В.А. ТРЕНОГИН

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Рекомендовано Научно-методическим советом по математике Министерства образования и науки Российской Федерации в качестве учебника для студентов вузов, обучающихся по физико-математическим, техническим, естественным и экономическим специальностям

МОСКВА
ФИЗМАТЛИТ®
2009

УДК 517.91
ББК 22.161.6
Т 66

Треногин В. А. **Обыкновенные дифференциальные уравнения.** — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. — 312 с. — ISBN 978-5-9221-1063-1.

Книга содержит обновленный элементарный начальный курс обыкновенных дифференциальных уравнений, соответствующий программе для технических вузов, утвержденной Министерством образования и науки РФ. От других книг этого же профиля данный учебник отличается повышенной прикладной направленностью, в частности, применением компьютерных систем.

Книга будет полезна студентам различных вузов, преподавателям и лицам, интересующимся применениями ДУ в самых разнообразных областях науки и техники.

Рекомендовано Научно-методическим советом по математике Министерства образования и науки Российской Федерации в качестве учебника для студентов вузов, обучающихся по физико-математическим, техническим, естественным и экономическим специальностям.

ISBN 978-5-9221-1063-1

© ФИЗМАТЛИТ, 2009
© В. А. Треногин, 2009

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 7

Глава I. **Дифференциальные уравнения первого порядка** 11

§ 1. Основные понятия. Теорема существования и единственности решения задачи Коши 11
§ 2. Продолжение решений. Непродолжимые решения, явления взрыва и прекращения решения 14
§ 3. Линейное однородное дифференциальное уравнение, его фундаментальное решение и общее решение 16
§ 4. Линейное неоднородное дифференциальное уравнение и нахождение его общего решения методом Лагранжа 19
§ 5. Линейное ДУ с постоянным коэффициентом и со специальной правой частью 23
§ 6. Дифференциальные уравнения, линейные относительно независимой переменной 25
§ 7. Уравнение Бернулли 29
§ 8. Дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными . 33
§ 9. Примеры нарушения единственности решения задачи Коши. Особые решения 35
§ 10. Дифференциальные уравнения и неявные функции 37
§ 11. Уравнения в дифференциалах и функции, заданные параметрически 40

Глава II. **Дифференциальные уравнения высших порядков** 43

§ 1. Задача Коши для дифференциальных уравнений высших порядков 43
§ 2. Линейная независимость решений и определитель Вронского . . 45
§ 3. Общее решение линейного однородного дифференциального уравнения 47
§ 4. Линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами 49
§ 5. Линейное однородное дифференциальное уравнение n-го порядка с постоянными коэффициентами 51
§ 6. Основные свойства решений линейных неоднородных дифференциальных уравнений 55
§ 7. Линейное ДУ с постоянными коэффициентами и со специальной правой частью 60
§ 8. Понятие о краевых (граничных) задачах 62
§ 9. Общая краевая задача для линейного ДУ и ее функция Грина . 65
§ 10. Периодические решения неоднородного ДУ второго порядка с постоянными коэффициентами 68
§ 11. Методы понижения порядка дифференциального уравнения . . . 69

Глава III. **Системы дифференциальных уравнений первого порядка** 74

§ 1. Задача Коши для системы дифференциальных уравнений 74
§ 2. Системы однородных линейных дифференциальных уравнений . 77
§ 3. Системы дифференциальных уравнений с постоянной диагонализуемой матрицей 78
§ 4. Системы дифференциальных уравнений с постоянной комплексно диагонализуемой матрицей 81
§ 5. Построение базиса из собственных и присоединенных векторов матрицы 84
§ 6. Построение фундаментальной системы решений для системы ДУ с постоянной матрицей 88
§ 7. Фундаментальная матрица и ее свойства 91
§ 8. Системы неоднородных линейных ДУ. Метод Лагранжа вариации произвольных постоянных 94
§ 9. Пример задачи о периодических решениях системы дифференциальных уравнений 96

Глава IV. **Динамические системы и элементы теории устойчивости по Ляпунову** 99

§ 1. Динамическая система ДУ, фазовое пространство, траектории . 99
§ 2. Первый интеграл динамической системы 102
§ 3. Устойчивость положений равновесия 106
§ 4. Теорема об устойчивости по линейному приближению 109
§ 5. Положения равновесия двумерной линейной системы. Основные положения равновесия и их фазовые портреты 112
§ 6. Движение материальной точки на прямой. Консервативные и диссипативные системы 118
§ 7. Метод функций Ляпунова 121
§ 8. Положения равновесия консервативных динамических систем . . 124
§ 9. Доказательства теорем Ляпунова 127
§ 10. Теорема Четаева о неустойчивости 128
§ 11. Исследование устойчивости колебаний нелинейного математического маятника при наличии трения 129
§ 12. Устойчивость решений систем дифференциальных уравнений . . 131

Глава V. **Приближенные методы решения дифференциальных уравнений** 135

§ 1. Качественное исследование решений дифференциальных уравнений и метод изоклин 136
§ 2. Метод последовательных приближений 138
§ 3. Отыскание решений дифференциальных уравнений в виде степенных рядов 140
§ 4. Метод малого параметра 143
§ 5. Метод малого параметра в задаче с сингулярным возмущением . 144
§ 6. Разностные схемы 147
§ 7. Метод пристрелки для решения краевых задач 152
§ 8. Метод прогонки и разностный метод в решении краевых задач . 154

Глава VI. **Основы теории обыкновенных дифференциальных уравнений** . . . 158

§ 1. Банаховы пространства . . . 158
§ 2. Принцип сжимающих отображений . . . 162
§ 3. Некоторые свойства отображений конечномерных пространств . 163
§ 4. Доказательство теоремы Коши . . . 165
§ 5. Продолжение локального решения задачи Коши до ее глобального решения . . . 167
§ 6. Существование и единственность решения задачи Коши в линейном случае . . . 168
§ 7. Непрерывная зависимость решения задачи Коши от начальных значений и от параметров . . . 169
§ 8. Степенные ряды в банаховых пространствах и теорема о неявном операторе в аналитическом случае . . . 171
§ 9. Теорема Ляпунова об устойчивости положения равновесия по линейному приближению . . . 175

Глава VII. **Дифференциальные уравнения с частными производными первого порядка** . . . 178

§ 1. Линейные дифференциальные уравнения с двумя независимыми переменными . . . 178
§ 2. Общее решение линейного дифференциального уравнения . . . 181
§ 3. Квазилинейные дифференциальные уравнения и их характеристики . . . 184
§ 4. Задача Коши для дифференциального уравнения с частными производными . . . 186
§ 5. Дифференциальные уравнения с несколькими независимыми переменными . . . 189

Дополнение I. **Некоторые приложения обыкновенных дифференциальных уравнений** . . . 191

§ 1. Закон всемирного тяготения, первый закон Кеплера и вторая космическая скорость . . . 194
§ 2. Резонанс, резонирующая частота в радиотехнике, биения и почти периодические решения . . . 198
§ 3. Периодические решения в экологии и в химической кинетике . . 203
§ 4. Примеры бифуркационных явлений . . . 206
§ 5. Метод фазовой плоскости в исследовании периодических и солитонных решений . . . 215
§ 6. Метод малого параметра Линштедта–Пуанкаре для консервативных задач . . . 222
§ 7. Свободные колебания нелинейного математического маятника в отсутствие трения и при наличии трения . . . 226
§ 8. Эллиптические функции Якоби и дифференциальные уравнения 231
§ 9. Метод Линштедта–Пуанкаре отыскания предельных циклов. Орбитальная устойчивость . . . 235
§ 10. Релаксационные колебания . . . 240
§ 11. Теоремы Пуанкаре–Андронова и Пуанкаре–Бендиксона . . . 242

§ 12. Устойчивые предельные циклы в химической кинетике и в биологии . . . 245
§ 13. Элементарная модель теплового взрыва . . . 247
§ 14. Операторы сдвига по траекториям ДС. Аттракторы, абстрактные ДС . . . 251
§ 15. Корректные и некорректные математические модели и задачи. Структурная устойчивость . . . 254

Дополнение II. **Приложения MATHCAD к задачам для обыкновенных ДУ** (*В. И. Ракитин*, *В. А. Треногин*) . . . 260

§ 1. Окно и инструменты MATHCAD . . . 260
§ 2. Простейшие вычисления. Операторы присваивания . . . 262
§ 3. Построение графиков функций . . . 263
§ 4. Использование блока решений обыкновенных ДУ и систем ДУ . 265
§ 5. Примеры решения задач Коши для нелинейных ДУ . . . 266
§ 6. Решение нелинейной задачи Коши с малым параметром при производной . . . 268
§ 7. Пример решения краевой задачи . . . 269
§ 8. Пример задачи с периодическим биением . . . 270
§ 9. Одно из периодических решений задачи «хищник–жертва» . . . 271
§ 10. Пример задачи с релаксационным колебанием . . . 272
§ 11. Численное моделирование задачи о тепловом взрыве . . . 274

Дополнение III. **Решение задач для обыкновенных ДУ с использованием системы компьютерной алгебры Mathematica** (*Н. И. Земцова*, *В. А. Треногин*) . . . 277

§ 1. Структура системы Mathematica . . . 277
§ 2. Простейшие численные и символьные вычисления в системе Mathematica . . . 279
2.1. Численные расчеты (279). 2.2. Символьные вычисления (280).
§ 3. Запись дифференциальных уравнений в системе Mathematica и их решение на примере простейших задач . . . 280
3.1. Решение дифференциальных уравнений в символьном виде (280). 3.2. Решение дифференциальных уравнений в численном виде (281).
§ 4. Метод изоклин . . . 289
§ 5. Нахождение решения в виде степенного ряда . . . 290
§ 6. Метод малого параметра . . . 291
§ 7. Уравнение Эйри . . . 292
§ 8. Задача о релаксационных колебаниях . . . 293
§ 9. Устойчивый и неустойчивый предельные циклы . . . 295
§ 10. Нахождение положений равновесия ДС . . . 296
§ 11. Система Лотки–Вольтерры с насыщением . . . 297
§ 12. Брюсселятор . . . 300
§ 13. Странный аттрактор Лоренца . . . 303

Предметный указатель . . . 306

Список литературы . . . 308

ПРЕДИСЛОВИЕ

Обыкновенные дифференциальные уравнения (далее кратко ДУ) являются одним из традиционных и ведущих разделов высшей математики. Они находят важнейшие применения в самых разнообразных областях современной науки и техники. Кроме приложений в механике, физике, технике и астрономии, все большее место ДУ занимают в химии, биологии, экологии, метеорологии, медицине, экономике и социологии. В прекрасном обзоре [10] читатель найдет много полезной информации о современном состоянии теории ДУ и ее приложений. Имеется огромное количество научных публикаций, монографий, учебников и учебных пособий по ДУ.

Данная книга направлена на чисто учебные цели, в основном — на обучение студентов высших учебных заведений. В ней нашли отражение многолетний опыт автора по преподаванию математики в Московском физико-техническом институте и в Московском институте стали и сплавов, а также его участие во множестве российских и международных научных и методических конференций.

Нашей целью является обновление традиционного и основательно устаревшего курса ДУ. Выскажем сначала ряд критических замечаний (см. [15]). Самым пагубным образом на качество преподавания математики в вузах влияют снижение из года в год уровня школьной математической подготовки, волюнтаристское сокращение учебных часов на преподавание математики, засорение преподавательского состава лицами, не имеющими математического образования.

В отличие от вузовского курса математического анализа, получившего в последние десятилетия достаточно аккуратное и строгое описание в учебниках Л. Д. Кудрявцева, С. М. Никольского, В. А. Ильина и некоторых других авторов, ДУ довольно часто излагаются в учебных пособиях и преподаются в технических вузах достаточно небрежно. Распространилась тенденция учить рецептам, а не исследованию, учить действовать по шаблону, а не изучать основные понятия, факты и методы теории ДУ, на которых основаны последующие использования ДУ в преподавании математизированных дисциплин и, что особенно важно, — приложения ДУ. Наша критика относится, главным образом, к базовым начальным разделам курса ДУ, когда неаккуратно вводятся основные понятия, а так называемые простейшие методы отыскания решений ДУ обильно насыщены математическими небрежностями. Прекрасная книга выдающегося советского математика академика Л. С. Понтрягина написана на очень высоком научном уровне и, возможно, поэтому практически не оказала заметного влияния на преподавание ДУ в вузах, причем не только технических.

Под маской обучения методам решения задач изучение ДУ часто подменяется еще одной (излишней!) возможностью попрактиковаться в вычислении неопределенных интегралов. В качестве результата решения ДУ обычно предлагается неявное громоздкое выражение с якобы произвольными постоянными, хотя получить из такого решения полезную информацию обычно бывает очень и очень непросто, а то и невозможно. Полностью запутывается вопрос о том, что же такое решение ДУ: однозначная это функция или многозначная, явная, неявная или заданная параметрически? Не уделяется внимание тому, где конкретное решение определено, локальное оно или глобальное, единственно ли это решение (локально и глобально). Методическим недостатком является злоупотребление словами «общее решение», «общий интеграл», «произвольная постоянная». Приводимое обычно понятие общего решения ДУ, использующее «произвольные постоянные», эффективно для линейных ДУ. Но оно не конструктивно в нелинейных случаях, некорректно с точки зрения и русского языка и элементарной логики. Заметим, в этой связи, что для нелинейного ДУ его общее решение аккуратно (но не конструктивно) можно определить разве лишь как совокупность всех его решений. Заметим также, что в наиболее методически продуманных учебниках (см. [12, 17]) понятие общего решения вводится только для линейных ДУ.

Какой же выход из создавшегося положения мы видим? Мы рекомендуем опираться с самого начала изучения ДУ на теорему Коши о локальном существовании единственного решения ДУ с заданными начальными значениями. Если начальные значения менять, то возникает локальное или даже глобальное семейство решений ДУ, зависящее от параметров, которыми и являются начальные значения решения и его производных. На первых порах лучше ограничиться, в основном, задачами с конкретными начальными или граничными условиями. Можно также проследить общий ход интегральных кривых, если задать начальные условия общего вида. Здесь исследование должно быть проведено достаточно аккуратно и полно. Сказанное особенно относится к построению глобальных фазовых портретов поведения траекторий динамической (автономной) системы ДУ.

Неформальное изучение ДУ широко использует технику, идеи, понятия и теоремы математического анализа, аналитической геометрии и линейной алгебры. К сожалению, в преподавательской практике этим обычно пренебрегают. Но без вдумчивого строгого исследования, без сохранения логики рассуждений нельзя серьезно освоить ДУ и, тем более, использовать их в практической деятельности. Поэтому мы уделяем и этим аспектам достаточное внимание.

Значительным недостатком преподавания ДУ в технических вузах обычно является излишнее увлечение частными типами ДУ, такими, например, как нелинейное однородное ДУ и сводящиеся к нему ДУ; ДУ, не разрешенные относительно старшей производной, уравнение Клеро и др. Вследствие этого и из-за недостатка учебных часов в тех-

нических вузах часто так и не удается перейти к важнейшим для приложений вопросам, таким, например, как краевые задачи и теория устойчивости по Ляпунову. Предлагаемая книга, как нам представляется, эти недостатки частично устраняет. Значительно меньше места отводится некоторым не имеющим важных приложений частным случаям ДУ. Вместо этого больше внимания уделено приближенным методам вычисления решений задач для ДУ, а также тем понятиям и методам теории ДУ, которые имеют важную прикладную направленность. В Дополнениях II и III освещены вопросы применения современных эффективных компьютерных систем для решения задач по ДУ и системам ДУ. Использование компьютерных методов в учебном процессе делает современное преподавание математических дисциплин значительно более полноценным.

Более сложные теоретические вопросы и значительная часть доказательств вынесены в отдельную главу VI. Учащийся может обращаться сюда по мере необходимости. Применяемый эдесь функционально-аналитический аппарат ныне употребляется во всем мире. Он находится на более высоком уровне абстракции, но позволяет более ясно выделить суть дела и избавиться от мешающих пониманию технических деталей.

В условиях широкого использования вычислительной техники давно пора сместить акценты в преподавании ДУ. Возможность проинтегрировать некоторые ДУ в явном виде следует, в основном, рассматривать не как самоцель, а скорее как иллюстрацию к теории ДУ. В то же время линейные ДУ, их системы и некоторые важнейшие в приложениях нелинейные ситуации должны быть рассмотрены достаточно тщательно.

С помощью ДУ часто описываются математические модели различных реальных процессов. В этих случаях явные формулы для решений позволяют лучше понять суть изучаемого физического явления и осмыслить полученные численные результаты.

Нельзя объять необъятное. Мир обыкновенных дифференциальных уравнений практически необозрим. Многие важные аспекты теории ДУ не вошли в книгу. Сюда включено довольно мало примеров стандартных приложений ДУ к задачам других наук. Такие примеры полезно подбирать для каждой конкретной учебной специальности. Все же в Дополнении I освещены некоторые актуальные приложения ДУ к физическим, физико-химическим, экологическим и техническим проблемам. Тем самым мы пытаемся несколько сократить разрыв между учебным курсом обыкновенных ДУ и современным состоянием науки.

Отметим, что вывод ДУ, описывающего то или иное явление, не является предметом изучения математики. Задачей математики является изучение свойств математических моделей и указание возможностей их теоретической и численной реализации. Вывод таких моделей должен проводиться соответствующей кафедрой в рамках изучаемой специальности. К сожалению, решение этого вопроса традиционно упирается в математическую малограмотность преподавателей специальных ка-

федр и в их нежелание повышать свою математическую квалификацию. Симметричную критику можно высказать и в адрес преподавателей математических кафедр. Промежуточным выходом из этой ситуации является выделение математическим кафедрам дополнительных учебных часов на изучение, а иногда и разработку, совместно со специальными кафедрами, математических моделей для основных задач по специальностям.

Не вошли в книгу тесно примыкающие к теории ДУ такие важные для приложений математические дисциплины как теория оптимального управления, функционально-дифференциальные и разностные уравнения, групповые методы в ДУ. И все же мы стремились к тому чтобы педагог и учащийся получили более широкое представление о современной теории ДУ, о возможностях ее применений и смогли найти для себя достаточно много не только полезного, но и интересного.

Изложение иногда прерывается предложением к читателю выполнить то или иное упражнение. Это делается как для того, чтобы чтение и изучение материала было более осознанным так и для того, чтобы читатель был подготовлен к пониманию дальнейшего текста и особенно — к пониманию приложений ДУ.

Мы выступаем за основательное обучение учащегося на базе математически достаточно строгих теоретических знаний (в частности лекций) и сравнительно небольшого количества тщательно подобранных иллюстрационных задач. Мы выступаем против формального натаскивания учащегося на большом числе ненужных задач, но мы также против подмены глубокого изучения теории пусть даже приятным, но поверхностным и ни к чему не обязывающим ознакомлением с изучаемым предметом.

Итак, ниже предлагается обновленный элементарный начальный курс ДУ, очень постепенно ведущий учащегося от простейших ДУ к началам изучения глубоких и важных проблем современных приложений методов и теории ДУ.

Мы надеемся, что данная книга поможет читателю перейти после работы с ней, в случае необходимости или с развитием интереса, к изучению специальной литературы по теории ДУ и их приложениям, затем и к практическим их применениям. Мы надеемся, что книга будет полезна также лицам, использующим ДУ в различных областях знания.

Автор выражает глубокую признательность выдающемуся ученому и педагогу, члену-корреспонденту Российской академии наук профессору Л. Д. Кудрявцеву, а также профессору В. М. Савчину за доброжелательное рецензирование данной книги и сделанные им полезные замечания.

Глава I

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

§ 1. Основные понятия. Теорема существования и единственности решения задачи Коши

Дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение вида

$$y' = f(x, y). \tag{1}$$

Здесь x — независимая переменная, y — неизвестная функция, а $f(x, y)$ — заданная функция двух вещественных переменных.

Итак, данное ДУ выражает первую производную $y'(x)$ от неизвестной функции $y = y(x)$ в точке x через значения независимой переменной x и функции $y(x)$.

Дадим определение решения ДУ. Для наглядности зафиксируем плоскость Π, на которой зададим декартову прямоугольную систему координат $\{O, x, y\}$. Как обычно, точка $(x, y) \in \Re^2$ будет отождествляться с точкой плоскости Π с координатами (x, y). Пусть функция двух переменных $f(x, y)$ определена в области $G \subset \Re^2$, а значения $f(x, y)$ лежат в $\Re$, т. е. вещественны. (Напомним, что область — это открытое связное множество, см. [8].)

Определение 1. Функция $y = y(x)$, определенная и непрерывно дифференцируемая на некотором интервале (α, β) (конечном или бесконечном), называется *решением* ДУ (1) на этом интервале, если а) $(x, y(x)) \in G$ для любых $x \in (\alpha, \beta)$ и б) равенство $y'(x) = f(x, y(x))$ выполняется для любых $x \in (\alpha, \beta)$.

Заметим существенность условия а). Если оно не выполняется, то равенство б) может не иметь смысла, так как функция $f(x, y)$ определена, возможно, только в области G.

Начнем с рассмотрения простейшего ДУ $y' = f(x)$. Здесь функция $f(x)$ предполагается непрерывной на заданном интервале (a, b) (конечном или бесконечном, т. е. возможно, что $a = -\infty$ или $b = +\infty$, или выполняются и то и другое одновременно). В данном случае правая часть ДУ не зависит от y и, следовательно, область G — это полоса, полуплоскость или вся плоскость переменных x, y.

Задача о решении даже этого простейшего ДУ составляет предмет изучения интегрального исчисления. Ей уделено достаточно много внимания в курсе математического анализа. Все ее решения даются в виде неопределенного интеграла формулой $y(x) = \int f(x)\,dx$. Каждое решение — это некоторая первообразная от функции $f(x)$ на (a, b). Фиксируем первообразную $F(x)$ функции $f(x)$ на (a, b), тогда $y(x) = F(x) + C$, где C — произвольная постоянная.

Таким образом, рассмотренное простейшее ДУ имеет бесконечно много решений. Аналогичная ситуация имеет место и для общего ДУ (1).

Для выделения единственного решения ДУ (1) поступим следующим образом. Зафиксируем точку $(x_0, y_0) \in G$. Будем искать решение $y = y(x)$ ДУ (1), удовлетворяющее следующему условию: это решение определено на некотором интервале (α, β), содержащем точку x_0, причем

$$y(x_0) = y_0. \tag{2}$$

Условие (2) называется начальным условием, так как в приложениях независимая переменная x часто играет роль времени. Задача (1), (2) называется задачей Коши, или начальной задачей.

Определение 2. График решения ДУ (1), изображаемый в плоскости П, называется *интегральной кривой* этого ДУ.

Задача Коши состоит в нахождении интегральной кривой ДУ, проходящей через заданную точку.

Упражнение. Покажите, что для простейшего ДУ $y' = f(x)$ с правой частью $f(x)$, непрерывной на (a, b), задача Коши с начальным условием (2) при любых $x_0 \in (a, b)$, $y_0 \in \Re$ имеет единственное решение. Это решение дается формулой $y(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(s)\,ds$, причем оно определено на всем (a, b).

Приведем теперь без доказательства теорему Коши, гарантирующую существование единственного решения задачи Коши (1), (2). Эта теорема является теоретической основой большей части материала данной главы. В технических вузах она обычно приводится без доказательства, которое довольно сложно и использует понятия и теоремы, часто не входящие в стандартный курс математического анализа. С доказательством более общего варианта теоремы Коши можно познакомиться в гл. VI (см. также [2, 7] и другие книги).

Теорема Коши. *Пусть в области G непрерывны функция $f(x, y)$ и ее частная производная $\dfrac{\partial f(x, y)}{\partial y}$. Тогда для любой точки $(x_0, y_0) \in G$ можно указать содержащий точку x_0 интервал (α, β), на котором определено единственное решение $y = y(x)$ задачи Коши* (1), (2).

Замечание 1. Геометрически задача Коши состоит в отыскании интегральной кривой, проходящей через заданную точку (x_0, y_0). Теорема Коши дает условия для правой части $f(x, y)$, при выполнении которых хотя бы вблизи этой точки такая интегральная кривая существует и единственна.

На рис. 1 в ограниченной области изображена интегральная кривая, проходящая через заданную точку. Пунктирными линиями обозначены другие интегральные кривые. При этом вся область покрыта непересекающимися (в силу единственности!) интегральными кривыми. Интегральные кривые подходят сколь угодно близко к границе области, как это будет выяснено в § 2.

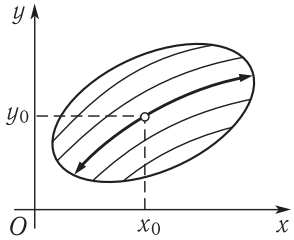


Рис. 1

Замечание 2. Задача Коши для ДУ описывает так называемые эволюционные, или детерминистские процессы. Если задано начальное состояние системы, моделируемой посредством ДУ, то дальнейшее (как и предшествовавшее) развитие этой системы полностью предопределено по крайней мере вблизи этого начального состояния.

Замечание 3. В условиях задачи Коши множество всех решений ДУ в области G зависит от одного свободного параметра (постоянной интегрирования). Зафиксируем x_0, такое, что множество точек $(x_0, y) \in G$ не пусто. Решение задачи Коши (1), (2) обозначим через $y = y(x, y_0)$ (для каждого y_0 решение свое). Начальное значение y_0 и играет роль свободного (но меняющегося в определенных границах, а потому вовсе не произвольного) параметра.

Замечание 4. Мы не рассматриваем пока более общее ДУ вида $F(x, y, y') = 0$, не разрешенное относительно производной. Выразить отсюда y' через x, y — это задача теории неявных функций, достаточно сложная даже локально. Обычно рассматриваемые подробно в учебных курсах частные случаи ДУ, не разрешенных относительно производной, довольно редко встречаются в приложениях.

Замечание 5. Мы не вводим в общем нелинейном случае широко распространенное определение «общего решения» ДУ с «произвольной постоянной». Как мы увидим ниже, такое определение в общем случае не является конструктивным. С точки зрения русского языка крайне неудачно здесь и использование штампа «произвольная постоянная». Ведь, как уже отмечалось, возникающая обычно при решении ДУ постоянная интегрирования вовсе не всегда произвольна. Часто она принимает свои значения в определенных границах (см. пример 4, § 8).

Напротив, для линейных ДУ понятие «общее решение» и термин «произвольная постоянная», как мы увидим ниже, не только полностью оправданы, но играют важнейшую роль.

§ 2. Продолжение решений. Непродолжимые решения, явления взрыва и прекращения решения

В ходе доказательства теоремы 1 (см. гл. VI) устанавливается существование и единственность локального решения задачи Коши, определенного только вблизи начальной точки x_0.

Оказывается, такое локальное решение всегда может быть продолжено на максимально возможный интервал, содержащий точку x_0, на котором $(x, y(x)) \in G$. Решение, определенное на таком интервале, будем называть непродолжимым решением. График непродолжимого решения подходит как угодно близко к границе области G. Это отражено на рис. 1. Доказательство данного факта подробно проводится в гл. VI; здесь же будет дано описательное изложение вопросов, связанных с продолжением решений.

Определение. Пусть $y(x)$ — решение ДУ (1) на (α, β), а $\tilde{y}(x)$ — решение ДУ (1) на большем интервале $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$, т. е. $(\alpha, \beta) \subset (\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$, причем $\tilde{y}(x) = y(x)$ при всех $x \in (\alpha, \beta)$. Тогда решение $\tilde{y}(x)$ называется *продолжением решения* $y(x)$.

Пусть решение $y(x)$ задачи Коши (1), (2) определено на интервале (α, β) и существует конечный предел $\lim y(x)_{x \to \beta - 0} = y_1$, причем точка $(\beta, y_1) \in G$. Рассмотрим новую задачу Коши для ДУ (1) с начальным условием $y(\beta) = y_1$. К этой задаче снова можно применить теорему Коши и, таким образом, мы получим продолжение решения $y(x)$ по x вправо на некоторый полуинтервал $[\beta, \beta_1)$.

Аналогично дело обстоит с точкой α и продолжением решения влево. Если область G ограничена, то таким путем можно продолжить решение вправо и влево, приближаясь сколь угодно близко к ∂G — границе области G. На рис. 1 представлена именно такая ситуация. Через каждую точку области G проходит ровно одна интегральная кривая. Можно сказать, что G расслаивается на интегральные кривые (является объединением интегральных кривых).

Пусть область G неограничена по переменной y. Оказывается, возможна ситуация, когда при продолжении решения вправо (влево) оно может обратиться в бесконечность при конечном значении переменной x. Иначе говоря, интегральная кривая может иметь одну или две вертикальные асимптоты.

Как мы увидим ниже, для линейных ДУ такое явление исключено. Напротив, возможность подобного явления для нелинейных ДУ представляет собой одну из основных трудностей при их изучении.

Для иллюстрации сказанного рассмотрим, например, задачу Коши $y' = y^2$, $y(0) = 1$. Здесь $G = \Re^2$ — вся плоскость переменных x, y. Казалось бы, правая часть ДУ очень «хорошая», и решение задачи Коши должно существовать для любых $x \in \Re$. Но нас подстерегает полная неожиданность!

Упражнение 1. Проверьте, что решение данной задачи Коши равно $y = \dfrac{1}{1-x}$ и определено на $(-\infty, 0)$. Это решение непродолжимо

правее точки $x = 1$. При $x \to 1 - 0$, т. е. при стремлении x к 1 слева, $x(t) \to +\infty$ (изобразите график решения — соответствующую интегральную кривую). Появилась вертикальная асимптота $x = 1$ графика решения.

Сделаем тривиальное замечание: это решение определено не на всей числовой оси $\Re$, так как функция $y = \dfrac{1}{1-x}$ разрывна в точке $x = 1$, а решение ДУ (и его производная) должны быть непрерывны согласно определению решения. Таким образом, решение $y = \dfrac{1}{1-x}$, $x \in (-\infty, 1)$ является непродолжимым решением исследованной задачи Коши.

В прикладных ситуациях подобные рассмотренному случаи моделируют явления взрыва (blow-up в зарубежной литературе), когда при приближении одной физической переменной к ее критическому значению зависящая от нее другая физическая переменная принимает сколь угодно большие (по абсолютной величине) значения.

Если, в частности, переменная x — время, то говорят, что решение обращается в бесконечность за конечное время. В § 12 Дополнения I обсуждаются некоторые явления взрыва, описываемые ДУ.

Отметим, что при более точном математическом моделировании соответствующей реальной конкретной проблемы явление взрыва получает более адекватное описание. Искомая переменная принимает очень большие, но все же конечные значения (см., например, § 13 Дополнения I).

Для нелинейных ДУ возможно также еще одно нестандартное явление. Проиллюстрируем его на примере.

Упражнение 2. Проверьте, что решение задачи Коши

$$y' = -\frac{1}{3y^2}, \quad y(0) = 1$$

равно $y = (1-x)^{1/3}$, $x \in (-\infty, 1)$. Постройте график решения.

Эта функция определена и непрерывна на всей числовой оси $(-\infty, +\infty)$. Однако решением (непродолжимым) задачи Коши она служит только на $(-\infty, 1)$. Этот интервал содержит начальную точку $x = 0$, и на нем эта функция дифференцируема. В точке $x = 1$ функция не дифференцируема, и, следовательно, правее этой точки решения нет!

Итак, в этом примере мы встретились с явлением прекращения решения. Начинаясь в точке $x = 0$, при $x \to 1 - 0$ решение $y(x) \to 0$. Но, при этом, $y'(x) \to \infty$. Это означает явление взрыва для производной решения.

Приведем в заключение параграфа несколько не совсем стандартных примеров решения задачи Коши для простейших ДУ. Всюду указываются непродолжимые решения.

Пример 1. Найдем решение задачи Коши $y' = \operatorname{tg} x$, $y(\pi) = 0$.

В качестве области G следует принять область

$$G = \{x, y\colon x \in (\pi/2, 3\pi/2), y \in \Re\}.$$

Эта область содержит начальную точку $(\pi, 0)$, и на ней правая часть ДУ непрерывна.

Решая ДУ и замечая, что $\cos x < 0$ на $(\pi/2, 3\pi/2)$ имеем

$$y = -\ln(-\cos x) + C.$$

Используя начальное условие, находим, что $C = 0$.

Ответ: $y = -\ln(-\cos x)$, $x \in (\pi/2, 3\pi/2)$.

Пример 2. Найдем решение задачи Коши $xy' = \ln x^2$, $y(-1) = 1$.

Здесь $G = \{x, y\colon x < 0, y \in \Re\}$. Запишем ДУ в виде $y' = -2\dfrac{\ln(-x)}{-x}$.

Интегрируя это равенство, получаем $y = \ln^2(-x) + C$. Но $y(-1) = 1$ и, значит, $C = 1$, а решение данной задачи Коши дается формулой $y = 1 + \ln^2(-x)$. Оно определено на полуоси $(-\infty, 0)$ и является непродолжимым.

Пример 3. В области $G_+ = \{x, y\colon x \in \Re, y > 0\}$ рассмотрим ДУ $2yy' = 1$. Введем новую функцию $u = y^2$. Поскольку по правилу дифференцирования суперпозиции $(y^2)' = 2yy'$, то для определения u получаем простейшее ДУ $u' = 1$. Интегрируя его, находим $u = x + C$, где $C \in \Re$ — постоянная интегрирования. Вернемся к старой переменной y. Имеем $y = \sqrt{x + C}$. Каждое такое решение определено на интервале $(-C, +\infty)$.

Если задано начальное условие $y(0) = y_0 > 0$, то решение соответствующей задачи Коши дается формулой $y = \sqrt{x + y_0^2}$.

Аналогично ДУ рассматривается в области $G_- = \{x, y\colon x \in \Re, y < 0\}$.

Упражнение 3. Решите задачу Коши $2yy' = 1$, $y(0) = -1$.

§ 3. Линейное однородное дифференциальное уравнение, его фундаментальное решение и общее решение

Под сегментом I будем понимать отрезок, интервал или полуинтервал числовой оси (конечный или бесконечный). Линейное пространство всех непрерывных на сегменте I функций будем обозначать через $C(I)$. Аналогично линейное пространство всех непрерывно дифференцируемых на сегменте I функций будем обозначать $C^1(I)$. Например, $C[a, b]$ — это линейное пространство всех функций, непрерывных на отрезке $[a, b]$.

Рассмотрим ДУ, называемое *линейным однородным ДУ*,

$$y' = p(x)y. \tag{3}$$

Предполагается, что функция $p(x)$ (коэффициент ДУ) известна, причем $p(x) \in C(a, b)$.

Линейность ДУ состоит в том, что неизвестная функция $y(x)$ и ее производная входят в ДУ в первой степени. Однородность ДУ проявляется в том, что оно всегда имеет на (a, b) тривиальное решение $y(x) = 0$.

Покажем сначала, что условия теоремы Коши выполняются. Правая часть в (3) $f(x, y) = p(x)y$ непрерывна в полосе (полуплоскости, плоско-

сти) $G = \{a < x < b,\ -\infty < y < +\infty\}$. В G непрерывна также частная производная функция $\dfrac{\partial f(x, y)}{\partial y} = p(x)$. Зафиксируем далее $x_0 \in (a, b)$. Согласно теореме Коши для любого $y_0 \in \Re$ на некотором интервале $(\alpha, \beta) \subset (a, b)$, содержащем точку x_0, существует единственное решение $y = y(x, y_0)$ уравнения (3), удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = y_0$.

Остановимся на некоторых общих свойствах решений ДУ (3).

1) ДУ (3) всегда имеет на всем интервале (a, b) тривиальное решение $y(x) = 0$.

2) Если z_1 и z_2 — решения ДУ (3) на (a, b), то любая их линейная комбинация $C_1 z_1 + C_2 z_2$, где $C_1, C_2 \in \Re$, — также его решение на том же интервале.

Упражнение 1. Проверьте эти свойства.

Приступим к решению, или, как часто говорят, к интегрированию ДУ (3).

Пусть сначала $y_0 = y(x_0) > 0$. По теореме о сохранении знака непрерывной функцией существует интервал $(\alpha_1, \beta_1) \subset (\alpha, \beta)$, содержащий точку x_0, на котором решение рассматриваемой задачи Коши $y(x) > 0$.

На этом интервале ДУ можно записать как следующее тождество $\dfrac{y'(x)}{y(x)} \equiv p(x)$. Проинтегрируем данное тождество от x_0 до x и получим

$$\int\limits_{x_0}^{x} \frac{y'(s)}{y(s)} ds = \int\limits_{x_0}^{x} p(s)\, ds.$$

Отсюда имеем $\ln y(x) - \ln y(x_0) = \int\limits_{x_0}^{x} p(s)\, ds$. Следовательно,

$$y(x) = y_0 \exp\Big(\int\limits_{x_0}^{x} p(s)\, ds\Big).$$

Упражнение 2. Пользуясь теоремой о дифференцировании интеграла с переменным верхним пределом (см. [8]) покажите, что данная формула определяет решение задачи Коши (3), (2) на всем интервале (a, b) (непродолжимое решение). Покажите, что та же формула пригодна также при $y_0 < 0$ и при $y_0 = 0$.

Итак, исходя из факта существования и единственности решения задачи Коши (3), (2), нами была получена явная формула для этого решения. Более того, решение оказалось непродолжимым, т. е. определенным на всем интервале (a, b). На этот факт мы будем опираться в дальнейшем. Формулой можно пользоваться при решении ДУ типа (3). Однако и в вычислениях и в теории существенно важнее и предпочтительнее более общий подход, излагаемый ниже.

Введем два важных понятия: «фундаментальное решение» и «общее решение» ДУ (3). Эти понятия будут в дальнейшем перенесены на случай линейных однородных ДУ высших порядков и на случай линейных однородных систем ДУ.

Лемма. *Пусть $z(x)$ — решение ДУ* (3) *на* (a, b). *Справедлива следующая альтернатива*:

или $z(x) = 0$ *на всем* (a, b),

или $z(x) \neq 0$ *ни в одной точке* (a, b).

Это утверждение следует непосредственно из полученной нами явной формулы для решения задачи Коши. Из него вытекает, в частности, что если $z(x)$ — решение ДУ (3) на (a, b), то или $z(x) > 0$ на всем (a, b) или $z(x) = 0$ на (a, b) или $z(x) < 0$ на (a, b).

Определение 1. Назовем *фундаментальным решением* ДУ (3) на (a, b) всякое его нетривиальное (т. е. ненулевое) решение на этом интервале.

Определение 2. Совокупность всех решений ДУ (3) на интервале (a, b) назовем его *общим решением* на (a, b).

Заметим, что в качестве фундаментального решения можно, в частности, взять $\varphi(x) = \exp\left(\int\limits_{x_0}^{x} p(s)\,ds\right)$.

Теорема. *Пусть $\varphi(x)$ — фундаментальное решение ДУ* (3) *на* (a, b), *а* $C \in \Re$ — *произвольная постоянная. Тогда формула*

$$y = C\varphi(x) \tag{4}$$

является формулой общего решения ДУ (3) *на* (a, b).

Доказательство. Покажем, что какое бы решение $z(x)$ на интервале (a, b) ни взять, всегда можно указать число C, при котором формула (4) дает это решение.

Действительно, пусть $z(x)$ — некоторое решение и точка $x_0 \in (a, b)$. Введем функцию $u(x) = z(x_0)\dfrac{\varphi(x)}{\varphi(x_0)}$. Обе функции $z(x)$ и $u(x)$ являются решениями ДУ (3), и в точке x_0 их значения совпадают. По теореме Коши они равны, т. е. $z(x) = C\varphi(x)$ при $C = \dfrac{z(x_0)}{\varphi(x_0)}$. Этим теорема доказана.

Таким образом, в предположении, что $p(x) \in C(a, b)$, установлено, что любая линейная задача Коши (3), (2) имеет единственное глобальное решение и это решение дается формулой (4).

Пример 1. Рассмотрим ДУ $y' = ky$, где $k = \mathrm{const}$. Его фундаментальное решение равно e^{kx} (проверьте!). Следовательно, формула $y = Ce^{kx}$ дает общее решение ДУ. Решение задачи Коши с начальным условием (2) дается формулой $y(x) = y_0 \exp(k(x - x_0))$.

Пример 2. Рассмотрим задачу Коши $y' = y \operatorname{tg} x$, $y(\pi) = 2$. Данное ДУ можно рассматривать на любом интервале $(k\pi - \pi/2, k\pi + \pi/2)$, где k — целое. Но так как начальная точка $x = \pi$ лежит на интервале $(\pi/2, 3\pi/2)$, то следует взять $k = 1$.

Найдем фундаментальное решение $y = \varphi(x)$ ДУ. Так как по определению фундаментального решения $\varphi(x) \neq 0$ на всем интервале $(\pi/2, 3\pi/2)$, то на этом интервале имеем тождество $\dfrac{d\varphi(x)}{\varphi(x)} = \dfrac{\sin x\, dx}{\cos x}$.

Упражнение 3. Проинтегрируйте это тождество и покажите, что $\varphi(x) = \dfrac{1}{\cos x}$.

Но тогда общее решение ДУ равно $y = C\dfrac{1}{\cos x}$ с любым $C \in \Re$. Учитывая начальное условие находим, что $C = -2$. Но тогда решение задачи Коши равно $y(x) = -\dfrac{2}{\cos x}$ (проверьте!).

§ 4. Линейное неоднородное дифференциальное уравнение и нахождение его общего решения методом Лагранжа

В этом параграфе будет изучено ДУ, которое называется *линейным неоднородным ДУ*. Это ДУ вида

$$y' - p(x)y = q(x). \tag{5}$$

Предполагается, что известны входящие в ДУ функции $p(x) \in C(a, b)$ и $q(x) \in C(a, b)$ (называемые иногда параметрами ДУ). При этом функция $q(x)$ называется правой частью ДУ.

Упражнение 1. Проверьте, что обеспечена применимость теоремы Коши в области $G = \{x, y\colon x \in (a, b), y \in \Re\}$.

Наряду с данным ДУ рассмотрим ДУ вида (3)

$$z' - p(x)z = 0,$$

которое называется линейным однородным ДУ, соответствующим рассматриваемому линейному неоднородному ДУ.

Пусть $z = \varphi(x)$ — фундаментальное решение этого однородного ДУ. Из предыдущего параграфа мы знаем, что формула $z = C\varphi(x)$ с произвольной константой C дает его общее решение.

Под общим решением ДУ (5) также будем понимать совокупность всех его решений.

Дадим формулу общего решения этого ДУ.

Пусть на интервале (a, b) известно некоторое фиксированное решение $y_0(x)$ линейного неоднородного ДУ (5), или, как принято говорить, *частное решение* этого ДУ. Справедливо следующее важное утверждение.

Теорема 1. *Пусть $\varphi(x)$ — фундаментальное решение однородного ДУ, соответствующего ДУ* (5), *$C \in \Re$ — произвольная постоянная, а $y_0(x)$ — некоторое* (*частное*) *решение ДУ* (5) *на* (a, b). *Тогда общее решение ДУ* (5) *определено на всем* (a, b) *и дается формулой* $y(x) = C\varphi(x) + y_0(x)$.

Упражнение 2. Докажите эту теорему по образцу доказательства теоремы из § 2.

Поскольку выражение $C\varphi(x)$ дает общее решение однородного ДУ, соответствующего (5), то утверждение теоремы 1 можно сформулировать в следующей форме.

Общее решение неоднородного ДУ равно сумме общего решения соответствующего однородного ДУ и частного решения неоднородного ДУ.

Отметим, что подобное представление общего решения имеет место для очень широких классов линейных уравнений, а не только для ДУ. Напомним в этой связи аналогичное представление общего решения системы линейных алгебраических уравнений.

Пример 1. Решим следующую задачу Коши: $y' = py + q$, $y(0) = 0$, где p и q — ненулевые постоянные. Согласно примеру 1 из § 3 общее решение соответствующего однородного ДУ равно $z = Ce^{px}$. Но очевидно, что частное решение неоднородного ДУ — это постоянная, равная $-\frac{q}{p}$ (ведь производная постоянной равна нулю).

Следовательно, общее решение неоднородного ДУ равно $y = Ce^{px} - \frac{q}{p}$. Постоянная C определяется из требования выполнения начального условия $y(0) = 0$.

Упражнение 3. Подставьте в выражение для общего решения $x = 0$, воспользуйтесь начальным условием и покажите, что решение задачи Коши дается формулой $y = \frac{q}{p}(e^{px} - 1)$.

Лагранж предложил удобный метод получения формулы общего решения неоднородного линейного ДУ (5). Дадим описание метода Лагранжа, который называется также методом вариации произвольного постоянного.

Согласно Лагранжу общее решение ДУ (5) можно всегда найти в виде $y(x) = C(x)\varphi(x)$, где $C(x)$ — некоторая неизвестная дифференцируемая на (a, b) функция, вычисляемая в процессе применения метода. Иначе говоря, в ДУ предлагается совершить замену переменной: от неизвестной функции $y(x)$ перейти к новой неизвестной функции $C(x)$.

Оказывается, зависимость C от x позволяет учесть влияние ненулевой правой части $q(x)$.

Дифференцируя выражение для $y(x)$, получаем $y'(x) = C'(x)\varphi(x) + C(x)\varphi'(x)$. Но $\varphi(x)$ является решением однородного ДУ так что $y'(x) = C'(x)\varphi(x) + C(x)p(x)\varphi(x)$. Подставляя выражения для $y'(x)$ и $y(x)$ в неоднородное ДУ (5) получаем равенство $C'(x)\varphi(x) + C(x)p(x)\varphi(x) = p(x)C(x)\varphi(x) + q(x)$. После уничтожения равных слагаемых имеем $C'(x)\varphi(x) = q(x)$. Итак, для нахождения неизвестной функции получается простейшее ДУ $C'(x) = \frac{q(x)}{\varphi(x)}$.

Решая его, находим $C(x) = \int \frac{q(x)}{\varphi(x)} dx$.

Эту формулу можно записать иначе, используя интеграл с переменным верхним пределом в качестве первообразной. Фиксируем $x_0 \in (a, b)$ и получим $C(x) = \int\limits_{x_0}^{x} \frac{q(s)}{\varphi(s)}\, ds + A$, где A — произвольная постоянная интегрирования.

Таким образом, получаем

$$y(x) = A\varphi(x) + \left(\int\limits_{x_0}^{x} \frac{q(s)}{\varphi(s)}\, ds\right)\varphi(x). \tag{6}$$

Упражнение 4. Проверьте, что эта формула является формулой общего решения ДУ (5) на всем (a, b), т. е. описывает все его непродолжимые решения.

Указание. Воспользуйтесь теоремой из курса математического анализа о дифференцировании интеграла по переменному верхнему пределу (см. [8]).

Обратите внимание на то, что первое слагаемое в правой части формулы является общим решением соответствующего (5) однородного ДУ, а второе слагаемое является частным решением ДУ (5).

Итак, методом Лагранжа получена формула обшего решения ДУ (5). При этом оказалось, что данный метод дает непродолжимые решения этого ДУ, определенные на всем интервале (a, b) непрерывности параметров ДУ $P(x)$, $q(x)$.

Из формулы общего решения, установленной методом Лагранжа, в применении к задаче Коши вытекает следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть функции $p(x)$ и $q(x)$ непрерывны на (a, b). Тогда для любой точки (x_0, y_0): $x_0 \in (a, b)$, $y_0 \in \Re$ на всем интервале (a, b) существует единственное решение $y = y(x)$ задачи Коши* (3), (2).

Доказательство. Потребуем, чтобы график решения проходил через точку (x_0, y_0). Полагая $x = x_0$, $y(x_0) = y_0$ в формуле Лагранжа общего решения $y(x) = \left(\int\limits_{x_0}^{x} \frac{q(s)}{\varphi(s)}\, ds\right)\varphi(x) + A\varphi(x)$ находим $A = \frac{y_0}{\varphi(x_0)}$. Подставим это значение постоянной A в формулу общего решения и получим решение задачи Коши (проверьте!).

Пример 2. Решим задачу Коши

$$y' = y \operatorname{tg} x + \frac{1}{\cos^3 x}, \quad y(0) = 0.$$

Максимальным интервалом, содержащим начальную точку $x = 0$, на котором непрерывны $p(x) = \operatorname{tg} x$ и $q(x) = \frac{1}{\cos^3 x}$, является интервал $(-\pi/2, \pi/2)$. Значит непродолжимое решение данной задачи Коши определено на этом же интервале.

Положительное фундаментальное решение соответствующего однородного ДУ $z' = z \operatorname{tg} x$ было вычислено в предыдущем параграфе и равно $\varphi(x) = \dfrac{1}{\cos x}$.

Общее решение неоднородного ДУ, согласно Лагранжу ищем в виде $y(x) = C(x)\dfrac{1}{\cos x}$. Для нахождения неизвестной функции $C(x)$ имеем ДУ

$$\frac{C'(x)}{\cos x} = \frac{1}{\cos^3 x},$$

откуда $C'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, но тогда $C(x) = \operatorname{tg} x + A$, где A — произвольная постоянная интегрирования.

Значит, общее решение неоднородного ДУ равно $y(x) = \dfrac{A}{\cos x} + \dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$.

Из начального условия $y(0) = 0$ находим, что $A = 0$.

Ответ: $y(x) = \dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$, $x \in (-\pi/2, \pi/2)$.

Сделаем тривиальное замечание: полученное для $y(x)$ выражение вовсе не является решением ДУ на всей оси x, так как определяемая им функция разрывна в нулях функции $\cos x$.

Пример 3. Решим следующую задачу Коши:

$$(x-1)y' + 3x + y - 2 = 0, \quad y(0) = 0.$$

В виде, разрешенном относительно производной, задача перепишется так:

$$y' = \frac{y}{1-x} + \frac{3x-2}{1-x}, \quad y(0) = 0.$$

Максимально возможным интервалом, на котором определено (непродолжимое) решение, является интервал $(-\infty, 1)$. Ведь именно ему принадлежит начальная точка $x = 0$.

Сначала найдем положительное фундаментальное решение соответствующего однородного ДУ $z' = \dfrac{z}{1-x}$. Имеем $\dfrac{z'}{z} = \dfrac{1}{1-x}$, откуда $\ln z = -\ln(1-x)$, или $z = \dfrac{1}{1-x}$.

Решение неоднородного ДУ ищем в виде $y = \dfrac{C(x)}{1-x}$. Для нахождения $C(x)$ получаем ДУ (проверьте!) $C'(x) = -3x + 2$, откуда находим $C(x) = -3/2x^2 + 2x + A$. Общее решение неоднородного ДУ равно $y = \dfrac{-3/2x^2 + 2x + A}{1-x}$. Из начального условия находим $A = 0$.

Ответ: непродолжимое решение дается формулой

$$y(x) = \frac{-3/2x^2 + 2x}{1-x}, \quad x \in (-\infty, 1).$$

§ 5. Линейное ДУ с постоянным коэффициентом и со специальной правой частью

Здесь будет изучено ДУ

$$y' - py = q(x) \tag{7}$$

с постоянным коэффициентом p и известной правой частью $q(x) \in C(a, b)$.

1°. Сначала получим формулу общего решения методом Лагранжа. Соответствующее однородное ДУ $z' = pz$ имеет фундаментальное решение $z = e^{px}$.

Общее решение неоднородного ДУ ищем методом Лагранжа в виде $y = C(x)e^{px}$. Для определения $C(x)$ имеем ДУ $e^{px}C'(x) = q(x)$. Следовательно, $C(x) = \int e^{-px}q(x)\,dx$ и $y = e^{px}\int e^{-px}q(x)\,dx$.

Фиксируем $x_0 \in (a, b)$.

Упражнение. Предлагаем читателю проверить, что общее решение на (a, b) дается формулой

$$y(x) = Ae^{px} + \int\limits_{x_0}^{x} e^{p(x-s)}\,q(s)\,ds \tag{8}$$

(A — произвольная постоянная).

Указание. Воспользуйтесь теоремой о дифференцировании интеграла по переменному верхнему пределу [8].

2°. Напомним теперь, что если фундаментальное решение однородного ДУ известно, то для нахождения общего решения неоднородного ДУ достаточно найти какое-либо его частное решение. Имеется довольно широкий класс правых частей, когда нахождение частного решения ДУ (6) осуществляется довольно просто без использования операции интегрирования.

Определение. Функция $q(x) = e^{\omega x}P_n(x)$, где $P_n(x)$ — многочлен степени n, называется *квазимногочленом*, или *специальной правой частью*.

Рассмотрим задачу вычисления частного решения ДУ (7) со специальной правой частью

$$q(x) = e^{\omega x}(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0), \tag{9}$$

где $a_n \neq 0$. Будем различать два случая.

2°.1) Пусть $\omega \neq p$. В этом случае частное решение можно найти в виде $y(x) = e^{\omega x}Q_n(x)$, где $Q_n(x)$ — многочлен той же степени, что и $P_n(x)$. Действительно, будем искать решение ДУ в виде

$$y(x) = e^{\omega x}(y_n x^n + y_{n-1}x^{n-1} + \ldots + y_0), \tag{10}$$

где неизвестные (неопределенные) коэффициенты $y_n, y_{n-1}, \ldots, y_0$ будут найдены в процессе вычисления.

Найдем $y'(x)$ и подставим выражения для $y(x)$, $y'(x)$ и $q(x)$ в уравнение (7). Имеем для любых $x \in \Re$ следующее тождество:

$$e^{\omega x}\omega(y_n x^n + y_{n-1}x^{n-1} + \ldots + y_0) + e^{\omega x}(ny_n x^{n-1} + (n-1)y_{n-1}x^{n-2} + \ldots + y_1) \equiv$$
$$\equiv pe^{\omega x}(y_n x^n + y_{n-1}x^{n-1} + \ldots + y_0) + e^{\omega x}(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0).$$

Сократим это тождество на $e^{\omega x}$ и получим равенство двух многочленов. Из их равенства следует, что равны их коэффициенты при одинаковых степенях x. Это приводит к следующей системе для определения коэффициентов y_n, y_{n-1}, y_0 (проверьте!)

$$(\omega - p)y_n = a_n, \quad (\omega - p)y_{n-1} = a_{n-1}, \quad \ldots, \quad (\omega - p)y_0 + y_1 = a_0.$$

При решении этой системы последовательно вычисляются из первого уравнения $y_n = \dfrac{a_n}{\omega - p}$, затем из второго уравнения y_{n-1} и т. д.

Пример 1. Найдем частное решение ДУ $y' + y = xe^{2x}$.

Здесь $p = -1$, $\omega = 2$, $n = 1$. Следовательно, частное решение ДУ можно найти как произведение многочлена первой степени с неопределенными коэффициентами $Ax + B$ на экспоненту e^{2x}:

$$y = (Ax + B)e^{2x}.$$

Имеем $y' = (2Ax + 2B + A)e^{2x}$. Подставляя y, y' в ДУ, после сокращения на e^{2x} получаем $3Ax + 3B + A = x$, откуда $A = 1/3$, $B = -1/9$.

Ответ: $y = (x/3 - 1/9)e^{2x}$.

2°.2) Остановимся теперь на случае, когда $\omega = p$. Оказывается, здесь частное решение можно найти в виде $y(x) = xQ_n(x)e^{px}$, т. е. в виде

$$y(x) = xe^{px}(y_n x^n + y_{n-1}x^{n-1} + \ldots + y_0). \tag{11}$$

ДУ здесь имеет вид

$$y' + py = e^{px}(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0).$$

Подставим в него выражения

$$y(x) = e^{px}(y_n x^{n+1} + ny_{n-1}x^n + \ldots + y_0 x)$$

и

$$y'(x) = e^{px}\big((n+1)y_n x^n + ny_{n-1}x^{n-1} + \ldots + y_1) + py\big).$$

После сокращения на e^{px} и уничтожения членов py получаем равенство двух многочленов

$$y_n x^n + ny_{n-1}x^{n-1} + \ldots + y_0 = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, последовательно находим

$$y_n = \frac{a_n}{n+1}, \quad y_{n-1} = \frac{a_{n-1}}{n}, \quad \ldots, \quad y_0 = a_0.$$

Пример 2. Найдем частное решение ДУ $y' + y = (x+1)e^{-x}$.

Здесь $p = -1 = \omega = -1$, $n = 1$. Следовательно, частное решение можно найти в виде

$$y = x(Ax + B)e^{-x}, \quad \text{т. е.} \quad y = (Ax^2 + Bx)e^{-x}.$$

Имеем $y' = (-Ax^2 - Bx + 2Ax + B)e^{-x}$. Подставим y' и y в ДУ и после сокращения на e^{-x} получим равенство двух многочленов $2Ax + B = x + 1$. Значит, $A = 1/2$, $B = 1$.

Ответ: $y = \left(\dfrac{x^2}{2} + x\right)e^{-x}$.

§ 6. Дифференциальные уравнения, линейные относительно независимой переменной

Этим параграфом начинается рассмотрение некоторых нелинейных ДУ. По методическом соображениям (как и в [12]) мы не будем использовать здесь слов «общее решение» и «произвольная постоянная». Формальное перенесение их с линейных ДУ на существенно более сложные нелинейные ДУ математически некорректно и может приводить к ошибкам.

Отметим еще, что исследование решений нелинейного ДУ требует иногда особенно вдумчивого математического анализа. Ведь при решении конкретных задач прикладного характера никому не нужно нагромождение математических формул. Вместо этого часто важно знать область определения того или иного решения, его график и особенности этого графика. Например, если график решения нелинейного ДУ может иметь одну или две вертикальные асимптоты, то возможны явления взрыва.

Укажем также, что в некоторых прикладных и, особенно часто, в геометрических задачах переменные x и y равноправны. В этих случаях бывает важно не вычислить само решение ДУ, а найти алгебраическую связь между переменными. Нахождение такой связи между переменными в техническом плане может часто само по себе оказаться полезным или даже решающим.

ДУ, рассматриваемые ниже, формально сводятся к линейным ДУ, обсуждавшимся в §§2–4, однако иногда требуют дополнительного серьезного анализа.

Рассмотрим следующее нелинейное ДУ:

$$y'(x) = \frac{1}{p(y)x + q(y)}. \tag{12}$$

Будем предполагать, что известны функции $p(y) \in C(a, b)$ и $q(y) \in C(a, b)$, причем $p(y) \neq 0$ на (a, b). Зададим на плоскости переменных x, y в декартовой системе координат кривую l, определяемую уравнением $p(y)x + q(y) = 0$. Эта кривая разбивает плоскость на две области D_-, где $p(y)x + q(y) < 0$ и D_+, где $p(y)x + q(y) > 0$.

Зададим начальную точку (x_0, y_0). Пусть сначала $(x_0, y_0) \in D_+$. Функция $f(x, y) = \dfrac{1}{p(y)x + q(y)}$ и ее частная производная по y непрерывны на D_+; поэтому, согласно теореме Коши, ДУ с начальным условием $y(x_0) = y_0$ имеет на некотором интервале (α, β), содержащем точку x_0, единственное решение $y = y(x)$, график которого проходит через заданную начальную точку. На этом интервале $y'(x) > 0$, откуда следует, что функция $y(x)$ строго возрастает на нем. Но тогда функция $y = y(x)$ имеет на интервале $(y(\alpha), y(\beta))$ (конечном или бесконечном) единственную обратную функцию $x = x(y)$. Это обстоятельство позволяет совершить в ДУ замену переменных, считая y новой независимой переменной, а $x(y)$ — новой искомой функцией. Поскольку $y'(x) = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{x'(y)}$ (по теореме о производной обратной функции), то для вычисления функции $x(y)$ мы получаем линейное ДУ $x' = p(y)x + q(y)$ с начальным условием $x(y_0) = x_0$. В отличие от исходной задачи Коши решение этой задачи $x = x(y)$ определено на всем интервале (a, b).

Аналогично дело обстоит, если $(x_0, y_0) \in D_-$.

Если по смыслу задачи переменные x, y равноправны, то на этом можно закончить: найдена искомая связь между переменными.

Если все же требуется найти y как функцию от x, следует исследование продолжить.

Вернемся к исходной задаче, когда x был независимой переменной. Задача нахождения ее глобальных решений и задача Коши для определения $x = x(y)$ не эквивалентны. Для второй задачи кривая l является кривой стационарных точек решений ДУ и не играет особо важной роли. Для исходной же задачи эта кривая разделяет области D_+ и D_- и оказывает самое существенное влияние на интервал существования решения. На приведенных ниже примерах читатель может получить представление о возникающих здесь трудностях.

Пример 1. Рассмотрим задачу Коши $y' = \dfrac{1}{x + e^y}$, $y(0) = 1$. Правая часть ДУ и ее частная производная по y непрерывны в каждой из двух областей $D_- = \{x, y\colon x + e^y < 0\}$ и $D_+ = \{x, y\colon x + e^y > 0\}$.

Исходную задачу Коши следует рассматривать в области D_+, так как ей принадлежит начальная точка $(0, 1)$.

Поскольку в D_+ для всякого решения $y = y(x)$ ДУ $y'(x) > 0$, то $y(x)$ является строго возрастающей функцией на некотором интервале (α, β), содержащем начальную точку $x = 0$. Пусть $x = x(y)$ — функция, обратная к функции $y(x)$. Для нее имеем задачу Коши $x' = x + e^y$, $x(1) = 0$.

Упражнение 1. Следуя §4, покажите, что $x = (y - 1)e^y$. При этом $x' = ye^y$, $x'' = (y + 1)e^y$.

Отсюда следует, что функция $x = x(y)$ строго убывает на полуоси $(-\infty, 0)$, строго возрастает на полуоси $(0, +\infty)$ и имеет в точке $y = 0$ строгий минимум, равный -1. Точка $y = -1$ является точкой перегиба.

Ось x в точке $y = 0$ является горизонтальной асимптотой функции $x = x(y)$ на $-\infty$. График функции $x = x(y)$ изображен на рис. 2.

Итак, связь между переменными x и y найдена.

Однако в исходной задаче Коши требовалось найти y как функцию от x. Такая постановка более типична для прикладных задач.

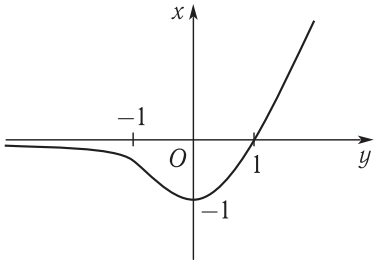


Рис. 2

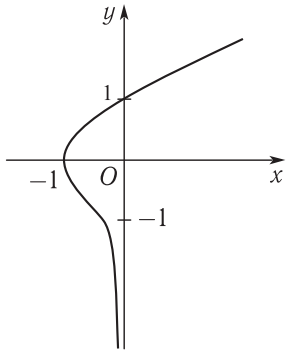


Рис. 3

Следует рассмотреть функцию, обратную к функции $x = x(y)$. Эта функция двузначна: она имеет две однозначные непрерывные ветви, представленные на рис. 3.

В качестве графика решения $y = y(x)$ следует выбрать непрерывную ветвь, проходящую через начальную точку $x = 0, y = 1$, т. е. строго возрастающую ветвь, определенную на $(-1, +\infty)$.

Вторая непрерывная ветвь строго убывает на $(-1, 0)$. Она не имеет прямого отношения к рассмотренной задаче Коши.

Пример 2. Рассмотрим задачу Коши $y' = \dfrac{1}{x-y}$, $y(1) = 0$. Задачу решаем сначала в области $D_+ = \{x, y\colon x > y\}$, где лежит начальная точка $x = 1, y = 0$. Меняя ролями переменные, получаем для определения $x = x(y)$ задачу Коши для линейного ДУ со специальной правой частью

$$\frac{dx}{dy} = x - y, \quad x(0) = 1.$$

Упражнение 2. Покажите, что общее решение ДУ равно $x = y + 1 + Ce^y$ и что из начального условия вытекает равенство $C = 0$.

Ответ: $y = x - 1$.

Пример 3. Рассмотрим задачу Коши $y' = \dfrac{1}{x-y}$, $y(1/2) = 0$.

Как и в примере 1, сведем эту задачу к задаче $\dfrac{dx}{dy} = x - y$, $x(0) = 1/2$.

Упражнение 3. Покажите, что $x = y + 1 - \dfrac{1}{2}e^y$. Постройте график этой функции.

В качестве комментария заметим, что функция $x = x(y)$ определена на всей оси y. В точке $y = \ln 2$ функция имеет положительный максимум, равный $x_{\max} = \ln 2$. При переходе через точку $y = \ln 2$ решение $x = x(y)$ попадает в область D_- и при $y \to -\infty$, возрастая, приближается к своей асимптоте $x = y + 1$, оставаясь ниже ее.

Задача Коши еще не решена: надо вернуться к старым переменным.

Упражнение 4. Постройте график обратной (двузначной) функции $y = y(x)$, меняя ролями координатные оси и считая теперь x независимой переменной.

На полуоси $(-\infty, \ln 2)$ уравнение $y + 1 - \dfrac{1}{2}e^y = x$ определяет две непрерывные ветви обратной функции $y = y(x)$.

Решением задачи Коши с начальным условием служит ветвь обратной функции $y = y(x)$ со значениями на $(-\infty, \ln 2)$.

Заметим, что ветвь обратной функции со значениями на $(\ln 2, +\infty)$ является решением задачи Коши с начальным условием $y(1/2) = y^*$, где y^* — ненулевой корень уравнения $1 + 2y = e^y$.

Упражнение 5. Для ДУ из примеров 2 и 3 рассмотрите задачи Коши с начальными условиями: а) $y(0) = -2$; б) $y(0) = -1$.

Проведенные выше рассуждения можно осуществить в случае начальных условий общего вида.

Пример 4. Рассмотрим задачу Коши с общим начальным условием: $y' = \dfrac{1}{x - y}$, $y(x_0) = y_0$.

Исследуем поведение ее решений при всевозможных допустимых значениях x_0, y_0, т. е. таких, что $y_0 \neq x_0$.

Введем в рассмотрение области $D_+ = \{(x, y) \colon x > y\}$ и $D_- = \{(x, y) \colon x < y\}$. В каждой из них вблизи точки x_0, y_0 можно осуществить замену переменных, приняв x за новую неизвестную функцию, а y — за новую независимую переменную. Функция $x = x(y)$, обратная к функции $y = y(x)$, является решением следующей задачи Коши для линейного ДУ:

$$\frac{dx}{dy} = x - y, \quad x(y_0) = x_0.$$

Ее решение дается формулой (проверьте!) $x = y + 1 + (x_0 - y_0 - 1)e^{y - y_0}$. Каждая из этих функций определена на всей оси y.

Рассмотрим расположение графиков этих решений. Отметим, что в области D_+ решения $x = x(y)$ строго возрастают, в области D_- они строго убывают, а кривая l является кривой их локальных максимумов.

Если $x_0 - y_0 - 1 > 0$, то соответствующие решения $x = x(y)$ лежат в области D_+ и, значит, строго возрастают, определены на всей оси y и $x(y) \to -\infty$ при $y \to -\infty$, оставаясь выше своей асимптоты $x = y + 1$.

Если $x_0 - y_0 - 1 = 0$, то $x(y) = y + 1$. Если $x_0 - y_0 - 1 < 0$, то $x(y) \to -\infty$ при $y \to -\infty$, оставаясь ниже своей асимптоты $x = y + 1$. В точке $\tilde{x}$, $\tilde{y}$, где $\tilde{y} = y_0 - \ln(1 + y_0 - x_0)$, функция $x(y)$ достигает мак-

симума, равного $\tilde{x} = y_0 - \ln(y_0 + 1 - x_0)$, т. е. $\tilde{x} = \tilde{y}$ (проверьте!). Таким образом, решение $x = x(y)$ переходит из области D_+ в область D_-, пересекая кривую l — кривую локальных максимумов.

Наконец, при $y \to +\infty$ имеем $x(y) \to +\infty$.

Упражнение 6. Изобразите на графике ход нескольких характерных интегральных кривых.

Исследование завершено, если требуется не решить задачу Коши, а лишь установить алгебраическую связь между переменными. С точки зрения исходной задачи Коши сказать, что она решена, а так часто поступают в вузах, было бы некорректно с точки зрения добросовестного исследователя. Вернемся к исходной задаче Коши.

Если $x_0 - y_0 - 1 > 0$, то $(x_0, y_0) \in D_+$, решение $y = y(x)$ определено на всей оси x и строго возрастает на ней от $-\infty$ (оставаясь ниже асимптоты $y = x - 1$) до $+\infty$.

Если $x_0 - y_0 - 1 = 0$, то $y(x) = x - 1$ и $(x, y(x)) \in D_+$.

Если $0 < x_0 - y_0 < 1$, то $(x, y(x)) \in D_+$, а $y(x)$ определено и строго возрастает на $(-\infty, \tilde{x}_0)$.

Наконец, если $x_0 - y_0 < 0$, то $(x, y(x)) \in D_-$, а $y(x)$ определено и строго убывает по x на $(-\infty, \tilde{x}_0)$ от $+\infty$ до $\tilde{x}_0$.

Замечание. В последних двух случаях непродолжимое решение подходит слева к точке $(\tilde{x}_0, \tilde{x}_0) \in l$, т. е. к границе своего существования.

Вернемся к задаче (12) для общего ДУ, линейного относительно x.

Если $p(y) = 0$ в отдельных точках (a, b), то кривая l состоит из нескольких компонент и разбивает область G на несколько подобластей, в каждой из которых можно провести приведенные выше рассуждения. Так обстоит дело, например, с задачей Коши $y' = \dfrac{1}{yx - 1}$, $y(x_0) = y_0$, где $y(x_0)x_0 \neq 1$, которая имеет три таких области. Предлагаем читателю исследовать эту более сложную задачу.

§ 7. Уравнение Бернулли

Уравнением Бернулли называется всякое ДУ вида

$$y' = p(x)y + q(x)y^\alpha \tag{13}$$

($\alpha \in \Re$). Коэффициенты $p(x) \in C(a, b)$ и $q(x) \in C(a, b)$ предполагаются заданными.

Исключим случаи $\alpha = 0$ и $\alpha = 1$, когда ДУ (13) является линейным ДУ.

Функция y^α определена в общем случае только при $y > 0$. Заметим также, что если $\alpha > 0$, то ДУ Бернулли имеет тривиальное решение $y = 0$ на (a, b).

Для ДУ Бернулли всегда обеспечена применимость теоремы Коши в области $G_+ = \{(x, y)\colon x \in (a, b), y > 0\}$ (проверьте!). Значит, в неко-

торой окрестности точки (x_0, y_0) существует единственное решение $y = y(x)$ задачи Коши для ДУ (13) с начальным условием (2), где $x_0 \in (a, b)$, $y_0 > 0$.

Покажем, что в этих условиях задача Коши для ДУ Бернулли формально сводится к задаче Коши для некоторого линейного ДУ. Действительно, так как $y(x_0) = y_0 > 0$, то по теореме о сохранении знака непрерывной функции найдется содержащий точку x_0 интервал (a_1, b_1), на котором решение задачи Коши $y(x) > 0$. Разделим обе части ДУ на y^α, введем новую неизвестную функцию $z = y^{1-\alpha}$ и получим для z на (a_1, b_1) линейное ДУ $z' = (1-\alpha)(p(x)z + q(z))$ с начальным условием $z(x_0) = y_0^{1-\alpha}$. Глобальное решение $z(x)$ последней задачи Коши определено на всем (a, b). Вернемся к старой неизвестной функции $y(x)$. Нетрудно убедиться, что формула $y = y(x) = z^{-1/(\alpha-1)}(x)$ всегда дает решение исходной задачи Коши для ДУ Бернулли на том интервале (a_2, b_2), на котором определена $y(x)$; возможно это будет только для тех x, где $z(x) > 0$.

Пусть теперь значение показателя α таково, что функция y^α определена лишь при $y > 0$. Здесь, как и выше, задача сводится к линейному случаю, однако возвращение к переменной y требует дополнительного исследования.

Пример 1. Рассмотрим задачу Коши $y' = y - y^2$, $y(0) = y_0$.

Это уравнение Бернулли с $\alpha = 2$. Два его постоянных решения очевидны: это $y = 0$ и $y = 1$. Они соответствуют начальным значениям $y_0 = 0$ и $y_0 = 1$. Условия теоремы Коши выполнены на всей плоскости $\Re^2$ переменных x, y. Однако поскольку для сведения ДУ к линейному ДУ нам предстоит разделить ДУ на y^2, то рассмотрим два случая: $y_0 > 0$ и $y_0 < 0$.

Пусть сначала $y_0 > 0$. Воспользуемся теоремой Коши и теоремой о сохранении знака непрерывной функции. Из них следует, что существует интервал (a, b), содержащий точку $x = 0$, на котором данная задача Коши имеет единственное решение $y = y(x) > 0$. Разделим при $x \in (a, b)$ ДУ на y^2 и получим задачу Коши для линейного ДУ относительно функции $z = \dfrac{1}{y}$

$$z' = -z + 1, \quad z(0) = \frac{1}{y_0}.$$

Общее решение равно $z = 1 + Ce^{-x}$. Удовлетворяя начальному условию, получим $\dfrac{1}{y_0} = 1 + C$. Таким образом, $z = 1 + \left(\dfrac{1}{y_0} - 1\right)e^{-x}$

Окончательно имеем $y = \dfrac{y_0}{y_0 + (1 - y_0)e^{-x}}$.

Пусть $y_0 < 0$. Нетрудно убедиться, что получается та же формула для решения. Она содержит и тривиальное решение $y = 0$, получающееся из нее при $y_0 = 0$.

Выведенная выше формула описывает при всевозможных значениях $y_0 \in \Re$ все решения соответствующих задач Коши. На графике (рис. 4) показаны типичные решения с начальными значениями $y_0 < 0$, $y_0 = 0$, $y_0 \in (0, 1)$, $y_0 = 1$, $y_0 > 1$.

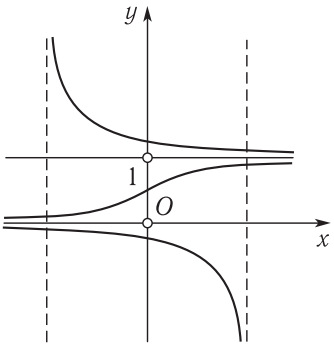


Рис. 4

Возникает вопрос: не содержит ли эта формула при всевозможных значениях y_0 все решения ДУ, т. е. не является ли она формулой общего решения рассматриваемого ДУ? Оказывается, это не так. Действительно, функции $y = \pm\dfrac{1}{1 - e^{-x}}$ являются решениями ДУ (проверьте!), но они не получаются из нашей формулы ни при каких $y_0 \in \Re$. Это обстоятельство указывает на литературную некорректность используемого во многих книгах понятия «общего решения» для нелинейного ДУ, использующего термин «произвольная постоянная». Отметим все же, что указанные решения получаются из формулы соответственно при $y_0 \to \pm\infty$, так что при всевозможных $y_0 \in \Re$, включая «значения» $-\infty$ и $+\infty$, формула содержит все решения ДУ.

Упражнение 1. Нарисуйте графики потерянных решений $y = \pm\dfrac{1}{1 - e^{-x}}$.

Пример 2. Рассмотрим задачу Коши $y' = y - y^3$, $y(0) = 2$.

Это уравнение Бернулли с $\alpha = 3$. Условия теоремы Коши выполнены на всей плоскости $\Re^2$ переменных x, y. Воспользуемся теоремой Коши и теоремой о сохранении знака непрерывной функции. Из них следует, что существует интервал (a, b), содержащий точку $x = 0$, на котором данная задача Коши имеет единственное решение $y = y(x) > 0$. Разделим при $x \in (a, b)$ ДУ на y^3 и получим задачу Коши для линейного ДУ относительно функции $z = \dfrac{1}{y^2}$

$$z' = -2z + 2, \quad z(0) = \frac{1}{4}.$$

Упражнение 2. Покажите, что $z = \dfrac{4 - 3e^{-x}}{4}$ и, значит, $y^2 = \dfrac{4}{4 - 3e^{-x}}$.

Выражение справа должно быть положительно, т. е. должно выполняться неравенство $x > \ln\dfrac{3}{4}$. Кроме того, при извлеченни квадратного корня следует взять знак плюс, ибо $y(0) > 0$.

Ответ: непродолжимое решение задачи равно $y = \dfrac{2}{\sqrt{4 - 3e^{-x}}}$, $x \in \left(\ln\dfrac{3}{4}, +\infty\right)$.

Упражнение 3. Постройте график решения.

Замечание 1. В этом примере мы в очередной раз встретились с явлением взрыва решения. Решение не определено левее точки $x = \ln\frac{3}{4}$. При стремлении x к этой точке справа и решение, и его производная стремятся к бесконечности. Еще раз отметим, что явление взрыва возможно лишь для нелинейных ДУ.

Пример 3. Рассмотрим задачу Коши для того же ДУ Бернулли примера 2 с общим начальным условием $y(0) = y_0$.

Проведем полное исследование этой задачи при всевозможных y_0. Вследствие нечетности правой части ДУ (при замене y на $-y$ ДУ не меняется) достаточно изучить эту задачу в верхней полуплоскости $y \geq 0$.

Заметим, что если $y_0 = 0$, то $y(x) = 0$ является решением, определенным на всей оси x. Аналогично, если $y_0 = 1$, то $y(x) = 1$ является решением, определенным также на всей оси x.

Рассмотрим ДУ в одной из областей $G_1 = \{(x, y)\colon x \in \Re,\ 0 < y < 1\}$, $G_2 = \{(x, y)\colon x \in \Re,\ y > 1\}$.

В каждой из этих областей, полагая $\frac{1}{y^2} = z$, получаем задачу Коши для линейного ДУ $z' = -2z + 2$, $z(0) = \frac{1}{y_0^2}$.

Упражнение 4. Покажите, что $z = \frac{y_0^2 + (1 - y_0^2)e^{-2x}}{y_0^2}$ и, значит, $y^2 = \frac{y_0^2}{y_0^2 + (1 - y_0^2)e^{-2x}}$.

Продолжим наше исследование. Если $0 < y_0 < 1$, то знаменатель в выражении для y^2 положителен и, значит,

$$y = \frac{y_0}{\sqrt{y_0^2 + (1 - y_0^2)e^{-2x}}}.$$

Эта функция определена на $\Re$ и имеет две горизонтальные асимптоты: $y = 0$ (асимптота на $-\infty$) и $y = 1$ (асимптота на $+\infty$).

Пусть $y_0 > 1$. Теперь соответствующее решение определено при $x > \tilde{x}_0 = \frac{1}{2}\ln\frac{y_0^2 - 1}{y_0^2}$ (проверьте!), имея прямую $x = \tilde{x}_0$ своей вертикальной асимптотой, а прямую $y = 1$ своей горизонтальной асимптотой.

Упражнение 5. Изобразите графики характерных интегральных кривых.

Замечание 2. Формула, описывающая решения задач Коши, пригодна и при $y_0 < 0$. Таким образом, формула

$$y = \frac{y_0}{\sqrt{y_0^2 + (1 - y_0^2)e^{-2x}}}$$

содержит все решения задач Коши с начальными значениями в точке $x = 0$. Однако она не является формулой общего решения ДУ, так как не содержит решений $y = \pm\dfrac{1}{\sqrt{1 - e^{-2x}}}$.

Эти решения получаются, правда, при $y_0 \to \pm\infty$, так что при всевозможных $y_0 \in \Re$, включая «бесконечные значения» $y = -\infty$ и $y = +\infty$, формула содержит все решения данного ДУ.

Пример 4. Рассмотрим задачу Коши

$$2y' = y - \frac{1}{y}, \quad y(0) = y_0 \neq 0.$$

Это уравнение Бернулли с $\alpha = -1$. Условия теоремы Коши выполнены в одной из областей $G_- = \{(x, y) : x \in \Re,\ y < 0\}$, $G_+ = \{(x, y) : x \in \Re,\ y > 0\}$.

Упражнение 6. Проведите полное исследование этой задачи при всевозможных начальных значениях $y_0 \neq 0$. Покажите, что всякое решение исходной задачи Коши дается формулой $y = \operatorname{sign} y_0 \sqrt{1 + (y_0^2 - 1)e^{2x}}$. Изобразите типичные интегральные кривые.

Указание. ДУ имеет два постоянных решения $y = 1$ и $y = 1$, соответствующих начальным значениям $y_0 = 1$ и $y_0 = -1$.

§ 8. Дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными

Уравнением с разделяющимися переменными называется ДУ следующего вида:

$$y' = p(x)q(y). \tag{14}$$

Его правая часть представляет собою произведение функции от x на функцию от y. Предполагается, что заданы функция $p(x) \in C(a, b)$ и функция $q(y) \in C^1(c, d)$ (т. е. $q(y)$ непрерывно дифференцируема на (c, d)). Каждый из интервалов (a, b), (c, d) может быть конечным либо бесконечным. Эти условия обеспечивают применимость теоремы Коши в области $G = \{(x, y) : x \in (a, b),\ y \in (c, d)\}$.

Рассмотрим для нашего ДУ задачу Коши с начальным условием (2) $y(x_0) = y_0$, где $x_0 \in (a, b)$, $y_0 \in (c, d)$. Согласно теореме Коши данная задача Коши имеет единственное решение $y(x)$, определенное на некотором интервале $(\alpha, \beta) \subset (a, b)$, содержащем точку x_0. Укажем путь нахождения этого решения при различных вариантах начальных значений y_0.

Выделим сначала особый случай, когда $q(y_0) = 0$. Здесь постоянная функция $y(x) = y_0$ является решением рассматриваемой задачи Коши на всем интервале (a, b): она удовлетворяет и ДУ, и начальному условию.

Переходим к основному случаю, когда $q(y_0) = q(y(x_0)) \neq 0$. Так как суперпозиция $q(y(x)$ непрерывна в точке x_0, то по теореме о сохранении знака непрерывной функции найдется содержащий точку x_0 интервал,

на котором знак $q(y(x))$ сохраняется. Пусть $(\alpha, \beta) \subset (a, b)$ — максимальный из таких интервалов сохранения знака. Запишем на нем наше ДУ в виде тождества

$$\frac{y'(x)}{q(y(x))} = p(x).$$

Интегрируя это тождество, получим

$$\int \frac{y'(x)dx}{q(y(x))} = \int p(x)\,dx, \quad \text{или} \quad \int \frac{dy(x)}{q(y(x))} = \int p(x)\,dx.$$

Обозначим через $Q(y)$ и $P(x)$ соответственно первообразные функций $q^{-1}(y)$ и $p(x)$. Удобно взять $Q(y) = \int\limits_{y_0}^{y} q^{-1}(t)\,dt$, $P(x) = \int\limits_{x_0}^{x} p(s)\,ds$. Теперь с учетом начального условия (2) исходная задача Коши сведена на (α_1, β_1) к уравнению $Q(y) = P(x)$.

Из этого уравнения надо найти решение $y = y(x)$. Поскольку $Q'(y) = \dfrac{1}{q(y)} \neq 0$, то функция $u = Q(y)$ строго монотонна и, значит, существует обратная к ней функция $y = Q^{-1}(u)$. Она определена для тех значений $x \in (\alpha, \beta)$, для которых $P(x) \in R(Q)$ — множеству значений функции $Q(y)$, т. е. на некотором интервале, содержащем точку x_0. На этом интервале решение исходной задачи Коши дается формулой $y(x) = Q^{-1}(P(x))$.

Упражнение 1. Проверьте, что эта формула действительно дает решение нашей задачи Коши.

Указание. Воспользуйтесь формулой производной обратной функции.

Пример 1. Рассмотрим задачу Коши $y' = 1 + y^2$, $y(0) = 0$. Здесь условия теоремы Коши выполняются в области $G = \Re^2$, т. е. во всей плоскости переменных x, y. Значит на некотором (α, β), содержащем точку 0, задача имеет единственное решение $y(x)$. Поскольку правая часть ДУ всегда положительна, его можно переписать в виде $\dfrac{y'(s)}{1 + y^2(s)} = 1$. Интегрируя от 0 до x, имеем $\operatorname{arctg} y(x) = x$. Но тогда $y = \operatorname{tg} x$ является глобальным решением исходной задачи на $(-\pi/2, \pi/2)$ (проверьте!).

Обратим внимание на то обстоятельство, что правая часть ДУ не имеет никаких особенностей и даже бесконечно дифференцируема на всей вещественной оси. По аналогии с линейными ДУ можно было бы ожидать, что решение $y(x)$ будет определено на всей оси x. Тем не менее оказалось, что решение уходит на бесконечность при приближении x к конечным точкам $\pm\pi/2$, т. е. имеет место явление взрыва.

Пример 2. Рассмотрим задачу Коши $y' = \dfrac{4x - 1}{\cos y}$, $y(0) = 0$. Здесь условия теоремы Коши выполняются в области $G = \{x \in \Re,\ y \in (-\pi/2, +\pi/2)\}$. По переменной y выбран интервал, содержащий точку $y(0) = 0$, на ко-

тором положителен $\cos y$. Умножив ДУ на $\cos y$ и интегрируя полученное равенство с учетом начального условия, получаем $\sin y = 2x^2 - x$. Посмотрим, когда правая часть этого уравнения принадлежит интервалу $(-1, +1)$, т. е. области значений $\sin y$ при $y \in (-\pi/2, +\pi/2)$. Поскольку функция $2x^2 - x \geq -1/8 > -1$, то достаточно решить неравенство $2x^2 - x < 1$, а это приводит к заключению, что $-1/2 < x < 1$. Итак, непродолжимое решение исходной задачи Коши определено на интервале $(-1/2, 1)$ и дается формулой $y = \arcsin(2x^2 - x)$.

Замечание. К ДУ с разделяющимися переменными с помощью замены переменных сводятся и некоторые другие ДУ. Сюда относится, например, ДУ вида $y' = g(y/x)$. Предполагается, что функция $g(u)$ непрерывно дифференцируема на конечном или бесконечном интервале. Это излишне популярное в преподавательской среде ДУ называется нелинейным однородным ДУ, поскольку его правая часть является однородной функцией: при замене x, y на kx, ky, где $k \neq 0$, функция $f(x, y) = g(y/x)$ не меняется. Замена $y = ux$ приводит (в переменных u, x) к ДУ с разделяющимися переменными.

Пример 3. Рассмотрим задачу Коши

$$y' = \frac{y}{x} + \sin\frac{y}{x}, \quad y(1) = \frac{\pi}{2}.$$

Если $y = ux$, то $y' = xu' + u$ и для определения $u = u(x)$ имеем задачу Коши

$$xu' = \sin u, \quad u(1) = \frac{\pi}{2}.$$

Ее решение дается формулой (проверьте!) $u = 2\operatorname{arctg} x$, откуда $y = 2x \times \times \operatorname{arctg} x$ — решение исходной задачи.

Пример 4. Рассмотрим ДУ $y' = -\dfrac{\cos x}{\cos y}$. В области $G = \{x, y : x \in \Re, y \in (-\pi/2, +\pi/2)\}$ выполняются условия теоремы Коши. В этой области запишем ДУ в виде $y' \cos y + \cos x = 0$, откуда $\sin y + \sin x' = 0$. Следовательно $\sin y + \sin x = C$, где C — постоянная интегрирования. Очевидно, что в данном случае C вовсе не является произвольной постоянной: ведь ее значения не могут выходить за пределы интервала $(-2, +2)$.

Упражнение 2. Убедитесь, что непродолжимым решением данного ДУ с начальным условием $y(0) = 0$ служит функция $y = -x$, $x \in (-\pi/2, +\pi/2)$.

§ 9. Примеры нарушения единственности решения задачи Коши. Особые решения

В предыдущих параграфах все рассуждения велись в рамках теоремы Коши. Однако справедлива значительно более общая теорема. Напомним, что замкнутой областью называется область вместе со своей границей.

Теорема Коши–Пеано. *Пусть в замкнутой области G непрерывна функция $f(x, y)$. Тогда для любой точки $(x_0, y_0) \in G$ найдется интервал (α, β), содержащий точку x_0, на котором существует решение $y = y(x)$ задачи Коши* (1), (2).

Доказательство теоремы можно найти в книге [13]. Проиллюстрируем эту теорему примером. Рассмотрим следующую задачу Коши:

$$y' = 3y^{2/3}, \quad y(0) = 0.$$

Условия теоремы Коши–Пеано выполняются во всей плоскости переменных x, y, и, значит, вблизи начальной точки данная задача Коши имеет локальное решение. Одно из ее решений очевидно: это — тривиальное решение $y(x) = 0$. Непосредственной проверкой убеждаемся, что $y = x^3$ также является решением данной задачи Коши. Таким образом, рассмотренная задача имеет по крайней мере два непродолжимых решения, определенных на всей оси $(-\infty, +\infty)$.

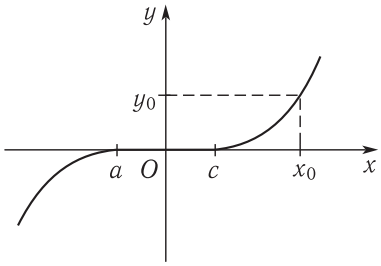


Рис. 5

Перейдем к случаю общего начального условия $y(x_0) = y_0$. Покажем, что эта общая задача Коши имеет бесконечно много решений, определенных на всей оси x.

Заметим сначала, что для любого $c \in \Re$ наше ДУ имеет решение $y(x) = (x - c)^3$. Из кусков таких кубических парабол и куска тривиального решения можно сконструировать бесконечное множество решений рассматриваемой общей задачи Коши.

Пусть $y_0 > 0$ и $c = x_0 - y_0^{1/3}$. Тогда решениями задачи Коши являются определенные на $(-\infty, +\infty)$ следующие функции:

1) $y = (x - c)^3$;

2) составная функция

$$\begin{cases} y = (x - c)^3 & \text{при} \quad x \in [c, +\infty), \\ y = 0 & \text{при} \quad x \in (-\infty, c); \end{cases}$$

3) составная функция $(a < c)$

$$\begin{cases} y = (x - c)^3 & \text{при} \quad x \in [c, +\infty), \\ y = 0 & \text{при} \quad x \in (a, c), \\ y = (x - a)^3 & \text{при} \quad x \in [-\infty, a). \end{cases}$$

На рис. 5 изображено решение типа 3).

Упражнение. Изобразите графики решений в остальных случаях.

Замечание. Если $y_0 > 0$, то в верхней полуплоскости $y > 0$ выполнены условия теоремы Коши и существует локально единственное решение задачи Коши, но как только это решение достигнет нуля его продолжение влево становится неоднозначным.

Аналогично обстоит дело при $y_0 < 0$ и при $y_0 = 0$.

Таким образом, всякая задача Коши для рассматриваемого уравнения имеет бесконечно много непродолжимых решений, определенных на всей вещественной оси.

Определение. Решение $y = y(x)$ ДУ называется его *особым решением*, если через каждую его точку проходит по крайней мере еще одно решение этого ДУ, отличное от $y(x)$.

Для рассмотренного ДУ решение $y(x) = 0$ является особым решением.

В заключение параграфа приведем пример, имеющий любопытную физическую интерпретацию. Выведем ДУ, описывающее истечение воды из дырявого ведра. Пусть $x = x(t)$ — высота воды в ведре в момент времени t. Тогда кинетическая энергия воды, вытекающей из ведра, $\frac{1}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$ равна потенциальной энергии $\frac{1}{2}x^2$ воды, остающейся в ведре. Получаем ДУ

$$\frac{dx}{dt} = -\sqrt{|x|}.$$

Его решение зависит от произвольной постоянной интегрирования c и дается формулой (проверьте!)

$$\begin{cases} x = \frac{1}{4}(t-c)^2 & \text{при} \quad t \le c, \\ x = 0 & \text{при} \quad t \ge c. \end{cases}$$

Зафиксируем $T > 0$. Рассмотрим решения с произвольным $c < T$, удовлетворяющие начальному условию $x(T) = 0$. Условие $x(T) = 0$ означает, что ведро пусто в момент $t = T$. В какой момент $t < T$ оно было полным? Этого мы не знаем и узнать не можем! Проведенное математическое исследование данной физической задачи показывает, что ведро могло быть полным в любой момент $c < T$.

Данный пример убедительно свидетельствует о том, что описание реального явления (процесса) посредством дифференциального уравнения в отсутствии единственности решения задачи Коши теряет свой детерминизм (предопределенность, предсказуемость), или, другими словами, перестает описывать эволюционные, т. е. однозначно развивающиеся процессы.

§ 10. Дифференциальные уравнения и неявные функции

1°. *Теорема о неявной функции.* Приведем необходимые сведения из математического анализа. Пусть на множестве $G \in \Re^2$ задана функция $F(x, y)$, причем $0 \in R(F)$ — ее области значений. Рассмотрим уравнение

$$F(x, y) = 0, \tag{15}$$

в котором y играет роль неизвестной функции, а x — роль параметра.

Определение 1. Всякая функция $y = y(x)$ называется *неявной функцией*, определяемой уравнением (15), если существует интервал (a, b), такой, что:

1) $y(x)$ определена на (a, b) и на этом интервале $(x, y(x)) \in G$;

2) $F(x, y(x)) = 0$ для всех $x \in (a, b)$.

Приведем формулировку теоремы о неявной функции в удобной для нас форме (доказательство см. в [8]).

Теорема. *Пусть функция $F(x, y)$ непрерывно дифференцируема в области G.*

Пусть далее, $F(x_0, y_0) = 0$, а частная производная $F_y(x_0, y_0) \neq 0$.

Тогда найдутся числа $r > 0$ и $\rho > 0$, такие, что при всех y, удовлетворяющих неравенству $|y - y_0| < r$, уравнение (15) определяет единственную неявную функцию $y = y(x)$, дифференцируемую на $(x_0 - \rho, x_0 + \rho)$, на котором

$$y'(x) = -\frac{F_x(x, y(x))}{F_y(x, y(x))}, \tag{16}$$

причем выполняется условие

$$y(x_0) = y_0. \tag{17}$$

Замечание 1. Теорема носит локальный характер: существование единственной неявной функции гарантировано только в некоторой окрестности точки (x_0, y_0).

Отметим тесную связь между задачей Коши для ДУ и задачей отыскания неявной функции.

2°. Неявная функция является решением задачи Коши (16), (17). Это позволяет применить для отыскания неявных функций широко развитые методы решения ДУ, в частности, приближенные методы (см. [1] и главу V настоящей книги).

3°. Иногда задачу Коши для ДУ удается свести к задаче о неявной функции. Здесь важное значение имеет понятие первого интеграла ДУ. Пусть дано ДУ (1) $y' = f(x, y)$ в условиях теоремы Коши.

Определение 2. Функция $\Phi(x, y)$, определенная в области $G \subset \Re^2$ и не равная в ней постоянной функции, называется *первым интегралом* ДУ (1) в этой области, если для любого решения ДУ (1) $y = y(x)$, $x \in (a, b)$, график которого лежит в G, и для любых $x \in (a, b)$ существует постоянная C, такая, что выполняется тождество $\Phi(x, y(x)) = C$.

Подчеркнем, что постоянная C зависит от решения (каждого на своем интервале определения (a, b)) и не зависит от $x \in (a, b)$.

Если существует первый интеграл $\Phi(x, y)$ ДУ (1), то решения этого ДУ определяются как неявные функции из уравнения вида

$$\Phi(x, y) = C, \tag{18}$$

где C — постоянная, принимающая любые значения из $R(\Phi)$ — области значений функции Φ (произвольная постоянная в этом смысле).

Если задано начальное условие, то $C = \Phi(x_0, y_0)$.

Замечание 2. В случае наличия первого интеграла ДУ всякий метод аналитического или приближенного вычисления неявной функции может быть использован для решения соответствующей задачи Коши.

4°. Обсудим вопрос о существовании первого интеграла. Рассмотрим ДУ вида

$$P(x, y) + Q(x, y)y' = 0 \tag{19}$$

в предположении, что функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ определены и непрерывны вместе со своими частными производными $P_y(x, y)$ и $Q_x(x, y)$ в односвязной области G.

Воспользуемся важным понятием потенциального векторного поля (см. [8]).

Определение 3. Векторное поле $(P(x, y), Q(x, y))$ называется *потенциальным* в области G, если в ней существует непрерывно дифференцируемая функция $\Phi(x, y)$, такая, что для всех $(x, y) \in G$ выполняются тождества

$$\Phi_x(x, y) = P(x, y), \quad \Phi_y(x, y) = Q(x, y).$$

Напомним еще следующий факт из математического анализа. Если область односвязна, векторное поле $(P(x, y), Q(x, y))$ гладкое и $P_y(x, y) = Q_x(x, y)$ в G, то это векторное поле потенциально и его потенциал можно вычислить в виде криволинейного интеграла второго рода по формуле

$$\Phi(x, y) = \int\limits_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P(\xi, \eta)\, d\xi + Q(\xi, \eta)\, d\eta.$$

Пусть $\Phi(x, y)$ — потенциал векторного поля $(P(x, y), Q(x, y))$. Тогда ДУ (19) можно записать в виде $\dfrac{d\Phi(x, y(x))}{dx} = 0$. Отсюда следует, что для каждого решения $y = y(x)$ ДУ (19) в области G выполняется тождество $\Phi(x, y(x)) = C$ с постоянной интегрирования $C \in R(\Phi)$ и, значит, в G $\Phi(x, y)$ является первым интегралом ДУ.

Аналогично, можно рассмотреть ДУ

$$P(x, y)x' + Q(x, y) = 0, \tag{20}$$

если ставится задача о нахождении x как функции от y.

5°. *Уравнение в дифференциалах и уравнение в полных дифференциалах*. Вспоминая, что производная является отношением дифференциалов, оба ДУ (18) и (19) можно записать в симметричной форме

$$P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy = 0. \tag{21}$$

Это ДУ называется *уравнением в дифференциалах*.

Если векторное поле $(P(x, y), Q(x, y))$ потенциально и $\Phi(x, y)$ — его потенциал, то ДУ (21) принято называть уравнением в полных дифференциалах. В этом случае ДУ может быть записано в виде $d\Phi(x, y) = 0$, так что $\Phi(x, y)$ является его первым интегралом.

Пример. В качестве иллюстрации рассмотрим задачу Коши

$$y' = \frac{3x^2y^2}{2x^3y + 4y^3}, \quad y(0) = 1.$$

Представим ее ДУ в виде уравнения в дифференциалах

$$(3x^2y^2)dx + (2x^3y + 4y^3)dy = 0.$$

Здесь $P(x, y) = 3x^2y^2$, $Q(x, y) = 2x^3y + 4y^3)$. Поскольку $Q_x = 6x^2y = P_y$, то векторное поле (P, Q) потенциально.

Значит, выражение левой части последнего ДУ является полным дифференциалом некоторой функции $\Phi(x, y)$.

Упражнение 1. Исходя из равенств $\dfrac{\partial\Phi}{\partial x} = 3x^2y^2$, $\dfrac{\partial\Phi}{\partial y} = 2x^3y + 4y^3$ покажите, что $\Phi(x, y) = y^4 + y^2x^3 + C$, где C — постоянная интегрирования.

Воспользовавшись начальным условием находим уравнение $y^4 + y^2x^3 - 1 = 0$, определяющее решение исходной задачи Коши как неявную функцию.

Упражнение 2. Покажите, что $y = \sqrt{\sqrt{1 + x^6/4} - x^3/2}$.

Замечание 3. Иногда удается подобрать функцию $\mu(x, y)$, называемую интегрирующим множителем, после умножения на которую уравнение в дифференциалах становится уравнением в полных дифференциалах (см. [3]).

Замечание 4. Более естественно вместо уравнения в дифференциалах рассматривать соответствующую ему автономную систему ДУ (см. гл. IV, § 2).

6°. *ДУ, не разрешенные относительно производной*. Иногда в приложениях встречаются ДУ, не разрешенные относительно производной: $\Phi(x, y, y') = 0$. Пусть функция $\Phi(x, y, z)$ достаточно гладкая в окрестности точки (x_0, y_0, y_1) и пусть $\Phi(x_0, y_0, y_1) = 0$, $\Phi_z(x_0, y_0, y_1) \neq 0$. Пользуясь теоремой о неявной функции (для случая трех переменных, см. [8]), можно разрешить ДУ локально относительно y' и свести его к стандартному виду $y' = f(x, y)$.

В примере предыдущего пункта как раз и встретилось такое ДУ.

Для интегрирования ДУ, не разрешенного относительно производной, иногда бывает полезен метод введения параметра (см. [13]).

§ 11. Уравнения в дифференциалах и функции, заданные параметрически

В ДУ (1) x играет роль независимой переменной, а y — роль неизвестной функции. Как уже отмечалось, в некоторых прикладных за-

дачах, в частности, во многих геометрических задачах, по самому смыслу задачи переменные x и y вполне могут быть равноправными. Например, это две физические переменные, и имеющуюся между ними связь в форме ДУ (дифференциальную связь) хотелось бы выразить алгебраически. В этих обстоятельствах выбор x в качестве независимой переменной может являться чисто случайным и далеко не всегда удачным. Выбор подходящей параметризации иногда позволяет более полно представить искомую связь между переменными и, в частности, существенно продолжить геометрически представляющую эту связь интегральную кривую.

Пример 1. Задачу Коши $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{3y^2}$, $y(-1) = -1$ следует рассматривать в области $G = \{x, y\colon x \in \Re, y < 0\}$ — максимальной области, в которой гарантированы существование и единственность решения данной задачи Коши. Непродолжимое решение $y = x^{1/3}$ определено на интервале $(-\infty, 0)$. Заметим, что $y'(x) \to -\infty$ при $x \to -0$.

Если же взять в качестве независимой переменной y, то получаем задачу Коши $\dfrac{dx}{dy} = 3y^2$, $x(-1) = -1$. Здесь условия теоремы Коши выполнены во всей плоскости $\Re^2$ переменных y, x и решение $x = y^3$ определено всюду.

Пример 2. Составим ДУ окружности $x^2 + y^2 = 1$, зафиксировав на ней точку $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Если считать независимой переменной x, то получаем задачу Коши $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x}{y}$, $y\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Ее решение $y = \sqrt{1 - x^2}$ определено на интервале $(-1, 1)$. Интегральная кривая — это верхняя полуокружность.

Если же считать независимой переменной y, то получаем задачу Коши $\dfrac{dx}{dy} = -\dfrac{y}{y}$, $x\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Ее решение $x = \sqrt{1 - y^2}$ определено на интервале $(-1, 1)$. Здесь интегральной кривой является правая полуокружность.

Таким образом, в данном примере ни x, ни y не являются удачными параметрами для представления уравнения окружности, дающего полную (глобальную) связь между переменными.

Зададим теперь уравнение окружности в параметрической форме, полагая

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad t \in [0, 2\pi).$$

Геометрический смысл параметра: t — длина дуги окружности.

Пусть точка обозначает дифференцирование по t. Тогда получаем следующую дифференциальную связь x и y: $x\dot{x} + y\dot{y} = 0$, $x(0) = y(0) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Эту связь удобно выразить в виде ДУ в полных дифференциалах $x\,dx + y\,dy = 0$.

Развивая пример 2, рассмотрим формальное ДУ в дифференциалах (21)

$$P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0$$

в предположении, что функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ непрерывно дифференцируемы в области $G \subset \Re^2$, и пусть точка $(x_0, y_0) \in G$.

Пусть $I \subset \Re$ — сегмент, т. е. отрезок, интервал или полуинтервал. Расширим понятие интегральной кривой, данное в § 1. Для этого запишем ДУ $y' = f(x, y)$ в дифференциалах, представив его правую часть в виде $f(x, y) = \dfrac{P(x, y)}{Q(x, y)}$, так чтобы функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ были непрерывно дифференцируемы в области $G \subset \Re^2$.

Определение. Гладкая кривая $l = \{x = x(t),\ y = y(t),\ t \in I\}$ называется *интегральной кривой* ДУ (1), проходящей через точку $(x(t_0), y(t_0))$, если для любых $t \in I$ выполняется тождество

$$P(x(t), y(t))\dot{x}(t) + Q(x(t), y(t))\dot{y}(t) = 0.$$

Пример 3. ДУ циклоиды или брахистохроны имеет вид

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{L - y}{y}}$$

(L — положительная постоянная).

Очевидно, $0 < y < L$. Найдем интегральную кривую, проходящую через точку $(0, 0)$.

Введем параметр t, полагая $\sqrt{\dfrac{L}{L - y}} = \operatorname{tg}\dfrac{t}{2}$.

Упражнение. Покажите, что $y = L\sin^2\dfrac{t}{2}$, $x = \dfrac{L}{2}(t - \sin t)$.

Итак, искомая интегральная кривая имеет параметрическое представление

$$x = \frac{L}{2}(t - \sin t), \quad y = \frac{L}{2}(1 - \cos t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

Интересный экскурс в историю и описание физических явлений, связанных с циклоидой и брахистохроной, читатель найдет в [19].

Глава II

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

§ 1. Задача Коши для дифференциальных уравнений высших порядков

Рассмотрим дифференциальное уравнение n-го порядка

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}). \tag{1}$$

Это ДУ выражает n-ю производную неизвестной функции $y = y(x)$ в точке через координату x этой точки и значения в этой точке функции $y(x)$ и ее производных до $(n-1)$-го порядка включительно.

Пример 1. В качестве важного примера ДУ второго порядка ($n = 2$) отметим второй закон Ньютона. Пусть независимая переменная (обозначим ее через t) играет роль времени. Рассмотрим движение материальной частицы массой m по прямой (по оси x) под воздействием внешней силы f. Согласно второму закону Ньютона произведение массы m на ускорение $\dfrac{d^2x}{dt^2}$ равно действующей силе f. Эта сила в общем случае может зависеть от момента времени t, а также от положения точки x и скорости $\dfrac{dx}{dt}$ (в момент t), т. е. $f = f\left(t, x, \dfrac{dx}{dt}\right)$.

Таким образом, движение частицы по прямой описывается ДУ

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = f\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right).$$

Определение. Пусть функция от $(n+1)$ вещественных переменных $f(x, u_1, u_2, \ldots, u_n)$ с вещественными значениями определена на области $G \in \Re^{n+1}$. Функция $y = y(x)$ называется *решением* ДУ на интервале (α, β), если на (α, β) выполнены следующие условия:

1) $y(x)$ является n раз непрерывно дифференцируемой,

2) всякая точка $(x, y(x), y'(x), y''(x), \ldots, y^{(n-1)}(x)) \in G$,

3) $y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), y''(x), \ldots, y^{(n-1)}(x)) = 0$.

Уже простейшее ДУ второго порядка $y'' = 0$ имеет решение $y = C_1x + C_2$, зависящее от двух постоянных интегрирования, являющихся в данном линейном случае произвольными. Примерно так обстоит

дело и в общем случае. Чтобы устранить, по возможности, эту неопределенность в выборе решения, зафиксируем точку $(x_0, y_0, y_1, y_2, \ldots$ $\ldots, y_{n-1}) \in G$ и зададим дополнительно к ДУ начальные условия

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \quad \ldots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}. \tag{2}$$

Задача (1), (2) называется задачей Коши. Как и в случае ДУ первого порядка, нижеследующая теорема Коши играет важную роль в дальнейшем изложении.

Рассмотрим эту ситуацию на частном случае примера 1. Пусть внешняя сила $f = 0$, т. е. на частицу не оказывается никакого внешнего воздействия. Тогда имеем ДУ $m\dfrac{d^2x}{dt^2} = 0$. Всякое его решение представимо в виде $x = C_1t + C_2$ с произвольными постоянными C_1, C_2. Зададим начальные условия. Пусть в момент времени $t = 0$ частица находилась в точке x_0 и имела начальную скорость v_0. Тогда частица движется по закону $x = x_0 + v_0t$, причем ее скорость постоянна: $\dfrac{dx}{dt} = v_0$.

Таким образом, справедлив ньютоновский закон инерции: при отсутствии внешних сил частица движется по прямой с постоянной скоростью.

Приведем теорему существования и единственности решения задачи Коши. Доказательство ее следует из аналогичной общей теоремы, приведенной в гл. VI.

Теорема 1. *Пусть функция $f(x, u_1, u_2, \ldots, u_n)$ с вещественными значениями непрерывна по совокупности своих переменных в области $G \subset \Re^{n+1}$ вместе со своими частными производными первого порядка по переменным $u_1, u_2, \ldots, u_n$. Тогда для любой точки $(x_0, y_0, y_1, \ldots, {}_{n-1}) \in G$ найдется содержащий точку x_0 интервал (α, β), на котором существует единственное решение $y = y(x)$ задачи Коши.*

График решения ДУ (1) в пространстве $\Re^{n+1}$ называется интегральной кривой. Отметим геометрический смысл теоремы при $n = 2$, где начальные условия принимают вид $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1$. Теорема дает условия, при выполнении которых локальный кусок интегральной кривой, проходящий через точку (x_0, y_0) (первое начальное условие) с угловым коэффициентом y_1 наклона касательной в точке x_0 (второе начальное условие), существует и единствен.

Замечание. Сформулированная теорема устанавливает существование и единственность локального решения задачи Коши. Однако, как и в гл. I, § 2, это решение может быть продолжено до непродолжимого решения, определенного на максимальном интервале его существования (доказательство см. в гл. VI).

Рассмотрим теперь ДУ

$$\sum_{k=0}^{n} c_k(x)y^{(k)} = h(x). \tag{3}$$

Предполагается, что коэффициенты $c_k(x) \in C(a, b)$, $k = 0, 1, \ldots, n$, и его правая часть $h(x) \in C(a, b)$ известны. Пусть, далее, $c_n(x) \neq 0$ на (a, b).

Данное ДУ называется линейным неоднородным ДУ n-го порядка.

В частном случае, когда $h(x) = 0$ на (a, b), ДУ

$$\sum_{k=0}^{n} c_k(x) y^{(k)} = 0 \tag{4}$$

называется линейным однородным ДУ n-го порядка.

Справедливо следующее утверждение (доказательство см. в гл. VI).

Теорема 2. *Пусть $c_k(x) \in C(a, b)$, $k = 0, 1, \ldots, n$, $h(x) \in C(a, b)$, $c_n(x) \neq 0$ на (a, b). Тогда для любой точки $(x_0, y_0, y_1, \ldots, {}_{n-1})$, где $x_0 \in (a, b)$, а $(y_0, y_1, \ldots, {}_{n-1}) \in \Re^n$, существует единственное решение $y = y(x)$ задачи Коши* (3), (2) *и оно определено на всем интервале* (a, b).

Упражнение. Проверьте, что условия теоремы Коши выполнены как для линейного однородного ДУ, так и для неоднородного. Для их проверки достаточно записать ДУ в виде, разрешенном относительно старшей производной.

Пример 2. Рассмотрим задачу Коши для линейного неоднородного ДУ второго порядка

$$y'' = \frac{y}{x-1} + \sin x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

Существует ли решение и на каком наибольшем интервале? Коэффициент ДУ и правая часть определены на $(-\infty, 1)$ и на $(1, +\infty)$. Так как начальная точка $0 \in (-\infty, 1)$, то в качестве интервала (a, b) следует выбрать именно этот интервал. Таким образом, согласно теореме 2 непродолжимое решение данной задачи Коши существует и единственно на полуоси $(-\infty, 1)$.

Относительно решения аналогичной нелинейной задачи

$$y'' = \frac{y}{x-1} + \sin y, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

можно по теореме 1 утверждать только, что оно существует и единственно лишь локально, т. е. на некотором интервале $(\alpha, \beta) \subset (-\infty, 1)$, содержащем точку $x = 0$.

§ 2. Линейная независимость решений и определитель Вронского

Чтобы разобраться далее в структуре множества решений линейного однородного ДУ (3), нам понадобятся известные из линейной алгебры понятия линейной независимости и линейной зависимости, приспособленные к рассматриваемой ситуации.

Пусть на интервале (a, b) задан набор функций, или система функций $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_r(x)$. Данная система функций называется линейно независимой на (a, b), если равенство $C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \ldots$ $\ldots + C_ry_r(x) = 0$ (постоянные $C_1, C_2, \ldots, C_r \in \Re$), выполненное для любых $x \in (a, b)$, возможно только, если все $C_s = 0$, $s = 1, 2, \ldots, r$.

Система функций $\{y_k(x)\}_{k=1}^r$ называется линейно зависимой на (a, b), если существуют постоянные $C_1^0, \ldots, C_r^0$ не все равные нулю и такие, что $C_1^0y_1(x) + C_2^0y_2(x) + \ldots + C_r^0y_r(x) = 0$ на (a, b).

Нас будет интересовать следующий вопрос. Пусть дана система из n функций $z_1(x), z_2(x), \ldots, z_n(x)$, являющихся решениями однородного ДУ (3) на (a, b). Как узнать, будет эта система решений линейно независимой на (a, b) или нет? Ответ на этот вопрос получается с помощью следующего определителя, называемого *определителем Вронского*, или, кратко, вронскианом:

$$W(x) = \det\begin{pmatrix} z_1(x) & z_2(x) & \ldots & z_n(x) \\ z_1'(x) & z_2'(x) & \ldots & z_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ z_1^{(n-1)}(x) & z_2^{(n-1)}(x) & \ldots & z_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}.$$

Теорема. *Пусть выполнены условия теоремы* 2 *из* § 1. *Пусть* $z_1(x), z_2(x), \ldots, z_n(x)$ — *система решений ДУ* (4). *Составим ее вронскиан* $W(x)$. *Если* $W(x_0) \neq 0$ *в некоторой точке* $x_0 \in (a, b)$, *то данная система решений линейно независима. Если же* $W(x_1) = 0$ *в некоторой точке* $x_1 \in (a, b)$, *то эта система решений линейно зависима.*

Доказательство. Пусть $W(x_0) \neq 0$. Предположим, что для некоторых постоянных $C_1, C_2, \ldots, c_n$ выполняется тождество

$$C_1z_1(x) + C_2z_2(x) + \ldots + C_nz_n(x) \equiv 0, \quad \forall\, x \in (a, b).$$

Продифференцируем это тождество последовательно $(n-1)$ раз и получим тождества

$$C_1z_1'(x) + C_2z_2'(x) + \ldots + C_nz_n'(x) \equiv 0, \quad \forall\, x \in (a, b).$$

$$\ldots$$

$$C_1z_1^{(n-1)}(x) + C_2z_2^{(n-1)}(x) + \ldots + C_nz_n^{(n-1)}(x) \equiv 0, \quad \forall\, x \in (a, b).$$

Положим во всех тождествах $x = x_0$ и получим следующую систему n линейных однородных алгебраических уравнений с n неизвестными $C_1, \ldots, C_n$:

$$\sum_{k=1}^{n} C_kz_k^{(l-1)}(x_0) = 0, \quad l = 1, 2, \ldots, n.$$

Определитель этой системы равен $W(x_0) \neq 0$. Следовательно, она имеет только тривиальное решение $C_s = 0$, $s = 1, 2, \ldots, n$.

Итак, система решений $z_1(x), z_2(x), \ldots, z_n(x)$ линейно независима.

Пусть теперь $W(x_1) = 0$. Покажем, что можно так подобрать постоянные $C_1, \ldots, C_n$, не все равные нулю, чтобы на (a, b) было справедливо равенство $C_1 z_1(x) + C_2 z_2(x) + \ldots + C_n z_n(x) = 0$. Как и выше, продифференцируем его последовательно $(n-1)$ раз и получим n тождеств на (a, b). Положим в них $x = x_1$. Для определения постоянных $C_1^0, \ldots, C_n^0$ имеем, как и выше, однородную систему линейных алгебраических уравнений, но с определителем $W(x_1) = 0$. Такая система всегда имеет нетривиальные решения. Пусть $C_1^0, \ldots, C_n^0$ — одно из них.

Рассмотрим функцию $\theta(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} C_k^0 z_k(x)$. Ее начальные значения Коши все нулевые: $\theta^{(l-1)}(x_1) = 0$, $l = 1, 2, \ldots, n$. Такие же начальные значения имеет и тривиальное решение. Тогда из единственности решения задачи Коши следует, что $\theta(x) = 0$ на всем (a, b), т. е. $\sum\limits_{k=1}^{n} C_k^0 z_k(x) = 0$, где не все $C_1^0, \ldots, C_n^0$ равны нулю. Это и означает линейную зависимость данной системы решений.

Следствие. *Имеет место альтернатива*: *или* $W(x) \neq 0$ *на* (a, b), *или* $W(x) = 0$ *всюду на* (a, b).

Для доказательства достаточно заметить, что никакая система функций не может быть одновременно линейно независимой и линейно зависимой на одном и том же интервале.

Упражнение. Пусть $n = 1$. Каков здесь вронскиан? Каков здесь смысл альтернативы?

Пример. Рассмотрим на $(-1, +1)$ функции $z_1(x) = x$, $z_2(x) = x^2$. Здесь $W(x) = 2x^2$ обращается в нуль в точке $x = 0$. Казалось бы, это противоречит альтернативе. Однако нетрудно проверить, что эти функции являются решениями ДУ $x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0$. Это ДУ не удовлетворяет условиям теоремы Коши на интервале, содержащем точку $x = 0$, а ведь справедливость альтернативы установлена только в условиях теоремы Коши.

§ 3. Общее решение линейного однородного дифференциального уравнения

По-прежнему для краткости будем использовать следующее обозначение: $C(a, b)$ — линейное пространство всех непрерывных на (a, b) функций. Кроме того, пусть $C^n(a, b)$ — линейное пространство всех n раз непрерывно дифференцируемых на (a, b) функций.

Упражнение 1. Продумайте: почему эти множества (с естественными операциями сложения функций и умножения функций на вещественные числа) являются линейными пространствами?

Пусть $D = \dfrac{d}{dx}$ — оператор дифференцирования по переменной x. Каждой функции $y(x) \in C^1(a, b)$ он ставит в соответствие ее производ-

ную $y'(x)$ по формуле $(Dy)(x) = y'(x) \in C(a, b)$. Таким образом, оператор D отображает пространство $C^1(a, b)$ в пространство $C(a, b)$.

Рассмотрим более общий дифференциальный оператор $L(x, D)$, определяемый формулой

$$L(x, D)y = \sum_{k=0}^{n} c_k(x) D^k y. \tag{5}$$

Как и ранее, будем предполагать, что коэффициенты $c_k(x) \in C(a, b)$ и без ограничения общности будем считать, что $c_n(x) = 1$.

Упражнение 2. Покажите, что оператор $L(D)$ действует из $C^n(a, b)$ в $C(a, b)$ (кратко $L(x, D)\colon C^n(a, b) \to C(a, b)$), т. е. при всяком $y(x) \in C^n(a, b)$ выполняется условие $L(x, D)y(x) \in C(a, b)$.

Упражнение 3. Покажите, что оператор $L(x, D)$ линейный, т. е. для любых $y_1, y_2 \in C^n(a, b)$ и любых $C_1, C_2 \in \Re$ выполняется равенство

$$L(x, D)(C_1 y_1 + C_2 y_2) = C_1 L(x, D) y_1 + C_2 L(x, D) y_2.$$

В этом параграфе рассматривается линейное однородное ДУ (4), записываемое кратко в операторном виде как уравнение $L(x, D)y = 0$. Множество всех решений этого ДУ на (a, b) обозначим через $N(L)$.

Лемма. *$N(L)$ является линейным пространством размерности n.*

Доказательство. Линейность $N(L)$ следует из свойства линейности оператора $L(x, D)$ (проверьте!). Докажем, что размерность $N(L)$ равна n. Зафиксируем точку $x_0 \in (a, b)$. Пусть $z_k(x)$ — решение задачи Коши $L(x, D)y = 0$, $z^{(s)}(x_0) = 0$, $s = 1, 2, \ldots, n-1$, $s \neq k-1$, $z^{(k-1)}(x_0) = 1$.

Упражнение 4. Докажите, что так определенная система функций $\{z_k(x)\}$ линейно независима на (a, b).

Покажем, что система функций $z_k(x)$ образует базис в $N(L)$. Пусть $z(x) \in N(L)$. Функция $\theta(x) = \sum_{k=1}^{n} z^{(k-1)}(x_0) z_k(x)$ является элементом $L(D)$ и ее начальные значения в точке x_0 совпадают с начальными значениями функции $z(x)$ в этой же точке. По теореме Коши $\theta(x) = z(x)$. Этим установлено, что любая функция из $L(D)$ является линейной комбинацией функций системы. Лемма доказана.

Построенная в ходе доказательства леммы система функций называется нормальной фундаментальной системой решений ДУ (4).

Итак, $N(L)$ n-мерно. Из линейной алгебры известно, что базисом в n-мерном линейном пространстве является любая система из n его независимых элементов.

Определение. *Фундаментальной системой решений* (ФСР) линейного однородного ДУ n-го порядка называется любая система из n его линейно независимых решений.

Заметим, что под общим решением этого ДУ понимается совокупность всех его решений.

Пусть $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^n$ — ФСР ДУ (4). Тогда из определения базиса следует, что всякое решение ДУ (4) можно записать в виде

$$z(x) = \sum_{k=1}^{n} C_k \varphi_k(x),$$

где $C_k \in \Re$ — некоторые постоянные.

Пусть в данной формуле $C_k \in \Re$ — произвольные постоянные. Тогда эта формула дает общее решение линейного однородного ДУ, поскольку она содержит в себе все его решения.

В заключение еще раз отметим следующее. Пусть найдена система из n решений. Если хоть в одной точке $x_0 \in (a, b)$ вронскиан этой системы отличен от нуля, то данная система является ФСР.

§ 4. Линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами

Рассмотрим ДУ

$$z'' + bz' + cz = 0. \tag{6}$$

Попробуем найти его решения в виде $z = e^{\lambda x}$. Отсюда имеем $z' = \lambda e^{\lambda x}$, $z'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$. Подставим выражения для z, z', z'' в ДУ и после сокращения на $e^{\lambda x}$ получим для определения возможных значений λ уравнение

$$\lambda^2 + b\lambda + c = 0.$$

Это квадратное уравнение называется *характеристическим уравнением*, составленным для ДУ (6), а многочлен, стоящий в его левой части, называется *характеристическим многочленом* этого ДУ.

Рассмотрим теперь различные возможные случаи.

1) Пусть сначала дискриминант $\Delta = b^2 - 4c > 0$. В этом случае характеристическое уравнение имеет два различных вещественных корня

$$\lambda_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2}.$$

А тогда ДУ имеет два решения

$$z_1 = e^{\lambda_1 x}, \quad z_2 = e^{\lambda_2 x}.$$

Эти решения линейно независимы, так как их вронскиан в точке $x = 0$ равен $W(0) = \lambda_2 - \lambda_1 \neq 0$ (проверьте!). Поэтому общее решение ДУ имеет вид

$$z = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x x}, \tag{7}$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

Пример 1. ФСР ДУ $y'' - y = 0$ — это e^x, e^{-x} или $\operatorname{ch} x$, $\operatorname{sh} x$.

2) Пусть теперь $\Delta = 0$. Тогда ДУ и характеристическое уравнение принимают соответственно вид

$$z'' + bz' + \frac{b^2}{4} z = 0, \quad \left(\lambda + \frac{b}{2}\right)^2 = 0.$$

Характеристическое уравнение имеет один двукратный корень $\lambda = -\dfrac{b}{2}$. Значит, ДУ имеет решение $z_1 = e^{-bx/2}$.

Но ФСР ДУ (6) состоит из двух его линейно независимых решений. Как найти второе решение?

Упражнение 1. Проверьте, что функция $z_2 = xe^{-bx/2}$ также является решением ДУ.

Составьте вронскиан $W(0)$ системы функций z_1, z_2 и докажите линейную независимость этой системы.

Подведем итог. При $\Delta = 0$ общее решение ДУ дается формулой

$$z = C_1 e^{-bx/2} + C_2 x e^{-bx/2}. \tag{8}$$

Пример 2. ФСР ДУ $y'' - 2y' + y = 0$ — это e^x, xe^x.

3) Для изучения случая, когда $\Delta < 0$, нам понадобятся комплекснозначные функции вещественного переменного $z(x) = u(x) + iv(x)$, где $u(x)$, $v(x)$ — дифференцируемые в $\Re$ функции с вещественными значениями. Производная такой функции определяется естественным образом: $z'(x) = u'(x) + iv'(x)$.

Определение. Комплекснозначная дифференцируемая функция $z(x)$ называется *комплексным решением* ДУ (6), если ее подстановка в ДУ обращает его в тождество.

Пусть $z(x) = u(x) + iv(x)$ является решением ДУ (6), т. е.

$$(u(x) + iv(x))'' + b(u(x) + iv(x))' + c(u(x) + iv(x)) = 0, \quad \forall\, x \in \Re.$$

Но тогда равны нулю и действительная и мнимая части функции, стоящей в левой части этого равенства, т. е. $u''(x) + bu'(x) + cu(x) = 0$ и $v''(x) + bv'(x) + cv(x) = 0$.

Это означает, что каждая из функций $u(x)$ и $v(x)$ является вещественным решением ДУ (6).

В случае, когда $\Delta < 0$, характеристическое уравнение имеет два комплексно сопряженных корня

$$\lambda_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2}.$$

Для краткости запишем эти корни в виде $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$, где $\alpha = \dfrac{-b}{2}$, $\beta = \dfrac{\sqrt{-\Delta}}{2}$.

Здесь нам понадобится экспоненциальная функция $e^{\lambda x}$, где $\lambda = \alpha + i\beta$, $\beta \neq 0$.

Согласно Эйлеру определим эту функцию формулой

$$e^{\lambda x} = e^{\alpha x}(\cos \beta x + i \sin \beta x).$$

Упражнение 2. Покажите, что $(e^{\lambda x})' = \lambda e^{\lambda x}$.

Из вышеизложенного следует, что обе функции $e^{\lambda_1 x}$, $e^{\lambda_2 x}$ являются комплексными решениями ДУ. Но тогда функция $e^{\alpha x} \cos \beta x = \operatorname{Re}(e^{\lambda_1 x}) = \operatorname{Re}(e^{\lambda_2 x})$ и функция $e^{\alpha x} \sin \beta x = \operatorname{Im}(e^{\lambda_1 x}) = -\operatorname{Im}(e^{\lambda_2 x})$ являются вещественными решениями ДУ.

Упражнение 3. Докажите, что система решений ДУ (6)

$$e^{\alpha x}\cos\beta x, \quad e^{\alpha x}\sin\beta x$$

линейно независима. Для этого проверьте, что $W(0) = \beta \neq 0$.

Согласно §3 приходим к заключению: общее вещественное решение ДУ в случае, когда $\Delta < 0$, имеет вид

$$z(x) = C_1 e^{\alpha x}\cos\beta x + C_2 e^{\alpha x}\sin\beta x, \tag{9}$$

где C_1, C_2 — произвольные вещественные постоянные.

Упражнение 4. Покажите, что ФСР ДУ $y'' + y = 0$ — это $\cos x$, $\sin x$. Приведите формулу общего решения.

Упражнение 5. Решите задачу Коши

$$y'' - 4y' + 5y = 0, \quad y(0) = y'(0) = 1.$$

Ответ: $y = e^{2x}\cos x - e^{2x}\sin x$.

§ 5. Линейное однородное дифференциальное уравнение *n*-го порядка с постоянными коэффициентами

Рассмотрим ДУ

$$L(D)z = 0, \tag{10}$$

где $L(D)$ — линейный дифференциальный оператор n-го порядка с вещественными постоянными коэффициентами: $L(D)z = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k D^k z \quad (a_n = 1)$. Формально заменяя в выражении $L(D)$ оператор D на числовой параметр λ, получаем многочлен $L(\lambda)$ степени n, который называется характеристическим многочленом, соответствующим дифференциальному оператору $L(D)$. Уравнение

$$L(\lambda) = 0 \tag{11}$$

называется характеристическим уравнением, соответствующим ДУ (10). Отметим, что степень характеристического многочлена равна n. Из курса алгебры известно, что всякое уравнение n-й степени имеет в поле комплексных чисел ровно n корней с учетом их кратности. При этом если уравнение с вещественными коэффициентами, каковым является уравнение (11), имеет комплексный корень некоторой кратности, то корнем той же кратности является и комплексно сопряженный ему корень.

Комплексное решение ДУ определяется, как в предыдущем параграфе.

Лемма 1. *Для того чтобы функция $e^{\lambda x}$, где λ — вещественное или комплексное число, была соответственно вещественым или комплексным решением ДУ* (1), *необходимо и достаточно, чтобы λ было корнем характеристического уравнения* (11).

Доказательство. Согласно упражнению 2 из §4 $De^{\lambda x} = \lambda e^{\lambda x}$. Следовательно, $D^k e^{\lambda x} = \lambda^k e^{\lambda x}$. Теперь утверждение леммы следует из цепочки тождеств, справедливых и для вещественных, и для комплексных λ:

$$L(D)e^{\lambda x} = \sum_{k=0}^{n} a_k D^k e^{\lambda x} = \sum_{k=0}^{n} a_k \lambda^k e^{\lambda x} = L(\lambda)e^{\lambda x}.$$

Если $e^{\lambda x}$ — решение ДУ, т. е. равна нулю левая часть цепочки тождеств, то равна нулю и правая часть, т. е. $L(\lambda) = 0$. И наоборот, из того, что λ — корень характеристического уравнения, следует, что $e^{\lambda x}$ — решение ДУ. Лемма доказана.

Рассмотрим все возможные случаи.

1) Пусть характеристическое уравнение (11) имеет n различных вещественных корней $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, т. е. все корни характеристического уравнения вещественные и простые (однократные). Каждому вещественному λ_k соответствует вещественное решение $e^{\lambda_k x}$, и, таким образом, ДУ имеет систему из решений

$$e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x} \quad e^{\lambda_n x}. \tag{12}$$

Докажем, что эта система линейно независима и, следовательно, является ФСР для ДУ (10).

Упражнение 1. Покажите, что определитель Вронского системы решений (12) в точке $x = 0$ равен

$$W(0) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \ldots & \lambda_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \ldots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Замечание 1. Этот определитель $W(0)$ называется определителем Вандермонда. Его можно вычислить методом полной математической индукции. Для нас важен лишь факт, что $W(0) \neq 0$, поскольку все $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ различны.

Приведем другое доказательство неравенства того, что $W(0) \neq 0$. Допустим противное, что вронскиан в точке 0 равен нулю. Но тогда строки этого определителя линейно зависимы, т. е. найдутся постоянные $C_1, C_2, \ldots, C_n$ не равные нулю одновременно и такие, что:

$$\begin{gathered} C_1 + C_2\lambda_1 + \ldots + C_n\lambda_1^{n-1} = 0, \\ C_1 + C_2\lambda_2 + \ldots + C_n\lambda_2^{n-1} = 0, \\ \ldots \\ C_1 + C_2\lambda_n + \ldots + C_n\lambda_n^{n-1} = 0. \end{gathered}$$

Составим многочлен $Q(\lambda) = C_1 + C_2\lambda + \ldots + C_n\lambda^{n-1}$.

Его степень не превосходит $n-1$ и потому он не может иметь более $(n-1)$ корней. Но выписанная выше система равенств показывает, что $Q(\lambda)$ имеет по меньшей мере n различных корней. Это возможно, лишь если Q — нулевой многочлен. Значит, все постоянные $C_1, C_2, \ldots, C_n$ равны нулю и линейная независимость нашей системы решений доказана. Подведем итог.

Теорема 1. *Пусть характеристическое уравнение* (11) *имеет n различных вещественных корней* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, *тогда ФСР ДУ* (10) *дается формулами* (12).

2) Теперь рассмотрим общий случай вещественных корней характеристического уравнения. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть характеристическое уравнение имеет вещественные корни* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ *соответственно кратностей* $n_1, n_2, \ldots, n_r$ *с общей суммой кратностей* $\sum\limits_{s=1}^{r} n_s = n$. *Тогда ФСР ДУ* (10) *имеет вид*

$$e^{\lambda_k x},\ xe^{\lambda_k x},\ \ldots,\ x^{n_k-1}e^{\lambda_k x}, \quad k = 1, 2, \ldots, r. \tag{13}$$

Заметим, что указанная ФСР получается объединением серий, каждая из которых состоит из решений, соответствующих одному из корней характеристического уравнения.

Недостаточно подготовленный читатель может пропустить доказательство теоремы. Другое доказательство дано в [12].

Доказательство теоремы 2. Начнем со следующей технически довольно сложной леммы.

Лемма 2. *Пусть* $M(D) = \sum\limits_{s=0}^{m} b_s D^s$ — *дифференциальный оператор, а* $M(\lambda)$ — *соответствующий ему характеристический многочлен. Пусть p — натуральное число, а* λ_0 — *вещественное или комплексное число. Тогда для того чтобы функция* $x^p e^{\lambda_0 x}$ *являлась решением ДУ* $M(D)z = 0$, *необходимо и достаточно, чтобы* λ_0 *было корнем характеристического уравнения* $M(\lambda) = 0$ *кратности не ниже* $p+1$.

Доказательство. Используя формулу Лейбница для производной высшего порядка от произведения двух функций и метод математической индукции, можно доказать формулу

$$M(D)(e^{\lambda x}x^p) = \sum_{s=0}^{p} C_p^s M^{(s)}(\lambda) e^{\lambda x} x^s. \tag{14}$$

Упражнение 2. Докажите эту формулу.

Продолжим доказательство леммы. Пусть λ_0 — корень многочлена $M(\lambda)$ кратности не ниже $p+1$. Подставляя в (13) $\lambda = \lambda_0$ и учитывая, что $M^{(s)}(\lambda_0) = 0$ при $s = 0, 1, \ldots, p-1$, получаем

$$M(e^{\lambda_0 x}x^p) = 0.$$

Обратно, пусть справедливо последнее равенство. Из формулы (14) имеем тогда

$$\sum_{s=0}^{p} C_p^s M^{(s)}(\lambda_0) e^{\lambda_0 x} x^s = 0.$$

Из линейной независимости системы функций $\{e^{\lambda_0 x} x^s\}$, $s = 0, \ldots, p$, следует, что $M^{(s)}(\lambda_0) = 0$, $s = 0, 1, \ldots, p$, т. е. кратность λ_0 равна $p+1$ или больше.

Следствие. *Если λ_k — корень кратности n_k характеристического уравнения* (11), *то все функции серии $e^{\lambda_k x}$, $xe^{\lambda_k x}$, $\ldots$, $x^{n_k-1}e^{\lambda_k x}$ являются решениями ДУ* (10).

Для доказательства следствия достаточно взять в (14) $M(\lambda) = L(\lambda)$ и $\lambda_0 = \lambda_k$.

Для завершения доказательства теоремы 2 осталось доказать линейную независимость системы решений (13).

Пусть $z_1(x), z_2(x), \ldots, z_n(x)$ — система решений ДУ (10), записанная как последовательное объединение серий (13): сначала функции 1-й серии, затем 2-й и т. д. Таким образом, $z_{n_1}(x) = x^{n_1-1}e^{\lambda_1 x}$, $z_{n_1+n_2}(x) = x^{n_2-1}e^{\lambda_2 x}$, $\ldots$, $z_n(x) = x^{n_r-1}e^{\lambda_r x}$.

Допустим, что эта система линейно зависима. Тогда ее вронскиан в любой точке равен нулю (см. §2). Значит, его строки линейно зависимы, т. е. существуют постоянные $C_1, C_2, \ldots, C_n$, не равные нулю одновременно и такие, что

$$C_1 z_s(0) + C_2 z_s'(0) + \ldots + C_n z_s^{n-1}(0) = 0, \quad s = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Введем дифференциальный оператор $M(D) = \sum\limits_{l=0}^{n-1} C_{l+1} D^l$.

Воспользуемся леммой 2. Так как $M(D) z_{n_1}(x) = 0$, то λ_1 является корнем многочлена $M(\lambda)$ кратности не менее n_1. Аналогично получим, что любое λ_k является корнем многочлена $M(\lambda)$ кратности не менее n_k.

Оказалось, что этот многочлен степени, не превышающей $n-1$, имеет не менее n корней с учетом их кратностей. Это возможно только в случае, когда многочлен равен нулю, т. е. все его коэффициенты $C_k = 0$. Линейная независимость системы доказана.

3) В общем случае у характеристического уравнения могут быть и комплексные корни. Если $\lambda_k = \alpha_k + i\beta_k$ — комплексный корень, т. е. $\beta_k \neq 0$, то корнем будет также комплексно сопряженное число $\alpha_k - i\beta_k$. Этой паре корней соответствует (см. §4) пара вещественных решений ДУ (10): $e^{\alpha_k x}\cos\beta_k x$, $e^{\alpha_k x}\sin\beta_k x$. Если корень $\lambda_k = \alpha_k + i\beta_k$ — комплексный корень кратности n_k ($\beta_k \neq 0$), то корнем той же кратности будет также комплексно сопряженное число $\alpha_k - i\beta_k$. Этой паре комплексно сопряженных корней соответствует (см. §4) $2n_k$ вещественных решений ДУ

$$e^{\alpha_k x}\cos\beta_k x, \ \ldots, \ x^{p-1}e^{\alpha_k x}\cos\beta_k x, \quad e^{\alpha_k x}\sin\beta_k x, \ \ldots, \ x^{p-1}e^{\alpha_k x}\sin\beta_k x.$$

Переберем все корни характеристического многочлена. На этом пути возникает система из n вещественных решений ДУ. Доказать (см. [12]) ее линейную независимость можно следующим образом. С помощью леммы 2 доказывается линейная независимость исходной системы, состоящей из вещественных и комплексных решений. Отсюда следует линейная независимость системы вещественных решений ДУ (детали см. в [12]).

Итак, всегда можно указать вещественную ФСР однородного ДУ (10) с постоянными вещественными коэффициентами и, следовательно, построить его общее решение.

Замечание 2. Приведенные рассуждения пригодны и в случае, когда $L(D)$ — линейный дифференциальный оператор с комплексными коэффициентами. ФСР определяется формулами (13).

§ 6. Основные свойства решений линейных неоднородных дифференциальных уравнений

Перейдем теперь к изучению линейного неоднородного ДУ (3): $L(D)y = h(x)$. Напомним, что под общим решением ДУ (3) понимается совокупность всех его решений.

1°. *Формула общего решения линейного неоднородного ДУ.* Заметим сначала, что формула

$$y(x) = \sum_{k=1}^{n} C_k \varphi_k(x) + y_0(x), \tag{15}$$

где y_0 — фиксированное решение нашего неоднородного ДУ (иначе говоря, его частное решение), $\varphi_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots, n$, — ФСР соответствующего однородного ДУ (4), а $C_1, C_2, \ldots, C_n$ — произвольные постоянные, дает общее решение ДУ (3).

Для доказательства этого утверждения достаточно показать, что при подходящем подборе постоянных C_k эта формула содержит любое решение $\tilde{y}(x)$ ДУ (3).

Функция $\tilde{y}(x) - y_0(x) \in N(L)$. Значит она есть линейная комбинация базисных функций фундаментальной системы решений:

$$\tilde{y}(x) - y_0(x) = \sum_{k=1}^{n} C_k^0 \varphi_k(x).$$

Это означает, что $\tilde{y}(x)$ содержится в формуле (12) при $C_k = C_k^0$.

Таким образом, для изучаемого ДУ справедливо следующее предложение, верное для всяких линейных уравнений: *общее решение неоднородного уравнения равно сумме общего решения соответствующего однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения. Для запоминания полезно записать*

$$y_{\text{общ. неод.}} = y_{\text{общ. одн.}} + y_{\text{частн. одн.}}.$$

В соответствии со сказанным важное значение приобретает возможность найти хоть одно решение неоднородного ДУ или, как говорят, его частное решение.

2°. *Принцип суперпозиции*. Отметим важный факт, полезный при решении задач. Пусть правая часть линейного неоднородного ДУ (3) является линейной комбинацией двух известных функций, т. е. представима в виде $h(x) = C_1h_1(x) + C_2h_2(x)$. Пусть $y_1(x)$ — решение ДУ $L(D)y = h_1(x)$, а $y_2(x)$ — решение ДУ $L(D)y = h_2(x)$. Тогда $y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ является решением ДУ $L(D)y = h(x)$.

В самом деле,

$$L(D)(C_1y_1 + C_2y_2) = C_1L(D)y_1 + C_2L(D)y_2 = C_1h_1(x) + C_2h_2(x) = h(x).$$

Данный факт вообще справедлив для любых линейных уравнений, не только дифференциальных. Он носит название *принцип суперпозиции*. Решение уравнения $Lx = y$ можно трактовать как отклик x системы, описываемой этим уравнением, на внешнее воздействие h. Если воздействие является линейной комбинацией двух (или нескольких) воздействий, то отклик на него будет той же линейной комбинацией соответствующих откликов.

3°. *Метод Лагранжа вариации произвольных постоянных*. Лагранж предложил следующий метод отыскания общего решения ДУ (3).

Пусть $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^n$ — ФСР соответствующего однородного ДУ.

Оказывается, частное решение неоднородного ДУ (3) можно найти в виде

$$y(x) = \sum_{k=1}^{n} C_k(x)\varphi_k(x),$$

где $C_k(x)$ — пока неизвестные непрерывно дифференцируемые на (a, b) функции.

Если бы $h(x) = 0$ на всем (a, b), то эти функции были бы произвольными постоянными. Их вариация (изменение, делающее их зависимыми от x) и позволяет учесть влияние ненулевой правой части.

Составим следующую систему Лагранжа:

$$\begin{gathered}
C_1'(x)\varphi_1(x) + C_2'(x)\varphi_2(x) + \ldots + C_n'(x)\varphi_n(x) = 0,\\
C_1'(x)\varphi_1'(x) + C_2'(x)\varphi_2'(x) + \ldots + C_n'(x)\varphi_n'(x) = 0,\\
\ldots\ldots\ldots\\
C_1'(x)\varphi_1^{(n-1)}(x) + C_2'(x)\varphi_2^{(n-1)}(x) + \ldots + C_n'(x)\varphi_n^{(n-1)}(x) = h(x).
\end{gathered}$$

Данная система при каждом $x \in (a, b)$ является линейной алгебраической системой n уравнений с n неизвестными $C_k'(x)$, $k = 1, 2, \ldots, n$ и ее определитель — это определитель Вронского $W(x) \neq 0$.

Следовательно, система Лагранжа имеет единственное решение (оно может быть найдено, например, по правилу Крамера)

$$C_k'(x) = g_k(x), \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

где $g_k(x)$ — известные функции.

Зафиксируем $x_0 \in (a, b)$. Тогда

$$C_k(x) = \int\limits_{x_0}^{x} g_k(s)ds + B_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

где B_k — произвольные постоянные.

Решение ДУ дается формулой

$$y(x) = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(x) \int\limits_{x_0}^{x} g_k(s)ds + \sum_{k=1}^{n} B_k\varphi_k(x).$$

Дадим обоснование метода Лагранжа. Учитывая систему Лагранжа, имеем:

$$y^{(l-1)}(x) = \sum_{k=1}^{n} C_k(x)\varphi_k^{(l-1)}(x), \quad l = 1, 2, \ldots, n;$$

$$y^{(n)}(x) = \sum_{k=1}^{n} C_k(x)\varphi_k^{(n)}(x) + h(x).$$

Подставим эти выражения в ДУ и получим

$$L(D)y = \sum_{l=0}^{n} c_l(x)y^{(l)}(x) = \sum_{l=0}^{n} c_l(x) \sum_{k=1}^{n} C_k(x)\varphi_k^{(l)}(x) + h(x) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} C_k(x)L(D)\varphi_k(x) + h(x) = h(x),$$

поскольку $\varphi_k(x) \in N(L)$ и, значит, $L(D)\varphi(x) = 0$.

В примерах 1–2 требуется найти общие решения ДУ.

Пример 1. $y'' + y = \sin x$.

Решение. ФСР соответствующего однородного ДУ имеет вид $\sin x$, $\cos x$. Составляем систему Лагранжа:

$$C_1' \sin x + C_2'(x) \cos x = 0, \quad C_1'(x) \cos x - C_2' \sin x = \sin x.$$

Умножим первое уравнение на $\sin x$, второе на $\cos x$ и, сложив полученные уравнения, найдем $C_1'(x) = \sin x \cos x$, откуда $C_1(x) = \dfrac{\sin^2 x}{2} + B_1$.

Аналогично, умножим первое уравнение на $\cos x$, второе на $-\sin x$ и, сложив полученные уравнения найдем $C_2'(x) = -\sin^2 x = \dfrac{\cos 2x - 1}{2}$, откуда $C_2(x) = \dfrac{\sin 2x - 2x}{4} + B_2$.

Искомое общее решение имеет вид

$$y = B_1 \sin x + B_2 \cos x + \frac{\sin^3 x}{2} + \frac{\sin x \cos^2 x - x \cos x}{2}.$$

Пример 2. $y'' - y = \dfrac{e^{2x}}{1+e^x}$.

Решение. ФСР соответствующего однородного ДУ имеет вид e^x, e^{-x}. Составляем систему Лагранжа:

$$C_1'e^x + C_2'(x)e^{-x} = 0, \quad C_1'(x)e^x - C_2'e^{-x} = \frac{e^{2x}}{1+e^x}.$$

Последовательно сложив эти уравнения и вычтя из первого второе, получим

$$C_1'(x) = \frac{1}{2}\cdot\frac{e^x}{1+e^x}, \quad C_2'(x) = \frac{1}{2}\cdot\frac{e^{3x}}{1+e^x}.$$

Интегрируя, находим (проверьте!)

$$C_1(x) = \frac{1}{2}\ln(1+e^x) + A_1e^x, \quad C_2(x) = \frac{1}{2}(e^{2x} - e^x + \ln(1+e^x)) + A_2e^{-x},$$

где A_1, A_2 — произвольные постоянные интегрирования. (Мы воспользовались равенством $\dfrac{e^{3x}}{1+e^x} = e^{2x} - e^x + \dfrac{e^x}{1+e^x}$.)

Предоставляем читателю записать выражение общего решения.

Пример 3. Обобщая пример 1, найдем частное решение ДУ

$$y'' + \omega^2 y = f(x),$$

где $\omega > 0$, а $f(x)$ непрерывна на интервале, содержащем точку $x = 0$.

Система Лагранжа имеет вид

$$C_1'\cos\omega x + C_2'\sin\omega x = 0, \quad -\omega C_1'\sin\omega x + \omega C_2'\cos\omega x = f(x).$$

Отсюда находим:

$$C_1' = -\frac{1}{\omega}f(x)\sin\omega x, \quad C_2' = \frac{1}{\omega}f(x)\cos\omega x.$$

Таким образом, частное решение равно

$$y(x) = \frac{1}{\omega}\int_0^x \sin\omega(x-s)f(s)\,ds.$$

Нетрудно убедиться, что $y(x)$ удовлетворяет начальным условиям $y(0) = y'(0) = 0$.

4°. *Формулы интегрального представления решений неоднородного ДУ.* В случае ДУ с постоянными коэффициентами дадим формулу интегрального представления частного решения неоднородного ДУ

$$L(D)y = f(x),$$

где $L(D) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_kD^k$, $a_n = 1$, а $f(x)$ непрерывна на интервале, содержащем точку $x = x_0$.

Теорема 1. *Пусть $z = K(x)$ — решение задачи Коши*

$$L(D)z = 0, \quad z^k(x_0) = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, n-2, \quad z^{n-1}(x_0) = 1.$$

Тогда функция

$$y = \int_{x_0}^{x} K(x_0 + x - s) f(s)\, ds$$

является решением задачи Коши

$$L(D)y = f(x), \quad y^k(x_0) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Доказательство. Используем следующую теорему о дифференцировании интеграла с переменным верхним пределом (см., например, [8]).

Пусть функция $\Phi(x, s)$ и ее частная производная $\dfrac{\partial \Phi(x, s)}{\partial x}$ непрерывны на прямоугольнике $x, s \in (a, b)$. Тогда

$$\frac{d}{dx} \int_{x_0}^{x} \Phi(x, s)\, ds = \Phi(x, x) + \int_{x_0}^{x} \frac{\partial \Phi(x, s)}{\partial x}\, ds.$$

Учитывая начальные условия для K, последовательно имеем:

$$D^k y = \int_{x_0}^{x} K^k(x_0 + x - s) f(s)\, ds, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1;$$

$$D^n y = f(x) + \int_{0}^{x} K^n(x_0 + x - s) f(s)\, ds.$$

Подставляя эти формулы в выражение для $L(D)$, получаем $L(D)y = f$.

Проверку выполнения начальных условий предоставляем читателю. Заметим, что полученное представление частного решения удобно, если приходится решать одно и то же ДУ с различными правыми частями $f(x)$.

Рассмотрим теперь краевую задачу для однородного ДУ с неоднородными граничными условиями. Учитывая определение функции $K(x)$, можно убедиться в справедливости следующего факта.

Теорема 2. *Решение задачи Коши*

$$L(D)y = 0, \quad y^{(k)}(x_0) = y_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n-1,$$

дается формулой

$$y(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k K^{(n-1-k)}(x),$$

в которой постоянные b_k, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, определяются из линейной алгебраической системы с треугольной матрицей

$$\sum_{k=0}^{l} b_k K^{(n-1-k+l)}(x_0) = y_l, \quad l = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Доказательство. Поскольку функция $K(x)$ и ее производные являются решениями однородного ДУ, то достаточно найти $b_0, b_0, \ldots, b_{n-1}$, так чтобы удовлетворялись начальные условия. Но

$$y^l(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k K^{(n-1-k+l)}(x), \quad l = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Подставляя сюда и учитывая начальные условия для $K(x)$, получим последовательно:

$$y(x_0) = b_0, \quad y'(x_0) = b_0 K^{(n)}(x_0) + b_1 = y_1, \quad \ldots,$$
$$y^{(n-1)}(x_0) = b_0 K^{(2n-2)}(x_0) + \ldots + b_{n-1}.$$

Это и есть искомая рекуррентная система.

Упражнение. В дополнение к примеру 3 проверьте, что решением задачи $y'' + \omega^2 y = 0$, $y(0) = y_0$, $y'(0) = y_1$ является функция $y = y_0 \cos \omega x + y_1 \dfrac{\sin \omega x}{\omega}$.

5°. *Принцип суперпозиции для линейной задачи Коши.* Из изложенного выше ясно, что решение задачи Коши

$$L(D)y = f(x), \quad y^{(k)}(x_0) = y_k, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1$$

является суммой решений задач из теорем 1 и 2.

Первое решение учитывает влияние правой части при однородных начальных условиях, а второе — влияние начальных условий при нулевой правой части.

§ 7. Линейное ДУ с постоянными коэффициентами и со специальной правой частью

Функцию вида $h(x) = e^{\alpha x} p_m(x)$, где $p_m(x) = \sum_{k=1}^{m} a_k x^k$ — многочлен степени m со старшим коэффициентом $a_m \neq 0$, принято называть псевдомногочленом.

Рассмотрим ДУ $L(D)y = h(x)$, где $h(x)$ — псевдомногочлен. Поскольку общее решение однородного ДУ мы строить умеем, то, согласно формуле (15), для нахождения общего решения неоднородного ДУ достаточно найти какое либо его частное решение. Дадим два рецепта нахождения частного решения.

1) Если α не является корнем характеристического уравнения, то частное решение можно найти в виде $y(x) = e^{\alpha x} Q_m(x)$, где $Q_m(x)$ — многочлен той же степени m, что и в правой части ДУ.

2) Если α является корнем характеристического уравнения кратности p, то частное решение можно найти в виде $y(x) = x^p e^{\alpha x} Q_m(x)$.

Доказательства (см. [13]) проводятся аналогично тому, как это было сделано в §4 для ДУ первого порядка. Их идея следующая. Подстановка выражения для $y(x)$ в ДУ и последующее сокращение на $e^{\alpha x}$ приводят к равенству двух многочленов. Приравнивание коэффициентов при одинаковых степенях x позволяет последовательно вычислить коэффициенты многочлена $Q_m(x)$. Заметим, что часто эта методика предпочтительнее использования метода Лагранжа.

Приведем несколько примеров.

Пример 1. $y''' + 7y'' + 3y = 4$. Здесь частное решение можно найти в виде постоянной функции $y(x) = C$. Подставляя ее в ДУ, имеем $3C = 4$ и $y(x) = 4/3$.

Пример 2. $y''' + 4y'' + 5y' = 4$. Здесь 0 является корнем кратности 1 характеристического уравнения $\lambda^3 + 4\lambda^2 + 5\lambda = 0$. Значит частное решение можно найти в виде $y = Cx$.

Ответ: $y = \dfrac{4x}{5}$.

Пример 3. $y'' - y = e^{2x} + e^x$. В соответствии с 2) найдем частные решения ДУ $y_1'' - y_1 = e^{2x}$ и $y_2'' - y_2 = e^x$. Поскольку показатель 2 не является корнем характеристического уравнения $\lambda^2 - \lambda = 0$, то частное решение первого ДУ следует искать в виде $y_1 = ae^{2x}$, откуда находим $a = 1/3$.

Показатель 1 является корнем кратности 1 характеристического уравнения. Поэтому частное решение второго ДУ будем искать в виде $y_2 = bxe^x$, и тогда $b = 1/2$ (проверьте!).

Ответ: $y = 1/3e^{2x} + 1/2xe^x$ — частное решение ДУ.

Пример 4. Метод пригоден и в случае комплексного показателя экспоненты.

Так, для ДУ $y'' + y = \sin 2x$: поскольку по формуле Эйлера $\sin 2x = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$, а $2i$ и $-2i$ не являются корнями характеристического уравнения и $(\sin 2x)'' = -4\sin 2x$, то частное решение ДУ можно найти в виде $y = a\sin 2x$ и $a = -1/3$.

Пример 5. Обобщим пример 1 из §6. Покажите, что частное решение ДУ $y'' + \omega^2 y = a_1\cos\omega x + b_1\sin\omega x$ равно $y = -\dfrac{b_1 x\cos\omega x}{2} + \dfrac{a_1 x\sin\omega x}{2}$.

Указание. Частное решение следует искать в виде $y = Ax\cos\omega x + Bx\sin\omega x$.

Другой способ решения состоит в следующем. По формуле Эйлера $\cos\omega x = \operatorname{Re} e^{i\omega x}$, $\sin\omega x = \operatorname{Im} e^{i\omega x}$. Поскольку числа $\pm i\omega$ являются корнями характеристического уравнения кратности 1, то частное (комплексное) решение ДУ $u'' + \omega^2 u = e^{i\omega x}$ можно найти в виде $u = Cxe^{i\omega x}$ (с комплексной постоянной C), а тогда по принципу суперпозиции $y = a_1\operatorname{Re} u + b_1\operatorname{Im} u$ есть вещественное решение исходного ДУ.

§ 8. Понятие о краевых (граничных) задачах

Ограничимся ДУ второго порядка

$$y'' = f(x, y, y'), \tag{16}$$

где правая часть и ее частные производные по второму и третьему аргументам непрерывны в области $D \subset \Re^3$. Наряду с задачами Коши для данного ДУ можно поставить и другие задачи. Важное прикладное значение имеют так называемые краевые, или граничные задачи. Перечислим простейшие из таких задач. Пусть точки (a, y_a, z_a), (b, y_b, z_b) принадлежат области D. Наряду с ДУ задаются два условия, называемые краевыми, или граничными условиями. Условно краевые задачи можно подразделить на три типа.

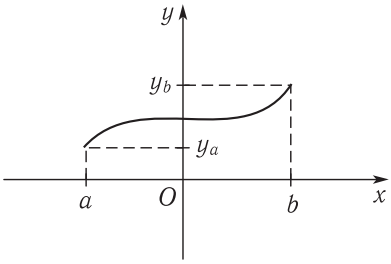


Рис. 6

1) Первая краевая задача, или задача Дирихле (рис. 6): найти на $[a, b]$ решение ДУ (16), принимающее на концах этого отрезка заданные значения

$$y(a) = y_a, \quad y(b) = y_b. \tag{17}$$

2) Вторая краевая задача, или задача Неймана: найти на $[a, b]$ решение ДУ (16), удовлетворяющее на концах краевым условиям $y'(a) = z_a$, $y'(b) = z_b$.

3) Третья краевая задача: найти решение ДУ (16) с граничными условиями

$$k_1 y(a) + l_1 y'(a) = u_a, \quad k_2 y(b) + l_2 y'(b) = u_b. \tag{18}$$

Предполагается выполнение естественного требования, что

$$|k_1| + |l_1| > 0, \quad |k_2| + |l_2| > 0.$$

Возможны и более общие краевые условия, когда заданы две независимые линейные комбинации значений искомого решения и его производной на концах отрезка, а также еще более сложные, в частности, нелинейные краевые условия. Теория краевых задач, фрагменты которой излагаются ниже, значительно сложнее рассмотренной выше теории задачи Коши. Краевая задача может иметь единственное решение, несколько решений или даже бесконечно много решений, а может оказаться неразрешимой, т. е. не иметь ни одного решения.

Заметим, что краевые задачи для линейных и нелинейных дифференциальных уравнений имеют многочисленные важные приложения. Краевая задача состоит в нахождении решения ДУ, переводящего описываемую им систему из одного положения в другое. В числе приложений первой краевой задачи укажем, например, задачи о полете снаряда,

ракеты и т. п.: орудие запуска находится в точке (a, y_a), требуется достичь точки (b, y_b).

Остановимся подробнее на первой краевой задаче для линейного ДУ

$$y'' + c(x)y' + d(x)y = f(x) \tag{19}$$

в предположении, что функции $c(x), d(x), f(x) \in C(A, B)$, где $(A, B) \supset [a, b]$. Согласно теореме 2 из §1, каждое решение этого ДУ определено на всем $[a, b]$.

Наряду с данной краевой задачей рассмотрим соответствующую ей однородную краевую задачу

$$z'' + c(x)z' + d(x)z = 0, \quad z(a) = 0, \quad z(b) = 0. \tag{20}$$

Такая задача всегда имеет тривиальное решение, т. е. решение, тождественно равное нулю на всем $[a, b]$. Возможны, однако, случаи, когда эта задача имеет на $[a, b]$ нетривиальные решения, не обращающиеся на $[a, b]$ в нуль тождественно (см. ниже пример 1).

Имеется тесная связь между неоднородной и соответствующей ей однородной задачами.

Теорема. *Неоднородная линейная краевая задача имеет единственное решение, если соответствующая ей однородная краевая задача имеет только тривиальное решение.*

Доказательство. Пусть $z_1(x)$, $z_2(x)$ — нормальная фундаментальная система решений однородного ДУ, т. е. система его решений, соответственно удовлетворяющих условиям

$$z_1(a) = 1, \quad z_1'(a) = 0; \quad z_2(a) = 0, \quad z_2'(a) = 1.$$

Напомним, что общее решение линейного неоднородного ДУ можно записать в виде

$$y(x) = C_1 z_1(x) + C_2 z_2(x) + y_0(x),$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, а $y_0(x)$ — его частное решение.

Покажем, что в условиях теоремы постоянные C_1, C_2 можно, и притом единственным образом, подобрать так, чтобы выполнялись неоднородные граничные условия. Полагая в выражении для $y(x)$ сначала $x = a$, находим $y(a) = C_1 + y_0(a)$, откуда C_1 определяется однозначно. Полагая затем $x = b$, находим $C_1 z_1(b) + C_2 z_2(b) + y_0(b) = y(b)$.

Из этого уравнения надо найти C_2.

Если $z_2(b) \neq 0$, то C_2 также находится единственным образом. Но тогда единственным образом будет определено решение неоднородной краевой задачи и теорема будет доказана.

Покажем, что в условиях теоремы равенство $z_2(b) = 0$ невозможно.

Действительно, в этом случае функция $z_2(x)$, являясь решением однородного уравнения, удовлетворяет также обоим однородным граничным условиям. Значит, не будучи тождественно равной нулю (ведь

$z_2'(a) = 1$), она является нетривиальным решением однородной задачи. Полученное противоречие исключает случай $z_2(b) = 0$. Теорема доказана.

Укажем теперь простое условие, достаточное для того, чтобы однородная задача имела лишь нулевое решение. Согласно теореме это же условие достаточно для однозначной разрешимости неоднородной краевой задачи.

Лемма. *Если* $d(x) < 0$ *на* (a, b), *то однородная задача* (19) *имеет только тривиальное решение.*

Доказательство. Пусть $z(x)$ — нетривиальное решение однородной задачи.

Докажем, что $z(x)$ не может иметь на (a, b) положительного максимума. Допустим противное, что на этом интервале найдется точка локального максимума x_0, в которой $z(x_0) > 0$. Тогда по теореме Ферма $z'(x_0) = 0$.

Далее, кроме того, $z''(x_0) \leq 0$. В самом деле, из $z''(x_0) > 0$ следовало бы, что x_0 — точка строгого локального минимума.

Рассмотрим ДУ в точке x_0:

$$z''(x_0) + c(x_0)z'(x_0) + d(x_0)z(x_0) = 0.$$

В левой части этого равенства первое слагаемое неположительно, второе равно нулю, а третье отрицательно. Получилось противоречие: в рассматриваемом равенстве его левая часть отрицательна, а правая часть — нулевая. Итак, $z(x)$ не может иметь на (a, b) положительного максимума.

Если теперь вместо $z(x)$ взять функцию $-z(x)$, то из вышеизложенного будет следовать, что $z(x)$ не может иметь на (a, b) отрицательного минимума.

Таким образом, $z(x) \equiv 0$ на $[a, b]$ и лемма доказана.

Заметим, что приведенное доказательство является вариантом известного в теории ДУ с частными производными принципа максимума — минимума.

Упражнение. Докажите, что краевая задача

$$y'' + xy' + (x^2 - 4)y = f(x), \quad y(-1) = a, \quad y(1) = b$$

имеет единственное решение для любой $f(x) \in C([-1, +1])$ и любых $a, b \in \Re$.

Приведем несколько тривиальных примеров краевых задач. В примерах 1 и 2 нарушено условие леммы и поэтому нельзя гарантировать существование единственного решения краевой задачи.

Пример 1. $y'' + y = 0$, $y(0) = 0$, $y(\pi) = 0$. Данная краевая задача имеет бесконечно много решений $y(x) = C \sin x$, где C — произвольная постоянная.

Пример 2. $y'' + y = 1$, $y(0) = 0$, $y(\pi) = 0$. Покажите, что задача не имеет решений.

Пример 3. $y'' + y = x$, $y(0) = 0$, $y(\pi/2) = 0$. Покажите, что эта краевая задача имеет единственное решение $y = -\frac{\pi}{2}\sin x + x$. Отметим, что условие леммы здесь не выполнено (ведь оно дает только достаточное условие существования и единственности решения краевой задачи).

Аналогичные краевые задачи рассматриваются также в §11.

§ 9. Общая краевая задача для линейного ДУ и ее функция Грина

Для ДУ (19) $y'' + c(x)y' + d(x)y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$ с параметрами задачи $c(x), d(x), f(x) \in C(a, b)$ рассмотрим краевую задачу с однородными граничными условиями

$$k_1 y(a) + l_1 y'(a) = 0, \quad k_2 y(b) + l_2 y'(b) = 0. \tag{21}$$

Однородной задачей, соответствующей данной краевой задаче, называется ее частный случай, когда $f(x) = 0$. Таким образом, однородная краевая задача имеет следующий вид:

$$z'' + c(x)z' + d(x)z = 0, \tag{22}$$

$$k_1 z(a) + l_1 z'(a) = 0,\ k_2 z(b) + l_2 z'(b) = 0. \tag{23}$$

И в этом общем случае из того факта, что однородная задача имеет лишь тривиальное решение, следует, что неоднородная задача имеет единственное решение $y(x)$ при любой непрерывной правой части $f(x)$. Этот факт будет установлен мимоходом. Главным здесь является представление решения через так называемую функцию Грина.

Решение граничной задачи построим методом Лагранжа вариации произвольных постоянных.

Действительно, пусть $z_1(x)$ — решение задачи Коши для однородного ДУ со следующими начальными условиями в точке a: $z(a) = -l_1$, $z'(a) = k_1$.

Аналогично, пусть $z_2(x)$ — решение задачи Коши для однородного ДУ со следующими начальными условиями в точке b: $z(b) = -l_2$, $z'(b) = k_2$.

Докажем, что система $z_1(x), z_2(x)$ линейно независима на отрезке $[a, b)$. Допустим противное, что существует постоянная $C \neq 0$, такая, что $z_2(x) = Cz_1(x)$. Тогда $z_2(a) = -Cl_1$, $z_2'(a) = Ck_1$, откуда $k_1 z_2(a) + l_1 z_2'(a) = C(-l_1 k_1 + k_1 l_1) = 0$. Оказалось, что $z_2(x)$ является нетривиальным решением однородной краевой задачи, что невозможно. Итак, построена специальная ФСР однородного ДУ.

Замечание 1. Из определения функций ФСР следует, что

$$k_1 z_2(a) + l_1 z_2'(a) \neq 0, \quad k_2 z_1(b) + l_2 z_1'(b) \neq 0.$$

Согласно методу Лагранжа решение краевой задачи (17) ищем в виде $y(x) = C_1(x)z_1(x) + C_2(x)z_2(x)$.

Заметим, что $y'(x) = C_1(x)z_1'(x) + C_2(x)z_2'(x)$, а производные неизвестных функций $C_1'(x)$, $C_2'(x)$ определяются из системы Лагранжа

$$C_1'(x)\,z_1(x) + C_2'(x)\,z_2(x), \quad C_1'(x)\,z_1'(x) + C_2'(x)\,z_2'(x) = f(x).$$

Из этой системы находим

$$C_1' = -\frac{y_2(x)f(x)}{W(x)}, \quad C_2' = \frac{y_1(x)f(x)}{W(x)},$$

где $W(x)$ — определитель Вронского системы решений z_1, z_2.

Покажем, что функции $C_1(x)$, $C_2(x)$ удовлетворяют следующим начальным условиям:

$$C_1(b) = 0, \quad C_2(a) = 0.$$

Имеем равенства:

$$y(a) = -C_1(a)l_1 + C_2(a)z_2(a), \quad y'(a) = C_1(a)k_1 + C_2(a)z_2'(a).$$

Используя граничные условия для $y(x)$ и для функций ФСР, получаем $0 = k_1y(a) + l_1y'(a) = C_2(a)(k_1z_2(a) + l_1z_2'(a))$. В силу замечания 1 коэффициент при $C_2(a)$ не равен нулю. Значит, $C_2(a) = 0$. Аналогично доказывается, что $C_1(b) = 0$.

Теперь мы можем найти решения задач Коши для $C_1(x)$ и $C_2(x)$:

$$C_1(x) = \int\limits_x^b \frac{y_2(s)f(s)}{W(s)}ds, \quad C_2(x) = \int\limits_a^x \frac{y_1(s)f(s)}{W(s)}ds.$$

Следовательно, решение краевой задачи дается формулой

$$y(x) = \int\limits_a^x \frac{y_2(x)y_1(s)f(s)}{W(s)}ds + \int\limits_x^b \frac{y_1(x)y_2(s)f(s)}{W(s)}ds.$$

Выражение для $y(x)$ можно записать в следующем компактном виде:

$$y(x) = \int\limits_a^b G(x,\,s)\,f(s)\,ds, \tag{24}$$

где

$$G(x,\,s) = \begin{cases} \dfrac{y_2(x)y_1(s)}{W(s)}, & \text{если } a \le s \le x; \\ \dfrac{y_1(x)y_2(s)}{W(s)}, & \text{если } x \le s \le b. \end{cases}$$

Функция $G(x,\,s)$ называется функцией Грина. Подробнее о функции Грина можно узнать в книгах [7, 13]; см. также обзор [10] в Математической энциклопедии.

Функция Грина полезна и в теоретических исследованиях, и при решении линейных краевых задач, когда одну и ту же задачу приходится решать при различных правых частях $f(x)$.

Рассмотрим теперь краевую задачу для однородного ДУ (22) с неоднородными граничными условиями

$$k_1 z(a) + l_1 z'(a) = u_a, \quad k_2 z(b) + l_2 z'(b) = u_b. \tag{25}$$

Пусть соответствующая однородная краевая задача имеет только тривиальное решение.

Общее решение этого однородного ДУ имеет вид

$$z(x) = A_1 z_1(x) + A_2 z_2(x),$$

где A_1, A_2 — произвольные постоянные, а $z_1(x)$, $z_2(x)$ — введенная выше ФСР. Оказывается, требование, чтобы $z(x)$ удовлетворяла граничным условиям (25), приводит к однозначному нахождению A_1, A_2, и, таким образом, краевая задача (21), (25) также имеет единственное решение.

Упражнение. Проверьте, что постоянные A_1, A_2 определяются формулами

$$A_1 = \frac{u_b}{k_1 y_2(a) + l_1 y_2'(a)}, \quad A_2 = \frac{u_a}{k_2 y_2(b) + l_2 y_2'(b)}.$$

Отметим, что знаменатели в выражениях справа отличны от нуля согласно замечанию 1.

Таким образом, решение краевой задачи (20)–(23) дается формулой

$$z(x) = \frac{u_b z_1(x)}{k_1 y_2(a) + l_1 y_2'(a)} + \frac{u_a z_2(x)}{k_2 y_2(b) + l_2 y_2'(b)}.$$

Доказано следующее утверждение.

Теорема. *Если однородная задача* (22)–(23) *имеет на* $[a, b]$ *только тривиальное решение, то неоднородная задача* (19), (18) *имеет для любой правой части* $f(x) \in C([a, b])$ *и любых чисел* u_a, u_b *единственное решение* $y = y(x)$ *и это решение дается формулой*

$$y(x) = z(x) + \int_a^b G(x, s) f(s)\, ds,$$

где $z(x)$ *— решение задачи* (21), (25), *а интегральное слагаемое справа является решением задачи* (19), (21).

Замечание 2. Для нахождения приближенного решения той или иной конкретной краевой задачи разработаны различные вычислительные методы (см. гл. V, §§ 6, 7).

В заключение параграфа повторим, что можно рассматривать еще более общие граничные условия, когда заданы две независимые линейные комбинации величин $y(a)$, $y'(a)$, $y(b)$, $y'(b)$. Таковы, например, периодические граничные условия $y(a) = y(b)$, $y'(a) = y'(b)$. Реже появляются краевые задачи для линейных ДУ более высоких порядков. В приложениях встречаются также существенно более сложные граничные задачи для нелинейных ДУ с линейными или даже нелинейными граничными условиями.

§ 10. Периодические решения неоднородного ДУ второго порядка с постоянными коэффициентами

На отрезке $[-\pi, +\pi]$ рассмотрим краевую задачу

$$y'' + y = f(x), \quad y(-\pi) = y(\pi), \quad y'(-\pi) = y'(\pi). \tag{26}$$

Пусть функция $f(x) \in C(\Re)$ является 2π-периодической и представима своим сходящимся рядом Фурье

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx.$$

Упражнение 1. Проверьте, что соответствующая однородная задача (с $f(x) = 0$) имеет двумерное подпространство решений с базисом (ФСР) $\cos x$, $\sin x$.

Итак, однородная задача имеет нетривиальные решения. Это приводит к тому, что неоднородная задача оказывается разрешимой не для всяких 2π-периодических правых частей $f(x)$ (см. теорему из §8). Выясним условия разрешимости этой задачи, т. е. необходимые и достаточные условия того, что она имеет хоть одно решение.

Пусть сначала в разложении Фурье функции $f(x)$ отсутствуют члены с $\cos x$ и $\sin x$, т. е. $a_1 = b_1 = 0$, или, с учетом выражений для коэффициентов Фурье,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(s) \cos s \, ds = 0, \qquad \int_{-\pi}^{\pi} f(s) \sin s \, ds = 0.$$

Геометрически эти условия означают ортогональность $f(x)$ на $[\pi, \pi]$ к $\cos x$ и к $\sin x$. В этом случае задача разрешима, т. е. имеет хоть одно решение. Частное решение, ортогональное к $\cos x$ и к $\sin x$, представимо следующим рядом Фурье:

$$y_{\text{ч}}(x) = \frac{a_0}{2} - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{a_k \cos kx + b_k \sin kx}{k^2 - 1}.$$

Упражнение 2. Проверьте эту формулу.

Общее решение краевой задачи дается формулой $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$, где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

Рассмотрим теперь случай, когда $f(x) = a_1 \cos x + b_1 \sin x$ с коэффициентами a_1, b_1, не обращающимися в нуль одновременно. Согласно примеру 5 из §7, соответствующее частное решение ДУ равно

$$y(x) = \frac{1}{2} x(-b_1 x \cos x + a_1 x \sin x).$$

В этом случае задача неразрешима, так как полученное решение непериодично.

Итак, для разрешимости задачи необходимо, чтобы $a_1 = b_1 = 0$. Эти же равенства являются и достаточными условиями разрешимости. Пусть они выполнены, так что теперь

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=2}^{\infty} a_k(\cos kx + b_k \sin kx) + a_1 \cos x + b_1 \sin x.$$

Тогда в соответствии с принципом суперпозиции общее решение задачи имеет вид

$$y(x) = \frac{a_0}{2} - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{a_k \cos kx + b_k \sin kx}{k^2 - 1} + \\ + \frac{1}{2}x(-b_1 x \cos x + a_1 x \sin x) + C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Сумма двух последних слагаемых с произвольными постоянными C_1 и C_2 представляет собой общее решение однородной задачи.

Доказано следующее утверждение.

Теорема. *Для того чтобы задача о периодических решениях была разрешима, необходимо и достаточно, чтобы разложение ее правой части $f(x)$ в ряд Фурье не содержало членов с $\cos x$ и $\sin x$. Если эти условия выполняются, то задача имеет двухпараметрическое семейство решений*

$$y(x) = \frac{a_0}{2} - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{a_k \cos kx + b_k \sin kx}{k^2 - 1} + C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

(C_1, C_2 — *произвольные постоянные*).

Аналогично рассматривается задача о периодических решениях ДУ

$$y'' + \omega^2 y = f(x), \tag{27}$$

где $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ и $f(x)$ — T-периодическая функция.

Для разрешимости этой задачи необходимо и достаточно, чтобы разложение $f(x)$ в ряд Фурье по тригонометрической системе

$$1, \quad \cos \omega x, \quad \sin \omega x, \quad \ldots, \quad \cos k\omega x, \quad \sin k\omega x, \quad \ldots$$

не содержало слагаемых с $\cos \omega x$, $\sin \omega x$.

§ 11. Методы понижения порядка дифференциального уравнения

Иногда с помощью замены переменных удается свести изучение ДУ к изучению ДУ более низкого порядка. Ниже на примере ДУ второго порядка в условиях теоремы Коши обсуждаются два основных метода понижения порядка ДУ. Задача Коши для ДУ второго порядка будет сведена к решению двух задач Коши для ДУ первого порядка.

1°. Рассмотрим сначала ДУ второго порядка в предположении, что его правая часть не зависит от y:

$$y'' = f(x, y') \tag{28}$$

с начальными условиями

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1. \tag{29}$$

Введем новую неизвестную функцию $p(x) = y'(x)$. Тогда $y''(x) = p'(x)$. Для функции $p(x)$ имеем задачу Коши первого порядка

$$p' = f(x, p), \; p(x_0) = y_1.$$

Пусть $p = p(x)$ — решение этой задачи. Возвращаясь к переменной y, получаем для нее задачу Коши также первого порядка $y' = p(x)$, $y(x_0) = y_0$, решение которой выписывается явно: $y(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} p(s)\,ds$.

2°. Теперь рассмотрим ДУ с правой частью, не зависящей от x:

$$y'' = f(y, y'), \tag{30}$$

и с теми же начальными условиями (17). Возможны два случая.

2°.1) Пусть начальное значение производной $y_1 = 0$ и выполняется равенство $f(y_0, 0) = 0$. Здесь решение задачи Коши выписывается явно: это постоянная функция $y(x) = y_0$ (проверьте!).

2°.2) Пусть теперь $y_1 = y'(x_0) \neq 0$. По теореме о сохранении знака непрерывной функцией найдется окрестность $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ точки x_0, в которой производная решения задачи Коши $y'(x)$ имеет тот же знак, что и число y_1. Но тогда в этой окрестности решение $y = y(x)$ является строго монотонной функцией. Значит существует единственная обратная функция $x = x(y)$ (на интервале $(y(x_0 - \delta), y(x_0 + \delta))$, если $y_1 > 0$).

Это обстоятельство позволяет считать здесь y новой независимой переменной, а $x = x(y)$ новой неизвестной функцией. По правилу вычисления производной обратной функции имеем $y'(x) = \dfrac{1}{x'(y)}$.

Приступим к понижению порядка ДУ. Введем новую неизвестную функцию $y'(x) = q(y)$. Но тогда по правилу дифференцирования суперпозиции (т. е. сложной функции) $y''(x) = \dfrac{d}{dx} q(y) = q'(y) y'(x)$. Следовательно, $y''(x) = q'(y) q(y)$. Таким образом, нахождение $q = q(y)$ сводится к следующей задаче Коши для ДУ первого порядка: $q' = f(y, q)/q$, $q(y_0) = y_1$.

Поскольку здесь выполнены условия теоремы Коши для ДУ первого порядка (напомним, в частности, что знаменатель q правой части ДУ не равен нулю в окрестности точки y_0), то полученная задача Коши имеет единственное локальное решение $q = q(y)$.

Возвращаясь к $y = y(x)$, получаем задачу Коши для ДУ с разделяющимися переменными: $y' = q(y)$, $y(x_0) = y_0$. Заметим, что $q(y(0)) \neq 0$.

Остался неисследованным случай, когда $y_1 = 0$, но $f(y_0), 0) \neq 0$. Применяя метод понижения порядка чисто формально, для определения $q(y)$ получим ту же задачу Коши, но с правой частью, не являющейся непрерывной функцией в точке $y = y_0$, $q = 0$. Здесь теорема Коши неприменима. Это может привести или к отсутствию решения задачи Коши или к его неединственности.

Приведем несколько примеров.

Пример 1. $y'' = 2(y')^3$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -1/2$. Имеет место первый случай понижения порядка. Полагая $y'(x) = p(x)$ и переходя к $p = p(x)$, имеем задачу Коши для ДУ с разделяющимися переменными $p' = 2p^3$, $p(0) = -1/2$.

Упражнение 1. Покажите, что решение данной задачи дается формулой $p = -\dfrac{1}{2\sqrt{1-x}}$. Для нахождения $y = y(x)$ имеем задачу Коши $y' = -\dfrac{1}{2\sqrt{1-x}}$, $y(0) = 1$. Следовательно, $y = \sqrt{1-x}$.

Замечание. Решение определено на полуоси $(-\infty, 1)$. Имеет место явление прекращения решения, встречавшееся нам ранее для ДУ первого порядка в гл. I, §2. Это явление порождено нелинейностью ДУ. Точка $x = 1$ не является какой-либо особенностью для ДУ. Однако в ней решение $y(x)$ хотя и определено, но не дифференцируемо (его производная стремится к бесконечности при $x \to 1 - 0$). Здесь имеет место явление взрыва для $y'(x)$.

Методы понижения порядка полезны и для исследования краевых задач.

Пример 2. $2y'' = 3y^2$, $y(0) = 0$, $y(1) = 1$.

Полагаем $y' = q(y)$, тогда $y'' = q(y)\,q'(y)$.

Для q получаем ДУ $2qq' = 3y^2$. Но тогда $q^2 = y^3 + C$, где постоянная интегрирования C пока неизвестна.

Будем искать положительное решение $q = \sqrt{y^3 + C}$.

Разделяя переменные, получаем $\dfrac{dy}{\sqrt{y^3 + C}} = dx$. Учитывая первое граничное условие для y, имеем $\displaystyle\int_0^y \frac{ds}{\sqrt{s^3 + C}} = x$.

Постоянную C предстоит найти из второго граничного условия $y(1) = 1$, т. е. из равенства $\varphi(C) = 1$, где $\varphi(C) = \displaystyle\int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{s^3 + C}}$.

Функция $\varphi(C)$ строго убывает на $(0, +\infty)$, так как

$$\varphi'(C) = -\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{ds}{(s^3 + C)^{3/2}} < 0.$$

Отметим далее, что $\varphi(C) \to +\infty$ при $C \to +0$, поскольку $\int\limits_0^1 s^{-3/2}\,ds$ расходится. Заметим также, что $\varphi(C) \to 0$ при $C \to +\infty$.

Следовательно, существует единственное число $C^* \in (0, +\infty)$, такое, что $\varphi(C^*) = 1$.

Решение исходной краевой задачи определяется из уравнения $\Psi(y) = x$, где $\Psi(y) = \int\limits_0^y \frac{ds}{\sqrt{s^3 + C^*}}$, и дается формулой $y = \Psi^{-1}(x)$.

Пример 3. $2y'' = -3y^2$, $y(0) = 0$, $y(1) = 0$.

Эта краевая задача имеет тривиальное решение $y = 0$. Покажем, что она имеет еще и нетривиальное решение.

Как и выше, имеем $(y')^2 = C - y^3$. При этом $C = (y')^2(0) > 0$ (случай $C = 0$ приводит к тривиальному решению). Положим $C = k^3$. Разделение переменных дает равенство $\frac{dy}{\sqrt{k^3 - y^3}} = \pm dx$. Из соображений симметрии решение краевой задачи склеим из двух кривых $x = \int\limits_0^y \frac{ds}{\sqrt{k^3 - s^3}}$ при $x \in (0, 1/2)$ и $x = 1 - \int\limits_0^y \frac{ds}{\sqrt{k^3 - s^3}} ds$ при $x \in (1/2, 1)$.

Склейка осуществляется в точке $x = 1/2$, $y = k$, так как $x'(k) = \infty$.

Для определения k получаем равенство $\int\limits_0^k \frac{ds}{\sqrt{k^3 - s^3}} = \frac{1}{2}$, откуда после замены $s = kt$ находим k по формуле

$$\sqrt{k} = 2\int\limits_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1 - t^3}}.$$

Подставим найденное значение k в выражения для $x = x(y)$. На каждом из отрезков $[0, 1/2]$ и $[1/2, 1]$ решение $y = y(x)$ определяется с помощью соответствующих обратных функций.

Упражнение 2. Решите краевую задачу $y'' = (y')^2$, $y(0) = 0$, $y'(1) = 1$.

Упражнение 3*. Покажите, что краевая задача $y'' + y^3 = 0$, $y(0) = y(1) = 0$ имеет бесконечное множество решений.

Пример 4. Рассмотрим следующую краевую задачу на полуоси, связанную с одной из задач диффузии–теплопроводности:

$$y'' + \frac{x}{2a^2}y' = 0, \quad x \in [0, +\infty), \quad y(0) = y_0, \quad y(+\infty) = y_1.$$

Методом понижения порядка нетрудно убедиться, что общее решение ДУ дается формулой

$$y(x) = C_1 + C_2 \int\limits_0^x e^{-s^2/(4a^2)}\,ds.$$

Используя граничные условия получаем систему для определения C_1, C_2:

$$C_1 = y_0, \quad C_1 + C_2 \int\limits_0^{+\infty} e^{-s^2/(4a^2)} ds = y_1.$$

Но $\int\limits_0^{+\infty} e^{-s^2/(4a^2)} ds = a\sqrt{\pi}$.

Следовательно,

$$C_1 = y_0, \quad C_2 = \frac{y_1 - y_0}{a\sqrt{\pi}}.$$

Таким образом,

$$y(x) = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{a\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{x} e^{-s^2/(4a^2)} ds = y_0 + (y_1 - y_0)\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{x/(2a)} e^{-\alpha^2} d\alpha.$$

Функция $\Phi(z) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{z} e^{-\alpha^2} d\alpha$ называется интегралом ошибок.

Окончательно имеем

$$y(x) = y_0 + (y_1 - y_0)\Phi\left(\frac{x}{2a}\right).$$

Глава III

СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

В данной главе широко используются определения, факты и методы линейной алгебры. Имеется много хороших учебников по этой дисциплине (см., например, [9]), и ее следует широко использовать при изучении математического анализа, ДУ и других дисциплин. Полезно материал главы просматривать на частном случае системы двух ДУ тем более, что бóльшая часть приводимых нами приложений относится к этому случаю. При небольшом количестве учебных часов придется этим случаем и ограничиться.

§ 1. Задача Коши для системы дифференциальных уравнений

Рассмотрим систему ДУ первого порядка

$$\dot{x}_k = f_k(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Здесь t — независимая вещественная переменная, $x_k = x_k(t)$, $k = 1, 2, \ldots, n$ — неизвестные функции, точка означает дифференцирование по t, функции $f_k(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ определены в области $G \subset \Re^{n+1}$ со значениями в $\Re$.

Такую систему принято называть *нормальной системой ДУ*.

Коротко в векторной форме ее можно записать так

$$\dot{x} = f(t, x), \tag{1}$$

где $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))^{\mathrm{T}}$ — столбец неизвестных функций, $\dot{x}$ — столбец их производных, а $f(t, x)$ — столбец правых частей.

Столбцовая вектор-функция $x = x(t)$ называется решением системы ДУ (1) на интервале (α, β), если на этом интервале:

1) каждая координатная функция $x_k(t)$ непрерывно дифференцируема,

2) $(t, x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)) \in G$,

3) подстановка $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$ в систему (1) обращает ее в тождество.

Под задачей Коши для нормальной системы ДУ (1) принято понимать задачу нахождения ее решения, удовлетворяющего начальным условиям

$$x_1(t_0) = x_{10}, \quad x_2(t_0) = x_{20}, \quad \ldots, \quad x_n(t_0) = x_{n0},$$

или в векторной форме

$$x(t_0) = x_0. \tag{2}$$

где $x_0 = (x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0})^{\mathrm{T}}$.

Справедлива следующая теорема существования и единственности решения задачи Коши — наиболее общий вариант приводившихся ранее аналогичных теорем.

Теорема 1. *Пусть функции* $f_k(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $k = 1, 2, \ldots, n$, *непрерывны в области* $G \subset \Re^{n+1}$ *вместе со всеми их частными производными первого порядка по переменным* $x_1, x_2, \ldots, x_n$. *Тогда для любой начальной точки* $(t_0, x_{10}, \ldots, x_{n0}) \in G$ *найдется* (*конечный или бесконечный*) *интервал* (a, b), *содержащий точку* t_0, *на котором существует единственное решение задачи Коши* (1), (2).

Теорема дает достаточные условия существования и единственности локального решения задачи Коши. Это решение можно распространить на максимальный интервал его существования и получить непродолжимое решение, график которого подходит сколь угодно близко к границе области G или стремится к бесконечности при стремлении t к одному или к обоим концам указанного максимального интервала. Разумеется, стремление решения к бесконечности при стремлении к концу максимального интервала возможно лишь, когда область G неограничена хотя бы по одной из переменных x_k.

График каждого решения системы ДУ в области G изображается лежащей в ней кривой, называемой интегральной кривой. График решения задачи Коши — это интегральная кривая, проходящая через заданную начальную точку.

Рассмотрим теперь частный случай системы ДУ (1) — линейную неоднородную систему ДУ, когда

$$f_k(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_{k1}(t)x_1 + a_{k2}(t)x_2 + \ldots + a_{kn}(t)x_k + h_k(t),$$
$$k = 1, 2, \ldots, n.$$

Пусть коэффициенты ДУ системы $a_{kl}(t) \in C(a, b)$, $k, l = 1, 2, \ldots, n$, и правые части $h_k(t) \in C(a, b)$, $k = 1, 2, \ldots, n$, т. е. непрерывны на заданном конечном или бесконечном (a, b).

В векторно-матричном виде эта линейная неоднородная система ДУ (1) записывается следующим образом:

$$\dot{x} = A(t)x + h(t). \tag{3}$$

Здесь $A(t)$ — матрица порядка $n \times n$ с элементами $a_{kl}(t)$, а $h(t)$ — столбцовая вектор-функция с координатами $h_k(t)$. Ищется неизвестная столбцовая вектор-функция $x(t)$. В частном случае, когда столбец пра-

вых частей $h(t)$ равен нулю, такая система ДУ называется линейной однородной системой ДУ.

Теорема 2. *Пусть задана система ДУ* (3), *где* $A(t)$ — *матрица порядка* $n \times n$ *с непрерывными на* (a, b) *элементами, а* $h(t)$ — *непрерывная на этом интервале вектор-функция столбец.*

Тогда для любой начальной точки (t_0, x_0), *где* $t_0 \in (a, b)$, *а* $x_0 \in \Re^n$, *на всем интервале* (a, b) *существует единственное решение задачи* (3), (2).

В чем же различие линейного и нелинейного случаев? Пусть D — область в $\Re^n$ и по аналогии с линейным вариантом область

$$G = \{(t, x) \colon t \in (a, b),\ x \in D\}.$$

В линейном случае существование решения гарантировано на всем (a, b). В нелинейном случае непродолжимое решение гарантировано лишь на некотором интервале, не совпадающим, возможно, с (a, b).

Доказательства теорем 1, 2 и усиление их, связанное с непродолжимыми решениями, рассматриваются в гл. VI.

Системы ДУ являются более общими объектами по сравнению с ДУ высших порядков. Полагая в ДУ (1) из гл. II

$$y = y_1, \quad y' = y_2, \quad \ldots, \quad y^{(n-1)} = y_n,$$

сведем его к системе ДУ

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ \ldots, \\ y_{n-1}' = y_n, \\ y_n' = f(x, y_1, \ldots, y_n). \end{cases}$$

Иногда систему ДУ удается свести к эквивалентному ДУ n-го порядка. На этом основывается так называемый метод исключения.

Пример 1. Рассмотрим следующую задачу Коши для системы ДУ:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1 x_2, \end{cases} \qquad x_1(0) = 1, \qquad x_2(0) = 1.$$

Из первого ДУ находим $\dot{x}_2 = \ddot{x}_1$. Подставляя во второе ДУ выражения для x_2 и $\dot{x}_2$, получаем задачу Коши для нахождения x_1:

$$\ddot{x}_1 = x_1 \dot{x}_1, \quad x_1(0) = 1, \quad \dot{x}_1(0) = 1.$$

Упражнение 1. Покажите, что $x_1 = \operatorname{tg}(t/2 + \pi/4)$, а тогда $x_2 = \dfrac{1}{2\cos^2(t/2 + \pi/4)}$.

Указание. ДУ для x_1 допускает понижение порядка.

Пример 2. Рассмотрим краевую задачу

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + x_2, \\ \dot{x}_2 = x_2, \end{cases} \qquad x_1(0) = 0, \quad x_2(1) = 1.$$

Из второго ДУ с учетом граничного условия находим $x_2 = \exp(t-1)$. Перейдя к x_1, получаем задачу Коши для ДУ со специальной правой частью

$$\dot{x}_1 = x_1 + \exp(-1)\exp(t), \quad x_1(0) = 0.$$

Упражнение 2. Покажите, что $x_1 = t\exp(1-t)$.

§ 2. Системы однородных линейных дифференциальных уравнений

Здесь рассматриваются системы ДУ

$$\dot{z} = A(t)z, \tag{4}$$

где z, $\dot{z}$ — столбцовые вектор-функции высоты n, а $A(t)$ — квадратная матрица порядка n с элементами непрерывными на (a, b).

Теорема. *Множество N всех решений системы ДУ* (4) *является линейным n-мерным пространством.*

Доказательство. Линейность N следует из линейности системы ДУ (проверьте!). Покажем, что N n-мерно. Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_n$ — стандартный базис в $\Re^n$ (напомним, что у вектора e_k его k-я координата равна 1, а остальные координаты равны 0). Зафиксируем $t_0 \in (a, b)$. Пусть $\varphi_k(t)$ — решение задачи Коши для системы (4) с начальным условием $z_k(t_0) = e_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

Докажем, что так выбранная система столбцовых вектор-функций $\{\varphi_k(t)\}_{k=1,2,\ldots,n}$ образует базис в N. Ее линейная независимость на (a, b) следует из того, что если $\sum\limits_{k=1}^{n} C_k\varphi_k(t) = 0$ на (a, b), то в точке t_0 это векторное равенство принимает вид $\sum\limits_{k=1}^{n} C_k e_k = 0$. Вследствие линейной независимости системы векторов стандартного базиса имеем $C_1 = C_2 = \ldots = C_n = 0$. Итак, линейная независимость системы доказана.

Для того, чтобы эта система была базисом, надо еще показать, что любое решение $\tilde{z}(t) \in N$ является линейной комбинацией векторов этой системы.

Пусть $\tilde{z}(t_0) = \sum\limits_{k=1}^{n} \tilde{z}_k e_k$. Рассмотрим вектор-функцию

$$\theta(t) = \sum_{k=1}^{n} \tilde{z}_k\varphi_k(t) \in N.$$

Так как $\tilde{z}(t_0) = \theta(t_0)$ (проверьте!), то по теореме 2 из §1 $\tilde{z}(t) = \theta(t)$ на (a, b). Значит, $\tilde{z}(t) = \sum\limits_{k=1}^{n} \tilde{z}_k\varphi_k(t) \in N$, т. е. всякое $\tilde{z} \in N$ представимо линейной комбинацией решений системы вектор-функций $\{\varphi_k(t)\}_{k=1}^{n}$, так что она образует базис в N, а само N n-мерно. Теорема доказана.

Определенная в ходе доказательства теоремы система вектор-функций $\{\varphi_k(t)\}_{k=1}^n$ называется *нормальной фундаментальной системой решений* системы ДУ (4), или, короче, ее нормальной ФСР.

Определение. Произвольный набор из n линейно независимых решений системы ДУ (4) (т. е. любой базис в N) будем называть *фундаментальной системой решений* (кратко ФСР) системы ДУ (4).

Из теоремы, в соответствии с определением базиса, вытекает следующее важное утверждение.

Следствие. *Пусть* $\{z_k(t)\}_{k=1}^n$ — *ФСР системы ДУ* (4). *Тогда формула* $z = \sum\limits_{k=1}^{n} C_k z_k(t)$, *где* $C_1, C_2, \ldots, C_n$ — *произвольные постоянные, является формулой общего решения этой системы ДУ.*

Для пояснения отметим, что, как всегда, под общим решением системы ДУ (4) понимается совокупность всех ее решений.

Упражнение. Покажите, что для системы ДУ

$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{-tx + y}{1 - t^2}, \\ \dot{y} = \dfrac{x - ty}{1 - t^2} \end{cases}$$

ФСР на $(-1, 1)$ есть набор столбцовых вектор-функций $(1, t)^{\mathrm{T}}$, $(t, 1)^{\mathrm{T}}$. Выпишите общее решение.

§ 3. Системы дифференциальных уравнений с постоянной диагонализуемой матрицей

Перейдем к рассмотрению линейных однородных систем ДУ с постоянной матрицей, т. е. систем вида

$$\dot{z} = Az. \tag{5}$$

Для таких систем ДУ имеются эффективные методы нахождения ФСР.

Решения системы (5) — вещественные или комплексные — попробуем найти в виде $z(t) = e^{\lambda t} w$, $w \neq 0$.

В комплексном случае экспонента $e^{\lambda t}$ была определена в гл. II, §4. При этом w — постоянный комплексный вектор. Поскольку $\dfrac{d}{dt} e^{\lambda t} = \lambda e^{\lambda t}$, то для любых $t \in \Re$ справедливо равенство

$$\dot{z}(t) - Az(t) = (\lambda w - Aw) e^{\lambda t}.$$

Но экспонента $e^{\lambda t} \neq 0$ на $\Re$. Значит справедлив следующий вывод: вектор-функция $z(t) = e^{\lambda t} w$ является решением системы ДУ (5) в том и только в том случае, когда вектор w и число λ связаны соотношением (проверьте!)

$$Aw = \lambda w. \tag{6}$$

Из равенства (6) нужно найти возможные показатели λ и возможные ненулевые векторы w.

Напомним известное из линейной алгебры определение. Число λ называется собственным значением матрицы A, если существует вектор $w \neq 0$, такой, что $Aw = \lambda w$. При этом w называется собственным вектором, отвечающим (соответствующим) собственному значению λ. Линейное подпространство, образованное всевозможными линейными комбинациями собственных векторов, отвечающих этому собственному значению, называется собственным подпространством матрицы A, соответствующим λ.

Итак, при отыскании решений вида $z(t) = e^{\lambda t}w$, $w \neq 0$, у нас возникла задача на собственные значения и собственные векторы матрицы A. Напомним известный из линейной алгебры ход ее решения.

Формулу (6) запишем в виде равенства $(A - \lambda E)w = 0$, где E — единичная матрица. В стандартном базисе оно представляет собою однородную алгебраическую систему n линейных уравнений с n неизвестными и с параметром λ. Такая система имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда ее определитель

$$\det(A - \lambda E) = 0. \tag{7}$$

Это равенство представляет собою алгебраическое уравнение, которое называется характеристическим уравнением. Многочлен $\det(A - \lambda E)$ называется характеристическим многочленом.

Заметим, что в научно-учебной литературе используется и другая терминология. Характеристическое уравнение называется иногда вековым уравнением, а собственные значения — характеристическими числами. Множество всех собственных значений матрицы иногда называют ее спектром.

Поскольку характеристическое уравнение — это уравнение степени n (почему?), то по основной теореме высшей алгебры оно имеет в поле комплексных чисел ровно n корней с учетом их кратности.

Пусть λ_0 — один из корней характеристического уравнения (вещественный или комплексный). Как всякий корень характеристического уравнения, он является собственным значением матрицы A. Рассмотрим систему n уравнений с n неизвестными

$$(A - \lambda_0 E)w = 0.$$

Ее определитель равен нулю, и потому она имеет нетривиальные решения. Совокупность всех решений системы образует ненулевое собственное подпространство N_{λ_0}, отвечающее собственному значению λ_0. Найдем базис этого подпространства.

Итак, если λ_0 — собственное значение матрицы A, то система ДУ имеет решения вида $z_0(t) = e^{\lambda_0 t}w_0$, где w_0 — любой вектор из N_{λ_0}.

При этом если λ_0 вещественно, то и подпространство N_{λ_0} вещественно.

(Продумайте правильность данного утверждения.)

Выделим теперь более простой, но часто встречающийся случай, когда удается довольно легко построить ФСР.

Определение. Будем называть матрицу A *диагонализуемой*, если из ее собственных векторов можно составить базис в $\Re^n$.

Поясним это определение. Оно означает, что матрица A имеет ровно n линейно независимых вещественных собственных векторов $w_1, w_2, \ldots, w_n$, соответствующих каждый своему собственному значению: $Aw_k = \lambda_k w_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$. При этом все собственные значения, очевидно, вещественны, однако не предполагается, что они различны.

Частным случаем диагонализуемой матрицы является матрица, имеющая n различных вещественных собственных значений. У такой матрицы собственные векторы, отвечающие различным собственным значениям, линейно независимы и, значит, образуют базис в $\Re^n$. Вспомните этот известный из линейной алгебры факт и продумайте его.

В курсе линейной алгебры доказывается еще и такой факт: если матрица симметрическая, то из ее собственных векторов можно составить базис $\Re^n$. Отметим, однако, что системы ДУ с симметрической матрицей встречаются в приложениях не так уж часто.

Еще один класс диагонализуемых матриц образуют так называемые нормальные матрицы. Матрица A по определению нормальна, если она перестановочна (коммутирует) с транспонированной к ней матрицей: $AA^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}}A$.

Важность определения диагонализуемой матрицы проявляется в следующем утверждении.

Теорема. *Пусть матрица A диагонализуема, $w_1, w_2, \ldots, w_n$ — ее линейно независимые собственные векторы, отвечающие соответственно собственным значениям $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.*

Тогда ФСР системы ДУ имеет вид

$$w_1 e^{\lambda_1 t}, \quad w_2 e^{\lambda_2 t}, \quad \ldots, \quad w_n e^{\lambda_n t}. \tag{8}$$

Доказательство. Нужно лишь проверить, что указанная в теореме система функций линейно независима. Пусть

$$C_1 w_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 w_2 e^{\lambda_2 t} + \ldots + C_n w_n e^{\lambda_n t} = 0.$$

При $t = 0$ имеем $C_1 w_1 + C_2 w_2 + \ldots + C_n w_n = 0$. Но векторы $w_1, w_2, \ldots, w_n$ линейно независимы. Значит, все $C_k = 0$, и теорема доказана.

В заключение поясним введенный нами термин «диагонализуемая матрица». Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — стандартный базис в $\Re^n$. Поставим в соответствие матрице A линейный оператор $\widehat{A}$, действующий в $\Re^n$ по следующему правилу: если $x = \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k e_k$, то полагаем $\widehat{A}x = \sum\limits_{k=1}^{n} Ae_k$.

Обратим внимание на то обстоятельство, что сама матрица A является матрицей оператора $\widehat{A}$ в стандартном базисе: $A = (Ae_1 \; Ae_2 \; \ldots \; Ae_n)$.

Мы воспользовались известным из линейной алгебры фактом: столбцы матрицы линейного оператора $\widehat{A}$ в некотором базисе содержат образы базисных векторов этого оператора при преобразовании $\widehat{A}$. Таким образом, справедлив следующий факт (продумайте!).

Лемма. *В базисе из собственных векторов матрица* Λ *оператора* $\widehat{A}$ *имеет диагональную форму* (*матрица* Λ *диагональна*): *в ней по главной диагонали стоят ее собственные значения*, *а остальные ее элементы равны нулю.*

Таким образом, матрица Λ имеет вид

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Кратко будем писать $\Lambda = \operatorname{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$.

Замечание. Пусть T — матрица перехода от стандартного базиса $\{e_k\}$ к базису $\{w_k\}$ из собственных векторов матрицы A, т. е. $Te_k = w_k$, $k = 1, 2, \dots, n$. Напомним факт из линейной алгебры: в столбцах матрицы T стоят собственные векторы матрицы A, и если A диагонализуема, то $T^{-1}AT = \Lambda$.

Пример. Найдем ФСР системы ДУ (проверьте!)

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + y + z, \\ \dot{y} = x + 2y + z, \\ \dot{z} = x + y + 2z. \end{cases}$$

В данном случае матрица A симметрическая и, значит, диагонализуема. Здесь характеристическое уравнение имеет вид $-\lambda^3 + 6\lambda^2 - 9\lambda + 4 = 0$.

Его корни — это $\lambda_1 = 1$ — двукратное собственное значение матрицы системы ДУ и $\lambda_2 = 4$ — ее простое собственное значение.

Собственному значению 1 отвечает двумерное собственное подпространство с базисными векторами $(1, 0, -1)^{\mathrm{T}}$ и $(0, 1, -1)^{\mathrm{T}}$.

Собственному значению 4 отвечает одномерное собственное подпространство с базисным вектором $(1, 1, 1)^{\mathrm{T}}$.

Следовательно, ФСР имеет вид $e^t(1, 0, -1)^{\mathrm{T}}$, $e^t(0, 1, -1)^{\mathrm{T}}$ $e^{4t}(1, 1, 1)^{\mathrm{T}}$.

§ 4. Системы дифференциальных уравнений с постоянной комплексно диагонализуемой матрицей

В общем случае характеристическое уравнение может иметь как вещественные, так и комплексные корни.

Пусть теперь $\lambda_0 = \alpha + i\beta$, $\beta \neq 0$, — комплексный корень характеристического уравнения.

Дальнейшие рассуждения нам будет удобно вести в линейном пространстве $\Re^n_c$, состоящем из столбцов комплексных чисел, рассматривая систему ДУ с вещественной матрицей в этом пространстве. Выражаясь более научным языком, мы осуществляем комплексификацию пространства $\Re^n$ и ДУ в нем.

Определитель системы уравнений $(A - \lambda_0 E)w = 0$ равен нулю. Запишем ее нетривиальное решение в виде $w = u + iv$. Формула $z = e^{\lambda_0 t}w$ определяет комплексное решение системы ДУ. Но нас интересуют только вещественные ее решения. Как их найти?

Пусть $\lambda_0 = \alpha + i\beta$ — комплексное собственное значение матрицы A, а $w = u + iv$ — соответствующий ему комплексный собственный вектор. Согласно их определению имеем равенство

$$A(u + iv) = (\alpha + i\beta)(u + iv).$$

Приравнивая действительные и мнимые части, получаем:

$$Au = \alpha u - \beta v, \quad Av = \beta u + \alpha v. \tag{9}$$

Лемма. *Система векторов u, v линейно независима.*

Доказательство. Из формул (9) видно, что $u \neq 0$, $v \neq 0$. Допустим противное, что система линейно зависима. Это означает, что существует постоянная $k \neq 0$, такая, что $v = ku$. Подставляя это выражение для v в (9), получаем (проверьте!) $\alpha - k\beta = \dfrac{\beta}{k} + \alpha$, т. е. $\beta(k^2 + 1) = 0$. Это невозможно, так как $\beta \neq 0$. Лемма доказана.

Рассмотрим вещественное двумерное подпространство, образуемое всевозможными линейными комбинациями (с вещественными коэффициентами) векторов u и v. Это подпространство инвариантно относительно матрицы A в том смысле, что результат применения A к любому его вектору принадлежит этому же подпространству.

Так как характеристическое уравнение имеет вещественные коэффициенты, то наряду с λ_0 его корнем является и комплексно сопряженное число $\overline{\lambda_0} = \alpha - i\beta$, а решением системы $(A - \overline{\lambda_0}E)w = 0$ является вектор $u - iv$. Этой паре корней отвечают комплексные решения системы ДУ

$$e^{\alpha t + i\beta t}(u + iv), \quad e^{\alpha t - i\beta t}(u - iv).$$

Вещественные и мнимые части этих комплексных решений являются действительными решениями.

Упражнение 1. Проверьте прямым вычислением, что функции

$$z_1(t) = e^{\alpha t}(u\cos\beta t - v\sin\beta t), \quad z_2(t) = e^{\alpha t}(u\sin\beta t + v\cos\beta t)$$

являются вещественными решениями рассматриваемой системы ДУ.

Определение. Пусть матрица A имеет хоть одно комплексное (точнее, невещественное) собственное значение. Матрицу A будем называть *комплексно диагонализуемой*, если в $\Re_c^n$ существует базис из ее собственных векторов.

Отметим, что векторы этого базиса, отвечающие вещественным собственным значениям, являются вещественными.

Если матрица A комплексно диагонализуема, то аналогично случаю ее (вещественной) диагонализуемости, комплексная ФСР ДУ дается формулами (5).

Воспользуемся некоторыми фактами линейной алгебры. Матрица A задает действующий в пространстве $\Re^n$ линейный оператор $\widehat{A}$, такой, что A является его матрицей в стандартном базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$.

Поскольку матрица A вещественна, то характеристическое уравнение имеет вещественные коэффициенты. Поэтому каждая пара ее взаимно сопряженных собственных значений порождает соответствующее двумерное инвариантных подпространств.

Зададимся вопросом: как устроена матрица оператора $\widehat{A}$ в базисе, состоящем из вещественных собственных векторов и векторов указанных двумерных инвариантных подпространств?

Начнем с простейшего случая, когда $n = 2$. Пусть матрица A имеет пару комплексно сопряженных собственных значений λ_0 и $\overline{\lambda_0}$ с двумерным инвариантным подпространством, образуемым векторами u, v.

Упражнение 2. Пользуясь определением матрицы линейного оператора, покажите, что в базисе $\{u, v\}$ оператор $\widehat{A}$ имеет матрицу

$$K = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

Такую матрицу будем далее называть кососиагональной клеткой, отвечающей паре комплексных собственных значений λ_0, $\overline{\lambda_0}$.

Заметим теперь, что если λ_0 — вещественное собственное значение матрицы A, имеющее кратность p, то ему отвечает p одномерных инвариантных подпространств.

Таким образом, если матрица A диагонализуема в $\Re^n_c$, то в базисе из ее вещественных инвариантных подпространств она имеет блочно-диагональный вид. За исключением расположенных по ее главной диагонали собственных значений и кососиагональных клеток, все ее остальные элементы равны нулю.

Сформулируем основной вывод данного параграфа.

Теорема. *Пусть матрица A вещественна и комплексно диагонализуема. Пусть λ_k, $k = 1, 2, \ldots, r$, — ее вещественные собственные значения; w_l, $l = 1, 2, \ldots, r$, — соответствующие им собственные векторы. Пусть $\alpha_m + i\beta_m$, $\alpha_m - i\beta_m$, $m = 1, 2, \ldots, s$, — пары комплексных (невещественных) корней характеристического уравнения, а u_m, v_m, $m = 1, 2, \ldots, s$, — порожденные ими соответственно векторы двумерных инвариантных подпространств. Пусть $r + 2s = n$.*

Тогда вещественная фундаментальная система решений системы ДУ имеет вид

$$e^{\lambda_k t} w_k, \quad k = 1, 2, \ldots, r;$$

$$e^{\alpha_m t} \cos \beta_m t u_m, \quad e^{\alpha_m t} \sin \beta_m t v_m, \quad m = 1, 2, \ldots, s.$$

В заключение параграфа остановимся еще раз на случае $n = 2$. Дадим явное выражение для общего вещественного решения, которое будет использовано в дальнейшем (гл. V).

Комплексное решение здесь удобнее записать в виде $z = Ce^{\lambda_0 t}(u - iv)$, где C — произвольная комплексная постоянная. Пусть $C = Re^{i\psi}$. Тогда (проверьте!) $z = Re^{\alpha t}(u - iv)(\cos(\beta t + \psi) + i\sin(\beta t + \psi))$. Действительная часть этого комплексного решения является вещественным решением ДУ, т. е. формула $x = Re^{\alpha t}(u\cos(\beta t + \psi) + v\sin(\beta t + \psi))$ дает вещественное решение ДУ.

Покажем, что это решение действительно общее. Пусть $\tilde{z}$ — некоторое фиксированное решение системы ДУ. Разложим его начальное значение по базису $\{u, v\}$: $z(0) = C_1 u + C_2 v$.

Пусть $\psi = \operatorname{arctg}\dfrac{C_2}{C_1}$, а $R = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$.

Предоставляем читателю убедиться, что при так выбранных R, ψ действительно получается решение $\tilde{z}$.

Запишем теперь общее вещественное решение системы ДУ в координатной форме, взяв в качестве базиса систему векторов $\{u, v\}$. Пусть $z(t) = \xi u + \eta v$. В косоугольных координатах, соответствующих этому базису, имеем:

$$\xi = Re^{\alpha t}\sin(\beta t + \psi), \quad \eta = Re^{\alpha t}\cos(\beta t + \psi). \tag{10}$$

§ 5. Построение базиса из собственных и присоединенных векторов матрицы

Остановимся здесь на ряде вспомогательных вопросов линейной алгебры. С их помощью в §6 будет сконструирована ФСР в комплексном случае.

Пусть $\Re_c^n$ — линейное пространство столбцов из n комплексных чисел, и пусть задана матрица A размера $n \times n$ с комплексными или вещественными элементами.

Матрица A имеет ровно n собственных значений с учетом их кратности. Однако соответствующих им собственных векторов, вообще говоря, может оказаться недостаточно, чтобы выбрать из них базис в $\Re_c^n$. Причина здесь следующая.

Пусть λ_0 — собственное значение кратности n_0. Рассмотрим соответствующее собственное подпространство N_{λ_0}. Пусть его размерность равна d_0.

Если $d_0 = n_0$ для всех собственных значений λ_0 матрицы A, то она является комплексно диагонализуемой или диагонализуемой.

Оказывается, может случиться, что хоть для одного собственного значения $d_0 < n_0$, т. е. размерность собственного подпространства строго меньше кратности собственного значения как корня характеристического уравнения.

В подобных случаях из собственных векторов матрицы A не удастся построить базис в $\Re_c^n$, а значит и ФСР вида (5).

Следующий элементарный пример подтверждает это.

Пример 1. Матрица размера $p \times p$

$$J_p = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}$$

имеет p-кратное собственное значение $\lambda = \lambda_0$, которому отвечает только один (с точностью до множителя) собственный вектор $w^1 = (1, 0, 0, \dots, 0)^{\mathrm{T}}$ (проверьте это!).

Данная матрица J_p представляет собою так называемую жорданову клетку. У нее все элементы главной диагонали равны одному и тому же числу λ_0, элементы первой наддиагонали равны единице, а все остальные элементы равны нулю.

Выход из подобной ситуации состоит в добавлении к собственным векторам так называемых присоединенных векторов.

Пусть λ_0 — собственное значение матрицы A, а w^1 — отвечающий ему собственный вектор.

Определение. Пусть существует система векторов[1]) $w^1, w^2, \dots, w^p$, удовлетворяющая системе уравнений

$$(A - \lambda_0 E)w^1 = 0, \quad (A - \lambda_0 E)w^2 = w^1, \quad \dots, \quad (A - \lambda_0 E)w^p = w^{p-1},$$

а уравнение $(A - \lambda_0 E)w = w^p$ неразрешимо. Тогда будем говорить, что эта система векторов является *жордановой цепочкой* матрицы A длины p, начинающейся с собственного вектора w^1. При этом векторы $w^2, \dots, w^p$ называются присоединенными векторами к собственному вектору w^1.

Упражнение 1. Покажите, что для матрицы J примера 1 в качестве жордановой цепочки можно выбрать векторы стандартного базиса в $\Re^p$. Таким образом, из собственных и присоединенных векторов матрицы J можно составить базис. Ниже будет отмечена справедливость этого факта для произвольной матрицы в $\Re^n_c$.

Лемма 1. *Векторы жордановой цепочки линейно независимы.*

Доказательство. Положим $B = A - \lambda_0 E$. Из определения жордановой цепочки следует, что

$$Bw^1 = 0, \quad Bw^2 = w^1, \quad \dots, \quad Bw^p = w^{p-1}.$$

Но тогда (проверьте!) $B^s w^{s+1} = w^1$, $s = 1, 2, \dots, p-1$, а $B^r w^{s+1} = 0$, $r > s$, $s = 1, 2, \dots, p-1$.

Пусть $C_1 w^1 + C_2 w^2 + \dots + C_p w^p = 0$.

Умножим это равенство на матрицу B^{p-1} и получим, что $C_p w^1 = 0$, откуда $C_p = 0$. Затем умножим то же равенство на матрицу B^{p-2} и по-

[1]) Цифры вверху справа от обозначений векторов — это индексы.

лучим $C_{p-1}w^1 = 0$, откуда $C_{p-1} = 0$. Продолжая эти рассуждения, получим равенство нулю всех коэффициентов C_k. Этим доказательство леммы завершено.

Выделим случай, когда на этом пути удается найти в $\Re^n_c$ базис из собственных и присоединенных к ним векторов матрицы A. Доказательство линейной независимости системы из собственных и присоединенных векторов предоставляется читателю.

Лемма 2. *Пусть матрица A имеет собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ и соответствующие им линейно независимые собственные векторы $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$, причем каждому вектору φ_i соответствует жорданова цепочка длины p_i. Тогда если $p_1 + p_2 + \ldots + p_m = n$, то объединение всех этих жордановых цепочек составляет базис в $\Re^n$.*

Пример 2. Рассмотрим матрицу размера 4×4

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -3 & 1 \\ 8 & -6 & -7 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

В нижеследующем упражнении предлагается найти базис из собственных и присоединенных векторов матрицы A.

Упражнение 2. Покажите, что $\lambda = -1$ является 4-кратным собственным значением матрицы A и ему соответствуют два линейно независимых собственных вектора $w_1 = (1, 3, -1, 0)^{\mathrm{T}}$, $w_2 = (1, 2, 0, 1)^{\mathrm{T}}$.

Пусть $B = A + E$. Покажите, что ранг матрицы B равен 2, а ранг расширенной матрицы $(B\ w_1)$ (к матрице B приписан справа столбец w_1) равен 3; значит, по теореме Кронекера–Капелли уравнение $Bw = w_1$ не имеет решений и, таким образом, имеется жорданова цепочка длины 1, состоящая из вектора $w_1^1 = w_1$.

Покажите, что ранг расширенной матрицы $(B\ w_2)$ равен 2, уравнение $Bw = w_2$ разрешимо и $w_2^2 = (3/2, 4, -1, 3/2)^{\mathrm{T}}$ — одно из его решений.

Покажите, что уравнение $Bw = w_2^2$ также разрешимо и $w_2^3 = (1/2, 0, 0, 0)^{\mathrm{T}}$ — одно из его решений.

Проверьте, что уравнение $Bw = w_2^3$ неразрешимо. Таким образом, имеется жорданова цепочка длины 3, состоящая из векторов $w_2^1 = w^2$, w_2^2, w_2^3.

Итак, в данном примере найден базис в $\Re^4$, состоящий из собственных и присоединенных векторов матрицы A.

Следующий пример показывает, что лемму 2 нельзя понимать примитивно. Оказывается, при случайном выборе собственных векторов, отвечающих кратному собственному значению, может не набраться жордановых цепочек нужной длины.

Пример 3. Предоставляем читателю убедиться в том, что матрица

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

имеет нулевое собственное значение и соответствующее ему двумерное собственное подпространство. Базис в $\Re^3$ должен состоять из собственного вектора с присоединенным к нему вектором и второго собственного вектора. Именно так обстоит дело, если в качестве собственных векторов — начал жордановых цепочек выбрать $(1, 0, 0)^{\mathrm{T}}$ и $(0, 1, 0)^{\mathrm{T}}$ (проверьте!).

Однако если взять собственные векторы $(1, 1, 1)^{\mathrm{T}}$ и $(0, 1, 0)$, то ни один из них не имеет присоединенных векторов (проверьте!).

Данный пример указывает на возможные трудности при построении базиса из собственных и присоединенных векторов матрицы.

Тем не менее справедливо следующее глобальное утверждение (см. [9]).

Теорема. *Для любой матрицы A в $\Re^n_c$ существует набор из ее линейно независимых собственных векторов, обладающий следующим свойством: по каждому собственному вектору этого набора построим жорданову цепочку, тогда объединение всех этих жордановых цепочек составит базис в $\Re^n_c$.*

Следствие. *Пусть A — вещественная матрица. Если все ее собственные значения вещественны, то все ее собственные и присоединенные векторы также вещественны и, значит, из них можно составить базис в $\Re^n$. Если среди собственных значений матрицы имеются комплексные (пары комплексно сопряженных), то, как в §4, от комплексных векторов базиса можно перейти к вещественным.*

Поставим еще следующий вопрос: как выглядит матрица линейного оператора, заданного в стандартном базисе пространства $\Re^n_c$ матрицей A?

Будем, как это уже делалось в §3, рассматривать матрицу A как матрицу линейного оператора $\widehat{A}$ в стандартном базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Какова будет матрица A_J этого оператора в базисе из собственных и присоединенных векторов A?

Расположим все векторы этого нового базиса последовательно — одну жорданову цепочку за другой. Поскольку в столбцах матрицы линейного оператора стоят координаты базисных векторов, то A_J имеет клеточно-диагональное строение: вдоль ее главной диагонали расположены жордановы клетки, отвечающие каждая своему собственному значению, а все остальные элементы равны нулю. Размер жордановой клетки равен длине жордановой цепочки. Если эта длина равна 1, то ей соответствует одномерная матрица, т. е. жорданова клетка с единственным элементом — собственным значением. Принято говорить, что

такая матрица имеет жорданову нормальную форму. Общий вид такой матрицы с q жордановыми клетками таков:

$$A_J = \begin{pmatrix} J_1 & 0_1 & \dots & 0_1 \\ 0_2 & J_2 & \dots & 0_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0_q & 0_q & \dots & J_q \end{pmatrix}$$

(через 0_s обозначена нулевая матрица того же порядка, что и J_s).

Сформулированной выше теореме можно придать следующую форму.

Всякая матрица в $\Re^n$ подобным преобразованием может быть приведена к жордановой нормальной форме.

Это означает, что существует невырожденная матрица T (матрица перехода), такая, что матрица $T^{-1}AT = J$ имеет жорданову нормальную форму.

§ 6. Построение фундаментальной системы решений для системы ДУ с постоянной матрицей

Рассмотрим систему ДУ $\dot{z} = Az$ в пространстве $\Re^n_c$. Столбцы $z, \dot{z}$ состоят из комплекснозначных функций, A — матрица с комплексными элементами. Как мы увидим ниже, и в этом общем случае всегда в явном виде можно сконструировать комплексную ФСР. Если же матрица вещественна, то описанным в §§3–4 методом строится вещественная ФСР.

Перейдем к построению ФСР для системы ДУ.

Лемма. *Пусть λ_0 — собственное значение матрицы A, w^1 — отвечающая ему собственная вектор-функция, а $w^1, w^2, \dots, w^p$ — соответствующая жорданова цепочка. Тогда система ДУ имеет p линейно независимых решений* (*набор вектор-функций*)

$$w^1 e^{\lambda_0 t}, \quad (w^2 + tw^1)e^{\lambda_0 t}, \quad \dots, \quad \sum_{s=1}^{p} \frac{t^{s-1}}{(s-1)!} w^{p+s-1} e^{\lambda_0 t}.$$

Доказательство. Всякая вектор-функция набора записывается в виде

$$z_k(t) = \sum_{s=1}^{k} \frac{t^{s-1}}{(s-1)!} w^{k-s+1} e^{\lambda_0 t} \quad (k = 1, 2, \dots, p).$$

Но по определению жордановой цепочки $Aw^s = \lambda_0 w^s + w^{s-1}$, $w^0 = 0$. Следовательно,

$$Az_k = \lambda_0 z_k + \sum_{s=1}^{k-1} w^{s-1} \frac{t^{s-1}}{(s-1)!} e^{\lambda_0 t}.$$

Далее имеем

$$\dot{z}_k = \lambda_0 z_k + \sum_{s=2}^{k} w^{k-s+1} \frac{t^{s-2}}{(s-2)!} e^{\lambda_0 t}.$$

Заменяя в индексе суммирования s на $s+1$, приходим к выводу, что $\dot{z}_k = Az_k$.

Для доказательства линейной независимости системы вектор-функций рассмотрим их линейную комбинацию. При $t = 0$ она сводится к линейной комбинации собственного и присоединенных векторов. Из линейной независимости этих векторов следует, что коэффициенты в исходной линейной комбинации равны нулю.

Теорема. *Пусть матрица A имеет собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, причем собственному значению λ_s отвечает жорданова цепочка $w_s^1, w_s^2, \ldots, w_s^{p_s}$. Пусть объединение всех этих жордановых цепочек составляет базис в $\Re_c^n$ (отсюда, в частности следует, что $p_1 + p_2 + \ldots + p_m = n$).*

Тогда набор функций

$$\varphi_s^1(t) = w_s^1 e^{\lambda_s t}, \quad \varphi_s^2(t) = (w_s^2 + t w_s^1) e^{\lambda_s t}, \quad \ldots,$$

$$\varphi_s^m(t) = \sum_{r=1}^{p_s} \frac{t^{r-1}}{(r-1)!} w_s^{p_s+r-1} e^{\lambda_s t}, \quad s = 1, 2, \ldots, m.$$

представляет собой ФСР системы ДУ.

Доказательство. Согласно лемме все функции набора являются решениями системы ДУ, так что имеется ровно n ее решений. Докажем их линейную независимость. Пусть линейная комбинация решений набора равна нулю. Положив в ней $t = 0$, получим линейную комбинацию с теми же коэффициентами собственных и присоединенных вектор-функций матрицы A. Вследствие их линейной независимости все коэффициенты в линейной комбинации равны нулю, что и завершает доказательство теоремы.

Заметим, что если матрица системы ДУ вещественна, но имеет среди собственных значений комплексные, то, как это делалось выше, с помощью формулы Эйлера можно построить вещественную ФСР системы ДУ.

Пример 1. Найдем ФСР для системы ДУ

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4, \\ \dot{x}_2 = 8x_1 - 6x_2 - 7x_3 + 2x_4, \\ \dot{x}_3 = -2x_1 + x_2, \\ \dot{x}_4 = 3x_1 - 2x_2 - 3x_3. \end{cases}$$

Базис в $\Re^4$ из собственных и присоединенных векторов матрицы A был найден в примере 2 из § 5.

Согласно лемме ФСР системы ДУ имеет вид $w_1^1 e^{-t}$, $w_2^1 e^{-t}$, $w_2^2 e^{-t}$, $w_2^3 e^{-t}$.

Упражнение 1. Выпишите формулу общего решения данной системы ДУ.

Из леммы следует полезный вычислительный метод.

Обозначим через N_{λ_0} подпространство решений системы ДУ, отвечающее k-кратному вещественному собственному значению $\lambda_0 = 0$. Всякое решение из N_{λ_0} представимо в виде

$$x(t) = p_{k-1}(t)e^{\lambda_0 t},$$

где $p_{k-1}(t)$ — вектор-функция, координаты которой являются многочленами степени $k-1$ (или более низкой степени).

Будем искать решения из N_{λ_0} в таком виде с неизвестными пока коэффициентами многочленов степени $k-1$.

Подстановка столбца $x(t)$ в систему ДУ приводит к линейной однородной алгебраической системе для определения коэффициентов многочленов. Оказывается, эта система всегда имеет ровно k линейно независимых решений (следствие жордановых соображений), поэтому система ДУ указанного вида имеет ровно k линейно независимых решений. Это соответствует тому факту, что N_{λ_0} имеет размерность k.

Этот более громоздкий кустарный способ не использует в явном виде жорданову структуру матрицы системы ДУ.

Пример 2. Найдем ФСР для системы ДУ $\dot{x} = x + y$, $\dot{y} = y + z$, $\dot{z} = z$. Матрица данной системы — это жорданова клетка

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Здесь $\lambda = 1$ — трехкратное собственное значение, которому отвечает собственный вектор $(1, 0, 0)^{\mathrm{T}}$. Множество всех решений системы ДУ можно искать в виде $x = (A_1t^2 + B_1t + C_1)e^t$, $y = (A_2t^2 + B_2t + C_2)e^t$, $z = C_3e^t$.

Упражнение 2. Подставьте эти выражения в систему ДУ, приравняйте коэффициенты при одинаковых степенях t и убедитесь, что общее решение системы ДУ имеет вид

$$x = \left(\frac{1}{2}C_3t^2 + C_2t + C_1\right)e^t, \quad y = (C_3t + C_2)e^t, \quad z = C_3e^t,$$

а ФСР задается столбцами $(1, 0, 0)^{\mathrm{T}}$, $(t, 1, 0)^{\mathrm{T}}$, $\left(\frac{1}{2}t^2, t, 1\right)$.

Задачу можно решить иначе: из третьего ДУ находим $z = C_3e^t$, подставляем во второе ДУ, получаем неоднородное ДУ со специальной правой частью и т. д.

Замечание 1. Члены решений, содержащие степени t, называются секулярными членами. Если матрица A диагонализуема или комплексно диагонализуема, то нетрудно убедиться, что в решениях системы ДУ секулярные члены отсутствуют.

Замечание 2. Если собственное значение λ_0 комплексное, то на этом же пути паре взаимно сопряженных k-кратных комплексных корней будет соответствовать ровно $2k$ линейно независимых вещественных решений системы ДУ.

§ 7. Фундаментальная матрица и ее свойства

Пусть задача Коши для системы ДУ $\dot{x} = f(t, x)$ с начальным условием $x(t_0) = x_0$ в условиях теоремы Коши имеет на интервале (a, b) (конечном или бесконечном) решение $x = x(t, x_0)$.

Заметим, что для любых $t, s, t + s \in (a, b)$ справедливо следующее групповое свойство:

$$x(s + t, x_0) = x(t, x(s, x_0) = x(t, x(s, x_0)).$$

Действительно, продвинуться по интегральной кривой от начальной точки x_0 до точки $x(s + t, x_0)$ можно также, продвинувшись сначала до точки $x(s, x_0)$, а затем до точки $x(s + t, x_0)$, либо двигаясь сначала до $x(t, x_0)$, а затем до $x(s + t, x_0)$.

Это групповое свойство, использующее единственность интегральной кривой, начинающейся в точке x_0, особенно полезно в линейном случае.

Пусть система вектор-функций $\{z_k(t)\}$, $k = 1, 2, \ldots, n$, является нормальной фундаментальной системой решений линейно однородной системы ДУ (4).

Заметим, что теперь формулу (7) можно записать в матричном виде. Пусть

$$z_k = (z_{1k}(t), z_{2k}(t), \ldots, z_{nk}(t))^{\mathrm{T}}, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Образуем матрицу, столбцами которой являются столбцы координат этих базисных векторов:

$$U(t) = \begin{pmatrix} z_{11}(t) & z_{12}(t) & \ldots & z_{1n}(t) \\ z_{21}(t) & z_{22}(t) & \ldots & z_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ z_{n1}(t) & z_{n2}(t) & \ldots & z_{nn}(t) \end{pmatrix}.$$

Эта матрица называется нормальной фундаментальной матрицей однородной системы ДУ. Как это принято в научной литературе, матрицу $U(t)$ будем называть также матрицантом, или матрицей Коши.

Пусть задано начальное значение $z(t_0) = z_0 = (z_{10}, z_{20}, \ldots, z_{n0})^{\mathrm{T}}$. Тогда решение задачи Коши равно

$$z(t) = U(t)z_0. \tag{11}$$

Матрицант $U(t)$ введен нами с помощью нормальной ФСР. Пусть $\{z_k(t)\}$, $k = 1, 2, \ldots, n$, — произвольная ФСР, а $W(t)$ — соответствующая ей фундаментальная матрица. Пользуясь теоремой Коши,

можно показать, что общее решение системы ДУ (4) представимо формулой (7), или в матричном виде $z(t) = W(t)C$, где C — столбец произвольных постоянных.

Упражнение 1. Докажите, что $U(t) = W(t)W^{-1}(t_0)$.

Следующая теорема перечисляет свойства фундаментальной матрицы.

Теорема. *Матрица $U(t)$ обладает следующими свойствами*:

1) $U(t_0) = E$;

2) $\dfrac{dU(t)}{dt} = A(t)U(t)$ *для любых* $t \in (a, b)$;

3) $U(s+t) = U(s)U(t) = U(t)U(s)$ *для любых* $s, t, s+t \in (a, b)$.

Доказательство. Свойство 1) следует из равенства

$$x(t_0) = U(t_0)x_0 = x_0 = Ex_0,$$

справедливого для любых x_0. Свойство 2) вытекает из тождества

$$\frac{d}{dt}U(t)x_0 = \dot{x}(t) = A(t)x(t) = A(t)U(t)x_0,$$

справедливого для любых x_0 и любых $t \in (a, b)$. Наконец, свойство 3) — это частный случай отмеченного выше группового свойства.

Замечание. Если матрица A — постоянная, то пусть далее $t_0 = 0$. Свойства 1)–3) теперь выглядят так:

1) $U(0) = E$;

2) $\dfrac{dU(t)}{dt} = AU(t)$ для любых $t \in \Re$;

3) $U(s+t) = U(s)U(t) = U(t)U(s)$ для любых $s, t \in \Re$.

В случае $n = 1$, $A \in \Re$ эти свойства полностью определяют функцию-экспоненту e^{At}. По аналогии определим матричную функцию-экспоненту, полагая $\exp(At) = U(t)$.

Эту матричную функцию можно определить также с помощью матричного степенного ряда. Чтобы это показать, решение задачи Коши

$$\dot{x} = Ax, \quad x(0) = x_0$$

с учетом начального условия будем искать в виде степенного ряда

$$x(t) = x_0 + \sum_{k=1}^{\infty} x_k t^k.$$

Подставим ряд в ДУ и получим рекуррентные соотношения

$$kx_k = Ax_{k-1}, \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях t, последовательно находим:

$$x_1 = x_0, \quad 2x_2 = Ax_1, \quad \ldots, \quad kx_k = Ax_{k-1}, \ldots .$$

По индукции вычисляем

$$x_k = \frac{A^k}{k!}x_0,$$

и, следовательно,

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!} x_0.$$

Таким образом, матрицант (нормальная фундаментальная матрица) $U(t)$ может быть представлен в виде матричного степенного ряда

$$U(t) = e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!}.$$

Можно доказать сходимость данного ряда в $\Re^n$.

С учетом замечания из §3 можно в случае диагонализуемости матрицы A вычислить экспоненту e^{At}, используя матрицу перехода C по формуле $e^{At} = Ce^{\Lambda t}C^{-1}$.

Отметим, что в случае диагонализуемости матрицы

$$Ae^{\Lambda t} = \operatorname{diag}\{e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \ldots, e^{\lambda_n t}\}.$$

В общем случае базиса из собственных и присоединенных векторов на этом пути также удается вычислить экспоненту e^{At}.

Упражнение 2. Вычислите e^{At}, если A — двумерная жорданова клетка.

Решение задачи Коши

$$\dot{x} = Ax, \quad x(0) = c$$

через матрицант $U(t) = e^{At}$ записывается в виде $x(t) = U(t)c$. В условиях теоремы §6 это решение можно дать и в другой форме. Разложим начальное значение по жорданову базису

$$c = \sum_{s=1}^{m} \sum_{r=1}^{p_s} c_s^r w_s^r.$$

Тогда решение задачи Коши дается формулой

$$x(t) = \sum_{s=1}^{m} \sum_{r=1}^{p_s} c_s^r \varphi_s^r(t).$$

Действительно, эта вектор-функция является решением системы ДУ и удовлетворяет начальному условию. Сравнение этих двух представлений решения позволяет получить полезную оценку нормы матрицанта.

Лемма. *Для любого* $\alpha > \max\limits_{1 \le k \le m} \operatorname{Re} \lambda_k$ *найдется* $M_\alpha > 0$, *такое, что на полуоси* $[0, +\infty)$ *имеет место оценка* $||U(t)|| \le M_\alpha e^{\alpha t}$.

Доказательство. Зададим норму в следующим образом: если $c = \sum\limits_{s=1}^{m} \sum\limits_{r=1}^{p_s} c_s^r w_s^r$, то положим $||c|| = \max\limits_{\substack{1 \le r \le p_s \\ 1 \le s \le m}} |c_s^r|$.

Но тогда имеем оценку

$$||x(t)|| \le \sum_{s=1}^{m}\sum_{r=1}^{p_s} |c_s^r| \cdot ||\varphi_s^r(t)|| \le \sum_{s=1}^{m}\sum_{r=1}^{p_s} ||\varphi_s^r(t)|| \cdot ||c||.$$

Заметим, что $\varphi_s^r(t) = e^{\lambda_s t} Q_s^r(t)$, где Q_s^r — векторные многочлены степени $r-1$ (см. определение вектор-функций $\varphi_s^r(t)$ в формулировке теоремы §7).

Зафиксируем $\alpha > \max\limits_{1\le k\le m} \operatorname{Re}\lambda_k$ и представим $\varphi_s^r(t)$ в виде

$$\varphi_s^r(t) = e^{\alpha t} e^{(\lambda_s-\alpha)t} Q_s^r(t).$$

Но $e^{(\lambda_s-\alpha)t}||Q_s^r(t)|| \to 0$ при $t \to +\infty$.

Следовательно $e^{(\lambda_s-\alpha)t}||Q_s^r(t)|| \le \mathrm{const}\cdot 0$ на $[0, +\infty)$ с постоянной, зависящей от s, r, α.

Мы воспользовались следующим элементарным соображением. Пусть $\beta < 0$, а $p(t)$ — многочлен. Тогда функция $f(t) = e^{\beta t} p(t)$ ограничена на полуоси $[0, +\infty)$.

Упражнение 3. Пользуясь правилом Лопиталя, докажите, что $f(t) \to +\infty$. Отсюда следует существование $T > 0$, такого, что $|f(t)| \le 1$ на $[T, +\infty)$. Наконец, $f(t)$ как непрерывная функция ограничена на $[0, T]$.

Таким образом, имеем оценки $||\varphi_s^r(t)|| \le \mathrm{const}\, e^{\alpha t}$, откуда и следует утверждение теоремы.

§ 8. Системы неоднородных линейных ДУ. Метод Лагранжа вариации произвольных постоянных

Рассмотрим систему ДУ (3) $\dot{x} = A(t)x + h(t)$ в предположении непрерывности элементов матрицы $A(t)$ и правой части $h(t)$ на интервале (a, b).

Приведем кратко основные сведения о таких системах.

1) Пусть $z_k(t)$, $k = 1, 2, \ldots, n$, — базис в пространстве N решений соответствующей однородной системы ДУ, а $W(t)$ — матрица, столбцами которой являются векторы этого базиса.

Общее решение системы записывается формулой

$$x(t) = W(t)C + x_0(t),$$

где C — столбец произвольных постоянных C_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, а $x_0(t)$ — некоторое решение неоднородной системы ДУ (3) (иными словами, ее частное решение).

2) При решении задач часто бывает полезным следующий принцип суперпозиции.

Лемма. *Пусть правая часть системы ДУ* (3) *равна* $h(t) = \alpha_1 h_1(t) + \alpha_2 h_2(t)$. *Тогда частное решение этой системы равно* $x(t) = \alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)$, *где* $x_1(t), x_2(t)$ — *частные решения систем ДУ* $\dot{x} = A(t)x + h_1(t)$ *и* $\dot{x} = A(t)x + h_2(t)$ *соответственно.*

3) Метод Лагранжа вариации произвольных постоянных состоит в следующем. Решение неоднородной системы ДУ ищется в виде

$$x(t) = W(t)\,C(t).$$

Для определения производных варьируемого столбца «постоянных» $\dot{C}(t)$ возникает алгебраическая система n уравнений с n неизвестными

$$W(t)\dot{C}(t) = h(t),$$

Определитель этой системы $W(t) \neq 0$, что следует из линейной независимости системы вектор-функций $z_k(t)$, $k = 1, 2, \ldots, n$, на (a, b).

Поскольку матрица $W(t)$ обратима, то для любого $s \in (a, b)$ имеем $\dot{C}(s) = W^{-1}(s)h(s)$, откуда $C(t) = \int\limits_{t_0}^{t} W^{-1}(s)h(s)\,ds + C$, где C — столбец произвольных постоянных.

Таким образом, общее решение линейной системы ДУ можно записать в виде

$$x(t) = W(t)C + \int\limits_{t_0}^{t} W(t)\,W^{-1}(s)\,h(s)\,ds.$$

В частности, можно принять $W(t) = U(t)$, где $U(t)$ — матрицант (или матрица Коши, т. е. фундаментальная матрица, построенная по нормальной ФСР, так что $U(t_0) = E$).

4) С помощью функции-экспоненты $U(t) = e^{At}$ решение задачи Коши

$$\dot{x} = Ax + h(t), \quad x(0) = x_0$$

можно записать в виде

$$x(t) = U(t)x_0 + \int\limits_{0}^{t} U(t-s)\,h(s)\,ds. \tag{12}$$

Упражнение. Проверьте эту формулу, используя теорему о дифференцировании интеграла по верхнему пределу.

5) В частном случае, когда матрица A постоянна и диагонализуема, может быть явно выписано решение задачи Коши системы ДУ с начальным условием $x(t_0) = x_0$.

Теорема. *Пусть матрица A диагонализуема, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ — ее собственные значения, а $v_1, v_2, \ldots, v_n$ — соответствующие им собственные векторы. Разложим правую часть $h(t)$ по базису из собственных векторов*:

$$h(t) = \sum_{k=1}^{n} h_k(t)\,v_k.$$

Тогда решение системы ДУ с начальным условием $x(t_0) = 0$ равно

$$x(t) = \sum_{k=1}^{n} v_k \int\limits_{t_0}^{t} e^{\lambda_k(t-s)} h_k(s)\,ds. \tag{13}$$

§ 9. Пример задачи о периодических решениях системы дифференциальных уравнений

Поставим следующую краевую задачу:

$$\begin{cases} \dot{x} + y = f(t), \\ \dot{y} - x = g(t), \end{cases} \qquad x(0) = x(2\pi), \quad y(0) = y(2\pi). \tag{14}$$

Предполагается, что правые части $f(t), g(t)$ заданы и непрерывны на всей оси t и имеют период 2π, так что задача (11) — это задача об отыскании 2π-периодических решений данной системы ДУ.

Для изучения периодических решений рассмотрим вспомогательную задачу Коши

$$\begin{cases} \dot{x} + y = f(t), \\ \dot{y} - x = g(t), \end{cases} \qquad x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0.$$

Упражнение 1. Покажите, что матрицант (соответствующей однородной системы ДУ) равен

$$U(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

Упражнение 2. Покажите, что $U^{-1}(t) = U^{\mathrm{T}}(t)$, т. е. матрица, обратная к U, равна матрице, транспонированной к U. (Заметим, что в линейной алгебре такие матрицы называются ортогональными матрицами.)

Пусть X — столбец с координатами (x, y), X_0 — столбец с координатами (x_0, y_0), а F — столбец с координатами (f, g). Тогда, поскольку $U(t-s) = U(t)U(-s) = U(t)U^{\mathrm{T}}(s)$, решение задачи Коши можно выразить в виде

$$X(t) = U(t)X_0 + U(t)\int_0^t U^{\mathrm{T}}(s)F(s)\,ds. \tag{15}$$

Эта же формула представляет общее решение рассматриваемой системы ДУ, если X_0 — столбец произвольных постоянных.

Упражнение 3. Покажите,что в координатном виде решение задачи Коши дается формулами

$$x(t) = x_0\cos t - y_0\sin t + \int_0^t (\cos(t-s)f(s) - \sin(t-s)g(s))\,ds,$$

$$y(t) = x_0\sin t + y_0\cos t + \int_0^t (\sin(t-s)f(s) + \cos(t-s)g(s))\,ds.$$

Отметим, что первое слагаемое справа в (12), очевидно, является 2π-периодической вектор-функцией.

Второе слагаемое в формуле (12) — это частное решение данной неоднородной системы ДУ из (11). Оно будет решением изучаемой краевой задачи тогда и только тогда, когда оно является 2π-периодической функцией.

Поскольку $U(2\pi) = E$, то для разрешимости исходной краевой задачи необходимо и достаточно, чтобы

$$\int_0^{2\pi} U^{\mathrm{T}}(s)F(s)\,ds = 0,$$

или в стандартном базисе (проверьте!)

$$\int_0^{2\pi} (f(s)\cos s + g(s)\sin s)\,ds = 0, \qquad \int_0^{2\pi} (-f(s)\sin s + g(s)\cos s)\,ds = 0. \quad (16)$$

Подведем предварительные итоги.

1) Однородная краевая задача, соответствующая (11), имеет двумерное подпространство решений.

2) Неоднородная задача неразрешима, т. е. не имеет решений, если условия (13) не выполняются. Если же условия разрешимости (13) выполняются, то задача (11) имеет семейство решений, зависящее от двух произвольных параметров и выражаемое формулой (12) с произвольными постоянными x_0 и y_0.

Условиям разрешимости можно придать иную форму.

Лемма. *Пусть $f(t)$ и $g(t)$ непрерывно дифференцируемы. Для существования 2π-периодического решения задачи* (11) *необходимо и достаточно, чтобы в разложении Фурье функции $\dot{f}(t) - g(t)$ (или функции $f(t) + \dot{g}(t)$) отсутствовали члены, содержащие* $\cos t$ *либо* $\sin t$.

Доказательство леммы предоставляем читателю.

Указание. Воспользуйтесь формулой интегрирования по частям. Например,

$$\int_0^{2\pi} \dot{f}(t)\cos t\,dt = \int_0^{2\pi} f(t)\sin t\,dt,$$

откуда и из первого условия разрешимости видно, что функция $\dot{f}(t) - g(t)$ ортогональна функции $\cos x$ на $[0, 2\pi]$.

В заключение рассмотрим задачу о периодических решениях в комплексной форме. Общее решение линейного однородного ДУ $\dot{z} - iz = 0$ дается формулой $z = Ce^{it}$ с произвольной комплексной константой C. Оно является 2π-периодической функцией. Рассмотрим неоднородное ДУ $\dot{z} - iz = h(t)$ с комплекснозначной правой частью $h(t)$, непрерывно дифференцируемой на $[0, 2\pi]$ и удовлетворяющей условиям $h(0) = h(2\pi) = 0$. Разложим $h(t)$ в комплексный ряд Фурье $h(t) = \sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ik}$.

Упражнение 4. Покажите, что частное решение неоднородного ДУ дается формулой

$$z = \sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 1}}^{+\infty} \frac{c_k e^{ik}}{i(k-1)} + c_1 e^{it}.$$

Отсюда вытекает следующий критерий: для существования 2π-периодического решения неоднородного ДУ необходимо и достаточно выполнения условия

$$c_1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(t) e^{it}\, dt = 0.$$

Это условие равносильно тому, что в разложении правой части $h(t)$ в ряд Фурье отсутствует член с e^{it}.

Глава IV

ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ И ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ УСТОЙЧИВОСТИ ПО ЛЯПУНОВУ

§ 1. Динамическая система ДУ, фазовое пространство, траектории

Излагаемые ниже вопросы относятся к так называемой качественной, или геометрической теории ДУ, восходящей к А. Пуанкаре и А. М. Ляпунову. Эта теория возникла в конце XIX в. в связи с фундаментальными вопросами небесной механики, такими, как вопросы эволюции и устойчивости солнечной системы. Качественная теория ДУ часто позволяет, не решая ДУ, установить многие важные свойства решений и, что особенно важно, изучить качественно их глобальное поведение, т. е. поведение на больших промежутках времени. Важнейшее место занимает в ней теория устойчивости, разработанная А. М. Ляпуновым.

Рассмотрим частный случай нормальной системы ДУ, когда ее правые части — функции $f_k(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $k = 1, 2, \ldots, n$, — не зависят от независимой переменной t, т. е. система ДУ, записанная в векторной форме, имеет вид

$$\dot{x} = f(x). \tag{1}$$

Такую систему ДУ будем называть *динамической системой* (далее для краткости ДС). В учебной и научной литературе динамические системы часто называют также автономными системами ДУ.

Всюду далее предполагается без специальных оговорок, что функции $f_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $k = 1, 2, \ldots, n$, непрерывно дифференцируемы в области $D \subset \Re^n$ (кратко $f(x) \in C^1(D)$).

Таким образом, в цилиндрической области $G = \{(t, x)\colon t \in \Re, x \in D\}$. к ДС (1) можно применить теорему Коши. Согласно этой теореме для любой точки $(t_0, x_0) \in G$ найдется интервал (α, β), на котором существует единственное решение $x = x(t)$ ДС, удовлетворяющее начальному условию $x(t_0) = x_0$. Это локальное решение можно продолжить вплоть до границы области G, если эта область ограничена. Если же область неограничена, то возможны явления типа взрывов. Всюду в дальнейшем, говоря о решении ДС, будем считать его непродолжимым, т. е. определенным на максимальном интервале его существования.

Графики интегральных кривых ДС расположены в области G.

Дадим теперь принципиально другую — кинематическую — интерпретацию ДС. Переменная t будет далее играть роль времени. Область $D \subset \Re^n$ переменных x, в которой задана правая часть $f(x)$ ДС, будем называть *фазовым пространством* ДС.

Дифференциальные уравнения, составляющие ДС, будем трактовать как законы движения материальной точки с координатами x в фазовом пространстве D, когда заданы правила изменения вектора скорости $\dot{x}$ как вектор-функции, зависящей только от координат точки x. Таким образом, каждое решение ДС $x = x(t)$, $t \in (\alpha, \beta)$, будем интерпретировать как конкретное движение материальной точки в фазовом пространстве D. Запись $x = x(t)$ будет означать, что геометрически данное движение представляется лежащей в D параметрически заданной гладкой ориентируемой кривой L: $x = x(t)$, $t \in (\alpha, \beta)$.

Всякую такую кривую L будем называть *траекторией* (фазовой траекторией) динамической системы. В приложениях наряду с термином «траектория» широко используется также термин «орбита».

Замечание 1. Непосредственной проверкой убеждаемся в справедливости следующего утверждения. Пусть $x = x(t)$ — решение ДС на интервале (α, β). Тогда для любого $c \in \Re$ функция $x = x(t + c)$ также является решением ДС, но на интервале $(\alpha - c, \beta - c)$. При этом все эти функции представляют одну и ту же траекторию.

Поясним для наглядности связь между интегральными кривыми и траекториями в случае, когда $n = 2$. Пусть в пространстве $\Re^3$ задана декартова прямоугольная система координат $\{O, x_1, x_2, t\}$. Изобразим лежащую в $\Re^3$ интегральную кривую l динамической системы. Соответствующая ей траектория L — это ортогональная проекция интегральной кривой динамической системы на фазовую плоскость $\Re^2$ переменных x_1, x_2. При этом все интегральные кривые, получающиеся друг из друга переносом по t, соответствуют одной и той же траектории, на которую они проектируются.

Полезно иметь и такую наглядную интерпретацию: траектория есть след движущейся точки (частицы), оставляемый ею в фазовом пространстве. Наблюдать траекторию в $\Re^3$ приходилось каждому: это, например, туманный (дымный) след пролетевшего в небе самолета. Тот же след мог быть оставлен и другим самолетом, пролетевшим по тому же маршруту в другое время.

Фазовой картиной (фазовым портретом) ДС будем называть совокупность траекторий в фазовом пространстве.

Конечно, знание фазовых траекторий дает меньше информации, чем знание интегральных кривых, однако фазовые картины часто оказываются очень полезными, особенно при $n = 2$ (метод фазовой плоскости), а иногда и при $n = 3$. При $n > 3$ теряется наглядность, но и здесь иногда могут оказаться полезными геометрические (топологические) соображения.

Применение теоремы Коши или приближенных методов дает возможность лишь локального описания индивидуальной траектории. Большим достоинством фазового подхода является возможность изучать в целом (глобально) поведение семейств траекторий во всей области их определения, находить замкнутые траектории и т. п. Метод фазовой плоскости представлен многими примерами в Дополнении I.

Обсудим вкратце некоторые возможные типы траекторий.

Определение. Точка $a \in D$ называется *положением равновесия* динамической системы, если $f(a) = 0$.

Если a — положение равновесия ДС, то в этой точке скорость $\dot{x}(a) = 0$, что и оправдывает термин «положение равновесия».

Заметим, что в определении положения равновесия в учебной и в научной литературе имеется много разночтений. Иногда положения равновесия ДС называют ее точками покоя, ее стационарными состояниями, а также особыми точками ДС, ее неподвижными точками и др.

Положения равновесия представляют собою простейшие траектории. Положение равновесия a — это траектория, состоящая из единственной точки a. Соответствующее ей движение (решение ДС) описывается формулами $x(t) = a$, $t \in \Re$. Это означает, что при движении в фазовом пространстве D материальная точка находится в покое, постоянно пребывая в точке a фазового пространства. Таково, например, движение спутника или вертолета, зависшего в небе над определенной точкой земной поверхности. Скорость его относительно Земли равна нулю, и поэтому так естественно положение равновесия назвать точкой покоя.

Замечание 2. Из теоремы Коши вытекает (подробнее см., например, [12]), что если траектория не является положением равновесия, то либо она является гладкой кривой без точек самопересечения (единственность решения задачи Коши!), либо это гладкая замкнутая простая кривая. В последнем случае соответствующее решение ДС является периодической функцией. Описанию положений равновесия и замкнутых траекторий, занимающих важнейшее место в фазовом портрете ДС, будет уделено большое место в дальнейшем изложении.

Определим в фазовом пространстве (т. е. в области D) векторное поле ДС: каждой точке $x \in D$, не являющейся положением равновесия, поставим в соответствие вектор $f(x)$.

Каждая траектория, не являющаяся положением равновесия, касается векторного поля ДС в каждой своей точке. Векторное поле ДС является проекцией векторного поля ДУ на фазовое пространство.

В точках, являющихся положениями равновесия, векторное поле не определено. Таким образом, положения равновесия являются особыми точками векторного поля ДС: в них векторное поле претерпевает разрыв.

Пример 1. Рассмотрим ДС $\dot{x} = x$, $\dot{y} = y$. Начало координат (0, 0) является единственным положением равновесия. Траектории являются лучами, выходящими из начала координат.

Пример 2. Рассмотрим ДС $\dot{x} = y$, $\dot{y} = -x$.

Упражнение. Методом исключения покажите, что траектории этой ДС являются окружности $x^2 + y^2 = C$, $C > 0$.

Все они — замкнутые траектории. При $C = 0$ получаем положение равновесия — точку $(0, 0)$.

§ 2. Первый интеграл динамической системы

В гл. I, §10 мы уже встречались с понятием первого интеграла ДУ первого порядка. Важную роль играет это понятие и для ДС.

Определение 1. Функция $V(x)$, $V\colon \Re^n \to \Re$, определенная и непрерывно дифференцируемая в области $D \subset \Re^n$ и не равная постоянной в этой области, называется *первым интегралом* ДС в D, если для всякого решения $x = x(t)$, $t \in (a, b)$, этой ДС существует постоянная C, такая, что $V(x(t)) = C$ для всех $t \in (a, b)$.

Подчеркнем, что постоянная C зависит только от решения, но не зависит от t. Пусть $x = x(t)$ — решение на (a, b), и пусть $x(t_0) = x_0$, тогда $V(x(t)) = C = V(x_0)$ для всех $t \in (a, b)$.

Пусть ДС имеет первый интеграл $V(x)$. Рассмотрим траекторию L этой ДС. Согласно определению первого интеграла существует постоянная C, такая, что $V(x) = C$ для любых $x \in L$. Таким образом, каждая траектория ДС лежит на некоторой поверхности уровня $V(x) = C$ первого интеграла.

Упражнение 1. Пусть $V(x)$ — первый интеграл ДС, а функция $F(y)$ не является постоянной и непрерывно дифференцируема (кратко $V \in C^1(\Re)$). Проверьте, что $F(V(x))$ также является первым интегралом ДС.

Таким образом, если ДС имеет хотя бы один первый интеграл, то она имеет бесконечное множество первых интегралов. Важным является понятие функциональной независимости системы первых интегралов.

Пусть в области $D \in \Re^n$ задана система функций

$$v_s(x) \in C^1(D), \quad s = 1, 2, \ldots, k \quad (1 \le k \le n).$$

Данная система называется *функционально зависимой*, если в D одна из ее функций выражается через остальные функции (например, $v_1(x) = F(v_2(x), \ldots, v_k(x))$, где $F \in C^1(\Re^{k-1})$).

Данная система называется *функционально независимой*, если она не является функционально зависимой ни в какой подобласти области D.

Можно доказать (см. [16, 17]), что в окрестности любой точки $x_0 \in D$, не являющейся положением равновесия, у динамической системы существует система из $(n-1)$ функционально независимых первых интегралов.

Существование у ДС первого интеграла в целом (т. е. в $\Re^n$) — явление довольно редкое. Однако, у некоторых ДС (так называемых

консервативных ДС) первые интегралы часто существуют и имеют смысл законов сохранения. Из их существования обычно можно сделать полезные математические и физические выводы.

Пример 1. Рассмотрим ДС

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -\dfrac{1}{m}U'(x) \end{cases}$$

($m > 0$, $x, y \in \Re$, $U(x) \in C^1(\Re^n)$).

Исключая y, получим ДУ второго порядка

$$m\ddot{x} + U'(x) = 0.$$

Это ДУ описывает одномерное движение материальной точки массы m в потенциальном силовом поле $U(x)$. В данном случае первый интеграл должен быть функцией от x и $\dot{x}$. Умножив ДУ на $\dot{x}$ и проинтегрировав, получим ДУ

$$m\frac{\dot{x}^2}{2} + U(x) = E.$$

Здесь E — постоянная, а слева стоит первый интеграл, называемый иногда интегралом энергии (механической энергии). Он дает выражение полной механической энергии, состоящей из двух слагаемых: кинетической энергии $\dfrac{m\dot{x}^2}{2}$ — энергии движущейся точки $x = x(t)$ — и ее потенциальной энергии $U(x)$ (энергии силового поля). Постоянство E является выражением закона сохранения механической энергии.

Задание начальных условий $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = y_0$ определяет траекторию движения точки и ее энергию $E = \dfrac{1}{2}my_0^2 + U(x_0)$.

Для краткости функцию $U(x)$ называют также потенциалом.

Отметим важный факт: наличие первого интеграла позволяет понизить порядок ДУ, сведя его к ДУ первого порядка. В условиях примера 1 из равенства $\dfrac{m\dot{x}^2}{2} + U(x) = E$ имеем

$$\dot{x} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x))}.$$

В Дополнении I на этом пути будут рассмотрены некоторые задачи прикладного характера.

Пример 2. Пусть функция $2n$ переменных $H(x, y)$ $x \in \Re^n$, $y \in \Re^n$ дважды непрерывно дифференцируема в области $G \subset \Re^{2n}$. Динамическая система

$$\begin{cases} \dot{x}_i = \dfrac{\partial H}{\partial y_i}, \\ \dot{y}_i = -\dfrac{\partial H}{\partial x_i} \end{cases}$$

называется гамильтоновой системой. Функция $H(x, y)$ называется функцией Гамильтона, или гамильтонианом. Она является первым интегралом ДС Гамильтона, так как (проверьте, используя уравнения ДС)

$$\frac{d}{dt}H(x(t), y(t)) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial x_i}\dot{x}_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial y_i}\dot{y}_i = 0.$$

Таким образом, на каждом решении ДС $H(x, y) = \mathrm{const}$. Это закон сохранения энергии механической системы, описываемой гамильтоновой ДС. Отметим, что гамильтоновы ДС играют важную роль в аналитической механике Лагранжа–Гамильтона.

Упражнение 2. Проверьте, что ДС, рассмотренная в примере 1, является гамильтоновой системой с $H(x, y) = \frac{1}{2}my^2 + U(x)$.

Пример 3. Движение материальной точки $x \in \Re^n$ массы m в потенциальном силовом поле $U(x)$ описывается системой n ДУ второго порядка $m\ddot{x} + \operatorname{grad} U(x) = 0$. Эта система эквивалентна ДС из $2n$ уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}_i = y_i, \\ m\dot{y}_i = -\dfrac{\partial U}{\partial x_i}, \end{cases} \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Предполагается, что $U(x)$ дважды непрерывно дифференцируема в области $G \subset \Re^n$, что гарантирует применимость теоремы Коши.

Упражнение 3. Проверьте, что эта ДС также является гамильтоновой с $H(x, y) = \frac{1}{2}(y, y) + U(x)$, где $(y, y) = \sum_{i=1}^{n} y_i^2$ — скалярный квадрат в $\Re^n$.

Условие существования первого интеграла в области D тесно связано с важным понятием потенциального векторного поля.

Определение 2. Пусть область $D \subset \Re^n$ — односвязная. Непрерывно дифференцируемое в D векторное поле $f(x)$ называется *потенциальным*, если существует непрерывно дифференцируемая функция $U\colon D \to \Re$, такая, что $\operatorname{grad} U(x) = f(x)$, $x \in D$. При этом функция $U(x)$ называется *потенциальной функцией*, или *потенциалом* векторного поля $f(x)$.

Заметим, что потенциальное векторное поле называется также градиентным векторным полем. Условия потенциальности векторного поля в случаях $n = 2$ и $n = 3$ рассматриваются в курсах математического анализа.

Обсудим тесную связь между ДС

$$\begin{cases} \dot{x} = Q(x, y), \\ \dot{y} = -P(x, y) \end{cases} \tag{2}$$

и уравнением в дифференциалах $P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0$, которое рассматривалось в гл. I, §10.

Пусть функция $U(x, y)$ является потенциалом плоского векторного поля $(P(x, y), Q(x, y))$. Тогда ДС принимает вид

$$\begin{cases} \dot{x} = U_y(x, y), \\ \dot{y} = -U_x(x, y). \end{cases}$$

Отсюда видно, что $U(x, y)$ является первым интегралом этой ДС (проверьте!).

Рассмотрим теперь ДУ

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{P(x, y)}{Q(x, y)}. \tag{3}$$

Лемма 2. *Пусть $Q(x_0, y_0) \neq 0$. Тогда решение задачи Коши для ДС* (2) *с начальными условиями $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$ дает в некоторой окрестности точки $t = 0$ параметрическое представление решения ДУ* (3) *с начальным условием $y(x_0) = y_0$.*

Доказательство. Из первого ДУ системы ДС (2) видно, что $\dot{x}(t_0) \neq 0$. По непрерывности $\dot{x}(t)$ сохраняет знак $\dot{x}(t_0)$ вблизи точки t_0, так что функция $x = x(t)$ строго монотонна. Но тогда существует обратная функция $t = t(x)$, определенная в некоторой окрестности точки x_0. Суперпозиция $y = y(t(x))$ является решением задачи Коши для ДУ.

Аналогично доказывается

Лемма 3. *Пусть $P(x_0, y_0) \neq 0$. Тогда решение задачи Коши для ДС* (2) *с начальными условиями $x_0 = x_0$, $y(0) - y_0$ является параметрическим представлением решения $x = x(y)$ задачи Коши для ДУ*

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{Q(x, y)}{P(x, y)}, \quad x(y_0) = x_0 \tag{4}$$

в некоторой окрестности точки y_0.

Напомним, что интегральной кривой ДУ мы называли график решения этого ДУ. В леммах 2, 3 даны условия, при выполнении которых каждая траектория ДС содержит кусок интегральной кривой ДУ первого порядка.

Развивая соображения, изложенные в гл. I, §10, расширим определение интегральной кривой ДУ первого порядка.

Определение 3. Траекторию ДС (2), не являющуюся положением равновесия этой ДС, будем называть *интегральной кривой* каждого из ДУ (3) и ДУ (4), а также ДУ в дифференциалах.

Таким образом, понятие траектории ДС обобщает понятие интегральной кривой ДУ. Отметим, что в учебной литературе под интегральной кривой ДУ первого порядка часто понимается фактически и без всяких оговорок траектория соответствующей ему ДС. Этим допускается некоторая методическая небрежность.

§ 3. Устойчивость положений равновесия

В этом и в следующих параграфах мы приступаем к изучению важнейшего в теории ДУ и их приложений научного направления — теории устойчивости по Ляпунову. Термины «методы Ляпунова», «теоремы Ляпунова», «функция Ляпунова» были введены в знак признания выдающегося вклада А. М. Ляпунова в создание современной теории устойчивости. Дальнейшее развитие теории устойчивости проходило под влиянием все новых и новых важнейших прикладных задач.

Динамическую систему $\dot{x} = f(x)$ рассматриваем, как всегда, в естественном предположении, что $f(x) \in C^1(D)$, где $D \in \Re^n$ — фазовое пространство.

Обозначим через $x(t, x_0)$ ее решение с начальным условием $x(0) = x_0$.

Определение 1. Положение равновесия a динамической системы называется *устойчивым по Ляпунову*, если:

1) существует $\delta_0 > 0$, такое, что для всех x_0, удолетвлетворяющих неравенству $||x_0 - a|| < \delta_0$, решение $x(t, x_0)$ существует на всей полуоси $[0, +\infty)$;

2) для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$, *такое, что* если $||x_0 - a|| < \delta$, то $||x(t, x_0) - a|| < \varepsilon$ для любых $t \in [0, +\infty)$.

Поясним данное определение.

Если столбец $u = (u_1, u_2, \ldots, u + n)^{\mathrm{T}} \in \Re^n$, то под его нормой (длиной) понимается число $||u|| = \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} u_k^2}$. Подробнее см. в гл. VI, §1.

Условие 1) означает, что если начальное значение x_0 достаточно близко к положению равновесия a, то решение $x(t, x_0)$, существующее по теореме 1 (гл. III, §1) вблизи точки $t = 0$, продолжимо вправо на всю полуось $[0, +\infty)$. Иначе говоря, при $t > 0$ отсутствует явление взрыва.

Условие 2) означает, что решение $x(t, x_0)$ в точке $x_0 = a$ зависит от x_0 непрерывно равномерно на всей полуоси $[0, +\infty)$. Для всех x_0, достаточно близких к a, решение $x(t, x_0)$ достаточно близко к решению $x(t, a) = a$ причем равномерно по t на полуоси $[0, +\infty)$.

Определение 2. Устойчивое по Ляпунову положение равновесия a называется *асимптотически устойчивым*, если $x(t, x_0) \to a$ при $t \to +\infty$.

Дадим фазовую интерпретацию этих определений. Пусть при всех x_0 вблизи положения равновесия a все траектории определены на положительной полуоси: $x = x(t, x_0)$, $t \in [0, +\infty)$.

Устойчивость по Ляпунову означает, что по любому $\varepsilon > 0$ по можно указать $\delta > 0$, такое, что если x_0 находится в δ-окрестности a, то вся полутраектория $x(t, x_0)$, $t \in [0, +\infty)$ лежит в ε-окрестности точки a.

На рис. 7 изображены две окрестности положения равновесия a: меньшая — δ-окрестность и бóльшая — ε-окрестность. Если $x(0)$ лежит в δ-окрестности, то $x(t)$ при всех $t > 0$ не выходит из ε-окрестности.

Асимптотическая устойчивость означает, что в дополнение к требованию устойчивости по Ляпунову всякая близкая к положению равновесия траектории при $t \to +\infty$ входит в положение равновесия.

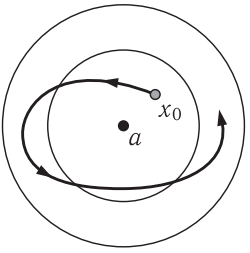


Рис. 7

Одной из простейших иллюстраций к этим определениям является задача о колебаниях маятника (подробнее см. ниже в §11 и далее в Дополнении 1). Нижнее вертикальное положение маятника является положением равновесия. В отсутствие трения в точке подвеса маятника и сопротивления среды данное положение равновесия устойчиво по Ляпунову: отклоним маятник от этого положения и отпустим, тогда под действием силы тяжести он начнет бесконечно колебаться около этого положения равновесия. Если же трение или сопротивление имеются, то колебания маятника затухают, он стремится занять нижнее вертикальное положение и, значит, нижнее положение равновесия является асимптотически устойчивым. Верхнее вертикальное положение маятника тоже является положением равновесия. Оно, очевидно, неустойчиво по Ляпунову.

Пример 1. Рассмотрим следующую задачу Коши для одномерной ($n = 1$) динамической системы $\dot{x} = kx$, $x(0) = x_0$, где $k \in \Re$ — постоянная. Решение этой задачи определено при всех $t \in \Re$ и дается формулой $x(t, x_0) = x_0 e^{kt}$.

Исследуем на устойчивость по Ляпунову положение равновесия $x = 0$ этой ДС.

Если $k < 0$, то $|x(t, x_0)| \le |x_0|$ и, значит, положение равновесия $x = 0$ устойчиво по Ляпунову (можно взять $\delta = \varepsilon$). Но, кроме того, $x(t, x_0) \to 0$ при $t \to +\infty$, и, значит, положение равновесия $x = 0$ асимптотически устойчиво.

Упражнение 1. Нарисуйте для $k < 0$ эскиз графиков $x = x_0 e^{kt}$ при $x_0 < 0$ и при $x_0 > 0$.

Асимптотическая устойчивость положения равновесия $x = 0$ (проекции тривиального решения $x = 0$ на ось x) означает, что прямая $x = 0$ является горизонтальной асимптотой на $+\infty$ для решений $x = x_0 e^{kt}$.

Нарисуем фазовый портрет (рис. 8). Здесь фазовым пространством является фазовая прямая — ось x, направление на ней вместо стрелки обозначим буквой x, стоящей справа. Имеется ровно три траектории.

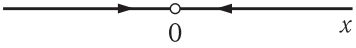


Рис. 8

Это положение равновесия — начало координат оси, а также полуоси $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$. Действительно, все графики решений в области $x < 0$ проектируются на траекторию $(-\infty, 0)$, а все графики решений в области $x > 0$ проектируются на траекторию $(0, +\infty)$.

Стрелками укажем направление движения на траекториях к положению равновесия $x = 0$.

Если $k = 0$, то $x(t, x_0) = x_0$. Здесь $x = 0$ устойчиво по Ляпунову. Заметим, что в данном случае и любое $x \in \Re$ является устойчивым по Ляпунову положением равновесия ДС (проверьте!)

Пусть $k > 0$. Теперь $x(t, x_0) \to \infty$, при $t \to +\infty$, если $x_0 \neq 0$. Отсюда следует, что $x = 0$ не является устойчивым по Ляпунову (почему?).

Упражнение 2. Нарисуйте для $k > 0$ фазовую картину.

Обе фазовые картины для $k < 0$ и для $k > 0$ удобно объединить одним рисунком: в плоскости переменных k, x. На нем можно проследить изменение устойчивости положения равновесия в зависимости от параметра k (рис. 9).

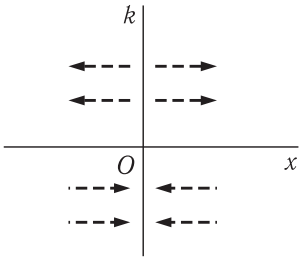


Рис. 9

Рассматривая прямую $k = \text{const}$, получаем фазовую картину при данном $k \neq 0$. Условимся всюду далее при изображении фазовых портретов направления на координатных осях обозначать без стрелок, только буквами. Стрелки же используются для указания направления движения по траекториям.

Пример 2. Рассмотрим следующую задачу Коши для одномерной ($n = 1$) динамической системы (ДУ) $\dot{x} = kx(N - x)$, $x(0) = x_0$, где k и N — положительные постоянные.

Данная ДС имеет два положения равновесия: $x = 0$ и $x = N$. Нам предстоит исследовать их на устойчивость.

Упражнение 3. Покажите, что решение задачи Коши дается формулой

$$x(t, x_0) = \frac{Nx_0}{x_0 + (N - x_0)e^{-kNt}}.$$

Проверьте, что при $x_0 > N$ и при $0 < x_0 < N$ решение $x(t, x_0)$ определено на всей полуоси $[0, +\infty)$ и $x(t, x_0) \to N$ при $t \to +\infty$. Отсюда вытекает, что положение равновесия $x = N$ устойчиво по Ляпунову (почему?) и асимптотически устойчиво.

Покажите, что положение равновесия $x = 0$ не является устойчивым по Ляпунову. Для этого убедитесь, что при $x_0 < 0$ решение $x(t, x_0)$ определено только на полуоси $(-\infty, t_0)$, где $t_0 = \dfrac{1}{kN} \ln \dfrac{N - x_0}{-x_0} > 0$. Таким образом, для положения равновесия $x = 0$ не выполнено (при $x_0 < 0$) даже первое условие в определении устойчивости по Ляпунову.

Упражнение 4. Как и в примере 1 из гл. I, §7, постройте графики решений для случаев $x_0 < 0$, $0 < x_0 < N$, $N < x_0$. Убедитесь, что все графики решений в области $x < 0$ проектируются на траекторию $(-\infty, 0)$. Аналогично, решения в области $0 < x < N$ проектируются на траекторию $(0, N)$, а решения в области $x > N$ — на траекторию $(N, +\infty)$.

Упражнение 5. Нарисуйте фазовую картину на фазовой прямой.

Заметим, что график решения рассмотренной задачи Коши с начальным значением $x_0 \in (0, N)$ называется логистической кривой. Ее график показан на рис. 10.

Следуя [19], укажем на экономическую интерпретацию данного примера. Это проблема эффективности рекламы. Пусть из общего числа N покупателей рекламируемой продукции о ней знают x покупателей, а $(N - x)$ покупателей не знают. Сделаем довольно естественное предположение, что скорость изменения числа покупателей, узнавших в результате рекламы о данной продукции, пропорциональна как числу знающих о ней, так и числу о ней не знающих, т. е. произведению $kx(N - x)$. Таким образом, если время отсчитывать с момента начала рекламы, то для определения $x = x(t)$ имеем рассматриваемое ДУ. Начальным значением здесь может служить любое число $x_0 \in (0, N)$. При $t \to +\infty$ решение $x(t)$ экспоненциально быстро стремится к устойчивому положению равновесия N. В результате после достаточно большого времени о рекламируемой продукции узнают практически все потенциальные покупатели. Это подтверждает большую эффективность рекламы и объясняет значительные траты производителей на нее.

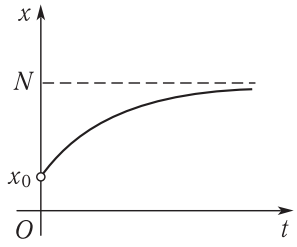


Рис. 10

Заметим, что это же ДУ описывает распространение технологических новшеств. В §2 Дополнения I читатель найдет его применение в экологии. Одно из достоинств математики состоит в том, что часто одна и та же математическая модель может описывать явления в отдаленных друг от друга областях науки, не имеющие, казалось бы, ничего общего.

§ 4. Теорема об устойчивости по линейному приближению

Остановимся на одном из фрагментов так называемого первого метода Ляпунова: исследовании устойчивости положения равновесия ДС. В этом методе заключение об устойчивости или неустойчивости делается на основе изучения поведения решений.

Вблизи положения равновесия нелинейную ДС можно заменить линейной ДС — линейным приближением к исходной ДС. Нельзя ли по устойчивости нулевого положения равновесия этой линейной системы судить об устойчивости положения равновесия исходной нелинейной ДС?

Пусть a является положением равновесия ДС $\dot{x} = f(x)$. Перейдем к новой неизвестной функции $z = x - a$. Для z согласно формуле Тейлора имеем новую ДС $\dot{z} = Az + R(z)$, где $A = \left(\dfrac{\partial f_k(a)}{\partial x_l}\right)_{k,l=1,2,\ldots,n}$ — матрица Якоби отображения $y = f(x)$ в точке a, а $R(z) = o(||z||)$ при $z \to 0$.

Если пренебречь малой вблизи точки $z = 0$ нелинейной добавкой $R(z)$, то возникает линейная ДС $\dot{z} = Az$, являющаяся линейным приближением к исследуемой нелинейной ДС вблизи ее положения равновесия $x = a$.

Замечание 1. Полученная линейная ДС часто называется также первым приближением к исходной нелинейной ДС, а еще и уравнением в вариациях, составленным вблизи положения равновесия a ДС.

Нашей ближайшей целью является выяснение условий, при выполнении которых по устойчивости нулевого положения равновесия линейной системы можно будет судить об устойчивости положения равновесия $x = a$ исходной нелинейной ДС.

Обсудим сначала условия устойчивости положения равновесия $z = 0$ линейной динамической системы $\dot{z} = Az$.

Пусть $\det A \neq 0$. Тогда $z = 0$ — единственное положение равновесия (почему?).

Оказывается, информацию об устойчивости или неустойчивости этого положения равновесия часто можно получить, рассматривая все собственные значения матрицы A — как вещественные, так и комплексные.

Определение. Назовем матрицу A *устойчивой*, если все ее собственные значения имеют отрицательные вещественные части.

Значение этого определения проявляется в справедливости следующего факта.

Теорема 1. *Если матрица A устойчива, то $z = 0$ является асимптотически устойчивым положением равновесия ДС $\dot{z} = Az$.*

Если хоть одно собственное значение матрицы A имеет положительную вещественную часть, то положение равновесия $z = 0$ этой ДС не устойчиво по Ляпунову.

Доказательство. Сначала рассмотрим частный случай, когда матрица A диагонализуема.

Обозначим через λ_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, ее собственные значения; напомним (гл. III, §3), что все они вещественны. Через v_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, обозначим соответствующие собственные векторы. Эта система собственных векторов образует базис в $\Re^n$.

Разложим начальное значение по базису $z_0 = \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k v_k$. Тогда $z(t, z_0) = \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k v_k e^{\lambda_k t}$.

Таким образом, все решения $z(t, z_0)$ определены на полуоси $[0, +\infty)$.

Воспользуемся тем, что в $\Re^n$ все нормы эквивалентны (см. гл. VI, §1). Определим норму вектора z_0 по формуле $||z_0|| = \sum\limits_{k=1}^{n} |\xi_k|$.

Теперь мы имеем оценку $||z(t, z_0)|| \leq e^{ct}||z_0||$, где $c = \max\limits_{k=1,2,\ldots,n} \operatorname{Re} \lambda_k < 0$.

Отсюда следует устойчивость по Ляпунову положения равновесия $z = 0$: ведь $||z(t, z_0)|| \leq ||z_0||$ (т. е. в определении устойчивости по Ляпунову можно взять $\delta = \varepsilon$). Из этой же оценки видно, что $||z(t, z_0)|| \to 0$ при $t \to +\infty$.

Аналогично теорема доказывается и в случае, когда матрица комплексно диагонализуема.

Доказательство теоремы в общем случае проводится по той же схеме, но технически оно более сложное. Воспользуемся леммой из гл. III, §7. Зафиксируем такое α, что $\max\limits_{1\le k\le n} \operatorname{Re}\lambda_k < \alpha < 0$. Тогда для матрицанта $U(t)$ будет справедлива оценка $||U(t)|| \le Me^{\alpha t}$. Следовательно, $||z(t, z_0)|| \le Me^{\alpha t}||x_0||$. Этим доказательство асимптотической устойчивости начала координат завершено.

Пусть теперь матрица A имеет такое собственное значение, что $\operatorname{Re}\lambda > 0$, а v — соответствующий ему собственный вектор. Возьмем начальное значение $z_0 = Cv$. Соответствующее вещественное решение задачи Коши равно $\operatorname{Re}(Cve^{\lambda t})$. При сколь угодно малых $|C|$ оно стремится (по модулю) к бесконечности при $t \to +\infty$. Значит, $z = 0$ — неустойчивое по Ляпунову положение равновесия.

Замечание 2. Для наглядности удобно пользоваться следующей гидродинамической интерпретацией. Каждую траекторию ДС будем рассматривать как след движущейся частицы жидкости, а саму ДС как модель движения потока жидкости.

Если матрица A устойчива, то положение равновесия назовем стоком: частицы жидкости стекают в положение равновесия.

Если $\operatorname{Re}\lambda > 0$ для всех собственных значений матрицы A, то будем положение равновесия $(0, 0)$ называть источником: частицы жидкости вытекают из него.

Приведем теперь теорему Ляпунова об устойчивости по линейному приближению.

Теорема 2. *Пусть $x = a$ — положение равновесия ДС* (1), *и пусть $f(x) \in C^1(S)$, где S — некоторая окрестность точки a.*

Если матрица Якоби $A = f'(a) = \left(\dfrac{\partial f_k(a)}{\partial x_l}\right)_{k,l=1,2,\ldots,n}$ устойчива, то положение равновесия $x = a$ является асимптотически устойчивым положением равновесия ДС (1).

Если хоть одно собственное значение матрицы A имеет положительную вещественную часть, то положение равновесия $x = a$ ДС (1) *неустойчиво по Ляпунову.*

Доказательство см., например, в книге академика Л. С. Понтрягина [12]. Заинтересованному читателю рекомендуем в этой же книге ознакомиться с приложением теоремы Ляпунова к теории автоматического регулирования, а именно, к устойчивой работе центробежного регулятора. Это приложение восходит к исследованию, проведенному в XIX в. почетным членом Петербургской академии наук, министром финансов России И. А. Вышнеградским. В современном виде оно было впервые представлено академиком А. А. Андроновым.

В заключение заметим, что в учебной и научной литературе используется также термин «устойчивость по первому приближению».

§ 5. Положения равновесия двумерной линейной системы. Основные положения равновесия и их фазовые портреты

Здесь будут обсуждены основные типы положений равновесия динамической системы $\dot{x} = Ax$ при $n = 2$ и приведены соответствующие фазовые картины расположения траекторий на фазовой плоскости. Соответствующая терминология принадлежит А. Пуанкаре. Впервые подробное исследование типов положений равновесия было проведено в магистерской диссертации будущего «отца русской авиации» Н. Е. Жуковского.

Пусть $\det A \neq 0$. Тогда точка $x = 0$ является единственным положением равновесия данной динамической системы.

Исследование проведем для ряда случаев, разделяющихся на подслучаи. При этом оказывается удобной гидродинамическая интерпретация. Считая, что ДС описывает поток частиц жидкости, можно использовать такие термины, как «сток» и «источник».

1) Матрица A имеет два различных вещественных собственных значения λ_1 и λ_2. Пусть им отвечают собственные векторы w_1 и w_2 соответственно. Отметим, что эти собственные векторы лишь случайно могут оказаться ортогональными. Поэтому декартова система координат $\{O, w_1, w_2\}$ будет, вообще говоря, косоугольной. В этой системе координат общее решение рассматриваемой динамической системы имеет вид

$$\xi_1 = c_1 e^{\lambda_1 t}, \quad \xi_2 = c_2 e^{\lambda_2 t}, \tag{5}$$

где c_1 и c_2 — произвольные постоянные.

При $c_1 = c_2 = 0$ имеем траектории, вырождающиеся в точку — положение равновесия (0, 0).

Если $c_1 = 0$, а $c_2 > 0$ или $c_2 < 0$, то траекторией является соответственно положительная или отрицательная полуось оси Ox_2. Аналогично, если $c_2 = 0$, а $c_1 > 0$ или $c_1 < 0$, то траекторией является полуось оси Ox_1.

Пусть $c_1 \neq 0$, $c_2 \neq 0$. Получить уравнения всех этих траекторий можно исключением из равенств (1) переменной t. Поскольку из (1) следуют равенства

$$\left(\frac{\xi_1}{c_1}\right)^{1/\lambda_1} = e^t, \quad \left(\frac{\xi_2}{c_2}\right)^{1/\lambda_2} = e^t,$$

то уравнением траекторий (за исключением положения равновесия и полуосей) будет следующее уравнение:

$$\left(\frac{\xi_1}{c_1}\right)^{1/\lambda_1} = \left(\frac{\xi_2}{c_2}\right)^{1/\lambda_2}. \tag{6}$$

Перейдем теперь к рассмотрению подслучаев конкретного расположения собственных значений.

1.1) Пусть $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$. В соответствии с теоремой 1 из §4 здесь положение равновесия (0, 0) асимптотически устойчиво.

Уравнение траекторий (2) можно переписать в виде

$$\xi_1 = c_1 \left(\frac{\xi_2}{c_2} \right)^{\lambda_1/\lambda_2}.$$

Пусть сначала $c_2 > 0$. Тогда $x_1 = c x_2^{\alpha}$, где $\alpha = \dfrac{\lambda_1}{\lambda_2} > 1$, а $c = \left(\dfrac{c_1}{c_2} \right)^{\alpha}$.

Таким образом, в I квадранте траектории — это параболы степени α, касающиеся оси Ox_2.

Аналогичный вид траектории имеют в остальных квадрантах (рис. 11).

На каждой траектории, включая полуоси, стрелками указаны направления движения при $t \to +\infty$. Из формул (2) видно, что $\xi_1 \to 0$, $\xi_2 \to 0$ и, значит, стрелки на всех траекториях (кроме начала координат — положения равновесия) должны быть направлены в сторону начала координат — положения равновесия.

Данное положение равновесия носит название *устойчивый узел*. В данном случае движение монотонно затухающее. С точки зрения гидродинамики, частицы в данном случае входят (втекают) в положение равновесия, т. е. имеет место сток.

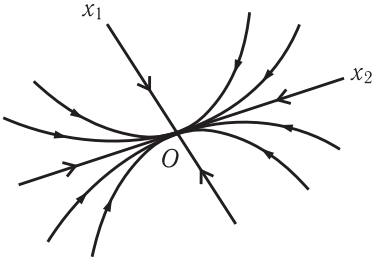


Рис. 11

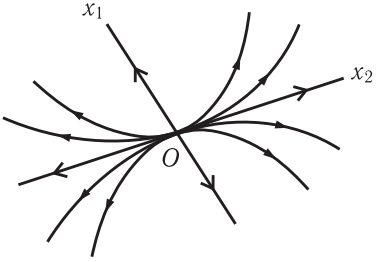


Рис. 12

Упражнение 1. Рассмотрите частный случай $\dot{x} = -x$, $\dot{y} = -2y$.

1.2) Пусть собственные значения таковы, что $0 < \lambda_2 < \lambda_1$. В соответствии с теоремой 2 в данном случае положение равновесия (0, 0) неустойчиво по Ляпунову.

Предоставляем читателю возможность убедиться, что здесь сохраняются все выводы предыдущего подслучая. Единственное исключение — это направление движение на траекториях: теперь стрелки должны быть направлены в противоположном направлении — от положения равновесия (рис. 12). Ведь из формул (2) видно, что теперь $\xi_1 \to \infty$, $\xi_2 \to \infty$ при $t \to +\infty$.

Данное положение равновесия носит название *неустойчивый узел*. Здесь каждая движущаяся частица экспоненциально быстро удаляется от положения равновесия, которое является источником.

Упражнение 2. Рассмотрите частный случай $\dot{x} = x$, $\dot{y} = 2y$.

1.3) Пусть собственные значения таковы, что $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$. Положение равновесия (0, 0) неустойчиво по Ляпунову. Уравнение траекторий здесь удобно записать так: $\left(\dfrac{\xi_1}{c_1}\right)^{-1/\lambda_1}\left(\dfrac{\xi_2}{c_2}\right)^{1/\lambda_2} = 1$. В первом квадранте, где $\xi_1 > 0$, $\xi_2 > 0$, имеем $\xi_1^{p_1}\xi_2^{p_2} = C$.

При $p_1 = p_2 = 1$ имеем ветвь обычной гиперболы $\xi_1\xi_2 = C$, асимптотически приближающуюся к положительным координатным полуосям. Аналогично, при других постоянных p_1 и p_2 имеем гиперболообразные кривые с асимптотами $\xi_1 = 0$ и $\xi_2 = 0$.

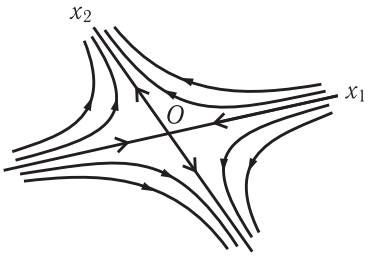


Рис. 13

В остальных квадрантах траектории также являются гиперболообразными кривыми (рис. 13).

Данное положение равновесия носит название *седло*. Можно сказать, что в случае седла движение полуустойчиво. По одним участкам траекторий точка экспоненциально быстро стремится войти в положение равновесия, а по другим — экспоненциально быстро уйти от него.

Упражнение 3. Рассмотрите частный случай $\dot{x} = -x$, $\dot{y} = 2y$.

2) Здесь мы предполагаем, что характеристическое уравнение имеет двукратный корень λ_0.

2.1) Пусть сначала матрица A имеет два линейно независимых собственных вектора u, v, соответствующих этому корню. В базисе из этих векторов общее решение ДС имеет вид

$$\xi_1 = c_1 e^{\lambda_0 t}, \quad \xi_2 = c_2 e^{\lambda_0 t}.$$

Как и всюду выше, кроме положения равновесия (0,0) траекториями являются и полуоси координатных осей. Если же $c_1 \neq 0$, $c_2 \neq 0$, то траекториями являются всевозможные лучи $\dfrac{\xi_1}{c_1} = \dfrac{\xi_2}{c_2}$.

В этом случае положение равновесия (0, 0) называется *дикритическим узлом*: при $\lambda_0 < 0$ (рис. 14) — *устойчивым* (сток), а при $\lambda_0 > 0$ (рис. 15) — *неустойчивым* (источник).

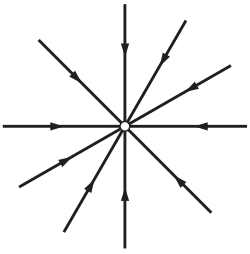


Рис. 14

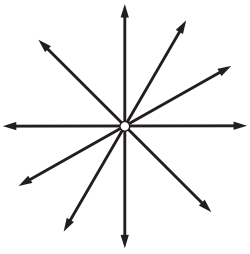


Рис. 15

2.2) Здесь исследуем вариант, когда собственному значению $\lambda_0 \neq 0$ (сток) отвечает одномерное собственное подпространство с базисным вектором u, так что $Au = \lambda_0 u$. В качестве второго вектора базиса в $\Re^2$ возьмем вектор v, такой, что $Av = \lambda_0 v + u$, называемый присоединенным вектором (см. определение в гл. III, §5).

В базисе u, v общее решение ДУ имеет вид

$$\xi_1 = (c_1 + c_2 t)e^{\lambda_0 t}, \quad \xi_2 = c_2 e^{\lambda_0 t}.$$

Упражнение 4. Выведите эту формулу, исходя из ДС

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = \lambda_0 \xi_1 + \xi_2, \\ \dot{\xi}_2 = \lambda_0 \xi_3. \end{cases}$$

Для построения траекторий ДС надо рассматривать формулы общего решения как параметрические представления траекторий с параметром $t \in (-\infty, +\infty)$.

Исследуем сначала вариант, когда $\lambda_0 < 0$. Приводимые ниже рассуждения и вычисления рекомендуем сопровождать рассмотрением рис. 16.

Положение равновесия $(0, 0)$ асимптотически устойчиво: $\xi_1 \to 0$, $\xi_2 \to 0$ при $t \to +\infty$.

Если $c_2 = 0$, то $\xi_1 = c_1 t$, $\xi_2 = 0$. В качестве траекторий получаем положение равновесия $(0, 0)$ и две полуоси $\xi_1 > 0$ и $\xi_1 < 0$.

Рассмотрим теперь, какими будут траектории в предположении, что $c_2 > 0$. Переменная ξ_2 является строго убывающей функцией от t. Следовательно, ξ_1 представляет собою однозначную функцию от ξ_2. Построим график этой параметрически заданной функции.

Поскольку $c_2 > 0$, то и $\xi_2 > 0$ (за исключением предельного случая $t = +\infty$). Далее (проверьте!) $\xi_1 < 0$ при $t < t_* = -\dfrac{c_1}{c_2}$, $\xi_1 = 0$ при $t = t_*$ и $\xi_1 > 0$ при $t > t_*$. Но, кроме того, $\xi_1 \to +0$, $\xi_2 \to +0$ при $t \to +\infty$.

Отметим также, что $\xi_1 \to -\infty$, когда $\xi_2 \to +\infty$ (при $t \to -\infty$).

Вычислим производную ξ_1 как функцию от ξ_2: $\dfrac{d\xi_1}{d\xi_2} = \dfrac{c_2 + \lambda_0(c_1 + c_2 t)}{c_2 \lambda_0}$. Мы видим, что ξ_1 как функция от ξ_2 на положительной полуоси (O, ξ_2) сначала строго убывает,затем имеет единственный положительный максимум $\left(\text{при } t = t^* = -\dfrac{1}{\lambda_0} - \dfrac{c_1}{c_2}\right)$, а далее строго возрастает.

Из этого же выражения для производной видно, что $\dfrac{d\xi_1}{d\xi_2} \to +\infty$ при $t \to +\infty$. Это означает,что каждая описываемая траектория имеет в начале координат «вертикальную» (т. е. параллельную оси ξ_2) касательную.

Наконец, пусть $c_2 < 0$. При замене c_2 на $-c_2$ и одновременно c_1 на $-c_1$ выражения для ξ_2 и ξ_1 меняют знак на противоположный. Это означает, что имеет место симметрия относительно начала координат,

которой можно воспользоваться для построения траекторий в полуплоскости $\xi_2 < 0$.

Мы рассмотрели случай $\lambda_0 < 0$. Положение равновесия (0, 0) здесь называется *устойчивым вырожденным узлом*.

Аналогично, если $\lambda_0 > 0$, то положение равновесия (0, 0) называется *неустойчивым вырожденным узлом*.

С точки зрения гидродинамики на рис. 16 и 17 представлены соответственно своеобразные сток и источник.

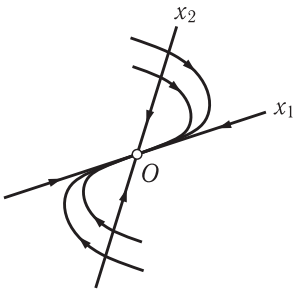


Рис. 16

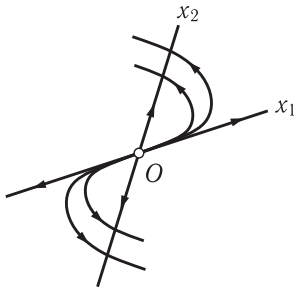


Рис. 17

Перейдем к рассмотрению случая, когда матрица имеет пару комплексно сопряженных собственных значений.

3) Пусть $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$, $\beta \neq 0$.

В гл. IV, §4 было показано, что в $\Re^2$ существует базис, в котором траектории описываются следующими равенствами:

$$\xi_1 = Re^{\alpha t}\cos(\beta t + \psi), \quad \xi_2 = Re^{\alpha t}\sin(\beta t + \psi),$$

где $R > 0$ и $\psi \in \Re$ — свободные параметры.

3.1) Пусть $\alpha = 0$. Значит, $\xi_1 = R\cos(\beta t + \psi)$, $\xi_2 = R\sin(\beta t + \psi)$. Исключая t, имеем $\xi_1^2 + \xi_2^2 = R^2$. Траектории — это семейство эллипсов: ведь система координат, вообще говоря, косоугольная (рис. 18).

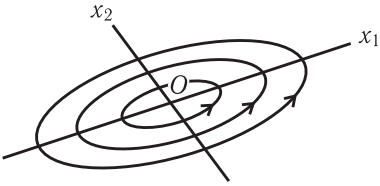


Рис. 18

Данное положение равновесия называется *центром*. Его окрестность заполнена замкнутыми траекториями. По каждой из них совершается периодическое движение. Подобное явление в природе изучается метеорологией и носит название вихрь.

Геометрически ясно, что центр — это устойчивое по Ляпунову положение равновесия, не являющееся асмптотически устойчивым.

Упражнение 5. Рассмотрите частный случай ДС $\dot{x} = -y$, $\dot{y} = x$.

3.2) Пусть $\alpha < 0$. Тогда (0, 0) — асимптотически устойчивое положение равновесия. При увеличении t на период $\dfrac{2\pi}{|\beta|}$ мы приходим к новым значениям ξ_1 и ξ_2 с меньшими по модулю значениями, так как множитель $e^{\alpha t}$ уменьшится. Таким образом, траектории являются

закручивающимися логарифмическими спиралями с направлением движения к положению равновесия (рис. 19).

Данное положение равновесия носит название *устойчивый фокус*. Движущаяся по траектории точка совершает затухающие (экспоненциально быстрые) колебания (сток в виде засасывающей воронки).

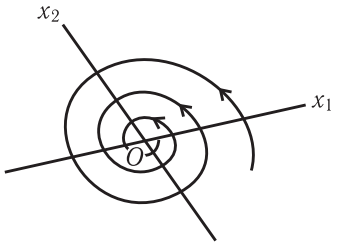


Рис. 19

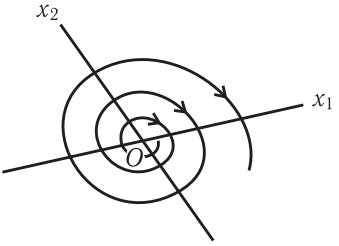


Рис. 20

Упражнение 6. Рассмотрите частный случай $\dot{x} = -y - x$, $\dot{y} = -x - y$.

3.3) Пусть $\alpha > 0$. Тогда (0, 0) — неустойчивое по Ляпунову положение равновесия. Фазовая картина аналогична предыдущей, но теперь спирали раскручиваются: направление движения идет от положения равновесия (рис. 20).

Данное положение равновесия носит название *неустойчивый фокус*. Движущаяся частица совершает колебания все большего размаха, экспоненциально быстро удаляющиеся от ее положения равновесия (спиралевидный источник).

Упражнение 7. Рассмотрите частный случай $\dot{x} = -y + x$, $\dot{y} = x + y$.

Если $\det A = 0$, то A имеет нулевое собственное значение. При этом возможны вырожденные положения равновесия, некоторые из них предлагаются в виде упражнения (см. [12]).

Упражнение 18. Рассмотрите случаи: а) $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 = 0$; б) $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 = 0$; в) $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$.

Естественным является следующий вопрос. Сохранится ли тип устойчивости (неустойчивости) при малом линейном или нелинейном (гладком) возмущении ДС? Оказывается, так обстоит дело в случаях узла, седла и фокуса. При этом вблизи положения равновесия качественно сохраняется геометрическая картина расположения траекторий. Эта проблема обсуждается также в §14 Дополнения I. В случае центра возникает известная проблема различения центра–фокуса: малое возмущение линейной ДС может перевести центр в фокус — устойчивый или неустойчивый.

Пример. Положение равновесия (0, 0) ДС $\dot{x} = -y$, $\dot{y} = x$ — это центр. Рассмотрим возмущенную ДС $\dot{x} = -y + \varepsilon x$, $\dot{y} = x + \varepsilon y$ с малым параметром $\varepsilon \in (-1, +1)$. При сколь угодно малом $|\varepsilon| \neq 0$ если $\varepsilon < 0$, то положение равновесия (0, 0) является устойчивым фокусом возмущенной ДС, а если $\varepsilon > 0$, то неустойчивым фокусом.

Упражнение 9. Пусть $r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$, $x_0 = r_0 \cos\alpha_0$, $y_0 = r_0 \sin\alpha_0$. Покажите, что решение задачи Коши для возмущенной ДС с начальными значениями x_0, y_0 дается формулами

$$x = r_0 e^{\varepsilon t} \cos(\alpha_0 + t), \quad y = r_0 e^{\varepsilon t} \sin(\alpha_0 + t).$$

Заметим, что при отсутствии линейных членов в окрестности положения равновесия в ДС, а также при $n = 3$ богатство возможностей типов положений равновесия резко возрастает. Здесь возможны геометрически довольно сложные экзотические положения равновесия.

В приложениях линейных ДУ наиболее важны устойчивые положения равновесия, такие, как устойчивый узел и устойчивый фокус. Сложнее, как показывает предыдущий пример, дело обстоит с центром.

Если дифференциальная математическая модель нелинейна, то в ходе изменения параметров может происходить смена устойчивости, могут рождаться новые устойчивые режимы, важным является слегка затронутый выше вопрос об устойчивости фазового портрета по отношению к малым возмущениям ДС (см. Дополнение I).

§ 6. Движение материальной точки на прямой. Консервативные и диссипативные системы

Линейное однородное ДУ второго порядка

$$m\ddot{x} + 2m\beta\dot{x} + Kx = 0$$

($m > 0$, $\beta \geq 0$, $K > 0$ — постоянные) описывает движение материальной точки массой m вдоль оси x под действием линейной упругой силы $-Kx$. Движение тормозится силой трения $-2m\beta\dot{x}$, пропорциональной скорости движения точки и направленной в сторону, противоположную этому движению [16].

Дадим простейшие физические интерпретации, носящие общее название «линейный механический осциллятор».

На оси Ox помещена линейная упругая пружина. Левый конец пружины закреплен, а к правому ее концу прикреплено тело массой m. Пружина подчиняется закону Гука: на массу действует сила $-Kx$ с упругой постоянной $K \geq 0$. Имеется еще тормозящая сила трения.

Это же ДУ описывает также колебания (осцилляции) линейного математического маятника, малые колебания груза, подвешенного на упругой пружине под действием силы тяжести, колебания тока в замкнутом контуре электрической цепи при наличии емкости, сопротивления и индуктивности и другие малые колебания (см. например, [59]).

Положим $\dfrac{K}{m} = \omega^2$, $\omega > 0$ и далее рассмотрим ДУ

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega^2 x = 0.$$

Этому ДУ соответствует следующая ДС:

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -2\beta y - \omega^2 x. \end{cases}$$

Перейдем к исследованию возможных типов положения равновесия (0, 0) этой ДС. Характеристическое уравнение имеет вид $\lambda^2 + 2\beta\lambda + \omega^2 = 0$.

Найдем собственные значения матрицы ДС. Положим $D = \beta^2 - \omega^2$.

Пусть наличествует сила трения настолько большая, что $\beta > \omega$, т. е. $D > 0$. Тогда матрица A имеет два отрицательные собственные значения $\lambda_1 = -\beta + \sqrt{D}$, $\lambda_2 = -\beta - \sqrt{D}$.

В этом случае начало координат является устойчивым узлом: при $t \to +\infty$ материальная точка неограниченно приближается к началу координат.

Если $D = 0$, то матрица A имеет отрицательное двукратное собственное значение $\lambda = -\beta$. Здесь точка (0, 0) — вырожденный устойчивый узел.

Пусть сила трения ($\beta > 0$) настолько мала, что $\beta < \omega$, т. е. $D < 0$. Тогда матрица A имеет два комплексно сопряженных собственных значения $\lambda_1 = -\beta + i\sqrt{-D}$, $\lambda_2 = -k - i\sqrt{-D}$. Положение равновесия является устойчивым фокусом. Материальная точка совершает затухающие колебания, неограниченно приближаясь к началу координат.

Замечание. При наличии трения положение равновесия (0, 0) всегда асимптотически устойчиво. Отсюда, в частности, следует, что всякое решение ДУ $x(t) \to 0$ при $t \to +\infty$.

Значительный интерес представляет случай, когда трение (сопротивление, потери в системе) отсутствует, т. е. $\beta = 0$. Тогда ДУ принимает вид

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

и называется ДУ гармонических колебаний.

Здесь дискриминант $D = -\omega^2$ и матрица A имеет чисто мнимые собственные значения $\lambda_1 = i\sqrt{\omega}$, $\lambda_2 = -i\sqrt{\omega}$. Положение равновесия является центром. Материальная точка совершает периодические колебания вокруг положения равновесия.

Всякое решение ДУ гармонических колебаний представимо в виде

$$x(t) = A\cos(\omega t - \delta)$$

($A \in \Re$ и $\delta \in [0, 2\pi)$ — произвольные постоянные).

Будем использовать общепринятую физическую терминологию. Постоянная A называется амплитудой гармонического колебания. Она характеризует размах, интенсивность колебаний. Фазой называется линейная по t функция $\theta = \omega t - \delta$, где постоянная δ называется сдвигом по фазе.

Величина ω называется собственной частотой. Число $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ является периодом гармонического колебания.

Отметим еще, что иногда ω называют круговой частотой, а частотой колебания называют величину $\nu = \dfrac{1}{T}$, равную числу колебаний за единицу времени.

Вернемся к случаю, когда наличествует трение. Пусть сначала оно настолько мало, что $\beta < \omega$. Общее решение ДУ имеет теперь вид

$$x(t) = Ae^{-\beta t}\cos(\sqrt{\omega^2 - \beta^2}t - \delta).$$

Оно описывает затухающие гармонические колебания с амплитудой $Ae^{-\beta t}$, где β называется коэффициентом затухания. Решение $x(t) \to 0$ при $t \to +\infty$. Оно не является периодической функцией, однако его нули, максимумы и минимумы повторяются с периодом $T = \dfrac{2\pi}{\sqrt{\omega^2 - \beta^2}}$.

Пусть теперь $\beta \geq \omega$. В этом случае говорят о сверхзатухании.

Упражнение 1. Каким будет общее решение в случаях сверхзатухания?

Остановимся еще на энергетических соображениях. Кинетическая энергия линейного осциллятора определяется формулой $E_k = \dfrac{1}{2}m\dot{x}^2$.

Потенциальная энергия, скрытая в пружине, определяется равенством $E_p = \dfrac{1}{2}Kx^2$.

Здесь учтено следующее правило: потенциальную энергию (в общем случае определяемую с точностью до постоянной) принято выбирать так, чтобы для невозмущенной системы ($x(0) = \dot{x}(0) = 0$) она равнялась нулю.

Полная механическая энергия — это $E = E_k + E_p$.

Если трение отсутствует ($\beta = 0$), то $\dot{E} = m\dot{x}\ddot{x} + Kx\dot{x} = 0$ в силу ДУ. Следовательно, $E(t) = \dfrac{1}{2}m\dot{x}^2(0) + \dfrac{1}{2}Kx^2(0) = \mathrm{const}$, т. е. полная энергия является первым интегралом ДС. С физической точки зрения последнее равенство представляет собою закон сохранения (механической) энергии. Пусть $x_0 \neq 0$ — начальное положение, а начальная скорость $\dot{x}(0) = 0$. Полная энергия $E = \dfrac{1}{2}Kx^2(0)$.

Физическая система (или описывающая ее ДС), для которой справедлив закон сохранения механической энергии, называется консервативной системой. Гамильтоновы системы (см. §2) дают широкий класс консервативных систем.

Пусть теперь имеется ненулевое трение. Повторяя те же вычисления, на этот раз получаем $\dot{E} = m\dot{x}\ddot{x} + Kx\dot{x} = -2\beta(\dot{x})^2 \leq 0$ в силу ДУ.

Упражнение 2. Пользуясь формулой общего решения $x(t)$, вычислите $E(t)$ и покажите, что $E(t) \leq E(0)e^{-2\beta t}$.

Таким образом, с течение времени энергия линейного осциллятора убывает, и закон сохранения механической энергии не выполняется.

В подобных случаях физическая система ДУ называется диссипативной. Происходит диссипация (рассеивание) энергии: вследствие

трения часть механической энергии переходит в другие виды энергии, например, в тепловую энергию. Для учета этого физического явления нужна была бы более точная математическая модель.

Любая реальная система является диссипативной. Однако если рассеивание энергии происходит медленно, то им можно пренебречь и рассмотреть консервативную систему, являющуюся приближением диссипативной системы. Так, например, движение Земли достаточно хорошо описывается консервативной системой Кеплера–Ньютона (см. §1 Дополнения I), если речь идет о столетиях. Если же счет идет на миллионы лет, то это движение будет правильнее описываться соответствующей диссипативной системой. На движение Земли будет оказывать влияние другие, обычно не учитываемые факторы, например, приливная сила океанов.

Подобное замечание относится, конечно, не только к задачам небесной механики, но и к любым консервативным задачам.

§ 7. Метод функций Ляпунова

Здесь обсуждается играющий исключительно важную роль в вопросах устойчивости решений ДУ второй метод Ляпунова — метод функций Ляпунова. В научной литература он называется также прямым методом Ляпунова, поскольку применяется непосредственно к ДУ, не используя информации о его решениях.

Дадим сначала несколько вспомогательных определений.

Определение 1. Функция $V(x)$, $V\colon \Re^n \to \Re$, заданная в окрестности S точки a, называется *положительно определенной* в S, если $V(a) = 0$, но $V(x) > 0$ для любых $x \in S$, $x \neq a$. Функция $W(x)$ называется *отрицательно определенной* в S, если функция $-W(x)$ является положительно определенной в S.

В линейной алгебре такого рода функции уже рассматривались. Так, например, положительно определенная (отрицательно определенная) квадратичная форма в $\Re^n$ является положительно определенной (отрицательно определенной) функцией в любой окрестности точки 0.

Например, функция $x^2 + y^4 + z^6$ вещественных переменных x, y, z является положительно определенной в любой окрестности точки $x = y = z = 0$.

Определение 2. Пусть в окрестности S точки a задана дифференцируемая функция $V(x)$ с вещественными значениями. *Производной функции V в силу ДС $\dot{x} = f(x)$* называется функция $\dot{V}(x) = V'(x)f(x)$.

Здесь $V'(x) = \left(\dfrac{\partial V}{\partial x_1}(x),\ \dfrac{\partial V}{\partial x_2}(x),\ \ldots,\ \dfrac{\partial V}{\partial x_n}(x)\right)$ — матрица-строка Якоби, а $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x))^{\mathrm{T}}$ — матрица-столбец правых частей динамической системы. Таким образом, выражение для скалярной функции $\dot{V}$ записано в матричной форме как произведение матрицы-строки на матрицу-столбец, и, значит, $\dot{V}(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\partial V}{\partial x_k}(x) f_k(x)$.

Поясним теперь определение 2 и обозначение $\dot{V}$. Пусть $x(t)$ — некоторое решение ДС на интервале (α, β) со значениями в S. Тогда по правилу дифференцирования композиции (сложной функции), учитывая ДС, на этом интервале получаем

$$\frac{d}{dt}V(x(t)) = V'(x(t))\dot{x}(t) = V'(x(t))f(x(t)) = \dot{V}(x(t)).$$

Таким образом, $\dot{V}$ является производной функции V вдоль всякой траектории ДС, или, что то же, вдоль векторного поля ДС.

Приведем, наконец, центральное определение этого параграфа.

Определение 3. Пусть a — положение равновесия ДС. Функция $V(x)$, определенная и дифференцируемая в окрестности S точки a, называется *функцией Ляпунова*, если:

1) $V(x)$ положительно определенная в S;

2) в S неположительна производная функции $V(x)$ в силу динамической системы, т. е. для всех $x \in S$ выполняется неравенство $\dot{V}(x) \leq 0$.

Если условие 2) выполняется в усиленной форме: $\dot{V}(x)$ отрицательно определенная функция в S, то $V(x)$ называется *строгой функцией Ляпунова*.

Приступим теперь к формулировке двух теорем Ляпунова, составляющих наиболее важную часть положений метода функций Ляпунова.

Теорема 1. *Пусть в окрестности положения равновесия ДС существует функция Ляпунова. Тогда это положение равновесия устойчиво по Ляпунову.*

Доказательство этой теоремы достаточно сложно и будет приведено в §9.

Теорема 2. *Пусть в окрестности S положения равновесия ДС существует строгая функция Ляпунова $V(x)$. Тогда это положение равновесия a асимптотически устойчиво.*

Строгое доказательство теоремы 2 будет дано в §9, а пока приведем наглядные геометрические соображения, подтверждающие справедливость утверждения теоремы. Рассмотрим окружающие положение равновесия a «сферы», т. е. замкнутые поверхности $\Sigma_R \subset S$ постоянного уровня $V(x) = R$. На каждой Σ_R определено два векторных поля: поле векторов внешней нормали $\operatorname{grad} V(x) = (V'(x))^{\mathrm{T}}$ и векторное поле ДС $f(x)$. Напомним известный из математического анализа факт: в направлении $\operatorname{grad} V(x)$ функция $V(x)$ возрастает быстрее всего. Но знак $\dot{V}(x) = (\operatorname{grad} V(x), f(x))$ совпадает со знаком косинуса угла между векторами $f(x)$ и $\operatorname{grad} V(x)$. Поэтому из неравенства $\dot{V}(x) < 0$ вытекает, что в каждой точке $x \in \Sigma_r$ вектор $f(x)$ образует тупой угол с вектором $\operatorname{grad} V(x)$. Это означает, что вектор $f(x)$ направлен внутрь области, ограниченной поверх-

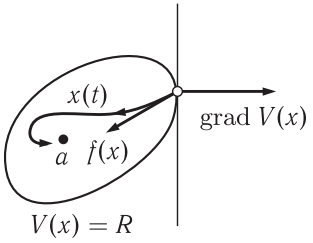


Рис. 21

ностью Σ_R и, следовательно, каждая траектория, пересекающаяся с Σ_R в точке x, входит в эту область. Уменьшая R, получаем аналогичную картину, и, следовательно, траектории стремятся войти в положение равновесия. На рис. 21 описанная ситуация изображена в плоском случае $x \in \Re^2$. Отмечены кривая постоянного уровня $V(x) = R$, касательная к ней в некоторой точке x, вектор нормали $\operatorname{grad} V(x)$ и образующий с ним тупой угол вектор $f(x)$.

Замечание. Как уже отмечалось, производную функции $V(x)$ в силу ДС можно называть также производной этой функции по направлению векторного поля $f(x)$. Это понятие является обобщением известного из математического анализа понятия производной функции $V(x)$ по направлению, заданному единичным вектором l: $\dfrac{\partial V}{\partial l}(x) = (\operatorname{grad} V(x), l)$. В определении $\dot{V}(x)$ учитываются не только направление вектора $f(x)$, но и его длина.

Производная $\dot{V}(x)$ играет центральную роль в групповом анализе ДУ (см. [28]), где носит название производной Ли (по имени норвежского математика Софуса Ли).

Построение функции Ляпунова в конкретной ситуации может оказаться трудной задачей. Причина заключается в отсутствии общей методики нахождения функции Ляпунова. Ниже мы ограничимся лишь примерами иллюстративного плана.

Пример 1. Рассмотрим ДС $\dot{x} = -x^3 + y^2$, $\dot{y} = -y^5 - xy$. Здесь $(0, 0)$ — единственное положение равновесия, и матрица A нулевая. Теорема об устойчивости по линейному приближению неприменима. Покажем, что $V(x, y) = x^2 + y^2$ является строгой функцией Ляпунова. Действительно, она положительно определенная, а ее производная в силу ДС равна $\dot{V}(x, y) = 2x(-x^3 + y^2) + 2y(-y^5 - xy) = -2x^4 - 2y^6$ и является отрицательно определенной функцией. Вывод: положение равновесия $x = 0$ асимптотически устойчиво.

Пример 2. Рассмотрим ДС $\dot{x} = -y - x(x^2 + y^2)$, $\dot{y} = x - y(x^2 + y^2)$.

Упражнение. Покажите, что начало коодинат $(0, 0)$ является единственным положением равновесия. Выпишите матрицу A и покажите, что ее собственные значения равны $\pm i$. Таким образом, и в этом примере теорема об устойчивости по линейному приближению неприменима.

Однако и здесь в качестве функции Ляпунова можно взять функцию $V(x, y) = x^2 + y^2$. Действительно, ее производная в силу ДС равна $\dot{V} = 2x(-y - x(x^2 + y^2)) + 2y(x - y(x^2 + y^2)) = -2(x^2 + y^2)^2$, т. е. $\dot{V}$ отрицательно определенная. По теореме 2 $(0, 0)$ — асимптотически устойчивое положение равновесия.

Выясним более детально характер положения равновесия. Пусть $x(t), y(t)$ — решение задачи Коши ДС с начальными данными x_0, y_0. Положим $r(t) = \sqrt{V(t)}$, где $V(t) = x^2(t) + y^2(t)$.

Пусть $r_0 = r(0)$, $x_0 = r_0 \cos\alpha_0$, $y_0 = r_0 \sin\alpha_0$.

Поскольку $\frac{d}{dt}V = -2V^2$, то, интегрируя это ДУ с разделяющимися переменными, находим $\frac{1}{V} = 2t + \frac{1}{V_0}$, где $V_0 = V(0)$. Следовательно, $V(t) = \frac{V_0}{1+2tV_0}$ и $r(t) = \frac{r_0}{\sqrt{1+2r_0^2 t}}$ (проверьте!).

Теперь решение задачи Коши для ДС можно записать в полярных координатах в виде

$$x = r(t)\cos(t+\alpha_0), \quad y = r(t)\sin(t+\alpha_0).$$

Поскольку $r(t) \to 0$ при $t \to +\infty$, то траектории ДС представляют собою закручивающиеся спирали и положение равновесия $(0, 0)$ является устойчивым фокусом. Правда, в отличие от линейного случая скорость закручивания здесь не экспоненциальная, а степенная.

§ 8. Положения равновесия консервативных динамических систем

Из теоремы 1 предыдущего параграфа вытекает следующее полезное предложение.

Теорема 1. *Если ДС имеет в некоторой окрестности S положения равновесия $x = a$ положительно определенный первый интеграл $V(x)$, то это положение равновесия устойчиво по Ляпунову.*

Доказательство. По определению первого интеграла для любого решения в $x(t)$ существует постоянная C такая, что $U(x(t)) = C$. Но тогда $\dot{V}(x) = 0$ в S, т. е. $V(x)$ является функцией Ляпунова ДС. (Геометрически равенство нулю производной $\dot{V}$ вдоль векторного поля ДС означает, что каждая траектория, проходящая через поверхность уровня $V(x) = C$, целиком лежит на этой поверхности.)

Применим этот результат к ДУ консервативной механической системы в $\Re^2$ (см. пример 1 из §2). $\ddot{x} + U'(x) = 0$.

Эквивалентная ДС имеет вид $\dot{x} = y$, $\dot{y} = -U'(x)$.

Пусть $U'(x_0) = 0$, так что точка x_0 является стационарной точкой потенциальной энергии, а точка $(x_0, 0)$ является положением равновесия ДС.

Первый интеграл (интеграл энергии) является функцией двух переменных и может быть записан в виде $V(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + U(x) - U(x_0)$. Если точка x_0 является точкой строгого локального минимума, то интеграл энергии в некоторой окрестности точки $(x_0, 0)$ является положительно определенной функцией. Из теоремы 1 вытекает теперь следующее предложение.

Следствие. *Если точка x_0 является точкой строгого локального минимума потенциальной энергии $U(x)$, то положение равновесия $(x_0, 0)$ устойчиво по Ляпунову.*

Замечание 1. Данный факт был открыт Лагранжем. В результате его глубокого обобщения Ляпуновым и появилось понятие функций Ляпунова, называемых иногда энергетическими функциями.

В терминах потенциальной энергии нетрудно дать и достаточные условия неустойчивости по Ляпунову положения равновесия. Отметим, что выявление неустойчивости крайне важно для конструирования правильно работающих реальных механизмов (см. [54]).

Теорема 2. *Пусть потенциал* $U\colon \Re \to \Re$ *и* $U(x)$ *дважды непрерывно дифференцируем в окрестности точки* x_0. *Пусть* $U'(x_0) = 0$, $U''(x_0) < 0$. *Тогда точка* $(x_0, 0)$ *является неустойчивым по Ляпунову положением равновесия ДС* $\dot{x} = y$, $\dot{y} = -U'(x)$.

Данная теорема означает, что если x_0 — точка строгого локального максимума потенциальной энергии, то точка $(x_0, 0)$ является неустойчивым по Ляпунову положением равновесия.

Доказательство. Линеаризованная ДС

$$\begin{cases} \dot{u} = v, \\ \dot{v} = -U''(x_0)u, \end{cases}$$

где $u = x - x_0$, $v = y$, имеет собственные значения (проверьте!) $\pm\sqrt{-U''(x_0)}$, и одно из них положительно. По теореме 2 из §4 положение равновесия неустойчиво.

В качестве обобщения рассмотрим консервативную механическую систему ($x \in \Re^n$, см. пример 3 из §2) $\ddot{x} + \operatorname{grad} U(x) = 0$. Эквивалентная ДС — это $\dot{x} = y$, $\dot{y} = -\operatorname{grad} U(x)$.

В качестве следствия, как и выше, вытекает

Теорема 3. *Пусть потенциал* $U(x)$, $U\colon \Re^n \to \Re$, *является положительно определенной функцией в некоторой окрестности точки* x_0 *и дважды непрерывно дифференцируемой в этой окрестности. Пусть его первый дифференциал* $dU(x_0, h) = 0$. *Если второй дифференциал* $d^2U(x_0, h)$ *является положительно определенной квадратичной формой, то положение равновесия* $(x_0, 0)$ *ДС устойчиво по Ляпунову.*

Действительно, в условиях теоремы потенциальная функция $z = U(x)$ имеет в точке x_0 строгий локальный минимум. Здесь прикладники любят говорить о «потенциальной яме» в точке x_0.

Обобщая результат теоремы 2, остановимся на вопросе о неустойчивости. Для понимания следующих ниже рассуждений читателю, забывшему линейную алгебру, рекомендуем основательно освежить свои знания; если же читатель вовсе не знаком с линейной алгеброй, то он может эти рассуждения пропустить.

Без ограничения общности будем считать, что $x_0 = 0$. Пусть $U(0) = 0$, $U'(0) = 0$. Воспользуемся второй формулой Тейлора и соответствующую исходной ДС линеаризованную ДС в окрестности точки $(0, 0)$ запишем в виде

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = Bx, \end{cases}$$

где $B = -U''(0)$ — симметрическая матрица из вторых частных производных функции $U(x)$ в точке $x = 0$. ФСР линеаризованой ДС будем искать в виде $x = ue^{\lambda t}$, $y = ve^{\lambda t}$. Подставляя в ДС, получаем $\lambda u = v$, $\lambda v = Bu$, откуда, исключая v, имеем $Bu = \lambda^2 u$. Пусть матрица B положительна, т. е. $(Bx, x) > 0$ при $x \neq 0$. Тогда все ее собственные значения положительны, а из собственных векторов матрицы B (вследствие ее симметричности) можно построить базис в $\Re^n$. Таким образом, матрица линеаризованной ДС имеет n положительных и n отрицательных собственных значений. Из теоремы о неустойчивости по линейному приближению вытекает справедливость следующего факта.

Теорема 4. *Пусть* $U(0) = 0$, $U'(0) = 0$, *а матрица* $U''(0)$ *отрицательная. Тогда положение равновесия* $(0, 0)$ *нелинейной ДС неустойчиво по Ляпунову.*

Замечание 2. У соответствующей линеаризованной ДС $(0, 0)$ является центром. Наличие нелинейных добавок высшего порядка малости привело к изменению типа положения равновесия (ср. пример из §5).

Упражнение. Покажите, что решение задачи Коши с начальными данными x_0, y_0 следующей ДС:

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + x(x^2 + y^2), \\ \dot{y} = x + y(x^2 + y^2) \end{cases}$$

можно задать формулами

$$x = r(t)\cos(t + \alpha_0), \quad y = r(t)\sin(t + \alpha_0),$$

где $r(t) = \dfrac{r_0}{\sqrt{1 - 2r_0^2 t}}$. Убедитесь, что ни одно из этих решений, кроме тривиального, не существует на полуоси $[0, +\infty)$. Таким образом, для этой ДС положение равновесия $(0, 0)$ неустойчиво по Ляпунову.

Замечание 3. В связи с теоремой об устойчивости по линейному приближению полезно отметить (без доказательства) следующий факт.

Пусть a — положение равновесия ДС $\dot{x} = f(x)$, и пусть все собственные значения матрицы $A = f'(a)$ различны, причем их вещественные части отличны от нуля. Тогда в некоторой достаточно малой окрестности положения равновесия a геометрическая (топологическая) структура траекторий нелинейной ДС будет той же, что у линеаризованной ДС. Здесь принято говорить о структурной устойчивости векторного поля ДС в этой окрестности.

В примере 2 и упражнении, рассмотренных в §7, структурная устойчивость отсутствует. Здесь собственные значения чисто мнимые, и малое (линейное или нелинейное) возмущение может привести, как мы видели, к принципиально иной геометрической структуре траекторий вблизи точки $(0, 0)$. Подробнее о структурной устойчивости см. в Дополнении I.

§ 9. Доказательства теорем Ляпунова

Перейдем к доказательству теорем Ляпунова из §7. В дальнейшем будем считать, что ДС имеет своим положением равновесия точку $x = 0$, поскольку общий случай сводится к этому с помощью замены $x = a + z$.

Доказательство теоремы 1. 1) Возьмем $\varepsilon > 0$ настолько малым, чтобы сфера $\sigma_\varepsilon = \{x \in \Re^n : \|x\| = \varepsilon\} \subset S$. Поскольку эта сфера является замкнутым ограниченным множеством в $\Re^n$, а $V(x)$ непрерывна на ней, то $V(x)$ достигает на ней своего наименьшего значения $m_\varepsilon = \min\limits_{\|x\|=\varepsilon} V(x)$.

2) Функция $V(x)$ непрерывна в точке $x = 0$, и $V(0) = 0$. Следовательно, по числу m_ε можно указать такое δ, что для любых x, удовлетворяющих неравенству $\|x\| < \delta$, выполняется неравенство $V(x) < m_\varepsilon$.

3) Покажем, что указанное δ является искомым. А именно, если $|x_0| \le \delta$, то решение будет определено на всей полуоси $[0, +\infty)$ и при этом будет выполняться неравенство $\|x(t, x_0) - a\| < \varepsilon$.

Действительно, пусть $|x_0| < \delta$. По теореме Коши решение $x = x(t, x_0)$ ДС определено на некотором полуинтервале $[0, t_1)$. Рассмотрим на этом полуинтервале вспомогательную функцию $\varphi(t) = V(x(t, x_0))$. Поскольку $\dot{V}(x) \le 0$ в S, имеем неравенство $\dot{\varphi}(t) \le 0$, $t \in [0, t_1)$. Следовательно, функция $\varphi(t) = V(x(t, x_0))$ убывает на этом интервале. Но тогда выполняется неравенство $V(x(t, x_0)) \le V(x_0) < m_\varepsilon$. Отсюда следует, что $x(t, x_0)$ лежит внутри сферы σ_ε при всех t: $0 \le t \le t_1$. Действительно, если бы $|x(t, x_0)| = \varepsilon$, то в соответствии с 1) выполнялось бы неравенство $V(x(t, x_0)) \ge m_\varepsilon$, что невозможно.

4) Итак, часть траектории, начинающаяся в x_0 и кончающаяся в точке $x(t_1)$, лежит внутри сферы σ_ε. Но тогда, продолжая эту часть трактории вправо по t, получим (подробнее см. в гл. VI, §5), что вся полутраектория $x(t)$, $t \ge 0$, лежит в той же сфере. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2. Продолжим рассуждения доказательства теоремы 1. По $\varepsilon > 0$ найдено $\delta > 0$, такое, что кусок трактории $x(t, x_0)$, $t \ge 0$, лежит внутри сферы σ_ε, если $\|x_0\| < \delta$. Покажем, что $x(t, x_0) \to 0$, если $t \to +\infty$.

В ходе доказательства теоремы 1 установлено, что функция $\omega(t) = V(x(t, x_0))$ убывает. Но она ограничена снизу нулем, и, значит, $\omega(t) \to A \ge 0$ при $t \to +\infty$.

Покажем, что предположение $A > 0$ приводит к противоречию.

В этом случае найдется $\alpha \in (0, \varepsilon)$, такое, что $\|x(t, x_0)\| \ge \alpha$ для всех $t \ge 0$ (в противном случае нашлась бы последовательность t_k, такая, что $V(x(t, x_0)) \to 0$, но это невозможно, ибо $V(0) = 0$).

В кольце $\alpha < \|x\| < \varepsilon$ функция $\dot{V}(x(t, x_0))$ строго отрицательна, т. е. найдется $k > 0$, такое, что $\dot{V}(x(t, x_0)) < k$ для всех $t \ge 0$. Интегрируя это неравенство, получаем, что $V(x(t, x_0)) \le V(x_0) - kt < 0$ для всех $t \ge 0$. Это противоречит предположению, что $V(x(t, x_0)) \ge A > 0$.

Итак, $A = 0$, и теорема доказана.

§ 10. Теорема Четаева о неустойчивости

Рассмотрим теперь теорему Н. Г. Четаева о неустойчивости по Ляпунову положения равновесия динамической системы.

Определение. Пусть функция $V(x)$ непрерывно дифференцируема в окрестности S положения равновесия $x = a$ ДС (1), и пусть существует область $G \subset S$, для которой точка a является граничной. Функция $U(x)$ называется *функцией Четаева* ДС (1), если $V(x) > 0$, $\dot{V}(x) > 0$ в G.

Заметим, что возможны два случая: 1) G содержит выколотую окрестность точки a; 2) G имеет часть границы $\Gamma \subset S$, не сводящуюся к точке a, на которой $V(x) = 0$.

Теорема. *Если в окрестности положения равновесия ДС существует функция Четаева, то это положение равновесия неустойчиво по Ляпунову.*

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что $a = 0$.

Теорема будет доказана, если будет установлено, что существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что для любого $\delta > 0$ найдутся x_0 с $||x_0|| < \delta$ и $t_0 > 0$ такие, что для траектории $x = x(t, x_0)$ будет выполняться неравенство $||x(t_0, x_0)|| \geq \varepsilon_0$. Иначе говоря, найдется траектория, начинающаяся сколь угодно близко к положению равновесия $x = 0$, но выходящая при некотором t_0 из шара $||x|| \leq \varepsilon_0$. Мы воспользовались отрицанием определения устойчивости по Ляпунову положения равновесия $x = 0$ (продумайте построение отрицания для данной ситуации!).

Итак, рассмотрим траекторию $x = x(t, x_0)$ с таким $x_0 \in G$, что $||x_0|| < \delta$. Эта траектория исходит из точки x_0, и по непрерывности существует $t_1 > 0$, такое, что $x(t, x_0) \in G$ на полуинтервале $[0, t_1)$.

Рассмотрим функцию $\theta(t) = V(x(t, x_0))$. Так как $\dot{\theta}(t) = \dot{V}(x(t, x_0)) > 0$, то $\theta(t)$ строго возрастает на $[0, t_1)$ и, следовательно, $V(x(t, x_0)) > V(x_0)$ при $t \in (0, t_1)$.

Отсюда следует, что рассматриваемая траектория не может подойти сколь угодно близко к части границы Γ, на которой $V(x) = 0$.

Заметим теперь, что в замкнутой ограниченной области $H = \{x \in G$: $V(x) \geq V(x_0)\}$ функция $\dot{V}(x)$ ограничена снизу положительным числом: $\dot{V}(x) \geq \alpha > 0$.

Зафиксируем $\varepsilon_0 > 0$, настолько малое, что сфера $||x|| = \varepsilon_0$ пересекает область G. В шаре $||x|| \leq \varepsilon_0$ функция $V(x)$ (как непрерывная функция) ограничена. Допустим, что траектория при всех $t \geq 0$ не выходит из этого шара. Интегрируя неравенство $\dot{V}(t, x_0) > 0$, получаем $V(x(t, x_0)) = V(x_0) + \int_0^t \dot{V}(s, x_0)ds \geq V(x_0) + \alpha t$. Это невозможно вследствие ограниченности $V(x)$. Следовательно, существует $t_0 > 0$, такое, что $||x(t_0, x_0)|| > \varepsilon_0$. Теорема полностью доказана.

Заметим, что возможен случай, когда G содержит выколотую окрестность точки a. В этом случае утверждение теоремы принадлежит Ляпунову.

Пример 1. Рассмотрим ДС $\dot{x} = y + xy^2$, $\dot{y} = -x + x^2y$.

Исследуем на устойчивость ее единственное положение равновесия $(0, 0)$.

Собственные значения матрицы линеаризованной ДС равны $\pm i$, и теорема об устойчивости по линейному приближению неприменима.

Введем положительно определенную функцию $V = x^2 + y^2$.

Ее производная в силу исходной ДС равна $\dot{V} = 4x^2y^2$.

Если в качестве области G взять первый квадрант ($x > 0$, $y > 0$), то в нем $\dot{V} > 0$, а на его границе $\dot{V} = 0$. По теореме Четаева положение равновесия исходной ДС не является устойчивым по Ляпунову.

Пример 2. Исследуем на устойчивость положение равновесия $(0, 0)$ ДС $\dot{x} = x^2 + xy^2$, $\dot{y} = -x^2y - y^3$. Собственные значения матрицы линеаризованной ДС равны 0, и теорема об устойчивости по линейному приближению неприменима.

Введем функцию $V = x^2 - y^2$.

Ее производная в силу исходной ДС, равная $\dot{V} = 2(x^2 + y^2)^2$, положительно определенная.

Если в качестве области взять $G = \{x, y \mid x > y > 0\}$, то в ней $V > 0$ и $\dot{V} > 0$. Здесь Г сводится к точке $(0, 0)$. По теореме Четаева положение равновесия исходной ДС не является устойчивым по Ляпунову.

Пример 3. Рассмотрим ДС $\dot{x} = x^2 + 2y^5$, $\dot{y} = xy^2$. Оказывается, функцию Четаева можно найти в виде $V = x^2 - y^4$. Проверьте, что $\dot{V} = 2x^3$. Теперь нетрудно убедиться, что в области $G = \{x, y \mid x > y^2, y > 0\}$ имеем $V > 0$ и $\dot{V} > 0$. Значит, положение равновесия $(0, 0)$ неустойчиво по Ляпунову.

§ 11. Исследование устойчивости колебаний нелинейного математического маятника при наличии трения

Рассмотрим ДУ второго порядка

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + a\frac{d\varphi}{dt} + b\sin\varphi = 0$$

($a \geq 0$, $b > 0$ — постоянные). Данное уравнение описывает, в частности, движения нелинейного математического маятника в сопротивляющйся среде. Оно было рассмотрено еще великим Леонардом Эйлером.

Коэффициенты a и b зависят от длины подвеса маятника, его массы и силы тяжести, коэффициент a характеризует еще и сопротивление среды или наличие трения в точке подвеса маятника, $\varphi(t)$ — угол отклонения маятника от вертикали, направленной вниз. Более точная

физическая интерпретация: колебания центра тяжести подвешенного твердого тела под действием силы тяжести.

Любопытно отметить, что подобное ДУ возникает во многих прикладных задачах теории нелинейных колебаний. В частности, оно является асимптотическим уравнением движения электрона в элементарной теории лазера на свободных электронах (см. [33]). Полагая $\varphi = x$, $\dfrac{d\varphi}{dt} = y$, сведем ДУ к системе ДУ первого порядка

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -ay - b\sin x. \end{cases}$$

Имеем два существенных положения равновесия: точку $(0, 0)$ и точку $(\pi, 0)$. Другие положения равновесия роли не играют. Вследствие 2π-периодичности функции $\sin x$ естественно считать, что $x \in [-\pi, \pi]$ и отождествить точку $x = -\pi$ с точкой $x = \pi$ (см. Дополнение I).

Вблизи положения равновесия $(0, 0)$, поскольку $\sin x = x + o(x)$, $x \to 0$, имеем линеаризованную систему ДУ

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -ay - bx. \end{cases}$$

Пусть сначала $a > 0$, т. е. наличествует трение. Характеристическое уравнение $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ имеет при $a^2 > 4b$ два различных отрицательных корня, совпадающие при $a^2 = 4b$. Если же $a^2 < 4b$ и $a > 0$, то характеристическое уравнение имеет два комплексных корня с отрицательной вещественной частью (проверьте!).

Таким образом, при наличии трения положение равновесия $(0, 0)$ асимптотически устойчиво.

Пусть $a = 0$, т. е. трение отсутствует. Здесь характеристическое уравнение имеет чисто мнимые корни. Поэтому мы не можем воспользоваться теоремой об устойчивости по линейному приближению. Однако здесь удается найти функцию Ляпунова.

Рассмотрим нелинейную ДС $\dot{x} = y$, $\dot{y} = -b\sin x$. Умножим второе ДУ на y и, воспользовавшись первым ДУ, получим $y\dot{y} = -b\sin x\dot{x}$, откуда $\dfrac{1}{2}y^2 + b(1 - \cos x) = \mathrm{const}$.

Значит, $U(x, y) = \dfrac{1}{2}y^2 + b(1 - \cos x)$ является первым интегралом ДС. Физический смысл: $U(x, y)$ — это полная энергия маятника в отсутствии трения.

Упражнение. Докажите положительную определенность U в некоторой достаточно малой окрестности точки $(0, 0)$.

По следствию из теоремы 1, § 8 $U(x, y)$ является функцией Ляпунова и по теореме Ляпунова в случае $a = 0$ положение равновесия (0,0) устойчиво по Ляпунову.

Перейдем к исследованию вопроса об устойчивости положения равновесия $(\pi, 0)$.

Полагая $x = \pi + z$, $y = y$, придем к следующей линеаризованной ДС:

$$\begin{cases} \dot{z} = y, \\ \dot{y} = -ay + bz. \end{cases}$$

Теперь соответствующее характеристическое уравнение имеет два вещественных корня, один из которых положителен (проверьте!). Значит это положение равновесия неустойчиво по Ляпунову (почему?).

Более подробно см. в §7 Дополнения I.

§ 12. Устойчивость решений систем дифференциальных уравнений

Обсужденная выше теория устойчивости была разработана А. М. Ляпуновым для значительно более общих ситуаций. Остановимся на этом вкратце. Подробное изложение этой теории читатель найдет в [33, 3] и других книгах.

Рассмотрим систему ДУ

$$\dot{x} = f(x, t) \tag{7}$$

в предположении, что $f(x, t)$, $\dfrac{\partial f(x, t)}{\partial x}$ непрерывны при всех $x \in D$ — области в $\Re^n$ — и $t \in [t_0, +\infty)$. Пусть это ДУ имеет на полуоси $[t_0, +\infty)$ решение $x^*(t)$.

Определение 1. Решение $x^*(t)$ называется *устойчивым по Ляпунову*, если:

1) существует $\sigma > 0$, такое, что для любых x_0: $|x_0 - x^*(t_0)| < \sigma$ решение $x(t, x_0)$ задачи Коши $\dot{x} = f(x, t)$, $x(t_0) = x_0$ определено на всем $[t_0, +\infty)$;

2) для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что при всех x_0, таких, что $|x_0 - x^*(t_0)| < \delta$, и для всех $t \in [t_0, +\infty)$ выполняется неравенство $|x(t, x_0) - x^*(t)| < \varepsilon$.

Если, кроме того, $|x(t, x_0) - x^*(t)| \to 0$, то решение $x^*(t)$ называется асимптотически устойчивым.

Без ограничения общности можно считать далее, что исследуемое на устойчивость решение $x^*(t)$ является тривиальным и $t_0 = 0$, т. е. $x^*(t) = 0$ для всех $t \geq 0$. Для проверки этого утверждения достаточно перейти в ДУ к новым переменным $z = x - x^*(t)$, $\tau = t - t_0$.

Для исследования на устойчивость тривиального решения системы ДУ (3) применяется метод функций Ляпунова в его более общем варианте.

Функция $V(x, t)$ называется положительно определенной, если существует не зависящая от t положительно определенная функция $W(x)$, непрерывная в некоторой окрестности точки $x = 0$ и такая, что

$V(x, t) \geq W(x)$. Функция $V(x, t)$ называется отрицательно определенной, если $-V(x, t)$ является положительно определенной.

Пусть функция $V(x, t)$ непрерывно дифференцируема при всех $t > t_0$ и $||x|| < h$. Выражение

$$\dot{V}(x, t) = \frac{\partial V(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial V(x, t)}{\partial x} f(x, t)$$

называется производной функции $V(x, t)$ в силу системы ДУ (3).

Определение 2. Непрерывно дифференцируемая функция $V(x, t)$ называется *функцией Ляпунова* системы ДУ (3), если:

1) $V(x, t)$ является положительно определенной,

2) $V(x, t) \to 0$ при $x \to 0$ равномерно по $t \in [t_0, +\infty)$,

3) $\dot{V}(x, t) \leq 0$.

Функция Ляпунова называется *строгой функцией Ляпунова*, если условие 3) выполняется в усиленной форме:

3′) $\dot{V}(x, t)$ является положительно определенной функцией в выколотой окрестности точки $x = 0$.

Заметим,что в случае выполнения условия 2) обычно говорят, что функция $V(x, t)$ имеет при $x \to 0$ бесконечно малый высший предел.

Справедлива следующая теорема, принадлежащая А. М. Ляпунову.

Теорема. *Пусть* $f(0, t) = 0$ *на* $[t_0, +\infty)$. *Если для системы ДУ* (3) *существует функция Ляпунова, то тривиальное решение этой системы ДУ устойчиво по Ляпунову. Если же функция Ляпунова строгая, то* $x = 0$ *является асимптотически устойчивым решением системы ДУ* (3).

Пример 1. Рассмотрим в $\Re$ ДУ $\dot{x} = -e^{-t}x$. Его общее решение равно $x = \frac{x_0}{e} e^{e^{-t}}$, где $x_0 = x(0)$, и, следовательно, его тривиальное решение $x = 0$ устойчиво по Ляпунову.

Однако $x \to x_0$ при $t \to +\infty$, и, значит, положение равновесия $x = 0$ не является асимптотически устойчивым.

Противоречия с утверждением теоремы нет. В качестве функции Ляпунова можно взять $V(x, t) = x^2$. При этом $\dot{V} = -2x^2e^{-t}$ отрицательна, но не является отрицательно определенной (почему?).

Пример 2. Исследуем на устойчивость тривиальное решение $x = 0$, $y = 0$ системы ДУ

$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{x}{1+t} - (1+t)^2 xy^2, \\ \dot{y} = -\dfrac{y}{1+t}. \end{cases}$$

Зададим начальные условия: $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$. Интегрируя второе ДУ, затем подставляя найденное $x = x(t, x_0)$ в первое уравнение, получим для определения y линейное ДУ. На этом пути находим (проверьте!):

$$x = x_0(1+t)e^{-y_0^2 t}, \quad y = \frac{y_0}{1+t}.$$

Эти решения определены на всей полуоси $[0, +\infty)$ и стремятся к нулю при $t \to +\infty$. Казалось бы, что тривиальное решение асимптотически устойчивое. Но это не так! Оно не является устойчивым по Ляпунову.

Действительно, возьмем $x_0 = \delta^2$, $y_0 = \delta$. Тогда

$$x\left(\frac{1}{\delta^2}\right) = \delta^2\left(1 + \frac{1}{\delta^2}e^{-1}\right) \geq e^{-1}$$

и, следовательно, устойчивости по Ляпунову нет. Таким образом, требование устойчивости по Ляпунову в определении асимптотической устойчивости является существенным.

Пример 3. Исследуем на устойчивость тривиальное решение $x = 0$, $y = 0$ линейной системы ДУ

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + \dfrac{x}{1+t}, \\ \dot{y} = x + \dfrac{y}{1+t}. \end{cases}$$

Упражнение. Покажите, что для данной ДС решение задачи Коши с начальными данными x_0, y_0 дается формулами:

$$x = r_0(1+t)\cos(\alpha_0 + t), \quad y = r_0(1+t)\sin(\alpha_0 + t).$$

Таким образом, решения системы ДУ вблизи окрестности тривиального решения ведут себя аналогично решениям в случае положения равновесия типа «неустойчивый фокус».

В работах А. М. Ляпунова и его последователей были исследованы также вопросы устойчивости периодических решений ДУ и, в частности, ДС (см. [33]).

Пример 4. Видоизменяя пример 2 из §7, рассмотрим ДС

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - x(x^2 + y^2 - 1), \\ \dot{y} = x + y(x^2 + y^2 - 1). \end{cases}$$

Эта ДС имеет замкнутую траекторию (цикл) $x^2 + y^2 = 1$, являющуюся окружностью радиуса 1. Действительно, зафиксируем точку x_0, y_0, лежащую на этой окружности, в качестве начальных данных для нашей ДС. Пусть $r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$, а α_0 таково, что $x_0 = r_0\cos\alpha_0$, $y_0 = r_0\sin\alpha_0$.

Непосредственной проверкой убеждаемся, что $x = \cos t$, $y = \sin t$ — решение ДС.

Как и в примере 2 из §7, умножим первое уравнение ДС на $2x$, второе на $2y$, и после сложения полученных равенств получаем ДУ Бернулли для определения $r^2 = x^2 + y^2$ (проверьте!): $\dot{r^2} = -2r^2(r^2 - 1)$.

Упражнение 1. Покажите, что решение этого ДУ с начальным условием $r^2(0) = r_0^2$ дается формулой $r^2(t) = \dfrac{r_0^2}{r_0^2 + (1 - r_0^2)e^{-2t}}$ и, таким образом, $r(t) = \dfrac{r_0}{\sqrt{r_0^2 + (1 - r_0^2)e^{-2t}}}$.

Упражнение 2. Покажите, что решение исходной ДС с начальным условием $x(0) = x_0$, $y_0 = y_0$ дается формулами $x = r(t)\cos(\alpha_0 + t)$, $y = r(t)\sin(\alpha_0 + t)$.

Указание. Воспользуйтесь тем, что $r(t)$ является решением задачи Коши $\dot{r} = -r(r^2 - 1)$, $r(0) = r_0$.

Поскольку $r(t) \to 1$ при $t \to +\infty$, то при $r_0 \neq 0$, $r_0 \neq 1$ траектории ДС спиралевидно наматываются на траекторию (окружность) $r = 1$, неограниченно приближаясь к ней. Таким образом, рассмотренная ДС имеет устойчивую в описанном смысле замкнутую траекторию $x^2 + y^2 = 1$.

Определение 3. Изолированная замкнутая траектория (вблизи которой нет других замкнутых траекторий) называется *предельным циклом*.

В данном примере устойчивость предельного цикла понимается как орбитальная устойчивость (см. Дополнение I).

Задача. Покажите, что предельный цикл $r = 1$ является орбитально неустойчивой траекторией следующей ДС:

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + x(x^2 + y^2 - 1), \\ \dot{y} = x + y(x^2 + y^2 - 1). \end{cases}$$

В Дополнении II рассмотренные примеры устойчивого и неустойчивого предельных циклов изучаются с применением компьютерной системы Mathematica.

Дадим краткую историческую справку. Впервые возможность существования предельных циклов у ДС была открыта А. Пуанкаре. В 1920 г. Ван дер Поль предложил математическую модель работы триодного колебательного контура с предельным циклом. В трудах выдающегося советского ученого А. А. Андронова и его научной школы была создана общая теория нелинейных колебаний и исследованы устойчивые предельные циклы, возникающие в ряде задач электротехники, механики, химии и биологии. Для соответствующего предельному циклу ДС периодического решения принят введенный А. А. Андроновым термин «автоколебание». В учебнике [12] академик Л. С. Понтрягин освещает широкий круг вопросов электротехники и радиотехники, применяя к их исследованию разработанные им совместно с А. А. Андроновым математические методы. В частности, в этом учебнике для нелинейного ДУ, описывающего работу лампового генератора, доказано существование автоколебания (устойчивого предельного цикла).

В дальнейшем выяснилось важное значение автоколебаний или, как еще говорят, самовозбуждающихся колебаний, в самых разнообразных явлениях природы и техники. В Дополнении I будут обсуждены некоторые приложения ДУ, в частности, к задачам, в которых возникают предельные циклы.

Глава V

ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Часто употребляется следующая терминология: ДУ называют *интегрируемым в квадратурах*, если его решение (или его первый интеграл) может быть выражено через элементарные функции и операции интегрирования. Бездумное увлечение квадратурами совершенно не оправдано. Получающиеся при этом выражения часто бывают очень сложными и малопригодными для практического применения. Отметим еще, что интегрируемые в квадратурах ДУ встречаются лишь в отдельных частных случаях и, в основном, в задачниках по ДУ. В справочниках [5, 6] можно найти почти все типы таких ДУ.

На практике же при нахождении решения той или иной задачи для ДУ чаще всего приходится использовать различные приближенные методы, в частности, численные методы. Мы ограничиваемся здесь обсуждением некоторых наиболее важных, на наш взгляд, приближенных методов, широко используемых в современной компьютерной практике.

Глава построена следующим образом. В каждом параграфе сначала обычно излагается простейший случай ДУ первого порядка. Этот материал рекомендуется использовать сразу же после изучения ДУ первого порядка из гл. I. Однако все рассмотренные приближенные методы применимы также к системам ДУ и, с небольшими видоизменениями, к ДУ высших порядков. В ходе изучения дальнейших глав можно снова и снова возвращаться к приближенным методам.

В Дополнениях I и II на основе компьютерных систем MATHCAD и Mathematica приведены решения многих задач, встречавшихся ранее в предыдущих главах книги. Здесь читатель сразу же убедится в практической важности приближенных методов. Другой поучительный вывод состоит в том, что для того чтобы получить правильное решение на компьютере, нужно указать компьютерной программе правильный порядок действий, основанный на знании и понимании основ теории.

В случае необходимости в более подробных сведениях о приближенных методах полезно обратиться к [1, 7].

§ 1. Качественное исследование решений дифференциальных уравнений и метод изоклин

Рассмотрим в области $G \subset \Re^2$ задачу Коши

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0 \tag{1}$$

в предположениях теоремы Коши (см. гл. I, §1).

Если задача не решается в квадратурах, то все же во многих конкретных ситуациях некоторые свойства ее решения удается установить, исходя из качественных соображений. Сделаем несколько замечаний, которые могут оказаться полезными при построении интегральных кривых.

1) Кривая $f(x, y) = 0$ состоит из стационарных точек интегральных кривых, т. е. точек, в которых касательные к этим кривым горизонтальны. В частности, это могут быть точки локального максимума и точки локального минимума интегральных кривых.

2) Если $f(x, y)$ непрерывно дифференцируема в области G как функция двух переменных, то каждое решение $y = y(x)$ дважды дифференцируемо. При этом

$$y'' = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)y' = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)f(x, y).$$

Отсюда следует, что кривая возможных точек перегиба интегральных кривых описывается уравнением

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)f(x, y) = 0.$$

При переходе через эту кривую интегральные кривые могут менять направление своей выпуклости.

Пример 1. Рассмотрим задачу Коши $y' = -x + y^2$, $y(0) = 0$. Здесь G — вся плоскость переменных x, y.

Рекомендуем читателю по мере ознакомления с дальнейшим текстом сверять его с нижеследующим графиком (рис. 22).

«Лежащая на боку» парабола $x = y^2$ делит плоскость x, y на две области: G_+, где $-x + y^2 > 0$ (область вне параболы: ей принадлежит, например, точка $(-1, 0)$) и G_-, где $-x + y^2 < 0$ (область внутри параболы: ей принадлежит, например, точка $(1, 0)$).

В области G_+ каждое решение ДУ $y = y(x)$ строго возрастает, а в G_- — строго убывает. Таким образом, кривая $x = y^2$ является кривой точек максимума графиков решений ДУ.

Далее, из ДУ имеем $y'' = -1 + 2yy' = -1 - 2xy + 2y^3$. Кривая l, задаваемая уравнением $x = y^2 - 1/2y$, состоит из двух ветвей. Она делит плоскость на три области D_1, D_2, D_3.

В D_1 и в D_3 решения ДУ выпуклы вниз, а в D_2 — выпуклы вверх. Таким образом кривая l является кривой точек перегиба решений ДУ.

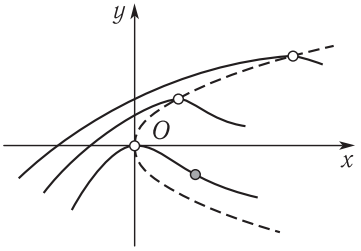


Рис. 22

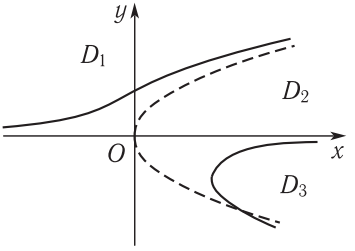


Рис. 23

Рассмотрим теперь качественное поведение искомого решения ДУ с начальным условием $y(0) = 0$. При $x < 0$ оно строго возрастает, в точке $(0, 0)$ имеет нулевой максимум, а при $x > 0$ строго убывает. До точки пересечения с кривой l решение лежит в области D_2 и строго выпукло вверх. В этой точке пересечения $y''(x)$ меняет знак с минуса на плюс и, следовательно, она является точкой перегиба. Правее нее решение строго выпукло вниз (рис. 23).

Перейдем к рассмотрению метода изоклин, позволяющего более точно графически изобразить ход интегральных кривых.

Напомним геометрический смысл решения ДУ — производной функции $y = y(x)$. Производная $y'(x)$ — это угловой коэффициент касательной к графику решения, т. е. к интегральной кривой в точке x. Согласно ДУ из (1) он равен $f(x, y(x))$. Это обстоятельство позволяет построить в области G вспомогательное векторное поле, называемое полем направлений. Каждой точке (x, y) поставим в соответствие определенное направление с угловым коэффициентом $f(x, y)$, которое в каждой точке $(x, y) \in G$ зададим небольшим отрезком с внутренней точкой (x, y), образующим угол $\alpha = \operatorname{arctg} f(x, y)$ с положительным направлением оси абцисс. Всякая интегральная кривая касается поля направлений в каждой своей точке. На этом основан так называемый метод изоклин, позволяющий приближенно строить графики интегральных кривых.

Определение. Пусть $C \in R(f)$ — множество значений функции f, когда точка (x, y) пробегает область G. Кривая, определяемая уравнением $f(x, y) = C$, называется *изоклиной* ДУ (1).

Метод изоклин состоит в следующем. Нанесем на кальку достаточно плотное множество изоклин и на каждой из них отметим поле направлений. Интегральную кривую, проходящую через заданную точку, строим так, чтобы она в каждой своей точке касалась вектора поля направлений в данной точке. Построив достаточно много изоклин с направлениями векторного поля, можно получить на них неплохое представление о каждой интегральной кривой.

Пример 2. Применим метод изоклин к ДУ $y' = x^2 + y^2$.

Качественные соображения показывают, что каждое непродолжимое решение является строго возрастающей функцией. При этом решение, проходящее через точку $(0, 0)$, касается в этой точке оси абсцисс.

Изоклины ДУ — это окружности $x^2 + y^2 = C$, $C > 0$ (при $C = 0$ окружность вырождается в точку). На рис. 24 изоклины отмечены пунктирами, а интегральные кривые изображены жирно.

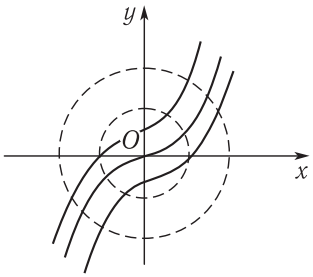


Рис. 24

Отметим, что до появления ЭВМ метод изоклин широко применялся прикладниками. Достоинство метода состоит в том, что иногда он дает возможность, не производя точного или численного интегрирования, получить качественную картину глобального расположения интегральных кривых. Недостатками метода являются его низкая точность, а также незначительная возможность его распространения на ДУ высших порядков и системы ДУ. Отметим все же, что идеология метода изоклин бывает полезна при изучении фазовых портретов динамических систем на плоскости и в трехмерном пространстве (см. Дополнение I).

§ 2. Метод последовательных приближений

Пусть ДУ (1) в условиях теоремы Коши имеет на некотором интервале (a, b), содержащем точку x_0, решение $y(x)$, такое, что $y(x_0) = y_0$. Подробнее это означает, что на (a, b) имеет место тождество $y'(s) = f(s, y(s))$. Проинтегрируем это тождество по s от x_0 до x и получим равенство

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))\, ds. \tag{2}$$

Это равенство можно рассматривать как интегральное уравнение, поскольку неизвестная функция $y(x)$ входит под знак интеграла.

Приведенное только что рассуждение показывает, что решение рассматриваемой задачи Коши на интервале (a, b) является решением интегрального уравнения (2).

Следующая лемма устанавливает обратную связь.

Лемма. *Всякое непрерывное на интервале* (a, b), *содержащем точку* x_0, *решение интегрального уравнения* (2) *является решением задачи Коши* (1).

Доказательство. Воспользуемся известной из математического анализа теоремой о дифференцируемости интеграла по верхнему пределу. Поскольку суперпозиция (сложная функция) $f(s, y(s))$ непрерывна на (a, b), то правая часть в уравнении (2) дифференцируема, причем ее производная равна подынтегральному выражению в точке x, т. е. $f(x, y(x))$. Но тогда на (a, b) непрерывно дифференцируема и левая часть уравнения (2), т. е. функция $y(x)$. Значит, $y(x)$ удовлетворяет

на (a, b) дифференциальному уравнению (1). Кроме того, поскольку правая часть в (2) непрерывна, то полагая в (2) $x = x_0$, видим, что $y(x)$ удовлетворяет и начальному условию.

Перейдем к непосредственному обсуждению метода последовательных приближений. Рассмотрим на (a, b) последовательность функций

$$y_0(x) = y_0, \quad y_n(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(s, y_{n-1}(s))\, ds, \quad n = 1, 2 \ldots .$$

Из этих рекуррентных формул последовательно определяется функциональная последовательность $\{y_n(x)\}$. Можно доказать, что существует отрезок $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$, содержащий точку x_0 и такой, что на нем $y_n(x) \to y(x)$, где $y(x)$ — решение задачи Коши. На этом пути и доказывается теорема Коши (см. гл. VI).

Пример 1. Рассмотрим ДУ $y' = x^2 + y^2$ с начальным условием $y(0) = 0$. Сведем его к интегральному уравнению

$$y(x) = \frac{x^3}{3} + \int\limits_{0}^{x} y^2(s)\, ds.$$

Образуем последовательные приближения

$$y_0(x) = 0, \quad y_n(x) = \frac{x^3}{3} + \int\limits_{0}^{x} y_{n-1}^2(s)\, ds, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Шаг за шагом находим (проверьте!) $y_1(x) = \dfrac{x^3}{3}$, $y_2(x) = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^7}{63}, \ldots$.

Упражнение. Примените здесь метод изоклин и сравните результаты.

Замечание 1. В гл. VI метод последовательных приближений будет использован для доказательства теоремы о существовании единственного решения задачи Коши. Важным обобщением излагаемой в данной книге теории ДУ является теория ДУ с разрывными правыми частями (см., например, [17]). В этом случае нельзя гарантировать утверждение леммы. Будем называть решение интегрального уравнения (2) обобщенным решением задачи Коши (1). Такое обобщенное решение, будучи непрерывным, может иметь разрывы производной. Эта ситуация типична в задачах оптимального управления (см. [7]).

Замечание 2. Достоинство метода состоит в его простой алгоритмической реализации. Недостатком метода является то обстоятельство, что обычно он гарантирует хорошее приближение к решению только локально — вблизи начальной точки x_0, y_0.

Пример 2. Рассмотрим задачу Коши $y' = -x + y^2$, $y(0) = 0$ из § 1. Полагая $y_0(x) = 0$, методом последовательных приближений находим (проверьте!) $y_1(x) = -\dfrac{x^2}{2}$, $y_2(x) = -\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^5}{20}$ и т. д.

В примере 1 из §1 показано, что решение $y(x) < 0$ при $x > 0$. Приближенное решение $y_2(x) < 0$ лишь при $x < 10^{1/3}$. Таким образом, $y_2(x)$ может дать разумное приближение к решению $y(x)$ только при x достаточно близких к 0.

Метод последовательных приближений и его различные модификации, в частности, такие, как итерационный процесс Ньютона (см., например, [14]), находят многочисленные применения при решении различных нелинейных задач.

§ 3. Отыскание решений дифференциальных уравнений в виде степенных рядов

Рассмотрим задачу Коши (1) при $x_0 = y_0 = 0$. Общий случай сводится к этому заменой переменных $x = x_0 + u$, $y = y_0 + v$.

Здесь мы предположим, что правая часть ДУ является аналитической функцией переменных в точке (0, 0), т. е. она представима в некоторой окрестности этой точки сходящимся двойным степенным рядом

$$f(x, y) = f_{00} + \sum_{k+l\geq 1} f_{kl} x^k y^l. \tag{3}$$

Точнее, существуют числа $a > 0$, $b > 0$, такие, что при всех x, y, удовлетворяющих условиям $|x| < a$, $|y| < b$, $a, b \in (0, +\infty]$, сходится двойной степенной числовой ряд

$$\sum_{k+l\geq 1} |f_{kl}||x|^k|y|^l.$$

В этих условиях решение задачи Коши само является аналитической функцией от x в точке $x = 0$ и его можно найти в виде степенного ряда с ненулевым радиусом сходимости:

$$y(x) = \sum_{s=1}^{+\infty} y_s x^s. \tag{4}$$

Этот факт является следствием теоремы существования и единственности решения задачи Коши в аналитическом случае (см. гл. VII).

Из формулы (4) находим $y'(x) = y_1 + 2y_2x + 3y_3x^2 + \dots$.

Проиллюстрируем процесс вычисления коэффициентов ряда (4) с точностью до $o(x^2)$. Подставим в (3) y, а затем в ДУ (1) выражения для y и y' и получим

$$y_1 + 2y_2x + 3y_3x^2 + \dots = f_{00} + f_{10}x + f_{01}(y_1x + y_2x^2 + \dots) + \\ + f_{20}x^2 + 2f_{11}x(y_1x + \dots) + f_{20}(y_1x + \dots)^2 + \dots .$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, имеем

$$y_1 = f_{00}, \quad 2y_2 = f_{10} + f_{01}y_1, \quad 3y_2 = f_{01}y_2 + f_{20} + 2f_{11}y_1 + f_{02}y_1^2, \dots .$$

Решая эту рекуррентную систему уравнений, последовательно находим $y_1, y_2, y_3, \ldots$.

Замечание 1. Иногда удается найти радиус сходимости $R > 0$ степенного ряда, представляющего решение $y(x)$. Полезно вспомнить, что при дифференцировании радиус сходимости не меняется (см. [8]). Поэтому решение $y(x)$ оказывается бесконечно дифференцируемой и даже аналитической функцией.

Замечание 2. Получающиеся ряды могут сходиться медленно и давать достаточно хорошее приближение к решению лишь вблизи начальной точки.

Замечание 3. Рассмотренный прием нахождения приближенного решения ДУ пригоден и в том случае, когда правая часть ДУ не является аналитической, но достаточно гладка по своим переменным в окрестности точки x_0, y_0. Тогда удается вычислить несколько членов разложения решения по степеням x.

В литературе рассмотренный метод часто называют методом неопределенных коэффициентов.

В гл. I, §4 мы уже встречались с видоизменением этого метода.

Упражнение 1. Пусть $k \neq 0$, а $P_n(x)$ — многочлен степени n. Покажите, что ДУ $y' + ky = P_n(x)$ имеет частное решение в виде многочлена той же степени $y(x) = Q_n(x)$.

Упражнение 2. Рассмотрим задачу Коши $y' = x + y^2$, $x(0) = 1$. Найдите решение этой задачи в виде $y = 1 + y_1 x + y_2 x^2 + y_3 x^3 + o(x^3)$, $x \to 0$.

Заметим, что ряд (4) является рядом Тейлора решения $y(x)$. Поэтому его коэффициенты равны $y_k = \dfrac{y^{(k)}(0)}{k!}$, $k = 1, 2, \ldots$, и их можно вычислить, находя эти производные непосредственно из ДУ.

Положим в ДУ (1) $x = 0$ и найдем $y'(0) = f(0, y_0)$. Продифференцируем ДУ и получим

$$y''(x) = \frac{\partial f(x, y(x))}{\partial x} + \frac{\partial f(x, y(x))}{\partial y} y'(x),$$

откуда при $x = 0$ имеем

$$y''(0) = \frac{\partial f(0, y_0)}{\partial x} + \frac{\partial f(0, y_0)}{\partial y} y'(0).$$

Продолжая эти действия, найдем сколь угодно много значений производных $y^{(k)}(0)$, а значит, и коэффициентов y_k. Этот подход является лишь другой формой метода неопределенных коэффициентов.

Проиллюстрируем сказанное на примере задачи Коши из упражнения 2.

Из ДУ при $x = 0$ имеем $y'(0) = y^2(0) = 1$. Дифференцируя ДУ дважды, получим:

$$y''(x) = 1 + 2y(x)y'(x), \quad y'''(x) = 2(y')^2(x) + 2y(x)y''(x).$$

Отсюда при $x = 0$ находим

$$y''(0) = 1 + 2y(0)y'(0) = 3, \quad y'''(0) = 2(y')^2(0) + 2y(0)y''(0) = 8.$$

Следовательно, $y_1 = 1$, $y_2 = \dfrac{y''(0)}{2!} = \dfrac{3}{2}$, $y_3 = \dfrac{y'''(0)}{3!} = \dfrac{4}{3}$.

Итак, $y(x) = 1 + x + \dfrac{3}{2}x^2 + \dfrac{4}{3}x^3 + o(x^3)$, $x \to 0$.

Замечание 4. Иногда с помощью метода математической индукции удается получить явные выражения для коэффициентов или даже выразить решение через элементарные функции.

Упражнение 3. Покажите с помощью метода неопределенных коэффициентов, что решение задачи Коши $y' = \sqrt{1 + y^2}$, $y(0) = 0$ дается формулой $y = \operatorname{sh}(x)$.

Подчеркнем еще раз, что степенной ряд представляет собой решение ДУ только на интервале сходимости этого ряда. Следовательно, данный метод (как и метод последовательных приближений) пригоден, вообще говоря, только для отыскания локального решения.

Перейдем к отысканию решений ДУ второго порядка в виде степенных рядов.

Упражнение 4. Для ДУ $y'' + y = 0$ найдите в виде рядов по степеням x решения, удовлетворяющие начальным условиям: 1) $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$; 2) $y'(0) = 1$, $y(0) = 0$.

В качестве более содержательного примера найдем ФСР ДУ Эйри

$$y'' - xy = 0.$$

Это ДУ находит различные применения в физике, например, в оптике, в механике и в квантовой механике, а также в асимптотическом анализе.

ФСР этого ДУ найдем в виде ряда

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} y_k x^k.$$

Дважды дифференцируя этот ряд, получим

$$y'' = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) y_k x^{k-2}.$$

Подстановка этих рядов в ДУ дает

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) y_k x^{k-2} - \sum_{k=0}^{\infty} y_k x^{k+1} = 0.$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x и получим:

$$2y_2 = 0, \quad 3 \cdot 2y_3 - y_0 = 0, \quad k(k-1)y_k - y_{k-3} = 0, \quad k = 4, 5, \ldots .$$

Последовательно имеем: $y_2 = 0$, $y_3 = \dfrac{y_0}{3 \cdot 2}$, $y_k = \dfrac{y_{k-3}}{k(k-1)}$, $k = 4, 5, \ldots$.

Для нахождения ФСР зададим два типа начальных условий.

Сначала найдем решение ДУ Эйри, удовлетворяющее начальным условиям

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

Обращаясь к ряду, представляющему решение видим, что $y_0 = 1$, $y_1 = 0$.

Далее последовательно находим: $y_2 = 0$, $y_3 = \dfrac{1}{3 \cdot 2}$, $y_4 = 0$, $y_5 = 0, \ldots$.

Методом математической индукции устанавливается, что

$$y_{3s} = \frac{1}{3s \cdot (3s-1) \cdot \ldots 3 \cdot 2},$$

а если k не кратно трем, то $y_k = 0$.

Найдено первое из решений ФСР

$$Y_1(x) = 1 + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{3s \cdot (3s-1) \cdot \ldots 3 \cdot 2} x^{3s}.$$

Для нахождения второго из решений ФСР возьмем начальные условия

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

Предоставляем читателю проверить, что решение ДУ Эйри с этими начальными условиями дается формулой

$$Y_2(x) = x + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{(3s+1) \cdot 3s \cdot \ldots 4 \cdot 3} x^{3s+1}.$$

Упражнение 5. Убедитесь, что Y_1, Y_2 линейно независимы. Покажите, что ряды, представляющие их, сходятся на всей числовой оси и что Y_1, Y_2 бесконечно дифференцируемы на $\Re$.

Данный пример довольно типичен. Важные в приложениях решения ДУ обычно называются специальными функциями. Свойства таких функций детально изучаются, для них составляются таблицы их значений, а иногда и компьютерные программы (см. Дополнение III). О функциях Эйри см. также [13].

§ 4. Метод малого параметра

В приложениях часто встречаются ДУ с малым параметром. Рассмотрим следующую задачу Коши, в которой правая часть ДУ и начальное значение зависят от малого параметра ε:

$$y' = f(x, y, \varepsilon), \quad y(x_0) = g(\varepsilon). \tag{5}$$

Пусть при всех $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ эта задача имеет единственное решение $y = y(x, \varepsilon)$, определенное на $[a, b]$.

При $\varepsilon = 0$ получаем предельную задачу

$$y' = f(x, y, 0), \quad y(x_0) = g(0). \tag{6}$$

Пусть $y_0(x)$ — ее решение. Положим $y = y_0(x) + z(x)$.

Для нахождения z имеем следующую задачу Коши:

$$z' = F(z, \varepsilon), \quad z(0) = g(\varepsilon) - g(0),$$

где $F(z, \varepsilon) = f(x, y_0(x) + z, \varepsilon) - f(x, y_0(x), 0)$.

Как и в §3, ограничимся случаем, когда правая часть $F(z, \varepsilon)$ этого ДУ является аналитической функцией переменных z, ε в точке $(0, 0)$, а начальное значение $g(\varepsilon)$ является аналитической функцией от ε в точке 0.

В этих предположениях для вычисления решения $z(x, \varepsilon)$ можно применить метод неопределенных коэффициентов, разыскивая это решение в виде степенного ряда, но на этот раз по степеням ε. При этом на каждом шагу решается линейная задача.

Пример. Рассмотрим задачу Коши для ДУ, не интегрируемого в квадратурах, с малым параметром ε: $y' + y = \varepsilon x y^2$, $y(0) = 0$. Решение ищем в виде ряда $y = y_0(x) + y_1(x)\varepsilon + \ldots$. Подстановка ряда в ДУ с учетом начального условия дает $y_0' + y_0 = 0$, $y_0(0) = 1$, $y_1' + y_1 = x y_0^2(x)$, $y_1(0) = 0$, $\ldots$. Решая задачу для y_0 находим $y_0(x) = e^{-x}$. Для определения y_2 имеем задачу Коши для ДУ со специальной правой частью $y_2' + y_2 = x e^{-2x}$, $y(2) = 0$. Вычислите y_2. На этом пути можно найти сколько угодно членов разложения решения по степеням ε.

§ 5. Метод малого параметра в задаче с сингулярным возмущением

Более сложной является задача с малым параметром при производной в ДУ вида

$$\varepsilon y' = f(x, y, \varepsilon), \quad y(x_0) = g(\varepsilon). \tag{7}$$

В отличие от задачи типа (5), называемой задачей с регулярным возмущением, задачи этого типа называются задачами с сингулярным возмущением. В задаче (5) решение предельной задачи дает хорошее приближение к ее решению, если ε достаточно мало. С задачей (7) дело обстоит значительно сложнее.

Рассмотрим простейший пример. Решение задачи $\varepsilon y' = -y + 1$, $y(0) = y_0$ равно $y = 1 + (y_0 - 1)e^{-x/\varepsilon}$.

Оно является суммой решения вырожденного уравнения $-y + 1 = 0$, получающегося из ДУ при $\varepsilon = 0$, и решения соответствующего однородного ДУ с начальным условием $y(0) = y_0 - 1$.

Пусть $y_0 \neq 1$. В выражении решения первое слагаемое 1 удовлетворяет ДУ, но не удовлетворяет начальному условию, если $g(\varepsilon) \neq 1$. Второе слагаемое — функция $v(x, \varepsilon) = (y_0 - 1)e^{-x/\varepsilon}$, которая сосредоточена вблизи точки $x = 0$. Действительно, при $x \geq \sqrt{\varepsilon}$ (вне погра-

ничного слоя) имеем оценку $|v(x, \varepsilon)| \le |y_0 - 1|e^{-\sqrt{\varepsilon}}$ и, значит, $v(x, \varepsilon)$ экспоненциально быстро стремится к нулю при $\varepsilon \to +0$.

Роль функции $v(x, \varepsilon)$ состоит в следующем: она устраняет невязку в выполнении начального условия приближенным решением $y = 1$. Функции такого типа принято называть погранслойными поправками (или функциями пограничного слоя).

Эта терминология взята из гидродинамики. Течение жидкости вблизи границы может быть представлено как внешнее течение (вдали от границы) плюс поправка, связанная с течением у границы.

На рис. 25 и 26 изображены соответственно решение и функция пограничного слоя.

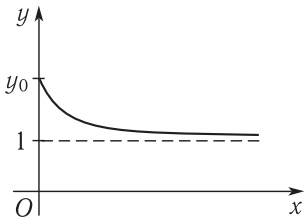


Рис. 25

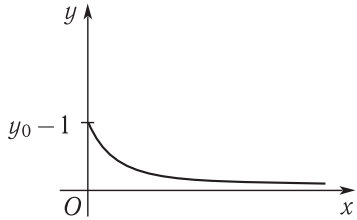


Рис. 26

Вернемся к общему случаю ДУ (7). Здесь вырожденное уравнение имеет вид $f(x, y, 0) = 0$. Нахождение его решений является задачей о существовании и вычислении определяемых им неявных функций. Это уравнение может в поле вещественных чисел иметь одно решение, несколько решений или не иметь их вовсе. Поэтому далее мы ограничимся для простоты случаем следующей линейной задачи Коши:

$$\varepsilon y' + k(x)y = h(x), \quad y(0) = g(\varepsilon) \tag{8}$$

в предположении, что на $[0, l]$ функции $k(x)$, $h(x)$ бесконечно дифференцируемы, причем $k(x) > 0$, а начальное значение $g(\varepsilon)$ — аналитическая функция в точке $\varepsilon = 0$: $g(\varepsilon) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} g_k \varepsilon^k$.

Сначала найдем решение ДУ (8) в виде ряда по степеням ε. Это так называемый первый итерационный процесс.

Итак, пусть

$$u(x, \varepsilon) = \sum_{r=0}^{+\infty} u_r(x)\varepsilon^r.$$

Подставим этот ряд в ДУ и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях параметра ε. Тогда коэффициенты ряда шаг за шагом определяются как решения алгебраических уравнений:

$$k(x)u_0(x) = h(x), \;\; k(x)u_1(x) = -u_0'(x), \;\; \ldots, \;\; k(x)u_r(x) = -u_{r-1}'(x), \;\; \ldots.$$

Построенное приближенное решение не удовлетворяет начальному условию в общем случае, когда $g(\varepsilon) - u(0, \varepsilon) \ne 0$.

Для устранения этой невязки в выполнении начального условия осуществляется так называемый второй итерационный процесс. Будет построен еще один ряд по степеням ε, являющийся погранслойной поправкой.

Перейдем в (8) к новым переменным, полагая $z = y - u(x, \varepsilon)$, $\xi = \dfrac{x}{\varepsilon}$. Для вычисления функции z получаем регулярную задачу Коши

$$\frac{dz}{d\xi} + k(\varepsilon\xi)z = 0, \quad z(0) = g(\varepsilon) - u(0, \varepsilon).$$

Коэффициент k и начальное значение разложим в ряды Тейлора. Решение ищем в виде

$$z = \sum_{r=0}^{+\infty} z_r(\xi)\varepsilon^r.$$

Для вычисления коэффициентов этого ряда имеем рекуррентную последовательность задач Коши:

$$\frac{dz_0}{d\xi} + k(0)z_0 = 0, \quad z_0(0) = g_0 - u(0, 0).$$

$$\frac{dz_1}{d\xi} + k(0)z_1 = -k'(0)z_0(\xi), \quad z_0(0) = g_0 - u(0, 0), \ \ldots.$$

Из первой задачи $z_0(\xi) = (g_0 - u(0, 0))e^{-k(0)\xi}$. Для нахождения $z_1(x)$ возникла задача для ДУ со специальной правой частью.

Упражнение. Найдите $z_1(x)$ и убедитесь, что это тоже погранслойная поправка.

На этом пути будет построена функция $z\left(\dfrac{x}{\varepsilon}, \varepsilon\right)$, экпоненциально убывающая при $\varepsilon \to 0$ вне пограничного слоя.

Итак приближенное решение задачи (8) имеет вид суммы двух асимптотических рядов

$$y(x, \varepsilon) = u(x, \varepsilon) + z\left(\frac{x}{\varepsilon}, \varepsilon\right).$$

Заметим, что построенные ряды в общем случае могут оказаться не сходящимися, а лишь асимптотическими. Понимать это следует так. Пусть $u_N(x, \varepsilon)$ и $z_N\left(\dfrac{x}{\varepsilon}, \varepsilon\right)$ — это N-е частичные суммы рядов $u(x, \varepsilon)$ и $z\left(\dfrac{x}{\varepsilon}, \varepsilon\right)$ соответственно. Пусть $y(x, \varepsilon)$ — точное решение задачи. Тогда при $\varepsilon \to +0$ равномерно по x на всяком $[0, l]$ справедлива оценка

$$\left|y(x, \varepsilon) - u_N(x, \varepsilon) - z_N\left(\frac{x}{\varepsilon}, \varepsilon\right)\right| = O(\varepsilon^{N+1}).$$

Аналогичное асимптотическое представление решения справедливо и в нелинейном случае. Решение одной из таких задач с помощью компьютерной системы MATHCAD рассмотрено в Дополнении II.

Основы исследования задач с сингулярными возмущениями заложены в трудах выдающихся советских математиков А. Н. Тихонова и Л. А. Люстерника. Познакомиться подробнее с подобными задачами можно в [13, 31].

§ 6. Разностные схемы

Разностные схемы решения различных задач для ДУ являются одним из основных современных методов решения задач для ДУ. Они являются также эффективным математическим средством, широко применяемым в современной практике использования электронной вычислительной техники. В настоящее время теория разностных схем достаточно хорошо разработана. При этом широко используются терминология и методы функционального анализа (см. [14], где разностным схемам и связанным с ними приближенным методам уделено значительное внимание). Разностные схемы (иногда здесь говорят о методе конечных разностей) излагаются обычно в курсе «Вычислительные методы». Однако мы считаем совершенно необходимым обсуждать их в ходе изучения ДУ в любом вузе. Довольно часто при решении прикладных задач численные методы дают исчерпывающий ответ на вопросы, интересующие исследователя. Следует отметить, однако, что без глубокого знания математической теории и без глубокого проникновения в сущность изучаемой проблемы бездумное формальное применение численных методов столь же часто приводит к поспешным ошибочным выводам.

Обращаем внимание читателя на соответствующие разделы книг [1, 13, 7].

Рассмотрим сначала общий подход к разностным схемам вычисления приближенных решений задачи Коши (1).

Предположим, что в полосе $\Pi = \{(x, y)\colon x_0 \le x \le x_0 + l,\ y \in \Re\}$. задача (1) имеет единственное решение $y(x)$, далее называемое точным решением.

Для приближенного вычисления точного решения поступим следующим образом. Разобьем отрезок $[x_0, x_0 + l]$ точками $x_0 < x_1 < \ldots$ $\ldots < x_n = x_0 + l$. Набор этих точек в теории разностных схем принято называть *сеткой*, а сами точки — *узлами* сетки.

Мелкостью сетки называется число $\max\limits_{k=1,\ldots n} |x_k - x_{k-1}|$. Всюду в дальнейшем предполагается, что при $n \to \infty$ мелкость сетки стремится к нулю. Это означает, что сетка хорошо аппроксимирует весь отрезок $[x_0, x_0 + l]$, на котором определено точное решение.

Под приближенным, или *сеточным решением* задачи Коши будем понимать набор чисел (функцию, заданную на сетке, иначе говоря, сеточную функцию) $\{y_k\}_{k=1,\ldots,n}$, где y_k — приближенное значение числа $y(x_k)$, $(k = 1, 2, \ldots, n)$, т. е. значения точного решения $y(x)$ в узле x_k. Для вычисления сеточного решения используются различные специаль-

но сконструированные алгебраические системы уравнений, называемые *разностными схемами*.

В общем виде разностная схема может быть записана в виде алгебраической системы n уравнений с n неизвестными

$$\Phi_i(y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Предполагается, что разностная схема имеет единственное решение. Оно и является сеточным решением исходной задачи Коши.

Таким образом, в отличие от ранее рассмотренных приближенных методов, решение задачи Коши ищется не на всем отрезке, а лишь на сетке. В этом проявляется недостаток разностных методов. С другой стороны, простота вычислительных процедур и возможность широкого использования вычислительной техники позволяет быстро получать эффективные результаты.

Определение. Разностная схема называется *сходящейся*, если $\Delta_n = \max\limits_{k=1,2,,\ldots,n} |y(x_k) - y_k| \to 0$ при $n \to \infty$.

Если, более того, существуют числа $C > 0$ и натуральное p, такие, что $\Delta_n \le \dfrac{C}{n^p}$, то говорят, что разностная схема имеет *порядок точности p*.

Заметим, что величина Δ_n — это отклонение сеточного решения от точного решения, рассматриваемого на сетке, т. е. в соответствующих узлах сетки.

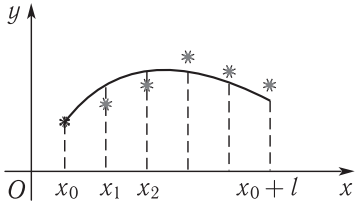


Рис. 27

Если разностная схема сходится, то геометрически это означает, что при $n \to \infty$ точки сеточного решения стремятся лечь на график точного решения. Порядок точности характеризует скорость приближения сеточного решения к точному и дает возможность оценить эту скорость.

На рис. 27 жирной линией обозначено точное решение, а звездочками обозначены точки (компоненты) сеточного решения.

Рассмотрим некоторые простейшие разностные схемы с равномерной сеткой, т. е. с постоянным шагом сетки $h = l/n$, когда $x_k = x_0 + kh$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

Разностная схема Эйлера. Сеточное решение определяется из следующей системы линейных алгебраических уравнений:

$$\frac{y_k - y_{k-1}}{h} = f(x_{k-1}, y_{k-1}), \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Эта система является аппроксимацией (приближением) исходного ДУ в точке x_{k-1}. Действительно, $y'(x_{k-1}) \approx \dfrac{y(x_{k-1} + h) - y(x_{k-1})}{h} \approx \dfrac{y_k - y_{k-1}}{h}$,

а $f(x_{k-1}, y(x_{k-1})) \approx f(x_{k-1}, y_{k-1})$. Запишем разностную схему Эйлера в так называемом каноническом виде

$$y_k = y_{k-1} + hf(x_{k-1}, y_{k-1}), \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Отсюда видно, что это рекуррентная система, из которой последовательно определяются

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0), \quad y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1), \quad \ldots, \quad y_n = y_{n-1} + hf(x_{n-1}, y_{n-1}).$$

Таким образом, разностная схема Эйлера имеет единственное (сеточное) решение. В конце параграфа в предположении достаточной гладкости правой части $f(x, y)$ будет доказано, что разностная схема Эйлера имеет первый порядок точности.

Неявная разностная схема. Это система вида

$$\frac{y_k - y_{k-1}}{h} = \frac{1}{2}(f(x_{k-1}, y_{k-1}) + f(x_k, y_k)), \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

При $k = 1$ имеем

$$y_1 = y_0 + h\frac{1}{2}(f(x_0, y_0) + f(x_1, y_1)).$$

Это уравнение нелинейно относительно y_1. В предположениях достаточной гладкости $f(x, y)$ можно доказать, что при достаточно малых h оно имеет единственное решение. Имеются эффективные вычислительные методы нахождения решения такого типа уравнений с любой заданной степенью точности.

Это же относится и к вычислению остальных значений сеточного решения. Они определяются не столь просто, как для разностной схемы Эйлера. Преимуществом неявной разностной схемы является ее более высокий — второй порядок точности.

Улучшенная схема Эйлера. Здесь сеточное решение определяется из системы уравнений

$$\begin{cases} y_k^* = y_{k-1} + hf(x_{k-1}, y_{k-1}), \\ y_k = y_{k-1} + \dfrac{h}{2}(f(x_{k-1}, y_{k-1}) + f(x_k, y_k^*)), \end{cases} \qquad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Данная разностная схема является явной. Действительно, при $k = 1$ имеем

$$\begin{cases} y_1^* = y_0 + hf(x_0, y_0), \\ y_1 = y_0 + \dfrac{h}{2}(f(x_0, y_0) + f(x_1, y_1^*). \end{cases}$$

Из первого уравнения находим y_1^*, подставляем это значение во второе уравнение и находим y_1. Так же последовательно вычисляются и остальные значения сеточной функции.

Можно доказать, что улучшенная схема Эйлера имеет второй порядок точности (см. например, [1, 14]). Таким образом, улучшенная

разностная схема Эйлера объединяет достоинства и разностной схемы Эйлера и неявной разностной схемы: она явная и имеет второй порядок точности.

Обобщениями улучшенной разностной схемы Эйлера являются явные разностные схемы Рунге–Кутты четвертого и пятого порядков точности. Они широко используются в качестве компьютерных стандартных программ для отыскания решений ДУ.

Разностная схема Рунге–Кутты четвертого порядка точности имеет следующий вид:

$$y_k = y_{k-1} + \frac{h}{6}(A_{k-1} + 2B_{k-1} + 2C_{k-1} + D_{k-1})$$

$$A_{k-1} = f(x_{k-1}, y_{k-1}), \quad B_{k-1} = f\Big(x_{k-1} + \frac{1}{2}h, y_{k-1} + \frac{1}{2}hA_{k-1}\Big),$$

$$C_{k-1} = f\Big(x_{k-1} + \frac{1}{2}h, y_{k-1} + \frac{1}{2}B_{k-1}\Big), \quad D_{k-1} = f(x_{k-1} + h, y_{k-1} + hC_{k-1})$$

$$(k = 1, 2 \ldots, n, \ \ y_0 \text{ известно}).$$

Проведем исследование первого порядка точности разностной схемы Эйлера. Пусть $G \subset \Re^2$ — замкнутая ограниченная выпуклая область, в которой лежит график точного решения и пусть правая часть ДУ удовлетворяет в G следующему условию Липшица: существуют постоянные $C_1 > 0$, $C_2 > 0$, такие, что для любых $(x_1, y_1) \in G$, $(x_2, y_2) \in G$ выполняется неравенство

$$|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| \le C_1|x_1 - x_2| + C_2|y_1 - y_2|.$$

Отсюда следует существование постоянной $C > 0$, такой, что в G справедливо неравенство $|f(x, y)| \le C$ (почему?).

Докажем, что в этих предположениях разностная схема Эйлера имеет первый порядок точности.

Оценим сначала величины $\delta_k = |y(x_k) - y_k|$.

Из тождества

$$y(x_k) = y(x_{k-1}) + \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} y'(s)\, ds,$$

используя ДУ, получаем

$$y(x_k) = y(x_{k-1}) + \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f(s, y(s))\, ds.$$

Запишем k-е уравнение разностной схемы Эйлера в виде

$$y_k = y_{k-1} + \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f(x_{k-1}, y_{k-1})\, ds.$$

Вычтем это равенство из предыдущего. Это позволит дать следующую оценку величин δ_k (проверьте!):

$$\delta_k \le \delta_{k-1} + \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} |f(s, y(s)) - f(x_{k-1}, y_{k-1})|\, ds.$$

Подинтегральное выражение оценим, пользуясь условием Липшица:

$$|f(s, y(s)) - f(x_{k-1}, y_{k-1})| \le C_1(s - x_{k-1}) + C_2|y(s) - y_{k-1}|.$$

Второе слагаемое справа оценим, пользуясь тождеством

$$y(s) = y(x_{k-1}) + \int\limits_{x_{k-1}}^{s} f(\sigma, y(\sigma))\, d\sigma,$$

откуда $|y(s) - y_{k-1}| \le C(s - x_{k-1}) + \delta_{k-1}$.

Объединяя полученные оценки, имеем неравенство

$$\delta_k \le \delta_{k-1} + \frac{1}{2}C_1h^2 + C_2Ch^2 + C_2h\delta_{k-1}.$$

Положим для краткости $M = \dfrac{1}{2}C_1 + C_2C$.

Доказана рекуррентная система неравенств

$$\delta_k \le (1 + C_2h)\delta_{k-1} + Mh^2, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Последовательно находим $\delta_1 \le Mh^2$, так как $\delta_0 = 0$, затем $\delta_2 \le$ $\le (1 + (1 + C_2h))Mh^2$ и т. д.

По индукции получаем

$$\delta_k \le \sum_{l=0}^{k-1}(1 + C_2h)^l Mh^2 = \frac{(1 + C_2h)^k - 1}{C_2h}Mh^2 = \frac{(1 + C_2h)^k - 1}{C_2}Mh.$$

Но $h = \dfrac{l}{n}$, и $(1 + C_2h)^k - 1 \le e^{C_2l} - 1$.

Мы воспользовались тем элементарным фактом, что последовательность $\left\{\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n\right\}$ строго возрастая стремится к числу e.

Таким образом, доказана следующая оценка точности разностной схемы Эйлера:

$$\Delta_n \le \frac{M}{C_2}(e^{C_2l} - 1)h.$$

Изложенные выше определения и утверждения легко переносятся на задачу Коши для нормальной системы ДУ. Остановимся, например, на разностной схеме Эйлера. Пусть $y \in \Re^m$, т. е. в виде одного ДУ записана система из m ДУ с m неизвестными функциями. Разностная схема Эйлера является теперь линейной алгебраической системой из nm уравнений с nm неизвестными, а роль модуля разности играет норма

(расстояние) в $\Re^m$. Аналогично дело обстоит и с другими разностными схемами. В [1, 14] читатель найдет более подробное описание и обсуждение теории разностных схем.

Замечание. Известным недостатком применения разностных схем является то обстоятельство, что сеточное решение определено только в узлах сетки. Часто бывает желательно иметь аналитическое выражение для приближенного решения на всем отрезке, на котором оно вычисляется. Этой цели служит продолжение, или, как чаще говорят, *интерполяция* сеточного решения на этот отрезок. Простейшей является кусочно-линейная интерполяция. Соединим последовательно точки сеточного решения (x_{k-1}, y_{k-1}) и (x_k, y_k), $k = 1, 2, \ldots, n$, прямолинейными отрезками. В качестве приближенного решения получим кусочно-гладкую функцию, графиком которой служит построенная ломаная. Этот путь был реализован Эйлером. В методе, названном его именем сеточное решение является решением разностной схемы Эйлера, а ломаная называется ломаной Эйлера. В узлах сетки продолженное приближенное решение недифференцируемо. Более гладкие интерполяции реализуются с помощью так называемых сплайнов. С элементами теории сплайнов можно ознакомиться в [1, 14].

§ 7. Метод пристрелки для решения краевых задач

Рассмотрим на $[0, l]$ краевую задачу

$$y'' = f(x, y, y'), \quad y(0) = y_0, \quad y(l) = y_l. \tag{9}$$

Для вычисления возможных ее решений можно применить следующий метод. Введем семейство вспомогательных задач Коши с параметром C

$$y'' = f(x, y, y'), \quad y(0) = y_0, \quad y'(0) = C.$$

Пусть при всех значениях параметра C из некоторого интервала (A, B) найдены решения $y = y(x, C)$ этих задач Коши, определенные на всем $[0, l]$.

Рассмотрим уравнение $y(l, C) = y_l$.

Каждому его решению $C^* \in (A, B)$ соответствует решение $y = y(x, C^*)$ исходной краевой задачи.

Остановимся на случае, когда на (A, B) имеется единственное решение C^* уравнения.

Воспользуемся артиллерийской терминологией. Краевую задачу будем интепретировать следующим образом. В точке $(0, y_0)$ плоскости xOy помещено орудие, а ДУ описывает полет его снаряда. Желательно, чтобы снаряд достиг точки (l, y_l).

Вспомогательная задача Коши состоит в том, что ствол орудия направляется под таким углом α к оси абсцисс, что $\operatorname{tg}\alpha = C$.

Пусть $y = y(x, C)$ — траектория полета снаряда, а наблюдатель сообщает о результатах стрельбы при значениях C_1 и C_2 $(C_1 < C_2)$, $y(l, C_1) < y_l$ (недолет), а $y(l, C_2) > y_l$ (перелет). Цель взята в вилку!

Теперь можно организовать (например, методом деления $[C_1, C_2]$ пополам) итерационный процесс (называемый методом пристрелки), сходящийся к C^*. Если имеется наблюдатель, то скорость сходимости может быть существенно увеличена.

Займемся частным случаем линейной краевой задачи с дифференциальным оператором $L(x, D) = D^2 + a(x)D + b(x)$

$$L(x, D)y = f(x), \quad y(0) = y_0, \quad y(l) = y_l \tag{10}$$

в предположении, что $a(x), b(x), f(x) \in C[0, l]$.

Пусть эта задача имеет единственное решение. Вспомогательная задача Коши

$$L(x, D)y = f(x), \quad y(0) = y_0, \quad y'(0) = C$$

имеет единственное решение, и оно определено на всем $[0, l]$. Это решение запишем в виде

$$y = y(x, C) = \tilde{y}(x) + Cz(x),$$

где $\tilde{y}(x)$ — решение задачи Коши $L(x, D)y = f(x)$, $y(0) = y_0$, $y'(0) = y_l$, а $z(x)$ — решение задачи Коши $L(x, D)z = 0$, $z(0) = 0$, $z'(0) = 1$.

Потребуем, чтобы $y(l, C) = y_l$, т. е. для нахождения C получаем линейное алгебраическое уравнение

$$\tilde{y}(l) + Cz(l) = y_l.$$

Но $z(l) \neq 0$, иначе однородная краевая задача имела бы нетривиальное решение $z(x)$ (см. гл. II). Значит, постоянная C определяется однозначно и подстановка ее в $y(x, C)$ дает единственное решение исходной краевой задачи.

Рассмотрим более общую краевую задачу с тем же линейным ДУ, но со значительно более общими граничными условиями

$$L(x, D)y = f(x), \quad \alpha_0 y(0) + \beta_0 y'(0) = \gamma_0, \quad \alpha_l y(l) + \beta_l y'(l) = \gamma_l. \tag{11}$$

где постоянные $\alpha_s, \beta_s, \gamma_s$, $s = 0, l$ известны. Пусть также коэффициенты α_s, β_s не обращаются одновременно в нуль, $s = 0, l$.

Для граничных операторов введем сокращенные обозначения

$$\alpha_0 y(0) + \beta_0 y'(0) = g_0 y, \quad \alpha_l y(l) + \beta_l y'(l) = g_l y.$$

Предполагается, что эта краевая задача однозначно разрешима.

Рассмотрим различные случаи.

Если $\alpha_0 \neq 0$, то вычисляем $\tilde{y}$ как решение задачи $L(x, D)y = f$, $g_0 y = \gamma_0$, $y'(0) = 0$, а z как решение задачи $L(x, D)y = 0$, $g_0 y = 0$, $y'(0) = 1$ и рассматриваем функцию $y(x, C) = \tilde{y}(x) + Cz(x)$. Требуем выполнения ею второго граничного условия $g_l y = \gamma_l$, т. е. для нахождения постоянной получаем уравнение $g_l \tilde{y} + Cg_l z = \gamma_l$. Поскольку $g_l z \neq 0$ (иначе z было бы нетривиальным решением однородной краевой задачи), то постоянная C, а значит, и решение краевой задачи определяются однозначно.

Если $\alpha_0 = 0$, то $y'(0)$ известно. Для реализации метода пристрелки следует задать $y(0) = C$. Предлагаем читателю провести необходимые рассуждения.

Рассмотрена правая пристрелка, когда вспомогательная задача Коши решается слева направо. Аналогично может быть реализована левая пристрелка.

Метод пристрелки, называемый также методом стрельбы, применим к общим краевым задачам для систем ДУ (см. [7]).

Отметим недостаток метода. Если среди решений ДУ имеются экспоненциально растущие, то на большом отрезке $[0, l]$ вычисление решения краевой задачи методом стрельбы может привести к большой вычислительной погрешности.

§ 8. Метод прогонки и разностный метод в решении краевых задач

Другим методом нахождения решений краевых задач является метод прогонки. Этот метод очень популярен и разработан в деталях. Поясним его в простейшем варианте краевой задачи (10).

Сначала осуществляется так называемая факторизация ДУ. Она состоит в представлении дифференциального оператора второго порядка произведением дифференциальных операторов первого порядка. Это позволит вместо краевой задачи решать вспомогательные задачи Коши.

Пусть $D = \dfrac{d}{dx}$. Дифференциальный оператор $L(x, D) = D^2 + a(x)D + b(x)$ попытаемся представить в виде

$$L(x, D) = (D + u(x))(D + v(x)),$$

где функции $u(x)$, $v(x)$ надо найти.

Такое разложение оператора $L(x, D)$ означает, что

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = y'' + (u(x) + v(x))y' + (v'(x) + u(x)v(x))y.$$

Приравнивая коэффициенты при y и его производных, находим:

$$u(x) + v(x) = a(x), \quad v'(x) + u(x)v(x) = b(x).$$

Из первого уравнения находим $u(x) = a(x) - v(x)$. Подставляя u во второе равенство, получаем ДУ для функции v

$$v' + a(x)v - v^2 = b(x).$$

Это нелинейное ДУ называется ДУ Риккати, оно хорошо изучено и, за исключением отдельных частных случаев, не интегрируется в квадратурах. Интерес к этому классу простейших нелинейных ДУ связан главным образом с его ролью в обсуждаемой факторизации ДУ второго порядка.

Пусть решение $v = v(x)$ полученного уравнения Риккати определено на всем $[0, 1]$.

Итак, если выбрано решение ДУ Риккати, то можно исходное ДУ записать в виде

$$(D + a(x) - v(x))(Dy + v(x)y) = f(x).$$

Теперь ДУ можно заменить эквивалентной ему линейной системой ДУ

$$\begin{cases} y' + v(x)y = z, \\ z' + u(x)z = f(x). \end{cases}$$

Факторизация ДУ завершена. Перейдем к описанию схемы метода прогонки для краевой задачи (11).

Пусть коэффициент $\beta_0 \neq 0$. Без ограничения общности будем считать, что $\beta_0 = 1$, так что граничное условие в точке $x = 0$ имеет вид $\alpha_0 y(0) + y'(0) = \gamma_0$.

Подберем решения ДУ для $u(x)$ так, чтобы для решения $y(x)$ удовлетворялось граничное условие в точке $x = 0$.

Этот набор действий называется *прямой прогонкой*: продвижением вправо от точки $x = 0$ до точки $x = l$.

Находим решение $v = v(x)$ ДУ Риккати с начальным условием $v(0) = \alpha_0$. Пусть оно определено на всем $[0, l]$. Тогда и $u(x)$ определена на $[0, l]$.

Далее находим $z(x)$ на $[0, l]$ как решение линейной задачи Коши $z' + u(x)z = f(x)$, $z(0) = \gamma_0$.

Прогонка вправо завершена. Совершаем *обратную прогонку*, решая влево задачу Коши для ДУ $y' + v(x)y = z(x)$ с начальным значением $y(1)$.

Это начальное значение находим из системы уравнений

$$\begin{cases} \alpha_l y(l) + y'(l) = \gamma_l, \\ y'(l) + v(1)y(l) = z(1). \end{cases}$$

Первое из них — это граничное условие в точке $x = l$, а второе получается из ДУ для y при $x = l$.

Если $v(l) \neq \alpha_0$, то $y(1)$, а значит, и решение краевой задачи определяется единственным образом.

Если $\beta_0 = 0$, но $\beta_l \neq 0$, то сначала осуществляем прогонку влево, а затем — вправо.

Остается нерассмотренным случай, когда $\beta_0 = \beta_l = 0$. Здесь можно поступить так. Фиксируем решение ДУ Риккати, и пусть оно определено на $[0, l]$. Находим $z = z(x, C)$ как решение задачи Коши на $[0, l]$

$$z' + u(x)z = f(x), \quad z(0) = C.$$

При этом $z(x, C) = \tilde{z}(x) + C\varphi(x)$, где $\tilde{z}(x)$ — решение задачи Коши $z' + u(x)z = f(x)$, $z(0) = 0$, а $\varphi(x)$ — решение задачи Коши $z' + u(x)z = 0$,

$z(0) = 1$, т. е. положительное фундаментальное решение соответствующего однородного ДУ.

Наконец, совершаем обратную прогонку, решая влево задачу Коши $y' + v(x)y = z(x, C)$, $y(1) = 0$.

В соответствии с принципом суперпозиции решение этой задачи

$$y = \tilde{y}(x) + C\phi(x),$$

где $\tilde{y}(x)$ — решение задачи Коши $y' + v(x)y = \tilde{x}(x)$, $y(1) = 0$, а $\phi(x)$ — решение задачи Коши $y' + v(x)y = \varphi(x)$, $y(1) = 0$.

Потребуем, чтобы выполнялось граничное условие в точке $x = 0$, т. е., чтобы $0 = \tilde{y}(0) + C\phi(0)$. Поскольку $\varphi(0) \neq 0$ (почему?), то постоянная C определяется из уравнения однозначно. Но тогда однозначно определяется $z(x)$, а значит, и $y(x)$.

Метод прогонки обладает большой устойчивостью по отношению к вычислительным погрешностям при использовании разностных методов. Метод применим для систем линейных ДУ с граничными условиями самого общего вида.

Для вычисления приближенного решения краевой задачи (9) широко применяются, вследствие их эффективности, разностные методы. Близкой к разностной схеме Эйлера является следующая разностная схема с постоянным шагом $h = \dfrac{l}{n}$:

$$\frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{h^2} = f\left(x_{k-1}, y_{k-1}, \frac{y_k - y_{k-1}}{h}\right),$$
$$k = 1, 2, \ldots, n-1, \quad y_0 = y_n = 0.$$

Она представляет собою нелинейную алгебраическую систему из $(n-1)$ уравнений и с $(n-1)$ неизвестными. Данная разностная схема не является явной и для ее решения в свою очередь на каждом шагу применяются приближенные методы.

Справа записано второе разностное отношение, аппроксимирующее вторую производную точного решения в точке x_{k-1}:

$$\frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{h^2} \approx \frac{y(x_{k+1}) - 2y(x_k) + y(x_{k-1})}{h^2} \approx y''(x_{k-1}).$$

Предлагаем читателю убедиться в справедливости этого приближенного равенства с помощью формулы Тейлора.

Для вычисления сеточного решения линейной краевой задачи

$$y'' + b(x)y = f(x), \quad \alpha_0 y(0) + \beta_0 y'(0) = \gamma_0, \quad \alpha_l y(l) + \beta_l y'(l) = \gamma_l$$

в предположении, что $b(x) \leq 0$, обычно используется следующая аппроксимирующая ДУ разностная схема:

$$\frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{h^2} + b_k y_k = f_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

где $b_k = b(x_k)$, $f_k = f(x_k)$.

Сюда надо добавить уравнения, аппроксимирующие граничные условия:

$$\alpha_0 y_0 + \beta_0 \frac{y_1 - y_0}{h} = \gamma_0, \quad \alpha_l y_n + \beta_l \frac{y_n - y_{n-1}}{h} = \gamma_l.$$

Таким образом имеется $(n+1)$ неизвестных $y_0, y_1, \ldots, y_n$, и для их определения $(n+1)$ линейных уравнений: это $(n-1)$ уравнений разностной схемы и еще два уравнения аппроксимации граничных условий.

Запишем разностную схему в каноническом виде

$$y_{k+1} - (2 - b_k h^2) y_k + y_{k-1} = f_k h^2, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Матрица этой алгебраической системы трехдиагональная: по ее главной диагонали стоят числа $-(2 - b_k h^2)$, все отрицательные, если n достаточно велико; по диагоналям, к ней примыкающим, стоят единицы; остальные элементы матрицы равны нулю. Это позволяет для решения разностной схемы совместно с разностными аппроксимации граничных условий успешно применять алгебраический вариант метода прогонки. Здесь метод прогонки превращается в упрощенный вариант метода исключения Гаусса.

Прямая прогонка: последовательно определяем y_2 как линейную комбинацию y_1 и y_0, затем y_3 как линейную комбинацию y_2 и y_1, а значит, y_1 и y_0 и т. д. В результате все y_k, $k = 2, \ldots, n$, оказываются вычисленными как линейные комбинации и y_1 и y_0.

Подставим y_{n-1} и y_n в разностный аналог граничного условия в точке $x = l$. Полученное соотношение между y_1 и y_0 совместно с разностным граничным условием в точке $x = 0$ составляют линейную алгебраическую систему уравнений для определения y_1 и y_0.

Обратная прогонка: вычисляем последовательно $y_n, y_{n-1}, \ldots, y_2$.

Все эти действия могут быть запрограммированы на ЭВМ.

Можно доказать, что в случае граничных условий $y(0) = y(l) = 0$ рассмотренная разностная схема имеет второй порядок точности. За подробностями отсылаем читателя к [7, 13, 14].

Глава VI

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В главе приводятся необходимые сведения из многомерного математического анализа, линейной алгебры и функционального анализа. На их основе доказываются общие варианты теоремы существования и единственности решения задачи Коши, теоремы о непрерывной и аналитической зависимости решения от параметров и начальных данных, теорема об устойчивости по линейному приближению и другие важные теоретические факты теории обыкновенных дифференциальным уравнений. Использование элементарных фактов функционального анализа давно назрело. Оно позволяет существенно короче и более ясно получать технические результаты теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Подробности читатель найдет в [2, 14].

§ 1. Банаховы пространства

Линейное пространство (вещественное или комплексное) называется *нормированным пространством*, если каждому его элементу x поставлено в соответствие вещественное число $||x||$ (норма x), обладающее следующими тремя свойствами:

1) $||x|| \geq 0$ для любых $x \in X$, причем $||x|| = 0$ в том и только в том случае, когда $x = 0$;

2) $||\lambda x|| = |\lambda| \cdot ||x||$ для любых $x \in X$ и любых чисел (скаляров) λ;

3) $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$ для любых $x, y \in X$.

Свойство 1) — это свойство положительной определенности норм, 2) — свойство ее положительной однородности. Свойство 3) нормы называется неравенством треугольника.

Наличие нормы позволяет ввести в X понятие сходимости: последовательность $\{x_m\} \subset X$ называется сходящейся к элементу $x \in X$, если $||x_m - x|| \to 0$ при $m \to \infty$. Кратко: $x_m \to x$, $m \to \infty$, или

$$\lim_{m \to \infty} x_m = x.$$

В линейном пространстве норму можно ввести различными способами. Две нормы $||x||_1$ и $||x||_2$ в X называются *эквивалентными*, если

существуют числа $c > 0$, $C > 0$, такие, что для любых $x \in X$ выполняется двойное неравенство

$$c||x||_1 \leq ||x||_2 \leq C||x||_1.$$

Если две нормы в X эквивалентны, то сходимость к x последовательности $\{x_m\}$ в смысле одной нормы равносильна ее сходимости к тому же x в смысле другой нормы.

Важную роль в математическом анализе играет известный критерий Коши об эквивалентности на вещественной оси понятий сходящейся и фундаментальной последовательности. Последовательность $\{x_m\}$ элементов нормированного пространства называется фундаментальной, если

$$||x_m - x_l|| \to 0 \quad \text{при} \quad m, l \to \infty.$$

Легко проверяется, что в любом нормированном пространстве всякая сходящаяся последовательность является фундаментальной. Обратное утверждение справедливо далеко не всегда.

Нормированное пространство X называется *полным*, если в нем выполняется критерий Коши, т. е. всякая фундаментальная в X последовательность является также сходящейся в X.

Линейное нормированное полное пространство принято называть *банаховым пространством* (по имени выдающегося польского и советского математика Стефана Банаха).

Приведем некоторые определения и факты. Далее X — нормированное или банахово пространство.

При рассмотрении множества $M \subset X$ его элементы удобно называть также точками множества M.

Окрестностью точки a в пространстве X называется множество (открытый шар в X) $D_r(a) = \{x\colon ||x - a|| < r\}$.

Множество $M \subset X$ называется замкнутым, если всякий раз из того, что последовательность $\{x_m\}_1^\infty \subset M$ и $x_m \to x$, следует, что $x \in M$. Примером замкнутого множества является замкнутый шар: $\overline{D}_r(a) = \{x \in X : ||x - a|| \leq r\}$. Действительно, если $||x_m - a|| \leq r$ и $x_m \to x$ при $m \to \infty$, то, переходя к пределу в неравенстве, получаем $||x - a|| \leq r$.

Множество $M \subset X$ называется ограниченным, если существует $R > 0$, такое, что для любого $x \in M$ выполняется неравенство $||x|| \leq R$, т. е. $M \subset \overline{D_R}(0)$.

Пусть X и Y — два банаховых пространства, и задано множество $\mathcal{D} \subset X$.

Если каждой точке $x \in \mathcal{D}$ поставлена в соответствие единственная точка $y \in Y$, то говорят, что задан оператор (отображение) $y = f(x)$ с множеством определения $\mathcal{D}$.

Кратко (без указания множества определения) этот факт будем записывать так $f\colon X \to Y$ или чуть подробнее: $f\colon \mathcal{D} \subset X \to Y$.

Отображение (оператор) $f(x)$ называется непрерывным в точке $x_0 \in \mathcal{D}$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta = \delta(\varepsilon)$, такое, что для любых $x \in D_\delta(x_0) \cap \mathcal{D}$ выполняется неравенство $||f(x) - f(x_0)|| < \varepsilon$.

Отображение $f(x)$ называется непрерывным на множестве $\mathcal{D} \subset X$, если оно непрерывно в каждой его точке.

Пример 1. Всякое арифметическое n-мерное пространство $\Re^n$, снабженное нормой, является банаховым пространством.

Напомним, что арифметическим n-мерным пространством $\Re^n$ называется множество всевозможных столбцов $x = (x_i)_{i=1}^n$, $y = (y_i)_{i=1}^n, \ldots$ из n вещественных чисел с операциями сложения столбцов $x + y = (x_i + y_i)_{i=1}^n$ и умножения столбцов на вещественные числа $\lambda x = (\lambda x_i)_{i=1}^n$. Из этого определения вытекает, что $\Re^n$ является n-мерным линейным пространством.

Элементы из $\Re^n$, т. е. столбцы, по аналогии с векторами на плоскости или в трехмерном пространстве, часто называют векторами. При этом числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называются координатами вектора x. В качестве базиса в $\Re^n$ выбирают обычно систему векторов $e_m = (\delta_{im})_{i=1}^n$, $m = 1, 2, \ldots, n$, где (символ Кронекера) $\delta_{im} = 0$ при $i \neq m$ и $\delta_{ii} = 1$, называемую стандартным базисом. У каждого вектора e_m $(1 \leq m \leq n)$ m-я координата равна единице, а остальные координаты равны нулю.

В арифметическом пространстве $\Re^n$, снабженном нормой, вводится понятие сходимости.

Норму в $\Re^n$ можно выбрать различными способами.

Например,

$$||x|| = \sqrt{\sum_{l=1}^{n} |x_l|^2}$$

— сферическая норма или

$$||x|| = \max_{1 \leq l \leq n} |x_l|$$

— кубическая норма.

Можно доказать, что все нормы в $\Re^n$ эквивалентны.

Оказывается, пространство $\Re^n$, снабженное любой нормой, является полным: в нем справедлив критерий Коши. Этот факт вследствие эквивалентности норм достаточно доказать в случае кубической нормы. При этом выясняется, что сходимость последовательности означает покоординатную сходимость. В дальнейшем мы будем использовать в $\Re^n$ кубическую норму как более простую в вычислениях. В учебной литературе традиционно предпочтение отдается сферической норме.

Справедлив следующий важный факт: отображение $f\colon \Re^n \to \Re$ (т. е. функция n вещественных переменных с вещественными значениями), непрерывное на замкнутом ограниченном множестве, ограничено на нем и достигает на нем своих наименьшего и наибольшего значений. Отсюда, в частности, и следует эквивалентность всех норм в $\Re^n$.

Пример 2. Всякое комплексное арифметическое n-мерное пространство $\Re_c^n$, снабженное нормой, является банаховым пространством.

Это пространство аналогично пространству $\Re^n$. Оно состоит из столбцов высоты n с комплексными координатами.

Всякий элемент в пространстве $\Re_c^n$ имеет вид $x + iy$, где $x \in \Re^n$, $y \in \Re^n$, так что $\Re_c^n = \Re^n \dotplus i\Re^n$ (прямая сумма). Поэтому говорят, что пространство $\Re_c^n$ является комплексификацией пространства $\Re^n$.

Пример 3. *Банаховы пространства непрерывных функций.* Пусть $C[a, b]$ — множество всех непрерывных на отрезке $[a, b]$ вещественных функций $x(t)$ с естественными операциями сложения функций и умножения функций на числа. В этом линейном пространстве норма задается формулой

$$||x||_C = \max_{t \in [a, b]} |x(t)|.$$

Сходимость в $C[a, b]$, порожденная данной нормой, называется равномерной сходимостью.

В математическом анализе (см., например, [8]) устанавливается, что пространство $C[a, b]$ полно в смысле равномерной сходимости и, таким образом, является банаховым пространством.

Обобщим этот пример. Рассмотрим множество всевозможных вектор-функций (столбцов из n функций) $x(t) = (x_k(t))_{k=1}^n$, в которых все координатные функции $x_k(t) \in C[a, b]$. Обозначим это множество через $C_n[a, b]$. С естественными операциями сложения вектор-функций и умножения их на числа данное множество является линейным пространством. Введем в нем норму

$$||x|| = \max_{1 \le k \le n} ||x_k||_C.$$

Тогда $C_n[a, b]$ также является банаховым пространством.

Аналогично рассматривается банахово пространство комплексно-значных непрерывных функций.

Другой важный случай банаховых пространств — это пространства $C^m[a, b]$, состоящие из всех m раз непрерывно дифференцируемых на $[a, b]$ функций $x(t)$ с нормой

$$||x|| = \sum_{k=0}^{m} ||x^{(k)}||_C.$$

Отметим также банаховы пространства $C_n^m[a, b]$, состоящие из столбцов $x(t) = \{x_l(t)\}$ высоты n с m раз непрерывно дифференцируемыми на $[a, b]$ координатами и с нормой

$$||x|| = \sum_{k=0}^{m} \max_{1 \le l \le n} ||x_l^{(k)}||_C.$$

§ 2. Принцип сжимающих отображений

Приведем здесь в удобной для последующего применения форме один из важнейших принципов нелинейного анализа. С помощью этого принципа ниже будет доказана лежащая в основе данного курса обыкновенных ДУ теорема Коши.

Пусть задан нелинейный оператор Φ с множеством определения $\mathcal{D}$, лежащим в банаховом пространстве X, и со значениями в этом же пространстве. Кратко $\Phi\colon \mathcal{D} \subset X \to X$.

Определение 1. Точка $x_* \in \mathcal{D}$ называется *неподвижной точкой* оператора Φ, если $\Phi(x_*) = x_*$.

Определение 2. Оператор Φ назовем *сжимающим оператором* на множестве $\mathcal{D}$, если существует число $q \in (0, 1)$, такое, что для любых $x, y \in \mathcal{D}$ выполняется неравенство

$$||\Phi(x) - \Phi(y)|| \le q||x - y||.$$

При этом q называется *коэффициентом сжатия* оператора Φ на множестве $\mathcal{D}$.

Теорема. *Пусть оператор Φ отображает замкнутый шар $\overline{D}_r(x_0)$ в пространство X, причем Φ является на $\overline{D}_r(x_0)$ сжимающим оператором с коэффициентом сжатия q. Пусть выполнено условие $||\Phi(x_0) - x_0|| \le (1 - q)r$. Тогда в $\overline{D}_r(x_0)$ существует единственная неподвижная точка x_* оператора Φ.*

Образуем последовательность $\{x_m\}$, полагая $x_m = \Phi(x_{m-1})$, $m = 1, 2, \ldots$. Тогда $\{x_m\} \subset \overline{D}_r(x_0)$, и эта последовательность сходится к x_*. При этом справедлива оценка скорости сходимости

$$||x_m - x_*|| \le q^{m-1}||\Phi(x_0) - x_0||.$$

Доказательство. Покажем сначала, что оператор отображает шар $D_r(x_0)$ в себя. Действительно, если $x \in D_r(x_0)$, то

$$||\Phi(x) - x_0|| \le ||\Phi(x) - \Phi(x_0)|| + ||\Phi(x_0) - x_0|| \le \\ \le q||x - x_0|| + (1 - q)r \le qr + (1 - q)r = r,$$

т. е. x тоже лежит в $\overline{D}_r(x_0)$.

Рассмотрим последовательность $\{x_m\}$, полагая $x_m = \Phi(x_{m-1})$, $m = 1, 2, \ldots$. Вся она лежит в шаре $\overline{D}_r(x_0)$. В самом деле, $x_1 = \Phi(x_0) \in D_r(x_0)$, $x_2 = \Phi(x_1) \in \overline{D}_r(x_0)$ и т. д., по математической индукции.

Положим $\theta = ||\Phi(x_0) - x_0||$. Используя сжимаемость Φ на $\overline{D}_r(x_0)$, последовательно находим

$$||x_1 - x_0|| = ||\Phi(x_0) - x_0|| = \theta,$$
$$||x_2 - x_1|| = ||\Phi(x_1) - \Phi(x_0)|| \le q||x_1 - x_0|| = \theta q,$$
$$||x_3 - x_2|| = ||\Phi(x_2) - \Phi(x_1)|| \le q||x_2 - x_1|| \le \theta q^2,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$||x_{m+1} - x_m|| \le \theta q^m.$$

Используя эти неравенства, докажем, что построенная последовательность фундаментальна в X. Действительно, имеем оценки:

$$||x_{m+p} - x_m|| \le ||x_{m+p} - x_{m+p-1}|| + ||x_{m+p-1} - x_{m+p-2}|| + \ldots$$

$$\ldots + ||x_{m+1} - x_m|| \le \theta(q^{m+p-1} + q^{m+p-2} + \ldots + q^m) = \frac{\theta(q^m - q^{m+p})}{1-q} \le \frac{\theta q^m}{1-q}.$$

Итак, доказано неравенство

$$||x_{m+p} - x_m|| \le \frac{\theta q^m}{1-q}.$$

Из него следует, что последовательность $\{x_m\}$ является фундаментальной в X, а вследствие полноты пространства X еще и сходящейся к некоторому элементу $x_* \in X$. Перейдя к пределу при $p \to \infty$ в последнем неравенстве, получим искомую оценку скорости сходимости

$$||x_* - x_m|| \le \frac{\theta q^m}{1-q}.$$

При этом $x_* \in \overline{D}_r(x_0)$. Это следствие замкнутости шара $\overline{D}_r(x_0)$.

Докажем, что x_* является неподвижной точкой оператора Φ.

Из условия сжимаемости оператора Φ следует его непрерывность в $\overline{D}_r(x_0)$. Пользуясь этим, перейдем в равенстве $x_m = \Phi(x_{m-1})$ к пределу при $m \to \infty$ и получим $\Phi(x_*) = x_*$.

Докажем единственность неподвижной точки оператора Φ в $\overline{D}_r(x_0)$.

Пусть Φ имеет в $\overline{D}_r(x_0)$ еще и неподвижную точку x_{**}. Пользуясь сжимаемостью Φ на $\overline{D}_r(x_0)$, имеем

$$||x_* - x_{**}|| = ||\Phi(x_*) - \Phi(x_{**})|| \le q||x_* - x_{**}||.$$

Это возможно лишь при $x_* = x_{**}$. Теорема полностью доказана.

Следствие. *Пусть оператор Φ отображает банахово пространство X в себя и является на X сжимающим оператором с коэффициентом сжатия q. Зафиксируем в X точку x_0, и пусть $r = (1-q)^{-1}||\Phi(x_0) - x_0||$. Тогда если $r = 0$, то x_0 — единственная неподвижная точка оператора Φ в X. Если же $r > 0$, то в шаре $\overline{D}_r(x_0)$ оператор Φ имеет единственную неподвижную точку.*

Доказательство. Заметим, что если $r = 0$, то x_0 — неподвижная точка. Ее единственность следует из сжимаемости Φ. Если же $r > 0$, то рассмотрим сужение оператора Φ на шар $\overline{D}_r(x_0)$, т. е. рассмотрим Φ только на этом шаре. Применяя к этому сужению теорему устанавливаем справедливость и второй части утверждения следствия.

§ 3. Некоторые свойства отображений конечномерных пространств

Перечислим необходимые для последующего изложения основные факты многомерного математического анализа (см. [8]).

Пусть $G \subset \Re^{n+1}$ — область в пространстве переменных $t \in \Re$, $x \in \Re^n$. Мы будем использовать в $\Re^n$ кубическую норму.

Рассмотрим отображение $y = f(t, x)$, ставящее в соответствие каждой точке $(t, x) \in G$ определенную точку $y \in \Re^n$. В стандартном базисе данное отображения можно записать в виде

$$y_k = f_k(t, x_1, \ldots, x_n), \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

где функции f_k от $(n+1)$ переменных называются координатными функциями отображения f.

Пусть выполнены следующие условия.

1) Отображение $f(t, x)$ непрерывно в G по совокупности своих переменных.

Заметим, что отображение $f(t, x)$ непрерывно на G тогда и только тогда, когда все его координатные функции $f_k(t, x)$ непрерывны на G.

2) Для каждой замкнутой ограниченной области $\overline{H} \subset G$ найдется число $K = K(\overline{H})$, такое, что для любых $(t, x) \in \overline{H}$, $(t, z) \in \overline{H}$ выполняется неравенство (условие Липшица)

$$||f(t, x) - f(t, z)|| \le K||x - z||.$$

Подробнее условие 2) выглядит следующим образом. Если $x = (x_k)_{k=1}^n$, а $z = (z_k)_{k=1}^n$, то условие Липшица равносильно условиям Липшица для каждой координатной функции:

$$|f_k(t, x) - f_k(t, z)| \le K \max_k |x_k - z_k|, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Напомним следующий факт, известный из математического анализа [8]: если отображение f непрерывно в области G, то на каждой замкнутой ее подобласти $\overline{H} \subset G$ оно ограничено: существует постоянная $M = M(\overline{H})$, такая, что для любых $(t, x) \in \overline{H}$ выполняется неравенство $||f(t, x)|| = \max\limits_k |f_k(t, x)| \le M$.

Часто полезным следствием является следующее условие.

3) Отображение $f(t, x)$ непрерывно дифференцируемо по x в области G.

В соответствии с определением дифференцируемости отображение f непрерывно дифференцируемо по x тогда и только тогда, когда непрерывно дифференцируема каждая его координатная функция, а это будет иметь место, если частные производные $\dfrac{\partial f}{\partial x_k}$, $k = 1, 2, \ldots, n$, непрерывны.

Из условия 3) следует 2). Докажем этот факт для случая выпуклой области G. Воспользуемся обозначением $x(\lambda) = y + \lambda(x - y)$, $\lambda \in [0, 1]$. Для каждой координатной функции по формуле конечных приращений Лагранжа имеем

$$f_k(t, x) - f_k(t, y) = f_k(t, x(1)) - f_k(t, x(0)) = \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial f_k(t, x(\theta))}{\partial x_l}(x_l - y_l),$$

где $\theta \in (0, 1)$.

Так как частные производные по переменным также ограничены на $\overline{H}$, то найдется постоянная $K > 0$, такая, что

$$|f_k(t, x) - f_k(t, y)| \le \sum_{l=1}^{n} |\frac{\partial f_k(t, x(\theta))}{\partial x_l}|.|x_l - y_l| \le K||x - y||,$$

где $K = \sup\limits_{\overline{H}} \max\limits_{1\le k\le n} \sum\limits_{l=1}^{n} \left|\dfrac{\partial f_k(t, x(\theta))}{\partial x_l}\right|$. Таким образом, справедлива оценка $||f(t, x) - f(t, y)|| \le K||x - y||$.

Остановимся на частном случае, когда отображение f линейное (неоднородное):

$$f(t, x) = A(t)x + h(t).$$

Здесь $A(t) = (a_{k,l}(t))_{k,l=1}^{n}$ — матрица с непрерывными на (a, b) элементами, а $h(t) = (h_k(t))_{k=1}^{n}$ — столбец из функций (вектор-функция) с непрерывными на (a, b) координатами.

Каждая координатная функция $f_k(t, x) = \sum\limits_{l=1}^{n} a_{kl}(t)x_l + h_k(t)$ и ее частные производные $\dfrac{\partial f_k}{\partial x_l} = a_{kl}(t)$ непрерывны по совокупности переменных при $t \in (a, b)$, $x \in \Re$. Следовательно, в этом случае выполнены условия 1), 2), а значит, и 2).

Упражнение. Покажите, что в данном случае в качестве постоянной Липшица при $t \in [\alpha, \beta] \subset (a, b)$, $x \in \Re^n$ можно взять

$$K = \max_{t\in[\alpha,\beta]} \max_{1\le k\le n} \sum_{l=1}^{n} |a_{k,l}(t)|.$$

§ 4. Доказательство теоремы Коши

Предшествующее изложение теории ДУ во многом базировалось на теореме Коши. Здесь будет дано доказательство этой теоремы в ее общем варианте.

Теорема. *Пусть в области $G \subset \Re^{n+1}$ отображение $f(t, x)$ непрерывно по совокупности своих переменных и удовлетворяет условию Липшица* 2) *из* §3. *Тогда для любой точки $(t_0, x_0) \in G$ существует $\delta > 0$, такое, что на отрезке $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ существует единственное решение задачи Коши*

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0. \tag{1}$$

Доказательство. Зафиксируем область H с границей Γ, такую, что точка $(t_0, x_0) \in H$ и замыкание H лежит в G, т. е. $\overline{H} = H \cup \Gamma \subset G$.

На $\overline{H}$ отображение f ограничено: существует постоянная $M > 0$, такая, что $||f(t, x)|| \leq M$, т. е. для любых $(t, x) \in \overline{H}$ имеют место неравенства

$$|f_k(t, x)| \leq M, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Воспользуемся условием 2). Существует $K > 0$, такое, что для любых $(t, x) \in \overline{H}$, $(t, z) \in \overline{H}$ выполняются неравенства

$$|f_k(t, x) - f_k(t, z)|| \leq K||x - z||, \quad k = 1, 2, \ldots, m.$$

Введем в рассмотрение цилиндр

$$T_r = \{(t, x), \ t \in [t_0 - \delta_r, \ t_0 + \delta_r], \ ||x - x_0|| \leq r\}.$$

Возьмем $r > 0$ настолько малым, чтобы при $\delta_r = \dfrac{r}{M + Kr}$ имело место включение $T_r \subset G$.

Рассмотрим интегральное уравнение

$$x(t) = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds. \tag{2}$$

В координатной форме это уравнение записывается как система интегральных уравнений

$$x_k(t) = x_{0k} + \int\limits_{t_0}^{t} f_k(s, x_1(s), x_2(s), \ldots, x_n(s))\, ds, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Интегральное уравнение (2) будем рассматривать в пространстве $X_r = C_n[t_0 - \delta_r, t_0 + \delta_r]$ непрерывных на $[t_0 - \delta_r, t_0 + \delta_r]$ вектор-функций.

Запишем уравнение (2) в операторном виде $x = \Phi(x)$, где оператор Φ задан формулой

$$\Phi(x)(t) = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds.$$

Рассмотрим в пространстве X_r замкнутый шар

$$\overline{D}_r(x_0) = \{x \in X_r \colon ||x - x_0|| \leq r\}.$$

Оператор Φ является сжимающим оператором на этом шаре и отображает его в себя. Действительно, для любых x, y из этого шара имеем

$$||\Phi(x) - \Phi(y)|| = \max_{t \in [t_0 - \delta_r, t_0 + \delta_r]} \left| \int\limits_{t_0}^{t} ||f(s, x(s)) - f(s, y(s))||\, ds \right| \leq \delta_r K ||x - y||.$$

Заметим, что коэффициент сжатия $q_r = \delta_r K = \dfrac{Kr}{M + Kr} < 1$.

Далее, $||\Phi(x_0) - x_0|| = \max\limits_{t \in [t_0 - \delta_r, t_0 + \delta_r]} \left| \int\limits_{t_0}^{t} ||f(s, x_0)||ds \right| \leq \delta_r M = (1 - q_r)r$ (проверьте!).

Согласно принципу сжимающих отображений (теорема из §2) в $\overline{D}_r(x_0)$ оператор Φ имеет единственную неподвижную точку x_*. Это означает, что интегральное уравнение (2) имеет на $[t_0 - \delta_r, t_0 + \delta_r]$ единственное решение $x = x_*(t)$. Это решение и является решением рассматриваемой задачи Коши. Доказательство такое же, как в лемме из гл. V, §2.

Следствие. *Пусть выполнены условия* 1) *и* 2) *из* §3. *Тогда справедливо утверждение теоремы.*

§ 5. Продолжение локального решения задачи Коши до ее глобального решения

Пусть $x(t)$ — локальное решение задачи Коши, существование и единственность которого установлены в ходе доказательства теоремы Коши. Зафиксируем сначала замкнутую ограниченную область $\overline{H} \subset G$, охватывающую график этого локального решения. Для продолжения этого решения вплоть до границы $\gamma = \partial\overline{H}$ замкнутой области $\overline{H}$ надо показать, что $x(t)$ может быть продолжено на отрезок $[a, b]$, такой, что $t_0 \in [a, b]$ и $(a, x(a)) \in \gamma$, $(b, x(b)) \in \gamma$. При этом достаточно ограничиться продолжением решения вправо.

Если оказалось, что точка $(t_0 + \delta_r, x(t_0 + \delta_r)) \in \gamma$, то все доказано. Если это не так, то положим $t_1 = t_0 + \delta_r$ и рассмотрим задачу Коши $\dot{x} = f(t, x)$, $x(t_1) = x(t_0 + \delta_r)$. Применяя теорему Коши, получим решение на отрезке $[t_0, t_2]$, где $t_2 > t_1$.

Рассмотрим всевозможные продолжения вправо (в замкнутой области $\overline{H}$) решения $x(t)$. Пусть Ω — множество всех тех t, для которых продолжение вправо возможно, т. е. $\Omega = \{t \geq t_0 \colon (t, x(t)) \in \overline{H}\}$. Множество Ω ограничено (ведь $\overline{H}$ ограничено).

Положим $b = \sup \Omega$. Точка $(x(b), b) \in \gamma$, и продолжение вправо завершено. Аналогично продолжением влево также достигаем границы Γ. Таким образом, доказано существование решения задачи Коши на максимальном отрезке $[a, b]$.

Покажем теперь, что в исходной области G существует максимальный по переменной t интервал (α, β) существования решения задачи Коши (конечный или бесконечный). Аппроксимируем область G изнутри расширяюшейся последовательностью замкнутых ограниченных областей $\{\overline{H}_n\}$ с границами γ_n, таких, что $(x_0, t_0) \in \overline{H}_n$ и $\overline{H}_n \subset G$. В каждой области H_n решение существует на отрезке $[a_n, b_n]$, таком, что $(a_n, x(a_n)) \in \gamma_n$, $(b_n, x(b_n)) \in \gamma_n$. Поскольку последовательность $\{b_n\}$ — возрастающая, а $\{a_n\}$ — убывающая, то существуют их пределы при $n \to \infty$, равные соответственно α и β (конечные или бесконечные). Интервал (α, β) и является максимальным интервалом существования в G решения задачи Коши. При этом точки графика ее решения подходят сколь угодно близко к границе области G или к бесконечности (последнее возможно, если G неограничена по x).

Приведем примеры ($n = 1$).

Пример 1. $\dot{x} = 1 + x^2$, $x(0) = 0$. Здесь $G = \Re^2$. Решение задачи равно $x = \operatorname{tg} t$, и оно определено на интервале $(-\pi/2, +\pi/2)$. При подходе к его концам решение стремится к бесконечности (имееют место взрывы решения).

Пример 2. В области $G = \{x \in \Re,\, t > 0\}$ рассмотрим задачу Коши

$$\dot{x} = -\frac{1}{t^2}\cos\frac{1}{t}, \quad x\left(\frac{2}{\pi}\right) = 1.$$

Ее решение равно $x = \sin\dfrac{1}{t}$, и его предельные точки при $t \to +0$ заполняют отрезок $[-1, +1]$.

Пример 3. В области $G = \{x \in \Re,\, t > 0\}$ рассмотрим задачу Коши

$$\dot{x} = -\frac{1}{t^2}\sin\frac{1}{t} - \frac{1}{t^3}\cos\frac{1}{t}, \quad x\left(\frac{2}{\pi}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Ее решение равно $x = \dfrac{1}{t}\sin\dfrac{1}{t}$, и его предельные точки при $t \to +0$ заполняют всю ось Ox.

§ 6. Существование и единственность решения задачи Коши в линейном случае

На практике встречаются, кроме линейного случая, также «почти линейные» случаи, когда правая часть ДУ определена для всех значений $x \in \Re^n$ и может расти при $||x|| \to +\infty$ не быстрее линейной функции.

Пусть выполнены следующие условия.

1) Отображение $f(t, x)\colon \Re^{n+1} \to \Re$ непрерывно по совокупности переменных на $G = \{(t, x)\colon t \in (a, b),\, x \in \Re^n\}$.

2) Отображение $f(t, x)$ удовлетворяет условию Липшица по x в любой замкнутой области вида $\overline{H} = \{(t, x)\colon t \in [\alpha, \beta], x \in \Re^n\}$, где $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$.

Теорема. *Пусть выполнены условия* 1) *и* 2). *Тогда для любой точки* $(t_0, x_0) \in G$ *на всем интервале* (a, b) *существует единственное решение задачи Коши* $\dot{x} = f(t, x)$, $x(t_0) = x_0$.

Доказательство. Пусть отрезок $[\alpha, \beta]$ содержит точку t_0. По условию 2) существует $K > 0$, такое, что на $\overline{H}$ имеем оценку

$$||f(t, x) - f(t, z)|| \le K||x - z||.$$

Зафиксируем $\delta \in (0, K^{-1})$. Покажем сначала, что задача Коши имеет единственное решение на отрезке $[t_0, t_0 + \delta]$. Для этого рассмотрим интегральное уравнение (2) на этом отрезке. Зададим оператор $\Phi(x)$ правой частью интегрального уравнения (2). Имеем оценку

$$|\Phi(x) - \Phi(z)| \le \left|\int\limits_{t_0}^{t} ||f(s, x(s) - f(s, z(s)))||\, ds\right| \le K \max_{t\in[t_0, t_0+\delta]} ||x(t) - z(t)||\delta.$$

Тогда в пространстве $C_n[t_0, t_0+\delta]$ оператор $\Phi(x)$ является сжимающим с коэффициентом сжатия $q = K\delta$. Отсюда по следствию к теореме из § 4 вытекает, что задача Коши имеет на $[t_0, t_0+\delta]$ единственное решение. Воспользуемся теперь методом продолжения из § 5. Рассмотрим новую задачу Коши: найти решение ДУ $\dot{x} = f(t, x)$, если значение $x(t_0+\delta)$ задано. Этой задаче соответствует интегральное уравнение

$$x(t) = x(t_0+\delta) + \int\limits_{t_0+\delta}^{t} f(s, x(s))\, ds.$$

Правую часть этого уравнения трактуем как сжимающее отображение в пространстве $C_n[t_0+\delta, t_0+2\delta]$ с тем же коэффициентом сжатия q. Из следствия к теореме из § 4 вытекает, что новая задача Коши имеет единственное решение на $[t_0+\delta, t_0+2\delta]$. Решения старой и новой задач Коши гладко стыкуются в точке $t_0+\delta$, поскольку в ней равны значения решения и его производной.

Этот процесс продолжения решения вправо конечен. Пусть N — наименьшее натуральное число, удовлетворяющее неравенству $t_0+N\delta \geq \beta$. Тогда точка β будет достигнута за N шагов применения следствия к теореме из § 4.

Аналогично продолжением влево за конечное число шагов достигаем точки α. Итак, решение задачи Коши существует и единственно на отрезке $[\alpha, \beta]$. А поскольку этот отрезок произволен, то решение существует на всем (a, b).

Следствие. *Пусть матрица $A(t)$ и вектор-функция $h(t)$ непрерывны на (a, b). Тогда для любых $t_0 \in (a, b)$, $x_0 \in \Re^n$ задача Коши для системы линейных ДУ*

$$\dot{x} = A(t)x + h(t), \quad x(t_0) = x_0$$

имеет на всем интервале (a, b) единственное решение.

Доказательство. Все условия теоремы выполняются, причем $K = \max\limits_{t\in[\alpha,\beta]} ||A(t)||$.

Рассмотренные теорема и следствие к ней могут быть доказаны и другими методами (см. [7, 13]).

§ 7. Непрерывная зависимость решения задачи Коши от начальных значений и от параметров

Начнем с вопроса о зависимости решения задачи Коши от начального значения решения. Пусть известно решение ДУ для некоторого фиксированного начального значения. Не может ли случиться так, что небольшая ошибка в задании этого начального значения приведет к значительной ошибке для решения задачи Коши? Оказывается, на конечном отрезке при разумных ограничениях этого не происходит. Ре-

шения будут отличаться достаточно мало, если их начальные значения были достаточно близки.

Пусть условиях теоремы Коши на отрезке $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ существуют решения ДУ $\dot{x} = f(t, x)$ с начальными условиями $x(t_0) = a_1$ и $x(t_0) = a_2$. Обозначим их через $x = x(t, a_1)$ и $x = x(t, a_2)$ соответственно.

На этом же отрезке выполняются интегральные тождества

$$x = x(t, a_1) = x(t_0, a_1) + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s, a_1))\, ds,$$

$$x = x(t, a_2) = x(t_0, a_2) + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s, a_2))\, ds.$$

Вычитая из первого тождества второе и оценивая полученное равенство по норме, получаем

$$||x(t, a_1) - x(t, a_2)|| \le ||a_1 - a_2|| + \left|\int_{t_0}^{t} ||f(s, x(s, a_1) - f(s, x(s, a_2)||\, ds\right|.$$

Воспользуемся условием Липшица и получим

$$||x(t, a_1) - x(t, a_1)|| \le ||a_1 - a_2|| + \delta K ||x(t, a_1) - x(t, a_1)||.$$

Как и в доказательстве теоремы Коши, δ можно считать настолько малым, чтобы $\delta K = q < 1$, а тогда

$$||x(t, a_1) - x(t, a_1)|| \le (1 - q)^{-1} ||a_1 - a_2||.$$

Таким образом, в условиях теоремы Коши решение задачи Коши непрерывно зависит от его начального значения.

Пусть теперь начальное значение не меняется, но правая часть ДУ зависит от параметра λ, принимающего значения из некоторой области $\Lambda \subset \Re^p$. Проведем вкратце аналогичные рассуждения.

Рассмотрим задачу Коши

$$\dot{x} = f(t, x, \lambda), \quad x(t_0) = x_0.$$

Пусть выполнены следующие предположения относительно отображения $f(t, x, \lambda)$.

1) Оно непрерывно по λ равномерно относительно переменных t, x, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\alpha = \alpha(\varepsilon) > 0$, такое, что из $|\lambda_1 - \lambda_2| < \alpha$ следует $||f(t, x, \lambda_1) - f(t, x, \lambda_2)|| < \varepsilon$ для всех $(t, x) \in \overline{H}$, где замкнутая область $\overline{H}$ определена в §5 и такова, что $x(t, \lambda) \subset \overline{H}$ при всех $\lambda \in \Lambda$.

2) Оно удовлетворяет условию Липшица равномерно по $(t, x) \in \overline{H}$, $\lambda \in \Lambda$:

$$||f(t, x, \lambda) - f(t, z, \lambda)|| \le K ||x - z||.$$

Пусть на общем отрезке $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ определены $x = x(t, \lambda_1)$ и $x = x(t, \lambda_2)$ — соответственно решения ДУ

$$\dot{x} = f(t, x, \lambda_1), \quad \dot{x} = f(t, x, \lambda_2)$$

с общим начальным условием $x(t_0) = x_0$.

Это означает, что на этом отрезке имеют место интегральные тождества

$$x(t, \lambda_1) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s, \lambda_1), \lambda_1)\, ds, \quad x(t, \lambda_2) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s, \lambda_2), \lambda_2)\, ds.$$

Вычтем из первого тождества второе и получим

$$x(t, \lambda_1) - x(t, \lambda_2) = \int_{t_0}^{t} \big(f(s, x(s, \lambda_1), \lambda_1) - f(s, x(s, \lambda_2), \lambda_2)\big)\, ds.$$

Пусть $|\lambda_1 - \lambda_2| < \alpha$. Воспользуемся оценкой

$$\begin{aligned} ||f(s, x(s, \lambda_1), \lambda_1) - f(s, x(s, \lambda_2), \lambda_2))|| \leq \\ \leq ||f(s, x(s, \lambda_1), \lambda_1) - f(s, x(s, \lambda_2), \lambda_1))|| + \\ + ||f(s, x(s, \lambda_2), \lambda_1) - f(s, x(s, \lambda_2), \lambda_2))|| < \\ < \sup_{t_0 - \alpha \leq t \leq t_0 + \alpha} ||x(t, \lambda_1) - x(t, \lambda_2)|| + \varepsilon. \end{aligned}$$

Теперь имеем оценку

$$\sup_{t_0 - \alpha \leq t \leq t_0 + \alpha} ||x(t, \alpha_1) - x(t, \alpha_2)|| \leq (1 - q)^{-1} \varepsilon \delta.$$

Отсюда вытекает непрерывная зависимость решения задачи Коши от параметра λ.

Аналогичным образом в предположении достаточной гладкости отображения f исследуются существование и непрерывность производных решения по начальным данным и по параметрам. Наиболее полно этот вопрос рассмотрен в учебнике [13].

В §14 Дополнения I рассмотрен общий подход к данному кругу вопросов. Устойчивость (корректность) и неустойчивость (некорректность) той или иной математической задачи (математической модели) по отношению к малым возмущениям ее параметров играют важнейшую роль в математике и особенно в ее приложениях.

§ 8. Степенные ряды в банаховых пространствах и теорема о неявном операторе в аналитическом случае

В приложениях часто встечаются нелинейные отображения, аналитические относительно неизвестной вектор-функции x и параметров. Ниже мы останавливаемся на уравнениях с аналитическими операторами.

Приведем сначала некоторые факты из математического анализа (см. [8]).

Функция $f\colon \Re \to \Re$, определенная в некоторой окрестности точки x_0, называется аналитической в этой точке, если она является суммой степенного ряда

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (x - x_0)^k$$

с ненулевым радиусом сходимости r_u.

Аналитическая функция бесконечно дифференцируема в своем интервале сходимости, а представляющий ее степенной ряд является ее рядом Тейлора.

Пусть $|a_k| \le b_k$, $k = 1, 2, \ldots$. Числовой ряд

$$\sum_{k=0}^{+\infty} b_k r^k$$

называется мажорантным рядом для степенного ряда. Если мажорантный ряд сходится, то $r_u > r$ и степенной ряд сходится абсолютно и равномерно на отрезке $[x_0 - r, x_0 + r]$.

Аналогично функция $f(x, \lambda)$ двух переменных ($f\colon \Re^2 \to \Re$), определенная в некоторой окрестности точки (x_0, λ_0), называется аналитической в этой точке, если она является суммой двойного степенного ряда

$$f(x, \lambda) = \sum_{k+l \ge 0} a_{k,l} (x - x_0)^k (\lambda - \lambda_0)^l.$$

Предполагается, что существуют числа $r_u > 0$, $\rho_u > 0$, называемые совместными радиусами сходимости, такие, что при всех (x, λ), удовлетворяющих неравенствам

$$|x - x_0| < r_u, \quad |\lambda - \lambda_0| < \rho_u,$$

двойной степенной ряд сходится, а если $|x - x_0| > r_u$, $|\lambda - \lambda_0| > \rho_u$, то он расходится.

Пусть $|a_{k,l}| \le b_{k,l}$, $k, l = 0, 1, 2, \ldots$. Числовой ряд

$$\sum_{k+l \ge 0} b_{k,l} r^k \rho^l$$

называется мажорантным рядом для двойного степенного ряда. Если мажорантный ряд сходится, то $r_u > r$, $\rho_u > \rho$ и двойной степенной ряд сходится абсолютно и равномерно при $|x - x_0| \le r$, $|\lambda - \lambda_0| \le \rho$.

Отображение $y_1 = f_1(x, \lambda)$, $y_2 = f_2(x, \lambda)$ (кратко $f\colon \Re^2 \to \Re^2$), определенное в некоторой окрестности точки (x_0, λ_0), называется аналитическим в этой точке, если его координатные функции f_1, f_2 являются аналитическими в этой точке.

Эти определения и утверждения могут быть перенесены на значительно более общие ситуации. Нам представляется целесообразным интерпретировать их на языке функционального анализа [14].

Пусть X, Y — вещественные банаховы пространства. Рассмотрим сначала линейный ограниченный оператор A, отображающий всё X в Y. Линейность A означает, что

$$A(c_1x_1 + c_2x_2) = c_1A(x_1) + c_2A(x_2)$$

для любых $x_1, x_2 \in X$ и любых чисел $c_1, c_2 \in \Re$.

Если A — линейный оператор, то его значение на элементе x будем записывать в виде Ax (т. е. без скобок).

По определению ограниченность линейного оператора A означает, что существует постоянная $C > 0$, такая, что для любых $x \in X$ выполняется неравенство $||Ax|| \leq C||x||$.

Наименьшая из таких постоянных C называется нормой оператора A и обозначается $||A||$.

Пример. Зададим в $\Re^n$ линейный оператор матрицей $A = (a_{kl})_{k,\,l=1}^n$. Этот оператор всегда является ограниченным, но при различных способах задания нормы в $\Re^n$ выражения для его нормы также будут различными.

Можно показать (см. [14]), что если $||x|| = \sqrt{\sum\limits_{l=1}^{n} x_l^2}$ (сферическая норма), то $||A|| = \sum\limits_{k,\,l=1}^{n} a_{kl}^2$.

Если же $||x|| = \max\limits_{1\leq l\leq n} |x_l|$ (кубическая норма), то $||A|| = \max\limits_{1\leq k\leq n} \sum\limits_{l=1}^{n} |a_{kl}|$.

Рассмотрим далее нелинейный оператор $F_2(x_1, x_2)$, зависящий от двух переменных $x_1, x_2 \in X$ со значениями в Y. Будем называть этот оператор билинейным, если он линеен по x_1 при фиксированном x_2 и линеен по x_2 при фиксированном x_1. Будем называть этот оператор симметричным, если $F_2(x_1, x_2) = F_2(x_2, x_1)$. Для билинейного симметрического оператора будем использовать краткую запись, опуская скобки: $F_2(x_1, x_2) = F_2x_1x_2$.

В этой записи $F_2x_1x_2$ можно понимать как произведение (в любом порядке) элементов x_1 и x_2 с операторным коэффициентом F_2.

Положим в симметрическом билинейном операторе $x_1 = x_2 = x$ и получим оператор F_2x^2. Этот оператор называется 2-степенным, или квадратичным оператором.

Аналогично вводится $F_kx_1x_2\ldots x_k$ — k-линейный симметрический оператор, линейный по каждому своему аргументу при фиксированных остальных и не меняющийся при любых перестановках своих аргументов.

Оператор F_kx^k называется k-степенным оператором. Например, оператор F_3x^3 является кубическим оператором.

Упражнение. Докажите формулу бинома Ньютона

$$F_n(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k F_n x^k y^{n-k}.$$

Определение. k"=линейный оператор $F_k x_1 x_2 \ldots x_k$ называется *ограниченным*, если существует постоянная $C > 0$, такая, что для любых $x_1, x_2, \ldots, x_k \in X$ выполняется неравенство

$$||F_k x_1 x_2 \ldots x_k|| \leq C||x_1||\,||x_2|| \ldots ||x_k||.$$

Наименьшая из таких постоянных C называется *нормой* оператора F_k и обозначается $||F_k||$.

В приложениях часто возникают степенные ряды в банаховых пространствах $\sum\limits_{k=0}^{\infty} F_k x^k$, где $F_0 \in Y$, $F_1 x$ — линейный ограниченный оператор, а $F_k x^k$ — k-степенные ограниченные операторы.

Пусть $r_u > 0$ — радиус сходимости степенного числового ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} ||F_k|| r^k$, называемого мажорантным рядом для исходного ряда в банаховых пространствах.

Тогда степенной ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} F_k x^k$ сходится в пространстве Y абсолютно и равномерно при всех x, таких, что $||x|| \leq r$, где $r \in (0, r_u)$.

Перейдем к рассмотрению двойных степенных рядов в банаховых пространствах.

Пусть дан оператор $F_{kl} x^k \lambda^l$, являющийся k-степенным ограниченным оператором по $x \in X$ и l-степенным ограниченным оператором по $\lambda \in \Lambda$, где X и Λ — вещественные банаховы пространства, причем значения F_{kl} принадлежат вещественному же банахову пространству Y.

Введем двойной степенной ряд $\sum\limits_{k+l \geq 0} F_{kl} x^k \lambda^l$, и пусть числа $r_u > 0$, $\rho_u > 0$ таковы, что мажорантный двойной степенной числовой ряд $\sum\limits_{k+l \geq 0} ||F_{kl}|| r^k \rho^l$ сходится при $r \in (0, r_u)$, $\rho \in (0, \rho_u)$.

Это предположение обеспечивает абсолютную и равномерную сходимость абстрактного двойного степенного ряда на множестве

$$\Omega_{r,\rho} = \{x \in X, \lambda \in \Lambda \colon ||x|| \leq r, ||\lambda|| \leq \rho\}.$$

Рассмотрим в сделанных выше предположениях нелинейное уравнение с неизвестной $x \in X$ и с параметром $\lambda \in \Lambda$

$$x = F_{0,1}\lambda + \sum_{k+l \geq 2} F_{kl} x^k \lambda^l. \tag{3}$$

Теорема. *Существуют числа* $r' \in (0, r_u)$, $\rho' \in (0, \rho_u)$, *такие, что в шаре* $||x|| \le r'$ *уравнение имеет единственное решение* $x = \sum_{s=1}^{\infty} x_s \lambda^s$, *причем этот ряд сходится в шаре* $||\lambda|| \le \rho'$.

Идея доказательства (которое читатель может найти в учебнике [14]) следующая. Решение отыскивается методом малого параметра в виде ряда по степеням λ. Подстановка этого ряда в уравнение с последующим приравниванием членов с одинаковыми степенями по λ позволяет последовательно вычислить все s-степенные операторы $x_s\lambda^s$. Для полученного формального степенного ряда составляется мажорирующий его степенной числовой ряд, радиус сходимости которого удается оценить, используя мажорантный ряд для исходного нелинейного оператора, участвующего в уравнении (3).

§ 9. Теорема Ляпунова об устойчивости положения равновесия по линейному приближению

Рассмотрим в $\Re^n$ линейную ДС $\dot{x} = Ax$, и пусть для матрицанта $U(t) = \exp(At)$ выполнено следующее условие.

1) Существуют положительные постоянные M и α, такие, что для всех $t \ge 0$ имеет место оценка $||U(t)|| \le M \exp(-\alpha t)$.

Лемма. *Если выполняется условие* 1), *то положение равновесия линейной ДС является асимптотически устойчивым.*

Доказательство. Пусть $x = x(t, a)$ — решение ДС, удовлетворяющее начальному условию $x(0) = a$. Тогда $||x(t, a)|| \le M \exp(-\alpha t)||a||$, откуда видно, что $||x(t, a)|| \le M||a||$, т.е. если $||a|| < \delta = \dfrac{\varepsilon}{M}$, то $||x(t, a)|| < \varepsilon$ (устойчивость по Ляпунову), и что $x(t, a) \to 0$ при $t \to +\infty$.

Заметим, что условие 1) равносильно требованию, чтобы все собственные значения матрицы A имели отрицательные вещественные части.

Рассмотрим теперь нелинейную ДС

$$\dot{x} = Ax + R(x).$$

Пусть в дополнение к условию 1) выполняется следующее локальное условие Липшица.

2) Нелинейный оператор $R(x)$ определен в шаре $D = D_r(0)$, причем существуют положительные числа C и β, такие, что для любых $x_1, x_2 \in D$ выполняется неравенство

$$||R(x_1) - R(x_2)|| \le C \max^{\beta}(||x_1||, ||x_2||)||x_1 - x_2||.$$

Из этого условия следует, что оператор $R(x)$ непрерывен в D и что $R(0) = 0$. Более того, при этом довольно слабом ограничении на нелинейную добавку $R(x)$ ниже будет установлено, что и у нелинейной ДС положение равновесия $x = 0$ также будет асимптотически устойчивым.

Теорема. *Если выполняются условия* 1) *и* 2), *то положение равновесия* $x = 0$ *нелинейной ДС является асимптотически устойчивым.*

Доказательство. Заменим задачу Коши для нелинейной ДС с начальным условием $x(0) = a$ задачей нахождения непрерывного решения эквивалентного ей интегрального уравнения

$$x(t) = U(t)a + \int_0^t U(t-s)R(x(s))\,ds. \tag{4}$$

Применим к этому интегральному уравнению принцип сжимающих отображений в некотором специально подобранном банаховом пространстве непрерывных экспоненциально убывающих на полуоси $[0, +\infty)$ вектор-функций.

Пусть $\alpha > 0$ взято из условия 1). Обозначим через C_α банахово пространство непрерывных на $[0, +\infty)$ вектор-функций $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))^T$ с нормой $|||x|||_\alpha = \max\limits_{1\le k\le n} \sup\limits_{t\in[0,+\infty)} |x_k(t)e^{\alpha t}|$.

Введем обозначение

$$\Phi(x, a) = U(t)a + \int_0^t U(t-s)R(x(s))\,ds.$$

Этот нелинейный оператор от x, зависящий от параметра a, будем рассматривать в шаре $D = \{x \in C_\alpha\colon |||x|||_\alpha < r\}$ пространства C_α при значениях параметра a из шара $||a|| < \rho$.

Покажем, что найдутся числа $r' \in (0, r)$, $\rho' \in (0, \rho)$, такие, что в шаре $|||x|||_\alpha \le r'$ интегральное уравнение (4) имеет единственное решение $x = x(t, a)$, определенное и непрерывное при всех значениях a из шара $||a|| \le \rho'$. Для этого достаточно проверить условия принципа сжимающих отображений из §2.

Сначала покажем, что найдутся числа $r' \in (0, r)$, $\rho' \in (0, \rho)$, такие, что в замкнутом шаре $D' = \{x \in C_\alpha\colon |||x|||_\alpha \le r'\}$ оператор Φ является сжимающим.

Проведем серию последовательных оценок (проверьте!)

$$||e^{\alpha t}(\Phi(x_0, x_1) - \Phi(x_0, x_1)|| = ||e^{\alpha t}\int_0^t U(t-s)(R(x_1(s)) - R(x_2(s)))ds|| \le$$

$$\le MC\int_0^t e^{\alpha s}\max{}^{\beta}(|x_1(s)|, |x_2(s)|||x_1(s) - x_2(s)||\,ds =$$

$$= MC\int_0^t e^{-\alpha\beta s}\max{}^{\beta}(e^{\alpha s}|x_1(s)|, e^{\alpha s}|x_2(s)| \cdot ||e^{\alpha s}(x_1(s) - x_2(s))||\,ds \le$$

$$\le \frac{MC}{\alpha\beta}\max{}^{\beta}(|||x_1|||_\alpha, |||x_2|||_\alpha)|||x_1 - x_2|||_\alpha \le \frac{MC}{\alpha\beta}r^\beta|||x_1 - x_2|||_\alpha.$$

В частности, использовано неравенство

$$\int_0^t e^{-\alpha\beta s} ds \le \frac{1}{\alpha\beta}.$$

Итак, установлена оценка

$$||\Phi(x_1, a) - \Phi(x_2, a)||_\alpha \le \frac{MC}{\alpha\beta} r^\beta |||x_1 - x_2|||_\alpha.$$

Зафиксируем $r' \in (0, r)$ так, чтобы выполнялось неравенство

$$q' = \frac{MC}{\alpha\beta}(r')^\beta < 1.$$

Теперь Φ в шаре D' является сжимающим оператором с коэффициентом сжатия q'.

Покажем, что можно подобрать $\rho' \in (0, \rho)$ таким образом, чтобы при $||a|| \le \rho'$ удовлетворялось неравенство $|||\Phi(0, a)|||_\alpha \le (1 - q')r'$.

Но, вследствие условия 1), имеем $||e^{\alpha t}\Phi(a, 0)|| = ||e^{\alpha t}U(t)a|| \le M||a||$ и, следовательно, $|||\Phi(a, 0)|||_\alpha \le M||a||$.

Зафиксируем $\rho' \in (0, \rho)$ так, чтобы выполнялось неравенство $M\rho' \le \le (1 - q')r'$. Теперь если $M||a|| \le \rho'$, то справедливость доказываемого неравенства установлена.

Итак, доказано, что если $||a|| \le \dfrac{\rho'}{M}$, то решение задачи Коши $x = x(t, a)$ определено на $[0, +\infty)$, устойчиво по Ляпунову и удовлетворяет оценке $||x(t, x_0)|| \le r'e^{-\alpha t}$.

Глава VII

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

В программу обыкновенных ДУ иногда включается раздел, относящийся к ДУ с частными производными первого порядка, хотя по существу данная тематика относится к курсу ДУ с частными производными или к курсу уравнений математической физики. Оправдание состоит в том, что этот тип ДУ с частными производными почти не требует специальных понятий и методов, а изучается посредством аппарата обыкновенных ДУ. Мы ограничиваемся в основном рассмотрением ДУ от двух независимых переменных.

§ 1. Линейные дифференциальные уравнения с двумя независимыми переменными

Пусть в области $D \in \Re^2$ заданы непрерывные функции $a(x, y)$, $b(x, y)$, $c(x, y)$, причем $|a(x, y)| + |b(x, y)| > 0$ в D. Дифференциальное уравнение

$$a(x, y)\frac{\partial z}{\partial x} + b(x, y)\frac{\partial z}{\partial y} = c(x, y) \tag{1}$$

называется *линейным* (*неоднородным*) *ДУ с частными производными первого порядка* с независимыми переменными x и y. Если $c(x, y) \equiv 0$ в D, то ДУ называется *однородным* ДУ.

Под решением ДУ (1) понимается однозначная функция $z = z(x, y)$, определенная и непрерывно дифференцируемая в области D (кратко $z \in C^1(D)$), подстановка которой в ДУ обращает его в тождество.

Всякое решение ДУ определяет в $\Re^3$ гладкую однозначную поверхность S, которая называется *интегральной поверхностью* этого ДУ. График S дается формулой $z = z(x, y)$, $(x, y) \in D$.

Пример 1. Простейшее из рассматриваемых ДУ имеет вид $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 0$. Здесь $D = \Re^2$. Уравнению, очевидно, формально удовлетворяет произвольная функция $z = V(y)$. Учитывая все же наше понимание решения,

будем считать, что $V(y) \in C^1(\Re)$, т. е. непрерывно дифференцируема на $\Re$. В данном случае найдено общее решение ДУ, так как полученная формула содержит, очевидно, все его решения.

Итак, в отличие от обыкновенных ДУ первого порядка, решение которых зависит от «произвольной постоянной», решение ДУ первого порядка с частными производными (1) зависит от «произвольной функции».

Исследование начнем с однородного ДУ вида

$$a(x, y)\frac{\partial z}{\partial x} + b(x, y)\frac{\partial z}{\partial y} = 0. \tag{2}$$

Рассмотрим наряду с ДУ (2) следующую динамическую систему:

$$\begin{cases} \dot{x} = a(x, y), \\ \dot{y} = b(x, y). \end{cases} \tag{3}$$

Напомним (см. гл. IV, §2), что функция $V(x, y) \in C^1(D)$ называется первым интегралом ДС (3), если она сохраняет постоянное значение на каждой траектории ДС (3). Отметим теперь следующий факт.

Лемма. *Функция $V(x, y)$ является первым интегралом ДС* (3) *тогда и только тогда, когда ее производная в силу этой ДС* (см. гл. IV, §7) $\dot{V} = \dfrac{\partial V}{\partial x}a(x, y) + \dfrac{\partial V}{\partial y}b(x, y)$ *равна нулю.*

Доказательство. Если $\dot{V} = 0$, то на любой траектории $x = x(t)$, $y = y(t)$ ДС имеем

$$\frac{d}{dt}V(x(t), y(t)) = \frac{\partial V(x(t), y(t))}{\partial x}\dot{x}(t) + \frac{\partial V(x(t), y(t))}{\partial y}\dot{y}(t) =$$

$$= \frac{\partial V(x(t), y(t))}{\partial x}a(x(t), y(t)) + \frac{\partial V(x(t), y(t))}{\partial y}b(x(t), y(t)) = \frac{V(x(t), y(t))}{dt} = 0.$$

Обратно, пусть $V(x, y)$ — первый интеграл ДС в области D. Тогда $\dot{V} = 0$ на всякой траектории ДС, лежащей в D. Допущение, что $\dot{V} \neq 0$ хоть в одной точке области, приводит к противоречию, ибо через каждую ее точку проходит единственная траектория ДС.

Отсюда, как перефразировка леммы, следует тесная связь между первыми интегралами ДС (3) и решениями ДУ с частными производными (2).

Теорема. *Для того чтобы функция $z = z(x, y)$, $(x, y) \in D$ была решением ДУ* (2), *необходимо и достаточно, чтобы функция $z(x, y)$ была первым интегралом ДС* (3).

Доказательство. Пусть $z = z(x, y)$ — первый интеграл ДС. Тогда его производная в силу ДС равна нулю. Это и означает, что $z = z(x, y)$ — решение ДУ. Обратно, пусть $z = z(x, y)$ — решение ДУ. По лемме $z(x, y)$ — первый интеграл ДС.

Следствие. *Пусть $V(x, y)$ является первым интегралом ДС* (2), *а $\Phi(z) \in C^1(\Re)$ — произвольная функция. Тогда функция $\Phi(V(x, y))$ также является первым интегралом ДС* (2).

Упражнение 1. Докажите справедливость следствия, воспользовавшись теоремой о дифференцировании сложной функции.

Пример 2. Рассмотрим ДУ $\dfrac{\partial z}{\partial t} + c\dfrac{\partial z}{\partial x} = 0$.

Это ДУ будем называть ДУ бегущей волны. Оно описывает распространение волн на прямой.

Здесь для независимых переменных использованы другие обозначения, так как в данной физической задаче переменная t играет роль времени, а переменная x — роль пространственной переменной.

Поскольку переменная t занята, то ДС (3) запишем в виде

$$\begin{cases} \dfrac{dt}{d\theta} = 1, \\ \dfrac{dx}{d\theta} = c. \end{cases}$$

Интегрируя эту систему ДУ, находим $t = \theta + C_1$, $x = c\theta + C_2$.

Исключая отсюда θ, получаем первый интеграл $x - ct = \mathrm{const}$.

Но тогда, согласно теореме и следствию из нее, при любой функции $V(z) \in C^1(\Re)$ формула $z = V(x - ct)$ дает решение ДУ бегущей волны. В §2 будет показано, что полученная формула представляет собой общее решение, т. е. при подходящем выборе функции V она содержит каждое решение ДУ бегущей волны.

В данном примере неопределенность в выборе решения может быть устранена за счет задания дополнительно к ДУ начального условия

$$z|_{t=0} = \varphi(x),$$

где $\varphi(x) \in C^1(\Re)$ — известная функция.

Возникшая задача Коши имеет единственное решение

$$z = \varphi(x - ct).$$

Эта формула описывает бегущую волну: движение вдоль оси x волны, не меняющей своей формы. В начальный момент времени $t = 0$ волна имеет определенную форму $z = \varphi(x)$. Если $c > 0$, то эта волна движется по оси x вправо с постоянной скоростью c. Это отражено на рис. 28 и 29.

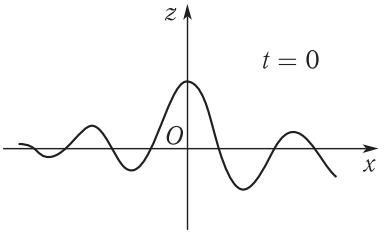


Рис. 28

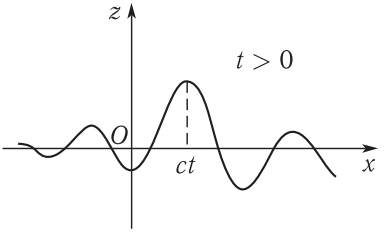


Рис. 29

Если $c < 0$, то волна движется влево со скоростью $-c$.

Пример 3. Видоизменяя пример 2, рассмотрим задачу Коши для более общего ДУ

$$\frac{\partial z}{\partial t} + c\frac{\partial z}{\partial x} + kz = 0, \quad z|_{t=0} = \varphi(x).$$

Отметим, что это ДУ представляет собою частный случай ДУ переноса вещества, вывод которого исходя из физических соображений приведен в [13].

Упражнение 2. Покажите, что замена неизвестной функции по формуле $v = we^{-kt}$ приводит к задаче Коши

$$\frac{\partial w}{\partial t} + c\frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad w|_{t=0} = \varphi(x),$$

и, таким образом, решение исходной задачи Коши дается формулой $z = \varphi(x - ct)e^{-kt}$. При $c > 0$, $k > 0$ это — бегущая вправо затухающая волна.

Упражнение 3. Изобразите $z = z(t, x)$ на графиках, аналогичных рис. 28, 29, если $c = 1$, $k = 1$, $\varphi(x) = e^{-x^2}$.

Пример 4. Рассмотрим другой вариант задачи Коши для ДУ переноса, описывающей, например, просачивание вещества через стенку $x = 0$ (см. [13])

$$\frac{\partial z}{\partial t} + c\frac{\partial z}{\partial x} + kz = 0, \quad z|_{x=0} = \psi(t),$$

где $\psi(t) \in C^1(\Re)$ — известная функция.

Упражнение 4. Покажите, что решение этой задачи находится по формуле $z = \psi\left(t - \frac{x}{c}\right)e^{-kt}$.

§ 2. Общее решение линейного дифференциального уравнения

Рассмотрим в предположениях §1 однородное ДУ (2). Покажем, что в подходящим образом выбранных новых независимых переменных это ДУ может быть сведено к простейшему обыкновенному ДУ.

Пусть $a(x, y) \neq 0$ на D. Воспользуемся ДС (3). Пусть ее траектория дается формулами $x = p(t)$, $y = q(t)$, $t \in (0, T)$. Так как $\dot{p}(t) = a(p(t), q(t)) \neq 0$, то функция $x = p(t)$ строго монотонна. Но тогда существует обратная функция $t = p^{-1}(x)$, так что $y = q(p^{-1}(x))$.

Перейдем в ДУ (1) к новым независимым переменным и новой неизвестной функции по формулам

$$\xi = x, \quad \eta = y - q(p^{-1}(x)), \quad z(x, y) = v(\xi, \eta).$$

Найдем выражения частных производных, входящих в ДУ. Отметим, что $\frac{\partial \xi}{\partial x} = 1$, $\frac{\partial \xi}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial \eta}{\partial y} = 1$.

Далее, используя правила дифференцирования сложной функции и обратной функции, а также ДС, получаем

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{d}{dx} q(p^{-1}(x)) = -\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = -\frac{b(x, y)}{a(x, y)}.$$

Используя цепное правило, т. е. правило дифференцирования сложной функции, находим:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial \xi} - \frac{\partial v}{\partial \eta} \cdot \frac{b(x, y)}{a(x, y)}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial \xi} \cdot 0 + \frac{\partial v}{\partial \eta} \cdot 1 = \frac{\partial v}{\partial \eta}.$$

Подставив эти выражения в ДУ (2), получаем ДУ

$$a(x, y)\frac{\partial v}{\partial \xi} = 0.$$

Таким образом, в новых переменных ДУ (2) принимает вид простейшего ДУ $\dfrac{\partial v}{\partial \xi} = 0$. Его общее решение, согласно примеру 1 из §1, дается формулой $v = V(\eta)$ с произвольной функцией $V \in C^1(\Re)$. Возвращаясь к старым переменным, видим, что общее решение ДУ (3) дается формулой

$$z = V(y - q(p^{-1}(x))).$$

Аналогично рассматривается случай, когда $b(x, y) \neq 0$ в D.

Общее решение линейного однородного ДУ найдено в предположении, что в D либо $a \neq 0$, либо $b \neq 0$. В общем случае этим же путем можно найти локальное общее решение. Зафиксируем точку $P_0(x_0, y_0) \in D$. В ней либо $a \neq 0$, либо $b \neq 0$. Для определенности будем считать, что $a(P_0) \neq 0$. Пусть $x = p(t)$, $y = q(t)$ — траектория ДС с начальным условием $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$, т. е. проходящая через точку P_0. Повторяя изложенные выше рассуждения, придем к общему решению, определенному в окрестности точки P_0.

Пример 1. Вернемся к ДУ бегущей волны (§1, пример 2).

Перейдем в нем к новым независимым переменным и новой неизвестной функции по формулам

$$\xi = x - ct, \quad \eta = x, \quad z(x, y) = v(\xi, \eta).$$

Упражнение 1. Покажите, что в этих новых переменных ДУ имеет вид $\dfrac{\partial v}{\partial \xi} = 0$.

Итак, общее решение действительно дается формулой $z = V(x - ct)$ с произвольной функцией $V \in C^1(\Re)$.

Рассмотрим неоднородное ДУ (1). Как найти его общее решение? Напомним известное правило, справедливое для всяких линейных

уравнений (см. гл. II, §6): общее решение линейного неоднородного уравнения равно общему решению соответствующего однородного уравнения плюс частное решение неоднородного уравнения.

Пример 2. Найдем общее решение ДУ

$$y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = y^2 - x^2.$$

Сначала рассмотрим соответствующее однородное ДУ

$$y\frac{\partial w}{\partial x} - x\frac{\partial w}{\partial y} = 0.$$

ДС (3) здесь записывается так: $\dot{x} = y$, $\dot{y} = -x$.

Упражнение 2. Покажите, что функция $x^2 + y^2$ является ее первым ДУ интегралом.

Согласно теореме из §1 функция $w = W(x^2 + y^2)$ при произвольной однозначной $W \in C^1(\Re)$ дает представление общего решения однородного ДУ. Заметим, что геометрически эта функция определяет общий вид поверхности вращения. Каждое ее сечение $W = \mathrm{const}$ является окружностью.

Частное решение неоднородного ДУ легко угадать: это $z_{\text{ч}} = xy$.

Ответ: $z = W(x^2+y^2)+xy$, где $W \in C^1(\Re)$ — произвольная функция.

Замечание. Пусть $a \neq 0$ в D. Если в неоднородном ДУ (1) перейти к введенным выше новым переменным ξ, η, v, то это ДУ сведется к ДУ

$$\frac{\partial v}{\partial \xi} = h(\xi, \eta),$$

где $h(\xi, \eta)$ — выражение функции $\dfrac{c(x, y)}{a(x, y)}$ в переменных ξ, η.

Интегрируя это обыкновенное ДУ по ξ с параметром η, находим его решение $v = V(\eta) + \int h(\xi, \eta)d\xi$. В этой формуле второе слагаемое, записанное в старых переменных x, y, и даст частное решение неоднородного ДУ (1).

Пример 3. Найдем общее решение ДУ

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial x} = xt.$$

В переменных $\xi = x$, $\eta = x - t$, $z(x, y) = v(\xi, \eta)$, замечая, что $xt = \xi(\xi - \eta)$, получаем ДУ

$$\frac{\partial v}{\partial \xi} = \xi(\xi - \eta).$$

Интегрируя его, находим $v = V(\eta) + \dfrac{\xi^3}{3} - \dfrac{\xi^2\eta}{2}$. Возвращаясь к старым переменным, получаем

Ответ: $z = V(x - t) - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^2 t}{2}$.

§ 3. Квазилинейные дифференциальные уравнения и их характеристики

Пусть $G \in \Re^3$ — область в декартовых переменных (x, y, z). Пусть заданы функции $a(x, y, z)$, $b(x, y, z)$, $c(x, y, z)$ определенные и непрерывно дифференцируемые на G (кратко $a, b, c \in C^1(G)$), и пусть $|a(x, y, z)| + |b(x, y, z)| > 0$ на G. Рассмотрим ДУ

$$a(x, y, z)\frac{\partial z}{\partial x} + b(x, y, z)\frac{\partial z}{\partial y} = c(x, y, z). \tag{4}$$

Это ДУ называется квазилинейным ДУ с частными производными первого порядка с независимыми переменными x и y. В качестве частных случаев оно содержит линейные ДУ из §1 и §2, а также более общее линейное ДУ

$$a(x, y)\frac{\partial z}{\partial x} + b(x, y)\frac{\partial z}{\partial y} + c(x, y)z = d(x, y),$$

частный случай которого встретился в примере 1 из §2.

График решения ДУ (4) $z = z(x, y)$, $(x, y) \in D$, изображает интегральную поверхность — гладкую однозначную поверхность S, расположенную над (под) областью D. Пусть S: $z = z(x, y)$, $(x, y) \in D$, — некоторая интегральная поверхность ДУ (4). Для каждой точки $P(x, y, z) \in S$ рассмотрим вектор-столбец

$$\overline{n} = \left(\frac{\partial z}{\partial x}(P), \frac{\partial z}{\partial y}(P), -1\right)^{\mathrm{T}},$$

являющийся вектором нормали к S в точке P. Этим на S задано непрерывное поле нормалей.

Рассмотрим на S еще одно векторное поле

$$\overline{l} = (a(P), b(P), c(P))^{\mathrm{T}}.$$

Тогда ДУ (4) можно трактовать как ортогональность векторов $\overline{n}$ и $\overline{l}$ в каждой точке $P \in S$.

Пусть $\pi(P)$ — касательная плоскость к S в точке P. Последнее равенство означает, что вектор $\overline{l}$ лежит в касательной плоскости $\pi(P)$.

Это, в свою очередь, означает, что S является интегральной поверхностью тогда и только тогда, когда в каждой своей точке S касается векторного поля $\overline{l}$. Иначе говоря, на поверхности S задано касательное к ней векторное поле $\overline{l}$.

Эта аналогия с геометрической трактовкой обыкновенного ДУ первого порядка приводит к следующим ее обобщениям.

Введем в рассмотрение следующую ДС:

$$\begin{cases} \dot{x} = a(x, y, z), \\ \dot{y} = b(x, y, z), \\ \dot{z} = c(x, y, z). \end{cases} \tag{5}$$

ДС (5) называется характеристической системой ДУ (4), а ее траектории называются характеристиками ДУ (4).

Из вышеизложенного следует, что через каждую точку интегральной поверхности проходит единственная характеристика. Сама поверхность состоит из характеристик (расслаивается на характеристики).

В качестве иллюстрации вернемся сначала к линейному неоднородному ДУ (1).

Характеристическая система здесь упрощается и принимает вид

$$\begin{cases} \dot{x} = a(x, y), \\ \dot{y} = b(x, y), \\ \dot{z} = c(x, y). \end{cases}$$

Первые два ее уравнения образуют ДС (3). Следовательно, ДС (3) определяет проекции характеристик на плоскость переменных xy. Найдем одну из этих проекций:

$$x = x(t), \quad y = y(t).$$

Подставляя $x(t)$ и $y(t)$ в третье уравнение, получаем для нахождения $z = z(t)$ простейшее обыкновенное ДУ $\dot{z} = c(x(t), y(t))$, которое решается одним интегрированием.

Мы видели выше, что в линейном случае ДУ (1) знание характеристик позволяет найти первый интеграл ДС, а затем и общее решение ДУ. При этом вдоль характеристики линейное ДУ с частными производными первого порядка вырождается в обыкновенное ДУ.

В случае однородного ДУ (2) характеристики являются линиями пересечения интегральной поверхности с плоскостями $z = \mathrm{const}$.

Посмотрим теперь, как обстоит дело для квазилинейного ДУ. Пусть характеристическая система имеет в области G (или в меньшей области) два функционально независимых первых интеграла $v_1(x, y, z)$, $v_2(x, y, z)$.

Уравнения $v_1(x, y, z) = C_1$, $v_2(x, y, z) = C_2$ с постоянными интегрирования C_1, C_2, принимающими значения из множеств значений функций v_1, v_2 соответственно, определяют два семейства поверхностей. Пересечения поверхностей из этих двух семейств и будут характеристиками.

Упражнение 1. Пусть функция двух переменных $\Phi(u_1, u_2) \in C(\Re^2)$ произвольна. Покажите, что функция $\Phi(v_1(x, y, z), v_2(x, y, z))$ также является первым интегралом характеристической системы (5).

Отметим, что уравнение

$$\Phi(v_1(x, y, z), v_2(x, y, z)) = \mathrm{const}$$

в естественных предположениях задает в неявном виде интегральную поверхность ДУ (4), если это уравнение можно однозначно разрешить относительно z локально или глобально.

Пример. Рассмотрим квазилинейное ДУ

$$(x-1)\frac{\partial z}{\partial x}+(y-1)\frac{\partial z}{\partial y}=z-1.$$

Характеристическая система

$$\begin{cases}\dot{x}=x-1,\\ \dot{y}=y-1,\\ \dot{z}=z-1\end{cases}$$

определяет характеристики:

$$x=1+C_1e^t,\quad y=1+C_2e^t,\quad z=1+C_3e^t.$$

Исключая e^t, получаем два первых интеграла:

$$v_1=\frac{y-1}{x-1},\quad v_2=\frac{z-1}{x-1}.$$

Общий вид искомой интегральной поверхности определяется из уравнения

$$\Phi\left(\frac{y-1}{x-1},\,\frac{z-1}{x-1}\right)=\mathrm{const}\,.$$

Решая это уравнение относительно второй переменной, находим

$$z=1+(x-1)V\left(\frac{y-1}{x-1}\right).$$

Упражнение 2. Проверьте, что при любой функции $V\in C^1(\Re)$ данная формула дает решение рассматриваемого ДУ.

Можно показать, что это решение является общим.

§ 4. Задача Коши для дифференциального уравнения с частными производными

Пусть в области $G\subset\Re^3$ задана в параметрическом виде гладкая кривая

$$L:\quad x=h(s),\quad y=g(s),\quad z=k(s),\quad s_1<s<s_2.$$

Задачей Коши для ДУ (4) называется следующая задача: найти интегральную поверхность этого ДУ, проходящую через кривую L.

Для линейных ДУ конкретные случаи задач Коши уже рассматривались. Так в примерах 2 и 3 из §1 кривая L может быть задана в виде $t=0$, $z=\varphi(x)$ с параметром $x\in\Re$. В задаче Коши примера 4 из §1 кривую L можно задать равенствами $x=0$, $z=\psi(t)$ с параметром $t\in\Re$.

В общем случае задача Коши может иметь неединственное решение, представляющее собой многозначную или вырожденную поверхность. Однако, поскольку характеристики заполняют интегральную поверхность, вполне естественным является описываемый ниже путь ее построения.

Для каждого $s \in (s_1, s_2)$ через точку $(h(s), g(s), k(s))$ проведем характеристику ДУ (4).

Всякая такая характеристика является решением задачи Коши для ДС (5) с начальными условиями

$$x|_{t=0} = h(s), \quad y|_{t=0} = g(s), \quad z|_{t=0} = k(s).$$

Придавая параметру s всевозможные значения на (s_1, s_2), получим семейство характеристик, каждая из которых исходит из кривой L. Пусть $(t_1(s), t_2(s))$ — интервал, содержащий точку $t = 0$, на котором определена характеристика, проходящая через точку $(h(s), g(s), k(s))$. Зададим полученное семейство характеристик формулами

$$x = x(t, s), \quad y = y(t, s), \quad z = z(t, s), \quad t \in (t_1(s), t_2(s)), \quad s_1 < s < s_2.$$

Эти формулы описывают в области G параметрически (с параметрами t, s) некоторое двумерное многообразие или, говоря иначе, поверхность. Эта поверхность может быть многозначной и, возможно, вырожденной, но она составлена из семейства характеристик ДУ (4) и, значит, может быть названа интегральной поверхностью ДУ (4) в обобщенном смысле.

Однако в нашем определении решения предполагаются однозначность и гладкость поверхности, т. е. возможность ее представления в виде $z = z(x, y)$ с гладкой функцией $z(x, y)$, определенной в некоторой области $D \in \Re^2$. Можно ли из найденного параметрического задания поверхности, хотя бы локально, получить однозначную интегральную поверхность?

Рассмотрим первые два уравнения параметрического представления

$$x = x(t, s), \quad y = y(t, s), \quad t_1(s) < t < t_2(s), \quad s_1 < s < s_2.$$

Они задают отображение области в плоскости переменных t, s на некоторую область в плоскости переменных x, y. Если это отображение имеет непрерывное обратное отображение, то находим $t = t(x, y)$, $s = s(x, y)$. Подставляя эти выражения в третье уравнение параметрического представления, получаем явное выражение решения $z = z(t(x, y), s(x, y))$.

Эти соображения для системы уравнений $x(t, s) = x$, $y(t, s) = y$ можно провести строго с помощью теоремы о неявной функции. Зафиксируем $s_0 \in (s_1, s_2)$, и пусть $x_0 = x(0, s_0)$, $y_0 = y(0, s_0)$.

Будем рассматривать переменные t, s как неизвестные функции, а x, y как параметры. Пусть J — якобиан отображения в точке $(0, s_0)$

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial t} & \dfrac{\partial y}{\partial t} \\ \dfrac{\partial x}{\partial s} & \dfrac{\partial y}{\partial s} \end{vmatrix}.$$

Условие $J \neq 0$ является достаточным для локальной непрерывной обратимости отображения.

Действительно (см. [8]), по теореме о неявной функции (отображения) существуют $\alpha > 0$ и $\beta > 0$, такие, что в квадрате $\max(|t|, |s - s_0|) < \beta$ система уравнений $x(t, s) = x$, $y(t, s) = y$ имеет единственное решение $t = t(x, y)$, $s = s(x, y)$, определенное в квадрате $\max(|x - x_0|, |y - y_0|) < \alpha$.

Формула $z = z(t(x, y), s(x, y))$ определяет локальный кусок интегральной поверхности в окрестности точки (x_0, y_0, z_0), где $z_0 = z(x_0, y_0)$.

Заметим, что

$$J = \begin{vmatrix} a & \dfrac{\partial y}{\partial t} \\ b & \dfrac{\partial y}{\partial s} \end{vmatrix}.$$

Отсюда видно, что условию $J \neq 0$ можно придать следующую геометрическую форму. Пусть l — проекция кривой L на плоскость xOy. Обозначим через Γ_s характеристику, проходящую через точку $(h(s), g(s), k(s))$, а через γ_s ее проекцию на плоскость x, y. Условие $J \neq 0$ означает, что l не касается ни одной из проекций характеристик γ_s (рис. 30).

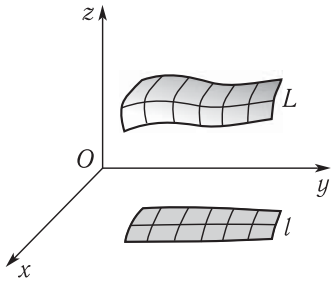


Рис. 30

Пример 1. Найдем решение следующей задачи Коши:

$$y\frac{\partial z}{\partial x} + x\frac{\partial z}{\partial y} = y, \quad z(x, 0) = 1.$$

Заметим, что общее решение данного ДУ равно (почему?) $z = V(x^2 + y^2) + x$ с произвольной функцией $V \in C^1(\Re)$.

Удовлетворяя начальному условию, получаем функциональное уравнение $V(x^2) + x = 1$, т. е. $V(x^2) = 1 - x$.

Положим $x^2 = u$, откуда $x = \sqrt{u}$, если $x > 0$; $x = -\sqrt{u}$, если $x < 0$.

Следовательно, $V(u) = 1 \pm \sqrt{u}$.

Ответ: $z = 1 + x - \sqrt{(x^2 + y^2)}$, если $x > 0$; $z = 1 + x + \sqrt{(x^2 + y^2)}$, если $x < 0$.

Убедитесь, что начальное условие выполняется.

Пример 2. Рассмотрим следующую задачу Коши: найти решение простейшего ДУ (см. пример 1 из §1) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 0$, удовлетворяющее на прямой L: $x = 1$, $z = 1$ начальному условию $z|_L = 1$.

Согласно примеру 1 из §1 общее решение ДУ имеет вид $z = V(y)$, где $V(y) \in C^1(\Re)$ — произвольная функция.

Удовлетворяя начальному условию, получаем, что $V(1) = 1$.

Таким образом, данная задача Коши имеет бесконечное множество решений вида $z = V(y)$, с произвольной функцией $V(y) \in C^1(\Re)$, удовлетворяющей условию $V(1) = 1$.

Причина неединственности решения задачи Коши в данном случае состоит в том, что прямая L является характеристикой ДУ.

Упражнение. Найдите общий вид характеристик и убедитесь, что L — одна из них.

Обратим внимание читателя на следующую задачу Коши:

$$\frac{\partial z}{\partial t} + p(z)\frac{\partial z}{\partial x} = 0, \quad z|_{t=0} = \varphi(x).$$

Типичными являются случаи $p(z) = z$, $p(z) = z^2$, $p(z) = \operatorname{arctg} z$.

Здесь проекции характеристик на плоскость могут пересекаться, что приводит к явлению прекращения решения при его продолжении по временно́й переменной t. Физические соображения подсказывают, что решение существует и после разрыва, так что под решением в более широком смысле естественно понимать разрывную функцию, или, как говорят, ударную волну. Соответствующие примеры заинтересованный читатель найдет в [17, 13].

§ 5. Дифференциальные уравнения с несколькими независимыми переменными

Дадим краткий обзор результатов для квазилинейных ДУ с n независимыми переменными

$$\sum_{r=1}^{n} a_k(x, z)\frac{\partial z}{\partial x_k} = c(x, z),$$

или кратко $(a(x, z), \operatorname{grad} z) = c(x, z)$.

Предполагается, что a_k, $c \in C^1(G)$, где G — область в $\Re^{n+1}$, и что $a \neq 0$ в G.

Решением называется функция $z = z(x) \in C^1(D)$, где D — область в $\Re^n$, обращающая ДУ в тождество. Оно определяет в $\Re^{n+1}$ интегральную поверхность.

ДС $\dot{x} = a(x, z)$, $\dot{z} = c(x, z)$ называется характеристической системой, а ее траектории называются характеристиками ДУ. Поверхность является интегральной в том и только в том случае, когда она вся состоит из характеристик.

Пусть характеристическая система имеет n функционально независимых первых интегралов $\varphi_k(x, z)$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

Пусть функция $V \in C^1(\Re^n)$ произвольна, тогда функция

$$V(\varphi_1(x, z), \ldots, \varphi_n(x, z))$$

также является первым интегралом, а из уравнения

$$V(\varphi_1(x, z), \ldots, \varphi_n(x, z)) = \text{const}$$

в предположениях теоремы о неявной функции можно найти общее решение ДУ.

Задача Коши ставится следующим образом. Требуется найти интегральную поверхность ДУ, проходящую через заданное гладкое многообразие размерности $n-1$. Если проекция этого многообразия на пространство $\Re^n$ переменных x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, не касается проекции характеристик на это же пространство, то локально задача Коши имеет единственное решение.

В заключение отметим, что в приложениях играют важную роль также нелинейные ДУ с частными производными, не являющиеся квазилинейными. Так уравнение эйконала

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2 = \frac{1}{c^2}$$

(c — скорость света) описывает распространение световых лучей в изотропной и однородной среде.

В [16] читатель найдет исследование этого ДУ на основе изучения более общих нелинейных ДУ первого порядка с частными производными.

Дополнение I

НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В данном Дополнении собраны некоторые приложения ДУ, практически не представленные в отечественной учебной литературе, но лежащие довольно близко к современным научным и техническим интересам. Для ориентации в предлагаемом материале мы считаем полезным предварить его кратким историческим обзором.

В основном мы концентрируем внимание читателя на задачах, связанных с колебательными процессами. С годами выяснились широчайшая распространенность таких процессов, особая роль бифуркационных явлений, в частности, таких их критических режимов, как, например, автоколебания и солитоны.

Перечислим некоторые из приложений обыкновенных ДУ. Начнем с широко известных в классической науке колебательных процессов при движении планет Солнечной системы, колебаний упругих тел (стержней, балок, пластин, оболочек), машин, механизмов, технических сооружений (мостов, вращающихся валов, турбинных дисков и т. п.). Сюда относятся также нелинейные волны в жидкостях и в газах, колебания в электрических цепях. Сравнительно недавно подверглись серьезному научному изучению автоколебания в технических конструкциях, флаттер крыла самолета или, более широко, самолетных конструкций и деталей космических и ракетных двигателей, колебательные процессы в плазме, в частности, в ядерных установках, колебательные процессы в в нелинейной оптике и акустике, включая нелинейные волны в эластических кристаллах и волны, возникающие в ходе работы лазеров, волновые процессы в экологии и в биологии, осцилляции в химической кинетике, например, описываемые периодической химической реакцией Белоусова–Жаботинского, биоэлектрические явления (передача нервных импульсов, работа мозга и сердца), колебательные процессы в атмосфере и в океане (тайфуны, смерчи, вихри, цунами), осцилляции в магнитном поле Земли и многие другие явления. Сюда относятся также многие проблемы экономики, социологии и даже истории.

Рассмотрение математических моделей всех этих явлений на базе обыкновенных ДУ потребовало бы многих томов.

В данном Дополнении мы ограничиваемся беглым описанием лишь некоторых простейших математических моделей, методов их исследования и необходимых для этого теоретических сведений. Конечно, этот круг вопросов может быть глубже понят лишь в рамках теории ДУ с частными производными, но это мы надеемся осуществить в дальнейшем.

Сначала рассматриваются прикладные задачи, описываемые консервативными ДС. Здесь характерно наличие областей, заполненных замкнутыми траекториями. От других траекторий такие области отделены сепаратрисами — траекториями, разделяющими различные типы движений. Решениями, соответствующими сепаратрисам, являются решения типа уединенных волн, называемые обычно солитонами. Увлекательное описание открытия солитонов и недавнего бурного развития их теории, связанного с лавиной важнейших приложений, читатель найдет в [33, 45].

Не менее интересны также крайне важные с точки зрения практики бифуркационные явления, описывающие различные критические ситуации.

В данном Дополнении рассмотрены также диссипативные (неконсервативные) ДС, для которых характерно наличие изолированных замкнутых траекторий (предельных циклов). Открытие предельных циклов связано с именем А. Пуанкаре. Особенно важны устойчивые предельные циклы. Дело в том, что на практике реализуются именно соответствующие этим циклам устойчивые периодические движения.

Академик Петербургской АН Александр Михайлович Ляпунов разработал общую теорию устойчивости решений ДУ. Кроме обсуждавшегося выше второго метода Ляпунова, чаще называемого методом функций Ляпунова, сюда входит как важная составная часть также первый метод Ляпунова, основанный на таких понятиях, как показатели Ляпунова, ляпуновские величины и теория Флоке. Относящийся сюда теоретический материал выходит далеко за рамки данной книги. С этим кругом вопросов, в частности, с исследованием устойчивости предельных циклов читатель может ознакомиться, например, в [33, 57].

Со временем выяснилось, что среди многих открытых еще Пуанкаре бифуркаций решений ДС на плоскости особенно важное прикладное значение имеет динамическая бифуркация — бифуркация рождения предельного цикла.

Академик АН СССР Александр Александрович Андронов в статье Les cycles limites de Poincaré et la théorie des oscillation autoentretenues, C. R. Acad. Sci. 189, 1929, дал строгое обоснование этого явления и предложил для него термин «автоколебание» (самовозбуждающееся колебание). В работах и книгах А. А. Андронова и его научной школы, объединяющей физиков, математиков и прикладников,

была создана современная теория нелинейных колебаний (см. [20, 21]). Методы Пуанкаре–Ляпунова, которые использовались до этого главным образом в консервативных системах, были существенно обобщены и перенесены на диссипативные системы. Для исследования устойчивости рождающихся предельных циклов были развиты и использованы концепция и техника методов Ляпунова. На этом пути были получены, в частности, многочисленные приложения к электротехнике и радиотехнике, как и к другим областям науки.

В ряде старых зарубежных изданий бифуркация рождения предельного цикла называется бифуркацией Хопфа. Это название не является правомерным ни с научной, ни с исторической точек зрения: значительно позже Пуанкаре и Андронова, в 1942 г. Хопф рассмотрел обобщение теоремы Пуанкаре–Андронова на многомерный случай. Восстанавливая историческую справедливость для бифуркации рождения предельного цикла следует использовать названия «бифуркация Пуанкаре–Андронова», «бифуркация Пуанкаре–Андронова–Хопфа» или хотя бы «бифуркация Андронова–Хопфа».

Анри Пуанкаре заложил основы теории бифуркаций, рассмотрев, в частности, различные виды бифуркаций решений двумерных ДС. А. М. Ляпунов и Э. Шмидт создали для нелинейных интегральных уравнений теорию бифуркаций (ветвления) их решений. В данном Дополнении достаточно много внимания уделено явлениям бифуркационного характера, интерес к которым возник у автора под влиянием его выдающегося учителя члена-корреспондента АН СССР Лазаря Ароновича Люстерника. На языке функционального анализа различные виды бифуркаций решений нелинейных уравнений довольно просто описываются в рамках общего эффективного метода, разработанного автором данной книги и его учениками (см. [15, 30]) и известного под названием метода Ляпунова–Шмидта. Важной составной частью этого метода служат проекционные соображения и изучение жордановой структуры линеаризованного вблизи критических точек оператора задачи. В результате проблема редуцируется к так называемому уравнению разветвления (бифуркационному уравнению), часто позволяющему выяснить число ответвляющихся решений и дать их асимптотические представления. В современном методе Ляпунова–Шмидта ляпуновские идеи существенно дополняются топологическими, вариационными, групповыми и численными подходами. В западной научной литературе в этом круге вопросов часто используются альтернативный метод центрального многообразия, равносильный методу Ляпунова–Шмидта (см. например, [41, 62]).

В книгу не вошли многие теории, важные в приложениях, такие, как теория Флоке–Ляпунова орбитальной устойчивости, нормальные формы Пуанкаре–Биркгофа, вариационный подход Лагранжа–Гамильтона, теория индекса Пуанкаре, метод осреднения Боголюбова–Крылова и, как его развитие, метод нескольких масштабов, проблема малых знаменателей Колмогорова–Арнольда, ДС с несколькими управляющими

параметрами, теория катастроф, а также многие другие важные теории и прикладные задачи.

Ниже предлагается ряд фрагментов, позволяющих, как мы надеемся, судить о гораздо более современных приложениях, описываемых простейшими моделями нелинейных дифференциальных уравнений, чем это принято в более стандартных учебниках. Ограниченный объем книги не позволил включить в нее целый ряд бесспорно важных и интересных теоретических сведений и приложений. Как уже отмечалось в предисловии, было бы крайне полезно для каждой специальности, преподаваемой в вузе, иметь свой набор математических моделей.

§ 1. Закон всемирного тяготения, первый закон Кеплера и вторая космическая скорость

Рассмотрим два тела массами M и m соответственно, и пусть $m < M$. Поместим тело с большей массой M в начало координат, считая его неподвижным. Для большей наглядности будем далее тело массы M считать Солнцем, а тело массы m — конкретной планетой, движения которой обсуждаются. Будем пренебрегать взаимопритяжениями других планет и Солнца, т. е. ограничимся, как в таких случаях принято говорить, задачей двух тел.

Согласно закону всемирного тяготения Ньютона на планету действует сила притяжения, равная $\overline{F} = \dfrac{\gamma m M \overline{r}}{r^3}$, где $r = |\overline{r}|$ — расстояние между центрами тяжести планеты и Солнца, а γ — гравитационная постоянная. Данное силовое поле является потенциальным векторным полем: $\overline{F} = \operatorname{grad} \dfrac{\gamma m M}{r}$.

Движение планеты относительно Солнца происходит в плоскости, называемой эклиптикой. Поместим начало координат в центр Солнца и зафиксируем в эклиптике декартову прямоугольную систему координат переменных x, y.

В соответствии со вторым законом Ньютона движение планеты определяется следующей системой двух ДУ второго порядка:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -\dfrac{kmx}{(x^2+y^2)^{3/2}}, \\ m\ddot{y} = -\dfrac{kmy}{(x^2+y^2)^{3/2}}, \end{cases} \tag{1}$$

где для краткости положено $k = M\gamma$.

Эту систему ДУ будем исследовать в полярных координатах $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$.

Ниже будет установлено, что всякое ее решение дается формулой

$$r = \frac{P}{1 + e\cos\varphi}. \tag{2}$$

Но это известная формула конических сечений с фокальным параметром P и эксцентриситетом e. При $e \in [0, 1)$ имеем эллипс (окружность при $e = 0$), при $e = 1$ — параболу, а при $e > 1$ — гиперболу.

Из астрономических наблюдений установлено, что для планет Солнечной системы $e < 1$. Таким образом, каждая из них движется вокруг Солнца по плоской эллиптической орбите. Этот факт носит название первого закона Кеплера.

Возвращающиеся кометы, например, комета Галлея, движутся по очень вытянутым эллипсам с эксцентриситетом, близким к 1, и потому редко появляются вблизи Земли. Тела, движущиеся по гиперболическим или параболическим орбитам, могут пересечь область солнечной системы лишь однажды.

Еще одну серию интересных примеров дают спутники Земли: Луна и искуственные спутники. Здесь эксцентриситет близок к нулю и, следовательно, орбита близка к окружности. Однако необходимость более детального изучения приводит к серьезным уточнениям. Так, задача о движении Луны является на самом деле задачей трех тел: ведь нужно учесть взаимопритяжение Земли, Луны и Солнца. С математическим исследованием этой задачи читатель может ознакомиться в [60].

Задача о космическом корабле типа «Земля–Луна» рассмотрена в [68].

Орбита спутника не только не является эллиптической, но даже, строго говоря, не является замкнутой. Это приводит к необходимости время от времени корректировать орбиту спутника (см. [63], где приведены уточнения к кеплеровским расчетам движений планет). На практике приходится также учитывать, что Земля не является точным шаром, а масса ее распределена неравномерно.

Если скорость космического объекта (или аппарата) достаточно велика, то он, выходя из поля притяжения одной планеты, может затем попасть в поле притяжения другой планеты или Солнца, становясь спутником или затем удаляясь от них. В настоящее время большое число космических аппаратов решает важнейшие научные задачи, исследуя околоземное пространство, планеты Солнечной системы, их спутники, астероиды и Солнце.

Перейдем к математическому исследованию движения планеты вокруг Солнца как задачи двух тел, следуя, в основном, источнику [61].

Кинетическая энергия движущейся частицы (материальной точки — центра тяжести планеты массы m) равна

$$K(t) = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)).$$

Потенциальная энергия равна

$$V(t) = -\frac{km}{\sqrt{x^2(t) + y^2(t)}}.$$

Напомним, что потенциальная энергия определяется с точностью до постоянной. Здесь постоянная выбрана так, чтобы выполнялось естественное условие: на бесконечности потенциальная энергия равняется нулю.

Упражнение 1. Пользуясь системой уравнений движения Ньютона, покажите, что эта система ДУ консервативна, т. е. ее полная энергия $K(t) + V(t) = E$ не зависит от t.

Этот факт является законом сохранения механической энергии движущейся планеты. Запишем его в полярных координатах.

Упражнение 2. Покажите, что в полярных координатах

$$\begin{cases} \dot{x} = \dot{r}\cos\varphi - r\sin\varphi\dot{\varphi}, \\ \dot{y} = \dot{r}\sin\varphi + r\cos\varphi\dot{\varphi}. \end{cases}$$

Проверьте, что закон сохранения энергии теперь принимает вид

$$\frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - \frac{km}{r} = E. \tag{3}$$

Введем в рассмотрение функцию $h(t) = mr^2(t)\dot{\varphi}(t)$, которую принято называть угловым моментом. Оказывается, в рассматриваемом случае имеет место еще один закон сохранения: угловой момент является постоянной величиной, не зависящей от времени.

Для доказательства этого закона сохранения из равенств упражнения 2 получим соотношение

$$r\dot{\varphi} = -\dot{x}\sin\varphi + \dot{y}\cos\varphi.$$

Следовательно $h(t) = m(-\dot{x}y + \dot{y}x)$.

Продифференцируем это равенство и, используя уравнения движения (1), получим

$$\dot{h}(t) = m(-\ddot{x}y + \ddot{y}x) = \frac{km(xy - yx)}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = 0.$$

Итак, доказано, что $mr^2\dot{\varphi} = h = \text{const}$. Это обстоятельство дает возможность упростить выражение (3) для закона сохранения энергии. Заменим в нем $\dot{\varphi}^2$ на $\dfrac{h^2}{m^2r^4}$ и получим следующее ДУ, связывающее переменные r и φ:

$$\frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + \frac{h^2}{m^2r^2}\right) - \frac{km}{r} = E.$$

Это обыкновенное нелинейное ДУ первого порядка, не разрешенное относительно производной. Входящее в него нелинейное слагаемое не зависит явно от переменной t. Это позволяет сделать в ДУ замену переменных, считая φ новой независимой переменной, а $u = \dfrac{1}{r}$ новой неизвестной функцией.

Упражнение 3. Покажите, пользуясь формулой производной сложной функции, что $\dot{r} = -\frac{1}{u^2} \cdot \frac{du}{d\varphi} = -\frac{h}{m} \cdot \frac{du}{d\varphi}$.

Следовательно, закон сохранения энергии в новых переменных приобретает вид

$$\frac{h^2}{2m}\left(\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 + u^2\right) - kmu = E. \tag{4}$$

Продифференцируем это ДУ по φ и получим

$$\left(\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u - \frac{k}{h^2}\right)\frac{du}{d\varphi} = 0.$$

Если равен нулю второй множитель, то u, а значит, и r не зависят от φ. Это соответствует движению по окружности. Равенство нулю первого множителя приводит к линейному неоднородному ДУ

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{k}{h^2}.$$

Общее решение этого ДУ равно

$$u = C\cos\varphi + \frac{k}{h^2}.$$

Упражнение 4. Подставьте это выражение для u в (3) и найдите отсюда, что $C = \sqrt{2mh^2E + m^2}$. Покажите, что так как $u = 1/r$, то отсюда следует формула (2) с $e = \sqrt{1 + 2\frac{Eh^2}{m}}$, $P = \frac{h^2}{k}$.

Поскольку для планет Солнечной системы наблюдается значение $\varphi = \pi$, а $1 + e\cos\varphi > 0$, то для них $e < 1$ и они движутся по эллиптическим орбитам.

Со вторым и третьим законами Кеплера читатель может познакомиться в [13].

Следуя [7], остановимся теперь на близком вопросе о запуске космического аппарата с поверхности Земли. Пусть масса аппарата постоянна и равна m. Пренебрежем сопротивлением атмосферы Земли и будем считать, что движение осуществляется только под действием начальной скорости аппарата v_0.

Обозначим через R радиус Земли, а начало координат пусть теперь находится в центре Земли. Уравнения движения аппарата имеют следующий вид:

$$m\ddot{x} = -\frac{x}{r^3}mgR^2, \quad m\ddot{y} = -\frac{y}{r^3}mgR^2.$$

($r = \sqrt{x^2 + y^2}$). Отсюда можно вывести закон сохранения энергии (проверьте!)

$$\frac{1}{2}m(\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)) - \frac{mgR^2}{r} = E = \text{const}\,.$$

Энергию E определим из начальных условий. При $t = 0$ аппарат находится на поверхности Земли, т. е. $r = R$, и пусть его начальная скорость равна v_0, откуда $\dot{x}^2(0) + \dot{y}^2(0) = v_0^2$.

Таким образом, $E = \frac{1}{2}mv_0^2 - mgR$. Следовательно, закон сохранения выглядит так

$$\frac{1}{2}m(\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)) - \frac{mgR^2}{r} = \frac{1}{2}mv_0^2 - mgR.$$

Если начальная скорость аппарата достаточна, то он выйдет на эллиптическую орбиту вокруг Земли. Поставим вопрос: при какой начальной скорости v_0 аппарат выйдет из поля притяжения Земли? Наименьшая из таких скоростей называется второй космической скоростью.

Если орбита не эллиптическая, то она параболическая или гиперболическая и при $t \to +\infty$ всегда $r \to +\infty$.

Из закона сохранения имеем $\frac{1}{2}mv_0^2 - mgR \geq -\frac{mgR^2}{r}$.

Отсюда при $t \to +\infty$ получаем $\frac{1}{2}v_0^2 - gR \geq 0$.

Следовательно, вторая космическая скорость равна $\sqrt{2gR} \approx 11,2$ км/с.

Заметим, что в задаче, лучше отражающей реальную действительность, масса аппарата задется функцией $m = m(t)$, так как она уменьшается в полете за счет расхода реактивного топлива. Силы, создаваемые реактивными двигателями также следует учесть в уравнениях движения (см. [7]). Кроме того, следует учитывать и сопротивление атмосферы Земли.

Некоторые бифуркационные явления при движении спутника по эллиптической орбите вокруг Земли описаны в [30].

§ 2. Резонанс, резонирующая частота в радиотехнике, биения и почти периодические решения

В дополнение к §6 из гл. IV рассмотрим важные в приложениях случаи линейного неоднородного ДУ колебаний. Сначала обсудим ДУ

$$\ddot{x} + \omega^2 x = F\cos\alpha t. \tag{5}$$

Напомним, что ω называется частотой собственных колебаний, а α — частотой вынужденных колебаний. Таким образом, данное ДУ описывает взаимодействие собственных колебаний с вынужденными колебаниями под действием косинусоидальной внешней силы.

Пусть $\omega \neq \alpha$. В этом случае ДУ имеет следующее частное решение:

$$x(t) = \frac{F}{\omega^2 - \alpha^2}\cos\omega t.$$

Упражнение 1. Выведите эту формулу. Воспользуйтесь тем, что наше ДУ — это ДУ со специальной правой частью и его частное решение можно найти в виде $C\cos\alpha t$.

Остановимся теперь на явлении резонанса. Из приведенной формулы частного решения ДУ видно, что чем ближе ω к α, тем большей оказывается амплитуда вынужденного колебания. (Раскачивание «в такт» качелей — простейший и наглядный пример.)

Если $\omega = \alpha$, т. е. частота вынужденных колебаний совпадает с частотой собственных колебаний, то говорят, что имеет место *резонанс*. Рассматривая амплитуду $C(\omega) = \dfrac{F}{\omega^2 - \alpha^2}$ частного решения как функцию параметра ω, мы видим, что для нее имеет место явление взрыва: $C(\omega) \to \infty$ при $\omega \to \alpha$.

Этот пример моделирует ситуации, встречающиеся в реальности. Напомним старинный случай из XIX в., когда внезапно разрушился мост так как частота (ритм движения) шедшей по нему колонны солдат случайно совпала с частотой собственных колебаний моста.

Таким образом, технической конструкцией, не учитывающей явления резонанса, опасно пользоваться, так как резонанс может ее внезапно разрушить.

Приведенная выше математическая модель, описывающая ДУ с возможным резонансом, может быть существенно уточнена. Учет сил сопротивления, несколько гасящих колебания большой амплитуды, позволяет технически более адекватно отразить явление резонанса.

Приступим к изучении подобной ситуации. Задача о вынужденных колебаниях при наличии трения описывается ДУ

$$\ddot{x} + 2k\dot{x} + \omega^2 x = F\cos\alpha t \tag{6}$$

$(k > 0)$.

Его общее решение представимо в виде $u(t) + v(t)$, где $u(t)$ — общее решение соответствующего однородного ДУ, а $v(t)$ — некоторое частное решение неоднородного ДУ.

Упражнение 2. Покажите, что оба корня характеристического уравнения, соответствующего однородному ДУ, всегда имеют отрицательные вещественные части и, таким образом, $u(t) \to 0$ при $t \to +\infty$.

Отсюда следует, что с течением времени собственные колебания затухают и начинает преобладать вынужденное колебание. Это означает, что переходные режимы, описываемые общим решением ДУ, с возрастанием времени всё с большей точностью приближаются к установившемуся режиму вынужденных колебаний.

Найдем частное решение $v(t)$, пользуясь тем, что исследуемое ДУ является ДУ со специальной правой частью (см. гл. II, §7), причем $i\alpha$ не является корнем характеристического уравнения. Пользуясь тем, что по формуле Эйлера $\cos\alpha t = \operatorname{Re} e^{i\alpha t}$, найдем сначала частное комплексное решение вспомогательного ДУ

$$\ddot{z} + 2k\dot{z} + \omega^2 z = \omega e^{i\alpha t}.$$

Это частное решение ищем в виде $z = Ce^{i\alpha t}$ с комплексной постоянной амплитудой C.

Подставляя выражение для функции z и ее производных в ДУ и сокращая на $e^{i\alpha t}$, находим уравнение для вычисления C:

$$C(\omega^2 - \alpha^2 + 2k\alpha i) = 1.$$

Отсюда имеем $C = \dfrac{1}{\omega^2 - \alpha^2 + 2k\alpha i}$, откуда

$$|C| = \frac{1}{\sqrt{(\omega^2 - \alpha^2)^2 + 4k^2\alpha^2}}.$$

Какова же наибольшая по модулю амплитуда вынужденного колебания? Обращаясь к выражению для $|C|$, видим, что наибольшее значение модуль комплексной амплитуды вынужденного колебания достигает при $\omega = \alpha$. При этом он равен $\dfrac{1}{2k}$.

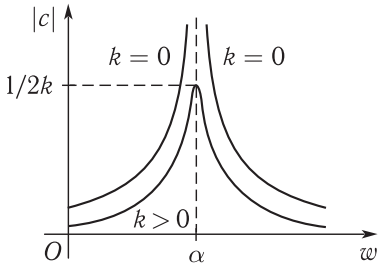


Рис. 31

Таким образом, учет трения дает более правильное описания явления резонанса: при малом положительном трении модуль амплитуды вынужденного колебания принимает большие (но не бесконечные) значения. Решение, рассматриваемое как функция параметра ω, имеет при $k = 0$ взрывной характер, более правильно моделируемый при $k > 0$ (рис. 31).

Полагая $C = |C|e^{i\delta_0}$, то окончательно имеем

$$z(t) = \frac{e^{i(\omega t + \delta_0)}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4k^2\omega^2}}.$$

Упражнение 3. Вычислите вещественное частное решение, описывающее вынужденное колебание при наличии малого трения.

Реальная колебательная система может возбуждаться линейной комбинацией нескольких внешних гармонических колебаний с частотами $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m$. Если желательно избежать резонанса, то эта система должна быть сконструирована таким образом, чтобы ее собственная частота $\omega \neq \omega_s$, $s = 1, 2, \ldots, m$, и даже не была близка к этим значениям.

Вместе с тем явление резонанса, нежелательное в одних обстоятельствах, может быть эффективно использовано в других условиях. Опасно пренебрегать этим явлением, но возможно иногда и полезное его использование.

Ограничимся одним известным примером, показывающим возможности применения резонанса в радиотехнике и близких к ней областях.

Далим краткое описание работы электрической цепи, состоящей из последовательно включенных конденсатора емкостью C, катушки самоиндукции с коэффициентом самоиндукции L, сопротивления R и внешнего источника переменного тока с напряжением $V \sin \alpha t$ (рис. 32).

Дифференциальное уравнение для силы тока $I(t)$ имеет вид (подробное описание его вывода см. в [12])

$$L\ddot{I} + R\dot{I} + \frac{1}{C}I = E\omega\cos\alpha t.$$

Это уже рассмотренное ДУ (6) с $k = \dfrac{R}{2L}$, $\omega^2 = \dfrac{1}{LC}$, $F = \dfrac{E\omega}{L}$.

Дело в том, что электрическая цепь (электрический осциллятор) является аналогом механического осциллятора. Величина $\omega = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ называется собственной частотой электрической цепи. Величины L, R, C играют соответственно роли: L — массы, R — сопротивления, $\dfrac{1}{C}$ — коэффициента упругости Гука.

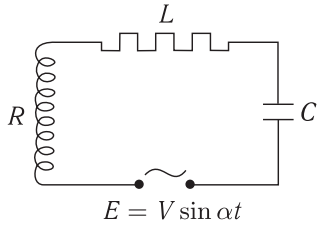


Рис. 32

Как и выше, при $t \to +\infty$ собственные колебания электрической цепи экспоненциально затухают, а амплитуда вынужденных колебаний достигает наибольшего значения, когда частота собственного колебания равна частоте вынужденного колебания.

Иначе говоря, колебательный контур L, R, C резонирует на свою собственную частоту.

Пусть внешнее колебание имеет вид

$$\sum_{s=1}^{m} \frac{\omega_k E_k}{L}\cos\omega_k t.$$

Вынужденное колебание согласно принципу суперпозиции равно аналогичной сумме откликов колебательного контура. Меняя параметры L, R, C колебательного контура так, чтобы $\omega \approx \omega_s$, можно настроиться на нужную s-ю волну внешних колебаний (настройка радиоприемника или телевизора на волну той или иной радиостанции или телевизионного канала).

Академик Л. С. Понтрягин в своем выдающемся учебнике [12], приведя целый спектр приложений ДУ к электротехнике и радиотехнике, отметил, что здесь имеется более богатое поле приложения ДУ, чем, скажем, в механике. В примерах данного Дополнения I читатель увидит, что и в других науках, еще недавно не затронутых математикой, дело обстоит совершенно так же.

В заключение параграфа рассмотрим явление, известное как биения. Зададим к ДУ при отсутствии трения (5) однородные начальные условия $x(0) = \dot{x}(0) = 0$.

Упражнение 4. Покажите, что решение задачи Коши дается формулой

$$x(t) = F\frac{\cos\alpha t - \cos\omega t}{\omega^2 - \alpha^2}.$$

Это выражение можно записать с «переменной амплитудой» $A(t)$:

$$x(t) = A(t)\sin\frac{(\omega+\alpha)t}{2}, \quad \text{где} \quad A(t) = \frac{2F}{|\omega^2-\alpha^2|}\sin\frac{(\omega-\alpha)t}{2}.$$

Такая запись решения позволяет условно рассматривать его как «гармоническое колебание» с периодом $T_0 = \dfrac{4\pi}{\omega+\alpha}$ и переменной амплитудой $A(t)$.

Сама амплитуда $A(t)$ также является периодической функцией с другим периодом $T = \dfrac{4\pi}{|\omega-\alpha|}$.

Пусть величина $|\omega-\alpha|$ достаточно мала. Тогда $A(t)$ как функция от t является медленно меняющейся функцией с большим периодом T. На этом большом периоде множитель $\sin\dfrac{(\omega+\alpha)t}{2}$ в выражении $x(t)$ является быстро меняющейся функцией от t.

Итак, $x(t)$ будем рассматривать как гармоническое колебание с периодом T_0, амплитуда которого медленно меняется с периодом T. Такие колебания называются биениями.

В Дополнении II на базе компьютерной системы MATHCAD приведен расчет задачи с биением и приведен соответствующий график.

Примеры биений: на кардиограмме записываются биения сердечной мышцы, на энцефалограмме записываются ритмы работы головного мозга.

Пусть $\omega \neq \alpha$. Естественно поставить вопрос: не представляются ли биения периодической функцией? Иначе говоря, существует ли минимальное $T > 0$, такое, что

$$\cos\omega T = \cos\alpha T, \quad \omega\sin\omega T = \alpha\sin\alpha T\,?$$

Возведем в квадрат оба эти равенства и, исключая $\cos\omega T$ и $\cos\alpha T$, получим (проверьте!)

$$\sin^2\omega T = 0, \quad \sin^2\alpha T = 0.$$

Эти равенства возможны тогда и только тогда, когда

$$\omega T = k\pi, \quad \alpha T = l\pi,$$

где k и l — некоторые натуральные числа. При этом

$$T = \frac{k\pi}{\omega} = \frac{l\pi}{\alpha}.$$

Если данное равенство соблюдается, то для минимальности периода T числа k и l следует выбрать взаимно простыми. Таким образом, биение является периодической функцией тогда и только тогда, когда существуют взаимно простые числа k и l такие, что

$$\frac{\omega}{k} = \frac{\alpha}{l}.$$

Таким образом, минимального общего периода не существует в том и только в том случае, когда частоты ω и α являются несоизмеримыми числами. При выполнении этого условия колебание будет биением.

График, изображающий биение (рис. 77), подсказывает, что оно в некотором смысле все же периодично. Как сформулировать это замечание математически более точно?

Определение. Функция вида $x(t) = A\cos(\omega_1 t + \delta_1) + B\cos(\omega_2 t + \delta_2)$ называется *почти периодической*, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $L = L(\varepsilon) > 0$, такое, что во всяком интервале длины L найдется число $T > 0$, такое, что $|x(t+T) - x(t)| < \varepsilon$. Это число T называется ε — *почти периодом* функции $x(t)$.

Как и выше, можно показать, что почти периодическая функция оказывается периодической в том и только в том случае, когда частоты ω_1 и ω_2 соизмеримы.

Условно можно сказать, что почти периодическая функция подобно периодической функции повторяет свои значения, но с ошибками.

В общем случае почти периодические функции определяются как функции вида

$$x(t) = \sum_{k=1}^{m} A_k \cos(\omega_k t + \delta_k).$$

Пусть все $A_k \neq 0$ и все $\omega_k > 0$. Можно показать, что тогда $x(t)$ не является периодической в том и только в том случае, когда частоты $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m$ рационально независимы, т. е. не существует целых чисел $N_1, N_2, \ldots, N_m$, не равных нулю одновременно и таких, что

$$N_1\omega_1 + N_2\omega_2 + \ldots + N_m\omega_m = 0.$$

Сказанное выше говорит о том, что почти периодические решения ДУ встречаются много чаще, чем их периодические решения. К сожалению, в отечественных науке и математической литературе почти периодическим решениям ДУ уделено совершенно недостаточное внимание. Подробнее о почти периодических функциях см. в [33].

Возвратимся к биениям при наличии малого трения. Как и выше, сначала идут биения, затем при возрастании t все с большей точностью начинают преобладать вынужденные установившиеся колебания.

§ 3. Периодические решения в экологии и в химической кинетике

Взаимные отношения живых существ в природе изучаются в экологии. Рассмотрим несколько простейших математических моделей развития биологических сообществ, или популяций.

Пусть имеется одна популяция с количеством членов x, и пусть a — количество постоянно потребляемой пищи за единицу времени. Будем считать, что скорость роста популяции пропорционально про-

изведению ax, т. е. $\dot{x} = k_1 ax$, где $k_1 > 0$ — постоянная. Аналогично, пусть смертность популяции определяется равенством $\dot{x} = -k_3 bx$, где $k_3 > 0$, $b > 0$ — постоянные. Учитывая оба фактора (роста и смертности), приходим к ДС $\dot{x} = kx$, где $k = k_1 a - k_3 b$ — так называемый мальтузианский параметр.

Если x_0 — число членов популяции при $t = 0$, то решение задачи Коши приводит к следующему закону развития популяции: $x = x_0 e^{kt}$. Рассмотрим различные возможные случаи.

Если $k > 0$, то имеет место экспоненциальный рост популяции (закон Мальтуса, 1798 г.).

Если $k < 0$, то экспоненциальный спад популяции ведет к ее гибели.

Однако в жизни часто наблюдается стабилизация биологических популяций. Одной из ее причин может служить ограниченный запас пищи.

Рассмотрим более общую математическую модель развития популяции. Она называется логистической моделью и описывается задачей Коши

$$\dot{x} = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right), \quad x(0) = x_0 \geq 0.$$

Здесь $r > 0$ — мальтузианский параметр, а $K > 0$ принято называть емкостью среды. Решение этой задачи Коши дается формулой (проверьте!)

$$x = \frac{Kx_0}{x_0 + (K - x_0)e^{-rt}}.$$

ДУ имеет два стационарных решения: $x = 0$ и $x = K$.

Если $x_0 = 0$, то $x(t) = 0$ для любых $t > 0$. Если же $x_0 > 0$, то $x(t) > 0$ на полуоси $t \geq 0$ и $x(t) \to K$ при $t \to +\infty$. Таким образом, происходит стабилизация популяции.

Упражнение. Нарисуйте график решения при $x_0 \in (0, K)$. Когда оно будет иметь точку перегиба?

Подобная задача встречалась в примере 2 из гл. IV, §3 в связи с проблемой эффективности рекламы.

Продолжим исследование математических моделей развития биологических сообществ. Другой причиной стабилизации популяции может быть наличие хищников.

Рассмотрим математическую модель «хищник–жертва», когда, например, x — кролики, а y — лисы. Пусть кролики имеют неограниченный запас пищи, так что их воспроизводство пропоционально ax. Пусть единственной причиной их смертности является гибель от лис. Естественно считать, что скорость гибели кроликов пропорциональна произведению числа кроликов на число лис, т. е. xy. Пусть воспроизводство лис пропорционально тому же произведению, а их смертность естественна. Учитывая вклады рождений и смертей, приходим к автономной системе ДУ, т. е. к ДС совместной эволюции двух популяций

$$\begin{cases} \dot{x} = k_1 ax - k_2 xy, \\ \dot{y} = k_2 xy - k_3 by. \end{cases} \tag{7}$$

Эта ДС изучалась Лоткой и Вольтеррой как простейшая эволюционная модель (биологический осциллятор). Лотка предложил рассматривать ее также в качестве модели периодической химической реакции. Речь идет о кинетике трех химических реакций со скоростями k_1, k_2, k_3:

$$A + X \xrightarrow{k_1} 2X, \quad X + Y \xrightarrow{k_2} 2Y, \quad Y \xrightarrow{k_3} B.$$

Буквами X, Y обозначены концентрации промежуточных химических веществ. Предполагается, что концентрации реагента A и продукта B поддерживаются постоянными и равномерными внутри реактора. Воспользуемся законом действующих масс, в соответствии с которым скорость химической реакции (при постоянной температуре) пропорциональна произведению (активных) концентраций реагентов (см. [40]). В применении к описанной системе реакций приходим к ДС (7).

Перейдем к исследованию ДС (7). Она имеет два положения равновесия: (0, 0) и (c, d), где $c = \dfrac{k_3 b}{k_2}$, $d = \dfrac{k_1 a}{k_2}$. Положение равновесия (0, 0) неустойчиво по Ляпунову, так как является седлом соответствующей линеаризованной ДС $\dot{x} = k_1 ax$, $\dot{y} = -k_3 by$ (проверьте!).

Для исследования поведения траекторий ДС (7) вблизи положения равновесия (c, d) положим $x = c + u$, $y = d$ и получим в новых переменных следующую ДС (проверьте!):

$$\begin{cases} \dot{u} = -k_3 bv - k_2 uv, \\ \dot{v} = k_1 au + k_2 uv. \end{cases} \tag{8}$$

Для линеаризованной ДС $\dot{u} = -k_3 bv$, $\dot{v} = k_1 au$ начало координат $u = 0$, $v = 0$ является центром.

Ниже будет показано, что и для нелинейной ДС (8) это положение равновесия также имеет геометрическую структуру центра.

Для упрощения выкладок будем далее считать, что $k_1 a = k_3 b = k_2 = 1$ так что ДС (8) принимает вид

$$\begin{cases} \dot{u} + v = -uv, \\ \dot{v} - u = uv. \end{cases} \tag{9}$$

Отсюда имеем

$$\begin{cases} \dfrac{\dot{u}}{1+u} = -v, \\ \dfrac{\dot{v}}{1+v} = u. \end{cases}$$

Умножим первое уравнение на u, второе на v и сложим полученные уравнения. В результате ДС (3) сводится к ДУ в дифференциалах

$$\frac{udu}{1+u} + \frac{vdv}{1+v} = 0.$$

Интегрируя его, находим уравнение траекторий

$$\frac{e^u}{1+u} + \frac{e^v}{1+v} = C$$

с постоянной интегрирования $C \geq 2$ (проверьте!). Вблизи положения равновесия $(0, 0)$ все эти траектории являются замкнутыми кривыми. Соответствующие им решения ДС являются периодическими функциями. В частности, при $u, v \to 0$ имеем $\frac{e^u}{1+u} = 1 + \frac{u^2}{2} + o(u^2)$, $\frac{e^v}{1+v} = 1 + \frac{v^2}{2} + o(v^2)$, так что приближенно траектории являются окружностями $u^2 + v^2 = 2(C-2)$.

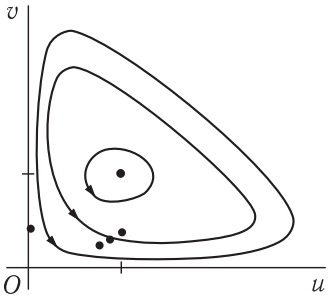


Рис. 33

Возвратимся к нелинейной ДС Лотки–Вольтерры. Установлено, что ее положение равновесия $\left(\frac{k_3 b}{k_2}, \frac{k_1 a}{k_2}\right)$ является центром (локально). Его окрестность заполнена замкнутыми траекториями. На рис. 33 показана примерная фазовая картина, полученная численным интегрированием ДС при конкретных значениях ее параметров.

Заметим, что система уравнений Лотки–Вольтерры аналогична консервативной механической системе без трения. Учет малого «биологического трения» приводит к аналогу диссипативной механической системы. Ее изучение дает более правильное описание эволюционной ситуации, связанное с появлением устойчивого предельного цикла (см. ниже §11 и [40]).

§ 4. Примеры бифуркационных явлений

Термин «бифуркация» (см. например, [14, 22, 55]), т. е. раздвоение, применяется в случаях, когда семейство объектов (процессов) зависит от параметра (числового или функционального), причем при переходе параметра через некоторое его значение (критическое значение, точка бифуркации) поведение объекта резко меняется качественно или количественно. В качестве простейшего примера укажем на нелинейное уравнение с вещественным параметром λ, когда при переходе значения параметра через критическую точку λ_0 (точка бифуркации) меняется число решений уравнения (какие-то исчезают или какие-то появляются).

В общей ситуации термин «бифуркация» и идентичные или родственные ему термины «ветвление», «разветвление», «катастрофа» математически описывают важнейшее понятие диалектической философии — закон перехода количества в качество.

Для иллюстрации сказанного приведем сначала ряд элементарных, а затем и несколько более сложных примеров.

1°. Рассмотрим уравнение $\lambda x - x^3 = 0$ с неизвестным $x \in \Re$ и параметром $\lambda \in \Re$.

При $\lambda < 0$ уравнение имеет только тривиальное решение $x = 0$ кратности 1.

При $\lambda = 0$ уравнение имеет только тривиальное решение $x = 0$ кратности 3.

При $\lambda > 0$ уравнение имеет не только тривиальное решение $x = 0$ кратности 1, но и два новых решения $x = \sqrt{\lambda}$ и $x = -\sqrt{\lambda}$.

Таким образом, точка $\lambda = 0$ является здесь точкой бифуркации. Уравнение при любых λ имеет тривиальное решение $x = 0$, но при переходе параметра λ через ноль (от отрицательных значений к положительным) рождаются два новых нетривиальных решения. Данный тип бифуркации прикладники называют иногда вилкообразной бифуркацией.

2°. Рассмотрим множество Ω кривых, описываемых уравнением $x^2 + y^2 = \lambda$ с параметром $\lambda \in \Re$.

Если $\lambda < 0$, то множество Ω пусто.

Если $\lambda = 0$, то это множество сводится к точке $x = y = 0$.

Если же $\lambda > 0$, то множество состоит из окружности $x^2 + y^2 = \lambda$.

Точка $\lambda = 0$ является точкой бифуркации.

3°. Пусть даны матрица $A - \lambda E$ порядка n с вещественными элементами (E — единичная матрица) и параметр $\lambda \in \Re$. Каждое собственное значение матрицы A является точкой бифуркации данного семейства матриц. Действительно, если λ не является собственным значением, то $\det(A - \lambda E) \neq 0$. Если же λ_0 является собственным значением матрицы A, то $\det(A - \lambda_0 E) = 0$.

Возможен и другой подход к этой ситуации. Уравнение $Ax - \lambda x = 0$ имеет лишь тривиальное решение, если λ не является собственным значением A. Если же λ_0 является собственным значением матрицы A, то уравнение $Ax - \lambda_0 x = 0$ имеет нетривиальные решения.

Перейдем к описанию простейших бифуркационных явлений положений равновесия ДС на прямой и на плоскости.

4°. Рассмотрим одномерную ДС (ДУ первого порядка) с вещественным параметром λ

$$\dot{x} = \lambda - x^2.$$

Если $\lambda < 0$, то ДС не имеет положений равновесия.

При $\lambda = 0$ имеем ДС $\dot{x} = -x^2$. Ее положение равновесия — это точка $x = 0$. Поскольку решение этой ДС с начальным условием $x(0) = 0$ равно $x(t, x_0) = \dfrac{x_0}{1 + tx_0}$, то положение равновесия асимптотически устойчиво.

Если $\lambda > 0$, то ДС имеет два положения равновесия $x = -\sqrt{\lambda}$ и $x = \sqrt{\lambda}$: первое неустойчиво, а второе устойчиво (проверьте, пользуясь теоремой об устойчивости по линейному приближению).

Таким образом, в ходе возрастания параметра λ от отрицательных значений к положительным при переходе через ноль (бифуркационное значение, точка бифуркации) рождаются два новых положения равновесия, из которых одно устойчиво, а второе нет. Эту ситуацию удобно пояснить на графике (рис. 34) в плоскости переменных x, λ.

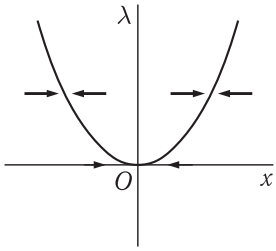


Рис. 34

Заметим, что в литературе этот тип бифуркации называется бифуркацией седло–узел по аналогии со значительно более общей ситуацией п. 9° (см. ниже).

5°. Рассмотрим одномерную ДС с параметром $\lambda \in \Re$

$$\dot{x} = \lambda x - x^2.$$

Предоставляем читателю возможность проверить следующие утверждения.

Здесь $x = 0$ при всех λ является положением равновесия: устойчивым при $\lambda \leq 0$ и неустойчивым при $\lambda > 0$.

Когда λ переходит через точку бифуркации $\lambda = 0$, тривиальное положение равновесия $x = 0$ теряет устойчивость, но от него ответвляется новое устойчивое положение равновесия $x = \lambda$. Этот процесс можно проследить на рис. 35. При каждом фиксированном λ можно наблюдать, какое из положений равновесия устойчиво, а какое нет.

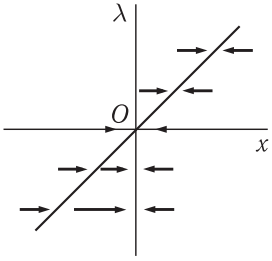


Рис. 35

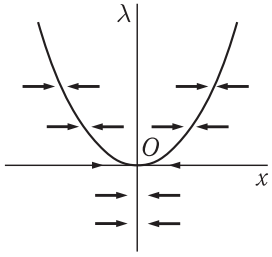


Рис. 36

6°. Рассмотрим одномерную ДС с вещественным параметром λ

$$\dot{x} = \lambda x - x^3.$$

Упражнение 1. Проверьте, используя теорему об устойчивости по линейному приближению, что верны следующие факты.

Если $\lambda \leq 0$, то $x = 0$ является его единственным, причем асимптотически устойчивым, положением равновесия. Если же $\lambda > 0$, то положение равновесия $x = 0$ становится неустойчивым, но взамен появляются (рождаются) два новых положения равновесия $x = \sqrt{\lambda}$ и $x = -\sqrt{\lambda}$. являющихся асимптотически устойчивыми (рис. 36). Значит, точка $\lambda = 0$ является точкой бифуркации.

Упражнение 2. Покажите, что решение ДУ с начальным условием $x(0) = x_0$ при $\lambda \neq 0$ дается формулой

$$x(t) = \frac{x_0}{\sqrt{\left(1 - \frac{x_0^2}{\lambda}\right)\exp(-2\lambda t) + \frac{x_0^2}{\lambda}}}.$$

Проверьте, что при $t \geq 0$ подкоренное выражение в правой части положительно.

Покажите, что если $\lambda = 0$, то $x(t) = \dfrac{x_0}{\sqrt{1 + 2tx_0^2}}$.

Из полученных явных формул для решения $x = x(t, x_0)$ задачи Коши можно сделать следующие важные заключения.

Если $\lambda < 0$, то при $t \to +\infty$ решение $x(t, x_0) \to 0$, т. е. стремится к единственному устойчивому положению равновесия $x = 0$. Таким образом, если траектория начинается в точке x_0 с достаточно малым $|x_0|$, то при всех $t > 0$ она остается в достаточно малой окрестности положения равновесия $x = 0$.

Аналогично обстоит дело для случая $\lambda = 0$. Разница состоит лишь в том, что если при $\lambda \neq 0$ стремление траекторий при $t \to +\infty$ к положению равновесия происходит с экспоненциальной скоростью, то в этом случае — со степенной.

Пусть теперь $\lambda > 0$. Здесь ситуация совершенно иная. При $t \to +\infty$ решение $x(t, x_0) \to \operatorname{sign} x_0 \sqrt{\lambda}$, т. е. $x(t, x_0)$ стремится к устойчивому положению равновесия $\sqrt{\lambda}$, если $x_0 > 0$, либо $-\sqrt{\lambda}$, если $x_0 < 0$. Здесь наблюдается плавный (по λ) переход от неустойчивого положения равновесия $x = 0$ (при $\lambda = 0$) к одному из устойчивых положений равновесия $\pm\sqrt{\lambda}$ при $\lambda > 0$. В прикладных задач электро- и радиотехники при этом говорят о мягком возбуждении системы.

Данный тип бифукации (как и примере п. 1°) называется бифуркацией типа вилки.

7°. *Пример динамической бифуркации — бифуркации рождения предельного цикла.* Рассмотрим на плоскости ДС с вещественным параметром λ

$$\begin{cases} \dot{x} = \lambda x + \omega y - x(x^2 + y^2), \\ \dot{y} = \lambda y - \omega x - y(x^2 + y^2). \end{cases}$$

Данную ДС целесообразно записать в полярных коодинатах $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$.

Умножим первое уравнение на x, второе на y, полученные уравнения сложим и придем к уравнению для нахождения r (проверьте!)

$$\dot{r} = \lambda r - r^3.$$

Далее умножим первое уравнение на y, второе на $-x$ и полученные уравнения сложим. В результате придем к уравнению для определения $\varphi = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$ (проверьте!)

$$\dot{\varphi} = \omega.$$

Решение ДУ для φ с начальным условием $\varphi(0) = \varphi_0$ равно

$$\varphi(t) = \omega t + \varphi_0.$$

Как и в п. 6°, решение ДУ для $r(t)$ с начальным условием $r(0) = r_0$ при $\lambda \neq 0$ дается формулой (но теперь $r(t) \geq 0$)

$$r(t) = \frac{r_0}{\sqrt{\left(1 - \frac{r_0^2}{\lambda}\right)\exp(-2\lambda t) + \frac{r_0^2}{\lambda}}}.$$

Если $\lambda < 0$, то при $t \geq 0$ подкоренное выражение положительно и $r(t) \to 0$ при $t \to +\infty$. Таким образом, при $\lambda < 0$ ДУ для r имеет единственное положение равновесия $r = 0$. Возвращаясь к исходной ДС, заметим, что для нее начало коодинат является устойчивым фокусом.

Если $\lambda = 0$, то $r(t) = \dfrac{r_0}{\sqrt{1 + 2tr_0^2}}$ и ДУ для r все еще имеет единственное положение равновесия $r = 0$, также являющееся устойчивым фокусом для ДС, правда со степенной скоростью закручивания спиралей.

Пусть, наконец, $\lambda > 0$, тогда у первого ДУ появляется еще одно положение равновесия $r(t) = \sqrt{\lambda}$. Для исходной ДС соответствующая траектория — это окружность $x^2 + y^2 = \lambda$. Эта траектория является устойчивым предельным циклом. Ведь по-прежнему подкоренное выражение положительно при всех $t \geq 0$, но теперь (проверьте!) и $r(t)$ стремится к $\sqrt{\lambda}$ при $t \to +\infty$.

В декартовых координатах решение задачи Коши исследуемой системы ДУ дается формулами

$$x = r(t)\cos(\omega t + \varphi_0), \quad y = r(t)\sin(\omega t + \varphi_0).$$

В частности, при $\lambda > 0$ имеем соответствующее предельному циклу периодическое решение $x = \sqrt{\lambda}\cos(\omega t + \varphi_0)$, $y = \sqrt{\lambda}\sin(\omega t + \varphi_0)$.

Таким образом, в данном примере при изменении параметра λ наблюдается смена фазовых картин расположения траекторий ДС, представленная на рис. 37–39. При $\lambda < 0$ положение равновесия $x = y = 0$ является устойчивым фокусом, на который экспоненциально быстро накручиваются остальные траектории — спирали (изображенные на рис. 37). При $\lambda = 0$ положение равновесия (0, 0) остается устойчивым фокусом, а остальные траектории спиралями, но их накручивание происходит существенно медленнее — со степенной скоростью (на рис. 38 спираль больше, она накручивается на начало координат медленнее). Когда λ становится положительным, происходит потеря устойчивости фокуса (0, 0), т. е. он становится неустойчивым. Теперь выходящие из него спирали раскучиваются и наматываются изнутри на родившийся устойчивый предельный цикл. На фазовом портрете (рис. 39) этот предельный цикл представлен пунктирной линией. При этом внешние

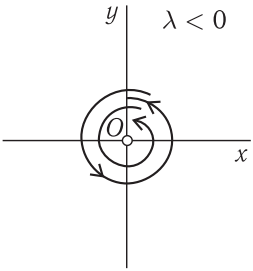


Рис. 37

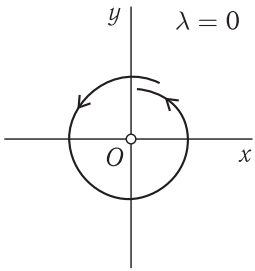


Рис. 38

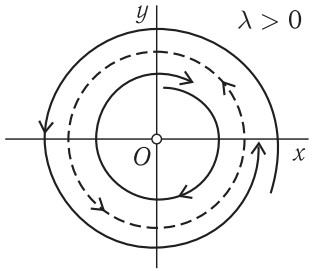


Рис. 39

траектории также являются спиралями, накручивающимися на предельный цикл снаружи.

Из полученных явных формул для решения $r = r(t, r_0)$ задачи Коши по переменной r можно сделать следующие важные заключения.

Если $\lambda < 0$, то при $t \to +\infty$ решение $r(t, r_0) \to 0$, т. е. стремится к единственному устойчивому положению равновесия $r = 0$. Таким образом, если траектория начинается в точке (r_0, φ_0) с достаточно малым $|r_0|$, то при всех $t > 0$ она остается в достаточно малой окрестности положения равновесия $r = 0$.

Аналогично обстоит дело для случая $\lambda = 0$. Разница состоит лишь в том, что если при $\lambda \neq 0$ стремление траекторий при $t \to +\infty$ к положению равновесия происходит с экспоненциальной скоростью, то в этом случае — со степенной.

Пусть теперь $\lambda > 0$. Здесь ситуация совершенно иная. Положение равновесия $r = 0$ становится неустойчивым фокусом. При $t \to +\infty$ решение $r(t, x_0) \to \sqrt{\lambda}$, т. е. $r(t, r_0)$ стремится к устойчивому положению равновесия $\sqrt{\lambda}$. Наблюдается плавный (по λ) переход от неустойчивого положения равновесия $r = 0$ (при $\lambda > 0$) к рождающемуся при $\lambda > 0$ устойчивому малому предельному циклу $r = \sqrt{\lambda}$ с растущей при росте λ амплитудой. При этом говорят, что имеет место мягкое возбуждение системы.

Пусть теперь параметр λ меняется от положительных значений к отрицательным. Тогда устойчивый предельный цикл плавно переходит в устойчивое положение равновесия, т. е. при $\lambda \to 0$ амплитуда предельного цикла стремится к нулю и он исчезает.

Проведенный качественный анализ полезно дополнить компьютерным экспериментом. В Дополнении III читатель найдет эффектную реализацию примеров устойчивого и неустойчивого предельных циклов на базе пакета компьютерной алгебры Mathematica.

Как уже отмечалось, бифуркация рождения предельного цикла была открыта Пуанкаре, строгое доказательство соответствующей теоремы было дано Андроновым и обобщено Хопфом.

8°. Пример бифуркации с жестким возникновением автоколебаний.

В п. 7° при возрастании параметра λ и переходе его через ноль рождалось малое устойчивое периодическое решение с амплитудой $\sqrt{\lambda}$.

Оказывается, возможно жесткое возбуждение системы, когда рождается новый устойчивый предельный цикл, далекий от исходного положения равновесия. Здесь малое изменение параметра приводит к нестандартной ситуации, когда траектория, начинающаяся вблизи положения равновесия, при потере им устойчивости резко уходит от него, приближаясь к далекому предельному циклу.

В электро- и радиотехнике в подобных случаях говорят о жестком возбуждении системы. Подобные типы бифуркаций, когда малые изменения параметра скачкообразно приводят к большим численным изменениям, принято называть катастрофами.

Рассмотрим ДС, записанную в полярных координатах в виде

$$\begin{cases} \dot{r} = \lambda r + r^2 - r^3, \\ \dot{\varphi} = \omega. \end{cases}$$

Предоставляем читателю проверить справедливость нижеследующих утверждений.

Если параметр $\lambda < -\dfrac{1}{4}$, то ДУ для r имеет единственное положение равновесия $r = 0$, являющееся асимптотически устойчивым.

Пусть $\lambda \in \left(-\dfrac{1}{4}, 0\right)$. Этот случай представлен на рис. 40.

Сохраняется положение равновесия $r = 0$, и оно по-прежнему асимптотически устойчивое. Появляются два новых положения равновесия (проверьте!):

$$r_* = \frac{1 - \sqrt{1 + 4\lambda}}{2}, \qquad r^* = \frac{1 + \sqrt{1 + 4\lambda}}{2}.$$

Упражнение 3. Покажите, что: 1) r_* строго убывает, принимая значения на интервале $(1/2, 0)$; 2) r^* строго возрастает и принимает значения на интервале $(1/2, 1)$.

Упражнение 4. Покажите, что r_* неустойчиво, а r^* асимптотически устойчиво.

Итак, точка $\lambda = -1/4$ является точкой бифуркации.

В данном примере главный интерес представляет точка $\lambda = 0$.

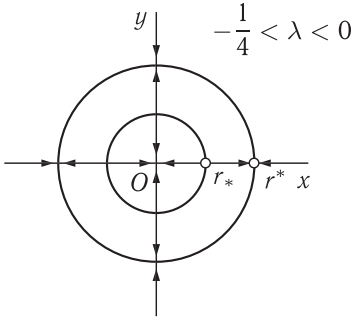


Рис. 40

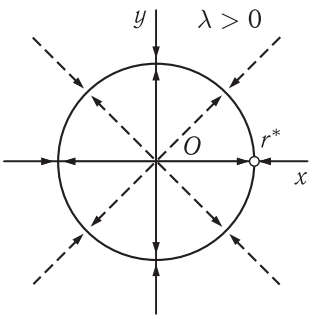


Рис. 41

Если $\lambda = 0$, то $r_* = 0$, т. е. положение равновесия r_* сливается с положением равновесия $r = 0$ («садится» на него).

Пусть $\lambda > 0$. Сохраняется положение равновесия $r = 0$, но оно теряет устойчивость (становится неустойчивым).

Положение равновесия r_* исчезает: ведь $r_* < 0$ невозможно.

Положение равновесия r^* по-прежнему остается асимптотически устойчивым. Соответствующая фазовая картина схематически представлена на рис. 41.

Напомним, что при λ, возрастающем на интервале $(0, +\infty)$, положение равновесия r^* также строго возрастает и принимает значения на $(1, +\infty)$. Следовательно $r^* > 1$ при $\lambda > 0$.

Итак, в процессе возрастания λ при переходе его через ноль положение равновесия r_* исчезает, сливаясь с положением равновесия $r = 0$, в результате чего положение равновесия $r = 0$ становится неустойчивым. Остается одно устойчивое положение равновесия r^*.

Как же ведет себя траектория, начинающяяся в точке (r_0, φ_0) с достаточно малым $r_0 > 0$?

Если $-1/4 < \lambda < 0$, то траектория с начальной точкой, лежащей вблизи начала коодинат, при всех $t > 0$ остается в достаточно малой окрестности этого устойчивого положения равновесия $r = 0$ и стремится к нему при $t \to +\infty$.

Когда параметр λ становится положительным, траектория резко уходит от положения равновесия $r = 0$ к далекому устойчивому предельному циклу — окружности $r = r^*$ радиуса $r^* > 1$, спиралевидно приближаясь к ней.

Что же произойдет при обратном уменьшении параметра λ от положительных значений к отрицательным? Пусть начальное положение трактории находится вблизи предельного цикла $r = r^*(\lambda)$. Тогда при всех $\lambda > -1/4$ при переходе через значение 0 положительная полутраектория (часть траектории с $t > 0$) останется в достаточно малой окрестности этого предельного цикла. При $\lambda = -1/4$ произойдет исчезновение этого предельного цикла и полутраектория резко перескочит в окрестность устойчивого положения равновесия $r = 0$.

Таким образом, для данной ДС точка $\lambda = 0$ в ходе возрастания параметра λ является точкой жесткой бифуркации, или катастрофы. Аналогично, в процессе убывания параметра λ точка $\lambda = -1/4$ также является точкой катастрофы (жесткой бифуркации).

При наличии у ДС нескольких предельных циклов возможна более сложная катастрофа перескакивания траектории из окрестности одного предельного цикла в окрестность другого предельного цикла.

Мы ограничились наличием в ДС одного «управляющего» параметра λ. Для ДС в пространстве $\Re^n$ с несколькими управляющими параметрами в теории катастроф исследованы все возможные типы катастроф (см. [6, 7]). Рассмотренная выше катастрофа носит название

катастрофы типа складки. Оказывается, только такого типа катастрофа и возможна для ДС в $\Re^2$ с одним управляющим параметром.

Открытие, математически строгое обоснование и технические приложения явления жесткой бифуркации являются заслугой А. А. Андронова.

9°. Бифуркация седло–узел.

Рассмотрим на плоскости ДС с параметром $\lambda \in \Re$

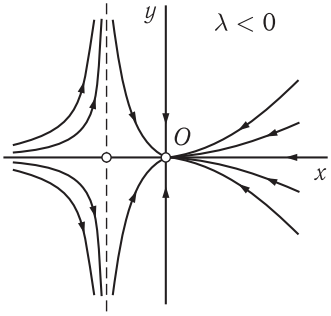


Рис. 42

$$\begin{cases} \dot{x} = \lambda x - x^2, \\ \dot{y} = -y. \end{cases}$$

Если $\lambda < 0$, то ДС имеет два положения равновесия $(\lambda, 0)$ — седло и $(0, 0)$ — устойчивый узел (проверьте!). Фазовый портрет показан на рис. 42.

Если $\lambda = 0$, то эти два положения равновесия сливаются в сложное положение равновесия, называемое седлоузлом.

Для проверки сказанного каждое из ДУ, составляющих ДС, можно проинтегрировать. Из первого ДУ $\dot{x} = -x^2$ имеем $x = \dfrac{x_0}{1 + tx_0}$, а из второго находим $y = y_0 e^{-t}$. Начало координат $(0, 0)$ и полуоси осей Ox и Oy являются траекториями (рис. 43).

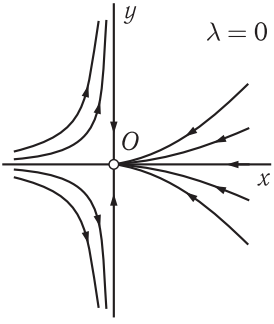


Рис. 43

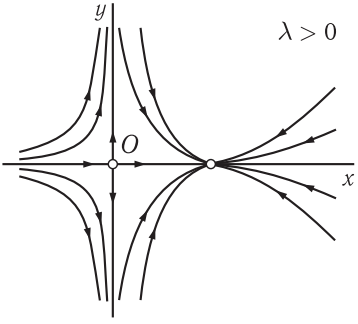


Рис. 44

Поскольку $t = \dfrac{1}{x_0} - \dfrac{1}{x}$, то уравнения остальных траекторий даются формулой

$$y = y_0 \exp\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right).$$

При $x \to +0$ имеем $y \to +\infty$. Если же $x \to -0$, то $y \to 0$.

Когда λ становится положительным (рис. 44), седлоузел распадается на седло $(0, 0)$ и устойчивый узел $(\lambda, 0)$ (проверьте!).

Аналогично, когда λ становится отрицательным, седлоузел распадается на седло $(\lambda, 0)$ и устойчивый узел $(0, 0)$ (проверьте!).

Бифуркация седло–узел встречается во многих приложениях, в частности, в математической физиологии.

§ 5. Метод фазовой плоскости в исследовании периодических и солитонных решений

Движения нелинейного консервативного осциллятора описываются ДУ $\dfrac{d^2c}{d\xi^2} + f(c) = 0$.

Далее, говоря о положениях равновесия ДУ, мы будем подразумевать под ними положения равновесия соответствующей ДС $c' = d$, $d' = -f(c)$.

Проведем исследование некоторых частных случаев этого ДУ, возникающих в различных областях приложений, в частности, в задачах гидродинамики (см. например, [37, 51, 67]).

Ниже рассматриваются ДУ с квадратичными и кубическими нелинейностями $\dfrac{d^2c}{d\xi^2} = \alpha c + \beta c^k$ при $k = 2$ и при $k = 3$. Чтобы не загромождать изложение слишком большими вычислениями, ограничимся некоторыми основными частными случаями.

Путь наших дальнейших рассуждений следующий. Полагая $\dfrac{dc}{d\xi} = v$, сводим ДУ к ДС. Рассмотрение ее фазового портрета позволяет сделать ряд заключений о решениях исходного ДУ в различных случаях.

1°. Начнем с изучения периодических решений ДУ

$$\frac{d^2c}{d\xi^2} = c - \frac{3}{2}c^2.$$

Умножим ДУ на $2\dfrac{dc}{d\xi}$ и после интегрирования получим уравнение фазовых траекторий

$$\left(\frac{dc}{d\xi}\right)^2 = P_A(c), \tag{10}$$

где $P_A(c) = c^2 - c^3 + A$ и A — постоянная интегрирования.

Из этого уравнения следует, что многочлен $P_A(c)$ должен быть неотрицательным. Поскольку нас интересуют периодические решения, то следует рассматривать только замкнутые траектории. Заметим еще, что график многочлена $P_A(c)$ получается из графика многочлена $P_0(c) = c^2 - c^3$ сдвигом на A по вертикальной оси. Эти соображения позволяют предложить читателю следующее.

Упражнение 1. Проверьте, что:

1) при $A < A_0$, где $A_0 = -\dfrac{4}{27}$, многочлен $P_A(c)$ имеет один отрицательный корень;

2) при $A_0 < A < 0$ многочлен $P_A(c)$ имеет три корня: один отрицательный и два положительных;

3) при $A > 0$ многочлен $P_A(c)$ имеет один положительный корень.

Графики многочленов $P_A(c)$ и расположение фазовых траекторий смотрите на рис. 45, 46. Здесь $u = \dfrac{2}{3}$. Через $\theta(A)$ и $\rho(A)$ обозначены положительные нули многочлена $P_A(c)$. Важно, что между ними многочлен положителен, вследствие чего на фазовом портрете возникает однопараметрическое семейство замкнутых траекторий, каждой из которых соответствует периодическое решение ДУ.

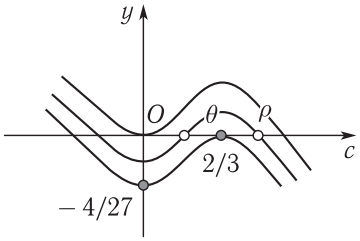


Рис. 45

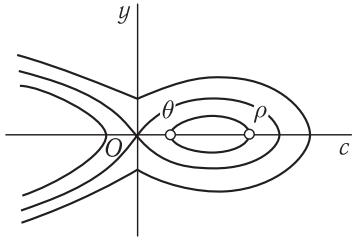


Рис. 46

Из рис. 45 видно, что периодическое решение существует при $A_0 < A < 0$. Его период находится по формуле

$$T = 4 \int\limits_{\theta(A)}^{\rho(A)} \frac{ds}{\sqrt{P_A(s)}}.$$

Действительно, разделяя переменные, приходим к равенству

$$\int\limits_{\theta(A)}^{c} \frac{ds}{\sqrt{P_A(s)}} = \pm\xi + \mathrm{const}\,.$$

Отсюда, полагая $\displaystyle\int\limits_{\theta(A)}^{\rho(A)} \frac{ds}{\sqrt{P_A(s)}} = K$, определяем $c = c(\xi)$ на $[0, K]$ как функцию, обратную к функции $\Phi(c) = \displaystyle\int\limits_{\theta(A)}^{c} \frac{ds}{\sqrt{P_A(s)}}$.

Продолжим $c(\xi)$ на $[K, 2K]$, полагая на этом отрезке $c = \Phi^{-1}(2K - \xi)$, т. е. определяя c из уравнения $\Phi(c) = 2K - \xi$. Наконец, продолжим $c(\xi)$ с отрезка $[0, 2K]$ на всю ось ξ нечетным образом. Получаем решение с периодом $T = 4K$.

Вследствие автономности ДУ решение определено с точностью до сдвига по ξ.

Рассмотрим теперь замкнутую траекторию, получающуюся в предельном случае при $A \to -0$. Многочлен $P_0(c)$ имеет двукратный корень $c = 0$ и положительный корень $c = 1$. Поэтому соответствующее этой предельной траектории решение не является периодическим (при $A \to -0$ период $T(A) \to +\infty$, так как интеграл становится расходящимся). Соответствующая траектория выходит из положения равновесия $(0, 0)$ и входит в него при $\xi \to +\infty$. Она отделяет множество замкнутых траекторий, соответствующих периодическим решениям, от незамкнутых траекторий, которым отвечают непериодические решения. Траектории, разделяющие семейства траекторий разного типа, называются сепаратрисами. Рассматриваемая сепаратриса имеет уравнение $\left(\frac{dc}{d\xi}\right)^2 = c^2 - c^3$. Возвращаясь к исходному ДУ, мы видим, что его решение, соответствующее этой сепаратрисе, определено на всей оси $\xi \in (-\infty, +\infty)$ и удовлетворяет краевым условиям

$$\lim_{\xi \to -\infty} c = \lim_{\xi \to +\infty} c = 0.$$

Подобные решения ДУ возникают в самых разнообразных областях науки и техники.

Определение. Пусть x_1 и x_2 — положения равновесия ДС $\dot{x} = f(x)$. Рассмотрим траекторию, соединяющую эти положения равновесия. Соответствующее этой траектории решение называется *решением типа уединенной волны*, или *солитоном* (*солитонным решением*).

Солитонное решение определено на всей временно́й оси и удовлетворяет граничным условиям

$$\lim_{\xi \to -\infty} c = x_1, \qquad \lim_{\xi \to +\infty} c = x_2.$$

Иногда в случае $x_1 = x_2$ говорят от гомоклинической траектории, а в случае $x_1 \neq x_2$ — о гетероклинической траектории (соответствующее ей решение иногда называют решением типа перехода).

Упражнение 2. Проверьте, что решение краевой задачи

$$\frac{d^2c}{d\xi^2} = c - \frac{3}{2}c^2, \qquad \lim_{\xi \to -\infty} c = \lim_{\xi \to +\infty} c = 0$$

дается формулой $c = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2(\xi/2)}$.

Рассмотренная ситуация может быть обсуждена и с бифуркационной точки зрения. Пусть для ДС $\frac{dc}{d\xi} = p$, $\frac{dp}{d\xi} = c - \frac{3}{2}c^2$ поставлена задача Коши с параметром $\alpha > 0$

$$c(0) = \alpha, \quad p(0) = 0.$$

Точка $\alpha = 1$ является точкой бифуркации; при $\alpha \geq 1$ решение непериодическое, а при $\alpha < 1$ решение периодическое. Таким образом происходит рождение периодических решений от сепаратрисы. Данная бифуркация называется бифуркацией седло–центр.

2°. Рассмотрим ДУ $\dfrac{d^2c}{d\xi^2} = c + \dfrac{3}{2}c^2$. Этот случай сводится к предыдущему заменой c на $-c$. Предоставляем читателю самостоятельно изучить его.

3°. Рассмотрим ДУ $\dfrac{d^2c}{d\xi^2} = -c + \dfrac{3}{2}c^2$.

Данный случай сводится к случаю 1° заменой $c = \dfrac{2}{3} - e$ (проверьте!). Полезнее, однако, провести прямые вычисления. Уравнение траекторий имеет вид (10) с многочленом $P_A(c) = -c^2 + c^3 + A$ и постоянной интегрирования A.

Как и в случае 1°, устанавливается, что при любом $A \in \left(0, \dfrac{4}{27}\right)$ многочлен $P_A(c) = -c^2 + c^3 + A$ имеет отрицательный корень, который обозначим θ, и два положительных корня, меньший из которых обозначим через ρ. На интервале (θ, ρ) имеем $P_A(c) > 0$.

Следовательно (рис. 47, 48), при каждом таком A существует единственное периодическое решение. Его период вычисляется, как и в случае 1°. Сепаратрисе соответствует решение $c(\xi) = \dfrac{2}{3} - \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2(\xi/2)}$. Это солитонное решение удовлетворяет граничным условиям

$$\lim_{\xi \to -\infty} c = \frac{2}{3}, \qquad \lim_{\xi \to +\infty} c = \frac{2}{3}$$

и соответствует гомоклинической траектории.

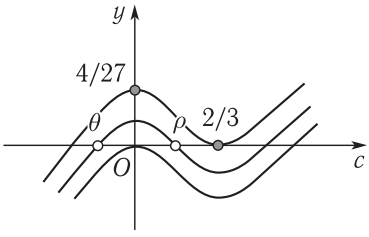


Рис. 47

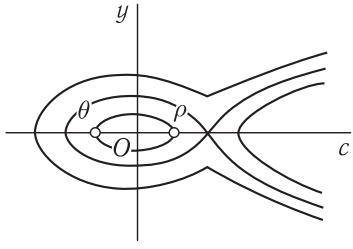


Рис. 48

4°. Рассмотрим ДУ $\dfrac{d^2c}{d\xi^2} = -c - \dfrac{3}{2}c^2$. Этот случай сводится к предыдущему заменой c на $-c$. Предоставляем читателю самостоятельно изучить его.

Остановимся теперь на ДУ с кубической нелинейностью вида $\dfrac{d^2c}{d\xi^2} = \alpha c + \beta c^3$. ДУ с более общей кубической нелинейностью, содер-

жащей член с c^2, исследуются аналогично с аналогичными выводами (см. например, [16]).

5°. Рассмотрим ДУ $\dfrac{d^2c}{d\xi^2} = c - 2c^3$. Фазовые траектории находятся из ДУ

$$(c')^2 = c^2 - c^4 + A.$$

Заметим сначала, что случай, когда постоянная интегрирования $A < -1/4$, невозможен. Для доказательства достаточно записать ДУ в виде $(c')^2 + (c^2 - 1/2)^2 = A + 1/4$.

Графики многочленов $y = c^2 - c^4 + A$ и фазовые портреты для случаев $A \geq -1/4$ изображены на рис. 49, 50.

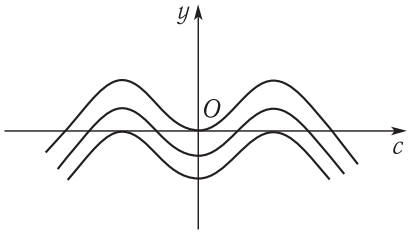


Рис. 49

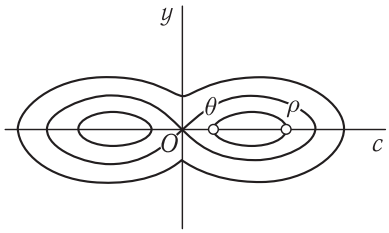


Рис. 50

Обсудим последовательно возможные случаи:

5°.1) $A = -1/4$;

5°.2) $-1/4 < A < 0$;

5°.3) $A = 0$;

5°.4) $A > 0$.

В случае 5°.1) (при $A = -1/4$) получаем положения равновесия $c = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ исходного ДУ.

В случае 5°.2) (при $-1/4 < A < 0$) многочлен $P_A(c) = c^2 - c^4 + A$ имеет два положительных $0 < \theta < \dfrac{1}{\sqrt{2}} < \rho$ и два отрицательных корня $(-\theta, -\rho)$.

Заметим, что θ, ρ, A связаны соотношениями $\theta^2 + \rho^2 = 1$, $\theta^2\rho^2 = -A$, так что ρ и θ могут быть вычислены в явном виде через A. Вследствие нечетности правой части ДУ достаточно изучить положительные периодические решения. Между положительными корнями многочлен $P_A(c)$ положителен, и имеется семейство замкнутых траекторий. Как и в случае 5°.1), устанавливается существование периодического решения при каждом $A \in (-1/4, 0)$. Поскольку $P_A(c) = (c^2 - \theta^2)(\rho^2 - c^2)$, эти решения определяются формулой

$$\int\limits_{\theta}^{c} \frac{ds}{\sqrt{(s^2 - \theta^2)(\rho^2 - s^2)}} = \xi.$$

Упражнение 3. Покажите, что замена переменных $s^2 = \theta^2 + (\rho^2 - \theta^2)\sin^2\psi$ приводит последнее уравнение к виду

$$\int\limits_0^{\varphi} \frac{d\psi}{\sqrt{\theta^2 + (\rho^2 - \theta^2)\sin^2\psi}} = \xi.$$

В случае 5°.3), когда $A = 0$, имеем сепаратрису, состоящую из двух гомоклинических траекторий, соединяющих положения равновесия $c = 0$. Им соответствуют два солитонных решения.

Упражнение 4. Проверьте, что ДУ $(c')^2 = c^2 - c^4$ имеет решения

$$c = \pm\frac{1}{\operatorname{ch}\xi}.$$

Перейдем к случаю 5°.4). Теперь многочлен $P_A(c)$ имеет только два корня: отрицательный $-\omega$ и положительный ω, причем на интервале между ними $P_A(c) > 0$. Здесь имеется семейство замкнутых траекторий. Соответствующие знакопеременные периодические решения определяются из уравнения

$$(c')^2 = -(c^2 + 1/2)^2 + A + 1/4.$$

Обсудим ДУ $(c')^2 = c^2 - c^4 + A$ с бифуркационной точки зрения. Параметр $A \in [-1/4, +\infty)$ будем рассматривать в качестве бифуркационного параметра. Если $A = -1/4$, то ДУ имеет пару постоянных решений $c = \pm -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ (два положения равновесия на фазовой плоскости). При возрастании A на интервале $(-1/4, 0)$ эти решения превращаются в пару периодических решений (положительное и отрицательное), изображаемых на фазовой плоскости замкнутыми траекториями. При $A = 0$ эти решения слились в пару солитонных решений (сепаратриса — «лежащая на боку восьмерка» на фазовой плоскости). Далее выясняется, что при $A > 0$ положительное и отрицательное периодические решения «объединились» в одно знакопеременное периодическое решение. Точки $A = -1/4$ и $A = 0$ являются точками бифуркации.

Рассуждая в фантастическом духе, можно сказать, что здесь наблюдается эволюция двух точечных элементарных «миров» в два развивающихся мира, объединяющихся затем в единый развивающийся мир.

Будем менять параметр A от больших положительных значений в сторону уменьшения. При $A = 0$ имеем сепаратрисное решение. Как только A становится отрицательным от сепаратрисного решения ответвляются два новых предельных цикла (распадение большого мира на две отдельные части). Такая бифуркация называется бифуркацией от сепаратрисы, или бифуркацией удвоения.

Когда A достигает значения $A = -1/4$, происходит последующая деградация (плавная гибель) предельных циклов, вплоть до положений равновесия (сжатие до «черных дыр»).

6°. Рассмотрим ДУ $\dfrac{d^2c}{d\xi^2} = -c + 2c^3$. Уравнение фазовых траекторий имеет вид (10) с $P_A(c) = -c^2 + c^4 + A$.

Предлагаем читателю проверить справедливость следующих утверждений. При каждом $A \in \left(0, \dfrac{1}{4}\right)$ многочлен $P_A(c)$ имеет 4 вещественных корня: $-\rho < -\theta < 0 < \theta < \rho$. При этом на интервале $(-\theta, +\theta)$ $P_A(c) > 0$. Следовательно, для всякого $A \in (0, 1/4)$ существует единственное однопараметрическое семейство периодических решений $c = c(\xi, A)$ ДУ. Решение этого семейства определяется из равенства

$$\int\limits_0^c \frac{ds}{\sqrt{(\theta^2 - s^2)(\rho^2 - s^2)}} = \xi.$$

Упражнение 5. Следуя образцу п. 5°, нарисуйте графики многочленов $y = P_A(c)$ и фазовый портрет.

Период искомых решений вычисляется аналогично тому, как это было сделано п. 1°. Все эти решения являются знакопеременными функциями.

Сепаратриса соответствует значению $A = 1/4$ и состоит из двух гетероклинических траекторий, соединяющих положения равновесия $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ и $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Упражнение 6. Предлагаем читателю убедиться в том, что этим траекториям отвечают солитонные решения $c(\xi) = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{1 - e^{\xi\sqrt{2}}}{1 + e^{\xi\sqrt{2}}}$.

7°. Рассмотрим ДУ $\dfrac{d^2c}{d\xi^2} = c + 2c^3$. Нетрудно убедиться, что здесь периодических и солитонных решений нет.

8°. Рассмотрим ДУ $\dfrac{d^2c}{d\xi^2} = -c - 2c^3$. Предлагаем читателю самостоятельно изучить данный случай. Уравнение траекторий имеет вид $(c')^2 = P_A(c)$ с $P_A = -c^2 - c^4 + A$. При каждом $A > 0$ многочлен $P_A(c)$ имеет два корня $0 < -\theta < \theta$, между которыми $P_A(c) > 0$. Отсюда следует, что для каждого $A > 0$ существует единственное периодическое решение, которое определяется уравнением

$$\int\limits_{-\theta}^c \frac{ds}{\sqrt{(\theta^2 - s^2)(s^2 + b^2)}} = \xi,$$

где $b^2 = \theta^2 - 1 > 0$.

§ 6. Метод малого параметра Линштедта–Пуанкаре для консервативных задач

Обсуждаемый ниже метод является приспособленным для ДС вариантом метода малого параметра. Он позволят находить замкнутые траектории ДС.

Пусть положение равновесия $(0, 0)$ является (локально) центром нелинейной ДС, правая часть которой аналитична в точке $(0, 0)$. Вблизи этого центра периодические решения, соответствующие окружающим его замкнутым траекториям, можно найти в виде степенных рядов по малому параметру — начальной амплитуде решения. Параллельно также в виде рядов по малой амплитуде вычисляются и периоды решений. Возникающие при этом ряды сходятся. Строгое обоснование мы здесь не приводим.

В §9 мы возвратимся к применению метода для диссипативных задач.

Пример. Будем разыскивать малые четные периодические решения ДУ, аналогичного рассмотренному в §4, п. 4°:

$$\ddot{x} + x = x^2.$$

Это означает, что к ДУ добавляются начальные условия

$$x(0) = \xi, \quad \dot{x}(0) = 0,$$

где начальная амплитуда ξ будет играть роль малого параметра, характеризующего малость решения данной задачи Коши. Все решения линеаризованного ДУ ($\ddot{x} + x = 0$) являются 2π-периодическими функциями. Однако решения исходной задачи вовсе не обязаны иметь тот же период. Будем искать решения исходного нелинейного ДУ с периодами, близкими к 2π. Исходя из этого соображения, произведем «растяжение времени», полагая $t = s\sqrt{1-\mu}$ (идея Линштедта), где $\mu = \mu(\xi)$ — малая добавка, стремящаяся к нулю вместе с ξ.

Новую неизвестную функцию обозначим через $y(s)$, так что

$$x(t) = y(s), \quad \ddot{x}(t) = y''(s)(1-\mu)^{-1}.$$

В результате этой замены переменных возникает эквивалентная прежней задача Коши отыскания четного 2π-периодического решения ДУ

$$y'' + y = \mu y + y^2(1-\mu), \quad y(0) = \xi, \quad y'(0) = 0.$$

Решение этой задачи, а также неизвестную пока малую добавку μ будем искать в виде степенных рядов по малому параметру ξ:

$$y(s) = y_1(s)\xi + y_2(s)\xi^2 + y_3(s)\xi^3 + \ldots, \quad \mu = \mu_1\xi + \mu_2\xi^2 + \ldots .$$

Подставляя эти ряды в ДУ, с учетом начальных условий получаем рекуррентную последовательность задач Коши:

$$y_1'' + y_1 = 0, \quad y_1(0) = 1, \quad y_1'(0) = 0;$$
$$y_2'' + y_2 = \mu_1 y_1 + y_1^2, \quad y_2(0) = 0, \quad y_2'(0) = 0;$$
$$y_3'' + y_3 = \mu_1 y_2 + \mu_2 y_1 + 2y_1 y_2 - \mu_1 y_1^2, \quad y_3(0) = 0, \quad y_3'(0) = 0;$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Решением первой задачи является $y_1 = \cos s$.

Правая часть второй задачи, следовательно, равна

$$\mu_1 \cos s + \frac{1 + \cos 2s}{2}.$$

Но для разрешимости второй задачи разложение Фурье ее правой части не должно содержать члена с $\cos s$ (см. гл. II, §10). Следовательно, небходимо, чтобы $\mu_1 = 0$.

Для вычисления y_2 имеем теперь задачу

$$y_2'' + y_2 = \frac{1 + \cos 2s}{2}, \quad y_2(0) = 0, \quad y_2'(0) = 0.$$

Это — ДУ со специальной правой частью и (проверьте!)

$$y_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{6}\cos 2s - \frac{1}{3}\cos s.$$

Обратимся к третьей задаче. Ее правая часть равна (проверьте!)

$$\mu_2 y_1 + 2y_1 y_2 = \mu_2 \cos s + 2\cos s\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\cos 2s - \frac{1}{3}\cos s\right) =$$
$$= \mu_2 \cos s + \cos s - \frac{1}{3}\cos s \cos 2s - \frac{2}{3}\cos^2 s =$$
$$= \left(\mu_2 + \frac{5}{6}\right)\cos s - \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\cos 2s - \frac{1}{6}\cos 3s.$$

Для однозначной разрешимости третьей задачи необходимо и достаточно, чтобы равнялся нулю коэффициент при $\cos s$ в Фурье-представлении ее правой части, т. е. $\mu_2 = -\frac{5}{6}$. Принимая это условие, находим частное решение ДУ третьей задачи.

Упражнение. Покажите, что

$$y_3 = -\frac{1}{3} + \frac{1}{9}\cos 2s + \frac{1}{48}\cos 3s + \frac{29}{144}\cos s.$$

Сумма первых трех слагаемых в правой части это частное решение неоднородного ДУ, а четвертое слагаемое — это решение соответствующего однородного ДУ, выбранное так, чтобы выполнялось начальное условие $y_3(0) = 0$.

В результате приведенных вычислений мы получаем асимптотические выражения малых периодических решений рассматриваемой модельной задачи ($\xi \to 0$)

$$x(t, \xi) = \cos s\xi + y_2(s)\xi^2 + y_3(s)\xi^3 + O(\xi^4), \quad s = \frac{t}{\sqrt{1 + \frac{5}{6}\xi^2}} + O(\xi^3).$$

Отметим, что при каждом достаточно малом ξ эта формула дает свое периодическое решение.

Поскольку исходное ДУ инвариантно относительно сдвигов по t, то формула $x(t + c, \xi)$ с произвольным $c \in \Re$ описывает всё двухпараметрическое семейство малых периодических решения исходного ДУ.

ДС Лотки–Вольтерры. Перейдем к вычислению периодических решений системы ДУ (3). Сведем ее к ДУ второго порядка. Для этого сначала сделаем замену переменных

$$u = \frac{1}{2}(U - V), \quad v = \frac{1}{2}(U + V).$$

В новых переменных имеем следующую систему ДУ:

$$\dot{U} + V = 0, \quad \dot{V} - U = \frac{1}{2}(U^2 - V^2).$$

Исключим V, подставив $V = -\dot{U}$ во второе ДУ системы, и получим ДУ для нахождения U

$$\ddot{U} + U = \frac{1}{2}(\dot{U}^2 - U^2).$$

Как и в примере, здесь непосредственное применение метода малого параметра привело бы к секулярным членам, содержащим степени t в качестве множителей. Причина та же: период решения зависит от начальной амплитуды. Это обстоятельство характерно только для нелинейных ДУ. Сделаем предварительно в последнем ДУ замену независимой переменной, полагая

$$t = s\sqrt{1 - \mu}, \quad U(t) = Z(s).$$

Операцию дифференцирования по переменной s будем обозначать штрихом. Будем искать четное 2π-периодическое решение задачи Коши

$$Z'' + Z(1 - \mu) = \frac{1}{2}(Z')^2 - Z^2(1 - \mu), \quad Z(0) = \xi, \quad Z'(0) = 0. \qquad (11)$$

Решение этой системы ДУ и вспомогательную функцию μ можно найти в виде степенных рядов по малому параметру ξ, характеризующему малость Z:

$$Z = \sum_{k=1}^{+\infty} Z_k(s)\xi^k, \quad \mu = \sum_{k=2}^{+\infty} \mu_k \xi^k.$$

Подставим эти ряды в ДУ (4), приравняем коэффициенты при одинаковых степенях ξ и получим рекуррентную систему задач Коши

$$Z_1'' + Z_1 = 0, \quad Z_1(0) = 1, \quad Z_1'(0) = 0;$$

$$Z_2'' + Z_2 = \frac{1}{2}(Z')^2 - Z_1^2, \quad Z_2(0) = 0, \quad Z_2'(0) = 0;$$

$$Z_3'' + Z_3 = \mu_2 Z_1 + Z_1' Z_2' - 2Z_1 Z_2, \quad Z_3(0) = 0, \quad Z_3'(0) = 0;$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Приведем краткое решение этих задач, предоставляя читателю проверку правильности тригонометрических вычислений и нахождения частных решений ДУ со специальной правой частью. Из первой задачи имеем $Z_1 = \cos s$.

Вторую задачу можно теперь записать в виде

$$Z_2'' + Z_2 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\cos 2s, \quad Z_2(0) = 0, \quad Z_2'(0) = 0,$$

откуда находим

$$Z_2 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\cos 2s.$$

Подставляя Z_1 и Z_2 в правую часть ДУ третьей задачи, получаем для определения Z_3 следующую задачу Коши:

$$Z_3'' + Z_3 = \left(\mu_2 + \frac{1}{2}\right)\cos s - \frac{1}{4}\cos 3s.$$

Условие разрешимости требует равенства нулю коэффициента при $\cos s$. Тогда задача имеет единственное решение и, значит,

$$\mu_2 = -\frac{1}{2}, \quad Z_3 = \frac{1}{32}(\cos 3s - \cos s).$$

Найдено приближенное решение

$$Z \approx \cos\xi + \frac{1}{4}(\cos 2s - 1)\xi^2 + \frac{1}{32}(\cos 3s - \cos s),$$

где

$$s \approx \frac{t}{\sqrt{1 + \frac{1}{2}\xi^2}}.$$

На этом пути с любой степенью точности вычисляются периодическое решение и его период. Возвращаясь к старым переменным, находим приближенные значения функций $U(t) = Z(s(t))$, $V(t) = -\dfrac{dU}{dt}$, затем и искомых функций $u(t)$, $v(t)$. В результате для каждого достаточно малого ξ вычисляется единственное с точностью до переноса по t периодическое решение ДУ Лотки–Вольтерры. Возникает однопараметрическое семейство периодических решений, зависящее от малого свободного параметра ξ.

Описанный метод Линштедта получил широкое распространение и развитие на общие гамильтоновы ДС в трудах А. Пуанкаре и обычно называется методом Линштедта–Пуанкаре. А. М. Ляпунов далеко расширил рамки данного метода для ситуаций, когда возможно существование несколько семейств малых решений, представляемых обычно рядами по дробным степеням малого параметра.

§ 7. Свободные колебания нелинейного математического маятника в отсутствие трения и при наличии трения

Рассмотрим свободные колебания плоского математического маятника, т. е. материальной точки массой m, закрепленной на конце нерастяжимого, несжимаемого и невесомого подвеса длиной l, другой конец которого закреплен на шарнире, допускающем движения маятника в плоскости под действием силы тяжести (g — ускорение силы тяжести). Пусть $\varphi = \varphi(t)$ — угол отклонения маятника от его нижнего положения равновесия (см. гл. V, §10).

Из второго закона Ньютона следует ДУ, описывающее движения маятника в отсутствие трения в точке подвеса и сопротивления среды,

$$ml^2\ddot{\varphi} + mgl\sin\varphi = 0.$$

Умножив это ДУ на $\dot{\varphi}$ и проинтегрировав, получим ДУ траекторий

$$\frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 + mgl(1-\cos\varphi) = E, \quad \text{или} \quad \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 + 2mgl\sin^2\frac{\varphi}{2} = E.$$

Данное равенство представляет собою закон сохранения механической энергии маятника.

Постоянная интегрирования $E \geq 0$ — это полная механическая энергия маятника: кинетическая плюс потенциальная. Таким образом, нелинейный математический маятник в отсутствие трения представляет собою консервативную (недиссипативную) физическую (точнее, механическую) систему.

Заметим, что если положить $\omega^2 = \frac{g}{l}$, то ДУ маятника можно записать также в виде

$$\ddot{\varphi} + \omega^2\sin\varphi = 0.$$

Постоянная $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}} > 0$ называется собственной частотой маятника.

Поставим вопрос: как будет двигаться маятник из нижнего положения равновесия $\varphi(0) = 0$ под действием положительной начальной скорости $v_0 = \dot{\varphi}(0) > 0$?

Из закона сохранения энергии следует, что энергия маятника равна ее значению в начальный момент $t = 0$, т. е. $E = \frac{1}{2}ml^2v_0^2$.

Используя выражение для собственной частоты и закон сохранения энергии, уравнение траекторий движения маятника можно записать в виде (проверьте!)

$$\dot{\varphi}^2 = v_0^2 - 4\omega^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}.$$

Аналогично тому, как это было сделано в § 5, рассмотрим траектории на фазовой плоскости переменных φ, $\dot{\varphi}$ (рис. 51). Однако поскольку функция $\sin\varphi$ 2π-периодична по φ, то достаточно изображать лишь часть фазового портрета в полосе $-\pi \le \varphi \le \pi$. Это приводит к следующему геометрическому построению.

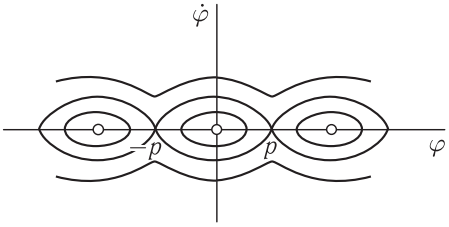


Рис. 51

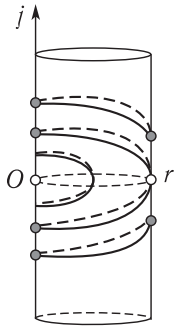


Рис. 52

Вырежем из фазовой плоскости эту полосу и склеим ее по линиям разреза. На полученном цилиндре (фазовом цилиндре) и будем изображать траектории (рис. 52).

В качестве комментария к рис. 52 рассмотрим три принципиально различных случая: 1) $0 < v_0 < 2\omega$; 2) $v_0 > 2\omega$; наконец, пограничный случай 3) $v_0 = 2\omega$.

1) Пусть начальная скорость маятника достаточно мала: $0 < v_0 < 2\omega$. Здесь траектории ДС — это замкнутые кривые, которым соответствуют колебательные движения маятника, описываемые периодическими решениями.

Покажем, что эти решения можно представить аналитически. Для этой цели можно воспользоваться так называемой функцией Якоби $\mathrm{sn}(x, k)$. Ниже, в § 8 приводится элементарное введение в теорию эллиптических функций Якоби, которые оказываются полезными при решении некоторых классов нелинейных ДУ.

Положим $v_0 = 2\omega \sin \frac{\varphi_0}{2}$ и перепишем ДУ фазовых траекторий в следующем виде:

$$\dot{\varphi}^2 = v_0^2 \Big(\sin^2 \Big(\frac{\varphi_0^2}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2} \Big) \Big).$$

Перейдем в этом ДУ к новой неизвестной функции y, полагая $\sin \frac{\varphi}{2} = y \sin \frac{\varphi_0}{2}$, откуда, дифференцируя, находим

$$\frac{1}{2} \cos \frac{\varphi}{2} \dot{\varphi} = \dot{y} \sin \frac{\varphi_0}{2}.$$

Для определения y получаем ДУ с параметром $k = \sin\frac{\varphi_0}{2}$

$$\dot{y}^2 = \omega^2(1-y^2)(1-k^2y^2).$$

Решение этого этого ДУ можно выразить «в явном виде», используя для этой цели специальную эллиптическкую функцию Якоби $\mathrm{sn}(x, k)$.

Упражнение 1. Используя определение из §8, покажите, что решение этого ДУ с начальным условием $y(0) = 0$ и с учетом того, что $\dot{y}(0) > 0$, дается формулой $y = \mathrm{sn}(\omega t, k)$.

Возвращаясь к старой переменной φ, находим

$$\sin\frac{\varphi}{2} = k\,\mathrm{sn}(\omega t, k).$$

Эта формула представляет в аналитическом виде обнаруженное выше на фазовом цилиндре семейство периодических решений ДУ маятника. Период находится по формуле $T = \dfrac{4K}{\omega}$, где значение K указано в §8.

2) Пусть начальная скорость маятника настолько велика, что $v_0 > 2\omega$. Здесь на фазовой плоскости нет замкнутых траекторий. Но на фазовом цилиндре все они являются замкнутыми (рис. 52). Эти траектории описывают вращательные движения маятника. Такие вращения исполняет опытный гимнаст на перекладине («солнышко»).

Получим аналитические выражения вращений маятника. ДУ траекторий запишем теперь так:

$$\dot{\varphi}^2 = v_0^2\left(1 - k^2\sin^2\frac{\varphi}{2}\right),$$

где $k = \dfrac{2\omega}{v_0} \in (0, 1)$.

Из этого ДУ, в частности, видно, что на протяжении всего движения маятника $\dot{\varphi} > 0$.

Введем новую переменную по формуле $\sin\frac{\varphi}{2} = y$, так что $\frac{1}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\dot{\varphi} = \dot{y}$.

Как и в случае 1), приходим к ДУ

$$\dot{y}^2 = \frac{v_0^2}{4}(1-y^2)(1-k^2y^2).$$

Как и в случае 1), решение этого этого ДУ можно выразить «в явном виде» через функцию Якоби $\mathrm{sn}(x, k)$.

Упражнение 2. Используя определение из §8, покажите, что $y = \mathrm{sn}\left(\dfrac{v_0 t}{2}, k\right)$.

Следовательно,

$$\sin\frac{\varphi}{2} = \mathrm{sn}\left(\frac{v_0 t}{2}, k\right).$$

Из этой формулы получаем следующий вывод: поскольку скорость маятника никогда не обращается в нуль, он все время движется в одном направлении, совершая вращательные движения.

Упражнение 3. Покажите, что периоды вращений вычисляются по формуле $T = \dfrac{2K}{v_0}$.

3) Пусть $v_0 = 2\omega$. Остановимся подробнее на этом случае. Он, как мы увидим ниже, соответствует особому движению маятника.

Уравнение соответствующей траектории имеет вид

$$\frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 = 2\omega^2\left(1 - \sin^2\frac{\varphi}{2}\right), \quad \text{т. е.} \quad \dot{\varphi}^2 = 4\omega^2\cos^2\frac{\varphi}{2},$$

откуда

$$\dot{\varphi} = 2\omega\cos\frac{\varphi}{2}.$$

Это ДУ первого порядка с разделяющимися переменными, и проинтегрировать его можно различными способами. Введем новую неизвестную функцию, полагая $\varphi = \pi - 4\psi$, и получим для нее ДУ $-4\dot{\psi} = \sin 2\psi$ с начальным условием $\psi(0) = \dfrac{\pi}{4}$ (напомним, что $\varphi(0) = 0$).

Упражнение 4. Покажите, что $\psi = \operatorname{arctg} e^{-\omega t}$ и, следовательно, $\varphi = \pi - 4\operatorname{arctg} e^{-\omega t}$.

Из этой формулы видно, что маятник движется из нижнего положения равновесия к верхнему ($\varphi(t) \to \pi$ при $t \to +\infty$), не достигая его за конечное время.

Упражнение 5. Покажите, что

$$\dot{\varphi} = \frac{2\omega}{\operatorname{ch}\omega t}.$$

Следовательно, маятник движется, замедляясь, и при $t \to +\infty$ его скорость стремится к нулю.

Подведем итог. Исследованная траектория является сепаратрисой, разделяющей колебательные и вращательные движения маятника. Она соединяет положения равновесия $(-\pi, 0)$ и $(\pi, 0)$. Ей соответствует солитонное решение.

Это солитонное решение можно наблюдать в простом эксперименте. Бывают качели с металлическим подвесом, допускающие вращательные движения. При слабом толчке происходят колебательные движения, при сильном — вращательные. Экспериментируя, можно силу толчка подобрать так, что качели сначала быстро идут вверх, а затем все медленнее и медленнее поднимаются к вертикальному положению. Это движение маятника и описывается указанным солитонным (сепаратрисным) решением.

Покажем, как в случае 1) приближенно вычислить методом Линштедта–Пуанкаре–Ляпунова малые периодические решения периода, близкого к 2π (см. §2 и §6).

Для краткости положим $\varphi = x$ и примем $\omega = 1$. Рассмотрим задачу Коши

$$\ddot{x} + \sin x = 0, \quad x(0) = \xi, \quad \dot{x}(0) = 0.$$

Можно показать, что эта задача не имеет 2π-периодических решений. Однако она имеет периодические решения с периодами, близкими к 2π. Для их нахождения произведем «растяжение времени» и сделаем замену неизвестной функции, полагая $t = (1-\mu)s$, $x(t) = y(s)$.

В новых переменных имеем задачу Коши $\left(y' = \dfrac{dy}{ds}\right)$

$$y'' + y = (2\mu - \mu^2)y + (y - \sin y)(1-\mu)^2, \quad y(0) = \xi, \quad y'(0) = 0.$$

Малые 2π-периодические решения этой задачи и подлежащий определению параметр $\mu = \mu(\xi)$ будем искать в виде следующих рядов по степеням малого параметра ξ:

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} y_{2k+1}\xi^{2k+1}, \quad \mu = \sum_{l=1}^{\infty} \mu_{2l}\xi^{2l}.$$

Заменим $\sin y$ его рядом Тейлора. Подставим эти ряды в ДУ, приравняем члены при одинаковых степенях ξ и получим рекуррентную последовательность задач Коши:

$$y_1'' + y_1 = 0, \quad y_1(0) = 1, \quad y_1'(0) = 0;$$

$$y_2'' + y_2 = 2y_1\mu_2 + \frac{1}{6}y_1^3, \quad y_2(0) = 0, \quad y_2'(0) = 0;$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Решение первой задачи — это $y_1(s) = \cos s$.

Следовательно, правая часть ДУ во второй задаче равна

$$2\mu_2 \cos s + \frac{\cos^3 s}{6} = 2\mu_2 \cos s + \frac{1}{6}(\cos 3s - \cos s).$$

Для того чтобы ДУ второй задачи имело 2π-периодическое решение, необходимо и достаточно (см. лемму из гл. III, §9) чтобы в его правой части равнялся нулю коэффициент при $\cos s$, т. е. $\mu_2 = \dfrac{1}{12}$.

Теперь для нахождения y_2 имеем задачу Коши

$$y_2'' + y_2 = \frac{\cos 3s}{6}, \quad y_2(0) = 0, \quad y_2'(0) = 0,$$

Упражнение 6. Покажите, что $y_2(s) = \dfrac{1}{48}(\cos s - \cos 3s)$.

Возвращаясь к старым переменным, приходим к приближенным представлениям решения поставленной задачи и его периода:

$$x(t) \approx \xi \cos \frac{t}{\left(1 - \frac{1}{12}\xi\right)^2} + \xi^3 \left(\cos\left(\frac{3t}{\left(1 - \frac{1}{12}\xi\right)^2}\right)^2 - \cos\left(\frac{t}{1 - \frac{1}{12}\xi}\right)^2 \right),$$

$$T \approx 2\pi\left(1 - \frac{1}{12}\xi\right)^2.$$

Аналогичным образом однозначно определяется как угодно много членов в рядах представляющих $y(s, \xi)$ и $\mu(\xi)$. Можно доказать сходимость этих рядов. Таким путем определяется двухпараметрическое семейство малых периодических решений ДУ нелинейного маятника $x = x(t + c, \xi)$, где ξ — произвольный достаточно малый параметр, а $c \in [0, T)$ — произвольная постоянная интегрирования. Период $T = T(\xi)$ каждого решения вычисляется по формуле $T(\xi) = 2\pi(1 - \mu(\xi))^2$.

Упражнение 7. Найдите аналогичное асимптотическое представление малых периодических решений уравнения Дуффинга

$$\ddot{x} + \omega^2 x = kx^3.$$

В заключение рассмотрим малые движения маятника при наличии трения. Они описываются ДУ

$$\ddot{\varphi} + c\dot{\varphi} + \omega^2 \sin\varphi = 0.$$

$(C > 0)$.

Соответствующая ДС

$$\dot{\varphi} = v, \quad \dot{v} = -cv - \omega^2 \sin\varphi = 0$$

имеет два положения равновесия: $(0, 0)$ и $(\pi, 0)$, отождествляемое с $(-\pi, 0)$. Вблизи положения равновесия $(0, 0)$ линеаризованная ДС имеет вид

$$\dot{\varphi} = v, \quad \dot{v} = -cv - \omega^2\varphi = 0.$$

Из характеристического уравнения $\lambda^2 + c\lambda + \omega^2 = 0$ находим собственные значения $\lambda_{1,2} = \dfrac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4\omega^2}}{2}$.

Упражнение 8. Убедитесь, что если трение настолько мало, что $c < 2\omega$, то $(0, 0)$ является устойчивым фокусом, а если трение настолько велико, что $c > 2\omega$, то $(0, 0)$ является устойчивым узлом. Изобразите на фазовом цилиндре траектории в том и в другом случаях.

Согласно теореме Ляпунова об устойчивости положения равновесия по линейному приближению, вблизи положения равновесия $(0, 0)$ фазовая картина траекторий нелинейного ДУ маятника с трением имеет ту же геометрическую структуру, что и в линейном случае. Точнее, при $c < 2\omega$ имеем устойчивый фокус, а при $c > 2\omega$ — устойчивый узел.

§ 8. Эллиптические функции Якоби и дифференциальные уравнения

Кроме элементарных функций, широко используемых в математическом анализе и в ДУ, важную роль играют так называемые специальные функции, возникающие в приложениях математики. Ниже приводится краткий справочный материал об эллиптических функциях Якоби с помощью которых выражаются решения некоторых нели-

нейных ДУ. Являясь естественными обобщениями хорошо известных тригонометрических функций, эллиптические функции Якоби детально исследованы и затабулированы. Поэтому представление ими решения ДУ ничуть не хуже представления тригонометрическими функциями.

Рассмотрим задачу Коши для системы трех ДУ с параметром $k \in (0, 1)$

$$\begin{cases} y_1' = y_2 y_3, \\ y_2' = -y_1 y_3, \\ y_3' = -k^2 y_1 y_2, \end{cases} \qquad y_1(0) = 0, \quad y_2(0) = 1, \quad y_3(0) = 1. \tag{12}$$

Решение этой задачи, согласно теореме Коши, заведомо существует, единственно и определено в некоторой окрестности $S_r(0)$ точки $x = 0$.

Компоненты этого решения принято обозначать следующим образом:

$$y_1 = \operatorname{sn} x, \quad y_2 = \operatorname{cn} x, \quad y_3 = \operatorname{dn} x.$$

Введенные таким образом функции называются *эллиптическими функциями Якоби*. Они зависят от параметра $k \in (0, 1)$, называемого *модулем* эллиптических функций, так что подробнее следует писать $y_1 = \operatorname{sn}(x, k)$, $y_2 = \operatorname{cn}(x, k)$, $y_3 = \operatorname{dn}(x, k)$.

Упражнение. Покажите, что система ДУ (12) имеет два независимых первых интеграла

$$y_1^2 + y_2^2 = C_1, \quad k^2 y_1^2 + y_3^2 = C_2.$$

Подставляя сюда решение и учитывая начальные условия, получаем тождества

$$\operatorname{sn}^2 x + \operatorname{cn}^2 x = 1, \quad k^2 \operatorname{sn}^2 x + \operatorname{dn}^2 x = 1. \tag{13}$$

Отсюда следует ограниченность введенных функций в указанной выше окрестности $S_r(0)$, в которой согласно теореме Коши они определены. Действительно (проверьте!):

$$-1 \le \operatorname{sn} x \le 1, \quad -1 \le \operatorname{cn} x \le 1, \quad k' \le \operatorname{dn} x \le 1.$$

Здесь $k' = \sqrt{1 - k^2}$ — так называемый *дополнительный модуль* эллиптических функций.

Из ограниченности эллиптических функций следует, что все они могут быть продолжены с $S_r(0)$ на $\Re$ и, таким образом, определены на всей вещественной оси.

Отметим теперь, что при $k \to 0$ имеем $\operatorname{sn}(x, k) \to \sin x$, $\operatorname{cn}(x, k) \to \cos x$, так что $\operatorname{sn} x$ и $\operatorname{cn} x$ являются естественными обобщениями тригонометрических функций $\sin x$ и $\cos x$.

Перейдем теперь к изучению свойств эллиптических функций. Для этого воспользуемся системой (12), которая принимает вид

$$\operatorname{sn}' x = \operatorname{cn} x \operatorname{dn} x, \quad \operatorname{cn}' x = -\operatorname{sn} x \operatorname{dn} x, \quad \operatorname{dn}' x = -k^2 \operatorname{sn} x \operatorname{cn} x.$$

Для изучения $\operatorname{sn} x$ из первого равенства имеем $(\operatorname{sn}' x)^2 = \operatorname{cn}^2 x \operatorname{dn}^2 x$. Подставив сюда выражения $\operatorname{cn}^2 x$ и $\operatorname{dn}^2 x$ из (13), получим для функции $s = \operatorname{sn} x$ ДУ

$$s' = (1 - s^2)(1 - k^2 s^2).$$

Интегрируя это ДУ с учетом начального условия $s(0) = 0$, имеем

$$\int\limits_0^s \frac{d\sigma}{\sqrt{(1-\sigma^2)(1-k^2\sigma^2)}} = x.$$

Обратная функция к стоящей слева функции от s и есть $s = \operatorname{sn} x$.

Непосредственно ясна нечетность функции $\operatorname{sn} x$. Далее, как и в случае 1) из §7, устанавливается ее периодичность с периодом $4K$, где

$$K = \int\limits_0^1 \frac{d\sigma}{\sqrt{(1-\sigma^2)(1-k^2\sigma^2)}}.$$

В приложениях важны еще следующие соображения. Сделаем в интеграле замену переменной, полагая $\sigma = \sin^2 \psi$. При $\sigma = 0$ имеем $\psi = 0$, и пусть $\psi = \varphi$ при $\sigma = s$. Теперь получаем

$$\int\limits_0^\varphi \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}} = x.$$

Стоящая справа функция от $x = x(\varphi)$ строго возрастает на $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Обратную к ней функцию (угол φ в зависимости от x) принято обозначать $\varphi = \operatorname{am} x$ или подробнее $\varphi = \operatorname{am}(x, k)$. Как и выше, $\operatorname{am} x$ можно продолжить на все значения $x \in \Re$, причем она оказывается 2π-периодической функцией. Введенный так угол φ называется *амплитудой* эллиптических функций, а сами эллиптические функции иногда называются соответственно синус-амплитудой, косинус-амплитудой и дельта-амплитудой. Согласно определению имеем важное соотношение $\operatorname{sn} x = \sin \varphi$.

Аналогично исследуются функции $\operatorname{cn} x$, $\operatorname{dn} x$. Обе они являются четными периодическими функциями, первая с периодом $4K$, а вторая с периодом $2K$. Нетрудно убедиться, что они являются решениями ДУ

$$(\operatorname{cn}' x)^2 = (1 - \operatorname{cn}^2 x)(k'^2 + k^2 \operatorname{cn}^2 x), \quad (\operatorname{dn}' x)^2 = (1 - \operatorname{dn}^2 x)(\operatorname{dn}^2 x - k'^2).$$

Решения некоторых нелинейных ДУ выражаются через эллиптические функции Якоби. Ограничимся примерами из двух предшествующих параграфов.

Функция $y = \operatorname{sn}(x, k)$ является решением ДУ

$$y'' + (1 + k^2)y = 2k^2 y^3. \tag{14}$$

Рассмотрим уравнение Дуффинга

$$\frac{d^2c}{d\xi^2} + \omega^2 c = \beta c^3.$$

($\beta > 0$). Заменой переменных $\xi = px$, $c = py(x)$ можно привести уравнение Дуффинга к уравнению (14). Следовательно (проверьте!)

$$c = \pm\sqrt{\frac{2}{\beta}} \cdot \frac{k\omega}{\sqrt{1+k^2}} \operatorname{sn} \frac{\omega\xi}{1+k^2}.$$

Заметим, что уравнение Дуффинга получается из ДУ маятника, если заменить в нем синус его третьим многочленом Тейлора. Частный случай ДУ Дуффинга был рассмотрен в §5, п. 6°.

Обратимся теперь к ДУ $\dfrac{d^2c}{d\xi^2} = c - \dfrac{3}{2}c^2$ из §5, п. 1°.

Пусть α — отрицательный корень многочлена $P_A(c)$, а θ и ρ — его положительные корни.

Так как $P_A(c) = (c-\alpha)(c-\theta)(\rho-c)$, то имеем

$$\int\limits_{\theta}^{c} \frac{ds}{(s-\alpha)(s-\theta)(\rho-s)} = \xi.$$

Перейдем в интеграле к новым переменным, полагая $s = \theta - (\theta-\rho)\sin^2\psi$. Если $s = 0$, то $\psi = 0$. Если же $s = c$, то положим $\psi = \varphi$. При этом c и φ связаны соотношением

$$c = \theta - (\theta-\rho)\sin^2\varphi.$$

Для нахождения φ имеем уравнение

$$\int\limits_{0}^{\varphi} \frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\psi}} = \frac{a\xi}{2},$$

где (проверьте!) $k^2 = \dfrac{\theta-\rho}{\theta-\alpha}$, $a = \sqrt{\theta-\alpha}$.

Согласно определению амплитуды эллиптических функций имеем $\varphi = am\left(\dfrac{a\xi}{2}\right)$, но $c = \theta - (\theta-\rho)\sin^2\varphi$ и, следовательно, формула $c = \theta - (\theta-\rho)\operatorname{sn}^2\dfrac{a\xi}{2}$ определяет (с точностью до сдвига по ξ) все семейство периодических решений рассматриваемого ДУ.

Заметим, что это семейство решений c можно выразить через эллиптическую функцию Якоби $\operatorname{cn}(t, k)$: $c = \rho + \left(\theta - \rho\operatorname{cn}^2\dfrac{a\xi}{2}\right)$.

Поэтому описываемые подобным образом решения ДУ часто называют коноидальными волнами.

§ 9. Метод Линштедта–Пуанкаре отыскания предельных циклов. Орбитальная устойчивость

С небольшими видоизменениями метод Линштедта–Пуанкаре (см. §6) может быть успешно применен в диссипативных случаях, что позволяет находить предельные циклы ДС с малым параметром. В данных ситуациях начальная амплитуда колебания, как и его период, предполагаются неизвестными и ищутся в виде рядов по малому параметру. Внутри области, окруженной замкнутой траекторией, всегда имеется положение равновесия. Вблизи него и устраиваются степенные разложения по малому параметру.

Для описания общей схемы применения метода рассмотрим задачу о периодических решениях следующего ДУ с малым параметром ε:

$$\ddot{x} + x = \varepsilon f(x, \dot{x}, \varepsilon).$$

Для простоты будем предполагать, что функция f является аналитической функцией своих переменных в точке $(x = 0,\ \dot{x} = 0,\ \varepsilon = 0)$.

При $\varepsilon = 0$ имеем ДУ $\ddot{x} + x = 0$, для которого начало координат является центром, а решения являются периодическими функциями с периодом 2π.

При $\varepsilon \neq 0$ начало координат может случайно остаться центром. Аналогичные случаи рассматривались выше. Однако более типичны ситуации, когда при малом возмущении центр становится фокусом (устойчивым или нет).

Крайне важен случай, когда на некотором расстоянии от начала координат появляется замкнутая траектория, охватывающая его, т. е. предельный цикл. Предельному циклу соответствует периодическое решение ДУ.

Займемся теми периодическими решениями, период которых для малых значениях ε будет близок к 2π. При этом, вследствие автономности ДУ, можно ограничиться начальными условиями

$$x(0) = \xi, \quad \dot{x}(0) = 0.$$

Перейдем в возникшей задаче Коши к новым переменным, полагая

$$t = (1 + \mu)s, \quad x(t) = y(s), \quad \dot{x} = \frac{y'}{1 + \mu}.$$

Для нахождения 2π-периодических решений $y(s)$ получаем следующую задачу Коши:

$$(1 + \mu)^{-2} y'' + y = \varepsilon f(y, (1 + \mu)^{-1} y', \varepsilon), \quad y(0) = \xi, \quad y'(0) = 0.$$

Будем искать неизвестное решение $y = y(s, \varepsilon)$ и неизвестные числовые функции $\mu = \mu(\varepsilon)$ и $\xi = \xi(\varepsilon)$ в виде степенных рядов по степеням малого параметра

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} y_k(s)\varepsilon^k, \qquad \mu = \sum_{l=1}^{\infty} \mu_l(s)\varepsilon^l, \quad \xi = \sum_{m=0}^{\infty} \xi_m(s)\varepsilon^m.$$

Подставим эти ряды в ДУ и с учетом начальных условий получим для определения коэффициентов этих рядов рекуррентную последовательность задач. Первая задача имеет вид

$$y_0'' + y_0 = 0, \quad y_0 = \xi_0, \quad y_0'(0) = 0,$$

и ее решение дается формулой $y_0 = \xi_0 \cos s$, где начальное значение ξ_0 пока неизвестно.

Для нахождения $y_1(s)$ имеем задачу (проверьте!)

$$y_1'' + y_1 = -2\mu_1 y_0 + f(y_0, y_0', 0), \quad y_0 = \xi_1, \quad y_1'(0) = 0,$$

Подставим в правую часть ДУ найденное значение y_0 и получим, что она теперь равна

$$-2\mu_1\xi_0 \cos s + f(\xi_0 \cos s, -\xi_0 \sin s, 0).$$

Для исследования разрешимости задачи о периодических решениях ДУ для $y_1(s)$ разложим его правую часть в ряд Фурье:

$$f(\xi_0 \cos s, -\xi_0 \sin s, 0) = \frac{1}{2}a_0(\xi_0) + \sum_{k=1}^{\infty} a_k(\xi_0)\cos ks + b_k(\xi_0)\sin ks.$$

Для того чтобы ДУ для определения y_1 имело 2π-периодическое решение (см. гл. II, §10), необходимо и достаточно, чтобы разложение Фурье его правой части не содержало членов с $\cos s$ или $\sin s$.

Таким образом, условия разрешимости задачи для y_1 имеют вид

$$-2\mu_1\xi_0 + a_1(\xi_0) = 0, \quad b_1(\xi_0) = 0.$$

Пусть из второго уравнения этой системы найдено $\xi_0 = \widehat{\xi_0} \neq 0$, тогда из первого ее уравнения находим $\mu_1 = \dfrac{a_1(\widehat{\xi_0})}{\widehat{\xi_0}}$.

Если $\widehat{\xi_0}$ является простым решением уравнения $b_1(\xi_0) = 0$, то можно доказать, что этим методом последовательно находятся все коэффициенты искомых разложений.

Замечание 1. Пусть все нетривиальные решения уравнения $b_1(\xi_0) = 0$ являются простыми и их число равно N. Тогда можно доказать, что исходная задача имеет ровно N периодических решений с периодами $T(\varepsilon) \to 2\pi$ при $\varepsilon \to 0$.

В качестве конкретного примера рассмотрим ДС

$$\frac{di}{dt} = \frac{v}{L}, \quad \frac{dv}{dt} = \frac{-i + I(v)}{C}.$$

Эта ДС была предложена Ван дер Полем в качестве математической модели нелинейной теории электрических колебаний (см. [51]). Она, в частности, описывает модель лампового генератора на триоде в случае нелинейной характеристики лампы.

Здесь v — напряжение на конденсаторе, i — ток через индуктивность, L — коэффициент самоиндукции, C — емкость конденсатора, $I(v)$ — нелинейная проводимость, играющая роль нелинейного сопротивления. Предполагается, что $I(v) = G\left(v - \frac{v^3}{3}\right)$ или аналогичная функция.

ДУ фазовых траекторий имеет вид

$$\frac{di}{dv} = -\frac{Cv}{L(i + I(v))}.$$

На фазовой плоскости (v, i) в соответствии с методом изоклин (см. гл. V, §1) нанесем направления векторного поля. На изоклине $v = 0$ все траектории имеют горизонтальные касательные, и из второго ДУ видно, что стрелки направлены влево при $i > 0$ и вправо при $i < 0$. Точно так же на траектории $i + I(v) = 0$ касательные вертикальны. На оси v касательные к траекториям имеют наклон $-\frac{v}{I}$. Заметим следующие важные обстоятельства. Если начальные значения v, i очень велики, то соответствующая траектория с увеличением времени стремится в область меньших значений v, i. Траектория, проходящяя вблизи начала координат, напротив, уходит из области малых значений v, i. Обе эти траектории стремятся к предельному циклу (рис. 53).

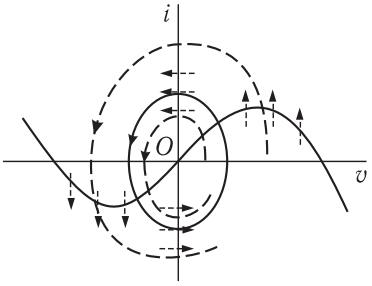


Рис. 53

Эти качественные соображения доказывают существование предельного цикла и могут быть строго обоснованы на основе теоремы Пуанкаре–Бендиксона (см. ниже §11).

Покажем теперь, как приближенно вычислить методом Линштедта–Пуанкаре–Ляпунова периодическое решение, соответствующее обнаруженному предельному циклу.

Пусть для краткости вычислений $v = x$, $\frac{G}{L} = \varepsilon$, $LC = 1$, $I = x - \frac{x^3}{3}$.

В этих предположениях ДС принимает вид $\dot{x} = y$, $\dot{y} = -x + \varepsilon(1 - x^2)y$.

Точка $(0, 0)$ является ее единственным положением равновесия. Для линеаризованной ДС $\dot{x} = v$, $\dot{v} = -x + \varepsilon v$ эта точка является неустойчивым фокусом (проверьте или см. гл. IV, §5, п. 3). Оказывается, траектории (спирали), раскручиваясь, наматываются изнутри на предельный цикл.

Итак, пусть $\varepsilon > 0$. Вместо ДС рассмотрим соответствующее ей ДУ второго порядка

$$\ddot{x} + x = \varepsilon(1 - x^2)\dot{x}.$$

Это ДУ называется уравнением Ван дер Поля. Если параметр ε малый, то оно описывает близкие к гармоническим нелинейные колебания под

действием нелинейного трения (сопротивления). ДУ Ван дер Поля служит простейшей математической моделью для описания и исследования многих электрических, акустических, механических, физиологических и других процессов и явлений.

Периодическое решение ДУ Ван дер Поля, соответствующее искомому предельному циклу, найдем методом Линштедта–Пуанкаре.

Линеаризованное ДУ при $\varepsilon = 0$ ($\ddot{x} + x = 0$) имеет периодические решения периода $T_0 = 2\pi$. Однако малые нелинейные возмущения влияют на величину периода. Поэтому для вычисления решений с периодом, близким к 2π, целесообразно перейти к новым переменным

$$t = s(1-\mu), \quad x(t) = z(s), \quad \dot{x} = z'(s)(1-\mu).$$

Для определения 2π-периодического решения $z(s)$ с периодом $2\pi(1-\mu)$, где μ — малая поправка, и неизвестного начального значения ξ рассмотрим задачу Коши

$$z'' + z = (2\mu - \mu^2)y + \varepsilon(1 - z^2)z'(1-\mu), \quad z(0) = \xi, \quad z'(0) = 0.$$

Отсюда нам предстоит определить $z(s)$, малую поправку μ и неизвестное начальное значение ξ. Будем искать $z(s)$, μ, ξ в виде степенных рядов по малому параметру ε

$$z = \sum_{k=0}^{+\infty} z_k(s)\varepsilon^k, \quad \mu = \sum_{l=1}^{+\infty} \mu_l \varepsilon^l, \quad \xi = \sum_{m=0}^{+\infty} \xi_m(s)\varepsilon^m.$$

Подставим эти ряды в ДУ, приравняем члены при одинаковых степенях ε и получим рекуррентную последовательность задач Коши. Выпишем только первые три задачи:

$$z_0'' + z_0 = 0, \quad z_0(0) = \xi_0, \quad z_0'(0) = 0;$$
$$z_1'' + z_1 = 2\mu_1 z_0 + (1 - z_0^2)z_0', \quad z_1(0) = \xi_1, \quad z_1'(0) = 0;$$
$$z_2'' + z_2 = 2mu_1 z_1 + \mu_1^2 z_0 + 2\mu_2 z_0 + (1 - z_0^2)z_1'.$$

Из первой задачи имеем $z_0(s) = \xi_0 \cos s$.

Правая часть второй задачи, таким образом, равна

$$2\mu_1\xi_0\cos s - (1 - \xi_0^2\cos^2 s)\xi_0 \sin s = 2\mu_1\xi_0\cos s - \xi_0\sin s + \xi_0^3\cos^2 s\sin s =$$
$$= 2\mu_1\xi\cos s - \xi_0\sin s + \frac{1}{4}\xi_0^3(\sin 3s - 3\sin s).$$

Мы воспользовались равенством $\cos^2 s \sin s = \dfrac{1}{4}(\sin 3s - 3\sin s)$.

Упражнение. Докажите это равенство, используя формулы Эйлера для $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$.

Для того чтобы вторая задача имела хоть одно 2π-периодическое решение, необходимо и достаточно чтобы Фурье-разложение правой части ДУ не содержало резонирующих членов с $\sin s$ и $\cos s$.

Это приводит к условиям $2\pi\mu_1 = 0$, $\pi\xi_0 - \frac{\pi}{4}\xi_0^3 = 0$.

Следовательно, $\mu_1 = 0$, $\xi_0 = 2$.

Заметим, что случай $\xi_0 = 0$ ведет к тривиальному решению $z = 0$. Случай $\xi_0 = -2$ также неинтересен, так как из ДУ видно, что вместе с z решением является и $-z$.

Возвратимся к задаче для нахождения z_1. Она имеет вид

$$z_1'' + z_1 = \frac{1}{4}\sin 3s, \quad z_1(0) = \xi_1, \quad z_1'(0) = 0.$$

Ее решением является функция (проверьте!)

$$z_1(s) = \xi_1 \cos s - \frac{1}{32}(\sin 3s - 3\sin s).$$

Получено приближенное представление решения исходной задачи $x(t) \approx 2\cos t + \left(\xi_1 \cos t - \frac{1}{32}(\sin 3t - 3\sin t)\right)\varepsilon$ с периодом $T \approx 2\pi$.

Если выписать задачу Коши для z_2, то из условий существования ее 2π-периодического решения будут найдены ξ_1 и μ_2.

Затем будет найдено z_2 с неизвестным еще ξ_2, и т. д.

На этом пути последовательно и однозначно вычисляются все коэффициенты рядов и, следовательно, будет найдены асимптотические представления периодического решения уравнения Ван дер Поля $x(t, \varepsilon)$ и его периода $T(\varepsilon)$, близкого к 2π с точностью $o(\varepsilon^N)$ для любого натурального N.

Построенные ряды оказываются сходящимися, т. е. аналитическими функциями параметра ε в точке $\varepsilon = 0$. Функция $x(t(1 - \mu(\varepsilon))$ является $2\pi(1 - \mu(\varepsilon))$-периодическим решением уравнения Ван дер Поля.

Является ли обнаруженный предельный цикл устойчивым по Ляпунову? Оказывается, нет. Но он устойчив в некотором другом смысле.

Дадим, следуя Ляпунову, еще один вариант определения устойчивости траектории, или, иначе, орбиты C. Пусть $\rho(x, C)$ — расстояние от точки x до орбиты C, а $x = x(t)$ — решение ДС. Орбита C называется орбитально устойчивой, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$, такое, что из $\rho(x(0), C) < \delta$ следует, что для любых $t \geq 0$ выполняется неравенство $\rho(x(t), C) < \varepsilon$. Если, кроме того, $\rho(x(t), C) \to 0$ при $t \to +\infty$, то C называется *орбитально асимптотически устойчивой*.

Можно доказать, что найденный предельный цикл ДС Ван дер Поля является орбитально асимтотически устойчивым.

Отметим, что из устойчивости орбиты по Ляпунову следует ее орбитальная устойчивость. Обратное утверждение неверно. В качестве примера возьмем математический маятник в отсутствие трения (§ 7). Зафиксируем одну из периодических траекторий C_0 и рассмотрим близкие к ней траектории. Все они периодические. Ясно, что C_0 орбитально устойчива. Но она не является устойчивой по Ляпунову. Ведь период близкой к ней траектории C отличен от периода траектории C_0. Поэтому

близкие в начальный момент точки на траекториях C_0 и C с течением времени расходятся.

Замечание 2. Было отмечено, что начало координат является неустойчивым фокусом ДС Ван дер Поля и начинающиеся вблизи него траектории уходят от него к предельному циклу. Но, как показали вычисления, этот предельный цикл близок к окружности радиуса 2, т. е. далек от начала координат. Таким образом, в данном случае имеет место жесткое возбуждение системы, или катастрофа складки (см. §3, п. 6°).

Подведем итог. Траектории, выходящие из малой окрестности положения равновесия, резко перескакивают к предельному циклу и, раскручиваясь, наматываются на него изнутри. Можно показать, что траектории, находящиеся вне этого предельного цикла, наматываются на него снаружи. Таким образом, уравнение Ван дер Поля (или соответствующая ему ДС) дает нетривиальный пример жесткой бифуркации (катастрофы типа складки). В процессе бифуркации Пуанкаре–Андронова–Хопфа происходит рождение далекого от положения равновесия орбитально ассимтотически устойчивого автоколебания (самовозбуждающегося колебания). Подчеркнем, что предельные циклы — это сугубо нелинейное явление. Для них нет аналогов в линейной теории ДУ.

§ 10. Релаксационные колебания

В §9 было показано, что ДУ Ван дер Поля

$$\ddot{x} + x - \varepsilon(1 - x^2)\dot{x} = 0$$

при всех достаточно малых положительных значениях параметра ε имеет орбитально устойчивый предельный цикл, близкий к окружности. Можно доказать, что и при всех $\varepsilon > 0$ это ДУ имеет в фазовой плоскости единственный орбитально устойчивый предельный цикл.

Ниже будет рассмотрен случай больших значений параметра ε. Здесь возникают так называемые релаксационные колебания, довольно часто встречающиеся в приложениях.

Рассмотрим ДС с малым параметром $\mu > 0$

$$\dot{x} = y + x - \frac{x^3}{3}, \quad \dot{y} = -\mu x.$$

Замечание. Данная ДС заменой переменных $t = \dfrac{s}{\sqrt{\mu}}$, $X(s) = x(t)$, $\mu = \dfrac{1}{\varepsilon^2}$ сводится к ДУ Ван дер Поля $\dfrac{d^2X}{ds^2} + X - \varepsilon(1 - X^2)\dfrac{dX}{ds}$.

Упражнение. Проверьте справеливость замечания.

Таким образом, изучая эту ДС, мы изучаем ДУ Ван дер Поля при больших значениях параметра $\varepsilon > 0$.

Векторное поле направлений ДС имеет следующий вид: $(y+x-\frac{x^3}{3}, -\mu x)$. Воспользуемся идеями метода изоклин (см. гл. V, §1). На изоклине $x = 0$ векторное поле имеет горизонтальное направление, причем стрелки направлены вправо при $y < 0$ и влево при $y > 0$. Пусть μ очень мало́. Тогда, кроме малой окрестности кривой $y = x - \frac{x^3}{3}$, векторное поле почти горизонтально.

На изоклине $y = -x + \frac{x^3}{3}$ стрелки имеют вертикальное направление (рис. 53).

На рис. 54 показан примерный ход траекторий, обосновывающий существование предельного цикла. Траектория, выходящая из точки M, выходит в близкую окрестность точки A кубической параболы $y = -x + \frac{x^3}{3}$, двигается по ней до точки B, после этого срывается в точку C, затем медленно движется по дуге CD той же параболы, после чего срывается в точку A. Далее циклическое движение повторяется снова и снова. Аналогичная ситуация возникает при любом положении начальной точки. Появляются незатухающие колебания с быстрыми и медленными участками движения. Такие почти разрывные колебания называются релаксационными колебаниями.

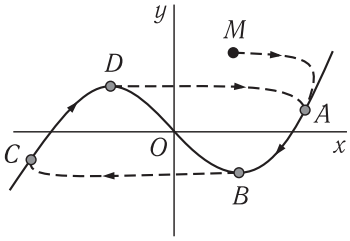


Рис. 54

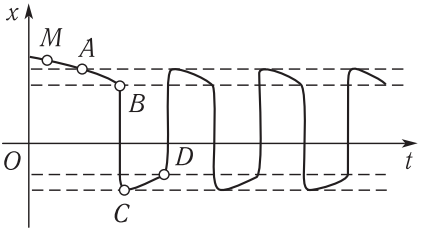


Рис. 55

На рис. 55 схематически показаны релаксационные колебания компоненты $x(t)$ ДС Ван дер Поля. Из точки M она достигает точки A, с которой начинается релаксационное колебание переменной $x = x(t)$ с плавными участками типа дуги AB и с почти вертикальными участками движения, аналогичными BC.

Задача с релаксационными колебаниями исследована компьютерными методами в Дополнениях II и III.

Итак, в качестве примера релаксационных колебаний нами исследована ДС, описывающая нелинейный осциллятор Ван дер Поля — математическую модель электрических колебаний с нелинейным сопротивлением.

В качестве второго примера использования релаксационных колебаний укажем на математическую модель, описывающую пульсацию сердца.

В процессе своей работы сердце поочередно находится в одном из двух состояний: в расслабленном (диастола) и в сокращенном (систола). В результате воздействия электрохимических импульсов мышечные волокна сердца быстро сжимаются, некоторое время остаются в состоянии систолы, а затем быстро возвращаются в состояние диастолы. Таким образом, ДС, описывающая работу сердца, должна иметь состояние равновесия, вблизи которого происходят быстрые колебания с промежуточными довольно продолжительными остановками. С математической моделью специального вида релаксационных колебаний, описывающей пульсации сердца, можно познакомиться в переведенной на русский язык и насыщенной приложениями книге [59], в которой читатель найдет также математические модели нервного импульса, роста опухоли и циклическую модель капиталистической экономики.

§ 11. Теоремы Пуанкаре–Андронова и Пуанкаре–Бендиксона

Остановимся вкратце без доказательств на основных методах, применяемых прикладниками для выяснения вопроса о существовании предельного цикла и его приближенного нахождения. Ограничимся двумерными ДС.

1°. Вблизи положения равновесия ДС найти ее предельный цикл обычно можно методом Линштедта–Пуанкаре. На этом пути особо выделяется обсуждаемая ниже теорема, проверить условия которой довольно просто. По этой причине она исключительно популярна у прикладников.

Теорема Пуанкаре–Андронова. *Рассмотрим ДС* $\dot{x} = A(\mu)x + B(x, \mu)$, *где* $x \in \Re^2$, *а* μ — *малый параметр* $\mu \in \Re$, $|\mu| < c$, *и пусть выполнены следующие условия.*

1) *Матрица* $A(\mu)$ *аналитична в точке* $\mu = 0$ *и имеет при* $\mu \neq 0$ *пару комплексно сопряженных собственных значений* $\lambda = \alpha(\mu) + i\beta(\mu)$ *и* $\overline{\lambda} = \alpha(\mu) - i\beta(\mu)$, *таких, что*

$$\alpha(0) = 0, \quad \alpha'(0) \neq 0, \quad \beta(0) \neq 0.$$

2) *Функциональный столбец* $B(x, \mu)$ *аналитичен по* x, μ *в точке* $(0, 0)$, *причем* $|B(x, \mu)| \leq |x|^2$.

Тогда при всех достаточно малых ε *существуют единственные аналитические в точке* $\varepsilon = 0$ *функции* $\mu = \mu(\varepsilon)$, $\mu(0) = 0$, $\omega = \omega(\varepsilon)$, $\omega(0) = \beta(0)$, *и единственное однопараметрическое семейство* $\dfrac{2\pi}{|\omega(\varepsilon)|}$*-периодических решений ДС* $x = y(\omega(\varepsilon)t, \varepsilon)$.

Сделаем несколько замечаний, поясняющих условия теоремы.

Замечание 1. Аналитичность матрицы $A(\mu)$ понимается в том смысле что аналитичны все ее элементы. Отсюда следует, что веще-

ственная и мнимая части ее собственных значений также аналитичны, т. е. представимы сходящимися в окрестности точки $\mu = 0$ рядами

$$\alpha = \alpha_1\mu + \alpha_2\mu^2 + \ldots, \quad \beta = \beta_0 + \beta_1\mu + \beta_2\mu^2 + \ldots .$$

Условия на собственные значения матрицы $A(\mu)$ показывают, что они пересекают мнимую ось, не касаясь ее.

Замечание 2. Аналитичность столбца функций

$$B(x, \mu) = (B_1(x, \mu), B_2(x, \mu))^{\mathrm{T}}$$

означает, что эти функции представимы степенными рядами

$$B_s(x, \mu) = \sum_{k=2}^{+\infty}\sum_{l=0}^{+\infty} B_{s,k,l}(\mu)x^k\mu^l \quad (s = 1, 2),$$

сходящимися в окрестности точки $x = 0$, $\mu = 0$.

Замечание 3. Разложения $\mu = \mu_1\varepsilon + \mu_2\varepsilon^2 + \ldots$, $\omega = \beta_0 + \omega_1\varepsilon + \omega_2\varepsilon^2 + \ldots$, $y(s, \varepsilon) = y_1(s)\varepsilon + y_2(s)\varepsilon^2 + y_3(s)\varepsilon^3 + \ldots$, $s = \omega(\varepsilon)t$, ведутся по вспомогательному малому параметру ε, характеризующего малость амплитуды искомого периодического решения.

Замечание 4. Следует иметь в виду несколько условный характер утверждения теоремы. Для линейной ДС $\dot{x} = A(\mu)x$ периодическое решение возникает только в случае $\mu = 0$. Предельный цикл может возникнуть только при наличии нелинейных членов, а его характер выясняется в ходе применения метода Линштедта–Пуанкаре при нахождении коэффициентов искомых рядов.

Имеется много доказательств теоремы Пуанкаре–Андронова в аналитическом и в неаналитическом случаях, а также ее обобщения на ДС в $\Re^n$, принадлежащие Хопфу, и все они технически довольно громоздки. В книгах [19, 23, 48] читатель может найти большое число результатов о бифуркации Пуанкаре–Андронова–Хопфа. Приведем план доказательства сформулированной теоремы.

Пусть $z = z(\mu)$ — комплексный собственный вектор матрицы $A(\mu)$, т. е. $A(\mu)z = \lambda(\mu)z$, а z^* — такой вектор, что $(z, z^*) = 1$, $(\overline{z}, z^*) = 0$.

Перейдем в ДС к новым переменным

$$s = \omega t, \quad x(t) = y(s).$$

Будем обозначать штрихом дифференцирование по s. Для нахождения $y(s)$ получим новую ДС,

$$\omega y' = A(\mu)y + B(y, \mu).$$

Ее вещественное 2π-решение ищем в виде

$$y = \eta(s)z + \overline{\eta}(s)\overline{z}.$$

Подстановка его в новую ДС дает

$$\omega\eta' z + \omega\overline{\eta}'\overline{z} = \lambda\eta z + \overline{\lambda}\overline{\eta}\overline{z} + B(\eta z + \overline{\eta}\overline{z}, \mu).$$

Умножим это уравнение скалярно справа на z^* и получим скалярную комплексную одномерную ДС, которую назовем определяющей ДС,

$$\omega\eta' = \lambda\eta + (B(\eta z + \overline{\eta z}, \mu), z^*).$$

Заметим, что скалярное умножение на z^* не дает ничего нового, так как приводит к ДС, сопряженной к определяющей ДС.

Можно показать, что в условиях теоремы определяющая ДС имеет при всех достаточно малых $|\varepsilon|$ единственное малое 2π-периодическое решение, являющееся аналитической функцией параметра ε. Подставим в определяющую ДС указанные в замечании 3 ряды для μ и ω, и неизвестное пока решение вида

$$\eta = \eta_1(s)\varepsilon + \eta_2(s)\varepsilon^2 + \eta_3(s)\varepsilon^3 + \dots .$$

Последовательным применением метода Линштедта–Пуанкаре можно однозначно найти коэффициенты рядов по степеням малого параметра ε, определяющих η и другие указанные в теореме функции. Доказательство сходимости возникающих рядов основывается на теореме о неявном операторе в аналитическом случае (гл. VI).

2°. Для доказательства существования устойчивого предельного цикла ДС на плоскости можно также воспользоваться геометрическим приемом, основанным на изучении векторного поля ДС. Этот прием обобщается в следующей важной теореме (см., например, [59]).

Теорема Пуанкаре–Бендиксона. *Пусть для двумерной ДС $\dot{x} = f(x)$ на фазовом пространстве D удалось подобрать простую замкнутую кривую L, в каждой точке x которой выполняется неравенство $(f(x), n(x)) < 0$, где $n(x)$ — вектор внешней нормали к L в точке x. Если внутри L находится единственное положение равновесия и оно неустойчиво по Ляпунову, то внутри L имеется устойчивый предельный цикл ДС.*

В качестве комментария к данной теореме укажем, что аналогичные соображения уже использовались нами в нестрогом доказательстве теоремы 2 из гл. IV, §7. Как и тогда, все траектории, начинающиеся на L, входят внутрь области, ограниченной L, и там остаются. В рассмотренной выше ситуации теоремы Пуанкаре–Бендиксона положение равновесия неустойчиво, поэтому траекториям «деваться некуда» и им приходится приближаться к предельному циклу (возможно, не единственному). С конкретным применением теоремы Пуанкаре–Бендиксона к задаче о ламповом генераторе можно познакомиться в учебнике [17, с. 192–195].

3°. В последние годы в связи с щироким использованием компьютерной техники стало популярным исследование вопроса о существовании предельного цикла с использованием компьютерных математических систем. Такие исследования для нескольких прикладных ситуаций продемонстрированы в Дополнении III на основе пакета компьютерной алгебры Mathematica.

§ 12. Устойчивые предельные циклы в химической кинетике и в биологии

Обсудим некоторые математические задачи химической кинетики. В химической промышленности широко используются так называемые проточные химические реакторы идеального перемешивания. Такой реактор является открытым: на его вход непрерывно подаются исходные вещества. Специальное перемешивающее устройство обеспечивает однородность внутри реактора. Из реактора по мере его наполнения вещество выходит через его край. Ход химических реакций внутри реактора описывается линейной или нелинейной ДС. Стандартной является ситуация, когда эта ДС имеет устойчивое положение равновесия. К работе в режиме, соответствующем этому стационарному состоянию, и стремится химический реактор. Именно в этом режиме и осуществляется соответствующий производственный процесс.

Периодическая химическая реакция Лотки–Вольтерры долгое время являлась интересным, но оторванным от жизни примером.

Совершенно неожиданным событием в области химической кинетики явилось открытие Б. П. Белоусовым реальной периодической химической реакции. Это произошло в 1951 г. в Институте прикладной физики (г. Горький), созданном А. А. Андроновым. Более детальное изучение этой реакции было продолжено А. М. Жаботинским. Общепринято название «реакция Белоусова–Жаботинского» (далее кратко реакция Б–Ж).

Сама реакция Б–Ж и ее математическая интерпретация оказались крайне сложными. Этим объясняется стремление исследователей найти более простую математическую модель. Одна из таких математических моделей была предложена брюссельской научной школой (Пригожин–Лефевр) и получила название «брюсселятор».

После некоторых упрощений возникает ДС с положительными параметрами a, b для определения концентраций x, y двух промежуточных веществ

$$\dot{x} = a - (b+1)x + x^2 y, \quad \dot{y} = bx - x^2 y.$$

Упражнение 1. Покажите, что единственным положением равновесия в первом квадранте ($x > 0$, $y > 0$) является точка $\left(a, \dfrac{b}{a}\right)$.

Изучим поведение траекторий вблизи этой точки, полагая

$$x = a + u, \quad y = \frac{b}{a} + v.$$

Упражнение 2. Покажите, что для u, v возникает ДС

$$\dot{u} = (b-1)u + a^2 v + \frac{b}{a}u^2 + 2auv + u^2 v, \quad \dot{v} = -bu - a^2 v - \frac{b}{a}u^2 - 2auv - u^2 v.$$

Будем далее считать a постоянным, а b меняющимся (так называемым управляющим параметром).

Рассмотрим соответствующую линеаризованную ДС

$$\dot{u} = (b-1)u + a^2 v, \quad \dot{v} = -bu - a^2 v.$$

Пример. Покажите, что собственные значения определяются уравнением $\lambda^2 - (b-1-a^2)\lambda + a = 0$, откуда

$$\lambda_{1,2} = \frac{b-1-a^2 \pm \sqrt{(b-1-a^2)^2 - 4a}}{2}.$$

Упражнение 4. Покажите, что для линеаризованной ДС начало координат $(0, 0)$ является устойчивым фокусом, если $b < b^* = 1 + a^2$, центром, если $b = b^*$, неустойчивым фокусом, если $b > b^*$.

Докажем, опираясь на теорему Пуанкаре–Андронова, что в ходе возрастания параметра b при переходе его через критическое значение (точку бифуркации) b^* происходит мягкая бифуркация рождения устойчивого предельного цикла.

Положим $b = b^* + \mu$ и предположим, что $\mu < 2\sqrt{a}$. Исходная нелинейная ДС теперь вид ДС с малым параметром

$$\begin{cases} \dot{u} = (a^2+\mu)u + a^2 v + \dfrac{1+a^2+\mu}{a}u^2 + 2auv + u^2 v, \\ \dot{v} = -(1+a^2+\mu)u - a^2 v - \dfrac{1+a^2+\mu}{a}u^2 - 2auv - u^2 v. \end{cases}$$

Собственные значения ее линеаризованной части записываются в виде

$$\lambda_{1,2} = \frac{\mu \pm i\sqrt{4a-\mu^2}}{2}.$$

Таким образом, $\operatorname{Re}\lambda = \alpha(\mu) = \dfrac{\mu}{2}$, откуда

$$\alpha(0) = 0, \quad \alpha'(0) \neq 0.$$

Кроме того, $\operatorname{Im}\lambda = \beta(\mu) = \sqrt{a - \dfrac{\mu^2}{4}}$ так что $\beta(0) \neq 0$.

Следовательно, условия теоремы Пуанкаре–Андронова выполнены и в задаче о брюсселяторе существует единственный предельный цикл.

Методом Линштедта–Пуанкаре можно сколь угодно точно вычислить соответствующее периодическое решение.

Более тонким является доказательство орбитальной устойчивости этого предельного цикла, выходящее за рамки данной книги.

Заметим, что в Дополнении III задача о брюсселяторе успешно исследуется с помощью компьютерной системы Mathematica.

Другая математическая модель, значительно лучше отражающая основные особенности реакции Б–Ж, получила название «орегонатор», так как была предложена в Университете штата Орегон, США. Она описывается ДС в $\mathfrak{R}^3$ и также имеет устойчивый предельный цикл (см. [40]).

Интересными областями нелинейных ДС, в которых также возникают предельные циклы, являются экология и биология. Система ДУ Лотки–Вольтерры (см. § 3) является аналогом консервативной механической ДС. Более адекватное описание реальной ситуации «хищник–жертва» удается получить, используя математические модели на основе неконсервативных, т. е. диссипативных ДС.

Различные диссипативные обобщения системы Лотки–Вольтерры приводятся, например, в книгах [50] и [40].

Рассмотрим следующую «систему Лотки–Вольтерры с насыщением» ($s > 0$ — коэффициент насыщения хищника, а при $s = 0$ получаем консервативную систему Лотки–Вольтерры из § 3)

$$\begin{cases} \dot{x} = k_1 ax - \dfrac{k_2 xy}{1 + sx}, \\ \dot{y} = \dfrac{k_3 xy}{1 + sx} - k_3 by. \end{cases}$$

В отличие от системы ДУ Лотки–Вольтерры, данная ДС система является консервативной и имеет предельный цикл. В Дополнении III проведено ее исследование с использованием пакета символьной компьютерной алгебры Mathematica.

Среди других приложений укажем на лазерную тематику. Вблизи порога возбуждения лазера также возникает бифуркация Пуанкаре–Андронова–Хопфа, сменяющаяся затем рабочим режимом лазера.

§ 13. Элементарная модель теплового взрыва

В результате сильного выделения тепла в ходе экзотермической химической реакции при сравнительно слабом теплообмене с окружающей средой в химическом реакторе может произойти резкое ускорение реакции, приводящее к нарушению теплового равновесия.

В безразмерных величинах это явление описывается задачей Коши для ДУ

$$\dot{\theta} = \exp\left(\frac{\theta}{1 + \beta\theta}\right) - \frac{\theta}{k}, \quad \theta(0) = 0.$$

Здесь θ характеризует разность температур химического реактора и окружающей среды, а $\beta > 0$ и $k > 0$ — параметры.

Данная математическая модель принадлежит лауреату Нобелевской премии академику Н. Н. Семёнову. Детальное ее описание читатель найдет в книге [58], откуда в переработанном виде и взято данное приложение.

Начнем с упрощенной модели, получающейся при $\beta = 0$ и удобной в некоторых расчетах,

$$\dot{\theta} = e^{\theta} - \frac{\theta}{k}, \quad \theta(0) = 0.$$

Найдем положения равновесия этой одномерной ДС. Для этого в плоскости θOy изучим возможность взаимного расположения кривой $y = e^{\theta}$ и различных полупрямых $y = \dfrac{\theta}{k}$, $k > 0$.

Упражнение 1. Убедитесь в том, что графики этих кривых касаются, если параметр $k = 1/e$ и при этом $(1, e)$ — точка касания (рис. 56). Покажите, что если $k > 1/e$, то кривые не пересекаются. Если же $k < 1/e$, то имеются две различные зависящие от k точки пересечения θ_* и θ^*, причем $\theta_* < 1 < \theta^*$.

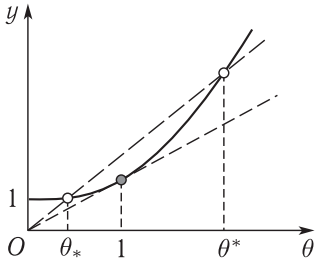


Рис. 56

Таким образом, лишь при $k \in (0, 1/e)$ ДС имеет два различных положения равновесия (два стационарных решения ДУ) θ_* и θ^*.

Упражнение 2. Убедитесь, что θ_* — устойчивое положение равновесия, а θ^* — неустойчивое.

Заметим далее, что эти положения равновесия при $k = 1/e$ (точка бифуркации) сливаются, а при $k > 1/e$ не существуют.

Исследуем теперь поведение решения задачи Коши при различных значениях параметра $k > 0$.

Поскольку ДУ является ДУ с разделяющимися переменными, а $e^{\theta} - \dfrac{\theta}{k} > 0$, то решение задачи Коши получается обращением интегрального уравнения $\displaystyle\int_0^{\theta} \frac{d\alpha}{e^{\alpha} - \alpha k^{-1}} = t$, т. е. нахождением из него θ как функции от t.

Запишем это интегральное уравнение в более удобном виде

$$\int_0^{\theta} \frac{e^{-\alpha} d\alpha}{1 - \alpha e^{-\alpha} k^{-1}} = t.$$

Если $k < 1/e$, то несобственный интеграл $\displaystyle\int_0^{\theta_*} \frac{e^{-\alpha} d\alpha}{1 - \alpha e^{-\alpha} k^{-1}}$ расходится (почему?) и, следовательно, решение задачи Коши определено и строго возрастает на полуоси $[0, +\infty)$. При этом прямая $\theta = \theta_*$ (стационарное решение ДУ) является его горизонтальной асимптотой (рис. 57).

Аналогично обстоит дело при $k = 1/e$. Здесь $\theta_* = \theta^* = 1$ и несобственный интеграл $\displaystyle\int_0^{1} \frac{e^{-\alpha} d\alpha}{1 - \alpha e^{-\alpha} e}$ также расходится.

Совершенно иная ситуация имеет место при $k > 1/e$. Теперь несобственный интеграл $\displaystyle\int_0^{\theta_*} \frac{e^{-\alpha} d\alpha}{1 - \alpha e^{\alpha} k^{-1}}$ сходится. Пусть его значение равно $t(k)$.

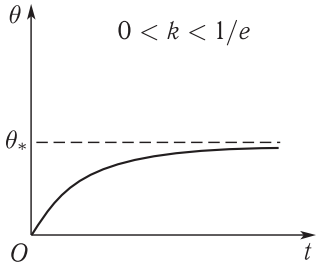


Рис. 57

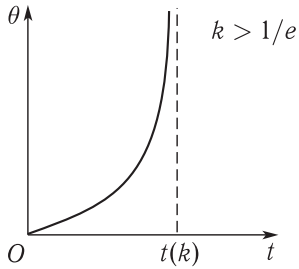


Рис. 58

Упражнение 3. Докажите сходимость несобственного интеграла. Для этого установите неравенство $0 < 1 - \alpha e^{\alpha} k^{-1} < 1 - (ek)^{-1}$.

Так как этот несобственный интеграл сходится, то (рис. 58) решение задачи Коши определено не на всей полуоси $[0, +\infty)$, а лишь на полуинтервале $[0, t(k))$, где

$$t(k) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha} d\alpha}{1 - k^{-1}\alpha e^{-\alpha}} < \infty.$$

При этом $\theta(t, k) \to +\infty$ при $t \to t(k) - 0$, т. е. решение уходит на бесконечность при конечном значении t.

Таким образом, значение параметра $k = 1/e$ является бифуркационным значением. При переходе через это значение (в ходе возрастания параметра) поведение решения задачи Коши резко меняется качественно: определенное на всей полуоси и ограниченное при $k \le 1/e$, оно становится при $k > 1/e$ определенным только на конечном интервале и неограниченным при стремлению к его правому концу. Получена имитация явления теплового взрыва.

Данная математическая модель дает упрощенное описание взрывного протекания химической реакции.

Вернемся к более точной модели академика Н. Н. Семёнова.

Для нахождения положений равновесия рассмотрим сначала взаимное расположение графиков функций $y = \dfrac{\theta}{k}$ и $y = \exp\left(\dfrac{\theta}{1 + \beta\theta}\right)$.

Эти графики касаются в точке с абсциссой θ, если одновременно равны значения этих функций и их производных, т. е. $\exp\left(\dfrac{\theta}{1 + \beta\theta}\right) = \dfrac{\theta}{k}$ и $\exp\left(\dfrac{\theta}{1 + \beta\theta}\right) \dfrac{1}{(1 + \beta\theta)^2} = \dfrac{1}{k}$.

Исключая из этой системы экспоненту, получим для определения θ квадратное уравнение $\theta = (1 + \beta\theta)^2$, из которого находим

$$\theta_{1,2} = \frac{1 - 2\beta \pm \sqrt{(1 - 2\beta)^2 - 4\beta^2}}{2\beta^2}.$$

Будем далее предполагать, что всюду ниже выполнено условие $\beta < 1/4$. Это условие обеспечивает наличие двух различных точек касания рассматриваемых кривых $0 < \theta_1(\beta) < \theta_2(\beta)$ (рис. 59).

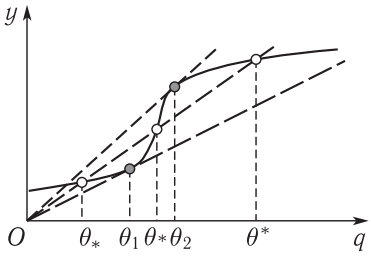


Рис. 59

Замечание. При $\beta \to 0$ справедливы асимптотические представления $\theta_1 \sim 1$, $\theta_2 \sim \dfrac{1}{\beta^2}$.

Упражнение 4. Пользуясь явными выражениями для θ_1, θ_2, докажите с помощью формулы Тейлора справедливость замечания.

Далее предоставляем читателю проверку следующих утверждений.

1) Касание графиков имеет место при значениях параметра k, равных $k_1 = \theta_1 \exp^{-1}\left(\dfrac{\theta_1}{1+\beta\theta_1}\right)$ и $k_2 = \theta_2 \exp^{-1}\left(\dfrac{\theta_2}{1+\beta\theta_2}\right)$.

2) При $\beta < 1/4$ и $k \in (k_1, k_2)$ уравнение $\exp\left(\dfrac{\theta}{1+\beta\theta}\right) = \dfrac{\theta}{k}$ определяет ровно три положения равновесия θ_*, $\theta*$, θ^*, при этом (рис. 59) $\theta_* < \theta_1 < \theta* < \theta_2 < \theta^*$.

Упражнение 5. Проведите исследование на устойчивость и убедитесь, что θ_* и θ^* асимптотически устойчивы, а $\theta*$ неустойчиво.

Указание. Достаточно показать, что $F'(\theta_*) < 0$, $F'(\theta^*) > 0$, $F'(\theta^*) > 0$, где $F(\theta) = \exp\left(\dfrac{\theta}{1+\beta\theta}\right) - \dfrac{\theta}{k}$.

Обратимся к задаче Коши для ДУ Семёнова. Пусть $\beta \in (0, 1/4)$ фиксировано, параметр $k \in (k_1, k_2)$, а начальное значение $\theta(0) \in (0, \theta_*)$. Вследствие асимптотической устойчивости θ_* решение задачи Коши $\theta(t, k) \to \theta_*$ при $t \to +\infty$ (рис. 60).

При $k = k_2$ (бифуркационное значение) положение θ_* теряет устойчивость, сливаясь с неустойчивым положением равновесия $\theta*$. При этом сохраняется устойчивое положение равновесия θ^*.

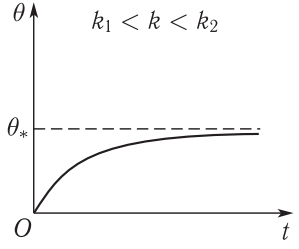


Рис. 60

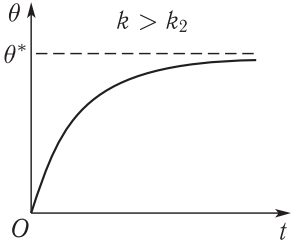


Рис. 61

Когда k становится больше k_2, положение равновесия θ_* исчезает. При этом решение $\theta(t, k)$ скачком (быстрым, но все же гладким) переходит в окрестность (асимптотически устойчивого) положения равновесия θ^*, далекого от начала координат (рис. 61).

При этом $\theta(t, k) \to \theta^*$, когда $t \to +\infty$.

Мы вновь встретились с жесткой бифуркацией или, как стало модно говорить, с катастрофой. С низкотемпературного режима (ведь $\theta_* < \theta_1 \sim 1$) решение скачком переходит в высокотемпературный режим (ведь, как отмечалось выше, $\theta^* > \theta_2 \sim \beta^{-2}$, а β мало́). Таким образом, модель академика Семёнова дает более адекватное описание явления теплового взрыва. Компьютерное исследование этой модели читатель найдет в Дополнении II.

Зададимся вопросом: что произойдет с траекторией ДС (решением ДУ) в ходе уменьшения параметра k от значения, большего, чем k_2? До значения k_1 положение равновесия θ^* остается устойчивым. При переходе через значение k_1 (еще одна точка бифуркации) траектория скачком попадает в зону притяжения устойчивого положения равновесия θ_*, а затем асимптотически приближается к нему. Отметим, что k_1 называется пределом воспламенения, а k_1 — пределом потухания. Их несовпадение свидетельствует о гистерезисном характере описанного явления. Движения «вперед» и «назад» осуществляются по разным кривым, образуя так называемую гистерезисную петлю.

Любопытно отметить, что совершенно такая же математическая ситуация возникает и других прикладных задачах, в частности, в одной из задач системы «хищник–жертва» (см. [50, с. 224, рис. 94]). При особо благоприятных обстоятельствах небольшая колония безобидных милых кузнечиков может внезапным, казалось бы, скачком превратиться в ужасающую стаю саранчи, а сравнительно небольшое и мирное сначала племя кочевников — в полчища гуннов, терроризирующих Европу.

Этим подтверждается еще раз, что совершенно различные по своей природе явления могут описываться одними и теми же или близкими математическими моделями.

§ 14. Операторы сдвига по траекториям ДС. Аттракторы, абстрактные ДС

Пусть $D \subset \Re^n$ — область и отображение $f\colon D \to \Re^n$ (векторное поле на D) определено и непрерывно дифференцируемо на D. Непродолжимое решение $x = x(t, x_0)$ задачи Коши для ДС $\dot{x} = f(x)$, $x(0) = x_0$ запишем в виде $x = U_t(x_0)$. Эта формула задает траекторию ДС, проходящую через точку x_0.

Кроме того, зта же формула при каждом $t \in \Re$ определяет нелинейный оператор U_t, отображающий каждую точку x_0 в точку $U_t(x_0)$, лежащую на той же траектории.

Оператор U_t называется оператором сдвига по траекториям ДС.

В соответствии с теоремой из гл. III, §7 оператор сдвига обладает следующими свойствами:

1) $U_t U_s = U_s U_t = U_{t+s} = U_{s+t}$;

2) $U_0 = I$, где I — тождественный оператор.

Таким образом, семейство операторов сдвига является группой.

В линейном случае, когда $f(x) = Ax$, матрица оператора сдвига в стандартном базисе является матрицантом (матрицей Коши).

Рассмотрим при фиксированном $t \in \Re$ множество $U_t(D)$, т. е. объединение множеств $U_t(x_0)$ по всем $x_0 \in D$.

Аттрактором ДС называется множество A всех предельных точек при $t \to +\infty$ множества $U_t(D)$.

Геометрически аттрактор можно описать как множество точек, притягивающее (при $t \to +\infty$) траектории ДС.

Аттрактор ДС может быть устроен сложным причудливым образом. С частными случаями аттракторов мы уже встречались.

Предоставляем читателю продумать следующие факты: если ДС имеет асимптотически устойчивое положение равновесия a, то $a \in A$, где A — аттрактор ДС; если ДС имеет устойчивый предельный цикл C_0, то $C_0 \subset A$.

Использование компьютерной техники позволило обнаружить большое число сложных аттракторов ДС при $n \geq 3$ в серьезных прикладных задачах.

В 1963 г. в связи с изучением некоторых задач гидродинамики атмосферы был открыт так называемый странный аттрактор Лоренца. Оказалось, что траектории ДС

$$\begin{cases} \dot{x} = -10x + 10y, \\ \dot{y} = 28x - y - xz, \\ \dot{z} = -\dfrac{8}{3}z + xy \end{cases}$$

при $t \to +\infty$ ведут себя подобно запутанному клубку ниток.

Более того, здесь нет непрерывной зависимости от начальных значений: очень близкие вначале траектории могут стать в дальнейшем достаточно далекими. По этой причине аттрактор Лоренца и называется странным. В Дополнении III приведены соответствующие численная и графическая реализации на основе компьютерной системы Mathematica.

Упражнение. Покажите, что аттрактор Лоренца содержит седло (0, 0, 0). Для этого рассмотрите линеаризованную ДС в окрестности точки (0, 0, 0) ДС.

Подробнее об аттракторах подобного типа см. в книге «Математическая энциклопедия», т. 3, с. 451. Имеется большое число научных работ и книг, посвященным исследованию аттракторов. Оказалось, что для ДС с $n > 3$ наличие аттракторов является скорее правилом, чем исключением.

Наличие сложных аттракторов часто увязывают с представлениями о хаосе. Существование геометрически организованных структур, как, например, в аттракторе Лоренца, позволяет говорить о детерминированном хаосе. В этой связи отметим волну увлечения красивой теорией фракталов (см. например, [65]).

В последние десятилетия разработан более общий подход к динамическим системам. Пусть на области $D \subset \Re^n$ с гладкой границей (далее D называется фазовым пространством) выполнены условия:

1) для любого $t \in \Re$ ($t \in \Re^+$) определено отображение $\varphi_t \colon D \to D$;

2) множество всех таких отображений φ_t, $t \in \Re$ (соответственно $t \in \Re^+$), образует по переменной t однопараметрическую группу (соответственно полугруппу), т. е. $\varphi_0 = \mathrm{id}$ (id — тождественное отображение) и для любых $t, s \in \Re$ (соответственно $t, s \in \Re^+$) справедливо равенство $\varphi_{t+s} = \varphi_t \circ \varphi_s$ (знаком «$\circ$» обозначается композиция отображений);

3) каждое отображение $\varphi_t(x)$ непрерывно дифференцируемо по совокупности переменных t, $x \in D$.

Тогда говорят, что на D задан фазовый поток (соответственно полупоток) φ_t или, что задана (абстрактная) ДС с фазовым пространством D и с потоком (соответственно полупотоком) φ_t.

Этим подходом получается широкое обобщение качественной теории ДС, не привязанное непосредственно к дифференциальным уравнениям.

Так, кривая $y = \varphi_t(x)$ называется орбитой или траекторией, проходящей через начальную точку x. В более общем плане изучаются положения равновесия, предельные циклы, вопросы устойчивости и т. п. (см. [24]).

Частным случаем абстрактных динамических систем являются изучавшиеся выше ДС. Вместо термина «оператор сдвига» используется термин «поток» (в случае ДУ $\varphi_t = U(t)$).

Всюду выше в качестве группового параметра рассматривались вещественные числа ($t \in \Re$). Другой вариант абстрактных ДС задается посредством отображения $F \colon D \to D$. Пусть F является гомеоморфизмом на D, т. е. взаимнооднозначным отображением D на D, таким, что F и F^{-1} непрерывны на D.

Зафиксируем $x_0 \in D$. Образуем последовательность

$$x_k = F(x_{k-1}), \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Эту последовательность будем называть положительной орбитой (положительной полуорбитой) с начальной точкой x_0.

Воспользуемся записью F^n для n-й степени отображения.

Поскольку

$$x_1 = F(x_0), \quad x_2 = F(x_1) = F(F(x_0)) = (F \circ F)(x_0),$$

то легко видеть по индукции, что $(\underbrace{F \circ F \circ \ldots \circ F}_{k})(x_0) = x_k = F^k(x_0)$, $k = 0, 1, \ldots$.

Точно так же определим отрицательную орбиту (полуорбиту) с начальной точкой x_0 как последовательность $x_k = F^k(x_0)$, $k = 0, -1, -2, \ldots$.

Таким образом, возникает группа F^k всех целых степеней гомеоморфизма F и соответствующая ей абстрактная динамическая система $\{D, F^k\}$.

Неподвижную точку $x^* \in D$ отображения F (т. е. $F(x^*) = x^*$) естественно называть положением равновесия ДС. На этом пути определяются устойчивость по Ляпунову и асимптотическая устойчивость положения равновесия. Если отображение F является C^2-диффеоморфизмом (F и F^{-1} дважды непрерывно дифференцируемы), то устанавливается аналог теоремы об устойчивости по линейному приближению. Рассматриваются отображения с параметром и устанавливаются различные бифуркационные теоремы.

Периодической орбитой отображения F называется его орбита $F^k(x_0)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, если существует натуральное число p, такое, что для любых целых k выполняется равенство $F^{k+p}(x_0) = F^k(x_0)$.

Если орбита периодическая, то естественно ее (наименьшим) периодом назвать такое число p, что $F^p(x_0) = x_0$, но $F^k(x_0) \neq x_0$ при $k = 1, \ldots, p-1$.

Для отображения с параметром рассматриваются различные бифуркации, в частности, аналог теоремы Пуанкаре–Андронова–Хопфа. В качестве фазового пространства используются также гладкие многообразия (окружность, цилиндр, тор и т. п.).

§ 15. Корректные и некорректные математические модели и задачи. Структурная устойчивость

Математические теории являются отражениями нашего материального мира. Пусть некоторое реальное (физическое, химическое, биологическое, механическое, зкономическое и т. п.) явление описывается математической моделью. Всякая математическая модель (задача, проблема) описывает явление лишь приближенно, выделяя из него главные, существенные свойства и характеристики. Кроме того, при моделировании численного описания реального явления, как правило, возникают вычислительные погрешности, которые могут существенно повлиять на выводы о свойствах изучаемого явления. Поэтому представляется крайне важным выделить математические модели, не чувствительные к малым возмущениям, которые не мешают получению достаточно точной информации об изучаемых существенных свойствах реального явления. Такие математические модели принято называть корректными.

С другой стороны, очень важными являются и математические модели, отражающие резкие переходы, бифуркационные и катастрофические явления. Здесь малые возмущения могут приводить к большим количественным или качественным изменениям. В таких случаях говорят о некорректных математических моделях и задачах. С математической точки зрения, такие критические ситуации являются крайне редкими. Но, с точки зрения практики, они играют исключительно важную роль, так как часто обусловливают переход от одного стабильного режима к совершенно другому стабильному режиму или к хаосу.

Выше мы познакомились и с теми, и с другими математическими моделями, описываемыми обыкновенными дифференциальными уравнениями. Обсудим эту проблему с более общей точки зрения. Дело заключается в том, что граница между корректными и некорректными задачами условна. Все зависит от того, в каком классе задач рассматривается математическая модель (далее для краткости матмодель), как понимать малое возмущение и как оценивать его влияние.

Включим явление P_0 в класс близких к нему явлений $\{P\}$, и пусть $r(P, P_0)$ — расстояние, характеризующее близость явления P к явлению P_0 по их выделенным существенным свойствам.

Аналогично модель M_0 включим в класс близких к ней математических моделей $\{M\}$ с расстоянием $\rho(M, M_0)$.

Наконец, зададим отображение (возможно, многозначное) $M = \Phi(P)$, ставящее в соответствие каждому явлению P его матмодель M, так что $\Phi(P_0) = M_0$.

Определение 1. Назовем матмодель M_0 *корректной*, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, такое, что из $\rho(M, M_0) < \delta$ следует $r(P, P_0) < \varepsilon$ для всякого P: $\Phi(P) = M$.

Определение некорректной матмодели строится посредством построения логического отрицания к определению корректности.

Определение 2. Назовем матмодель M_0 *некорректной*, если найдется такое $\varepsilon > 0$, что для любого $\delta > 0$ существует матмодель M, такая, что $\rho(M, M_0) < \delta$, но найдется P: $\Phi(P) = M$, для которого $r(P, P_0) \geq \varepsilon$.

Основоположником теории некорректных задач и методов их регуляризации является выдающийся советский ученый академик А. Н. Тихонов. Имеется огромное количество некорректных задач, важных в приложениях. Методы регуляризации часто позволяют сконструировать устойчивые алгоритмы их решения (см., например, [14]). Этот круг научных проблем выходит за рамки данной книги.

Ниже будут рассмотрены конкретные примеры корректных и некорректных математических задач для ДУ. Начнем с проблемы о непрерывной зависимости решения задачи Коши от начального значения, рассмотренной в гл. VI. Там в естественных условиях было доказано, что на конечном отрезке данная проблема является корректной. Если начальное значение решения меняется достаточно мало, то и решение меняется мало.

Совсем не так дело обстоит на полуоси. В качестве простейшего примера некорректной задачи рассмотрим задачу Коши $\dot{x} = x$, $x(0) = 0$. Ее решение — это функция $x = 0$, $t \in (0, +\infty)$. Это же ДУ с начальным условием $x(0) = x_0 \neq 0$ имеет решение $x = x_0 e^t$, $t \in (0, +\infty)$. Но как бы мало́ ни было $|x_0|$ на полуоси $(0, +\infty)$, модуль решения $|x_0 e^t|$ может за счет выбора t быть сделан сколь угодно большим.

В гл. VI, §9 изложена теорема Ляпунова об устойчивости по линейному приближению. Эта теорема может быть интерпретирована как

теорема о непрерывной зависимости решения нелинейной системы ДУ на полуоси от его начального значения.

Простейшую иллюстрацию к теореме Ляпунова дает

Упражнение 1. Покажите, что решение задачи Коши $\dot{x} = -x$, $x(0) = a$ непрерывно зависит от начального значения на полуоси $(0, +\infty)$ и, значит, эта задача корректна.

Обсудим еще один класс проблем. Матрица A порядка $n \times n$ задает в $\Re^n$ линейное векторное поле. Будем называть это векторное поле гиперболическим, если $\operatorname{Re}\lambda \neq 0$ для любого собственного значения λ матрицы A.

Пусть наряду с матрицей имеется матрица B того же порядка и также с вещественными элементами.

Близость матрицы B к матрице A будем характеризовать числом (см. пример в гл. VI, §7) $||B - A|| = \max\limits_{1 \le k \le n} \sum\limits_{l=1}^{n} |a_{kl}|$.

Обсудим вопрос о том, как меняются свойства собственных значений матрицы A при ее малом матричном возмущении, т. е. при замене ее на достаточно близкую к ней матрицу B.

Лемма. *Пусть векторное поле, порождаемое матрицей A, является гиперболическим. Пусть $||B - A|| \le \delta$. Тогда для всех достаточно малых δ векторное поле, порождаемое матрицей B, также является гиперболическим.*

Доказательство. Рассмотрим характеристические многочлены $P(\lambda) = \det(A - \lambda E)$ и $Q(\lambda) = \det(B - \lambda E)$ матриц A и B соответственно.

Пусть сначала λ_0 — простое собственное значение матрицы A, т. е. $P(\lambda_0) = 0$, $P'(\lambda_0) \neq 0$.

Покажем, что для всех достаточно малых δ матрица B также имеет простое собственное значение с вещественной частью, отличной от нуля. Для этого характеристическое уравнение представим в виде $P(\lambda) = P(\lambda) - Q(\lambda)$ и будем искать его решение в виде $\lambda = \lambda_0 + \eta$.

По формуле Тейлора $P(\lambda_0 + \eta) = P'(\lambda_0)\eta + R(\eta)$, где $|R(\eta)| \le C_1\eta^2$.

Поскольку также $|P(\lambda) - Q(\lambda)| \le C_2\delta$, то можно показать, что характеристическое уравнение $Q(\lambda) = 0$ при всех достаточно малых δ имеет единственный корень, близкий к λ_0. При этом знак вещественной части этого корня совпадает со знаком $\operatorname{Re}\lambda_0$.

Если λ_0 — корень кратности r, то аналогичным образом для поправки η получаем уравнение

$$\frac{P^r(\lambda_0)}{r!}\eta^q + O(\eta^{r+1}) = O(\delta),$$

которое имеет r комплексных корней, стремящихся к нулю при $\delta \to 0$.

Следовательно, при всех достаточно малых δ матрица B имеет ровно r собственных значений (с учетом их кратности), близких к λ_0 и с вещественной частью того же знака, что и $\operatorname{Re}\lambda_0$.

Доказанная лемма относится к теории возмущения матриц. В применении к ДУ из нее можно сделать ряд полезных заключений. Например, из нее вытекает следующее утверждение.

Теорема. *Пусть все собственные значения матрицы A имеют отрицательные вещественные части. Пусть B — произвольная матрица, удовлетворяющая неравенству $||B - A|| \leq \delta$. Тогда для всех достаточно малых δ положение равновесия $x = 0$ ДС $\dot{x} = Bx$ асимптотически устойчиво.*

Теорема означает, что в ее условиях задача об асимптотической устойчивости положения равновесия $x = 0$ ДС $\dot{x} = Ax$ корректна в классе матричных возмущений матрицы A.

В качестве другой иллюстрации остановимся на случае $n = 2$, рассмотренном в гл. IV, §5. Здесь нас будет интересовать вопрос о том влияют ли малые матричные возмущения на фазовый портрет ДС. Подобные вопросы об устойчивости векторных полей нелинейных динамических систем, т. е. о корректности в этом смысле описываемых ими матмоделей, были поставлены в известной совместной статье двух выдающихся ученых академиков А. А. Андронова и Л. С. Понтрягина (ДАН СССР, т. 14, 1937).

Если слабые возмущения ДС не меняют качественно ее фазового портрета, то принято говорить о структурной устойчивости ДС (понятие грубости ДС у Андронова и Понтрягина). В противном случае говорят о структурной неустойчивости ДС. Данный подход является существенным расширением понятий корректности и некорректности при рассмотрении ДС.

Итак, вернемся к ДС $\dot{x} = Ax$ при $n = 2$ с точки зрения ее структурной устойчивости.

1) Если матрица A имеет два различных вещественных ненулевых собственных значения λ_1 и λ_2, то положение равновесия может быть узлом (устойчивым или неустойчивым) или седлом. Из леммы следует, что матрица B (для всех достаточно малых δ) имеет в точности те же положения равновесия, что и матрица A.

Таким образом, в данном случае достаточно слабое возмущение матрицы A не меняет качественно фазового портрета расположения траекторий ДС $\dot{x} = Ax$, и ДС структурно устойчива (в классе матричных возмущений).

2) Если матрица A имеет двукратное собственное значение (естественно, оно вещественно), то возможны в устойчивом и в неустойчивом вариантах дикритический узел и вырожденный узел. При возмущении матрицы возможны различные случаи. Предлагаем читателю просмотреть их в виде упражнений. Ограничиваемся устойчивыми вариантами.

Упражнение 2. Покажите, что для ДС $\dot{x} = -x + \delta y$, $\dot{y} = \delta x - y$ устойчивый дикритический узел (при $\delta = 0$) переходит в обычный устойчивый узел. Собственное значение раздваивается (бифурцирует) на два близких к 1 вещественных собственных значения.

Упражнение 3. Покажите, что для ДС $\dot{x} = -x + \delta y$, $\dot{y} = -\delta x - y$ устойчивый дикритический узел (при $\delta = 0$) переходит в устойчивый фокус. Собственное значение раздваивается (бифурцирует) на два близких к 1 комплексно сопряженных собственных значения.

Упражнение 4. Покажите, что для ДС $\dot{x} = -x + \delta y$, $\dot{y} = -y$ устойчивый дикритический узел (при $\delta = 0$) переходит в вырожденный устойчивый узел. Собственное значение не бифурцирует.

Упражнение 5. Покажите, что для ДС $\dot{x} = -x + y$, $\dot{y} = \delta x - y$ устойчивый вырожденный узел (при $\delta = 0$) переходит в обычный устойчивый узел ($\delta > 0$) или в устойчивый фокус ($\delta < 0$). Собственное значение раздваивается (бифурцирует) на два близких к 1 собственных значения (вещественных или комплексных).

При столь подробной детализации фазовых портретов следует считать ДС с кратным собственным значением структурно неустойчивой.

При $n > 2$ количество возможных различных типов положений равновесия у ДС разрастается и становится малообозримым.

Договоримся не различать случаи узлов (обычного, дикритического или вырожденного) и фокуса. При этом огрубленном подходе случай 2) также можно считать структурно устойчивым.

3) Пусть матрица A имеет два комплексно сопряженных собственных значения с ненулевой вещественной частью. Здесь возможен только фокус (устойчивый или неустойчивый). Из леммы следует, что при достаточно малом возмущении матрицы собственные значения не меняют свой тип и для возмущенной ДС начало координат остается фокусом с сохранением его устойчивости или неустойчивости. Итак, здесь имеет место структурная устойчивость относительно матричных возмущений.

Особо выделим случай, когда матрица A имеет пару чисто мнимых комплексно сопряженных собственных значений. Оказывается, эта ситуация носит принципиально иной характер. Начало координат является центром — устойчивым по Ляпунову положением равновесия. Однако, в примере из гл. IV, §5 показано, что при сколь угодно малом возмущении матрицы центр может превратиться в устойчивый или неустойчивый фокус. Здесь сколь угодно малое возмущение может привести к качественной перестройке фазового портрета. Следовательно, в данном случае ДС структурно неустойчива.

В заключение укажем на общий подход к концепции структурной устойчивости. В нелинейном случае речь идет об определении локального характера.

Определение 3. Заданное в области D гладкое векторное поле $f(x)$ называется *структурно устойчивым*, если для любого достаточно близкого к нему в метрике $C^1(D)$ векторного поля $g(x)$ существует сохраняющий ориентацию диффеоморфизм D на D, отображающий положительные полутраектории поля $f(x)$ на положительные полутраектории поля $g(x)$.

Напомним, что диффеоморфизм — это взаимно однозначное непрерывно дифференцируемое отображение, имеющее непрерывно дифференцируемое обратное отображение.

Понятие структурной устойчивости и его дальнейшие обобщения и развития лежит в основе современной качественной теории динамических систем (см., например, [33]), находящей многочисленные применения в современной механике и в других областях научных знаний.

Подчеркнем еще раз следующие общие положения. Диссипативные ДС структурно устойчивы (например, осциллятор Ван дер Поля и описанные в §12 ДС с устойчивыми предельными циклами из биологии и химической кинетики).

Консервативные ДС структурно неустойчивы. Тем не менее, вследствие их сравнительной простоты, использование их в разумных пределах очень полезно в приложениях.

Структурно неустойчивая матмодель «гармонический осциллятор» дает много полезной информации о гармонических колебаниях. Учет малого трения приводит к структурно устойчивым матмоделям, таким, например, как осциллятор Ван дер Поля. Аналогично, структурно неустойчивая матмодель биологических колебаний Лотки–Вольтерры представляет несомненную ценность в приложениях, хотя более точное представление дают структурно устойчивые матмодели, учитывающие биологические виды трения.

Структурно неустойчивая консервативная матмодель Кеплера–Ньютона все еще достаточно хорошо описывает жизнь Солнечной системы.

Дополнение II

ПРИЛОЖЕНИЯ MATHCAD К ЗАДАЧАМ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДУ

В.И. Ракитин, *В.А. Треногин*

MATHCAD является одной из универсальных математических систем, которая позволяет решать большое количество весьма сложных задач без использования программирования, предельно сохраняя наглядную форму постановки задач и представления решений. С ее помощью легко осуществляются численные вычисления, представляемые также графически для визуализации решений задач. Система работает в режиме диалога с пользователем.

В настоящем Дополнении демонстрируются возможности системы MATHCAD для решения различного типа задач для обыкновенных дифференциальных уравнений. При этом особое внимание уделяется задачам, ранее встречавшимся в книге, в частности, задачам прикладной направленности.

Наша рекомендация — включать использование прикладных компьютерных программ по математике в изучение ДУ на практических занятиях или в качестве домашних заданий. Этим можно устранить диспропорцию в изучении ДУ, когда в учебном процессе наглядное решение достигается длительными аналитическими преобразованиями. Кроме того, при большем внимании к теории можно достичь лучшего понимания ДУ как важной основы математического моделирования и последующего изучения самых разнообразных процессов и явлений.

Далее дается достаточное представление об основах работы в прикладной программе MATHCAD. Предполагается знакомство с операционной системой Windows.

§ 1. Окно и инструменты MATHCAD

При запуске прикладной программы MATHCAD на экране монитора появляется окно, показанное на рис. 62.

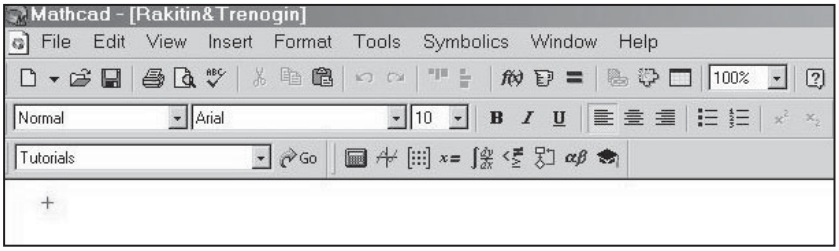


Рис. 62

По белому рабочему листу можно перемещать «красный плюс» (рабочий вид курсора) клавишами со стрелками с клавиатуры, либо при помощи мыши. Красный плюс — это указатель позиции рабочей области — начала ввода операторов MATHCAD. Панель палитр инструментов (toolbars) математических операций MATH можно вывести на ра-

Рис. 63

бочий стол последовательностью обращений к меню: **View** ⇒ **Toolbar** ⇒ **Math**. Каждая кнопка на палитре инструментов **Math** открывает рабочие палитры различных математических операторов или символов (рис. 63). Можно вставлять любые операторы щелчком мыши на соответствующей кнопке рабочей панели инструментов или использованием так называемых «горячих клавиш».

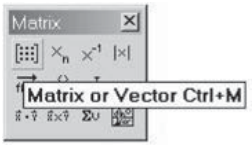


Рис. 64

Как только указатель мыши задерживается на какой-либо пиктограмме панели инструментов, появляется сообщение о характере действия кнопки; возможно также напоминание о горячих клавишах, вызывающих указанное действие. Пример показан на рис. 64.

§ 2. Простейшие вычисления. Операторы присваивания

Пример 1. Вычислить значение арифметического выражения

$$\sqrt[5]{7+\left(\frac{\sqrt{2}-1}{9}\right)^3\cdot 23{,}7}.$$

Решение.

Действия мышью или клавишами	**Результат на экране**
• Щелкнуть на рабочем листе; плюс — место ввода.	+
• Щелкнуть на кнопке $\sqrt[n]{\square}$ панели арифметических операций или нажать клавиши **Ctrl** + \.	$\sqrt{\square}$
• Вставить в «знакоместа» (placeholder) показатель корня и первое слагаемое. При нажатии клавиши «**пробел**» угол синего цвета выделяет объект, над которым продолжаются действия.	$\sqrt[5]{7}$ — действия под корнем,
• Используя «**пробел**», а также клавиши деления «/», возведения в степень «^» и умножения «*», последовательно образуем данное арифметическое выражение. Результат вычисления получим после нажатия на клавишу «=».	$\sqrt[5]{7+\sqrt{2}-1}$ $\sqrt[5]{7+\frac{\sqrt{2}-1}{9}}$
$\sqrt[5]{7+\left(\frac{\sqrt{2}-1}{9}\right)^3}$ $\sqrt[5]{7+\left(\frac{\sqrt{2}-1}{9}\right)^3\cdot 23.7}$ $\sqrt[5]{7+\left(\frac{\sqrt{2}-1}{9}\right)^3\cdot 23.7}=1.476$	

Обратившись к опции меню **Format** ⇒ **Result...**, можно получить результат с большим числом верных знаков (до 15 знаков); здесь имеем 1,47587056810725.

Пример 2. На отрезке $[a, b]$ определена функция $y = f(x)$. Разбить данный отрезок на n равных частей и вычислить значения функции в точках разбиения. Пусть $y = x \sin x$, $a = 0$, $b = 2\pi$, $n = 5$.

Решение. Символ «:=» обозначает оператор присваивания. Чтобы определить функцию или присвоить значение какой-либо переменной, следует после ввода имени переменной или функции, не забывая в скобках указать ее аргумент, вставить символ «:=» с клавиатуры — вводом символа «:» (двоеточие), или мышью — щелчком по кнопке [:=] на палитре инструментов, либо арифметических операторов, либо операторов присваивания. Для присваивания множества значений переменной следует использовать оператор диапазона «..»; в частности, для множества равноотстоящих значений x с шагом h на отрезке $[a, b]$ следует ввести [x := a, a + h..b]. Символ диапазона изменения переменной «..» вводится с клавиатуры нажатием клавиши «;» (точка с запятой). При вводе комбинации символов [x =] или [y(x) =] на экране появляются вычисленные значения соответственно аргумента и функции:

$y(x) := x \cdot \sin(x)$ $\quad a := 0 \quad b := 2 \cdot \pi \quad n := 5 \quad h := \dfrac{b-a}{n}$

$x := a, a + h .. b$

x =
0
1.257
2.513
3.77
5.027
6.283

y(x) =
0
1.195
1.477
-2.216
-4.781
$-1.539 \cdot 10^{-15}$

§ 3. Построение графиков функций

Пример. Построить график функции $y = x \sin x$ на отрезке $[a, b]$, разбивая его на n равных частей, полагая $n = 100$, $a = 0$, $b = 6\pi$.

Решение. На каждом шаге разбиения h на экране вместо дуги кривой изображается отрезок прямой, соединяющий две соседние точки, начиная с пары точек $(a, y(a))$ и $(a + h, y(a + h))$. Ниже следует последовательность действий для построения «гладкой» кривой.

- $y(x) := x \cdot \sin(x) \quad a := 0 \quad b := 6 \cdot \pi \quad n := 100 \quad h := \dfrac{b-a}{n} \quad x := a, a + h .. b$

• Расположив красный плюс в нужном месте рабочего листа MATHCAD, щелкнуть мышью на изображенной пиктограмме (рис. 65).

Рис. 65

В окне графика вставить параметры на соответствующих местах (рис. 66).

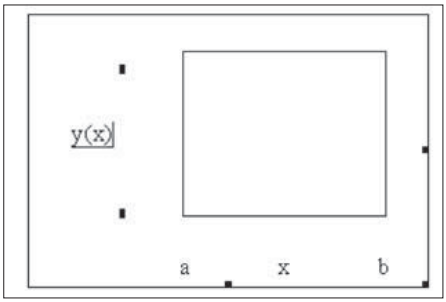


Рис. 66

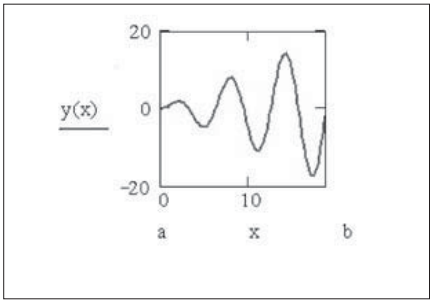


Рис. 67

• Изображение графика появляется мгновенно после ввода данных и щелчка мышью на другом месте листа (рис. 67). График автоматически масштабируется по вертикальной оси, если на предыдущем шаге два знакоместа не заполнены.

График функции на отрезке $[-10, 10]$ можно получить с помощью простейших команд: ввести функцию, щелкнуть по пиктограмме «X-Y Plot» и вставить x и $y(x)$ в соответствующие знакоместа (рис. 68).

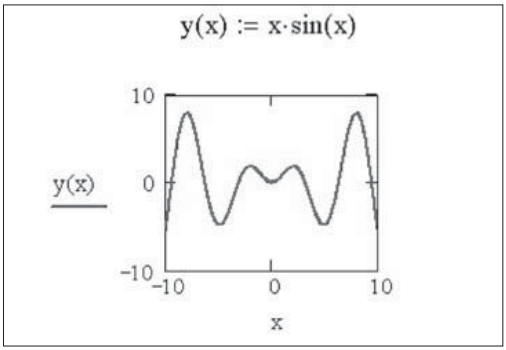


Рис. 68

Допустимо построение на одном рисунке не более 16 графиков функций.

Если дважды щелкнуть по графику, появляется окно форматирования (рис. 69). Можно нанести координатные сетки (grid lines) по каждой оси, указать значения переменных (X-Y Axes); можно определить цвет, толщину линии, ее тип (Traces) и т. п.

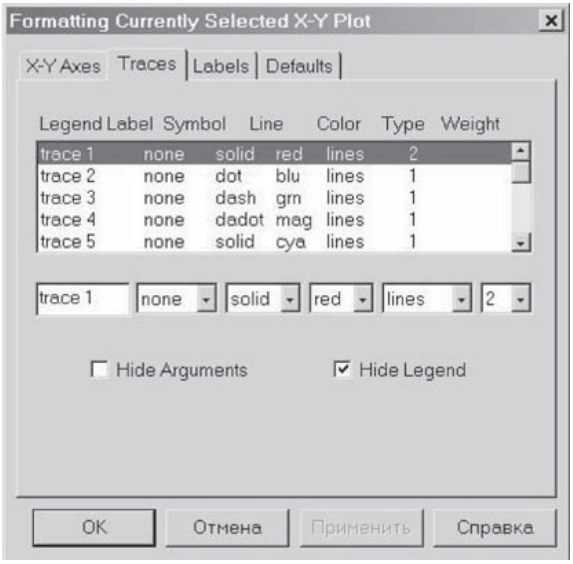


Рис. 69

§ 4. Использование блока решений обыкновенных ДУ и систем ДУ

При решении задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений и систем ограничимся только одной функцией программы MATHCAD — **Odesolve()** (solving ordinary differential equations — решение обыкновенных дифференциальных уравнений). Решение некоторых краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений также можно получить с помощью функции **Odesolve()**.

Функция **Odesolve(vector,x,b,[step])** возвращает решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений, линейных относительно старших производных, в виде вектора функций, зависящих от x и удовлетворяющих либо начальным, либо краевым условиям, число которых равно сумме порядков дифференциальных уравнений. Аргументы: **vector** — вектор-столбец имен функций (при решении одного дифференциального уравнения используется функция **odesolve(x,b,[step])**; **x** — переменная интегрирования; **b** — конечная точка промежутка интегрирования; **step** — число шагов при вычислении решения (по выбору). Блок решения ограничен операторами **Given** (дано) и **Odesolve()**, между которыми располагаются дифференциальные уравнения с начальны-

ми или краевыми условиями. Для производных в блоках решения можно использовать как операторы типа d/dx и d^2/dx^2, так и обозначения со штрихом $y'(x)$ и $y''(x)$. Штрих (производная) в программе MATHCAD ставится нажатием клавиш **Ctrl+F7**. Заметим, что в начальных данных и краевых условиях обозначения производных со штрихом обязательны. Для условия равенства в блоке следует нажимать **Ctrl+=** .

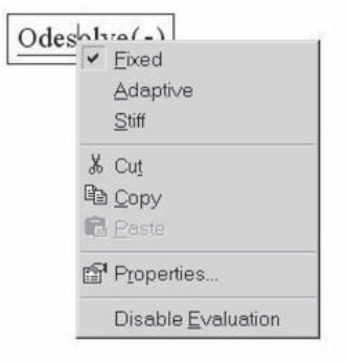


Рис. 70

По умолчанию функция **odesolve()** дает решение задачи, используя метод Рунге–Кутты с фиксированным шагом — **fixed** (рис. 70). Другие возможные методы: **adaptive** или **stiff** — оказываются полезными для быстро изменяющихся решений на промежутке. Для их использования следует щелкнуть правой клавишей мыши на **odesolve** и выбрать **adaptive** или **stiff** в появляющемся контекстном меню.

§ 5. Примеры решения задач Коши для нелинейных ДУ

Решения рассматриваемых в данном параграфе ДУ можно получить только с помощью численных методов. Это обстоятельство типично для ДУ. Поэтому при необходимом понимании методов решения задач Коши или краевых задач полезно использовать в преподавании уже готовые прикладные компьютерные программы для численного решения задач.

Пример 1. Используя блок решения с функцией **Odesolve()**, найти решение начальной задачи $y' = -x + y^2$, $y(-1) = 0$ на отрезке $[a, b]$. Построить график интегральной кривой.

Решение. Данная задача качественно исследовалась в гл. V, §1. На рис. 71 хорошо видна точка перегиба решения рассматриваемой задачи Коши.

```
a := −1  b := 5     step := 100
Given
    y'(x) = −x + y(x)^2        y(−1) = 0

y := Odesolve(x, b, step)
```

Пример 2. Используя блок решения с функцией **Odesolve()**, найти решение начальной задачи $y' = x^2 + y^2$, $y(-1) = -5$ на отрезке $[a,\ b]$. Построить график интегральной кривой.

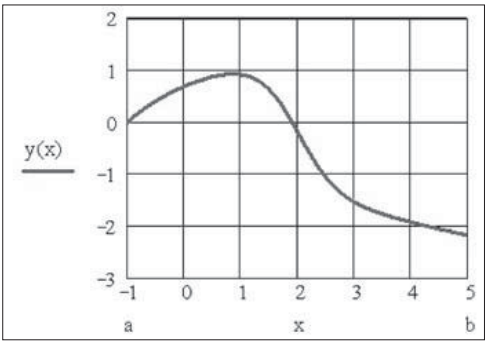


Рис. 71

Решение. В гл. V, §1 интегральную кривую для этой задачи получали методом изоклин. График решения представлен на рис. 72.

```
a := −1        b := 2      step := 100
Given
    y'(x) = x^2 + y(x)^2   y(−1) = −5
y := Odesolve(x, b, step)
```

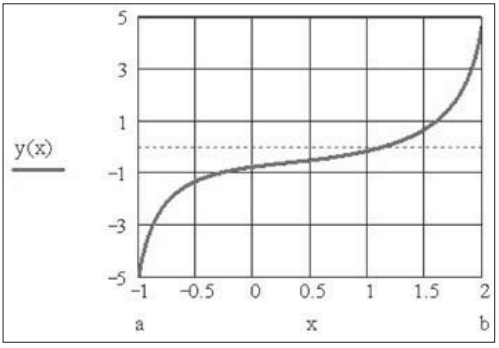


Рис. 72

Пример 3. Используя блок решения с функцией **Odesolve()**, найти решение начальной задачи $y'' + y - \frac{1}{2}y^2 = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ на отрезке $[a, b]$. Построить график интегральной кривой.

Решение.

```
L := 20    Given
                y''(x) + y(x) − (1/2)·y(x)^2 = 0     y(0) = 0     y'(0) = 1
           y := Odesolve(x, L)                 x := 0, L/1000 .. L
```

Решением является периодическая функция (рис. 73). Качественный анализ аналогичного дифференциального уравнения проводился в Дополнении I, §5.

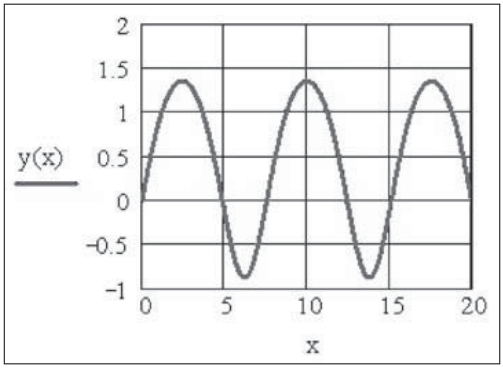


Рис. 73

§ 6. Решение нелинейной задачи Коши с малым параметром при производной

Пример. Используя блок решения с функцией **Odesolve()**, найти решение начальной задачи $\frac{1}{1000}y' = x^2 - y^2$, $y(0) = 1$ на отрезке $[a, b]$. Построить график интегральной кривой.

Решение. Здесь принят метод решения **adaptive**.

```
a := 0   b := .2     step := 100
Given
    1/1000 y'(x) = x^2 − y(x)^2          y(0) = 1
y := Odesolve(x, b, step)
```

Этот пример является типичной задачей сингулярного возмущения. Решение аналогичной линейной задачи аналитическим методом рассмотрено в гл. V. Коэффициент 1/1000 при производной играет роль малого параметра. Если пренебречь величиной $\frac{1}{1000}y'$, получим уравнение $x^2 - y^2 = 0$ (вырожденное уравнение). Приближенным решением исходной задачи Коши является функция $y = x$. Точное решение задачи в малой окрестности начала координат резко уходит на свое начальное значение $y(0) = 1$. Это явление пограничного слоя хорошо наблюдается на рис. 74 и 75.

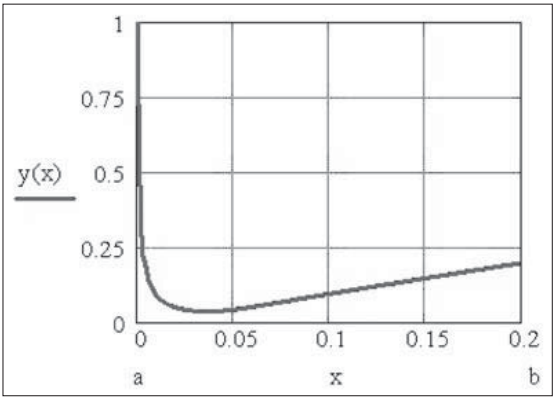


Рис. 74

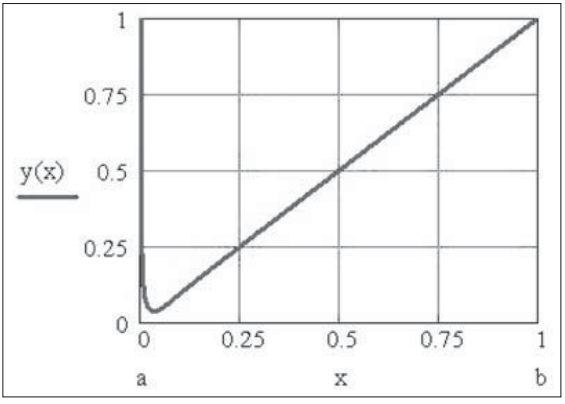


Рис. 75

§ 7. Пример решения краевой задачи

Пример. Используя блок решения с функцией **Odesolve()**, найти решение краевой задачи $y'' + y' + y = -\sin x \cdot x \cdot e^{4x}$, $y(0) = 0$, $y(1) = 0$ на отрезке $[a, b]$. Построить график интегральной кривой.

Решение.

```
a := 0      b := 1      step := 1000

Given

    y''(x) + y'(x) + y(x) = -sin(x)·x·e^(4·x)

    y(0) = 0        y(b) = 0

y := Odesolve(x, 1, step)
```

Это пример решения линейной краевой задачи для ДУ второго порядка (рис. 76). Соответствующая теория приведена в гл. II, §8. Читатель может убедиться в том, что для рассматриваемого ДУ первая краевая задача с непрерывной на отрезке правой частью имеет на нем единственное решение.

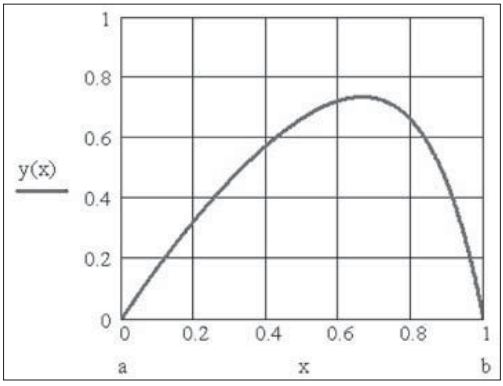


Рис. 76

§ 8. Пример задачи с периодическим биением

Ниже явление биения иллюстрируется на примере задачи о вынужденных колебаниях для задачи с трением (см. Дополнение I). Поскольку частоты здесь соизмеримы, то биение оказывается периодической функцией.

Пример. Используя блок решения с функцией **Odesolve()**, найти решение начальной задачи $\ddot{x} + 2 \cdot k \cdot \dot{x} + \omega_0^2 \cdot x = F \cdot \cos(\omega \cdot t)$, $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$ на отрезке $[a, b]$. Построить график интегральной кривой.

Решение.

$$T := 25 \quad step := 100 \quad k := 0.01 \quad \omega_0 := 4 \quad \omega := 4.5 \quad F := 1$$

Given

$$x''(t) + 2 \cdot k \cdot x'(t) + \omega_0^{\,2} \cdot x(t) = F \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

$$x(0) = 0 \qquad x'(0) = 0$$

$$x := \mathrm{Odesolve}(t, T, step) \qquad t := 0, \frac{T}{1000} .. T$$

График решения представлен на рис. 77.

В программе MATHCAD имя переменной с нижним индексом, как например, ω_0 следует вводить, набирая последовательно символ ω, далее нажатие на клавишу «.» (образование знакоместа нижнего индекса), наконец, символ 0.

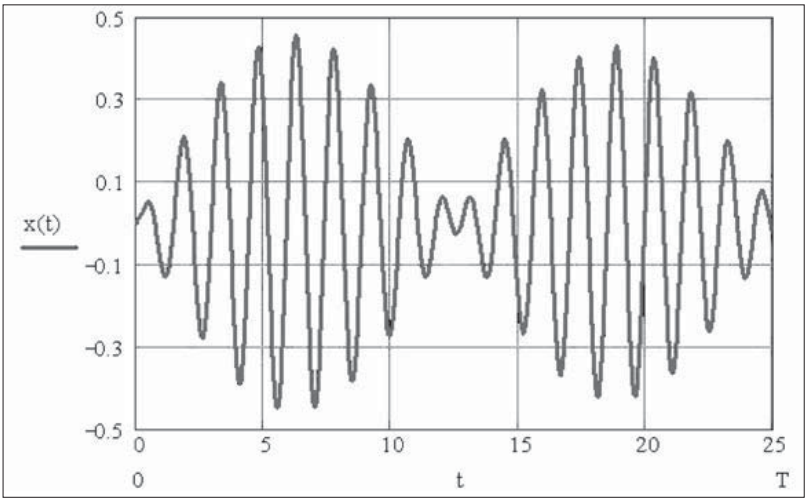


Рис. 77

§ 9. Одно из периодических решений задачи «хищник–жертва»

Пример. Используя блок решения с функцией **Odesolve()**, найти решение начальной задачи для системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{u} + v = -u \cdot v, \\ \dot{v} - u = u \cdot v, \end{cases} \qquad u(0) = u_0,\ v(0) = 0$$

на отрезке $[a, b]$. Построить графики решений и фазовую траекторию полученного решения.

Решение.

$$T := 10 \qquad u_0 := 1.5$$

Given

$$u'(t) + v(t) = -u(t)\cdot v(t)$$

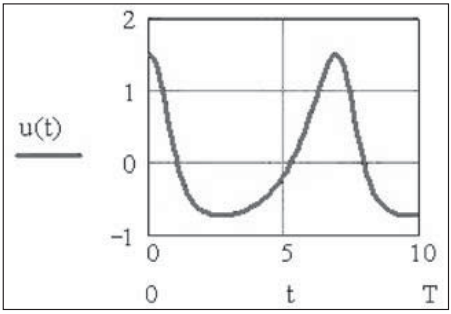
$$v'(t) - u(t) = u(t)\cdot v(t)$$

$$u(0) = u_0 \qquad v(0) = 0$$

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} := \mathrm{Odesolve}\left[\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, t, T\right] \qquad t := 0, \frac{T}{100} .. T$$

При построении фазовой траектории знакоместа́ для диапазонов изменения функций $u(t)$ и $v(t)$ следует заполнять, учитывая полученные из решения минимальные и максимальные значения этих функций.

Графики решений и фазовая траектория представлены соответственно на рис. 78 и 79.



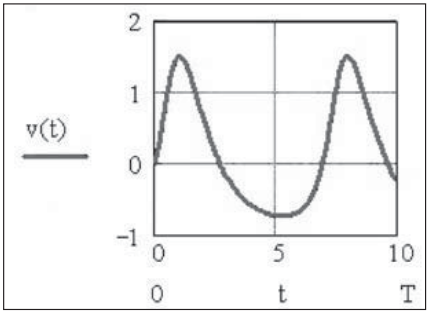


Рис. 78

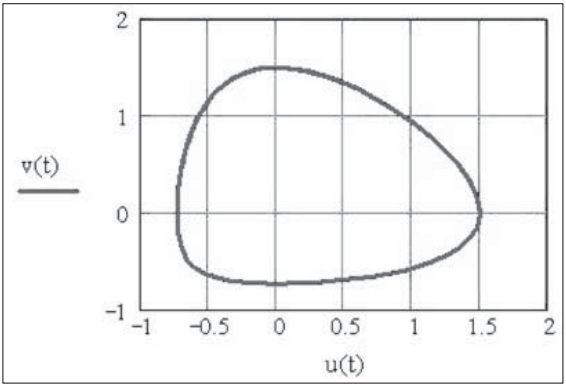


Рис. 79

Данная система ДУ была исследована в Дополнении I. В системе координат (u, v) фазовые траектории при некоторых начальных значениях задачи являются замкнутыми кривыми вокруг положения равновесия. Одна из них и вычисляется в данной задаче (рис. 79). Меняя в некоторых пределах начальные данные, можно получать различные траектории из семейства этих траекторий.

Уменьшение числа хищников $u(t)$ ведет к увеличению числа жертв $v(t)$, что в свою очередь ведет к увеличению числа хищников (рис. 78) и дальнейшему периодическому чередованию численностей хищников и жертв.

§ 10. Пример задачи с релаксационным колебанием

Пример. Используя блок решения с функцией **Odesolve()**, найти решение начальной задачи $\ddot{x} + x - k \cdot (1 - x^2) \cdot \dot{x} = 0$, $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = 1$ на отрезке $[a, b]$. Построить график интегральной кривой.

Поставленная для численного решения задача Коши для ДУ — задача Ван дер Поля с параметром k — имеет различные приложения (см. Дополнение I).

Решение.

$$T := 50 \qquad step := 1000 \qquad k := 10$$

Given

$$x''(t) + x(t) - k\cdot\left(1 - x(t)^2\right)\cdot x'(t) = 0$$

$$x(0) = 1 \qquad x'(0) = 0$$

$$x := \mathrm{Odesolve}(t, T) \qquad t := 0, \frac{T}{1000} .. T$$

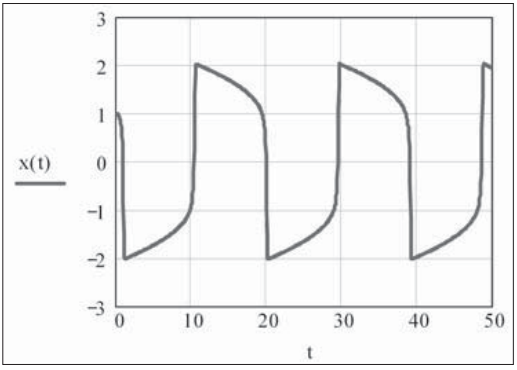


Рис. 80

Представленные на рис. 80 периодические движения называют релаксационными колебаниями. Период этих колебаний приблизительно равен $2k$. Релаксационные колебания характеризуются резкими переходами от одного состояния так называемого равновесия в другое состояния «равновесия». Амплитуда колебаний приблизительно равна двум и практически не зависит от параметра k. Задержки в положениях «равновесия» приблизительно равны значению параметра k, а значение отклонения за этот промежуток изменяются либо от 2 до 1, либо от -2 до -1. Этот процесс особенно хорошо воспринимается при наблюдении за графиком изменения скорости $v(t) = \dot{x}(t)$, равной приблизительно $\frac{1}{k}$ в промежутках «равновесия» (рис. 81), — решение ниже поставленной задачи.

$$T := 50 \qquad step := 1000 \qquad k := 10$$

Given

$$v'(t) + x(t) - k\cdot\left(1 - x(t)^2\right)\cdot v(t) = 0$$

$$x'(t) = v(t)$$

$$x(0) = 1 \qquad v(0) = 0$$

$$\begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} := \mathrm{Odesolve}\left[\begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix}, t, T, step\right] \qquad t := 0, \frac{T}{10000} .. T$$

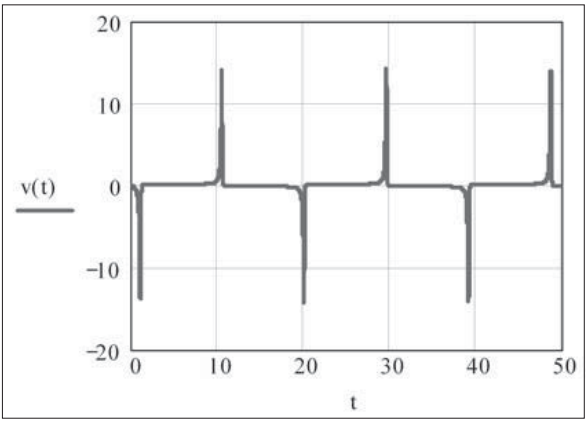


Рис. 81

Промежутки релаксации — это промежутки, где скорость почти равна нулю (от -2 до -1 и от 1 до 2 на рис. 82).

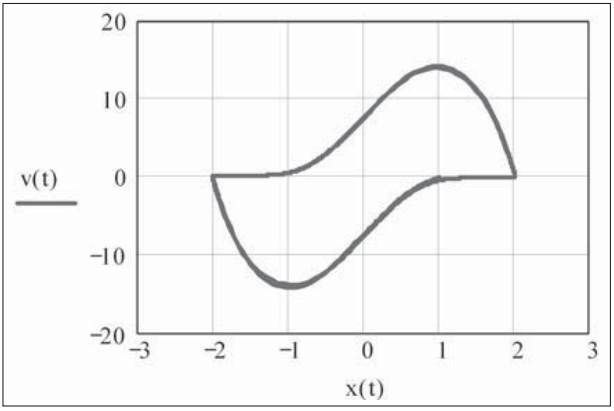


Рис. 82

§ 11. Численное моделирование задачи о тепловом взрыве

Математическая модель теплового взрыва, принадлежащая лауреату Нобелевской премии академику Н. Н. Семёнову, была рассмотрена в Дополнении I.

Пример. Найти решение начальной задачи $\dot{\theta} = \exp\left(\dfrac{\theta}{1+\beta\theta}\right) - \dfrac{\theta}{k}$, $\theta(0) = 0$ на отрезке $[a, b]$, используя блок решения с функцией **Odesolve()**. Построить график интегральной кривой.

Решение. Частные случаи решения задачи, когда $\beta = 1/8$ при различных величинах k, выбор которых далее мотивирован поведением правой части дифференциального уравнения, являются типичными для

любых $0 < \beta < 1$ и $k > 0$. Возможны следующие три случая решения уравнения (в частности, для $\beta = 1/8$)

$$f(\theta) = y(\theta), \quad \text{где} \quad f(\theta) = \exp\left(\frac{\theta}{1+\beta\theta}\right), \quad y(\theta) = \frac{\theta}{k}.$$

1) Уравнение имеет два корня, один из которых $\theta^* \approx 1{,}3729$ при $k^* \approx 0{,}4253$ (рис. 83, *а*) — это точка касания графиков функций $f(\theta)$ и $y(\theta)$, другой $\theta^{**} \approx 1200$ (рис. 83, *б*) — точка пересечения этих графиков.

2) Уравнение $f(\theta) = y(\theta)$ имеет три корня, если $0 < k < k^* \approx 0{,}4253$ наименьший из которых меньше θ^* $(0 < \theta < \theta^* \approx 1{,}3729)$.

Графики функций $f(\theta)$ и $y_1(\theta) = \dfrac{\theta}{0{,}3}$ пересекаются в трех точках (рис. 83).

3. Уравнение имеет один корень, если $k > k^* \approx 0{,}4253$ (рис. 83), превосходящий $\theta^{**} \approx 1200$. Графики функций $f(\theta)$ и $y_2(\theta) = \dfrac{\theta}{0{,}6}$ пересекаются в одной точке (рис. 83).

$$\beta := \frac{1}{8} \quad k := 0.4254 \quad k_1 := 0.3 \quad k_2 := 0.6$$

$$f(\theta) := \exp\left(\frac{\theta}{1+\beta\cdot\theta}\right) \quad y(\theta) := \frac{\theta}{k} \quad y_1(\theta) := \frac{\theta}{k_1} \quad y_2(\theta) := \frac{\theta}{k_2}$$

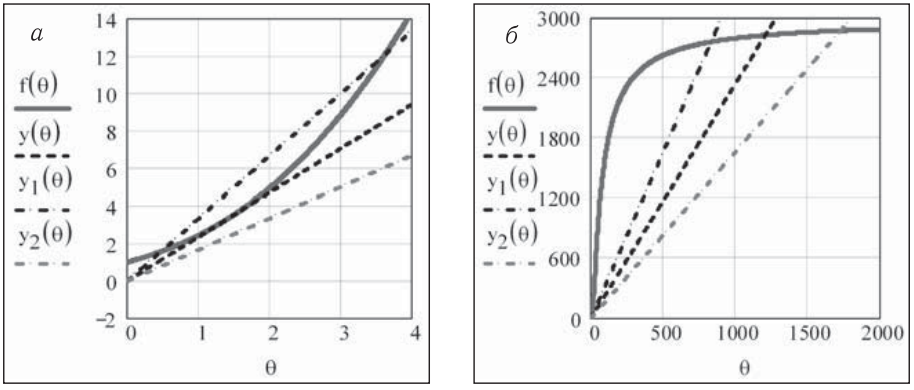


Рис. 83

Интегральная кривая данной задачи — функция $\theta(t)$, возрастающая до своего предельного значения, равного наименьшему (или единственному) корню уравнения $f(\theta) = y(\theta)$. На рис. 84 представлены интегральные кривые $\theta(t)$, $\theta_1(t)$ и $\theta_2(t)$ решения задачи при значениях параметра k в правой части ДУ, равных соответственно 0,4254 (несколько больше $k^* \approx 0{,}4253$), $k_1 = 0{,}3$ и $k_2 = 0{,}6$.

На рис. 84, *а* наблюдается низкотемпературный режим химической реакции при малых значениях параметра k. Когда параметр k переходит через критическое (бифуркационное) значение k^*, температура скачком поднимается до очень больших значений (рис. 84, *б*). На рис. 84, *в* наблюдается явление теплового взрыва.

$$T := 400 \qquad step := 100 \qquad \beta := \frac{1}{8} \qquad k := 0.4254$$

Given

$$\theta'(t) = \exp\left(\frac{\theta(t)}{1+\beta\cdot\theta(t)}\right) - \frac{\theta(t)}{k} \qquad \theta(0) = 0$$

$$\theta := \mathrm{Odesolve}(t, T, step) \qquad t := 0, \frac{T}{100} .. T$$

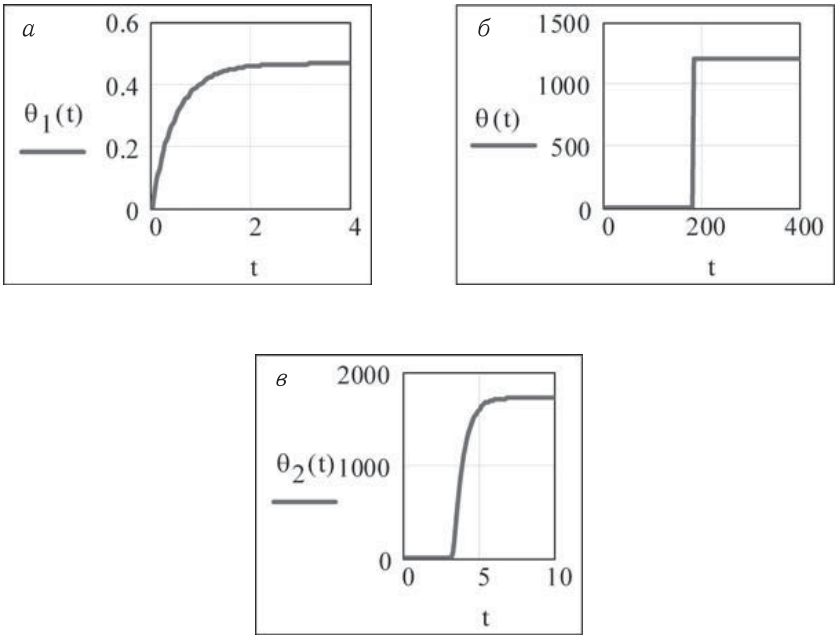


Рис. 84

Замечание. Значения $\theta^* \approx 1{,}3729$ и $k^* \approx 0{,}4253$ получены в прикладной программе MATHCAD как решение системы уравнений

$$\begin{cases} f(\theta) = y(\theta), \\ f'(\theta) = y'(\theta), \end{cases} \text{т. е} \quad \begin{cases} \exp\left(\dfrac{\theta}{1+\beta\theta}\right) = \dfrac{\theta}{k}, \\ \dfrac{1}{(1+\beta\theta)^2}\exp\left(\dfrac{\theta}{1+\beta\theta}\right) = \dfrac{1}{k}. \end{cases}$$

Дополнение III

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДУ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СИСТЕМЫ КОМПЬЮТЕРНОЙ АЛГЕБРЫ MATHEMATICA

Н.И. Земцова, В.А. Треногин

Система компьютерной алгебры Mathematica, разработанная американской компанией Wolfram Research Inc., является одним из универсальных программных средств, предназначенных в первую очередь для выполнения технических расчетов. В настоящее время время она с успехом используется не только в физике и математике, но и в таких областях, как кибернетика, биология, химия, экономика, финансовое и банковское дело, социология. Этому во многом способствовали не только исключительно мощные вычислительные возможности системы, но и простота и удобство работы с ней. Цель данной главы — познакомить читателя с применением системы символьных вычислений Mathematica для решения основных типов обыкновенных дифференциальных уравнений. Аналогичные задачи решаются в других современных компьютерных системах, таких, как Maple, MatLab, Maxima.

§ 1. Структура системы Mathematica

Система состоит из двух основных частей: вычислительное ядро (The Kernel) и оболочка (The Front End). Ядро представляет собой программное обеспечение, непосредственно выполняющее вычисления и работающее одинаково на всех типах компьютеров. Оболочка обеспечивает взаимодействие между ядром и пользователем. При этом вычислительное ядро и оболочка могут находиться как на одном, так и на разных компьютерах; в последнем случае связь между ними осуществляется по сети.

Наиболее общей и удобной для пользователей является оболочка, используемая при работе в операционной системе Windows. Она позволяет работать с ядром в интерактивном режиме, при котором команды, предназначенные для выполнения, и получаемые результаты изображаются на экране монитора.

Окно системы Mathematica 5 при ее запуске показано на рис. 85.

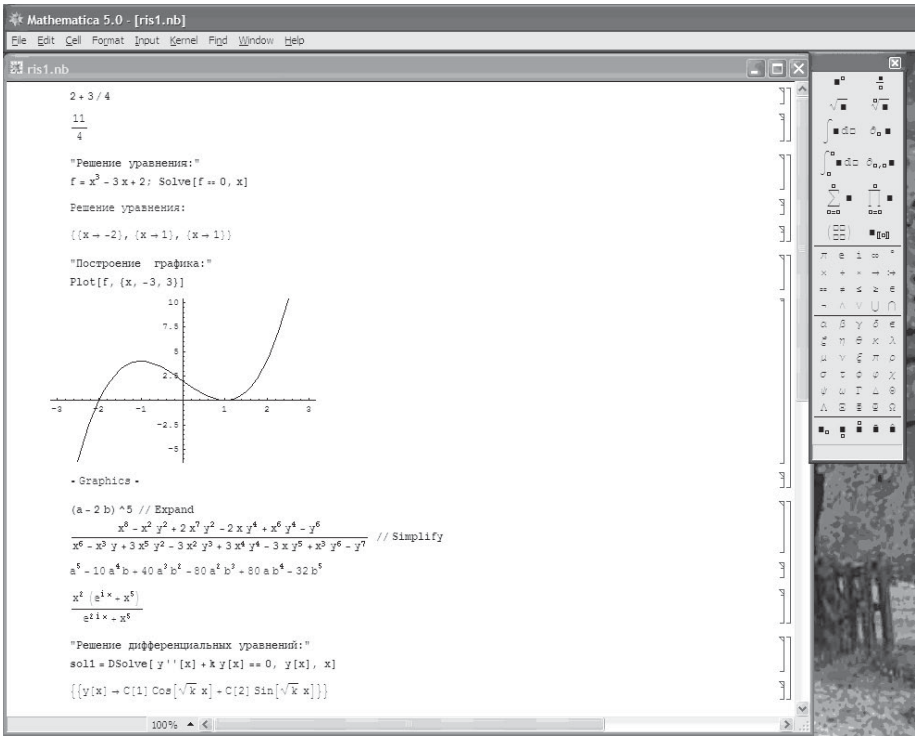


Рис. 85

Окно редактирования, называемое блокнотом или ноутбуком, состоит, как видно из рисунка, из команд пользователя и результатов, выводимых системой. Вводимые команды пользователя и выводимые результаты объединены в так называемые ячейки, отмеченные в правой части главного окна редактирования характерными квадратными скобками. Особенностью документов, создаваемых в системе Mathematica, является возможность соединять в них различные элементы, такие, как текст, команды, выполняемые ядром, получаемые при этом результаты в виде чисел, выражений, таблиц, графиков, звуков, а также рисунки. В простейшем случае работа с системой напоминает работу с обычным калькулятором и представляет собой диалог, состоящий из пар:

$$\texttt{In[n]} := \text{Команда, вводимая пользователем}$$

$$\texttt{Out[n]} = \text{Результат, выводимый системой}$$

При этом команда пользователя сводится либо к выражению, которое нужно вычислить, либо к применению какой-либо встроенной функции, число которых в системе Mathematica превышает тысячу. Для выполнения команды достаточно набрать необходимое математическое выражение и одновременно нажать клавиши **Shift** + **Enter**. Для набора

команд и редактирования введенной информации можно использовать весь спектр возможностей клавиатуры и мыши, включая копирование (**Copy**), вырезание (**Cut**), вставки (**Paste**), удаление (**Delete**) и т. п. Кроме того, можно использовать инструментальные панели с множеством пиктограмм ввода математических символов, что позволяет представлять формулы в виде, близком к традиционным математическим обозначениям. Например, следующие два выражения эквивалентны:

```
y = Sum[(i^2 + 1), {i, 1, 10}]
```

$$y = \sum_{i=1}^{10} (i^2 + 1)$$

§ 2. Простейшие численные и символьные вычисления в системе Mathematica

2.1. Численные расчеты

Mathematica выполняет все известные операции с числами, производя вычисления с максимально возможной точностью. Рассмотрим несколько примеров.

а) Арифметические вычисления:

```
2 + 3/4
N[2 + 3/4]
```

$$\frac{11}{4}$$

2.75

```
100!
```

93326215443944152681699238856266700490715968264381621468592963895217599993229915608941463976156518286253697920827223758251185210916864000000000000000000000000

```
2.187143^{157}
```

2.29465×10^{53}

б) Решение алгебраического уравнения:

```
NSolve[x^6 – 3x^4 + 17x – 3 == 0, x]
```

```
{{x → -2.18311}, {x → -0.643543 - 1.40029 i}, {x → -0.643543 + 1.40029 i},
 {x → 0.176641}, {x → 1.64678 - 0.750866 i}, {x → 1.64678 + 0.750866 i}}
```

в) Нахождение минимального значения функции в заданной области:

```
NMinimize[Cos[x y] + x, x^2 + y^2 < = 10, x, y]
```

{-3.99011, {x → -2.99809, y → 1.0057} }

г) Численное интегрирование функции:

NIntegrate[Sin[x^2] / x^2, {x, 0, 1 }]

0.967577

2.2. Символьные вычисления

Mathematica позволяет обрабатывать выражения, содержащие переменные или символы.

а) Преобразование алгебраических выражений:

(a - 2b)^5 // Expand

$a^5 - 10a^4b + 40a^3b^2 - 80a^2b^3 + 80ab^4 - 32b^5$

б) Разложение в ряд Тейлора:

$$\text{Series}\left[\frac{\text{Cos}[x^2+3x]}{x^2+1}, \{x,0,5\}\right]$$

$$1 - \frac{11x^2}{2} - 3x^3 + \frac{67x^4}{8} - \frac{15x^5}{2} + O[x]^6$$

в) Вычисление неопределенного интеграла:

$$\text{Integrate}\left[\frac{x}{x^3+1}, x\right]$$

$$\frac{\text{ArcTan}[(-1+2x)/\sqrt{3}]}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3}\text{Log}[1-x] + \frac{1}{6}\text{Log}[1-x-x^2]$$

§ 3. Запись дифференциальных уравнений в системе Mathematica и их решение на примере простейших задач

Дифференциальное уравнение можно записать несколькими способами. Суть от этого не меняется. Например $y' = \dfrac{y}{1+e^x}$ можно записать следующими способами:

y'[x] == y[x](1 + Exp[x]),

или

D[y[x], x] == y[x]/(1 + e^x),

или

∂_x y[x] == y[x](1 + e^x)

(символ $\partial_{\square}\square$ можно ввести с палитры **BasicInput**).

Как видим, искомая функция y и ее производные записываются с аргументом, заключенным в квадратные скобки: $y[x]$, $y'[x]$, ...

3.1. Решение дифференциальных уравнений в символьном виде

Для решения в символьном виде используются следующие функции:

• DSolve[eq, y[x], x] — решает дифференциальное уравнение eq относительно функции y с независимой переменной x;

• [{eq1, eq2,...}, {y1[x1,..], y2[x1,..],...}, {x1,...}] — решает систему дифференциальных уравнений eq1, eq2, ...

Например:

```
sol = DSolve[y'[x] == y[x]/(1 + Exp[x]), y[x], x]
```

$$\left\{\left\{y[x] \to \frac{e^x\, C[1]}{1 + e^x}\right\}\right\}$$

Функция **DSolve** выдает, в случае нахождения решения, общее решение, содержащее константы $C[1], C[2], \ldots$. Чтобы найти решение задачи Коши, нужно уравнение дополнить начальными условиями:

```
sol = DSolve[y'[x] == y[x]/(1 + Exp[x]), y[0] == 1, y[x], x]
```

$$\left\{\left\{y[x] \to \frac{2\, e^x}{1 + e^x}\right\}\right\}$$

3.2. Решение дифференциальных уравнений в численном виде

Когда не удается решить дифференциальное уравнение в аналитическом виде, можно искать решение численными методами, включающими интерполяцию сеточных решений Для этого используется функция **NDSolve[{eq,initdata}, y, {x,xmin,xmax}]**. Здесь **eq** — дифференциальное уравнение относительно функции **y**, аргумент **x** изменяется в пределах **[xmin,xmax]**, initdata — начальные условия.

В качестве примера найдем решение дифференциального уравнения $y'' - 2y' + 5xy = 0$ с начальными условиями $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ на отрезке $x \in [0, 3]$:

```
eq = y''[x] - 2y'[x] + 5x y[x] == 0;
sol = NDSolve[eq, y[0] == 1, y'[0] == 0, y[x], x, 0, 3]]
{{y[x] → InterpolatingFunction[{{0.,3.}},< > ][x]}}
```

Решение получается посредством подстановки искомой функции $y(x)$ в правую часть. У применяемой интерполяционной функции имеются два аргумента, первый из которых указывает ее область определения, а второй представляет собой таблицу значений функции $y(x_i)$ в различных точках отрезка $[x_{\min}, x_{\max}]$. Эта таблица достаточно велика и потому обычно не выводится, а заменяется скобками $< >$. Приближенное решение может быть найдено в любой точке промежутка:

```
y[2.5] /. sol
{5.63038}
```

С интерполяционной функцией можно обращаться, как с обычной функцией, например, дифференцировать, интегрировать, строить ее график (рис. 86):

```
Plot[y[x] /. sol, x, 0, 3]
```

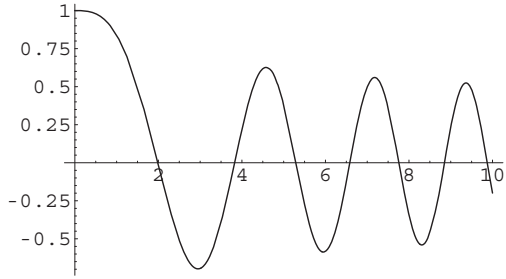


Рис. 86

Дальнейшие примеры демонстрируют эффективность использования системы Mathematica при решении дифференциальных уравнений.

Пример 1. *Дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными.*

Найти все решения уравнения $(1+x^2)y' = 2x\sqrt{1-y^2}$.

Решение. Это уравнение с разделяющимися переменными

$$\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{2xdx}{1+x^2}, \quad y \neq \pm 1.$$

Запишем равество интегралов в Mathematica и получим результат:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}\, dy = \int \frac{2x}{1 + x^2}\, dx + C$$

ArcSin[y] == Log[1+x^2] + C

Заметим, что Mathematica использует для обозначения фунций начальные прописные буквы, в данном примере ArcSin[y] $= \arcsin(y)$, а Log[y] $= \ln(y)$.

Теперь решим это уравнение с помощью встроенной функции **DSolve**:

sol = DSolve[y'[x](1 + x^2) y'[x] == 2x$\sqrt{1 - y[x]^2}$, y[x], x]

y[x] /. sol

{{y → Function[x, Sin[C[1] + Log[1+x^2]]]}}

Sin[C[1] + Log[1 +x^2]]

Пример 2. *Решение дифференциального уравнения в полных дифференциалах.*

Решить уравнение $(3xy^2 - x^2)dx + (3xy^2 - 6y^2 - 1)dy = 0$.

Решение. Убедимся, что уравнение является уравнением в полных дифференциалах:

P[x, y] := 3xy^2 - x^2; Q[x, y] := 3xy^2 - 6y^2 - 1;

D[P[x, y], y] == D[Q[x, y], x]

True

Потенциальную функцию $U(x, y)$ будем искать в виде:

$$\mathbf{U[x, y] = \int P[x,y]\, dx + C[y]}$$

$$-\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2y^2}{2} + C[y]$$

Чтобы найти неизвестную функцию $C[y]$, продифференцируем $U(x, y)$ по y и результат приравняем к $Q(x, y)$:

$$\mathbf{eq1 = D[U[x, y], y] == Q[x,y] \;//\; Simplify}$$

$$1 + 6y^2 + C'[y] == 0$$

Полученное относительно $C[y]$ уравнение легко интегрируется:

$$\mathbf{sol = DSolve[eq1, C[y], y] \;//\; Flatten}$$

$$\{\{C[y] \to -y - 2y^2 + C[1]\}\}$$

Тогда можно получить первый интеграл рассматриваемого ДУ:

$$\mathbf{(U[x, y] \;/.\; sol1) == 0}$$

$$-\frac{x^3}{3} - y + \frac{3x^2y^2}{2} - 2y^3 + C[1] == 0$$

Пример 3. Найти общее решение линейного неоднородного ДУ первого порядка

$$y' + 2xy = xe^{-x^2}\sin x.$$

Это решение $y' = a(x)y + b(x)$ ищется по формуле (см. главу I)

$$y(x) = C\exp\Big(\int\limits_{x0}^{x} a(t)\,dt\Big) + \int\limits_{x0}^{x} b(z)\exp\Big(\int\limits_{x0}^{x} a(t)\,dt\Big)dz.$$

Запишем эту формулу в системе Mathematica и получим результат:

$$\mathbf{res[x_] = C\ exp\ (\int\limits_{x0}^{x} -2t\ dt) + \int\limits_{x0}^{x} ze^{-z^2}\ sin(z)\ exp\int\limits_{x0}^{x} -2t\ dt)\ dz}$$

$$C\, e^{-x^2} + e^{-x^2}\,(-x\cos[x] + \sin[x])$$

Подставим решение в уравнение:

$$\mathbf{y'[x] + 2xy[x] - xe^{-x^2}sin[x] \;/.\; y \to res \;//\; Simplify}$$

$$0$$

Теперь решим это уравнение с помощью встроенной функции DSolve:

$$\mathbf{sol = DSolve[y'[x] + 2xy[x] == xe^{-x^2}\ sin(x),\ y[x],\ x]}$$

$$\{\{y \to \mathrm{Function}[x, C[1]\, e^{-x^2} + e^{-x^2}(-x\cos[x] + \sin[x])]\}\}$$

Получим решение в явном виде:

```
y[x] /. sol
```

$$\{C[1]\, e^{-x^2} + e^{-x^2}(-x \cos[x] + \sin[x])\}$$

Пример 4. *Дифференциальные уравнения высших порядков.*

Построить решение уравнения ангармонических колебаний $x'' + 2ax' + bx = 0$ для параметров $a = 0{,}1$, $b = 1$.

Решение. Найдем общее решение этого уравнения:

```
DSolve[x''[t] + 2a x'[t] + b x[t] == 0, x[t], t]
```

$$\{\{x[t] \to e^{(-a-\sqrt{a^2-b})t}\, C[1] + e^{(-a+\sqrt{a^2-b})t}\, C[2]\}\}$$

Обозначим функцией $\mathrm{sol}(a, b, x_0, y_0)$ решение уравнения с начальными условиями $x(0) = x_0$, $x'(0) = y_0$:

```
sol[a_, b_, x0_, y0_] :=
x[t] /. DSolve[x''[t] + a x'[t] + b x[t] == 0, x[0] == x0, x'[0] == y0, x[t], t][[1]]
```

Изобразим на графике (рис. 87) решения этого уравнения при различных начальных условиях:

```
Plot[Evaluate[{sol[0.1, 2, 1, 0.3], sol[0.1, 1, 0, 1], sol[0.1, 1, 0.5, 0]}], {t, 0, 10},
PlotStyle → {, Dashing[{0.01}], Dashing[{0.03}]}]
```

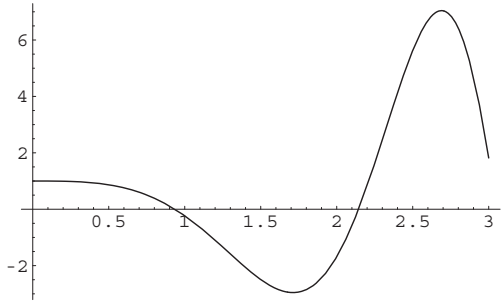


Рис. 87

Пример 5. Найти решение задачи Коши

$$y = y\,\mathrm{tg}(x) + \frac{1}{\cos^2(x)}, \quad y(0) = 0.$$

Напишем уравнение и решим его с помощью функции **DSolve**:

```
eq = {y'[x] == y[x]Tan[x] + 1/Cos[x]^2, y[0] == 0}
sol = DSolve[eq, y[x], x] // Flatten
```

$$\{y[x] \to 2\ \mathrm{ArcTanh}[\mathrm{Tan}[\frac{x}{2x}]]\ \mathrm{Sec}[x]\}$$

Построим график (рис. 88):

Plot[y[x] /. sol, {x, - π/2, π/2}]

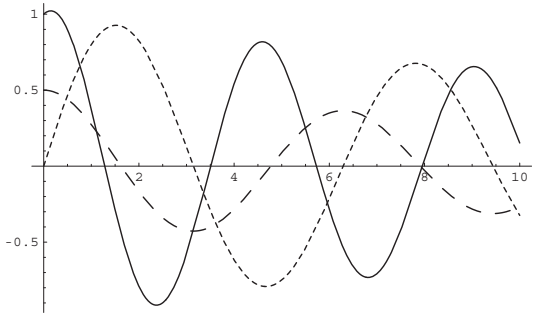


Рис. 88

Пример 6. Найти решение ДУ $y' = \dfrac{1}{x-y}$.

Уравнение не является линейным относительно переменной y, однако оно линейно относительно x. Напишем уравнение для $x(y)$:

eq = x'[y] == (x[y] - y);

Решим его с помощью функции **DSolve**:

sol = DSolve[eq, x[y], y] // Flatten

{x[y] → 1 + y + e^yC[1]}

Построим график решения (рис. 89) при различных значениях $(-1, 1, 2)$ параметра $C[1]$:

ParametricPlot[{{x[y] /. sol /. C[1] -> -1, y}, {x[y] /. sol /. C[1] -> 1, y},
{x[y] /. sol /. C[1] -> 2, y}}, {y, -5, 5},
PlotStyle → {{Thickness[0.009]}, {Dashing[{0.02}], Thickness[0.009]},
{Dashing[{0.05}], Thickness[0.009]}}, AxesLabel -> {"X"Y"}]

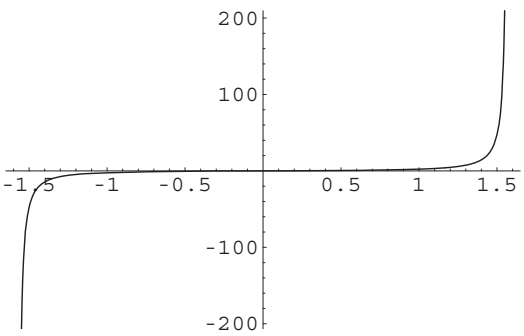


Рис. 89

Пример 7. Найти решение ДУ задачи Коши

$$y' = y - y^3, \quad y(0) = y_0.$$

Рассматриваемое уравнение является уравнением Бернулли. Сделаем замену, учитывая, что $y = 0$ является решением, $z = y^{-2}$, т. е. $y \to \frac{1}{\sqrt{z}}$. Получим уравнение относительно z:

```
eq = y'[x] == y[x] - y[x]^3;
eq1 = eq/. y → (1/Sqrt[z[#]] &);
Solve[eq1, z'[x]] // Flatten
{z'[x] → -2 (-1+z[x]) }
```

Получаем линейное ДУ, решение которого найдем с помощью функции **DSolve**:

```
sol1 = DSolve[eq1, z[x], x] // Flatten
{z[x] → 1 + e^(-2x) C[1]}
```

Общее решение исходного уравнения:

```
eq = 1/y^2 == z[x] /. sol1 /. z[x] -> 1/y^2
1/y^2 == 1 + e^(-2x)C[1]
```

Напишем команду, которая строит частное решение, удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = y_0$:

```
sol[x0_, y0_] := Select[y /. Solve[eq /. C[1] → C[1] /.
Solve[eq /. x → x0, y → y0, C[1]],y] // Flatten, N[# /. x → x0] == y0 &];
```

Например:

```
sol[0,-1]
{-1}
sol[0,1/2]
{e^x/Sqrt[3 + e^(2x)]}
```

Построим график решения $y[x]$ на отрезке [0, 1] для различных начальных условий (рис. 90):

```
Plot[Evaluate[{sol[0, -1], sol[0, 1], sol[0, 1/2], sol[0, 2]}], {x, 0, 1},
AxesLabel → {"Y "X"}]
```

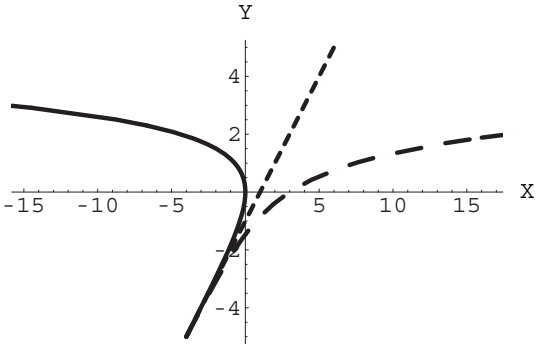


Рис. 90

Пример 8. Решить ДУ

$$y' = \frac{4x-1}{\cos y} y(0) = 0.$$

Проинтегрируем наше уравнение с разделяющимися переменными и получим первый интеграл:

$$\int \textbf{Cos[y] dy} - \int \textbf{(4x - 1) dx == C}$$

$$\text{x - 2x}^2 + \text{Sin[y] == C}$$

Напишем уравнение и решим его с помощью функции **DSolve**:

```
eq = {y'[x] == (4x - 1)/Cos[y[x]], y[0] == 0};
sol = DSolve[eq, y[x], x] // Flatten
```

$$\{y[x] \to -\text{ArcSin}[x - 2x^2]\}$$

Построим график решения на отрезке определения решения $[-1/2, 1]$ (рис. 91):

```
Plot[ y[x] /. sol , {x, -1/2,1}]
```

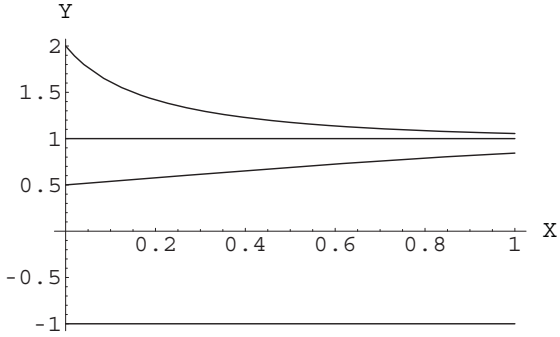


Рис. 91

Пример 9. Построить интегральные кривые ДУ

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}.$$

Определим функцию $\mathrm{sol}[x_0, y_0]$ как численное решение нашего уравнения с начальными условиями x_0, y_0:

```
sol[x0_,y0_] := NDSolve[{1/Sqrt[1 - x^2 - y^2] == 0, y[x0] == y0},
y[x], {x,x0,1}] // Flatten;
```

В цикле, для различных начальных условий, численно решим уравнение, выберем решения с нулевой мнимой частью и построим графики в виде таблицы. Затем все графики отобразим на одном чертеже (рис. 92). Для наглядности нарисуем окружность радиуса 1, а жирными точками обозначим начальные условия:

```
gr = { };
Do[sol1 = sol[x0, y0];
l = Select[Table[{Evaluate[y[x] /. sol1], x}, {x, x0, 1, 0.01}],
 Abs[Im [#[[1]]]] == 0 &];
gr = Append[gr, ListPlot[l,PlotJoined → True, DisplayFunction → Identity]],
{x0, -0.7, 0.2, 0.2}, {y0, -0.7, 0.2, 0.2}];
gr1 = ParametricPlot[{Cos[t], Sin[t]}, {t, 0, 2 π, DisplayFunction → Identity}];
ll = Table[Point[{x, y}], {x, -0.7, 0.2, 0.2}, {y, -0.7, 0.2, 0.2}];
grp = Graphics[{PointSize[0.015],ll}];
Show[gr,gr1,grp, DisplayFunction → $DisplayFunction]
```

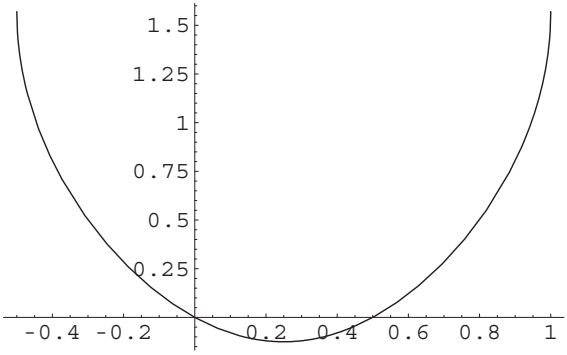


Рис. 92

§ 4. Метод изоклин

Пример. Для ДУ $y' = x^2 + y^2$ построить поле направлений и интегральные кривые, проходящие через точки $(-1, -1)$, $(0, 0)$, $(1, 1)$.

Решение. Предварительно загрузим внешний модуль **Graphics‘Arrow‘**, позволяющий рисовать стрелки, и определим правую часть уравнения

```
«Graphics‘Arrow‘
f[x_, y_] := x^2 + y^2;
```

Для построения изоклин $f(x, y) = k$, где $k = 0{,}2,\ 0{,}4,\ 0{,}6,\ 0{,}8,\ 1$, используем функцию построения контурного графика **ContourPlot**. Этот график соответствующих контурных линий назовем **g1**:

```
g1 = ContourPlot[f[x, y], {x, -1, 1}, {y, -1, 1},
Contours → {0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1}, ContourShading → False];
```

Далее построим поле направлений, помещая на каждую изоклину стрелки, тангенс наклона которых к оси Ox равен значению y':

```
arr = {};
Do[{xmax =√k; dx = xmax/(4 + k);
Do[arr = Append[arr,
{ Arrow[ { -xmax + (i - 1) dx,(k - (-xmax) + ((i - 1) dx)^2)^(1/2)},
{ -xmax + (i - 1) dx + 0.1, (k - (-xmax + (i - 1)dx)^2)^(1/2)} +
0.1k}, HeadScaling → Relative, HeadWidth → 0.7],
Arrow[{ -xmax + (i - 1)dx, - (k - (-xmax + (i - 1) dx))^2)^(1/2)},
{ -xmax + (i - 1) dx + 0.1, - (k - (-xmax + (i - 1) dx)^2)^(1/2) + 0.1k},
HeadScaling → Relative, HeadWidth → 0.6]}], {i,9 + 2k}]},
{k, 0.2, 1, 0.2}];
g2 = Graphics[arr];
```

С помощью функции **NDSolve** найдем интегральные кривые, проходящие через точки $(-1, 1)$, $(0, 0)$, $(1, 1)$, и наложим их на поле направлений (рис. 93):

```
eq = y'[x] - x^2 - y[x]^2 == 0;
r1 = NDSolve[{eq, y[0] == 0}, y[x], {x, -1, 1}];
r2 = NDSolve[{ eq, y[-1] == -1}, y[x], {x, -1, 1 }];
r3 = NDSolve[{eq, y[1] == 1}, y[x], {x, -1, 1}];
g3 = Plot[{ (y[x] /. r1), (y[x] /. r2), (y[x] /. r3)},
{x, -1, 1 }, PlotRange → -1, 1, PlotStyle → Thickness[0.009],
DisplayFunction → Identity];
Show[g1, g2, g3, PlotRange → {-1, 1}, Axes → True,
DisplayFunction → DisplayFunction];
```

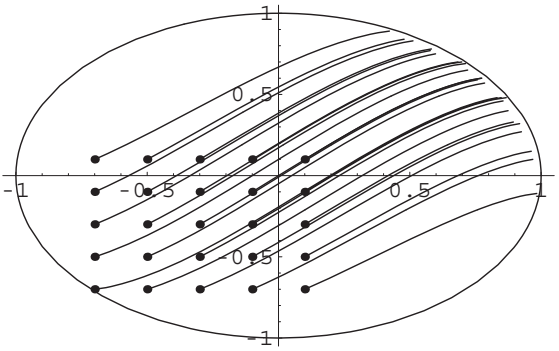


Рис. 93

§ 5. Нахождение решения в виде степенного ряда

Пример. В задаче Коши $y' = y^2 - x$, $y(0) = 1$ найти решение в виде степенного ряда.

Решение. Функция $y^2 - x$ является аналитической по переменным x, y в окрестности точки (0, 1), поэтому существует аналитическое решение в виде степенного ряда. Запишем это:

$$\mathbf{n=10;}$$

$$\mathbf{y[x_] := \sum_{i=0}^{n} a_i x^i;}$$

Подставим этот ряд в наше уравнение и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x. Получим систему уравнений относительно a_i:

$$\mathbf{eq = Expand[y'[x] - y[x]^2 + x];}$$

$$\mathbf{eq1 = Table[Coefficient[eq, x, i] == 0, i, 0, n - 1]}$$

$$\mathbf{\{-1+a_1==0,\ 1-2a_1+2a_2==0,\ -a_1^2-2a_2+3a_3==0,}$$

$$\mathbf{-2a_1a_2-2a_3+4a_4==0,\ -a_2^2-2a_1a_3-2a_4+5a_5==0,}$$

$$\mathbf{-2a_2a_3-2a_1a_4-2a_5+6a_6==0,\ -a_3^2-2a_2a_4-2a_1a_5-2a_6+7a_7==0,}$$

$$\mathbf{-2a_3a_4-2a_2a_5-2a_1a_6-2a_7+8a_8==0,}$$

$$\mathbf{-a_4^2-2a_3a_5-2a_2a_6-2a_1a_7-2a_8+9a_9==0,}$$

$$\mathbf{-2a_4a_5-2a_3a_6-2a_2a_7-2a_1a_8-2a_9+10a_{10}==0\}}$$

Так как $y(0) = 1$, то $a_0 = 1$. Запишем это:

$$\mathbf{a_0=1;}$$

Решаем систему уравнений относительно a_i:

$$\mathbf{var = Table[a_i,\{i,1,n\}];}$$

$$\mathbf{sol = Solve[eq1, var]}$$

$$\mathbf{\{\{a_{10} \to \frac{29549}{90720}, a_9 \to \frac{1637}{4536}, a_8 \to \frac{447}{1120}, a_7 \to \frac{559}{1260},}$$

$$\mathbf{a_6 \to \frac{22}{45}, a_5 \to \frac{11}{20}, a_4 \to \frac{7}{12}, a_3 \to \frac{2}{3}, a_2 \to \frac{1}{2}, a_1 \to 1\}\}}$$

Получаем решение задачи:

$$\mathbf{y[x]\ /.\ sol}$$

$$\{1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{2x^3}{3}+\frac{7x^4}{12}+\frac{11x^5}{20}+\frac{22x^6}{45}+\frac{559x^7}{1260}+$$
$$+\frac{447x^8}{1120}+\frac{1637x^9}{4536}+\frac{29549x^{10}}{90720}\}$$

§ 6. Метод малого параметра

Пример. Для задачи Коши $y' + y = \varepsilon x y^2$, $y(0) = 1$ найти три члена разложения решения по степеням малого параметра ε.

Поскольку правая часть уравнения аналитична по y, ε, решение ищем в виде

$$\mathbf{n=3;}$$

$$\mathbf{y[x_]:=}\sum_{i=0}^{n}\varepsilon^{i}\ \mathbf{y_i[x];}$$

Подставим ряд в уравнение и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях ε:

$$\mathbf{eq = Expand[y'[x] + y[x] - \varepsilon\ x\ y[x]^2];}$$
$$\mathbf{eq1 = Table[Coefficient[eq,\varepsilon, i] == 0, \{i, 0, n\}]}$$
$$\mathbf{\{y_0[x]+y_0'[x] == 0,-xy_0[x]^2 + y_1[x] + y_1'[x] == 0,}$$
$$\mathbf{-2xy_0[x]y_1[x] + y_2[x] + y_2'[x]==0,}$$
$$\mathbf{-xy_1[x]^2 - 2xy_0[x]y_2[x] + y_3[x] + y_3'[x]==0\}}$$

Запишем начальные условия:

$$\mathbf{cond = \{y_0[0] == 1, y_1[0] == 0, y_2[0] == 0, y_3[0] == 0\};}$$

Теперь последовательно решаем рекуррентную систему $eq1$, используя начальные условия **cond**:

$$\mathbf{ust=\{\};}$$
$$\mathbf{Do[r1 = DSolve[\{eq2[[i + 1]] /.\ ust, cond[[i + 1]]\}, y_i[x],x] // Flatten;}$$
$$\mathbf{ust = Append[ust, r1[[1]]];}$$
$$\mathbf{Print[r1], \{i, 0, n\}]}$$
$$\mathbf{\{y_0[x] \to e^{-x}\}}$$
$$\mathbf{\{y_1[x] \to e^{-2x}(-1+e^{x}-x)\}}$$
$$\mathbf{\{y_2[x] \to e^{-3x}(-1+e^{x}-x)^2\}}$$
$$\mathbf{\{y_3[x] \to e^{-4x}(-1+e^{x}-x)^3\}}$$

Итак, получаем решение нашей задачи:

$$\mathbf{y[x]/.\{\ y[x] \to}\sum_{i=0}^{n}\varepsilon^{i}\ \mathbf{y_i[x]\ \}\ /.ust}$$

$$\mathbf{e^{-x}+e^{-2x}(-1+e^{x}-x)}\varepsilon+\ \mathbf{e^{-3x}(-1+e^{x}-x)^2}\varepsilon^2\ +\mathbf{e^{-4x}(-1+e^{x}-x)^3}\varepsilon^3$$

§ 7. Уравнение Эйри

Пример. Рассмотрим следующую задачу Коши для ДУ Эйри (см. гл. V).

Дано уравнение $y'' + xy$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$. Построить решение в виде степенного ряда.

Решение. Решение можно найти в явном виде:

```
sol = DSolve[{y''[x] + xy[x] == 0, y[0] == 1, y'[0] == 0}, y[x], x]
```

$$\{\{y[x] \to \frac{1}{2}(3^{2/3}\text{AiryAi}[(-1)^{1/3}x]\text{Gamma}[\frac{1}{2}]+ 3^{1/6}\ \text{AiryBi}[(-1)^{1/3}x]\ \text{Gamma}[\frac{1}{2}])\}\}$$

Построим график (рис. 94):

```
gr1 = Plot[{y[x] /. sol }, {x, 0, 20}];
```

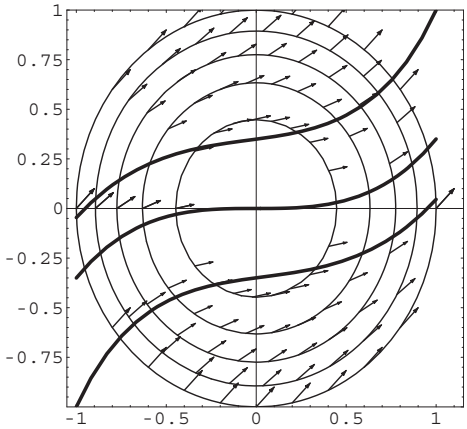


Рис. 94

Найдем решение в виде степенного ряда:

$$y[x_] := \sum_{n=0}^{\infty} a_n\ x^n$$

Подставим ряд в уравнение, получим тождество:

$$y''[x] + xy[x]==0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1+n)nx^{-2+n}a_n + x\sum_{n=0}^{\infty}x^n\ a_n==0$$

Объединяем две суммы в одну, получим

$$2a_2 + \sum_{n=2}^{\infty}((-1+n)n\ a_n + a_{n-3})x^{n-2}==0$$

Отсюда $2a_2 = 0$, $(-1+n)na_n + a_{n-3}$, и получаем рекуррентную формулу $a_n = -a_{n-3}/(n(n-1))$.

Запишем эти соотношения для коэффициентов и многочлена степени 100 в виде операторов:

$$a_0=1;\ a_1=0;\ a_{24}=0;$$

$$\mathrm{Do}[a_n =- a_{n-3}/(n(n-1)),\{n,3,100\}];$$

$$y1=\sum_{n=0}^{100} x_n\ a_n$$

Выведем первые 10 членов многочлена:

Take[y1,10]

$$1-\frac{x^3}{6}+\frac{x^6}{180}-\frac{x^9}{12960}+\frac{x^{12}}{1710720}-\frac{x^{15}}{359251200}+\frac{x^{18}}{109930867200}-\frac{x^{21}}{46170964224000}+\frac{x^{24}}{25486372251648000}-\frac{x^{27}}{17891433320656896000}$$

Построим график (рис. 95):

gr2 = Plot[{y1}, {x, 0, 10}]

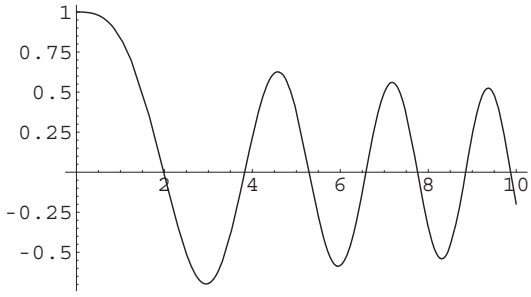


Рис. 95

Как видим из рисунков, графики совпадают. Решение в виде степенного ряда можно построить практически любой длины.

§ 8. Задача о релаксационных колебаниях

Пример 1. Построить график решения уравнения, описывающего релаксационные колебания,

$$x'' + x - \alpha(1 - x^2)x' = 0.$$

Решение. Напишем уравнение и его численное решение для различных значений параметра α ($\alpha = 10$ на рис. 96, $\alpha = 100$ на рис. 97):

sol[α_] := NDSolve[{x”[t] + x[t] - α(1 - x[t]^2)x’[t] == 0, x’[0] == 1, x[0] == 0},
x[t],{t,0,α *10}, MaxStep $\to \infty$];

Plot[Evaluate[x[t] /. sol[10], {t, 0, 200}], AxesLabel $\to$ {"t "X"}]

Plot[Evaluate[x[t] /. sol[100], {t, 0, 200}], AxesLabel $\to$ {"t "X"}]

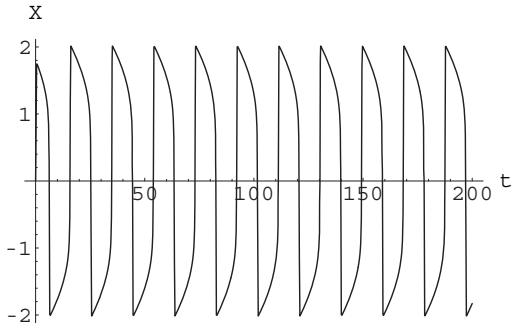


Рис. 96

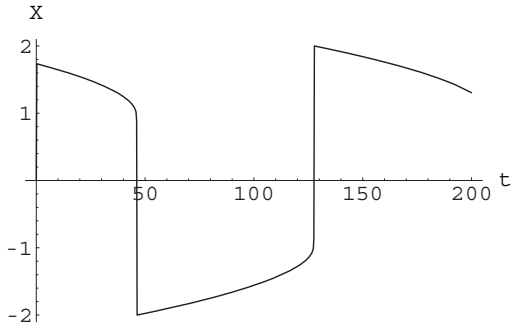


Рис. 97

Пример 2. Для уравнения из примера 1 при малых α ($\alpha = 0{,}01$ на рис. 98) колебания близки к гармоническим (аналитическим методом Линштедта–Пуанкаре эти случаи изучены в Дополнении I):

```
sol = NDSolve[{x''[t] + x[t] - 0.01(1-x[t]^2) x'[t]==0, x'[0]==1, x[0]==0},
x[t],{t,0,20, MaxStep → ∞];
Plot[Evaluate[x[t] /. sol, {t, 0, 20}], AxesLabel → {"t "X"}]
```

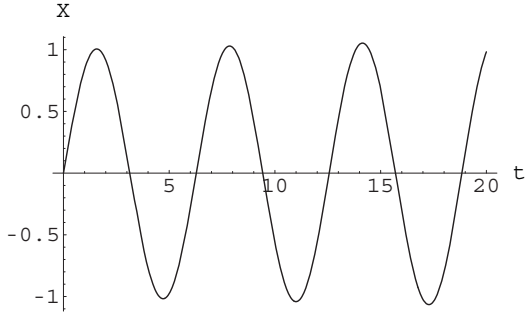


Рис. 98

§ 9. Устойчивый и неустойчивый предельные циклы

Пример 1. *Устойчивый предельный цикл.*

Построить фазовый портрет автономной системы и показать, что система имеет устойчивый предельный цикл:

$$\begin{cases} \dot{x} = x(1 - x^2 - y^2) - y, \\ \dot{y} = y(1 - x^2 - y^2) + x. \end{cases}$$

Решение. Запишем уравнения системы:

```
eqx[x_,y_]:=x(1-x^2-y^2)-y;
eqy[x_,y_]:=y(1-x^2-y^2)+x;
```

Определим функцию $\mathrm{sol}[x_0, y_0]$ как численное решение системы при начальных условиях $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$ на отрезке $[0, 10]$:

```
sol[x0_, y0_] := {x[t], y[t]} /.
NDSolve[{x'[t] == eqx[x[t], y[t]], y'[t] == eqy[x[t], y[t]],
x[0] == x0, y[0] == y0}, {x[t], y[t]}, {t, 0, 10}];
```

Построим графики численных решений для различных начальных значений x_0, y_0 (рис. 99):

```
gr1 = ParametricPlot[Evaluate[Flatten[Table[sol[x0, y0],
{x0, -2, 2, 0.5}, {y0, -2, 2, 0.5}], 1]], {t, 0, 10}]
```

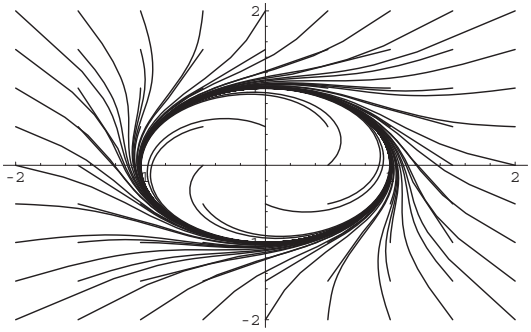


Рис. 99

Нарисуем векторное поле этой системы (рис. 100):

```
«Graphics‘PlotField‘
gr2 = PlotVectorField[{eqx[x, y], eqy[x, y] },
{x, -2, 2}, {y,-2, 2}, PlotPoints → 25];
```

Совместим оба рисунка:

```
Show[gr1, gr2]
```

и получим фазовый портрет (рис. 101).

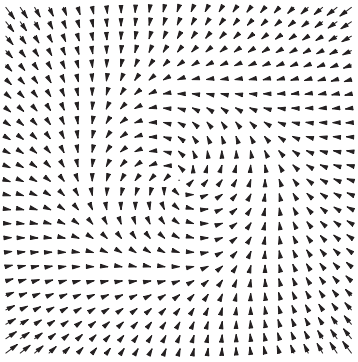


Рис. 100

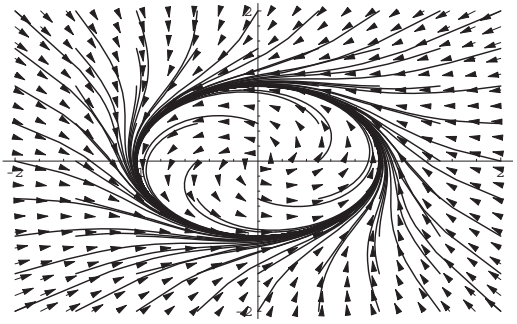


Рис. 101

Пример 17. *Неустойчивый предельный цикл.*

Упражнение. Пользуясь системой Mathematica, построить фазовый портрет автономной системы, показать, что она имеет неустойчивый предельный цикл, и построить соответствующие графики:

$$\begin{cases} \dot{x} &= -x(1-x^2-y^2)-y, \\ \dot{y} &= -y(1-x^2-y^2)+x. \end{cases}$$

Решение. Запишем правую часть системы:

```
eqx[x_, y_] := -y - x(1-x^2-y^2)
eqx[x_, y_] := x - y(1-x^2-y^2)
```

§ 10. Нахождение положений равновесия ДС

Пример. Найти положения равновесия ДС (стационарные решения системы ДУ)

$$\begin{cases} \dot{x} = x(x^2+y^2-1)(x^2+y^2-4)-y, \\ \dot{y} = (y(x^2+y^2)+\frac{x}{3})(x^2+y^2-4)+x. \end{cases}$$

Напомним, что положения равновесия ДС (автономной системы)

$$x' = f(x, y),$$
$$y' = g(x, y)$$

определяются как решение системы алгебраических уравнений:

$$\mathbf{f(x,y) = 0},$$
$$\mathbf{g(x,y) = 0}.$$

Сформируем систему алгебраических уравнений:

$$\mathbf{eq=\{x(x^2+y^2-1)(x^2+y^2-4)-y==0,\ (y(x^2+y^2)+\frac{x}{3})\ (x^2+y^2-4)+x==0\}}$$

решаем эту систему:

```
res = N[Solve[eq, x,y]]
{{y → 0., x → -1.}, {y → 0., x → 0.}, {y → 0., x → 1.},
{y → 0.907448 - 3.28081i, x → -3.82322 - 0.816339i},
{y → -0.907448 + 3.28081i, x → 3.82322 + 0.816339i},
{y → 0.907448 + 3.28081i, x → -3.82322 + 0.816339i},
{y → -0.907448 - 3.28081i, x → 3.82322 - 0.816339i},
{y → 0.+0.139514i, x → 0. + 0.0339987i},
{y → 0.-0.139514i, x → 0. - 0.0339987i}},
```

и выберем действительные решения.

```
Select[res, Head[#[[2]][[2]]] == Real &]
{{y → 0., x → -1.}, {y → 0., x → 0.}, {y → 0., x → 1.}}
```

Таким образом, находим три положения равновесия $(0, 0)$, $(0, -1)$, $(0, 1)$.

§ 11. Система Лотки–Вольтерры с насыщением

Пример. Исследовать ДС

$$\begin{cases} x' = 2x - \dfrac{xy}{1+sx}, \\ y' = -y + \dfrac{xy}{1+sx}, \end{cases}$$

где $s > 0$ — параметр, характеризующий насыщение хищников.

Решение. Найдем положения равновесия ДС. Для этого составим уравнения из правых частей и решим их:

```
eq1 = 2x - x y/(1 + s x);
eq2 = x y/(1 + s x) - y;
sol = Solve[{eq1 == 0, eq2 == 0}, {x, y}] // Flatten
```

$$\{x \to 0,\ y \to 0,\ y \to -\frac{2}{-1+s},\ x \to -\frac{1}{-1+s}\}$$

Выберем ненулевое решение:

```
sol= Take[sol,-2]
```

$$\{y \to -\frac{2}{-1+s},\ x \to -\frac{1}{-1+s}\}$$

Итак, $\left(-\dfrac{1}{-1+s}, -\dfrac{2}{-1+s}\right)$ — положение равновесия.

Далее задаем и реализуем в системе Mathematica следующий порядок действий.

1. Начало координат переносим в найденное положение равновесия.
2. Линеаризуем полученную ДС.
3. Находим собственные значения матрицы линеаризованной ДС (матрицы Якоби в точке положения равновесия):

```
y0 = y /. sol; x0 = x /. sol;
eq1 = Normal[Series[Simplify[Expand[eq1 /. {x → x + x0, y → y + y0}]],
{x, 0, 1}, {y, 0, 1}]];
eq2 = Normal[Series[Simplify[Expand[eq2 /. {x → x + x0, y → y + y0}]],
{x, 0, 1}, {y, 0, 1}]];
A = {{Coefficient[eq1, x] /. y → 0, Coefficient[eq1, y] /. x → 0},
{Coefficient[eq2, x] /. y → 0, Coefficient[eq2, y] /. x → 0}};
ev = Eigenvalues[A]
{s-√(-2+2s+s^2), s-√(-2+2s+s^2)}
```

Итак, найдены собственные значения $\lambda_{1,2} = s \pm \sqrt{-2+2s+s^2}$. При $s = 0$ положение равновесия является центром. В остальных случаях имеем неустойчивое положение равновесия: неустойчивый фокус или седло.

Построим графики решения ДС и фазовых траекторий.

Для этой цели определим функцию $\mathrm{sol}[x_0, y_0]$ как численное решение системы при заданных начальных условиях x_0, y_0:

```
sol[x0_, y0_] := NDSolve[{x'[t] == 2x[t] - x[t] y[t]/(1 + s x[t]),
y'[t] == x[t] y[t]/(1 + s x[t]) - y[t], x[0] == x0, y[0] == y0},
{x[t], y[t]}, {t, 0, 100}, MaxSteps → ∞];
```

и набор значений параметра s

```
par = {0., 0.01};
```

Далее в цикле зададим построение графика решений для начальных значений (1, 1) и графика фазовых траекторий для различных начальных значений: (0,2; 2), (0,4; 2), (0,6; 2), (0,8; 2), (1, 2):

```
Do[s = par[[k]];
gr1 = Plot[Evaluate[{x[t], y[t]} /. sol[1, 1]], { t, 0, 100 },
PlotStyle → {Dashing[{ 0.015 }], {}}];
ParametricPlot[Evaluate[Flatten[Table[{x[t], y[t]} /. sol[m, n],
{m, 0.2, 1., 0.2}, {n, 2, 2, 1}], 1]], {t, 0, 20 }],{k, 1, 2}]
```

В результате выполнения этих операторов получаем графики, изображенные на рис. 102–104.

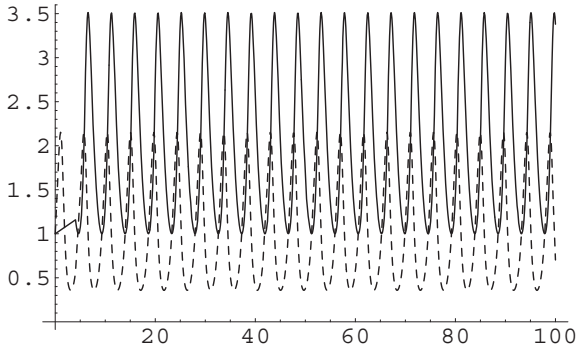


Рис. 102. $x(t)$ (пунктир), $y(t)$ при $s = 0$

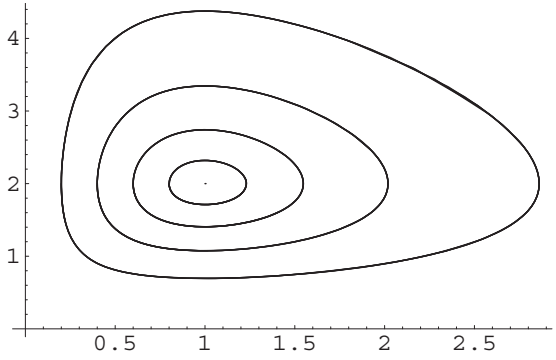


Рис. 103. Фазовые траектории при $s = 0$

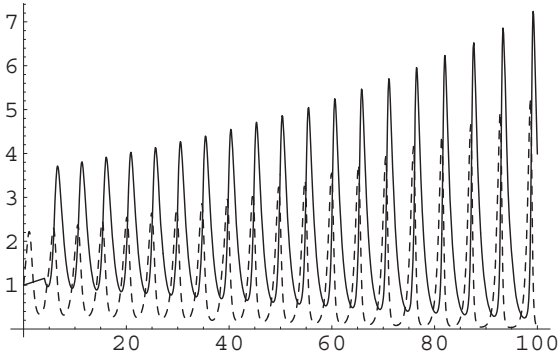


Рис. 104. $x(t)$ (пунктир), $y(t)$ при $s = 0{,}01$

Случай $s = 0$ соответствует классической системе Лотки–Вольтерры без насыщения (см. Доп. I). Эта система консервативна, и ей соответствует семейство замкнутых траекторий, окружающих положение равновесиия (см. Доп. I, § 3). В § 6 замкнутые траектории вычислены аналогичным методом Линдштедта–Пуанкаре.

При $s > 0$ имеем более адекватную действительности диссипативную систему Лотки–Вольтерры с насыщением. Здесь имеется устойчивый предельный цикл (см. Доп. I, §12).

На рис. 105 показана одна траектория, наматывающаяся на предельный цикл снаружи.

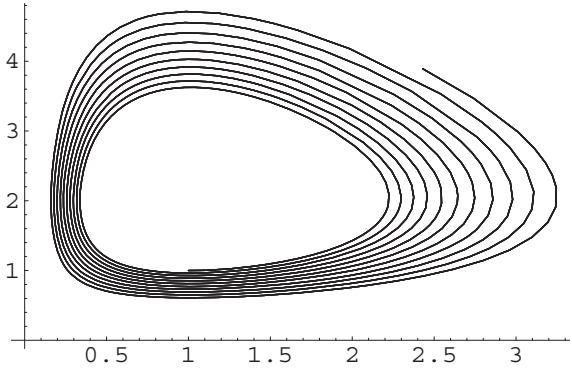


Рис. 105. Фазовые траектории при $s = 0{,}01$

§ 12. Брюсселятор

Пример. Исследуем ДС, предложенную брюссельской научной школой, как первое приближение к ДС Власова–Жаботинского (см. Доп. I, §12)

$$\begin{cases} x' = a - (b+1)x + x^2 y, \\ y' = bx - x^2 y, \quad a > 0, \quad b > 0, \quad x > 0, \quad y > 0. \end{cases}$$

Решение. Найдем сначала положения равновесия ДС. Для этого составим уравнения из правых частей и решим их:

```
eq1 = a-(b+1)x +x^2y;
eq2 = bx-x^2y;
sol = Solve[{eq1 == 0, eq2 == 0}, {x, y}] // Flatten
{y → b/a, x → a}
```

Итак, $\left(\frac{b}{a}, a\right)$ — особая точка.

Далее переносим начало координат в эту точку:

```
Expand[eq1 /. {x → x + x0, y → y + y0}]
Expand[eq2 /. {x → x + x0, y → y + y0}]
```

$$- x + bx + \frac{bx^2}{a} + a^2y + 2axy + x^2y$$

$$- bx - \frac{bx^2}{a} - a^2y - 2axy - x^2y$$

Берем линейную часть полученных выражений, составляем матрицу A из коэффициентов при x, y и ищем собственные значения этой матрицы:

```
A = {{b - 1, a^2}, {-b, -a^2}} ;
ev = Eigenvalues[A]
```

$$\{\frac{1}{2}\ (-1-a^2+b-\sqrt{-4a^2+(1+a^2-b^2)^2}),\ \frac{1}{2}\ (-1-a^2+b+\sqrt{-4a^2+(1+a^2-b^2)^2})\}$$

Получили корни характеристического уравнения

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(-1 - a^2 + b \pm \sqrt{-4a^2 + (1 + a^2 - b^2)^2}).$$

Из этого выражения видно, что при $b < 1 + a^2$ действительная часть отрицательна, положение равновесия $(a,\ b/a)$ устойчиво и является фокусом. Если же $b > 1 + a^2$, то положение равновесия становится неустойчивым, появляется устойчивый предельный цикл. Значение $b = 1 + a^2$ является бифуркационным. Построим графики решения системы и фазовых траекторий для $a = 1$ и различных значений b (1, 2, 3).

Определим функцию $\mathrm{sol}[x_0,\ y_0]$ как численное решение системы при заданных начальных условиях x_0, y_0:

```
a=0.1
sol[x0_, y0_] := NDSolve[{x'[t] == a-(b+1)x[t] - x[t]^2 y[t],
y'[t] == bx[t] -x[t]^2 y[t], x[0] == x0, y[0] == y0},
{x[t], y[t]}, {t, 0, 1000}, MaxSteps → ∞];
```

В цикле зададим построение графика решений системы и графика фазовых траекторий для различных начальных значений.

```
Do[
gr1 = Plot[Evaluate[{x[t], y[t]} /. sol[1, 1]], {t, 0, 100},
PlotStyle → {Dashing[{0.015}], {}}];
ParametricPlot[Evaluate[Flatten[Table[{x[t], y[t]} /. sol[m, n],
{m, 0.5, 2.5, 0.5}, {n, 0.5, 2, 0.5}], 1]], { t, 0, 10 }],
{b, 1, 3}]
```

В результате выполнения этих операторов получаем графики, представленные на рис. 106–111.

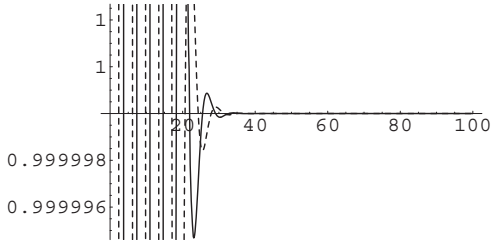


Рис. 106. $x(t)$ (пунктир), $y(t)$ для $b < 1 + a^2$

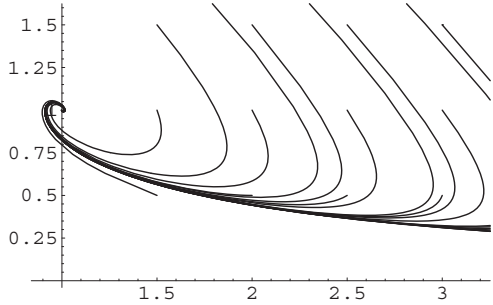


Рис. 107. Фазовые траектории для $b < 1 + a^2$

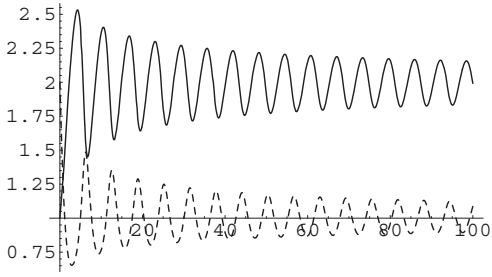


Рис. 108. $x(t)$ (пунктир), $y(t)$ для $b = 1 + a^2$

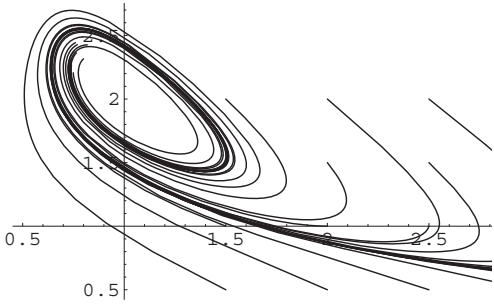


Рис. 109. Фазовые траектории для $b = 1 + a^2$

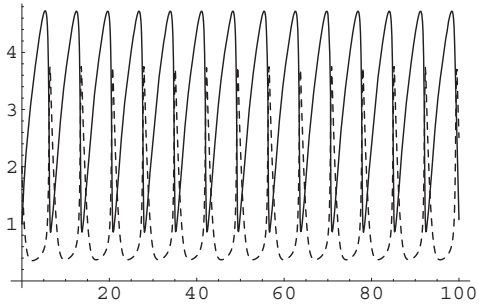


Рис. 110. $x(t)$ (пунктир), $y(t)$ для $b > 1 + a^2$

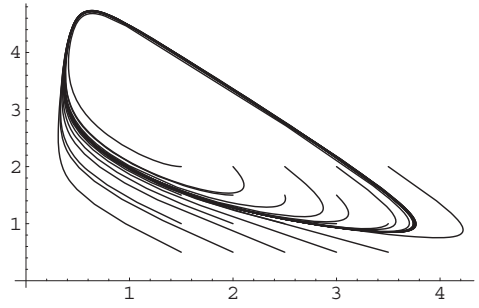


Рис. 111. Фазовые траектории для $b > 1 + a^2$

§ 13. Странный аттрактор Лоренца

Исключительные возможности системы Mathematica прекрасно демонстрируются на следующем примере, упоминавшемся в Доп. I, §4.

Пример. Исследуем ДС

$$\begin{cases} x' = 10x + 10y, \\ y' = 28x - y - xz, \\ z' = -8/3z + xy. \end{cases}$$

Решение. Найдем положение равновесия ДС. Для этого составим уравнения из правых частей и решим их:

```
eq1 = 10x+10y; eq2 = 28x-y-xz; eq3=-8/3z+xy
sol = Solve[{eq1 == 0, eq2 == 0, eq3 == 0}, {x, y}] // Flatten
{y → 0, x → 0, z → 0,
x → -6√2, y → -6√2, z → 27, x → 6√2, y → 6√2, z → 27}
```

Система имеет три особые точки, исследуем их на устойчивость. Для этого выполним для каждой точки действия, аналогичные действиям в предыдущих примерах, т. е. переносим начало координат в эту точку, составляем характеристическую матрицу из коэффициентов при линей-

ных членах и ищем собственные значения этой матрицы или корни характеристического многочлена. Все эти действия записаны в виде общей программы:

```
len = Length[sol];
Do[
x0 = x /. Take[sol, {k, k + 2}];
y0 = y /. Take[sol, {k, k + 2}];
z0 = z /. Take[sol, {k, k+ 2}];
eq11 = eq1 /. {x → x + x0, y → y + y0, z → z + z0};
eq22 = eq2 /. {x → x + x0, y → y + y0, z → z + z0};
eq33 = eq3 /. {x → x + x0, y → y + y0, z → z + z0};
A = {Coefficient[eq11, {x, y, z}] /. {x → 0, y → 0, z → 0},
{Coefficient[eq22, {x, y, z}] /. {x → 0, y → 0, z → 0},
{Coefficient[eq33, {x, y, z}] /. {x → 0, y → 0, z → 0}};
ev = N[Eigenvalues[A]];
Print[ev], {k, 1, l, 3}]
{-22.8277, 11.8277, -2.66667}
{-13.8546, 0.0939556 + 10.1945i, 0.0939556 - 10.1945i}
{-13.8546, 0.0939556 + 10.1945i, 0.0939556 - 10.1945i}
```

Полученные корни характеристического уравнения показывают, что все положения равновесия являются неустойчивыми. Построим графики решения ДС и фазовых траекторий.

Определим функцию $\mathrm{sol}[x_0, y_0, z_0]$ как численное решение ДС при заданных начальных условиях x_0, y_0, z_0:

```
sol[x0_, y0_,z0_] := NDSolve[{x'[t] == -10x[t] + 10y[t],
y'[t] == 28x[t] - y[t] - x[t]z[t],
z'[t] == -8/3z[t] + x[t]y[t], x[0] == x0, y[0] == y0, z[0] == 0},
{x[t], y[t], z[t]}, {t, 0, 1000}, MaxSteps → ∞];
Plot[Evaluate[{x[t]} /. sol[2,2,2]], {t, 0, 20}];
ParametricPlot[Evaluate[Flatten[Table[{x[t], y[t]} /. sol[m, n,2],
{m, 0, 2,1}, {n, 1, 2, 1}], 1]], {t, 0, 20}],
ParametricPlot3D[Evaluate[{x[t], y[t],z[t]} /. sol[2,2,2], {t, 0, 20}];
```

В результате выполнения этих операторов получаем графики, показанные на рис. 112–114.

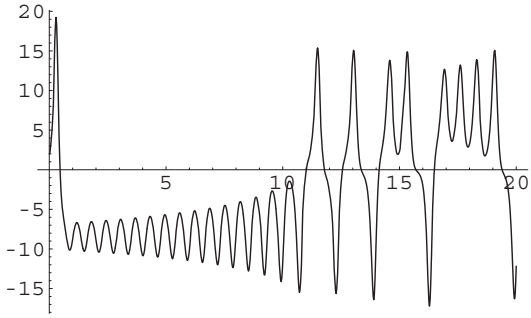


Рис. 112. Решение $x(t)$

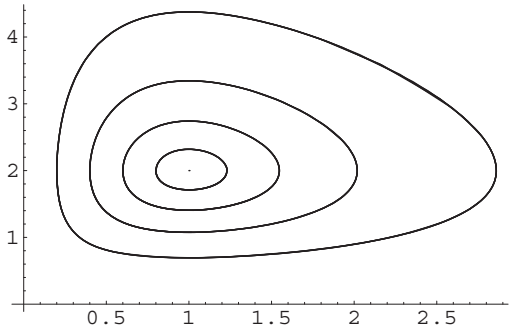


Рис. 113. Фазовые траектории x, y

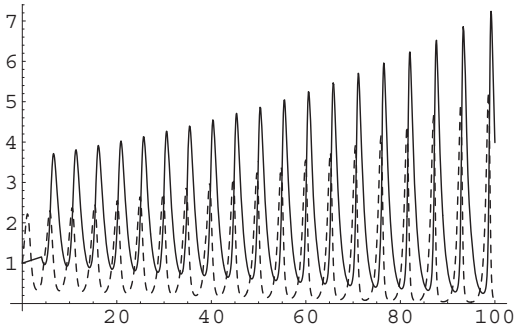


Рис. 114. Фазовые траектории x, y, z

На рисунках видно, что все траектории притягиваются к некоторому причудливому, сложно устроенному множеству, названному, по имени обнаружившего его ученого, странным аттрактором Лоренца.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Автономная (динамическая) система 99
Асимптотическая устойчивость 106
Аттракторы 252, 303

Банахово пространство 159
Биения 202, 270
Бифуркация Пуанкаре–Андронова–Хопфа 209
— решения ДУ 207
— седло–узел 214
— седло–центр 218
Брюсселятор 245, 300

Граничная задача 62

Диагонализуемая матрица 78, 80
Диагональная матрица 81
Динамическая система (ДС) 99
Диссипативная система 120
Дифференциальное уравнение (ДУ) 7, 11
Дифференциальный оператор 47, 51
ДС Лотки–Вольтерры 204, 224, 271
— — с насыщением 247
ДУ бегущей волны 180
— Бернулли 29
— в полных дифференциалах 39
—, линейное относительно независимой переменной 25
—, не разрешенное относительно производной 40
— с разделяющимися переменными 33
— с частными производными первого порядка 178
— со специальной правой частью 23, 60
— Эйри 142, 292

Жесткое возникновение автоколебаний 211
Жорданова клетка 85, 90
Жорданова нормальная форма 88
— цепочка 85

Задача Коши 12, 59, 75, 186
Закон сохранения механической энергии 120

Интегральная кривая 12
— поверхность 178
Интегральное уравнение 138
Интегрирующий множитель 40
Источник 113, 114

Катастрофа типа складки 214, 240
Комплексно диагонализуемая матрица 82
Комплексное решение ДУ 50, 82
Консервативная система 120, 124, 226
Корректные и некорректные задачи 254
Краевая задача 62, 65, 152, 154

Линейное ДУ 16, 19
— — неоднородное 19, 23, 60
— — однородное 16, 47, 49, 51

Матрицант 91
Маятник линейный 118
— нелинейный 129, 226
Метод изоклин 136, 289
— Лагранжа вариации произвольных постоянных 19, 56, 94
— Линштедта–Пуанкаре–Ляпунова 222, 235
— малого параметра 143, 144, 291
— неопределенных коэффициентов 141
— последовательных приближений 138
— пристрелки 152
— прогонки 154
— фазовой плоскости 215

Модель теплового взрыва 247, 274

Начальное условие 12
Неединственность решения задачи Коши 36
Непрерывная зависимость решения задачи Коши 171
Непродолжимое (глобальное) решение 14
Неявные функции, операторы 37, 171
Нормированное пространство 158

Общее решение линейного ДУ 18, 49, 55, 181
Оператор сдвига по траекториям 251
Определитель Вронского 46
Орбитальная устойчивость 239
Особое решение ДУ 37
Осциллятор Ван дер Поля 237

Первый закон Кеплера 194
— интеграл ДУ и ДС 38, 102, 179
Периодические решения ДУ 68, 96
Погранслойная поправка 145
Поле направлений 137
Положение равновесия 101, 112
Понижение порядка ДУ 70
Предельный цикл 209, 245, 295
Принцип сжимающих отображений 162
Присоединенные векторы 85
Продолжение решения ДУ 14, 167
Производная в силу ДС 121

Разностная схема 147
Резонанс 198
Релаксационные колебания 240, 293
Решение ДУ 11

Седло 114
Сепаратриса 217
Сингулярное возмущение 144
Системы ДУ 76
Собственное значение 79
Собственный вектор 79, 84
Солитон 217
Степенные ряды 140, 171, 290
Сток 113, 114
Структурная устойчивость 259

Теорема Коши 12, 44, 75, 165, 168
— Коши–Пеано 36
— Ляпунова об устойчивости по линейному приближению 109, 175
— Пуанкаре–Андронова 242
— Пуанкаре–Бендиксона 244
Траектория (орбита) ДС 100

Узел 113, 114, 116
Условие Липшица 164
Устойчивость по линейному (первому) приближению 109, 175
— по Ляпунову 106

Фазовое пространство 100
Фокус 117
Фундаментальная матрица 91
— система решений (ФСР) 48, 78, 83, 89
Фундаментальное решение ДУ 16
Функция Грина 66
— Ляпунова 122, 132
— Четаева 128

Характеристика 184
Характеристическое уравнение 51, 79

Центр 116

Энергия кинетическая 120
— потенциальная 120
Эллиптические функции Якоби 231

Явление взрыва 15
— прекращения решения 15

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Основная литература

1. *Бахвалов Н.С.*, *Жидков Н.П.*, *Кобельков Г.М.* Численные методы. — 4-е изд. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006.
2. *Бугров Я.С.*, *Никольский С.М.* Высшая математика. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. — М.: Наука, 1981.
3. *Егоров А.И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения с приложениями. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007.
4. *Еругин Н.П.* Книга для чтения по общему курсу обыкновенных дифференциальных уравнений. — Минск: Наука и техника, 1970.
5. *Зайцев И.Ф.*, *Полянин А.Д.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001.
6. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Пер. с нем.; Под. ред. Н.Х. Розова. — М.: Наука, 1976.
7. *Карташев А.П.*, *Рождественский Б.Л.* Обыкновенные дифференциальные уравнения и основы вариационного исчисления. — М.: Наука, 1986.
8. *Кудрявцев Л.Д. и др.* Краткий курс математического анализа. В 2 т. — 3-е изд., перераб. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005.
9. *Мальцев А.И.* Основы линейной алгебры. — М.: Наука, 1967.
10. *Мищенко Е.Ф.* Дифференциальное уравнение обыкновенное // Математическая энциклопедия. Т. 2. — М.: Советская Энциклопедия, 1979. — С. 282–290.
11. *Петровский И.Г.* Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.–Л.: ГИТТЛ, 1949.
12. *Понтрягин Л.С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Наука, 1982.
13. *Тихонов А.Н.*, *Васильева А.Б.*, *Свешников А.Г.* Дифференциальные уравнения. — 3-е изд., воспр. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005.
14. *Треногин В.А.* Функциональный анализ. — 4-е изд., исправ. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007.
15. *Треногин В.А.* Критические замечания о преподавании курса ДУ в технических вузах // Современные проблемы преподавания математики и информатике: Материалы Международной научной конференции, посвященной 100-летию академика С.М. Никольского. — М.: издание мехмата МГУ, 2005. — С. 157–160.
16. *Федорюк М.В.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Наука, 1985.
17. *Филиппов А.Ф.* Введение в теорию дифференциальных уравнений. — М.: УРСС, 2004.
18. *Эльсгольц Л.Э.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. — М.: УРСС, 2000.

Дополнительная литература

19. *Амелькин В.В.* Дифференциальные уравнения в приложениях. — М.: Наука, 1987.
20. *Андронов А.А.* Собрание трудов. — М.: Изд-во АН СССР, 1956.
21. *Андронов А.А.*, *Витт А.А.*, *Хайкин С.Э.* Теория колебаний. — М.: Наука, 1981.
22. *Аносов Д.В.*, *Треногин В.А.* Бифуркация // Математическая энциклопедия. Т. 1. — М.: Советская энциклопедия, 1977. — С. 496–498.
23. *Арнольд В.И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Наука, 1971.
24. *Арнольд В.И.* Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1978.
25. *Арнольд В.И.* Теория катастроф. — М.: МГУ, 1983.
26. *Баутин Н.Н*, *Леонтович Е.Л.* Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. — М.: Наука, 1991.
27. *Босс В.* Лекции по математике. Дифференциальные уравнения. — М.: УРСС, 2004.
28. *Боголюбов Н.Н.*, *Митропольский Ю.А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. — М.: Наука, 1974.
29. *Богоявленский О.И.* Методы качественной теории в астрофизике и газовой динамике. — М.: Наука, 1980.
30. *Вайнберг М.М.*, *Треногин В.А.* Теория ветвления решений нелинейных уравнений. — М.: Наука, 1969.
31. *Васильева А.Б.*, *Бутузов В.Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. — М.: Наука, 1973.
32. *Вольтерра В.* Математическая теория борьбы за существование. — М.: Наука, 1976.
33. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости. — М.: Наука, 1967.
34. *Дьяконов В.П.* Mathematica в математических и научно-технических расчетах. — М.: Солон-Пресс, 1983.
35. *Журавлев В.Ф.*, *Климов Д.М.* Прикладные методы в теории колебаний. — М.: Наука, 1988.
36. *Йосс Ж.*, *Джозеф Д.* Элементарная теория устойчивости и бифуркаций / Пер. с англ.; Под ред. Н.Н. Моисеева. — М.: Мир, 1983.
37. *Кузнецов А.П.*, *Кузнецов С.П.*, *Рыскин Н.М.* Нелинейные колебания. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002.
38. *Лэм Дж. Л.* Введение в теорию солитонов. — М.: Мир, 1983.
39. *Ляпунов А.М.* Общая задача устойчивости движения. — М.-Л.: Гостехиздат, 1950.
40. *Марри Дж.* [*Мюррей Дж.*] Нелинейные дифференциальные уравнения в биологии. Лекции о моделях / Пер. с англ.; Под ред. А.Д. Мышкиса. — М.: Мир, 1983.
41. *Марсден Дж.*, *Мак-Кракен М.* Бифуркации рождения цикла и ее применения / Пер. с англ. — М.: Мир, 1980.

42. *Мищенко Е. Ф.*, *Розов Н. Х.* Дифференциальные уравнения и малый параметр. — М.: Наука, 1975.
43. *Моисеев Н. Н.* Асимптотические методы нелинейной механики. — 2-е изд., перераб. — М.: Наука 1981.
44. Нелинейный анализ и нелинейные дифференциальные уравнения / Под ред. В. А. Треногина и А. Ф. Филиппова. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003.
45. *Николис Г.*, *Пригожин И.* Самоорганизация в неравновесных средах / Пер. с англ. — М.: Мир, 1979.
46. *Овсянников Л. В.* Групповой анализ обыкновенных дифференциальным уравнений. — М.: Наука, 1978.
47. *Постон Т.*, *Стюарт И.* Теория катастроф и ее приложения / Пер. с англ. — М.: Мир, 1980.
48. *Пуанкаре А.* О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями // Избранные труды. Т. 1. — М.: Наука, 1971.
49. *Ракитин В. И.* Руководство по методам вычислений и приложения MATHCAD. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005.
50. *Свирежев Ю. М.* Нелинейные диссипативные структуры и катастрофы в экологии. — М.: Наука, 1987.
51. *Скотт Э.* Волны в активных и нелинейных средах в приложении к электронике / Пер. с англ. — М.: Сов. радио, 1977.
52. *Стокер Дж.* Нелинейные колебания в механических и электрических системах / Пер. с англ. — М.: ИЛ, 1958.
53. Теория ветвления и нелинейные задачи на собственные значения / Ред. Дж. Б. Келлер и С. Антман; Пер. с англ.; Под ред. В. А. Треногина и В. И. Юдовича. — М.: Мир, 1974.
54. *Тимошенко С. П.* Колебания в инженерном деле / Пер. с англ. — 2-е изд. — М.: Наука, 1967.
55. *Треногин В. А.* Ветвление решений // Математическая энциклопедия. Т. 1. — М.: Советская энциклопедия, 1977. — С. 676–679.
56. *Филиппов А. Т.* Многоликий солитон. — М.: Наука, 1986.
57. *Хакен Д.* Синергетика. Иерархия неустойчивостей в самоорганизующихся системах и устройствах. — М.: Мир, 1993.
58. *Худяев С. И.* Пороговые явления в нелинейных уравнениях. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003.
59. *Эрроусмит Д*, *Плейс К.* Обыкновенные дифференциальным уравнения. Качественная теория с приложениями / Пер. с англ.; Под ред. Н. Х. Розова. — М.: Мир, 1966.
60. *Berglund N.* Geometrical Theory of Differential Equations. — Lecture Notes, 2001.
61. *Brauer F.*, *Nohel J. A.* The qualitative theory of ordinary differential equations. — Dove Publication., 1989.
62. *Carr J.* Applications of Center Manyfold Theory. — Springer, 1981.
63. *Chicone C.* Ordinary Differential Equations with Applications. — Springer, 1990.
64. *Crauford J. D.* Introduction to bifurcation theory // Reviews of Modern Physics. 1991. V. 63, No. 4.

65. *Enns R.H.*, *McGuire G.S.* Nonlinear Physics with Mathematica for Scientists and Engineers. — Birchauser, 2001.
66. *Hirsch M. W.*, *Smale S.* Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra. — Academic Press, 1971.
67. *Kuznetsov Y.A.* Elements of Application Bifurcation Theory. — Springer, 1998.
68. *Nayfeh*, *Mook D.J.* Nonlinear Oscillations. — Wiley Publication., 1995.