

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ им. В. А. СТЕКЛОВА
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

Лекционные курсы НОЦ

Выпуск 2

Издание выходит с 2006 года

М. Е. Чанга

Метод комплексного интегрирования



Москва
2006

УДК 511
ББК (В)22.13
Л43

Редакционный совет:

*С. И. Адян, Д. В. Аносов, О. В. Бесов, И. В. Волович,
А. М. Зубков, А. Д. Изаак (ответственный секретарь),
А. А. Карацуба, В. В. Козлов, С. П. Новиков,
В. П. Павлов (заместитель главного редактора),
А. Н. Паршин, Ю. В. Прохоров, А. Г. Сергеев, А. А. Славнов,
Д. В. Трещев (главный редактор), Е. М. Чирка*

Л43 **Лекционные курсы НОЦ** / Математический институт им. В. А. Стеклова РАН (МИАН). – М.: МИАН, 2006. Вып. 2: Метод комплексного интегрирования / Чанга М. Е. – 58 с.

ISBN 5-98419-012-5

Серия “Лекционные курсы НОЦ” – рецензируемое продолжающееся издание Математического института им. В. А. Стеклова РАН. В серии “Лекционные курсы НОЦ” публикуются материалы специальных курсов, прочитанных в Математическом институте им. В. А. Стеклова Российской академии наук в рамках программы Научно-образовательный центр МИАН.

Настоящая брошюра содержит полугодовой курс М. Е. Чанги “Метод комплексного интегрирования”, прочитанный в осеннем семестре 2005 года.

ISBN 5-98419-012-5

© Математический институт
им. В. А. Стеклова РАН, 2006

Оглавление

Обозначения	4
§ 1 Мультипликативные функции. Производящие ряды Ди- рихле	5
§ 2 Сумматорные функции. Формула Перрона	13
§ 3 Дзета-функция Римана. Функциональное уравнение . . .	20
§ 4 Нули дзета-функции Римана	29
§ 5 Асимптотический закон распределения простых чисел .	38
§ 6 Проблема делителей Дирихле. Формула Вороного	45

Обозначения

Запись $d \mid n$ при натуральном d и целом n означает, что d делит n , то есть существует целое q такое, что $n = dq$;

(n, m) обозначает наибольший общий делитель чисел n и m ;

$p, p_1, p_2, \dots, q, q_1, q_2, \dots$ обозначают простые числа;

$s = \sigma + it$ обозначает комплексное переменное;

Запись $A \ll B$ при положительном B означает, что $A = O(B)$, то есть существует положительное c такое, что $|A| \leq cB$;

Запись $A \asymp B$ означает, что $A \ll B$ и $B \ll A$;

$c, c_1, c_2, \dots$ обозначают положительные постоянные, в различных формулах, вообще говоря, различные;

ε обозначает произвольно малое положительное число;

$[x]$ обозначает целую часть числа x , то есть наибольшее целое число, не превосходящее x ;

$\{x\}$ обозначает дробную долю числа x , то есть $x - [x]$;

$\ln s$ обозначает главную ветвь логарифма.

§ 1 Мультипликативные функции. Производящие ряды Дирихле

Комплекснозначная функция натурального аргумента $f(n)$ называется *мультипликативной*, если она не равна нулю тождественно и для любых натуральных n и m таких, что $(n, m) = 1$, имеет место равенство

$$f(nm) = f(n)f(m).$$

Например, функция n^s мультипликативна при любом комплексном s . Рассмотрим простейшие свойства мультипликативных функций.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $f(n)$ и $g(n)$ мультипликативны. Тогда

а) $f(1) = 1$;

б) $f(n)g(n)$ мультипликативна;

в) $\sum_{d|n} f(d)$ мультипликативна;

г) если $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}$, то $f(n) = f(p_1^{\alpha_1}) \dots f(p_r^{\alpha_r})$.

Таким образом, мультипликативная функция вполне определяется своими значениями на степенях простых чисел.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Пусть n таково, что $f(n) \neq 0$. Поскольку $(n, 1) = 1$, имеем

$$f(n) = f(n \cdot 1) = f(n)f(1).$$

Сокращая на $f(n)$, получаем требуемое.

б) Пусть $(n, m) = 1$. Тогда

$$f(nm)g(nm) = f(n)f(m)g(n)g(m) = f(n)g(n)f(m)g(m).$$

При этом $f(n)g(n)$ не равна нулю тождественно, так как $f(1) = g(1) = 1$.

в) При $n = 1$ имеем $\sum_{d|1} f(d) = f(1) = 1$. Пусть теперь $(n, m) = 1$. Тогда из основной теоремы арифметики следует, что если d_1 пробегает делители n , а d_2 пробегает делители m , то $d_1 d_2$ пробегает все делители nm , причем только один раз. Имеем

$$\begin{aligned} \sum_{d|nm} f(d) &= \sum_{d_1|n} \sum_{d_2|m} f(d_1 d_2) = \sum_{d_1|n} \sum_{d_2|m} f(d_1) f(d_2) \\ &= \sum_{d_1|n} f(d_1) \sum_{d_2|m} f(d_2), \end{aligned}$$

ибо, очевидно, $(d_1, d_2) = 1$.

г) Так как $(p_1^{\alpha_1} \dots p_{r-1}^{\alpha_{r-1}}, p_r^{\alpha_r}) = 1$, имеем

$$f(n) = f(p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}) = f(p_1^{\alpha_1} \dots p_{r-1}^{\alpha_{r-1}}) f(p_r^{\alpha_r}).$$

Продолжая этот процесс, получим требуемое. ■

Определим *функцию Мебиуса* $\mu(n)$ равенствами $\mu(1) = 1$, $\mu(p_1 \dots p_r) = (-1)^r$; $\mu(n) = 0$, если n делится на квадрат простого числа. Таким образом, функция $\mu(n)$ отлична от нуля только на числах, свободных от квадратов, а ее модуль есть характеристическая функция множества таких чисел. Докажем важные свойства функции Мебиуса.

ТЕОРЕМА 2. *Имеют место следующие утверждения:*

а) *Функция Мебиуса мультипликативна;*

б) *при натуральном $n > 1$ имеет место равенство*

$$\sum_{d|n} \mu(d) = 0;$$

в) *(формула обращения Мебиуса) если $g(n) = \sum_{d|n} f(d)$, то $f(n) = \sum_{d|n} \mu(d) g\left(\frac{n}{d}\right)$ и обратно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Пусть n или m содержит квадрат. Тогда nm также содержит квадрат и равенство $\mu(nm) = \mu(n)\mu(m)$ выполнено. Пусть теперь n и m бесквадратны, причем $(n, m) = 1$. Тогда $n = p_1 \dots p_r$ и $m = q_1 \dots q_s$, при этом $p_i \neq q_j$ для всех $i = 1, \dots, r$ и $j = 1, \dots, s$. Тогда

$$\mu(n)\mu(m) = (-1)^r (-1)^s = (-1)^{r+s} = \mu(nm).$$

В случае $n = 1$ полагаем $r = 0$.

б) Из пункта а) и теоремы 1 заключаем, что функция $f(n) = \sum_{d|n} \mu(d)$ мультипликативна. Найдём ее значения на степенях простых чисел. При $\alpha \geq 1$ имеем

$$f(p^\alpha) = \sum_{d|p^\alpha} \mu(d) = \mu(1) + \mu(p) + \dots + \mu(p^\alpha) = 1 - 1 = 0.$$

Теперь требуемое утверждение следует из пункта г) теоремы 1.

в) Пусть $g(n) = \sum_{d|n} f(d)$. Используя утверждение пункта б) имеем

$$\sum_{d|n} \mu(d) g\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d|n} \mu(d) \sum_{k|\frac{n}{d}} f(k) = \sum_{k|n} f(k) \sum_{d|\frac{n}{k}} \mu(d) = f(n).$$

Обратно, если $f(n) = \sum_{d|n} \mu(d) g\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) g(d)$, то

$$\sum_{d|n} f(d) = \sum_{d|n} \sum_{k|d} \mu\left(\frac{d}{k}\right) g(k) = \sum_{k|n} g(k) \sum_{r|\frac{n}{k}} \mu(r) = g(n).$$

■

В теории чисел важную роль играют ряды вида $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{n^s}$, называемые рядами Дирихле. Следующая теорема позволяет перемножать подобные ряды.

ТЕОРЕМА 3. Пусть ряды $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{n^s}$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b(n)}{n^s}$ сходятся абсолютно. Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c(n)}{n^s}$, где

$$c(n) = \sum_{d|n} a(d) b\left(\frac{n}{d}\right)$$

также сходится абсолютно, причем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{n^s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b(n)}{n^s}.$$

Формула для коэффициентов $c(n)$ содержит сумму по делителям числа n , что и определяет тесную связь рядов Дирихле с арифметикой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Перемножая частичные суммы, имеем

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \frac{a(n)}{n^s} \sum_{m=1}^N \frac{b(m)}{m^s} &= \sum_{n,m=1}^N \frac{a(n)b(m)}{(nm)^s} \\ &= \sum_{k=1}^N \frac{1}{k^s} \sum_{n|k} a(n) b\left(\frac{k}{n}\right) + \sum_{\substack{n,m=1 \\ nm > N}}^N \frac{a(n)b(m)}{(nm)^s}, \end{aligned}$$

но так как при $nm > N$ либо $n > \sqrt{N}$, либо $m > \sqrt{N}$, то

$$\left| \sum_{\substack{n,m=1 \\ nm > N}}^N \frac{a(n)b(m)}{(nm)^s} \right| \leq \sum_{n > \sqrt{N}} \frac{|a(n)|}{n^\sigma} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{|b(m)|}{m^\sigma} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a(n)|}{n^\sigma} \sum_{m > \sqrt{N}} \frac{|b(m)|}{m^\sigma}.$$

В силу абсолютной сходимости перемножаемых рядов правая часть последнего выражения стремится к нулю при $N \rightarrow \infty$.

Наконец, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c(n)}{n^s}$ сходится абсолютно, так как

$$\frac{|c(n)|}{n^\sigma} \leq \frac{1}{n^\sigma} \sum_{d|n} |a(d)| \left| b\left(\frac{n}{d}\right) \right|,$$

а по доказанному выше

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\sigma} \sum_{d|n} |a(d)| \left| b\left(\frac{n}{d}\right) \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a(n)|}{n^\sigma} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|b(n)|}{n^\sigma} < \infty.$$

■

Простейший ряд Дирихле $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ сходится абсолютно в полуплоскости $\operatorname{Re} s > 1$. Его сумма как функция комплексного переменного s называется *дзета-функцией Римана*. Таким образом, при $\operatorname{Re} s > 1$

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Ряд Дирихле $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$ называется *производящим* рядом Дирихле функции $f(n)$. Производящие ряды Дирихле многих мультипликативных функций выражаются через дзета-функцию Римана. Например, пользуясь основным свойством функции Мебиуса, при $\operatorname{Re} s > 1$ находим

$$\zeta(s) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \sum_{d|n} \mu(d) = 1.$$

Отсюда, в частности, следует, что дзета-функция Римана не имеет нулей в полуплоскости $\operatorname{Re} s > 1$. Итак, в этой полуплоскости

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} = \frac{1}{\zeta(s)}.$$

Аналогично

$$\zeta(2s) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\mu(n)|}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\delta(n)}{n^s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\mu(n)|}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \sum_{d^2|n} \left| \mu\left(\frac{n}{d^2}\right) \right|,$$

где $\delta(n)$ – характеристическая функция множества квадратов натуральных чисел. Последний ряд есть дзета-функция Римана, так как при любом n

$$\sum_{d^2|n} \left| \mu\left(\frac{n}{d^2}\right) \right| = 1.$$

Действительно, из основной теоремы арифметики следует, что натуральное n однозначно представляется в виде a^2b с бесквадратным b . Суммирование по $d^2 | n$ заменяется при этом суммированием по $d | a$, а по свойствам функции Мебиуса все слагаемые окажутся равными нулю, кроме слагаемого с $d = a$, которое равняется единице. Таким образом, при $\operatorname{Re} s > 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\mu(n)|}{n^s} = \frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)}.$$

ТЕОРЕМА 4 (тождество Эйлера). Пусть $f(n)$ мультипликативна и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$ абсолютно сходится. Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} = \prod_p \left(1 + \frac{f(p)}{p^s} + \frac{f(p^2)}{p^{2s}} + \dots \right) = \prod_p \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f(p^k)}{p^{ks}}.$$

Тождество Эйлера по существу представляет собой аналитический эквивалент основной теоремы арифметики о единственности канонического разложения натурального числа на простые сомножители.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку ряды $\sum_{k=0}^{\infty} f(p^k)p^{-ks}$ сходятся абсолютно, повторное применение теоремы 3 показывает, что их можно перемножать между собой в любом конечном числе. Имеем

$$\prod_{p \leq N} \left(1 + \frac{f(p)}{p^s} + \frac{f(p^2)}{p^{2s}} + \dots \right) = \sum_{n=1}^N \frac{f(n)}{n^s} + \sum'_{n > N} \frac{f(n)}{n^s},$$

где штрих у знака суммы означает суммирование по натуральным n , все простые делители которых не превосходят N . Здесь мы

существенно пользуемся основной теоремой арифметики и мультипликативностью функции $f(n)$. В силу абсолютной сходимости производящего ряда Дирихле имеем

$$\left| \sum'_{n>N} \frac{f(n)}{n^s} \right| \leq \sum_{n>N} \left| \frac{f(n)}{n^s} \right| \rightarrow 0$$

при $N \rightarrow \infty$. Переходя к пределу при $N \rightarrow \infty$, доказываем сходимость произведения и получаем требуемое. Заметим, что в силу абсолютной сходимости производящего ряда Дирихле, случай расходимости бесконечного произведения к нулю здесь исключен.

Например, при $\operatorname{Re} s > 1$, находим

$$\zeta(s) = \prod_p \left(1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \cdots \right) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s} \right)^{-1},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s} \right), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\mu(n)|}{n^s} = \prod_p \left(1 + \frac{1}{p^s} \right).$$

Отсюда легко следуют уже полученные нами ранее соотношения между этими функциями. ■

Задачи к § 1

1. При $k \geq 3$ функции $\tau_k(n)$ определяются по индукции равенством

$$\tau_k(n) = \sum_{d|n} \tau_{k-1}(d),$$

где

$$\tau_2(n) = \tau(n) = \sum_{d|n} 1$$

есть число делителей n .

- а) Доказать мультипликативность $\tau_k(n)$;
- б) показать, что $\tau_k(n)$ есть число решений уравнения $x_1 \dots x_k = n$ в натуральных $x_1, \dots, x_k$;
- в) доказать, что

$$\tau_k(p^\alpha) = C_{\alpha+k-1}^{k-1};$$

г) доказать, что $\tau_k(n) \leq \tau^{k-1}(n)$;

д) доказать, что $1 \leq \tau_k(n) \leq C(\varepsilon)n^\varepsilon$ при любом $\varepsilon > 0$;

е) показать, что при $\operatorname{Re} s > 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau_k(n)}{n^s} = \zeta^k(s).$$

2. При $k \geq 1$ функции $\sigma_k(n)$ определяются равенствами

$$\sigma_k(n) = \sum_{d|n} d^k,$$

в частности,

$$\sigma_1(n) = \sigma(n) = \sum_{d|n} d$$

есть сумма делителей n .

а) Доказать мультипликативность $\sigma_k(n)$;

б) доказать, что

$$\sigma_k(p^\alpha) = \frac{p^{(\alpha+1)k} - 1}{p^k - 1};$$

в) доказать, что при $k \geq 2$ имеют место неравенства $n^k \leq \sigma_k(n) \leq 2n^k$;

г) пользуясь тем, что

$$\sum_{p \leq x} \frac{1}{p} = \ln \ln x + O(1), \quad \sum_{p \leq x} \ln p \gg x,$$

доказать неравенства $n \leq \sigma(n) \leq n \ln \ln n$;

д) показать, что при $\operatorname{Re} s > k + 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_k(n)}{n^s} = \zeta(s)\zeta(s-k);$$

е) показать, что при $\operatorname{Re} s > k + l + 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_k(n)\sigma_l(n)}{n^s} = \frac{\zeta(s)\zeta(s-k)\zeta(s-l)\zeta(s-k-l)}{\zeta(2s-k-l)}.$$

3. Функция Эйлера $\varphi(n)$ есть количество натуральных чисел, не превосходящих n и взаимно простых с ним:

$$\varphi(n) = \sum_{\substack{k \leq n \\ (k,n)=1}} 1.$$

а) Доказать, что

$$\varphi(n) = n \sum_{d|n} \frac{\mu(d)}{d};$$

б) доказать мультипликативность $\varphi(n)$;

в) доказать, что $\varphi(p^\alpha) = p^\alpha - p^{\alpha-1}$;

г) доказать, что

$$\varphi(n) = n \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right);$$

д) доказать, что

$$\sum_{d|n} \varphi(d) = n;$$

е) пользуясь тем, что

$$\sum_{p \leq x} \frac{1}{p} = \ln \ln x + O(1), \quad \sum_{p \leq x} \ln p \gg x,$$

доказать неравенства

$$\frac{n}{\ln \ln n} \ll \varphi(n) \leq n;$$

ж) показать, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(n)}{n^s} = \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)}.$$

§ 2 Сумматорные функции. Формула Перрона

Докажем вначале интегральный аналог преобразования Абеля для сумм, который имеет исключительно широкое применение в аналитической теории чисел.

ТЕОРЕМА 5 (преобразование Абеля). Пусть $c_n \in \mathbb{C}$, $C(x) = \sum_{a < n \leq x} c_n$ и $f(x) \in C^1[a, b]$. Тогда

$$\sum_{a < n \leq b} c_n f(n) = C(b)f(b) - \int_a^b C(x)f'(x) dx.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Меняя порядок суммирования и интегрирования, имеем

$$\begin{aligned} \int_a^b \sum_{a < n \leq x} c_n f'(x) dx &= \sum_{a < n \leq b} c_n \int_n^b f'(x) dx \\ &= f(b) \sum_{a < n \leq b} c_n - \sum_{a < n \leq b} c_n f(n). \end{aligned}$$

■

Выражение $\sum_{n \leq x} f(n)$ называют *сумматорной функцией* $f(n)$. Оказывается, производящий ряд Дирихле достаточно просто выражается через сумматорную функцию.

ТЕОРЕМА 6. Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$ сходится при $\operatorname{Re} s > a \geq 0$, $F(x) = \sum_{n \leq x} f(n)$. Тогда при $\operatorname{Re} s > a$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s} = s \int_1^{\infty} \frac{F(x)}{x^{s+1}} dx.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Совершая преобразование Абеля, получим

$$\sum_{n=1}^N \frac{f(n)}{n^s} = \frac{F(N)}{N^s} + s \int_1^N \frac{f(x)}{x^{s+1}} dx.$$

Здесь мы воспользовались тем, что $F(x) = 0$ при $x < 1$. Для доказательства теоремы достаточно показать, что $F(N)N^{-s} \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$.

При достаточно малом $\varepsilon > 0$ имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{N^s} F(N) &= \frac{1}{N^s} \sum_{n=1}^N \frac{f(n)}{n^{s-\varepsilon}} n^{s-\varepsilon} \\ &= N^{-\varepsilon} \sum_{n=1}^N \frac{f(n)}{n^{s-\varepsilon}} - \frac{s-\varepsilon}{N^s} \int_1^N \sum_{n \leq x} \frac{f(n)}{n^{s-\varepsilon}} x^{s-\varepsilon-1} dx. \end{aligned}$$

Но в силу сходимости ряда Дирихле

$$\left| \sum_{n=1}^N \frac{f(n)}{n^{s-\varepsilon}} \right| \leq C(s, \varepsilon)$$

для любого N . Отсюда, считая ε столь малым, что $\sigma - \varepsilon > 0$, находим

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(N)}{N^s} \right| &\leq C(s, \varepsilon) \left(N^{-\varepsilon} + \frac{|s| + \varepsilon}{N^\sigma} \int_1^N x^{\sigma-\varepsilon-1} dx \right) \\ &\leq C_1(s, \varepsilon) N^{-\varepsilon} \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

при $N \rightarrow \infty$. ■

Следующая теорема, напротив, выражает сумматорную функцию через соответствующий производящий ряд Дирихле.

ТЕОРЕМА 7 (формула Перрона). Пусть

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{n^s},$$

причем ряд абсолютно сходится при $\operatorname{Re} s > a \geq 0$, и пусть при $\sigma \rightarrow a + 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a(n)|}{n^\sigma} \ll (\sigma - a)^{-\alpha}$$

с некоторым $\alpha > 0$. Тогда при любых $b > a$, $x \geq 2$, $T \geq 2$ имеет место формула

$$\sum_{n \leq x} a(n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} F(s) \frac{x^s}{s} ds + R(x),$$

где

$$R(x) \ll \frac{x^b}{T(b-a)^\alpha} + 2^b \left(\frac{x \ln x}{T} + \ln \frac{T}{b} + 1 \right) \max_{\frac{x}{2} \leq n \leq \frac{3x}{2}} |a(n)|.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ряд Дирихле функции $F(s)$ равномерно сходится на отрезке интегрирования, поэтому его можно интегрировать почленно. Имеем

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{n^s} \frac{x^s}{s} ds = \sum_{n=1}^{\infty} a(n) \frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} \left(\frac{x}{n}\right)^s \frac{ds}{s}.$$

Рассмотрим внутренний интеграл. Пусть $n < x - 1$, выберем произвольно большое число U и рассмотрим прямоугольный контур Γ с вершинами в точках $-U \pm iT$, $b \pm iT$. По теореме Коши о вычетах

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \left(\frac{x}{n}\right)^s \frac{ds}{s} = \operatorname{res}_{s=0} \frac{1}{s} \left(\frac{x}{n}\right)^s = 1.$$

С другой стороны,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \left(\frac{x}{n}\right)^s \frac{ds}{s} = \frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} \left(\frac{x}{n}\right)^s \frac{ds}{s} + I_1 + I_2 + I_3,$$

где I_1 , I_2 , I_3 обозначают интегралы по левой, верхней и нижней сторонам контура Γ . Оценим эти интегралы по абсолютной величине:

$$\begin{aligned} |I_1| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T \left(\frac{x}{n}\right)^{-U} \frac{dt}{U} = \frac{T}{\pi U} \left(\frac{x}{n}\right)^{-U}, \\ |I_2|, |I_3| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-U}^b \left(\frac{x}{n}\right)^{\sigma} \frac{d\sigma}{T} \leq \frac{1}{2\pi T} \left(\frac{x}{n}\right)^b \left| \ln \frac{x}{n} \right|^{-1}. \end{aligned}$$

Переходя к пределу при $U \rightarrow \infty$, получим при $n < x - 1$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} \left(\frac{x}{n}\right)^s \frac{ds}{s} = 1 + O\left(\frac{1}{T} \left(\frac{x}{n}\right)^b \left| \ln \frac{x}{n} \right|^{-1}\right).$$

Пусть теперь $n > x + 1$. Выбирая произвольно большое число U и, рассматривая прямоугольный контур с вершинами в точках $b \pm iT$, $U \pm iT$, проведем аналогичные рассуждения. Получим следующее равенство:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} \left(\frac{x}{n}\right)^s \frac{ds}{s} = O\left(\frac{1}{T} \left(\frac{x}{n}\right)^b \left| \ln \frac{x}{n} \right|^{-1}\right).$$

Наконец, при $|n - x| \leq 1$ оценим интеграл тривиально:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} \left(\frac{x}{n}\right)^s \frac{ds}{s} &\ll \left(\frac{x}{n}\right)^b \int_{-T}^T \frac{dt}{\sqrt{t^2 + b^2}} \\ &\ll 2^b \int_0^b \frac{dt}{b} + 2^b \int_b^T \frac{dt}{t} \ll 2^b \left(\ln \frac{T}{b} + 1 \right). \end{aligned}$$

Собирая полученные оценки, находим

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} a(n) \frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} \left(\frac{x}{n}\right)^s \frac{ds}{s} &= \sum_{n < x-1} a(n) \\ &\quad + O\left(2^b \left(\ln \frac{T}{b} + 1\right) \sum_{|n-x| \leq 1} |a(n)|\right) \\ &\quad + \frac{1}{T} \sum_{|n-x| > 1} |a(n)| \left(\frac{x}{n}\right)^b \left|\ln \frac{x}{n}\right|^{-1} \\ &= \sum_{n \leq x} a(n) + O\left(2^b \left(\ln \frac{T}{b} + 1\right) \max_{\frac{x}{2} \leq n \leq \frac{3x}{2}} |a(n)|\right) \\ &\quad + O\left(\frac{1}{T} \sum_{|n-x| > \frac{x}{2}} |a(n)| \left(\frac{x}{n}\right)^b \left|\ln \frac{x}{n}\right|^{-1}\right) \\ &\quad + \frac{1}{T} \sum_{1 < |n-x| \leq \frac{x}{2}} |a(n)| \left(\frac{x}{n}\right)^b \left|\ln \frac{x}{n}\right|^{-1}. \end{aligned}$$

Рассмотрим отдельно две последние суммы, обозначив их через S_1 и S_2 . При $|n - x| > \frac{x}{2}$ имеем $\left|\ln \frac{x}{n}\right| > \ln \frac{3}{2}$. Отсюда находим

$$S_1 \ll \frac{x^b}{T} \sum_{|n-x| > \frac{x}{2}} \frac{|a(n)|}{n^b} \leq \frac{x^b}{T} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a(n)|}{n^b} \ll \frac{x^b}{T(b-a)^\alpha}.$$

При $1 < |n - x| \leq \frac{x}{2}$ имеем

$$\begin{aligned} S_2 &\ll \frac{2^b}{T} \left(\sum_{1 < |n-x| \leq \frac{x}{2}} \left|\ln \frac{n}{x}\right|^{-1} \right) \max_{\frac{x}{2} \leq n \leq \frac{3x}{2}} |a(n)| \\ &\ll \frac{2^b}{T} \left(\sum_{1 < |n-x| \leq \frac{x}{2}} \left|\frac{n}{x} - 1\right|^{-1} \right) \max_{\frac{x}{2} \leq n \leq \frac{3x}{2}} |a(n)|, \end{aligned}$$

ибо $s(\ln(1+s))^{-1}$ есть аналитическая в круге $|s| < 1$ функция. И так,

$$\begin{aligned} S_2 &\ll 2^b \frac{x}{T} \left(\sum_{1 < |n-x| \leq \frac{x}{2}} \frac{1}{|n-x|} \right) \max_{\frac{x}{2} \leq n \leq \frac{3x}{2}} |a(n)| \\ &\ll 2^b \frac{x \ln x}{T} \max_{\frac{x}{2} \leq n \leq \frac{3x}{2}} |a(n)|. \end{aligned}$$

Этим доказательство завершается. ■

Иногда более удобен другой вариант формулы Перрона, в котором фигурирует интеграл от сумматорной функции.

ТЕОРЕМА 8. Пусть

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{n^s},$$

причем этот ряд абсолютно сходится при $\operatorname{Re} s > a \geq 0$, и пусть при $b > a$

$$B(b) = \int_1^{\infty} \frac{|A(u)|}{u^{b+1}} du, \quad A(u) = \sum_{n \leq u} a(n).$$

Тогда при $x \geq 2$, $T \geq 2$ имеет место формула

$$\int_1^x A(u) du = \frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} \frac{F(s)x^{s+1}}{s(s+1)} ds + R(x),$$

где

$$R(x) \ll B(b) \frac{x^{b+1}}{T} + 2^b \left(\frac{x \ln x}{T} + \ln T \right) \max_{\frac{x}{2} \leq u \leq \frac{3x}{2}} |A(u)|.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $\operatorname{Re} s > a$ согласно теореме 6 имеем

$$\frac{F(s)}{s} = \int_1^{\infty} \frac{A(u)}{u^{s+1}} du.$$

Поскольку этот интеграл равномерно сходится при $s = b + it$, $|t| \leq T$, мы можем поменять порядок интегрирования следующим

образом:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} \left(\int_1^\infty \frac{A(u)}{u^{s+1}} du \right) \frac{x^{s+1}}{s+1} ds \\ &= \int_1^\infty \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{b+1-iT}^{b+1+iT} \left(\frac{x}{u} \right)^s \frac{ds}{s} \right) A(u) du. \end{aligned}$$

Внутренний интеграл в правой части уже был исследован при доказательстве предыдущей теоремы. Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} F(s) \frac{x^{s+1}}{s(s+1)} ds = \int_1^{x-1} A(u) du \\ &+ O\left(\frac{1}{T} \int_{|x-u|>1} |A(u)| \left(\frac{x}{u} \right)^{b+1} \left| \ln \frac{x}{u} \right|^{-1} du + \max_{\frac{x}{2} \leq u \leq \frac{3x}{2}} |A(u)| \ln T \right) \\ &= \int_1^x A(u) du + O\left(\ln T \max_{\frac{x}{2} \leq u \leq \frac{3x}{2}} |A(u)| \right) \\ &+ O\left(\frac{1}{T} \int_{|x-u|>\frac{x}{2}} |A(u)| \left(\frac{x}{u} \right)^{b+1} \left| \ln \frac{x}{u} \right|^{-1} du \right. \\ &\left. + \frac{1}{T} \int_{1 < |x-u| \leq \frac{x}{2}} |A(u)| \left(\frac{x}{u} \right)^{b+1} \left| \ln \frac{x}{u} \right|^{-1} du \right). \end{aligned}$$

Рассмотрим отдельно два последних интеграла, обозначив их через I_1 и I_2 . При $|x-u| > \frac{x}{2}$ имеем $\left| \ln \frac{x}{u} \right| > \ln \frac{3}{2}$. Отсюда находим

$$I_1 \ll \frac{x^{b+1}}{T} \int_{|x-u|>\frac{x}{2}} \frac{|A(u)|}{u^{b+1}} du \leq \frac{x^{b+1}}{T} \int_1^\infty \frac{|A(u)|}{u^{b+1}} du = B(b) \frac{x^{b+1}}{T}.$$

При $1 < |x-u| \leq \frac{x}{2}$ имеем

$$\begin{aligned} I_2 &\ll \frac{2^b}{T} \left(\int_{1 < |x-u| \leq \frac{x}{2}} \left| \ln \frac{u}{x} \right|^{-1} du \right) \max_{\frac{x}{2} \leq u \leq \frac{3x}{2}} |A(u)| \\ &\ll \frac{2^b}{T} \left(\int_{1 < |x-u| \leq \frac{x}{2}} \left| \frac{u}{x} - 1 \right|^{-1} du \right) \max_{\frac{x}{2} \leq u \leq \frac{3x}{2}} |A(u)|, \end{aligned}$$

ибо $s(\ln(1+s))^{-1}$ есть аналитическая в круге $|s| < 1$ функция. Итак,

$$\begin{aligned} I_2 &\ll 2^b \frac{x}{T} \left(\int_{1 < |x-u| \leq \frac{x}{2}} \frac{du}{|x-u|} \right) \max_{\frac{x}{2} \leq u \leq \frac{3x}{2}} |A(u)| \\ &\ll 2^b \frac{x \ln x}{T} \max_{\frac{x}{2} \leq u \leq \frac{3x}{2}} |A(u)|. \end{aligned}$$

Этим доказательство завершается. ■

Задачи к § 2

1. Доказать, что функция

$$F(s) = s e^{Cs} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{s}{n} \right) e^{-\frac{s}{n}}$$

является целой и имеет только простые нули в точках $s = 0, -1, -2, \dots$

2. Пусть C – постоянная Эйлера,

$$C = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{N} - \ln N \right).$$

Тогда при $\operatorname{Re} s > 0$ справедливо равенство

$$\frac{1}{F(s)} = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{s-1} dx.$$

Из приведенных задач следует, что гамма-функция Эйлера задается при любом комплексном s равенством

$$\frac{1}{\Gamma(s)} = \frac{1}{s} e^{-Cs} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{s}{n} \right)^{-1} e^{\frac{s}{n}}.$$

Гамма-функция не имеет нулей, а в точках $s = 0, -1, -2, \dots$ она имеет полюса первого порядка.

§ 3 Дзета-функция Римана. Функциональное уравнение

Мы начнем с доказательства формулы суммирования Эйлера, имеющей многочисленные приложения. Введем вспомогательные функции

$$\varrho(x) = \frac{1}{2} - \{x\}, \quad \sigma(x) = \int_0^x \varrho(u) du.$$

Очевидны следующие свойства этих функций:

- а) $\varrho(x)$ и $\sigma(x)$ периодичны с периодом 1;
- б) $\varrho(n) = \frac{1}{2}$ и $\sigma(n) = 0$ для любого $n \in \mathbb{Z}$.
- в) $|\varrho(x)| \leq \frac{1}{2}$ и $0 \leq \sigma(x) \leq \frac{1}{8}$ для любого $x \in \mathbb{R}$.

ТЕОРЕМА 9 (формула суммирования Эйлера). Пусть $f \in C^2[a, b]$. Тогда имеет место равенство

$$\begin{aligned} \sum_{a < n \leq b} f(n) &= \int_a^b f(x) dx + \varrho(b)f(b) - \varrho(a)f(a) \\ &\quad + \sigma(a)f'(a) - \sigma(b)f'(b) + \int_a^b \sigma(x)f''(x) dx. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применим к сумме в левой части преобразование Абеля

$$\begin{aligned} \sum_{a < n \leq b} f(n) &= f(b) \sum_{a < n \leq b} 1 - \int_a^b \left(\sum_{a < n \leq x} 1 \right) f'(x) dx \\ &= f(b)([b] - [a]) - \int_a^b ([x] - [a]) f'(x) dx \\ &= f(b)(b - a + \varrho(b) - \varrho(a)) \\ &\quad - \int_a^b (x - a + \varrho(x) - \varrho(a)) f'(x) dx \\ &= f(b)(b - a + \varrho(b) - \varrho(a)) - \int_a^b (x - a) f'(x) dx \\ &\quad - \int_a^b \varrho(x) f'(x) dx + \varrho(a)(f(b) - f(a)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= f(b)(b - a + \varrho(b)) - \varrho(a)f(a) - \\
&\quad - (b - a)f(b) + \int_a^b f(x) dx - \int_a^b \varrho(x)f'(x) dx \\
&= \int_a^b f(x)dx + \varrho(b)f(b) - \varrho(a)f(a) - \int_a^b \varrho(x)f'(x) dx.
\end{aligned}$$

Мы получили *упрощенный вариант* формулы суммирования Эйлера, который также часто используется.

Допустим, интервал (a, b) не содержит целых точек, то есть функция $\varrho(x)$ непрерывна на (a, b) . Тогда

$$\begin{aligned}
-\int_a^b \varrho(x)f'(x) dx &= -\int_a^b f'(x) d\sigma(x) \\
&= \sigma(a)f'(a) - \sigma(b)f'(b) + \int_a^b \sigma(x)f''(x) dx.
\end{aligned}$$

Если же интервал (a, b) содержит целые точки, то, разбивая его на интервалы, таких точек не содержащие, и действуя аналогично предыдущему случаю, получим требуемое. ■

В полуплоскости $\operatorname{Re} s > 1$ *дзета-функция Римана* определяется равенством

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

В силу равномерной сходимости ряда Дирихле в полуплоскости $\operatorname{Re} s > 1 + \varepsilon$ дзета функция Римана является аналитической в полуплоскости $\operatorname{Re} s > 1$. Кроме того, при $\operatorname{Re} s > 1$

$$\zeta(s) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}.$$

Наконец, как уже отмечалось в §1, $\zeta(s)$ не имеет нулей в полуплоскости $\operatorname{Re} s > 1$.

С помощью формулы суммирования Эйлера получим аналитическое продолжение $\zeta(s)$ в полуплоскость $\operatorname{Re} s > 0$.

ТЕОРЕМА 10. *При $\operatorname{Re} s > 0$, $N \geq 1$ имеет место равенство*

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^s} + \frac{N^{1-s}}{s-1} - \frac{1}{2}N^{-s} + s \int_N^{\infty} \frac{\varrho(u)}{u^{s+1}} du.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $M > N$. Имеем

$$\begin{aligned} \sum_{N < n \leq M} \frac{1}{n^s} &= \int_N^M \frac{du}{u^s} + \frac{1}{2}M^{-s} - \frac{1}{2}N^{-s} + s \int_N^M \frac{\varrho(u)}{u^{s+1}} du = \\ &= \frac{N^{1-s}}{s-1} - \frac{1}{2}N^{-s} - \frac{M^{1-s}}{s-1} + \frac{1}{2}M^{-s} + s \int_N^M \frac{\varrho(u)}{u^{s+1}} du. \end{aligned}$$

Пусть $\operatorname{Re} s > 1$. Перейдем к пределу при $M \rightarrow \infty$. Имеем

$$\zeta(s) - \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^s} = \frac{N^{1-s}}{s-1} - \frac{1}{2}N^{-s} + s \int_N^\infty \frac{\varrho(u)}{u^{s+1}} du.$$

Последний интеграл есть аналитическая в полуплоскости $\operatorname{Re} s > 0$ функция. Согласно принципу аналитического продолжения получаем требуемое. ■

Таким образом, $\zeta(s)$ аналитична в полуплоскости $\operatorname{Re} s > 0$ за исключением точки $s = 1$, где она имеет полюс первого порядка с вычетом 1.

Теперь мы докажем функциональное уравнение дзета-функции Римана, которое связывает значения дзета-функции в точках s и $1-s$, и дает аналитическое продолжение $\zeta(s)$ на всю комплексную плоскость. Нам понадобится вспомогательное утверждение.

ТЕОРЕМА 11. Пусть $x > 0$,

$$\theta(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi n^2 x}.$$

Тогда

$$\theta\left(\frac{1}{x}\right) = \sqrt{x}\theta(x).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем считать x фиксированным числом. Пусть $N > 10$, $M = N^4$, $|n| \leq N$. Рассмотрим интеграл

$$I(n) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{\sin \pi(2M+1)u}{\sin \pi u} e^{-\pi x(n+u)^2} du.$$

Поскольку

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{\sin \pi(2M+1)u}{\sin \pi u} du &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sum_{k=-M}^M e^{2\pi i k u} du \\ &= \sum_{k=-M}^M \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{2\pi i k u} du = 1, \end{aligned}$$

имеем

$$I(n) = e^{-\pi x n^2} + \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{\sin \pi(2M+1)u}{\sin \pi u} (e^{-\pi x(n+u)^2} - e^{-\pi x n^2}) du.$$

Разобьем последний интеграл на интегралы I_1 , I_2 и I_3 по промежуткам $(N^{-3}, \frac{1}{2})$, $(-N^{-3}, N^{-3})$ и $(-\frac{1}{2}, -N^{-3})$, соответственно. Оценим каждый из интегралов сверху. При $|u| \leq \frac{1}{2}$ по теореме Лагранжа о конечных приращениях имеем

$$e^{-\pi x(n+u)^2} - e^{-\pi x n^2} \ll Nu,$$

откуда

$$I_2 \ll N \int_0^{N^{-3}} \frac{u du}{\sin \pi u} \ll \frac{1}{N^2},$$

ибо $|\sin \pi u| \geq 2u$ при $|u| \leq \frac{1}{2}$. Интегралы I_1 и I_3 оцениваются одинаково. Интегрируя по частям, имеем

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{-\cos \pi(2M+1)u}{\pi(2M+1) \sin \pi u} (e^{-\pi x(n+u)^2} - e^{-\pi x n^2}) \Big|_{N^{-3}}^{\frac{1}{2}} \\ &\quad - \int_{N^{-3}}^{\frac{1}{2}} \frac{\cos \pi(2M+1)u}{\pi(2M+1)} \left(\frac{\pi \cos \pi u}{\sin^2 \pi u} (e^{-\pi x(n+u)^2} - e^{-\pi x n^2}) \right. \\ &\quad \left. + \frac{2\pi x(n+u)e^{-\pi x(n+u)^2}}{\sin \pi u} \right) du. \end{aligned}$$

Действуя аналогично предыдущему, получаем, что внеинтегральный член есть $\ll NM^{-1}$, а выражение в скобках в последнем интеграле есть $\ll Nu^{-1}$. Отсюда

$$I_1 \ll \frac{N}{M} + \frac{N}{M} \int_{N^{-3}}^{\frac{1}{2}} \frac{du}{u} \ll \frac{N \ln N}{M} \ll \frac{1}{N^2}.$$

Таким образом,

$$\sum_{n=-N}^N I(n) = \sum_{n=-N}^N e^{-\pi x n^2} + O\left(\frac{1}{N}\right).$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} \sum_{n=-N}^N I(n) &= \sum_{n=-N}^N \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sum_{k=-M}^M e^{2\pi i k u - \pi x(n+u)^2} du \\ &= \sum_{k=-M}^M \sum_{n=-N}^N \int_{n-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} e^{2\pi i k u - \pi x u^2} du \\ &= \sum_{k=-M}^M \int_{-N-\frac{1}{2}}^{N+\frac{1}{2}} e^{2\pi i k u - \pi x u^2} du. \end{aligned}$$

Вычислим последний интеграл. Рассмотрим прямоугольный контур с вершинами в точках $\pm(N+\frac{1}{2})$, $\pm(N+\frac{1}{2})+ikx^{-1}$. Подынтегральная функция аналитична внутри этого контура, поэтому согласно теореме Коши интеграл от этой функции по такому контуру будет равен нулю. Отсюда, оценивая интегралы по боковым сторонам контура тривиально, находим

$$\begin{aligned} &\int_{-N-\frac{1}{2}}^{N+\frac{1}{2}} e^{2\pi i k u - \pi x u^2} du \\ &= \int_{-N-\frac{1}{2}}^{N+\frac{1}{2}} e^{2\pi i k(u+ikx^{-1}) - \pi x(u+ikx^{-1})^2} du + O(|k|e^{-\pi x N}) \\ &= e^{-\frac{\pi k^2}{x}} \int_{-N-\frac{1}{2}}^{N+\frac{1}{2}} e^{-\pi x u^2} du + O(|k|e^{-\pi x N}) \\ &= e^{-\frac{\pi k^2}{x}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x u^2} du + O((|k|+1)e^{-\pi x N}), \end{aligned}$$

ибо

$$\int_{N+\frac{1}{2}}^{\infty} e^{-\pi x u^2} du \leq \int_N^{\infty} e^{-\pi x u} du \ll e^{-\pi x N}.$$

Наконец,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi x u^2} du &= 2 \int_0^{\infty} e^{-\pi x u^2} du = \frac{1}{\sqrt{\pi x}} \int_0^{\infty} e^{-v} v^{-\frac{1}{2}} dv \\ &= \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\sqrt{\pi x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

Окончательно имеем

$$\sum_{n=-N}^N e^{-\pi x n^2} + O\left(\frac{1}{N}\right) = \frac{1}{\sqrt{x}} \sum_{k=-N^4}^{N^4} e^{-\frac{\pi k^2}{x}} + O(N^8 e^{-\pi x N}).$$

Переходя к пределу при $N \rightarrow \infty$, получаем требуемое. ■

Идея доказательства этой теоремы является основой так называемой формулы суммирования Пуассона. Теперь мы готовы к доказательству функционального уравнения $\zeta(s)$.

ТЕОРЕМА 12 (функциональное уравнение дзета-функции Римана). *Дзета-функция Римана аналитически продолжается на всю комплексную плоскость за исключением точки $s = 1$ и удовлетворяет тождеству*

$$\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) = \pi^{-\frac{1-s}{2}} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \zeta(1-s).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $\operatorname{Re} s > 1$ имеем

$$\begin{aligned} \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \pi^{-\frac{s}{2}} n^{-s} \int_0^{\infty} e^{-x} x^{\frac{s}{2}-1} dx \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \left(\sum_{n=1}^N e^{-\pi n^2 u} \right) u^{\frac{s}{2}-1} du. \end{aligned}$$

Здесь мы сделали замену переменной $x = \pi n^2 u$. Введем функцию

$$\omega(u) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 u} = \frac{\theta(u) - 1}{2}.$$

Из определения $\omega(u)$ следует, что $\theta(u) \ll e^{-\pi u}$ при $u \rightarrow \infty$, а из теоремы 11 следует, что $\theta(u) \ll u^{-\frac{1}{2}}$ при $u \rightarrow 0$. Таким образом,

$$\begin{aligned} \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) &= \int_0^\infty u^{\frac{s}{2}-1} \omega(u) du \\ &\quad - \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^\infty \left(\sum_{n>N} e^{-\pi n^2 u} \right) u^{\frac{s}{2}-1} du, \end{aligned}$$

причем первый интеграл в правой части сходится. Оценим выражение в скобках:

$$\begin{aligned} \sum_{n>N} e^{-\pi n^2 u} &\leq \int_N^\infty e^{-\pi x^2 u} dx = \frac{1}{2\sqrt{\pi u}} \int_{\pi N^2 u}^\infty e^{-v} v^{-\frac{1}{2}} dv \\ &\ll \min(u^{-\frac{1}{2}}, (Nu)^{-1} e^{-\pi N^2 u}). \end{aligned}$$

Отсюда находим

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{N^2}} \left(\sum_{n>N} e^{-\pi n^2 u} \right) u^{\frac{s}{2}-1} du &\ll \int_0^{\frac{1}{N^2}} u^{\frac{\sigma-3}{2}} du = \frac{2N^{1-\sigma}}{\sigma-1}, \\ \int_{\frac{1}{N^2}}^\infty \left(\sum_{n>N} e^{-\pi n^2 u} \right) u^{\frac{s}{2}-1} du &\ll \frac{1}{N} \int_{\frac{1}{N^2}}^\infty e^{-\pi N^2 u} u^{\frac{\sigma}{2}-2} du \\ &= N^{1-\sigma} \int_1^\infty e^{-\pi v} v^{\frac{\sigma}{2}-2} dv. \end{aligned}$$

Поскольку $\operatorname{Re} s > 1$, оба выражения стремятся к нулю при $N \rightarrow \infty$. Таким образом, в полуплоскости $\operatorname{Re} s > 1$ справедливо равенство

$$\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) = \int_0^\infty u^{\frac{s}{2}-1} \omega(u) du.$$

Рассмотрим часть этого интеграла, отвечающую промежутку $(0, 1)$, сделаем в нем замену $u = v^{-1}$, и воспользуемся теоремой 11.

Имеем

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 u^{\frac{s}{2}-1} \omega(u) du &= \int_1^\infty v^{-1-\frac{s}{2}} \omega(v^{-1}) dv = \int_1^\infty \frac{\theta(\frac{1}{v}) - 1}{2} v^{-1-\frac{s}{2}} dv \\
 &= \int_1^\infty \frac{\sqrt{v}\theta(v) - 1}{2} v^{-1-\frac{s}{2}} dv \\
 &= \int_1^\infty \left(\sqrt{v}\omega(v) - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{v}}{2} \right) v^{-1-\frac{s}{2}} dv \\
 &= \int_1^\infty v^{-\frac{1}{2}-\frac{s}{2}} \omega(v) dv - \frac{1}{s} + \frac{1}{s-1} \\
 &= \frac{1}{s(s-1)} + \int_1^\infty v^{-\frac{1}{2}-\frac{s}{2}} \omega(v) dv.
 \end{aligned}$$

Таким образом, в полуплоскости $\operatorname{Re} s > 1$ имеет место формула

$$\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) = \frac{1}{s(s-1)} + \int_1^\infty (u^{\frac{s}{2}-1} + u^{-\frac{1}{2}-\frac{s}{2}}) \omega(u) du.$$

Последний интеграл есть целая функция комплексного переменного s , так что по принципу аналитического продолжения получаем, что дзета-функция Римана задается равенством

$$\zeta(s) = \frac{1}{\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} \left(\frac{1}{s(s-1)} + \int_1^\infty (u^{\frac{s}{2}-1} + u^{-\frac{1}{2}-\frac{s}{2}}) \omega(u) du \right)$$

при любом комплексном s , кроме $s = 1$, так как полюс первого порядка при $s = 0$ гасится полюсом первого порядка функции $\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)$. Наконец, правая часть предпоследнего равенства не меняется при замене s на $1-s$, что дает функциональное уравнение и завершает доказательство. ■

Задачи к §3

1. Доказать, что

$$\sum_{n \leq x} \frac{1}{n} = \ln x + C + O\left(\frac{1}{x}\right),$$

причем для константы Эйлера C справедливо представление

$$C = \frac{1}{2} + 2 \int_1^\infty \frac{\sigma(x)}{x^3} dx.$$

2. Доказать, что при $\delta > 0$ и $|\arg s| \leq \pi - \delta$ справедлива формула Стирлинга

$$\ln \Gamma(s) = \left(s - \frac{1}{2}\right) \ln s - s + \ln \sqrt{2\pi} + O\left(\frac{1}{|s|}\right).$$

3. Доказать следующую формулу для суммы Гаусса

$$\sum_{n=1}^N e^{2\pi i \frac{n^2}{N}} = \frac{1 + i^{-N}}{1 + i^{-1}} \sqrt{N}.$$

4. Доказать, что

$$\lim_{s \rightarrow 1} \left(\zeta(s) - \frac{1}{s-1} \right) = C.$$

§ 4 Нули дзета-функции Римана

В предыдущем параграфе было установлено, что дзета-функция Римана аналитична во всей комплексной плоскости, за исключением точки $s = 1$, где она имеет полюс первого порядка с вычетом 1. Из свойств гамма-функции Эйлера (см. задачи к § 2) и последнего равенства § 3 следует, что дзета-функция Римана имеет нули в точках $s = -2, -4, -6, \dots$, называемые *тривиальными*. Других нулей в полуплоскости $\operatorname{Re} s < 0$ нет, так как в противном случае в силу функционального уравнения и свойств гамма-функции $\zeta(s)$ имела бы нули при $\operatorname{Re} s > 1$, что, как мы показали в § 1, не имеет места. Таким образом, все прочие нули дзета-функции Римана, называемые *нетривиальными*, лежат в *критической полосе* $0 \leq \operatorname{Re} s \leq 1$. При этом они расположены симметрично относительно *критической прямой* $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$ и вещественной оси $\operatorname{Im} s = 0$, поскольку $\zeta(s)$ вещественна при вещественных s и удовлетворяет функциональному уравнению. *Гипотеза Римана*, до сих пор не доказанная и не опровергнутая, утверждает, что все нетривиальные нули дзета-функции Римана лежат на критической прямой.

Рассмотрим функцию

$$\xi(s) = s(s-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s).$$

Из последнего равенства § 3 следует, что $\xi(s)$ является целой функцией и ее нули суть в точности нетривиальные нули дзета-функции Римана. При этом в силу теоремы 12 имеет место соотношение

$$\xi(s) = \xi(1-s).$$

В этом параграфе мы получим представление $\xi(s)$ в виде бесконечного произведения по нетривиальным нулям дзета-функции Римана. Нам потребуются два вспомогательных утверждения из комплексного анализа.

ТЕОРЕМА 13 (формула Иенсена). Пусть функция $f(s)$ аналитична в круге $|s| \leq R$, не имеет нулей на окружности $|s| = R$ и $f(0) \neq 0$. Тогда

$$\ln \frac{|f(0)|R^n}{r_1 \dots r_n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |f(Re^{i\varphi})| d\varphi,$$

где $r_1, \dots, r_n$ – модули нулей функции $f(s)$ в круге $|s| < R$, каждый из которых считается столько раз, каков его порядок.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $s_1, \dots, s_n$ – нули $f(s)$ в круге $|s| < R$. Рассмотрим функцию

$$F(s) = \frac{f(s)}{R^n} \prod_{k=1}^n \frac{R^2 - s\overline{s_k}}{s - s_k}.$$

Эта функция аналитична в круге $|s| \leq R$ и не имеет там нулей, ибо $R^2 r_k^{-1} > R$. Таким образом, функция $\ln F(s)$ аналитична в круге $|s| \leq R$. Согласно теореме о среднем

$$\ln F(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln F(Re^{i\varphi}) d\varphi.$$

Отделяя вещественную часть, получим

$$\ln F(0) = \ln \frac{|f(0)|R^n}{r_1 \dots r_n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |F(Re^{i\varphi})| d\varphi.$$

Но по определению функции $F(s)$

$$|F(Re^{i\varphi})| = |f(Re^{i\varphi})| \prod_{k=1}^n \left| \frac{R - e^{i\varphi}\overline{s_k}}{Re^{i\varphi} - s_k} \right| = |f(Re^{i\varphi})|,$$

что и завершает доказательство. ■

ТЕОРЕМА 14 (Борель, Каратеодори). Пусть функция $f(s)$ аналитична в круге $|s| \leq R$. Тогда для любого $n \geq 1$

$$\left| \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \right| \leq 2(A(R) - \operatorname{Re} f(0))R^{-n},$$

где $A(R)$ обозначает максимум $\operatorname{Re} f(s)$ на окружности $|s| = R$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно формулам Коши

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|s|=R} \frac{f(s) ds}{s^{n+1}} = \frac{R^{-n}}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(Re^{i\varphi}) e^{-in\varphi} d\varphi.$$

С другой стороны, при $n \geq 1$, в силу теоремы Коши

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|s|=R} f(s) s^{n-1} ds = \frac{R^n}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(Re^{i\varphi}) e^{in\varphi} d\varphi = 0.$$

Таким образом, взяв комплексное сопряжение, получим

$$\frac{R^{-n}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{f(Re^{i\varphi})} e^{-in\varphi} d\varphi = 0.$$

Складывая, находим

$$\begin{aligned} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} &= \frac{R^{-n}}{\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} f(Re^{i\varphi}) e^{-in\varphi} d\varphi \\ &= \frac{R^{-n}}{\pi} \int_0^{2\pi} (\operatorname{Re} f(Re^{i\varphi}) - A(R)) e^{-in\varphi} d\varphi, \\ \left| \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \right| &\leq \frac{R^{-n}}{\pi} \int_0^{2\pi} \left| \operatorname{Re} f(Re^{i\varphi}) - A(R) \right| d\varphi \\ &= \frac{R^{-n}}{\pi} \int_0^{2\pi} (A(R) - \operatorname{Re} f(Re^{i\varphi})) d\varphi, \end{aligned}$$

ибо, по определению $A(R)$, всегда $A(R) \geq \operatorname{Re} f(Re^{i\varphi})$. Далее,

$$\int_0^{2\pi} \operatorname{Re} f(Re^{i\varphi}) d\varphi = \operatorname{Re} \int_0^{2\pi} f(Re^{i\varphi}) d\varphi = 2\pi \operatorname{Re} f(0)$$

в силу теоремы о среднем. Подставляя полученное равенство в предыдущую оценку, получим требуемое. ■

ТЕОРЕМА 15. *Справедливо равенство*

$$\xi(s) = e^{as} \prod_{\varrho} \left(1 - \frac{s}{\varrho} \right) e^{\frac{s}{\varrho}},$$

где в правой части стоит бесконечное произведение по всем нетривиальным нулям ϱ функции $\zeta(s)$ с учетом кратности, расположенным в порядке возрастания модуля,

$$a = \ln 2\sqrt{\pi} - \frac{C}{2} - 1,$$

C – константа Эйлера.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оценим максимум модуля $\xi(s)$ на окружности $|s| = R$. Так как $\xi(s) = \xi(1-s)$, достаточно рассмотреть случай $\sigma \geq \frac{1}{2}$. Из теоремы 10 при $N = 1$ получаем оценку

$$|\zeta(s)| \leq \frac{1}{|s-1|} + \frac{1}{2} + |s| \int_1^\infty \frac{|\varrho(u)|}{u^{\sigma+1}} du \leq \frac{1}{R-1} + \frac{1}{2} + \frac{R}{2} \int_1^\infty \frac{du}{u^{\frac{3}{2}}} \ll R.$$

Отделяя вещественную часть в формуле Стирлинга (см. задачу 2 к §3), находим

$$\begin{aligned} \ln \left| \Gamma \left(\frac{s}{2} \right) \right| &= \frac{\sigma - 1}{2} \ln \frac{|s|}{2} - \frac{t}{2} \arg \frac{s}{2} - \frac{\sigma}{2} + \ln \sqrt{2\pi} + O \left(\frac{1}{|s|} \right) \\ &\leq \frac{R}{2} \ln \frac{R}{2} + \frac{\pi R}{4} + O(1) \ll R \ln R. \end{aligned}$$

Отсюда находим при $|s| = R$

$$|\xi(s)| = \left| s(s-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) \right| \ll R^3 e^{c_1 R \ln R} \leq e^{c_2 R \ln R}.$$

Предположим, что множество нетривиальных нулей дзета-функции Римана бесконечно. Применим формулу Иенсена к функции $\xi(s)$. Легко видеть, что

$$\xi(0) = \xi(1) = \pi^{-\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 1 \neq 0.$$

Пусть $\varrho_1, \dots, \varrho_n$ — нули $\xi(s)$ в круге $|s| \leq R$. Выберем $R_1 \in [2R, 3R]$ так, чтобы $\xi(s)$ не имела нулей на окружности $|s| = R_1$. Пусть $\varrho_1, \dots, \varrho_k$ — нули $\xi(s)$ в круге $|s| \leq R_1$. Имеем

$$\ln \frac{R_1^k}{|\varrho_1| \dots |\varrho_k|} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |\xi(R_1 e^{i\varphi})| d\varphi \leq c_2 R_1 \ln R_1 \leq c_3 R \ln R.$$

С другой стороны, поскольку $|\varrho_l| \leq R$ при $l = 1, \dots, n$, имеем

$$\ln \frac{R_1^k}{|\varrho_1| \dots |\varrho_k|} \geq \ln \left(\frac{R_1}{R} \right)^n \geq n \ln 2.$$

Таким образом, число нулей $\xi(s)$ в круге $|s| \leq R$ есть $O(R \ln R)$. В частности, при $R = |\varrho_n|$ получим

$$n \leq c_4 |\varrho_n| \ln |\varrho_n| \leq c_5 |\varrho_n|^{1+\varepsilon}.$$

Итак, при любом положительном a справедлива оценка

$$|\varrho_n|^{-a} \leq c_6 n^{-\frac{a}{1+\varepsilon}},$$

что означает сходимость ряда $\sum_{\varrho} |\varrho|^{-a}$ при $a > 1$.

Рассмотрим функцию

$$F(s) = \prod_{\varrho} \left(1 - \frac{s}{\varrho}\right) e^{\frac{s}{\varrho}},$$

и докажем, что она является целой и имеет своими нулями точки $s = \varrho$ и только их. Пусть R – произвольно большое число. Рассмотрим круг $|s| \leq R$ и разобьем произведение на два сомножителя – с ϱ , по модулю не превосходящими $2R$, и с оставшимися ϱ , обозначив эти сомножители через $F_1(s)$ и $F_2(s)$, соответственно. Функция $F_1(s)$ аналитична в круге $|s| \leq R$ и имеет там только требуемые нули. Докажем, что функция $F_2(s)$ также аналитична в круге $|s| \leq R$, но не имеет там нулей. В силу произвольности R это и даст нам требуемое утверждение.

Рассматривая соответствующий $F_2(s)$ ряд логарифмов, при $|s| \leq R$ имеем

$$\begin{aligned} \left| \sum_{|\varrho| > 2R} \left(\ln \left(1 - \frac{s}{\varrho} \right) + \frac{s}{\varrho} \right) \right| &\leq \sum_{|\varrho| > 2R} \left| \frac{s^2}{2\varrho^2} + \frac{s^3}{3\varrho^3} + \dots \right| \\ &\leq \sum_{|\varrho| > 2R} \frac{|s|^2}{|\varrho|^2} \leq R^2 \sum_{|\varrho| > 2R} \frac{1}{|\varrho|^2}. \end{aligned}$$

Поскольку ряд $\sum_{\varrho} |\varrho|^{-2}$ сходится, то сходится и вышеприведенный ряд логарифмов, следовательно, бесконечное произведение $F_2(s)$ также сходится. Таким образом, функция $F_2(s)$ существует и не обращается в нуль в круге $|s| \leq R$. Далее, имеет место тождество

$$\begin{aligned} &\left| \prod_{2R < |\varrho| \leq M} \left(1 - \frac{s}{\varrho} \right) e^{\frac{s}{\varrho}} - F_2(s) \right| \\ &= |F_2(s)| \left| 1 - \exp \left(\sum_{|\varrho| > M} \left(\ln \left(1 - \frac{s}{\varrho} \right) + \frac{s}{\varrho} \right) \right) \right|. \end{aligned}$$

Выражение в экспоненте в правой части стремится к нулю с ростом M , что следует из предыдущей оценки при замене $2R$ на M . Поэтому, начиная с некоторого M , справедлива оценка

$$\left| \prod_{2R < |\varrho| \leq M} \left(1 - \frac{s}{\varrho} \right) e^{\frac{s}{\varrho}} - F_2(s) \right| \leq 2R^2 \exp \left(R^2 \sum_{|\varrho| > 2R} \frac{1}{|\varrho|^2} \right) \sum_{|\varrho| > M} \frac{1}{|\varrho|^2},$$

правая часть которой также стремится к нулю с ростом M . Таким образом, последовательность частичных произведений сходится к $F_2(s)$ равномерно в круге $|s| \leq R$, что в силу теоремы Вейерштрасса означает аналитичность $F_2(s)$ в этом круге.

Итак, функция $\xi(s)(F(s))^{-1}$ есть целая функция, не имеющая нулей. Следовательно, ее логарифм есть также целая функция. Таким образом, имеем

$$\xi(s) = e^{h(s)} \prod_{\varrho} \left(1 - \frac{s}{\varrho}\right) e^{\frac{s}{\varrho}},$$

где $h(s)$ – некоторая целая функция. Мы доказали эту формулу в предположении бесконечности множества нетривиальных нулей ϱ , в случае конечности этого множества формула очевидна.

Прологарифмируем это равенство и дважды продифференцируем его:

$$h''(s) = \frac{d}{ds} \frac{\xi'(s)}{\xi(s)} + \sum_{\varrho} \frac{1}{(s - \varrho)^2}.$$

Пусть R – произвольно большое число, и $|s| \leq \frac{R}{2}$. Тогда при $|\varrho| > R$ имеем $|s - \varrho| \geq |\varrho| - |s| > \frac{1}{2}|\varrho|$. Таким образом, находим

$$\left| \sum_{|\varrho| > R} \frac{1}{(s - \varrho)^2} \right| \leq \sum_{|\varrho| > R} \frac{1}{|s - \varrho|^2} \leq 4 \sum_{|\varrho| > R} \frac{1}{|\varrho|^2}.$$

Итак, эта сумма стремится к нулю с ростом R . В случае конечности множества нулей ϱ она вообще равна нулю тождественно при достаточно большом R .

Рассмотрим теперь функцию

$$\frac{d}{ds} \frac{\xi'(s)}{\xi(s)} + \sum_{|\varrho| \leq R} \frac{1}{(s - \varrho)^2} = \frac{d^2}{ds^2} \ln \left(\xi(s) \prod_{|\varrho| \leq R} \left(1 - \frac{s}{\varrho}\right)^{-1} \right) = h_R''(s)$$

и применим к $h_R(s)$ теорему Бореля–Каратеодори. На окружности $|s| = 2R$ имеем

$$\operatorname{Re} h_R(s) = \ln \left| \xi(s) \prod_{|\varrho| \leq R} \left(1 - \frac{s}{\varrho}\right)^{-1} \right| \leq c_3 R \ln R,$$

ибо при $|s| = 2R$ и $|\varrho| \leq R$

$$\left| \frac{\varrho}{\varrho - s} \right| \leq \frac{|\varrho|}{|s| - |\varrho|} \leq 1.$$

Далее, $\operatorname{Re} h_R(0) = \ln |\xi(0)| = 0$, откуда при $n \geq 1$ имеем

$$\left| \frac{h_R^{(n)}(0)}{n!} \right| \leq c_7 (2R)^{-n} R \ln R.$$

Раскладывая $h_R''(s)$ в ряд Тейлора при $|s| \leq \frac{R}{2}$, находим

$$\begin{aligned} |h_R''(s)| &= \left| \sum_{n=2}^{\infty} \frac{h_R^{(n)}(0)}{(n-2)!} s^{n-2} \right| \\ &\leq \sum_{n=2}^{\infty} c_7 (2R)^{-n} n(n-1) \left(\frac{R}{2} \right)^{n-2} R \ln R \\ &= 4c_7 \frac{\ln R}{R} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n-1)}{4^n}. \end{aligned}$$

Мы видим, что $h_R''(s)$ также стремится к нулю с ростом R . Фиксируя s и устремляя R к бесконечности, получаем, что функция $h''(s)$ равна нулю тождественно, то есть $h(s) = as + b$. Итак,

$$\xi(s) = e^{as+b} \prod_{\varrho} \left(1 - \frac{s}{\varrho} \right) e^{\frac{s}{\varrho}}.$$

Подставляя $s = 0$, находим, что $b = 0$. Для вычисления a возьмем логарифмическую производную от обеих частей равенства и положим $s = 0$:

$$a = \frac{\xi'(0)}{\xi(0)} = -\frac{\xi'(1)}{\xi(1)} = \lim_{s \rightarrow 1} \left(-\frac{1}{s} - \frac{1}{s-1} + \frac{1}{2} \ln \pi - \frac{1}{2} \frac{\Gamma'(\frac{s}{2})}{\Gamma(\frac{s}{2})} - \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right).$$

Здесь мы пользовались определением и функциональным уравнением $\xi(s)$. Пользуясь выражением гамма-функции в виде бесконечного произведения (см. задачу 2 к §2), находим

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{2} \ln \pi + \frac{C}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+1} \right) - \lim_{s \rightarrow 1} \left(\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} + \frac{1}{s-1} \right) \\ &= \ln 2\sqrt{\pi} + \frac{C}{2} - 1 - \lim_{s \rightarrow 1} \left(\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} + \frac{1}{s-1} \right). \end{aligned}$$

Для вычисления предела воспользуемся задачей 4 к §3, согласно которой в окрестности точки $s = 1$ будем иметь

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \frac{-\frac{1}{(s-1)^2} + c + \dots}{\frac{1}{s-1} + C + c(s-1) + \dots} = -\frac{1}{s-1} + C + O(|s-1|).$$

Таким образом, искомый предел равен константе Эйлера C .

Осталось показать, что множество нулей ϱ бесконечно. В противном случае $\xi(s)$ есть многочлен, умноженный на экспоненту от линейной функции, то есть

$$\max_{|s|=R} |\xi(s)| \leq e^{c_8 R}.$$

Но если R вещественно и стремится к $+\infty$, то из формулы Стирлинга и определения функции $\xi(s)$ следует, что $\ln \xi(R) \sim \frac{R}{2} \ln R$, то есть

$$\max_{|s|=R} |\xi(s)| \geq |\xi(R)| \geq e^{c_9 R \ln R}.$$

Полученное противоречие доказывает бесконечность множества нетривиальных нулей $\zeta(s)$ и завершает доказательство теоремы. ■

Задачи к § 4

1. Функция Мангольдта $\Lambda(n)$ равна $\ln p$, если n есть степень простого числа p , и равна нулю, если n не является степенью простого числа.

а) Доказать, что

$$\sum_{d|n} \Lambda(d) = \ln n;$$

б) показать, что при $\operatorname{Re} s > 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s} = -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)};$$

в) показать, что

$$\ln(n!) = \sum_{k \leq n} \Lambda(k) \left[\frac{n}{k} \right];$$

г) доказать оценку

$$\psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n) \asymp x;$$

д) доказать асимптотическую формулу

$$\sum_{p \leq x} \frac{1}{p} = \ln \ln x + B + O\left(\frac{1}{\ln x}\right);$$

е) показать, что

$$\pi(x) = \sum_{p \leq x} 1 \asymp \frac{x}{\ln x}.$$

2. Доказать, что при $t \geq 2\pi$, $|\sigma| \leq N$ (N – фиксировано), имеет место формула

$$\chi(s) = \pi^{s-\frac{1}{2}} \frac{\Gamma(\frac{1-s}{2})}{\Gamma(\frac{s}{2})} = \left(\frac{t}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}-\sigma} e^{-it \ln \frac{t}{2\pi e} + i\frac{\pi}{4}} \left(1 + O\left(\frac{1}{t}\right)\right).$$

3. Доказать, что при $t \geq 2\pi$ и фиксированном N справедливы оценки

$$\begin{aligned} \zeta(s) &\ll t^{\frac{1}{2}-\sigma} \ln t, & -N \leq \sigma \leq 0; & \quad \zeta(s) \ll t^{\frac{1}{2}} \ln t, & 0 \leq \sigma \leq \frac{1}{2}; \\ \zeta(s) &\ll t^{1-\sigma} \ln t, & \frac{1}{2} \leq \sigma \leq 1; & \quad \zeta(s) \ll \ln t, & 1 \leq \sigma \leq N. \end{aligned}$$

§ 5 Асимптотический закон распределения простых чисел

Метод комплексного интегрирования возник в связи с доказательством асимптотической формулы для $\pi(x)$ – количества простых чисел, не превосходящих x . Эта формула была получена Адамаром и Валле-Пуссенем в 1896 году. Ключевым моментом доказательства явилось установление так называемой границы нулей дзета-функции Римана.

ТЕОРЕМА 16 (Валле-Пуссен). *Пусть $T \geq 10$. Тогда существует $c > 0$ такое, что дзета-функция Римана не имеет нулей в области*

$$\sigma \geq 1 - \frac{c}{\ln T}, \quad |t| \leq T.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В точке $s = 1$ функция $\zeta(s)$ имеет полюс, поэтому при достаточно малом c существует $T_0 > 0$ такое, что в области

$$1 - \frac{c}{\ln T} \leq \sigma \leq 1, \quad |t| \leq T_0$$

дзета-функция Римана не имеет нулей. Кроме того, $\zeta(s) \neq 0$ при $\sigma > 1$.

Согласно задаче 1 к § 3 при $\sigma > 1$ имеем

$$-\operatorname{Re} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n) n^{-\sigma} \cos(t \ln n).$$

Поскольку при любом вещественном φ

$$3 + 4 \cos \varphi + \cos 2\varphi = 2 + 4 \cos \varphi + 2 \cos^2 \varphi = 2(1 + \cos \varphi)^2 \geq 0,$$

при $1 < \sigma \leq 2$, $T_0 < t \leq T$ справедливо следующее неравенство:

$$3 \left(-\frac{\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)} \right) + 4 \left(-\operatorname{Re} \frac{\zeta'(\sigma + it)}{\zeta(\sigma + it)} \right) + \left(-\operatorname{Re} \frac{\zeta'(\sigma + 2it)}{\zeta(\sigma + 2it)} \right) \geq 0.$$

Оценим сверху каждое слагаемое в левой части этого неравенства. Логарифмическая производная дзета-функции Римана имеет при $s = 1$ полюс первого порядка с вычетом -1 , поэтому

$$-\frac{\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)} \leq \frac{1}{\sigma - 1} + c_1.$$

Пользуясь теоремой 15, определением функции $\xi(s)$ и представлением гамма-функции в виде бесконечного произведения, получим

$$\begin{aligned}\frac{\xi'(s)}{\xi(s)} &= a + \sum_{\varrho} \left(\frac{1}{s - \varrho} + \frac{1}{\varrho} \right) \\ &= \frac{1}{s-1} - \frac{1}{2} \ln \pi + \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - \frac{C}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{s+2n} - \frac{1}{2n} \right).\end{aligned}$$

Пусть $\operatorname{Re} \varrho = \beta$, $\operatorname{Im} \varrho = \gamma$, тогда

$$-\operatorname{Re} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \leqslant - \sum_{\varrho} \left(\frac{\sigma - \beta}{(\sigma - \beta)^2 + (t - \gamma)^2} + \frac{\beta}{\beta^2 + \gamma^2} \right) + c_2 \ln T,$$

ибо

$$\begin{aligned}\left| \frac{1}{s-1} + c_3 - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{s+2n} - \frac{1}{2n} \right) \right| \\ \leqslant \frac{1}{T_0} + |c_3| + \sum_{n \leqslant T} \frac{1}{n} + \sum_{n > T} \frac{|s|}{4n^2} \leqslant c_2 \ln T.\end{aligned}$$

Поскольку $\sigma > 1$, а $0 \leqslant \beta \leqslant 1$, то в сумме по ϱ все слагаемые неотрицательны, следовательно,

$$-\operatorname{Re} \frac{\zeta'(\sigma + it)}{\zeta(\sigma + it)} \leqslant - \frac{\sigma - \beta}{(\sigma - \beta)^2 + (t - \gamma)^2} + c_2 \ln T,$$

где $\varrho = \beta + i\gamma$ — произвольный нетривиальный нуль дзета-функции Римана. Наконец, аналогично получаем оценку

$$-\operatorname{Re} \frac{\zeta'(\sigma + 2it)}{\zeta(\sigma + 2it)} \leqslant c_4 \ln T.$$

Объединяя полученные оценки, находим при $1 < \sigma \leqslant 2$, $T_0 < t \leqslant T$ следующее неравенство

$$\frac{3}{\sigma-1} - 4 \frac{\sigma - \beta}{(\sigma - \beta)^2 + (t - \gamma)^2} + c_5 \ln T \geqslant 0,$$

где $\varrho = \beta + i\gamma$ — произвольный нетривиальный нуль дзета-функции Римана. Пусть $T_0 < \gamma \leqslant T$. Для доказательства теоремы достаточно показать, что в этом случае $\beta < 1 - \frac{c}{\ln T}$ для достаточно малого c . Взяв $t = \gamma$, получим

$$\frac{4}{\sigma - \beta} \leqslant \frac{3}{\sigma - 1} + c_5 \ln T.$$

Возьмем теперь $\sigma = 1 + \frac{1}{2c_5 \ln T}$, что дает неравенство

$$\beta \leq 1 - \frac{1}{14c_5 \ln T}$$

и завершает доказательство теоремы. ■

Теперь мы готовы к доказательству асимптотического закона распределения простых чисел.

ТЕОРЕМА 17. *Справедлива асимптотическая формула*

$$\psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n) = x + O(xe^{-c\sqrt{\ln x}}),$$

где $c > 0$ – постоянная.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $\operatorname{Re} s > 1$

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}.$$

Применим формулу Перрона, взяв $a = 1$, $b = 1 + \frac{1}{\ln x}$. Параметр α равен единице, ибо логарифмическая производная $\zeta(s)$ имеет при $s = 1$ полюс первого порядка. Для коэффициентов $\Lambda(n)$ справедлива тривиальная оценка $\ln n$. В итоге находим

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \sum_{n \leq x} \Lambda(n) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right) \frac{x^s}{s} ds + O\left(\frac{x \ln^2 x}{T} + \ln x \ln T \right). \end{aligned}$$

Согласно теореме Валле-Пуссена о границе нулей дзета-функции Римана существует постоянная $c_1 > 0$ такая, что в области

$$\sigma \geq 1 - \frac{2c_1}{\ln T}, \quad |t| \leq 2T$$

нет нулей $\zeta(s)$. Рассмотрим интеграл по контуру Γ , представляющему собой прямоугольник с вершинами $b \pm iT$, $\alpha \pm iT$, где $\alpha = 1 - \frac{c_1}{\ln T}$. Подынтегральная функция аналитична на Γ и внутри него, исключая простой полюс при $s = 1$ с вычетом x . Таким образом, в силу теоремы Коши

$$x = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right) \frac{x^s}{s} ds = \frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right) \frac{x^s}{s} ds + I_1 + I_2 + I_3,$$

где через I_1, I_2, I_3 обозначены интегралы по левой и горизонтальным сторонам контура Γ . Оценим эти интегралы сверху.

Применим теорему Бореля–Каратеодори к функции $\ln \zeta(s)$ в круге радиуса $R = \frac{3c_1}{\ln T}$ с центром в точке $s_0 = 1 + \frac{R}{2} + it$, где $2\pi \leq t \leq T$. Согласно задаче 3 к § 4 в круге $|s - s_0| \leq R$ справедлива оценка $\zeta(s) \ll \ln T$. Таким образом, имеем

$$A(R) = \max_{|s-s_0|=R} \operatorname{Re} \ln \zeta(s) = \max_{|s-s_0|=R} \ln |\zeta(s)| \leq c_2 \ln \ln T.$$

Далее, пользуясь тождеством Эйлера, находим

$$\begin{aligned} |\ln \zeta(s_0)| &= \left| \sum_p \ln \left(1 - \frac{1}{p^{s_0}} \right) \right| = \left| \sum_p \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{mp^{ms_0}} \right| \\ &\leq \sum_p \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{mp^{m\sigma_0}} = \ln \zeta \left(1 + \frac{R}{2} \right) \leq c_3 \ln \ln T, \end{aligned}$$

ибо

$$1 < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{R}{2}}} \leq 1 + \int_1^{\infty} \frac{du}{u^{1+\frac{R}{2}}} = \frac{2+R}{R} \ll \ln T.$$

Итак, $-\operatorname{Re} \ln \zeta(s_0) = -\ln |\zeta(s_0)| \leq |\ln \zeta(s_0)| \leq c_3 \ln \ln T$, откуда при $n \geq 1$ имеем окончательно

$$a_n = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{ds^n} \ln \zeta(s) \Big|_{s=s_0} \ll R^{-n} \ln \ln T.$$

Раскладывая логарифмическую производную дзета-функции Римана в ряд Тейлора, находим в круге $|s - s_0| \leq \frac{5c_1}{2 \ln T}$ оценку

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (s - s_0)^{n-1} \ll \ln \ln T \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{5}{6} \right)^n \ln T \ll \ln T \ln \ln T.$$

В частности, эта оценка справедлива на горизонтальных сторонах контура Γ и на его левой стороне, если $|t| \geq 2\pi$. Если же $|t| < 2\pi$, то на левой стороне Γ справедлива оценка

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \ll \ln T,$$

поскольку логарифмическая производная дзета-функции имеет при $s = 1$ простой полюс.

Теперь оценим интегралы I_1, I_2, I_3 . Имеем

$$I_1 \ll x^\alpha \ln T \int_0^{2\pi} dt + x^\alpha \ln T \ln \ln T \int_{2\pi}^T \frac{dt}{t} \ll x^\alpha \ln^2 T \ln \ln T,$$

$$I_2, I_3 \ll \frac{\ln T \ln \ln T}{T} \int_\alpha^b x^\sigma d\sigma \ll \frac{x}{T} \ln T \ln \ln T.$$

Собирая вместе все полученные оценки, находим

$$\psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n)$$

$$= x + O\left(\frac{x \ln^2 x}{T} + \frac{x \ln T \ln \ln T}{T} + x^\alpha \ln^2 T \ln \ln T + \ln x \ln T\right).$$

Положив $T = e^{\sqrt{\ln x}}$, получим требуемое асимптотическое равенство. ■

СЛЕДСТВИЕ (асимптотический закон распределения простых чисел). *Имеет место асимптотическая формула*

$$\pi(x) = \sum_{p \leq x} 1 = \int_2^x \frac{du}{\ln u} + O(xe^{-c\sqrt{\ln x}}),$$

где $c > 0$ – постоянная.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению функции Мангольдта находим

$$\psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n) = \sum_{p \leq x} \ln p + \sum_{\substack{p^k \leq x \\ k \geq 2}} \ln p = \sum_{p \leq x} \ln p + O(\sqrt{x}),$$

ибо в силу задачи 1, е к § 4

$$\sum_{\substack{p^k \leq x \\ k \geq 2}} \ln p = \sum_{p \leq \sqrt{x}} \ln p \sum_{2 \leq k \leq \frac{\ln x}{\ln p}} 1 \leq \sum_{p \leq \sqrt{x}} \ln p \left[\frac{\ln x}{\ln p} \right] \leq \ln x \sum_{p \leq \sqrt{x}} 1 \ll \sqrt{x}.$$

Таким образом, из теоремы 17 получаем, что

$$\sum_{p \leq x} \ln p = x + O(xe^{-c\sqrt{\ln x}}).$$

Пусть $\delta(n)$ обозначает характеристическую функцию множества простых чисел. Совершая преобразование Абеля (теорема 9), находим

$$\begin{aligned}
 \pi(x) &= 1 + \sum_{2 < n \leq x} \delta(n) \ln n \frac{1}{\ln n} \\
 &= 1 + \frac{1}{\ln x} \sum_{2 < n \leq x} \delta(n) \ln n + \int_2^x \left(\sum_{2 < n \leq u} \delta(n) \ln n \right) \frac{du}{u \ln^2 u} \\
 &= 1 + \frac{1}{\ln x} \sum_{2 < p \leq x} \ln p + \int_2^x \left(\sum_{2 < p \leq u} \ln p \right) \frac{du}{u \ln^2 u} \\
 &= \frac{x}{\ln x} + \int_2^x \frac{du}{\ln^2 u} + O\left(xe^{-c\sqrt{\ln x}} + \int_2^x e^{-c\sqrt{\ln u}} du\right).
 \end{aligned}$$

Возьмем по частям интеграл в главном члене

$$\frac{x}{\ln x} + \int_2^x \frac{du}{\ln^2 u} = \frac{x}{\ln x} - \int_2^x u d\left(\frac{1}{\ln u}\right) = \int_2^x \frac{du}{\ln u}.$$

Наконец, оценим интеграл в остаточном члене, разбив его на два интеграла и пользуясь монотонностью подынтегральной функции

$$\int_2^x e^{-c\sqrt{\ln u}} du \ll \int_2^{\sqrt{x}} du + e^{-c_1\sqrt{\ln x}} \int_{\sqrt{x}}^x du \ll xe^{-c_1\sqrt{\ln x}}.$$

Этим доказательство завершается. ■

В 1958 году Виноградов получил новую границу нулей дзета-функции Римана — $\sigma \geq 1 - c(\ln T)^{-\frac{2}{3}-\varepsilon}$, и новую оценку остаточного члена в асимптотическом законе — $\ll xe^{-c(\ln x)^{0.6-\varepsilon}}$. Эти результаты, по существу, не улучшены и по сей день. Между тем, из гипотезы Римана следует, что

$$\pi(x) = \int_2^x \frac{du}{\ln u} + O(\sqrt{x} \ln x).$$

Задачи к § 5

1. Доказать следующие асимптотические формулы:

а)

$$\sum_{n \leq x} \mu(n) = O(xe^{-c\sqrt{\ln x}});$$

б)

$$\sum_{n \leq x} r(n) = \frac{\zeta(2)\zeta(3)}{\zeta(6)}x + O(xe^{-c\sqrt{\ln x}}),$$

где $r(n)$ – число решений уравнения $\varphi(m) = n$.

2. Доказать следующие асимптотические формулы:

а)

$$\sum_{n \leq x} \frac{1}{\varphi(n)} = \frac{\zeta(2)\zeta(3)}{\zeta(6)} \ln x + c + O(x^{-\frac{2}{3}} \ln^2 x);$$

б)

$$\sum_{n \leq x} \sigma^2(n) = \frac{\zeta^2(2)\zeta(3)}{\zeta(4)} \frac{x^3}{3} + O(x^{\frac{7}{3}} \ln^3 x);$$

в)

$$\sum_{n \leq x} \tau(n^2) = \frac{x \ln^2 x}{2\zeta(2)} + c_1 x \ln x + c_2 + O(x^{\frac{5}{7}+\varepsilon}).$$

3. Доказать следующую асимптотическую формулу:

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq x} \frac{1}{\tau(n)} &= \frac{x}{\sqrt{\pi \ln x}} \prod_p \sqrt{p(p-1)} \ln \frac{p}{p-1} \\ &+ c_1 x (\ln x)^{-\frac{3}{2}} + \dots + c_{N-1} x (\ln x)^{-N+\frac{1}{2}} + O(x (\ln x)^{-N-\frac{1}{2}}), \end{aligned}$$

где N – произвольное фиксированное число.

§ 6 Проблема делителей Дирихле. Формула Вороного

Асимптотические формулы для некоторых сумматорных функций можно получить, не прибегая к методу комплексного интегрирования. Например,

$$\begin{aligned}\sum_{n \leq x} \tau(n) &= \sum_{n \leq x} \sum_{d|n} 1 = \sum_{d \leq x} \sum_{k \leq \frac{x}{d}} 1 \\ &= \sum_{d \leq x} \left[\frac{x}{d} \right] = x \sum_{d \leq x} \frac{1}{d} + O(x) = x \ln x + O(x).\end{aligned}$$

Полученная оценка остатка очень груба, так как суммирование по d идет вплоть до x , где ошибка от замены целой части дроби $\frac{x}{d}$ на саму дробь сравнима по величине с этой дробью. Гораздо более точную оценку можно получить с помощью изящного приема, восходящего к Гауссу.

ТЕОРЕМА 18 (Дирихле). *Справедливо равенство*

$$\sum_{n \leq x} \tau(n) = x \ln x + (2C - 1)x + O(\sqrt{x}),$$

где C – постоянная Эйлера.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко видеть, что

$$\sum_{n \leq x} \tau(n) = \sum_{d \leq x} \left[\frac{x}{d} \right] = \sum_{uv \leq x} 1.$$

Таким образом, интересующая нас величина представляет собой число точек с целыми неотрицательными координатами под гиперболой $uv = x$. Имеет место соотношение

$$\sum_{n \leq x} \tau(n) = 2 \sum_{d \leq \sqrt{x}} \left[\frac{x}{d} \right] - \left(\sum_{d \leq \sqrt{x}} 1 \right)^2.$$

Действительно, первое слагаемое в правой части есть число целых точек под гиперболой $uv = x$ с ограничением $u \leq \sqrt{x}$ плюс число целых точек под той же гиперболой с ограничением $v \leq \sqrt{x}$. Эти две области перекрываются по квадрату $u, v \leq \sqrt{x}$, то есть

целые точки в этом квадрате считаются дважды и их количество должно быть вычтено. Согласно задаче 1 к §3 имеем

$$\sum_{n \leq x} \tau(n) = 2x \sum_{d \leq \sqrt{x}} \frac{1}{d} - x + O(\sqrt{x}) = x \ln x + (2C - 1)x + O(\sqrt{x}).$$

Этим доказательство завершается. ■

Положим

$$R(x) = \sum_{n \leq x} \tau(n) - x \ln x - (2C - 1)x.$$

Проблема уточнения оценки $R(x)$ известна как проблема делителей Дирихле. В 1903 году Вороной показал, что $R(x) \ll x^{\frac{1}{3}+\varepsilon}$. Наилучший на сегодняшний день результат – $R(x) \ll x^{\frac{7}{22}+\varepsilon}$ – получен Иванцом в 1988 году. С другой стороны, Харди доказал существование последовательности чисел x_n , стремящейся к бесконечности и такой, что $|R(x_n)| \gg x_n^{\frac{1}{4}}$. Предполагают, что имеет место оценка $R(x) \ll x^{\frac{1}{4}+\varepsilon}$.

Мы получим явную формулу для $R(x)$, известную как формула Вороного, из которой легко следует оценка $R(x) \ll x^{\frac{1}{3}+\varepsilon}$. Для этого мы проведем контур интегрирования существенно левее единичной прямой, и вместо того, чтобы оценивать интеграл по левой стороне контура, вычислим его асимптотически. Нам потребуется два вспомогательных утверждения.

ТЕОРЕМА 19. *При $0 \leq \sigma \leq 1$, $t \geq 2\pi$ имеет место оценка*

$$\zeta(s) \ll t^{\frac{1-\sigma}{2}} \ln t.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим функцию

$$f_\varepsilon(s) = e^{\varepsilon is + \frac{s-1}{2} \ln(-is)} \frac{1}{\ln(-is)}.$$

Пусть $0 \leq \sigma \leq 1$, $t \geq 2\pi$. Имеем

$$|f_\varepsilon(s)| = \frac{e^{-\varepsilon t + \frac{\sigma-1}{2} \ln |s| - \frac{t}{2} \arg(-is)}}{\sqrt{\ln^2 |s| + \arg^2(-is)}} = t^{\frac{\sigma-1}{2}} e^{-\varepsilon t} \frac{e^{\frac{\sigma}{2}} + O(t^{-2})}{\ln t},$$

поскольку $\ln |s| = \frac{1}{2} \ln(\sigma^2 + t^2) = \ln t + O(t^{-2})$, а $\arg(-is) = -\arctg \frac{\sigma}{t} = -\frac{\sigma}{t} + O(t^{-3})$.

Рассмотрим теперь функцию $\zeta(s)f_\varepsilon(s)$ в полуполосе $0 \leq \sigma \leq 1$, $t \geq 2\pi$. Согласно задаче 3 к § 4 имеют место оценки $\zeta(it) \ll t^{\frac{1}{2}} \ln t$ и $\zeta(1+it) \ll \ln t$. Таким образом, на границе указанной полуполосы имеем

$$|\zeta(s)f_\varepsilon(s)| \leq M,$$

где M – абсолютная постоянная. При $T \geq T_0(\varepsilon)$ та же оценка верна и при $s = \sigma + iT$, $0 \leq \sigma \leq 1$, что опять же следует из упомянутой задачи. В силу принципа максимума модуля указанная оценка справедлива в прямоугольнике $0 \leq \sigma \leq 1$, $2\pi \leq t \leq T$, а значит и во всей полуполосе $0 \leq \sigma \leq 1$, $t \geq 2\pi$, так как T можно брать произвольно большим.

Итак, при $0 \leq \sigma \leq 1$, $t \geq 2\pi$ имеем

$$|\zeta(s)| \leq M|f_\varepsilon(s)|^{-1} \leq M_1 e^{\varepsilon t} t^{\frac{1-\sigma}{2}} \ln t.$$

Доказательство завершается переходом к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$. ■

ТЕОРЕМА 20. Пусть $f(x)$ и $\varphi(x)$ – вещественные функции, удовлетворяющие на отрезке $[a, b]$ условиям:

- 1) $f^{(4)}(x)$ и $\varphi''(x)$ непрерывны;
- 2) существуют числа $H, A > 0, U \geq b - a$ такие, что

$$f^{(2)}(x) \asymp A^{-1}, \quad f^{(3)}(x) \ll A^{-1}U^{-1}, \quad f^{(4)}(x) \ll A^{-1}U^{-2},$$

$$\varphi(x) \ll H, \quad \varphi'(x) \ll HU^{-1}, \quad \varphi''(x) \ll HU^{-1};$$

- 3) существует $c \in [a, b]$ такое, что $f(c) = 0$.

Тогда имеет место формула

$$\int_a^b \varphi(x) e^{2\pi i f(x)} dx = \frac{\varphi(c)}{\sqrt{f''(c)}} e^{2\pi i f(c) + \frac{\pi i}{4}} + O(HAU^{-1})$$

$$+ O(H \min(|f'(a)|^{-1}, \sqrt{A})) + O(H \min(|f'(b)|^{-1}, \sqrt{A})).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $c \in (a, b)$. Рассмотрим отдельно интеграл от c до b и интеграл от a до c . Имеем

$$\int_c^b \varphi(x) e^{2\pi i f(x)} dx = \varphi(c) \int_c^b e^{2\pi i f(x)} dx$$

$$+ \int_0^{b-c} (\varphi(x+c) - \varphi(c)) e^{2\pi i f(x+c)} dx.$$

Возьмем второй интеграл по частям:

$$\begin{aligned} \int_0^{b-c} (\varphi(x+c) - \varphi(c)) e^{2\pi i f(x+c)} dx &= \left. \frac{\varphi(x+c) - \varphi(c)}{2\pi i f'(x+c)} e^{2\pi i f(x+c)} \right|_0^{b-c} \\ &- \frac{1}{2\pi i} \int_0^{b-c} \frac{\varphi'(x+c) f'(x+c) - f''(x+c)(\varphi(x+c) - \varphi(c))}{(f'(x+c))^2} \\ &\quad \times e^{2\pi i f(x+c)} dx. \end{aligned}$$

Пользуясь условиями на производные функций $f(x)$ и $\varphi(x)$, из формулы конечных приращений Лагранжа находим

$$\begin{aligned} \varphi(x+c) - \varphi(c) &= \varphi'(c)x + O(HU^{-2}x^2), \\ \varphi'(x+c) &= \varphi'(c) + O(HU^{-2}x), \\ f'(x+c) &= f''(c)x + O(A^{-1}U^{-1}x^2), \quad |f'(x+c)| \gg A^{-1}x, \\ f''(x+c) &= f''(c) + O(A^{-1}U^{-1}x). \end{aligned}$$

Из этих оценок и неравенства $U \geq b-a$ следует, что

$$\int_0^{b-c} (\varphi(x+c) - \varphi(c)) e^{2\pi i f(x+c)} dx \ll HAU^{-1}.$$

Точно такая же оценка справедлива и для интеграла от a до c .

Рассмотрим теперь разность

$$D = \int_0^{b-c} e^{2\pi i f(x+c)} dx - \int_0^{b-c} \frac{f'(x+c) e^{2\pi i f(x+c)} dx}{\sqrt{2f''(c)(f(x+c) - f(c))}}.$$

Интегрируя по частям, находим

$$\begin{aligned} D &= \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{1}{f'(x+c)} - \frac{1}{\sqrt{2f''(c)(f(x+c) - f(c))}} \right) e^{2\pi i f(x+c)} \Big|_0^{b-c} - \\ &- \frac{1}{2\pi i} \int_0^{b-c} \left(-\frac{f''(x+c)}{(f'(x+c))^2} + \frac{f'(x+c)}{\sqrt{8f''(c)(f(x+c) - f(c))}^{\frac{3}{2}}} \right) \\ &\quad \times e^{2\pi i f(x+c)} dx. \end{aligned}$$

Пользуясь формулой Тейлора и условиями на производные функции $f(x)$, получаем

$$\begin{aligned} f(x+c) - f(c) &= \frac{1}{2}f''(c)x^2 + \frac{1}{6}f^{(3)}(c)x^3 + O(A^{-1}U^{-2}x^4), \\ f'(x+c) &= f''(c)x + f^{(3)}(c)x^2 + O(A^{-1}U^{-2}x^3), \\ f''(x+c) &= f''(c) + f^{(3)}(c)x + O(A^{-1}U^{-2}x^2). \end{aligned}$$

Из этих оценок и неравенства $U \geq b - a$ следует, что

$$\int_0^{b-c} e^{2\pi i f(x+c)} dx = \int_0^{b-c} \frac{f'(x+c) e^{2\pi i f(x+c)} dx}{\sqrt{2f''(c)(f(x+c) - f(c))}} + O(AU^{-1}).$$

В случае интеграла от a до c имеем

$$\int_{a-c}^0 e^{2\pi i f(x+c)} dx = - \int_{a-c}^0 \frac{f'(x+c) e^{2\pi i f(x+c)} dx}{\sqrt{2f''(c)(f(x+c) - f(c))}} + O(AU^{-1}),$$

ибо в этом случае $x \leq 0$ и $\sqrt{x^2} = -x$.

Сделаем замену переменной $u = f(x+c) - f(c)$, обозначая $\lambda = f(b) - f(c)$ (соответственно, $\lambda = f(a) - f(c)$). Имеем $u \geq 0$, так как c – точка минимума $f(x)$, и в обоих случаях получаем интеграл одного и того же вида:

$$\begin{aligned} & \frac{e^{2\pi i f(c)}}{\sqrt{2f''(c)}} \int_0^\lambda \frac{e^{2\pi i u}}{\sqrt{u}} du \\ &= \frac{e^{2\pi i f(c)}}{\sqrt{2f''(c)}} \int_0^\infty \frac{e^{2\pi i u}}{\sqrt{u}} du + O\left(\sqrt{A} \left| \int_\lambda^\infty \frac{e^{2\pi i u}}{\sqrt{u}} du \right| \right). \end{aligned}$$

С одной стороны, интегрируя по частям, находим оценку

$$\left| \int_\lambda^\infty \frac{e^{2\pi i u}}{\sqrt{u}} du \right| \leq \frac{1}{2\pi\sqrt{\lambda}} + \frac{1}{4\pi} \int_\lambda^\infty u^{-\frac{3}{2}} du \ll \frac{1}{\sqrt{\lambda}}.$$

С другой стороны,

$$\left| \int_\lambda^\infty \frac{e^{2\pi i u}}{\sqrt{u}} du \right| \ll 1.$$

При $\lambda > 1$ последняя оценка следует из предыдущей, а при $\lambda \leq 1$ имеем

$$\int_\lambda^{\lambda+1} \frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{\lambda+1} - 2\sqrt{\lambda} \ll 1.$$

Наконец, согласно формуле конечных приращений Лагранжа находим

$$\begin{aligned} \sqrt{f(b) - f(c)} &= \sqrt{\frac{1}{2}f''(\xi)(b-c)^2} \gg \frac{1}{\sqrt{A}}|b-c|, \\ |f'(b)| &= |f''(\xi_1)(b-c)| \ll \frac{1}{A}|b-c|, \end{aligned}$$

то есть

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} \ll \frac{1}{\sqrt{A}|f'(b)|}.$$

Окончательно имеем

$$\begin{aligned} \int_a^b \varphi(x) e^{2\pi i f(x)} dx &= \frac{\varphi(c)}{\sqrt{f''(c)}} e^{2\pi i f(c)} \sqrt{2} \int_0^\infty \frac{e^{2\pi i u}}{\sqrt{u}} du + O(HAU^{-1}) \\ &+ O(H \min(|f'(a)|^{-1}, \sqrt{A})) + O(H \min(|f'(b)|^{-1}, \sqrt{A})). \end{aligned}$$

Случай $c = b$ или $c = a$ также учитывается этой формулой: главный член будет вдвое меньше, но он поглощается остатком $O(H\sqrt{A})$.

Остается вычислить несобственный интеграл в правой части. Рассмотрим контур Γ , состоящий из четвертей окружностей радиусов r и R с центром в нуле, расположенных в первом квадранте, и соединяющих концы этих дуг отрезков вещественной и мнимой осей. Согласно теореме Коши

$$\int_{\Gamma} \frac{e^{2\pi i s}}{\sqrt{s}} ds = 0.$$

Интегралы по дугам стремятся к нулю при $r \rightarrow 0$ и $R \rightarrow \infty$, ибо

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{2\pi i r e^{i\varphi}}}{\sqrt{r} e^{\frac{i\varphi}{2}}} i r e^{i\varphi} d\varphi &\ll \sqrt{r}, \\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{2\pi i R e^{i\varphi}}}{\sqrt{R} e^{\frac{i\varphi}{2}}} i R e^{i\varphi} d\varphi &\ll \sqrt{R} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-2\pi R \sin \varphi} d\varphi \\ &\ll \sqrt{R} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-4R\varphi} d\varphi \ll \frac{1}{\sqrt{R}}. \end{aligned}$$

Таким образом, получаем

$$\begin{aligned} \sqrt{2} \int_0^\infty \frac{e^{2\pi i u}}{\sqrt{u}} du &= \sqrt{2} e^{\frac{\pi i}{4}} \int_0^\infty \frac{e^{-2\pi u}}{\sqrt{u}} du = \frac{e^{\frac{\pi i}{4}}}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-x} x^{-\frac{1}{2}} dx \\ &= \frac{e^{\frac{\pi i}{4}}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = e^{\frac{\pi i}{4}}. \end{aligned}$$

Этим доказательство завершается. ■

Теперь мы готовы к доказательству формулы Вороного.

ТЕОРЕМА 21 (формула Вороного). Пусть $T \leq x$. Тогда справедливо равенство

$$\sum_{n \leq x} \tau(n) = x \ln x + (2C - 1)x + \frac{x^{\frac{1}{4}}}{\pi\sqrt{2}} \sum_{n \leq \frac{1}{x} \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2} \frac{\tau(n)}{n^{\frac{3}{4}}} \cos\left(4\pi\sqrt{nx} - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{x^{1+\varepsilon}}{T}\right),$$

где C – постоянная Эйлера.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем считать $T \geq 100\sqrt{x}$, так как в противном случае формула Вороного следует из теоремы Дирихле. Будем также считать, не ограничивая общности, что верхний предел суммирования в правой части формулы Вороного есть полуцелое число. При $\operatorname{Re} s > 1$ имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau(n)}{n^s} = \zeta^2(s),$$

причем согласно задаче 1, д к §1 справедлива оценка $\tau(n) \ll n^\varepsilon$. Поскольку дзета-функция Римана имеет при $s = 1$ полюс первого порядка, то при $\sigma \rightarrow 1 + 0$ имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau(n)}{n^\sigma} = \zeta^2(\sigma) \ll \frac{1}{(\sigma - 1)^2}.$$

Выберем $b = 1 + \frac{1}{\ln x}$ и применим формулу Перрона, полагая $T \leq x$. Имеем

$$\sum_{n \leq x} \tau(n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} \zeta^2(s) \frac{x^s}{s} ds + O\left(\frac{x^{1+2\varepsilon}}{T}\right).$$

Рассмотрим прямоугольный контур Γ с вершинами в точках $b \pm iT$, $-\varepsilon \pm iT$. Согласно теореме Коши о вычетах

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \zeta^2(s) \frac{x^s}{s} ds = \operatorname{res}_{s=1} \zeta^2(s) \frac{x^s}{s} + \operatorname{res}_{s=0} \zeta^2(s) \frac{x^s}{s}.$$

Вычислим вычеты в правой части последнего равенства:

$$\operatorname{res}_{s=1} \zeta^2(s) \frac{x^s}{s} = \left(((s-1)\zeta(s))^2 \frac{x^s}{s} \right)'_{s=1} = x \ln x - x + 2Cx,$$

что следует из задачи 4 к §3, и

$$\operatorname{res}_{s=0} \zeta^2(s) \frac{x^s}{s} = \zeta^2(0) \ll 1.$$

Теперь оценим интегралы по горизонтальным сторонам контура Г. Используя теорему 19 и задачу 3 к §4, получим

$$\begin{aligned} \int_{-\varepsilon}^b \zeta^2(\sigma \pm iT) \frac{x^{\sigma \pm iT}}{\sigma \pm iT} d\sigma &\ll \frac{x^0}{T} \max_{-\varepsilon \leq \sigma \leq 0} |\zeta^2(\sigma \pm iT)| \\ &+ \frac{\ln^2 T}{T} \int_0^1 x^\sigma T^{1-\sigma} d\sigma + \frac{x^b}{T} \max_{1 \leq \sigma \leq b} |\zeta^2(\sigma \pm iT)| \\ &\ll T^{2\varepsilon} \ln^2 T + \frac{x}{T} \ln^2 T \ll \frac{x^{1+3\varepsilon}}{T}. \end{aligned}$$

Итак, имеем

$$\sum_{n \leq x} \tau(n) = x \ln x + (2C - 1)x + j + O\left(\frac{x^{1+3\varepsilon}}{T}\right),$$

где

$$j = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\varepsilon - iT}^{-\varepsilon + iT} \zeta^2(s) \frac{x^s}{s} ds.$$

Преобразуем интеграл j к более удобному виду. Легко видеть, что

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\varepsilon - 2\pi i}^{-\varepsilon + 2\pi i} \zeta^2(s) \frac{x^s}{s} ds \ll 1,$$

и, поскольку дзета-функция Римана вещественна при вещественных s ,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{-2\pi} \zeta^2(-\varepsilon + it) \frac{x^{-\varepsilon + it}}{-\varepsilon + it} dt &= \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi}^T \zeta^2(-\varepsilon - it) \frac{x^{-\varepsilon - it}}{-\varepsilon - it} dt \\ &= \overline{\frac{1}{2\pi} \int_{2\pi}^T \zeta^2(-\varepsilon + it) \frac{x^{-\varepsilon + it}}{-\varepsilon + it} dt}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$j = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \int_{2\pi}^T \zeta^2(-\varepsilon + it) \frac{x^{-\varepsilon + it}}{-\varepsilon + it} dt + O(1).$$

Согласно функциональному уравнению дзета-функции Римана и задаче 2 к § 4 имеем

$$\begin{aligned}\zeta^2(-\varepsilon + it) &= \chi^2(-\varepsilon + it)\zeta^2(1 + \varepsilon - it) \\ &= \zeta^2(1 + \varepsilon - it)\left(\frac{t}{2\pi}\right)^{1+2\varepsilon} e^{-2it \ln \frac{t}{2\pi e} + i\frac{\pi}{2}} \left(1 + O\left(\frac{1}{t}\right)\right).\end{aligned}$$

Учитывая, что

$$\frac{1}{-\varepsilon + it} = \frac{1}{it} \left(1 + O\left(\frac{1}{t}\right)\right)$$

и

$$\zeta^2(1 + \varepsilon - it) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau(n)}{n^{1+\varepsilon}} n^{it} \ll \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau(n)}{n^{1+\varepsilon}} \ll 1,$$

получаем равенство

$$\begin{aligned}\zeta^2(-\varepsilon + it) \frac{x^{-\varepsilon + it}}{-\varepsilon + it} \\ = \zeta^2(1 + \varepsilon - it) \frac{x^{-\varepsilon} t^{2\varepsilon}}{(2\pi)^{1+2\varepsilon}} e^{-it \ln(\frac{1}{x}(\frac{t}{2\pi e})^2)} + O(x^{-\varepsilon} t^{2\varepsilon-1}).\end{aligned}$$

Таким образом,

$$j = \frac{1}{\pi} \frac{x^{-\varepsilon}}{(2\pi)^{1+2\varepsilon}} \operatorname{Re} \int_{2\pi}^T \zeta^2(1 + \varepsilon - it) t^{2\varepsilon} e^{-it \ln(\frac{1}{x}(\frac{t}{2\pi e})^2)} dt + O(T^{2\varepsilon}).$$

Но ряд Дирихле для $\zeta^2(1 + \varepsilon - it)$ сходится равномерно на отрезке интегрирования, поэтому его можно проинтегрировать почленно, что приводит к равенству

$$j = \frac{1}{\pi} \frac{x^{-\varepsilon}}{(2\pi)^{1+2\varepsilon}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau(n)}{n^{1+\varepsilon}} \operatorname{Re} j(n) + O(T^{2\varepsilon}),$$

где

$$j(n) = \int_{2\pi}^T t^{2\varepsilon} e^{it \ln(\frac{1}{nx}(\frac{t}{2\pi e})^2)} dt.$$

Мы изменили знак показателя мнимой экспоненты, так как он не влияет на вещественную часть.

Теперь найдем асимптотическую формулу для величины $j(n)$. Введем обозначение

$$f(t) = \frac{t}{2\pi} \ln\left(\frac{1}{nx} \left(\frac{t}{2\pi e}\right)^2\right).$$

Тогда

$$f'(t) = \frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{1}{nx} \left(\frac{t}{2\pi} \right)^2 \right) = \frac{1}{\pi} \ln \frac{t}{t_1},$$

где $t_1 = 2\pi\sqrt{nx}$. Очевидно, $f'(t_1) = 0$. Пусть

$$n_1 = \frac{1}{x} \left(\frac{T}{2\pi} \right)^2,$$

причем T , напомним, таково, что n_1 равно половине нечетного числа. Пусть вначале $t_1 > T$, то есть $n > n_1$. Тогда, интегрируя по частям, найдем

$$\begin{aligned} j(n) &= \int_{2\pi}^T \frac{t^{2\varepsilon}}{2\pi i f'(t)} de^{2\pi i f(t)} \\ &= \frac{t^{2\varepsilon}}{2\pi i f'(t)} e^{2\pi i f(t)} \Big|_{2\pi}^T - \int_{2\pi}^T e^{2\pi i f(t)} d \frac{t^{2\varepsilon}}{2\pi i f'(t)}. \end{aligned}$$

Но функция $-t^{2\varepsilon}(f'(t))^{-1}$ положительна и монотонно возрастает на отрезке интегрирования, поэтому, оценивая правую часть тривиально, получим

$$j(n) \ll \frac{T^{2\varepsilon}}{|f'(T)|} \ll \frac{T^{2\varepsilon}}{\ln \frac{n}{n_1}},$$

ибо

$$f'(T) = \frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{1}{nx} \left(\frac{T}{2\pi} \right)^2 \right) = -\frac{1}{2\pi} \ln \frac{n}{n_1}.$$

Таким образом, в силу полужелости n_1 , имеем

$$\begin{aligned} \sum_{n > n_1} \frac{\tau(n)}{n^{1+\varepsilon}} \operatorname{Re} j(n) &\ll T^{2\varepsilon} \sum_{n > n_1} \frac{1}{n^{1+\frac{\varepsilon}{2}}} \frac{1}{\ln \frac{n}{n_1}} \\ &\ll T^{2\varepsilon} \sum_{n > \frac{3}{2}n_1} \frac{1}{n^{1+\frac{\varepsilon}{2}}} + \frac{T^{2\varepsilon}}{n_1^{1+\frac{\varepsilon}{2}}} \sum_{n_1 < n \leq \frac{3}{2}n_1} \frac{n_1}{n - n_1} \\ &\ll T^{2\varepsilon} n_1^{-\frac{\varepsilon}{2}} + T^{2\varepsilon} n_1^{-\frac{\varepsilon}{2}} \sum_{0 \leq k \leq \frac{n_1}{2}} \frac{1}{k + \frac{1}{2}} \\ &\ll T^{2\varepsilon} n_1^{-\frac{\varepsilon}{2}} \ln n_1 \ll T^{2\varepsilon}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$j = \frac{1}{\pi} \frac{x^{-\varepsilon}}{(2\pi)^{1+2\varepsilon}} \sum_{n < n_1} \frac{\tau(n)}{n^{1+\varepsilon}} \operatorname{Re} j(n) + O(T^{2\varepsilon}).$$

Пусть теперь $n < n_1$, то есть $t_1 < T$. Введем обозначения $a = 0.9t_1$, $b = \min(1.1t_1, T)$. Аналогично предыдущему имеем

$$\int_{2\pi}^a \frac{t^{2\varepsilon}}{2\pi i f'(t)} de^{2\pi i f(t)} \ll \frac{a^{2\varepsilon}}{|f'(a)|} \ll t_1^{2\varepsilon} \ll n^\varepsilon x^\varepsilon.$$

Функция $t^{2\varepsilon}(f'(t))^{-1}$ положительна на отрезке $[b, T]$ и либо монотонна на этом отрезке, либо имеет на нем два участка монотонности, разделенных точкой минимума. В обоих случаях интегрирование по частям приводит к оценке

$$\int_b^T \frac{t^{2\varepsilon}}{2\pi i f'(t)} de^{2\pi i f(t)} \ll \frac{T^{2\varepsilon}}{|f'(T)|} + \frac{b^{2\varepsilon}}{|f'(b)|} \ll n^\varepsilon x^\varepsilon + \frac{T^{2\varepsilon}}{\ln \frac{n_1}{n}}.$$

Отсюда

$$j = \frac{1}{\pi} \frac{x^{-\varepsilon}}{(2\pi)^{1+2\varepsilon}} \sum_{n < n_1} \frac{\tau(n)}{n^{1+\varepsilon}} \operatorname{Re} \int_a^b t^{2\varepsilon} e^{2\pi i f(t)} dt + R + O(T^{2\varepsilon}),$$

где

$$\begin{aligned} R &\ll \sum_{n < n_1} \frac{\tau(n)}{n} + T^{2\varepsilon} \sum_{n < n_1} \frac{\tau(n)}{n^{1+\varepsilon}} \frac{1}{\ln \frac{n_1}{n}} \\ &\ll n_1^\varepsilon \ln n_1 + T^{2\varepsilon} \sum_{n < \frac{n_1}{2}} \frac{\tau(n)}{n^{1+\varepsilon}} + T^{2\varepsilon} n_1^{-\frac{\varepsilon}{2}} \sum_{0 \leq k \leq \frac{n_1}{2}} \frac{1}{k + \frac{1}{2}} \ll T^{2\varepsilon}. \end{aligned}$$

Наконец, применим к интегралу от a до b теорему 20, полагая $\varphi(t) = t^{2\varepsilon}$, $A = U = t_1$ и $H = t_1^{2\varepsilon}$. Это приводит к равенству

$$\int_a^b t^{2\varepsilon} e^{2\pi i f(t)} dt = t_1^{2\varepsilon} \sqrt{\pi t_1} e^{-2it_1 + i\frac{\pi}{4}} + O(t_1^{2\varepsilon}).$$

Отделяя вещественную часть, подставляя в вышеприведенную формулу и пользуясь явным выражением для t_1 , получим

$$j = \frac{x^{\frac{1}{4}}}{\pi \sqrt{2}} \sum_{n \leq \frac{1}{x} \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2} \frac{\tau(n)}{n^{\frac{3}{4}}} \cos\left(4\pi \sqrt{nx} - \frac{\pi}{4}\right) + O(T^{2\varepsilon}).$$

Этим доказательство завершается. ■

СЛЕДСТВИЕ. *Имеет место формула*

$$\sum_{n \leq x} \tau(n) = x \ln x + (2C - 1)x + O(x^{\frac{1}{3} + \varepsilon}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оценивая выражение для остаточного члена тривиально, при $T \geq 100\sqrt{x}$ получим

$$\begin{aligned} R(x) &\ll x^{\frac{1}{4}} \sum_{n \leq \frac{1}{x} \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2} \frac{\tau(n)}{n^{\frac{3}{4}}} + \frac{x^{1+\varepsilon}}{T} \\ &\ll x^{\frac{1}{4} + \varepsilon} \int_1^{T^2 x^{-1}} \frac{du}{u^{\frac{3}{4}}} + \frac{x^{1+\varepsilon}}{T} \ll x^\varepsilon \sqrt{T} + \frac{x^{1+\varepsilon}}{T}. \end{aligned}$$

Выбирая $T = x^{\frac{2}{3}}$, получаем требуемое. ■

Научное издание

Лекционные курсы НОЦ

Выпуск 2

Марис Евгеньевич Чанга

Метод комплексного интегрирования

Компьютерная верстка: *А. М. Малокостов*

Сдано в набор 01.02.2006. Подписано в печать 26.04.2006.

Формат 60×90/16. Усл. печ. л. 3,625. Тираж 200 экз.

Отпечатано в Математическом институте им. В. А. Стеклова РАН

Москва, 119991, ул. Губкина, 8.

<http://www.mi.ras.ru/noc/>

e-mail: pavlov@mi.ras.ru