенно более поздними, чем для одиночных звезд главной последовательности. Для систем с наибольшими периодами ($P > 5^{\rm h}$–$6^{\rm h}$) это, возможно связано с тем, что звезды-доноры успели слегка проэволюционировать в ядерной шкале времени эволюции (Beuermann et al., 1998, Podsiadlowski et al., 2003a, b). Однако для всех других систем аномально поздние спектральные типы звезд-доноров, по-видимому, связаны с тем, что они не находятся в тепловом равновесии и имеют избытки радиусов. И действительно, на зависимости масса–радиус, построенной в работе (Patterson et al., 2005) для звезд-доноров катаклизмических двойных систем, найдено, что для $P \leqslant 6^{\rm h}$ звезды-доноры имеют избытки радиусов по сравнению со звездами главной последовательности тех же масс. Кроме того, в работе (Patterson et al., 2005) обнаружен скачек на зависимости масса–радиус для звезд-доноров в районе, соответствующем провалу в распределении орбитальных периодов для катаклизмических двойных. Это согласуется с описанной выше идеей о прекращении торможения магнитным звездным ветром. Следовательно, для периодов $P > 3^{\rm h}$ в катаклизмических двойных действительно работают совместно два механизма потери углового момента: главный — торможение магнитным звездным ветром, и вторичный — излучение гравитационных волн. Для $P < 3^{\rm h}$ остается лишь один, менее эффективный механизм потери углового момента — излучение системой гравитационных волн. Поэтому звезды-доноры в катаклизмических двойных с $P > 3^{\rm h}$ не должны находиться в тепловом равновесии из-за большого темпа потери массы, что и объясняет наличие у них наблюдаемых избытков радиусов.

В работе (Knigge, 2006, 2007) суммированы все доступные данные по звездам-донорам в катаклизмических двойных и построена полуэмпирическая эволюционная последовательность для этих звезд. Кроме того, в этой работе пересчитаны и дополнены данные работ (Beuermann et al., 1998, Patterson et al., 2005), показана взаимная согласованность данных этих работ: наблюдаемая зависимость масса-радиус, полученная в работе (Patterson et al., 2005), как раз такова, что она позволяет объяснить аномально поздние спектральные классы звезд-доноров в катаклизмических переменных. Ниже мы кратко изложим результаты работ (Knigge, 2006, 2007).

Прежде всего, рассмотрим метод определения масс и радиусов звезд-доноров с использованием информации о периодах следования сверхгорбов, наблюдаемых в кривых блеска катаклизмических двойных систем. Как известно (см., например, Warner, 1995, Hellier, 2001), сверхгорбы на кривых блеска катаклизмических двойных представляют собой проявление прецессирующего эллиптического аккреционного диска вокруг белого карлика, который возникает главным образом во взрывных карликовых новых, а также в некоторых новоподобных катаклизмических двойных с не очень сильно замагниченным белым карликом и даже в ряде маломассивных рентгеновских двойных систем. Эллиптический аккреционный диск, возникший во время сверхвспышки, лежит в плоскости орбиты, но его большая полуось поворачивается (прецессирует) относительно линии центров компонент системы. Период такой прецессии эллиптического аккреционного диска много длиннее орбитального периода. Сверхгорбы на кривой блеска катаклизмической двойной системы следуют с периодом, соответствующим разности частот орбитального и прецессионного периодов системы. Поэтому период сверхгорбов $P_{\rm sh}$ на несколько процентов длиннее, чем орбитальный период. Можно ввести понятие избытка периода, обусловленного сверхгорбом:

$$\varepsilon = \frac{P_{\rm sh} - P_{\rm orb}}{P_{\rm orb}}. \tag{515}$$

Как следует из теории и наблюдений, величина избытка ε является функцией отношения масс компонент $q = M_2/M_1$, где M_1 — масса белого карлика, M_2 — масса звезды-донора. Эта зависимость $\varepsilon(q)$ может быть надежно прокалибрована с использованием результатов интерпретации затмений в ряде катаклизмических двойных с наблюдаемыми сверхгорбами на кривых блеска. В этих случаях из анализа затмений отношение масс в системе может быть определено независимо из условия того, что средний радиус звезды-донора должен совпадать со средним радиусом ее полости Роша в ТДС. Используя прокалиброванную таким образом зависимость $\varepsilon(q)$ (рис. 119), можно определять отношение масс q для многих катаклизмических

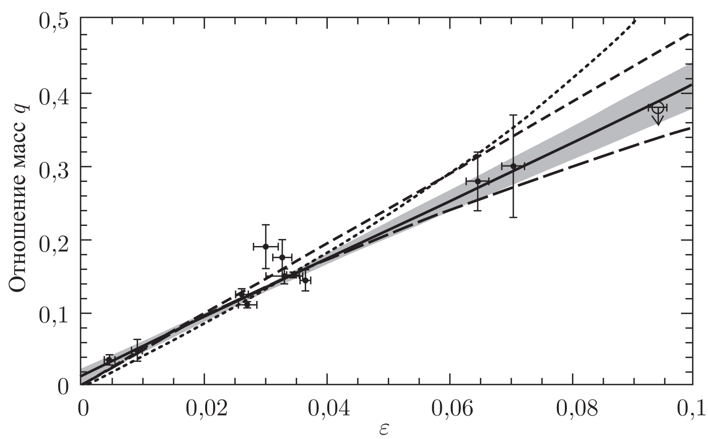


Рис. 119. Калибровка зависимости $q(\varepsilon)$ для катаклизмических двойных со сверхгорбами. Приведена зависимость отношения масс q от избытка периода ε для калибровочных звезд. Толстая сплошная линия соответствует наиболее оптимальной линейной аппроксимации. Затемненная полоса соответствует 1σ-диапазону неопределенностей (по материалам работы Knigge, 2006)

двойных с наблюдаемыми явлениями сверхгорбов на кривых блеска. Аналитическая аппроксимация для зависимости $\varepsilon(q)$ получена в работе (Knigge, 2006):

$$q(\varepsilon) = (0{,}114 \pm 0{,}005) + (3{,}97 \pm 0{,}41) \cdot (\varepsilon - 0{,}025). \tag{516}$$

Далее, задавая массу белого карлика M_1, можно найти массу звезды-донора:

$$M_2 = qM_1. \tag{517}$$

Масса M_1 может быть непосредственно измерена в случае затменных катаклизмических двойных, где из анализа орбитальной кривой блеска можно определить радиус белого карлика и, далее, по зависимости масса-радиус для белых карликов, найти массу M_1. На рис. 120 приведена зависимость найденных таким образом масс 16 белых карликов от орбитального периода соответствующей катаклизмической переменной. Видно, что масса белого карлика практически не зависит от орбитального периода катаклизмической двойной и в среднем составляет

$$\overline{M}_1 = (0{,}75 \pm 0{,}05)\, M_\odot.$$

Эта величина может быть положена в основу определения M_2 из уравнения (517). Забегая вперед, подчеркнем, что радиусы звезд-доноров пропорциональны $M_1^{1/3}$, поэтому ошибка в задании M_1 слабо сказывается на окончательных результатах.

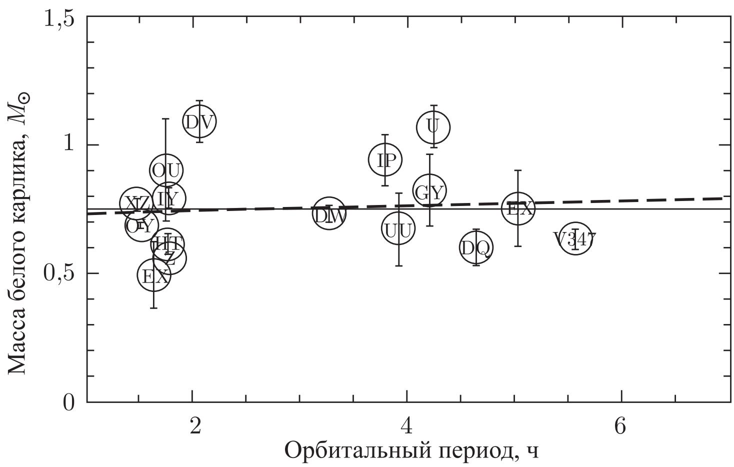


Рис. 120. Ограничения на эволюцию масс белых карликов с орбитальным периодом. Показана зависимость масс белых карликов от орбитальных периодов для затменных систем. Сплошная линия соответствует средней массе белого карлика $M_{\rm WD} = (0{,}75 \pm 0{,}05)\, M_\odot$. Тонкая пунктирная линия показывает наилучшее линейное представление наблюдательных данных (по материалам работы Knigge, 2006)

Для определения радиуса звезды-донора R_2 можно использовать тот факт, что она заполняет свою полость Роша. В этом случае звезда-донор должна удовлетворять хорошо известной зависимости период — средняя плотность (Warner, 1995):

$$\overline{\rho}_2 = 107\, P_{\rm orb,h}^{-2}\ \left(\text{г/см}^3\right), \tag{518}$$

где $P_{\rm orb,h}$ — орбитальный период, выраженный в часах,

$$\overline{\rho}_2 = \frac{3M_2}{4\pi R_2^2}. \tag{519}$$

Уравнение (518) справедливо с точностью лучше 3% в интервале $0{,}01 < q < 1$. Поскольку $P_{\rm orb,h}$ и M_2 известны, уравнение (518) позволяет найти радиус звезды-донора:

$$\frac{R_2}{R_\odot} = 0{,}2361\, P_{\rm orb,h}^{2/3}\, q^{1/3} \left(\frac{M_1}{M_\odot}\right)^{1/3}, \tag{520}$$

или в случае использования M_2,

$$\frac{R_2}{R_\odot} = 0{,}2361\, P_{\mathrm{orb,h}}^{2/3} \left(\frac{M_2}{M_\odot}\right)^{1/3}. \tag{521}$$

Таким образом, удается оценить массы и радиусы звезд-доноров в катаклизмических двойных системах. Аналитическая аппроксимация такой зависимости масса–радиус, дополненной величинами M_2, R_2, найденными с использованием данных анализа затмений в затменных двойных системах, позволяет найти функциональную зависимость масса–радиус для звезд-доноров в катаклизмических двойных системах.

В табл. 40 приведены величины M_2 и R_2 с их ошибками, найденные описанным выше способом в работах (Knigge, 2006, 2007) для 88 катаклизмических двойных систем.

Таблица 40

Массы и радиусы доноров в катаклизмических двойных, оцененные с использованием периодов супергорбов. Здесь орбитальные периоды даны в часах, массы и радиусы — в солнечных единицах (из работы Knigge, 2007)

Система	P_{orb}	M_2	σM_2	R_2	σR_2	Система	P_{orb}	M_2	σM_2	R_2	σR_2
DI UMa	1,3094	0,051	0,011	0,105	0,008	CY UMa	1,6697	0,119	0,026	0,164	0,012
V844 Her	1,3114	0,083	0,018	0,124	0,009	FO And	1,7186	0,115	0,027	0,165	0,013
LL And	1,3212	0,097	0,023	0,131	0,010	OU Vir	1,7450	0,130	0,029	0,173	0,013
SDSS 0137-09	1,3289	0,085	0,019	0,125	0,009	VZ Pyx	1,7597	0,110	0,024	0,165	0,012
ASAS 0025+12	1,3452	0,072	0,017	0,120	0,009	CC Cnc	1,7645	0,156	0,034	0,186	0,014
AL Com	1,3601	0,047	0,010	0,104	0,008	HT Cas	1,7676	0,089	0,009	0,154	0,005
WZ Sge	1,3606	0,056	0,009	0,111	0,006	IY UMa	1,7738	0,093	0,006	0,157	0,003
RX 1839+26	1,3606	0,063	0,015	0,115	0,009	VW Hyi	1,7825	0,110	0,024	0,166	0,012
PU CMa	1,3606	0,077	0,018	0,123	0,009	Z Cha	1,7880	0,089	0,003	0,155	0,001
SW UMa	1,3634	0,084	0,020	0,127	0,010	QW Ser	1,7887	0,110	0,026	0,167	0,013
HV Vir	1,3697	0,071	0,015	0,120	0,009	WX Hyi	1,7954	0,114	0,025	0,169	0,012
MM Hya	1,3822	0,066	0,014	0,118	0,009	BK Lyn	1,7995	0,154	0,033	0,187	0,013
WX Cet	1,3990	0,070	0,016	0,122	0,009	RZ Leo	1,8250	0,114	0,026	0,171	0,013
KV Dra	1,4102	0,080	0,018	0,128	0,010	AW Gem	1,8290	0,137	0,030	0,182	0,013
T Leo	1,4117	0,081	0,018	0,129	0,009	SU UMa	1,8324	0,105	0,023	0,167	0,012
EG Cnc	1,4393	0,031	0,007	0,095	0,007	SDSS 1730+62	1,8372	0,123	0,027	0,176	0,013
V1040 Cen	1,4467	0,103	0,023	0,142	0,011	HS Vir	1,8456	0,153	0,033	0,190	0,014
RX Vol	1,4472	0,064	0,015	0,121	0,009	V503 Cyg	1,8648	0,139	0,031	0,185	0,014
AQ Eri	1,4626	0,096	0,021	0,139	0,010	V359 Cen	1,8696	0,127	0,030	0,180	0,014
XZ Eri	1,4678	0,094	0,005	0,139	0,003	CU Vel	1,8840	0,098	0,024	0,166	0,013
CP Pup	1,4748	0,083	0,015	0,133	0,008	NSV 9923	1,8984	0,134	0,030	0,185	0,014
V1159 Ori	1,4923	0,106	0,023	0,146	0,010	BR Lup	1,9080	0,112	0,027	0,175	0,014
V2051 Oph	1,4983	0,095	0,022	0,141	0,011	V1974 Cyg	1,9502	0,202	0,033	0,216	0,012
V436 Cen	1,5000	0,074	0,018	0,130	0,011	TU Crt	1,9702	0,129	0,028	0,188	0,014
BC UMa	1,5026	0,102	0,022	0,145	0,010	TY PsA	2,0194	0,135	0,030	0,194	0,014
HO Del	1,5038	0,093	0,022	0,141	0,011	KK Tel	2,0287	0,121	0,027	0,187	0,014
EK TrA	1,5091	0,107	0,024	0,147	0,011	V452 Cas	2,0304	0,159	0,035	0,205	0,015

Продолжение табл. 40

Система	$P_{\rm orb}$	M_2	σM_2	R_2	σR_2	Система	$P_{\rm orb}$	M_2	σM_2	R_2	σR_2
TV Crv	1,5096	0,108	0,025	0,148	0,011	DV UMa	2,0604	0,165	0,013	0,209	0,006
VY Aqr	1,5142	0,072	0,016	0,129	0,010	YZ Cnc	2,0832	0,176	0,038	0,216	0,016
OY Car	1,5149	0,065	0,004	0,125	0,003	GX Cas	2,1365	0,145	0,032	0,206	0,015
RX 1131+43	1,5194	0,088	0,019	0,139	0,010	NY Ser	2,3460	0,197	0,043	0,242	0,018
ER UMa	1,5278	0,105	0,023	0,148	0,011	V348 Pup	2,4442	0,202	0,045	0,251	0,019
DM Lyr	1,5710	0,095	0,022	0,145	0,011	V795 Her	2,5982	0,237	0,051	0,276	0,020
UV Per	1,5574	0,081	0,019	0,137	0,010	V592 Cas	2,7614	0,197	0,042	0,270	0,019
AK Cnc	1,5624	0,121	0,028	0,157	0,012	TU Men	2,8128	0,225	0,049	0,286	0,021
AO Oct	1,5737	0,083	0,021	0,139	0,012	AH Men	3,0530	0,275	0,059	0,323	0,023
SX LMi	1,6121	0,114	0,026	0,158	0,012	DW UMa	3,2786	0,197	0,010	0,303	0,005
SS UMi	1,6267	0,118	0,026	0,160	0,012	TT Ari	3,3012	0,263	0,056	0,335	0,024
KS UMa	1,6310	0,083	0,020	0,143	0,011	V603 Aql	3,3144	0,242	0,044	0,327	0,020
V1208 Tau	1,6344	0,122	0,027	0,163	0,012	PX And	3,5124	0,278	0,060	0,356	0,025
RZ Sge	1,6387	0,102	0,023	0,153	0,012	V533 Her	3,5352	0,225	0,048	0,333	0,024
TY Psc	1,6399	0,114	0,025	0,159	0,012	BB Dor	3,5808	0,291	0,062	0,366	0,026
IR Gem	1,6416	0,116	0,032	0,160	0,015	BH Lyn	3,7380	0,246	0,053	0,356	0,026
V699 Oph	1,6536	0,070	0,017	0,136	0,011	UU Aqr	3,9259	0,197	0,041	0,342	0,024

На рис. 121 приведена зависимость M_2–R_2 для катаклизмических двойных (Knigge, 2006). Виден заметный скачек в распределении радиусов звезд-доноров вблизи значения $M_2 \simeq 0{,}2M_\odot$. Как видно из табл. 40, этому значению M_2 соответствует примерно середина провала в распределении числа катаклизмических двойных по орбитальным периодам $\Delta P_{\rm orb} = (2\text{–}3)^{\rm h}$. Таким образом, из рис. 121 следует, что звезды-доноры в катаклизмических двойных, периоды которых больше $3^{\rm h}$ имеют систематически увеличенные радиусы. Это подтверждает вывод работы (Patterson et al., 2005) о том, что распределение радиусов звезд-доноров в катаклизмических двойных в зависимости от их масс согласуется с современным эволюционным сценарием для этих систем. Звезды-доноры с массами $M_2 > 0{,}2M_\odot$ имеют избытки радиусов, поскольку они отклоняются от состояния теплового равновесия ввиду относительно интенсивного темпа потери массы, обусловленного главным образом торможением двойной системы магнитным звездным ветром. Скорее всего, катаклизмические двойные системы эволюционируют в пределах провала с $\Delta P_{\rm orb} = (2\text{–}3)^{\rm h}$ как разделенные системы и из рис. 121 следует, что критическая масса звезды-донора, при которой она становится полностью конвективной и прекращает испускать магнитный звездный ветер (что приводит к прекращению обмена масс), составляет

$$M_2^{\rm conv} = (0{,}20 \pm 0{,}02)M_\odot,$$

где ошибка $0{,}02M_\odot$ полностью статистическая. Поскольку в пределах провала $\Delta P = (2\text{–}3)^{\rm h}$ система разделенная (из-за отделения полностью конвективной звезды-донора от своей полости Роша), эта величина $M_2^{\rm conv}$ представляет собой массу звезды-донора на обоих концах провала $\Delta P_{\rm orb} = (2\text{–}3)^{\rm h}$.

На рис. 122 показано распределение катаклизмических двойных систем по орбитальным периодам, выраженное в дифференциальной и интегральной форме (Ritter and Kolb, 2003, Knigge, 2006, 2007). На этом распределении отчетливо

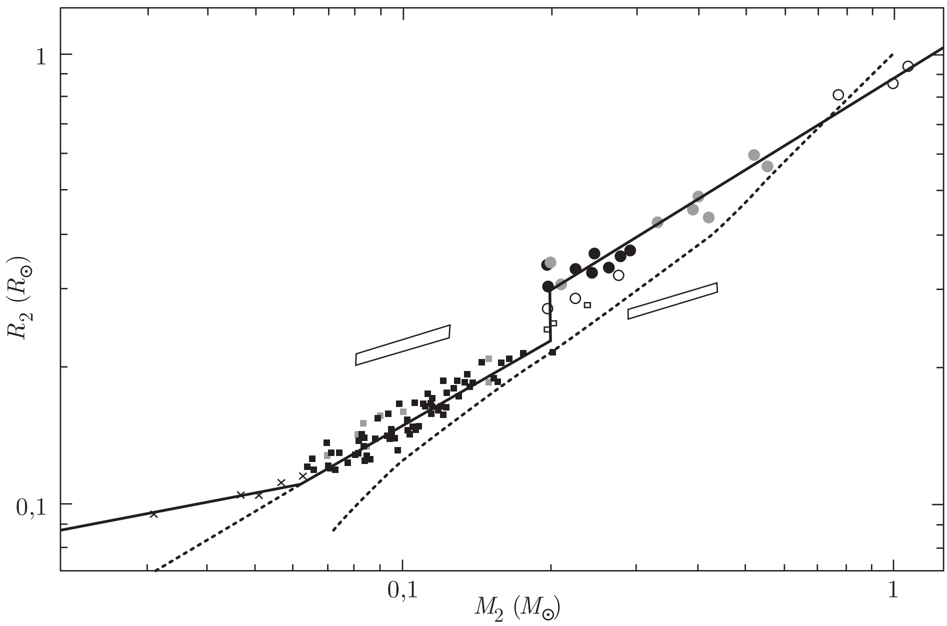


Рис. 121. Зависимость «масса–радиус» для звезд-доноров катаклизмических двойных систем. Показаны данные по массам и радиусам для звезд-доноров. Параллелограммы показывают типичную ошибку для одного значения в случае короткопериодических и долгопериодических катаклизмических двойных. Сплошная линия показывает оптимальную аппроксимацию наблюдательных данных. Точечная линия соответствует зависимости «масса-радиус» для звезд главной последовательности (по материалам работы Knigge, 2006)

прослеживается провал ΔP, границы которого задаются следующими значениями периода:

$$P^{-}_{\text{gap}} = 2{,}15^{\text{h}} \pm 0{,}03^{\text{h}}; \quad P^{+}_{\text{gap}} = 3{,}18^{\text{h}} \pm 0{,}04^{\text{h}}.$$

Видно также, что число катаклизмических двойных систем внутри провала ΔP увеличивается в сторону более длинных орбитальных периодов. Это может быть связано с наличием систем с низкой металличностью, которые, как предполагается, заполняют провал ΔP со стороны длинных периодов (Webbink and Wickramasinghe, 2002). На рис. 122 виден также резкий обрыв числа катаклизмических двойных систем около некоторого значения орбитального периода $P_{\min} = (76{,}2 \pm 1{,}0)$ мин, называемого минимальным. Ему соответствует некоторая масса донора $M_2 = M_{\text{bounce}}$. Можно предполагать, что физические характеристики и эволюция катаклизмических двойных с массами звезд-доноров $M_2 < M_{\text{bounce}}$ (число таких систем очень мало — меньше десятка) должны отличаться от характеристик «нормальных» катаклизмических двойных с $M_2 > M_{\text{bounce}}$. Масса звезды-донора M_2, соответствующая $P_{\min}$, обозначается как M_{bounce} и составляет $M_{\text{bounce}} = (0{,}063 \pm 0{,}009)\,M_\odot$ (лежит в области значений масс коричневых карликов). Зависимость $R_2(M_2)$ для «нормальных» катаклизмических двойных должна быть обрезана вблизи значения M_{bounce}. Катаклизмические двойные с массами $M_2 < M_{\text{bounce}}$ должны рассматриваться отдельно. Как показано в работе (Knigge, 2006, 2007), рассмотрение катаклизмических двойных с массами $M_2 < M_{\text{bounce}}$ (коричневые карлики) приводит к заключению, что зависимость $R_2(M_2)$ для них соответствует не уменьшению, а увеличению орбитального периода с уменьшением масса звезды-донора M_2.

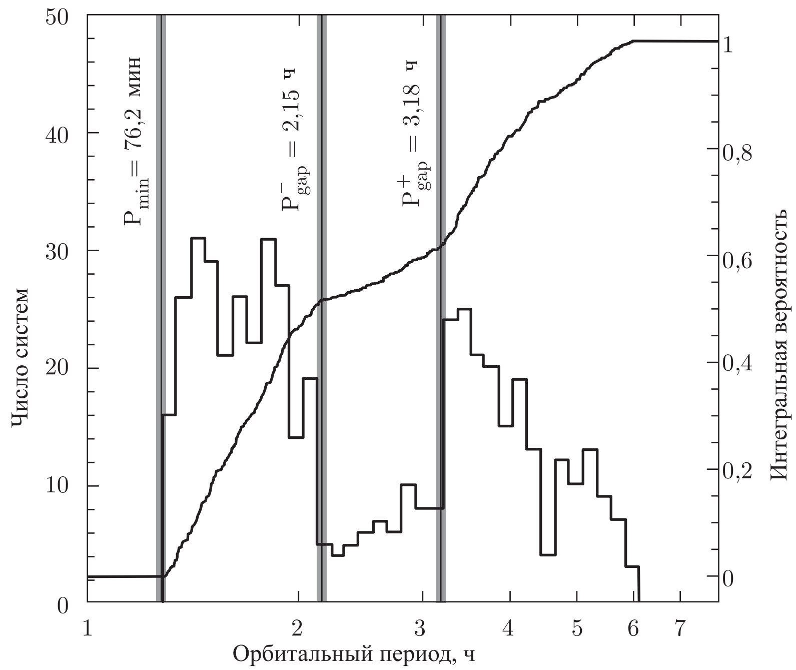


Рис. 122. Дифференциальная и интегральная функции распределения орбитальных периодов катаклизмических двойных систем (из работы Knigge, 2006)

В работе (Knigge, 2006, 2007) после тщательного анализа данных по M_2 и R_2, содержащихся в табл. 40, даны оптимальные аналитические степенные аппроксимации зависимости $R_2(M_2)$ для различных диапазонов M_2. При этом учтен тот факт, что лишь величины q и M_1 являются независимыми, поскольку они оценены напрямую из наблюдаемой кривой блеска, в то время, как окончательные величины M_2 и R_2 скоррелированы. Эта корреляция должна быть учтена при выводе оптимальной теоретической зависимости $R_2(M_2)$ на основе критерия χ^2. В итоге получены следующие выражения для функции $R_2(M_2)$:

$$\frac{R_2}{R_\odot} = \begin{cases} (0{,}110 \pm 0{,}005)\left(\dfrac{M_2}{M_{\text{bounce}}}\right)^{0{,}21^{+0{,}05}_{-0{,}10}} & \text{для систем с } M_2 < M_{\text{bounce}} \\ (0{,}230 \pm 0{,}008)\left(\dfrac{M_2}{M_{\text{conv}}}\right)^{0{,}64 \pm 0{,}02} & \text{для систем с } P_{\text{orb}} < 2{,}15^{\text{h}},\ M_2 > M_{\text{bounce}} \\ (0{,}299 \pm 0{,}010)\left(\dfrac{M_2}{M_{\text{conv}}}\right)^{0{,}67 \pm 0{,}04} & \text{для систем с } 3{,}18^{\text{h}} < P_{\text{orb}} < 6^{h}. \end{cases}$$

Эти три различные степенные аппроксимации зависимости $R_2(M_2)$ соответствуют трем диапазонам масс звезд-доноров в катаклизмических двойных: очень короткопериодическим системам с $M_2 < M_{\text{bounce}}$; короткопериодическим системам с $M_{\text{bounce}} < M_2 < M_{\text{conv}}$ и $P_{\text{orb}} < P_{\text{gap}}^{-}$; долгопериодическим системам с $M_{\text{conv}} < M_2 < M_{\text{evol}}$ и $P_{\text{gap}}^{+} < P_{\text{orb}} < P_{\text{evol}}$. Напомним, что M_{conv} соответствует началу стадии полностью конвективной звезды-донора, когда прекращается истечение магнитного звездного ветра, и звезда, сжимаясь, отделяется от своей полости Роша; M_{evol} — масса звезды-донора, при которой характерное время ее ядерной эволюции меньше возраста Вселенной. Численные значения характерных масс и периодов следующие (Knigge, 2006, 2007):

$$\begin{aligned}
M_{\text{bounce}} &= (0{,}063 \pm 0{,}009)\,M_\odot,\\
M_{\text{conv}} &= (0{,}20 \pm 0{,}02)\,M_\odot,\\
M_{\text{evol}} &\simeq (0{,}6\text{–}0{,}7)\,M_\odot,\\
P_{\min} &= (76{,}2 \pm 1{,}0)\text{мин},\\
P^{-}_{\text{gap}} &= (2{,}15 \pm 0{,}03)^{\text{h}},\\
P^{+}_{\text{gap}} &= (3{,}18 \pm 0{,}04)^{\text{h}},\\
P_{\text{evol}} &\simeq (5\text{–}6)^{\text{h}}.
\end{aligned}$$

В работах (Knigge, 2006, 2007) подчеркивается, что именно из-за сравнительно низкого показателя степени в $R_2(M_2)$ для систем с $M_2 < M_{\text{bounce}}$ (системы с донорами — коричневыми карликами), в катаклизмических двойных с предельно малыми орбитальными периодами наблюдается обратная зависимость орбитального периода от массы донора: период P_{orb} возрастает с уменьшением M_2. Эволюция катаклизмических двойных систем с $P_{\text{orb}} < 3{,}18^{\text{h}}$ определяется двумя конкурирующими процессами: тенденцией к сокращению радиуса орбиты системы, обусловленной излучением ею гравитационных волн и тенденцией к увеличению радиуса орбиты, связанной с переносом вещества от менее массивной звезды-донора на более массивный белый карлик. В случае, когда показатель степени в функции $R_2(M_2)$ относительно мал (менее $\sim 0{,}33$), побеждает вторая тенденция. Поэтому орбитальный период при уменьшенииM_2 начинает возрастать.

С целью построения эволюционных последовательностей для звезд-доноров в катаклизмических двойных системах в работах (Knigge, 2006, 2007) были корректно определены спектральные классы звезд-доноров в исследуемых катаклизмических двойных (см. табл. 41).

Таблица 41

Спектральные классы доноров в катаклизмических двойных (из работы Knigge, 2007)

Система	P_{orb}, h	Спектр. класс	Система	P_{orb}, h	Спектр. класс
RX J1951	11,808	M0 ± 0,5	GY Cnc	4,211	M3 ± 1
UY Pup	11,502	K4 ± 2	SDS J2048	4,200	M3 ± 1
V442 Cen	11,040	G6 ± 2	V1043 Cen	4,190	M2,5 ± 0,5
DX And	10,572	K0 ± 1	SDSS J0924	4,056	M3,5 ± 1
AE Aqr	9,880	K4 ± 1	DO Dra	3,969	M4,25 ± 0,7
1RXS J1548	9,864	K2 ± 2	UU Aql	3,925	M4 ± 1
AT Ara	9,012	K2 ± 0,5	CN Ori	3,917	M4 ± 1
RU Peg	8,990	K2,5 ± 0,5	KT Per	3,905	M3,3 ± 1
GY Hya	8,336	K4,5 ± 0,5	GY Lyr	3,818	M3,25 ± 1,25
CH UMa	8,236	K6,5 ± 1,5	VY For	3,806	M4,5 ± 1
MU Cen	8,208	K4 ± 1	IP Peg	3,797	M4 ± 0,5
BT Mon	8,012	G8 ± 2	QQ Vul	3,708	M4 ± 0,5
V1309 Ori	7,983	M0,5 ± 0,5	WY Sge	3,687	M4 ± 1
V392 Hya	7,799	K5,5 ± 0,5	RX J0944	3,581	M2 ± 1
AF Cam	7,776	K5,5 ± 2	MN Hya	3,390	M3,5 ± 0,5
V363 Aur	7,710	G7 ± 2	V1432 Aql	3,366	M4 ± 0,5
RY Ser	7,222	K5 ± 1	TT Ari	3,196	M3,5 ± 0,5

Продолжение табл. 41

Система	$P_{\rm orb}$, h	Спектр. класс	Система	$P_{\rm orb}$, h	Спектр. класс
AC Cnc	7,211	K2 ± 1	MV Lyr	3,190	M5 ± 0,5
EM Cyg	6,982	K3 ± 1	SDSS J0837	3,180	M5 ± 1
Z Cam	6,956	K7 ± 2	AM Her	3,094	M4,25 ± 0,5
SDSS J0813	6,936	K5,5 ± 1	WX LMi	2,782	M4,5 ± 2
V426 Oph	6,848	K5 ± 1	RX J1554	2,531	M4 ± 1
SS Cyg	6,603	K4,5 ± 0,5	SDSS J1702	2,402	M1,5 ± 1,1
CW 1045	6,511	K6,5 ± 1,5	QS Tel	2,332	M4,5 ± 0,5
CM Phe	6,454	M3,5 ± 1,5	UW Pic	2,224	M4,5 ± 1
TT Crt	6,440	K5 ± 0,75	UZ For	2,109	M4,5 ± 0,5
BV Pup	6,353	K3 ± 2	HU Aqr	2,084	M4,25 ± 0,7
AH Her	6,195	K7 ± 1	DV UMa	2,063	M4,5 ± 0,5
XY Ari	6,065	M0 ± 0,5	QZ Ser	1,996	K4 ± 2
LL Lyr	5,978	M2,5 ± 1,5	AR UMa	1,932	M5,5 ± 0,5
AH Eri	5,738	M4 ± 1	ST LMi	1,898	M5,5 ± 1,5
V347 Pup	5,566	M0,5 ± 0,5	MR Ser	1,891	M6 ± 1
RW Tri	5,565	M0 ± 1	CU Vel	1,884	M5 ± 1
EZ Del	5,362	M1,5 ± 0,5	V2301 Oph	1,883	M5,5 ± 1
CZ Ori	5,254	M2,5 ± 1,5	RZ Leo	1,836	M5 ± 1
AR Cnc	5,150	M5 ± 1	Z Cha	1,788	M5,5 ± 0,5
EX Dra	5,038	M1,5 ± 0,5	HT Cas	1,768	M5,4 ± 0,3
RX And	5,037	K4,75 ± 2	V834 Cen	1,692	M6,5 ± 1,5
AT Cnc	4,826	K7,5 ± 1	VV Pup	1,674	M6,5 ± 1
DQ Her	4,647	M3 ± 0,5	EX Hya	1,638	M4 ± 1
AI Tri	4,602	M2,5 ± 1	HS Cam	1,637	M5 ± 2
Leo 7	4,483	M3 ± 1	BZ UMa	1,632	M5,5 ± 0,5
SDSS J1553	4,391	M4,5 ± 1	VY Aqr	1,514	M9,5 ± 1
SS Aur	4,387	M3 ± 1	BC UMa	1,512	M6,5 ± 0,5
TW Vir	4,384	M5,5 ± 0,5	EI Psc	1,070	K5 ± 1
U Gem	4,246	M4,25 ± 0,5			

Для сравнения характеристик звезд-доноров в катаклизмических двойных системах с параметрами одиночных звезд автором также была построена диаграмма Герцшпрунга–Рессела для звезд малых масс главной последовательности с использованием данных по одиночным звездам (Knigge, 2006, 2007). С использованием этих данных в работах (Knigge, 2006, 2007) были построены эмпирические зависимости «спектральный тип–орбитальный период» для звезд-доноров катаклизмических двойных и для одиночных равновесных звезд главной последовательности (рис. 123). При этом каждой звезде из набора одиночных звезд главной последовательности приписывался условный орбитальный период на основе данных о ее массе и радиусе с использованием зависимости «период–средняя плотность звезды» в предположении, что звезда заполняет свою полость Роша. Иными словами, в данном случае орбитальный период $P_{\rm orb}$ — это период гипотетической полуразделенной двойной системы со звездой донором — звездой главной последовательности.

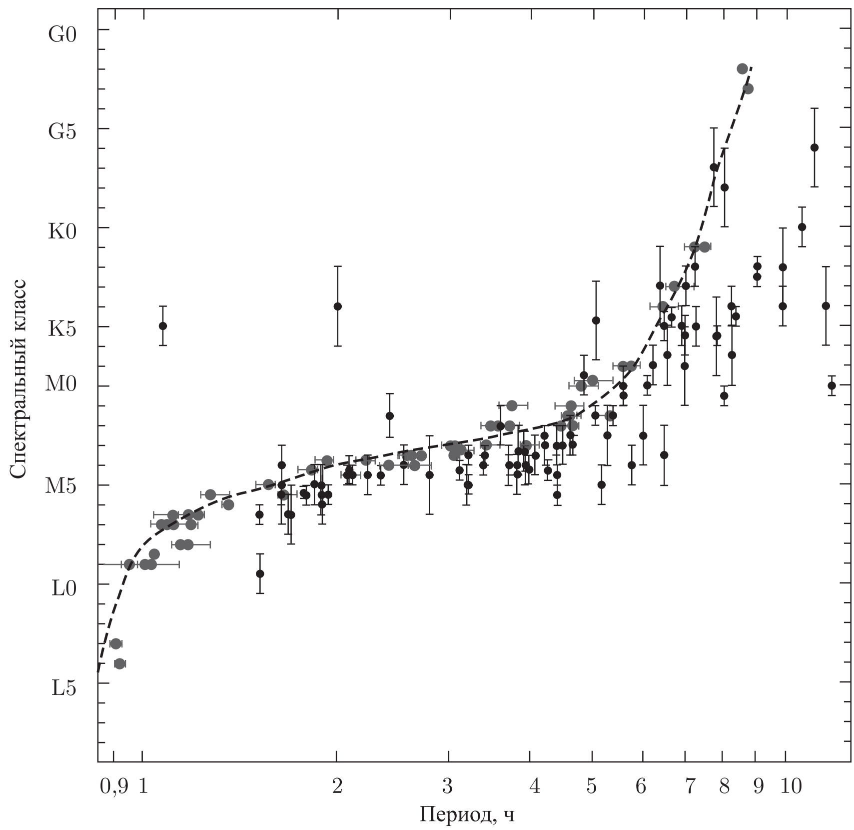


Рис. 123. Эмпирическая зависимость между спектральными классами и орбитальными периодами звезд-компонент катаклизмических двойных систем и звезд главной последовательности. Пунктирная линия — теоретическая зависимость, построенная с помощью эволюционных изохрон (по материалам работы Knigge, 2006). Здесь точки с вертикальными барами соответствуют звездам-донорам в катаклизмических двойных системах, а точки с горизонтальными барами — одиночным звездам главной последовательности

Из рис. 123 следует, что спектральные типы звезд-доноров в катаклизмических двойных являются систематически более поздними, чем в случае одиночных звезд главной последовательности. Причем это имеет место не только для долгопериодических систем с $P_{\rm orb} > 3^{\rm h}$ (как это утверждалось в работе Beuermann et al., 1998), но практически во всем диапазоне орбитальных периодов катаклизмических двойных. За исключением нескольких (двух-трех) систем, отклоняющихся от общей зависимости, звезды-доноры в подавляющем числе катаклизмических двойных с периодами $P_{\rm orb} \lesssim (5\text{–}6)^{\rm h}$ образуют очень четкую последовательность на диаграмме «спектральный тип донора–орбитальный период системы» (см. рис. 123). Это позволяет считать, что большинство катаклизмических двойных систем действительно следуют описанному выше сценарию эволюции с главными механизмами потери углового момента из системы — магнитным звездным ветром и излучением гравитационных волн. Для более длинных периодов $P_{\rm orb} \gtrsim (5\text{–}6)^{\rm h}$ наблюдается все возрастающий с увеличением периода разброс точек на зависимости «спектральный класс донора–орбитальный период системы» (см. рис. 123), хотя звезды-доноры в среднем имеют также более поздние спектральные классы, по сравнению с соответствующими одиночными звездами главной последовательности. Как отмечено в работе (Beuermann et al., 1998), разброс точек для $P_{\rm orb} > (5\text{–}6)^{\rm h}$, по-видимому, связан с тем, что соответствующие звезды-доноры успели слегка проэволюционировать в ядерной шкале до начала обмена масс в системе, и разброс точек для $P_{\rm orb} \gtrsim (5\text{–}6)^{\rm h}$ отражает разброс обилия водорода в центральных частях звезд-доноров в начале обмена масс в этих катаклизмических двойных. Таким образом, как следует из рис. 123, единая эволюционная последовательность звезд-доноров в катаклизмических двойных, не искаженная эффектами их ядерной эволюции, должна рассматриваться лишь для достаточно короткопериодических систем с $P_{\rm orb} \lesssim 6^{\rm h}$ (соответствующее значение массы звезды-донора $M_2 \lesssim 0{,}7M_\odot$).

Как уже отмечалось, три системы значительно отклоняются вверх от единой последовательности «спектральный класс донора–период двойной системы». Это системы с $P_{\rm orb} < 3^{\rm h}$: SDSS J1702+3229 (Szkody et al., 2004), QZSer (Thorstenser et al., 2002), EI Psc (Mennickent et al., 2004). Эта часть диаграммы ($P_{\rm orb} < 3^{\rm h}$) должна быть населена звездами с низкой металличностью (Beuermann, 1998) или системами, в которых звезды-доноры уже значительно проэволюционировали в процессе обмена масс (но не в процессе ядерной эволюции). Для систем QZ Ser и EI Psc именно такая интерпретация наиболее предпочтительна ввиду того, что, например, орбитальный период системы EI Psc ($P_{\rm orb} = 64^{\rm m}$) очень короткий и лежит ниже значения минимального периода для «нормальных» катаклизмических двойных (Thorstensen et al., 2002). Система SDSS J1702+3229 имеет период $P_{\rm orb} = 2{,}4^{\rm h}$, лежащий внутри провала периодов $\Delta P_{\rm orb}$ для катаклизмических двойных. Она отклоняется всего лишь на 2σ от «стандартной» последовательности звезд-доноров катаклизмических двойных (см. рис. 123). Оценка спектрального класса этой системы выполнена по полосам TiO (Szkody et al., 2004). Требуются дополнительные наблюдения этой системы для уточнения ее спектрального класса.

Используя эмпирические зависимости $R_2 - M_2$ и «спектральный класса донора–орбитальный период системы» автором работ (Knigge, 2006, 2007) была построена полуэмпирическая эволюционная последовательность звезд-доноров катаклизмических двойных систем. Используя эмпирическую зависимость $R_2(M_2)$ можно на основе зависимости «период–средняя плотность донора» найти $P_{\rm orb}$ для любой фиксированной массы звезды-донора. Соответствующая эффективная температура звезды-донора может быть найдена интерполяцией теоретической зависимости $M\text{–}T_{\rm ef}$ по стандартным изохронам на Г–Р-диаграмме для звезд главной последовательности. Поскольку M_2 и R_2 известны, ускорение силы тяжести на поверхности звезды-донора легко находится. Поэтому можно найти абсолютную звездную величину звезды-донора в любой фотометрической полосе, используя сетку моделей звездных атмосфер и интерполируя по $T_{\rm ef}$. и $\lg g$. Таким образом, спектральный тип каждой звезды-донора может быть определен из калибровочной зависимости спектрального типа от показателя цвета $(I - K)$ (см. Knigge, 2006, 2007).

В табл. 42, заимствованный из работы (Knigge 2007), приведены данные для полной полуэмпирической последовательности звезд-доноров в катаклизмических двойных, вычисленные указанным выше способом. Эта последовательность охватывает интервал масс звезд-доноров $0{,}03 \leqslant M_2 \leqslant 0{,}75M_\odot$.

На рис. 124 приведено сравнение наблюдательных спектральных типов и предсказанных спектральных типов на основе построенной полуэмпирической последовательности для звезд-доноров в катаклизмических двойных системах (Knigge, 2006, 2007). Здесь темные точки соответствуют эмпирически определенным спектральным типам звезд-доноров в катаклизмических двойных с $P_{\rm orb} \lesssim 6^{\rm h}$ часов, взятым из табл. 41. Светлыми кружками обозначены значительно проэволюционировавшие звезды-доноры, которые были исключены из статистических исследований. Сплошная

Таблица 42

Полуэмпирическая последовательность звезд-доноров в катаклизмических двойных системах (по материалам работы Knigge, 2007)

P_{orb}, ч	M_2, $M_\odot$	R_2, $R_\odot$	T_{ef}, К	$\log g$	$\log L_2$, (эрг/с)	Спектр. класс
1,462	0,030	0,095	1009	4,964	28,50	T
1,420	0,035	0,098	1140	5,003	28,74	T
1,384	0,040	0,100	1271	5,037	28,96	T
1,353	0,045	0,103	1407	5,067	29,15	T
1,326	0,050	0,105	1543	5,094	29,33	T
1,302	0,055	0,107	1609	5,118	29,42	T
1,281	0,060	0,109	1675	5,141	29,51	T
1,268	0,063	0,110	1732	5,153	29,57	T
1,290	0,065	0,113	1784	5,148	29,65	L6.7
1,334	0,070	0,118	1894	5,139	29,79	L2.6
1,377	0,075	0,123	2003	5,131	29,93	L3.7
1,418	0,080	0,128	2313	5,124	30,21	M9.0
1,457	0,085	0,133	2477	5,116	30,36	M7.6
1,496	0,090	0,138	2641	5,110	30,51	M6.8
1,533	0,095	0,143	2726	5,103	30,59	M6.5
1,569	0,100	0,148	2812	5,097	30,67	M6.3
1,638	0,110	0,157	2921	5,086	30,79	M5.9
1,704	0,120	0,166	2988	5,076	30,88	M5.6
1,768	0,130	0,175	3055	5,066	30,96	M5.3
1,828	0,140	0,183	3103	5,057	31,03	M5.0
1,886	0,150	0,192	3151	5,049	31,10	M4.8
1,942	0,160	0,200	3185	5,042	31,15	M4.6
1,996	0,170	0,207	3218	5,035	31,20	M4.4
2,049	0,180	0,215	3246	5,028	31,25	M4.3
2,100	0,190	0,223	3269	5,021	31,29	M4.2
2,149	0,200	0,230	3292	5,015	31,33	M4.0
3,179	0,200	0,299	3292	4,789	31,56	M4.2
3,559	0,250	0,347	3376	4,756	31,73	M3.8
3,902	0,300	0,392	3436	4,729	31,87	M3.5
4,218	0,350	0,434	3475	4,706	31,98	M3.3
4,512	0,400	0,475	3522	4,686	32,08	M3.1
4,788	0,450	0,514	3582	4,669	32,18	M2.8
5,050	0,500	0,552	3649	4,653	32,27	M2.5
5,299	0,550	0,588	3760	4,639	32,38	M2.0
5,537	0,600	0,623	3893	4,626	32,49	M1.4
5,766	0,650	0,658	4065	4,615	32,61	M0.4
5,985	0,700	0,691	4239	4,604	32,73	K7.0
6,198	0,750	0,724	4460	4,593	32,85	K5.0

линия показывает зависимость «спектральный тип донора–орбитальный период системы», представленную в работе (Knigge, 2006, 2007) полуэмпирической последовательностью звезд-доноров (см. табл. 42).

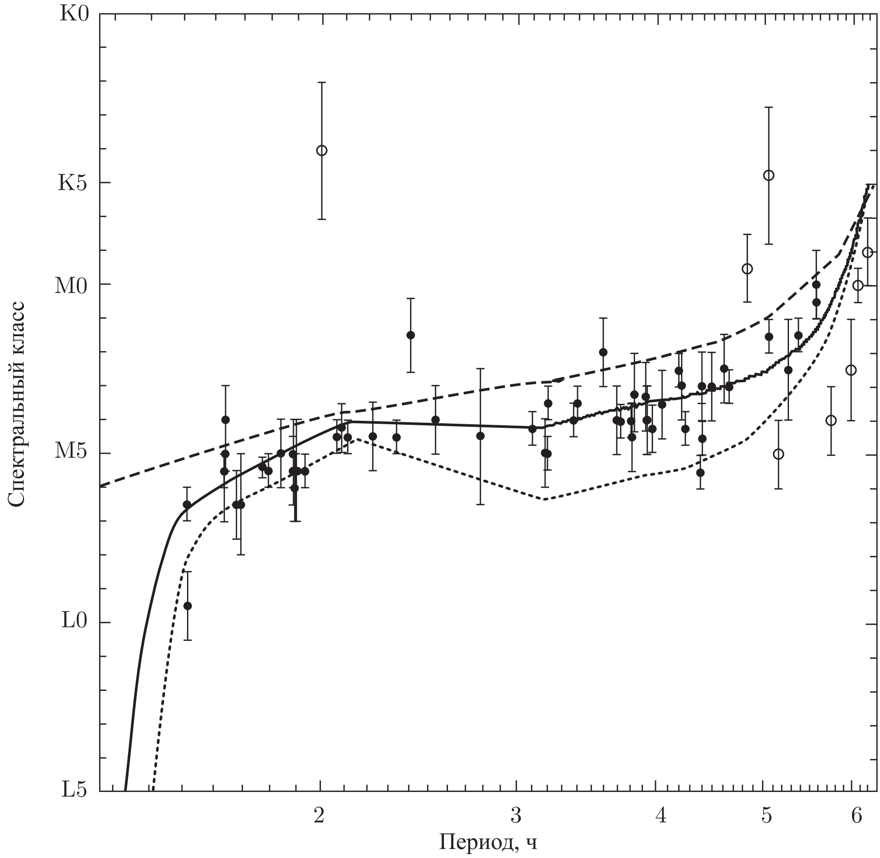


Рис. 124. Сравнение наблюдаемой (точки) и теоретически предсказанной зависимости (сплошная линия) спектральных классов звезд-доноров в катаклизмических двойных системах от орбитальных периодов этих систем (по материалам работы Knigge, 2006)

Как видно из рис. 124, в области коротких орбитальных периодов наблюдается резкий спад спектральных классов звезд-доноров к более поздним спектральным классам и к меньшим значениям T_{ef}, болометрической светимости L_2, оптической и инфракрасной светимости. Причем этот спад наблюдается до того, когда периоды систем достигают значения $P_{\min}$. Наиболее поздний спектральный класс L достигается в узком интервале периодов $1{,}3^{\text{h}} \leqslant P_{\text{orb}} \leqslant 1{,}4^{\text{h}}$. Этим можно объяснить трудности с обнаружением коричневых карликов в качестве звезд-доноров катаклизмических двойных систем, поскольку даже в ИК-диапазоне вклад излучения аккрецирующего белого карлика значителен по сравнению со светимостью коричневого карлика.

В работе (Knigge, 2006, 2007) развит также метод определения расстояний до катаклизмических двойных систем по видимой ИК-звездной величине и орбитальному периоду (Bailey, 1981). Метод основан на использовании данных по абсолютным звездным величинам звезд-доноров в ИК-диапазоне.

Все изложенное позволяет заключить, что современная эволюционная теория для катаклизмических двойных систем опирается на прочный наблюдательный базис и в основных чертах правильно описывает физику и эволюцию этого класса взаимодействующих двойных систем.

17. Параметры рентгеновской новой Мухи 1991 г. (GRS 1124-68), полученные из анализа орбитальной кривой блеска в спокойном состоянии

Рассмотрим еще один класс взаимодействующих двойных систем — класс рентгеновских двойных. В отличие от катаклизмических двойных систем, рассмотренных выше, в рентгеновских двойных аккреторами являются релятивистские объекты — нейтронные звезды и черные дыры. Типичная рентгеновская двойная система состоит из оптической звезды-донора вещества и аккрецирующего релятивистского объекта. В большинстве случаев оптическая звезда близка к заполнению своей полости Роша (или заполняет ее) и истекает через окрестности точки Лагранжа L_1, что приводит к формированию аккреционного диска вокруг релятивистского объекта и мощного рентгеновского излучения. В случае рентгеновских двойных систем с оптическими компонентами — быстро вращающимися звездами Be, аккреция вещества на релятивистский объект идет из экваториального звездного ветра звезды Be, при этом оптическая звезда далека от заполнения своей полости Роша.

Рентгеновские двойные системы принадлежат к типу ТДС на поздней стадии эволюции (см. Каталог поздних ТДС, Cherepashchuk et al., 1996). Их наблюдательные проявления весьма разнообразны и будут рассмотрены в последующих главах второй части книги. Существуют квазистационарные рентгеновские двойные с оптическими звездами O-B-сверхгигантами, а также транзиентные рентгеновские системы со спутниками Be-звездами (жесткие рентгеновские транзиенты) и системы со спутниками-звездами сравнительно малой массы (мягкие рентгеновские транзиенты или рентгеновские новые). В случае систем с Be-звездами транзиентный (вспышечный) характер рентгеновского излучения обусловлен усилением темпа аккреции при прохождении релятивистского объекта вблизи периастра эллиптической орбиты. В случае рентгеновских новых вспышки рентгеновского излучения связаны с накоплением вещества в диске, поставляемого маломассивной звездой, с последующим его выпадением (аккрецией) на релятивистский объект в результате внезапного усиления турбулентной вязкости в диске, обусловленного срабатыванием некоторой неустойчивости.

Методы и результаты определения масс релятивистских объектов в квазистационарных рентгеновских двойных системах с O–B-спутниками суммированы в монографии (Гончарский, Романов, Черепащук, 1991). Эти методы основаны на использовании функции масс оптической звезды и анализе оптической кривой блеска системы, а также в ряде случаев, на учете длительности затмения рентгеновского источника оптической звездой и информации о расстоянии до системы.

Здесь мы рассмотрим определение массы черной дыры в рентгеновской Новой Мухи 1991 (см. Антохина и Черепащук, 1993). Другое обозначение этой системы: GRS 1124-68 (GU Mus).

Рентгеновская новая GRS 1124-68 была открыта со спутников GRANAT и GINGA в январе 1991 г. (Lund et al., 1991, Sunyaev, 1991, Makino et al., 1991). Соответствующая оптическая новая ($V \sim 13^m$) открыта Вестом и др. (West et al., 1991). В спокойном состоянии GU Mus — это звезда с $R = 19{,}4^m$, $B = 20{,}9^m$ (Della Valle et al., 1991). Рентгеновский спектр и вспышечная рентгеновская кривая блеска GRS 1124-68 подобны соответствующим характеристикам известной рентгеновской новой A0620-00 — надежного кандидата в черные дыры (Sunyaev et al., 1992).

В работе Ремилларда и др. (Remillard et al., 1992) приведены оптические кривые блеска GRS 1124-68 в спокойном состоянии в фильтрах I и $B + V$, полученные с помощью ПЗС-матрицы. Кривые блеска представляют собой двойную волну за орбитальный период, причем минимум блеска соответствует переходу лучевых скоростей оптической звезды K2V через γ-скорость. Это обосновывает модель двойной системы и корректность определения функции масс оптической звезды $f_v(m) = \dfrac{m_x^3 \sin^3 i}{(m_x + m_v)^2} = 3{,}1 M_\odot$. Орбитальный период системы равен $\sim 0{,}4$ суток, орбита круговая. $B+V$-кривая блеска имеет большую амплитуду переменности ($\sim 0{,}4^m$) и сильное неравенство максимумов в квадратурах, что, по-видимому, связано с эффектами газовых потоков и их взаимодействием с аккреционным диском. I-кривая блеска имеет более симметричный вид и меньшую амплитуду ($\sim 0{,}15^m$).

Мы изложим результаты анализа I-кривой блеска системы GRS 1124-68 (Антохина и Черепащук, 1993) в рамках стандартной модели рентгеновской двойной системы с тонким аккреционным диском вокруг релятивистского объекта, лежащим в плоскости орбиты (Балог и др., 1982). Естественно предполагать, что в ближнем ИК-диапазоне (фильтр I) основной вклад в светимость системы вносит приливно-деформированная оптическая звезда K2V. Влияние газовых потоков на ИК-кривую блеска много меньше, чем на оптическую $B+V$-кривую. Поскольку модель рентгеновской двойной системы в ИК диапазоне существенно проще, чем в оптическом, можно надеяться получить ограничения на параметры системы GRS 1124-68 из анализа I-кривой блеска.

Интерпретация I-кривой блеска системы GRS 1124-68 проводилась в рамках стандартной модели рентгеновской двойной системы, в которой оптическая звезда описывается фигурой, соответствующей эквипотенциальной поверхности в модели Роша, а вокруг релятивистского объекта предполагается наличие тонкого, круглого аккреционного диска, лежащего в плоскости орбиты и имеющего радиус, равный 0,6 от максимального радиуса полости Роша релятивистского объекта (Paczynski, 1977). Следует отметить, что в широком интервале углов наклонения орбиты i в нашей модели затмения звезды диском и диска звездой не происходит, поэтому аккреционный диск вносит лишь квазипостоянную добавку к суммарной оптической светимости двойной системы (далее будем называть I-кривую блеска оптической кривой). Гравитационное потемнение на поверхности оптической звезды K2V учитывалось по формуле Люси ($\beta = 0{,}08$). Средняя температура оптической звезды K2V принималась равной 4500 K, коэффициент потемнения к краю звезды $u = 0{,}55$ для $\lambda = 9000$ Å (Al-Naimiy, 1978). Минимум блеска на фазе $\varphi = 0{,}5$ (рентгеновский источник впереди) менее глубок, что свидетельствует о вкладе эффекта «отражения» (нагрев поверхности нормальной звезды рентгеновским излучением с последующим переизлучением в оптическом и ИК-диапазоне). Как показали расчеты, модель двойной системы при отсутствии эффекта «отражения» отвергается по критерию χ^2 на очень низком уровне значимости $\alpha = 0{,}001$. Поэтому мы, наряду с другими параметрами задачи (q, i), искали также параметр $k_x = L_x/L_v$ — отношение болометрических светимостей рентгеновского источника и оптической звезды. Расчет эффекта «отражения» проводился в модели изотропно излучающего точечного рентгеновского источника. Учитывая анизотропию рентгеновского излучения от аккреционного диска вокруг черной дыры (Shakura and Sunyaev, 1973), найденные величины k_x (которые соответствуют рентгеновскому потоку в направлении на оптическую звезду) должны быть увеличены на множитель 4–5: $\overline{k}_x = (4\text{–}5)k_x$. Таким образом, $\overline{k}_x$ соответствует светимости анизотропного рентгеновского источника, проинтегрированной по всем телесным углам.

Оптическая светимость аккреционного диска (в фильтре I) принималась равной 5 % от болометрической светимости нормальной звезды ($\sim 10^{33}$ эрг/с). Таким образом, диск полагался в основном затмевающим объектом с очень малой собственной относительной светимостью в I-диапазоне, что типично для рентгеновских двойных систем, не находящихся в режиме сверхкритической аккреции.

Степень заполнения полости Роша оптической звездой принималась равной единице ($\mu = 1$). Таким образом, в нашей задаче искомыми являются параметры $q = m_x/m_v$ (m_x, m_v — массы релятивистского объекта и оптической звезды), i и $k_x = L_x/L_v$.

Как показали расчеты, для описания наблюдаемой разницы в глубинах минимумов ($\sim 0{,}04^m$), необходимо принять $k_x = 2$–6 для значений $q = 3$–20. Это означает, что $\overline{k}_x = 10$–30, и полная рентгеновская светимость аккреционного диска составляет $L_x^{\mathrm{d}} = (10\text{–}30)L_v$. Учитывая, что отношение оптической и рентгеновской светимостей аккреционного диска в системе GRS 1124-68 в период активности этой рентгеновской Новой в январе 1991 г. составляло 0,2–03 % (Гребенев и др., 1991) и предполагая, что это соотношение сохраняется и для спокойного состояния, получаем оптическую светимость аккреционного диска, составляющую в нашем случае 5–9 % от светимости оптической звезды. Это согласуется с принятым нами значением относительной оптической (в фильтре I) светимости аккреционного диска. Аномальное соотношение глубин главного и вторичного минимумов также могло бы быть связано с переходом величины i через критическое значение угла наклонения орбиты (в модели «чистого» эффекта эллипсоидальности — см. Дмитриенко и Шакура, 1974, Бочкарев и др., 1979б). Однако наши модельные расчеты показали, что для $q = 10$ главный минимум глубже вторичного всего на $0{,}01^m$ при $i = 20°$. С увеличением угла i эта разница уменьшается и при $i > 35°$ вторичный минимум становится глубже (в модели «чистого» эффекта эллипсоидальности). Таким образом, этим эффектом нельзя объяснить наблюдаемое соотношение минимумов для кривой блеска системы GRS 1124-68.

Решение обратной задачи интерпретации I-кривой блеска проводилось прямым перебором по параметрам q, i, k_x. При этом минимизировалась весовая сумма квадратов уклонений наблюдаемой кривой блеска от теоретической. Веса принимались равными $1/\sigma_i^2$, где σ_i — среднеквадратичные ошибки для нормальных точек кривой блеска, приведенные в работе Ремилларда и др. (Remillard et al., 1992). Для проверки адекватности используемой модели наблюдаемой I-кривой блеска и оценки доверительных интервалов для искомых параметров использовался критерий χ^2. Найденные значения масс m_x и m_v для различных значений q, i приведены в работе Антохиной и Черепащука (1993). На рис. 125 приведены наблюдаемая и теоретическая кривые блеска для оптимальных параметров, минимизирующих невязку

$$\Delta\,(q,\,i,\,k_x) = \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{m_i^0 - m_i^c}{\sigma_i}\right)^2,$$

где m_i^0 наблюдаемая звездная величина в i-й нормальной точке кривой блеска, m_i^c — теоретическая звездная величина, σ_i — среднеквадратичная ошибка нормальной точки. На рис. 126 показана зависимость невязок $\Delta(q, i, k_x)$ от параметров q, i, минимальных по k_x. Здесь же отложены критические χ^2 на уровне значимости 1 % и 0,1 %. Видно, что при всех значениях параметров кривые невязок Δ лежат выше критического значения χ^2 на уровне значимости 1 %. Это означает, что используемая нами простая модель двойной системы отвергается на уровне значимости 1 % (отвергая модель, мы правы в 99 случаев из 100). Таким образом, вероятность ошибиться, отвергая модель в случае ее истинности, менее 1 %. Значит у нас имеются большие основания отвергнуть модель. Это связано с тем, что нормальные точки на I-кривой блеска испытывают значительный разброс при сравнительно малых ошибках наблюдений σ_i, что, по-видимому, отражает влияние физической переменности системы. Только на уровне значимости 0,1 % наша модель

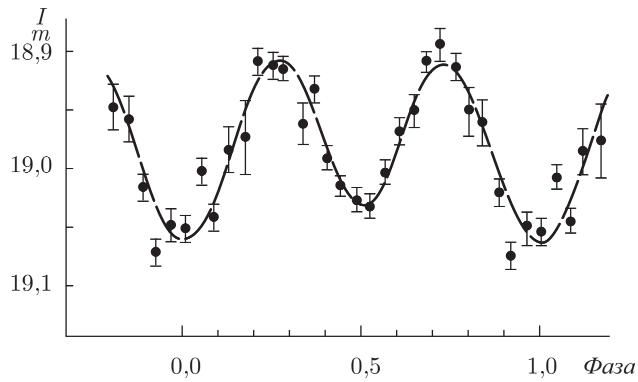


Рис. 125. Наблюдаемая (точки) и теоретическая кривые блеска в фильтре I рентгеновской двойной системы XN Mus для оптимальных значений параметров: $q = M_x/M_v = 16$, $i = 41°$, $k_x = L_x/L_v = 6$, $M_x = 13M_\odot$

не отвергается, и в этом случае можно пытаться оценивать доверительные интервалы для параметров q, i. При этом, поскольку критический уровень значимости 0,1 % очень мал, в нашей модели получаются «плохие» оценки параметров q, i, k_x и их доверительных интервалов. Имея это в виду, мы, тем не менее, выполнили оценку параметров q, i, k_x для системы GRS 1124-68. Как следует из рис. 126, минимум невязки $\Delta(i)$ для каждого q позволяет установить зависимость $i(q)$: $i = 47° \pm 2°$, $45° \pm 2°$, $42° \pm 1{,}5°$, $41° \pm 1{,}5°$ для $q = 3$, 5, 10, 16 соответственно. Таким образом, значение угла наклонения орбиты i слабо зависит от отношения масс q в широком диапазоне изменения q, и величина q из кривой блеска не определяется.

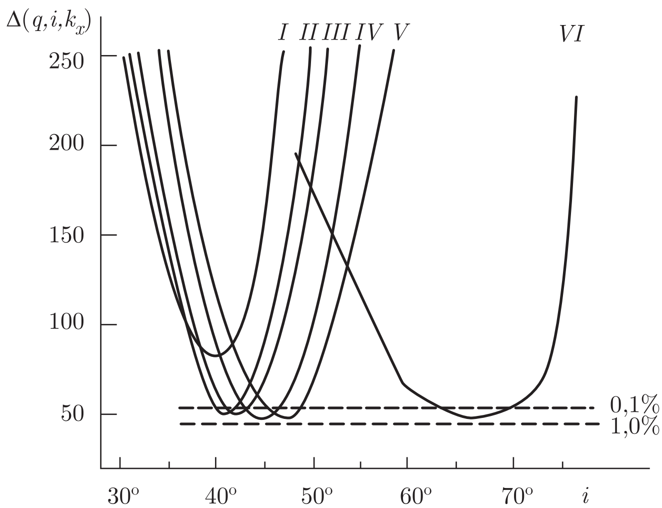


Рис. 126. Система XN Mus. Зависимость невязки Δ от угла наклонения орбиты i для различных значений q, μ, k_x: $I - q = 10$, эффект «отражения» не учитывается (в этом случае невязка больше, чем при учете эффекта отражения); $II - q = 16$, $\mu = 1$, $k_x = 6$; $III - q = 10$, $k_x = 5$; $IV - q = 5$, $k_x = 3$; $V - q = 3$, $k_x = 2$; $VI - q = 10$, $\mu = 0{,}9$, $k_x = 5$. Штриховыми линиями показаны критические значения невязки по уровню значимости 0,1 % и 1 % для статистики χ^2

Следует отметить, что мы считали оптическую звезду заполняющей свою полость Роша ($\mu = 1$), что естественно, поскольку маломассивная звезда в двойной системе может обеспечить формирование аккреционного диска вокруг релятивистского объекта лишь в том случае, если она заполняет свою полость Роша и истекает через внутреннюю точку Лагранжа L_1 (звездный ветер маломассивных звезд имеет очень малую интенсивность, например, для Солнца темп потери массы в виде ветра составляет $\dot{M} = 10^{-14} M_\odot$/год). Чтобы проверить чувствительность задачи к изменению параметра μ, мы выполнили анализ кривой блеска для фиксированного значения $\mu = 0{,}9$. Соответствующая кривая невязок приведена на рис. 126. Видно, что значению $\mu = 0{,}9$ соответствует $i = 65°$.

На рис. 127 приведена допустимая область значений параметра $i(q)$, полученная из интерпретации I-кривой блеска (область I). В интервале q от 3 до 20 величина $i(q)$ меняется весьма слабо. Чтобы однозначно найти решение задачи,

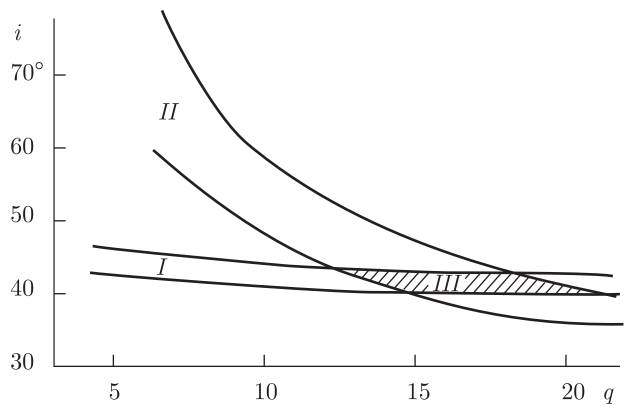


Рис. 127. Допустимые области значений параметров i и q для системы XN Mus: I — получена из интерпретации кривой блеска, II — получена с использованием значений массы оптической звезды M_v и наблюдаемой функции масс $f_v(M)$. В результате пересечения областей I и II получается окончательная область III для возможных значений параметров системы XN Mus

нужно из дополнительных соображений зафиксировать отношение масс $q = m_x/m_v$ или массу оптической звезды m_v (например, в соответствии с ее спектральным классом K2 и классом светимости V). На рис. 127 приведена вторая допустимая область параметра $i(q)$, (область II), полученная для значения массы оптической K2V звезды $m_v = (0{,}7\text{–}0{,}8) M_\odot$, с использованием функции масс оптической звезды $f_v\,(m) = \dfrac{q m_v \sin^3 i}{(1+1/q)^2} = 3{,}1 M_\odot$. Эта вторая допустимая область построена с учетом неопределенностей в значениях m_v и $f_v(m)$. Пересечение двух допустимых областей для значений $i(q)$, полученных из решения кривой блеска и с привлечением информации о массе оптической звезды и ее функции масс, дает нам результирующую область возможных значений i и q (область III — см. рис. 127). В этом случае окончательные значения параметров следующие: $q = 12\text{–}21$, $i = (39\text{–}43)°$, $m_x = (9\text{–}16) M_\odot$, $m_v = (0{,}7\text{–}0{,}8) M_\odot$ (зафиксирована). Компьютерная модель системы GRS 1124-68 при оптимальных значениях параметров приведена на рис. 128. Значение $m_x = (9\text{–}16) M_\odot$ намного превышает $3 M_\odot$ — теоретический верхний предел массы нейтронной звезды, предсказываемый ОТО Эйнштейна, что позволяет считать GRS 1124-68 надежным кандидатом в черные дыры.

В работе (Shahbaz et al., 1997) с использованием спектроскопически определенной вращательной скорости оптической звезды K2V ($v \sin i = (106 \pm 13)$ км/с) и новой инфракрасной кривой блеска системы GRS1124-68 в более далеком ИК-диапазоне (фильтр H), где искажающее влияние газовых потоков минимально, получены новые параметры этой системы: $i \approx 54°$, $q = m_x/m_v \simeq 7{,}5$, $m_x = 5{,}8M_\odot$, $m_v = 0{,}8M_\odot$. При этом, поскольку масса оптической звезды m_v определена независимо из функции масс $f_v(m)$ при известном q, эти результаты являются менее модельно зависимыми, по сравнению с нашими результатами интерпретации I-кривой блеска системы GRS1124-68, в которых мы не имели возможности оценить q независимо по вращательному уширению профилей линий поглощения в спектре оптической звезды K2V. Качественно результаты нашей интерпретации и результаты работы (Shahbaz et al., 1997) согласуется между собой, демонстрируя возможный интервал неопределенности найденных параметров системы GRS 1124-68.

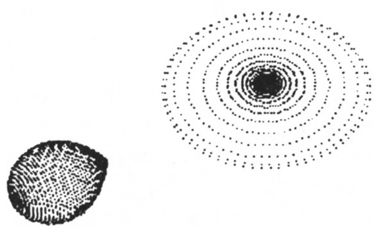


Рис. 128. Компьютерная модель системы XN Mus для $q = M_x/M_v = 16$, $i = 41°$, $M_x = 13M_\odot$

Таким образом, спектральные и фотометрические наблюдения рентгеновских двойных систем позволяют надежно измерять массы нейтронных звезд и черных дыр. Более детально методы и результаты определения масс релятивистских объектов в рентгеновских двойных системах будут изложены в последующих главах.

18. Определение параметров рентгеновской двойной системы SS 433, находящейся в сверхкритическом режиме аккреции

SS 433 — это массивная затменная рентгеновская двойная система на продвинутой стадии эволюции, когда оптическая звезда заполняет свою полость Роша. По своим характеристикам она принадлежит к классу так называемых микроквазаров, характерная особенность которых — это наличие коллимированных релятивистских выбросов-джетов. С момента своего открытия (Clark and Murdin, 1978, Margon et al., 1979, Crampton et al., 1980, Cherepashchuk, 1981) эта уникальная рентгеновская двойная система тщательно исследовалась в различных диапазонах спектра: оптическом, ИК, радио, а также в рентгеновском (см. обзоры: Margon, 1984, Черепащук, 1988, 2002, Фабрика, 2004 и ссылки в них).

Среди десятка известных микроквазаров (см. обзоры: Castro-Tirado et al., 2001, Carraminana et al., 2001 и ссылки в них) объект SS 433 выделяется следующими особенностями.

1. В этой системе массивная оптическая звезда заполняет свою полость Роша и истекает на релятивистский объект в тепловой шкале времени релаксации с огромным темпом $\sim 10^{-4} M_\odot$/год, поэтому аккреция вещества на релятивистский объект здесь идет в сверхкритическом режиме (Shakura and Sunyaev, 1973). В этом случае сила давления радиации уравновешивает силу гравитационного притяжения, и из центральных частей аккреционного диска истекает мощный звездный ветер. Основная часть рентгеновского излучения, формирующегося при аккреции вблизи релятивистского объекта, перерабатывается в оптический и УФ-диапазоны в оптически толстом ветре, поэтому в системе SS 433 наблюдается оптически яркий, геометрически толстый «диск», граница которого является своеобразной фотосферой

для выходящего наружу излучения, а собственно аккреционный диск погребен внутри этой фотосферы и не наблюдается.

2. Из центральных частей сверхкритического аккреционного диска перпендикулярно его плоскости симметрии вырываются две противоположно направленные, узконаправленные (коллимированные) струи газа (джеты) с релятивистскими скоростями $V \simeq 80\,000$ км/с (0,26 с). В отличие от других микроквазаров, эти джеты наблюдаются не спорадически, а квазистационарно на протяжении по крайней мере нескольких десяткой лет, с практически постоянной скоростью истечения (по модулю) (Давыдов и др., 2009).

3. Аккреционный диск и релятивистские джеты регулярно прецессируют с почти постоянным периодом $P_{\rm prec} = 162{,}5^{\rm d}$, причем и прецессионный период $P_{\rm prec}$, и угол наклона плоскости симметрии диска к орбитальной плоскости ($\sim 20^\circ$) в среднем остаются постоянными на протяжении десятков лет (Давыдов и др., 2009).

4. Сверхкритический аккреционный диск и его центр регулярно затмеваются спутником — нормальной оптической звездой — сверхгигантом A7I (Hillwig and Gies, 2008) с орбитальным периодом $P_{\rm orb} = 13{,}082^{\rm d}$, причем форма соответствующей оптической кривой блеска сильно меняется с фазой прецессионного периода (Черепащук и Яриков, 1991, Горанский и др., 1998а,б). При этом орбитальный период двойной системы держится постоянным на протяжении более 25 лет, несмотря на значительный обмен масс между компонентами и сильный звездный ветер из сверхкритического аккреционного диска ($v \simeq 2000$ км/с, $\dot{M} \simeq 10^{-4} M_\odot$/год).

5. И аккреционный диск, и релятивистские джеты испытывают регулярное «покачивание» (вынужденную нутацию) с периодом $P_{\rm nut} \simeq 6{,}28^{\rm d}$, соответствующим сумме частот орбитального обращения компонент и прецессии диска:

$$P_{\rm nut} = (2f_{\rm orb} + f_{\rm prec})^{-1},$$

что говорит о том, что диск прецессирует в направлении, противоположном орбитальному обращению, а причина нутации связана с воздействием на него пары сил, возникающих от влияния приливного гравитационного притяжения со стороны нормальной звезды. Замечательно то, что прецессия и нутация релятивистских джетов в объекте SS 433 непосредственно наблюдается по доплеровским движениям «подвижных» эмиссионных линий в оптическом, ИК и рентгеновском спектрах объекта, которые формируются в прецессирующих джетах. В частности, подвижные эмиссионные линии водорода (H_α, H_β, H_γ и др.) регулярно перемещаются по оптическому спектру SS 433 с прецессионным периодом $162{,}5^{\rm d}$ (см. рис. 129), причем амплитуда этих перемещений достигает огромной величины ~ 1000 Å и никогда ранее не наблюдалась в спектрах галактических объектов. При этом центр симметрии этих доплеровских смещений подвижных линий смещен постоянно в красную часть спектра на 11 000 км/с в шкале скоростей благодаря влиянию поперечного эффекта Доплера.

Анализ кривых лучевых скоростей подвижных эмиссий позволяет, с использованием данных радионаблюдений высокого углового разрешения, однозначно восстановить параметры кинематической модели для прецессирующих джетов. Оказалось, что угол конуса прецессии джетов составляет $\sim 20^\circ$, а луч зрения наклонен к оси прецессии (которая перпендикулярна плоскости орбиты) на угол $i \simeq 79^\circ$ (Margon, 1984). Независимое определение угла наклонения орбиты $i \simeq 79^\circ$ в системе SS 433 представляется очень важным для построения модели этой рентгеновской двойной системы. Несмотря на тридцатилетний срок исследований объекта SS 433, с этим уникальным объектом остаются связанными многие нерешенные проблемы:

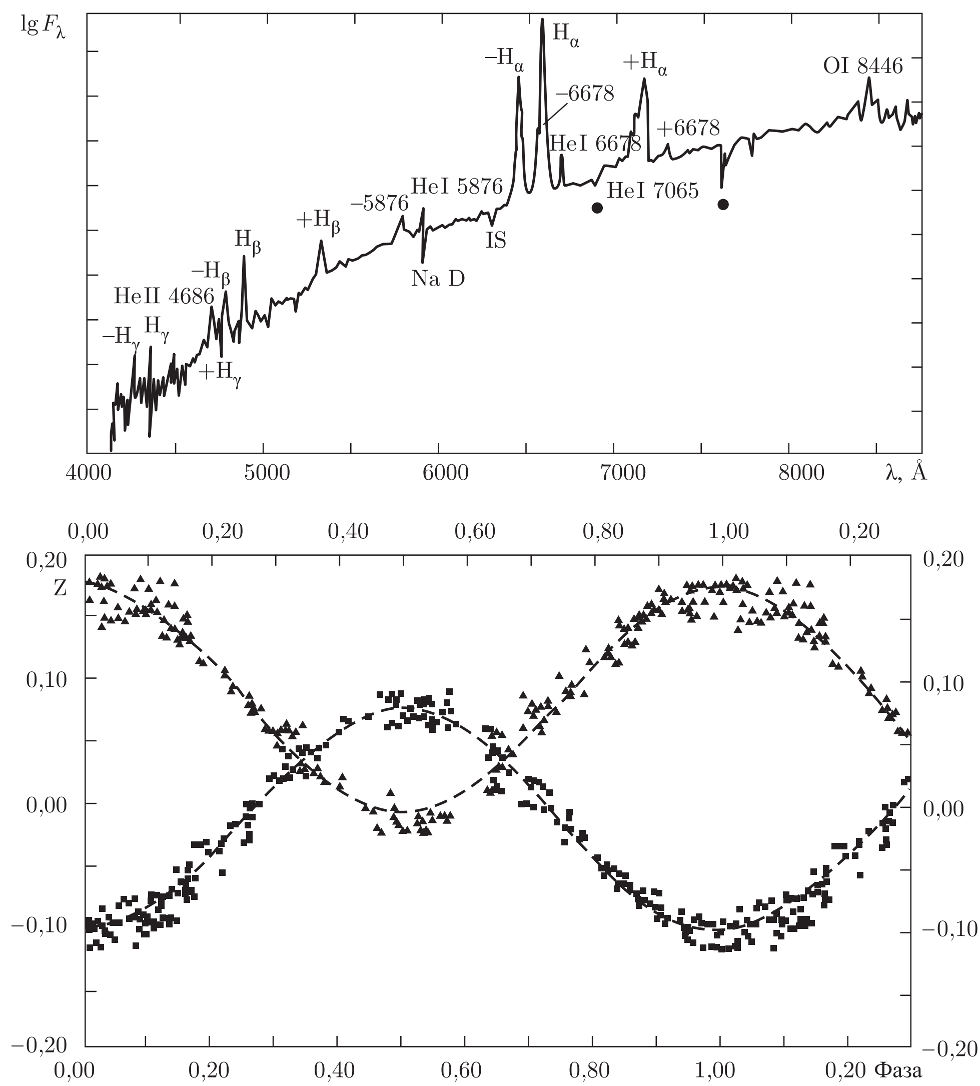


Рис. 129. Вверху: Оптический спектр объекта SS 433. Здесь $+\mathrm{H}_\alpha$, $-\mathrm{H}_\alpha$, $+\mathrm{H}_\beta$, $-\mathrm{H}_\beta$ — движущиеся компоненты стационарных эмиссионных линий H_α, H_β. Внизу: Кривые лучевых скоростей для SS 433, построенные по движущимся эмиссионным линиям. По оси абсцисс отложена фаза прецессионного $162{,}5^{\mathrm{d}}$ периода, по оси ординат — смещение линий $Z = (\lambda - \lambda_0)/\lambda_0$, где λ_0 — лабораторная длина волны. Центр симметрии смещения движущихся линий сдвинут в красную часть спектра на ~ 11000 км/с, что вызвано действием поперечного эффекта Доплера

1) природа релятивистского объекта: нейтронная звезда или черная дыра;

2) механизм коллимации (угол раствора джетов $\sim 1^\circ$) и ускорения вещества в джетах до релятивистских скоростей $v = 80\,000$ км/с;

3) природа прецессионного феномена в этой рентгеновской двойной системе.

Для выяснения природы релятивистского объекта в системе SS 433 принципиальное значение имеет оценка массы компактного объекта. Спектроскопические наблюдения (Crampton and Hutchigs, 1981) обнаружили периодические смещения эмиссионной линии He II 4686 Å в спектре SS 433 с орбитальным периодом $13{,}1^{\mathrm{d}}$ и полуамплитудой $K_x = 195$ км/с. Корреляция этих смещений с фазой оптических затмений в этой затменной двойной системе (Cherepashchuk, 1981, Crampton and Hutchings, 1981) доказывает тот факт, что в момент главного затменного минимума аккреционный диск вокруг релятивистского объекта затмевается нормальной звездой. Соответствующая функция масс

$$f_x\left(m\right) = \frac{m_v^3 \sin^3 i}{\left(m_v + m_x\right)^2} = 10{,}1 M_\odot$$

свидетельствует о том, что масса нормальной звезды превышает $10{,}1 M_\odot$. Для оценки массы релятивистского объекта m_x необходимо знать либо кривую лучевых скоростей нормальной звезды, либо ее массу m_v, либо отношение масс компонент $q = m_x/m_v$ (напомним, что $i \simeq 79^\circ$ известно из анализа кривых лучевых скоростей для подвижных эмиссий). Несмотря на большие усилия (Gies et al., 2002, Hillwig et al., 2004, Barnes et al., 2006, Cherepashchuk et al., 2005), линии поглощения, принадлежащие нормальной звезде, в спектре SS 433 до последнего времени надежно не были обнаружены. Более того, даже значение функции масс релятивистского объекта $f_x(m) = 10{,}1$, найденное в работе (Crampton and Hutchings, 1981) может быть пересмотрено в сторону уменьшения. Например, в работе (D'Odoriko et al., 1991) были получены спектры SS 433 более высокого разрешения, чем у Крэмптона и Хатчингса, построена более надежная кривая лучевых скоростей по эмиссионной линии He II 4686 Å, амплитуда которой оказалась значительно меньше: $K_x = (112 \pm 5)$ км/с. Соответствующая функция масс $f_x(m) \simeq 2M_\odot$, что привело авторов к выводу о том, что SS 433 — сравнительно маломассивная двойная, подобная известной рентгеновской двойной системе Her X-1 (HZ Her). Однако D'Odoriko et al. (1991) получили спектры SS 433 в момент близкий к «кроссоуверу», когда прецессирующий аккреционный диск был виден «с ребра», и центральные части диска были закрыты для наблюдателя. Поэтому можно ожидать, что кривая лучевых скоростей по линии He II 4686 Å, полученная D'Odoriko et al. (1991), искажена влиянием газовых потоков в системе и не совсем точно отражает орбитальное движение компонент. Как показано в работе Фабрики и Бычковой (Fabrika and Bychkova, 1990) на основе анализа спектрограмм, полученных на 6-метровом телескопе, именно в момент максимального раскрытия диска для наблюдателя полуамплитуда кривой лучевых скоростей, построенной по эмиссионной линии He II 4686 Å для SS 433 максимальна, и соответствующая функция масс $f_x(m) = 8M_\odot$, что согласуется с результатами Крэмптона и Хатчингса (1981). Таким образом, функция масс оптической звезды $f_v(m)$ для системы SS 433 до последнего времени была неизвестна, а функция масс релятивистского объекта $f_x(m)$ известна с большой неопределенностью: $f_x(m)$ лежит в интервале от $(8\text{–}10)M_\odot$ (наиболее предпочтительное значение) до $2M_\odot$.

Лишь совсем недавно в работе (Hillwig and Gies, 2008) линии поглощения в спектре оптической звезды — сверхгиганта A7I были обнаружены. Полуамплитуда кривой лучевых скоростей оптической звезды $K_v = (58{,}2 \pm 3{,}1)$ км/с, функция масс оптической звезды масс $f_v(m) = 0{,}268 M_\odot$. Полуамплитуда кривой лучевых скоростей релятивистского объекта, оцененная по эмиссионной линии He II 4686 Å $K_x = (168 \pm 18)$ км/с (Hillwig et al., 2004). Отсюда получается отношение масс компонент $q = m_x/m_v = 0{,}35$ и массы компонент $m_x = (4{,}3 \pm 0{,}8)M_\odot$ и $m_v = (12{,}3 \pm 3{,}3)M_\odot$ (Hillwig and Gies, 2008), свидетельствующие о том, что релятивистский объект в системе SS 433 является черной дырой.

Из-за сильного межзвездного поглощения ($A_v \simeq 8^m$) оценка массы нормальной звезды по видимой величине, цвету и расстоянию до системы SS 433 получается с большой неопределенностью (Черепащук и др., 1982). Поэтому представляется важным пытаться независимо оценить отношение масс компонент $q = m_x/m_v$ из анализа оптических и рентгеновских затмений в системе SS 433. В работах (Гончарский и др., 1984, Антохина и Черепащук, 1985, 1987) из анализа оптических кривых блеска SS 433 в разных фазах прецессионного периода была сделана оценка $q = 0{,}3$–$0{,}4$ (хотя второе решение с $q = 1{,}2$ также не исключается). Осторожная оценка для q, полученная из анализа оптических кривых блеска SS 433 по критерию χ^2 на уровне значимости 1 % получается следующей: $q > 0{,}25$. С использованием функции масс релятивистского объекта $f_x(m) = 10{,}1M_\odot$ (Crampton and Hutchings, 1981) были получены оценки для масс компонент: $m_x = 8{,}4M_\odot$, $m_v = 21M_\odot$ для $q = 0{,}4$ и $m_x = 62M_\odot$, $m_v = 52M_\odot$ для $q = 1{,}2$. Если принять оценку $q > 0{,}25$, то $m_x > 4M_\odot$. Результаты интерпретации оптических кривых блеска SS 433 и соответствующие модели подробно описаны в книгах (Гончарский и др., 1985, 1991). Последующие рентгеновские наблюдения SS 433, выполненные со спутников EXOSAT, GINGA и ASKA показали, что в системе наблюдаются рентгеновские затмения, совпадающие по положению с оптическими (Brinkman et al., 1989, Kotani et al., 1994, 1996, Kawai et al., 1989). В стандартном рентгеновском диапазоне 2–10 кэВ в случае SS 433 светят части релятивистских джетов, близкие к центру аккреционного диска ($L_x \simeq 10^{36}$ эрг/с), причем в рентгеновском спектре видны, в частности, подвижные эмиссионные линии Fe XXV и Fe XXVI на энергии $\sim 6{,}4$ кэВ, смещенные как в высокоэнергичную («синюю») часть спектра (от джета, направленного к наблюдателю), так и низкоэнергичную («красную») часть спектра (от джета направленного от наблюдателя). Более того, и «синие», и «красные» подвижные рентгеновские линии продолжают оставаться видимыми в спектре SS 433 даже в середине рентгеновского затмения. Таким образом, рентгеновские джеты в SS 433 настолько длинны, что не только тело аккреционного диска, но даже тело нормальной звезды затмевают рентгеновские джеты лишь частично. Все эти факты накладывают ограничения на длину рентгеновских джетов, плотность вещества в них, а также на размеры аккреционного диска и звезды. Анализ рентгеновских затмений в диапазоне 2–10 кэВ, выполненный на основе наблюдений со спутников GINGA и ASKA, привел к выводу о малом отношении масс компонент в системе SS 433: $q = m_x/m_v = 0{,}155$ (Kawai et al.,1989, Kotani et al., 1996). В этих работах предполагалось, что рентгеновское излучение от SS 433 формируется в тонких длинных джетах, вырывающихся в противоположных направлениях из центра аккреционного диска перпендикулярно его плоскости. Независимая интерпретации рентгеновских наблюдений со спутника GINGA, выполненная в предположении о том, что рентгеновское излучение от SS 433 в диапазоне 2–10 кэВ формируется в сравнительно толстых «джетах» (являющихся основаниями для тонких джетов), также привела к выводу о малом отношении масс компонент: $q \simeq 0{,}15$–$0{,}25$ (Антохина и др., 1992). Таким образом, результаты анализа и рентгеновских, и оптических затмений в системе SS 433 согласуются между собой, если принять значение $q = 0{,}25$. Но при столь малом отношении масс компонент при известном $i = 79^\circ$ и нормальной звезде, заполняющей свою полость Роша, полость Роша релятивистского объекта полностью затмевается оптической звездой. В этом случае минимальный блеск системы в момент затмения аккреционного диска звездой не должен меняться с фазой $162{,}5^{\mathrm{d}}$ прецессионного периода, что противоречит наблюдениям (см. рис. 130). Как видно из рис. 130, длительные фотометрические наблюдения SS 433 уверенно подтверждают прецессионную переменность минимального блеска в середине главного минимума оптической кривой блеска амплитудой $0{,}5^m$, что говорит о том, что прецессирующий аккреционный диск в системе SS 433 затмевается оптической звездой в орбитальной фазе $\varphi = 0$ не полностью, а лишь частично.

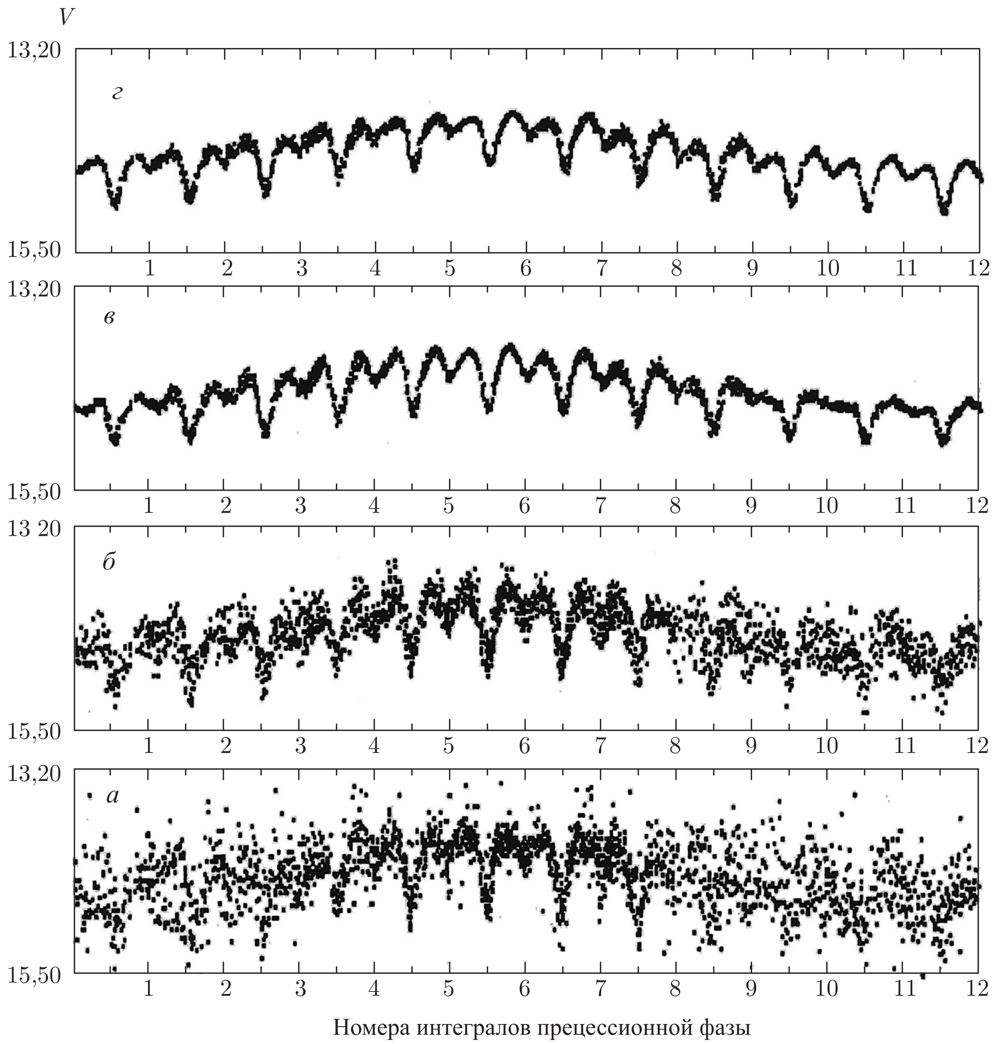


Рис. 130. Форма оптической кривой блеска системы SS 433 как функция фазы прецессионного периода. *а* — наблюдаемая кривая; *б* — синтетическая кривая блеска, содержащая все виды регулярной периодичности, кроме «вспышек»; *в* — синтетическая кривая блеска, содержащая три периодичности: орбитальную, прецессионную и нутационную; *г* — синтетическая кривая блеска, содержащая только две периодичности: орбитальную и прецессионную. По оси абсцисс отложены номера интервалов прецессионной фазы

Все эти противоречия между результатами анализа оптических и рентгеновских наблюдений SS 433 можно пытаться преодолеть, развивая новую модель SS 433 и проводя наблюдения в жестком рентгеновском диапазоне, в котором, как можно ожидать, светятся основания рентгеновских джетов, т. е. самые центральные части аккреционного диска.

В работе Черепащука и др. (Cherepashchuk et al., 1995) рентгеновские затмения в стандартном диапазоне 2–10 кэВ были объяснены с помощью модели сталкивающихся сверхзвуковых звездных ветров от сверхкритического аккреционного диска и оптической звезды. Поскольку плотная область взаимодействия звездных ветров лежит в пространстве между компонентами, в этой модели удается удовлетворительно описать большую наблюдаемую ширину рентгеновского затмения при значениях отношения масс компонент, близких к единице. Это позволяет снять противоречия между рентгеновской и оптической кривой блеска SS 433 и свидетельствует в пользу наличия черной дыры в системе SS 433. Однако в этой модели, поскольку затмение рентгеновского источника происходит не только телом нормальной звезды, но и плотной областью взаимодействия звездных ветров, длительность рентгеновского затмения должна зависеть от энергетического диапазона: в мягком рентгеновском диапазоне ($kT \sim 1$–2 кэВ) эта длительность должна быть больше, чем в жестком ($kT \simeq 7$–10 кэВ). В пределах ошибок наблюдений такого различия длительности рентгеновских затмений пока не обнаружено.

С целью дальнейшего выяснения природы SS 433 нами были предприняты рентгеновские наблюдения этого уникального объекта в жестком ($kT \sim 20$–100 кэВ) рентгеновском диапазоне с борта международной орбитальной гамма-обсерватории INTEGRAL. Поскольку объект SS 433 демонстрирует сверхкритический режим аккреции, основная часть жесткого рентгеновского излучения, формирующегося вблизи центрального релятивистского объекта в результате аккреции, должна перерабатываться в более мягкий диапазон в оптически толстом звездном ветре. Поэтому ожидать значительного рентгеновского потока в жестком диапазоне от объекта SS 433 казалось маловероятным. Однако первые же наблюдения SS 433 с борта обсерватории INTEGRAL показали, что этот объект является заметным источником жесткого рентгеновского излучения (см. рис. 131). Светимость жесткого рентгеновского излучения

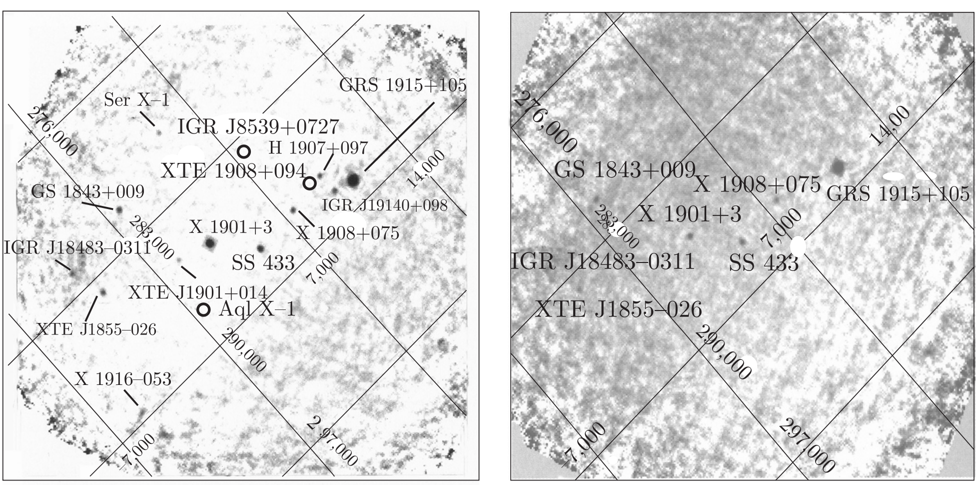


Рис. 131. Карта неба в области объекта SS 433, полученная телескопами IBIS/ISGRI в мае 2003 г., с борта орбитальной гамма-обсерватории INTEGRAL. Слева — диапазон 25–50 кэВ, справа — диапазон 50–100 кэВ

для SS 433 в диапазоне 20–100 кэВ составляет $\sim 10^{35}$ эрг/с, что всего лишь на порядок меньше светимости SS 433 в стандартном рентгеновском диапазоне 2–10 кэВ (Черепащук и др., 2003). По-видимому, геометрия сверхкритического аккреционного диска в системе SS 433 далека от сферической, и в центральной его части имеется «канал» (выметаемый релятивистскими джетами и высокоскоростной компонентой ветра), через который жесткое рентгеновское излучение «просачивается» наружу и становится доступным для внешнего наблюдателя.

За четыре года наблюдений SS 433 на обсерватории INTEGRAL была изучена орбитальная затменная и прецессионная переменность этого объекта в жестком рентгеновском диапазоне. Неожиданным результатом этих исследований (Cherepashchuk et al., 2005) оказалось то, что ширина рентгеновского затмения в жестком диапазоне больше, чем его ширина в мягком (рис. 132). Это радикально отличает объект

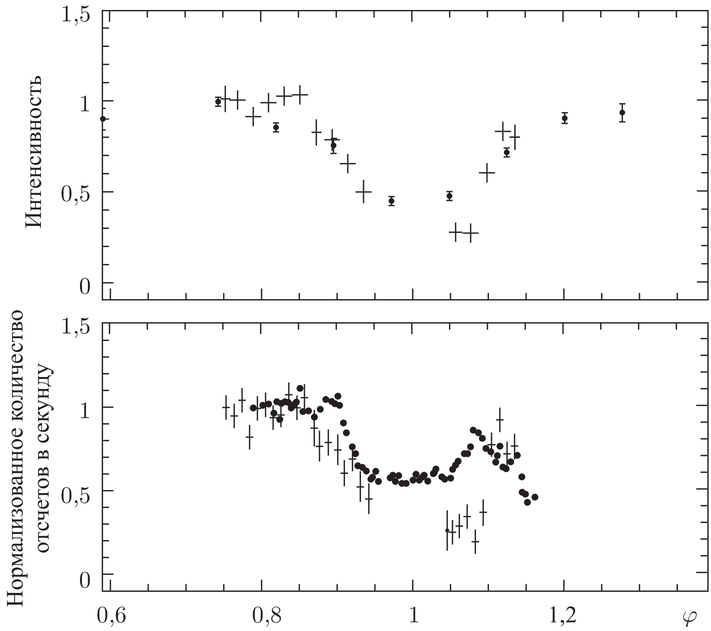


Рис. 132. Вверху: рентгеновское затмение в системе SS 433 в диапазоне 18–60 кэВ (наблюдения на спутнике INTEGRAL, телескоп IBIS/ISGRI, май 2003 г.). Жирные точки — оптические наблюдения в фильтре V, выполненные одновременно с рентгеновскими. Внизу: крестики — рентгеновское затмение SS 433 в диапазоне 18–60 кэВ (данные со спутника INTEGRAL). Жирные точки — рентгеновское затмение SS 433 в диапазоне 4,6–27 кэВ (наблюдения со спутника GINGA, см. Kawai et al., 1989). Данные со спутника INTEGRAL вверху и внизу одни и те же, отличается лишь способ усреднения

SS 433 от классических рентгеновских двойных систем (типа Cen X-3, Her X-1, Vela X-1 и др.), где ширина рентгеновского затмения убывает с ростом энергии рентгеновских квантов (что естественно, так как размеры области формирования рентгеновского излучения при аккреции на релятивистский объект убывают с ростом энергии рентгеновских квантов). Амплитуда прецессионной переменности и глубина рентгеновского затмения возрастают с ростом энергии рентгеновских квантов (рис. 133).

Если обозначить через $F_{\max}$ — максимальный наблюдаемый рентгеновский поток, а через $F_{\min}$ — минимальный поток, то амплитуда прецессионной переменности $A_{\rm pr} = F_{\max}/F_{\min}$ меняется монотонно от $\sim 1{,}6$ для $kT = 1{,}5$–5 кэВ до 4,2 для $kT = 50$–100 кэВ. Амплитуда затменной переменности $A_{\rm ecl} = F_{\max}/F_{\min}$ растет от $\sim 1{,}7$ для $kT = 1{,}0$–4,6 кэВ до $\sim 3{,}6$ для $kT = 25$–50 кэВ.

На рис. 134 приведены наблюдения SS 433 в жестком ($kT = 25$–50 кэВ) рентгеновском диапазоне, полученные в 2003–2005 гг. (Cherepashchuk et al., 2007).

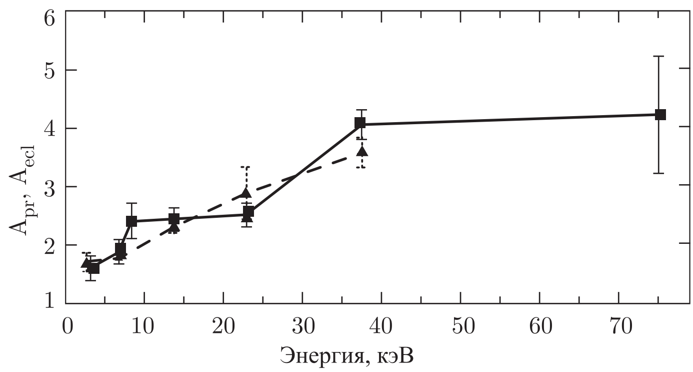


Рис. 133. Амплитуда прецессионной и затменной переменности в системе SS 433 как функция энергии в рентгеновском диапазоне: A_{pr} (квадратики и жирная линия) и A_{ecl} (треугольники и точечная линия)

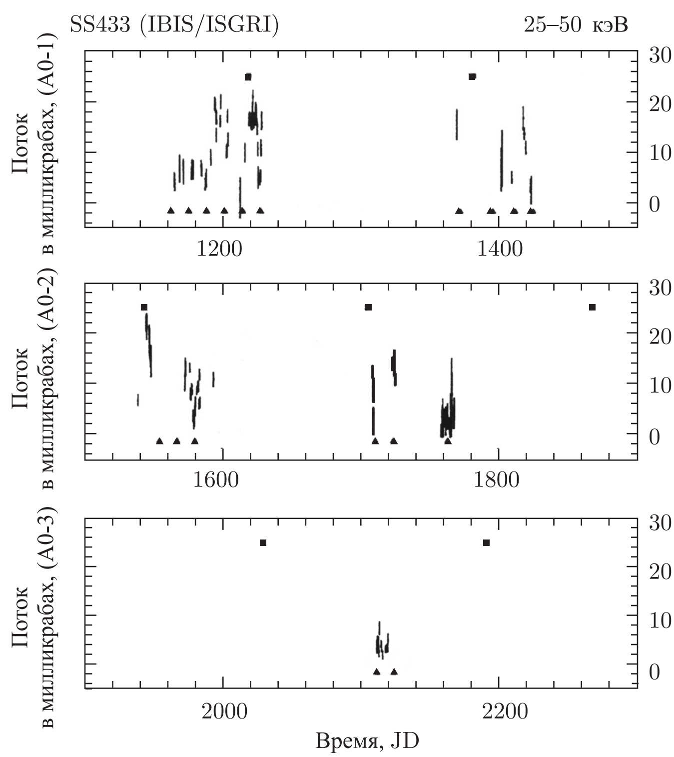


Рис. 134. Рентгеновские наблюдения SS 433 в 2003–2005 гг. По оси абсцисс — время, по оси ординат — рентгеновский поток в диапазоне 25–50 кэВ, выраженный в милликрабах. Темные квадраты вверху обозначают момент максимального раздвижения подвижных эмиссий (T_3), темные треугольники внизу — момент середины рентгеновского затмения

Отчетливо прослеживается как затменная переменность, так и прецессионная переменность. Свертка максимального внезатменного «блеска» и минимального «блеска» в середине рентгеновского затмения с фазой прецессионного периода приведена на рис. 135. Видно, что в то время, как внезатменный блеск системы испытывает регулярную прецессионную переменность, блеск системы в середине главного затмения близок к нулю и в пределах ошибок не показывает регулярной прецессионной переменности.

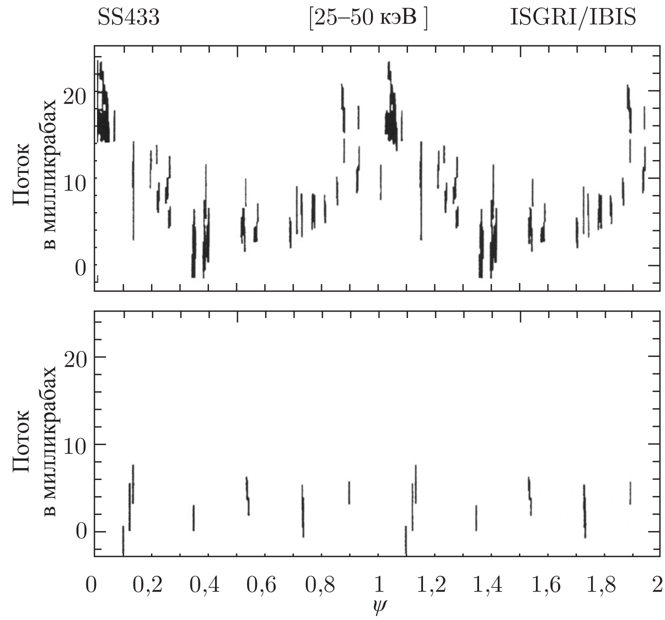


Рис. 135. Рентгеновские прецессионные кривые блеска SS 433. Вверху — максимальный блеск вне затмений, внизу — блеск в середине затменных минимумов

Орбитальные кривые блеска SS 433 вблизи главного затмения в разных фазах прецессионного периода показаны на рис. 136. Видно, что глубина рентгеновского затмения меняется в основном из-за изменения внезатменного блеска системы, обусловленного прецессией аккреционного диска. Спектры рентгеновского излучения SS 433 в диапазоне 10–200 кэВ в «высоком» и «низком» состоянии показаны на рис. 137. Для получения этих спектров все доступные наблюдения SS 433 были разделены на две части: ниже среднего значения рентгеновского потока ($\sim$ 10 милликраб в диапазоне 20–50 кэВ) и выше этого значения (соответственно, «низкое» и «высокое» состояния). Как видно из рис. 137, не наблюдается значимых изменений спектра системы в жестком диапазоне при изменении рентгеновского потока в несколько раз. Это резко отличается от поведения рентгеновского спектра SS 433 в стандартном диапазоне 2–10 кэВ, где с уменьшением рентгеновского потока (вызванным затмениями нижних, наиболее горячих частей релятивистских джетов) рентгеновский спектр становится более мягким. Данные по SS 433 в жестком рентгеновском диапазоне свидетельствуют о том, что область формирования жесткого рентгеновского излучения обусловлена в основном не джетами, а представляет собой протяженную квазиизотермическую горячую область, размеры которой сравнимы с радиусом аккреционного диска. Форма рентгеновского спектра от этой горячей протяженной области («короны») может быть описана моделью тепловой комптонизации для полусферы с температурой плазмы $kT = 20$ кэВ и оптической толщей для электронного расстояния $\tau = 0{,}2$ (Krivosheev et al., 2009).

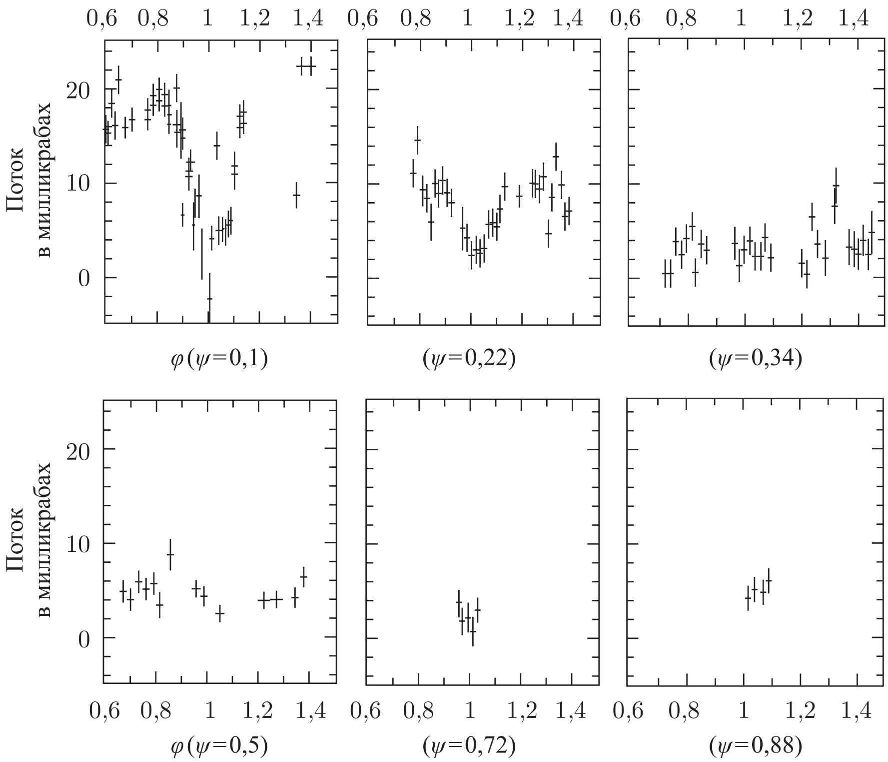


Рис. 136. Орбитальные рентгеновские кривые блеска SS 433 в разных фазах прецессионного периода ψ (за нулевую фазу принят момент максимального раздвижения подвижных эмиссий)

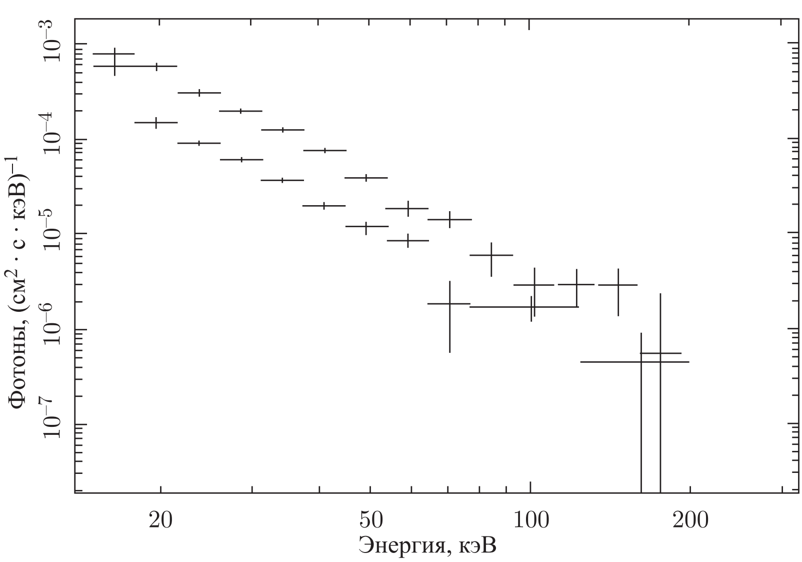


Рис. 137. Рентгеновские спектры SS 433 в диапазоне 10–200 кэВ для высокой и низкой светимости объекта (верхний и нижний спектр, соответственно). Видно, что форма рентгеновского спектра не зависит от рентгеновской светимости SS 433

Была выполнена интерпретация затменной кривой блеска SS 433 в жестком рентгеновском диапазоне 25–50 кэВ на фазе прецессионного периода $\psi = 0{,}1$ (аккреционный диск близок к моменту T_3 максимального раскрытия для наблюдателя). Кроме того проведена интерпретация сводной прецессионной кривой блеска SS 433 в жестком рентгеновском диапазоне 25–50 кэВ (Cherepashchuk et al., 2007). Такие исследования позволяют осуществлять двумерную томографию протяженной горячей «короны» вокруг аккреционного диска, поскольку во время затмения «корона» сканируется телом нормальной звезды вдоль ее основания, а во время прецессии «корона» сканируется внешними частями аккреционного диска вдоль ее высоты.

На рис. 138 приведено сравнение нашей рентгеновской кривой блеска при затмении в жестком диапазоне 25–50 кэВ с рентгеновской кривой затмения в более мягком диапазоне 18,4–27,6 кэВ, полученной со спутника GINGA. Видно, что нисходящие ветви затмения в обоих случаях сравнительно регулярны, причем в жестком диапазоне, как уже отмечалось, затмение начинается раньше, чем в мягком (эффект затмения протяженной короны в жестком диапазоне телом нормальной звезды).

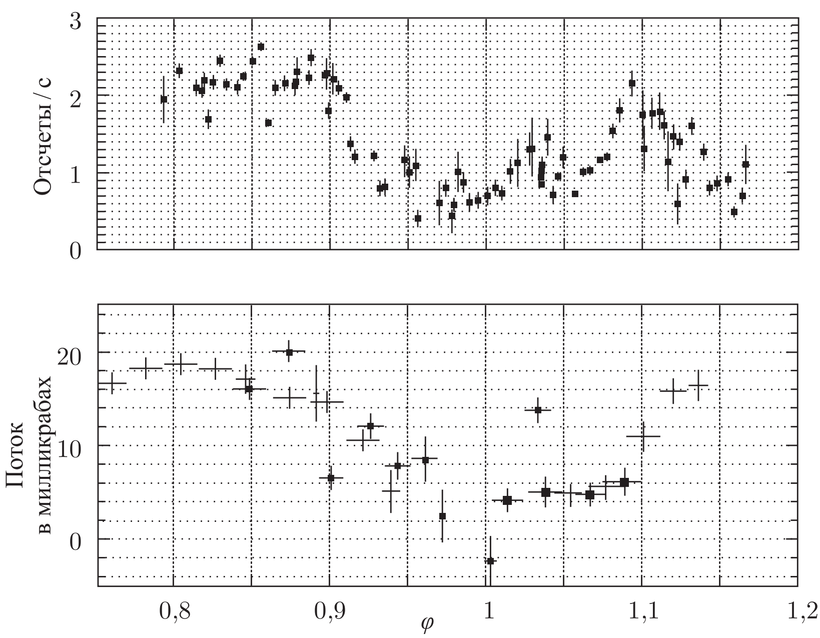


Рис. 138. Форма рентгеновского затмения в системе SS 433 в диапазоне 18,4–27,6 кэВ (вверху, данные со спутника GINGA) и в жестком диапазоне 25–50 кэВ (внизу, данные со спутника INTEGRAL)

В то же время восходящая ветвь затмения в обоих случаях сильно нерегулярна, что, по-видимому, отражает влияние на эффект затмения различных физических факторов: газовых потоков, струй и т. п. Поэтому, в дальнейших исследованиях при интерпретации затменной кривой блеска в жестком диапазоне использовалась лишь нисходящая ветвь кривой блеска.

Для анализа прецессионной и затменной рентгеновской переменности SS 433 в жестком диапазоне использовалась геометрическая модель SS 433, ранее примененная нами для анализа рентгеновских наблюдений со спутника GINGA (Антохина и др., 1992), а также для анализа первых наблюдений, полученных со спутника

INTEGRAL (Cherepashchuk et al., 2005). В этой модели тесная двойная система состоит из нормальной звезды, заполняющей свою полость Роша, и релятивистского объекта, окруженного оптически и геометрически толстым «аккреционным диском». Размеры «нормальной» звезды определяются размерами ее критической полости Роша для заданного отношения масс компонент $q = M_x/M_v$, где M_x — масса релятивистского объекта, M_v – масса нормальной звезды. «Аккреционный диск» включает в себя собственно диск, а также протяженную фотосферу, сформированную истекающим плотным ветром. Диск наклонен по отношению к орбитальной плоскости на угол $\theta = 20^\circ.30$. Орбита системы круговая. Осевое вращение нормальной звезды синхронно с орбитальным обращением. Непрозрачное тело диска (см. рис. 139) описывается коническим телом радиусом r_d и углом раскрытия ω. Центральный релятивистский объект окружен полупрозрачной однородно излучающей сфероидальной оболочкой с видимым радиусом r_j и высотой b_j, которая грубо аппроксимирует горячую «корону» (без релятивистских скоростей). Величины r_j, b_j, и r_d — безразмерные, выражены в долях радиуса относительной орбиты a. Предполагается, что только «корона» излучает в жестком рентгеновском диапазоне, в то время как звезда и толстый диск — темные объекты и лишь затмевают излучение «короны» в процессе орбитального и прецессионного движений. Угол наклонения орбиты, известный из анализа кривых лучевых скоростей подвижных эмиссий, принят равным $i = 78{,}8^\circ$.

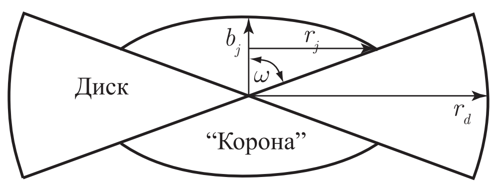


Рис. 139. Геометрическая модель аккреционного диска и его «короны» в системе SS 433 для рентгеновского излучения в жестком диапазоне спектра

Положение компонент относительно наблюдателя определяется наклонением орбиты i, углом наклона диска к плоскости орбиты $\theta = 20{,}3^\circ$ и прецессионной фазой $\psi_{\rm pr}$, причем $\psi_{\rm pr} = 0$ в момент максимального раскрытия диска относительно наблюдателя (соответствующий моменту T_3 максимального раздвижения подвижных эмиссий). Причем $\psi_{\rm pr} = 0{,}34$ и $0{,}66$, когда диск виден с «ребра» (в моменты T_1 и T_2 пересечения подвижных эмиссий соответственно). Радиус прецессирующего аккреционного диска ограничивался максимальным радиусом полости Роша релятивистского объекта.

В течение прецессионного движения угол наклона диска по отношению к лучу зрения меняется, обусловливая различные условия видимости «короны» внешним наблюдателем. Поэтому наблюдаемая прецессионная переменность SS 433 может служить для получения «вертикального» скана излучающей «короны» и определения параметров b_j и ω — высоты «короны» и угла раскрытия диска. С другой стороны, орбитальная переменность (затмение) соответствует сканированию излучающей области «короны» в «горизонтальном» направлении, что позволяет оценить параметры r_d, r_j и ω, где r_d — радиус диска, r_j — радиус видимой части сфероида, аппроксимирующего «корону». Кроме того, затменная переменность ограничивает параметр q — отношение масс компонент. На рис. 140 приведена компьютерная модель системы SS 433 для жесткого рентгеновского диапазона.

Результаты совместного анализа орбитальной и прецессионной переменности SS 433 в жестком рентгеновском диапазоне приводят к следующим выводам.

В рамках нашей модели форма и глубина рентгеновского затмения (нисходящая ветвь кривой блеска) и амплитуда прецессионной кривой блеска лучше всего описываются «короной», которая имеет большие, по сравнению с радиусом диска, размеры и сплюснутую форму по высоте. Эта «корона» располагается по обе стороны от толстого аккреционного диска (рис. 140).

Для любого значения q наилучшее описание наблюдаемого широкого орбитального рентгеновского затмения (нисходящая ветвь) получается при сравнительно большом значении видимого радиуса горячей «короны» r_j, которое лишь слегка меньше, чем значение радиуса диска r_d, так что $r_j/r_d = 0{,}7$–$0{,}9$. Высота «короны» b_j составляет около 0,3–0,6 от величины радиуса диска r_d, а величина угла раствора конуса диска равна $\omega = 70°$–$80°$.

Прецессионная кривая блеска, взятая в отдельности, не позволяет ограничить отношение масс q: одинаково хорошее описание наблюдаемой кривой прецессии теоретической кривой получается для широкого диапазона q: от 0,05 до 1,0 (рис. 141).

Анализ орбитальной затменной рентгеновской кривой блеска на фазе прецессии $\psi_{\rm prec} \simeq 0{,}1$ (только нисходящая ветвь затмения) показывает, что в диапазоне значений $q = 0{,}1$–$0{,}6$ точность описания наблюдаемой кривой блеска теоретической меняется всего лишь на 10 %, т. е. из анализа только затменной кривой блеска величина q также не определяется однозначно.

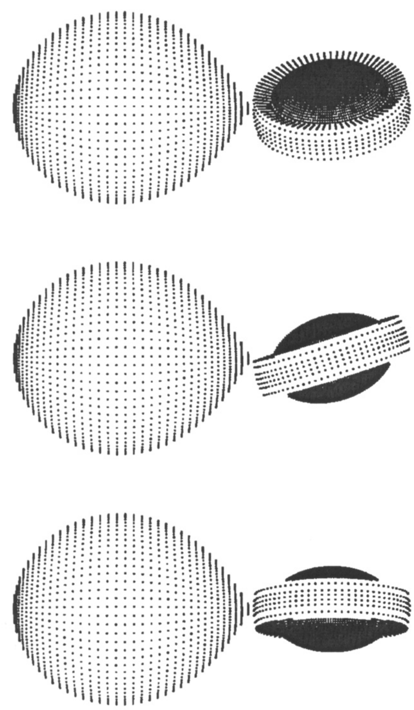


Рис. 140. Компьютерная модель SS 433 для отношения масс $q = 0{,}3$ в разных прецессионных фазах ($\psi = 15°$, $118°$ и $180°$ — сверху вниз соответственно)

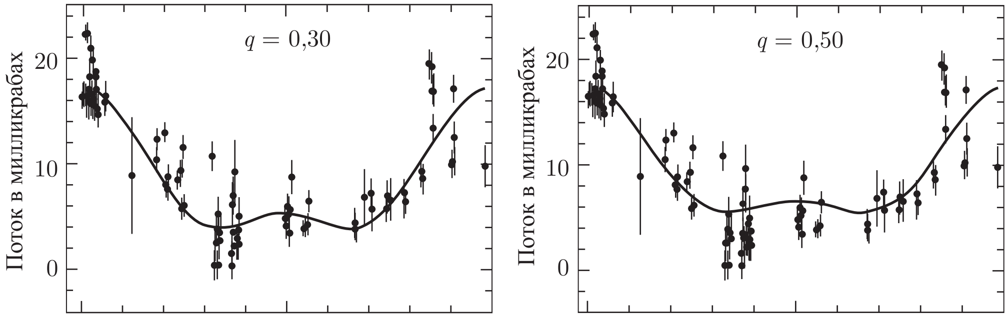


Рис. 141. Рентгеновские прецессионные кривые SS 433. Точки — наблюдения, сплошные линии — теоретические прецессионные кривые для $q = 0{,}30$ (слева) и $q = 0{,}50$ (справа)

Совместный анализ как прецессионной, так и затменной кривой блеска SS 433 (нисходящая ветвь, $\psi_{\rm prec} \simeq 0{,}1$) позволяет ограничить величину q в интервале $q = 0{,}3$–05 (рис. 142).

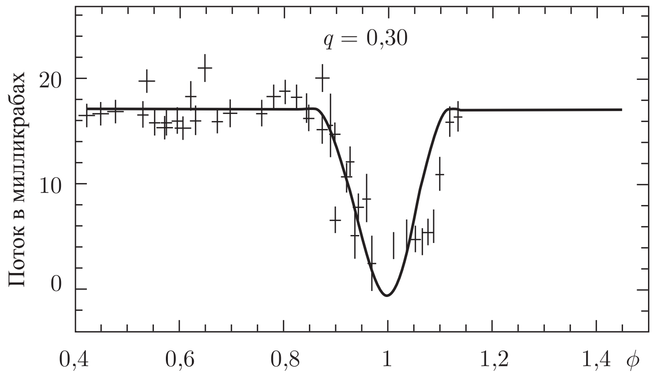


Рис. 142. Наблюдаемая (точки) и теоретическая (сплошная линия) затменные рентгеновские кривые блеска SS 433 для отношения масс компонент $q = 0{,}3$

Таким образом, анализ рентгеновских наблюдений SS 433 в жестком диапазоне (25–50 кэВ) привел к открытию протяженной горячей «короны» у сверхкритического аккреционного диска. Получены новые ограничения на величину отношения масс в системе $q = 0{,}3$–05, что, с использованием функции масс по эмиссии He II 4686 Å $f_x(m) = 10{,}1M_\odot$ (Crampton and Hutchings, 1981) позволяет предположить наличие в системе SS 433 черной дыры. Кроме того при $q = 0{,}3$–05 полость Роша релятивистского объекта затмевается телом оптической звезды не полностью, что позволяет объяснить значительную ($\sim 0{,}5^m$) прецессионную переменность SS 433 в середине главного затмения оптической кривой блеска (см. выше).

Таким образом, в мягком рентгеновском диапазоне (2–10 кэВ) излучение объекта SS 433 обусловлено релятивистскими джетами (светимость L_x (2–10 кэВ) $\simeq$ $\simeq 10^{36}$ эрг/с), а в жестком (25–50 кэВ) — горячей ($T \simeq 10^8$–10^9 K) протяженной «короной» у основания джетов (L_x (25–50 кэВ) $\simeq 10^{35}$ эрг/с). Поток кинетической энергии вещества джетов $\sim 10^{39}$ эрг/с, что сравнимо с болометрической светимостью сверхкритического аккреционного диска, высвечиваемой главным образом в УФ- и оптическом диапазонах спектра: $L_{\text{bol}} \simeq 10^{38}$–$10^{39}$ эрг/с. Неудивительно, что столь мощный поток кинетической энергии вещества релятивистских джетов воздействует на окружающий объект SS 433 остаток вспышки сверхновой — плерион W50, вплоть до громадных расстояний порядка ± 50 пк. Этот поток определяет структуру и энергетику светящихся в запрещенных линиях тонковолокнистых туманностей (филаментов), образованных «сгребанием» межзвездной среды движущимся с релятивистскими скоростями веществом джетов.

Все эти уникальные особенности объекта SS 433 делают его в высшей степени перспективным для дальнейших исследований во всех доступных электромагнитных диапазонах.

Новые наблюдения SS 433 с борта обсерватории INTEGRAL (Cherepashchuk et al., 2009) подтвердили описанные выше результаты. Была открыта сильная (до двух раз) переменность ширины затменной кривой блеска SS 433 в жестком рентгеновском диапазоне в фазе прецессии, близкой к моменту T_3 максимального раскрытия аккреционного диска. На рис. 143 приведены затменные кривые блеска SS 433 в фазах прецессии, близких к моменту T_3, полученные в разные эпохи. Видно, что ширина рентгеновского затмения в диапазоне 18–60 кэВ меняется от эпохи к эпохе в ~ 2 раза. Соответствующие наблюдения SS 433, приведенные к одному орбитальному пе-риоду, приведены на рис. 144. Здесь же показана затменная оптимальная теоретическая кривая блеска, соответствующая абсолютному минимуму

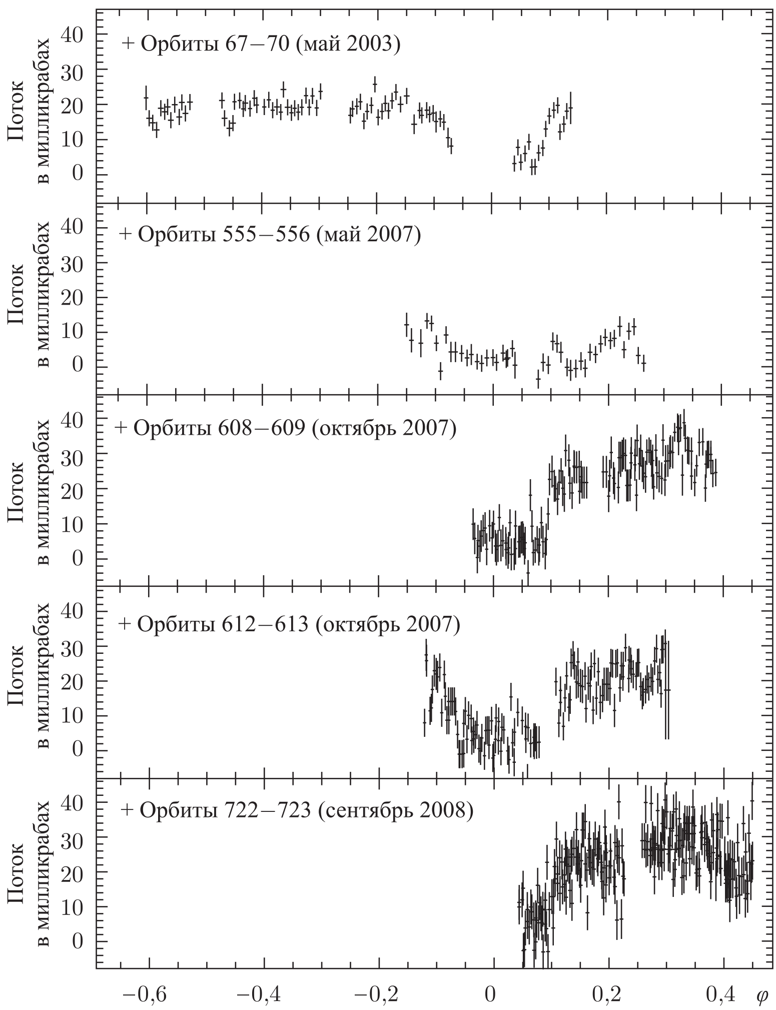


Рис. 143. Кривые рентгеновского затмения объекта SS 433, полученные со спутника INTEGRAL (данные IBIS/ISGRI, диапазона 18-60 кэВ) в различные циклы наблюдений 2003–2008 гг.

невязки. Видна сильная переменность восходящей части затменной кривой блеска, обусловленная поглощением жесткого рентгеновского излучения от «короны» аккреционного диска в нестационарных газовых потоках, звездных ветрах от диска и оптической звезды, а также в области уплотнения плазмы, обусловленной столкновением звездных ветров. Столь сильная переменность ширины рентгеновского затмения свидетельствует о том (Cherepashchuk et al., 2009), что рентгеновское затмение в системе SS 433 не может описываться моделью чисто геометрического затмения. При интерпретации рентгеновского затмения в системе SS 433 необходимо принимать во внимание тот факт, что эффективные размеры диска затмевающей оптической звезды из-за поглощения в газовых структурах превышают размеры гидростатического тела этой звезды, причем это превышение разное в разных диапазонах рентгеновского спектра (по-видимому это превышение возрастает с уменьшением

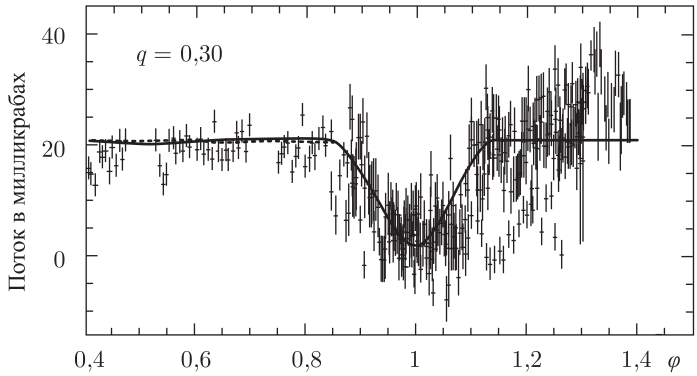


Рис. 144. Сводная кривая рентгеновских затмений в системе SS 433 в диапазоне 18–60 кэВ (наблюдения со спутника INTEGRAL). Сплошная линия — оптимальная теоретическая кривая затмения для отношения масс компонент $q = m_x/m_v = 0{,}3$. Видна сильная физическая переменность наблюдаемой кривой затмения, особенно в области восходящей части кривой блеска

энергии рентгеновских квантов). Для того, чтобы иметь основания применять для интерпретации рентгеновского затмения в системе SS 433 геометрическую модель, мы должны взять за основу лишь верхнюю огибающую затменной кривой блеска, отдавая предпочтение ее наиболее стабильной нисходящей ветви (рис. 144).

Результаты совместной интерпретации затменной (верхняя огибающая) и прецессионной кривых блеска SS 433 в жестком рентгеновском диапазоне ($kT = 18$–60 кэВ) приведены на рис. 145, где представлены суммарные приведенные значения $\chi^2_{\text{tot}} = \chi^2_{\text{orb}} + \chi^2_{\text{prec}}$ и χ^2_{orb} как функции искомого отношения масс компонент $q = m_x/m_v$ (невязки минимальны по остальным параметрам модели: r_d, ω, r_j, b_j). Здесь χ^2_{orb} — приведенное χ^2 для орбитальной кривой блеска (верхняя огибающая), χ^2_{prec} — приведенное χ^2 для прецессионной кривой блеска.

Как видно из рис. 145, значения приведенных χ^2_{tot} и χ^2_{orb} (минимизированные по остальным параметрам: r_d, ω, r_j, b_j) сильно превышают единицу. Это означает, что наша модель слишком упрощена и не вполне адекватна используемым наблюдательным данным. Эти данные демонстрируют значительный разброс, вызванный как сильной иррегулярной физической переменностью жесткого рентгеновского потока, так и систематическими эффектами поглощения газовыми потоками, звездными ветрами и областью столкновения звездных ветров. Поэтому в рамках нашей простой модели, не учитывающей влияния этих факторов, мы не можем дать надежной оценки доверительной области для искомых параметров, в том числе, параметра q.

Тем не менее, ввиду того, что величины приведенных χ^2_{tot} и χ^2_{orb} сильно (в несколько раз) меняются с изменением q (рис. 145) представляется разумным выбрать оптимальное значение q по результатам нашего анализа. Как видно из рис. 145, χ^2_{tot} резко и сильно возрастает с уменьшением q для $q < 0{,}3$ и медленно возрастает с увеличением q для $q > 0{,}3$. Абсолютный минимум $\chi^2_{\text{tot}} \simeq 8{,}21$ достигается при $q \simeq 0{,}3$. Поэтому мы можем принять как оптимальное значение $q \simeq 0{,}3$. С другой стороны, поскольку величина χ^2_{orb} начинает быстро возрастать для $q > 0{,}5$ (рис. 145), мы можем дать оценку сверху для q: $q \leqslant 0{,}5$.

Таким образом, в рамках нашей простой модели мы можем принять следующий допустимый интервал значений отношения масс: $0{,}3 < q \leqslant 0{,}5$, в котором наиболее предпочтительным значением, выбираемым по абсолютному минимуму суммарной

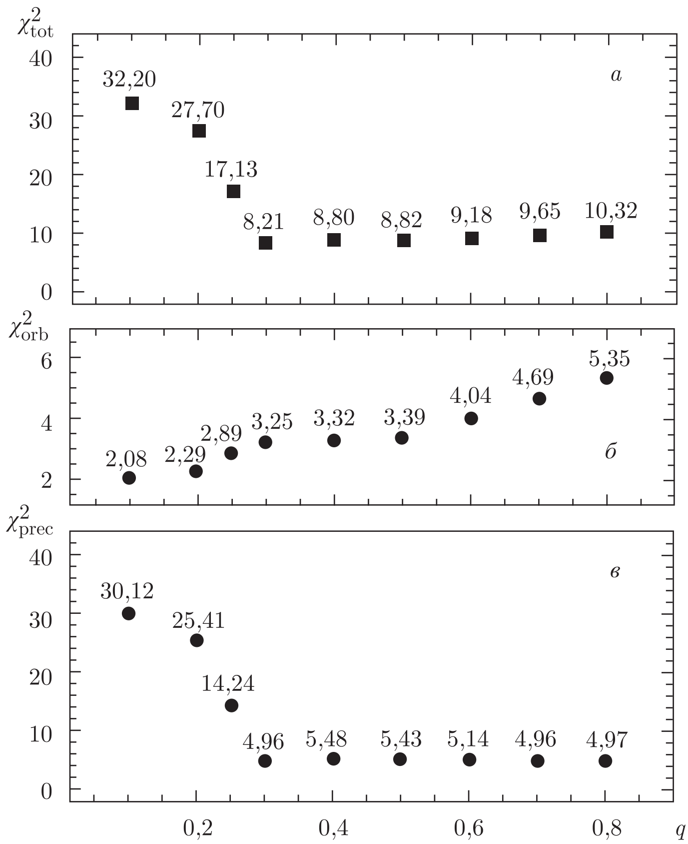


Рис. 145. *а* — суммарная невязка между наблюдаемой и теоретической кривой блеска, выраженная в виде приведенного хи-квадрат $\chi^2_{\rm tot} = \chi^2_{\rm orb} + \chi^2_{\rm prec}$, где $\chi^2_{\rm orb}$ и $\chi^2_{\rm prec}$ — приведенные хи-квадрат для орбитальной (затменной) рентгеновской кривой блеска и прецессионной кривой блеска соответственно, как функция отношения масс компонент системы SS 433 $q = m_x/m_v$ *б* — невязка $\chi^2_{\rm orb}$ — приведенное хи-квадрат для орбитальной кривой блеска как функция q; *в* — невязка $\chi^2_{\rm prec}$ — приведенное хи-квадрат для прецессионной кривой блеска. Цифры около точек обозначают значения приведенного хи-квадрат

невязки $\chi^2_{\rm tot} = \chi^2_{\rm orb} + \chi^2_{\rm prec} = 8{,}21$, является $q \simeq 0{,}3$. Это значение $q \simeq 0{,}3$ хорошо согласуется с оценкой отношения масс $q \simeq 0{,}35$, полученной в работе (Hillwig and Gies, 2008). Следует подчеркнуть, что оценка $q \simeq 0{,}35$ получена авторами (Hillwig and Gies, 2008) из анализа спектроскопических наблюдений SS 433. Она согласуется с оценкой $q \simeq 0{,}4$, независимо полученной Антохиной и Черепащуком (1987) из анализа оптических затменных кривых блеска SS 433 в разных фазах прецессионного периода. Наша новая оценка $q \simeq 0{,}3$ получена из независимых наблюдательных данных SS 433 в жестком рентгеновском диапазоне. Такая хорошая сходимость величины отношения масс $q \simeq 0{,}3$–$0{,}4$, полученной из различных и независимых наблюдательных данных, укрепляет нашу уверенность в надежности определения q для системы SS 433.

Параметры нашей простой модели, соответствующие оптимальному значению $q \simeq 0{,}3$, соответствуют протяженной сплюснутой «короне» с размерами, сравнимыми с размерами аккреционного диска ($r_j \sim r_d$), и малой высотой ($b_j \sim 0{,}15$–$0{,}20$).

Напомним, что параметры r_d, r_j, b_j выражены в долях радиуса относительной орбиты системы a. В нашей модели такая геометрия «короны», излучающей в жестком рентгеновском диапазоне, обусловлена сравнительно большой шириной затменного минимума блеска (верхняя огибающая) и большой амплитудой прецессионной переменности SS 433 в жестком диапазоне. Прецессионная кривая блеска в жестком рентгеновском диапазоне для SS 433 обусловлена затмением горячей «короны» внешними краями прецессирующего аккреционного диска. Нагрев вещества горячей «короны» может осуществляться за счет взаимодействия релятивистских джетов с неоднородностями звездного ветра, истекающего из внутренних частей аккреционного диска (Begelman et al., 2006). Формирование жесткого рентгеновского излучения в горячей «короне» может быть связано с комптоновским рассеянием тепловых мягких рентгеновских фотонов от релятивистских джетов и, возможно, от внутренних частей аккреционного диска (Krivosheev et al., 2009).

С найденным нами оптимальным значением $q \simeq 0{,}3$, используя функцию масс оптической звезды A7I (Hillwig and Gies, 2008), $f_v(m) = 0{,}268M_\odot$, находим массы компонент: $m_x \simeq 5{,}3M_\odot$, $m_v \simeq 17{,}7M_\odot$. Найденная масса релятивистского объекта $m_x \simeq 5{,}3M_\odot$ несколько больше, чем значение $m_x \simeq 4{,}3M_\odot$, найденное в работе (Hillwig and Gies, 2008), ввиду того, что найденное нами значение $q \simeq 0{,}3$ несколько меньше, чем $q \simeq 0{,}35$, полученное этими авторами. Большая масса релятивистского объекта свидетельствует о том, что компактный объект в системе SS 433 является черной дырой.

С найденным нами диапазоном отношения масс $q = 0{,}3$–$0{,}5$ для SS 433 и функцией масс оптической A7I-звезды (Hillwig and Gies, 2008), находим следующий диапазон значений масс релятивистского объекта: $m_x = (5{,}33$–$2{,}56)M_\odot$. В этом диапазоне значение $m_x = 5{,}33M_\odot$ наиболее предпочтительно, поскольку оно соответствует абсолютному минимуму суммарной невязки ($\chi_t^2 = 8{,}21$ — см. рис. 145). Таким образом, хотя нижний предел массы $m_x = 2{,}56M_\odot$ из найденного нами диапазона $m_x = (5{,}33$–$2{,}56)M_\odot$ не исключает возможности существования в системе SS 433 тяжелой нейтронной звезды, оптимальное значение $m_x = 5{,}33M_\odot$, которое соответствует наилучшему значению $q = 0{,}3$ (хорошо согласующемуся со всем комплексом наблюдательных данных по системе SS 433), позволяет заключить, что релятивистский объект в системе SS 433 является черной дырой.

Оценка массы релятивистского объекта в системе SS 433 сильно зависит от конкретного значения функции масс оптической A7I-звезды $f_v(m) = 0{,}268M_\odot$, которое может быть искажено влиянием эффектов неточечности оптической звезды, ее грушевидной формы, а также возможным эффектом прогрева оптической звезды излучением прецессирующего сверхкритического аккреционного диска (Cherepashchuk et al., 2005).

Поэтому дальнейшие высококачественные спектроскопические наблюдения SS 433 и их анализ с помощью наших программ синтеза профилей линий и кривых лучевых скоростей (см. выше) представляются весьма перспективными.

19. Зависимость формы профиля линии поглощения и кривой лучевых скоростей оптической звезды рентгеновской двойной системы от наклонения орбиты и отношения масс компонент

На примере ТДС разных типов мы продемонстрировали, как «работают» современные методы синтеза кривых блеска. Попутно были описаны физические характеристики и эволюционный статус различных ТДС.

Рассмотрим теперь применение методов синтеза к анализу профилей линий и кривых лучевых скоростей ТДС.

Оптическая звезда в рентгеновской двойной системе приливно деформирована, прогревается рентгеновским излучением аккрецирующего релятивистского объекта и имеет сложное распределение температуры по поверхности, обусловленное гравитационным потемнением и эффектом рентгеновского прогрева. Эти эффекты взаимодействия компонент вызывают орбитальную переменность профилей линий поглощения оптической звезды. Орбитальная переменность профилей линий поглощения приводит не только к зависимости полуамплитуды кривой лучевых скоростей от величины наклонения орбиты i и отношения масс компонент $q = m_x/m_v$ (m_x и m_v — масса релятивистского объекта и оптической звезды соответственно), но и к зависимости формы кривой лучевых скоростей от i и q. Это дает принципиальную возможность определения наклонения орбиты i из кривой лучевых скоростей рентгеновской двойной системы. Из классических учебников по астрофизике известно, что наклонение орбиты i из кривой лучевых скоростей ТДС не определяется, поэтому массы звезд находятся с точностью до множителя $\sin^3 i$. Однако, это утверждение справедливо лишь для модели ТДС, описываемой двумя точечными массами, двигающимися по кеплеровским орбитам. В случае рентгеновских двойных систем, где оптическая звезда близка к заполнению своей полости Роша, приближение точечной массы для звезды неприменимо. Отсюда и вытекает для рентгеновских двойных систем возможность определения наклонения орбиты i из кривой лучевых скоростей оптической звезды.

Впервые на зависимость формы кривой лучевых скоростей приливно деформированной оптической звезды от параметров ТДС было обращено внимание в работе Вильсона и Софии (1976). В работе Антохиной и Черепащука (1987б) и Шабаза (Shabaz, 1998) был предложен новый метод определения отношения масс компонент q и наклонения орбиты i рентгеновской двойной системы по орбитальной переменности профилей линий поглощения в спектре оптической звезды. В работе Абубекерова и др. (2004б) выполнена оценка наклонения орбиты рентгеновской двойной Cyg X-1 по высокоточной наблюдаемой кривой лучевых скоростей. В работе Абубекерова и др. (2005) приведены результаты теоретического моделирования кривой лучевых скоростей в модели Роша в ЛТР-приближении для различных значений наклонения орбиты i в случае рентгеновских дойных систем с оптическими звездами малых, умеренных и больших масс. Исследованы изменения формы кривой лучевых скоростей при изменении i для разных значений q. Изучены соответствующие изменения формы профиля линии поглощения H_γ.

Расчет теоретических профилей линии в спектре оптической звезды выполнен с использованием методов синтеза, описанных выше. Наблюдаемые кривые лучевых скоростей OB-звезд в рентгеновских двойных получены преимущественно по линиям поглощения водорода бальмеровской серии, поэтому синтез теоретических кривых лучевых скоростей оптической звезды выполнен нами для линии H_γ. Эта линия поглощения достаточно сильна в спектрах OB-звезд в массивных рентгеновских двойных, в то же время, в отличие от линии H_α, для линии H_γ влияние эмиссионной компоненты, возникающей от газовых потоков и аккреционного диска, весьма мало.

Теоретическая лучевая скорость в данной орбитальной фазе вычислялась по средней длине волны на уровне остаточных интенсивностей 1/3, 1/2 и 2/3 синтезированного интегрального профиля линии поглощения. Для сравнения, использовались два метода расчета интегрального профиля линии поглощения. В первом методе (назовем его экспрессным), предложенном Антохиной и Черепащуком (1994), локальный профиль линии для каждой элементарной площадки dS на поверхности звезды находится не путем построения модели атмосферы и вычисления интенсивности выходящего излучения в линии и в континууме (с учетом переработки внешнего рентгеновского потока), а с использованием вычисленных Куруцем и затабулированных им профилей линий поглощения водорода бальмеровской серии для различных значений эффективных температур $T_{\rm ef}$ и ускорений силы тяжести g. При этом эффект прогрева атмосферы звезды рентгеновским излучением компактного объекта учитывается в простейшей модели путем сложения выходящего и падающего болометрических потоков без учета переноса излучения в атмосфере облучаемой звезды. Помимо упрощенного учета эффекта отражения такой экспрессный способ вычисления интегральных профилей линий поглощения не совсем корректен, поскольку в таблицах Куруца (Kurucz, 1992) приведены теоретические профили линий в относительных потоках (т. е. профили, усредненные по диску сферической звезды), а не в интенсивностях. Однако, поскольку мы используем полученные теоретические профили линий не для сравнения с наблюдаемыми профилями, а лишь для определения лучевых скоростей (определяемых «центром тяжести» линии), мы считаем такое приближение разумным. Главное достоинство экспрессного метода синтеза кривых лучевых скоростей состоит в сравнительно небольших затратах компьютерного времени, требуемого для его реализации. Второй метод синтеза профилей линий в ТДС (условно назовем его точным), был предложен Антохиной и др. (2003, 2005). Метод предполагает для каждой элементарной площадки dS расчет модели атмосферы звезды (в гипотезе ЛТР) с учетом внешнего прогрева рентгеновским излучением компактного объекта с последующим вычислением локального профиля линий (в интенсивностях), а также локального континуума. Каждой элементарной площадке на поверхности звезды соответствует локальная эффективная температура $T_{\rm loc}$, локальное ускорение силы тяжести $g_{\rm loc}$ и параметр внешнего прогрева $k_x^{\text{лок}}$, равный отношению падающего рентгеновского потока к выходящему потоку без учета внешнего облучения атмосферы. К недостаткам точного метода можно отнести сравнительно большие затраты компьютерного времени, требуемые для его реализации (метод стало возможным эффективно реализовать лишь сравнительно недавно, в связи с появлением компьютеров с частотой процессора не менее 1 ГГц). Кроме того, в этом методе из-за специфики граничных условий (Антохина и др., 2003, 2005) не учитывается вклад в интегральный профиль звезды локальных профилей площадок, расположенных на краю диска звезды (в приближении ЛТР и в пренебрежении процессами рассеяния излучения). В то же время, у реальных оптических звезд локальные профили площадок края диска ненулевые (из-за влияния процессов рассеяния излучения) и вносят вклад в формирование интегрального профиля линии поглощения. Отметим, что экспрессный метод синтеза профилей линий свободен от эффекта «обнуления» вклада локальных профилей линий для площадок края диска в интегральный профиль. Поэтому в работе Абубекерова и др. (2005) было проведено сравнение результатов, полученных экспрессным и точным методами.

Параметры рентгеновской двойной системы, для которой проведено моделирование, приведены в табл. 43. Численные значения параметров моделируемой рентгеновской двойной взяты на основе Каталога поздних ТДС (Cherepashchuk et al., 1996) как наиболее характерные.

Был выполнен синтез кривых лучевых скоростей оптических звезд с массами $m_v = 1$, 5, 10, 20, $30 M_\odot$ (остальные параметры приведены в табл. 43). С целью исследования зависимости формы кривой лучевых скоростей от наклонения орбиты i был проведен синтез кривых лучевых скоростей для значений $i = 30°$, $60°$, $90°$.

При моделировании кривых лучевых скоростей оптической звезды с массой $m_v = 30 M_\odot$ с использованием таблиц Куруца (Kurucz, 1992) значения локального ускорения силы тяжести $g_{\rm loc}$ и локальной температуры $T_{\rm loc}$ на поверхности оптической звезды выходили за пределы диапазона значений в таблицах,

Таблица 43

Численные значения параметров, используемых для синтеза кривых лучевых скоростей оптической компоненты в модели Роша

P, сут	5,0	Период
m_x, $M_\odot$	10	Масса компактного объекта
m_v, $M_\odot$	var*	Масса оптической звезды
e	0,0	Эксцентриситет
i, °	30, 60, 90	Наклонение орбиты
μ	1,0	Коэффициент заполнения полости Роша оптической компонентой
f	1,0	Коэффициент асинхронности вращения оптической компоненты
$T_{\rm ef}$, K	var*	Эффективная температура оптической компоненты
β	0,25**	Коэффициент гравитационного потемнения
k_x	0,1	Отношение рентгеновской светимости релятивисткой компоненты к болометрической светимости оптической компоненты L_x/L_v
A	0,5	Коэффициент переработки рентгеновского излучения
u	0,3	Коэффициент потемнения к краю

* Параметр рентгеновской двойной системы менялся в ходе модельных расчетов.
** При массе оптической звезды $m_v = 1M_\odot$ значение коэффициента гравитационного потемнения полагалось равным $\beta = 0{,}08$.

т. е. для некоторого числа локальных площадок профили в таблицах отсутствуют. Число таких площадок невелико (около 10–20%) и все они находятся на «носике» заполняющей свою полость Роша оптической звезды. В этом случае профиль для всех «выпадающих» площадок полагался идентичным. В качестве локального профиля в данном случае использовался профиль линии H_γ для средней эффективной температуры и среднего значения ускорения силы тяжести на поверхности оптической звезды. Степень точности подобной аппроксимации проверена в специальном тестовом расчете (тестовый расчет 1).

Также следует оговорить ситуацию со значением средней эффективной температуры оптической звезды. Средняя температура звезды, заполняющей свою полость Роша, определяется выражением

$$T_{\rm ef} = \frac{\int\int T_{\rm loc}\, dS}{\int\int dS},$$

где интегрирование проводится по всей поверхности приливно деформированной звезды. В табл. 44 приведены оценки эффективной температуры по зависимостям «масса–светимость» из работ Херреро (Herrero, 2003) и Страйжиса (1982).

Из табл. 44 видно, что эффективные температуры звезд, полученные разными методами, различаются. Поэтому с целью количественной оценки влияния значения эффективной температуры оптической звезды на теоретическую кривую лучевых скоростей был проведен специальный тестовый расчет (тестовый расчет 2). В качестве средней эффективной температуры использовалась эффективная температура соответствующей равнообъемной сферической звезды. Также в табл. 44 приведен диапазон значений эффективной температуры и ускорения силы тяжести на поверхности оптической звезды в модели Роша. Отметим, что число локальных площадок,

Таблица 44

Масса оптической звезды и соответствующая ей эффективная температура

m_v, $M_\odot$	T^*_{ef}, K	T^{**}_{ef}, K	T^{***}_{ef}, K	Диапазон значений параметров атмосферы по поверхности звезды в модели Роша		S, %
				$\lg g$	T_{ef}, K	
1	—	5500	5500	2,02–3,15	2800–5930	89
5	14 000	12 000	12 000	2,02–3,16	6570–12 820	93
10	17 000	15 000	16 000	2,13–3,22	9190–17 060	94
20	26 000	23 000	23 000	2,23–3,25	14 020–24 540	94
30	29 000	28 000	29 000	2,28–3,26	18 390–31 010	96

Примечание: T^*_{ef} — температура оптической звезды согласно зависимости «масса–светимость» из работы (Herrero, 2003); T^{**}_{ef} — температура оптической звезды согласно зависимости «масса–светимость» из работы (Страйжис, 1982); T^{***}_{ef} — температура оптической звезды, используемая при расчете кривой лучевых скоростей в данной работе; S — доля площади поверхности звезды, температура которой отличается от средней эффективной температуры T^{***}_{ef} не более чем на 10%.

температура которых T_{loc} отличается от принятой эффективной температуры T_{ef} более, чем на 10%, весьма невелико и не превышает 11%.

а) Тестовый расчет 1. Влияние аппроксимации локального профиля на теоретическую кривую лучевых скоростей. Напомним, что в этом тестовом расчете проверяется, насколько различаются лучевые скорости, вычисленные различными способами с использованием таблиц Куруца (Kurucz, 1992). Выполнен синтез кривой лучевых скоростей для оптической звезды с массой $m_v = 10M_\odot$ и средней эффективной температурой поверхности $T_{\mathrm{ef}} = 15\,000$ К (остальные параметры системы содержатся в табл. 43). В рамках ЛТР-приближения каждой локальной элементарной площадке ставится в соответствие ее теоретический локальный профиль линии поглощения H_γ согласно таблицам Куруца. Полученная кривая лучевых скоростей представлена сплошной линией на рис. 146 *а*. Затем для оптической звезды была построена кривая лучевых скоростей в предположении, что форма локального профиля линии всех элементарных площадок одинакова, но при суммировании профилей по поверхности звезды учитывается нормировка на континуум. В качестве такого профиля использовался профиль линии поглощения водорода H_γ для средней эффективной температуры и ускорения силы тяжести оптической звезды. В случае звезды с $m_v = 10M_\odot$ использовался профиль из таблиц Куруца, соответствующий $T_{\mathrm{loc}} = 15\,000$ К и $\lg g_{\mathrm{loc}} = 3{,}2$. Полученная кривая лучевых скоростей представлена штриховой линией на рис. 146 *а*. На рис. 146 *б* показана разность между модулем лучевой скорости, полученной по «истинным» локальным профилям, и модулем лучевой скорости, полученной в предположении тождественности формы локальных профилей для каждой площадки. Видно, что разность между кривыми лучевых скоростей не превышает 1,7 км/с, что составляет ~ 1% от полуамплитуды кривой лучевых скоростей. Аналогичный расчет выполнен для рентгеновской двойной системы с массой оптической звезды $m_v = 20M_\odot$. Полученные кривые лучевых скоростей показаны на рис. 147 *а*. В этом случае расхождение между кривыми лучевых скоростей не превышает 2 км/с или 1,6% от полуамплитуды кривой лучевых скоростей (рис. 147 *б*).

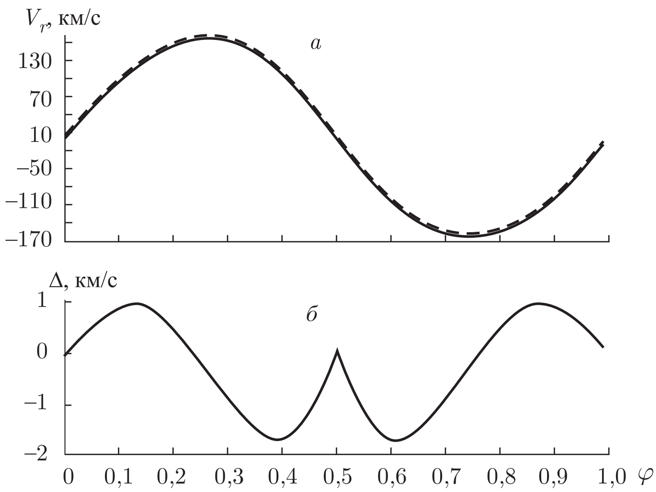


Рис. 146. Тестовой расчет 1: *а* — модельная кривая лучевых скоростей оптической звезды с $m_v = 10M_\odot$ и $T_{\rm ef} = 15\,000$ K при $i = 90^\circ$ и такая же модельная кривая лучевых скоростей, полученная в предположении о постоянстве формы локального профиля линии (штриховая линия). В данном масштабе обе кривые лучевых скоростей практически совпадают. Расчет кривых лучевых скоростей произведен на основе использования профиля линии H_γ (в потоках) из таблиц Куруца. *б* — разность модулей лучевых скоростей

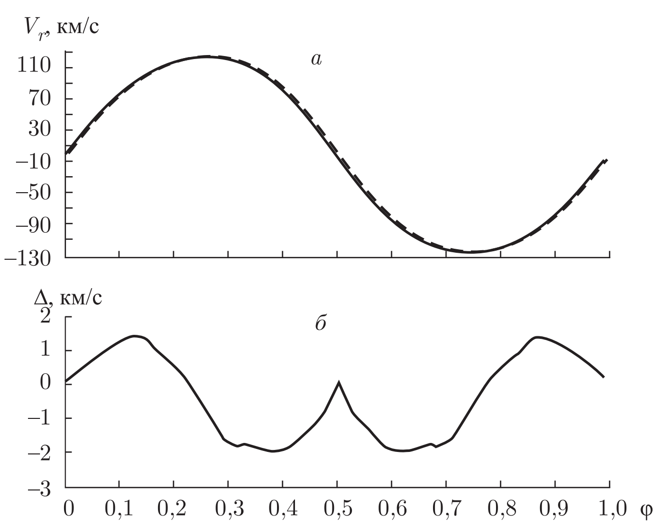


Рис. 147. То же, что на рис. 146, для параметров оптической звезды m_v=$20M_\odot$ и $T_{\rm ef} = 23\,000$ K

б) Тестовый расчет 2. Влияние значения эффективной температуры оптической звезды на теоретическую кривую лучевых скоростей. Как отмечалось выше, эффективная температура оптической звезды обычно точно неизвестна. Как видно из табл. 44, наблюдаемая эффективная температура, определенная по зависимости «масса–светимость» по данным разных авторов (Herrero, 2003, Страйжис, 1982) несколько различается. Поэтому был проведен тестовый расчет для оценки влияния значения температуры оптической звезды на теоретическую кривую лучевых скоростей. Для этого выполнен синтез кривой лучевых скоростей для тесной двойной системы с массой оптической звезды $m_v = 10M_\odot$ и наклонением орбиты $i = 90°$ при $T_{\text{ef}} = 10\,000$ и $17\,000$ K (специально выбран широкий диапазон изменения эффективной температуры). Полученные кривые лучевых скоростей представлены на рис. 148 *а, б* (остальные параметры двойной системы содержатся в табл. 43).

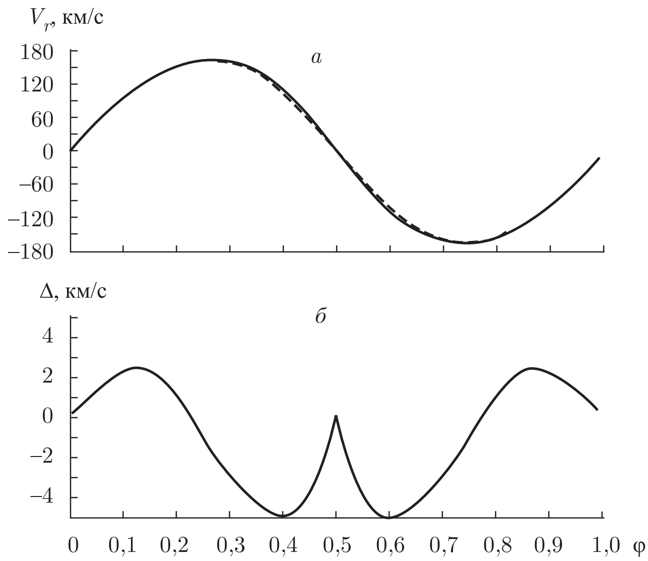


Рис. 148. Тестовый расчет 2. *а* — модельная кривая лучевых скоростей оптической звезды с $m_v = 10M_\odot$, $i = 90°$, $T_{\text{ef}} = 10\,000$ K (сплошная линия) и модельная кривая лучевых скоростей при тех же параметрах и $T_{\text{ef}} = 17\,000$ K (штриховая линия). Использовался профиль линии H_γ из таблиц Куруца (в потоках). *б* — разность между модулями лучевых скоростей $\Delta = |V_r(T_{\text{ef}} = 17\,000\,\text{K})| - |V_r(T_{\text{ef}} = 10\,000\,\text{K})|$

Поскольку расхождение между кривыми лучевых скоростей незначительно, то на рис. 148 *б* представлена разность их модулей. Под разностью модулей лучевых скоростей понимается величина $\Delta = |V_r(T_{\text{ef}} = 17\,000\,\text{K})| - |V_r(T_{\text{ef}} = 10\,000\,\text{K})|$, где $|V_r(T_{\text{ef}} = 17\,000\,\text{K})|$ — значение модуля лучевой скорости оптической звезды в модели Роша при средней эффективной температуре ее поверхности $T_{\text{ef}} = 17\,000$ K, а $|V_r(T_{\text{ef}} = 10\,000\,\text{K})|$ — то же самое при средней эффективной температуре поверхности оптической звезды $T_{\text{ef}} = 10\,000$ K. Из рис. 148 *б* видно, что максимальное расхождение модулей лучевых скоростей, полученных при $T_{\text{ef}} = 10\,000$ K и $17\,000$ K, происходит на орбитальных фазах 0,35–0,45 и достигает 5 км/с, или 2,6 % от полуамплитуды кривой лучевых скоростей.

Из тестового расчета видно, что неоднозначность значения средней эффективной температуры оптической звезды ($\Delta T_{\text{ef}} = 5000$–$7000$ K) приводит к уже заметной вариации формы кривой лучевых скоростей. Вариация формы кривой лучевых скоростей различна в разных орбитальных фазах (рис. 148 *б*). На фазах 0,35–0,45 она максимальна и может доходить до ~ 3 % от полуамплитуды кривой лучевых скоростей. Как уже отмечалось, неоднозначность эффективной температуры оптической звезды в тестовом расчете была специально завышена. Согласно табл. 44, максимальная неопределенность эффективной температуры не превышает 3000 K, поэтому неоднозначность кривой лучевых скоростей не превышает 1 %.

На основе наших расчетов можно сделать вывод, что в случае использования кривой лучевых скоростей для определения параметров двойной системы значение средней эффективной температуры оптической звезды $T_{\rm ef}$ должно быть известно с максимально возможной точностью.

Было проведено исследование зависимости формы кривой лучевых скоростей от отношения масс q и наклонения орбиты i, а также выполнен расчет кривых лучевых скоростей как без учета влияния аппаратной функции на теоретический интегральный профиль, так и с учетом этого влияния.

в) Расчет кривых лучевых скоростей без учета влияния аппаратной функции на теоретический профиль линии поглощения. В ЛТР-приближении в модели Роша был выполнен синтез кривых лучевых скоростей оптических звезд с массами $m_v = 1$, 5, 10, 20 и $30 M_\odot$ (остальные модельные параметры см. в табл. 43). Для оптической звезды с массой $m_v = 1 M_\odot$ синтез кривой лучевых скоростей выполнен

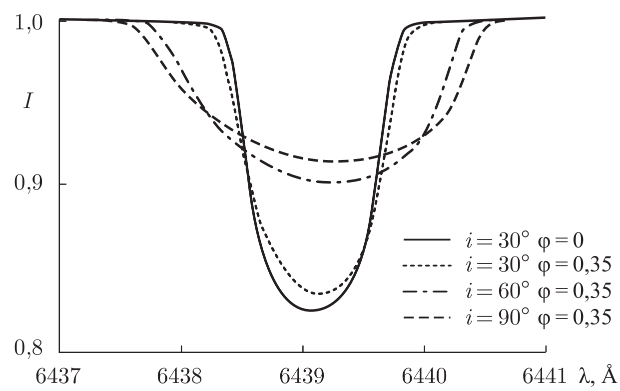


Рис. 149. Теоретические профили линии поглощения CaI 6439 Å без учета влияния инструментального профиля (рассчитанные с точным алгоритмом — см. Антохина и др., 2003, 2005) в орбитальной фазе $\varphi = 0{,}0$ при наклонении орбиты $i = 30^\circ$ (сплошная линия) и в орбитальной фазе $\varphi = 0{,}35$ при наклонении орбиты $i = 30^\circ$ (пунктирная линия), 60° (штрих-пунктирная линия и 90° (штриховая линия). Модельные профили линии получены в ЛТР-приближении при массе оптической звезды $m_v = 1 M_\odot$ и $T_{\rm ef} = 5500$ K. Орбитальные доплеровские смещения линий устранены

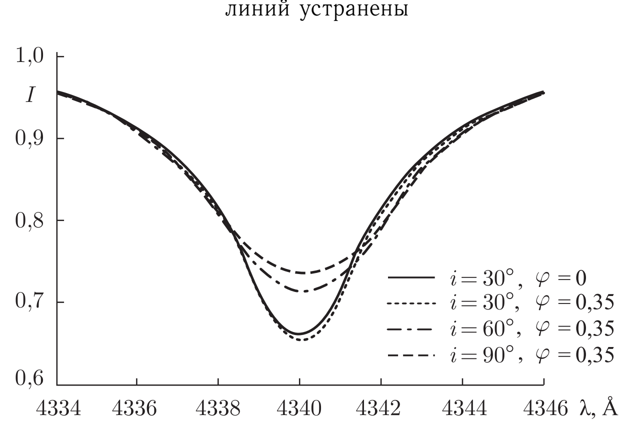


Рис. 150. То же, что на рис. 149, для линии поглощения H_γ и параметров оптической звезды $m_v = 20 M_\odot$ и $T_{\rm ef} = 23\,000$ K

по линии поглощения Ca I 6439 Å Синтез кривых лучевых скоростей оптических звезд с массами $m_v = 5$, 10, 20 и $30M_\odot$ выполнен по линии поглощения H_γ двумя методами — экспрессным и точным, описанными выше. Теоретические интегральные профили линии поглощения CaI 6439Å и H_γ представлены на рис. 149 и 150. Для каждого значения m_v выполнен синтез кривой лучевых скоростей оптической звезды для наклонения орбиты $i = 30°$, $60°$, $90°$. Полученные теоретические кривые лучевых скоростей оптических звезд с массами $m_v = 1$, 20 и $30M_\odot$ представлены на рис. 151–153 соответственно. С увеличением наклонения орбиты i также

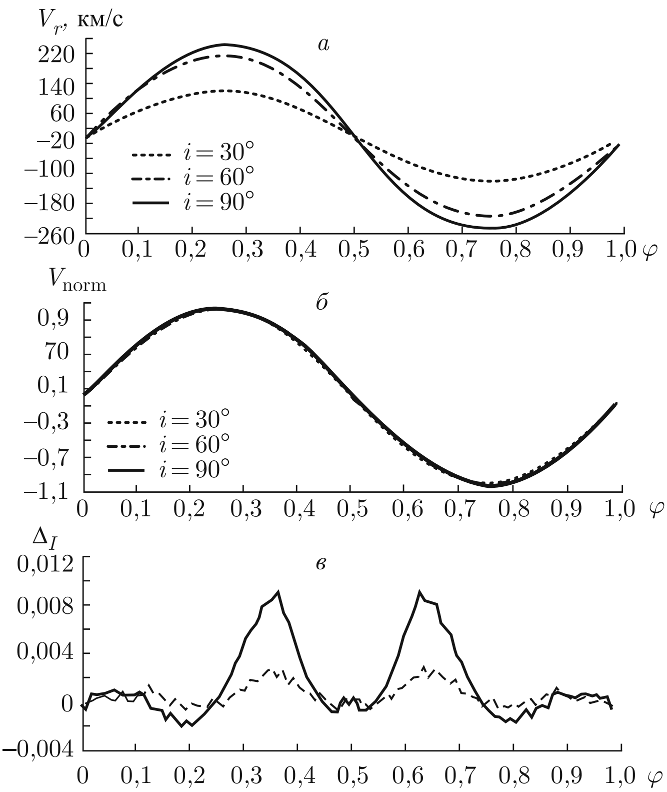


Рис. 151. *а* — теоретическая кривая лучевых скоростей оптической звезды с $m_v = 1M_\odot$, $T_{\rm ef} = 5500$ K, вычисленная без учета влияния аппаратной функции на модельный интегральный профиль линии поглощения Ca I 6439 Å, при наклонении орбиты $i = 30°$ (пунктирная линия), $60°$ (штрих-пунктирная линия) и $90°$ (сплошная линия). Кривые лучевых скоростей рассчитаны с точным алгоритмом (Антохина и др., 2003, 2005); *б* — те же кривые лучевых скоростей, нормированные на свое значение полуамплитуды лучевых скоростей для $i = 30°$ (пунктирная линия), $60°$ (штрих-пунктирная линия) и $90°$ (сплошная линия). В данном масштабе кривые почти совпадают. *в* — разность модулей нормированных кривых лучевых скоростей $\Delta_I = |V_{\rm norm}(i = 90°)| - |V_{\rm norm}(i = 30°)|$ (сплошная линия) и $\Delta_I = |V_{\rm norm}(i = 90°)| - |V_{\rm norm}(i = 60°)|$ (штриховая линия). Величина Δ_I указана в единицах полуамплитуды кривой лучевых скоростей K_v

увеличивается и значение полуамплитуды кривой лучевых скоростей K_v. Поэтому каждая теоретическая кривая лучевых скоростей была пронормирована на свою величину K_v, за которую принималось максимальное значение лучевой скорости

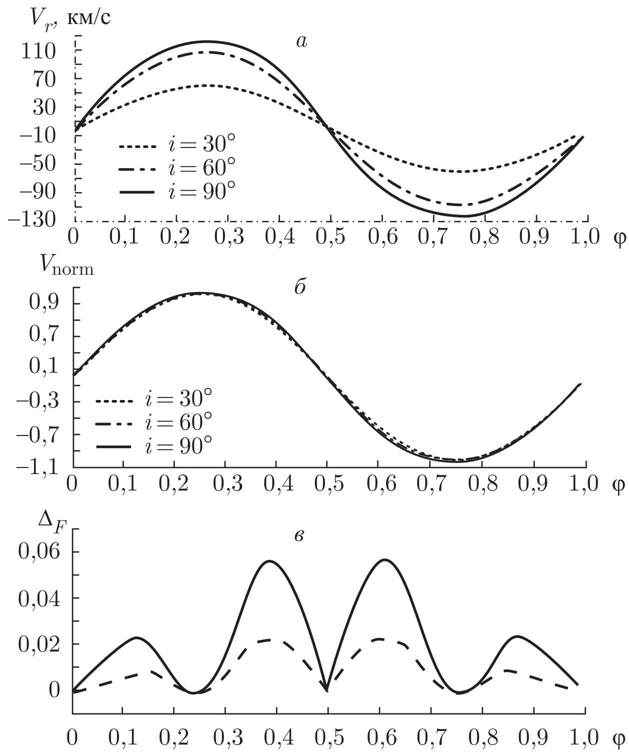


Рис. 152. *а* — теоретическая кривая лучевых скоростей оптической звезды с $M_v = 20M_\odot$, $T_{\rm ef} = 23000$ К, вычисленная без учета влияния аппаратной функции на модельный интегральный профиль линии поглощения H_γ, при наклонении орбиты $i = 30°$ (пунктирная линия), 60° (штрих-пунктирная линия) и 90° (сплошная линия). Кривые лучевых скоростей рассчитаны с экспрессным алгоритмом (Антохина и Черепащук, 1994, Антохина, 1996), с использованием профилей линии H_γ в потоках из таблиц Куруца; *б* — те же кривые лучевых скоростей, нормированные на свое значение полуамплитуды лучевых скоростей для $i = 30°$ (пунктирная линия), 60° (штрих-пунктирная линия) и 90° (сплошная линия). *в* — разность модулей нормированных кривых лучевых скоростей $\Delta_F = |V_{\rm norm}(i = 90°)| - |V_{\rm norm}(i = 30°)|$ (сплошная линия) и $\Delta_F = |V_{\rm norm}(i = 90°)| - |V_{\rm norm}(i = 60°)|$ (штриховая линия). Величины Δ_F указаны в единицах полуамплитуды кривой лучевых скоростей K_v

из интервала орбитальных фаз 0,0–0,5. Нормированные кривые лучевых скоростей оптических звезд с массами $m_v = 1$, 20, $30M_\odot$ представлены на рис. 151–153. Поскольку эффект различия формы кривых лучевых скоростей сравнительно невелик (по сравнению с величиной K_v), то была вычислена разность модулей нормированных кривых лучевых скоростей $\Delta = |V_{\rm norm}(i = 90°)| - |V_{\rm norm}(i = 30°)|$ и разность $\Delta = |V_{\rm norm}(i = 90°)| - |V_{\rm norm}(i = 60°)|$, где $|V_{\rm norm}(i = 90°)|$, $|V_{\rm norm}(i = 60°)|$ и $|V_{\rm norm}(i = 30°)|$ — модули нормированных кривых лучевых скоростей для наклонения орбиты $i = 90°$, $i = 60°$ и $i = 30°$ соответственно. Максимальное значение разности между нормированными кривыми лучевых скоростей, полученными двумя разными методами (экспрессным и точным) для оптических звезд с массами $m_v = 1$, 20, $30M_\odot$, представлено в табл. 45 и 46.

Максимальное значение разности между нормированными кривыми лучевых скоростей достигается на орбитальных фазах 0,35–0,45 и 0,55–0,65. Обозначим

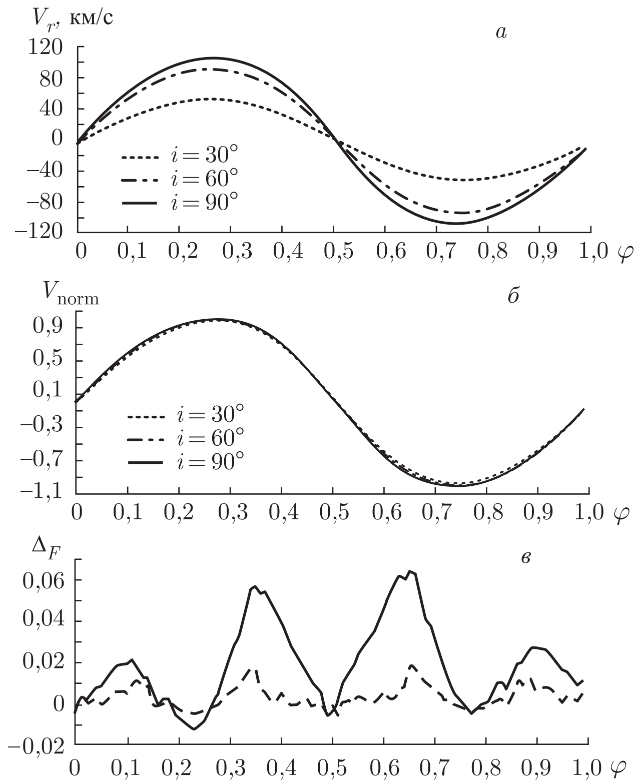


Рис. 153. То же, что на рис. 152, для линии H_γ и параметров оптической звезды $m_v = 30 M_\odot$, $T_{\rm ef} = 29000$ K,

Таблица 45

Максимальное значение эффекта изменения формы кривой лучевых скоростей в модели Роша при изменении наклонения орбиты с 60° до 90°

m_v, $M_\odot$	Δ_I, %	Δ_F, %
1	0,3	—
5	0,4	1,1
10	0,6	1,5
20	1,1	2,3
30	1,9	2,9

Примечание: Величина эффекта Δ_I и Δ_F выражена в единицах полуамплитуды K_v. Более подробное пояснение см. в тексте. Индексы I и F соответствует локальным профилям, вычисленным в интенсивностях (I) и в потоках (F).

через Δ_I максимальное значение эффекта изменения формы кривой лучевых скоростей при изменении наклонения орбиты, полученное с точным алгоритмом, в котором интенсивность выходящего излучения вычисляется на основе построения модели атмосферы локальной элементарной площадки на поверхности звезды

Таблица 46

Максимальное значение эффекта изменения формы кривой лучевых скоростей в модели Роша при изменении наклонения орбиты с 30° до 90°

m_v, $M_\odot$	Δ_I, %	Δ_F, %
1	0,9	—
5	1,5	3,2
10	2,5	4,6
20	4,2	5,7
30	6,5	8,0

Примечание: Величина эффекта Δ_I и Δ_F выражена в единицах полуамплитуды K_v. Более подробное пояснение см. в тексте. Индексы I и F соответствует локальным профилям, вычисленным в интенсивностях (I) и в потоках (F).

(Антохина и др., 2003, 2005). Величиной Δ_F обозначим максимальное значение эффекта изменения формы кривой лучевых скоростей при изменении наклонения орбиты, полученное с экспрессным алгоритмом, в котором используются теоретические профили линий в потоках, взятые из таблиц Куруца (Антохина и Черепащук, 1994, Антохина, 1996). Разность модулей нормированных кривых лучевых скоростей для масс оптических звезд $m_v = 1$, 20, $30M_\odot$, представлена на рис. 151–153. Из рисунков непосредственно видно, что максимальное различие формы кривых лучевых скоростей, полученное при разных значениях i, происходит на орбитальных фазах 0,35–0,45 и 0,55–0,65.

Из расчетов следует, что величина эффекта изменения формы кривой лучевых скоростей зависит не только от наклонения орбиты i, но и от отношения масс компонент $q = m_x/m_v$. Так, например, максимальная величина изменения формы кривой лучевых скоростей (в долях полуамплитуды изменения лучевых скоростей) при изменении наклонения орбиты от $i = 30°$ до 90° для звезд с массами $m_v = 1$, 5, 10, 20 и $30M_\odot$ (напомним, что масса $m_x = 10M_\odot$ и постоянна) составляет $\Delta_F = 0{,}9$, 3,2, 4,6, 5,7 и 8% соответственно. Таким образом, эффект изменения формы кривой лучевых скоростей с наклонением орбиты i более ярко выражен в системах с малым отношением масс компонент $q = m_x/m_v$. Это связано с тем, что при $q < 1$ центр масс двойной системы лежит в теле оптической звезды, поэтому при орбитальном движении часть поверхности звезды, лежащая вблизи внутренней точки Лагранжа, движется в том же направлении, что и релятивистский объект, а не в направлении движения оптической звезды. Это приводит к сильному искажению суммарного профиля линии поглощения, зависящему от наклонения орбиты i и от отношения масс q.

г) Расчет кривых лучевых скоростей с учетом влияния аппаратной функции на теоретический профиль линии поглощения. Как и в предыдущем случае, синтез кривых лучевых скоростей был выполнен для оптических звезд с массами $m_v = 1$, 5, 10, 20 и $30M_\odot$ (остальные параметры двойной системы представлены в табл. 43). За аппаратную функцию спектрографа принята гауссиана. Свертка профиля линии Ca I 6439 Å осуществлялась с аппаратной функцией, у которой FWHM (полная ширина на половинной интенсивности) равна 1 Å. При синтезе кривых лучевых скоростей звезд с массами m_v= 5, 10, 20 и $30M_\odot$ производилась свертка теоретического профиля линии поглощения H_γ с аппаратной функцией, для которой величина FWHM = 7 Å. Свернутые теоретические профили линии поглощения

Ca I 6439 Å и линии поглощения водорода H_γ представлены на рис. 154 и 155 соответственно.

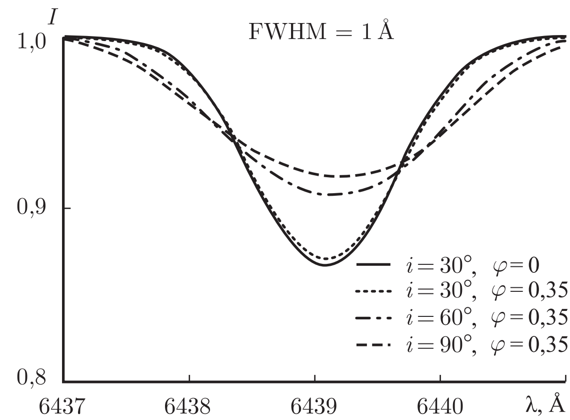


Рис. 154. То же, что на рис. 149, для случая учета влияния инструментального профиля спектрографа с FWHM = 1 Å

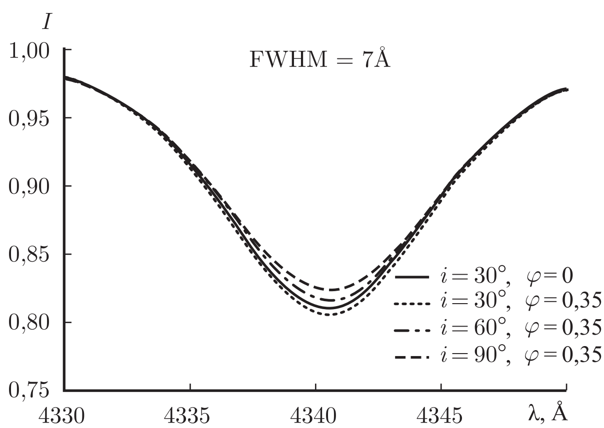


Рис. 155. То же, что на рис. 150, для случая учета влияния инструментального профиля с FWHM = 7 Å

Было проведено аналогичное описанному выше исследование изменения формы кривой лучевых скоростей с вариацией наклонения орбиты i. Максимальное изменение формы кривой лучевых скоростей по-прежнему происходит на фазах 0,35–0,45. Величина эффекта изменения формы кривой лучевых скоростей при изменении i от 60° до 90°, полученная двумя разными алгоритмами (точным и экспрессным), приведена в табл. 47. Аналогичные величины для случая изменения i от 30° до 90° содержатся в табл. 48. Сравнение табл. 45, 46 и табл. 47, 48 показывает, что результаты, полученные без учета инструментального профиля, и с его учетом, в пределах возможных ошибок вычисления интегральных профилей линий практически совпадают.

Таким образом, эффект изменения формы кривой лучевых скоростей с наклонением орбиты не «замывается» влиянием аппаратной функции спектрографа, что подтверждает возможность оценки наклонения орбиты двойной системы

Таблица 47

Максимальное значение эффекта изменения формы кривой лучевых скоростей в модели Роша при изменении наклонения орбиты с 60° до 90° с учетом влияния аппаратной функции на теоретический интегральный профиль линии поглощения

m_v, $M_\odot$	Δ_I, %	Δ_F, %
1	0,3	-
5	0,4	1,1
10	0,6	1,4
20	1,1	1,7
30	2,0	3,0
Примечание: Величина эффекта Δ_I и Δ_F выражена в единицах полуамплитуды K_v. Более подробное пояснение см. в тексте.		

Таблица 48

Максимальное значение эффекта изменения формы кривой лучевых скоростей в модели Роша при изменении наклонения орбиты с 30° до 90° с учетом влияния аппаратной функции на моделируемый интегральный профиль линии поглощения.

m_v, $M_\odot$	Δ_I, %	Δ_F, %
1	0,9	-
5	1,6	3,3
10	2,4	4,2
20	4,2	5,5
30	6,8	8,7
Примечание: Величина эффекта Δ_I и Δ_F выражена в единицах полуамплитуды K_v. Более подробное пояснение см. в тексте.		

по высокоточной кривой лучевых скоростей. Возможность оценки наклонения орбиты рентгеновской двойной системы с той или иной массой оптической звезды сводится лишь к обеспечению необходимой точности наблюдаемой кривой лучевых скоростей. Так, для рентгеновских двойных систем с $m_x = 10M_\odot$ (кандидат в черные дыры) и $m_v = (20–30)M_\odot$ (оптическая звезда близка к заполнению своей полости Роша) точность наблюдаемой кривой лучевых скоростей должна быть лучше 7–8 % от полуамплитуды K_v изменения лучевых скоростей. В случае оценки наклонения орбиты по наблюдаемой кривой лучевых скоростей для систем с массами оптических звезд $m_v = 1–10M_\odot$ (заполняющих свои полости Роша) и массой релятивистского объекта $m_x = 10M_\odot$ точность кривой лучевых скоростей должна быть лучше 1–4 % от полуамплитуды K_v. Отметим, что при $m_v = 1–10M_\odot$, если взять $m_x = 1{,}4M_\odot$ (нейтронная звезда), то эффект влияния изменения i на кривую лучевых скоростей возрастает и также может достигать значения 7–8 % от величины K_v. Например, в работах (Абубекеров и др., 2004б, 2005) проведена оценка наклонения орбиты рентгеновской двойной Cyg X-1 по высокоточной кривой лучевых скоростей оптической звезды (см. ниже). Точность средней наблюдаемой кривой лучевых скоростей системы Cyg X-1 составила $\sim 3\%$ от величины полуамплитуды K_v. При массе оптической звезды $m_v \simeq 20M_\odot$ (и $m_x \simeq 10M_\odot$) это позволило наложить ограничение на наклонение орбиты ($i < 45°$) системы Cyg X-1 на основе лишь наблюдаемой кривой лучевых скоростей.

д) Обсуждение результатов. Модельные расчеты показали, что эффект изменения формы кривой лучевых скоростей оптической звезды при вариации наклонения орбиты более ярко выражен в двойных системах с массивными оптическими спутниками (или с малым значением отношения масс $q = m_x/m_v$). Также было показано, что для оптических звезд малых, умеренных и больших масс эффект изменения формы кривой лучевых скоростей с изменением i качественно одинаков — максимальное изменение формы кривой лучевых скоростей (в единицах полуамплитуды K_v) происходит в интервалах орбитальных фаз 0,35–0,45 и 0,55–0,65.

Эффект изменения формы кривой лучевых скоростей связан с изменением формы профиля линии поглощения, по которой определяется лучевая скорость. Напомним, что лучевая скорость определяется по среднему значению длины волны, найденному с использованием трех уровней: 1/3, 1/2 и 2/3 от максимальной глубины линии поглощения. Форма профиля линии поглощения оптической звезды в тесной двойной системе претерпевает изменения как в случае ее орбитального движения, так и в случае изменения наклонения орбиты системы i. Зависимость формы профиля линии поглощения оптической звезды, вызванная ее орбитальным движением, уже обсуждалась в работах (Wilson and Sofia, 1976, Антохина и Черепащук, 1997б, Shahbaz, 1998). Она связана с изменением фигуры проекции оптической звезды на картинную плоскость наблюдателя. Теперь рассмотрим, как влияет на форму профиля линии поглощения и кривую лучевых скоростей изменение наклонения орбиты i.

Оптическая звезда, близкая к заполнению своей полости Роша в двойной системе, сильно приливно деформирована и имеет сложное распределение поля скоростей, температуры и ускорения силы тяжести. Поэтому при изменении наклонения орбиты i на картинную плоскость наблюдателя начинают проектироваться качественно новые области оптической звезды (см. рис. 156). Вследствие этого форма профиля линии поглощения также претерпевает изменения. В результате изменения формы профиля линии с наклонением орбиты меняется и форма кривой лучевых скоростей. На рис. 149, 150 соответственно представлены интегральные профили линий поглощения Ca I 6439 Å и H_γ, полученные без учета инструментального профиля спектрографа, при $i = 30°$, $60°$, $90°$. Из рисунков видно, что форма профилей, полученных для различных i, различна. Профили заметно асимметричны, и эта асимметрия усиливается с увеличением наклонения орбиты i.

Зависимость формы профиля линии поглощения и, как следствие формы кривой лучевых скоростей от наклонения орбиты i возрастает с уменьшением отношения масс компонент $q = m_x/m_v$. Возвращаясь к результатам расчетов, видим, что при $q = 1$–10 эффект изменения формы кривой лучевых скоростей составляет ~ 4–1% (см. рис. 151). При значениях $q = 0{,}3$–$0{,}5$ эффект изменения формы кривой лучевых скоростей составляет ~ 8–4% (рис. 152, 153). Видно, что величина эффекта растет с уменьшением q. Это связано с пространственным расположением центра масс двойной системы относительно тела оптической звезды. С уменьшением q барицентр двойной системы смещается к оптическому спутнику. При $q < 1$ центр масс двойной системы лежит уже в теле оптической звезды. В этом случае ($q < 1$) «носик» оптической звезды движется в том же направлении при орбитальном движении, что и релятивистский объект, внося максимальное искажение в суммарный профиль линии поглощения оптической звезды. Вследствие этого, форма кривой лучевых скоростей при $q < 1$ более чувствительна к изменению наклонения орбиты,

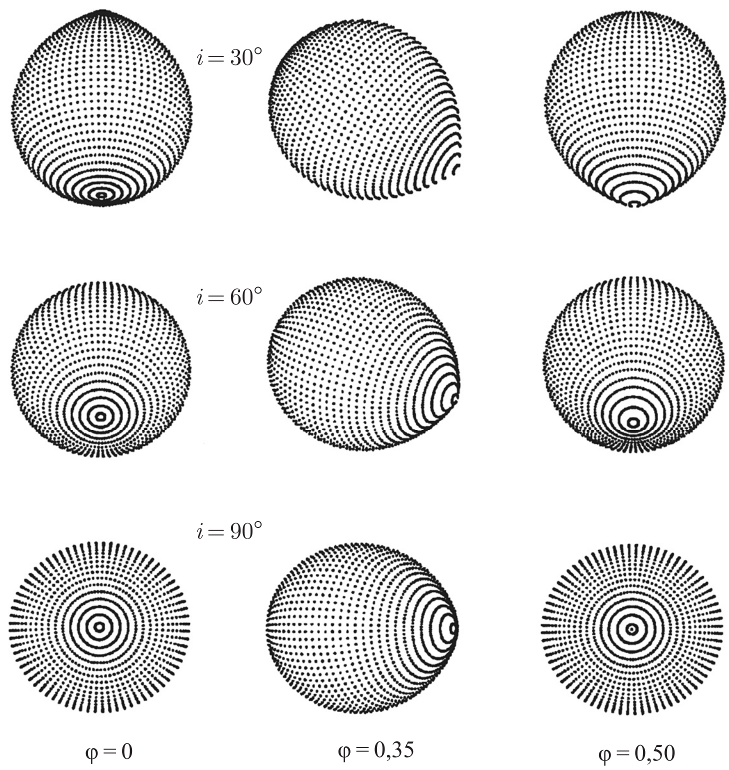


Рис. 156. Оптическая звезда рентгеновской двойной систем в модели Роша с $q = 1$ при степени заполнения полости Роша μ=1 и наклонении орбиты $i = 30°$, $60°$, $90°$ в орбитальных фазах 0,0, 0,35, 0,5. При $i = 90°$ проекция звезды на картинную плоскость сильно меняется (от круговой формы, до грушевидной). «Носик» звезды, то затмевается, то нет, что приводит к заметному искажению профиля линии и кривой лучевых скоростей. При $i = 30°$ форма проекции звезды на картинную плоскость почти не меняется — меняется лишь позиционный угол фигуры, что не влияет на форму интегрального профиля линии и кривой лучевых скоростей

по сравнению со случаем $q > 1$. При орбитальном движении оптической звезды ее проекция на картинную плоскость меняется (см. рис. 156). Степень асимметрии формы линии поглощения зависит не только от асимметрии поля скоростей элементарных площадок и асимметрии распределения параметров T_{loc} и g_{loc} относительно геометрического центра проекции, но и от градиента этих параметров по проекции оптической звезды на картинную плоскость. Наиболее экстремальной областью с точки зрения физических параметров и их градиента является «носик» оптической звезды (близкой к заполнению полости Роша). В орбитальных фазах 0,35–0,45 и 0,55–0,65 большая часть «носика» оптического спутника открыта для наблюдателя. Поэтому распределение параметров T_{loc}, g_{loc} и их градиента относительно геометрического центра проекции звезды максимально асимметрично. Это делает форму интегрального профиля линии поглощения оптической звезды на фазах 0,35–0,45 и 0,55–0,65 максимально асимметричной и максимально чувствительной к изменению наклонения орбиты i по сравнению с другими орбитальными фазами (рис. 149, 150).

Таким образом, наиболее сильная орбитальная переменность профилей линий поглощения в спектре оптической звезды наблюдается при $i \simeq 90^\circ$ и $q < 1$, так как для стороннего наблюдателя в процессе орбитального движения «носик» оптической звезды затмевается ее телом. Фигура звезды в проекции на картинную плоскость при $i = 90^\circ$ меняется очень сильно: проекция звезды становится то почти круговой, то «грушевидной», что вызывает максимальную асимметрию кривой лучевых скоростей. При наклонении орбиты $i \ll 90^\circ$ затмения «носика» звезды в процессе ее орбитального движения не происходит. Фигура проекции звезды, а также области ее поверхности, проектирующиеся на картинную плоскость, остаются почти неизменными (меняется лишь ориентация, позиционный угол этой фигуры на картинной плоскости, к чему профили линии и кривая лучевых скоростей нечувствительны), что делает профиль линии менее чувствительным к орбитальному движению оптической звезды. Рисунок 156 поясняет сказанное.

г) Заключение. Основным результатом проделанных исследований является количественная оценка эффекта изменения формы кривой лучевых скоростей оптической звезды в рентгеновской двойной системе в зависимости от наклонения орбиты i и отношения масс компонент $q = m_x/m_v$ для звезд разных масс и температур.

Согласно результатам тестовых расчетов, величина эффекта изменения формы кривой лучевых скоростей при изменении i растет с массой оптической звезды m_v (при фиксированной массе компактного объекта m_x). Наибольшую величину этот эффект имеет в системах, для которых $q < 1$. Таким образом, в первую очередь оценка наклонения орбиты по кривой лучевых скоростей возможна в рентгеновских двойных системах с массивными оптическими звездами ($m_v > 10M_\odot$, при наличии в качестве релятивистского компаньона черной дыры с массой $m_x = 10M_\odot$). Требуемая точность наблюдаемой кривой лучевых скоростей должна быть лучше 4–8 %. Заметим, что все расчеты нами проводились для массы релятивистского объекта $m_x = 10M_\odot$. Поскольку эффект изменения формы кривой лучевых скоростей преимущественно определяется как наклонением орбиты, так и отношением масс $q = m_x/m_v$, то основные выводы проделанной работы можно применять и для рентгеновских двойных систем с нейтронными звездами ($m_x = 1{,}4M_\odot$). В этом случае величина эффекта изменения формы кривой лучевых скоростей с изменением i может быть достаточно велика и при массах оптического спутника $m_v \geqslant 1M_\odot$.

Подчеркнем, что синтез кривых лучевых скоростей по линиям поглощения Ca I 6439 Å и H_γ выполнен нами в ЛТР-приближении. Известно, что ЛТР-приближение не годится для горячих звезд с $T_{\text{ef}} > 20\,000$–$30\,000$ K (Herrero, 2003). В случае синтеза кривой лучевых скоростей в не-ЛТР-приближении величина эффекта изменения формы кривой лучевых скоростей при изменении i может отличаться от случая ЛТР-приближения. Однако следует отметить, что наши тестовые расчеты с использованием постоянного по форме локального профиля линии поглощения H_γ на всей поверхности звезды (рис. 146, 147) показывают, что изменения формы интегрального профиля линии чувствительны главным образом к «геометрии» фигуры звезды (в частности, к положению «носика» звезды относительно барицентра двойной системы). Поэтому можно надеяться, что, хотя в случае высоких T_{ef} использование не ЛТР-приближения может существенно изменить эквивалентную ширину линии H_γ (или других линий), изменения формы интегрального профиля линии H_γ с фазой орбитального периода будут не сильно различаться в случае ЛТР и не-ЛТР-моделей атмосферы оптической звезды. В дальнейших частях книги мы подробно исследуем эти различия, выполнив не-ЛТР-моделирование атмосферы оптической звезды в рентгеновской двойной системе.

20. Оценка наклонения орбиты и массы черной дыры по кривой лучевых скоростей в рентгеновской двойной системе Cyg X-1

Мы изложим результаты исследования системы Cyg X-1, опубликованные в работе (Абубекеров и др., 2004б). Система Cyg X-1, состоящая из сверхгиганта O9,7 I ab и черной дыры сравнительно ярка ($V \simeq 9{,}5^m$) для получения спектров высокого разрешения с целью изучения тонких эффектов вращения оптической звезды (Gies and Bolton, 1986) и спектроскопической оценки параметров оптической звезды методом моделей атмосфер (Herrero et al., 1995). К настоящему времени накоплено большое число измерений лучевых скоростей оптической звезды в системе Cyg X-1 со средним спектральным разрешением, что позволяет построить высокоточную среднюю кривую лучевых скоростей. Можно надеяться, что высокоточная кривая лучевых скоростей системы Cyg X-1 содержит в себе усредненные эффекты орбитальной переменности соответствующих профилей линий поглощения, описанные в работах (Антохина и Черепащук, 1997б, Shahbaz, 1998). Поэтому представляет интерес попытка оценки наклонения орбиты i (и, соответственно, массы черной дыры) в системе Cyg X-1 по средней высокоточной кривой лучевых скоростей. Как оказалось, в полном соответствии с исследованиями, описанными в предыдущих параграфах, в отличие от модели двух точечных масс, в случае рентгеновской двойной системы с приливно деформированной оптической звездой, при изменении наклонения орбиты системы i меняется не только амплитуда, но и форма кривой лучевых скоростей, что позволяет оценить i по высокоточной кривой лучевых скоростей и дать независимую оценку массы черной дыры.

а) Наблюдательный материал. В сводную кривую лучевых скоростей вошли спектральные данные работ (Brucato and Zappala, 1974, Abt et al., 1977, Gies and Bolton, 1982, Ninkov et al., 1987, Sower et al., 1998, La Sala et.al., 1998, Brocksopp et al., 1999), полученные в 1973–1997 гг. Поскольку на основании теста, проведенного в работе Абубекерова и др. (2004а), теоретические лучевые скорости по линиям поглощения He I 4713 Å и H_γ оказались близки, то в сводную кривую лучевых скоростей включены скорости, определенные как по линиям водорода, так и по линиям He I. Спектральные данные, несмотря на разделяющий их большой временной интервал, показали хорошее согласие между собой (см. рис. 157). Значение орбитального периода системы Cyg X-1 было принято $P_{\rm orb} = 5{,}599829^{\rm d}$. Это значение получено из анализа многолетних рядов наблюдений (Brocksopp et al., 1999). Перед внесением в кривую лучевых скоростей наблюдаемые скорости были исправлены за систематическую скорость. Значение систематической скорости для системы Cyg X-1 лежит в интервале $-2{,}1$, $-10{,}5$ км/с и определено для каждой из наблюдательных спектроскопических работ (подробности см. в работе Абубекерова и др., 2004б).

Опишем спектральные данные, содержащиеся в опубликованных работах. В работе (Brucato and Zappala, 1974) приведены результаты летнего сета наблюдений HDE 226868(Cyg X-1), выполненных в 1973 г. на 2,54-м телескопе. Всего получено 17 спектров в диапазоне 6100–6800 Å с обратной дисперсией 20 Å/мм. Лучевые скорости определены по линии поглощения He I 6678 Å.

Спектральные данные, приведенные в работе (Abt et al., 1977) получены в период с 1972 по 1975 г. Время экспозиции спектров составляет от 20 до 65 минут. Всего было получено 85 спектров. Из них 23 спектра — с обратной дисперсией 39 Å/мм на 2,1-м кассегреновском телескопе и 62 спектра с обратной дисперсией 63 Å/мм на 0,9-м кассегреновском телескопе. Лучевые скорости определены по линиям поглощения водорода H9, H8, H_δ, H_γ и гелия He I 4026 Å, He I 4471 Å.

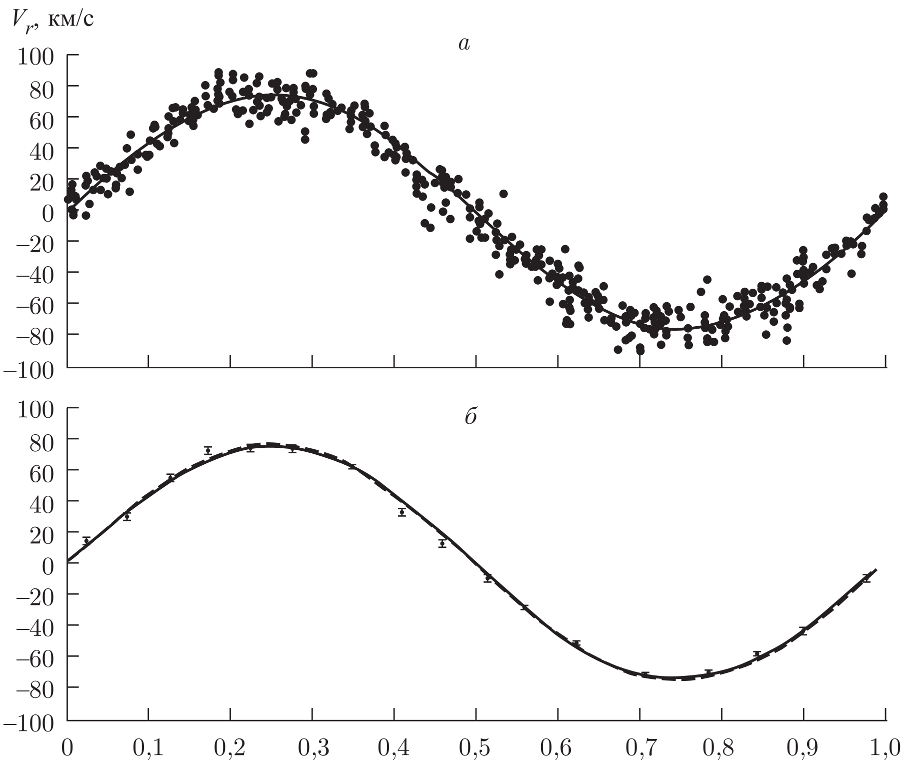


Рис. 157. *а* — сводная кривая наблюдаемых лучевых скоростей оптической звезды рентгеновской двойной системы CygX-1. Темными кружками представлены лучевые скорости, полученные по абсорбционным линиям водорода и He I. Для сравнения приведены теоретические кривые лучевых скоростей в модели Роша (сплошная линия) и в модели точечных масс (штриховая линия) для массы черной дыры $m_x = 10{,}86 M_\odot$, соответствующей минимуму невязки в модели Роша при $m_v = 20 M_\odot$, рассчитанной без использования наблюдаемых значений лучевых скоростей в фазовом интервале 0,4–0,6, при наклонении орбиты 35° (кривые почти совпадают); *б* — лучевые скорости усредненные внутри фазовых интервалов. Для сравнения приведена теоретическая кривая лучевых скоростей в модели Роша (сплошная линия) и в модели точечных масс (штриховая линия) для $m_v = 20 M_\odot$, $m_x = 10{,}86 M_\odot$, $i = 35°$

В работе (Gies and Bolton, 1982) приведены спектры, полученные в период с 1971 по 1981 г. на 1,88-м телескопе. Всего снято 78 спектров в диапазоне 3700–4920 Å с обратной дисперсией 12 и 16 Å/мм. Измерение лучевых скоростей проводилось как по линиям поглощения водорода H_β, H_γ, H_δ, H_ε, H8-H16, так и линиям He I 3819,606, 4009,270, 4026,189, 4120,812, 4143,759, 4168,971, 4387,928, 4471,507, 4713,143 Å.

В работе (Ninkov et al., 1987) представлены результаты спектральных наблюдений за период с 1980 по 1984 г. Наблюдения были выполнены на 1,22-м телескопе с обратной дисперсией 40 Å/мм (или 0,6 Å на диод), на 1,83-м телескопе с обратной дисперсией 15 Å/мм (или 0,231 Å на диод), на 3,6-м телескопе с обратной дисперсией 2,4 Å/мм (или 0,036 Å на диод). Всего получено 84 спектра. Измерение лучевой скорости проводилось отдельно по линиям поглощения водорода и гелия. Лучевая скорость по линиям поглощения водорода определена как средневзвешенное значение скоростей, измеренных по линиям H_β, H_γ, H_δ. Лучевая скорость по линиям гелия определена как средневзвешенное значение лучевых скоростей, измеренных по линиям поглощения He I 4009,270, 4026,189, 4120,812, 4143,759, 4387,928, 4471,477, 4713,143, 4921,929, 5015,675, 5047,736 Å.

В работе (Sowers et al., 1998) приведены результаты наблюдений Cyg X-1, выполненные в течение 1985–1986 гг. Всего получено 14 спектров на 2,1-м телескопе в диапазоне 6500–6710 Å с обратной дисперсией 0,14 Å на пиксел. Экспозиция спектра менялась от 1 до 3 часов. Отношение сигнал/шум на пиксел составило $S/N = 100$–300. Измерение лучевой скорости производилось по линии поглощения He I 6678 Å.

В работе (La Sala et al., 1998) приведены результаты наблюдений Cyg X-1, выполненные в 1996 г. на телескопе Исаака Ньютона (INT). Получено 37 спектров в диапазоне 4100–4900 Å с обратной дисперсией 0,8 Å/мм, экспозицией 100–200 с. и отношением $S/N > 100$. Определение лучевой скорости производилось методом кросс-корреляции относительно спектра стандарта Cep19. Лучевая скорость определена по линиям поглощения водорода и гелия He I отдельно. Для измерения лучевой скорости по линиям He I использовались линии поглощения He I 4387,928, 4471,477, 4713,143, 4921,929 Å.

В работе (Brocksopp et al., 1999) приведены спектры, полученные на кудэ-спектрографе 2,6-м телескопа Крымской астрофизической обсерватории. Получено 20 спектров с обратной дисперсией 3 Å/мм и разрешением 25000. Средняя экспозиция спектра была 1,5 часа с конечным отношением $S/N = 100$. Ширина спектров составила 60 Å, перед определением лучевой скорости спектры были центрированы по линии He II 4686 Å. Измерение лучевой скорости производилось по линии He I 4713,143 Å.

Таким образом, в нашем распоряжении оказалось 502 значения лучевой скорости, достаточно равномерно распределенных по орбитальным фазам (рис. 157). С целью уменьшения влияния случайных ошибок лучевые скорости были усреднены внутри фазовых интервалов шириной от 0,05 до 0,08. Усредненная кривая наблюдаемых лучевых скоростей представлена на рис. 157. Следует отметить, что в свете недавнего исследования (Quantrell et al., 2003), ошибки, привносимые в наблюдаемую лучевую скорость оптической звезды приливно-гравитационными волнами на поверхности звезды, также имеют случайный характер и могут быть подавлены усреднением по многим ночам наблюдений.

Ввиду большого числа измеренных лучевых скоростей (502 значения) и сравнительно большой полуамплитуды кривой лучевых скоростей в системе Cyg X-1 (~ 75 км/с), относительные ошибки нормальных точек в средней наблюдаемой кривой лучевых скоростей весьма малы ($\sim 3\%$). Это позволяет надеяться на возможность оценки наклонения орбиты (и массы черной дыры) по данной кривой лучевых скоростей.

б) Интерпретация средней кривой лучевых скоростей. В системе Cyg X-1 оптическая звезда близка к заполнению своей полости Роша. Звезда сильно приливно-деформирована, обращенная к релятивистской компоненте сторона прогрета исходящим от него рентгеновским излучением. Все эти эффекты взаимодействия компонент должны быть приняты в рассмотрение при интерпретации наблюдаемой кривой лучевых скоростей. Интерпретация средней высокоточной кривой лучевых скоростей системы Cyg X-1 была выполнена в модели Роша с помощью алгоритмов, описанных выше. Численные значения параметров модели для системы Cyg X-1 приведены в табл. 49.

Орбита системы Cyg X-1 была принята круговой на основании того, что ее орбитальный период ($P_{\text{orb}} \simeq 5{,}6^{\text{d}}$) сравним с периодами рентгеновских двойных систем SMCX-1 ($P_{\text{orb}} \simeq 3{,}9^{\text{d}}$) и 4U1538-52 ($P_{\text{orb}} \simeq 3{,}7^{\text{d}}$), у которых по результатам тайминга

Таблица 49

Численные значения параметров, используемых для синтеза кривых лучевых скоростей оптической компоненты Cyg X-1 в модели Роша

P, сут	5,599829	Период
e	0,0	Эксцентриситет (постулируется)
i, град.	30, 35, 40 45, 55, 65	Наклонение орбиты
μ	0,95*	Коэффициент заполнения полости Роша оптической компоненты
f	0,95	Коэффициент асинхронности вращения оптической компоненты
$T_{\rm ef}$ (K)	32 000**	Эффективная температура оптической компоненты
β	0,25	Коэффициент гравитационного потемнения
k_x	0,02	Отношение рентгеновской светимости релятивистской компоненты к болометрической светимости оптической компоненты L_x/L_v
A	0,5	Коэффициент переработки рентгеновского излучения
u	0,3***	Коэффициент потемнения к краю

* Данные взяты из работы (Cherepashchuk et al., 1996).
** Данные взяты из работы (Herrero et al., 1995).
*** Данные взяты из работы (Рубашевский, 1991).

рентгеновских пульсаров орбиты круговые (van Kerkwijk et al.,1995, Makishima et al., 1987). Коэффициент асинхронности вращения f принят равным 0,95 на основании работы (Gies and Bolton, 1986), в которой авторы, исходя из анализа профиля линии He I 4471 Å, приходят к выводу о близости коэффициента асинхронности к единице. Близость коэффициента асинхронности к единице также подтверждает гипотезу о круговой орбите в системе Cyg X-1 (Zahn, 1977, 1989). Поскольку радиус оптической звезды в системе Cyg X-1 больше 0,25 радиуса относительной орбиты системы, можно предполагать, что округление орбиты в этой системе за время, прошедшее после образования черной дыры, успело завершиться (Zahn, 1977, 1989). Определение эксцентриситета орбиты e по кривой лучевых скоростей, как хорошо известно, ненадежно ввиду влияния эффекта анизотропии звездного ветра (подробнее об этом, см. в работах Абубекеров и др., 2004a, Милгром, 1978).

За неизвестные параметры были приняты массы обеих компонент m_x, m_v и угол наклонения орбиты i. Нами использовался метод перебора по параметрам, при котором многократно решалась прямая задача. Для каждого значения массы оптической компоненты m_v из дискретного набора значений 20, 30, 40, 50, 60, $70M_\odot$ при фиксированном значении i проводился перебор по массам компактного объекта m_x. Результатом явились зависимости массы m_x от m_v для значений $i = 30°$, $35°$, $40°$, $45°$, $55°$, $65°$. Невязка между средней наблюдаемой кривой лучевых скоростей и теоретической кривой вычислялась по формуле

$$\Delta\,(m_x) = \frac{\sum\limits_{j=1}^{M}(n_j-1)}{M}\,\frac{\sum\limits_{j=1}^{M} n_j\left(\overline{V}_j^{\rm obs} - V_j^{\rm theor}\right)^2}{\sum\limits_{j=1}^{M} n_j\,(n_j-1)\,\sigma_j^2},$$

где $\overline{V}_j^{\text{obs}}$ — наблюдаемое среднее значение лучевой скорости на фазовом интервале с центром на фазе $\overline{\varphi}_j$, V_j^{theor} — теоретическое значение лучевой скорости на этой фазе, σ_j — среднеквадратичное отклонение для $\overline{V}_j^{\text{obs}}$ в данном фазовом интервале с центром в $\overline{\varphi}_j$, M — количество фазовых интервалов, в которых усреднялись наблюдаемые лучевые скорости, n_j — число усредненных индивидуальных наблюдений лучевых скоростей в данном фазовом интервале. Величина $\Delta(m_x)$ при точных значениях параметров распределена по закону Фишера $F_{M,\sum\limits_{j=1}^{M}(n_j-1),\,\alpha}$ (Худсон, 1970).

Задавшись уровнем значимости α, можно найти доверительное множество для искомого параметра m_x при фиксированных значениях i и m_v. Оно состоит из тех значений m_x, для которых выполняется условие (Гончарский и др., 1991)

$$\Delta(m_x) \leqslant F_{M,\sum\limits_{j=1}^{M}(n_j-1),\,\alpha}.$$

Решение обратной задачи, помимо модели Роша, выполнено также в модели двух точечных масс. Последняя использовалась с целью выявления различия результатов интерпретации в рамках двух моделей: Роша и точечных масс.

Следует оговорить ситуацию со звездным ветром оптической звезды в системе Cyg X-1. Оптической звездой здесь является O-сверхгигант. Неоднородность ускорения силы тяжести на его поверхности и прогрев рентгеновским излучением поверхности, обращенной к релятивистской компоненте, нарушает изотропность истечения звездного ветра. Скорость ветра вблизи точки Лагранжа L_1 возрастает, что проявляется в избытке отрицательной лучевой скорости близ фазы 0,5, когда рентгеновский источник находится впереди O-сверхгиганта (см. рис. 157). Подробный анализ эффекта анизотропии звездного ветра в рентгеновских двойных системах с OB-сверхгигантами проведен в работе Абубекерова и др. (2004а) (см. ниже). Анизотропия звездного ветра в двойной системе привносит систематические ошибки в наблюдаемую кривую лучевых скоростей. Поэтому интерпретация средней наблюдаемой кривой лучевых скоростей была проведена двумя методами:

Метод 1 — с использованием всех точек наблюдаемой средней кривой лучевых скоростей;

Метод 2 — без учета точек средней кривой лучевых скоростей, лежащих в интервале фаз 0,4–0,6, как наиболее сильно подверженных искажению эффектом анизотропии звездного ветра.

Для работы был выбран уровень значимости 5%. В процессе интерпретации методом 1 и модель Роша, и модель двух точечных масс по выбранному уровню значимости $\alpha = 5\%$ отвергаются. Поэтому, мы отдали предпочтение методу 2, с использованием которого модель по уровню значимости $\alpha = 5\%$ может быть принята. Таким образом, анализ средней наблюдаемой кривой лучевых скоростей с косвенным учетом эффекта анизотропии звездного ветра (метод 2) позволил принять модель по уровню значимости 5%. Это говорит о важности учета эффекта анизотропии звездного ветра при интерпретации кривых лучевых скоростей OB-звезд, входящих в ТДС (Абубекеров и др., 2004а, Милгром, 1978).

Поведение невязки Δ между наблюдаемой и теоретической кривыми лучевых скоростей в модели Роша и модели двух точечных масс для $i = 40^\circ$ представлено на рис. 158. По результатам анализа наблюдаемой средней кривой лучевых скоростей в модели Роша и модели двух точечных масс построены зависимости массы рентгеновской компоненты m_x от массы оптической звезды m_v (рис. 159). Для угла наклонения орбиты $i = 40^\circ$ при массе оптической звезды $50M_\odot$ минимальное значение невязки Δ, достигаемое при $m_x = 16{,}16M_\odot$, равно значению квантиля

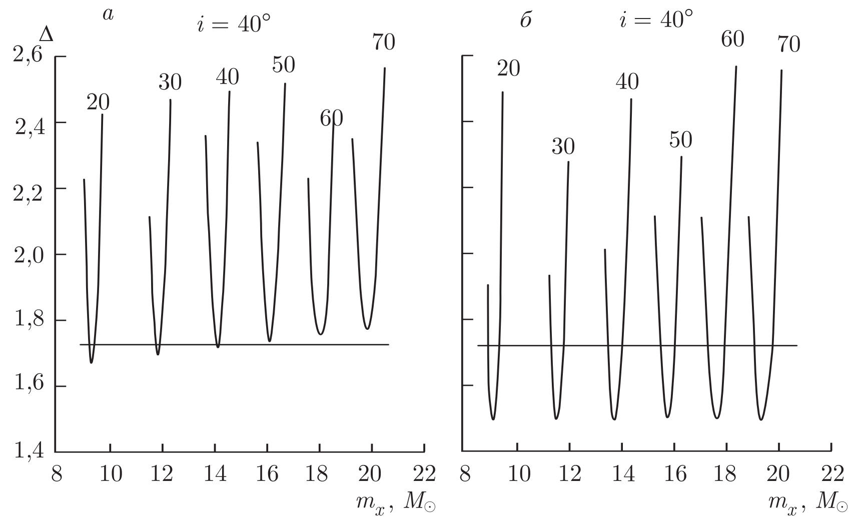


Рис. 158. Значения невязок, полученные методом 2 (без использования лучевых скоростей в фазах 0,4–0,6) между средней наблюдаемой кривой лучевых скоростей системы Cyg X-1 и синтезированной кривой в модели Роша (*а*) и модели точечных масс (*б*) при наклонении орбиты $i = 40°$. Горизонтальная линия соответствует критическому значению невязки по критерию Фишера $\Delta_{13,401} = 1{,}72$ на уровне значимости α=5%. Масса оптической компоненты, при которой получена невязка, указана около кривых (в массах Солнца)

критического уровня для $\alpha = 5\,\%$. Поэтому коридор ошибок зависимости масс на рис. 159 обрывается при значении массы оптической звезды $m_v = 50 M_\odot$. При наклонении орбиты $i \geqslant 45°$ ни одно значение массы релятивистского объекта m_x не удовлетворяет средней наблюдаемой кривой лучевых скоростей по 5 % уровню значимости. Поэтому на рис. 159 зависимости между m_v и m_x для $i = 45°$, $55°$, $65°$, найденные по минимуму невязки Δ, приведены без коридора ошибок. Численно результат интерпретации средней кривой лучевых скоростей методом 2 в модели Роша представлен в табл. 50. Результат анализа средней кривой лучевых скоростей в модели двух точечных масс представлен в табл. 51. Отметим, что в табл. 50 значения m_x, при которых модель Cyg X-1 отвергалась по 5 % уровню значимости, приведены без доверительных интервалов.

Из табл. 50 и 51 видно, что массы компактного объекта, полученные в модели Роша, хотя и незначительно, но систематически больше масс m_x, определенных в модели двух точечных масс (различие составляет $\sim 2\,\%$). Близость значений масс m_x, полученных в этих двух моделях, можно объяснить двумя причинами. Во-первых, вследствие малого значения ускорения силы тяжести близ точки Лагранжа L_1 температура «носика» оптической звезды ниже температуры остальной ее поверхности (гравитационное потемнение). Во-вторых, прогрев обращенной к рентгеновскому источнику части оптической звезды сравнительно невелик ($k_x = 0{,}02$). Поэтому вклад излучения «носика» звезды, вносящего наибольшее возмущение в наблюдаемую кривую лучевых скоростей, в интегральное излучение оптической звезды мал, что и объясняет близость значений m_x в модели Роша и модели двух точечных масс. Более подробно влияние коэффициента рентгеновского прогрева k_x на форму кривой лучевых скоростей обсуждается в работе Антохиной и Черепащука (1997).

Таким образом, как следует из рис. 158, 159 и табл. 50, 51, модель двух точечных масс не отвергается ни при каких значениях i, m_x, m_v, что подтвер-

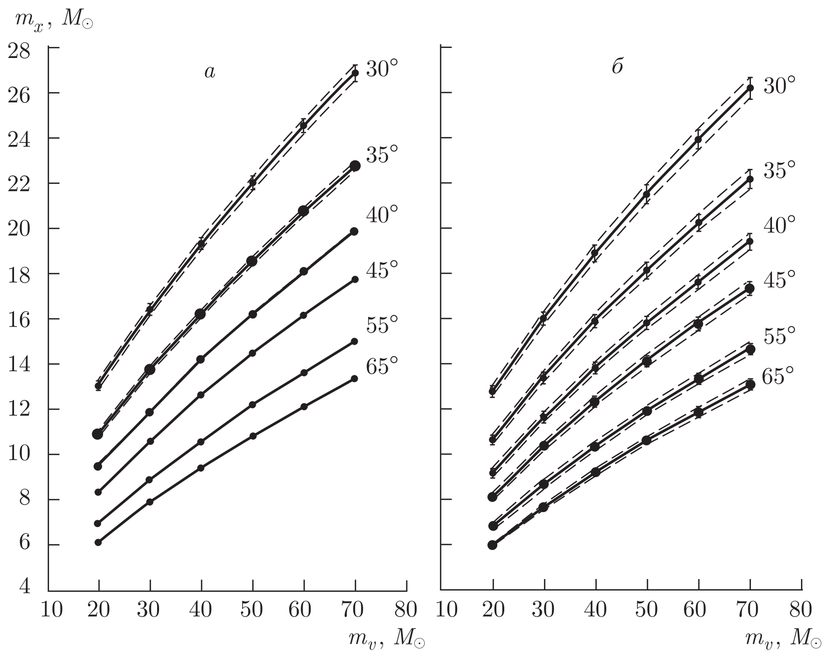


Рис. 159. *а* — зависимость массы компактного объекта в системе Cyg X-1 от массы оптической звезды при анализе кривой лучевых скоростей в модели Роша методом 2 (без использования лучевых скоростей в интервале 0,4–0,6). Соответствующие наклонения орбиты указаны около кривых; *б* — то же для модели точечных масс. В модели точечных масс для любого значения i модель может быть принята, и может быть оценен доверительный интервал (границы которого обозначены штриховыми линиями). В модели Роша для $i \geqslant 45°$ модель отвергается на уровне значимости $\alpha = 5\,\%$. Поэтому в модели Роша для $i \geqslant 45°$ доверительный интервал не определяется (вырождается в пустое множество), и коридор ошибок в данном случае не указан

Таблица 50

Зависимость массы релятивистской компоненты от массы оптической компоненты, полученная в модели Роша для углов наклонения орбиты $i = 30°$–$65°$

m_v, $M_\odot$	m_x, $M_\odot$					
	$i = 30°$	$i = 35°$	$i = 40°$	$i = 45°$	$i = 55°$	$i = 65°$
20	$13{,}03^{+0{,}21}_{-0{,}21}$	$10{,}86^{+0{,}21}_{-0{,}21}$	$9{,}37^{+0{,}09}_{-0{,}09}$	8,31	6,92	6,12
30	$16{,}36^{+0{,}24}_{-0{,}24}$	$13{,}71^{+0{,}21}_{-0{,}21}$	$11{,}89^{+0{,}09}_{-0{,}09}$	10,58	8,85	7,84
40	$19{,}29^{+0{,}27}_{-0{,}26}$	$16{,}24^{+0{,}21}_{-0{,}21}$	$14{,}13^{+0{,}05}_{-0{,}05}$	12,59	10,56	9,36
50	$21{,}98^{+0{,}29}_{-0{,}30}$	$18{,}55^{+0{,}21}_{-0{,}21}$	16,16	14,43	12,12	10,76
60	$24{,}47^{+0{,}31}_{-0{,}30}$	$20{,}70^{+0{,}21}_{-0{,}21}$	18,06	16,14	13,58	12,06
70	$26{,}83^{+0{,}33}_{-0{,}33}$	$22{,}72^{+0{,}21}_{-0{,}21}$	19,85	17,74	14,95	13,29

ждает классическое утверждение о том, что наклонение орбиты не может быть определено из анализа кривой лучевых скоростей (в модели двух точечных масс). В то же время, в рамках модели Роша, при некоторых значениях параметров i,

Таблица 51

Зависимость массы релятивистской компоненты от массы оптической, полученная в модели точечных масс для углов наклонения орбиты $i = 30°–65°$

$m_v, M_\odot$	$m_x, M_\odot$					
	$i=30°$	$i=35°$	$i=40°$	$i=45°$	$i=55°$	$i=65°$
20	$12{,}82^{+0{,}26}_{-0{,}26}$	$10{,}68^{+0{,}21}_{-0{,}19}$	$9{,}23^{+0{,}20}_{-0{,}19}$	$8{,}19^{+0{,}16}_{-0{,}15}$	$6{,}84^{+0{,}12}_{-0{,}12}$	$6{,}06^{+0{,}11}_{-0{,}10}$
30	$16{,}07^{+0{,}32}_{-0{,}31}$	$13{,}48^{+0{,}25}_{-0{,}24}$	$11{,}69^{+0{,}22}_{-0{,}20}$	$10{,}41^{+0{,}20}_{-0{,}18}$	$8{,}74^{+0{,}16}_{-0{,}16}$	$7{,}76^{+0{,}14}_{-0{,}13}$
40	$18{,}94^{+0{,}36}_{-0{,}36}$	$15{,}95^{+0{,}29}_{-0{,}29}$	$13{,}87^{+0{,}25}_{-0{,}25}$	$12{,}38^{+0{,}22}_{-0{,}22}$	$10{,}41^{+0{,}19}_{-0{,}17}$	$9{,}27^{+0{,}17}_{-0{,}16}$
50	$21{,}56^{+0{,}40}_{-0{,}41}$	$18{,}20^{+0{,}33}_{-0{,}33}$	$15{,}86^{+0{,}29}_{-0{,}27}$	$14{,}17^{+0{,}25}_{-0{,}26}$	$11{,}95^{+0{,}21}_{-0{,}20}$	$10{,}65^{+0{,}19}_{-0{,}18}$
60	$23{,}98^{+0{,}45}_{-0{,}44}$	$20{,}29^{+0{,}38}_{-0{,}36}$	$17{,}71^{+0{,}32}_{-0{,}31}$	$15{,}84^{+0{,}28}_{-0{,}27}$	$13{,}38^{+0{,}23}_{-0{,}23}$	$11{,}93^{+0{,}20}_{-0{,}19}$
70	$26{,}27^{+0{,}48}_{-0{,}48}$	$22{,}25^{+0{,}40}_{-0{,}36}$	$19{,}46^{+0{,}34}_{-0{,}34}$	$17{,}42^{+0{,}30}_{-0{,}30}$	$14{,}72^{+0{,}25}_{-0{,}25}$	$13{,}14^{+0{,}22}_{-0{,}21}$

m_x, m_v модель отвергается (по уровню значимости 5%), что и позволяет дать оценку для наклонения орбиты i из анализа кривой лучевых скоростей. Подчеркнем, что все расчеты были сделаны нами с помощью экспрессного метода вычисления кривой лучевых скоростей, в котором локальные профили линии H_γ, выраженные в потоках, брались из таблиц Куруца. Проверка этих результатов с помощью точного метода (Абубекеров и др., 2005) показала лишь незначительные различия (см. ниже).

в) Ограничение на массу черной дыры, следующее из кривой лучевых скоростей. Как следует из рис. 159 и табл. 50, высокоточная средняя наблюдаемая кривая лучевых скоростей практически независимо от массы оптической звезды m_v позволяет ограничить наклонение орбиты i в системе Cyg X-1 сверху: $i < 45°$ (по уровню значимости 5%; т. е. отвергая значения i, большие 45°, мы редко ошибаемся: не более, чем в 5 случаев из 100). Знание верхнего предела для i позволяет получить оценку снизу для массы черной дыры. Используем выражение для массы компактного объекта m_x, следующее из функции масс оптической звезды $f_v(m)$:

$$m_x = f_v(m)\left(1+\frac{1}{q}\right)^2\frac{1}{\sin^3 i}.$$

Так как $q = m_x/m_v > 0$, из этого выражения следует:

$$m_x > f_v(m)\cdot\frac{1}{\sin^3 i},$$

где значение $f_v(m)$ определяется известным выражением:

$$f_v(m) = \frac{m_x^3\sin^3 i}{(m_x+m_v)^2} = 1{,}038\cdot 10^{-7}K_v^3 P\left(1-e^2\right)^{3/2}.$$

Необходимо учесть, что наблюдаемая функция масс $f_v(m)$ соответствует реальной неточечной фигуре звезды и занижена по сравнению с моделью звезды как материальной точки. Чтобы учесть это отличие при использовании выражения для функции масс $f_v(m)$, мы должны подставить величину K_v, соответствующую значению m_x, найденному в модели Роша, а не в модели двух точечных масс. Мы скорректировали наблюдаемое значение $f_v(m)$ за неточечность оптической звезды, используя результаты наших расчетов. Так, для $i = 35°$ в модели точечных масс $f_v(m) = (0{,}245 \pm 0{,}002)M_\odot$, скорректированное значение функции масс

$f_v(m) = (0{,}2571 \pm 0{,}0006)M_\odot$. Для $i = 40°$ в модели точечных масс $f_v(m) = (0{,}248 \pm 0{,}002)M_\odot$, скорректированное значение $f_v(m) = (0{,}2580 \pm 0{,}0007)M_\odot$. В дальнейшем значение функции масс оптической звезды принималось равным $f_v(m) = 0{,}258M_\odot$. С этим значением функции масс и с верхним пределом для $i = 45°$ находим нижний предел на массу черной дыры в системе Cyg X-1: $m_x > 0{,}73M_\odot$. Подчеркнем, что оценка $m_x > 0{,}73M_\odot$ получена только из одной высокоточной кривой лучевых скоростей системы Cyg X-1.

г) Оценка массы черной дыры на основе информации о радиусе оптической звезды. В работе (Балог и др., 1981а,б) представлены результаты решения высокоточной оптической кривой блеска системы Cyg X-1 для различных расстояний до системы $d = 1{,}5,\ 2{,}0,\ 2{,}5$ кпк, т. е. для различных радиусов оптической звезды $R_v = 13{,}5,\ 18{,}0,\ 22{,}5R_\odot$. При соответствующей степени заполнения полости Роша μ оптической звездой в этой работе определена связь между отношением масс q и наклонением орбиты i. Как следует из этого анализа, при $i < 31°$ оптическая звезда в системе Cyg X-1 должна переполнять свою полость Роша, чтобы обеспечить наблюдаемую амплитуду оптической кривой блеска $\sim 0{,}04^m$. Переполнение оптической звездой своей полости Роша в системе Cyg X-1 физически нереально, поскольку там не наблюдается объекта типа SS 433. Как известно, если оптическая звезда в массивной рентгеновской двойной системе переполняет свою полость Роша, темп поступления вещества в аккреционный диск становится столь большим, что диск оптически толст для рентгеновского излучения, и вместо мощного рентгеновского источника наблюдается оптически яркий аккреционный диск. Поскольку в системе

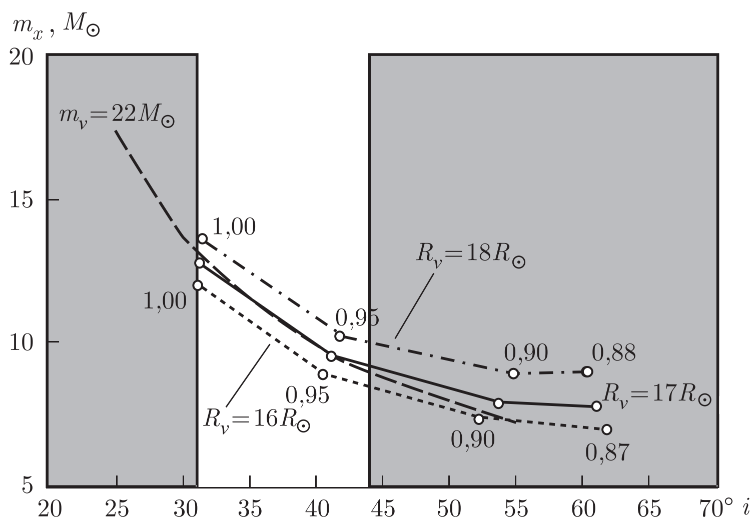


Рис. 160. Зависимость массы компактного объекта системы Cyg X-1 от наклонения орбиты: сплошная линия получена из решения кривой блеска (Балог и др., 1981) при радиусе оптической звезды $17R_\odot$ (Herrero et al., 1995), штрих-пунктирная линия получена из решения кривой блеска (Балог и др., 1981) при радиусе оптической звезды $18R_\odot$, пунктирная линия получена из решения кривой блеска (Балог и др., 1981), при радиусе оптической звезды $16R_\odot$ (Herrero et al., 1995), штриховая линия получена из наблюдаемой средней кривой лучевых скоростей при массе оптической звезды $22M_\odot$. Цифры у светлых кружков показывают соответствующую величину степени заполнения полости Роша оптической звездой. Затемненные области соответствуют значениям i, неудовлетворяющим кривой блеска, приведенной в работе (Балог и др., 1981), и кривой лучевых скоростей

Cyg X-1 наблюдается мощный рентгеновский источник, гипотеза о переполнении оптической звездой полости Роша отвергается. Поэтому из анализа кривой блеска мы располагаем нижним значением наклонения орбиты для системы Cyg X-1: $i > 31^\circ$.

Анализ спектров оптической звезды в не-ЛТР-приближении, выполненный в работе (Herrero et al., 1995), дает значение радиуса оптической звезды $R_v = 17R_\odot$. Исходя из этого значения R_v и результатов решения кривой блеска (Балог и др., 1981), была построена зависимость массы релятивистской компоненты m_x в двойной системе Cyg X-1 от наклонения орбиты i (рис. 160). Решение оптической кривой блеска при фиксированном радиусе $R_v = 17R_\odot$ дает зависимость между q и i. Вычисляя массу m_x по формуле $m_x = f_v\,(m)\left(1 + \dfrac{1}{q}\right)^2 \dfrac{1}{\sin^3 i}$, получаем связь между m_x и i. Как следует из рис. 160, в допустимых пределах для наклонения орбиты $i = 31^\circ$–44° масса компактного объекта по результатам работы (Балог и др., 1981) заключена в пределах $m_x = (9{,}2$–$12{,}8)M_\odot$. Для проверки зависимости величины m_x от значения радиуса оптической звезды мы дополнительно взяли значения радиуса $R_v = 16$ и $18R_\odot$. С этими значениями R_v на основе решения кривой блеска (Балог и др., 1981) также были построены зависимости между m_x и i (см. рис. 160). Как видно из рис. 160, зависимости достаточно близки, т. е. неопределенность в значении радиуса R_v слабо сказывается на оценке величины m_x: для $R_v = 16R_\odot$ и $18R_\odot$ в диапазоне допустимых значений i $31^\circ < i < 44^\circ$ масса черной дыры равна $(8{,}5$–$12{,}0)M_\odot$ и $(10{,}0$–$13{,}6)M_\odot$ соответственно.

Таким образом, принимая значение радиуса оптической звезды $R_v = (17 \pm 1)R_\odot$, получаем, что масса черной дыры в системе Cyg X-1 заключена в пределах $m_x = (8{,}5$–$13{,}6)M_\odot$.

д) Оценка массы черной дыры на основе информации о светимости оптической звезды. Тонкий спектроскопический анализ Cyg X-1 (Herrero et al., 1995) позволил определить не только радиус оптической звезды, но и ее болометрическую светимость $\lg(L_v/L_\odot) = 5{,}4$. Знание болометрической светимости оптической звезды позволило дать оценку ее массы.

Зависимость «масса–светимость» для оптических компонент рентгеновских двойных систем отличается от зависимости «масса–светимость» одиночных звезд (Ziolkowski, 1978). Оптическая звезда в тесной двойной системе при заполнении полости Роша или же при интенсивном звездном ветре теряет свои верхние слои, вследствие чего температура ее поверхности и светимость выше одиночных звезд той же массы (более подробное обсуждение этой проблемы см. в работе Петрова и др., 2007). Обратимся к зависимости «масса–светимость» для OB-сверхгигантов, входящих в рентгеновские двойные системы (Абубекеров, 2004, Петров и др., 2007). Эта зависимость приведена на рис. 161. Видно, что светимости оптической звезды в системе Cyg X-1 $\lg(L_v/L_\odot) = 5{,}4$ соответствует ее масса $22M_\odot$, тогда как зависимость «масса–светимость» для невзаимодействующих ТДС для той же светимости дает оценку массы оптической звезды $28M_\odot$. Исходя из полученной в модели Роша зависимости между массой оптической звезды и релятивистского объекта (рис. 159 *а*), была построена зависимость массы релятивистского объекта m_x от наклонения орбиты i при условии, что $m_v = 22M_\odot$, которая приведена на рис. 160. В допустимых пределах наклонения орбиты $i = 31^\circ$–44° масса релятивистского объекта оказывается заключенной в пределах $m_x = (9{,}0$–$13{,}2)M_\odot$.

Таким образом, значение массы черной дыры в системе Cyg X-1, определенной с использованием радиуса оптической звезды и путем решения кривой блеска, а также значение массы черной дыры, определенной по светимости оптической звезды,

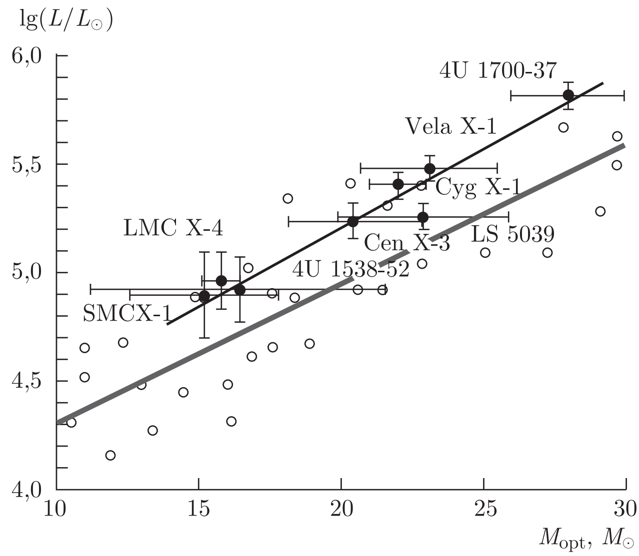


Рис. 161. Зависимость «масса–светимость» для OB-звезд в рентгеновских двойных системах (темные кружки) и OB-звезд, входящих в невзаимодействующие двойные системы, согласно работе (Herrero, 1992) (светлые кружки). Серая линия — линейная аппроксимация методом наименьших квадратов зависимости для невзаимодействующих OB-звезд (Herrero, 1992). Черной линией показана линейная аппроксимация для рентгеновских систем

хорошо согласуются между собой. В пределах допустимых значений наклонения орбиты $i = 31°–44°$ оба метода дают оценку массы черной дыры $m_x = (8{,}5–13{,}6)M_{\odot}$.

е) Обсуждение результатов. Обратимся к зависимостям между m_x и m_v, полученным в модели Роша для $i = 30°$, $35°$, $40°$, $45°$, $55°$, $65°$ (см. рис. 159 *а*). Из рисунка видно, что теоретические кривые лучевых скоростей, начиная с наклонения орбиты $i = 45°$ и более, не удовлетворяют высокоточной средней наблюдаемой кривой лучевых скоростей по 5% уровню значимости при любой массе оптической звезды.

На рис. 162 представлены графики поведения невязок Δ, рассчитанных в процессе поиска массы m_x в модели Роша для $i = 30°$, $35°$, $40°$, $45°$, $55°$, $65°$ при массе оптической звезды $m_v = 22M_{\odot}$. Видно, что значение минимума невязки Δ между наблюдаемой средней кривой лучевых скоростей и теоретическими кривыми в модели Роша растет с увеличением наклонения орбиты i, т. е. модель оказывается чувствительной не только к массе компактного объекта m_x, но и к наклонению орбиты. В случае системы Cyg X-1 при массе оптической звезды $m_v = 22M_{\odot}$, начиная с наклонения орбиты $i = 44°$ ни одно значение m_x не может удовлетворить наблюдаемой средней кривой лучевых скоростей по 5% уровню значимости. На рис. 162 *б* показаны графики поведения невязок Δ, вычисленных в модели двух точечных масс для наклонений орбиты $i = 30°$, $35°$, $40°$, $45°$, $55°$, $65°$ при массе оптической звезды $m_v = 22M_{\odot}$. Видно, что значение невязки в минимуме неизменно, т. е. модель нечувствительна к наклонению орбиты i (поэтому из анализа кривой лучевых скоростей оценивается не m_x, а величина $m_x \sin^3 i$). Иными словами, для любого i можно определить массу m_x, удовлетворяющую средней наблюдаемой кривой лучевых скоростей по 5% уровню значимости, причем для любого i минимальная невязка одна и та же. Как уже отмечалось выше, возможность определения i из анализа высокоточной кривой лучевых скоростей связана с тем, что в случае модели

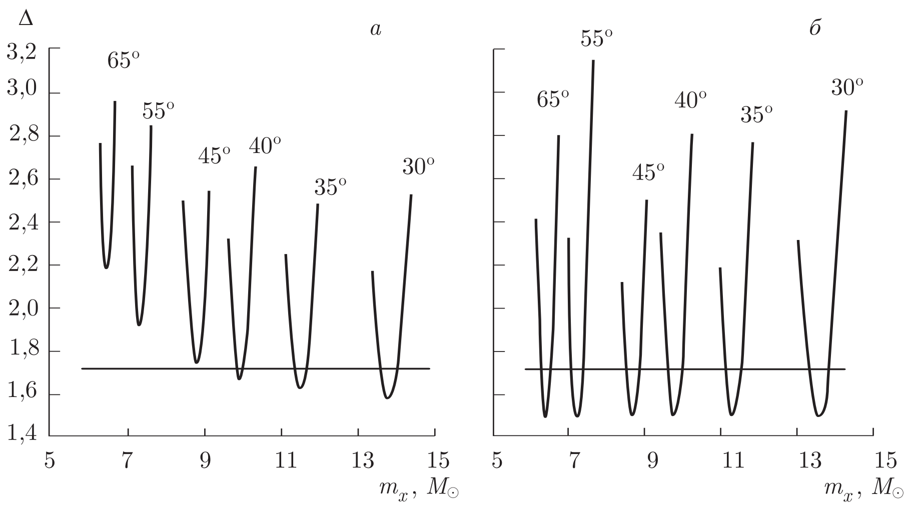


Рис. 162. *а* — невязки, полученные в процессе интерпретации средней наблюдаемой кривой лучевых скоростей системы Cyg X-1 в модели Роша методом 2 (без использования точек на кривой лучевых скоростей в фазах 0,4–0,6) при массе оптической звезды $22M_\odot$ для различных значений наклонения орбиты i (приведены около кривых); *б* — то же для модели точечных масс

Роша форма профиля линии поглощения в спектре оптической звезды, близкой к заполнению своей полости Роша, меняется с фазой орбитального периода, причем эти изменения различны для различных значений наклонения орбиты i.

Все проведенные расчеты сделаны нами без учета влияния инструментального профиля спектрографа на теоретические профили линий поглощения в спектре оптической звезды. Как уже отмечалось выше, учет влияния инструментального профиля приводит к результатам интерпретации наблюдаемой кривой лучевых скоростей, близким к результатам, полученным без учета инструментального профиля. Тем не менее, нами для системы Cyg X-1 дополнительно проведен синтез теоретических кривых лучевых скоростей по абсорбционному профилю H_γ, свернутому с инструментальным профилем спектрографа. Расчет проведен для двух значений аппаратной функции с полной шириной на половинной интенсивности FWHM $= 7$ Å и 14 Å (предполагалось, что инструментальный профиль или аппаратная функция — гауссиана). Масса m_v была зафиксирована: $m_v = 22M_\odot$, по остальным параметрам $(m_x,\ i)$ проводился перебор в прежних интервалах. Расчет показал, что в модели Роша все модели с наклонением орбиты более 45° по-прежнему отвергаются по уровню значимости 5%. Значения невязок для разных i между наблюдаемой и теоретической кривыми лучевых скоростей в случае теоретических профилей, искаженных и неискаженных инструментальным профилем, очень близки. Таким образом, можно заключить, что в случае OB-звезд в рентгеновских двойных системах, интерпретация наблюдаемой кривой лучевых скоростей (построенной по линиям He I и H, значительно уширенным вследствие влияния эффекта Штарка) возможна на основе синтетических профилей линий без учета влияния на них аппаратной функции спектрографа.

Степень чувствительности обратной задачи интерпретации средней кривой лучевых скоростей Cyg X-1 к изменению искомых параметров проиллюстрирована на рис. 163. Здесь приведены наблюдаемая средняя кривая лучевых скоростей Cyg X-1 и две теоретические кривые лучевых скоростей, соответствующие минимальным невязкам Δ. Для наклонения орбиты $i = 35^\circ$ при $m_v = 22M_\odot$ минимуму невязки в модели Роша соответствует $m_x = 11{,}47M_\odot$. Соответствующая теоретическая кривая лучевых скоростей приведена на рис. 163 в виде сплошной линии. Для наклонения $i = 65^\circ$ при $m_v = 22M_\odot$ минимуму невязки в модели Роша соответствует $m_x = 6{,}48M_\odot$. Соответствующая теоретическая кривая лучевых скоростей приведена на рис. 163 в виде пунктирной линии. Видно различие формы оптимальных теоретических кривых лучевых скоростей, возникающее вследствие изменения наклонения орбиты. Вследствие этого различия минимальная невязка Δ для случая $i = 65^\circ$, $m_v = 22M_\odot$, $m_x = 6{,}48M_\odot$ значительно больше минимальной невязки для случая $i = 35^\circ$, $m_v = 22M_\odot$, $m_x = 11{,}47M_\odot$ и превосходит критическое значение невязки по уровню значимости 5%. Это и позволяет ограничить значение i при интерпретации средней кривой лучевых скоростей системы Cyg X-1 в рамках модели Роша.

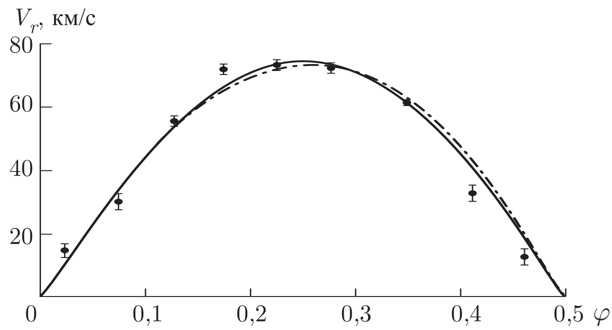


Рис. 163. Теоретические кривые лучевых скоростей оптической звезды в системе Cyg X-1, рассчитанные для соответствующих минимуму невязки параметров $m_v = 22M_\odot$, $m_x = 11{,}47M_\odot$, $i = 35^\circ$ (сплошная линия) и $m_v = 22M_\odot$, $m_x = 6{,}48M_\odot$, $i = 65^\circ$ (штрих-пунктирная линия). Точками показаны наблюдаемые средние значения лучевой скорости оптической звезды в системе Cyg X-1. Хотя амплитуды оптимальных кривых лучевых скоростей близки, их формы существенно различаются. Это и позволяет ограничить наклонение орбиты i с помощью высокоточной кривой лучевых скоростей

Мы уже отмечали, что все выше приведенные расчеты при интерпретации средней кривой лучевых скоростей были выполнены экспрессным методом, использующим локальные профили линии H_γ, вычисленные в потоках (т. е. усредненные по диску сферической звезды) в работах Куруца. Для проверки чувствительности результатов интерпретации средней кривой лучевых скоростей системы Cyg X-1 к методу расчета локальных профилей линии, была выполнена интерпретация этой кривой точным методом, в котором локальные профили линии поглощения H_γ были рассчитаны в интенсивностях на основе построения модели атмосферы для локальных элементарных площадок (Антохина и др., 2003, 2005).

Интерпретация точным методом средней кривой лучевых скоростей системы Cyg X-1 проведена с учетом и без учета влияния инструментального профиля спектрографа на модельный интегральный профиль линии поглощения H_γ. Ширина инструментального профиля (аппроксимируемого гауссианой) FWHM принята равной 7 Å. Анализ средней кривой лучевых скоростей проведен для значений $m_v = 20$, 30, 40, 50, и $60M_\odot$. Остальные параметры модели содержатся в табл. 49. Результатом анализа является зависимость между массой оптической звезды m_v и релятивистского объекта m_x для набора наклонений орбиты $i = 30^\circ$, 35°, 40°, 45°, 55°, 65°. Эти зависимости приведены на рис. 164. Как видно из рисунка, наклонения орбиты $i < 45^\circ$, как и ранее, отвергаются по уровню значимости 5%.

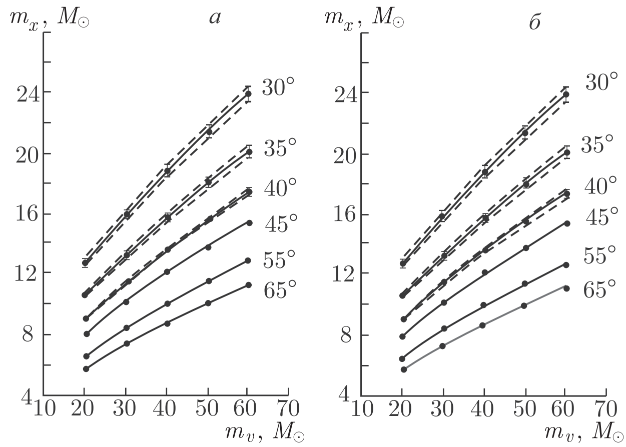


Рис. 164. *а* — зависимость массы компактного объекта в рентгеновской двойной системе Cyg X-1 от массы оптической звезды для наклонений орбиты $i = 30°$, $35°$, $40°$, $45°$, $55°$ и $65°$, полученная в модели Роша при интерпретации средней высокоточной кривой лучевых скоростей системы Cyg X-1 из работы (Абубекеров и др., 2004б). Наклонение орбиты указано около соответствующей кривой; *б* — то же что на графике (*а*), с учетом влияния аппаратной функции с FWHM $= 7$ Å на моделируемый интегральный профиль линии H_γ в спектре оптической звезды. При вычислении интегрального профиля линии H_γ и соответствующих кривых лучевых скоростей использовался точный алгоритм (Антохина и др., 2003, 2005), т. е. локальные профили линии H_γ вычислялись в интенсивностях

При массе оптической звезды $m_v = 22M_\odot$ наклонение орбиты $i < 43°$ (рис. 164). Принимая по внимание, как и ранее, результаты анализа оптической кривой блеска Cyg X-1, накладывающие ограничение на наклонение орбиты снизу: $i > 31°$, можно заключить, что масса черной дыры в системе Cyg X-1 (при массе $m_v = 22M_\odot$) заключена в пределах $m_x = (8{,}4\text{–}12{,}8)M_\odot$ (без учета влияния аппаратной функции) и $m_x = (8{,}2\text{–}12{,}6)M_\odot$ (с учетом аппаратной функции). Напомним, что согласно результатам нашей интерпретации экспрессным методом, наклонение орбиты $i < 45°$, а масса черной дыры (при массе $m_v = 22M_\odot$) $m_x = (9{,}0\text{–}13{,}2)M_\odot$. Таким образом, результаты интерпретации с применением точного и экспрессного методов находятся в хорошем согласии.

На примере системы Cyg X-1 мы показали, что точности средней наблюдаемой кривой лучевых скоростей 3% (от полуамплитуды ~ 75 км/с) оказывается достаточно, чтобы с помощью одной кривой лучевых скоростей наложить ограничение на наклонение орбиты системы и оценить массу черной дыры.

ж) Оценка наклонения орбиты по кривой лучевых скоростей в случае эллиптической орбиты системы. Все расчеты, проведенные выше, были сделаны нами для круговой орбиты, которая, вполне вероятно, имеет место в системе Cyg X-1.

С целью более тщательного изучения влияния наклонения орбиты на форму кривой лучевых скоростей в модели Роша были вычислены наборы теоретических кривых лучевых скоростей как для случая круговой, так и для эллиптической орбиты.

В случае круговой орбиты масса оптической звезды была принята $m_v = 22M_\odot$, масса черной дыры $m_x = 11{,}47M_\odot$. Данная масса m_x соответствует решению средней наблюдаемой кривой лучевых скоростей системы Cyg X-1 для $i = 35°$. Значения остальных параметров модели оставлены прежними (см. табл. 49). Синтез теоретических кривых лучевых скоростей проводился для $i = 30°$, $60°$, $90°$. Поскольку амплитуда кривых лучевых скоростей возрастает с увеличением наклонения орбиты, теоретические значения лучевой скорости нормировались на ее максимальное значение в интервале фаз $\varphi = 0{,}0$–$0{,}5$ (в модели Роша максимум лучевой скорости достигается не обязательно в квадратуре, когда $\varphi = 0{,}25$). Нормированные кривые лучевых скоростей для $i = 30°$, $60°$, $90°$ приведены на рис. 165. Из-за относительно небольшой величины эффекта на рис. 165 представлены лишь части кривых лучевых скоростей, в интервале орбитальных фаз $\varphi = 0{,}2$–$0{,}5$. Как видно из рис. 165, форма кривой лучевых скоростей чувствительна к наклонению орбиты: относительная лучевая скорость оптической звезды на фазовом интервале 0,3–0,5 (и симметричном ему интервале 0,5–0,8) с ростом i увеличивается.

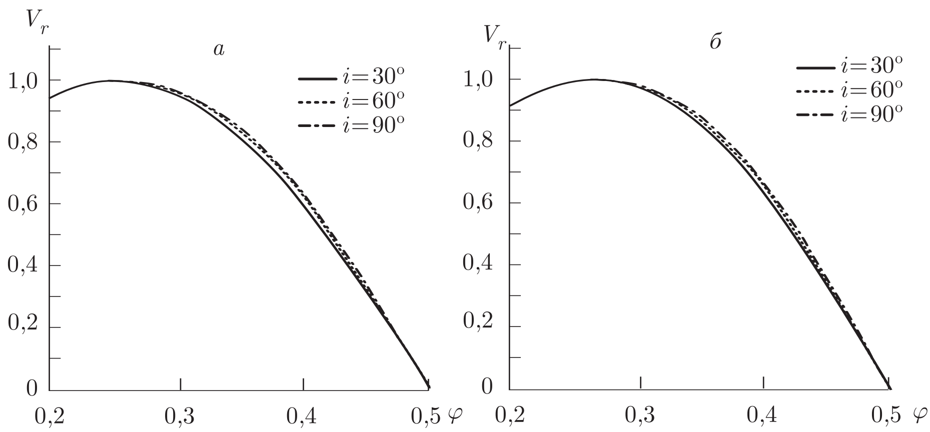


Рис. 165. Относительные теоретические кривые лучевых скоростей в модели Роша: *а* — при значениях $m_v = 22M_\odot$, $m_x = 11{,}47M_\odot$, e=0,0 для наклонений орбиты $i = 30°$, $60°$, $90°$; *б* — при значениях m_v=$22M_\odot$, $m_x = 11{,}47M_\odot$, $e = 0{,}05$, $\omega_v = 90°$ для наклонений орбиты $i = 30°$, $60°$, $90°$. Как и в случае круговой орбиты, видна зависимость формы кривой лучевых скоростей от наклонения орбиты i при $e \neq 0$

Теоретические кривые лучевых скоростей для орбиты с эксцентриситетом $e = 0{,}05$ вычислялись для массы оптической звезды $m_v = 22M_\odot$ и массы черной дыры $m_x = 11{,}47M_\odot$, соответствующей наклонению орбиты $i = 35°$ (см. рис. 159). Для каждой долготы периастра оптической звезды из набора значений $\omega_v = 0°$, $90°$, $180°$, $270°$ были синтезированы теоретические кривые лучевых скоростей для $i = 30°$, $60°$, $90°$. Теоретические значения лучевой скорости нормировались на ее максимальное значение из фазового интервала 0,0–0,5. Теоретические кривые относительных лучевых скоростей оптической звезды для каждого значения долготы периастра $\omega_v = 0°$, $90°$, $180°$, $270°$ показали изменение формы кривой лучевых скоростей, а именно, увеличение лучевой скорости на фазовом интервале 0,0–0,5 (и симметричном ему интервале 0,5–0,8) с ростом i, аналогичное тому, что наблюдается для случая круговой орбиты. Из-за схожести рисунков, мы приводим набор относительных кривых лучевых скоростей лишь для одной долготы периастра $\omega_v = 90°$ (см. рис. 165 *б*). Как обычно, из-за относительно небольшой величины эффекта на рис. 165 *б* представлены лишь части кривых лучевых скоростей в интервале фаз $\varphi = 0{,}2$–$0{,}5$.

Для полноты исследования, нами была решена обратная задача интерпретации средней кривой лучевых скоростей системы Cyg X-1 в случае эллиптической орбиты. Задача решена как с использованием всех нормальных точек средней кривой лучевых скоростей, так и средней кривой лучевых скоростей без нормальных точек в интервале фаз 0,4–0,6, отягощенных влиянием эффекта анизотропии звездного ветра оптической звезды.

При интерпретации всех нормальных точек средней кривой лучевых скоростей масса оптической звезды была зафиксирована $m_v = 22M_{\odot}$, значение эксцентриситета орбиты вначале также фиксировалось $e = 0{,}05$. Решение обратной задачи проводилось многократным решением прямой задачи при фиксированных m_v и e. Перебор велся по значению массы черной дыры m_x и долготе периастра орбиты ω_v. Невязка Δ между теоретической кривой лучевых скоростей и наблюдаемой, как обычно, соответствовала статистике Фишера. Минимум невязки достигался при $m_x = 13{,}5M_{\odot}$ и $\omega_v = 270°–330°$, но модель отвергалась по уровню значимости 5%. Следует отметить, что масса релятивистского спутника, при которой достигается минимум невязки, крайне слабо зависит от вариации эксцентриситета и долготы периастра. Если «раскрепить» значение эксцентриситета орбиты e и сделать его искомым параметром, то перебор по трем параметрам m_x, ω_v и e приводит к тому, что модель может быть принята по уровню значимости 5%, и значения параметров, соответствующие минимуму невязки Δ, получаются следующими: $e = 0{,}02–0{,}04$, $\omega_v = 280°–330°$, $m_x = 13{,}5M_{\odot}$. Для значений ω_v, лежащих вне интервала 280°–330° модель отвергается по 5% уровню значимости. При уменьшении эксцентриситета до $e = 0{,}01$ модель также отвергается для любого значения ω_v. Таким образом, можно заключить, что формальные значения эксцентриситета и долготы периастра орбиты для системы Cyg X-1 равны $e = 0{,}03 \pm 0{,}01$, $\omega_v = 300° \pm 30°$. Близость формального значения ω_v к 360°, как отмечалось в работе (Milgrom, 1978), является указанием на то, что найденные из анализа кривой лучевых скоростей величины e и ω_v отягощены эффектами селективного поглощения света оптической звезды в анизотропном звездном ветре и газовых потоках в системе. В действительности, орбита в системе Cyg X-1 является, скорее всего, круговой.

Решение обратной задачи интерпретации средней кривой лучевых скоростей системы Cyg X-1 без нормальных точек, лежащих в интервале фаз 0,4–0,6 (отягощенных влиянием анизотропии звездного ветра), проводилось по той же схеме. Масса оптической звезды фиксировалась на значении $m_v = 22M_{\odot}$. Минимум невязки, при котором модель не отвергается по уровню значимости 5%, достигался при массе черной дыры $m_x = 13{,}7M_{\odot}$, эксцентриситете орбиты $e = 0{,}01–0{,}02$ и долготе периастра $\omega_v = 300° \pm 40°$. При значениях ω_v вне интервала $300° \pm 40°$ при любом значении e отличном от нуля, модель отвергается по уровню значимости 5%.

Таким образом, нами показано, что и в случае эллиптической орбиты рентгеновской двойной системы высокоточная (точность лучше ∼3%) кривая лучевых скоростей позволяет в рамках модели Роша ограничить сверху наклонение орбиты системы.

з) Заключение. Основным результатом интерпретации средней высокоточной кривой лучевых скоростей системы Cyg X-1 являются зависимости между массой оптической звезды m_v и релятивистского объекта m_x для наклонений орбиты $i = 30°$, 35°, 40°, 45°, 55°, 65°, полученные в рамках модели Роша с использованием двух методов синтеза: экспрессного и точного, которые показывают хорошее согласие между собой. Важным результатом наших исследований является обоснование возможности оценки наклонения орбиты i по высокоточной кривой лучевых скоростей рентгеновской двойной системы в рамках модели Роша. В рамках этой модели синтезируемый абсорбционный профиль линии от оптической звезды за счет своей асимметрии оказывается достаточно чувствительным к изменению наклонения орбиты системы i. В случае системы Cyg X-1 показано, что, практически независимо от массы оптической звезды, верхнее значение i составляет 45°.

В работе проведена оценка массы черной дыры в системе Cyg X-1 двумя независимыми способами. Опираясь на результаты интерпретации оптической кривой блеска в фильтре B (Балог и др., 1981б) и исходя из значения радиуса оптической звезды $R_v = 17 \pm 1 R_\odot$ (Herrero et al., 1995), с использованием найденных нами ограничений для i находим, что масса черной дыры заключена в пределах $m_x = (8{,}5\text{–}13{,}6) M_\odot$. С другой стороны, используя зависимость «масса–светимость» для ОВ-сверхгигантов в рентгеновских двойных системах (Абубекеров, 2004, Петров и др., 2007) по найденной из не-ЛТР-анализа спектра болометрической светимости оптической звезды (Herrero и др. 1995) находим ее массу: $m_v = 22 M_\odot$. С этим значением m_v и с найденными нами ограничениями для i получаем независимую оценку для массы черной дыры в системе Cyg X-1: $m_x = 9{,}0\text{–}13{,}2 M_\odot$. Обе оценки для m_x хорошо согласуются между собой.

Незнание точного значения наклонения орбиты не позволяет дать однозначную оценку массы черной дыры в системе Cyg X-1. На сегодняшний момент можно указать лишь интервал значений массы черной дыры, соответствующий найденному нами интервалу для наклонения орбиты $31^\circ < i < 44^\circ$: $m_x = (8{,}5\text{–}13{,}6) M_\odot$. Эта величина заведомо превышает $3 M_\odot$ — абсолютный верхний предел для массы нейтронной звезды, предсказываемый ОТО Эйнштейна. При накоплении новых спектральных наблюдений системы Cyg X-1 и повышении точности средней кривой лучевых скоростей обнаруженный нами эффект позволит дать более точную оценку для i и, следовательно, массы черной дыры. С другой стороны, точное измерение расстояния до системы Cyg X-1 с борта будущих космических астрометрических обсерваторий (GAIA, SIM и др.) позволит дать точную эмпирическую оценку радиуса оптической звезды, что окончательно решит проблему оценки массы черной дыры в рентгеновской двойной системе Cyg X-1.

В работе (Orosz et al., 2011) даны уточненные параметры системы Cyg X-1 с использованием информации о расстоянии до системы $d = 1{,}86^{+0{,}12}_{-0{,}11}$ кпк, полученной на базе тригонометрического параллакса системы Cyg X-1 (по данным VLBI-радиоинтерферометрии). Новые параметры следующие: $i = 27{,}06^\circ \pm 0{,}76^\circ$ (согласуется с нашей оценкой $i < 44^\circ$), $m_v = (19{,}6 \pm 1{,}90) M_\odot$, $R_v = (16{,}17 \pm 0{,}68) R_\odot$, $m_x = (14{,}81 \pm 0{,}98) M_\odot$, $e = 0{,}018 \pm 0{,}003$, $\omega = 307{,}6^\circ \pm 5{,}3^\circ$.

21. Массы рентгеновских пульсаров в двойных системах с ОВ-сверхгигантами

Здесь мы изложим результаты, опубликованные в работе (Абубекеров и др., 2004а), которые описывают характеристики аккрецирующих нейтронных звезд в тесных двойных рентгеновских системах, содержащих в качестве оптических звезд-доноров вещества сверхгиганты спектральных классов О-В.

Нейтронные звезды являются продуктами эволюции звезд с массами, превышающими $10 M_\odot$. Теоретически возможность существования нейтронных звезд была предсказана Ландау (1932) в начале 30-х годов прошлого века. В начале 70-х годов с помощью спутника UHURU были открыты компактные объекты с периодически переменным излучением в рентгеновском диапазоне спектра (рентгеновские пульсары, см. Forman et al., 1978), которые были отождествлены с аккрецирующими нейтронными звездами в тесных двойных системах.

К настоящему времени открыты тысячи компактных рентгеновских источников в двойных системах (рентгеновских двойных систем) в нашей и ближайших галактиках. В этих системах оптическая звезда поставляет вещество на соседний релятивистский объект (нейтронную звезду или черную дыру). Аккреция вещества с субрелятивистскими скоростями на релятивистский объект приводит к гигантскому выделению энергии в рентгеновском диапазоне со светимостью порядка 10^{36}–10^{39} эрг/с (Зельдович, 1964, Salpeter, 1964, Shakura and Sunyaev, 1973, Pringle and Rees, 1972, Novikov and Thorne, 1973). Характеристики рентгеновских двойных систем разных типов суммированы, например, в Каталоге поздних ТДС (Cherepashchuk et al., 1996).

Ключевой характеристикой рентгеновского пульсара с точки зрения уравнения состояния сверхплотного вещества является его масса. Теория предсказывает две моды устойчивого состояния нейтронных звезд: на основе «мягкого» уравнения состояния с максимальной массой $M_{\max} \simeq 1{,}4M_\odot$ и жесткого с $M_{\max} \simeq 1{,}8M_\odot$ (Shapiro and Teukolsky, 1983, Arnett and Bowers, 1977, Datta, 1988, Stock, 1989, Brown and Bethe, 1994). На вопрос, следует ли привлекать моду «жесткого» уравнения состояния для нейтронных звезд, до настоящего времени не получено однозначного ответа. Из известных рентгеновских пульсаров лишь один (Vela X-1) обладает массой, близкой к $1{,}8M_\odot$ (van Kerkwijk et al., 1995).

Исследование рентгеновских двойных систем ведется уже свыше 30 лет. К настоящему времени накоплен обширный и высококачественный наблюдательный материал, который требует применять для его интерпретации более совершенные модели ТДС. Модель двух точечных масс, широко применяемая до последнего времени, не вполне адекватна современным наблюдательным данным по рентгеновским двойным системам. Она не позволяет дать корректную оценку массы рентгеновского пульсара. Особенно это касается рентгеновских двойных систем с OB-сверхгигантами. В таких системах оптическая звезда близка к заполнению своей полости Роша, сильно приливно деформирована, прогревается рентгеновским излучение аккрецирующего релятивистского объекта. Поэтому модель материальной точки к ней неприменима. Кроме того, вследствие неоднородности распределения ускорения силы тяжести и температуры по поверхности OB-сверхгиганта в рентгеновской двойной системе, истекающий из него звездный ветер является сильно анизотропным. Селективное поглощение света OB-звезды в анизотропном звездном ветре и газовых потоках приводит к искажению ее кривой лучевых скоростей. Величина этих искажений в случае рентгеновских пульсаров в паре с OB-сверхгигантами сравнима с остальной скоростью оптической звезды.

В свете изложенного, представляется актуальным применение описанных выше методов синтеза кривых лучевых скоростей в модели Роша к анализу современных наблюдательных данных по рентгеновским пульсарам в двойных системах с OB-сверхгигантами.

Для анализа наблюдений был применен описанный выше экспрессный метод синтеза кривых лучевых скоростей, в котором использовались локальные профили линий, выраженные в потоках, которые рассчитаны Куруцем (Kurucz, 1979, 1992). Этот метод синтеза подробно описан в работах (Антохина и Черепащук, 1994, Антохина, 1996), а также в предыдущих главах. Основной целью работы было уточнение масс рентгеновских пульсаров в ТДС. Прежде чем приступить к интерпретации наблюдений, мы выполнили тестовые расчеты для сравнения теоретических кривых лучевых скоростей в модели Роша и в модели точечных масс. Кривые лучевых скоростей вычислялись по линии H_γ для гипотетической рентгеновской двойной системы с параметрами (табл. 52), близкими к исследуемым рентгеновским двойным: Cen X-3, LMCX-4, SMCX-1, Vela X-1 и 4U1538-52 (см. табл. 53).

Для выявления степени влияния эффекта «отражения» (рентгеновского прогрева оптической звезды) на кривые лучевых скоростей были выполнены расчеты в модели Роша при различных значениях рентгеновского потока — малом значении $k_x = L_x/L_v = 0{,}05$ и большом $k_x = 1{,}4$. Расчеты кривых лучевых скоростей

Таблица 52

Численные значения параметров, используемых для синтеза кривых лучевых скоростей рентгеновской ТДС в модели Роша

Масса релятивистской компоненты	m_x, $M_\odot$	1,35
Масса оптической компоненты	m_v, $M_\odot$	20
Период	P, сут	4
Эксцентриситет	e	0
Долгота периастра оптической компоненты	ω, град	0
Лучевая скорость центра масс системы	V_γ, км/с	0
Наклонение орбиты	i, град.	80
Коэффициент заполнения полости Роша оптической компонентой в периастре орбиты	μ	0,99
Коэффициент асинхронности вращения	f	0,95
Эффективная температура оптической компоненты	T_{ef}, K	30000
Коэффициент гравитационного потемнения	β	0,25
Отношение рентгеновской светимости релятивистской компоненты к болометрической светимости оптической компоненты	$k_x = L_x/L_v$	0,05 и 1,4
Коэффициент переработки рентгеновского излучения	A	0,5
Коэффициент потемнения к краю	u	0,3

Таблица 53

Наблюдаемые характеристики рентгеновских двойных с ОВ-сверхгигантами (использованы данные из работ (van Kerkwijk et al., 1995, Cherepashchuk et al., 1996, Гончарский и др., 1991))

Название	Спектральный класс	T_{ef}, K	P, сут	e	i, град.	μ	f	K_x, км/с
Cen X-3	O(6-9)II-III	35000	2,0871390	$< 0{,}0008$	83^{+3}_{-3}	$0{,}995^{+0{,}005}_{-0{,}005}$	$0{,}95^{+0{,}27}_{-0{,}25}$	$414{,}1 \pm 0{,}9$
LMC X-4	O7 III-V	35000	1,40839	$< 0{,}01$	63^{+3}_{-3}	$\sim 1{,}0$	$0{,}65^{+0{,}23}_{-0{,}19}$	400,6
SMC X-1	B0,5Ia	25000	3,89229118	$< 0{,}00004$	65^{+5}_{-5}	$0{,}97^{+0{,}03}_{-0{,}03}$	$0{,}95^{+0{,}34}_{-0{,}27}$	$301{,}5 \pm 4$
Vela X-1	B0.5Ibeq	25000	8,964368	0,0898	73^{+3}_{-3}	$0{,}95^{+0{,}04}_{-0{,}04}$	$0{,}69^{+0{,}09}_{-0{,}08}$	$278{,}1 \pm 0{,}3$
4U 1538-52	B0Iabe	25000	3,72844	0,08	60^{+5}_{-5}	$0{,}95^{+0{,}04}_{-0{,}04}$	$0{,}94^{+0{,}32}_{-0{,}25}$	$309{,}0 \pm 11$

Примечание: Наклонение орбиты i определено из анализа длительности рентгеновских затмений (см., например, (Гончарский и др., 1991)). Величины e и K_x определены по кривой лучевых скоростей рентгеновского пульсара.

по линии H_γ показали, что с увеличением рентгеновского прогрева полуамплитуда кривых лучевых скоростей уменьшается. Подобный результат был получен ранее (Антохина и Черепащук, 1994) и он связан с тем, что при увеличении мощности падающего на оптическую звезду рентгеновского излучения возрастает вклад излучения «носика» звезды в ее общую оптическую светимость. Соответственно, элементарные площадки на «носике» дают возрастающий вклад в среднюю лучевую скорость звезды. Поскольку скорости площадок «носика» меньше, чем скорость центра масс звезды, то средняя лучевая скорость звезды уменьшается.

Эффект отличия кривой лучевых скоростей звезды от кривой лучевых скоростей ее центра масс увеличивается от фазы $\varphi = 0$ к фазе $\varphi = 0{,}5$ (напомним, что $\varphi = 0$, когда рентгеновский источник расположен сзади оптической звезды). Эффект нарастает по мере того, как вследствие орбитального движения прогретая и сильно приливно деформированная часть («носик») оптической звезды поворачивается к наблюдателю. С уменьшением отношения масс $q = m_x/m_v$ и смещением центра масс двойной системы вглубь тела оптической звезды отличие кривой лучевых скоростей звезды в модели Роша от кривой лучевых скоростей материальной точки возрастает.

На рис. 166 для сравнения приведены теоретические кривые лучевых скоростей системы (параметры см. в табл. 52) в модели Роша и модели точечных масс. Кривые построены по линии H_γ при малом рентгеновском прогреве $k_x = 0{,}05$. Полуамплитуда кривой лучевых скоростей в модели Роша меньше, и лишь увеличение массы релятивистского объекта от $1{,}35 M_\odot$ до $1{,}45 M_\odot$ позволяет сравнять полуамплитуды кривых лучевых скоростей. Чтобы достичь равенства полуамплитуд на фазе 0,25, требуется увеличить массу рентгеновского пульса до $1{,}55 M_\odot$. В случае большого рентгеновского прогрева $k_x = 1{,}4$ и при сохранении значений остальных параметров для выравнивания полуамплитуд в модели Роша и модели точечных масс требуется увеличить массу рентгеновского пульсара до $1{,}65 M_\odot$.

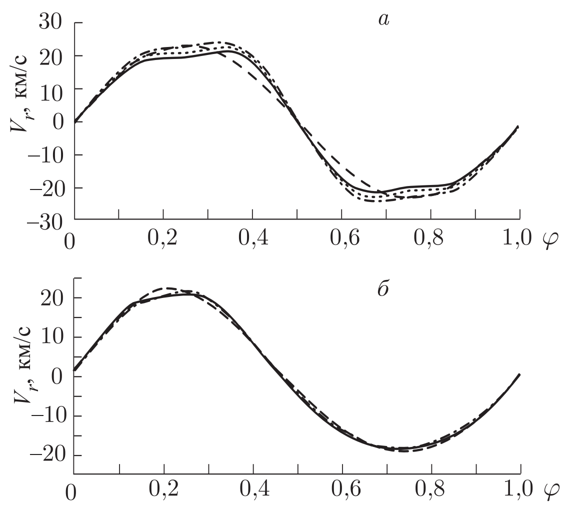


Рис. 166. *а* — теоретические кривые лучевых скоростей оптической звезды в рентгеновской двойной системе. Кривые построены по линии H_γ. Пунктирная линия соответствует оптической звезде в модели материальной точки с $m_x = 1{,}35 M_\odot$, сплошная — звезде в модели Роша с $m_x = 1{,}35 M_\odot$, точечная линия соответствует $m_x = 1{,}45 M_\odot$ штрих-пунктирная — $m_x = 1{,}55 M_\odot$; *б* — сравнение теоретических кривых лучевых скоростей звезды в модели Роша, построенных по линии H_γ (сплошная линия) и по линии He I 4471 (штрих-пунктирная линия). Параметры системы выбраны близкими к параметрам системы Vela X-1: $m_v = 23 M_\odot$, $m_x = 1{,}8 M_\odot$, $P_{\mathrm{orb}} = 8{,}96^{\mathrm{d}}$, $e = 0{,}0898$, $\omega = 332{,}59^\circ$, $i = 73^\circ$, $\mu = 0{,}99$, $f = 0{,}69$, $T = 25000\,\mathrm{K}$, $\beta = 0{,}25$, $k_x = 0{,}05$, $A = 0{,}5$, $u = 0{,}38$. Пунктирная линия — кривая лучевых скоростей центра масс оптической звезды

Таким образом, уже из этих простых модельных расчетов ясно, что использование модели Роша для вычисления кривой лучевых скоростей приводит, при прочих равных условиях, к увеличению массы релятивистского компаньона на ~ 7–$20\,\%$ по сравнению с массой, полученной в рамках модели двух точечных масс. Подобный же эффект увеличения массы черной дыры m_x в системе Cyg X-1 был описан нами выше: масса черной дыры, полученная в рамках модели Роша, оказалась систематически больше (на $\sim 2\,\%$), по сравнению с моделью двух точечных масс. То, что различие значений m_x в данном случае сравнительно невелико ($\sim 2\,\%$), связано с большой массой черной дыры ($\sim 10 M_\odot$) по сравнению с массой рентгеновского пульсара ($\sim 1{,}4 M_\odot$). В связи с изложенным можно предполагать что интерпретация наблюдаемых кривых лучевых скоростей, в рамках модели Роша, более близкой к реальности, чем модель двух точечных масс, позволит дать более реалистичные значения масс рентгеновских пульсаров. Это особенно важно, для уточнения уравнения состояния сверхплотного вещества в нейтронных звездах, а также для поиска ожидаемого превышения масс нейтронных звезд в рентгеновских двойных с ОВ-сверхгигантами над массой радиопульсаров, равной в среднем $(1{,}35 \pm 0{,}04) M_\odot$ (Thorsett and Chakrabarty, 1999).

а) Наблюдательный материал. К настоящему времени открыто пять затменных рентгеновских пульсаров в тесных двойных системах с ОВ-сверхгигантами (см. табл. 53). По ним за 30 лет накоплен обширный наблюдательный материал, позволяющий применить для его интерпретации статистический метод проверки гипотез. Широко распространенный метод Монте-Карло основан на простейшей модели рентгеновской двойной и не позволяет учесть эффекты взаимодействия компонент. Поэтому выполненные ранее оценки масс рентгеновских пульсаров должны быть уточнены в рамках модели Роша.

На базе опубликованных спектроскопических наблюдений для каждой системы была построена сводная кривая лучевых скоростей. Приведем описание соответствующих спектроскопических данных для каждой системы. Для всех систем в качестве нулевой фазы была принята середина рентгеновского затмения (оптическая звезда впереди рентгеновского пульсара).

Cen X-3. Система состоит и О-гиганта (O(6-9)II-III) с массой $(17$–$18) M_\odot$ и рентгеновского пульсара с орбитальным периодом 2,0871390 суток. Эксцентриситет орбиты, измеренный таймингом импульсов рентгеновского излучения системы, очень мал ($e<0{,}0008$, см. van Kerkwijk et al., 1995), поэтому орбита является круговой. Для сводной кривой лучевых скоростей (рис. 167) привлечены данные из работ (Mouchet et al., 1980, Hutchings et al., 1979, Ash et al., 1999), полученные в течение 1976–1997 гг. Для данных, содержащихся в работе (Hutchings et al., 1979), была проведена коррекция только за γ-скорость ТДС. Коррекция за скорость звездного ветра у его основания была проведена самими авторами при определении среднего значения наблюдаемой лучевой скорости по дифференциальным смещениям абсорбционных линий He I 4471 Å, He I 5875 Å и линий водорода бальмеровской серии. В работах (Mouchet et al., 1980, Ash et al., 1999) дифференциальные смещения линий искались относительно среднего по всем орбитальным фазам спектра, тем самым, учет γ-скорости был заложен в самом методе. Представленные в работе (Mouchet et al., 1980) средние лучевые скорости были определены по линиям поглощения He I 4471 Å, He II 4541 Å и линиям водорода бальмеровской серии. Из работы (Ash et al., 1999) нами были использованы лишь лучевые скорости, измеренные по линии H_γ. Всего в нашем распоряжении оказалось 79 точек, приблизительно равномерно распределенных по орбитальным фазам. В итоге была составлена сводная кривая лучевых скоростей системы Cen X-3 по линиям поглощения H_β, H_γ, H_δ, He I 4471 Å, He I 5875 Å. Специальные тестовые расчеты показали, что теоретические кривые лучевых скоростей, рассчитанные в рамках модели Роша по линии H_γ

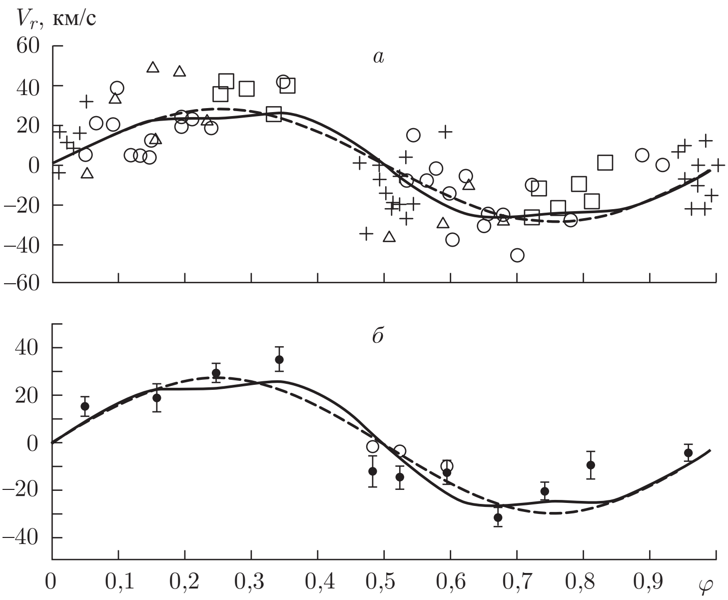


Рис. 167. *а* — сводная наблюдаемая кривая лучевых скоростей рентгеновской двойной системы Cen X-3. Треугольниками представлены спектральные данные 1976 г. из работы (Mouchet et al., 1980), кружками — данные 1978 г. из работы (Hutchings et al., 1979), крестиками — данные 1990 г. из работы (Ash et al., 1999), квадратиками — данные 1997 г. из работы (Ash et al., 1999). Для сравнения приведены теоретические кривые лучевых скоростей в модели Роша (сплошная линия) и модели точечных масс (штриховая линия) для массы $m_x = 1{,}22 M_\odot$, соответствующей минимуму невязки в модели Роша. *б* — лучевые скорости, усредненные внутри фазовых интервалов (темными кружками представлены средние в фазовом интервале лучевые скорости, светлыми — лучевые скорости, исправленные за нормированную функцию анизотропии звездного ветра оптической звезды). Здесь же для сравнения приведены теоретические кривые лучевых скоростей в модели Роша (сплошная линия) и модели точечных масс (штриховая линия) для $m_x = 1{,}22 M_\odot$

и другим линиям (H_β, H_δ, He I 4471 Å) при прочих равных условиях практически совпадают (см. рис. 166 *б*, а также текст ниже). Поэтому мы использовали теоретические кривые лучевых скоростей по линии H_γ для интерпретации сводной кривой лучевых скоростей как системы Cen X-3, так и других рентгеновских двойных систем. Полученная нами на основе спектральных данных из работы (Hutchings et al., 1979) γ-скорость системы равна 39 км/с.

LMCX-4. В систему входят рентгеновский пульсар и оптическая звезда спектрального класса O7III-V с массой $(14–15) M_\odot$. Орбита близка к круговой ($e < 0{,}01$); в нашей работе она принята круговой. Орбитальный период по данным исследования рентгеновского пульсара составляет 1,40839 суток. Для сводной кривой лучевых скоростей (рис. 168) использовались данные из работ (Hutchings et al., 1978, Kelley et al., 1983), полученные в течение 1975–1982 гг. В работе (Kelley et al., 1983) авторами уже использовались данные более ранних наблюдений, представленные в работе (Hutchings et al., 1978). Приведенные здесь лучевые скорости были получены по линиям поглощения водорода. Перед включением в сводную кривую лучевых скоростей они были исправлены за γ-скорость самими авторами. Полученная нами на основе спектральных данных работы (Kelley et al., 1983) γ-скорость системы составляет 275 км/с.

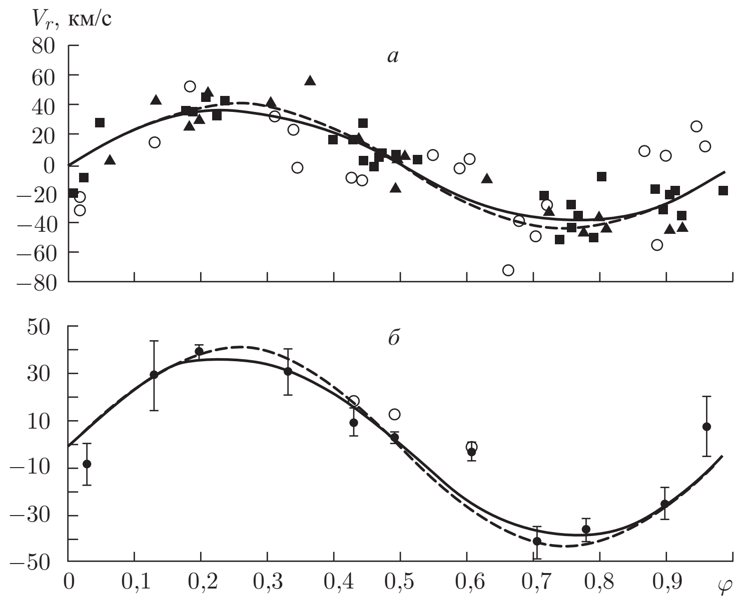


Рис. 168. *а* — сводная наблюдаемая кривая лучевых скоростей рентгеновской двойной системы LMCX-4. Здесь темными треугольниками представлены спектральные данные 1975 г. из работы (Hutchings et al., 1978), кружками и темными квадратиками — спектральные данные 1982 г. из работы (Kelley et al., 1983), полученные на 2,5-м и 4-м телескопах соответственно. Для сравнения приведены теоретические кривые лучевых скоростей в модели Роша (сплошная линия) и модели точечных масс (штриховая линия) для массы $m_x = 1{,}63 M_\odot$, соответствующей минимуму невязки в модели Роша. *б* — лучевые скорости, усредненные внутри фазовых интервалов (темными кружками представлена средняя лучевая скорость в фазовом интервале, светлыми — лучевая скорость, исправленная за нормированную функцию анизотропии звездного ветра оптической звезды). Для сравнения приведена теоретическая кривая лучевых скоростей в модели Роша (сплошная линия) и модели точечных масс (штриховая линия) для $m_x = 1{,}63 M_\odot$

SMCX-1. Система состоит из рентгеновского пульсара и оптической звезды-сверхгиганта спектрального класса B0,5Ia с массой около $(17–18) M_\odot$. Орбитальный период системы равен 3,89229118 суток.

В сводную кривую лучевых скоростей (рис. 169) вошли данные из работ (Osmer and Hiltner, 1977, Hutchings et al., 1977, Reynolds et al., 1993). В работе (Osmer and Hiltner, 1977) представлены средние лучевые скорости, измеренные по линиям поглощения He I, Si IV и линиям водорода бальмеровской серии. В работе (Hutchings et al., 1977) авторы определили лучевые скорости путем комбинирования среднего по смещениям линий водорода бальмеровской серии и по линиям поглощения He I, Si IV, N III, лежащим в синей области спектра 3900–4000 Å. Расчет лучевых скоростей в работе (Reynolds et al., 1993) велся методом кросс-корреляции по фрагменту спектра от 4000 до 4395 Å относительно спектра звезды — стандарта B3V, в качестве которой использовалась звезда HR 1174.

Перед построением сводной кривой лучевых скоростей данные всех трех работ были исправлены за γ-скорость. Расчет γ-скорости проводился на основе минимизации суммы квадратов отклонений между наблюдаемой лучевой скоростью и синтезируемой в рамках модели Роша лучевой скоростью для тех же значений фаз. В используемом алгоритме синтеза кривой лучевых скоростей γ-скорость входит

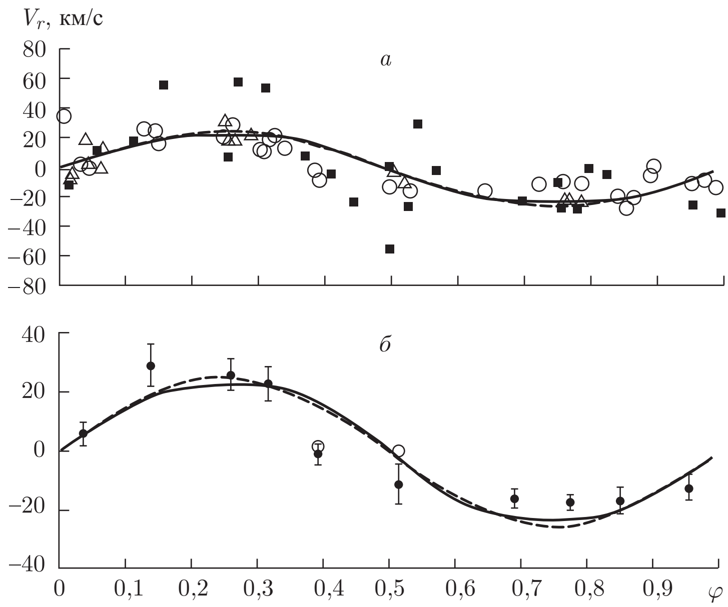


Рис. 169. *а* — сводная наблюдаемая кривая лучевых скоростей рентгеновской двойной системы SMCX-1. Здесь темными квадратиками представлены спектральные данные 1973 г. из работы (Osmer and Hiltner, 1977), светлыми кружками — спектральные данные 1976 г. из работы (Hutchings et al., 1977), светлыми треугольниками — спектральные данные 1989 г. из работы (Reinolds et al., 1993). Для сравнения приведены теоретические кривые лучевых скоростей в модели Роша (сплошная линия) и модели точечных масс (штриховая линия) для массы $m_x = 1{,}48 M_\odot$, соответствующей минимуму невязки в модели Роша. *б* — лучевые скорости, усредненные внутри фазовых интервалов (темными кружками представлена средняя интенсивность в фазовом интервале, светлыми — лучевые скорости, исправленные за нормированную функцию анизотропии звездного ветра оптической звезды). Для сравнения, приведена теоретическая кривая лучевых скоростей в модели Роша (сплошная линия) и в модели точечных масс (штриховая линия) для $m_x = 1{,}48 M_\odot$

аддитивно, поэтому условие равенства площадей кривой лучевых скоростей «над» и «под» γ-скоростью выполнялось автоматически. На основе спектральных данных, содержащихся в работах (Osmer and Hiltner, 1977, Hutchings et al., 1977, Reynolds et al., 1993), нами получены следующие значения γ-скорости для системы SMCX-1: 173,0, 181,0, 172,7 км/с соответственно.

4U 1538-52. Система состоит из рентгеновского пульсара и сверхгиганта спектрального класса B0Iabe с массой (17–18)$M_\odot$. Орбитальный период системы равен 3,72844 суток. Эксцентриситет орбиты, найденный по таймингу рентгеновских импульсов, равен $(0{,}07 \pm 0{,}09)$ (Makishima et al., 1987). Ввиду значительной неопределенности в величине эксцентриситета, в нашей работе он принят равным нулю.

Сводная кривая лучевых скоростей (рис. 170) была построена по спектроскопическим данным, содержащимся в работах (Crampton et al., 1978, Reynolds et al., 1992). В работе (Crampton et al., 1978) приведены средние лучевые скорости, полученные по линиям поглощения H_β, H_γ, He I 4921 Å и He I 4471 Å. В работе (Reynolds et al., 1992) расчет лучевых скоростей был произведен методом кросс-корреляции относительно спектрального стандарта HD133955 по линиям поглощения He I из области 6290–6710 Å. Данные показали хорошее согласие между собой. С нашей стороны данные обеих работ были исправлены за γ-скорость системы. На основе

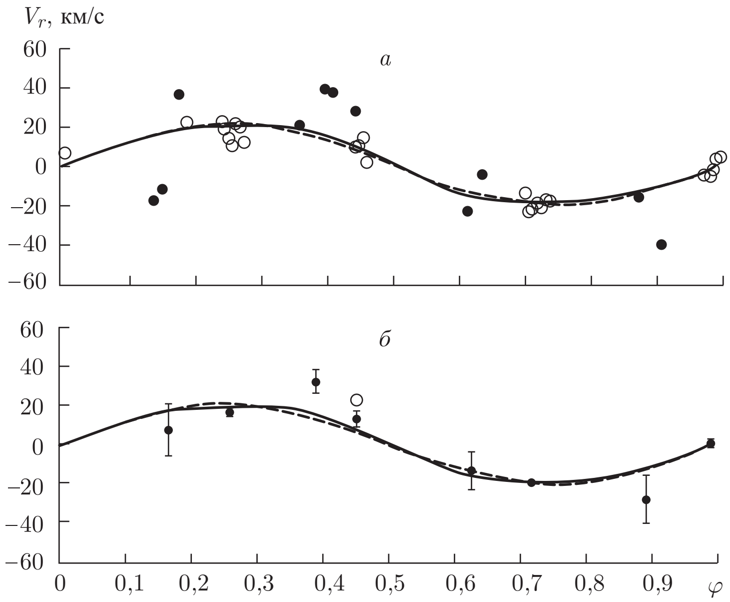


Рис. 170. *а* — сводная наблюдаемая кривая лучевых скоростей рентгеновской двойной системы 4U 1538-52. Здесь темными кружками представлены спектральные данные 1978 г. из работы (Crampton et al., 1978), светлыми кружками — спектральные данные 1991 г. из работы (Reynolds et al., 1992). Для сравнения приведены теоретические кривые лучевых скоростей в модели Роша (сплошная линия) и модели точечных масс (штриховая линия) для массы $m_x = 1{,}18 M_\odot$, соответствующей минимуму невязки в модели Роша. *б* — лучевые скорости, усредненные внутри фазовых интервалов (темными кружками представлена средняя интенсивность в фазовом интервале, светлыми — лучевые скорости, исправленные за нормированную функцию анизотропии звездного ветра оптической звезды). Для сравнения, приведена теоретическая кривая лучевых скоростей в модели Роша (сплошная линия) и модели точечных масс (штриховая линия) для $m_x = 1{,}18 M_\odot$

спектральных данных из работ (Crampton et al., 1978, Reynolds et al., 1992) получены следующие значения γ-скорости: $-168{,}5$ и $-146{,}7$ км/с соответственно. Большое отрицательное значение γ-скорости в данном случае может отражать эффект радиального расширения области формирования линии у основания звездного ветра оптической звезды — сверхгиганта B0Iabe.

Vela X-1. В эту систему входит рентгеновский пульсар и оптическая звезда — сверхгигант B0,5I beq с массой $(24–25) M_\odot$. Компоненты движутся по эллиптической орбите с эксцентриситетом $e \simeq 0{,}0898$; это значение e было принято в нашей работе. Орбитальный период системы 8,964368 суток.

По данной системе получен наиболее богатый наблюдательный материал. Нами для построения сводной кривой лучевых скоростей (рис. 171) использовались только лучевые скорости, полученные по линиям водорода бальмеровской серии, из работ (van Paradijs et al., 1977, Barziv et al., 2001). В итоге, в сводную кривую лучевых скоростей вошли данные 1973 и 1995–1996 гг.; несмотря на разделяющий их большой временной интервал, данные показали хорошее согласие между собой.

Для абсорбционных линий водорода бальмеровской серии из работы (van Paradijs et al., 1977) лучевые скорости, полученные по абсолютным смещениям ядер линий H_2–H_{10} относительно лабораторных длин волн показывают рост скорости звездного ветра с уменьшением порядкового номера линии в серии — бальмеровский прогресс

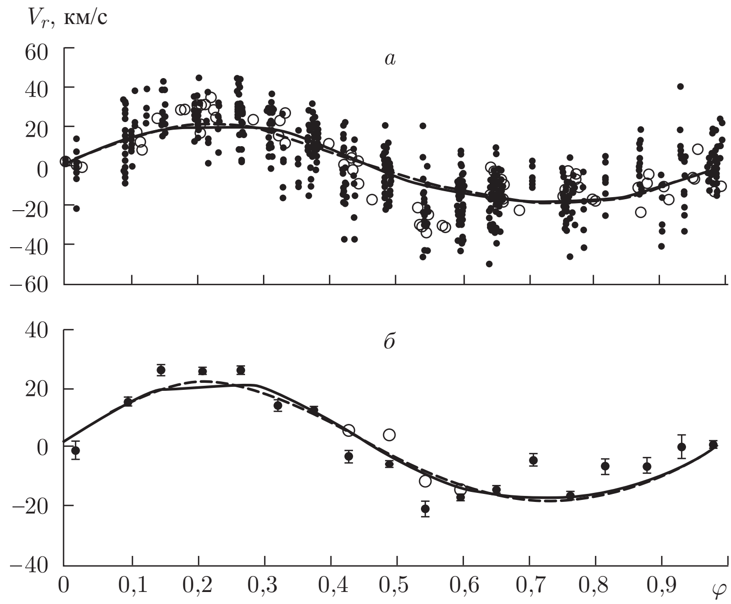


Рис. 171. *а* — сводная наблюдаемая кривая лучевых скоростей рентгеновской двойной системы Vela X-1. Здесь темными кружками представлены спектральные данные 1973 г. из работы (van Paradijs et al., 1977), светлыми кружками — спектральные данные 1995–1996 гг. из работы (Barziv et al., 2001). Для сравнения приведены теоретические кривые лучевых скоростей в модели Роша (сплошная линия) и модели точечных масс (штриховая линия) для массы $m_x = 1{,}93 M_\odot$, соответствующей минимуму невязки в модели Роша. *б* — лучевые скорости, усредненные внутри фазовых интервалов (темными кружками представлена лучевая скорость, средняя в фазовом интервале, светлыми кружками — лучевые скорости, исправленные за нормированную функцию анизотропии звездного ветра оптической звезды). Для сравнения, приведена теоретическая кривая лучевых скоростей в модели Роша (сплошная линия) и модели точечных масс (штриховая линия) для $m_x = 1{,}93 M_\odot$

(Hutchings, 1980, Crampton et al., 1985). Эффект связан с понижением температуры с высотой в атмосфере звезды-сверхгиганта и возрастанием скорости звездного ветра с высотой, что приводит к зависимости наблюдаемой скорости звездного ветра от потенциала возбуждения абсорбционной линии, по которой она измерена. Так, ввиду формирования линии поглощения H_β в более холодных и, следовательно, более высоких слоях фотосферы звезды, скорость звездного ветра, получаемая по этой линии, больше, по сравнению со скоростью ветра, измеренной по линиям поглощения бальмеровской серии более высокого порядка, которые формируются в более глубоких и более горячих слоях фотосферы звезды, где скорость у основания ветра меньше.

По данным работы (Hutchings, 1974) γ-скорость системы Vela X-1, измеренная на основе линии H_β и линий ионов He I, N III, Si IV, составляет $(-3{,}5 \pm 0{,}8)$ км/с. Сдвиг ядра линии относительно лабораторной длины волны вызван не только наличием скорости движения центра масс системы (γ-скорости), но и скоростью звездного ветра оптической звезды у его основания, где формируются линии поглощения. При этом, если γ-скорость системы много меньше скорости звездного ветра у его основания, определить ее по смещениям линий водорода H_2–H_1 представляется весьма затруднительным. Например, систематическая лучевая скорость системы (γ-скорость плюс скорость у основания ветра), определяемая по линиям H_2, H_3,

H_5 и H_6, согласно спектральным данным из работы (van Paradijs et al., 1977) равна соответственно $-29{,}0$, $-15{,}5$, $-14{,}0$ и $-8{,}5$ км/с. Из этих данных видно, что лучевая скорость, связанная с истечением ветра, намного превышает скорость систематического движения центра масс системы, составляющую, согласно работе (Hutchings, 1974), $-(3{,}5 \pm 0{,}8)$ км/с. Поэтому для системы Vela X-1 мы найденные нами значения γ-скорости не приводим. Лучевые скорости, полученные по линиям H_2–H_{10} из работы (van Paradijs et al., 1977), были индивидуально для каждой линии исправлены за систематическую лучевую скорость (γ-скорость плюс скорость ветра у его основания), перед их внесением в сводную кривую лучевых скоростей.

Метод кросс-корреляции спектров, используемый при вычислении лучевых скоростей в работе (Barziv et al., 2001), не потребовал с нашей стороны введения поправки ни за γ-скорость, ни за скорость ветра.

Поскольку, помимо линий водорода при определении лучевых скоростей использовались также линии He I, нами были выполнены тестовые расчеты, которые показали, что кривая лучевых скоростей, синтезированная в рамках модели Роша по линии He I 4471 Å мало отличается от кривой лучевых скоростей, синтезированной по линии H_γ (см. рис. 166 *б*). В этом тестовом расчете кривая лучевых скоростей по линии He I 4471 Å вычислялась с помощью точного метода синтеза.

Для массовых расчетов при интерпретации всех пяти исследуемых рентгеновских двойных систем мы использовали экспрессный метод синтеза с использованием таблиц профилей линий водорода, вычисленных в потоках и опубликованных Куруцем (Kurucz, 1992). Поскольку во всех исследуемых рентгеновских двойных эффект рентгеновского прогрева невелик, использование экспрессного метода синтеза представляется вполне разумным, тем более, что этот метод требует значительно меньших затрат компьютерного времени, по сравнению с точным методом. При использовании экспрессного метода во всех случаях мы использовали линию H_γ для построения синтетических кривых лучевых скоростей.

б) Исследование эффекта анизотропии звездного ветра в атмосфере OB-звезды. Звезды ранних спектральных классов обладают высоким темпом потери массы, в виде ветра, который достигает 10^{-7}–$10^{-5} M_\odot$/год при скоростях ветра в сотни и тысячи км/с. Скорость истечения у основания ветра, в зоне образования линий поглощения достигает ~ 10–20 км/с, что сравнимо с орбитальной скоростью OB-звезды в ТДС с рентгеновскими пульсарами.

Изотропность ветра в ТДС нарушается в результате гравитационного взаимодействия со стороны компактного объекта. Скорость ветра вблизи внутренней точки Лагранжа L_1 возрастает, что реально наблюдается (см. рис. 167–171) в виде избытка отрицательной лучевой скорости в направлении наблюдателя на фазе 0,5 (рентгеновский источник впереди OB-звезды).

Этот факт делает затруднительным проведение корректной интерпретации кривой лучевых скоростей рентгеновской двойной системы с OB-сверхгигантом. Анизотропия звездного ветра является источником ошибок при определении спектроскопических элементов орбиты системы (см., например, Milgrom, 1978). Таким образом, эффект анизотропии звездного ветра должен быть учтен при интерпретации наблюдаемой кривой лучевых скоростей. Учитывая трудности построения теоретической модели анизотропного ветра приливно деформированной звезды, мы применили эмпирический подход к этой проблеме.

Прежде чем приступить непосредственно к интерпретации сводных кривых лучевых скоростей исследуемых систем, нами для каждой из них (за исключением системы 4U 1538-52, в силу небольшого числа точек и их неравномерного распределения по орбитальным фазам) была построена развернутая по орбитальной фазе разность $V_{\rm obs} - V_{\rm theor}$, где $V_{\rm obs}$ — наблюдаемая лучевая скорость для данной фазы, а $V_{\rm theor}$ — ее теоретическое значение в модели Роша без учета ветра, вычисленное с предварительно определенными параметрами системы без учета средних лучевых скоростей в фазовом интервале 0,4–0,6.

Полученные невязки лучевых скоростей для всех четырех систем были сведены воедино и усреднены внутри фазовых интервалов шириной 0,05. Поскольку в случае системы Vela X-1 структура спектральных данных была такова, что на одну фазу приходились лучевые скорости, полученные по линиям поглощения H_2–H_{10}, то они предварительно были усреднены внутри этой орбитальной фазы. В качестве $V_{\rm obs}$ была взята средняя скорость по всем линиям поглощения H_2–H_{10} на данной фазе. В случае остальных систем использовались неусредненные данные.

Средняя по четырем системам кривая невязок лучевых скоростей $V_{\rm obs} - V_{\rm theor}$ представлена на рис. 172. Эту функцию мы будем называть функцией анизотропии звездного ветра. На данной зависимости (рис. 172) четко прослеживается избыток отрицательной лучевой скорости (в направление к наблюдателю) на фазовом интервале 0,4–0,6, достигающий ~ 10 км/с. Данные фазы соответствуют геометрии системы, при которой к наблюдателю повернут «носик» приливно деформированной звезды. Результат находится в качественном согласии с моделью анизотропного истечения звездного ветра.

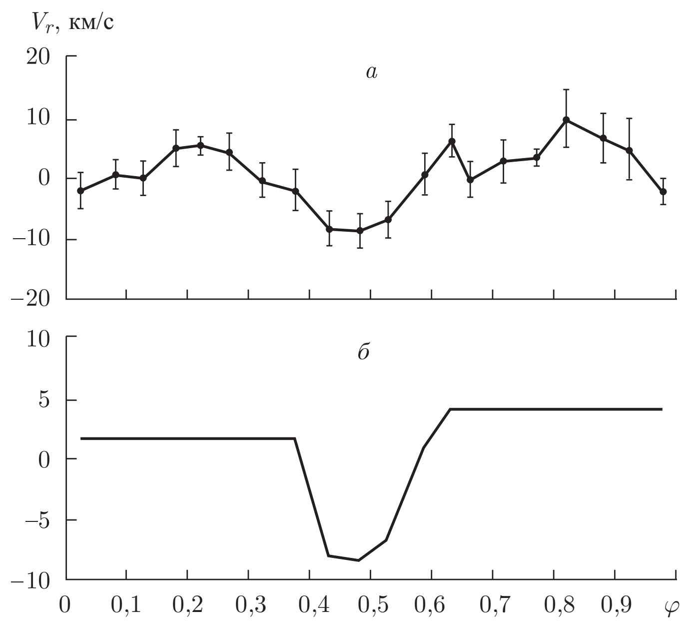


Рис. 172. Функция анизотропии звездного ветра (*а*) и ее вид после нормировки (*б*)

Функция анизотропии звездного ветра, полученная нами, является эмпирической зависимостью. Мы имеем основания, использовать ее для коррекции наблюдаемых лучевых скоростей. Для этого была выполнена ее нормировка. Остаточные разности $V_{\rm obs} - V_{\rm theor}$ в интервале фаз 0–0,4 и 0,6–10 были усреднены и заменены средними значениями. Полученные в ходе усреднения значения 1,79 и 4,32 км/с были приняты за нуль-пункты при проведении коррекции значений наблюдаемой лучевой скорости на фазовых интервалах 0,0–0,5 и 0,5–1,0 соответственно. Нормированная эмпирическая функция анизотропии звездного ветра представлена на рис. 172 *б*.

в) Интерпретация кривых лучевых скоростей. Целью нашей работы является определение масс рентгеновских пульсаров по сводным кривым лучевых скоростей в рамках модели Роша с учетом анизотропии ветра OB-звезды.

Мы применили простой метод перебора по параметрам и многократного решения прямой задачи. В качестве неизвестного искался один параметр — масса компактного объекта m_x, которая варьировалась в процессе решения задачи. Все остальные параметры рентгеновской двойной были зафиксированы. Их значения были определены из анализа оптических кривых блеска, а также данных о рентгеновских затмениях и рентгеновского тайминга импульсов пульсара (подробнее см. монографию Гончарского и др., 1991). Используемые для синтеза кривой лучевых скоростей параметры рентгеновских двойных приведены в табл. 54.

Таблица 54

Численные значения параметров, используемых для синтеза кривых лучевых скоростей рентгеновских ТДС в модели Роша

Параметры	Cen X-3	LMC X-4	SMC X-1	4U 1538-52	Vela X-1
P, сут	2,0871390	1,40839	3,89229118	3,72844	8,964368
e	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0898
ω, $^\circ$ *	0,0	0,0	0,0	0,0	332,59
i, $^\circ$	82	65	65	65	73
μ**	0,99	0,99	0,97	0,95	0,95 и 0,99
f	0,95	0,65	0,95	0,94	0,69
$T_{\rm ef}$, K	35000	35000	25000	25000	25000
β	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25
k_x	0,05	1,4	0,25	0,0025	0,003
A	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5
u***	0,30	0,30	0,38	0,38	0,38
K_x, км/с	414,1	400,6	301,5	309,0	278,1

* Указана долгота периастра оптической компоненты.
** Для системы Vela X-1 значение указано для периастра орбиты.
*** Данные взяты из работы (Рубашевский, 1991).

Сложные процессы на поверхности OB-сверхгиганта и в газовых структурах могут приводить к систематическим и случайным отклонениям наблюдаемой лучевой скорости от истинной лучевой скорости, связанной с орбитальным движением. В частности, дополнительным источником систематических ошибок, помимо описанного выше эффекта анизотропии звездного ветра, в измерениях лучевой скорости могут быть приливные гравитационные волны на поверхности звезды в случае эллиптической орбиты (van Kerkwijk et al., 1995). Недавнее исследование (Quantrell et al., 2003) показало, что корреляция между орбитальной фазой и фазой гравитационных приливных волн отсутствует. Следовательно, приливные гравитационные волны на поверхности оптической звезды — это источник случайных ошибок, которые могут быть подавлены усреднением по многим ночам наблюдений. Помимо гравитационных волн на поверхности OB-звезды в рентгеновской двойной системе источником случайных ошибок в наблюдаемых лучевых скоростях может являться дополнительное селективное поглощение и эффекты фотоионизации в сложных газовых структурах (см., например, Kaper et al., 1994).

Чтобы уменьшить влияние случайных ошибок, лучевые скорости были усреднены внутри фазовых интервалов. Интерпретация кривых лучевых скоростей проводилась по средним значениям наблюдаемых лучевых скоростей. Усредненные кривые лучевых скоростей для исследуемых систем приведены на рис. 167–171.

Для статистической проверки гипотезы и оценки доверительных интервалов для искомого параметра m_x использовался критерий Фишера (см. выше). Решение обратной задачи проводилось в рамках модели Роша (применялся экспрессный метод синтеза) и в модели двух точечных масс. Последняя использовалась лишь для выявления расхождения результатов для разных моделей. Интерпретация средней кривой лучевых скоростей проводилась тремя методами:

Метод 1: по всем средним значениям наблюдаемых лучевых скоростей, без внесения коррекции за анизотропию звездного ветра.

Метод 2: с выбрасыванием средних наблюдаемых значений лучевых скоростей, лежащих в интервале фаз 0,4–0,6, где искажения эффектом анизотропии ветра наиболее сильны.

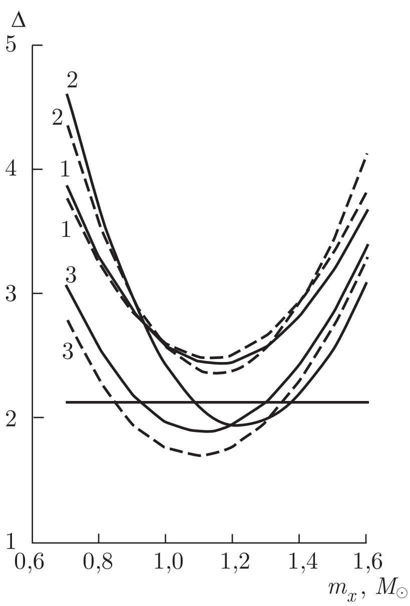


Рис. 173. Невязка между наблюдаемой средней кривой лучевых скоростей системы CenX-3 и синтезированной в модели Роша кривой лучевых скоростей (сплошные линии), а также в модели точечных масс (штриховые линии). Невязки вычислены методами 1, 2 и 3 (номера указаны на кривых невязок). Горизонтальная линия соответствует критическому значению невязки Δ в рамках статистики Фишера $\Delta_{8,47} = 2{,}14$ на уровне значимости $\alpha = 5\%$

Метод 3: с коррекцией средних значений лучевых скоростей, находящихся в интервале фаз 0,4–0,6, используя функцию анизотропии звездного ветра. Процедуру поиска массы m_x каждым из трех перечисленных методов подробно рассмотрим на примере системы Cen X-3.

Cen X-3. В сводную кривую лучевых скоростей Cen X-3 вошли 74 точки. Они были разбиты на 11 групп, внутри которых было проведено усреднение. Средняя кривая лучевых скоростей, представленная 11 нормальными точками с их среднеквадратичными ошибками, приведена на рис. 167 *б*.

В ходе решения обратной задачи искался один параметр m_x методом перебора. При этом вариация массы релятивистского объекта m_x велась таким образом, чтобы значение полуамплитуды его кривой лучевых скоростей (определенных по таймингу рентгеновских пульсаций) $K_x = 414{,}1$ км/с (Nagase et al., 1992) оставалось неизменным (подробности см. в статье Абубекерова и др., 2004а). Остальные параметры системы оставались фиксированными (см. табл. 54).

Невязка Δ, возникающая в результате интерпретации средней кривой лучевых скоростей методом 1 (с использованием всех нормальных точек), представлена на рис. 173. Для работы был выбран уровень значимости 5%. Как видно из рисунка, модель Роша, без учета анизотропии ветра, отвергается по уровню значимости 5%. Значение $m_x = 1{,}14 M_\odot$, соответствующее минимуму невязки, приведено в табл. 55. Поскольку модель отвергается, ошибка для этого значения m_x не приводится. Модель точечных масс также отвергается по уровню значимости 5%.

Интерпретация средней кривой лучевых скоростей затруднена сильным уклонением нормальных точек в фазах 0,4–0,6, вызванным анизотропией ветра. Поэтому на следующем шаге мы использовали метод 2 (нормальные точки из интервала фаз 0,4–0,6 исключены). Соответствующее поведение невязки Δ показано на рис. 173. Видно, что в этом случае модель точечных масс отвергается по уровню значимости 5%. В то же время, более реалистичная модель Роша может быть принята. При этом следует помнить, что модель Роша принимается не потому, что она верна, а потому, что нет оснований ее отвергнуть по уровню значимости 5% (подробнее см. выше, см. также обзор Черепащука, 1993). Масса рентгеновского пульсара, соответствующая минимуму невязки в модели Роша составляет $m_x = \left(1{,}22^{+0{,}15}_{-0{,}14}\right) M_\odot$, соответствующее значение m_x в случае модели точечных масс равно $m_x = 1{,}14 M_\odot$ (приводится без ошибок, так как модель отвергается). Причины столь заметного расхождения объясняются, как уже отмечалось, различием формы синтезируемой кривой лучевых скоростей в модели Роша и модели двух точечных масс. Центр масс двойной системы расположен глубоко в теле оптической звезды (так как $q = m_x/m_v \ll 1$), поэтому часть излучающей поверхности оптической звезды движется в том же направлении, что и рентгеновский пульсар. Это приводит к меньшему значению полуамплитуды синтезируемой в модели Роша кривой лучевых скоростей при прочих равных условиях и, как следствие, к большей массе m_x.

Таблица 55

Массы рентгеновских пульсаров в ТДС со сверхгигантами, полученные при интерпретации средних наблюдаемых кривых лучевых скоростей оптических звезд в модели Роша и модели точечных масс (доверительный интервал приведен для уровня доверия 95%)

Название системы	Модель Роша			Модель точечных масс		
	Метод 1	Метод 2	Метод 3	Метод 1	Метод 2	Метод 3
Cen X-3	1,14	$1{,}22^{+0{,}15}_{-0{,}14}$	$1{,}10^{+0{,}05}_{-0{,}05}$	1,12	1,14	$1{,}09^{+0{,}18}_{-0{,}18}$
LMC X-4	$1{,}55^{+0{,}29}_{-0{,}27}$	$1{,}63^{+0{,}42}_{-0{,}47}$	1,60	$1{,}40^{+0{,}30}_{-0{,}29}$	$1{,}47^{+0{,}47}_{-0{,}43}$	$1{,}43^{+0{,}08}_{-0{,}05}$
SMC X-1	$1{,}40^{+0{,}33}_{-0{,}29}$	$1{,}48^{+0{,}47}_{-0{,}42}$	$1{,}40^{+0{,}49}_{-0{,}45}$	$1{,}30^{+0{,}33}_{-0{,}31}$	$1{,}36^{+0{,}41}_{-0{,}39}$	$1{,}30^{+0{,}49}_{-0{,}45}$
4U 1538-52	$1{,}21^{+0{,}28}_{-0{,}26}$	$1{,}18^{+0{,}29}_{-0{,}27}$	1,26	1,16	$1{,}13^{+0{,}11}_{-0{,}11}$	1,21
Vela X-1 ($\mu = 0{,}95$)*	2,02	$1{,}93^{+0{,}25}_{-0{,}24}$	$1{,}94^{+0{,}08}_{-0{,}10}$	2,02	$1{,}92^{+0{,}30}_{-0{,}28}$	$1{,}94^{+0{,}21}_{-0{,}18}$
Vela X-1 ($\mu = 0{,}99$)*	2,02	$1{,}93^{+0{,}19}_{-0{,}21}$	1,94	2,02	$1{,}92^{+0{,}30}_{-0{,}28}$	$1{,}94^{+0{,}21}_{-0{,}18}$

* Доверительный интервал приведен для ошибки среднего, искусственно увеличенной в 2 раза.

Для расчета методом 3 была проведена коррекция средних значений лучевой скорости, находящихся в интервале фаз 0,4–0,6, с применением функции анизотропии звездного ветра. После внесения поправок расхождение между синтезированной и наблюдаемой кривой лучевых скоростей заметно уменьшилось (см. рис. 167*б*). Невязка Δ между наблюдаемой средней кривой лучевых скоростей и теоретической кривой представлена на рис. 173. Видно, что в этом случае есть основания принять обе модели — и модель Роша, и модель двух точечных масс. Найденное значение массы m_x приведено в табл. 55, где даны также массы m_x для других систем.

LMCX-4. В сводную кривую лучевых скоростей вошло 70 точек (см. рис. 168 *а*). Средняя кривая лучевых скоростей приведена на рис. 168 *б*. Средние значения лучевой скорости внутри фазовых бинов получены по 3–10 точкам. Для системы LMCX-4 наблюдается в среднем хорошее согласие между средней кривой лучевых скоростей и теоретической.

Значение минимальной невязки Δ, полученное при интерпретации методами 1 и 2 наблюдаемой средней кривой лучевых скоростей позволяет принять и модель Роша, и модель точечных масс по уровню значимости 5 %. Поскольку изначально наблюдалось хорошее согласие средней кривой лучевых скоростей с теоретической кривой, то при интерпретации наблюдаемой средней кривой методом 3 минимальная невязка Δ возрастает. Увеличение расхождения между наблюдаемой и теоретической кривыми хорошо видно на рис.168 *б*. Модель точечных масс при интерпретации методом 3 отвергается по уровню значимости 5 %, модель Роша может быть принята. Полученные значения масс m_x и их доверительных интервалов (для случаев, когда модель может быть принята) приведены в табл. 55.

SMCX-1. В сводную кривую лучевых скоростей вошло 70 точек (рис. 169 *а*). Средняя кривая лучевых скоростей приведена на рис. 169 *б*. Из рисунка видно, что наблюдаемые лучевые скорости в фазах 0,40 и 0,51 достаточно сильно отклоняются от теоретических значений в сторону отрицательных скоростей.

Интерпретация средней кривой лучевых скоростей всеми тремя методами позволяет принять как модель Роша, так и модель точечных масс, по уровню значимости 5 %. Коррекция средних наблюдаемых значений лучевых скоростей на фазах 0,40 и 0,51 с помощью функции анизотропии звездного ветра уменьшает расхождение между синтезированными и наблюдаемыми значениями лучевой скорости (рис. 169 *б*). Поэтому получаемое методом 3 значение минимальной невязки Δ меньше в сравнении со значением Δ, полученным методом 1. Этот факт отображен более широким доверительным интервалом для значения массы m_x, получаемым на уровне доверия 95 %, в сравнении с 95 % — доверительным интервалом для m_x, полученным при интерпретации наблюдений методом 1 (см. табл. 55). Напомним (см. выше), что доверительный интервал — случайная величина, и для разных реализаций случайного процесса (наблюдаемой средней кривой лучевых скоростей) он может иметь разные размеры даже для одного и того же принятого уровня доверия (в случае применения статистики Фишера).

4U 1538-52. В сводную кривую лучевых скоростей вошло 36 точек (см. рис. 170 *а*). Средняя кривая лучевых скоростей приведена на рис. 170 *б*. Вследствие небольшого числа спектральных данных, усреднение в некоторых фазовых интервалах производилось по лучевым скоростям, измеренным в течение одной ночи, что не позволило уменьшить влияние случайных ошибок. Возможно, этим объясняется избыток положительной лучевой скорости на фазе 0,45.

При интерпретации средней кривой лучевых скоростей методом 1 модель Роша может быть принята, а модель точечных масс отвергается на уровне значимости 5 %. Без учета значения лучевой скорости на фазе 0,45 (метод 2) обе модели — Роша и точечных масс могут быть приняты. Поскольку на фазе 0,45 наблюдается избыток положительной лучевой скорости, то коррекция за нормированную функцию анизотропии звездного ветра лишь увеличивает расхождение между средним наблюдательным значением лучевой скорости и теоретическим значением. Поэтому в результате интерпретации методом 3 невязка Δ увеличивается, что приводит к тому, что обе модели (Роша и точечных масс) отвергаются на уровне значимости 5%. Полученные значения массы m_x и доверительных интервалов приведены в табл. 55.

Vela X-1. В сводную кривую лучевых скоростей вошло 782 точки (рис. 171 *а*), которые были разбиты на 18 групп. Средняя кривая лучевых скоростей приведена на рис. 171 *б*. Из-за большого числа точек, находящихся в каждом фазовом интервале (от 28 до 82 точек), величина среднеквадратичной ошибки среднего для нормальных точек оказалась очень малой. В то же время, разброс нормальных точек на средней кривой лучевых скоростей (рис. 171 *б*) весьма большой по сравнению со среднеквадратичной ошибкой нормальной точки. Малые ошибки нормальных точек предъявляют высокие требования к модели, поэтому модель Роша даже с учетом анизотропии звездного ветра отвергается по уровню значимости 5%. То же самое можно сказать и о модели двух точечных масс. Так, значение минимальной невязки, полученной при интерпретации средней кривой лучевых скоростей в модели Роша методом 1, методом 2 и методом 3, равно соответственно 8,59, 6,0 и 6,59 при квантилях, соответствующих 5% уровню значимости, равных 1,69, 1,605 и 1,69. По-видимому, в системе Vela X-1 происходят сложные физические процессы, которые не учитываются в нашей модели Роша. Эти процессы обуславливают дополнительные доплеровские смещения линий поглощения в спектре оптической звезды, искажающие орбитальные смещения линий. Изучение этих процессов — актуальная задача будущих тонких спектроскопических наблюдений системы Vela X-1.

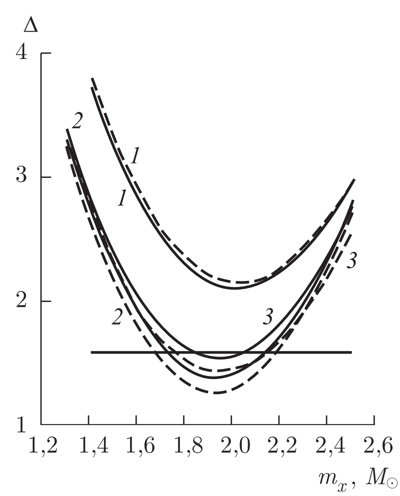


Рис. 174. Невязка между наблюдаемой средней кривой лучевых скоростей системы Vela X-1 и синтезированной в модели Роша кривой лучевых скоростей (сплошные линии), а также в модели точечных масс (штриховые линии). Невязки вычислены методами 1, 2 и 3 (номера указаны на кривых невязок). Горизонтальная линия соответствует критическому значению невязки Δ в рамках статистики Фишера $\Delta_{18,782} = 1{,}605$ на уровне значимости $\alpha = 5\%$

Искусственное увеличение среднеквадратичных ошибок для нормальных точек средней кривой лучевых скоростей в 1,5 раза привело к уменьшению невязки Δ при интерпретации кривой лучевых скоростей методом 2 до 1,92, в то время как критический уровень по критерию Фишера на уровне значимости 5% составляет 1,605. Расхождение между пятипроцентным критическим уровнем и минимальной невязкой, получаемой методами 1 и 3 для случая, когда среднеквадратичная ошибка нормальной точки увеличена в 1,5 раза, еще больше. Чтобы согласовать модель с наблюдениями, среднеквадратичные ошибки для нормальных точек средней кривой лучевых скоростей были искусственно увеличены в 2 раза. Это позволило принять модель Роша при интерпретации методами 2 и 3 средней кривой лучевых скоростей. Отметим, что даже при увеличении ошибки в два раза, при интерпретации методом 1 полной, не корректированной кривой лучевых скоростей, модель отвергается.

Все это позволяет заключить, что ввиду неадекватности используемой нами модели Роша, применяемой к высокоточной средней кривой лучевых скоростей оптической звезды в системе Vela X-1, надежность полученного значения массы m_x рентгеновского пульсара в этой системе не может быть высокой.

Ввиду неоднозначности значения степени заполнения полости Роша μ, расчет был проведен при двух значениях μ: $\mu = 0{,}95$ и 0,99 (напомним, что эти значения μ соответствуют случаю, когда оптическая звезда находится в периастре орбиты), при прочих равных условиях (это соответствует двум строкам в табл. 55). Для случая $\mu = 0{,}95$ невязка Δ между средней кривой лучевых скоростей и синтезированной кривой в модели Роша немного меньше, по сравнению со случаем $\mu = 0{,}99$, что отображается в большей ширине доверительного интервала. При этом значение массы рентгеновского пульсара m_x, определенное по минимуму невязки, остается прежним. Из этого можно заключить, что наши результаты интерпретации устойчивы по отношению к небольшим изменениям степени заполнения полости Роша оптической звездой.

Поведение невязки Δ (для случая $\mu = 0{,}95$), полученной в процессе интерпретации в рамках модели Роша каждым из трех методов, представлено на рис. 174. Значения массы m_x, найденные в результате интерпретации, в случае системы Vela X-1 приведены в табл. 55. В случае, если модель отвергается по уровню значимости 5 %, в табл. 55 указано значение m_x, соответствующее минимуму невязки Δ. Определить доверительный интервал (в рамках статистики Фишера) в таком случае не представляется возможным.

г) Заключение. Мы получили оценки масс рентгеновских пульсаров, наиболее адекватные всему комплексу имеющихся наблюдательных данных по рентгеновским двойным системам с OB-сверхгигантами. В отличие от предыдущих исследований, мы использовали не только полуамплитуду кривой лучевых скоростей оптической звезды, но и всю ее форму.

Наши исследования показали, что для интерпретации кривых лучевых скоростей рентгеновских двойных систем с OB-сверхгигантами недостаточно алгоритма в рамках модели Роша. Модель зачастую отвергается по статистическому критерию вследствие избытка отрицательной лучевой скорости вблизи фазы 0,5. Лишь учет анизотропии звездного ветра позволяет в ряде случаев принять модель Роша по статистическому критерию и дать надежную оценку массы нейтронной звезды и ее доверительного интервала. Результатом нашего исследования являются массы рентгеновских пульсаров, полученные в рамках модели Роша с учетом анизотропии звездного ветра. Такая модель значительно более реалистична, по сравнению с используемой ранее моделью двух материальных точек на кеплеровских орбитах. Отметим, что выполненные ранее в рамках модели материальных точек оценки масс рентгеновских пульсаров в паре с OB-сверхгигантами (van Kerkwijk et al., 1995) находятся в хорошем согласии с нашими определениями, выполненными в рамках той же модели двух точечных масс (см. табл. 55). Обратимся к нашим оценкам масс рентгеновских пульсаров, полученным в рамках модели Роша (табл. 55). Видно, что они систематически больше, в среднем на ~ 10 %, оценок масс, полученных в модели двух материальных точек. Тестовые расчеты для системы SMCX-1 показали независимость такого систематического превышения масс рентгеновских пульсаров, определенных в модели Роша, от наклонения орбиты системы i (подробнее, см. Абубекеров и др., 2004а). Поэтому можно сделать вывод о том, что во всех предыдущих исследованиях, выполненных в рамках модели двух точечных масс, найденные массы рентгеновских пульсаров систематически занижены на 5–10 %.

Значения масс рентгеновских пульсаров в системах LMCX-4 и SMCX-1, равные, соответственно, $\left(1{,}63^{+0{,}42}_{-0{,}47}\right) M_{\odot}$ и $\left(1{,}48^{+0{,}47}_{-0{,}42}\right) M_{\odot}$, оказываются несколько больше стандартного значения массы нейтронной звезды $(1{,}35 \pm 0{,}04) M_{\odot}$ (Thorsett and Chakrabarty, 1998), хотя в пределах наших доверительных интервалов и согласуются со значением $1{,}35 M_\odot$. Превышение массы рентгеновских пульсаров над стандартным значением $1{,}35 M_\odot$ трудно объяснить накоплением аккрецирующего вещества, поступающего из аккреционного диска на поверхность нейтронной звезды. За время жизни оптической звезды на стадии, близкой к заполнению полости Роша $\sim 10^5$ лет и при темпе потери ею массы 10^{-7}–$10^{-6} M_\odot$/год, с учетом размеров ТДС и радиуса гравитационного захвата релятивистского спутника, на его поверхности может осесть всего лишь порядка $0{,}01 M_\odot$.

Массы рентгеновских пульсаров в системах Cen X-3, LMCX-4, SMCX-1 и 4U 1538-52, полученные наиболее надежным способом, т. е. в модели Роша без использования нормальных точек у средней кривой лучевых скоростей в интервале фаз 0,4–0,6, соответственно равны $\left(1{,}22^{+0{,}15}_{-0{,}14}\right) M_\odot$, $\left(1{,}63^{+0{,}42}_{-0{,}47}\right) M_\odot$, $\left(1{,}48^{+0{,}47}_{-0{,}42}\right) M_\odot$, $\left(1{,}18^{+0{,}29}_{-0{,}27}\right) M_\odot$. Исходя из этого, среднее значение массы четырех рентгеновских пульсаров получается равным $(1{,}37 \pm 0{,}15) M_\odot$ по уровню доверия 95% (при усреднении масса рентгеновского пульсара в системе Vela X-1 не принималась во внимание, как аномально высокая). Это среднее значение массы рентгеновских пульсаров в пределах ошибок согласуется со стандартным значением массы радиопульсаров $(1{,}35 \pm 0{,}04) M_\odot$(Thorsett and Chakrabarty, 1999).

Отметим, что тестовые расчеты в модели Роша для различных наклонений орбиты i показали правомерность зависимости $m_x \sim \sin^{-3} i$ (подробнее, см. Абубекеров и др., 2004а). Таким образом, в случае уточнения значения угла i массы рентгеновских пульсаров, полученные нами в модели Роша (табл. 55), могут быть легко пересчитаны.

Важным результатом является оценка массы рентгеновского пульсара в системе Vela X-1. По произведенной ранее оценке она равна $\left(1{,}86^{+0{,}32}_{-0{,}32}\right) M_\odot$ по уровню доверия 95% (Barziv et al., 2001), что существенно превосходит стандартное значение массы нейтронной звезды $1{,}35 \pm 0{,}04$. Наша интерпретация средней кривой лучевых скоростей в модели Роша с учетом анизотропии звездного ветра немного увеличила массу рентгеновского пульсара в системе Vela X-1 до $\left(1{,}93^{+0{,}19}_{-0{,}21}\right) M_\odot$ по уровню доверия 95% (необходимо помнить, однако, что, мы вынуждены были в два раза искусственно увеличить среднеквадратичную ошибку нормальных точек кривой лучевых скоростей). Однако следует подчеркнуть, что поскольку используемая нами модель Роша с анизотропным ветром отвергается по уровню значимости 5%, надежность значения массы рентгеновского пульсара $1{,}93 M_\odot$ в системе Vela X-1 не может считаться высокой, и для решения проблемы массы рентгеновского пульсара в системе Vela X-1 требуются дальнейшие наблюдательные и теоретические исследования. Для объяснения существования нейтронных звезд столь высокой массы необходимо использовать «жесткую» моду уравнения состояния сверхплотного вещества. Исследования в этом направлении представляются весьма перспективными.

В работе (Петров, Антохина, Черепащук, АЖ, 2013, т. 90, с. 729) на основе модели Роша с применением экспрессного алгоритма построены теоретические кривые лучевых скоростей для оптических OB-звезд в двойных системах с рентгеновскими пульсарами в широком диапазоне параметров q, μ, i. На основе этих результатов вычислены величины K-поправок $K(q, \mu, i)$, позволяющие проводить коррекцию наблюдаемых полуамплитуд кривых лучевых скоростей за эффекты неточечности оптической звезды. Использование этих таблиц K-поправок позволит уточнить распределения плотности вероятности масс рентгеновских пульсаров при применении метода Монте-Карло.

22. Масса релятивистского объекта в маломассивной рентгеновской двойной системе 2S 0921-630

Мы изложим результаты работы Абубекерова и др. (2006), где дана корректная оценка массы релятивистского объекта в системе 2S 0921-630, что важно для выяснения его природы (массивная нейтронная звезда или маломассивная черная дыра).

На сегодняшний день известны оценки масс нескольких десятков нейтронных звезд. Из них прецизионной точностью обладают значения масс радиопульсаров в двойных системах Халса-Тэйлора (Thorsett and Chakrabarty, 1999) и системы из двух радиопульсаров J 0737-3039 (Lyne et al., 2004). Согласно этим оценкам, массы нейтронных звезд лежат в достаточно узком интервале $(1{,}25–1{,}44)M_\odot$. Тем не менее, накоплен ряд теоретических предпосылок существования массивных нейтронных звезд с массой $m_{\rm NS} \simeq (2–3)M_\odot$.

Во-первых, согласно теоретическим расчетам, ожидаемые массы нейтронных звезд, образовавшихся при коллапсе ядер массивных звезд, могут лежать в пределах $(1{,}0–1{,}8)M_\odot$ (Woosley et al., 2000, Timms et al., 1996, Fryer and Kalogera, 2001).

Во-вторых, существует целый ряд жестких уравнений состояния нейтронной материи, в которых масса Оппенгеймера–Волкова превышает $1{,}8M_\odot$ (Haensal, 2003). Особое внимание следует обратить на появившийся в последние годы цикл работ по так называемым скайрмионным звездам. В 1999 г. Оуед и Батлер (Ouyed and Butler, 1999) рассмотрели уравнение состояния на основе модели Скайрма (Skyrme, 1962). Характерной особенностью моделей нейтронных звезд на основе уравнения состояния Скайрма является большая предельная масса: $2{,}95M_\odot$ для невращающейся конфигурации и $3{,}45M_\odot$ для вращающейся (Ouyed, 2002, 2004).

В-третьих, расчеты эволюции масс нейтронных звезд в двойных системах на «Машине сценариев» (Lipunov et al., 1996) показали, что реализуются каналы эволюции двойной системы, в ходе которых нейтронная звезда за счет аккреции способна увеличить свою массу более чем на $\sim 1M_\odot$ (Богомазов и др., 2005б, Popov and Prokhorov, 2005).

Следует также упомянуть и результаты статистических исследований нейтронных звезд и черных дыр (Черепащук, 2003). Имеются основания полагать, что распределение релятивистских объектов по массам является бимодальным с провалом в интервале масс $(2–4)M_\odot$. В этом интервале наблюдается резкий дефицит (если не полное отсутствие) релятивистских объектов. Иными словами, наблюдения дают свидетельство о том, что по какой-то глубокой причине в природе не рождаются (или аномально редко рождаются) массивные ($m_x \simeq (2–3)M_\odot$) нейтронные звезды и маломассивные ($m_x \simeq 3M_\odot$) черные дыры.

В связи с вышеизложенным особый интерес представляет компактный объект в маломассивной рентгеновской двойной системе 2S 0921-630 (Li et al., 1978). Эта рентгеновская двойная состоит из компактного объекта и маломассивной оптической звезды (V 395 Car) (Branduardi-Raymont et al., 1983) спектрального класса K0III (Shahbaz et al., 1999b). Орбитальный период системы составляет $P_{\rm orb} = (9{,}006 \pm 0{,}007)^{\rm d}$ (Jonker et al., 2005).

Природа компактного объекта неизвестна — в этой рентгеновской двойной не наблюдается рентгеновского пульсара и рентгеновского барстера 1-го типа (оба эти феномены — явные признаки наблюдаемой поверхности у компактного объекта, характерные для нейтронных звезд). В системе наблюдаются частные оптические и рентгеновские затмения, что говорит о большом значении наклонения орбиты, $i \simeq 70°–90°$ (Shahbaz et al., 1999b, Frank et al., 1987).

Согласно результатам работы (Shahbaz et al., 1999b), масса компактного объекта, в предположении $i = 70°–90°$, заключена в пределах $m_x = (2{,}0–4{,}3)\,M_\odot$. Отношение масс компонент, полученное по вращательному уширению линий в спектре оптической звезды, составляет $q = m_x/m_v = 1{,}12 \pm 0{,}18$ (Shahbaz et al., 1999b).

В работе (Jonker et al., 2005) выполнена интерпретация высокоточной кривой лучевых скоростей системы. В предположении $i = 70°–90°$ масса компактного объекта составила $(1{,}90 \pm 0{,}25)M_\odot < m_x < (2{,}9 \pm 0{,}4)M_\odot$. Из-за сильного рентгеновского прогрева для оценки отношения масс q авторы работы (Jonker et al., 2005) прибегли к так называемой K-корректировке (Wade and Horne, 1988) полуамплитуды кривой лучевых скоростей. С учетом введения K-поправки значение отношения масс компонент получилось равным $q = m_x/m_v = 0{,}75 \pm 0{,}37$. В связи с наличием сильного прогрева атмосферы оптической звезды K0III рентгеновским излучением аккрецирующего релятивистского объекта ($k_x = L_x/L_v \approx 10$), интерпретация наблюдаемой кривой лучевых скоростей в системе 2S 0921-630 усложняется. Используемая для анализа наблюдаемой кривой лучевых скоростей модель двойной системы должна учитывать круг физических явлений, связанных как с сильной приливной деформацией оптической звезды, так и с высокой рентгеновской светимостью компактного объекта.

Принимая во внимание важность надежной оценки массы релятивистского объекта в системе 2S 0921-630, мы проанализировали высокоточную кривую лучевых скоростей (Jonker et al., 2005) в рамках модели Роша с учетом эффекта рентгеновского прогрева оптической звезды и экранирования части рентгеновского излучения аккреционным диском, а также с учетом возможной анизотропии рентгеновского излучения от внутренних частей аккреционного диска вокруг черной дыры.

а) Наблюдательный материал. В качестве наблюдательных данных использовались спектральные данные из работы (Jonker et al., 2005). Кратко опишем эти данные. Спектры были получены с декабря 2003 г. по март 2004 г. на телескопе VLT. Всего получено 44 спектра с экспозицией 1300 с. Размер щели спектрографа составлял 0,4″, что позволило получить спектры высокой дисперсии (обратная дисперсия 0,75 Å/пиксел). Точность калибровки шкалы длин волн составила 0,03 Å.

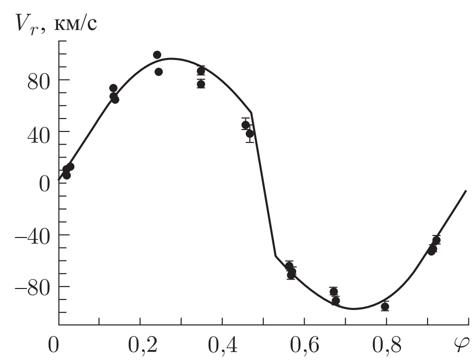


Рис. 175. Наблюдаемая кривая лучевых скоростей оптической звезды в рентгеновской двойной системе 2S 0921-630 из работы (Jonker et al., 2005) и теоретическая кривая лучевых скоростей в модели Роша при массе компактного объекта $m_x = 2{,}35M_\odot$, массе оптической звезды $m_v = 2{,}4M_\odot$, коэффициенте рентгеновского прогрева оптической звезды $k_x = 10$ и наклонении орбиты $i = 75°$. Теоретическая кривая лучевых скоростей соответствует минимуму невязки

Спектральные данные получены на двух решетках 1200R+93 и 1028z+29, охватывающих спектральные диапазоны 5920–6520 Å и 8360–8900 Å соответственно. Выполненный авторами (Jonker et al., 2005) анализ спектрограмм системы 2S 0921-630 подтвердил спектральный класс оптической звезды-гиганта K0III. Лучевые скорости определены методом кросс-корреляции спектров, полученных на дифракционной решетке 1200R+93 относительно спектра звезды-стандарта. В качестве стандартов использовались звезды спектрального класса от G5 до K7, спектры которых получены на телескопе Keck с тем же разрешением. При построении кривой лучевых скоростей за нулевую фазу принят момент середины затмения рентгеновской компоненты оптической звездой. На основе высокоточной кривой лучевых скоростей авторами (Jonker et al., 2005) уточнен орбитальный период системы. Значение орбитального периода относительно эфемериды нулевой фазы $JD_0 = 2453000{,}49$ составляет $P_{\rm orb} = 9{,}006^{\rm d} \pm 0{,}007^{\rm d}$. Лучевая скорость центра масс системы $\gamma = (44{,}4 \pm 2{,}4)$ км/с. Полуамплитуда наблюдаемой кривой лучевых скоростей составляет $K_v = (99{,}1 \pm 3{,}1)$ км/с. Наблюдаемая кривая лучевых скоростей относительно γ-скорости представлена на рис. 175.

б) Анализ кривой лучевых скоростей. В тесной двойной системе 2S 0921-630 оптическая звезда заполняет свою полость Роша (степень заполнения полости Роша $\mu = 1$). Поверхность приливно деформированной звезды, обращенная к релятивистскому объекту, прогревается рентгеновским излучением. Эти эффекты взаимодействия компонент должны быть приняты во внимание при анализе наблюдаемой кривой лучевых скоростей оптической звезды.

Интерпретация наблюдаемой кривой лучевых скоростей системы 2S 0921-630 была выполнена в рамках модели Роша с учетом прогрева оптической звезды рентгеновским излучением аккрецирующего релятивистского объекта. Использовался описанный выше точный метод синтеза теоретической кривой лучевых скоростей, в котором для каждой элементарной площадки на поверхности оптической звезды путем построения модели атмосферы с внешним прогревом вычисляется локальный профиль линии. Алгоритм синтеза подробно описан выше (см. также работы: Антохина и др., 2003, 2005). Синтез кривой лучевых скоростей выполнен по линии поглощения Ca I 6439,075 Å, характерной для звезд позднего спектрального класса (для краткости в дальнейшем линия будет обозначаться как Ca I 6439 Å). Напомним, что лучевая скорость звезды в данной фазе орбитального периода определяется по средней длине волны на уровне остаточных интенсивностей 1/3, 1/2 и 2/3 интегрального теоретического профиля линии поглощения.

Нами был выполнен анализ кривой лучевых скоростей как без учета, так и с учетом влияния аппаратной функции на теоретический интегральный профиль линии поглощения Ca I 6439 Å. Полная ширина аппаратной функции на половинной интенсивности принята равной FWHM = 0,5 Å. Поскольку результаты оказались почти тождественными, то мы приводим лишь результаты, полученные с учетом влияния аппаратной функции.

Как уже отмечалось, в системе 2S 0921-630 наблюдается значительный рентгеновский прогрев атмосферы оптической звезды. В связи с этим, спектр рентгеновского излучения должен быть учтен наиболее корректно. Форма рентгеновского спектра в системе 2S 0921-630 известна (Kallman et al., 2003). Опираясь на наблюдательные данные рентгеновских обсерваторий XMM и «Chandra» (Kallman et al., 2003), мы задали величину фотонного индекса степенного рентгеновского спектра системы 2S 0921-630 $\alpha_p = 1{,}2$ в интервале 0,1–12 кэВ. По данным XMM и «Chandra» собственная рентгеновская светимость релятивистского объекта $L_x \simeq 10^{36}$ эрг/с (Kallman et al., 2003). Болометрическая светимость оптической звезды K0III, заполняющей свою полость Роша, в предположении средней эффективной температуры $T_{\rm ef} = 4700$ К, составляет $L_v \simeq 2 \cdot 10^{35}$ эрг/с. Принимая во внимание некоторую неопределенность оценки расстояния до системы и рентгеновской светимости L_x можно положить $k_x = L_x/L_v = 10$. Мы провели интерпретацию наблюдаемой кривой лучевых скоростей при значениях $k_x = 0$ и $k_x = 10$.

Интерпретация наблюдаемой кривой лучевых скоростей проведена в трех разных моделях: без, и с учетом экранирования рентгеновского излучения аккреционным диском, а также с учетом анизотропии рентгеновского излучения от аккреционного диска вокруг возможной черной дыры. Численные значения параметров модели Роша системы 2S 0921-630 представлены в табл. 56.

Таблица 56

Численные значения параметров, используемых при моделировании кривых лучевых скоростей оптической компоненты в модели Роша

P, сут	9,006	Орбитальный период
m_v, $M_\odot$	var*	Масса оптической звезды
e	0,0	Эксцентриситет
i, град	60, 75, 90	Наклонение орбиты
μ	1,0	Коэффициент заполнения полости Роша оптической компонентой
f	1,0	Коэффициент асинхронности вращения оптической компоненты
$T_{\rm ef}$, K	4700	Эффективная температура оптической компоненты
β	0,08	Коэффициент гравитационного потемнения
k_x	var*	Отношение рентгеновской светимости релятивисткой компоненты к болометрической светимости оптической компоненты L_x/L_v
A	1,0	Коэффициент переработки рентгеновского излучения
u	0,3	Коэффициент потемнения к краю
α_p	1,2	Фотонный индекс рентгеновского спектра
* Эти параметры рентгеновской двойной системы менялись в ходе модельных расчетов		

в) Модель 1. Анализ наблюдаемой кривой лучевых скоростей без учета экранирования рентгеновского излучения аккреционным диском. Поскольку масса оптической звезды точно не известна, в качестве искомых были два параметра — масса оптической звезды m_v и масса релятивистского объекта m_x. Для решения обратной задачи использовался простой метод перебора по параметрам m_v, m_x. Для каждого значения m_v из дискретного набора 1,0, 1,9, 2,4, 2,9$M_\odot$ при фиксированном i осуществлялся перебор по массе релятивистского объекта m_x. Проверка адекватности модели наблюдательным данным проводилась по статистическому критерию χ^2. Для работы был выбран уровень значимости $\alpha = 5\,\%$ и $\alpha = 1\,\%$ (см. выше, а также обзор Черепащука, 1993). Для сравнения результатов, интерпретация кривой лучевых скоростей выполнена как с учетом рентгеновского прогрева ($k_x = 10$), так и без его учета ($k_x = 0$). Интерпретация выполнена для значений $i = 60°$, $75°$, $90°$. Результатом нашего анализа являются зависимости между массой оптической звезды m_v и массой релятивистского объекта m_x для каждого из значений i. Численные результаты приведены в табл. 57, 58, а графические — на рис. 176.

В табл. 57 и 58 приведены значения m_x, соответствующие минимуму невязки χ^2 между наблюдаемой и теоретической кривыми лучевых скоростей. Значения m_x в табл. 57, 58 приведены без указания величины ошибки для m_x, поскольку модель Роша двойной системы отвергается в обоих случаях: и для $\alpha = 5\,\%$ и для $\alpha = 1\,\%$. Значения квантилей для выбранных уровней значимости равны $\Delta_{1\%} = 38{,}93$, $\Delta_{5\%} = 32{,}67$. В случае учета рентгеновского прогрева ($k_x = 10$) минимальное значение невязки составляет $\chi^2 = 120$–150. При анализе без учета рентгеновского прогрева минимальное значение невязки еще больше: $\chi^2 = 350$–380. Неадекватность модели наблюдательным данным связана со значительной дисперсией точек на наблюдаемой кривой лучевых скоростей при относительно небольшой погрешности

Таблица 57

Зависимость массы релятивистской компоненты от массы оптической, полученная в модели Роша с учетом изотропного прогрева оптического спутника рентгеновским излучением при $k_x = 10$ для углов наклонения орбиты $i = 60^\circ$, 75°, 90° (без учета экранирования рентгеновского излучения аккреционным диском)

m_v, $M_\odot$	m_x, $M_\odot$		
	$i = 60^\circ$	$i = 75^\circ$	$i = 90^\circ$
1,0	2,00	1,70	1,55
1,9	2,55	2,15	2,00
2,4	2,80	2,35	2,25
2,9	3,00	2,55	2,45

Таблица 58

Зависимость массы релятивистской компоненты от массы оптической, полученная в модели Роша без учета прогрева оптического спутника ($k_x = 0$) для углов наклонения орбиты $i = 60^\circ$, 75°, 90°

m_v, $M_\odot$	m_x, $M_\odot$		
	$i = 60^\circ$	$i = 75^\circ$	$i = 90^\circ$
1,0	2,55	2,10	1,95
1,9	3,30	2,75	2,60
2,4	3,65	3,05	2,85
2,9	4,00	3,35	3,15

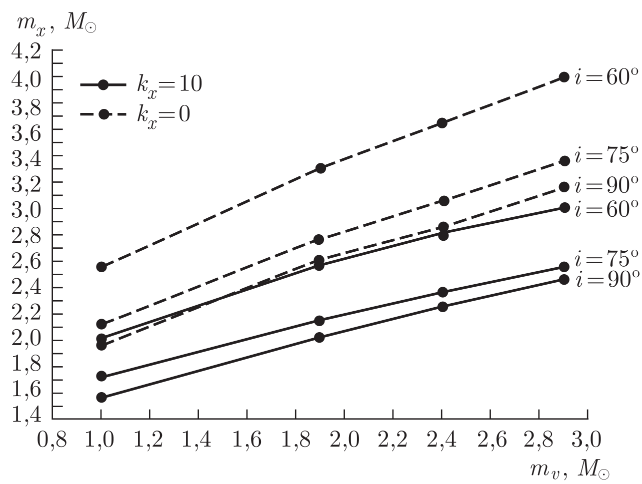


Рис. 176. Зависимости между массой оптической звезды и массой релятивистского спутника в рентгеновской двойной системе 2S 0921-630, полученная путем интерпретации наблюдаемой кривой лучевых скоростей в модели Роша при величине рентгеновского прогрева оптической звезды $k_x = 10$ (сплошные линии) и без учета влияния рентгеновского прогрева на атмосферу оптического спутника, $k_x = 0$ (штриховые линии). Случай изотропного рентгеновского прогрева

лучевых скоростей в каждой точке (см. рис. 175). Как отмечалось в работе (Jonker et al., 2005), значительный разброс точек на кривой лучевых скоростей системы 2S 0921-630 связан, по-видимому, с переменным, рентгеновским прогревом оптической звезды, вызванным нестационарностью аккреции вещества на релятивистский объект. Поскольку $k_x = 10$, эта переменность рентгеновского прогрева заметно сказывается на форме кривой лучевых скоростей от одного орбитального цикла к другому. Свертка нескольких различных орбитальных циклов приводит к большому разбросу отдельных точек на средней кривой лучевых скоростей. Поскольку этот эффект не учитывается нашей моделью, модель Роша отвергается по статистическому критерию на уровне значимости 1 % (отвергая модель, мы ошибаемся, т. е. отвергаем верную модель, лишь в одном случае из ста). Можно было бы искусственно увеличить величины среднеквадратичных ошибок для индивидуальных измерений лучевых скоростей, учтя таким образом ошибки, вносимые переменностью рентгеновского прогрева (в гипотезе о том, что переменность рентгеновского прогрева — случайный процесс). В этом случае можно было бы добиться того, чтобы модель могла быть принята (так мы поступили при определении массы рентгеновского пульсара в системе Vela X-1 — см. выше). Однако ввиду не очень большого количества точек на средней кривой лучевых скоростей системы 2S 0921-630 мы не стали заниматься такой искусственной процедурой, предпочитая работать с величинами искомых параметров m_v, m_x, выбранных по минимуму невязки.

Сравним результаты интерпретации наблюдаемой кривой лучевых скоростей, полученные в модели Роша с учетом рентгеновского прогрева (табл. 57), с результатами, полученными без учета рентгеновского прогрева (табл. 58). В случае рентгеновского прогрева с $k_x = 10$ при наклонении орбиты $i \simeq 60°–90°$ и массе оптической звезды $m_v = (1{,}0–2{,}9)M_\odot$ масса релятивистского объекта m_x лежит в пределах $m_x = (1{,}55–3{,}0)M_\odot$; без учета рентгеновского прогрева ($k_x = 0$) $m_x = (1{,}95–4{,}0)M_\odot$. Таким образом, интерпретация кривой лучевых скоростей без учета рентгеновского прогрева атмосферы оптической звезды ведет к систематическому завышению массы релятивистского объекта на $0{,}5–1{,}0M_\odot$.

Рассмотрим подробно, с чем связано такое систематическое завышение. На рис. 177 приведены теоретические интегральные профили линии поглощения Ca I 6439 Å в орбитальной фазе $\varphi = 0{,}25$, полученные при $m_v = 2{,}4M_\odot$, $m_x = 2{,}35M_\odot$, $i = 75°$ с учетом рентгеновского прогрева (сплошная линия) и без учета прогрева (штриховая линия). Видно, что в случае учета рентгеновского прогрева при $k_x = 10$ в интегральном профиле линии Ca I 6439 Å появляется эмиссионная компонента (рис. 177).

В фазе 0,25 оптическая звезда удаляется от наблюдателя с максимальной лучевой скоростью. В отсутствие рентгеновского прогрева в спектре оптической звезды формируется широкая интегральная линия поглощения, максимально смещенная (в фазе 0,25) в красную часть спектра. То, что формируется широкая абсорбция, связано с большой разницей линейных скоростей на теле оптической звезды K0III, заполняющей свою полость Роша. При наличии рентгеновского прогрева на стороне звезды, обращенной к релятивистскому объекту, из-за инверсного распределения температуры в атмосфере звезды формируется эмиссионная компоненты линии. Поскольку линейная скорость удаления прогретой части звезды меньше, чем непрогретой, эмиссионная компонента линии смещена в сторону более коротких длин волн. Таким образом, эмиссионная компонента «съедает» коротковолновую часть интегрального профиля линии поглощения, что приводит к смещению «центра тяжести» линии в длинноволновую сторону и увеличению наблюдаемой полуамплитуды кривой лучевых скоростей. Так, на рис. 177 при учете рентгеновского прогрева «центр тяжести» линии поглощения приходится на длину волны 6441,131 Å, что

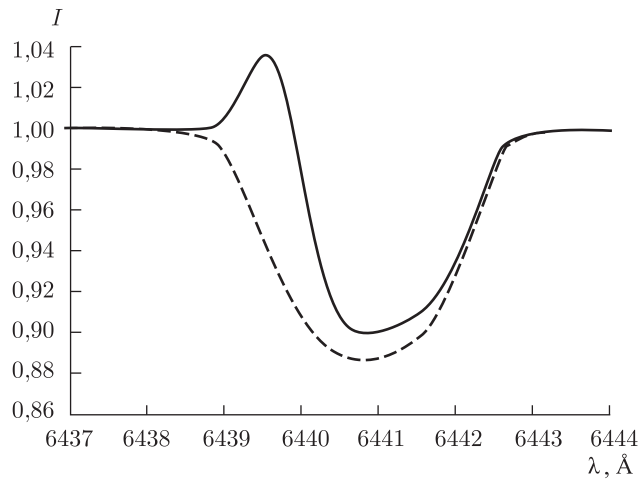


Рис. 177. Модельные интегральные профили линии поглощения Ca I 6439 Å в спектре оптической звезды в рентгеновской двойной системе 2S 0921-630 в орбитальной фазе $\varphi = 0{,}25$. Профили получены в модели Роша при $m_x = 2{,}35 M_\odot$, $m_v = 2{,}4 M_\odot$, $i = 75^\circ$. Штриховой линией показан профиль линии поглощения, полученный в модели Роша без учета эффекта рентгеновского прогрева. Сплошная линия — профиль линии поглощения при величине рентгеновского прогрева оптической звезды k_x=10. Оба модельных интегральных профиля свернуты с аппаратной функцией спектрографа с величиной FWHM = 0,5 Å

соответствует лучевой скорости 95,44 км/с. При отсутствии рентгеновского прогрева «центр тяжести» линии приходится на длину волны 6440,818 Å, что соответствует лучевой скорости 81,57 км/с. В фазе $\varphi = 0$ эмиссионная компонента линии отсутствует, так как прогретая часть звезды затмевается ее телом. Поэтому в этой фазе положение «центра тяжести» линии поглощения не искажается рентгеновским прогревом. В фазе 0,75 эмиссионная компонента по понятным причинам появляется в длинноволновой стороне интегрального профиля линии поглощения, что приводит к смещению «центра тяжести» линии поглощения в коротковолновую часть спектра и увеличению наблюдаемой полуамплитуды кривой лучевых скоростей. Таким образом, вследствие деформации интегрального профиля линии поглощения эмиссионной компонентой, наблюдаемую полуамплитуду кривой лучевых скоростей оптической звезды можно объяснить меньшей массой релятивистского объекта. Поэтому выполненный нами корректный учет влияния рентгеновского прогрева в системе 2S 0921-630 позволил снизить массу рентгеновского объекта с величины $m_x = (1{,}95–4{,}0) M_\odot$ до $m_x = (1{,}55–3{,}0) M_\odot$.

Все вышесказанное поясняется модельными кривыми лучевых скоростей, приведенными на рис. 178. В случае рентгеновского прогрева ($k_x = 10$) при массе оптической звезды $m_v = 2{,}4 M_\odot$ и наклонении орбиты $i = 75^\circ$ минимуму невязки ($\chi^2_{\min} = 149{,}8$) соответствует масса релятивистского объекта $m_x = 2{,}35 M_\odot$. На рис. 178 соответствующая кривая лучевых скоростей представлена сплошной линией. Значение K_v в этом случае составляет $K_v = 96{,}81$ км/с. Кривая лучевых скоростей оптической звезды при тех же параметрах, но без учета рентгеновского прогрева имеет полуамплитуду $K_v = 81{,}27$ км/с (штрих-пунктирная линия на рис. 178). При анализе наблюдаемой кривой лучевых скоростей без учета рентгеновского прогрева при $m_x = 2{,}4 M_\odot$ и $i = 75^\circ$ минимуму невязки ($\chi^2_{\min} = 356{,}7$) соответствует более

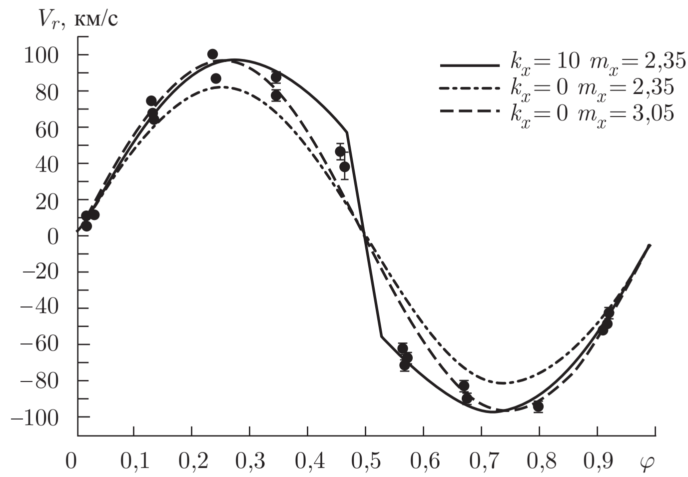


Рис. 178. Наблюдаемая кривая лучевых скоростей из работы (Jonker et al., 2005) и теоретические кривые лучевых скоростей системы 2S 0921-630, полученные в модели Роша при наклонении орбиты $i = 75°$. Сплошная линия — оптимальная кривая лучевых скоростей при величине рентгеновского прогрева k_x=10 и при $m_v = 2{,}4M_\odot$, $m_x = 2{,}35M_\odot$. Штрих-пунктирная линия — кривая лучевых скоростей, полученная в модели Роша без учета рентгеновского прогрева ($k_x = 0$) и при $m_v = 2{,}4M_\odot$ и $m_x = 2{,}35M_\odot$. Штриховая линия — оптимальная кривая лучевых скоростей, полученная в модели Роша без учета рентгеновского прогрева ($k_x = 0$) при $m_v = 2{,}4M_\odot$ и $m_x = 3{,}05M_\odot$

значительная масса релятивистского объекта $m_x = 3{,}05M_\odot$. Соответствующая кривая лучевых скоростей приведена на рис. 178 штриховой линией.

Рассмотрим теперь вопрос о форме линий поглощения оптической звезды при большом рентгеновском прогреве. Очевидно, что оценка массы релятивистского объекта в двойной системе напрямую зависит от точности определения «центра тяжести»

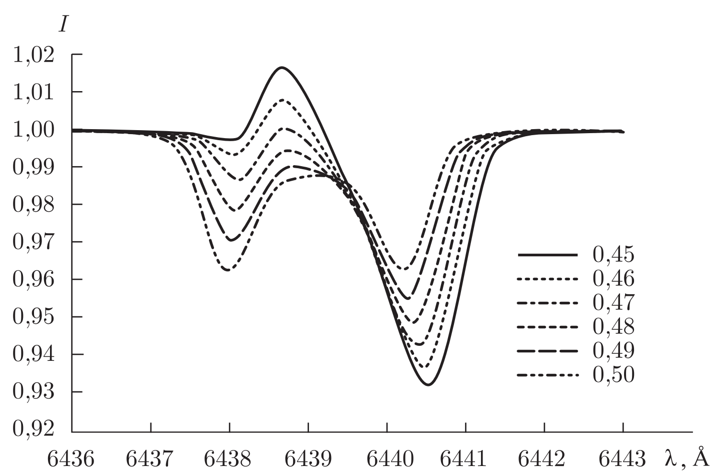


Рис. 179. Модельные интегральные профили линии поглощения Ca I 6439 Å в спектре оптической звезды системы 2S 0921-630, полученные в модели Роша при величине рентгеновского прогрева оптической звезды $k_x = 10$ и при $m_v = 2{,}4M_\odot$, $m_x = 2{,}35M_\odot$, $i = 75°$. Орбитальные фазы указаны на графике рисунка

линии поглощения в спектре оптической звезды. При исследовании формы теоретических интегральных профилей линии поглощения Ca I 6439 Å мы столкнулись с проблемой неоднозначности определения положения «центра тяжести» интегрального профиля линии.

Так, в двойной системе с массой оптической звезды $m_v = 2{,}4M_\odot$, массой релятивистского объекта $m_x = 2{,}35M_\odot$ и наклонением орбиты $i = 75°$ на фазах 0,47–0,50 «центр тяжести» линии определяется неоднозначно. На рис. 179 представлены теоретические интегральные профили линии поглощения Ca I 6439 Å в орбитальных фазах 0,47–0,50. Видно, что начиная с фазы 0,47 форма профиля линии имеет два минимума, что не позволяет однозначно оценить положение «центра тяжести» линии и, следовательно, дать значение лучевой скорости в этих орбитальных фазах. Поэтому на нашей теоретической кривой лучевых скоростей, представленной на рис. 178, на фазах 0,47 и 0,53 наблюдается излом, обусловленный неопределенностью в значениях теоретической лучевой скорости оптической звезды.

Из-за сложности формы профилей линий поглощения в рентгеновских двойных с большим рентгеновским прогревом оценка массы релятивистских объектов в таких системах должна проводиться не по косвенным упрощенным данным, какими являются кривые лучевых скоростей, а непосредственно по орбитальной переменности наблюдаемых профилей линий в спектре высокого разрешения оптической звезды. Высокое качество необходимого наблюдательного материала способны обеспечить современные 8–10 метровые телескопы.

г) Модель 2. Анализ наблюдаемой кривой лучевых скоростей с учетом экранирования рентгеновского излучения аккреционным диском. Мы учли экранирование рентгеновского излучения аккреционным диском. Полный угол раствора аккреционного диска принят равным 5° (Shakura and Sunyaev, 1973). Предполагается, что аккреционный диск лежит в плоскости орбиты. Часть элементарных площадок оптической звезды попадает в область теневой полосы. Интенсивности и профили линий для этих площадок вычислялись при условии $k_x^{\text{лок}} = 0$. Анализ наблюдаемой кривой лучевых скоростей проведен для значений $m_v = 1{,}0$, 1,9, 2,4, $2{,}9M_\odot$ и $i = 75°$. Результат представлен в табл. 59. Результаты, оказались весьма близкими (а в случае $m_v = 1{,}0M_\odot$ и $1{,}9M_\odot$ тождественными) к результатам,

Таблица 59

Зависимость массы релятивистской компоненты от массы оптической, полученная в модели Роша для наклонения орбиты $i = 75°$ с учетом прогрева оптического спутника при $k_x = 10$ и экранирования рентгеновского излучения аккреционным диском

m_v, $M_\odot$	m_x, $M_\odot$
1,0	1,70
1,9	2,15
2,4	2,40
2,9	2,60

полученным без учета экранирования диском. Поэтому анализ для значений $i = 60°$ и 90° нами не проводился. Теневая полоса для рентгеновского излучения на оптической звезде оказалась слишком узкой, чтобы значительно повлиять на результаты.

Мы также выполнили анализ наблюдаемой кривой лучевых скоростей с учетом экранирования диском, но при очень большом рентгеновском прогреве, $k_x = 30$. Как и ранее, наклонение орбиты $i = 75°$. Интерпретация выполнена для значений $m_v = 1{,}0,\ 1{,}9,\ 2{,}4,\ 2{,}9 M_\odot$. Результаты представлены в табл. 60.

Таблица 60

Зависимость массы релятивистской компоненты от массы оптической, полученная в модели Роша с учетом прогрева оптического спутника при $k_x = 30$ для наклонения орбиты $i = 75°$

m_v, $M_\odot$	m_x, $M_\odot$	
	С учетом экранирования рентгеновского излучения	Без учета экранирования рентгеновского излучения
1,0	1,65	1,60
1,9	2,08	2,05
2,4	2,30	2,28
2,9	2,50	2,45

Как следует из табл. 60, учет экранирования рентгеновского потока при $k_x = L_x/L_v = 30$ слабо отражается на результатах. Максимальное различие массы m_x, полученное в моделях при $k_x = 30$ без экранирования и с экранированием, составляет $0{,}05 M_\odot$ (табл. 60). В случае меньшего k_x эффект экранирования будет еще меньше. Поэтому наши прежние результаты (см. выше) по анализу кривых лучевых скоростей рентгеновских пульсаров, выполненному без учета эффекта экранирования рентгеновского излучения аккреционным диском, следует считать корректными (во всех пяти исследованных рентгеновских двойных системах с OB-сверхгигантами значение $k_x = L_x/L_v \leqslant 1{,}4$).

д) Модель 3. Анализ наблюдаемой кривой лучевых скоростей в предположении анизотропного рентгеновского излучения аккреционного диска. Для полноты исследования, мы также рассмотрели эффект анизотропии рентгеновского излучения от аккреционного диска вокруг возможной черной дыры в системе 2S 0921-630. Этот эффект предсказывается теорией дисковой аккреции (Shakura and Sunyaev, 1973). Он приводит к ослаблению рентгеновского потока в орбитальной плоскости и уменьшению эффективного рентгеновского прогрева. Отметим, что присутствие сильных эмиссионных компонент у многих линий поглощения в оптическом спектре системы 2S 0921-630 (Jonker et al., 2005) делает гипотезу об изотропно излучающем рентгеновском источнике в этой системе более предпочтительной. Эмиссионные компоненты линий поглощения в спектре оптической звезды, указывающие на значительный рентгеновский прогрев оптической звезды, являются косвенным указанием на наличие в системе 2S 0921-630 изотропно излучающей рентгеновский поток нейтронной звезды.

Аккреционный диск предполагается геометрически тонким, лежащим в плоскости орбиты системы. Анизотропия рентгеновского излучения от аккреционного диска вокруг черной дыры задавалась выражениями (Бочкарев и др., 1988)

$$\frac{dL}{d\Omega} = \frac{L_x F(\theta)}{4\pi},$$

$$F(\theta) = \frac{6}{7}\cos\theta\,(1 + 2\cos\theta),$$

где θ — угол между нормалью к плоскости диска и направлением элементарного телесного угла $d\Omega$. Геометрия двойной системы в модели Роша такова, что на оптический спутник падает поток рентгеновского излучения в области значений

$\theta = 70°$–$90°$. Как видно из приведенных выражений, при таких значениях θ рентгеновский поток значительно ослаблен. На рис. 180 представлены теоретические интегральные профили линии поглощения Ca I 6439 Å в орбитальной фазе 0,25. Видно, что эмиссионная компонента интегрального профиля в случае анизотропного прогрева ослаблена, по сравнению с изотропным прогревом.

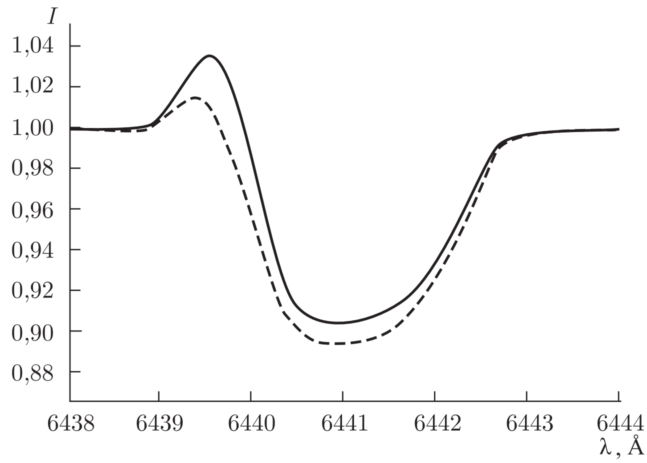


Рис. 180. Модельные интегральные профили линии поглощения Ca I 6439 в спектре оптической звезды в системе 2S 0921-630 в орбитальной фазе 0,25. Профили получены в модели Роша при $m_x = 2{,}35 M_\odot$ $m_v = 2{,}4 M_\odot$, $i = 90°$ и при значении коэффициента рентгеновского прогрева $k_x = 10$. Сплошная линия — профиль линии поглощения в предположении изотропии излучения рентгеновского источника. Пунктирная линия — профиль линии поглощения в случае анизотропного рентгеновского источника. Оба модельных интегральных профиля свернуты с аппаратной функцией спектрографа с величиной FWHM $= 0{,}5$ Å

Для случая анизотропного рентгеновского излучения аккреционного диска результаты интерпретации наблюдаемой кривой лучевых скоростей представлены в табл. 61.

Таблица 61

Зависимость массы релятивистской компоненты от массы оптической, полученная в модели Роша с учетом прогрева оптического спутника рентгеновским излучением при $k_x = 10$ в предположении анизотропии излучения рентгеновского диска для углов наклонения орбиты $i = 60°$, $75°$, $90°$

m_v, $M_\odot$	m_x, $M_\odot$		
	$i = 60°$	$i = 75°$	$i = 90°$
1,0	2,20	1,80	1,70
1,9	2,75	2,30	2,15
2,4	3,00	2,50	2,35
2,9	3,25	2,75	2,60

Поскольку используемая модель отвергается по уровню значимости 1 %, то центральные значения параметров, найденные по минимуму невязки, приведены без указания ошибок. При массе оптической звезды $m_v = (1{,}0$–$2{,}9) M_\odot$ масса релятивистского объекта заключена в пределах $(1{,}70$–$3{,}25) M_\odot$. Напомним, что в случае изотропного прогрева при $k_x = 10$ масса релятивистского объекта лежит в пределах $m_x = (1{,}55\text{–}3{,}0)M_\odot$. Таким образом, предположение о возможной анизотропии рентгеновского излучения в системе 2S 0921-630 увеличивает массу релятивистского объекта на $\sim 0{,}2M_\odot$ по сравнению со случаем изотропного рентгеновского источника.

е) Обсуждение результатов. Результаты нашего анализа высокоточной кривой лучевых скоростей (Jonker et al., 2005) в предположении $i = 60°\text{–}90°$ и $m_v = (1{,}0\text{–}2{,}9)M_\odot$ представлены в табл. 62. В качестве основного результата мы приняли значение массы релятивистского объекта, полученное в модели 1 (изотропный прогрев без экранирования диском): $m_x = (1{,}55\text{–}3)M_\odot$.

Таблица 62

Масса компактного объекта рентгеновской двойной системы 2S 0921-630 в разных моделях в предположении коэффициента рентгеновского прогрева оптического спутника $k_x = 10$

Модель*	m_x, $M_\odot$
1	1,55–3,0
2	1,55–3,0
3	1,70–3,25

* Модель 1 — изотропный источник рентгеновского излучения без учета экранирования рентгеновского потока аккреционным диском; модель 2 — изотропный источник рентгеновского излучения с учетом экранирования рентгеновского потока аккреционным диском; модель 3 — анизотропный источник рентгеновского излучения без учета экранирования рентгеновского потока аккреционным диском.

Как уже упоминалось, в системе 2S 0921-630 наблюдаются рентгеновские затмения, что говорит о большом значении наклонения орбиты $i = 70°\text{–}90°$ (Shahbaz et. al., 1999b). Отсутствие рентгеновских дипов позволяет предположить, что $i > 80°$ (Frank et al., 1987). При оценке массы мы предполагаем, что $i = 75°\text{–}90°$. Главный результат нашего исследования — это полученные зависимости m_x от m_v для разных i (см. табл. 57 и рис. 176). Уточнение величин i и m_v позволит дать однозначную оценку массы релятивистского объекта m_x. Пока же мы на основании наших результатов (табл. 57 и рис. 176) можем оценить m_x, лишь из разумных соображений ограничив значения m_v и i.

В случае $i = 75°\text{–}90°$ и $m_v = (1{,}0\text{–}2{,}9)M_\odot$ значение $m_x \simeq (1{,}55\text{–}2{,}55)M_\odot$. Принимая во внимание спектральный класс и класс светимости оптической звезды K0III и оценивая по ним ее массу (Страйжис, 1982) $m_v \simeq 2{,}9M_\odot$, можно получить оценку массы релятивистского объекта $m_x = (2{,}45\text{–}2{,}55)M_\odot$. Реальное значение массы оптической звезды во взаимодействующей двойной системе может отличаться от ее оценки, проводимой по спектральному классу и классу светимости. Так, например, в маломассивных транзиентных рентгеновских двойных системах с черными дырами V 404 Cyg (оптическая звезда K0IV) и GRS 1915+105 (оптическая звезда KIII) оценки масс m_v, полученные динамическим способом, по вращательному уширению линий поглощения, составляют $(0{,}7 \pm 0{,}1)M_\odot$ (Casares and Charles, 1994) и $(0{,}81 \pm 0{,}53)M_\odot$ (Harlaftis and Creiner, 2004) соответственно. В то же время массы одиночных звезд данных спектральных классов и классов светимостей должны составлять $m_v = 1{,}3M_\odot$ для V 404 Cyg и $(2{,}3\text{–}2{,}9)M_\odot$ для GRS 1915+105 (Страйжис, 1982). Таким образом, оценка массы оптического спутника, выполненная по его спектральному классу и классу светимости, оказывается завышенной почти в 2 раза по сравнению со спектроскопической оценкой m_v. Этот вывод согласуется с современными теоретическими представлениями об эволюции звезд в маломассивных тесных двойных системах. Согласно расчетам, выполненным на «Машине сценариев» (Lipunov et al., 1996), оптический спутник с начальной массой $\sim 3M_\odot$ на стадии обмена веществом теряет более $1M_\odot$ (Богомазов и др., 2005).

Оптические звезды в рентгеновских двойных V 404 Cyg, GRS 1915+105 и 2S 0921-630 близки по спектральному классу и классу светимости (Shahbaz et al., 1999b, Harlaftis et al., 2004). Полагая, что звезда K0III в системе 2S 0921-630 потеряла в результате обмена значительную часть своей массы и, предполагая, что ее масса составляет, подобно системе GRS 1915+105, $m_v \simeq 1M_\odot$, получаем массу релятивистского объекта в системе 2S 0921-630 равной $m_x = (1{,}6\text{–}1{,}7)M_\odot$ (в предположении $i = 75°\text{–}90°$). Это близко к средней массе нейтронной звезды. Таким образом, есть основания предполагать, что в системе 2S 0921-630 присутствует аккрецирующая нейтронная звезда.

Для более исчерпывающего анализа мы рассмотрели обратную гипотезу о том, что масса релятивистского объекта в системе 2S 0921-630 равна $1{,}4M_\odot$ — близка к стандартной массе нейтронной звезды. В этом случае, согласно нашим результатам анализа средней кривой лучевых скоростей системы 2S 0921-630, масса оптического спутника заключена в диапазоне $m_v = (0{,}65\text{–}0{,}75)M_\odot$ (при $i = 75°\text{–}90°$). С точки зрения теории звездной эволюции, одиночные звезды таких масс за хаббловское время не могут проэволюционировать до стадии гиганта. Однако в случае эволюции звезды в тесной двойной системе при ее начальной массе $\geqslant 0{,}8M_\odot$ она может достичь за хаббловское время стадии гиганта, а затем потерять часть своей массы на полуразделенной фазе за счет обмена масс (Тутуков и Федорова, 2003). Таким образом, можно объяснить существование в системе 2S 0921-630 гиганта K0III с массой $\sim (0{,}6\text{–}0{,}7)M_\odot$. Результатом эволюции такого гиганта является гелиевый белый карлик с массой $\sim (0{,}3\text{–}0{,}4)M_\odot$ (Тутуков и Федорова, 2003). Поэтому можно предположить, что результатом дальнейшей эволюции рентгеновской двойной системы 2S 0921-630 будет миллисекундный радиопульсар в паре с гелиевым белым карликом. Эта гипотеза находится в хорошем количественном согласии с модельными расчетами (Тутуков и Федорова, 2003) и эмпирической зависимостью между орбитальным периодом и массой вторичной компоненты (белого карлика) для двойных систем с миллисекундными радиопульсарами (Тутуков и Федорова, 2003, Lorimer, 2005).

Подчеркнем еще раз, что все рассмотренные нами модели системы 2S 0921-630, хотя и являются наиболее продвинутыми к настоящему времени, отвергаются по статистическому критерию на уровне значимости 1%. В табл. 57–62 приведены значения m_x, выбранные по минимуму невязки χ^2. Значения m_x приведены без указания ошибок, поскольку используемая модель отвергается по статистическому критерию. Поскольку во всех случаях используемая нами модель Роша не является адекватной наблюдательным данным, полученные оценки для массы релятивистского объекта m_x нельзя считать окончательными, и для системы 2S 0921-630 требуются дальнейшие наблюдательные и теоретические исследования.

Следует подчеркнуть важность методических результатов нашей работы. Расчеты, выполненные в модели Роша, показали, что форма профиля линии поглощения в случае сильного рентгеновского прогрева весьма сложна и претерпевает значительные изменения при орбитальном движении (рис. 177, 179). Поэтому оценки отношения масс компонент q, полученные на основе исследования вращательного уширения профиля линии поглощения в маломассивных рентгеновских двойных с сильным рентгеновским прогревом, нельзя считать вполне надежными. Этот вопрос требует дальнейшего изучения.

ж) Заключение. Принимая во внимание большое значение наклонения орбиты в системе 2S 0921-630 $i = 75°–90°$ и полученные нами зависимости между массами компонент (рис. 176) можно заключить, что масса релятивистского объекта находится в пределах $m_x = (1{,}55–2{,}55)M_\odot$ при массе оптической звезды $m_v = (1{,}0–2{,}9)M_\odot$. В работе показано, что если учесть возможную потерю массы оптического спутника из-за обмена масс в тесной двойной системе (которая, согласно теории звездной эволюции, в случае маломассивных звезд практически не меняет наблюдаемый химический состав оболочки звезды) вплоть до значения $m_v = 1M_\odot$, то в системе 2S 0921-630 весьма вероятно присутствие аккрецирующей нейтронной звезды с массой $m_x = (1{,}6–1{,}7)M_\odot$. Наблюдаемый рентгеновский спектр (Kallman et al., 2003) релятивистского объекта в системе 2S 0921-630 может соответствовать как черной дыре, так и нейтронной звезде со слабым магнитным полем.

В работе также показано, что, ввиду сильной орбитальной переменности профилей линий в спектре 2S 0921-630, вызванной мощным рентгеновским прогревом оптической звезды, для оценки масс компонент в этой системе желательно использовать не только кривую лучевых скоростей, но и профили линий как функцию орбитальной фазы, для чего необходимы спектры высокого разрешения $R = \lambda/\Delta\lambda > 10000$ (см. рис. 179) с высоким отношением «сигнал–шум».

23. Масса компактного объекта в рентгеновской двойной системе 4U 1700-37

Введение. Рентгеновская двойная 4U 1700-37 открыта с борта спутника UHURU в декабре 1970 г. (Jones et al., 1973). Последующие наблюдения выявили затменный характер излучения рентгеновского источника с периодом 3,412 суток. Система была отождествлена со сверхгигантом O6,5Iaf (Jones et al., 1972, Jones and Liller, 1973), обладающим регулярным изменением блеска с тем же периодом (двойная волна за орбитальный период — эффект эллипсоидальности). Система находится на расстоянии 1,8 кпк и представляет собой компактный объект, аккрецирующий вещество, поставляемое оптическим спутником.

Рентгеновское излучение системы 4U 1700-37 имеет жесткий спектр (Reynolds et al., 1999, Kaper and Cherepashchuk, 2001), похожий на спектр аккрецирующих нейтронных звезд. Вместе с тем, от компактного объекта не наблюдается регулярных рентгеновских импульсов, связанных с «эффектом маяка», возникающим при аккреции вещества на магнитные полюса замагниченной нейтронной звезды. Это не позволяет построить кривую лучевых скоростей компактного объекта и, следовательно, однозначно определить массы компонент двойной системы. Таким образом, для оценки масс компонент в случае системы 4U 1700-37 мы имеем лишь кривую лучевых скоростей и кривую блеска оптической звезды, а также информацию о длительности затмения рентгеновского источника оптической звездой.

В работе (Hutchings et al., 1973) интерпретация наблюдаемой кривой лучевых скоростей оптической звезды была выполнена в модели двух точечных масс. В предположении массы оптической звезды $35M_\odot$ и наклонении орбиты $i = 90°$, масса компактного объекта составила $2{,}4M_\odot$.

В работе (Heap and Corcoran, 1992) оценка масс компонент системы 4U 1700-37 проводилась с привлечением информации о длительности затмения и радиуса оптической звезды. Исходя из предполагаемой массы оптической компоненты $m_v = (52 \pm 2)M_\odot$, получена масса компактного объекта $m_x = (1{,}8 \pm 0{,}4)M_\odot$. Предыдущее исследование (Conti and Cowley, 1975), выполненное тем же методом, дало оценку массы компактного объекта $m_x = 1{,}3M_\odot$ при массе оптической звезды $27M_\odot$.

Метод Монте-Карло (Rubin et al., 1996) дает оценку массы компактного объекта $m_x = 2{,}6^{+2{,}3}_{-1{,}4}\ M_\odot$ при массе оптической звезды $m_v = 30^{+11}_{-7}\ M_\odot$. Авторы работы (Clark et al., 2002), также использовавшие метод Монте-Карло, получили $m_x = (2{,}44 \pm 0{,}27)M_\odot$ и $m_v = (58 \pm 11)M_\odot$. Моделирование в данной работе выполнено не совсем корректно. Вместо значения полуамплитуды кривой лучевых скоростей оптической звезды $K_v = (18{,}7 \pm 1{,}0)$ км/с, соответствующей круговой орбите (которая должна иметь место в такой тесной двойной системе, как 4U 1700-37), авторы (Clark et al., 2002) приняли значение $K_v = (20{,}6 \pm 1{,}0)$ км/с, что привело к некоторому завышению масс компонент.

Из всего сказанного видна значительная неопределенность оценки массы компактного объекта в системе 4U 1700-37. Это связано со следующими причинами.

Во-первых, неопределенность массы компактного объекта в системе 4U 1700-37 связана с неточным значением массы оптической звезды, определяемой по спектральному классу и классу светимости.

Во-вторых, следует иметь в виду, что применяемые ранее методы оценки масс основаны на использовании модели двух точечных масс на кеплеровских орбитах. В рамках такой упрощенной модели корректная оценка массы рентгеновского спутника невозможна даже при точно известной массе оптической компоненты.

В-третьих, в методе Монте-Карло используется лишь значение полуамплитуды кривой лучевых скоростей оптической звезды (известной с точностью 5–10 %) и игнорируется информация о форме кривой лучевых скоростей.

Таким образом, комплекс спектроскопических наблюдательных данных по системе 4U 1700-37 должен быть проинтерпретирован в рамках модели, более адекватной действительности, когда учитываются ненулевые размеры оптической звезды и эффекты ее рентгеновского прогрева. Такая интерпретация выполнена в работе Абубекерова (2004).

а) Наблюдательный материал. Для сводной наблюдаемой кривой лучевых скоростей привлекались данные из работ (Hammerschlag-Hensberger et al., 1978, 2003). За нулевую фазу в обоих случаях принят момент середины рентгеновского затмения.

Спектральные данные, содержащиеся в работе (Hammerschlag-Hensberger et al., 1978), получены в течение 1973–1976 гг. на 152-см телескопе Южно-Европейской обсерватории. Лучевые скорости определены по линиям поглощения водорода H_β, H_γ, H_δ, H8, H9, H10, H11, H12. Измерение лучевых скоростей проводилось по абсолютному смещению ядра абсорбционной линии относительно ее лабораторного значения. Поэтому в нашем случае возникла необходимость в коррекции спектральных данных за систематическую скорость перед их внесением в сводную кривую лучевых скоростей.

Отметим, что значение систематической лучевой скорости двойной системы, определенной по линиям поглощения водорода бальмеровской серии, растет с уменьшением порядкового номера линии в серии — так называемый бальмеровский прогресс (Hutchings, 1980, Crampton et al., 1985). Так, например, для линий H_δ, H_γ, H_β систематическая лучевая скорость составила −82,7, −110,3, −152,3 км/с соответственно. Рост систематической лучевой скорости с уменьшением номера серии линии поглощения, по которой она измерена, связан с формированием ядер линий начала серии в более высоких слоях звездной атмосферы, где уже формируется радиальное истечение в виде звездного ветра. Систематическая скорость, полученная на основе абсорбционных линий водорода бальмеровской серии более высокого порядка H10, H11, H12, равна −72,7, −83,3, −78,4 км/с соответственно.

Поскольку эти линии формируются в наиболее низких слоях фотосферы оптической звезды, где систематическая скорость радиального истечения в виде ветра близка к нулю, то их среднее значение $-78{,}1$ км/с может быть принято в качестве γ-скорости системы 4U 1700-37.

На основе работы (Hammerschlag-Hensberger et al., 1978) в нашем распоряжении оказалось 570 значений лучевых скоростей, приблизительно равномерно распределенных по фазам орбитального периода. Сводная кривая лучевых скоростей приведена на рис. 181.

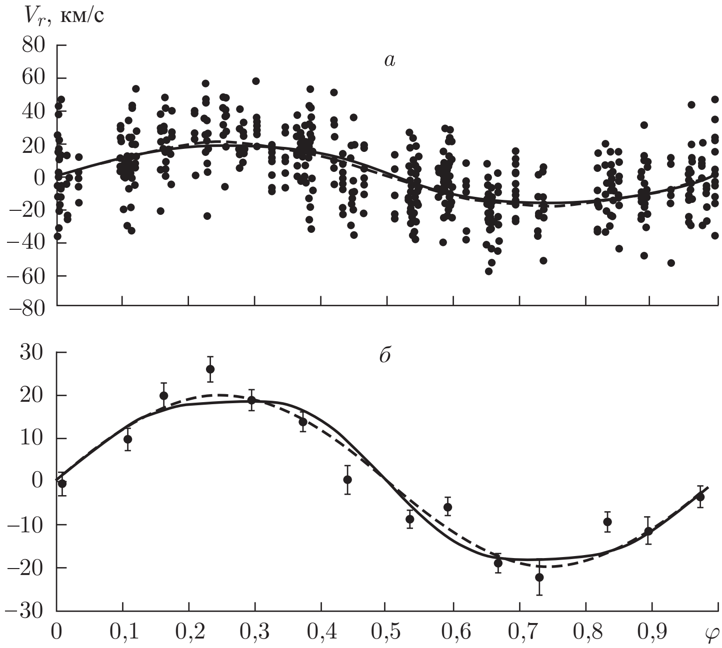


Рис. 181. *а* — сводная кривая наблюдаемых лучевых скоростей рентгеновской двойной системы 4U1700-37. Темными кружками представлены лучевые скорости, полученные по линиям поглощения водорода из работы (Hammerschlag-Hensberger et al., 1978). Для сравнения приведены теоретические кривые лучевых скоростей в модели Роша (сплошная линия) и модели точечных масс (пунктирная линия) для массы $m_x = 2{,}11 M_\odot$, соответствующей минимуму невязки в модели Роша при $m_v = 50 M_\odot$, рассчитанной методом 2, то есть без использования значений средней наблюдаемой лучевой скорости в фазовом интервале 0,4–0,6; *б* — лучевые скорости усредненные внутри фазовых интервалов (темными кружками представлена средняя в фазовом интервале лучевая скорость). Для сравнения здесь приведена теоретическая кривая лучевых скоростей в модели Роша (сплошная линия) и модели точечных масс (штриховая линия) для $m_x = 2{,}11 M_\odot$ и $m_v = 50 M_\odot$

Со спутника IUE было отснято свыше 60 спектров системы 4U 1700-37. Результаты обработки этих высокоточных спектральных данных представлены в работе (Hammerschlag-Hensberger et al., 2003). Приведенные здесь лучевые скорости получены методом кросс-корреляции участков спектра из диапазона 1300–1800 Å. На основе работы (Hammerschlag-Hensberger et al., 2003) в нашем распоряжении оказалось 61 значение лучевой скорости системы 4U 1700-37. Соответствующая кривая лучевых скоростей представлена на рис. 182.

С целью уменьшения влияния случайных ошибок лучевые скорости были усреднены внутри фазовых интервалов. Усредненные кривые наблюдаемых лучевых

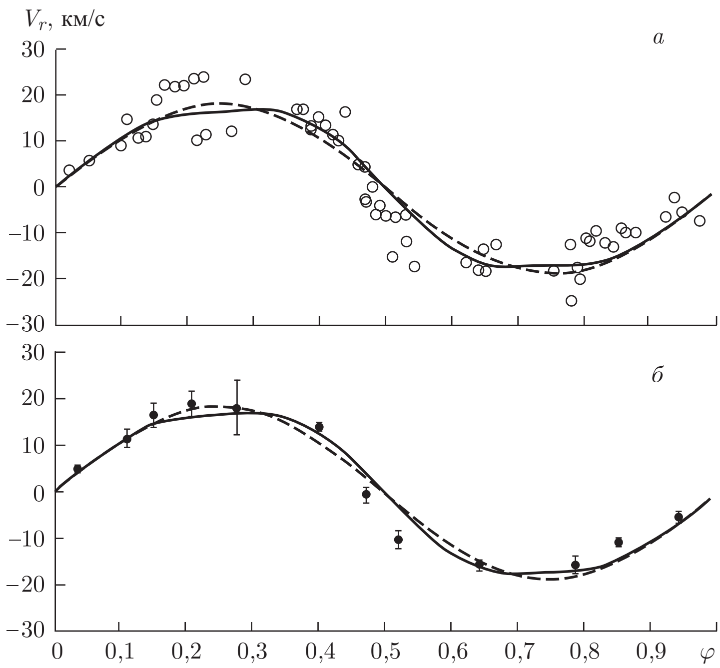


Рис. 182. *а* — сводная кривая наблюдаемых лучевых скоростей рентгеновской двойной системы 4U 1700-37. Светлыми кружками представлены лучевые скорости, определенные по спектральным данным IUE из работы (Hammerschlag-Hensberger et al., 2003). Для сравнения приведены теоретические кривые лучевых скоростей в модели Роша (сплошная линия) и модели точечных масс (штриховая линия) для массы $m_x = 2{,}01 M_\odot$, соответствующей минимуму невязки в модели Роша при $m_v = 50 M_\odot$, рассчитанной методом 2, то есть без использования значений средней наблюдаемой лучевой скорости в фазовом интервале 0,4–0,6; *б* — лучевые скорости, усредненные внутри фазовых интервалов. Для сравнения приведена теоретическая кривая лучевых скоростей в модели Роша (сплошная линия) и модели точечных масс (штриховая линия) для $m_x = 2{,}01 M_\odot$ и $m_v = 50 M_\odot$

скоростей приведены на рис. 182 *б*. Следует отметить, что в связи с недавним исследованием (Quantrell et al., 2003), ошибки, вносимые в наблюдаемую кривую лучевых скоростей оптической звезды приливно-гравитационными волнами, имеют случайный характер и могут быть подавлены усреднением по многим ночам наблюдений.

б) Интерпретация кривых лучевых скоростей. В системе 4U 1700-37 оптическая звезда близка к заполнению своей полости Роша (Гончарский и др., 1991), поэтому ее фигура сильно отличается от сферической. Обращенная к компактному объекту сторона оптической звезды прогрета исходящим от него рентгеновским излучением. Все эти эффекты должны быть приняты во внимание при интерпретации наблюдаемой кривой лучевых скоростей системы 4U 1700-37. Интерпретация усредненных кривых лучевых скоростей была выполнена в модели Роша с учетом перечисленных эффектов. Численные параметры модели Роша для системы 4U 1700-37 приведены в табл. 63 (Абубекеров, 2004).

В качестве независимых искомых параметров были приняты массы оптической и рентгеновской компонент m_v и m_x (ввиду наличия в системе рентгеновского затмения, наклонение орбиты i не является независимым параметром). Использовался метод перебора по параметрам путем многократного решения прямой задачи.

Таблица 63

Численные значения параметров, используемых для синтеза кривых лучевых скоростей рентгеновской ТДС 4U 1700-37 в модели Роша

P, сут	3,411581	Период
e	0,0	Эксцентриситет
ω, °	0,0	Долгота периастра оптической компоненты
i, °	67*	Наклонение орбиты
μ	0,93*	Коэффициент заполнения полости Роша оптической компонентой
f	0,9	Коэффициент асинхронности вращения
$T_{\rm ef}$, K	36 000**	Эффективная температура оптической компоненты
β	0,25	Коэффициент гравитационного потемнения
k_x	0,0005	Отношение рентгеновской светимости релятивистской компоненты к болометрической светимости оптической компоненты L_x/L_v
A	0,5	Коэффициент переработки рентгеновского излучения
u	0,3***	Коэффициент потемнения к краю

* — данные взяты из работы (Гончарский и др., 1991).
** — данные взяты из работы (Clark et al., 2002).
*** — данные взяты из работы (Рубашевский, 1991).

Для каждого значения массы оптической компоненты $m_v = 20$, 30, 40, 50, 58, $70 M_\odot$ проводился перебор по массе компактного объекта m_x. По минимуму невязки выбиралась зависимость $m_x(m_v)$. Невязка Δ между усредненной наблюдаемой кривой лучевых скоростей и теоретической вычислялась по формуле, соответствующей статистике Фишера (см. выше): $F_{M,\ \sum_{j=1}^{M}(n_j-1),\ \alpha}$. Задавшись уровнем значимости α, можно найти доверительное множество для искомого параметра m_x при фиксированном значении m_v. Оно состоит из тех значений m_x, для которых выполняется условие:

$$\Delta\,(m_x) \leqslant F_{M\ \sum_{j=1}^{M}(n_j-1),\ \alpha}.$$

Решение обратной задачи, помимо модели Роша, выполнено и в модели точечных масс. Модель точечных масс использовалась с целью выявления расхождения результатов моделей. Интерпретация средней кривой лучевых скоростей проводилось отдельно для спектральных данных работ (Hammerschlag-Hensberger et al., 1978, 2003).

Особо следует оговорить ситуацию со звездным ветром оптической компоненты O6,5Iaf. Неоднородность силы тяжести на поверхности O-сверхгиганта и прогрев рентгеновским излучением стороны звезды, обращенной к релятивистскому спутнику, приводят к анизотропии истечения звездного ветра. Скорость ветра вблизи точки Лагранжа L_1 возрастает, что проявляется в избытке отрицательной лучевой скорости вблизи фазы 0,5 (рентгеновский источник впереди O-сверхгиганта). Анизотропия звездного ветра привносит систематические ошибки в наблюдаемую кривую лучевых скоростей. Поэтому, как и в случае других рентгеновских двойных систем (см. выше) интерпретация усредненных наблюдаемых кривых лучевых скоростей была проведена двумя методами:

Метод 1 — по всем средним значениям наблюдаемой кривой лучевых скоростей;

Метод 2 — без учета средних значений наблюдаемых лучевых скоростей, лежащих в интервале фаз 0,4-0,6, как наиболее сильно искаженных эффектом анизотропии звездного ветра.

Для работы был выбран уровень значимости 5%. Интерпретация методом 1 спектральных данных работ (Hammerschlag-Hensberger et al., 1978, 2003) не позволила принять ни модель Роша, ни модель точечных масс по выбранному уровню значимости $\alpha = 0{,}05$. Поведение невязки, возникающей в ходе интерпретации в модели Роша, представлено на рис. 183.

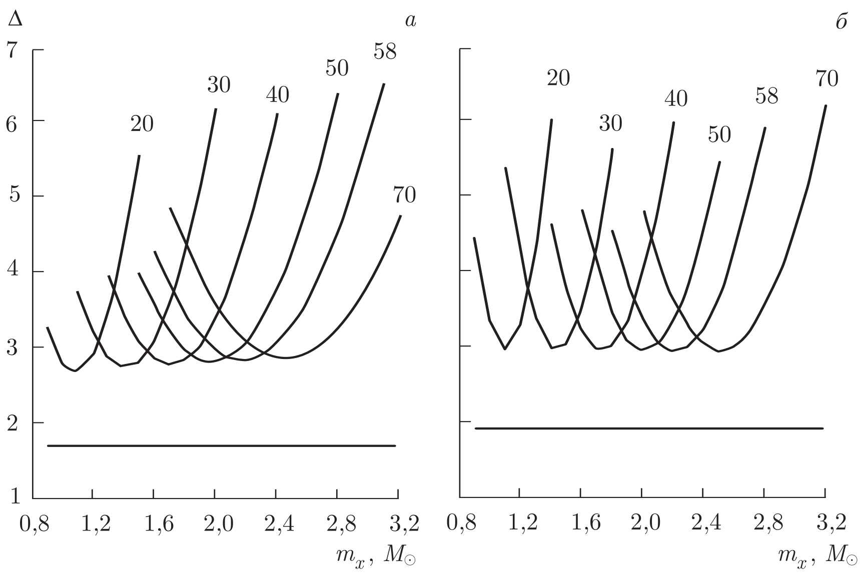


Рис. 183. Значения невязок, полученных методом 1, т. е. с использованием всех значений средней наблюдаемой лучевой скорости, между средней наблюдаемой кривой лучевых скоростей системы 4U 1700-37 и синтезированной кривой в модели Роша: *а* — по данным работы (Hammerschlag-Hensberger et al., 1978), горизонтальная линия соответствует критическому значению невязки в рамках статистики Фишера $\Delta_{14,570} = 1{,}69$ на уровне значимости $\alpha = 5\%$. Масса оптической компоненты, при которой получена невязка Δ, указана около кривых в массах Солнца; *б* — то же, с использованием работы (Hammerschlag-Hensberger et al., 2003). Горизонтальная линия здесь соответствует критическому значению невязки в рамках статистики Фишера $\Delta_{12,61} = 1{,}916$ на уровне значимости $\alpha = 5\%$

Интерпретация средних наблюдаемых кривых лучевых скоростей методом 2 позволила принять модель Роша и модель точечных масс по уровню значимости $\alpha = 0{,}05$ (см. рис. 184). По результатам этой интерпретации построена зависимость массы рентгеновской компоненты от массы оптической при значении наклонения орбиты 67°, оцененного из анализа длительности рентгеновского затмения в системе (Гончарский и др., 1991) — см. рис. 185. Для массы оптической компоненты $69M_\odot$ минимальное значение невязки, достигаемое при $m_x = 2{,}61M_\odot$ в процессе интерпретации спектральных данных (Hammerschlag-Hensberger et al., 1978), равно значению квантиля, соответствующему $\alpha = 0{,}05$. Поэтому коридор ошибок зависимости масс компонент на рис. 185 *а* обрывается на значении $m_v = 69M_\odot$. Численные результаты интерпретации спектральных данных работы (Hammerschlag-Hensberger et al., 1978)

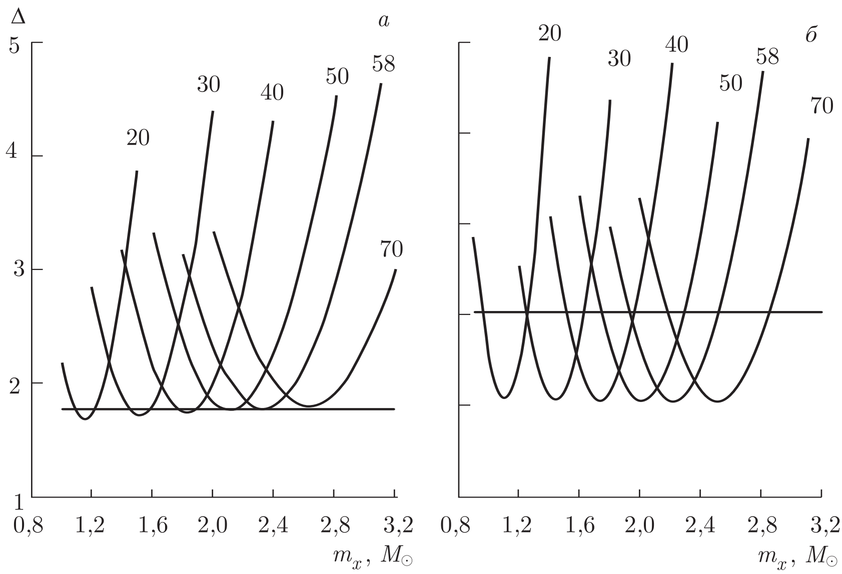


Рис. 184. Значения невязок, полученных методом 2, то есть без использованием значений средней лучевой скорости в фазовом интервале 0,4–0,6, между средней наблюдаемой кривой лучевых скоростей системы 4U 1700-37 и синтезированной кривой в модели Роша: *а* — по данным работы (Hammerschlag-Hensberger et al., 1978) горизонтальная линия соответствует критическому значению невязки в рамках статистики Фишера $\Delta_{11,428} = 1{,}79$ на уровне значимости $\alpha = 5\,\%$. Масса оптической компоненты, при которой получена невязка, указана около кривых в массах Солнца; *б* — то же, с использованием работы (Hammerschlag-Hensberger et al., 2003). Здесь горизонтальная линия соответствует критическому значению невязки в рамках статистики Фишера $\Delta_{10,48} = 2{,}03$ на уровне значимости $\alpha = 5\,\%$

и работы (Hammerschlag-Hensberger et al., 2003) в модели Роша и модели точечных масс представлены в табл. 64 и табл. 65.

Как видно из данных табл. 64 и 65, массы компактного объекта в модели Роша и модели точечных масс близки. Это объясняется двумя причинами. Во-первых, вследствие малого значения ускорения силы тяжести близ точки L_1, температура «носика» оптической звезды из-за гравитационного потемнения ниже температуры остальной ее поверхности. Во-вторых, рентгеновский прогрев в системе 4U 1700-37 очень мал ($k_x = 0{,}0005$). Поэтому вклад излучения «носика» оптической звезды, вносящего наибольшее возмущение в кривую лучевых скоростей, в интегральное излучение оптической компоненты относительно мал. Кроме того, степень заполнения полости Роша оптической звездой в системе 4U 1700-37 существенно отличается от единицы: $\mu = 0{,}93$ (Гончарский и др., 1991). Все это и объясняет близость результатов интерпретации в модели Роша и модели точечных масс.

Зависимости между m_v и m_x, полученные при интерпретации независимых данных работ (Hammerschlag-Hensberger et al., 1978, 2003) в пределах ошибок показывают хорошее согласие между собой (см. табл. 64, 65 и рис. 185 *а*, *б*).

Поскольку наклонение орбиты i в системе 4U 1700-37 оценено из анализа длительности рентгеновского затмения с некоторой ошибкой, была дополнительно проведена интерпретация методом 2 спектральных данных работы (Hammerschlag-Hensberger et al., 2003) для значений $i = 62°$ и $i = 72°$. Значения остальных параметров модели Роша приняты прежними (см. табл. 63). Результаты интерпретации

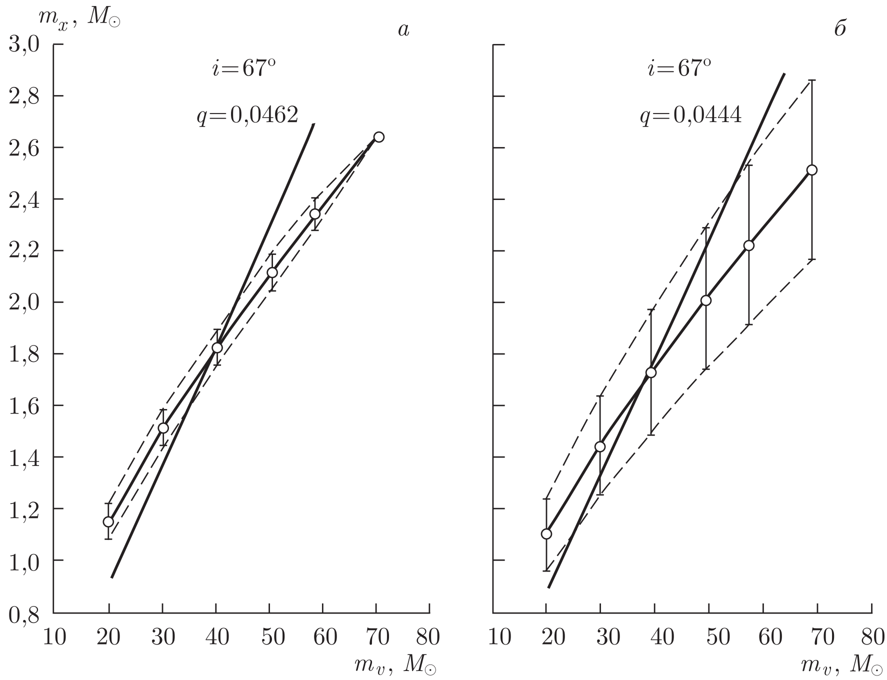


Рис. 185. *а* — зависимость массы компактного объекта в рентгеновской двойной системе 4U 1700-37 от массы оптической звезды при наклонении орбиты $i = 67°$. Получена интерпретацией в модели Роша лучевых скоростей, определенных по линиям поглощения водорода в работе (Hammerschlag-Hensberger et al., 1978) методом 2, т. е. без использования значений средней наблюдаемой лучевой скорости в фазовом интервале 0,4–0,6. Прямая линия соответствует связи между m_x и m_v при отношении масс компонент $q = 0{,}0462$; *б* — то же, с использованием данных IUE работы (Hammerschlag-Hensberger et al., 2003). Здесь прямая линия соответствует связи между m_x и m_v при $q = 0{,}0444$

Таблица 64

Значения массы релятивистской компоненты рентгеновской ТДС 4U 1700-37, полученные в результате интерпретации спектроскопических данных работы (Hammerschlag-Hensberger et al., 1978) в модели Роша (отмечено «R») и модели точечных масс (с отмечено «P»)

m_v, $M_\odot$	m_x(P), $M_\odot$	m_x(R), $M_\odot$
20	$1{,}15^{+0{,}13}_{-0{,}12}$	$1{,}15^{+0{,}08}_{-0{,}06}$
30	$1{,}51^{+0{,}16}_{-0{,}16}$	$1{,}51^{+0{,}08}_{-0{,}07}$
40	$1{,}82^{+0{,}20}_{-0{,}20}$	$1{,}82^{+0{,}08}_{-0{,}07}$
50	$2{,}11^{+0{,}23}_{-0{,}23}$	$2{,}11^{+0{,}07}_{-0{,}06}$
58	$2{,}32^{+0{,}26}_{-0{,}25}$	$2{,}33^{+0{,}05}_{-0{,}06}$
70	$2{,}64^{+0{,}28}_{-0{,}30}$	2,64*

* Доверительный интервал не указан, поскольку модель по уровню значимости 5 % отвергается.

Таблица 65

Значения массы релятивистской компоненты рентгеновской ТДС 4U 1700-37, полученные в результате интерпретации спектроскопических данных работы (Hammerschlag-Hensberger et al., 2003) в модели Роша (отмечено «R») и модели точечных масс (с отмечено «P»)

m_v, $M_\odot$	m_x(P), $M_\odot$	m_x(R), $M_\odot$
20	$1{,}09^{+0{,}10}_{-0{,}10}$	$1{,}10^{+0{,}15}_{-0{,}14}$
30	$1{,}42^{+0{,}13}_{-0{,}13}$	$1{,}44^{+0{,}19}_{-0{,}19}$
40	$1{,}72^{+0{,}16}_{-0{,}16}$	$1{,}73^{+0{,}25}_{-0{,}23}$
50	$1{,}99^{+0{,}18}_{-0{,}19}$	$2{,}01^{+0{,}28}_{-0{,}27}$
58	$2{,}19^{+0{,}21}_{-0{,}20}$	$2{,}22^{+0{,}31}_{-0{,}31}$
70	$2{,}49^{+0{,}23}_{-0{,}24}$	$2{,}51^{+0{,}35}_{-0{,}34}$

Таблица 66

Значения массы релятивистской компоненты рентгеновской ТДС 4U 1700-37, полученные в результате интерпретации методом 2 спектральных данных работы (Hammerschlag-Hensberger et al., 2003) в модели Роша для наклонения орбиты $i = 62^\circ$ (колонка 1) и результат пересчета массы компактного объекта, полученной в модели Роша при $i = 67^\circ$ (колонка 2)

m_v, $M_\odot$	m_x, $M_\odot$	
	1	2
20	$1{,}16^{+0{,}15}_{-0{,}15}$	1,25
30	$1{,}51^{+0{,}20}_{-0{,}20}$	1,63
40	$1{,}82^{+0{,}24}_{-0{,}24}$	1,96
50	$2{,}11^{+0{,}28}_{-0{,}28}$	2,28
58	$2{,}33^{+0{,}30}_{-0{,}31}$	2,52
70	$2{,}63^{+0{,}35}_{-0{,}34}$	2,84

численно представлены в колонке (1) табл. 66 и 67. Графически результаты представлены на рис. 186.

Зависимость массы компактного объекта от i в рамках модели точечных масс задается соотношением $m_x \sim \sin^{-3} i$. Чтобы проверить, насколько точно выполняется данная зависимость для модели Роша, был проведен тест, аналогичный тесту работы (Абубекеров и др., 2004а). Значения m_x, определенные в модели Роша при $i = 67^\circ$, были пересчитаны для углов наклонения орбиты $i = 62^\circ$ и $i = 72^\circ$:

$$m_x\,(62^\circ) = m_x\,(67^\circ)\,\frac{\sin^3 67^\circ}{\sin^3 62^\circ},$$

$$m_x\,(72^\circ) = m_x\,(67^\circ)\,\frac{\sin^3 67^\circ}{\sin^3 72^\circ}.$$

Здесь $m_x(62^\circ)$, $m_x(67^\circ)$ и $m_x(72^\circ)$ обозначают массы релятивистской компоненты для $i = 62^\circ$, 67°, и 72° соответственно. Результат пересчета m_x по первой формуле

Таблица 67

Значения массы релятивистской компоненты рентгеновской ТДС 4U 1700-37, полученные в результате интерпретации методом 2 спектральных данных работы (Hammerschlag-Hensberger et al., 2003) в модели Роша для наклонения орбиты $i = 72^\circ$ (колонка 1) и результат пересчета массы компактного объекта, полученной в модели Роша при $i = 67^\circ$ (колонка 2)

m_v, $M_\odot$	m_x, $M_\odot$	
	1	2
20	$1{,}06^{+0{,}15}_{-0{,}14}$	1,00
30	$1{,}39^{+0{,}19}_{-0{,}20}$	1,31
40	$1{,}67^{+0{,}24}_{-0{,}23}$	1,57
50	$1{,}94^{+0{,}27}_{-0{,}27}$	1,82
58	$2{,}13^{+0{,}30}_{-0{,}29}$	2,01
70	$2{,}51^{+0{,}33}_{-0{,}33}$	2,28

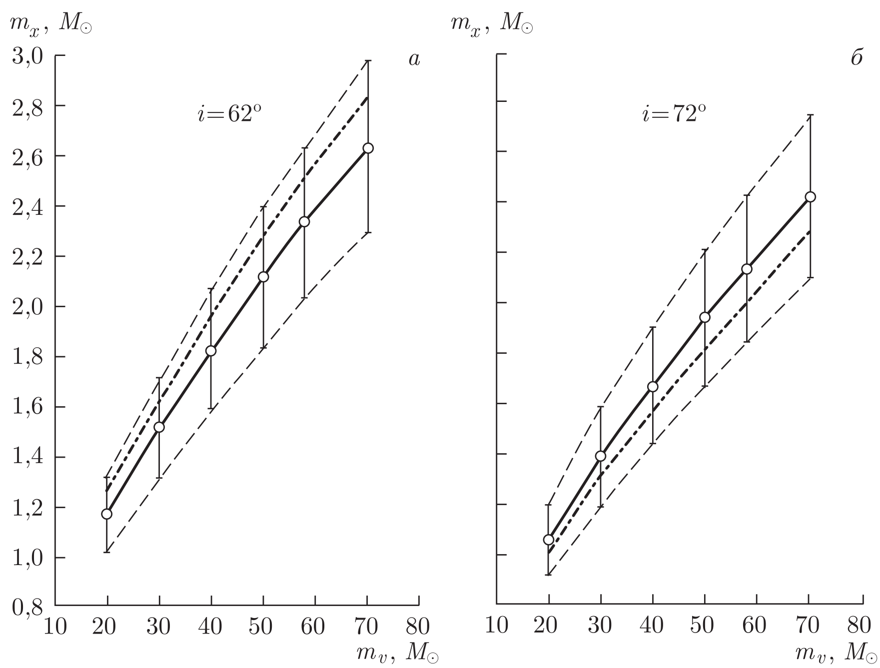


Рис. 186. *а* — зависимость массы компактного объекта в рентгеновской двойной системе 4U 1700-37 от массы оптической звезды при наклонении орбиты $i = 62^\circ$. Получена интерпретацией в модели Роша спектральных данных IUE из работы (Hammerschlag-Hensberger et al., 2003) методом 2, т. е. без использования значений средней наблюдаемой лучевой скорости в фазовом интервале 0,4–0,6. Штрих-пунктирная линия соответствует массе компактного объекта, полученной пересчетом его массы, определенной в модели Роша для наклонения орбиты 67°; *б* — то же для наклонения орбиты 72°. Штрих-пунктирная линия соответствует массе компактного объекта, полученной пересчетом его массы, определенной в модели Роша для наклонения орбиты 67°

представлен во второй колонке табл. 66. Результат пересчета m_x по второй формуле дан во второй колонке табл. 67.

Из сравнения данных колонок (1) и (2) табл. 66 и табл. 67 видно, что соотношение $m_x \sim \sin^{-3} i$ дает результат, близкий к результату модели Роша, но не строго совпадающий с ним. Тем не менее, значение массы m_x лежит в пределах ошибок (см. рис. 186). Поэтому при уточнении величины наклонения орбиты i масса компактного объекта m_x может быть приближенно пересчитана согласно зависимости $m_x \sim \sin^{-3} i$.

в) Определение масс компонент

Определение на основе значения ускорения силы тяжести оптической звезды. В работе (Rubin et al., 1996) выполнен тщательный не-ЛТР-анализ спектров оптической звезды в системе 4U 1700-37. Величина ускорения силы тяжести $\lg g$, определенная по крыльям линий поглощения водорода бальмеровской серии и He I в спектре оптической звезды в системе HD 153919 (4U 1700-37) заключена в пределах 3,45–3,55. Найденная в этой же работе болометрическая светимость оптической звезды $\lg(L/L_\odot) = 5{,}82$ и эффективная температура $(35\,000 \pm 1000)$ K, дают значение радиуса звезды $21{,}9 R_\odot$. Исходя из значения $\lg g = 3{,}45$–$3{,}55$ и радиуса $R_v = 21{,}9 R_\odot$, получаем нижний предел массы оптической звезды $m_v = 55^{+7}_{-6}\ M_\odot$. Масса оптической звезды, определенная на основе ускорения свободного падения, является минимальной оценкой, вследствие возможного уменьшения его реального значения центробежными силами и силами давления радиации. Авторы (Rubin et al., 1996) предполагают, что нижнее значение массы оптической звезды близко к $50 M_\odot$, а верхнее значение, получаемое из анализа положения HD 153919 на диаграмме Герцшпрунга–Рессела, не достигает $60 M_\odot$.

Масса компактного объекта, соответствующая массе оптической звезды $m_v = 55^{+7}_{-6}\ M_\odot$ при $i = 67°$ оценивается по соответствующей зависимости между массами m_x и m_v (см. рис. 185 *а*) и равна $m_x = 2{,}25^{+0{,}23}_{-0{,}24}\ M_\odot$.Зависимость между массами компонент, построенная на основе спектральных данных IUE, в этом случае дает $m_x = 2{,}14^{+0{,}50}_{-0{,}43}$ (см. рис. 185 *б*). При значениях $i = 62°$ и $72°$, масса релятивистского объекта, полученная с использованием зависимости m_x от m_v, построенной на основе спектральных данных IUE, равна, соответственно $m_x = 2{,}26^{+0{,}49}_{-0{,}44}\ M_\odot$ и $m_x = 2{,}06^{+0{,}47}_{-0{,}39}\ M_\odot$.

Определение на основе информации о радиусе оптической звезды. Радиус оптической звезды R_v, степень заполнения ею своей полости Роша μ, наклонение орбиты i, орбитальный период системы P, функция масс оптической звезды $f_v(m)$ и отношение масс компонент $q = m_x/m_v$ связаны известным соотношением (см., например, Гончарский и др., 1991):

$$\sin i = \frac{0{,}38\mu}{R_v} \left(\frac{GP^2 f_v(m)}{4\pi^2} \right)^{1/3} \frac{1+q}{q^{1{,}208}}.$$

Функция масс оптической звезды $f_v(m)$ определяется как

$$f_v(m) = \frac{m_x^3 \sin^3 i}{(m_x + m_v)^2} = 1{,}038 \cdot 10^{-7} K_v^3 P \left(1 - e^2\right)^{3/2},$$

где K_v — полуамплитуда кривой лучевых скоростей, соответствующей орбитальному движению центра масс звезды. Таким образом, располагая информацией о радиусе R_v оптической звезды, можно определить отношение масс компонент q. Значения параметров μ, e, P, i были взяты из табл. 63. Поиск скорости орбитального движения центра масс оптической звезды K_v проводился в модели двух точечных масс. Для каждой пары m_v, m_x, определенных в модели Роша (табл. 64, 65), была построена теоретическая кривая лучевых скоростей в модели точечных масс. Далее было определено среднее значение K_v. Для спектральных данных на основе линий поглощения водорода (Hammerschlag-Hensberger et al., 1978) $K_v = (19{,}72 \pm 0{,}02)$ км/с; по спектральным данным IUE (Hammerschlag-Hensberger et al., 2003) $K_v = (18{,}81 \pm 0{,}01)$ км/с.

Подставив в формулу для $\sin i$ значение $R_v = 21{,}9 R_\odot$ и значение функции масс $f_v(m)$, вычисленное с полученными значениями K_v для модели точечных масс, получаем уравнение для определения q. Решая это уравнение, получаем для полуамплитуды $K_v = 19{,}72$ км/с значение $q = 0{,}0462$, для $K_v = 18{,}81$ км/с $q = 0{,}0444$. На зависимостях m_x от m_v (рис. 185 *а*, *б*) отложены прямые, соответствующие этим значениям q. Пересечение этих прямых с областью допустимых значений масс позволяет найти массу компактного объекта. По данным Hammerschlag-Hensberger (1978) масса релятивистского объекта равна $m_x = 1{,}76^{+0{,}20}_{-0{,}21}\ M_\odot$ (рис. 185 *а*), по данным Hammerschlag–Hensberge (2003) $m_x = 1{,}65^{+0{,}78}_{-0{,}56}\ M_\odot$ (рис. 185 *б*).

Определение на основе зависимости «масса–светимость». Масса оптической компоненты, определенная по средней линии зависимости «масса–светимость» для невзаимодействующих двойных звезд главной последовательности, составляет $49{,}5 M_\odot$ (Herrero, 2003). Данному значению массы оптической звезды по зависимости $m_x(m_v)$, построенной по данным (Hammerschlag-Hensberger, 1978), соответствует $m_x = 2{,}08^{+0{,}07}_{-0{,}07}\ M_\odot$ (рис. 185 *а*), а по зависимости $m_x(m_v)$, построенной на основе спектральных данных IUE (Hammerschlag–Hensberge, 2003) имеем $m_x = 1{,}98^{+0{,}27}_{-0{,}26}\ M_\odot$ (рис. 185 *б*).

Однако зависимость «масса–светимость» для оптических компонент рентгеновских двойных систем отличается от зависимости «масса–светимость» для одиночных звезд (Ziolkowski, 1978). Оптическая звезда в ТДС, при заполнении полости Роша или интенсивном звездном ветре теряет верхние слои атмосферы, что приводит к появлению у звезды значительного избытка светимости. Наблюдательный избыток углерода и азота на поверхности оптического спутника (Clark et al., 2002), подтверждает гипотезу о потере верхних слоев оптическим спутником в системе 4U 1700-37. Из зависимости «масса–светимость» для оптических компонент рентгеновских двойных систем (Абубекеров, 2004, Петров и др., 2007) получается, что светимости оптической звезды $\lg(L/L_\odot) = 5{,}82$ соответствует масса оптической звезды $m_v = 27{,}4 M_\odot$ (что значительно отличается от значения $m_v = 49{,}5 M_\odot$, оцененного по зависимости «масса–светимость» для невзаимодействующих ТДС и одиночных звезд). При массе оптической звезды $m_v = 27{,}4 M_\odot$ масса релятивистского объекта равна $m_x = 1{,}41^{+0{,}08}_{-0{,}08}\ M_\odot$ по спектральным данным Hammerschlag-Hensberger (1978) и $m_x = 1{,}35^{+0{,}18}_{-0{,}18}\ M_\odot$ по данным IUE (Hammerschlag-Hensberger, 2003) — см. рис. 185 *а*, *б*. Таким образом, исходя из зависимости «масса–светимость» для оптических звезд рентгеновских двойных систем с OB-звездами, масса релятивистского объекта в системе 4U 1700-37 в пределах ошибок определения не отличается от средней массы нейтронных звезд $1{,}35^{+0{,}04}_{-0{,}04}$ (Thorsett and Chakrabarty, 1998).

г) Заключение. Основным результатом данного исследования являются зависимости между массами оптической и релятивистской звезд в рентгеновской двойной 4U 1700-37, полученные для наклонений орбит $i = 62^\circ$, 67° и 72° (см. рис. 185, 186). Помимо этого, даны оценки массы релятивистского объекта m_x на основе известных параметров оптической компоненты. В системе 4U 1700-37 до сих пор окончательно не установлено, является ли компактный объект маломассивной черной дырой или нейтронной звездой. Наши результаты свидетельствуют в пользу нейтронной звезды.

Значение массы релятивистского спутника, полученное с привлечением зависимости «масса–светимость» для рентгеновских двойных систем с OB-звездами, составляет $(1{,}41 \pm 0{,}08)M_\odot$ и $(1{,}35 \pm 0{,}18)M_\odot$ (по данным работ (Hammerschlag–Hensberge et al., 1978, 2003), что в пределах ошибок согласуется со средним значением массы для нейтронных звезд $(1{,}35 \pm 0{,}04)M_\odot$ (Thorsett and Chakrabarty, 1998). Масса компактного объекта системы 4U 1700-37, полученная по значению ускорения силы тяжести на поверхности оптической звезды, равна $2{,}25^{+0{,}23}_{-0{,}24}\ M_\odot$ и $2{,}14^{+0{,}50}_{-0{,}43}\ M_\odot$, а масса m_x, полученная с использованием значения радиуса оптической компоненты, составляет $1{,}76^{+0{,}20}_{-0{,}21}\ M_\odot$ и $1{,}65^{+0{,}78}_{-0{,}56}\ M_\odot$. Эти значения m_x для системы 4U 1700-37 в пределах ошибок сравнимы с массой рентгеновского пульсара в системе Vela X-1, равной $1{,}93^{+0{,}19}_{-0{,}21}\ M_\odot$ (Абубекеров и др., 2004а). Поэтому можно предположить, что, подобно системе Vela X-1, компактный объект в системе 4U 1700-37 представляет собой массивную нейтронную звезду. В пользу того, что компактный объект является нейтронной звездой, свидетельствует жесткий спектр рентгеновского излучения системы 4U 1700-37, похожий на спектры рентгеновских пульсаров (Reynolds et al., 1999, Kaper and Cherepashchuk, 2001). Отсутствие периодических рентгеновских пульсаций от системы 4U 1700-37, связанных с вращением аккрецирующей нейтронной звезды, может быть объяснено соосностью вектора магнитного диполя с осью вращения.

Для уточнения массы релятивистского объекта в системе 4U 1700-37 необходимы дополнительные сведения об оптической компоненте. Так, например, в космическом проекте ГАЙЯ, планируемом Европейским Космическим Агентством, будут измерены тригонометрические параллаксы и расстояния для миллионов звезд Галактики. Знание точного расстояния до системы 4U 1700-37 позволит провести прямое определение радиуса оптической звезды, что даст возможность уточнить массу компактного объекта. Также представляются важными дальнейшие, тщательные поиски феномена рентгеновского пульсара в системе 4U 1700-37.

24. Анализ кривой лучевых скоростей оптической звезды в рентгеновской двойной системе HZ Her (Her X-1)

Рентгеновская двойная Her X-1 (HZ Her) — первая рентгеновская затменная система, где был обнаружен сильный прогрев оптической звезды излучением рентгеновского пульсара — аккрецирующей нейтронной звезды с сильным магнитным полем. В работах (Cherepashchuk et al., 1972, Bahcall and Bahcall, 1972) было показано, что главная причина оптической переменности системы HZ Her — это «эффект отражения», точнее, прогрева атмосферы оптической звезды рентгеновским излучением аккрецирующей нейтронной звезды.

В работе Абубекерова и др. (2008б) впервые произведена оценка массы компонент рентгеновской двойной HZ Her с учетом не-ЛТР-эффектов при формировании линии поглощения H_γ в спектре оптической звезды. Оценка масс выполнена в модели Роша с точным учетом рентгеновского прогрева на основе наблюдаемой кривой лучевых скоростей оптической звезды. Рентгеновский источник Her X-1 был открыт с борта спутника UHURU в 1972 г. (Tananbaum et al., 1972). Он был отождествлен с переменной звездой HZ Her (Курочкин, 1972, Cherepashchuk et al., 1972, Forman et al., 1972, Bahcall and Bahcall, 1972). Рентгеновская двойная Her X-1/HZ Her, состоит из оптической звезды спектрального класса $\sim$A7, заполняющей свою полость Роша, и рентгеновского пульсара с периодом 1,24 с. Орбитальный период системы $P_{\rm orb} \simeq 1{,}7^{\rm d}$. В системе наблюдается долгопериодическая (прецессионная) переменность с периодом $P_{\rm prec} \simeq 35^{\rm d}$, связанная с прецессией скрученного аккреционного диска (Tananbaun et al., 1972, Schandl, 1996). Основной вклад в оптическую переменность в системе HZ Her вносит эффект рентгеновского прогрева оптической звезды. Подробнее о системе HZ Her см. в Каталоге поздних ТДС (Cherepashchuk et al., 1996).

Система HZ Her/Her X-1 хорошо изучена. Из рентгеновского тайминга получено высокоточное значение полуамплитуды кривой лучевых скоростей рентгеновского пульсара $K_x = 169{,}049$ км/с (Deeter et al., 1981). Из анализа длительности рентгеновского затмения известно наклонение орбиты $i = 81°–88°$ (Reynolds et al., 1997). Тем не менее, однозначной оценки массы рентгеновского пульсара до сих пор не получено, ввиду огромной величины рентгеновского прогрева $k_x = L_x/L_v \simeq 150$.

Согласно работе (Middleditch and Nelson, 1976), масса рентгеновского пульсара составляет $m_x \simeq (1{,}30 \pm 0{,}15)M_\odot$. По результатам работы (Koo and Kron, 1977) $m_x \simeq 1{,}5M_\odot$, по данным работы (Hutchings et al., 1985) $m_x = (0{,}93 \pm 0{,}07)M_\odot$. В работе (Reinolds et al., 1997) сделан вывод о том, что масса рентгеновского пульсара в системе Her X-1/HZ Her равна $m_x = (1{,}5 \pm 0{,}3)M_\odot$. Приведенные оценки масс m_x выполнены в модели двух точечных масс, за исключением работы (Koo and Kron, 1977), в которой оценка m_x выполнена в модели сферической формы оптического спутника и с грубым учетом его рентгеновского прогрева.

Рентгеновская светимость компактного объекта в системе Her X-1 составляет $L_x = 3{,}39 \cdot 10^{37}$ эрг/с (Cheng et al., 1995), вследствие чего спектральный класс оптической звезды в течение орбитального периода меняется от A7 ($\varphi = 0$) до B3-B6 ($\varphi = 0{,}5$) (Cheng et al., 1995, Anderson et al., 1994). Распределение температуры по поверхности оптической звезды также усложнено переменным экранированием рентгеновского излучения скрученным аккреционным диском. Все это сильно препятствует надежной оценке масс компонент из анализа оптической кривой лучевых скоростей.

Принимая во внимание важность надежной оценки массы рентгеновского пульсара в системе HZ Her, нами были проанализированы наблюдательные данные работы (Reynolds et al., 1997) в модели Роша с точным учетом эффекта прогрева рентгеновским излучением оптической звезды. Забегая вперед, отметим, что, как показывают спектральные наблюдения (Reynolds et al., 1997), в спектре оптической звезды в системе HZ Her отсутствуют заметные эмиссионные компоненты у линий поглощения, несмотря на огромную величину рентгеновского прогрева в этой системе. Поскольку это может быть связано с эффектами отклонения от локального термодинамического равновесия (ЛТР) в атмосфере прогретой оптической звезды, мы провели анализ наблюдаемой кривой лучевых скоростей в рамках двух моделей: ЛТР и не-ЛТР.

а) Наблюдательный материал. В качестве наблюдательных данных использовались спектральные данные из работы (Reynolds et al., 1997). Данные получены с 10 по 16 июня 1995 г. на 2,5-метровом телескопе имени Исаака Ньютона Королевской Гринвичской обсерватории на Ла Пальма (Канарские острова). Всего получено 59 спектров в диапазоне 4080–4940 Å с экспозицией от 1200 до 1800 секунд. Спектры получены на Intermediate Dispersion Spectrograph с 235-мм камерой, дифракционной решеткой 1200 штрихов/мм и ПЗС-матрицей Tektronix. Обратная дисперсия составляла 0,84 Å на пиксель. Отношение сигнала к шуму в полученных спектрах лежит в пределах $S/N = 50–100$. Калибровка шкалы длин волн выполнена по Cu–Ar-стандарту. Ошибка калибровки $< 0{,}05$ Å.

Лучевые скорости системы HZ Her определены методом кросс-корреляции относительно IAU звезд-стандартов лучевых скоростей спектрального класса F, полученных в те же ночи, что и спектрограммы HZ Her. В работе (Reynolds et al., 1997) в качестве нулевой фазы использован момент максимальной положительной лучевой скорости оптической звезды HZ Her (JD = 2448800,537). Орбитальный период был принят равным $P_{\rm orb} = 1{,}700167412^{\rm d}$ (Prince et al., 1994). В нашей работе за нулевую фазу принят момент середины затмения рентгеновского источника оптической звездой. В этом случае момент максимальной положительной лучевой скорости оптической звезды приходится на фазу $\varphi = 0{,}22$, а систематическая лучевая скорость центра масс системы составляет $\gamma = -69$ км/с. Наблюдаемая кривая лучевых скоростей представлена на рис. 187. Спектрограммы работы (Reynolds et al., 1997) получены

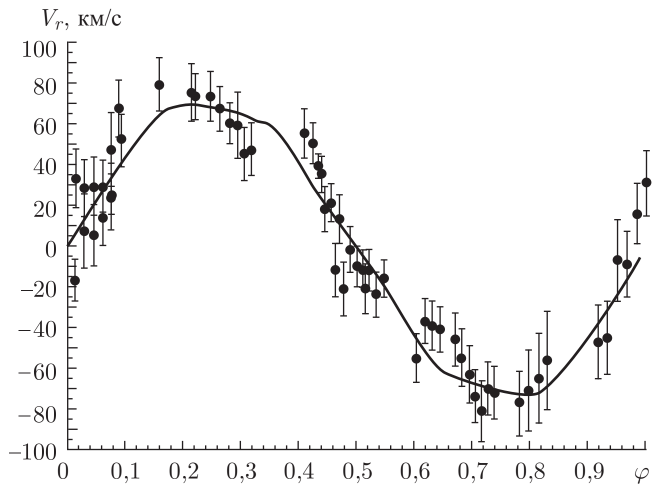


Рис. 187. Наблюдаемая и теоретическая кривые лучевых скоростей оптической звезды в рентгеновской двойной системе Her X-1. Точки — значения лучевой скорости HZ Her из работы (Reynolds et al., 1997). Сплошная линия — теоретическая кривая лучевых скоростей в модели Роша, вычисленная точным алгоритмом при массе компактного объекта $m_x = 0{,}81 M_\odot$, массе оптической звезды $m_v = 1{,}80 M_\odot$ и наклонении орбиты $i = 88^\circ$

в промежутке фаз 35-дневного прецессионного цикла $\psi_{35} = 0{,}14$–$0{,}33$ (за нулевую фазу принят момент «включения» рентгеновского источника для земного наблюдателя). Таким образом, аккреционный диск в момент проведения спектроскопических наблюдений (Reynolds et al., 1997) практически не экранировал рентгеновский поток в направлении оптической звезды. Поэтому нами при интерпретации наблюдаемой кривой лучевых скоростей эффект экранирования рентгеновского излучения аккреционным диском не учитывался (предполагалось, что рентгеновская тень от диска на звезде отсутствует).

б) Модель двойной системы и алгоритм вычисления кривой лучевых скоростей. Синтез теоретических профилей линий поглощения и кривых лучевых скоростей оптической звезды в системе HZ Her выполнен нами с использованием двух алгоритмов, подробно описанных выше: экспрессного алгоритма и точного алгоритма. Экспрессный алгоритм (алгоритм I) использует затабулированные профили бальмеровских линий в потоках, вычисленные Куруцем. В точном алгоритме (алгоритм II) поток выходящего излучения из прогретой атмосферы звезды вычисляется методом моделей атмосфер при наличии падающего внешнего потока. Предполагается, что оптическая звезда заполняет свою полость Роша и имеет неоднородное распределение температуры по поверхности вследствие эффекта гравитационного потемнения и эффекта рентгеновского прогрева. При моделировании кривой лучевых скоростей рентгеновская двойная была представлена оптической звездой в модели Роша и точечным рентгеновским источником, масса которого подлежит определению.

Эффект прогрева атмосферы звезды в экспрессном методе учитывался, как уже отмечалось ранее, путем простого сложения выходящего и падающего потоков без учета переноса излучения в атмосфере звезды. Профиль линии поглощения и его эквивалентная ширина для каждой видимой площадки с температурой T_{loc} и локальным ускорением силы тяжести g_{loc} вычислялись по таблицам Куруца для нормированных профилей бальмеровских линий (Kurucz, 1993) с применением процедуры интерполяции. Суммируя локальные профили по видимой поверхности звезды с учетом эффекта Доплера и умножая их на интенсивность соответствующего континуума, вычислялся интегральный профиль линии от звезды в данной фазе орбитального периода (подробнее см. в работах Антохиной и Черепащука, 1994, Антохиной, 1996). Вычисленный интегральный профиль линии поглощения использовался для определения лучевой скорости звезды. Лучевая скорость в данной орбитальной фазе вычислялась по средней длине волны на уровне остаточных интенсивностей 1/3, 1/2 и 2/3 интегрального профиля линии поглощения.

В точном алгоритме для каждой элементарной площадки помимо собственной локальной температуры T_{loc} и локального ускорения силы тяжести g_{loc} вычисляется параметр k_x^{loc}, равный отношению падающего рентгеновского потока к выходящему невозмущенному собственному потоку излучения (подробнее, см. работы: Антохина и др., 2003, 2005). При этих значениях T_{loc}, g_{loc}, k_x^{loc} в данной точке поверхности звезды в предположении об ЛТР вычисляется модель атмосферы путем решения уравнения переноса излучения в линии при наличии падающего внешнего рентгеновского излучения. Таким образом, для каждой элементарной площадки вычисляется интенсивность выходящего излучения в линии и в континууме, с учетом переработки внешнего рентгеновского излучения. Далее, аналогично тому, как это делается в экспрессном методе, вычисляется интегральный профиль линии, а по нему определяется лучевая скорость звезды.

В атмосферах горячих звезд, особенно с наличием внешнего облучения, возможны значительные отклонения от ЛТР. Поэтому моделирование профилей бальмеровских линий в точном алгоритме проводилось как в приближении ЛТР, так и при отказе от гипотезы об ЛТР. Расчеты равновесных не-ЛТР-населенностей уровней HI проведены на основе методики, аналогичной разработанной Ивановой и др. (2002). В вычислениях применялась 23-уровенная модель атома HI, учитывающая все разрешенные и радиативные механизмы перераспределений атомов по состояниям, в том числе генерируемые внешним излучением. Всего модель HI включает 153 разрешенных связно-связанных и 22 связно-свободных радиативных переходов, 55 из которых принимались линеаризуемыми. Не-ЛТР-населенности уровней получены для моделей атмосфер локальных площадок на поверхности оптической звезды в системе HZ Her с использованием программного комплекса NONLTE3 (Сахибуллин, 1983), реализующего метод полной линеаризации в версии Ауэра и Хисли (Иванова и др., 2002) и модернизированного Ивановой и др. (2002) для учета внешнего излучения. В процессе вычислений учитывались все непрерывные источники непрозрачности в оптическом и в рентгеновском диапазонах и около 570 000 линий из списка Куруца (Kurucz,1994). Последующее моделирование профилей линий HI осуществлялось по стандартной методике, описанной выше, но с применением полученных не-ЛТР-населенностей.

Сравнение локальных профилей на рис. 188, полученных в рамках ЛТР- и не-ЛТР-моделей, показывает, что в случае не-ЛТР в линии H_γ не формируется эмиссионная компонента. Данный эффект связан с сильной, в 4–6 раз, формирующейся в хромосферной области атмосферы перенаселенностью второго уровня ($n = 2$) атома водорода относительно вышележащих уровней. Функция источников $S_\nu \simeq (b_j/b_i)B_\nu(T_e)$ пропорциональна отношению населенностей нижнего и верхнего

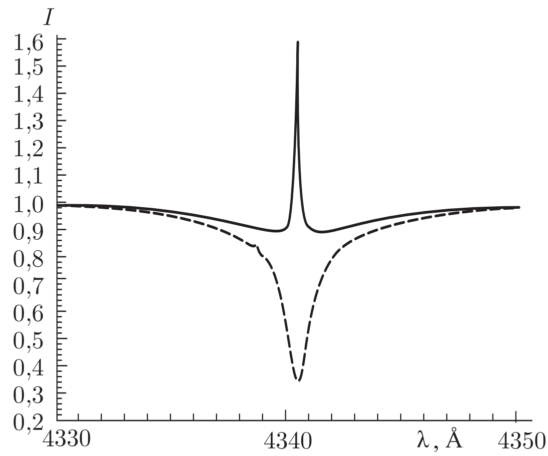


Рис. 188. Модельные локальные профили линии поглощения водорода H_γ. Сплошная линия — в ЛТР-приближении (расчет выполнен с помощью точного алгоритма) при $m_x = 0{,}9M_\odot$, $m_v = 2{,}0M_\odot$, $i = 80^\circ$, $k_x = 50$. Штриховая линия — в не-ЛТР-приближении при тех же параметрах системы. Значения температуры площадки и ускорения силы тяжести составляют $T_{\rm loc} = 7825$ К и $\lg g = 3{,}336$

уровней переходов. В результате, несмотря на большой рост функции $B_\nu(T_e)$ в горячей хромосфере, значение S_ν в ней превышает значение функции источников в области формирования континуума, т. е. профиль линии оказывается абсорбционным.

Как показывает анализ физических процессов в атоме HI, перенаселенность его низко возбужденных состояний должна быть характерной для горячих звезд с рентгеновским облучением. Согласно данным (Сахибуллин и Шиманский, 1996), водород обеспечивает менее 20 % общего поглощения в рентгеновском диапазоне спектра при $T_e = 7000$ К и в 10^3 раз меньше при $T_e = 20\,000$ К.

Одновременно превышение температуры в хромосферной области над температурой в зоне формирования континуума приводит к доминированию в ней функции источников над средней интенсивностью излучения $J_\nu \ll S_\nu$ (где J_ν — средняя интенсивность излучения в данной частоте на данной глубине, S_ν — полная функция источников в данной частоте на данной глубине) для всех частот оптического спектра. Таким образом, процессы радиативной рекомбинации на все уровни HI и процессы последующих спонтанных переходов, пропорциональные S_ν, преобладают по сравнению с процессами ионизации, вызываемыми как внешним излучением, так и собственным излучением атмосферы. В результате все уровни HI оказываются перенаселенными относительно приближения ЛТР с относительным усилением перенаселенности для более низких состояний.

Данные не-ЛТР-эффекты должны приводить к усилению абсорбционных и ослаблению эмиссионных компонент водородных линий в спектрах атмосфер в случае значительного рентгеновского облучения (что как раз и имеет место в случае системы HZ Her, где $k_x \simeq 150$). Подчеркнем, что в спектре оптической звезды HZ Her, несмотря на огромную величину рентгеновского прогрева ($k_x \simeq 150$), не наблюдаются заметные эмиссионные компоненты в профилях линий поглощения, что может быть связано с влиянием эффектов отклонения от ЛТР, описанных выше.

в) Анализ наблюдаемой кривой лучевых скоростей. Рентгеновская светимость компактного объекта в системе HZ Her составляет $L_x \simeq 3{,}39 \times 10^{37}$ эрг/с (Cheng et al., 1995), тогда как светимость оптической звезды равна

$L_v = 2{,}28 \cdot 10^{35}$ эрг/с. Значение оптической светимости получено в предположении о заполнении оптической звездой своей полости Роша и ее средней эффективной температуры $T_{\rm ef} = 8100$ K.

При моделировании прогрева атмосферы оптической звезды использовались данные о рентгеновском спектре Her X-1, полученные на спутнике Beppo SAX в 1997 г. (Oosterbroek et al., 1997). Отметим, что, несмотря на сильное межзвездное поглощение, от системы Her X-1 уверенно регистрируется мягкое рентгеновское излучение в диапазоне (0,1–1) кэВ, что важно для изучения условий формирования оптического спектра прогретой звезды в системе HZ Her (Milgrom, 1976). Так, например, на рис. 189 приведены два модельных ЛТР-спектра линии поглощения водорода H_γ для оптической звезды в системе HZ Her, вычисленные с учетом и без учета мягкой компоненты (0,1–1 кэВ) облучающего рентгеновского спектра. Видно, что в случае учета мягкой компоненты спектра падающего рентгеновского потока эмиссионная компонента в линии поглощения H_γ заметно сильнее.

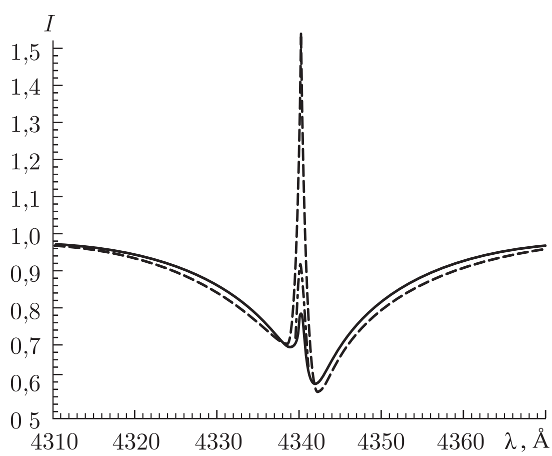


Рис. 189. Влияние учета мягкой компоненты падающего рентгеновского потока на форму профиля линии H_γ. Приведены интегральные профили, вычисленные с помощью точного алгоритма в предположении $k_x = 150$, $m_x = 1M_\odot$, $m_v = 2M_\odot$, $i = 80°$. Штриховая линия — в модельном диапазоне рентгеновского спектра 0,1–1 кэВ. Штрих-пунктирная линия — в модельном диапазоне рентгеновского спектра 0,1–17 кэВ. Сплошная линия — в модельном диапазоне рентгеновского спектра 1–17 кэВ

Рентгеновский спектр источника Her X-1 в диапазоне (0,1–10) кэВ, исправленный за межзвездное поглощение, был восстановлен с помощью программы XSPEC по данным (Oosterbroek et al., 1997). Использовалась двухкомпонентная модель спектра: чернотельное излучение с температурой 0,093 кэВ (эта компонента преобладает до энергии ~ 1 кэВ) и степенное излучение со спектральным индексом 0,74 (эта компонента преобладает на энергиях более 1 кэВ). Мы не включили компоненты, описывающие рентгеновские эмиссионные линии железа из-за их малого вклада в общий рентгеновский поток (Oosterbroek et al., 1997). При учете рентгеновского прогрева предполагалось, что рентгеновское излучение релятивистского объекта изотропно.

Поскольку точное значение массы оптической звезды в системе HZ Her неизвестно, за искомые параметры приняты массы обеих компонент m_x и m_v. Для решения обратной задачи нами использовался метод перебора по параметрам и многократного

Таблица 68

Численные значения параметров, используемых при моделировании кривых лучевых скоростей оптической компоненты в модели Роша

P, сут	1,700167412	Орбитальный период
e	0,0	Эксцентриситет
i, °	80; 88	Наклонение орбиты
μ	1,0	Коэффициент заполнения полости Роша оптической компонентой
f	1,0	Коэффициент асинхронности вращения оптической компоненты
T_{ef}, К	8100	Эффективная температура невозмущенной оптической компоненты
β	0,08	Коэффициент гравитационного потемнения
k_x	150	Отношение рентгеновской светимости релятивисткой компоненты к болометрической светимости оптической компоненты L_x/L_v
A	1,0	Коэффициент переработки рентгеновского излучения (для алгоритма I)
u	0,3	Коэффициент потемнения к краю

решения прямой задачи, который позволяет детально исследовать поверхность невязок.

Из тайминга рентгеновских импульсов известно значение полуамплитуды кривой лучевых скоростей рентгеновского пульсара в системе Her X-1 $K_x = 169{,}049$ км/с (Deeter et al., 1981), следовательно, функция масс пульсара $f_x(m) = 0{,}85M_\odot$. Поэтому при переборе по массам компонент m_x, m_v, мы следили за сохранением величины $f_x(m) = \dfrac{m_v^3 \sin^3 i}{(m_x + m_v)^2} = 0{,}85M_\odot$. Это было выполнено следующим образом.

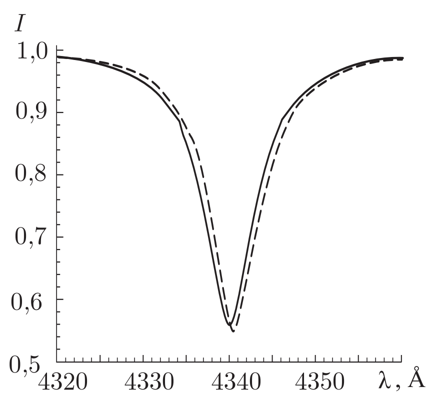


Рис. 190. Интегральные профили линии поглощения водорода H_γ, вычисленные в модели Роша с помощью экспрессного алгоритма при ширине аппаратной функции FWHM $= 1{,}7$ Å для $m_x = 1{,}78M_\odot$, $m_v = 2{,}5M_\odot$, $i = 85°$. Сплошная линия — профиль в орбитальной фазе $\varphi = 0{,}0$, пунктирная линия — профиль в орбитальной фазе $\varphi = 0{,}30$

Функция масс $f_x(m)$ при фиксированном значении i задает однозначную связь между значениями m_x, m_v. Для каждого значения массы оптической звезды m_v при фиксированном i из уравнения для функции масс $f_x(m)$ вычислялось значение m_x. Далее, для соответствующих значений m_x, m_v при численных значениях параметров модели Роша (см. табл. 68) вычислялась теоретическая кривая лучевых скоростей оптической звезды.

Проверка адекватности модели наблюдаемой кривой лучевых скоростей выполнялась по критерию χ^2_M. Для работы был выбран уровень значимости 5 % (подробности см. в работах: Черепащук, 1993, Абубекеров и др., 2008а).

г) Результаты, полученные с экспрессным алгоритмом. Поскольку значения лучевых скоростей работы (Reynolds et al., 1997) определены по спектрам, полученным с величиной аппаратной функции FWHM $= 1{,}7$ Å в нашей работе теоретические кривые лучевых скоростей вычислялись по интегральному профилю линии H_γ, свернутому с гауссовым инструментальным профилем с FWHM $= 1{,}7$ Å. Соответствующие теоретические интегральные профили линии поглощения H_γ представлены на рис. 190.

В табл. 69 приведены значения массы рентгеновского пульсара m_x и оптической звезды m_v, соответствующие минимуму невязки Δ, в рамках статистики χ^2_M, между наблюдаемой и теоретической кривыми лучевых скоростей. Значения масс компонент

Таблица 69

Массы релятивистской и оптической компоненты Her X-1, полученные в модели Роша с помощью алгоритма I

Наклонение орбиты	m_x, $M_\odot$	m_v, $M_\odot$
$i = 80°$	1,84	2,6
$i = 88°$	1,78	2,5

в табл. 69 приведены без указания величины ошибки, поскольку модель двойной системы отвергается по выбранному уровню значимости $\alpha = 5\,\%$. При значении квантиля $\Delta\,(\alpha = 5\,\%) = 77{,}93$ минимальное значение невязки при наклонениях орбиты $i = 80°$ и $88°$ составляет $\Delta_{\min} \simeq 170$. Теоретическая кривая лучевых скоростей для

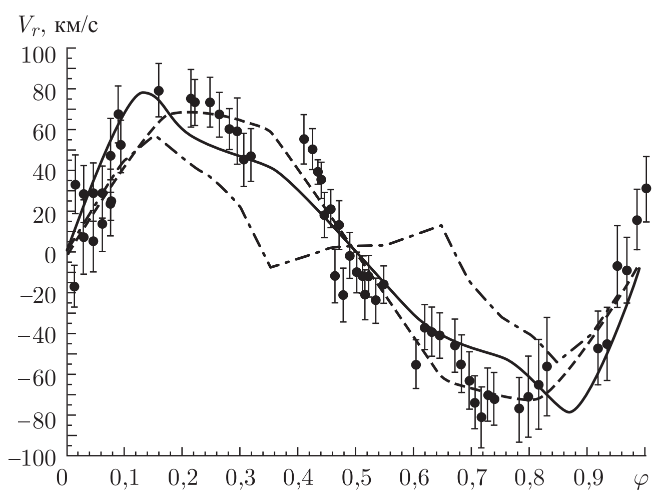


Рис. 191. Наблюдаемая (из работы Reynolds et al., 1997) и теоретические кривые лучевых скоростей оптической звезды в рентгеновской двойной системе Her X-1/HZ Her. Сплошная линия — теоретическая кривая лучевых скоростей, вычисленная с помощью экспрессного алгоритма при $m_x = 1{,}78M_\odot$, $m_v = 2{,}5M_\odot$, $i = 88°$. Штриховая линия — теоретическая кривая лучевых скоростей, вычисленная с помощью точного алгоритма при $m_x = 0{,}81M_\odot$, $m_v = 1{,}80M_\odot$, $i = 88°$. Кривая лучевых скоростей получена по шести сечениям интегрального теоретического профиля линии H_γ. Штрих-пунктирная линия — теоретическая кривая лучевых скоростей, вычисленная в не-ЛТР-модели с помощью алгоритма NONLTE3 (Сахибуллин, 1983) при $m_x = 0{,}81M_\odot$, $m_v = 1{,}80M_\odot$, $i = 88°$

$i = 88°$ представлена на рис. 191. Поведение невязки Δ при $i = 80°$ приведено на рис. 192 *а*.

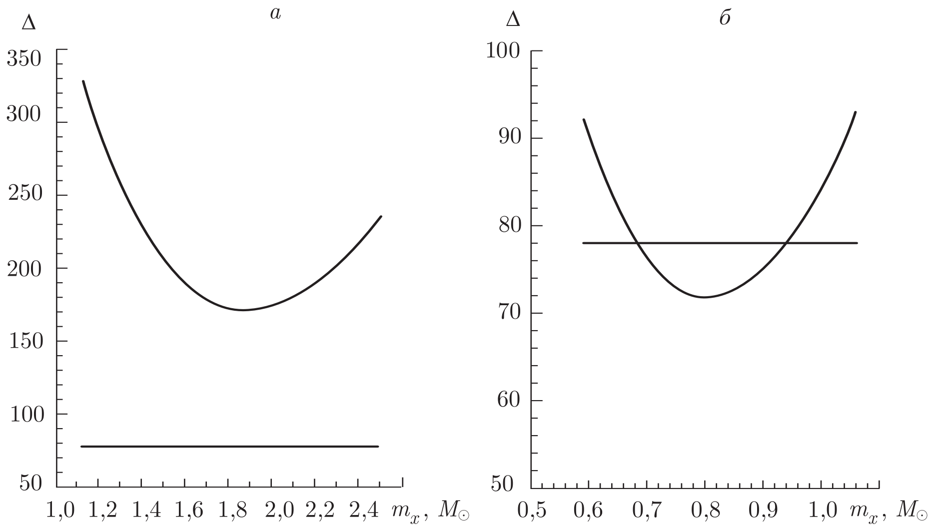


Рис. 192. Значения невязок между наблюдаемой и теоретической кривой лучевых скоростей системы HZ Her: *а* — невязки получены с помощью экспрессного алгоритма при наклонении орбиты $i = 80°$. Горизонтальные линии соответствуют критическому значению невязки в рамках статистики χ^2_M $\Delta_{59} = 77{,}93$ на уровне значимости $\alpha = 5\,\%$; *б* — невязки, полученные с помощью точного алгоритма

д) Результаты, полученные с точным алгоритмом. На представленных в используемой нами работе (Reynolds, et al., 1997) спектрах профиль линии поглощения H_γ на орбитальной фазе 0,47 имеет возмущение. Теоретический интегральный профиль H_γ в той же орбитальной фазе при свертке с аппаратной функцией шириной FWHM $= 1{,}7$ Å имеет заметную эмиссионную компоненту и, как следствие, значимо отличается от наблюдаемого (рис. 193). Подобное возмущение на фазе 0,47

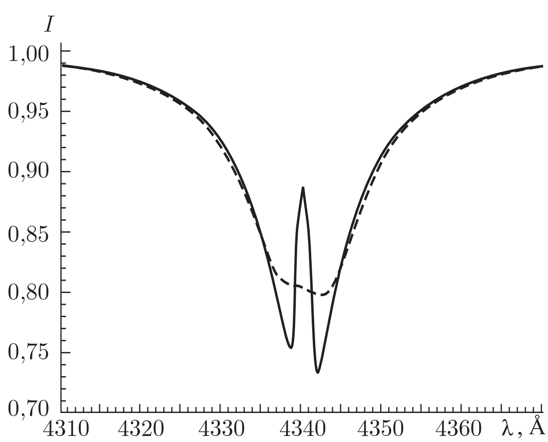


Рис. 193. Модельный интегральный профиль линии поглощения водорода H_γ в орбитальной фазе $\varphi = 0{,}47$, вычисленный в рамках ЛТР-гипотезы с помощью точного алгоритма. Сплошная линия — при ширине аппаратной функции FWHM $= 1{,}7$ Å, $m_x = 0{,}81 M_\odot$, $m_v = 1{,}80 M_\odot$, $i = 85°$. Штриховая линия — профиль линии при ширине аппаратной функции FWHM $= 5$ Å, при идентичных параметрах модели

на интегральном теоретическом профиле H_γ нам удалось воспроизвести лишь при ширине аппаратной функции FWHM $= 5$ Å (рис. 193). Поэтому анализ наблюдаемой кривой лучевых скоростей выполнен нами по линии H_γ при ширине аппаратной функции FWHM $= 5$ Å.

При эффективной температуре поверхности звезды около 8000 K линия водорода H_γ имеет ширину на половине остаточной интенсивности ~ 25 Å (рис. 194). Мы столкнулись с проблемой определения лучевой скорости по столь широкому профилю

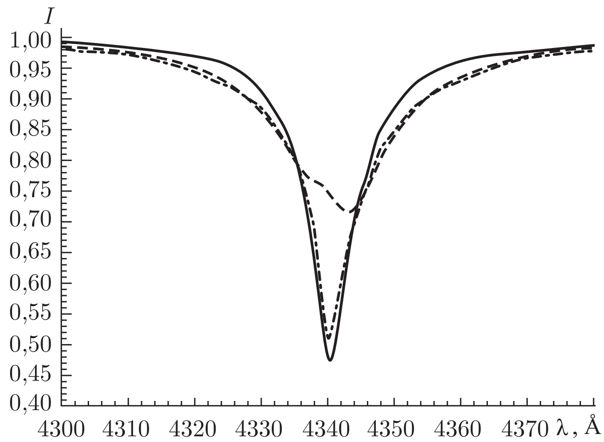


Рис. 194. Модельный интегральный профиль линии поглощения водорода H_γ в орбитальной фазе $\varphi = 0{,}30$. Штриховая линия — профиль линии, полученный с помощью точного алгоритма при ширине аппаратной функции FWHM $= 5$ Å, $m_x = 0{,}81 M_\odot$, $m_v = 1{,}80 M_\odot$, $i = 88^\circ$. Сплошная линия — профиль, полученный с помощью экспрессного алгоритма при ширине аппаратной функции FWHM $= 1{,}7$ Å, $m_x = 1{,}78 M_\odot$, $m_v = 2{,}5 M_\odot$, $i = 85^\circ$. Штрих-пунктирная линия — профиль линии, полученный с помощью программного комплекса NONLTE3 в не-ЛТР-модели при ширине аппаратной функции FWHM $= 1{,}7$ Å, $m_x = 0{,}81 M_\odot$, $m_v = 1{,}80 M_\odot$, $i = 88^\circ$

линии поглощения H_γ. В случае экспрессного алгоритма полуширина модельного профиля H_γ была меньше ~ 10 Å (рис. 194), а сам профиль обладал большей симметрией. Поэтому для определения положения «центра тяжести» линии было достаточно трех сечений профиля на высоте 1/2, 2/3 и 1/3 остаточной интенсивности. В случае вычисления интегрального профиля H_γ с помощью точного алгоритма в ЛТР-приближении трех сечений для определения «центра тяжести» линии было недостаточно. Для определения «центра тяжести» линии H_γ в этом случае мы выбрали шесть и восемь сечений остаточной интенсивности модельного интегрального профиля. По шести уровням сечения лучевая скорость определялась как средняя длина волны, определяемая по шести уровням сечений нижней половины профиля линии поглощения. Ошибка определения лучевой скорости в этом случае составила ~ 1 км/с. По восьми уровням сечения дополнительно к предыдущему случаю вводилась пара сечений верхней половины модельного интегрального профиля линии H_γ. Ошибка значения теоретической кривой лучевых скоростей в этом случае составила $\sim 2{,}5$ км/с. Здесь в качестве ошибки теоретической лучевой скорости приведены значения, соответствующие лучевой скорости на орбитальной фазе $\varphi = 0{,}0$ (оптическая звезда затмевает рентгеновский источник). Ошибка лучевой скорости при вычислении «центра тяжести» линии по шести сечениям заметно меньше по причине относительной узости нижней части профиля линии H_γ по сравнению с крыльями (рис. 194).

Массы рентгеновского пульсара m_x и оптической звезды m_v, соответствующие минимумам невязки Δ (в рамках статистики χ^2_M) между теоретической и наблюдаемой кривыми лучевых скоростей, полученные с использованием шести и восьми уровней сечения интегрального профиля линии H_γ, приведены соответственно в табл. 70 и 71.

Таблица 70

Массы релятивистской и оптической компоненты, полученные при определении лучевой скорости по шести сечениям интегрального профиля H_γ

Наклонение орбиты	m_x, $M_\odot$	m_v, $M_\odot$
$i = 80°$	$0{,}85 \pm 0{,}15$	$1{,}87 \pm 0{,}13$
$i = 88°$	$0{,}81 \pm 0{,}13$	$1{,}80 \pm 0{,}11$

Таблица 71

Массы релятивистской и оптической компоненты, полученные при определении лучевой скорости по восьми сечениям интегрального профиля H_γ

Наклонение орбиты	m_x, $M_\odot$	m_v, $M_\odot$
$i = 80°$	0,70	1,75
$i = 88°$	0,70	1,70

Теоретическая кривая лучевых скоростей, полученная по шести сечениям интегрального профиля линии H_γ, приведена на рис. 191.

Видно, что результат зависит от метода определения «центра тяжести» интегрального профиля линии поглощения H_γ (для $i = 80°$, $m_x = (0{,}85 \pm 0{,}15)M_\odot$ и $m_x = 0{,}70 M_\odot$ соответственно), хотя в пределах ошибок массы рентгеновского пульсара и оптической звезды согласуются для обоих случаев.

В случае использования шести сечений модель двойной системы может быть принята по уровню значимости $\alpha = 5\,\%$. Величина минимальной невязки $\Delta_{\min} \simeq 70$ (рис. 192 *б*). При использовании восьми сечений модель двойной системы отвергается по уровню значимости $\alpha = 5\,\%$, величина минимальной невязки составила $\Delta_{\min} \simeq 90$ (по этой причине массы компонент в табл. 71 приведены без ошибок).

е) Интегральный профиль линии H_γ и кривая лучевых скоростей с учетом не-ЛТР-эффектов. Как уже подчеркивалось выше, несмотря на огромную величину рентгеновского прогрева ($k_x \simeq 150$), в оптическом спектре системы HZ Her отсутствуют заметные эмиссионные компоненты у линий поглощения. Это, по-видимому, связано с влиянием не-ЛТР-эффектов в атмосфере оптической звезды, прогретой рентгеновским излучением (см. выше).

Был выполнен расчет интегральных профилей линии поглощения H_γ и соответствующей кривой лучевых скоростей в не-ЛТР-модели (см. рис. 191). Расчет выполнен с помощью программы NONLTE3 (Сахибуллин, 1983) для параметров модели двойной системы $m_x = 0{,}81 M_\odot$, $m_v = 1{,}80 M_\odot$, $i = 88°$. Ширина аппаратной функции принималась равной FWHM = 1,7 Å. К сожалению, расчеты на основе алгоритма NONLTE3 очень многозатратны по компьютерному времени. Поэтому поиск параметров ТДС (решение обратной задачи) на основе этого алгоритма трудно выполним. Мы вынуждены довольствоваться в данном случае лишь качественными выводами. Хотя следует отметить, что даже качественный анализ кривой лучевых скоростей на основе не-ЛТР-модели представляет собой значительный прогресс по сравнению с ЛТР-моделью.

Локальный и интегральный профили линии поглощения H_γ, рассчитанные в не-ЛТР-приближении, представлены на рис. 188 и 194 соответственно. Полученная на основе этих профилей кривая лучевых скоростей приведена на рис. 191.

Из рис. 194 видно, что качественно интегральный профиль линии поглощения H_γ, полученный в не-ЛТР-модели, близок к интегральному профилю линии H_γ, рассчитанному с помощью экспрессного алгоритма: на обоих модельных интегральных профилях линии H_γ отсутствует эмиссионная компонента. Тогда как интегральный профиль линии поглощения H_γ, полученный в рамках ЛТР-модели в точном алгоритме содержит значительную эмиссионную компоненту (см. рис. 189 и 194).

Также из рис. 191 видно, что форма кривой лучевых скоростей, полученной в рамках не-ЛТР-модели, качественно близка к форме кривой лучевых скоростей, вычисленной с помощью экспрессного алгоритма. В связи с этим, результаты интерпретации наблюдаемой кривой лучевых скоростей системы HZ Her/Her X-1, выполненные на основе экспрессного алгоритма, можно полагать более достоверными: $m_x = 1{,}78M_\odot$, $m_v = 2{,}5M_\odot$ при $i = 88^\circ$. Хотя следует подчеркнуть, что модель двойной системы с данными параметрами отвергается по статистическому критерию χ^2_M на уровне значимости $\alpha = 5\,\%$.

ж) Обсуждение результатов. Рассмотрим достоинства и недостатки применяемых нами алгоритмов интерпретации.

При расчете интегрального профиля линии оптической звезды экспрессным алгоритмом в качестве локальных профилей используются затабулированные Куруцем (Kurucz, 1993) профили линий в потоках для одиночных звезд. Эти профили не содержат эмиссионной компоненты. Кроме того, поскольку простейший метод учета эффекта рентгеновского прогрева, основанный на сложении выходящего и падающего потоков излучения, не приводит к инверсному распределению температуры в атмосфере облучаемой звезды, его использование в экспрессном методе также не дает эмиссионной компоненты в профиле линии. Тем самым, локальные профили линий, используемые в экспрессном алгоритме, качественно подобны локальным профилям линий, рассчитанным в не-ЛТР-приближении. Однако модельный интегральный профиль линии H_γ, вычисленный с помощью экспрессного алгоритма, не воспроизводит характерного возмущения профиля линии H_γ, наблюдаемого на орбитальной фазе $\varphi = 0{,}47$ (см. рис. 1 из работы Reynolds et al., 1997), а оптимальная теоретическая кривая лучевых скоростей заметно расходится, как качественно, так и количественно ($\Delta_{\min} = 170$ — модель отвергается по уровню значимости $\alpha = 5\,\%$) с наблюдаемой кривой лучевых скоростей (рис. 191). Поэтому оценки масс, полученные с помощью экспрессного алгоритма ($m_x = 1{,}84M_\odot$, $m_v = 2{,}6M_\odot$ для $i = 80^\circ$ и $m_x = 1{,}78M_\odot$, $m_v = 2{,}5M_\odot$ для $i = 88^\circ$), нельзя считать окончательными. Рассмотрим результаты интерпретации кривой лучевых скоростей с помощью точного алгоритма.

Локальные профили линий в ЛТР-приближении с точным учетом эффекта рентгеновского прогрева содержат сильную эмиссионную компоненту (которая отсутствует в наблюдаемых оптических спектрах системы HZ Her), тогда как на локальных профилях линии поглощения, вычисленных с помощью точного алгоритма в не-ЛТР-приближении, эмиссионная компоненты отсутствует (см. рис. 188). Тем не менее, теоретический интегральный профиль линии поглощения H_γ, свернутый с искусственно уширенной аппаратной функцией с FWHM $= 5$ Å (вместо реальной FWHM $= 1{,}7$ Å) качественно воспроизводит «возмущение» формы профиля наблюдаемой линии поглощения H_γ. Ширина полученного интегрального профиля линии H_γ на половине остаточной интенсивности составляет ~ 25 Å, что затрудняет определение «центра тяжести» линии поглощения. Для определения «центра тяжести» модельного интегрального профиля линии H_γ в этом случае пришлось использовать шесть и восемь сечений профиля.

Значения масс компонент с использованием шести и восьми уровней сечения модельного интегрального профиля линии H_γ в пределах ошибок согласуются между собой (по шести сечениям: $m_x = (0{,}85 \pm 0{,}15) M_\odot$, $m_v = (1{,}87 \pm 0{,}13) M_\odot$ для $i = 80°$, $m_x = (0{,}81 \pm 0{,}13) M_\odot$, $m_v = (1{,}80 \pm 0{,}11) M_\odot$ для $i = 88°$; по восьми сечениям: $m_x = 0{,}70 M_\odot$, $m_v = 1{,}75 M_\odot$ для $i = 80°$, $m_x = 0{,}70 M_\odot$, $m_v = 1{,}70 M_\odot$ для $i = 88°$). Однако оказалось, что оценки масс компонент системы HZ Her, полученные с помощью точного алгоритма, и достоверность модели двойной системы зависят от количества сечений интегрального профиля линии, используемых для нахождения ее «центра тяжести». Так, в случае использования восьми сечений модель отвергается по выбранному уровню значимости $\alpha = 5\%$, в то время как в случае шести сечений модель может быть принята. Массы компонент системы в обоих случаях различаются на $\sim 0{,}1 M_\odot$.

Принимая во внимание вышесказанное, отдать предпочтение какому-либо из перечисленных результатов не представляется возможным. Поэтому можно считать результаты, содержащиеся в табл. 69 и 70 равноправными. Таким образом, можно заключить, что масса рентгеновского пульсара в системе HZ Her/Her X-1 пока определяется с точностью до фактора ~ 2 и составляет $m_x \simeq (0{,}8\text{–}1{,}8) M_\odot$. При этом следует подчеркнуть, что столь большая неопределенность в значении m_x вызвана не ошибками наблюдений, а связана с неопределенностью модели атмосферы прогреваемой звезды и трудностью определения кривой лучевых скоростей по сложным интегральным профилям линий поглощения. Для более точного определения масс компонент системы HZ Her/Her X-1 требуется детальный расчет интегральных профилей линий прогреваемой оптической звезды в рамках не-ЛТР-приближения и прямое сравнение этих профилей в разных фазах орбитального периода с реально наблюдаемыми профилями линий, полученными с высоким разрешением ($R = \lambda/\Delta\lambda \simeq 30\,000\text{–}50\,000$). Эта важная наблюдательная задача вполне может быть решена на современных крупных телескопах нового поколения. Поэтому дальнейшие исследования системы HZ Her/Her X-1 представляются весьма перспективными.

25. Масса черной дыры в рентгеновской двойной системе M 33 X-7 и эволюционный статус систем M 33 X-7 и IC 10 X-1, расположенных в галактиках Местной группы.

В последние годы, в связи с вводом в строй новых крупных 8–10 метровых телескопов, начались оптические исследования рентгеновских двойных систем в других галактиках. В работе (Абубекеров и др., 2008) выполнены определения параметров одной из таких систем и изучен эволюционный статус таких систем.

Рентгеновский источник M 33 X-7 (именуемый нами далее как X-7) расположен в галактике M33 (Long et al., 1981). Периодическая переменность источника впервые была выявлена в работах (Peres et al., 1989a, b), первая оценка периода переменности составила $P_{\mathrm{orb}} = 1{,}7857^{\mathrm{d}}$. Также в данных работах впервые выдвинута гипотеза, что, рентгеновский источник входит в двойную звездную систему.

На основе данных рентгеновских обсерваторий «Einstein», ROSAT, ASCA Ларсон и Шульман уточнили значение периода рентгеновской переменности этой двойной системы $P_{\mathrm{orb}} = 3{,}4531^{\mathrm{d}}$ (Larson and Schulman, 1997). Данное значение периода было подтверждено в работе (Dubus et al., 1999): $P_{\mathrm{orb}} = (3{,}4535 \pm 0{,}0005)^{\mathrm{d}}$.

В 2004 г. было выполнено отождествление рентгеновского источника X-7 с оптической звездой $18{,}89^m$ (Pietsch et al., 2004). Фотометрические наблюдения в фильтрах B и V работы (Pietsch et al., 2004) подтвердили гипотезу о модели двойной звездной системы для рентгеновского источника X-7. Также в данной работе показано, что спектральный класс оптического спутника системы X-7 лежит в пределах B0I-O7I, масса оптической звезды составляет $m_v = 25–35 M_\odot$. Уточненное значение периода составило $P_{\rm orb} = (3{,}45376 \pm 0{,}00021)^{\rm d}$ (Pietsch et al., 2004).

Опираясь на данные обсерваторий «Einstein», ROSAT, XMM-Newton, в работе (Pietsch et al., 2006) получено новое значение орбитального периода системы X-7: $P_{\rm orb} = (3{,}453014 \pm 0{,}000020)^{\rm d}$. На основе данных Космического телескопа имени Хаббла, наблюдавшего ассоциацию звезд HS 13, к которой относится двойная система X-7, уточнен спектральный класс спутника — O6III, и его минимальная масса — $m_v = 20 M_\odot$ (Pietsch et al., 2006). Опираясь на спектральный класс оптического спутника, скорость изменения периода двойной системы, отсутствие эффекта рентгеновского пульсара, анализ рентгеновского спектра и оптических кривых блеска из работы (Pietsch et al., 2004), Питч и др. (Pietsh et al., 2006) предположили, что рентгеновский источник X-7 является черной дырой.

В работе (Shporer et al., 2007) проведен детальный анализ фотометрических кривых блеска системы X-7. Значение фотометрического периода системы составило $P_{\rm orb} = (3{,}4530 \pm 0{,}0014)^{\rm d}$. Радиус оптического спутника $R_v = (15–20) R_\odot$, его эффективная температура $T_{\rm ef} = 33\,000–47\,000$ K.

В работе (Orosz et al., 2007) на основе наблюдаемой кривой лучевых скоростей впервые выполнена динамическая оценка массы компактного объекта X-7, которая составляет $m_x = (15{,}65 \pm 1{,}45) M_\odot$. Среднее значение массы для большинства кандидатов в черные дыры в тесных двойных звездных системах близко к $m_x \sim 8 M_\odot$. Значение массы компактного объекта в системе X-7 значительно больше этой величины.

Отметим, что оценка массы компактного объекта в работе (Orosz et al., 2007) выполнена в модели точечных масс. Кроме того, ошибки наблюдаемой кривой лучевых скоростей достаточно велики (около 20–30 % от полуамплитуды кривой лучевых скоростей), что не может не сказаться на точности оценки массы компактного объекта. Принимая во внимание важность надежной оценки массы компактного объекта в двойной системе X-7 для эволюции звездных двойных систем, нами были проанализированы спектральные наблюдательные данные (Orosz et al., 2007) в модели Роша (Антохина и Черепащук, 1994, Антохина, 1996). Кроме того, мы исследовали эволюционный статус системы X-7, а также изучили эволюцию рентгеновской двойной системы IC 10 X-1, содержащей в качестве оптического спутника звезду WR и возможную черную дыру с массой $m_x \sim 23 M_\odot$. В работе (Lozinskaya and Moiseev, 2007) приведены наблюдательные аргументы в пользу того, что возможная массиваня черная дыра в системе IC 10 X-1 образовалась в результате коллапса ядра очень массивной звезды и вспышки гиперновой с энергией разлета оболочки в $(1–3) \cdot 10^{52}$ эрг.

а) Наблюдательные данные. В качестве наблюдательных данных использовались спектральные данные из работы (Orosz et al., 2007). Спектры получены с 18 августа по 16 ноября 2006 г. на 8,2-метровом телескопе Gemini North Telescope. Спектральные наблюдения выполнены в диапазоне 4000–5000 Å. Кривая лучевых скоростей получена на основе 22 спектров методом кросс-корреляции относительно синтетического спектра в диапазонах $\lambda = 4150–4300$ Å и $\lambda = 4521–4578$ Å. Эти диапазоны длин волн содержат линии He II 4200 Å и He II 4541 Å, не блендированные другими линиями. В качестве нулевой фазы авторы (Orosz et al., 2007) использовали момент середины затмения рентгеновского источника X-7:

$T_0(\mathrm{HJD}) = (2453967{,}157 \pm 0{,}048)^{\mathrm{d}}$. Значение момента середины затмения находится в полном согласии со значением, полученным ранее в работе (Pietsch et al., 2006), и отличается на $95{,}001 \pm 0{,}014$ орбитальных периодов. Значение орбитального периода полагалось равным $P_{\mathrm{orb}} = 3{,}453014^{\mathrm{d}}$ (Orosz et al., 2007). Наблюдаемая кривая лучевых скоростей приведена на рис. 195. По причине того, что таблица

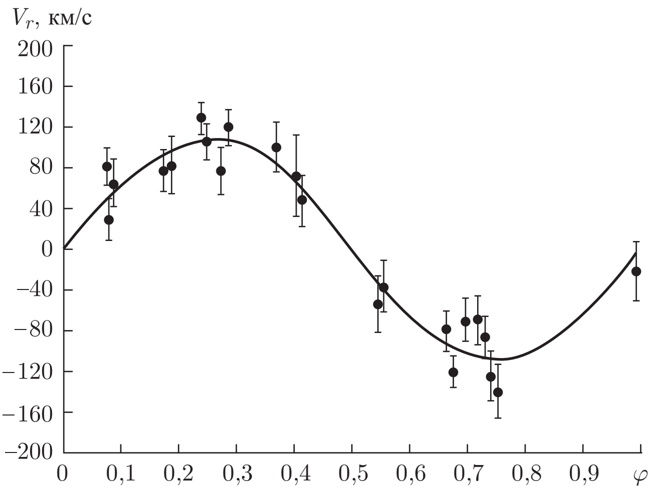


Рис. 195. Наблюдаемая и теоретическая кривые лучевых скоростей рентгеновской двойной системы M 33 X-7. Точки — значения лучевой скорости оптической звезды из работы (Orosz et al., 2007). Сплошная линия — теоретическая кривая лучевых скоростей в модели Роша, вычисленная при массе компактного объекта $m_x = 15{,}55 M_\odot$, массе оптической звезды $m_v = 70 M_\odot$ и наклонении орбиты $i = 74{,}6°$

лучевых скоростей авторами (Orosz et al., 2007) не опубликована, наблюдаемая кривая лучевых скоростей из работы (Orosz et al., 2007) была нами оцифрована с рисунка. Ошибка оцифровки значений лучевой скорости оптического спутника в системе X-7 составила $\sim 0{,}6$ км/с, что много меньше средней ошибки наблюдаемой лучевой скорости ~ 20–25 км/с. Поэтому ошибками оцифровки в нашем случае можно пренебречь.

б) Анализ наблюдаемой кривой лучевых скоростей. Расстояние между компонентами в системе X-7 сравнимо с радиусом оптической звезды. Значение степени заполнения полости Роша оптическим спутником в системе X-7 составляет $\mu = 0{,}777 \pm 0{,}017$ (Orosz et al., 2007). Напомним, что в системе X-7 наблюдаются затмения рентгеновского источника оптической звездой, что позволяет из анализа оптической кривой блеска, обусловленной в основном эффектом эллипсоидальности оптической звезды, определить степень заполнения этой звездой своей полости Роша. Модель точечных масс не позволяет учесть эффекты близости компонент в изменениях лучевых скоростей.

В работе (Абубекеров и др. 2008б) выполнен анализ кривой лучевых скоростей оптической звезды в системе X-7 в модели Роша, которая позволяет учесть приливно-деформированную форму оптического спутника и неоднородное распределение температуры по его поверхности вследствие эффекта гравитационного потемнения и эффекта прогрева поверхности звезды рентгеновским излучением релятивистского объекта. Отметим, что эффект рентгеновского прогрева в данной системе невелик, болометрическая светимость оптической компоненты при эффективной температуре $T_{\text{ef}} = 35\,000$ K составляет $L_v = 1{,}3 \cdot 10^{39}$ эрг/с. Средняя светимость рентгеновского источника вне затмения равна $L_x = 5 \cdot 10^{37}$ эрг/с (Pietsch et al., 2006). Поэтому коэффициент рентгеновского прогрева весьма мал: $k_x = L_x / L_v \simeq 0{,}04$. Тем не менее, эффект рентгеновского прогрева учитывался в нашей модели.

Возмущения в кривую лучевых скоростей оптической звезды вносятся главным образом приливно-вращательной деформацией звезды и ее гравитационным потемнением. Алгоритм, который использовался при моделировании наблюдаемой кривой лучевых скоростей, подробно описан в работах (Антохина и Черепащук, 1994, Антохина, 1996). Кратко напомним основные идеи метода.

Двойная система состоит из оптической звезды в модели Роша и точечного рентгеновского источника. Приливно-деформированная поверхность звезды разбивается на ~ 2600 элементарных площадок, для каждой из которых вычисляется выходящее излучение. При вычислении потока излучения от элементарной площадки учитывались эффект потемнения к краю, эффект гравитационного потемнения и эффект рентгеновского прогрева. Эффект прогрева атмосферы звезды рентгеновским излучением компактного объекта в алгоритме (Антохина и Черепащук, 1994, Антохина, 1996) учитывается путем простого сложения выходящего и падающего болометрических потоков, без учета переноса рентгеновского излучения в атмосфере звезды. В силу малости эффекта рентгеновского прогрева в системе X-7, такое приближение можно считать вполне удовлетворительным.

Расчет модельной кривой лучевых скоростей выполнен на основе профиля линии поглощения H_γ. Профиль линии поглощения и его эквивалентная ширина для каждой видимой площадки с локальной температурой T_{loc} и локальным ускорением силы тяжести g_{loc} вычислялся по таблицам Куруца для бальмеровских линий (Kurucz, 1993) с применением процедуры интерполяции. Суммируя локальные профили по видимой поверхности звезды с учетом эффекта Доплера, предварительно пронормировав их на континуум для каждой площадки, вычисляем интегральный профиль линии для звезды в данной фазе орбитального периода. Вычисленный интегральный профиль линии поглощения использовался для определения лучевой скорости звезды. Лучевая скорость в данной орбитальной фазе вычислялась по средней длине волны на уровне остаточных интенсивностей 1/3, 1/2 и 2/3 от интегрального профиля линии поглощения. При вычислении потемнения диска звезды в краю использовался закон квадратного корня

$$I(\cos\theta) = I_0 \left[1 - x(1 - \cos\theta) - y\left(1 - \sqrt{\cos\theta}\right)\right],$$

где θ — угол между направлением на наблюдателя и нормалью к поверхности звезды, x, y — коэффициенты потемнения (Dias-Cordoves and Gimenez, 1992, Van Hamme, 1995).

Поскольку масса оптической звезды точно не известна, за искомые параметры были приняты массы обеих компонент двойной системы. Использовался метод перебора по параметрам и многократного решения прямой задачи. Для каждого значения массы оптической компоненты m_v из набора значений $m_v = 20M_\odot$, $30M_\odot$, $40M_\odot$, $50M_\odot$, $60M_\odot$, $70M_\odot$, $80M_\odot$ при фиксированном значении наклонения орбиты $i = 74{,}6^\circ$ (которое определяется по длительности рентгеновского затмения) производился перебор по массе компактного объекта m_x. Проверка адекватности модели наблюдательным данным выполнялась по статистическому критерию χ^2_M. Для работы был выбран уровень значимости $\alpha = 5\,\%$ (подробности см. в работе Черепащука, 1993).

В работе (Orosz et al., 2007) наблюдаемые значения лучевых скоростей получены на основе фрагментов спектра, содержащих линии поглощения He II 4200 Å и He II 4541 Å. К сожалению, интерпретация кривой лучевых скоростей на основе модельной линии He II слишком многозатратна по времени. Поэтому, как отмечалось ранее, моделирование теоретической кривой лучевых скоростей выполнено на основе модельной линии поглощения Hγ. Тестовый расчет показал (см. рис. 196), что разница в кривых лучевых скоростей по линии He II 4200 Å и по линии Hγ составляет в среднем 3–4 км/с, что много меньше ошибок наблюдений $\Delta V_r \simeq 20$–30 км/с. Кривая лучевых скоростей по линии He II 4200 Å вычислена на основе построения модели атмосферы оптической звезды («точный» метод, см. Антохина и др., 2005).

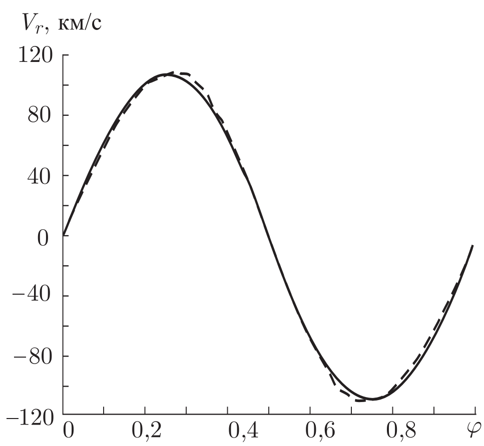


Рис. 196. Теоретические кривые лучевых скоростей оптической звезды в системе M 33 X-7, полученные в модели Роша при массе компактного объекта $m_x = 15{,}55 M_\odot$, массе оптической звезды $m_v = 70 M_\odot$ и наклонении орбиты $i = 74{,}6^\circ$. Сплошная линия — кривая лучевых скоростей, вычисленная по линии поглощения водорода H_γ, штриховая линия — по линии поглощения гелия He II 4200 Å

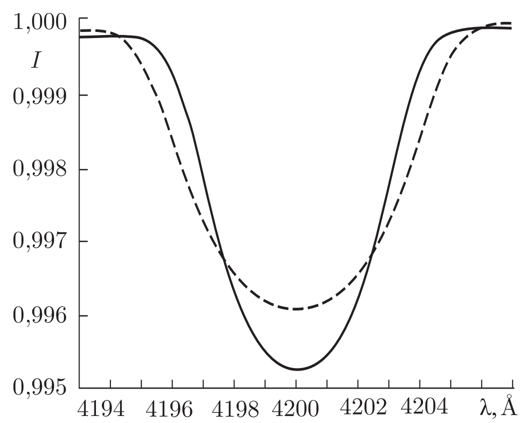


Рис. 197. Модельные интегральные профили линии поглощения HeII 4200 Å. в спектре оптической звезды системы M 33 X-7 в орбитальной фазе $\varphi = 0{,}0$. Профили получены в модели Роша при $m_x = 15{,}55 M_\odot$, $m_v = 70 M_\odot$, $i = 74{,}6^\circ$. Сплошная линия — профиль линии поглощения, полученный в модели Роша при значении степени заполнения полости Роша $\mu = 0{,}78$, штриховая линия — при $\mu = 1{,}0$. Оба модельных интегральных профиля свернуты с аппаратной функцией спектрографа с шириной FWHM = 2 Å

На рис. 197–199 представлены модельные профили линии поглощения He II 4200 Å в двух фазах орбитального периода $\varphi = 0{,}0$, $\varphi = 0{,}25$, а также приведены профили линии поглощения H_γ при значениях степени заполнения полости Роша оптической звездой $\mu = 0{,}78$ и $\mu = 1{,}0$. Численные значения параметров, используемых при моделировании кривой лучевых скоростей оптической звезды в модели Роша, приведены в табл. 72.

Результат анализа наблюдаемой кривой лучевых скоростей из работы (Orosz et al., 2007) в модели Роша численно представлен в табл. 73 и графически — на рис. 201. На рис. 200 показана зависимость невязки Δ между наблюдаемой и теоретической кривой лучевых скоростей, по минимуму которой устанавливается соответствие между массами m_v и m_x. Видно, что модель Роша для системы X-7 не отвергается по уровню значимости $\alpha = 0{,}05$. Модель может быть принята, и можно оценить оптимальные значения параметров и их доверительные интервалы (ошибки) на уровне доверия $\gamma = 1 - \alpha = 0{,}95$.

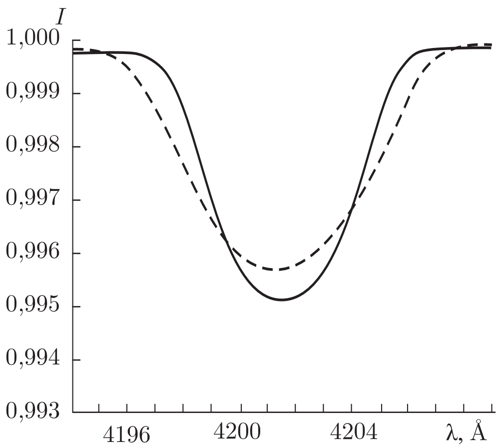


Рис. 198. То же, что на рис. 197 для орбитальной фазы $\varphi = 0{,}25$

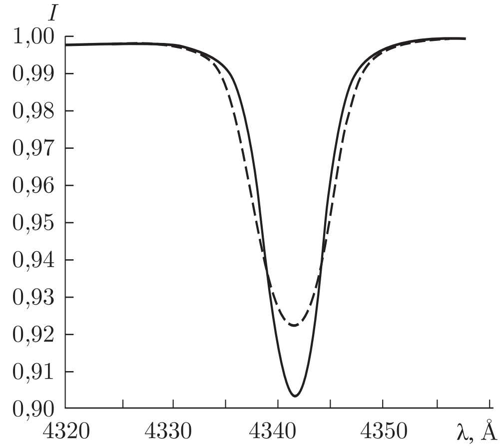


Рис. 199. То же, что на рис. 198 для линии поглощения водорода H_γ

Таблица 72

Численные значения параметров, используемых при моделировании кривых лучевых скоростей оптической звезды в модели Роша

P, сут	3,453014	Орбитальный период
m_v, $M_\odot$	var*	Масса оптической звезды
e	0,0	Эксцентриситет орбиты
i, °	74,6	Наклонение орбиты
μ	0,78–1,0	Степень заполнения полости Роша оптической звездой
f	1,0	Коэффициент асинхронности вращения оптической звезды
$T_{\rm ef}$, K	35000	Средняя эффективная температура оптической звезды
β	0,25	Коэффициент гравитационного потемнения
$k_x = L_x/L_v$	0,04	Коэффициент рентгеновского прогрева
A	1,0	Коэффициент переработки рентгеновского излучения
x, y	$-0{,}186$; $-0{,}683$	Коэффициенты потемнения к краю

* — масса оптической звезды менялась в ходе модельных расчетов; значения μ принимались равными 0,78, 0,85, 0,90,0,95, 1,0.

Таблица 73

Зависимость между массами компонент двойной системы X-7 при наклонении орбиты $i = 74{,}6°$. Указаны ошибки, соответствующие 95% доверительному интервалу в рамках статистики χ^2_M, где M — число наблюдаемых точек на кривой лучевых скоростей

m_v, $M_\odot$	20	30	40	50	60	70	80
m_x, $M_\odot$	$7{,}30 \pm 1{,}60$	$9{,}30 \pm 2{,}00$	$11{,}0 \pm 2{,}40$	$12{,}65 \pm 2{,}70$	$14{,}15 \pm 2{,}90$	$15{,}55 \pm 3{,}20$	$16{,}95 \pm 3{,}40$

Результат интерпретации в нашей, более сложной и более адекватной модели подтвердил результаты работы (Orosz et al., 2007). Вследствие относительно малой степени заполнения полости Роша оптической звездой значения массы черной дыры в нашей работе и работе (Orosz et al., 2007) близки: $m_x = (15{,}55 \pm 3{,}20) M_\odot$ (наша оценка) и $m_x = (15{,}65 \pm 1{,}45) M_\odot$ (при наиболее вероятной массе оптической звезды $m_v = 70 M_\odot$).

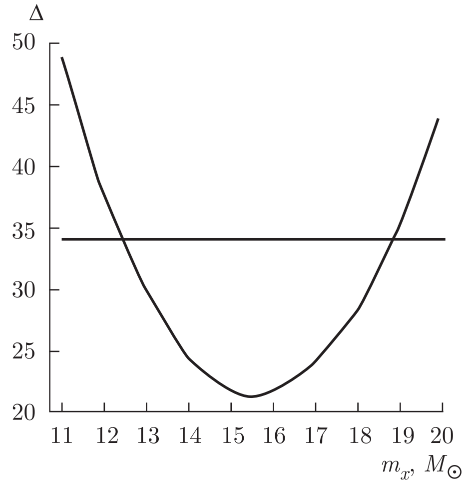


Рис. 200. Зависимость невязки Δ в рамках статистики χ^2_M между наблюдаемой и теоретической кривыми лучевых скоростей при $m_v = 70 M_\odot$. Горизонтальная линия соответствует критическому значению невязки на уровне значимости $\alpha = 5\,\%$

Рассмотрим зависимость амплитуды теоретической кривой лучевых скоростей от степени заполнения полости Роша оптической звездой. На рис. 198 и 199 представлены модельные профили линий поглощения He II4200 Å и H_γ, полученные при значении степени заполнения полости Роша оптической звездой $\mu = 0{,}78$ и $\mu = 1$. Из рисунков видно, что «центр тяжести» линии поглощения, полученной при значении $\mu = 0{,}78$ более смещен в красную сторону по сравнению с «центром тяжести» линии, полученной при $\mu = 1$, т. е. полуамплитуда теоретической кривой лучевых скоростей оптической звезды K_v уменьшается с ростом степени заполнения полости Роша μ.

Следующий расчет, представленный в нашей работе, показывает количественную

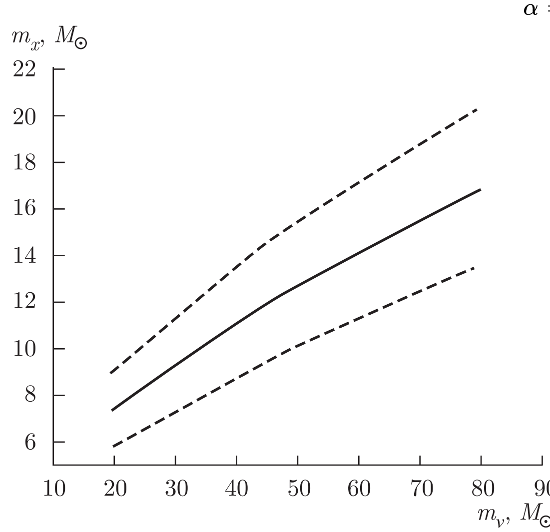


Рис. 201. Зависимость между массой компактного объекта m_x и массой оптической звезды m_v в системе M 33 X-7, полученная в результате интерпретации наблюдаемой кривой лучевых скоростей из работы (Orosz et al., 2007) в модели Роша. Сплошная линия — центральные значения массы черной дыры, пунктирные линии соответствуют верхней и нижней границам ошибки центрального значения в рамках статистики χ^2_M при уровне доверия $\gamma = 95\,\%$ (M — число наблюдаемых точек на кривой лучевых скоростей)

разницу между полуамплитудами кривой лучевых скоростей в модели точечных масс и в модели Роша при разной степени заполнения μ. Для данного расчета использовались параметры системы X-7 (табл. 72); масса компактного объекта принята равной $m_x = 15{,}55 M_\odot$, масса оптической звезды $m_v = 70 M_\odot$.

Полуамплитуда кривой лучевых скоростей для данных значений параметров двойной системы составила $V_c = 108{,}65$ км/с. Приведенная в табл. 74 разница полуамплитуд кривых лучевых скоростей слабо зависит от наклонения орбиты (в диапазоне $i = 60°–90°$). Видно, что с увеличением μ полуамплитуда теоретической кривой лучевых скоростей убывает и при $\mu = 1$ она на 6,11 км/с меньше, чем в случае модели точечных масс. Масса релятивистского объекта m_x в модели Роша возрастает с увеличением μ: для $\mu = 0{,}78$ $m_x = 15{,}55 M_\odot$, а для $\mu = 1$ $m_x = 15{,}95 M_\odot$.

Таблица 74

Разница полуамплитуд кривой лучевых скоростей, полученной в модели Роша, V_{Roche} и в модели точечных масс, V_c, как функция степени заполнения оптической звездой своей полости Роша μ

μ	0,78	0,85	0,90	0,95	1,00
$V_c - V_{\mathrm{Roche}}$, км/с	0,80	1,43	2,11	3,24	6,11
m_x, $M_\odot$*	15,55	15,60	15,65	15,75	15,95

* m_x — значение массы черной дыры, полученное в модели Роша при массе оптической звезды $m_v = 70 M_\odot$. Остальные параметры модели приведены в табл. 72.

Из табл. 74 видно, что вплоть до значения $\mu = 0{,}90$ разница полуамплитуд кривой лучевых скоростей близка к $\sim 1\,\%$ от самой величины полуамплитуды. В случае же более полного заполнения полости Роша $\mu = 0{,}95–1{,}0$ относительное уменьшение K_v составляет $\sim 3–6\,\%$, по сравнению со случаем модели точечных масс.

Результаты интерпретации наблюдаемой кривой лучевых скоростей в модели Роша близки к результатам интерпретации, полученным в модели точечных масс. Так, различие между m_x, полученной в модели Роша при $\mu = 0{,}78$, и модели точечных масс составляет 0,6 %, а при $\mu = 1$ это различие составляет 2,5 %.

Следует отметить, что такая близость значений массы компактного объекта, полученных в модели Роша и модели точечных масс не универсальна. Так, например, при использовании модели точечных масс при оценке масс рентгеновских пульсаров в двойных системах с OB-гигантами получается систематическое занижение массы компактного объекта до $\sim 10\,\%$ (Абубекеров и др., 2004а,б, Абубекеров, 2004). Это связано с тем, что при малой массе релятивистского объекта ($m_x \simeq 1{,}4 M_\odot$) центр масс двойной системы лежит в теле оптической звезды, что приводит к значительным искажениям профилей линий поглощения в спектре оптической звезды при ее орбитальном движении. При наличии сильного рентгеновского прогрева оптической звезды использование модели двух точечных масс также дает результаты, далекие от реальности (Абубекеров и др., 2006).

В системе X-7 близость оценок массы компактного объекта, полученных в модели Роша и модели точечных масс, объясняется большим значением массы компактного объекта (центр масс двойной системы лежит неглубоко в теле оптической звезды) относительно малой степенью заполнения полости Роша $\mu \simeq 0{,}78$, а также слабостью эффекта рентгеновского прогрева ($k_x \simeq 0{,}04$).

Таким образом, проведенная нами интерпретация наблюдаемой кривой лучевых скоростей оптической звезды в системе X-7 в рамках нашей более адекватной модели полностью подтверждает количественные выводы авторов работы (Orosz et al., 2007).

Несмотря на то, что оценки массы оптического спутника в системе X-7 лежат в интервале от 20 до $70M_{\odot}$, мы в нашей работе приняли как наиболее вероятное, значение $m_v = 70M_{\odot}$. Это значение получено по наиболее полному набору данных — на основе спектрального анализа, результатов интерпретации кривой блеска оптической звезды и длительности рентгеновского затмения (Orosz et al., 2007).

Опираясь на оценку массы оптической звезды $m_v = 70M_{\odot} \pm 6{,}9M_{\odot}$ (Orosz et al., 2007), получаем, что масса компактного объекта лежит в пределах $m_x = (14{,}5\text{–}16{,}5)M_{\odot}$. Как уже отмечалось, данное значение массы черной дыры значительно отклоняется от среднего значения $m_x \simeq 8M_{\odot}$ для большинства двойных систем с черными дырами. Следует подчеркнуть, что модель Роша для двойной системы X-7 при интерпретации наблюдаемой кривой лучевых скоростей может быть принята по критерию χ^2_M (M — число наблюдаемых точек на кривой лучевых скоростей) на уровне значимости $\alpha = 5\,\%$, и могут быть оценены доверительные интервалы (ошибки) искомых параметров модели в рамках статистики χ^2_M на уровне доверия $\gamma = 1 - \alpha = 95\,\%$. Все это гарантирует надежность наших результатов интерпретации.

Рассмотрим теперь возможные эволюционные сценарии, способные привести к формированию таких массивных рентгеновских двойных систем с черными дырами, как система M 33 X-7 и подобные ей системы, например, система IC 10 X-1, расположенная в галактике IC 10. Согласно недавнему сообщению (Silverman and Filippenko, 2008), минимальная возможная масса компонент в этой рентгеновской двойной системе, состоящей из звезды WR и компактного объекта, составляет $m_v = (32{,}7 \pm 2{,}6)M_{\odot}$, $m_x = (23{,}1 \pm 2{,}1)M_{\odot}$. Следует отметить, что поскольку до сих пор не установлено точное соответствие между моментами затмения компонент и моментом перехода через γ-скорость лучевых скоростей, полученных по эмиссионной линии He II 4686 Å, вывод о большой массе черной дыры в системе IC 10 X-1 не может считаться окончательным, поскольку пока нет надежной гарантии того, что кривая лучевых скоростей в данном случае отражает орбитальное движение компонент системы. Тем не менее, мы рассмотрели возможность образования двойной системы с данными массами компонент.

в) Эволюционные сценарии для рентгеновских двойных систем M 33 X-7 и IC 10 X-1. В работе (Orosz et al., 2007) система X-7 обсуждается с эволюционной точки зрения. Авторы данной работы приходят к выводу, что современные эволюционные сценарии объясняют существование систем типа X-7 с большим трудом. По представлениям, существующим в некоторых эволюционных сценариях, проблема выглядит следующим образом. Размер первоначально более массивной звезды превышает текущее расстояние между компонентами, следовательно, система должна пройти через стадию с общей оболочкой, во время которой компоненты сблизились. Однако для формирования черной дыры с массой около $15M_{\odot}$ необходимо, чтобы звезда заполнила свою полость Роша (и последовала стадия с общей оболочкой) сразу после завершения горения гелия в ядре. Однако после завершения горения гелия в ядре радиус звезды должен быть меньше, чем в процессе горения гелия, а значит, заполнения полости Роша быть не должно.

Анализ возможных эволюционных треков систем X-7 и IC 10 X-1 выполнен нами на программном комплексе «Машина сценариев». Поскольку принципы работы «Машины сценариев» подробно описаны (см. ниже), здесь мы ограничимся лишь указанием основных параметров, использованных в расчетах. Подробное описание «Машины сценариев» содержится в работах (Lipunov et al., 1996, 2007).

В работе (Богомазов и др., 2005а) получены функции масс черных дыр в рентгеновских двойных системах, рассчитанные в различных эволюционных сценариях.

Подчеркнем, что один из рассмотренных в этой работе эволюционных сценариев предсказывал существование черных дыр с массами до $50 M_{\odot}$. Причем этот сценарий удовлетворяет важнейшему критерию отбора реалистичных эволюционных сценариев, которым является требование наличия в Галактике рентгеновских двойных систем типа Cyg X-1.

В работе (Богомазов и др., 2005а) использованы сценарии эволюции A, B, C и W, которые отличаются темпом истечения вещества, зависимостью масс ядер звезд от начальной массы звезды, зависимостью «масса–радиус». Подчеркнем, что сценарии A, B, C и W представляют собой набор различных предположений о физических параметрах звезд на разных стадиях эволюции, а не обозначения типов обмена масс в соответствии с классической классификацией Киппенхана и Вайгерта (Kippenhahn and Weigert, 1967). Подробное описание перечисленных сценариев содержится в работах (Lipunov et al., 2007, Богомазов и др., 2005а). Также в работе (Богомазов и др., 2005а) показано, что сценарий B отвергается, поскольку в его рамках невозможно объяснить наличие в Галактике систем типа Cyg X-1. Отметим, что именно эволюционный сценарий B основан на представлениях, используемых в работе (Orosz et al., 2007), в которой делается вывод о том, что объяснение существования систем типа X-7 встречается с трудностями. В нашей работе (Абубекеров и др., 2009а) эволюционный сценарий B не использовался, а рассматривались лишь сценарии A, C, W.

Рассмотрим расчеты эволюционных треков двойной системы, проведенные в сценариях A, C, W. Последние два сценария эволюции отличаются более высоким темпом потери массы звездой по сравнению со сценариями A, B. В первом грубом приближении их можно считать сценариями, отвечающими большой металличности звезд. Расчеты показали, что в рамках эволюционных сценариев C и W системы типа X-7 и IC 10 X-1 получить невозможно. В рамках сценария A обнаружена область значений параметров, при которых образование систем типа X-7 и IC 10 X-1 оказалось возможным.

Подробное описание сценария A содержится в работах ((Lipunov et al., 1996, 2007, Богомазов и др., 2005а). Здесь мы опишем лишь те параметры, которые выступали в качестве свободных параметров задачи. В ходе моделирования двойной системы — предшественника систем X-7 и IC 10 X-1, варьировалась доля и темп потери массы звезды на стадии главной последовательности и стадии звезды Вольфа–Райе, а также доля массы предсверхновой звезды, в процессе коллапса уходящей под горизонт событий. Темп потери массы звездой $\dot{M}$ очень важен по двум причинам: во-первых, он существенно влияет на размер большой полуоси двойной системы, во-вторых, он влияет непосредственно на само значение массы звезды. Темп радиальной потери массы $\dot{M}$ на стадии главной последовательности описывается классической формулой:

$$\dot{M} = \frac{\alpha L}{c V_{\infty}},$$

где L — болометрическая светимость звезды, V_{∞} — скорость ветра на бесконечности, c — скорость света, α — свободный параметр. Изменение массы ΔM в сценарии A в течение одной эволюционной стадии не превышает величины $0{,}1(M - M_{\rm core})$, где M — масса звезды в начале стадии, $M_{\rm core}$ — масса ядра этой звезды. Потерю массы на стадии звезды WR мы параметризовали как $\Delta M_{\rm WR} = k_{\rm WR} M_{\rm WR}$, где $M_{\rm WR}$ — максимальная масса на стадии звезды WR.

Масса черной дыры $M_{\rm BH}$, образовавшейся в результате взрыва предсверхновой с массой $M_{\rm preSN}$, вычислялась по формуле:

$$M_{\rm BH} = k_{\rm bh} M_{\rm preSN},$$

где коэффициент k_{bh} является долей массы предсверхновой, уходящей под горизонт событий в процессе коллапса.

Коэффициенты α и k_{WR} принимали значения 0,3 (стандартное значение, используемое при расчетах в сценарии A) и 0,1. При этом, ослабленный ветер звезды призван грубо имитировать металличность системы X-7, которая меньше солнечной (Orosz et al., 2007); галактика IC 10 также бедна металлами (см., например, Massey et al., 2007). Величина k_{bh} изменялась в пределах от 0,1 до 1,0.

При проведении популяционного синтеза мы принимали в качестве системы X-7 двойную систему, состоящую из черной дыры с массой $m_{\text{BH}} = (14\text{–}17)M_{\odot}$ и звезды главной последовательности, находящейся на стадии эволюции, соответствующей окончанию стадии главной последовательности, масса которой находится в пределах $m_v = (65\text{–}75)M_{\odot}$, орбитальный период системы ограничен пятью днями: $P_{\text{orb}} \lesssim 5^{\text{d}}$. В качестве системы IC 10 X-1 в процессе расчетов принималась двойная система, состоящая из черной дыры массой $m_{\text{BH}} = (23\text{–}34)M_{\odot}$ и звезды WR с массой $m_{\text{WR}} = (17\text{–}35)M_{\odot}$, орбитальный период такой системы ограничен полутора днями: $P_{\text{orb}} \lesssim 1{,}5^{\text{d}}$. Для каждого набора параметров эволюционного сценария проведен популяционный синтез 10^6 двойных систем. Согласно результатам популяционного синтеза двойные системы типа X-7 должны существовать в галактике с массой $10^{11}M_{\odot}$ и темпом звездообразования, задаваемым функцией Салпитера. Количество подобных систем должно быть порядка одной системы в настоящий момент (см. рис. 202). Результаты расчетов приведены на рис. 202–205.

На рис. 202 и 204 показано количество систем типа X-7 и IC 10 X-1 соответственно в спиральной галактике с массой $10^{11}M_{\odot}$ и темпом звездообразования, заданным функцией Салпитера. Цифрами на рисунках обозначены кривые, рассчитанные со следующими наборами параметров: *1* — $\alpha = 0{,}3$, $k_{\text{WR}} = 0{,}3$; *2* — $\alpha = 0{,}1$, $k_{\text{WR}} = 0{,}1$; *3* — $\alpha = 0{,}1$, $k_{\text{WR}} = 0{,}3$. Из рис. 202 видно, что существуют значения параметра k_{bh}, при которых системы типа X-7 можно получить. Если учесть, что темп звездообразования, по крайней мере на единицу площади, в галактике M33 выше среднего темпа среди спиральных галактик Местной группы (см., например, Gardan et al., 2007), то происхождение системы X-7 может быть объяснено в рамках сценария A. Из рис. 204 видно, что системы типа IC 10 X-1 можно получить в широком диапазоне значений параметра k_{bh}. Учитывая, что в галактике IC 10 идет активное звездообразование, можно ожидать, что темп образования массивных звезд в IC 10 по порядку величины сравним с темпом образования массивных звезд в нашей Галактике (несмотря на то, что масса галактики IC 10 примерно на два порядка меньше, чем масса Галактики). По-видимому, в галактике IC 10 продолжается

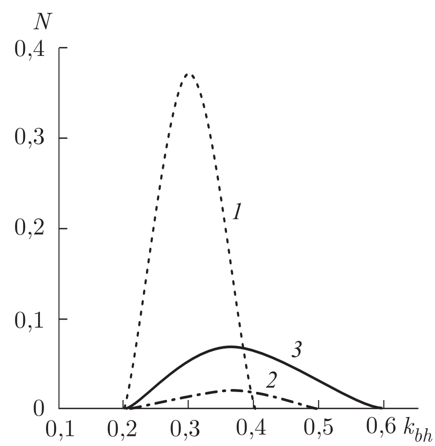
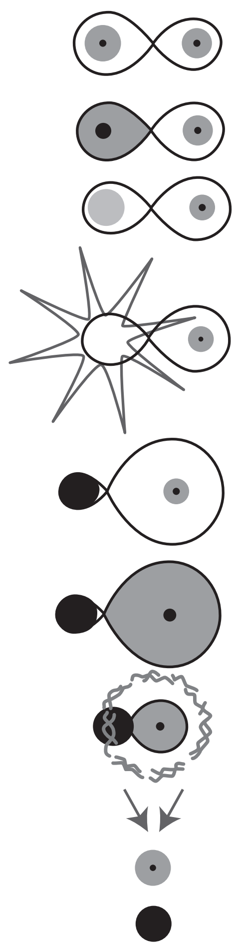


Рис. 202. Количество систем типа M 33 X-7 на спиральную галактику с массой $10^{11}M_{\odot}$ и темпом звездообразования, заданным функцией Салпитера. Цифрами обозначены кривые, рассчитанные при различном наборе эволюционных параметров. По оси ординат — ожидаемое абсолютное число систем типа M 33 X-7 в галактике. По оси абсцисс — доля массы предсверхновой, которая попадает под горизонт событий в момент образования черной дыры. Видно, что в случае *1* ($\alpha = 0{,}3$, $k_{\text{WR}} = 0{,}3$, $k_{\text{bh}} = 0{,}3$) максимальное ожидаемое число систем типа M 33 X-7 равно 0,37, что по порядку величины близко к единице

начавшийся около 10^6 лет назад всплеск звездообразования (см., например, работы: Massey et al., 2007, Vacca et al., 2007).



Стадия	M	M	a	T
I + I	113,2	41,4	34	0
III + I	108,3	37,8	36	2,4
WR + I	75,0	71,1	22	2,4
SN	52,5	69,6	26	
BH + I	15,8	69,9	46	2,6
SBN + IIIs	15,8	69,3	38	3,2
CE	15,8	64,4	22	3,2
TZ	55,3			3,2
BH	55,2			3,3

Рис. 203. Характерный эволюционный сценарий, приводящий к образованию системы типа M 33 X-7. Обозначения эволюционных стадий (подробнее см.работу Lipunov et al., 2007): I — звезда главной последовательности, III, IIIs — звезды на стадии заполнения полости Роша. WR — звезда Вольфа–Райе, BH — черная дыра, SBH — черная дыра со сверхкритическим темпом аккреции, SN — взрыв сверхновой, CE — стадия с общей оболочкой, TZ — объект Торна–Житков. Приведены значения масс первой и второй звезды M (в солнечных массах), большая полуось орбиты системы a (в солнечных радиусах) и возраст системы T (в млн. лет). Все эти величины приведены на начало соответствующих стадий, а в момент взрыва сверхновой — на момент непосредственно перед взрывом. Значения свободных параметров задачи приняты следующими: $\alpha = 0{,}3$, $k_{\mathrm{WR}} = 0{,}3$, $k_{\mathrm{bh}} = 0{,}3$

На рис. 203 представлен характерный эволюционный сценарий, приводящий к образованию системы типа X-7. Во всех сценариях, в которых удается получить систему типа X-7, качественная схема эволюции двойной системы очень похожа. В начале эволюции это — массивная тесная двойная система, масса первичной звезды находится в диапазоне $m_1 = (80\text{–}120)M_\odot$, масса вторичной — в диапазоне $m_2 = (40\text{–}60)M_\odot$, а начальная большая полуось орбиты $a \lesssim 100R_\odot$. Примерный диапазон начальных параметров предшественников системы X-7 также показан на рис. 206, 207. После выгорания водорода в ядре первичная, более массивная звезда заполняет свою полость Роша. Начинается перетекание вещества на соседнюю звезду, как правило, с темпом, более быстрым, чем в ядерной шкале времени эволюции (стадия III в работе Lipunov et al., 2007), иногда заключительная часть перетекания может происходить в шкале времени эволюции, близкой к ядерной (стадия III-e в работе Lipunov et al., 2007). После потери водородной оболочки первой звездой на ее месте остается звезда WR, которая, взрываясь как сверхновая типа Ib/c, образует черную дыру. Слабый звездный ветер на стадии главной последовательности, а также «правильно» подобранное значение доли массы предсверхновой, попадающий под горизонт событий в процессе формирования черной дыры, позволяют сформировать черную дыру требуемой массы ($15\text{–}20M_\odot$) в достаточно тесной системе. Отметим также, что система X-7 до своего образования в рамках рассмотренного сценария A не проходит стадию общей оболочки (подробнее см. работу Lipunov et al., 2007). В «Машине сценариев» принято, что системы типа B по классификации Киппенхана и Вайгерта (Kippenhahn and Weigert, 1967) образуют общую оболочку, если выполнено условие $q = m_2/m_1 \leqslant q_{\rm cr} = 0{,}3$. В нашем случае $q \simeq 0{,}35$ в начале стадии заполнения полости Роша первичной звездой. Качественно дальнейший ход эволюции системы X-7 выглядит следующим образом. Вторая звезда заполняет свою полость Роша, вследствие чего начинается сверхкритическая аккреция на черную дыру, затем происходит образование общей оболочки, и двойная система заканчивает существование в результате слияния компонент с образованием объекта Торна–Житков. Конечным результатом эволюции системы типа X-7 является одиночная, массивная черная дыра. Отметим, что во время движения черной дыры по спирали к центру невырожденной звезды (стадия формирования объекта Торна–Житков) система может быть мощным источником гравитационных волн (Nazin and Postnov, 1995).

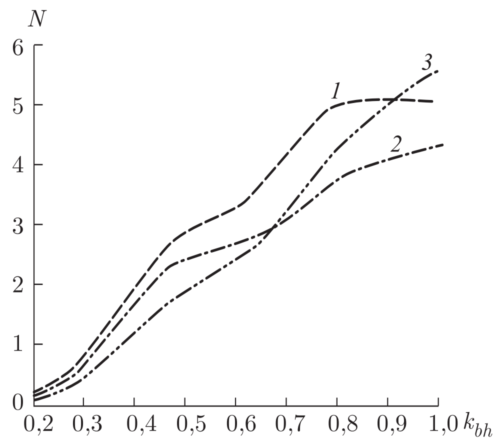
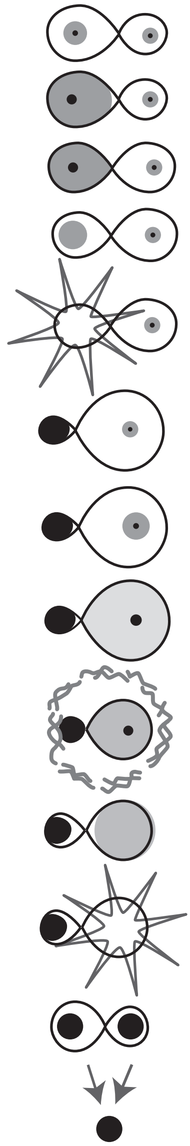


Рис. 204. То же, что на рис. 202 для системы типа IC 10 X-1

Рассмотрим теперь характерный эволюционный сценарий двойной системы, приводящий к образованию двойной системы типа IC 10 X-1 (см. рис. 205). В начале эволюции масса первичной звезды находится в диапазоне $m_1 = 80\text{–}120M_\odot$, масса вторичной $m_2 = 15\text{–}60M_\odot$, начальная, большая полуось орбиты системы находится в диапазоне $a \simeq 170\text{–}200R_\odot$. Примерный диапазон начальных параметров предшественников системы типа IC 10 X-1 показан на рис. 206, 207. Отметим, что в процессе обмена веществом масса звезды может превзойти начальную массу, поэтому минимальная начальная масса вторичной звезды может быть меньше, чем оценка массы звезды WR в системе IC 10 X-1. После выгорания водорода в ядре первичная более массивная звезда заполняет свою полость Роша. Начинается перетекание вещества на соседнюю звезду, как правило, быстрее, чем в ядерной шкале времени эволюции (стадия III в работе Lipunov et al., 2007), а заключительная стадия перетекания



Стадия	M	M	a	T
I + I	94,3	56,7	180	0
III + I	92,5	56,2	190	2,5
IIIe + I	60,8	60,8	180	2,5
WR + I	58,1	61,0	180	3,1
SN	52,3	61,0	190	
BH + I	26,1	61,0	270	3,3
BH + II	26,1	60,9	270	3,5
SBN + IIIs	26,1	54,5	270	3,8
CE	26,1	53,0	260	3,8
BH + WR	26,1	31,6	18	3,8
SN	26,1	28,4	19	
BH + BH	26,1	14,2	30	4,1
BH	40,3			4300

Рис. 205. Характерный эволюционный сценарий, приводящий к образованию системы типа IC 10 X-1. Обозначения эволюционных стадий (подробнее см. работу Lipunov et al., 2007): I — звезда главной последовательности, II — звезда, закончившая эволюцию на главной последовательности, но не заполняющая свою полость Роша, III, IIIe и IIIs — звезды на стадии заполнения полости Роша. WR — звезда Вольфа–Райе, BH — черная дыра, SBH — черная дыра со сверхкритическим темпом аккреции, SN — взрыв сверхновой, CE — стадия с общей оболочкой. Приведены значения масс первой и второй звезд M (в солнечных массах), большая полуось орбиты a (в солнечных радиусах) и возраст системы T (в млн лет). Все эти величины приведены на начало соответствующих стадий, а в момент взрыва сверхновой — на момент непосредственно перед взрывом. Значения свободных параметров задачи приняты следующими: $\alpha = 0{,}1$, $k_{WR} = 0{,}1$, $k_{\rm bh} = 0{,}5$

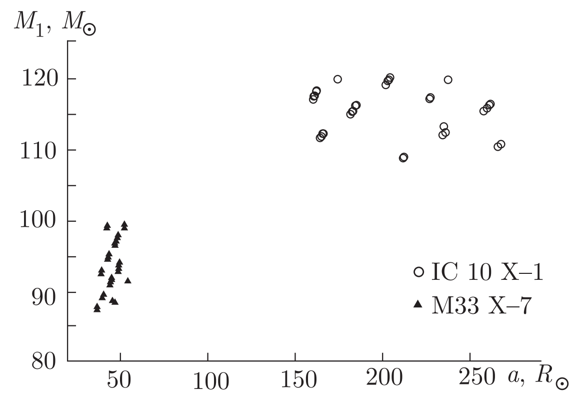


Рис. 206. Начальные параметры систем, результатом эволюции которых являются исследуемые двойные системы: по оси ординат — начальная масса первичной (изначально более массивной) компоненты, по оси абсцисс — начальная большая полуось системы. Треугольниками обозначены двойные системы, эволюция которых приводит к образованию систем типа М 33 X-7, кружками — двойные системы, эволюция которых приводит к образованию систем типа IC 10 X-1. Значения свободных параметров задачи приняты следующими: $\alpha = 0{,}1$, $k_{\mathrm{WR}} = 0{,}1$, $k_{\mathrm{bh}} = 0{,}3$

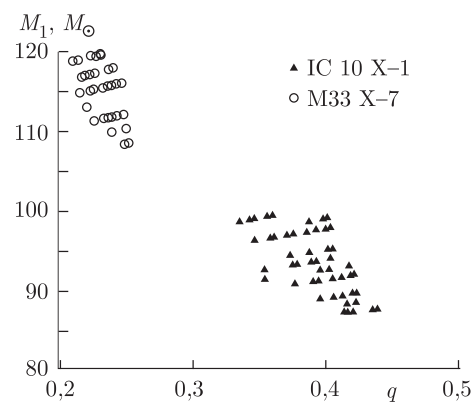


Рис. 207. Начальные параметры систем, результатом эволюции которых являются исследуемые двойные системы: по оси ординат — начальная масса первичной (изначально более массивной) компоненты, по оси абсцисс — отношение масс компонент системы $q = M_2/M_1 < 1$ в начале эволюции. Обозначения как на рис. 206. Значения свободных параметров задачи приняты следующими: $\alpha = 0{,}1$, $k_{\mathrm{WR}} = 0{,}1$, $k_{\mathrm{bh}} = 0{,}3$

происходит в шкале времени, близкой к ядерной (стадия IIIe в работе Lipunov et al., 2007). После потери водородной оболочки первичной звездой на ее месте остается звезда WR, которая, взрываясь как сверхновая Ib/c, образует черную дыру. Согласно работе (Lozinskaya and Moiseev, 2007), образование массивной черной дыры в системе IC 10 X-1 могло сопровождаться взрывом гиперновой с последующим образованием синхротронно излучающей сверхоболочки с энергией разлета $(1–3) \cdot 10^{52}$ эрг. Далее, закончив эволюцию на главной последовательности, заполняет свою полость Роша вторая звезда. После фазы сверхкритической аккреции на черную дыру на стадии заполнения полости Роша второй звездой наступает стадия общей оболочки системы, во время которой компоненты очень тесно сближаются, но не образуют объект Торна–Житков, а оболочка нерелятивистской компоненты теряется. Образуется система, состоящая из звезды WR и черной дыры (аналог системы в нашей Галактике — система Cyg X-3, состоящая из звезды WN 3-7 и черной дыры). Конечным результатом эволюции двойной системы типа IC 10 X-1 является слияние вследствие потери углового момента за счет излучения гравитационных волн двух черных дыр — остатков эволюции компонент системы, с образованием одиночной массивной черной дыры. На конечной стадии слияния двух черных дыр формируется всплеск гравитационно-волнового излучения, а также, возможно, космический гамма-всплеск.

Сценарий эволюции системы M33X-7, качественно похожий на рассмотренный нами, предложен в работе (Valsecchi et al., 2010).

Недавно в работе (De Mink et al., 2010) предложен новый эволюционный сценарий для образования массивных рентгеновских двойных систем типа M33 X-7 и IC 10 X-1, в котором важную роль играет перемешивание вещества в теле массивной звезды в тесной двойной системе, вызванное быстрым вращением звезды. Как показано в работе (De Mink et al., 2009), в случае очень массивных тесных двойных систем, благодаря приливным взаимодействиям, скорость осевого вращения звезд может быть так велика, что перемешивание вещества в теле звезды, вызванное ее быстрым осевым вращением, становится весьма эффективным. При этом гелий, генерируемый в центре звезды, переносится в оболочку звезды. Такие звезды, вместо того, чтобы расширяться в процессе ядерной эволюции на стадии главной последовательности (что необходимо для реализации обмена масс в ТДС) остаются звездами почти постоянного радиуса и не заполняют свои полости Роша. Они постепенно эволюционируют в массивные гелиевые звезды. Этот сценарий эволюции приводит к формированию очень массивных черных дыр в весьма тесных двойных системах.

г) Заключение. Используя кривую лучевых скоростей оптической звезды в рентгеновской двойной системе M 33 X-7 с рентгеновскими затмениями (Orosz et al., 2007) и принимая параметры этой системы, найденные из анализа кривой блеска (Orosz et al., 2007) $\mu = 0{,}78$, $i = 74{,}6^\circ$, мы построили зависимость между массой черной дыры m_x и массой оптической звезды m_v в рамках модели Роша для оптической звезды. Мы также исследовали влияние приливной деформации и гравитационного потемнения оптической звезды на значение массы черной дыры m_x. Оказалось, что при $\mu = 0{,}78$ влияние эффектов взаимной близости компонент на кривую лучевых скоростей оптической звезды сравнительно невелико, что обосновывает корректность определения массы черной дыры в этой системе $m_x = (15{,}65 \pm 1{,}45)M_\odot$ (при $m_v = 70M_\odot$), выполненного в работе Ороша, Мак-Клинтока и Нараяна (Orosz et al., 2007). Наше определение массы черной дыры при $m_v = 70M_\odot$ в пределах ошибок совпадает с этим значением: $m_x = (15{,}55 \pm 3{,}20)M_\odot$ где ошибка соответствует 95% доверительному интервалу в рамках статистики χ^2_M, где M — число наблюдательных точек на кривой лучевых скоростей. Подчеркнем, что если бы степень заполнения полости Роша оптической звездой была близка к единице, масса черной дыры, при прочих равных условиях составила бы $m_x = (15{,}95 \pm 3{,}20)M_\odot$, что на ∼3% выше, чем в случае $\mu = 0{,}78$. Поэтому, хотя результаты интерпретации в модели Роша и модели точечных масс почти совпадают, проведенный нами анализ необходим для обоснования корректности определения массы черной дыры в такой уникальной рентгеновской двойной системе, как M 33 X-7.

В нашей работе (Абубекеров и др., 2009а) также исследован эволюционный статус рентгеновских двойных систем M 33 X-7 и IC 10 X-1. Показано, что существование таких систем, содержащих вероятные звездные черные дыры больших масс, вполне реально в галактиках M33 и IC 10, при разумных физических предположениях о начальных параметрах этих систем и процессе массообмена в них. Показано также, что в конце эволюции системы IC 10 X-1 должно происходить слияние двух массивных черных дыр, что может приводить к всплеску гравитационно-волнового излучения и, возможно к космическому гамма-всплеску. В случае системы M 33 X-7 на стадии образования объекта Торна–Житков также должен наблюдаться всплеск гравитационно-волнового излучения (Nazin and Postnov, 1995). Эти выводы важны для постановки наблюдательных программ на современных лазерных гравитационно-волновых антеннах, таких, как LIGO, VIRGO и др.

Следует особо подчеркнуть, что с открытием черной дыры в системе M 33 X-7 (Orosz et al., 2007) наступила эра поиска черных дыр звездных масс в других галактиках Местной группы. Это стало возможным в связи с пуском в строй крупных 8–10-метровых оптических телескопов нового поколения. Замечательно то, что первые открытия новых звездных черных дыр в других галактиках не противоречат гипотезе о бимодальном распределении масс релятивистских объектов (Черепащук, 2001, 2003, Постнов и Черепащук, 2003). Первый вывод о бимодальном распределении масс релятивистских объектов и провале в распределении масс нейтронных звезд и черных дыр в интервале $m_x = (2\text{–}4)M_\odot$ (Bailyn et al., 1998, Черепащук, 1998, Черепащук, 2001a) был сделан на основе данных о массах примерно 40 объектов (~ 20 нейтронных звезд и ~ 20 черных дыр). Открытие новых черных дыр в других галактиках позволит существенно нарастить число определений масс релятивистских объектов и тем самым увеличить значимость соответствующих статистических выводов. Важно, что наращивание числа изученных звездных черных дыр в рентгеновских двойных системах открывает перспективы для проверки новых теорий гравитации (Постнов и Черепащук, 2003, Johannsen et al., 2009).

Заключение к части I

На этом заканчивается первая часть нашей монографии, посвященная изложению современных методов и результатов исследований тесных двойных систем (ТДС), содержащих звезды с тонкими атмосферами.

Во второй части монографии изложены методы и результаты исследований тесных двойных систем, содержащих звезды с протяженными атмосферами, а также описаны новые методы исследований ТДС (в частности, метод доплеровской томографии, затмения звезд экзопланетами и т. п.), изложены современные представления об эволюции ТДС. Кроме того, во второй части суммированы данные о ТДС на поздних стадиях эволюции, приведены результаты статистических исследований ТДС, включая сведения о тройных и кратных системах, кратко рассмотрены проблемы происхождения двойных и кратных звездных систем.

Список литературы

Абубекеров М.К., 2004 // АЖ. Т. 81. С. 714.

Абубекеров М.К., *Черепащук А.М.*, 2005 // Астрофизика. Т. 48. С. 211.

Абубекеров М.К. и др., 2004а — *Абубекеров М.К.*, *Антохина Э.А.*, *Черепащук А.М.* // АЖ. Т. 81. С. 108.

Абубекеров М.К. и др., 2004б — *Абубекеров М.К.*, *Антохина Э.А.*, *Черепащук А.М.* // АЖ. Т. 81. С. 606.

Абубекеров М.К. и др., 2005 — *Абубекеров М.К.*, *Антохина Э.А.*, *Черепащук А.М.* // АЖ. Т. 82. С. 900.

Абубекеров М.К. и др., 2006 — *Абубекеров М.К.*, *Антохина Э.А.*, *Черепащук А.М.*, *Шиманский В.В.* // АЖ. Т. 83. С. 609.

Абубекеров М.К. и др., 2008а — *Абубекеров М.К.*, *Гостев Н.Ю.*, *Черепащук А.М.* // АЖ. Т. 85. С. 121.

Абубекеров М.К. и др., 2008б — *Абубекеров М.К.*, *Антохина Э.А.*, *Черепащук А.М.*, *Шиманский В.В.* // АЖ. Т. 85. С. 427.

Абубекеров М.К. и др., 2009а — *Абубекеров М.К. Антохина Э.А.*, *Богомазов А.И.*, *Черепащук А.М.* // АЖ. Т. 86. С. 260.

Абубекеров М.К. и др., 2009б — *Абубекеров М.К.*, *Гостев Н.Ю.*, *Черепащук А.М.* // АЖ. Т. 86. С. 778.

Абубекеров М.К. и др., 2010 — *Абубекеров М.К.*, *Гостев Н.Ю.*, *Черепащук А.М.* // АЖ. Т. 87. С. 1199.

Абубекеров М.К. и др., 2011 — *Абубекеров М.К.*, *Гостев Н.Ю.*, *Черепащук А.М.* // АЖ. Т. 88. С. 1139.

Айвазян С.А. и др., 1983 — *Айвазян С.А.*, *Енюков И.С.*, *Мешалкин Л.Д.*. Прикладная статистика, основы моделирования и первичная обработка данных. — М.: Финансы и статистика.

Александрова О.В., *Бычков К.В.*, 1998a // АЖ. Т. 75. С. 188.

Александрова О.В., *Бычков К.В.*, 1998b // АЖ. Т. 75. С. 532.

Александрова О.В., *Бычков К.В.*, 2000 // АЖ. Т. 77. С. 883.

Аллен К.У., 1977. Астрофизические величины. — М.: Мир.

Амнуэль П.Р., *Гусейнов О.Х.*, 1971 // АЖ. Т. 48. С. 280.

Антохин И.И., *Черепащук А.М.*, 2001а // АЖ. Т. 78. С. 432.

Антохин И.И., *Черепащук А.М.*, 2001б // АЖ. Т. 78. С. 313.

Антохин И.И., *Черепащук А.М.*, 2007 // АЖ. Т. 84. С. 542.

Антохин И.И. и др., 1988 — *Антохин И.И.*, *Холтыгин А.Ф.*, *Черепащук А.М.* // АЖ. Т. 65. С. 558.

Антохин И.И. и др., 1992 — *Антохин И.И.*, *Нугис Т.*, *Черепащук А.М.* // АЖ. Т. 69. С. 516.

Антохина Э.А., 1988 //АЖ. Т. 65. С. 1164.

Антохина Э.А., 1996 //АЖ. Т. 73. С. 532.

Антохина Э.А., *Кумсиашвили М.И.*, 1999 // ПАЖ. Т. 25. С. 764.

Антохина Э.А., *Черепащук А.М.*, 1985 // ПАЖ. Т. 11. С. 10.

Антохина Э.А., *Черепащук А.М.*, 1987 // АЖ. Т. 64. С. 562.

Антохина Э.А., *Черепащук А.М.*, 1988 // ПАЖ. Т. 14. С. 252.

Антохина Э.А., *Черепащук А.М.*, 1993 // ПАЖ. Т. 19. С. 500.

Антохина Э.А., *Черепащук А.М.*, 1994 // АЖ. Т. 71. С. 420.

Антохина Э.А., *Черепащук А.М.*, 1997а //АЖ. Т. 74. С. 417.

Антохина Э.А., *Черепащук А.М.*, 1997б // ПАЖ. Т. 23. С. 889.

Антохина Э.А. и др., 1992 — *Антохина Э.А.*, *Сейфина Е.В.*, *Черепащук А.М.* // АЖ. Т. 69. С. 282.

Антохина Э.А. и др., 1993 — *Антохина Э.А.*, *Павленко Е.П.*, *Черепащук А.М.*, *Шугаров С.Ю.* // АЖ. Т. 70. С. 804.

Антохина Э.А. и др., 2003 — *Антохина Э.А.*, *Черепащук А.М.*, *Шиманский В.В.* // Изв. РАН. Сер. Физич. Т. 67. С. 293.

Антохина Э.А. и др., 2005а — *Антохина Э.А.*, *Сейфина Е.В.*, *Черепащук А.М.* // АЖ. Т. 82. С. 123.

Антохина Э.А. и др., 2005б — *Антохина Э.А.*, *Черепащук А.М.*, *Шиманский В.В.* // АЖ. Т. 82. С. 131.

Асланов А.А., *Черепащук А.М.*, 1982 // АЖ. Т. 59. С. 290.

Асланов А.А., *Черепащук А.М.*, 1990 // АЖ. Т. 67. С. 1195.

Асланов А.А. и др., 1989 — *Асланов А.А.*, *Колосов Д.Е.*, *Липунова Н.А. и др.* Каталог тесных двойных звезд на поздних стадиях эволюции. — М.: Изд-во Московского университета.

Ахмедов Э.Т., 2001 // УФН. Т. 171. С. 1005.

Байрамов З.Т. и др., 1990 — *Байрамов З.Т.*, *Пилюгин Н.Н.*, *Усов В.В.*) // АЖ. Т. 67. С. 998.

Балог Н.И. и др., 1981а — *Балог Н.И.*, *Гончарский А.В.*, *Черепащук А.М.* // АЖ. Т. 58. С. 61.

Балог Н.И. и др., 1981б — *Балог Н.И.*, *Гончарский А.В.*, *Черепащук А.М.* // ПАЖ. Т. 7. С. 605.

Балог Н.И. и др., 1982 — *Балог Н.И.*, *Гончарский А.В.*, *Метлицкая З.Ю.*, *Черепащук А.М.* // ПЗ. Т. 21. С. 695.

Белоцерковский С.М., *Лифанов И.К.*, 1985. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях и их приложение в аэродинамике, теории упругости и электродинамике. — М.: Наука. С. 256.

Белоцерковский О.М. и др., 2002 — *Белоцерковский О.М.*, *Опарин А.М.*, *Чечеткин В.М.* Турбулентность, новые подходы. — М.: Наука. С. 212.

Бескин В.С., 2005. Осесимметричные стационарные течения в астрофизике. — М.: Физматлит.

Бисикало Д.В. и др., 1997 // АЖ. Т. 74, С. 880.

Бисикало Д.В. и др., 1998 — *Бисикало Д.В.*, *Боярчук А.А.*, *Кузнецов О.А.*, *и др.* // АЖ. Т. 75. С. 40.

Бисикало Д.В. и др., 2000 — *Бисикало Д.В.*, *Боярчук А.А.*, *Кузнецов О.А.*, *Чечеткин В.М.* // АЖ. Т. 77. С. 31.

Бисикало Д.В. и др., 2003 — *Бисикало Д.В.*, *Боярчук А.А.*, *Кайгородов П.В.*, *Кузнецов О.А.* // АЖ. Т. 80. С. 879.

Бисикало Д.В. и др., 2004 — *Бисикало Д.В.*, *Боярчук А.А.*, *Кайгородов П.В.*, *и др.* // АЖ. Т. 81. С. 494.

Бисикало Д.В. и др., 2005 — *Бисикало Д.В.*, *Кайгородов П.В.*, *Боярчук А.А.*, *Кузнецов О.А.* // АЖ. Т. 82. С. 788.

Бисноватый-Коган Г.С., 1970 // АЖ. Т. 47. С. 813.

Бисноватый-Коган Г.С., 1985 // Бюлл. Абастум. Обсерв. Т. 58. С. 175.

Бисноватый-Коган Г.С., 1989. Физические вопросы теории звездной эволюции. — М.: Наука.

Бисноватый-Коган Г.С., 1990 // Астрофизика. Т. 32. С. 313.

Бисноватый-Коган Г.С., 2006 // УФН. Т. 176. С. 59.

Бисноватый-Коган Г.С., *Комберг Б.В.* 1974 // АЖ. Т. 51. С. 373.

Бисноватый-Коган Г.С., *Ламзин С.А.* 1984 // АЖ. Т. 61. С. 323.

Бисноватый-Коган Г.С. и др., 1977 — *Бисноватый-Коган Г.С.*, *Гончарский А.В.*, *Комберг Б.В.*, *и др.* АЖ. Т. 54. С. 241.

Бисноватый-Коган Г.С. и др., 1978 — *Бисноватый-Коган Г.С.*, *Бочкарев Н.Г.*, *Карицкая Е.А. и др.* // ПАЖ. Т. 4. С. 81.

Богданов М.Б., 2001 // АЖ. Т. 78. С. 1089.

Богданов М.Б., *Черепащук А.М.*, 1984 // АЖ. Т. 61. С. 944.

Богданов М.Б., *Черепащук А.М.*, 1993 // ПАЖ. Т. 19. С. 348.

Богданов М.Б., *Черепащук А.М.*, 1995 // ПАЖ. Т. 21. С. 570.

Богданов М.Б., *Черепащук А.М.*, 1998 // АЖ. Т. 75. С. 261.

Богданов М.Б., *Черепащук А.М.*, 2000 // АЖТ. 77. С. 842.

Богданов М.Б., *Черепащук А.М.*, 2002а // АЖ. Т. 79. С. 693.

Богданов М.Б., *Черепащук А.М.*, 2002б // АЖ. Т. 79. С. 1109.

Богданов М.Б., *Черепащук А.М.*, 2004 // АЖ. Т. 81. С. 291.

Богданов М.Б., *Черепащук А.М.*, 2007а // АЖ. Т. 84. С. 536.

Богданов М.Б., *Черепащук А.М.*, 2007б // АЖ. Т. 84. С. 627.

Богданов М.Б., *Черепащук А.М.*, 2008 // Астрофизика. Т. 51. С. 595.

Богомазов А.И., *Липунов В.М.*, 2008 // АЖ. Т. 85. С. 336.

Богомазов А.И., *Черепащук А.М.*, 2008 // АЖ. Т. 85. С. 1122.

Богомазов А.И. и др., 2005а — *Богомазов А.И.*, *Абубекеров М.К.*, *Липунов В.М.* // АЖ. Т. 82. С. 722.

Богомазов А.И. и др., 2005б — *Богомазов А.И.*, *Абубекеров М.К.*, *Липунов В.М.*, *Черепащук А.М.* // АЖ. Т. 82. С. 331.

Боденхеймер П., *Блек Д.С.*, 1982. Протозвезды и протопланеты. Т. 1 — М.: Мысль. С. 321.

Бочкарев Н.Г., *Карицкая Е.А.*, 1983а // ПАЖ. Т. 9. С. 14.

Бочкарев Н.Г., *Карицкая Е.А.*, 1983б // АЦ № 1255.

Бочкарев Н.Г., *Карицкая Е.А.*, 1983в // ПАЖ. Т. 9. С. 16.

Бочкарев Н.Г. и др., 1975 — *Бочкарев Н.Г.*, *Карицкая Е.А.*, *Шакура Н.И.* // ПАЖ. Т. 1. С. 13.

Бочкарев Н.Г. и др., 1979а — *Бочкарев Н.Г.*, *Карицкая Е.А.*, *Сюняев Р.А.*, *Шакура Н.И.* // ПАЖ. Т. 5. С. 185.

Бочкарев Н.Г. и др., 1979б — *Бочкарев Н.Г.*, *Карицкая Е.А.*, *Шакура Н.И.* // АЖ. Т. 56. С. 16.

Бочкарев Н.Г. и др., 1980 — *Бочкарев Н.Г.*, *Карицкая Е.А.*, *Курочкин Н.Е.*, *Черепащук А.М.* // АЦ № 1147. С. 1.

Бочкарев Н.Г. и др., 1986 — *Бочкарев Н.Г.*, *Карицкая Е.А.*, *Лоскутов В.М.*, *Соколов В.В.* // АЖ. Т. 63. С. 71.

Бочкарев Н.Г. и др., 1988 — *Бочкарев Н.Г.*, *Сюняев Р.А.*, *Хрузина Т.С.*, *и др.* // АЖ. Т. 65. С. 778.

Брумберг В.А., *и др.*, 1975 // ПАЖ. Т. 1. С. 5.

Бэттен А., 1976. Двойные и кратные звезды — М.: Мир.

Бялко А.В., 1969 // АЖ. Т. 46. С. 998.

Васильев Ф.П., 1980. Численные методы решения экстремальных задач — М.: Наука.

Велихов Е.П., 1959 // ЖЭТФ. Т. 36. С. 1398.

Гильфанов М., 1995. Докторская диссертация. ИКИ РАН. С. 167.

Гинзбург В.Л., 1967. Распространение электромагнитных волн в плазме — М.: Наука.

Гинзбург В.Л., 1981, Теоретическая физика и астрофизика — М.: Наука.

Гинзбург В.Л., 1995, О физике и астрофизике, 3-е изд. — М.: Бюро Квантум. С. 111.

Гинзбург В.Л., 1999 // УФН. Т. 169. С. 419.

Гнедин Ю.Н., *Силантьев Н.А.*, 1980 // ПАЖ. Т. 6. С. 344.

Гнедин Ю.Н. и др., 1976 — *Гнедин Ю.Н.*, *Силантьев Н.А.*, *Шибанов Ю.А.* // АЖ. Т. 53. С. 936.

Гончарский А.В., *Степанов В.В.*, 1979 // Докл. АНСССР. Т. 245. С. 1296.

Гончарский А.В., *Ягола А.Г.*, 1969 // Докл. АНСССР. Т. 184. С. 771.

Гончарский А.В. и др., 1978 — *Гончарский А.В.*, *Черепащук А.М.*, *Ягола А.Г.*. Численные методы решения обратных задач астрофизики — М.: Наука.

Гончарский А.В. и др., 1984 — *Гончарский А.В.*, *Метлицкая З.Ю.*, *Черепащук А.М.* // АЖ. Т. 61. С. 124.

Гончарский А.В. и др., 1985 — *Гончарский А.В.*, *Черепащук А.М.*, *Ягола А.Г.*. Некорректные задачи астрофизики — М.: Наука. С. 101.

Гончарский А.В. и др., 1986а — *Гончарский А.В.*, *Романов С.Ю.*, *Степанов В.В.*, *Черепащук А.М.* // АЖ. Т. 63. С. 1024.

Гончарский А.В. и др., 1986б — *Гончарский А.В.*, *Степанов В.В.*, *Черепащук А.М.* // АЖ. Т. 63. С. 725.

Гончарский А.В. и др., 1991 — *Гончарский А.В.*, *Романов С.Ю.*, *Черепащук А.М.*. Конечно-параметрические обратные задачи астрофизики — М.: Изд. Моск. ун-та. С. 165.

Горанский В.П., 1978 // АЦ № 1024. С. 3.

Горанский В.П. и др., 1996 — *Горанский В.П.*, *Карицкая Е.А.*, *Курочкин Н.Е.*, *Трунковский Е.М.* // ПАЖ. Т. 22. С. 413.

Горанский В.П. и др., 1998а — *Горанский В.П.*, *Есипов В.Ф.*, *Черепащук А.М.* // АЖ. Т. 75. С. 240.

Горанский В.П. и др., 1998б — *Горанский В.П.*, *Есипов В.Ф.*, *Черепащук А.М.* // АЖ. Т. 75. С. 383.

Горбацкий В.Г., 1967 // Астрофизика. Т. 3. С. 245.

Горбацкий В.Г., 1974. Новоподобные и новые звезды — М.: Наука.

Горбацкий В.Г., 1977, Космическая газодинамика — М.: Наука. С. 335.

Горда С.Ю., *Свечников М.А.*, 1998 // АЖ. Т. 75. С. 896.

Гостев Н.Ю., 2011 // АЖ. Т. 88. С. 704.

Градштейн И.С., *Рыжик И.М.*, 1963, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений — М., Физматгиз.

Гребенев С.А. и др., 1991 — *Гребенев С.А.*, *Сюняев Р.А.*, *Павлинский М.Н.*, *Деханов И.А.* // ПАЖ. Т. 17. С. 985.

Гребенев С.А. и др., 1992 — *Гребенев С.А.*, *Сюняев Р.А.*, *Павлинский М.Н.* // ПАЖ. Т. 18. С. 11.

Гуревич А.В. и др., 1997 — *Гуревич А.В.*, *Зыбин К.П.*, *Сирота В.А.* // УФН. Т. 167. С. 913.

Гусейнов О.Х., *Зельдович Я.Б.*, 1966 // АЖ. Т. 43. С. 323.

Давыдов В.В. и др., 2008 — *Давыдов В.В.*, *Есипов В.Ф.*, *Черепащук А.М.* // АЖ. Т. 85. С. 545.

Де Ягер К., 1984. Звезды наибольшей светимости — М.: Мир. С.58, 374.

Дейч А.Н., 1962. Визуально-двойные звезды // В кн. «Курс астрофизики и звездной астрономии». Т. 2 / Ред. А.А.Михайлов. — М.: Гос. изд-во физ.-мат. литературы. с. 60–86.

Демиденко Е.З., 1981. Линейная и нелинейная регрессия. — М.: Финансы и статистика.

Деннис Дж., *Шнабель Р.*, 1988. Численные методы безусловной оптимизации и решения нелинейных уравнений. — М.: Мир.

Дибай Э.А., 1980 // АЖ. Т. 57. С. 677.

Дмитриенко Е.С., *Черепащук А.М.*, 1980 // АЖ. Т. 57. С. 749.

Дмитриенко Е.С., *Шакура Н.И.*, 1974 // АЦ № 835. С. 1.

Дмитриенко Е.С. и др., 1984 — *Дмитриенко Е.С.*, *Матвиенко А.Н.*, *Черепащук А.М.*, *Ягола А.Г.* // АЖ. Т. 61. С. 310.

Долгинов А.З., *Силантьев Н.А.*, 1981 // ПАЖ. Т. 5. С. 526.

Долгинов А.З. и др., 1979 — *Долгинов А.З.*, *Гнедин Ю.Н.*, *Силантьев Н.А.* Распространение и поляризация излучения в космической среде — М.: Наука.

Дорошенко О.В., *Копейкин С.М.*, 1990 // АЖ. Т. 67. С. 986.

Дремова Г.Н., *Свечников М.А.*, 2001 // АЖ. Т. 78. С. 248.

Дремова Г.Н., *Свечников М.А.*, 2002 // Астрофизика. Т. 45. С. 419.

Дремова Г.Н., *Свечников М.А.*, 2007 // Астрофизика. Т. 50. С. 299.

Ефремов Ю.Н., *Чернин А.Д.*, 2003 // УФН. Т. 173. С. 3.

Жилкин А.Г., *Бисикало Д.В.*, *Боярчук А.А.*, 2012 // УФН. Т. 182. С. 121.

Закиров М.М., 1985 // Бюлл. Абастум. Астрофиз. Обсерв. Т. 58. С. 425.

Закиров М.М., 2008 // Кинематика и физика небесных тел. Т. 24. С. 35.

Закиров М.М., 2009 // Кинематика и физика небесных тел. Т. 25. С. 163.

Закиров М.М., 2010 // Кинематика и физика небесных тел. Т. 26. С. 3.

Захаров А.Ф., 1997 // Гравитационные линзы и микролинзы. — М.: Янус-К.

Захаров А.Ф., 1999 // АЖ. Т. 76. С. 379.

Захаров А.Ф., *Сажин М.В.*, 1998 // УФН. Т. 168. С. 1041.

Зверев М.С. и др., 1947 — *Зверев М.С.*, *Кукаркин Б.В.*, *Мартынов Д.Я.*, *Паренаго П.П.*, *Флоря Н.Ф.*, *Цесевич В.П.* Переменные звезды. Т. III. — М.-Л.: ОГИЗ, Госуд. изд-во технико-теоретич. лит-ры. С. 474.

Зельдович Я.Б., 1964 // ДАН СССР. Т. 155. С. 67.

Зельдович Я.Б., *Новиков И.Д.*, 1964 // ДАН СССР. Т. 158. С. 811.

Зельдович Я.Б., *Новиков И.Д.*, 1967. Релятивистская астрофизика — М.: Наука.

Зельдович Я.Б. и др., 1972 — *Зельдович Я.Б.*, *Иванова Л.И.*, *Надежин Д.К.* // АЖ. Т. 49. С. 253.

Иванова Д.В. и др., 2002 — *Иванова Д.В.*, *Сахибуллин Н.А.*, *Шиманский В.В.* // АЖ. Т. 79. С. 390.

Иванова Д.В. и др., 2004 — *Иванова Д.В.*, *Сахибуллин Н.А.*, *Шиманский В.В.* // АЖ. Т. 81. С. 523.

Калиткин Н.Н., 1978. Численные методы. — М.: Наука, с. 107.

Кардашев Н.С. и др., 2006 — *Кардашев Н.С.*, *Новиков И.Д.*, *Шацкий А.А.* // АЖ. Т. 83. С. 675.

Каретников В.Г., 1988 // АЦ №1533. С. 11.

Каретников В.Г., 1990 // АЖ. Т. 67. С. 885.

Каретников В.Г., 1991, АЖ. Т. 68. С. 880.

Каретников В.Г., *Сироткин Ф.В.*, 2005 // АЖ. Т. 82. С. 999.

Каретников В.Г., *Черепащук А.М.*, 1998 // АЖ. Т. 75. С. 548.

Карицкая Е.А., 1981 // АЖ. Т. 58. С. 146.

Карицкая Е.А., 1983 // АЦ № 1255. С. 1.

Карицкая Е.А., *Бочкарев Н.Г.*, 1983 // АЖ. Т. 60. С. 946.

Кемп Дж.К.и др., 1987 — *Кемп Дж.К.*, *Карицкая Е.А.*, *Кумсиашвили М.И. и др.* // АЖ. Т. 64. С. 326.

Климов Г.С., 1983. Теория вероятностей и математическая статистика — М.: Изд-во Моск. ун-та.

Ковалева Д.А., 2000 // АЖ. Т. 78. С. 1104.

Козырева В.С., *Халиуллин Х.Ф.*, 1999 // АЖ. Т. 76. С. 775.

Козырева В.С. и др., 2005 — *Козырева В.С.*, *Кусакин А.В.*, *Вольф М.* // ПАЖ. Т. 37. С. 922.

Колмогоров А.Н., *Фомин С.В.*, 1968. Элементы теории функций и функционального анализа — М.: Наука.

Колосов М.А., *Шабельников А.В.*, 1976. Распространение электромагнитных волн в атмосферах Земли, Венеры, Марса. — М.: Советское радио.

Комберг Б.В. и др., 1995 — *Комберг Б.В.*, *Компанеец Д.А.*, *Лукаш В.Н.* // АЖ. Т. 72. С. 457.

Корнилов В.Г., *Липунов В.М.*, 1983а // АЖ. Т. 60. С. 284.

Корнилов В.Г., *Липунов В.М.* 1983б // АЖ. Т. 60. С. 574.

Корнилов В.Г. и др., 1984 — *Корнилов В.Г.*, *Миронов А.В.*, *Трунковский Е.М.*, *Халиуллин Х.Ф.*, *Черепащук А.М.* // АЖ. Т. 61. С. 739.

Корнилов В.Г., *Черепащук А.М.*, 1979 // ПАЖ. Т. 5. С. 398.

Крайчева З.Т. и др., 1978 — *Крайчева З.Т.*, *Попова Е.И.*, *Тутуков А.В.*, *Юнгельсон Л.Р.* // АЖ. Т. 55. С. 1176.

Крайчева З.Т. и др., 1979 // АЖ. Т. 56. С. 620.

Крайчева З.Т. и др., 1981 // ПАЖ. Т. 7. С. 488.

Крамер Г., 1975. Математическая статистика. — М.: Мир.

Крат В.А., 1933 // ПЗ. Т. 4, № 40.

Крат В.А., 1938 // ПЗ. Т. 5, № 54.

Крат В.А., 1962 // В кн. «Курс астрофизики и звездной астрономии» / Ред. А.А. Михайлов. Т. 2. С. 87.

Кудзей И., 1985а // Бюлл. Абастум. Астрофиз. Обсерв. Т. 58.

Кудзей И., 1985б // АЦ. № 1363.

Кузнецов О.А. и др., 2001 — *Кузнецов О.А.*, *Бисикало Д.В.*, *Боярчук А.А.*, *Хрузина Т.С.*, *Черепащук А.М.* // АЖ. Т. 78. С. 997.

Куликовский П.Г., 1985. Звездная астрономия — М.: Наука. С. 57.

Кумсиашвили М.И., 1985 // Бюлл. Абастум. Астрофиз. Обсерв. Т. 58. С. 93.

Курочкин Н.Е., 1972 // ПЗ. Т. 18. С. 425.

Куто П., 1981. Наблюдения визульно-двойных звезд — М.: Мир.

Лавров М.И., 1971 // АЖ. Т. 48. С. 951.

Ландау Л.Д., 1937 // ДАН СССР. Т. 17. С. 301.

Ландау Л.Д., *Лифшиц Е.М.*, 1958. Механика — М.: Физматгиз. С. 46, 29.

Ландау Л.Д., *Лифшиц Е.М.*, 1962. Теория поля — М.: Физматгиз.

Лебедев М.Г., *Мясников А.В.*, 1988 // В кн. «Численные методы в аэродинамике» / Пасконов В.М, Росляков Г.С., изд. — М.: Изд-во Моск. ун-та. С. 3.

Левич Е.В., *Сюняев Р.А.*, 1971 // АЖ Т. 48. С. 461.

Леонов А.С., *Ягола А.Г.*, 2000 // Вестник МГУ. Сер. 3, Физика, Астрономия. Т. 2. С. 14.

Липовецкий В.А., *Степанян Дж.А.*, 1981 // Астрофизика. Т. 17. С. 573.

Липунов В.М., 1982 // ПАЖ. Т. 8. С. 358.

Липунов В.М., 1987. Астрофизика нейтронных звезд — М.: Наука.

Лозинская Т.А., 1986. Сверхновые и звездный ветер. Взаимодействие с газом Галактики — М.: Наука. С. 107.

Лозинская Т.А., 2012. Взрывы звезд и звездный ветер в галактиках — М.: КРАСАНД.

Лозинская Т.С., *Тутуков А.В.*, 1981 // Научные информ. Астросов. АНСССР. Т. 49. С. 21.

Лоскутов В.М., *Соболев В.В.*, 1979 // Астрофизика Т. 15. С.241.

Лукьянов Л.Г., 2006 // Труды ГАИШ. Т. 76. С. 42.

Лукьянов Л.Г., 2008 // АЖ. Т. 85. С. 755.

Лукьянов Л.Г., *Ширмин Г.И.*, 2009. Лекции по небесной механике — Алматы: Эверо.

Любарский Ю.Е., *Шакура Н.И.*, 1987 // ПАЖ. Т. 13. С. 917.

Лютый В.М. и др., 1973 — *Лютый В.М.*, *Сюняев Р.А.*, *Черепащук А.М.* // АЖ. Т. 50. С. 3.

Лютый В.М. и др., 1974 — *Лютый В.М.*, *Сюняев Р.А.*, *Черепащук А.М.* // АЖ. Т. 51. С. 1150.

Макаренко Е.Н., 1962 // ПЗ. Т. 14. С. 214.

Манчестер Р., *Тейлор Дж.*, 1980. Пульсары — М.: Мир. С. 104–136.

Мартынов Д.Я., 1937 // АЖ. Т. 14. С. 306.

Мартынов Д.Я., 1948а // Изв. АОЭ. Т. 25.

Мартынов Д.Я., 1948б // Уч.зап. Казанского Ун-та, Т. 108. Кн. 5.

Мартынов Д.Я., 1950 // Бюлл. АОЭ. Т. 27.

Мартынов Д.Я., 1971 // В кн. «Затменные переменные звезды» — М.: Наука. С. 313–347.

Мартынов Д.Я., 1972 // УФН. Т. 108. С. 701.

Мартынов Д.Я., 1981. Классические системы. Звезда RX Кассиопеи. Движение линии апсид // В кн. «Звезды и звездные системы» / Ред. Д.Я.Мартынов. — М.: Наука. С. 9–37.

Мартынов Д.Я., 1948 // Изв. АОЭ. Т. 108, №25.

Маршаков А.В., 2002 // УФН. Т. 172. С. 977.

Масевич А.Г., *Тутуков А.В.*, 1988. Эволюция звезд: теория и наблюдения — М: Наука. С. 82.

Михайлов А.А. (ред.), 1962. Курс астрофизики и звездной астрономии. Т. 2.— М.: Гос. изд-во физ.-мат.литературы. С. 60–138.

Михалас Д., 1980. Звездные атмосферы, в двух томах. — М.: Мир.

Мудров В.И., *Кушко В.Л.*, 1983. Методы обработки измерений: квазиправдоподобные оценки. — М.: Радио и связь.

Мустель Э.Р., 1960. Звездные атмосферы. — М.: Физматгиз.

Нагирнер Д.И., 1962 // Труды ЛГУ. Т. 19. С. 79.

Надежин Д.К., 1966 // Научные информ. Астросов. АНСССР. Т. 4. С. 37.

Назаренко В.В. и др., 2001 — *Назаренко В.В.*, *Глазунова Л.В.*, *Каретников В.Г.* // АЖ. Т. 78. С. 525.

Нерсисян С.Е. и др., 1989 — *Нерсисян С.Е.*, *Шаврина А.В.*, *Яремчук А.А.* // Астрофизика. Т. 30. С. 247.

Новиков И.Д., *Фролов В.П.*, 1986 // Физика черных дыр. — М.: Наука. С. 88.

Новиков И.Д., *Фролов В.П.*, 2001 // УФН. Т. 171. С. 307.

Орлов А.А., 1960 // АЖ. Т. 37. С. 902.

Паренаго П.П., *Масевич А.Г.*,1950 // Труды ГАИШ. Т. 20. С. 81.

Петров В.С. и др., 2007 — *Петров В.С.*, *Тутуков А.В.*, *Черепащук А.М.* // АЖ. Т. 84. С. 165.

Петров В.С. и др., 2013 — *Петров В.С.*, *Антохина Э.А.*, *Черепащук А.М.* // АЖ. Т. 90. С. 729.

Пикельнер С.Б., *Щеглов П.В.*, 1968 // АЖ. Т. 45. С. 953.

Попов С.Б., *Прохоров М.Е.*, 2007 // УФН Т. 177. С. 1179.

Попова Е.И. и др., 1982 — *Попова Е.И.*, *Тутуков А.В.*, *Юнгельсон Л.Р.* // ПАЖ. Т. 8. С. 297.

Постнов К.А., 2003 // ПАЖ. Т. 29. С. 424.

Постнов К.А., *Прохоров М.Е.*, 2001 // АЖ. Т. 78. С. 1025.

Постнов К.А., *Черепащук А.М.*, 2003 // АЖ. Т. 80. С. 1075.

Прилуцкий О.Ф., *Усов В.В.*, 1975 // АЦ № 854.

Прилуцкий О.Ф., *Усов В.В.*, 1976 // АЖ. Т. 53. С. 6.

Пустыльник И.Б., 1969. Модели звезд с протяженными атмосферами спектральных классов F-K. — Тарту.

Пшеничный Б.Н., *Данилин Ю.М.*, 1975. Численные методы в экстремальных задачах — М.: Наука.

Радциг А.А., *Смирнов Б.М.*, 1986. Параметры атомов и атомных ионов — М.: Энергоатомиздат.

Рубаков В.А., 2001 // УФН. Т. 171. С. 913.

Рубашевский А.А., 1971 // Изв. Главн. астрон. обс. в Пулкове. № 186. С. 26.

Рубашевский А.А., 1991 // АЖ. Т. 68. С. 799.

Рублев С.В., 1974 // В кн. Явления нестационарности и звездная эволюция / Ред. А.А.Боярчук, Ю.Н.Ефремов. — М.: Наука. С. 47.

Рустамов Д.Н., *Черепащук А.М.*, 2011 // АЖ. Т. 88. С. 380.

Рустамов Д.Н., *Черепащук А.М.*, 2012 // АЖ. Т. 89. С. 843.

Сажин М.В., *Черепащук А.М.*, 1994 // ПАЖ. Т. 20. С. 613.

Сахаде Дж., 1963. Составные и комбинационные спектры // В кн. Звездные атмосферы / Ред. Дж. Гринстейн. — М.: ИЛ. С. 461.

Сахибуллин Н.А., 1983 // Труды Казан. Гор. Астрон. обс. Т. 48. С. 9.

Сахибуллин Н.А., 1997. Методы моделирования в астрофизике. I. Звездные атмосферы — Казань: Фэн.

Сахибуллин Н.А., *Шиманский В.В.*, 1996 // АЖ. Т. 73. С. 793.

Сахибуллин Н.А., *Шиманский В.В.*, 1997 // АЖ. Т. 74. С. 432.

Сахибуллин Н.А. и др., 1998 — *Сахибуллин Н.А.*, *Сулейманов В.Ф.*, *Шиманский В.В.* // ПАЖ. Т. 24. С. 22.

Свечников М.А., 1969. Каталог орбитальных элементов, масс и светимостей затменных двойных звезд. — Свердловск: Изд-во Ур.ГУ. Сер. Астрономия. Вып. 5, № 88.

Свечников М.А., 1986. Каталог орбитальных элементов, масс и светимостей тесных двойных звезд. — Иркутск: Изд-во Иркутского ун-та.

Свечников М.А., *Кузнецова Е.Ф.*, 1990. Каталог приближенных фотометрических и абсолютных элементов затменных переменных звезд. Т. 1-2. — Свердловск: Изд-во Ур. ГУ.

Свечников М.А., *Перевозкина Е.Л.*, 1999. Каталог орбитальных элементов, масс и светимостей затменных переменных звезд РГП типа и некоторые результаты его статистической обработки. — Екатеринбург: Изд-во Ур.ГУ. Вып. 5.

Свечников М.А., *Снежко Л.И.*, 1974 // В кн. Явления нестационарности и звездная эволюция / Ред. А.А. Боярчук, Ю.Н. Ефремов. — М.: Наука. С. 181.

Седов Л.И., 1957. Методы подобия и размерности в механике. — М.: Гостехиздат.

Сибгатуллин Н., *Сюняев Р.*, 1998 // ПАЖ. Т. 24. С. 894.

Силантьев Н.А., 1980 // АЖ. Т. 57.С. 787.

Скульский М.Ю., 1985 // Бюлл. Абастум. Астрофизич. Обсерв. Т. 85. С. 101.

Снежко Л.И., 1967 // ПЗ. Т. 16. С. 253.

Собер Дж., 1980. Линейный регрессионный анализ. — М.: Мир.

Соболев В.В., 1947. Движущиеся оболочки звезд. — Л.: Изд-во ЛГУ.

Соболев В.В., 1949 // Ученые записки ЛГУ, серия математич. Т. 18. С. 1.

Соболев В.В., 1956. Перенос лучистой энергии в атмосферах звезд и планет. — М.: Гостехиздат. 391 с.

Соболев В.В., 1967. Курс теоретической астрофизики. — М.: Наука. С. 46.

Соколов В.В., 1987 // АЖ. Т. 64. С. 803.

Старицын Е.И., 1990 // Научные информ. Астросов. АНСССР. Т. 68. С. 35.

Страйжис В., 1982. Звезды с дефицитом металлов. — Вильнюс: Мокслас.

Страйжис В.Л., 1977. Многоцветная фотометрия звезд. — Вильнюс: Мокслас.

Субботин М.Ф., 1937. Курс небесной механики. Т. 2 — М.: ГТТИ. С. 223, 226.

Сулейманов В.Ф., 1996 // ПАЖ. Т. 22. С. 107.

Сытов А.Ю. и др., 2007 — *Сытов А.Ю.*, *Кайгородов П.В.*, *Бисикало Д.В.*, *и др.* // АЖ. Т. 84. С. 926.

Сюняев Р.А., 1972 // АЖ. Т. 49. С. 1153.

Сюняев Р.А., *Шакура Н.И.*, 1986 // ПАЖ. Т. 12. С. 286.

Сюняев Р.А. и др., 1988 — *Сюняев Р.А.*, *Лапшов И.Ю.*, *Гребенев С.А.*, *и др.* // ПАЖ. Т. 14. С. 771.

Сюняев Р.А. и др., 1991а — *Сюняев Р.А.*, *Арефьев В.А.*, *Бороздин К.Н.*, *и др.* // ПАЖ. Т. 17. С. 975.

Сюняев Р.А. и др., 1991б — *Сюняев Р.А.*, *Каниовский А.С.*, *Ефремов В.В. и др.* //ПАЖ. Т. 17. С. 291.

Табачник В.М., 1971 // В кн. Затменные переменные звезды / Ред. В.П. Цесевич. — М.: Наука. С. 113.

Тассуль Ж.-Л., 1982. Теория вращающихся звезд — М.: Мир.

Тихонов А.Н., 1943 // ДАН СССР. Т. 39. С. 195.

Тихонов А.Н., 1963а // ДАН СССР. Т. 151. С. 501.

Тихонов А.Н., 1963б // ДАН СССР. Т. 153. С. 49.

Тихонов А.Н. и др., 1983 — *Тихонов А.Н.*, *Гончарский А.В.*, *Степанов В.В.*, *Ягола А.Г.* Регуляризирующие алгоритмы и априорная информация — М.: Наука.

Токовинин А.А., 1988. Звездные интерферометры — М.: Наука.

Тутуков А.В., 1983. Preprint IAP-83-95.

Тутуков А.В., 1992 // АЖ. Т. 69. С. 1275.

Тутуков А.В., 1995 // АЖ. Т. 72. С. 400.

Тутуков А.В., *Федорова А.В.*, 2003 // АЖ. Т. 80. С. 652.

Тутуков А.В., *Федорова А.В.*, 2004 // АЖ. Т. 81. С. 589.

Тутуков А.В., *Черепащук А.М.*, 1985 // АЖ. Т. 62. С. 1124.

Тутуков А.В., *Черепащук А.М.*, 1993 // АЖ. Т. 70. С. 307.

Тутуков А.В., *Черепащук А.М.*, 1997 // АЖ. Т. 74. С. 407.

Тутуков А.В., *Черепащук А.М.*, 2003 // АЖ. Т. 80. С. 419.

Тутуков А.В., *Черепащук А.М.*, 2004 // АЖ. Т. 81. С. 43.

Тутуков А.В., *Юнгельсон Л.Р.*, 1973а // Научные информ. Астросовета АН СССР. Т. 27. С. 58.

Тутуков А.В., *Юнгельсон Л.Р.*, 1973б // Научные информ. Астросовета АН СССР. Т. 27. С. 70.

Тутуков А.В., *Юнгельсон Л.Р.*, 1978а // Научные информ. Астросов. АНСССР. Т. 41. С. 3.

Тутуков А.В., *Юнгельсон Л.Р.*, 1978б // Научные информ. Астросов. АНСССР. Т. 42. С. 55.

Тутуков А.В., *Юнгельсон Л.Р.*, 1980, АЖ. Т. 57. С. 1266.

Тутуков А.В.и др., 1973 — *Тутуков А.В.*, *Юнгельсон Л.Р.*, *Кляйман А.* // Научные информ. Астросовета АНСССР. Т. 27. С. 3.

Тутуков А.В.и др., 1985 — *Тутуков А.В.*, *Федорова А.В.*, *Эргма Е.В.*, *Юнгельсон Р.Л.* // ПАЖ. Т. 11. С. 123.

Тутуков А.В.и др., 2003 — *Тутуков А.В.*, *Федорова А.В.*, *Черепащук А.М.* // АЖ. Т. 80. С. 23.

Тутуков А.В. и др., 2004 — *Тутуков А.В.*, *Дремова Г.Н.*, *Свечников М.А.* // АЖ. Т. 81. С. 244.

Тутуков А.В. и др., 2008 — *Тутуков А.В.*, *Федорова А.В.*, *Черепащук А.М.* // АЖ. Т. 85. С. 728.

Уилкс С., 1967. Математическая статистика — М.: Наука.

Федорова А.В., *и др.*, 2000 — *Федорова А.В.*, *Бисикало Д.В.*, *Боярчук А.А. и др.* // АЖ. Т. 44. С. 409.

Фокин А.Б., *Тутуков А.В.*, 2007 // АЖ. Т. 84. С. 824.

Фридман А.М., 2008 // УФН Т. 178. С. 225.

Фридман А.М., *Бисикало Д.В.*, 2008 // УФН. Т. 178. С. 1.

Фридман А.М., *Горькавый Н.Н.*, 1994. Физика планетных колец — М., Наука.

Фридман А.М., *Хоружий О.В.*, 1994 // В кн. Фридман А.М. и Горькавый Н.Н. Физика планетных колец — М.: Наука. С. 282.

Халиуллин Х.Ф., 1974 // АЖ. Т. 51. С. 395.

Халиуллин Х.Ф., 1983а // АЖ. Т. 60. С. 72.

Халиуллин Х.Ф., 1983б // АЦ №1262. С. 1.

Халиуллин Х.Ф., 1997 // В кн. Двойные звезды. — М.: Космосинформ. С. 139.

Халиуллин Х.Ф., *Халиуллина А.И.*, 2006 // АЖ. Т. 83. С. 911.

Халиуллина А.И., *Халиуллин Х.Ф.*, 1984 // АЖ. Т. 61. С. 393.

Халиуллина А.И., *Халиуллин Х.Ф.*, 1989 // АЖ. Т. 66. С. 76.

Химмельблау Д.В., 1975. Прикладное нелинейное программирование — М.: Мир. С. 163.

Холопов П.Н. и др., 1985–1988 — *Холопов П.Н.*, *Самусь Н.Н.*, *Фролов М.С*, *и др.* Общий каталог переменных звезд. 4-е изд. Т. I–III — М.: Наука; см. также http://www.sai.msu.ru/groups/cluster/gcvs/gcvs/ for living edition.

Хрузина Т.С., 1985 // АЖ. Т. 62. С. 356.

Хрузина Т.С., 2000 // АЖ. Т. 77. С. 510.

Хрузина Т.С., 2001 // АЖ. Т. 78. С. 298.

Хрузина Т.С., *Черепащук А.М.*, 1984 // АЖ. Т. 61. С. 299.

Хрузина Т.С., *Черепащук А.М.*, 1986а // АЖ. Т. 63. С. 494.

Хрузина Т.С., *Черепащук А.М.*, 1986б // АЖ. Т. 63. С. 711.

Хрузина Т.С., *Черепащук А.М.*, 1994 // АЖ. Т. 71. С. 442.

Хрузина Т.С., *Черепащук А.М.*, 1995 // АЖ. Т. 72. С. 203.

Хрузина Т.С., *Черепащук А.М.*, 1997 // АЖ. Т. 74. С. 559.

Хрузина Т.С., *Черепащук А.М.*, 1999 // АЖ. Т. 76. С. 917.

Хрузина Т.С. и др., 2001 — *Хрузина Т.С.*, *Черепащук А.М.*, *Бисикало Д.В.*, *Боярчук А.А.*, *Кузнецов О.А.* // АЖ. Т. 78. С. 625.

Хрузина Т.С. и др., 2003а — *Хрузина Т.С.*, *Черепащук А.М.*, *Бисикало Д.В.*, *Боярчук А.А.*, *Кузнецов О.А.* // АЖ. Т. 80. С. 239.

Хрузина Т.С. и др., 2003б — *Хрузина Т.С.*, *Черепащук А.М.*, *Бисикало Д.В.*, *Боярчук А.А.*, *Кузнецов О.А.* // АЖ. Т. 80. С. 919.

Худсон Д., 1970. Статистика для физиков — М.: Мир.

Цесевич В.П. (ред.), 1971. Затменные переменные везды — М.: Наука.

Цесевич В.П., 1940 // Бюлл. Астрон. ин-та АНСССР № 50. С. 283.

Чандрасекар С., 1953. Перенос лучистой энергии — М.: ИЛ. 432 с.

Черепащук А.М., 1966 // АЖ. Т. 43. С. 517.

Черепащук А.М., 1967а // Кандидатская диссертация, МГУ, ГАИШ. С. 114.

Черепащук А.М., 1967б // Переменные звезды. Т. 16. С. 226.

Черепащук А.М., 1971 // В кн.: Затменные переменные звезды — М.: Наука. С.36–44, 261–312.

Черепащук А.М., 1973а // АЖ. Т. 50. С. 879.

Черепащук А.М., 1973б // ПЗ. Т. 19. С. 227.

Черепащук А.М., 1974 // В кн. Явления нестационарности и звездная эволюция / Под ред. А.А. Боярчука, Ю.Н. Ефремова. — М.: Наука. С. 95.

Черепащук А.М., 1975 // АЖ. Т. 52. С. 883.

Черепащук А.М., 1975 // Астрофизика. Т. 11. С. 49.

Черепащук А.М., 1976 // ПАЖ. Т. 2. С. 356.

Черепащук А.М., 1985 // Бюлл. Абастум. Астрофиз. Обсерв. Т. 58. С. 113.

Черепащук А.М., 1990 // АЖ. Т. 67. С. 955.

Черепащук А.М., 1993 // АЖ. Т. 70. С. 1157.

Черепащук А.М., 1996 // УФН. Т. 166. С. 809.

Черепащук А.М., 1997 // В кн. Двойные звезды / Под ред. А.Г. Масевич — М.: Космосинформ. С. 45.

Черепащук А.М., 1998 //В сб. Современные проблемы звездной эволюции, Труды международной конференции «Проблемы звездной эволюции», Звенигород / Д.С. Вибе (ред.) — М.: ГЕОС. С. 198.

Черепащук А.М., 2001а // АЖ. Т. 78. С. 145.

Черепащук А.М., 2001б, Взаимодействия в двойных системах //Вв кн. «Ультрафиолетовая Вселенная». — М.: ГЕОС. С. 133.

Черепащук А.М., 2002 // УФН. Т. 172. С. 959.

Черепащук А.М., 2003 // УФН. Т. 173. С. 345.

Черепащук А.М., 2005 // Вестник МГУ. Серия 3. Физика и Астрономия. Т. 2. С. 62.

Черепащук А.М., 2011 // УФН. Т. 181. С. 1097.

Черепащук А.М., *Каретников В.Г.*, 2003 // АЖ. Т. 80. С. 42.

Черепащук А.М., *Яриков С.Ф.*, 1991 // ПАЖ. Т. 17. С. 605.

Черепащук А.М. и др., 1967 — *Черепащук А.М.*, *Гончарский А.В.*, *Ягола А.Г.* // АЖ. Т. 44. С. 1239.

Черепащук А.М. и др., 1968 — *Черепащук А.М.*, *Гончарский А.В.*, *Ягола А.Г.* // АЖ. Т. 45. С. 1191.

Черепащук А.М. и др., 1973 — *Черепащук А.М.*, *Гончарский А.В.*, *Ягола А.Г.* // ПЗ. Т. 18. С. 535.

Черепащук А.М. и др., 1982 — *Черепащук А.М.*, *Асланов А.А.*, *Корнилов В.Г.* // АЖ. Т. 59. С. 1157.

Шакура Н.И., 1972 // АЖ. Т. 49. С. 921.

Шакура Н.И., 1985 //ПАЖ. Т. 11. С. 7.

Шапиро С., *Тьюколски С.*, 1985. Черные дыры, белые карлики и нейтронные звезды — М.: Мир. С. 357.

Шаховской Н.М., 1962 // АЖ. Т. 39. С. 755.

Шаховской Н.М., 1964 // АЖ. Т. 41. С. 1042.

Шацкий А.А., 2004 // АЖ. Т. 81. С. 579.

Шварцман В.Ф., 1971 // АЖ. Т. 48. С. 479.

Шварцшильд М., 1961. Строение и эволюция звезд — М.: ИЛ.

Шкловский И.С., 1962 // АЖ. Т. 39. С. 209.

Шулов О.С., 1967 // Астрофизика. Т. 3. С. 233.

Шулов О.С., *Копацкая Е.Н.*, 1974 // Астрофизика. Т. 10. С. 120.

Шульберг А.М., 1971. Тесные двойные звездные системы с шаровыми компонентами — М., Наука.

Щиголев Б.М., 1962, Математическая обработка наблюдений — М.: Физматгиз.

Юнгельсон Л.Р., 1973 //Научн. Информ. Астросов. АНСССР. Т. 27. С. 93.

Юнгельсон Л.Р., 2011, Эволюция взаимодействующих двойных звезд малых и умеренных масс. Докторская диссертация. М.: ин-т Астрономии РАН.

Юнгельсон Л.Р., *Масевич А.Г.*, 1982 // Итоги науки и техники. Серия Астрономия, ВИНИТИ. Т. 21. С. 27.

Яковлев Д.Г., *Урпин В.А.*, 1980 // АЖ. Т. 57. С. 526.

Abbott B.P. et al., 2009 // Nature. V. 460. P. 990.

Abbott D.C. et al., 1981 — *Abbott D.C.*, *Bieging J.H.*, *Churchwell E.* // ApJ. V. 250. P. 645.

Abramovicz M.A., *Kluzniak W.*, 2001 // Astron. Aph. V. 374. L19.

Abramowicz M.A. et al., 1988 //ApJ. V. 332. P. 646.

Abramowicz M.A. et al., 1995 — *Abramowicz M.A.*, *Chen X.*, *Kato S. et al.* // ApJ. V. 438. L37.

Abt H.A., 1961 // ApJ. Suppl. V. 6. P. 37.

Abt H.A., 1983 // Annual Rev. Astron. Aph. V. 21. P. 343.

Abt H.A., *Levy S.G.*, 1976 // ApJ. Suppl. V. 30. P. 273.

Abt H.A., *Morrell N.I.*, 1995 // ApJ. Suppl. V. 99. P. 135.

Abt H.A. et al., 1977 — *Abt H.A.*, *Hintzen P.*, *Levy S.G.* // ApJ.V. 213. P. 815.

Adelberger E.G. et al., 2007 — *Adelberger E.C.*, *Heckel B.R.*, *Hoedl S. et al.* // PRL. V. 98. id. 131104.

Adelberger E.G. et al., 2009 // PPNP V. 62. P. 102.

Agafonov M.I., 2004a // Astron. Nachr. V. 325. P. 259.

Agafonov M.I., 2004b // Astron. Nachr. V. 325. P. 263.

Agafonov M.I., *Sharova O.I.*, 2005 // Astron. Nachr. V. 326. P. 143.

Agafonov M.I. et al., 2006 — *Agafonov M.I.*, *Richards M.T.*, *Sharova O.I.* // ApJ. V. 652. P. 1547.

Agafonov M.I. et al., 2009 — *Agafonov M.I.*, *Sharova O.I.*, *Richard M.T.* //ApJ. V. 690. P. 1730.

Aharonian F. et al., 2005 // Science V. 309. P. 746.

Albayrak B. et al., 2004 — *Albayrak B.*, *Djurašević G.*, *Erkapić S.*, *Tanriverdi T.* // Astron. Aph. V. 420. P. 1039.

Albrecht S.et al., 2009 — *Albrecht S.*, *Reffert S.*, *Snellen I.A.G.*, *Winn J.N.* // Nature. V. 461. P. 373.

Alcock C. et al., 1993 — *Alcock C.*, *Akerlof C.W.*, *Allsman R.A. et al.* // Nature. V. 365. P. 621.

Alcock C. et al., 2000 — *Alcock C.*, *Allsman R.A.*, *Alves D.R. et al.* // ApJ. V. 542. P. 281.

Alexander D.R., *Ferguson J.W.*, 1994 // ApJ. V. 437. P. 879.

Al-Naimiy H.M., 1978 // Ap. Sp. Sci.V. 53. P. 181.

Alpar M.A., *Shaham J.*, 1985 // IAU Circ. № 4046.

Alpar M.A. et al., 1982 // Nature V. 300. P. 728.

Altamirano D., *Cavecchi Y.*, *Patruno A. et al.*, 2011 // ApJ. V. 727. L18.

Amato U., *Hughes W.*, 1991 // Invers Problems. V. 7. P. 793.

Amnuel P.R. et al., 1974 — *Amnuel P.R.*, *Guseinov O.H.*, *Rakhamimov Sh.Ju.* // Ap. Sp. Sci. V. 29. P. 331.

Amnuel P.R., *Guseinov O.H.*, 1979a // Ap. Space Sci. V. 63. P. 131.

Amnuel P.R. et al., 1979b — *Amnuel P.R.*, *Guseinov O.H.*, *Rakhamimov Sh.Ju.* // ApJ. Suppl. V. 41. P. 327.

Anders E., *Grevesse N.*, 1989 // Geochim et Cosmochim Acta. V. 53. P. 197.

Andersen J., 1975 // Astron. Aph. V. 44. P. 355.

Andersen J., 1991 // Astron. Aph. Rev. V. 3. P. 91.

Andersen J., *Vaz L.P.R.*, 1984 // Astron. Aph. V. 130. P. 102.

Andersen J., *Vaz L.P.R.*, 1987 // Astron. Aph. V. 175. P. 355.

Andersen J. et al., 1983 — *Andersen J.*, *Clausen J.V.*, *Gimenez A.*, *Nordstrom B.* // Astron. Aph. V. 128. P. 17.

Anderson S.F. et al., 1994 — *Anderson S.F.*, *Wachter S.*, *Margon B. et al.* // ApJ. V. 436. P. 319.

Andronov I.L., 2008 // J. of Physical Studies V. 12. P. 2902.

Anosova J.P., 1988 // Bull. Astron. Obs. Beograd V. 138. P. 13.

Antokhin I.I. et al., 1997 — *Antokhin I.I.*, *Cherepashchuk A.M.*, *Yagola A.G.* // Ap. Sp. Sci. V. 254. P. 111.

Antokhin I.I. et al., 1995 — *Antokhin I.I.*, *Marchenko S.V.*, *Moffat A.F.J.* // Proc. of the IAU Symp. № 163, Wolf-Rayet Stars: Binaries, Colliding Winds, Evolution, Eds. Van den Hucht K.A., Williams P.M. — Dordrecht: Kluwer Acad. Publ. P.520.

Antokhin I.I. et al., 2000 — *Antokhin I.I.*, *Moffat A.F.J.*, *Hill G.M.* // In: Tartu International Workshop: Thermal and Ionization Aspects of Flows from Hot Stars: Observations and Theory / Eds. H. Lamers and A. Sapar. — ASP Publishers. P. 295.

Antokhin I.I. et al., 2004 — *Antokhin I.I.*, *Owocki S.P.*, *Brown J.C.* // ApJ. V. 611. P. 434.

Antokhin I.I. et al., 2008 — *Antokhin I.I.*, *Rauw G.*, *Vreux J.M. et al.* // Astron. Aph. V. 477. P. 593.

Antokhina E.A. et al., 2000 — *Antokhina E.A.*, *Moffat A.F.J.*, *Antokhin I.I. et al.* // ApJ. V. 529. P. 463.

Anzer U. et al., 1987 — *Anzer U.*, *Burner G.*, *Monaghan J.J.* // Astron. Aph. V. 176. P. 235.

Archibald A.M. et al., 2009 — *Archibald A.M.*, *Stairs I.H.*, *Ransom S.M. et al.* // Science. V. 324. P. 1411.

Arkani-Hamed N. et al., 1998 — *Arkani-Hamed N.*, *Dimopoulos S.*, *Dvali C.* // Phys. Lett. B. V. 429. P. 263.

Arnett W.D., 1978 // in «Physics and Astrophysics of Neutron Stars and Black Holes» (eds. R. Giacconi, R. Ruffini) — Amsterdam: North Holl Publ. Comp. P. 346–356.

Arnett W.D., *Bowers R.L.*, 1977 // ApJ. Suppl. V. 33. P. 415.

Arthanari T.S., *Dodge Y.*, 1983. Mathematical Programming in Statistics — New-York: John Wiley an Sons.

Artymowicz P., *Lubov S.H.*, 1994 // ApJ. V. 421. P. 651.

Artymowicz P. et al., 1991 — *Artymowicz P.*, *Clarke C.J.*, *Lubov S.H.*, *Pringle J.E.* // ApJ. V. 370. L35.

Asai K. et al., 1998 — *Asai K.*, *Dotani T.*, *Hosni R. et al.* // Publ. Astron. Soc. Japan V. 50. P. 611.

Asai K. et al., 1996a // Publ. Astron. Soc. Japan V. 48. L27.

Asai K. et al., 1996b — *Asai K.*, *Dotani T.*, *Mitsuda K. et al.* // Publ. Astron. Soc. Japan V. 48. P. 257.

Ash C.D.T. et al., 1999 — *Ash C.D.T.*, *Reynolds A.P.*, *Roche P. et al.* // MNRAS. V. 307. P. 357.

Avni Y., 1976 // ApJ. V. 209. P. 574.

Avni Y., *Bahcall J.N.*, 1974 // ApJ. V. 192. L139.

Avni Y., *Bahcall J.*, 1975 // ApJ. V. 197. P. 675.

Baglin A., 2003 // Adv. Space Res. V. 31. P. 345.

Bagnuolo W.G. et al., 1992 — *Bagnuolo W.G.*, *Gies D.R.*, *Wiggs M.S.* // ApJ. V. 385. P. 708.

Bagot P., 1996 // Astron. Aph. V. 314. P. 576.

Bahcall J.N., *Bahcall N.A.*, 1972 // ApJ. V. 178. L1.

Bahcall J.N. et al., 1974 — *Bahcall J.N.*, *Dyson F.J.*, *Katz J.L.*, *Paczynski B.* // ApJ. V. 180. L17.

Bailes M. et al., 2002 — *Bailes M.*, *Nice D.J.*, *Thorsett S.E.*, (*eds.*) //Radio Pulsars, Astron. Society of the Pacific Series. V. 302. 404 p.

Bailes M. et al., 2003 — *Bailes M.*, *Ord S.M.*, *Knight H.S.*, *Hotan A.W.* // ApJ. V. 595. L49.

Bailey J., 1981 // MNRAS. V. 197. P. 31.

Bailyn C.D., 1992 // ApJ. V. 391. P. 298.

Bailyn C.D. et al., 1995 — *Bailyn C.D.*, *Orosz J.A.*, *McClintock J.E.*, *Remillard R.A.* // Nature. V. 378. P. 157.

Bailyn C.D. et al., 1998 — *Bailyn C.D.*, *Jain R.K.*, *Coppi P.*, *Orosz J.A.* //ApJ. V. 499. P. 367.

Balberg S. et al., 2000 — *Balberg S.*, *Zampieri L.*, *Shapiro S.L.* // ApJ. V. 541. P. 860.

Balbus S.A., *Hawley J.F.*, 1998 // Rev. Mod. Phys. V. 70. P. 1.

Barembaum M.J., *Etzel P.B.*, 1995 // Astron. J. V. 109. P. 2680.

Barker B.M., *O'Connell R.F.*, 1975 // ApJ. V. 199. L25.

Barnard A.J. et al., 1969 — *Barnard A.J.*, *Cooper J.*, *Shamey L.J.* // Astron. Aph. V. 1. P. 28.

Barnard R. et al., 2008 — *Barnard R.*, *Clark J.S.*, *Kolb V.C.* //Astron. Aph. V. 488. P. 697.

Barnes A.D. et al/, 2006 — *Barnes A.D.*, *Casares J.*, *Charles P.A. et al.* // MNRAS. V. 365. P. 296.

Barr J., 1908 // JRASC V. 2. P. 70.

Barret D. et al., 1992 — *Barret D.*, *Bouchet*, *L.*; *Mandrou*, *P. et al.* // ApJ. V. 394. P. 615.

Barret D. et al., 2001 — *Barret D.*, *van der Klis M.*, *Skinner G.K.*, *Staubert R.*, *Stella L.* // Ap. Sp. Sci. Suppl. V. 276. P. 305.

Bartolini C. et al., 1991 — *Bartolini C.*, *Guarnieri A.*, *Piccioni A. et al.* // in IAU Colloq № 129, Structure and Emission Properties of Accretion Disks, Eds. C. Bertout, et al. — Paris: Edition Frontieres. P. 373.

Bartzakos P. et al., 2001a — *Bartzakos P.*, *Moffat A.F.J.*, *Niemela V.S.* // MNRAS. V. 324. P. 18;

Bartzakos P. et al., 2001b — *Bartzakos P.*, *Moffat A.F.J.*, *Niemela V.S.* // MNRAS. V. 324. P. 33.

Barziv O. et al., 2001 — *Barziv O.*, *Kaper L.*, *van Kerkwijk M.H. et al.* // Astron. Aph. V. 377. P. 925.

Basri G. et al., 2005 — *Basri G.*, *Borucki W.J.*, *Koch D.* // New Astron. Rev. V. 49. P. 478.

Bassa C.G. et al., 2001 — *Bassa C.G.*, *Brisken W.F.*, *Nelemans G. et al.* // MNRAS. V. 412. L63.

Bassa C.G. et al., 2006a — *Bassa C.G.*, *van Kerkwijk M.H.*, *Kulkarni S.R.* // Astron. Ap. V. 450. P. 295.

Bassa C.G. et al., 2006b — *Bassa C.G.*, *van Kerkwijk M.H.*, *Koester D.*, *Verbunt F.* // Astron. Aph. V. 456. P. 295.

Bate M., 2000 // MNRAS. V. 314. P. 33.

Batten A.H., 1973. Binary and Multiple Systems of Stars — Oxford: Pergamon Press. P. 278.

Batten A.H., 1983 // JRASC. V. 77. P. 95.

Batten A.H., 1988 // PASP. V. 100. P. 160.

Batten A.M. et al., 1989 — *Batten A.M.*, *Fletcher J.M.*, *McCarthy D.G.*. Eight Catalogue of the Orbital Elements of Spectroscopic Binary Systems — Publ. DAO Victoria. V. XVII.

Bauer F.E., *Brandt W.N.*, 2004 // ApJ. V. 601. L67.

Beakman G. et al., 1997 — *Beakman G.*, *Shahbaz T.*, *Naylor T. et al.* // MNRAS. V. 290. P. 303.

Beals C.S., 1944 // MNRAS. V. 104. P. 205.

Becker R.H., *White R.L.*, 1995 // In K.A. van der Hucht and P.M. Williams (eds.). IAU Symp. № 163. P.450.

Becklin E.E. et al., 1972 — *Becklin E.E.*, *Kristian J.*, *Neugebauer G.*, *Wynn-Williams C.G.* // Nature Phys. Sci. V. 239. P. 130.

Beekman G. et al., 1997, MNRAS. V. 290. P. 303.

Begelman M.C., 1986, Nature V. 322. P. 614.

Begelman M.C. et al., 2006 — *Begelman M.C.*, *King A.R.*, *Pringle J.E.* // MNRAS. V. 370. P. 399.

Bekenstein J.D., *Bowers R.L.*, 1974 // ApJ. V. 190. P. 653.

Belloni T. et al., 1996 — *Belloni T.*, *Mendes M.*, *van der Klis M. et al.* // ApJ. V. 472. L107.

Belczynski K. et al., 2012 — *Belczynski K.*, *Wiktorowicz G.*, *Fryer C.L. et al.* // ApJ. V. 757. P. 91.

Bennett D.P. et al., 2002 — *Bennett D.P.*, *Becker A.C.*, *Quinn J.L. et al.* // ApJ. V. 579. P. 639.

Benson R.S., 1974 // BAAS. V. 2. P. 295.

Bergeron P. et al., 1991 — *Bergeron P.*, *Wesemael F.*, *Fontaine G.* // ApJ. V. 367. P. 253.

Bergeron P. et al., 1992 — *Bergeron P.*, *Saffer R.*, *Liebert J.* // ApJ. V. 394. P. 228.

Bertout C. et al., 2009 — *Bertout C.*, *Forveille T.*, *Langer N.*, *Shore S.* (*Eds.*) // Astron. Aph. V. 506. P. 1.

Beskin V.S., *Kuznetsova I.V.*, 2000 // Nuovo Cimento B. V. 115. P. 795.

Beuermann K. et al., 1998 — *Beuermann K.*, *Baraffe I.*, *Kolb U.*, *Weichhold M.* // Astron. Aph. V. 339. P. 518.

Bhat N.D.R. et al., 2008 — *Bhat N.D.R.*, *Bailes M.*, *Verbiest P.W.* // Phys. Rew. D. V. 77. id. 124017.

Bianchi L., *Garsia M.*, 2002 // ApJ. V. 581. P. 610.

Bilir S. et al., 2005 — *Bilir S.*, *Karatas Y.*, *Eker Z.*, *Demircan O.* // MNRAS. V. 357. P. 497.

Binnendijk L., 1970 // Vistas Astron. V. 12. P. 217.

Binnendijk L., 1977 // Vitas Astron. V. 21. P. 359.

Bisikalo D.V., 2005 // Ap. Sp. Sci. V. 296. P. 391.

Bisikalo D.V. et al., 1998 // MNRAS. V. 300. P. 39.

Bisnovatyi-Kogan G.S., 1987 // In Proc. of the ESO Workshop on the SN 1987A, Garching bei München, FKG, 6–8 July 1987, ESO Conf. and Workshop Proc. V.26, Ed. I.J. Danziger, Garching bei München, European Southern Obs. P.387.

Bisnovatyi-Kogan G.S., 1999 // In S.K. Chakrabarti (ed.). Observational Evidences for Black Holes in The Universe — Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. L1.

Bisnovatyi-Kogan G.S., *Blinnikov S.I.*, 1977 // Astron. Aph. V. 59. P. 111.

Bisnovatyi-Kogan G.S., *Lovelace R.V.*, 1997 // ApJ. V. 486. L43.

Bisnovatyi-Kogan G.S., *Lovelace R.V.E.*, 2000 // ApJ. V. 529. P. 978.

Bisnovatyi-Kogan G.S., *Lovelace R.V.E.*, 2001 // New Astron. Rev. V. 45. P. 663.

Bisnovatyi-Kogan G.S., *Nadyozhin D.K.*, 1972, // Ap. Sp. Sci. V. 15. P. 353.

Bisnovatyi-Kogan, *G.S.*; *Lamzin*, *S.A.*, 1984 // Sov. Astron. V. 28. P. 187.

Blaauw A., 1961 // Bull. Astron. Inst. Netherlands. V. 15. P. 265.

Blaaw A.B., 1961 // Bull. Astron. Inst. Netherlands. V. 15. P. 265.

Blaaw A.B., 1964 // Ann. Rev. Astron. Aph. V. 2. P. 213.

Blanford R.D., *Begelman M.C.*, 1999 // MNRAS. V. 303. L1.

Blanford R.D., *Payne D.G.*, 1982 // MNRAS. V. 199. P. 883.

Blanford R.D., *Rees M.J.*, 1992 // In: Testing the AGN Paradigm, Proc. of the 2-nd Annual Topical Astrophys. Conf., College Park, M.D., Oct 14–16, 1991, AIP Conf. Proc., V. 254, P. 3, Eds. S.S. Holt, S.G. Neff, C.M. Urry — New-York: American Institute of Physics.

Blanford R.D., *Teukolsky S.K.*, 1976 // ApJ. V. 205. P. 580.

Blanford R.D., *Znajek R.L.*, 1977 // MNRAS. V. 179. P. 433.

Block D.I. et al (*Eds.*), 2000, Toward a New Millenium in Galaxy Morfology, Proc. of an Intern. Conf., Midrand, South Africa, sept. 13-18, 1999; Dordrecht, Kluwer Acad. Publ.

Blundell K.M. et al., 2008 — *Blundell K.M.*, *Bowler M.G.*, *Schmidtobreick L.* // ApJ. V. 678. L47.

Bobinger A. et al., 1997 — *Bobinger A.*, *Horne K.*, *Mantel K.-H.*, *Wolf S.* // Astron. Aph. V. 327. P. 1023.

Bochkarev N.G., 1988 // Nature V. 332. P. 518.

Bochkarev N.G., *Karitskaya E.A.*, 1985 // Ap. Sp. Sci. V. 109. P. 1.

Bochkarev N.G. et al., 1985a — *Bochkarev N.G.*, *Karitskaya E.A.*, *Sahibullin N.A.* // Ap. Sp. Sci. V. 108. P. 15.

Bochkarev N.G. et al., 1985b — *Bochkarev N.G.*, *Karitskaya E.A.*, *Shakura N.I.* // Ap. Sp. Sci. V. 108. P. 1.

Bodenheimer P., 1978 // ApJ. V. 224. P. 488.

Bodenheimer P., 1992 // IAU Symp. No 151, «Evolutionary Process in Interacting Binary Stars», Y. Kondo, R.F. Sistero, R.S. Polidan (eds.) — Dordrecht: Kluwer. P. 9.

Bodenheimer P. et al., 1992 — *Bodenheimer P.*, *Ruzmaikina T.*, *Mathieu R.* // In: Protostars and Planets III / E. Levy, J. Lunine, M.S. Mattews (eds.) — Tucson: University of Arizona Press.

Boersma J., 1961 // Bull. Astron. Inst. Netherlands V. 15. P. 291.

Bogdanov M.B., 2001, astro-ph/0102031.

Bogdanov M.B., *Cherepashchuk A.M.*, 2008 // Ap. Sp. Sci. V. 317. P. 181.

Bogdanov M.B. et al., 1996 — *Bogdanov M.B.*, *Cherepashchuk A.M.*, *Sazhin M.V.* // Ap. Sp. Sci. V. 235. P. 219.

Bolton C.T., 1975 // ApJ. V. 200. P. 269.

Bonanos A.Z. et al., 2004 — *Bonanos A.Z.*, *Stanek K.Z.*, *Udalski A. et al.* // ApJ. V. 611. L33.

Bondi H., 1952 // MNRAS. V. 114. P. 195.

Bondi H., *Hoyle F.*, 1944 // MNRAS. V. 104. P. 273.

Bonnell I. et al., 1991 — *Bonnell I.*, *Martel H.*, *Bastien P. et al.* // ApJ. V. 377. P. 553.

Bonnet-Bidaud J.M., *Chardin G.*, 1988 // Phys. Rep. V. 170. P. 325.

Borisov N.V. et al., 1989 // In J. Hunt and B. Battrick (eds.), Two-Topics in X-ray Astronomy. I. X-ray Binaries — ESA Publ. P.305.

Boss A.P., 1991 //In: Close Binaries / J. Sahade, G. M. McClusky, Y. Kondo (eds.) — Dordrecht, Kluwer.

Boss A.P., 1991 // Nature V. 351. P. 298.

Bouchy F. et al., 2005 — *Bouchy F.*, *Pont F.*, *Melo C.*, *Santos N.C.*, *Mayor M.*, *Queloz D.*, *Urdy S.* // Astron. Aph. V. 431. P. 1105.

Boyarchuk A.A. et al., 2002 — *Boyarchuk A.A.*, *Bisikalo D.V.*, *Kuznetsov O.A.*, *Chechetkin V.M.*. Mass Transfer in Close Binary Stars — London and New York: Taylor and Francis.

Bozza V. et al, 2001 — *Bozza V.*, *Jetzer P.*, *Mancini L.*, *Scarpetta G.* // Astron. Aph. V. 382. P. 6.

Bradt H.V. et al., 1979 — *Bradt H.V.*, *Doxsey R.E.*, *Jernigan J.C.* // In: X-ray Astronomy / W.A. Baity and L.E. Peterson (eds.). — Oxford: Pergamon Press. P.3.

Bradt H.V., *McClintock J.E.*, 1983 // Ann. Rev. Astron. Aph. V. 21. P. 13.

Brancewicz H.K., *Dworak T.Z.*, 1980 // Acta Astron. V. 30. P. 502.

Brandt W.N. et al., 1995 — *Brandt W.N.*, *Podsiadlowski Ph.*, *Sigurdsson S.* // MNRAS. V. 277. L35.

Brandt W.N. et al., 1997 — *Brandt W.N.*, *Ward M.J.*, *Fabian A.C.*, *Hodge P.W.* // MNRAS. V. 291. P. 709.

Branduardi-Raymont G. et al., 1983 — *Branduardi-Raymont G.*, *Corbet R.H.D.*, *Mason K.O. et al.* // MNRAS. V. 205. P. 403.

Breger M. et al., 1996 — *Breger M.*, *van der Klis M.*, *van Paradijs J. et al.* // ApJ. V. 469. L13.

Brinkman W. et al., 1989 — *Brinkman W.*, *Kawai N.*, *Matsuoka M.* // Astron. Aph. V. 218. L13.

Brockscopp C. et al., 1999 — *Brockscopp C.*, *Tarasov A.E.*, *Lyuty V.M.*, *Roche P.* // Astron. Aph. V. 343. P. 861.

Brockscopp C. et al., 2001 // MNRAS. V. 323. P. 517.

Brown G.E., *Bethe H.A.*, 1994 // ApJ. V. 423. P. 659.

Brown G.E. et al., 1996 — *Brown G.E.*, *Weingartner J.C.*, *Wijers R.A.M.J.* // ApJ. V. 463. P. 297.

Brown J.C. et al., 1978 — *Brown J.C.*, *McLean I.S.*, *Emslie A.G.* // Astron. Aph. V. 68. P. 415.

Brown J.C. et al., 1982 — *Brown J.C.*, *Aspin C.*, *Simmons J.E.L.*, *Mc Lean I.S.* // MNRAS. V. 198. P. 787.

Brown J.C. et al., 1989 — *Brown J.C.*, *Carlaw V.A.*, *Cassinelli J.P.* // ApJ. V. 344. P. 341.

Brown T.M. et al., 2001 — *Brown T.M.*, *Charbonneau D.*, *Gilliland R.L.*, *Noyes R.W.*, *Burrows A.* // ApJ. V. 552. P. 699.

Brucato R.J., *Zappala R.R.*, 1974, ApJ. V. 189. L71.

Brumberg V.A., *Kopeikin S.M.*, 1989 // Nuovo Cim. V. 103B. P. 63.

Budaj J., 1996 // Astron. Aph. V. 313. P. 523.

Budaj J., 1997 // Astron. Aph. V. 326. P. 655.

Budding E., 1974 // Ap. Sp. Sci. V. 26. P. 371.

Budding E. et al., 2004 — *Budding E.*, *Erdem A.*, *Gicek C. et al.* // Astron. Aph. V. 417. P. 263.

Budding E. et al., 2006 — *Budding E.*, *Bembrick C.*, *Carter B.D. et al.* // Ap. Sp. Sci. V. 304. P. 11.

Burgay M. et al., 2003 // Nature. V. 426. P. 531.

Burrows A. et al., 2007 — *Burrows A.*, *Hubeny I.*, *Budai J.*, *Hubbard W.B.* // ApJ. V. 661. P. 502.

Butler R.P. et al., 1996 — *Butler R.P.*, *Marcy G.W.*, *Williams E. et al.* // PASP. V. 108. P. 500.

Callanan P.J. et al., 1998 — *Callanan P.J.*, *Garnavich P.M.*, *Koester D.* // MNRAS. V. 298. P. 207.

Camilo F., *Rasio F.A.*, 2005 // ASP Conf. Ser., V. 328. P. 147.

Campana S. et al., 1997 — *Campana S.*, *Mereghetti S.*, *Stella L.*, *Colpi M.* // Astron. Aph. V. 324. P. 941.

Cannizzo J.K., 1993 // ApJ. V. 419. P. 318.

Cannizzo J.K., 1999 // In S. Mineshige and J.C. Weeler (eds.), Disk Instabilities in Close Binary Systems — Tokyo: University Academic Press INC. P.177.

Cannizzo J.K. et al., 1982 — *Cannizzo J.K.*, *Ghost P.*, *Weeler J.C.* // ApJ. V. 260. L83.

Cannizzo J.K. et al., 1995 — *Cannizzo J.K.*, *Chen W.*, *Livio M.* // ApJ. V. 454. P. 880.

Cantrell A.G. et al., 2010 — *Cantrell A.G.*, *Bailyn C.D.*, *Orosz J.A. et al.* // ApJ. V. 710. P. 1127.

Carpano S. et al., 2007a — *Carpano S.*, *Pollock A.M.T.*, *Wilms J. et al.* // Astron. Aph. V. 461. L9.

Carpano S. et al., 2007b — *Carpano S.*, *Pollock A.M.T.*, *Prestwich A. et al.* // Astron. Aph. V. 466. L17.

Carramicana A. et al., 2001 — *Carramicana A.*, *Reimer O.*, *Thompson D.J.* (*Eds.*). The Nature of Unidentified Galactic High-Energy Gamma-Ray Sources. Proc. of the Workshop, Tonantzintla, Puebla, Mexico, 9-11 October 2000; Ap. Sp. Sci. Library. V. 267. — Dordrecht: Kluwer, Acad. Publ.

Casadio R., 2004 // Phys. Rev. D. V. 69. id. 084025.

Casares J., 2009 // arXiv: 0904,1116v1, Highlights of Spanish Astrophys. V, 2010, Aph. & Spase Sci. Proccedings.

Casares J., *Charles P.A.*, 1994 // MNRAS. V. 271. L5.

Casares J. et al., 1992 — *Casares J.*, *Charles P.A.*, *Naylor T.* // Nature. V. 355. P. 614.

Casares J. et al., 1993 — *Casares J.*, *Charles P.A.*, *Naylor T.*, *Pavlenko E.P.* // MNRAS. V. 265. P. 834.

Casares J. et al., 1995a — *Casares J.*, *Martin A.S.*, *Charles P.A. et al.* // MNRAS. V. 276. L35.

Casares J. et al., 1995b — *Casares J.*, *Charles P.A.*, *Marsh T.R.* // MNRAS. V. 277. L45.

Casares J. et al., 1996 — *Casares J.*, *Martin E.L.*, *Charles P.A. et al.* // New Astron. V. 1. P. 299.

Casares J. et al., 1997 — *Casares J.*, *Martin E.L.*, *Charles P.A.*, *Molaro P.*, *Rebolo R.* // New Astron. V. 1. P. 299.

Casares J. et al., 1998 — *Casares J.*, *Charles P.*, *Kuulkers E.* // ApJ. V. 493. L39.

Casares J. et al., 2002 — *Casares J.*, *Dubus G.*, *Shahbaz T.*, *Zurita C.*, *Charles P.A.* // MNRAS. V. 329. P. 29.

Casares J. et al., 2004a // ApJ. V. 613. L133.

Casares J. et al., 2004b — *Casares J.*, *Steeghs D.*, *Hynes R.I. et al.* // Compact Binaries in the Galaxy and Beyond, Proceedings of the conference held 17-22 November, 2003 in La Paz, Baja California Sur. Edited by G. Tovmassian and E. Sion. Revista Mexicana de Astronomia y Astrofisica (Serie de Conferencias) IAU Colloquium 194. V. 20. P. 21.

Casares J. et al., 2005 — *Casares J.*, *Ribo M.*, *Ribas I. et al.* // MNRAS. V. 364. P. 899.

Casares J. et al., 2009 — *Casares J.*, *Orosz J.A.*, *Zurita C. et al.* // ApJ. Suppl. Series. V. 181. P. 238.

Casares J. et al., 2010 — *Casares J.*, *Gonzalez Hernandez J.I.*, *Izraelian G.*, *Rebolo R.* // MNRAS. V. 401. P. 2517.

Castelli F. et al., 1997 — *Castelli F.*, *Gratton R.G.*, *Kurucz R.L.* // Astron. Aph. V. 318. P. 841.

Castro-Tirado A.J. et al., 1992a — *Castro-Tirado A.J.*, *Brandt*, *S.*, *Lund*, *N.*. IAU Circ. № 5590.

Castro-Tirado A.J. et al., 1992b — *Castro-Tirado A.J.*, *Pavlenko E.P.*, *Salyapikov A. et al.* IAU Circ. № 5588.

Castro-Tirado A.J. et al., 2001 — *Castro-Tirado A.J.*, *Greiner J.*, *Paredes J.M.* (*Eds.*). Microquasars; Proc. of the 3-rd Microquasar Workshop on Galactic Relativistic Jets Sources, Granada, Spain, 11-13 Sept. 2000, Ap. Space Sci V. 276. — Dordrecht: Kluwer Acad. Publ.

Catalan S. et al., 2008a — *Catalan S.*, *Isern J.*, *Garcia-Berro E.*, *Ribas I.* // MNRAS. V. 387. P. 1693.

Catalan S. et al., 2008b — *Catalan S.*, *Isern J.*, *Garcia-Berro E.*, *Ribas I. et al.* // Astron. Aph. V. 477. P. 213.

Catalano S.et al., 1988 — *Catalano S.*, *Marilli E.*, *Trigilio C.* // In: Formation and Evolution of low Mass Stars / A.K.Dupree and M.T.V.T. Lago (eds). — Dordrecht: Kluwer, P.377.

Caughlan G.R. et al., 1985 — *Caughlan G.R.*, *Fowler W.A.*, *Harris M.J. et al.* // Atom. Data and Nucl. Data Tabl. V. 32. P. 197.

Cester B. et al., 1979 — *Cester B.*, *Giuricin G.*, *Mardirossian F. et al.* // Astron. Aph. Suppl. V. 36. P. 273.

Chagelishvili G.D. et al., 1989 — *Chagelishvili G.D.*, *Lominadze J.G.*, *Rogava A.D.* // ApJ. V. 347. P. 1100.

Chakrabarti S.K. (*Ed.*), 1999, Observational Evidences for Black Holes in the Universe // Ap. Sp. Sci. Library. V.234 — Dordrecht: Kluwer Acad. Publ.

Chakrabarty D., *Roche P.*, 1997 // ApJ. V. 489. P. 254.

Chamblin A. et al., 2000 — *Chamblin A.*, *Hawking S.W.*, *Reall H.S.* // Physical Review D (Particles, Fields, Gravitation, and Cosmology). V. 61, id. 065007.

Chambliss C.R., 1992a // PASP. V. 104. P. 663.

Chambliss C.R., 1992b // IAU Symp. No 151, «Evolutionary Progress in Interacting Binary Stars», Y. Kondo, R.F. Sistero, R.S. Polidan (eds.) — Dordrecht: Kluwer. P. 315.

Champion D.J. et al., 2004 — *Champion D.J.*, *Lorimer D.R.*, *McLaughlin M.A. et al.* // MNRAS. V. 350, L61.

Champion D.J. et al., 2005 — *Champion D.J.*, *Lorimer D.R.*, *McLaughlin M.A. et al.* // MNRAS. V. 363, P. 929.

Champion D.J. et al., 2008 — *Champion D.J.*, *Ransom S.M.*, *Lazarus P. et al.* // Science V. 320. P. 1309.

Chandrasekhar S., 1933a // MNRAS. V. 93. P. 449.

Chandrasekhar S., 1933b // MNRAS. V. 93. P. 539.

Chandrasekhar S., 1934 // MNRAS. V. 94. P. 444.

Chandrasekhar S., 1946 // ApJ. V. 103. P. 365.

Chandrasekhar S., 1950 // Radiative Transfer — Oxford: Clarendon Press.

Chandrasekhar S., 1960 // Radiative Transfer — New York: Dover. P.36.

Charbonneau D. et al., 2000 — *Charbonneau D.*, *Brown T.M.*, *Latham D.W.*, *Mayor M.* // ApJ. V. 529. L45.

Charles P.A., 1998 // In: Theory of Black Hole Accretion Disks / Eds. M.A. Abramowicz, G. Bjurnsson, J.E. Pringle — Cambridge: Cambridge Univ. Press. P.1.

Charles P.A., 1999 // In: Theory of Black Holes and Accretion Disks / Eds. M. Abramowicz et al. — Cambridge: Cambridge University Press. P.1.

Charles P.A., 2001 // In: Black Holes in Binaries and Galactic Nuclei: Diagnostic, Demography and Formation / Eds. L. Kaper, E.P.J. van den Heuvel and P.A. Woudt. V.27 — Berlin: Springer.

Charles P.A. et al., 1988 — *Charles P.A.*, *Hassall B.J.M.*, *Machin G.*, *Smale A.P.*, *Allington-Smith J.*, *Corbet R.*. IAU Circ. № 4609.

Charles P.A. et al., 1991 — *Charles P.A.*, *Kidger M.P.*, *Pavlenko E.P. et al.* // MNRAS. V. 249. P. 567.

Chen W.-C., *Panei J.A.*, 2011 // Astron. Ap. V. 527. P. 128.

Chen W. et al., 1997 — *Chen W.*, *Shrader C.R.*, *Livio M.* // ApJ. V. 491. P. 312.

Chen W. et al., 2006 — *Chen W.-C.*, *Li X.-D.*, *Qian S.-B.* // ApJ. V. 649. P. 973.

Cheng F.N. et al., 1995 — *Cheng F.N.*, *Vrtilek S.D.*, *Raymond J.C.* // ApJ. V. 452. P. 825.

Cheng F.H. et al., 1997 — *Cheng F.H.*, *Sion E.M.*, *Horne K. et al.* // Astron.J. V. 114. P. 1165.

Cherepashchuk A.M., 1981 // MNRAS. V. 194. P. 761.

Cherepashchuk A.M., 1988 // Sov. Sci. Rev. Ap. Space Phys. / ed. R.A.Sunyaev. V. 7. P. 1.

Cherepashchuk A.M., 1991 // In: Wolf-Rayer Stars and Interrelation with Other Massive Stars in Galaxies, IAU Symp. № 143 / Eds. K.A. van der Hucht, B.Hidayat. — Dordrecht: Kluwer Acad. Publ. P.280.

Cherepashchuk A.M., 1995a // Proc. Of the IAU Symp. № 163, Wolf-Rayet Stars: Binaries, Colliding Winds, Evolution / Eds. Van den Hucht K.A., Williams P.M. — Dordrecht: Kluwer Acad. Publ. P.262.

Cherepashchuk A.M., 1995b // Space Sci. Rev. V. 74. P. 313.

Cherepashchuk A.M., 1996 // Proc. of the 33-rd Liege Intern. Astroph. Coll. Wolf-Rayet Stars in the Framework of Stellar Evolution / Eds. Vreux J.-M. et al. Liege. P.155.

Cherepashchuk A.M., 2000a // Ap. Sp. Sci. V. 274. P. 159.

Cherepashchuk A.M., 2000b // Proc. Of the Workshop: Thermal and Ionization Aspects of Flows from Hot Stars: Observations and Theory / Eds. Lamers H.J.G.L.M., Sapar A. ASP Conf. Ser. V. 204. P. 249.

Cherepashchuk A.M., 2000c // Space. Sci. Rev. V. 93. P. 473.

Cherepashchuk A.M., 2002 // Space Sci. Rev. V. 102. P. 23.

Cherepashchuk A.M., 2005 // In: Zdenek Kopal's Binary Star Legacy, eds. H. Drechsel and M. Zejda, Springer, P. 55 (Reprinted from. Ap. Sp. Sci, 2005, 296, № 1–4).

Cherepashchuk A.M., 2007 // Astron. Astroph. Transactions V. 26. P. 35.

Cherepashchuk A.M., *Aslanov A.A.*, 1984 // Ap. Sp. Sci. V. 102. P. 97.

Cherepashchuk A.M., *Moffat A.F.J.*, 1994 // ApJ. V. 424. L53.

Cherepashchuk A.M. et al., 1972 — *Cherepashchuk A.M.*, *Efremov Yu.N.*, *Kurochkin N.E. et al.* // IBVS. № 720.

Cherepashchuk A.M. et al., 1984 — *Cherepashchuk A.M.*, *Eaton J.A.*, *Khaliullin Kh.F.* // ApJ. V. 281. P. 774.

Cherepashchuk A.M. et al., 1995a — *Cherepashchuk A.M.*, *Bychkov K.V.*, *Seifina E.V.* // Ap. Sp. Sci. V. 229. P. 33.

Cherepashchuk A.M. et al., 1995b — *Cherepashchuk A.M.*, *Koenigsberger G.*, *Marchenko S.V.*, *Moffat A.F.J.* // Astron Aph. V. 293. P. 142.

Cherepashchuk A.M. et al., 1996 — *Cherepashchuk A.M.*, *Katysheva N.A.*, *Khruzina T.S.*, *Shugarov S.Yu.*. Highly Evolved Close Binary Stars: Catalog. — Brusseles: Gordon and Breach.

Cherepashchuk A.M. et al., 2005 — *Cherepashchuk A.M.*, *Sunyaev R.A.*, *Fabrika S.N. et al.* // Astron. Aph. V. 437. P. 561.

Cherepashchuk A.M. et al., 2009 — *Cherepashchuk A.M.*, *Sunyaev R.A.*, *Postnov K.A. et al.* // MNRAS. V. 397. P. 479.

Cherepashchuk A.M. et al., 2003 — *Cherepashchuk A.M.*, *Sunyaev R.A.*, *Seifina E.V. et al.* // Astron. Aph. V. 411. L441.

Cherepashchuk A.M. et al., 2007 — *Cherepashchuk A.M.*, *Sunyaev R.A.*, *Seifina E.V. et al.* // VI INTEGRAL Workshop. The Obscured Universe / Eds. S.Grebenev, R.Sunyaev, C.Winkler. ESA SP-632. P. 319.

Chernyi G.G., 1961. Introduction to Hypersonic Flow — New York: Academic Press.

Chevalier C., *Ilovaisky S.A.*, 1992 // IAU Circ. № 5520, P. 1.

Chevalier C., *Ilovaisky S.A.*, 1993 // Astron. Aph. V. 269. P. 301.

Chevalier C., *Ilovaisky S.A.*, 1994 // IAU Circ. № 5974.

Chevalier C., *Ilovaisky S.A.*, 1995 // Astron. Aph. V. 297. P. 103.

Chevalier C. et al., 1989 — *Chevalier C.*, *Ilovaisky S.A.*, *van Paradijs J. et al.* // Astron. Aph. V. 210. P. 114.

Chlebovski T., *Garmany C.D.*, 1991 // ApJ. V. 368. P. 241.

Chochol D. et al., 2005 — *Chochol D.*, *Pribulla T.*, *Katysheva N.A.*, *Shugarov S. Yu.*, *Volkov I.M.* // Ap.Sp.Sci. V. 296. P. 135.

Chodil G.et al., 1968 — *Chodil G.*, *Mark H.*, *Rodrigues R.*, *Swift C.D.* // ApJ. V. 152. L45.

Ciatti F. et al., 1980 — *Ciatti F.*, *Mammano A.*, *Margoni R. et al.* // Astron. Aph. Suppl. V. 41. P. 143.

Claret A., 1995 // Astron. Aph. Suppl. V. 109. P. 441.

Claret A., 1999 // Astron. Aph. V. 350. P. 56.

Claret A., 2000a // Astron. Aph. V. 359. P. 289.

Claret A., 2000b // Astron. Aph. V. 363. P. 1081.

Claret A., 2004a // Astron. Aph. V. 424. P. 919.

Claret A., 2004b // Astron. Aph. V. 428. P. 1001.

Claret A., 2009 // Astron. Aph. V. 506. P. 1335.

Claret A., *Cunha N.C.S.*, 1997 // Astron. Aph., V. 318. P. 187.

Claret A., *Gimenez A.*, 1989 // Astron. Aph. V. 81. P. 37.

Claret A., *Gimenez A.*, 1992 // Astron Aph. Suppl. V. 96. P. 255.

Claret A., *Gimenez A.*, 1993 // Astron. Aph. V. 277. P. 487.

Claret A., *Hauschildt P.H.*, 2003 // Astron. Aph. V. 412. P. 241.

Claret A. et al., 1995a — *Claret A.*, *Gimenez A.*, *Cunha N.C.S.* // Astron. Aph. V. 299. P. 724.

Claret A. et al., 1995b — *Claret A.*, *Diaz-Cordoves J.*, *Gimenez A.* // Astron. Aph. Suppl. V. 114. P. 247.

Clark D.H., *Murdin P.*, 1978 // Nature V. 276. P. 54.

Clark J.S., *Crowther P.A.*, 2004 // Astron. Aph. V. 414. L45.

Clark J.S. et al., 2001 // Astron. Aph. V. 376. P. 476.

Clark J.S. et al., 2002 — *Clark J.S.*, *Goodwin S.P.*, *Crowther P.A. et al.* // Astron. Aph. V. 392. P. 909.

Clausen J.V., 1996 // Astron. Aph. V. 308. P. 151.

Clausen J.V. et al., 1983 — *Clausen J.V.*, *Nordstrom B.*, *Reipurth B.* // Astron. Aph. Suppl. V. 52. P. 323.

Clausen J.V. et al., 2003 — *Clausen J.V.*, *Strom J.*, *Larsen S.S.*, *Gimenez A.* // Astron. Aph. V. 402. P. 509.

Cochran W., 1996, In: SUBARU Telescope Tech. Rep., NAOJ 55, Proc. Workshop on High Resolution Data Processing, eds. M. Iye, T. Takata. J. Wampler. P.30.

Colbert E.J.M., *Mushotzky R.F.*, 1999 // ApJ. V. 519. P. 89.

Collins G.W., *Sonneborn G.H.*, 1977 // ApJ. Suppl. V. 34. P. 41.

Colpi M. et al. (eds.), 2009. Physics of Relativistic Objects in Compact Binaries: From Birth to Coalescence — UK-Netherlands, Dordrecht: Springer, Astrophys. and Space Science Library. V. 359.

Combi J.A. et al., 2004 — *Combi J.A.*, *Cellone S.A.*, *Marti J. et al.* // Astron. Aph. V. 427. P. 959.

Cominsky L. et al., 1978 — *Cominsky L.*, *Jones C.*, *Forman W.*, *Tananbaum H.* // ApJ. V. 224. P. 46.

Conti P.S., 1976 // Mem. Soc. R. Sci. Liege V. 9. P. 193.

Conti P.S., 1984 // In: Observational Test of Stellar Evolution Theory, IAU Symposium 105 / Ed. A. Maeder and A. Rensini — Dordrecht: Reidel, 1984. P.233.

Conti P.S., *Cowley A.P.*, 1975 // ApJ. V. 200. P. 133.

Conti P.S. et al., 2008 — *Conti P.S.*, *Crowther P.A.*, *Leitherer C.*. From Luminous Hot Stars to Starburst Galaxies — Cambridge: Cambridge Univ. Press.

Cooke B.A. et al., 1978 — *Cooke B.A.*, *Fabian A.C.*, *Pringle J.E.* // Nature. V. 273. P. 645.

Corbel S. et al., 2000 — *Corbel S.*, *Fender R.P.*, *Tzioumis A.K. et al.* // Astron. Aph. V. 359. P. 251.

Corcoran M., 2003 // In: K.A. van der Hucht, A. Herrero,C.Esteban (eds.), A. Massive Star Odissey, from Main Sequence to Supernova, Proc. of IAU Symp. № 212, ASP conf. ceries. P.130.

Cordes J.M., 1986 // ApJ. V. 311. P. 183.

Corongiu A. et al., 2007 — *Corongiu A.*, *Kramer M.*, *Stappers B.W.* // Astron. Aph. V. 462. P. 703.

Counselman C.C., 1973 // ApJ. V. 180. P. 307.

Cowley A.P., 1992 // Ann. Rev. Astron. Aph. V. 30. P. 287.

Cowley A.P., *Hutchings J.B.*, 1976 // PASP. V. 88. P. 456.

Cowley A.P. et al., 1983 — *Cowley A.P.*, *Crampton D.*, *Hutchings J.B. et al.* // ApJ. V. 272. P. 118.

Cowley A.P. et al., 1991 — *Cowley A.P.*, *Schmidke P.C.*, *Ebisawa K. et al.* // ApJ. V. 381. P. 526.

Cowling T.G., 1938 // MNRAS. V. 98. P. 734.

Cox J.P., *Giuli R.T.*, 1968. Principles of Stellar Structure I and II. — Gordon and Breach.

Crampton D., *Hutchings J.*, 1981 // ApJ. V. 251. P. 604.

Crampton D. et al., 1978 — *Crampton D.*, *Hutchings J.B.*, *Cowley A.P.* // ApJ. V. 225. L63.

Crampton D. et al., 1980 — *Crampton D.*, *Cowley A.P.*, *Hutchings J.B.* // ApJ. V. 235. L131.

Crampton D. et al., 1985 — *Crampton D.*, *Hutchings J.B.*, *Cowley A.P.* // ApJ. V. 299. P. 839.

Crawford J.A., 1955, ApJ. V. 121. P. 71.

Crowther P.A., 2005, MNRAS. V. 363. L46.

Crowther P.A., 2006. Stellar Evolution at Low Metallicity: Mass Loss, Explosions // Cosmology ASP Conference Series, Proceedings of the Conference Held 15-19 August, 2005 in Tartu, Estonia. V. 353. P. 157.

Crowther P.A. et al., 2002 — *Crowther P.A.*, *Hillier D.J.*, *Evans C.J. et al.* // ApJ. V. 579. P. 774.

Crowther P.A. et al., 2010a — *Crowther P.A.*, *Barnard R.*, *Carpano S. et al.* // MNRAS. V. 403. L41.

Crowther P.A. et al., 2010b — *Crowther P.A.*, *Schnurr O.*, *Hirschi R. et al.* // MNRAS. V. 408. P. 731.

Cruz-Gonzales C. et al., 1974 — *Cruz-Gonzales C.*, *Recillas-Cruz E.*, *Costero R.*, *Peimbert M.*, *Torres-Peimbert S.* // Rev. Mex. As. Ap. V. 1. P. 211.

Cui W., *Zhang S.N.*, *Chen W.*, 1998 // ApJ. V. 492. L53.

D'Amico N. et al., 2001 — *D'Amico N.*, *Lyne A.G.*, *Manchester R.N. et al.* // ApJ. V. 548. L171.

D'Antona F., *Mazzitelli I.*, 1990 // Annual Rev. Astron. Aph. V. 28. P. 139.

D'Odoriko S. et al., 1991 — *D'Odoriko S.*, *Oosterloo T.*, *Zwitter T.*, *Calvani M.* // Nature. V. 353. P. 329.

D'Souza M.C.R. et al., 2006 — *D'Souza M.C.R.*, *Molt P.M.*, *Tholine J.E.*, *Frank J.* // ApJ. V. 643. P. 381.

Damour T., *Deruelle N.*, 1985 // Ann. Inst. Henri Poincare, Physique Theorique V. 43. P. 107.

Damour T., *Deruelle N.*, 1986 // Ann. Inst. Henri Poincare Sect. A V. 44. P. 263.

Damour T., *Ruffini R.C.B.*, 1974 // Acad. Sci. Ser. A, Sci. Math. (Paris). V. 279. P. 971.

Damour T., *Taylor J.H.*, 1992 // Phys. Rev. D. V. 45. P. 1840.

Darwin G.H., 1879 // Phil. Trans. Roy. Soc. V. 170. P. 1.

Darwin G.H., 1900 // MNRAS. V. 60. P. 82.

Datta B., 1988 // Fundam. Cosmic Phys. V. 12. P. 151.

Davidson K., *Ostriker J.P.*, 1973 // ApJ. V. 179. P. 585.

Davies R.E., *Pringle J.E.*, 1980 // MNRAS. V. 191. P. 599.

Davis S.W. et al., 2006 — *Davis S.W.*, *Done C.*, *Blaes O.M.* // ApJ. V. 647. P. 525.

Dawidsen A. et al., 1977 — *Dawidsen A.*, *Malina M.*, *Bower S.* // ApJ. V. 211. P. 866.

Deb S., *Singh H.P.*, 2011 // MNRAS. V. 412. P. 1787.

De Kool M., 1990 // ApJ. V. 358. P. 189.

De Kool M. et al., 1987 — *De Kool M.*, *van den Heuvel E.P.J.*, *Pylyser E.* // Astron. Aph. V. 183. P. 47.

De la Force C. et al., 2001 — *De la Force C.*, *Spencer R.*, *Stirling A.*, *Garrett M.*, *Fender R.* // Ap. Sp. Sci. Suppl. V. 276. P. 121.

De Loore C.W.H., *De Greve J.P.*, 1976 // In: Structure and Evolution of Close Binary Systems / Eds. P. Eggleton. S. Mitton, J. Whelan. — Dordrech: Reidel Publ. comp. P.27.

De Loore C.W.H., *Doom C.*, 1992. Structure and Evolution of Single and Binary Stars — Dordrecht: Kluwer Acad. Publ. 458 p.

Deeter J.E. et al., 1981 — *Deeter J.E.*, *Boynton P.E.*, *Pravdo S.H.* // ApJ. V. 247. P. 1003.

Delfosse X. et al., 2000 — *Delfosse X.*, *Fortveille T.*, *Segransen D. et al.* // Astron. Aph. V. 364. P. 217.

Delgado-Donate E.J. et al., 2004 — *Delgado-Donate E.J.*, *Clarke C.J.*, *Bate M.R.*, *Hodgkin S.T.* // MNRAS. V. 351. P. 617.

Della Valle M. et al., 1991 — *Della Valle M.*, *Jarvis B.J.*, *West R.M.* // Astron. Aph. V. 247. L33.

Demircan O. et al., 2006 — *Demircan O.*, *Eker Z.*, *Karatas Y.*, *Bilir S.* // MNRAS. V. 366. P. 1511.

De Mink S.E. et al., 2009 — *De Mink S.E.*, *Cantiello M.*, *Langer N.*, *Pols O.R.*, *Brott I.*, *Yoon S.-Ch.* // Astron. Aph., V. 497. P. 243.

De Mink S.E. et al., 2010 — *De Mink S.E.*, *Cantiello M.*, *Langer N.*, *Pols O.R.*, *Yoon S.-Ch.* // Proc. of a conference held June 8–12, 2009 in Brno, Czech Republic. Eds A. Prša and M. Zejda. San Francisco: Astronomical Society of the Pacific. P. 179; arXiv:0910,3694v1.

Demorest P.B. et al., 2010 — *Demorest P.B.*, *Pennucci T.*, *Ransom S.M. et al.* // Nature. V. 467. P. 1081.

Dewey R.J., *Cordes J.M.*, 1987 // ApJ. V. 321. P. 780.

Dewi J.D.M., *Tauris T.M.*, 2000 // Astron. Aph. V. 360. P. 1043.

Diaz-Cordoves J., *Gimenez A.*, 1992 // Astron. Aph. V. 227. P. 259.

Diaz-Cordoves J., *Gimenez A.*, 1992 // Astron. Aph. V. 259. P. 227.

Diaz-Cordoves J. et al., 1995 — *Diaz-Cordoves J.*, *Claret A.*, *Gimenez A.* // Astron. Aph. V. 110. P. 329.

Dickey J.M., 1983 // ApJ. V. 273. L71.

Djurašević G., 1986 // Ap. Sp. Sci. V. 124. P. 5.

Djurašević G., 1992a // Ap. Sp. Sci. V. 196. P. 241.

Djurašević G., 1992b // Ap. Sp. Sci. V. 197. P. 17.

Djurašević G. et al., 1998 — *Djurasevic G.*, *Zakirov M.*, *Hojaev A.*, *Arzumanyants G.* // Astron. Aph. Suppl. V. 131. P. 17.

Djurašević G. et al., 2001 — *Djurasevic G.*, *Rovithis-Livaniou H.*, *Rovithis P. et al.* // Astron. Aph. V. 367. P. 840.

Djurašević G. et al., 2003 — *Djurasevic G.*, *Rovithis-Livaniou H.*, *Rovithis P. et al.* // Astron. Aph. V. 402. P. 667.

Djurašević G. et al., 2005 — *Djurasevic G.*, *Rovithis-Livaniou H.*, *Rovithis P.*, *Borkovits T.*, *Biro I.B.* // New Astronomy V. 10. P. 517.

Djurašević G. et al., 2006 — *Djurašević G., Rovithis-Livaniou H., Rovithis P. et al.* // Astron. Aph. V. 445. P. 291.

Doeleman S.S. et al., 2008 // Nature V. 455. P. 78.

Done C. et al., 1992 — *Done C., Mulchaey J.S., Mushotzky R.F., Arnaud K.A.* // ApJ. V. 395. P. 275.

Drake J.J., Sarna M.J., 2003 // ApJ. V. 594. L55.

Drake A.J. et al., 2010 // arXiv:1009.3048v1.

Drissen L. et al., 1986a — *Drissen L., Lamontagne R., Moffat A.F.J., Bastein P., Seguin M.* // ApJ. V. 304. P. 188.

Drissen L. et al., 1986b — *Drissen L., Moffat A.F.J., Bastein P., Lamontagne R.* // ApJ. V. 306. P. 215.

Dryomova G.N., Svechnikov M.A., 2003 // Ap. Sp. Sci. V. 283. P. 309.

Dryomova G.N. et al., 2005 — *Dryomova G.N., Perevozkina E.L., Svechnikov M.A.* // Astron. Aph. V. 437. P. 375.

Dubus G. et al., 1999a — *Dubus G., Charles P.A., Long K.S. et al.* // MNRAS. V. 302. P. 731.

Dubus G. et al., 1999b — *Dubus G., Lasota J.-P., Hameury J.-M., Charles P.* // MNRAS. V. 303. P. 139.

Dunham E.W. et al., 2010 // ApJ. V. 713. L136.

Duquennoy A., Mayor M., 1992 // In: Binaries as Tracers of Stellar Formation / M. Mayor (ed.) — Geneva: Geneva Obs.

Eaton J. et al., 1985a — *Eaton J., Cherepashchuk A.M., Khaliullin Kh.F.* // ApJ. V. 296. P. 222.

Eaton J. et al., 1985b — *Eaton J., Cherepashchuk A.M., Khaliullin Kh.F.* // ApJ. V. 297. P. 266.

Ebisawa K. et al., 1989 — *Ebisawa K., Mitsuda K., Inoue H.* // Publ. Astron. Soc. Japan. V. 41. P. 159.

Ebisawa K. et al., 1994 // Publ. Astron. Soc. Japan V. 46. P. 375.

Echevarria J., 1983 // Rev, Mex. Astron. Astrof. V. 8. P. 109.

Eddington A.S., 1926 // MNRAS. V. 86. P. 320.

Eddington A.S., Plakidis S., 1929 // MNRAS. V. 90. P. 65.

Edwards R.T., Bailes M., 2001 // ApJ. V. 547. P. 37.

Eggermont P.P., 1993 // SIAM J. Math. Anal. V. 24. P. 1557.

Eggleton P.P., 1983 // ApJ. V. 268. P. 368.

Eggleton P.P., 2006. Evolutionary Processes in Binary and Multiple Stars. — Cambridge, UK: Cambridge Univ. Press.

Eggleton P.P., Kisseleva L.G., 2001 // ApJ. V. 562. P. 1012.

Eggleton P.P., Kisseleva-Eggleton L., 2006 // Ap. Sp. Sci. V. 304. P. 73.

Eggleton P.P., Verbunt F., 1986 // MNRAS. V. 220. P. 13P.

Eichler D., Usov V.V., 1993 // ApJ. V. 402. P. 271.

Eikenberry S.S. et al., 1998 // ApJ. V. 494. L61.

Eikenberry S.S. et al., 2004 — *Eikenberry S.S., Matthews K., La Vine J.L. et al.* // ApJ. V. 616. P. 506.

Einstein A., Rosen N., 1935 // Phys. Rev. V. 48. P. 73.

Eiroa E. et al., 2001 — *Eiroa E., Romero G.E., Gustavo E., Torres D.F.* // Modern Phys. Lett. A V. 16. P. 973.

Eker Z. et al., 2006 — *Eker Z., Demircan O., Bilir S., Karatas Y.* // MNRAS. V. 373. P. 1483.

Eldridge, 2007 // MNRAS. V. 377. L29.

Elebert P. et al., 2008 — *Elebert P., Callanan P.J., Filippenko A.V. et al.* // MNRAS. V. 383. P. 1581.

Elebert P. et al., 2009 — *Elebert P.*, *Reynolds M.T.*, *Callanan P.J. et al.* // MNRAS. V. 395. P. 884.

Emparan R. et al., 2003 — *Emparan R.*, *Garcia-Bellido J.*, *Kaloper N.* // J. High Energy Phys. V. 0301. P. 079.

Engl H.W., *Landl G.*, 1993 // SIAM J. Numer. Anal. V. 30. P. 1509.

Ergma E., 1998 // In: Modern Problems of Stellar Evolution / D.S. Wiebe (ed.). Proc. Int. Conf. Problems of Stellar Evolution, Zvenigorod, GEOS edition, Moscow, P.208.

Ergma E., *Fedorova A.V.*, 1998 // Astron. Aph. V. 338. P. 69.

Ergma E., *van den Heuvel E.P.J.*, 1998 // Astron. Aph. V. 331. L29.

Esin A.A. et al/, 1997 — *Esin A.A.*, *McClintock J.M.*, *Narayan R.* // ApJ. V. 489. P. 865.

Etzel P.B., 1975. Master Thesis, San Diego Stat Univ.

Etzel P.B., 1981 // In: Photometric and Spectroscopic Binary Systems / Carling E.B. and Kopal Z. (eds). NATO AST Ser. C., 69. — Dordrecht: Kluwer. P.111.

Euler L., 1766 // Novi Comment. Acad. Scient. Petropolitanae. V. 10. P. 544.

Euler L., 1767 // Novi Comment. Acad. Scient. Petropolitanae. V. 11. P. 144.

Evans D.S., 1971 // Highlight of Astronomy, ed. de Jager C. V. 2. P. 601 — Dordrecht: Reidel.

Evans C.R. et al., 1987 — *Evans C.R.*, *Iben I.J.*, *Smarr L.* // ApJ. V. 323. P. 129.

Van't Veer F., 1960 // Rech. Astron. Obs. Utrecht. V. 14, №3.

Fabian A.C. et al., 1975 — *Fabian A.C.*, *Pringle J.E.*, *Rees M.J.* // MNRAS. V. 172. P. 15.

Fabrika S.N., 2004 // Astrophys. Space Phys. Rev. V. 12. P. 1 (Ed. R.A. Sunyaev).

Fabrika S.N., *Bychkova L.V.*, 1990 // Astron. Aph. V. 240. L5.

Faigler S., *Mazeh T.*, 2011 // MNRAS. V. 415. P. 3921.

Farr W.M. et al., 2011 — *Farr W.M.*, *Sravan N.*, *Cantrell A. et al.* // ApJ. V. 741. P. 103.

Faulkner J., 1971 // ApJ. V. 171. L99.

Faulkner A.J. et al., 1983 — *Faulkner J.*, *Lin D.*, *Papaloizou J.* // MNRAS. V. 205. P. 359.

Faulkner A.J. et al., 2005 // ApJ. V. 618. L119.

Fekel F.C., 1981 // ApJ. V. 246. P. 879.

Fender R.P., 2001 // MNRAS. V. 322. P. 301.

Fender R.P., *Kuulkers E.*, 2001 // MNRAS. V. 324. P. 923.

Fender R.P. et al., 1997a — *Fender R.P.*, *Bell Burnell S.J.*, *Waltman E.B.* // Vistas Astron. V. 41. P. 3.

Fender R.P. et al., 1997b — *Fender R.P.*, *Pooley G.G.*, *Robinson C.R. et al.* // In: Accretion Phenomena and Related Outflows / D.T. Wickramasinghe, G.V. Bucknell, L. Ferrario (eds.). IAU Colloq. 163. ASP Conf. Ser. V. 121. P. 701.

Fender R.P. et al., 1999 — *Fender R.P.*, *Garrington S.T.*, *McKay D.J. et al.* // MNRAS. V. 304. P. 865.

Fender R.P. et al., 2002 — *Fender R.P.*, *Rayner D.*, *Trushkin S.A. et al.* // MNRAS. V. 330. P. 212.

Fender R.P. et al., 2003 — *Fender R.P.*, *Gallo E.*, *Jonker P.G.* // MNRAS. V. 343. L99.

Ferdman R.D. et al., 2010 — *Ferdman R.D.*, *Stairs I.H.*, *Kramer M. et al.* // ApJ. V. 711. P. 764.

Figer D.F. et al., 1998 — *Figer D.F.*, *Najarro F.*, *Morris M. et al.* // ApJ. V. 506. P. 384.

Filippenko A.V., *Chornock R.*, 2001. IAU Circ. № 7644.

Filippenko A.V. et al., 1995 — *Filippenko A.V.*, *Matheson T.*, *Barth A.J.* // ApJ. V. 455. L139.

Filippenko A.V. et al., 1995 — *Filippenko A.V.*, *Matheson T.*, *Ho L.C.* // ApJ. V. 455. P. 614.

Filippenko A.V. et al., 1997 — *Filippenko A.V.*, *Matheson T.*, *Leonard D.C. et al.* // PASP. V. 109. P. 461.

Filippenko A.V. et al., 1999 — *Filippenko A.V.*, *Lbonard D.C.*, *Matheson T.*, *Li W.*, *Moran E.C.*, *Piess A.G.* // PASP. V. 111. P. 969.

Filippova E.V. et al., 2006 — *Filippova E.V.*, *Revnivtsev M.*, *Fabrika S.*, *Postnov K.*, *Seifina E.* // Astron. Aph. V. 460. P. 125.

Flannery B.P., *van den Heuvel E.P.J.*, 1975 // Astron. Aph. V. 39. P. 61.

Fleming T.A. et al., 1989 — *Fleming T.A.*, *Gioia I.M.*, *Maccacaro T.* // Astron. J. V. 98. P. 692.

Foellmi C. et al., 2005 — *Foellmi C.*, *Marchenko S.*, *Moffat A.F.J.* // Stellar Evolution at Low Metallicity: Mass Loss, Explosions, Cosmology ASP Conference Series, V. 353, Proceedings of the Conference Held 15-19 August, in Tartu, Estonia. P. 197.

Foellmi C. et al., 2006 — *Foellmi C.*, *Moffat A.F.J.*, *Marchenko S.V.* // Astron. Aph. V. 447. P. 667.

Foley R. et al., 2007 — *Foley R.*, *Smith N.*, *Ganeshalingan M. et al.* // ApJ. V. 657. L105.

Forman W.C. et al., 1972 — *Forman W.C.*, *Jones C.A.*, *Liller W.* // ApJ. V. 177. L103.

Forman W. et al., 1978 — *Forman W.*, *Jones C.*, *Cominsky L. et al.* // ApJ. Suppl. V. 38. P. 357.

Foster R.S. et al., 1996 — *Foster R.S.*, *Waltman E.B.*, *Tavani M. et al.* // ApJ. V. 467. L81.

Fracastoro M.G., 1979 // Astron. Aph. V. 78. P. 112.

Frank J. et al., 1987 — *Frank J.*, *King A.R.*, *Lasota J.-P.* // Astron. Aph. V. 178. P. 137.

Freire P.C.C., 2009 // Proc. of the Meeting: Neutron Stars and Gamma Ray Bursts: Recent Development and Future Directions, Egypt, Cairo and Alexandria. arXiv: 0907,3219v1.

Freire P., *Wex N.*, 2011, astro-ph/1006,0642v1. Proc. of the 12-th Macel Grossman meeting.

Freire P.C. et al., 2003 — *Freire P.C.*, *Camilo F.*, *Kramer M. et al.* // MNRAS. V. 340. P. 1359.

Freire P.C. et al., 2007 — *Freire P.C.C*, *Ransom S.M.*, *Gupta Y.* // ApJ. V. 662. P. 1177.

Freire P.C. et al., 2008a — *Freire P.C.C*, *Ransom S.M.*, *Begin S. et al.* // ApJ. V. 675. P. 670.

Freire P.C. et al., 2008b — *Freire P.C.C.*, *Wolszczan A.*, *van den Berg M.*, *Hessel J.W.T.* // ApJ. V. 679. P. 1433.

Freire P.C. et al., 2011 — *Freire P.C.*, *Bassa C.G.*, *Wex N. et al.* // MNRAS. V. 412. P. 2763.

Fridman A.M., *Polyachenko V.L.*, 1984. Physics of Gravitating Systems. — New York: Springer.

Frieden B.R., 1979. Picture Processing and Digital Filtering / Ed. T.S. Huang. — Heidelberg: Springer-Verlag. P. 177.

Friend M.T. et al., 1990 — *Friend M.T.*, *Martin J.S.*, *Connon-Smith R.*, *Jones D.H.P.* // MNRAS. V. 246. P. 637.

Fryer C.L., *Kalogera V.*, 2001 // ApJ. V. 554. P. 548.

Fryxell B.A., *Arnett W.D.*, 1981 // ApJ. V. 243. P. 994.

Fryxell B.A. et al., 1987 — *Fryxell B.A.*, *Taam R.E.*, *McMillan S.L.W.* // ApJ. V. 315. P. 536.

Garcia M. et al., 2000 — *Garcia M.*, *Brown W.*, *Pahre M. et al.* // IAU Circ. № 7392. P. 2.

Gardan E. et al., 2007 — *Gardan E.*, *Braine J.*, *Schuster K.F. et al.* // Astron. Aph. V. 473. P. 91.

Gayley K.G. et al., 1997 — *Gayley K.G.*, *Owocki S.P.*, *Granmer S.P.* // ApJ. V. 475. P. 786.

Gebhardt K. et al., 2000 — *Gebhardt K.*, *Pryor C.*, *O'Connell R.D.*, *Williams T.B.*, *Hesser J.E.* // Astron. J. V. 119. P. 1268.

Gelino D.M., 2002 // Bull. Of the American Astronomical Society V. 34. P. 654.

Gelino D.M., *Harrison T.E.*, 2003 // ApJ. V. 599. P. 1254.

Gelino D.M. et al., 2001 — *Gelino D.M.*, *Harrison T.E.*, *McNamara B.* // ApJ. V. 122. P. 971.

Ghez A.M. et al., 2008 // ApJ. V. 635. P. 1087.

Giannone P., *Gianuzzi M.A.*, 1974 // Ap. Sp. Sci. V. 26. P. 289.

Gierlinski M. et al., 2008 — *Gierlinski M.*, *Middleton M.*, *Ward M.*, *Done C.* // Nature V. 455. P. 369.

Gies D.R., 2003 // In: A Massive Star Odissey, from Main Sequence to Supernova. Proc. IAU Symp. 212, Eds. K.A. van der Hucht, A. Herrero, C. Esteban, San Francisco. P.91.

Gies D.R., *Bolton C.T.*, 1982 // ApJ. V. 260. P. 240.

Gies D.R., *Bolton C.T.*, 1986a // ApJ. V. 304. P. 371.

Gies D.R., Bolton C.T., 1986b // ApJ. Suppl. V. 61. P. 419.

Gies D.R. et al., 2002 — *Gies D.R., Huang W., Mc Swain M.V.* // ApJ. V. 578. L67.

Gilfanov M.et al., 1993 — *Gilfanov M., Churazov E., Sunyaev R. et al.* // Astron. Aph. Suppl. Ser. V. 97. P. 303.

Gillessen S. et al., 2008, arXiv: 0810,4674; ApJ. 2009. V. 692. P. 1075.

Gillon M. et al., 2007a // Astron. Aph. V. 466. P. 743.

Gillon M. et al., 2007b // Astron. Aph. V. 471. L51.

Gimenez A., 1992 // IAU Symp. No 151, «Evolutionary Progress in Interacting Binary Stars», Y. Kondo, R.F. Sistero, R.S. Polidan (eds.). — Dordrecht: Kluwer. P. 31.

Gimenez A., 2006a // Ap. Sp. Sci., V. 304. P. 19.

Gimenez A., 2006b // Astron. Aph. V. 450. P. 1231.

Gimenez A., Scaltriti F., 1982 // Astron. Aph. V. 115. P. 321.

Girardi L. et al., 2000 — *Girardi L., Bressan A., Bertelli G., Chiosi C.* // Astron. Aph. V. 141. P. 371.

Goldman I., Mareh T., 1991 // ApJ. V. 376. P. 260.

Gonzales Hernandez J.L. et al., 2004 — *Gonzales Hernandez J.L., Rebolo R., Israelian G., Casares J.* // ApJ. V. 609. P. 988.

Goodwin S.P., Kroupa P., 2005 // Astron. Aph. V. 439. P. 565.

Goodwin S.P. et al., 2004 — *Goodwin S.P., Whitworth A.P., Ward-Thompson D.* // Astron. Aph. V. 414. P. 633.

Goranskij V.P., 1990 // IBVS № 3464.

Goranskij V.P. et al., 1985 — *Goranskij V.P., Shugarov S.Yu., Orlowsky E.I., Rakhimov V.Yu.* // IBVS №2653.

Gou L. et al., 2009 — *Gou L., McClintock J.E., Liu J. et al.* // ApJ. V. 701. P. 1076.

Gou L. et al., 2011 — *Gou L., McClintock J.E., Reid M.J. et al.* // ApJ. V. 742. P. 85.

Goutikakis C., Hameury J.-M., 1993 // Astron. Aph. V. 271. P. 118.

Graczyk D., 2003 // MNRAS. V. 342. P. 1334.

Grader R.J. et al., 1966 — *Grader R.J., Hill R., Seward F.D., Torr A.* // Science. V. 152. P. 1499.

Grasdalen G.L. et al., 1979 — *Grasdalen G.L., Hackwell J.A., Gehrz R.D., McClain D.* // ApJ. V. 234. L129.

Grebenev S. et al., 1991 — *Grebenev S.A., Sunyaev R.A., Pavlinsky M.N.* // In: S. Brandt (e.), Proc. of Workshop on Nova Muscae. 1991, Danish Space Res. Inst., Lyndgby. P.19.

Grebenev S. et al., 1993 — *Grebenev S.A., Sunyaev R.A., Pavlinsky M.N.* // Astron. Aph. Suppl. V. 97. P. 281.

Grebenev S. et al., 1997 — *Grebenev S.A., Sunyaev R.A., Pavlinsky M.N.* // Adv. Space Res. V. 19. P. 15.

Greene J. et al., 2001 — *Greene J., Bailyn C.D., Orosz J.A.* // ApJ. V. 554. P. 1290.

Greiner J. et al., 2001 — *Greiner J., Cuby J.G., McCaughrean M.J.* // Nature. V. 414. P. 522.

Griem H.R., 1960 // ApJ. V. 132. P. 883.

Grimm H.-J. et al., 2002 — *Grimm H.-J., Gilfanov M., Sunyaev R.* // Astron. Aph. V. 391. P. 923.

Grimm H.-J. et al., 2003 — *Grimm H.-J., Gilfanov M.R., Sunyaev R.A.* // MNRAS. V. 339. P. 793.

Groot P. et al., 2001 // IAU Circ. №7708. P. 4.

Grupp F., 2004 // Astron. Aph. V. 420. P. 289.

Grygar J., 1965 // BAC. V. 16. P. 195.

Grygar J. et al., 1972 — *Grygar J., Cooper M.L., Jurkevich I.* // Bull. Astron. Inst. Czechoslovakia. V. 23. P. 147.

Guinan E.F., 1992 // In: Evolutionary Processes in Interacting Binary Stars, IAU Symp. No 151, Y. Kondo, R.F. Sistero, R.S. Polidan (eds.) — Dordrecht: Kluwer. P. 245.

Guinan E.F., *Bradstreet D.H.*, 1988 // In: Formation and Evolution of Low Mass Stars / A.K.Dupree and M.T.V.T. Lago (eds). — Kluwer Academic Publishers. P.345.

Guinan E.F., *Engle S.G.*, 2006 // Ap. Sp. Sci. V. 304. P. 3.

Guinan E.F., *Maloney F.P.*, 1985 // Astron. J. V. 90. P. 1519.

Guiricin G., *Mardirossian F.*, 1981a // Astron. Aph. V. 101. P. 138.

Guiricin G., *Mardirossian F.*, 1981b // ApJ. Suppl. V. 46. P. 1.

Guiricin G. et al., 1983 — *Guiricin G.*, *Mardirossian F.*, *Mezzetti M.* // Astron. Aph. V. 54. P. 211.

Gurevich A.V., *Zybin K.P.*, 1995 // Phys. Lett. A. V. 208. P. 276.

Gylden H., 1884 // Astron. Nachr. V. 109. P. 1.

Hadjidemetriou J., 1963 // Icarus. V. 2. P. 440.

Hadjidemetriou J., 1966 // Icarus. V. 5. P. 34.

Hadrava P., 2004 // In: Spectroscopically and Spatially Resolving the Components of Close Binary Stars / Hilditch R.W., Hensberge H.,Pavlovski K. (eds). ASP Conf. Ser. V. 318. — San Francisco: Astron. Soc. Pac. P. 80.

Haensal P., 2003 // EAS Publications Series, Eds. C. Motch, J.-M., Hameury. V. 7. P. 249.

Halbwachs J.L., 1987 // Astron. Aph. V. 183. P. 234.

Hall D.S. et al., 1976 — *Hall D.S.*, *Richardson T.R.*, *Chambliss C.R.* // Astron. J. V. 81. P. 1138.

Hameury J.-M. et al., 1986 — *Hameury J.-M.*, *King A.R.*, *Lasota J.P.* // Astron. Aph. V. 162. P. 1.

Hameury J.-M. et al., 1990 — *Hameury J.-M.*, *King A.R.*, *Lasota J.P.* // ApJ. V. 353. P. 585.

Hameury J.-M. et al., 1999 — *Hameury J.-M.*, *Dubus G.*, *Lasota J.-P*, *Menou K.* // In: Disk Instabilities in Close Binary Systems / S. Mineshige and J.C. Weeler (eds.). — Tokyo: University Academic Press INC. P. 237.

Hameury J.-M. et al., 2003 — *Hameury J.-M.*, *Barret D.*, *Lasota J.-P.*, *McClintock J.E.*, *Menou K.*, *Motch C.*, *Olive J.F.*, *Webb N.* // Astron. Aph. V. 399. P. 631.

Hamman W.-R., 1996 // Proc of the IAU Symp. № 163, Wolf-Rayet Stars: Binaries, Colliding Winds, Evolution / Eds. Van den Hucht K.A., Williams P.M. — Dordrecht: Kluwer Acad. Publ. P. 105.

Hamman W.-R., *Koesterke L.*, 1996 // In: Wolf-Rayet Stars in the Framework of Stellar Evolution / Vreux J.M., Detal A., Fraipont-Caro D., Gosset E., Rauw G. (eds.). Proc of the 33-rd Liege Int. Aph. Colloquium, Univ. de Liege, Liege. P.491.

Hamman W.-R., *Grefener G.*, 2004 // Astron. Aph. V. 427. P. 697.

Hamman W.-R., *Schwarz E.*, 1992 // Astron Aph. V. 261. P. 523.

Hamman W.-R. et al., 1999 — *Hamman W.-R.*, *Koesterke L.*, *Grefener G.* // Proc, of the IAU Symp. № 193, Wolf-Rayet Phenomena in Massive Stars and Starburst Galaxies / Eds. Van den Hucht K.A., Koenigsberger G., Eenens Ph.R.J. Astronomical Society of The Pacific, P.138.

Hammerschlag-Hensberge G. et al., 1978 — *Hammerschlag-Hensberge G.*, *De Loore C.*, *van den Heuvel E.P.J.* // Astron. Aph. Suppl. Ser. V. 32. P. 375.

Hammerschlag-Hensberge G. et al., 2003 — *Hammerschlag-Hensberge G.*, *van Kerkwijk M.H.*, *Kaper L.* // Astron. Aph. V. 407. P. 685.

Han C. et al., 2000 — *Han C.*, *Park S.-H.*, *Jeong J.H.* // MNRAS. V. 316. P. 97.

Hansen B.M., *Phinney E.S.*, 1998a // MNRAS. V. 294. P. 557.

Hansen B.M., *Phinney E.S.*, 1998b // MNRAS. V. 294. P. 569.

Hanson M.M. et al., 2000 — *Hanson M.M.*, *Still M.D.*, *Fender R.P.* // ApJ. V. 541. P. 308.

Hardy M.M. et al., 2006 — *Hardy M.M.*, *Koerding E.*, *Knigge C. et al.* // Nature V. 444. P. 730.

Harlaftis E.T., *Greiner J.*, 2004 // Astron, Aph. V. 414. L13.

Harlaftis E. et al., 1994 — *Harlaftis E.T.*, *Marsh T.R.*, *Dhillon V.S.*, *Charles P.A.* // MNRAS. V. 267. P. 473.

Harlaftis E. et al., 1996 — *Harlaftis E.T.*, *Horne K.*, *Filippenko A.V.* // PASP. V. 108. P. 762.

Harlaftis E. et al., 1997 — *Harlaftis E.T.*, *Steeghs D.*, *Horne K.* // Astron. J. V. 114. P. 1170.

Harlaftis E. et al., 1999 — *Harlaftis E.*, *Collier S.*, *Horne K.*, *Filippenko A.V.* // Astron. Aph. V. 341. P. 491.

Harmanec P., 2003 // In: «New directions for close binary Studies; "the royal road to the stars"», Proceeding of the workshop held in Canakkale, Turkey, COMU Astrophys. Res. Center, (ed. O. Demircan and E. Budding). P. 221.

Harmon B.A. et al., 1995 — *Harmon B.A.*, *Wilson C.A.*, *Zhang S.N. et al.* // Nature. V. 374. P. 703.

Harmon B.A. et al., 1997 — *Harmon B.A.*, *Deal K.J.*, *Paciesas W.S. et al.* // ApJ. V. 477. L85.

Harrier J.R. et al., 1967 — *Harrier J.R.*, *McCracken K.G.*, *Francey R.J.*, *Fenton A.G.* // Nature. V. 215. P. 38.

Harries T.J. et al., 1998 — *Harries T.J.*, *Hillier D.J.*, *Howarth I.D.* //MNRAS. V. 296. P. 1072.

Harries T.J. et al., 2003 — *Harries T.J.*, *Hilditch R.W.*, *Howarth I.D.* // MNRAS. V. 339. P. 157.

Hartmann L., 1978, ApJ. V. 221. P. 193.

Hasinger G., *van der Klis M.*, 1989 // Astron Aph. V. 225. P. 79.

Haswell C.A. et al., 1990 — *Haswell C.A.*, *Robinson E.L.*, *Horne K.D.* // In: Accretion Powered Compact Binaries / C.W. Mauche (ed.). — Cambridge: Cambridge University Press. P. 17.

Haswell C.A. et al., 1993 — *Haswell C.A.*, *Robinson E.L.*, *Horne R. et al.* // ApJ. V. 411. P. 802.

Hawking S.W., 1974 // Nature V. 248. P. 30.

Heap S.R., *Corcoran M.F.*, 1992 // ApJ. V. 387. P. 340.

Hellier C., 2001. Cataclysmic Variable Stars. How and Why They Vary. — London-Tokyo: Springer.

Henry G.W. et al., 2000 — *Henry G.W.*, *Marcy G.W.*, *Buteer R.P.*, *Vogt S.S.* // ApJ. V. 529. L41.

Henry T.J., 2004 // In: Hildich R.W., Hensberge H., Pavlovski K. (eds.), ASP Conf. Ser., Vol. 318, Proc. «Spectroscopically and Spatially Resolving the Components of Close Binary Stars». Astron. Soc. Pac., San Francisco. P. 159.

Henry T.J. et al/, 1999 — *Henry T.J.*, *Franz O.G.*, *Wasserman L.H. et al.* // ApJ. V. 512. P. 864.

Herrero A., 2003 // A.Massive Star Odyssei; from Main Sequence to Supernova (IAU Symp. 212, Eds. Karel A. van der Hucht, Artemio Herrero and Cesar Esteban), Publ. The Astronomical Society of the Pasific. P. 3.

Herrero A. et al., 1995 — *Herrero A.*, *Kudritzki R.-P.*, *Gabler R. et al.* // Astron. Aph. V. 297. P. 556.

Herrero A. et al., 2002 — *Herrero A.*, *Puls J.*, *Najarro F.* // Astron. Aph. V. 396. P. 949.

Hessman F.V., 1989 // Astron. J. V. 98. P. 675.

Hester J.J. et al., 1991 — *Hester J.J.*, *Light R.M.*, *Westpol J.A. et al.* // Astron. J. V. 102. P. 654.

Hilditch R.W., 2001. An Introduction to Close Binary Stars. — Cambridge (UK): Cambridge Univ. Press.

Hilditch R.W., 2004 // In Hilditch R.W., Hensberge H., Pavlovski K., (eds). ASP Conf. Ser. Vol. 318, Spectroscopically and Spatially Resolving the Components of Close Binary Stars, Astron. Soc. Pac. San Francisco, P.198.

Hilditch R.W. et al., 1988 — *Hilditch R.W.*, *King D.J.*, *McFarlane T.M.* // MNRAS. V. 231. P. 341.

Hilditch R.W. et al., 2005 — *Hilditch R.W.*, *Howarth I.D.*, *Harries T.J.* // MNRAS. V. 357. P. 304.

Hill G., 1979 // Publ. Dom. Astrophys. Obs. V. 15. P. 297.

Hill G., *Rucinski S.M.*, 1993 // In: Light Curve Modelling of Eclipsing Binary Stars / Milone E.E. (ed.). New York: Springer. P. 135.

Hill G.W., 1978 // Am.J. Math. V. 1. P. 5.

Hillier D.J., 1985 // Astron.J. V. 90. P. 1514.

Hillier D.J., 2003 // In: A Massive Stars Odissey, from Main Sequence to Supernova / K.A. van der Hucht, A. Herrero, C. Esteban (eds.). Proc. IAU Symp. № 212, ASP Conf. Ceries, San Francisco. P. 70.

Hillier D.J., *Miller D.L.*, 1998 // ApJ. V. 496. P. 407.

Hillier D.J., *Miller D.L.*, 1999 // ApJ. V. 519. P. 354.

Hillwig T.C., *Gies D.R.*, 2008 // ApJ. V. 676. L37.

Hillwig T.C. et al., 2004 — *Hillwig T.C.*, *Gies D.R.*, *Huang W.* // ApJ. V. 615. P. 422.

Himmelblau D.M., 1971. Applied Nonlinear Programming. — New-York: McGraw-Hill.

Hjalmarsdotter L. et al., 2008 — *Hjalmarsdotter L.*, *Zdziarski A.A.*, *Larsson S. et al.* // MNRAS. V. 384. P. 278.

Hjalmarsdotter L. et al., 2009 — *Hjalmarsdotter L.*, *Zdziarski A.A.*, *Szostek A.*, *Hannikainen D.C.* // MNRAS. V. 392. P. 251.

Hjellming M.S., 1989 // Ph.D. Thesis, Univ. of Illinois, Urbana, Ill.

Hjellming R.M., *Rupen M.P.*, 1995 // Nature. V. 375. P. 464.

Hjellming R.M. et al., 2000 // ApJ. V. 544. P. 977.

Ho L., 1999 // In: Observational Evidence for Black Holes in the Universe. Astrophys. and Space Sci. Library, V.234 / Ed. S.K. Chakrabarti. — Dordrecht: Kluwer Acad. Publ. P. 157.

Hobbs G. et al., 2004 — *Hobbs G.*, *Lyne A.G.*, *Kramer M*, *et al.* // MNRAS. V. 353. P. 1311.

Hobill D.W. et al., 2008 — *Hobill D.W.*, *Kollar J.*, *Pulwicki J.* // In: Short-Period Binary Stars: Observations, Analyses and Results (Eds. E.F.Milone, D.A.Leahy, D.W.Hobill), Springer, Astrophys. Space Phys. Library, P. 63.

Hochberg D., *Visser M.*, 1997 // Phys. Rev. V. 56. P. 4745.

Hochberg D. et al., 1997 — *Hochberg D.*, *Popov A.*, *Sushkov S.V.* // Phys. Rev. Lett. V. 78. P. 2050.

Hogeveen S.J., 1992 // Ap. Sp. Sci. V. 196. P. 299.

Holman M.J. et al., 2006 // ApJ. V. 652. P. 1715.

Holman M.J. et al., 2007 // ApJ. V. 664. P. 1185.

Holmgren D., 2004 // In: Spectroscopically and Spatially Resolving the Components of Close Binary Stars / Hilditch R.W., Hensberge H., Pavlovski K., (eds). ASP Conf. Ser. V. 318. Astron. Soc. Pac, San Francisco, P.95.

Homan J. et al., 2003 // ApJ. V. 586. P. 1262.

Homan J. et al., 2006 — *Homan J.*, *Wijnands R.*, *Kong A. et al.* // MNRAS. V. 366. P. 235.

Horne K., 1985 // MNRAS. V. 213. P. 129.

Horne K. et al., 1986 — *Horne K.*, *Wade R.A.*, *Szkody P.* // MNRAS. V. 219. P. 791.

Horowicz G.T., *Maeda K.*, 2001 // Phys. Rev. Lett. V. 87. id. 131301.

Hotan A.W. et al., 2006 — *Hotan A.W.*, *Bailes M.*, *Ord S.M.* // MNRAS. V. 369. P. 1502.

Howarth I.D., 1993 // The Observatory. V. 113. P. 75.

Howarth I.D., *Schmutz W.*, 1992 // Astron. Aph. V. 261. P. 503.

Hoyle F., *Lyttleton R.A.*, 1939 // Proc. Camb. Phil. Soc. V. 35. P. 105.

Huang M., *Wheeler J.C.*, 1989 // ApJ. V. 343. P. 229.

Huang S.-S., 1963 // ApJ. V. 138. P. 342.

Huang S.-S., 1966a // Ann Rev. of Astron. and Astroph. V. 4. P. 35.

Huang S.-S., 1966b // ApJ. V. 29. P. 331.

Hughes V.A., *Woodsworth A.*, 1973 // Nature V. 242. P. 116.

Hulse R.A., *Taylor J.H.*, 1975 // ApJ. V. 195. L51.

Humpreys R.M., *Davidson K.*, 1994 // PASP V. 106. P. 1025.

Hunt R., 1979 // MNRAS. V. 188. P. 83.

Hurley J.R. et al., 2002 — *Hurley J.R.*, *Christopher A.T.*, *Pols O.R.* // MNRAS. V. 239. P. 897.

Hut P., 1981 // Astron Aph. V. 99. P. 126.

Hut P., 1983 // ApJ. Lett. V. 272. L29.

Hutchings J.B., 1974 // ApJ. V. 192. P. 685.

Hutchings J.B., 1980 // ApJ. V. 235. P. 413.

Hutchings J.B. et al., 1973 // MNRAS. V. 163. P. 13.

Hutchings J.B. et al., 1977 — *Hutchings J.B.*, *Cramton D.*, *Cowley A.P.*, *Osmer P.S.* // ApJ. V. 217. P. 18.

Hutchings J.B. et al., 1978 — *Hutchings J.B.*, *Crampton D.*, *Cowley A.P.* // ApJ. V. 225. P. 548.

Hutchings J.B. et al., 1979 — *Hutchings J.B.*, *Cowley A.P.*, *Crampton D.* // ApJ. V. 229. P. 1079.

Hutchings J.B. et al., 1985 — *Hutchings J.B.*, *Gibson E.M.*, *Crampton D.*, *Fisher W.A.* // ApJ. V. 292. P. 670.

Hutchings J.B. et al., 1987 — *Hutchings J.B.*, *Crampton D.*, *Cowley A.P. et al.* // Astron. J. V. 94. P. 340.

Hynes R.I., *Haswell C.A.*, 1999 // MNRAS. V. 303. P. 101.

Hynes R.I. et al., 1997 // MNRAS. V. 300. P. 64.

Hynes R.I. et al., 1998 — *Hynes R.I.*, *Haswell C.A.*, *Shrader C.R. et al.* // MNRAS. V. 300. P. 64.

Hynes R.I. et al., 2003 — *Hynes R.I.*, *Steeghs D.*, *Casares J. et al.* // ApJ. V. 583. L95.

Ibanoglu C. et al., 2006 — *Ibanoglu C.*, *Soydugan F.*, *Soudugan E.*, *Dervisoglu A.* // MNRAS. V. 373. P. 435.

Iben I., 1966a // ApJ. V. 143. P. 483.

Iben I., 1966b // ApJ. V. 143. P. 505.

Iben I., 1967 // ApJ. V. 147. P. 624.

Iben I., *Livio M.*, 1993, Publ. Astron. Soc. Pac. V. 105. P. 1373.

Iben I., *Tutukov A.V.*, 1984a // ApJ. Suppl. V. 54. P. 335.

Iben I., *Tutukov A.V.*, 1984b // ApJ. V. 282. P. 615.

Iben I., *Tutukov A.V.*, 1985 // ApJ. Suppl. V. 58. P. 661.

Iben I., *Tutukov A.V.*, 1991 // ApJ. V. 370. P. 615.

Iben I. et al., 1995a — *Iben I.*, *Tutukov A.V.*, *Yungelson L.R.* // ApJ. Suppl. V. 100. P. 217.

Iben I. et al., 1995b — *Iben I.*, *Tutukov A.V.*, *Yungelson L.R.* // ApJ. Suppl. V. 100. P. 233.

Ichikawa S. et al., 1994 — *Ichikawa S.*, *Mineshige S.*, *Kato S.* // ApJ. V. 435. P. 748.

Iglesias C.A. et al., 1992 — *Iglesias C.A.*, *Rogers F.J.*, *Wilson B.G.* // ApJ. V. 397. P. 771.

Iglesias C.A., *Rogers F.J.*, 1996 // ApJ. V. 464. P. 943.

Ilijie S., 2004 // In: Spectroscopically and Spatially Resolving the Components of Close Binary Stars / Hilditch R.W., Hensberge H., Pavlovski K., (eds). ASP Conf. Ser. V. 318, Astron. Soc. Pac, San Francisco. P.107.

Illarionov A.F., *Sunyaev R.A.*, 1975 // Astron. Aph. V. 39. P. 185.

Imshennik V.S., 1995 // Space Sci. Rew. V. 74. P. 325.

In't Zand J.J.M. et al., 2000 — *In't Zand J.J.M.*, *Kuulkers E.*, *Bazzano A. et al.* // Astron, Aph. V. 357. P. 520.

Irwin I.B., 1952 // ApJ. V. 116. P. 218.

Irwin J.B., 1959 // Astron. J. V. 64. P. 149.

Israelian G. et al., 1999 // Nature V. 401. P. 142.

Jacobi C.G.J., 1836 // Compt. Rend. V. 3. P. 59.

Jacoby B.A. et al., 2005 — *Jacoby B.A.*, *Hotan A.*, *Bailes M. et al.* // ApJ. V. 629. L113.

Jacoby B.A. et al., 2006 — *Jacoby B.A.*, *Cameron P.B.*, *Jenet F.A. et al.* // ApJ. V. 644. L113.

Janssen G.H. et al., 2008 — *Janssen G.H.*, *Stappers B.W.*, *Kramer M. et al.* // Astron. Aph. V. 490. P. 753.

Jaranowski P., *Krolak A.*, 1992 // ApJ. V. 394. P. 586.

Jeans J.H., 1928. Astronomy and Cosmogony. — Cambridge Univ. Press.

Jenkins J.M. et al., 2002 — *Jenkins J.M.*, *Caldwell D.A.*, *Borucki W.J.* // ApJ. V. 564. P. 495.

Johannsen T., 2009 // Astron. Aph. V. 507. P. 617 (arXiv: 0812,0809v1).

Johannsen T. et al., 2009 — *Johannsen T.*, *Psaltis D.*, *McClintock J.E.* // ApJ. V. 691. P. 997.

Johnston S.et al., 1992 — *Johnston S.*, *Manchester R.N.*, *Lyne A.G. et al.* // ApJ. V. 387. P. L37.

Jones C., *Liller W.*, 1973 // IAU Circ. № 2503.

Jones C. et al., 1972 — *Jones C.*, *Forman W.*, *Liller W. et al.* // Bull Amer. Astr. Soc. V. 4. P. 329.

Jones C. et al., 1973 — *Jones C.*, *Forman W.*, *Tananbaum H. et al.* // ApJ. V. 181. P. 43.

Jonker P.G., *Nelemans G.*, 2004 // MNRAS. V. 354. P. 355.

Jonker P.G., *van der Klis M.*, 2001 // ApJ. V. 553. L43.

Jonker P.G. et al., 2003 — *Jonker P.G.*, *van der Klis M.*, *Groot P.J.* // MNRAS. V. 339. P. 663.

Jonker P.G. et al., 2005 — *Jonker P.G.*, *Steegh D.*, *Nelemans G.*, *van der Klis M.* // MNRAS. V. 356. P. 621.

Joss P.C. et al., 1987 — *Joss P.C.*, *Rappaport S.*, *Lewis W.* // ApJ. V. 319. P. 180.

Justham S. et al., 2006 — *Justham S.*, *Rappaport S.*, *Podsiadlowski P.* // MNRAS. V. 366. P. 1415.

Kahler H., 2002 // Astron. Aph. V. 395. P. 907.

Kaitchuck R.H. et al., 1994 — *Kaitchuck R.H.*, *Schlegel E.M.*, *Honeycutt R.K. et al.* // ApJ. Suppl. V. 93. P. 519.

Kalemci E. et al., 2005 — *Kalemci E.*, *Tomsick J.A.*, *Buxton M.M. et al.* // ApJ. V. 622. P. 508.

Kallman T.R. et al., 2003 — *Kallman T.R.*, *Angelini L.*, *Boroson B.*, *Cottam J.* // ApJ. V. 583. P. 861.

Kallrath J., 1991 // Astron. Aph. V. 247. P. 434.

Kallrath J., *Linnell A.P.*, 1987 // ApJ. V. 313. P. 346.

Kallrath J., *Milone E.F.*, 1999. Eclipsing Binary Stars. Modeling and Analysis. — New York: Springer.

Kallrath J., *Strassmeier K.G.*, 2000 // Astron. Aph. V. 362. P. 673.

Kalogera V. et al., 2004 — *Kalogera V.*, *Kim C.*, *Lorimer D.R. et al.* // ApJ. V. 601. L179.

Kaluzny J. et al., 2003 — *Kaluzny J.*, *Rucinski S.M.*, *Thompson I.B.* // Astron.J. V. 125. P. 1546.

Kaper L., *Cherepashchuk A.M.*, 2001 // In: Black Heles in Binaries and Galactic Nuclei: Diagnostic, Demography and Formation, ESO Astrophys. Symposia, eds. L. Kaper, E.P.J. Van den Heuvel, P.A. Woudt (Berlin, Springer). P.289.

Kaper L. et al., 1994 — *Kaper L.*, *Hammerschlag-Hensberge G.*, *Zuiderwijk E.J.* // Astron. Aph. V. 289. P. 846.

Kaper L. et al., 2001 — *Kaper L.*, *van den Heuvel E.P.J.*, *Woudt P.A.*, (*Eds.*). Black Holes in Binaries and Galactic Nuclei: Diagnostics, Demography and Formation, Proc. of the ESO Workshop, Garching, Germany, 6–8 Sept. 1999, in Honour of Riccardo Giacconi, ESO Astrophys. Symposia, Berlin, Springer.

Kaper L. et al., 2004 — *Kaper L.*, *van den Meer A.*, *Tijani A.H.* // In: Rev. Mex. Astron. Astrofis. Conf. Ser. 21, eds. C. Allen and C. Scarfe. P.128.

Kapner D.J. et al., 2007 — *Kapner D.J.*, *Cook T.S.*, *Adelberger E.G. et al.* // Phys. Rev. Lett. V. 98. id. 021101.

Karatas Y. et al., 2004 — *Karatas Y.*, *Bilir S.*, *Eker Z.*, *Demircan O.* // MNRAS. V. 349. P. 1069.

Kaspi V.M. et al., 1994 — *Kaspi V.M.*, *Johnston S.*, *Bell J.F. et al.* // ApJ. V. 423. L43.

Kaspi V.M. et al., 2004 — *Kaspi V.M.*, *Ransom, S.M.*, *Backer, D.C. et al.* // ApJ. V. 613. L37.

Kasuya S. et al., 2011 — *Kasuya S.*, *Honda M.*, *Mishima R.* // MNRAS. V. 411. P. 1863.

Kato S. et al., 1995 — *Kato S.*, *Mineshige S.*, *Hirata R.* // Publ. Astron. Soc. Japan V. 47. P. 31.

Kato S. et al., 1998 — *Kato S.*, *Inagaki S.*, *Fukue J.*, *Mineshige S.*. Basic Physics of Accretion Disks. — New York: Gordon and Breach Publ. Com.

Kato Y., 2004 // PASJ. V. 56. P. 931.

Kawai N., 1999 // Proc. Int. Conf. X-ray Astronomy. Heating and Acceleration in the Universe, Tokyo.

Kawai N. et al., 1989 — *Kawai N.*, *Matsuoka M.*, *Pan H.-C.*, *Stewart G.S.* // PASJ V. 41. P. 491.

Kelley R.L. et al., 1983 — *Kelley R.L.*, *Jernigan J.G.*, *Levine A. et al.* // ApJ. V. 264. P. 568.

Kemp J.C., 1980a, Astron. Aph. V. 91. P. 108.

Kemp J.C., *Herman L.C.*, 1977 // ApJ. V. 218. P. 770.

Kemp J.C. et al., 1978 — *Kemp J.C.*, *Barbour M.S.*, *Herman L.S.*, *Rudy R.J.* // ApJ. V. 220. L123.

Kemp J.C. et al., 1979 — *Kemp J.C.*, *Barbour M.S.*, *Parker T.E.*, *Herman L.C.* // ApJ. V. 228. L23.

Kemp J.C. et al., 1981 — *Kemp J.C.*, *Barbour M.S.*, *Mc Birney R.E.*, *Rudy R.J.* // ApJ. V. 243. P. 557.

Kemp J.C. et al., 1983 — *Kemp J.C.*, *Barbour M.S.*, *Henson G.D. et al.* // ApJ. V. 271. L65.

Kerins E.J., 1997 // Astron. Aph. V. 322. P. 709.

Khaliullin Kh.F., 1985 // ApJ. V. 299. P. 668.

Khaliullin Kh.F., *Khaliullina A.I.*, 2007 // MNRAS. V. 382. P. 356.

Khaliullin Kh.F., *Khaliullina A.I.*, 2010 // MNRAS. V. 401. P. 257.

Khaliullin Kh.F., *Khaliullina A.I.*, 2011 // MNRAS. V. 411. P. 2804.

Khaliullin Kh.F. et al., 1991 — *Khaliullin Kh.F.*, *Khodykin S.A.*, *Zakharov A.I.* // ApJ. V. 375. P. 314.

Khaliullina A.I., 1987 // MNRAS. V. 225. P. 425.

Khodykin S.A., *Vedeneyev U.G.*, 1997 // ApJ. V. 475. P. 798.

Khodykin S.A. et al., 2004 — *Khodykin S.A.*, *Zakharov A.I.*, *Andersen W.L.* // ApJ. V. 615. P. 506.

Khruzina T.C. et al., 1988 — *Khruzina T.C.*, *Cherepashchuk A.M.*, *Shakura N.I.*, *Sunyaev R.A.* // Adv. Space Res. V. 8. P. 237.

Kim S.-W., *Cho Y.M.*, 1996 // Proc. Seventh Marcel Grossman Meeting Held at Stanford Univ. 24-30 July 1994 (River Edge N.J., World Scientific). P.1147.

King A.R., *Jemeson R.F.*, 1979 // Astron. Aph. V. 71. P. 326.

King A.R., *Ritter H.*, 1998 // MNRAS. V. 293. L42.

Kippenhahn R., *Weigert A.*, 1967 // Z. Astrophys. V. 65. P. 251.

Kippenhahn R. et al., 1967 — *Kippenhahn R.*, *Kohl K.*, *Weigert A.* // Z. Astrophys. V. 66. P. 58.

Kitamoto S. et al., 1990 // ApJ. V. 361. P. 590.

Kitamura M., *Kondo M.*, 1978 // Ap. Sp. Sci., V. 56. P. 341.

Kitamura M., *Nakamura M.*, 1983 // Ann. Tokyo Astron. Obs. 2nd Ser. V. 19. P. 413.

Kitamura M., *Nakamura Y.*, 1987a // Ann. Tokyo Astron. Obs. 2nd Ser. V. 21. P. 331.

Kitamura M., *Nakamura Y.*, 1987b // Ann. Tokyo Astron. Obs. 2nd Ser. V. 21. P. 387.

Kiyokawa M., *Kitamura M.*, 1975 // Ann. Tokyo Astron. Obs., 2nd Ser. V. 15. P. 117.

Kiziltan B. et al., 2011 — *Kiziltan B.*, *Kottas A.*, *Thorsett S.E.* // ApJ., arXiv: 1011,4291v1.

Kjurkchieva D.P. et al., 2002 — *Kjurkchieva D.P.*, *Marchev D.V.*, *Zola S.* // Astron. Aph. V. 386. P. 548.

Klinglesmith D.A., *Sobieski S.*, 1970 // A.J. V. 75. P. 175.

Knigge C., 2006 // MNRAS. V. 373. P. 484.

Knigge C., 2007 // MNRAS. V. 382. P. 1982, errata.

Knispel B. et al., 2011 — *Knispel B.*, *Lazarus P.*, *Allen B. et al.* // ApJ. V. 732. L1. astro-ph/1102,5340v1.

Knuston H.A. et al., 2007 — *Knuston H.A.*, *Charbonneau D.*, *Allen L.*, *Burrows A.*, *Megeath S.T.* // ApJ. V. 673. P. 526.

Knutson H.A. et al., 2007 — *Knutson H.A.*, *Charbonneau D.*, *Noyes R.W.*, *Brown T.M.*, *Gilliland R.L.* // ApJ. V. 655. P. 564.

Koch R.H. et al., 1965 — *Koch R.H.*, *Olson E.C.*, *Yoss K.M.* // ApJ. V. 141. P. 955.

Koch R.H. et al., 1970 — *Koch R.H.*, *Plavec M.*, *Wood F.B.* // Publ. Univ. Pensilvania, Astr. Ser, 11.

Koch D.G. et al., 2010 // ApJ. V. 732. L131. arXiv:1001.0913v1.

Koenigsberger G., 1990 // Astron, Aph. V. 235. P. 282.

Koester D., 2002 // Annual Rev. Astron. Aph. V. 11. P. 33.

Koester D. et al., 1992 — *Koester D.*, *Chanmugam G.*, *Reimers D.* // ApJ. V. 395. L107.

Kong A.K. et al., 2002 — *Kong A.K.*, *McClintock J.E.*, *Garcia M.R.*, *Murray S.S.*, *Barret D.* // ApJ. V. 570. P. 277.

Koo D.C., *Kron R.C.*, 1977 // PASP. V. 89. P. 285.

Kopal Z., 1959. Close Binary Systems. — London: Shapman and Hall LTD.

Kopal Z., 1946 // ApJ. V. 103. P. 310.

Kopal Z., 1965 // Advances in Astron. And Aph. V. 3. P. 89.

Kopal Z., 1978. Dynamics of Close Binary Systems. — Dordrecht: Reidel.

Kopal Z., *Shapley M.B.*, 1946 // ApJ. V. 104. P. 160.

Kopeikin S.M., 1988 // Celest. Mech. V. 44. P. 87.

Kopeikin S.M., *Ozernoy L.M.*, 1999 // ApJ. V. 523. P. 771.

Kotani T. et al., 1994 — *Kotani T.*, *Kawai N.*, *Aoki T. et al.* // PASJ. V. 46. L147.

Kotani T. et al., 1996 — *Kotani T.*, *Kawai N.*, *Matsuoka M.*, *Brinkman W.* // PASJ. V. 48. P. 619.

Kouveliotou C. et al., 1992 — *Kouveliotou C.*, *Finger M.N.*, *Fishman G.J. et al.* // IAU Circ. № 5592.

Kozai Y., 1962 // A.J. V. 67. P. 591.

Kozirev N.A., 1934 // MNRAS. V. 94. P. 430.

Kraft K.P. et al., 1962 — *Kraft K.P.*, *Mathews J.*, *Greenstein J.L.* // ApJ. V. 136. P. 312.

Kramer M. et al., 2006 — *Kramer M.*, *Stairs I.H.*, *Manchester R.N. et al.* // Science. V. 314. P. 97.

Kreidberg L. et al., 2012 — *Kreidberg L.*, *Bailyn C.D.*, *Farr W.M.*, *Kalogera V.* // ApJ. V. 757. P. 17, 36. arXiv:1205.1805v1.

Kreiner J.M. et al., 2001 — *Kreiner J.M.*, *Kim C.*, *Nha I.* // An Atlas of O-C Diagrams of Eclipsing Binary Stars. — Poland, Cracow: Wydawnictwo Naukowe Akademii Pedagogicznej.

Krivosheev Yu. M. et al., 2009 — *Krivosheev Yu.M.*, *Bisnovatyi-Kogan G.S.*, *Cherepashchuk A.M.*, *Postnov K.A.* // MNRAS. V. 394. P. 1674.

Kron G.E., 1942 // ApJ. V. 96. P. 173.

Kron G.E., *Gordon K.C.*, 1950 // ApJ. V. 111. P. 454.

Krumbolz M.R., *Thompson T.A.*, 2007 // ApJ. V. 661. P. 1034.

Krumholz M.R. et al., 2007 — *Krumholz M.R.*, *Klein R.I.*, *McKee C.F.* // ApJ. V. 656. P. 959.

Kruszewski A., 1963 // Acta Astronomica V. 13. P. 106.

Kruszewski A., 1966 // In: Adv. Astron. Astrophys. / Ed. Z. Kopal. — New York: Academic Press. V. 3. P. 89.

Kruszewski A., 1974 // In: Planets, Stars and Nebulae, Studied with Photopolarimetry / Ed. T. Gehrels. — University of Arizona Press. P. 845.

Krzeminski W., 1962 // ApJ. V. 142. P. 1051.

Kudoh H. et al., 2003 — *Kudoh H.*, *Tanaka T.*, *Nakamura T.* // Phys. Rev. D. V. 68, id. 024035.

Kudritzki, R.P. et al., 2006 — *Kudritzki, R. P.*; *Urbaneja, M. A.*; *Puls, J.* // Planetary Nebulae in our Galaxy and Beyond, Proceedings of the International Astronomical Union, Symposium #234 / Ed. M.J. Barlow and R.H. Méndez. — Cambridge: Cambridge University Press. P. 119-126.

Kuiper L. et al., 1988 — *Kuiper L.*, *van Paradijs J.*, *van der Klis M.* // Astron. Aph. V. 203. P. 79.

Kumar S., 1986 // MNRAS. V. 223. P. 225.

Kundt W., 1979 // Astron. Aph. V. 80. L7.

Kurucz R.L., 1970 // SAO Spec. Rep. V. 309. P. 1.

Kurucz R.L., 1979 // ApJ. Suppl. V. 40. P. 1.

Kurucz R.L., 1991 // Harvard Preprint 3348.

Kurucz R.L., 1992 // CD-ROMs.

Kurucz R.L., 1993 // CD-ROMs.

Kurucz R.L., 1994 // SAO CD-Roms. Cambridge. MA 02138, USA.

Kurucz R.L., *Furenlid I.*, 1979. Sample Spectral Atlas for Sirius. SAO Spec. Rep. V. 387. P. 1.

Kurucz R.L. et al., 1974 — *Kurucz R.L.*, *Reytreman E.*, *Avrett E.A.*. Blanketed Model Atmospheres for Early Type Stars. Washington, KPA.

Kuulkers E., 1999 // In: Disk Instabilities in Close Binary Systems / S. Mineshige and J.C. Weeler (eds.). — Tokyo: Univ. Acad. Press INC. P. 169.

Kuulkers E. et al., 1999 — *Kuulkers E.*, *Fender R.P.*, *Spencer R.E. et al.* // MNRAS. V. 306. P. 919.

Lacy C.H., 1977 // ApJ. Suppl. V. 34. P. 479.

Lacy C.H., 1979 // ApJ. V. 228. P. 817.

Lacy C.H.S. et al., 2002 — *Lacy C.H.S.*, *Torres G.*, *Claret A.*, *Sabby J.A.* // A.J. V. 123. P. 1013.

Lacy C.H.S. et al., 2004a — *Lacy C.H.S.*, *Claret A.*, *Sabby J.A.* // A.J. V. 128. P. 1340.

Lacy C.H.S. et al., 2004b — *Lacy C.H.S.*, *Vaz L.P.R.*, *Claret A.*, *Sabby J.A.* // A.J. V. 128. P. 1324.

Lagrange J.L., 1772. Essai d'une Nouvelle Methode pour Resoudre la Probleme de Trois Corps (Мемуар, представленный в Парижскую академию наук, 1772). Euvres, v.6, Paris, Gauthier-Villars, 1873.

Lamb F.K. et al., 1985 — *Lamb F.K.*, *Aly J.J.*, *Cook M.C.*, *Lamb D.Q.* // In: Cataclysmic Variables and Low Mass X-ray Binaries / D.Q. Lamb and J. Patterson (eds.). — Dordrecht: D. Reidel Publ. Co.

Lamb S. et al., 1976 — *Lamb S.*, *Iben I.*, *Howard M.* // ApJ. V. 207. P. 209.

Lamers H.J.G.L.M., 1987. Instabilities in Luminous Early-Stars. — Dordrecht: Reidel.

Lamers H.J.G.L.M., *Cassinelli J.P.*, 1999. Introduction to Stellar Winds. — Camridge: Cambridge Univ. Press. P. 9.

Lampton M. et al., 1976 — *Lampton M.*, *Margon B.*, *Bowyer S.* // ApJ. V. 208. P. 117.

Landau L.D., 1932 // Phys. Z.Sowjetunion V. 1. P. 285.

Langer N., 1989a // Astron. Aph. V. 210. P. 93.

Langer N., 1989b // Astron. Aph. V. 220. P. 135.

Langer N., 1991 // Astron. Aph. V. 252. P. 669.

Larson D.T., *Schulman E.*, 1997 // Astron. J. V. 113. P. 618.

Larson R.B., 1972 // MNRAS. V. 156. P. 437.

Larson R.B., 1995 // MNRAS. V. 272. P. 213.

Larson R.B., 2002 // MNRAS. V. 332. P. 155.

LaSala J. et al., 1998 — *LaSala J.*, *Charles P.A.*, *Smith R.A.D.*, *Balucinska-Church M.*, *Church M.J.* // MNRAS. V. 301. P. 285.

Lasota J.-P., 1996 // In: E.P.J. van den Heuwel et al. (eds.), Compact Stars in Binaries, IAU Symp. № 165. P.43.

Lasota J.-P., 1997 // In: D.T. Wickramasinghe et al. (eds.), Accretion Phenomena and Related Outflows, IAU Colloq. 143, ASP Conf. Ser. V. 121. P. 351.

Lasota J.-P., 1999 // In: Disk Instabilities in Close Binary Systems / S. Mineshige and J.C. Weeler (eds.). — Tokyo: University Academic. Press INC. P. 191.

Latham D.W. et al., 1992 — *Latham D.W.*, *Matieu R.D.*, *Milone A.A.E.*, *Davis R.J.* // IAU Symp. No 151, «Evolutionary Process in Interacting Binary Stars», Y. Kondo, R.F. Sistero, R.S. Polidan (eds.). — Dordrecht: Kluwer. P. 471.

Latham D. et al., 2010 // ApJ. V. 713. L140.

Lauterborn D., 1970 // Astron. Aph. V. 7. P. 150.

Lehmann H., *Mkrtichian D.E.*, 2008 // Astron. Aph. V. 480. P. 247.

Lehmann H. et al., 2002 — *Lehmann H.*, *Hempelmann A.*, *Wolter U.* // Astron. Aph. V. 392. P. 963.

Lehmann-Filhes R., 1894 // Astron. Nachr. V. 136. P. 17.

Lejeune T., *Schaerer D.*, 2001 // Astron. Aph. V. 366. P. 583.

Lepine S., *Moffat A.F.J.*, 1999 // ApJ. V. 514. P. 909.

Levato H., 1974 // Astron. Aph. V. 35. P. 259.

Levi-Civita T., 1906 // Acta Math. V. 30. P. 305.

Levi-Civita T., 1937 // Am. J. Math. V. 59. P. 225.

Levine A., *Corbet R.*, 2006 // Astron. Telegram, 940.

Lewin W.H.G. et al., 1988 — *Lewin W.H.G.*, *van Paradijs J.*, *van der Klis M.* // Space Sci. Rev. V. 46. P. 273.

Leyder J.-C. et al., 2008 — *Leyder J.-C.*, *Walter R.*, *Rauw G.* // Astron. Aph. V. 477. L29.

Li F.K. et al., 1978 — *Li F.K.*, *Clark G.W.*, *Jernigan J.G.* // Nature. V. 276. P. 799.

Lightman A.P., 1974 // ApJ. V. 194. P. 429.

Lightman A.P., *Shapiro S.L.*, 1975 // ApJ., V. 198. P. L73.

Limber D.N., 1963 // ApJ. V. 138. P. 1112.

Linnel A.P., *Proctor D.D.*, 1970 // ApJ. V. 162. P. 683.

Lipunov V.M. et al., 1996 — *Lipunov V.M.*, *Postnov K.A.*, *Prokhorov M.E.* // Astrophys. and Space Physics Reviews 9, 1 (1996, the Scenario Machine: Binary Star Population Synthesis, Ed. R.A. Sunyaev, Harwood academic publishers).

Lipunov V.M., 2005 — Grav. Cosmol. V. 11. P. 166.

Lipunov V.M. et al., 2007 // arXiv: 0704,1387 (astro-ph); АЖ. 2009. V. 86. P. 985.

Lipunova G.V., *Shakura N.I.*, 2000 // Astron. Aph. V. 356. P. 363.

Liu Q.Z. et al., 2007 — *Liu Q.Z.*, *van Paradijs J.*, *van den Heuvel E.P.J.* // Astron. Aph. V. 469. P. 807.

Liu J. et al., 2008 — *Liu J.*, *McClintock J.E.*, *Narayan R. et al.* // ApJ. V. 679., L37; erratum: ApJ., 2010. V. 719. L109.

Livio M., 1994, in Shore et al. Interacting Binaries. — Berlin-Budapest: Springer-Verlag. P. 168.

Livio M. et al., 1986 — *Livio M.*, *Soker N.*, *de Kool M.*, *Savonije G.J.* // MNRAS. V. 222. P. 235.

Loeb A., *Sasselov D.*, 1995 // ApJ. V. 449. L33.

Löhmer O. et al., 2004 — *Löhmer O.*, *Kramer M.*, *Drebe T. et al.* // Astron. Ap., V. 426. P. 631.

Lommen D. et al., 2005 — *Lommen D.*, *Yungelson L.*, *van den Heuvel E. et al.* // Astron. Aph. V. 443. P. 231.

Long J.C., *Price J.C.*, 2003 // Comptes Rendus Physique, V. 4. P. 337.

Long K.S. et al., 1981 — *Long K.S.*, *Dodorico S.*, *Charles P.A.*, *Dopita M.A.* // ApJ. V. 246. L61.

Long K.S. et al., 1993 — *Long K.S.*, *Blair W.P.*, *Bowers C.W. et al.* // ApJ. V. 405. P. 327.

Lorimer D.R., 2005 // Living Rev. in Relativity V. 8. P. 7.

Lorimer D.R., 2008 // arXiv: 0811,0762v1; Living Reviews in Relativity. V. 11, N8.

Lorimer D.R. et al., 2005 — *Lorimer D.R.*, *Stairs I.H.*, *Freire P.C. et al.* // ApJ. V. 640. P. 428.
Lovelace R.V.E. et al., 1991 — *Lovelace R.V.E.*, *Berk H.L.*, *Contopolous J.* // ApJ. V. 379. P. 696.
Lovis C. et al, 2005 // Astron. Aph. V. 437. P. 1121.
Lozinskaya T.A., *Moiseev A.V.*, 2007 // MNRAS. V. 381. L26.
Lu W.X., 1985 // PASP V. 97. P. 1086.
Lubow S.H., *Shu F.H.*, 1975 // ApJ. V. 198. P. 383.
Lucy L.B., 1967 // Z. f. Astrophys. V. 65. P. 89.
Lucy L.B., *Ricco E.*, 1979 // Astron. J. V. 84. P. 401.
Lucy L.B., *Wilson R.E.*, 1979 // ApJ. V. 231. P. 502.
Ludwig H.-G. et al., 2009 — *Ludwig H.-G.*, *Caffau E.*, *Steffen M. et al.* // Proc. IAU Symp. N265, Chemical Abundances in the Universe: Connecting First Stars to Planets / Eds. K. Cunha, M. Spite, B. Barbuy. P. 119.
Luhrs S., 1997 // PASP. V. 109. P. 504.
Lund N. et al., 1991 — *Lund N.*, *Brandt S.*, *Makino F. et al.* // IAU Circ № 5161.
Luo C., *Liang E.P.*, 1994 // MNRAS. V. 266. P. 386.
Luo D.et al., 1990 — *Luo D.*, *McCray R.*, *Mac Low M.-M.* // ApJ. V. 362. P. 267.
Lynden-Bell D., 1969 // Nature. V. 223. P. 690.
Lyne A.G. et al., 2000 // MNRAS. V. 312. P. 698.
Lyne A.G. et al., 2004 // Science. V. 303. P. 1153.
Lyne A.G., 1984 // Nature. V. 310. P. 300.
Lyne A.G. et al., 2004 — *Lyne A.G.*, *Burgay M.*, *Kramer M. et al.* // Science. V. 303. P. 1153.
Maceroni C., *Ribas I.*, 2006 // Ap. Sp. Sci. V. 304. P. 381.
Maceroni C., *Rucinski S.M.*, 1997 // PASP. V. 109. P. 782.
Machida M.N. et al., 2008 — *Machida M.N.*, *Tomisaka K.*, *Matsimoto T.*, *Inutsuka S.* // ApJ. V. 677. P. 327.
Madej J. et al., 2004 — *Madej J.*, *Nalezyty M.*, *Althaus L.G.* // Astron. Aph. V. 419. L5.
Maeda Y. et al., 2005 — *Maeda Y.*, *Kubota A*, *Kobayashi Y. et al.* // ApJ. V. 631. L65.
Maeder A., 1975 // Astron. Aph. V. 40. P. 303.
Maeder A., 1987 // Astron. Aph. V. 178. P. 159.
Maeder A., *Meynet G.*, 1987 // Astron. Aph. V. 182. P. 243.
Maeder A., *Meynet G.*, 1988 // Astron. Aph. Suppl. V. 76. P. 411.
Maeder A., *Meynet G.*, 2000a // Ann. Rev. Astron. Aph. V. 24. P. 329.
Maeder A., *Meynet G.*, 2000b // Astron. Aph. V. 361. P. 159.
Maeder A., *Zahn J.-P.*, 1998 // Astron. Aph. V. 934. P. 1000.
Maejima Y. et al., 1984 — *Maejima Y.*, *Makishima K.*, *Matsuoka M. et al.* // ApJ. V. 285. P. 712.
Makino F. et al., 1987 // IAU Circ. №4342.
Makino F. and Ginga Teem, 1991 // IAU Circ. № 5161.
Makishima K. et al., 1987 — *Makishima K.*, *Koyama K.*, *Hayakawa S.*, *Nagase F.* // ApJ. V. 314. P. 619.
Malkov O.Yu., 1993 // Bull. Inf. CDS V. 42. P. 27.
Malkov O.Yu., 2003 // Astron. Aph. V. 402. P. 1055.
Malkov O.Yu., 2007 // MNRAS. V. 382. P. 1073.
Malkov O.Yu. et al., 2006 — *Malkov O.Yu.*, *Oblak E.*, *Snegireva E.A.*, *Torra J.* // Astron. Aph. V. 446. P. 785.
Maloney P.R., *Begelman M.C.*, 1997 // ApJ. V. 491. P. L43.
Maloney P.R. et al., 1996 — *Maloney P.R.*, *Begelman M.C.*, *Pringle J.E.* // ApJ. V. 472. P. 582.
Mandel K., *Agol E.*, 2002 // ApJ. V. 580. L171.

Manduca A. et al., 1977 — *Manduca A.*, *Bell R.A.*, *Gustafsson B.* // Astron. Aph. V. 61. P. 809.
Mao S., *Paczynski B.*, 1991 // ApJ. V. 347, L37.
Mao S. et al., 2002 — *Mao S.*, *Smith M.C.*, *Wozniak P. et al.* // MNRAS. V. 329. P. 349.
Maraschi L. et al., 1976 — *Maraschi L.*, *Trevers A.*, *van den Heuvel E.P.J.* // Nature. V. 259. P. 292.
Margon B., 1984 // Annual Rev. Astron. Aph. V. 22. P. 507.
Margon B., *Anderson S.F.*, 1989 // ApJ. V. 347. P. 448.
Margon B. et al., 1973 — *Margon B.*, *Bowers S.*, *Stone R.P.* // ApJ. V. 185. L113.
Margon B. et al., 1979 — *Margon B.*, *Stone R.P.S.*, *Klemola A. et al.* // ApJ. V. 230. P. L41.
Markert T.M. et al., 1973 — *Markert T.M.*, *Canizares C.R.*, *Clark G.W. et al.* // ApJ. V. 184. L67.
Markwardt C.B. et al., 1999 — *Markwardt C.B.*, *Swank J.H.*, *Marshall F.E.* // IAU Circ. № 7120. P. 1.
Markwardt C. et al., 2001 — *Markwardt C.*, *Swank J.*, *Smith E.* // IAU Circ. № 7707. P. 2.
Marquardt D.W., 1963 // J. Soc. Ind. Appl. Math. V. 11, № 2. P. 431.
Marsh T.R., 1988 // MNRAS. V. 231. P. 1117.
Marsh T.R., 2000 // Astrotomography, Indirect Imaging Methods in Observational Astronomy / Ed. by H.M.J. Boffin, D. Steeghs and J. Cuypers. Lecture Notes in Physics. V. 573. P. 1.
Marsh T.R., 2005 // Ap. Sp. Sci. V. 296. P. 403.
Marsh T.R., *Horne K.*, 1988 // MNRAS. V. 235. P. 269.
Marsh T.R., *Horne K.*, 1990 // ApJ. V. 349. P. 593.
Marsh T.R. et al., 1994 — *Marsh T.R.*, *Robinson E.L.*, *Wood J.H.* // MNRAS. V. 266. P. 137.
Marti J. et al., 1998 — *Marti J.*, *Paredes J.M.*, *Ribo M.* // Astron. Aph. V. 338. L71.
Martin A.C. et al., 1992 — *Martin A.C.*, *Rebolo R.*, *Casares J.*, *Charles P.A.* // Nature. V. 358. P. 129.
Martin A.C. et al., 1995 — *Martin A.C.*, *Casares J.*, *Charles P.A.*, *van den Hoofs F.*, *van Paradijs J.* // MNRAS. V. 274. L46.
Martin E.L. et al., 1996 — *Martin E.L.*, *Casares J.*, *Molano P. et al.* // New Astron. V. 1. P. 197.
Martin E.L. et al., 1994 — *Martin E.L.*, *Rebolo R.*, *Casares J.*, *Charles P.A.* // ApJ. V. 435. P. 791.
Martin J.S. et al., 1989 — *Martin J.S.*, *Friend M.T.*, *Smith R.C.*, *Jones D.H.P.* // MNRAS. V. 240. P. 519.
Martins F. et al., 2002 — *Martins F.*, *Schaerer D.*, *Hillier D.* // Astron. Aph. V. 382. P. 999.
Martynov D.Ya., 1957 // In: Non-Stable Stars, IAU Colloquium 3 / Ed. by G.H. Herbig. — Cambridge: Cambridge Univ. Press. P. 138.
Martynov D.Ya., *Khalinllin Kh.F.*, 1980 // Ap. Sp. Sci. V. 71. P. 147.
Mason K.O. et al., 1978 — *Mason K.O.*, *Lampton M.*, *Charles P.*, *Bowyer S.* // ApJ. V. 226. L129.
Massevitch A.G. et al., 1979 // Ap. Sp. Sci. V. 62. P. 451.
Massey P. et al., 2001 — *Massey P.*, *De Gioia-Eastwood K.*, *Waterhouse E.* // Astron. J. V. 121. P. 1050.
Massey P. et al., 2007 — *Massey P.*, *Olsen K.A.G.*, *Hodge P.W. et al.* // Astron. J. V. 133. P. 2393.
Massey P. et al., 2002 — *Massey P.*, *Penny L.R.*, *Vukovich J.* // ApJ. V. 565. P. 982.
Massey P. et al., 2005 — *Massey Ph.*, *Puls J.*, *Pauldrach A.W.A. et al.* // ApJ. V. 627. P. 477.
Masuda M. et al., 2009 // Phys. Rev. Lett. V. 102. id. 171101.
Mathieu R.D., 1992 // IAU Symp. No 151, «Evolutionary Process in Interacting Binary Stars» / Ed. Y. Kondo, R.F. Sistero, R.S. Polidan. — Dordrecht: Kluwer. P. 21.
Mathieu R.D., *Mazeh T.*, 1988 // ApJ. V. 326. P. 256.
Matsuda T. et al., 1987 — *Matsuda T.*, *Inoue M.*, *Sawada K.* // MNRAS. V. 226. P. 785.
Mayer P., 1990 // BAC. V. 41. P. 231.

Mayor M., *Mermillard J.C.*, 1984 // IAU Symp. No 105, «Observational Tests of the Stellar Evolution Theory» / Eds. A. Maeder and A. Renzini. — Dordrecht: Reide. P. 411.

Mayor M., *Queloz D.*, 1995 // Nature V. 378. P. 355.

McClintock J.E., 1991 — In: Texas/ESO-CERN Symp. On Relativistic Astrophys., Cosmology and Fundamental Physics / Eds. J.D. Barrow et al. — New York: New York Academic Press. P. 495.

McClintock J.E., 1998 // AIP Conf. Proc. V. 431. P. 290.

McClintock J.E., 2008 // In: Sport-Period Binary Stars: Observations, Analyses and Results / Eds. E.F. Milone, D.A. Leahy, D.W. Hobill. — Springer, Astrophys. Space. Sci. Library. P. 3.

McClintock J.E., *Remillard R.A.*, 1986, ApJ. V. 308. P. 110.

McClintock J.E., *Remillard R.A.*, 1990, ApJ. V. 350. P. 386.

McClintock J.E., *Remillard R.A.*, 2000, ApJ. V. 531. P. 956.

McClintock J.E. et al., 1995 — *McClintock J.E.*, *Horne K.*, *Remillard R.A.* // ApJ. V. 442. P. 358.

McClintock J.E. et al., 2001 — *McClintock J.E.*, *Garcia M.R.*, *Caldwell N. et al.* // ApJ. V. 551. L147.

McLaughlin M.A. et al., 2004a — *McLaughlin M.A.*, *Kramer M.*, *Lyne A.G. et al.* // ApJ. V. 613. L57.

McLaughlin M.A. et al., 2004b — *McLaughlin M.A.*, *Lyne A.G.*, *Lorimer D.R. et al.* // ApJ. V. 616. L131.

McLean I.S., 1977 // Astron. Aph. V. 55. P. 347.

McLean I.S., *Tapia S.*, 1980, Nature V. 287. P. 703.

McSwain M.V. et al., 2004 — *McSwain M.V.*, *Gies D.R.*, *Huang W. et al.* // ApJ. V. 600. P. 927.

Mendez M., *van der Klis M.*, 1997a // ApJ. V. 479. P. 926.

Mendez M., *van der Klis M.*, 1997b // ApJ. V. 499. L187.

Mennickent R.E. et al., 2004 — *Mennickent R.E.*, *Diaz M.P.*, *Tappert C.* // MNRAS. V. 347. P. 1180.

Mereghetti S. et al., 1994 — *Mereghetti S.*, *Belloni T.*, *Shara M.*, *Drissen L.* // ApJ. V. 424. P. 943.

Merloni A. et al., 2003 — *Merloni A.*, *Heinz S.*, *di Matteo T.* // MNRAS. V. 345. P. 1057.

Merloni A. et al., 2005 — *Merloni A.*, *Nayakshin S.*, *Sunyaev R.A.* (*Eds.*) // Growing Block Holes: accretion in a Cosmological Context, Proc. of the MPA/ESO/MPE/USM Joint Astronomy Conference Held at Garching, Germany, 21–25 June 2004. — Berlin: Springer.

Mescerskii F., 1902 // Astron. Nachr. V. 159. P. 229.

Mestel L., 1968 // MNRAS. V. 138. P. 359.

Meyer F., *Meyer-Hoffmeister E.*, 1984 // Astron. Aph. V. 132. P. 143.

Meynet G., *Maeder A.*, 2000 // Astron. Aph. V. 361. P. 101.

Meynet G., *Maeder A.*, 2005 // Astron Aph. V. 429. P. 581.

Meynet G., *Maeder A.*, 2007 // Astron. Aph. V. 464. L11.

Meynet G. et al., 1994 — *Meynet G.*, *Maeder A.*, *Schaerer D.*, *Charbonnel C.* // Astron Aph. Suppl. V. 103. P. 97.

Michaud G. et al., 2004 — *Michaud G.*, *Richard O.*, *Richer J.*, *Van den Berg D.A.* // ApJ. V. 606. P. 452.

Middleditch J., *Nelson J.E.*, 1976 // ApJ. V. 208. P. 567.

Mihalas D. et al., 1974 — *Mihalas D.*, *Barnard A.J.*, *Cooper J.*, *Smith E.W.* // ApJ. V. 190. P. 315.

Milgrom M., 1976 // ApJ. V. 206. P. 869.

Milgrom M., 1978 // Astron. Aph. V. 70. P. 763.

Milgrom M., 1979 // Astron. Aph. V. 76. P. 338.

Miller J.M. et al., 2002 // ApJ. V. 570. L69.

Milne E.A., 1926 // MNRAS. V. 86. P. 320.

Milone A.A.E., *Latham D.W.*, 1992 // IAU Symp. No 151, «Evolutionary Process in Interacting Binary Stars» / Eds. Y. Kondo, R.F. Sistero, R.S. Polidan. — Dordrecht: Kluwer. P. 475.

Milone E.F. (*ed.*), 1993. Light Curve Modeling of Eclipsing Binary Stars. — New York: Springer.

Milone E. et al., 1992 — *Milone E.F.*, *Stagg C.R.*, *Schiller S.J.* // IAU Symp. No 151, «Evolutionary Process in Interacting Binary Stars» / Eds. Y. Kondo, R.F. Sistero, R.S. Polidan. — Dordrecht: Kluwer. P. 479.

Milone E. et al., 2008 — *Milone E.*, *Leahy D.A.*, *Hobill D.W.* (*eds.*). Short-Period Binary Stars: Observations, Analyses and Results. — Springer, ASSL Sery.

Mineshige S., *Weeler J.C.*, 1989 // ApJ. V. 343. P. 241.

Mineshige S., *Wheeler J.C.* (*eds.*), 1999. Disk Instabilities in Close Binary Systems — 25 Years of the Disk Instability Model. — Univ. Academy Press.

Mineshige S. et al., 1993 — *Mineshige S.*, *Yamasaki T.*, *Ishizaka C.* // Publ. Astron. Soc. Japan V. 45. P. 707.

Mirabel I.F., *Rodriguez L.E.*, 1994 // Nature. V. 374. P. 46.

Mirabel I.F., *Rodriguez L.F.*, 1998 // Nature. V. 392. P. 673.

Mirabel I.F. et al., 1996 — *Mirabel I.F.*, *Rodriguez L.F.*, *Chaty S. et al.* // ApJ. V. 472. L111.

Mirabel I.F. et al., 1998 — *Mirabel I.F.*, *Dhawan V.*, *Chaty S. et al.* // Astron. Aph. V. 330. L9.

Mirabel I.F. et al., 2001 — *Mirabel I.F.*, *Dhawan V. Mignani R.P.*, *Rodrigues I.*, *Guglielmetti F.* // Nature V. 413. P. 139.

Mitsuda K. et al., 1984 — *Mitsuda K.*, *Inoue H.*, *Koyama K. et al.* // Publ. Astron. Soc. Japan V. 36. P. 741.

Miyama S. et al., 1984 — *Miyama S.*, *Hayashi C.*, *Narita S.* // ApJ. V. 279. P. 621.

Miyamoto S. et al., 1991 — *Miyamoto S.*, *Kimura K.*, *Kitamoto S. et al.* // ApJ. V. 383. P. 784.

Miyoshi M. et al., 2009 — *Miyoshi M.*, *Shen Z.-Q.*, *Oyama T. et al.* // arXiv:0906,5511v1.

Mkrtichian D.E.et al., 2006 — *Mkrtichian D.E.*, *Kim S.L.*, *Kuzakin A.V. et al.* // Ap. Sp. Sci. V. 304. P. 169.

Mkrtichian D.E.et al., 2007 — *Mkrtichian D.E.*, *Kim S.E.*, *Rodrigues E. et al.* // Publ. of ASP-conference Series V. 370. P. 194.

Moffat A.F.J., 1988 // in Polarized Radiation of Circumstellar Origin, ed. G.V. Coyne et al (Vatican Observatory, Vatican), P.607.

Moffat A.F.J., 1989 // ApJ. V. 347. P. 373.

Moffat A.F.J., 1995 // In: Wolf-Rayer Stars: Binaries, Colliding Winds, Evolution, IAU Symp. № 163, Eds. K.A. van der Hucht, P.M. Williams, B. — Dordrecht: Kluwer Acad. Publ. P. 213.

Moffat A.F.J., 1996 // Proc. of the 33-rd Liege Intern. Astroph. Coll. Wolf-Rayet Stars in the Framework of Stellar Evolution, Eds. Vreux J.-M. et al., Liege, P.199.

Moffat A.F.J., 1998 // Ap. Sp. Sci. V. 260. P. 225.

Moffat A.F.J., 1999 // in K.A. van der Hucht, G. Koenigsberger, P.R.J. Eenens (eds.), IAU Symp. № 193, P. 278.

Moffat A.F., *Robert C.*, 1994 // ApJ. V. 421. P. 310.

Moffat A.F.J., *Seggewiss W.*, 1987 // The Messenger (ESO). № 49. P.26.

Moffat A.F.J. et al., 1982 — *Moffat A.F.J.*, *Firmani C.*, *McLean I.S.*, *Seggewiss W.* // In: IAU Symp. № 99, Wolf-Rayet Stars: Observation, Physics, Evolution / C.W.H. de Loore and A.J. Willis (eds.). — Dordrecht: Reidel. P. 577.

Moffat A.F.J. et al., 1988 — *Moffat A.F.J.*, *Drissen L.*, *Lamontagne R.*, *Robert C.* // ApJ. V. 334. P. 1038.

Moffat A.F.J. et al., 1990 — *Moffat A.F.J.*, *Drissen L.*, *Robert C. et al.* // ApJ. V. 350. P. 767.

Moffat A.F.J. et al., 1991 — *Moffat A.F.J.*, *Shara M.M.*, *Potter M.* // Astron.J. V. 102. P. 642.

Mokiem M.R. et al., 2007 — *Mokiem M.R.*, *de Koter A.*, *Evans C.J. et al.* // Astron. Aph., V. 465. P. 1003.

Molnar L.A., *Kobulnicky H.A.*, 1992 // ApJ. V. 392. P. 648.

Morgan E.H. et al., 1997 — *Morgan E.H.*, *Remillard R.A.*, *Greiner J.* // ApJ. V. 482. P. 993.

Morris M.S., *Thorne K.S.*, 1988 // Am. J. Phys. V. 56. P. 395.

Morton D.C., 1960 // ApJ. V. 132. P. 146.

Motch C. et al., 1997 — *Motch C.*, *Haberl F.*, *Dennerl K. et al.* // Astron. Aph. V. 323. P. 853.

Mouchet M. et al., 1980 — *Mouchet M.*, *Ilovaisky S.A.*, *Chevalier C.* // Astron. Aph. V. 90. P. 113.

Mouri H., *Taniguchi Y.*, 2002 // ApJ. V. 566. L17.

Munoz-Darias T. et al., 2005 — *Munoz-Darias T.*, *Casares J.*, *Martinez-Pais I.G.* // ApJ. V. 635. P. 502.

Munoz-Darias T. et al., 2008 — *Munoz-Darias T.*, *Casares J.*, *Martinez-Pais I.G.* // MNRAS. V. 385. P. 2205.

Myasnikov A.V., *Zhekov S.A.*, 1991 // Ap. Sp. Sci. V. 184. P. 287.

Myasnikov A.V., *Zhekov S.A.*, 1993 // MNRAS. V. 260. P. 221.

Myasnikov A.V., *Zhekov S.A.*, 1998 // MNRAS. V. 300. P. 686.

Myers P.C. et al., 1987 — *Myers P.C.*, *Fuller G.A.*, *Matieu R.D. et al.* // ApJ. V. 319. P. 340.

Nagase F. et al., 1992 — *Nagase F.*, *Corbet R.H.D.*, *Day C.S.R. et al.* // ApJ. V. 396. L147.

Nagueruela I. et al., 2006 — *Nagueruela I.*, *Smith D.M.*, *Harrison T.E.*, *Torrejon J.M.* // ApJ. V. 638. P. 982.

Naik S. et al., 2002 // MNRAS. V. 330. P. 487.

Nalezyty M., *Madej J.*, 2004 // Astron. Aph. V. 420. P. 507.

Narayan R., 1996 // ApJ. V. 462. P. 136.

Narayan R., *McClintock J.E.*, 2012 // MNRAS. V. 419. L69.

Narayan R., *Nityananda R.*, 1986 // Ann, Rev. Astron. Aph. V. 24. P. 127.

Narayan R., *Yi I.*, 1994 // ApJ. V. 428. L13.

Narayan R., *Yi I.*, 1995 // ApJ. V. 452. P. 710.

Narayan R. et al., 1996 — *Narayan R.*, *McClintock J.E.*, *Yi I.*, 1996 // ApJ. V. 457. P. 821.

Narayan R. et al., 1997a — *Narayan R.*, *Barrett D.*, *McClintock J.E.* // ApJ. V. 482. P. 448.

Narayan R. et al., 1997b — *Narayan R.*, *Garcia M.R.*, *McClintock J.E.* // ApJ. V. 478. L79.

Narayan R. et al., 1999 — *Narayan R.*, *Mahadevan R.*, *Quataert E.* // In: The Theory of Black Hole Accretion Disks / Eds. M.A. Abramowicz et al. — Cambridge: Cambridge University Press.

Nazin S.N., *Postnov K.A.*, 1995 // Astron. Aph. V. 303. P. 789.

Negoro H., 1999 // In: Disk Instabilities in Close Binary Systems / Eds. S. Mineshige and J.C. Weeler. — Tokyo: University Academic Press, INC. P. 281.

Nelemans G. et al., 2004 — *Nelemans G.*, *Yungelson L.R.*, *Portegies-Zwart S.F.* // MNRAS. V. 349. P. 181.

Nelson B., *Davis W.D.*, 1972 // ApJ. V. 174. P. 617.

Nelson C.A., *Eggleton P.P.*, 2001 // ApJ. V. 552. P. 664.

Newman E.T. et al., 1963 — *Newman E.T.*, *Tamburino L.*, *Unti T.* // Math. Phys. V. 4. P. 915.

Nice D.J. et al., 2001 — *Nice D.J.*, *Splaver E.M.*, *Stairs I.H.* // ApJ. V. 549. P. 516.

Nice D.J. et al., 2003 — *Nice D.J.*, *Splaver E.M.*, *Stairs I.H.* // In: «Radio Pulsars», ASP Conference Proceedings, Vol. 302. Held 26–29 August 2002 at Mediterranean Astronomic Institute of Chania, Crete, Greece / Eds. M. Bailes, D.J. Nice and S.E. Thorsett. — San Francisco: Astronomical Society of the Pacific. P. 75.

Nice D.J. et al., 2004 — *Nice D.J.*, *Splaver E.M.*, *Stairs I.H.* // Young Neutron Stars and Their Environments, IAU Symposium no. 218, held as part of the IAU General Assembly, 14–17 July, 2003 in Sydney, Australia / Eds. F. Camilo and B.M. Gaensler. — San Francisco, CA: Astronomical Society of the Pacific. P. 49.

Nice D.J. et al., 2005a — *Nice D.J.*, *Splaver E.M.*, *Stairs I.H.* // Binary Radio Pulsars, ASP Conference Series, Vol. 328, Proceedings of the conference held 11–17 January, 2004, Aspen, Colorado, USA / Eds. F. A. Rasio and I. H. Stairs. — San Francisco: Astronomical Society of the Pacific. P. 371.

Nice D.J. et al., 2005b — *Nice D.J.*, *Splaver E.M.*, *Stairs I.H. et al.* // ApJ. V. 634. P. 1242.

Nice D.J. et al., 2007 — *Nice D.J.*, *Stairs I.H.*, *Kasian L.E.* // Bull. American Astron. Soc. V.39. P. 918.

Nice D.J. et al., 2008 — *Nice D.J.*, *Stairs I.H.*, *Kasian L.E.* // In: AIP Conf. Proc. V. 983. P. 453.

Niemela V.S. et al., 2008 — *Niemela V.S.*, *Gamen R.C.*, *Barba R.H. et al.* // MNRAS. V. 389. P. 1447.

Ninkov Z. et al., 1987 — *Ninkov Z.*, *Walker G.A.H.*, *Yang S.* // ApJ. V. 321. P. 425.

Nolt I.G. et al., 1975 — *Nolt I.G.*, *Kemp J.C.*, *Rudy R.J. et al.* // ApJ. V. 199. P. 27.

Nomoto K., *Yamaoko H.*, 1992 // In: X-ray Binaries and Recycled Pulsars / Eds. E.P.J. van den Heuvel and S.A. Rappaport. — Dordrecht: Kluwer Acad. Publ. P. 189.

Nouri-Zonoz M., *Lynden-Bell D.*, 1997 // MNRAS. V. 292. P. 714.

Novikov I.D., 1997 // In: Relativistic Astrophysics and Cosmology, Proc. of the Spanish Relativity Meeting, La Laguna, Tenerife, Spain. Sept. 4-7, 1995 / Eds. J. Buitrago, E. Medaliavilla, A. Oscoz. — Singapore: World Scientific. P. 51.

Novikov I.D., *Thorne K.S.*, 1973 // In Black Holes / Eds. C. De Witt, B.S. De Witt. — New-York: Gordon and Breach. P. 343.

Novikov I.D., *Zeldovich Ya. B.*, 1966 // Nuovo Cimento Suppl. V. 4. P. 810.

Nowak M.A., 1995 // PASP. V. 107. P. 1207.

Nowak M.A. et al., 1997 — *Nowak M.A.*, *Wagoner R.V.*, *Begelman M.C.*, *Lehr D.E.* // ApJ. V. 477. L91.

Nugis T., *Lamers H.J.G.L.M.*, 2000 // Astron. Aph. V. 360. P. 227.

Nugis T. et al., 1998 — *Nugis T.*, *Crowther P.A.*, *Willis A.J.* // Astron. Aph. V. 333. P. 956.

Oda M., 1977 // Space Sci. Rev. V. 20. P. 757.

Okuda T., 1983 // Publ. Astron. Soc. Japan V. 35. P. 235.

Oosterbroek T. et al., 1997 — *Oosterbroek T.*, *Parmar A.N.*, *Martin D.D.E.*, *Lammers U.* // Astron. Aph. V. 327. P. 215.

Orosz J.A., 2001 // Astron. Tel. #67.

Orosz J.A., 2003 // A. Massive Star Odyssey: from Main Sequence to Supernova, IAU Symp. № 212, eds. K.A. van der Hucht, A. Herrero, C. Esteban, ASP Conf Series, P. 365.

Orosz J.A., *Bailyn C.D.*, 1995 // ApJ. V. 446. L59.

Orosz J.A., *Kuulkers E.*, 1999 // MNRAS. V. 305. P. 132.

Orosz J.A. et al., 1994 — *Orosz J.A.*, *Jerome A.*, *Bailyn C.D. et al.* // Bull. Amer. Astron. Soc. 102,02., V. 185. P. 12.

Orosz J.A. et al., 1995 — *Orosz J.A.*, *Schaefer B.*, *Barnes S.* // IAU Circ. № 6203.

Orosz J.A. et al., 1996 — *Orosz J.A.*, *Charles D.B.*, *McClintock J.E.*, *Remillard R.A.* // ApJ. V. 468. P. 380.

Orosz J.A. et al., 1997 — *Orosz J.A.*, *Remillard R.*, *Baylin C.D.*, *McClintock J.E.* // ApJ. V. 478. L83.

Orosz J.A. et al., 1998 — *Orosz J.A.*, *Jain R.K.*, *Bailyn C.D.*, *McClintock J.E.*, *Remillard R.A.* // ApJ. V. 499. P. 375.

Orosz J.A. et al., 2001 — *Orosz J.A.*, *Kuulkers E.*, *van der Klis M. et al.* // ApJ. V. 555. P. 489.

Orosz J.A. et al., 2002a — *Orosz J.A.*, *Groot P.J.*, *van der Klis M.*, *McClintock J.E.*, *Garcia M.R.*, *Zhao P.*, *Jain R.K.*, *Bailyn C.D.*, *Remillard R.A.* // ApJ. V. 568. P. 845.

Orosz J.A. et al., 2002b — *Orosz J.A.*, *Polisensky E.J.*, *Bailyn C.D. et al.* // Bull. Of the American Astron. Soc. V. 34. P. 1124.

Orosz J.A. et al., 2004 — *Orosz J.A.*, *McClintock J.E.*, *Remillard R.A.*, *Corbel S.* // ApJ. V. 616. P. 376.

Orosz J.A. et al., 2007 — *Orosz J.A.*, *McClintock J.E.*, *Narayan R. et al.* // Nature. V. 449. P. 872.

Orosz J.A. et al., 2009 — *Orosz J.A.*, *Steeghs D.*, *McClintock J.E. et al.* // ApJ. V. 697. P. 573.

Orosz J.A. et al., 2011 // ApJ. V. 742. P. 84.

Osaki Y., 1985 // Astron, Aph. V. 144. P. 369.

Oskinova L. et al., 2007 — *Oskinova L.*, *Hamann W.*, *Feldmeier A.* // Astron. Aph. V. 476. P. 1331.

Osmer P.S., *Hiltner W.A.*, 1977 // ApJ. V. 217. P. 186.

Ostriker J.P., 1976 // «Common Envelope Binaries», Structure and Evolution of Close Binary Systems, IAU Symp. № 73, Cambridge, England, 28 July–1 August, 1975, conference paper.

Ouyed R., 2002, Astron. Aph. V. 382. P. 939.

Ouyed R., 2004, astro-ph/0402122.

Ouyed R., *Butler M.*, 1999 // ApJ. V. 522. P. 543.

Owocki S.P., *Gayley K.G.*, 1995 // ApJ. V. 454. L145.

Özel F. et al., 2010 — *Özel F.*, *Psaltis D.*, *Narayan R.*, *McClintock J.E.* // ApJ. V. 725. P. 1918. arXiv 1006,2834 v1 (14 July 2010).

Ozernoy L.M., 1997 // MNRAS. V. 291. L63.

Paciesas W.S., 1992 // IAU Circ. № 5580.

Paczynski B., 1966 // Acta Astron. V. 16. P. 231.

Paczynski B., 1967a // Acta Astron. V. 17. P. 1.

Paczynski B., 1967b // Acta Astron. V. 17. P. 193.

Paczynski B., 1967c // Acta Astron. V. 17. P. 287.

Paczynski B., 1967d // Acta Astron. V. 17. P. 355.

Paczynski B., 1970 // In: «Mass Loss and Evolution of Close Binaries» (ed. K. Gyldenkerne and R. West). — Copenhagen: Copenhagen Univ. Pub. Funds. P.142.

Paczynski B., 1971a // Acta Astron. V. 21. P. 1.

Paczynski B., 1971b // Annual Rev. Astron. Aph. V. 9. P. 183.

Paczynski B., 1973 // IAU Symp № 49 on Wolf-Rayet and high temperature stars, (eds. M. Bappu and J. Sahade). Dordrecht-Holland: D.Reidel Publ. Comp. P. 143.

Paczynski B., 1974 // Astron. Aph. V. 34. P. 161.

Paczynski B., 1976 // In: Eggleton. P.P. Mitton, J. Whelan (eds.), Structure and Evolution of Close Binary Systems, IAU Symp. № 73. — Dordrecht, Netherlands: D. Reidel, «Common Envelope Binaries».

Paczynski B., 1977 // ApJ. V. 216. P. 822.

Paczynski B., 1978 // in Proc. of IAU Symp. № 73, Structure and Evolution of Close Binary Systems, (eds. P. Eggleton. S. Mitton, J. Whelan). P.75.

Paczynski B., 1983 // Astron. Aph. V. 273. L81.

Paczynski B., 1986 // ApJ. V. 304. P. 1.

Paczynski B., *Bisnovatyi-Kogan G.S.*, 1981 // Acta Astron. V. 31. P. 283.

Paczynski B., *Sienkiewicz R.*, 1972 // Astron. Aph. V. 22. P. 73.

Paczynski B., *Sienkiewicz R.*, 1981 // ApJ. Lett. V. 248. L27.

Paczynski B. et al., 2006 — *Paczynski B.*, *Szczygiel D.*, *Pileski B.*, *Pojmanski G.* // MNRAS. V. 368. P. 1311.

Pan K., 1997 // Astron. Aph. V. 321. P. 202.

Panek R.J., *Holm A.V.*, 1984 // ApJ. V. 277. P. 700.

Papaloizou J.C.B., *Lin D.N.C.*, 1995 // Ann. Rev. Astron. Aph. V. 33. P. 505.

Paredes J.M., 2005 // In: Aharonian F.A., Volk H.J., Horns D. (eds.), Proc. AIP Conf. V. 745, High Energy Gamma-Ray Astronomy 2-nd International Symposium. Amer. Inst. Phys. New-York. P. 93.

Paredes J.M. et al., 2000 — *Paredes J.M.*, *Marti J.*, *Ribo M.*, *Massi M.* // Science. V. 288. P. 2340.

Park S.Q. et al., 2004 // ApJ. V. 610. P. 378.

Parmar A.N. et al., 1986a — *Parmar A.N.*, *Stella L.*, *White N.E.* // ApJ. V. 304. P. 664.

Parmar A.N. et al., 1986b — *Parmar A.N.*, *White N.E.*, *Giommi P.*, *Cottwardt M.* // ApJ. V. 308. P. 199.

Pasquini L. et al., 2006 // In: IAU Symp. 232, the Scientific Requirement for Extremely Large Telescopes / Ed. P. Whitelock, B. Leibundgut, M. Dennefeld. — Cambridge: Cambridge Univ. Press.

Patterson J., 1984, ApJ. Suppl. V. 54. P. 443.

Patterson J., 1998, Publ. Astron. Soc. Pacific V. 110. P. 1132.

Patterson J. et al., 2005 — *Patterson J.*, *Kemp J.*, *Harvey D.A. et al.* // PASP. V. 117. P. 1204.

Pearson T.J., *Zensus J.A.*, 1987 // In: Superluminal Radio Souces / Eds. J.A. Zensus and T.J. Pearson. — Cambridge: Cambridge University Press. P. 1.

Pedersen H., 1983 // Messenger. V. 34. P. 21.

Peplinski A. et al., 2008 — *Peplinski A.*, *Artymowicz P.*, *Mellema G.* // MNRAS. V. 386. P. 179.

Peres G. et al., 1989a — *Peres G.*, *Reale F.*, *Collura A.*, *Fabbiano G.* // Socilta Astronomica Italiana Memorie V. 60. P. 221.

Peres G. et al., 1989b — *Peres G.*, *Reale F.*, *Collura A.*, *Fabbiano G.* // ApJ. V. 336. P. 140.

Petrova A.V., *Orlov V.V.*, 1999 // ApJ. V. 117. P. 587.

Pfeiffer R.J., *Koch R.H.*, 1973 // IBVS № 780.

Pietsch W. et al., 2006 — *Pietsch W.*, *Haberl F.*, *Sasaki M. et al.* // ApJ. V. 646. P. 420.

Pietsch W. et al., 2004 — *Pietsch W.*, *Mochejska B.J.*, *Misanovic Z. et al.* // Astron. Aph. V. 413. P. 879.

Piirola V., 1975 // IBVS № 1061.

Piirola V., 1980 // Astron. Aph. V. 90. P. 48.

Piotrowski S.L., 1964a // Bull Acad. Sci. Polonaise (ser. math. astr. phys.) V. 12. P. 323.

Piotrowski S.L., 1964b // Acta Astron. V. 14. P. 251.

Piotrowski S.L., 1967 // Comm. Obs. Roy. Belg. Uccle, (B), № 17. P. 133ff.

Piran Y., 1978 // ApJ. V. 221. P. 652.

Pittard J.M., *Stevens I.R.*, 1999 // In: K.A. van der Hucht, G. Koenigsberger, P.R.J. Eenens (eds.), IAU Symp. № 193, Wolf-Rayet Phenomena in Massive Stars and Starburst Galaxies, ASP Conf. Publishers, San Francisco. P.386.

Plaut L., 1959 // PASP. V. 71. P. 167.

Plavec M., 1958 // Mem. Soc. Roy. Sci. Liege V. 20, P. 411.

Plavec M., 1967 // Commun. Obs. R. Belgique, Uccle, B17, P. 83.

Plavec M., 1970 // In: Stellar Rotation / Ed. A. Slettebak. — Dordrecht: Reidel. P. 133.

Plavec M., *Kratochvill*, 1964, Bull. Astron. Inst. Czechoslovakia V. 15. P. 165.

Plavec M., *Polidan R.S.*, 1976, Proc. IAU Symp. № 73, «Structure and Evolution of Close Binary Systems», P. 289.

Plavec M.et al., 1968 — *Plavec M.*, *Kriz S.*, *Harmanec P.*, *Horn J.* // Bull. Astron. Inst. Chech. V. 19. P. 24.

Podsiadlowski P. et al., 2003a — *Podsiadlowski P.*, *Han Z.*, *Rappaport S.* // MNRAS. V. 340. P. 1214.

Podsiadlowski P. et al., 2003b — *Podsiadlowski P.*, *Rappaport S.*, *Han Z.* // MNRAS. V. 341. P. 385.

Podsiadlowski P. et al., 1995 — *Podsiadlowski Ph.*, *Cannon R.C.*, *Rees M.J.* // MNRAS. V. 274. P. 485.

Poinceare H., 1892, 1893, 1899. Les Methodes Nouvelles de la Mecanique Celeste. — Paris: Gauthier-Villars. V1-3.

Pojmanski G., 1998 // Acta Astron. V. 48. P. 711.

Politano M., *Weiler K.P.*, 2006 // ApJ. Lett. V. 641. L137.

Pollock A.M.T., 1987, ApJ. V. 320. P. 283.

Pollock A.M.T. et al., 1995 — *Pollock A.M.T.*, *Haberl F.*, *Corcoran M.F.* // In: IAU Symp. № 163, Wolf-Rayer Stars: Binaries, Colliding Winds, Evolution / Eds. K.A. Van den Hucht and P.M. Williams. — Dordrecht: Kluwer. P. 512.

Pols O.R. et al., 1998 — *Pols O.R.*, *Schröder K.-P.*, *Hurley J.R.*, *Tout C.A.*, *Eggleton P.P.* // MNRAS. V. 298. P. 525.

Pont F. et al., 2005 — *Pont F.*, *Bouchy F.*, *Melo C. et al.* // Astron. Aph. V. 438. P. 1123.

Pont F. et al., 2006 — *Pont F.*, *Zucker S.*, *Queloz D.* // MNRAS. V. 373. P. 231.

Pont F. et al., 2008 — *Pont F.*, *Knutson H.*, *Gilliland R.L. et al.* //MNRAS. V. 385. P. 109.

Pooley G. et al., 1999 — *Pooley G.*, *Fender R.P.*, *Brocksopp C.* //MNRAS. V. 302. L1.

Popov S.B., *Prokhorov M.E.*, 2005 // Astron. Aph. V. 434. P. 649.

Popov S.B. et al., 2000 // ApJ. V. 530. P. 896.

Popova E.I. et al., 1982 — *Popova E.I.*, *Tutukov A.V.*, *Yungelson L.R.* // Ap. Sp. Sci. V. 88. P. 55.

Popovic G.P., 1991 // Bull. Astron. Obs. Beograd V. 144. P. 13.

Popper D.M., 1980 // Annual Reviews of Astron. Aph. V. 18. P. 15.

Popper D.M., 1984 // Astron. J. V. 89. P. 132.

Popper D.M., *Etzel P.B.*, 1981 // Astron.J. V. 86. P. 102.

Popper D.M., *Plavec M.*, 1976 // ApJ. V. 205. P. 462.

Popper D.M., *Ulrich R.K.*, 1977 // ApJ. V. 212. L131.

Portegis Zwart S. et al., 1997 — *Portegis Zwart S.*, *Verbunt E.*, *Ergma E.* // Astron. Aph. V. 321. P. 207.

Postnov K.A., *Yungelson L.R.*, 2006, The Evolution of Compact Binary Systems // Living Rev. Relativity. V. 9. P. 6.

Poveda A. et al., 1994 — *Poveda A.*, *Herrera M.A.*, *Allen C. et al.* // Rev. Mex. Astron. Astrofis. V. 28. P. 43.

Poveda A. et al., 1967 — *Poveda A.*, *Ruiz J.*, *Allen C.* // Tonantzintla y Tacubaya Bull. V. 4. P. 86.

Press W.H. et al., 1992 — *Press W.H.*, *Teukolsky S.A.*, *Vetterling W.T.*, *Flannery B.P.*. Numerical Recipes in Fortran 77: The Art of Scientific Computing. — Cambridge: Cambridge Univ. Perss. P. 402.

Prestwich A.H. et al., 2006 — *Prestwich A.H.*, *Kilgard R.*, *Carpano S. et al.* // A. Tel. 955.

Prestwich A.H. et al., 2007 — *Prestwich A.H.*, *Kilgard R.*, *Crowther P.A. et al.* // ApJ. V. 669. L21.

Pribulla T. et al., 2003 — *Pribulla T.*, *Kreiner J.M.*, *Tremko J.* // Contrib. of the Astron. Obs. Skalante Pleso V. 33. P. 38.

Pribulla T., *Rucinski S.M.*, 2006 // Astron. J. V. 131. P. 2986.

Priedhorsky W.C. et al., 1983 — *Priedhorsky W.C.*, *Terrell J.*, *Holt S.S.* // ApJ. V. 270. P. 233.

Prince T.A. et al., 1994 — *Prince T.A.*, *Blidsten L.*, *Chakrabarty D.* // In: The Evolution of X-ray Binaries / Eds. S.S.Holt, C.S. Day. — New York: AIP Press. P. 235.

Pringle J.E., 1985 // In: Interacting Binary Systems. Chapter 1 / Eds. Pringle J.E., Wade R.A. — Cambridje Univ. Press.

Pringle J.E., 1991 // In: Physics of Star Formation and Early Stellar Evolution / Eds. C. Lada and N. Kylafis. — Dordrecht: Kluwer. P. 437.

Pringle J.E., 1992 // In: Circumstellar Disks in Nonisotropic and Variable Outflows from Stars / Eds. L. Drissen, C. Leitherer, A. Note. ASP Conf. Series. V. 22. P. 14.

Pringle J.E., 1996 // MNRAS. V. 281. P. 357.

Pringle J.E., *Rees M.J.*, 1972 // Astron. Aph. V. 21. P. 1.

Prinja R.K. et al., 1990 — *Prinja R.K.*, *Barlow M.J.*, *Howarth I.D.* // ApJ. V. 361. P. 607.

Pszota G. et al., 2008 — *Pszota G.*, *Zhang H.*, *Yuan F.*, *Cui W.* // MNRAS. V. 389. P. 423.

Punsly B., 2001 // In: The Nature of Unidentified Galactic High-Energy Gamma-Ray Sources. Proc. of the Workshop, Tonantzintla, Puebla, Mexico, 9-11 October 2000; Astron and Space Sci Laboratory, V. 267 / Eds. A. Carramicana, O. Reimer, D.J. Tompson. — Dordrecht: Kluwer Acad. Publ. P. 271.

Pustynski V.-V., 2007 // Modeling the Reflection Effect in Precataclysmic Binary Systems. — Tartu: Tartu University Press.

Quantrell H. et al., 2003 — *Quantrell H.*, *Norton A.J.*, *Ash T.D.C. et al.* // Astron. Aph. V. 401. P. 313.

Radon J., 1917 // Ber. Verh. Suchs. Acad. Wiss. Leipzig Math. Phys. K1. V. 69. P. 262.

Rafert J.B., *Twigg L.W.*, 1980 // MNRAS. V. 139. P. 78.

Raguzova N.V., *Popov S.V.*, 2005 // Astron. Aph. Transactions. V. 24. P. 151.

Rahunen T., 1981 // Astron. Aph. V. 102. P. 81.

Rahvar S., *Habibi F.*, 2004 // ApJ. V. 610. P. 673.

Rahvar S., *Nouri-Zonoz M.*, 2003 // MNRAS. V. 338. P. 926.

Randall L., *Sundrom R.*, 1999 // Phys. Rev. Lett. V. 83. P. 4690.

Rappaport S., *Joss P.C.*, 1997, ApJ. V. 486. P. 453.

Rappaport S. et al., 1983 — *Rappaport S.*, *Verbunt F.*, *Joss P.* — ApJ. V. 275. P. 713.

Rappaport S. et al., 1995 — *Rappaport S.*, *Podsiadlowski P.*, *Joss P.C. et al.* // MNRAS. V. 273. P. 731.

Rasio F.A., *Livio M.*, 1996 — ApJ. V. 471. P. 366.

Rauw G. et al., 1996 — *Rauw G.*, *Vreux J.-M.*, *Gosset E. et al.* — Astron. Aph. V. 306. P. 771.

Rauw G. et al., 2004 — *Rauw G.*, *De Becker M.*, *Naze Y. et al.* — Astron. Aph. V. 420. L9.

Rauw G. et al., 2005 — *Rauw G.*, *Crowther P.A.*, *De Becker M. et al.* // Astron. Aph. V. 432. P. 985.

Rauw G. et al., 2007 — *Rauw G.*, *Manfroid J.*, *Gosset E. et al.* // Astron. Aph. V. 463. P. 981.

Rebassa-Mansergas A. et al., 2010 — *Rebassa-Mansergas A.*, *Gänsicke B.T.*, *Schreiber M.R.*, *Koester D.*, *Rodriguez-Gil P.* // MNRAS. V. 402. P. 620.

Rees M.J., 1982 // In: The Galactic Center, AIP Conf. Proc., V. 83 / Eds. G.R. Reigler, R.D. Blanford. — New York: American Inst. of Physics. P. 166.

Rees M.J., 1984 // Ann. Rev. Astron. Aph. V. 22. P. 471.

Refsdal S., *Weigert A.*, 1971 // Astron. Aph. V. 13. P. 367.

Reid I.N., 1996 // Astron.J. V. 111. P. 2000.

Reig P. et al., 2006 — *Reig P.*, *Papadakis I.E.*, *Shrader C.R.*, *Kazanas D.* // ApJ. V. 644. P. 424.

Reimer A., *Reimer O.*, 2007 // The First Glast Symposium. AIP Conference Proceedings. V. 921. P. 217.

Remillard R.A., 2001 // IAU Circ № 7707. P. 1.

Remillard R.A., *McClintock J.E.*, 2006 // Annual Rev. Astron. Aph. V. 44. P. 49.

Remillard R.A. et al., 1992 — *Remillard R.A.*, *McClintock J.E.*, *Bailyn C.D.* // ApJ. Lett. V. 399. L145.

Remillard R. et al., 1996 — *Remillard R.*, *Orosz J.A.*, *McClintock J.*, *Baylin C.D.* // ApJ. V. 459. P. 226.

Revnivtsev M., *Sunyaev R.*, 2001 // IAU Circ. №7715, P. 1.

Reynolds A.P. et al., 1992 — *Reynolds A.P.*, *Bell S.A.*, *Hilditch R.W.* // MNRAS. V. 256. P. 631.

Reynolds A.P. et al., 1993 — *Reynolds A.P.*, *Hilditch R.W.*, *Bell S.A.*, *Hill G.* // MNRAS. V. 261. P. 337.

Reynolds A.P. et al., 1997 — *Reynolds A.P.*, *Quaintrell H.*, *Still M.D. et al.* // MNRAS. V. 288. P. 43.

Reynolds A.P. et al., 1999 — *Reynolds A.P.*, *Owens A.*, *Kaper L. et al.* // Astron. And Aph. V. 349. P. 873.

Ribas I., *Miralda-Escude J.*, 2007 // Astron. Aph. V. 464. P. 779.

Ribo M. et al., 2005 — *Ribo M.*, *Combi J.A.*, *Mirabel I.F.* // In: Proc. Astrophys. Space Sci. V297, Multiwavelength Approach to Unidentified Gamma Ray Sources / Eds. Cheng K.S., Romero G.E. — Dordrecht: Kluwer Acad. Publ. P. 143.

Richardson D. et al., 2002 // Astron. J. V. 123. P. 475.

Ridgway S.T.,, 1981 // 3-rd Symp. On Recent Adv. Observ. Astron. Mexico: Ensenada, P. 81.

Ritter H., *Kolb U.*, 1998 // Astron. Aph. Suppl. V. 129. P. 83.

Robert C. et al., 1989 — *Robert C.*, *Moffat A.F.J.*, *Bastein P. et al.* // ApJ. V. 347. P. 1034.

Robert C. et al., 1990 — *Robert C.*, *Moffat A.F.J.*, *Bastein P. et al.* // ApJ. V. 359. P. 211.

Roberts A., 1906 // MNRAS. V. 66. P. 123.

Roberts T.P., *Warwick R.S.*, 2000 // MNRAS. V. 315. P. 98.

Roberts T.P. et al., 2001 — *Roberts T.P.*, *Goad M.R.*, *Ward M.J. et al.* // MNRAS. V. 325. L7.

Robertson S.L., *Leiter D.J.*, 2002 // ApJ. V. 565. P. 447.

Robinson E.L. et al., 1993 — *Robinson E.L.*, *Marsh T.R.*, *Smak J.* // In: Accretion Disks in Compact Stellar Systems / Ed. J.C. Weeler. — Singapore: World Sci. Publ. P. 75.

Roche E.A., 1873 // Ann. de l'Acad. Sci. Montpellier. V. 8. P. 235.

Rodono M., 1992 // In: Evolutionary Processes in Interacting Binary Stars, (Y.Kondo, R.F.Sistero, R.S.Polidan, eds), Symp. IAU №151. — Dordrecht: Kluwer. P. 71.

Rodriguez L.F., *Mirabel I.F.*, 1997 // ApJ. V. 474. L123.

Rodriguez L.F., *Mirabel I.F.*, 2001 // in The Nature of Unidentified Galactic High-Energy Gamma-Ray Sources. Proc. of the Workshop, Tonantzintla, Puebla, Mexico, 9–11 October 2000; Astrophys. and Space Sci Laboratory, V267 / Eds. A. Carramicana, O. Reimer, D.J. Tompson. — Dordrecht: Kluwer Acad. Publ. P. 245.

Rogers R.I., *Iglesias C.A.*, 1992 // ApJ. Suppl. V. 79. P. 507.

Romano P. et al., 2008 — *Romano P.*, *Sidoli L.*, *Mangano V. et al.* // ApJ. V. 680. L137.

Rossiter R.A., 1924 // ApJ. V. 60. P. 15.

Rotschild R.E. et al., 1974 — *Rotschild R.E.*, *Boldt E.A.*, *Holt S.S.*, *Serlemitsos P.J.* // ApJ. V. 189. L13.

Rowe J.F. et al., 2006 // ApJ. V. 646. P. 1241.

Rubin B.C. et al., 1996 — *Rubin B.C.*, *Finger M.H.*, *Harmon B.A. et al.* // ApJ. V. 459. P. 259.

Rucinski S.M., 1969a // Acta Astron. V. 19. P. 125.

Rucinski S.M., 1969b // Acta Astron. V. 19. P. 245.

Rucinski S.M., 1970 // Acta Astron. V. 20. P. 327.

Rucinski S.M., 1973 // Acta Astron. V. 23. P. 301.

Rucinski S.M., 1985 // In: Interacting Binary Stars / Eds. P.P.Eggleton and J.E. Pringle. — D.Reidel Publ. Co. P. 85, 113.

Rudkjobing M., 1959 // Ann. d'Astrophys. V. 22. P. 111.

Rudy R.J., *Kemp J.C.*, 1976 // ApJ. V. 207. L125.

Ruffini R. et al., 2001 // ApJ. V. 555. L113.

Ruiter A.J. et al., 2009 — *Ruiter A.J.*, *Belczynski K.*, *Fryer C.* // ApJ. V. 699. P. 2026.

Russell H.N., 1914 // ApJ. V. 40. P. 282.

Russell H.N., 1928 // MNRAS. V. 88. P. 642.

Russell H.N., 1948 // ApJ. V. 108. P. 388.

Russell H.N., *Merrill J.E.*, 1952 // Contributions, from the Princeton University Observatory, № 26.

Safonova M. et al., 2001 — *Safonova M.*, *Torres D.F.*, *Romero G.E.* // Physical Review D. V. 65, id. 023001.

Salaris M. et al., 2000 — *Salaris M.*, *Garcia-Berro E.*, *Hernanz M.*, *Isern J.*, *Saumon D.* // ApJ. V. 544. P. 1036.

Salpeter E.E., 1964 // ApJ. V. 140. P. 796.

Samimi J. et al., 1979 // Nature V. 278. P. 434.

Sana H. et al., 2003 — *Sana H.*, *Hensberge H.*, *Rauw G.*, *Gosset E.* // Astron. Aph. V. 405. P. 1063.

Sanchez-Fernandez C. et al., 2002 // IAU Circ. №7989. P. 1.

Sandquist E.L. et al., 2000 — *Sandquist E.L.*, *Taam R.E.*, *Burket A.* // ApJ. V. 533. P. 984.

Sarma M.B.K. et al., 1996 — *Sarma M.B.K.*, *Vivekananda Rao P.*, *Abhyankar K.D.* // ApJ. V. 458. P. 371.

Savonije G.L., 1978 // Astron. Aph. V. 62. P. 317.

Sawada K. et al., 1986 — *Sawada K.*, *Matsuda T.*, *Hachisu I.* // MNRAS. V. 219. P. 75.

Sazhin M.V. et al., 1996 — *Sazhin M.V.*, *Yagola A.G.*, *Yakubov A.V.* // Phys. Lett., A. V. 219. P. 199.

Sazonov S.Y. et al., 1994 — *Sazonov S.Y.*, *Sunyaev R.A.*, *Lapshov V.F. et al.* // Astron. Lett. V. 20. P. 787.

Scarfe C.D., 1986 // Roy. Astron. Soc. Can. V. 80. P. 257.

Schaerer D., *Maeder A.*. 1992 // Astron. Aph. V. 263. P. 129.

Schaller G. et al., 1992 — *Schaller G.*, *Shaerer D.*, *Meynet G.*, *Maeder A.* // Astron. Aph. Suppl V. 96. P. 269.

Schandl S., 1996 // Astron. Aph. V. 307. P. 95.

Shaposhnikov N., *Titarchuk L.*, 2009 // ApJ. V. 699. P. 453.

Shaposhnikov N. et al., 2011 — *Shaposhnikov N.*, *Swank J.H.*, *Markwardt C.*, *Krimm H.* // arXiv: 1103,0531.

Schatsman E., 1962 // Ann. Aph. V. 25. P. 18.

Schlesinger F., 1908 // Publ. Allegheny Obs. V. 1. P. 3.

Schmid-Burgk J. et al., 1981 — *Schmid-Burgk J.*, *Scholz M.*, *Wehrse R.* // MNRAS. V. 194. P. 383.

Schmidt H., 1997 // In: White Dwarfs / Eds. J. Isern, M. Hermanz, E. Garcia-Berro, Proc. of the 10-th European Workshop on White Dwarfs. P. 3.

Schmutz W. et al., 1996 — *Schmutz W.*, *Geballe T.R.*, *Schild H.* // Astron. Aph. V. 111. L25.

Schmutz W. et al., 1998 — *Schmutz W.*, *Hamann W.-R.*, *Wessolowski U.* // Astron. Aph. V. 210. P. 236.

Schnieder P. et al., 1992 — *Schnieder P.*, *Ehlers J.*, *Falko E.E.* // Gravitational Lenses. — Berlin.

Schnurr O. et al., 2008 — *Schnurr O.*, *Casoli J.*, *Chene A.-N. et al.* // MNRAS. V. 389. L38.

Schnurr O. et al., 2009 — *Schnurr O.*, *Moffat A.F.J.*, *Villar-Sbaffi A. et al.* // MNRAS. V. 395. P. 823.

Schodel R. et al., 2002 // Nature. V. 419. P. 694.

Schwarzschild K., 1900 // A.N. V. 152. P. 65.

Schweickhardt J. et al., 1999 — *Schweickhardt J.*, *Schmutz W.*, *Stahl O. et al.* // Astron. Aph. V. 347. P. 127.

Seaton M.J. et al., 1992 — *Seaton M.J.*, *Zeippen C.J.*, *Tully J.A. et al.* // Rev. Mech. Astron y astrofis. V. 23. P. 19.

Sguera V. et al., 2005 — *Sguera V.*, *Barlow E.J.*, *Bird A.J. et al.* // Astron. Aph. V. 444. P. 221.

Shahbaz T., 1998 // MNRAS. V. 298. P. 153.

Shahbaz T., 2003 // MNRAS. V. 339. P. 1031.

Shahbaz T., *Kuulkers E.*, 1998 // MNRAS. V. 295. L1.

Shahbaz T., *Watson C.A.*, 2007 // Astron. Aph. V. 474. P. 969.

Shahbaz T. et al., 1994a — *Shahbaz T.*, *Naylor T.*, *Charles P.A.* // MNRAS. V. 268. P. 756.

Shahbaz T. et al., 1994b — *Shahbaz T.*, *Reingwald F.A.*, *Bunn J.C. et al.* // MNRAS. V. 271. L10.

Shahbaz T. et al., 1996 — *Shahbaz T.*, *Naylor T.*, *Charles P.A.* // MNRAS. V. 282. P. 1437.

Shahbaz T. et al., 1997 — *Shahbaz T.*, *Naylor T.*, *Charles P.A.* // MNRAS. V. 285. P. 607.

Shahbaz T. et al., 1998 — *Shahbaz T.*, *Thorstensen J.R.*, *Charles P.A.*, *Sherman N.D.* // MNRAS. V. 296. P. 1004.

Shahbaz T. et al., 1999a — *Shahbaz T.*, *van den Hooft F.*, *Casares J.*, *Charles P.A.*, *van Paradijs J.* // MNRAS. V. 306. P. 89.

Shahbaz T. et al., 1999b — *Shahbaz T.*, *Kuulkers E.*, *Charles P.A. et al.* // Astron. Aph. V. 344. P. 101.

Shahbaz T. et al., 2001 — *Shahbaz T.*, *Fender R.*, *Charles P.A.* // Astron. Aph. V. 376. L17.

Shakhovskoy N.M., *Efimov Yu.S.*, 1975 // In: Variable Stars and Stellar evolution. IAU Symp. № 67 / Eds. Sherwood V.E., Plaut L. — Dordrecht-Boston: Reidel D. P. 487.

Shakura N.I., *Sunyaev R.A.*, 1973 // Astron. Aph. V. 24. P. 337.

Shakura N.I., *Sunyaev R.A.*, 1976 // MNRAS. V. 175. P. 613.

Shakura N.I. et al., 2012 — *Shakura N.I.*, *Postnov K.A.*, *Kochetkova A.Yu.*, *Hjalmarsdotter L.* // MNRAS. V. 420. P. 216.

Shapiro S.L., *Lightman A.P.*, 1976 // ApJ. V. 204. P. 555.

Shapiro S.L., *Teukolsky S.A.*, 1983 // Black Holes, White Dwarfs and Neutron Stars; The Physics of Compact Objects. — New York: John Wiley and Sons.

Shara M.M. et al., 1991 — *Shara M.M.*, *Smith L.F.*, *Potter M. et al.* // Astron.J. V. 102. P. 716.

Shatsky N., 2001 // Astron. Aph. V. 380. P. 238.

Shaviv G., *Salpeter E.E.*, 1973 // ApJ. V. 184. P. 191.

Shaw J.S., 1994 // Mem. S.A. It. V. 65. P. 1.

Shellen I.A.G. et al., 2009 — *Shellen I.A.G.*, *de Mooij E.J.W.*, *Albrecht S.* // Nature V. 459. P. 543.

Shevalier R.A., 1993 // ApJ. V. 411. L33.

Shima E. et al., 1985 — *Shima E.*, *Matsuda T.*, *Takeda H.*, *Sawada K.* // MNRAS. V. 217. P. 367.

Shipman H.L., 1979 // ApJ. V. 228. P. 240.

Shklovsky I.S., 1967 // ApJ. V. 148. L1.

Shore S.N., *Brown D.N.*, 1988 // ApJ. V. 334. P. 1021.

Shore S.N. et al., 1994 — *Shore S.N.*, *Livio M.*, *van den Heuvel E.P.J.*. Interacting Binaries. — Berlin-Budapest: Springer-Verlag.

Shporer A. et al., 2007 *Shporer A.*, *Hartman J.*, *Mazeh T.*, *Pietsch W.* // Astron. Aph. V. 462. P. 1091.

Shu F.H. et al., 1990 — *Shu F.H.*, *Tremaine S.*, *Adams F.C.*, *Ruden S.P.* // ApJ. V. 358. P. 495.

Shulberg, A. M., 1973 // Limb Darkening of Spherical stars, in Tsessevich V.P. (ed) Eclipsing Variable Stars, Wiley, New-York.

Sidoli L. et al., 2008 — *Sidoli L.*, *Romano P.*, *Mangano V. et al.* // ApJ. V. 687. P. 1230.

Sidoli L. et al., 2009a — *Sidoli L.*, *Romano P.*, *Ducci L. et al.* // MNRAS. V. 397. P. 1528.

Sidoli L. et al., 2009b — *Sidoli L.*, *Romano P.*, *Esposito P. et al.* // MNRAS. V. 400. P. 258.

Siess L. et al., 2000 — *Siess L.*, *Dufour E.*, *Forestini M.* // Astron. Aph. V. 358. P. 593.

Sigel C.L., 1936 // Trans. Am. Math. Soc. V. 39. P. 225.

Silber A.D., 1992 // Ph. D. Thesis, Massachusetts Institute of Techology.

Silverman J.M., *Filippenko A.V.*, 2008 // ApJ. V. 678. L17.

Simmons J.E.L. et al,, 1995 — *Simmons J.E.L.*, *Willis J.P.*, *Newsam A.M.* // Astron. Aph. V. 293. L46.

Sinvhal S.D., *Srivastava J.B.*, 1978, Ap. Sp. Sci. V. 54. P. 239.

Sion E.M. et al., 1994 — *Sion E.M.*, *Long K.S.*, *Szkody P.*, *Huang M.* // ApJ. V. 430. L53.

Skinner S. et al., 1995 — *Skinner S.*, *Nagase F.*, *Koyama K.*, *Maeda Y.*, *Tsuboi Y.* // In: IAU Symp. № 163, Wolf-Rayet Stars: Binaries, Colliding Winds, Evolution. / Eds. K.A. van der Hucht and P.M. Williams. — Dordrecht: Kluwer. P. 471.

Skumanicz L.A., 1972 // ApJ. V. 171. P. 565.

Skyrme T.H.R., 1962 // Proc. Roy. Soc. London A V. 267. P. 127.

Smak J., 1970 // Acta Astron. V. 20. P. 312.

Smak J., 1984 // Acta Astron. V. 34. P. 93.

Smith D.A., *Dhillon V.S.*, 1998 // MNRAS. V. 301. P. 767.

Smith L.E. et al., 1994 — *Smith L.E.*, *Meynet G.*, *Mermilliod J.-C.* // Astron. Aph. V. 287. P. 835.

Smith L.F., *Maeder A.*, 1989 — Astron. Aph. V. 211. P. 71.

Sobolev V.V., 1963. A Treatise on Radiative Transfer. — Princeton: D. van Nostrand and Co. Inc.

Sobolev V.V., 1963 // Soviet Astron. V. 6. P. 497.

Soker N., 2000 // Astron. Aph. V. 357. P. 557.

Soker N., *Livio M.*, 1984 // MNRAS. V. 211. P. 927.

Solhein J., 2010 // PASP. V. 122. P. 1133.

Southworth J., 2008 // MNRAS. V. 386. P. 1644.

Southworth J., 2011 // MNRAS. V. 417. P. 2166.

Southworth J., 2012 // MNRAS. V. 426. P. 1291.

Southworth J., *Clausen J.V.*, 2007 // Astron. Aph. V. 461. P. 1077.

Southworth J. et al., 2004a — *Southworth J.*, *Maxted P.F.L.*, *Smalley B.* // MNRAS. V. 349. P. 547.

Southworth J. et al., 2004b — *Southworth J.*, *Maxted P.F.L.*, *Smalley B.* // MNRAS. V. 351. P. 1277.

Southworth J. et al., 2004c — *Southworth J.*, *Zucker S.*, *Maxted P.F.L.*, *Smalley B.* // MNRAS. V. 355. P. 986.

Southworth J. et al., 2005a — *Southworth J.*, *Smalley B.*, *Maxted P.F.L.*, *Claret A.*, *Etzel P.B.* // MNRAS. V. 363. P. 529.

Southworth J. et al., 2005b — *Southworth J.*, *Maxted P.F.L.*, *Smalley B.* // Astron. Aph. V. 429. P. 645.

Sowers J.W. et al., 1998 — *Sowers J.W.*, *Gies D.R.*, *Bagnuolo W.G. et al.* // ApJ. V. 506. P. 424.

Splaver E.M. et al., 2002 — *Splaver E.M.*, *Nice D.J.*, *Arzoumanian Z. et al.* // ApJ. V. 581. P. 509.

Spruit H.C., 1998 // astro-ph/9806141.

Spruit H.C., *Ritter H.*, 1983 // Astron, Aph. V. 124. P. 267.

Spruit H.C., *Taam R.E.*, 2001 // ApJ. V. 548. P. 900.

Srinivasan G., 2001 // In: Black Holes in Binaries and Galactic Nuclei: Diagnostics, Demography and Formation, ESO Astrophys. Symposia / Eds. L. Kaper, E.P.J. van den Heuvel, P.A. Woudt. — Berlin: Springer. P. 45.

Stairs I.H. et al., 2001 // MNRAS. V. 325. P. 979.

Stairs I.H. et al., 2002 — *Stairs I.H.*, *Thorsett S.E.*, *Taylor J.H.*, *Wolszczan A.* // ApJ. V. 581. P. 501.

Stairs I.H. et al., 2004 — *Stairs I.H.*, *Thorsett S.E.*, *Arzoumanian Z.* // Phys. Rev. Lett. V. 93, id. 141101.

Stairs I.H. et al., 2008 — *Stairs I.H.*, *Kramer M.*, *Manchester R.N. et al.* // In: Short-Period Binary Stars: Observations, Analyses and Results / Eds. E.F. Milone, D.A. Leahy, D.W. Hobill. — Springer: Astrophys. Space Phys. Library. P. 53.

Staniucha M., 1979 // Acta Astron. V. 29. P. 587.

Stark M.J., *Saia M.*, 2003 // ApJ. V. 587. L101.

Steeghs D., 1996 // MNRAS. V. 281. P. 626.

Steeghs D., *Jonker P.G.*, 2007 // ApJ. V. 669. L85.

Steeghs D. et al., 1997 — *Steeghs D.*, *Harlaftis E.T.*, *Horne K.* // MNRAS. V. 290. L28.

Sterne T.E., 1934 // Harv.Circ.Nos. V. 386. P. 387.

Sterne T.E., 1939 // MNRAS. V. 99. P. 451.

Sterne T.E., 1940 // Proceed. Nat. Acad. Sci V. 26. P. 36 (Harvard. Repr. 191).

Stevens I.R. et al., 1992 — *Stevens I.R.*, *Blondin J.M.*, *Pollock A.M.T.* // ApJ. V. 386. P. 265.

Stirling A.M. et al., 2001 // MNRAS. V. 327. P. 1273.

St.-Louis N. et al., 1987 — *St-Louis N.*, *Drissen L.*, *Moffat A.F.J. et al.* // ApJ. V. 322. P. 870.

St.-Louis N. et al., 1988 — *St-Louis N.*, *Moffat A.F.J.*, *Drissen L. et al.* // ApJ. V. 330. P. 286.

St.-Louis N. et al., 1993 — *St-Louis N.*, *Moffat A.F.J.*, *Lapointe L. et al.* // ApJ. V. 410. P. 342.

St.-Louis N. et al., 1996 — *St.-Louis N.*, *Hill G.*, *Moffat A.F.J.*, *Bortzakos P.*, *Antokhin I.* // In: Proc. 33-d Liege Intern. Astrophys. Coll. Wolf-Rayet Stars in the Framework of Stellar Evolution / Eds. J.M. Vreux, A. Detal, D. Frainpont-Caro, E. Gosset, G. Rauw. — Liege. P. 331.

Stock R., 1989 // Nature V. 337. P. 319.

Stone R.C., 1979 // ApJ. V. 233. P. 520.

Stone R.E., 1982 // ApJ. V. 261. P. 208.

Stothers R., 1974 // ApJ. V. 194. P. 651.

Stothers R., *Chin C.*, 1985 // ApJ. V. 292. P. 222.

Stothers R.B., *Chin C.*, 2000 // ApJ. V. 540. P. 1041.

Stover R.J., 1981 // ApJ. V. 248. P. 684.

Struve O., 1925 // MNRAS. V. 86. P. 63.

Struve O., 1948a // Ann. Aph. V. 11. P. 117.

Struve O., 1948b // PASP. V. 60. P. 160.

Struve O., 1950. Stellar Evolution — Princeton, New Jersey.

Struve O., 1953 // In Cinquieme Colloque International d'Astrophysique Liege, Belgium, Liege. P. 236.

Stuwart G.C. et al., 1987 — *Stuwart G.C.*, *Watson M.G.*, *Matsuoka M. et al.* // MNRAS. V. 228. P. 293.

Suleymanov V.F., 1992 // Astron. Aph. Trans. V. 2. P. 197.

Summers L.K. et al., 2003 — *Summers L.K.*, *Stevens I.K.*, *Stickland D.K.*, *Heckman T.M.* // MNRAS. V. 342. P. 690.

Sunyaev R., 1991 // IAU Circ № 5179.

Sunyaev R. et al., 1992 — *Sunyaev R.*, *Churazov E.*, *Gilfanov M. et al.* // ApJ. Lett. V. 389. L75.

Sunyaev R.A. et al., 1991 — *Sunyaev R.A.*, *Churazov E.*, *Gilfanov M. et al.* // Astron. Aph. V. 247. L29.

Sunyaev R.A. et al., 1992 — *Sunyaev R.A.*, *Churazov E.*, *Gilfanov M. et al.* // ApJ. V. 389. L75.

Sunyaev R.A. et al., 1993 — *Sunyaev R.A.*, *Kaniovsky A.S.*, *Borozdin K.N. et al.* // Astron. Aph. V. 280. L1.

Sutantyo W., 1999 // Astron. Aph. V. 344. P. 505.

Swank L.H. et al., 1978 — *Swank L.H.*, *Boldt E.A.*, *Holt S.S. et al.* // ApJ., V. 226. L133.

Swings P.Z., 1936 // Z. Astrophys. V. 12. P. 40.

Szkody P., *Mateo M.*, 1986 // Astron. J. V. 92. P. 483.

Szkody P. et al., 2004 — *Szkody P.*, *Henden A.*, *Fraser O. et al.* // Astron. J. V. 128. P. 1882.

Szostek A. et al., 2008 — *Szostek A.*, *Zdziarski A.A.*, *McCollough M.L.* // MNRAS. V. 388. P. 1001.

Szostek A., *Dubus G.*, 2011 // MNRAS. V. 411. P. 193.

Taam R.E., *Sandquist E.L.*, 2000 // Ann. Rev. Astron. Aph. V. 38. P. 113.

Taam R.E., *Spruit H.C.*, 2001 // ApJ. V. 561. P. 329.

Tagieva S.O. et al., 2000 // Astron. Astrophys. Transactions V. 19. P. 123.

Takizawa M. et al., 1997 — *Takizawa M.*, *Dotani T.*, *Mitsuda K. et al.* // ApJ. V. 489. P. 272.

Tanaka J., 1999 // In: Disk Instabilities in Close Binary Systems / Eds. S. Mineshige and J.C. Weeler. — Tokyo: University Academic Press INC. P. 21.

Tanaka T., 2003 // Progr. Theor. Phys. Suppl. V. 148. P. 307.

Tanaka Y., 1989 // In: 23-d ESLAB Symp., Noordwijk, ESA / Eds. J. Hunt and B. Battrik. V. 1. P. 3.

Tanaka Y., *Lewin W.H.G.*, 1995 // In: X-ray Binaries / Eds. W.H.G. Lewin et al. — Cambridge: Cambridge University Press. P. 126.

Tanaka Y., *Shibazaki N.*, 1996 // Ann. Rev. Astron. Aph. V. 34. P. 607.

Tanaka Y. et al., 1991 — *Tanaka Y.*, *Makino F.*, *Dotani T. et al.* // In: Proc. of Workshop on Nova Muscae 1991, Danish Space Res. Inst., Lyngby / Ed. S. Brandt. P. 125.

Tananbaum H. et al.,1972 — *Tananbaum H.*, *Gursky H.*, *Kellog E.M. et al.* // ApJ. Lett. V. 174. L143.

Taniguchi Y. et al., 2000 — *Taniguchi Y.*, *Shioya Y.*, *Tsuru T.G.*, *Ikeuchi S.* // // Publ. Astron. Soc. Japan. V. 52. P. 533.

Tapia S., 1977 // ApJ. V. 212. L125.

Tassoul J.L., 1978. Theory of Rotating Stars, Princeton Series in Astrophysics. — Princeton, NJ: Princeton University Press.

Tassoul J.L., 1987 // ApJ. V. 322. P. 856.

Tassoul J.L., 1988 // ApJ. V. 324. L71.

Tassoul J.L., 1995 // ApJ. V. 444. P. 338.

Tavani M., 1991 // ApJ. V. 366. L27.

Tavani M. et al., 1996 — *Tavani M.*, *Fruchter A.*, *Zhang S.N. et al.* // ApJ. V. 473. L103.

Taylor J.H., 1994 // Rev. Mod. Phys. V. 66. P. 711.

Taylor J.H., *Weisberg J.M.*, 1989 // ApJ. V. 345. P. 434.

Thorne K., *Zytkov A.N.*, 1977 // ApJ. V. 212. P. 832.

Thorne K.S. et al., 1986 — *Thorne K.S.*, *Price R.H.*, *Macdonald D.A.*(eds.). Black Holes: The Membran Paradigm. — New Haven: Yalle Univ. Press.

Thorsett S.E., *Chakrabarty D.*, 1998 // ApJ. V. 512. P. 288.

Thorsett S.E. et al., 1993 — *Thorsett S.E.*, *Arzoumanian Z.*, *McKinnon M.M.*, *Taylor J.H.* // ApJ. V. 405. L29.

Thorstensen J.R. et al., 2002 — *Thorstensen J.R.*, *Fenton W.H.*, *Patterson J. et al.* // PASP. V. 114. P. 1117.

Timmes F.X. et al., 1996 — *Timmes F.X.*, *Woosley S.E.*, *Weaver T.A.* // ApJ. V. 457. P. 834.

Tingay S.J. et al., 1995 // Nature, V. 374. P. 141.

Titarchuk L., 1994 // ApJ. V. 434. P. 570.

Titarchuk L., *Osherovich V.*, 2000 // ApJ. V. 542. L111.

Titarchuk L., *Shaposhnikov N.*, 2010 // ApJ., V. 724. P. 2, 1147.

Tokovinin A.A., 1997 // Astron. Aph. Suppl. V. 124. P. 75.

Tokovinin A.A., 2004 // IAU Coll. No 191, Rev. Mex. Astron. Astrofis. / Eds. C. Scarfe, C. Allen. V. 21. P. 7.

Tokovinin A.A., 2008a // MNRAS. V. 389. P. 925.

Tokovinin A.A., 2008b // Multiple Stars Across the H-R Diagram. — Berlin: Springer. P. 3.

Tokovinin A.A. et al., 2006 — *Tokovinin A.A.*, *Thomas S.*, *Sterzik M.*, *Urdy S.* // Astron. Aph. V. 450. P. 68.

Tomkin J., *Popper D.M.*, 1986 // Astron. J. V. 91. P. 1428.

Tomsick J.A. et al., 2002 — *Tomsick J.A.*, *Heindl W.A.*, *Chakrabarty D.*, *Caaret P.* // ApJ. V. 581. P. 570.

Torok G. et al., 2005 — *Torok G.*, *Abramovicz M.A.*, *Kluzniak W.*, *Stuchlik Z.* // Astron. Aph. V. 436. P. 1.

Torres G. et al., 1992 — *Torres G.*, *Latham D.W.*, *Mareh T. et al.* // IAU Symp. No 151, «Evolutionary Process in Interacting Binary Stars» / Eds. Y. Kondo, R.F. Sistero, R.S. Polidan. — Dordrecht: Kluwer. P. 491.

Tout C., 1996 // In: Accretion Disk Viscosity in Cataclysmic Variables and Related Objects / Eds. A. Evans, J.H. Wood, eds. — Dordrecht: Kluwer, P. 97.

Tout C.A., 1991 // MNRAS. V. 250. P. 701.

Trimble V., 1974 // Astron J. V. 79. P. 967.

Trimble V., 1990 // MNRAS. V. 242. P. 79.

Trimble V.L., *Thorne K.S.*, 1969 // ApJ. V. 156. P. 1013.

Trushkin S.A., 2000 // Astron. Aph. Transactions V. 19. P. 525.

Tsumeni H. et al., 1989 — *Tsumeni H.*, *Kitamoto S.*, *Roussel-Dupre D.* // ApJ. V. 337. L81.

Turcotte S. et al., 2000 — *Turcotte S.*, *Richer J.*, *Michaud G.*, *Christensen-Dalsgaard J.* // Astron. Aph. V. 360. P. 603.

Tuthill P.G. et al., 1999 — *Tuthill P.G.*, *Monnler J.D.*, *Danchi W.C.* // Nature. V. 398. P. 487.

Tutukov A.V., 1978 // Astron. Aph. V. 70. P. 57.

Tutukov A.V., *Yungelson L.R.*, 1979 // Astron. Aph. V. 29. P. 665.

Tutukov A.V., *Yungelson L.R.*, 1994 // MNRAS. V. 268. P. 871.

Udalski A. et al., 1998 — *Udalski A.*, *Soszynski I.*, *Szymanski M. et al.* // Acta Astron. V. 48. P. 563.

Udry S., *Santos N.C.*, 2007 // Ann. Rev. Astron. Aph. V. 45. P. 397.

Uemura M. et al., 2000 — *Uemura M.*, *Kato T.*, *Matsumoto K. et al.* // Publ. Astron. Soc. Japan. V. 52. L15.

Uitterdijk J., 1932 // BAN. V. 6, № 237.

Underhill A.B., 1991 // ApJ. V. 383. P. 729.

Unsold A., 1955. Physik der Sternatmospheren, , Berlin–Gottingen–Heidelberg: Springer.

Ushida Y, *Shibata K.*, 1985 // Publ. Astron. Soc. Japan, V. 37. P. 515.

Usov V.V., 1990 // Ap. Sp. Sci. V. 167. P. 297.

Usov V.V., 1991 // MNRAS. V. 252. P. 19.

Usov V.V., 1992 // ApJ. V. 389. P. 635.

Usov V.V., 1995 // In: Wolf-Rayet Stars: Binaries, Colliding Winds, Evolution / Eds. K.A. van der Hucht and P.M. Williams. IAU Symp, № 163. — Dordrecht: Kluwer. P. 495.

Usov V.V., *Merlose D.B.*, 1992, ApJ. V. 395. P. 575.

Vacca W.D. et al., 2007 — *Vacca W.D.*, *Sheehy C.D.*, *Graham J.R.* // ApJ. V. 662. P. 272.

Valenti J.A. et al., 1995 — *Valenti J.A.*, *Butler R.P.*, *Marcy G.W.* // PASP. V. 107. P. 966.

Valsecchi F. et al., 2010 — *Valsecchi F.*, *Glebbeek E*, *Farr W.M*, *Fragos T.*, *Willems B.*, *Orosz J.A.*, *Liu J.* // Nature. V. 468. P. 77.

Valtonen M.J., 2008 // OJ287: A. Binary Black Hole System, in The Nuclear Region, Host Galaxy and Environment of Active Galaxies, Proc. of Int. Symp. Held in Huatulco, Oaxaca, Mexico in april 18-20, 2007, Revista Mexicana de Astronomia y Astrofisica. V.32, P.22.

Van Albada T.C., 1968 // Bull. Astron. Inst. Netherlands V. 20. P. 47.

Van Beveren D., 1991 // Space Sci. Rev. V. 56. P. 249.

Van den Heuvel E.P.J., 1976 // In: Structure and Evolution of Close Binary Systems / Eds. P.P. Eggleton, B. Mitton, J. Whelan. — Dordrecht: Reidel Publ. Comp. P. 35.

Van den Heuvel E.P.J., 1994 // In: Shore S.N. et al. Interacting Binaries. — Berlin-Budapest: Springer-Verlag. P. 267.

Van den Heuvel E.P.J., *De Loore C.*, 1973 // Astron. Aph. V. 25. P. 387.

Van den Heuvel E.P.J., *Habets G.M.H.J.*, 1984 // Nature. V. 309. P. 598.

Van den Heuvel E.P.J., *Heize J.*, 1972 // Nature. Phys. Sci. V. 239. P. 67.

Van den Heuvel E.P.J., *van Paradijs J.*, 1988 // Nature. V. 334. P. 227.

Van den Heuvel E.P.J., *Yoon S.-C.*, 2007 // Ap. Sp. Sci. V. 311. P. 177.

Van der Klis M., 1994, ApJ. Suppl. Ser. V. 92. P. 511.

Van der Klis M., 1997, in D.T. Wickramasinghe (ed.), Accretion Phenomena and Related Outflows. IAU Colloq. 163, ASP Conf. Series, V. 121. P. 347.

Van der Klis M. et al., 1985 — *Van der Klis M.*, *Clousen J.N.*, *Jensen K. et al.* // Astron. Aph. V. 151. P. 322.

Van der Hooft F.F. et al., 1998 — *Van der Hooft F.F.*, *Heemskerk M.H.M.*, *Alberts F.*, *van Paradijs J.* // Astron. Aph. V. 329. P. 538.

Van der Hucht K.A., 2001 // New Astron. Rev. V. 45. P. 135.

Van der Hucht K.A. et al., 2003 — *Van der Hucht K.A.*, *Herrero A.*, *Esteban C.* (eds.) // A Massive Star Odissey: from Main Sequence to Supernova, IAU Symp. № 212, ASP Conf. Series, Paris-France.

Van Hamme W., 1993 // Astron. J. V. 106. P. 2096.

Van Hamme W., *Wilson R.E.*, 1994 // Mem Soc. Astron. Italiana. V. 65. P. 89.

Van Kerkwijk M.H., 1993 // Astron. Aph. V. 276. L9.

Van Kerkwijk M.H., *Kulkarni S.R.*, 1999, ApJ. V. 516. L25.

Van Kerkwijk M.H. et al., 1992 — *Van Kerkwijk M.H.*, *Charles P.A.*, *Geballe T.R. et al.* // Nature V. 355. P. 703.

Van Kerkwijk M.H. et al., 1995 — *Van Kerkwijk M.H.*, *van Paradijs J.*, *Zuiderwijk E.J.* // Astron. Aph. V. 303. P. 497.

Van Kerkwijk M.H. et al., 1996 — *Van Kerkwijk M.H.*, *Bergeron P.*, *Kulkarni S.R.* // ApJ. V. 467. L89.

Van Kerkwijk M.H. et al., 2005 // ASP Conf. V. 328. P. 357.

Van Paradijs J., 1995 // In: X-ray Binaries / Eds. W.H.G. Lewin et al. — Cambridge: Cambridge University Press. P. 536.

Van Paradijs J., *McClintock J.E.*, 1994 // ApJ. V. 290. P. 113.

Van Paradijs J., *Verbunt F.*, 1984 // In: High Energy Transients in Astrophysics / Eds. S.E. Woosley. AIP Conf. Ser. Proc. № 115, AIP. New-York. P. 49.

Van Paradijs J. et al., 1977 — *Van Paradijs J.*, *Zuiderwijk E.J.*, *Takens R.J.*, *Hammerschlag-Hensberge G.* // ApJ. Suppl. Ser. V. 30. P. 195.

Van Paradijs J. et al., 1980 — *Van Paradijs J.*, *Verbunt F.*, *van den Linden T. et al.* // ApJ. V. 241. L161.

Van Paradijs J. et al., 1987 — *Van Paradijs J.*, *Verbunt F.*, *Shafer R.A.*, *Arnaud K.A.* // Astron. Aph. V. 182. P. 47.

Van Paradijs J. et al., 1996 — *Van Paradijs J.*, *Zhang W.*, *Marshall F. et al.* // IAU Circ. № 6336.

Van Straten W. et al., 2001 — *Van Straten W.*, *Bailes M.*, *Britton M.C. et al.* // Nature. V. 412. P. 158.

Van't Veer F., 1975 // Astron. Aph. V. 40. P. 167.

Van't Veer F., 1979 // Astron. Aph. V. 80. P. 287.

Van't Veer F., *Maceroni C.*, 1989 // Astron. Aph. V. 220. P. 128.

Vanbeveren D., *de Loore C.*, 1994 // Astron. Aph. V. 290. P. 129.

Vanbeveren D. et al., 1998 — *Vanbeveren D.*, *De Loore C.*, *Van Rensbergen W.* // The Astron. Aph. Rev. V. 9. P. 63.

Vanko M. et al., 2006 — *Vanko M.*, *Tremko J.*, *Pribulla T. et al.* // Ap. Sp. Sci. V. 304. P. 133.

Vaz L.P.R., 1985 // Ap. Sp. Sci. V. 113. P. 349.

Verbiest J.P.W. et al., 2008 — *Verbiest J.P.W.*, *Bailes M.*, *van Straten W. et al.* // ApJ. V. 679. P. 675.

Verbunt F., 1993 // Annual Rev. Astron. Aph. V. 31. P. 93.

Verbunt F., *Zwaan C.*, 1981 // Astron. Aph. V. 100. L7.

Verbunt F. et al., 1994 — *Verbunt F.*, *Belloni T.*, *Johnston H.M. et al.* // Astron. Aph. V. 285. P. 903.

Vikhlinin A. et al., 1992 — *Vikhlinin A.*, *Finogenov A.*, *Sitdikov A. et al.* // IAU Circ. № 5608.

Vikhlinin A. et al., 1994 — *Vikhlinin A.*, *Churazov E.*, *Gilfanov M. et al.* // ApJ. V. 424. P. 395.

Vilhu O., 1982 // Astron. Aph. V. 109. P. 17.

Vilhu O., 1992 // In: Evolutionary Processes in Interacting Binary Stars / Eds. Y. Kondo, R.F. Sistero, R.S. Polidan. IAU Symp № 151. — Dordrecht: Kluwer. P. 61.

Vilhu O. et al., 2009 — *Vilhu O.*, *Hakala P.*, *Hannikainen D.C. et al.* // Astron. Aph. V. 501. P. 679.

Vink J.S., 2006 // ASP Conf Ser. V. 355. P. 173.

Vink J.S., *de Koter A.*, 2005 // Astron Aph. V. 442. P. 587.

Vink J.S., *Kotak R.*, 2007 // In: Circumstellar Media and Late Stages of Massive Stellar Evolution / Eds. G. Garcia-Segura & E.Ramirez-Ruiz. — Revista Mexicana de Astronomia y Astrofisica (Serie de Conferencias). V. 30. P. 17.

Vink J.S. et al., 2008 — *Vink J.S.*, *de Koter A.*, *Kotak R.* // Mass Loss from Stars and the Evolution of Stellar Clusters ASP Conference Series. Proc. of the conference held 29 May–1 June 2006, in Lunteren, The Netherlands / Ed. A. de Koter, L.J. Smith, and L.B.F.M. Waters. — San Francisco: Astronomical Society of the Pacific. V. 388. P. 47.

Volkov M.S., *Galtsov D.V.*, 1999 // Phys. Rep. V. 319. P. 1.

Wade R.A., *Horne K.*, 1988 // ApJ. V. 324. P. 411.

Wade R.A., *Rucinski S.M.*, 1985 // Astron. Aph. Suppl. V. 60. P. 471.

Wagner R.M. et al., 1988 — *Wagner R.M.*, *Henden A.A.*, *Bertram R.*, *Starfield S.G.* // IAU Circ. № 4600.

Wagner R.M. et al., 1992a — *Wagner R.M.*, *Bertram R.*, *Starrfield S.G.*, *Shrader C.R.* // IAU Circ. № 5589.

Wagner R.M. et al., 1992b — *Wagner R.M.*, *Kreidl T.J.*, *Howell S.B.*, *Starrfield S.* // ApJ. V. 401. L97.

Wagner R.M. et al., 2001 — *Wagner R.M.*, *Foltz C.B.*, *Shahbaz T. et al.* // ApJ. V. 556. P. 42.

Walborn N.R. et al., 2004 — *Walborn N.R.*, *Morrell N.*, *Howarth I.D. et al.* // ApJ. V. 608. P. 1028.

Walder R., 1995 // In: Wolf-Rayet Stars: Binaries, Colliding Winds, Evolution. IAU Symp. № 163 / Eds. K.A. van der Hucht and P.M. Williams. — Dordrecht: Kluwer. P. 420.

Walder R., 1998 // Ap. Sp. Sci. V. 260. P. 243.

Walder R., *Folini D*, 1995 // In: Wolf-Rayet Stars: Binaries, Colliding Winds, Evolution. IAU Symp. № 163 / Eds. K.A. van der Hucht and P.M. Williams. — Dordrecht: Kluwer. P. 525.

Walder R., *Folini D.*, 2003 // In: Massive Star Odissey, from Main Sequence to Supernova / Eds. K.A. van der Hucht, A. Herrero, C. Esteban. IAU Symp. № 212, A. , ASP Conf. Ser., San Francisco. P.139.

Walder R. et al., 1999 — *Walder R.*, *Folini D.*, *Motamen S.M.* // In: Wolf-Rayet Phenomena in Massive Stars and Starburst Galaxies / Eds. K.A. van der Hucht, G. Koenigsberger, P.R.J. Eenens. IAU Symp. № 193, ASP Publishers, San Francisco. P.298.

Wang Q.D. et al., 2005 — *Wang Q.D.*, *Whitaker K.E.*, *Williams R.* // MNRAS. V. 362. P. 1065.

Wang Y.-M., 1981, Astron. Aph. V. 102. P. 36.

Warner B., 1987, MNRAS. V. 227. P. 23.

Warner B., 1995. Cataclysmic Variable Stars. — Cambridge: Cambridge University Press. P. 117.

Warner B., *Nather R.E.*, 1971 // MNRAS. V. 152. P. 219.

Watanabe T., *Kodaira K.*, 1979 // Publ. Astron Soc. Japan V. 31. P. 61.

Webb N.A. et al., 2000 — *Webb N.A.*, *Naylor T.*, *Ioannou Z.*, *Charles P.A.*, *Shahbaz T.* // MNRAS. V. 317. P. 528.

Webbink R.F., 1984 // ApJ. V. 277. P. 355.

Webbink R.F., *Wickramasinghe D.T.*, 2002 // MNRAS. V. 335. P. 1.

Webbink R.F. et al., 1983 — *Webbink R.F.*, *Rappaport S.*, *Savonije G.J.* // ApJ. V. 270. P. 678.

Webster N.L., *Murdin P.*, 1972 // Nature V. 235. P. 37.

Weinberg M.D., *Wasserman I.*, 1988 // ApJ. V. 329. P. 253.

Weisberg J.M., *Taylor J.H.*, 2003 // In: Radio Pulsars. ASP Conference Series / Eds. M. Bailes, D.J. Nice, S.E. Thorsett. V. 302. P. 93.

Weisberg J.M. et al., 2010 — *Weisberg J.M.*, *Nice D.J.*, *Taylor J.H.* // ApJ. V. 722. P. 1030.

Weisskopf M.C., 2001 // Chandra News V. 8. P. 3.

Wellstein S., *Langer N.*, 1999 // Astron. Aph. V. 350. P. 148.

West R.M. et al., 1991 — *West R.M.*, *Della Valle M.*, *Jarvis B.* // IAU Circ. № 5165.

Wheeler J.A., 1968 // Am. Sci. V. 56. P. 1.

White N.E., 1997 // In: Accretion Phenomena and Related Outflows / Ed. D.T. Wickramasinghe. IAU Colloq. 163, ASP Conf. Series. V. 121.

White N.E., *van Paradijs J.*, 1996, ApJ. V. 473. L25.

White N.E. et al., 1984 — *White N.E.*, *Kaluzienski J.L.*, *Swank J.H.* // In: High Energy Transients in Astrophysics / Ed. S.E. Woosley. AIP Conf. Proc. 115, New York, AIP. P. 31.

White N.E. et al., 1985 — *White N.E.*, *Peacock A.*, *Taylor B.G.* // ApJ. V. 296. P. 47.

White N.E. et al., 1988 — *White N.E.*, *Stella L.*, *Parmar A.N.* // ApJ. V. 324. P. 363.

White N.E. et al., 1995 — *White N.E.*, *Nagase F.*, *Parmar A.N.* // In: X-ray Binaries / Eds. W.H.G. Lewin et al. — Cambridge: Cambridge University Press. P. 1.

White R.L., *Chen W.*, 1995 // In: Wolf-Rayet stars: binaries; colliding winds; evolution / Eds. K.A. van der Hucht and P.M. Williams. IAU Simp. No 163. — Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. P. 438.

Whitehurst R., 1988 // MNRAS. V. 232. P. 35.

Whitehurst R., *King A.R.*, 1989 // In: Two-Topics in X-ray Astronomy. I. X-ray Binaries / Eds. J. Hunt and B.Buttrick. — ESA Publ. P. 127.

Wijnands R. et al., 2001 — *Wijnands R.*, *Miller J.M.*, *Lewin W.H.G.* // IAU Circ. №7715, P. 2.

Wijers R.A.M.J., 1996 // In: Evolutionary Processes in Binary Stars, NATO ASI Series. Ser. C, V.477 / Eds. R.A.M.J. Wijers, M.B. Davies, C.A. Tout. — Dordrecht: Kluwer Acad. Publ. P. 327.

Wijers R.A.M.J. et al., 1992 — *Wijers R.A.M.J.*, *van Paradijs J.A.*, *van den Heuvel E.P.J.* // Astron. Aph. V. 261. P. 145.

Williams P.M., 1999 // In: Wolf-Rayet Phenomena in Massive Stars and Starburst Galaxies / Eds. K.A. van der Hucht, G. Koenigsberger, P.R.J. Eenens. IAU Symp. № 193. — San Francisco: ASP Conf. Pubsishers. P. 267.

Williams P.M. et al., 1990 — *Williams P.M.*, *van der Hucht K.A.*, *Pollock A.M.T.*, *Florkowski D.R.*, *van der Woerd H.*, *Wamsteker W.M.* // MNRAS. V. 243. P. 662.

Williams P.M. et al., 1992 — *Williams P.M.*, *van der Hucht K.A.*, *Bouchet P.*, *Spoelstra T.A.Th.*, *Eenens P.R.G.*, *Geballe T.R.*, *Kidger M.R.*, *Churchwell E.B.* // MNRAS. V. 258. P. 461.

Williams P.M. et al., 1994 — *Williams P.M.*, *van der Hucht K.A.*, *Kidger M.R.*, *Geballe T.R. Bouchet P.* // MNRAS. V. 266. P. 247.

Williams P.M. et al., 1997 — *Williams P.M.*, *Dougherty S.M.*, *Davis R.J. et al.* // MNRAS. V. 289. P. 10.

Willis A.J. et al., 1995 — *Willis A.J.*, *Schild H.*, *Stevens I.R.* // Astron. Aph. V. 298. P. 549.

Wilson R.E., 1974 // ApJ. V. 189. P. 319.

Wilson R.E., 1979 // ApJ. V. 234. P. 1054.

Wilson R.E., 1990 // ApJ. V. 356. P. 613.

Wilson R.E., 1993. Computing Binary Star Observables (Reference Manual to the Wilson-Devinney Programm), Department of Astronomy, University of Florida, Gainesville, FL.

Wilson R.E., *Devinney E.J.*, 1971 // ApJ. V. 166. P. 605.

Wilson R.E., *Sofia S.*, 1976 // ApJ. V. 203. P. 182.

Winn J.N. et al., 2007 — *Winn J.N.*, *Holman M.J.*, *Roussanova A.* // ApJ. V. 657. P. 1098.

Wolf M., *Diethelm R.*, 1993 // MNRAS. V. 263. P. 527.

Wolf M. et al., 1998 — *Wolf M.*, *Diethelm R.*, *Kozyreva V.S.*, *Sarounova L.* // Astron. Aph. V. 334. P. 840.

Wolf M. et al., 1999 — *Wolf M.*, *Diethelm R.*, *Sarounova L.* // Astron. Aph. V. 345. P. 533.

Wolf M. et al., 2002 — *Wolf M.*, *Harmanec P.*, *Diethelm R.*, *Hornoch K.*, *Eenens P.* // Astron. Aph. V. 383. P. 533.

Wolf S. et al., 1993 — *Wolf S.*, *Mantel K.H.*, *Horne K. et al.* // Astron. Aph. V. 273. P. 160.

Wolszczan A., 1991 // Nature. V. 350. P. 688.

Wood D.B., 1971 // Astron. J. V. 76. P. 701.

Wood D.B., 1973 // PASP. V. 85. P. 253.

Wood J.H., *Crawford C.S.*, 1986 // MNRAS. V. 222. P. 645.

Wood J.H. et al., 1989 — *Wood J.H.*, *Marsh T.R.*, *Robinson E.L. et al.* // MNRAS. V. 239. P. 809.

Woosley S.E., *Heger A.*, 2006 // ApJ. V. 637. P. 914.

Woosley S.E. et al., 1993 — *Woosley S.E.*, *Langer N.*, *Weaver T.A.* // ApJ. V. 411. P. 283.

Woosley S.E. et al., 2000 — *Woosley S.E.*, *Heger A.*, *Weaver T.A.* // Rev. Mod. Phys. V. 74. P. 1015.

Wozniak P., *Paczynski B.*, 1997 // ApJ. V. 487. P. 55.

Wright A.E., *Barlow M.J.*, 1975 // MNRAS. V. 170. P. 41.

Wu C.C., *Panek R.J.*, 1982 // ApJ. V. 262. P. 244.

Wyithe J.S.B., *Wilson R.E.*, 2002 // ApJ. V. 571. P. 293.

Wyrzykowski L. et al., 2004 — *Wyrzykowski L.*, *Udalski A.*, *Kubiak M. et al.* // Acta Astron. V. 54. P. 1.

Yakovlev D.G. et al., 1990 — *Yakovlev D.G.*, *Band L.M.*, *Trzhaskovskaya M.B.*, *Verner D.A.* // Astron. Aph. V. 237. P. 267.

Yang H., *Skillman E.D.*, 1993 // Astron. J. V. 106. P. 1448.

Yardy M.M. et al., 2006 — *Yardy M.M.*, *Koerding E.*, *Knigge C. et al.* // Nature. V. 444. P. 730.

Yildiz M., 2005 // MNRAS. V. 363. P. 967.

Yungelson L., *Lasota J.-P.*, 2008 // New Astron. Review. V. 51. P. 860.

Zahn J.-P., 1975 // Astron. Aph. V. 41. P. 329.

Zahn J.-P., 1977a // Astron. Aph. V. 57. P. 383.

Zahn J.-P., 1977b // Astron. Aph. V. 57. P. 386, erratum 1977, V. 67. P. 162.

Zahn J.-P., 1989 // Astron. Aph. V. 220. P. 112.

Zahn J.-P., *Bouchet L.*, 1989 // Astron. Aph. V. 223. P. 112.

Zboril M., *Djurašević G.*, 2003 // Astron. Aph. V. 406. P. 193.

Zdziarski A.A. et al., 2011 — *Zdziarski A.A.*, *Pooley G.G.*, *Skinner G.K.* // MNRAS. V. 412. P. 1985.

Zdziarski A.A. et al., 2012 — *Zdziarski A.A.*, *Mikolajewska J.*, *Belczynski K.* // arXiv:1208.5455v1.

Zeipel H. von, 1924 // MNRAS. V. 84. P. 665.

Zeldovich Ya.B., *Guseinov O.H.*, 1966 // ApJ. V. 144. P. 840.

Zhai D.S., *Lu W.X.*, 1989 // Chin. Astron. Aph. V. 13. P. 350.

Zhai D.S. et al., 1988 — *Zhai D.S.*, *Lu W.X.*, *Zhang X.Y.* // Ap. Space Sci. V. 146. P. 1.

Zhang C.M. et al., 2011 — *Zhang C.M.*, *Wang J.*, *Zhao Y.H. et al.* // Astron. Aph., arXiv 1010.5429v4.

Zhang S.N. et al., 1997a — *Zhang S.N.*, *Cui W.*, *Chen W.* // ApJ. V. 482. L155.

Zhang S.N. et al., 1997b — *Zhang S.N.*, *Ebisawa K.*, *Sunyaev R.A. et al.* // ApJ. V. 479. P. 381.

Zhang S.N. et al., 2012 — *Zhang S.N.*, *Liao J.*, *Yao J.* // MNRAS. V. 421. P. 3550.

Zhao P. et al., 1994 — *Zhao P.*, *Callanan P.*, *Garcia M.*, *McClintock J.E.* // IAU Circ. № 6072.

Zinnecker H., 1990 // In: Low Mass Star Formation and Pre-Main Sequence Objects / B. Reipurth (ed.). — Garching, ESO. P. 447.

Zinnecker H., *Matieu R.D.* (*eds.*), 2001. Proc. IAU Symp. No 2000, «The Formation of Binary Stars». — San Francisco: Astron. Soc. Pac.

Zinnecker., 2003 // In: A Massive Star Odissey, From Main Sequence to Supernova / Eds. K. Van der Hucht, A. Herrero, C. Esteban, IAU Symp. № 212, ASP-conference series. P. 80.

Ziolkowski J., 1972 // Acta Astron. V. 22. P. 327.

Ziolkowski J., 1978 // In: Nonstationary Evolution of Close Binaries / Ed. A.N. Zitkov. — Warsaw: PWN. P. 29.

Ziolkowski J., 2012 // Proc. 9th INTEGRAL Workshop and Celebration of the 10th Anniversary of the Launch. Paris, France.

Zucker S., *Alexander T.*, 2007 // ApJ. V. 654. L83.

Zucker S., *Mazeh T.*, 1994 // ApJ. V. 420. P. 806.

Zucker S. et al., 2006 *Zucker S.*, *Alexander T.*, *Gillessen S.*, *Eisenhauer F.*, *Genzel R.* // ApJ. V. 639. L21.

Zycki P.T. et al., 1999 — *Zycki P.T.*, *Done C.*, *Smith D.A.* // MNRAS. V. 309. P. 561.

Научное издание

ЧЕРЕПАЩУК Анатолий Михайлович

ТЕСНЫЕ ДВОЙНЫЕ ЗВЕЗДЫ

Часть I

Редактор *О.В. Салецкая*
Редактор-организатор: *Т.Ю. Давидовская*
Оригинал-макет: *В.В. Затекин*
Оформление переплета: *В.Ф. Киселев*

Подписано в печать 02.12.2013. Формат 70×100/16. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 45,15. Уч.-изд. л. 49,7. Тираж 300 экз. Заказ №

Издательская фирма «Физико-математическая литература»
МАИК «Наука/Интерпериодика»
117997, Москва, ул. Профсоюзная, 90
E-mail: fizmat@maik.ru, fmlsale@maik.ru;
http://www.fml.ru

Отпечатано с электронных носителей издательства
в ГУП МО «Коломенская типография».
140400, г. Коломна, ул. III Интернационала, д. 2а.
ИНН 5022013940. Тел.: 8(496)618-69-33, 618-60-16.
E-mail: bab40@yandex.ru, www.kolomna-print.ru