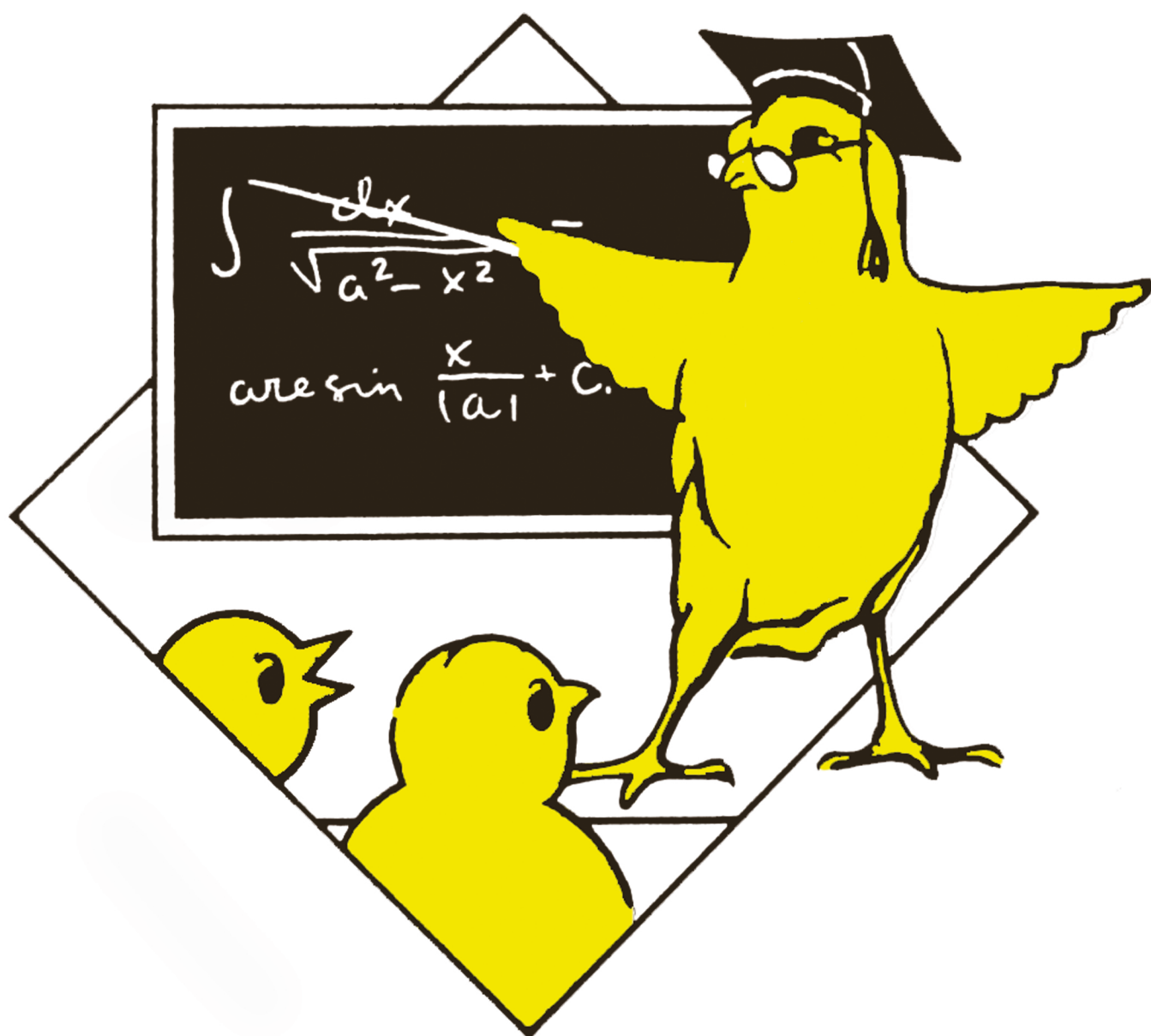


Н. А. Усов

ОСНОВЫ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ



Н. А. Усов

ОСНОВЫ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ

Моя Строка
Санкт-Петербург
2021

Книга издается в авторской редакции

Оригинал-макет: *И. Македонская*

Обложка: *И. Македонская*

Усов, Н. А.

Основы элементарной математики / Н. А. Усов. — Санкт-Петербург : Моя Строка, 2021. — 180 с.

ISBN 978-5-9965-1604-9

В небольшом курсе дан вывод большинства важнейших формул и теорем, изучаемых в школьных разделах алгебры, геометрии и началах математического анализа. Большое внимание уделено разбору математических понятий, вызывающих сложности при изучении, методам построения графиков функций, преобразованию тригонометрических выражений, вычислению пределов, решению геометрических задач на построение, пр. Анализируются типичные ошибки, допускаемые учащимися при решении алгебраических и тригонометрических уравнений и неравенств. Теоретический материал проиллюстрирован подробным анализом задач из текущей экзаменационной практики и известных руководств. Даются конкретные рекомендации по подготовке к экзамену и по оформлению письменной экзаменационной работы.

Для учащихся вечерних и заочных подготовительных курсов и лиц, готовящихся к экзаменам по математике в высшее учебное заведение самостоятельно.

www.mystroka.ru

Все права защищены. Никакая часть данной книги не может быть воспроизведена в какой бы то ни было форме без письменного разрешения правообладателя.

ISBN 978-5-9965-1604-9

© Усов Н. А., 2021

© Издательство «Моя Строка», 2021

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	4
ЧАСТЬ 1. АЛГЕБРА.....	5
§ 1. Формулы сокращенного умножения.....	5
§ 2. Рациональные алгебраические уравнения и системы	6
§ 3. Рациональные неравенства	14
§ 4. Линейная и квадратная функции.....	17
§ 5. Модуль действительного числа.....	22
§ 6. Иррациональные уравнения и неравенства	25
§ 7. Показательные и логарифмические уравнения.....	29
§ 8. Показательные и логарифмические неравенства.....	35
§ 9. Преобразование тригонометрических выражений.....	39
§ 10. Решение тригонометрических уравнений и неравенств	44
§ 11. Элементарные функции и графики	53
§ 12. Прогрессии	64
§ 13. Задачи на составление уравнений и неравенств	68
ЧАСТЬ II. ЭЛЕМЕНТЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ.....	75
§ 14. Пределы последовательностей.....	75
§ 15. Предел функции. Непрерывность	80
§ 16. Вычисление производных	85
§ 17. Вычисление первообразных. Интеграл.....	94
§ 18. Применение производных и интегралов к решению задач	103
§ 19. Комплексные числа	109
ЧАСТЬ III. ГЕОМЕТРИЯ	116
§ 20. Теоремы планиметрии.....	116
§ 21. Формулы планиметрии.....	126
§ 22. Задачи на построение	132
§ 23. Задачи по планиметрии.....	137
§ 24. Теоремы и формулы стереометрии.....	146
§ 25. Задачи по стереометрии	156
§ 26. Векторная алгебра	164
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	170
ПРИЛОЖЕНИЕ: Математический фольклор	172
ОТВЕТЫ К КОНТРОЛЬНЫМ ЗАДАЧАМ	174
СПИСОК ОБОЗНАЧЕНИЙ.....	176

ВВЕДЕНИЕ

Первое издание этой книги было выпущено почти тридцать лет назад и давно разошлось. Автор надеется, что эта небольшая книга принесет пользу каждому, кто хотел бы научиться не перераспределять - товары, деньги, услуги - произведенные другими людьми, а непосредственно участвовать в создании новых интеллектуальных и материальных ценностей. Все удивительные вещи на свете: самолеты и автомобили, подводные лодки и телевизоры, фотоаппараты, телефоны, компьютеры, лазеры - все это движется, действует и непрерывно совершенствуется потому, что на свете есть математика! Мало этого, за пределами обычных человеческих масштабов лишь математика дает нам косвенное представление о том, как устроен мир, где мы существуем.

Цель этой книги – помочь повторить и систематизировать изученный в школе материал, а также связать его с тем, что будет изучаться в высшей школе. В книге разобраны стандартные задачи, которые традиционно предлагаются на экзаменах по математике в ведущих вузах страны. На этом материале автор хотел бы научить вдумчивого читателя активному владению математикой, когда запоминаются лишь самые простые и очевидные факты (аксиомы!), а все остальное - выводится. При этом отпадает нужда в каких-либо справочниках и шпаргалках, и торжествует принцип Диогена:

"Все свое ношу с собой!"

Автор не смог обойтись в этой книге без нравоучений, так как он убежден, что нельзя чему-либо научить, не поучая. Впрочем, почти все нравоучения выделены в отдельные абзацы и могут быть опущены без ущерба для основного текста книги. В конце большинства параграфов дано небольшое число упражнений, снабженных ответами. Эти задачи полезны для проверки усвоения изложенного материала и ни в коем случае не могут заменить систематической работы над различными разделами курса.

В заключение, я хотел бы поблагодарить Ф. Ю. Корепанова, А. Н. Усову, Е. М. Губанову и Р. А. Рытова за помощь в оформлении рукописи.

ЧАСТЬ 1. АЛГЕБРА

§ 1. Формулы сокращенного умножения

Для любых действительных чисел a и b справедливы следующие тождества:

- 1°. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- 2°. $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- 3°. $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
- 4°. $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
- 5°. $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$
- 6°. $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
- 7°. $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

Первые четыре равенства есть частные формы бинома Ньютона $(a + b)^n$. Они получаются непосредственным перемножением нужного числа сомножителей $a \pm b$ и приведением подобных членов. Последние три равенства указывают способ разложения на множители выражения $a^n \pm b^n$ и легко проверяются перемножением их правых частей.

Указанные формулы следует запомнить наизусть, как таблицу умножения, поскольку они встречаются в алгебраических вычислениях на каждом шагу. Запоминание упрощается, если учесть симметрию формул. Во-первых, вторая, четвертая и седьмая формулы не являются самостоятельными, а получаются, соответственно из первой, третьей и шестой заменой $b \rightarrow -b$. Далее, если записать бином $(a + b)^3$ в виде

$$(a + b)^3 = a^3b^0 + 3a^2b^1 + 3a^1b^2 + a^0b^3$$

то легко заметить, что сумма показателей степени в каждом одночлене равна показателю степени бинома, т. е. 3. Для бинома $(a + b)^2$ эта сумма будет равна 2, а для бинома $(a + b)^n$ соответственно, n . Далее, бином $(a + b)^n$ симметричен относительно замены чисел a и b . Наконец, коэффициент при первом члене любого бинома равен единице, так как $(a + 0)^n = a^n$, а коэффициент при втором члене равен n . Следовательно

$$(a + b)^n = a^n + na^{n-1}b + \dots + nab^{n-1} + b^n.$$

Итак, вместо бездумного заучивания, гораздо полезнее "собрать сведения" о запоминаемом объекте.

А. Тождество и уравнение

Формулы сокращенного умножения являются тождествами, т.е. они верны для любых числовых значений a и b . Другими словами, они являются лишь разными формами записи одной и той же величины. Важно понимать существенную разницу между тождеством и уравнением. Если $f(x) = g(x)$ тождественно (иногда пишут еще $f(x) \equiv g(x)$) то графики функций $y_1 = f(x)$ и $y_2 = g(x)$ всюду совпадают (см. Рис. 1.1). Если же функции $f(x)$ и $g(x)$ различны, то равенство $f(x) = g(x)$ является уравнением, которое может иметь корни, т.е. такие значения аргумента x_i ($i = 1, 2, \dots$), в которых графики функций $y_1(x)$ и $y_2(x)$ пересекают или касаются друг друга (Рис. 1.2). Корни отсутствуют, если графики y_1 и y_2 не имеют общих точек.

Так как формулы сокращенного умножения - тождества, то они обращаются в верные равенства при подстановке любых числовых значений a и b , например

$$(1 + 1)^2 = 1^2 + 2 \cdot 1 \cdot 1 + 1^2.$$

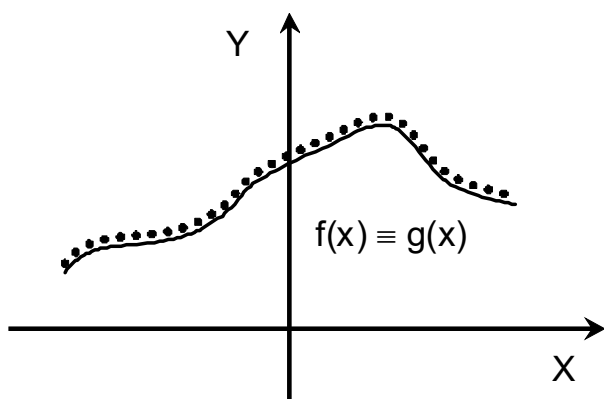


Рис. 1.1

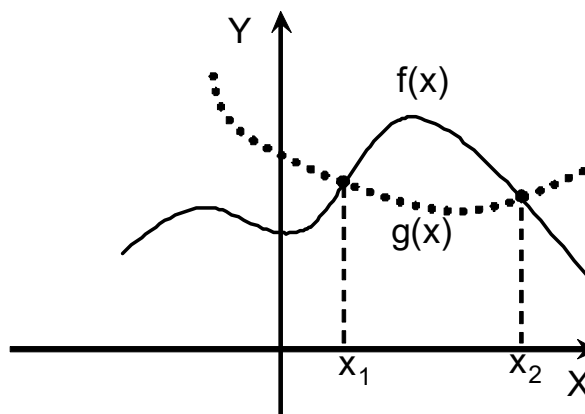


Рис. 1.2

Если одна из этих формул записана неверно, это легко обнаружить "прикидкой". Допустим, ученик по ошибке написал

$$a^3 - b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2) \quad (\text{неверно})!$$

При подстановке в эту "формулу" $a = b$ получаем слева 0, а справа $2a^3$. Следовательно, это не тождество, а уравнение по отношению к a и b , которое, как легко проверить, справедливо лишь при условии $b = 0$, когда оно превращается в тривиальное равенство $a^3 = a^3$. Следует ясно понимать, что "прикидками" можно лишь обнаружить ошибку в предполагаемом тождестве, но нельзя ничего доказать.

МАТЕМАТИКА: СРЕДСТВО ИЛИ ПРОФЕССИЯ?

Приступая к изучению какой-нибудь серьезной науки, полезно, хотя бы отчасти, отдавать себе отчет: с какой целью изучается эта наука? Огромное большинство школьников изучают в школе иностранный язык, но до недавнего времени лишь единицы из них были способны объясниться с иностранцем на улице. Однако замечено, что если человеку предстоит длительная зарубежная командировка, или даже просто увлекательное туристическое путешествие, его способности к языкам многократно возрастают. Отсюда мораль: бессмысленно учить что-либо впрок, в расчете на то, что изучаемое "когда-нибудь пригодится". Мы не разучиваемся читать и считать только потому, что делаем это ежедневно. Конечно, можно зубрить предмет, чтобы успешно сдать экзамен. Однако человеческая природа хитра. При такой внутренней установке изучаемое автоматически помещается лишь в "ближнюю" память и человек благополучно забывает все, с таким трудом вызубренное, через пару недель после успешно сданного экзамена. Поэтому лучше будет знать предмет тот, кто учит его, пусть в известных пределах, но с расчетом на длительное применение, и кто действительно применяет изученное в своей практике.

Хорошее знание математики увеличит возможности инженера и биолога, экономиста и бизнесмена. Математический аппарат является рабочим инструментом химика, физика и программиста. И, наконец, лишь для некоторых, для избранных, математика станет судьбой.

§ 2. Рациональные алгебраические уравнения и системы

А. Уравнение второй степени (квадратное)

Рассмотрим уравнение

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad (2.1)$$

где x - неизвестное, а a , b и c - заданные коэффициенты, причем $a \neq 0$, так как в противном случае имеем линейное уравнение, единственное решение которого есть $x = -c/b$. Заметим, что так как $a \neq 0$, то можно разделить уравнение (2.1) на этот коэффициент и записать его в приведенном (эквивалентном) виде

$$x^2 + px + q = 0, \quad p = b/a, \quad q = c/a. \quad (2.2)$$

Решить уравнения (2.1), либо (2.2) - значит найти такие значения неизвестного, которые обращают эти уравнения в верные равенства.

Усвоим весьма полезное преобразование, которое называется выделением полного квадрата и осуществимо для любого квадратного трехчлена

$$ax^2 + bx + c = a \left[x^2 + 2x \left(\frac{b}{2a} \right) + \left(\frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{c}{a} \right].$$

Мы здесь добавили и, соответственно, вычли в квадратных скобках одну и ту же величину $(b/2a)^2$ с тем, чтобы собрать полный квадрат

$$x^2 + 2x \left(\frac{b}{2a} \right) + \left(\frac{b}{2a} \right)^2 = \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2.$$

В результате, получаем

$$ax^2 + bx + c = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}. \quad (2.3)$$

Выражение $D = b^2 - 4ac$ называется дискриминантом квадратного трехчлена. Используя представление (2.3), исходное уравнение (2.1) запишем в виде

$$\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = \frac{D}{4a^2}. \quad (*)$$

Отсюда следует, что если $D < 0$, то уравнение (2.1) не имеет действительных корней. Если же $D \geq 0$, то, извлекая из обеих частей уравнения (*) квадратный корень (см. по этому поводу §5, далее), получаем два решения

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}; \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}; \quad D = b^2 - 4ac \geq 0. \quad (2.4)$$

Заметим, что в случае $D = 0$ корни квадратного уравнения совпадают.

Итак, формулы (2.4) для корней квадратного уравнения получены. Многие школьники полагают, что на этом изучение квадратного уравнения заканчивается. На самом деле, формулы (2.4) - это только половина дела! Проследим за тем, как подходит к этой проблеме математик. Прежде всего, он отмечает, что по заданным коэффициентам a , b и c уравнения (2.1) его корни (2.4) определяются однозначно. Верно ли обратное? Если заданы корни x_1 и x_2 квадратного уравнения, то определено ли уравнение?

Оказывается, что глубокий алгебраический смысл корней состоит в том, что они осуществляют разложение квадратного трехчлена на множители

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2). \quad (2.5)$$

Действительно, правая часть уравнения (2.5) является, очевидно, многочленом второй степени,

который обращается в нуль в точках x_1 и x_2 . Докажем, что равенство (2.5) является тождеством по отношению к неизвестному x . Перемножая сомножители в правой части, находим

$$ax^2 + bx + c = ax^2 - a(x_1 + x_2)x + ax_1x_2. \quad (2.6)$$

Учтем теперь важный факт, который часто используется в алгебре: два многочлена могут тождественно совпадать в том, и только в том случае, когда они имеют одинаковую степень и их коэффициенты при одинаковых степенях неизвестного совпадают. Поэтому, чтобы (2.6) было тождеством, необходимо выполнение равенств

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -b/a = -p, \\ x_1x_2 = c/a = q. \end{cases} \quad (2.7)$$

Равенства (2.7) легко выводятся непосредственно из формул (2.4) (проверьте!) и известны как теорема Виета. Таким образом, корни уравнения x_1 и x_2 по формулам (2.7) определяют вид квадратного уравнения с точностью до общего множителя a .

Теорема Виета позволяет легко проверить, правильно ли найдены корни квадратного уравнения. Применения ее в курсе элементарной математики весьма многочисленны (см., например, далее пункты Б, Г и §4).

а) Пусть x_1 и x_2 - корни уравнения $3x^2 - 7x + 2 = 0$. Вычислить $g = x_1^3x_2 + x_1x_2^3$.

Преобразуем симметричную комбинацию корней к виду

$$g = x_1x_2(x_1^2 + x_2^2) = x_1x_2[(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2] = q[p^2 - 2q].$$

Из вида уравнения а) находим коэффициенты приведенного уравнения $p = -7/3$, $q = 2/3$, что дает $g = 74/27$. ■

Б. Уравнения высших степеней

Возьмем три произвольных действительных числа, x_1 , x_2 и x_3 и рассмотрим выражение

$$y(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3), \quad (2.8)$$

составленное по аналогии с правой частью (2.5). Ясно, что $y(x)$ является многочленом третьей степени, а числа x_1 , x_2 и x_3 - его корни. Перемножив множители в правой части (2.8) и приведя подобные члены, представим этот многочлен в виде

$$y(x) = x^3 + px^2 + qx + s; \quad (2.9a)$$

где

$$\begin{aligned} p &= -(x_1 + x_2 + x_3); \\ q &= x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3; \\ s &= -x_1x_2x_3. \end{aligned} \quad (2.9б)$$

Мы получили, тем самым, теорему Виета для кубического уравнения, которая показывает, что приведенное кубическое уравнение (с коэффициентом при старшем члене равным единице) полностью определяется своими действительными корнями. Ясно теперь, что если у нас имеется n действительных чисел $x_1, x_2, \dots, x_n$, то составляя выражение вида (2.8) из n сомножителей, получим приведенный многочлен n -й степени, коэффициенты которого полностью определяются его корнями.

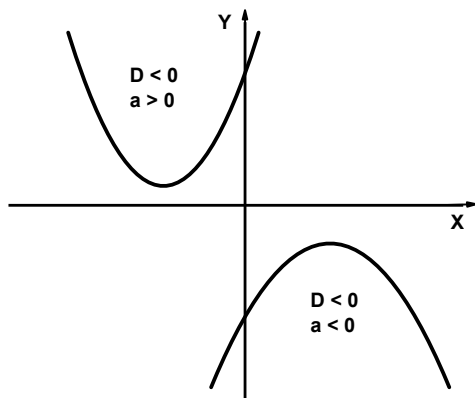


Рис. 2.1

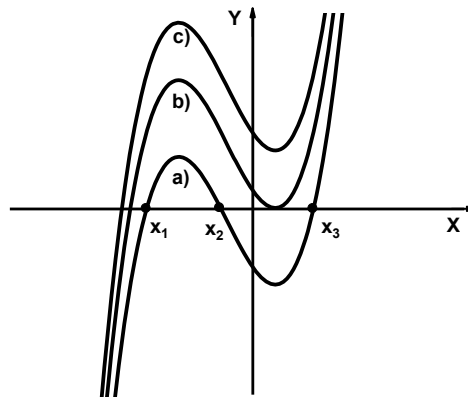


Рис. 2.2

Итак, обратная задача - определение многочлена по его действительным корням, решается неожиданно легко. Прямая же задача - вычисление корней заданного многочлена, в области действительных чисел часто не имеет решения! Так, квадратное уравнение (2.1) при отрицательном дискриминанте не имеет действительных корней. При этом график функции $y = ax^2 + bx + c$ лежит всюду ниже или выше оси x , (см. Рис. 2.1).

Функция $y(x)$, заданная соотношением (2.8), есть кубическая парабола, показанная на Рис. 2.2. Если кубическое уравнение имеет три разных корня x_1 , x_2 и x_3 , то график кубической параболы пересекает ось x три раза (см. Рис. 2.2, положение а)). Допустим, что в формуле (2.9а) коэффициенты p и q остаются постоянными, а свободный член s постепенно увеличивается. Нетрудно сообразить, что при такой операции график функции (2.9а) постепенно смещается вверх, оставаясь параллельным самому себе. В положении б) на Рис. 2.2 корни x_2 и x_3 сливаются, а при дальнейшем увеличении s у соответствующего многочлена (2.9а) остается только один действительный корень, сдвинутый влево по отношению к его исходному положению x_1 . Поскольку для кубической параболы значения y непрерывно меняются от $-\infty$ до $+\infty$ при изменении x от $-\infty$ до $+\infty$, то любая кубическая парабола хотя бы один раз пересекает ось x . Следовательно, любое кубическое уравнение (и вообще, любое уравнение нечетной степени $n = 2k + 1$) имеет хотя бы один действительный корень. С другой стороны, многочлен четной степени, $n = 2k$, может вообще не иметь корней. Например, график функции $y = x^{2k} + 1$ не пересекает, очевидно, ось x ни разу.

Математики блестяще справились с этой затруднительной ситуацией. Они ввели специальные величины - комплексные числа, обобщающие числа действительные (см. далее §19). В области комплексных чисел любой многочлен степени n имеет ровно n корней (знаменитая теорема Гаусса). Мало этого, для комплексных корней оказывается справедливой теорема Виета. Она имеет в точности вид (2.7) для квадратного, и (2.9б) для кубического уравнений, соответственно.

В. Типичные примеры

б) Решить биквадратное уравнение вида $ax^4 + bx^2 + c = 0$.

Это уравнение заменой $t = x^2 \geq 0$ сводится к квадратному. При решении квадратного уравнения отбираем только неотрицательные корни. Аналогичным образом решается и более общее уравнение

$$ax^{2n} + bx^n + c = 0,$$

где достаточно положить $t = x^n$. ■

с) $(x+a)(x+2a)(x+3a)(x+4a) = b^4$.

Заметим, что

$$\begin{aligned}(x+a)(x+4a) &= x^2 + 5a + 4a^2; \\ (x+2a)(x+3a) &= x^2 + 5a + 6a^2.\end{aligned}$$

Поэтому замена $t = x^2 + 5a + 4a^2$ сводит исходное уравнение к квадратному

$$t(t+2a^2) = b^4. \blacksquare$$

Хотя общие формулы для корней уравнений третьей и четвертой степени существуют, они не изучаются в школе ввиду их сложности. Если в процессе решения какой-либо задачи возникает уравнение третьей степени, то следует искать его действительные корни с помощью разложения многочлена на множители.

$$\text{d)} \quad x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0.$$

Группируя члены, имеем

$$(x^3 + 2x^2) - (x + 2) = 0; \Rightarrow x^2(x+2) - (x+2); \Rightarrow (x+2)(x+1)(x-1) = 0.$$

Отсюда видно, что это уравнение имеет корни $x_1 = -2$, $x_2 = -1$, и $x_3 = 1$. ■

$$\text{e)} \quad x^3 - 4x^2 + 5x - 6 = 0.$$

Заметим, что из теоремы Виета для кубического уравнения (2.9b) следует, что если коэффициенты p , q и s - целые числа, и если существует целый корень этого уравнения, то он является делителем свободного члена. Действительно, пусть x_1 целый корень уравнения (2.9a). Поскольку p целое, то из первого уравнения (2.9b) следует, что $x_2 + x_3$ - целое число. Тогда из второго уравнения (2.9b) следует, что $x_2 x_3 = -s/x_1$ также есть целое число. В ряде случаев, этот факт облегчает подбор корней уравнения высокой степени. Так, для уравнения e) подбором находим, что один из его корней есть $x_1 = 3$. Следовательно, должно существовать разложение многочлена на множители вида

$$x^3 - 4x^2 + 5x - 6 = (x-3)(x^2 + px + q).$$

Коэффициенты p и q в этом разложении могут быть найдены делением многочлена на множитель $x - 3$. Альтернативно, коэффициенты p и q можно найти, перемножая множители в правой части и приравнявая члены справа и слева с одинаковыми степенями x . Таким путем находим разложение

$$x^3 - 4x^2 + 5x - 6 = (x-3)(x^2 - x + 2) = 0.$$

Так как квадратный трехчлен $x^2 - x + 2$ не имеет действительных корней, то уравнение e) имеет лишь один действительный корень, $x_1 = 3$. ■

Г. Система линейных уравнений

Простейшая система линейных уравнений имеет вид

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1; \\ a_2x + b_2y = c_2. \end{cases} \quad (2.10)$$

Любой школьник легко решает такую систему методом исключения одного из неизвестных. Однако эта система заслуживает внимательного исследования. Неискушенный ученик и не подозревает, какое огромное количество научных и прикладных задач первостепенной

важности сводится к исследованию линейных систем типа (2.10) (только, как правило, с большим количеством неизвестных). Системы линейных уравнений изучает *линейная алгебра*.

Умножим первое уравнение на b_2 , а второе на b_1 и вычтем из первого уравнения второе. Получим

$$(a_1 b_2 - a_2 b_1)x = c_1 b_2 - c_2 b_1. \quad (2.11a)$$

Аналогично, умножим первое уравнение на a_2 , а второе - на a_1 и опять вычтем из первого уравнения второе. Получим

$$(b_1 a_2 - b_2 a_1)y = c_1 a_2 - c_2 a_1. \quad (2.11b)$$

Назовем *определителем* второго порядка квадратную табличку

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc, \quad (2.12)$$

где a, b, c и d - некоторые числа, называемые элементами определителя. Выражение, стоящее в правой части равенства (2.12) есть число, которое по определению приписывается определителю. Оно получается перемножением чисел, стоящих на главной диагонали определителя (a и d), и вычитанием затем произведения чисел, стоящих на его побочной диагонали (c и b). Используя понятие определителя, имеем

$$a_1 b_2 - a_2 b_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \Delta_0; \quad c_1 b_2 - c_2 b_1 = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = \Delta_x; \quad a_1 c_2 - a_2 c_1 = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = \Delta_y, \quad (2.13)$$

так что уравнения (2.11) переписываются в следующем простом виде

$$\begin{cases} \Delta_0 \cdot x = \Delta_x; \\ \Delta_0 \cdot y = \Delta_y. \end{cases} \quad (2.14)$$

Исследуем теперь систему (2.14), которая эквивалентна системе (2.10).

1°. Если $\Delta_0 \neq 0$, то система (2.10) имеет единственное решение $x = \frac{\Delta_x}{\Delta_0}; \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta_0}$.

2°. Если $\Delta_0 = \Delta_x = \Delta_y = 0$, то система имеет бесконечное множество решений.

3°. Если $\Delta_0 = 0$, но хотя бы одно из чисел Δ_x , либо Δ_y не равно нулю, то система (2.10) противоречива и не имеет решений.

Действительно, из определений (2.13) следует, что в случае 2° коэффициенты уравнений системы пропорциональны друг другу

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}.$$

Следовательно, второе уравнение (2.10) является следствием первого и может быть вычеркнуто. Таким образом, в случае 2° система (2.10) имеет бесконечное множество пар решений (x, y) , где x и y удовлетворяют одному первому уравнению системы. Геометрическую интерпретацию решения системы (2.10) мы приведем в §4.

Преимущество введения определителей (2.13) состоит в том, что они просто выписываются по виду уравнений системы (при этом система должна быть записана в каноническом виде (2.10)). Так, главный определитель Δ_0 составлен из коэффициентов, стоящих при неизвестных системы. Определитель Δ_x получен из Δ_0 вычеркиванием столбца

коэффициентов, стоящих при x и заменой их на столбец свободных членов. Аналогично, определитель Δ_y получен из Δ_0 заменой столбца коэффициентов, стоящих при y , на столбец свободных членов.

$$f) \quad \text{При каких значениях параметра } a \text{ система } \begin{cases} x + ay = a^2; \\ ax + y = a, \end{cases} \text{ имеет решения?}$$

Составим и вычислим определители

$$\Delta_0 = \begin{vmatrix} 1, & a \\ a, & 1 \end{vmatrix} = 1 - a^2; \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} a^2, & a \\ a, & 1 \end{vmatrix} = 0; \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 1, & a^2 \\ a, & a \end{vmatrix} = a - a^3.$$

При $\Delta_0 \neq 0$, т. е. при $a \neq \pm 1$, система имеет единственное решение. Если же $a = \pm 1$, то $\Delta_0 = \Delta_x = \Delta_y = 0$, и система имеет бесчисленное множество решений. ■

Простейшая *однородная* система линейных уравнений имеет вид

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = 0; \\ a_2x + b_2y = 0. \end{cases} \quad (2.15)$$

Очевидно, что она всегда имеет *тривиальное* решение, $x = y = 0$. Принципиально важно, что система (2.15) может иметь также и нетривиальные решения. Действительно, если главный определитель системы $\Delta_0 \neq 0$, то как мы доказали выше, возможно только тривиальное решение, поскольку в данном случае, как легко видеть, $\Delta_x = \Delta_y = 0$. Если же $\Delta_0 = 0$, то имеем бесконечное множество решений, которые удовлетворяют одному из уравнений (2.15). Так, $x = b_1y/a_1$, если $a_1 \neq 0$.

АБСТРАКТНОСТЬ МАТЕМАТИКИ

Естественно спрашивать физика, химика, биолога, в чем польза исследований, которыми они занимаются. Математики не любят таких вопросов. Они отстаивают принцип, что любая, самая абстрактная задача может быть предметом исследования, если только полученные результаты и выводы не являются противоречивыми. В этом есть резон, поскольку математика уже много раз доказала свою исключительную мощь и полезность в разнообразных прикладных вопросах. Поэтому у самых стойких бюрократов нет оснований задавать им вопрос о пользе абстрактных математических исследований для народного хозяйства. Очень часто то, что сегодня кажется абстрактным, завтра оказывается прикладным.

Одна из важнейших черт математики – развитие максимального общего подхода к задачам. Так, математиков интересует не решение системы (2.10) при конкретных численных значениях коэффициентов, а зависимость этих решений от всех существенных параметров задачи, то есть от a_1 , b_1 и т.д. При этом крайне важным для приложений является тот факт, что математик дает *исчерпывающее* решение, то есть устанавливается фундаментальный факт, что существует три, и только три отмеченные выше возможности при решении системы (2.10) при любых значениях параметров a_1 , b_1 и т.д. Полное исследование проблемы дано также для гораздо более сложного случая системы m уравнений с n неизвестными $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Эта задача является центральной в *линейной алгебре*, но в своей общей постановке она подавляет новичка – первокурсника своей абстрактностью. Поневоле, у него возникает вопрос, какая польза будет от изучения всей этой премудрости? К сожалению, в преподавании математики соблюдается тот же принцип – в чем польза математики должны рассуждать представители других наук. Только на старших курсах студент

увидит, какое фундаментальное значение для науки имеют методы и понятия линейной алгебры. Достаточно сказать, что методы линейной алгебры лежат в основе *квантовой механики*, науки, которая объясняет, как устроены атомы и молекулы, из которых состоим мы сами, и окружающий нас мир.

В этой связи, крайне полезно твердо помнить анализ решения простеньких линейных систем (2.10), (2.15), что является важным ключом к пониманию общих теорем линейной алгебры и применению этих методов в прикладных задачах.

Д. Системы рациональных уравнений

$$g) \quad \begin{cases} x + y = 3; \\ xy = -4. \end{cases}$$

Из теоремы Виета (2.7) следует, что x и y являются корнями квадратного уравнения $t^2 - 3t - 4 = 0$. Корни этого уравнения есть $t_1 = -1$ и $t_2 = 4$. Поэтому система g) имеет симметричную пару решений $x_1 = -1, y_1 = 4$ и $x_2 = 4, y_2 = -1$. ■

К системе типа g) сводятся многие системы с двумя неизвестными.

$$h) \quad \begin{cases} x^3 + y^3 = 7; \\ xy(x + y) = -2. \end{cases}$$

Преобразуем сумму кубов

$$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2) = (x + y)[(x + y)^2 - 3xy] = (x + y)^3 - 3xy(x + y).$$

Используя второе уравнение системы, находим

$$\begin{cases} (x + y)^3 = 1; \\ xy(x + y) = -2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 1; \\ xy(x + y) = -2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 1; \\ xy = -2. \end{cases}$$

Таким образом, система h) сведена к системе типа g). ■

$$i) \quad \begin{cases} x^2 + y^2 - xy = 13; \\ x + y - \sqrt{xy} = 3. \end{cases}$$

Положим $\sqrt{xy} = v \geq 0; \quad x + y = u$. Тогда

$$x^2 + y^2 - xy = (x + y)^2 - 3xy = u^2 - 3v^2.$$

Получаем систему

$$\begin{cases} u^2 - 3v^2 = 13 \\ u - v = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (3 + v)^2 - 3v^2 = 13; \\ u = v + 3. \end{cases}$$

Для определения v имеем квадратное уравнение $v^2 - 3v + 2 = 0$, корни которого $v_1 = 1, v_2 = 2$. Следовательно, $u_1 = 4, u_2 = 5$. Таким образом, исходная система эквивалентна следующим двум системам типа g)

$$1) \begin{cases} x + y = 4; \\ xy = 1; \end{cases} \quad \text{и} \quad 2) \begin{cases} x + y = 5; \\ xy = 4. \end{cases} \quad \blacksquare$$

Мы видим, таким образом, что использование симметрии системы часто является важным ключом к ее решению.

Е. Контрольные задачи

1°. $x^3 + 4x^2 + 6x + 3 = 0.$

2°. $\frac{24}{x^2 + 2x - 8} - \frac{15}{x^2 + 2x - 3} = 2.$

3°. При каких значениях a и b система $\begin{cases} ax - y = b; \\ bx + y = a, \end{cases}$ имеет бесконечное множество решений?

4°. $\begin{cases} (x^2 + 1)(y^2 + 1) = 10; \\ (x + y)(xy - 1) = 3. \end{cases}$

§ 3. Рациональные неравенства

А. Свойства числовых неравенств

Пусть a и b есть некоторые действительные числа. Говорят, что $a < b$, если число a на числовой оси расположено левее числа b . Имея ввиду эту геометрическую интерпретацию, нетрудно доказать эквивалентность следующих неравенств

1°. $a < b, \quad c - \text{любое} \quad \Leftrightarrow \quad a + c < b + c;$

2°. $a < b, \quad c > 0 \quad \Leftrightarrow \quad a \cdot c < b \cdot c;$

$a < b, \quad c < 0 \quad \Leftrightarrow \quad a \cdot c > b \cdot c;$

3°. $0 < a < b, \quad \Leftrightarrow \quad 0 < \frac{1}{b} < \frac{1}{a};$

4°. $0 < a < b, \quad \Rightarrow \quad a^2 < b^2;$

5°. $0 < a < b, \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{a} < \sqrt{b}.$

Полезно воспринимать эти теоремы как правила действий с конкретными числами, или как некоторые операции с точками на числовой оси. Так, свойство 1° означает, что если от точек a и b на числовой оси отложить в любую сторону один и тот же отрезок длины c , то порядок следования точек не изменится, и т. д. Весьма важно для дальнейшего требование положительности чисел a и b в свойствах 3° и 4°. Невыполнение этого требования может приводить к неверным выводам. Так, верно что $-5 < 3$, но неверно, что $(-5)^2 < 3^2$.

Б. Эталонные неравенства

Рассуждения, проводимые при решении рациональных неравенств можно сделать стандартными, используя некоторые эталонные неравенства. Заметим, что для произвольных функций $f(x)$ и $g(x)$ нижеследующие неравенства эквивалентны

$$f(x) \cdot g(x) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} f(x) > 0; \\ g(x) > 0, \end{cases} \quad \text{либо} \quad \begin{cases} f(x) < 0; \\ g(x) < 0, \end{cases} \quad (3.1)$$

а также

$$f(x) \cdot g(x) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} f(x) > 0; \\ g(x) < 0, \end{cases} \quad \text{либо} \quad \begin{cases} f(x) < 0; \\ g(x) > 0. \end{cases} \quad (3.2)$$

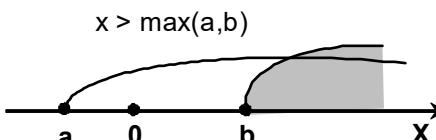
Действительно, для каждого фиксированного x функции $f(x)$ и $g(x)$ являются некоторыми числами, и знак произведения этих чисел однозначно определяется знаком сомножителей. Совершенно аналогично, эквивалентны неравенства

$$\frac{f(x)}{g(x)} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0; \\ g(x) > 0, \end{cases} \text{ либо } \begin{cases} f(x) < 0; \\ g(x) < 0, \end{cases} \quad (3.3)$$

а также

$$\frac{f(x)}{g(x)} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0; \\ g(x) < 0, \end{cases} \text{ либо } \begin{cases} f(x) < 0; \\ g(x) > 0. \end{cases} \quad (3.4)$$

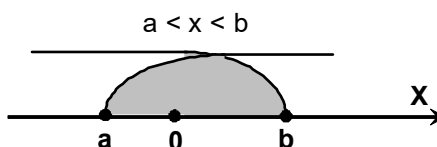
Напомним решение простейших систем неравенств, к которым сводятся обычно более сложные случаи. Имеем

$$\begin{cases} x > a \\ x > b \end{cases} \Rightarrow x > \max(a, b)$$


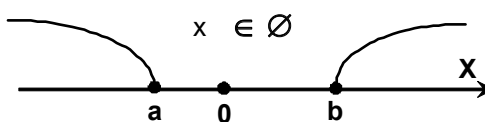
где $\max(a, b)$ - есть максимальное из чисел a и b . Аналогично

$$\begin{cases} x < a \\ x < b \end{cases} \Rightarrow x < \min(a, b)$$


где $\min(a, b)$ - есть минимальное из чисел a и b . Далее

$$\begin{cases} x > a \\ x < b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a < x < b, \\ \text{при } a < b \end{cases}$$


Напротив,

$$\begin{cases} x < a \\ x > b \end{cases} \Rightarrow \emptyset, \quad a \leq b.$$


Системы трех и больше чисел неравенств последовательно упрощаются путем совместного решения любой пары неравенств системы. Например, имеем

$$\begin{cases} x > a \\ x > b \\ x > c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > \max(a, b) \\ x > c \end{cases} \Rightarrow x > \max[c, \max(a, b)].$$

В. Типичные примеры

а) Квадратичное неравенство $ax^2 + bx + c > 0$.

Это неравенство является одним из важнейших типов неравенств в школьной практике. Если дискриминант $D = b^2 - 4ac \geq 0$, то действительные корни x_1 и x_2 соответствующего квадратного уравнения существуют. Тогда, как мы знаем из §2А, квадратный трехчлен можно разложить на множители и записать исходное неравенство в виде $a(x - x_1)(x - x_2) > 0$. Умножая это неравенство на число $1/a$, по свойству 2° сохраняем его знак, если $a > 0$ и меняем знак неравенства на обратный, если $a < 0$. Затем применяем эталонные неравенства (3.1), либо (3.2).

В случае $D < 0$ преобразование (2.3) показывает, что функция $y = ax^2 + bx + c$ всегда положительна при $a > 0$. Следовательно, при $a > 0$ решением исходного неравенства является любое действительное число. В случае же $a < 0$ у него решений нет. По поводу геометрической интерпретации этих результатов см. также §4. ■

б) Рациональное неравенство типа $\frac{ax+b}{cx+d} > 0$, либо $\frac{ax+b}{cx+d} < 0$.

Это неравенство решается применением эталонных неравенств (3.3) и (3.4). ■

с) Решить неравенство $\frac{2}{3-x} < 4$.

При решении этого неравенства было бы грубой ошибкой умножить обе его части на множитель $3 - x$, поскольку знак этого выражения неизвестен. Правильный метод заключается в переносе свободного члена в правую часть,

$$\frac{2}{3-x} < 4 \quad \Rightarrow \quad \frac{2-4(3-x)}{3-x} < 0,$$

с последующим приведением подобных членов в числителе и применением формулы (3.4). Напротив, решая неравенство

$$\frac{3x^2 - 5x + 4}{x^2 + 1} < 0,$$

следует прежде всего освободиться от знаменателя, умножив обе части неравенства на заведомо положительный множитель $x^2 + 1 > 0$. В результате получим квадратичное неравенство типа, разобранный в примере а). ■

д) Решить неравенство $\frac{2x}{x^2-9} \leq \frac{1}{x+2}$.

Преобразуем данное неравенство следующим образом

$$\frac{2x(x+2)-(x^2-9)}{(x+3)(x-3)(x+2)} \leq 0; \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2+4x+9}{(x+3)(x-3)(x+2)} \leq 0.$$

Поскольку $x^2 + 4x + 9 = (x+2)^2 + 5 > 0$, то необходимо $(x+3)(x-3)(x+2) < 0$. Воспользуемся методом интервалов. Положим $y(x) = (x+3)(x+2)(x-3)$ и заметим, что функция $y(x)$ меняет знак в точках -3 , -2 и 3 . При $x < -3$ имеем $y(x) < 0$, при $-3 \leq x < -2$ функция $y(x) \geq 0$, затем при $-2 < x < 3$ функция $y(x) < 0$ и, наконец, при $x \geq 3$ имеем $y(x) \geq 0$.

Ответ: $x \in (-\infty, -3) \cup (-2, 3)$. ■

Г. Контрольные задачи

1°. $(x^2 - x)^2 + 3(x^2 - x) + 2 \geq 0$.

2°. $\frac{2-x}{x^3+x^2} > \frac{1-2x}{x^3-3x^2}$.

3°. Найдите целые x , удовлетворяющие неравенству $x^4 - 3x^3 - x + 3 < 0$.

4°. $(x+4)^5(x+3)^6(x+2)^7(x-1)^8 \leq 0$.

ЗАПОМИНАТЬ ИЛИ ВЫВОДИТЬ?

Объем материала, которым должен владеть выпускник средней школы, достаточно велик. Но он мал по сравнению с тем обширным количеством сведений, которое усваивает успешный выпускник вуза. В свою очередь, от студенческого диплома до переднего края науки также лежит очень неблизкий путь. Удивительно поэтому, что достаточно много людей годам к 30-ти успешно проходит эту тернистую дорогу.

Достигает успеха тот, кто смолоду учится усваивать материал активно, творчески. Голова такого человека меньше всего похожа на библиотеку, где все разложено по полочкам, либо на память персонального компьютера с ее файлами, в нужный момент вызываемыми на экран. Основу основ составляет, по-видимому, тонкое умение безошибочно проводить длинные цепочки логических рассуждений, отправляясь от простых и очевидных (или принятых за основные) положений. Важное значение имеет также критическое восприятие нового материала. При таком подходе к обучению нужная информация в любой момент воспроизводится из некоторого минимума тщательно отобранных исходных данных. Наблюдая такую работу мощного, тренированного ума, сторонний наблюдатель приходит в неподдельный восторг и восхищение. Эффективности же его, в сочетании с интуицией, может позавидовать (пока что) любой компьютер!

§ 4. Линейная и квадратная функции

А. Линейная функция

Так называется функция, заданная уравнением

$$y = kx + b, \quad (4.1)$$

графиком которой является некоторая прямая линия (см. Рис. 4.1).

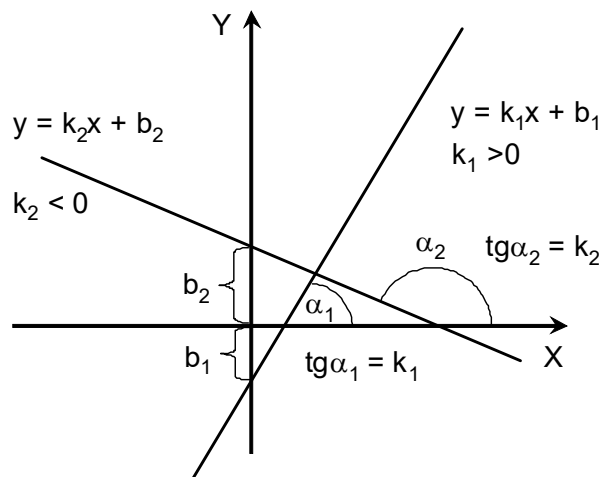


Рис. 4.1

При заданных конкретных значениях k и b любой школьник уверенно строит график прямой линии по двум точкам. Математик же ставит вопрос иначе. Он интересуется всей совокупностью прямых, описываемых уравнением (4.1). Иными словами, он изучает, как изменяется положение прямой по отношению к осям координат при изменении параметров k и b в уравнении (4.1). Такая постановка вопроса характерна для раздела математики, который называется *аналитической геометрией*.

Если $x = 0$, то $y = b$, так что точка $(0, b)$ принадлежит прямой (4.1). Следовательно, коэффициент b в уравнении (4.1) равен отрезку, отсекаемому данной прямой на оси y . Геометрический смысл коэффициента k определим, перейдя в (4.1) к приращениям

$$\Delta y = k \Delta x \quad \Rightarrow \quad k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg} \alpha, \quad (4.2)$$

где α - угол между положительным направлением оси x и данной прямой, отсчитываемый против часовой стрелки (см. Рис. 4.1). Если $k > 0$, то прямая идет из третьего квадранта в первый, а если $k < 0$, то из второго квадранта - в четвертый. Если $k = 0$, то прямая $y = b$ расположена параллельно оси x . А вот случай прямой, параллельной оси y , уравнение (4.1),

строго говоря, не описывает! Уравнение такой прямой, $x = c$, получается из (4.1) искусственным предельным переходом $b = -kc$, $k \rightarrow \infty$. Чтобы избежать этой трудности, в аналитической геометрии общее уравнение прямой линии записывают в виде

$$Ax + By + C = 0, \quad (4.3a)$$

где A , B и C - произвольные коэффициенты. В частности, прямая $x = c$ получается из уравнения (4.3a) в случае $B = 0$, а уравнение прямой, записанное в виде

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \quad (4.3б)$$

называется уравнением прямой в отрезках, так как очевидно, что прямая (4.3б) отсекает на оси x отрезок a , а на оси y - отрезок b .

Дадим теперь графическую интерпретацию решению линейной системы уравнений (2.10), подробно рассмотренной в §2Г. Предполагая $b_1 \neq 0$, $b_2 \neq 0$, перепишем систему (2.10) в виде

$$\begin{aligned} y &= -\frac{a_1}{b_1}x + \frac{c_1}{b_1}; \\ y &= -\frac{a_2}{b_2}x + \frac{c_2}{b_2}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Рассмотрим сначала случай, когда главный определитель исходной системы (2.10) не равен нулю

$$\Delta_0 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0. \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a_1}{b_1} \neq \frac{a_2}{b_2}. \quad (4.5)$$

В §2Г мы доказали, что в этом случае система (2.10) имеет единственное решение. Действительно, условие (4.5) означает, что угловые коэффициенты прямых (4.4) различны. Следовательно, прямые заведомо пересекаются в некоторой точке плоскости (x_0, y_0) , координаты которой и являются единственным решением линейной системы уравнений (2.10) (см. Рис. 4.2а).

Пусть теперь главный детерминант системы $\Delta_0 = 0$. Тогда угловые коэффициенты прямых (4.4) одинаковы. Следовательно, на плоскости прямые либо совпадают, либо параллельны (см. Рис. 4.2б). Как различить эти два случая алгебраически? С алгебраической точки зрения, имеются две возможности. Пусть все детерминанты системы равны нулю.

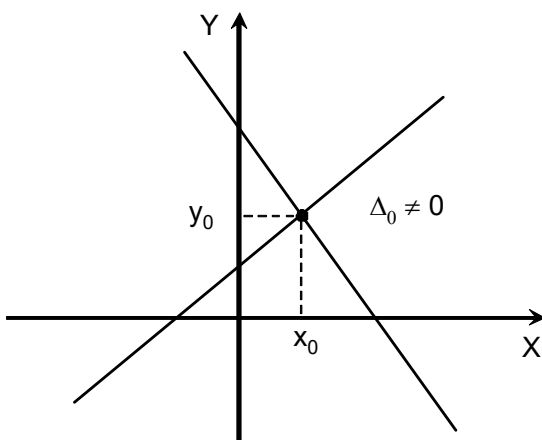


Рис. 4.2а

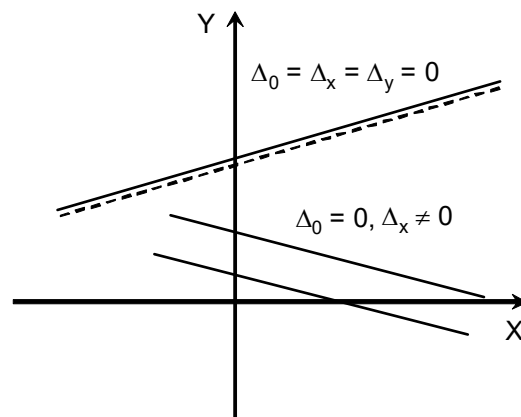


Рис. 4.2б

Это, как мы видели в §2Г, эквивалентно условию пропорциональности коэффициентов системы (2.10)

$$\Delta_0 = \Delta_x = \Delta_y = 0; \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}. \quad (4.6)$$

Очевидно, что в этом случае прямые (4.4) совпадают, и система имеет бесконечное множество решений. В противоположном случае, хотя бы один из детерминантов, например Δ_x , отличен от нуля

$$\Delta_0 = 0; \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_2 \\ c_2 & b_1 \end{vmatrix} = c_1 b_2 - c_2 b_1 \neq 0. \quad (4.7)$$

В этом случае система противоречива, решений не имеет. Соответственно, прямые (4.4) параллельны.

Мораль – каждому, логически возможному набору алгебраических условий, сформулированных в §2Г, соответствует свой, строго определенный случай расположения прямых на плоскости. Геометрическая интерпретация алгебраических соотношений крайне полезна. В данном случае, она ясно показывает, почему существует три, и только три различных типа алгебраических решений системы (2.10).

Б. Квадратичная функция

Квадратичная функция задается уравнением

$$y = ax^2 + bx + c; \quad a \neq 0. \quad (4.6)$$

Доказывается, что графиком этой функции является некоторая парабола. Параболой называется геометрическое место точек, равно удаленных от заданной точки и некоторой прямой. В соответствии с изложенным выше подходом, самое важное при исследовании функции (4.6) состоит в том, чтобы понять, как изменяется положение параболы по отношению к осям координат при изменении параметров a , b и c .

Перепишем равенство (4.6), выделяя в правой части полный квадрат по формуле (2.3)

$$y = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{D}{4a}; \quad D = b^2 - 4ac. \quad (4.7)$$

Перенесем затем свободный член и левую часть, и введем новые декартовы координаты по формулам

$$y_1 = y + \frac{D}{4a}; \quad x_1 = x + \frac{b}{2a}.$$

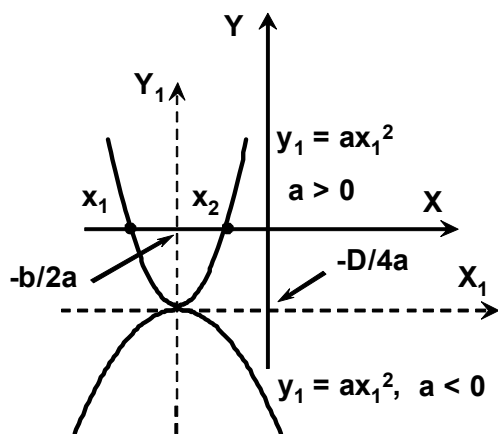


Рис. 4.3

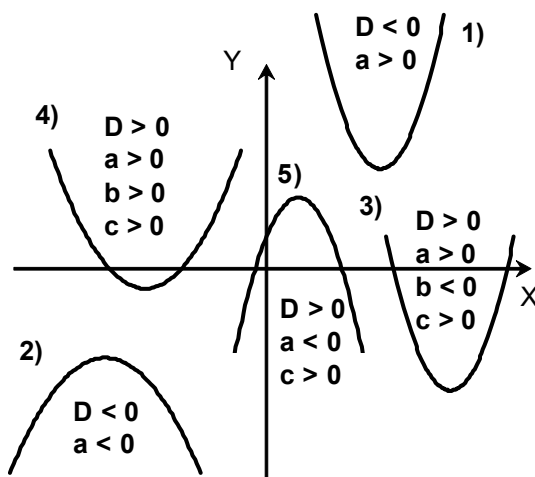


Рис. 4.4

В новых осях (x_1, y_1) уравнение (4.6) принимает простой вид, $y_1 = ax_1^2$ (см. Рис. 4.3). Если $a > 0$, то ветви параболы направлены вверх, а если $a < 0$ - то вниз. Таким образом, в старых осях (x, y) координатами вершины параболы являются значения

$$x_0 = -\frac{b}{2a}; \quad y_0 = -\frac{D}{4a}. \quad (4.8)$$

Этот факт важно хорошо себе уяснить. Действительно, при подстановке координат точки (4.8) в уравнение (4.7) получаем верное равенство, т.е. точка (4.8) принадлежит параболе. С другой стороны, из Рис. 4.3 нетрудно видеть, что точка (4.8) является минимальной точкой параболы при $a > 0$ и максимальной ее точкой при $a < 0$.

Формулы (4.7) и (4.8) позволяют исследовать уравнение параболы в общем виде. Запоминать же их не имеет смысла, так как они в каждом конкретном случае выводятся в две строчки (см. §2). Напомним, что точки пересечения параболы (4.6) с осью x являются корнями квадратного трехчлена, стоящего в правой части. Если $D < 0$, то действительных корней нет и парабола не пересекает ось x . Действительно, при $D < 0$ и $a > 0$ имеем $y_0 > 0$; кроме того, ветви параболы направлены вверх. Если же $D < 0$ и $a < 0$, то $y_0 < 0$ но ветви параболы направлены в этом случае вниз, (см. Рис. 4.4, случаи 1) и 2)). Случаю 3) на Рис. 4.4 соответствует $a > 0$ и наличие положительных действительных корней. При этом $D > 0$, и как легко понять из теоремы Виета (2.8), как произведение корней c/a , так и их сумма $-b/a$ положительны. В случае же 4) произведение корней c/a положительно, но их сумма $-b/a$ отрицательна, а в случае 5) ветви направлены вниз ($a < 0$) и корни имеют различные знаки ($c/a < 0$). Другие возможные случаи предоставляем рассмотреть читателю самостоятельно.

В. Кривые второго порядка

Так же как уравнение (4.1) есть частный случай общего уравнения прямой (4.2), уравнение (4.3) есть частный случай более общего уравнения кривой второго порядка

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \quad (4.9)$$

и получается из этого уравнения, в частности, в случае $B = C = 0$.

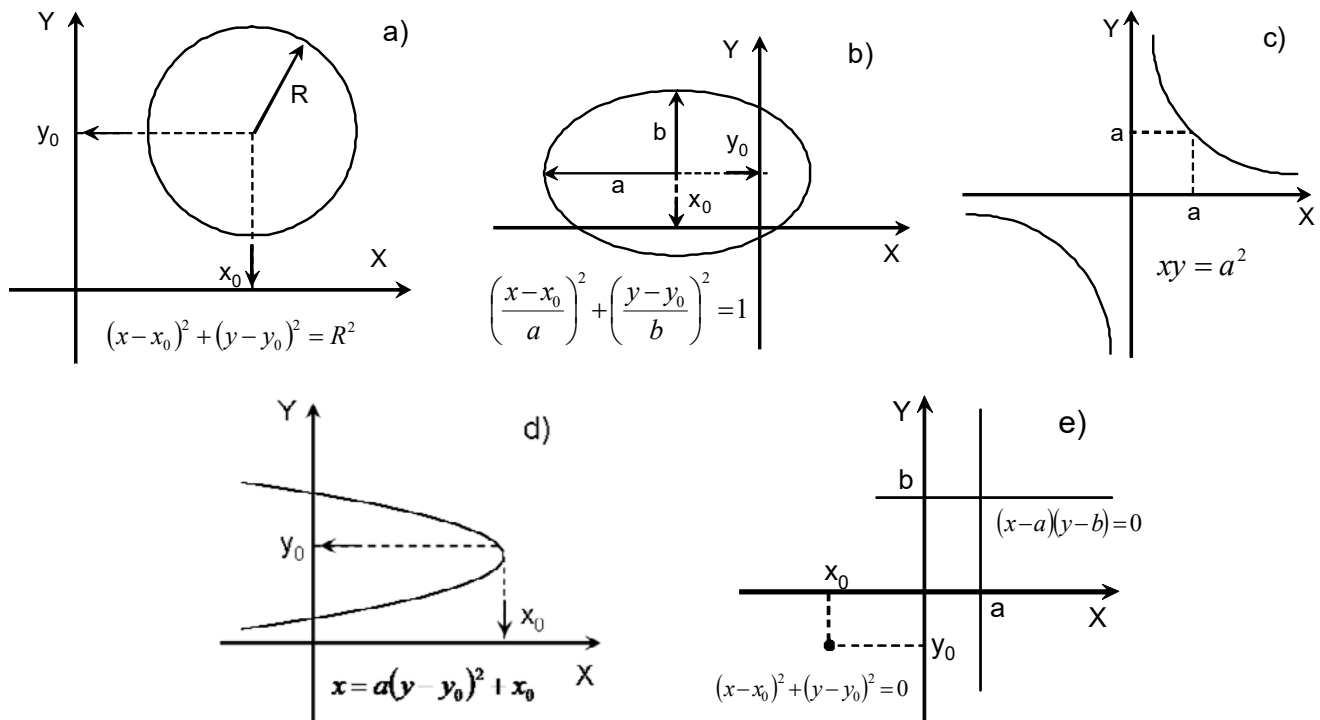


Рис. 4.5

Оказывается, что уравнение (4.9) может описывать окружности, эллипсы, гиперболы, параболы, пересекающиеся прямые, наконец, отдельную точку (см. Рис. 4.5 а), b), c), d) и e), соответственно). А может и вообще ничего не описывать! И все это разнообразие кривых определяется соответствующим выбором коэффициентов A, B, C , и т. д. в уравнении (4.9). Это есть шикарная математическая задача – найти условия на коэффициенты A, B, C , и т.д., при которых реализуется каждая из отдельных возможностей. Конечно, она решена уже много лет назад, и подробно излагается в стандартном курсе аналитической геометрии.

Г. Типичные задачи

Лишь искушенные ученики знают, что задачи "на квадратную функцию" являются одними из самых сложных в курсе элементарной математики. Эти задачи требуют свободного владения всеми понятиями и фактами, изложенными в §2, и в данном параграфе.

а) Найдите все значения a , при которых неравенство $(a+4)x^2 - 2ax + 2a - 6 < 0$ выполняется для всех x .

Чтобы удовлетворить условиям задачи, парабола должна быть расположена так, как в случае 2) на Рис. 4.4. Следовательно, необходимо выполнение условий

$$\begin{cases} a+4 < 0 \\ D = (2a)^2 - 4(a+4)(2a-6) < 0. \end{cases} \blacksquare$$

б) При каких значениях a графики функций $y_1 = 2ax + 1$ и $y_2 = (a-6)x^2 - 2$ не пересекаются?

По условию задачи разность функций

$$y_2 - y_1 = (a-6)x^2 - 2ax - 3$$

нигде не обращается в нуль. Следовательно, необходимо

$$D = (2a)^2 + 12(a-6) < 0. \blacksquare$$

с) При каких значениях параметра a оба корня уравнения $x^2 + (2a+6)x + 4a+12 = 0$ больше -1?

Во-первых, действительные корни этого уравнения должны существовать. Следовательно, необходимо

$$D = (2a+6)^2 - 4(4a+12) \geq 0.$$

Далее, ветви параболы направлены вверх и возможны всего три случая расположения корней уравнения по отношению к точке $x = -1$ (см. Рис. 4.6).

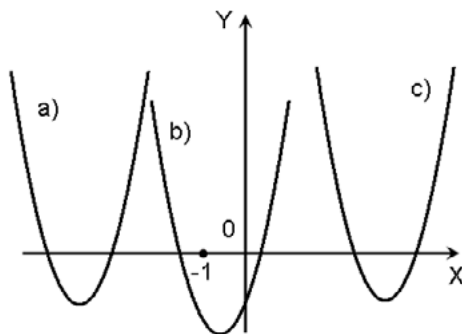


Рис. 4.6

Нас устраивает лишь случай с), когда оба корня параболы расположены справа от точки $x = -1$. Обозначим левую часть данного уравнения через $y(x)$. Случай б) на Рис. 4.6 легко исключить, наложив условие

$$y(-1) = 2a + 7 > 0.$$

А случай а) исключим, потребовав, чтобы x - координата вершины параболы x_0 находилась справа от точки $x = -1$, т. е.

$$x_0 = -a - 3 > -1,$$

где значение x_0 получено выделением в данном уравнении полного квадрата. Совместное решение трех указанных неравенств и даст ответ на вопрос задачи. ■

Д. Контрольные задачи

1°. Найти все значения a , при которых оба корня уравнения $x^2 - 6ax + 2 - 2a + 9a^2 = 0$ больше 3.

2°. При каких значениях параметра a сумма квадратов корней уравнения $x^2 - ax + a - 1 = 0$ будет наименьшей?

§ 5. Модуль действительного числа

А. Определение и типичные примеры

Модуль или абсолютная величина действительной функции $f(x)$ определяется следующим образом

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x), & \text{если } f(x) \geq 0; \\ -f(x), & \text{если } f(x) < 0. \end{cases} \quad (5.1)$$

Это "составное" определение непривычно и требует известной практики для усвоения. Рассмотрим некоторые примеры решения уравнений и неравенств с модулем

$$\text{а) Решить уравнение } |x - 3| = 5. \quad (5.2)$$

"Раскрывать" модуль начинаем, используя определение (5.1) справа - налево. Если $x - 3 \geq 0$, то справедлива верхняя строчка (5.1), т.е. $|x - 3| = x - 3$. Следовательно

$$\begin{cases} x - 3 = 5; \\ x + 3 \geq 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 8; \\ x \geq 3, \end{cases} \Rightarrow x = 8.$$

Наоборот, если $x - 3 < 0$, то действуя по нижней строчке (5.1), имеем $|x - 3| = -(x - 3)$, так что

$$\begin{cases} -(x - 3) = 5 \\ x - 3 < 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2; \\ x < 3, \end{cases} \Rightarrow x = -2.$$

Таким образом, получаем ответ: $x_1 = -2, x_2 = 8$. ■

Описанное рассуждение - "двухходовка" - это все, что надлежит здесь усвоить. Обратим внимание, что требование положительности (либо отрицательности) накладывается на все выражение, стоящее под знаком модуля. Это - ключевой момент, которого многие не понимают.

$$\text{б) Решить неравенство } \frac{|x - 1|}{x + 2} < 1.$$

Применяя определение (5.1) находим, что данной неравенство эквивалентно следующим двум системам неравенств

$$1) \begin{cases} \frac{x-1}{x+2} < 1; \\ x-1 \geq 0, \end{cases} \quad \text{и} \quad 2) \begin{cases} \frac{-(x-1)}{x+2} < 1; \\ x-1 < 0. \end{cases}$$

Операция "раскрытия" модуля настолько ответственна, что ее нужно совершать отдельно. Все прочие преобразования и упрощения можно легко выполнить далее.

с) Чуть более сложной является задача $|x-2| + |x+1| = 3$. (5.3)

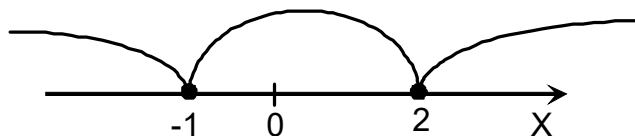


Рис. 5.1

Применим метод интервалов (см. Рис. 5.1). Подмодульные выражения меняют знак в точках $x = -1$ и $x = 2$. В интервале $x < -1$ оба выражения под модулем отрицательны, поэтому

$$1) \begin{cases} -(x-2) + [-(x+1)] = 3; \\ x < -1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1; \\ x < -1. \end{cases} \Rightarrow \emptyset.$$

Далее, в интервале $-1 < x < 2$ имеем $x-2 < 0$, но $x+1 \geq 0$, поэтому

$$2) \begin{cases} -(x-2) + (x+1) = 3; \\ -1 \leq x < 2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 = 3; \\ -1 \leq x < 2. \end{cases} \Rightarrow -1 \leq x < 2.$$

Наконец, при $x \geq 2$ оба подмодульных выражения положительны, так что

$$3) \begin{cases} (x-2) + (x+1) = 3; \\ x \geq 2, \end{cases} \Rightarrow x = 2.$$

Ответ: $-1 \leq x \leq 2$. ■

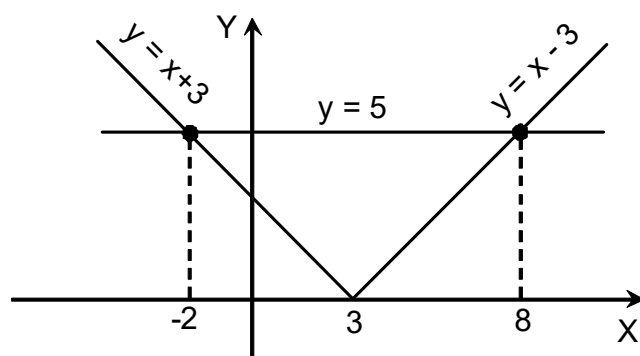


Рис. 5.2

Б. Геометрическая интерпретация

У многих учеников вызывает удивление тот факт, что "линейное" уравнение (5.2) имеет два решения, а уравнение (5.3) - даже целый интервал решений. Дело в том, что функция $y = |x-3|$

не является линейной, ее график есть некоторая ломаная линия. Действительно, раскрывая модуль, напишем

$$1) \begin{cases} y = x - 3, \\ x - 3 \geq 0. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} y = -(x - 3), \\ x - 3 < 0. \end{cases}$$

Следовательно, при $x \geq 3$ и $x < 3$ нужно строить графики разных линейных функций (см. Рис. 5.2). На том же графике построим прямую $y = 5$, т. е. правую часть уравнения (5.2). Тогда x - координаты точек пересечения обоих графиков и дадут корни уравнения (5.2).

О "ПОНИМАНИИ"

Нередко можно наблюдать как добросовестный ученик приходит в отчаяние от своей неспособности немедленно освоить какое-нибудь новое, сложное понятие. Один из лучших преподавателей МГУ им. М.В. Ломоносова, доцент В.Д. Кукин, часто говорил нам, зеленым третьекурсникам

"Студент сначала не понимает, а потом - привыкает!".

Автор, уже давно не будучи студентом, постоянно ощущает на себе всю глубину и мудрость этой фразы! Когда-то, в начальной школе, непонятными были отрицательные числа. Затем - модуль, комплексные числа, понятие предела и т. д., до бесконечности! Существуют рубежные, ключевые понятия во всякой науке, не только в математике. Нужны время и практика, чтобы привыкнуть к новому понятию и научиться его правильно использовать. А это, возможно, и есть "понимание".

В. Арифметический корень

Для школьников часто остается таинственной загадкой факт появления знаков "плюс-минус" при извлечении квадратных корней. По определению, число a является корнем квадратным из числа b , если $a^2 = b$. Таким образом, извлечение корня определяется через обратную операцию - возведение в степень. Допустим, мы хотим найти квадратные корни из числа 16. Таких корней два, $x_1 = 4$ и $x_2 = -4$, так как $4^2 = 16$ и $(-4)^2 = 16$. Для обозначения этих корней договорились положительный корень называть арифметическим и обозначать символом $\sqrt{}$, так что $x_1 = \sqrt{16}$. Тогда второй корень, отрицательный, выражается через арифметический, и равен $x_2 = -x_1 = -\sqrt{16}$. Отсюда следует важная формула

$$\sqrt{[f(x)]^2} = |f(x)|. \quad (5.4)$$

Действительно, выражение слева по определению, обозначает заведомо положительную (неотрицательную) величину. Таким образом, верно, что $\sqrt{3x^2} = \sqrt{3}|x|$. Но неверно, что $x\sqrt{3} = \sqrt{3x^2}$, как некоторые, по-видимому, уверены.

Г. Контрольные задачи

$$1^\circ. \quad |x - 1| + |x + 2| - |x - 3| = 4.$$

$$2^\circ. \quad \left| \frac{3x + 1}{x - 3} \right| < 3.$$

$$3^\circ. \quad \begin{cases} y - 2|x| + 3 = 0; \\ |y| + x - 3 = 0. \end{cases}$$

§ 6. Иррациональные уравнения и неравенства

А. Преобразование иррациональных выражений

Рассмотрим иррациональную функцию

$$y = \sqrt{f(x)}, \quad \text{ОДЗ: } f(x) \geq 0.$$

Так как символ $\sqrt{}$ всегда обозначает арифметический корень (см. §5), то значения этой функции, по определению, неотрицательны, $y \geq 0$. Определена же эта функция только для таких значений x , при которых $f(x) \geq 0$. Например, для функции $y = \sqrt{3-x}$ область допустимых значений неизвестного (ОДЗ) есть $3-x \geq 0$, т. е. $x \leq 3$, а функция $y = \sqrt{x-5}$ определена только при $x \geq 5$. Следовательно, "функция"

$$y = \sqrt{3-x} \cdot \sqrt{x-5}$$

не определена ни в одной точке! С другой стороны, функция $y = \sqrt{(3-x)(x-5)}$ определена при $(3-x)(x-5) \geq 0$, т.е. при $3 \leq x \leq 5$. Таким образом, мы видим, что при объединении подкоренных выражений под единым символом $\sqrt{}$

$$\sqrt{f(x)} \cdot \sqrt{g(x)} \rightarrow \sqrt{f(x)g(x)} \quad (6.1)$$

происходит, вообще говоря, расширение ОДЗ. Действительно, левая часть (6.1) определена только при $f(x) \geq 0$ и $g(x) \geq 0$, а правая часть - еще и в случае $f(x) < 0$ и, одновременно, $g(x) < 0$. Наоборот, при обратной операции

$$\sqrt{f(x)g(x)} \rightarrow \sqrt{f(x)} \cdot \sqrt{g(x)} \quad (6.2)$$

происходит, вообще говоря, сужение ОДЗ, что не допустимо, так как может приводить к потере решений уравнений и неравенств. Рассмотрим два уравнения

$$f(x) = g(x) \quad \text{и} \quad f(x) = -g(x), \quad (*)$$

При возведении в квадрат как первого, так и второго уравнения, приходим к одному и тому же уравнению - следствию:

$$[f(x)]^2 = [g(x)]^2. \quad (**)$$

Легко видеть, что множество корней уравнения (**) содержит как корни первого, так и корни второго из уравнений (*). Таким образом, уравнение (**) равносильно двум уравнениям (*), а не каждому из этих уравнений в отдельности. Однако, если мы наложим, например, условия

$$f(x) \geq 0; \quad g(x) \geq 0, \quad (6.3)$$

то одно первое уравнение (*) будет эквивалентно уравнению (**). Действительно, при выполнении (6.3) второе уравнение (*) противоречиво и не имеет решений. Исключением является случай, когда в какой-либо точке x_1 имеем $f(x_1) = g(x_1) = 0$. Но для таких точек уравнения (*), очевидно, совпадают.

Изложенной "теории" достаточно для ясного понимания тех преобразований, которые проводятся при решении иррациональных уравнений и неравенств.

Б. Иррациональные уравнения

Рассмотрим уравнение типа

$$\sqrt{f(x)} = g(x), \quad (6.4)$$

где $f(x)$ и $g(x)$ некоторые рациональные выражения. Величина, стоящая слева - неотрицательна. Следовательно, при $g(x) < 0$ уравнение (6.4) не имеет решений. Потребуем поэтому $g(x) \geq 0$. Тогда обе части уравнения неотрицательны, и возводя его в квадрат, находим, что (6.4) эквивалентно системе

$$\begin{cases} g(x) \geq 0; \\ f(x) = g^2(x). \end{cases} \quad (6.5)$$

Полезно заметить, что условие ОДЗ, $f(x) \geq 0$, при этом оказывается выполненным автоматически, так как $f(x)$ должно быть равно квадрату некоторой величины. Более сложные случаи иррациональных уравнений сводятся, как мы увидим, к уравнению типа (6.4).

В. Иррациональные неравенства

Сходные рассуждения можно применить и к решению иррациональных неравенств. Рассмотрим неравенство типа

$$\sqrt{f(x)} < g(x), \quad (6.6)$$

Если $g(x) \leq 0$, то решений нет. Если же $g(x) > 0$, то обе части неравенства неотрицательны, и по свойству 4° числовых неравенств (см. § 3А), данное неравенство эквивалентно системе неравенств

$$\begin{cases} g(x) > 0; \\ f(x) < g^2(x); \\ f(x) \geq 0. \end{cases} \quad (6.7)$$

В отличие от случая (6.5), в данном случае условие ОДЗ, $f(x) \geq 0$, не выполняется автоматически. Поэтому оно и присоединено к системе неравенств (6.7).

В случае обратного неравенства

$$\sqrt{f(x)} > g(x) \quad (6.8)$$

рассуждения таковы. Если $g(x) < 0$, то неравенство выполняется всюду в ОДЗ, так что система

$$1) \quad \begin{cases} g(x) < 0; \\ f(x) \geq 0. \end{cases} \quad (6.9a)$$

дает часть решений этого неравенства. Если же $g(x) \geq 0$, то обе части неравенства неотрицательны, и по свойству 4° из §3А, оно эквивалентно системе

$$2) \quad \begin{cases} g(x) \geq 0; \\ f(x) > g^2(x). \end{cases} \quad (6.9b)$$

Заметим, что в этом случае условие ОДЗ выполнено автоматически. Совокупность решений систем 1) и 2) и дает решение исходного неравенства (6.8).

Сказанное выше, частично обобщается и на случай корней n -й степени. По определению, число b называется корнем n -ой степени из числа a , если $b^n = a$. Отсюда легко вывести, что действительных корней четной степени, $n = 2k$, из отрицательных чисел не существует. Далее, так же как и в случае квадратного корня, если число b удовлетворяет соотношению $b^{2k} = a$, то число $-b$ также удовлетворяет этому соотношению. Неотрицательное решение уравнения $b^{2k} = a$ называется арифметическим корнем степени $2k$ из числа a и обозначается $b = \sqrt[2k]{a}$. Действительный корень нечетной степени, $n = 2k + 1$, существует для любого действительного

числа. Для неотрицательных чисел, $a \geq 0$, этот корень неотрицателен, называется арифметическим корнем и обозначается $b = \sqrt[k+1]{a}$.

В заключение этого пункта подчеркнем, что бессмысленно запоминать как готовые рецепты полученные в данном параграфе общие формулы типа, например, (6.5) или (6.7). Практиковаться нужно, прежде всего, в правильном проведении рассуждений, приводящих к этим формулам.

Г. Типичные примеры

$$\text{а)} \quad \sqrt{7-x} = x-1.$$

Это уравнение относится к типу (6.4). Если $x-1 < 0$, то решений нет. Требуя $x-1 \geq 0$, получаем систему типа (6.5)

$$\begin{cases} x-1 \geq 0; \\ 7-x = (x-1)^2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 1; \\ x^2 - x - 6 = 0. \end{cases}$$

По теореме Виета находим корни квадратного уравнения $x_1 = -2$, $x_2 = 3$. Так как неравенству $x \geq 1$ удовлетворяет только корень $x_2 = 3$, получаем ответ: $x = 3$. ■

Полезно выполнить проверку этого решения. Кроме того, полезно убедиться, что лишний корень $x_1 = -2$ есть решение уравнения, "противоположного" уравнению а), т. е. $\sqrt{7-x} = 1-x$.

$$\text{б)} \quad \sqrt{3x+1} - \sqrt{x+4} = 1.$$

Сведем это уравнение к уравнению типа (6.4). В исходной записи знак его левой части неопределен. Выгодно поэтому переписать это уравнение в виде

$$\sqrt{3x+1} = 1 + \sqrt{x+4}.$$

Теперь обе части уравнения заведомо положительны и, возводя его в квадрат, получаем эквивалентное уравнение

$$3x+1 = 1 + 2\sqrt{x+4} + x+4; \quad \Rightarrow \quad \sqrt{x+4} = x-2,$$

поскольку условие ОДЗ, $3x+1 \geq 0$, исходного уравнения б) выполнено автоматически (почему?). Полученное на этом этапе уравнение аналогично рассмотренному в пункте а). ■

$$\text{в)} \quad x < \sqrt{2-x}.$$

Применяя схему рассуждений, указанную при решении неравенства (6.8) находим, что данное неравенство эквивалентно двум системам рациональных неравенств

$$1) \begin{cases} x < 0; \\ 2-x \geq 0, \end{cases} \quad \text{и} \quad 2) \begin{cases} x \geq 0; \\ x^2 < 2-x, \end{cases},$$

изученных в §3. ■

$$\text{д)} \quad 3\sqrt{x} - \sqrt{x+3} > 1.$$

Перенесем отрицательный член в правую часть неравенства

$$3\sqrt{x} > 1 + \sqrt{x+3}.$$

Так как обе части неравенства положительны, то возводя его в квадрат, по свойству 4° из §3А получим эквивалентное неравенство

$$9x > 1 + 2\sqrt{x+3} + x + 3 \quad \Rightarrow \quad 4x - 2 > \sqrt{x+3},$$

причем условие ОДЗ, $x \geq 0$, выполнено здесь автоматически. Таким образом, задача сводится к неравенству типа (6.6). ■

$$\text{е) } \sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} > \frac{3}{2}.$$

Преобразуем, прежде всего, подкоренные выражения, применяя соответствующие формулы сокращенного умножения

$$\begin{aligned} x + 2\sqrt{x-1} &= x - 1 + 2\sqrt{x-1} + 1 = (\sqrt{x-1} + 1)^2; \\ x - 2\sqrt{x-1} &= x - 1 - 2\sqrt{x-1} + 1 = (\sqrt{x-1} - 1)^2. \end{aligned}$$

Используя затем правило извлечения квадратного корня (5.4), приводим неравенство е) к виду

$$|\sqrt{x-1} + 1| + |\sqrt{x-1} - 1| > \frac{3}{2},$$

где учтено, что $\sqrt{x-1} + 1 > 0$. Для раскрытия модуля рассмотрим, как обычно, два случая

$$\begin{aligned} 1) \quad \begin{cases} \sqrt{x-1} - 1 \geq 0; \\ \sqrt{x-1} > \frac{3}{4}, \end{cases} & \Rightarrow \quad \sqrt{x-1} \geq 1; \quad \Rightarrow \quad x \geq 2. \\ 2) \quad \begin{cases} \sqrt{x-1} - 1 < 0; \\ 2 > \frac{3}{2}, \end{cases} & \Rightarrow \quad \sqrt{x-1} < 1; \quad \Rightarrow \quad 1 \leq x < 2. \end{aligned}$$

Объединяя оба ответа, получаем $x \geq 1$. ■

Д. Контрольные задачи

$$1^\circ. \quad \sqrt{25-x} = 2 - \sqrt{9+x}.$$

$$2^\circ. \quad \frac{1}{\sqrt{1+x}} > \frac{1}{2-x}.$$

$$3^\circ. \quad \frac{|x+2| - |x|}{\sqrt{4-x^3}} > 0.$$

$$4^\circ. \quad \begin{cases} \sqrt{x/y} + \sqrt{y/x} = 5/2 \\ x + y = 5 \end{cases}.$$

О НАДЕЖНОСТИ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Математические выкладки производятся по четко установленным правилам. Результат правильного математического вычисления всегда одинаков, он не может зависеть от того кто, когда и в каком месте земного шара его производит; иначе манипуляции с математическими символами потеряли бы всякий смысл. Поэтому забота о надежности проводимых выкладок есть первейшая обязанность вычислителя. Особого внимания

требуют такие стандартные математические операции, как перемена знака у некоторого выражения, освобождение от знаменателя, раскрытие модуля, и т. д. Часто приходится наблюдать, как ученик "сдваивает" эти операции. Например, раскрывая модуль, одновременно меняет знак у подмодульного выражения, или освобождается от знаменателя и одновременно переносит все члены уравнения в одну сторону. Опытный вычислитель выполняет эти ответственные действия, как правило, строго последовательно. Точно также, например, как и опытный водитель, который максимально сосредоточен при проезде перекрестка и никогда не пойдет на двойной обгон.

Математические ошибки нельзя разделить на серьезные, и несерьезные. Если космический корабль отклонился от предписанной траектории, то неважно, по какой конкретной причине это произошло: забыл ли математик учесть определенный член в уравнении движения корабля, либо программист, набивая программу, не поставил в нужном месте запятую. Поэтому, совершенно справедливо не считается решенной на экзамене задача, в которой ответ дан "всего лишь(!)" с неверным знаком. Если ученик не в состоянии выучиться абсолютно точно проводить математические выкладки, он вряд ли может быть признан профессионально пригодным для обучения в высшей школе.

§ 7. Показательные и логарифмические уравнения

А. Свойства показательной функции

Функция вида

$$y(x) = a^x; \quad a > 0, \quad a \neq 1 \quad (7.1)$$

называется показательной. В школе изучается показательная функция лишь при положительном основании, $a > 0$. Кроме того, значение $a = 1$ для показательной функции является "вырожденным", так как для любого x имеем $(1)^x = 1$.

По определению, показательная функция обладает следующими свойствами:

- 1°. $a^0 = 1$;
- 2°. $a^{x_1+x_2} = a^{x_1} \cdot a^{x_2}$;
- 3°. $(a^{x_1})^{x_2} = a^{x_1 x_2}$,

где x_1 и x_2 - произвольные значения аргумента. Из свойств 1° и 2° следует тождество (выведите!)

$$4°. \quad a^{x_1-x_2} = \frac{a^{x_1}}{a^{x_2}}.$$

Кроме того, если $a > 0$ и $b > 0$ - два различных основания, то верны равенства

- 5°. $(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$,
- 6°. $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$,

которые можно обосновать, используя понятие логарифма (см. пункт Б далее).

Б. Свойства логарифма

Поскольку $a > 0$, то показательная функция (7.1) принимает лишь положительные значения, $y = a^x > 0$. При $0 < a < 1$ она является монотонно убывающей, а при $a > 1$ - монотонно возрастающей функцией (см. Рис. 7.1).

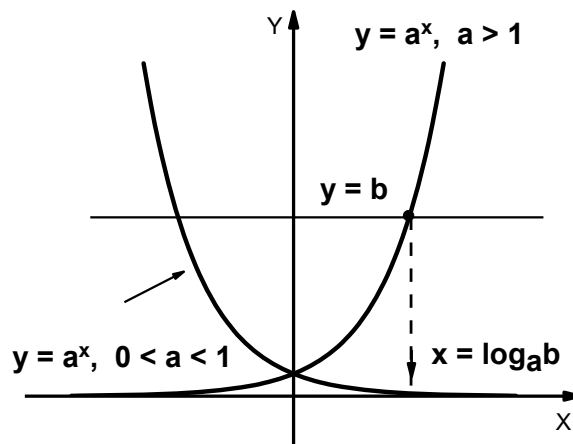


Рис. 7.1

Для произвольного числа b рассмотрим уравнение

$$a^x = b. \quad (7.2)$$

На Рис. 7.1 построены как левая часть этого уравнения, $y = a^x$, так и правая его часть, $y = b$. Поскольку $y = a^x$ - монотонная функция, то, как видно из Рис. 7.1, уравнение (7.2) при $b > 0$ всегда имеет единственное решение, которое обозначают символом

$$x = \log_a b. \quad (7.3)$$

При $b \leq 0$ уравнение (7.2) не имеет решения. Число a называют основанием логарифма, а число b будет являться его аргументом, если мы введем в рассмотрение логарифмическую функцию

$$y = \log_a x, \quad x > 0, \quad (7.4)$$

которая, очевидно, должна определяться только при $a > 0, a \neq 1$ и только для положительных значений аргумента. Полезно также выучить определение

Логарифмом числа b по основанию a называется показатель степени, в которую нужно возвести число a , чтобы получить число b . (*)

Таким образом, также как при определении арифметического корня (см. §5В), мы встречаемся с ситуацией, когда "прямая" операция - взятие логарифма - определяется через обратную операцию возведения в степень. Если определение (*) перевести на язык математики, то получим основное логарифмическое тождество

$$a^{\log_a b} = b. \quad (7.5)$$

Поскольку логарифм - это показатель степени, то каждому из свойств $1^\circ - 4^\circ$ показательной функции отвечает соответствующее свойство логарифма:

- $1^\circ. \quad \log_a 1 = 0$
- $2^\circ. \quad \log_a (x_1 \cdot x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2; \quad x_1, x_2 > 0,$
- $3^\circ. \quad \log_a (x_1)^{x_2} = x_2 \cdot \log_a x_1; \quad x_1 > 0$
- $4^\circ. \quad \log_a \frac{x_1}{x_2} = \log_a x_1 - \log_a x_2; \quad x_1, x_2 > 0.$

Действительно, свойство 1° означает, что показатель степени, в которую нужно возвести число a , чтобы получить 1, равен нулю. Аналогичным образом полезно уяснить себе и свойства $2^\circ -$

4°. Прочие полезные логарифмические тождества также имеют весьма простое происхождение. Пусть положительные числа x_1 и x_2 связаны соотношением $x_1 = x_2^k$. Логарифмируя это равенство по произвольным основаниям a и b , находим тождество

$$5^\circ. \quad \frac{\log_a x_1}{\log_a x_2} = \frac{\log_b x_1}{\log_b x_2} = k.$$

Таким образом, отношение логарифмов не зависит от основания. Полагая в 5° $a = x_2$, $b = x_1$ и учитывая что $\log_{x_2} x_2 = 1$, получаем важное следствие

$$6^\circ. \quad \log_{x_2} x_1 = \frac{1}{\log_{x_1} x_2}.$$

Далее, допустим что $(a^n)^k = x^m$, тогда $a^k = x^{\frac{m}{n}}$, и логарифмируя первое из равенств по основанию a^n , а второе - по основанию a , находим тождество

$$7^\circ. \quad \log_{a^n} x^m = \frac{m}{n} \log_a x; \quad x > 0, \quad n \neq 0.$$

Заметим теперь, что используя соответствующий логарифм, легко перейти от одного основания показательной функции к любому другому

$$b^x = [a^{\log_a b}]^x = a^{x \cdot \log_a b}. \quad (7.6)$$

Имея ввиду это преобразование, легко понять, что тождества 5° к 6° из пункта А являются просто следствиями тождеств 2° к 4°.

В. Показательные уравнения. Типичные примеры

Прежде чем приступить к решению сложных задач на логарифмическую и показательную функции, необходимо на простейших цифровых примерах хорошо усвоить смысл логарифма, как показателя степени. Скажем, при решении уравнения $2^x = 8$ ученик уверенно находит корень $x = 3$. Но при этом он плохо осознает тот факт, что $x = \log_2 8 (= 3)$, (см. переход (7.2) → (7.3)). Поэтому решить уравнение $2^x = 7$ этот ученик уже не в состоянии. Хорошо усвоить понятие логарифма и получить практику в применении свойств логарифма 1° - 7° помогает решение задач следующего типа

$$a) \quad \log_5 2 = a; \quad \log_2 7 = b. \text{ Выразить число } \lg 56 \text{ через } a \text{ и } b.$$

Используя свойства логарифма 1° - 7°, легко найти, что

$$\lg 56 = \frac{1}{\log_7 5 + \log_7 2} + \frac{3}{1 + \log_2 5} = \frac{a(3+b)}{1+a},$$

где учтено, что

$$\log_7 5 = \frac{\log_2 5}{\log_2 7} = \frac{1}{ab}. \blacksquare$$

Заметим, что простое заучивание свойств логарифма 1° - 7° само по себе малопродуктивно. Логарифм - это всего лишь показатель степени. Поэтому гораздо полезнее уметь выводить свойства логарифма 1° - 7° из соответствующих свойств показательной функции. Последние воспринимаются и запоминаются гораздо легче, так как они во многом аналогичны свойствам степенной функции.

Любое показательное уравнение на конечном этапе сводится к элементарному уравнению типа (7.2). Решать такое уравнение можно формально.

$$\text{б)} \quad 2^x = 7 \Rightarrow \log_2(2^x) = \log_2 7 \Rightarrow x \cdot \log_2 2 = \log_2 7;$$

Так как $\log_2 2 = 1$, то отсюда $x = \log_2 7$. ■

Уравнение

$$\text{с)} \quad 4^x - 7 \cdot 2^x + 3 = 0.$$

легко сводится к квадратному уравнению подстановкой $y = 2^x > 0$, с учетом того, что $4^x = (2^x)^2 = y^2$. При решении полученного квадратного уравнения следует отобрать только положительные корни. ■

Предыдущий прием не проходит при решении уравнения

$$\text{д)} \quad 9^x - 2 \cdot 6^x + 3 \cdot 4^x = 0.$$

Заметим, однако, что $9^x = 3^{2x}$; $6^x = 2^x \cdot 3^x$ и $4^x = 2^{2x}$. Поэтому разделив уравнение д) на $6^x \neq 0$, получим

$$(3/2)^x - 2 + 3 \cdot (2/3)^x = 0.$$

Последнее же уравнение сводится к квадратному заменой $y = (3/2)^x$. ■

$$\text{е)} \quad \left(\sqrt{5 + \sqrt{24}} \right)^x + \left(\sqrt{5 - \sqrt{24}} \right)^x = 10.$$

Пусть a и b – два положительных числа, связанных условием $a \cdot b = 1$. Очевидно, что уравнения типа

$$a^x + b^x = c \quad (*)$$

Сводится к квадратному заменой $y = a^x > 0$, $b^x = a^{-x} = 1/y$. Поскольку $\sqrt{5 + \sqrt{24}} \cdot \sqrt{5 - \sqrt{24}} = 1$, то уравнение е) является уравнением типа (*). ■

Г. Логарифмические уравнения. Примеры

В сложных логарифмических уравнениях часто встречаются выражения вида

$$\log_{f(x)} g(x); \quad \text{ОДЗ: } \begin{cases} g(x) > 0; \\ f(x) > 0; \\ f(x) \neq 1, \end{cases} \quad (7.7)$$

которые определены лишь при условии положительности функций $f(x)$ и $g(x)$ и отличия функции $f(x)$ от единицы. Далее, при решении логарифмических уравнений пользоваться свойствами логарифма 2° - 7° нужно с известной осторожностью, так как левые и правые части в этих формулах имеют, вообще говоря, разные области определения. Например, левая часть равенства 2° из пункта Б определена при условии $x_1 \cdot x_2 > 0$, т. е. при $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, а также при $x_1 < 0$ и $x_2 < 0$. Правая же часть этого равенства определена только для положительных x_1 и x_2 . Поэтому при использовании равенства 2° (а также равенств 3°, 4° и 7°) слева направо происходит, вообще говоря, сужение ОДЗ, а при использовании их справа налево – расширение ОДЗ. Сужение ОДЗ недопустимо, так как это приводит к потере решений. Расширение же ОДЗ нежелательно, так как оно может приводить к появлению лишних корней. Избежать

расширения ОДЗ можно, налагая на преобразуемые величины соответствующие ограничения. Так, при преобразовании типа

$$\log_a f(x) + \log_a g(x) \Rightarrow \begin{cases} \log_a [f(x) \cdot g(x)]; \\ f(x) > 0; \\ g(x) > 0, \end{cases} \quad (7.8)$$

ОДЗ исходного и конечного выражений одинаковы.

f) Уравнение типа $\log_a \varphi(x) = b$

решается формальным потенцированием

$$\log_a \varphi(x) = \log_a a^b \Rightarrow \varphi(x) = a^b.$$

Заметим, что поскольку $a^b > 0$, то при потенцировании ОДЗ исходного и конечного выражений совпадают. ■

g) Уравнение $\log_{5-x}(x^2 - 2x + 65) = 2$

преобразуется аналогично

$$\log_{5-x}(x^2 - 2x + 65) = \log_{5-x}(5-x)^2.$$

Для сохранения ОДЗ исходного уравнения, при потенцировании необходимо использовать очевидные ограничения на основание логарифма

$$\begin{cases} x^2 - 2x + 65 = (5-x)^2; \\ 5-x > 0; \\ 5-x \neq 1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -5; \\ x < 5; \\ x \neq 4. \end{cases} \Rightarrow x = -5.$$

Ответ: $x = -5$. ■

h) $\log_7(2^x - 1) + \log_7(2^x - 7) = 1$.

Потенцируя это уравнение по формуле (7.8), получаем

$$\begin{cases} (2^x - 1) \cdot (2^x - 7) = 7; \\ 2^x - 7 > 0. \end{cases}$$

Положив здесь $y = 2^x > 0$, сведем задачу к решению квадратного уравнения. ■

В рассмотренных до сих пор примерах f) - h) уравнение решалось потенцированием. Значительное число логарифмических уравнений решается также подходящей заменой переменного.

i) $\log_x \sqrt{5} + \log_x(5x) - 2,25 = (\log_x \sqrt{5})^2$.

В области определения этого уравнения ($x > 0, x \neq 1$) законно логарифмирование

$$\log_x(5x) = \log_x 5 + 1 = 2 \log_x \sqrt{5} + 1,$$

где мы использовали свойства логарифма 2° и 3°. Полагая теперь $y = \log_x \sqrt{5}$, получаем квадратное уравнение относительно y

$$3y - 1,25 = y^2. \quad \blacksquare$$

$$j) \quad \log_x(9x^2) \cdot \log_3^2 x = 4.$$

Область определения этого уравнения $x > 0, x \neq 1$. Предполагая, что x принадлежит ОДЗ имеем

$$\log_x(9x^2) = 2\log_x 3 + 2 = \frac{2}{\log_3 x} + 2,$$

где мы воспользовались свойствами логарифма $2^\circ, 3^\circ$ и 6° . Теперь очевидно, что уравнение сводится к алгебраическому заменой $y = \log_3 x; y \neq 0$. ■

Д. Степенно-показательная функция

Так называется функция вида

$$y(x) = [f(x)]^{g(x)}; \quad \text{ОДЗ: } f(x) > 0, \quad (7.9)$$

которая определена лишь при таких значениях неизвестного, при которых $f(x) > 0$. Поскольку функция $f(x)$ положительна, то для любого $a > 0$ справедливо представление (см. тождество 7.5)

$$f(x) = a^{\log_a f(x)} \quad \Rightarrow \quad y(x) = a^{g(x) \log_a f(x)}. \quad (7.10)$$

$$k) \quad x^{1+\lg x} = 10x.$$

Область определения этого уравнения $x > 0$. В этой области обе части уравнения положительны. Логарифмируя по основанию 10, получаем уравнение

$$(1 + \lg x) \lg x = 1 + \lg x,$$

которое заменой $y = \lg x$ сводится к квадратному уравнению. ■

$$l) \quad |x-1|^{\lg^2 x - \lg x^2} = |x-1|^3$$

Область определения этого уравнения есть, очевидно, $x > 0, x \neq 1$. Так как обе части уравнения положительны, то законно логарифмирование по произвольному основанию $a > 0$. Имеем

$$(\lg^2 x - 2 \lg x) \log_a |x-1| = 3 \log_a |x-1|,$$

или

$$(\lg^2 x - 2 \lg x - 3) \log_a |x-1| = 0.$$

Таким образом, либо

$$1) \quad \begin{cases} \lg^2 x - 2 \lg x - 3 = 0; \\ x \neq 1, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad (\lg x + 1)(\lg x - 3) = 0,$$

т.е. $x_1 = 1/10, x_2 = 10^3$. Либо

$$2) \quad \begin{cases} \log_a |x-1| = 0; \\ x > 0, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} |x-1| = 1 \\ x > 0, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x = 2.$$

Ответ: $x_1 = 1/10; x_2 = 10^3; x_3 = 2$. ■

Е. Контрольные задачи

$$1^\circ. \quad 4^{\log_9 x} - 6 \cdot 2^{\log_9 x} + 2^{\log_3 27} = 0.$$

$$2^\circ. \quad 27^x + 12^x = 2 \cdot 8^x.$$

$$3^{\circ}. \quad 2 \log_9 x + 9 \log_x 3 = 10.$$

$$4^{\circ}. \quad 3^{\lg x} = 54 - x^{\lg 3}.$$

$$5^{\circ}. \quad |x - 2|^{10x^2 - 3x - 1} = 1.$$

$$6^{\circ}. \quad \begin{cases} 2^x \cdot 3^y = 6; \\ 3^x \cdot 4^y = 12. \end{cases}$$

УМЕЕМ ЛИ МЫ УЧИТЬСЯ?

В различных сложных видах человеческой деятельности разработаны и успешно применяются эффективные приемы обучения. Гимнаст, готовящий новую программу, начинает с разучивания отдельных элементов. Лишь после того, как каждое отдельное упражнение в достаточной степени освоено, стыкуются между собой различные части программы и вся комбинация шлифуется в целом. Так же действует и опытный пианист. Новая, технически сложная пьеса разучивается по кускам. Сложные пассажи, фигурации, октавные или аккордовые последовательности - всему этому уделяется отдельное внимание, вплоть до проигрывания специально подобранных упражнений, помогающих преодолеть конкретные технические сложности. Лишь затем пьеса проигрывается в целом и исполнение доводится до совершенства. По иному подходит к делу обычный ученик музыкальной школы. Он бесчисленное число раз исполняет пьесу от начала до конца, спотыкаясь и запинаясь на каждом такте. Эффективность такого многомесячного "разучивания" близка к нулю.

Положим, что некто желает научиться решать задачи определенного типа, допустим, показательные уравнения. В §7 мы видели, что решение показательного уравнения, как правило, состоит из следующих этапов: а) сведение к алгебраическому (квадратному) уравнению, б) решение алгебраического уравнения и с) решение простейшего показательного уравнения типа 7.2. Следовательно, обучение решению показательных уравнений состоит, собственно, в овладении этапами а) и с). На деле же ученик, занимающийся показательными уравнениями, чуть ли не большую часть времени занятий посвящает пункту б), то есть тому, что он давно уже знает и умеет - решению квадратных уравнений. В то время как в момент обучения он должен сконцентрировать свое внимание, прежде всего, на пункте а). Весьма помогает такой концентрации прием решения задач "вприглядку". Откройте любой хороший задачник, содержащий достаточное количество показательных уравнений, и решайте их, начиная от простых задач к сложным, одними глазами, без помощи ручки и бумаги. "Решение" состоит в указании способа сведения данного показательного уравнения к алгебраическому, т. е. к отработке исключительно этапа а). Тот, кто внимательно прочитал §7, обнаружит, что значительная доля показательных уравнений действительно решается "вприглядку". Пропускайте те задачи, для которых сведение к алгебраическому уравнению быстро не находится - над ними нужно подумать отдельно. За 15-20 минут такого "блицтурнира" с самим собой Вы научитесь большему, чем за 2-3 часа обычных занятий.

Изложенным методом можно отрабатывать существенные элементы решения задач самых различных типов. Конечно изредка, для контроля, решение некоторых интересных задач нужно проводить от начала до конца.

§ 8. Показательные и логарифмические неравенства

А. Монотонность показательной и логарифмической функций

В §7Б мы отмечали, что при основании $a > 1$ показательная функция $y = a^x$ является монотонно возрастающей (см. Рис. 7.1). Другими словами, большему значению аргумента соответствует

большее значение функции. Следовательно, эквивалентны неравенства

$$x_1 < x_2 \quad \Leftrightarrow \quad a^{x_1} < a^{x_2}, \quad \text{если } a > 1. \quad (8.1)$$

Наоборот, при $0 < a < 1$ большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции. Поэтому, эквивалентны неравенства

$$x_1 < x_2 \quad \Leftrightarrow \quad a^{x_1} > a^{x_2}, \quad \text{если } 0 < a < 1. \quad (8.2)$$

Эти же самые утверждения можно выразить на языке логарифмов. Логарифмируя по основанию a числовое неравенство с положительными членами следует сохранить знак неравенства при $a > 1$, и изменить его на противоположный при $0 < a < 1$, т. е.

$$0 < x_1 < x_2 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \log_a x_1 < \log_a x_2, & a > 1 \\ \log_a x_1 > \log_a x_2, & 0 < a < 1 \end{cases} \quad (8.3)$$

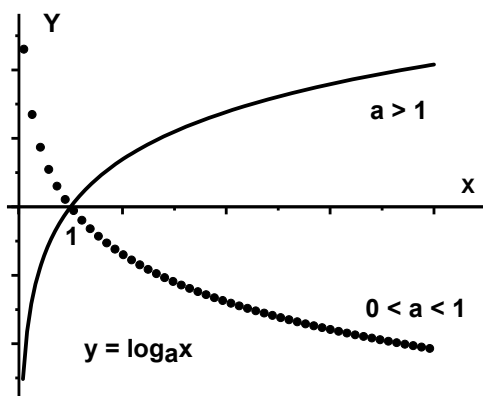


Рис. 8.1

Эквивалентность неравенств (8.3) можно хорошо уяснить с помощью графика функции $y = \log_a x$ (см. Рис. 8.1). Непосредственно из графика видно, что при $a > 1$ функция $y = \log_a x$ является монотонно возрастающей, а при $0 < a < 1$ эта функция монотонно убывающая.

Б. Показательные неравенства

Рассмотрим несколько характерных примеров решения показательных неравенств.

а) $3^{\sqrt{x}} > 2.$

Используем эквивалентность неравенств (8.3). Логарифмируя по основанию $3 > 1$, получаем эквивалентное неравенство

$$\log_3 3^{\sqrt{x}} > \log_3 2 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{x} > \log_3 2.$$

Поскольку $\log_3 2 > 0$, то обе части этого неравенства положительны; возводя его в квадрат, получаем равносильное неравенство (см. §6)

$$x > (\log_3 2)^2. \blacksquare$$

б) $x^2 \cdot 5^x - 5^{2+x} < 0.$

Вынося общий множитель 5^x за скобку, получаем

$$(x^2 - 25) \cdot 5^x < 0.$$

Поскольку $5^x > 0$, то необходимо $x^2 - 25 < 0$. Следовательно, $|x| < 5. \blacksquare$

$$c) \quad 4^x - 2 \cdot 5^{2x} - 10^x > 0.$$

Заметим, что $4^x = (2^x)^2$; $5^{2x} = (5^x)^2$; $10^x = 2^x \cdot 5^x$. Разделив обе части неравенства на положительную величину $10^x > 0$, находим

$$(2/5)^x - 2 \cdot (5/2)^x - 1 > 0.$$

Полагая $y = (2/5)^x$; $y > 0$, получаем систему рациональных неравенств

$$\begin{cases} y > 0; \\ y - (2/y) - 1 > 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y > 0; \\ (y+1)(y-2) > 0, \end{cases} \Rightarrow y > 2.$$

Следовательно, исходное неравенство эквивалентно элементарному неравенству $(2/5)^x > 2$. Логарифмируя это неравенство по основанию $2/5 < 1$, находим ответ: $x < \log_{2/5} 2$. ■

В. Логарифмические неравенства

Решение логарифмических неравенств также основано на эквивалентности элементарных неравенств (8.3). При этих преобразованиях необходимо, однако, соблюдать осторожность, чтобы не изменить область определения исходного неравенства.

$$d) \quad \log_{1/4} \frac{35 - x^2}{x} \geq -\frac{1}{2}.$$

Поскольку $\log_{1/4}(1/4) = 1$, имеем

$$\log_{1/4} \frac{35 - x^2}{x} \geq \log_{1/4} (1/4)^{-1/2}.$$

Далее, так как основание логарифма $1/4 < 1$, то действуя по нижней строчке соотношения (8.3) справа налево получаем, что исходное неравенство эквивалентно следующей системе рациональных неравенств

$$0 < \frac{35 - x^2}{x} \leq 2.$$

Здесь левое неравенство наложено с тем, чтобы сохранить область определения исходного неравенства. Дальнейшие преобразования сводятся уже к решению системы рациональных неравенств (см. §3). ■

$$e) \quad \log_{3x+5} (9x^2 + 8x + 8) > 2.$$

Область определения исходного неравенства есть, очевидно, совокупность условий

$$\begin{cases} 9x^2 + 8x + 8 > 0; \\ 3x + 5 > 0; \\ 3x + 5 \neq 1. \end{cases} \quad (\text{ОДЗ})$$

Пусть сначала $0 < 3x + 5 < 1$. Тогда имеем

$$1) \begin{cases} 0 < 3x + 5 < 1; \\ \log_{3x+5} (9x^2 + 8x + 8) > \log_{3x+5} (3x + 5)^2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 < 3x + 5 < 1; \\ 0 < 9x^2 + 8x + 8 < (3x + 5)^2. \end{cases}$$

Снимая знаки логарифма, мы по правилу (8.3) сменили знак неравенства на обратный, и наложили еще недостающее условие ОДЗ.

Пусть теперь $3x + 5 > 1$. Тогда, используя верхнюю строчку (8.3) справа - налево, имеем

$$2) \begin{cases} 3x + 5 > 1; \\ \log_{3x+5}(9x^2 + 8x + 8) > \log_{3x+5}(3x + 5)^2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + 5 > 1; \\ 9x^2 + 8x + 8 > (3x + 5)^2. \end{cases}$$

Очевидно, что условия ОДЗ здесь выполнены автоматически. Таким образом, решение исходного неравенства сводится к решению рациональных систем неравенств 1) и 2) (см. §3). Изложенная в примерах d) и e) схема рассуждений является стандартной при решении логарифмических неравенств.

$$f) \quad 2 \log_5 x - \log_x 125 < 1.$$

Область определения неравенства $x > 0, x \neq 1$. Поскольку $\log_x 125 = 3 \log_x 5 = 3 / \log_5 x$, то полагая $y = \log_5 x$, сведем данное неравенство к рациональному неравенству

$$2y - (3/y) - 1 < 0. \quad \blacksquare$$

$$g) \quad \log_x 2x \leq \sqrt{\log_x(2x^3)}.$$

В области определения этого неравенства имеем

$$\log_x 2x = 1 + \log_x 2, \quad \text{и} \quad \log_x(2x^3) = 3 + \log_x 2.$$

Полагая затем $y = \log_x 2$, сведем исходное неравенство к иррациональному неравенству

$$1 + y \leq \sqrt{3 + y}.$$

Решив это неравенство относительно y (см. §6), получим для $\log_x 2$ неравенство типа, рассмотренного выше в примерах б) и e). $\blacksquare$

$$h) \quad \log_2(2^x - 1) \cdot \log_{1/2}(2^{x+1} - 2) > -2.$$

Заметим, что

$$\log_{1/2}(2^{x+1} - 2) = \log_{1/2}(2^x - 1) + \log_{1/2} 2 = \frac{\log_{1/2}(2^x - 1)}{\log_{1/2}(1/2)} - 1 = -\log_2(2^x - 1) - 1.$$

Мы воспользовались здесь тем обстоятельством, что отношение логарифмов не зависит от основания (см. §7). Положив теперь $y = \log_2(2^x - 1)$, получим квадратичное неравенство

$$y(y + 1) - 2 < 0.$$

Решив это неравенство относительно y , сведем задачу к элементарному неравенству типа d). $\blacksquare$

$$i) \quad 2^{\log_{2-x}(x^2 + 8x + 15)} < 1.$$

Логарифмируя это неравенство по основанию $2 > 1$ получим неравенство

$$\log_{2-x}(x^2 + 8x + 15) < 0,$$

аналогичное рассмотренному в примере e). $\blacksquare$

$$k) \quad \left[x^{\log_2 \sqrt{x}} \right]^{1/2} \geq 2.$$

Неравенства такого типа называются трансцендентными. Область определения этого неравенства $x > 0$. Так как обе части неравенства положительны, то возводя его в квадрат, получаем эквивалентное неравенство (см. §6)

$$x^{\log_2 \sqrt{x}} \geq 4.$$

Логарифмируя это неравенство по основанию $2 > 1$, имеем

$$\log_2 \sqrt{x} \cdot \log_2 x \geq 2 \Rightarrow (\log_2 x)^2 \geq 4 \Rightarrow |\log_2 x| \geq 2.$$

Полученное неравенство эквивалентно двум элементарным

$$1) \quad \log_2 x \leq -2; \quad \text{либо} \quad 2) \quad \log_2 x \geq 2. \quad \blacksquare$$

Г. Контрольные задачи

$$1^\circ. \quad 3^{\lg x + 2} > 3^{\lg x^2 + 5} - 2.$$

$$2^\circ. \quad 2^{x+3} - x^3 \cdot 2^x \leq 16 - 2x^3.$$

$$3^\circ. \quad \log_{1/2} |x-3| > -1.$$

$$4^\circ. \quad [\log_3(9x-3)]^{1/2} \leq \log_3(x-1/3).$$

$$5^\circ. \quad (x-2)^{x^2-6x+8} > 1.$$

§ 9. Преобразование тригонометрических выражений

А. Радианная и градусная меры угла

В тригонометрии мы сталкиваемся, прежде всего, с тем обстоятельством, что независимой переменной задачи является угол. Рассмотрим единичный радиус-вектор OA , выходящий из начала декартовой системы координат (см. Рис. 9.1). В начальном положении этот вектор направим вдоль положительного направления оси x . Примем, что углы увеличиваются при вращении радиус-вектора против часовой стрелки и уменьшаются при вращении его в обратном направлении. При измерении углов в градусах одному полному обороту радиус-вектора соответствует 360° , двум полным оборотам - 720° и т.д. Градусная мера измерения углов возникла исторически, вне всякой связи с математикой. С равным успехом можно было бы разделить окружность не на 360, а, например, на 100 равных частей. Радианная же мера угла основана на том простом факте, что центральный угол φ на рис. 9.1 пропорционален длине дуги AB , на которую он опирается. По определению, *радиан* - это угол, опирающийся на дугу, равную его радиусу. Поскольку длина окружности равна $2\pi R$, то из простой пропорции

$$\frac{360^\circ}{x^\circ} = \frac{2\pi R}{R}$$

находим, что одному радиану соответствует угол $360^\circ/2\pi \approx 57^\circ$. Следовательно, если некоторый угол φ задан в радианах, то его градусной мерой будет $360\varphi/2\pi$ градусов.

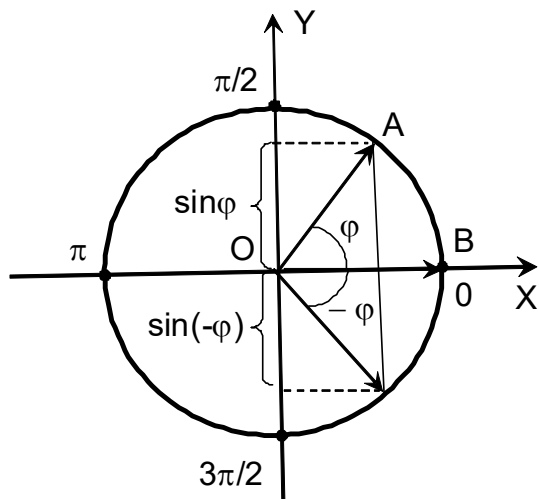


Рис. 9.1

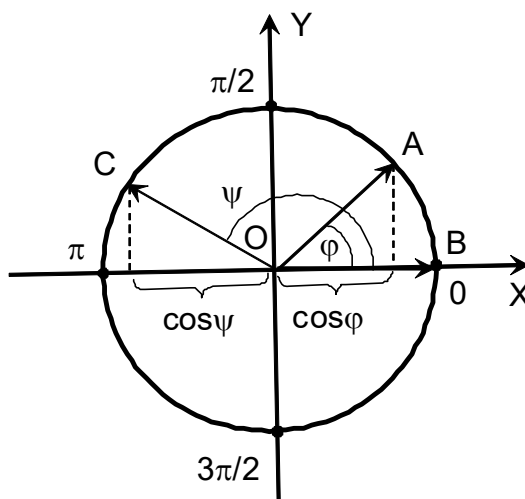


Рис. 9.2

Б. Определение и простейшие свойства тригонометрических функций

Единичный круг, изображенный на Рис. 9.1 и 9.2, называется тригонометрическим кругом. Простейшими тригонометрическими функциями независимой переменной φ являются проекции единичного радиуса-вектора OA на оси декартовых координат. По определению, $\sin \varphi$ - это проекция радиуса-вектора OA на ось y , а $\cos \varphi$ - его проекция на ось x (см. Рис. (9.1) и (9.2)). В декартовых координатах длины проекций не могут превышать длины радиус-вектора; отсюда находим неравенства

$$|\sin \varphi| \leq 1, \quad |\cos \varphi| \leq 1. \quad (9.1)$$

Кроме того, проекции являются катетами некоторого прямоугольного треугольника, а единичный радиус-вектор - его гипотенузой. Из теоремы Пифагора следует равенство

$$\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1, \quad (9.2)$$

которое называется основным тригонометрическим тождеством. Это тождество показывает, что функции $\sin \varphi$ и $\cos \varphi$ не являются независимыми. Если $\sin \varphi$ задан, то $\cos \varphi = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \varphi}$, то есть известен с точностью до знака. Допустим, требуется определить угол φ из соотношений

$$\sin \varphi = 1/5; \quad \cos \varphi = 4/5.$$

Хотя неравенства (9.1) при этом выполняются, но тождество (9.2) - нет. Следовательно, не существует угла, удовлетворяющего этим соотношениям.

Повернув радиус-вектор OA на полный оборот, найдем, что радиус-векторы, которым соответствуют углы φ и $\varphi + 2\pi$, на тригонометрическом круге совмещаются. Следовательно, совпадают и их проекции на оси координат, так что

$$\sin(\varphi + 2\pi) = \sin \varphi; \quad \cos(\varphi + 2\pi) = \cos \varphi \quad (9.3)$$

Эти равенства справедливы для любого исходного угла φ , поэтому 2π является *периодом* функций $\sin \varphi$ и $\cos \varphi$. Кроме того, из Рис. 9.1 нетрудно заметить, что у радиус-векторов, соответствующих углам φ и $-\varphi$ проекции на ось x всегда совпадают, а проекции на ось y - противоположны по знаку. Отсюда выводим, что

$$\sin(-\varphi) = -\sin \varphi; \quad \cos(-\varphi) = \cos \varphi, \quad (9.4)$$

так что $\sin \varphi$ является *нечетной*, а $\cos \varphi$ - *четной* функцией аргумента φ .

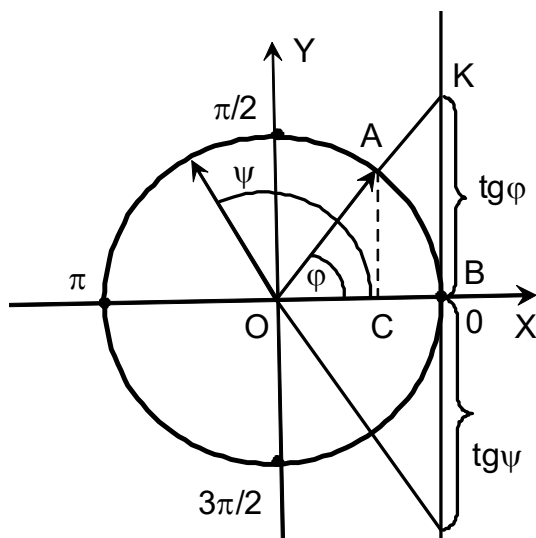


Рис. 9.3

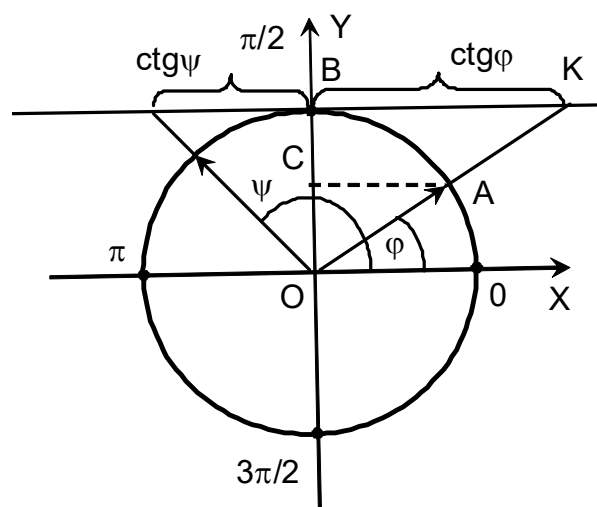


Рис. 9.4

Функции $\operatorname{tg} \varphi$ и $\operatorname{ctg} \varphi$ определяются как отношения

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi}; \quad \operatorname{ctg} \varphi = \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi}. \quad (9.5)$$

С помощью тригонометрического круга легко найти, что $\cos \varphi$ обращается в нуль в точках $\varphi = \pi/2 + \pi n$, $n = 0, \pm 1, \dots$. Следовательно, в этих точках $\operatorname{tg} \varphi$ неопределен. Соответственно, $\operatorname{ctg} \varphi$ неопределен в точках, где $\sin \varphi = 0$, то есть при $\varphi = \pi n$, $n = 0, \pm 1, \dots$.

Проведем через точку $x = 1$ прямую, параллельную оси y , и продолжим единичный радиус-вектор OA до пересечения с этой прямой в точке K (см. Рис. 9.3). На Рис. 9.3 прямоугольные треугольники OAC и OKB подобны, так как имеют общий угол φ (см. далее §19). Отсюда

$$\frac{|KB|}{|OB|} = \frac{|AC|}{|OC|} \Rightarrow |KB| = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = \operatorname{tg} \varphi,$$

поскольку $|OB| = 1$; $|AC| = \sin \varphi$; $|OC| = \cos \varphi$. Ось $x = 1$ называется осью *тангенсов*. Из Рис. 9.3 следует, что тангенсы углов, лежащих в первой и третьей четвертях тригонометрического круга положительны, а тангенсы углов, лежащих во второй и в четвертой четвертях - отрицательны. Кроме того, в отличие от $\sin \varphi$ и $\cos \varphi$, функция $\operatorname{tg} \varphi$ не ограничена и может принимать любые действительные значения.

Ось *котангенсов* получим, проведя через точку $y = 1$ прямую, параллельную оси x . Продолжим единичный радиус-вектор OA до пересечения с осью котангенсов в точке K (см. Рис. 9.4). Из подобия прямоугольных треугольников OAC и OKB находим, что на рисунке 9.4 отрезок $|KB| = \operatorname{ctg} \varphi$. Из определений (9.5) следует, что знаки выражений $\operatorname{tg} \varphi$ и $\operatorname{ctg} \varphi$ совпадают и что функция $\operatorname{ctg} \varphi$ также является неограниченной. Далее, из Рис. 9.3 и 9.4 легко видеть, что радиус-векторы, которым соответствуют углы φ и $\varphi + \pi$ продолжают в одинаковые точки как на оси тангенсов, так и на оси котангенсов. Поскольку исходный угол φ может быть взят произвольно, то число π является периодом функций $\operatorname{tg} \varphi$ и $\operatorname{ctg} \varphi$, т.е.

$$\operatorname{tg}(\varphi + \pi) = \operatorname{tg} \varphi; \quad \operatorname{ctg}(\varphi + \pi) = \operatorname{ctg} \varphi. \quad (9.6)$$

Кроме того, из определений (9.5) и равенств (9.4) легко заключить, что $\operatorname{tg} \varphi$ и $\operatorname{ctg} \varphi$ являются нечетными функциями аргумента φ

$$\operatorname{tg}(-\varphi) = \frac{\sin(-\varphi)}{\cos(-\varphi)} = -\operatorname{tg} \varphi; \quad \operatorname{ctg}(-\varphi) = \frac{\cos(-\varphi)}{\sin(-\varphi)} = -\operatorname{ctg} \varphi. \quad (9.7)$$

В. Тригонометрические тождества

В тригонометрии и планиметрии мы постоянно встречаемся с тригонометрическими функциями, заданными от сложных аргументов, например, от суммы двух различных углов α и β , как в выражении $\sin(\alpha + \beta)$, либо от произведения некоторого угла φ на целое число, например $\cos 2\varphi$, и т.д. Для упрощения и преобразования таких выражений используются подходящие тригонометрические тождества. Число этих тождеств на первый взгляд велико и необходимость их запоминания приводит школьников в уныние. На самом же деле все эти тождества являются прямым следствием двух основных тождеств

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta; \quad (9.8a)$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta, \quad (9.8б)$$

которые запомнить уже сравнительно нетрудно, так как в первое тождество симметрично входят произведения синусов и косинусов, а во второе тождество - произведения только косинусов и только синусов. Для уточнения знаков в этих формулах можно использовать метод "прикидок", описанный в §1. Полагая, например, во втором тождестве $\beta = -\alpha$ и учитывая нечетность синуса и тот факт, что $\cos 0 = 1$, сведем это равенство к основному тригонометрическому тождеству (9.2). При неверном выборе знаков в правой части (9.8б) получилось бы не тождество, а уравнение по отношению к углу α .

Заменяя в тождествах (9.8) угол β на $-\beta$, и учитывая свойства (9.4), находим выражения для синуса и косинуса разности аргументов

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \sin \beta; \quad (9.9a)$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta. \quad (9.9б)$$

Далее, полагая в формулах (9.8) $\alpha = \beta$, находим выражения для синусов и косинусов двойных углов

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha; \quad \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha. \quad (9.10)$$

Синусы и косинусы тройных углов можно при необходимости получить, подставляя в формулы (9.8) $\beta = 2\alpha$, и используя затем равенства (9.10).

Другую группу формул получим, складывая почленно формулы (9.8a) и (9.9a), а также формулы (9.8б) и (9.9б). В результате, получаем полезные равенства

$$2 \sin \alpha \cdot \cos \beta = \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta), \quad (9.11a)$$

$$2 \cos \alpha \cdot \cos \beta = \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta), \quad (9.11б)$$

Вычитая почленно из формулы (9.9б) формулу (9.8б), получим еще одну формулу того же типа

$$2 \sin \alpha \cdot \sin \beta = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta). \quad (9.11в)$$

Эти же формулы (9.11) часто используются в другой записи. Положим

$$\begin{cases} x = \alpha + \beta; \\ y = \alpha - \beta; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{x+y}{2}; \\ \beta = \frac{x-y}{2}. \end{cases} \quad (9.12)$$

Тогда тождества (9.11) принимают следующий вид

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} \quad (9.13a)$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} \quad (9.13б)$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2} \quad (9.13в)$$

Наконец, заменяя в тождестве (9.13a) аргумент y на $-y$, и учитывая нечетность синуса, получаем еще одну формулу того же типа

$$\sin x - \sin y = 2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2}. \quad (9.13г)$$

Еще одну группу формул получим, прибавляя к основному тождеству (9.2) второе тождество (9.10), а также, вычитая из основного тождества эту формулу

$$1 + \cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha, \quad 1 - \cos 2\alpha = 2\sin^2 \alpha \quad (9.14)$$

Формулы (9.14) позволяют выразить $\sin^2 \alpha$ и $\cos^2 \alpha$ через $\cos 2\alpha$. Они полезны также при переходе от половинного угла $\alpha/2$ к углу α . Полагая в (9.14) $\alpha = x/2$ и извлекая из обеих частей тождеств квадратный корень по правилу (5.4), получаем

$$\left| \sin \frac{\alpha}{2} \right| = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}; \quad \left| \cos \frac{\alpha}{2} \right| = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}. \quad (9.15)$$

При раскрытии модуля в этих формулах, выбор знака зависит от того в какую из четвертей тригонометрического круга попадает угол $\alpha/2$.

Изредка используется также формула

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}, \quad (9.16)$$

которая доказывается применением формул (9.8) и делением числителя и знаменателя на $\cos \alpha \cos \beta$. Формулу для $\operatorname{tg}(\alpha - \beta)$ легко получить отсюда заменой угла β на $-\beta$ и использованием равенств (9.7).

Г. Доказательство тождеств. Примеры

При доказательстве тригонометрических тождеств, прежде всего, обращаем внимание на структуру аргументов тригонометрических функций.

Так, тождество

$$\text{a)} \quad \sin \alpha + 2 \sin 3\alpha + \sin 5\alpha = 4 \sin 3\alpha \cdot \cos^2 \alpha$$

содержит функции от аргументов α , 3α и 5α . Вспомним, что при сложении тригонометрических функций по формулам (9.13), в правых частях возникают полу-суммы и полу-разности исходных аргументов. Выгодно, поэтому, сложить первый и третий член в левой части тождества

$$\sin \alpha + \sin 5\alpha = 2 \sin 3\alpha \cdot \cos 2\alpha,$$

с тем, чтобы получить функцию от аргумента 3α . Следовательно, левая часть тождества равна

$$(\text{л.ч.}) = 2 \sin 3\alpha (1 + \cos 2\alpha) = 4 \sin 3\alpha \cdot \cos^2 \alpha,$$

где во втором равенстве мы использовали первую формулу (9.14). ■

Для доказательства тождества

$$\text{b)} \quad \sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha + 3 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = 1,$$

возведем основное тождество (9.2) в куб, используя соответствующую формулу сокращенного умножения

$$1 = (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^3 = \sin^6 \alpha + 3 \sin^4 \alpha \cdot \cos^2 \alpha + 3 \sin^2 \alpha \cdot \cos^4 \alpha + \cos^6 \alpha = \\ \sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha + 3 \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha),$$

откуда и следует справедливость тождества b). ■

$$\text{c)} \quad 1 + 2 \cos 7\alpha = \frac{\sin 10,5\alpha}{\sin 3,5\alpha}.$$

Положим $3,5\alpha = \beta$; тогда $7\alpha = 2\beta$, а $10,5\alpha = 3\beta$, так что исходное тождество принимает вид

$$1 + 2 \cos 2\beta = \frac{\sin 3\beta}{\sin \beta}.$$

Поскольку $\sin 3\beta = 3 \sin \beta - 4 \sin^3 \beta$, то отсюда получаем

$$1 + 2 \cos 2\beta = 3 - 4 \sin^2 \beta,$$

а так как $\cos 2\beta = 1 - 2 \sin^2 \beta$, то последнее равенство очевидно. ■

$$\text{d) Доказать, что если } \alpha + \beta + \gamma = \pi, \text{ то } \cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = 1 + 4 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}.$$

Воспользуемся тем, что $\gamma = \pi - (\alpha + \beta)$. Поэтому

$$\sin \frac{\gamma}{2} = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha + \beta}{2} \right) = \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} - \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2},$$

где учтено, что $\sin(\pi/2) = 1$, а $\cos(\pi/2) = 0$. Далее, имеем

$$(n.ч.) = 1 + 4 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \left(\cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} - \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \right) = 1 + \sin \alpha \cdot \sin \beta - (1 - \cos \alpha)(1 - \cos \beta).$$

Здесь использованы тождества типа (9.10) и (9.14). Окончательно, получаем

$$(n.ч.) = \cos \alpha + \cos \beta - \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta,$$

что совпадает с левой частью тождества d), поскольку

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta - \cos \alpha \cdot \cos \beta = -\cos(\alpha + \beta) = \cos \gamma.$$

Заметим в заключение, что все школьные «формулы приведения» являются просто следствиями полученных выше соотношений (9.8), (9.9) и аналогичных им. Например

$$\cos(\alpha - \pi/2) = \cos \alpha \cdot \cos(\pi/2) + \sin \alpha \cdot \sin(\pi/2) = \sin \alpha,$$

поскольку $\cos(\pi/2) = 0$, $\sin(\pi/2) = 1$.

Д. Контрольные задачи

Доказать тождества 1° - 3°:

$$1^\circ. \quad \cos^8 \alpha - \sin^8 \alpha = \frac{1}{4} \cos 2\alpha (3 + \cos 4\alpha).$$

$$2^\circ. \quad \frac{3 + 4 \cos 4\alpha + \cos 8\alpha}{3 - 4 \cos 4\alpha + \cos 8\alpha} = \operatorname{ctg}^4 2\alpha.$$

$$3^\circ. \quad \sin \alpha + \sin 3\alpha + \sin 5\alpha + \sin 7\alpha = 4 \cos \alpha \cdot \cos 2\alpha \cdot \sin 4\alpha.$$

$$4^\circ. \quad \text{Найти } \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}, \text{ если } \frac{\sin 3\alpha}{\sin \alpha} = \frac{11}{25}.$$

§ 10. Решение тригонометрических уравнений и неравенств

А. Вычисление значений тригонометрических функций

На практике часто требуется знать значения тригонометрических функций углов, являющихся простейшими долями угла π , т.е. $\pi/6$; $\pi/4$; $\pi/3$; $\pi/2$; $2\pi/3$ и т. д. Для углов из промежутка $[0, \pi/2]$ вычислить эти значения проще всего из подходящего треугольника. В равностороннем треугольнике ABC (см. Рис. 10.1) все углы равны, а поскольку их сумма равна π , то каждый из углов равен $\pi/3$.

Пусть сторона треугольника равна 1. Проведем высоту BD , которая в равностороннем треугольнике является одновременно и медианой, и биссектрисой (см. §19). Следовательно, $|AD| = |DC| = 1/2$, и $\angle ABD = \pi/6$. Кроме того, по теореме Пифагора

$$|BD| = \sqrt{|AB|^2 - |AD|^2} = \sqrt{3}/2.$$

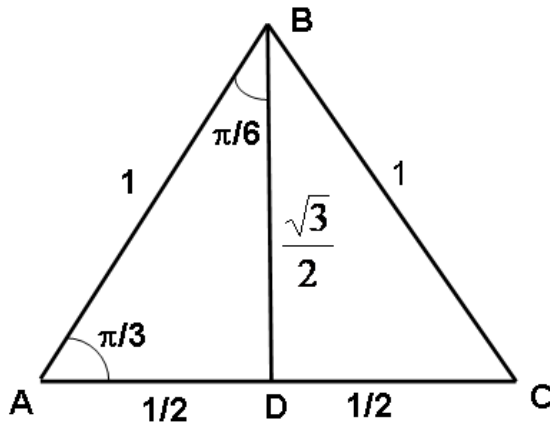


Рис. 10.1

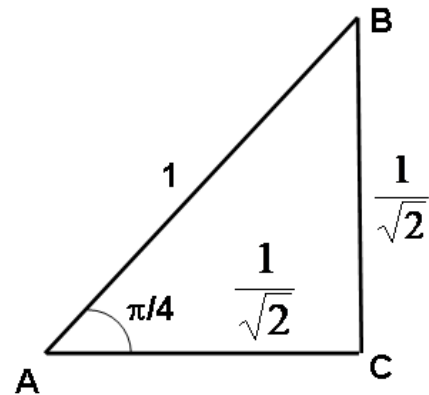


Рис. 10.2

Поэтому из треугольника ABD на Рис. 10.1 легко находим, что для угла $\pi/3$ ($= 60^\circ$)

$$\begin{aligned} \sin \frac{\pi}{3} &= \frac{|BD|}{|AB|} = \frac{\sqrt{3}}{2}; & \cos \frac{\pi}{3} &= \frac{|AD|}{|AB|} = \frac{1}{2}; \\ \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} &= \frac{\sin(\pi/3)}{\cos(\pi/3)} = \sqrt{3}; & \operatorname{ctg} \frac{\pi}{3} &= \frac{1}{\operatorname{tg}(\pi/3)} = \frac{1}{\sqrt{3}}. \end{aligned} \quad (10.1)$$

Аналогично, для угла $\pi/6$ ($= 30^\circ$) имеем

$$\begin{aligned} \sin \frac{\pi}{6} &= \frac{|AD|}{|AB|} = \frac{1}{2}; & \cos \frac{\pi}{6} &= \frac{|BD|}{|AB|} = \frac{\sqrt{3}}{2}; \\ \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} &= \frac{\sin(\pi/6)}{\cos(\pi/6)} = \frac{1}{\sqrt{3}}; & \operatorname{ctg} \frac{\pi}{6} &= \frac{1}{\operatorname{tg}(\pi/6)} = \sqrt{3}. \end{aligned} \quad (10.2)$$

Значения тригонометрических функций для угла $\pi/4$ ($= 45^\circ$) легко получить из равнобедренного прямоугольного треугольника ABC (Рис. 10.2) с гипотенузой, равной 1. Из теоремы Пифагора следует, что его катеты $|AC| = |BC| = 1/\sqrt{2}$. Острые углы этого треугольника равны, и в сумме с прямым $\angle ACB$ составляют π радиан. Следовательно, каждый из них равен $\pi/4$. Поэтому из треугольника ABC на Рис. 10.2 находим

$$\sin \frac{\pi}{4} = \frac{|BC|}{|AB|} = \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad \cos \frac{\pi}{4} = \frac{|AC|}{|AB|} = \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4} = 1. \quad (10.3)$$

Итак, для получения величин (10.1) - (10.3) достаточно запомнить, что значения тригонометрических функций углов $\pi/6$ и $\pi/3$ находятся из равностороннего треугольника, а для угла $\pi/4$ - из равнобедренного прямоугольного треугольника.

Значения тригонометрических функций углов 0 и $\pi/2$ легко определить непосредственно на тригонометрическом круге. Из рисунков 9.1 - 9.4 находим, что

$$\sin 0 = 0; \quad \cos 0 = 1; \quad \operatorname{tg} 0 = 0.$$

При этом $\operatorname{ctg} 0$ – неопределен. Кроме того,

$$\sin \frac{\pi}{2} = 1; \quad \cos \frac{\pi}{2} = 0; \quad \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2} = 0,$$

а $\operatorname{tg}(\pi/2)$ – неопределен. Значения же тригонометрических функций углов из промежутка $[\pi/2, 2\pi]$ легко выражаются через соответствующие значения для углов из промежутка $[0, \pi/2]$ с помощью формул (9.8) и (9.9). Имеем, например

$$\sin \frac{2\pi}{3} = \sin \left(\pi - \frac{\pi}{3} \right) = \sin \pi \cdot \cos \frac{\pi}{3} - \cos \pi \cdot \sin \frac{\pi}{3} = \sin \frac{\pi}{3},$$

так как с помощью тригонометрического круга (Рис. 9.1) легко найти, что $\sin \pi = 0$ и $\cos \pi = -1$.

Б. Решение элементарных тригонометрических уравнений

Рассмотрим уравнение

$$\sin \varphi = m. \quad (10.6)$$

По определению, $\sin \varphi$ – есть проекция единичного радиус-вектора на ось Y. Проведем на Рис. 10.3 прямую $y = m$. Если $|m| > 1$, то прямая не пересекает тригонометрический круг и решений уравнения (10.6) нет. Если же $|m| < 1$, то прямая пересекает круг в общем случае в двух точках,

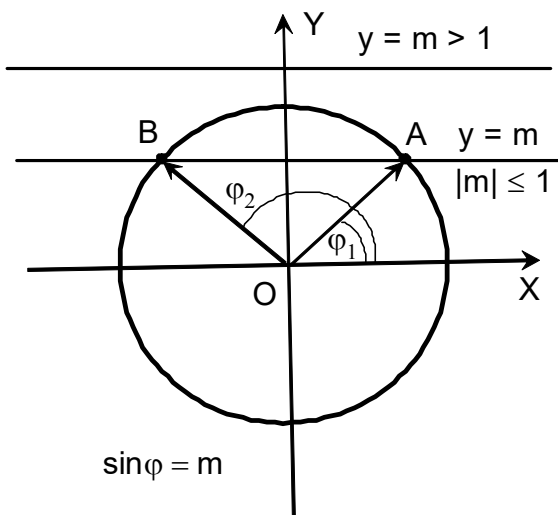


Рис. 10.3

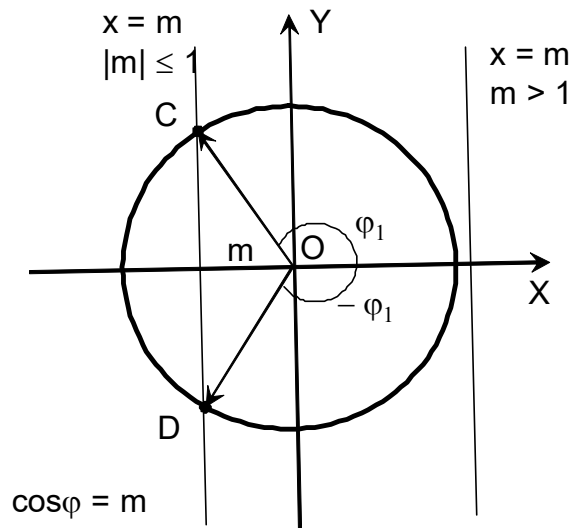


Рис. 10.4

А и В на Рис. 10.3. Положению радиус-вектора OA соответствуют углы типа $\varphi_1 + 2\pi n$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ причем угол φ_1 меняется в промежутке $[-\pi/2, \pi/2]$, а положению радиус-вектора OB – углы типа $\varphi_2 + 2\pi n$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, при этом угол φ_2 меняется в промежутке $[\pi/2, 3\pi/2]$. Поскольку прямая AB параллельна оси X , то легко сообразить, что при расположении прямой как выше оси X (при $0 \leq m \leq 1$), так и ниже этой оси (при $-1 \leq m \leq 0$) имеем $\varphi_1 + \varphi_2 = \pi$. Следовательно, уравнение (10.6) имеет две серии решений

$$\varphi = \varphi_1 + 2\pi n \quad \text{и} \quad \varphi = \pi - \varphi_1 + 2\pi n. \quad (*)$$

Как видно из рисунка 10.3, любому числу m из промежутка $-1 \leq m \leq 1$ соответствует, одно и только одно значение угла φ_1 из промежутка $[-\pi/2, \pi/2]$ такое, что $\sin \varphi_1 = m$. Это единственное решение называют *арксинусом* m и обозначают его как $\varphi_1 = \arcsin m$. Используя это обозначение и объединяя формулы (*) в одну формулу, получаем общее решение уравнения (10.6) в виде

$$\varphi = (-1)^k \arcsin m + \pi k \quad k = 0, \pm 1, \dots, \quad |m| \leq 1. \quad (10.7)$$

Действительно, при четных $k = 2n$ имеем $(-1)^k = 1$, и получаем первую из формул (*), а при $k = 2n + 1$, когда $(-1)^k = -1$, получаем вторую из формул (*).

Итак, $\arcsin m$ - это угол из промежутка $[-\pi/2, \pi/2]$ такой, что синус этого угла равен m . Опять налицо определение некоторой математической операции - взятия арксинуса - через обратную операцию, вычисление синуса. Полезно заучить приведенное определение. Оно является словесным эквивалентом формулы

$$\sin(\arcsin m) = m, \quad |m| \leq 1. \quad (10.8)$$

Понятие арксинуса требует от ученика времени и сил для усвоения. Почему, спрашивается, значение арксинуса лежит именно в выбранном нами промежутке $[-\pi/2, \pi/2]$? Рассмотрим другой промежуток углов, скажем, $[0, \pi]$. В этом промежутке углов уравнение (10.6) при $0 < m < 1$ имеет два решения (точки A и B на Рис. 10.3), а при $-1 < m < 0$ оно вообще не имеет решений. Нам же нужно выбрать такой интервал углов, чтобы уравнение (10.6) всегда имело решение, и при том, только одно. Тогда проведенный анализ показывает, что все остальные решения выражаются через это единственное решение.

Уяснив метод решения уравнения (10.6), можно аналогичным образом решить и уравнение

$$\cos \varphi = m. \quad (10.9)$$

Учитывая, что $\cos \varphi$ - это проекция единичного радиус-вектора на ось X , проведем на Рис. 10.4 прямую $x = m$. При $|m| > 1$ прямая не пересекает тригонометрический круг и решений нет. Если же $|m| < 1$, то прямая пересекает круг в общем случае в двух точках, C и D . Положению радиус-вектора OC соответствуют углы типа $\varphi_1 + 2\pi n$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ где элементарный угол φ_1 меняется в промежутке $[0, \pi]$, а положению радиус-вектора OD соответствуют углы типа $\varphi_2 + 2\pi n$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, где φ_2 - элементарный угол из промежутка $[-\pi, 0]$. Из Рис. 10.4 легко видеть, что $\varphi_2 = -\varphi_1$, поэтому уравнение (10.9) допускает две серии решений

$$\varphi = \varphi_1 + 2\pi n \quad \text{и} \quad \varphi = -\varphi_1 + 2\pi n. \quad (**)$$

Как и в предыдущем случае, каждому числу m из интервала $[-1, 1]$ соответствует одно и только одно значение угла из промежутка $[0, \pi]$, такое что $\cos \varphi_1 = m$. Это единственное решение называют *арккосинусом* m и обозначают как $\varphi_1 = \arccos m$. Итак, $\arccos m$ - это угол из промежутка $[0, \pi]$ такой, что косинус этого угла равен m . Следовательно

$$\cos(\arccos m) = m, \quad |m| \leq 1, \quad (10.10)$$

а формулы (**), дающие все решения уравнения (10.9), могут быть записаны в виде единой формулы

$$\varphi = \pm \arccos m + 2\pi n, \quad n = 0, \pm 1, \dots, \quad |m| \leq 1. \quad (10.11)$$

Рассмотрим теперь уравнение

$$\operatorname{tg} \varphi = m. \quad (10.12)$$

На оси тангенсов (см. Рис. 10.5) отложим отрезок $|KC| = m$ и через центр тригонометрического круга проведем прямую OK , которая пересечет единичную окружность в точках A и B . Таким образом, уравнение (10.12) имеет решения при произвольном m . Углы, соответствующие положению радиус-вектора OA можно записать в виде $\varphi_1 + 2\pi n$, $n = 0, \pm 1, \dots$, где φ_1 - элементарный угол из промежутка $[-\pi/2, \pi/2]$. Из рисунка 10.5 видно, что в промежутке

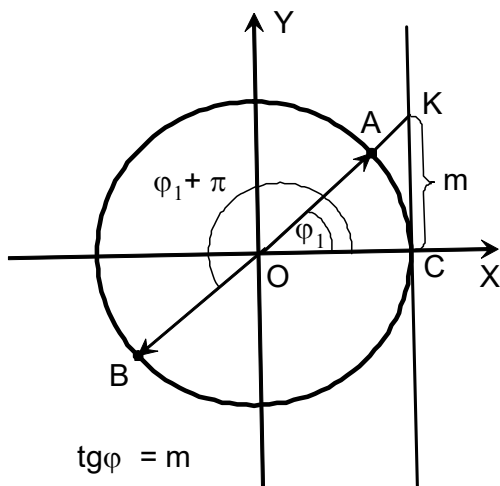


Рис. 10.5

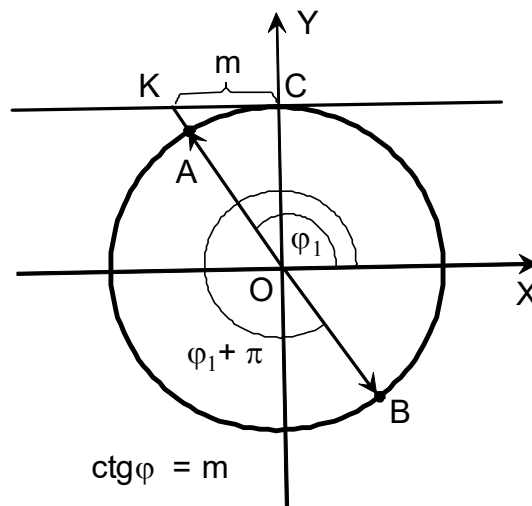


Рис. 10.6

$[-\pi/2, \pi/2]$ для каждого m имеется одно и только одно решение уравнения (10.12), которое следует назвать *арктангенсом* m , так что $\varphi_1 = \operatorname{arctg} m$. Тогда серию решений, соответствующих положению радиус-вектора OA , можно записать как $\operatorname{arctg} m + 2\pi n$. Вектор же OB получается из вектора OA поворотом на угол π . Следовательно, серию решений, соответствующих положению радиус-вектора OB , можно записать как $\pi + \operatorname{arctg} m + 2\pi n$. Объединяя эти серии решений, получаем общее решение уравнения (10.12) в виде

$$\varphi = \operatorname{arctg} m + k\pi; \quad k = 0, \pm 1, \dots \quad (10.13)$$

Действительно, первая серия решений получается при $k = 2\pi n$, а вторая серия - при $k = 2\pi n + 1$.

Рассмотрим, наконец, уравнение

$$\operatorname{ctg} \varphi = m \quad (10.14)$$

На оси котангенсов (см. Рис. 10.6) отложим отрезок $|CK|$, равный m . Через точки K и центр O проведем прямую, которая пересечет единичную окружность в точках A и B . Введем элементарный угол $\operatorname{arctg} m$, лежащий в промежутке $[0, \pi]$ и такой, что $\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} m) = m$. Из Рис. 10.6 видно, что в промежутке $[0, \pi]$ для каждого m найдется один и только один такой угол. Тогда серию решений, соответствующих положению радиус-вектора OA на Рис. 10.6 можно записать как $\operatorname{arctg} m + 2\pi n$, $n = 0, \pm 1, \dots$, а серию решений, соответствующих положению радиус-вектора OB - как $\pi + \operatorname{arctg} m + 2\pi n$. Объединяя эти решения в единую формулу, находим общее решение уравнения (10.14) в виде

$$\varphi = \operatorname{arctg} m + \pi k; \quad k = 0, \pm 1, \dots \quad (10.15)$$

В. Примеры тригонометрических уравнений

Любое тригонометрическое уравнение решается приведением к одному или нескольким элементарным уравнениям, изученным в пункте Б выше. Приемы и способы такого приведения рассмотрим на характерных примерах.

а) $3 \sin^2 2x + 7 \cos 2x - 3 = 0.$

Это уравнение сводится к квадратному заменой

$$y = \cos 2x; \quad |y| \leq 1; \quad \sin^2 2x = 1 - \cos^2 2x = 1 - y^2.$$

Отбрав корни y_i ($i = 1, 2$) квадратного уравнения, удовлетворяющие условию $|y_i| \leq 1$, решаем затем элементарное уравнение $\cos 2x = y_i$, применяя формулу (10.11). ■

Очень часто, в результате преобразований с помощью тригонометрических тождеств из § 9В, исходное уравнение приводится к виду

$$\text{b) } \sin \alpha x = \sin \beta x, \quad \text{либо} \quad \cos \alpha x = \cos \beta x$$

где α и β - некоторые числа. Стандартное решение этих уравнений достигается применением формул (9.13). Например, первое уравнение решается так

$$\sin \alpha x - \sin \beta x = 0; \quad \sin \frac{(\alpha - \beta)}{2} x \cdot \cos \frac{(\alpha + \beta)}{2} x = 0,$$

откуда

$$\sin \frac{(\alpha - \beta)}{2} x = 0, \quad \text{либо} \quad \cos \frac{(\alpha + \beta)}{2} x = 0. \quad \blacksquare$$

Так же, как и при доказательстве тригонометрических тождеств, при поиске подходящего приема для решения уравнения обращаем внимание, прежде всего, на аргументы тригонометрических функций. Уравнение

$$\text{c) } \sin 5x + \cos 3x - \sin x = 0$$

содержит аргументы x , $3x$ и $5x$. Вспомним, что при алгебраическом сложении синусов и косинусов по формулам (9.13) возникают полу-суммы и полу-разности исходных аргументов. Сгруппируем, поэтому

$$\sin 5x - \sin x = 2 \sin 2x \cdot \cos 3x,$$

и получим

$$\cos 3x \cdot (2 \sin 2x + 1) = 0,$$

Откуда

$$\cos 3x = 0, \quad \text{либо} \quad \sin 2x = -1/2. \quad \blacksquare$$

Аналогично, для уравнения

$$\text{d) } \sin x - \sin 2x + \sin 5x + \sin 8x = 0$$

наиболее естественной будет группировка средних членов,

$$\sin 5x - \sin 2x = 2 \sin \frac{3}{2} x \cdot \cos \frac{7}{2} x,$$

и крайних членов,

$$\sin x = \sin 8x = 2 \sin 8x = 2 \sin \frac{9}{2} x \cdot \cos \frac{7}{2} x.$$

Вынося за скобку общий множитель,

$$2 \cos \frac{7}{2} x \cdot \left[\sin \frac{3}{2} x + \sin \frac{9}{2} x \right] = 0,$$

получим элементарное уравнение $\cos(7x/2) = 0$ и уравнение типа, рассмотренного в пункте b). ■

При наличии в уравнении произведения функций с разными аргументами часто применяются формулы обратного преобразования (9.11). Применяя формулу (9.11с) к уравнению

$$\text{e) } \sin x \cdot \sin 7x = \sin 3x \cdot \sin 5x,$$

получим

$$\cos 6x - \cos 8x = \cos 2x - \cos 8x \quad \Rightarrow \quad \cos 6x = \cos 2x,$$

т.е. приходим к уравнению типа б). Данный прием весьма эффективен, если совпадают суммы или разности аргументов у функций, входящих в произведение. ■

Кроме вида аргумента, важное значение имеют показатели степени, с которыми входят в уравнение тригонометрические функции. Если, как в пункте а), заменой переменного уравнение не удастся свести к алгебраическому, то применяют формулы понижения степени (9.14).

$$\text{f)} \quad \sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x + \sin^2 4x = 2.$$

Используя справа налево вторую из формул (9.14), получаем

$$\frac{1 - \cos 2x}{2} + \frac{1 - \cos 4x}{2} + \frac{1 - \cos 6x}{2} + \frac{1 - \cos 8x}{2} = 2.$$

Так как суммы аргументов $2x + 8x$ и $4x + 6x$ равны, то имеем уравнение типа с). ■

В уравнениях

$$\text{g)} \quad \sin^4 \frac{x}{2} - \cos^4 \frac{x}{2} = \frac{1}{4},$$

и

$$\sin^4 x + \cos^4 x = \sin x \cdot \cos x$$

понижить степень тригонометрических функций можно с помощью основного тригонометрического тождества (9.2). В первом из этих уравнений, используя формулу для разности квадратов и тождество (9.2), получаем

$$\sin^2 \frac{x}{2} - \cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad \cos x = -\frac{1}{4}.$$

Второе же уравнение, с помощью тождества

$$1 = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 = \sin^4 x + 2\sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x$$

приводится к квадратному заменой

$$\sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x = y; \quad |y| \leq \frac{1}{2}; \quad \sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2\sin^2 x \cos^2 x = 1 - 2y^2. \quad \blacksquare$$

Иногда наиболее эффективно тригонометрические уравнения решаются с использованием свойств ограниченности синуса и косинуса (9.1). Так, уравнение

$$\text{h)} \quad \sin \alpha x + \sin \beta x = 2$$

может, очевидно, иметь решение только при одновременном выполнении равенств $\sin \alpha x = 1$ и $\sin \beta x = 1$. ■

Г. Метод дополнительного угла

Отдельного упоминания заслуживает специальный прием преобразования выражения вида

$$y(x) = a \sin x + b \cos x,$$

где a и b произвольные действительные числа. Имеем тождественно

$$y = \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x \right).$$

Далее, так как

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1,$$

то существует некоторый элементарный угол φ_0 такой, что

$$\cos \varphi_0 = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}; \quad \sin \varphi_0 = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad (10.16)$$

(см. обсуждение после формулы (9.2)). Заметим, что в качестве вспомогательного угла φ_0 можно взять любой из углов, удовлетворяющих соотношениям (10.16). С учетом (10.16) и (9.8a), получаем

$$y = a \sin x + b \cos x = \sqrt{a^2+b^2} \sin(x + \varphi_0). \quad (10.17)$$

Преобразование (10.17) весьма полезно для исследования поведения функции $y(x)$. Оно показывает, что при сложении "гармоник" $\sin x$ и $\cos x$ с амплитудами a и b возникает новая гармоника $\sin(x+\varphi_0)$ с увеличенной амплитудой $\sqrt{a^2+b^2}$, сдвинутая по фазе на величину φ_0 . Полезно также запомнить, что в силу ограниченности синуса (см. (9.1)), максимум выражения (10.17) равен $\sqrt{a^2+b^2}$, а минимум этого выражения равен $-\sqrt{a^2+b^2}$.

Рассмотрим теперь уравнение типа

$$\text{i) } a \sin x + b \cos x = c.$$

Вводя дополнительный угол φ_0 по формулам (10.16) и учитывая преобразование (10.17), получаем уравнение

$$\sin(x + \varphi_0) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}; \quad \cos \varphi_0 = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}; \quad \sin \varphi_0 = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Если $|c / \sqrt{a^2+b^2}| > 1$, то решений нет. Если же $|c / \sqrt{a^2+b^2}| \leq 1$, то как обычно, получаем

$$x = -\varphi_0 + (-1)^k \arcsin \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} + \pi k; \quad k = 0, \pm 1, \dots$$

Заметим теперь, что если $a \geq 0$, то есть $\cos \varphi_0 \geq 0$, то угол φ_0 лежит в правой половине тригонометрического круга. Следовательно, угол φ_0 можно взять в виде

$$\varphi_0 = \arcsin \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}; \quad a \geq 0.$$

Если же $a < 0$, то угол φ_0 лежит в левой половине тригонометрического круга и его можно выбрать, например, в виде

$$\varphi_0 = \pi - \arcsin \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}; \quad a < 0.$$

В простых ситуациях подходящий вспомогательный угол φ_0 находится непосредственно из уравнений (10.16). Например, уравнение

$$\text{j) } \sin x + \cos x = 1$$

преобразуется к элементарному виду так

$$\sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin x + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x \right) = 1; \quad \sin x \cdot \cos \frac{\pi}{4} + \cos x \cdot \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

Откуда

$$\sin(x + \pi/4) = 1/\sqrt{2}. \blacksquare$$

Д. Решение тригонометрических неравенств

Решение элементарных тригонометрических неравенств рассмотрим на примере неравенства

$$\sin \varphi > m. \quad (10.18)$$

Возвращаясь к Рис. 10.3 заключаем, что возможны три случая

1°. Если $m \geq 1$, то решений, очевидно, нет.

2°. Если $-1 \leq m < 1$, то решением неравенства являются, очевидно, углы, радиус - векторы которых оканчиваются в точках, принадлежащих дуге AB на Рис. 10.3. Поскольку точке A на этом рисунке соответствует элементарный угол $\varphi_1 = \arcsin m$, а точке B - элементарный угол $\pi - \varphi_1 = \pi - \arcsin m$, то ясно, что неравенство (10.18) выполняется для всех углов вида

$$\arcsin m + 2\pi n < \varphi < \pi - \arcsin m + 2\pi n; \quad n = 0, \pm 1, \dots, \quad (10.19)$$

где мы учли, что функция $\sin \varphi$ периодична с периодом 2π .

3°. Если же $m < -1$, то неравенство (10.18) выполняется для любого значения φ .

Аналогично, с использованием тригонометрического круга, решаются и другие элементарные тригонометрические неравенства, типа $\sin x < m$, $\cos x > m$ и т. д.

к) Решить неравенство $2 \sin^2 x - 5 \sin x + 2 < 0$.

Полагая $y = \sin x$; $|y| \leq 1$, получаем квадратичное неравенство

$$\begin{cases} 2y^2 - 5y + 2 < 0; \\ |y| \leq 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(y - \frac{1}{2}\right)(y - 2) < 0 \\ |y| \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{2} < y \leq 1.$$

Таким образом, дело сводится к решению тригонометрического неравенства $\sin x > 1/2$. ■

Е. Контрольные задачи

- 1°. $2 \sin x \cos x + 5 \cos^2 x = 4$.
- 2°. $\cos^2 3x + \cos^2 4x + \cos^2 5x = 3/2$.
- 3°. $(1 - \operatorname{tg} x)(1 + \sin 2x) = 1 + \operatorname{tg} x$.
- 4°. $3 \sin x - 5 \cos x = \sqrt{17}$
- 5°. $\begin{cases} \sin x \cdot \cos y = -1/2; \\ \cos x \cdot \sin y = 1/2. \end{cases}$

ЗНАНИЕ ИЛИ ВЕРА?

Приведенные в данном параграфе формулы тригонометрии многие ученики воспринимают с благоговейным страхом. Вопрос об их происхождении ставит учеников в тупик. Смутное, туманное представление о том, что знание возникает чуть ли не как результат божественного откровения, осеняющего изредка истинных подвижников науки, по-прежнему весьма близко человеческой душе. Но если знание есть откровение, то оно священо! Можно лишь переписывать раз найденное из книги в книгу, можно комментировать, интерпретировать и дополнять, но радикально менять, отбрасывать нельзя! Более того, чем старше книга, чем древнее теорема, тем большее святотатство совершит тот, кто посягнет на их истинность. Встретившись с таким подходом, нужно проявить осторожность: перед нами система взглядов, основанная на вере.

Следовательно, как бы мудрено она ни называлась, это не наука, а религия. В науке у теорем, выводов и других результатов нет возраста. Они вечно молоды, потому что переоткрываются и продумываются заново каждым новым поколением исследователей с учетом всех, как новых, так и уже накопленных данных. Наибольшей доблестью в науке является вскрытие неясностей и противоречий в прежних научных положениях, потому что именно из противоречий, из их разрешения растет новое, более точное и полное знание. В частности, и формулы тригонометрии каждый серьезный ученик должен продумать и вывести для себя сам. Только тогда на них можно будет уверенно опираться в дальнейшем.

§ 11. Элементарные функции и графики

А. Область определения функции

Область определения функции или область допустимых значений её аргумента (ОДЗ) есть, как мы знаем, совокупность всех значений независимого переменного, при которых функция имеет смысл. Подводя итог изложенному в предыдущих параграфах, в левой колонке мы пишем общий вид некоторой функции, а в правой колонке - ОДЗ её аргумента.

Функция		ОДЗ
$y = \frac{f(x)}{g(x)}$	$\Rightarrow$	$g(x) \neq 0$.
$y = \sqrt[n]{f(x)}$	$\Rightarrow$	$f(x) \geq 0$.
$y = \log_{g(x)} f(x)$	$\Rightarrow$	$f(x) > 0$; $g(x) > 0$; $g(x) \neq 1$.
$y = [f(x)]^{g(x)}$	$\Rightarrow$	$f(x) > 0$.
$y = \arcsin f(x)$	$\Rightarrow$	$ f(x) \leq 1$.
$y = \arccos f(x)$		

Мы предполагаем здесь, что сами функции $f(x)$ и $g(x)$ определены для всех x и являются, например, многочленами. В противном случае ОДЗ исходной функции $y(x)$ будет сужена с учетом требований, налагаемых, в свою очередь, на функции $f(x)$ и $g(x)$.

а) Определить ОДЗ аргумента функции $y = \log_2(\operatorname{tg} \sqrt{x})$.

Допустимые значения аргумента определяются из совокупности последовательно налагаемых условий

$$x \geq 0; \quad \sqrt{x} \neq \frac{\pi}{2} + \pi n; \quad n = 0, 1, \dots; \quad \operatorname{tg} \sqrt{x} > 0. \blacksquare$$

При тождественном преобразовании функций нужно соблюдать осторожность с тем, чтобы сохранить ОДЗ аргумента исходной функции. Так, функции

$$y = \sqrt{x^2} = |x| \quad \text{и} \quad y = (\sqrt{x})^2$$

тождественно совпадают при $x \geq 0$, но первая из них определена для всех x , а вторая — только при $x \geq 0$. Аналогично, функции

$$y = \sin x \quad \text{и} \quad y = 2^{\log_2 \sin x}$$

тождественно совпадают при $\sin x > 0$, но вторая из них неопределенна при $\sin x \leq 0$. Следовательно, это - различные функции!

Б. Графики простейших функций

Построение графика, или примерного эскиза поведения функции, является важным вспомогательным средством решения самых разнообразных математических задач. Часто функция бывает задана сложным аналитическим выражением (или задана неявным образом) и график, отражающий наиболее характерные детали ее поведения, представляет информацию о функции в наглядном и удобном для последующего использования виде. Построение графиков - это достаточно сложное искусство, требующее времени и труда для освоения. Однако жалеть о затраченных усилиях ученику не придется, поскольку его аналитические возможности в результате многократно расширятся.

Графиком функции $f(x)$ является совокупность всех точек плоскости (x, y) , удовлетворяющих уравнению $y = f(x)$. Нарисовать график некоторой функции означает, как правило, дать его эскиз, отражающий все наиболее характерные детали поведения этой функции, а именно: точки экстремума функции, интервалы монотонности, наличие у графика асимптотических прямых, к которым он приближается сколь угодно близко, и т. д.

Графики простейших элементарных функций служат, как мы увидим далее, исходным "материалом" при рассмотрении более сложных примеров.

1°. Степенная функция $y = x^\alpha$

Поведение этой важной функции существенно зависит от значения показателя α . Разберем характерные случаи.

1.1°. $y = x^{2m}$; $m = 1, 2, \dots$

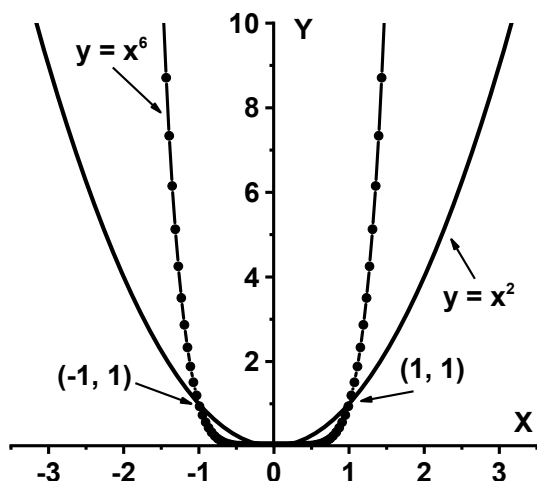


Рис. 11.1

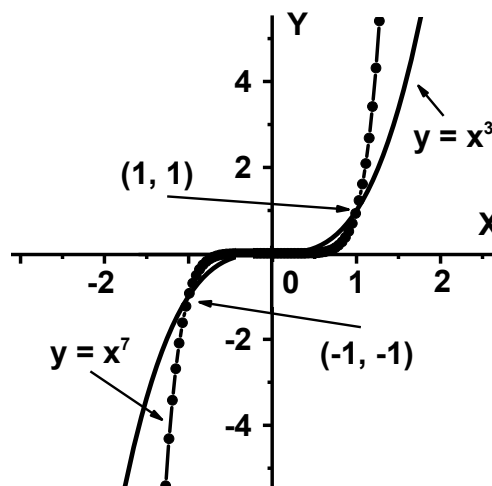


Рис. 11.2

Типичным представителем функций этого типа является парабола $y = x^2$, ($m = 1$). В характерных точках $x = \pm 1$ для любого m имеем $y(\pm 1) = 1$. В интервале $|x| < 1$ с увеличением m функция x^{2m} "проседает", приближаясь ближе к оси x , зато при $|x| > 1$ она растет тем быстрее, чем больше m (см. Рис. 11.1). Поскольку функция x^{2m} четная, $(-x)^{2m} = x^{2m}$, то ее график симметричен относительно оси y .

1.2°. $y = x^{2m+1}$; $m = 0, 1, 2, \dots$

Типичным представителем этого семейства функций является кубическая парабола $y = x^3$, т. к. случай $m = 0$ (прямая $y = x$) является исключительным. В отличие от случая 1а), функция x^{2m+1} является нечетной, $(-x)^{2m+1} = -x^{2m+1}$. Поэтому её график (см. Рис. 11.2) обладает центральной симметрией относительно начала координат. Получить этот график можно отразив его часть, заданную при $x \geq 0$, сначала относительно оси y , а затем - относительно отрицательной полуоси $x < 0$. Характерными точками графика являются точки $x = 1$, где $y = 1$, и $x = -1$, где $y = -1$.

$$1.3^\circ. \quad y = x^{-2m}; \quad m = 1, 2, \dots$$

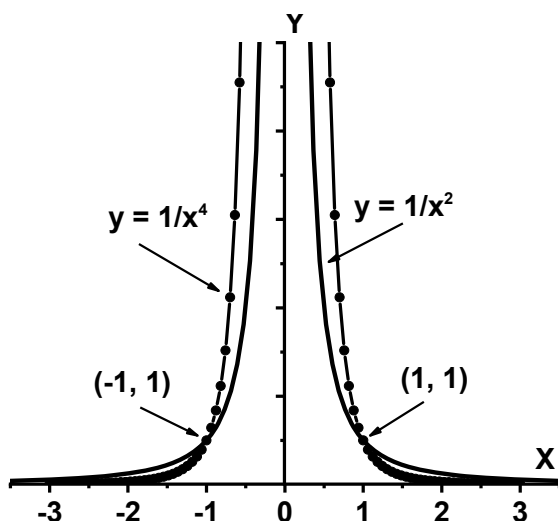


Рис. 11.3

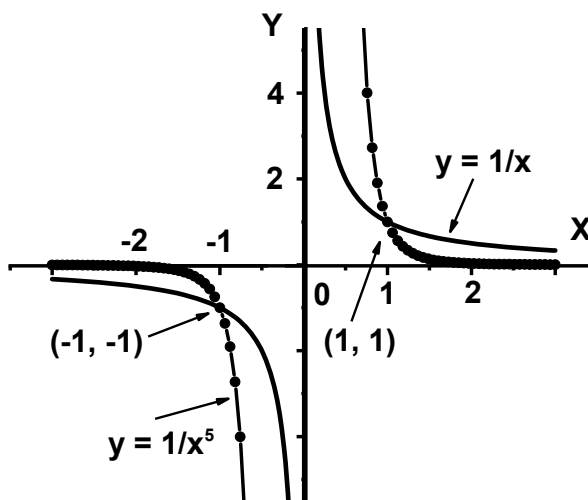


Рис. 11.4

Область определения этой функции есть $x \neq 0$. Типичным представителем семейства является функция $y = 1/x^2$ (см. Рис.11.3). Характерными точками графика являются точки $(1; 1)$ и $(-1; 1)$. Прямая $x = 0$ является вертикальной асимптотой графика, а прямая $y = 0$ - горизонтальной асимптотой. Этот факт ясен из того, что при $x \rightarrow 0, y \rightarrow +\infty$, а при $x \rightarrow +\infty, y \rightarrow 0$. Кроме того x^{-2m} является, очевидно, четной функцией и её график симметричен относительно оси y .

$$1.4^\circ. \quad y = x^{-2m-1}; \quad m = 1, 2, \dots$$

Область определения функции есть $x \neq 0$. Гипербола $y = 1/x$ является типичным представителем этого семейства. Основное качественное отличие семейства функций 1.4° от семейства 1.3° состоит в том, что функции типа 1.4° - нечетные. Поэтому графики функций этого семейства симметричны относительно начала координат (см. Рис. 11.4).

$$1.5^\circ. \quad y = x^\alpha; \quad \alpha - \text{нецелое число, } \alpha > 0.$$

При произвольных нецелых α эта функция определяется лишь при $x \geq 0$. Характерными точками графика являются начало координат и точка $(1, 1)$ (см. Рис. 11.5). При $\alpha > 1$ эта функция является выпуклой вверх и качественно не отличается от функции $y = x^{2m}$ при $x > 0$. Если же $0 < \alpha < 1$, то функция имеет выпуклость вниз. Типичным представителем такой функции будет парабола $y = \sqrt{x}$ (см. Рис. 11.5). Действительно, обращая равенство $y = \sqrt{x}$, получим $x = y^2, y \geq 0$. Ясно, что эта зависимость получается из параболы $y = x^2$ заменой координат, $x \rightarrow y; y \rightarrow x$. На этом примере легко понять, что графики прямой и обратной функций симметричны относительно прямой $y = x$.

$$1.6^\circ. \quad y = x^{-\alpha}; \quad \alpha - \text{нецелое число, } \alpha > 0.$$

При произвольных нецелых α область определения этой функции $x > 0$. Характерной точкой семейства является точка $(1, 1)$; прямые $x = 0$ и $y = 0$ являются для него, соответственно, вертикальной и горизонтальной асимптотами. При всех $\alpha > 0$ функция $y = x^{-\alpha}$ является выпуклой вверх (см. Рис. 11.6).

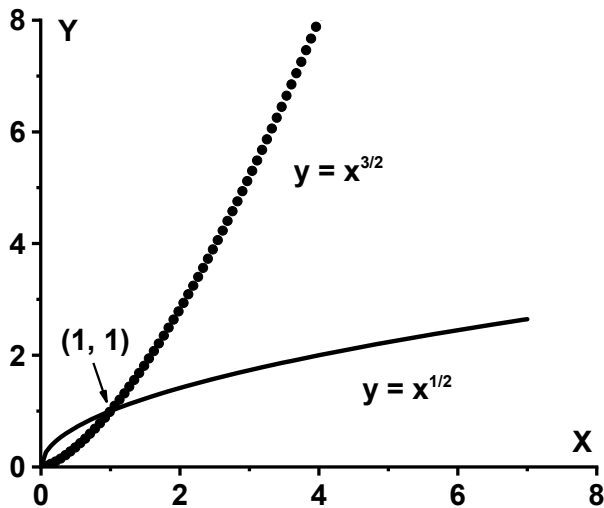


Рис. 11.5

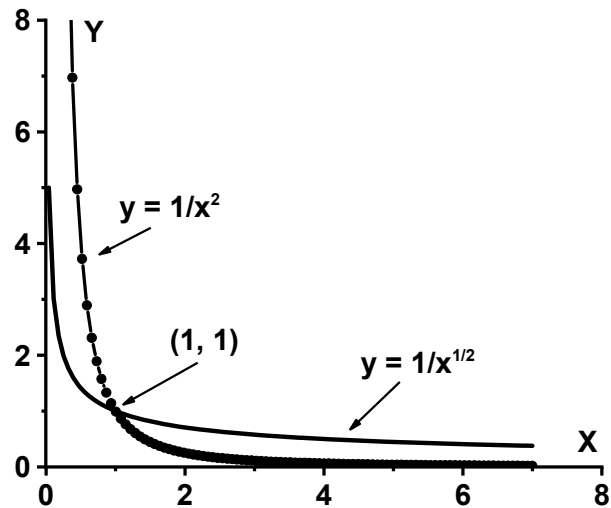


Рис. 11.6

2°. Показательная функция $y = a^x$, $a > 0$.

Свойства этой функции мы обсуждали в § 7, а её график приведён на Рис. 7.1.

3°. Логарифмическая функция $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$.

Свойства логарифмической функции обсуждались в § 7; её график дан на Рис. 8.1. Заметим, что функции $y = a^x$ и $y = \log_a x$ взаимно обратны, поэтому их графики симметричны относительно прямой $y = x$.

4°. Тригонометрические функции.

Свойства тригонометрических функций обсуждались в § 9.

4.1°. $y = \sin x$.

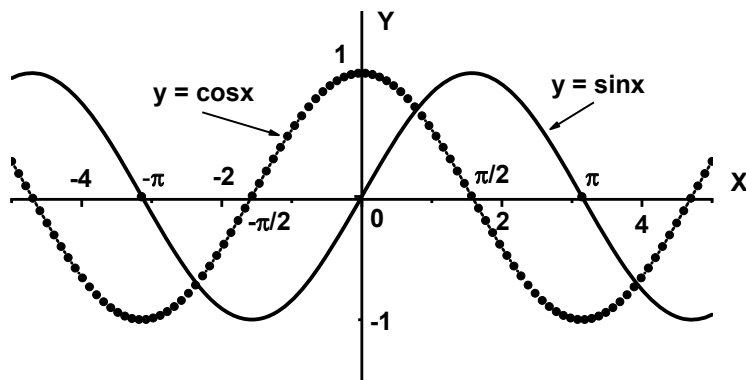


Рис. 11.7

Функция $y = \sin x$ определена на всей числовой оси. Её период равен 2π , так как для всех x $\sin(x + 2\pi) = \sin x$, кроме того она нечетная, так как $\sin(-x) = -\sin x$. Поэтому достаточно задать эту функцию в промежутке $[0, \pi]$. Покажем, однако, что можно обойтись и промежутком $[0, \pi/2]$, где функция $y = \sin x$ монотонно возрастает. Частные значения $\sin x$ в этом промежутке получены в § 10А. Построим $y = \sin x$ в этом промежутке по точкам, отметив характерные значения $y(0) = 0$ и $y(\pi/2) = 1$. Затем, пользуясь тождеством $\sin(\pi - x) = \sin x$, отразим её относительно оси $x = \pi/2$ в промежуток $[\pi/2, \pi]$. Далее, пользуясь нечетностью $\sin x$, используем центральную симметрию относительно начала координат и построим $y = \sin x$ в промежутке $[-\pi, 0]$. Так как длина промежутка $[-\pi, \pi]$ равна периоду функции 2π , то график

$y = \sin x$ можно теперь получить для всех x параллельным переносом из промежутка $[-\pi, \pi]$ в промежутки $[-\pi + 2\pi n, \pi + 2\pi n]$, где $n = \pm 1, \pm 2, \dots$, (см. Рис. 11.7).

4.2°. $y = \cos x$.

График функции $y = \cos x$ получается из графика $y = \sin x$ параллельным переносом вдоль оси x (см. Рис. 11.7). Действительно, воспользуемся тождеством $\cos(x - \pi/2) = \sin x$ и положим $x_1 = x - \pi/2$. Из этого соотношения ясно, что начало отсчета на числовой оси x_1 сдвинуто на $\pi/2$ вправо, по сравнению с осью x (см. Рис. 11.8).

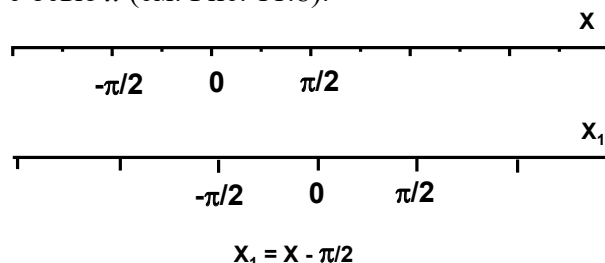


Рис. 11.8

В декартовых же координатах (x, y) перенос начала отсчета по оси x на $+\pi/2$ означает, очевидно, перенос оси y параллельно самой себе вправо на $\pi/2$ единиц. Таким образом, имея в координатах (x, y) график $y = \sin x$, получим график $y = \cos x_1$ в координатах (x_1, y) , просто перенесем ось y на $\pi/2$ вправо.

4.3°. $y = \operatorname{tg} x$.

Функция $y = \operatorname{tg} x$ определена для всех $x \neq \pi/2 + \pi n$. Поскольку её период равен π и она нечетная (см. § 9), то достаточно задать её в промежутке $[0, \pi/2]$. Частные значения $\operatorname{tg} x$ в этом промежутке получены в § 10А. Кроме того, при $x \rightarrow \pi/2$ имеем $\operatorname{tg} x \rightarrow +\infty$. Поэтому прямая $x = \pi/2$ является вертикальной асимптотой этого графика. Построив график $y = \operatorname{tg} x$ в промежутке $[0, \pi/2]$ (см. Рис. 11.9), получим затем его в промежутке $[-\pi/2, 0]$ с помощью центрально-симметричного отражения относительно начала координат. Тем самым, мы построим график $y = \operatorname{tg} x$ на целом периоде $[-\pi/2, \pi/2]$; на другие интервалы периодичности этот график распространяется параллельным переносом.

4.4°. $y = \operatorname{ctg} x$.

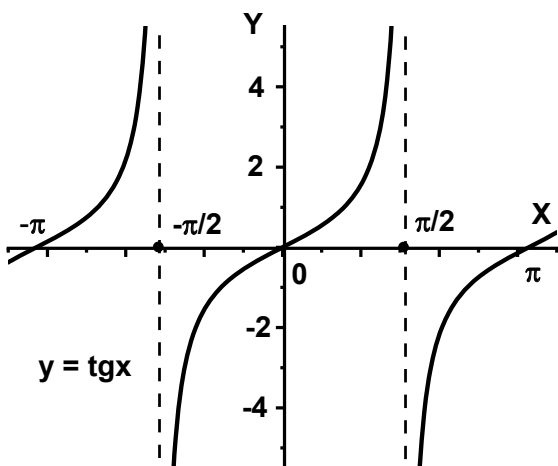


Рис. 11.9

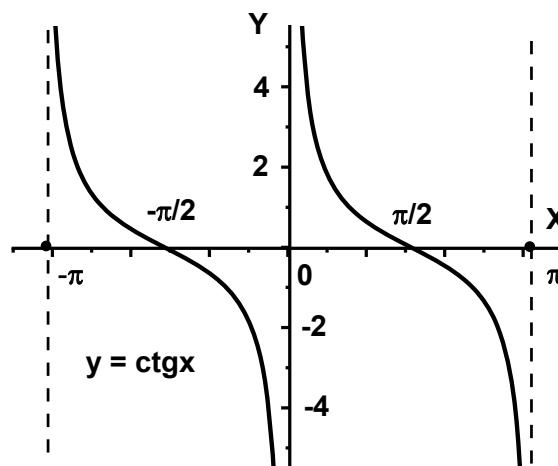


Рис. 11.10

Эта функция определена при всех $x \neq \pi$. График её легко получить из графика функции $y = \operatorname{tg} x$ с помощью тождества $\operatorname{ctg}(x - \pi/2) = -\operatorname{tg} x$. Так же как в случае функции $y = \cos x$, график функции $y = \operatorname{ctg} x$ ($x_1 = x - \pi/2$) получается из графика $y = \operatorname{tg} x$ переносом оси y на $\pi/2$ вправо. Необходимо, однако, ещё отразить сдвинутый график относительно оси x , учитывая, что значения $\operatorname{ctg}(x - \pi/2)$ и $\operatorname{tg} x$ противоположны по знаку (см. Рис. 11.10).

Получается, таким образом, что для построения графиков функций $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$ достаточно знать только графики функций $y = \sin x$ и $y = \operatorname{tg} x$ на интервале $[0, \pi/2]$. Покажем, что этих сведений достаточно и для построения обратных тригонометрических функций.

5°. Обратные тригонометрические функции

Определение этих функций дано в § 10.

5.1°. $y = \arcsin x$.

Функция $y = \arcsin x$ определена при $|x| \leq 1$, а область её значений есть $|y| \leq \pi/2$. Взяв синус от обеих частей равенства, получим $x = \sin y$; $|y| \leq \pi/2$. Считая y независимой переменной, меняющейся в промежутке $[-\pi/2, \pi/2]$, а x - функцией, получим график, изображённый на рисунке 11.11. Полезно уяснить, что Рис.11.11 может быть получен также отражением отрезка синусоиды $y = \sin x$ из промежутка $[-\pi/2, \pi/2]$ относительно прямой $y = x$. Этот факт есть следствие взаимно-обратного соответствия функции $y = \arcsin x$ и функции $y = \sin x$, взятой в промежутке $[-\pi/2, \pi/2]$.

5.2°. $y = \arccos x$.

Эта функция также определена при $|x| \leq 1$, но область её значений есть промежуток $[0, \pi]$. Поскольку $y = \arccos x$ обратна функции $y = \cos x$, взятой в промежутке $[0, \pi]$, то она может быть получена из отрезка косинусоиды отражением относительно прямой $y = x$, (см. Рис. 11.12).

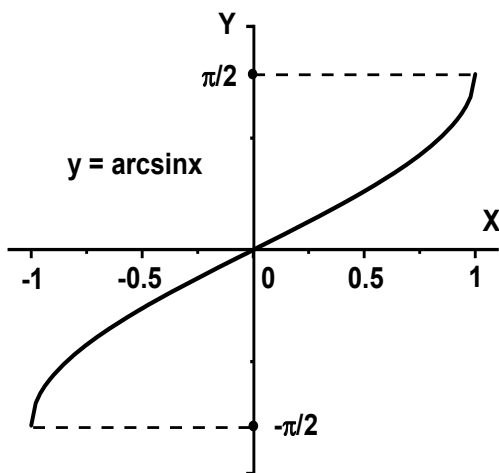


Рис. 11.11

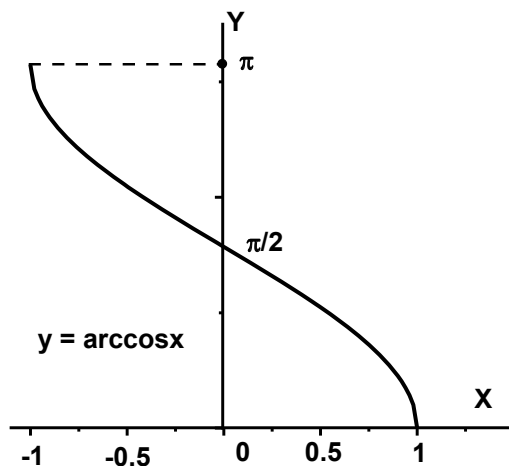


Рис. 11.12

5.3°. $y = \operatorname{arctg} x$.

Функция $y = \operatorname{arctg} x$ определена для всех x , а область её значений есть промежуток $[-\pi/2, \pi/2]$. Взяв тангенс от обеих частей равенства 5.3° получим $x = \operatorname{tg} y$, $|y| \leq \pi/2$. Можно построить это соотношение, считая y независимой переменной, а x - функцией, а можно взять отрезок графика $y = \operatorname{tg} x$, заключенный между вертикальными асимптотами $x = \pm\pi/2$, и отобразить его зеркально относительно прямой $y = x$. Получим Рис. 11.13.

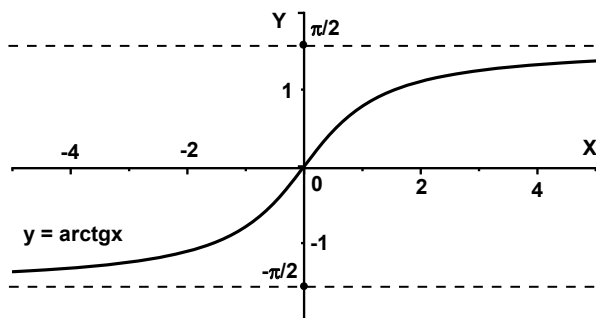


Рис. 11.13

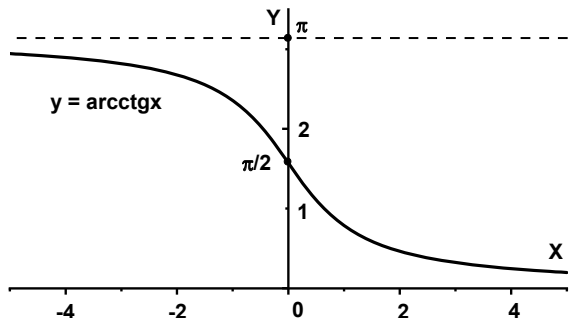


Рис. 11.14

5.4°. $y = \text{arcctg} x$.

Эта функция определена при всех x ; область её значений есть промежуток $[0, \pi]$. График функции $y = \text{arcctg} x$ показан на Рис.11.14 и может быть построен любым из способов, указанных в пункте 5.3°.

В. Свойства функций и приемы преобразований графиков

Подытожим теперь те методы, которые были использованы в пункте Б при построении графиков простейших функций.

1°. Если функция четная, $f(-x) = f(x)$, то достаточно построить её график при $x \geq 0$; в область $x < 0$ график продолжается с помощью отражения относительно оси y .

2°. График нечетной функции, $f(x) = -f(-x)$, также достаточно построить лишь при $x \geq 0$. В область $x < 0$ он продолжается с помощью центрально-симметричного отражения относительно начала координат.

3°. Если функция обладает периодом T , так что для всех x имеем $f(x + T) = f(x)$, то достаточно построить её график на любом интервале длины T . В соседние интервалы той же длины этот график продолжается параллельным переносом вдоль оси x .

4°. Если функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ являются обратными друг для друга, то их графики симметричны относительно биссектрисы первого и третьего квадрантов, $y = x$.

Для правильного построения графика функции весьма существенны также следующие её свойства:

- а) наличие экстремумов;
- б) существование асимптот графика;
- в) интервалы монотонности функции;
- г) интервалы выпуклости функции;
- д) наличие характерных точек семейства функций.

Эти свойства функции исследуют с помощью производной и понятия предела функции (см. далее §§ 15, 16 и 18).

5°. Пусть дан график функции $y = f(x)$. В левой колонке приведем простые преобразования этой функции, а в правой - опишем соответствующую трансформацию графика по отношению к графику исходной функции:

$$\begin{array}{ll} y = -f(x) & \Rightarrow \text{симметричное отражение относительно оси } x; \\ y = f(-x) & \Rightarrow \text{симметричное отражение относительно оси } y; \end{array}$$

$y = f(x) + b \Rightarrow$ параллельное смещение графика как целого вдоль оси y на b единиц вверх ($b > 0$), либо - вниз ($b < 0$).

$y = f(x + a) \Rightarrow$ параллельное смещение графика как целого на a единиц влево при $a > 0$, либо - вправо, при $a < 0$.

Чтобы не ошибиться в последнем преобразовании, достаточно проследить за смещением какой-либо одной характерной точки графика, например, точки $(0, f(0))$.

$y = f(mx); \quad m > 0, \quad \Rightarrow$ изменение масштаба графика по оси x в $1/m$ раз.

Действительно, если положить в этом равенстве $x_1 = x/m$, то в координатах (x_1, y) получим исходный график $y = f(x_1)$.

$y = kf(x); \quad k > 0, \quad \Rightarrow$ изменение масштаба графика вдоль оси y в k раз.

Ясно, что все перечисленные преобразования есть частные случаи общего преобразования функции вида

$$y = kf(mx + a) + b. \quad (*)$$

Трансформацию графика для преобразования общего вида (*) можно выполнять поэтапно, действуя, например, по схеме

$$f(x) \rightarrow f(mx) \rightarrow \left[m \left(x + \frac{a}{m} \right) \right] \rightarrow kf \left[m \left(x + \frac{a}{m} \right) \right] \rightarrow kf \left[m \left(x + \frac{a}{m} \right) \right] + b.$$

На каждом этапе мы имеем одно из описанных выше частных преобразований, а общее преобразование получается как результат "перемножения" частных преобразований. Напомним, что аналогичные преобразования мы выполняли в § 4 при построении графика квадратичной функции. Если переписать преобразование (*) в виде

$$\frac{y-b}{k} = f \left[m \left(x + \frac{a}{m} \right) \right],$$

и ввести новые переменные по формулам

$$y_1 = \frac{y-b}{k}; \quad x_1 = m \left(x + \frac{a}{m} \right); \quad \Rightarrow \quad y_1 = f(x_1),$$

то становится ясным геометрический смысл преобразования (*): параллельное перенесение осей координат (т.е. выбор нового начала отсчета координат) и изменение исходных масштабов по осям, с возможным изменением направлений числовых осей.

Рассмотрим теперь некоторые характерные примеры.

б) Построить график $y = -\frac{3}{2} \sin \left(\frac{x}{2} - 1 \right)$.

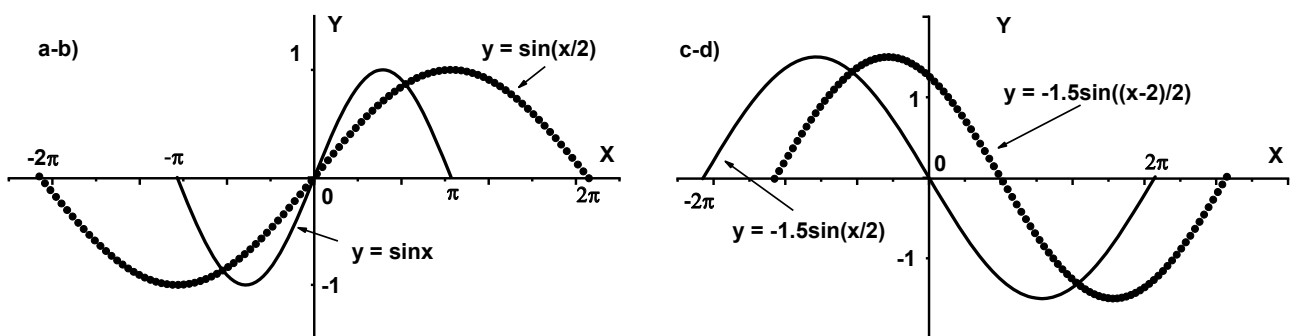


Рис. 11.15

Запишем эту функцию в виде $y = -1.5 \sin[(x - 2)/2]$. Обратим внимание, что сдвигка графика по оси x определяется именно числом -2 , прибавляемым к аргументу x . Этапы а) - d) построения графика этой функции из исходной функции $y = \sin x$ показаны на Рис. 11.15, причем достаточно проследить трансформацию лишь одного периода функции $y = \sin x$. ■

с) Построить график дробно-линейной функции $y = \frac{ax+b}{cx+d}$; $ad \neq bc$; $c \neq 0$.

Записав эту функцию в виде

$$y = \frac{a}{c} + \frac{m}{x + d/c}, \quad m = \frac{bc - ad}{c^2},$$

и полагая

$$y_1 = y - \frac{a}{c}; \quad x_1 = x + \frac{d}{c},$$

получим в переменных (x_1, y_1) обратно пропорциональную зависимость $y_1 = m/x_1$. Пусть, например,

$$y = \frac{x-1}{x+1}; \quad \Rightarrow \quad y_1 = 1 - \frac{2}{x+1}.$$

Тогда $y_1 = y - 1$; $x_1 = x + 1$, так что начало отсчета системы координат (x_1, y_1) находится в точке $(-1, 1)$. Построив в координатах (x_1, y_1) график функции $y_1 = -2/x_1$ получим в координатах (x, y) график исходной функции (см. Рис. 11.16). ■

d) Построить геометрическое место точек, удовлетворяющих уравнению

$$y^2 + 3y + x^2 - x - \frac{1}{2} = 0.$$

Заметим, что это есть уравнение некоторой кривой второго порядка (см. § 2). Преобразуем его к виду

$$\left(y + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = 3.$$

Вводя новые переменные $x_1 = x - 1/2$; $y_1 = y + 3/2$, получаем уравнение окружности радиусом $R = \sqrt{3}$ (см. Рис. 11.17). ■

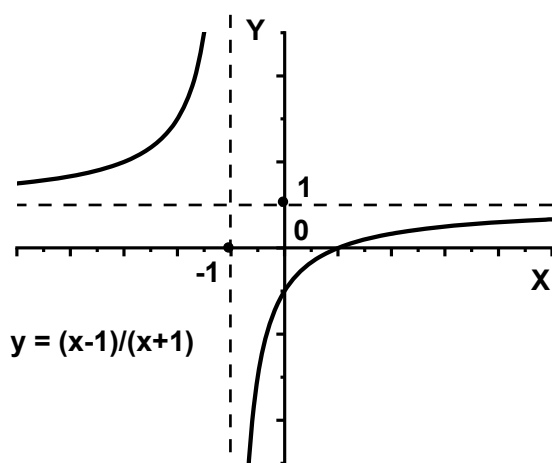


Рис. 11.16

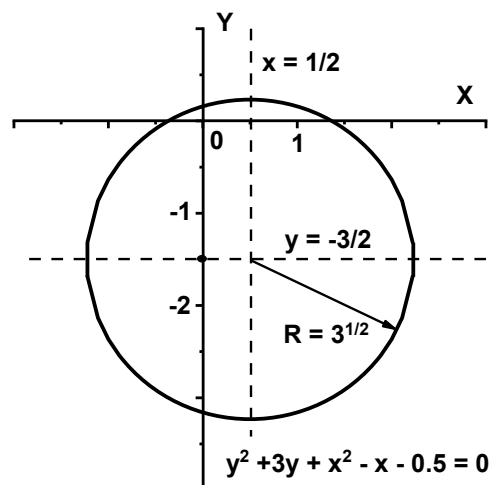


Рис. 11.17

6°. Пусть даны графики $y_1 = f(x)$ и $y_2 = g(x)$. График функции $y = f(x) + g(x)$ получается из исходных графиков сложением ординат y_1 и y_2 , соответствующих одному и тому же значению x .

е) $y = x + 1/x$.

Построив предварительно графики $y_1 = x$ и $y_2 = 1/x$ (см. пункт на Рис. 11.18), получим искомый график сложением ординат y_1 и y_2 для каждого значения x .

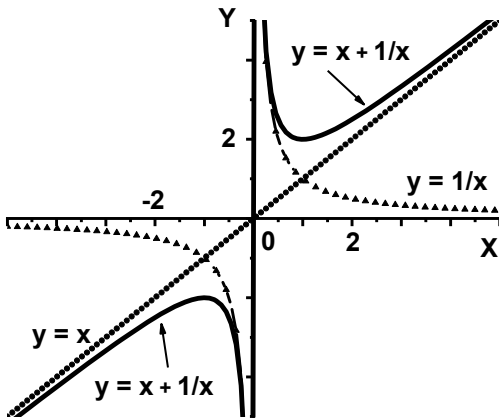


Рис. 11.18

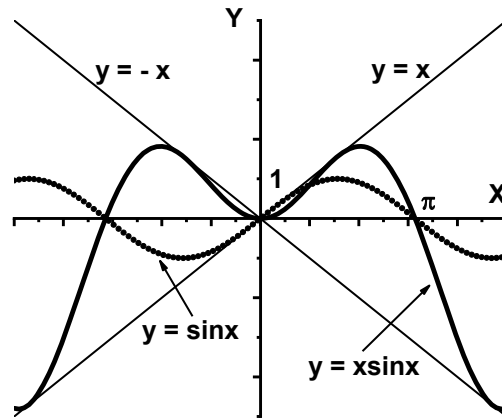


Рис. 11.19

Легко видеть, что прямая $x = 0$ является вертикальной асимптотой этого графика, а прямая $y = x$ - наклонной асимптотой. ■

7°. Пусть даны графики функций $y_1 = f(x)$ и $y_2 = g(x)$. Тогда график функции $y = f(x)g(x)$ получается из исходных графиков перемножением ординат y_1 и y_2 для каждого x .

ф) $y = x \sin x$.

Построим предварительно графики функций $y = \pm x$ и $y = \sin x$ (см. пункт и тонкие линии на Рис. 11.19). Заметим, что $y = x \sin x$ есть четная функция. Поэтому достаточно построить её при $x \geq 0$. Далее обратим внимание, что в точках $x = \pi n$, $n = 0, 1, 2, \dots$, имеем $\sin x = 0$; поэтому $y(\pi n) = 0$. Кроме того, в точках $x = \pi/2 + \pi n$; $n = 0, 1, 2, \dots$, $\sin x = \pm 1$; поэтому в этих точках значения функции y равны $\pm x$. Учитывая эти характерные точки графика функции $y = x \sin x$, получаем качественную кривую, показанную на рисунке 11.19. ■

8° Пусть дан график некоторой функции $y = f(x)$ (см. Рис. 11.20a).

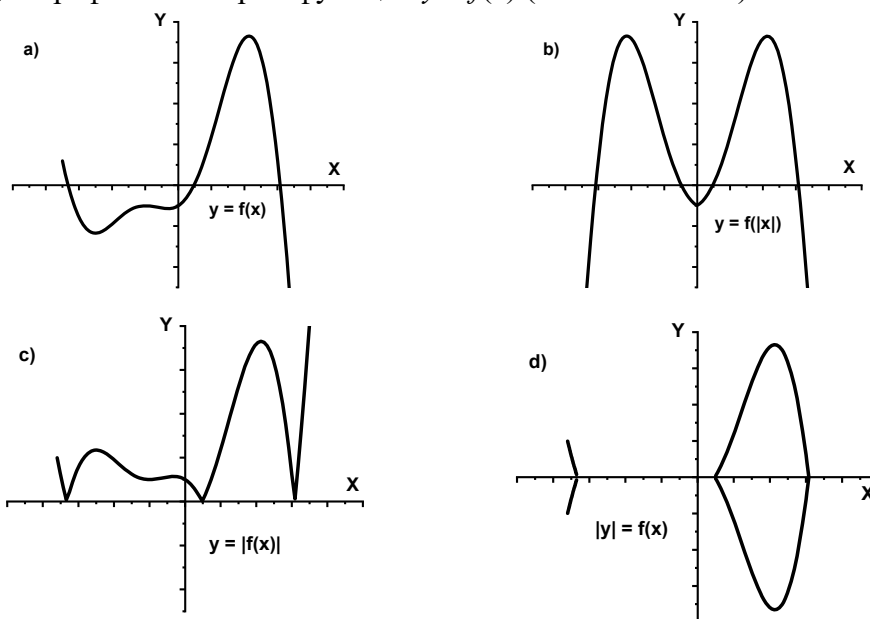


Рис. 11.20

Рассмотрим следующие функции

$$1) \quad y = f(|x|).$$

При $x \geq 0$ график этой функции совпадает с исходным; в область же $x < 0$ он переносится отражением относительно оси y . Часть графика исходной функции, расположенная при $x < 0$, при этом исчезает (см. рис. 11.20b).

$$2) \quad y = |f(x)|.$$

Для построения графика данной функции нужно отразить относительно оси x все части исходного графика, лежащие ниже оси x (см. Рис. 11.20c).

$$3) \quad |y| = f(x).$$

Этому графику принадлежат только точки, для которых $f(x) \geq 0$. Далее, если точка (x, y) принадлежит графику, то точка $(x, -y)$ также ему принадлежит. Поэтому график этой функции симметричен относительно оси x (см. Рис. 11.20d). Все эти утверждения легко оправдать, используя данное в § 5 определение модуля функции.

$$g) \quad y = x^2 - 2|x - 1| + 1$$

Раскрывая модуль, получаем два случая

$$1) \quad \begin{cases} y = x^2 - 2x + 3; \\ x \geq 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = (x - 1)^2 + 2; \\ x \geq 1, \end{cases}$$

$$2) \quad \begin{cases} y = x^2 + 2x - 1; \\ x < 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = (x + 1)^2 - 2; \\ x < 1. \end{cases}$$

Таким образом, при $x \geq 1$ и $x < 1$ нужно строить графики различных парабол (см. Рис. 11.21). ■

9° Наиболее сложными для построения являются обычно графики "функций от функции" вида $y = F(f(x))$. При построении таких графиков приходится сопоставлять промежутки монотонности функций $f(x)$ и $F(f)$.

$$i) \quad y = 2^{\operatorname{tg} x}.$$

Поскольку функция $f(x) = \operatorname{tg} x$ имеет период π , то исходную функцию достаточно построить на интервале $[-\pi/2, \pi/2]$. На этом интервале $\operatorname{tg} x$ монотонно возрастает от $-\infty$ до $+\infty$. В свою очередь, показательная функция с основанием $2 > 1$ является монотонно возрастающей для всех x . Если $x \rightarrow \pi/2$ слева, то имеем $\operatorname{tg} x \rightarrow +\infty$ (см. рис. 11.9) и $y(x) \rightarrow +\infty$. Следовательно, прямая $x = \pi/2$

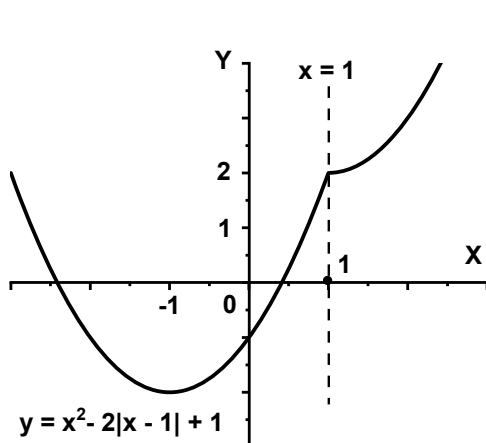


Рис. 11.21

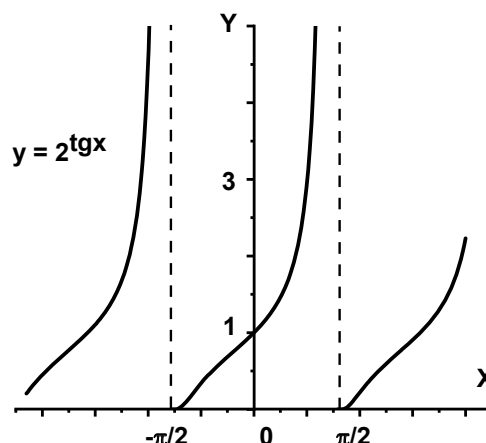


Рис. 11.22

является вертикальной асимптотой графика. Если же $x \rightarrow -\pi/2$ справа, то $\operatorname{tg} x \rightarrow -\infty$, а $y(x) \rightarrow 0$. Учитывая, что $y(0) = 1$, получаем качественный график, показанный на рисунке 11.22. ■

$$k) \quad y = \operatorname{arccctg} \frac{x-1}{x+1}.$$

Рассматривая график функции $y = (x-1)/(x+1)$ (см. рис. 11.16) видим, что в интервале $(-\infty, -1)$ эта функция монотонно возрастает от 1 до $+\infty$. Поскольку $y = \operatorname{arccctg} x$ всюду убывает и при $x \rightarrow \infty$ имеем $\operatorname{arccctg} x \rightarrow 0$ (см. рис. 11.14), то исходная функция в интервале $(-\infty, -1)$ монотонно убывает от асимптотического значения $\operatorname{arccctg} 1$ до 0 (см. Рис. 11.23). Далее, в интервале $(-1, \infty)$ функция на рис. 11.16 монотонно растет от $-\infty$ до 1. Так как при $x \rightarrow -\infty$ $\operatorname{arccctg} x \rightarrow \pi$, то заданная функция в этом интервале монотонно убывает от значения π до значения $\operatorname{arccctg} 1$. Таким образом, прямая $y = \operatorname{arccctg} 1$ является горизонтальной асимптотой этого графика. ■

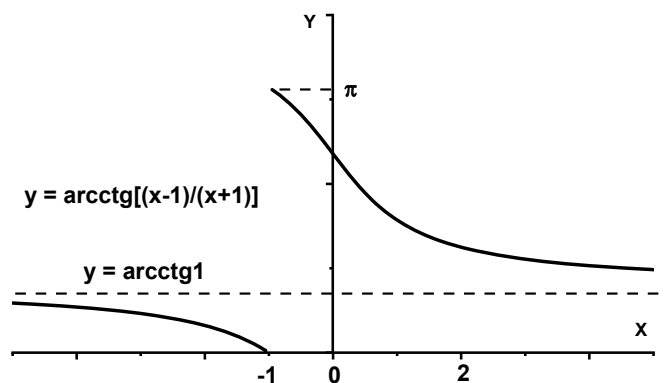


Рис. 11.23

§ 12. Прогрессии

А. Метод математической индукции

Прогрессии являются простейшими примерами числовых последовательностей. Каждый член числовой последовательности характеризуется натуральным числом n - своим порядковым номером. В арифметической прогрессии каждый последующий член a_{n+1} получается прибавлением к предыдущему члену a_n одного и того же числа d , называемого разностью прогрессии

$$a_{n+1} = a_n + d; \quad n = 1, 2, \dots \quad (12.1)$$

В геометрической же прогрессии следующие друг за другом члены $\dots b_n, b_{n+1}, b_{n+2} \dots$ образуются умножением на одно и то же число q - знаменатель прогрессии, так что

$$b_{n+1} = b_n q; \quad n = 1, 2, \dots \quad (12.2)$$

Формулы для общего члена прогрессии и для суммы конечного числа её членов удобно получить, используя *метод математической индукции*, который является аксиомой арифметики.

1°. Пусть некоторое свойство членов числовой последовательности справедливо для её первого члена, $n = 1$.

2° Пусть из того, что это свойство справедливо для члена последовательности с произвольным номером n следует, что оно справедливо и для члена с номером $n + 1$.

Тогда аксиома индукции утверждает, что данное свойство справедливо для всех членов последовательности. Действительно, справедливость этого свойства проверена для первого члена, $n = 1$. Тогда, по свойству 2°, оно справедливо и для второго члена, $n = 2$, и т. д.

Б. Общий член и сумма членов прогрессии

Определение арифметической прогрессии (12.1) не дает явного выражения для произвольного члена прогрессии. Из (12.1) следует лишь, что если a_1 и d заданы, то $a_2 = a_1 + d$, $a_3 = a_2 + d = a_1 + 2d$, и т.д. Вид последовательно получаемых членов заставляет нас предположить, что общий член арифметической прогрессии может быть найден по формуле

$$a_n = a_1 + (n-1)d. \quad (12.3)$$

Докажем это предположение методом математической индукции. При $n = 1$ получаем из (12.3) $a_1 = a_1$, т. е. верное равенство. Далее, предполагая, что (12.3) справедливо для члена номер n , имеем по определению (12.1) для члена номер $n + 1$

$$a_{n+1} = a_n + d = a_1 + nd = a_1 + [(n+1)-1]d. \quad (12.4)$$

Важнейший пункт этого доказательства, обычно ускользающий от внимания ученика, состоит в том, что мы вывели формулу (12.4) той же структуры, что и формула (12.3). Другими словами, формула (12.4) "устроена" так же, как и формула (12.3) с той разницей, что в (12.4) индекс n заменен на индекс $n + 1$. Чтобы до конца понять суть дела, полезно увидеть, как метод математической индукции позволяет отсеивать неверные гипотезы. Допустим, мы ошибочно предположили формулу

$$a_n = a_1 + nd. \quad (\text{неверно!}) \quad (*)$$

Однако, проверка этой формулы для $n = 1$ дает неверное равенство $a_1 = a_1 + d$, ($d \neq 0$), что показывает, что гипотеза (*) неверна.

Возьмем другую неверную гипотезу, скажем

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot nd. \quad (\text{неверно!}) \quad (**)$$

В этом случае равенство $a_1 = a_1$ при $n = 1$ выполняется. Далее, по определению (12.1), из (**) получаем

$$a_{n+1} = a_n + d = a_1 + [(n-1)n+1]d. \quad (***)$$

Если бы гипотеза (**) была справедливой, то формулу (***) удалось бы привести к виду

$$a_{n+1} = a_1 + \{[(n+1)-1] \cdot (n+1)\}d,$$

что, конечно, невозможно, так как $(n-1)n+1 \neq [(n+1)-1](n+1)$.

Итак, формула (12.3) для общего члена арифметической прогрессии доказана. Конечно, основная трудность в применении метода мат. индукции состоит в подборе единственной правильной гипотезы.

Рассмотрим теперь последовательные члены геометрической прогрессии. Из определения (12.2) имеем $b_2 = b_1q$, $b_3 = b_2q = b_1q^2$, и т.д. Отсюда следует разумное предположение, что формула для общего члена прогрессии имеет вид

$$b_n = b_1q^{n-1}. \quad (12.5)$$

Далее действуем по методу мат. индукции.

1°. При $n = 1$ из (12.5) получаем $b_1 = b_1$, т.е. верное равенство.

2°. Допустим, что (12.5) справедливо для некоторого n . Тогда по определению (12.2) из (12.5) получаем

$$b_{n+1} = b_n q = b_1 q^n = b_1 q^{[(n+1)-1]}. \quad (12.6)$$

Таким образом, формула (12.6) получается из (12.5) заменой n на $n + 1$. Мы видим, что если "свойство" (12.5) справедливо для члена прогрессии с некоторым произвольным номером n , то оно справедливо и для члена прогрессии с номером $n + 1$.

Следовательно, формула (12.5) верна для всех номеров n .

Получим теперь формулу для суммы n членов арифметической прогрессии, $S_n + a_1 + a_2 + \dots + a_n$. Заметим, что

$$\begin{aligned} a_1 + a_n &= a_1 + a_1 + (n-1)d = 2a_1 + (n-1)d; \\ a_2 + a_{n-1} &= a_1 + d + a_1 + (n-1)d = 2a_1 + (n-1)d, \end{aligned}$$

и так далее. Если n - четное, то таких сумм можно составить $n/2$ штук. Поэтому, для четных n имеем

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n. \quad (12.7)$$

Докажем, что эта формула справедлива не только для четных, но для всех значений n .

1°. При $n = 1$ получаем $S_1 = a_1$, т. е. верное равенство.

2°. Предположим, что формула (12.7) справедлива для некоторого n . Тогда, по определению суммы членов прогрессии, имеем

$$S_{n+1} = S_n + a_{n+1} = \frac{a_1 + a_n}{2} n + a_{n+1}.$$

Заметив, что $a_n = a_{n+1} - d$ и $a_{n+1} = a_1 + nd$, получаем отсюда

$$S_{n+1} = \frac{a_1 + a_{n+1}}{2} n + a_{n+1} - \frac{nd}{2} = \frac{a_1 + a_{n+1}}{2} (n+1),$$

так как $a_{n+1} - nd/2 = (a_1 + a_{n+1})/2$. Итак, получено выражение той же структуры, что и (12.7); поэтому формула (12.7) справедлива, на самом деле, для всех значений n .

Для суммы n членов геометрической прогрессии, используя формулу общего члена (12.5), получаем

$$S_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n = b_1 (1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1}).$$

Умножив и разделив это выражение на множитель $1 - q$, получаем, перемножая скобки в числителе

$$S_n = \frac{b_1 (1 + q + \dots + q^{n-1}) (1 - q)}{1 - q} = \frac{b_1 (1 - q^n)}{1 - q}.$$

Учитывая, что $b_{n+1} = b_1 q^n$, эту формулу можно записать также в виде

$$S_n = \frac{b_1 - b_{n+1}}{1 - q}. \quad (12.8)$$

Формулу (12.8) полезно доказать также методом мат. индукции.

Если знаменатель прогрессии $|q| < 1$, то геометрическая прогрессия называется бесконечно убывающей. Действительно, из формулы (12.5) следует, что последовательные члены такой прогрессии убывают по абсолютной величине, так что в пределе $n \rightarrow \infty$ имеем $|b_n|$

→ 0. Поэтому, как мы увидим в части II, § 14, существует предел суммы (12.8) при бесконечном увеличении числа ее членов, равный

$$S_{\infty} = \frac{b_1}{1-q}; \quad |q| < 1. \quad (12.9)$$

В. Типичные задачи

При решении задач на прогрессии, кроме формул (12.3), (12.5) и (12.7-9) полезно иметь в виду, что если три числа a , b и c в указанном порядке составляют арифметическую прогрессию, то справедливо равенство $b - a = c - b$, которое есть непосредственное следствие определения (12.1). Аналогично, если три числа a , b и c составляют в указанном порядке геометрическую прогрессию, то имеем, очевидно

$$\frac{b}{a} = \frac{c}{b},$$

как это следует из определения (12.2). Кроме того, ясно, что для задания любой прогрессии достаточно указать ее первый член и разность в случае арифметической прогрессии, либо знаменатель для геометрической прогрессии, соответственно.

Рассмотрим некоторые примеры.

а) Вставьте два числа между числами 4 и 40 так, чтобы получилась арифметическая прогрессия.

Пусть числа 4, x , y и 40 составляют арифметическую прогрессию. Тогда, по определению прогрессии имеем

$$\begin{cases} y - x = x - 4; \\ 40 - y = y - x. \end{cases}$$

Отсюда находим $x = 16$; $y = 28$. ■

б) Сумма первых десяти членов геометрической прогрессии равна Q_1 а сумма следующих десяти членов (с 11-го по 20-й) равна Q_2 . Найти знаменатель прогрессии.

Пусть b_1 - первый член прогрессии, а q - ее знаменатель. Сумма первых 10-ти членов прогрессии равна

$$S_{10} = \frac{b_1(1-q^{10})}{1-q} = Q_1,$$

а сумма первых 20 членов прогрессии равна

$$S_{20} = \frac{b_1(1-q^{20})}{1-q} = Q_1 + Q_2.$$

Разделив первое уравнение на второе, получим

$$\frac{1-q^{10}}{1-q^{20}} = \frac{Q_1}{Q_1 + Q_2}.$$

Положив здесь $q^{10} = y > 0$, получим относительно y квадратное уравнение, положительные корни которого и определяют возможные значения q . ■

с) Если к четырем числам, составляющим геометрическую прогрессию, прибавить соответственно 4, 21, 29 и 1, то получатся числа, составляющие арифметическую прогрессию. Найдите эти числа.

Пусть b_1 - первый член геометрической прогрессии, а q – ее знаменатель. Тогда первые четыре члена этой прогрессии есть b_1, b_1q, b_1q^2 и b_1q^3 . Из условия задачи следует, что числа $b_1 + 4, b_1q + 21, b_1q^2 + 29$ и $b_1q^3 + 1$ составляют арифметическую прогрессию. Следовательно

$$\begin{cases} (b_1q + 21) - (b_1 + 4) = (b_1q^2 + 29) - (b_1q + 21); \\ (b_1q^2 + 29) - (b_1q + 21) = (b_1q^3 + 1) - (b_1q^2 + 29). \end{cases}$$

Таким образом, для определения b_1 и q получаем систему двух уравнений с двумя неизвестными, которая легко приводится к виду

$$\begin{cases} b_1(q^2 - 2q + 1) = 9; \\ b_1q(q^2 - 2q + 1) = 36, \end{cases}$$

откуда $q = 4, b_1 = 1$. ■

Г. Контрольные задачи

1°. Найти возрастающую арифметическую прогрессию, у которой сумма первых трех членов равна 27, а сумма их квадратов равна 275.

2°. Три числа образуют геометрическую прогрессию. Если среднее из них удвоить, то получится арифметическая прогрессия. Найти знаменатель геометрической прогрессии.

ПАПА ГЛАДКИЙ, ИЛИ КОЛЮЧИЙ?

Стремление математиков сделать используемые ими понятия как можно более точными и определенными, воспринимается далекими от этой науки людьми с известной долей иронии. Математики - де сплошь педанты и сухари, неспособные восхищаться многозначностью поэтического слова! Между тем суровая необходимость заставляет людей искать в этой науке твердую почву под ногами. Проведем шуточное рассуждение, построенное, вроде бы, в соответствии с канонами математической строгости. А именно, докажем методом математической индукции, что на свете не бывает бородатых людей.

1°. Если у мужчины на подбородке всего один волос, то это, очевидно, еще не борода.

2°. Допустим, что n волос на подбородке – это тоже не борода. Если к этим n волосам прибавить еще один волосок, то ничего страшного, конечно, не случится. То есть, если n волос еще не борода, то и $n + 1$ волос - также не борода!

Отсюда, по методу математической индукции следует, что любое количество волос на подбородке не является бородой. Разгадка этой шутки в том, что понятию "борода" не дано изначально строгого определения, поскольку не указано, сколько именно волос составляет бороду. Так же неясно, сколько капель воды составляют океан, сколько отдельных деревьев составляют лес, и т. д.

Таким образом, следует еще раз обратить внимание на важность точной формулировки математических определений. В реальной жизни мы о многих вещах и понятиях догадываемся из "контекста", мы часто стесняемся спросить у собеседника, что он конкретно понимает под используемым понятием. Но если мы не знаем, что вложил математик, скажем, в понятие *конгруэнтность*, то необходимо, во избежание казуса, заглянуть в соответствующий учебник.

§ 13. Задачи на составление уравнений и неравенств

А. Задачи на движение

В задачах этого типа присутствуют обычно мудреные передвижения различных объектов: пешеходов, велосипедистов, лодок и т.д. Приступая к решению, прежде всего, нужно ясно

представить себе последовательность совершающихся событий. Затем следует ввести столько неизвестных переменных, сколько необходимо для простого и естественного описания этих событий и связать эти неизвестные уравнениями. При этом, конечно, следует помнить, что скорость u , время движения t и пройденный путь L в равномерном движении связаны уравнением

$$L = u \cdot t \quad (13.1)$$

На последнем этапе необходимо выяснить, какую же конкретную комбинацию неизвестных необходимо определить по условиям задачи. Рассмотрим примеры.

а) Два пешехода вышли одновременно: один из пункта A в пункт B , а другой - из B в A . Каждый шел с постоянной скоростью и, придя в конечный пункт, сразу же отправился обратно. Первый раз пешеходы встретились в 12 км от B , второй раз - через 6 часов после первой встречи в 6 км от A . Найдите расстояние между A и B и скорости обоих пешеходов.

На рис. 13.1 путь первого пешехода изображен сплошной линией, а путь второго - пунктиром. Представив точную схему передвижения пешеходов, нетрудно описать ее на языке уравнений. Пусть u_1 и u_2 - скорости первого и второго пешеходов, а L - расстояние между пунктами A и B . До первой встречи (см. Рис.13.1) первый пешеход прошел $(L - 12)$ км, а второй - 12 км. Поскольку они двигались до встречи одно и то же время, то

$$\frac{L-12}{u_1} = \frac{12}{u_2}$$

До второй встречи первый пешеход прошел отрезок пути

$$|CB| + |BD| = [12 + (L - 6)] \text{ км} = (L + 6) \text{ км},$$

а 2-ой пешеход прошел путь

$$|CA| + |AD| = [(L - 12) + 6] \text{ км} = (L - 6) \text{ км}.$$

Поскольку от первой до второй встречи прошло 6 часов, получаем уравнения

$$\frac{L+6}{u_1} = 6; \quad \frac{L-6}{u_2} = 6.$$

Имеем таким образом, три уравнения с тремя неизвестными, которые легко решаются. ■

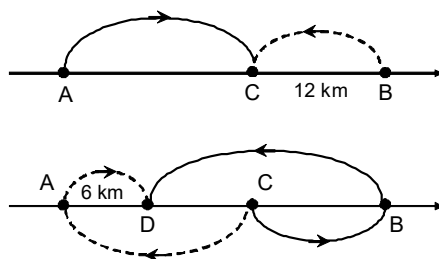


Рис. 13.1

Весьма часто в задачах на движение следует использовать известный из механики принцип Галилея для определения скоростей равномерно движущихся объектов по отношению к неподвижной системе координат. Так, если скорость лодки в стоячей воде (например, озере) равна u км/час, а скорость течения реки равна v км/час, то скорость движения лодки по течению будет равна $(u + v)$ км/час, а скорость лодки против течения будет равна $(u - v)$ км/час.

б) Города A и B стоят на берегу реки. Буксир тратит на прохождение от A до B и обратно 13 часов, а катер, собственная скорость которого в два раза больше скорости буксира, тратит на этот же путь 6 часов. Во сколько раз собственная скорость буксира больше скорости реки?

Пусть расстояние между пунктами A и B равно L км, скорость реки равна v км/час, собственная скорость буксира (т.е. его скорость в стоячей воде) равна u км/час. Тогда собственная скорость катера равна $2u$. По течению реки буксир движется со скоростью $u + v$, а катер - со скоростью $2u + v$. Против течения они движутся со скоростями $u - v$ и $2u - v$, соответственно. По условию задачи, время движения буксира из A в B и обратно равно

$$\frac{L}{u + v} + \frac{L}{u - v} = 13,$$

А время движения катера туда и обратно составляет

$$\frac{L}{2u + v} + \frac{L}{2u - v} = 6.$$

Для трех неизвестных L , u и v мы получили лишь два уравнения. Однако, в задаче требуется определить не сами величины L , u и v , а только отношение u/v . Положим $x = u/v$, и перепишем наши уравнения следующим образом

$$\frac{L}{v} \left[\frac{1}{x + 1} + \frac{1}{x - 1} \right] = 13; \quad \frac{L}{v} \left[\frac{1}{2x + 1} + \frac{1}{2x - 1} \right] = 6.$$

Разделив первое из этих уравнений на второе, для определения искомого отношения u/v получаем, очевидно, квадратное уравнение. ■

Б. Работа и производительность

Задачи этого типа мало чем отличаются от задач на движение. Действительно, выполненная работа аналогична пройденному пути, а производительность, т. е. количество работы, выполненной в единицу времени, есть понятие, полностью аналогичное понятию скорости равномерного движения. Таким образом, если Q - полная работа, t - время ее выполнения, а u - производительность, то

$$Q = u \cdot t. \quad (13.2)$$

Единственное, что представляет здесь известную новость для неискушенного ученика – это сложение производительностей при совместном выполнении работ. Скажем, если u_1 есть производительность первого рабочего, а u_2 - производительность второго, то при совместном выполнении работы их производительность есть сумма, $u = u_1 + u_2$.

с) Две трубы, работая одновременно, наполняют бассейн за 12 часов. Первая труба наполняет бассейн на 10 часов быстрее, чем вторая. За сколько часов наполняет бассейн вторая труба?

Пусть Q - объем бассейна, а u_1 и u_2 - производительности 1-й и 2-й труб, соответственно. Когда трубы работают вместе, их производительность есть $u_1 + u_2$. По условию задачи, они совместно заполняют бассейн за 12 час., т.е.

$$Q = 12(u_1 + u_2).$$

Далее, первая труба наполняет бассейн за Q/u_1 часов, а вторая, за Q/u_2 часов. По условию задачи

$$\frac{Q}{u_2} - \frac{Q}{u_1} = 10.$$

Здесь мы также имеем для трех неизвестных Q , u_1 и u_2 только 2 уравнения. Определить же следует Q/u_2 . Положив $Q/u_1 = x$, $Q/u_2 = y$, получим для определения x и y простую систему уравнений

$$\begin{cases} y - x = 10; \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{12}. \blacksquare \end{cases}$$

В. Задачи на проценты и смеси.

По определению, один процент есть сотая доля некоторой величины. Так, число 2 составляет два процента от числа 100. Если даны две произвольных величины a и b , то согласно данному определению, a составляет $(a/b) \cdot 100\%$ от числа b . Этот результат следует из простой пропорции

$$\begin{array}{rcl} b & - & 100 \% \\ a & - & x \% \end{array} \quad (*)$$

Вычисляя процент нужно внимательно следить, по отношению к какой из величин вычисляются проценты. В пропорции (*) величина b принята за 100%, а величина a выражается в долях b . Но с равным успехом мы могли бы вычислить проценты (другие!) величины b по отношению к величине a , приняв величину a за 100%. Достаточно хорошо уяснить себе эту разницу, и обращаться с процентами будет легко и просто.

d) Цена на товар была повышена на 25%. На сколько процентов надо теперь ее снизить, чтобы получить первоначальную цену товара?

Пусть исходная цена товара равна q единиц. 25% этой величины составляет x единиц, где x находится из пропорции

$$\begin{array}{rcl} q & - & 100 \% ; \\ x & - & 25 \% , \end{array} \quad \Rightarrow \quad x = q/4.$$

Следовательно, новая цена товара есть $q + x = 5q/4$ единиц. Ясно, что для получения старой цены товара нужно снизить новую цену на $q/4$ единиц. Ключевой же момент решения состоит в том, что процент снижения следует вычислять по отношению к новой цене! Следовательно, искомый процент y находится из пропорции

$$\begin{array}{rcl} 5q/4 & - & 100\% \\ q/4 & - & y\% \end{array}$$

отсюда $y = 20\%$. ■

Пусть два вещества a и b , составляющие некоторый сплав или раствор, относятся друг к другу по весу (или по объему) как $m : n$. Это значит, что доля вещества a в сплаве есть $m/(m + n)$, а доля вещества b - есть $n/(m + n)$.

е) В двух сплавах медь и цинк относятся как 5 : 2 и 3 : 4 (по весу). Сколько нужно взять килограмм первого сплава и сколько второго, чтобы после совместной переплавки получилось 28 кг нового сплава с равным содержанием меди и цинка?

Пусть первого сплава взято x кг. Так как доля меди в нем составляет $5/7$, а доля цинка составляет $2/7$, то взято, соответственно, $5x/7$ кг меди и $2x/7$ кг цинка. Пусть теперь второго сплава взято y кг. Аналогично, во втором сплаве имеется $3y/7$ кг меди и $4y/7$ кг цинка. Так как нового сплава получилось 28 кг, то

$$x + y = 28.$$

В новом сплаве содержится $(5x/7 + 3y/7)$ кг меди и $(2x/7 + 4y/7)$ кг цинка, соответственно. Поскольку содержание меди и цинка в новом сплаве равны, то

$$\frac{5}{7}x + \frac{3}{7}y = \frac{2}{7}x + \frac{4}{7}y.$$

Из этих двух уравнений легко найти, что $x = 7$ кг, $y = 21$ кг. ■

В задаче е) мы пользовались законом сохранения массы отдельных компонент при сплавлении. При слиянии растворов, имеющих объемы v_1 и v_2 в школьных задачах для простоты, предполагается, что получается смесь, объем которой равен $v_1 + v_2$, хотя это и не всегда верно с точки зрения физики. Так же как и в предыдущей задаче, при слиянии, разбавлении и прочих манипуляциях с растворами удобно следить за изменениями абсолютных объемов их компонент.

f) Из сосуда, до краев наполненного чистым глицерином, отлили 2 л. глицерина, а к оставшемуся глицерину долили 2 л. воды. После перемешивания снова отлили 2 л. смеси и долили 2 л. воды. Наконец, опять после перемешивания, отлили 2 л. смеси и долили 2 л. воды. В результате этих операций объем воды в сосуде стал на 3 л. больше объема оставшегося в нем глицерина. Сколько литров глицерина и воды осталось в сосуде в результате проделанных операций?

Пусть сначала в сосуде имелось q литров глицерина. После первой операции в нем стало $(q - 2)$ литров глицерина и 2 литра воды, так что доля глицерина составляла при этом $(q - 2)/q$. Отлив 2 литра этой смеси мы забрали тем самым $2(q - 2)/q$ литров глицерина. Следовательно, после второй операции, в сосуде осталось

$$\left(q - 2 - 2 \cdot \frac{q - 2}{q} \right) = \frac{(q - 2)^2}{q}$$

литров глицерина. При этом его доля в растворе стала $[(q - 2)/q]^2$. Отлив 2 литра новой смеси, мы забрали тем самым

$$\frac{(q - 2)^2}{q} \cdot 2$$

литров глицерина. Поэтому, после третьей операции в сосуде осталось

$$\frac{(q - 2)^2}{q} - \left(\frac{q - 2}{q} \right)^2 = \left(\frac{q - 2}{q} \right) \cdot (q - 2) \quad (\text{глицерин})$$

литров глицерина. Воды же в сосуде стало

$$q - \frac{(q - 2)^3}{q^2} \quad (\text{вода})$$

литров. По условию, разность объемов воды и глицерина равна 3 литрам, т. е.

$$\left[q - \frac{(q - 2)^3}{q^2} \right] - \frac{(q - 2)^3}{q^2} = 3$$

или, после приведения подобных членов

$$q^3 - 9q^2 + 24q - 16 = 0.$$

Подстановкой легко проверить, что это уравнение имеет корень $q = 1$. Разделив многочлен в левой части на $q - 1$ (см. §2), его нетрудно разложить на множители

$$(q - 1)(q - 4)^2 = 0.$$

Отсюда $q_1 = 1$ и $q_2 = q_3 = 4$. Корень $q_1 = 1$ литр следует отбросить, как не удовлетворяющий условиям задачи (почему?). ■

Г. Использование неравенств

г) Группа студентов, состоящая из 30 человек, получила на экзамене оценки 2, 3, 4 и 5. Сумма полученных оценок равна 93, причем "троек" было больше, чем "пятерок", и меньше, чем "четверок". Кроме того, число "четверок" делилось на 10, а число "пятерок" было четным. Определить, сколько каких оценок получила группа?

Пусть x , y , z и t - это числа студентов, получивших оценки 2, 3, 4 и 5, соответственно. Поскольку группа состоит из 30 человек, а сумма полученных оценок равна 93, легко составим два уравнения

$$\begin{cases} x + y + z + t = 30; \\ 2x + 3y + 4z + 5t = 93. \end{cases} \quad (*)$$

Далее, по условию, числа y , z , и t связаны неравенствами

$$t < y < z. \quad (**)$$

Кроме того известно, что $z = 10n$ и $t = 2k$, где n и k - натуральные числа, либо нули. Полученная система уравнений и неравенств должна быть, очевидно, дополнена условием целочисленности и неотрицательности величин x , y , z и t . Это важное обстоятельство всегда нужно иметь ввиду при решении задач рассматриваемого типа.

Поскольку z кратно 10, то в силу первого из уравнений (*), возможны лишь следующие значения z : 0, 10, 20 и 30. Значение 0 не удовлетворяет неравенству (**), а значение 30 - второму из уравнений (*). Предположим, что $z = 20$. Тогда из уравнений (*) получим

$$\begin{cases} x + y + t = 10; \\ 2x + 3y + 5t = 13. \end{cases}$$

Умножим первое из этих уравнений на 2 и вычтем из второго. Получим $y + 3t = -7$, что невозможно при $y \geq 0$ и $t \geq 0$. Следовательно, $z \neq 20$. Остается, таким образом, положить $z = 10$, так что получаем систему соотношений

$$\begin{cases} x + y + t = 20 \\ 2x + 3y + 5t = 13 \\ t < y < 10 \\ t = 2k \end{cases}.$$

Умножим первое из этих уравнений на 2 и вычтем из второго. Тогда $y + 3t = 13$. Поскольку $t = 2k$, то для t остаются следующие возможности: $t = 0, 2, 4$. Если $t = 0$, то $y = 13$, а если $t = 4$, то $y = 1$. Оба этих случая не удовлетворяют неравенству $t < y < 10$. Остается $t = 2$, $y = 7$. Следовательно, $x = 11$.

Ответ: $x = 11$, $y = 7$, $z = 10$ и $t = 2$. ■

Итак, целочисленность и неотрицательность искомых величин сильно ограничивает их возможные значения, так что решение в задачах рассматриваемого типа достигается, как правило, простым перебором вариантов.

В заключение этого параграфа скажем несколько слов о размерных величинах. Ясно, что бессмысленно приравнять сапоги валенкам, а самолеты - бананам. Иными словами, в любом уравнении или неравенстве все его члены должны быть либо безразмерными, либо иметь одну и ту же размерность. Мало того, если, скажем, в задаче часть промежутков времени измеряется

в сутках, а часть - в часах, то при составлении соответствующих уравнений следует перейти к однородным единицам измерения, приняв какую-нибудь одну из них за основную.

Д. Контрольные задачи

1°. Лодка спускается по течению реки на расстояние 10 км, а затем поднимается против течения на 6 км. Скорость течения равна 1 км/час. В каких пределах должна лежать собственная скорость лодки, чтобы вся поездка заняла от 3-х до 4-х часов?

2°. В начале года в сберкассе на книжку было внесено 1640 рублей, а в конце года было взято обратно 882 рубля. Еще через год на книжке снова оказалось 882 рубля. Сколько процентов начисляет сберкасса в год?

3°. Свежие фрукты содержат 72% воды, а сухие - 20%. Сколько сухих фруктов получается из 20 кг свежих?

ЧАСТЬ II. ЭЛЕМЕНТЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

§ 14. Пределы последовательностей

А. Определение предела

Числовой последовательностью называется совокупность действительных чисел $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$, в которой каждый член характеризуется натуральным числом - своим порядковым номером. Удобно задавать последовательность, указывая явную формулу для её общего члена, например

$$x_n = n^2; \quad x_n = (-1)^{n+1}; \quad x_n = a + \frac{1}{n}, \quad (14.1)$$

где $n = 1, 2, \dots$. Заметим, что члены разных последовательностей на больших номерах n ведут себя совершенно по-разному. Члены первой последовательности стремятся к бесконечности при $n \rightarrow \infty$. Члены второй последовательности "осциллируют", принимая поочередно значения ± 1 . Наконец, члены третьей последовательности с увеличением n приближаются сколь угодно близко к числу a . Последовательность называется сходящейся, если её поведение на больших n аналогично поведению третьей последовательности. Именно, члены сходящейся последовательности для больших значений n все теснее группируются около некоторого числа - *предела последовательности*. Этот основной факт ярко выражает следующее определение

Число a называется пределом последовательности x_n , если для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ существует такой номер N , что $|x_n - a| < \varepsilon$ для всех $n > N$.

Важно уяснить, какой именно характер сгущения точек около предельного значения допускает приведенное определение. Во-первых, в определении речь идет об асимптотическом поведении членов последовательности на сколь угодно больших номерах n . Мы интересуемся только "концом" (бесконечным!) последовательности, но не её "началом". Любое конечное число начальных членов последовательности может быть задано произвольно и это не окажет никакого влияния на её сходимости.

Далее, рассмотрим последовательности вида

$$x_n = \frac{1}{n}; \quad x_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}; \quad x_n = [1 - (-1)^n] / 2n. \quad (14.2)$$

Очевидно, что все три последовательности сходятся к числу 0. В первом случае точки x_n располагаются только с одной стороны (справа) от предельного значения, никогда не принимая самого предельного значения. Во втором случае они "осциллируют" около предела, приближаясь постепенно к нему все ближе. В третьем случае, при четных $n = 2k$ значения x_n равны предельному значению.

Все эти случаи предельного поведения определение предела допускает. Докажем, например, сходимости к нулю второй последовательности (14.2). Для любого $\varepsilon > 0$ имеем

$$\left| \frac{(-1)^{n+1}}{n} - 0 \right| < \varepsilon \Rightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon \Rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}. \quad (14.3)$$

Положим $N(\varepsilon) = [1/\varepsilon]$, где операция [...] выделяет целую часть числа. Тогда при $n > N(\varepsilon)$ неравенство (14.3) будет, очевидно, выполнено для всех x_n . Это и означает, что число 0 есть предел этой последовательности. Полезно убедиться, что если предположить, что последовательности (14.2) сходятся не к нулю, а к некоторому другому числу, скажем, $a = 0.001$, то никакого числа $N(\varepsilon)$ со свойствами, требуемыми определением предела, найти не удастся!

Еще одну тонкость определения предела раскрывает пример последовательности

$$x_n = \begin{cases} 1/n, & n \neq 2^k \\ 1, & n = 2^k \end{cases}; \quad n = 1, 2, \dots \quad (14.4)$$

Легко видеть, что последовательность (14.4) отличается от первой последовательности (14.2) тем, что для номеров $n = 2, 4, 8, \dots$, являющихся целыми степенями числа 2, её члены равны 1. Ясно, что при увеличении n числа, представимые как 2^k , встречаются в натуральном ряду все реже и реже, так что подавляющее большинство членов последовательности (14.4) с ростом n все теснее располагается у точки 0. Тем не менее, последовательность (14.4) не является сходящейся. Действительно, определение предела требует, чтобы при достаточно больших n все без исключения точки последовательности были близки к пределу, а для последовательности (14.4) это, очевидно, не так. Из этого же примера можно заключить, что числовая последовательность не может одновременно стремиться к двум различным пределам.

Б. Теоремы о пределах

Имеются важные теоремы, облегчающие вычисление пределов. Пусть существуют конечные пределы последовательностей x_n и y_n , так что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b. \quad (*)$$

Тогда справедливы теоремы

$$1^\circ. \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \pm y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a \pm b$$

$$2^\circ. \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a \cdot b$$

$$3^\circ. \text{ Если } b \neq 0, \text{ то } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n} = \frac{a}{b}.$$

Эти теоремы формально доказывают, используя определение предела. Интуитивно же ясно, что если точки одной последовательности стягиваются к числу a , а точки другой последовательности - к числу b , то их сумма приближается к числу $a + b$, и т.д.

Рассмотрим некоторые примеры:

а) Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1/2$; $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \sqrt{3}$. Найти $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n^2 + b_n}{2b_n}$.

Используя теоремы $1^\circ - 3^\circ$, имеем

$$L = \frac{(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n)^2 + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n}{2 \lim_{n \rightarrow \infty} b_n} = \frac{\frac{1}{4} + \sqrt{3}}{2\sqrt{3}} \quad \blacksquare$$

Заметим, однако, что теоремы $1^\circ - 3^\circ$ непосредственно неприменимы, если условие существования обоих пределов (*) не выполняется.

б) $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 3n + 1}{n^2 + 1}.$

Легко видеть, что числитель и знаменатель этого выражения с увеличением n стремятся к $+\infty$, так что непосредственно использовать теорему 3° нельзя. О такой ситуации говорят как о "неопределенности" вида ∞/∞ . Эту неопределенность нетрудно "раскрыть", разделив числитель и знаменатель дроби на n^2

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + 3/n + 1/n^2}{1 + 1/n^2} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} (2 + 3/n + 1/n^2)}{\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 1/n^2)} = 2,$$

поскольку очевидно, что $\lim_{n \rightarrow \infty} 1/n = \lim_{n \rightarrow \infty} 1/n^2 = 0$. ■

$$c) \quad L = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n} - \sqrt{n+1}).$$

Неопределенность вида $\infty - \infty$ раскрывается обычно следующим образом

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n} - \sqrt{n+1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n} - \sqrt{n+1})(\sqrt{n} + \sqrt{n+1})}{(\sqrt{n} + \sqrt{n+1})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-1}{(\sqrt{n} + \sqrt{n+1})} = 0,$$

так как знаменатель последнего выражения с увеличением n неограниченно возрастает. ■

$$d) \quad L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2} \sin(n!)}{n+1}.$$

В силу ограниченности синуса (см.(9.1)), имеем $|\sin(n!)| \leq 1$. Поэтому для любых n справедливо неравенство

$$\left| \frac{\sqrt[3]{n^2} \sin(n!)}{n+1} \right| \leq \frac{n^{2/3}}{n+1} \leq \frac{1}{n^{1/3}}.$$

Используя это неравенство и определение предела нетрудно доказать, что $L = 0$. ■

Завершить доказательство в примере d) можно также используя "теорему о двух милиционерах"

4°. Пусть для любого n справедливо неравенство $x_n \leq y_n \leq z_n$. Пусть, далее, последовательности x_n и z_n сходятся к одному и тому же пределу a . Тогда и последовательность y_n сходится к тому же пределу.

Если записать неравенство, полученное в примере d), в виде

$$-\frac{1}{n^{1/3}} \leq \frac{\sqrt[3]{n^2} \sin(n!)}{n+1} \leq \frac{1}{n^{1/3}}$$

то применимость "теоремы о двух милиционерах" становится очевидной. Теорема 4° замечательна тем, что она указывает *достаточный* критерий сходимости. Именно, эта теорема утверждает, что последовательность y_n сходится, если ее "зажимают" с двух сторон последовательности, сходящиеся к общему пределу.

Еще один признак достаточной сходимости дает теорема о монотонной последовательности. Последовательность типа $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \leq x_{n+1} \leq \dots$ называется монотонно возрастающей, а последовательность типа $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n \geq x_{n+1} \geq \dots$ - монотонно убывающей. В курсе анализа доказывается фундаментальная теорема

5°. Для существования конечного предела монотонной последовательности необходимо и достаточно, чтобы монотонно возрастающая последовательность была ограничена сверху, $x_n \leq M$; $M = \text{const}$, $n = 1, 2, \dots$, а монотонно убывающая последовательность - ограничена снизу, $m \leq x_n$; $m = \text{const}$, $n = 1, 2, \dots$

При вычислении пределов находит применение также следующая теорема, очевидная из единственности предела.

6°. Пусть две последовательности x_n и y_n начиная с некоторого номера N совпадают, $x_n = y_n$, $n > N$. Пусть, кроме того, каждая последовательность имеет конечный предел $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$. Тогда $a = b$.

С помощью теорем 1° - 6° вычислим некоторые важные пределы. Рассмотрим четыре последовательности

$$x_n = \log_a n; \quad y_n \leq n^k; \quad z_n = c^n; \quad t_n = n! \quad (14.5)$$

Если $a > 1$, $c > 1$, и показатель степени $k > 0$, то все эти последовательности при увеличении n стремятся к $+\infty$. Однако скорость возрастания членов с увеличением n у этих последовательностей совершенно различна. Оказывается, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z_n}{t_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c^n}{n!} = 0; \quad c > 1 \quad (14.6)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n}{z_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{c^n} = 0; \quad c > 1, k > 0 \quad (14.7)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_a n}{n^k} = 0; \quad a > 1, k > 0. \quad (14.8)$$

Следовательно, самой медленной из последовательностей (14.5) является логарифмическая последовательность, а самой быстрой - последовательность факториалов. Докажем соотношения (14.6) - (14.8). Положим, $u_n = c^n/n!$ Тогда

$$u_{n+1} = u_n \frac{c}{n+1} \quad (**)$$

Для достаточно больших $n > c$ эта последовательность становится монотонно убывающей, поскольку каждый последующий член умножается на число, меньшее единицы. При этом она ограничена снизу любым отрицательным числом. Следовательно, существует конечный предел $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = b$. Но последовательность u_{n+1} - это та же самая последовательность, что и u_n (с точностью до первого числа); поэтому $\lim_{n \rightarrow \infty} u_{n+1} = b$. Переходя в равенстве (**) к пределу $n \rightarrow \infty$, на основе теоремы 6° получаем $b = b \cdot 0$, откуда $b = 0$.

Аналогично, положим $u_n = n^k/c^n$. Тогда

$$u_{n+1} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^k \cdot \frac{1}{c} u_n \quad (***)$$

Так как $\lim_{n \rightarrow \infty} (1+1/n)^k = 1$, а $c > 1$, то при достаточно больших n эта последовательность также становится монотонно убывающей. Будучи ограниченной снизу, она имеет некоторый предел b . Переходя в равенстве (***) к пределу $n \rightarrow \infty$, из теоремы 6° получим $b = b/c$, откуда $b = 0$. Наконец, используя основное логарифмическое тождество (7.5), запишем отношение x_n/y_n в виде

$$\frac{x_n}{y_n} = \frac{\log_a n}{n^k} = \frac{\log_a n}{a^{k \log_a n}} = \frac{x_n}{a^{kx_n}}.$$

Так как предполагается, что $a > 1$ и $k > 0$, а последовательность $x_n \rightarrow +\infty$ при $n \rightarrow \infty$, то, положив здесь $c = a^k > 1$, мы сведем дело, фактически, к предыдущему случаю.

В. Типичные примеры

е) Пусть $|g| < 1$. Доказать, что $\lim_{n \rightarrow \infty} g^n = 0$.

Так как $|g| < 1$, имеем

$$|g^n - 0| < \varepsilon \Rightarrow |g|^n < \varepsilon \Rightarrow n > \log_{|g|} \varepsilon.$$

Пусть $N_0(\varepsilon)$ есть целая часть числа $\log_{|g|} \varepsilon$. Тогда при $n > N_0(\varepsilon)$ все точки последовательности лежат в " ε - окрестности" нуля. Поскольку ε может быть выбрано произвольно малым, то предел последовательности g^n при $|g| < 1$ равен нулю. ■

ф)
$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+1}{3n-2} \right)^5.$$

Используя обобщение теоремы 2° на произвольное (конечное) число сомножителей, получаем

$$L = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{3n-2} \right)^5 = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2+1/n}{3-2/n} \right)^5 = \left(\frac{2}{3} \right)^5. \blacksquare$$

г)
$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + 3^n}{n^2 + 2 \cdot 3^n}.$$

Применяя теоремы 1° - 3° и используя предел (14.7), находим

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2/3)^n + 1}{n^2/3^n + 2} = \frac{1 + \lim_{n \rightarrow \infty} (2/3)^n}{2 + \lim_{n \rightarrow \infty} n^2/3^n} = \frac{1}{2}. \blacksquare$$

При вычислении числителя, мы учли также результат примера е).

h)
$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_2 n + 1}{\log_3 n}.$$

Используя свойства логарифма (см. §7), получаем

$$\log_3 n = \frac{\log_3 n}{\log_3 3} = \frac{\log_2 n}{\log_2 3}.$$

Отсюда

$$L = \log_2 3 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{1}{\log_2 n} \right] = \log_2 3. \blacksquare$$

i)
$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{\lg n + n!}.$$

Применяя результаты (14.6) – (14.8), имеем

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n/n!}{1 + \lg n/n!} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n/n!}{1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \lg n/n!} = 0. \blacksquare$$

Г. Контрольные задачи

Вычислить пределы числовых последовательностей.

1°. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^2 - 5n + 6} - n \right)$

$$2^\circ. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos(n^2 + n)}{n + 1}$$

$$3^\circ. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 5^n}{n + 5^{n+1}}$$

$$4^\circ. \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \left[\pi \sqrt{n^2 + 1} \right]$$

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА В ШКОЛЕ

В добрые старые времена в школе изучалась в полном объеме лишь элементарная математика, а обучение в высшей школе начиналось с понятия о предельном переходе. В этом был большой резон, поскольку понятие предела, несомненно, является одним из самых фундаментальных понятий высших разделов математики. Однако объем человеческих познаний растет со все увеличивающейся скоростью. Заметим, что в средневековой Европе, до появления позиционной системы счисления, блестяще образованным считался человек, владевший операцией деления чисел. И действительно, в записи римскими цифрами нелегко разделить одно число на другое. Сегодня деление чисел заканчивают изучать в начальной школе. Существенный прогресс в обучении возможен лишь в том случае, если параллельно растущему объему знаний идет непрерывный процесс отбора, систематизации и "компрессии" накопленного материала.

§ 15. Предел функции. Непрерывность

А. Определение предела функции

Рассмотрим произвольную последовательность точек x_n , сходящуюся к точке a , но не принимающую ни при каком n самого значения a , так что

$$x_n \rightarrow a; \quad x_n \neq a. \quad (*)$$

Допустим, что на отрезке, содержащем точку a , задана функция $f(x)$. Возникает вопрос о поведении при $n \rightarrow \infty$ последовательности значений функции $f(x_n)$. Если для любой последовательности точек типа $(*)$ последовательность $y_n = f(x_n)$ стремится к одному и тому же пределу A , то число A называется *пределом функции $f(x)$ в точке A* . Более формальное, но зато и более конструктивное определение предела функции в точке таково

Число A является пределом функции $f(x)$ в точке $x = a$, если для любого сколь угодно малого $\delta > 0$ найдется такое число $\varepsilon > 0$, что при всех $x \neq a$ и $|x - a| < \varepsilon$, имеем $|f(x) - A| < \delta$.

Эквивалентность первого и второго определений предела функции легко понять из рассмотрения Рис. 15.1. Если некоторая последовательность $x_n \rightarrow a$, то для достаточно больших $n > N$ все ее точки оказываются в интервале $[a - \varepsilon, a + \varepsilon]$. Кроме того, так как $f(x_n) \rightarrow A$, то для всех $n > N_1$, все точки $y_n = f(x_n)$ оказываются в интервале $[A - \delta, A + \delta]$. Поэтому достаточно выбрать $n > \max(N, N_1)$, чтобы удовлетворить условиям второго определения.

Аналогично, из второго определения можно получить первое определение. Подчеркнем, что в определении предела не требуется, чтобы функция $f(x)$ была определена в самой точке $x = a$. С этим связано требование $(*)$ $x_n \neq a$. Кроме того, определение предела функции допускает ситуацию типа изображенной на Рис. 15.2, когда функция $f(x)$ определена в точке $x = a$, но ее значение $f(a) = B \neq A$.

Чтобы лучше усвоить понятие предела функции, рассмотрим поведение функции $y(x) = \sin(1/x)$ вблизи точки $x = 0$ (в самой точке 0 функция $y(x)$ неопределена!). Для сходящейся к нулю последовательности имеем

$$x_n = \frac{1}{\pi n} \rightarrow 0; \quad n \rightarrow \infty; \quad y(x_n) = \sin \pi n = 0.$$

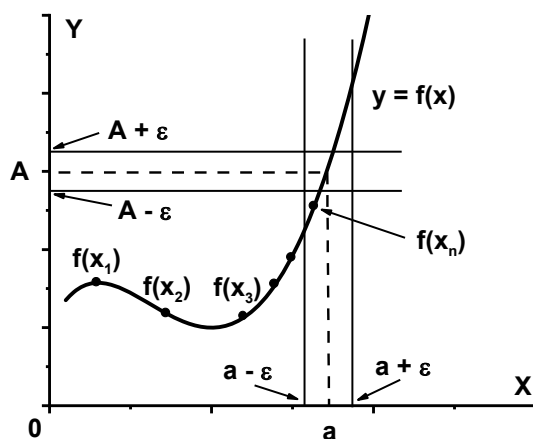


Рис. 15.1.

Однако для другой сходящейся к нулю последовательности получаем следующий результат

$$x_n = \frac{1}{\pi/2 + 2\pi n} \rightarrow 0; \quad n \rightarrow \infty; \quad y(x_n) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) = 1.$$

Следовательно, функция $y(x)$ не имеет предела в точке $x = 0$. Это связано, конечно, с чрезвычайно быстрыми осцилляциями функции $\sin(1/x)$ вблизи точки $x = 0$.

Б. Непрерывность функции

Функция $f(x)$ называется *непрерывной* в точке $x = a$, если выполнены два условия

- функция $f(x)$ имеет предел в точке $x = a$, т. е. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$
- предельное значение A равно значению функции в точке a , т. е. $f(a) = A$.

Функция, непрерывная в каждой точке некоторого отрезка называется непрерывной на отрезке. Непрерывную на отрезке функцию можно нарисовать, не отрывая карандаша от бумаги. Все элементарные функции, с которыми мы встречаемся в школьной практике, непрерывны всюду, за исключением некоторых особых точек.

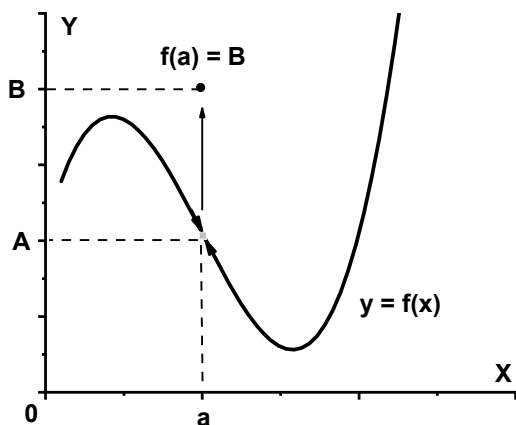


Рис. 15.2.

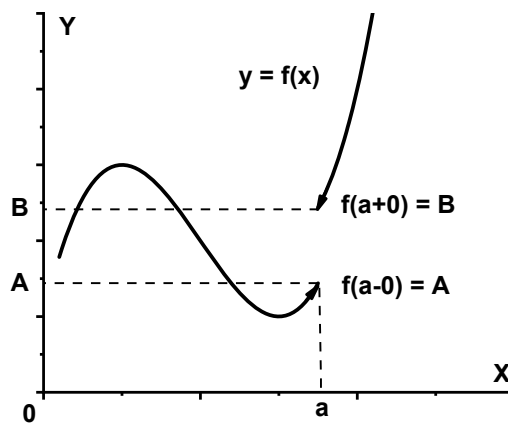


Рис. 15.3.

На Рис. 15.2 схематически изображена ситуация, когда функция $f(x)$ имеет в точке $x = a$ своим предельным значением число A , но значение функции в этой точке $f(a) = B \neq A$. Разрыв непрерывности такого типа называют *устранимым*, так как достаточно переопределить функцию в одной точке, чтобы получить всюду непрерывную функцию. В более сложных случаях функция может иметь в некоторых точках пределы слева и справа, неравные друг другу

$$\lim_{x \rightarrow a, x < a} f(x) = A; \quad \lim_{x \rightarrow a, x > a} f(x) = B; \quad A \neq B.$$

Такой разрыв непрерывности называется неустранимым (см. Рис.15.3).

В. Замечательные пределы

В курсе математического анализа доказываются следующие "замечательные" пределы

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1; \quad (15.1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} = e, \quad (15.2)$$

которые являются неопределенностями типа $0/0$ и 1^∞ , соответственно. Число $e = 2,71828\dots$ - есть основание натуральных логарифмов, $\log_e x = \ln x$. С помощью формул (15.1) и (15.2) вычисляются многие важные пределы.

$$\text{a) } L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x - \sin 3x}{\sin x}.$$

Имеем

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 \cdot \frac{\sin 5x}{5x} - 3 \cdot \frac{\sin 3x}{3x}}{\frac{\sin x}{x}} = \frac{5-3}{1} = 2.$$

Мы воспользовались здесь обобщением предела (15.1),

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin mx}{mx} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = 1,$$

поскольку при $x \rightarrow 0$ и переменная $y = mx \rightarrow 0$. ■

В §16 при вычислении производных нам потребуются также следующие важные пределы

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a}, \quad a > 0, \quad a \neq 1 \quad (15.3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a, \quad a > 0 \quad (15.4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha, \quad (15.5)$$

которые являются неопределенностями типа $0/0$. Докажем эти равенства. Используя непрерывность логарифма, имеем

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a \left[\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} \right] = \log_a e = \frac{1}{\ln a}.$$

Во втором равенстве мы воспользовались замечательным пределом (15.2). Далее, в примере (15.4) заменим переменную, полагая $y = a^x - 1$, так что $x = \log_a(1+y)$. Очевидно, что при $x \rightarrow 0$ имеем $y \rightarrow 0$, поэтому

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\log_a(1+y)} = \ln a,$$

где использован предыдущий результат. Наконец, соотношение (15.5) можно обосновать, применяя общую форму бинорма Ньютона (см. §1)

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + R(x)$$

Здесь остаточный член $R(x)$ содержит только члены порядка x^2 и старше. Поэтому

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{R(x)}{x} = \alpha.$$

Г. Вычисление пределов функций

Если функция $f(x)$ непрерывна в точке $x = a$, то по определению

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a). \quad (15.6)$$

Рассмотрим типичные примеры.

$$\text{b) } L = \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{5}{\cos^2 x} - 2 \log_3 x \right].$$

Функция, стоящая под знаком предела, есть комбинация элементарных алгебраических функций, и не имеет особенностей в точке $x = 1$. Следовательно, она непрерывна в этой точке и, по правилу (15.6), имеем $L = 5/\cos^2 1$. ■

Таким образом, специального исследования заслуживают лишь "неопределенности" различных видов.

$$\text{c) } L = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2} - \sqrt[3]{x^3 + 1}}{\sqrt[4]{x^4 + 8}}.$$

Неопределенности типа ∞/∞ и $\infty - \infty$ раскрываются обычно также, как и в примерах b) и c) из §14.

$$L = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2} - \sqrt[3]{x^3 + 1}}{\sqrt[4]{x^4 + 8}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x| \cdot \sqrt{1 + 2/x^2} - x \cdot \sqrt[3]{1 + 1/x^3}}{|x| \sqrt[4]{1 + 8/x^4}} = 2,$$

так как при $x \rightarrow -\infty$ выражения под радикалами стремятся к 1. ■

$$\text{d) } L = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 + 7x + 10}.$$

Поскольку число $x = -2$ является корнем и числителя и знаменателя, мы имеем в данном примере неопределенность типа $0/0$. Для ее раскрытия, разложим квадратные трехчлены на множители

$$L = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2) \cdot (x-3)}{(x+2) \cdot (x+5)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x-3}{x+5} = -\frac{5}{3},$$

Заметим, что в процессе предельного перехода $x \rightarrow -2$ аргумент по определению не может принимать значения $x = -2$. Следовательно, $x \neq -2$, и на скобку $(x+2)$ дробь можно сократить. ■

$$\text{e) } L = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-1} - 2}{x-5}.$$

Имеем здесь

$$L = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(\sqrt{x-1}-2) \cdot (\sqrt{x-1}+2)}{(x-5) \cdot (\sqrt{x-1}+2)} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x-5}{(x-5) \cdot (\sqrt{x-1}+2)}.$$

Сокращая на скобку $(x-5)$, получаем $L = 1/4$. ■

$$\text{f)} \quad L = \lim_{x \rightarrow 0} (1-x)^{1/2x}.$$

Положим $y = -x$. Если $x \rightarrow 0$, то и $y \rightarrow 0$. Следовательно, имеем

$$L = \lim_{y \rightarrow 0} (1+y)^{-1/2y} = \lim_{y \rightarrow 0} \left[(1+y)^{1/y} \right]^{-1/2} = \left[\lim_{y \rightarrow 0} (1+y)^{1/y} \right]^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{e}}. \blacksquare$$

Здесь использован замечательный предел (15.2) и свойство непрерывности функции $y = 1/\sqrt{x}$ при $x \neq 0$.

$$\text{g)} \quad L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 3^x}{x}.$$

Используя результат (15.4), получаем

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} 3^x \frac{(2/3)^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 3^x \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2/3)^x - 1}{x} = \ln \frac{2}{3}. \blacksquare$$

$$\text{h)} \quad L = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\log_5 x - 1}{x - 5}.$$

Положим $y = x - 5$. Если $x \rightarrow 5$, то $y \rightarrow 0$. Поэтому

$$L = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\log_5(y+5) - 1}{y}.$$

Поскольку $\log_5(y+5) - 1 = \log_5(1+y/5)$, то используя предел (15.3), находим окончательно

$$L = \frac{1}{5} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\log_5(1+y/5)}{y/5} = \frac{1}{5 \ln 5}. \blacksquare$$

$$\text{i)} \quad L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{\sin x} - 1}{2x}.$$

Используя пределы (15.1) и (15.4), имеем

$$L = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(3^x)^{\sin x / x} - 1}{x} = \frac{\ln 3}{2}. \blacksquare$$

В заключение этого параграфа отметим, что результаты (14.7) и (14.8) из §14 остаются справедливыми, если под n понимать переменную, пробегающую непрерывный ряд значений.

$$\text{j)} \quad L = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 2^x}{1 + x + 2^x}.$$

Используя указанные формулы, находим

$$L = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x^2/2^x) - 1}{1 + (1+x)/2^x} = -1. \blacksquare$$

Д. Контрольные задачи

Вычислить пределы функций.

$$1^\circ. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2 + 7} - 4}{x^2 - 5x + 6}$$

$$2^\circ. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2-x}{2+x} \right)^{\frac{1}{\sin x}}$$

$$3^\circ. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1-x} - \sqrt[3]{1+x}}{x}$$

$$4^\circ. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x)}{\sin x}$$

$$5^\circ. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \sin x}{\cos x - 1}$$

$$6^\circ. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}}$$

§ 16. Вычисление производных

А. Определение производной

Теория пределов имеет в математическом анализе исключительное значение, в частности, потому, что такие важные понятия, как производная и определенный интеграл определяются как пределы специальных типов. Рассмотрим функцию $f(x)$, определенную на некотором отрезке. Пусть x_0 - какая-либо внутренняя точка этого отрезка. Дадим аргументу x_0 малое приращение Δx произвольного знака и составим приращение функции

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

Производной функции $f(x)$ в точке x_0 по независимой переменной x называется предел отношения

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0).$$

Производную $f'(x)$ обозначают часто также символом df/dx .

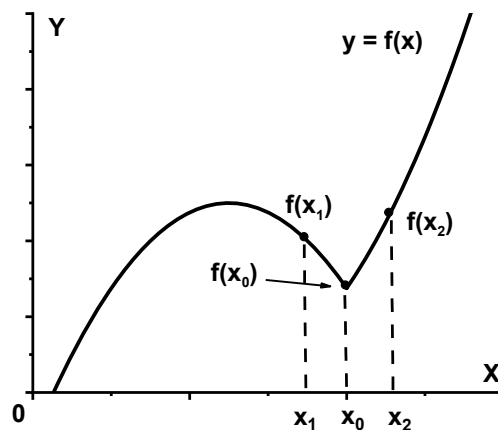


Рис. 16.1.

Прежде всего ясно, что если функция разрывна в точке x_0 , то ее производная в этой точке не существует. Действительно, в точках разрыва функции $f(x)$ приращения Δf конечны; поэтому при $\Delta x \rightarrow 0$ не может быть конечным отношение $\Delta f/\Delta x$. Следовательно функция, дифференцируемая в точке x , заведомо непрерывна в этой точке. Однако одной непрерывности функции в точке недостаточно для ее дифференцируемости. Если непрерывная функция в точке x_0 имеет излом (см. Рис. 16.1), то легко видеть, что ее производная в этой точке не существует. Например, непрерывная функция, показанная на Рис. 16.1, в некоторой окрестности справа от точки x_0 возрастает. Следовательно, для положительных $\Delta x = x_1 - x_0 > 0$ приращения функции $\Delta f = f(x_1) - f(x_0) > 0$ и отношение $\Delta f/\Delta x > 0$. Слева же от точки x_0 эта функция убывает, поэтому, для отрицательных $\Delta x = x_2 - x_0 < 0$ ее приращения по-прежнему положительны (см. Рис. 16.1). Таким образом, $\Delta f = f(x_2) - f(x_0) > 0$, а отношение $\Delta f/\Delta x < 0$. Рассмотрим некоторую последовательность точек, сходящуюся к x_0 , и такую, что ее члены могут располагаться как справа, так и слева от точки x_0 . Для точек этой последовательности, лежащих справа от x_0 , отношение $\Delta f/\Delta x > 0$, а для точек, лежащих слева от x_0 , $\Delta f/\Delta x < 0$. Следовательно, для такой последовательности отношение $\Delta f/\Delta x$ "осциллирует" и не может сходиться к определенному пределу, если абсолютная величина отношения $|\Delta f/\Delta x| \geq m > 0$, т.е. ограничена снизу.

Мы видим, таким образом, что функция, дифференцируемая в некоторой точке x_0 , должна быть, во-первых, непрерывной в этой точке и, во-вторых, *гладкой*, т.е. должна иметь определенную касательную в этой точке. Из определения производной следует, что вблизи точки x_0 для дифференцируемой функции выполняется приближенное равенство

$$\Delta f \approx f'(x_0)\Delta x. \quad (16.1)$$

Сравнивая это равенство с формулой (4.2) видим, что $f'(x_0)$ равно в точности угловому коэффициенту касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $x = x_0$. Таков геометрический смысл производной функции в заданной точке.

Б. Правила дифференцирования

Поскольку производная, по определению, является пределом определенного вида, то ясно, что должны существовать теоремы, аналогичные теоремам о пределах из §14, пункт Б. Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют в некоторой точке x производные $u'(x)$ и $v'(x)$, соответственно. Тогда существуют производные функций $u \pm v$, $u \cdot v$ и u/v , причем

$$1^\circ. \quad (u \pm v)' = u' \pm v',$$

$$2^\circ. \quad (u \cdot v)' = u'v + uv',$$

$$3^\circ. \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Кроме того, из определения производной легко вывести, что производная константы $C' = 0$, так как для константы любое приращение $\Delta C = 0$. Если в теореме 2° положить $u(x) = C$, то получим полезное следствие

$$4^\circ. \quad (Cv)' = Cv'$$

т. е. константу можно выносить за знак производной.

Теоремы 1° - 3° легко получаются непосредственно из определения производной и теорем о пределах. Возьмем, например, приращение произведения

$$\Delta(u \cdot v) = u(x + \Delta x) \cdot v(x + \Delta x) - u(x) \cdot v(x),$$

и преобразуем его следующим образом

$$\Delta(u \cdot v) = [u(x + \Delta x) - u(x)]v(x + \Delta x) + u(x) \cdot [v(x + \Delta x) - v(x)] = \Delta u \cdot v(x + \Delta x) + u(x) \Delta v.$$

Разделив это равенство на приращение аргумента Δx , получаем

$$\frac{\Delta(u \cdot v)}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot v(x + \Delta x) + u(x) \frac{\Delta v}{\Delta x}. \quad (*)$$

По условию, в пределе $\Delta x \rightarrow 0$ имеем $\Delta u / \Delta x \rightarrow u'(x)$, $\Delta v / \Delta x \rightarrow v'(x)$, а функция $v(x + \Delta x) \rightarrow v(x)$ в силу ее непрерывности (которая следует из дифференцируемости). Следовательно, в пределе $\Delta x \rightarrow 0$ равенство (*) приводит к формуле 2°. Аналогично доказываются формулы 1° и 3°.

Если бы для вычисления производной конкретной функции каждый раз приходилось вычислять соответствующий предел, то дифференцирование было бы непростой операцией. К счастью, теоремы 1° - 3° показывают нам, что имея достаточный запас производных некоторых "основных" функций, можно легко получать производные их всевозможных комбинаций. Весьма полезно, поэтому, иметь таблицу производных элементарных функций.

В. Производные элементарных функций

Нижеследующие формулы получаются, как правило, непосредственно из определения производной

$$y = x^\alpha \quad y' = \alpha x^{\alpha-1} \quad (16.2)$$

$$y = a^x, \quad a > 0 \quad y' = a^x \ln a \quad (16.3)$$

$$y = \log_a x, \quad a > 0, \quad a \neq 1 \quad y' = 1/(x \ln a) \quad (16.4)$$

$$y = \sin x \quad y' = \cos x \quad (16.5)$$

$$y = \cos x \quad y' = -\sin x \quad (16.6)$$

$$y = \operatorname{tg} x \quad y' = 1/\cos^2 x \quad (16.7)$$

$$y = \operatorname{ctg} x \quad y' = -1/\sin^2 x \quad (16.8)$$

Формулы (16.3) и (16.4) упрощаются, если основание a выбрано равным e , т. к. по определению $\ln e = 1$. Следовательно

$$(e^x)' = e^x; \quad (\ln x)' = 1/x. \quad (16.9)$$

Кроме того, полезно иметь ввиду частные случаи формулы (16.2)

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}; \quad \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}. \quad (16.10)$$

Первая из них получается из (16.2) при $\alpha = 1/2$, а вторая – при $\alpha = -1$.

Формулы (16.2)-(16.10) следует, конечно, запомнить. Однако гораздо полезнее (и надежнее!) знать, как они получаются. По определению, предполагая что $x \neq 0$, имеем

$$(x^\alpha)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^\alpha - x^\alpha}{\Delta x} = x^\alpha \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(1 + \Delta x/x)^\alpha - 1}{\Delta x}.$$

Положим здесь $y = \Delta x/x$. Если x фиксировано, а $\Delta x \rightarrow 0$, то и $y \rightarrow 0$. Поэтому

$$(x^\alpha)' = x^{\alpha-1} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{(1+y)^\alpha - 1}{y} = \alpha x^{\alpha-1},$$

где использована формула (15.5). Подчеркнем, что при вычислении производной функции в точке x , аргумент x считается фиксированным, а Δx - переменным. Поэтому функции, зависящие только от x можно выносить за знак предела. Далее,

$$(a^x)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = a^x \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = a^x \ln a.$$

где использована формула (15.4). Затем,

$$(\log_a x)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\log_a(x + \Delta x) - \log_a x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1 + \Delta x/x)}{\Delta x}.$$

Положив здесь $y = \Delta x/x$, с использованием формулы (15.3) получим

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+y)}{y} = \frac{1}{x \ln a}.$$

Для тригонометрических функций имеем, по определению

$$(\sin x)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x}.$$

Используя формулу (9.13d), находим

$$\sin(x + \Delta x) - \sin x = 2 \sin(\Delta x/2) \cos(x + \Delta x/2).$$

Поэтому

$$(\sin x)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{\sin(\Delta x/2)}{\Delta x/2} \cdot \cos(x + \Delta x/2) \right] = \cos x.$$

Здесь использовано правило взятия предела от произведения, непрерывность косинуса и замечательный предел (15.1). Аналогично,

$$(\cos x)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos(x + \Delta x) - \cos x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin(\Delta x/2) \sin(x + \Delta x/2)}{\Delta x} = -\sin x.$$

Зная производные синуса и косинуса, можно получить теперь формулы (16.7) и (16.8) по теореме 3°.

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{\sin' x \cos x - \cos' x \sin x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x};$$

$$(\operatorname{ctg} x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x} \right)' = \frac{\cos' x \sin x - \sin' x \cos x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

В этих преобразованиях использовано также основное тригонометрическое тождество (9.2).

Г. Производная сложной функции

Правила дифференцирования 1° - 3° и формулы (16.2)-(16.8) позволяют вычислять производные самых различных комбинаций элементарных функций, заданных от аргумента x . Непонятно,

однако, как вычислить производную функции, зависящей от сложного аргумента, скажем, производную функции $y = \sin(x^2)$.

Пусть задана функция $y = y(u)$ от аргумента u и функция $u = u(x)$ от аргумента x . Сложной функцией называется "функция от функции", например, $y = y[u(x)]$. Чтобы вычислить значение y в некоторой точке x_0 , следует сначала вычислить значение функции u в этой точке, т. е. $u_0 = u(x_0)$, а затем уже вычислять значение функции y в точке u_0 , т. е. $y = y(u_0)$. Положим, например

$$\begin{cases} y(x) = \sin u \\ u(x) = \lg x \end{cases} \Rightarrow y(x) = \sin(\lg x). \quad (*)$$

Заметим, однако, что с равным правом мы могли бы положить также

$$\begin{cases} y(u) = \lg u \\ u(x) = \sin x \end{cases} \Rightarrow y(x) = \lg(\sin x). \quad (**)$$

Функции (*) и (**) совершенно различны. Следовательно, образуемая сложная функция определяется не только исходными функциями (в нашем примере $\lg x$ и $\sin x$) но и порядком их композиции в единую функцию. Ничто не мешает нам рассматривать также композиции трех и большего числа функций. На практике приходится, как правило, наоборот, раскладывать заданную сложную функцию на "элементарные составляющие", зависящие от простого аргумента.

а) Представить как композицию элементарных функций

$$1) y = \ln[\operatorname{tg} \sqrt{x}]; \quad 2) y = \sin[\log_2 \sqrt{1-x^2}].$$

В примере а1) имеем композицию трех функций

$$y = \ln f; \quad f = \operatorname{tg} u; \quad u = \sqrt{x},$$

а в примере а2) – композицию четырех функций

$$y = \sin f; \quad f = \log_2 u; \quad u = \sqrt{t}; \quad t = 1 - x^2. \blacksquare$$

Существует важная теорема о производной сложной функции, которая значительно расширяет возможности вычислителя.

5°. Пусть функция $u = u(x)$ имеет в точке x_0 производную $u'_x = u'_x(x_0)$, а функция $y = y(u)$ имеет производную в соответствующей точке $u_0 = u(x_0)$, т.е. $y'_u = y'_u(u_0)$, тогда

$$y'_x = y'_u(u_0) \cdot u'_x(x_0). \quad (16.11)$$

Значок снизу в этой формуле указывает, по какой переменной производится дифференцирование.

б) Пусть $y = \sin(x^2)$. Вычислить y'_x .

Положим $y = \sin u$, $u = x^2$. Используя теорему 5°, имеем

$$y'_x = (\sin u)'_u (x^2)'_x = \cos u \cdot 2x = 2x \cdot \cos(x^2). \blacksquare$$

Заметим, что на последнем этапе мы вернулись к исходной переменной x . Итак, при вычислении производной сложной функции нужно прежде всего представить эту функцию как

композицию элементарных функций, а затем применить соответствующее число раз теорему 5°. Например, в рассматриваемом выше примере а1) имеем

$$y'_f = (\ln f)'_f = \frac{1}{f}; \quad f'_u = (\operatorname{tg} u)'_u = \frac{1}{\cos^2 u}; \quad u'_x = (\sqrt{x})'_x = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Поэтому, применяя последовательно формулу (16.11), получаем

$$y'_x = y'_f \cdot f'_u \cdot u'_x = \frac{1}{f} \cdot \frac{1}{\cos^2 u} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\operatorname{tg} \sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\cos^2 \sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}. \blacksquare$$

Теорема 5° имеет весьма простое происхождение. Так как производная y'_u существует, то по аналогии с (16.1), пишем

$$\Delta y = y'_u \cdot \Delta u + R(\Delta u) \quad (16.12)$$

Причем остаток $R(\Delta u)$ стремится к нулю быстрее, чем Δu , так как существование производной означает, что

$$\lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{R(\Delta u)}{\Delta u} = 0. \quad (*)$$

Но производная u'_x , по условию, также существует. Следовательно $\Delta u = u'_x \Delta x$ и при $\Delta x \rightarrow 0$ имеем $\Delta u \rightarrow 0$. Тогда из равенства (16.12) получаем формальный вывод

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'_u \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{R(\Delta u)}{\Delta x}$$

Заменяя во втором пределе переменную $\Delta x = \Delta u / u'_x$, и учитывая соотношение (*), получим отсюда формулу (16.11).

Для вычисления производных некоторых функций удобно применять теорему о производной обратной функции. Пусть в некоторой точке x_0 производная функции $y(x)$ существует и равна $y'_x(x) \neq 0$. На языке "малых приращений" это означает, что

$$\Delta y \approx y'_x(x_0) \Delta x \Rightarrow \Delta y \approx k \Delta x.$$

Другими словами, в малой окрестности точки x_0 эта функция приближенно описывается уравнением прямой линии с коэффициентом $k = y'_x(x_0)$. Так как, по условию, $k \neq 0$, то зависимость $y = y(x)$ вблизи точки x_0 можно однозначно разрешить, и получить обратную функцию $x = x(y)$, которая на языке "малых приращений" будет описываться уравнением

$$\Delta x = \frac{1}{k} \Delta y$$

Отсюда следует, что в точке $y_0 = y(x_0)$ существует предел

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = x'_y(y_0) = \frac{1}{k} = \frac{1}{y'_x(x_0)}. \quad (16.13)$$

Рассмотрим функцию $y = \arcsin x$, для которой по определению (см. §10), $x = \sin y$, а значения y ограничены интервалом $-\pi/2 \leq y \leq \pi/2$. Применяя формулу (16.13) справа налево, имеем

$$y'_x = (\arcsin x)'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\cos y}.$$

Здесь следует, конечно, исключить значения $y = \pm \pi/2$, для которых $\cos y = 0$.

Итак, применить формулу (16.13) легко. Необычным же для ученика является то, что в результате применения этой формулы мы получаем производную y'_x , записанную как функция y , а не функция независимой переменной x ! Но ведь $y = \arcsin x$, и $|y| < \pi/2$. Следовательно, $\cos y > 0$ и продолжая преобразования, получаем

$$(\arcsin x)'_x = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Аналогично, для функции $y = \arccos x$, значения которой лежат в интервале $0 \leq y \leq \pi$ (см. §10) имеем по определению $x = \cos y$. Поэтому

$$(\arccos x)'_x = \frac{1}{-\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2(\arccos x)}} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}},$$

где при извлечении квадратного корня учтено, что в интервале $0 < y < \pi$ имеем $\sin y > 0$. Наконец, для функции $y = \arctg x$ имеем $x = \operatorname{tg} y$, так что

$$(\arctg x)' = \cos^2 y = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2(\arctg x)} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Проводя аналогичные вычисления для функции $y = \operatorname{arctg} x$, мы можем пополнить нашу таблицу производных формулами

$$y = \arcsin x \quad y' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \quad (16.14)$$

$$y = \arccos x \quad y' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \quad (16.15)$$

$$y = \arctg x \quad y' = \frac{1}{1 + x^2} \quad (16.16)$$

$$y = \operatorname{arctg} x \quad y' = -\frac{1}{1 + x^2} \quad (16.17)$$

Д. Примеры вычисления производных

с) $y = \arctg(x + \sqrt{1 + x^2})$. Найти производную y'_x .

Положим $u = x + \sqrt{1 + x^2}$. Тогда, применяя теорему 5, получим

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x = (\arctg u)'_u \cdot u'_x = \frac{1}{1 + u^2} u'_x = \frac{1}{1 + u^2} \left(1 + (\sqrt{1 + x^2})'_x \right).$$

Положим теперь $f = \sqrt{t}$; $t = 1 + x^2$. Тогда

$$f'_x = f'_t \cdot t'_x = \frac{1}{2\sqrt{t}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

Окончательно, находим

$$y'_x = \frac{1}{1 + (x + \sqrt{1 + x^2})^2} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}} \right) = \frac{x + \sqrt{1 + x^2}}{\sqrt{1 + x^2} [1 + (x + \sqrt{1 + x^2})^2]}. \blacksquare$$

Заметим, что на первом этапе преобразований мы выразили производную y'_x через производную u'_x , затем производную u'_x свели к вычислению производной f'_t , и т. д. Важно, что вычисление производной на каждом шаге не зависит ни от предыдущего шага, ни от последующего. Так, вычисление производной $(\arctgu)'_u$ совершенно не зависит от того, какой вид имеет функция $u(x)$. В этом и состоит удивительная мощь теоремы о сложной функции. Свободное дифференцирование невозможно без овладения описанной техникой.

$$\text{d)} \quad y = (\ln x)^x \quad x > 1$$

Получим сначала общее правило дифференцирования степенно-показательной функции $y = [u(x)]^{v(x)}$. Возьмем логарифм от обеих частей этого равенства

$$\ln y = v(x) \ln u(x).$$

Дифференцируя обе части этой формулы, последовательно находим

$$(\ln y)'_x = (v \ln u)'_x; \quad (\ln y)'_y y'_x = v'_x \ln u + v (\ln u)'_u u'_x; \quad \frac{1}{y} y'_x = v'_x \ln u + v \frac{1}{u} u'_x.$$

Отсюда получаем, окончательно

$$y'_x = (u^v)'_x = u^v \ln u \cdot v' + v \cdot u^{v-1} u'_x. \quad (16.18)$$

Нетрудно видеть, что первый член в этом выражении получен по правилу дифференцирования показательной функции (16.3) в предположении $u = \text{const}$, а второй член - по правилу дифференцирования степенной функции (16.2), в предположении $v = \text{const}$.

Применяя формулу (16.18), получим в примере d)

$$[(\ln x)^x]' = (\ln x)^x \ln(\ln x) + (\ln x)^{x-1} \cdot \blacksquare$$

Е. Формула Тейлора

Заметим, что соотношение (16.1) для дифференцируемой функции можно записать в следующем точном виде

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + R_2(x - x_0), \quad (16.19)$$

где $R_2(x - x_0)$ есть *остаточный* член второго порядка малости по отношению к разности $(x - x_0)$, который обладает тем свойством, что

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_2(x - x_0)}{x - x_0} = 0. \quad (16.20)$$

Отсюда следует, что функцию $R_2(x - x_0)$ можно представить в виде

$$R_2(x - x_0) = A_2(x - x_0)^2 + R_3(x - x_0); \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_3(x - x_0)}{(x - x_0)^2} = 0. \quad (16.21)$$

Чтобы найти значение коэффициента A_2 в этой формуле, подставим выражение для $R_2(x - x_0)$ в формулу (16.19), продифференцируем обе части полученного выражения по x дважды, и перейдем к пределу $x \rightarrow x_0$. В результате, мы получим замечательное соотношение,

$A_2 = f''(x_0)/2$. Обобщая это рассуждение, мы приходим к разложению дифференцируемой функции $f(x)$ вблизи точки x_0 в ряд по степеням малой разности $(x - x_0)$ вида

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{s=1}^n \frac{f^{(s)}(x_0)}{s!} (x - x_0)^s + R_{n+1}(x - x_0). \quad (16.22)$$

Это выражение носит название формулы Тейлора и дает начало новому разделу математического анализа – *теории степенных рядов*.

Формула (16.22) показывает, что любую функцию, обладающую в заданной точке x_0 производными до n -го порядка включительно, можно с соответствующей точностью представить как многочлен степени n по степеням $(x - x_0)$. Тем самым, мы получаем полное описание всей совокупности функций рассматриваемого класса, что является важнейшей целью исследования при глубоком математическом подходе к проблеме.

Для ряда хорошо известных функций получаются достаточно простые разложения в ряд Тейлора. Учитывая, например (см. формулу (16.9)), что производная любого порядка s от экспоненциальной функции равна самой этой функции, $\exp^{(s)}(x) = \exp(x)$, для разложения экспоненциальной функции в нуле получаем замечательную формулу

$$e^x = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}. \quad (16.23)$$

В теории степенных рядов доказывается, что ряд по степеням x в правой части этой формулы сходится для всех конечных значений переменной x .

Ж. Контрольные задачи

Вычислить производные функций.

$$1^\circ. y = \left[\frac{1-x^2}{1+x^2} \right]^{1/2}$$

$$2^\circ. y = \sqrt{\sin \sqrt{x}}$$

$$3^\circ. y = \operatorname{arctg} \frac{1+x}{1-x}$$

$$4^\circ. y = \cos^3 x \cdot \left(e^{1/x} - \ln 4x \right)$$

$$5^\circ. y = (\sin x)^{2x}$$

ОШИБКА ИЛИ НЕБРЕЖНОСТЬ?

Удивительная легкость, с которой почти каждый школьник готов отказаться от только что проведенных им математических выкладок, говорит о том, что он либо не считает важным дело своего обучения, либо, скорее всего, не очень верит в эти выкладки. А не верит он в них потому, что не привык, или не желает жестко себя контролировать. При таком отношении к делу мудрено чему-либо научиться. Скажем, квадратное уравнение решают одинаковым образом и профессор математики, и ученик 9-го класса средней школы. Но попробуйте сказать профессору, что он решил квадратное уравнение неверно. Если такой казус действительно случился, для профессора это будет трагедией. А с ученика, даже выпускного класса школы - как с гуся вода! Автор до сих пор помнит, как в сочинении на революционную тему его школьный товарищ в словосочетании "паровозные топки" по ошибке заменил букву "т"

на букву "п". В назидание остальным, учитель зачитал сочинение в классе вслух. Помню оглушительный хохот, красные уши моего товарища и беспрерывные насмешки, которые он мужественно терпел после этого едва ли не пол-года. Эффект такого, хотя и жестокого, лечения небрежности был, конечно, огромен. По-видимому, стыд от допущенной математической небрежности должен испытывать не только профессор, но каждый человек, готовящийся профессионально применять математику в своей деятельности.

§ 17. Вычисление первообразных. Интеграл

А. Неопределенный интеграл

Мы уже отмечали ранее, что в математике многие прямые операции (такие как извлечение корня, взятие арксинуса и т. д.) определяются через соответствующие обратные операции (возведение в степень, вычисление синуса). Подобным же образом *интегрирование* определяется через обратную ему операцию - дифференцирование. Функция $F(x)$ называется *первообразной* для функции $f(x)$, если $F'(x) = f(x)$. Поскольку производная константы $C' = 0$, то, если $F(x)$ есть некоторая первообразная для $f(x)$, то $F(x) + C$ также есть первообразная для этой функции. Совокупность всех первообразных данной функции называют *неопределенным интегралом* от этой функции и обозначают

$$F(x) + C = \int f(x) dx; \quad \Rightarrow \quad \left(\int f(x) dx \right)' = f(x) \quad (*)$$

Подынтегральное выражение $f(x)$ показывает для какой функции ищется совокупность первообразных, а *дифференциал* dx указывает, по отношению к какой переменной определяются первообразные. Таким образом, неопределенный интеграл представляет собой общий вид первообразных заданной функции и определен всегда с точностью до произвольной постоянной C .

Б. Правила интегрирования

Пусть существуют первообразные функций $f(x)$ и $g(x)$. Тогда существуют и первообразные функций $f(x) \pm g(x)$ и $kf(x)$, где k - некоторая постоянная, причем

$$1^\circ. \quad \int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx,$$

$$2^\circ. \quad \int k \cdot f(x) dx = k \int f(x) dx.$$

Эти равенства легко проверяются с помощью определения (*) и правил дифференцирования 1° и 4° из §16Б. Заметим также, что для первообразной от производной имеем, очевидно

$$3^\circ. \quad \int [f'(x)] dx = f(x) + C$$

Действительно, дифференцируя обе части этого равенства с помощью определения (*), получаем верное равенство $f'(x) = f'(x)$. Проинтегрируем теперь с учетом правила 3° обе части формулы дифференцирования произведения (2° из §16Б). Получим

$$u(x)v(x) = \int u'(x)v(x) dx + \int u(x)v'(x) dx \quad (**)$$

Произвольная постоянная C в левой части этой формулы может быть опущена, так как ее правая часть, как мы знаем, определена с точностью до произвольной постоянной.

Введем удобное понятие *дифференциала функции*, полагая

$$df(x) = f'(x)dx.$$

С помощью этого понятия формулу (**) можно переписать в виде

$$4^\circ. \quad \int v(x)du(x) = u(x)v(x) - \int u(x)dv(x).$$

В такой записи это выражение носит название формулы интегрирования по частям.

Теореме 5° из §16Г о производной сложной функции также соответствует некоторое правило интегрирования, которое известно как метод замены переменного. Рассмотрим интеграл типа

$$\int f[g(x)] \cdot g'(x)dx.$$

Образует дифференциал $g'(x)dx = dg$ и будем рассматривать функцию $g(x)$ как независимую переменную. Если $F(x)$ – первообразная для $f(x)$, то мы получаем, очевидно, равенство

$$5^\circ. \quad \int f(g) \cdot g'(x)dx = \int f(g)dg = F[g(x)] + C.$$

В некоторых случаях удобнее наоборот, перейти от независимой переменной x к другой независимой переменной t по формуле $x = g(t)$. Тогда, учитывая что $dx = g'(t)dt$, получим

$$\int f(x)dx = \int f[g(t)] \cdot g'(t)dt.$$

Зависимость $x = g(t)$ должна быть на некотором интервале однозначной и допускать обратное преобразование $t = q(x)$. Допустим, что у функции $f[g(t)] \cdot g'(t)$ имеется первообразная $G(t)$. Тогда получаем

$$6^\circ. \quad \int f(x)dx = \int f(g) \cdot g'(t)dt = G[q(x)] + C.$$

Заметим, что на последнем этапе вычислений необходимо перейти от вспомогательной переменной t к исходной переменной x , что всегда возможно в силу наложенного требования однозначности функции $x = g(t)$.

В. Таблица неопределенных интегралов

В §16 мы составили таблицу производных некоторых "основных", простейших элементарных функций. Операция интегрирования элементарных функций также производится с помощью базовых, так называемых, "табличных" интегралов. Используя правило 3° интегрирования производной, мы получаем эти табличные интегралы, просто читая соотношения (16.2)-(16.10) и (16.14)-(16.17) справа налево, и переобозначая в некоторых случаях константы

$$\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1} \int (x^{\alpha+1})' dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C; \quad (\alpha \neq -1) \quad (17.1)$$

$$\int a^x dx = \frac{1}{\ln a} \int (a^x)' dx = \frac{a^x}{\ln a} + C; \quad a > 0 \quad (17.2)$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int (\ln x)' dx = \ln|x| + C; \quad (17.3)$$

$$\int \cos x dx = \int (\sin x)' dx = \sin x + C; \quad (17.4)$$

$$\int \sin x dx = \int (-\cos x)' dx = -\cos x + C; \quad (17.5)$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int (\operatorname{tg} x)' dx = \operatorname{tg} x + C; \quad (17.6)$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = \int (-\operatorname{ctgx})' dx = -\operatorname{ctgx} + C. \quad (17.7)$$

Кроме того, имеем

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{1}{|a|} \int \frac{dx}{\sqrt{1 - (x/a)^2}} = \left(t = \frac{x}{|a|} \right) = \int (\arcsin t)'_t dt = \arcsin \frac{x}{|a|} + C. \quad (17.8)$$

В формуле (17.8) мы использовали простейший вариант теоремы 5°, проведя замену переменной $t = x/|a|$. Аналогичная замена переменной дает интеграл

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \int \frac{d(x/a)}{1 + (x/a)^2} = \left(t = \frac{x}{a} \right) = \frac{1}{a} \int (\operatorname{arctg} t)'_t dt = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C. \quad (17.9)$$

Прочие интегралы от элементарных функций и их комбинаций стараются получить на основе базовых интегралов (17.1)-(17.9) с помощью правил интегрирования 1° - 5°.

Следует заметить, что операция интегрирования является гораздо более сложной процедурой, чем операция дифференцирования. Во многих случаях интегралы от элементарных функций не выражаются через известные функции, и образуют так называемые *специальные функции*, (интегральный синус, интегральный логарифм, пр.) которые широко используются в различных разделах математики.

Г. Примеры вычисления интегралов

Рассмотрим некоторые простейшие приемы вычисления неопределенных интегралов.

$$\text{а)} \quad I = \int \frac{dx}{x^2 - a^2}.$$

Используя стандартное разложение на простейшие дроби

$$\frac{1}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \left[\frac{1}{x - a} - \frac{1}{x + a} \right],$$

получаем

$$I = \frac{1}{2a} \int dx \left[\frac{1}{x - a} - \frac{1}{x + a} \right] = \frac{1}{2a} \left\{ \int \frac{d(x - a)}{x - a} - \frac{d(x + a)}{x + a} \right\} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x - a}{x + a} \right| + C. \blacksquare$$

$$\text{б)} \quad I = \int \operatorname{tg} x dx.$$

Воспользуемся теоремой 5°

$$I = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = \int \frac{d(-\cos x)}{\cos x} = -\ln |\cos x| + C. \blacksquare$$

Заметим, что в примерах а) и б) соответствующая замена переменной интегрирования не проводится явно, а из экономии письма лишь подразумевается.

$$\text{в)} \quad I = \int x \cdot \sin x dx.$$

Воспользуемся теоремой 4° интегрирования по частям

$$I = \int x \cdot d(-\cos x) = -x \cdot \cos x + \int \cos x dx = \sin x - x \cdot \cos x + C. \blacksquare$$

Пользуясь понятием дифференциала, мы представили здесь $\sin x dx$ как $d(-\cos x)$.

$$d) \quad I = \int \operatorname{arctg} x dx.$$

Интегрируя по частям с использованием формулы (16.16), получаем

$$I = x \cdot \operatorname{arctg} x - \int x \cdot d(\operatorname{arctg} x) = x \cdot \operatorname{arctg} x - \int \frac{x dx}{1+x^2} = x \cdot \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C. \blacksquare$$

При вычислении последнего интеграла подразумевается преобразование дифференциала $x dx = d(1+x^2)/2$ с последующей заменой переменной $u = 1+x^2$.

$$e) \quad I = \int x(x+1)^5 dx.$$

Положим $u = x + 1$. Поскольку $du = d(x+1) = dx$, имеем

$$I = \int (u-1)u^5 du = \frac{1}{7}u^7 - \frac{1}{6}u^6 + C = \frac{1}{7}(x+1)^7 - \frac{1}{6}(x+1)^6 + C. \blacksquare$$

На последнем этапе преобразований мы вернулись к исходной переменной x .

$$f) \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1-(3x+2)^2}}.$$

Положим $u = 3x + 2$; тогда $du = d(3x+2) = 3dx$, так что $dx = du/3$. Интегрируя по du и возвращаясь затем к исходной переменной, получим

$$I = \frac{1}{3} \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{1}{3} \arcsin u + C = \frac{1}{3} \arcsin(3x+2) + C. \blacksquare$$

Д. Определенный интеграл

В элементарной геометрии каждому конечному треугольнику приписывается некоторое число - его площадь. Если некоторая фигура может быть разбита на конечное число треугольников, то ее площадь считается равной сумме площадей составляющих ее треугольников. Принципиальная трудность возникает при попытке определить площадь фигуры, ограниченной кривой линией, например, площадь круга или эллипса.

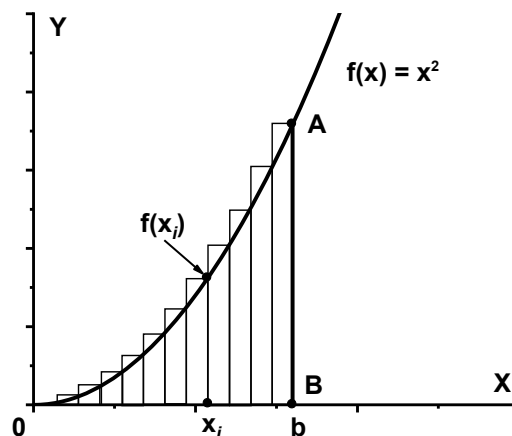


Рис. 17.1.

При определении площадей такого рода фигур естественно возникает своеобразный предельный переход. Рассмотрим площадь фигуры, ограниченной параболой $y = f(x) = x^2$, отрезком прямой $x = b$ и осью x (см. Рис. 17.1). Разобьем отрезок $[0, b]$ оси x на n частей длины $\Delta x = b/n$. Ясно, что $x_i = ib/n$ ($i = 1, 2, \dots, n$) есть правый конец отрезка номер i . Построим на i -м

отрезке, как на стороне, прямоугольник высотой $f(x_i) = x_i^2$. Тогда получим ступенчатую фигуру, показанную на Рис. 17.1. Площадь этой ступенчатой фигуры равна

$$S_n = \sum_{i=1}^n f(x_i)[x_i - x_{i-1}].$$

Геометрически очевидно, что при достаточно малых Δx (или, другими словами, с увеличением числа прямоугольников n) площадь ступенчатой фигуры будет стремиться к некоторому пределу, который естественно считать площадью «криволинейной трапеции» OAB . Конечно, с уменьшением Δx площадь каждого прямоугольника стремиться к нулю,

$$f(x_i)[x_i - x_{i-1}] \rightarrow 0,$$

но одновременно, число этих прямоугольников бесконечно возрастает. Поэтому предел суммы площадей прямоугольников может оказаться отличным от нуля,

$$S = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i)[x_i - x_{i-1}] = \int_0^b f(x)dx, \quad (17.10)$$

где второе равенство есть обозначение этого предела. Оказывается, что этот предел существует для каждой непрерывной на некотором отрезке $[a, b]$ функции $f(x)$ и называется *определенным интегралом* от этой функции на отрезке $[a, b]$. Сами числа a и b называются *пределами интегрирования* и показывают, от какой точки на оси x интегрирование начинается (нижний предел) и в какой точке оканчивается (верхний предел). Кроме того, дифференциал dx показывает, по какой переменной производится интегрирование. В конкретном примере, показанном на Рис. 17.1, совокупная площадь прямоугольников (n -я "интегральная сумма") есть

$$S_n = \sum_{s=1}^n x_s^2 \Delta x = \sum_{s=1}^n \left(\frac{sb}{n} \right)^2 \cdot \frac{b}{n} = \left(\frac{b}{n} \right)^3 \sum_{s=1}^n s^2.$$

С помощью метода математической индукции (см. §12) нетрудно доказать, что

$$\sum_{s=1}^n s^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Поэтому, используя теоремы о пределах из §14, находим предел последовательности интегральных сумм

$$S_{OAB} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{6} b^3 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{n^3} = \frac{b^3}{3}.$$

В этих формулах величины b и S_{OAB} являются отвлеченными числами. Чтобы перейти к размерным единицам положим, что длина отрезка OB равна b единиц. Тогда, в силу $y = x^2$, длина отрезка AB равна b^2 единиц. Для площади криволинейного треугольника получаем, таким образом $S_{AOB} = |OB| \cdot |AB| / 3$, в то время как площадь прямоугольного треугольника OAB равна, как известно, $|OB| \cdot |AB| / 2$.

Из определения определенного интеграла, как предела интегральных сумм (17.10), нетрудно получить следующие его свойства

$$1^\circ. \quad \int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx.$$

Действительно, пусть $b > a$. Тогда в любой интегральной сумме (17.10), составленной для левой части формулы 1° , все разности $\Delta x = x_i - x_{i-1} > 0$. Напротив, в такой же интегральной сумме, составленной для правой части этой формулы, где интегрирование идет от большего числа к меньшему, все разности $x_i - x_{i-1} < 0$. Отсюда, в пределе $\Delta x \rightarrow 0$, и следует формула 1° .

$$2^\circ. \quad \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx,$$

где $a < c < b$. Это свойство геометрически очевидно из Рис. 17.2, так как оно есть выражение того факта, что сумма площадей криволинейных трапеций AA_1C_1C и CC_1B_1B на рисунке 17.2 равна площади криволинейной трапеции AA_1B_1B .

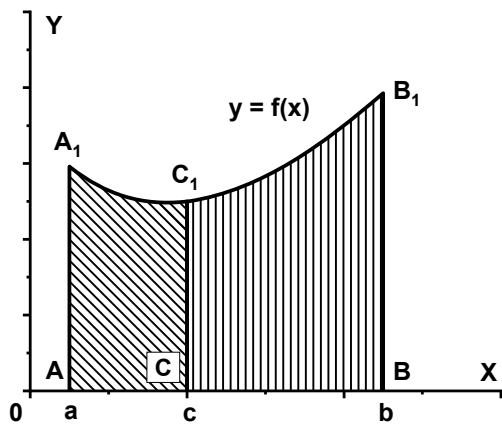


Рис. 17.2.

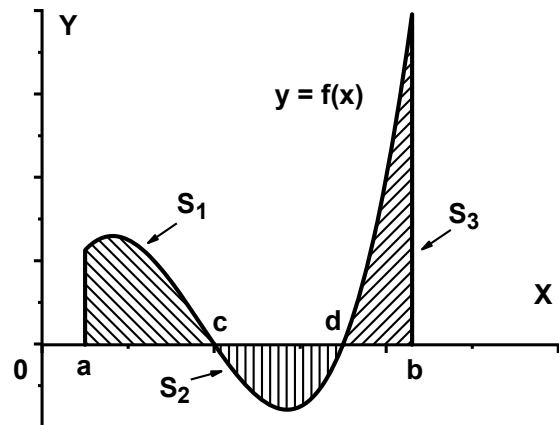


Рис. 17.3.

Заметим также, что если $b > a$ и $f(x) \geq 0$ на отрезке $[a, b]$, то каждое слагаемое в интегральной сумме (17.10) положительно. Следовательно, в пределе $\Delta x \rightarrow 0$ имеем

$$3a^\circ. \quad f(x) \geq 0; \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(x)dx \geq 0; \quad b > a.$$

Если же $f(x) \leq 0$ на отрезке $[a, b]$, то каждый член интегральной суммы отрицателен, $f(x_i)(x_i - x_{i-1}) \leq 0$ и, следовательно

$$3b^\circ. \quad f(x) \leq 0; \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(x)dx \leq 0; \quad b > a.$$

Мы видим, что определенный интеграл (17.10) на самом деле дает площадь (положительное число!) криволинейной трапеции только в том случае, когда $f(x) \geq 0$ (см., например, Рис. 17.2). Если же на некотором отрезке функция $f(x)$ отрицательна, то интеграл (17.10) будет численно равен площади фигуры, заключенной между графиком $y = f(x)$ и осью x , взятой, однако, с противоположным знаком. Так, для функции, показанной на рисунке 17.3, получим

$$\int_a^c f(x)dx = S_1; \quad \int_c^d f(x)dx = -S_2; \quad \int_d^b f(x)dx = S_3.$$

где S_1 , S_2 и S_3 - площади заштрихованных на Рис. 17.3 фигур. Если же мы будем вычислять интеграл от этой функции по всему отрезку $[a, b]$, то в соответствии с формулой 2° , получим

$$\int_a^b f(x)dx = \left(\int_a^c + \int_c^d + \int_d^b \right) f(x)dx = S_1 - S_2 + S_3.$$

Е. Формула Ньютона-Лейбница

До гениальных открытий создателей математического анализа - Ньютона и Лейбница - не существовало никакой видимой связи между изложенной в предыдущем пункте процедурой

определения площадей криволинейных фигур и задачей определения экстремумов функции (что, как мы увидим в §18, сводится к вычислению производной). Удивительное открытие Ньютона и Лейбница состоит в обнаружении этой связи. Рассмотрим некоторую функцию $f(x)$, непрерывную на отрезке $[a, b]$ (см. Рис. 17.4). Возьмем произвольную точку x внутри отрезка $[a, b]$ и определим площадь криволинейной трапеции AA_1C_1C

$$S_{AA_1C_1C} = \int_a^x f(x_1) dx_1 = \Phi(x).$$

Если точку a считать фиксированной, а точку x - переменной, то мы получим, очевидно, некоторую функцию $\Phi(x)$, зависящую от переменного верхнего предела интегрирования x . Чтобы вычислить производную функции $\Phi(x)$, составим отношение

$$\frac{\Phi(x + \Delta x) - \Phi(x)}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x)\Delta x}{\Delta x} = f(x + \Delta x).$$

Мы воспользовались здесь тем, что разность площадей трапеций $\Phi(x + \Delta x) - \Phi(x)$ приближенно равна площади малого прямоугольника, показанного на Рис. 17.4 двойной штриховкой. Пользуясь теперь определением производной из §16 и непрерывностью функции $f(x)$, получаем в пределе $\Delta x \rightarrow 0$ замечательный результат

$$\Phi'(x) = \left(\int_a^x f(x) dx \right)' = f(x). \quad (17.11)$$

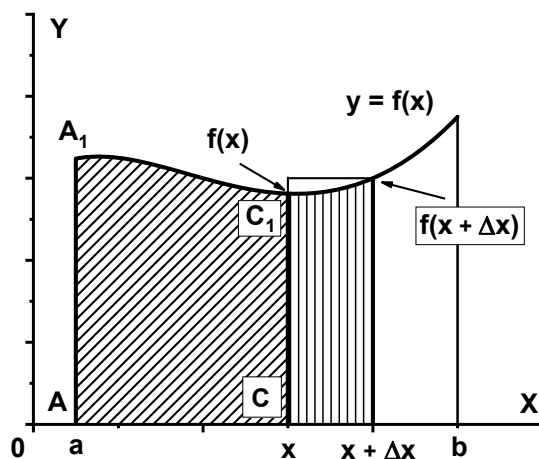


Рис. 17.4.

Следовательно, задача вычисления площади криволинейной фигуры сводится к задаче нахождения первообразной (т. е. неопределенного интеграла) для соответствующей функции. Если $\Phi(x)$ есть некоторая первообразная для $f(x)$, то в силу соотношения (17.11), выполняется равенство

$$\int_a^x f(x) dx = \Phi(x) + C \quad (*)$$

где C - подлежащая определению постоянная. Определить ее легко, заметив, что для любой функции интеграл по отрезку нулевой длины $[a, a]$ равен нулю. Полагая $x = a$ в равенстве (*), получим $C = -\Phi(a)$. Полагая теперь $x = b$ в равенстве (*), получим знаменитую формулу Ньютона-Лейбница

$$\int_a^b f(x) dx = \Phi(x) \Big|_a^b = \Phi(b) - \Phi(a), \quad (17.12)$$

где промежуточное равенство есть просто удобное обозначение для разности $\Phi(b) - \Phi(a)$.

Рассмотрим несколько примеров вычисления определенных интегралов.

$$g) \quad I = \int_0^1 \operatorname{arctg} x dx.$$

Пользуясь результатом примера d) и формулой (17.12), находим

$$I = \left(x \cdot \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) \right) \Big|_0^1 = \operatorname{arctg} 1 - \frac{\ln 2}{2} = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}. \blacksquare$$

Правила интегрирования 1° и 2° из пункта Б остаются справедливыми и при вычислении определенных интегралов.

$$h) \quad I = \int_0^{\pi} \left(\frac{x}{2} + 3 \sin x \right) dx.$$

Имеем

$$I = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} x dx + 3 \int_0^{\pi} \sin x dx = \left(\frac{x^2}{4} - 3 \cos x \right) \Big|_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{4} + 6. \blacksquare$$

На этом примере можно оценить удобство обозначений (17.12).

Правило интегрирования по частям 4° из пункта Б принимает для определенных интегралов следующий вид

$$\int_a^b v(x) du(x) = u(x)v(x) \Big|_a^b - \int_a^b u(x) dv(x).$$

Используем этот прием при вычислении интеграла

$$i) \quad I = \int_0^2 x \ln x dx.$$

Пользуясь тем, что $x dx = dx^2/2$, получаем

$$I = \frac{1}{2} \int_0^2 \ln x dx^2 = \frac{x^2}{2} \ln x \Big|_0^2 - \frac{1}{2} \int_0^2 x^2 d \ln x = 2 \ln 2 - 1. \blacksquare$$

В приведенных вычислениях учтено, что $d(\ln x) = dx/x$, а при вычислении "внеинтегрального" члена использовано соотношение

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \ln x = 0.$$

Теоремы 5° и 6° из пункта Б о замене переменных в неопределенном интеграле также переносятся на случай определенного интеграла. Необходимо лишь следить за тем, чтобы на всем промежутке интегрирования $[a, b]$ замена переменных была взаимно однозначной. В противном случае следует разбить данный промежуток на несколько промежутков, в которых взаимно однозначная замена переменных возможна.

$$j) \quad I = \int_0^2 x^2 \sin(x^3) dx.$$

Воспользуемся тем, что $x^2 dx = dx^3/3$ и положим $u(x) = x^3$. В интервале $[0, 2]$ функция $u(x)$ монотонно возрастает и имеет обратную функцию $x = u^{1/3}$. Поэтому замена переменных $u = x^3$ возможна. При $x = 0$ имеем $u(0) = 0$, а при $x = 2$ имеем $u(2) = 8$. Получаем, поэтому

$$I = \frac{1}{3} \int_0^2 \sin(x^3) dx^3 = \frac{1}{3} \int_0^8 \sin u du = \frac{1}{3} (-\cos x) \Big|_0^8 = \frac{1 - \cos 8}{3}.$$

Таким образом, при переходе к новой переменной необходимо заменить соответствующим образом пределы интегрирования.

Ж. Контрольные задачи

Вычислить интегралы.

1°. $I = \int \sin^2 x dx$

2°. $I = \int x^2 e^{-x} dx$

3°. $I = \int \frac{\cos x dx}{4 + \sin^2 x}$

4°. $I = \int_{-\pi/4}^{\pi/2} \sqrt{1 - \cos^2 x} dx$

5°. $I = \int_2^9 \sqrt[3]{x-1} dx$

КОНТРИМЕРЫ - ОСНОВА ПОНИМАНИЯ

Математические определения возникают не произвольно, не по чьей-то прихоти. Они выстраданы и выношены всем предыдущим, так сказать, "внутриутробным", развитием какого-либо раздела математики. Как правило, окончательную формулировку математические определения приобретают лишь к моменту, когда развитие данного раздела математики в главных чертах закончено.*) С другой стороны, когда накопленный материал приводится в систему в монографии или учебнике, то определения даются, естественно, в самом начале изложения. В этом состоит большая трудность для человека, впервые изучающего предмет, поскольку информация о том, чем мотивировано данное, часто довольно абстрактное, определение в начальный момент отсутствует. А ведь новичку нужно как-то вдуматься в определение, понять его целесообразность. Тем более, что переоценить важность определений невозможно! Структура математики такова, что коль скоро определения даны, а правила логики сформулированы, все содержание данного раздела (или даже многих разделов и ветвей) математики однозначно предreshено. Математическое определение - это своего рода молекула ДНК, в которой зашифрована вся информация о будущем развитии организма. Поэтому, во избежание "мутаций", ни одно слово, ни одну запятую в данном определении нельзя опустить или переставить.

Существует, тем не менее, достаточно эффективный, хотя и трудный способ "прощупать" новое определение с помощью конструирования примеров и контрпримеров. Этот метод мы продемонстрировали в § 14, осваивая понятие предела последовательности. Как помнит читатель, в § 14 мы рассматривали конкретные примеры последовательностей самых разных типов выясняя, какой же именно характер поведения точек последовательности x_n при $n \rightarrow \infty$ удовлетворяет определению предела. Заметим, что для того, чтобы яснее понять, какие последовательности имеют предел, важно было построить примеры последовательностей, не имеющих предела в смысле данного определения. Мало этого, для развития интуиции, полезно было в каждом конкретном случае указать причину, по которой данная последовательность пределом не обладает. После того, как такая предварительная работа проведена и понятие предела

усвоено творчески и неформально, уже довольно легко следить за развитием теории пределов, т. е. доказывать теоремы о пределах и осваивать технику их вычисления.

*) Так, Ньютон и Лейбниц вычисляли производные и интегралы задолго до того, как близкое к современному определение предела, т. е. понятия, которое лежит в основе этих операций, впервые появилось в учебнике анализа французского математика Коши.

§ 18. Применение производных и интегралов к решению задач

А. Построение касательных

Чтобы построить касательную в точке x_0 к заданной непрерывной функции $y = f(x)$, проведем сначала секущую, пересекающую график этой функции в точке с координатами $(x_0; f(x_0))$ и в некоторой близкой точке с координатами $(x_1; f(x_1))$ (см. Рис.18.1). Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки плоскости можно записать в виде (см. также §4)

$$y = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0). \quad (*)$$

Действительно, это уравнение вида $y = kx + b$. Кроме того, при $x = x_0$ имеем $y = f(x_0)$, а при $x = x_1$ получаем $y = f(x_1)$. По определению, касательной к функции $y = f(x)$ в точке $x = x_0$ называется предельное положение секущей, проходящей через точку x_0 , и близкую точку x_1 при стремлении $x_1 \rightarrow x_0$ по любому закону.

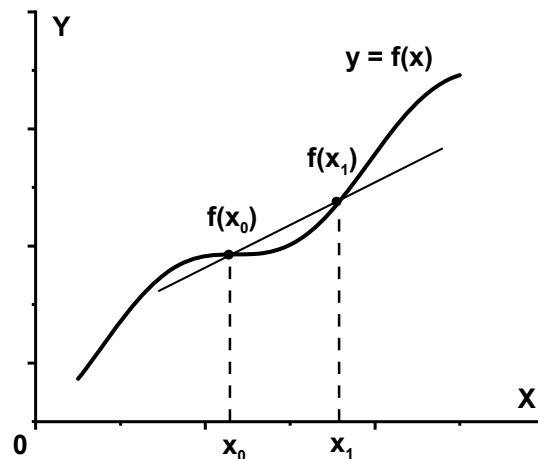


Рис. 18.1.

Если в равенстве (*) перейти к пределу $x_1 \rightarrow x_0$, и учесть определение производной, данное в §16А, то получим уравнение касательной в виде

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0). \quad (18.1)$$

Мы видим, следовательно, что касательная к функции существует только в тех точках, в которых эта функция дифференцируема, т. е. имеет производную, как об этом уже упоминалось в §16А. В точках, где непрерывная функция имеет излом, предельное положение секущей зависит от того, слева или справа от точки x_0 выбирается близкая точка x_1 , т. е. зависит от закона, по которому $x_1 \rightarrow x_0$. Таким образом, в точках излома функции касательная неопределена.

а) Построить уравнение касательной к функции $y = x^2 - 2x + 5$ в точке ее пересечения с осью y .

Парабола пересекает ось y в точке, с координатами $x = 0, y = 5$. Далее, $y' = 2x - 2$, поэтому $y'(0) = -2$. В обозначениях, принятых в (18.1), имеем, следовательно: $x_0 = 0; f(x_0) = 5; f'(x_0) = -2$. Поэтому уравнение искомой касательной есть $y = -2x + 5$. ■

б) На кривой $y = x^2 - x + 1$ найти точку, в которой касательная параллельна прямой $y = 3x - 1$.

С учетом изложенного в §4 нетрудно сообразить, что две прямые $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$ параллельны в том, и только в том случае, когда $k_1 = k_2$. Угловым коэффициентом касательной к данной параболе есть $k_1(x) = y'(x) = 2x - 1$, а угловым коэффициентом данной прямой $k_2 = 3$. Из равенства $k_1(x) = k_2$ находим искомую точку $x = 2$. При этом $y = 3$. ■

с) Найти уравнения общих касательных к параболам $y = x^2$ и $y = -x^2 + 3x - 2$.

Уравнение касательной к параболе $y = x^2$ в точке x_0 есть $y = 2x_0(x - x_0) + x_0^2$; а уравнение касательной к параболе $y = -x^2 + 3x - 2$ в точке x_1 есть $y = (-2x_1 + 3)(x - x_1) + (-x_1^2 + 3x_1 - 2)$.

Чтобы эти прямые совпадали, необходимо равенство их угловых коэффициентов и свободных членов

$$\begin{cases} 2x_0 = -2x_1 + 3 \\ -x_0^2 = x_1^2 - 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 + x_1 = 1.5 \\ x_0^2 + x_1^2 = 2 \end{cases}.$$

Отсюда получаем два возможных решения

$$\begin{cases} x_0 = (3 - \sqrt{7})/4 \\ x_1 = (3 + \sqrt{7})/4 \end{cases}, \quad \text{либо} \quad \begin{cases} x_0 = (3 + \sqrt{7})/4 \\ x_1 = (3 - \sqrt{7})/4 \end{cases}. \quad \blacksquare$$

Задачи а) - с) являются типичными задачами аналитической геометрии. Мы видим, что для их решения совершенно не обязательно (хотя и очень полезно!) обращаться к каким-либо чертежам.

Б. Исследование функций

Ранее в §11 отмечалось, что полное исследование функции $y = f(x)$ и построение ее графика требует, как правило, изучения ее производной. Для получения интервалов монотонности функции используется следующая теорема

1°. Если на некотором отрезке $[a, b]$ производная $f'(x) \geq 0$, то функция $y = f(x)$ на этом отрезке монотонно возрастает. Если же на отрезке $[a, b]$ имеем $f'(x) \leq 0$, то $y = f(x)$ на этом отрезке монотонно убывает.

Особым является случай, когда $f'(x) \equiv 0$ в каждой точке некоторого отрезка $[a, b]$. Тогда на этом отрезке $y(x) = \text{const}$. Геометрический смысл теоремы 1° очевиден из Рис. 18.2 и 18.3 и того факта, что угловым коэффициентом касательной к функции $y = f(x)$ в точке x_0 , как мы видели в пункте А, есть $f'(x_0)$.

Экстремумы (т. е. точки локального максимума или минимума) функции находятся с помощью теоремы Ферма

2°. Если в точке x_0 дифференцируемая функция $y = f(x)$ имеет экстремум, то $f'(x_0) = 0$.

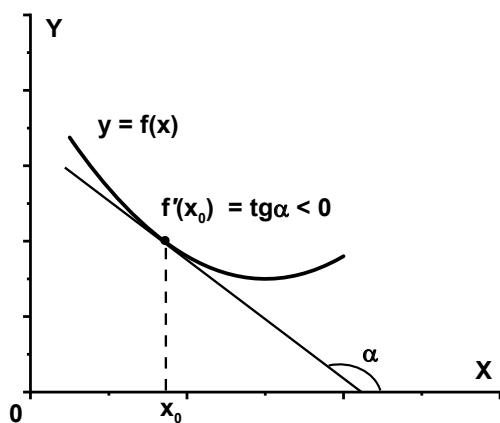


Рис. 18.2.

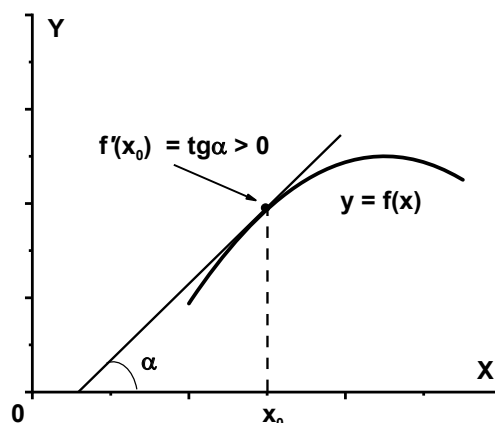


Рис. 18.3.

Другими словами, в точках экстремума функции $y = f(x)$ касательная к этой функции параллельна оси x (см. Рис. 18.4, 18.5).

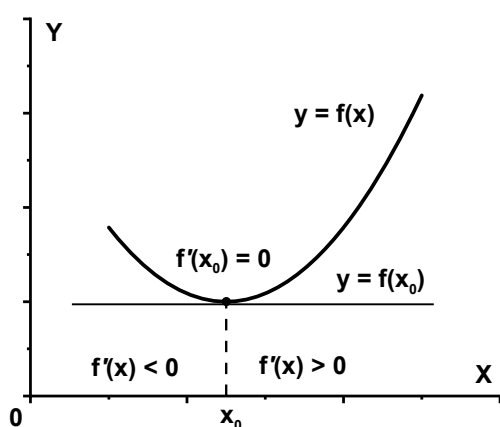


Рис. 18.4.

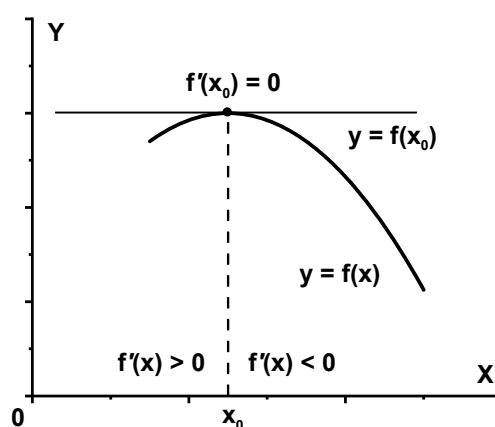


Рис. 18.5.

Отличить точку локального минимума функции (Рис. 18.4) от точки локального максимума (Рис. 18.5) можно, изучая знак ее производной вблизи $x = x_0$. Как видно из Рис. 18.4, 18.5 имеем следующее правило

3°. Если $f'(x) < 0$ при $x < x_0$ и $f'(x) > 0$ при $x > x_0$, то в точке x_0 имеется локальный минимум. Наоборот, если $f'(x) > 0$ при $x < x_0$ и $f'(x) < 0$ при $x > x_0$, то в точке x_0 функция имеет локальный максимум.

Анализ экстремумов дифференцируемой функции можно также провести, анализируя знак второй производной функции в критической точке. Легко убедиться, что в случае локального минимума вторая производная функции в критической точке x_0 положительна, $f''(x_0) > 0$, а в случае локального максимума, вторая производная отрицательна, $f''(x_0) < 0$.

Заметим, что кроме точек экстремума, уравнение $f'(x) = 0$ дает еще и другие "критические" точки функции $y = f(x)$, для которых условия 3° не выполняются (так называемые *точки перегиба* функции). Существование таких точек ясно из Рис. 18.6 и 18.7. На Рис. 18.6, слева от точки перегиба x_0 функция $y = f(x)$ является выпуклой вниз, а справа - выпуклой вверх, а на Рис. 18.7 интервалы выпуклости меняются местами.

d) Определить интервалы монотонности и экстремумы функции $y = (x - 2)^2(x - 3)^2$.

Вычисляя производную, имеем

$$y' = 2(x - 2)(x - 3)^2 + 2(x - 2)^2(x - 3) = 4(x - 2)(x - 2,5)(x - 3).$$

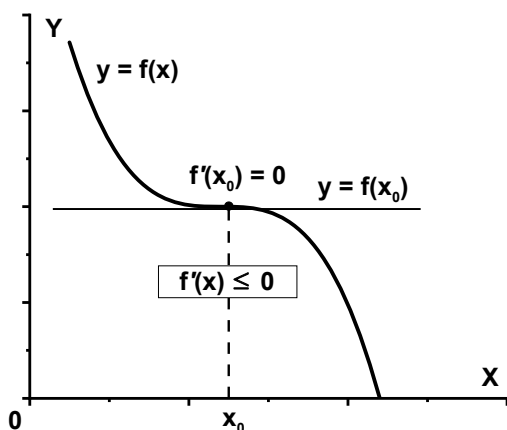


Рис. 18.6.

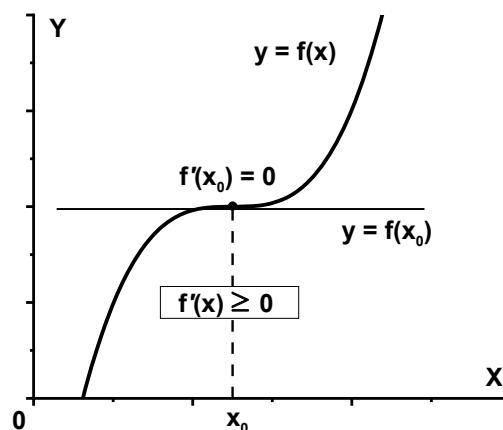


Рис. 18.7.

Следовательно, критическими для этой функции являются точки $x_1 = 2$, $x_2 = 2,5$ и $x_3 = 3$. Используя метод интервалов (см. §3) находим, что $f'(x) < 0$ при $x \in (-\infty, 2) \cup (2,5, 3)$ и $f'(x) > 0$ при $x \in (2, 2,5) \cup (3, \infty)$. Пользуясь правилом 3° получаем, что точки $x_1 = 2$ и $x_3 = 3$ являются локальными минимумами, а точка $x_2 = 2,5$ - локальным максимумом этой функции. ■

В. Задачи на экстремум

Прежде всего, рассмотрим задачу об определении максимального и минимального значений функции на замкнутом отрезке. Рецепт определения этих значений состоит в том, что сначала находятся экстремальные значения функции во внутренних точках отрезка $[a, b]$. Затем к ним добавляются значения функции на концах этого отрезка, т. е. $f(a)$ и $f(b)$, и затем уже из всех полученных значений функции выбирается наибольшее, либо, соответственно, наименьшее значение функции на заданном отрезке.

е) Определить наименьшее и наибольшее значение функции $y = x^3 - 4x^2 + 4x + 3$ на отрезке $[-1/2, 3]$.

Находим сначала критические точки этой функции, решая уравнение

$$y'(x) = 3x^2 - 8x + 4 = 0,$$

откуда $x_1 = 2/3$ и $x_2 = 2$. С помощью правила 3° из пункта Б определяем, что точке $x_1 = 2/3$ соответствует локальный максимум, а точке $x_2 = 2$ - локальный минимум. (Сделать это проще всего, разложив производную $y'(x)$ на множители). В точках экстремума, которые оказываются внутри заданного интервала, получаем $y(2/3) = 4 + 5/27$; $y(2) = 3$. Кроме того, на концах отрезка имеем $y(-1/2) = -1/8$; $y(3) = 6$. Следовательно, минимальное значение функции достигается в граничной точке $x = -1/2$, $y_{\min} = -1/8$, а максимальное значение - в точке $x = 3$, $y_{\max} = 6$. ■

График функции примера е) показан на Рис.18.8. Из этого графика ясна необходимость исследования значений функции на концах заданного интервала при определении ее абсолютного максимума или минимума на этом интервале.

ф) Даны точки $A(0; 3)$ и $B(4; 5)$. Найти на оси x точку M такую, что сумма расстояний от этой точки до точек A и B наименьшая.

Пусть точка M имеет координаты $(x; 0)$ (см. Рис. 18.9). По определению, расстояние d между двумя точками плоскости $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$ равно

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Следовательно, сумма расстояний $|AM|$ и $|BM|$ равна

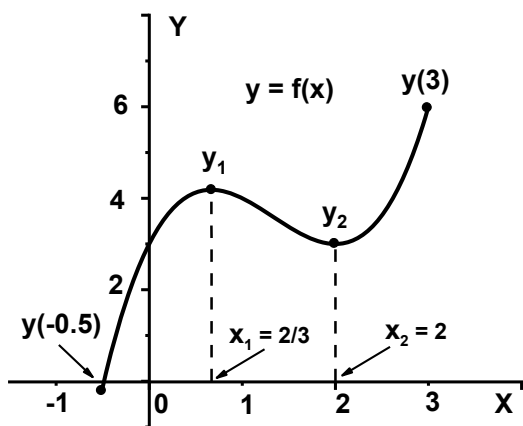


Рис. 18.8.

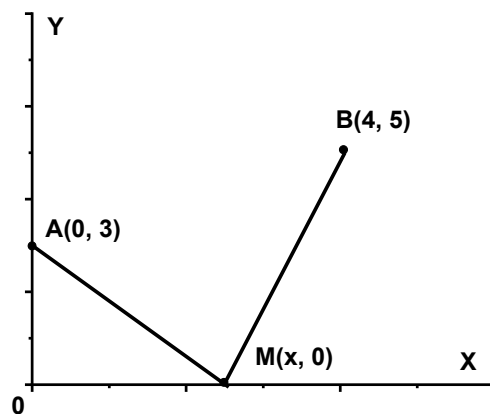


Рис. 18.9.

$$y(x) = \sqrt{x^2 + 9} + \sqrt{(x-4)^2 + 25}.$$

Дифференцируя эту функцию и приравнявая производную нулю, получаем

$$y'(x) = 0 \Rightarrow x\sqrt{(x-4)^2 + 25} = (4-x)\sqrt{x^2 + 9}.$$

Решение этого уравнения существует лишь при $0 \leq x \leq 4$ (почему?). При этом обе его части положительны, и возводя его в квадрат, получаем эквивалентное уравнение (см. §6)

$$25x^2 = 9(x-4)^2 \Rightarrow 5|x| = 3|x-4|.$$

Отсюда, учитывая что $0 \leq x \leq 4$, находим $x = 3/2$. Таким образом, у функции $y(x)$ имеется единственная критическая точка, которая заведомо является минимумом, поскольку при $x \rightarrow \pm \infty$ имеем $y \rightarrow +\infty$. ■

Г. Площади криволинейных фигур

g) Вычислить площадь круга радиуса R .

Из симметрии задачи ясно, что площадь круга равна учетверенной площади сектора с центральным углом $\alpha = \pi/2$ (см. Рис. 18.10). Уравнение дуги окружности с центром в начале координат есть $y(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$. Отсюда для площади круга находим

$$S = 4 \int_0^R \sqrt{R^2 - x^2} dx.$$

Положим здесь $x = R \sin \varphi$. При увеличении угла φ в интервале $0 \leq \varphi \leq \pi/2$, переменная x монотонно возрастает от 0 до R . Учитывая, что $dx = R d(\sin \varphi) = R \cos \varphi d\varphi$, получаем

$$S = 4R^2 \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \sin^2 \varphi} \cos \varphi d\varphi = 2R^2 \int_0^{\pi/2} [1 + \cos 2\varphi] d\varphi = \pi R^2 + R^2 \int_0^{\pi/2} \cos 2\varphi d(2\varphi) = \pi R^2. \blacksquare$$

h) Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $xy = 3$ и $x + y = 4$.

Построив графики прямой $y = 4 - x$ и гиперболы $y = 3/x$, получим фигуру, заштрихованную на Рис. 18.11. Решая систему уравнений

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ xy = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ y_1 = 3 \end{cases} \text{ либо } \begin{cases} x_2 = 3 \\ y_2 = 1 \end{cases},$$

находим точки пересечения линий $A_1(1; 3)$ и $B_1(3; 1)$.

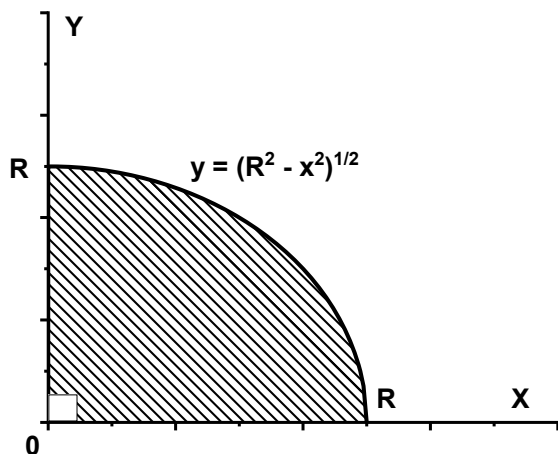


Рис. 18.10.

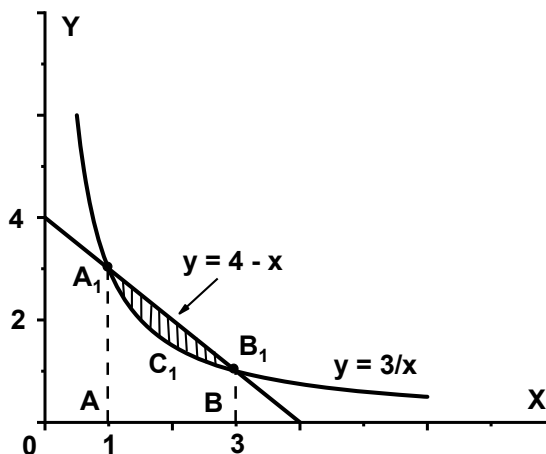


Рис. 18.11.

Искомая площадь может быть получена как разность площадей трапеции AA_1B_1B и криволинейной трапеции $AA_1C_1B_1B$

$$S = \int_1^3 (4 - x) dx - 3 \int_1^3 \frac{dx}{x} = \left(4x - \frac{x^2}{2} - 3 \ln x \right) \Big|_1^3 = 4 - 3 \ln 3.$$

i) Фигура ограничена линиями $y = x^2 + 1$; $y = 0$; $x = 0$; $x = 1$. В какой точке $(x_0; y_0)$ графика функции $y = x^2 + 1$ надо провести касательную к нему так, чтобы она отсекала от фигуры трапецию наибольшей площади?

Уравнение касательной к графику функции $y = x^2 + 1$ в некоторой точке x_0 , как следует из (18.1), имеет вид

$$y = 2x_0x - x_0^2 + 1.$$

Интегрируя эту прямую на отрезке $[0, 1]$, получаем площадь трапеции, как функцию координаты x_0

$$S(x_0) = \int_0^1 [2x_0x - x_0^2 + 1] dx = -x_0^2 + x_0 + 1.$$

Эта парабола имеет, очевидно, единственный максимум, которому соответствует критическая точка

$$S'(x_0) = -2x_0 + 1 = 0; \quad \Rightarrow \quad x_0 = 1/2.$$

Следовательно, касательную нужно проводить через точку $(1/2; 5/4)$. ■

Читателю рекомендуется сделать эскиз графика и убедиться, что найденное решение является единственно возможным.

Д. Контрольные задачи

- 1°. Найти координаты точек пересечения с осью x тех касательных к графику функции $y = (x+1)/(x-3)$, которые образуют с осью x угол $3\pi/4$.
- 2°. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $y = x/3 + 2/x$ на отрезке $[1, 3]$.
3. В сегмент параболы $y^2 = 2px$, отсекаемый прямой $x = 2a$, вписать прямоугольник наибольшей площади.
- 4°. Найти площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y = x^2$ и $y = 2x - x^2$.

5°. При каком значении параметра a площадь S криволинейной трапеции, ограниченной линиями

$$y = \frac{x}{6} + \frac{1}{x^2}; \quad y = 0; \quad x = a; \quad x = 2a,$$

принимает наименьшее значение?

§ 19. Комплексные числа

А. Числовые системы

Господь Бог дал математикам натуральные числа, все остальное они создали сами (Л. Кронекер, немецкий математик). Понятие о натуральном числе естественно возникает при попытке определить количество животных в стаде, количество деревьев в саду, брильянтов в царской короне, и в других подобных случаях, когда пересчитываются однородные предметы и сравниваются их количества. Натуральные числа вводятся в современной математике аксиоматически.

1. Существует натуральное число единица, которое обозначается символом 1.
2. Каждое последующее натуральное число b получается прибавлением единицы к предыдущему натуральному числу a , то есть $b = a + 1$.

Отсюда можно вывести правила сложения и умножения натуральных чисел, ввести понятие о простых и составных натуральных числах, установить почти очевидные правила, которым починяются операции сложения и умножения натуральных чисел, а именно

- a) $a + b = b + a,$
 - b) $a \cdot b = b \cdot a,$
 - c) $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c.$
- (*)

Что же может быть проще собрания натуральных чисел? Все они расположены в строгом порядке, друг за другом. У каждого натурального числа (кроме единицы) есть предыдущее и последующее. Однако, уже в понятии натурального числа просматривается глубина и сложность математики. Во-первых, в собрании натуральных чисел нет наибольшего. Сколь велико бы не было данное натуральное число, всегда можно получить последующее, прибавив к данному числу единицу. Так, впервые в математике появляется понятие бесконечности, которое существенно усложняет построение многих разделов математики. Далее, у натуральной единицы нет предыдущего числа. Чтобы исправить эту ситуацию, вводится понятие нуля, и далее счет продолжается в обратном порядке, -1, -2, и т. д. Таким образом, мы расширяем совокупность натуральных чисел, $\{N\}$, до совокупности целых чисел $\{Z\}$. Такое расширение крайне полезно, поскольку оно позволяет решать в целых числах уравнение

$$x + a = b. \tag{19.1}$$

Действительно, в области натуральных чисел это уравнение не имеет решения при $b < a$. Переходя к совокупности целых чисел, мы должны определить для них операции сложения и умножения, причем так, чтобы сохранялись свойства операций (*). Это нужно для того, чтобы множество натуральных чисел было просто подмножеством совокупности целых чисел. При этом выясняется, что произведение отрицательного и положительного числа дает отрицательное число, но произведение двух отрицательных чисел должно быть равно положительному числу. Рассмотрим простой числовой пример

$$(5 + (-5)) \cdot (-2) = 5 \cdot (-2) + (-5) \cdot (-2).$$

Левая часть этого равенства очевидно равна нулю. Правая же его часть обратится в нуль, только если $(-5) \cdot (-2) = 10$.

Идея расширения множества элементов с сохранением всех предыдущих их свойств является одной из центральных в математике. Так, в области натуральных и целых чисел элементарное уравнение

$$x a = b \quad (19.2)$$

в общем случае не имеет решения. Поэтому разумно расширить множество целых чисел, добавив к нему множество всех отношений целых чисел b/a и получив, таким образом, множество рациональных чисел $\{Q\}$. При этом случай $a = 0$ следует исключить, поскольку при $a = 0$ и $b \neq 0$, уравнение (19.2) не имеет решения, а при $a = b = 0$ оно имеет бесконечное множество решений.

Заметим, что в множестве рациональных чисел содержатся и целые числа, как частный случай, который возникает, когда число b делится на a нацело. Введя множество рациональных чисел, мы можем рассуждать о *частях* целого, и можем, например, разделить пирог на части по числу пришедших в гости друзей.

Обращаться с рациональными числами нас учат в начальной школе, и при этом ученикам трудно осознать, насколько сильно множество рациональных чисел отличается от множества целых чисел. Если множество целых чисел *дискретно*, так что на числовой оси каждое целое число стоит отдельно, на равном расстоянии от предыдущего и последующего числа, то множество рациональных чисел *всюду плотно*. Это означает, что как бы близко ни стояли друг к другу два рациональных числа p и q , между ними можно вставить еще одно рациональное число, положив например, $s = (p + q)/2$. Следовательно, у рационального числа нет ближайшего. Соответственно, в множестве рациональных чисел нет *порядка*, то есть для рационального числа s нельзя указать предыдущее и последующее число.

Обобщением понятия умножения чисел является операция возведения числа q в целую степень n , как произведение целого числа одинаковых сомножителей

$$s = q^n. \quad (19.3)$$

При этом естественно возникает понятие об обратной операции извлечения корня соответствующей степени, то есть нахождения такого числа q , n - я степень которого равна заданному числу s . Одним из величайших открытий античной математики было доказательство того факта, что в области рациональных чисел уравнение (19.3) может не иметь решения.

Рассмотрим уравнение

$$x^2 = 2, \quad (19.4)$$

и допустим, что его решение имеет вид $x = p/q$, причем целые числа p и q не имеют общих сомножителей, на которые дробь можно сократить. Тогда $p^2 = 2q^2$. Числа p и q не могут быть одновременно четными, так как дробь p/q , по условию, несократима. Они не могут быть одновременно нечетными, так как квадрат нечетного числа дает нечетное число, а p^2 должно быть четным. Предположение, что p нечетно, то есть $p = 2n + 1$, а q – четно, так что $q = 2m$, неверно, так как $(2n + 1)^2$ есть нечетное число. Аналогично, неверно и предположение, что $p = 2n$, а $q = 2m + 1$, поскольку тогда $(2m + 1)^2 = 2n^2$, что невозможно. Таким образом, не существует целых чисел p и q , которые удовлетворяют соотношению $p^2 = 2q^2$.

Возникает парадоксальная ситуация. С одной стороны, множество рациональных чисел $\{Q\}$ всюду плотно, то есть как бы непрерывно. А с другой стороны, в нем нет чисел для решения простого уравнения (19.4). Некоторый свет на этот парадокс проливает представление рациональных чисел в виде десятичных дробей. Нетрудно показать, что десятичное представление рационального числа либо состоит из конечного числа цифр, например $2/25 = 0.08$, либо является бесконечной *периодической* дробью, например $1/7 = 0.(142857)$, где число в скобках показывает бесконечно повторяющуюся совокупность цифр, тот есть период данной бесконечной дроби.

В то же время, если решать уравнение (19.4) итерациями, то для арифметического корня возникает число с *непериодической* последовательностью цифр в дробной части, $x = 1.41421356\dots$. Естественно считать такое решение уравнения (19.4) также некоторым числом, хотя оно и не может быть точно представлено в виде отношения целых чисел p/q . Если к множеству рациональных чисел $\{Q\}$ добавить все числа с бесконечной непериодической дробной частью, то получим совокупность *вещественных* чисел $\{R\}$, в которой множество рациональных чисел является лишь подмножеством. Во множестве вещественных чисел выполнимо алгебраическое сложение, умножение, деление чисел (с исключением деления на нуль), а также возведение чисел в целые и дробные степени, за исключением операции извлечения корней четной степени из отрицательных чисел. Для изображения вещественных чисел удобно ввести вещественную числовую ось, предполагая, что существует взаимно-однозначное соответствие между вещественными числами и точками числовой оси.

Б. Мнимые и составные числа

К сожалению, в области вещественных чисел ряд алгебраических операций все еще остается невыполнимым. В частности, простое квадратное уравнение

$$x^2 + 1 = 0 \quad (19.5)$$

не имеет решения в области вещественных чисел. Формально, дело сводится к невыполнимости в области вещественных чисел операции извлечения квадратного корня из отрицательного числа, $x = \pm\sqrt{-1}$. Решительный шаг в преодолении этой трудности состоит в том, чтобы ввести новый элемент, *мнимую единицу*, положив $\sqrt{-1} = i$, так что $i^2 = -1$. Тогда уравнение (5) будет иметь два решения, $x_1 = i$, $x_2 = -i$. Более того, появляется возможность извлекать квадратные корни из произвольных отрицательных чисел, поскольку $\sqrt{-|a|} = \sqrt{|a|}\sqrt{-1} = i\sqrt{|a|}$. Совокупность элементов вида $a \cdot i$, где a есть произвольное вещественное число, образует множество мнимых чисел. По аналогии с вещественной числовой осью, которую традиционно отождествляют с осью X двумерной декартовой системы координат, мнимые числа удобно расположить вдоль оси Y этой системы координат.

Во множестве мнимых чисел можно ввести операции алгебраического сложения и умножения мнимого числа на вещественное число. Однако это множество незамкнуто по отношению к умножению мнимых чисел, поскольку произведение двух мнимых чисел дает, очевидно, вещественное число. Выход из этой ситуации – объединение вещественных и мнимых чисел в единое множество составных, или комплексных чисел $z = x + iy$, где x есть произвольное вещественное число, а iy – произвольное мнимое число. Очевидно, что составное число z есть точка *комплексной плоскости*, показанной на Рис. 19.1. С комплексным числом z удобно связать так же двумерный вектор z с координатами (x, y) .

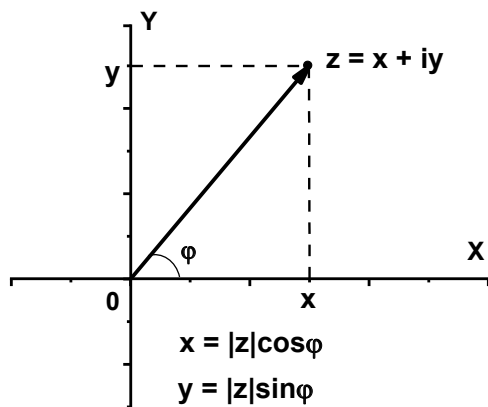


Рис. 19.1

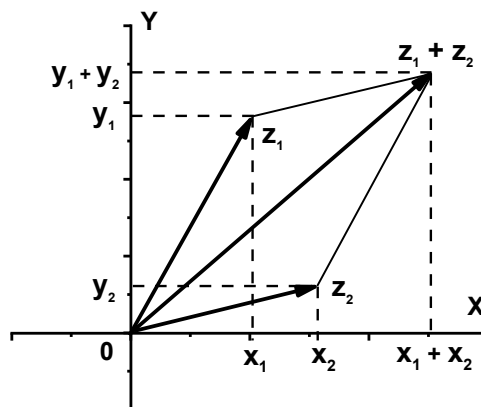


Рис. 19.2

Чтобы множество комплексных чисел обладало полезными свойствами и стало расширением множества вещественных чисел, необходимо определить в нем операции сложения и умножения комплексных чисел так, чтобы выполнялись законы (*), принятые для множества вещественных чисел. Определим операции сложения и умножения комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ следующим образом

$$\text{a) } z_1 + z_2 = x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2), \quad (19.6a)$$

$$\text{b) } z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_2y_1 + x_1y_2), \quad (19.6б)$$

где во втором равенстве мы учли что $i^2 = -1$.

Прежде всего, мы видим, что множество комплексных чисел замкнуто по отношению к сложению и умножению, поскольку в результате сложения и умножения мы снова получаем комплексные числа. Кроме того, легко проверить, что переместительный и дистрибутивный законы (*) выполняются и для комплексных чисел, в силу того, что они выполняются для вещественных чисел.

Деление комплексных чисел выполняется следующим образом

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + i(x_2y_1 - x_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2}. \quad (19.6в)$$

Выражение $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ называется модулем комплексного числа. Очевидно, это есть длина вектора, соединяющего начало координат с точкой z комплексной плоскости. Как показывает формула (19.6в), деление комплексных чисел выполнимо, если модуль знаменателя, $|z_2| \neq 0$. В результате деления возникает некоторое комплексное число, поэтому множество комплексных чисел замкнуто по отношению к делению. Нетрудно доказать также, что оно замкнуто по отношению к возведению комплексного числа в целую степень n . Вещественные числа, которые располагаются на оси X комплексной плоскости, являются, очевидно, частным случаем комплексных чисел вида $z = x + 0i$.

Таким образом, множество комплексных чисел сохраняет все свойства множества вещественных чисел, но при этом в этом множестве существуют элементы, которые являются корнями алгебраических уравнений произвольной степени n . Удивительно, что введя во множестве $\{R\}$ только один дополнительный элемент, изначально предназначенный для решения уравнения (19.5), мы получаем возможность решать алгебраические уравнения произвольной степени. Знаменитая теорема Гаусса, которую называют основной теоремой алгебры, утверждает, что во множестве комплексных чисел любой многочлен степени n с вещественными, или комплексными коэффициентами, имеет ровно n корней. Тем самым, принципиально решенной оказывается одна из основных проблем алгебры.

Из Рис. 19.2 легко видеть, что сложение комплексных чисел по формуле (19.6a) эквивалентно сложению двумерных векторов $\vec{z}_1$ и $\vec{z}_2$ по хорошо известному правилу

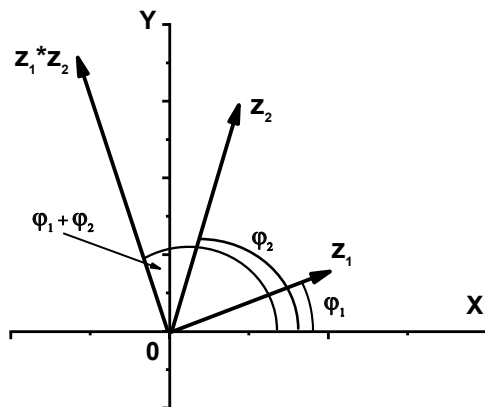


Рис. 19.3

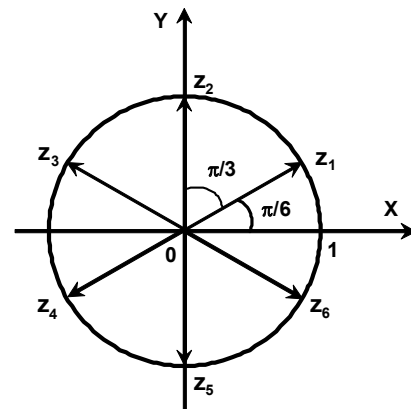


Рис. 19.4

параллелограмма. Умножение же комплексных чисел по формуле (19.6б) отличается от известных векторных операций умножения. Из Рис. 19.1 легко заключить, что в полярной системе координат, произвольное комплексное число можно представить в так называемой тригонометрической форме

$$z = x + iy = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi), \quad (19.7)$$

где $|z|$ есть модуль комплексного числа, а φ - соответствующий полярный угол. Тогда умножение комплексных чисел z_1 и z_2 принимает вид

$$z_1 z_2 = |z_1| |z_2| (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) = |z_1| |z_2| [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)], \quad (19.8)$$

где мы воспользовались тригонометрическими формулами сложения аргументов (9.8). Таким образом, в результате умножения комплексных чисел z_1 и z_2 возникает новое комплексное число с модулем $|z_1| |z_2|$, и с полярным углом, равным сумме полярных углов φ_1 и φ_2 (см. Рис. 19.3). Аналогичным образом интерпретируется деление комплексных чисел.

В. Формула Эйлера

Леонард Эйлер, великий математик, фактически заложивший основы Российской математической школы, получил выдающиеся результаты в теории чисел, математическом анализе, вариационном исчислении, и других разделах математики и физики. В комплексном анализе Эйлер открыл одну из самых красивых математических формул, показав, что экспоненциальная функция в комплексной области выражается через тригонометрические функции, так что

$$e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y). \quad (19.9a)$$

Отсюда легко вывести, что тригонометрические функции выражаются, в свою очередь, через комплексную экспоненту

$$\cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}, \quad \sin y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}. \quad (19.9б)$$

Кроме того, соотношение (19.7) можно теперь записать в виде $z = x + iy = |z| \exp(i\varphi)$.

Результат Эйлера (19.9a) следует, фактически, из разложения (16.23) экспоненты в ряд Тейлора. Действительно, учтем, что целые степени мнимой единицы равны $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, $i^5 = i$, и т.д., и напомним выражение для комплексной экспоненты в виде разложения в бесконечный ряд Тейлора вида

$$e^{i\varphi} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(i\varphi)^n}{n!} = 1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \dots + i \left(1 - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \dots \right). \quad (19.9в)$$

Вычисляя последовательные производные функций $\cos \varphi$ и $\sin \varphi$, можно доказать, что действительная и мнимая части выражения (19.9в) есть разложение в ряд Тейлора функций $\cos \varphi$ и $\sin \varphi$, соответственно.

С учетом формулы Эйлера, возведение комплексного числа z в целую степень выполняется элементарно

$$z^n = (|z| e^{i\varphi})^n = |z|^n \exp(in\varphi) = |z|^n [\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)]. \quad (19.10)$$

Гораздо интереснее процедура извлечения корня n -й степени из комплексного числа. Уже в области вещественных чисел процедура извлечения корней четной степени неоднозначна, так как кроме арифметического корня, имеется и противоположный ему корень с отрицательным

знаком. В комплексной же области уравнение $z^n = z_0$, где z_0 есть заданное комплексное число, в соответствии с теоремой Гаусса, имеет n различных решений.

Дело в том, что полярный угол φ в тригонометрической форме записи комплексного числа (19.7) задан неоднозначно, с точностью до целого числа периодов $2\pi k$ функций $\cos \varphi$ и $\sin \varphi$, где k – целое число. Поэтому, рассматриваемое нами уравнение в общем виде можно записать так

$$z^n = |z_0| \exp(i(\varphi_0 + 2\pi k)), \quad \Rightarrow \quad z = \sqrt[n]{|z_0|} \exp\left(i \frac{\varphi_0 + 2\pi k}{n}\right), \quad k = 0, \pm 1, \dots \quad (19.11)$$

Придавая числу k значения $0, 1, \dots, n - 1$, получим n различных значений корня n -й степени из комплексного числа z_0 . Для всех прочих значений k показатель экспоненты в формуле (19.11) будет отличаться на целое число комплексных периодов $2\pi i$ этой функции, и других значений для корней n -й степени из комплексного числа z_0 не возникнет.

Г. Типичные задачи

а) Вычислить выражение $(1+i)^{12}$

Комплексное число $(1+i)$ в показательной форме имеет вид

$$1+i = \sqrt{2} \frac{1+i}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \exp\left(i \frac{\pi}{4}\right).$$

Применяя формулу (19.10) получаем

$$(1+i)^{12} = 2^6 \exp(3\pi i) = -2^6. \blacksquare$$

б) Решить уравнение $z^6 + 1 = 0$.

Запишем это уравнение в виде $z^6 = -1$, где $-1 = \exp(\pi i + 2\pi k i)$, $k = 0, \pm 1, \dots$ Применяя формулу (19.11) находим все 6 корней данного уравнения,

$$z = \exp\left(i \frac{\pi + 2\pi k}{6}\right), \quad k = 0, 1, \dots, 5.$$

Поскольку $|z| = 1$, то как показывает Рис. 19.4, корни данного уравнения располагаются на единичной окружности комплексной плоскости и отстоят друг от друга на угол $\pi/3$.

Д. Контрольные задачи

1°. Найти все значения выражения $\sqrt[5]{i}$.

2°. Решить уравнение $z^3 + 2i = 0$.

3°. Найти геометрическое место точек, удовлетворяющих неравенству $|z - 5 + i| < 2$.

О НАУЧНОМ ПРИЗНАНИИ

Даже младшие школьники, наверное, осознают, что современное поколение людей живет в гораздо лучших условиях, чем люди, которые жили 100 и даже 50 лет назад. Автор помнит, что в годы учебы в университете у него, как и многих других студентов, были единственные брюки и ботинки. Мы удивлялись, когда узнавали, что американец не знает, сколько брюк в его гардеробе. К счастью, общество в целом стремительно богатеет, и для людей из многих стран покупка одежды и других необходимых человеку вещей перестала быть проблемой. Но кто же создает все это богатство? Несомненно, что это происходит за счет стремительного развития науки и технологий.

Поразительно, что один из самых выдающихся ученых всех времен, Исаак Ньютон, в списке знаменитых людей Великобритании, составленном жителями этой страны, находится лишь в конце первого десятка, а на первых местах располагаются короли и военные деятели. А ведь Ньютон совершил поистине грандиозный рывок в развитии естественных наук! Он впервые построил целостную картину мира, разработал мощный математический аппарат и применил его для объяснения устройства Солнечной системы, сделал много в оптике и других науках. Ньютон определил развитие физики и математики на века вперед.

Конечно, жестокая история человечества показывает, что народ, у которого нет своих полководцев, не имеет больших шансов на выживание. С другой стороны, если мы отодвигаемся вглубь веков, то начинают проступать фигуры выдающихся мыслителей и ученых древности - Аристотеля, Евклида, Архимеда, и многих других, а имена правителей, при которых они жили, теряются в древних манускриптах.

Ньютон говорил: я видел дальше других, потому что стоял на плечах титанов.

ЧАСТЬ III. ГЕОМЕТРИЯ

Геометрия есть непревзойденный образец математической теории, построенной строго аксиоматически. В аксиоматической теории имеется:

- a) набор основных понятий теории;
- b) список аксиом, в которых выражены свойства основных понятий;
- c) список определений других понятий и объектов теории, которые формулируются с помощью основных понятий и аксиом;
- d) совокупность утверждений (теорем) теории о свойствах ранее определенных объектов, которые должны быть выведены по правилам логики из аксиом данной теории.

АКСИОМАТИЧЕСКИЙ МЕТОД

Аксиоматический метод – это бесценная находка геометров древности. Однако в одном важном пункте современная точка зрения существенно отличается от позиции древних математиков: основные понятия теории должны оставаться неопределяемыми. Математики древности наивно надеялись, что основные понятия всегда можно выбрать простыми и "интуитивно" ясными. Пример геометрии, в которой основными неопределяемыми понятиями являются точка, прямая и плоскость, показывает, что это не так. Аксиома планиметрии гласит:

"Каждая прямая есть множество точек".

Попытка понять, как устроена прямая из точек, показывает, что прямая совсем не является "интуитивно ясным объектом". Точки отрезка прямой нельзя сосчитать, их нельзя расположить друг за другом, в отрезках различной длины содержится "одинаковое" количество точек и т. д. Поэтому свойства прямой, как совокупности точек, описывает специальный набор аксиом, называемых аксиомами порядка.

Математики предпринимают специальные усилия, чтобы сделать используемый набор аксиом минимальным. На практике же, не каждая теорема или утверждение доказываются непосредственно из аксиом. "Практический список" аксиом планиметрии, на котором основываются рассуждения, содержит обычно признаки равенства треугольников, признаки подобия треугольников, свойства параллельных прямых и признаки параллелограмма. Следует ясно понимать, что такой подход принят лишь из соображений краткости письма, и используемые утверждения являются, в свою очередь, теоремами, подлежащими при строгом подходе выводу из аксиом.

§ 20. Теоремы планиметрии

В этом параграфе мы напомним основные теоремы планиметрии, снабдив некоторые из них краткими доказательствами.

А. Параллельные прямые; параллелограмм

1°. Если две параллельные прямые пересечены третьей (см. Рис. 20.1), то

- a) *внешние накрест лежащие углы $\angle 1$ и $\angle 2$ равны;*
- b) *внутренние накрест лежащие углы $\angle 3$ и $\angle 4$ равны;*
- c) *внутренние односторонние углы $\angle 4$ и $\angle 5$ составляют в сумме два прямых угла (π радиан);*
- d) *соответственные углы $\angle 2$ и $\angle 4$ равны.*

Заметим, что обратные утверждения дают признаки параллельности прямых. Так, если две прямые пересечены третьей прямой и внутренние накрест лежащие углы равны, то прямые параллельны.

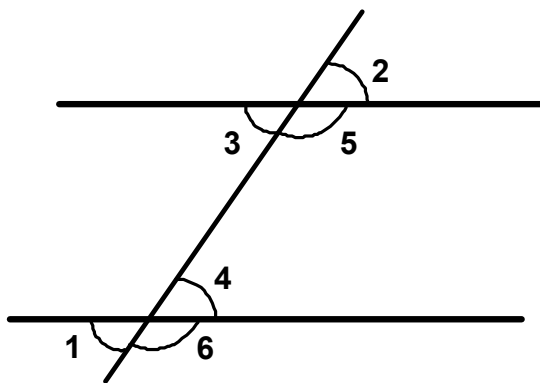


Рис. 20.1

2°. Четырехугольник, у которого все стороны попарно параллельны, называется *параллелограммом*. Из этого определения нетрудно вывести, что

- a) противоположные стороны параллелограмма равны;
- b) противоположные углы параллелограмма равны;
- c) диагонали параллелограмма делятся точкой их пересечения пополам.

Обратные теоремы дают признаки параллелограмма. Так, если в некотором четырехугольнике выполняется хотя бы одно из условий

- d) противоположные стороны попарно равны;
- e) две противоположные стороны равны и параллельны;
- f) противоположные углы равны;
- g) диагонали в точке пересечения делятся пополам,

то такой четырехугольник является параллелограммом.

Доказываются эти теоремы с помощью изложенных в пункте А1° признаков параллельности прямых.

3°. Параллелограмм, у которого все стороны равны, называется *ромбом*. Ромб обладает всеми свойствами параллелограмма, но кроме того

- a) диагонали ромба взаимно перпендикулярны;
- b) диагонали ромба делят его внутренние углы пополам.

4°. Параллелограмм, у которого хотя бы один угол прямой, называется *прямоугольником*. Из этого определения и свойства параллельных прямых А1°с нетрудно заключить, что в прямоугольнике все углы прямые.

5°. Прямоугольник, у которого две смежные стороны равны, называется *квадратом*. Из свойства А2°а следует, что у квадрата все стороны равны. Как наиболее симметричная фигура, квадрат обладает всеми свойствами параллелограмма, ромба и прямоугольника.

Б. Треугольник

1°. Признаки равенства треугольников указывают возможные наборы условий, которые полностью определяют треугольник (т. е. определяют все его стороны и углы). Любой треугольник полностью задается следующими элементами

- а) тремя сторонами;
- б) двумя сторонами и углом между ними;
- с) стороной и двумя прилежащими к ней углами.

Следует помнить, однако, что если предъявлены три отрезка длины a , b и c , то они образуют треугольник лишь при выполнении соответствующих неравенств (неравенств треугольника)

$$a < b + c; \quad b < c + a; \quad c < a + b.$$

Аналогично, два заданных угла $\angle A$ и $\angle B$ могут принадлежать некоторому треугольнику только в том случае, если их сумма меньше π радиан, так как

- д) сумма углов треугольника равна двум прямым (π радиан).

Действительно, проведем через вершину B треугольника ABC прямую, параллельную стороне AC (см. Рис. 20.2). Углы, обозначенные цифрами 1 и 3 попарно равны, как внутренние накрест лежащие. Но углы при вершине B составляют в сумме развернутый угол, поэтому $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = \pi$. ■

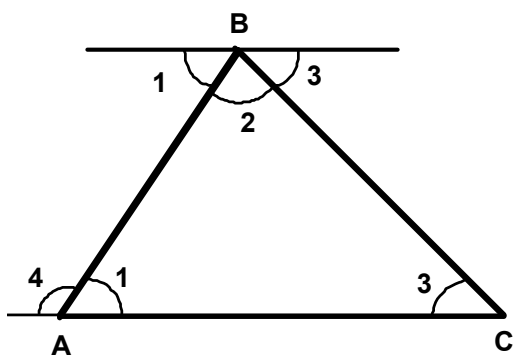


Рис. 20.2

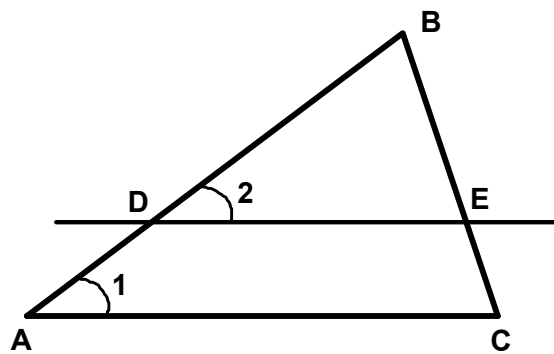


Рис. 20.3

- е) внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних углов не смежных с ним.

На Рис. 20.2 внешний угол $\angle 4$ треугольника ABC в сумме со смежным внутренним углом $\angle 1$ составляет развернутый угол при вершине A . Поэтому, в силу теоремы Б1°d, имеем $\angle 4 = \angle 2 + \angle 3$. ■

2°. Два треугольника называются *подобными*, если у них сходственные углы равны, а сходственные стороны - пропорциональны. Признаки подобия треугольников указывают минимальные наборы условий, достаточных для подобия. Треугольники подобны, если

- а) три стороны одного треугольника пропорциональны трем сторонам другого треугольника;
- б) две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника, а углы между этими сторонами равны;
- с) два угла одного треугольника равны двум углам другого треугольника.

Кроме того,

- д) прямая, параллельная основанию, отсекает треугольник, подобный данному.

Пусть прямая DE на Рис. 20.3 параллельна основанию AC треугольника ABC . Тогда угол $\angle 1$ $\triangle ABC$ равен углу $\angle 2$ $\triangle BDE$, как соответственные углы (см. пункт А1°d), а угол $\angle ABC$ у них общий. Поэтому $\triangle ABC \sim \triangle BDE$ по признаку Б2°с. ■

3°. Специальные линии треугольника

Средняя линия треугольника есть отрезок, соединяющий середины двух его сторон.

- а) средняя линия треугольника параллельна основанию и равна его половине.

Дополним треугольник ABC на Рис. 20.4 до параллелограмма $ABDC$. Соединим середины сторон AB и CD отрезком MK . По построению, $AB \parallel CD$, поэтому $\angle 1 = \angle 2$ и $\angle 3 = \angle 4$ как внутренние накрест лежащие. Кроме того, по построению, $|BM| = |CK|$; поэтому $\triangle BMN$ и $\triangle NKC$ равны (см. пункт Б1°с). Следовательно, $|MN| = |NK| = |MK|/2$. С другой стороны, так как $AM = KC$ и $AM \parallel KC$ по построению, то $AMKC$ - параллелограмм (пункт А2°е). Отсюда $MN \parallel AC$ и $|MN| = |MK|/2 = |AC|/2$. ■

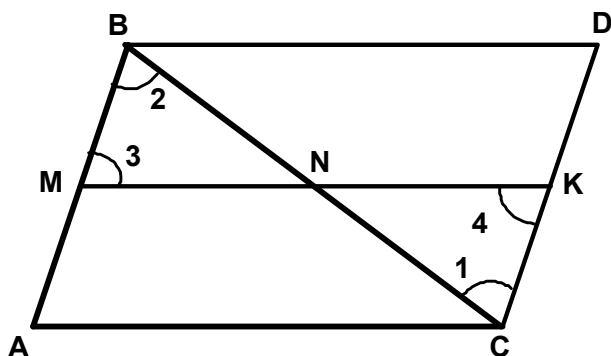


Рис. 20.4

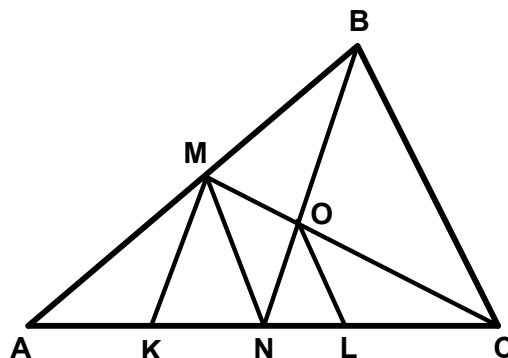


Рис. 20.5

Медиана треугольника есть отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны.

- б) три медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся этой точкой в отношении 2:1, считая от вершины треугольника.

Пусть O - точка пересечения медиан BN и CM треугольника $\triangle ABC$ (см. Рис. 20.5). Проведем в треугольнике AMN медиану MK . По построению, $|AM| = |MB|$ и $|AK| = |KN|$. Следовательно, MK - средняя линия $\triangle ABN$. Поэтому $MK \parallel BN$ (пункт Б3°а) и $\triangle MKC \sim \triangle ONC$ (пункт Б2°d). Далее, по построению, $|AN| = |NC|$ и $|AK| = |KN|$. Следовательно,

$$\frac{|CN|}{|NK|} = \frac{|CO|}{|OM|} = 2.$$

По построению, MN есть средняя линия $\triangle ABC$, поэтому $MN \parallel BC$. Проведем прямую $OL \parallel MN$. Тогда $\triangle OLC \sim \triangle MNC$, так что $|CL| = 2|LN|$. Но $OL \parallel BC$, поэтому $\triangle OLN \sim \triangle BCN$. Отсюда находим

$$\frac{|BO|}{|ON|} = 2.$$

Рассуждая от противного, легко доказать, что третья медиана из вершины A должна также пройти через общую точку O . ■

Высотой треугольника называется отрезок перпендикуляра, опущенного из вершины на противоположную сторону, или на ее продолжение.

- с) три высоты треугольника пересекаются в одной точке. (Доказательство этой теоремы мы опускаем).

Биссектриса внутреннего угла треугольника есть прямая, делящая этот угол пополам. Биссектриса треугольника есть отрезок биссектрисы внутреннего угла, соединяющий вершину треугольника с противоположной стороной.

д) биссектриса треугольника делит сторону треугольника на части, пропорциональные прилежащим к ней сторонам.

Пусть BE – биссектриса треугольника ABC , так что $\angle 1 = \angle 2$ (см. Рис. 20.6). Через вершину A проведем прямую, параллельную BE , до пересечения с продолжением стороны BC в точке K . По построению, $\angle 1 = \angle 3$ как внутренние накрест лежащие, а $\angle 2 = \angle 4$ – как соответственные углы при параллельных прямых $AK \parallel BE$. Следовательно, в $\triangle KBA$ имеем $\angle 3 = \angle 4$. Докажем, что $|AB| = |BK|$. Опустим в $\triangle ABK$ высоту BF на сторону AK . $\triangle BFK$ и $\triangle BFA$ равны по признаку Б1°с, так как сторона BF – общая, углы при вершине F равны, как прямые, а $\angle KBF = \angle FBA$, как дополнения равных углов $\angle 3$ и $\angle 4$ до прямого угла. Из равенства $\triangle BFK$ и $\triangle BFA$ выводим, что $|AB| = |BK|$. Далее по построению $AK \parallel BE$, поэтому $\triangle AKC \sim \triangle EBC$ (Б2°d); следовательно,

$$\frac{|AE| + |EC|}{|EC|} = \frac{|KB| + |BC|}{|BC|} \Rightarrow \frac{|AE|}{|EC|} = \frac{|KB|}{|BC|}.$$

Отсюда и следует утверждение теоремы, поскольку $|KB| = |AB|$. ■

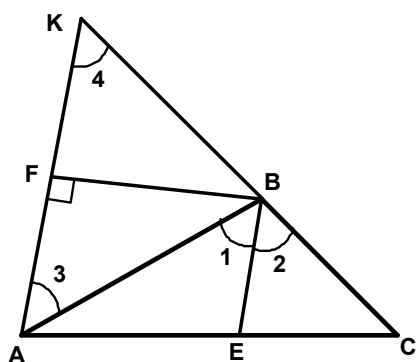


Рис. 20.6

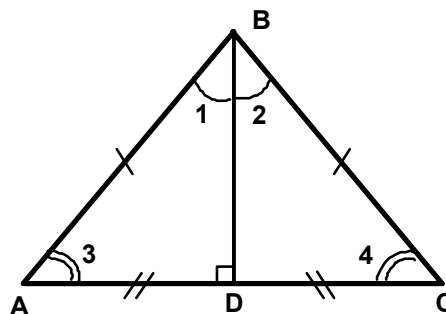


Рис. 20.7

4°. Треугольники специального вида

Равнобедренным называется треугольник, у которого две (боковые) стороны равны.

а) медиана, проведенная из вершины равнобедренного треугольника на его основание является одновременно и биссектрисой, и высотой.

Пусть в $\triangle ABC$ на Рис. 20.7 стороны AB и BC равны. Проведем медиану BD . Тогда $\triangle ABD = \triangle BDC$ по признаку Б1°а, т. к. BD – общая сторона, а $|AD| = |DC|$ по построению. В равных треугольниках против равных сторон лежат равные углы. Следовательно, $\angle 1 = \angle 2$, так что BD – биссектриса угла $\angle ABC$. Далее, $\angle 3 = \angle 4$ как углы, лежащие в равных треугольниках против общей стороны BD . Но сумма углов $\triangle ABC$ $\angle 3 + \angle 1 + \angle 2 + \angle 4 = \pi$ (пункт Б1°d), поэтому $\angle 1 + \angle 3 = \pi/2$; соответственно, $\angle ADB = \pi - \angle 1 - \angle 3 = \pi/2$. Следовательно, BD – высота $\triangle ABC$. ■

Аналогично можно доказать, что

а1) биссектриса угла при вершине равнобедренного треугольника является одновременно медианой и высотой, и

а2) высота, опущенная из вершины равнобедренного треугольника на его основание является одновременно и биссектрисой, и медианой.

Равносторонним называется треугольник, у которого все стороны равны. Поскольку равносторонний треугольник является одновременно равнобедренным по отношению к каждой вершине, то в таком треугольнике высота, медиана и биссектриса, проведенные из одной вершины, совпадают.

Прямоугольным называется треугольник, у которого один угол прямой. В прямоугольном треугольнике

б) высота, проведенная из вершины прямого угла, есть среднее пропорциональное между отрезками, на которые она разбивает гипотенузу.

Пусть в треугольнике ABC угол B - прямой (см. Рис. 20.8). Проведем $BD \perp AC$. Тогда $\triangle ABD \sim \triangle ABC$, так как $\angle A$ у них общий, а $\angle ADB = \angle ABC = 90^\circ$ (пункт Б2°с). Аналогично, $\triangle BDC \sim \triangle ABC$. Следовательно

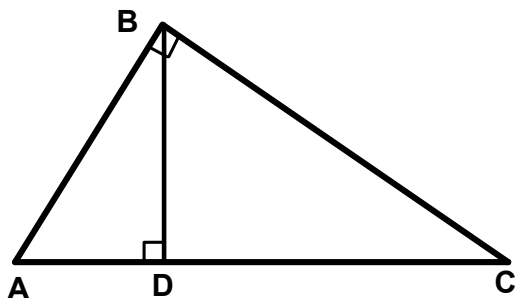


Рис. 20.8

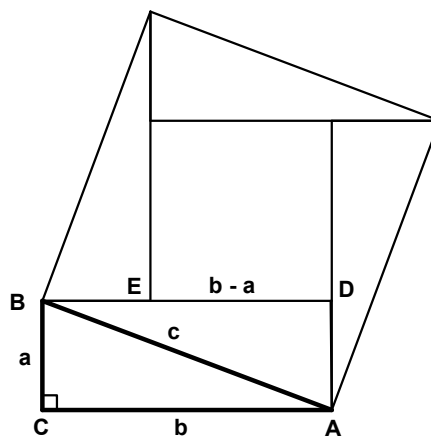


Рис. 20.9

$$\frac{|AD|}{|BD|} = \frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|BD|}{|DC|} \Rightarrow |BD|^2 = |AD| \cdot |DC|. \blacksquare$$

с) квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов (теорема Пифагора).

На Рис. 20.9 квадрат, построенный на гипотенузе $|AB| = c$ прямоугольного треугольника ABC с катетами $|BC| = a$ и $|AC| = b$ разбит на четыре треугольника, равных $\triangle ABC$ и меньший квадрат со стороной $|ED|$, равной $b - a$. Поскольку площадь $\triangle ABC$ равна половине площади прямоугольника $ACBD$, т. е. равна $ab/2$, находим соотношение

$$c^2 = 4 \frac{ab}{2} + (b - a)^2 \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2. \blacksquare$$

В. Окружность и круг

Окружность - есть геометрическое место точек, равноудаленных от заданной точки плоскости (центра окружности).

1°. Угол, вершина которого лежит в центре окружности, называется *центральный* углом.

а) центральный угол пропорционален длине дуги, на которую он опирается.

Вписанным называется угол, вершина которого лежит на окружности, а стороны пересекают или касаются окружности.

б) вписанный угол равен половине центрального угла, который опирается на ту же дугу окружности.

Пусть $\angle ABC$ вписан в окружность O . Проведем через вершину угла B и центр круга O прямую, пересекающую окружность в точке K (Рис. 20.10). Так как $|AO| = |OB|$ как радиусы одной окружности, то $\triangle AOB$ равнобедренный. Следовательно, $\angle 1 = \angle 2$. Но центральный угол $\angle AOK$,

равен сумме внутренних углов $\triangle AOB$, не смежных с ним, т. е. сумме $\angle 1 + \angle 2$ (пункт Б1°е). Таким образом, вписанный угол $\angle ABK$, опирающийся на дугу AK , равен половине центрального угла $\angle AOK$, опирающегося на ту же дугу. Аналогично доказывается, что вписанный $\angle KBC = \angle KOC/2$. ■

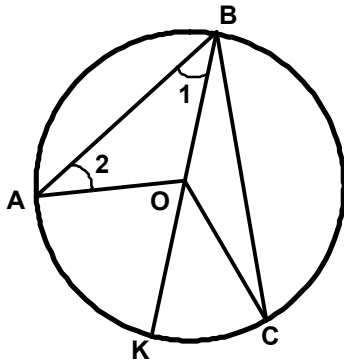


Рис. 20.10

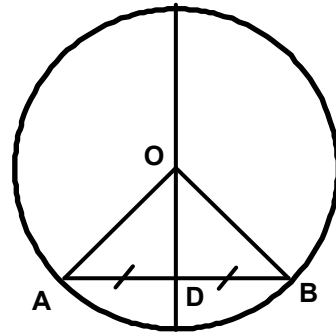


Рис. 20.11

Из пункта б) вытекает важное следствие

с) вписанный угол, опирающийся на диаметр окружности - прямой.

2°. Отрезок прямой, соединяющий две точки окружности, называется *хордой*. Хорда, проходящая через центр окружности, есть *диаметр*.

а) диаметр, делящий хорду пополам, перпендикулярен этой хорде.

Пусть на рисунке 20.11 диаметр OD проведен через середину хорды AB , так что $|AD| = |DB|$. Поскольку $|AO| = |OB|$, как радиусы одной окружности, то $\triangle AOB$ - равнобедренный. По условию, OD является медианой этого треугольника, следовательно $OD \perp AB$ (пункт Б4°а). ■

б) если две хорды пересекаются внутри окружности, то произведения отрезков хорд равны.

Пусть на Рис. 20.12 хорды AB и CD пересекаются в точке M . Тогда $\triangle AMC \sim \triangle DMB$. Действительно, вписанные углы $\angle ACD$ и $\angle ABD$ равны, поскольку опираются на одну и ту же дугу окружности AD . Аналогично, $\angle CAB = \angle CDB$. Треугольники подобны по пункту Б2°с. Следовательно

$$\frac{|CM|}{|MB|} = \frac{|AM|}{|MD|} \Rightarrow |CM| \cdot |MD| = |AM| \cdot |MB|. \blacksquare$$

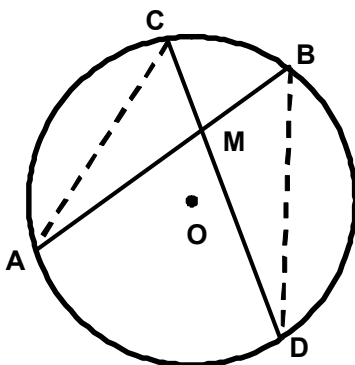


Рис. 20.12

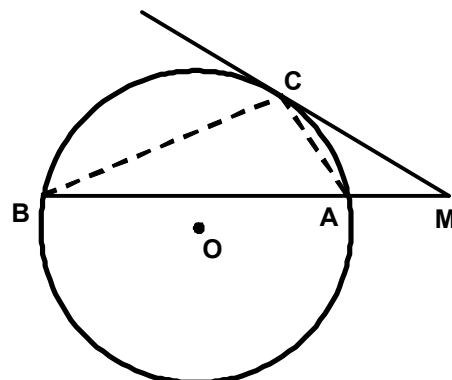


Рис. 20.13

3°. Прямая, имеющая с окружностью только одну общую точку, называется *касательной* к окружности.

- а) радиус, проведенный в точку касания, перпендикулярен касательной. Обратная теорема дает признак касательной.
- б) если прямая перпендикулярна к радиусу в конечной его точке, лежащей на окружности, то она является касательной.

Эти теоремы можно доказать рассуждением от противного.

- с) если из точки, лежащей вне окружности, проведены касательная и секущая, то произведение секущей на ее внешнюю часть равно квадрату касательной.

Пусть на Рис. 20.13 MC - касательная к окружности O , а MB - секущая. Вписанные углы $\angle CBA$ и $\angle MCA$ равны, так как опираются на одну и ту же дугу CA . Отсюда следует, что $\triangle CMB \sim \triangle CMA$, так как $\angle CMA$ у них общий (пункт Б2°с). Следовательно,

$$\frac{|CM|}{|MB|} = \frac{|AM|}{|CM|} \Rightarrow |CM|^2 = |AM| \cdot |MB|. \blacksquare$$

Заметим, что при составлении пропорции мы учитываем, что в подобных треугольниках сходственные стороны лежат против равных углов.

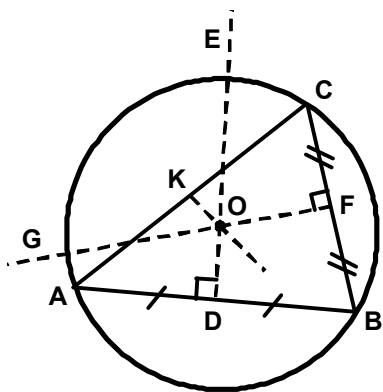


Рис. 20.14

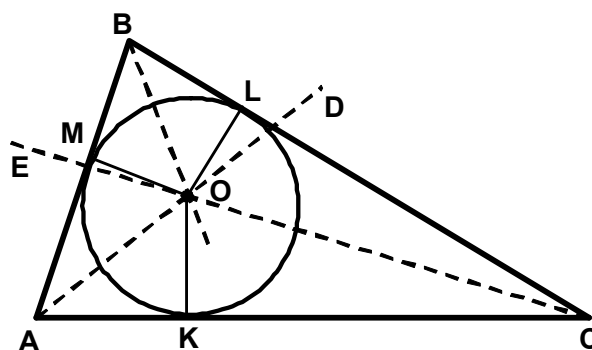


Рис. 20.15

4°. Окружность называется *описанной* около треугольника, если она проходит через все его вершины.

- а) через три точки плоскости, не лежащие на одной прямой, можно провести окружность, и при том только одну.

Возьмем на плоскости три точки A , B и C (Рис. 20.14), не лежащие на одной прямой. Через середины отрезков AB и BC проведем перпендикуляры DE и FG . Так как точки A , B и C не лежат на одной прямой, то эти перпендикуляры пересекаются в некоторой точке O . Легко видеть, что отрезок $|OA| = |OB|$. Действительно, $\triangle ADO = \triangle ODB$, так как $|AD| = |DB|$, OD - общая сторона и $\angle ADO = \angle ODB = 90^\circ$ (пункт Б1°б). Аналогично, из равенства треугольников $\triangle BFO$ и $\triangle OFC$ заключаем, что $|OB| = |OC|$. Следовательно, точка O - есть центр окружности, проходящей через точки A , B и C . Опустим теперь из точки O перпендикуляр OK на сторону AC . Так как $|OA| = |OC|$, то $\triangle AOC$ равнобедренный; поэтому $|AK| = |KC|$ (пункт Б4°а2). Следовательно, три перпендикуляра к серединам сторон произвольного $\triangle ABC$ пересекаются в одной точке, которая есть центр описанной около него окружности. ■

Окружность называется *вписанной*, если она касается всех сторон треугольника.

б) центр вписанной окружности лежит на пересечении биссектрис треугольника.

Пусть AD - биссектриса $\angle BAC$ и EC - биссектриса $\angle BCA$ треугольника ABC пересекаются в некоторой точке O (Рис. 20.15). Опустим перпендикуляры OK , OL и OM на стороны треугольника. Легко видеть, что $\triangle OCL = \triangle OCK$, (пункт В1°с), так как OC - общая сторона, $\angle OCK = \angle OCL$ поскольку OC - биссектриса, а $\angle LOC = \angle KOC$ как дополнения равных углов $\angle OCK$ и $\angle OCL$ до прямых углов. Следовательно $|OL| = |OK|$. Аналогично, из равенства $\triangle AOK$ и $\triangle AOM$ следует, что $|OK| = |OM|$. Следовательно, точки K , L и M лежат на одной окружности. Далее, прямая CL перпендикулярна к радиусу OL в конечной его точке L , лежащей на окружности. Поэтому CL - касательная к окружности O (пункт В3°б). Аналогично, AC и AB также являются касательными к окружности O . Проведем теперь прямую BO . Треугольники $\triangle BOM$ и $\triangle BOL$ прямоугольные по построению, гипотенуза OB у них общая, а катеты $|OM| = |OL|$. Следовательно, $|MB| = |BL|$ по теореме Пифагора и $\triangle BOM = \triangle BOL$ (пункт В1°а). Отсюда $\angle MBO = \angle OBL$, и три биссектрисы треугольника пересекаются в единственной точке O . ■

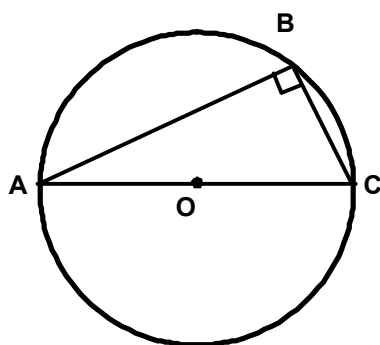


Рис. 20.16

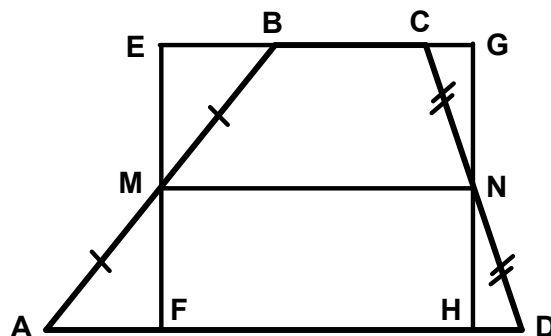


Рис. 20.17

с) центр окружности, описанной около прямоугольного треугольника, лежит на середине гипотенузы.

Пусть прямоугольный треугольник ABC с углом $\angle ABC = 90^\circ$ вписан в окружность O (Рис. 20.16). Так как вписанный угол $\angle ABC$ прямой, то центральный угол $\angle AOC$ равен 180° (теорема, обратная В1°б); следовательно гипотенуза AC - диаметр. Поэтому $|AO| = |OC|$ как радиусы одной окружности. ■

Г. Четырехугольники

1°. Четырехугольник, у которого две стороны (основания) параллельны, а две другие стороны (боковые) не параллельны, называется *трапецией*. *Средняя линия* трапеции есть отрезок, соединяющий середины боковых сторон.

а) средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме.

Пусть четырехугольник $ABCD$ на Рис. 20.17 - трапеция, причем $BC \parallel AD$. Проведем среднюю линию MN и через точки M и N проведем перпендикуляры EF и GH к прямой AD . Легко доказать, что $FEGH$ - прямоугольник. Далее, $\triangle AMF = \triangle MEB$ по признаку В1°с, т. к. $\angle EMB = \angle AMF$ как вертикальные углы, $\angle EBM = \angle MAF$ как внутренние накрест лежащие при параллельных $BC \parallel AD$, а $|AM| = |MB|$ по построению. Следовательно, $|EM| = |MF|$ и $|EB| = |AF|$. Аналогично, из равных треугольников $\triangle CNG$ и $\triangle HND$ находим $|CG| = |HD|$ и $|GN| = |NH|$. Таким образом, MN - средняя линия прямоугольника $FEGH$; поэтому $MN \parallel BC \parallel AD$ и $|MN| = (|EG| + |FH|)/2 = (|BC| + |AD|)/2$, так как $|EB| = |AF|$ и $|CG| = |HD|$. ■

2° Четырехугольник называется *выпуклым*, если он расположен по одну сторону от продолжения любой его стороны. Легко видеть, что в выпуклом четырехугольнике любой внутренний угол меньше развернутого угла.

а) для того, чтобы в выпуклый четырехугольник можно было вписать окружность, необходимо и достаточно, чтобы суммы противоположных сторон четырехугольника были равны.

Пусть окружность O вписана в выпуклый многоугольник $ABCD$ (Рис. 20.18). Легко доказать, что отрезки касательных от данной вершины до точек касания с окружностью равны, т. е. $|CF| = |CG|$; $|BF| = |BE|$; $|AF| = |AH|$ и $|DH| = |DG|$. Действительно, рассмотрим, например, $\triangle AEH$. Этот треугольник равнобедренный, так как его углы при основании $\angle HEA$ и $\angle EHA$ равны, как вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу EH . Из приведенных равенств и следует соотношение $|BC| + |AD| = |AB| + |CD|$. Необходимость этого соотношения доказана. Его достаточность доказывается построением вписанной окружности (см. §22, далее). ■

б) для того, чтобы около выпуклого четырехугольника можно было описать окружность, необходимо и достаточно, чтобы сумма противоположных углов четырехугольника была равна развернутому углу (π радиан).

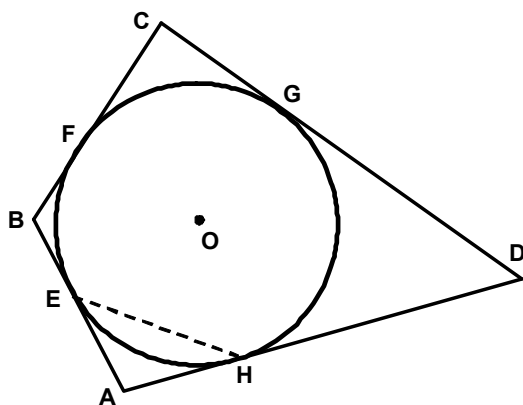


Рис. . 20.18

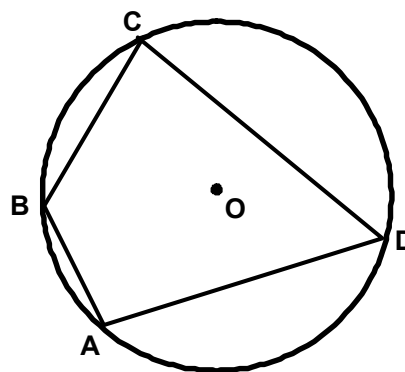


Рис. 20.19

Необходимость этого условия легко доказать из рассмотрения Рис. 20.19. Действительно, вписанные углы $\angle CBA$ и $\angle CDA$ опираются на дуги, которые в сумме составляют окружность O . Следовательно, (пункт В1°б), $\angle CBA + \angle CDA = \pi$. Аналогично, $\angle BCD + \angle BAD = \pi$. Докажем достаточность. Проведем через вершины B , C и D четырехугольника окружность O (пункт В4°а). Так как $ABCD$ - выпуклый четырехугольник, а угол $\angle BAD$ является дополнительным к углу $\angle BCD$ до развернутого угла, то вершина A должна лежать на окружности O . ■

О ПОЧЕРКЕ И ОФОРМЛЕНИИ

Хороший, четкий почерк и умение грамотно оформить работу смело можно отнести к важным профессиональным навыкам человека умственного труда. Уже в школе описание задачи занимает нередко несколько страниц. Курсовая же, или дипломная работа в ВУЗе, научная статья - это, как правило, десятки страниц рассуждений, доказательств и вычислений, изложенных логично и последовательно. Учиться этому искусству нужно смолоду. Разумно проводить сложные и ответственные выкладки (даже черновые) на отдельных, пронумерованных листах бумаги и только на одной стороне каждого листа. В черновике желательно отдельно фиксировать (например, подчеркивать или обводить в рамочку) такие ключевые моменты, как введение новых обозначений. Важно выписывать, по мере их получения, готовые промежуточные результаты. Особое внимание должно быть уделено четкому перебору логически возможных случаев,

возникающих в ходе решения задачи, как это делалось, например, в §§ 3, 6 и 8. Все это чрезвычайно упрощает контроль и проверку выкладок и помогает постоянно держать в памяти стратегический план решения задачи. Сравнивая полученные результаты с планом решения, легко в любой момент видеть, на каком этапе находятся текущие вычисления, и что остается сделать для их завершения. Ученики, не уделяющие должного внимания аккуратному оформлению выкладок, редко добиваются до правильного ответа в задаче. Тот же, кто четко излагает, почти наверняка и четко мыслит! Наконец, нужно подумать об экзаменаторе, который будет проверять вашу работу. Заставляя его разбирать каракули, вы, конечно, не способствуете повышению оценки вашей экзаменационной работы.

§ 21. Формулы планиметрии

А. Стандартные обозначения

В произвольном треугольнике $\triangle ABC$ принято обозначать (см. Рис. 21.1 и 21.2)

a, b и c - длины сторон, лежащих, соответственно, против углов $\angle A, \angle B$ и $\angle C$;

$p = (a + b + c)/2$ - полупериметр треугольника;

h_a, m_a, β_a - длины высоты, медианы и биссектрисы, проведенных к стороне, противолежащей $\angle A$;

R и r - радиусы описанной и вписанной в этот треугольник окружностей;

S - площадь треугольника.

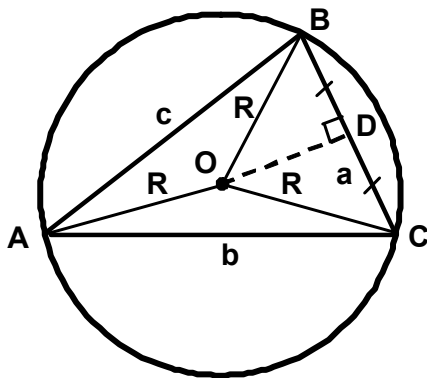


Рис. 21.1

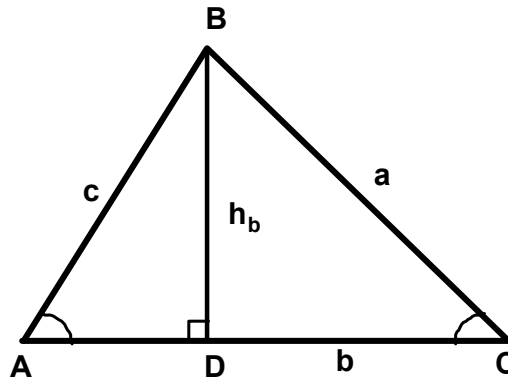


Рис. 21.2

Б. Теоремы синусов и косинусов

Эти теоремы являются важнейшими "вычислительными" теоремами планиметрии.

1°. Теорема синусов

Для любого треугольника имеем

$$\frac{a}{\sin \angle A} = \frac{b}{\sin \angle B} = \frac{c}{\sin \angle C} = 2R. \quad (21.1)$$

Опишем около произвольного треугольника ABC окружность с центром в точке O (Рис. 21.1). Тогда отрезки $|OA| = |OB| = |OC| = R$, где R - радиус описанной окружности. В равнобедренном треугольнике OBC опустим высоту $OD \perp BC$, которая одновременно является и биссектрисой и медианой (§20, пункт Б°4а2). Следовательно, $|BD| = |DC| = a/2$ и $\angle BOD = \angle BOC/2$. Из прямоугольного треугольника $\triangle OBD$ находим, вспоминая определение синуса угла (§9), что

$$\sin \angle BOD = \frac{a}{2R}; \Rightarrow \frac{a}{\sin \angle A} = 2R,$$

поскольку вписанный угол $\angle BAC = \angle A$ равен половине центрального угла $\angle BOC$ (§20, пункт В1°b). Аналогичное соотношение можно написать и для сторон b и c , откуда и следует теорема синусов. ■

Заметим, что поскольку любой угол (например, $\angle A$) треугольника меньше π радиан (§20, пункт В1°d), то $\sin \angle A > 0$, в согласии с теоремой синусов (21.1).

2°. Теорема косинусов

$$\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \angle A \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \angle B \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \angle C \end{cases} \quad (21.2)$$

(Здесь теорема косинусов записана отдельно для каждой стороны треугольника).

Пусть сначала угол $\angle A$ в треугольнике $\triangle ABC$ острый, $\angle A < \pi/2$ (Рис. 21.2). Тогда $\cos \angle A > 0$ и высота h_b , опущенная из вершины B , пересекает сторону AC в точке D . Из прямоугольного треугольника $\triangle ABD$ имеем $|BD| = c \sin \angle A$; $|AD| = c \cos \angle A$. Далее, так как $|DC| = |AC| - |AD| = b - c \cdot \cos \angle A$, то по теореме Пифагора, из прямоугольного треугольника $\triangle BDC$ имеем $|BC|^2 = |BD|^2 + |DC|^2$, или

$$a^2 = (b - c \cos \angle A)^2 + (c \sin \angle A)^2 \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \angle A.$$

В случае, когда угол $\angle A$ тупой, $\angle A > \pi/2$, имеем $\cos \angle A < 0$ и высота BD падает на продолжение стороны AC . Тем не менее, как легко убедиться, и в этом случае первая формула (21.2) остается в силе. Прочие формулы (21.2) получаются из первой формулы заменой обозначений. ■

Заметим, что теорема Пифагора есть частный случай формул (21.2). Так, в первой формуле (21.2) теореме Пифагора соответствует случай $\angle A = \pi/2$.

В. Решение треугольников

Произвольный треугольник определен, если известны все его стороны и углы. Но задан треугольник может быть, как мы знаем (§20, пункт В1°), гораздо меньшим числом условий, например, любым набором условий, указанных в признаках равенства треугольников. Поэтому, при решении планиметрических задач постоянно возникает проблема определения по некоторым данным, которые полностью определяют треугольник, всех оставшихся величин. Мы рассмотрим здесь три стандартных задачи такого рода.

1°. Пусть даны три стороны a , b и c треугольника $\triangle ABC$. Необходимо определить $\angle A$, $\angle B$ и $\angle C$.

Расположим стороны в порядке возрастания длин. Поскольку обозначения произвольны, то без ограничения общности можно считать, что $a \leq b \leq c$. Рассуждая от противного, нетрудно доказать, что в треугольнике против наибольшей стороны (стороны c) лежит наибольший угол ($\angle C$). Поскольку в любом треугольнике лишь один угол может быть тупым, то $\angle A$ и $\angle B$ - заведомо острые. Следовательно, они однозначно определяются из теоремы косинусов, так что

$$\cos \angle A = \frac{b^2 + c^2}{2bc}; \quad a \leq b \leq c; \quad 0 < \angle A < \frac{\pi}{2},$$

и, аналогично, для угла $\angle B$. Угол $\angle C$ затем находится как $\angle C = \pi - \angle A - \angle B$. ■

2°. В $\triangle ABC$ даны стороны b , c и угол $\angle A$ между ними. Необходимо определить сторону a и углы $\angle B$ и $\angle C$.

Сторона a находится по теореме косинусов (21.2), после чего задача сводится к предыдущей задаче (пункт В1°). ■

3°. В $\triangle ABC$ даны сторона b и прилежающие углы $\angle A$ и $\angle C$. Определить $\angle B$ и стороны a и c треугольника ABC .

В силу теоремы В1°d из §20, $\angle B = \pi - \angle A - \angle C$, а стороны a и c находятся с помощью теоремы синусов

$$a = b \frac{\sin \angle A}{\sin \angle B}; \quad c = b \frac{\sin \angle C}{\sin \angle B}. \quad \blacksquare$$

Г. Вычисление линий в треугольнике. Площадь треугольника

При вычислении линий в треугольнике считаем, что треугольник полностью определен, т. е. известны все его стороны и углы (см. предыдущий пункт В); обозначения приведены в пункте А.

1°. Для высоты h_b $\triangle ABC$ имеем формулу (см. Рис. 21.2)

$$h_b = c \sin \angle A = a \sin \angle C. \quad (21.3a)$$

Эти равенства остаются справедливыми и в случае, когда $\angle A$, либо $\angle C$ - тупые. Кроме того, полезно иметь ввиду формулу

$$h_b = 2S/b. \quad (21.3b)$$

2°. Медиана m_b треугольника ABC определяется любой из формул

$$m_b = \sqrt{c^2 + (b/2)^2 - bc \cos \angle A}; \quad (21.4a)$$

$$m_b = \frac{1}{2} \sqrt{2(a^2 + c^2) - b^2}. \quad (21.4b)$$

Пусть $|BD|$ - медиана $\triangle ABC$, так что $|AD| = |DC| = b/2$ (Рис.21.3). Из $\triangle ABD$ по теореме косинусов имеем

$$m_b^2 = c^2 + (b/2)^2 - bc \cos \angle A. \quad (*)$$

Отсюда следует формула (21.4a). Далее, из треугольника ABC по теореме косинусов имеем

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \angle A. \quad (**)$$

Исключая из соотношений (*) и (**) $\cos \angle A$, получаем формулу (21.4b). ■

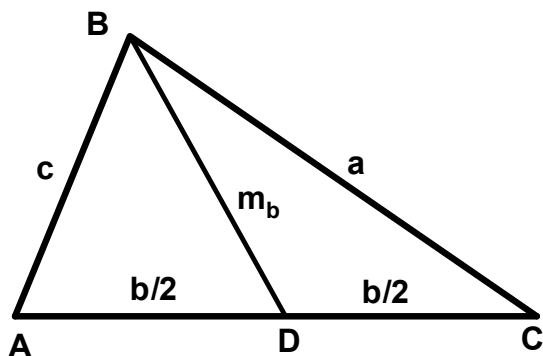


Рис. 21.3

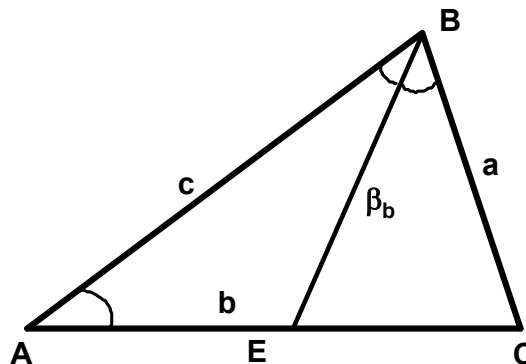


Рис. 21.4

3°. Биссектриса β_b $\triangle ABC$ определяется формулой

$$\beta_b = \frac{cb}{a+c} \cdot \frac{\sin \angle A}{\sin(\angle B/2)}. \quad (21.5)$$

Пусть BE - биссектриса $\triangle ABC$, так что $\angle ABE = \angle EBC$ (Рис. 21.4). Из теоремы БЗ°d, §20 следует, что

$$\begin{cases} |AE| + |EC| = b \\ \frac{|AE|}{c} = \frac{|EC|}{a} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |AE| = \frac{cb}{a+c} \\ |EC| = \frac{ab}{a+c} \end{cases}.$$

По теореме синусов, из $\triangle ABE$ находим

$$\frac{|AE|}{\sin(\angle B/2)} = \frac{|BE|}{\sin(\angle A)},$$

откуда и следует формула (21.5). ■

4°. Радиус описанной окружности находится из теоремы синусов

$$R = \frac{a}{2 \sin \angle A} = \frac{b}{2 \sin \angle B} = \frac{c}{2 \sin \angle C}. \quad (21.6a)$$

Кроме того, выражая из формул (21.3) $\sin \angle A = 2S/bc$, получаем

$$R = \frac{abc}{4S}. \quad \blacksquare \quad (21.6b)$$

5°. Радиус вписанной окружности определяется формулой

$$r = \frac{S}{p}. \quad (21.7)$$

Действительно, возвращаясь к Рис. 20.15 видим, что площадь треугольника ABC равна сумме площадей $\triangle AOC$, $\triangle COB$ и $\triangle BOA$, в которых высоты OK , OL и OM являются радиусами вписанной окружности. Следовательно,

$$S = \frac{1}{2} r(a+b+c),$$

откуда и следует формула (21.7). ■

6°. Площадь $\triangle ABC$ дается формулами

$$S = \frac{1}{2} h_b b = \frac{1}{2} cb \sin \angle A. \quad (21.8a)$$

Чтобы доказать первую из этих формул, дополним $\triangle ABC$ на Рис. 21.2 до прямоугольника, построенного на стороне AC ; второе же равенство следует затем из формулы (21.3a). Далее, выражая $\cos \angle A$ с помощью теоремы косинусов и помня, что для угла треугольника $\sin \angle A > 0$, получаем

$$\sin \angle A = \left[1 - \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \right)^2 \right]^{1/2}. \quad (21.8b)$$

Используя это выражение во второй формуле (21.8a), приходим после простых преобразований к формуле Герона

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}. \blacksquare \quad (21.8в)$$

Формула Герона удобна тем, что непосредственно выражает площадь треугольника через его стороны.

Д. Параллелограмм, трапеция, правильный многоугольник.

1°. Пусть в параллелограмме $ABDC$ (Рис. 21.5) стороны $|AD| = a$, $|AB| = b$, высота, опущенная на сторону a есть $|BE| = h_a$, диагонали $|BD| = d_1$ и $|AC| = d_2$, угол $\angle BAD = \angle A$. Из прямоугольного $\triangle ABE$ находим $h_a = b \sin \angle A$. Опустим перпендикуляр CF на продолжение стороны AD . Легко доказать, что $\triangle ABE = \triangle DCF$, поскольку $|AB| = |CD|$ как противоположные стороны параллелограмма (§20, пункт А2°а), $\angle BAE = \angle CDF$ как соответственные углы при параллельных прямых $AB \parallel CD$, а $\angle ABE = \angle DCF$ как дополнения равных углов до прямого угла. Отсюда выводим, что площадь прямоугольника $EBCF$ равна площади S параллелограмма $ABCD$, так что

$$S = |BE| \cdot |EF| = |BE| \cdot |AD| = ah_a = ab \sin \angle A, \quad (21.9)$$

где учтено, что $|AE| = |DF|$. Далее, из $\triangle ABD$ и $\triangle ADC$ с помощью теоремы косинусов находим

$$d_1^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \angle A; \quad d_2^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cos \angle A.$$

Во втором равенстве принято во внимание, что $\cos \angle C = \cos(\pi - \angle A) = -\cos \angle A$. Следовательно

$$d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2). \quad (21.10)$$

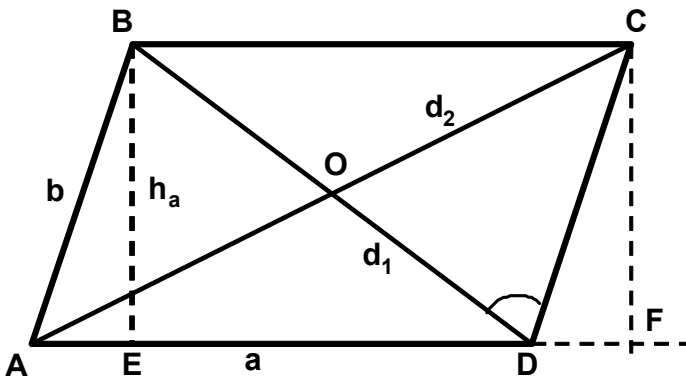


Рис. 21.5

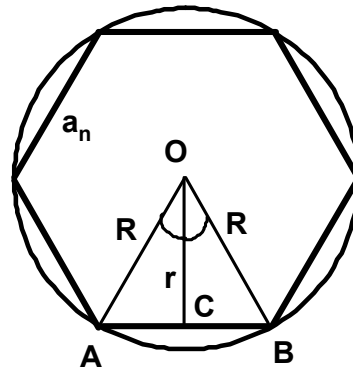


Рис. 21.6

2°. Для определения площади трапеции возвращаемся к Рис. 20.17. При доказательстве теоремы о средней линии трапеции (§20, пункт Г1°а) было установлено, что $\triangle AMF = \triangle MEB$, а $\triangle NHD = \triangle NCG$. Следовательно, площадь трапеции $ABCD$ равна площади прямоугольника $FEGH$. Обозначая высоту трапеции $|EF| = h$, а ее основания $|AD| = a$ и $|BC| = b$, для площади S трапеции $ABCD$ получаем

$$S = |MN| \cdot |EF| = \frac{a+b}{2} h. \quad (21.11)$$

3°. Многоугольник называется правильным, если все его стороны и все внутренние углы равны. Любой правильный многоугольник задается, очевидно, радиусом описанной окружности R и числом сторон n (Рис. 21.6). Проведем из центра описанного круга O радиусы $|OA| = |OB| = R$ к соседним вершинам многоугольника A и B . Из симметрии задачи ясно, что центральный угол $\angle AOB = 2\pi/n$, поскольку n - угольник разбивается на n треугольников, равных $\triangle AOB$. Очевидно,

что высота $|OC|$ треугольника AOB равна радиусу r вписанного в многоугольник круга. Так как $\triangle AOB$ равнобедренный, то OC является одновременно и медианой и биссектрисой (§20, пункт Б4°а2), поэтому $|AC| = |CB|$ и $\angle AOC = \pi/n$. Пусть сторона многоугольника $|AB| = a_n$. Из прямоугольного $\triangle AOC$ находим

$$|OC| = |AO| \cos \frac{\pi}{n} \Rightarrow r = R \cos \frac{\pi}{n}; \quad (21.12a)$$

$$|AC| = |AO| \sin \frac{\pi}{n} \Rightarrow a_n = 2R \sin \frac{\pi}{n}. \quad (21.12б)$$

Отсюда, для площади S многоугольника получаем

$$S_n = n \frac{|AB| \cdot |OC|}{2} = n \frac{R^2}{2} \sin \frac{2\pi}{n}, \quad (21.13)$$

где мы учли, что $2\sin(\pi/n)\cos(\pi/n) = \sin(2\pi/n)$. Кроме того, для периметра многоугольника находим

$$p_n = na_n = 2Rn \sin \frac{\pi}{n} \quad (21.14)$$

Е. Линии и площади в круге

Длину L окружности радиуса R проще всего получить как предел периметров правильных вписанных n - угольников при $n \rightarrow \infty$. Принимая во внимание (21.14) и используя замечательный предел (15.1), находим

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} p_n = 2\pi R \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(\pi/n)}{\pi/n} = 2\pi R. \quad (21.15)$$

поскольку при $n \rightarrow \infty$ имеем $\pi/n \rightarrow 0$. Аналогично, площадь S круга радиуса R можно получить как предел площадей правильных вписанных n - угольников в пределе $n \rightarrow \infty$

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \pi R^2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(2\pi/n)}{2\pi/n} = \pi R^2 \quad (21.16)$$

(сравните с результатом примера g) из §18Г). Далее, длину дуги $L(\alpha)$, соответствующей центральному углу α , и площадь соответствующего сектора круга $S(\alpha)$, находим из простых пропорций

$$\left. \begin{array}{l} 2\pi \\ \alpha \end{array} \right\} \begin{array}{l} - \\ - \end{array} \left. \begin{array}{l} 2\pi R \\ L(\alpha) \end{array} \right\} \Rightarrow L(\alpha) = \alpha R. \quad (21.17a)$$

$$\left. \begin{array}{l} 2\pi \\ \alpha \end{array} \right\} \begin{array}{l} - \\ - \end{array} \left. \begin{array}{l} \pi R^2 \\ S(\alpha) \end{array} \right\} \Rightarrow S(\alpha) = \frac{1}{2} R^2 \alpha. \quad (21.17б)$$

Наконец, так как площадь равнобедренного треугольника с боковой стороной R и углом при вершине α равна $0.5R^2 \sin \alpha$, то для площади сегмента S_1 круга, соответствующего центральному углу α , получаем

$$S_1(\alpha) = S(\alpha) - \frac{R^2}{2} \sin \alpha = \frac{R^2}{2} (\alpha - \sin \alpha), \quad \alpha < \pi. \quad (21.17в)$$

§ 22. Задачи на построение

Задачи на построение в "чистом виде" не предлагаются, как правило, на экзаменах по математике. Однако, геометрическое построение является важнейшим элементом почти каждой серьезной задачи по геометрии. Можно сказать, что задачи на построение и есть настоящие геометрические задачи, так как именно в этих задачах проявляется существо геометрии в отличие, скажем, от алгебры. "Инструментами" задачи на построение являются древние инструменты землемера - линейка (без делений) и циркуль. Линейка позволяет через любые две заданные точки плоскости провести прямую линию. С помощью же циркуля можно построить окружность с центром в данной точке и радиусом, равным длине заданного отрезка.

Все прочие геометрические построения должны быть выполнены (или описаны) как некоторые комбинации указанных элементарных построений.

КОНСТРУКТИВНОСТЬ МАТЕМАТИКИ

Неискушенный ученик часто воспринимает наложенные ограничения как прихоть преподавателя. Лишь позже, приобретя некоторый опыт, он начинает понимать, что удивительная мощь и красота геометрического построения состоит в его конструктивности. Допустим, некто заявляет

"Существует корень квадратный из числа 2".

Мудрые математики древности не любили таких абстрактных утверждений. От заявителя требовали предъявить (а значит, построить!) отрезок, длина которого в $\sqrt{2}$ раз больше длины заданного отрезка. Лишь тот объект признавался существующим, который можно было построить за конечное число шагов. В данном случае, отрезок длиной $\sqrt{2}$ - это диагональ квадрата со стороной 1.

К сожалению, мудрецы древности требовали от природы слишком многого. Доказано, что циркулем и линейкой нельзя построить правильный семиугольник, но ведь он, очевидно, существует! Пришлось признать существующим не только то, что можно явно построить по заданным правилам за конечное число шагов. Но роль и значение конструктивных доказательств и, в частности, геометрических построений, после этого лишь возросли.

А. Простейшие построения

Сложные геометрические построения выполняют обычно из некоторых простых стандартных "блоков", которые, в свою очередь, собраны известным образом из элементарных операций

- а) провести прямую через две заданные точки; (линейка)
- б) построить окружность заданного радиуса с центром в заданной точке; (циркуль)

К числу стандартных простейших построений можно отнести следующие операции

- с) отложить данный отрезок на данной прямой;
- д) отложить заданный угол от заданной прямой;
- е) разделить заданный отрезок пополам;
- ф) провести биссектрису заданного угла;
- г) восстановить перпендикуляр (опустить перпендикуляр) к прямой из данной точки;
- х) через заданную точку провести прямую, параллельную данной прямой.

Чтобы напомнить, как построения с) - х) строятся из элементарных построений а) и б), рассмотрим, например, задачи е) и ф).

Построение е). Пусть дан некоторый отрезок AB (Рис. 22.1). Проведем две окружности с центрами в концах A и B заданного отрезка с одним и тем же радиусом R , большим половины длины отрезка $|AB|$. Соединим прямой линией точки пересечения окружностей C и D . Тогда $CD \perp AB$ и $|AE| = |EB|$. Доказательство этих фактов, основанное на свойствах ромба $ACBD$ (§20, пункт А3°), предоставляем читателю. ■

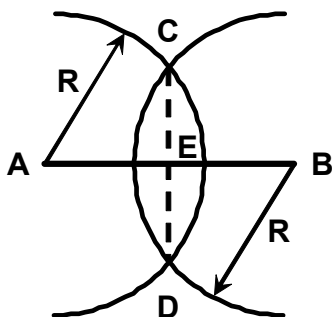


Рис. 22.1

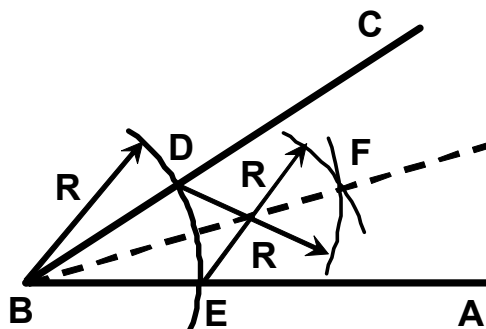


Рис. 22.2

Построение ф). Пересечем стороны заданного угла $\angle ABC$ (Рис. 22.2) окружностью произвольного радиуса R с центром в вершине угла B . Из точек пересечения D и E , как из центров, проведем окружности того же радиуса R до пересечения в точке F внутри $\angle ABC$. Соединив точки B и F , получим биссектрису $\angle ABC$ (§20, пункт А3°). ■

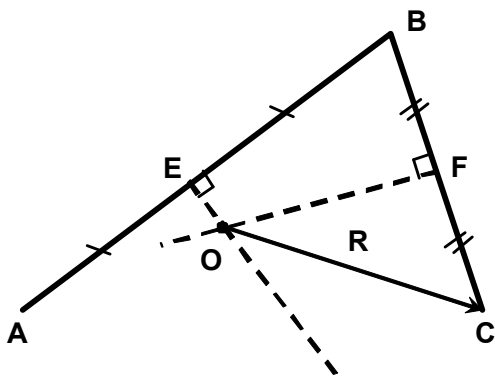


Рис. 22.3

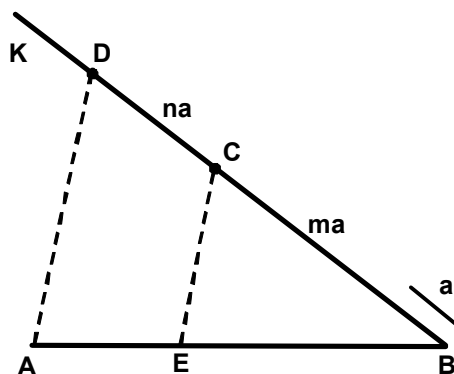


Рис. 22.4

Рассмотрим еще несколько задач, которые часто используются как готовые "блоки" в более сложных геометрических построениях.

i) провести окружность через три данные точки, не лежащие на одной прямой.

Пусть точки A , B и C не лежат на одной прямой (Рис. 22.3). Проведем прямые AB и BC [построение а)] и разделим отрезки AB и BC пополам [построение е)]. Из точек E и F — середин отрезков AB и BC — восставим перпендикуляры к AB и BC , соответственно [построение г)]. Точка O пересечения этих перпендикуляров и будет центром искомой окружности (§20, пункт В4°а). ■

j) разделить заданный отрезок AB в отношении $m : n$.

Возьмем на плоскости произвольную точку K , не принадлежащую отрезку AB (Рис. 22.4) и проведем прямую BK [построение а)]. Возьмем произвольный отрезок и отложим его от вершины B на прямой BK m раз, получив некоторую точку C , а затем еще n раз, до получения некоторой точки D [построение с)]. Через точку D и конец отрезка A проведем прямую DA

[построение а)]. Через точку C , параллельно прямой DA проведем прямую, до пересечения с заданным отрезком AB в точке E [построение h)]. Тогда (см. §20, пункт Б2°d), $|BE|/|EA| = m/n$. ■

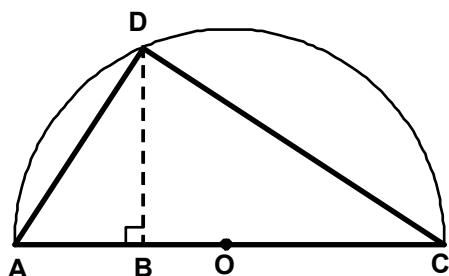


Рис. 22.5

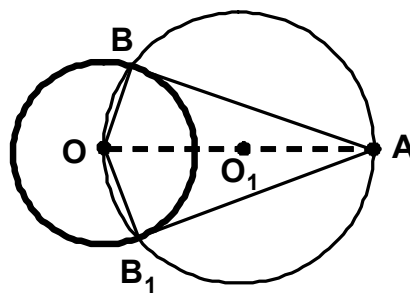


Рис. 22.6

к) построить среднее геометрическое двух данных отрезков.

Отложим на некоторой прямой друг за другом два данных отрезка $|AB|$ и $|BC|$ (Рис. 22.5) [построение с)]. Разделим отрезок $|AC|$ пополам [построение е)]. Из точки O , центра отрезка $|AC|$, радиусом, равным отрезку $|OC|$, проведем окружность [построение б)]. Из точки B восставим перпендикуляр к отрезку $|AC|$ [построение г)] до пересечения с окружностью в точке D . Получим отрезок (§20, пункт Б4°b),

$$|DB| = \sqrt{|AB| \cdot |BC|}. \blacksquare$$

1) провести касательную из данной точки, к заданной окружности.

Пусть даны окружность с центром в точке O и точка A , лежащая вне круга O (Рис. 22.6). Через точки O и A проведем прямую OA [построение а)]. Разделим отрезок $|OA|$ пополам [построение е)]. Из точки O_1 , середины отрезка $|OA|$, радиусом, равным $|O_1A|$, проведем окружность O_1 , пересекающую данную окружность в некоторой точке B [построение б)]. Проведем прямую AB [построение а)], которая и будет касательной к данной окружности, проведенной из данной точки. Действительно, радиус OB , проведенный в точку касания, перпендикулярен отрезку BA , так как вписанный угол $\angle OBA$ опирается на диаметр OA окружности O_1 . (§20, пункт В1°с и пункт В3°b)). ■

Заметим, что условиям задачи удовлетворяет также прямая AB_1 , так что данная задача имеет два решения.

Б. Метод двух геометрических мест

Идея этого мощного приема решения задач на построение состоит в том, что из полного набора данных, характеризующих некоторую фигуру, опускается одно какое-нибудь условие и определяется совокупность фигур, удовлетворяющих оставшимся условиям. Затем из полного набора данных исключается некоторое другое условие и опять определяется совокупность фигур, удовлетворяющих оставшимся условиям. Искомая фигура затем находится как "пересечение" множеств фигур из каждой совокупности.

Заметим, что задача i) решена, фактически, методом геометрических мест. Действительно, геометрическое место центров всех окружностей, проходящих через точки A и B (Рис. 22.3) есть, как нетрудно доказать, перпендикуляр к AB , проходящий через середину E этого отрезка. Аналогично, геометрическое место всех окружностей, проходящих через точки B и C есть перпендикуляр к BC , проходящий через середину BC , точку F . Ясно, что пересечение этих двух геометрических мест дает точку O , которая равноудалена от всех трех точек A , B и C .

Методом геометрических мест легко решается также задача о построении центра вписанной в треугольник окружности. Действительно, геометрическое место центров окружностей, касающихся сторон угла $\angle BAC$ на Рис. 20.15 есть биссектриса AD , а

геометрическое место центров окружностей, касающихся сторон угла ACB есть биссектриса CE . Ясно, что центр O вписанной в треугольник окружности должен лежать на пересечении биссектрис AD и CE .

м) построить треугольник по трем заданным сторонам.

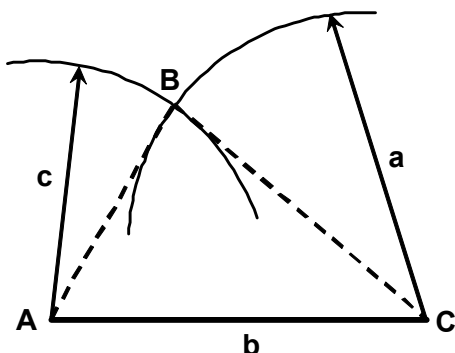


Рис. 22.7

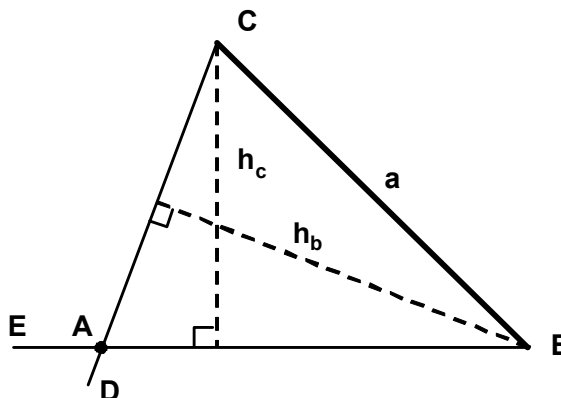


Рис. 22.8

Пусть даны отрезки $|AB| = c$, $|AC| = b$ и $|BC| = a$ (Рис. 22.7). Легко видеть, что геометрическое место вершин треугольников, со сторонами $|AC| = b$ и $|AB| = c$ есть окружность, проведенная из конца A отрезка AC как из центра, радиусом, равным c . Аналогично, окружность, центр которой расположен в точке C , а радиус равен a , есть геометрическое место вершин треугольников со сторонами $|AC| = b$ и $|BC| = a$. Вершина B искомого треугольника находится как пересечение указанных геометрических мест. ■

Из этого построения легко вывести необходимость выполнения неравенств треугольника (§20, пункт Б1°) для длин a , b и c данных отрезков.

н) построить треугольник по следующим данным: a , h_b и h_c (см. обозначения в §21А).

Пусть $|CB| = a$ — заданный отрезок (Рис. 22.8). Из его конца C , как из центра, проведем окружность радиуса h_c , а из конца B , как из центра, проведем окружность радиуса h_b [построение б)] (эти окружности на Рис. 22.8 не показаны). Из точки C проведем к окружности радиуса h_b касательную CD , а из точки B проведем к окружности радиуса h_c касательную BE [построение е)]. Тогда точка пересечения касательных CD и EB есть вершина A искомого треугольника ABC . ■

Кроме треугольника ABC , показанного на Рис. 22.8, данным задачи удовлетворяет также (как легко проверить) треугольник, зеркально отраженный относительно стороны $|CB| = a$. Это — разные треугольники, так как они не совмещаются (в общем случае) при наложении.

В. Метод подобия

Основную идею метода подобия разберем на конкретном примере.

о) построить треугольник по двум углам α и γ и периметру $2p$.

Поскольку все треугольники с двумя заданными углами подобны друг другу (§20, пункт Б2°с), построим сначала некоторый произвольный треугольник с заданными углами α и γ , а затем преобразуем его подобно так, чтобы его периметр стал равным заданному отрезку $2p$. Возьмем некоторый отрезок AC и построим на нем, как на основании треугольника два заданных угла α и γ (Рис. 22.9а). [построение д)]. Поскольку сумма $\alpha + \gamma$ не может превышать π радиан (§20, пункт Б1°д), то стороны углов пересекутся в некоторой точке B — вершине $\triangle ABC$. Отложим теперь на стороне некоторого угла от его вершины последовательно отрезки, равные сторонам $\triangle ABC$, т. е. $|BA|$, $|AC|$ и $|CB|$ [построение с)] (Рис. 22.9б). На другой стороне угла от его вершины

отложим отрезок $|BB_1|$ заданной длины $2p$ [построение с)]. Через точки B и B_1 проведем прямую BB_1 [построение а)]; затем через точки A и C проведем прямые, параллельные прямой BB_1 , до пересечения с противоположной стороной угла в точках A_1 и C_1 [построение h)]. Нетрудно доказать (§20, пункт Б2°d), что

$$\frac{|B_1A_1|}{|BA|} = \frac{|A_1C_1|}{|AC|} = \frac{|C_1B_1|}{|CB|}.$$

Следовательно (§20, пункт Б2°а), построив $\Delta A_1B_1C_1$ по трем сторонам $|B_1A_1|$; $|A_1C_1|$ и $|C_1B_1|$, получим треугольник, подобный ΔABC . Кроме того, по построению

$$|B_1A_1| + |A_1C_1| + |C_1B_1| = 2p.$$

Заметим, что построить искомый $\Delta A_1B_1C_1$ можно также отложив на стороне AB (или на ее продолжении) отрезок $|A_1B_1|$, а на стороне AC - отрезок $|A_1C_1|$, соединив точки B_1 и C_1 отрезком прямой. ■

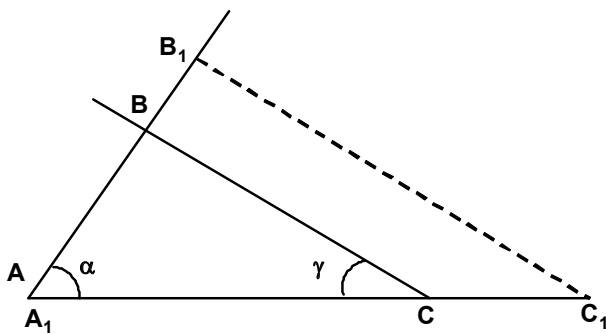


Рис. 22.9а

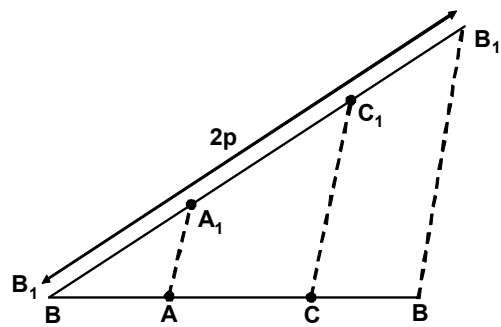


Рис. 22.9б

Г. Метод преобразований

В методе преобразований по данным задачи строится сначала некоторая вспомогательная фигура, из которой искомая фигура получается с помощью какого-либо геометрического преобразования: параллельного переноса или вращения некоторого элемента, осевого или центрально-симметричного отражения и т. д.

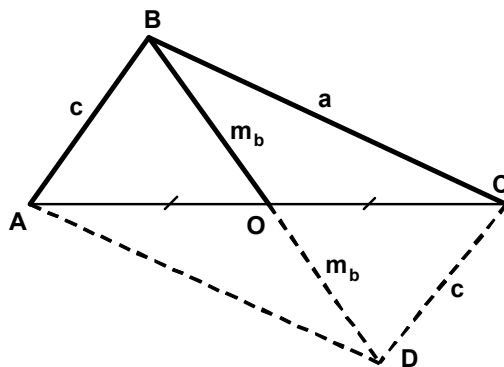


Рис. 22.10

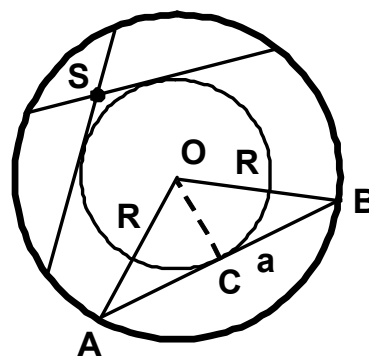


Рис. 22.11

р) построить треугольник по следующим элементам: a , c и m_b .

Предположим, что искомый треугольник уже построен (ΔABC , Рис. 22.10). Дополним этот треугольник до параллелограмма $ABCD$. Поскольку в параллелограмме противоположные стороны равны (§20, пункт А2°а), то $|DC| = |AB| = c$. Кроме того, в параллелограмме диагонали в точке пересечения делятся пополам (§20, пункт А2°с). Следовательно, $|AO| = |OC|$ и $|BO| = |OD|$.

Таким образом, BO - медиана $\triangle ABC$ и $|BO| = |OD| = m_b$. Отсюда ясно, что $\triangle BDC$ задан тремя своими сторонами. Построив $\triangle BDC$, легко затем построить и искомый $\triangle ABC$. ■

г) дан круг радиуса R и точка S внутри него. Провести через данную точку хорду заданной длины a .

Возьмем на окружности произвольную точку A и из нее, как из центра, проведем окружность радиусом, равным a , до пересечения с заданной окружностью в некоторой точке B (Рис. 22.11) [построение б)]. (Для этого необходимо, конечно, $a \leq 2R$). Разделим хорду AB пополам [построение е)] и соединим ее середину (точку C) с центром O заданной окружности [построение а)]. Так как $|OA| = |OB| = R$, то треугольник $\triangle AOB$ равнобедренный, следовательно, $OC \perp AB$ (§20, пункт Б4°а). Проведем радиусом, равным $|OC|$, вспомогательную окружность с центром в точке O . Тогда хорда AB касается вспомогательной окружности (§20, пункт В3°б). Нетрудно доказать, что все хорды, касающиеся вспомогательной окружности имеют одну и ту же длину a . Следовательно, проведя касательные к вспомогательной окружности из данной точки S , получим искомую хорду. Заметим, что задача имеет два решения в том случае, если данная точка S принадлежит кольцу, ограниченному данной и вспомогательной окружностями, и только одно решение, если данная точка лежит на вспомогательной окружности. У данной задачи нет решения, если точка S лежит внутри вспомогательной окружности. ■

ГРАММАТИКА И МАТЕМАТИКА

Наблюдая в очередной раз, как выпускник средней школы усиленно морщит лоб, пытаюсь, например, разделить одну дробь на другую, поневоле задумаешься, в чем тут дело. Особенно если этот же ученик только что уверенно решил, скажем, сложное показательное неравенство или вычислил каверзный предел. В русском языке есть понятие практической грамотности. Практически грамотный человек безупречно изъясняется и правильно пишет не помня, фактически, ни одного правила грамматики. Помогает ему приобретенная ранее интуиция и каждодневная практика устной и письменной речи. Однако (неосознанная) попытка применить этот же метод в математике приводит, рано или поздно, к ошибкам и неуверенности в своих действиях. Заметим, что родной язык мы употребляем все же гораздо чаще, чем математический. Кроме того, в силу гибкости языка, трудное место можно легко обойти, выразив ту же мысль по-другому. В математике это обычно невозможно. В то же время, математические выкладки имеют смысл, только если они проводятся абсолютно точно. Необходимо, поэтому, постоянно восстанавливать в памяти точные правила выполнения даже самых простых математических операций и определения основных математических понятий. К счастью, число действительно фундаментальных понятий и операций в математике сравнительно невелико.

§ 23. Задачи по планиметрии

Геометрическая задача является обычно наиболее трудоемкой частью письменной работы по математике. Лишь тот может рассчитывать здесь на успех, кто в достаточной степени "вооружен" изложенным в §§ 20 - 22 материалом, т. е. теоремами, формулами и методами геометрических построений. При решении геометрической задачи разумно действовать следующим образом.

1°. Обдумывая условия задачи, параллельно делать эскиз чертежа. При этом все геометрические факты, явно указанные в задаче, должны быть выдержаны на чертеже, по- возможности, точно: высота должна быть перпендикулярна основанию, медиана должна делить сторону (хотя бы приблизительно!) пополам, и т. д. В остальном же эскиз должен быть сделан для фигуры "общего" вида, не обладающей никакой "лишней" симметрией, не указанной в задаче явно.

2°. Предварительный анализ задачи должен показать, задана ли фигура (треугольник, четырехугольник и т. д.), о которой идет речь в задаче, полностью или только с точностью до подобия или некоторого другого преобразования.

3°. Если фигура непосредственно задана условиями задачи (например, треугольник задан тремя сторонами и нужно определить в нем некоторые отрезки) то перед нами задача скорее вычислительного плана. Здесь нужно, используя формулы §21, составить замкнутую систему уравнений для определения искомых величин. Сложность полученной системы уравнений определяется искусством и опытом вычислителя. При ее решении следует в полной мере использовать приемы и методы алгебры и тригонометрии, изложенные в §2, 6, 9 и 10.

4°. Гораздо интереснее, однако, те геометрические задачи, в которых приведенных данных, по-видимости, не хватает для однозначного определения фигуры, либо искомых величин. Здесь необходимо:

а) учитывать неявные, скрытые условия: касание фигур, параллельность или перпендикулярность некоторых отрезков и т. д.,

б) использовать специфические свойства равнобедренных, равнобоких, прямоугольных треугольников, частных типов параллелограмма, и тому подобные факты (см. §20),

в) попытаться построить фигуру по приведенным данным (см. §22). Прямое построение фигуры позволяет исследовать единственность решения, выявить особые случаи и, кроме того, часто указывает наиболее естественный способ вычисления искомых величин. Для эффективного выявления жестко заданных элементов фигуры весьма полезен также метод геометрических мест (§22Б).

г) Если фигура не задана однозначно, необходимо определить максимально широкий набор геометрических преобразований (поворотов, смещений, растяжений и т. д.) фигуры, совместимых с данными задачи. Возможно, что искомые величины окажутся инвариантными относительно таких преобразований.

5°. Определенный опыт необходим для грамотного введения неизвестных величин. По аналогии с изложенным в §13, как правило, необходимо вводить не те переменные, которые в задаче требуется определить, а некоторые другие величины, которые полностью задают фигуру и удобны для описания приведенных в условии задачи фактов. Затем уже нужно выяснить, через какую комбинацию введенных переменных могут быть выражены искомые величины.

6°. Необходимо следить за правильной, однородной размерностью используемых в задаче величин. Даже если в задаче указаны некоторые конкретные длины отрезков и величины углов, полезно сначала решать задачу в общем виде. Это позволяет в ходе решения легко контролировать правильность проводимых преобразований, т. к. все члены любого уравнения или соотношения должны иметь одну и ту же размерность. Кроме того, решение, полученное в общем виде, позволяет исследовать ответ в различных предельных случаях и проверить его совместимость с геометрической интуицией. Как правило, конкретные числовые данные следует подставлять лишь в окончательный ответ задачи.

А. Треугольники

а) В треугольнике ABC величины углов $\angle A$, $\angle B$ и $\angle C$ составляют арифметическую прогрессию. Наименьшая сторона треугольника в 4 раза меньше наибольшей стороны. Найдите тангенс наименьшего угла.

Ясно, что условиями задачи треугольник определен с точностью до преобразования подобия, но этого достаточно для определения его углов. Так как $\angle A$, $\angle B$ и $\angle C$ составляют арифметическую прогрессию, положим (см. §12)

$$\angle A = \alpha, \quad \angle B = \alpha + \beta, \quad \angle C = \alpha + 2\beta.$$

С другой стороны, сумма углов треугольника равна π , следовательно,

$$3\alpha + 3\beta = \pi, \quad \Rightarrow \quad \angle B = \alpha + \beta = \pi/3.$$

Поэтому

$$\angle A = \alpha, \quad \angle B = \pi/3, \quad \angle C = 2\pi/3 - \alpha.$$

Пусть $\alpha < \pi/3$. Тогда $\angle A$ – наименьший, а $\angle C$ – наибольший. Если против $\angle A$ лежит сторона a , а против $\angle C$ – сторона c , то по условию $4a = c$. По теореме синусов имеем

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{4a}{\sin(2\pi/3 - \alpha)}. \quad \Rightarrow \quad \sin(2\pi/3 - \alpha) = 4 \sin \alpha.$$

С помощью §10А находим, что $\sin(2\pi/3) = \sqrt{3}/2$, а $\cos(2\pi/3) = -1/2$. Следовательно,

$$\sqrt{3} \cos \alpha + \sin \alpha = 8 \sin \alpha \quad \Rightarrow \quad \operatorname{tg} \alpha = \sqrt{3}/7. \blacksquare$$

б) В равнобедренном треугольнике $\triangle ABC$ (Рис. 23.1) медиана AD и биссектриса CE перпендикулярны. Определить величину угла $\angle ADB$.

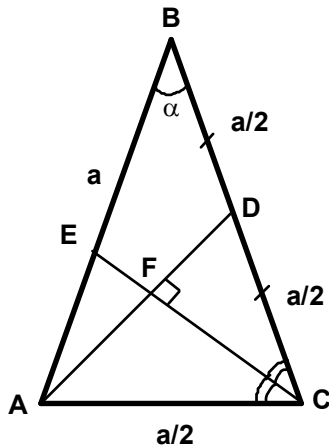


Рис. 23.1

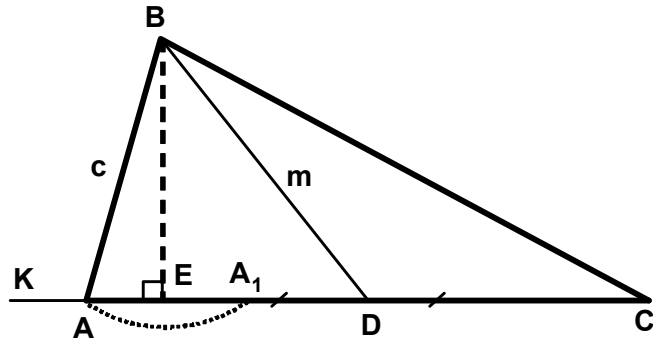


Рис. 23.2

В данной задаче также не задан ни один линейный размер. Поэтому вычислять можно лишь величины, общие для всех подобных друг другу треугольников, то есть углы и отношения линейных отрезков. Тем не менее, удобно задать равнобедренный треугольник, положив $|AB| = |BC| = a$, $\angle ABC = \alpha$. По условию задачи в $\triangle ADC$ биссектриса CF является одновременно и высотой. Отсюда нетрудно доказать (теорема, обратная утверждению §20, пункт Б4°а1), что $\triangle ADC$ равнобедренный, $|AC| = |DC|$. Кроме того $|AC| = a/2$, поскольку AD – медиана и $|BD| = |DC|$. Опустив высоту на основание AC равнобедренного треугольника $\triangle ABC$ и учитывая, что она является одновременно биссектрисой, нетрудно получить соотношение

$$\sin(\alpha/2) = 1/4, \quad \Rightarrow \quad \alpha = 2 \arcsin(1/4).$$

Мы учли здесь, что угол α , как лежащий против меньшей стороны, определенно острый. Действительно, по доказанному, $|AC|/|AB| = 1/2$. Остается выразить $\angle ADB$ через угол α . По свойству внешнего угла треугольника (§20, пункт Б1°е), находим из прямоугольного $\triangle DFC$ $\angle ADB = \pi/2 + \angle FCD = \pi/2 + \angle ACD/2$. Поскольку $\triangle ABC$ равнобедренный, то $\angle ACD = (\pi - \alpha)/2$, следовательно $\angle ADB = 3\pi/4 - 1/2 \arcsin(1/4)$. ■

с) В треугольнике ABC (Рис. 23.2) длина стороны $|AB| = c$. Из вершины B к стороне AC проведена медиана BD , длина которой равна m . Найти площадь $\triangle ABC$, если $\angle BDA = 30^\circ$.

Известно, что медиана разбивает любой треугольник на два равновеликих треугольника. Действительно, по условию $|AD| = |DC|$, а высота BE у $\triangle ADB$ и $\triangle DBC$ общая. Следовательно, достаточно вычислить площадь $\triangle ABD$. Заметим, однако, что треугольник ABD условиями задачи определен не полностью, так как данный набор условий ($|AB| = c$, $|BD| = m$ и $\angle BDA = 30^\circ$) не соответствует ни одному из наборов условий, указанных в признаках равенства треугольников (§20 пункт Б1°). Построим треугольник ABD по указанным данным. От конца D отрезка $|BD| = m$ отложим угол $\angle BDK = 30^\circ$ и опустим перпендикуляр BE на сторону DK угла BDK . Далее, из вершины B радиусом равным c проведем дугу окружности, пересекающую сторону DK в точках A и A_1 . Из прямоугольного $\triangle BED$ легко найти высоту $|BE| = m \cdot \sin 30^\circ = m/2$. Отсюда ясно, что если $c < m/2$, то искомый треугольник не существует. Если $m/2 = c$, то $\triangle ABD$ совпадает с $\triangle BED$. В случае $m/2 < c < m$ имеется два треугольника, $\triangle ABD$ и $\triangle A_1BD$, площади которых отличаются на площадь равнобедренного $\triangle ABA_1$. Наконец, при $c \geq m$ данным задачи удовлетворяет лишь $\triangle ABD$. Итак, при $c = m/2$ легко находим, что

$$S_{BED} = 1/2 |BE| \cdot |ED| = m^2 \sqrt{3} / 8; \quad \Rightarrow \quad S_{ABC} = m^2 \sqrt{3} / 4.$$

Далее, в случае $m/2 < c < m$, имеем

$$S_{ABD} = S_{BED} + S_{ABE}, \quad \Rightarrow \quad S_{A_1BD} = S_{BED} - S_{ABE}.$$

В прямоугольном $\triangle ABE$ известна гипотенуза $|AB| = c$ и катет $|BE| = m/2$. Поэтому

$$S_{ABE} = 1/2 |AE| \cdot |BE| = \frac{m}{4} \sqrt{c^2 - (m/2)^2}.$$

Таким образом, при $m/2 < c < m$ имеем два решения

$$S_{ABC} = 2S_{ABD} = 2 \left[\frac{m^2 \sqrt{3}}{8} + \frac{m^2}{8} \sqrt{(2c/m)^2 - 1} \right] = \frac{m^2}{4} \left[\sqrt{3} + \sqrt{(2c/m)^2 - 1} \right];$$

и

$$S_{A_1BC} = 2S_{A_1BD} = \frac{m^2}{4} \left[\sqrt{3} - \sqrt{(2c/m)^2 - 1} \right].$$

Наконец, легко видеть, что при $c \geq m$ остается лишь решение, соответствующее S_{ABD} , так как площадь треугольника $\triangle A_1BC$ при $c \geq m$ формально становится отрицательной. Таким образом, алгебраические выкладки полностью подтверждают геометрические факты, установленные при прямом построении треугольника $\triangle ABD$. ■

Б. Четырехугольники

d) В трапеции $ABCD$ длины оснований $|BC| = a$ и $|AD| = b$, а длины диагоналей $|AC| = d_1$ и $|BD| = d_2$. Определить площадь трапеции.

Покажем, прежде всего, что по данным задачи трапеция определяется однозначно. Одновременно мы найдем простой способ вычисления ее площади. Проведем через вершину C трапеции прямую, параллельную диагонали BD , до пересечения с продолжением основания AD в точке K (Рис. 23.3). Так как $BC \parallel DK$ и $BD \parallel CK$ то четырехугольник $DBCK$ – параллелограмм (§20, пункт А2°). Следовательно, $|DK| = a$, $|CK| = d_2$, так что $\triangle ACK$ однозначно задан тремя сторонами, $|AC| = d_1$, $|CK| = d_2$, и $|AK| = a + b$, если эти стороны удовлетворяют неравенствам

треугольника (§20, пункт Б1°). Отсюда ясны условия и способ построения трапеции по ее основаниям и диагоналям. Далее,

$$S_{ABCB} = S_{ABC} + S_{ACD} = S_{ACD} + S_{CDK} = S_{ACK}.$$

Здесь учтено, что площади $\triangle ABC$ и $\triangle CDK$ равны, так как у них равные основания $|BC| = |DK|$, и равные высоты. Площадь же треугольника ACK можно найти по формуле Герона (§21.8в)

$$S_{ACK} = [p(p-d_1)(p-d_2)(p-a-b)]^{1/2}; \quad p = \frac{1}{2}(d_1 + d_2 + a + b). \blacksquare$$

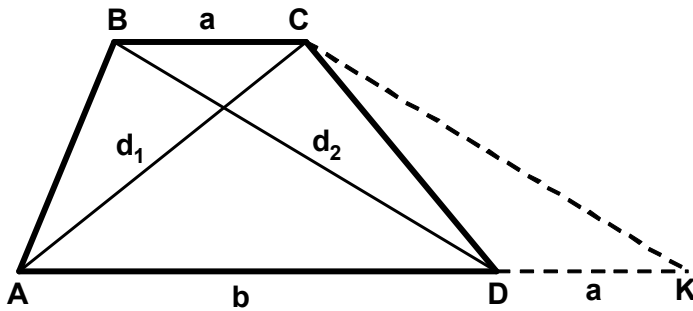


Рис. 23.3

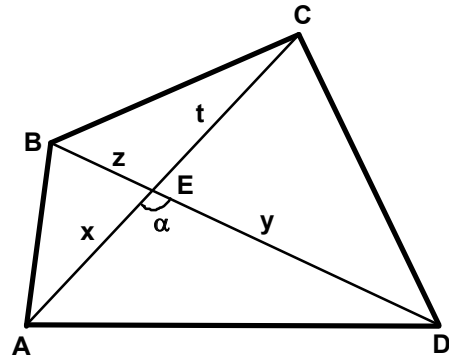


Рис. 23.4

е) В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ точка E – пересечение диагоналей. Известно, что площадь каждого из треугольников $\triangle ABE$ и $\triangle CED$ равна 7, а площадь всего четырехугольника не превосходит 28. Длина стороны AD равна $\sqrt{5}$. Найти длину стороны BC .

Заметим, что четырехугольник $ABCD$ будет полностью задан, если мы введем отрезки диагоналей $|AE| = x$, и $|ED| = y$ (Рис. 23.4). Действительно, в этом случае $\triangle AED$ будет определен по трем сторонам, следовательно $\angle AED = \alpha$ будет известен. Далее, поскольку площади треугольников $\triangle ABE$ и $\triangle CED$ известны, то по указанным данным могут быть определены также и длины отрезков $|BE| = z$ и $|EC| = t$. В результате, длина стороны $|BC|$ может быть определена по теореме косинусов. Удобно однако, считать заданными все четыре отрезка диагоналей x, y, z и t , и угол между диагоналями α . Этот набор данных полностью определяет четырехугольник и удобен для анализа. Обозначим, также площадь треугольника $S_{AED} = Q$ и установим соотношения между введенными величинами. Прежде всего, пользуясь тем, что $\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$, определим из Рис. 23.4 площади треугольников, на которые разбивается диагоналями данный четырехугольник. Имеем

$$S_{ABE} = \frac{1}{2}zx \sin \alpha = 7, \quad \Rightarrow \quad z = \frac{14}{x \sin \alpha}; \quad S_{ECD} = \frac{1}{2}ty \sin \alpha = 7, \quad \Rightarrow \quad t = \frac{14}{y \sin \alpha};$$

$$S_{AED} = \frac{1}{2}xy \sin \alpha = Q; \quad S_{BEC} = \frac{1}{2}zt \sin \alpha = \frac{1}{2} \left(\frac{14}{x \sin \alpha} \right) \left(\frac{14}{y \sin \alpha} \right) \sin \alpha = \frac{7^2}{Q}. \quad (*)$$

Следовательно, для площади четырехугольника получаем

$$S_{ABCD} = 14 + Q + \frac{7^2}{Q} = 7 \left(\sqrt{\frac{Q}{7}} + \sqrt{\frac{7}{Q}} \right)^2.$$

Рассматривая функцию $y = (x + 1/x)^2$ нетрудно доказать, что минимальное значение полного квадрата равно 4. По условию задачи $S_{ABCD} \leq 28$, следовательно $Q = 7$. Тогда из соотношений (*)

получаем равенства $zx = ty = xy = zt$, откуда $z = y$ и $t = x$. Отсюда следует, что рассматриваемая фигура - параллелограмм (§20, пункт А2°g); поэтому $|AD| = |BC| = \sqrt{5}$. ■

В. Окружности

f) В полукруг радиуса R вписаны две окружности, касающиеся друг друга, полукруга и его диаметра. Радиус одной из окружностей равен r . Найти радиус другой окружности.

Пусть центр полукруга расположен в точке O , а центры вписанных окружностей - в точках B и C (Рис. 23.5); x - радиус искомой окружности. Проведем радиусы $|AB| = x$ и $|CO| = r$ в точки A и D касания окружностей с диаметром полукруга. По известному свойству радиуса, проведенного в точку касания (§20, пункт В3°а) имеем $AB \perp AD$ и $CD \perp AD$. Далее, соединим центры окружностей B и C с центром полукруга O прямыми OB и OC . Так как вписанные окружности касаются изнутри окружности полукруга, то прямые OB и OC проходят через точки касания окружностей с полукругом E и F , соответственно.

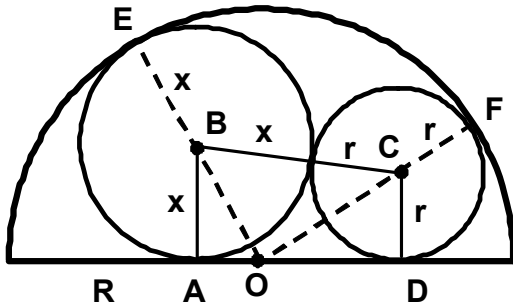


Рис. 23.5

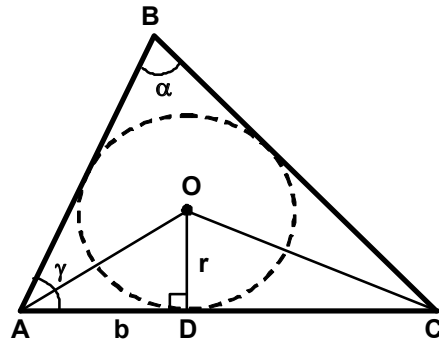


Рис. 23.6

Поскольку $|OE| = |OF| = R$, то отрезки $|OB| = R - x$ и $|OC| = R - r$. Тогда, из прямоугольных $\triangle ABO$ и $\triangle OCD$ находим

$$AO = \sqrt{(R - x)^2 - x^2} = \sqrt{R(R - 2x)}; \quad OD = \sqrt{(R - r)^2 - r^2} = \sqrt{R(R - 2r)}.$$

Наконец, условие касания внутренних окружностей между собой означает, что длина отрезка, соединяющего их центры $|BC| = x + r$. Из прямоугольной трапеции $ABCD$ нетрудно заключить, что независимо от соотношения между x и r , для определения x имеем равенство

$$(x + r)^2 = (x - r)^2 + \left(\sqrt{R(R - 2x)} + \sqrt{R(R - 2r)} \right)^2,$$

или, после упрощения

$$4xr = R \left(\sqrt{R - 2x} + \sqrt{R - 2r} \right)^2.$$

Заметим, что размерность всех членов в этом уравнении одинаковая. Для его решения удобно перейти к безразмерным переменным, полагая $t = x/R$ и $g = r/R$. Тогда получим

$$4gt = \left(\sqrt{1 - 2t} + \sqrt{1 - 2g} \right)^2 \quad (1^*)$$

Прежде чем решать это уравнение, исследуем его. Область определения уравнения (1*) есть $t \leq 1/2$; причем параметр g также должен быть задан в интервале $[0, 1/2]$. Это соответствует тому очевидному факту, что в полукруг радиуса R можно вписать лишь окружность с $r/R \leq 1/2$. Далее, пусть заданная окружность имеет максимально возможное значение безразмерного

радиуса $g = 1/2$. Тогда из (1*) легко находим, что минимальное возможное значение t равно $1/4$. Это означает, что при $t < 1/4$ касание внутренних окружностей между собой и, одновременно, с полукругом, невозможно. Отсюда следует, что задача имеет решение только при $1/4 \leq g \leq 1/2$. Выяснив условия существования решения задачи, переходим к решению уравнения (1*). Возводя в квадрат правую часть уравнения (1*) и приводя подобные члены, получаем

$$t(2g+1) + g - 1 = \sqrt{(1-2t)(1-2g)}. \quad (2^*)$$

Заметим, что уравнение (2*) имеет решение лишь при условии

$$t > (1-g)/(2g+1). \quad (3^*)$$

(см. §6). При этом условии обе части уравнения (2*) положительны и возводя его в квадрат, приходим к квадратному уравнению относительно t , решения которого есть

$$t_{\pm} = \frac{g}{(2g+1)^2} [3 - 2g \pm \sqrt{8(1-2g)}]. \quad (4^*)$$

В силу симметрии между искомой и заданной окружностью, нам подходит лишь тот из корней (4*), который меняется в интервале $1/4 \leq t \leq 1/2$. Нетрудно убедиться, что таковым является корень t_+ . Можно доказать (попробуйте!) что только корень t_+ удовлетворяет неравенству (3*) при условии что $1/4 \leq g \leq 1/2$. ■

На этом примере видно, что геометрические соображения существенно помогают правильному отбору решений, действительно удовлетворяющих условиям задачи.

Г. Разные задачи

г) В треугольнике ABC заданы $|AC| = b$ и $\angle ABC = \alpha$. Определить радиус окружности, проходящей через центр вписанного в треугольник ABC круга и вершины A и C .

В этой задаче (см. Рис. 23.6) заведомо не хватает данных для однозначного определения $\triangle ABC$. Действительно, нетрудно показать, что вершины треугольников с основанием $|AC| = b$ и углом при вершине $\angle ABC = \alpha$ лежат на окружности радиуса

$$R = \frac{b}{2 \sin \alpha}.$$

Ясно, что для треугольников с вершинами, лежащими в различных точках этой окружности, центры соответствующих вписанных окружностей также лежат в различных точках. Остается поэтому надеяться, что радиус искомой окружности, тем не менее, инвариантен относительно указанного преобразования $\triangle ABC$. Установим этот факт прямым вычислением. Фиксируем $\triangle ABC$, задав угол при вершине A , $\angle BAC = \gamma$. Поскольку $\angle BCA = \pi - \alpha - \gamma$, то $\triangle ABC$ задан стороной AC и двумя прилежащими к ней углами. Центр вписанной окружности O находится на пересечении биссектрис AO и OC углов $\angle BAC$ и $\angle BCA$, соответственно (§20, пункт В3°а). Поэтому $\angle OAC = \gamma/2$ и $\angle OCA = (\pi - \alpha - \gamma)/2$. Соединим центр O с точкой касания D вписанной окружности со стороной AC . Тогда (§20, пункт В3°а), $OD \perp AC$. Обозначим радиус вписанной окружности $|OD| = r$. Наметим теперь схему вычисления радиуса окружности, проходящей через точки A , O и C .

1) Через точки A , O и C проходит единственная окружность (§20, пункт В4°а) и ее радиус R может быть вычислен через площадь вписанного в нее треугольника AOC (формула (21.6b))

$$R = \frac{|AO| \cdot |OC| \cdot |AC|}{4S_{AOC}}.$$

2) Площадь ΔAOC есть

$$S_{AOC} = \frac{1}{2} |AC| \cdot |OD| = \frac{1}{2} br.$$

3) Отрезки AO и OC находятся из прямоугольных ΔAOD и ΔODC

$$AO = \frac{r}{\sin(\gamma/2)}, \quad OC = \frac{r}{\sin[(\pi - \alpha - \gamma)/2]}.$$

4) Остается, таким образом, найти радиус r окружности, вписанной в ΔABC , который равен (формула (20.7))

$$r = \frac{S_{ABC}}{p}, \quad p = \frac{1}{2} (|AB| + |BC| + |AC|)$$

5) Поскольку ΔABC полностью определен, то его стороны $|AB|$, $|BC|$ и площадь легко находятся с помощью теоремы синусов.

Заметим, что такого рода план действий должен быть разработан для любой серьезной вычислительной задачи перед тем, как пускаться в сложные и опасные вычисления. Реализовав намеченный план, получим искомый радиус R как функцию заданных величин b и α и введенного нами угла γ

$$R = b \cdot \frac{1}{2 \sin(\gamma/2) \cos((\alpha + \gamma)/2)} \cdot \frac{\sin \gamma \sin(\alpha + \gamma)}{\sin \alpha + \sin \gamma + \sin(\alpha + \gamma)}.$$

На первый взгляд, эта величина не является инвариантом, так как явно зависит от угла γ . Можно показать, однако (докажите соответствующее тригонометрическое тождество!), что это выражение можно привести к виду

$$R = \frac{b}{2 \cos(\alpha/2)}. \blacksquare$$

h) В трапеции боковые стороны перпендикулярны, длина меньшего основания равна a , а высота трапеции равна h . Какова наибольшая площадь треугольника, образованного отрезками диагоналей и меньшим основанием трапеции?

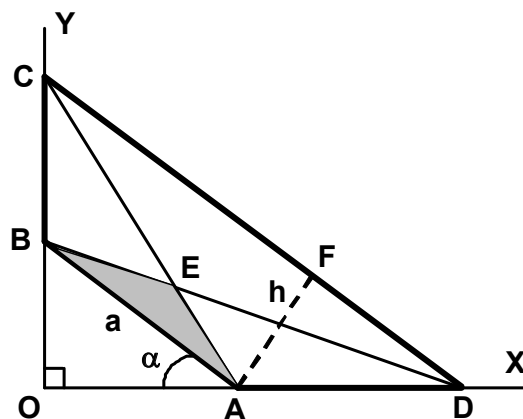


Рис. 23.7

Продолжим боковые стороны AD и BC трапеции $ABCD$ до их пересечения в точке O (Рис. 23.7). По условию угол $\angle BOA$ - прямой. Построим трапецию $ABCD$ по данным задачи. На стороне прямого угла возьмем произвольную точку A и радиусом, равным a , проведем окружность до

пересечения с другой стороной угла в точке B . Затем с внешней стороны прямого угла проведем прямую, параллельную отрезку AB на расстоянии h от него. Точки пересечения C и D этой прямой со сторонами прямого угла и определяют искомую трапецию $ABCD$. Ясно, что множество трапеций $ABCD$ зависит от единственного параметра, например, угла $\angle BAO$, который мы обозначим через α . Пусть E - точка пересечения диагоналей AC и BD . В задаче требуется определить такую трапецию (следовательно, такой угол α !) для которой площадь треугольника BEA максимальна. Необходимо, следовательно, найти площадь ΔBEA как функцию угла α и определить ее максимум на интервале $0 < \alpha < \pi/2$. План решения задачи следующий:

- 1) Площадь искомого ΔBEA найдем как разность

$$S_{BEA} = S_{BOD} - S_{BOA} - S_{EAD}. \quad (5^*)$$

- 2) Из прямоугольного ΔBOA легко находим $|BO| = a \cdot \sin \alpha$, $|OA| = a \cdot \cos \alpha$. Поэтому

$$S_{BOA} = \frac{1}{4} a^2 \sin 2\alpha.$$

- 3) Опустив высоту AF на основание трапеции CD , и учитывая, что в силу $AB \parallel CD$ угол $\angle ADF = \alpha$, из прямоугольного ΔAFD находим $|AD| = h/\sin \alpha$. Следовательно,

$$S_{BOD} = \frac{1}{2} a \sin \alpha \left(a \cos \alpha + \frac{h}{\sin \alpha} \right).$$

- 4) В треугольнике EAD основание AD известно; остается найти его высоту, опущенную на основание AD . Будем считать, что стороны прямого угла совпадают с осями Ox и Oy декартовой системы координат и определим y – координату точки E из условия пересечения диагоналей трапеции CA и BD . Поскольку ΔCOD - прямоугольный, то $\angle OCD = \pi/2 - \alpha$. Отсюда нетрудно получить, что $|CB| = h/\cos \alpha$. Вспоминая уравнение прямой в отрезках (см. §4), уравнение прямой CA запишем в виде

$$\frac{y}{a \sin \alpha + h/\cos \alpha} + \frac{x}{a \cos \alpha} = 1. \quad (6^*)$$

Соответственно, уравнение прямой BD есть

$$\frac{y}{a \sin \alpha} + \frac{x}{a \cos \alpha + h/\sin \alpha} = 1. \quad (7^*)$$

Решая уравнения (6*) - (7*) совместно, находим y - координату точки E , затем вычисляем площадь ΔEAD по формуле

$$S_{EAD} = \frac{1}{2} y_E \frac{h}{\sin \alpha}.$$

Подставляя все найденные соотношения в формулу (5*), находим зависимость площади ΔBEA от угла α

$$S_{BEA}(\alpha) = \frac{ha^2 \sin 2\alpha}{4(h + a \sin 2\alpha)}. \quad (8^*)$$

Полученная формула имеет правильную размерность и показывает, что $S_{BEA} \rightarrow 0$ при $\alpha \rightarrow 0$, либо $\alpha \rightarrow \pi/2$. Максимальное же значение этой площади можно найти, исследуя экстремумы функции (8*) на заданном интервале $0 < \alpha < \pi/2$ (см. §18). Это дает

$$\alpha_{\max} = \frac{\pi}{4}, \quad S_{BEA, \max} = \frac{ha^2}{4(h+a)} \cdot \blacksquare$$

Д. Контрольные задачи

1°. В треугольнике $\triangle ABC$ заданы углы $\angle BAC = \alpha$ и $\angle BCA = \gamma$. Определить отношение отрезков, на которые разбивает центр вписанной в $\triangle ABC$ окружности биссектрису $\angle ABC$.

2°. В параллелограмме с длинами сторон a и b и острым углом α проведены биссектрисы четырех углов. Найдите площадь четырехугольника, вершинами которого служат точки пересечения биссектрис.

3°. Длины катетов прямоугольного треугольника равны a и b . Найти расстояние между центрами вписанной и описанной окружностей.

4°. В треугольнике $\triangle ABC$ заданы углы $\angle BAC = \alpha$ и $\angle BCA = \gamma$, а сторона $|AC| = b$. Определить длину стороны квадрата, вписанного в этот треугольник.

НЕПОСТИЖИМАЯ ЭФФЕКТИВНОСТЬ МАТЕМАТИКИ

По шутливой классификации академика Л.Д. Ландау науки делятся на естественные (физика, химия, биология и т. д.), неестественные (история, философия, политология и др.) и противоестественные (например, благополучно почившая ныне история КПСС). Математику же Ландау называл наукой сверхестественной. Действительно, между математикой и естественными науками имеются существенные различия.

Естественные науки исследуют явления и процессы, происходящие в окружающем нас мире, и главным критерием истинности в этих науках является опыт, экспериментальный факт. Математика же в значительной мере "придумывается" математиками. Поэтому проверять математику опытным путем бессмысленно. В математике допустимо, по-видимому, все, что не противоречиво. Удивительно, что наука "выдуманная", сугубо умозрительная, так хорошо подходит для описания объективной реальности, существующей вне нас и независимо от нас! Конечно, основные понятия математики, такие как множество, число, геометрическая фигура и т. д. есть глубокая абстракция опыта. Более того, используемые в математических доказательствах правила логического вывода, несомненно, есть плод многовековой успешной человеческой деятельности. Тем не менее, опыт и практика человека ограничены естественными для него масштабами величин. В физике, например, это приводит к тому, что повседневному человеческому опыту адекватны лишь понятия механики Ньютона, то есть механики малых скоростей. Явления, происходящие при слишком больших скоростях относительного движения человеком интуитивно непостижимы. Неудивительно поэтому, что для правильного описания этих явлений физикам пришлось радикально изменить коренные физические представления о пространстве, времени, одновременности событий и т. д. Однако с точки зрения математики дело сводится лишь к изменению закона преобразования величин при переходе из одной движущейся системы координат в другую. Всеохватность математики, универсальная приложимость ее понятий и методов как в микромире (описание поведения кварков) так и в макромире (эволюция галактик) остается удивительным и необъяснимым фактом современной науки.

§ 24. Теоремы и формулы стереометрии

В стереометрии к понятиям точки и прямой, используемым в планиметрии, добавляется новое неопределяемое понятие - плоскость. Наиболее интересные факты стереометрии связаны с взаимным расположением прямых и плоскостей в пространстве. В данном параграфе мы используем следующие обозначения: (А) - аксиома, (О) - определение и (Т) - теорема.

А. Прямая и плоскость

Прямая и плоскость могут иметь: 1) две общих точки; 2) одну общую точку; 3) ни одной общей точки.

1°. Если прямая имеет с плоскостью две общие точки, то прямая лежит в этой плоскости (А).

2°. Если прямая не имеет с плоскостью ни одной общей точки, то она называется параллельной плоскости (О). Прямая, имеющая с плоскостью одну и только одну общую точку, пересекает плоскость в этой точке (О). Утверждения о том, что существуют прямые, расположенные параллельно плоскости, и прямые, пересекающие плоскость, являются теоремами стереометрии. Стереометрические теоремы в большинстве случаев интуитивно очевидны и доказываются, как правило, рассуждением от противного.

3°. Если плоскость проходит через прямую, параллельную другой плоскости и пересекает эту плоскость, то линия пересечения плоскостей параллельна данной прямой (Т).

Обратная теорема дает важный признак параллельности прямой и плоскости.

4°. Если прямая параллельна какой-нибудь прямой, лежащей в плоскости, то данная прямая параллельна плоскости (Т).

Перпендикулярность прямой к плоскости есть частный случай их пересечения.

5°. Прямая и плоскость называются взаимно перпендикулярными, если прямая перпендикулярна каждой прямой, лежащей в плоскости (О).

Признак перпендикулярности прямой и плоскости.

6°. Если прямая перпендикулярна каждой из двух пересекающихся прямых, лежащих в плоскости, то эта прямая и плоскость взаимно перпендикулярны (Т).

7°. Свойства перпендикуляров к плоскости:

а) через данную точку можно провести одну и только одну прямую, перпендикулярную данной плоскости (Т);

б) два различных перпендикуляра к плоскости параллельны (Т);

с) если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна плоскости, то и другая перпендикулярна этой плоскости (Т). Заметим, что теорема с) является обратной теореме б).

д) расстояние от точки до плоскости есть длина перпендикуляра, опущенного из данной точки на плоскость (О).

Прямую, пересекающую плоскость и не перпендикулярную к ней, называют наклонной к плоскости (О).

8°. Углом между наклонной и плоскостью называется угол между наклонной и ее ортогональной проекцией на плоскость (О).

9°. Теорема о трех перпендикулярах.

Для того, чтобы прямая, лежащая в плоскости, была перпендикулярна наклонной, необходимо и достаточно, чтобы эта прямая была перпендикулярна проекции наклонной. (Т)

Б. Прямые в пространстве

Две прямые в пространстве могут: 1) совпадать; 2) пересекаться; 3) быть параллельными; 4) скрещиваться. В первых трех случаях существует плоскость, которой принадлежат обе рассматриваемые прямые. Следовательно, эти случаи могут быть изучены в рамках планиметрии. Новым здесь является лишь случай *скрещенных* прямых.

1°. Две прямые называются скрещивающимися, если они не пересекаются и не параллельны (О).

Признак скрещивающихся прямых.

2°. Если одна из двух прямых лежит в плоскости, а другая пересекает эту плоскость в точке, не принадлежащей первой прямой, то данные прямые скрещиваются (Т).

3°. Отрезок, имеющий концы на двух скрещивающихся прямых и перпендикулярный к ним, называется общим перпендикуляром скрещивающихся прямых (О).

В. Плоскости в пространстве

Две плоскости в пространстве могут: 1) совпадать; 2) быть параллельными; 3) пересекаться.

1°. Если три точки одной плоскости совпадают с тремя точками другой плоскости, то плоскости совпадают (А).

2°. Если две различные плоскости имеют общую точку, то они пересекаются и их пересечение есть прямая (А).

Таким образом, прямые в пространстве можно проводить через две заданные точки (аксиома!), либо строить как пересечение двух плоскостей.

3°. Две плоскости называются параллельными, если они не имеют ни одной общей точки (О).

Признак параллельности двух плоскостей.

4°. Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны (Т).

5°. Свойства параллельных плоскостей.

а) через данную точку можно провести одну и только одну плоскость, параллельную данной (Т);

б) если две параллельные плоскости пересечены третьей плоскостью, то линии пересечения параллельны (Т);

с) две плоскости, перпендикулярные одной и той же прямой, параллельны (Т).

6°. Двугранный угол

а) Две пересекающиеся плоскости выделяют часть пространства, которая называется двугранным углом. Прямая, являющаяся общей границей граней двугранного угла, называется его ребром (О);

б) пересечение двугранного угла и плоскости, перпендикулярной его ребру, называется линейным углом двугранного угла (О);

с) двугранный угол измеряется величиной его линейного угла (О).

7°. Две плоскости называются взаимно перпендикулярными, если линейный угол двугранного угла, образованного их пересечением, равен прямому углу (О).

Признак перпендикулярности плоскостей.

8°. Если плоскость содержит перпендикуляр к другой плоскости, то она перпендикулярна этой плоскости (Т).

9°. Свойства перпендикулярных плоскостей:

а) если две плоскости взаимно перпендикулярны, то прямая, проведенная в одной плоскости перпендикулярно линии пересечения плоскостей, перпендикулярна другой плоскости (Т).

б) если две плоскости взаимно перпендикулярны и к одной из плоскостей проведен перпендикуляр, проходящий через линию пересечения этих плоскостей, то этот перпендикуляр целиком принадлежит другой плоскости (Т).

Г. Определения стереометрических фигур

Неправильное или неточное использование определений многогранников или тел вращения, о которых идет речь в стереометрической задаче, является источником значительного числа ошибок абитуриентов на экзамене по математике.

1°. Призма - это многогранник, у которого

- а) основания - равные n - угольники, лежащие в параллельных плоскостях;
- б) боковые грани - параллелограммы.

Призма может быть прямой и наклонной.

2°. Прямая призма

- а) боковые ребра перпендикулярны основаниям.

3°. Правильная призма

- а) основание - правильные n - угольники (§20, пункт Д3°);
- б) боковые ребра перпендикулярны основаниям.

Таким образом, прямая призма есть частный случай общей призмы, а правильная призма - частный случай прямой призмы.

4°. Параллелепипед - частный случай призмы, у которой в основаниях лежат (равные) параллелограммы. Таким образом, все шесть граней параллелепипеда есть параллелограммы.

5°. Прямой параллелепипед

а) боковые ребра перпендикулярны основаниям; следовательно, противоположные боковые грани прямого параллелепипеда есть равные прямоугольники.

6°. Прямоугольный параллелепипед

- а) основания - равные прямоугольники;
- б) боковые грани - попарно равные прямоугольники.

Частный случай прямоугольного параллелепипеда, у которого все ребра равны, называется кубом. Все грани куба - равные квадраты.

7°. Пирамида - это многогранник, у которого

- а) основание - произвольный многоугольник;
- б) боковые грани - треугольники, имеющие общую вершину.

8°. Правильная пирамида

- а) основание - правильный многоугольник (§20, пункт Д3°);
- б) боковые грани - равные равнобедренные треугольники.

Высота правильной пирамиды ортогонально проецируется в центр правильного многоугольника. Высота боковой грани правильной пирамиды, проведенная из ее вершины, называется *апофемой* пирамиды.

9°. Тетраэдр - это частный случай пирамиды; в основании тетраэдра лежит произвольный треугольник.

10°. Правильный тетраэдр - пирамида, у которой все четыре грани являются равными равносторонними треугольниками.

Следует обратить внимание, что правильный тетраэдр есть специальный случай правильной треугольной пирамиды.

11°. Прямой круговой цилиндр:

- а) основания - круги равного радиуса, расположенные в параллельных плоскостях;
- б) образующие боковой поверхности цилиндра перпендикулярны основаниям.

12°. Прямой круговой конус:

- а) основание конуса - круг;
- б) образующие боковой поверхности конуса сходятся в одной точке - вершине конуса;
- с) вершина конуса ортогонально проектируется в центр круга.

Д. Формулы стереометрии

В данном пункте мы получим формулы для площадей поверхности и объемов различных стереометрических фигур. Заметим, что задача измерения величин является одной из самых древних и глубоких в математике. Так, уже попытка измерить диагональ квадрата в единицах длины его стороны приводит к выводу о существовании несоизмеримых отрезков. С этой трудностью математики справились, пополнив множество рациональных чисел (т. е. чисел, представимых в виде отношения p/q , где p и q - целые числа) иррациональными числами. Есть, однако, трудности другого рода. Припишем отрезку $[0, 1]$ числовой оси длину, равную единице. Рассмотрим некоторую внутреннюю точку этого отрезка. Ее можно покрыть промежутком произвольно малой длины; поэтому "длину" отдельной точки отрезка естественно считать нулем. С другой стороны, отрезок мыслится как совокупность бесконечного (и к тому же несчетного) множества точек. Ясно, что здесь налицо некоторая "неопределенность" типа $0 \cdot \infty$. Этот парадокс непротиворечиво разрешается в разделе математики, называемом теория меры.

В наивной постановке, идущей от геометров древности, задача измерения, скажем, объемов многогранников состоит в том, что

а) некоторому фиксированному многограннику, например, кубу с ребром длины единица, приписывается объем, равный единице.

б) произвольным многогранникам также приписываются некоторые положительные числа - их объемы - с соблюдением следующих правил:

1) конгруэнтные многогранники имеют равные объемы;

2) если многогранник разложен на несколько многогранников, не имеющих общих внутренних точек, то объем данного многогранника равен сумме объемов составляющих его частей.

Последнее условие называется принципом аддитивности объема. Аналогичным образом производится и измерение площадей поверхности многогранников, с той разницей, что за единицу площади принимается квадрат со стороной, равной единице.

1°. Призма

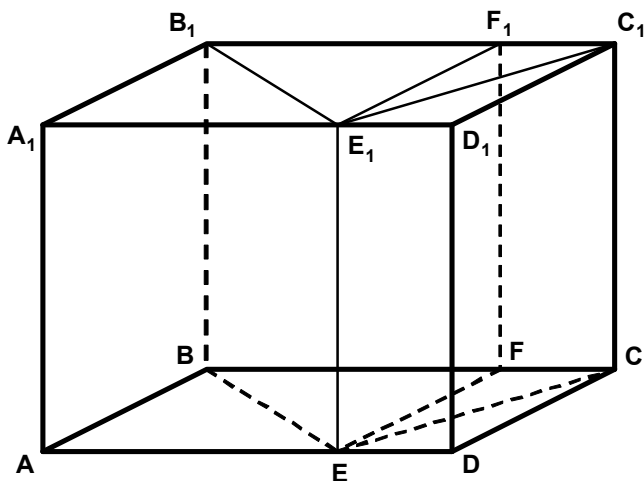


Рис. 24.1

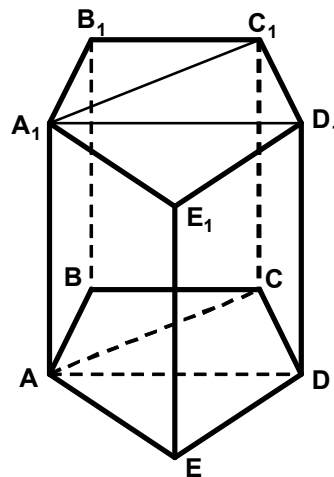


Рис. 24.2

Будем исходить из того хорошо известного факта, что объем прямого параллелепипеда равен произведению длин его ребер. Пусть в прямоугольном параллелепипеде $ABCA_1B_1C_1D_1$ (Рис. 24.1) длины ребер $|AA_1| = a$; $|AB| = b$ и $|AD| = c$. Тогда, обозначая многогранник по его диагонали, имеем

$$V_{AC_1} = a \cdot b \cdot c = S_{осн} \cdot h, \quad (24.1)$$

где $S_{осн} = b \cdot c$ есть площадь прямоугольника, лежащего в основании прямоугольного параллелепипеда, а ребро $a = h$ является его высотой. Формула (24.1) легко обобщается на случай произвольной прямой призмы. Действительно, произвольную прямую призму AD_1 (см. Рис. 24.2) всегда можно представить как совокупность прямых треугольных призм. Следовательно, достаточно обосновать второе равенство (24.1) для прямой треугольной призмы. Дополним прямую треугольную призму $BECB_1E_1C_1$ на Рис. 24.1 до прямого параллелепипеда AC_1 . Проведя сечение призмы плоскостью EE_1F_1F , перпендикулярной грани параллелепипеда AA_1D_1D , легко доказать, что призма $ABEA_1B_1E_1$ конгруэнтна призме $BEFB_1E_1F_1$, а призма $EDCE_1D_1C_1$ конгруэнтна призме $EFCE_1F_1C_1$. Отсюда следует, что объем призмы $BECB_1E_1C_1$ равен половине объема прямого параллелепипеда AC_1 . С другой стороны, очевидно (см., также, §20 Д), что

$$S_{BEC} = \frac{1}{2} S_{ABCD}.$$

Отсюда и следует справедливость формулы $V = S_{осн} \cdot h$ для прямой треугольной призмы, а значит, и для произвольной прямой призмы.

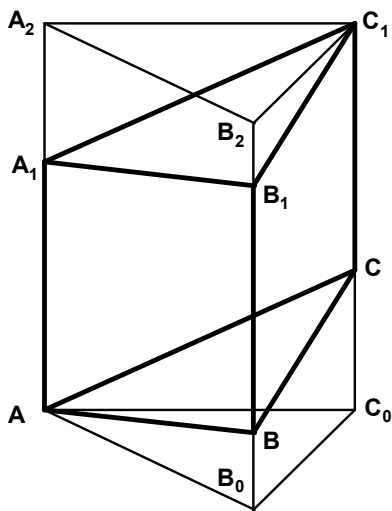


Рис. 24.3

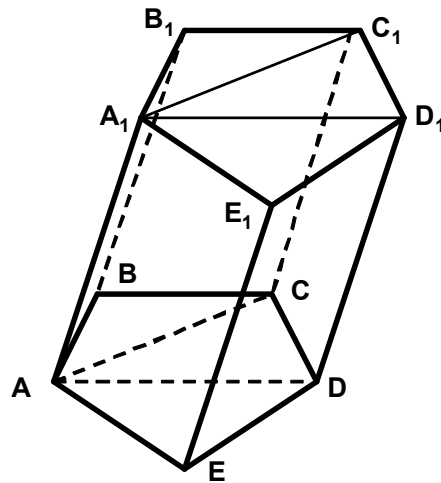


Рис. 24.4

Рассмотрим теперь наклонную треугольную призму $ABCA_1B_1C_1$ (Рис. 24.3) и дополним ее до прямой треугольной призмы $AB_0C_0A_2B_2C_1$ так, как это показано на Рис. 24.3. При этом основание прямой призмы AB_0C_0 является перпендикулярным сечением наклонной призмы. Поскольку боковые грани прямой призмы являются прямоугольниками, а боковые грани наклонной призмы - параллелограммы, то из рассмотрения Рис. 24.3 нетрудно доказать соотношения

$$|A_1A_2| = |C_0C|, \quad \text{и} \quad |B_0B| + |B_1B_2| = |A_1A_2|.$$

Отсюда ясно, что верхний и нижний многогранники $A_1B_1C_1A_2B_2C_1$ и AB_0C_0ABC составляют вместе прямую треугольную призму с основанием, равным $\triangle AB_0C_0$ и высотой, равной отрезку $|A_1A_2|$. Обозначив через S_n площадь $\triangle AB_0C_0$, который по построению является перпендикулярным сечением наклонной призмы $ABCA_1B_1C_1$, получим

$$V_1 = V_{A_1B_1C_1A_2B_2C_1} + V_{AB_0C_0ABC} = S_n |AA_2|.$$

С другой стороны, объем прямой треугольной призмы $AB_0C_0A_2B_2C_1$ есть, очевидно

$$V_0 = V_{AB_0C_0A_2B_2C_1} = S_n |AA_2|$$

Отсюда для объема наклонной призмы получаем формулу, вполне аналогичную (24.1)

$$V_{ABCA_1B_1C_1} = V_0 - V_1 = S_n |AA_1|. \quad (24.2)$$

Здесь S_n - площадь сечения, перпендикулярного ребрам наклонной призмы, а $|AA_1|$ - длина ее бокового ребра. Формула (24.2) верна, очевидно, не только для треугольной, но и для произвольной наклонной призмы, которая, как показано на Рис. 24.4, всегда может быть разбита на совокупность треугольных наклонных призм.

Площадь поверхности призмы складывается, очевидно, из площадей (равных) оснований призмы $S_{осн}$ и площади ее боковой поверхности $S_{бок}$

$$S = S_{бок} + 2S_{осн}. \quad (24.3)$$

Так как в основании призмы лежит многоугольник, а боковые грани призмы - параллелограммы, то подсчет величин $S_{бок}$ и $S_{осн}$ легко производится по формулам планиметрии из §21.

2°. Пирамида

Формулы (24.1) и (24.2) для объема призмы мы получили в предыдущем пункте с помощью элементарных рассуждений, основанных на принципе аддитивности объема. В общем же случае, площади поверхности и объемы тел различной формы находятся в математическом анализе с помощью двумерных и трехмерных определенных интегралов. Однако много интересных и важных результатов можно получить и с помощью одномерного определенного интеграла, изученного ранее в §17. Получим сначала с помощью одномерного интеграла объем пирамиды, а затем обобщим этот прием на другие случаи.

Проведем в пирамиде $SABCDE$ (Рис. 24.5) высоту SO и предположим, для простоты, что точка O принадлежит многоугольнику $ABCDE$. Через высоту SO и боковые ребра пирамиды SA , SB и т. д. проведем сечения, которые разобьют данную пирамиду на совокупность треугольных пирамид с общей высотой SO . Рассмотрим одну из этих пирамид, например, $SAOE$ (Рис. 24.6).

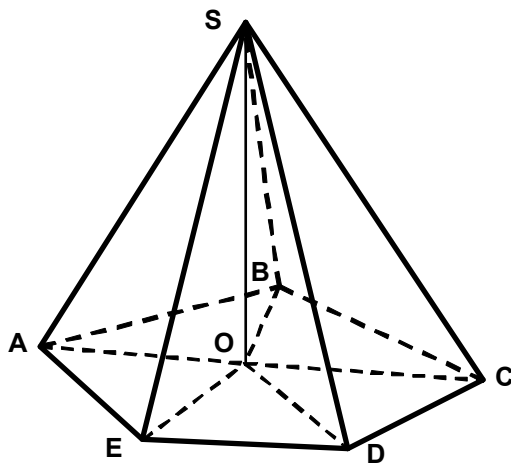


Рис. 24.5

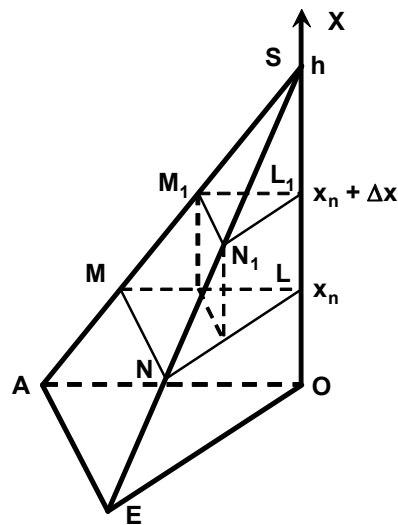


Рис. 24.6

По построению, ребро пирамиды SO перпендикулярно плоскости основания AOE ; поэтому (пункт В6°b) $\angle AOE$ является линейным углом двугранного угла, образованного плоскостями SOA и SOE . Проведем вдоль ребра SO пирамиды числовую ось OX с началом в точке O и разобьем отрезок SO точками деления x_n ($n = 1, 2, \dots$) на малые отрезки равной длины Δx . Через точки деления x_n проведем плоскости, параллельные основанию пирамиды AOE и перпендикулярные, следовательно, ребру SO . В сечениях пирамиды $SAOE$ этими плоскостями мы получим некоторые треугольники MNL , $M_1N_1L_1$, и т. д. (см. Рис. 24.6). На каждом таком треугольнике, как на основании, построим прямую треугольную призму высоты Δx . Если через $S(x_n)$ обозначить площадь основания n -ой треугольной призмы, то ее объем, по формуле (24.1) будет равен $V_n = S(x_n)\Delta x$. Интуитивно ясно, что при достаточно малом Δx суммарный объем треугольных призм будет близок к объему пирамиды $SAOE$

$$V_{SAOE} \approx \sum_n S(x_n)\Delta x. \quad (*)$$

Заметим теперь, что правая часть соотношения (*) есть не что иное, как интегральная сумма (см. формулу (17.10)) для функции $S(x)$. Переходя в равенстве (*) к пределу $\Delta x \rightarrow 0$, находим

$$V_{SAOE} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_n S(x)\Delta x = \int_0^h S(x)dx, \quad (24.4)$$

где мы обозначили через h длину отрезка $|SO|$. Остается теперь определить функцию $S(x)$ и вычислить интеграл (24.4). Заметим, что по построению, сечение пирамиды MNL перпендикулярно ребру SO . Поэтому (пункт А5°) $NL \perp SO$ и (§20, пункт В2°d) $\triangle SNL \sim \triangle SEO$. Принимая длину отрезка $|LO| = x$, получим отсюда

$$\frac{|NL|}{|EO|} = \frac{|SL|}{|SO|} = \frac{h-x}{h}.$$

Аналогичным образом, нетрудно доказать, что $\triangle SOA \sim \triangle SML$, так что

$$\frac{|ML|}{|AO|} = \frac{|SL|}{|SO|} = \frac{h-x}{h}$$

Заметим теперь, что $\angle AOE = \angle MLN$ как линейные углы одного и того же двугранного угла с ребром SO . Следовательно,

$$\frac{S_{MLN}}{S_{AOE}} = \frac{\frac{1}{2}|ML| \cdot |NL| \sin \angle MLN}{\frac{1}{2}|AO| \cdot |EO| \sin \angle AOE} = \left(\frac{h-x}{h} \right)^2.$$

Полагая $S_{AOE} = S_{оч}$, $S_{MLN} = S(x)$, находим отсюда искомую функцию $S(x)$

$$S(x) = S_{оч} \left(\frac{h-x}{h} \right)^2. \quad (**)$$

Используя затем соотношение (**) в формуле (24.4), для объема пирамиды $SAOE$ получаем

$$V_{SAOE} = S_{оч} \int_0^h \left(\frac{h-x}{h} \right)^2 dx = S_{оч} \cdot h \int_0^1 (1-y)^2 dy = \frac{1}{3} S_{оч} h, \quad (24.5)$$

где в интеграле произведена замена переменной $y = x/h$. В формуле (24.5) $S_{оч}$ есть площадь основания пирамиды $SAOE$ на Рис. 24.5 и 24.6. Но основание пирамиды $SABCDE$, т. е. многоугольник $ABCDE$, состоит из $\triangle AOE$, $\triangle EOD$, пр., которые являются основаниями пирамид

$SAOE$, $SEOD$ и т. д., для каждой из которых справедлива формула (24.5). Поэтому формула (24.5) справедлива и для пирамиды $SABCDE$, с той разницей, что под $S_{осн}$ в этой формуле нужно понимать площадь многоугольника $ABCDE$. Случай, когда основание O высоты пирамиды SO не принадлежит ее основанию, предоставляем рассмотреть читателю. Что касается площади поверхности пирамиды, то она складывается, естественно, из площади боковой поверхности пирамиды $S_{бок}$, и площади ее основания

$$S = S_{бок} + S_{осн} . \quad (24.6)$$

3°. Объемы тел вращения

Формула (24.4), как легко понять из ее вывода, применима не только к пирамидам, но к любым телам, с известной зависимостью площади поперечного сечения $S(x)$ от координаты x вдоль некоторой оси OX .

а) Прямой круговой цилиндр

Направим ось OX вдоль оси цилиндра и совместим начало координат с нижним основанием цилиндра. Тогда верхнее основание будет соответствовать точке $x = h$, где h - высота цилиндра. Если R - радиус круга в основании прямого кругового цилиндра, то функция $S(x) = \pi R^2$ не зависит от координаты x . Поэтому, по формуле (24.4) объем цилиндра равен

$$V_{цил} = \int_0^h \pi R^2 dx = \pi R^2 h = S_{осн} \cdot h . \quad (24.7)$$

б) Прямой круговой конус

Рассмотрим прямой круговой конус высоты h , с радиусом основания, равным R . Проведем сечение конуса SAB (см. Рис. 24.7), содержащее его высоту SO . Ось OX направим вдоль оси конуса, а начало координат O совместим с нижним основанием конуса. Пусть MN - линия пересечения поперечного сечения конуса, отстоящего на расстоянии x от его основания, с плоскостью SAB . Из подобия $\triangle SMN$ и $\triangle SAB$ легко заключить, что

$$\frac{|MN|}{|AB|} = \frac{h-x}{h} \Rightarrow \frac{|MN|}{2} = R \frac{h-x}{h} ,$$

где $|MN|/2$ есть очевидно радиус поперечного сечения конуса $r(x)$, расположенного на высоте x над плоскостью основания. Отсюда находим функцию $S(x)$, и аналогично (24.5), объем конуса

$$S(x) = \pi R^2 \left(\frac{h-x}{h} \right)^2 \Rightarrow V_{конус} = \frac{1}{3} \pi R^2 h = \frac{1}{3} S_{осн} h . \quad (24.8)$$

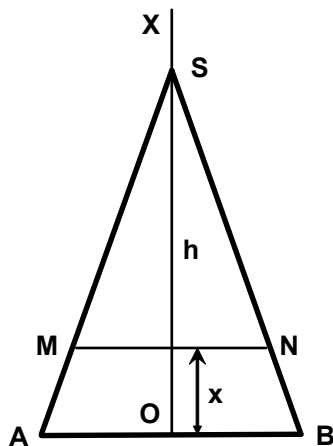


Рис. 24.7

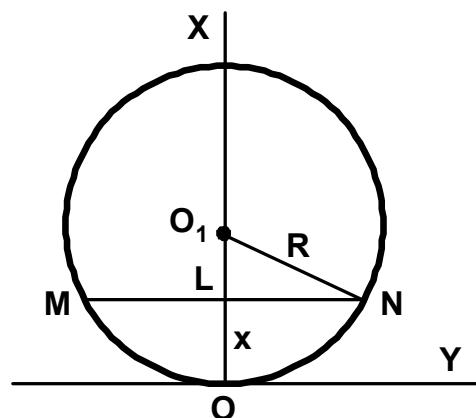


Рис. 24.8

с) Шар

Проведем через центр O шара радиуса R некоторую ось OX с началом O , лежащим на поверхности шара (Рис. 24.8). Затем через точку L , отстоящую от начала координат на расстоянии x , проведем поперечное сечение шара плоскостью. Радиус этого сечения LN легко определить из прямоугольного треугольника O_1LN , учитывая, что $|O_1N| = R$ и $|OL| = R - x$. По теореме Пифагора находим

$$|LN| = \sqrt{|O_1N|^2 - |O_1L|^2} = \sqrt{R^2 - (R - x)^2} = \sqrt{x(2R - x)}.$$

Следовательно, площадь поперечного сечения шара и его объем равны

$$S(x) = \pi x(2R - x) \quad \Rightarrow \quad V_{\text{шар}} = \int_0^{2R} \pi x(2R - x) dx = \frac{4}{3} \pi R^3. \quad (24.9)$$

4°. Площади поверхностей тел вращения

а) Прямой круговой цилиндр

Площадь боковой поверхности цилиндра можно получить как предел площадей боковых поверхностей вписанных в цилиндр правильных n -угольных призм (Рис. 24.9). Пусть высота цилиндра и радиус его основания равны, соответственно h и R . Зная периметр правильного n -угольника, вписанного в круг радиуса R (см. формулу (21.14)), для площади боковой поверхности правильной n -угольной призмы легко находим

$$S_{n,\text{бок}} = p_n \cdot h = 2R \cdot n \cdot h \cdot \sin \frac{\pi}{n}.$$

Отсюда, в пределе $n \rightarrow \infty$, для боковой поверхности прямого кругового цилиндра получаем (ср. с формулой (21.15))

$$S_{\text{бок}} = \lim_{n \rightarrow \infty} p_n \cdot h = 2\pi R h \quad (24.10)$$

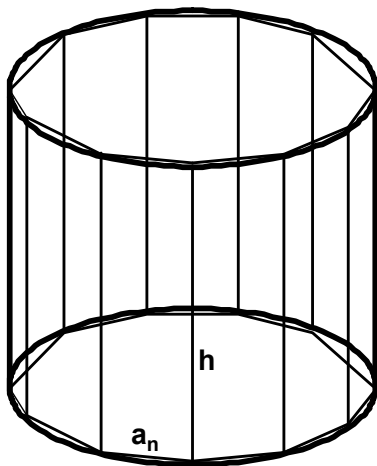


Рис. 24.9

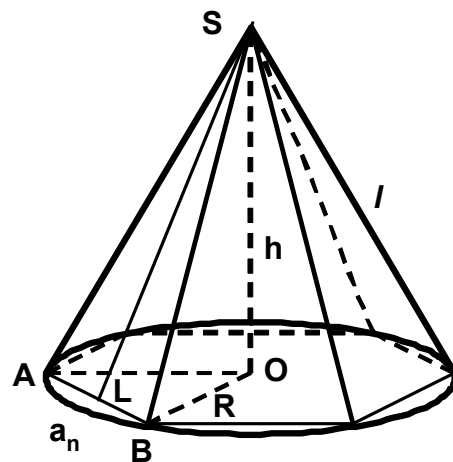


Рис. 24.10

б) Прямой круговой конус

Аналогично предыдущему, площадь боковой поверхности конуса можно получить как предел площадей боковых поверхностей правильных n -угольных пирамид, вписанных в данный конус. Пусть высота конуса и радиус его основания равны, соответственно, h и R . Рассмотрим боковую грань SAB правильной n -угольной пирамиды, вписанной в конус (Рис. 24.10). По

определению, в $\triangle ASB$ $|SA| = |SB|$, как боковые ребра правильной пирамиды, а основание $|AB| = a_n = 2R\sin(\pi/n)$ (см. (21.12b)), как сторона правильного n -угольника, лежащего в основании пирамиды. Длину стороны SB можно найти из прямоугольного $\triangle SOB$, где $|SO| = h$ как высота пирамиды, а $|OB| = R$ есть радиус основания конуса. Таким образом, по теореме Пифагора

$$|SA| = |SB| = \sqrt{h^2 + R^2}.$$

Проведем в равнобедренном $\triangle ASB$ высоту SL , которая одновременно (§20, пункт 4°а2) является медианой. Тогда из прямоугольного $\triangle SLB$ находим

$$|SL| = \sqrt{h^2 + R^2 - (a_n/2)^2}.$$

Следовательно, площадь $\triangle ASB$ равна

$$S_{ASB} = \frac{1}{2}|AB| \cdot |SL| = \frac{1}{2}a_n \sqrt{h^2 + R^2 - (a_n/2)^2},$$

а площадь боковой поверхности пирамиды есть, очевидно, nS_{ASB} . В пределе $n \rightarrow \infty$ находим отсюда площадь боковой поверхности конуса

$$\begin{aligned} S_{бок} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2} a_n \sqrt{h^2 + R^2 - (a_n/2)^2} = \\ &= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} (na_n) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{h^2 + R^2 - (a_n/2)^2} = \pi R \sqrt{h^2 + R^2}, \end{aligned} \quad (24.11)$$

поскольку в пределе $n \rightarrow \infty$ имеем $a_n \rightarrow 0$. Формулу (24.11) можно записать также в виде $S_{бок} = \pi Rl$, где $l = \sqrt{h^2 + R^2}$ - длина образующей конуса.

с) Шар

Докажем, что площадь поверхности шара $S_{шар}$ можно получить как производную объема шара по его радиусу. Действительно, объем тонкого шарового слоя, расположенного между сферами с радиусами R и $R + \Delta R$ можно оценить как $S_{шар}\Delta R$. С другой стороны, этот же самый объем равен разности

$$\Delta V(R) = V_{шар}(R + \Delta R) - V_{шар}(R).$$

Отсюда, в пределе $\Delta R \rightarrow 0$ находим

$$S_{шар} = \lim_{\Delta R \rightarrow 0} \frac{\Delta V(R)}{\Delta R} = \frac{dV_{шар}}{dR} = 4\pi R^2. \quad (24.12)$$

Таким образом, площадь поверхности шара равна учетверенной площади большого круга.

§ 25. Задачи по стереометрии

Приступая к решению стереометрической задачи нужно, прежде всего, правильно "расшифровать" определения описываемых в условии задачи стереометрических фигур (см. §24, пункт Г). Рекомендации, приведенные в начале §23, следует иметь ввиду и при решении стереометрической задачи. Существенно новыми, по сравнению с планиметрией, являются наборы условий, которыми задается (однозначно, или с точностью до подобия) стереометрическая фигура. Вычисление конкретных соотношений между отрезками и углами производится в стереометрии обычно с помощью проведения подходящих сечений фигуры плоскостями. Этим приемом дело сводится, фактически, к планиметрии. Грамотное проведение

- а) найти другие линии и точки, которые принадлежат проводимому сечению и полностью его определяют;
- б) доказать, что интересующие нас точки и отрезки, такие, например, как центр вписанного в фигуру шара, либо перпендикуляр, проведенный из заданной точки к некоторой плоскости, действительно принадлежат проведенному сечению.

Призма общего вида задается параметрами, определяющими ее основание, а также длиной бокового ребра и высотой, либо длиной бокового ребра и углом наклона ребер к плоскости основания. Для прямой призмы любое ребро является высотой; поэтому достаточно знать лишь длину высоты и параметры многоугольника, лежащего в основании призмы. Наконец, правильная призма определяется длиной стороны правильного n - угольника и высотой.

A diagram of a rectangular prism with vertices labeled $A, B, C, D, A_1, B_1, C_1, D_1$. The base is a rectangle $ABCD$ and the top is a rectangle $A_1B_1C_1D_1$. A dashed line connects vertex A to vertex B_1 . Three angles are indicated: α at vertex A between edges AB and AD ; β at vertex D between edges DC and DD_1 ; and ϕ at vertex A between edges AB and AB_1 .

Обозначим в прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ (Рис. 25.1) диагонали смежных боковых граней $|AD_1| = x$ и $|DC_1| = y$. По определению прямоугольного параллелепипеда, грани $AA_1 D_1 D$ и $DD_1 C_1 C$ перпендикулярны основанию $ABCD$; поэтому $\angle DAD_1 = \alpha$ и $\angle CDC_1 = \beta$ (§24, пункт А8°). Из прямоугольного $\triangle AD_1 D$ находим $|AD| = x \cos \alpha$; $|DD_1| = x \sin \alpha$. Аналогично, из прямоугольного $\triangle DC_1 C$ следует, что $|DC| = y \cos \beta$; $|C_1 C| = y \sin \beta$. Так как длины боковых ребер в параллелепипеде равны, $|DD_1| = |CC_1|$, то $y = x \sin \alpha / \sin \beta$. В результате, высота параллелепипеда и стороны его основания выражаются через длину диагонали $|AD_1|$

Из определения прямоугольного параллелепипеда следует, что $AD \parallel BC \parallel B_1C_1$. Следовательно, прямые AD и B_1C_1 параллельны и принадлежат сечению параллелепипеда AB_1C_1D . Кроме того,

сечение AB_1C_1D , как минимум, параллелограмм, поскольку $|AD| = |BC| = |B_1C_1|$ (§20, пункт А2°е). Следовательно, диагональ $AB_1 \parallel DC_1$ и искомый угол между диагоналями AD_1 и DC_1 равен углу между диагоналями AB_1 и AD_1 . Через точки A , B_1 и D_1 проведем сечение параллелепипеда AB_1D_1 . Искомый угол $\angle B_1AD_1 = \varphi$ может быть найден из $\triangle AB_1D_1$ по теореме косинусов

$$\cos \varphi = \frac{|AB_1|^2 + |AD_1|^2 - |B_1D_1|^2}{2|AB_1| \cdot |AD_1|}.$$

Подставляя в эту формулу

$$|AB_1| = |C_1D| = x \cdot \sin \alpha / \sin \beta; \quad |AD_1| = x,$$

и учитывая, что B_1D_1 – диагональ прямоугольного $\triangle A_1B_1D_1$, так что

$$|B_1D_1|^2 = (x \sin \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta)^2 + (x \cdot \cos \alpha)^2,$$

после несложных преобразований находим

$$\cos \varphi = \sin \alpha \cdot \sin \beta; \quad \varphi = \arccos(\sin \alpha \cdot \sin \beta). \quad \blacksquare \quad (25.1)$$

Заметим, что в полученный ответ углы α и β входят симметрично, как это, очевидно, и должно быть, поскольку диагонали AD_1 и DC_1 в задаче никоим образом не выделены. Далее, предположим, что угол $\alpha \rightarrow 0$ при фиксированном угле β . Из Рис. 25.1 ясно, что это возможно при увеличении длины ребра $|AD|$ при фиксированной длине ребер $|DC|$ и $|DD_1|$. При таком преобразовании фигуры диагональ AD_1 становится почти параллельной ребру AD , а угол φ , как нетрудно сообразить, должен стремиться к $\pi/2$, так как $\angle B_1AD = \pi/2$ по теореме о трех перпендикулярах. Тот факт, что формула (1) приводит именно к такому поведению угла φ при α (либо β) $\rightarrow 0$, указывает на разумность полученного результата.

Обратимся теперь к пирамидам. Пирамида общего вида может быть задана параметрами многоугольника, лежащего в основании, и высотой. Кроме того, должна быть указана точка в плоскости основания, в которую ортогонально проецируется вершина пирамиды. Правильная пирамида может быть задана различными наборами данных: стороной правильного n – угольника и высотой, либо, вместо высоты, углом наклона бокового ребра к плоскости основания, либо, наконец, величиной двугранного угла между смежными боковыми гранями или между боковой гранью и плоскостью основания.

б) Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна a ; боковое ребро равно b . Найти площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через центр основания и параллельной двум непересекающимся ребрам пирамиды.

Пусть O – центр основания правильной треугольной пирамиды $SABC$ (Рис. 25.2). Построим сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точку O и параллельной ребрам SA и BC . Через точку O в плоскости ABC проведем прямую $DE \parallel BC$. Далее, через боковое ребро SA и точку O проведем плоскость, которая пересечет основание ABC по прямой AF , а боковую грань SBC – по прямой SF . В треугольнике ASF через точку O , лежащую на стороне AF проведем прямую, параллельную его основанию AS до пересечения со стороной SF в точке G . Точка G принадлежит отрезку SF и, следовательно, принадлежит боковой грани SBC . Проведем в плоскости SBC через точку G прямую $KL \parallel BC$. По построению, $DE \parallel BC$ и $KL \parallel BC$, следовательно, $DL \parallel KL$ и через прямые DE и KL можно провести сечение $DKLE$. Сечение $DKLE$ – искомое. Действительно, по построению, $DE \parallel BC$, поэтому сечение $DKLE$ параллельно прямой BC (§24, пункт А4°). Кроме того, по построению, точки O и G принадлежат сечению

$DKLE$, поэтому и отрезок OG принадлежит этому сечению (§24, пункт А1°). Но, по построению же $OG \parallel SA$, поэтому сечение $DKLE$ параллельно прямой SA (§24, пункт А4°).

Определим площадь сечения $DKLE$. Поскольку $DE \parallel KL$, то $DKLE$ - трапеция. Докажем, что $GO \perp DE$. Отсюда будет следовать, что

$$S_{DKLE} = \frac{1}{2}(|DE| + |KL|) \cdot |GO|.$$

По построению, отрезок AF проходит через центр O равностороннего треугольника ABC . Следовательно, AF является медианой ($|BF| = |FC|$) и высотой ($AF \perp BC$) в $\triangle ABC$ (§20, пункт Б4°). Далее, в равнобедренном $\triangle SBC$ ($|SB| = |SC|$) SF является медианой, а следовательно, и высотой, так что $SF \perp BC$ (§20, пункт Б4°а). Таким образом, прямая BC перпендикулярна двум пересекающимся прямым AF и SF , лежащим в плоскости ASF . Следовательно, (§23, пункт А6°), BC перпендикулярна плоскости ASF . В таком случае отрезок DE , будучи параллельным BC , перпендикулярен любой прямой, лежащей в плоскости ASF (§23, пункт А5°), так что $DE \perp OG$, и OG является высотой трапеции $DKLE$. Определим теперь длины отрезков DE , KL и GO . Поскольку $DE \parallel BC$, то $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ (§20, пункт Б2°d). Кроме того, центр O равностороннего $\triangle ABC$ есть точка пересечения медиан. Поэтому

$$\frac{|DE|}{|BC|} = \frac{|AO|}{|AF|} = \frac{2}{3} \Rightarrow |DE| = \frac{2}{3}a.$$

Аналогично, $OG \parallel SA$ и $\triangle ASF \sim \triangle OGF$. Поэтому

$$\frac{|OG|}{|SA|} = \frac{|OF|}{|AF|} = \frac{1}{3} \Rightarrow |OG| = \frac{1}{3}b.$$

Наконец, $KL \parallel BC$ и $\triangle SKL \sim \triangle SBC$. Отсюда

$$\frac{|KL|}{|BC|} = \frac{|SG|}{|SF|} = \frac{|AO|}{|AF|} = \frac{2}{3} \Rightarrow |KL| = \frac{2}{3}a.$$

Таким образом, доказано, что $|DE| = |KL|$ и

$$S_{DKLE} = |DE| \cdot |GO| = \frac{2}{9}ab. \blacksquare$$

Б. Многогранник и шар

Плоскость называется касательной к сфере (шару), если она имеет со сферой только одну общую точку. Для того, чтобы плоскость была касательной к сфере необходимо и достаточно, чтобы она была перпендикулярна радиусу сферы и проходила через его конечную точку, лежащую на сфере. Центр сферы, вписанной в двугранный угол, лежит в биссекторной плоскости этого угла. Для доказательства этого факта достаточно провести плоскость через центр сферы перпендикулярно ребру двугранного угла. Отсюда следует, что центр сферы, вписанной в призму или пирамиду, является точкой пересечения биссекторных плоскостей всех двугранных углов, соответственно, призмы или пирамиды. Если же сфера описана около призмы или пирамиды, то ее центр, по определению, равноудален от всех вершин многогранника. Отсюда следует, что центр описанной сферы находится на пересечении плоскостей, проходящих через середины ребер призмы или пирамиды перпендикулярно этим ребрам. Действительно, геометрическое место точек пространства, равноудаленных от двух

заданных точек есть, очевидно, плоскость перпендикулярная соединяющему эти точки отрезку, и проходящая через его середину.

с) В треугольной пирамиде $SABC$ две равные боковые грани ASB и BSC перпендикулярны плоскости основания, а грань ASC наклонена к плоскости основания под углом β . Найти радиус шара, описанного около пирамиды, если радиус окружности, описанной около основания, равен r , а $\angle ABC = \alpha$.

По условию задачи боковые грани пирамиды SBA и SBC равны. Следовательно, $|AB| = |BC|$ и лежащий в основании пирамиды $\triangle ABC$ равнобедренный (см. Рис. 25.3).

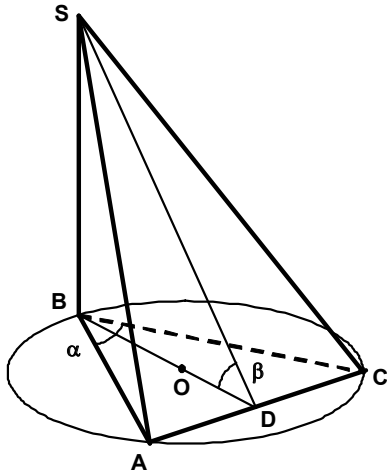


Рис. 25.3

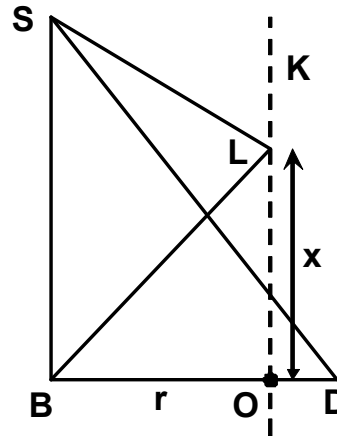


Рис. 25.4

Проведем высоту $BD \perp AC$, которая по свойству равнобедренного треугольника (§20, пункт В4°а2) является одновременно и медианой и биссектрисой. Следовательно, $|AD| = |DC|$ и $\angle DBC = \alpha/2$. Кроме того, центр O окружности, описанной около $\triangle ABC$, принадлежит отрезку BD (§20, пункт В4°а).

Покажем, прежде всего, что условия задачи определяют пирамиду однозначно. Из теоремы синусов следует, что

$$\frac{|AC|}{\sin \alpha} = 2r \Rightarrow |AC| = 2r \cdot \sin \alpha; \quad |DC| = r \cdot \sin \alpha.$$

Далее, из прямоугольного $\triangle BDC$ находим

$$|BC| = \frac{|DC|}{\sin(\alpha/2)} = 2r \cdot \cos \frac{\alpha}{2}; \quad |BD| = |BC| \cos \frac{\alpha}{2} = 2r \cdot \cos^2 \frac{\alpha}{2}.$$

Через пересекающиеся прямые SB и BD проведем сечение пирамиды SBD . Ребро SB есть пересечение граней SBA и SBC , которые по условию перпендикулярны основанию пирамиды. Следовательно, ребро SB перпендикулярно плоскости ABC . Так как сечение SBD содержит перпендикуляр SB к плоскости ABC , то плоскость SBD перпендикулярна плоскости ABC (§24, пункт В8°). Сечение SBD пересекает грань SAC по прямой SD . По доказанному, BD есть ортогональная проекция SD на плоскость ABC , а поскольку $BD \perp AC$, то по теореме о трех перпендикулярах (§23, пункт А9°) имеем $SD \perp AC$. Таким образом $\angle BDS$ есть линейный угол двугранного угла, образованного гранью SAC с основанием ABC . По условию, $\angle BDS = \beta$. Так как SB перпендикулярно плоскости ABC , то $SB \perp BD$ (§24, пункт А5°) и из прямоугольного $\triangle SBD$ находим

$$h = |SB| = |BD| \operatorname{tg} \beta = 2r \cdot \cos^2 \frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{tg} \beta.$$

Таким образом, условиями задачи пирамида определена однозначно.

Построим теперь центр сферы, описанной около данной пирамиды. Из точки O - центра окружности, описанной около основания пирамиды ABC , восставим перпендикуляр к плоскости ABC . Так как точка O принадлежит прямой BD , по которой пересекаются плоскости ABC и SBD , то этот перпендикуляр принадлежит сечению SBD (§24, пункт В9°b), (перпендикуляр OK на Рис. 25.4). Пусть x - расстояние некоторой точки L этого перпендикуляра от точки O . Легко видеть, что расстояния точки L от вершин пирамиды A , B и C одинаковы

$$|LA| = |LB| = |LC| = \sqrt{r^2 + x^2}.$$

Следовательно, перпендикуляр OK есть геометрическое место точек, равноудаленных от вершин пирамиды A , B и C и центр описанной сферы с необходимостью лежит на этом перпендикуляре. Однако центр описанной сферы должен быть равноудален также и от четвертой вершины пирамиды S , так что $|LB| = |LS|$. Из Рис. 25.4 находим, что должно быть

$$r^2 + x^2 = (h - x)^2 + r^2 \Rightarrow x = h/2.$$

Отсюда получаем искомый радиус описанной сферы

$$R = \sqrt{r^2 + (h/2)^2} = r \left[1 + \cos^4 \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg}^2 \beta \right]^{\frac{1}{2}}. \blacksquare \quad (25.2)$$

Полезно исследовать полученный результат. Заметим, что в пределе $\beta \rightarrow 0$ вершина пирамиды S приближается к вершине B , а радиус описанной сферы должен, очевидно, стремиться к радиусу описанной окружности r . Так как при $\beta \rightarrow 0$ имеем $\operatorname{tg} \beta \rightarrow 0$, то формула (25.2) подтверждает этот вывод. Далее, если $\alpha \rightarrow 0$ при фиксированном β , то сближаются вершины A и C пирамиды, которая превращается в прямоугольный треугольник SBD . Центр описанной сферы должен лежать, как нетрудно сообразить, на гипотенузе SD этого треугольника и делить ее пополам. Следовательно, в пределе $\alpha \rightarrow 0$ должно быть $R \rightarrow r/\cos \beta$. Этот вывод также согласуется с формулой (25.2), поскольку при $\alpha \rightarrow 0$ имеем $\cos(\alpha/2) \rightarrow 1$, и по непрерывности

$$\left[1 + \cos^4 \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg}^2 \beta \right]^{\frac{1}{2}} \rightarrow \frac{1}{\cos \beta}.$$

Таким образом, исследование предельных случаев увеличивает наше доверие к полученному результату.

В. Комбинация тел вращения

По определению шар, вписанный в прямой круговой цилиндр, касается оснований цилиндра в их центрах и соприкасается с боковой поверхностью цилиндра по окружности, плоскость которой параллельна основаниям и проходит через центр шара. Далее, шар называется вписанным в прямой круговой конус, если он касается основания конуса в его центре и соприкасается с боковой поверхностью конуса по окружности, плоскость которой параллельна основанию конуса.

d) В конус вписан шар радиуса r . Найти объем конуса если известно, что плоскость, касающаяся шара и перпендикулярная к одной из образующих конуса, отстоит от вершины конуса на расстояние d .

Проведем сечение конуса через его высоту BD и произвольную точку A на окружности основания (Рис. 25.5). Так как в прямом круговом конусе все образующие равны, то в сечении получим равнобедренный $\triangle ABC$. Докажем, что центр вписанного шара O лежит в сечении ABC

на высоте конуса BD . Действительно, по построению, сечение ABC содержит перпендикуляр BD к плоскости основания. Поэтому оно перпендикулярно плоскости основания (§24, пункт В8°). Из центра вписанного шара O проведем радиус в точку касания шара с основанием конуса (точка D). По определению касательной плоскости, радиус OD перпендикулярен плоскости основания конуса. С другой стороны, конечная точка этого радиуса D принадлежит линии пересечения AC перпендикулярных плоскостей ABC и основания конуса. Поэтому радиус OD целиком лежит в плоскости ABC , а точка O центра вписанного шара находится на высоте BD равнобедренного $\triangle ABC$ (§24, пункт В9°b). Кроме того, сечение шара плоскостью ABC есть круг радиуса r , вписанный в $\triangle ABC$.

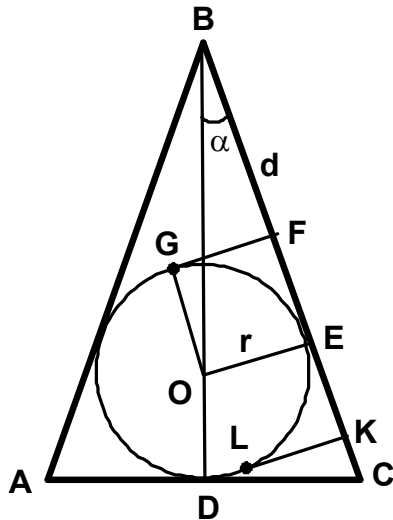


Рис. 25.5

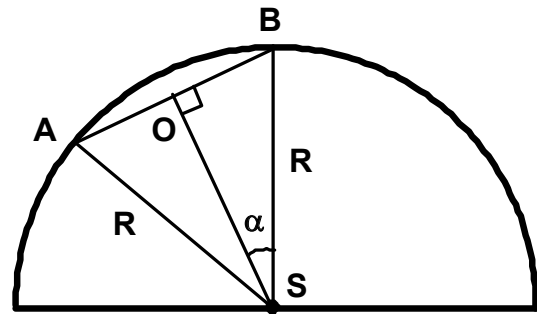


Рис. 25.6

Следовательно, радиус OE , проведенный в точку касания круга с боковой стороной BC $\triangle ABC$ перпендикулярен BC (§20, пункт В3°a). Пусть α - угол между образующей конуса BC и высотой BD . Легко видеть, что считая α и r заданными, мы полностью определим конус. Действительно, из прямоугольного $\triangle OBE$ находим

$$\frac{|OE|}{|OB|} = \sin \alpha \Rightarrow |OB| = \frac{r}{\sin \alpha},$$

поэтому

$$h = |BD| = |BO| + |OD| = r \cdot \left(1 + \frac{1}{\sin \alpha}\right). \quad (25.3)$$

А из прямоугольного $\triangle BDC$ получаем

$$R = |DC| = |BD| \operatorname{tg} \alpha = r \frac{1 + \sin \alpha}{\cos \alpha}. \quad (25.4)$$

Таким образом, высота конуса h и радиус его основания R выражены через r и α . Остается выразить угол α через заданные величины r и d . Проведем в $\triangle ABC$ к вписанному кругу O касательную GF , параллельную радиусу OE . Радиус OG , проведенный в точку касания G , перпендикулярен касательной; поэтому $OG \parallel EF$ и четырехугольник $OGFE$ - параллелограмм. Более того, $|OG| = |OE|$ и $OG \perp OE$, следовательно $OGFE$ - квадрат со стороной, равной r . Проведем в конусе через прямую GF плоскость γ , перпендикулярную сечению ABC . Так как радиус OG перпендикулярен прямой GF , по которой пересекаются перпендикулярные плоскости γ и ABC , то $OG \perp \gamma$ (§24, пункт В9°a). Следовательно, плоскость γ - касательная к

вписанному шару. Так как $OG \parallel BE$, то прямая $BE \perp \gamma$ (§24, пункт А7°с) и отрезок BF есть расстояние вершины конуса B от плоскости γ , перпендикулярной образующей конуса BC . По условию задачи $BF = d$.

Завершим теперь наши вычисления, связав угол α между образующей и высотой конуса с параметром d . Из прямоугольного $\triangle OBE$ находим $|BE| = r \operatorname{ctg} \alpha$. Но $|BE| = |BF| + |FE| = d + r$. Следовательно, угол α определяется из соотношения

$$r \operatorname{ctg} \alpha = d + r; \quad \Rightarrow \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{d + r}{r}. \quad (25.5)$$

Используя формулы (25.3) и (25.4), находим объем конуса

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 h = \frac{\pi R^3}{3} \cdot \frac{1}{\operatorname{ctg}^2 \alpha} \cdot \left(1 + \frac{1}{\sin \alpha}\right)^3. \quad (25.6)$$

Учитывая, что $0 < \alpha < \pi/2$, можно выразить $\sin \alpha$ через $\operatorname{ctg} \alpha$ (см. §9)

$$\frac{1}{\sin \alpha} = \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}. \quad (25.7)$$

Затем, используя в (25.6) соотношения (25.7) и (25.5), получаем, окончательно

$$V = \frac{\pi r^3}{3} \cdot \left(\frac{r}{d+r}\right)^2 \left[1 + \sqrt{1 + \left(\frac{d+r}{r}\right)^2}\right]^3. \quad \blacksquare \quad (25.8)$$

Уставший от долгих трудов ученик, который посчитает возможным без лишних раздумий поставить здесь долгожданную точку, будет наказан: мощь математики велика, но необходим разум для правильной интерпретации полученных результатов.

Исследуем полученное решение. Правая часть соотношения (25.5) не меньше единицы,

$$\frac{d+r}{r} \geq 1; \quad \Rightarrow \quad \operatorname{ctg} \alpha \geq 1; \quad \Rightarrow \quad 0 < \alpha \leq \frac{\pi}{4}.$$

Следовательно, полученное решение существует лишь для указанных выше углов. Более того, в данной задаче существует еще одно решение, связанное с касательной LK к кругу O (см. Рис. 25.5), также параллельной радиусу OE . Для этого решения отрезок $BK = d$ и угол α определяется, как легко видеть, из соотношения

$$r \cdot \operatorname{ctg} \alpha + r = d. \quad (25.9)$$

Второе решение существует, очевидно, для всех α из интервала $0 < \alpha < \pi/2$. Мы видим, что задание угловой переменной α более удобно для исследования задачи. Читателю рекомендуется выяснить, сколько решений данной задачи существует в зависимости от значения отношения d/r .

е) В полушар радиуса R вписан конус так, что вершина его находится в центре полушара. Найти радиус основания конуса, при котором его объем будет максимальным.

В данной задаче положение конуса в полушаре не задано однозначно (см. Рис. 25.6). Фиксируем ось симметрии конуса SO и проведем через нее произвольную плоскость. В сечении получим равнобедренный треугольник SAB , вписанный в полукруг радиуса R . Высота конуса SO будет являться высотой, а, следовательно, и медианой $\triangle SAB$ (§20, пункт Б4°а2). Пусть радиус основания конуса $|OB| = x$. Из прямоугольного $\triangle SOB$ получим

$$h = |SO| = \sqrt{R^2 - x^2}$$

а объем конуса равен

$$V = \frac{1}{3} \pi x^2 h = \frac{1}{3} \pi x^2 \sqrt{R^2 - x^2} = \frac{\pi R^3}{3} t^2 \sqrt{1 - t^2},$$

где мы ввели безразмерную переменную $t = x/R$. Дифференцируя функцию $V(t)$ по переменной t находим, что экстремальные точки удовлетворяют соотношению

$$t(2 - 3t^2) = 0 \Rightarrow t_1 = 0 \quad t_{2,3} = \pm \sqrt{2/3}$$

Легко видеть, что точке t_1 соответствует минимальный ($V = 0$), а точке $t_2 = \sqrt{2/3}$ - максимальный объем конуса. Точка $t_3 = -\sqrt{2/3}$ не подходит по смыслу задачи. Для угла α между высотой конуса и его образующей, соответствующего конусу максимального объема, из прямоугольного $\triangle SOB$ находим

$$\operatorname{tg} \alpha_{\max} = \frac{|OB|}{|SO|} = \frac{x_{\max}}{\sqrt{R^2 - x_{\max}^2}} = \sqrt{2}.$$

Следовательно, $\alpha_{\max} < \pi/2$ и задача действительно имеет решение.

Ответ: $x_{\max} = \sqrt{2/3} R$. ■

Г. Контрольные задачи

1°. Через каждую вершину единичного куба проведены плоскости, перпендикулярные одной и той же диагонали куба. На какие части делится диагональ этими плоскостями?

2°. Сечение правильного тетраэдра плоскостью имеет форму квадрата, а его площадь равна m^2 . Найти площадь поверхности тетраэдра.

3°. Центр сферы, описанной около правильной четырехугольной пирамиды, находится на расстоянии a от боковой грани и на расстоянии b от бокового ребра. Найти радиус сферы.

4°. В конус, у которого угол осевого сечения при вершине равен α , вписан шар радиуса R . Найти объем части конуса, расположенной между вершиной конуса и шаром.

§ 26. Векторная алгебра

Методы векторной алгебры являются мощным средством решения геометрических задач. В §19 мы отмечали, что произвольное комплексное число можно представить как упорядоченную пару чисел, $z = (x, y)$, причем числа x и y можно рассматривать также как проекции двумерного вектора на оси двумерной декартовой системы координат. Аналогично, упорядоченную тройку действительных чисел, (x, y, z) , можно считать совокупностью проекций трехмерного вектора $\mathbf{a}$ на оси X , Y и Z трехмерной декартовой системы координат. Как показывает Рис. 26.1, вектор $\mathbf{a}$ является пространственной диагональю прямого параллелепипеда с длинами ребер x , y и z . Поэтому длина вектора $\mathbf{a}$ (употребляется также термин «модуль вектора», или «норма вектора») есть

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \quad (26.1)$$

Фактически, соотношение (26.1) есть обобщение теоремы Пифагора на трехмерный случай.

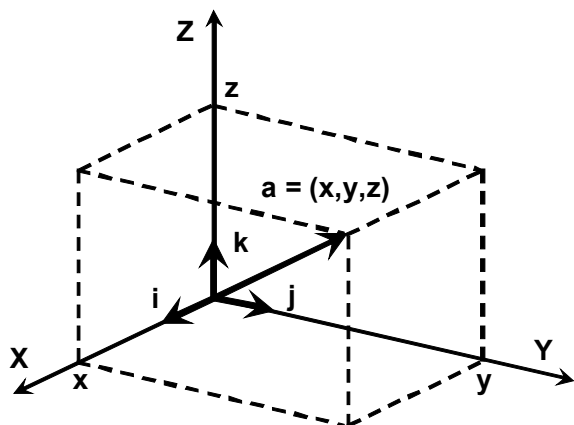


Рис. 26.1

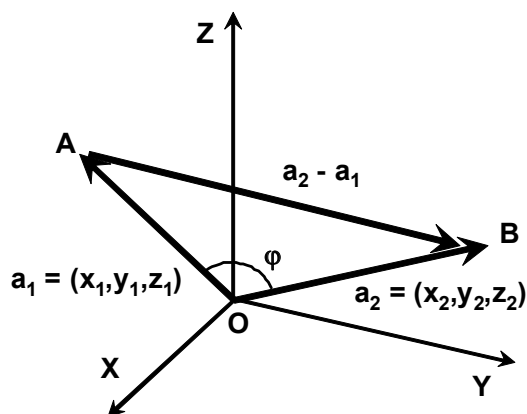


Рис. 26.2

Трехмерные векторы можно складывать и умножать на действительные числа по следующим правилам

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 &= (x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2); \\ \mathbf{b} &= \lambda \mathbf{a} = (\lambda x, \lambda y, \lambda z). \end{aligned} \quad (26.2a)$$

При этом легко видеть, что в силу свойств действительных чисел, операции сложения векторов и умножения их на числа подчиняются переместительному и распределительному закону

$$\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 = \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_1; \quad \lambda(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2) = \lambda \mathbf{a}_1 + \lambda \mathbf{a}_2. \quad (26.2b)$$

В результате сложения произвольных трехмерных векторов и умножения их на числа появляются новые трехмерные векторы. Поэтому совокупность трехмерных векторов (трехмерное векторное пространство) замкнуто по сложению и умножению вектора на число.

А. Скалярное произведение векторов

Для трехмерных векторов можно ввести несколько типов операций умножения. Скалярное произведение двух векторов $\mathbf{a}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ и $\mathbf{a}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ выполняется по следующему закону

$$\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2. \quad (26.3)$$

Таким образом, в результате скалярного умножения двух векторов получается некоторое действительное число – сумма произведений их компонент. Из определения (26.3) нетрудно вывести следующие свойства скалярного произведения

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 = \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_1; \\ \text{b)} \quad & \mathbf{a}_1(\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3) = \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_3; \\ \text{c)} \quad & (\lambda \mathbf{a}_1) \mathbf{a}_2 = \mathbf{a}_1(\lambda \mathbf{a}_2) = \lambda \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2. \end{aligned} \quad (26.4)$$

Заметим, что скалярное умножение вектора на себя дает квадрат модуля вектора

$$\mathbf{a} \mathbf{a} = \mathbf{a}^2 = x^2 + y^2 + z^2; \quad \text{или} \quad \mathbf{a}^2 = |\mathbf{a}|^2. \quad (26.5)$$

Два вектора, $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$, называются *ортогональными* друг другу, если их скалярное произведение равно нулю, $\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 = 0$.

В трехмерном векторном пространстве полезно ввести совокупность базисных векторов, положив (см. Рис. 26.1)

$$\mathbf{i} = (1, 0, 0); \quad \mathbf{j} = (0, 1, 0); \quad \mathbf{k} = (0, 0, 1). \quad (26.6a)$$

Длина базисных векторов равна единице, а их попарные скалярные произведения равны нулю

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = 1; \quad \mathbf{i}\mathbf{j} = \mathbf{j}\mathbf{k} = \mathbf{k}\mathbf{i} = 0, \quad (26.66)$$

так что базисные векторы образуют тройку единичных, взаимно ортогональных векторов. Легко видеть, что произвольный трехмерный вектор $\mathbf{a} = (x, y, z)$ можно однозначно представить в виде разложения по базисным векторам, $\mathbf{a} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Действительно, в силу свойств базисных векторов (26.66) имеем

$$a_x = \mathbf{a} \cdot \mathbf{i} = (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) \cdot \mathbf{i} = x; \quad a_y = \mathbf{a} \cdot \mathbf{j} = y; \quad a_z = \mathbf{a} \cdot \mathbf{k} = z.$$

Таким образом, проекцию вектора на заданную ось координат можно получить, вычисляя скалярное произведение вектора на соответствующий базисный вектор.

Скалярное произведение векторов можно представить также в другом виде. Рассмотрим замкнутый пространственный треугольник OAB , показанный на Рис. 26.2 и образованный векторами $\mathbf{a}_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $\mathbf{a}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ и вектором $\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1 = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$. Применяя к треугольнику OAB теорему косинусов (§21, пункт Б2°), получим уравнение

$$(\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1)^2 = \mathbf{a}_1^2 + \mathbf{a}_2^2 - 2|\mathbf{a}_1||\mathbf{a}_2|\cos\varphi,$$

где φ есть угол между векторами $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$. С учетом соотношения $(\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1)^2 = \mathbf{a}_1^2 + \mathbf{a}_2^2 - 2\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2$ отсюда легко получить, что

$$\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2 = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = |\mathbf{a}_1||\mathbf{a}_2|\cos\varphi; \quad \cos\varphi = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}. \quad (26.7)$$

Таким образом, с помощью скалярного произведения можно находить длины векторов и определять углы между трехмерными векторами. Кроме того, вычисляя скалярное произведение, легко проверить ортогональность двух заданных векторов.

Б. Векторное произведение векторов

Векторное произведение векторов $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$ дает в результате новый вектор $\mathbf{a}_3 = \mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2$, который перпендикулярен данным векторам, и модуль которого вычисляется по формуле

$$|\mathbf{a}_3| = |\mathbf{a}_1||\mathbf{a}_2|\sin\varphi, \quad (26.8)$$

где φ есть введенный выше угол между векторами $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$. Кроме того, из двух возможных направлений вектора $\mathbf{a}_3$ выбирается то, которое дает правую тройку векторов $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ и $\mathbf{a}_3$ (см. Рис. 26.3) Это означает, что при вращении вектора $\mathbf{a}_1$ в направлении вектора $\mathbf{a}_2$ направление вектора $\mathbf{a}_3$ должно определяться известным из школы «правилом буравчика».

Достаточно сложное определение (26.8) реализуется в координатном представлении векторов, $\mathbf{a}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ и $\mathbf{a}_2 = (x_2, y_2, z_2)$, следующим образом

$$\vec{a}_3 = \vec{a}_1 \times \vec{a}_2 = \vec{i}(y_1z_2 - y_2z_1) + \vec{j}(z_1x_2 - z_2x_1) + \vec{k}(x_1y_2 - x_2y_1). \quad (26.9)$$

Вычисляя скалярные произведения базисных векторов по правилам (26.66) легко доказать выполнение условий $\mathbf{a}_1\mathbf{a}_3 = \mathbf{a}_2\mathbf{a}_3 = 0$. Таким образом, вектор $\mathbf{a}_3$, определенный формулой (26.9), действительно ортогонален как вектору $\mathbf{a}_1$, так и вектору $\mathbf{a}_2$. Это очень важное свойство векторного произведения, которое часто используется в вычислениях.

Проверить выполнение условия (26.8) можно, вычисляя квадрат модуля вектора (26.9), что дает

$$|\vec{a}_3|^2 = (y_1z_2 - y_2z_1)^2 + (z_1x_2 - z_2x_1)^2 + (x_1y_2 - x_2y_1)^2 = |\vec{a}_1|^2|\vec{a}_2|^2 - (\vec{a}_1\vec{a}_2)^2.$$

С учетом формулы (26.7), из последнего соотношения легко получить уравнение (26.8).

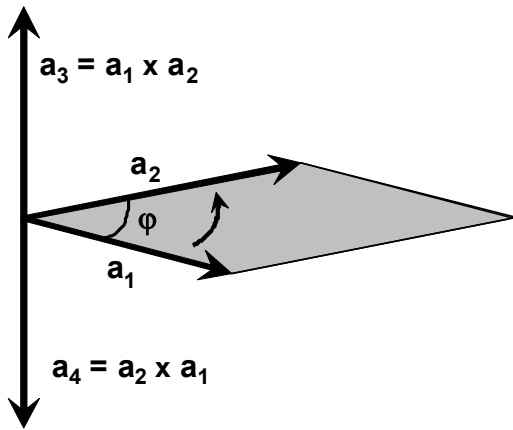


Рис. 26.3

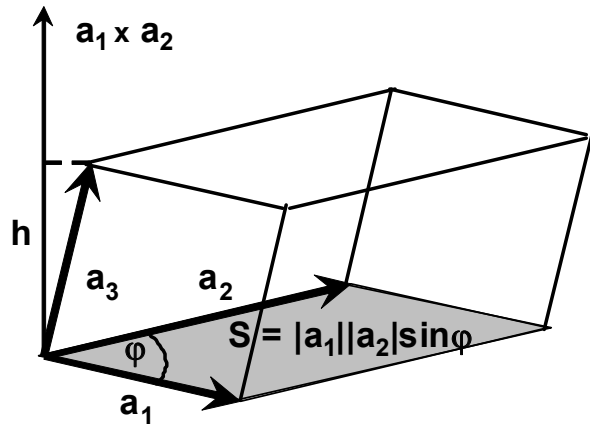


Рис. 26.4

Из определения (26.9) можно вывести следующие свойства векторного произведения

- a) $\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_1 = -\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2$;
- b) $\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 = 0$, если $\mathbf{a}_2 = \lambda \mathbf{a}_1$;
- c) $\mathbf{a}_1 \times (\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3) = \mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_3$.

(26.10)

Свойство а) означает, что векторное произведение меняет знак при перестановке сомножителей. Свойство б) показывает, что векторное произведение параллельных векторов равно нулю. Действительно, угол φ для параллельных векторов равен нулю, поэтому в согласии с формулой (26.8) норма соответствующего векторного произведения обращается в нуль. В частности, векторное произведение вектора на себя равно нулю, $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = 0$. Наконец, свойство с) облегчает проведение сложных векторных выкладок.

Для практических вычислений весьма полезно составить таблицу векторных произведений для базисных векторов (26.6а). Используя определение (26.9), находим

$$\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = 0; \quad \mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}; \quad \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}; \quad \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}. \quad (26.11)$$

Прочие соотношения получаются отсюда перестановкой сомножителей, с учетом правила (26.10а).

Векторное произведение используется для проверки коллинеарности (то есть, параллельности) двух заданных векторов. С помощью векторного произведения строится вектор, перпендикулярный плоскости, в которой лежат два заданных вектора. Кроме того, в силу формулы (26.8), модуль векторного произведения равен площади параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$.

В. Смешанное произведение векторов

Смешанное произведение является суперпозицией скалярного и векторного произведений. Умножая векторное произведение $\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2$ скалярно на произвольный вектор $\mathbf{a}_3$ слева, или справа, получаем, в силу свойства перестановочности скалярного произведения (26.4) одно и то же число

$$\lambda = \mathbf{a}_3(\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2) = (\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2)\mathbf{a}_3, \quad (26.12)$$

которое и есть результат смешанного произведения. Анализируя формулу (26.12) в координатном представлении, можно доказать интересное равенство

$$(\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2)\mathbf{a}_3 = \mathbf{a}_1(\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3). \quad (26.13)$$

В силу этого, расстановка знаков скалярного и векторного произведений в смешанном произведении может выбираться произвольно, при условии, что порядок следования самих

векторов при этом не меняется. В записи смешанного произведения принято, поэтому, опускать знак векторного произведения и писать просто $(\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2)\mathbf{a}_3 = \mathbf{a}_1(\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3) = \mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3$. С другой стороны, при перестановке любых двух ближайших сомножителей знак смешанного произведения меняется на противоположный, например, $\mathbf{a}_2\mathbf{a}_1\mathbf{a}_3 = -\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3$.

Смешанное произведение обращается в нуль, если любые два вектора параллельны, поскольку обращается в нуль векторное произведение этих векторов, которое входит в состав смешанного произведения. Кроме того, легко видеть, что смешанное произведение $\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3$ обращается в нуль, если три вектора $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ и $\mathbf{a}_3$ лежат в одной плоскости, то есть компланарны. Действительно, векторное произведение двух произвольных векторов, скажем, $\mathbf{a}_2$ и $\mathbf{a}_3$ перпендикулярно плоскости, в которой они лежат. Следовательно, умножение этого векторного произведения на вектор $\mathbf{a}_1$, который лежит в той же плоскости, дает нуль, в силу свойства скалярного произведения.

Замечательно также, что объем параллелепипеда, построенного на векторах $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ и $\mathbf{a}_3$ может быть вычислен по формуле

$$V = |\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3| = S_{\text{осн}}h. \quad (26.14)$$

Действительно, как показывает Рис. 26.4, модуль векторного произведения векторов $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$ равен площади параллелограмма, лежащего в основании параллелепипеда $S_{\text{осн}}$, а проекция вектора $\mathbf{a}_3$ на направление вектора $\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2$ дает высоту параллелепипеда h .

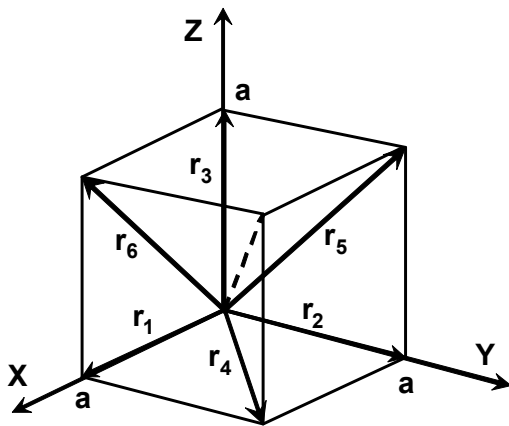


Рис. 26.5

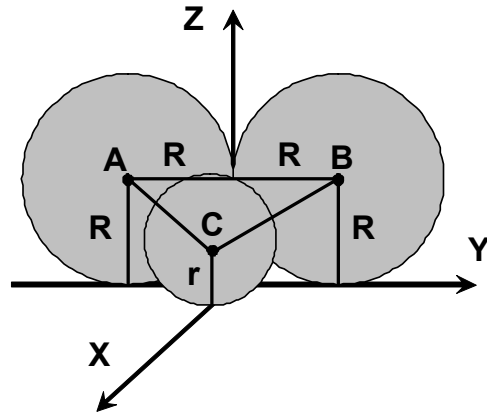


Рис. 26.6

Г. Типичные примеры

а) Через каждую вершину единичного куба проведены плоскости, перпендикулярные одной и той же диагонали куба. На какие части делится диагональ этими плоскостями?

Направление пространственной диагонали куба можно задать единичным вектором $\bar{n} = (1, 1, 1)/\sqrt{3}$, поскольку этот вектор образует равные проекции на оси декартовой системы координат. Пусть ребро куба равно a . Поместим одну из вершин куба в начало декартовой системы координат, а ребра направим вдоль осей X , Y и Z (Рис. 26.5). Тогда радиус-векторы вершин куба, ближайших к началу координат, будут равны

$$\mathbf{r}_1 = (a, 0, 0); \quad \mathbf{r}_2 = (0, a, 0); \quad \mathbf{r}_3 = (0, 0, a). \quad (*)$$

Проекции этих векторов на направление пространственной диагонали куба совпадают, $\mathbf{r}_1\bar{n} = \mathbf{r}_2\bar{n} = \mathbf{r}_3\bar{n} = a/\sqrt{3}$. Следовательно, плоскости, проходящие через вершины векторов $(*)$ перпендикулярно пространственной диагонали совпадают, и отсекают на ней отрезок длины $a/\sqrt{3}$. Радиус-векторы следующих трех вершин куба даются уравнениями

$$\mathbf{r}_4 = (a, a, 0); \quad \mathbf{r}_5 = (0, a, a); \quad \mathbf{r}_6 = (a, 0, a). \quad (**)$$

Проекции этих векторов на направление пространственной диагонали куба дают значение $\mathbf{r}_4\mathbf{n} = \mathbf{r}_5\mathbf{n} = \mathbf{r}_6\mathbf{n} = 2a/\sqrt{3}$. Следовательно, плоскость, проходящая через вершины куба (**) отсекает на пространственной диагонали отрезок длины $2a/\sqrt{3}$. Поскольку длина пространственной диагонали равна $\sqrt{3}a$, то построенные плоскости разделяют пространственную диагональ на три равные части. ■

б) На плоскости XY два шара радиуса R касаются друг друга и меньшего шара радиуса r . Найти двугранный угол, который образует плоскость, касающаяся всех трех шаров, с плоскостью XY .

Пусть центры двух шаров радиуса R находятся в точках A и B , а центр меньшего шара находится в точке C (Рис. 26.6). Без ограничения общности можно считать, что радиус-векторы центров шаров A и B равны $\mathbf{r}_A = (0, -R, R)$ и $\mathbf{r}_B = (0, R, R)$, соответственно, а радиус-вектор меньшего шара, в силу симметрии задачи, равен $\mathbf{r}_C = (x_0, 0, r)$, где отрезок x_0 подлежит определению из условий касания шаров. Вектор, идущий из точки A в точку C , и квадрат его модуля равны, соответственно

$$\mathbf{r}_{CA} = \mathbf{r}_C - \mathbf{r}_A = (x_0, R, r - R); \quad (\mathbf{r}_C - \mathbf{r}_A)^2 = x_0^2 + R^2 + (r - R)^2.$$

Из условия касания шаров A и C следует, что длина отрезка AC должна быть равна $r + R$, поэтому $(\mathbf{r}_C - \mathbf{r}_A)^2 = (r + R)^2$. Из этого уравнения легко найти x – координату центра шара C

$$x_0 = \sqrt{R(4r - R)}. \quad (*)$$

Легко проверить, что при $r < R/4$ радиус шара C слишком мал, чтобы, касаясь плоскости XY , обеспечить одновременное касание шаров A и C , и B и C . Поэтому при $r < R/4$ задача не имеет решения.

Построим единичный вектор $\mathbf{n}$, перпендикулярный плоскости ABC на Рис. 26.6. Вектор, идущий из точки A в точку B равен $\mathbf{r}_{BA} = \mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A = (0, 2R, 0)$. Векторное произведение векторов $\mathbf{r}_{CA}$ и $\mathbf{r}_{BA}$, которое направлено перпендикулярно плоскости ABC , вычисляется следующим образом

$$\mathbf{r}_{CA} \times \mathbf{r}_{BA} = (x_0\mathbf{i} + R\mathbf{j} + (r - R)\mathbf{k}) \times 2R\mathbf{j} = 2R(R - r)\mathbf{i} + 2Rx_0\mathbf{k}.$$

Разделив этот вектор на его модуль, с учетом соотношения (*) находим единичный вектор $\mathbf{n}$ в виде

$$\bar{\mathbf{n}} = \frac{(R - r)\bar{\mathbf{i}} + \sqrt{R(4r - R)}\bar{\mathbf{k}}}{\sqrt{r(r + 2R)}}.$$

Скалярное произведение единичных векторов $\mathbf{n}$ и $\mathbf{k}$ дает косинус угла между этими векторами

$$\cos \varphi = \bar{\mathbf{n}}\bar{\mathbf{k}} = \sqrt{R(4r - R)/r(r + 2R)}; \quad \varphi = \arccos \sqrt{R(4r - R)/r(r + 2R)}.$$

Очевидно, что угол φ есть линейный угол двугранного угла, который образует плоскость ABC с плоскостью XY . В силу симметрии задачи, искомый угол, который образует касательная к шарам плоскость с плоскостью XY , равен 2φ . ■

Легко видеть, что при $r \rightarrow R$ угол 2φ стремится к нулю, так что касательная плоскость становится параллельной плоскости XY , как это и должно быть для шаров одинакового радиуса.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Изложенного выше материала должно быть достаточно для продолжения успешного обучения в высшем учебном заведении. Однако для поступления в престижный университет с повышенным уровнем физико-математической подготовки иногда требуется сдать дополнительный экзамен по математике.

"Экзамен - это потеря!" - говорят нам иногда родители. Это действительно так для того, кто что-то не выучил или не понял в школе. Но это не вся правда! Слишком много серьезных, трудолюбивых юношей и девушек, упорно проработавших школьный курс наук, сдают экзамены в университет гораздо ниже своих возможностей. Экзамен - это еще и серьезное испытание, требующее психологической устойчивости, воли и собранности. В этом экзамен сродни спортивному соревнованию. По телевидения нам часто рассказывают, как тщательно готовятся опытные спортсмены к ответственным стартам. О том же, как помочь человеку проявить максимальную умственную работоспособность знают, возможно, лишь специалисты. Создается впечатление, что человечеству гораздо важнее пробежать, наконец, стометровку за 9,8 сек, либо прыгнуть с шестом на $6 + n$ метров, чем вырастить исследователей, способных решить, скажем, проблему создания дешевых и экологически чистых источников энергии. Не будучи специалистом - психологом, автор рискует, тем не менее, дать несколько советов по подготовке к экзамену, основанных просто на опыте и здравом смысле.

1°. Подготовку к экзаменам в избранный вами университет разумно начинать со сбора подробной информации об этом учебном заведении. Если университет находится в вашем городе, не поленитесь съездить туда, посмотрите условия, в которых проходят занятия, поговорите со студентами об учебной нагрузке и о будущем распределении. Положительная информация укрепит ваше желание учиться именно в данном учебном заведении. А мечта - сдвинет горы!

2°. Необходимо заранее выяснить, какие экзамены следует сдавать, какой конкурс и какой средний проходной балл реально складывался в прошедшие годы в данном университете по избранной специальности. Для подготовки к письменному экзамену по математике совершенно необходимо иметь также варианты письменных заданий, предлагавшихся на экзаменах в этом университете за ряд прошлых лет.

3°. Параллельно с проработкой и повторением материала по подходящему для вас учебному пособию, необходимо за несколько месяцев до экзамена практиковать регулярное решение вариантов экзаменационных работ. За условленное время (обычно за 4 часа) в уединенной обстановке вы должны успеть полностью решить и переписать набело задачи варианта, не пользуясь никакими справочниками и шпаргалками. Весьма полезно попросить проверить решенный вариант учителя или хорошо успевающего товарища. Регулярная практика решения вариантов экзаменационных работ научит вас ценить каждую минуту и правильно распределять время на экзамене.

4°. Излишне говорить, что непосредственно перед экзаменом необходимо хорошо отдохнуть (погулять, послушать музыку и т. д.) и выспаться. Утром перед экзаменом важно беречь свою нервную энергию, исключить лишние эмоции и переживания. Следует точно рассчитать время поездки в институт. Приехать на экзамен слишком рано, значит заранее "перегореть"; еще хуже переволноваться из-за возможного опоздания. Полезно также еще до экзамена побывать в институте и ознакомиться с аудиториями, в которых будет проводиться экзамен. Цель этих предосторожностей - исключить любые непредвиденные случайности. Знание обстановки будущего экзамена поможет также значительно снизить предстартовое волнение.

5 . Придя в аудиторию и получив на руки вариант экзаменационной работы, часть абитуриентов, даже не ознакомившись толком с условиями задач, немедленно приступает к решению. Это неверная тактика. Прежде всего, нужно внимательно прочитать и коротко

обдумать условия всех задач варианта. Любые неясности, а тем более, возможные опечатки в условиях задач вы имеете право обсудить с преподавателем в аудитории. Никого будет винить, если вы неправильно поняли условие или обозначения в задаче.

6°. Предварительное ознакомление с задачами варианта помогает оценить объем предстоящей работы и немедленно настраивает подготовленного абитуриента на рабочий лад. Ознакомиться с задачей - значит вдуматься в условие и прикинуть, хотя бы предварительный, план ее решения. Затем следует выбрать самую легкую из предложенных вам задач, решить ее в черновике, сделать тщательную проверку решения и внимательно переписать его в чистовик. Тем самым, определенная часть работы будет полностью выполнена. Действуя далее таким же образом, вы сначала наберете количество баллов, достаточное для оценки работы на "3", затем для оценки "4" и т. д. Вы сможете максимально полно использовать отведенное вам время и будете готовы в любой момент сдать работу преподавателю.

7°. Но, предположим, вы успели решить все предложенные вам задачи. Потратьте оставшееся время для тщательной, всесторонней проверки решений. Следует проявить упорство, дотошность, настойчивость в поиске ошибок. В старину говорили, что на "5" знает предмет только Господь Бог! Частенько аудиторию шокирует абитуриент, гордо сдающий работу чуть ли не за два часа до окончания экзамена. Пусть вас это не трогает. Главная задача - решить вариант не быстро, а правильно. Не стоит также во время экзамена входить в контакт с соседями. Даже если все вокруг вас решают ту же самую задачу и ответ не совпадает с вашим - это ничего не означает! Математические истины голосованием не устанавливаются.

8 . О почерке и оформлении работы было сказано ранее. Особо внимательным нужно быть при переписывании работы на белом, так как при этом совершается значительное количество ошибок. Перед сдачей работы преподавателю полезно точно записать условия задач для домашней проверки и подготовки к возможной апелляции.

Несколько слов в утешение неудачнику. Как ни горька, как не обидна бывает неудача на экзаменах, это не повод опускать руки. Тот, кто хочет - своего добьется! Жизнь - это не спринт, а своего рода марафон, бег на длинную и очень изнурительную дистанцию. И здесь большего достигнет не обязательно тот, кто раньше убежал со старта. Кроме того, как это не удивительно, но лишь поражения по-настоящему чему-то нас учат.

ПРИЛОЖЕНИЕ: Математический фольклор

Великий Аристотель писал: "По большей части приятно также учиться и восхищаться, потому что в восхищении уже заключается желание познания, так что предмет восхищения делается скоро предметом желания". Но верно и другое: трудное дитя родителю дороже. Нельзя не полюбить хотя бы в малой степени тот предмет, которому отдано огромное количество времени и труда. Поэтому часто обучение математике начинается с равнодушия и неприятия, а кончается искренним уважением и восхищением! Быстрее и легче пройти этот путь помогают задачи математического фольклора. Решайте их сами и задавайте друзьям и знакомым. Это один из лучших способов получить от математики удовольствие и на первых порах самоутвердиться в этой науке.

1. Кирпич весит 1 кг и еще полкирпича. Сколько весят 5 кирпичей?
2. 3 кошки съедают 3 мышек за 1,5 часа. За какое время 10 кошек съедят 20 мышек?
3. Высота столба 20 м. Муравей ползет по нему и поднимается за день на 5 м вверх, а за ночь опускается на 4 м вниз. За сколько дней муравей доползет до вершины столба?
4. Имеем 3 сосуда вместимостью соответственно 8, 5 и 3 л. Наибольший сосуд полон молока. Как разделить это молоко на 2 равные части, используя и остальные сосуды?
5. В 10 мешочках одинаковые на вид монеты. Но в одном они фальшивые - на 1 г легче настоящих. Настоящая монета весит 10 г. Как при помощи одного взвешивания определить мешочек с фальшивыми монетами?
6. Семь рыбаков ловили рыбу на озере. Первый рыбачил каждый день, второй - через день, третий - через 2 дня и т. д., седьмой - через шесть дней. Сегодня все рыбаки на озере. Через сколько дней все 7 рыбаков снова соберутся вместе на озере?
7. Над садом летало несколько ворон. В саду было несколько деревьев. Если вороны сядут по одной на дерево, то одной вороне не хватит дерева. Если они сядут по 2 на дерево, 1 дерево останется без ворон. Сколько было ворон и сколько деревьев?
8. В прямоугольной комнате имеется 10 стульев. Расставьте их так, чтобы вдоль каждой стены стояло равное количество стульев.
9. Хозяин имел квадратный двор. На четырех углах двора он посадил по дереву. Прошло время, и он захотел увеличить свой двор в 2 раза, но чтобы он по-прежнему был квадратным. Как ему поступить, чтобы деревья остались на линии ограды?
10. Три мудреца, измученные постоянными спорами и летней жарой, легли и заснули. Через некоторое время проходивший мимо шутник намазал им лбы черным углем. Мудрецы проснулись, поглядели друг на друга и стали смеяться. Вдруг один из мудрецов перестал смеяться, он догадался, что и его лоб измазан. Как он рассуждал?
11. Человеку необходимо переправить через реку с помощью лодки волка, козу и капусту. В лодке может поместиться только человек, а с ним или волк, или коза, или капуста. Но если оставить волка с козой, то волк съест козу, если оставить козу с капустой, то коза съест капусту. Как перевезти через реку и волка, и козу, и капусту целыми и невредимыми?
12. Сколько раз в сутки стрелки часов располагаются перпендикулярно друг другу?
13. По экватору Земли плотно натянута нерастяжимая нить. Добавим в эту нить 1 метр и расположим ее так, чтобы щель между поверхностью Земли и нитью была везде одинаковой. Пролезет ли в образовавшуюся щелочку муравей?
14. Иван спросил Петра: "Сколько лет твоим сыновьям?" "У меня три сына", - ответил Петр. Произведение их возрастов равно 36, а сумма возрастов ... равна числу окон в противоположном доме! Иван окна сосчитал, но задачу не решил. Пришлось Петру добавить, что старший сын - рыжий. Сколько лет сыновьям Петра?
15. Какую часть площади параллелограмма $ABCD$ на Рис. 1 составляет сумма площадей заштрихованных треугольников, если E и F – середины сторон BC и DC , соответственно?
16. Чему равна площадь треугольника ABC на Рис. 2?

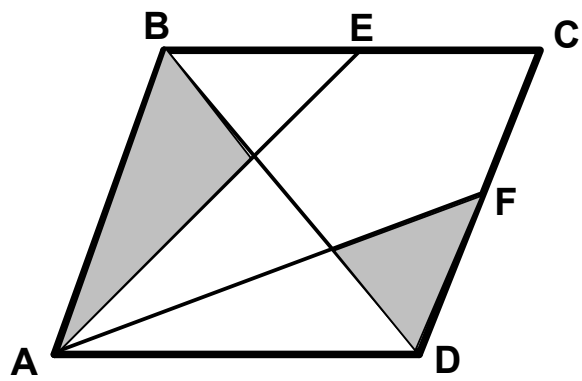


Рис. 1

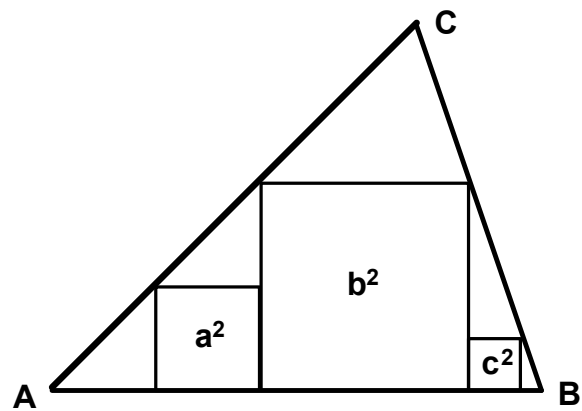


Рис. 2

ОТВЕТЫ К КОНТРОЛЬНЫМ ЗАДАЧАМ

§2. 1°. $x = -1$. 2°. $x_1 = 0$; $x_2 = -2$; $x_{3,4} = -1 \pm \sqrt{33/2}$.

3°. $a = -b$. 4°. $\begin{cases} x_1 = 1 \\ y_1 = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = -3 \\ y_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_3 = -2 \\ y_3 = 1 \end{cases}$

Кроме того, имеется еще три решения, в которых x и y меняются местами.

§3. 1°. $(-\infty, \infty)$. 2°. $(-\infty, -7) \cup (-1, 1) \cup (3, \infty)$.
3°. $x = 2$. 4°. $[-4, -2] \cup [1]$.

§4. 1°. $\left(\frac{1}{2}, 1\right) \cup \left(\frac{11}{9}, \infty\right)$. 2°. $a_{\min} = 1$.

§5. 1°. $x_1 = -8$; $x_2 = 2$; 2°. $\left(-\infty, \frac{4}{3}\right)$. 3°. $\begin{cases} x_1 = 2 \\ y_1 = 1 \end{cases}$; $\begin{cases} x_2 = 0 \\ y_2 = -3 \end{cases}$; $\begin{cases} x_3 = -6 \\ y_3 = 9 \end{cases}$.

§6. 1°. Нет решений. 2°. $\left(-1, \frac{5 - \sqrt{13}}{2}\right) \cup (2, \infty)$.
3°. $(-1, \sqrt[3]{4})$. 4°. $\begin{cases} x_1 = 1 \\ y_1 = 4 \end{cases}$; $\begin{cases} x_2 = 4 \\ y_2 = 1 \end{cases}$.

§7. 1°. $x_1 = 9$; $x_2 = 81$. 2°. $x = 0$. 3°. $x_1 = 3$; $x_2 = 3^9$.
4°. $x = 10^3$. 5°. $x_1 = -1,5$; $x_2 = \frac{1}{2}$; $x_3 = 1$; $x_4 = 3$. 6°. $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$.

§8. 1°. $\left(0, \frac{1}{100}\right)$. 2°. $(-\infty, 1) \cup (2, \infty)$. 3°. $(1, 3) \cup (3, 5)$. 4°. $\left[9\frac{1}{3}, \infty\right)$.
5°. $(2, 3) \cup (4, \infty)$.

§10. 1°. $x_1 = \arctg \frac{\sqrt{5} + 1}{4} + \pi n$; $x_2 = -\arctg \frac{\sqrt{5} - 1}{4} + \pi n$.
2°. $x_1 = \frac{\pi}{16} + \frac{\pi n}{8}$; $x_2 = \pm \frac{\pi}{3} + \pi n$. 3°. $x_1 = -\frac{\pi}{4} + \pi n$; $x_2 = \pi n$.
4°. $x = \arctg \frac{5}{3} + (-1)^k \frac{\pi}{4} + \pi n$. 5°. $\begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2} + \pi k \\ y = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2} - \pi k \end{cases}$

§12. 1°. $a_1 = 5$; $a_2 = 9$; $a_3 = 13$. 2°. $q = 2 \pm \sqrt{3}$.

§13. 1°. $\left(4, \frac{8 + \sqrt{61}}{3}\right)$. 2°. 5%. 3°. 7кг.

§14. 1°. $-\frac{5}{2}$. 2°. 0. 3°. $\frac{1}{5}$. 4°. 0.

§15. 1°. $\frac{3}{4}$. 2°. $\frac{1}{e}$. 3°. $-\frac{2}{3}$. 4°. 2. 5°. -2. 6°. 1.

§16. 1°. $y' = -\frac{2x}{(1-x^2)^{1/2}(1+x^2)^{3/2}}$. 2°. $y' = \frac{\cos\sqrt{x}}{4[x \cdot \sin\sqrt{x}]^{1/2}}$. 3°. $y' = -\frac{1}{1+x^2}$.

4°. $y' = 3\cos^2 x \cdot \sin x \left[\ln 4x - e^{1/x} \right] - \cos^3 x \left[e^{1/x} + x \right] / x^2$.

5°. $y' = 2(\sin x)^{2x} \cdot \ln(\sin x) + 2x(\sin x)^{2x-1} \cdot \cos x$.

§17. 1°. $F(x) = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C$. 2°. $F(x) = -[x^2 + 2x + 2]e^{-x} + C$.

3°. $F(x) = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left[\frac{\sin x}{2} \right] + C$. 4°. $2 - 1/\sqrt{2}$. 5°. 45/4.

§18. 1°. $x_1 = 0$; $x_2 = 8$. 2°. $y_{\max} = \frac{7}{3}$; $y_{\min} = \sqrt{8/3}$.

3°. $S_{\max} = \frac{16a}{3} \sqrt{\frac{pa}{3}}$. 4°. $S = \frac{1}{3}$. 5°. $a_{\min} = 1$.

§23. 1°. $\frac{\sin \alpha + \sin \gamma}{\sin(\alpha + \lambda)}$. 2°. $(b-a)^2 \cdot \cos^2 \frac{\alpha}{2}$.

3°. $\frac{[a^2(b-t)^2 + b^2(a-t)^2]^{1/2}}{2t}$, $t = \frac{a+b+\sqrt{a^2+b^2}}{2}$.

4°. $\frac{b \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \gamma}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \gamma + \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \gamma}$.

§25. 1°. 1:1:1. 2°. $4\sqrt{3}m^2$. 3°. $\frac{ab}{\sqrt{2a^2-b^2}}$. 4°. $\frac{1}{3}\pi R^3 \left(1 - \sin \frac{\alpha}{2}\right)^2 / \sin \frac{\alpha}{2}$.

Ответы к Приложению

1°. 10 кг. 2°. 3 час. 3°. 16 дней. 5°. Примените формулу (12.7).

6°. 60 дней. 7°. 4 вороны и 3 дерева. 9°. Учтите, что $\sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$.

12°. 44. 13°. $\Delta R = \Delta L / 2\pi$. 14°. 9; 2; 2.

СПИСОК ОБОЗНАЧЕНИЙ

Список обозначений

- $[a, b]$ – замкнутый промежуток, $a \leq x \leq b$
 (a, b) – открытый промежуток, $a < x < b$
 $(a, b]$ – полуоткрытый промежуток, $a < x \leq b$
 $[a, b)$ – полуоткрытый промежуток, $a \leq x < b$
 $\Rightarrow$ – знак следования
 $\Leftrightarrow$ – знак равносильности
 $A \cup B$ – объединение множеств A и B
 $n!$ – n - факториал ($n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$)
 $[x]$ – целая часть числа
 $|x|$ – абсолютная величина числа
 $\lg$ – десятичный логарифм
 $\ln$ – натуральный логарифм (по основанию e)
 $\min(a, b)$ – наименьшее из чисел a и b
 $\max(a, b)$ – наибольшее из чисел a и b
 $\emptyset$ – пустое множество
 $\Phi_1 \sim \Phi_2$ – подобие фигур
 $|AB|$ – длина отрезка AB
 $\parallel$ – знак параллельности
 $\perp$ – знак перпендикулярности
■ – знак окончания доказательства, или описания задачи.

Учебное издание

Н. А. Усов

ОСНОВЫ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ

Книга издается в авторской редакции

Оригинал-макет: *И. Македонская*

Обложка: *И. Македонская*

ISBN 978-5-9965-1604-9

Издается по технологии Print on Demand.

Формат издания 60×90/8.

Усл. печ. л. 20,45.

Издательство «Моя Строка»

199178, Санкт-Петербург, 7-я линия ВО, д.80/2 лит. Д, пом. 6/3н

www.mystroka.ru

