МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Южно-Российский государственный университет экономики и сервиса

В.И. Филиппенко

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОЛЯ

Электронное учебное пособие для студентов 2 – 3 курсов

всех специальностей заочной и дистанционной форм обучения

Шахты – 2003

Составитель:
кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики ЮРГУЭС
В.И. Филиппенко

В пособии рассмотрены основные понятия теории поля: градиент, дивергенция, ротор, циркуляция. Даны приложения теорем Гаусса – Остроградского и Стокса. Указаны условия потенциальности и соленоидальности векторных полей. Приведены детальные решения типовых примеров на вычисление числовых характеристик векторного поля. Подобрано достаточное количество примеров для самостоятельного решения студентами.

Пособие предназначено для студентов-заочников ЮРГУЭС.

© Южно-Российский государственный университет экономики и сервиса. 2003
© Филиппенко В.И., 2003 г.

Содержание

Введение…….…….4
1. Скалярные и векторные поля……...……..……4
2. Циркуляция векторного поля вдоль кривой……..…….....……8
3. Формула Гаусса-Остроградского. Дивергенция…….……..…….10
4. Формула Стокса…….……14
5. Ротор векторного поля…….……...……..16
6. Потенциальное поле и его свойства……19
7. Соленоидальное поле и его свойства……..22
8. Векторный потенциал……..……23
Ответы……25
Литература……..27

ВВЕДЕНИЕ

Физика в своем историческом развитии постепенно превратилась из науки описательной в науку точную. Для характеристики различных явлений и процессов, происходящих в природе и технике, физики все шире используют математические методы, или, как принято говорить, соответствующий математический аппарат. Для этой цели пришлось прежде всего ввести меру каждого физического свойства. Пока физики имели дело с простейшими свойствами тел, в качестве меры каждого из них можно было ограничиться скалярными величинами, обычно показывающими, во сколько раз мера данного свойства рассматриваемого тела больше некоторого единичного масштаба. Так были введены такие скалярные величины, как длина, площадь, объем, масса, время, температура, электрический заряд, энергия и т.п.

Со временем выяснилось, что для количественного описания скорости движения, изменения этой скорости, взаимодействия тел и т.п. скалярные величины не подходят. В этих случаях оказались пригодными более сложные математические величины — направленные отрезки, или векторы. Развитие количественных методов показало, что одно и то же физическое свойство в разных точках исследуемого объекта может принимать различные значения, и поэтому для их математического описания необходимо знать совокупность значений соответствующей величины во всех точках рассматриваемого объекта. Так в физике постепенно сложилось представление о математическом поле – области пространства, каждой точке которого соответствует определенное значение некоторой физической величины.

Поля бывают скалярные и векторные. Каждое из них в свою очередь может быть стационарным (если физическая величина в каждой точке области со временем не меняется) или нестационарным. Введение понятия поля в физике сыграло такую же прогрессивную роль, как в свое время появление в математике переменной величины.

1. Скалярные и векторные поля

Множество E точек рассматриваемого пространства, совместно с приписанными этим точкам числами, называется скалярным полем. Скалярным полем часто называют и саму функцию F(M), породившую это поле на точечном множестве E. Если E – множество точек на плоскости, то скалярное поле называется плоским; если же E – множество точек в трехмерном пространстве, то поле называется пространственным.

Примеры скалярных полей различной природы доставляет нам физика. Так, можно говорить о скалярном поле температур в пространстве, занятом нагретым телом (в каждой точке этого пространства температура имеет определенное значение); можно говорить о скалярном поле электрического потенциала в пространстве вокруг электрического заряда и т.п. Известные из физики изотермы (линии равной температуры), изобары (линии равного давления), эквипотенциальные линии (линии равного потенциала) являются примером линий уровня в различных плоских физических скалярных полях.

Для пространственного скалярного поля F(M) = F(x,y,z) уравнение F(x,y,z) = C с переменным параметром C определяет семейство поверхностей уровня, т.е. семейство поверхностей во всех точках каждой из которых скалярное поле F(M) имеет одно и тоже значение. Поверхности уровня могут вырождаться в линии и точки. Для сферически симметричного поля, т.е. такого, что значение F(M) зависит только от расстояния точки M до некоторой фиксированной точки N, любая сфера с центром в точке N является поверхностью уровня. Если F(M) = const во всей области E, то множество точек, удовлетворяющих уравнению F(x,y,z) = C, либо пусто, либо совпадает со всей областью E.

Градиент скалярного поля u(M) = u(x,y,z) определяется равенством

$$grad\ u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}\,. \qquad (1)$$

В математической теории поля широко используют символическое выражение, обозначаемое $\vec{\nabla}$

("набла"): $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$, напоминающее по форме вектор, разложенный по базисным ортам $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, где вместо координат вектора записаны операторы дифференцирования $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$. Это выражение называют векторным дифференциальным оператором или оператором Гамильтона.

Если каждой точке M данной области E соответствует определенный вектор $\vec{a}(M)$, то говорят, что в области E задано векторное поле. В декартовой системе координат векторное поле $\vec{a}(M)$ задается тремя функциями P,Q,R, определенными в области E

$$\vec{a}(M) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}.$$

Здесь и в дальнейшем будем предполагать, что эти функции во всей области непрерывны вместе с частными производными. Для плоского векторного поля:

$$\vec{a}(M) = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}.$$

Векторной линией данного поля $\vec{a}(M)$ называют такую линию ℓ, в каждой точке которой вектор $\vec{a}(M)$ имеет направление касательной к этой линии. Через каждую точку векторного поля проходит (при условии, что $|\vec{a}'(M)| \neq 0$) одна векторная линия. Совокупность всех векторных линий определяется системой дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx}{P(x,y,z)} = \frac{dy}{Q(x,y,z)} = \frac{dz}{R(x,y,z)}.$$

Векторные линии характеризуют векторные поля геометрически и дают известную информацию о структуре этого поля. Так, если $\vec{a}(M)$ – стационарное поле скоростей текущей жидкости, то в этом поле векторные линии, очевидно, будут являться траекториями частиц жидкости; называются они в таком случае линиями тока. В векторном поле $\vec{a}(M) = grad\, F(M)$ векторные линии нормальны в каждой точке поверхностям уровня *F(x,y,z) = C;* вдоль этих линий функция F(M) изменяется быстрее всего. В случае плоского векторного поля семейство векторных линий определяется уравнением

$$\frac{dx}{P(x,y)} = \frac{dy}{Q(x,y)};\ dz = 0.$$

Примеры

1. Найти линии уровня плоского поля u=xy.
Решение. Линии уровня определяются уравнением xy=C и представляют собой равносторонние гиперболы. При C = 0 линиями уровня являются координатные оси Ox и Oy.
2. Найти поверхности уровня скалярного поля:

$$u = arctg\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}.$$

Решение. Поверхности уровня определяются уравнением $arctg\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}=C$. Отсюда находим $\frac{x^2+y^2}{z^2}=a^2$, *где* $a=tg\,C, -\frac{}{2}<C<\frac{}{2}$. Мы видим, что поверхностями уровня являются круговые конусы $x^2+y^2-a^2z^2=0$, ось симметрии которых совпадает с осью Oz.

3. Найти поверхности уровня скалярного поля:

$$u=\frac{1}{2x+3y-4z+1}.$$

Решение. Скалярное поле определено для всех точек пространства, кроме точек, расположенных на плоскости:

$$2x+3y-4z+1=0$$

Поверхности уровня определяются уравнением

$$2x+3y-4z+1=C,$$

описывающим семейство параллельных плоскостей:

$$2x+3y-4z+C_1=0\ (C_1=1-C).$$

2. Найти поверхности уровня сферически симметричного поля:

$$u=\cos r,\ (r=\sqrt{x^2+y^2+z^2})$$

Решение. Очевидно, что все сферы с центром в начале координат являются поверхностями уровня (при $r=const$ и $u=const$). Для нахождения не просто поверхностей, на которых u=const, а всего множества точек с заданным значением поля, нужно решить уравнение $\cos r=C\ (-1\le C\le 1)$.
Имеем: $r=\pm arccosC+2\pi n\ (n=0, \pm1, \pm2,...)$. Отбрасывая отрицательные значения r, найдем, что множество точек, для которых значение поля равно C, состоит из совокупности сфер радиусов $arccos\ c$, $arccos\ c+2\pi n$, $-arccos\ c+2\pi n$, где n – целое число. Центры всех этих сфер совпадают с началом координат.
3. Найти градиент скалярных полей:

а) u(P)=x; б) u(P)=y; в) u(P)=z;

Решение. Применим формулу (1):
а) $\vec{\nabla}u=\vec{\nabla}x=\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i}=\vec{i}$. *Аналогично*: *б)* $\vec{\nabla}y=\vec{j}$; *в)* $\vec{\nabla}y=\vec{k}$.

6. Найти градиент скалярного поля $u(x,y)=\sqrt{4+x^2+y^2}$ в точке *M(2; 1).*

Решение. По формуле *(1):* $grad\ u=\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\vec{j}$. Вычислим частные производные $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$ в указанной точке: $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{4+x^2+y^2}}=\frac{2}{3}$; $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{4+x^2+y^2}}=\frac{1}{3}$; тогда: $grad\ u=\frac{2}{3}\vec{i}+\frac{1}{3}\vec{j}$.

7. Найти $grad(\vec{c}, \vec{r})$, *где* $\vec{c}$ – *постоянный вектор*.

Решение. Пусть $\vec{c} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ *; тогда*

$$(\vec{c}, \vec{r}) = \alpha x + \beta y + \gamma z;\ grad(\vec{c}, \vec{r}) = \vec{\nabla}(\vec{c}, \vec{r}) = \vec{\nabla}(\alpha x + \beta y + \gamma z) = \alpha \vec{\nabla} x + \beta \vec{\nabla} y + \gamma \vec{\nabla} z,$$

с учетом того, что $\vec{\nabla} x = \vec{i}, \vec{\nabla} y = \vec{j}, \vec{\nabla} z = \vec{k}$ получим $grad(\vec{c}, \vec{r}) = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k} = \vec{c}$.

8. Найти векторные линии поля $\vec{F}(M) = ax\vec{i} - ay\vec{j} - 2az\vec{k}$ $(a = const)$.

Решение. Дифференциальные уравнения векторных линий в данном случае имеют вид:

$$\frac{dx}{ax} = -\frac{dy}{ay} = -\frac{dz}{2az}$$

Интегрируя уравнение $\frac{dx}{ax} = -\frac{dy}{ay}$, получим $\ln|x| + \ln|y| = \ln|c_1|$, или $xy = c_1$. Решение уравнения $\frac{dy}{ay} = \frac{dz}{2az}$ приводит к результату $\ln|y| = \frac{1}{2}\ln|z| + \frac{1}{2}\ln|c_2|$ *или* $y^2 = c_2 z$. Следовательно, векторными линиями поля являются линии пересечения гиперболических цилиндров с параболическими:

$$\begin{cases} xy = c_1; \\ y^2 = c_2 z. \end{cases}$$

9. Найти линии тока плоского потока жидкости, характеризуемого вектором скорости $\vec{a}(M) = xy\vec{i} - 2x(x-1)\vec{j}$.

Решение. Интегрируя дифференциальное уравнение векторных линий в данном случае $\frac{dx}{xy} = -\frac{dy}{2x(x-1)}$, получим $(x-1)^2 + \frac{y^2}{2} = c\ (c \geq 0)$. Это эллипсы с осями, параллельными осям координат, и с центром в точке (1, 0).

Упражнения

В следующих задачах установить область определения и найти линии и поверхности уровня скалярного поля:

10. $u = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$.

11. $u = \frac{e}{r}$ (*потенциал электрического поля*).

12. $u = \arcsin\frac{x}{\sqrt{y^2 + z^2}}$.

13. $u = \sin(x^2 - y^2)$.

14. $u = \frac{x^2 + y^2}{z}$.

15. Найти градиент скалярного поля*:*

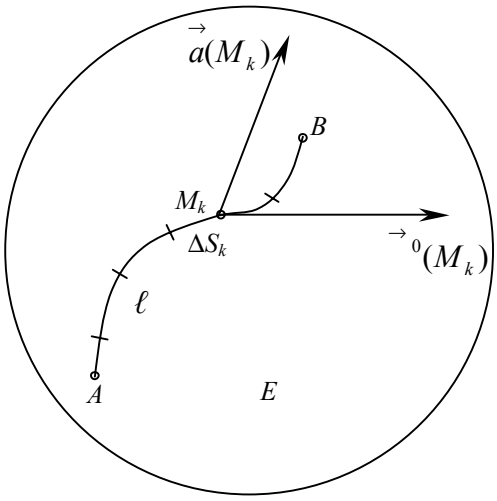
а) $u(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - xy - 4x + 2y - 4z$ *в точке* $M\ (0,0,0)$.

б) $u(x,y,z) = 3x^2 y - 3y^3 + y^4$ *в точке* $M\ (1,2,1)$.

в) $u = arctg\dfrac{y}{x}$.

16. Найти векторные линии сферически симметричного поля.

17. Найти векторные линии поля $\vec{a}(M) = \dfrac{1}{x}\vec{i} + \dfrac{1}{y}\vec{j}$.



18. Найти векторные линии поля
$\vec{a}(M) = \dfrac{1}{x^2}\vec{i} - \dfrac{1}{y^2}\vec{j} + \dfrac{1}{z^2}\vec{k}$.

19. Найти уравнения семейства векторных линий поля:
$\vec{a}(M) = (x^2 - y^2 - z^2)\,\vec{i} + 2xy\,\vec{j} + 2xz\,\vec{k}$.

20. Найти векторные линии поля
$\vec{a} = [\vec{c}, \vec{r}]$, *где* $\vec{c}$ – *постоянный вектор.* ($[\vec{c}, \vec{r}]$ – векторное произведение).

21. Найти силовые линии:
а) магнитного поля прямолинейного тока;
б) гравитационного поля точечного источника.

22. Поток несжимаемой жидкости имеет потенциал $\varphi(x,y) = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$. Найти траектории движения частиц жидкости.

23. В точке (0;0) найти направление, в котором функция $z = x\sin y + y\cos x$ изменяется быстрее всего.

24.1) Найти наибольшую крутизну подъема поверхности $z = \ln(x^2 + 4y^2)$ в точке $(6;\ 4;\ \ln 100)$.

2) Найти наибольшую крутизну подъема поверхности $z = x^y$ в точке (2; 2; 4).

25. Каково направление наибольшего изменения функции
$\varphi(x,y,z) = x\sin z - y\cos z$ в начале координат?

Рис. 1.

26.1) $z = \arcsin\dfrac{x}{x+y}$. Найти угол между градиентами этой функции в точках (1; 1) и (3; 4).

2) Даны функции $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ *и* $z = x - 3y + \sqrt{3xy}$. Найти угол между градиентами этих функций в точке (3; 4).

2. Циркуляция векторного поля вдоль кривой

Пусть векторное поле $\vec{a}(M)$ определено в пространственной области *E*. Выберем в этой области какую-нибудь кривую *ℓ*. Ориентируем эту кривую, указав на ней положительное направление, для чего установим на *ℓ* начальную точку А и конечную – В (рис. 1). Пусть $\vec{\tau}^\circ$ – орт касательной в точке М к кривой *ℓ*, совпадающей по направлению с направлением кривой.

Разобьем кривую ℓ любым образом на n "элементарных дуг" длиной ΔS_k ($k=1,2, \ldots,n$) в направлении от A к B и в произвольном месте каждой элементарной дуги возьмем по точке M_k .Для k-й элементарной дуги составим произведение

$$(\vec{a}(M_k), \vec{\tau}^{\circ}(M_k))\Delta S_k \tag{1}$$

а затем просуммируем все подобные произведения по всем k:

$$\sum_{k=1}^{n}(\vec{a}(M_k), \vec{\tau}^{\circ}(M_k))\Delta S_k \tag{2}$$

Мы пришли к интегральной сумме первого рода по кривой ℓ. Если функции P, Q, R непрерывны в области E, а $\max\Delta S_k$ – наибольшая из длин ΔS_k , то при условии $\max\Delta S_k \to 0$ сумма (2) стремится к конечному пределу, которым является криволинейный интеграл первого рода от функции $(\vec{a}(M), \vec{\tau}^{\circ}(M))$ по кривой ℓ:

$$\int_l (\vec{a}, \vec{\tau}^{\circ})ds . \tag{3}$$

Вводя в рассмотрение векторный элемент $d\vec{s} = \vec{\tau}^{\circ}ds$ линии ℓ с координатами dx, dy, dz, можем представить интеграл (3) в координатной форме:

$$\int_{\ell} (\vec{a}, \vec{\tau}^{\circ})ds = \int_{\ell}(\vec{a}, \vec{\tau}^{\circ}ds) = \int_{\ell}(\vec{a}, d\vec{s}) = \int_{\ell} Pdx + Pdy + Rdz . \tag{4}$$

Особенно большую роль играет в теории поля криволинейный интеграл (4) в случае, когда кривая ℓ, по которой он берется, замкнута, т.е. в случае когда конец B этой кривой совпадает с ее началом A. В этом случае криволинейный интеграл (4) называется циркуляцией векторного поля $\vec{a}(M)$ по замкнутой кривой ℓ и обозначается символом $Ц_{\ell}(\vec{a})$:

$$Ц_{\ell}(\vec{a}) = \oint_{\ell} (\vec{a}, \vec{\tau}^{0})ds = \oint_{\ell} (\vec{a}, d\vec{s}) = \oint_{\ell} Pdx + Pdy + Rdz . \tag{5}$$

Примеры

27. Вычислить циркуляцию плоского векторного поля $\vec{a} = y^2\vec{i} + x\vec{j}$ вдоль кривой x=3cos$t$, y=sin$t$ с обходом по часовой стрелке.

Решение. Данная кривая является эллипсом. Обход кривой совершается по часовой стрелке, поэтому t меняется от 2π до 0. Следовательно, циркуляция вычисляется следующим образом:

$Ц = \oint_{\gamma}(\vec{a}, d\vec{r}) = \int_{2\pi}^{0}(-3\sin^3 t + 3\cos^2 t)dt = \frac{3}{2}\int_{2\pi}^{0}(1-\cos 2t)dt = -3\pi$. Ответ: –3π

28. Вычислить циркуляцию вектора $\vec{a} = -y\vec{i} + x\vec{j} + \vec{k}$ вдоль окружности $x^2 + y^2 = 1, z = 0$ в положительном направлении.

Решение. Параметрическое уравнение окружности: x=cos$t$, y=sin$t$, z=0, $0 \le t \le 2\pi$. Поскольку $P = -y =$

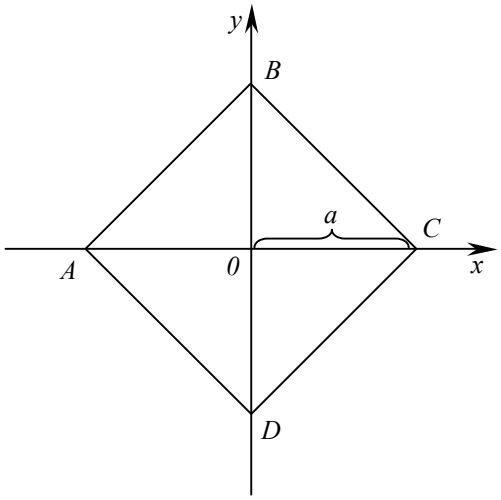
= -sin$t$, Q=x=cos$t$, R=1, dx= –sintdt, dy=costdt, dz=0, то по определению циркуляции получаем:

$$Ц = \oint_{\gamma} (-y)dx + xdy + dz = \int_0^{2\pi} ((-\sin t)(-\sin t) + \cos t \cos t)dt = \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t)dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi .$$

Ответ: 2π

29. Найти циркуляцию векторного поля $\vec{a}(M) = xyz\vec{i} + (x+y+z)\vec{j} - x^2y^2\vec{k}$ вдоль контура квадрата

ABCDA, определяемого уравнениями: $-x+y=a$; $x+y=a$; $x-y=a$; $x+y=-a$; $z=0$. См. рис. 2.



Решение. Имеем:

$(\vec{a}, d\vec{r}) = xyzdx + (x+y+z)dy - x^2y^2dz = (x+y)dy$, так как $z=0$ и $dz=0$. Разбиваем искомую циркуляцию на четыре линейных интеграла, причем в качестве параметра на каждой стороне квадрата выбираем координату y:

$$Ц = \int_{AB} (\vec{a}, d\vec{r}) + \int_{BC} (\vec{a}, d\vec{r}) + \int_{CD} (\vec{a}, d\vec{r}) + \int_{DA} (\vec{a}, d\vec{r}) = \int_{AB} (x+y)dy +$$

$$\int_{BC} (x+y)dy + \int_{CD} (x+y)dy + \int_{DA} (x+y)dy = \int_0^a (2y-a)dy + \int_a^0 ady +$$

$$+ \int_0^{-a} (2y+a)dy + \int_{-a}^0 (-a)dy = -2a^2$$

Ответ: $-2a^2$.

Упражнения

30. Найти циркуляцию поля $\vec{a} = y\vec{i}$ по контуру окружности $x=b\cos t$, $y=b+b\sin t$, расположенной в плоскости XOY.

31. Найти циркуляцию векторного поля $\vec{a} = xy\vec{i} + yz\vec{j} + zx\vec{k}$ вдоль окружности $x^2+y^2=R^2$; $z=0$.

32. Вычислить циркуляцию поля $\vec{a} = x^2y\vec{i} + \vec{j} + z\vec{k}$ вдоль окружности $x^2+y^2=R$, $z=0$.

33. Найти циркуляцию Ц вектора $\vec{a} = -y\vec{i} + x\vec{j} + c\vec{k}$ (c – постоянная):
а) вдоль окружности $x^2+y^2=1$, $z=0$;
б) вдоль окружности $(x-2)^2+y^2=1$, $z=0$.

3.Формула Гаусса-Остроградского. Дивергенция

Пусть функции $z_1(x,y)$ и $z_2(x,y)$ определены и непрерывны в ограниченной замкнутой области D и $z_1(x,y) \le z_2(x,y)$. Область $G=\{(x,y,z)|(x,y)\in D,\ z_1(x,y) \le z \le z_2(x,y)\}$ называется z–цилиндрической. Аналогично определяются x–цилиндрическая и y–цилиндрическая области. Область G называется простой, если ее можно разбить на конечное число как x–цилиндрических, так и y–цилиндрических и z-цилиндрических областей.

Теорема. Пусть функции $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$, и их частные производные $\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial z}$ непрерывны в простой замкнутой области G, ограниченной кусочно-гладкой поверхностью Φ. Тогда справедлива формула

$$\iiint_G \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz = \iint_{\Phi} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy , \qquad (1)$$

где поверхностный интеграл берется на внешней стороне поверхности *Ф*, которая служит границей *G*.
Формула (1) называется формулой Остроградского-Гаусса.

Следствие. Если функции *P, Q, R* таковы, что $\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=1$, то интеграл в левой части равенства

(1) равен объему области *G*, т.е. $\iiint\limits_G dxdydz = V(G)$, и из формулы (1) получается формула для вычисления объема области *G* с помощью интеграла по ее поверхности:

(2)
$$V(G)=\iint\limits_{\Phi} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy$$

Примеры

34. Пользуясь формулой Остроградского-Гаусса, вычислить интеграл
$\Pi=\iint\limits_{\Phi} x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy$, где Ф – внешняя сторона сферы $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$.

Решение. По формуле Остроградского-Гаусса имеем:

$$\Pi=\iiint\limits_G (2x+2y+2z)dxdydz,$$

где *G* – шар $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2\le R^2$. Для вычисления интеграла перейдем к сферическим координатам:

$x=a+\rho\cos\varphi\sin\theta$, $y=b+\rho\sin\varphi\sin\theta$, $z=c+\rho\cos\theta$, $0\le\varphi\le 2\pi$, $0\le\theta\le\pi$.

Якобиан перехода равен $\rho^2\sin\theta$. Уравнение границы области *G* имеет вид $\rho = R$. Следовательно,
$\Pi=2\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta\int_0^R\rho^2(a+b+c+\rho(\cos\varphi\sin\theta+\sin\varphi\sin\theta+\cos\theta))d\rho=\frac{8}{3}\pi(a+b+c)R^3$.

Ответ: $\frac{8}{3}\pi(a+b+c)R^3$.

Пусть задана ориентированная поверхность (*Ф*), т.е. такая поверхность, в каждой точке которой выбран единичный вектор $\vec{n}(M)=\cos\alpha(M)\vec{i}+\cos\beta(M)\vec{j}+\cos\gamma(M)\vec{k}$, меняющийся на поверхности непрерывно. В случае замкнутой поверхности в качестве $\vec{n}(M)$ будем всегда выбирать вектор внешней нормали.

Потоком П векторного поля $\vec{a}(M)$ через ориентированную поверхность (Ф) называют поверхностный интеграл (первого рода): $\Pi=\iint\limits_{(\Phi)}(\vec{a},\vec{n})ds$.

Дивергенция (расходимость) векторного поля $\vec{a}(M)$ может быть определена выражением:
$div\,\vec{a}(M)=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$, т.е. дивергенция векторного поля $\vec{a}(M)$ представляет собой

скалярное поле в области G.

Если $\vec{a} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ – разложение векторного поля $\vec{a}$ *по ортам* $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, то формулу, определяющую поток, можно записать в виде:

$$\Pi = \iint\limits_{(\Phi)} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)ds,$$

либо записать в форме поверхностного интеграла (второго рода):

$$\Pi = \iint\limits_{(\Phi)} Pdydz + Qdxdz + Rdxdy.$$

Теперь теорему Остроградского-Гаусса можно сформулировать следующим образом: поток векторного поля через замкнутую поверхность равен тройному интегралу от дивергенции векторного поля по объему, ограниченному этой поверхностью.

35. Найти поток векторного поля $\vec{a} = y\vec{i} - x\vec{j} + z\vec{k}$ через замкнутую поверхность (Φ), состоящую из поверхности конуса $x^2+y^2=z^2$ и плоскости z=1. См. рис 3.

Решение. Имеем $div\,\vec{a}(M) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x}y + \frac{\partial}{\partial y}(-x) + \frac{\partial}{\partial z}z = 1$.

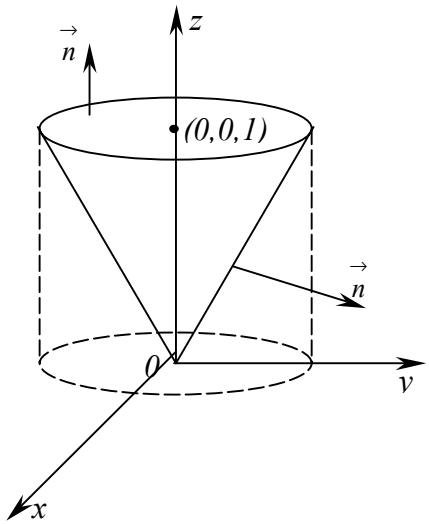


Рис. 3.

Следовательно, $\Pi = \iiint\limits_{(G)} div\,\vec{a}\,dv = \iiint\limits_{(G)} dv = V$, где V–объем конуса.

Так как $V = \frac{1}{3}\ R^2H$, то $\Pi = \frac{1}{3}$. Ответ: π/3.

36. Найти поток векторного поля $\vec{a} = xy^2\vec{i} + yz^2\vec{j} + zx^2\vec{k}$ через поверхность сферы $x^2+y^2+z^2=R^2$.

Решение. В данном случае поверхность (Φ) – замкнутая, поэтому для вычисления потока можно применить формулу Гаусса - Остроградского. Имеем

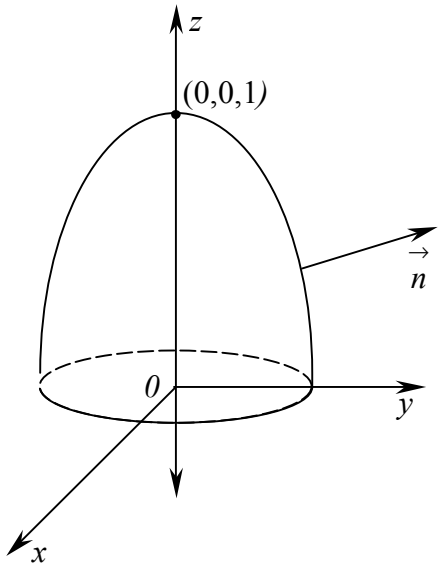
$$div\,\vec{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = y^2 + z^2 + x^2 = \ ^2,\ \Pi = \iiint\limits_{(G)} \ ^2\,dv.$$

Вычисляем интеграл в сферических координатах:

$$\Pi = \int_0^2 d\varphi \int_0 \sin\ d \int_0^R \ ^4 d\ = \frac{4}{5}\ R^5.$$

37. Найти поток векторного поля $\vec{a} = y^2\vec{i} + x^2\vec{j} + \vec{k}$ через часть поверхности параболоида $1 - z = x^2+y^2$ $(0 \le z \le 1)$. См. рис. 4.

Решение. Обозначим данную поверхность



через (Φ_1) и рассмотрим замкнутую поверхность $(\Phi) = (\Phi_1) \cup (\Phi_2)$, где ($\Phi_2$) – круг радиуса R=1 на плоскости XOY. Из формулы Гаусса - Остроградского вытекает, что поток через поверхность (Φ) равен нулю. Действительно, для данного поля

$$div\,\vec{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} y^2 + \frac{\partial}{\partial y} x^2 + \frac{\partial}{\partial z} \cdot 1 = 0.$$

Рис. 4

Следовательно, $\iint\limits_{(\Phi_1)} (\vec{a}, \vec{n}) ds + \iint\limits_{(\Phi_2)} (\vec{a}, \vec{n}) ds = 0$. Отсюда искомый поток через поверхность (Φ_1):

$$\iint\limits_{(\Phi_1)} (\vec{a}, \vec{n}) ds = -\iint\limits_{(\Phi_2)} (\vec{a}, -\vec{k}) ds = \iint\limits_{(\Phi_2)} ds = \pi.$$

Ответ: π.

38. Пользуясь формулой Остроградского-Гаусса, вычислить поток векторного поля

$$\vec{a} = x^2 \vec{i} + y^2 \vec{j} + z^2 \vec{k}$$

через полную поверхность конуса $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$, $z = 0$.

Решение. Найдем дивергенцию векторного поля:

$div\,\vec{a} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2) + \frac{\partial}{\partial y}(y^2) + \frac{\partial}{\partial z}(z^2) = 2(x + y + z)$. Тогда

$$\Pi = \iiint\limits_{(G)} div\,\vec{a}\, dxdydz = 2\iiint\limits_{(G)} (x + y + z) dxdydz = 2\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho d\rho \int_0^{1-\rho} (\rho\cos\varphi + \rho\sin\varphi + z) dz = \frac{\pi}{3}.$$

Упражнения

Применяя формулу Остроградского-Гаусса, преобразовать поверхностные интегралы в интегралы по объему:

39. $\iint\limits_{(\Phi)} (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma) ds$.

40. $\iint\limits_{(\Phi)} (x^2 + y^2 + z^2)(dydz + dxdz + dxdy)$.

41. $\iint\limits_{(\Phi)} xydxdy + yzdydz + xzdzdx$

С помощью формулы Остроградского-Гаусса вычислить следующие интегралы:

42. $\iint\limits_{(\Phi)} (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma) ds$, где Φ – поверхность эллипсоида $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

43. $\iint\limits_{(\Phi)} (x^3\cos\alpha + y^3\cos\beta + z^3\cos\gamma) ds$, где Φ – поверхность сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$

44. $\iint\limits_{(\Phi)} x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy$, где Φ – поверхность конуса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 0$ $(0 \le z \le b)$

45. Найти дивергенцию вектора $\vec{a} = (x - y^2)\,\vec{i} + x^2 z\,\vec{j} + xy\,\vec{k}$.

46. Пользуясь формулой Остроградского-Гаусса, преобразовать поверхностный интеграл

$\iint\limits_{П} x^2 ydydz + y^3 dxdz + zxdxdy$ в интеграл по объему.

47. Вычислить поверхностный интеграл $\iint\limits_{(\Phi)} x^2 zdxdy + y^2 xdydz$, где Ф – полная поверхность параболоида $z=x^2+y^2$, ограниченного плоскостью $z=1$.

48. Пользуясь формулой Остроградского–Гаусса, вычислить поверхностные интегралы по внешней стороне поверхности Φ (если поверхность не замкнутая, дополните её до замкнутой).

а) $\iint\limits_{(\Phi)} xdydz + ydzdx + zdxdy$, где Φ – сфера $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$;

б) $\iint\limits_{(\Phi)} (y - z)dydz + (z - x)dzdx + (x - y)dxdy$, где Φ часть конической поверхности $x^2 + y^2 = z^2$ *при* $0 \le z \le h$;

в) $\iint\limits_{(\Phi)} yzdydz + zxdzdx + xydxdy$, где Φ – граница тела $x^2 + y^2 \le a^2$, $0 \le z \le h$;

г) $\iint\limits_{(\Phi)} xdydz + ydzdx + zdxdy$, где Φ – часть поверхности $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$ при $0 \le z \le 1$;

д) $\iint\limits_{(\Phi)} ydydz + zdzdx + xdxdy$, где Φ – поверхность пирамиды, ограниченной плоскостями $x + y + z = a$ (a>0), $x=0$, $y=0$, $z=0$;

е) $\iint\limits_{(\Phi)} x^3 dydz + y^3 dzdx + z^3 dxdy$, где Φ – сфера $x^2 + y^2 + z^2 = x$;

ж) $\iint\limits_{(\Phi)} x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy$, где Φ – поверхность куба $0 \le x \le a$; $0 \le y \le a$; $0 \le z \le a$.

4. Формула Стокса

Пусть в области G определено векторное поле $\vec{a} = (P, Q, R)$; L – замкнутый контур, лежащий в области G; Φ- произвольная поверхность, границей которой является контур L; $\Phi \subset G$ (говорят "поверхность Φ натянута на контур L"); $\vec{n}(M) = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$–единичный вектор нормали на выбранной стороне поверхности Φ.

Поверхность Φ называется xyz – проектируемой, если она однозначно проектируется на каждую координатную плоскость прямоугольной системы координат $Oxyz$. Такую поверхность можно задать с помощью любого из уравнений: $z=z(x,y)$, $(x,y)\in G_1$; $x=x(y,z)$, $(y,z)\in G_2$; $y=y(z,x)$, $(z,x)\in G_3$.

Пусть Φ – гладкая xyz – проектируемая ориентированная поверхность, ограниченная кусочно-гладким контуром L и расположенная внутри области G, в которой функции $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ имеет непрерывные частные производные первого порядка. Тогда справедлива формула Стокса

$$\oint Pdx + Qdy + Rdz = \iint_{\Phi} ((\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z})\cos\alpha + (\frac{\partial LP}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x})\cos\beta + (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})\cos\gamma)ds,$$

где ориентация контура L согласована с ориентацией поверхности Φ. Левая часть формулы Стокса есть циркуляция векторного поля $\vec{a}$ вдоль контура L, а правая часть представляет собой поток через поверх

ность Φ векторного поля с координатами $\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$.

Эта формула названа по имени английского физика и математика Д. Стокса. Её формулу можно переписать также в следующем виде:

$$\iint_{\Phi} ((\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z})dydz + (\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x})dxdz + (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dxdy = \oint_L Pdx + Qdy + Rdz.$$

Формула Стокса остается верной для иной ориентированной поверхности Ф с кусочно-гладким краем L , которую можно разбить при помощи кусочно-гладких линий на конечное число гладких кусков, проецирующихся на все три плоскости координат. Ориентированная поверхность, которую можно разбить на конечное число и плоского треугольников, называется полиэдральной поверхностью и представляет собой пример простейшей поверхности, к которой применима формула Стокса.

Примеры

49. Вычислить циркуляцию вектора $\vec{a} = y\vec{i} + x\vec{j} + \vec{k}$ вдоль окружности $x^2+y^2=1$, $z=0$ в положительном направлении.

Решение. В этом случае $P=y$; $Q=x$; $R=1$. Следовательно,

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1 - (-1); \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = 0 \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = 0.$$

по формуле Стокса

$$Ц = \iint_{(\Phi)} (1 - (-1))dxdy = 2\iint_{(\Phi)} dxdy = 2\int_0^{2\pi} dx \int_0^1 \rho d\rho = 2\pi.$$

Применяя формулу Стокса, вычислить интегралы:

50 $I = \oint_L ydx + zdy + xdz$, где L - окружность $x^2+y^2+z^2$ a^2, $x+y+z=0$, пробегаемая против хода часовой стрелки, если смотреть с положительной оси Ox.

Решение. Применив формулу Стокса и взяв в ней в качестве поверхности Φ круг радиуса a, лежащий в плоскости $x+y+z=0$, получаем:

$$I = -\iint_{(\Phi)} dydz + dzdx + dxdy = -\iint_{\Phi} (\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma)ds,$$

где $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ - направляющие косинусы нормали к поверхности Φ – плоскости $x+y+z=0$, так как нормаль этой плоскости образует с положительным направлением оси Oz острый угол, то в каждой из формул для вычисления $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ перед знаком радикала возьмем знак "+".

Очевидно, $\cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}$, в силу чего имеем:

$$I = -\sqrt{3}\oiint_S ds = -\sqrt{3}\pi a^2$$

Ответ: $-\sqrt{3}\pi a^2$

51. $I = \oint_L y^2 z^2 dx + x^2 z^2 dy + x^2 y^2 dz$, L - замкнутая кривая $x=a\cos t$, $y=a\cos 2t$, $z=a\cos 3t$, пробегается в направлении возрастания параметра t.

Решение. При изменении t от 0 до π подвижная точка $M(x,y,z)$ пробегает кривую L от точки $M_0(a,a,a)$ до точки $M_1(-a,a,-a)$, а при изменении t от π до 2π точка M пробегает ту же самую часть кривой L в противоположном направлении – от точки M, до точки M_0. Таким образом, точки замкнутой кривой L взаимно накладываются и кривая L не ограничивает никакой поверхности, вследствие чего $I=0$.

Ответ: 0.

Упражнения

52. Интеграл $\int_L (y^2+z^2)dx + (x^2+z^2)dy + (x^2+y^2)dz$, взятый по некоторому замкнутому контуру, преобразовать с помощью формулы Стокса в интеграл по поверхности, "натянутой" на этот контур.

53. Вычислить интеграл $\int_L x^2 y^2 dx + dy + zdz$, где контур L – окружность $x^2+y^2=R^2$, $z=0$, используя формулу Стокса, взяв в качестве поверхности полусферу $z = +\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$. Интегрирование по окружности в плоскости xOy ведется в положительном направлении.

4. Ротор векторного поля

С понятием циркуляции тесно связано понятие ротора, или вихря. Циркуляция характеризует завихренность векторного поля вдоль всего контура. Локальной характеристикой поля, связанной с завихренностью, является ротор.

Рассмотрим сначала плоское векторное поле $\vec{a}$ и какой-то контур L, окружающий выбранную точку M_0. Величину площади области, заключенной внутри L, обозначим через S. Тогда отношение

$$\frac{1}{S}\oint_L (\vec{a}, d\vec{z}) \qquad (1)$$

дает среднюю плотность циркуляции вектора $\vec{a}$ на площадке S. Плотность циркуляции в точке M_0 характеризуется пределом выражения (1) при условии стягивания контура L в точку M_0, тогда площадь S, охватываемая контуром L, стремится к нулю, таким образом, если предел $\lim\limits_{\substack{L\to M_0 \\ (S\to 0)}} \frac{1}{S}\oint_L (\vec{a}, d\vec{r})$ существует, то он дает величину завихренности поля в точке M_0.

Если векторное поле $\vec{a}$ - пространственное, то можно говорить о завихренности поля в каком-либо направлении $\vec{n}$.

Ротором векторного поля $\vec{a}$ в точке M_0 обозначаемым $rot\,\vec{a}$ называется вектор, проекция которого на каждое направление $\vec{n}$ равна пределу отношения циркуляции векторного поля по контуру L плоской области G, перпендикулярной этому направлению, к величине площади S этой области, когда размеры площади стремятся к нулю, а сама область стягивается в точку M_0, т.е.

$$Пр_{\vec{n}}\, rot\,\vec{a} = (rot\,\vec{a})_{\vec{n}} = \lim_{\substack{L\to M_0\\(S\to 0)}} \frac{1}{S}\oint_L (\vec{a}, d\vec{r}),$$

где L – контур, лежащий в плоскости, перпендикулярной вектору $\vec{n}$, S- площадь области, ограниченной этим контуром.

Если задано векторное поле $\vec{a}(M) = P(x,y,z)\,\vec{i} + Q(x,y,z)\,\vec{j} + R(x,y,z)\,\vec{k}$, где функции P, Q и R – непре

рывно дифференцируемые в соответствующей области , то

$$rot\,\vec{a} = (R'_y - Q'_z)\,\vec{i} + (P'_z - R'_x)\,\vec{j} + (Q'_x - P'_y)\,\vec{k} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

Примеры

54. Найти ротор векторного поля $\vec{a} = x^2\,\vec{i} + y^2\,\vec{j} - z^2\,\vec{k}$.

Решение. $R'_y = Q'_z = P'_z = R'_x = Q'_x = P'_y = 0$, то $rot\,\vec{a} = \vec{0}$

Ответ: $\vec{0}$

55. Найти *rot (grad u)*, если $u = x^2 + y^2 + z^2$

Решение. Поскольку $grad\,u = 2x^2\,\vec{i} + 2y^2\,\vec{j} + 2z^2\,\vec{k}$, то $rot\,(grad\,u) = \vec{0}$

Ответ: $\vec{0}$

56. Найти ротор поля скоростей твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной точки с мгновенной угловой скоростью $\vec{\omega} = \omega_x\,\vec{i} + \omega_y\,\vec{j} + \omega_z\,\vec{k}$.

Решение. Как известно, скорость твердого тела определяется по формуле

$$\vec{\upsilon} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix} = (z\omega_y - y\omega_z)\,\vec{i} + (x\omega_z - z\omega_x)\,\vec{j} + (y\omega_x - x\omega_y)\,\vec{k}$$

Отсюда находим $rot\,\vec{\upsilon} = \vec{\nabla}\times\vec{\upsilon} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ z\omega_y - y\omega_x & x\omega_x - z\omega_x & y\omega_x - x\omega_y \end{vmatrix} = 2\omega_x\,\vec{i} + 2\omega_y\,\vec{j} + 2\omega_z\,\vec{k} = 2\vec{\omega}$.

Таким образом, $rot\,\vec{\ }$, характеризуя "вращательную компоненту" поля скоростей, равен удвоенной скорости вращения.

57. Доказать, что завихренность поля достигает наибольшего значения в направлении ротора.

Решение. Завихренность поля $\vec{a}$ в направлении $\vec{n}$ равна проекции ротора на это направление, т.е. $(rot\,\vec{a})_n = |\,rot\,\vec{a}\,|\cdot\cos(\widehat{\vec{n}, rot\,\vec{a}})$.Отсюда видно, что поле $\vec{a}$ наибольшую завихренность имеет в случае, когда $\cos(\widehat{\vec{n}, rot\,\vec{a}})$=1, а это означает, что направление нормали $\vec{n}$ совпадает с направлением $rot\,\vec{a}$, причем наибольшая завихренность равна $|\,rot\,\vec{a}\,|$.

58. Вычислить ротор векторного поля: $\vec{a} = y^2\,\vec{i} - x^2\,\vec{j} + z^2\,\vec{k}$.

Решение $rot\,\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y^2 & -x^2 & z^2 \end{vmatrix} = -2(x+y)\,\vec{k}$.

Ответ: $-2(x+y)\,\vec{k}$.

Упражнения

59. Доказать свойства ротора:

а) $rot\,\vec{c} = 0$; $[\vec{\nabla}\,\vec{c}] = 0$, где $\vec{c}$ =const

б) $rot(c_1\,\vec{a}_1 + c_2\,\vec{a}_2) = c_1 rot\,\vec{a}_1 + c_2 rot\,\vec{a}_2$,

$[\vec{\nabla}, (c_1\,\vec{a}_1 + c_2\,\vec{a}_2)] = c_1[\vec{\nabla}\,\vec{a}_1] + c_2[\vec{\nabla}\,\vec{a}_2]$, где c_1, c_2 – постоянные коэффициенты.

в) $rot\,u\,\vec{a} = [grad\,u, \vec{a} + u\,rot\,\vec{a}; [\vec{\nabla}, u\,\vec{a}_1] = [\vec{\nabla}u, \vec{a}_1] + u[\vec{\nabla}, \vec{a}_1]$, где u - скалярное поле.

60. Вычислить ротор векторного поля:

а) $\vec{a} = \sin(2x - y - z)(2\,\vec{i} - \vec{j} + \vec{R})$;

б) $\vec{a} = xyz(x\,\vec{i} - y\,\vec{j} + z\,\vec{R})$;

в) $\vec{a} = arctg(x - y + z)(\vec{i} - 3\,\vec{j} - 2\,\vec{k})$;

61. Вычислить ротор векторного поля $\vec{a} = e^{x+2y+3z}(3x\,\vec{i} + 2y\,\vec{j} + z\,\vec{k})$ в точке M_0(3,-3,1).

62. Найти функцию векторного поля $\vec{a} = y\,\vec{i} - x\,\vec{j}$ вдоль замкнутой линии $ABOA$, где AB – дуга астроиды, определяемой уравнением: $x^{2/3} + y^{2/3} = R^{2/3}$ или $x=R\cos^3 t$, $y=R\sin^3 t$.

Указание. Следует применить формулу Стокса:

$$Ц = \oint_L Pdx + Qdy + Rdz = \iint_{(\Phi)} (rot\,\vec{a}, \vec{n})ds.$$

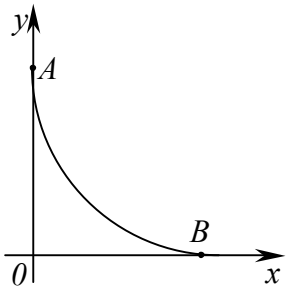


Рис. 4.

63. С помощью формулы Стокса найти циркуляцию векторного поля
$\vec{a}(M) = xyz\,\vec{i} + (x+y+z)\,\vec{i} - x^2 y^2 \vec{R}$

вдоль контура квадрата $ABCDA$ определяемого уравнениями: $-x+y=a$; $x+y=a$; $x-y=a$; $x+y=-a$; $z=0$.

64. Вычислить с помощью формулы Стокса циркуляцию векторного поля
$\vec{a} = (x+z)\,\vec{i} + (y-z)\,\vec{j} + (y-x)\,\vec{R}$ вдоль окружностей:

а) $(y+1)^2 + (z-1)^2 = 1$, $x=5$ (вектор положительной нормали $\vec{n} = \vec{i}$);

б) $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 4$, $z=0$ (вектор положительной нормали $\vec{n} = \vec{k}$)

65. Доказать, что $rot(\vec{a}_1(M) + \vec{a}_2(M)) = rot\,\vec{a}_1(M) + rot\,\vec{a}_2(M)$.

6. Потенциальное поле и его свойства

Векторное поле $\vec{a}(M)$ называют потенциальным в области (G), если существует такая скалярная функция (скалярное поле) $\upsilon(M)$, заданная в (G), что для всех точек этой области:
$\vec{a}(M) = grad\,\upsilon(M)$. Функцию $\upsilon(M)$ называют потенциалом поля $\vec{a}(M)$.
В потенциальном поле линейный интеграл не зависит от формы пути и определятся только начальной и конечной точками пути, а именно

$$\oint_L (\vec{a}, d\vec{r}) = \upsilon(M) - \upsilon(M_0),$$

где M_0 и M – начальная и конечная точка линии (L).

Верно и обратное: если линейный интеграл поля $\vec{a}$ (M) не зависит от пути, то поле $\vec{a}$ (M) потенциально. Потенциал поля определяется с точностью до постоянного слагаемого. Это означает, что если $\upsilon(M)$ один из потенциалов поля $\vec{a}(M)$, то выражения $\upsilon(M) + C$ при любом

постоянном C также являются потенциалами поля. Задание величины потенциала в какой- либо точке M_0 области (V) однозначно определяет потенциал любой точки M:

$$\upsilon(M) = \upsilon(M_0) + \int_{M_0}^{M} (\vec{a}, d\vec{r}), \qquad (*)$$

где вместо $\int_{(L)} (\vec{a}, d\vec{r})$ использовано обозначение $\int_{M_0}^{M} (\vec{a}, d\vec{r})$, поскольку интеграл не зависит от пути.

Если поле задано в декартовой координатной форме: $\vec{a}(M) = P(x,y,z)\,\vec{i} + Q(x,y,z)\,\vec{j} + R(x,y,z)\,\vec{k}$,

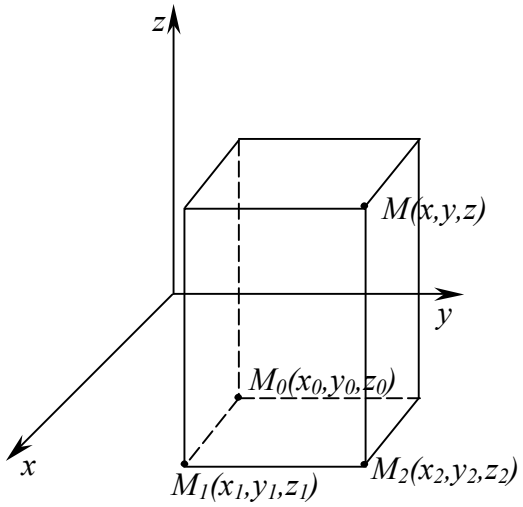


Рис. 5.

то для нахождения потенциала точки M(x,y,z) удобно взять линейный интеграл по ломанной $M_0M_1M_2M$, звенья которой параллельны координатным осям. Предполагается, конечно, что ломаная $M_0M_1M_2M$ не выходит за пределы области (G). При таком выборе пути интегрирования и при дополнительном условии $\upsilon(M_0) = 0$ выражение (*) принимает вид:

$$\upsilon(x,y,z) = \int_{x_0}^{x} P(x,y_0,z_0)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x,y,z_0)dy + \int_{z_0}^{z} R(x,y,z)dz \qquad (*$$

При использовании этой формулы следует иметь в виду, что в каждом из трех входящих в нее интегралов одной буквой обозначают и верхний предел, и переменную интегрирования, т.е.

$$\int_{x_0}^{x} P(x,y_0,z_0)dx = \int_{x_0}^{x} P(t,y_0,z_0)dt; \int_{y_0}^{y} Q(x,y,z_0)dy = \int_{y_0}^{y} Q(x,t,z_0)dt; \int_{z_0}^{z} R(x,y,z)dz = \int_{z_0}^{z} R(x,y,t)dt$$

Отметим, что потенциальность поля $\vec{a}(M)$ и равенство нулю циркуляции поля по искомому простому кусочно-гладкому замкнутому контуру являются эквивалентными свойствами.

Если поле $\vec{a}(M)$ потенциально в области (G), то в любой точке этой области $rot\,\vec{a}(M) = \vec{0}$. Это свойство потенциального поля является наиболее важным. Таким образом, потенциальное поле $\vec{a}$ (M) является безвихревым. Обратное, вообще говоря, неверно. Однако, если ограничиться поверхностно односвязными областями, то для таких областей понятие потенциального и безвихревого полей оказываются эквивалентными.

Примеры

66. Проверить, что поле $\vec{a} = (y+z)\,\vec{i} + (z+x)\,\vec{j} + (x+y)\,\vec{k}$ является потенциальным, и найти его потенциал.

Решение. Поле $\vec{a}$ определено во всем пространстве, т.е. в односвязной области, поэтому достаточно проверить, что $rot\,\vec{a} = 0$. Имеем:

$$rot\,\vec{a}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ x+z & z+x & x+y\end{vmatrix}=(1-1)\,\vec{i}+(1-1)\,\vec{j}+(1-1)\,\vec{k}=\vec{0},$$

что и доказывает потенциальный характер поля $\vec{a}$.
Найдем потенциал двумя способами.
<u>1 способ.</u>
Для нахождения потенциала воспользуемся формулой (∗), беря в качестве M_0 начало координат:

$$\upsilon(x,y,z)=\int_0^x P(x,0,0)dx+\int_0^y Q(x,y,0)dy+\int_0^z R(x,y,z)dz=\int_0^x 0dx+\int_0^y xdy+\int_0^z (x+y)dz=0+xy+(x+y)z=$$
$$=xy+yz+zx.$$

<u>2 способ.</u>
Будем снова считать $M_0(0,0,0)$.
Пусть $\vec{r}=x\,\vec{i}+y\,\vec{j}+z\,\vec{k}$ – радиус-вектор точки $M(x,y,z)$, а точка N пробегает отрезок M_0M; ее радиус-вектор $\vec{\rho}=\vec{r}\,t(0\le t\le 1)$. Точка N имеет координаты t_x, t_y, t_z.

Отсюда $d\vec{\rho}=\vec{r}\,dt$. Положим $\upsilon(M_0)=0$, тогда $\upsilon(M)=\int_0^M(\vec{a}(N),d\vec{\rho})=\int_0^1(\vec{a}(t),\vec{r})dt$.

Для рассматриваемого поля $\vec{a}(t)=t(y+z)\,\vec{i}+t(z+x)\,\vec{j}+t(x+y)\,\vec{k}$.
$(\vec{a}(t),\vec{r})=t(y+z)x+t(z+x)y+t(x+y)z=2t(xy+yz+zx)$.

Следовательно, $\upsilon(M)=(xy+yz+zx)\int_0^1 2tdt=xy+yz+zx$.
Ответ: $xy+yz+zx$.
67. Доказать, что циркуляция потенциального поля по любому замкнутому контуру равна нулю.
Решение: Пусть $\vec{a}$ - потенциальное поле и (L) - замкнутый контур, началом и концом которого является точка $M(M=M_0)$.
Тогда $Ц=\oint_L(\vec{a},d\vec{r})=\upsilon(M)-\upsilon(M_0)=\upsilon(M)-\upsilon(M_0)=0$, что и требовалось доказать.

Упражнения

68. Пусть $\vec{F}=-\dfrac{vm}{r^3}\vec{r}$ – гравитационное поле (поле сил тяготения), которое представляет собой силу притяжения единичной массы, помещенной в точку M, массой m, находящийся в начале координат. Сила определена во всех точках, кроме начала координат и образует векторное поле – поле тяготения точечной массы m. Показать, что поле $\vec{F}$ потенциально во всем пространстве, кроме начала координат и найти его потенциал.

69. Проверить , что поле $\vec{a}=(3yz+x^2)\,\vec{i}+(2y^2+3xz)\,\vec{j}+(z^2+3xy)\,\vec{k}$ является потенциальным, и найти его потенциал.

70. Доказать, что векторное *поле* $\vec{a}=y^2\,\vec{i}+2xy\,\vec{j}+z\,\vec{k}$ потенциально, и найти его потенциал.

71. Выяснить, является ли векторное поле $\vec{a} = -\frac{y}{x^2+y^2}\vec{i} + \frac{x}{x^2+y^2}\vec{j} + 2\vec{k}$ потенциальным.

72. Даны векторные поля: $\vec{a}_1=(y+z)\vec{i} + (x+z)\vec{j} + (x+y)\vec{k}$; $\vec{a}_2=f(x)\vec{i} + f_2(y)\vec{j} + f_3(z)\vec{k}$; $\vec{a}_3=x\vec{i} + y\vec{j} + y\vec{k}$.

Выяснить какие из них являются потенциальными.

73. Проверить, будет ли потенциальным поле $\vec{a}$. В случае потенциальности поля найти его потенциал u(x,y,z).

а) $\vec{a}=(-2x-yz)\vec{i} + (-2y-xz)\vec{j} + (-2z-xy)\vec{k}$;

б) $\vec{a}=(2x-yz)\vec{i} + (2y-xz)\vec{j} + (2z-xy)\vec{k}$;

в) $\vec{a}=(2x+yz)\vec{i} + (2y+xz)\vec{j} + (2z+xy)\vec{k}$;

г) $\vec{a}=(2x-4yz)\vec{i} + (2y-4xz)\vec{j} + (2z-4xy)\vec{k}$;

д) $\vec{a}=(2x-3yz)\vec{i} + (2y-3xz)\vec{j} + (2z-3xy)\vec{k}$;

е) $\vec{a}=(-3x+yz)\vec{i} + (-3y+xz)\vec{j} + (-3z+xy)\vec{k}$;

ж) $\vec{a}=(2x+2yz)\vec{i} + (2y+2xz)\vec{j} + (2z+2xy)\vec{k}$;

з) $\vec{a}=(4x+yz)\vec{i} + (2y+xz)\vec{j} + (2z+xy)\vec{k}$.

7. Соленоидальное поле и его свойства

Векторное поле $\vec{a}(M)$ называют соленоидальным в области (G), если во всех точках этой области $div\,\vec{a}(M) = 0$.

С понятием соленоидального поля тесно связано понятие векторного потенциала. Если в области (G), в которой определено поле $\vec{a}(M)$ существует такое векторное поле $\vec{A}(M)$, что в каждой точке области (G) $\vec{a}(M) = rot\,\vec{A}(M)$, то векторное поле $\vec{A}(M)$ называют векторным потенциалом поля $\vec{a}(M)$ в области (G).

Для поля $\vec{a}(M)$, обладающего векторным потенциалом в области (G), поток через любую замкнутую поверхность, содержащуюся в области (G), равен нулю.

Поле $\vec{a}(M)$, обладающее векторным потенциалом в области (G), является в ней соленоидальным . Обратное, вообще говоря, неверно: для произвольно взятой области (G) соленоидальность поля $\vec{a}(M)$ еще не гарантирует существования во всей области (G) векторного потенциала поля $\vec{a}(M)$. Однако, если ограничиться пространственно-односвязными областями, то соленоидальность поля и наличие у него векторного потенциала являются эквивалентными свойствами. Таким образом, в пространственно-односвязной области условие $div\,\vec{a}=0$ является необходимым и достаточным для существования векторного потенциала.

Из формулы Остроградского-Гаусса следует, что если соленоидальное поле задано в односвязной области, то поток вектора через любую замкнутую поверхность, принадлежащую этой области, равен нулю:

$$\Pi = \iint\limits_{(\Phi)} (\vec{a}, \vec{n})ds = \iiint\limits_{(G)} div\,\vec{a}\,dv = 0\,.$$

Пусть соленоидальное поле $\vec{a}$ задано в односвязной области. Тогда поток вектора $\vec{a}$ через любую поверхность *S*, натянутую на заданный контур *L*, не зависит от вида этой поверхности, а зависит только от контура *L*.

Возьмем в поле $\vec{a}$ замкнутый контур *L* и проведем через его точки векторные линии. Образовавшаяся поверхность называется векторной трубкой. Любая другая векторная линия, не проходящая через точки контура *L* , либо целиком лежит в векторной трубке, либо находится вне ее. В случае поля скоростей стационарного потока жидкостей векторная трубка – это та часть пространства, которую запасной при своем перемещении фиксированный объем жидкости. Интенсивностью векторной трубки называется поток поля через поперечное сечение этой трубки. Для соленоидальных полей имеет место так называемый закон сохранения интенсивности векторной трубки.

Если соленоидальное поле $\vec{a}$ определено в односвязной области *G,* то интенсивность векторной трубки постоянна вдоль всей трубки.

В соленоидальном поле векторные линии не могут ни начинаться, ни кончаться внутри поля; они либо замкнуты, либо имеют концы на границе поля, либо имеют бесконечные ветви (в случае неограниченного поля).

Упражнения

75. Проверить, будут ли соленоидальными поля, указанные в задаче 74.

8. Векторный потенциал

Векторный потенциал $\vec{A}$ *(M)* определяется с точностью до градиента произвольного соленоидального поля *f(M)*.

В самом деле, если $rot\,\vec{A}\,(M) = \vec{a}\,(M)$ и *f(M)* – произвольное скалярное поле, то поскольку *rot grad f(M)*=0, получаем $rot(\vec{A}\,(M) + grad\,f(M)) = rot\,\vec{A}\,(M) + rot\,grad\,f(M) = \vec{a}\,(M)$.

Для того чтобы непрерывно дифференцируемое поле $\vec{a}$ *(M)* было соленоидальным, необходимо и достаточно, чтобы оно имело векторный потенциал $\vec{A}$ *(M)*. Необходимость этого условия является следствием разрешимости системы дифференциальных уравнений:

$$P = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}; Q = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}; R = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \qquad (1)$$

при условии $div\,\vec{a}$ =0 ($\vec{A} = A_x\,\vec{i} + A_y\,\vec{j} + A_z\,\vec{k}$).

Покажем как можно найти векторный потенциал $\vec{A}$ *(M)*. поскольку в выборе этого вектора имеется значительная доля произвола примем A_x=0. Тогда система (1) примет вид

$$\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = P; -\frac{\partial A_z}{\partial x} = Q; \frac{\partial A_y}{\partial x} = R \qquad (2)$$

Таким образом, задача сводиться к определению функции A_y и A_z, удовлетворяющих условиям (2) при условии, что известные функции P, Q, R таковы, что $div\,\vec{a}$ =0. Пусть $M_0(x_0,y_0,z_0)$ – фиксированная, *M(x,y,z)* – произвольные точки параллелепипеда Ω.

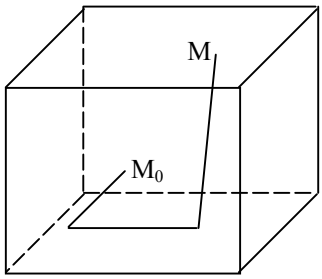


Рис. 6.

Рассмотрим функции

$$A_y(x,y,z)=\int_{x_0}^{x} R(x,y,z)dx,\ A_z(x,y,z)=-\int_{x_0}^{x} Q(x,y,z)dx+\int_{y_0}^{y} R(x,y,z)dx, \qquad (3)$$

Условие задания поля $\vec{a}$ (M) в параллелепипеде с гранями, параллельными плоскостям координат, гарантирует, что пути интегрирования в этих формулах не выйдут за пределы поля. Применяя правила дифференцирования определенного интеграла по параметру и по верхнему пределу и принимая во внимание условие $div\,\vec{a}=0$, получим , что обе функции A_y и A_z, определенные равенствами (3) удовлетворяют и первому из условий (2). Таким образом, $\vec{A}=$ $A_x\vec{i}+A_y\vec{j}+A_z\vec{k}$, координаты A_y и A_z определяются формулами (3). Для этого вектора $\vec{A}$ выполняется условие $rot\,\vec{A}=\vec{0}$.

74. Найти векторный потенцал

$$\vec{A}(x,y,z)$$

для соленоидального поля, задаваемого вектором **a** = 2y***i*** - z***j*** + 2x***k***.

Ответы:

10. Область определения – круг $x^2+y^2\le 9$; линии уровня – семейство концентрических окружностей
$x^2+y^2=9-c^2$ ($|c| \le 3$).
11. Поле определено во всем пространстве, за исключением точки $r=0$; поверхности уровня – сферы $r=c$ с центром в точке, где находится заряд.
12.Поле определено в области $z^2+y^2-x^2\ge 0$;поверхности уровня – круговые конусы $a^2(z^2+y^2)-x^2=0$ ($|a| \le 1$).
13. Линии уровня $u=c$ представляют собой семейство гипербол $x^2-y^2=(-1)^n \arcsin c+\pi n$, где n– целое число.
14. Поле определено во всем пространстве, за исключением плоскости $z=0$; поверхности уровня – параболоиды вращения $x^2+y^2=cz$ ($-\infty<c<\infty$).

15. а) $-4\vec{i}+2\vec{j}-4\vec{k}$. б) $12\vec{i}-\vec{j}$; в) $\frac{y}{x^2+y^2}\vec{i}+\frac{x}{x^2+y^2}\vec{j}$.

16. Прямые, проходящие через начало координат.
17. $x^2-y^2=c;\ z=h$.
18. $x^3+y^3=c_1;\ z^3+y^3=c_2$.
19. $y=c_1z;\ x^2+y^2+z^2=c_2y$.
20. Окружности, лежащие в плоскостях, перпендикулярных к прямой, проходящей через начало координат и имеющей направление вектора $\vec{e}$; центры этих окружностей лежат на этой прямой.
22. Окружности с центром на оси Oy, проходящей через начало координат.
23. Направление наибыстрейшего возрастания функции в точке (0,0) совпадает с положительным направлением оси Oy.
24. 1) $\mathrm{tg}\varphi \approx 0{,}342$, $\varphi \approx 18^0 52'$; 2) $\mathrm{tg}\varphi \approx 4{,}87$, $\varphi \approx 78^0 24'$.
25. Отрицательная полуось оси Oy.
26. 1) $\cos\alpha \approx 0{,}99$; $\alpha=8^0$; 2) $\cos\alpha \approx -0{,}199$; $\alpha=101^0 30'$;
30. $Ц=-\pi b^2$.
31. $Ц=-\pi$.
32. $Ц=-\frac{1}{8}\pi R^6$
33. а) $Ц=2\pi$; б) $Y=2\pi$.
39. $\iiint\limits_V 3dxdydz = 3V$.
40. $2\iiint\limits_V (x+y+z)dxdydz$
41.0.
42. $4\pi abc$.
43. $\frac{12\pi R^5}{5}$.
44. $\frac{\pi a^2 b^2}{2}$.
45. 1.
46. $\iiint\limits_V (2xy+3y^2+x)dxdydz$.

47. $\frac{\pi}{6}$.

48. а) $4\pi a^3$; б) 0. Дополните поверхность S до замкнутой; в)0; г) π. Дополните поверхность S до замкнутой; д)0; е) $\frac{\pi}{5}$; ж) $3a^4$.

52. $2\iint\limits_S (x-y)dxdy + (y-z)dydz + (z-x)dxdz.$

53. $-\frac{\pi R^6}{8}$.

60. а) $rot\,\vec{a} = -2\cos(2x-y-z)(\vec{i} + 2\vec{j})$; б) $rot\,\vec{a} = x(z^2-y^2)\,\vec{i} + y(x^2-z^2)\,\vec{j} + z(y^2-x^2)\,\vec{k}$; в)

$rot\,\vec{a} = \frac{5\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}}{1+(x-y+z)^2}$.

61. $rot\,\vec{a}_{M_0} = 20\vec{i} + 26\vec{j} - 24\vec{k}$.

62. $-\frac{3}{16\pi R^2}$.

63. $-2a^2$.

64. а) $Ц=2\pi$; б) $Ц=0$.

68. $-\frac{\gamma m}{r} + c$.

69. $\frac{1}{3}(x^3+2y^3+z^3)+3xyz + c$.

70. $xy^2 + \frac{z^2}{2}$.

71. Нет.

72. Потенциальными являются поля $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$.

73. $\upsilon(x,y,z)=xyz(x+y+z)+c$, где c произвольная постоянная.

74. $x^2\boldsymbol{j} + (xz + y^2)\boldsymbol{k}$.

Литература

1. Государственный образовательный стандарт высшего профессионального образования. М.: Госкомвуз России, 2000.
2. Никольский С.М. Курс математического анализа, том. II- М.: Наука, 1973.
3. Зорич В.А. Математический анализ. Ч. II.- М.: Наука, 1984
4. Уваров В.Б. Математический анализ. М.: Высш.шк.,1984.
5. Ефимов А.В. и др. Математический анализ (специальные разделы) ч.II. Применение некоторых методов математического и функционального анализа. - М.: Высш. шк., 1980.
6. Кальницкий Л.А и др. Специальный курс высшей математики для вутзов. М.: Высш. шк., 1976.
7. Несис Е.И. Методы математической физики. - М.: Просвещение, 1977.
8. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление. - М.: Наука, 1972.
9. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. - М.: Наука, 1985.
10. Бутузов В.Ф. и др. Математический анализ в вопросах и задачах. Функции нескольких переменных. - М.: Высш. шк. ,1988.
11. Филиппенко В.И. Приложения кратных интегралов. – Кривой Рог, 1998.
12. Гаврилов В.Р., Иванова Е.Е., Морозова В.Д. Кратные и криволинейные интегралы. Элементы теории поля. – М.: Изд – во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2001.