

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Томский государственный архитектурно-строительный университет»

Б.А. Тухфатуллин

**ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА
СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ**

**МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ
(ТЕОРИЯ И ПРАКТИКА)**

Учебное пособие

Томск
Издательство ТГАСУ
2013

УДК 624.04(075.8)
ББК 38.112я7

Тухфатуллин, Б.А. Численные методы расчета строительных конструкций. Метод конечных элементов (теория и практика) [Текст] : учебное пособие / Б.А. Тухфатуллин. – Томск : Изд-во Том. гос. архит.-строит. ун-та, 2013. – 100 с.
ISBN 978-5-93057-522-4

В пособии приведены теоретические сведения и примеры определения перемещений, внутренних усилий для плоских стержневых систем, перемещений и напряжений в плоской задаче теории упругости методом конечных элементов.

Учебное пособие предназначено для студентов всех направлений подготовки инженеров, специалистов и бакалавров, изучающих дисциплину «Численные методы расчета строительных конструкций».

УДК 624.04(075.8)
ББК 38.112я7

Рецензенты:

Л.Е. Путеева, ст. преподаватель кафедры строительной механики ТГАСУ;

И.И. Подшивалов, гл. инженер ООО «Эфес плюс», к.т.н., доцент.

ISBN 978-5-93057-522-4

© Томский государственный
архитектурно-строительный
университет, 2013

© Б.А. Тухфатуллин, 2013

ВВЕДЕНИЕ

Современный расчет строительных конструкций невозможно представить без использования программных комплексов. В большинстве существующих комплексов для расчета усилий, перемещений, напряжений, критических сил, частот собственных колебаний используется метод конечных элементов (МКЭ) [1–5, 7, 10–13].

Основная идея МКЭ заключается в разделении рассчитываемой системы на отдельные части – конечные элементы (КЭ). Объединение КЭ между собой в узлах приводит к разрешающей системе уравнений. Наибольшее распространение получил вариант МКЭ, в котором за неизвестные принимаются перемещения узлов (общее название для линейных и угловых перемещений – степень свободы). Матрица коэффициентов уравнений составляется простым суммированием матриц жесткости конечных элементов. Такой подход реализуется независимо от того, из каких КЭ состоит система: стержневых, пластинчатых, объемных.

Для систем, состоящих из прямолинейных стержней постоянной по длине жесткости, решение, полученное по МКЭ, будет точным. Для пластин и объемных тел решение будет приближенным, результаты расчета существенным образом зависят от числа степеней свободы в КЭ и от количества элементов, на которые разделена система.

В первом разделе учебного пособия на примере стержневой системы с растянутыми (сжатыми) элементами изложены основные этапы расчета по МКЭ. Расчет плоской рамы с изгибаемыми и растянутыми (сжатыми) элементами рассмотрен во втором разделе. Общий подход для получения матриц жесткости стержневых КЭ, основанный на вариационном принципе Лагранжа, представлен в третьем разделе. Использование МКЭ для решения плоской задачи теории упругости рассмотрено в четвертом разделе. Расчет по МКЭ требует большой вычислительной работы и подразумевает использование компьютерных

программ. Тем не менее, для лучшего понимания основ метода в пятом разделе рассмотрено решение трех задач по МКЭ вручную.

В ходе решения по МКЭ используются операции над матрицами. Приведем необходимые для изучения метода сведения о матрицах.

Таблица чисел из m строк и n столбцов называется матрицей размера $m \cdot n$:

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & a_{ij} & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Числа, из которых состоит матрица, называются ее элементами, например a_{ij} , где первый индекс означает номер строки, а второй индекс – номер столбца.

Для того чтобы отличать матрицу от скалярной величины, используются обозначения $[A]$ или $\|A\|$. Матрица, состоящая из одного столбца, называется вектором \vec{b} или $\{b\}$, где

$$\{b\} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{Bmatrix}.$$

Матрица называется квадратной, если число ее строк равно числу столбцов. Количество строк (столбцов) такой матрицы определяет ее порядок. Матрица, для которой выполняется условие $a_{ij} = a_{ji}$, называется симметричной. Матрица, в которой все элементы, кроме главной диагонали, равны нулю, называется диагональной. Частным случаем диагональной матрицы является единичная матрица $[E]$, для которой все диагональные элементы равны единице:

$$[E] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & 1 & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

В ходе расчета встречаются треугольные и ленточные матрицы (звездочками обозначены ненулевые элементы):

$$\begin{bmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 \\ * & * & * & * \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} * & * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 & 0 \\ 0 & * & * & * & 0 \\ 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * \end{bmatrix}.$$

Над матрицами возможны следующие операции:

- сложение (вычитание);
- умножение матрицы на число;
- перемножение матриц;
- транспонирование матрицы;
- обращение матриц.

Перемножение матриц имеет смысл, если число столбцов первой матрицы равно числу строк второй: $[A] \times [B] = [C]$. Число строк матрицы – результата $[C]$ равно числу строк первой матрицы $[A]$, а число столбцов равно числу столбцов второй матрицы $[B]$. Элемент c_{ij} вычисляется по формуле $c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$.

Для квадратных матриц в общем случае перемножение некоммутативно $[A] \times [B] \neq [B] \times [A]$.

Для квадратных матриц в общем случае перемножение некоммутативно $[A] \times [B] \neq [B] \times [A]$.

Обратной к матрице $[A]$ называется матрица $[A]^{-1}$ при выполнении условия $[A] \times [A]^{-1} = [A]^{-1} \times [A] = [E]$. Матрица, для которой обратная матрица является транспонированной к исходной, называется ортогональной $[A]^{-1} = [A]^T$.

1. РАСЧЕТ СТЕРЖНЕВОЙ СИСТЕМЫ С РАСТЯНУТЫМИ (СЖАТЫМИ) ЭЛЕМЕНТАМИ

Для изучения основных этапов МКЭ рассмотрим расчет плоской шарнирно-стержневой системы, нагруженной в узлах сосредоточенными силами (рис. 1.1, *a*). В качестве неизвестных выберем горизонтальные и вертикальные перемещения узлов.

Пронумеруем перемещения в порядке обхода узлов системы, при этом в узле сначала нумеруем горизонтальное перемещение, а затем вертикальное (рис. 1.1, *б*). Положительные направления перемещений совпадают с направлениями координатных осей. Система координат xOy называется общей, или глобальной системой координат.

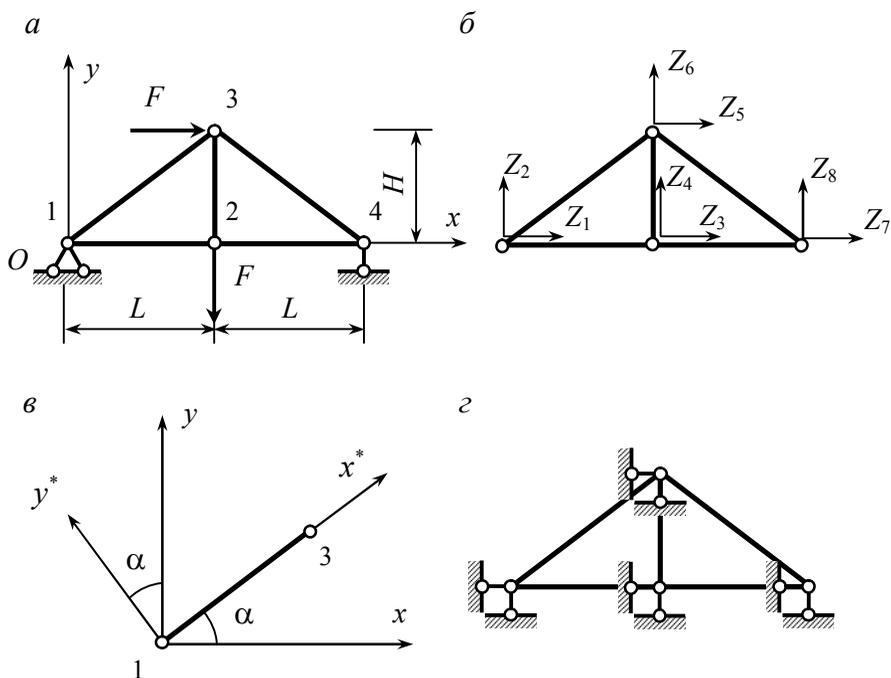


Рис. 1.1

Для каждого стержня существует также местная (локальная) система координат x^* , y^* (рис. 1.1, в). Начало этой системы размещается в узле с меньшим порядковым номером, угол α определяется расположением стержня.

Для выбора основной системы МКЭ (рис. 1.1, г) в каждый узел добавляем горизонтальную и вертикальную связи. Система при этом разделяется на отдельные шарнирно закрепленные по концам стержни. Каждый стержень представляет собой КЭ.

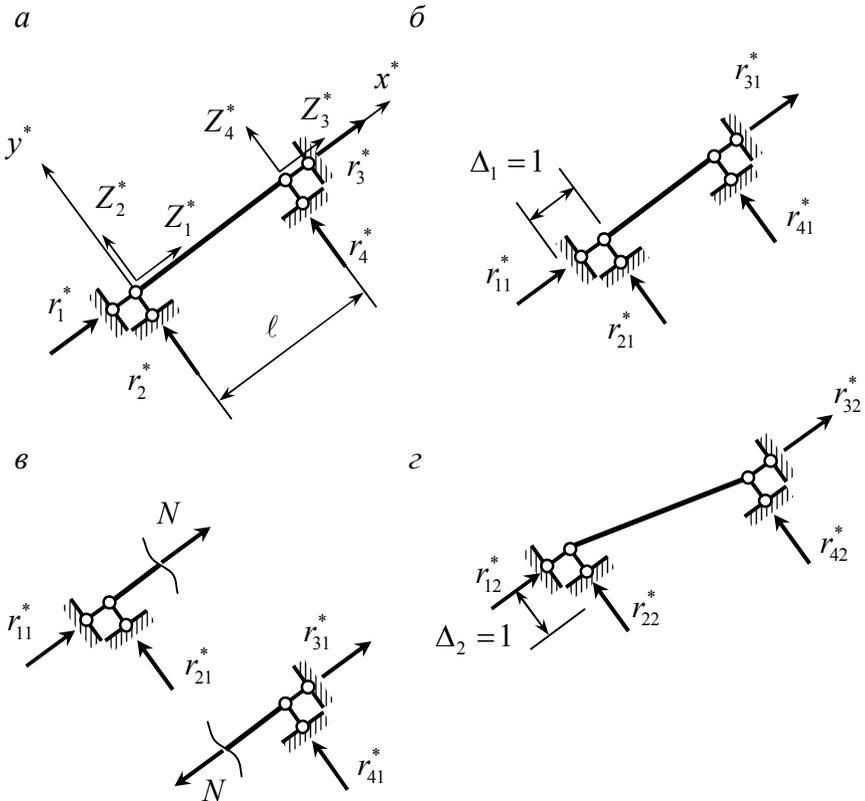


Рис. 1.2

Для вывода матрицы жесткости КЭ установим связь между реакциями $r_1^*, r_2^*, r_3^*, r_4^*$ и перемещениями по концам стержня в местной системе координат $Z_1^*, Z_2^*, Z_3^*, Z_4^*$ (рис. 1.2, а). Для определения реакций зададим последовательно по направлению каждого перемещения единичное смещение соответствующей опорной связи.

Зададим смещение связи $\Delta_1 = 1$ (рис. 1.2, б) по направлению перемещения Z_1^* . Деформацию сжатого стержня определим по закону Гука

$$\Delta \ell = \frac{N \ell}{EA} = -\Delta_1.$$

Продольная сила, возникающая в стержне, будет равна

$$N = -\frac{EA}{\ell} \Delta_1 = -\frac{EA}{\ell} 1 = -\frac{EA}{\ell}.$$

Из условия равновесия (рис. 1.2, в) определим реакции в связях:

$$r_{11}^* = -N = -\left(-\frac{EA}{\ell}\right) = \frac{EA}{\ell};$$

$$r_{21}^* = 0;$$

$$r_{31}^* = N = -\frac{EA}{\ell};$$

$$r_{41}^* = 0.$$

Зададим по направлению перемещения Z_2^* смещение связи $\Delta_2 = 1$ (рис. 1.2, г). Стержень при этом не деформируется, следовательно, реакции во всех связях будут равны нулю:

$$r_{12}^* = r_{22}^* = r_{32}^* = r_{42}^* = 0.$$

Задавая единичные смещения третьей и четвертой связям, определяем аналогично реакции по направлениям перемещений Z_3^*, Z_4^* :

$$r_{13}^* = -\frac{EA}{\ell}; r_{23}^* = 0; r_{33}^* = \frac{EA}{\ell}; r_{43}^* = 0; r_{14}^* = r_{24}^* = r_{34}^* = r_{44}^* = 0.$$

На основании принципа суперпозиции определим реакции в связях $r_1^*, r_2^*, r_3^*, r_4^*$ при одновременном смещении всех связей:

$$r_1^* = r_{11}^* Z_1^* + r_{12}^* Z_2^* + r_{13}^* Z_3^* + r_{14}^* Z_4^* = \frac{EA}{\ell} Z_1^* + 0 \cdot Z_2^* - \frac{EA}{\ell} Z_3^* + 0 \cdot Z_4^*;$$

$$r_2^* = r_{21}^* Z_1^* + r_{22}^* Z_2^* + r_{23}^* Z_3^* + r_{24}^* Z_4^* = 0 \cdot Z_1^* + 0 \cdot Z_2^* + 0 \cdot Z_3^* + 0 \cdot Z_4^*;$$

$$r_3^* = r_{31}^* Z_1^* + r_{32}^* Z_2^* + r_{33}^* Z_3^* + r_{34}^* Z_4^* = -\frac{EA}{\ell} Z_1^* + 0 \cdot Z_2^* + \frac{EA}{\ell} Z_3^* + 0 \cdot Z_4^*;$$

$$r_4^* = r_{41}^* Z_1^* + r_{42}^* Z_2^* + r_{43}^* Z_3^* + r_{44}^* Z_4^* = 0 \cdot Z_1^* + 0 \cdot Z_2^* + 0 \cdot Z_3^* + 0 \cdot Z_4^*.$$

В матричной форме эти выражения имеют вид:

$$\{r^*\} = \begin{Bmatrix} r_1^* \\ r_2^* \\ r_3^* \\ r_4^* \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{\ell} & 0 & -\frac{EA}{\ell} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{\ell} & 0 & \frac{EA}{\ell} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} Z_1^* \\ Z_2^* \\ Z_3^* \\ Z_4^* \end{Bmatrix} = [k^*] \times \{Z^*\}.$$

Матрица $[k^*]$ называется матрицей жесткости КЭ в местной системе координат:

$$[k^*] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{\ell} & 0 & -\frac{EA}{\ell} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{\ell} & 0 & \frac{EA}{\ell} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Для ее формирования достаточно задать величины:

EA – жесткость стержня на растяжение (сжатие);

ℓ – длину стержня.

С помощью матрицы жесткости по известному вектору перемещений по концам стержня $\{Z^*\}$ определяется вектор реакций $\{r^*\}$ в связях $\{r^*\} = [k^*] \times \{Z^*\}$.

При объединении КЭ в единую конструкцию необходимо, чтобы реакции в связях были вычислены в общей системе координат. Получим формулы для перевода реакций из местной системы координат, связанной со стержнем, в общую систему координат для всей конструкции.

С помощью рис. 1.3, а запишем формулы для такого перевода в начале стержня:

$$r_1 = r_1^* \cos \alpha - r_2^* \sin \alpha ;$$

$$r_2 = r_1^* \sin \alpha + r_2^* \cos \alpha .$$

Формулы для конца стержня (рис. 1.3, б) аналогичны:

$$r_3 = r_3^* \cos \alpha - r_4^* \sin \alpha ;$$

$$r_4 = r_3^* \sin \alpha + r_4^* \cos \alpha .$$

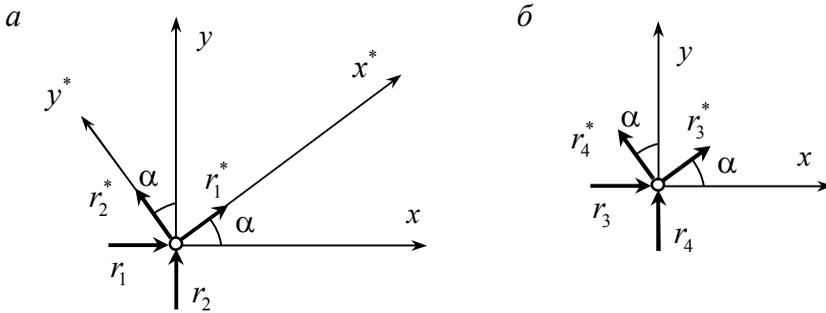


Рис. 1.3

В матричной форме эти выражения примут вид:

$$\{r\} = \begin{Bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} r_1^* \\ r_2^* \\ r_3^* \\ r_4^* \end{Bmatrix} = [C] \times \{r^*\} .$$

Матрица $[C]$ называется матрицей направляющих косинусов и служит для перевода реакций из местной системы координат в общую систему координат

$$[C] = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}.$$

С помощью матрицы направляющих косинусов можно переводить из местной системы координат в общую систему не только реакции, но и перемещения:

$$\{Z\} = [C] \times \{Z^*\}.$$

Для обратного перевода необходимо из выражения $\{r\} = [C] \times \{r^*\}$ выразить вектор $\{r^*\}$. Для этого умножим левую и правую части равенства на матрицу, обратную к матрице $[C]$:

$$[C]^{-1} \times \{r\} = [C]^{-1} \times [C] \times \{r^*\} = [E] \times \{r^*\} = \{r^*\};$$

$$[C]^{-1} \times \{r\} = \{r^*\}; \{r^*\} = [C]^{-1} \times \{r\}.$$

Можно показать, что для вычисления обратной матрицы $[C]^{-1}$ достаточно поменять в матрице $[C]$ местами строки и столбцы (матрица $[C]$ – ортогональная). Таким образом, с учетом выражения $[C]^{-1} = [C]^T$ получим:

$$\{r^*\} = [C]^T \times \{r\}; \{Z^*\} = [C]^T \times \{Z\}.$$

Запишем выражения для вычисления реакций в связях через узловые перемещения в общей системе координат:

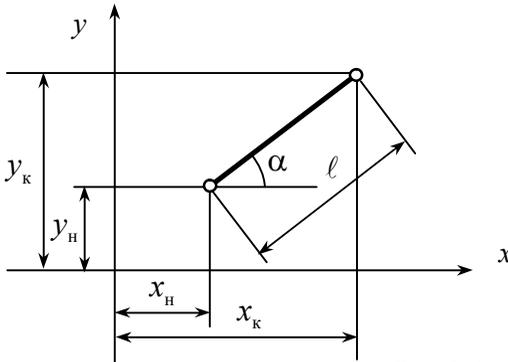
$$\{r\} = [C] \times \{r^*\} = [C] \times [k^*] \times \{Z^*\} = [C] \times [k^*] \times [C]^T \times \{Z\}.$$

Обозначая матричное произведение $[C] \times [k^*] \times [C]^T = [k]$, получим $\{r\} = [k] \times \{Z\}$. Матрица $[k]$ называется матрицей жесткости стержня в общей системе координат. С ее помощью вычисляются реакции по концам стержня $\{r\}$ через узловые перемещения $\{Z\}$ в общей системе координат.

Для вычисления матрицы направляющих косинусов $[C]$ используются координаты узлов в начале и в конце стержня (рис. 1.4). Длина стержня находится по формуле

$$\ell = \sqrt{(x_k - x_n)^2 + (y_k - y_n)^2}.$$

Для вычисления матрицы жесткости конструкции используется следующий прием: если в узле сходится несколько стержней, то реакции в связях, найденные по отдельности для каждого стержня, складываются. Таким образом, матрица жесткости всей конструкции равна сумме матриц жесткостей отдельных стержней $[K] = \sum [k]$. Матрица $[K]$ называется общей или глобальной матрицей жесткости. Для ее вычисления необходимо в соответствии с принятой нумерацией перемещений разослать числа, из которых состоят матрицы жесткости КЭ, в общую матрицу жесткости. Числа, попадающие в одну и ту же ячейку, суммируются.



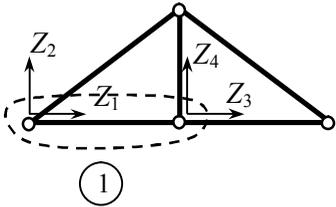
$$\cos \alpha = \frac{x_k - x_n}{\ell}$$

$$\sin \alpha = \frac{y_k - y_n}{\ell}$$

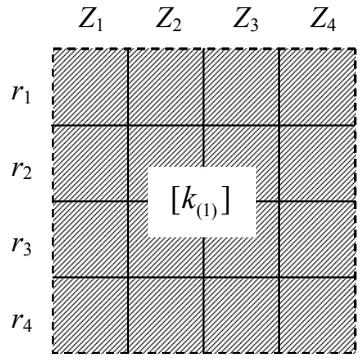
Рис. 1.4

Порядок формирования матрицы $[K]$ поясним на следующем примере. Пусть матрица жесткости первого КЭ (рис. 1.5, а) в общей системе координат вычислена (рис. 1.5, б). Перемещения по концам стержня – Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 , реакции в связях – r_1, r_2, r_3, r_4 . В соответствии с нумерацией рассылаем матрицу жесткости первого КЭ в глобальную матрицу жесткости (рис. 1.5, в). Матрица жесткости второго КЭ (рис. 1.6, а) имеет вид, показанный на рис. 1.6, б.

a



b



6

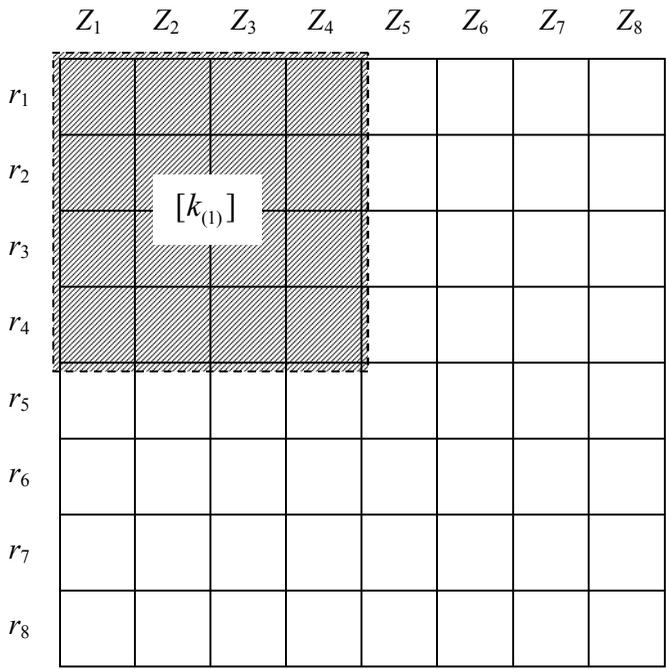
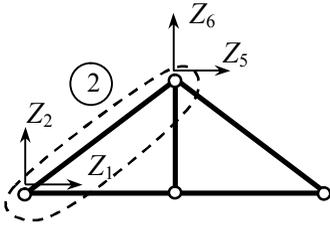
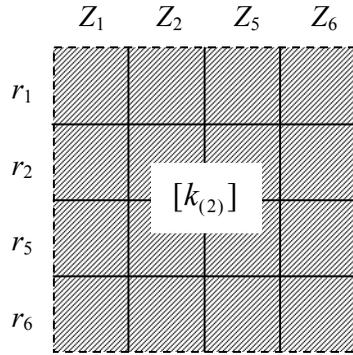


Рис. 1.5

a



b



6

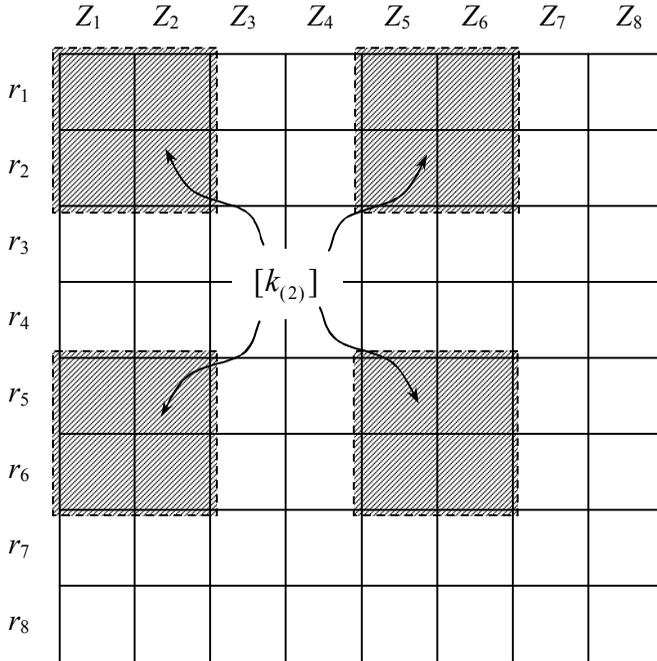


Рис. 1.6

В соответствии с нумерацией перемещений Z_1, Z_2, Z_5, Z_6 и реакций r_1, r_2, r_5, r_6 разошлем матрицу жесткости второго КЭ в глобальную матрицу жесткости. Результаты этой операции показаны на рис. 1.6, в.

Для формирования вектора узловых нагрузок $\{F\}$ определим реакции в опорных связях от внешней нагрузки. Рассмотрим равновесие узла системы, к которому приложены внешние силы F_x, F_y (рис. 1.7).

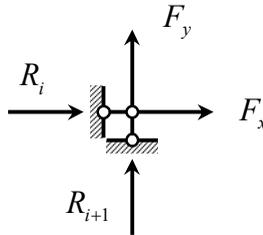


Рис. 1.7

Из уравнений равновесия получим:

$$R_i = -F_x; R_{i+1} = -F_y.$$

После составления уравнений равновесия для всех узлов получим вектор реакций $\{R\} = -\{F\}$.

Таким образом, вектор узловых нагрузок $\{F\}$ формируется из значений внешних сил, записанных в порядке нумерации перемещений. Положительные направления сил совпадают с направлением осей общей системы координат.

Так как реакции в добавленных связях от перемещений и внешних сил равны нулю, то

$$[K] \times \{Z\} + \{R\} = \{0\},$$

$$[K] \times \{Z\} = -\{R\} \text{ или } [K] \times \{Z\} = \{F\}.$$

Сформированная система уравнений соответствует конструкции, не имеющей опорных связей (наложенные при выборе

Для вычисления усилий из общего вектора перемещений сформируем вектор перемещений $\{Z^{(j)}\}$, относящийся к рассматриваемому стержню. Затем по формуле $\{Z^*\} = [C]^T \times \{Z^{(j)}\}$ переведем его в местную систему координат и вычислим реакции по формуле $\{r^*\} = [k^*] \times \{Z^*\}$. Из условия равновесия определим усилие в КЭ. Эту операцию повторим для всех КЭ.

Основные этапы рассмотренного расчета стержневой системы по МКЭ следующие:

1. Дискретизация системы – разбивка на узлы и конечные элементы (один стержень – один КЭ).
2. Цикл (повторение операций) по КЭ:
 - формирование матрицы жесткости в местной системе координат и матрицы направляющих косинусов;
 - перевод матрицы жесткости в общую систему координат и рассылка в глобальную матрицу жесткости для суммирования.
3. Формирование вектора узловых нагрузок.
4. Учет опорных связей.
5. Решение системы линейных алгебраических уравнений.
6. Цикл по элементам:
 - определение реакций в связях по концам элемента;
 - вычисление внутренних усилий в КЭ.

Эти же этапы сохраняются и при расчете плоских и пространственных стержневых систем, элементы которых работают на изгиб, растяжение (сжатие), кручение. Меняется количество степеней свободы, размерность матриц жесткости и направляющих косинусов. Очевидно, что для таких расчетов необходимо дополнительно задавать жесткости стержней на изгиб EJ_z , EJ_y и кручение GJ_x .

Определение узловых перемещений, изгибающих моментов, поперечных и продольных сил для плоской стержневой системы рассмотрено в следующем разделе.

2. РАСЧЕТ СТЕРЖНЕВОЙ СИСТЕМЫ С ИЗГИБАЕМЫМИ И РАСТЯНУТЫМИ (СЖАТЫМИ) ЭЛЕМЕНТАМИ

Рассмотрим алгоритм МКЭ для расчета плоской стержневой системы, в которой все узлы (или некоторая их часть) жесткие (рис. 2.1, *a*). Для жесткого узла назначаются три неизвестных перемещения: два линейных (по горизонтали и по вертикали) и одно угловое перемещение (рис. 2.1, *б*).

В отличие от метода перемещений, рассматриваемого в курсе строительной механики [3, 7, 11], продольными деформациями стержней не пренебрегаем, поэтому при выборе основной системы каждый узел закрепляется от смещения по горизонтали и вертикали (рис. 2.1, *в*). С одной стороны, это увеличивает количество неизвестных, а с другой, существенно упрощает алгоритм расчета. Для шарнирного узла определяются два линейных перемещения и добавляются две связи (рис. 2.1, *г*).

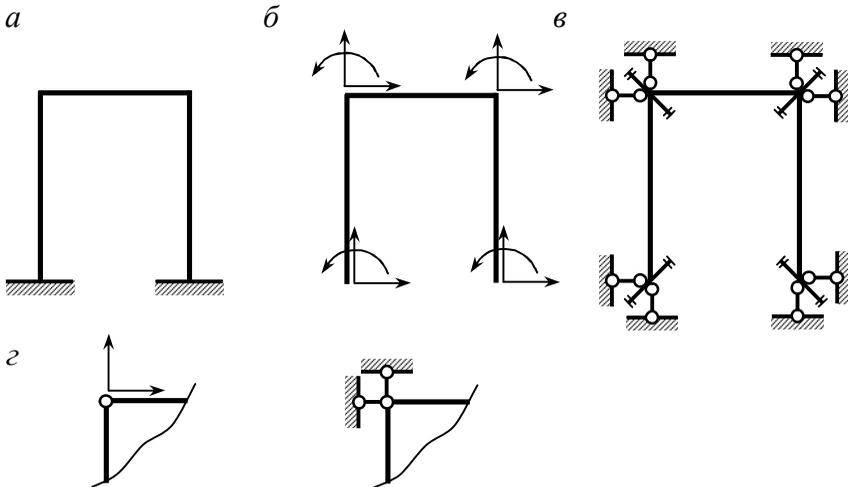


Рис. 2.1

Как отмечалось выше, основная идея МКЭ состоит в разделении исходной конструкции на отдельные части (КЭ), для которых предварительно произведен расчет на действие единичных значений неизвестных узловых перемещений и внешних воздействий.

Таким образом, возможно использование для расчета стержневых конструкций КЭ произвольного вида, например, с ломаной (рис. 2.2, *а*) или криволинейной осью (рис. 2.2, *б*), переменного сечения по длине (рис. 2.2, *в*). Набор КЭ (библиотека) в этом случае возрастает, что неудобно как разработчикам программных комплексов, так и их пользователям.

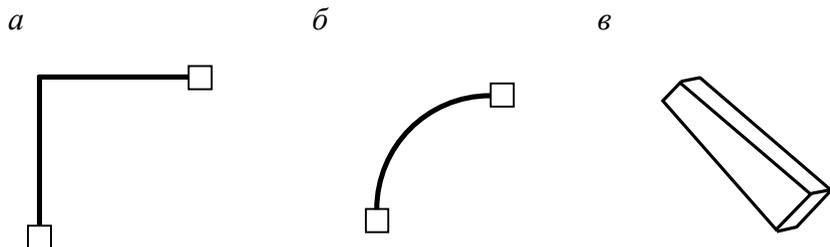


Рис. 2.2

С точки зрения разумного компромисса между разнообразием решаемых задач и количеством используемых для расчета КЭ приемлем следующий подход. Для расчета плоской стержневой системы назначим узлы в следующих местах:

- перелома осей системы;
- изменения размеров поперечного сечения и (или) материала стержня;
- расположения шарниров и (или) опорных связей;
- приложения сосредоточенных сил, моментов;
- начала и (или) конца действия распределенных нагрузок.

В этом случае для расчета стержневой системы достаточно четырех различных типов КЭ:

- элемент, жестко примыкающий к узлам в начале и в конце (рис. 2.3, *а*);
- элемент, шарнирно примыкающий к узлу в начале и жестко в конце (рис. 2.3, *б*);
- элемент, жестко примыкающий к узлу в начале и шарнирно в конце (рис. 2.3, *в*);
- элемент, примыкающий к узлам в начале и в конце шарнирно (рис. 2.3, *г*).

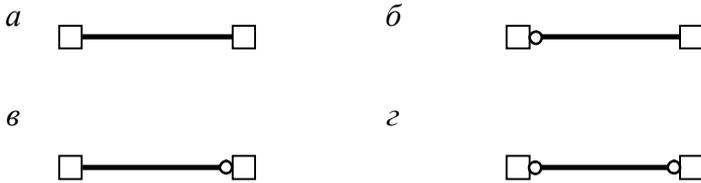


Рис. 2.3

В случае, если конструкция имеет плавно меняющуюся жесткость по длине, то ее следует разбить на ряд КЭ постоянного сечения (рис. 2.4, *а*). В стержень с криволинейной осью необходимо вписать ломаную (рис. 2.4, *б*). Результаты расчета в этих случаях будут зависеть от количества КЭ; с увеличением их числа точность решения будет увеличиваться.

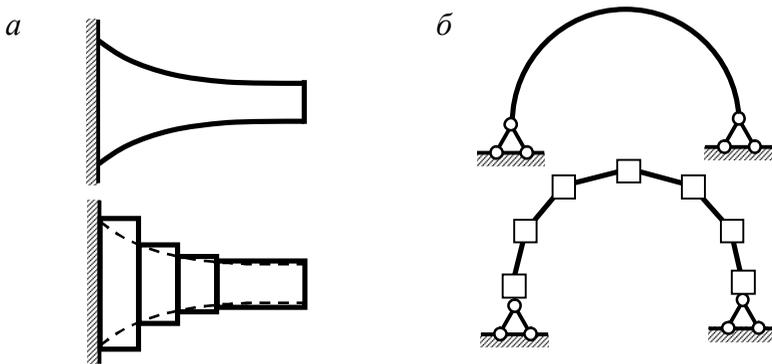


Рис. 2.4

Матрицы жесткости $[k^*]$ и направляющих косинусов $[C]$ КЭ (рис. 2.3, *з*) были получены ранее. Получим матрицы жесткости и направляющих косинусов для остальных типов КЭ.

Рассмотрим КЭ, жестко примыкающий к узлам в начале и в конце (рис. 2.5, *а*). Так как по концам элемента возникает шесть неизвестных перемещений, то матрицы жесткости и направляющих косинусов будут иметь размер 6×6 .

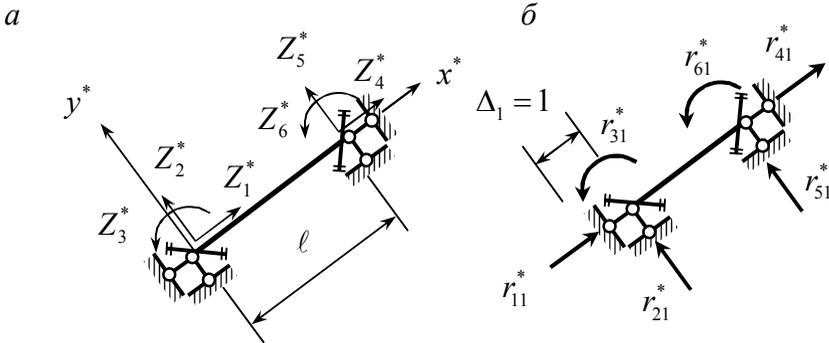


Рис. 2.5

Зададим единичное перемещение $\Delta_1 = 1$ и определим реакции в наложенных связях. В результате получим первый столбец матрицы жесткости (см. раздел 1):

$$r_{11}^* = -N = \frac{EA}{\ell}; \quad r_{21}^* = r_{31}^* = 0; \quad r_{41}^* = N = -\frac{EA}{\ell}; \quad r_{51}^* = r_{61}^* = 0.$$

Зададим по направлению второй добавленной связи единичное перемещение $\Delta_2 = 1$ (рис. 2.6, *а*). С помощью табличной эпюры метода перемещений (рис. 2.6, *б*) определим реакции в связях:

$$M_A = M_B = \frac{6EJ}{\ell^2}; \quad R_A = R_B = \frac{12EJ}{\ell^3}.$$

Сопоставляя направления реакций и перемещений, заполним второй столбец матрицы жесткости:

$$r_{12}^* = 0; r_{22}^* = R_A = \frac{12EJ}{\ell^3}; r_{23}^* = M_A = \frac{6EJ}{\ell^2};$$

$$r_{42}^* = 0; r_{52}^* = -R_B = -\frac{12EJ}{\ell^3}; r_{62}^* = M_B = \frac{6EJ}{\ell^2}.$$

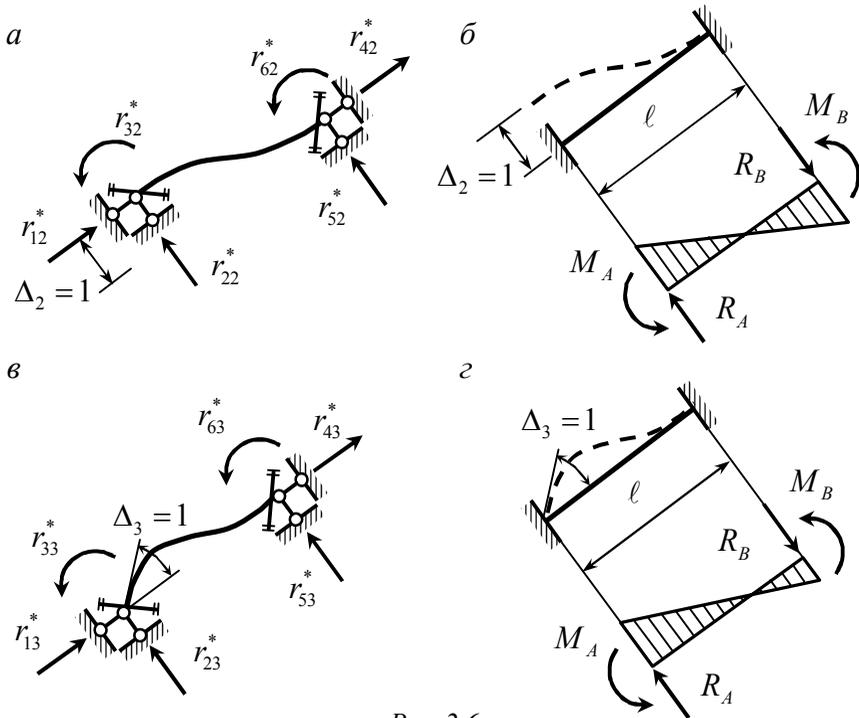


Рис. 2.6

Задавая единичный угол поворота $\Delta_3 = 1$ (рис. 2.6, в), определим реакции по концам стержня (рис. 2.6, г):

$$M_A = \frac{4EJ}{\ell}; M_B = \frac{2EJ}{\ell}; R_A = R_B = \frac{6EJ}{\ell^2}.$$

Аналогичным способом заполним третий столбец матрицы жесткости:

$$r_{13}^* = 0; r_{23}^* = R_A = \frac{6EJ}{\ell^2}; r_{33}^* = M_A = \frac{4EJ}{\ell};$$

$$r_{43}^* = 0; r_{53}^* = -R_B = -\frac{6EJ}{\ell^2}; r_{63}^* = M_B = \frac{2EJ}{\ell}.$$

Задавая единичные перемещения по направлению связей в конце элемента, вычислим остальные реакции и сформируем матрицу жесткости КЭ:

$$[k^*] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{\ell} & 0 & 0 & -\frac{EA}{\ell} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EJ}{\ell^3} & \frac{6EJ}{\ell^2} & 0 & -\frac{12EJ}{\ell^3} & \frac{6EJ}{\ell^2} \\ 0 & \frac{6EJ}{\ell^2} & \frac{4EJ}{\ell} & 0 & -\frac{6EJ}{\ell^2} & \frac{2EJ}{\ell} \\ -\frac{EA}{\ell} & 0 & 0 & \frac{EA}{\ell} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EJ}{\ell^3} & -\frac{6EJ}{\ell^2} & 0 & \frac{12EJ}{\ell^3} & -\frac{6EJ}{\ell^2} \\ 0 & \frac{6EJ}{\ell^2} & \frac{2EJ}{\ell} & 0 & -\frac{6EJ}{\ell^2} & \frac{4EJ}{\ell} \end{bmatrix}.$$

Формулы для перевода линейных перемещений Z_1^* , Z_2^* , Z_4^* , Z_5^* из местной системы координат в общую систему были получены ранее. Так как угловые перемещения Z_3^* , Z_6^* не меняются при повороте осей координат, то

$$Z_3^* = Z_3 \text{ и } Z_6^* = Z_6.$$

Таким образом, матрица направляющих косинусов для КЭ, жестко примыкающего к узлам в начале и в конце, имеет вид:

$$[C] = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Сформируем матрицу жесткости и направляющих косинусов КЭ, имеющего шарнир в начале элемента (рис. 2.3, б). Размер этих матриц в соответствии с числом неизвестных будет 5×5 . Матрица жесткости КЭ формируется с помощью таблиц метода перемещений, матрица направляющих косинусов – вычеркиванием третьей строки и третьего столбца из матрицы для КЭ первого типа:

$$[k^*] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{\ell} & 0 & -\frac{EA}{\ell} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3EJ}{\ell^3} & 0 & -\frac{3EJ}{\ell^3} & \frac{3EJ}{\ell^2} \\ -\frac{EA}{\ell} & 0 & \frac{EA}{\ell} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3EJ}{\ell^3} & 0 & \frac{3EJ}{\ell^3} & -\frac{3EJ}{\ell^2} \\ 0 & \frac{3EJ}{\ell^2} & 0 & -\frac{3EJ}{\ell^2} & \frac{3EJ}{\ell} \end{bmatrix},$$

$$[C] = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 & 0 & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Матрица направляющих косинусов и матрица жесткости КЭ, имеющего шарнир в конце элемента (рис. 2.3, в), формируются аналогично:

$$[C] = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 & 0 & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & 0 & 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix},$$

$$[k^*] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{\ell} & 0 & 0 & -\frac{EA}{\ell} & 0 \\ 0 & \frac{3EJ}{\ell^3} & \frac{3EJ}{\ell^2} & 0 & -\frac{3EJ}{\ell^3} \\ 0 & \frac{3EJ}{\ell^2} & \frac{3EJ}{\ell} & 0 & -\frac{3EJ}{\ell^2} \\ -\frac{EA}{\ell} & 0 & 0 & \frac{EA}{\ell} & 0 \\ 0 & -\frac{3EJ}{\ell^3} & -\frac{3EJ}{\ell^2} & 0 & \frac{3EJ}{\ell^3} \end{bmatrix}.$$

Для формирования вектора узловых нагрузок $\{F\}$ необходимо, чтобы вся нагрузка была приложена к узлам конструкции (рис. 2.7, а). Распределенную нагрузку, действующую на КЭ, необходимо заменить эквивалентной узловой.

Предварительно следует разложить равномерно распределенную нагрузку для КЭ с жестким примыканием к узлам в начале и в конце (рис. 2.7, б) по направлениям местной системы координат x^* , y^* (рис. 2.7, в), в соответствии с формулами:

$$q_x = q \sin \alpha ;$$

$$q_y = q \cos \alpha .$$

Затем, используя табличные эпюры метода перемещений, находим реакции по концам стержня (рис. 2.7, г):

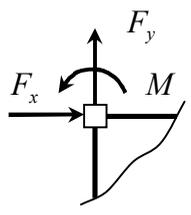
$$R_{Ay} = R_{By} = \frac{q_y \ell}{2} ;$$

$$M_A = M_B = \frac{q_y \ell^2}{12} ;$$

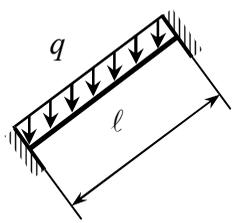
$$R_{Ax} = R_{Bx} = \frac{q_x \ell}{2} .$$

Узловые силы и моменты, заменяющие распределенную нагрузку, численно равны реакциям по концам стержня и направлены в противоположную сторону (рис. 2.7, д).

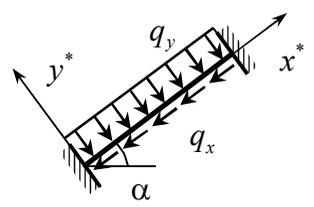
a



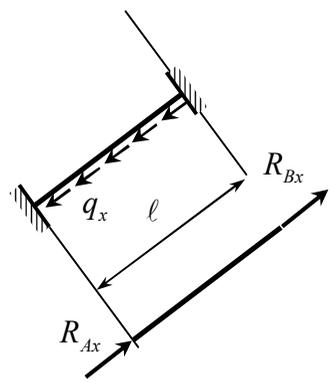
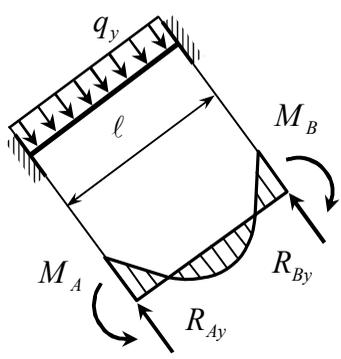
б



в



г



д

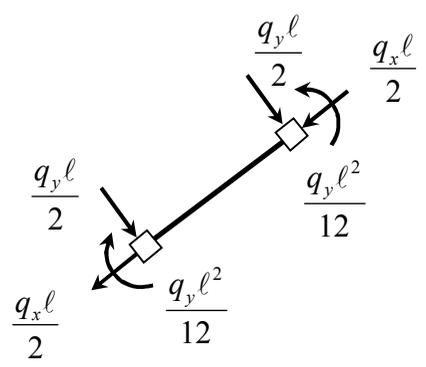


Рис. 2.7

Преобразование нагрузки для других типов КЭ осуществляется аналогично. Полученные узловые силы необходимо перевести из местной системы координат в общую систему координат по формуле

$$\{F_{(j)}\} = [C] \times \{F^*\}.$$

Узловые силы и моменты, полученные при обработке всех КЭ, примыкающих к узлу, складываются. Формирование вектора узловых нагрузок и учет опорных связей осуществляется аналогично расчету стержневых систем, элементы которых работают на растяжение (сжатие).

После решения системы уравнений

$$[K] \times \{Z\} = \{F\}$$

получим вектор узловых перемещений $\{Z\}$.

По известным перемещениям по концам элемента определим реакции и внутренние усилия для каждого КЭ. Необходимо учесть, что для КЭ с распределенной нагрузкой реакции по концам элемента от перемещений $\{r^*\} = [k^*] \times \{Z^*\}$ складываются с реакциями от внеузловой нагрузки. Из условий равновесия определяем внутренние усилия в элементе и строим эпюры изгибающих моментов, поперечных и продольных сил.

Рассмотренный выше способ формирования матриц жесткости в местной системе координат требует предварительного расчета КЭ на смещение связей. Такой подход не является универсальным (в частности, его невозможно использовать для МКЭ в расчетах пластин, оболочек, массивных тел). Для таких задач используется иной прием, рассмотренный в следующем разделе.

3. ВЫВОД МАТРИЦЫ ЖЕСТКОСТИ СТЕРЖНЯ ИЗ ВАРИАЦИОННОГО ПРИНЦИПА ЛАГРАНЖА

Элементы матриц жесткости для стержневых КЭ были получены ранее по результатам расчета стержня на принудительное смещение узлов. Рассмотрим более общий подход, использующий вариационный принцип Лагранжа [7]:

из множества перемещений, удовлетворяющих граничным условиям, истинными будут перемещения, придающие полной энергии системы стационарное значение.

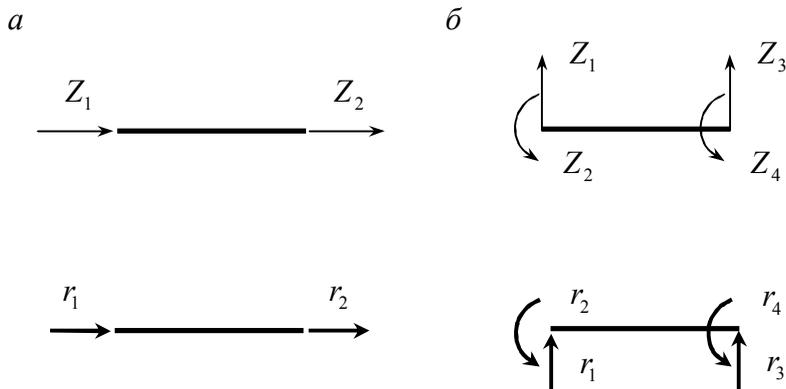


Рис. 3.1

Получим элементы матрицы жесткости стержня (рис. 3.1, а), работающего на растяжение (сжатие). Обозначим через Z_1, Z_2, r_1, r_2 перемещения и реакции по концам стержня. Индекс *, указывающий на принадлежность к местной системе координат, при выводе формул опустим.

Потенциальная энергия деформации стержня длиной ℓ при растяжении (сжатии) вычисляется по формуле

$$U = \frac{EA}{2} \int_0^{\ell} [u'(x)]^2 dx .$$

Функцию продольных перемещений $u(x)$ зададим с точностью до двух параметров a_1, a_2 :

$$u(x) = a_1 + a_2 x .$$

Выразим продольные перемещения $u(x)$ через узловые перемещения Z_1, Z_2 , используя граничные условия:

$$1) u(0) = a_1 + a_2 \cdot 0 = Z_1 ;$$

$$2) u(\ell) = a_1 + a_2 \cdot \ell = Z_2 .$$

Отсюда следует, что

$$a_1 = Z_1 \text{ и } a_2 = \frac{Z_2 - a_1}{\ell} = \frac{Z_2 - Z_1}{\ell} .$$

Таким образом, формула для перемещений примет вид:

$$u(x) = a_1 + a_2 \cdot x = Z_1 + \frac{(Z_2 - Z_1)}{\ell} x = \left(1 - \frac{x}{\ell}\right) Z_1 + \frac{x}{\ell} Z_2 .$$

Найдем первую производную функции перемещений

$$u'(x) = -\frac{Z_1}{\ell} + \frac{Z_2}{\ell} = \frac{1}{\ell} (Z_2 - Z_1)$$

и квадрат первой производной

$$[u'(x)]^2 = \frac{1}{\ell^2} (Z_2 - Z_1)^2 .$$

Вычислим интеграл

$$\int_0^{\ell} [u'(x)]^2 dx = \frac{1}{\ell^2} (Z_2 - Z_1)^2 \int_0^{\ell} dx = \frac{1}{\ell^2} (Z_2 - Z_1)^2 \ell = \frac{1}{\ell} (Z_2 - Z_1)^2 .$$

Реакции r_1, r_2 на перемещениях Z_1, Z_2 совершают работу

$$W = r_1 Z_1 + r_2 Z_2 .$$

Потенциал внешних сил Π равен работе с обратным знаком, следовательно $\Pi = -W = -r_1 Z_1 - r_2 Z_2$.

Функционал полной энергии стержня равен сумме потенциальной энергии деформации и потенциала внешних сил. Таким образом,

$$\mathcal{E} = U + \Pi = \frac{EA}{2} \frac{1}{\ell} (Z_2^2 - 2 \cdot Z_1 Z_2 + Z_1^2) - r_1 Z_1 - r_2 Z_2.$$

Запишем условия минимума полной энергии в виде:

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial Z_1} = 0 \text{ и } \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial Z_2} = 0.$$

В результате получим следующие уравнения:

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial Z_1} = \frac{EA}{2} \frac{1}{\ell} (-2Z_2 + 2Z_1) - r_1 = 0;$$

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial Z_2} = \frac{EA}{2} \frac{1}{\ell} (2Z_2 - 2Z_1) - r_2 = 0.$$

Из первого уравнения $r_1 = \frac{EA}{\ell} (Z_1 - Z_2),$

из второго уравнения $r_2 = \frac{EA}{\ell} (-Z_1 + Z_2).$

В матричной форме эти выражения имеют вид:

$$\{r\} = \begin{Bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{\ell} & -\frac{EA}{\ell} \\ -\frac{EA}{\ell} & \frac{EA}{\ell} \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{Bmatrix} = [k^*] \times \{Z\},$$

где матрица $[k^*]$ представляет собой матрицу жесткости КЭ, работающего на растяжение (сжатие):

$$[k^*] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{\ell} & -\frac{EA}{\ell} \\ -\frac{EA}{\ell} & \frac{EA}{\ell} \end{bmatrix}.$$

Отличие матрицы $[k^*]$ от аналогичной матрицы, полученной в первом разделе, объясняется тем, что в данном примере в каждом узле принято только одно (продольное) перемещение, а не два, как для шарнирно-стержневой конструкции, показанной на рис. 1.1, б.

Для изгибаемого стержня (рис. 3.1, б) функция прогибов задается полиномом третьей степени

$$v(x) = a_1 + a_2x + a_3x^2 + a_4x^3,$$

а функция углов поворота – как первая производная от функции прогибов

$$\varphi(x) = v'(x) = a_2 + 2a_3x + 3a_4x^2.$$

Граничные условия для КЭ при смещении вертикальной связи на величину $\Delta_1 = 1$ (рис. 3.2, а) имеют вид:

- 1) $v_1(0) = 1$; 2) $\varphi_1(0) = 0$;
- 3) $v_1(\ell) = 0$; 4) $\varphi_1(\ell) = 0$.

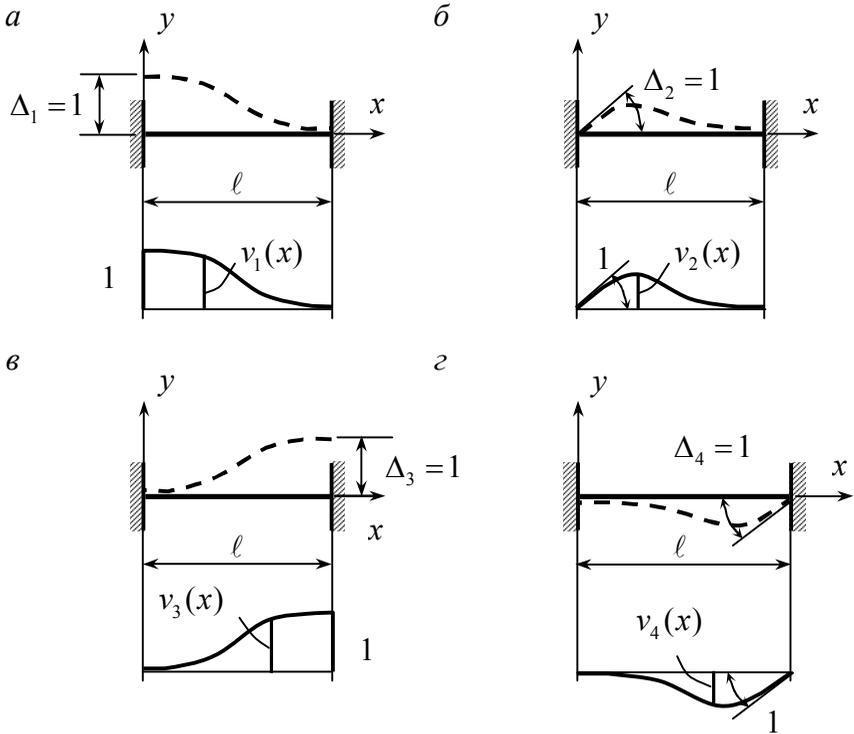


Рис. 3.2

Определим коэффициенты из граничных условий:

$$1) a_1 + a_2 \cdot 0 + a_3 \cdot 0^2 + a_4 \cdot 0^3 = 1; \quad a_1 = 1;$$

$$2) a_2 + 2a_3 \cdot 0 + 3a_4 \cdot 0^2 = 0; \quad a_2 = 0;$$

$$3) 1 + a_3 \ell^2 + a_4 \ell^3 = 0; \quad a_3 + a_4 \ell = -\frac{1}{\ell^2};$$

$$4) 2a_3 \ell + 3a_4 \ell^2 = 0; \quad 2a_3 + 3a_4 \ell = 0.$$

Решим систему двух уравнений:

$$\begin{cases} a_3 + a_4 \ell = -\frac{1}{\ell^2}, \\ 2a_3 + 3a_4 \ell = 0. \end{cases}$$

В результате находим коэффициенты

$$a_3 = -\frac{3}{\ell^2}; \quad a_4 = \frac{2}{\ell^3}.$$

Таким образом,

$$v_1(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3 = 1 - \frac{3}{\ell^2} x^2 + \frac{2}{\ell^3} x^3.$$

Смещая угловую связь на $\Delta_2 = 1$ (рис. 3.2, б), находим:

$$a_1 = 0; \quad a_2 = 1; \quad a_3 = -\frac{2}{\ell}; \quad a_4 = \frac{1}{\ell^2}; \quad v_2(x) = x - \frac{2}{\ell} x^2 + \frac{1}{\ell^2} x^3.$$

Для стержня на рис. 3.2, в находим:

$$a_1 = a_2 = 0; \quad a_3 = \frac{3}{\ell^2}; \quad a_4 = -\frac{2}{\ell^3}; \quad v_3(x) = \frac{3}{\ell^2} x^2 - \frac{2}{\ell^3} x^3.$$

Для стержня на рис. 3.2, г:

$$a_1 = a_2 = 0; \quad a_3 = -\frac{1}{\ell}; \quad a_4 = \frac{1}{\ell^2}; \quad v_4(x) = -\frac{1}{\ell} x^2 + \frac{1}{\ell^2} x^3.$$

Функция прогибов при одновременном смещении всех связей

$$\begin{aligned} v(x) &= Z_1 v_1(x) + Z_2 v_2(x) + Z_3 v_3(x) + Z_4 v_4(x) = \\ &= Z_1 \left(1 - \frac{3}{\ell^2} x^2 + \frac{2}{\ell^3} x^3 \right) + Z_2 \left(x - \frac{2}{\ell} x^2 + \frac{1}{\ell^2} x^3 \right) + \end{aligned}$$

$$+ Z_3 \left(\frac{3}{\ell^2} x^2 - \frac{2}{\ell^3} x^3 \right) + Z_4 \left(-\frac{1}{\ell} x^2 + \frac{1}{\ell^2} x^3 \right).$$

Находим первую производную от функции прогибов

$$v'(x) = Z_1 \left(-\frac{6}{\ell^2} x + \frac{6}{\ell^3} x^2 \right) + Z_2 \left(1 - \frac{4}{\ell} x + \frac{3}{\ell^2} x^2 \right) + \\ + Z_3 \left(\frac{6}{\ell^2} x - \frac{6}{\ell^3} x^2 \right) + Z_4 \left(-\frac{2}{\ell} x + \frac{3}{\ell^2} x^2 \right).$$

Вторая производная от функции прогибов

$$v''(x) = Z_1 \left(-\frac{6}{\ell^2} + \frac{12}{\ell^3} x \right) + Z_2 \left(-\frac{4}{\ell} + \frac{6}{\ell^2} x \right) + \\ + Z_3 \left(\frac{6}{\ell^2} - \frac{12}{\ell^3} x \right) + Z_4 \left(-\frac{2}{\ell} + \frac{6}{\ell^2} x \right).$$

Потенциальная энергия деформации стержня при изгибе

$$U = \frac{EJ}{2} \int_0^\ell [v''(x)]^2 dx.$$

Реакции r_1, r_2, r_3, r_4 на перемещениях Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 совершают работу

$$W = r_1 Z_1 + r_2 Z_2 + r_3 Z_3 + r_4 Z_4.$$

Функционал полной энергии стержня

$$\mathfrak{E} = U + \Pi = \frac{EJ}{2} \int_0^\ell [v''(x)]^2 dx - r_1 Z_1 - r_2 Z_2 - r_3 Z_3 - r_4 Z_4.$$

Реакцию r_1 найдем из условия $\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial Z_1} = 0$:

$$r_1 = Z_1 EJ \int_0^\ell \left(-\frac{6}{\ell^2} + \frac{12}{\ell^3} x \right)^2 dx + \\ + Z_2 EJ \int_0^\ell \left(-\frac{6}{\ell^2} + \frac{12}{\ell^3} x \right) \left(-\frac{4}{\ell} + \frac{6}{\ell^2} x \right) dx +$$

$$\begin{aligned}
& + Z_3 EJ \int_0^\ell \left(-\frac{6}{\ell^2} + \frac{12}{\ell^3} x \right) \left(\frac{6}{\ell^2} - \frac{12}{\ell^3} x \right) dx + \\
& + Z_4 EJ \int_0^\ell \left(-\frac{6}{\ell^2} + \frac{12}{\ell^3} x \right) \left(-\frac{2}{\ell} + \frac{6}{\ell^2} x \right) dx = \\
& = r_{11} Z_1 + r_{12} Z_2 + r_{13} Z_3 + r_{14} Z_4.
\end{aligned}$$

Вычисляя интегралы, определим реакции:

$$\begin{aligned}
r_{11} & = EJ \int_0^\ell \left(-\frac{6}{\ell^2} + \frac{12}{\ell^3} x \right)^2 dx = \frac{36EJ}{\ell^4} \int_0^\ell \left(-1 + \frac{2}{\ell} x \right)^2 dx = \\
& = \frac{36EJ}{\ell^4} \int_0^\ell \left(1 - \frac{4}{\ell} x + \frac{4}{\ell^2} x^2 \right) dx = \frac{36EJ}{\ell^4} \left(x - \frac{4}{\ell} \frac{x^2}{2} + \frac{4}{\ell^2} \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^\ell = \\
& = \frac{36EJ}{\ell^4} \left(\ell - \frac{4}{\ell} \frac{\ell^2}{2} + \frac{4}{\ell^2} \frac{\ell^3}{3} \right) = \frac{36EJ}{\ell^4} \left(\ell - 2\ell + \frac{4}{3}\ell \right) = \frac{36EJ}{\ell^4} \frac{\ell}{3} = \\
& = \frac{12EJ}{\ell^3};
\end{aligned}$$

$$r_{12} = EJ \int_0^\ell \left(-\frac{6}{\ell^2} + \frac{12}{\ell^3} x \right) \left(-\frac{4}{\ell} + \frac{6}{\ell^2} x \right) dx = \frac{6EJ}{\ell^2};$$

$$r_{13} = EJ \int_0^\ell \left(-\frac{6}{\ell^2} + \frac{12}{\ell^3} x \right) \left(\frac{6}{\ell^2} - \frac{12}{\ell^3} x \right) dx = -\frac{12EJ}{\ell^3};$$

$$r_{14} = EJ \int_0^\ell \left(-\frac{6}{\ell^2} + \frac{12}{\ell^3} x \right) \left(-\frac{2}{\ell} + \frac{6}{\ell^2} x \right) dx = \frac{6EJ}{\ell^2}.$$

Реакции в связях r_2, r_3, r_4 находим из условий:

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial Z_2} = 0; \quad \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial Z_3} = 0; \quad \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial Z_4} = 0$$

аналогичным образом.

После вычисления соответствующих интегралов сформируем матрицу жесткости для изгибаемого элемента в виде:

$$[k^*] = \begin{bmatrix} \frac{12EJ}{\ell^3} & \frac{6EJ}{\ell^2} & -\frac{12EJ}{\ell^3} & \frac{6EJ}{\ell^2} \\ \frac{6EJ}{\ell^2} & \frac{4EJ}{\ell} & -\frac{6EJ}{\ell^2} & \frac{2EJ}{\ell} \\ -\frac{12EJ}{\ell^3} & -\frac{6EJ}{\ell^2} & \frac{12EJ}{\ell^3} & -\frac{6EJ}{\ell^2} \\ \frac{6EJ}{\ell^2} & \frac{2EJ}{\ell} & -\frac{6EJ}{\ell^2} & \frac{4EJ}{\ell} \end{bmatrix}.$$

Объединяя матрицы жесткости элемента, работающего на растяжение (сжатие), с матрицей жесткости изгибаемого элемента, получаем матрицу жесткости сжато-изгибаемого КЭ:

$$[k^*] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{\ell} & 0 & 0 & -\frac{EA}{\ell} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EJ}{\ell^3} & \frac{6EJ}{\ell^2} & 0 & -\frac{12EJ}{\ell^3} & \frac{6EJ}{\ell^2} \\ 0 & \frac{6EJ}{\ell^2} & \frac{4EJ}{\ell} & 0 & -\frac{6EJ}{\ell^2} & \frac{2EJ}{\ell} \\ -\frac{EA}{\ell} & 0 & 0 & \frac{EA}{\ell} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EJ}{\ell^3} & -\frac{6EJ}{\ell^2} & 0 & \frac{12EJ}{\ell^3} & -\frac{6EJ}{\ell^2} \\ 0 & \frac{6EJ}{\ell^2} & \frac{2EJ}{\ell} & 0 & -\frac{6EJ}{\ell^2} & \frac{4EJ}{\ell} \end{bmatrix}.$$

Матрицы жесткости совпали с полученными ранее матрицами, т. к. использованные для вывода функции перемещений $u(x)$, $v_1(x)$, $v_2(x)$, $v_3(x)$, $v_4(x)$ являются точными решениями соответствующих дифференциальных уравнений растяжения (сжатия) и изгиба стержня.

4. РЕШЕНИЕ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Задача по определению напряжений, деформаций и перемещений в пластине, нагруженной в своей плоскости (рис. 4.1, а), называется плоской задачей теории упругости [2].

Если толщина пластины δ существенно меньше ее высоты и ширины, то напряжениями σ_z пренебрегают (плоское напряженное состояние). Если условия нагружения и закрепления тела таковы, что перемещения в направлении оси z равны нулю, то задача относится к случаю плоской деформации.

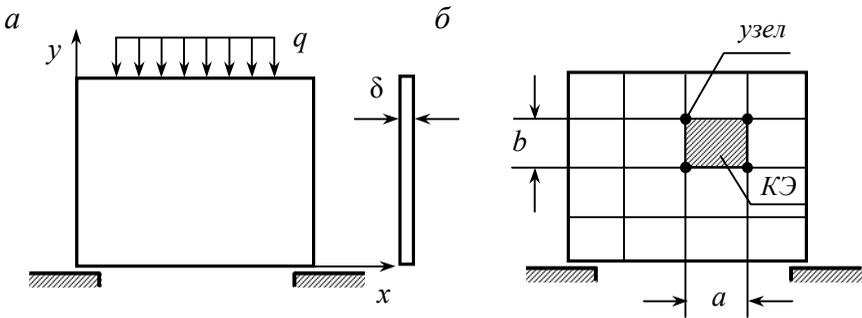


Рис. 4.1

Приведем известные из курса теории упругости [2] уравнения, связывающие между собой напряжения σ_x , σ_y , $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, деформации ε_x , ε_y , γ_{xy} , перемещения u , v , объемные силы X , Y для плоского напряженного состояния.

Уравнения равновесия:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X = 0, \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y = 0. \end{cases}$$

Геометрические уравнения:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Физические уравнения в прямой форме:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \mu\sigma_y);$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \mu\sigma_x);$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{2(1+\mu)}{E}\tau_{xy}.$$

Физические уравнения в обратной форме:

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_x + \mu\varepsilon_y);$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_y + \mu\varepsilon_x);$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\mu)}\gamma_{xy}.$$

В матричной форме эти уравнения представим в виде:

$$[A] \times \{\sigma\} + \{F\} = 0; \quad [B] \times \{Z\} = \{\varepsilon\};$$

$$[C] \times \{\sigma\} = \{\varepsilon\}; \quad [D] \times \{\varepsilon\} = \{\sigma\}.$$

Матрицы $[A]$ и $[B]$ не являются обычными матрицами, а содержат шаблоны для производных, остальные матрицы и векторы формируются обычным способом:

$$[A] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}; \quad [B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}; \quad \{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}; \quad \{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix};$$

$$[C] = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\mu & 0 \\ -\mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\mu) \end{bmatrix}; [D] = \frac{E}{1-\mu^2} \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} \end{bmatrix}; \{Z\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}.$$

Для расчета по МКЭ разделим пластину на конечные элементы прямоугольной формы (рис. 4.1, б). КЭ соединяются между собой в узлах по вершинам элемента (рис. 4.2, а). Схема нумерации узловых перемещений показана на рис. 4.2, б. Индекс *, указывающий на принадлежность к местной системе координат, опустим.

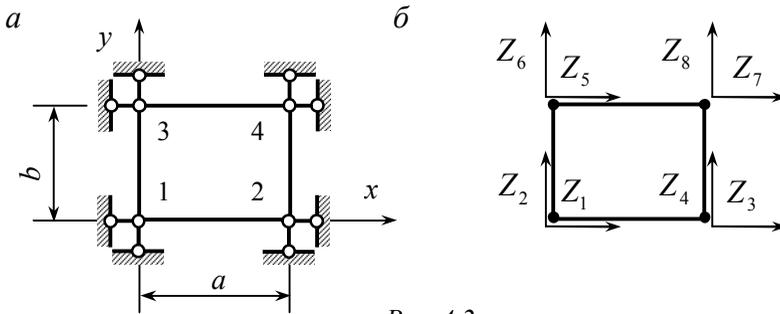


Рис. 4.2

Зададим горизонтальные перемещения $u(x, y)$ для произвольной точки КЭ в виде [10]:

$$u(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 xy.$$

Для определения неизвестных коэффициентов $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ используем условия:

$$1) x = y = 0; \quad u = \alpha_1 = Z_1;$$

$$2) x = a; \quad y = 0; \quad u = Z_3 = Z_1 + \alpha_2 a; \quad \alpha_2 = \frac{Z_3 - Z_1}{a};$$

$$3) x = 0; \quad y = b; \quad u = Z_5 = Z_1 + \alpha_3 b; \quad \alpha_3 = \frac{Z_5 - Z_1}{b};$$

$$4) x = a; \quad y = b; \quad u = Z_7 = Z_1 + \frac{Z_3 - Z_1}{a} a + \frac{Z_5 - Z_1}{b} b + \alpha_4 ab;$$

$$\alpha_4 = \frac{Z_7 + Z_1 - Z_3 - Z_5}{ab}.$$

Подставляя найденные выражения для $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ в формулу для $u(x, y)$, получим

$$u(x, y) = Z_1 + \frac{Z_3 - Z_1}{a} x + \frac{Z_5 - Z_1}{b} y + \frac{Z_7 + Z_1 - Z_3 - Z_5}{ab} xy.$$

Окончательное выражение для горизонтальных перемещений

$$u(x, y) = \frac{(a-x)(b-y)}{ab} Z_1 + \frac{x(b-y)}{ab} Z_3 + \frac{(a-x)y}{ab} Z_5 + \frac{xy}{ab} Z_7.$$

Заменой индексов получим выражение для вертикальных перемещений

$$v(x, y) = \frac{(a-x)(b-y)}{ab} Z_2 + \frac{x(b-y)}{ab} Z_4 + \frac{(a-x)y}{ab} Z_6 + \frac{xy}{ab} Z_8.$$

Из геометрических и физических уравнений выразим $\{\sigma\} = [D] \times \{\varepsilon\} = [D] \times [B] \times \{Z\}$.

Транспонируем формулу для вычисления деформаций

$$\{\varepsilon\}^T = ([B] \times \{Z\})^T = \{Z\}^T \times [B]^T.$$

Энергия деформации, накопленная в единице объема тела,

$$U_0 = \frac{1}{2} (\varepsilon_x \sigma_x + \varepsilon_y \sigma_y + \gamma_{xy} \tau_{xy}) = \frac{1}{2} \{\varepsilon\}^T \times \{Z\} =$$

$$= \frac{1}{2} \{Z\}^T \times [B]^T \times [D] \times [B] \times \{Z\}.$$

Для КЭ толщиной δ с площадью $A = ab$ вычислим двойной интеграл:

$$U = \delta \iint_A U_0 dx dy = \frac{\delta}{2} \iint_A \{Z\}^T \times [B]^T \times [D] \times [B] \times \{Z\} dx dy =$$

$$= \frac{1}{2} \{Z\}^T \times \left(\delta \iint_A [B]^T \times [D] \times [B] dx dy \right) \times \{Z\} = \frac{1}{2} \{Z\}^T \times [k] \times \{Z\}.$$

Матрица $[k]$ представляет собой матрицу жесткости КЭ и вычисляется по формуле $[k] = \delta \iint_A [B]^T \times [D] \times [B] dx dy$.

В соответствии с количеством неизвестных перемещений симметричная матрица $[k]$ имеет размер 8×8 :

$$[k] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{18} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{28} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{81} & k_{82} & \dots & k_{88} \end{bmatrix}.$$

Для примера вычислим коэффициент k_{11} матрицы $[k]$.

Используя первый столбец матрицы $[B]$, получим

$$\{B^{(1)}\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{(a-x)(b-y)}{ab} \right) \\ 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{(a-x)(b-y)}{ab} \right) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{-1(b-y)}{ab} \\ 0 \\ \frac{(a-x)(-1)}{ab} \end{Bmatrix} = \frac{1}{ab} \begin{Bmatrix} y-b \\ 0 \\ x-a \end{Bmatrix}.$$

Матричное произведение $\{B^{(1)}\}^T \times [D] \times \{B^{(1)}\} =$

$$\begin{aligned} &= \frac{E}{a^2 b^2 (1-\mu^2)} \{(y-b) \quad 0 \quad (x-a)\} \times \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} y-b \\ 0 \\ x-a \end{Bmatrix} = \\ &= \frac{E}{a^2 b^2 (1-\mu^2)} \{(y-b) \quad 0 \quad (x-a)\} \times \begin{Bmatrix} y-b \\ \mu(y-b) \\ \frac{(1-\mu)(x-a)}{2} \end{Bmatrix} = \\ &= \frac{E}{a^2 b^2 (1-\mu^2)} \left((y-b)^2 + \frac{(1-\mu)}{2} (x-a)^2 \right). \end{aligned}$$

Вычислим интегралы:

$$\begin{aligned}
 & (y-b)^2 \int_0^a dx + \frac{(1-\mu)}{2} \int_0^a (x-a)^2 dx = (y-b)^2 x \Big|_0^a + \frac{(1-\mu)}{2} \times \\
 & \times \left(\frac{x^3}{3} - 2a \frac{x^2}{2} + a^2 x \right) \Big|_0^a = (y-b)^2 a + \frac{(1-\mu)}{2} \frac{a^3}{3}; \\
 & a \int_0^b (y-b)^2 dy + \frac{(1-\mu)}{6} a^3 \int_0^b dy = a \left(\frac{y^3}{3} - 2a \frac{y^2}{2} + a^2 y \right) \Big|_0^b + \frac{(1-\mu)}{6} \times \\
 & \times a^3 y \Big|_0^b = \frac{ab^3}{3} + \frac{(1-\mu)}{6} a^3 b = \frac{a^2 b^2}{12} \left(\frac{4b}{a} + 2(1-\mu) \frac{a}{b} \right).
 \end{aligned}$$

Реакция в 1-й связи от перемещения $Z_1 = 1$:

$$k_{11} = \delta \iint_A \{B^{(1)}\}^T \times [D] \times \{B^{(1)}\} dx dy = \frac{E\delta}{12(1-\mu^2)} \left(\frac{4b}{a} + 2(1-\mu) \frac{a}{b} \right).$$

Приведем элементы матрицы жесткости КЭ прямоугольной формы для решения плоской задачи теории упругости согласно [3, 10]:

$$\begin{aligned}
 k_{11} &= 4 \frac{b}{a} + 2(1-\mu) \frac{a}{b}; & k_{12} &= \frac{3}{2}(1+\mu); & k_{13} &= -4 \frac{b}{a} + (1-\mu) \frac{a}{b}; \\
 k_{14} &= \frac{3}{2}(3\mu-1); & k_{15} &= 2 \frac{b}{a} - 2(1-\mu) \frac{a}{b}; & k_{16} &= \frac{3}{2}(3\mu-1); \\
 k_{17} &= -2 \frac{b}{a} - (1-\mu) \frac{a}{b}; & k_{18} &= -\frac{3}{2}(1+\mu); \\
 k_{22} &= 4 \frac{a}{b} + 2(1-\mu) \frac{b}{a}; & k_{23} &= \frac{3}{2}(3\mu-1); & k_{24} &= 2 \frac{a}{b} - 2(1-\mu) \frac{b}{a}; \\
 k_{25} &= -\frac{3}{2}(3\mu-1); & k_{26} &= -4 \frac{a}{b} + (1-\mu) \frac{b}{a}; & k_{27} &= -\frac{3}{2}(1+\mu); \\
 k_{28} &= -2 \frac{a}{b} - (1-\mu) \frac{b}{a}; \\
 k_{33} &= 4 \frac{b}{a} + 2(1-\mu) \frac{a}{b}; & k_{34} &= -\frac{3}{2}(1+\mu); & k_{35} &= -2 \frac{b}{a} - (1-\mu) \frac{a}{b};
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_{36} &= \frac{3}{2}(1+\mu); & k_{37} &= 2\frac{b}{a} - 2(1-\mu)\frac{a}{b}; & k_{38} &= -\frac{3}{2}(3\mu-1); \\
k_{44} &= 4\frac{a}{b} + 2(1-\mu)\frac{b}{a}; & k_{45} &= \frac{3}{2}(1+\mu); & k_{46} &= -2\frac{a}{b} - (1-\mu)\frac{b}{a}; \\
k_{47} &= \frac{3}{2}(3\mu-1); & k_{48} &= -4\frac{a}{b} + (1-\mu)\frac{b}{a}; \\
k_{55} &= 4\frac{a}{b} + 2(1-\mu)\frac{b}{a}; & k_{56} &= -\frac{3}{2}(1+\mu); & k_{57} &= -4\frac{b}{a} + (1-\mu)\frac{a}{b}; \\
k_{58} &= \frac{3}{2}(3\mu-1); \\
k_{66} &= 4\frac{a}{b} + 2(1-\mu)\frac{b}{a}; & k_{67} &= -\frac{3}{2}(3\mu-1); & k_{68} &= 2\frac{a}{b} - 2(1-\mu)\frac{b}{a}; \\
k_{77} &= 4\frac{b}{a} + 2(1-\mu)\frac{a}{b}; & k_{78} &= \frac{3}{2}(1+\mu); & k_{88} &= 4\frac{a}{b} + 2(1-\mu)\frac{b}{a}.
\end{aligned}$$

Общий множитель к матрице жесткости $\frac{E\delta}{12(1-\mu^2)}$.

Распределенная нагрузка, действующая по граням КЭ, приводится к узловой по способу рычага (рис. 4.3).

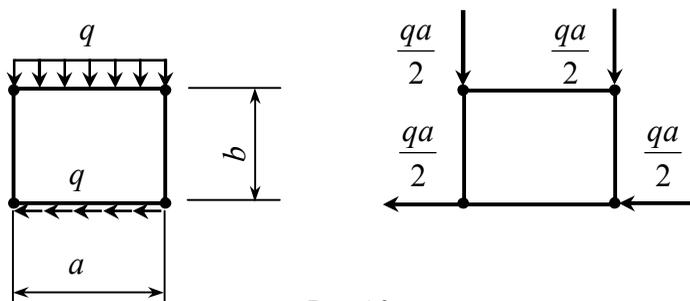


Рис. 4.3

Формирование глобальной матрицы жесткости, вектора узловых нагрузок, способы учета опорных связей осуществляются аналогично расчету стержневых систем (раздел 1, 2).

После формирования и решения системы уравнений напряжения в центре тяжести КЭ вычисляются из условий равновесия (рис. 4.4) по формулам:

$$\sigma_x = \frac{r_3 + r_7}{b\delta} = -\frac{r_1 + r_5}{b\delta}; \quad \sigma_y = \frac{r_6 + r_8}{a\delta} = -\frac{r_2 + r_4}{a\delta};$$

$$\tau_{yx} = \frac{r_4 + r_8}{b\delta} = -\frac{r_2 + r_6}{b\delta}; \quad \tau_{xy} = \frac{r_5 + r_7}{a\delta} = -\frac{r_1 + r_3}{a\delta}.$$

Для вычисления напряжений в произвольной точке прямоугольного КЭ можно использовать формулы, приведенные в [3].

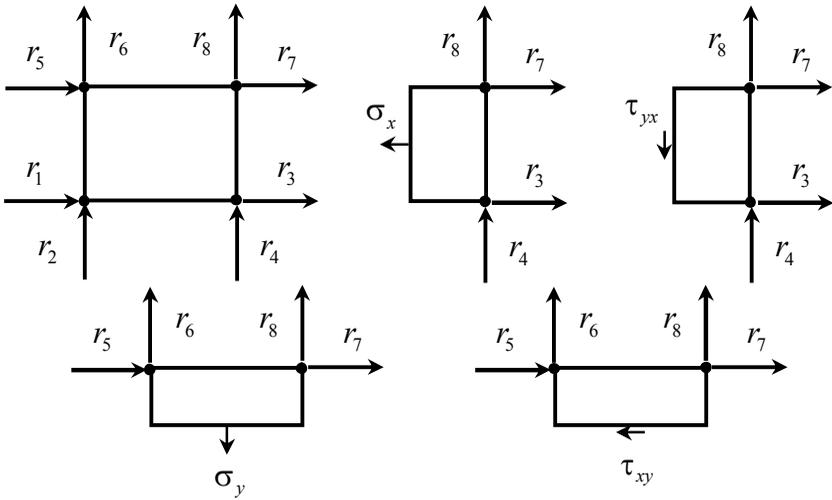


Рис. 4.4

Для моделирования пластины произвольной формы необходимо использовать, кроме рассмотренного выше прямоугольного КЭ, треугольный элемент. Получим матрицу жесткости КЭ в виде прямоугольного треугольника (рис. 4.5, а). Нумерация узловых перемещений приведена на рис. 4.5, б. Зададим горизонтальные перемещения $u(x, y)$ и вертикальные перемещения $v(x, y)$ для произвольной точки КЭ в виде [10]:

$$u(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y; \quad v(x, y) = \alpha_4 + \alpha_5 x + \alpha_6 y.$$

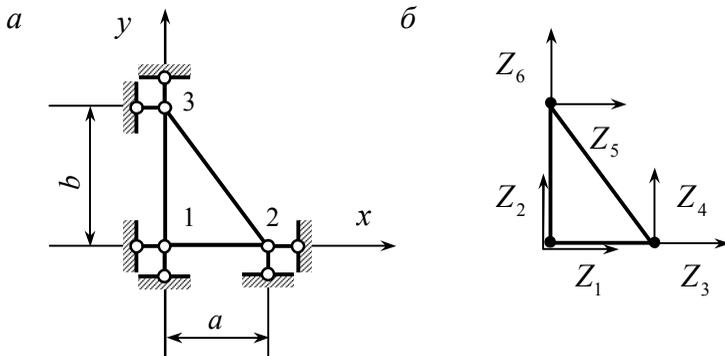


Рис. 4.5

Для определения неизвестных коэффициентов $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ используем условия:

- 1) $x = y = 0; \quad u = Z_1;$
- 2) $x = a; \quad y = 0; \quad u = Z_3;$
- 3) $x = 0; \quad y = b; \quad u = Z_5.$

Подставляя эти условия в формулу для $u(x, y)$, получим:

- 1) $Z_1 = \alpha_1 + \alpha_2 \cdot 0 + \alpha_3 \cdot 0; \quad \alpha_1 = Z_1;$
- 2) $Z_3 = \alpha_1 + \alpha_2 \cdot a + \alpha_3 \cdot 0; \quad \alpha_2 = \frac{Z_3 - \alpha_1}{a} = \frac{Z_3 - Z_1}{a};$
- 3) $Z_5 = \alpha_1 + \alpha_2 \cdot 0 + \alpha_3 \cdot b; \quad \alpha_3 = \frac{Z_5 - \alpha_1}{b} = \frac{Z_5 - Z_1}{b}.$

Таким образом, перемещения в КЭ по горизонтали

$$u(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y = Z_1 + \frac{Z_3 - Z_1}{a} x + \frac{Z_5 - Z_1}{b} y = \left(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) Z_1 + \frac{x}{a} Z_3 + \frac{y}{b} Z_5.$$

Заменой индексов получим перемещения в КЭ по вертикали:

$$v(x, y) = \left(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) Z_2 + \frac{x}{a} Z_4 + \frac{y}{b} Z_6.$$

Для вычисления элементов k_{11}, k_{12} матрицы жесткости КЭ используем первый и второй столбцы матрицы $[B]$:

$$\{B^{(1)}\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \left(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b} \right) \\ 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b} \right) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{1}{a} \\ 0 \\ -\frac{1}{b} \end{Bmatrix} = -\begin{Bmatrix} \frac{1}{a} \\ 0 \\ \frac{1}{b} \end{Bmatrix};$$

$$\{B^{(2)}\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b} \right) \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b} \right) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{b} \\ -\frac{1}{a} \end{Bmatrix} = -\begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{1}{b} \\ \frac{1}{a} \end{Bmatrix}.$$

Матричное произведение

$$\begin{aligned} & \{B^{(1)}\}^T \times [D] \times \{B^{(1)}\} = \\ & = \frac{E}{(1-\mu^2)} \begin{Bmatrix} \frac{1}{a} & 0 & \frac{1}{b} \end{Bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \frac{1}{a} \\ 0 \\ \frac{1}{b} \end{Bmatrix} = \\ & = \frac{E}{(1-\mu^2)} \begin{Bmatrix} \frac{1}{a} & 0 & \frac{1}{b} \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \frac{1}{a} \\ \frac{\mu}{a} \\ \frac{1-\mu}{2b} \end{Bmatrix} = \\ & = \frac{E}{(1-\mu^2)} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{(1-\mu)}{2} \frac{1}{b^2} \right). \end{aligned}$$

Интеграл по площади КЭ

$$\iint_A dx dy = A = \frac{ab}{2}.$$

Реакция в 1-й связи от перемещения $Z_1 = 1$:

$$\begin{aligned} k_{11} &= \delta \{B^{(1)}\}^T \times [D] \times \{B^{(1)}\} \iint_A dx dy = \\ &= \frac{E\delta}{(1-\mu^2)} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{(1-\mu)}{2} \frac{1}{b^2} \right) \frac{ab}{2} = \frac{E\delta}{12(1-\mu^2)} \left(6 \frac{b}{a} + 3(1-\mu) \frac{a}{b} \right). \end{aligned}$$

Матричное произведение

$$\begin{aligned} \{B^{(1)}\}^T \times [D] \times \{B^{(2)}\} &= \\ &= \frac{E}{(1-\mu^2)} \left\{ \frac{1}{a} \quad 0 \quad \frac{1}{b} \right\} \times \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{1}{b} \\ \frac{1}{a} \end{Bmatrix} = \\ &= \frac{E}{(1-\mu^2)} \left\{ \frac{1}{a} \quad 0 \quad \frac{1}{b} \right\} \times \begin{Bmatrix} \frac{\mu}{b} \\ \frac{1}{b} \\ \frac{1-\mu}{2a} \end{Bmatrix} = \\ &= \frac{E}{(1-\mu^2)} \left(\frac{\mu}{ab} + \frac{(1-\mu)}{2} \frac{1}{ab} \right) = \frac{E}{(1-\mu^2)2ab} (\mu+1). \end{aligned}$$

Реакция в 1-й связи от перемещения $Z_2 = 1$:

$$\begin{aligned} k_{12} &= \delta \{B^{(1)}\}^T \times [D] \times \{B^{(2)}\} \iint_A dx dy = \\ &= \frac{E\delta}{(1-\mu^2)2ab} (\mu+1) \frac{ab}{2} = \frac{E\delta}{12(1-\mu^2)} (3(1+\mu)). \end{aligned}$$

Матрица жесткости КЭ в виде прямоугольного треугольника имеет вид:

$$[K] = \frac{E\delta}{12(1-\mu^2)} \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} \\ & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} \\ & & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} \\ & & & k_{44} & k_{45} & k_{46} \\ & & & & k_{55} & k_{56} \\ & & & & & k_{66} \end{bmatrix},$$

симметрично

где, согласно [3, 13]:

$$k_{11} = 6\frac{b}{a} + 3(1-\mu)\frac{a}{b}; \quad k_{12} = 3(1+\mu); \quad k_{13} = -6\frac{b}{a};$$

$$k_{14} = -3(1-\mu); \quad k_{15} = -3(1-\mu)\frac{a}{b}; \quad k_{16} = -6\mu;$$

$$k_{22} = 6\frac{a}{b} + 3(1-\mu)\frac{b}{a}; \quad k_{23} = -6\mu; \quad k_{24} = -3(1-\mu)\frac{b}{a};$$

$$k_{25} = -3(1-\mu); \quad k_{26} = -6\frac{a}{b};$$

$$k_{33} = 6\frac{b}{a}; \quad k_{34} = k_{35} = 0; \quad k_{36} = 6\mu;$$

$$k_{44} = 3(1-\mu)\frac{b}{a}; \quad k_{45} = 3(1-\mu); \quad k_{46} = 0;$$

$$k_{55} = 3(1-\mu)\frac{a}{b}; \quad k_{56} = 0;$$

$$k_{66} = 6\frac{a}{b}.$$

Для вычисления напряжений в треугольном КЭ используются формулы:

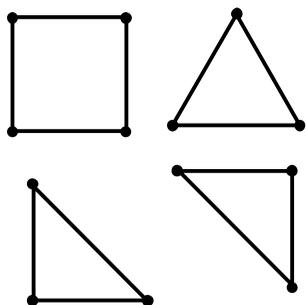
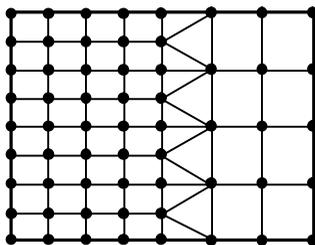
$$\{\varepsilon\} = [B] \times \{Z\} =$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \times \left\{ \begin{bmatrix} \left(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) Z_1 + \frac{x}{a} Z_3 + \frac{y}{b} Z_5 \\ \left(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) Z_2 + \frac{x}{a} Z_4 + \frac{y}{b} Z_6 \end{bmatrix} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} \frac{Z_3 - Z_1}{a} \\ \frac{Z_6 - Z_2}{b} \\ \frac{Z_5 - Z_1}{b} + \frac{Z_4 - Z_2}{a} \end{bmatrix} \right\}; \\
\{\sigma\} &= \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = [D]\{\varepsilon\} = \frac{E}{1-\mu^2} \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} \end{bmatrix} \times \left\{ \begin{bmatrix} \frac{Z_3 - Z_1}{a} \\ \frac{Z_6 - Z_2}{b} \\ \frac{Z_5 - Z_1}{b} + \frac{Z_4 - Z_2}{a} \end{bmatrix} \right\} = \\
&= \frac{E}{1-\mu^2} \left\{ \begin{bmatrix} \frac{Z_3 - Z_1}{a} + \mu \frac{Z_6 - Z_2}{b} \\ \mu \frac{Z_3 - Z_1}{a} + \frac{Z_6 - Z_2}{b} \\ \frac{1-\mu}{2} \left(\frac{Z_5 - Z_1}{b} + \frac{Z_4 - Z_2}{a} \right) \end{bmatrix} \right\}.
\end{aligned}$$

Отметим, что напряжения $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ для треугольного КЭ постоянны в пределах элемента. Следовательно, эпюры напряжений будут иметь вид ступеней, что не соответствует реальной картине распределения напряжений. Таким образом, для получения достоверных результатов следует разделять рассчитываемую конструкцию на большое количество КЭ.

При назначении узлов конечно-элементной модели (если эта операция производится расчетчиком вручную) следует помнить, что наилучшей формой КЭ является равносторонняя (рис. 4.6, а) либо близкая к ней.

В зонах, где имеет место концентрация напряжений, необходимо сгущать сетку конечных элементов (рис. 4.6, б).

a*б**Рис. 4.6*

На результаты расчета оказывает влияние порядок нумерации неизвестных. Оптимальной нумерацией считается такая, при которой разность номеров перемещений, относящихся к КЭ, оказывается минимальной. В этом случае ширина ленты глобальной матрицы жесткости также будет минимальной (при решении системы уравнений вычисления производятся над лентой, чем она уже, тем меньше операций потребуются). Следует отметить, что в промышленных программных комплексах эта проблема решена (перед решением системы уравнений производится оптимальная перенумерация неизвестных по специальным алгоритмам).

Использование в рамках одной модели КЭ, существенно отличающихся друг от друга по размерам и жесткостным характеристикам, также может привести к ухудшению результатов расчета. В некоторых случаях целесообразно использовать специальные приемы (например, использовать для имитации КЭ большой жесткости «жесткие вставки» [9]).

5. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПО МКЭ

Пример 5.1. Для заданной шарнирно-стержневой системы (рис. 5.1, а) требуется определить перемещения узлов и продольные силы в стержнях. Числовые данные для расчета:

$$L = 4\text{ м}; H = 3\text{ м}; F = 10\text{ кН}; EA = 100\text{ кН}.$$

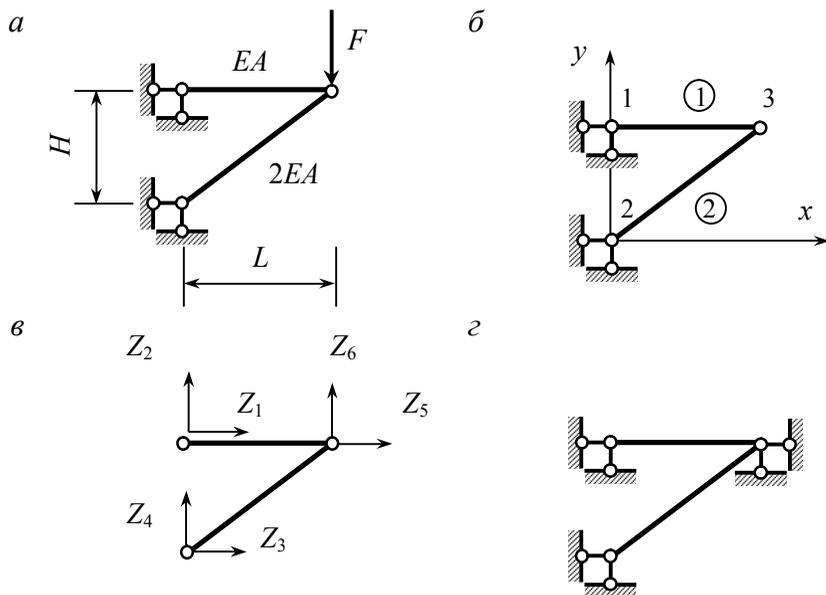


Рис. 5.1

Выберем общую систему координат и пронумеруем узлы и конечные элементы (рис. 5.1, б). Схема нумерации неизвестных перемещений приведена на рис. 5.1, в. Для выбора основной системы добавим связи по направлению всех перемещений (рис. 5.1, г). Сформируем по формулам раздела 1 матрицы жесткости и направляющих косинусов КЭ в местной и общей системах координат.

Стержень № 1 (рис. 5.2)

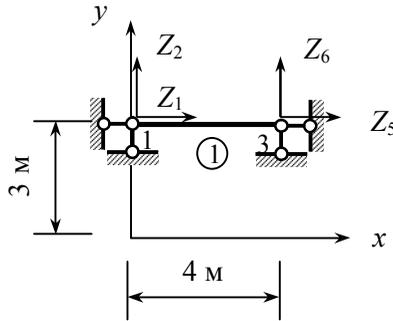


Рис. 5.2

Длина стержня l_1 и тригонометрические функции угла α_1 :

$$l_1 = \sqrt{(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2} = \sqrt{(4 - 0)^2 + (3 - 0)^2} = 5 \text{ м};$$

$$\cos \alpha_1 = \frac{x_3 - x_1}{l_1} = \frac{4 - 0}{5} = 0,8;$$

$$\sin \alpha_1 = \frac{y_3 - y_1}{l_1} = \frac{3 - 0}{5} = 0,6.$$

Матрицы жесткости $[k_{(1)}^*]$ и направляющих косинусов $[C_{(1)}]$:

$$[k_{(1)}^*] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l_1} & 0 & -\frac{EA}{l_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{l_1} & 0 & \frac{EA}{l_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{100}{5} & 0 & -\frac{100}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{100}{5} & 0 & \frac{100}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 20 & 0 & -20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -20 & 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$[C_{(1)}] = \begin{bmatrix} \cos \alpha_1 & -\sin \alpha_1 & 0 & 0 \\ \sin \alpha_1 & \cos \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha_1 & -\sin \alpha_1 \\ 0 & 0 & \sin \alpha_1 & \cos \alpha_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [C_{(1)}]^T.$$

Матрица жесткости $[k_{(1)}]$ в общей системе координат

$$[k_{(1)}] = [C_{(1)}] \times [k_{(1)}^*] \times [C_{(1)}]^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 25 & 0 & -25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -25 & 0 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 & 0 & -25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -25 & 0 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Разошлем матрицу жесткости первого стержня в общую матрицу жесткости размером 6×6 (предварительно все ее ячейки обнуляем):

	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4	Z_5	Z_6
r_1	25	0	0	0	-25	0
r_2	0	0	0	0	0	0
r_3	0	0	0	0	0	0
r_4	0	0	0	0	0	0
r_5	-25	0	0	0	25	0
r_6	0	0	0	0	0	0

Стержень № 2 (рис. 5.3)

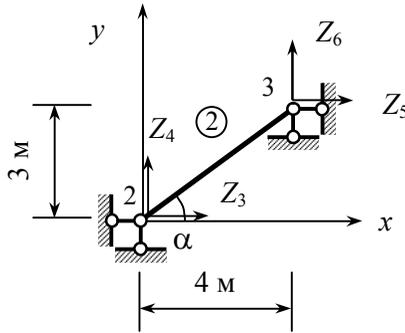


Рис. 5.3

$$l_2 = \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2} = \sqrt{(4 - 0)^2 + (3 - 0)^2} = 5 \text{ м};$$

$$\cos \alpha_2 = \frac{x_3 - x_2}{l_2} = \frac{4 - 0}{5} = 0,800;$$

$$\sin \alpha_2 = \frac{y_3 - y_2}{l_2} = \frac{3 - 0}{5} = 0,600.$$

$$[k_{(2)}^*] = \begin{bmatrix} \frac{2EA}{l_2} & 0 & -\frac{2EA}{l_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{2EA}{l_2} & 0 & \frac{2EA}{l_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{200}{5} & 0 & -\frac{200}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{200}{5} & 0 & \frac{200}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 40 & 0 & -40 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -40 & 0 & 40 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; [C_2] = \begin{bmatrix} 0,8 & -0,6 & 0 & 0 \\ 0,6 & 0,8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,8 & -0,6 \\ 0 & 0 & 0,6 & 0,8 \end{bmatrix}.$$

$$[C_{(2)}]^T = \begin{bmatrix} 0,8 & 0,6 & 0 & 0 \\ -0,6 & 0,8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,8 & 0,6 \\ 0 & 0 & -0,6 & 0,8 \end{bmatrix}.$$

Переводим матрицу жесткости КЭ в общую систему координат:

$$[k_{(2)}^*] \times [C_{(2)}]^T = \begin{bmatrix} 40 & 0 & -40 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -40 & 0 & 40 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0,8 & 0,6 & 0 & 0 \\ -0,6 & 0,8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,8 & 0,6 \\ 0 & 0 & -0,6 & 0,8 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 32 & 24 & -32 & -24 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -32 & -24 & 32 & 24 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$[k_{(2)}] = [C_{(2)}] \times [k_{(2)}^*] \times [C_{(2)}]^T = \begin{bmatrix} 0,8 & -0,6 & 0 & 0 \\ 0,6 & 0,8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,8 & -0,6 \\ 0 & 0 & 0,6 & 0,8 \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} 32 & 24 & -32 & -24 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -32 & -24 & 32 & 24 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25,6 & 19,2 & -25,6 & -19,2 \\ 19,2 & 14,4 & -19,2 & -14,4 \\ -25,6 & -19,2 & -25,6 & 19,2 \\ -19,2 & -14,4 & 19,2 & 14,4 \end{bmatrix}.$$

Разошлем матрицу жесткости второго стержня в общую матрицу жесткости:

	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4	Z_5	Z_6
r_1	25	0	0	0	-25	0
r_2	0	0	0	0	0	0
r_3	0	0	25,6	19,2	-25,6	-19,2
r_4	0	0	19,2	14,4	-19,2	-14,4
r_5	-25	0	-25,6	-19,2	25+25,6	19,2
r_6	0	0	-19,2	-14,4	19,2	14,4

После суммирования получим:

	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4	Z_5	Z_6
r_1	25	0	0	0	-25	0
r_2	0	0	0	0	0	0
r_3	0	0	25,6	19,2	-25,6	-19,2
r_4	0	0	19,2	14,4	-19,2	-14,4
r_5	-25	0	-25,6	-19,2	50,6	19,2
r_6	0	0	-19,2	-14,4	19,2	14,4

Формируем вектор узловых нагрузок $\{F\}$, обходя узлы в порядке нумерации. Так как по направлениям всех перемещений, за исключением перемещения Z_6 , узловые силы отсутствуют, то

$$f_1 = f_2 = f_3 = f_4 = f_5 = 0.$$

Узловая сила $F = 10 \text{ кН}$ направлена противоположно перемещению Z_6 , поэтому

$$f_6 = -10.$$

Таким образом, вектор узловых нагрузок имеет вид:

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -10 \end{Bmatrix}.$$

Учет опорных связей для рассматриваемой стержневой системы выражается условиями: $Z_1 = Z_2 = Z_3 = Z_4 = 0$, т. к. узлы № 1, 2 закреплены от смещения по горизонтали и по вертикали. Вычеркнем строки и столбцы, соответствующие нулевым перемещениям.

	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4	Z_5	Z_6	F
r_1	25	0	0	0	-25	0	0
r_2	0	0	0	0	0	0	0
r_3	0	0	-25,6	-19,2	-25,6	-19,2	0
r_4	0	0	-19,2	-14,4	-19,2	-14,4	0
r_5	-25	0	-25,6	-19,2	50,6	19,2	0
r_6	0	0	-19,2	-14,4	19,2	14,4	-10

После этой операции получим систему двух линейных алгебраических уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} 50,6Z_5 + 19,2Z_6 = 0, \\ 19,2Z_5 + 14,4Z_6 = -10. \end{cases}$$

Из решения системы уравнений находим значения узловых перемещений: $Z_5 = 0,533$ и $Z_6 = -1,405$.

Вектор перемещений $\{Z\} = \{0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0,533 \ -1,405\}^T$.

Используя найденные перемещения, вычислим продольные усилия в стержнях.

Стержень № 1 (рис. 5.4, а):

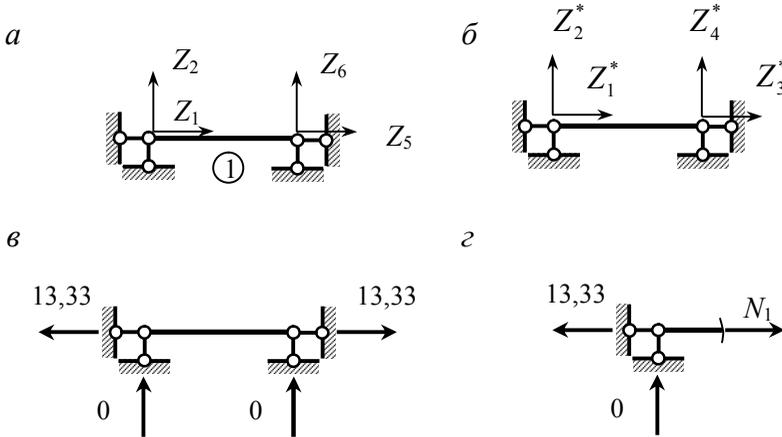


Рис. 5.4

Вектор перемещений по концам стержня в общей системе координат

$$\{Z_{(1)}\} = \begin{Bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_5 \\ Z_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,533 \\ -1,405 \end{Bmatrix}.$$

Переводим перемещения в местную систему координат (рис. 5.4, б)

$$\{Z_{(1)}^*\} = [C_{(1)}]^T \times \{Z_{(1)}\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,533 \\ -1,405 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,533 \\ -1,405 \end{Bmatrix}.$$

Вычислим реакции по концам стержня в местной системе координат

$$\{r_{(1)}^*\} = [k_{(1)}^*] \times \{Z_{(1)}^*\} = \begin{bmatrix} 25 & 0 & -25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -25 & 0 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,533 \\ -1,405 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -13,33 \\ 0 \\ 13,33 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Показываем найденные реакции по концам стержня (рис. 5.4, в). Отрицательные реакции прикладываем в направлении, обратном узловым перемещениям.

Из условия равновесия (рис. 5.4, г) находим продольную силу в первом стержне

$$N_1 = 13,33 \text{ кН.}$$

Стержень № 2 (рис. 5.5, а):

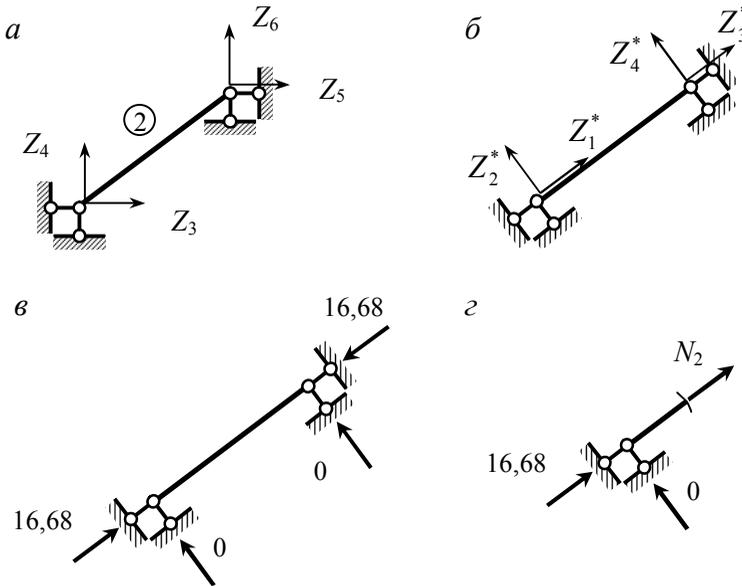


Рис. 5.5

Вектор перемещений по концам стержня № 2

$$\{Z_{(2)}\} = \begin{Bmatrix} Z_3 \\ Z_4 \\ Z_5 \\ Z_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,533 \\ -1,405 \end{Bmatrix}.$$

Переводим в местную систему координат (рис. 5.5, б):

$$\begin{aligned} \{Z_{(2)}^*\} &= [C_{(2)}]^T \times \{Z_{(2)}\} = \begin{bmatrix} 0,8 & 0,6 & 0 & 0 \\ -0,6 & 0,8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,8 & 0,6 \\ 0 & 0 & -0,6 & 0,8 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,533 \\ -1,405 \end{Bmatrix} = \\ &= \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0,417 \\ -1,444 \end{Bmatrix}. \end{aligned}$$

Вектор реакций по концам элемента (рис. 5.5, в)

$$\{r_{(2)}^*\} = [k_{(2)}^*] \times \{Z_{(2)}^*\} = \begin{bmatrix} 40 & 0 & -40 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -40 & 0 & 40 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -0,417 \\ -1,444 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 16,68 \\ 0 \\ -16,68 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Продольная сила в стержне (рис. 5.5, г) $N_2 = -16,68$ кН.

Результаты расчета стержневой системы – деформированная схема и эпюра продольных сил показаны на рис. 5.6, а, б.

Для проверки правильности расчета составим уравнения равновесия для узла № 3 (рис. 5.6, в).

$$\sum x = 0: \quad -N_1 - N_2 \cdot \cos \alpha = 0;$$

$$\sum y = 0: \quad -N_2 \cdot \sin \alpha - F = 0.$$

Подставляя найденные значения продольных сил при $\cos \alpha = 0,800$ и $\sin \alpha = 0,600$, получим:

$$\sum x = 0: -13,33 - (-16,68) \cdot 0,800 = -13,33 + 13,34 = 0,01;$$

$$\sum y = 0: -(-16,68) \cdot 0,600 - 10 = 10,01 - 10 = 0,01.$$

Условия равновесия выполняются, усилия в стержнях вычислены верно.

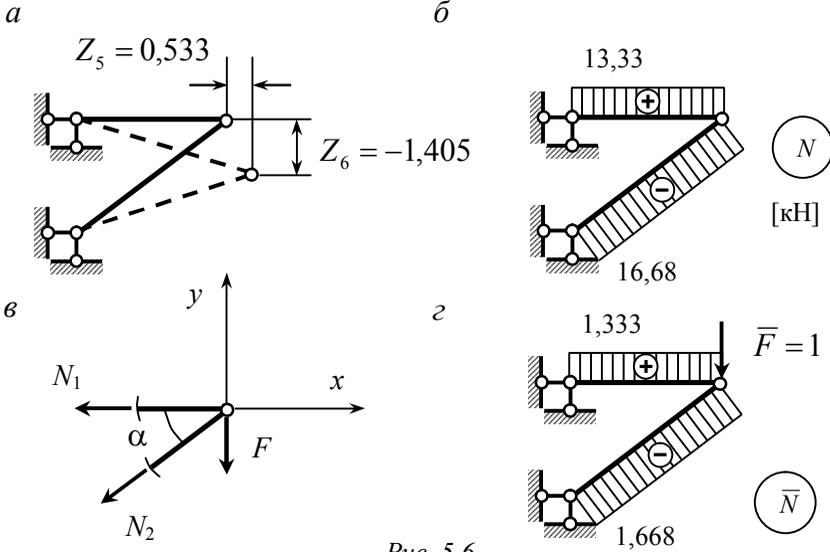


Рис. 5.6

Определим в качестве проверки вертикальное перемещение грузового узла по методу Максвелла–Мора [3, 7] перемножением эпюры продольных сил от внешней нагрузки N и эпюры \bar{N} от единичной силы (рис. 5.6, г):

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \sum \int_0^l \frac{\bar{N} \cdot N}{EA} dx = \frac{13,33 \cdot 4 \cdot 1,333}{EA} + \frac{(-16,68) \cdot 5 \cdot (-1,668)}{2EA} = \\ &= \frac{140,63}{EA} = \frac{140,63}{100} = 1,406. \end{aligned}$$

Результаты по обоим методам совпали (напомним, что знак плюс в ответе означает направление перемещения сверху вниз).

Пример 5.2. Для плоской стержневой системы (рис. 5.7, а) требуется:

- определить перемещения узлов;
- построить эпюры изгибающих моментов, поперечных и продольных сил.

Числовые данные для расчета:

$$L = 3\text{ м}; H = 2\text{ м}; F = 10\text{ кН}; M = 6\text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$q = 4\text{ кН/м}; EA = 40\text{ кН}; EJ = 1\text{ кН}\cdot\text{м}^2.$$

Пронумеруем узлы и КЭ (рис. 5.7, б). Покажем на схеме неизвестные узловые перемещения в общей системе координат (рис. 5.7, в).

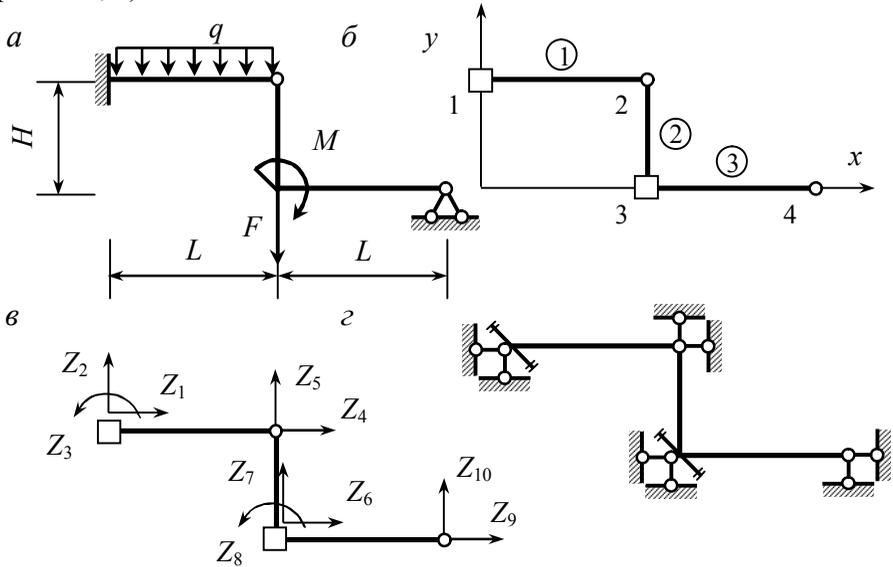


Рис. 5.7

Стержень № 1

$$l_1 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(3 - 0)^2 + (2 - 2)^2} = 3\text{ м};$$

$$\cos \alpha_1 = \frac{x_2 - x_1}{l_1} = \frac{3 - 0}{3} = 1,000;$$

$$\sin \alpha_1 = \frac{y_3 - y_1}{\ell_1} = \frac{2 - 2}{3} = 0,000.$$

Матрица жесткости КЭ в местной системе координат

$$[k_{(1)}^*] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{\ell_1} & 0 & 0 & -\frac{EA}{\ell_1} & 0 \\ 0 & \frac{3EJ}{\ell_1^3} & \frac{3EJ}{\ell_1^2} & 0 & -\frac{3EJ}{\ell_1^3} \\ 0 & \frac{3EJ}{\ell_1^2} & \frac{3EJ}{\ell_1} & 0 & -\frac{3EJ}{\ell_1^2} \\ -\frac{EA}{\ell_1} & 0 & 0 & \frac{EA}{\ell_1} & 0 \\ 0 & -\frac{3EJ}{\ell_1^3} & -\frac{3EJ}{\ell_1^2} & 0 & \frac{3EJ}{\ell_1^3} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{40}{3} & 0 & 0 & -\frac{40}{3} & 0 \\ 0 & \frac{3}{3^3} & \frac{3}{3^2} & 0 & -\frac{3}{3^3} \\ 0 & \frac{3}{3^2} & \frac{3}{3} & 0 & -\frac{3}{3^2} \\ -\frac{40}{3} & 0 & 0 & \frac{40}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{3}{3^3} & -\frac{3}{3^2} & 0 & \frac{3}{3^3} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 13,333 & 0 & 0 & -13,333 & 0 \\ 0 & 0,111 & 0,333 & 0 & -0,111 \\ 0 & 0,333 & 1 & 0 & -0,333 \\ -13,333 & 0 & 0 & 13,333 & 0 \\ 0 & -0,111 & -0,333 & 0 & 0,111 \end{bmatrix}.$$

Матрица направляющих косинусов

$$[C_{(1)}] = \begin{bmatrix} \cos \alpha_1 & -\sin \alpha_1 & 0 & 0 & 0 \\ \sin \alpha_1 & \cos \alpha_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \alpha_1 & -\sin \alpha_1 \\ 0 & 0 & 0 & \sin \alpha_1 & \cos \alpha_1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [C_{(1)}]^T.$$

Матрица жесткости в общей системе координат

$$[k_{(1)}] = [C_{(1)}] \times [k_{(1)}^*] \times [C_{(1)}]^T =$$

$$= \begin{bmatrix} 13,333 & 0 & 0 & -13,333 & 0 \\ 0 & 0,111 & 0,333 & 0 & -0,111 \\ 0 & 0,333 & 1 & 0 & -0,333 \\ -13,333 & 0 & 0 & 13,333 & 0 \\ 0 & -0,111 & -0,333 & 0 & 0,111 \end{bmatrix}.$$

Разошлем в соответствии с нумерацией матрицу жесткости КЭ № 1 в общую матрицу жесткости (рис. 5.8).

	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4	Z_5
r_1	13,333	0	0	-13,333	0
r_2	0	0,111	0,333	0	-0,111
r_3	0	0,333	1	0	-0,333
r_4	-13,333	0	0	13,333	0
r_5	0	-0,111	-0,333	0	0,111

	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4	Z_5	Z_6	Z_7	Z_8	Z_9	Z_{10}
r_1	13,333	0	0	-13,333	0	0	0	0	0	0
r_2	0	0,111	0,333	0	-0,111	0	0	0	0	0
r_3	0	0,333	1	0	-0,333	0	0	0	0	0
r_4	-13,333	0	0	13,333	0	0	0	0	0	0
r_5	0	-0,111	-0,333	0	0,111	0	0	0	0	0
r_6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
r_7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
r_8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
r_9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
r_{10}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Рис. 5.8

Стержень № 2

$$l_2 = \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2} = \sqrt{(3-3)^2 + (0-2)^2} = 2 \text{ м};$$

$$\cos \alpha_1 = \frac{x_3 - x_2}{l_2} = \frac{3-3}{2} = 0,000;$$

$$\sin \alpha_2 = \frac{y_3 - y_2}{l_2} = \frac{0-2}{2} = -1,000.$$

Матрица жесткости КЭ в местной системе координат

$$[k_{(2)}^*] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l_2} & 0 & -\frac{EA}{l_2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3EJ}{l_2^3} & 0 & -\frac{3EJ}{l_2^3} & \frac{3EJ}{l_2^2} \\ -\frac{EA}{l_2} & 0 & \frac{EA}{l_2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3EJ}{l_2^3} & 0 & \frac{3EJ}{l_2^3} & -\frac{3EJ}{l_2^2} \\ 0 & \frac{3EJ}{l_2^2} & 0 & -\frac{3EJ}{l_2^2} & \frac{3EJ}{l_2} \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} \frac{40}{2} & 0 & -\frac{40}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2^3} & 0 & -\frac{3}{2^3} & \frac{3}{2^2} \\ -\frac{40}{2} & 0 & \frac{40}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2^3} & 0 & \frac{3}{2^3} & -\frac{3}{2^2} \\ 0 & \frac{3}{2^2} & 0 & -\frac{3}{2^2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 20 & 0 & -20 & 0 & 0 \\ 0 & 0,375 & 0 & -0,375 & 0,750 \\ -20 & 0 & 20 & 0 & 0 \\ 0 & -0,375 & 0 & 0,375 & -0,750 \\ 0 & 0,750 & 0 & -0,750 & 1,5 \end{bmatrix}.$$

Матрица направляющих косинусов

$$[C_{(2)}] = \begin{bmatrix} \cos \alpha_2 & -\sin \alpha_2 & 0 & 0 & 0 \\ \sin \alpha_2 & \cos \alpha_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha_2 & -\sin \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sin \alpha_2 & \cos \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; [C_{(2)}]^T = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Переводим матрицу жесткости КЭ № 2 в общую систему координат:

$$[k_{(2)}^*] \times [C_{(2)}]^T =$$

$$= \begin{bmatrix} 20 & 0 & -20 & 0 & 0 \\ 0 & 0,375 & 0 & -0,375 & 0,750 \\ -20 & 0 & 20 & 0 & 0 \\ 0 & -0,375 & 0 & 0,375 & -0,750 \\ 0 & 0,750 & 0 & -0,750 & 1,5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -20 & 0 & 20 & 0 \\ 0,375 & 0 & -0,375 & 0 & 0,750 \\ 0 & 20 & 0 & -20 & 0 \\ -0,375 & 0 & 0,375 & 0 & -0,750 \\ 0,750 & 0 & -0,750 & 0 & 1,5 \end{bmatrix}.$$

$$[k_{(2)}] = [C_{(2)}] \times [k_{(2)}^*] \times [C_{(2)}]^T =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & -20 & 0 & 20 & 0 \\ 0,375 & 0 & -0,375 & 0 & 0,750 \\ 0 & 20 & 0 & -20 & 0 \\ -0,375 & 0 & 0,375 & 0 & -0,750 \\ 0,750 & 0 & -0,750 & 0 & 1,500 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0,375 & 0 & -0,375 & 0 & 0,750 \\ 0 & 20 & 0 & -20 & 0 \\ -0,375 & 0 & 0,375 & 0 & -0,750 \\ 0 & -20 & 0 & 20 & 0 \\ 0,750 & 0 & -0,750 & 0 & 1,500 \end{bmatrix}.$$

Разошлем матрицу жесткости КЭ № 2 в общую матрицу жесткости (рис. 5.9).

	Z_4	Z_5	Z_6	Z_7	Z_8
r_4	0,375	0	-0,375	0	0,750
r_5	0	20	0	-20	0
r_6	-0,375	0	0,375	0	-0,750
r_7	0	-20	0	20	0
r_8	0,750	0	-0,750	0	1,500

	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4	Z_5	Z_6	Z_7	Z_8	Z_9	Z_{10}
r_1	13,333	0	0	-13,333	0	0	0	0	0	0
r_2	0	0,111	0,333	0	-0,111	0	0	0	0	0
r_3	0	0,333	1	0	-0,333	0	0	0	0	0
r_4	$\bar{13,333}$	0	0	$13,333+$ $+0,375$	0	-0,375	0	0,750	0	0
r_5	0	-0,111	-0,333	0	0,111+20	0	-20	0	0	0
r_6	0	0	0	-0,375	0	0,375	0	-0,750	0	0
r_7	0	0	0	0	-20	0	20	0	0	0
r_8	0	0	0	0,750	0	-0,750	0	1,500	0	0
r_9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
r_{10}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Рис. 5.9

Стержень № 3

$$l_3 = \sqrt{(x_4 - x_3)^2 + (y_4 - y_3)^2} = \sqrt{(6-3)^2 + (0-0)^2} = 3 \text{ м};$$

$$\cos \alpha_3 = \frac{x_4 - x_3}{l_3} = \frac{6-3}{3} = 1,0; \quad \sin \alpha_3 = \frac{y_4 - y_3}{l_3} = \frac{0-0}{3} = 0,0.$$

$$[k_{(3)}^*] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l_3} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l_3} & 0 \\ 0 & \frac{3EJ}{l_3^3} & \frac{3EJ}{l_3^2} & 0 & -\frac{3EJ}{l_3^3} \\ 0 & \frac{3EJ}{l_3^2} & \frac{3EJ}{l_3} & 0 & -\frac{3EJ}{l_3^2} \\ -\frac{EA}{l_3} & 0 & 0 & \frac{EA}{l_3} & 0 \\ 0 & -\frac{3EJ}{l_3^3} & -\frac{3EJ}{l_3^2} & 0 & \frac{3EJ}{l_3^3} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{40}{3} & 0 & 0 & -\frac{40}{3} & 0 \\ 0 & \frac{3}{3^3} & \frac{3}{3^2} & 0 & -\frac{3}{3^3} \\ 0 & \frac{3}{3^2} & \frac{3}{3} & 0 & -\frac{3}{3^2} \\ -\frac{40}{3} & 0 & 0 & \frac{40}{3} & 0 \\ 0 & -\frac{3}{3^3} & -\frac{3}{3^2} & 0 & \frac{3}{3^3} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 13,333 & 0 & 0 & -13,333 & 0 \\ 0 & 0,111 & 0,333 & 0 & -0,111 \\ 0 & 0,333 & 1 & 0 & -0,333 \\ -13,333 & 0 & 0 & 13,333 & 0 \\ 0 & -0,111 & -0,333 & 0 & 0,111 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{aligned}
[C_{(3)}] &= \begin{bmatrix} \cos \alpha_3 & -\sin \alpha_3 & 0 & 0 & 0 \\ \sin \alpha_3 & \cos \alpha_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \alpha_3 & -\sin \alpha_3 \\ 0 & 0 & 0 & \sin \alpha_3 & \cos \alpha_3 \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [C_{(3)}]^T; [k_{(3)}] = [C_{(3)}] \times [k_{(3)}^*] \times [C_{(3)}]^T = \\
&= \begin{bmatrix} 13,333 & 0 & 0 & -13,333 & 0 \\ 0 & 0,111 & 0,333 & 0 & -0,111 \\ 0 & 0,333 & 1 & 0 & -0,333 \\ -13,333 & 0 & 0 & 13,333 & 0 \\ 0 & -0,111 & -0,333 & 0 & 0,111 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Разошлем матрицу жесткости КЭ № 3 в общую матрицу жесткости (рис. 5.10).

	Z_6	Z_7	Z_8	Z_9	Z_{10}
r_6	13,333	0	0	-13,333	0
r_7	0	0,111	0,333	0	-0,111
r_8	0	0,333	1	0	-0,333
r_9	-13,333	0	0	13,333	0
r_{10}	0	-0,111	-0,333	0	0,111

Матрица жесткости стержневой системы до учета опорных связей показана на рис. 5.11.

	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4	Z_5	Z_6	Z_7	Z_8	Z_9	Z_{10}
r_1	13,333	0	0	-13,333	0	0	0	0	0	0
r_2	0	0,111	0,333	0	-0,111	0	0	0	0	0
r_3	0	0,333	1	0	-0,333	0	0	0	0	0
r_4	-13,333	0	0	13,333+ +0,375	0	-0,375	0	0,750	0	0
r_5	0	-0,111	-0,333	0	0,111+20	0	-20	0	0	0
r_6	0	0	0	-0,375	0	0,375+ +13,333	0	-0,750	-13,333	0
r_7	0	0	0	0	-20	0	20+ +0,111	0,333	0	-0,111
r_8	0	0	0	0,750	0	-0,750	0,333	1,500+1	0	-0,333
r_9	0	0	0	0	0	-13,333	0	0	13,333	0
r_{10}	0	0	0	0	0	0	-0,111	-0,333	0	0,111

Рис. 5.10

	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4	Z_5	Z_6	Z_7	Z_8	Z_9	Z_{10}
r_1	13,333	0	0	-13,333	0	0	0	0	0	0
r_2	0	0,111	0,333	0	-0,111	0	0	0	0	0
r_3	0	0,333	1	0	-0,333	0	0	0	0	0
r_4	-13,333	0	0	13,708	0	-0,375	0	0,750	0	0
r_5	0	-0,111	-0,333	0	20,111	0	-20	0	0	0
r_6	0	0	0	-0,375	0	13,708	0	-0,750	-13,333	0
r_7	0	0	0	0	-20	0	20,111	0,333	0	-0,111
r_8	0	0	0	0,750	0	-0,750	0,333	2,500	0	-0,333
r_9	0	0	0	0	0	-13,333	0	0	13,333	0
r_{10}	0	0	0	0	0	0	-0,111	-0,333	0	0,111

Рис. 5.11

Приводим заданную на КЭ № 1 распределенную нагрузку (рис. 5.12, а) в узлы рамы (рис. 5.12, б). Там же показываем узловые нагрузки.

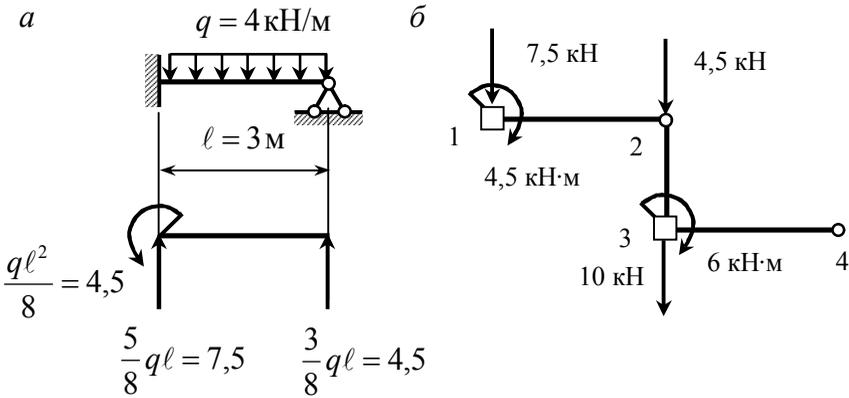


Рис. 5.12

Формируем вектор узловой нагрузки

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -7,5 \\ -4,5 \\ 0 \\ -4,5 \\ 0 \\ -10 \\ -6 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

В соответствии с условиями закрепления конструкции $Z_1 = Z_2 = Z_3 = Z_9 = Z_{10} = 0$.

	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4	Z_5	Z_6	Z_7	Z_8	Z_9	Z_{10}
r_1	-13,333	0	0	-13,333	0	0	0	0	0	0
r_2	0	-0,111	-0,333	0	-0,111	0	0	0	0	0
r_3	0	-0,333	0	0	-0,333	0	0	0	0	0
r_4	-13,333	0	0	13,708	0	-0,375	0	0,750	0	0
r_5	0	-0,111	-0,333	0	20,111	0	-20	0	0	0
r_6	0	0	0	-0,375	0	13,708	0	-0,750	-13,333	0
r_7	0	0	0	0	-20	0	20,111	0,333	0	-0,111
r_8	0	0	0	0,750	0	-0,750	0,333	2,500	0	-0,333
r_9	0	0	0	0	0	-13,333	0	0	-13,333	0
r_{10}	0	0	0	0	0	0	-0,111	-0,333	0	-0,111

Рис. 5.13

Вычеркнем первую, вторую, третью, девятую и десятую строки и столбцы системы уравнений (рис. 5.13). Матрица жесткости и вектор узловых нагрузок системы после учета опорных связей имеют вид:

$$[K] = \begin{bmatrix} 13,708 & 0 & -0,375 & 0 & 0,750 \\ 0 & 20,111 & 0 & -20 & 0 \\ -0,375 & 0 & 13,708 & 0 & -0,750 \\ 0 & -20 & 0 & 20,111 & 0,333 \\ 0,750 & 0 & -0,750 & 0,333 & 2,500 \end{bmatrix}; \{F\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -4,5 \\ 0 \\ -10 \\ -6 \end{Bmatrix}.$$

Решаем полученную систему уравнений:

$$\begin{cases} 13,708Z_4 + 0,000Z_5 - 0,375Z_6 + 0,000Z_7 + 0,750Z_8 = 0, \\ 0,000Z_4 + 20,111Z_5 + 0,000Z_6 - 20,000Z_7 + 0,000Z_8 = -4,5, \\ -0,375Z_4 + 0,000Z_5 + 13,708Z_6 + 0,000Z_7 - 0,750Z_8 = 0, \\ 0,000Z_4 - 20,000Z_5 + 0,000Z_6 + 20,111Z_7 + 0,333Z_8 = -10, \\ 0,750Z_4 + 0,000Z_5 - 0,750Z_6 + 0,333Z_7 + 2,500Z_8 = -6. \end{cases}$$

В результате решения находим вектор перемещений:

$$Z_1 = Z_2 = Z_3 = 0; Z_4 = -0,438; Z_5 = -77,478;$$

$$Z_6 = 0,438; Z_7 = -77,683; Z_8 = 8,221; Z_9 = Z_{10} = 0.$$

Определим внутренние усилия в КЭ стержневой системы.

Стержень № 1

Вектор перемещений по концам элемента

$$\{Z_{(1)}\} = \begin{Bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \\ Z_4 \\ Z_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0,438 \\ -77,478 \end{Bmatrix}.$$

Переводим перемещения в местную систему координат

$$\{Z_{(1)}^*\} = [C_{(1)}]^T \times \{Z_{(1)}\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0,438 \\ -77,478 \end{array} \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0,438 \\ -77,478 \end{array} \right\}.$$

Вектор реакций по концам элемента в местной системе от узловой нагрузки

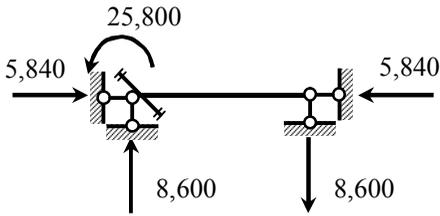
$$\{r_{(1)}^*\} = [k_{(1)}^*] \times \{Z_{(1)}^*\} =$$

$$\begin{bmatrix} 13,333 & 0 & 0 & -13,333 & 0 \\ 0 & 0,111 & 0,333 & 0 & -0,111 \\ 0 & 0,333 & 1 & 0 & -0,333 \\ -13,333 & 0 & 0 & 13,333 & 0 \\ 0 & -0,111 & -0,333 & 0 & 0,111 \end{bmatrix} \times \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0,438 \\ -77,478 \end{array} \right\} =$$

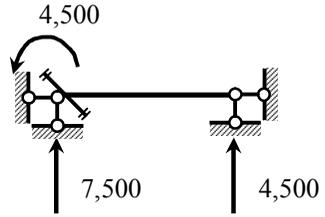
$$= \left\{ \begin{array}{c} 5,840 \\ 8,600 \\ 25,800 \\ -5,840 \\ -8,600 \end{array} \right\}.$$

Сложим найденные реакции (рис. 5.14, а) с реакциями от внеузловой нагрузки (рис. 5.14, б). От полученных в результате реакций по концам КЭ (рис. 5.14, в) определим внутренние усилия в стержне (рис. 5.14, з).

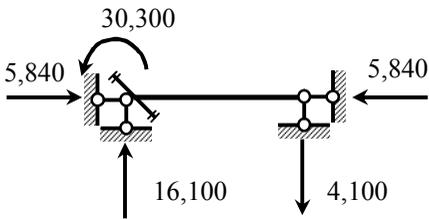
a



б



в



г

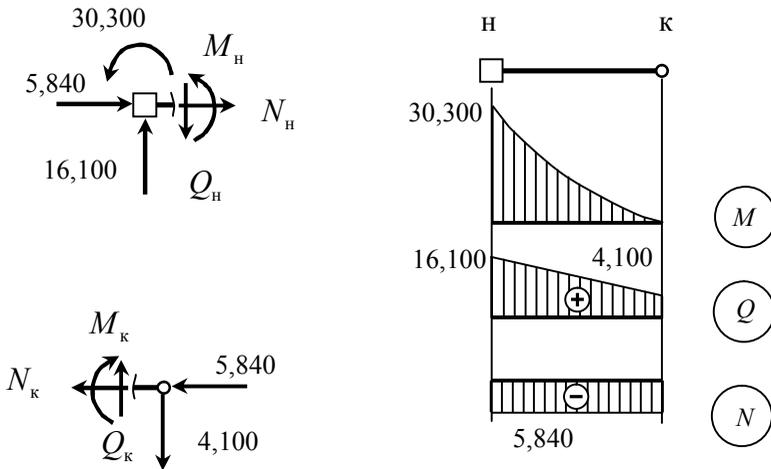


Рис. 5.14

Стержень № 2

Определим перемещения по концам КЭ

$$\{Z_{(2)}\} = \begin{Bmatrix} Z_4 \\ Z_5 \\ Z_6 \\ Z_7 \\ Z_8 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0,438 \\ -77,478 \\ 0,438 \\ -77,683 \\ 8,221 \end{Bmatrix}.$$

Переводим перемещения в местную систему координат

$$\begin{aligned} \{Z_{(2)}^*\} &= [C_{(2)}]^T \times \{Z_{(2)}\} = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} -0,438 \\ -77,478 \\ 0,438 \\ -77,683 \\ 8,221 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 77,478 \\ -0,438 \\ 77,683 \\ 0,438 \\ 8,221 \end{Bmatrix}. \end{aligned}$$

Вычислим реакции

$$\begin{aligned} \{r_{(2)}^*\} &= [k_{(2)}^*] \times \{Z_{(2)}^*\} = \\ &= \begin{bmatrix} 20 & 0 & -20 & 0 & 0 \\ 0 & 0,375 & 0 & -0,375 & 0,750 \\ -20 & 0 & 20 & 0 & 0 \\ 0 & -0,375 & 0 & 0,375 & -0,750 \\ 0 & 0,750 & 0 & -0,750 & 1,5 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 77,478 \\ -0,438 \\ 77,683 \\ 0,438 \\ 8,221 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -4,100 \\ 5,837 \\ 4,100 \\ -5,837 \\ 11,675 \end{Bmatrix}. \end{aligned}$$

По известным реакциям определим внутренние усилия и построим эпюры для КЭ № 2 (рис. 5.15).

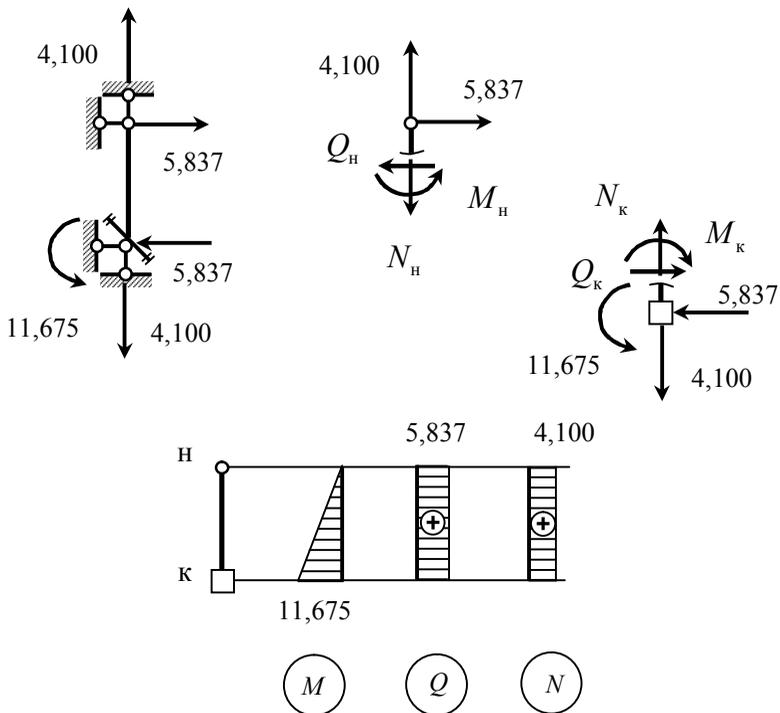


Рис. 5.15

Стержень № 3

Вектор перемещений по концам элемента

$$\{Z_{(3)}\} = \begin{Bmatrix} Z_6 \\ Z_7 \\ Z_8 \\ Z_9 \\ Z_{10} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,438 \\ -77,683 \\ 8,221 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Переводим перемещения в местную систему координат

$$\{Z_{(1)}^*\} = [C_{(3)}]^T \times \{Z_{(3)}\} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0,438 \\ -77,683 \\ 8,221 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,438 \\ -77,683 \\ 8,221 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

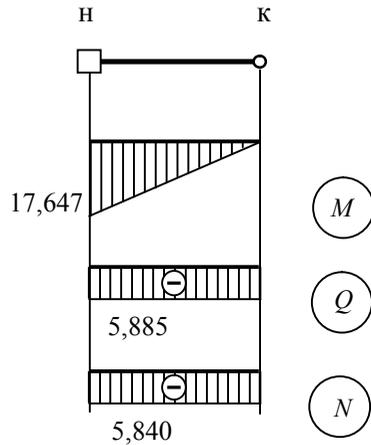
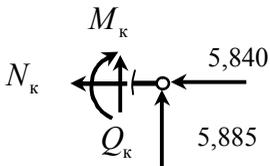
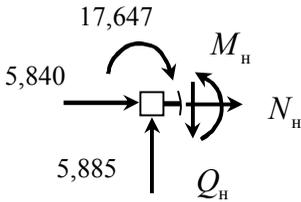
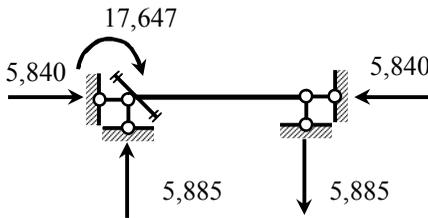


Рис. 5.16

Вектор реакций по концам элемента в местной системе координат $\{r_{(3)}^*\} = [k_{(3)}^*] \times \{Z_{(3)}^*\} =$

$$\begin{bmatrix} 13,333 & 0 & 0 & -13,333 & 0 \\ 0 & 0,111 & 0,333 & 0 & -0,111 \\ 0 & 0,333 & 1 & 0 & -0,333 \\ -13,333 & 0 & 0 & 13,333 & 0 \\ 0 & -0,111 & -0,333 & 0 & 0,111 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0,438 \\ -77,683 \\ 8,221 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} =$$

$$= \begin{Bmatrix} 5,840 \\ -5,885 \\ -17,647 \\ -5,840 \\ 5,885 \end{Bmatrix}.$$

Строим эпюры внутренних усилий для КЭ № 3 (рис. 5.16) и для всей системы (рис. 5.17).

Выполним статическую проверку построенных эпюр. Находим величины и направления опорных реакций и составляем уравнения равновесия:

$$\sum x = 0: H_A - H_B = 5,840 - 5,840 = 0;$$

$$\sum y = 0: V_A + V_B - q \cdot 3 - F = 16,100 + 5,885 - 4 \cdot 3 - 10 =$$

$$= 21,985 - 22 = -0,015;$$

$$\sum m_A = 0: M_A - q \cdot 3 \cdot \frac{3}{3} - M - F \cdot 3 - H_B \cdot 2 + V_B \cdot 6 =$$

$$= 30,300 - 4 \cdot 3 \cdot \frac{3}{2} - 6 - 10 \cdot 3 - 5,840 \cdot 2 + 5,885 \cdot 6 =$$

$$= 65,610 - 65,680 = -0,070.$$

Уравнения равновесия выполняются, внутренние усилия в раме вычислены верно.

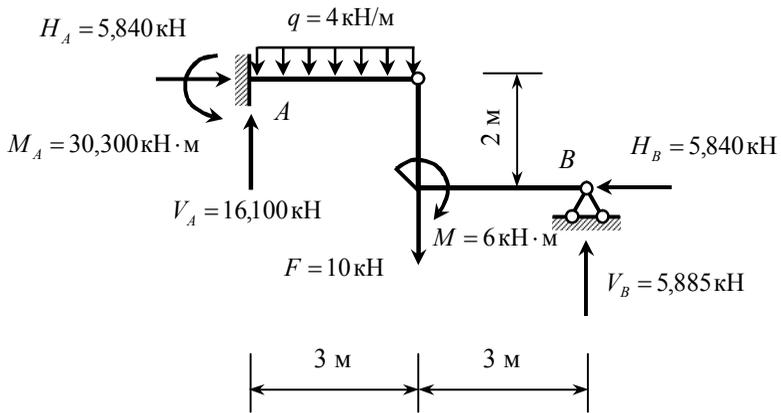
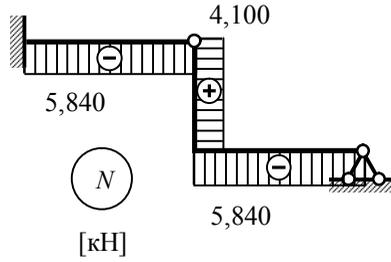
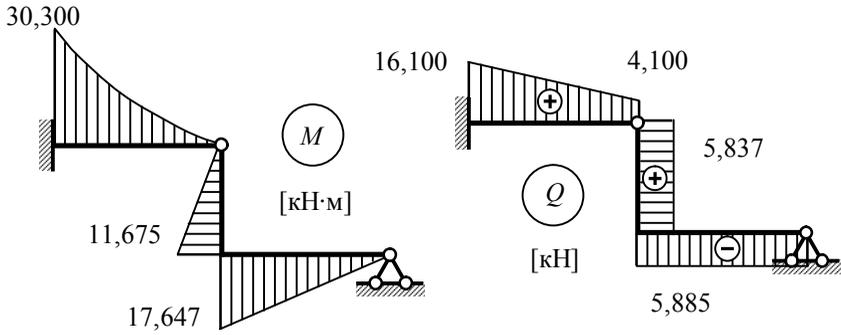


Рис. 5.17

Пример 5.3. Для конструкции толщиной δ [3, с. 441], изображенной на рис. 5.18, а, требуется:

- вычислить перемещения узлов и напряжения в центре тяжести КЭ;
- сравнить результаты ручного расчета с результатами автоматизированного расчета в программном комплексе SCAD [6, 8, 9].

Числовые данные для расчета:

$$q = 10 \text{ кН/м}; \delta = 0,1 \text{ м}; E = 10^5 \text{ кН/м}^2; \mu = 0,3.$$

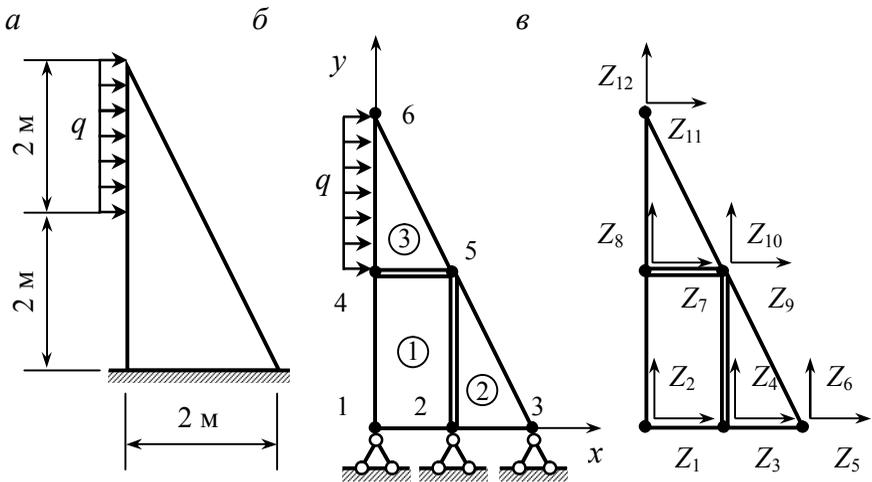


Рис. 5.18

Для решения плоской задачи теории упругости разделим конструкцию на один прямоугольный КЭ и два треугольных КЭ. Схема нумерации узлов и элементов показана на рис. 5.18, б. В соответствии с нумерацией узлов пронумеруем перемещения в общей системе координат (рис. 5.18, в).

Используя формулы раздела 4, сформируем матрицы жесткости КЭ в местной системе координат.

КЭ № 1 (рис. 5.19)

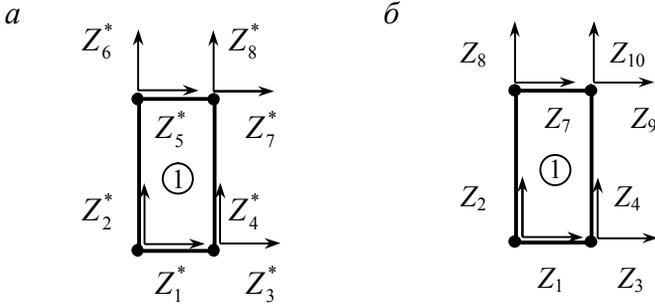


Рис. 5.19

Нумерация узловых перемещений для КЭ № 1 в местной системе координат показана на рис. 5.19, а.

$$k_{11} = 4 \frac{b}{a} + 2(1-\mu) \frac{a}{b} = 4 \frac{2,0}{1,0} + 2(1-0,3) \frac{1,0}{2,0} = 8,700;$$

$$k_{12} = \frac{3}{2}(1+\mu) = \frac{3}{2}(1+0,3) = 1,950;$$

$$k_{13} = -4 \frac{b}{a} + (1-\mu) \frac{a}{b} = -4 \frac{2,0}{1,0} + (1-0,3) \frac{1,0}{2,0} = -7,650;$$

$$k_{14} = \frac{3}{2}(3\mu-1) = \frac{3}{2}(3 \cdot 0,3-1) = -0,150;$$

$$k_{15} = 2 \frac{b}{a} - 2(1-\mu) \frac{a}{b} = 2 \frac{2,0}{1,0} - 2(1-0,3) \frac{1,0}{2,0} = 3,300;$$

$$k_{16} = \frac{3}{2}(3\mu-1) = \frac{3}{2}(3 \cdot 0,3-1) = 0,150;$$

$$k_{17} = -2 \frac{b}{a} - (1-\mu) \frac{a}{b} = -2 \frac{2,0}{1,0} - (1-0,3) \frac{1,0}{2,0} = -4,350;$$

$$k_{18} = -\frac{3}{2}(1+\mu) = -\frac{3}{2}(1+0,3) = -1,950;$$

$$k_{22} = 4 \frac{a}{b} + 2(1-\mu) \frac{b}{a} = 4 \frac{1,0}{2,0} + 2(1-0,3) \frac{2,0}{1,0} = 4,800;$$

$$k_{23} = \frac{3}{2}(3\mu-1) = \frac{3}{2}(3 \cdot 0,3-1) = 0,150;$$

$$k_{24} = 2 \frac{a}{b} - 2(1-\mu) \frac{b}{a} = 2 \frac{1,0}{2,0} - 2(1-0,3) \frac{2,0}{1,0} = -1,800;$$

$$k_{25} = -\frac{3}{2}(3\mu-1) = -\frac{3}{2}(3 \cdot 0,3-1) = -0,150;$$

$$k_{26} = -4 \frac{a}{b} + (1-\mu) \frac{b}{a} = -4 \frac{1,0}{2,0} + (1-0,3) \frac{2,0}{1,0} = -0,600;$$

$$k_{27} = -\frac{3}{2}(1+\mu) = -\frac{3}{2}(1+0,3) = -1,950;$$

$$k_{28} = -2 \frac{a}{b} - (1-\mu) \frac{b}{a} = -2 \frac{1,0}{2,0} - (1-0,3) \frac{2,0}{1,0} = -2,400;$$

$$k_{33} = 4 \frac{b}{a} + 2(1-\mu) \frac{a}{b} = 4 \frac{2,0}{1,0} + 2(1-0,3) \frac{1,0}{2,0} = 8,700;$$

$$k_{34} = -\frac{3}{2}(1+\mu) = -\frac{3}{2}(1+0,3) = -1,950;$$

$$k_{35} = -2 \frac{b}{a} - (1-\mu) \frac{a}{b} = -2 \frac{2,0}{1,0} - (1-0,3) \frac{1,0}{2,0} = -4,350;$$

$$k_{36} = \frac{3}{2}(1+\mu) = \frac{3}{2}(1+0,3) = 1,950;$$

$$k_{37} = 2 \frac{b}{a} - 2(1-\mu) \frac{a}{b} = 2 \frac{2,0}{1,0} - 2(1-0,3) \frac{1,0}{2,0} = 3,300;$$

$$k_{38} = -\frac{3}{2}(3\mu-1) = -\frac{3}{2}(3 \cdot 0,3-1) = -0,150;$$

$$k_{44} = 4 \frac{a}{b} + 2(1-\mu) \frac{b}{a} = 4 \frac{1,0}{2,0} + 2(1-0,3) \frac{2,0}{1,0} = 4,800;$$

$$k_{45} = \frac{3}{2}(1 + \mu) = \frac{3}{2}(1 + 0,3) = 1,950;$$

$$k_{46} = -2\frac{a}{b} - (1 - \mu)\frac{b}{a} = -2\frac{1,0}{2,0} - (1 - 0,3)\frac{2,0}{1,0} = -2,400;$$

$$k_{47} = \frac{3}{2}(3\mu - 1) = \frac{3}{2}(3 \cdot 0,3 - 1) = 0,150;$$

$$k_{48} = -4\frac{a}{b} + (1 - \mu)\frac{b}{a} = -4\frac{1,0}{2,0} + (1 - 0,3)\frac{2,0}{1,0} = -0,600;$$

$$k_{55} = 4\frac{a}{b} + 2(1 - \mu)\frac{b}{a} = 4\frac{1,0}{2,0} + 2(1 - 0,3)\frac{2,0}{1,0} = 8,700;$$

$$k_{56} = -\frac{3}{2}(1 + \mu) = -\frac{3}{2}(1 + 0,3) = -1,950;$$

$$k_{57} = -4\frac{b}{a} + (1 - \mu)\frac{a}{b} = -4\frac{2,0}{1,0} + (1 - 0,3)\frac{1,0}{2,0} = -7,650;$$

$$k_{58} = \frac{3}{2}(3\mu - 1) = \frac{3}{2}(3 \cdot 0,3 - 1) = 0,150;$$

$$k_{66} = 4\frac{a}{b} + 2(1 - \mu)\frac{b}{a} = 4\frac{1,0}{2,0} + 2(1 - 0,3)\frac{2,0}{1,0} = 4,800;$$

$$k_{67} = -\frac{3}{2}(3\mu - 1) = -\frac{3}{2}(3 \cdot 0,3 - 1) = -0,150;$$

$$k_{68} = 2\frac{a}{b} - 2(1 - \mu)\frac{b}{a} = 2\frac{1,0}{2,0} - 2(1 - 0,3)\frac{2,0}{1,0} = -1,800;$$

$$k_{77} = 4\frac{b}{a} + 2(1 - \mu)\frac{a}{b} = 4\frac{2,0}{1,0} + 2(1 - 0,3)\frac{1,0}{2,0} = 8,700;$$

$$k_{78} = \frac{3}{2}(1 + \mu) = \frac{3}{2}(1 + 0,3) = 1,950;$$

$$k_{88} = 4\frac{a}{b} + 2(1 - \mu)\frac{b}{a} = 4\frac{1,0}{2,0} + 2(1 - 0,3)\frac{2,0}{1,0} = 4,800.$$

Матрица жесткости КЭ № 1 имеет вид:

	Z_1^*	Z_2^*	Z_3^*	Z_4^*	Z_5^*	Z_6^*	Z_7^*	Z_8^*	
r_1^*	8,700	1,950	-7,650	-0,150	3,300	0,150	-4,350	-1,950	r_1
r_2^*	1,950	4,800	0,150	-1,800	-0,150	-0,600	-1,950	-2,400	r_2
r_3^*	-7,650	0,150	8,700	-1,950	-4,350	1,950	3,300	-0,150	r_3
r_4^*	-0,150	-1,800	-1,950	4,800	1,950	-2,400	0,150	-0,600	r_4
r_5^*	3,300	-0,150	-4,350	1,950	8,700	-1,950	-7,650	0,150	r_7
r_6^*	0,150	-0,600	1,950	-2,400	-1,950	4,800	-0,150	-1,800	r_8
r_7^*	-4,350	-1,950	3,300	0,150	-7,650	-0,150	8,700	1,950	r_9
r_8^*	-1,950	-2,400	-0,150	-0,600	0,150	-1,800	1,950	4,800	r_{10}
	Z_1	Z_2	Z_3	Z_4	Z_7	Z_8	Z_9	Z_{10}	

Так как в соответствии с условиями закрепления заданной конструкции перемещения $Z_1 - Z_6$ заведомо нулевые, то в глобальной матрице жесткости будем производить суммирование только для перемещений $Z_7 - Z_{12}$ (выделены пунктиром).

КЭ № 2 (рис. 5.20)

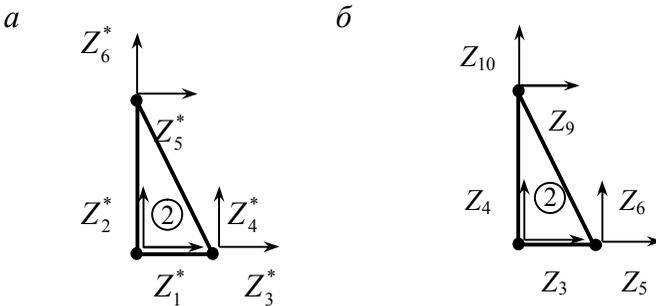


Рис. 5.20

Нумерация узловых перемещений для КЭ № 2 в местной системе координат показана на рис. 5.20, а.

$$k_{11} = 6 \frac{b}{a} + 3(1-\mu) \frac{a}{b} = 6 \frac{2,0}{1,0} + 3(1-0,3) \frac{1,0}{2,0} = 13,050;$$

$$k_{12} = 3(1+\mu) = 3(1+0,3) = 3,900;$$

$$k_{13} = -6 \frac{b}{a} = -6 \frac{2,0}{1,0} = -12,000;$$

$$k_{14} = -3(1-\mu) = -3(1-0,3) = -2,100;$$

$$k_{15} = -3(1-\mu) \frac{a}{b} = -3(1-0,3) \frac{1,0}{2,0} = -1,050;$$

$$k_{16} = -6\mu = -6 \cdot 0,3 = -1,800;$$

$$k_{22} = 6 \frac{a}{b} + 3(1-\mu) \frac{b}{a} = 6 \frac{1,0}{2,0} + 3(1-0,3) \frac{2,0}{1,0} = 7,200;$$

$$k_{23} = -6\mu = -6 \cdot 0,3 = -1,800;$$

$$k_{24} = -3(1-\mu) \frac{b}{a} = -3(1-0,3) \frac{2,0}{1,0} = -4,200;$$

$$k_{25} = -3(1-\mu) = -3(1-0,3) = -2,100;$$

$$k_{26} = -6 \frac{a}{b} = -6 \frac{1,0}{2,0} = -3,000;$$

$$k_{33} = 6 \frac{b}{a} = 6 \frac{2,0}{1,0} = 12,000;$$

$$k_{34} = k_{35} = 0;$$

$$k_{36} = 6\mu = 6 \cdot 0,3 = 1,800;$$

$$k_{44} = 3(1-\mu) \frac{b}{a} = 3(1-0,3) \frac{2,0}{1,0} = 4,200;$$

$$k_{45} = 3(1-\mu) = 3(1-0,3) = 2,100; \quad k_{46} = 0;$$

$$k_{55} = 3(1-\mu) \frac{a}{b} = 3(1-0,3) \frac{1,0}{2,0} = 1,050;$$

$$k_{56} = 0;$$

$$k_{66} = 6 \frac{a}{b} = 6 \frac{1,0}{2,0} = 3,000.$$

Матрица жесткости КЭ № 2 имеет вид:

	Z_1^*	Z_2^*	Z_3^*	Z_4^*	Z_5^*	Z_6^*	
r_1^*	13,050	3,900	-12,000	-2,100	-1,050	-1,800	r_3
r_2^*	3,900	7,200	-1,800	-4,200	-2,100	-3,000	r_4
r_3^*	-12,000	-1,800	12,000	0,000	0,000	1,800	r_5
r_4^*	-2,100	-4,200	0,000	4,200	2,100	0,000	r_6
r_5^*	-1,050	-2,100	0,000	2,100	1,050	0,000	r_9
r_6^*	-1,800	-3,000	1,800	0,000	0,000	3,000	r_{10}
	Z_3	Z_4	Z_5	Z_6	Z_9	Z_{10}	

Часть матрицы жесткости, необходимая для суммирования, выделена пунктиром.

КЭ № 3 (рис. 5.21)

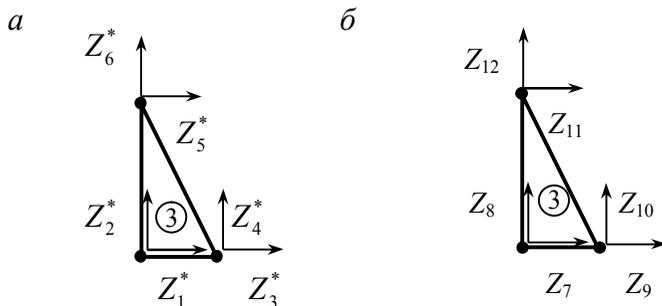


Рис. 5.21

Матрица жесткости КЭ № 3 вычисляется аналогично КЭ № 2

	Z_1^*	Z_2^*	Z_3^*	Z_4^*	Z_5^*	Z_6^*	
r_1^*	13,050	3,900	-12,000	-2,100	-1,050	-1,800	r_7
r_2^*	3,900	7,200	-1,800	-4,200	-2,100	-3,000	r_8
r_3^*	-12,000	-1,800	12,000	0,000	0,000	1,800	r_9
r_4^*	-2,100	-4,200	0,000	4,200	2,100	0,000	r_{10}
r_5^*	-1,050	-2,100	0,000	2,100	1,050	0,000	r_{11}
r_6^*	-1,800	-3,000	1,800	0,000	0,000	3,000	r_{12}
	Z_7	Z_8	Z_9	Z_{10}	Z_{11}	Z_{12}	

После суммирования получаем матрицу жесткости конструкции в общей системе координат:

	Z_7	Z_8	Z_9	Z_{10}	Z_{11}	Z_{12}
r_7	21,750	1,950	-19,650	-1,950	-1,050	-1,800
r_8	1,950	12,000	-1,950	-6,000	-2,100	-3,000
r_9	-19,650	-1,950	21,750	1,950	0,000	1,800
r_{10}	-1,950	-6,000	1,950	12,000	2,100	0,000
r_{11}	-1,050	-2,100	0,000	2,100	1,050	0,000
r_{12}	-1,800	-3,000	1,800	0,000	0,000	3,000

Равномерно распределенную нагрузку q приводим к узлам системы по правилу рычага:

$$R_7 = R_8 = R_{10} = R_{12} = 0;$$

$$-R_9 = -R_{11} = \frac{q \cdot 2}{2} = q.$$

Вычислим грузовой коэффициент с учетом множителя $\frac{E\delta}{12(1-\mu^2)}$ перед матрицей жесткости КЭ (раздел 4):

$$\frac{12(1-\mu^2)}{E\delta} q = \frac{12(1-0,3^2)}{10^5 \cdot 0,1} 10 = 10,92 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 10,92 \text{ мм}.$$

Таким образом, разрешающая система уравнений МКЭ для определения узловых перемещений

$$\begin{cases} 21,750Z_7 + 1,950Z_8 - 19,650Z_9 - 1,950Z_{10} - 1,050Z_{11} - 1,800Z_{12} = 0, \\ 1,950Z_7 + 12,000Z_8 - 1,950Z_9 - 6,000Z_{10} - 2,100Z_{11} - 3,000Z_{12} = 0, \\ -19,650Z_7 - 1,950Z_8 + 21,750Z_9 + 1,950Z_{10} + 0,000Z_{11} + 1,800Z_{12} = 10,92, \\ -1,950Z_7 - 6,000Z_8 + 1,950Z_9 + 12,000Z_{10} + 2,100Z_{11} + 0,000Z_{12} = 0, \\ -1,050Z_7 - 2,100Z_8 + 0,000Z_9 + 2,100Z_{10} + 1,050Z_{11} + 0,000Z_{12} = 10,92, \\ -1,800Z_7 - 3,000Z_8 + 1,800Z_9 + 0,000Z_{10} + 0,0Z_{11} + 3,000Z_{12} = 0. \end{cases}$$

Решение системы уравнений и результаты расчета перемещений в программном комплексе SCAD приведены в табл. 5.1. Используя полученные результаты (рис. 5.22, табл. 5.1), вычислим напряжения в КЭ № 1 и КЭ № 2.

Таблица 5.1

	Перемещения узлов, мм					
	Z_7	Z_8	Z_9	Z_{10}	Z_{11}	Z_{12}
Ручной расчет	17,655	10,385	16,934	-4,977	58,779	10,818
Расчет в SCAD	18,149	10,607	16,845	-4,913	59,588	11,389

КЭ № 1

Из общего решения выбираем вектор узловых перемещений в соответствии с нумерацией в местной (рис. 5.19, а) и общей системах координат (рис. 5.19, б):

$$\{Z_{(1)}^*\} = \begin{Bmatrix} Z_1^* \\ Z_2^* \\ Z_3^* \\ Z_4^* \\ Z_5^* \\ Z_6^* \\ Z_7^* \\ Z_8^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \\ Z_4 \\ Z_7 \\ Z_8 \\ Z_9 \\ Z_{10} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 17,655 \\ 10,385 \\ 16,934 \\ -4,977 \end{Bmatrix}.$$

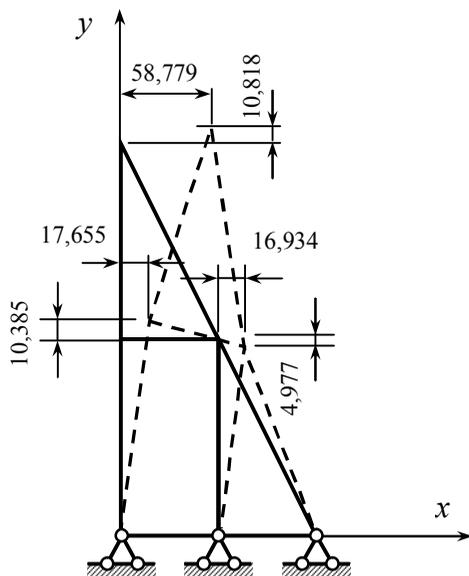


Рис. 5.22

Определим реакции в связях с точностью до множителя

$$\frac{E\delta}{12(1-\mu^2)} \text{ по формуле } \{r_{(1)}^*\} = [k_{(1)}^*] \times \{Z_{(1)}^*\} =$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} 8,7 & 1,95 & -7,65 & -0,15 & 3,3 & 0,15 & -4,35 & -1,95 \\ 1,95 & 4,8 & 0,15 & -1,8 & -0,15 & -0,6 & -1,95 & -2,4 \\ -7,65 & 0,15 & 8,7 & -1,95 & -4,35 & 1,95 & 3,3 & -0,15 \\ -0,15 & -1,8 & -1,95 & 4,8 & 1,95 & -2,4 & 0,15 & -0,6 \\ 3,3 & -0,15 & 4,35 & 1,95 & 8,7 & -1,95 & -7,65 & 0,15 \\ 0,15 & -0,6 & 1,95 & -2,4 & -1,95 & 4,8 & -0,15 & -1,8 \\ -4,35 & -1,95 & 3,3 & 0,15 & -7,65 & -0,15 & 8,7 & 1,95 \\ -1,95 & -2,4 & -0,15 & 0,6 & 0,15 & 1,8 & 1,95 & 4,8 \end{bmatrix} \times \\
&\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 17,655 \\ 10,385 \\ 16,934 \\ -4,977 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3,3 \cdot 17,655 + 0,15 \cdot 10,385 - 4,35 \cdot 16,934 - 1,95(-4,977) \\ -0,15 \cdot 17,655 - 0,6 \cdot 10,385 - 1,95 \cdot 16,934 - 2,4(-4,977) \\ -4,35 \cdot 17,655 + 1,95 \cdot 10,385 + 3,3 \cdot 16,934 - 0,15(-4,977) \\ 1,95 \cdot 17,655 - 2,4 \cdot 10,385 + 0,15 \cdot 16,934 - 0,6(-4,977) \\ 8,7 \cdot 17,655 - 1,95 \cdot 10,385 - 7,65 \cdot 16,934 + 0,15(-4,977) \\ -1,95 \cdot 17,655 + 4,8 \cdot 10,385 - 0,15 \cdot 16,934 - 1,8(-4,977) \\ -7,65 \cdot 17,655 - 0,15 \cdot 10,385 + 8,7 \cdot 16,934 + 1,95(-4,977) \\ 0,15 \cdot 17,655 - 1,8 \cdot 10,385 + 1,95 \cdot 16,934 + 4,8(-4,977) \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} -4,139 \\ -29,956 \\ 0,080 \\ 15,030 \\ 3,056 \\ 21,839 \\ 1,002 \\ -6,913 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Вычислим напряжения в центре тяжести КЭ по формулам:

$$\sigma_x = \frac{E\delta}{12(1-\mu^2)} \frac{r_3 + r_7}{b\delta} = \frac{10^5 \cdot 0,1}{12(1-0,3^2)} \frac{0,080 + 1,002}{2,0 \cdot 0,1} 10^{-3} = 49,54 \text{ кПа};$$

$$\sigma_y = \frac{E\delta}{12(1-\mu^2)} \frac{r_6 + r_8}{a\delta} = \frac{10^5 \cdot 0,1}{12(1-0,3^2)} \frac{21,839 - 6,913}{1,0 \cdot 0,1} 10^{-3} = 136,68 \text{ кПа};$$

$$\tau_{yx} = \frac{E\delta}{12(1-\mu^2)} \frac{r_4 + r_8}{b\delta} = \frac{10^5 \cdot 0,1}{12(1-0,3^2)} \frac{15,030 - 6,913}{2,0 \cdot 0,1} 10^{-3} = 37,17 \text{ кПа}.$$

КЭ № 2

Вектор узловых перемещений

$$\{Z_{(2)}^*\} = \begin{Bmatrix} Z_1^* \\ Z_2^* \\ Z_3^* \\ Z_4^* \\ Z_5^* \\ Z_6^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Z_3 \\ Z_4 \\ Z_5 \\ Z_6 \\ Z_9 \\ Z_{10} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 16,934 \\ -4,977 \end{Bmatrix}.$$

Вычислим напряжения в КЭ по формулам:

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\mu^2} \begin{Bmatrix} \frac{Z_3^* - Z_1^*}{a} + \mu \frac{Z_6^* - Z_2^*}{b} \\ \mu \frac{Z_3^* - Z_1^*}{a} + \frac{Z_6^* - Z_2^*}{b} \\ \frac{1-\mu}{2} \left(\frac{Z_5^* - Z_1^*}{b} + \frac{Z_4^* - Z_2^*}{a} \right) \end{Bmatrix} =$$

$$= \frac{10^5 \cdot 10^{-3}}{1-0,3^2} \begin{Bmatrix} \frac{0-0}{1,0} + 0,3 \frac{-4,977-0}{2,0} \\ 0,3 \frac{0-0}{1,0} + \frac{-4,977-0}{2,0} \\ \frac{1-0,3}{2} \left(\frac{16,934-0}{2,0} + \frac{0-0}{1,0} \right) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -82,04 \\ -273,46 \\ 325,65 \end{Bmatrix}.$$

Напряжения, полученные при ручном расчете и рассчитанные в программном комплексе SCAD, приведены в табл. 5.2.

Таблица 5.2

	Напряжения, кПа					
	КЭ № 1			КЭ № 2		
	σ_x	σ_y	τ_{xy}	σ_x	σ_y	τ_{xy}
Ручной расчет	49,54	136,68	37,17	-82,04	-273,46	325,65
Расчет в SCAD	48,26	134,96	38,03	-80,98	-269,92	323,95

Очевидно, что результаты ручного расчета и расчета в ПК SCAD отличаются друг от друга незначительно. Наличие программного комплекса позволяет выполнить расчеты, разделив конструкцию на большое количество КЭ и уточнить величины перемещений и напряжений.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Как производится дискретизация стержневой системы по МКЭ?
2. Сколько степеней свободы имеют узлы плоской шарнирно-стержневой системы?
3. Каким требованиям должен отвечать конечный элемент стержня?
4. Какие типы конечных элементов используются при расчете плоской стержневой системы?
5. Какие конечные элементы используются при расчете пластин, оболочек, массивных тел?
6. Что представляют собой местная и общая системы координат в МКЭ?
7. Для чего нужна матрица направляющих косинусов?
8. Каким образом получена матрица жесткости стержня в местной системе координат?
9. Что представляют собой элементы матрицы жесткости?
10. Как перевести матрицу жесткости стержня из местной системы координат в общую систему?
11. Как перевести матрицу жесткости стержня из общей в местную систему координат?
12. Что представляет собой вектор узловых нагрузок?
13. Каким образом учитываются опорные связи?
14. В каком порядке вычисляются внутренние усилия?
15. Какая нумерация узлов является оптимальной?
16. Перечислите основные этапы расчета по МКЭ.
17. Каким образом осуществляется проверка результатов расчета в МКЭ?
18. От чего зависит точность результатов расчета по МКЭ при расчете стержневой системы (пластины, оболочки, массивного тела)?

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

Основная литература

1. *Агапов, В.П.* Метод конечных элементов в статике, динамике и устойчивости конструкций : учеб. пособие / В.П. Агапов. – М. : Изд-во АСВ, 2004. – 248 с.
2. *Александров, А.В.* Основы теории упругости и пластичности : учеб. для вузов / А.В. Александров, В.Д. Потапов. – М. : Высш. шк., 2007. – 400 с.
3. *Дарков, А.В.* Строительная механика : учебник для вузов / А.В. Дарков, Н.Н. Шапошников. – СПб. : Лань, 2008. – 656 с.
4. *Ильин, В.П.* Численные методы решения задач строительной механики : учеб. пособие / В.П. Ильин, В.В. Карпов, А.М. Масленников. – М. : Изд-во АСВ, 2005. – 426 с.
5. *Константинов, И.А.* Строительная механика : учеб. для вузов / И.А. Константинов, В.В. Лалин, И.И. Лалина. – М. : Проспект, КНОРУС, 2010. – 432 с.
6. *Семенов, А.А.* Проектно-вычислительный комплекс SCAD в учебном процессе. Часть I. Статический расчет : учеб. пособие / А.А. Семенов, А.И. Габитов. – М. : Изд-во АСВ, 2005. – 152 с.
7. *Строительная механика.* Статика упругих систем : учеб. для вузов / В.Д. Потапов [и др.]. – М. : Высш. шк., 2007. – 511 с.
8. *Тухфатуллин, Б.А.* Численные методы расчета строительных конструкций. Материалы для проведения практических занятий и самостоятельной работы студентов: методические указания / Б.А. Тухфатуллин. – Томск : Изд-во Том. гос. архит.-строит. ун-та, 2012. – 56 с.
9. *SCAD Office.* Вычислительный комплекс SCAD / В.С. Карпиловский [и др.]. – М. : Изд-во АСВ, 2007. – 592 с.

Дополнительная литература

10. *Автоматизация расчетов транспортных сооружений* / А.С. Городецкий [и др.]. – М. : Транспорт, 1989. – 232 с.
11. *Леонтьев, Н.Н.* Основы строительной механики стержневых систем : учеб. для вузов / Н.Н. Леонтьев, Д.Н. Соболев, А.А. Амосов. – М. : Изд-во АСВ, 1996. – 541 с.
12. *Метод конечных элементов* : учеб. пособие / П.М. Варвак и [др.]. – Киев : Вища школа, 1981. – 176 с.
13. *Строительная механика. Тонкостенные пространственные системы* : учеб. для вузов / А.В. Александров [и др.]. М. : Стройиздат, 1983. – 488 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение.....	3
1. Расчет стержневой системы с растянутыми (сжатыми) элементами.....	6
2. Расчет стержневой системы с изгибаемыми и растянутыми (сжатыми) элементами.....	18
3. Вывод матрицы жесткости стержня из вариационного принципа Лагранжа.....	28
4. Решение плоской задачи теории упругости.....	36
5. Примеры решения задач по МКЭ.....	50
Контрольные вопросы.....	96
Библиографический список.....	97

Учебное издание

Борис Ахатович Тухфатуллин

**ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА
СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ**

**МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ
(ТЕОРИЯ И ПРАКТИКА)**

Учебное пособие

Редактор Е.Ю. Глотова
Оригинал-макет подготовлен Б.А. Тухфатуллиным

Подписано в печать 14.05.13.
Формат 60×84/16. Бумага офсет. Гарнитура Таймс.
Усл. печ. л. 5,8. Уч.-изд. л. 5,3. Тираж 100 экз. Заказ № 190.

Изд-во ТГАСУ, 634003, г. Томск, пл. Соляная, 2.
Отпечатано с оригинал-макета в ООП ТГАСУ.
634003, г. Томск, ул. Партизанская, 15.