МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА

Механико-математический факультет

А. Б. Угольников

Классы Поста

Рекомендовано
УМО по классическому университетскому образованию
в качестве учебного пособия по дискретной математике
для студентов высших учебных заведений, обучающихся
по направлениям подготовки высшего профессионального
образования 010100 Математика, 010200 Математика.
Прикладная математика

Москва 2008

УДК 519.7
ББК 22

Угольников А. Б. Классы Поста. Учебное пособие: М.: Изд-во ЦПИ при механико-математическом факультете МГУ имени М. В. Ломоносова, 2008. 64 с.

Рецензенты:

Касим-Заде О. М., профессор, д.ф.-м.н.
Кобельков Г. М., профессор, д.ф.-м.н.

Учебное пособие содержит доказательство конечной порождаемости всех замкнутых классов функций алгебры логики (классов Поста), на основе которого дано описание структуры всех замкнутых классов. Этот материал входит в программу обязательного курса "Дискретная математика", читаемого студентам механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова на четвертом курсе.

Для студентов и аспирантов.

Содержание

Предисловие

Данная книга содержит доказательство известной теоремы американского математика Э. Л. Поста [32–34] о том, что каждый класс функций алгебры логики, замкнутый относительно операции суперпозиции, имеет конечный базис. На основе этого доказательства приводится описание структуры всех замкнутых классов булевых функций (классов Поста).

Этот материал входит в программу обязательного курса "Дискретная математика", читаемого студентам механико-математического факультета МГУ на четвертом курсе, и служит дополнением раздела "Функции алгебры логики" обязательного курса "Введение в математическую логику", читаемого студентам первого курса факультета.

В книге принят достаточно лаконичный стиль изложения: некоторые простые свойства булевых функций приводятся без подробного обоснования, что позволяет более выпукло показать основные идеи предлагаемых конструкций и методы доказательств. Заинтересованный читатель может легко восстановить все детали доказательств. Приведенный в данном издании материал может быть также использован при проведении практических занятий по вышеупомянутым обязательным курсам при изучении свойств функций алгебры логики.

Автор выражает благодарность О. С. Дудаковой за подготовку оригинала-макета.

Введение

Э. Пост [32–34] описал все классы булевых функций, замкнутые относительно операции суперпозиции (см. также [37]). На основе этого он показал, что каждый такой класс имеет конечный базис. В книге С. В. Яблонского, Г. П. Гаврилова и В. Б. Кудрявцева [19] было дано более компактное и простое изложение этих результатов. При этом, в отличие от работ Поста, в книге [19] предполагается, что каждый класс вместе с функцией содержит также и все функции, отличающиеся от нее фиктивными переменными, то есть фактически замыкание систем функций рассматривается относительно двух операций: суперпозиции и введения несущественной переменной. Такой подход позволил получить более простую структуру замкнутых классов, чем структура, описанная у Поста. В ней отсутствуют классы (их семнадцать), которые не являются замкнутыми относительно операции введения несущественной переменной.

Описание классов Поста содержится также в [7, 8, 17, 28–30, 35]. В работах [1] и [6] приведены доказательства конечной порождаемости всех замкнутых классов булевых функций, не использующие описание структуры Поста (см. также [31]). Некоторые свойства замкнутых классов изучены в [2, 3, 18, 20–22, 24–27]. Алгебраический подход к понятиям суперпозиции и замкнутого класса предложен в [4, 5].

В данной книге приведено доказательство конечной порождаемости замкнутых классов булевых функций (также не опирающееся на описание структуры замкнутых классов) из работы автора [17], на основе которого[1] дано описание структуры всех классов Поста, в том числе тех, которые отсутствуют в книге [19].

В основе этого доказательства лежит метод моделирования констант функциями определенного вида, а также специальное представление монотонных функций над системой булевых функций вида $d_p(x_1, \ldots, x_p) = \bigvee x_i x_j$ (дизъюнкция берется по всем $i, j = 1, \ldots, p,\ i \neq j$), которые, в свою очередь, получаются отождествлением переменных у исходных функций. Эти методы ранее применялись автором при реализации функций из замкнутых классов схемами из функциональных элементов и формулами в неполных базисах (см. [10–16, 36]).

В §1 даются основные определения и обозначения. Перечисление всех классов Поста потребовало несколько иначе, чем в книгах [23, 24], ввести некоторые понятия, однако отличие невелико. В §2 приводятся вспомогательные утверждения. В §3 доказывается теорема о конечной порождаемости замкнутых классов. На основе этого доказательства в §4 приводится описание всех замкнутых классов булевых функций. В §5 дается описание классов Поста, не являющихся замкнутыми относительно операции введения несущественной переменной.

В книге используются обозначения замкнутых классов из работы [17]. В приложении приведены обозначения этих классов из работы Поста [34], а также из книги [19]. Следует отметить, что для замкнутых классов, которые не содержат существенных функций (а также некоторых классов конъюнкций и дизъюнкций), в книге [19] используются обозначения, отличающиеся от обозначений соответствующих классов из работы [34].

---

[1] Основные моменты этого доказательства изложены также в книгах [7] и [8].

§1 Некоторые определения и обозначения

Пусть $E = \{0,1\}$, X — счетное множество переменных. Элементы множества X обозначаются символами x_i, y_i, $z_i, \ldots$, $i = 1, 2, \ldots$; нижние индексы иногда опускаются. Обозначим через $\widetilde{x}$ набор переменных $(x_1, \ldots, x_n)$, через E^n — множество всех наборов $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, таких что $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in E$, $n \geq 1$; через $\widetilde{1}$ — набор $(1, \ldots, 1)$, а через $\widetilde{0}$ — набор $(0, \ldots, 0)$. Пусть $f^{(n)}$ — отображение множества E^n в E, $n \geq 1$, и пусть функция $f^{(n)}(\widetilde{x})$, $x_1, \ldots, x_n \in X$, задает это отображение, E^n — область определения, E — область значений, $x_1, \ldots, x_n$ — переменные, от которых зависит $f^{(n)}(\widetilde{x})$. Функция $f^{(n)}(x_1, \ldots, x_n)$ называется n-местной *булевой функцией* (или *функцией алгебры логики*), а $f^{(n)}$ — n-местным *функциональным символом*, соответствующим этой функции. В дальнейшем мы верхний индекс у функциональных символов будем, как правило, опускать, указывая при этом число переменных, от которых зависят рассматриваемые функции. Множество всех таких функций обозначается через P_2. Так как наборов $(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ длины n из нулей и единиц конечное число (именно 2^n), то каждая функция алгебры логики может быть полностью задана таблицей (табл. 1).

В левой части табл. 1 выписаны все наборы значений переменных, в правой части — соответствующие им значения функций. На каждом из 2^n наборов функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ может принимать любое из двух значений из множества E.

Отсюда следует, что число функций алгебры логики от n переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ равно 2^{2^n}.

Таблица 1

x_1	x_2	$\ldots$	x_n	$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$
0	0	$\ldots$	0	$f(0, 0, \ldots, 0)$
		$\ldots$		$\ldots$
σ_1	σ_2	$\ldots$	σ_n	$f(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$
		$\ldots$		$\ldots$
1	1	$\ldots$	1	$f(1, 1, \ldots, 1)$

Отметим, что каждая n-местная булева функция $f^{(n)}(\widetilde{x})$ представляет собой совокупность некоторого отображения из E^n в E и упорядоченного набора $\widetilde{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ переменных из множества X, $n \geq 1$. В соответствии с этим возникает следующее понятие равенства функций.

Функции *равны*, если они зависят от одного и того же множества переменных и задают одно и то же отображение. А именно, функции $f^{(n)}(\widetilde{x})$ и $g^{(n)}(\widetilde{x})$ из P_2 называются равными (обозначения $f^{(n)} = g^{(n)}$ или $f^{(n)} \equiv g^{(n)}$), если $f^{(n)}(\widetilde{\alpha}) = g^{(n)}(\widetilde{\alpha})$ для любого набора $\widetilde{\alpha} \in E^n$, $n \geq 1$.

Функция $f^{(n)}(\widetilde{x})$ называется *константой нуль* (соответственно *константой единица*), если она принимает значение 0 (соответственно 1) на всех наборах из E^n, $n \geq 1$; n-местные константы нуль и единица обозначаются через $0^{(n)}$ и $1^{(n)}$ соответственно (или соответственно через 0 и 1 в тех случаях, когда нет необходимости отмечать число переменных, от которых зависят эти функции). Функция $f^{(n)}(\widetilde{x})$ называется *селекторной*, если существует такой номер i, $1 \leq i \leq n$, что для любого набора $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ из E^n выполняется равенство $f^{(n)}(\widetilde{\alpha}) = \alpha_i$ (такая функция обозначается $e_i^{(n)}(x_1, \ldots, x_n)$); функцию $e_1^{(1)}(x)$ будем обозначать также $e(x)$ или x.

В дальнейшем важную роль будут играть некоторые функции одного и двух аргументов. Рассмотрим эти функции подробно.

При $n = 1$ будет всего 4 функции, указанные в табл. 2; функция $\overline{x}$ называется *отрицанием* x.

Таблица 2

x	0	x	$\overline{x}$	1
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

При $n = 2$ будет уже 16 функций. Некоторые из них указаны в табл. 3.

Функция $x_1 \& x_2$ называется *конъюнкцией* x_1 *и* x_2, она обозначается также x_1x_2. Функция $x_1 \vee x_2$ называется *дизъюнкцией* x_1 *и* x_2; $x_1 + x_2$ называется *суммой* x_1 *и* x_2 *по модулю* 2; $x_1 \to x_2$ называется *импликацией* x_1 *и* x_2.

Таблица 3

x_1	x_2	$x_1 \& x_2$	$x_1 \vee x_2$	$x_1 + x_2$	$x_1 \to x_2$
0	0	0	0	0	1
0	1	0	1	1	1
1	0	0	1	1	0
1	1	1	1	0	1

Переменная x_i $(1 \le i \le n)$ функции $f(\widetilde{x})$ называется *существенной*, если найдутся $\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n \in E$ такие, что

$$f(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, 0, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n) \neq$$

$$\neq f(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, 1, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n).$$

В этом случае говорят, что функция $f(\widetilde{x})$ *существенно зависит* от переменной x_i. Переменная x_i, не являющаяся существенной, называется *несущественной* (или *фиктивной*) переменной функции $f(\widetilde{x})$; в этом случае говорят, что функция $f(\widetilde{x})$ *не зависит существенно* от переменной x_i. Функция называется *существенной*, если она имеет по крайней мере две существенные переменные.

Одним из удобных способов задания функций являются формулы. Пусть дано некоторое множество булевых функций

$$\mathcal{A} = \{f_1^{(n_1)}(x_{i_1}, \ldots, x_{i_{n_1}}), f_2^{(n_2)}(x_{j_1}, \ldots, x_{j_{n_2}}), \ldots\}.$$

Пусть $\mathcal{F} = \{f_1^{(n_1)}, f_2^{(n_2)}, \ldots\}$ — множество функциональных символов, соответствующих функциям из $\mathcal{A}$. Дадим индуктивное определение *формулы над* $\mathcal{A}$.

1. Выражение x_i, $x_i \in X$, является формулой над $\mathcal{A}$; такие формулы называются *тривиальными*.

2. Если $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$ — формулы над $\mathcal{A}$, $n \geq 1$, а $f^{(n)}$ — n-местный функциональный символ из $\mathcal{F}$, то выражение

$$\Phi = f^{(n)}(\Phi_1, \ldots, \Phi_n)$$

является формулой над $\mathcal{A}$; формулы $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$ называются *подформулами формулы* Φ.

Предполагается при этом, что никаких других формул над $\mathcal{A}$ не существует, то есть каждая формула над $\mathcal{A}$ может быть получена применением конечного числа правил 1 и 2. Таким образом, формулы над $\mathcal{A}$ — это слова определенного вида (конечной длины) в алфавите $X \cup \mathcal{F} \cup \mathcal{V}$, где $\mathcal{V}$ — множество вспомогательных символов, состоящее из символов левой и правой скобок, а также запятой.

Для сокращения записи формул введем некоторые соглашения:

1) будем опускать внешние скобки;

2) не будем заключать в скобки переменные и константы.

Через $\Phi(\widetilde{x})$ будем обозначать такую формулу Φ, в которую входят символы переменных $x_1, \ldots, x_n$ и только они.

Для каждого набора $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in E^n$ определим значение $\Phi(\widetilde{\alpha})$, которое принимает формула Φ на наборе $\widetilde{\alpha}$. Если Φ — тривиальная формула вида x_i, $1 \leq i \leq n$, то это значение равно α_i. Пусть Φ имеет вид

$$\Phi(\widetilde{x}) = f^{(m)}(\Phi_1(\widetilde{x}^1), \ldots, \Phi_m(\widetilde{x}^m)),$$

где $f^{(m)} \in \mathcal{F}$, $m \geq 1$, $\widetilde{x}^1, \ldots, \widetilde{x}^m$ — поднаборы набора $\widetilde{x}$, а $\Phi_1, \ldots, \Phi_m$ — формулы над $\mathcal{A}$, для которых значения $\Phi_1(\widetilde{\alpha}^1), \ldots, \Phi_m(\widetilde{\alpha}^m)$ (где $\widetilde{\alpha}^1, \ldots, \widetilde{\alpha}^m$ — поднаборы набора $\widetilde{\alpha}$) уже определены и равны $\beta_1, \ldots, \beta_m$ соответственно. Тогда

$$\Phi(\widetilde{\alpha}) = f^{(m)}(\beta_1, \ldots, \beta_m).$$

Так как мы можем определить значение формулы Φ на любом наборе переменных, то тем самым мы сопоставим этой формуле некоторую функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$. Про функцию, сопоставленную указанным выше способом формуле, говорят, что она *реализуется* или *выражается* этой формулой. Таким образом, каждая формула выражает какую-то функцию алгебры логики.

Формулы Φ_1 и Φ_2 называются *эквивалентными* (обозначение $\Phi_1 = \Phi_2$), если они реализуют равные функции.

Например, формулы $x_1 \to x_2$ и $\overline{x}_1 \vee x_2$ эквивалентны.

Отметим ряд свойств элементарных функций. Легко видеть, что функции $x_1 \& x_2$, $x_1 \vee x_2$ и $x_1 + x_2$ обладают свойствами коммутативности и ассоциативности. Кроме того, эти функции обладают свойствами дистрибутивности:

$$x_1 \,\&\, (x_2 \vee x_3) = (x_1 \,\&\, x_2) \;\vee\; (x_1 \,\&\, x_3)$$

$$x_1 \,\&\, (x_2 + x_3) = (x_1 \,\&\, x_2) + (x_1 \,\&\, x_3),$$

$$x_1 \vee (x_2 \,\&\, x_3) = (x_1 \vee x_2) \,\&\, (x_1 \vee x_3).$$

Из этих свойств нетрудно вывести следующее правило: в конъюнкции из нескольких членов можно произвольным образом их переставлять и произвольным образом расставлять скобки. Аналогично для дизъюнкции и суммы по модулю 2.

Например,

$$((x_1x_2)(x_3x_4))x_5 = (x_1(x_3x_5))(x_4x_2).$$

Это правило позволяет ввести дальнейшие соглашения, упрощающие вид формул:

3) в формулах, получающихся многократным применением конъюнкции к более простым формулам, будем опускать скобки.

Аналогично для дизъюнкции и суммы по модулю 2. Например, вместо

$$((\Phi_1 \vee \Phi_2) \vee \Phi_3) \vee (\Phi_4 \vee \Phi_5)$$

будем писать

$$\Phi_1 \vee \Phi_2 \vee \Phi_3 \vee \Phi_4 \vee \Phi_5.$$

Кроме того, будем считать, что

4) конъюнкция связывает сильнее чем дизъюнкция и сумма по модулю 2, и будем опускать соответствующие скобки.

Например, вместо $x_1 \vee (x_2x_3)$ будем писать $x_1 \vee x_2x_3$.

Введем также следующие соглашения для записи формул:

$$\bigvee_{i=1}^{n} \Phi_i = \Phi_1 \vee \Phi_2 \vee \ldots \vee \Phi_n,$$

$$\sum_{i=1}^{n} \Phi_i = \Phi_1 + \Phi_2 + \ldots + \Phi_n.$$

Итак, мы определили способ порождения функций алгебры логики функциями системы $\mathcal{A} \subseteq P_2$. Этот способ мы будем называть *операцией суперпозиции.* Если функция $f(\widetilde{x})$ реализована некоторой нетривиальной формулой над $\mathcal{A}$, то будем также говорить, что $f(\widetilde{x})$ получена операцией суперпозиции из функций системы $\mathcal{A}$. Очевидно, что частными случаями операции суперпозиции являются следующие операции над булевыми функциями: перестановка переменных, переименование переменных, отождествление переменных, композиция функций (то есть подстановка функций на места переменных в другие функции). Множество всех функций, которые могут быть реализованы нетривиальными формулами над $\mathcal{A}$ будем называть *замыканием множества* $\mathcal{A}$ *относительно операции суперпозиции* (обозначение $[\mathcal{A}]_C$). Множество $\mathcal{A} \subseteq P_2$ называется *замкнутым относительно операции суперпозиции* (или C*-замкнутым классом*), если $[\mathcal{A}]_C = \mathcal{A}$.

Определим еще один способ порождения функций — *операцию введения несущественной переменной.* Результатом применения этой операции к n-местной булевой функции $f^{(n)}(x_1, \ldots, x_n)$, $n \geq 1$, является $(n+1)$-местная функция алгебры логики $f^{(n+1)}(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1})$, значение которой на произвольном наборе $(\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_n,\ \alpha_{n+1})$ из E^{n+1} определяется равенством

$$f^{(n+1)}\ (\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_n,\ \alpha_{n+1}) = f^{(n)}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n).$$

Отметим, что эта операция, вообще говоря, не является частным случаем операции суперпозиции.

Замыканием множества $\mathcal{A}$ (*относительно операции суперпозиции и введения несущественной переменной*) будем называть множество всех функций, которые могут быть получены из функций системы $\mathcal{A}$ применением операций суперпозиции и введения фиктивной переменной (обозначение $[\mathcal{A}]$).

Отметим некоторые свойства операции замыкания.

1. $\mathcal{A} \subseteq [\mathcal{A}]$.

2. Если $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$, то $[\mathcal{A}] \subseteq [\mathcal{B}]$.

3. $[[\mathcal{A}]] = [\mathcal{A}]$.

Множество $\mathcal{A} \subseteq P_2$ называется *замкнутым относительно операций суперпозиции и введения несущественной переменной* (или *замкнутым классом*), если $[\mathcal{A}] = \mathcal{A}$. Очевидно, что для любых множеств $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ из P_2 множество $[\mathcal{A}] \cap [\mathcal{B}]$ является замкнутым. Отметим также, что, если $[\mathcal{A}] = \mathcal{A}$, то $[\mathcal{A}]_C = \mathcal{A}$; обратное, вообще говоря, не верно. Например, если $f^{(1)}(x)$ — произвольная булева функция одной переменной, то

$$[\{f^{(1)}(x)\}]_C \neq [\{f^{(1)}(x)\}].$$

Система функций алгебры логики $\mathcal{A}$ называется *полной*, если $[\mathcal{A}] = P_2$. Говорят, что система $\mathcal{A}$, $\mathcal{A} \subseteq F \subseteq P_2$, *порождает* класс F (соответственно C-замкнутый класс F), если $[\mathcal{A}] = F$ (соответственно $[\mathcal{A}]_C = F$). В этом случае говорят также, что система $\mathcal{A}$ является *полной в классе* F. *Базисом* класса F называется такая порождающая F система $\mathcal{A}$, любая собственная подсистема которой не порождает F. Класс называется *конечно порожденным*, если он имеет конечный базис.

Пусть F и G — замкнутые классы булевых функций такие, что $F \subseteq G$. Класс F называется *предполным в* G, если $F \neq G$ и для любой функции $f \in G \setminus F$ система $F \cup \{f\}$ является полной в G. Замкнутые классы, предполные в P_2, называются также *предполными классами.*

§2 Вспомогательные утверждения

По определению функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ *сохраняет константу* 1 (соответственно 0), если $f(\widetilde{1}) = 1$ (соответственно $f(\widetilde{0}) = 0$). Функция $\overline{f}(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n)$ называется *двойственной* к функции $f(\widetilde{x})$ (обозначение $f^*(\widetilde{x})$); функция f называется *самодвойственной*, если $f = f^*$. Функция $f(\widetilde{x})$ называется *монотонной*, если $f(\widetilde{\alpha}) \leq f(\widetilde{\beta})$ для любых двух наборов $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\widetilde{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ из E^n, таких, что $\alpha_1 \leq \beta_1, \ldots, \alpha_n \leq \beta_n$. Говорят, что функция $f(\widetilde{x})$ *не превосходит* функции $g(\widetilde{x})$ (обозначение $f \leq g$), если $f(\widetilde{\alpha}) \leq f(\widetilde{\alpha})$ для любого набора $\widetilde{\alpha} \in E^n$; f *меньше* g (обозначение $f < g$), если $f \leq g$ и $f \neq g$. Отметим, что эти отношения (как и понятие равенства функций) определены только для функций, зависящих от одного и того же множества переменных. Тем не менее, мы иногда для удобства написания будем их использовать также для сравнения функций, зависящих от разных множеств переменных, добавляя тем самым необходимое число несущественных переменных в рассматриваемые функции.

Функция $f(\widetilde{x})$ называется *линейной*, если выполняется равенство

$$f(\widetilde{x}) = c_0 + c_1 x_1 + \ldots + c_n x_n$$

(сумма берется по модулю 2), *конъюнкцией*, если

$$f(\widetilde{x}) = c_0 \,\&\, (c_1 \vee x_1) \,\&\, \ldots \,\&(c_n \vee x_n),$$

и *дизъюнкцией*, если

$$f(\widetilde{x}) = c_0 \vee c_1x_1 \vee \ldots \vee c_nx_n,$$

где $c_i \in E$, $i = 1, \ldots, n$.

Говорят, что функция *удовлетворяет условию* $< 0^\mu >$ (соответственно $< 1^\mu >$), если любые μ наборов ($\mu \geq 2$), на которых функция равна 0 (соответственно 1), имеют общую нулевую (соответственно единичную) компоненту. Говорят, что функция $f(\widetilde{x})$ *удовлетворяет условию* $< 0^\infty >$ (соответственно $< 1^\infty >$), если существует такой номер i, $1 \leq i \leq n$, что $f \geq x_i$ (соответственно $f \leq x_i$).

Определим следующие множества булевых функций: T_1 — множество всех функций, сохраняющих константу 1; T_0 — множество всех функций, сохраняющих константу 0; S — множество всех самодвойственных функций; M — множество всех монотонных функций; L — множество всех линейных функций; K — множество всех конъюнкций; D — множество всех дизъюнкций; O^μ — множество всех функций, удовлетворяющих условию $< 0^\mu >$, $\mu = 2, 3, \ldots, \infty$; I^μ — множество всех функций, удовлетворяющих условию $< 1^\mu >$, $\mu = 2, 3, \ldots, \infty$; U — множество всех функций, существенно зависящих не более чем от одной переменной; C — множество всех функций, не имеющих существенных переменных. Нетрудно показать, что все перечисленные множества являются замкнутыми классами (см. также [23, 24]), и для всех $\mu = 2, 3, \ldots, \infty$ выполняются соотношения

$$1 \in O^\infty \subseteq \ldots \subseteq O^\mu \subseteq \ldots \subseteq O^2;$$

$$0 \in I^\infty \subseteq \ldots \subseteq I^\mu \subseteq \ldots \subseteq I^2.$$

Будем обозначать через f_{T_1}, f_{T_0}, f_S, f_M, f_L, f_K, f_D такие булевы функции, которые не принадлежат множествам T_1, T_0, S, M, L, K, D соответственно.

Утверждение 1. *Каждая функция $f^{(n)}(\widetilde{x})$ из P_2 может быть представлена в следующей форме:*

$$f^{(n)}(\widetilde{x}) = a + \sum_{i_1,\ldots,i_s} a_{i_1,\ldots,i_s}(x_{i_1} \vee \ldots \vee x_{i_s}), \qquad (1)$$

где a, $a_{i_1,\ldots,i_s} \in E$, а сумма (по модулю 2) берется по всевозможным непустым подмножествам $\{i_1, i_2, \ldots, i_s\}$ множества $\{1, 2, \ldots, n\}$, $s \geq 1$.

Доказательство этого утверждения нетрудно получить, учитывая, что для любой булевой функции $f(x_1, \ldots, x_n)$, $n \geq 2$, справедливо представление

$$f = (x_1 \vee f_1) + (x_1 \vee f_0) + f_1,$$

где $f_1 = f(1, x_2, \ldots, x_n)$, $f_0 = f(0, x_2, \ldots, x_n)$, и используя соотношение $x \vee (y + z) = (x \vee y) + (x \vee z) + x$.

Выражение вида (1) будем называть *суммой дизъюнкций*. Подсчитывая число функций $f(\widetilde{x})$ из P_2 и число различных сумм дизъюнкций от переменных $x_1, \ldots, x_n$, получаем, что каждая булева функция имеет единственное представление в виде суммы дизъюнкций.

Таким образом, каждую булеву функцию можно выразить в виде формулы над множеством $\{0, 1, x \vee y, x + y\}$. Поэтому

$$[\{0, 1, x \vee y, x + y\}] = P_2.$$

Порождающие системы замкнутых классов могут быть найдены с использованием следующего простого утверждения (см. также [23, 24]).

Утверждение 2 (достаточное условие полноты). *Пусть даны системы булевых функций $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, такие что $[\mathcal{A}] = F$ и любая функция из $\mathcal{A}$ выражается формулой над $\mathcal{B}$. Тогда $[\mathcal{B}] = F$.*

Используя достаточное условие полноты, нетрудно показать, что системы $\{1, x \vee y, x+y\}$, $\{1, xy, x+y\}$, $\{\overline{x}, x \vee y\}$, $\{\overline{x}, xy\}$, $\{0, \overline{x} \vee y\}$ являются полными.

Утверждение 3 (принцип двойственности). *Если*

$$F(\widetilde{x}) = f_0(f_1(\widetilde{x}), \ldots, f_m(\widetilde{x})),$$

то

$$F^*(\widetilde{x}) = f_0^*(f_1^*(\widetilde{x}), \ldots, f_m^*(\widetilde{x})).$$

Доказательство этого утверждения непосредственно следует из определения (см. также [23, 24]).

Утверждение 4. *Для любых функций f_K, f_D из M выполняются соотношения*

$$x \vee y \in [\{1, f_K\}], \qquad xy \in [\{0, f_D\}].$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $f_K(x_1, \ldots, x_n)$ из M, существенно зависящую от всех своих переменных. Очевидно, что $n \geq 2$. Так как $f_K \notin K$, найдется набор $\widetilde{\alpha} \in E^n$ с одной нулевой компонентой (пусть, например, $\widetilde{\alpha} = (0, 1, \ldots, 1)$) такой, что

$$f_K(\widetilde{\alpha}) = f_K(0, 1, \ldots, 1) = 1.$$

Так как функция f_K существенно зависит от переменной x_1, найдется набор $\widetilde{\beta} = (\beta_2, \ldots, \beta_n)$ такой, что

$$f_K(1, \widetilde{\beta}) = 1, \quad f_K(0, \widetilde{\beta}) = 0,$$

$\widetilde{\beta} \not\equiv \widetilde{1}$. Пусть, например, $\beta_2 = \ldots = \beta_k = 0$, $\beta_{k+1} = \ldots = \beta_n = 1$, $k \geq 2$. Положим $x_1 = x$, $x_2 = \ldots = x_k = y$, $x_{k+1} = \ldots = x_n = 1$. Тогда $f_K(x, y, \ldots, y, 1, \ldots, 1) = x \vee y$, и поэтому

$$x \vee y \in [\{1, f_K\}].$$

Двойственным образом устанавливается справедливость соотношения
$$xy \in [\{0, f_D\}].$$

Утверждение 5. *Для любых функций* f_M, f_L *из* T_1 *выполняется соотношение*
$$\overline{x} \vee y \in [\{1, f_M, f_L\}].$$

Доказательство. Рассмотрим немонотонную функцию $f_M(x_1, \ldots, x_n)$ из T_1. Очевидно, что $n \geq 2$. Пусть, например, функция f_M немонотонна по переменной x_1. Тогда существует такой набор $\widetilde{\alpha} = (\alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, что
$$f_M(0, \widetilde{\alpha}) = 1, \quad f_M(1, \widetilde{\alpha}) = 0,$$
$\widetilde{\alpha} \not\equiv \widetilde{1}$. Пусть, например, $\alpha_2 = \ldots = \alpha_k = 0$, $\alpha_{k+1} = \ldots \ldots = \alpha_n = 1$, $k \geq 2$. Положим $x_1 = x$, $x_2 = \ldots = x_k = y$, $x_{k+1} = \ldots = x_n = 1$. Тогда $f_M(x, y, \ldots, y, 1, \ldots, 1)$ — это либо $\overline{x} \vee y$, либо $x + y + 1$.

Во втором случае рассмотрим нелинейную функцию $f_L(x_1, \ldots, x_n)$ из T_1, $n \geq 2$. Рассмотрим представление для f_L в виде суммы дизъюнкций. Выберем в этом представлении среди дизъюнкций, содержащих по крайней мере две переменные, дизъюнкцию с наименьшим числом переменных. Пусть, например, она имеет вид $x_1 \vee \ldots \vee x_k$, $k \geq 2$. Положим $x_1 = x$, $x_2 = \ldots = x_k = y$, $x_{k+1} = \ldots = x_n = 1$. Тогда
$$g(x, y) = f_L(x, y, \ldots, y, 1, \ldots, 1) \notin L.$$
Так как $g \in T_1$, то g — одна из следующих функций: $x \vee \overline{y}$, $\overline{x} \vee y$, $x \vee y$, xy, и требуемое утверждение следует из представлений
$$\overline{x} \vee y = (x \vee y) + y + 1, \quad \overline{x} \vee y = xy + x + 1.$$

Следствие 1. *Для любой функции* f_M *выполняется соотношение*

$$\overline{x} \in [\{0, 1, f_M\}].$$

Следствие 2. *Для любой функции* f_L *выполняется соотношение*

$$x \vee y \in [\{1, \overline{x}, f_L\}].$$

Доказательство. Действительно, из доказательства утверждения 5 следует, что множество $[\{1, f_L, \overline{f}_L\}]$ содержит одну из следующих функций: $x \vee \overline{y}$, $\overline{x} \vee y$, $x \vee y$, xy. Поэтому

$$x \vee y \in [\{1, \overline{x}, f_L, \overline{f}_L\}] = [\{1, \overline{x}, f_L, \}].$$

Следствие 3. *Для любых функций* f_M, f_L *выполняется соотношение*

$$[\{0, 1, f_M, f_L\}] = P_2.$$

Утверждение 6. *Для любой функции* f_S *из* $T_0 \cap T_1$ *выполняется по крайней мере одно из следующих соотношений:*

$$x \vee y \in [\{f_S\}], \qquad x \,\&\, y \in [\{f_S\}].$$

Доказательство. Рассмотрим несамодвойственную функцию $f_S(x_1, \ldots, x_n)$ из $T_0 \cap T_1$. Очевидно, что $n \geq 2$, и $f_S(x, \ldots, x) = x$. Существует набор $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ такой, что

$$f_S(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = f_S(\overline{\alpha}_1, \ldots, \overline{\alpha}_n),$$

где $\widetilde{\alpha} \not\equiv \widetilde{0}, \widetilde{1}$. Пусть, например, $\alpha_1 = \ldots = \alpha_k = 0$, $\alpha_{k+1} = \ldots = \alpha_n = 1$, $1 \leq k < n$. Положим $x_1 = \ldots = x_k = x$, $x_{k+1} = \ldots = x_n = y$. Тогда $f_S(x, \ldots, x, y, \ldots, y)$ — это либо $x \vee y$, либо $x \,\&\, y$.

Утверждение 7. *Для любой монотонной функции* f, *такой что* $f \not\equiv 0, 1$, *выполняется соотношение*

$$f \in [\{x \vee y,\, xy\}].$$

Доказательство этого утверждения нетрудно получить, учитывая, что для любой функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ из M, $n \geq 2$, справедливо представление

$$f = x_1 \& f_1 \vee f_0,$$

где $f_1 = f(1, x_2, \ldots, x_n)$, $f_0 = f(0, x_2, \ldots, x_n)$, причем функции f_1 и f_0 принадлежат множеству M, и если при этом $f \not\equiv 0, 1$, то $f_1 \not\equiv 0$, $f_0 \not\equiv 1$.

§3 Конечная порождаемость замкнутых классов

Лемма 1. *Пусть* $\mathcal{A}$ — *произвольное множество функций алгебры логики такое, что* $x \vee y \in [\mathcal{A}]$. *Тогда если* $f \in [\mathcal{A} \cup \{0\}]$, $g \in [\mathcal{A}]$ *и* $g \leq f$, *то* $f \in [\mathcal{A}]$.

Доказательство. Пусть функции $f(\widetilde{x})$ и $g(\widetilde{x})$ удовлетворяют условиям леммы, а Φ_f — формула над $\mathcal{A} \cup \{0\}$, реализующая f. Заменим всякое вхождение константы 0 в Φ_f на новую переменную y. Получим формулу Φ над $\mathcal{A}$, реализующую некоторую функцию $h(y, \widetilde{x}) \in [\mathcal{A}]$, причем $h(0, \widetilde{x}) = f(\widetilde{x})$. Так как $g \leq f$, то

$$f(\widetilde{x}) = g(\widetilde{x}) \vee h(g(\widetilde{x}), \widetilde{x})$$

и, таким образом, $f \in [\mathcal{A}]$.

Определим функцию $\omega(x, y, z)$. Положим $\omega = x \vee yz$. Очевидно, что $\omega \in O^\infty$.

Лемма 2. *Для любой монотонной функции* $f \in O^\infty$, $f \not\equiv 1$, *выполняется соотношение* $f \in [\{\omega\}]$.

Доказательство. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$— произвольная монотонная функция из O^∞, $f \not\equiv 1$, $n \geq 1$. Очевидно, что $x \vee y \in [\{\omega\}]$, $xy \in [\{\omega, 0\}]$. Поэтому в силу утверждения 7 $f \in [\{\omega, 0\}]$. Кроме того, $x_i \leq f$ при некотором i, $1 \leq i \leq n$, и $x_i \in [\{\omega\}]$. Поэтому в силу леммы 1 $f \in [\{\omega\}]$.

Определим функции $d_p(x_1, \ldots, x_p)$, $p \geq 2$, следующим образом:

$$d_p(x_1, \ldots, x_p) = \bigvee_{1 \leq i < j \leq p} x_i x_j.$$

Отметим следующие свойства функций ω и d_p, $p \geq 2$.

1. $\omega \in [\{1, f_K, f_D\}]$, *если* $f_K, f_D \in M$.

Действительно, в силу утверждения 4 выполняются соотношения $x \vee y$, $xy \in [\{0, 1, f_K, f_D\}]$. Поэтому в силу утверждения 7

$$\omega \in [\{x \vee y,\, xy\}] \subseteq [\{0, 1, f_K, f_D\}].$$

Кроме того, $x, x \vee y \in [\{1, f_K, f_D\}]$, $x \leq \omega$, а значит, в силу леммы 1 $\omega \in [\{1, f_K, f_D\}]$.

2. $\omega \in [\{1, d_3\}]$; *если* $p > 3$, *то* $\omega \in [\{d_p\}]$.

Это свойство следует из соотношений

$$d_3(1, x, d_3(x, y, z)) = \omega, \quad d_p(x, \ldots, x, y, z) = \omega.$$

3. $d_{p+1}(x_1, \ldots, x_p, 1) = x_1 \vee \ldots \vee x_p$, $d_{p+1}(x_1, \ldots, x_p, 0) = d_p(x_1, \ldots, x_p)$.

4. $d_{p+1}(x_1, \ldots, x_{p+1}) > d_p(x_1, \ldots, x_p)$.

5. $d_p \in O^\mu$, *если* $p \geq \mu + 1$; *иначе* $d_p \notin O^\mu$ *для всех* $\mu \geq 2$; $d_p \notin O^\infty$, *для всех* $p \geq 2$.

6. $[\{\omega\}] \subset [\{\omega, d_{p+1}\}] \subset [\{\omega, d_p\}]$, $p \geq 2$.

Действительно, в силу леммы 1 и свойства 4 при всех $p \geq 2$ выполняются соотношения

$$[\{\omega\}] \subseteq [\{\omega, d_{p+1}\}] \subseteq [\{\omega, d_p\}].$$

По определению $\omega \in O^\infty$, а в силу свойства 5 $d_{p+1} \notin O^\infty$. Кроме того, $\omega, d_{p+1} \in O^p$, но $d_p \notin O^p$.

7. $d_3 \in S$; *а если* $p \neq 3$, *то* $d_p \notin S$.

Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ — некоторая монотонная функция, $n \geq 2$. Обозначим через $A_k(f)$, $k = 1, \ldots, n-1$, множество всех функций от k переменных, получающихся из f отождествлением переменных.

Лемма 3. *Для любой монотонной булевой функции* $f(x_1, \dots, x_n)$, $n \ge 2$, *выполняется соотношение*

$$f \in [\{\omega, d_n\} \cup A_{n-1}(f)].$$

Доказательство. Утверждение очевидно, если f — константа, а если $f \in O^\infty$, $f \not\equiv 1$, то оно следует из леммы 2.

Пусть $f \notin O^\infty$, $f \not\equiv 0$. Положим

$$\mathcal{H}_f = \{\omega, d_n\} \cup A_{n-1}(f).$$

Доказательство будем вести индукцией по n. Случай $n = 2$ очевиден. Пусть $n > 2$ и утверждение леммы справедливо для всех функций, зависящих менее чем от n переменных. Положим $g = f(0, x_2, \dots, x_n)$. Если $g \equiv 0$, то

$$f(x, y, \dots, y) = x \& f(1, y, \dots, y) = xy,$$

то есть $xy \in [A_{n-1}(f)]$, и утверждение леммы следует из утверждения 7.

Пусть $g \not\equiv 0$. Рассмотрим следующие функции:

$$f_j^i = f(x_1, \dots, x_{j-1}, x_i, x_{j+1}, \dots, x_n), \quad i, j = 1, \dots, n,\ i \ne j;$$

$$g_j^i = g(x_2, \dots, x_{j-1}, x_i, x_{j+1}, \dots, x_n), \quad i, j = 2, \dots, n,\ i \ne j;$$

$$\varphi(y_1, \dots, y_n) = y_1 \& (y_2 \vee \ldots \vee y_n) \vee g(y_2, \dots, y_n);$$

$$\lambda(x_1, \dots, x_n) = \varphi(x_1, f_1^2, \dots, f_1^n).$$

Положим

$$B_{n-2}(g) = \{g_j^i,\ \text{где}\ i, j = 2, \dots, n;\ i \ne j\}.$$

Очевидно, что

$$B_{n-2}(g) \subseteq A_{n-2}(g), \quad [B_{n-2}(g)] = [A_{n-2}(g)].$$

По предположению индукции существует формула над множеством $\{\omega, d_{n-1}\} \cup A_{n-2}(g)$, реализующая функцию g. Поэтому найдется формула Φ_g над $\{\omega, d_{n-1}\} \cup B_{n-2}(g)$, реализующая $g(y_2, \ldots, y_n)$. Заменим всякое вхождение функции g_j^i в Φ_g на функцию f_j^i, $i, j = 2, \ldots, n, i \neq j$, а всякое вхождение функции d_{n-1} — на функцию d_n, подставляя всякий раз на место первой переменной переменную y_1. Получим формулу Φ над множеством $\mathcal{H}_f$, реализующую некоторую функцию

$$h(y_1, \ldots, y_n) \in [\mathcal{H}_f].$$

Из определения функций g, f_j^i, g_j^i и свойства 3 следует соотношение $h(0, y_2, \ldots, y_n) = g(y_2, \ldots, y_n)$, а так как $f(1, 0, \ldots, 0) = 0$ и $d_n(1, 0, \ldots, 0) = 0$, то выполняются равенства

$$h(1, 0, \ldots, 0) = 0 = g(0, \ldots, 0).$$

Поэтому справедливо представление

$$\varphi(y_1, \ldots, y_n) = y_1 \& (y_2 \vee \ldots \vee y_n) \vee h(y_1, \ldots, y_n).$$

Таким образом, $\varphi \in [\mathcal{H}_f]$, а значит, и $\lambda \in [\mathcal{H}_f]$. Так как $f \in M$, то для всех $i = 2, \ldots, n$, то выполняются соотношения

$$x_1 \& f_1^i \leq f, \quad f_1^i \leq x_i \vee f.$$

Поэтому

$$\lambda = x_1 \& (f_1^2 \vee \ldots \vee f_1^n) \vee g(f_1^2, \ldots, f_1^n) \leq$$

$$\leq f \vee g(x_2 \vee f, \ldots, x_n \vee f) \leq f.$$

Применение к функциям f и λ леммы 1 доказывает требуемое утверждение.

Пусть $f(\widetilde{x})$ — монотонная функция, $f \notin O^\infty$, $f \not\equiv 0$. Обозначим через F_f множество всех таких функций, которые получаются из f отождествлением переменных (быть может, пустым) и не принадлежат O^∞, а при всяком отождествлении двух переменных переходят в функции из O^∞. Через $p(f)$ обозначим минимальное число существенных переменных у функций из F_f.

Поскольку $f(x,\ldots,x) = x \in O^\infty$, то $F_f \neq \emptyset$ и $p(f) \geq 2$. Кроме того, любая функция h из F_f, существенно зависящая от p переменных, имеет вид $h = d_p$ (из соотношения $h \notin O^\infty$ следует, что

$$h(1,0,\ldots,0) = ... = h(0,\ldots,0,1) = 0,$$

а из этих равенств и соотношения $h(x_1,x_1,x_3,\ldots,x_p) \in O^\infty$ следует, что $h(1,1,0,\ldots,0) = 1$, и т. д.). Поэтому

$$d_{p(f)} \in [\{f\}]. \tag{2}$$

Лемма 4. *Для любой монотонной функции* $f \notin O^\infty$, $f \not\equiv 0$, *выполняется соотношение*

$$f \in [\{\omega, d_{p(f)}\}].$$

Доказательство. Очевидно, что $n \geq 2$. В силу леммы 3 имеем

$$f(\widetilde{x}) \in [\{\omega, d_n\} \cup A_{n-1}(f)].$$

Если $p(f) < n$, то применим ко всем функциям из $A_{n-1}(f)$ аналогичные соотношения. Получим

$$f \in [\{\omega, d_n, d_{n-1}\} \cup A_{n-2}(f)]$$

и т. д. В конце концов получим

$$f \in [\{\omega, d_n, d_{n-1}, \ldots, d_{p(f)}\} \cup A_{p(f)-1}(f)],$$

причем каждая функция из $A_{p(f)-1}(f)$ принадлежит множеству O^∞. Из леммы 2 и свойства 6 имеем

$$f \in [\{\omega, d_{p(f)}\}].$$

Лемма 5. *Для любой функции $f(\widetilde{x})$ найдется монотонная функция $g(\widetilde{x})$ из $[\{1,\ x\ \vee\ y,\ f\}]$ такая, что $g \le f$. При этом если $f \in T_0$, то $g \in [\{x \vee y, f\}]$.*

Доказательство. Утверждение леммы очевидно, если f — монотонная функция. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n) \notin M$, $n \ge 1$. Если $n = 1$, то $f = \overline{x}_1$, и утверждение леммы очевидно. Пусть $n \ge 2$ и f немонотонна, например, по переменной x_1. Тогда найдется набор $\widetilde{\alpha} = (\alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ такой, что $f(0, \widetilde{\alpha}) = 1$, $f(1, \widetilde{\alpha}) = 0$. Обозначим через R множество всех таких наборов $\widetilde{\alpha} \in E^{n-1}$. Пусть $\psi_R(x_2, \ldots, x_n)$ — характеристическая функция[1] множества R. Положим

$$g_1(\widetilde{x}) = f((f(\widetilde{x}) \vee \psi_R(x_2, \ldots, x_n)), x_2, \ldots, x_n).$$

Рассмотрим произвольный набор $\widetilde{\beta} = (\beta_1, \widetilde{\gamma})$ длины n. Если $\widetilde{\gamma} \in R$, то $g_1(1, \widetilde{\gamma}) = g_1(0, \widetilde{\gamma}) = f(1, \widetilde{\gamma}) = 0$; если же $\widetilde{\gamma} \notin R$, то либо $f(0, \widetilde{\gamma}) = f(1, \widetilde{\gamma})$, либо $f(\beta_1, \widetilde{\gamma}) = \beta_1$, поэтому $g_1(\widetilde{\beta}) = f(\widetilde{\beta})$. Таким образом, $g_1 < f$. Кроме того,

$$f \vee \psi_R \in [\{1, x \vee y, f, 0\}] = P_2$$

(в силу следствия 3 из утверждения 5), $f \le f \vee \psi_R$, а значит, в силу леммы 1

$$f \vee \psi_R \in [\{1, x \vee y, f\}].$$

Но тогда и $g_1 \in [\{1, x \vee y, f\}]$. Если g_1 — немонотонная функция, то применим к ней аналогичное преобразование и т. д.

[1]Функция $\psi_R(x_2, \ldots, x_n)$ называется *характеристической функцией множества* $R \in E^{n-1}$, если равенство $\psi_R(\alpha_2, \ldots, \alpha_n) = 1$ выполняется тогда и только тогда, когда $(\alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in R$.

В конце концов[2] получим искомую монотонную функцию g, такую что $g \le f$, $g \in [\{1, x \vee y, f\}]$.

Пусть теперь функция f принадлежит T_0 и пусть Φ — формула над $\{1, x \vee y, f\}$, реализующая функцию g, $g \le f$. Заменим всякое вхождение константы 1 в Φ на $x_1 \vee \ldots \vee x_n$. Получим формулу над $\{x \vee y, f\}$, реализующую функцию g.

Лемма 6. *Пусть* $\mathcal{A} \subseteq S$ *и пусть* $\mathcal{B} \subseteq [\mathcal{A}]$, $[\mathcal{B} \cup \{1\}] = [\mathcal{A} \cup \{1\}]$. *Тогда*

$$[\mathcal{A}] = [\mathcal{B}] = [\mathcal{A} \cup \{1\}] \cap S.$$

Доказательство. Очевидно, что

$$[\mathcal{B}] \subseteq [\mathcal{A}] \subseteq [\mathcal{A} \cup \{1\}] \cap S.$$

Пусть $f(\widetilde{x})$ — произвольная функция из $[\mathcal{A} \cup \{1\}] \cap S$, а Φ — формула над $\mathcal{B} \cup \{1\}$, реализующая f. Заменим всякое вхождение константы 1 в Φ на переменную y. Получим формулу над $\mathcal{B}$, реализующую некоторую функцию $g(y, \widetilde{x})$. Так как функции f и g принадлежат S, а $g(1, \widetilde{x}) = f(\widetilde{x})$, то имеем $g \equiv f$. Поэтому $[\mathcal{A} \cup \{1\}] \cap S \subseteq [\mathcal{B}]$. Таким образом,

$$[\mathcal{A}] = [\mathcal{B}] = [\mathcal{A} \cup \{1\}] \cap S.$$

Лемма 7. *Пусть* $\mathcal{A} \subseteq T_0$ *и пусть* $\mathcal{B} \subseteq [\mathcal{A}]$, $x \vee y \in [\mathcal{A}]$, $[\mathcal{B} \cup \{1\}] = [\mathcal{A} \cup \{1\}]$. *Тогда*

$$[\mathcal{A}] = [\mathcal{B} \cup \{x \vee y\}] = [\mathcal{A} \cup \{1\}] \cap T_0.$$

Доказательство. Очевидно, что

$$[\mathcal{B} \cup \{x \vee y\}] \subseteq [\mathcal{A}] \subseteq [\mathcal{A} \cup \{1\}] \cap T_0.$$

[2]Можно показать, что потребуется не более n шагов, так как функция g_1 монотонна по переменной x_1 и эта монотонность после каждого шага будет сохраняться.

Пусть $f(\widetilde{x})$ — произвольная функция из $[\mathcal{A}\cup\{1\}]\cap T_0$, а Φ — формула над $\mathcal{B}\cup\{1\}$, реализующая функцию f. Заменим всякое вхождение константы 1 в Φ на $x_1\vee\ldots\vee x_n$. Получим некоторую формулу над $\mathcal{B}\cup\{x\vee y\}$. Легко видеть, что она реализует функцию f. Поэтому

$$[\mathcal{A}\cup\{1\}]\cap T_0=[\mathcal{B}\cup\{x\vee y\}].$$

Двойственным образом доказывается следующая

Лемма 8. *Пусть* $\mathcal{A}\subseteq T_1$ *и пусть* $\mathcal{B}\subseteq[\mathcal{A}]$, $xy\in[\mathcal{A}]$, $[\mathcal{B}\cup\{0\}]=[\mathcal{A}\cup\{0\}]$. *Тогда*

$$[\mathcal{A}]=[\mathcal{B}\cup\{xy\}]=[\mathcal{A}\cup\{0\}]\cap T_1.$$

Теорема 1. *Пусть* $\mathcal{A}$ *— произвольное множество булевых функций. Тогда класс* $[\mathcal{A}]$ *имеет конечный базис.*

Доказательство. Рассмотрим четыре случая.

1. $0,1\in[\mathcal{A}]$. Если $\mathcal{A}$ целиком содержится в одном из классов K,D,L, то утверждение теоремы очевидно. Пусть в $\mathcal{A}$ есть функции f_K,f_D,f_L.

Если $\mathcal{A}\subseteq M$, то, согласно утверждениям 4 и 7,

$$[\mathcal{A}]=[\{0,\ 1,\ x\ \vee\ y,\ xy\}]=[\{0,1,f_K,f_D\}]=M;$$

если же $\mathcal{A}$ содержит немонотонную функцию f_M, то в силу следствия 3 из утверждения 5

$$[\mathcal{A}]=[\{0,1,f_M,f_L\}]=P_2.$$

2. $1\in[\mathcal{A}]$, $0\notin[\mathcal{A}]$. Легко видеть, что $[\mathcal{A}]\subseteq T_1$. Если $\mathcal{A}$ целиком содержится в одном из классов K,D,L, то утверждение теоремы очевидно. Пусть в $\mathcal{A}$ есть функции f_K,f_D,f_L.

а) Пусть $[\mathcal{A}]\subseteq M$. Тогда в силу свойства 1

$$\omega\in[\{1,f_K,f_D\}]\subseteq[\mathcal{A}].$$

Если $\mathcal{A} \subseteq O^\infty$, то в силу леммы 2 $\mathcal{A} \subseteq M \cap O^\infty \subseteq [\{1, \omega\}]$. Поэтому

$$[\mathcal{A}] = M \cap O^\infty = [\{1, \omega\}] = [\{1, f_K, f_D\}].$$

Если $\mathcal{A} \not\subseteq O^\infty$, то рассмотрим $p(\mathcal{A}) = \min p(f)$, где минимум берется по всем функциям f из $\mathcal{A}$ таким, что $f \notin O^\infty$; пусть этот минимум достигается на функции $f^{p(\mathcal{A})}$. Из лемм 2, 4 и свойства 6 следует, что

$$\mathcal{A} \subseteq [\{1, \omega, d_{p(\mathcal{A})}\}],$$

причем в силу соотношения (2) $d_{p(\mathcal{A})} \in [\{f^{p(\mathcal{A})}\}] \subseteq [\mathcal{A}]$. Таким образом,

$$[\mathcal{A}] = [\{1, \omega, d_{p(\mathcal{A})}\}] = [\{1, f_K, f_D, f^{p(\mathcal{A})}\}].$$

б) Пусть в $\mathcal{A}$ есть функция f_M. Согласно утверждению 5, имеем

$$\overline{x} \vee y \in [\{1, f_M, f_L\}] \subseteq [\mathcal{A}].$$

Так как $x \vee y = \overline{(\overline{x} \vee y)} \vee y$, то $x \vee y \in [\{\overline{x} \vee y\}]$. Кроме того, $[\{\overline{x} \vee y, 0\}] = P_2$. Поэтому в силу леммы 1 для любой функции $f \in O^\infty$ выполняется соотношение

$$f \in [\{\overline{x} \vee y)\}]$$

(см. также доказательство леммы 2), то есть $O^\infty \subseteq [\{\overline{x} \vee y)\}]$.

Если $\mathcal{A} \subseteq O^\infty$, то

$$[\mathcal{A}] = O^\infty = [\{\overline{x} \vee y)\}] = [\{1, f_M, f_L\}].$$

Пусть $\mathcal{A} \not\subseteq O^\infty$. По лемме 5 для каждой функции f из $\mathcal{A}$ найдется монотонная функция g_f из $[\{1, x \vee y, f\}]$ такая, что $g_f \leq f$, причем если $f \notin O^\infty$, то и $g_f \notin O^\infty$. Положим

$$\mathcal{D} = \bigcup \{g_f\},$$

где объединение берется по всем функциям f из $\mathcal{A}$, $f \notin O^\infty$. Рассмотрим функцию $g^{p(\mathcal{D})}$ и обозначим через $\widehat{f}^{p(\mathcal{D})}$ (произвольную) функцию из $\mathcal{A}$, при помощи которой получена функция $g^{p(\mathcal{D})}$. Имеем

$$g^{p(\mathcal{D})} \in [\{1, x \vee y, \widehat{f}^{p(\mathcal{D})}\}].$$

По доказанному выше

$$[\mathcal{D}] = [\{1, \omega, d_{p(\mathcal{D})}\}].$$

Положим

$$\mathcal{B} = \{1, \omega, d_{p(\mathcal{D})}, \overline{x} \vee y\}.$$

Таким образом, если $f \in \mathcal{A}$, то $g_f \in [\mathcal{B}]$. Поэтому в силу леммы 1 имеем $\mathcal{A} \subseteq [\mathcal{B}]$. Так как

$$x \vee yz = x \vee \overline{(x \vee \overline{y}) \vee \overline{z}},$$

то $\omega \in [\{\overline{x} \vee y\}]$. Поэтому из соотношений

$$1, x \vee y, \omega \in [\{\overline{x} \vee y\}],$$

$$d_{p(\mathcal{D})} \in [\{1, x \vee y, \widehat{f}^{p(\mathcal{D})}\} \subseteq [\mathcal{A}]$$

окончательно получаем

$$[\mathcal{A}] = [\mathcal{B}] = [\{\overline{x} \vee y, d_{p(\mathcal{D})}\}] = [\{1, f_M, f_L, \widehat{f}^{p(\mathcal{D})}\}].$$

3. $0 \in [\mathcal{A}]$, $1 \notin [\mathcal{A}]$. В этом случае утверждение теоремы следует из предыдущего случая в силу принципа двойственности.

4. $0, 1 \notin [\mathcal{A}]$. В силу выше приведенных рассмотрений для любой системы функций $\mathcal{A}$ существуют конечные системы $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_0$ такие, что $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_0 \subseteq \mathcal{A}$ и

$$[\mathcal{B}_1 \cup \{1\}] = [\mathcal{A} \cup \{1\}], \quad [\mathcal{B}_0 \cup \{0\}] = [\mathcal{A} \cup \{0\}].$$

Поэтому если $\mathcal{A} \subseteq S$, то в силу леммы 6 $[\mathcal{A}] = [\mathcal{B}_1]$. Если же в $\mathcal{A}$ есть несамодвойственная функция f_S, то для любой функции $g \in \mathcal{A}$ выполняется соотношение $g(x, \ldots, x) = x$, так как иначе множество $[\{f_S, g\}]$ содержит константу. Поэтому $\mathcal{A} \subseteq T_0 \cap T_1$, и в силу утверждения 6 множество $[\mathcal{A}]$ содержит по крайней мере одну из функций $x \vee y$, xy. Если $x \vee y \in [\mathcal{A}]$, то в силу леммы 7

$$[\mathcal{A}] = [\mathcal{B}_1 \cup \{x \vee y\}];$$

а если $xy \in [\mathcal{A}]$, то в силу леммы 8

$$[\mathcal{A}] = [\mathcal{B}_0 \cup \{xy\}].$$

Замечание 1. Отметим, что $0, 1 \in [\mathcal{A}]$ тогда и только тогда, когда система $\mathcal{A}$ содержит функции f_{T_0}, f_{T_1}, f_S (так как $0, 1 \in [\{f_{T_0}, f_{T_1}, f_S\}]$); $1 \in [\mathcal{A}]$, $0 \notin [\mathcal{A}]$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{A} \subseteq T_1$ и в $\mathcal{A}$ есть функция f_{T_0} (так как $1 \in [\{f_{T_0}\}]$); $0 \in [\mathcal{A}]$, $1 \notin [\mathcal{A}]$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{A} \subseteq T_0$ и в $\mathcal{A}$ есть функция f_{T_1} (так как $0 \in [\{f_{T_1}\}]$); $0, 1 \notin [\mathcal{A}]$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{A} \subseteq T_0 \cap T_1$ или $\mathcal{A} \subseteq S$.

§4 Структура замкнутых классов

Положим $T_{01} = T_0 \cap T_1$. Обозначим через M_1, L_1, K_1, D_1, U_1, C_1, I_1^μ пересечение класса T_1 с множествами M, L, K, D, U, C, I^μ соответственно; через M_0, L_0, K_0, D_0, U_0, C_0, O_0^μ — пересечение класса T_0 с множествами M, L, K, D, U, C, O^μ соответственно; через S_{01}, M_{01}, L_{01}, K_{01}, D_{01}, U_{01} — пересечение T_{01} с множествами S, M, L, K, D, U соответственно; через MO^μ, MI^μ, MO_0^μ, MI_1^μ, MU — пересечение M с множествами O^μ, I^μ, O_0^μ, I_1^μ, U соответственно, $\mu = 2, 3, \ldots, \infty$. Положим

$$SM = S \cap M, \quad SL = S \cap L, \quad SU = S \cap U.$$

Теорема 2. *Множество замкнутых классов алгебры логики исчерпывается следующим списком.*

1. *Классы, содержащие константы* 0 *и* 1:

$$P_2, \quad M, \quad L, \quad K, \quad D, \quad U, \quad MU, \quad C.$$

2. *Классы, содержащие* 1 *и не содержащие* 0:

$$T_1, \ M_1, \ L_1, \ K_1, \ D_1, \ U_1, \ C_1, \ O^\mu, \ MO^\mu,$$

$\mu = 2, 3, \ldots, \infty$.

3. *Классы, содержащие* 0 *и не содержащие* 1:

$$T_0, \ M_0, \ L_0, \ K_0, \ D_0, \ U_0, \ C_0, \ I^\mu, \ MI^\mu,$$

$\mu = 2, 3, \ldots, \infty$.

4. *Классы, не содержащие* 0 *и* 1:

$$T_{01}, \ S_{01}, \ M_{01}, \ L_{01}, \ K_{01}, \ D_{01}, \ U_{01}; \ S, \ SM, \ SL, \ SU;$$

$$O_0^\mu, \quad MO_0^\mu, \quad I_1^\mu, \quad MI_1^\mu,$$

$\mu = 2, 3, \ldots, \infty$.

При этом все перечисленные классы различны.

Доказательство. Пусть F — произвольный замкнутый класс алгебры логики. Рассмотрим четыре случая.

1. $0, 1 \in F$. Если $F \subseteq L$, то F — один из классов:

$$L = [\{1, x + y\}], \quad U = [\{1, \overline{x}\}],$$

$$MU = [\{0, 1, x\}], \quad C = [\{0, 1\}].$$

Если $F \subseteq K$ и $F \not\subseteq U$, то

$$F = K = [\{0, 1, xy\}].$$

Если $F \subseteq D$ и $F \not\subseteq U$, то

$$F = D = [\{0, 1, x \vee y\}].$$

Если же F содержит функции f_L, f_K, f_D, то в силу теоремы 1 (см. случай 1) F — один из классов:

$$M = [\{0, 1, x \vee y, xy\}], \quad P_2 = [\{\overline{x}, x \vee y\}].$$

2. $1 \in F$, $0 \notin F$. Если $F \subset L$, то F — один из классов:

$$L_1 = [\{x + y + 1\}], \quad U_1 = [\{1, x\}], \quad C_1 = [\{1\}].$$

Если $F \subset K$ и $F \not\subseteq U$, то

$$F = K_1 = [\{1, xy\}].$$

Если $F \subset D$ и $F \not\subseteq U$, то

$$F = D_1 = [\{1, x \vee y\}].$$

Пусть F содержит функции f_L, f_K, f_D.

а) $F \subseteq M$. Если $F \subseteq O^\infty$, то в силу теоремы 1 (см. случай 2, п. *а*)

$$F = MO^\infty = [\{1, \omega\}] = [\{1, x \vee yz\}].$$

В противном случае

$$F = [\{1, \omega, d_{\mu+1}\}]$$

(здесь $p(\mathcal{A}) = \mu + 1$), $\mu = 1, 2, \ldots$.

При $\mu = 1$ согласно утверждению 7

$$F = M_1 = [\{1, x \vee y, xy\}].$$

При $\mu \geq 2$, с одной стороны,

$$1, \omega, d_{\mu+1} \in MO^\mu$$

(см. свойство 5); с другой стороны, для любой функции f из MO^μ, $f \notin O^\infty$, выполняется неравенство $p(f) \geq \mu + 1$ (см. свойство 5), а значит, в силу леммы 4 и свойства 6

$$f \in [\{1, \omega, d_{\mu+1}\}].$$

Таким образом, в силу свойства 2

$$F = MO^\mu = [\{1, \omega, d_{\mu+1}\}] = [\{1, d_{\mu+1}\}],$$

$\mu = 2, 3, \ldots$.

б) $F \not\subseteq M$. Если $F \subseteq O^\infty$, то в силу теоремы 1 (см. случай 2, п. *б*)

$$F = O^\infty = [\{\overline{x} \vee y\}].$$

Если $F \not\subseteq O^\infty$, то

$$F = [\{\overline{x} \vee y, d_{\mu+1}\}], \quad \mu = 1, 2, \ldots .$$

При $\mu = 1$, с одной стороны,

$$\overline{x} \vee y,\ xy \in T_1;$$

с другой стороны, для любой функции $f(\widetilde{x})$ из T_1 выполняется соотношение $x_1 \& \ldots \& x_n \leq f$, причем

$$x_1 \& \ldots \& x_n,\ x \vee y \in [\{\overline{x} \vee y, xy\}],$$

и поэтому в силу леммы 1 $f \in [\{\overline{x} \vee y, xy\}]$. Таким образом,

$$F = T_1 = [\{\overline{x} \vee y, xy\}].$$

При $\mu \geq 2$, с одной стороны,

$$\overline{x} \vee y, d_{\mu+1} \in O^{\mu};$$

с другой стороны, в силу леммы 5 для любой функции f из O^{μ} найдется функция $g \in MO^{\mu}$ такая, что $g \leq f$, причем по доказанному выше

$$g \in [\{\overline{x} \vee y, d_{\mu+1}\}],$$

и поэтому в силу леммы 1 функция f принадлежит множеству $[\{\overline{x} \vee y, d_{\mu+1}\}]$. Таким образом,

$$F = O^{\mu} = [\{\overline{x} \vee y, d_{\mu+1}\}],$$

$\mu = 2, 3, \ldots$.

3. $0 \in F$, $1 \notin F$. В силу рассмотрений предыдущего случая и принципа двойственности F — один из классов:

$$L_0 = [\{x + y\}], \quad U_0 = [\{0, x\}], \quad C_0 = [\{0\}],$$

$$K_0 = [\{0, xy\}], \quad D_0 = [\{0, x \vee y\}],$$

$$MI^{\infty} = [\{0, x(y \vee z)\}], \quad M_0 = [\{0, x \vee y, xy\}],$$

$$I^{\infty} = [\{\overline{x}y\}], \quad T_0 = [\{\overline{x}y, x \vee y\}],$$
$$MI^{\mu} = [\{0, d^*_{\mu+1}\}], \quad I^{\mu} = [\{\overline{x}y, d^*_{\mu+1}\}],$$

$\mu = 2, 3, \ldots$ ($d^*_{\mu+1}$ — функция, двойственная к функции $d_{\mu+1}(x_1, \ldots x_{\mu+1})$).

4. $0, 1 \notin F$. Если $F \subset L$, то F — один из классов:

$$SL = [\{x + y + z + 1\}], \quad L_{01} = [\{x + y + z\}];$$
$$SU = [\{\overline{x}\}], \quad U_{01} = [\{x\}].$$

Если $F \subset K$ и $F \not\subseteq U$, то

$$F = K_{01} = [\{xy\}].$$

Если $F \subset D$ и $F \not\subseteq U$, то

$$F = D_{01} = [\{x \vee y\}].$$

Пусть F содержит функции f_L, f_K, f_D.

а) $F \subseteq S$. Если в F есть функция f_{T_1}, то $f_{T_1} \notin M$. Поэтому $[F \cup \{1\}] = [\{1, f_{T_1}, f_L\}] = P_2$, и в силу леммы 6

$$F = S = [\{f_{T_1}, f_L\}],$$

например,

$$S = [\{\overline{x}, d_3\}].$$

Пусть $F \subseteq T_1$. Если в F есть функция f_M, то в силу утверждения 5

$$\overline{x} \vee y \in [\{1, f_M, f_L\}].$$

Подставляя в формулу над множеством $\{1, f_M, f_L\}$, реализующую функцию $\overline{x} \vee y$, вместо константы 1 переменную z, получим формулу над $\{f_M, f_L\}$, реализующую некоторую функцию $h(x,y,z)$ из S, причем выполняется соотношение $h(x,y,1) = \overline{x} \vee y$. Поэтому

$$h(x,y,z) = z(\overline{x} \vee y) \vee \overline{x}y = d_3(\overline{x}, y, z).$$

Значит, $d_3(\overline{x}, y, z) \in [\{f_M, f_L\}]$, но тогда $yz \in \{1, f_M, f_L\}$ и

$$T_1 = [\{\overline{x} \vee y, xy\} \subseteq [\{1, f_M, f_L\}].$$

Таким образом, $[\{1, f_M, f_L\}] = [F \cup \{1\}] = T_1$, и в силу леммы 6

$$F = T_1 \cap S = S_{01} = [\{f_M, f_L\}],$$

например,

$$S_{01} = [\{d_3(\overline{x}, y, z)\}].$$

Если $F \subseteq M$, то в силу утверждения 4 $x \vee y \in [\{1, f_K\}]$, а значит, $d_3(x,y,z) \in [\{1, f_K\}]$ (рассуждение аналогично приведенному выше). Так как в силу свойства 1 выполняется соотношение $\omega \in [\{1, f_K, f_D\}]$, то

$$[F \cup \{1\}] \supseteq [\{1, f_K, f_D\}] \supseteq [\{1, \omega, d_3\}].$$

Кроме того, для любой функции f из SM, $f \notin O^\infty$, в силу свойства 7 выполняется равенство $p(f) = 3$. Поэтому, согласно лемме 4, имеем

$$F \subseteq SM \subseteq [\{1, \omega, d_3\}] = MO^2,$$

и $[F \cup \{1\}] = [\{1, f_K, f_D\}] = [\{1, \omega, d_3\}] = MO^2$. Таким образом, в силу леммы 6

$$F = MO^2 \cap S = SM = [\{f_K, f_D\}],$$

например,

$$SM = [\{d_3\}].$$

Пусть в F есть функция f_S. Тогда в силу теоремы 1 (см. случай 4) $F \subseteq T_{01}$, и согласно утверждению 6 либо $x \vee y \in F$, либо $xy \in F$.

б) $x \vee y \in F$. Пусть $F \subseteq M$. Если $F \subseteq O^\infty$, то в силу теоремы 1 (см. случай 2, п. a)

$$[F \cup \{1\}] = MO^\infty = [\{1, \omega\}] = [\{1, f_K, f_D\}],$$

и в силу леммы 7

$$F = MO^\infty \cap T_0 = MO_0^\infty = [\{x \vee y, f_K, f_D\}],$$

например,

$$MO_0^\infty = [\{x \vee y, \omega\}] = [\{x \vee yz\}].$$

В противном случае

$$[F \cup \{1\}] = [\{1, \omega, d_{\mu+1}\}] = [\{1, f_K, f_D, f^{\mu+1}\}],$$

$\mu = 1, 2, \ldots$. В силу леммы 7

$$F = [\{1, \omega, d_{\mu+1}\}] \cap T_0 = [\{x \vee y, f_K, f_D, f^{\mu+1}\}],$$

$\mu = 1, 2, \ldots$.

При $\mu = 1$

$$F = M_1 \cap T_0 = M_{01} = [\{x \vee y, xy\}].$$

При $\mu \geq 2$

$$F = MO^\mu \cap T_0 = MO_0^\mu,$$

например,

$$MO_0^\mu = [\{x \vee y, d_{\mu+1}\}].$$

Пусть в F есть функция f_M. Если $F \subseteq O^\infty$, то в силу теоремы 1 (см. случай 2, п. *б*)

$$[F \cup \{1\}] = O^\infty = [\{\overline{x} \vee y\}] = [\{1, f_M, f_L\}],$$

и в силу леммы 7

$$F = O^\infty \cap T_0 = O_0^\infty = [\{x \vee y, f_M, f_L\}],$$

например,

$$O_0^\infty = [\{x \vee y, x \vee y\overline{z}\}] = [\{x \vee y\overline{z}\}].$$

В противном случае

$$[F \cup \{1\}] = [\{\overline{x} \ \vee \ y, \ d_{\mu+1} \ \}] = [\{1, f_M, f_L, \widehat{f}^{\mu+1}\}],$$

$\mu = 1, 2, \ldots$. В силу леммы 7

$$F = [\{\overline{x} \vee y, d_{\mu+1}\}] \cap T_0 = [\{x \ \vee \ y, \ f_M, \ f_L, \ \widehat{f}^{\mu+1}\}],$$

$\mu = 1, 2, \ldots$. При $\mu = 1$

$$F = T_1 \cap T_0 = T_{01},$$

например,

$$T_{01} = [\{x \vee y, x \vee y\overline{z}, xy\}] = [\{x \vee y\overline{z}, xy\}].$$

При $\mu \geq 2$

$$F = O^\mu \cap T_0 = O_0^\mu,$$

например,

$$O_0^\mu = \{x \vee y, x \vee y\overline{z}, d_{\mu+1}\}] = [\{x \vee y\overline{z}, d_{\mu+1}\}],$$

$\mu = 2, 3, \ldots$.

в) $xy \in F$. В этом случае в силу принципа двойственности и рассмотрений предыдущего случая F — один из классов:

$$MI_1^\infty = [\{x(y \vee z)\}], \quad M_{01}, \quad MI_1^\mu = [\{xy, d_{\mu+1}^*\}],$$

$$I_1^\infty = [\{x(y \vee \overline{z})], \quad T_{01}, \quad I_1^\mu = [\{x(y \vee \overline{z}), d_{\mu+1}^*\}],$$

$\mu = 2, 3, \ldots$.

Таким образом, первая часть утверждения теоремы доказана; доказательство второй части легко извлекается из приведенных рассмотрений.

Замечание 2. На основе приведенных рассмотрений нетрудно построить полную диаграмму включений классов функций алгебры логики, замкнутых относительно операций суперпозиции и введения несущественной переменной (рис. 1).

В приложении (табл. 4) приведен полный перечень замкнутых классов булевых функций.

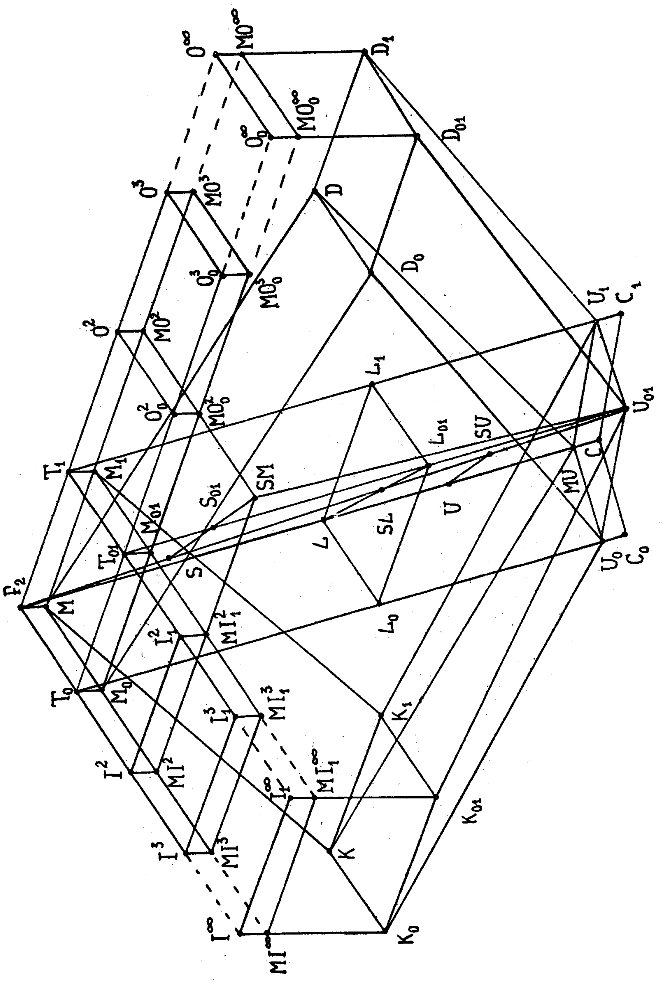

Рис. 1: диаграмма включений замкнутых классов

§5 Структура C-замкнутых классов

Поскольку каждый замкнутый класс функций алгебры логики является C-замкнутым, перечислим только такие C-замкнутых классы, которые не являются замкнутыми.

Определим следующие множества булевых функций: $\widehat{K}_{01}$ — множество всех конъюнкций, не имеющих фиктивных переменных; $\widehat{D}_{01}$ — множество всех дизъюнкций, не имеющих фиктивных переменных. Положим

$$\widehat{K}_0 = \widehat{K}_{01} \cup C_0, \quad \widehat{D}_1 = \widehat{D}_{01} \cup C_1.$$

Обозначим через $U^{(1)}$, $MU^{(1)}$, $C^{(1)}$, $U_1^{(1)}$, $C_1^{(1)}$, $U_0^{(1)}$, $C_0^{(1)}$, $SU^{(1)}$, $U_{01}^{(1)}$ множества всех функций одной переменной из классов U, MU, C, U_1, C_1, U_0, C_0 , SU, U_{01} соответственно. Положим

$$\widehat{U} = U^{(1)} \cup C, \quad \widehat{MU} = MU^{(1)} \cup C,$$

$$\widehat{U}_1 = U_1^{(1)} \cup C_1, \quad \widehat{U}_0 = U_0^{(1)} \cup C_0.$$

Легко видеть, что все перечисленные множества являются C-замкнутыми и не являются замкнутыми классами.

Утверждение 8. *Для любой системы $\mathcal{A} \subseteq P_2$, содержащей селекторную функцию $e_1^{(2)}$, выполняется соотношение*

$$[\mathcal{A}]_C = [\mathcal{A}].$$

Доказательство этого утверждения следует из определения операций суперпозиции и введения фиктивной переменной.

Теорема 3. *Множество C-замкнутых классов алгебры логики, не являющихся замкнутыми классами, исчерпывается следующим списком.*

1. *Классы, содержащие существенные функции*:

$$\widehat{K}_0, \quad \widehat{K}_{01}, \quad \widehat{D}_1, \quad \widehat{D}_{01}.$$

2. *Классы, содержащие константы* $0^{(n)}$ *или* $1^{(n)}$, $n \geq 2$, *и не содержащие существенных функций*:

$$\widehat{U}, \quad \widehat{MU}, \quad \widehat{U}_1, \quad \widehat{U}_0.$$

3. *Классы функций одной переменной*:

$$U^{(1)}, \; MU^{(1)}, \; C^{(1)}, \; U_1^{(1)}, \; C_1^{(1)}, \; U_0^{(1)}, \; C_0^{(1)}, \; SU^{(1)}, \; U_{01}^{(1)}.$$

При этом все перечисленные классы различны.

Доказательство. Пусть F — произвольный C-замкнутый класс алгебры логики такой, что $F \neq [F]$. Рассмотрим три случая.

1. F содержит существенную функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$, $n \geq 2$. Очевидно, что $f \notin S$.

а) $F \subseteq D$. Если $0^{(n)} \in F$, $n \geq 1$, то $e_1^{(2)} \in F$, и в силу утверждения 8 выполняется равенство $F = [F]$, что противоречит условию; если $1^{(n)} \in F$, $0^{(m)} \notin F$, $n, m \geq 1$, то

$$F = \widehat{D}_1 = [\{x \vee y, 1^{(1)}\}]_C;$$

если $0^{(m)}, 1^{(n)} \notin F$, $n, m \geq 1$, то

$$F = \widehat{D}_{01} = [\{x \vee y\}]_C.$$

б) $F \subseteq K$. Из рассмотрений, аналогичных предыдущему случаю, следует, что F — один из классов:

$$F = \widehat{K}_0 = [\{xy, 0^{(1)}\}]_C, \quad F = \widehat{K}_{01} = [\{xy\}]_C.$$

Пусть F содержит функции f_K и f_D. Покажем, что в этом случае F содержит функцию $e_1^{(2)}$.

Если $0, 1 \in F$, то

$$e_1^{(2)} \in [\{0, 1, f\}]_C \subseteq F.$$

Если $1 \in F$, $0 \notin F$, то $F \subseteq T_1$. Рассмотрим функцию $f_D(x_1, \ldots, x_m)$, $m \geq 1$. Так как $f_D \notin D$, то $m \geq 2$ и найдется набор $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ такой, что $\widetilde{\alpha} \neq (0, \ldots, 0)$, $f_D(\widetilde{\alpha}) = 0$, а для любого набора $\widetilde{\beta} \in E^m$ такого, что $\widetilde{\beta} \geq \widetilde{\alpha}$ выполняется равенство $f_D(\widetilde{\beta}) = 1$. Пусть, например, $\alpha_1 = \ldots = \alpha_k = 0$, $\alpha_{k+1} = \ldots = \alpha_m = 1$, $k < m$. Положим $x_1 = \ldots = x_k = x$, $x_{k+1} = \ldots = x_m = 1(y)$. Тогда

$$f_D(x, \ldots, x, 1(y), \ldots, 1(y)) = e_1^{(2)}(x, y).$$

Если $0 \in F$, $1 \notin F$, то $F \subseteq T_0$. Рассмотрим функцию $f_K(x_1, \ldots, x_p)$, $p \geq 1$. Так как $f_K \notin K$, то $p \geq 2$ и найдется набор $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_p)$ такой, что $\widetilde{\alpha} \neq (1, \ldots, 1)$, $f_K(\widetilde{\alpha}) = 1$, а для любого набора $\widetilde{\beta} \in E^p$, такого что $\widetilde{\beta} \leq \widetilde{\alpha}$ выполняется равенство $f_K(\widetilde{\beta}) = 0$; пусть, например, $\alpha_1 = \ldots = \alpha_k = 1$, $\alpha_{k+1} = \ldots = \alpha_p = 0$, $k < p$. Положим $x_1 = \ldots = x_k = x$, $x_{k+1} = \ldots = x_p = 0(y)$. Тогда

$$f_K(x, \ldots, x, 0(y), \ldots, 0(y)) = e_1^{(2)}(x, y).$$

Пусть $0, 1 \notin F$. Тогда $F \subseteq T_0 \cap T_1$ (так как $f \notin S$), и из доказательства утверждения 6 следует, что множество $[\{f\}]_C$ содержит по крайней мере одну из следующих функций: $x \vee y$, xy. Поэтому выполняется соотношение

$$e_1^{(2)}(x, y) \in [\{f, f_D, f_K\}]_C.$$

Таким образом, функция $e_1^{(2)}$ принадлежит F, и в силу утверждения 8 $F = [F]_C$, что противоречит условию.

2. F не содержит существенных функций, и $F \not\subseteq U^{(1)}$. Если $0^{(2)}, 1^{(2)} \in F$, то F — один из классов:

$$\widehat{U} = [\{1^{(2)}, \overline{x}\}]_C, \quad \widehat{MU} = [\{0^{(2)}, 1^{(2)}, x\}]_C;$$

если $1^{(2)} \in F$, $0^{(2)} \notin F$, то

$$F = \widehat{U}_1 = [\{1^{(2)}, x\}]_C;$$

если же $0^{(2)} \in F$, $1^{(2)} \notin F$, то

$$F = \widehat{U}_0 = [\{0^{(2)}, x\}]_C.$$

3. $F \subseteq U^{(1)}$. Тогда F — один из классов:

$$U^{(1)} = [\{1^{(1)}, \overline{x}\}]_C, \quad C^{(1)} = [\{0^{(1)}, 1^{(1)}\}]_C;$$

$$MU^{(1)} = [\{0^{(1)}, 1^{(1)}, x\}]_C,$$

$$U_1^{(1)} = [\{1^{(1)}, x\}]_C, \quad U_0^{(1)} = [\{0^{(1)}, x\}]_C;$$

$$C_1^{(1)} = [\{1^{(1)}\}]_C, \quad C_0^{(1)} = [\{0^{(1)}\}]_C,$$

$$SU^{(1)} = [\{\overline{x}\}]_C, \quad U_{01}^{(1)} = [\{x\}]_C.$$

Таким образом, первая часть утверждения теоремы доказана, вторая часть очевидна.

Замечание 3. На основе приведенных выше рассмотрений нетрудно построить полную диаграмму включений всех классов Поста — C-замкнутых классов булевых функций (рис. 2).

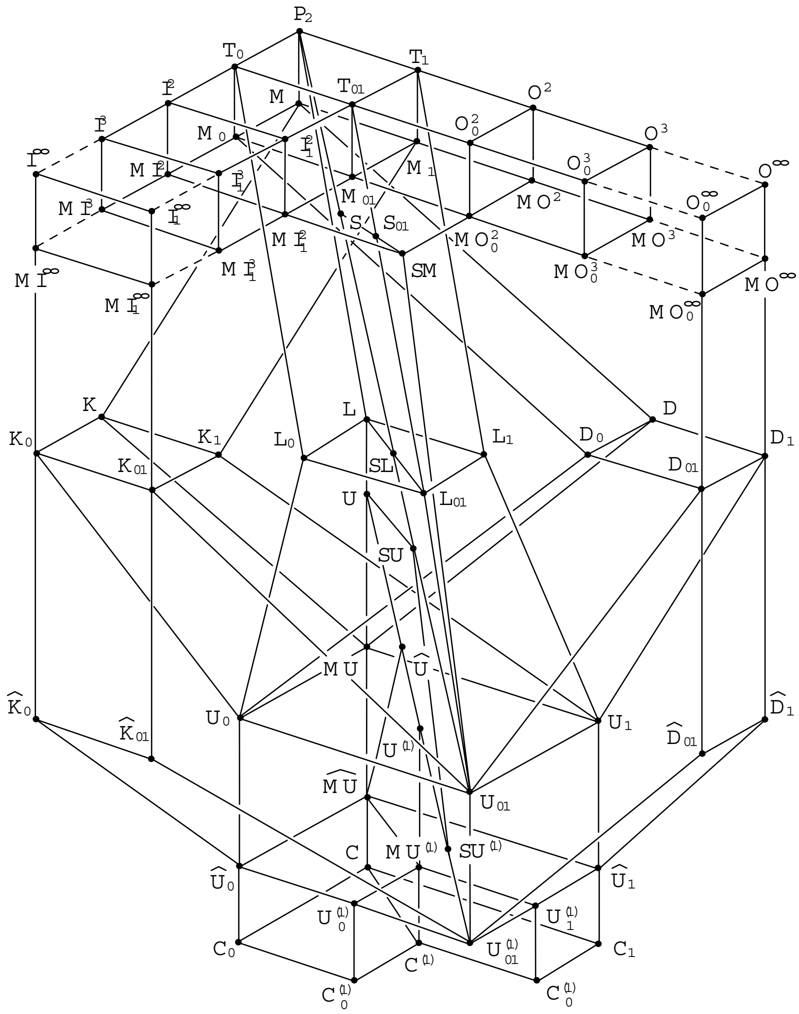

Рис. 2: диаграмма включений классов Поста

В приложении (табл. 5) приведен перечень всех C-замкнутых классов функций алгебры логики, которые не являются замкнутыми (см. также [9]).

Приложение

Таблица 4

Замкнутые классы булевых функций

Замкнутый класс	Входящие в него функции	Пример базиса	Обозначение у Поста	Обозначение из [19]
Классы, содержащие константы 0 и 1:				
P_2	все булевы функции	$\overline{x}, xy$	C_1	C_1
M	монотонные функции	$0, 1, xy, x \vee y$	A_1	A_1
L	линейные функции	$1,\ x + y$	L_1	L_1
K	конъюнкции	$0,\ 1,\ xy$	P_6	P_6
D	дизъюнкции	$0,\ 1,\ x \vee y$	S_6	S_6
U	функции, имеющие не более одной существенной переменной	$1,\ \overline{x}$	R_{13}	O_9
MU	монотонные функции, имеющие не более одной существенной переменной	$0,\ 1,\ x$	R_{11}	O_8
C	функции, не имеющие существенных переменных	$0,\ 1$	R_9	O_7

Продолжение таблицы 4

Замкнутый класс	Входящие в него функции	Пример базиса	Обозначение у Поста	Обозначение из [19]
Классы, содержащие 1 и не содержащие 0:				
T_1	функции, сохраняющие 1	$\overline{x} \vee y$, xy	C_2	C_2
M_1	монотонные функции, сохраняющие 1	1, xy, $x \vee y$	A_2	A_2
L_1	линейные функции, сохраняющие 1	$x + y + 1$	L_2	L_2
K_1	конъюнкции, сохраняющие 1	1, xy	P_5	P_5
D_1	дизъюнкции, сохраняющие 1	1, $x \vee y$	S_4	S_3
U_1	селекторные функции и константы 1	1, x	R_6	O_5
C_1	константы 1	1	R_2	O_2
O^μ $(\mu = 2, 3, \ldots)$	функции, удовлетворяющие условию $< 0^\mu >$	$\overline{x} \vee y$, $d_{\mu+1}$	F_4^μ	F_4^μ
MO^μ $(\mu = 2, 3, \ldots)$	монотонные функции, удовлетворяющие условию $< 0^\mu >$	1, $d_{\mu+1}$	F_3^μ	F_3^μ

Продолжение таблицы 4

Замкнутый класс	Входящие в него функции	Пример базиса	Обозначение у Поста	Обозначение из [19]
O^∞	функции, удовлетворяющие условию $< 0^\infty >$	$\overline{x} \vee y$	F_4^∞	F_4^∞
MO^∞	монотонные функции, удовлетворяющие условию $< 0^\infty >$	$1,\ x \vee yz$	F_3^∞	F_3^∞
Классы, содержащие 0 и не содержащие 1:				
T_0	функции, сохраняющие 0	$\overline{x}y,\ x \vee y$	C_3	C_3
M_0	монотонные функции, сохраняющие 0	$0,\ xy,\ x \vee y$	A_3	A_3
L_0	линейные функции, сохраняющие 0	$x + y$	L_3	L_3
K_0	конъюнкции, сохраняющие 0	$0,\ xy$	P_4	P_3
D_0	дизъюнкции, сохраняющие 0	$0,\ x \vee y$	S_5	S_5
U_0	селекторные функции и константы 0	$0,\ x$	R_8	O_6
C_0	константы 0	0	R_3	O_3
I^μ $(\mu = 2, 3, \ldots)$	функции, удовлетворяющие условию $< 1^\mu >$	$\overline{x}y,\ d^*_{\mu+1}$	F_8^μ	F_8^μ

Продолжение таблицы 4

Замкнутый класс	Входящие в него функции	Пример базиса	Обозначение у Поста	Обозначение из [19]
MI^μ ($\mu = 2, 3, \ldots$)	монотонные функции, удовлетворяющие условию $< 1^\mu >$	$0,\ d^*_{\mu+1}$	F^μ_7	F^μ_7
I^∞	функции, удовлетворяющие условию $< 1^\infty >$	$\overline{x}y$	F^∞_8	F^∞_8
MI^∞	монотонные функции, удовлетворяющие условию $< 1^\infty >$	$0,\ x(y \vee z)$	F^∞_7	F^∞_7
Классы, не содержащие 0 и 1:				
T_{01}	функции, сохраняющие 0 и 1	$x \vee y\overline{z},\ xy$	C_4	C_4
S_{01}	самодвойственные функции, сохраняющие 0 и 1	$d_3(\overline{x}, y, z)$	D_1	D_1
M_{01}	монотонные функции, сохраняющие 0 и 1	$xy,\ x \vee y$	A_4	A_4
L_{01}	линейные функции, сохраняющие 0 и 1	$x + y + z$	L_4	L_4
K_{01}	конъюнкции, сохраняющие 0 и 1	xy	P_2	P_1
D_{01}	дизъюнкции, сохраняющие 0 и 1	$x \vee y$	S_2	S_1

Продолжение таблицы 4

Замкнутый класс	Входящие в него функции	Пример базиса	Обозначение у Поста	Обозначение из [19]
U_{01}	селекторные функции	x	R_1	O_1
S	самодвойственные функции	$d_3(\overline{x},\overline{y},z)$	D_3	D_3
SM	монотонные самодвойственные функции	$d_3(x,y,z)$	D_2	D_2
SL	линейные самодвойственные функции	$x+y+z+1$	L_5	L_5
SU	селекторные функции и их отрицания	$\overline{x}$	R_4	O_4
O_0^μ $(\mu=2,3,\ldots)$	функции, удовлетворяющие условию $< 0^\mu >$ и сохраняющие 0	$x \vee y\overline{z}, d_{\mu+1}$	F_1^μ	F_1^μ
MO_0^2	монотонные функции, удовлетворяющие условию $< 0^2 >$ и сохраняющие 0	$x \vee y,\ d_3$	F_2^2	F_2^2
MO_0^μ $(\mu=3,4,\ldots)$	монотонные функции, удовлетворяющие условию $< 0^\mu >$ и сохраняющие 0	$d_{\mu+1}$	F_2^μ	F_2^μ
I_1^μ $(\mu=2,3,\ldots)$	функции, удовлетворяющие условию $< 1^\mu >$ и сохраняющие 1	$x(y \vee \overline{z}),\ d^*_{\mu+1}$	F_5^μ	F_5^μ

Продолжение таблицы 4

Замкнутый класс	Входящие в него функции	Пример базиса	Обозначение у Поста	Обозначение из [19]
MI_1^2	монотонные функции, удовлетворяющие условию $< 1^2 >$ и сохраняющие 1	xy, d_3	F_6^2	F_6^2
MI_1^μ $(\mu = 3, 4, \dots)$	монотонные функции, удовлетворяющие условию $< 1^\mu >$ и сохраняющие 1	$d_{\mu+1}^*$	F_6^μ	F_6^μ
O_0^∞	функции, удовлетворяющие условию $< 0^\infty >$ и сохраняющие 0	$x \vee y\overline{z}$	F_1^∞	F_1^∞
MO_0^∞	монотонные функции, удовлетворяющие условию $< 0^\infty >$ и сохраняющие 0	$x \vee yz$	F_2^∞	F_2^∞
I_1^∞	функции, удовлетворяющие условию $< 1^\infty >$ и сохраняющие 1	$x(y \vee \overline{z})$	F_5^∞	F_5^∞
MI_1^∞	монотонные функции, удовлетворяющие условию $< 1^\infty >$ и сохраняющие 1	$x(y \vee z)$	F_6^∞	F_6^∞

Таблица 5

C-замкнутые классы булевых функций (не являющиеся замкнутыми)

Замкнутый класс	Входящие в него функции	Пример базиса	Обозначение у Поста
Классы, не содержащие существенных функций:			
$U_{01}^{(1)}$	функции e	x	O_1
$C_1^{(1)}$	функции $1^{(1)}$	$1^{(1)}$	O_2
$C_0^{(1)}$	функции $0^{(1)}$	$0^{(1)}$	O_3
$SU^{(1)}$	функции e, $\overline{e}$	$\overline{x}$	O_4
$U_1^{(1)}$	функции e, $1^{(1)}$	$1^{(1)}$, x	O_5
$U_0^{(1)}$	функции e, $0^{(1)}$	$0^{(1)}$, x	O_6
$C^{(1)}$	функции $0^{(1)}$, $1^{(1)}$	$0^{(1)}$, $1^{(1)}$	O_7
$MU^{(1)}$	функции e, $0^{(1)}$, $1^{(1)}$	$0^{(1)}$, $1^{(1)}$, x	O_8
$U^{(1)}$	функции e, $\overline{e}$, $0^{(1)}$, $1^{(1)}$	$1^{(1)}$, $\overline{x}$	O_9

Продолжение таблицы 5

Замкнутый класс	Входящие в него функции	Пример базиса	Обозначение у Поста
$\widehat{U}$	функции e, $\overline{e}$, $0^{(n)}$, $1^{(n)}$, $n=1,2,\ldots$	$1^{(2)}$, $\overline{x}$	R_{12}
$\widehat{MU}$	функции e, $0^{(n)}$, $1^{(n)}$, $n=1,2,\ldots$	$0^{(2)}$, $1^{(2)}, x$	R_{10}
$\widehat{U}_1$	функции e, $1^{(n)}$, $n=1,2,\ldots$	$1^{(2)}$, x	R_5
$\widehat{U}_0$	функции e, $0^{(n)}$, $n=1,2,\ldots$	$0^{(2)}, x$	R_7
Классы, содержащие существенные функции:			
$\widehat{K}_0$	конъюнкции, не имеющие фиктивных переменных, и константы $0^{(n)}$, $n=1,2,\ldots$	$0^{(1)}$, xy	P_3
$\widehat{D}_1$	дизъюнкции, не имеющие фиктивных переменных, и константы $1^{(n)}$, $n=1,2,\ldots$	$1^{(1)}$, $x \vee y$	S_3
$\widehat{K}_{01}$	конъюнкции, не имеющие фиктивных переменных	xy	P_1
$\widehat{D}_{01}$	дизъюнкции, не имеющие фиктивных переменных	$x \vee y$	S_1

Список литературы

[1] *Гаврилов Г. П.* Индуктивные представления булевых функций и конечная порождаемость классов Поста // Алгебра и логика. 1984. **23**, № 1. 3–26.

[2] *Гаврилов Г. П.* Функциональные системы дискретной математики. М.: Изд-во МГУ, 1985. 39 с.

[3] *Гаврилов Г. П., Сапоженко А. А.* Сборник задач по дискретной математике. М.: Физматлит, 2004. 416 с.

[4] *Мальцев А. И.* Итеративные алгебры и многообразия Поста // Алгебра и логика. Новосибирск, 1966. **5**, № 2. 3–26.

[5] *Мальцев А. И.* Итеративные алгебры Поста. Новосибирск: Изд-во НГУ, 1976. 100 с.

[6] *Марченков С. С.* К существованию конечных базисов в замкнутых классах булевых функций // Алгебра и логика. 1984. **23**, № 1. 88–99.

[7] *Марченков С. С., Угольников А. Б.* Замкнутые классы булевых функций. М.: Изд-во ИПМ им. М. В. Келдыша АН СССР, 1990. 147 с.

[8] *Марченков С. С.* Замкнутые классы булевых функций. М.: Физматлит, 2000. 126 с.

[9] *Нечипорук Э. И.* Синтез логических сетей в неполных и вырожденных базисах // Проблемы кибернетики. Вып. 14. М.: Наука, 1965. 111–160.

[10] *Угольников А. Б.* Синтез схем и формул в неполных базисах // Доклады АН СССР. 1979. **249**, № 1. 60–63.

[11] *Угольников А. Б.* Синтез схем и формул в неполных базисах // Препринт № 112 ИПМ им. М. В. Келдыша АН СССР. М., 1980. 22 с.

[12] *Угольников А. Б.* О релизации булевых функций из некоторых замкнутых классов схемами из функциональных элементов в неполных базисах // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 1985, № 3. 76–78.

[13] *Угольников А. Б.* О сложности реализации булевых функций схемами в базисе из медианы и импликации // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 1987. № 3. 87–89.

[14] *Угольников А. Б.* О глубине и полиномиальной эхвивалентности формул для замкнутых классов двузначной логики // Математические заметки. 1987. **42**, № 4. 603–612.

[15] *Угольников А. Б.* О глубине и сложности формул, реализующих функции из замкнутых классов // Докл. АН СССР. 1988. **298**, № 6. 1341–1344.

[16] *Угольников А. Б.* О глубине формул в неполных базисах // Математические вопросы кибернетики. Вып. 1. М.: Наука, 1988. 242–245.

[17] *Угольников А. Б.* О замкнутых классах Поста // Известия ВУЗов. Математика. 1988, № 7 (314). 79–88.

[18] *Яблонский С. В.* Функциональные построения в k-значной логике // Труды матем. ин-та АН СССР. 1958. **51**. 5–142.

[19] *Яблонский С. В., Гаврилов Г. П., Кудрявцев В. Б.* Функции алгебры логики и классы Поста. М.: Наука, 1966. 119 с.

[20] *Яблонский С. В.* Введение в теорию функций k-значной логики // Дискретная математика и математические вопросы кибернетики, **1**. М.: Наука, 1974. 9–66.

[21] *Яблонский С. В.* О некоторых результатах в теории функциональных систем // Труды Междунар. конгр. математиков. Хельсинки. 1978. 963–971.

[22] *Яблонский С. В.* О замкнутых классах в P_2 // Проблемы кибернетики. Вып. 39. М.: Наука, 1982. 262–262.

[23] *Яблонский С. В.* Введение в дискретную математику. М.: Высшая школа, 2001. 384 с.

[24] Конспект лекций *О. Б. Лупанова* по курсу "Введение в математическую логику" / Отв. ред. А. Б. Угольников. М.: Изд-во ЦПИ при механико-математическом факультете МГУ им. М. В. Ломоносова, 2007. 192 с.

[25] *Benzaken C.* Definitions et proprietes de certains familles de fonctions booleénnes croissantes // Compt. Rend. Acad. Sci. Paris. 1964. **259**, groupe I. 1369–1371.

[26] *Benzaken C.* Les familles de fonctions booleénnes deduites de certaines familles de fonctions booleénnes croissantes. Criteres de determination de l'indice d'une fonction croissante // Compt. Rend. Acad. Sci. Paris. 1965. **260**, groupe I. 1528–1531.

[27] *Benzaken C.* Treillis des familles de fonctions booleénnes croissantes, applications au coloriage d'un graphe // Séminaire Dubreil — Pisot (Algèbre et Théorie des nombres) 19e année, 1965/1966, № 2. 1–13.

[28] *Kuntzman J.* Algèbre de Boole. Bibliotheque de l'Ingenieur // Automaticien. Paris: Dunod, 1965. 319 p.

[29] *Lau D.* On closed subsets of Boolean functions (A new proof for Post's theorem) // J. Inform. Process. Cybernet. EIK. 1991. **27** № 3. 167–178.

[30] *Lau D.* Funktionenenalgebren über endlichen Mengen. Berlin, Heidelberg, New York, Hong Kong, London, Milan, Paris, Tokio: Springer, 2004. 652 p.

[31] *Pippenger N.* Theories of Computability. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1997. 251 p.

[32] *Post E. L.* Determination of all closed systems of truth tables // Bull. of the Amer. Math. Soc. 1920. **26**. 437–437.

[33] *Post E. L.* Introduction to a general theory of elementary propositions // Amer. J. Math. 1921. **43**, № 3. 163–185.

[34] *Post E. L.* Two-valued iterative systems of mathematical logic // Annals of Math. Studies. Princeton–London: Princeton Univ. Press, 1941. **5**. 122 p.

[35] *Reschke M., Denecke K.* Ein neuer Beweis für die Ergebniss von E.L. Post über abgeschlossene Klassen Boolescher Funktionnen // J. Process. Cybern. EIK. 1989. **25**, № 7. 361–380.

[36] *Ugolnikov A. B.* Complexity and depth of formulas realizing functions from closed classes // Proc. of Fundamentals of Computation Theory. Lecture Notes in Comp. Sci. **278**. Berlin: Springer - Verlag, 1987. 456–461.

[37] Solvability, provability, definability: the collected works of Emil L. Post / Martin Davis, editor. Boston, Basel, Berlin: Birkhäuser, 1994. 554 p.

Учебное пособие

УГОЛЬНИКОВ Александр Борисович

КЛАССЫ ПОСТА

Оригинал-макет: О. С. Дудакова

Подписано в печать 21.12.2007 г.
Формат 60×90 1/16. Усл. печ. л. 4,0
Заказ Тираж 300 экз.

Издательство Центра прикладных исследований при механико-математическом факультете МГУ.
г. Москва, Ленинские горы.
Изд. лиц. № 04059 от 20.02.2001 г.

Отпечатано на типографском оборудовании механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова.