

Независимый московский  
университет

Московский центр непрерывного  
математического образования

Высший колледж математики

**А. Г. Хованский**

**Комплексный анализ**

МЦНМО, ВКМ НМУ 2004

*Аскольд Георгиевич Хованский*

**А. Г. Хованский**

Комплексный анализ. — М: МЦНМО: ВКМ НМУ, 2004. — 48 с.

## Предисловие

Этот семестровый курс читался в НМУ весной 2003 года и предназначался второкурсникам. Уровень подготовки слушателей был разным. Раз в неделю была двухчасовая лекция, за которой следовал двухчасовой семинар (имеются в виду академические часы). На лекциях, с одной стороны, обсуждалась общая картина и связи комплексного анализа с другими областями математики. С другой стороны, основные теоремы разбивались на короткие, понятные сами по себе утверждения, которые объяснялись шаг за шагом. После лекции эти утверждения включались в списки задач, которые раздавались слушателям и обсуждались на семинарах. Семинары вели В. А. Кисунько, И. А. Пушкарь и С. П. Чулков. Они отдельно обсуждали с каждым студентом каждую решенную им задачу.

Экзамен состоял из теоретического зачета и письменной домашней контрольной. Зачет шел в течение всего семестра: студенты сдавали решенные ими задачи на каждом семинаре и в течение нескольких дополнительных занятий в конце курса. Задачи для письменного экзамена — рассчитанной на одну неделю домашней письменной работы — мы, в основном, заимствовали из предыдущих письменных экзаменов по комплексному анализу в НМУ.

Здесь приводятся в слегка отредактированном виде задачи, которые мы обсуждали в течение семестра и которые составляли значительную часть курса. Пункты 15, 16 и 18 написаны чуть позже и в семестре не разбирались.

**О содержании курса.** Первые четыре пункта посвящены теореме Коши и теореме Стокса. Теорема Коши опирается на теорему Стокса, имеющую и другие многочисленные применения в теории аналитических функций. Традиционно теорема Коши доказывается в довольно слабых предположениях, в которых классическая теорема Стокса неприменима. В пунктах 1–3 мы напоминаем теорему Стокса и доказываем ее в довольно слабых предположениях. Теорема Коши — прямое следствие этой обобщенной теоремы Стокса и простой линейной алгебры, описывающей дифференциалы аналитических отображений (см. п. 4).

Для доказательства интегральной формулы Коши, кроме теоремы Коши, нужно исследовать форму  $\frac{dz}{z}$  и ее неопределенный интеграл. Этот интеграл интересен сам по себе: он представляет собой многозначную функцию  $\ln z$ , а его обращение является однозначной функцией  $\exp z$  (см. п. 5).

В пункте 6 обсуждаются локальные свойства аналитических функций.

Конформные отображения сферы Римана в себя являются преобразованием Мёбиуса. Преобразования Мёбиуса определены не только на плоскости, но и в пространстве  $\mathbb{R}^n$ . Всякое преобразование Мёбиуса — произведение инверсий. Элементарной геометрии инверсий посвящен пункт 7. В пункте 8 эта геометрия применяется для определения сферы Римана. Там же показывается, что всякая мероморфная функция на сфере Римана является рациональной функцией.

В пункте 9 обсуждаются вычеты, принцип аргумента и основная теорема алгебры.

В пункте 10 дается представление о модели Пуанкаре пространства Лобачевского и описываются геодезические в этой модели. Это описание использует элементарную геометрию инверсий из пункта 7. Обсуждается связь геометрии Лобачевского и ТФКП, которая, в частности, приводит к инвариантной формулировке неравенства Шварца (см. задачу 10.6). Эта формулировка неравенства Шварца делает очевидным экстремальное свойство конформного отображения, фигурирующего в теореме Римана (см. задачу 10.8). В пункте 11 обсуждается критерий компактности семейства аналитических функций, который нужен для завершения доказательства теоремы Римана (см. задачу 10.17).

В пункте 12 доказывается продолжаемость отображения Римана до границы области. Доказательство основано на принципе длин и площадей и без труда переносится на случай квазиконформных отображений.

В пункте 13 определяются римановы поверхности аналитических функций. Показывается, что если риманова поверхность функции компактна, то функция алгебраическая.

В пункте 14 доказывается принцип симметрии Римана–Шварца и теорема Пикара.

Дополнение 1 посвящено гармоническим функциям и их связям с комплексным анализом. Теория гармонических функций многих переменных напоминает теорию аналитических функций (см. п. 15). Используя обобщенную формулу Стокса, можно чуть ослабить требования гладкости в определении гармонической функции в том же духе, как Гурса ослабил требования гладкости в определении аналитической функции. Гармонические функции играют большую роль в математической физике.

Аналитические функции важны для приложений, в частности, потому, что их теория сильно связана с теорией гармонических функций двух переменных. В пункте 16 обсуждается связь этих теорий и приме-

нения аналитических функций к теории гармонических функций двух переменных.

В пункте 17 гармонические и субгармонические функции двух переменных применяются к теории аналитических функций. Здесь доказывается следующая теорема единственности. *Если аналитическая функция в области  $G$  при стремлении к каждой точке некоторой дуги, лежащей на границе области, стремится к одной и той же константе, то эта функция постоянна* (см. задачи 16.10 и 16.11). Эта теорема единственности — центральный пункт доказательства из учебника Евграфова продолжаемости конформного отображения Римана до границы области. В процессе подготовки лекции выяснилось, что это доказательство ошибочно (см. задачу 12.13), и продолжаемость до границы пришлось доказывать по-другому (см. п. 12). Тем не менее, теорема единственности интересна и сама по себе. К тому же ее доказательство использует замечательную формулу Йенсена и свойства гармонических и субгармонических функций, также представляющих самостоятельный интерес.

В дополнении 2 приводится стандартный материал о сведении глобального варианта теоремы Стокса к ее локальному варианту, используя разбиение единицы (глобальный вариант теоремы Стокса использовался в курсе без доказательства).

Ниже следует более подробное введение к пунктам 1–4, 15 и 18, благодарности и посвящение.

**Об обобщенной формуле Стокса и теореме Коши.** Двумерная (плоская) формула Стокса утверждает, что для ограниченной области  $U$  на плоскости и формы  $\omega = P(x, y) dx + Q(x, y) dy$  справедливо равенство

$$\int_{\partial U} \omega = \int_U d\omega,$$

где  $\partial U$  — проходимая «в направлении против часовой стрелки» граница области  $U$  и  $d\omega = \left(-\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial x}\right) dx dy$ . Для справедливости формулы Стокса нужно требовать некоторую гладкость формы  $\omega$  и границы  $\partial U$ . Можно, например, требовать, чтобы функции  $P$  и  $Q$  принадлежали классу  $C^1$  в замыкании области  $U$  и чтобы граница  $\partial U$  была бы  $C^1$ -гладкой (или кусочно гладкой). Именно такие требования гладкости накладываются в классическом варианте формулы Стокса.

Гурса придал законченную форму определению аналитической функции: он показал, что для аналитичности комплекснозначных функций комплексного переменного достаточно требовать лишь существования первой производной в каждой точке области. Он использовал

найденную им форму теоремы Коши с немного меньшими требованиями гладкости формы, чем обычно. С тех пор теорема Коши традиционно входит во все курсы комплексного анализа именно в этой форме. Для доказательства теоремы Коши в форме Гурса классического варианта теоремы Стокса недостаточно. Мы показываем, что формула Стокса верна, если

- 1) функции  $P$  и  $Q$  в каждой точке имеют дифференциалы;
- 2) функция  $-\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial x}$  непрерывна.

Наше доказательство, фактически, совпадает с рассуждением Гурса (из него лишь изгоняется специфика комплексного анализа).

Формулировка и доказательство подобного обобщения теоремы Стокса автоматически переносятся на случай  $k$ -форм на  $n$ -мерных многообразиях. Нам понадобится (при рассмотрении гармонических функций многих переменных) лишь следующий многомерный вариант этого утверждения.

**Обобщенный вариант формулы Стокса.** Пусть  $U$  — компактная область с гладкой границей  $\partial U$  в пространстве  $\mathbb{R}^n$ , пусть  $\omega = P_1 dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n - P_2 dx_1 \wedge dx_3 \wedge \dots \wedge dx_n + \dots + (-1)^{n+1} P_n dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{n-1}$  —  $(n-1)$ -форма, коэффициенты  $P_i$  которой имеют дифференциалы в замыкании области  $U$  и функция  $F = \frac{\partial P_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial P_n}{\partial x_n}$  непрерывна в замыкании этой области. Тогда справедлива формула Стокса

$$\int_{\partial U} \omega = \int_U d\omega, \quad (1)$$

где  $d\omega = F dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ .

В классическом варианте формулы Стокса для областей в  $\mathbb{R}^n$  дополнительно предполагается, что функции  $P_1, \dots, P_n$  принадлежат классу  $C^1$  в замыкании области  $U$ .

Обычное доказательство классического варианта формулы Стокса не проходит для доказательства обобщенного варианта этой формулы. Приведем хорошо известный пример аналогичной ситуации.

**Пример** (теорема Лагранжа). Для функции  $f$  на отрезке  $[a, b]$  существует точка  $\xi$  такая, что  $f(b) = f(a) + f'(\xi)(b - a)$ .

Для справедливости теоремы Лагранжа нужно требовать некоторую гладкость функции  $f$ . Конечно, можно требовать, чтобы функция  $f$  принадлежала классу  $C^1$  на  $[a, b]$ . Но достаточно требовать, чтобы функция  $f$  была бы непрерывна на отрезке  $[a, b]$  и имела дифференциал в каждой внутренней точке этого отрезка. Если  $f'$  непрерывна, то, согласно формуле Ньютона–Лейбница,  $f(b) = f(a) + \int_a^b f'(t) dt$ . По тео-

реме о среднем существует точка  $\xi$  такая, что  $\int_a^b f'(t) dt = f'(\xi)(b-a)$ , откуда и вытекает теорема Лагранжа. Если же функция  $f'$  не непрерывна, то она может оказаться и неинтегрируемой, и это рассуждение не проходит. Здесь выручает такое соображение. Легко видеть, что существует касательная к графику функции  $y = f(x)$ , параллельная хорде, проходящей через точки  $(a, f(a))$  и  $(b, f(b))$ . Тогда  $f(b) = f(a) + f'(\xi)(b-a)$ , где  $\xi$  — абсцисса точки касания.

Доказательство обобщенного варианта формулы Стокса соотносится с доказательством классического варианта этой формулы так же, как второе из приведенных доказательств теоремы Лагранжа соотносится с первым доказательством.

В курсе мы обсуждали лишь локальную формулу Стокса, т.е. формулу Стокса для стандартного квадрата на плоскости и для стандартного куба в многомерном пространстве. Формула Стокса для компактных областей с гладкой границей сводится к ее локальному варианту при помощи разбиения единицы (см. дополнение 2).

**Благодарности.** Моя жена Т. В. Белокриницкая набирала и редактировала все списки задач и все варианты этой брошюры. В. А. Кисунько, И. А. Пушкарь и С. П. Чулков весь семестр вели семинарские занятия. Они вложили в этот курс много труда. Слушатели активно решали задачи и обнаружили много неточностей и опечаток. Всем им я приношу свою благодарность.

**Посвящение.** Второго ноября 2003 года исполнилось 60 лет Юлию Сергеевичу Ильяшенко, с которым мы дружим без малого полвека. Эта брошюра посвящается Юлию Сергеевичу.

## 1. Теорема Лагранжа для функций множеств

Пусть  $A$  — некоторый класс подмножеств пространства  $\mathbb{R}^n$ . Мы всегда будем считать, что для всех множеств из класса  $A$  определено понятие объема. Мы будем обозначать через  $V(X)$  объем множества  $X$ .

Для дальнейшего важен следующий пример:  $A$  состоит из кубов пространства  $\mathbb{R}^n$ , грани которых параллельны координатным гиперплоскостям и которые лежат внутри стандартного единичного куба  $0 \leq x_1 \leq 1, \dots, 0 \leq x_n \leq 1$  (особенно важен случай  $n = 2$ ). Можно считать, что  $A$  — класс подмножеств из этого примера.

Разбиением множества  $\Delta \in A$  такого, что  $V(\Delta) \neq 0$ , называется его представление в виде  $\Delta = \bigcup_{i=1}^m \Delta_i$ , где

- 1)  $\Delta_i \in A, i = 1, \dots, m$ ;

- 2)  $V(\Delta_i) \neq 0, i = 1, \dots, m;$
- 3)  $V(\Delta_i \cap \Delta_j) = 0, 1 \leq i < j \leq m.$

Скажем, что класс множеств  $A$  является *классом с разбиениями*, если для каждого множества  $\Delta \in A$  такого, что  $V(\Delta) \neq 0$ , существует его разбиение  $\Delta = \bigcup \Delta_i$ , для которого диаметр каждого множества  $\Delta_i$  не больше чем половина диаметра множества  $\Delta$ .

Класс кубов в пространстве  $\mathbb{R}^n$  (см. выше) очевидно является классом множеств с разбиениями.

Рассмотрим некоторую функцию  $F: A \rightarrow \mathbb{R}^p$ , сопоставляющую каждому множеству  $X$  из некоторого класса с разбиением  $A$  вектор  $F(X)$  пространства  $\mathbb{R}^p$ .

Скажем, что функция  $F$  является *функцией типа меры*, если для каждого множества  $\Delta$  и каждого его разбиения  $\Delta = \bigcup \Delta_i$ , где  $\Delta, \Delta_i \in A$ , справедливо равенство  $F(\Delta) = \sum F(\Delta_i)$ .

**Задача 1.1.** Пусть  $\Delta = \bigcup_{i=1}^m \Delta_i$  — разбиение множества  $\Delta$ , и  $V(\Delta) \neq 0$ . Пусть выполняется равенство  $F(\Delta) = \sum F(\Delta_i)$ . Тогда

- 1) точка  $\frac{1}{V(\Delta)} F(\Delta)$  пространства  $\mathbb{R}^p$  лежит внутри выпуклой оболочки точек  $\frac{1}{V(\Delta_i)} F(\Delta_i)$  этого пространства;
- 2) если в пространстве  $\mathbb{R}^p$  есть скалярное произведение (или норма), то среди векторов  $\frac{1}{V(\Delta_i)} F(\Delta_i)$  существует хотя бы один вектор, имеющий не меньшую длину, чем вектор  $\frac{1}{V(\Delta)} F(\Delta)$ .

**Задача 1.2.** Пусть функция  $F: A \rightarrow \mathbb{R}^p$  является функцией типа меры. Тогда для каждого  $\Delta \in A$  такого, что  $V(\Delta) \neq 0$ , существует последовательность вложенных множеств  $\Delta \supset \Delta_1 \supset \dots \supset \Delta_m \supset \dots$  таких, что 1)  $\Delta_i \in A$ ; 2)  $V(\Delta_i) > 0$ ; 3) диаметр  $\Delta_m \leq \frac{1}{2^m}$  (диаметр  $\Delta$ ); 4) существует (конечный или бесконечный) предел  $\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{F(\Delta_i)}{V(\Delta_i)}$ ; 5)  $\lim_{i \rightarrow \infty} \left\| \frac{F(\Delta_i)}{V(\Delta_i)} \right\| \geq \left\| \frac{F(\Delta)}{V(\Delta)} \right\|$ . Здесь  $\|a\|$  обозначает длину вектора  $a$  в пространстве  $\mathbb{R}^p$ .

**Определение 1.** Скажем, что последовательность множеств  $\Delta_1, \dots, \Delta_m, \dots$  *сходится к точке  $a$*  (обозначение:  $\lim_{i \rightarrow \infty} \Delta_i = a$ ), если для любого  $\varepsilon > 0$  существует номер  $N$  такой, что все множества  $\Delta_i$  при  $i > N$  лежат в  $\varepsilon$ -окрестности точки  $a$ .

**Определение 2.** Пусть  $F: A \rightarrow \mathbb{R}^p$  — функция типа меры. Скажем, что  $F$  *имеет производную  $F'_A(a) \in \mathbb{R}^p$  по  $A$  в точке  $a$* , если для любой такой последовательности множеств  $\Delta_1 \supset \dots \supset \Delta_m \supset \dots$  из  $A$ , что

$V(\Delta_i) \neq 0$  и  $\lim_{i \rightarrow \infty} \Delta_i = a$ , справедливо равенство

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{F(\Delta_i)}{V(\Delta_i)} = F'_A(a).$$

**Задача 1.3.** Пусть  $A$  — класс множеств области  $U$  пространства  $\mathbb{R}^n$ , для которых определено понятие объема. Пусть  $f$  — непрерывная функция на  $A$  со значениями в пространстве  $\mathbb{R}^p$ . Рассмотрим функцию  $F$  на  $A$ , сопоставляющую каждому  $\Delta \in A$  вектор  $F(\Delta) = \int_{\Delta} f(x) dx_1 \dots dx_n$ . Тогда

- 1)  $F$  является функцией типа меры;
- 2) в каждой точке  $a \in U$  существует  $F'_A(a)$ , причем  $F'_A(a) = f(a)$ .

**Задача 1.4.** 1) («Теорема Лагранжа».) Пусть функция  $F: A \rightarrow \mathbb{R}^p$  является функцией типа меры и имеет производную по  $A$  в каждой точке  $a$ , причем  $F'_A(a) = 0$ . Тогда для каждого  $\Delta \in A$  справедливо равенство  $F(\Delta) = 0$ .

2) Пусть функции типа меры  $F: A \rightarrow \mathbb{R}^p$  и  $G: A \rightarrow \mathbb{R}^p$  имеют производные по  $A$  в каждой точке  $a$ , причем  $F'_A(a) \equiv G'_A(a)$ . Тогда функции  $F$  и  $G$  совпадают, т. е. для каждого множества  $\Delta \in A$  справедливо равенство  $F(\Delta) = G(\Delta)$ .

3) («Формула Ньютона–Лейбница».) Если  $F'_A$  — непрерывная функция, то

$$F(\Delta) = \int_{\Delta} F'_A dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n.$$

**Задача 1.5.** Пусть  $A$  — класс отрезков на прямой, лежащих внутри фиксированного отрезка  $[a, b]$ , и пусть  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^p$  — произвольная функция. Определим функцию  $F: A \rightarrow \mathbb{R}$  формулой  $F([c, d]) = f(d) - f(c)$ . Показать, что

- 1) функция  $F$  является функцией типа меры;
- 2) существование производной  $F'_A(a)$  эквивалентно дифференцируемости функции  $f$  в точке  $a$ , причем  $F'_A(a) = f'(a)$ ;
- 3) если функция  $f$  дифференцируема в каждой точке отрезка  $[a, b]$ , причем  $f' \equiv 0$ , то  $f(a) = f(b)$  (см. задачу 1.4, п. 1);
- 4) если функция  $f$  дифференцируема в каждой точке отрезка и  $f'$  непрерывна на отрезке, то  $f(b) - f(a) = \int_a^b f'(\xi) d\xi$  (см. задачу 1.4, п. 3).

## 2. Формула Стокса для линейных форм в единичном кубе

Начнем с двумерного случая. Обозначим через  $\Delta$  стандартный квадрат  $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$  на плоскости.

**Задача 2.1.** Пусть функция  $Q: \Delta \rightarrow \mathbb{R}^p$  обладает следующими свойствами. Во-первых, функции  $Q_0$  и  $Q_1$  от переменной  $y$ , определенные при  $0 \leq y \leq 1$  соотношениями  $Q_0(y) = Q(0, y)$ ,  $Q_1(y) = Q(1, y)$ , являются интегрируемыми функциями. Во-вторых, выполняется тождество  $Q_1 - Q_0 \equiv C$ , где  $C$  — постоянный вектор. Тогда  $\int_{\partial\Delta} Q \, dy = C$ . Аналогично, если функции  $P_0$  и  $P_1$ , определенные при  $0 \leq x \leq 1$  соотношениями  $P_0(x) = P(x, 0)$  и  $P_1(x) = P(x, 1)$ , интегрируемы и  $P_1 - P_0 = C$ , то  $\int_{\partial\Delta} P \, dx = -C$ .

**Задача 2.2.** Для любых постоянных векторов  $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3$  пространства  $\mathbb{R}^p$  справедливо равенство

$$\int_{\partial\Delta} (A_1 + A_2x + A_3y) \, dx + (B_1 + B_2x + B_3y) \, dy = (B_2 - A_3).$$

**Задача 2.3.** Пусть  $P$  и  $Q$  — непрерывные функции в области  $\Delta$  на плоскости со значениями в  $\mathbb{R}^p$ , причем  $\|P\| < M$  и  $\|Q\| < M$ . Тогда для всякого контура  $\gamma$  на плоскости, длина которого равна  $L$ , справедлива оценка

$$\left\| \int_{\gamma} P(x, y) \, dx + Q(x, y) \, dy \right\| \leq 2ML.$$

Перейдем к многомерной ситуации. Обозначим через  $\Delta$  стандартный куб  $0 \leq x_1 \leq 1, \dots, 0 \leq x_n \leq 1$  в пространстве  $\mathbb{R}^n$ .

**Задача 2.4.** Пусть  $\omega = P_1 \, dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n - P_2 \, dx_1 \wedge dx_3 \wedge \dots \wedge dx_n + \dots + (-1)^{n+1} P_n \, dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n$ , где  $P_i$  — линейные неоднородные функции, т. е.  $P_i = A_i + A_{i,1}x_1 + \dots + A_{i,n}x_n$ , где  $A_i$  и  $A_{i,j}$  — постоянные векторы в пространстве  $\mathbb{R}^p$ . Тогда  $\int_{\partial\Delta} \omega = \int_{\Delta} d\omega$ , т. е.  $\int_{\partial\Delta} \omega = A_{1,1} + \dots + A_{n,n}$ .

Следующие две задачи в дальнейшем не понадобятся.

**Задача 2.5.** Пусть  $P_1$  — функция класса  $C^1$  на  $\Delta$ . Тогда для куба  $\Delta$  и формы  $\omega = P_1 \, dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n$  справедлива формула Стокса, т. е.

$$\int_{\partial\Delta} P_1 \, dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n = \int_{\Delta} \frac{\partial P_1}{\partial x_1} \, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n.$$

*Указание.* Проинтегрировать функцию  $\frac{\partial P_1}{\partial x_1}$  по переменной  $x_1$  и воспользоваться формулой Ньютона–Лейбница.

**Замечание.** При доказательстве обобщенной формулы Стокса мы не используем формулы Ньютона–Лейбница, но доказываем ее многомерное обобщение (ср. задачу 1.4, п. 3).

**Задача 2.6.** Доказать формулу Стокса в кубе  $\Delta$  для формы  $\omega$  с коэффициентами класса  $C^1$ . Почему это доказательство не проходит для доказательства обобщенной формулы Стокса в кубе  $\Delta$ ?

### 3. Обобщенная формула Стокса в единичном кубе

**Задача 3.1.** Пусть  $A$  — класс квадратов на плоскости, лежащих внутри стандартного единичного квадрата  $\Delta$ , стороны которых параллельны координатным осям. Пусть  $P$  и  $Q$  — непрерывные функции на квадрате  $\Delta$  со значениями в  $\mathbb{R}^p$ . Рассмотрим функцию на  $A$ , сопоставляющую каждому квадрату  $\Delta_0 \in A$  вектор  $F(\Delta_0)$ , равный  $\int_{\partial\Delta_0} P dx + Q dy$ . Тогда

1) функция  $F: A \rightarrow \mathbb{R}^p$  является функцией типа меры;

2) если функции  $P$  и  $Q$  имеют дифференциал в точке  $a$ , то функция  $F$  дифференцируема по  $A$  в точке  $a$ , причем  $F'_A(a) = -\frac{\partial P}{\partial y}(a) + \frac{\partial Q}{\partial x}(a)$ .

*Указание.* См. задачи 2.2 и 2.3.

**Задача 3.2** (обобщенная формула Стокса для квадрата). Пусть 1) функции  $P$  и  $Q$ , принимающие значения в  $\mathbb{R}^p$ , непрерывны в квадрате  $\Delta$ , 2) в каждой точке квадрата  $\Delta$  каждая из этих функций имеет дифференциал, 3) функция  $-\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial x}$  непрерывна в  $\Delta$ . Тогда  $\int_{\partial\Delta} P dx + Q dy = \int_{\Delta} \left(-\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial x}\right) dx \wedge dy$ . В частности, если  $-\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial x} \equiv 0$ , то  $\int_{\partial\Delta} P dx + Q dy = 0$ .

*Указание.* См. задачу 3.1 и п. 3 в задаче 1.4.

**Задача 3.3** (обобщенная формула Стокса для куба). Пусть  $\omega = P_1 dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n - P_2 dx_1 \wedge dx_3 \wedge \dots \wedge dx_n + \dots + (-1)^{n+1} P_n dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{n-1}$ , где  $P_i$  — непрерывные функции в кубе  $\Delta$  пространства  $\mathbb{R}^n$ . Пусть функции  $P_1, \dots, P_n$  имеют дифференциалы в каждой точке куба  $\Delta$ , причем функция  $F = \frac{\partial P_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial P_n}{\partial x_n}$  непрерывна в  $\Delta$ . Тогда  $\int_{\partial\Delta} \omega = \int_{\Delta} F dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ .

Ниже мы используем обобщенную формулу Стокса не только для кубов, но и для компактных областей пространства  $\mathbb{R}^n$ , имеющих гладкую границу (в основном, нам важен случай  $n = 2$ ). Переход от куба к области с гладкой границей совершенно стандартен и делается при помощи разбиения единицы. Для полноты картины мы приводим это рассуждение в пункте 18 (дополнение 2).

Напомним формулу Стокса для 1-форм на гладких кривых.

**Задача 3.4.** Пусть  $\omega = P_1 dx_1 + \dots + P_n dx_n$ , где  $P_1, \dots, P_n$  — непрерывные функции в области  $U$  пространства  $\mathbb{R}^n$  со значениями в пространстве  $\mathbb{R}^p$ . Допустим, что для любого замкнутого пути  $\gamma$  в области  $U$  справедливо равенство  $\int_{\gamma} \omega = 0$ . Фиксируем точку  $x_0 \in U$ . Определим функцию  $F$  в области  $U$  следующим равенством:  $F(a) = \int_{\gamma} \omega$ , где

$\gamma$  — любая кривая в области  $U$ , начинающаяся в точке  $x_0$  и заканчивающаяся в точке  $a$ . Доказать, что

- 1) функция  $F$  определена корректно, т. е. не зависит от выбора  $\gamma$ ;
- 2) функция  $F$  в каждой точке имеет дифференциал  $dF$  и выполнено равенство

$$dF = P_1 dx_1 + \dots + P_n dx_n.$$

**Задача 3.5.** Пусть  $F$  — функция в области  $U$  со значениями в пространстве  $\mathbb{R}^p$ , имеющая непрерывные частные производные  $P_1, \dots, P_n$ , и  $dF = P_1 dx_1 + \dots + P_n dx_n$ . Тогда  $\int_\gamma P_1 dx_1 + \dots + P_n dx_n = F(b) - F(a)$ , где  $b$  и  $a$  — конец и начало кривой  $\gamma \in U$ .

#### 4. Линейная алгебра и теорема Коши

В этом пункте мы будем отождествлять плоскость  $\mathbb{R}^2$  с комплексной плоскостью (синоним: «комплексная прямая»), сопоставляя точке  $(x, y)$  комплексное число  $z = x + iy$ . Рассмотрим вещественно линейное отображение  $A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  из вещественной плоскости в себя.

**Задача 4.1.** Отображение  $A(x, y) = P_1 x + P_2 y$ , где  $P_1, P_2 \in \mathbb{C}$ , единственным образом записывается в виде  $A(x, y) = Q_1 z + Q_2 \bar{z}$ . При этом  $Q_1 = \frac{1}{2}(P_1 - iP_2)$ ,  $Q_2 = \frac{1}{2}(P_1 + iP_2)$ . Определитель матрицы отображения  $A$  положителен, если  $|Q_1| > |Q_2|$ , отрицателен, если  $|Q_1| < |Q_2|$ , и равен нулю, если  $|Q_1| = |Q_2|$ . Если  $|Q_1| = |Q_2| \neq 0$ , то отображение  $A$  переводит в нуль прямую  $z = \lambda z_0$ , где  $\lambda \in \mathbb{R}$ , а  $z_0 = \sqrt{-\frac{Q_1}{Q_2}}$ .

**Обозначения.** Пусть  $U$  — область на плоскости и  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^2$  — дифференцируемое отображение (т. е. у отображения  $f$  в каждой точке существует дифференциал), и  $df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$  — его дифференциал. Имеем:  $df = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right) dz + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right) d\bar{z}$ . Число  $\frac{1}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right)$  обозначается  $\frac{\partial f}{\partial z}$ , а число  $\frac{1}{2} \left( \frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right)$  обозначается  $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$ . По определению  $df = \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z}$ .

*Производной*  $f'(a)$  комплекснозначной функции  $f$  в точке  $a \in \mathbb{C}$  называется число  $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(a+z) - f(a)}{z}$ .

**Задача 4.2.** 1) Если отображение  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^2$  имеет дифференциал в точке  $a$  и  $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(a) = 0$ , то, во-первых, дифференциал является поворотом (на некоторый угол  $\alpha$ ) с растяжением (в  $\lambda$  раз, где  $\lambda$  — некоторое

неотрицательное число), во-вторых, у комплекснозначной функции  $f$  существует производная  $f'(a)$ . При этом  $f'(a) = \frac{\partial f}{\partial z}(a)$ ,  $\arg f'(a) = \alpha$ ,  $|f'(a)| = \lambda$ .

2) Обратно, если производная существует, то отображение  $f$  имеет дифференциал в точке  $a$ . При этом, во-первых,  $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(a) = 0$  и  $\frac{\partial f}{\partial z}(a) = f'(a)$  и, во-вторых, дифференциал этого отображения — поворот (на угол  $\arg f'(a)$ ) с растяжением (в  $|f'(a)|$  раз).

Задача 4.2 доказывает эквивалентность следующих двух определений.

**Определение 1** (аналитическая функция по Гурса). Функция  $f$  называется *аналитической в области  $U$* , если в каждой точке области  $U$  у функции  $f$  существует комплексная производная.

**Определение 2.** Функция  $f$  называется *аналитической в области  $U$* , если в каждой точке области  $U$  отображение  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$  дифференцируемо, причем  $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \equiv 0$  (т.е. дифференциал отображения — поворот с растяжением).

**Задача 4.3.** Функция  $f$  аналитична в области  $U$ , если и только если у формы  $\omega = f(z) dz = f(z) dx + if(z) dy$  коэффициенты имеют первые дифференциалы и  $d\omega \equiv 0$ .

**Задача 4.4.** Функция  $f = u + iv$  аналитична в области  $U$ , если и только если функции  $u, v$  имеют первые дифференциалы в каждой точке области и выполняются соотношения Коши-Римана  $\frac{\partial u}{\partial x} \equiv \frac{\partial v}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial y} \equiv -\frac{\partial v}{\partial x}$ .

**Определение 3.** Функция  $f$  называется *аналитической вплоть до границы области  $U$* , если функция  $f$  определена и аналитична в некоторой большей области  $V$ , содержащей замыкание области  $U$ .

**Задача 4.5** (Теорема Коши). Для всякой функции  $f$ , аналитической вплоть до границы ограниченной области  $U$  с гладкой границей  $\partial U$ , справедливо тождество

$$\int_{\partial U} f dz = 0.$$

*Указание.* Воспользоваться задачей 4.3 и обобщенной формулой Стокса для областей с гладкой границей.

**Задача 4.6.** Пусть  $f(z)$  — аналитическая функция в односвязной области  $U$ . Проверить, что функция  $F(z) = \int_{z_0}^z f(z) dz$  определена корректно и аналитична. Здесь  $\int_{z_0}^z f(z) dz$  — это интеграл функции  $f$  по любой лежащей в области  $U$  гладкой кривой, начинающейся в точке  $z_0$  и заканчивающейся в точке  $z$ . Доказать, что  $F'(z) = f(z)$ .

*Указание.* Воспользоваться теоремой Коши и задачей 3.4.

## 5. Форма $\frac{dz}{z}$ и интегральная формула Коши

**Задача 5.1.** 1) Пусть  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $g: U \rightarrow \mathbb{C}$  — любые гладкие комплекснозначные функции на области  $U \subset \mathbb{R}^n$ . Тогда  $\frac{d(fg)}{fg} = \frac{df}{f} + \frac{dg}{g}$ .

2) Применить 1) к функциям  $f = |z|$  и  $g = \cos \varphi + i \sin \varphi$  и доказать соотношение  $\frac{dz}{z} = \frac{d|z|}{|z|} + i d\varphi$ , где  $\varphi = \arg z$ .

**Задача 5.2.** 1) Пусть область  $U$  на плоскости не охватывает точку 0 и содержит точку 1, и пусть  $\arg: U \rightarrow \mathbb{R}$  — однозначная ветвь аргумента на области  $U$  (для которой  $\arg 1 = 0$ ). Тогда

$$\int_1^z \frac{dz}{z} = \ln |z| + i \arg z \quad (\text{при } z \in U).$$

2) Интеграл  $\int_\gamma \frac{dz}{z}$  по контуру  $\gamma$ , один раз обходящему точку нуль (например, по границе  $\gamma = \partial U$  выпуклой области  $U$ , содержащей точку нуль), равен  $2\pi i$ .

Мы вернемся к интегралу  $\int_1^z \frac{dz}{z}$  в задачах 5.12–5.14. А сейчас перейдем к интегральной формуле Коши.

**Задача 5.3** (интегральная формула Коши). Пусть  $f$  — функция, аналитическая вплоть до границы ограниченной области  $U$ , имеющей гладкую границу  $\partial U$ . Тогда справедлива следующая интегральная формула Коши:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = f(z_0).$$

*Указание.* Представить область  $U$  в виде объединения малого замкнутого круга  $B$  с центром в точке  $z_0$  и области  $V = U \setminus B$ . Тогда

$$\int_{\partial U} \frac{f(z) dz}{z - z_0} = \int_{\partial V} \frac{f(z) dz}{z - z_0} + \int_{\partial B} \frac{f(z) dz}{z - z_0}.$$

Первый из этих интегралов вычисляется при помощи теоремы Коши. Второй интеграл мало отличается от интеграла  $\int_{\partial B} \frac{f(z_0) dz}{z - z_0}$ , который вычислен в задаче 5.2.

**Задача 5.4.** Пусть  $\Delta$  — комплексное число, причем  $|\Delta| < |z - z_0|$ . Тогда справедливо равенство

$$\frac{1}{z - z_0 - \Delta} = \left( 1 + \frac{\Delta}{z - z_0} + \dots + \frac{\Delta^n}{(z - z_0)^n} + \dots \right) \frac{1}{z - z_0} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Delta^n}{(z - z_0)^{n+1}},$$

причем ряд, стоящий в правой части равенства, сходится равномерно в каждой области  $|z - z_0| > |\Delta| + \varepsilon$  при  $\varepsilon > 0$ .

**Задача 5.5.** В условиях задачи 5.3 доказать равенство

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial U} \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^{n+1}}.$$

*Указание.* См. задачу 5.3.

**Задача 5.6.** Пусть, в условиях задачи 5.3,  $R$  — расстояние от точки  $z_0$  до границы области. Доказать, что при  $|\Delta| < R$  справедливо равенство

$$f(z_0 + \Delta) = f(z_0) + f'(z_0)\Delta + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)\Delta^n + \dots$$

Показать, что ряд сходится равномерно в области  $|\Delta| < R - \varepsilon$ , где  $\varepsilon$  — любое положительное число.

*Указание.* См. задачи 5.3 и 5.4.

**Задача 5.7.** Показать, что производная аналитической функции является аналитической функцией.

*Указание.* См. задачу 5.5.

**Задача 5.8** (теорема Морера). Пусть  $f(z)$  — непрерывная комплекснозначная функция в области  $U$ , причем интеграл формы  $f(z) dz$  по любому замкнутому контуру, лежащему в области  $U$ , равен нулю. Тогда функция  $f$  аналитична в области  $U$ .

*Указание.* См. задачи 3.4 и 5.7.

**Задача 5.9.** Пусть  $f$  — равномерный предел аналитических функций в области  $U$ . Тогда  $f$  — аналитическая функция в области  $U$ .

*Указание.* Воспользоваться теоремой Морера.

**Задача 5.10** (оценки производных с потерей области). Пусть функция  $f$  аналитична в области  $U$ ,  $L$  — длина границы области  $U$ , и  $M$  — максимум модуля функции  $f$  в  $\bar{U}$ . Тогда справедлива оценка  $\|f^{(k)}(z)\| \leq \frac{k! ML}{2\pi r(z)^{k+1}}$ , где  $r(z)$  — расстояние от точки  $z$  до границы области.

*Указание.* См. задачу 5.5.

**Задача 5.11** (теорема Лиувилля). Функция, аналитическая на всём  $\mathbb{C}$ , модуль которой ограничен, является константой.

*Указание.* См. задачу 5.10 для  $k = 1$ .

**Задача 5.12.** Многозначная аналитическая функция  $\ln z = \int_1^z \frac{dz}{z} = \ln |z| + i \arg z$  (функция  $\arg z$  определена с точностью до слагаемого  $2k\pi$ ) имеет однозначную обратную функцию: если  $\ln z = u = u_1 + iu_2$ , то  $z = e^{u_1}(\cos u_2 + i \sin u_2)$ . Эта функция называется *экспонентой*.

**Задача 5.13.** Из задачи 6.1 будет следовать, что функция  $y = \exp z$  аналитична (во всей комплексной плоскости). Проверить, что  $y' = y$  и что  $y^{(n)} = y$  для всех  $n$ . Ряд Тейлора  $\exp z$  сходится к  $\exp z$  во всей

комплексной области (см. задачу 5.6). Поэтому

$$\exp z = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots$$

**Задача 5.14.** Пусть  $\gamma: [0, 1] \rightarrow (\mathbb{C} \setminus 0)$  — кривая на комплексной плоскости, не проходящая через нуль. Рассмотрим новую кривую  $\gamma_1: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ , где  $\gamma_1 = a\gamma$ ,  $a \in \mathbb{C}$ ,  $a \neq 0$ . Доказать, что  $\int_{\gamma} \frac{dz}{z} = \int_{\gamma_1} \frac{dz}{z}$ .

**Задача 5.15.** Пусть  $\gamma_1: [0, 1] \rightarrow (\mathbb{C} \setminus 0)$  и  $\gamma_2: [0, 1] \rightarrow (\mathbb{C} \setminus 0)$  — пути на проколотой комплексной прямой, начинающиеся в точке 1 и кончающиеся в точках  $a$  и  $b$  соответственно,  $\partial\gamma_1 = a - 1$ ,  $\partial\gamma_2 = b - 1$ . Рассмотрим кривую  $\gamma$ , являющуюся объединением кривых  $\gamma_1$  и  $a\gamma_2$ . Кривая  $\gamma$  связна. Она начинается в точке 1 и заканчивается в точке  $ab$ . Проверить, что  $\int_{\gamma} \frac{dz}{z} = \int_{\gamma_1} \frac{dz}{z} + \int_{\gamma_2} \frac{dz}{z}$ , т. е. что для некоторых ветвей функции  $\ln z$  справедливы равенства  $\ln(ab) = \ln a + \ln b$ . Вывести отсюда равенство  $\exp(a+b) = \exp a \exp b$ .

## 6. Локальные свойства аналитических отображений

**Задача 6.1** (теорема об обратной функции). Пусть  $f$  — аналитическая функция в окрестности точки  $a$ , причем  $f'(a) \neq 0$ . Тогда  $f$  взаимно однозначно отображает окрестность точки  $a$  на окрестность точки  $f(a)$ , причем обратное отображение является аналитической функцией.

*Указание.* Воспользоваться теоремой об обратной функции для отображения  $f$ , рассматриваемого как гладкое отображение плоскости в плоскость.

**Задача 6.2.** Многозначная функция  $f(z) = z^{1/n}$  (определенная равенством  $(f(z))^n = z$ ) удовлетворяет следующим соотношениям:

- 1)  $z^{1/n} = |z|^{1/n} \left( \cos \frac{\varphi}{n} + i \sin \frac{\varphi}{n} \right)$ , где  $\varphi = \arg z + 2k\pi$ ;
- 2)  $z^{1/n} = \exp \left( \frac{1}{n} \ln z \right)$

**Задача 6.3.** 1) Пусть  $f'(z_0) = \dots = f^{(k-1)}(z_0) = 0$ , но  $f^{(k)}(z_0) \neq 0$ . Если  $\Delta$  достаточно мало, то  $f(z_0 + \Delta) = f(z_0) + \Delta^k \varphi(z_0 + \Delta)$ , где  $\varphi$  — аналитическая функция, причем  $\varphi(z_0) \neq 0$ .

2) Существует аналитическая функция  $g$  такая, что  $f(z_0) + (g(z))^k = f(z)$ , причем  $g'(z_0) \neq 0$  (область определения функции  $g$  может быть меньше, чем область определения функции  $f$ ).

3) Доказать, что если в условиях п. 1) аналитическая функция  $f$  непостоянна, то в окрестности точки  $z_0$  существует такая голоморфная замена переменной  $u = u(z)$ ,  $z = z(u)$ , что выполняется равенство  $f(z(u)) = u^k + f(z_0)$ . (Вопрос п. 3 — переформулировка вопроса п. 2.)

**Задача 6.4.** Пусть  $U$  — связная область на плоскости, и  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$  — непостоянная аналитическая функция. Тогда

- 1)  $f$  сохраняет области (т. е. образ  $f(U_1)$  каждого открытого множества  $U_1 \subset U$  является открытым множеством);
- 2) прообраз  $f^{-1}(a)$  каждого значения  $a$  состоит из изолированных точек.

**Задача 6.5.** Если непостоянная аналитическая в связной ограниченной области  $U$  функция  $f$  непрерывна вплоть до границы  $\partial U$ , то функция  $|f|$  достигает максимума на границе  $\partial U$  области  $U$ . Если  $f$  не обращается в нуль ни в какой точке  $z_0 \in U$ , то функция  $|f|$  достигает минимума на границе области.

*Указание.* См. задачу 6.4.

**Задача 6.6.** Используя задачу 6.5, доказать основную теорему алгебры: всякий полином положительной степени имеет корень.

## 7. Инверсия

*Инверсией* в пространстве  $\mathbb{R}^n$  относительно сферы радиуса  $R$  с центром в точке  $A$  называется преобразование, переводящее точку  $x$  в точку  $y$  такую, что

- 1) луч из точки  $A$ , проходящий через точку  $x$ , содержит точку  $y$ ;
- 2) произведение  $\rho(A, x) \cdot \rho(A, y)$ , где  $\rho(\cdot, \cdot)$  — расстояние между двумя точками, равно  $R^2$ .

Преобразование инверсии определено в любой точке  $x \in \mathbb{R}^n$ , отличной от  $A$ .

**Задача 7.1.** 1) Для всякой инверсии  $\tau$  справедливо равенство  $\tau \circ \tau = \text{id}$ , где  $\text{id}$  — тождественное преобразование.

2) Пусть  $\tau_1$  и  $\tau_2$  — инверсии относительно сфер радиусов  $R_1$  и  $R_2$  с центром в точке нуль. Доказать, что  $\tau_2 = \Gamma \circ \tau_1$ , где  $\Gamma$  — гомотетия с коэффициентом  $(R_2/R_1)^2$ .

3) Инверсия относительно сферы оставляет эту сферу на месте. В каждой точке  $a$  сферы дифференциал инверсии — отражение относительно гиперплоскости, касательной к сфере в точке  $a$ .

4) Дифференциал инверсии в произвольной точке — композиция отражения относительно гиперплоскости (какой?) и растяжения (во сколько раз?). В частности, инверсия сохраняет углы между любыми кривыми.

**Задача 7.2** («квадратный трехчлен» в евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^n$ ). Рассмотрим евклидово пространство  $\mathbb{R}^n$  и уравнение

$$a\langle x, x \rangle + \langle b, x \rangle + c = 0, \quad (1)$$

где  $a, c$  — данные числа,  $\mathbf{b}$  — данный вектор в  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{x}$  — неизвестный вектор в  $\mathbb{R}^n$  и  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  — скалярное произведение.

- 1) Если  $a = 0$ , но  $\mathbf{b} \neq 0$ , то уравнение (1) определяет гиперплоскость.
- 2) Если  $c = 0$ , то множество решений содержит нулевой вектор.
- 3) Пусть  $a \neq 0$ . Если «дискриминант»  $D = \langle \mathbf{b}, \mathbf{b} \rangle - 4ac$  отрицателен, то уравнение (1) несовместно. Если  $D \geq 0$ , то решением  $\mathbf{x}$  уравнения (1) является любая точка  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ , находящаяся на расстоянии  $\frac{\sqrt{D}}{2a}$  от точки  $\mathbf{x}_0 = \frac{-\mathbf{b}}{2a}$ . В частности, общее решение уравнения (1) — это сфера.

**Задача 7.3.** Рассмотрим инверсию относительно сферы радиуса 1 с центром в нуле.

1) Эта инверсия задается формулой  $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}/\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle$ . Обратное преобразование задается формулой  $\mathbf{x}(\mathbf{u}) = \mathbf{u}/\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle$ . На комплексной плоскости в комплексных обозначениях эти преобразования описываются формулами  $u = 1/\bar{x}$ ,  $x = 1/\bar{u}$ .

2) Эта инверсия переводит решение уравнения  $a\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + \langle \mathbf{b}, \mathbf{x} \rangle + c = 0$  в решение уравнения  $c\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle + \langle \mathbf{b}, \mathbf{u} \rangle + a = 0$ .

3) При этой инверсии: сферы, не проходящие через нуль, переходят в сферы, не проходящие через нуль; сферы, проходящие через нуль, переходят в гиперплоскости, не проходящие через нуль, и наоборот.

4) Прямые и окружности в  $\mathbb{R}^3$  переходят в прямые и окружности. (Когда окружность переходит в прямую?)

**Задача 7.4** (задача Кокстера). Пусть сферы  $S_1, S_2, S_3$  и  $S_4$  в трехмерном пространстве лежат вне друг друга и касаются друг друга. Построим сферу  $S_5$ , касающуюся сфер  $S_1, S_2, S_3$  и  $S_4$ . Затем построим сферу  $S_6$ , касающуюся сфер  $S_1, S_2, S_3$  и  $S_5$  такую, что  $S_6 \neq S_4$ . Затем построим сферу  $S_7$ , касающуюся сфер  $S_1, S_2, S_3$  и  $S_6$  такую, что  $S_7 \neq S_5$ , и т. д. Доказать, что всегда  $S_{10} = S_4$ .

**Задача 7.5.** Стереографическая проекция сферы на плоскость — ограничение на сферу некоторой инверсии пространства  $\mathbb{R}^3$  (какой?). Поэтому стереографическая проекция переводит окружности на сфере в окружности и прямые на плоскости и сохраняет углы между кривыми.

**Задача 7.6.** Фиксируем на сфере  $S$  в  $\mathbb{R}^3$  ориентацию, противоположную обычной, т. е. такую, что вектор внутренней нормали и пара правильно ориентированных на сфере касательных векторов в точке  $a \in S$  образуют тройку положительно ориентированных векторов в  $\mathbb{R}^3$ .

1) Стереографическая проекция из «северного полюса» на сферу на горизонтальную плоскость (предполагается, что сфера лежит на горизонтальной плоскости и что горизонтальная плоскость ориентирована стандартным способом) сохраняет ориентацию.

2) Стереографическая проекция из «южного полюса» на сферу на

горизонтальную плоскость (предполагается, что горизонтальная плоскость сферы лежит на сфере и что горизонтальная плоскость ориентирована стандартным способом) меняет ориентацию.

3) отождествим верхнюю и нижнюю касательные плоскости к сфере при помощи параллельного переноса на вертикальный вектор (по длине равный диаметру сферы). Доказать, что после этого отождествления стереографическая проекция  $x(a)$  точки  $a$ , описанная в п. 1), и стереографическая проекция  $y(a)$  той же точки  $a$ , описанная в п. 2), связаны между собой преобразованием инверсии. Относительно какой окружности?

4) В комплексных обозначениях точки  $x(a)$  и  $y(a)$  из п. 3) связаны соотношением  $y(a) = 1/\bar{x}(a)$ . (При условии, что диаметр сферы равен единице.)

*Преобразование Мёбиуса* — это отображение плоскости, пополненной бесконечно удаленной точкой, в себя, переводящее прямые и окружности в прямые и окружности и сохраняющее углы между кривыми (но не обязательно сохраняющее ориентацию).

Аналогично определяется преобразование Мёбиуса сферы в  $\mathbb{R}^3$  в себя.

**Задача 7.7.** 1) На плоскости  $\mathbb{R}^2$  всякий поворот и всякий параллельный перенос можно представить в виде произведения двух симметрий относительно прямых. Каких?

2) В пространстве  $\mathbb{R}^n$  гомотетию с положительным коэффициентом можно представить в виде произведения двух инверсий. Каких?

**Задача 7.8.** Будем говорить, что две точки симметричны относительно окружности, если они переставляются при инверсии относительно окружности. Показать, что точки  $x$  и  $y$  симметричны относительно окружности  $S$ , если и только если всякая окружность  $L$ , проходящая через  $x$  и  $y$ , пересекает  $S$  под прямым углом. Вывести отсюда, что симметрия точек относительно окружности сохраняется при преобразованиях Мёбиуса (т. е. если  $F$  — преобразование Мёбиуса и  $x, y$  симметричны относительно  $S$ , то  $F(x), F(y)$  симметричны относительно  $F(S)$ ).

**Задача 7.9.** Пару окружностей  $S_1$  и  $S_2$  можно перевести преобразованием Мёбиуса

1) в пару прямых, проходящих через точку нуль, если  $S_1$  и  $S_2$  пересекаются;

2) в пару параллельных прямых, если  $S_1$  и  $S_2$  касаются;

3) в пару концентрических окружностей, если  $S_1$  и  $S_2$  не пересекаются.

*Указание к п. 3.* Построить прямую и окружность, ортогонально пересекающие  $S_1$  и  $S_2$ . Эту прямую и окружность перевести в пару прямых, проходящих через точку нуль.

## 8. Сфера Римана

**Задача 8.1** (теорема об устранимой особенности). 1) Пусть  $f$  аналитична и ограничена в проколотой окрестности точки  $a$ . Тогда  $f$  аналитически продолжается в точку  $a$ .

2) Если в условиях п. 1) вместо ограниченности  $f$  имеем неравенство  $|f(z)| < C|z - a|^{-N}$  для некоторой константы  $C$  и некоторого целого  $N$ , то  $f(z)(z - a)^N$  является аналитической функцией. Такая функция  $f(z)$  в окрестности точки  $a$  представима в виде ряда

$$f(z) = \sum_{m \geq -N}^{\infty} c_m (z - a)^m.$$

Если при этом  $c_{-N} \neq 0$  и  $-N < 0$ , то говорят, что функция  $f$  имеет *полюс* порядка  $N$  в точке  $a$ .

**Задача 8.2.** Рассмотрим такое гладкое отображение  $f$  области  $U \subset \mathbb{R}^2$  в  $\mathbb{R}^2$ , что:

1) дифференциал  $f$  обращается в нуль лишь на дискретном множестве точек;

2) во всех остальных точках дифференциал сохраняет ориентацию и углы между любыми двумя кривыми, проходящими через эту точку.

Тогда  $f$  — аналитическая функция (мы отождествляем  $\mathbb{R}^2$  с  $\mathbb{C}$ ).

*Указание.* Воспользоваться теоремой Коши и теоремой об устранимой особенности.

**Определение.** Фиксируем на сфере  $S$  в  $\mathbb{R}^3$  некоторую ориентацию. Отображение  $f$  области  $U \subset S$  на ориентированной сфере в комплексную плоскость называется *аналитическим*, если  $df$  обращается в нуль лишь в дискретном множестве точек и в остальных точках  $df$  сохраняет ориентацию и углы между любыми двумя кривыми.

**Задача 8.3.** Фиксируем на сфере диаметра 1, лежащей на горизонтальной плоскости, ориентацию, противоположную стандартной.

1) Стереографическая проекция  $\pi_1$  из «северного полюса» сферы на горизонтальную плоскость, касающуюся сферы в «южном полюсе» сферы, является аналитическим отображением. Если область  $U \subset S^2$  не содержит верхней точки сферы, то отображение  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$  является аналитическим, если и только если функция комплексного переменного  $f(\pi_1^{-1}(z))$  в области  $\pi_1(U)$  является аналитической.

2) Стереографическая проекция  $\pi_2$  из «южного полюса» сферы на горизонтальную плоскость, касающуюся сферы в «северном полюсе» сферы, является антианалитическим отображением, т.е. отображение  $\bar{\pi}_2$  является аналитическим (мы отождествляем верхнюю и нижнюю касательные плоскости при помощи параллельного переноса на

единичный вертикальный вектор и отождествляем обе плоскости с комплексной прямой). Если область  $U$  не содержит нижней точки сферы, то отображение  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$  является аналитическим, если и только если функция  $f(\pi_2^{-1}(\bar{u}))$  комплексного переменного  $u$  в области  $\pi_2(U)$  является аналитической.

3) «Комплексные координаты»  $z(a) = \pi_1(a)$  и  $u(a) = \overline{\pi_2(a)}$  точки  $a$  на сфере связаны соотношениями  $u = 1/z$ ,  $z = 1/u$ .

Так называемую сферу Римана можно воспринимать как комплексную плоскость, дополненную одной точкой, обозначаемой  $\infty$ . Около этой точки есть координата  $u = 1/z$ , причем  $u(\infty) = 0$ .

Говорят, что функция  $f$  переменной  $z$  аналитична в окрестности бесконечности, если и только если функция  $\psi$  переменной  $u$ , определенная формулой  $\psi(u) = f(1/z)$ , аналитична в окрестности нуля. Если функция  $\psi$  имеет полюс порядка  $N$  в нуле, то говорят, что функция  $f$  имеет полюс порядка  $N$  в бесконечности.

**Определение.** Функция  $f$  мероморфна в области  $U$  на сфере Римана, если все ее особые точки в этой области являются полюсами.

**Задача 8.4.** Доказать, что

1) функция  $f$ , мероморфная на сфере Римана, представима в виде

$$f(z) = P(z) + \sum_{1 \leq i \leq k} \sum_{1 \leq j \leq m(i)} \frac{c_j^i}{(z - a_i)^j};$$

Поэтому всякая функция, мероморфная на сфере Римана, рациональна.

2) всякая рациональная функция раскладывается на простейшие дроби;

**Задача 8.5.** 1) Всякое аналитическое взаимно однозначное преобразование сферы Римана в себя — это дробно-линейное преобразование

$$z \rightarrow \frac{az + b}{cz + d}, \text{ где } ad - bc \neq 0.$$

2) Всякое дробно-линейное преобразование, для которого  $c \neq 0$ , представимо в виде  $z = \frac{A}{z - z_0} + B$ .

3) Всякое дробно-линейное преобразование представимо в виде произведения не более чем четырех инверсий.

4) Дробно-линейное преобразование имеет либо две неподвижных точки, либо одну (кратную) неподвижную точку, либо тождественно.

5) Для любых трех различных точек  $a, b, c$  и для любых трех различных точек  $A, B, C$  существует единственное дробно-линейное преобразование  $z \rightarrow F(z)$  такое, что  $F(a) = A$ ,  $F(b) = B$  и  $F(c) = C$ .

6) Всякая композиция четного числа инверсий является дробно-линейным преобразованием.

**Задача 8.6.** 1) Сохраняющее ориентацию преобразование Мёбиуса — это дробно-линейное преобразование.

2) Меняющее ориентацию преобразование Мёбиуса имеет вид  $F(z) = \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d}$ , где  $ad - bc \neq 0$ .

3) Любое преобразование Мёбиуса — произведение инверсий.

**Задача 8.7.** Всякое взаимно однозначное преобразование сферы в  $\mathbb{R}^3$  в себя, сохраняющее углы между любыми двумя кривыми, является преобразованием Мёбиуса. Оно всегда представимо в виде композиции инверсий относительно сфер, ортогональных данной сфере.

## 9. Вычеты

Рассмотрим форму  $f(z) dz$ , где  $f(z)$  — аналитическая функция в проколотой окрестности  $U$  точки  $a$ .

**Задача 9.1.** Интеграл  $\int_{\gamma} f(z) dz$  по любому контуру  $\gamma$ , лежащему в области  $U$  и «обегаящему один раз вокруг точки  $a$  в направлении против часовой стрелки», не зависит от выбора контура  $\gamma$ .

**Определение.** 1) Число  $\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) dz$ , где  $\gamma$  — контур из задачи 9.1, называется *вычетом* формы  $\omega = f(z) dz$  в точке  $a$  и обозначается  $\text{Res}_a \omega$ ; 2) если  $a = \infty$ , то вычет формы  $f(z) dz$  по определению равен вычету формы  $f(1/z) d(1/z)$  в точке 0.

**Задача 9.2.** 1) Пусть в окрестности точки  $a \neq \infty$  функция  $f(z)$  представима сходящимся рядом  $f(z) = \sum_{-\infty < k < \infty} C_k (z - a)^k$ . Вычислить  $\text{Res}_a \omega$ , где  $\omega = f(z) dz$ .

2) Пусть при достаточно больших  $z$  ряд  $\sum_{-\infty < k < \infty} C_k z^k$  сходится. Найти  $\text{Res}_{\infty} \omega$ , где  $\omega = f(z) dz$ .

**Задача 9.3** (теорема о сумме вычетов). Пусть  $U$  — область на сфере Римана с кусочно гладкой границей  $\gamma = \partial U$ . Пусть  $f(z)$  — функция, аналитическая вплоть до границы области  $U$  всюду, за исключением конечного числа внутренних точек. Тогда

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{a \in U} \text{Res}_a f(z) dz.$$

В частности, если  $U$  — сфера Римана, то

$$\sum_a \text{Res}_a f(z) dz = 0.$$

**Задача 9.4.** Пусть функция  $f(z)$  мероморфна в окрестности точки  $a$ , т. е. представима в виде  $f(z) = \sum_{m \leq k < \infty} C_k (z - a)^k$ , и коэффициент  $C_m$  не

равен нулю. Тогда вычет формы  $\omega = \frac{df}{f}$  в точке  $a$  равен  $m$ , т.е. этот вычет отрицателен в полюсе, положителен в нуле и по модулю равен кратности соответствующего полюса или нуля.

**Задача 9.5** (принцип аргумента). 1) Пусть функция  $f$  мероморфна в области  $U$ ,  $P$  — число полюсов функции  $f$  в области  $U$ , посчитанных с учетом кратности,  $N$  — число нулей функции  $f$  в области  $U$ , посчитанных с учетом кратности. Тогда

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U} \frac{df}{f} = P - N.$$

2) Число  $\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U} \frac{df}{f}$  равно приросту аргумента функции  $f$  при полном обходе границы области  $U$ .

**Задача 9.6.** Для рациональной функции на сфере число нулей (посчитанных с учетом кратности) равно числу ее полюсов (посчитанных с учетом кратности). В частности, число нулей полинома степени  $n$  равно  $n$ .

*Указание.* См. задачи 9.4 и 9.5.

## 10. Геометрия Лобачевского и ТФКП

**Задача 10.1.** Рассмотрим в  $\mathbb{R}^n$  верхнее полупространство  $\mathbb{R}_+^n$ , определенное неравенством  $x_n > 0$ , где  $x_n$  — последняя координата точки  $x = (x_1, \dots, x_n)$ . Зададим риманову метрику Пуанкаре в  $\mathbb{R}_+^n$

$$(ds)^2 = \frac{(dx_1)^2 + \dots + (dx_n)^2}{x_n^2}.$$

Доказать, что эта метрика инвариантна относительно инверсий, центры которых лежат в гиперплоскости  $x_n = 0$ , а радиусы произвольны.

*Указание.* См. п. 4 задачи 7.1.

**Задача 10.2.** Пусть у точек  $x_1$  и  $x_2$  в  $\mathbb{R}_+^n$  все координаты, кроме последней, равны. Тогда среди всех кривых, соединяющих  $x_1$  и  $x_2$ , самая короткая кривая в смысле метрики Пуанкаре — вертикальный отрезок.

*Указание.* Аналогичный факт верен для любой метрики

$$(ds)^2 = f(x_n)((dx_1)^2 + \dots + (dx_n)^2),$$

где  $f$  — любая неотрицательная функция, зависящая лишь от одной переменной  $x_n$ .

**Задача 10.3.** Пусть  $x_1$  и  $x_2$  — две точки в  $\mathbb{R}_+^n$ . Тогда самая короткая в смысле метрики Пуанкаре кривая, соединяющая  $x_1$  и  $x_2$ , — дуга окружности, ортогональной гиперплоскости  $x_n = 0$ .

*Указание.* См. задачи 10.2 и 10.1.

Полупространство  $\mathbb{R}_+^n$  с метрикой Пуанкаре называется моделью Пуанкаре пространства Лобачевского  $L^n$ .

**Задача 10.4** (неравенство Шварца). Пусть  $B_1$  — открытый единичный круг на комплексной плоскости (т.е.  $B_1$  определено неравенством  $|z| < 1$ ), и пусть  $f: B_1 \rightarrow B_1$  — такое аналитическое отображение, что  $f(0) = 0$ . Тогда

1) справедливо неравенство

$$|f(z)| \leq |z|;$$

2) если хотя бы в одной точке  $z_0 \in B_1$ ,  $z_0 \neq 0$ , достигается равенство  $|f(z_0)| = |z_0|$ , то  $f(z) \equiv c \cdot z$ , где  $c$  — комплексное число,  $|c| = 1$ .

*Указание.* Для всякого замкнутого круга  $|z| \leq (1 - \varepsilon)$  воспользоваться принципом максимума для функции  $\varphi(z) = \frac{f(z)}{z}$ .

**Задача 10.5.** Переведем открытый круг  $B_1$  в верхнюю полуплоскость  $\mathbb{R}_+^2$  любым преобразованием Мёбиуса (т.е. произведением инверсий) и индуцируем в  $B_1$  риманову метрику из метрики Пуанкаре в  $\mathbb{R}_+^2$ . Тогда индуцированная метрика не зависит от выбора преобразования Мёбиуса (почему?) и тоже называется метрикой Пуанкаре. Открытый круг  $B_1$  вместе с метрикой Пуанкаре называется моделью Пуанкаре плоскости Лобачевского в единичном круге. Чему равна эта риманова метрика? Как выглядит кратчайшая в смысле этой метрики линия, соединяющая две точки в  $B_1$ ?

**Задача 10.6.** Пусть точка  $a$  лежит в открытом единичном круге  $B_1$ . Рассмотрим функцию  $h$ , определенную формулой  $h(z) = \frac{z-a}{\bar{a}z-1}$ . Показать, что

1)  $h$  задает взаимно однозначное отображение  $B_1$  в себя, сохраняет метрику Пуанкаре в круге и переводит точку  $a$  в точку нуль;

2) всякая другая функция  $g$ , обладающая этими свойствами, имеет вид  $g = ch$ , где  $c$  — комплексное число, по модулю равное единице (функция  $h$  выделяется среди функций, обладающих этими свойствами, тем, что она переводит прямую, соединяющую точки нуль и  $a$ , в себя).

**Задача 10.7.** Пусть  $f: B_1 \rightarrow B_1$  — аналитическое отображение открытого единичного круга в себя (не обязательно оставляющее точку нуль на месте). Тогда для любых двух точек  $z_1, z_2 \in B_1$  справедливо неравенство

$$\rho(f(z_1), f(z_2)) \leq \rho(z_1, z_2),$$

где  $\rho$  — расстояние в метрике Пуанкаре. Если для некоторой пары точек  $z_1^0, z_2^0 \in B$ , где  $z_1^0 \neq z_2^0$ , выполняется равенство  $\rho(f(z_1^0), f(z_2^0)) = \rho(z_1^0, z_2^0)$ , то для любой пары точек  $z_1, z_2 \in B$   $\rho(f(z_1), f(z_2)) = \rho(z_1, z_2)$ .

*Указание.* Рассмотреть отображение  $F = h_2 \circ f \circ h_1$ , где  $h_1$  и  $h_2$  — функции из задачи 10.6, переводящие, соответственно, точку нуля в точку  $z_1$  и точку  $f(z_1)$  в точку нуля. Для отображения  $F$  воспользоваться неравенством Шварца.

**Задача 10.8.** 1) Пусть  $f: B_1 \rightarrow B_1$  — взаимно однозначное аналитическое отображение. Тогда отображение  $f$  сохраняет метрику Пуанкаре и является преобразованием Мёбиуса, сохраняющим ориентацию.

2) Всякое взаимно однозначное отображение плоскости Лобачевского в себя, сохраняющее углы между любыми двумя кривыми, является движением плоскости Лобачевского.

*Указание.* См. задачу 10.7.

**Задача 10.9.** Для любой пары различных точек  $z_1$  и  $z_2$  в единичном круге  $B_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$  и для любого выбора корней  $b_1 = \sqrt{z_1}$  и  $b_2 = \sqrt{z_2}$  справедливо неравенство  $\rho(z_1, z_2) < \rho(b_1, b_2)$ , где  $\rho$  — расстояние в метрике Пуанкаре.

*Указание.* См. задачу 10.7.

**Задача 10.10.** Пусть  $f: D \rightarrow B_1$  — однолистное отображение (т.е. если  $f(z_1) = f(z_2)$ , то  $z_1 = z_2$ ) односвязной области  $D$  в единичный круг  $B_1$ . Пусть точка  $a \in B_1$  не принадлежит образу отображения  $f$ . Пусть  $\varphi: B_1 \rightarrow B_1$  — взаимно однозначное аналитическое отображение круга  $B_1$  в себя, переводящее точку  $a$  в точку 0. Обозначим через  $g$  одну из однозначных ветвей функции  $g = \sqrt{\varphi(f)}$  на области  $D$  (почему такая ветвь существует?). Тогда для любых двух различных точек  $a, b \in D$  справедливо неравенство

$$\rho(g(a), g(b)) > \rho(f(a), f(b))$$

(здесь  $\rho$  — метрика Пуанкаре), причем функция  $g: D \rightarrow B_1$  однолистна в  $D$ .

*Указание.* См. задачу 10.9.

**Задача 10.11.** Фиксируем две различные точки  $a, b$  в односвязной ограниченной области  $D$ . Пусть  $f: D \rightarrow B_1$  — однолистное отображение, для которого  $\rho(f(a), f(b))$  принимает самое большое возможное значение. Тогда  $f$  — взаимно однозначное отображение.

*Указание.* См. задачу 10.10.

Теорема Римана утверждает, что для всякой ограниченной односвязной области  $D$  существует взаимно однозначное аналитическое отображение в единичный круг.

Для завершения доказательства теоремы Римана нам нужен критерий компактности семейства аналитических функций.

## 11. Компактность функциональных множеств и теорема Римана

**Метрические пространства и компактность.** В задачах 11.1–11.3 мы напомним теорему Арцелá. Метрическое пространство называется *полным*, если в нем каждая фундаментальная последовательность сходится. Топологическое пространство называется *компактом*, если из любого его покрытия открытыми множествами можно выбрать конечное подпокрытие. Множество  $X$  в метрическом пространстве называется *вполне ограниченным*, если для любого  $\varepsilon > 0$  в нем существует *конечная  $\varepsilon$ -сеть*, т. е. такое конечное подмножество  $A$ , что для любой точки  $x \in X$  существует точка  $a \in A$ , расстояние которой до точки  $x$  меньше или равно  $\varepsilon$ .

**Задача 11.1.** Метрическое пространство является компактом, если и только если оно полно и вполне ограничено.

**Задача 11.2.** Непрерывное отображение метрического компакта в метрическое пространство равномерно непрерывно.

**Задача 11.3** (теорема Арцелá). Рассмотрим пространство  $C(X, \mathbb{R}^n)$  непрерывных отображений метрического компакта  $X$  в евклидово пространство  $\mathbb{R}^n$ . Это пространство наделено равномерной метрикой. Подмножество  $A \subset C(X, \mathbb{R}^n)$  имеет компактное замыкание в  $C(X, \mathbb{R}^n)$ , если и только если

1) функции из  $A$  равномерно ограничены, т. е. существует константа  $C$  такая, что если  $f \in A$ , то  $\|f\| < C$  ( $\|f\|$  — это максимальная длина вектора  $f(x)$ ,  $x \in X$ );

2) функции из  $A$  равномерно непрерывны, т. е. для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $\delta > 0$ , такое, что если  $\rho(x_1, x_2) < \delta$  и  $f \in A$ , то  $\rho(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$ .

**Компактные семейства аналитических функций.** Пусть  $D$  — любая область и  $K$  — компакт, содержащийся в  $D$ .

**Задача 11.4.** Если множество  $A$  аналитических функций в области  $D$  равномерно ограничено, то ограничения этих функций на  $K \subset D$  равномерно непрерывны.

*Указание.* Производная функции оценивается в меньшей области при помощи интегральной формулы Коши (см. задачу 5.10).

**Задача 11.5** (компактность ограниченного семейства аналитических функций). Если множество  $A$  аналитических функций в области  $D$  равномерно ограничено, то из всякой последовательности функций из  $A$  можно выбрать подпоследовательность, ограничение которой на каждый компакт  $K \subset D$  сходится равномерно на этом компакте.

*Указание.* Воспользоваться задачей 11.4 для такой счетной последовательности компактов  $K_1 \subseteq K_2 \subseteq \dots$ , что  $\bigcup K_i = D$ , и «диагональным процессом Кантора».

**Задача 11.6.** Пусть каждая из функций  $f_1, \dots, f_n, \dots$  аналитична в области  $D$  и однолистка в ней. Пусть функция  $f$  есть предел функций  $f_1, \dots, f_n, \dots$ , причем для каждого компакта  $K \subset D$  ограничения  $f_i$  на  $K$  равномерно сходятся к ограничению  $f$  на  $K$ . Тогда  $f$  либо постоянна, либо однолистка в  $D$ .

**Задача 11.7** (теорема Римана). Пусть  $D$  — односвязная ограниченная область. Тогда существует взаимно однозначное аналитическое отображение  $f: D \rightarrow B_1$  области  $D$  в единичный круг.

*Указание.* Воспользоваться задачами 10.11, 11.5 и 11.6.

## 12. Продолжаемость до границы

**Задача 12.1.** Пусть  $X \subset \mathbb{R}^n$  — ограниченное множество, и  $f: X \rightarrow \mathbb{R}^m$  — непрерывное отображение. Отображение  $f$  непрерывно продолжается на замыкание  $\overline{X}$  множества  $X$ , если и только если отображение  $f$  равномерно непрерывно.

**Задача 12.2.** Пусть  $X \subset \mathbb{R}^n$  и  $Y \subset \mathbb{R}^m$  — ограниченные множества, и  $f: X \rightarrow Y$  — гомеоморфизм. Показать, что гомеоморфизм  $f$  продолжается до гомеоморфизма замыканий  $\overline{X}$  и  $\overline{Y}$ , если и только если отображения  $f: X \rightarrow Y$  и  $f^{-1}: Y \rightarrow X$  равномерно непрерывны.

**Задача 12.3.** Доказать, что непрерывная вещественнозначная функция на связном множестве принимает все промежуточные значения.

**Задача 12.4.** Скажем, что множество  $X \subset \mathbb{R}^n$  локально связно в своем замыкании  $\overline{X}$ , если у каждой точки  $a \in \overline{X}$  существует сколь угодно малая окрестность  $U \subset \mathbb{R}^n$  такая, что  $U \cap X$  непусто и связно. Показать, что если  $X$  локально связно в  $\overline{X}$ , то каждая сфера достаточно малого радиуса с центром в точке  $a$  пересекает множество  $X$ .

**Задача 12.5.** Пусть  $f: X \rightarrow Y$  — гомеоморфизм,  $a_i \in X$ ,  $\lim a_i = a \in \overline{X}$  и  $\lim f(a_i) = b \in \overline{Y}$ . Если  $Y$  локально связно в  $\overline{Y}$ , то для любого  $\varepsilon > 0$  найдется такое  $\delta > 0$ , что на всякой сфере радиуса  $\delta_0$ ,  $0 < \delta_0 < \delta$ , с центром в точке  $a$  существует точка  $c \in X$ , для которой расстояние от  $f(c)$  до  $b$  меньше  $\varepsilon$ .

**Задача 12.6.** Пусть  $X$  и  $Y$  — ограниченные области на плоскости, и  $f: X \rightarrow Y$  — диффеоморфизм. Допустим, что

- 1)  $X$  и  $Y$  локально связны в своих замыканиях;
- 2) для каждой точки  $a \in \overline{X}$  пересечение существует такое  $R_0(a) > 0$ , что для любого  $R < R_0(a)$  пересечение окружности  $S_R$  радиуса  $R$  с центром  $a$  и области  $X$  связно;

3) для каждой точки  $b \in \overline{Y}$  пересечение существует такое  $R_0(b) > 0$ , что для любого  $R < R_0(b)$  пересечение окружности радиуса  $R$  с центром  $b$  и области  $Y$  связно.

Тогда если отображение  $f: X \rightarrow Y$  не равномерно непрерывно, то существует точка  $a \in \overline{X}$  и число  $\beta > 0$  такие, что каждая кривая  $f(\gamma_R)$ , где  $\gamma_R = S_R \cap X$ ,  $0 < R < R_0$ , имеет длину больше  $\beta$ .

**Принцип длины и площади.** Пусть  $G \subset \mathbb{C}^1$  — область на комплексной плоскости, и  $f: G \rightarrow \mathbb{C}^1$  — аналитическая функция, однолистная в области  $G$ . Фиксируем систему полярных координат  $\rho, \theta$ . Введем следующие обозначения:

- $\gamma(\rho)$  — кривая  $|z| = \rho$ ,  $z \in G$ ,
- $l(\rho)$  — длина кривой  $\gamma(\rho)$ ,
- $L(\rho)$  — длина образа  $f(\gamma(\rho))$  кривой  $\gamma(\rho)$  при отображении  $f$ ,
- $S(f(G))$  — площадь области  $f(G)$ .

**Задача 12.7.** Объяснить формулы:

- 1)  $L(\rho) = \int_{|z|=\rho, z \in G} |f'(z)| ds$ , где  $ds = \rho d\theta$ .
- 2)  $S(f(G)) = \int_0^\infty \int_{|z|=\rho, z \in G} |f'(z)|^2 \rho d\theta d\rho$ .

**Задача 12.8.** Доказать неравенство

$$\int_{|z|=\rho, z \in G} |f'(z)|^2 \rho d\theta \geq \frac{L(\rho)^2}{l(\rho)}.$$

Используя задачу 12.7, показать, что

$$S(f(G)) \geq \int_0^\infty \frac{L(\rho)^2}{l(\rho)} d\rho$$

(последнее неравенство называется принципом длины и площади).

**Задача 12.9.** Используя принцип длины и площади, показать, что конформное отображение  $f: X \rightarrow Y$  ограниченных областей на плоскости, удовлетворяющих условиям задачи 12.6, равномерно непрерывно.

*Указание.*  $\int_0^{R_0} \frac{\beta^2 d\rho}{2\pi\rho} = \infty$ .

**Задача 12.10.** Используя предыдущие задачи, доказать, что конформное отображение  $f: X \rightarrow Y$  ограниченных областей на плоскости, удовлетворяющих условиям задачи 12.6, продолжается до их границ.

**Квазиконформные отображения.** Диффеоморфизм  $f$  области на плоскости в другую область называется *квазиконформным* с коэффициентом квазиконформности  $k$ , если якобиан  $df$  отображения  $f$  удовлетворяет следующему условию:

$$\max_{\|x\|=1} \|df(x)\| \leq k \min_{\|x\|=1} \|df(x)\|.$$

Будем использовать обозначения, введенные перед задачей 12.7, для квазиконформного отображения  $f$ .

**Задача 12.11.** Пусть  $f$  — квазиконформное отображение с коэффициентом квазиконформности  $k$ . Введем следующие обозначения:

$$c(z) = \min_{\|x\|=1} \|df(x)\|, \quad C(z) = \max_{\|x\|=1} \|df(x)\|,$$

$C(z) \leq kc(z)$ . Объяснить следующие соотношения:

- 1)  $L(\rho) \geq \int_{\|z\|=\rho, z \in G} c(z) ds$ , где  $ds = \rho d\theta$ ;
- 2)  $S(f(G)) = \int_0^\infty \int_{\|z\|=\rho, z \in G} c(z) C(z) \rho d\theta d\rho$ ;
- 3)  $S(f(G)) \geq k \int_0^\infty \frac{L^2(\rho)}{l(\rho)} d\rho$ .

**Задача 12.12.** Доказать продолжаемость квазиконформного диффеоморфизма до границы области.

*Указание.* См. задачи 12.9 и 12.11.

**Ошибка в учебнике Евграфова.**<sup>1</sup> Скажем, что гладкое отображение  $f: U \rightarrow V$  обладает свойством единственности, если выполнено следующее условие: не существует связной дуги  $\Gamma$  на границе  $\partial U$  области  $U$  для которой  $\lim_{z \rightarrow x} f(z)$  существует при всех  $x \in \Gamma$ , причем все эти пределы равны.

В учебнике М. А. Евграфова «Аналитические функции» (М.: Наука, 1968) доказана продолжаемость конформного отображения исходя из того, что аналитические функции  $f$  и  $f^{-1}$  обладают свойством единственности.

**Задача 12.13.** 1) Привести пример диффеоморфизма  $f: U \rightarrow V$  такого, что  $f$  и  $f^{-1}$  обладают свойством единственности, но отображение  $f$  не продолжается до границы области.

2) Указать конкретную ошибку на с. 378 этого учебника.

### 13. Римановы поверхности аналитических функций

Росток  $f_a$  аналитической функции в точке  $a$  сферы Римана  $\tilde{\mathbb{C}}$  — это ряд Тейлора  $f_a = \sum_{k=1}^{\infty} c_k (z - a_k)^k$  с центром в точке  $a$ , сходящийся в некотором открытом круге с центром в точке  $a$  (если  $a = \infty$ , то  $f_a = \sum_{k=0}^{\infty} c_k u^k$ , где  $u = \frac{1}{z}$ , и ряд сходится при  $|u| < R$ ).

<sup>1</sup>Книга Евграфова, по-моему, — один из самых лучших учебников по комплексному анализу. Ошибка, о которой пойдет речь в задаче 12.13, — дело житейское; собственно говоря, я наткнулся на нее потому, что использовал книгу Евграфова при подготовке курса лекций.

Пусть  $I = [0, 1]$ ,  $\gamma: I \rightarrow \tilde{\mathbb{C}}$  — непрерывная кривая на сфере Римана с началом в точке  $a$ , т. е.  $\gamma(0) = a$ . Аналитическим продолжением ростка  $f_a$  вдоль кривой  $\gamma$  называется отображение, сопоставляющее каждой точке  $t_0 \in [0, 1]$  аналитический росток  $f_b$  в точке  $b = \gamma(t_0)$  таким образом, что для всякого  $t \in [0, 1]$  существуют такие окрестность  $U \subset \tilde{\mathbb{C}}$  точки  $\gamma(t)$ , окрестность  $V \subset [0, 1]$  точки  $t$  и аналитическая функция  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$  в области  $U$ , что для всякой точки  $b \in V$  аналитический росток  $f_{\gamma(b)}$  — это росток в точке  $\gamma(b) \in U$  функции  $f$ .

**Задача 13.1.** Для кривой  $\gamma: I \rightarrow \tilde{\mathbb{C}}$ ,  $\gamma(0) = a$ , и ростка  $f_a$  существует не более одного аналитического продолжения.

**Задача 13.2.** Пусть росток  $f_a$  аналитически продолжается вдоль кривой  $\gamma: I \rightarrow \tilde{\mathbb{C}}$ ,  $\gamma(0) = a$ ,  $\gamma(1) = b$ , и  $f_b$  — росток, полученный при этом продолжении. Тогда существует конечная цепочка точек  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$ , для которой ряд  $f_{\gamma(t_i)}$  сходится в точке  $\gamma(t_{i+1})$ , причем ряд  $f_{\gamma(t_i)}$  — это ряд Тейлора в точке  $\gamma(t_i)$  полученной аналитической функции.

**Задача 13.3** (теорема о монодромии). Рассмотрим непрерывное отображение  $F$  единичного квадрата  $I^2$  с координатами  $u, v$ ,  $0 \leq u \leq 1$ ,  $0 \leq v \leq 1$ , в  $\tilde{\mathbb{C}}$  такое, что каждая кривая  $F_v: I \rightarrow \tilde{\mathbb{C}}$ , где  $F_v(u) = F(u, v)$ , начинается в точке  $a$  и кончается в точке  $b$ , т. е.  $F(v, 0) \equiv a$  и  $F(v, 1) \equiv b$ . Пусть для каждой кривой  $F_v$  росток  $f_a$  аналитически продолжается вдоль этой кривой. Тогда результат аналитического продолжения до точки  $u = 1$  не зависит от выбора кривой  $F_v$ , где  $0 \leq v \leq 1$ .

*Указание.* Если немного изменить кривую в малой окрестности любой из ее точек, то результат аналитического продолжения не изменится.

**Определение.** Два аналитических ростка  $f_a$  и  $g_b$ , заданные в точках  $a$  и  $b$  сферы Римана, называются эквивалентными, если существует такая кривая  $\gamma: I \rightarrow \tilde{\mathbb{C}}$ ,  $\gamma(0) = a$ ,  $\gamma(1) = b$ , что росток  $g_b$  — результат продолжения ростка  $f_a$  вдоль кривой  $\gamma$ .

**Задача 13.4.** Описанные выше соотношение действительно являются соотношением эквивалентности, т. е.

- 1)  $f_a \sim f_a$ ;
- 2) если  $f_a \sim g_b$ , то  $g_b \sim f_a$ ;
- 3) если  $f_a \sim g_b$  и  $g_b \sim \varphi_c$ , то  $f_a \sim \varphi_c$ .

**Определение.** Как множество точек риманова поверхность ростка  $f_a$  — это совокупность всех ростков  $g_b$ , эквивалентных ростку  $f_a$ .

На римановой поверхности  $R$  ряда  $f$  определены два естественных отображения:

- 1) проекция  $\pi: R \rightarrow \tilde{\mathbb{C}}$ , сопоставляющая каждому ростку точку, в окрестности которой этот росток определен;

2) функция  $f: R \rightarrow \mathbb{C}$ , сопоставляющая каждому ростку его значение в точке, в окрестности которой он определен.

Топология на  $R$  определяется как наименее тонкая топология, в которой проекция  $\pi: R \rightarrow \mathbb{C}$  непрерывна.

**Задача 13.5.** Отображение  $\pi: R \rightarrow \mathbb{C}$  является локальным гомеоморфизмом, т.е. у каждой точки  $p \in R$  существует такая окрестность  $U$ , что ограничение  $\pi$  на  $U$  — гомеоморфизм на свой образ.

**Задача 13.6.** Каждая точка  $a \in \mathbb{C}$  имеет не более чем счетное число прообразов при отображении  $\pi: R \rightarrow \mathbb{C}$ .

**Определение.** Функция  $g: R \rightarrow \mathbb{C}$  называется *аналитической*, если для каждой области  $U \subset R$ , для которой проекция  $\pi: U \rightarrow \mathbb{C}$  является гомеоморфизмом, функция  $\varphi$  в области  $V = \pi(U)$ , определенная равенством  $\varphi = g \circ \pi^{-1}$ , является аналитической.

Аналогично определяется мероморфная функция на  $R$ .

**Алгеброидные ростки.** Скажем, что росток  $f_p$  аналитической функции в связной окрестности  $U$  точки  $a$ ,  $p \in U \setminus a$ , *алгеброиден*, если

1) росток  $f_p$  аналитически продолжается вдоль любой кривой  $\gamma: I \rightarrow U \setminus a$ ,  $\gamma(0) = p$ ;

2) существует лишь конечное число  $k$  ростков  $g_p$  в точке  $p$ , получающихся аналитическим продолжением ростка  $f_p$  вдоль замкнутой кривой  $\gamma: I \rightarrow U \setminus a$ ,  $\gamma(0) = p$ ,  $\gamma(1) = p$ ;

3) существуют такие натуральное число  $N$  и вещественная константа  $C$ , что для всякого ростка  $g_q$ , полученного из  $f_p$  при продолжении вдоль некоторой кривой  $\gamma: I \rightarrow U \setminus a$ ,  $\gamma(0) = p$ ,  $\gamma(1) = q$ , справедливо одно из неравенств

$$\begin{aligned} |g_q(q)| &\leq C|q - a|^{-N}, & \text{если } a \neq \infty, \\ |g_q(q)| &\leq C|q|^N, & \text{если } a = \infty. \end{aligned}$$

**Задача 13.7.** Росток  $f_p$  функции переменной  $z$  алгеброиден в  $U \setminus a$  если и только если  $f_p = g_p(u)$ , где  $g$  — мероморфная функция переменной  $u$  в окрестности 0 и  $z - a = u^k$  при  $a \neq \infty$  или  $1/z = u^k$  при  $a = \infty$  (переменная  $u$  определена этими равенствами однозначно с точностью до умножения на любой из корней  $k$ -й степени из 1). Так как мероморфная функция  $g$  раскладывается в ряд Лорана  $g(u) = \sum_{m \geq -M} c_m u^m$ ,

алгеброидная функция  $f$  раскладывается в ряд Пюизё:

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{m \geq -M} c_m (z - a)^{m/k}, & \text{если } a \neq \infty, \text{ или} \\ f(z) &= \sum_{m \leq M} c_m z^{m/k}, & \text{если } a = \infty. \end{aligned}$$

Докажите сформулированные утверждения. Если в рядах Пюизё, написанных выше, каждый из коэффициентов  $c_m$  заменить на коэффициент  $\tilde{c}_m = c_m \xi^m$ , где  $\xi$  — фиксированный корень  $k$ -й степени из единицы, то получаются новые ряды Пюизё, которые считаются эквивалентными исходным. Как связаны между собой многозначные аналитические функции в  $U \setminus a$ , определяемые эквивалентными рядами Пюизё?

**Определение.** Полная риманова поверхность ростка  $f_a$  (как множество точек) — это совокупность всех рядов Тейлора и рядов Пюизё, которые получаются аналитическим продолжением из исходного ростка  $f_a$  (при этом считается, что эквивалентные ряды Пюизё задают одну и ту же точку полной римановой поверхности ростка  $f_a$ ). На полной аналитической поверхности  $R$  определены два отображения:  $\pi: R \rightarrow \tilde{\mathbb{C}}$  и  $f: R \rightarrow \mathbb{C}$  (они определяются так же, как это делалось для римановой поверхности ростка  $f_a$ ). Топология в  $R$  определяется как наименее тонкая топология (т. е. топология, содержащая наименьший класс открытых множеств), в которой проекция  $\pi$  непрерывна. Аналитическая функция в окрестности точки, соответствующей ряду Пюизё, — это аналитическая функция от параметра  $u$  (см. задачу 13.7).

Скажем, что аналитический росток  $f_a$  в точке  $a$  сферы Римана  $\tilde{\mathbb{C}}$  является ростком алгебраической функции (или алгебраическим ростком), если

- 1) существует конечное подмножество  $A \subset \tilde{\mathbb{C}}$ ,  $a \notin A$  такое, что росток  $f_a$  аналитически продолжается вдоль любой кривой  $\gamma: I \rightarrow \tilde{\mathbb{C}} \setminus A$ ,  $\gamma(0) = a$ , не пересекающей множества  $A$ ;
- 2) существует лишь конечное множество ростков  $f_{a_1}, \dots, f_{a_k}$ , которые могут быть получены аналитическим продолжением вдоль замкнутых кривых  $\gamma: I \rightarrow \tilde{\mathbb{C}} \setminus A$ ,  $\gamma(0) = \gamma(1) = a$ ;
- 3) для каждой точки  $b \in A$  существуют такие окрестность  $U_b$ , натуральное число  $N$  и вещественная константа  $C$ , что каждый росток  $g_q$ ,  $q \in U_b$ , эквивалентный ростку  $f_a$ , удовлетворяет одному из неравенств

$$\begin{aligned} |g_q(q)| &\leq C|q - b|^{-N}, & \text{если } b \neq \infty, & \text{ или} \\ |g_q(q)| &\leq C|q|^N, & \text{если } b = \infty. \end{aligned}$$

**Задача 13.8.** Показать, что всякий алгебраический росток  $f_a$  удовлетворяет некоторому алгебраическому уравнению

$$f_a^k + R_1(z)f_a^{k-1} + \dots + R_k(z) = 0,$$

в котором  $R_i(z)$  — рациональные функции.

*Указание.* Рассмотреть симметрические функции  $\sigma_1, \dots, \sigma_k$  от ростков  $f_{a_1}, \dots, f_{a_k}$ , эквивалентных ростку  $f_a$  в точке  $a$  ( $\sigma_1 = \sum f_{a_i}$ ,

$\sigma_2 = \sum_{i>j} f_{a_i} f_{a_j}$  и т. д.). Проверить, что функции  $\sigma_1, \dots, \sigma_k$  рациональны, используя задачу 8.4.

**Задача 13.9.** Полная риманова поверхность алгебраического ростка  $f_a$  компактна.

*Указание.* Чтобы из последовательности точек  $b_1, \dots, b_n, \dots$  на  $R$  выбрать сходящуюся подпоследовательность, нужно выбрать сходящуюся подпоследовательность из точек  $\pi(b_i) \in \mathbb{C}$  и воспользоваться тем, что каждая точка  $a \in \mathbb{C}$  имеет одно и то же конечное число прообразов при отображении  $\pi: R \rightarrow \mathbb{C}$  (если учитывать кратности).

**Определение.** 1-форма, определенная в области на римановой поверхности  $R$ , называется *аналитической*, если около каждой точки области она локально представима в виде  $f(z) dz$ , где  $z$  — локальный параметр на  $R$  и  $f(z)$  — аналитическая функция.

**Задача 13.10.** Пусть  $U$  — компактная область на  $R$  с гладкой границей  $\partial U$  и  $\omega$  — аналитическая форма в области  $U$ . Тогда  $\int_{\partial U} \omega = 0$ .

**Определение.** Пусть форма  $\omega$  аналитична в малой проколотовой окрестности точки  $a$  на римановой поверхности  $R$  и  $\partial U$  — граница малой односвязной области  $U$ , содержащей точку  $a$ . Число  $\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U} \omega$  называется *вычетом* формы  $\omega$  в точке  $a$ .

**Задача 13.11.** Вычет определен корректно, т. е. не зависит от выбора окрестности точки  $a$ .

**Задача 13.12.** Пусть  $\omega$  — мероморфная форма (т. е. локально представима в виде  $f(z) dz$ , где  $f$  — мероморфная функция). Тогда сумма вычетов формы  $\omega$  по всем ее особым точкам равна 0.

**Задача 13.13.** 1) Для всякой мероморфной функции  $f: R \rightarrow \mathbb{C}$  на компактной римановой поверхности ее число полюсов  $P$ , посчитанных с учетом кратности, равно числу  $N$  ее нулей, посчитанных с учетом кратности, т. е.  $P = N$ .

2) Пусть  $N(a)$  — посчитанное с учетом кратности количество точек, в которых мероморфная функция равна  $a$ . Тогда  $N(a) = P$  и не зависит от выбора точки  $a$ .

*Указание.* См. задачу 9.5.

**Задача 13.14.** Пусть  $\pi: R \rightarrow \mathbb{C}$  — мероморфное отображение компактной римановой поверхности в сферу Римана. Тогда множество точек  $a \in \mathbb{C}$ , среди прообразов которых есть кратные, является конечным.

**Задача 13.15.** Пусть полная риманова поверхность  $\pi: R \rightarrow \tau$  функции  $f$  компактна. Тогда функция  $f$  алгебраична.

*Указание.* См. задачи 3.8 и 3.14.

## 14. Принцип симметрии Римана–Шварца. Теорема Пикара

**Задача 14.1** (теорема об устранимости особенностей вдоль линии). Пусть  $U$  — область на плоскости, и  $l \subset U$  — гладкая кривая в этой области, которая разбивает ее на две области  $U_1$  и  $U_2$ , граничащие друг с другом по кривой  $l$ . Пусть  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$  — непрерывная функция в области  $U$ , ограничения которой на подобласти  $U_1$  и  $U_2$  аналитичны в этих областях. Тогда  $f$  аналитична в  $U$ .

*Указание.* Воспользоваться интегральной формулой Коши для областей  $U_1$  и  $U_2$ . Показать, что сумма двух полученных интегралов задает интегральное представление функции  $f$  в области  $U \setminus l$ . Убедиться, что это интегральное представление продолжается на всю область  $U$  и совпадает с интегральной формулой Коши для функции  $f$  в области  $U$ .

**Задача 14.2** (принцип симметрии Римана–Шварца). Пусть  $U$  и  $G$  — области на плоскости. Пусть граница области  $U$  содержит дугу  $l_1$  окружности  $S_1$ , а граница области  $G$  содержит дугу  $l_2$  окружности  $S_2$ . Обозначим через  $\tau_1$  и  $\tau_2$  отображения инверсии относительно окружностей  $S_1$  и  $S_2$ . Пусть образ  $\tau_1(U)$  области  $U$  при инверсии  $\tau_1$  не пересекается с областью  $U$ . Допустим, что существует аналитическое отображение  $f: U \rightarrow G$ , которое непрерывно продолжается на дугу  $l_1$ , причем  $f(l_1) \subseteq l_2$ . Тогда аналитическое отображение  $f: U \rightarrow G$  аналитически продолжается до отображения  $F: \tilde{U} \rightarrow \tilde{G}$ , где  $\tilde{U} = U \cup \tau_1(U) \cup l_1$  и  $\tilde{G} = G \cup \tau_2(G) \cup l_2$ , определенного на области  $\tau_1(U)$  следующей формулой:

$$F(z) = \tau_2 \circ f \circ \tau_1(z).$$

*Указание.* Воспользоваться предыдущей задачей и конформностью инверсии.

**Замечание.** Если области  $U$  и  $\tau_1(U)$  пересекаются, то функция  $f$  аналитически продолжается в  $\tau_1(U)$ , но функция  $F$  на области  $\tilde{U}$  будет, вообще говоря, многозначной.

**Задача 14.3.** Пусть  $G$  — многоугольник на плоскости, стороны которого — дуги окружностей. Тогда по теореме Римана существует взаимно однозначное аналитическое отображение  $f: \Pi \rightarrow G$ , где  $\Pi$  — верхняя полуплоскость  $\operatorname{Im} z > 0$ . По теореме о продолжаемости до границы отображение  $f$  непрерывно продолжается на ось вещественных чисел, пополненную точкой  $\infty$ , причем полученное отображение вещественной проективной прямой на границу  $\partial G$  многоугольника  $G$  является гомеоморфизмом. Обозначим через  $A'_1, \dots, A'_n$  прообразы последовательных вершин  $A_1, \dots, A_n$  многоугольника  $G$ .

1) Доказать, что отображение  $f$  непрерывно продолжается в нижнюю полуплоскость вдоль любого интервала  $A'_i, A'_{i+1}$  вещественной оси

(один из этих интервалов содержит  $\infty$ ). Это означает, что существует функция  $F: \tilde{U} \rightarrow \mathbb{C}$ , где  $\tilde{U}$  — это объединение верхней полуплоскости  $\Pi$ , нижней полуплоскости  $\bar{\Pi}$  ( $z \in \bar{\Pi}$ , если  $\operatorname{Im} z < 0$ ) и интервала  $A'_i, A'_{i+1}$ .

2) Что собой представляет образ нижней полуплоскости  $\bar{\Pi}$  при отображении  $F$ ?

3) Доказать, что росток  $f_a$  отображения  $f$  в точке  $a \in \Pi$  аналитически продолжается вдоль любой кривой  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\gamma(0) = a$ , не проходящей через точки  $A'_1, \dots, A'_n$ .

**Задача 14.4.** Пусть в условиях предыдущей задачи  $G$  — треугольник с нулевыми углами, вписанный в единичную окружность и имеющий вершины  $A_1, A_2, A_3$ . Сделав, если нужно, вещественное дробно-линейное преобразование  $u = \frac{az+b}{cz+d}$ , где  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ , можно считать, что  $A'_1 = 0$ ,  $A'_2 = 1$ ,  $A'_3 = \infty$ . Рассмотрим многозначную аналитическую функцию  $\chi: \mathbb{C} \setminus \{0, 1\} \rightarrow \mathbb{C}$ , полученную аналитическим продолжением функции  $f: \Pi \rightarrow G$ . Доказать, что функция  $\chi^{-1}$  определена и голоморфна в открытом единичном круге (и, стало быть, что все значения многозначной функции  $\chi$  по модулю не превосходят единицы).

*Указание.* Пусть  $G'$  — треугольник, полученный инверсией треугольника  $G$  относительно одной из его сторон. Тогда  $G'$  тоже вписан в единичную окружность. Треугольник  $G'$  снова можно инверсионно отразить в одной из его сторон. Получится треугольник  $G''$ , тоже вписанный в единичную окружность. Повторяя эту процедуру, можно получить «паркет», замощающий внутренность единичного круга и состоящий из треугольников, полученных из  $G$  последовательными инверсиями.

**Задача 14.5.** Аналитическая функция, определенная на всей комплексной плоскости, называется *целой* функцией. Показать, что всякая целая функция  $g: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , не принимающая значение  $a$ , имеет вид  $g = e^f + a$ , где  $f$  — целая функция.

*Указание.* Рассмотреть однозначную ветвь функции  $\ln(g(z) - a)$  на комплексной плоскости. (Почему такая однозначная ветвь существует?)

**Задача 14.6** (теорема Пикара). Всякая целая функция  $g: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , не принимающая двух значений  $a$  и  $b$ , является константой.

*Указание.* Пусть  $\chi$  — функция из задачи 14.4. Тогда многозначная функция  $\chi\left(\frac{z-a}{b-a}\right)$  продолжается вдоль любой кривой, не проходящей через  $a$  и  $b$ , и все ее значения не превосходят по модулю единицы. Рассмотреть однозначную ветвь на комплексной плоскости функции  $\chi\left(\frac{g(z)-a}{b-a}\right)$ . (Почему такая однозначная ветвь существует?) Воспользоваться теоремой Лиувилля.

## ДОПОЛНЕНИЕ 1

### 15. Гармонические функции многих переменных

Оператор Лапласа  $\Delta$  в  $\mathbb{R}^n$  — это дифференциальный оператор

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}.$$

**Задача 15.1.** Для всякой функции  $f$  класса  $C^2$  в области  $U \subset \mathbb{R}^n$  справедливо тождество

$$\Delta f = \operatorname{div} \operatorname{grad} F.$$

Определим оператор усреднения  $\operatorname{Mid}(R, a)$ . Пусть  $S_{R,a}$  и  $B_{R,a}$  — сфера и шар радиуса  $R$  с центром в точке  $a \in \mathbb{R}^n$ . Для всякой непрерывной функции  $f$  в области, содержащей сферу  $S_{R,a}$ , определим число  $\operatorname{Mid}(R, a)f$  как среднее значение функции  $f$  по сфере  $S_{R,a}$ , т. е.

$$\operatorname{Mid}(R, a)f = \frac{1}{V(S_{R,a})} \int_{S_{R,a}} f \Omega,$$

где  $\Omega$  — форма  $(n-1)$ -мерного объема на сфере  $S_{R,a}$ ,  $V(S_{R,a})$  —  $(n-1)$ -мерный объем сферы  $S_{R,a}$ .

**Задача 15.2.** Для всякой функции  $f$  класса  $C^2$  в области  $U$ , содержащей шар  $B_{R_0,a}$  радиуса  $R_0$  с центром в точке  $a$ , при  $R < R_0$  справедливо тождество

$$\frac{d}{dR} \operatorname{Mid}(R, a)f \equiv \frac{1}{V(S_{R,a})} \int_{B_{R,a}} \Delta f \, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n.$$

*Указание.* Пусть  $a = 0$ . Растяжением в  $R^{-1}$  раз интеграл по сфере  $S_{R,0}$  сводится к интегралу по фиксированной сфере  $S_{1,0}$ :

$$\operatorname{Mid}(R, 0)f = \frac{1}{V(S_{1,0})} \int_{S_{1,0}} f(Rx) \Omega.$$

Поэтому  $\frac{d}{dR} \operatorname{Mid}(R, 0)f = \frac{1}{V(S_{1,0})} \int_{S_{1,0}} \langle \vec{n}, \operatorname{grad} f(R, x) \rangle \Omega$ , где  $\vec{n}$  — единичная нормаль к единичной сфере в точке  $x$ . Преобразовать последний интеграл, используя формулу Стокса.

**Задача 15.3.** Пусть  $f$  — функция класса  $C^2$  в области  $U$ . Тогда:

- 1) если в области  $U$  выполнено неравенство  $\Delta f > 0$ , то  $\operatorname{Mid}(R, a)f \geq f(a)$ ;
- 2) если в области  $U$  выполнено неравенство  $\Delta f < 0$ , то  $\operatorname{Mid}(R, a)f \leq f(a)$ ;

3) если в области  $U$  выполнено тождество  $\Delta f \equiv 0$ , то  $\text{Mid}(R, a)f = f(a)$ .

(В задаче предполагается, что область  $U$  содержит шар  $B_{R,a}$  радиуса  $R$  с центром в точке  $a$ .)

**Определение 1** (классическое определение гармонической функции). Функция  $f$  класса  $C^2$  в области  $U$  называется *гармонической* в этой области, если справедливо тождество

$$\Delta f \equiv 0.$$

**Задача 15.4.** Обозначим через  $r(x)$  расстояние от точки  $x \in \mathbb{R}^3$  до точки 0. Проверить, что функция  $f(x) = \frac{1}{r(x)}$  является гармонической функцией в  $\mathbb{R}^3 \setminus 0$  и что градиент этой функции по длине равен  $\frac{1}{r^2(x)}$  и направлен от точки 0.

**Замечание.** Согласно закону всемирного тяготения сила гравитационного притяжения к массе, расположенной в точке 0, пропорциональна градиенту функции  $\frac{1}{r(x)}$  (коэффициент пропорциональности зависит от массы). По задаче 15.4 потенциал силы притяжения к массивной точке, а значит, и к любой системе точек, является гармонической функцией вне области, содержащей эти точки. Аналогичное верно и для сил электрического притяжения. Это одна из причин, по которым гармонические функции играют столь фундаментальную роль в математической физике.

**Определение 2** (интегральное определение гармонической функции). Непрерывная функция  $f$  в области  $U$  называется *гармонической* в области  $U$ , если для всякой точки  $a$  и шара  $B_{R,a}$  таких, что  $B_{R,a} \subset U$ , выполняется равенство

$$\text{Mid}(R, a)f = f(a).$$

Приведем еще одно близкое определение.

Непрерывная функция  $f$  в области  $U$  называется *субгармонической* в области  $U$ , если для всякой точки  $a$  и шара  $B_{R,a}$  таких, что  $B_{R,a} \subset U$ , выполняется неравенство

$$\text{Mid}(R, a)f \geq f(a).$$

**Задача 15.5.** 1) Если к определению 2 добавить требование гладкости  $f$ ,  $f \in C^2$ , то определения 1 и 2 станут эквивалентными.

2) Функция  $f$  класса  $C^2$  является субгармонической, если и только если выполняется неравенство  $\Delta f \geq 0$ .

*Указание.* См. задачу 15.3.

Для следующей задачи нам понадобится обобщенная формула Стокса в векторной форме. Рассмотрим в пространстве  $\mathbb{R}^n$  стандартное скалярное произведение. В этом случае обобщенный вариант (так же как и классический вариант) формулы Стокса допускает векторную трактовку. Приведем ее.

**Обобщенная формула Стокса в векторном виде.** Пусть  $U$  — компактная область с гладкой границей  $\partial U$  в пространстве  $\mathbb{R}^n$ , пусть  $V = (P_1, \dots, P_n)$  — векторное поле, коэффициенты  $P_i$  которого имеют дифференциалы в замыкании области  $U$  и дивергенция которого  $\operatorname{div} V = \frac{\partial P_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial P_n}{\partial x_n}$  непрерывна в замыкании этой области. Тогда поток  $\int_{\partial U} \langle \vec{V}, \vec{dS} \rangle$  векторного поля через границу области (здесь  $\vec{dS}$  — вектор, ортогональный границе  $\partial U$  области  $U$ , направленный наружу и равный по длине  $(n-1)$ -мерному объему рассматриваемого малого элемента  $dS$  границы этой области) равен интегралу ее дивергенции  $\int_U \operatorname{div} V \, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ .

Обобщенная формула Стокса в векторном виде не нуждается в отдельном доказательстве, поскольку она является переформулировкой обобщенной формулы Стокса (см. раздел «Об обобщенной формуле Стокса...» предисловия).

**Определение 3** (определение гармонической функции в духе Гурса). Функция  $f$  класса  $C^1$  в области  $U \subset \mathbb{R}^n$  называется *гармонической* в области  $U$ , если

1) функция  $f$  в каждой точке имеет второй дифференциал (другими словами, отображение  $\operatorname{grad} f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  в каждой точке имеет первый дифференциал);

2) справедливо тождество  $\Delta f \equiv 0$ .

**Задача 15.6.** Всякая функция, являющаяся гармонической в смысле определения 3, является гармонической в интегральном смысле.

*Указание.* Можно действовать, как в задаче 15.5, но вместо классической формулы Стокса нужно использовать ее обобщенный вариант.

Гармоническая функция в смысле классического определения, разумеется, является гармонической в смысле определения 3. В задачах 15.7, 15.8 мы проверим, что функция, удовлетворяющая интегральному определению гармонической функции, автоматически является гладкой. Поэтому определения 1, 2 и 3 эквивалентны.

**Задача 15.7.** Пусть  $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  — такая непрерывная функция, что

1)  $\varphi$  зависит лишь от расстояния точки до нуля, т. е.  $\varphi(x) = g(\|x\|)$ ;  
 2)  $\varphi$  обращается в нуль во всех достаточно удаленных от нуля точках;

$$3) \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n \equiv 1.$$

Проверить, что если для функции  $f$  выполнено тождество  $\text{Mid}(R, a)f \equiv f(a)$ , то  $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x-a) dx \equiv f(a)$ . (Здесь предполагается, что область  $U$  содержит шары  $B_{R,a}$ , о которых идет речь в первом тождестве, и носители функций  $\varphi(x-a)$ , о которых идет речь во втором тождестве.)

**Задача 15.8.** Если для функции  $f$  справедливо тождество  $\text{Mid}(R, a) \equiv f(a)$ , то функция  $f$  гладкая.

*Указание.* Воспользоваться тождеством из задачи 15.7 для гладкой функции  $\varphi(x-a)$ .

**Задача 15.9.** 1) Для гармонических функций справедлив принцип максимума: если гармоническая функция достигает максимума во внутренней точке связной области  $U$ , то эта функция постоянна.

*Указание.* Воспользоваться интегральным определением гармонической функции.

2) Для субгармонических функций также справедлив принцип максимума: если субгармоническая функция достигает максимума во внутренней точке связной области  $U$ , то эта функция постоянна.

**Задача 15.10.** Пусть функции  $f_1, \dots, f_n, \dots$  в области  $U$  равномерно сходятся к функции  $f$ . Тогда

1) если функции  $f_i$  гармонические, то функция  $f$  тоже гармоническая в  $U$ ;

2) если функции  $f_i$  субгармонические, то функция  $f$  тоже субгармоническая в  $U$ .

*Указание.* Воспользоваться интегральным определением гармонической функции.

Пусть на границе  $\partial U$  ограниченной области  $U$  задана вещественная непрерывная функция  $h: \partial U \rightarrow \mathbb{R}$ . *Задача Дирихле* состоит в нахождении непрерывной в замыкании  $U$  и гармонической в  $U$  функции  $f$  такой, что  $f$  совпадает с  $h$  на  $\partial U$ .

**Задача 15.11.** Задача Дирихле имеет не более одного решения.

Отметим, что задача Дирихле разрешима для широкого класса областей (не обязательно односвязных).

## 16. Гармонические функции на плоскости и аналитические функции

Вещественная и мнимая части аналитической функции являются гармоническими функциями. (Это несложно проверить, используя как классическое, так и интегральное определение гармонических функ-

ций.) Этот факт объясняет роль аналитических функций в математической физике — во многих физических задачах гармонические функции зависят лишь от двух переменных, и теория таких функций сводится к ТФКП.

**Задача 16.1.** Вещественная и мнимая части аналитической функции в области  $U$  являются  $C^2$ -гладкими функциями и удовлетворяют уравнению Лапласа  $\Delta f \equiv 0$ .

*Указание.* Воспользоваться гладкостью аналитических функций и уравнениями Коши–Римана.

**Задача 16.2.** Вещественная и мнимая части аналитической в области  $U$  функции удовлетворяют тождеству

$$\operatorname{Mid}(R, a)f \equiv f(a).$$

*Указание.* Воспользоваться интегральной формулой Коши.

**Задача 16.3.** Если  $u$  — гармоническая в односвязной области  $U$  функция, то существует такая функция  $v$  (определенная с точностью до произвольной постоянной), что функция  $f = u + iv$  является аналитической в области  $U$ .

*Указание.* Из уравнений Коши–Римана можно вычислить частные производные  $\frac{\partial v}{\partial x}$  и  $\frac{\partial v}{\partial y}$  функции  $v$ , используя частные производные функции  $u$ . Система  $\frac{\partial v}{\partial x} = p$ ,  $\frac{\partial v}{\partial y} = q$  разрешима в односвязной области  $U$ , если и только если  $\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}$ . Проверить, что в нашей ситуации условие разрешимости эквивалентно тождеству  $\Delta u \equiv 0$ .

**Задача 16.4.** Пусть  $g$  — гармоническая функция в области  $V \subset \mathbb{C}$ , и пусть  $f: U \rightarrow V$  — аналитическая функция. Тогда функция  $g(f)$  является гармонической в области  $U$ .

*Указание.* См. задачи 16.1–16.3

**Задача 16.5.** Показать, что для всякого тригонометрического многочлена  $h(\alpha) = c_0 + \sum_{k=0}^n (a_k \sin k\alpha + b_k \cos k\alpha)$  задача Дирихле разрешима.

*Указание.* Если  $|z| = 1$ ,  $\alpha = \arg z$ , то  $\operatorname{Re} z^k = \cos k\alpha$ ,  $\operatorname{Im} z^k = \sin k\alpha$ .

**Задача 16.6.** Используя плотность тригонометрических многочленов в множестве непрерывных функций на окружности, доказать разрешимость задачи Дирихле для круга.

*Указание.* Воспользоваться тем, что предел равномерно сходящихся гармонических функций является гармонической функцией (см. задачу 15.10) и принципом максимума.

Зная априори, что задача Дирихле для круга разрешима, несложно написать ее решение в явном виде. Пусть мы ищем значение в точ-

ке  $a$ ,  $|a| < 1$ , решения задачи Дирихле  $\Delta u \equiv 0$ ,  $u|_{|z|=1} = h$  в круге  $|z| \leq 1$ . Переведем точку  $a$  в точку 0 преобразованием  $\varphi_a(z) = \frac{z-a}{\bar{a}z-1}$ . Функция  $v(z) = u(\varphi_a^{-1}(z))$  гармонична в круге  $|z| < 1$ , и ее значение в нуле совпадает с искомым числом  $u(a)$ . Имеем

$$u(a) = v(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{|z|=1} h(\varphi_a^{-1}(z)) |dz| = \frac{1}{2\pi} \int_{|\xi|=1} h(\xi) \left| \frac{d}{d\xi} \varphi_a(\xi) \right| |d\xi|.$$

**Задача 16.7** (формула Пуассона). 1) Явно вычислить ядро Пуассона

$$\left| \frac{d}{d\xi} \varphi_a(\xi) \right| |d\xi|,$$

зависящее от точки  $\xi$  на единичной окружности  $|\xi| = 1$  и точки  $a$  внутри единичного круга.

2) Проверить, что ядро Пуассона является вещественно-аналитической функцией (т.е. ряд Тейлора этой функции является сходящимся) от координат  $x(a)$ ,  $y(a)$  в точке  $a$ .

3) Из вещественной аналитичности ядра Пуассона как функции от  $a$  вытекает вещественная аналитичность гармонической функции двух переменных (не обязательно в круге, а в любой области плоскости). Почему?

Отметим, что задача Дирихле в многомерном шаре так же явно решается при помощи явно выписываемого ядра Дирихле, являющегося вещественно-аналитической функцией. Отсюда вытекает, что гармонические функции многих переменных являются вещественно-аналитическими функциями.

**Задача 16.8.** Для всякой односвязной области  $U \subset \mathbb{C}^2$ , для которой выполнены условия непрерывной продолжаемости до границы отображения Римана (см. п. 12), задача Дирихле разрешима. Более того, если явно написано отображение Римана области  $U$  в единичный круг, то для всякой задачи Дирихле в области  $U$  можно написать явное решение. Почему?

**Задача 16.9.** На комплексной плоскости оператор Лапласа  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$  представим в виде  $\Delta = 4 \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ , где  $z = x + iy$ , а операторы  $\frac{\partial}{\partial z}$ ,  $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$  определены в п. 4.

## 17. Субгармонические функции и теорема единственности

**Задача 17.1** (формула Йенсена). Пусть функция  $f$  голоморфна в замыкании круга радиуса  $R$  с центром в точке 0. Доказать следующую

формулу:

$$\frac{1}{2\pi R} \int_{|z|=R} \ln |f| \, ds = \ln |f(0)| + \sum_{f(z_i)=0, |z_i|<R} \ln \frac{R}{|z_i|},$$

где нули функции  $f$  входят в последнюю сумму с учетом кратности.

*Указание.* Провести доказательство в три этапа:

1) доказать, что если формула Йенсена верна для функций  $f$  и  $g$ , то она верна и для произведения  $fg$ ;

2) доказать формулу Йенсена для функций, не имеющих нулей в рассматриваемом круге;

3) для каждой точки  $a$  круга построить явно такую функцию  $f$  (голоморфную в замыкании данного круга), что  $f$  обращается в нуль только в точке  $a$ , а модуль  $f$  тождественно равен 1 на граничной окружности. Проверить формулу для таких функций.

Объединяя все три пункта, доказать утверждение задачи.

Нам понадобится немного расширить определение субгармонической функции на плоскости, разрешив функции принимать значение  $-\infty$ . Ниже под словами «субгармоническая функция» мы имеем в виду следующее чуть более общее понятие.

**Определение.** Пусть  $U$  — область в комплексной плоскости, и  $A \subset U$  — дискретное подмножество. Рассмотрим вещественнозначную функцию  $f$  на  $U \setminus A$ , которая в точках множества  $A$  «равна  $-\infty$ ». Такая функция считается непрерывной, если функция  $e^f: U \rightarrow R$ , доопределенная в точках множества  $A$  числом 0, непрерывна. Функция такого вида называется *субгармонической*, если для всякого круга  $|z - a| \leq R$ , целиком лежащего в области  $U$ , выполнено неравенство

$$\frac{1}{2\pi R} \int_{|z-a|=R} f(z) \, ds \geq f(a).$$

Если окружность  $|z - a| = R$  содержит точки множества  $A$ , то предполагается, что интеграл, стоящий в левой части неравенства, существует как несобственный интеграл.

**Задача 17.2.** Обобщить формулу Йенсена на случай, когда окружность  $|z| = R$  содержит нули функции  $f(z)$ . Доказать, что функция  $\ln |f(z)|$  субгармонична в области  $U$ , в которой функция  $f$  аналитична.

**Задача 17.3.** Обобщить формулу Йенсена на случай мероморфных функций.

**Задача 17.4** (принцип максимума для субгармонических функций). Рассмотрим функцию  $f$ , субгармоническую в связной области  $G$ . Пред-

положим, что существует такая точка  $a \in G$ , что для любой точки  $z \in G$  выполнено неравенство  $f(a) \geq f(z)$ . Доказать, что  $f$  — константа.

Задачи 17.5–17.7 представляют собой варианты принципа максимума.

**Задача 17.5.** Рассмотрим ограниченную сверху субгармоническую функцию  $u$  в области  $G$ . Обозначим через  $\Gamma$  границу области  $G$ . Для каждой точки  $a$  границы положим

$$\bar{u}(a) = \overline{\lim_{z \rightarrow a, z \in G}} u(z).$$

Доказать, что для произвольной точки  $x$  области  $G$  выполнено неравенство  $u(x) \leq \sup_{a \in \Gamma} \bar{u}(a)$ .

**Задача 17.6.** В условиях предыдущей задачи предположим, что область  $G$  ограничена и ее диаметр равен  $D$ . На границе  $\Gamma$  области  $G$  отметим произвольные точки  $a_1, \dots, a_k$ . Пусть  $\tilde{\Gamma} = \Gamma \setminus \{a_1, \dots, a_k\}$ . Доказать, что для любой точки  $x$  области  $G$  выполнено неравенство  $u(x) \leq \sup_{a \in \tilde{\Gamma}} \bar{u}(a)$ .

*Указание.* Воспользоваться принципом максимума для функции

$$u_\varepsilon = u + \varepsilon \sum \ln \frac{|x - a_i|}{D}.$$

В качестве  $\varepsilon$  здесь нужно рассматривать произвольное положительное число.

**Задача 17.7.** Перенести утверждение предыдущей задачи на неограниченную область  $G$ , дополнение которой до сферы Римана имеет хотя бы одну внутреннюю точку.

**Задача 17.8.** Если отбросить требования ограниченности сверху субгармонической функции, то утверждение задачи 17.6 станет неверным. Привести пример ненулевой гармонической в верхней полуплоскости функции, которая непрерывно продолжается на вещественную ось и тождественно равна нулю на этой оси.

**Задача 17.9.** Рассмотрим замкнутый круг  $B$  на комплексной прямой.

1) Отметим на граничной окружности различные точки  $A_1$  и  $A_2$ . Предъявить такую ограниченную гармоническую во внутренности круга  $B$  функцию, что она непрерывна вплоть до граничной окружности за исключением точек  $A$  и  $B$ , равна 1 на дуге  $AB$  и равна 0 на дополнительной дуге. Доказать, что функция, удовлетворяющая условиям задачи, единственна. Нарисовать картину ее линий уровня.

*Указание.* Функция  $\frac{1}{2\pi} \arg z$  гармонична и ограничена в верхней полуплоскости. На вещественной прямой она равна нулю для положительных  $z$  и единице для отрицательных  $z$ .

2) Предположим теперь, что граничная окружность разбита на  $n$  дуг  $l_1, \dots, l_n$ . Сформулировать и решить задачу, аналогичную п. 1).

**Задача 17.10.** Пусть  $B$  — замкнутый круг на комплексной прямой. Отметим на граничной окружности дугу между различными точками  $A_1$  и  $A_2$ . Для каждого действительного числа  $A$  рассмотрим такую ограниченную гармоническую во внутренности круга  $B$  функцию  $f_A$ , что  $f_A$  тождественно равна  $A$  на дуге  $A_1A_2$  и тождественно равна некоторой константе  $C$  (фиксированной для всех функций) на дополнительной дуге. Доказать, что для любой внутренней точки круга  $B$  выполнено равенство

$$\lim_{A \rightarrow -\infty} f_A(x) = -\infty.$$

**Определение.** Точку  $a$ , принадлежащую границе области  $G$ , назовем *простой граничной точкой* этой области, если каждая достаточно малая окружность с центром в точке  $a$  содержит дугу, целиком лежащую в дополнении к  $G$ .

**Задача 17.11** (граничная теорема единственности). Пусть  $f: G \rightarrow \mathbb{C}$  — ограниченная аналитическая функция в области  $G$ , и пусть  $a$  — простая граничная точка этой области. Если для некоторого  $\varepsilon > 0$  выполнено равенство  $\lim_{z \rightarrow b} f(z) = 0$  для всякой точки  $b \in \partial G$  такой, что  $|a - b| < \varepsilon$ , то  $f(z) \equiv 0$ .

*Указание.* На достаточно малом круге  $B$  с центром в точке  $a$  рассмотреть гармоническую функцию  $u_A$ , равную  $-A$  на некоторой дуге  $\Gamma_1$  окружности  $\partial B$ , лежащей вне области  $G$ , и равную  $\ln|c|$  на дополнительной дуге окружности  $\partial B$ . Здесь  $A$  — большое отрицательное число и  $c = \sup_{z \in G} |f(z)|$ . Доказать, что при  $z \in B \cap G$  справедливо неравенство  $u_A(z) \geq \ln|f(z)|$ . Воспользовавшись задачей 17.9, показать, что  $f(z) \equiv 0$ .

**Задача 17.12.** Обобщить граничную теорему единственности на любую (не обязательно простую) граничную точку  $a$ , предполагая, что область  $G$  односвязна.

*Указание.* Воспользоваться (локально) отображением  $\sqrt{z - a}$ . Проверить, что образ точки  $a$  будет простой граничной точкой для образа области  $G$ .

## ДОПОЛНЕНИЕ 2

### 18. Формула Стокса для областей с гладкой границей

После того как классическая или обобщенная формула Стокса доказана для кубов, ее легко доказать для областей в  $\mathbb{R}^n$  (и для ори-

ентированных гладких многообразий) с гладкой границей. Для этого достаточно воспользоваться разбиением единицы. Напомним, как это делается.

**Определение.** Пусть  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  — компакт, и  $U_\alpha$  — любое покрытие этого компакта открытыми множествами. *Разбиением единицы*, согласованным с покрытием  $U_\alpha$ , называется конечное множество гладких функций  $\varphi_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , определенных в некоторой окрестности компакта  $X$ , таких, что

- 1) ограничение функции  $\varphi_1 + \dots + \varphi_N$  на  $X$  тождественно равно единице;
- 2) для каждой функции  $\varphi_i$  существует открытое множество  $U_{\alpha_i}$  из покрытия такое, что функция  $\varphi_i$  тождественно равна нулю на дополнении к множеству  $U_{\alpha_i}$

**Задача 18.1.** Для всякого компакта  $X \subset \mathbb{R}^n$  и всякого его покрытия  $U_\alpha$  существует согласованное с этим покрытием разбиение единицы  $\varphi_1, \dots, \varphi_N$ , в котором  $\varphi_i$  — бесконечно гладкие функции.

*Указание.* 1) Существует неотрицательная бесконечно гладкая функция в  $\mathbb{R}^n$ , равная единице в круге радиуса  $R_0$  и равная нулю вне круга радиуса  $R_1$  с тем же центром, где  $R_1 > R_0$ ;

2) используя функцию из 1) и компактность  $X$ , построить конечный набор функций  $g_1, \dots, g_N$ , каждая из которых равна нулю вне некоторого множества  $U_{\alpha_i}$ , но сумма  $F = g_1 + \dots + g_N$  строго больше нуля на  $X$ ;

3) функции  $\varphi_i = g_i/F$  дают искомое разбиение единицы.

*Локальной картой* около точки  $a \in \mathbb{R}^n$  называется окрестность  $U_a$  точки  $a$  вместе с диффеоморфизмом  $x: U_a \rightarrow V$  на область  $V$  в  $\mathbb{R}^n$  таким, что  $x(a) = 0$ . Компоненты  $x_1, \dots, x_n$  вектор-функции  $x$  называются *локальными координатами* в карте  $U_a$ .

**Определение.** Граница  $\partial U$  области  $U$  в  $\mathbb{R}^n$  называется *гладкой* в окрестности точки  $a \in \partial U$ , если существует локальная карта в окрестности этой точки такая, что в локальных координатах  $x_1, \dots, x_n$  замыкание области задается неравенством  $x_n \geq 0$ .

**Задача 18.2.** Пусть замыкание области  $U$  в  $\mathbb{R}^n$  задано неравенством  $f \geq 0$ , где  $f$  — гладкая функция, дифференциал  $df$  которой не обращается в нуль ни в одной точке поверхности  $f = 0$ . Доказать, что область  $U$  имеет гладкую границу.

Пусть  $U$  — ограниченная область в  $\mathbb{R}^n$  с гладкой границей. Фиксируем локальные координаты  $U_a$  около каждой точки  $a$  замыкания области  $U$ . Для граничных точек  $a \in \partial U$  мы предполагаем, что локальная система координат около точки  $a$  удовлетворяет условиям предыдущего определения. Рассмотрим стандартные кубы  $\Delta^\varepsilon$  и  $\tilde{\Delta}^\varepsilon$  в пространстве  $\mathbb{R}^n$ , определенные неравенствами  $-\varepsilon \leq x_1 \leq \varepsilon, \dots, -\varepsilon \leq x_n \leq \varepsilon$  и

$-\varepsilon \leq x_1 \leq \varepsilon, \dots, -\varepsilon \leq x_{n-1} \leq \varepsilon, 0 \leq x_n \leq 2\varepsilon$ . Подходящим кубом  $\Delta_a^\varepsilon$  для точки  $a$  в локальной карте  $U_a$  с координатами  $x: U_a \rightarrow \mathbb{R}^n$  будем называть множества  $x^{-1}(\Delta_a^\varepsilon)$ , если  $a$  — внутренняя точка области  $U_a$ , и  $x^{-1}(\tilde{\Delta}_a^\varepsilon)$ , если  $a$  — граничная точка области  $U_a$ . При этом предполагается, что образ  $x(U_a)$  карты  $U_a$  целиком содержит соответствующий куб  $\Delta_a^\varepsilon$  или  $\tilde{\Delta}_a^\varepsilon$ .

**Задача 18.3.** Пусть  $U$  — ограниченная область в  $\mathbb{R}^n$ ,  $a \in U$  — точка в этой области и  $\Delta_a^\varepsilon$  — подходящий куб около точки  $a$ . Пусть  $\omega$  —  $(n-1)$ -форма в  $\mathbb{R}^n$ , равная нулю вне куба  $\Delta_a^\varepsilon$  и удовлетворяющая условиям обобщенной формулы Стокса (т.е. коэффициенты формы  $\omega$  имеют дифференциалы, а форма  $d\omega$  непрерывна). Тогда  $\int_U d\omega = \int_{\partial U} \omega = 0$ .

**Задача 18.4.** Пусть  $U$  — ограниченная область в  $\mathbb{R}^n$ ,  $a \in \partial U$  — точка границы этой области и  $\tilde{\Delta}_a^\varepsilon$  — подходящий куб около точки  $a$ . Пусть  $\omega$  —  $(n-1)$ -форма в  $\mathbb{R}^n$ , равная нулю вне куба  $\tilde{\Delta}_a^\varepsilon$  и удовлетворяющая условиям обобщенной формулы Стокса. Тогда  $\int_{\partial U} \omega = \int_U d\omega$ .

**Задача 18.5.** Пусть  $\omega$  — форма, удовлетворяющая условиям обобщенной формулы Стокса в замыкании ограниченной области  $U$  с гладкой границей  $\partial U$ , и пусть  $\varphi_1, \dots, \varphi_N$  — некоторое разбиение единицы на большом шаре  $B$ , содержащем замыкание области  $\bar{U}$  в своей внутренности, такое, что для каждой формы  $\omega_i = \varphi_i \omega$  справедлива формула Стокса  $\int_{\partial U} \omega_i = \int_U d\omega_i$ . Тогда  $\int_{\partial U} \omega = \int_U d\omega$ .

**Задача 18.6.** Доказать обобщенную формулу Стокса для произвольной компактной области с гладкой границей.

*Указание.* Достаточно подобрать разбиение единицы на большом шаре  $B$ , для которого выполняются условия задачи 18.5. Для этого достаточно взять разбиение единицы, согласованное с покрытием шара  $B$  следующими открытыми множествами  $V_p$ . Для всякой точки  $p \in B$  определим  $V_p$  следующим образом:

1) если  $p$  не лежит в замыкании области  $U$ , то в качестве  $V_p$  можно взять любое открытое множество, для которого  $p \in V_p$ ,  $V_p \cap \bar{U} = \emptyset$ ;

2) если  $p$  принадлежит замыканию области  $\bar{U}$ , сначала фиксируем локальную карту  $x_1, \dots, x_n$  около точки  $p$  и подходящий куб  $\Delta_p^\varepsilon$  для точки  $p$  и этой карты. После этого в качестве  $V_p$  достаточно взять любое открытое множество, для которого: 1)  $p \in V_p$ , 2)  $V_p \subset B$ , 3)  $V_p \cap \bar{U} \subset \Delta_p^\varepsilon$ .

Проверить, что выполнимость условий задачи 18.5 для разбиения единицы, согласованного с покрытием  $V_p$ , вытекает из задач 18.3 и 18.4.

## Оглавление

|                                                                             |    |
|-----------------------------------------------------------------------------|----|
| Предисловие . . . . .                                                       | 3  |
| 1. Теорема Лагранжа для функций множеств . . . . .                          | 7  |
| 2. Формула Стокса для линейных форм в единичном кубе . . . . .              | 9  |
| 3. Обобщенная формула Стокса в единичном кубе . . . . .                     | 11 |
| 4. Линейная алгебра и теорема Коши . . . . .                                | 12 |
| 5. Форма $\frac{dz}{z}$ и интегральная формула Коши . . . . .               | 14 |
| 6. Локальные свойства аналитических отображений . . . . .                   | 16 |
| 7. Инверсия . . . . .                                                       | 17 |
| 8. Сфера Римана . . . . .                                                   | 20 |
| 9. Вычеты . . . . .                                                         | 22 |
| 10. Геометрия Лобачевского и ТФКП . . . . .                                 | 23 |
| 11. Компактность функциональных множеств<br>и теорема Римана . . . . .      | 26 |
| 12. Продолжаемость до границы . . . . .                                     | 27 |
| 13. Римановы поверхности аналитических функций . . . . .                    | 29 |
| 14. Принцип симметрии Римана–Шварца. Теорема Пикара . . . . .               | 34 |
| 15. Гармонические функции многих переменных . . . . .                       | 36 |
| 16. Гармонические функции на плоскости и аналитические<br>функции . . . . . | 39 |
| 17. Субгармонические функции и теорема единственности . . . . .             | 41 |
| 18. Формула Стокса для областей с гладкой границей . . . . .                | 44 |

## О НЕЗАВИСИМОМ МОСКОВСКОМ УНИВЕРСИТЕТЕ

НМУ — негосударственное высшее учебное заведение для подготовки профессиональных математиков.

Занятия в НМУ проводятся в вечернее время (обычно с 17.30). Это связано с тем, что многие наши студенты совмещают обучение в НМУ с занятиями в другом вузе (как правило — но не исключительно! — на мехмате МГУ). Наши занятия по физике и математике может посещать любой желающий (не обязательно студент или аспирант НМУ).

Обучение в НМУ бесплатное. Студентам выплачивается стипендия.

Наш адрес:

119002, Москва, Б. Власьевский пер., д. 11.

Телефон:

(095) 241-4086.

Факс:

(095) 291-6501.

E-mail:

`ium@mccme.ru`

Подробности см. на сайте <http://ium.mccme.ru/>