

**В.А. ТРЕНОГИН
И.С. НЕДОСЕКИНА**

УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

*Рекомендовано Научно-методическим советом по математике
Министерства образования и науки Российской Федерации
в качестве учебника для студентов вузов, обучающихся
по специальности «Прикладная математика»
и физико-химическим специальностям*



МОСКВА
ФИЗМАТЛИТ®
2013

УДК 517.95
ББК 22.161.6
Т 66

Треногин В.А., Недосекина И.С. **Уравнения в частных производных.** — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2013. — 228 с. — ISBN 978-5-9221-1448-6.

Излагаемый учебный курс описывает методы решения нескольких важных задач математической физики. Книга составлена из семнадцати лекций, образующих семестровый курс. Теоретический материал иллюстрируется большим количеством задач.

Рекомендовано Научно-методическим советом по математике Министерства образования и науки Российской Федерации в качестве учебного пособия для студентов вузов, обучающихся по специальности «Прикладная математика» и физико-химическим специальностям.

ISBN 978-5-9221-1448-6

© ФИЗМАТЛИТ, 2013
© В.А. Треногин, И.С. Недосекина,
2013

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	5
Лекция 1. Смешанная задача для уравнения диффузии/теплопроводности в простейших случаях	8
Лекция 2. Симметрические неотрицательные линейные операторы. Задачи на собственные значения для оператора второй производной	18
Лекция 3. Смешанная задача для уравнения диффузии/теплопроводности с краевыми условиями общего вида. Метод Фурье	29
Лекция 4. Свойства решений смешанной задачи для одномерного уравнения диффузии/теплопроводности	40
Лекция 5. Смешанная задача для одномерного волнового уравнения	49
Лекция 6. Смешанная задача для двумерного уравнения диффузии/теплопроводности. Решение в случае прямоугольной пластины	62
Лекция 7. Решение смешанной задачи для уравнения диффузии/теплопроводности в круглой пластине	71
Лекция 8. Смешанная задача для двумерного волнового уравнения. Колебания прямоугольной и круглой мембран	85
Лекция 9. Краевые задачи для двумерных уравнений Лапласа и Пуассона. Построение решений в прямоугольнике методом Фурье	93
Лекция 10. Решение задачи Дирихле для уравнений Лапласа и Пуассона в круге	103
Лекция 11. Задача Дирихле для уравнения Лапласа вне круга и в кольце. Задача Неймана в круге	113
Лекция 12. Задача Коши для уравнения диффузии/теплопроводности	123
Лекция 13. Смешанная задача для уравнения диффузии/теплопроводности на полуоси. Метод продолжения ..	136
Лекция 14. Метод подобия в задаче диффузии/теплопроводности. Задача о фазовом переходе	145

Лекция 15. Задача Коши для уравнения струны. Формулы Д'Аламбера–Эйлера	155
Лекция 16. Смешанная задача для полуограниченной струны. Метод продолжения	168
Лекция 17. Применение разностных методов для решения некоторых задач математической физики	177
Приложение 1. Классификация дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка	189
Приложение 2. Вывод основных уравнений математической физики (<i>Р.И. Соколовский, В.А. Треногин</i>)	197
Приложение 3. Портретно-биографическая галерея создателей математической физики	205
Эйлер (Euler) Леонард (1707–1783)	206
Бернулли (Bernoulli) Даниил (1700–1782)	208
Д'Аламбер (D'Alembert) Жан Лерон (1717–1783)	209
Лаплас (Laplace) Пьер Симон (1749–1827)	210
Фурье (Fourier) Жан Батист Жозеф (1768–1830)	211
Пуассон (Poisson) Симеон Дени (1781–1840)	213
Бессель (Bessel) Фридрих Вильгельм (1784–1846)	214
Коши (Cauchy) Огюстен Луи (1789–1857)	215
Дирихле (Dirichlet) Петер Густав (1805–1859)	216
Штурм (Sturm) Шарль Франсуа (1803–1855)	217
Лиувиль (Liouville) Жозеф (1809–1882)	217
Стефан (Stefan) Йозеф (1835–1893)	218
Нейман (Neumann) Карл Готфрид (1832–1925)	218
Ляпунов Александр Михайлович (1857–1918)	219
Стеклов Владимир Андреевич (1863/64–1926)	220
Галёркин Борис Григорьевич (1871–1945)	221
Петровский Иван Георгиевич (1901–1973)	221
Соболев Сергей Львович (1908–1989)	222
Тихонов Андрей Николаевич (1906–1993)	223
Самарский Александр Андреевич (1919–2008)	224
Список литературы	226

Предисловие

Излагаемый ниже учебный курс описывает методы решения нескольких важных задач математической физики. Применение математики к задачам физики, физической химии, механики и других наук многообразно и эффективно. Математическая физика занимается изучением математических моделей, описывающих разнообразные физические явления, в основном, в форме тех или иных задач для дифференциальных уравнений (ДУ) с частными производными. При этом обычно оказывается, что одна и та же математическая задача описывает сразу несколько, казалось бы, далеких друг от друга явлений. Здесь отражается характер современной математики. Методы математической физики играют важнейшую роль в математическом образовании инженера-исследователя, применяющего в своей практической деятельности современный математический аппарат.

В XX в. математики перешли от изучения конкретных задач математической физики к созданию общей теории дифференциальных уравнений с частными производными. Различные подходы к ее изложению нашли отражение в современных университетских курсах. При этом широко используются идеи и методы функционального анализа. Например, часто изложение ведется в пространствах Соболева. Однако математическая физика включена и в программы многих технических специальностей. Здесь при небольшом количестве учебных часов и при недостаточной базе математических знаний у учащихся еще не установилась, на наш взгляд, традиция преподавания математической физики. В предлагаемом пособии мы ограничиваемся рассмотрением нескольких наиболее важных классических задач математической физики, опираясь при этом на простейшие соображения математического и функционального анализа и линейной алгебры. Такой подход представляется нам наиболее целесообразным и эффективным для преподавания математической физики в технических вузах, и мы рекомендуем его нашим коллегам-преподавателям.

Книга составлена из семнадцати лекций, образующих семестровый курс. Эти лекции на протяжении многих лет авторы читали студентам Национального исследовательского технологического университета — МИСиС (Московский институт стали и сплавов), обучавшимся по ряду физико-химических специальностей и специальности «прикладная математика».

При этом нами была поставлена цель — научить учащегося на сравнительно небольшом материале осмысленно применять основные методы решения задач математической физики. Это повлияло на принцип отбора материала и на подходы к его изложению.

Главное внимание мы уделяем методам решения задач математической физики, в значительно меньшей степени останавливаясь на выяснении тех ограничений на параметры задачи (правые части уравнений, начальные и граничные значения), при которых полученное решение будет классическим. Определенное внимание уделяется физическим постановкам и интерпретациям рассматриваемых задач. В книгах из цитируемого списка учебной литературы читатель может найти дополнительную физическую информацию [1–3, 5, 6, 8–10].

В лекциях 1–11 излагается метод Фурье в применении к решению задач математической физики в пространственно ограниченных областях. В современном изложении он трактуется нами не как традиционный метод разделения переменных, а как более простой, на наш взгляд, геометрический метод разложения параметров задачи по некоторому базису — ортогональной системе собственных функций вспомогательного дифференциального оператора (см. [2, 9]). Полученный в качестве решения функциональный ряд мы называем формальным решением задачи. Определенное внимание уделяется и таким важным вопросам теории, как классическое решение, его единственность, корректность задачи, принцип максимума и энергетические соображения. При построении базиса из собственных функций используются такие простейшие понятия функционального анализа (см. [12]), как симметричность, положительность и неотрицательность линейных операторов в пространстве со скалярным произведением, а также свойства собственных значений и собственных функций таких операторов. Этот подход не только позволяет лучше понять структуру решения, но и существенно сокращает вычисления.

Лекции 12–16 посвящены задачам в пространственно неограниченных областях, для построения решений которых мы использовали метод интегрального преобразования Фурье. Здесь же рассматриваются и другие важные для современного инженера-исследователя методы, например, метод подобия, на основе которого рассмотрена важная в приложениях задача о фазовом переходе.

В лекции 17 на примерах задачи Дирихле для уравнения Лапласа в прямоугольнике и смешанной задачи для одномерного уравнения диффузии/теплопроводности рассмотрены разностные

методы решения этих задач. Разностные схемы математической физики эффективны с вычислительной точки зрения (см. [7]), но получение с помощью ЭВМ хороших результатов и их правильная интерпретация тесно связаны с углубленным пониманием математической модели и ее разностной интерпретации.

Вопросы, связанные с классификацией и приведением к каноническому виду линейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка, вынесены нами в приложение 1. В приложении 2 приведен нетрадиционный вывод некоторых основных уравнений математической физики. Приложение 3 содержит материал из истории науки, который может быть полезен для гуманитарного образования студентов. Там представлены краткие биографии и портреты выдающихся ученых, внесших вклад в создание математической физики.

Авторы благодарят профессоров В.М. Савчина и Р.И. Соколовского, ознакомившихся с первичным вариантом книги и сделавших ряд полезных замечаний, которые способствовали улучшению изложения материала.

Лекция 1

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ/ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В ПРОСТЕЙШИХ СЛУЧАЯХ

Начнем с описания следующей задачи. Рассмотрим (см. рис. 1.1) в полуполосе

$$Q = \{(x, t) : 0 < x < l, 0 < t < +\infty\}$$

следующее дифференциальное уравнение (ДУ), называемое *уравнением диффузии/теплопроводности*:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t), \quad (x, t) \in Q. \quad (1.1)$$

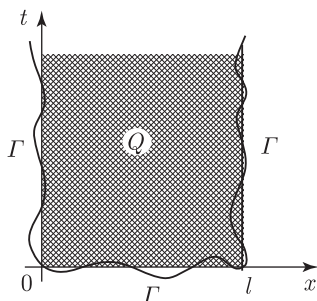


Рис. 1.1

Здесь $a^2 > 0$ — известный числовой параметр, правая часть $f(x, t)$ — известная функция, определенная на Q , а $u = u(x, t)$ — неизвестная функция; t играет роль времени, x — пространственная переменная.

ДУ (1.1) является ДУ с частными производными первого порядка по переменной t и второго порядка по x . По аналогии с обыкновенными ДУ, для устранения произвола в определении $u(x, t)$ следует задать дополнительные условия: одно по переменной t и два по x .

Дополнительное условие по переменной t (функция $\varphi(x)$ предполагается известной)

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in [0, l], \quad (1.2)$$

называется *начальным условием* (оно задано на нижнем основании полуполосы Q).

Два дополнительных условия по переменной x

$$u(0, t) = \alpha_0(t), \quad u(l, t) = \alpha_l(t), \quad t \in [0, +\infty), \quad (1.3)$$

называются *граничными* (или *краевыми*) *условиями* (они заданы на боковых сторонах полуполосы Q). Функции $\alpha_0(t)$ и $\alpha_l(t)$ также предполагаются известными.

Задача (1.1)–(1.3) называется *смешанной задачей* для ДУ диффузии/теплопроводности. В ней присутствуют и начальные, и граничные (краевые) условия. Иногда ее называют *начально-краевой задачей*.

Сформулируем теперь, что мы будем понимать под решением задачи (1.1)–(1.3).

Обозначим через Γ границу области Q , тогда $\overline{Q} = Q \cup \Gamma$ — соответствующая замкнутая область. Существуют различные определения решения задачи (1.1)–(1.3). Ограничимся простейшим и наиболее употребительным определением.

Определение 1.1. Функция $u(x, t)$, определенная в $\overline{Q}$, называется *классическим решением смешанной задачи* (1.1)–(1.3), если:

1) $u(x, t)$ непрерывна в $\overline{Q}$ и удовлетворяет на ее границе Γ условиям (1.2)–(1.3),

2) частные производные $\frac{\partial u}{\partial t}$ и $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ непрерывны в Q , а $u(x, t)$ удовлетворяет в Q уравнению (1.1).

Замечание 1.1. Если смешанная задача (1.1)–(1.3) имеет классическое решение, то функция $f(x, t)$ непрерывна в Q , $\varphi(x)$ непрерывна на $[0, l]$, а $\alpha_0(t)$ и $\alpha_l(t)$ непрерывны на $[0, +\infty)$ и, кроме того, выполняются условия согласования начального и граничных условий

$$\varphi(0) = \alpha_0(0), \quad \varphi(l) = \alpha_l(0). \quad (1.4)$$

Смешанная задача (1.1)–(1.3) имеет ряд полезных физических интерпретаций.

1. Она является математической моделью явления распространения, иначе — диффузии, вещества (раствора, газа, расплавленного металла, нейтронов в металле и т. п.). Пусть

задана трубка длины l — пустая или пористая. Коэффициент a^2 называется коэффициентом диффузии, он определяется физическими параметрами задачи. Внутри трубки могут существовать источники диффундирующего вещества. Функция $f(x, t)$ характеризует их плотность в сечении трубки с координатой x в момент времени t . В начальный момент задано распределение $\varphi(x)$ вещества в трубке (см. начальное условие (1.2)). На концах трубки вещество подается по законам $\alpha_0(t)$ и $\alpha_l(t)$ (см. граничные условия (1.3)). Требуется определить концентрацию вещества $u(x, t)$ в сечении x в момент времени t .

2. ДУ (1.1) описывает также явление распространения тепла. Пусть задан стержень длины l . Боковая поверхность стержня предполагается теплоизолированной, т. е. тепло может проникать в стержень только через его концы. Коэффициент a^2 ($a > 0$) называется *коэффициентом температуроводности*. Он определяется характеристиками материала стержня. Внутри стержня может возникать или поглощаться тепло (например, при прохождении тока, вследствие химических реакций и т. п.). Функция $f(x, t)$ характеризует плотность тепловых источников внутри стержня. В начальный момент задано распределение $\varphi(x)$ температуры в стержне. На концах стержня температура меняется по законам $\alpha_0(t)$ и $\alpha_l(t)$. Требуется определить температуру стержня $u(x, t)$ в сечении x в момент времени t .

Отложим пока важный вопрос о том, существует ли решение задачи (1.1)–(1.3) и единственно ли оно, и займемся формальным построением решения в простейших случаях.

Пример 1.1. Рассмотрим смешанную задачу для ДУ с нулевой правой частью и нулевыми граничными значениями (задача об остывании стержня, на концах которого поддерживается нулевая температура):

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & 0 < x < \pi, \quad t > 0; \\ u(x, 0) = \sin x, & 0 \leq x \leq \pi; \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, & t \geq 0. \end{cases}$$

Попробуем найти ее решение в виде

$$u(x, t) = A(t) \sin x,$$

где $A(t)$ — неизвестная пока функция. Заметим, что граничные условия в этом случае автоматически выполняются, так как $\sin 0 = \sin \pi = 0$. Остается подобрать функцию $A(t)$ так, чтобы искомое решение удовлетворяло ДУ и начальному условию.

Сначала найдем производные

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A'(t) \sin x, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -A(t) \sin x.$$

Подставим их в ДУ и получим

$$(A'(t) + A(t)) \cdot \sin x = 0.$$

Так как последнее равенство должно выполняться при любых значениях x , то

$$A'(t) + A(t) = 0.$$

Воспользуемся начальным условием

$$u(x, 0) = A(0) \sin x = \sin x,$$

откуда получим, что $A(0) = 1$.

Итак, неизвестная функция $A(t)$ может быть найдена как решение следующей задачи Коши для линейного ДУ первого порядка:

$$\begin{cases} A'(t) + A(t) = 0, \\ A(0) = 1. \end{cases}$$

Общее решение этого ДУ имеет вид

$$A(t) = ce^{-t},$$

где c — произвольная постоянная. Используя начальные условия, получим решение задачи Коши

$$A(t) = e^{-t}.$$

Таким образом, искомое формальное решение задачи (1.1)–(1.3) дается следующей формулой:

$$u(x, t) = e^{-t} \sin x.$$

Проверьте, что это решение является классическим решением рассматриваемой задачи.

Рассмотрим теперь задачу (1.1)–(1.3) при дополнительном существенном предположении, что граничные условия (1.3) однородные ($\alpha_0(t) = \alpha_l(t) = 0$):

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t), & (x, t) \in Q, \\ u(x, 0) = \varphi(x), & x \in [0, l], \\ u(0, t) = u(l, t) = 0, & t \in [0, +\infty). \end{cases}$$

Оказывается, решение этой задачи можно формально построить в виде ряда Фурье по тригонометрической системе функций

$$\left\{ \sin \frac{k\pi x}{l} \right\}_{k=1}^{\infty}.$$

Обратим внимание на то, что все функции этой системы удовлетворяют рассматриваемым однородным краевым условиям. Исклчительно важно также то обстоятельство, что данная система функций ортогональна на отрезке $[0, l]$ и является базисом в пространстве непрерывных на $[0, l]$ функций. Напомним, что всякая ортогональная система линейно независима.

Геометрическая идея метода Фурье состоит в следующем.

Разложим в ряд Фурье по ортогональной системе $\left\{ \sin \frac{k\pi x}{l} \right\}_{k=1}^{\infty}$ начальную функцию $\varphi(x)$ и правую часть уравнения $f(x, t)$, т. е. представим их в виде

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k \sin \frac{k\pi x}{l}, \quad f(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) \sin \frac{k\pi x}{l},$$

где

$$\varphi_k = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx, \quad f_k(t) = \frac{2}{l} \int_0^l f(x, t) \sin \frac{k\pi x}{l} dx.$$

Решение задачи будем искать в виде аналогичного ряда Фурье

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) \sin \frac{k\pi x}{l}.$$

Таким образом, здесь реализуется идея метода разложения по базису, известного из курса аналитической геометрии.

Неизвестные пока коэффициенты $T_k(t)$ являются функциями от t и будут определены в процессе решения. Заметим, что функция $u(x, t)$ формально удовлетворяет краевым условиям, так как этим условиям удовлетворяют все члены ряда ($\sin 0 = \sin k\pi = 0$).

Найдем (формально) входящие в уравнение производные от функции $u(x, t)$:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} T'_k(t) \sin \frac{k\pi x}{l},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = - \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k\pi}{l} \right)^2 T_k(t) \sin \frac{k\pi x}{l} = - \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k T_k(t) \sin \frac{k\pi x}{l},$$

где

$$\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{l} \right)^2, \quad k = 1, 2, \dots$$

Подставляя соответствующие ряды в ДУ, получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} (T'_k + a^2 \lambda_k T_k) \sin \frac{k\pi x}{l} = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) \sin \frac{k\pi x}{l}.$$

Воспользуемся начальным условием (1.2):

$$u(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(0) \sin \frac{k\pi x}{l} = \varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k \sin \frac{k\pi x}{l}.$$

Приравнявая в выписанных рядах коэффициенты при $\sin \frac{k\pi x}{l}$, получим для определения $T_k(t)$ следующие задачи Коши для обыкновенных ДУ:

$$\begin{cases} T'_k + a^2 \lambda_k T_k = f_k(t), \\ T_k(0) = \varphi_k, \end{cases} \quad k = 1, 2, \dots$$

Решение каждой из этих задач можно записать в виде (проверьте!)

$$T_k(t) = \varphi_k e^{-a^2 \lambda_k t} + \int_0^t e^{-a^2 \lambda_k (t-s)} f_k(s) ds.$$

Итак, мы построили формальное решение смешанной задачи

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k e^{-a^2 \lambda_k t} \sin \frac{k\pi x}{l} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_0^t e^{-a^2 \lambda_k (t-s)} f_k(s) ds \right) \sin \frac{k\pi x}{l}.$$

Вопрос о сходимости ряда, представляющего функцию $u(x, t)$, а тем более рядов для производных $\frac{\partial u}{\partial t}$ и $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, будет рассмотрен позднее.

Заметим, что первая сумма в полученной формуле для $u(x, t)$ дает формальное решение задачи с нулевой правой частью,

описывающей остывание стержня. Вторая сумма — формальное решение задачи с нулевой начальной функцией.

Пример 1.2. Решим смешанную задачу для неоднородного ДУ с нулевой начальной функцией и однородными граничными условиями:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 1, & 0 < x < \pi, \quad t > 0; \\ u(x, 0) = 0, & 0 \leq x \leq \pi; \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, & t \geq 0. \end{cases}$$

В данном случае $l = \pi$ и решение задачи будем строить в виде разложения по базису $\{\sin kx\}_{k=1}^{\infty}$.

Сначала разложим по этому базису правую часть уравнения

$$f(x, t) = 1 = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \sin kx,$$

где

$$f_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin kx dx = -\frac{2}{\pi k} \cos kx \Big|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi k} (1 - (-1)^k).$$

Решение задачи ищем в виде

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) \sin kx.$$

Для определения $T_k(t)$ запишем следующие задачи Коши для обыкновенных ДУ:

$$\begin{cases} T'_k + k^2 T_k = f_k, \\ T_k(0) = 0, \end{cases} \quad k = 1, 2, \dots$$

Решая эти задачи, получим

$$T_k(t) = \frac{f_k}{k^2} (1 - e^{-k^2 t}).$$

Итак, формальное решение рассматриваемой задачи построено и имеет следующий вид:

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(1 - (-1)^k)}{\pi k^3} (1 - e^{-k^2 t}) \sin kx.$$

Заметим, что в полученном выражении слагаемые с четными номерами равны нулю. Поэтому окончательный ответ можно записать так:

$$u(x, t) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2l-1)^3} (1 - e^{-(2l-1)^2 t}) \sin(2l-1)x.$$

Пример 1.3. Теперь решим задачу для неоднородного ДУ с однородными граничными условиями и ненулевой начальной функцией

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \sin x, & 0 < x < \pi, \quad t > 0; \\ u(x, 0) = \sin 2x, & 0 \leq x \leq \pi; \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, & t \geq 0. \end{cases}$$

Следуя методу Фурье, правую часть $f(x, t) = \sin x$ необходимо разложить по базису $\{\sin kx\}_{k=1}^{\infty}$. Однако функция $\sin x$ сама является элементом этого базиса, т. е.

$$f(x, t) = \sin x = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \sin kx,$$

где

$$f_k = \begin{cases} 1, & k = 1, \\ 0, & k \neq 1. \end{cases}$$

Аналогично начальная функция представляется в виде

$$\varphi(x) = \sin 2x = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k \sin kx,$$

где

$$\varphi_k = \begin{cases} 1, & k = 2, \\ 0, & k \neq 2. \end{cases}$$

В соответствии с методом Фурье решение ищем в виде

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) \sin kx.$$

Поскольку в разложениях правой части уравнения и начальной функции присутствуют лишь две базисные функции: $\sin x$

и $\sin 2x$, то и в решении останутся только слагаемые с этими функциями, т. е. решение можно найти в виде

$$u(x, t) = T_1(t) \sin x + T_2(t) \sin 2x.$$

Подставляя последнее выражение в ДУ и учитывая начальное условие, приходим к следующей паре задач Коши для определения неизвестных коэффициентов:

$$\begin{cases} T_1' + T_1 = 1, \\ T_1(0) = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} T_2' + 4T_2 = 0, \\ T_2(0) = 1. \end{cases}$$

Решая эти задачи, покажите, что

$$T_1(t) = 1 - e^{-t}, \quad T_2(t) = e^{-4t}.$$

Запишем окончательный ответ, представляющий классическое решение рассматриваемой смешанной задачи:

$$u(x, t) = (1 - e^{-t}) \sin x + e^{-4t} \sin 2x.$$

Сведение смешанной задачи к случаю однородных граничных условий. Отметим еще раз, что описываемый нами вариант метода Фурье применим только к случаю смешанных задач с однородными граничными условиями. Если граничные условия (1.3) не являются однородными, то простой заменой неизвестной функции исходную задачу можно свести к задаче с однородными граничными условиями.

Пусть функции $\alpha_0(t)$ и $\alpha_l(t)$ непрерывно дифференцируемы на полуоси $[0, +\infty)$. Сделаем замену неизвестной функции, полагая

$$u(x, t) = v(x, t) + w(x, t),$$

где $v(x, t)$ — новая неизвестная функция, а $w(x, t)$ — любая дважды дифференцируемая по x и один раз по t известная функция, удовлетворяющая граничным условиям (1.3). Возьмем, например,

$$w(x, t) = \alpha_0(t) + \frac{x}{l}(\alpha_l(t) - \alpha_0(t)).$$

Тогда

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial t} + \alpha_0'(t) + \frac{x}{l}(\alpha_l'(t) - \alpha_0'(t))$$

и для новой неизвестной функции $v(x, t)$ получаем уравнение

$$\frac{\partial v}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = F(x, t),$$

где

$$F(x, t) = f(x, t) - \alpha'_0(t) - \frac{x}{l}(\alpha'_l(t) - \alpha'_0(t)).$$

Далее

$$u(x, 0) = v(x, 0) + \alpha_0(0) + \frac{x}{l}(\alpha_l(0) - \alpha_0(0)).$$

Значит, для функции $v(x, t)$ имеем начальное условие

$$v(x, 0) = \varphi(x) - \alpha_0(0) - \frac{x}{l}(\alpha_l(0) - \alpha_0(0)) \equiv \Phi(x).$$

Наконец, граничные условия для $v(x, t)$ приобретают вид

$$v(0, t) = v(l, t) = 0.$$

Итак, для определения функции $v(x, t)$ мы получили смешанную задачу

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = F(x, t), & 0 < x < l, \quad t > 0; \\ v(x, 0) = \Phi(x), & 0 \leq x \leq l; \\ v(0, t) = v(l, t) = 0, & t \geq 0. \end{cases}$$

Заметим, что если выполняется условие согласования (1.4), то аналогичное условие выполняется и для $v(x, t)$.

Лекция 2

СИММЕТРИЧЕСКИЕ НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ.

ЗАДАЧИ НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ДЛЯ ОПЕРАТОРА ВТОРОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

Симметрические неотрицательные линейные операторы.

Пусть $\mathbf{H}$ — вещественное линейное пространство со скалярным произведением.

Пусть L — оператор с областью определения $D(L) \subset \mathbf{H}$ и со значениями в $\mathbf{H}$, т. е. каждому элементу $u \in D(L)$ поставлен в соответствие определенный элемент $Lu \in \mathbf{H}$.

Определение 2.1. Оператор L называется *линейным*, если для любых $u_1, u_2 \in D(L)$ и любых чисел α_1, α_2 :

$$1) \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 \in D(L);$$

$$2) L(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) = \alpha_1 Lu_1 + \alpha_2 Lu_2.$$

Определение 2.2. Число $\lambda \in \mathbf{R}$ называется *собственным значением линейного оператора L* , если существует ненулевой элемент $v \in D(L)$, такой, что

$$Lv = \lambda v.$$

При этом элемент v называется *собственным элементом* оператора L , отвечающим собственному значению λ .

В линейной алгебре в случае конечномерного (евклидова) пространства $\mathbf{H}$ в предположении, что $D(L) = \mathbf{H}$ (оператор L определен во всем пространстве), был установлен ряд свойств собственных значений и собственных векторов. Эти факты частично переносятся на интересующий нас бесконечномерный случай. Они будут использованы затем в общей абстрактной схеме метода Фурье, позволяющей с единой точки зрения рассмотреть многие задачи математической физики.

Определение 2.3. Линейный оператор L называется *симметрическим*, если для любых $u_1, u_2 \in D(L)$ имеет место равенство

$$(Lu_1, u_2) = (u_1, Lu_2).$$

Определение 2.4. Линейный оператор L называется *положительным (неотрицательным)*, если для любого $u \in D(L)$, $u \neq 0$, справедливо неравенство

$$(Lu, u) > 0 \quad ((Lu, u) \geq 0).$$

Приведем две простые, но важные теоремы о собственных значениях и собственных элементах.

Теорема 2.1. *Собственные элементы, отвечающие различным собственным значениям симметрического оператора, ортогональны.*

Доказательство. Пусть

$$Lv_1 = \lambda_1 v_1, \quad Lv_2 = \lambda_2 v_2, \quad v_1 \neq 0, \quad v_2 \neq 0, \quad \lambda_1 \neq \lambda_2.$$

Оператор L симметричен, т. е.

$$(Lv_1, v_2) = (v_1, Lv_2).$$

Пользуясь свойствами скалярного произведения, получим:

$$(Lv_1, v_2) = (\lambda_1 v_1, v_2) = \lambda_1 (v_1, v_2),$$

$$(v_1, v_2) = (v_1, \lambda_2 v_2) = \lambda_2 (v_1, v_2).$$

Таким образом,

$$\lambda_1 (v_1, v_2) = \lambda_2 (v_1, v_2) \Rightarrow (\lambda_1 - \lambda_2) \cdot (v_1, v_2) = 0.$$

По условию теоремы $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Следовательно,

$$(v_1, v_2) = 0,$$

т. е. собственные элементы v_1 и v_2 оператора L ортогональны.

Теорема 2.2. *Все собственные значения положительно-го (неотрицательного) оператора положительны (неотрицательны).*

Доказательство. Пусть $Lv = \lambda v$, $v \neq 0$, тогда

$$(Lv, v) = (\lambda v, v) = \lambda (v, v),$$

откуда

$$\lambda = \frac{(Lv, v)}{(v, v)}.$$

Так как $(v, v) > 0$, то знак λ определяется знаком скалярного произведения (Lv, v) . Если оператор L положителен, т. е. $(Lv, v) > 0$, то $\lambda > 0$. Если же оператор L неотрицателен, т. е. $(Lv, v) \geq 0$, то $\lambda \geq 0$.

В линейной алгебре (пространство $\mathbf{H}$ конечномерно) доказывается, кроме того, важная теорема о том, что из собственных векторов линейного симметрического оператора можно образовать базис в $\mathbf{H}$. Аналогичный факт справедлив и в бесконечномерном случае при некоторых дополнительных ограничениях, налагаемых на оператор L .

В дальнейшем мы будем иметь дело с линейными неотрицательными симметрическими операторами L , собственные элементы которых образуют базис в пространстве $\mathbf{H}$, т. е. *полную ортогональную систему* $\{v_k\}_{k=1}^{\infty}$, такую, что любой элемент $u \in \mathbf{H}$ представим сходящимся к нему в метрике пространства $\mathbf{H}$ рядом Фурье по этой системе

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} u_k v_k,$$

где числа

$$u_k = \frac{(u, v_k)}{(v_k, v_k)} = \frac{(u, v_k)}{\|v_k\|^2}$$

— коэффициенты Фурье элемента u по системе $\{v_k\}_{k=1}^{\infty}$.

Задачи на собственные значения для оператора второй производной. Пусть $\mathbf{H} = \mathbf{C}[0, l]$ — линейное пространство, состоящее из всех непрерывных на отрезке $[0, l]$ функций со скалярным произведением

$$(u, v) = \int_0^l u(x)v(x)dx.$$

Рассмотрим в пространстве $\mathbf{H}$ линейный оператор $L = -\frac{d^2}{dx^2}$ с областью определения $D(L)$, состоящей из дважды непрерывно дифференцируемых на $[0, l]$ функций, удовлетворяющих следующим краевым условиям:

$$Au(0) - Bu'(0) = 0 \quad (A \geq 0, B \geq 0, A + B > 0),$$

$$Cu(l) + Du'(l) = 0 \quad (C \geq 0, D \geq 0, C + D > 0).$$

Таким образом, эта область определения имеет вид

$$D(L) = \left\{ u(x) \in C^2[0, l] : \begin{aligned} & Au(0) - Bu'(0) = Cu(l) + Du'(l) = 0; \\ & A \geq 0, B \geq 0, A + B > 0; C \geq 0, D \geq 0, C + D > 0 \end{aligned} \right\}.$$

Рассматриваемый оператор называется *дифференциальным оператором Штурма–Лиувилля*. Сформулируем его важнейшие свойства и докажем некоторые из них.

Лемма 2.1. *L — симметрический оператор.*

Доказательство. Пусть $u_1(x), u_2(x) \in D(L)$. Дважды интегрируя по частям, получим

$$\begin{aligned}
 (Lu_1, u_2) &= \int_0^l \left(-\frac{d^2 u_1(x)}{dx^2} \right) u_2(x) dx = \\
 &= -\frac{du_1(x)}{dx} u_2(x) \Big|_0^l + \int_0^l \frac{du_1(x)}{dx} \cdot \frac{du_2(x)}{dx} dx = \\
 &= \left(\frac{du_2(x)}{dx} u_1(x) - \frac{du_1(x)}{dx} u_2(x) \right) \Big|_0^l + \int_0^l \left(-\frac{d^2 u_2(x)}{dx^2} \right) u_1(x) dx = \\
 &= (u_1(x) u_2'(x) - u_1'(x) u_2(x)) \Big|_0^l + (u_1, Lu_2).
 \end{aligned}$$

Рассматриваемое свойство будет доказано, если удастся установить, что

$$(u_1(x) u_2'(x) - u_1'(x) u_2(x)) \Big|_0^l = 0.$$

Из краевых условий имеем

$$\begin{cases} Au_1(0) - Bu_1'(0) = 0, \\ Au_2(0) - Bu_2'(0) = 0, \end{cases} \quad A + B > 0;$$

$$\begin{cases} Cu_1(l) + Du_1'(l) = 0, \\ Cu_2(l) + Du_2'(l) = 0, \end{cases} \quad C + D > 0.$$

Как известно из линейной алгебры, каждая из этих систем линейных относительно A, B и C, D уравнений имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда ее определитель равен нулю, т. е.

$$\begin{vmatrix} u_1(0) & -u_1'(0) \\ u_2(0) & -u_2'(0) \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} u_1(l) & u_1'(l) \\ u_2(l) & u_2'(l) \end{vmatrix} = 0.$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} (u_1(x)u_2'(x) - u_1'(x)u_2(x))\Big|_0^l &= \\ &= (u_1(l)u_2'(l) - u_1'(l)u_2(l)) - (u_1(0)u_2'(0) - u_1'(0)u_2(0)) = \\ &= \begin{vmatrix} u_1(l) & u_1'(l) \\ u_2(l) & u_2'(l) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u_1(0) & -u_1'(0) \\ u_2(0) & -u_2'(0) \end{vmatrix} = 0. \end{aligned}$$

Итак, мы установили, что

$$(Lu_1, u_2) = (u_1, Lu_2).$$

Лемма 2.2. L — неотрицательный оператор. Кроме того, $(Lu, u) = 0$ тогда и только тогда, когда $u = \text{const}$, а краевые условия имеют вид

$$u'(0) = u'(l) = 0.$$

(Отсюда, в частности, следует, что L имеет собственное значение, равное 0, только в последнем случае.)

Доказательство. Пусть $u \in D(L)$, $u \neq 0$. Имеем

$$\begin{aligned} (Lu, u) &= \int_0^l \left(-\frac{d^2 u(x)}{dx^2} \right) u(x) dx = -\frac{du(x)}{dx} u(x) \Big|_0^l + \\ &+ \int_0^l \frac{du(x)}{dx} \cdot \frac{du(x)}{dx} dx = u'(0)u(0) - u'(l)u(l) + \int_0^l \left(\frac{du(x)}{dx} \right)^2 dx. \end{aligned}$$

Здесь $I = \int_0^l \left(\frac{du(x)}{dx} \right)^2 dx \geq 0$, причем $I = 0$ тогда и только тогда, когда $u = \text{const}$ на $[0, l]$. Чтобы определить знак слагаемого $u'(0)u(0) - u'(l)u(l)$, воспользуемся краевыми условиями. Так как

$$Au(0) - Bu'(0) = 0, \quad A \geq 0, \quad B \geq 0, \quad A + B > 0,$$

то $u(0)$ и $u'(0)$ имеют одинаковые знаки, т. е. $u'(0)u(0) \geq 0$. Так как

$$Cu(l) + Du'(l) = 0, \quad C \geq 0, \quad D \geq 0, \quad C + D > 0,$$

то $u(l)$ и $u'(l)$ имеют разные знаки, т. е. $u'(l)u(l) \leq 0$. Следовательно,

$$u'(0)u(0) - u'(l)u(l) \geq 0.$$

Итак, $(Lu, u) \geq 0$, причем $(Lu, u) = 0$ тогда и только тогда, когда $u = \text{const}$ на $[0, l]$.

Заметим, что при $u \neq 0$ равенство $(Lu, u) = 0$ возможно только в случае выполнения краевых условий $u'(0) = u'(l) = 0$. В этом случае $u(x) = \text{const}$ — собственная функция, соответствующая собственному значению $\lambda = 0$.

Следующую важную теорему, принадлежащую выдающемуся российскому математику В.А.Стеклову [9], мы приводим без доказательства.

Теорема 2.3. *Собственные значения оператора Штурма–Лиувилля образуют последовательность чисел $\{\lambda_n\}$, такую, что*

$$0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_k \leq \dots,$$

а из соответствующих им собственных элементов можно сформировать полную ортогональную систему функций в пространстве $\mathbf{H}$. Всякая функция $u(x) \in D(L)$ разлагается в абсолютно и равномерно сходящийся ряд Фурье по этой системе.

Пример 2.1. Решим задачу на собственные значения и собственные функции для линейного дифференциального оператора, определяемого дифференциальным выражением $L = -\frac{d^2}{dx^2}$ с однородными краевыми условиями одного из четырех типов:

$$1) u(0) = u(l) = 0;$$

$$2) u(0) = u'(l) = 0;$$

$$3) u'(0) = u(l) = 0;$$

$$4) u'(0) = u'(l) = 0.$$

Таким образом, требуется найти те значения параметра λ (собственные значения), при которых ДУ

$$-u'' = \lambda u$$

с соответствующими краевыми условиями имеет ненулевые решения (собственные функции), и найти эти решения.

Например, в первом случае возникает следующая краевая задача:

$$\begin{cases} u'' + \lambda u = 0, & 0 < x < l; \\ u(0) = u(l) = 0. \end{cases}$$

Согласно изложенному выше, оператор L — симметрический, положительный; значит, $\lambda = \mu^2 > 0$, и корни характеристического уравнения чисто мнимые. Тогда общее решение ДУ имеет вид

$$u(x) = c_1 \cos(\mu x) + c_2 \sin(\mu x).$$

Подставляя сюда краевые условия, получим

$$u(0) = c_1 = 0; \quad u(l) = c_2 \sin(\mu l) = 0.$$

Так как $c_2 \neq 0$ (в противном случае $u(x) \equiv 0$ на $[0, l]$, а мы ищем ненулевые решения), то $\sin(\mu l) = 0$, что выполняется, если $\mu l = \pi k$, т. е. $\mu = \frac{k\pi}{l}$ и все ненулевые решения краевой задачи имеют вид

$$u(x) = c_2 \sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right), \quad k = 1, 2, \dots$$

Итак, мы получили ортогональную на $[0, l]$ систему из собственных функций

$$X_k(x) = \sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right), \quad k = 1, 2, \dots,$$

соответствующих собственным значениям $\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2$. Нетрудно подсчитать, что

$$\|X_k\|^2 = \int_0^l \sin^2 \frac{k\pi x}{l} dx = \frac{l}{2}.$$

Решив задачу для других типов краевых условий (предлагается это сделать в качестве упражнения), заполним следующую полезную на будущее таблицу:

$-u'' = \lambda u$			
Краевые условия	Собственные значения	Собственные функции	Квадраты норм собственных функций
$u(0) = u(l) = 0$	$\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2$ ($k = 1, 2, \dots$)	$X_k(x) =$ $= \sin \frac{k\pi x}{l}$	$\ X_k\ ^2 = \frac{l}{2}$
$u(0) = u'(l) = 0$	$\lambda_k = \left(\frac{(2k-1)\pi}{2l}\right)^2$ ($k = 1, 2, \dots$)	$X_k(x) =$ $= \sin \frac{(2k-1)\pi x}{2l}$	$\ X_k\ ^2 = \frac{l}{2}$
$u'(0) = u(l) = 0$	$\lambda_k = \left(\frac{(2k-1)\pi}{2l}\right)^2$ ($k = 1, 2, \dots$)	$X_k(x) =$ $= \cos \frac{(2k-1)\pi x}{2l}$	$\ X_k\ ^2 = \frac{l}{2}$
$u'(0) = u'(l) = 0$	$\lambda_0 = 0$	$X_0(x) = 1$	$\ X_0\ ^2 = l$
	$\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2$ ($k = 1, 2, \dots$)	$X_k(x) =$ $= \cos \frac{k\pi x}{l}$	$\ X_k\ ^2 = \frac{l}{2}$

Пример 2.2. Пусть $\mathbf{H} = \mathbf{C}[-\pi, \pi]$ — линейное пространство, состоящее из всех непрерывных на $[-\pi, \pi]$ функций со скалярным произведением

$$(u, v) = \int_{-\pi}^{\pi} u(x)v(x)dx.$$

Рассмотрим в пространстве $\mathbf{H}$ линейный оператор $L = -\frac{d^2}{dx^2}$ с областью определения $D(L)$, состоящей из дважды непрерывно дифференцируемых на $[-\pi, \pi]$ функций, удовлетворяющих следующим (периодическим) краевым условиям:

$$u(-\pi) = u(\pi), \quad u'(-\pi) = u'(\pi).$$

Таким образом, область определения равна

$$D(L) = \left\{ u(x) \in C^2[-\pi, \pi] : u(-\pi) = u(\pi), u'(-\pi) = u'(\pi) \right\}.$$

Убедимся, что оператор L — симметрический. Возьмем произвольные функции $u_1(x), u_2(x) \in D(L)$. Вычислим скалярное произведение

$$\begin{aligned}(Lu_1, u_2) &= \int_{-\pi}^{\pi} \left(-\frac{d^2 u_1(x)}{dx^2} \right) u_2(x) dx = -\frac{du_1(x)}{dx} u_2(x) \Big|_{-\pi}^{\pi} + \\ &+ \int_{-\pi}^{\pi} \frac{du_1(x)}{dx} \frac{du_2(x)}{dx} dx = \left(\frac{du_2(x)}{dx} u_1(x) - \frac{du_1(x)}{dx} u_2(x) \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} + \\ &+ \int_{-\pi}^{\pi} \left(-\frac{d^2 u_2(x)}{dx^2} \right) u_1(x) dx = (u_1(\pi)u_2'(\pi) - u_1(-\pi)u_2'(-\pi)) + \\ &+ (u_1'(-\pi)u_2(-\pi) - u_1'(\pi)u_2(\pi)) + (u_1, Lu_2).\end{aligned}$$

Из граничных условий следует, что в последнем выражении

$$u_1(\pi)u_2'(\pi) - u_1(-\pi)u_2'(-\pi) = 0$$

и

$$u_1'(-\pi)u_2(-\pi) - u_1'(\pi)u_2(\pi) = 0.$$

Следовательно,

$$(Lu_1, u_2) = (u_1, Lu_2) \quad \text{для любых } u_1, u_2 \in D(L).$$

Нетрудно проверить, что L — неотрицательный оператор. Возьмем произвольную функцию $u \in D(L)$, $u \neq 0$. Интегрируя по частям, с учетом граничных условий получим

$$(Lu, u) = \int_{-\pi}^{\pi} \left(-\frac{d^2 u(x)}{dx^2} \right) u(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{du(x)}{dx} \right)^2 dx \geq 0,$$

т.е. для любых $u \in D(L)$, $u \neq 0$ справедливо неравенство $(Lu, u) \geq 0$.

Далее решим задачу на собственные значения и собственные функции для рассматриваемого оператора, т.е. найдем те значения параметра λ , при которых ДУ

$$-u'' = \lambda u$$

с краевыми условиями

$$u(-\pi) = u(\pi), \quad u'(-\pi) = u'(\pi)$$

имеет ненулевые решения, и получим эти решения.

Так как оператор неотрицательный, то его собственные значения $\lambda \geq 0$.

Пусть $\lambda = \mu^2 > 0$. В этом случае требуется решить следующую краевую задачу:

$$\begin{cases} u'' + \mu^2 u = 0, & -\pi < x < \pi, \\ u(\pi) = u(-\pi), & u'(\pi) = u'(-\pi). \end{cases}$$

Общее решение ДУ здесь имеет вид

$$u(x) = c_1 \cos(\mu x) + c_2 \sin(\mu x),$$

а его производная

$$u'(x) = \mu(-c_1 \sin(\mu x) + c_2 \cos(\mu x)).$$

Подставляя $u(x)$ и $u'(x)$ в краевые условия, получим:

$$c_1 \cos(\mu\pi) + c_2 \sin(\mu\pi) = c_1 \cos(\mu\pi) - c_2 \sin(\mu\pi),$$

$$-c_1 \sin(\mu\pi) + c_2 \cos(\mu\pi) = c_1 \sin(\mu\pi) + c_2 \cos(\mu\pi).$$

Отсюда имеем систему для определения c_1 и c_2

$$\begin{cases} c_1 \sin(\mu\pi) = 0, \\ c_2 \sin(\mu\pi) = 0. \end{cases}$$

Так как c_1 и c_2 одновременно не могут быть равны нулю, то $\sin(\mu\pi) = 0$, что выполняется, если $\mu = k$ ($k = 1, 2, \dots$). Следовательно, все ненулевые решения рассматриваемой краевой задачи имеют вид

$$u(x) = c_1 \cos(kx) + c_2 \sin(kx),$$

т. е. представляют собой линейную комбинацию ортогональных на $[-\pi, \pi]$ функций

$$X_k^{(1)}(x) = \cos(kx), \quad X_k^{(2)}(x) = \sin(kx) \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Пусть теперь $\lambda = 0$. Решим соответствующую этому случаю краевую задачу

$$\begin{cases} u'' = 0, & -\pi < x < \pi, \\ u(\pi) = u(-\pi), & u'(\pi) = u'(-\pi). \end{cases}$$

Здесь общее решение ДУ

$$u(x) = c_1 x + c_2,$$

а его производная

$$u'(x) = c_1.$$

Подставляя $u(x)$ в первое краевое условие, получим

$$c_1 \pi + c_2 = -c_1 \pi + c_2,$$

откуда имеем

$$c_1 = 0.$$

При этом второе краевое условие выполняется автоматически. Таким образом, ненулевым решением рассматриваемой краевой задачи является любая отличная от нуля константа c_2 , т.е. его можно записать как

$$u(x) = c_2 \cdot 1.$$

Итак, мы установили, что собственному значению $\lambda_0 = 0$ соответствует одна собственная функция $X_0(x) \equiv 1$, а каждому собственному значению $\lambda_k = k^2$ ($k = 1, 2, \dots$) отвечают две линейно независимые собственные функции $X_k^{(1)}(x) = \cos kx$ и $X_k^{(2)}(x) = \sin kx$.

Таким образом, собственные функции оператора $L = -\frac{d^2}{dx^2}$ с периодическими краевыми условиями образуют тригонометрическую систему

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots$$

Известно, что для всякой непрерывной на $[-\pi, \pi]$ функции $f(x)$ ряд Фурье по тригонометрической системе (обычный тригонометрический ряд Фурье) сходится к $f(x)$ в среднем (см., например, [4]). Следовательно, тригонометрическая система является полной в пространстве $\mathbf{H} = \mathbf{C}[-\pi, \pi]$.

Лекция 3

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ДИФFUЗИИ/ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ ОБЩЕГО ВИДА. МЕТОД ФУРЬЕ

Рассмотрим следующую смешанную задачу с однородными краевыми условиями:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t), & (x, t) \in Q, \end{cases} \quad (3.1)$$

$$\begin{cases} u(x, 0) = \varphi(x), & x \in [0, l], \end{cases} \quad (3.2)$$

$$\begin{cases} \left(Au - B \frac{\partial u}{\partial x} \right) \Big|_{x=0} = \left(Cu + D \frac{\partial u}{\partial x} \right) \Big|_{x=l} = 0, & t \in [0, \infty) \\ (A, B, C, D \geq 0; \quad A + B > 0; \quad C + D > 0). \end{cases} \quad (3.3)$$

Построим формальное решение этой задачи, руководствуясь следующим алгоритмом.

1. Рассмотрим в пространстве $\mathbf{H} = \mathbf{C}[0, l]$ линейный оператор $L = -\frac{d^2}{dx^2}$ с областью определения

$$D(L) = \left\{ u(x) \in \mathbf{C}^2[0, l] : Au(0) - Bu'(0) = Cu(l) + Du'(l) = 0; \right. \\ \left. A \geq 0, B \geq 0, A + B > 0; C \geq 0, D \geq 0, C + D > 0 \right\}$$

и решим для него задачу на собственные значения и собственные функции. Другими словами, найдем те значения параметра λ , при которых краевая задача

$$\begin{cases} u'' + \lambda u = 0, & 0 < x < l, \\ Au(0) - Bu'(0) = 0, \quad Cu(l) + Du'(l) = 0 \end{cases}$$

имеет ненулевые решения, и получим эти решения.

Пусть λ_k — найденные собственные значения, а $X_k(x)$ — соответствующие им собственные функции рассматриваемого оператора, т. е. для них выполняются условия

$$\begin{cases} -X_k'' = \lambda_k X_k, & 0 < x < l, \\ AX_k(0) - BX_k'(0) = 0, & CX_k(l) + DX_k'(l) = 0, \end{cases} \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.4)$$

В соответствии с теоремой 2.3 (теорема разложимости В.А. Стеклова) система $\{X_k\}_{k=1}^{\infty}$ образует ортогональный базис в пространстве $C[0, l]$.

2. Разложим в ряд Фурье по базису $\{X_k\}_{k=1}^{\infty}$ функции $\varphi(x)$ и $f(x, t)$, т. е. представим их в виде

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k X_k(x), \quad f(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) X_k(x),$$

где

$$\varphi_k = \frac{(\varphi, X_k)}{(X_k, X_k)} = \frac{\int_0^l \varphi(x) X_k(x) dx}{\int_0^l X_k^2(x) dx},$$

$$f_k(t) = \frac{(f, X_k)}{(X_k, X_k)} = \frac{\int_0^l f(x, t) X_k(x) dx}{\int_0^l X_k^2(x) dx}.$$

3. Решение смешанной задачи (3.1)–(3.3) будем искать в виде аналогичного ряда

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) X_k(x),$$

коэффициенты которого $T_k(t)$ — неизвестные функции от переменной t .

Найдем производные от $u(x, t)$, входящие в уравнение (3.1):

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \sum_{k=1}^{\infty} T_k'(t) X_k(x),$$

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) X_k''(x) = - \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k T_k(t) X_k(x).$$

При вычислении второй производной по переменной x мы воспользовались условием (3.4), согласно которому $X_k''(x) = -\lambda_k X_k(x)$.

Подставляя ряды в ДУ (3.1), получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} (T_k' + a^2 \lambda_k T_k) X_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) X_k(x).$$

Приравнявая коэффициенты при базисных функциях $X_k(x)$, имеем

$$T_k' + a^2 \lambda_k T_k = f_k(t) \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Далее используем начальные условия

$$u(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(0) X_k(x) = \varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k X_k(x),$$

откуда следует, что $T_k(0) = \varphi_k$. В результате для определения $T_k(t)$ получим следующие задачи Коши для обыкновенного ДУ:

$$\begin{cases} T_k' + a^2 \lambda_k T_k = f_k(t), \\ T_k(0) = \varphi_k, \end{cases} \quad k = 1, 2, \dots$$

Решения этих задач можно записать так:

$$T_k(t) = \varphi_k e^{-a^2 \lambda_k t} + \int_0^t e^{-a^2 \lambda_k (t-s)} f_k(s) ds.$$

Итак, формальное решение смешанной задачи (3.1)–(3.3) построено и дается формулой

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k e^{-a^2 \lambda_k t} X_k(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_0^t e^{-a^2 \lambda_k (t-s)} f_k(s) ds \right) X_k(x).$$

В частности, если краевые условия таковы:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=l} = 0,$$

то собственные значения и собственные функции соответствующего дифференциального оператора имеют вид

$$\lambda_0 = 0, \quad X_0(x) = 1, \quad \lambda_k = \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2,$$

$$X_k(x) = \cos \frac{k\pi x}{l} \quad (k = 1, 2, \dots).$$

и решение смешанной задачи записывается следующим образом:

$$u(x, t) = \varphi_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k e^{-a^2 \lambda_k t} \cos \frac{k\pi x}{l} + \\ + \int_0^t f_0(s) ds + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_0^t e^{-a^2 \lambda_k (t-s)} f_k(s) ds \right) \cos \frac{k\pi x}{l}.$$

Замечание 3.1. Если рассматривается задача с неоднородными граничными условиями, то, прежде чем применять метод Фурье, надо заменой неизвестной функции свести исходную задачу к новой задаче с однородными граничными условиями.

Пример 3.1.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & 0 < x < \pi, \quad t > 0; \\ u(x, 0) = 1, & x \in [0, \pi]; \\ u(0, t) = e^{-t}, \quad \frac{\partial u(\pi, t)}{\partial x} = 0, & t \in [0, +\infty). \end{cases}$$

Здесь граничное условие при $x = 0$ неоднородно. Чтобы применение метода Фурье стало возможным, мы должны сначала свести рассматриваемую задачу к задаче с однородными граничными условиями. Для этого сделаем замену неизвестной функции, полагая

$$u(x, t) = v(x, t) + w(x, t),$$

где $v(x, t)$ — новая неизвестная функция, а $w(x, t)$ — функция, которую мы подберем так, чтобы она удовлетворяла граничным условиям

$$w(0, t) = e^{-t}, \quad \frac{\partial w(\pi, t)}{\partial x} = 0.$$

Нетрудно проверить, что в качестве такой функции можно взять $w(x, t) = e^{-t}$. Тогда для новой неизвестной функции имеем задачу

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = e^{-t}, & 0 < x < \pi, \quad t > 0; \\ v(x, 0) = 0, & x \in [0, \pi]; \\ v(0, t) = \frac{\partial v(\pi, t)}{\partial x} = 0, & t \in [0, +\infty). \end{cases}$$

Теперь найдем систему базисных функций $\{X_k\}$, необходимую для построения решения этой задачи, рассмотрев вспомогательную задачу на собственные значения

$$\begin{cases} -X_k'' = \lambda_k X_k, & 0 < x < \pi, \\ X_k(0) = X_k'(\pi) = 0. \end{cases}$$

В результате получим:

$$\lambda_k = \left(\frac{2k-1}{2}\right)^2, \quad X_k(x) = \sin \frac{2k-1}{2}x \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Разложим в ряд Фурье по найденному базису правую часть уравнения:

$$f(x, t) = e^{-t} = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) \sin \frac{2k-1}{2}x,$$

где

$$\begin{aligned} f_k(t) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} e^{-t} \sin \left(\frac{2k-1}{2}x \right) dx = \\ &= -\frac{2}{\pi} e^{-t} \frac{2}{2k-1} \cos \left(\frac{2k-1}{2}x \right) \Big|_0^{\pi} = \frac{4e^{-t}}{\pi(2k-1)}. \end{aligned}$$

Решение $v(x, t)$ будем искать в виде разложения в ряд по базисным функциям

$$v(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} T_k(t) \sin \frac{2k-1}{2}x.$$

Вычислим входящие в ДУ производные от $v(x, t)$:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \sum_{k=0}^{\infty} T'_k(t) \sin \frac{2k-1}{2}x,$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} &= - \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2k-1}{2} \right)^2 T_k(t) \sin \frac{2k-1}{2}x = \\ &= - \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k T_k(t) \sin \frac{2k-1}{2}x. \end{aligned}$$

Подставив соответствующие ряды в ДУ и начальные условия, получим:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} T'_k(t) \sin \frac{2k-1}{2}x + \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k T_k(t) \sin \frac{2k-1}{2}x &= \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} f_k(t) \sin \frac{2k-1}{2}x, \\ \sum_{k=0}^{\infty} T_k(0) \sin \frac{2k-1}{2}x &= 0. \end{aligned}$$

Приравняв коэффициенты при одинаковых базисных функциях и используя начальные условия, имеем следующие задачи Коши для определения неизвестных функций $T_k(t)$:

$$\begin{cases} T'_k + \lambda_k T_k = f_k(t), \\ T_k(0) = 0, \end{cases} \quad k = 1, 2, \dots$$

Решая эти задачи, получим

$$\begin{aligned} T_k(t) &= \int_0^t e^{-\lambda_k(t-s)} f_k(s) ds = \int_0^t e^{-\lambda_k(t-s)} \frac{4e^{-s}}{\pi(2k-1)} ds = \\ &= \frac{4e^{-\lambda_k t}}{\pi(2k-1)} \int_0^t e^{(\lambda_k-1)s} ds = \frac{4(e^{-t} - e^{-\lambda_k t})}{\pi(2k-1)(\lambda_k-1)} = \\ &= \frac{4(e^{-t} - e^{-((2k-1)/2)^2 t})}{\pi(2k-1) \left(\frac{(2k-1)^2}{4} - 1 \right)} = \frac{16(e^{-t} - e^{-((2k-1)/2)^2 t})}{\pi(2k-1)(2k+1)(2k-3)}. \end{aligned}$$

Теперь можем записать окончательный ответ:

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{16}{\pi(4k^2 - 1)(2k - 3)} \left(e^{-t} - e^{-((2k-1)/2)^2 t} \right) \sin \frac{2k-1}{2} x + e^{-t}.$$

Пример 3.2.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = e^{-t} \cos \frac{x}{2} + \cos \frac{3x}{2}, & 0 < x < \pi, \quad t > 0; \\ u(x, 0) = 2 \cos \frac{3x}{2} + 5(x - \pi), & x \in [0, \pi]; \\ \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = 5, \quad u(\pi, t) = 0, & t \in [0, +\infty). \end{cases}$$

С помощью замены неизвестной функции сведем эту задачу к задаче с однородными граничными условиями, полагая

$$u(x, t) = v(x, t) + w(x, t) = v(x, t) + 5(x - \pi).$$

Для новой неизвестной функции получим следующую задачу:

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = e^{-t} \cos \frac{x}{2} + \cos \frac{3x}{2}, & 0 < x < \pi, \quad t > 0; \\ v(x, 0) = 2 \cos \frac{3x}{2} & x \in [0, \pi]; \\ \frac{\partial v(0, t)}{\partial x} = v(\pi, t) = 0, & t \in [0, +\infty). \end{cases}$$

Найдем систему базисных функций $\{X_k\}$, необходимую для построения ее решения, решив вспомогательную задачу на собственные значения и собственные функции

$$\begin{cases} -X_k'' = \lambda_k X_k, & 0 < x < \pi, \\ X_k'(0) = X_k(\pi) = 0. \end{cases}$$

В результате получим:

$$\lambda_k = \left(\frac{2k-1}{2} \right)^2, \quad X_k(x) = \cos \frac{2k-1}{2} x \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Разложим в ряд Фурье по найденному базису начальную функцию и правую часть уравнения:

$$\varphi(x) = 2 \cos \frac{3x}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k \cos \frac{(2k-1)x}{2},$$

$$f(x, t) = e^{-t} \cos \frac{x}{2} + \cos \frac{3x}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) \cos \frac{(2k-1)x}{2}.$$

Не вычисляя интегралов, с помощью которых выражаются коэффициенты этих разложений Фурье, заметим, что

$$\varphi_k = \begin{cases} 2, & k = 2, \\ 0, & k \neq 2, \end{cases} \quad f_k(t) = \begin{cases} e^{-t}, & k = 1, \\ 1, & k = 2, \\ 0, & k > 2. \end{cases}$$

Поскольку в разложениях функций $\varphi(x)$ и $f(x, t)$ отличны от нуля лишь коэффициенты при двух базисных функциях, то и в разложении решения задачи будут присутствовать лишь два соответствующих слагаемых:

$$v(x, t) = T_1(t) \cos \frac{x}{2} + T_2(t) \cos \frac{3x}{2}.$$

Подставим последнее разложение в ДУ:

$$\begin{aligned} T_1'(t) \cos \frac{x}{2} + T_2'(t) \cos \frac{3x}{2} + \frac{1}{4} T_1(t) \cos \frac{x}{2} + \frac{9}{4} T_2(t) \cos \frac{3x}{2} = \\ = e^{-t} \cos \frac{x}{2} + \cos \frac{3x}{2} \end{aligned}$$

и в начальные условия:

$$v(x, 0) = T_1(0) \cos \frac{x}{2} + T_2(0) \cos \frac{3x}{2} = 2 \cos \frac{3x}{2}.$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых базисных функциях, запишем для определения $T_1(t)$ и $T_2(t)$ следующие задачи Коши:

$$\begin{cases} T_1' + \frac{1}{4} T_1 = e^{-t}, \\ T_1(0) = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} T_2' + \frac{9}{4} T_2 = 1, \\ T_2(0) = 2. \end{cases}$$

Решая эти задачи, получим:

$$T_1(t) = \frac{4}{3} \left(e^{-t/4} - e^{-t} \right), \quad T_2(t) = \frac{2}{9} \left(7e^{-9t/4} + 2 \right).$$

Наконец, можем записать решение исходной задачи

$$u(x, t) = \frac{4}{3} \left(e^{-t/4} - e^{-t} \right) \cos \frac{x}{2} + \frac{2}{9} \left(7e^{-9t/4} + 2 \right) \cos \frac{3x}{2} + 5(x - \pi).$$

Пример 3.3.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = x^2 + x, & 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = \sin^2(\pi x), & x \in [0, 1], \\ \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = t, \quad \frac{\partial u(1, t)}{\partial x} = 3t, & t \in [0, +\infty). \end{cases}$$

Сведем задачу к задаче с однородными краевыми условиями с помощью замены неизвестной функции, полагая

$$u(x, t) = v(x, t) + w(x, t),$$

где $v(x, t)$ — новая неизвестная функция, а $w(x, t)$ — дважды дифференцируемая по x и один раз по t функция, удовлетворяющая краевым условиям

$$\frac{\partial w(0, t)}{\partial x} = t, \quad \frac{\partial w(1, t)}{\partial x} = 3t.$$

Подберем необходимую функцию $w(x, t)$ в виде

$$w(x, t) = a(t)x^2 + b(t)x.$$

Из краевых условий

$$\frac{\partial w(0, t)}{\partial x} = b(t) = t, \quad \frac{\partial w(1, t)}{\partial x} = 2a(t) + b(t) = 3t$$

находим $a(t) = t$, $b(t) = t$, т. е.

$$w(x, t) = t(x^2 + x).$$

Для новой неизвестной функции получим следующую задачу:

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} - 4 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 8t, & 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ v(x, 0) = \sin^2(\pi x), & x \in [0, 1], \\ \frac{\partial v(0, t)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v(1, t)}{\partial x} = 0, & t \in [0, +\infty). \end{cases}$$

Для построения системы базисных функций $\{X_k\}$ запишем вспомогательную задачу на собственные значения

$$\begin{cases} -X_k'' = \lambda_k X_k, & 0 < x < 1, \\ X_k'(0) = X_k'(1) = 0. \end{cases}$$

Решив эту задачу, получим:

$$\lambda_0 = 0, \quad X_0(x) = 1; \quad \lambda_k = (k\pi)^2, \quad X_k(x) = \cos(k\pi x), \quad k = 1, 2, \dots$$

Разложим в ряд Фурье по найденному базису правую часть уравнения и начальную функцию. Заметим, что в данном случае

$$f(x, t) = 8t \cdot 1 = f_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) \cos k\pi x,$$

т. е.

$$f_k(t) = \begin{cases} 8t, & k = 0, \\ 0, & k = 1, 2, \dots \end{cases}$$

Начальная функция может быть представлена в виде

$$\varphi(x) = \sin^2(\pi x) = \frac{1}{2} \cdot 1 + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \cos 2\pi x = \varphi_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k \cos k\pi x,$$

т. е.

$$\varphi_k = \begin{cases} 1/2, & k = 0, \\ -1/2, & k = 2, \\ 0, & k = 1, 3, 4, \dots \end{cases}$$

Так как в разложениях для $f(x, t)$ и $\varphi(x)$ отличны от нуля коэффициенты лишь при двух базисных функциях, то и в разложении решения задачи будут лишь два соответствующих слагаемых:

$$v(x, t) = T_0(t) + T_2(t) \cos 2\pi x.$$

Подставим последнее разложение в ДУ:

$$T_0'(t) + T_2'(t) \cos 2\pi x + 4 \cdot T_2(t)(2\pi)^2 \cos 2\pi x = 8t$$

и в начальные условия:

$$v(x, 0) = T_0(0) + T_2(0) \cos 2\pi x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\pi x.$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых базисных функциях, запишем для определения $T_0(t)$ и $T_2(t)$ следующие задачи Коши:

$$\begin{cases} T_0' = 8t, \\ T_0(0) = \frac{1}{2}; \end{cases} \quad \begin{cases} T_2' + 16\pi^2 T_2 = 0, \\ T_2(0) = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Решая эти задачи, получим:

$$T_0(t) = 4t^2 + \frac{1}{2}, \quad T_2(t) = -\frac{1}{2}e^{-16\pi^2 t}.$$

Наконец, запишем окончательный ответ рассматриваемой смешанной задачи

$$u(x, t) = 4t^2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-16\pi^2 t} \cos 2\pi x + (x^2 + x) \cdot t.$$

Возможная физическая интерпретация граничных условий. Остановимся на физической интерпретации распространения тепла в стержне.

1. Если заданы тепловые потоки $Q_0(t)$ и $Q_l(t)$, протекающие через торцевые сечения стержня длины l , то соответствующие граничные условия запишутся так:

$$k \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = Q_0(t), \quad k \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=l} = -Q_l(t),$$

где $k > 0$ — коэффициент теплопроводности.

2. Если на концах стержня происходит теплообмен с окружающей средой согласно закону Ньютона, то граничные условия имеют вид

$$\left(k \frac{\partial u}{\partial x} - h(u - u_0) \right) \Big|_{x=0} = 0, \quad \left(k \frac{\partial u}{\partial x} + h(u - u_0) \right) \Big|_{x=l} = 0,$$

где $h > 0$ — коэффициент теплообмена, а $u_0 = u_0(x, t)$ — температура окружающей среды.

3. Возможны также ситуации, когда на одном конце стержня задана температура, а на другом задан тепловой поток или происходит теплообмен.

Лекция 4

СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ/ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Принцип максимума (минимума). Зафиксируем $T > 0$ и рассмотрим смешанную задачу (1.1)–(1.3) для уравнения диффузии в прямоугольнике $Q_T = \{(x, t) : 0 < x < l, 0 < t \leq T\}$. Обозначим через Γ_T часть границы прямоугольника, состоящую из его нижнего основания и боковых сторон (рис. 4.1).

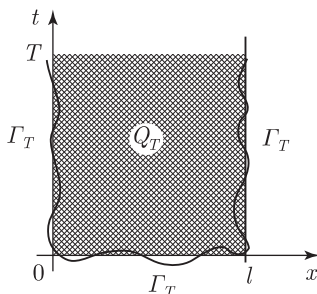


Рис. 4.1

Теорема 4.1 (принцип максимума). Пусть $u(x, t)$ является классическим решением смешанной задачи (1.1)–(1.3) в прямоугольнике Q_T . Если $f(x, t) \leq 0$ в замкнутом прямоугольнике $\overline{Q}_T = Q_T \cup \Gamma_T$, то наибольшее значение функции $u(x, t)$ в $\overline{Q}_T$ достигается на Γ_T .

Доказательство. Предположим, что утверждение теоремы неверно, т. е. существует точка $(x_0, t_0) \in Q_T$, в которой

$$u(x_0, t_0) = \max_{Q_T} u(x, t) = M > m = \max_{\Gamma_T} u(x, t)$$

$$(0 < x_0 < l, 0 < t_0 \leq T).$$

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$v(x, t) = u(x, t) + \frac{T-t}{T} \cdot \frac{M-m}{2}.$$

Если $(x, t) \in \Gamma_T$, то имеем оценку

$$v(x, t) \leq m + \frac{M-m}{2} = \frac{M+m}{2} < M$$

(здесь учтено, что $\frac{T-t}{T} \leq 1$).

Далее, в точке (x_0, t_0) имеем

$$v(x_0, t_0) = M + \frac{T-t_0}{T} \cdot \frac{M-m}{2} \geq M.$$

Сопоставляя последние два неравенства, заметим, что

$$v(x, t) < v(x_0, t_0),$$

т. е. значение $v(x, t)$ на Γ_T меньше, чем значение $v(x, t)$ в точке $(x_0, t_0) \in Q_T$.

Следовательно, наибольшее значение функции $v(x, t)$ в замкнутом прямоугольнике $\overline{Q_T}$ достигается на Q_T . Пусть оно достигается в некоторой точке $(x_1, t_1) \in Q_T$, т. е.

$$v(x_1, t_1) = \max_{Q_T} v(x, t).$$

Тогда, согласно необходимым условиям максимума, в этой точке имеем:

$$\frac{\partial v(x_1, t_1)}{\partial t} \geq 0 \quad \left(\frac{\partial v(x_1, t_1)}{\partial t} = 0, \quad \text{если } t_1 < T; \right.$$

$$\left. \frac{\partial v(x_1, t_1)}{\partial t} \geq 0, \quad \text{если } t_1 = T); \quad \frac{\partial v(x_1, t_1)}{\partial x} = 0.$$

Далее заметим, что $\frac{\partial^2 v(x_1, t_1)}{\partial x^2} \leq 0$, так как в противном случае при $x = x_1$ функция $v(x, t_1)$ имела бы минимум, что невозможно, поскольку (x_1, t_1) — точка максимума функции $v(x, t)$.

Итак, $\frac{\partial v(x_1, t_1)}{\partial t} \geq 0$, $\frac{\partial^2 v(x_1, t_1)}{\partial x^2} \leq 0$ и $f(x_1, t_1) \leq 0$ по условию теоремы.

Поскольку $u(x, t)$ — решение уравнения (1.1), то

$$\frac{\partial u(x_1, t_1)}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u(x_1, t_1)}{\partial x^2} - f(x_1, t_1) = 0.$$

Теперь заметим, что

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{M - m}{2T}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}.$$

Следовательно, в точке (x_1, t_1) имеем

$$0 = \frac{\partial v(x_1, t_1)}{\partial t} + \frac{M - m}{2T} - a^2 \frac{\partial^2 v(x_1, t_1)}{\partial x^2} - f(x_1, t_1) \geq \frac{M - m}{2T} > 0.$$

Полученное противоречие показывает, что сделанное в начале доказательства предположение неверно и, таким образом, теорема доказана.

Следствие 4.1 (принцип минимума). Пусть $u(x, t)$ является классическим решением смешанной задачи (1.1)–(1.3) в прямоугольнике Q_T и $f(x, t) \geq 0$ в замкнутом прямоугольнике $\bar{Q}_T = Q_T \cup \Gamma_T$. Тогда функция $u(x, t)$ достигает своего наименьшего значения в $\bar{Q}_T$ на Γ_T .

Следствие 4.2. Пусть $u(x, t)$ — классическое решение смешанной задачи (1.1)–(1.3) в прямоугольнике Q_T в случае $f(x, t) = 0$ в $\bar{Q}_T$. Тогда функция $u(x, t)$ достигает своих наибольшего и наименьшего значений на Γ_T (т. е. в начальный момент времени или на концах отрезка).

Замечание 4.1. Физически принцип максимума означает, что при отсутствии источников температура тела во внутренней точке не может стать большей, чем в начальный момент времени или на границе тела.

Единственность классического решения смешанной задачи. Важным следствием принципа максимума является теорема единственности решения.

Теорема 4.2. Задача (1.1)–(1.3) может иметь не более одного классического решения.

Доказательство. Пусть $u_1(x, t)$, $u_2(x, t)$ — два классических решения задачи (1.1)–(1.3). Их разность

$$u(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t)$$

есть решение следующей смешанной задачи:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & (x, t) \in Q, \\ u(x, 0) = 0, & x \in [0, l], \\ u(0, t) = u(l, t) = 0, & t \in [0, +\infty). \end{cases}$$

Возьмем любое $T > 0$. Тогда $u(x, t) = 0$ на Γ_T . По следствию 4.2 $u(x, t) = 0$ на Q_T . В силу произвольности T имеем $u(x, t) = 0$ на $\overline{Q}$. Значит, $u_1(x, t) = u_2(x, t)$ на $\overline{Q}$.

Теорема существования классического решения смешанной задачи для уравнения диффузии/теплопроводности. Рассмотрим для простоты смешанную задачу

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & (x, t) \in Q, \end{cases} \quad (4.1)$$

$$\begin{cases} u(x, 0) = \varphi(x), & x \in [0, l], \end{cases} \quad (4.2)$$

$$\begin{cases} u(0, t) = u(l, t) = 0, & t \in [0, +\infty). \end{cases} \quad (4.3)$$

Ее формальное решение дается формулой

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k e^{-(ak\pi/l)^2 t} \sin \frac{k\pi x}{l}, \quad (4.4)$$

где

$$\varphi_k = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx. \quad (4.5)$$

Покажем, что при определенных ограничениях на функцию $\varphi(x)$ ряд (4.4) представляет собой классическое решение задачи.

Напомним, что необходимым условием существования классического решения является выполнение условий согласования начального и граничного условий

$$\varphi(0) = \varphi(l) = 0.$$

Теорема 4.3. Пусть функция $\varphi(x)$ непрерывна на $[0, l]$, имеет кусочно-непрерывную производную на $[0, l]$ и удовлетворяет условиям $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$. Тогда существует классическое решение задачи (4.1)–(4.3), представимое рядом (4.4) с коэффициентами (4.5).

Доказательство. Функция $u(x, t)$ удовлетворяет однородным граничным условиям (4.3), так как этим условиям удовлетворяют все члены ряда (4.4). Начальное условие (4.2) выполняется, так как при $t = 0$ ряд (4.4) переходит в тригонометрический ряд Фурье для функции $\varphi(x)$, удовлетворяющей условиям разложимости в тригонометрический ряд Фурье на интервале $(0, l)$:

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k \sin \frac{k\pi x}{l}.$$

Осталось доказать, что ряд (4.4) сходится и функция $u(x, t)$, представляемая этим рядом:

1) непрерывна в $\bar{Q}$;

2) имеет непрерывные в Q частные производные $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$;

3) удовлетворяет ДУ (4.1) на Q .

Займемся доказательством этих утверждений.

Оценим общий член исследуемого ряда:

$$\left| \varphi_k e^{-(ak\pi/l)^2 t} \sin \frac{k\pi x}{l} \right| \leq |\varphi_k|, \quad \forall (x, t) \in \bar{Q}.$$

Если будет доказана сходимость числового ряда $\sum_{k=1}^{\infty} |\varphi_k|$, то по признаку Вейерштрасса равномерной сходимости функционального ряда ряд (4.4) будет равномерно сходиться на $\bar{Q}$ и, следовательно, его сумма $u(x, t)$ будет непрерывной на $\bar{Q}$ функцией.

Докажем сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} |\varphi_k|$. С помощью интегрирования по частям, учитывая равенство

$$\varphi(0) = \varphi(l) = 0,$$

находим

$$\begin{aligned} \varphi_k &= \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx = -\frac{2}{k\pi} \int_0^l \varphi(x) d\left(\cos \frac{k\pi x}{l}\right) dx = \\ &= -\frac{2}{k\pi} \varphi(x) \cos \frac{k\pi x}{l} \Big|_0^l + \frac{2}{k\pi} \int_0^l \varphi'(x) \cos \frac{k\pi x}{l} dx = \frac{l}{k\pi} \varphi'_k, \end{aligned}$$

где φ'_k — k -й коэффициент Фурье функции $\varphi'(x)$ по ортогональной системе $\left\{ \cos \frac{k\pi x}{l} \right\}_{k=1}^{\infty}$. Согласно неравенству Бесселя (см., например, [4, 12]) ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |\varphi'_k|^2$ сходится. Далее воспользуемся неравенством

$$0 \leq \left(|\varphi'_k| - \frac{1}{k} \right)^2 = |\varphi'_k|^2 - 2 \frac{|\varphi'_k|}{k} + \frac{1}{k^2},$$

из которого вытекает, что

$$|\varphi_k| = \frac{l}{k\pi} |\varphi'_k| \leq \frac{l}{2\pi} \left(|\varphi'_k|^2 + \frac{1}{k^2} \right).$$

Вследствие последнего неравенства сходится и ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |\varphi_k|$. Отсюда, по признаку Вейерштрасса равномерной сходимости функционального ряда, рассматриваемый функциональный ряд (4.4) сходится равномерно на $\overline{Q}$; следовательно, его сумма $u(x, t)$ — непрерывная в этой области функция, причем

$$u(x, t) \rightarrow \varphi(x) \quad \text{при} \quad t \rightarrow 0,$$

$$u(x, t) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad x \rightarrow +0 \quad \text{и} \quad x \rightarrow l - 0.$$

Далее, формально продифференцировав ряд (4.4) один раз по переменной t и два раза по x , получим

$$\frac{\partial u}{\partial t} = - \left(\frac{a\pi}{l} \right)^2 \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \varphi_k e^{-(ak\pi/l)^2 t} \sin \frac{k\pi x}{l},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = - \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \varphi_k e^{-(ak\pi/l)^2 t} \sin \frac{k\pi x}{l}.$$

Покажем, что при $t \geq \tau > 0$ эти ряды равномерно сходятся.

Так как функция $\varphi(x)$ непрерывна на $[0, l]$, то она ограничена на этом отрезке, т. е. существует $M > 0$ такое, что $|\varphi(x)| \leq M$ на $[0, l]$. Следовательно,

$$|\varphi_k| = \left| \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx \right| \leq \frac{2}{l} \int_0^l |\varphi(x)| \times \\ \times \left| \sin \frac{k\pi x}{l} \right| dx \leq \frac{2}{l} \int_0^l M dx \leq 2M.$$

Поэтому при $t \geq \tau > 0$ получим оценку

$$\left| k^2 \varphi_k e^{-(a\pi k/l)^2 t} \sin \frac{k\pi x}{l} \right| \leq 2M k^2 e^{-(a\pi k/l)^2 \tau}.$$

Исследуем на сходимость числовой ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2 e^{-(a\pi k/l)^2 \tau}.$$

По признаку Д'Аламбера этот ряд сходится, так как

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \left(\frac{k+1}{k} \right)^2 e^{-(a\pi/l)^2 (2k+1)\tau} \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty.$$

Тогда по признаку Вейерштрасса ряды, полученные формальным дифференцированием, сходятся равномерно. Следовательно, ряд (4.4) можно почленно дифференцировать один раз по t и два раза по x при $t \geq \tau > 0$, или, в силу произвольности τ , в области Q . При этом суммы полученных равномерно сходящихся рядов $\frac{\partial u}{\partial t}$ и $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ непрерывны в области Q .

Так как ДУ (4.1) линейно, то для него справедлив принцип суперпозиции решений. Следовательно, составленный из частных решений ряд (4.4), который можно почленно дифференцировать один раз по t и два раза по x , также будет решением.

Итак, мы доказали, что при выполнении условий теоремы функция $u(x, t)$ является классическим решением задачи.

Корректность задачи математической физики. Пусть некоторая задача математической физики имеет единственное решение.

Под корректностью задачи математической физики будем понимать непрерывную зависимость ее решения от параметров задачи, т. е. от правых частей уравнения, начальных и граничных значений. Корректность означает устойчивость данной математической модели по отношению к небольшим возмущениям, как физическим, так и получающимся в процессе вычислений.

В том случае, когда эти требования нарушаются, задача называется *некорректно поставленной*.

Замечание 4.2. До середины XX в. считалось, что некорректно поставленные задачи математической физики не могут служить математическими моделями реальных физических процессов, а потому не заслуживают внимания. Однако последующие исследования (работы академика А.Н. Тихонова и его научной школы) показали, что для весьма широкого класса естественно-научных проблем некорректно поставленные задачи описывают реальные ситуации и являются их адекватными математическими моделями.

Теорема 4.4. *Задача (1.1)–(1.3) корректна в классе своих классических решений.*

Доказательство. Введем нормы в пространствах непрерывных функций, отвечающих правым частям уравнения, начальным и граничным значениям:

$$\|f\| = \max_{Q_T} |f(x, t)|, \quad \|\varphi\| = \max_{[0, l]} |\varphi(x)|,$$

$$\|\alpha_0\| = \max_{[0, T]} |\alpha_0(t)|, \quad \|\alpha_l\| = \max_{[0, T]} |\alpha_l(t)|.$$

Пусть $u(x, t)$ — классическое решение задачи (1.1)–(1.3) на Q_T . Примем также

$$\|u\| = \max_{Q_T} |u(x, t)|.$$

Введем вспомогательную функцию

$$w(x, t) = u(x, t) - t \|f\|.$$

Эта функция является решением смешанной задачи

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = f(x, t) - \|f\|, \\ w(x, 0) = \varphi(x), \\ w(0, t) = \alpha_0(t) - t \|f\|, \quad w(l, t) = \alpha_l(t) - t \|f\|. \end{cases}$$

Так как

$$f(x, t) - \|f\| \leq 0, \quad \alpha_0(t) - t \|f\| \leq \|\alpha_0\|, \quad \alpha_l(t) - t \|f\| \leq \|\alpha_l\|,$$

то, согласно принципу максимума,

$$w(x, t) \leq \max(\|\varphi\|, \|\alpha_0\|, \|\alpha_l\|).$$

Тогда

$$u(x, t) \leq \max(\|\varphi\|, \|\alpha_0\|, \|\alpha_l\|) + T \|f\| = C.$$

Аналогично, если взять

$$\tilde{w}(x, t) = u(x, t) + t \|f\|,$$

то с помощью принципа минимума придем к неравенству

$$u(x, t) \geq -C.$$

Следовательно, справедлива оценка

$$\|u\| \leq \max(\|\varphi\|, \|\alpha_0\|, \|\alpha_l\|) + T \|f\|, \quad (4.6)$$

которой мы воспользуемся при доказательстве корректности смешанной задачи для уравнения диффузии.

Пусть $u_i(x, t)$ — решения смешанных задач с данными

$$f_i(x, t), \varphi_i(x), \alpha_{0i}(t), \alpha_{li}(t), \quad i = 1, 2.$$

Тогда $u = u_1(x, t) - u_2(x, t)$ есть решение смешанной задачи с данными

$$f_1(x, t) - f_2(x, t), \varphi_1(x) - \varphi_2(x), \alpha_{01}(t) - \alpha_{02}(t), \alpha_{l1}(t) - \alpha_{l2}(t).$$

Из оценки (4.6) имеем

$$\|u_1 - u_2\| \leq \max(\|\varphi_1 - \varphi_2\|, \|\alpha_{01} - \alpha_{02}\|, \|\alpha_{l1} - \alpha_{l2}\|) + T \|f_1 - f_2\|.$$

Если

$$\|\varphi_1 - \varphi_2\| < \varepsilon, \quad \|\alpha_{01} - \alpha_{02}\| < \varepsilon, \quad \|\alpha_{l1} - \alpha_{l2}\| < \varepsilon, \quad \|f_1 - f_2\| < \varepsilon,$$

то

$$\|u_1 - u_2\| \leq (1 + T)\varepsilon.$$

Это значит, что близким по норме правым частям, начальным и граничным функциям соответствуют близкие по норме решения задачи. Непрерывная зависимость решения от данных задачи доказана.

Лекция 5

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНОМЕРНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

Постановка смешанной задачи для одномерного волнового уравнения. По аналогии с рассмотренным выше ДУ диффузии/теплопроводности (1.1) рассмотрим в полуполосе

$$Q = \{(x, t) : 0 < x < l, 0 < t < +\infty\}$$

следующее ДУ с частными производными, которое называется *волновым* (одномерным) *уравнением* (или *уравнением колебаний струны*):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t), \quad (x, t) \in Q. \quad (5.1)$$

Здесь $a^2 > 0$ — известный числовой параметр, правая часть $f(x, t)$ — достаточно гладкая известная функция, определенная на Q , а $u = u(x, t)$ — неизвестная функция; t играет роль времени, x — пространственная переменная.

В отличие от уравнения диффузии/теплопроводности (1.1), уравнение (5.1) является ДУ второго порядка по переменной t . Следовательно, для устранения произвола в определении $u(x, t)$ необходимо задать два дополнительных условия по переменной t (начальные условия):

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \psi(x), \quad x \in [0, l], \quad (5.2)$$

и два — по x (краевые условия), например, такие:

$$u(0, t) = \alpha_0(t), \quad u(l, t) = \alpha_l(t), \quad t \in [0, +\infty). \quad (5.3)$$

Здесь $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $\alpha_0(t)$ и $\alpha_l(t)$ — достаточно гладкие известные функции.

Задача (5.1)–(5.3) называется *смешанной задачей* для одномерного волнового уравнения. Сформулируем теперь, что мы будем понимать под решением этой задачи.

Обозначим через Γ границу области Q , тогда $\overline{Q} = Q \cup \Gamma$ — соответствующая замкнутая область.

Определение 5.1. Функция $u(x, t)$, определенная на множестве $\overline{Q}$, называется *классическим решением смешанной задачи* (5.1)–(5.3), если:

1) $u(x, t)$ и $\frac{\partial u(x, t)}{\partial t}$ непрерывны на $\overline{Q}$ и удовлетворяют на Γ условиям (5.1)–(5.3);

2) частные производные $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ и $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ непрерывны на Q , а $u(x, t)$ удовлетворяет на Q ДУ (5.1).

Как и в случае уравнения диффузии/теплопроводности, необходимым условием существования классического решения задачи является согласование начальных и граничных условий:

$$\varphi(0) = \alpha_0(0), \quad \varphi(l) = \alpha_l(0), \quad \psi(0) = \alpha'_0(0), \quad \psi(l) = \alpha'_l(0).$$

Физический смысл смешанных задач для волнового уравнения. Одномерное волновое уравнение часто называют ДУ струны. Пусть дана гибкая струна длины l , занимающая в состоянии покоя отрезок $0 \leq x \leq l$. Пусть T_0 — постоянное натяжение струны, ρ — постоянная плотность материала струны, $F(x, t)$ — нагрузка внешней силы, приложенная к струне в точке x в момент времени t и рассчитанная на единицу длины. Пусть $a^2 = \frac{T_0}{\rho}$, $f(x, t) = \frac{F(x, t)}{\rho}$, $u(x, t)$ — амплитуда колебаний в точке x в момент времени t . Тогда ДУ (5.1) описывает малые поперечные колебания струны, причем при $f(x, t) = 0$ — свободные колебания, а при $f(x, t) \neq 0$ — вынужденные колебания. Начальные условия (5.2) имеют следующий смысл: функция $\varphi(x)$ задает начальную форму струны, а $\psi(x)$ — начальное распределение ее скоростей. Граничные условия на концах струны могут быть различными. Они определяются в зависимости от способов закрепления концов струны. Если заданы законы движения концов струны, то граничные условия имеют вид (5.3). В частности, если

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad t \in [0, +\infty),$$

то концы струны жестко закреплены. Если концы струны свободны (могут свободно двигаться вдоль прямых $x = 0$ и $x = l$ плоскости (x, t)), то граничные условия будут таковы:

$$\frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = \frac{\partial u(l, t)}{\partial x} = 0.$$

Кроме того, возможны граничные условия, связывающие при $x = 0$ (или при $x = l$) значения u и $\frac{\partial u}{\partial x}$, что соответствует упругому закреплению, а также случаи, когда на разных концах заданы условия разного типа.

Уравнение (5.1) описывает также продольные колебания однородного стержня ($a^2 = \frac{E}{\rho}$, E — модуль Юнга, ρ — плотность материала стержня), колебания электрического тока в проводе при отсутствии сопротивления и потерь через изоляцию ($a^2 = \frac{1}{LC}$, L — коэффициент самоиндукции, C — коэффициент емкости, $u(x, t)$ — сила тока или напряжение), а также другие колебательные процессы.

Единственность классического решения смешанной задачи для волнового уравнения. Рассмотрим смешанную задачу для уравнения струны (5.1)–(5.3).

Теорема 5.1. *Задача (5.1)–(5.3) имеет не более одного классического решения.*

Доказательство. Пусть $u_1(x, t)$, $u_2(x, t)$ — два классических решения задачи (5.1)–(5.3). Их разность

$$u(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t)$$

есть решение следующей смешанной задачи:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & (x, t) \in Q, \end{cases} \quad (5.4)$$

$$\begin{cases} u(x, 0) = 0, & \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0, & x \in [0, l], \end{cases} \quad (5.5)$$

$$\begin{cases} u(0, t) = u(l, t) = 0, & t \in [0, +\infty). \end{cases} \quad (5.6)$$

Докажем, что эта задача имеет только нулевое решение.

Рассмотрим функцию

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right)^2 dx + \frac{a^2}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right)^2 dx$$

и покажем, что она является постоянной, т.е. не зависит от t . Физический смысл функции $E(t)$ — полная энергия колебаний струны в момент времени t , причем

$$E_k(t) = \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right)^2 dx$$

есть кинетическая энергия, а

$$E_p(t) = \frac{a^2}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right)^2 dx$$

— потенциальная энергия. Таким образом, применяемый метод доказательства основан на энергетических соображениях.

Продифференцируем функцию $E(t) = E_k(t) + E_p(t)$ по t , выполняя при этом дифференцирование под знаком интеграла. Вычислив $E'_k(t)$ и воспользовавшись затем уравнением (5.4), получим

$$E'_k(t) = \int_0^l \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \cdot \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} dx = a^2 \int_0^l \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \cdot \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} dx.$$

Далее, вычислив $E'_p(t)$ и проинтегрировав полученный интеграл по частям, имеем

$$\begin{aligned} E'_p(t) &= a^2 \int_0^l \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x \partial t} dx = \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \cdot \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \Big|_0^l - \\ &- a^2 \int_0^l \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \cdot \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} dx = -a^2 \int_0^l \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \cdot \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} dx. \end{aligned}$$

Здесь внеинтегральное слагаемое обращается в ноль в силу граничных условий (5.6)

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad t \in [0, +\infty),$$

откуда следует, что и

$$\frac{\partial u(0, t)}{\partial t} = \frac{\partial u(l, t)}{\partial t} = 0, \quad t \in [0, +\infty).$$

Таким образом,

$$E'(t) = E'_k(t) + E'_p(t) = 0, \quad t \in (0, +\infty).$$

Следовательно, функция $E(t) = \text{const}$ на полуоси $(0, +\infty)$. Согласно начальным условиям (5.5)

$$\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0, \quad \forall x \in [0, l],$$

откуда и

$$\frac{\partial u(x, 0)}{\partial x} = 0, \quad \forall x \in [0, l].$$

Поэтому

$$E(0) = \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} \right)^2 dx + \frac{a^2}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial u(x, 0)}{\partial x} \right)^2 dx = 0.$$

В силу непрерывности функции $E(t)$ на $[0, +\infty)$ имеем

$$E(t) = \text{const} = E(0) = 0, \quad t \in [0, +\infty).$$

Обращаясь к выражению для $E(t)$, приходим к выводу, что

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = 0, \quad (x, t) \in \overline{Q}.$$

Отсюда следует, что

$$u(x, t) = \text{const} = C, \quad (x, t) \in \overline{Q}.$$

Используя начальное условие, находим

$$u(x, 0) = C = 0.$$

Тем самым доказано, что

$$u(x, t) \equiv 0, \quad (x, t) \in \overline{Q}.$$

Следовательно, если существуют две функции $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$, удовлетворяющие условиям теоремы, то $u_1(x, t) \equiv u_2(x, t)$. Теорема доказана.

Замечание 5.1. Аналогичные соображения можно применить для доказательства теоремы единственности в случае краевых условий другого типа.

Замечание 5.2. Примененный здесь метод, основанный на энергетических соображениях, широко используется при доказательстве теорем единственности в различных задачах математической физики, например, в теории электромагнитных полей, теории упругости и гидродинамике.

Решение смешанной задачи для уравнения струны методом Фурье. Как и в случае уравнения диффузии/теплопроводности, будем решать задачу методом Фурье. Если граничные условия неоднородные, то сначала надо свести задачу к задаче с однородными граничными условиями путем замены неизвестной функции, полагая

$$u(x, t) = v(x, t) + w(x, t),$$

где $v(x, t)$ — новая неизвестная функция, а $w(x, t)$ — дважды дифференцируемая по x и по t известная функция, удовлетворяющая заданным граничным условиям.

Рассмотрим смешанную задачу с однородными граничными условиями общего вида

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t), & (x, t) \in Q, \end{cases} \quad (5.7)$$

$$\begin{cases} u(x, 0) = \varphi(x), & \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \psi(x), & x \in [0, l], \end{cases} \quad (5.8)$$

$$\begin{cases} \left(Au - B \frac{\partial u}{\partial x} \right) \Big|_{x=0} = \left(Cu + D \frac{\partial u}{\partial x} \right) \Big|_{x=l} = 0, & t \in [0, \infty) \\ (A, B, C, D \geq 0; \quad A + B > 0; \quad C + D > 0). \end{cases} \quad (5.9)$$

Займемся построением ее формального решения методом Фурье подобно тому, как это было сделано в лекции 3 для задачи (3.1)–(3.3).

Напомним, что сначала нужно найти систему базисных функций, необходимую для построения решения. Для этого рассмотрим в пространстве $\mathbf{H} = \mathbf{C}[0, l]$ линейный оператор $L = -\frac{d^2}{dx^2}$ с областью определения

$$D(L) = \left\{ u(x) \in \mathbf{C}^2[0, l] : Au(0) - Bu'(0) = Cu(l) + Du'(l) = 0; \right. \\ \left. A \geq 0, B \geq 0, A + B > 0; C \geq 0, D \geq 0, C + D > 0 \right\}$$

и решим для него задачу на собственные значения и собственные функции, которая в данном случае сводится к следующей краевой задаче:

$$\begin{cases} u'' + \lambda u = 0, & 0 < x < l, \\ Au(0) - Bu'(0) = 0, & Cu(l) + Du'(l) = 0. \end{cases}$$

Напомним, что оператор L положителен, кроме случая крайних условий $u'(0) = u'(l) = 0$. Пока мы этот случай исключим.

Пусть λ_k — собственные значения, а $X_k(x)$ — соответствующие им собственные функции оператора L , т. е. выполняется условие

$$\begin{cases} -X_k'' = \lambda_k X_k, & 0 < x < l, \\ AX_k(0) - BX_k'(0) = 0, & CX_k(l) + DX_k'(l) = 0, \end{cases} \quad k = 1, 2, \dots$$

Как мы уже отмечали ранее, система $\{X_k\}_{k=1}^{\infty}$ образует ортогональный базис в пространстве $C[0, l]$. Разложим в ряд Фурье по этому базису данные рассматриваемой задачи:

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k X_k(x); \quad \psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k X_k(x);$$

$$f(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) X_k(x).$$

Решение задачи (5.7)–(5.9) будем искать в виде аналогичного ряда

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) X_k(x). \quad (5.10)$$

Подставляя соответствующие ряды в уравнение (5.7) и начальные условия (5.8) и приравнявая коэффициенты при одинаковых базисных функциях, получим следующие задачи Коши для определения неизвестных функций $T_k(t)$:

$$\begin{cases} T_k'' + a^2 \lambda_k T_k = f_k(t), \\ T_k(0) = \varphi_k, \\ T_k'(0) = \psi_k, \end{cases} \quad k = 1, 2, \dots \quad (5.11)$$

Решение каждой из этих задач можно найти методом вариации произвольных постоянных (см. например, [13]). Согласно

этому методу, сначала построим фундаментальные системы решений соответствующих однородных ДУ. Так как оператор L положителен, то все $\lambda_k > 0$. Обозначим $\omega_k = a\sqrt{\lambda_k}$ и запишем характеристическое уравнение

$$p^2 + \omega_k^2 = 0.$$

Это уравнение имеет чисто мнимые корни $p = \pm i\omega_k$, следовательно, фундаментальная система решений имеет вид

$$\{\cos(\omega_k t), \sin(\omega_k t)\}.$$

Далее, общие решения ДУ в задачах (5.11) будем искать в виде

$$T_k(t) = C_1(t) \cos(\omega_k t) + C_2(t) \sin(\omega_k t),$$

где производные от неизвестных функций $C_1(t)$, $C_2(t)$ находятся из следующей, линейной относительно этих производных, системы алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} \begin{cases} C'_1 \cos \omega_k t + C'_2 \sin \omega_k t = 0, \\ C'_1 (\cos \omega_k t)' + C'_2 (\sin \omega_k t)' = f_k(t), \end{cases} & \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} C'_1 \cos \omega_k t + C'_2 \sin \omega_k t = 0, \\ -C'_1 \sin \omega_k t + C'_2 \cos \omega_k t = \frac{f_k(t)}{\omega_k}. \end{cases} \end{aligned}$$

Решая последнюю систему, получим:

$$C'_1(t) = -\frac{f_k(t)}{\omega_k} \sin \omega_k t, \quad C'_2(t) = \frac{f_k(t)}{\omega_k} \cos \omega_k t,$$

откуда

$$\begin{aligned} C_1(t) &= -\frac{1}{\omega_k} \int_0^t f_k(s) \sin(\omega_k s) ds + C_3, \\ C_2(t) &= \frac{1}{\omega_k} \int_0^t f_k(s) \cos(\omega_k s) ds + C_4 \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned}
T_k(t) &= \left(-\frac{1}{\omega_k} \int_0^t f_k(s) \sin(\omega_k s) ds + C_3 \right) \cos \omega_k t + \\
&\quad + \left(\frac{1}{\omega_k} \int_0^t f_k(s) \cos(\omega_k s) ds + C_4 \right) \sin \omega_k t = \\
&= C_3 \cos \omega_k t + C_4 \sin \omega_k t + \frac{1}{\omega_k} \int_0^t f_k(s) \sin(\omega_k(t-s)) ds.
\end{aligned}$$

Наконец, осталось определить произвольные постоянные, воспользовавшись начальными условиями. Продифференцируем последнее выражение:

$$T'_k(t) = \omega_k(-C_3 \sin \omega_k t + C_4 \cos \omega_k t) + \int_0^t f_k(s) \cos(\omega_k(t-s)) ds.$$

Подставляя начальные условия, получим:

$$T_k(0) = C_3 = \varphi_k, \quad T'_k(0) = \omega_k C_4 = \psi_k \Rightarrow C_3 = \varphi_k, \quad C_4 = \frac{\psi_k}{\omega_k}.$$

Итак, решение задач (5.11) в рассматриваемом случае имеет вид

$$\begin{aligned}
T_k(t) &= \varphi_k \cos(a\sqrt{\lambda_k} t) + \frac{\psi_k}{a\sqrt{\lambda_k}} \sin(a\sqrt{\lambda_k} t) + \\
&\quad + \frac{1}{a\sqrt{\lambda_k}} \int_0^t f_k(s) \sin(a\sqrt{\lambda_k}(t-s)) ds.
\end{aligned}$$

Теперь особо отметим случай, когда оператор L неотрицателен. У него существует собственное значение $\lambda_0 = 0$, которому соответствует собственная функция $X_0(x) \equiv 1$, и при построении решения задачи (5.7)–(5.9) к разложению (5.10) добавляется слагаемое $T_0(t)$. Для его нахождения имеем задачу Коши

$$\begin{cases} T''_0 = f_0(t), \\ T_0(0) = \varphi_0, \\ T'_0(0) = \psi_0. \end{cases}$$

Читателю предлагается проверить, что ее решение дается формулой

$$T_0(t) = \varphi_0 + \psi_0 t + \int_0^t (t-s)f_0(s)ds.$$

Наконец, подставляя найденные функции $T_k(t)$ в формулу (5.10), получим формальное решение задачи (5.7)–(5.9).

Рассмотрим некоторые примеры.

Пример 5.1. Однородная струна длины l жестко закреплена на концах $x = 0$ и $x = l$. В точке $x_0 \in (0, l)$ струну отклонили от положения равновесия на небольшое расстояние h (рис. 5.1) и в момент $t = 0$ отпустили без начальной скорости. Требуется определить отклонения $u(x, t)$ струны в любой момент времени.

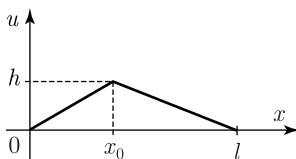


Рис. 5.1. Начальный профиль струны $u(x, 0) = \varphi(x)$

Математической моделью рассматриваемого процесса является следующая начально-краевая задача для однородного уравнения струны:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & 0 < x < l, \quad t > 0; \\ u(x, 0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0, & x \in [0, l]; \\ u(0, t) = u(l, t) = 0, & t \in [0, +\infty). \end{cases}$$

Здесь начальная функция аналитически может быть записана в виде

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{h}{x_0}x, & 0 \leq x \leq x_0, \\ \frac{h(l-x)}{l-x_0}, & x_0 \leq x \leq l. \end{cases}$$

В данном случае краевые условия однородны. Найдем систему базисных функций $\{X_k\}$, необходимую для построения решения задачи. Решив вспомогательную задачу на собственные значения

$$\begin{cases} -X_k'' = \lambda_k X_k, & 0 < x < l, \\ X_k(0) = X_k(l) = 0, \end{cases}$$

получим:

$$\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2, \quad X_k(x) = \sin \frac{k\pi x}{l}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Разложим в ряд Фурье по найденному базису начальную функцию

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k \sin \frac{k\pi x}{l},$$

$$\begin{aligned} \varphi_k &= \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx = \\ &= \frac{2}{l} \left(\frac{h}{x_0} \int_0^{x_0} x \sin \frac{k\pi x}{l} dx + \frac{h}{l-x_0} \int_{x_0}^l (l-x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx \right) = \\ &= \frac{2hl^2}{k^2\pi^2 x_0(l-x_0)} \sin \frac{k\pi x_0}{l}. \end{aligned}$$

Решение будем искать в виде

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) \sin \frac{k\pi x}{l}.$$

Подставляя соответствующие ряды в уравнение и начальные условия и приравнявая коэффициенты при одинаковых базисных функциях, получим следующие задачи Коши для неизвестных функций $T_k(t)$:

$$\begin{cases} T_k'' + \left(\frac{ak\pi}{l}\right)^2 T_k = 0, \\ T_k(0) = \varphi_k, \\ T_k'(0) = 0, \end{cases} \quad k = 1, 2, \dots$$

Решая эти задачи, получим

$$T_k(t) = \varphi_k \cos \frac{ak\pi t}{l}.$$

Итак, искомая амплитуда колебаний струны меняется по закону

$$u(x, t) = \frac{2hl^2}{\pi^2 x_0(l - x_0)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \sin \frac{k\pi x_0}{l} \cos \frac{ak\pi t}{l} \sin \frac{k\pi x}{l}.$$

Пример 5.2. Рассмотрим теперь начально-краевую задачу для уравнения струны, закрепленной на концах, с ненулевой правой частью и с заданным начальным отклонением

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = e^{-t} \sin \frac{\pi x}{l}, & 0 < x < l, \quad t > 0; \\ u(x, 0) = \sin \frac{2\pi x}{l}, \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0, & x \in [0, l]; \\ u(0, t) = u(l, t) = 0, & t \in [0, +\infty). \end{cases}$$

Здесь краевые условия такие же, как и в примере 5.1, поэтому можем сразу выписать систему базисных функций, необходимых для построения решения:

$$X_k(x) = \sin \frac{k\pi x}{l}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Разложим в ряд Фурье по этому базису данные задачи:

$$\varphi(x) = \sin \frac{2\pi x}{l} = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k \sin \frac{k\pi x}{l},$$

$$\varphi_k = \frac{2}{l} \int_0^l \sin \frac{2\pi x}{l} \sin \frac{k\pi x}{l} dx = \begin{cases} 1, & k = 2, \\ 0, & k \neq 2; \end{cases}$$

$$f(x, t) = e^{-t} \sin \frac{\pi x}{l} = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) \sin \frac{k\pi x}{l},$$

$$f_k(t) = \frac{2}{l} \int_0^l e^{-t} \sin \frac{\pi x}{l} \sin \frac{k\pi x}{l} dx = \begin{cases} e^{-t}, & k = 1, \\ 0, & k \neq 1. \end{cases}$$

Поскольку в разложениях данных задачи отличны от нуля коэффициенты лишь при двух базисных функциях, то и в разложении ее решения будут только два соответствующих слагаемых:

$$u(x, t) = T_1(t) \sin \frac{\pi x}{l} + T_2(t) \sin \frac{2\pi x}{l}.$$

Подставим последнее разложение в ДУ:

$$\begin{aligned} T_1''(t) \sin \frac{\pi x}{l} + T_2''(t) \sin \frac{2\pi x}{l} + \left(\frac{\pi a}{l}\right)^2 T_1(t) \sin \frac{\pi x}{l} + \\ + \left(\frac{2\pi a}{l}\right)^2 T_2(t) \sin \frac{2\pi x}{l} = e^{-t} \sin \frac{\pi x}{l} \end{aligned}$$

и в начальные условия:

$$u(x, 0) = T_1(0) \sin \frac{\pi x}{l} + T_2(0) \sin \frac{2\pi x}{l} = \sin \frac{2\pi x}{l},$$

$$\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = T_1'(0) \sin \frac{\pi x}{l} + T_2'(0) \sin \frac{2\pi x}{l} = 0.$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых базисных функциях, запишем для определения $T_1(t)$ и $T_2(t)$ следующие задачи Коши:

$$\begin{cases} T_1'' + \left(\frac{\pi a}{l}\right)^2 T_1 = e^{-t}, \\ T_1(0) = 0, \quad T_1'(0) = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} T_2'' + \left(\frac{2\pi a}{l}\right)^2 T_2 = 0, \\ T_2(0) = 1, \quad T_2'(0) = 0. \end{cases}$$

Решая эти задачи, получим:

$$T_1(t) = \frac{1}{1 + \left(\frac{\pi a}{l}\right)^2} \left(e^{-t} - \cos \frac{\pi a t}{l} + \frac{l}{\pi a} \sin \frac{\pi a t}{l} \right),$$

$$T_2(t) = \cos \frac{2\pi a t}{l}.$$

Подставляя найденные функции $T_1(t)$ и $T_2(t)$ в выражение для $u(x, t)$, запишем окончательное решение задачи

$$\begin{aligned} u(x, t) = \frac{1}{1 + \left(\frac{\pi a}{l}\right)^2} \left(e^{-t} - \cos \frac{\pi a t}{l} + \frac{l}{\pi a} \sin \frac{\pi a t}{l} \right) \sin \frac{\pi x}{l} + \\ + \cos \frac{2\pi a t}{l} \sin \frac{2\pi x}{l}. \end{aligned}$$

Лекция 6

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ДВУМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ/ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ. РЕШЕНИЕ В СЛУЧАЕ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ

Постановка задачи. Пусть G – ограниченная односвязная область на плоскости переменных (x, y) с достаточно гладкой границей Γ . В цилиндре

$$\Pi = \{(x, y, t) : (x, y) \in G, 0 < t < +\infty\}$$

(см. рис. 6.1) рассмотрим следующую смешанную задачу:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \Delta u = f(x, y, t), & (x, y, t) \in \Pi; \end{cases} \quad (6.1)$$

$$\begin{cases} u(x, y, 0) = \varphi(x, y), & (x, y) \in \overline{G}; \end{cases} \quad (6.2)$$

$$\begin{cases} u = \omega(x, y, t), & (x, y) \in \Gamma, \quad t \in [0, +\infty). \end{cases} \quad (6.3)$$

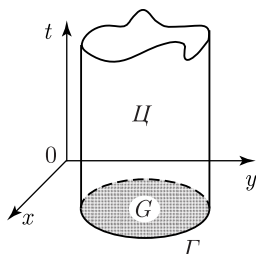


Рис. 6.1

Здесь $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ – двумерный оператор Лапласа.

Предполагается, что функция $f(x, y, t)$ непрерывна на $\Pi = \{(x, y, t) : (x, y) \in \overline{G}, t \in [0, +\infty)\}$, функция $\varphi(x, y)$ непрерывна на $\overline{G}$, а $\omega(x, y, t)$ непрерывна на множестве $\{(x, y, t) : (x, y) \in \Gamma, t \in [0, +\infty)\}$. Кроме того, пусть выполняется условие согласования начального и граничного условий

$$\varphi(x, y) = \omega(x, y, 0). \quad (6.1)$$

Определение 6.1. Функция $u(x, y, t)$, определенная на $\bar{\Pi}$, называется *классическим решением смешанной задачи* (6.1)–(6.3), если:

1) $u(x, y, t)$ непрерывна на $\bar{\Pi}$ и удовлетворяет условиям (6.2)–(6.3);

2) частные производные $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ непрерывны на Π , а $u(x, y, t)$ удовлетворяет на Π уравнению (6.1).

Замечание 6.1. Для классического решения задачи справедливости принцип максимума, теорема единственности и корректность, т. е. непрерывная зависимость классического решения от параметров задачи.

Если граничная функция $\omega(x, y, t) = 0$, то формальное решение задачи может быть построено методом Фурье.

Пусть $\mathbf{H}$ — евклидово пространство непрерывных на $\bar{G}$ функций со скалярным произведением

$$(u_1, u_2) = \iint_G u_1(x, y) u_2(x, y) dx dy.$$

Рассмотрим линейный оператор $L = -\Delta$ с областью определения, состоящей из дважды непрерывно дифференцируемых на $\bar{G}$ функций, удовлетворяющих граничному условию $u|_G = 0$.

Лемма 6.1. *Оператор L — симметрический и положительный.*

Доказательство. Докажем сначала, что $\forall u, v \in D(L)$ справедливо равенство

$$(-\Delta u, v) = \iint_G \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy.$$

Воспользуемся формулой Грина

$$\iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int_\Gamma P dx + Q dy.$$

Положим в этой формуле

$$P = -v \frac{\partial u}{\partial y}, \quad Q = v \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Учитывая, что

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(v \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(v \frac{\partial u}{\partial y} \right),$$

получим

$$\iint_G \left(v \Delta u + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\Gamma} -v \frac{\partial u}{\partial y} dx + v \frac{\partial u}{\partial x} dy.$$

Так как $v|_{\Gamma} = 0$, то интеграл в правой части последнего равенства равен нулю и

$$-\iint_G v \Delta u dx dy = \iint_G \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy.$$

Требуемое утверждение доказано. Отсюда, в силу равноправия u и v , следует *симметричность* оператора L . Положим $u = v$. Тогда

$$(Lu, u) = \iint_G \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy = \iint_G |\text{grad } u|^2 dx dy \geq 0.$$

Здесь $(Lu, u) = 0$, если $\text{grad } u = 0$ на $\overline{G}$, откуда $u = \text{const}$. Но $u|_{\Gamma} = 0$, значит $u \equiv 0$. Отсюда следует, что оператор L *положителен*.

Перейдем теперь к построению формального решения задачи в виде ряда Фурье по собственным функциям этого оператора в двух важных для приложений случаях, когда плоская область — прямоугольник или круг.

Собственные значения и собственные функции оператора $L = -\Delta$ в случае прямоугольной области. Пусть область G — прямоугольник, т. е.

$$G = \{(x, y) : 0 < x < a, 0 < y < b\}.$$

Найдем собственные значения и собственные функции оператора $L = -\Delta$ с нулевыми краевыми условиями. Для их определения возникает краевая задача ($\lambda = \mu^2 > 0$, так как оператор L положителен):

$$\left\{ \begin{aligned} -\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) &= \mu^2 v, & (x, y) \in G, \end{aligned} \right. \quad (6.5)$$

$$\left\{ \begin{aligned} v(0, y) &= v(a, y) = 0, \end{aligned} \right. \quad (6.6)$$

$$\left\{ \begin{aligned} v(x, 0) &= v(x, b) = 0. \end{aligned} \right. \quad (6.7)$$

Решение этой задачи будем искать в виде

$$v(x, y) = Y(y) \sin \frac{k\pi x}{a}, \quad (6.8)$$

где $\sin \frac{k\pi x}{a}$ — собственная функция оператора $L_1 = -\frac{d^2}{dx^2}$ с краевыми условиями (6.6). Подставляя (6.8) в (6.5), (6.7), получим для определения $Y(y)$ следующую краевую задачу:

$$\begin{cases} -Y''(y) = \left(\mu^2 - \left(\frac{k\pi}{a} \right)^2 \right) Y(y), \\ Y(0) = Y(b) = 0. \end{cases}$$

Это означает, что $Y(y)$ является собственной функцией оператора $L_2 = -\frac{d^2}{dy^2}$ с краевыми условиями (6.7), соответствующей собственному значению $\mu^2 - \left(\frac{k\pi}{a} \right)^2$. В соответствии с результатом, установленным в лекции 2, имеем

$$\mu^2 - \left(\frac{k\pi}{a} \right)^2 = \left(\frac{m\pi}{b} \right)^2, \quad Y_m(y) = \sin \frac{m\pi y}{b}, \quad m = 1, 2, \dots$$

Следовательно, искомые собственные значения задачи (6.5)–(6.7) суть

$$\mu_{km}^2 = \left(\frac{k\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b} \right)^2, \quad k, m = 1, 2, \dots \quad (6.9)$$

Им отвечают собственные функции

$$v_{km}(x, y) = \sin \frac{k\pi x}{a} \cdot \sin \frac{m\pi y}{b}, \quad k, m = 1, 2, 3, \dots \quad (6.10)$$

Вычислим квадраты норм полученных собственных функций:

$$\begin{aligned} \|v_{km}\|^2 &= \iint_G v_{km}^2(x, y) dx dy = \int_0^a \sin^2 \left(\frac{k\pi x}{a} \right) dx \int_0^b \sin^2 \left(\frac{m\pi y}{b} \right) dy = \\ &= \left\| \sin \left(\frac{k\pi x}{a} \right) \right\|^2 \cdot \left\| \sin \left(\frac{m\pi y}{b} \right) \right\|^2 = \frac{ab}{4}. \end{aligned}$$

Замечание 6.2. Найденные собственные функции оператора Лапласа в прямоугольнике равны произведению собственных функций по каждой переменной, т. е. $X_k(x) \cdot Y_m(y)$, а собственные значения равны сумме собственных значений одномерных задач.

Замечание 6.3. Собственные значения в данном случае могут повторяться (быть кратными). Однако ортогональность полученной системы собственных функций (6.10) в прямоугольнике можно проверить непосредственными вычислениями.

Пример 6.1. Пусть $G = \{(x, y) : 0 < x < \pi, 0 < y < \pi\}$ — квадрат. Тогда

$$\mu_{km}^2 = k^2 + m^2, \quad k, m = 1, 2, \dots$$

Отсюда получим:

$$\mu_{11}^2 = 2, \quad \mu_{12}^2 = \mu_{21}^2 = 5, \quad \mu_{22}^2 = 8, \quad \mu_{13}^2 = \mu_{31}^2 = 10, \quad \dots$$

Здесь, например, второе собственное значение двукратно. Ему соответствуют две различные собственные функции: $v_{12}(x, y) = \sin x \cdot \sin 2y$, $v_{21}(x, y) = \sin 2x \cdot \sin y$.

Построение формального решения смешанной задачи для уравнения диффузии/теплопроводности в прямоугольной области. Теперь можем рассмотреть смешанную задачу, описывающую явления теплопроводности или диффузии в плоской прямоугольной пластинке $G = \{(x, y) : 0 < x < a, 0 < y < b\}$:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \Delta u = f(x, y, t), & (x, y) \in G, \quad t > 0; \end{cases} \quad (6.11)$$

$$\begin{cases} u(x, y, 0) = \varphi(x, y), & (x, y) \in \overline{G}; \end{cases} \quad (6.12)$$

$$\begin{cases} u(0, y, t) = u(a, y, t) = 0, \end{cases} \quad (6.13)$$

$$\begin{cases} u(x, 0, t) = u(x, b, t) = 0. \end{cases} \quad (6.14)$$

Разложим правую часть уравнения и начальную функцию в двойные ряды Фурье по синусам:

$$f(x, y, t) = \sum_{k, m=1}^{\infty} f_{km}(t) \sin \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b},$$

$$f_{km}(t) = \frac{(f, v_{km})}{(v_{km}, v_{km})} = \frac{4}{ab} \int_0^a dx \int_0^b f(x, y, t) \sin \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b} dy,$$

$$\varphi(x, y) = \sum_{k,m=1}^{\infty} \varphi_{km} \sin \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b},$$

$$\varphi_{km} = \frac{(\varphi, v_{km})}{(v_{km}, v_{km})} = \frac{4}{ab} \int_0^a dx \int_0^b \varphi(x, y) \sin \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b} dy.$$

Решение задачи будем искать в виде аналогичного разложения

$$u(x, y, t) = \sum_{k,m=1}^{\infty} T_{km}(t) \sin \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b}.$$

Подставляя ряды в дифференциальное уравнение (6.11) и начальные условия (6.12) и приравнявая коэффициенты при одинаковых базисных функциях, получим задачи Коши для определения $T_{km}(t)$:

$$\begin{cases} T'_{km} + a^2 \mu_{km}^2 T_{km} = f_{km}(t), \\ T_{km}(0) = \varphi_{km}, \quad k, m = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (6.15)$$

Решения этих задач могут быть записаны в виде

$$T_{km}(t) = \varphi_{km} e^{-a^2 \mu_{km}^2 t} + \int_0^t e^{-a^2 \mu_{km}^2 (t-s)} f_{km}(s) ds.$$

Итак, формальное решение смешанной задачи для уравнения теплопроводности в прямоугольнике имеет вид

$$u(x, y, t) = \sum_{k,m=1}^{\infty} \varphi_{km} e^{-a^2 \mu_{km}^2 t} \sin \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b} + \sum_{k,m=1}^{\infty} \left(\int_0^t e^{-a^2 \mu_{km}^2 (t-s)} f_{km}(s) ds \right) \sin \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b}.$$

Пример 6.2.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0, (x, y) \in G = \{(x, y) : 0 < x < \pi, 0 < y < \pi\}, t > 0; \\ u(x, y, 0) = 3 \sin x \cdot \sin 2y, \quad (x, y) \in \overline{G}; \\ u(0, y, t) = u(\pi, y, t) = u(x, 0, t) = u(x, \pi, t) = 0. \end{cases}$$

Здесь начальная функция имеет вид $\varphi(x, y) = 3 \sin x \cdot \sin 2y = 3v_{12}(x, y)$, т. е. она уже разложена в ряд Фурье по ортогональной в области G системе функций (6.10). Поскольку в разложении данных задачи присутствует лишь одна базисная функция, ее решение будем искать в виде

$$u(x, y, t) = T(t) \sin x \cdot \sin 2y.$$

Подставляя это выражение в ДУ и начальные условия, получим для определения неизвестной функции $T(t)$ следующую задачу Коши:

$$\begin{cases} T' + 5T = 0, \\ T(0) = 3. \end{cases}$$

Отсюда $T(t) = 3e^{-5t}$, и мы можем записать решение начально-краевой задачи

$$u(x, y, t) = 3e^{-5t} \sin x \cdot \sin 2y,$$

являющееся ее классическим решением.

Собственные значения и собственные функции оператора $-\Delta$ в прямоугольной области в случае краевых условий общего вида. Следует заметить, что на практике, помимо краевых условий рассмотренного типа, встречаются и другие. Например, на границе прямоугольника или на ее части может задаваться нормальная к ней производная. Как и ранее, собственные функции оператора Лапласа в прямоугольнике равны

$$v_{km}(x, y) = X_k(x)Y_m(y),$$

где $X_k(x)$ — собственные функции оператора $-\frac{d^2}{dx^2}$, $Y_m(y)$ — собственные функции оператора $-\frac{d^2}{dy^2}$ с соответствующими краевыми условиями, а собственные значения равны сумме собственных значений этих операторов. Проиллюстрируем это на примерах.

Пример 6.3. Найдём собственные значения λ и собственные функции $v(x, y)$ оператора $L = -\Delta$ с областью определения, состоящей из дважды непрерывно дифференцируемых на прямоугольнике $G = \{(x, y) : 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b\}$ функций $u(x, y)$, удовлетворяющих краевым условиям $\frac{\partial u(0, y)}{\partial x} = \frac{\partial u(a, y)}{\partial x} =$

$= \frac{\partial u(x, 0)}{\partial y} = \frac{\partial u(x, b)}{\partial y} = 0$. Для их определения возникает краевая задача

$$\begin{cases} -\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) = \lambda v, & 0 < x < a, \quad 0 < y < b; \end{cases} \quad (6.16)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial v(0, y)}{\partial x} = \frac{\partial v(a, y)}{\partial x} = 0, & 0 \leq y \leq b; \end{cases} \quad (6.17)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial v(x, 0)}{\partial y} = \frac{\partial v(x, b)}{\partial y} = 0, & 0 \leq x \leq a. \end{cases} \quad (6.18)$$

Пусть $\lambda_k^{(1)}$ — собственные значения, а $X_k(x)$ — соответствующие им собственные функции оператора $L_1 = \frac{d^2}{dx^2}$ с краевыми условиями $X'_k(0) = X'_k(a) = 0$, $k = 0, 1, \dots$, т. е.

$$\begin{cases} -X''_k = \lambda_k^{(1)} X_k, & 0 < x < a, \\ X'_k(0) = X'_k(a) = 0, \end{cases} \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Решение задачи (6.16)–(6.18) будем искать в виде

$$v(x, y) = Y(y)X_k(x). \quad (6.19)$$

Заметим, что краевые условия (6.17) в этом случае выполняются. Подставляя выражение (6.19) в ДУ (6.16) и условия (6.18), получим для определения $Y(y)$ следующую краевую задачу:

$$\begin{cases} -Y''(y) = (\lambda - \lambda_k^{(1)})Y(y), & 0 < y < b; \\ Y'(0) = Y'(b) = 0. \end{cases}$$

Отсюда следует, что $\lambda - \lambda_k^{(1)} = \lambda_m^{(2)}$ — собственные значения, а $Y(y) = Y_m(y)$ — соответствующие им собственные функции оператора $L_2 = -\frac{d^2}{dy^2}$ с краевыми условиями $Y'_m(0) = Y'_m(b) = 0$, $m = 0, 1, \dots$, т. е.

$$\begin{cases} -Y''_m = \lambda_m^{(2)} Y_m, & 0 < y < b, \\ Y'_m(0) = Y'_m(b) = 0, \end{cases} \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Таким образом, собственные значения двумерного оператора $-\Delta$ с рассматриваемыми краевыми условиями

$$\lambda_{km} = \lambda_k^{(1)} + \lambda_m^{(2)} = \left(\frac{k\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2,$$

а соответствующие им собственные функции

$$v_{km}(x, y) = \cos \frac{k\pi x}{a} \cdot \cos \frac{m\pi y}{b}, \quad k, m = 0, 1, 2, \dots$$

Пример 6.4. Рассмотрим задачу на собственные значения для оператора $L = -\Delta$ с другими краевыми условиями

$$\begin{cases} -\Delta v = \lambda v, & 0 < x < a, \quad 0 < y < b; \\ \frac{\partial v(0, y)}{\partial x} = v(a, y) = 0, & 0 < y < b; \\ v(x, 0) = \frac{\partial v(x, b)}{\partial y} = 0, & 0 < x < a. \end{cases}$$

В качестве упражнения проверьте, что здесь

$$\lambda_{km} = \left(\frac{(2k-1)\pi}{2a} \right)^2 + \left(\frac{(2m-1)\pi}{2b} \right)^2,$$

$$v_{km}(x, y) = \cos \frac{(2k-1)\pi x}{2a} \cdot \sin \frac{(2m-1)\pi y}{2b}, \quad k, m = 1, 2, \dots$$

Лекция 7

РЕШЕНИЕ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ/ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В КРУГЛОЙ ПЛАСТИНЕ

Уравнение и функции Бесселя. Приведем для полноты изложения необходимые нам факты о бесселевых функциях, изучаемых обычно в курсе обыкновенных ДУ.

Уравнением Бесселя (или *уравнением цилиндрических функций*) называется линейное однородное ДУ второго порядка следующего вида ($p \geq 0$ — числовой параметр):

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - p^2)y = 0. \quad (7.1)$$

Любое нетривиальное решение этого ДУ называется *цилиндрической функцией*.

Как всякое линейное однородное ДУ второго порядка, уравнение Бесселя на полуоси $x > 0$ имеет два линейно независимых решения. Эти решения могут быть построены в виде обобщенных степенных рядов (см., например, [11]). Одно из этих двух линейно независимых решений имеет вид

$$J_p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(p+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+p}. \quad (7.2)$$

Оно называется *функцией Бесселя порядка p* . Здесь $\Gamma(p+k+1)$ — гамма-функция Эйлера (см., например, [4]).

В частности, при $p = n = 0, 1, 2, \dots$ функции Бесселя представимы сходящимися на всей оси обычными степенными рядами

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(n+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! (n+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}.$$

Например, функция Бесселя нулевого порядка может быть задана формулой

$$J_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} = 1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{2^2} \left(\frac{x}{2}\right)^4 - \dots$$

Этот ряд напоминает разложение Тейлора функции $\cos \frac{x}{2}$. График функции $J_0(x)$ при $x \geq 0$ изображен на рис. 7.1, он описывает затухающие колебания. Аналогичные графики получаются для бесселевых функций $J_p(x)$, $p > 0$, однако эти функции обращаются в ноль при $x = 0$. Их графики похожи на «затухающий синус». Каждая из функций $J_p(x)$, $p \geq 0$, имеет последовательность нулей $\mu_p^{(s)}$, $s = 1, 2, 3, \dots$. В частности, нули функции $J_0(x)$ таковы: $\mu_0^{(1)} \approx 2,4048$; $\mu_0^{(2)} \approx 5,5201$; $\mu_0^{(3)} \approx 8,6537 \dots$

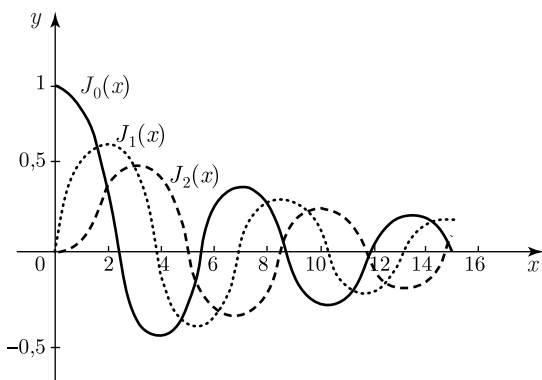


Рис. 7.1. Графики функций Бесселя $J_0(x)$, $J_1(x)$ и $J_2(x)$

Если p не равно целому числу, то второе решение уравнения Бесселя, линейно независимое с $J_p(x)$, дается формулой

$$J_{-p}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(-p + k + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-p}. \quad (7.3)$$

Очевидно, это решение стремится к бесконечности при $x \rightarrow +0$ (решение неограничено в нуле).

Если $p = n$ — целое число, то

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x),$$

т. е. решения линейно зависимы и не могут образовать фундаментальную систему решений ДУ. В этом случае вторым, линейно независимым с $J_n(x)$, решением уравнения Бесселя является функция Неймана

$$N_n(x) = \lim_{p \rightarrow n} \frac{J_p(x) \cos px - J_{-p}(x)}{\sin px}. \quad (7.4)$$

Это решение также неограничено при $x \rightarrow +0$. Графики функций Неймана порядков 0 и 1 приведены на рис. 7.2.

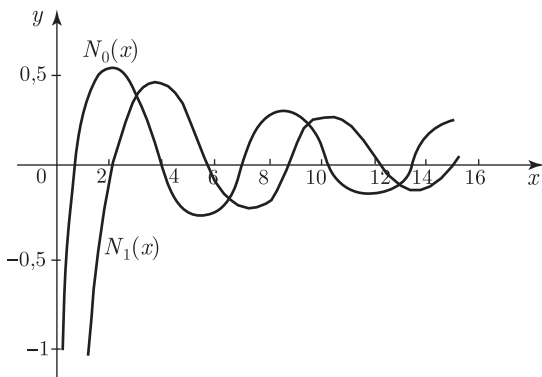


Рис. 7.2. Графики функций Неймана $N_0(x)$ и $N_1(x)$

Заметим, что цилиндрические функции Бесселя хорошо изучены, для них имеются подробные таблицы и т. п. (см., например, [10]). В частности, справедлива следующая рекуррентная формула:

$$\frac{d}{dx} (x^{-p} J_p(x)) = -x^{-p} J_{p+1}(x). \quad (7.5)$$

Ее следствием является другая полезная рекуррентная формула

$$x J'_p(x) - p J_p(x) = -x J_{p+1}(x). \quad (7.6)$$

Если $x = \mu_p^{(s)}$, где $\mu_p^{(s)}$ — s -й нуль функции $J_p(x)$, то из рекуррентной формулы (7.6) получим

$$J'_p(\mu_p^{(s)}) = -J_{p+1}(\mu_p^{(s)}). \quad (7.7)$$

Выражение оператора Лапласа в полярных координатах. Рассмотрим область $D \subset \mathbf{R}^2$ переменных x, y и область $G \subset \mathbf{R}^2$

переменных r, φ . Пусть замена переменных (переход к полярным координатам)

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi \quad (7.8)$$

отображает G на D взаимно однозначно, т.е. каждой точке $(r, \varphi) \in G$ ставится в соответствие точка $(x, y) \in D$, причем существует обратное отображение. На рис. 7.3 показан один из возможных вариантов такой пары областей.

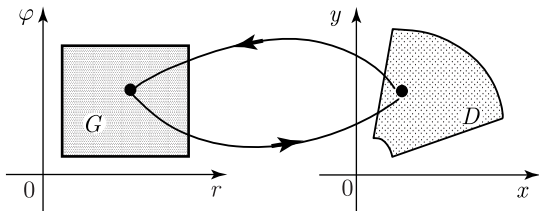


Рис. 7.3

Пусть в области D задана дважды непрерывно дифференцируемая функция $u(x, y)$. Положим

$$v(r, \varphi) = u(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \quad (7.9)$$

и поставим следующую задачу: выразить

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

через функцию $v(r, \varphi)$ и ее частные производные, т.е. найти вид двумерного оператора Лапласа в полярных координатах. С помощью правила дифференцирования сложной функции находим:

$$\frac{\partial v}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \varphi + \frac{\partial u}{\partial y} \sin \varphi, \quad \frac{\partial v}{\partial \varphi} = -\frac{\partial u}{\partial x} r \sin \varphi + \frac{\partial u}{\partial y} r \cos \varphi,$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} &= \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \cos \varphi + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \sin \varphi = \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cos^2 \varphi + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \sin \varphi \cos \varphi + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \cos \varphi \sin \varphi + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \sin^2 \varphi, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} = & -\frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) r \sin \varphi - \frac{\partial u}{\partial x} r \cos \varphi + \\
& + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) r \cos \varphi - \frac{\partial u}{\partial y} r \sin \varphi = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} r^2 \sin^2 \varphi - \\
& - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} r^2 \sin \varphi \cos \varphi - \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} r^2 \cos \varphi \sin \varphi + \\
& + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} r^2 \cos^2 \varphi - \frac{\partial u}{\partial x} r \cos \varphi - \frac{\partial u}{\partial y} r \sin \varphi.
\end{aligned}$$

Сложив выражения для $\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}$, $\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r}$, $\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2}$, получим

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Итак, найдено выражение для оператора Лапласа в полярных координатах. Более компактно его можно переписать так:

$$\Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2}. \quad (7.10)$$

Пример 7.1. Пусть функция $u(x, y)$ дважды непрерывно дифференцируема в круге $x^2 + y^2 < R^2$ и непрерывна в замкнутом круге $x^2 + y^2 \leq R^2$. В данном случае затруднительно непосредственно перейти к полярным координатам, так как в этом круге отображение (7.8) не является взаимно однозначным. Поэтому мы поступим следующим образом.

Рассмотрим в плоскости переменных r, φ открытый прямоугольник

$$G = \{(r, \varphi): 0 < r < R, -\pi < \varphi < \pi\}.$$

В результате отображения (7.8) область G перейдет в область

$$D = \{(x, y): x^2 + y^2 < R^2\} \setminus \{(x, y): -R < x \leq 0, y = 0\},$$

представляющую собой открытый круг с разрезом по радиусу, лежащему на отрицательной полуоси абсцисс (см. рис. 7.4).

Функция $u(x, y)$ перейдет в результате замены переменных (7.8) в функцию $v(r, \varphi)$ согласно (7.9). Заметим, однако, что первоначально $u(x, y)$ была непрерывна в замкнутом круге, в частности, на линии разреза. Поэтому $v(r, \varphi)$ должна быть определена

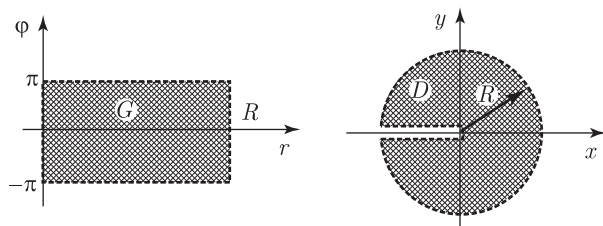


Рис. 7.4

на нижнем и верхнем основаниях прямоугольника G и принимать там равные значения, т. е.

$$v(r, -\pi) = v(r, \pi), \quad r \in (0, R). \quad (7.11)$$

Далее, поскольку

$$\frac{\partial v}{\partial \varphi} = -\frac{\partial u}{\partial x} r \sin \varphi + \frac{\partial u}{\partial y} r \cos \varphi = -y \frac{\partial u}{\partial x} + x \frac{\partial u}{\partial y}$$

и частные производные $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ также непрерывны на линии разреза, то должно выполняться условие

$$\frac{\partial v(r, -\pi)}{\partial \varphi} = \frac{\partial v(r, \pi)}{\partial \varphi}, \quad r \in (0, R). \quad (7.12)$$

Сформулированные условия (7.11)–(7.12) называются *условиями 2 π -периодичности* функции v по переменной φ .

Обратим внимание на еще одно обстоятельство. Выражение для оператора Лапласа в декартовых координатах определено в начале координат. В полярных же координатах (см. (7.10)) это выражение не определено при $r = 0$. Однако, в силу непрерывности,

$$u(x, y) \rightarrow u(0, 0) \text{ при } (x, y) \rightarrow (0, 0).$$

Следовательно, в соответствии с (7.9),

$$v(r, \varphi) \rightarrow u(0, 0) \text{ при } r \rightarrow 0.$$

Отсюда следует, что функция $v(r, \varphi)$ должна быть ограничена при $r \rightarrow 0$, что кратко будем записывать так:

$$|v(0, \varphi)| < +\infty. \quad (7.13)$$

Подведем итог. Функция $v(r, \varphi)$, полученная из $u(x, y)$ в результате перехода к полярным координатам, должна удовлетворять:

- условиям 2π -периодичности по φ

$$v(r, -\pi) = v(r, \pi), \quad \frac{\partial v(r, -\pi)}{\partial \varphi} = \frac{\partial v(r, \pi)}{\partial \varphi}, \quad r \in (0, R);$$

- условию ограниченности при $r \rightarrow 0$

$$|v(0, \varphi)| < +\infty.$$

Собственные значения и собственные функции оператора Лапласа в круге. Напомним, что в лекции 6 мы рассмотрели линейный оператор

$$-\Delta = -\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)$$

с областью определения

$$D(-\Delta) = \{u(x, y) \in C^2(\overline{G}) : u|_{\Gamma} = 0\},$$

где G — область в плоскости переменных x, y , а Γ — ее граница, и доказали (см. лемму 6.1), что этот оператор симметрический и положительный, а также решили для него задачу на собственные значения и собственные функции в случае прямоугольной области. Пусть теперь область $G = \{(x, y) : x^2 + y^2 < R^2\}$ — круг радиуса R с центром в начале координат, $\Gamma = \{(x, y) : x^2 + y^2 = R^2\}$. Рассмотрим задачу на собственные значения

$$\begin{cases} -\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = \mu^2 u, & (x, y) \in G, \\ u|_{\Gamma} = 0. \end{cases} \quad (7.14)$$

В полярных координатах эта задача приобретает следующий вид:

$$\begin{cases} -\left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2}\right) = \mu^2 v, & r \in (0, R), \varphi \in (-\pi, \pi), \\ v(R, \varphi) = 0. \end{cases} \quad (7.15)$$

При этом функция $v(r, \varphi)$ должна быть 2π -периодической по переменной φ и ограниченной при $r \rightarrow 0$, т.е. удовлетворять также и следующим граничным условиям:

$$v(r, -\pi) = v(r, \varphi), \quad \frac{\partial v(r, -\pi)}{\partial \varphi} = \frac{\partial v(r, \pi)}{\partial \varphi}, \quad (7.16)$$

$$|v(0, \varphi)| < +\infty. \quad (7.17)$$

Перейдем к решению поставленной задачи.

Выделим в правой части ДУ (7.15) оператор $L = -\frac{d^2}{d\varphi^2}$ с областью определения $D(L)$, состоящей из дважды непрерывно дифференцируемых на $[-\pi, \pi]$ функций $\Phi(\varphi)$, удовлетворяющих периодическим краевым условиям

$$\Phi(-\pi) = \Phi(\pi), \quad \Phi'(-\pi) = \Phi'(\pi).$$

Согласно примеру 2.2, рассмотренному в лекции 2, собственные функции оператора L составляют тригонометрическую систему

$$1, \cos \varphi, \sin \varphi, \cos 2\varphi, \sin 2\varphi, \dots, \quad (7.18)$$

причем 1 отвечает собственному значению 0, а $\cos k\varphi, \sin k\varphi$ отвечают собственному значению k^2 . Будем искать частные решения нашей задачи в виде произведений этих функций на неизвестные функции, зависящие от r , т.е. в виде

$$a_0(r) \cdot 1, \quad a_k(r) \cdot \cos k\varphi, \quad b_k(r) \cdot \sin k\varphi \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (7.19)$$

Подставляя последовательно выражения (7.19) в (7.15) вместо $v(r, \varphi)$ и учитывая условия (7.17), для определения неизвестных функций получим следующие краевые задачи:

$$\begin{cases} -a_k'' - \frac{1}{r}a_k' + \frac{1}{r^2}a_k = \mu^2 a_k, \\ |a_k(0)| < +\infty, \quad a_k(R) = 0, \quad k = 0, 1, \dots; \end{cases} \quad (7.20)$$

$$\begin{cases} -b_k'' - \frac{1}{r}b_k' + \frac{1}{r^2}b_k = \mu^2 b_k, \\ |b_k(0)| < +\infty, \quad b_k(R) = 0, \quad k = 1, 2, \dots. \end{cases} \quad (7.21)$$

Любую из этих задач можно записать в виде

$$\begin{cases} r^2 c'' + r c' + (\mu^2 r^2 - k^2) c = 0, \quad 0 < r < R, \\ |c(0)| < +\infty, \quad c(R) = 0. \end{cases} \quad (7.22)$$

Сделаем замену независимой переменной и неизвестной функции, полагая

$$\mu r = \rho, \quad c(r) = w(\rho).$$

В результате задача переписывается так:

$$\begin{cases} \rho^2 w'' + \rho w' + (\rho^2 - k^2)w = 0, & 0 < \rho < \mu R, \\ |w(0)| < +\infty, & w(\mu R) = 0. \end{cases} \quad (7.21)$$

Мы получили краевую задачу для уравнения Бесселя с целочисленным параметром k . Решение уравнения Бесселя, ограниченное в нуле, имеет вид

$$w(\rho) = J_k(\rho), \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

где $J_k(\rho)$ — функция Бесселя порядка k . Воспользуемся вторым краевым условием

$$w(\mu R) = J_k(\mu R) = 0.$$

Это равенство означает, что

$$\mu R = \mu_k^{(s)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad s = 1, 2, \dots,$$

где $\mu_k^{(s)}$ — нули соответствующих функций Бесселя. Таким образом, ненулевые решения задачи (7.22), т. е. собственные функции, существуют только при значениях параметра

$$\mu^2 = \left(\frac{\mu_k^{(s)}}{R} \right)^2, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad s = 1, 2, \dots, \quad (7.22)$$

являющихся собственными значениями оператора Лапласа с рассматриваемыми краевыми условиями. При этом каждому собственному значению $\left(\frac{\mu_0^{(s)}}{R} \right)^2$ отвечает собственная функция

$J_0 \left(\frac{\mu_0^{(s)} r}{R} \right)$, а каждому собственному значению $\left(\frac{\mu_k^{(s)}}{R} \right)^2$ с $k \geq 1$ отвечают две собственные функции:

$$J_k \left(\frac{\mu_k^{(s)} r}{R} \right) \cos k\varphi, \quad J_k \left(\frac{\mu_k^{(s)} r}{R} \right) \sin k\varphi.$$

Покажем, что построенная система собственных функций (так называемая *система Фурье–Бесселя*)

$$\begin{cases} J_k \left(\frac{\mu_k^{(s)} r}{R} \right) \cos k\varphi, & k = 0, 1, 2, \dots, \\ J_l \left(\frac{\mu_l^{(s)} r}{R} \right) \sin l\varphi, & l = 1, 2, \dots \quad (s = 1, 2, \dots) \end{cases} \quad (7.23)$$

ортогональна на области $\overline{G}$. Возьмем две разные функции системы (7.23). Их можно записать в виде

$$u_1 = \mathfrak{R}_1(r)\Phi_1(\varphi), \quad u_2 = \mathfrak{R}_2(r)\Phi_2(\varphi),$$

где $\mathfrak{R}_1(r)$ и $\mathfrak{R}_2(r)$ — бесселевы функции, а $\Phi_1(\varphi)$ и $\Phi_2(\varphi)$ — функции тригонометрической системы (7.18). Напомним, что в двумерном случае под скалярным произведением двух функций мы понимаем двойной интеграл по области G от их произведения. При переходе к полярным координатам имеем

$$(u_1, u_2) = \int_0^R \mathfrak{R}_1(r)\mathfrak{R}_2(r)rdr \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_1(\varphi)\Phi_2(\varphi)d\varphi. \quad (7.24)$$

Если $\Phi_1(\varphi)$ и $\Phi_2(\varphi)$ — различные функции тригонометрической системы, то $\int_{-\pi}^{\pi} \Phi_1(\varphi)\Phi_2(\varphi)d\varphi = 0$ и $(u_1, u_2) = 0$. Пусть

$\Phi_1(\varphi) = \Phi_2(\varphi) = \Phi(\varphi)$, тогда $\mathfrak{R}_1(r)$ и $\mathfrak{R}_2(r)$ — бесселевы функции одного порядка, но с разными значениями s . Это означает, что в данном случае собственные функции отвечают различным собственным значениям и по теореме 2.1 также ортогональны. Итак, мы установили, что $(u_1, u_2) = 0$, если u_1 и u_2 — любые две разные функции системы (7.23).

Замечание 7.1. Согласно изложенному выше, при $\Phi_1(\varphi) = \Phi_2(\varphi) = \Phi(\varphi)$ из (7.24) получим

$$0 = \int_0^R \mathfrak{R}_1(r)\mathfrak{R}_2(r)rdr \int_{-\pi}^{\pi} \Phi^2(\varphi)d\varphi.$$

Следовательно,

$$\int_0^R J_k \left(\frac{\mu_k^{(s_1)} r}{R} \right) J_k \left(\frac{\mu_k^{(s_2)} r}{R} \right) r dr = 0 \text{ при } s_1 \neq s_2, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

т. е. система функций Бесселя $\left\{ J_k \left(\frac{\mu_k^{(s)} r}{R} \right) \right\}_{s=1}^{\infty}$ при каждом $k = 0, 1, 2, \dots$ ортогональна на $[0, R]$ с весом r . Ортогональность с весом r здесь понимается как ортогональность функций $w_1(r)$ и $w_2(r)$ на $[0, R]$ в смысле скалярного произведения

$$\int_0^R w_1(r) w_2(r) r dr.$$

Построение решения смешанной задачи для уравнения диффузии/теплопроводности в круглой пластине. Рассмотрим смешанную задачу (6.1)–(6.3) в случае, когда плоская область — круг радиуса R с центром в начале координат, а граничная функция равна 0. Согласно изложенному выше, в полярных координатах поставленная задача запишется так:

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} - a^2 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} \right) = f(r, \varphi, t), \\ \quad r \in (0, R), \quad \varphi \in (-\pi, \pi), t > 0; \\ v(r, \varphi, 0) = h(r, \varphi), \quad r \in (0, R), \quad \varphi \in (-\pi, \pi); \\ v(R, \varphi, t) = 0, \quad |v(0, \varphi, t)| < +\infty, \quad \varphi \in (-\pi, \pi), t \geq 0, \\ v(r, -\pi, t) = v(r, \pi, t), \quad \frac{\partial v(r, -\pi, t)}{\partial \varphi} = \frac{\partial v(r, \pi, t)}{\partial \varphi}, \\ \quad r \in (0, R), \quad t \geq 0. \end{cases} \quad (7.25)$$

В соответствии с общей схемой метода Фурье, начальную функцию и правую часть уравнения следует разложить в ряды по ортогональной системе Фурье–Бесселя (7.23), т. е. представить в виде

$$\begin{aligned} h(r, \varphi) = \sum_{s=1}^{\infty} \left\{ a_{0s} \cdot J_0 \left(\frac{\mu_0^{(s)} r}{R} \right) + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_{ks} \cdot J_k \left(\frac{\mu_k^{(s)} r}{R} \right) \cos k\varphi + \right. \right. \\ \left. \left. + b_{ks} \cdot J_k \left(\frac{\mu_k^{(s)} r}{R} \right) \sin k\varphi \right) \right\}, \quad (7.26) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f(r, \varphi, t) = & \sum_{s=1}^{\infty} \left\{ \tilde{a}_{0s}(t) \cdot J_0\left(\frac{\mu_0^{(s)} r}{R}\right) + \right. \\
& \left. + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\tilde{a}_{ks}(t) \cdot J_k\left(\frac{\mu_k^{(s)} r}{R}\right) \cos k\varphi + \tilde{b}_{ks}(t) \cdot J_k\left(\frac{\mu_k^{(s)} r}{R}\right) \sin k\varphi \right) \right\},
\end{aligned} \tag{7.27}$$

где

$$\begin{aligned}
a_{ks} = & \frac{\int_0^R J_k\left(\frac{\mu_k^{(s)} r}{R}\right) r dr \int_{-\pi}^{\pi} h(r, \varphi) \cos k\varphi d\varphi}{\int_0^R J_k^2\left(\frac{\mu_k^{(s)} r}{R}\right) r dr \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 k\varphi d\varphi}, \\
& k = 0, 1, 2, \dots, \quad s = 1, 2, \dots,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_{ks} = & \frac{\int_0^R J_k\left(\frac{\mu_k^{(s)} r}{R}\right) r dr \int_{-\pi}^{\pi} h(r, \varphi) \sin k\varphi d\varphi}{\int_0^R J_k^2\left(\frac{\mu_k^{(s)} r}{R}\right) r dr \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 k\varphi d\varphi}, \\
& k = 1, 2, \dots, \quad s = 1, 2, \dots.
\end{aligned}$$

Аналогично вычисляются коэффициенты разложения функции $f(r, \varphi, t)$. Мы не останавливаемся здесь на вычислении интегралов от бесселевых функций. Соответствующий материал можно найти, например, в [10].

Решение задачи (7.25) будем искать в виде аналогичного ряда

$$\begin{aligned}
v(r, \varphi, t) = & \sum_{s=1}^{\infty} \left\{ v_{0s}(t) \cdot J_0\left(\frac{\mu_0^{(s)} r}{R}\right) + \right. \\
& \left. + \sum_{k=1}^{\infty} \left(v_{ks}(t) \cdot J_k\left(\frac{\mu_k^{(s)} r}{R}\right) \cos k\varphi + u_{ks}(t) \cdot J_k\left(\frac{\mu_k^{(s)} r}{R}\right) \sin k\varphi \right) \right\},
\end{aligned} \tag{7.28}$$

коэффициенты которого определяются как решения следующих задач Коши:

$$\begin{cases} v'_{ks} + a^2 \left(\frac{\mu_k^{(s)}}{R} \right)^2 v_{ks} = \tilde{a}_{ks}(t), & t > 0, \\ v_{ks}(0) = a_{ks}, & k = 0, 1, 2, \dots, \quad s = 1, 2, \dots; \end{cases} \quad (7.29)$$

$$\begin{cases} u'_{ks} + a^2 \left(\frac{\mu_k^{(s)}}{R} \right)^2 u_{ks} = \tilde{b}_{ks}(t), & t > 0, \\ u_{ks}(0) = b_{ks}, & k = 1, 2, \dots, \quad s = 1, 2, \dots. \end{cases} \quad (7.30)$$

Пример 7.2. Дан бесконечный однородный круговой цилиндр радиуса R , начальное распределение температуры в котором задается функцией $h(r) = AJ_0 \left(\frac{\mu_0^{(3)} r}{R} \right)$, $0 \leq r \leq R$, $A = \text{const}$. На поверхности цилиндра поддерживается температура, равная нулю. Требуется найти распределение температуры внутри цилиндра в любой момент времени t . Математической моделью изучаемого процесса является смешанная задача для уравнения теплопроводности в круге типа (7.25), где правая часть ДУ равна 0, а коэффициент a^2 определяется характеристиками материала цилиндра. Так как уравнение однородно, а начальная функция не зависит от угла φ , то неизвестная функция тоже не зависит от угла φ , т.е. рассматривается задача о радиальном распределении температуры $v(r, t)$, которая записывается так:

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} - a^2 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} \right) = 0, & r \in (0, R), t > 0; \\ v(r, 0) = AJ_0 \left(\frac{\mu_0^{(3)} r}{R} \right), & 0 \leq r \leq R; \\ v(R, t) = 0, & |v(0, t)| < +\infty, \quad t \geq 0. \end{cases}$$

Уравнение теплопроводности рассматривается с однородными краевыми условиями Дирихле, следовательно, в соответствии с методом Фурье решение строится в виде ряда Фурье–Бесселя (7.28). Здесь начальная функция $h(r) = AJ_0 \left(\frac{\mu_0^{(3)} r}{R} \right)$ уже разложена в подобный ряд, причем в этом разложении отлично от

нуля лишь одно слагаемое. Решение задачи в этом случае будет иметь вид

$$v(r, t) = v_{03}(t) J_0 \left(\frac{\mu_0^{(3)} r}{R} \right).$$

Подставляя последнее выражение в ДУ и начальные условия, получим задачу Коши для определения неизвестной функции от t

$$\begin{cases} v'_{03} + \left(\frac{a\mu_0^{(3)}}{R} \right)^2 v_{03} = 0, & t > 0, \\ v_{03}(0) = A. \end{cases}$$

Отсюда $v_{03}(t) = A \exp \left(- \left(\frac{a\mu_0^{(3)}}{R} \right)^2 t \right)$. Следовательно, закон распределения температуры в любом сечении цилиндра, перпендикулярном его оси, имеет вид

$$v(r, t) = A \exp \left(- \left(\frac{a\mu_0^{(3)}}{R} \right)^2 t \right) J_0 \left(\frac{\mu_0^{(3)} r}{R} \right).$$

Лекция 8

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ДВУМЕРНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ. КОЛЕБАНИЯ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ И КРУГЛОЙ МЕМБРАН

Постановка задачи. Пусть G — ограниченная односвязная область на плоскости переменных (x, y) с достаточно гладкой границей Γ . В цилиндре

$$C = \{(x, y, t): (x, y) \in G, 0 < t < +\infty\}$$

рассмотрим смешанную задачу

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \Delta u = f(x, y, t), & (x, y, t) \in C; \end{cases} \quad (8.1)$$

$$\begin{cases} u(x, y, 0) = \varphi(x, y), & \frac{\partial u(x, y, 0)}{\partial t} = \psi(x, y), & (x, y) \in \overline{G}; \end{cases} \quad (8.2)$$

$$\begin{cases} u = \omega(x, y, t), & (x, y) \in \Gamma, & t \in [0, +\infty). \end{cases} \quad (8.3)$$

Здесь $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ — двумерный оператор Лапласа, $f(x, y, t)$, $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$, $\omega(x, y, t)$ — достаточно гладкие на рассматриваемых областях известные функции.

Уравнение (8.1) называется *волновым уравнением* (или *уравнением колебаний*). Мы уже рассматривали подобное уравнение в случае одной пространственной переменной — так называемое уравнение струны. В данном случае уравнение (8.1) может описывать колебания мембраны — тонкой пленки или пластинки.

Если функция $f(x, y, t)$ непрерывна на $\overline{C} = \{(x, y, t): (x, y) \in \overline{G}, t \in [0, +\infty)\}$, функции $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ непрерывны на $\overline{G}$, $\omega(x, y, t)$ и $\frac{\partial \omega(x, y, t)}{\partial t}$ непрерывны на множестве $\{(x, y, t): (x, y) \in \Gamma, t \in [0, +\infty)\}$ и выполняются условия согласования начальных и граничных условий

$$\omega(x, y, 0) = \varphi(x, y), \quad \frac{\partial \omega(x, y, 0)}{\partial t} = \psi(x, y), \quad (8.4)$$

то можно сформулировать определение классического решения смешанной задачи.

Определение 8.1. Функция $u(x, y, t)$ называется *классическим решением смешанной задачи* (8.1)–(8.3), если:

1) $u(x, y, t)$ и $\frac{\partial u(x, y, t)}{\partial t}$ непрерывны на $\overline{D}$ и удовлетворяют условиям (8.2)–(8.3);

2) частные производные $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ непрерывны на D , а $u(x, y, t)$ удовлетворяет на D уравнению (8.1).

Замечание 8.1. Смешанная задача (8.1)–(8.3) имеет не более одного классического решения.

Замечание 8.2. Имеет место непрерывная зависимость классического решения от параметров задачи.

Если граничная функция $\omega(x, y, t) = 0$, то формальное решение задачи может быть построено методом Фурье.

Построение формального решения смешанной задачи для уравнения колебаний прямоугольной мембраны. Пусть $G = \{(x, y) : 0 < x < a; 0 < y < b\}$ — прямоугольник на плоскости. Рассмотрим смешанную задачу, описывающую колебания прямоугольной мембраны, закрепленной по краям:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \Delta u = f(x, y, t), & (x, y) \in G, \quad t > 0; \end{cases} \quad (8.5)$$

$$\begin{cases} u(x, y, 0) = \varphi(x, y), & \frac{\partial u(x, y, 0)}{\partial t} = \psi(x, y), & (x, y) \in \overline{G}; \end{cases} \quad (8.6)$$

$$\begin{cases} u(0, y, t) = u(a, y, t) = u(x, 0, t) = u(x, b, t) = 0, & t \geq 0. \end{cases} \quad (8.7)$$

Согласно методу Фурье, будем искать решение задачи в виде ряда Фурье по ортогональной на области $\overline{G} = \{(x, y) : 0 \leq x \leq a; 0 \leq y \leq b\}$ системе функций — собственным функциям оператора $-\Delta$ с однородными краевыми условиями (8.7). Как было показано в лекции 6, такой системой будет система синусов

$$v_{km}(x, y) = \sin \frac{k\pi x}{a} \cdot \sin \frac{m\pi y}{b}, \quad k, m = 1, 2, 3, \dots \quad (8.8)$$

Разложим правую часть уравнения и начальные функции в двойные ряды Фурье по системе (8.8):

$$f(x, y, t) = \sum_{k, m=1}^{\infty} f_{km}(t) \sin \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b},$$

$$f_{km}(t) = \frac{(f, v_{km})}{(v_{km}, v_{km})} = \frac{4}{ab} \int_0^a dx \int_0^b f(x, y, t) \sin \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b} dy,$$

$$\varphi(x, y) = \sum_{k,m=1}^{\infty} \varphi_{km} \sin \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b},$$

$$\varphi_{km} = \frac{(\varphi, v_{km})}{(v_{km}, v_{km})} = \frac{4}{ab} \int_0^a dx \int_0^b \varphi(x, y) \sin \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b} dy,$$

$$\psi(x, y) = \sum_{k,m=1}^{\infty} \psi_{km} \sin \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b},$$

$$\psi_{km} = \frac{(\psi, v_{km})}{(v_{km}, v_{km})} = \frac{4}{ab} \int_0^a dx \int_0^b \psi(x, y) \sin \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b} dy.$$

Решение задачи будем искать в виде аналогичного разложения

$$u(x, y, t) = \sum_{k,m=1}^{\infty} T_{km}(t) \sin \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b}. \quad (8.9)$$

Подставив ряды в дифференциальное уравнение (8.5) и начальные условия (8.6), получим задачи Коши для определения $T_{km}(t)$:

$$\begin{cases} T''_{km} + a^2 \mu_{km}^2 T_{km} = f_{km}(t), & t > 0, \\ T_{km}(0) = \varphi_{km}, & T'_{km}(0) = \psi_{km}, \quad k, m = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (8.10)$$

Здесь $\mu_{km}^2 = \left(\frac{k\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2$ — собственные значения оператора $-\Delta$ с краевыми условиями (8.7).

С задачами типа (8.10) мы уже имели дело в лекции 5 при изучении уравнения струны и установили, что их решения могут быть записаны в виде

$$T_{km}(t) = \varphi_{km} \cos(a\mu_{km}t) + \frac{\psi_{km}}{a\mu_{km}} \sin(a\mu_{km}t) + \frac{1}{a\mu_{km}} \int_0^t f_{km}(s) \sin(a\mu_{km}(t-s)) ds. \quad (8.11)$$

Подставляя (8.11) в (8.8), можем записать окончательное решение нашей задачи.

Пример 8.1. Решим задачу о свободных колебаниях однородной мембраны, имеющей форму квадрата со стороной π , если начальное отклонение задается функцией $\varphi(x, y) = A \sin x \sin 2y$, а начальная скорость $\psi(x, y) = B \sin 3x \sin 4y$, где A и B — постоянные. Математической моделью данного процесса является смешанная задача (8.5)–(8.7), где правая часть ДУ равна 0, а коэффициент a^2 определяется характеристиками материала пластины, т. е.

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = 0, & 0 < x < \pi, \quad 0 < y < \pi, \quad t > 0; \\ u(x, y, 0) = A \sin x \sin 2y, \quad \frac{\partial u(x, y, 0)}{\partial t} = B \sin 3x \sin 4y, \\ \quad \quad \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad 0 \leq y \leq \pi; \\ u(0, y, t) = u(\pi, y, t) = u(x, 0, t) = u(x, \pi, t) = 0, \quad t \geq 0. \end{cases}$$

Решение задачи будем искать в виде разложения (8.9). Здесь правая часть ДУ равна нулю, а начальные функции являются элементами ортогонального базиса (8.8), по которому мы будем разлагать решение задачи. Следовательно, в разложении (8.9) останутся лишь слагаемые с соответствующими базисными функциями, т. е.

$$u(x, y, t) = T_{12}(t) \sin x \sin 2y + T_{34}(t) \sin 3x \sin 4y.$$

Подставляя последнее разложение в ДУ и начальные условия, получим следующие задачи для определения неизвестных функций:

$$\begin{cases} T''_{12} + a^2 \mu_{12}^2 T_{12} = 0, \\ T_{12}(0) = A, \quad T'_{12}(0) = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} T''_{34} + a^2 \mu_{34}^2 T_{34} = 0, \\ T_{34}(0) = 0, \quad T'_{34}(0) = B. \end{cases}$$

Решая эти задачи, получим:

$$\begin{aligned} T_{12}(t) &= A \cos(a\mu_{12}t) = A \cos(a\sqrt{5}t), \\ T_{34}(t) &= \frac{B}{a\mu_{34}} \sin(a\mu_{34}t) = \frac{B}{5a} \sin(5at). \end{aligned}$$

Итак, решение смешанной задачи, описывающей колебания мембраны, найдено и имеет вид

$$u(x, y, t) = A \cos(\sqrt{5}at) \sin x \sin 2y + \frac{B}{5a} \sin(5at) \sin 3x \sin 4y.$$

Построение решения смешанной задачи для уравнения колебаний круглой мембраны. Рассмотрим смешанную задачу (8.1)–(8.3) в случае, когда плоская область — круг радиуса R с центром в начале координат, а граничная функция равна 0. По аналогии с соответствующей задачей для ДУ диффузии/теплопроводности, в полярных координатах поставленная задача запишется так:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - a^2 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} \right) = f(r, \varphi, t), \\ \quad r \in (0, R), \varphi \in (-\pi, \pi), t > 0; \\ v(r, \varphi, 0) = h(r, \varphi), \quad \frac{\partial v(r, \varphi, 0)}{\partial t} = g(r, \varphi), \\ \quad r \in (0, R), \quad \varphi \in (-\pi, \pi); \\ v(R, \varphi, t) = 0, \quad |v(0, \varphi, t)| < +\infty, \quad \varphi \in (-\pi, \pi), \quad t \geq 0, \\ v(r, -\pi, t) = v(r, \pi, t), \quad \frac{\partial v(r, -\pi, t)}{\partial \varphi} = \frac{\partial v(r, \pi, t)}{\partial \varphi}, \\ \quad r \in (0, R), \quad t \geq 0. \end{array} \right. \quad (8.11)$$

В соответствии с общей схемой метода Фурье, правую часть уравнения и начальные функции следует разложить в ряды по ортогональной системе Фурье–Бесселя (7.23), т.е. представить в виде

$$f(r, \varphi, t) = \sum_{s=1}^{\infty} \left\{ a_{0s}(t) \cdot J_0 \left(\frac{\mu_0^{(s)} r}{R} \right) + \right. \\ \left. + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_{ks}(t) \cdot J_k \left(\frac{\mu_k^{(s)} r}{R} \right) \cos k\varphi + b_{ks}(t) \cdot J_k \left(\frac{\mu_k^{(s)} r}{R} \right) \sin k\varphi \right) \right\},$$

$$h(r, \varphi) = \sum_{s=1}^{\infty} \left\{ \tilde{a}_{0s} \cdot J_0 \left(\frac{\mu_0^{(s)} r}{R} \right) + \right. \\ \left. + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\tilde{a}_{ks} \cdot J_k \left(\frac{\mu_k^{(s)} r}{R} \right) \cos k\varphi + \tilde{b}_{ks} \cdot J_k \left(\frac{\mu_k^{(s)} r}{R} \right) \sin k\varphi \right) \right\},$$

$$g(r, \varphi) = \sum_{s=1}^{\infty} \left\{ \tilde{a}_{0s} \cdot J_0 \left(\frac{\mu_0^{(s)} r}{R} \right) + \right. \\ \left. + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\tilde{a}_{ks} \cdot J_k \left(\frac{\mu_k^{(s)} r}{R} \right) \cos k\varphi + \tilde{b}_{ks} \cdot J_k \left(\frac{\mu_k^{(s)} r}{R} \right) \sin k\varphi \right) \right\},$$

где

$$a_{ks} = \frac{\int_0^R J_k \left(\frac{\mu_k^{(s)} r}{R} \right) r dr \int_{-\pi}^{\pi} f(r, \varphi, t) \cos k\varphi d\varphi}{\int_0^R J_k^2 \left(\frac{\mu_k^{(s)} r}{R} \right) r dr \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 k\varphi d\varphi}, \\ k = 0, 1, 2, \dots, \quad s = 1, 2, \dots, \\ b_{ks} = \frac{\int_0^R J_k \left(\frac{\mu_k^{(s)} r}{R} \right) r dr \int_{-\pi}^{\pi} h(r, \varphi) \sin k\varphi d\varphi}{\int_0^R J_k^2 \left(\frac{\mu_k^{(s)} r}{R} \right) r dr \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 k\varphi d\varphi}, \\ k = 1, 2, \dots, \quad s = 1, 2, \dots,$$

а коэффициенты разложений функций $h(r, \varphi)$ и $g(r, \varphi)$ вычисляются аналогично.

Решение задачи (8.11) будем искать в виде аналогичного ряда

$$v(r, \varphi, t) = \sum_{s=1}^{\infty} \left\{ v_{0s}(t) \cdot J_0 \left(\frac{\mu_0^{(s)} r}{R} \right) + \right. \\ \left. + \sum_{k=1}^{\infty} \left(v_{ks}(t) \cdot J_k \left(\frac{\mu_k^{(s)} r}{R} \right) \cos k\varphi + u_{ks}(t) \cdot J_k \left(\frac{\mu_k^{(s)} r}{R} \right) \sin k\varphi \right) \right\},$$

коэффициенты которого определяются как решения следующих задач Коши:

$$\begin{cases} v''_{ks} + a^2 \left(\frac{\mu_k^{(s)}}{R} \right)^2 v_{ks} = a_{ks}(t), \\ v_{ks}(0) = \tilde{a}_{ks}, \quad v'_{ks}(0) = \tilde{a}'_{ks}, \quad k = 0, 1, 2, \dots; \end{cases}$$

$$\begin{cases} u''_{ks} + a^2 \left(\frac{\mu_k^{(s)}}{R} \right)^2 u_{ks} = b_{ks}(t), \\ u_{ks}(0) = \tilde{b}_{ks}, \quad u'_{ks}(0) = \tilde{b}'_{ks}, \quad k = 1, 2, \dots \end{cases}$$

Пример 8.2. Решим задачу о свободных колебаниях однородной круглой мембраны радиуса R при условии, что начальное отклонение задается функцией $AJ_0\left(\frac{\mu_0^{(m)}r}{R}\right)$, $0 \leq r \leq R$ ($A = \text{const}$, $\mu_0^{(m)}$ — m -й корень функции Бесселя нулевого порядка), а начальная скорость равна нулю.

Математической моделью данного процесса является смешанная задача (8.12), где правая часть ДУ равна 0, а коэффициент a^2 определяется характеристиками материала пластины. Так как уравнение однородно, начальная функция не зависит от угла φ , а начальная скорость равна нулю, то и неизвестная функция не зависит φ , т. е. $v = v(r, t)$. Итак, рассмотрим задачу

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - a^2 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} \right) = 0, & r \in (0, R), t > 0; \\ v(r, 0) = AJ_0\left(\frac{\mu_0^{(m)}r}{R}\right), \quad \frac{\partial v(r, 0)}{\partial t} = 0, & 0 \leq r \leq R; \\ v(R, t) = 0, \quad |v(0, t)| < +\infty, & t \geq 0. \end{cases}$$

В соответствии с методом Фурье формальное решение задачи можно построить в виде ряда Фурье–Бесселя (7.28). Обратим внимание на то, что в данных задачи отлична от нуля лишь начальная функция $h(r) = AJ_0\left(\frac{\mu_0^{(m)}r}{R}\right)$, причем она уже разложена в подобный ряд, где отлично от нуля лишь одно слагаемое. Решение задачи в этом случае будет иметь вид

$$v(r, t) = v_{0k}(t)J_0\left(\frac{\mu_0^{(m)}r}{R}\right).$$

Подставляя последнее выражение в ДУ и начальные условия, получим задачу Коши для определения неизвестной функции от t

$$\begin{cases} v''_{0m} + \left(\frac{a\mu_0^{(m)}}{R} \right)^2 v_{0m} = 0, & t > 0, \\ v_{0m}(0) = A, \quad \frac{\partial v_{0m}(0)}{\partial t} = 0. \end{cases}$$

Нетрудно проверить, что решением этой задачи является функция

$$v_{0m}(t) = A \cos \left(\frac{a\mu_0^{(m)}}{R} t \right).$$

Следовательно, амплитуда колебаний мембраны меняется по закону

$$v(r, t) = A \cos \left(\frac{a\mu_0^{(m)}}{R} t \right) J_0 \left(\frac{\mu_0^{(m)}}{R} r \right).$$

Лекция 9

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДВУМЕРНЫХ УРАВНЕНИЙ ЛАПЛАСА И ПУАССОНА. ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЙ В ПРЯМОУГОЛЬНИКЕ МЕТОДОМ ФУРЬЕ

Постановка краевых задач для уравнения Пуассона в плоской области. Пусть (см. рис. 9.1, а) $D \subset \mathbb{R}^2$ — ограниченная область с кусочно-гладкой границей ∂D , $\vec{n}$ — единичный вектор нормали к границе области, а Δ — двумерный оператор Лапласа:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

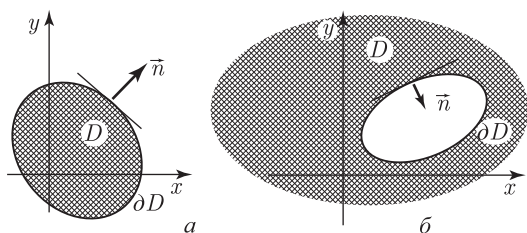


Рис. 9.1

Рассмотрим уравнение

$$\Delta u = f(x, y), \quad (x, y) \in D, \quad (9.1)$$

где $f(x, y)$ — известная функция, определенная на $\overline{D}$.

В литературе это уравнение называется *уравнением Пуассона*. В случае $f(x, y) \equiv 0$ уравнение (9.1) принимает вид

$$\Delta u = 0$$

и называется *уравнением Лапласа*.

Наиболее часто ДУ (9.1) рассматривается вместе с краевыми условиями одного из следующих видов:

I. $u = \omega(x, y)$, $(x, y) \in \partial D$ (первая краевая задача, или задача Дирихле);

II. $\frac{\partial u}{\partial n} = \omega(x, y)$, $(x, y) \in \partial D$ (вторая краевая задача, или задача Неймана);

III. $\frac{\partial u}{\partial n} + hu = \omega(x, y)$, $(x, y) \in \partial D$ (третья краевая задача).

Здесь $\omega(x, y)$ — известная функция, заданная на границе ∂D , $h > 0$, $\frac{\partial u}{\partial n}$ — производная по направлению внешней нормали к границе ∂D области, в которой ищется решение.

Требуется найти функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую во внутренних точках области D (рис. 9.1, а) уравнению (9.1), а на границе области — одному из приведенных выше краевых условий. Такая задача называется *внутренней* краевой задачей.

Краевые задачи для уравнения Пуассона описывают многие физические явления. В частности, оказывается, что решение смешанной задачи диффузии в плоской пластине (в случае, когда правая часть уравнения и граничное условие не зависят от t) при $t \rightarrow +\infty$, независимо от начального условия, стремится к решению соответствующей краевой задачи. Таким образом, эта задача описывает стационарное явление диффузии, т. е. распределение диффундирующего вещества, устанавливающееся при $t \rightarrow +\infty$.

Иногда требуется найти решение в неограниченной области, внешней по отношению к границе ∂D (рис. 9.1, б). В этом случае соответствующую задачу называют *внешней* краевой задачей.

Гармонические функции.

Определение 9.1. Функция $u(x, y)$, имеющая в области $D \subset \mathbf{R}^2$ непрерывные частные производные первого и второго порядков и удовлетворяющая в этой области уравнению Лапласа

$$\Delta u = 0,$$

называется *гармонической* в области $D \subset \mathbf{R}^2$.

Для гармонических функций справедливо следующее важное предложение (его доказательство имеется в [11]).

Теорема 9.1 (принцип максимума для гармонических функций). Пусть $u(x, y)$ — гармоническая в ограниченной области D и непрерывная в соответствующей замкнутой области $\bar{D}$ функция. Тогда наибольшее и наименьшее значения $u(x, y)$ достигаются на границе ∂D области D .

Единственность классического решения внутренней задачи Дирихле. Рассмотрим внутреннюю задачу Дирихле для уравнения Пуассона

$$\begin{cases} \Delta u = f(x, y), & (x, y) \in D; \\ u = \omega(x, y), & (x, y) \in \partial D. \end{cases} \quad (9.2)$$

Определение 9.2. Функция $u(x, y)$ называется *классическим решением* задачи (9.2), если она:

1) непрерывна в замкнутой области $\overline{D}$ и удовлетворяет граничному условию;

2) имеет непрерывные в области D производные $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ и обращает уравнение в тождество.

Теорема 9.2. Задача Дирихле (9.2) имеет не более одного классического решения.

Доказательство. Пусть $u_1(x, y)$, $u_2(x, y)$ — два классических решения задачи (9.2). Тогда их разность

$$u(x, y) = u_1(x, y) - u_2(x, y)$$

есть решение следующей задачи:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & (x, y) \in D; \\ u = 0, & (x, y) \in \partial D. \end{cases}$$

Согласно принципу максимума для гармонических функций, функция $u(x, y)$ достигает своего наибольшего и наименьшего значений на границе ∂D области D . Так как $u(x, y) = 0$ на границе области, то $u(x, y) = 0$ и в $\overline{D}$, т. е. $u_1(x, y) = u_2(x, y)$.

Отметим без доказательства следующие факты.

Замечание 9.1. В отличие от задачи Дирихле, задача Неймана имеет такие особенности. Если решение $u(x, y)$ существует, то всякое другое ее решение равно $u(x, y) + C$, где C — произвольная постоянная. Для существования решения необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \oint_{\partial D} \omega(x, y) ds.$$

Замечание 9.2. Как и задача Дирихле, внутренняя третья краевая задача может иметь не более одного классического решения.

Построение формального решения краевых задач для уравнения Пуассона в прямоугольнике методом Фурье. Пусть $D = \{(x, y) : 0 < x < a; 0 < y < b\}$ — прямоугольник на плоскости (рис. 9.2).

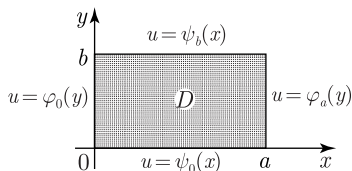


Рис. 9.2

Рассмотрим в прямоугольнике D задачу Дирихле

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y), & (x, y) \in D; \\ u(0, y) = \varphi_0(y), \quad u(a, y) = \varphi_a(y), & 0 \leq y \leq b, \\ u(x, 0) = \psi_0(x), \quad u(x, b) = \psi_b(x), & 0 \leq x \leq a. \end{cases} \quad (9.3)$$

Будем решать задачу (9.3), придерживаясь следующего алгоритма.

1. Сведем (9.3) к задаче с однородными краевыми условиями по одной из переменных, например, по x . Для этого подберем функцию $w(x, y)$, удовлетворяющую условиям

$$w(0, y) = \varphi_0(y), \quad w(a, y) = \varphi_a(y).$$

В данном случае положим

$$w(x, y) = \varphi_0(y) + \frac{x}{a}(\varphi_a(y) - \varphi_0(y)).$$

Далее, сделаем в уравнении замену неизвестной функции, полагая

$$u = v + w,$$

где $v(x, y)$ — новая неизвестная функция. В результате задача приобретет следующий вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = f(x, y) - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \equiv F(x, y), & (x, y) \in D; \\ v(0, y) = v(a, y) = 0, & 0 \leq y \leq b, \\ v(x, 0) = \psi_0(x) - w(x, 0) \equiv \Psi_0(x), \\ v(x, b) = \psi_b(x) - w(x, b) \equiv \Psi_b(x), & 0 \leq x \leq a. \end{cases} \quad (9.4)$$

Обозначим $L = -\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ и перепишем задачу (9.4) так:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - Lv = F(x, y), & (x, y) \in D, \\ v(0, y) = v(a, y) = 0, & 0 \leq y \leq b, \\ v(x, 0) = \Psi_0(x), \quad v(x, b) = \Psi_b(x), & 0 \leq x \leq a. \end{cases} \quad (9.5)$$

2. Рассмотрим задачу на собственные значения и собственные функции для дифференциального оператора $L = -\frac{d^2}{dx^2}$ с областью определения $D(L) = \{v(x) \in C^2[0, a] : v(0) = v(a) = 0\}$:

$$\begin{cases} v'' + \lambda v = 0, & 0 < x < a; \\ v(0) = v(a) = 0. \end{cases}$$

Как было показано ранее (см. пример 2.1), в данном случае его собственными значениями являются числа $\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{a}\right)^2$, а собственные функции имеют вид $X_k(x) = \sin \frac{k\pi x}{a}$ ($k = 1, 2, \dots$).

3. Будем искать решение задачи (9.5) в виде ряда Фурье по найденной ортогональной системе собственных функций $\left\{\sin \frac{k\pi x}{a}\right\}_{k=1}^{\infty}$, т. е. в виде

$$v(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} Y_k(y) X_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} Y_k(y) \sin \frac{k\pi x}{a}. \quad (9.6)$$

Предварительно разложим в аналогичные ряды функции $F(x, y)$, $\Psi_0(x)$, $\Psi_b(x)$:

$$F(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} F_k(y) \sin \frac{k\pi x}{a}, \quad F_k(y) = \frac{2}{a} \int_0^a F(x, y) \sin \frac{k\pi x}{a} dx;$$

$$\Psi_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \Psi_{0k} \sin \frac{k\pi x}{a}, \quad \Psi_{0k} = \frac{2}{a} \int_0^a \Psi_0(x) \sin \frac{k\pi x}{a} dx;$$

$$\Psi_b(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \Psi_{bk} \sin \frac{k\pi x}{a}, \quad \Psi_{bk} = \frac{2}{a} \int_0^a \Psi_b(x) \sin \frac{k\pi x}{a} dx.$$

Найдем входящие в ДУ производные:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \sum_{k=1}^{\infty} Y_k''(y) \sin \frac{k\pi x}{a}, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = - \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k\pi}{a} \right)^2 Y_k(y) \sin \frac{k\pi x}{a}.$$

Подставляя соответствующие ряды в ДУ, получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(Y_k''(y) - \left(\frac{k\pi}{a} \right)^2 Y_k(y) \right) \sin \frac{k\pi x}{a} = \sum_{k=1}^{\infty} F_k(y) \sin \frac{k\pi x}{a}.$$

Используем краевые условия по переменной y :

$$v(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} Y_k(0) \sin \frac{k\pi x}{a} = \Psi_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \Psi_{0k} \sin \frac{k\pi x}{a},$$

$$v(x, b) = \sum_{k=1}^{\infty} Y_k(b) \sin \frac{k\pi x}{a} = \Psi_b(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \Psi_{bk} \sin \frac{k\pi x}{a}.$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых собственных функциях, получим следующие краевые задачи для неизвестных функций $Y_k(y)$:

$$\begin{cases} Y_k'' - \left(\frac{k\pi}{a} \right)^2 Y_k = F_k(y), & 0 < y < b; \\ Y_k(0) = \Psi_{0k}, \quad Y_k(b) = \Psi_{bk}, & k = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (9.7)$$

4. Приступим к нахождению их решений. Сначала найдем фундаментальную систему решений соответствующего обыкновенного линейного однородного ДУ второго порядка. Решим характеристическое уравнение

$$p^2 - \left(\frac{k\pi}{a} \right)^2 = 0 \Rightarrow p = \pm \frac{k\pi}{a}.$$

Таким образом, в качестве фундаментальной системы решений (ФСР) могут быть выбраны функции $\exp \frac{k\pi y}{a}$, $\exp \left(-\frac{k\pi y}{a} \right)$, но

для дальнейшего гораздо удобнее использовать функции $\operatorname{sh} \frac{k\pi y}{a}$, $\operatorname{ch} \frac{k\pi y}{a}$, являющиеся их линейными комбинациями. Общее решение линейного неоднородного ДУ из (9.7) можно искать методом вариации произвольных постоянных в виде

$$Y_k(y) = C_1(y) \operatorname{sh} \frac{k\pi y}{a} + C_2(y) \operatorname{ch} \frac{k\pi y}{a}, \quad (9.8)$$

где производные неизвестных функций $C_1(y)$ и $C_2(y)$ находятся из линейной алгебраической системы Лагранжа

$$\begin{cases} C_1'(y) \operatorname{sh} \frac{k\pi y}{a} + C_2'(y) \operatorname{ch} \frac{k\pi y}{a} = 0, \\ C_1'(y) \operatorname{ch} \frac{k\pi y}{a} + C_2'(y) \operatorname{sh} \frac{k\pi y}{a} = \frac{a}{\pi k} F_k(y). \end{cases} \quad (9.9)$$

Решая систему (9.9), получим:

$$C_1'(y) = \frac{a}{\pi k} F_k(y) \operatorname{ch} \frac{k\pi y}{a}, \quad C_2'(y) = -\frac{a}{\pi k} F_k(y) \operatorname{sh} \frac{k\pi y}{a}.$$

Интегрируя эти выражения, имеем:

$$C_1(y) = \frac{a}{\pi k} \int_0^y F_k(\xi) \operatorname{ch} \frac{k\pi \xi}{a} d\xi + C_3,$$

$$C_2(y) = -\frac{a}{k\pi} \int_0^y F_k(\xi) \operatorname{sh} \frac{k\pi \xi}{a} d\xi + C_4.$$

Подставляя найденные $C_1(y)$ и $C_2(y)$ в выражение (9.8), после небольших преобразований получим общее решение ДУ

$$Y_k(y) = C_3 \operatorname{sh} \frac{k\pi y}{a} + C_4 \operatorname{ch} \frac{k\pi y}{a} + \frac{a}{k\pi} \int_0^y F_k(\xi) \operatorname{sh} \frac{k\pi(y-\xi)}{a} d\xi.$$

Подставим сюда краевые условия

$$Y_k(0) = C_3 \operatorname{sh}(0) + C_4 \operatorname{ch}(0) + \frac{a}{k\pi} \int_0^0 F_k(\xi) \operatorname{sh} \frac{k\pi(-\xi)}{a} d\xi = C_4 = \Psi_{0k},$$

$$Y_k(b) = C_3 \operatorname{sh} \frac{k\pi b}{a} + \Psi_{0k} \operatorname{ch} \frac{k\pi b}{a} + \frac{a}{k\pi} \int_0^b F_k(\xi) \operatorname{sh} \frac{k\pi(b-\xi)}{a} d\xi = \Psi_{bk},$$

откуда имеем

$$C_3 = \left(\Psi_{bk} - \Psi_{0k} \operatorname{ch} \frac{k\pi b}{a} - \frac{a}{k\pi} \int_0^b F_k(\xi) \operatorname{sh} \frac{k\pi(b-\xi)}{a} d\xi \right) \frac{1}{\operatorname{sh} \frac{k\pi b}{a}}.$$

Окончательно решение задачи (9.7) получается в следующем виде:

$$\begin{aligned} Y_k(y) = & \Psi_{0k} \frac{\operatorname{sh} \frac{k\pi(b-y)}{a}}{\operatorname{sh} \frac{k\pi b}{a}} + \Psi_{bk} \frac{\operatorname{sh} \frac{k\pi y}{a}}{\operatorname{sh} \frac{k\pi b}{a}} - \\ & - \frac{a}{k\pi} \int_0^b F_k(\xi) \operatorname{sh} \frac{k\pi(b-\xi)}{a} d\xi \cdot \frac{\operatorname{sh} \frac{k\pi y}{a}}{\operatorname{sh} \frac{k\pi b}{a}} + \\ & + \frac{a}{k\pi} \int_0^y F_k(\xi) \operatorname{sh} \frac{k\pi(y-\xi)}{a} d\xi. \end{aligned}$$

Осталось записать решение задачи (9.4), подставив найденные выражения (9.9) для $Y_k(y)$ в формулу (9.6).

Таким же образом может быть построено формальное решение краевой задачи для уравнения Пуассона с граничными условиями другого типа.

Пример 9.1. Рассмотрим смешанную задачу для уравнения Пуассона в прямоугольнике с краевыми условиями Дирихле

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \sin y \cdot \sin(2\pi x), & 0 < x < 1; \quad 0 < y < 2; \\ u(0, y) = u(1, y) = 1, \\ u(x, 0) = 1, \quad u(x, 2) = 1 - \sin \pi x. \end{cases}$$

Нетрудно заметить, что замена

$$u = v + 1$$

приводит к следующей задаче с однородными краевыми условиями по переменной x :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \sin y \cdot \sin 2\pi x, & 0 < x < 1, \quad 0 < y < 2; \\ v(0, y) = v(1, y) = 0; \\ v(x, 0) = 0, \quad v(x, 2) = -\sin \pi x. \end{cases}$$

Ее решение можно найти в виде ряда Фурье по ортогональной системе

$$\left\{ \sin \frac{k\pi x}{a} \right\}_{k=1}^{\infty} = \{ \sin(k\pi x) \}_{k=1}^{\infty},$$

т. е. в виде

$$v(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} Y_k(y) \sin(k\pi x).$$

В данном случае правая часть уравнения и краевые условия по переменной y разлагаются в ряды Фурье следующим образом:

$$F(x, y) = \sin y \cdot \sin(2\pi x) = \sum_{k=1}^{\infty} F_k(y) \sin(k\pi x),$$

$$F_k(y) = \begin{cases} \sin y, & k = 2, \\ 0, & k \neq 2; \end{cases}$$

$$\Psi_2(x) = -\sin \pi x = \sum_{k=1}^{\infty} \Psi_{2k} \sin(k\pi x), \quad \Psi_{2k} = \begin{cases} -1, & k = 1, \\ 0, & k \neq 1. \end{cases}$$

Так как в разложениях данных задачи отличны от нуля коэффициенты лишь при двух базисных функциях, то и в разложении решения будут присутствовать слагаемые только с этими базисными функциями, т. е. решение имеет вид

$$v(x, y) = Y_1(y) \sin \pi x + Y_2(y) \sin(2\pi x).$$

Подставим последнее выражение в ДУ и в краевые условия и приравняем коэффициенты при одинаковых базисных функциях. В результате получим краевые задачи для определения коэффициентов $Y_k(y)$, $k = 1, 2$. Приведем их решения.

$$1) \quad \begin{cases} Y_1'' - \pi^2 Y_1 = 0, & 0 < y < 2; \\ Y_1(0) = 0, \quad Y_1(2) = -1. \end{cases}$$

Общее решение ДУ здесь имеет вид

$$Y_1(y) = C_1 \operatorname{sh} \pi y + C_2 \operatorname{ch} \pi y.$$

Подставляя краевые условия, получим

$$Y_1(y) = -\frac{\operatorname{sh} \pi y}{\operatorname{sh} (2\pi)}.$$

$$2) \quad \begin{cases} Y_2'' - 4\pi^2 Y_2 = \sin y, & 0 < y < 2; \\ Y_1(0) = 0, & Y_1(2) = 0. \end{cases}$$

ФСР соответствующего однородного ДУ в данном случае записывается так:

$$\{\operatorname{sh} (2\pi y), \operatorname{ch} (2\pi y)\}.$$

Далее можно решать задачу методом вариации произвольных постоянных, однако здесь правая часть ДУ позволяет подобрать частное решение. Будем искать его в виде

$$Y_{2\text{част}}(y) = A \cos y + B \sin y.$$

Подставляя последнее выражение в ДУ и приравнявая коэффициенты при одинаковых функциях, получим:

$$A = 0, \quad B = -\frac{1}{1 + 4\pi^2}.$$

Теперь, согласно принципу суперпозиции, общее решение неоднородного ДУ можно представить как сумму общего решения однородного ДУ и найденного частного решения неоднородного ДУ, т. е.

$$Y_2(y) = C_1 \operatorname{sh} (2\pi y) + C_2 \operatorname{ch} (2\pi y) - \frac{\sin y}{1 + 4\pi^2}.$$

Далее, подставляя краевые условия, получим:

$$Y_2(0) = C_2 = 0,$$

$$Y_2(2) = C_1 \operatorname{sh} (4\pi) - \frac{\sin 2}{1 + 4\pi^2} = 0 \Rightarrow C_1 = \frac{\sin 2}{(1 + 4\pi^2) \operatorname{sh} (4\pi)}.$$

Итак,

$$Y_2(y) = \frac{\sin 2 \cdot \operatorname{sh} (2\pi y)}{(1 + 4\pi^2) \operatorname{sh} (4\pi)} - \frac{\sin y}{1 + 4\pi^2}.$$

Наконец, можно записать окончательный ответ:

$$u(x, y) = 1 - \frac{\operatorname{sh} \pi y}{\operatorname{sh} (2\pi)} \sin \pi x + \\ + \frac{1}{1 + 4\pi^2} \left(\frac{\sin 2}{\operatorname{sh} (4\pi)} \operatorname{sh} (2\pi y) - \sin y \right) \sin (2\pi x).$$

Лекция 10

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ЛАПЛАСА И ПУАССОНА В КРУГЕ

Уравнение Лапласа. Пусть $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 < R^2\}$ — круг в плоскости (x, y) (рис. 10.1). Рассмотрим в этом круге внутреннюю задачу Дирихле

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, & (x, y) \in D; \\ u = \omega(x, y), & (x, y) \in \partial D = \{(x, y) : x^2 + y^2 = R^2\}. \end{cases} \quad (10.1)$$

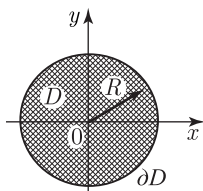


Рис. 10.1

Запишем задачу (10.1) в полярных координатах, полагая

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi.$$

Тогда

$$u(x, y) = u(r \cos \varphi, r \sin \varphi) = v(r, \varphi),$$

$$\omega(x, y) = \omega(R \cos \varphi, R \sin \varphi) = f(\varphi).$$

Как было показано в лекции 7, при переходе к полярным координатам оператор Лапласа запишется так:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2}.$$

Напомним также (см. лекцию 7), что функция $v(r, \varphi)$, полученная из $u(x, y)$ в результате перехода к полярным координатам, должна удовлетворять условию ограниченности при $r \rightarrow 0$

$$|v(0, \varphi)| < +\infty$$

и условиям 2π -периодичности по переменной φ :

$$v(r, -\pi) = v(r, \pi), \quad \frac{\partial v(r, -\pi)}{\partial \varphi} = \frac{\partial v(r, \pi)}{\partial \varphi}, \quad r \in (0, R).$$

Итак, в полярных координатах рассматриваемая задача принимает вид

$$\begin{cases} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} = 0, & 0 < r < R, \quad -\pi \leq \varphi \leq \pi; \\ v(R, \varphi) = f(\varphi), & |v(0, \varphi)| < +\infty. \end{cases} \quad (10.2)$$

Применим к решению этой задачи метод Фурье. Разложим граничную функцию в тригонометрический ряд Фурье на отрезке $[-\pi, \pi]$:

$$f(\varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi), \quad (10.3)$$

где

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi) d\varphi, \quad a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi) \cos k\varphi d\varphi,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi) \sin k\varphi d\varphi.$$

Решение будем искать в виде аналогичного ряда Фурье, коэффициенты которого — неизвестные функции от r , т. е. в виде

$$v(r, \varphi) = \frac{A_0(r)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k(r) \cos k\varphi + B_k(r) \sin k\varphi). \quad (10.4)$$

Найдем входящие в уравнение (10.2) производные:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right) = \frac{1}{2} (r A_0'(r))' + \sum_{k=1}^{\infty} (r A_k'(r))' \cos k\varphi + (r B_k'(r))' \sin k\varphi,$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} = \sum_{k=1}^{\infty} (-k^2 A_k(r) \cos k\varphi - k^2 B_k(r) \sin k\varphi).$$

Подставляя их в ДУ, получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2r} (r A'_0(r))' + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{r} (r A'_k(r))' - \frac{k^2}{r^2} A_k(r) \right) \cos k\varphi + \\ + \left(\frac{1}{r} (r B'_k(r))' - \frac{k^2}{r^2} B_k(r) \right) \sin k\varphi = 0. \quad (10.5) \end{aligned}$$

Используем граничные условия:

$$\begin{aligned} v(R, \varphi) = \frac{A_0(R)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k(R) \cos k\varphi + B_k(R) \sin k\varphi) = \\ = f(\varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi). \quad (10.6) \end{aligned}$$

Приравнявая в выражениях (10.5) и (10.6) коэффициенты при одинаковых функциях тригонометрической системы и используя условие ограниченности решения при $r \rightarrow 0$, получим следующие задачи для определения неизвестных коэффициентов ряда (10.4):

$$\frac{1}{r} (r A'_0)' = 0, \quad |A_0(0)| < +\infty, \quad A_0(R) = a_0; \quad (10.7)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} (r A'_k)' - \frac{k^2}{r^2} A_k = 0, \quad |A_k(0)| < +\infty, \\ A_k(R) = a_k \quad (k = 1, 2, \dots); \end{aligned} \quad (10.8)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} (r B'_k)' - \frac{k^2}{r^2} B_k = 0, \quad |B_k(0)| < +\infty, \\ B_k(R) = b_k \quad (k = 1, 2, \dots). \end{aligned} \quad (10.9)$$

Дважды непосредственно интегрируя уравнение (10.7), получим его общее решение

$$A_0(r) = C_0 \ln r + D_0.$$

Условие ограниченности при $r \rightarrow 0$ можно выполнить, лишь если $C_0 = 0$. С учетом второго граничного условия окончательно получим

$$A_0(r) = a_0.$$

Для нахождения общего решения ДУ (10.8) попытаемся найти его частное решение в виде $A_k = r^\alpha$. Подставляя это выражение в ДУ (10.8), получим

$$\frac{1}{r} (\alpha r^\alpha)' - \frac{k^2}{r^2} r^\alpha = (\alpha^2 - k^2) r^{\alpha-1} = 0,$$

откуда для неизвестного α имеем уравнение

$$\alpha^2 - k^2 = 0,$$

т. е. $\alpha = \pm k$. Итак, в качестве фундаментальной системы решений линейного ДУ (10.8), определяющего r , можно взять функции r^k и r^{-k} и записать его общее решение в виде

$$A_k(r) = C_k r^k + D_k r^{-k}.$$

Далее воспользуемся краевыми условиями:

$$|A_k(0)| < +\infty \Rightarrow D_k = 0,$$

$$A_k(R) = C_k R^k = a_k \Rightarrow C_k = \frac{a_k}{R^k}.$$

Таким образом, получим

$$A_k(r) = a_k \left(\frac{r}{R} \right)^k.$$

Аналогично находим

$$B_k(r) = b_k \left(\frac{r}{R} \right)^k$$

Подставляя найденные неизвестные функции в ряд (10.4), получим

$$v(r, \varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R} \right)^k (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi). \quad (10.10)$$

Данная формула дает формальное решение задачи. Если функция $f(\varphi)$ достаточно гладкая, то решение будет классическим.

Пример 10.1. Решим задачу Дирихле для уравнения Лапласа в круге

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & (x, y) \in D = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 9\}, \\ u = 3y + 4xy + x^2, & (x, y) \in \partial D = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 9\}. \end{cases}$$

Перейдем к полярным координатам, полагая $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$. Тогда:

$$u(x, y) = u(r \cos \varphi, r \sin \varphi) = v(r, \varphi),$$

$$\begin{aligned} v|_{r=3} &= \left(3r \sin \varphi + 4r^2 \cos \varphi \sin \varphi + r^2 \cos^2 \varphi \right) \Big|_{r=3} = \\ &= 9 \sin \varphi + 36 \cos \varphi \sin \varphi + 9 \cos^2 \varphi = \\ &= \frac{9}{2} + 9 \sin \varphi + \frac{9}{2} \cos 2\varphi + 18 \sin 2\varphi. \end{aligned}$$

Итак, в полярных координатах задача запишется следующим образом:

$$\begin{cases} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} = 0, & 0 < r < 3, \quad -\pi \leq \varphi \leq \pi; \\ v(3, \varphi) = \frac{9}{2} + 9 \sin \varphi + \frac{9}{2} \cos 2\varphi + 18 \sin 2\varphi, & |v(0, \varphi)| < +\infty. \end{cases}$$

Разложим граничную функцию в тригонометрический ряд Фурье

$$\begin{aligned} f(\varphi) &= \frac{9}{2} + 9 \sin \varphi + \frac{9}{2} \cos 2\varphi + 18 \sin 2\varphi = \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi). \end{aligned}$$

Как нетрудно заметить, здесь

$$a_0 = 9, \quad a_2 = \frac{9}{2}, \quad b_2 = 18; \quad a_k = b_k = 0, \quad k \geq 2.$$

Теперь, согласно формуле (10.10), можно записать решение задачи:

$$\begin{aligned} v(r, \varphi) &= \frac{9}{2} + \frac{r}{3} 9 \sin \varphi + \left(\frac{r}{3} \right)^2 \left(\frac{9}{2} \cos 2\varphi + 18 \sin 2\varphi \right) = \\ &= \frac{9}{2} + 3r \sin \varphi + r^2 \left(\frac{1}{2} \cos 2\varphi + 2 \sin 2\varphi \right). \end{aligned}$$

Возвращаясь к старым переменным, запишем полученное решение в декартовых координатах:

$$u(x, y) = \frac{9}{2} + 3y + \frac{x^2 - y^2}{2} + 4xy.$$

Уравнение Пуассона. Теперь рассмотрим задачу Дирихле для уравнения Пуассона

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = h(x, y), & (x, y) \in D = \{(x, y) : x^2 + y^2 < R^2\}; \\ u = \omega(x, y), & (x, y) \in \partial D = \{(x, y) : x^2 + y^2 = R^2\}. \end{cases} \quad (10.11)$$

Ее решение можно представить в виде $u = u_1 + u_2$, где u_1 — уже найденное решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} = 0, & (x, y) \in D = \{(x, y) : x^2 + y^2 < R^2\}; \\ u_1 = \omega(x, y), & (x, y) \in \partial D = \{(x, y) : x^2 + y^2 = R^2\}. \end{cases} \quad (10.12)$$

а u_2 — решение задачи Дирихле для уравнения Пуассона с нулевой граничной функцией

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} = h(x, y), & (x, y) \in D = \{(x, y) : x^2 + y^2 < R^2\}; \\ u_2 = 0, & (x, y) \in \partial D = \{(x, y) : x^2 + y^2 = R^2\}. \end{cases} \quad (10.13)$$

Запишем задачу для u_2 в полярных координатах:

$$\begin{cases} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} = F(r, \varphi), & 0 < r < R, \quad -\pi \leq \varphi \leq \pi; \\ v(R, \varphi) = 0, & |v(0, \varphi)| < +\infty. \end{cases} \quad (10.14)$$

Разложим в тригонометрический ряд Фурье на $[-\pi, \pi]$ правую часть уравнения

$$F(r, \varphi) = \frac{a_0(r)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k(r) \cos k\varphi + b_k(r) \sin k\varphi),$$

$$a_0(r) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(r, \varphi) d\varphi, \quad a_k(r) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(r, \varphi) \cos k\varphi d\varphi,$$

$$b_k(r) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(r, \varphi) \sin k\varphi d\varphi.$$

Решение задачи будем искать в виде аналогичного ряда Фурье

$$v(r, \varphi) = \frac{A_0(r)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k(r) \cos k\varphi + B_k(r) \sin k\varphi).$$

Для определения неизвестных коэффициентов этого ряда, с учетом граничных условий, получим следующие задачи:

$$\frac{1}{r} (rA_0')' = a_0(r), \quad |A_0(0)| < +\infty, \quad A_0(R) = 0; \quad (10.15)$$

$$\frac{1}{r} (rA_k')' - \frac{k^2}{r^2} A_k = a_k(r), \quad |A_k(0)| < +\infty, \quad A_k(R) = 0; \quad (10.16)$$

$$\frac{1}{r} (rB_k')' - \frac{k^2}{r^2} B_k = b_k(r), \quad |B_k(0)| < +\infty, \quad B_k(R) = 0. \quad (10.17)$$

Здесь функция $A_0(r)$ может быть найдена непосредственным интегрированием.

Как было показано при рассмотрении уравнения Лапласа, в задачах (10.16) и (10.17) соответствующие однородные ДУ имеют ФСР $\{r^k, r^{-k}\}$. Общее решение неоднородного ДУ в (10.16) может быть найдено методом вариации произвольных постоянных в виде

$$A_k(r) = C_1(r)r^k + C_2(r)r^{-k},$$

где производные от неизвестных функций определяются как решения следующей линейной алгебраической системы:

$$\begin{cases} C_1' r^k + C_2' r^{-k} = 0, \\ k(C_1' r^{k-1} - C_2' r^{-k-1}) = a_k(r). \end{cases}$$

Аналогично решаются задачи для $B_k(r)$.

Пример 10.2. Решим задачу Дирихле для уравнения Пуассона в круге

$$\begin{cases} \Delta u = 2(x - y)^2, & (x, y) \in D = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 4\}, \\ u = 0, & (x, y) \in \partial D = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 4\}. \end{cases}$$

Перейдем к полярным координатам, полагая

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi.$$

Тогда

$$\begin{aligned} h(x, y) = 2(x - y)^2 &= 2r^2(\cos^2 \varphi - 2 \sin \varphi \cos \varphi + \sin^2 \varphi) = \\ &= 2r^2(1 - \sin 2\varphi) = F(r, \varphi), \end{aligned}$$

$$u(x, y) = u(r \cos \varphi, r \sin \varphi) = v(r, \varphi),$$

и задача запишется так:

$$\begin{cases} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} = 2r^2 - 2r^2 \sin 2\varphi, \\ 0 < r < 2, \quad -\pi \leq \varphi \leq \pi; \\ v(2, \varphi) = 0, \quad |v(0, \varphi)| < +\infty. \end{cases}$$

Разложим в тригонометрический ряд Фурье правую часть ДУ

$$F(r, \varphi) = 2r^2 - 2r^2 \sin 2\varphi = \frac{a_0(r)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k(r) \cos k\varphi + b_k(r) \sin k\varphi).$$

Здесь

$$a_0(r) = 4r^2, \quad b_2(r) = -2r^2; \quad a_k = 0, \quad k \neq 0; \quad b_k = 0, \quad k \neq 2.$$

Заметим, что в данном случае ненулевые решения будут иметь только задачи для $A_0(r)$ и $B_2(r)$. Для прочих коэффициентов записываются линейные однородные ДУ с нулевыми краевыми условиями, имеющие лишь тривиальные решения. Найдем указанные ненулевые решения.

$$1) \frac{1}{r} (rA'_0)' = 4r^2, \quad |A_0(0)| < +\infty, \quad A_0(2) = 0.$$

Интегрируя один раз, получим

$$rA'_0 = \int 4r^3 dr = r^4 + C_1.$$

После второго интегрирования имеем

$$A_0(r) = \int \left(r^3 + C_1 \frac{1}{r} \right) dr = \frac{r^4}{4} + C_1 \ln r + C_2.$$

Далее воспользуемся краевыми условиями:

$$|A_0(0)| < +\infty \Rightarrow C_1 = 0,$$

$$A_0(2) = \frac{2^4}{4} + C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = -4.$$

Итак,

$$A_0(r) = \frac{r^4}{4} - 4.$$

$$2) \frac{1}{r} (rB_2')' - \frac{2^2}{r^2} B_2 = -2r^2, \quad |B_2(0)| < +\infty, \quad B_2(2) = 0.$$

Заметим, что ФСР соответствующего однородного ДУ в данном случае имеет вид

$$\{r^2, r^{-2}\}.$$

Общее решение линейного неоднородного ДУ, определяющего B_2 , будем искать методом вариации произвольных постоянных в виде

$$B_2(r) = C_1(r)r^2 + C_2(r)r^{-2}.$$

Для определения производных неизвестных функций запишем систему Лагранжа

$$\begin{cases} C_1' r^2 + C_2' r^{-2} = 0, \\ 2(C_1' r - C_2' r^{-3}) = -2r^2, \end{cases}$$

решая которую, находим:

$$\begin{cases} C_1' = -\frac{r}{2}, \\ C_2' = \frac{r^5}{2}. \end{cases}$$

Отсюда

$$C_1(r) = -\frac{1}{2} \int r dr = -\frac{r^2}{4} + \tilde{C}_1, \quad C_2(r) = \frac{1}{2} \int r^5 dr = \frac{r^6}{12} + \tilde{C}_2.$$

Теперь можно записать общее решение ДУ

$$B_2(r) = \tilde{C}_1 r^2 + \tilde{C}_2 r^{-2} - \frac{r^4}{4} + \frac{r^4}{12} = \tilde{C}_1 r^2 + \tilde{C}_2 r^{-2} - \frac{r^4}{6}.$$

Далее воспользуемся краевыми условиями:

$$|B_2(0)| < +\infty \Rightarrow \tilde{C}_2 = 0,$$

$$B_2(2) = \tilde{C}_1 2^2 - \frac{2^4}{6} = 0 \Rightarrow \tilde{C}_1 = \frac{2}{3}.$$

Итак,

$$B_2(r) = \frac{2}{3}r^2 - \frac{r^4}{6}.$$

Запишем построенное решение исходной задачи в полярных координатах:

$$v(r, \varphi) = \frac{A_0(r)}{2} + B_2(r) \sin 2\varphi = \frac{r^4}{8} - 2 + \left(\frac{2}{3}r^2 - \frac{r^4}{6} \right) \sin 2\varphi.$$

В декартовых координатах это решение имеет вид

$$u(x, y) = \frac{(x^2 + y^2)^2}{8} - 2 + \left(\frac{2}{3} - \frac{x^2 + y^2}{6} \right) \cdot 2xy.$$

Нетрудно проверить, что найденное решение является классическим.

Лекция 11

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА ВНЕ КРУГА И В КОЛЬЦЕ. ЗАДАЧА НЕЙМАНА В КРУГЕ

Задача Дирихле во внешности круга. Пусть $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 > R^2\}$ — внешность круга с центром в начале координат на плоскости (x, y) (рис. 11.1). Рассмотрим *внешнюю задачу Дирихле* для уравнения Лапласа

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, & (x, y) \in D; \\ u = \omega(x, y), & (x, y) \in \partial D = \{(x, y) : x^2 + y^2 = R^2\}. \end{cases} \quad (11.1)$$

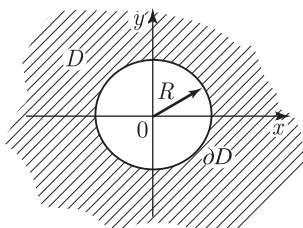


Рис. 11.1

В полярных координатах рассматриваемая задача принимает вид

$$\begin{cases} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} = 0, & r > R, \quad -\pi \leq \varphi \leq \pi; \\ v(R, \varphi) = f(\varphi), & |v(+\infty, \varphi)| < +\infty. \end{cases} \quad (11.2)$$

Последнее условие в задаче (11.2) — требование ограниченности решения на бесконечности. Это условие естественно с точки зрения физических интерпретаций задачи и обеспечивает единственность решения. Кроме того, как и в случае построения

решения внутри круга, непрерывность $u(x, y)$ приводит к требованию 2π -периодичности по переменной φ функций $v(r, \varphi)$ и $\frac{\partial v(r, \varphi)}{\partial \varphi}$.

Будем решать задачу, придерживаясь той же схемы, что и при решении внутренней задачи.

Разложим граничную функцию в тригонометрический ряд Фурье на $[-\pi, \pi]$:

$$f(\varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi),$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi) d\varphi, \quad a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi) \cos k\varphi d\varphi,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi) \sin k\varphi d\varphi.$$

Решение будем искать в виде аналогичного ряда Фурье, коэффициенты которого — неизвестные функции от r :

$$v(r, \varphi) = \frac{A_0(r)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k(r) \cos k\varphi + B_k(r) \sin k\varphi). \quad (11.3)$$

Подставляя ряд (11.3) в ДУ и приравнявая коэффициенты при одинаковых функциях тригонометрической системы, а также используя условие ограниченности решения при $r \rightarrow +\infty$, получим следующие задачи для определения неизвестных коэффициентов ряда:

$$\frac{1}{r} (rA_0')' = 0, \quad |A_0(+\infty)| < +\infty, \quad A_0(R) = a_0; \quad (11.4)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} (rA_k')' - \frac{k^2}{r^2} A_k &= 0, \\ |A_k(+\infty)| < +\infty, \quad A_k(R) &= a_k, \quad k = 1, 2, \dots; \end{aligned} \quad (11.5)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} (rB_k')' - \frac{k^2}{r^2} B_k &= 0, \\ |B_k(+\infty)| < +\infty, \quad B_k(R) &= b_k, \quad k = 1, 2, \dots. \end{aligned} \quad (11.6)$$

Напомним, что общее решение ДУ (11.4) имеет вид

$$A_0(r) = C_0 \ln r + D_0.$$

Из условия ограниченности при $r \rightarrow +\infty$ следует, что $C_0 = 0$. С учетом второго граничного условия окончательно получим, что $D_0 = a_0$, т. е.

$$A_0(r) = a_0.$$

Запишем общее решение ДУ (11.5)

$$A_k(r) = C_k r^k + D_k r^{-k}.$$

Воспользуемся краевыми условиями:

$$|A_k(+\infty)| < +\infty \Rightarrow C_k = 0,$$

$$A_k(R) = D_k R^{-k} = a_k \Rightarrow D_k = a_k R^k.$$

Таким образом,

$$A_k(r) = a_k \left(\frac{R}{r} \right)^k.$$

Аналогично получим

$$B_k(r) = b_k \left(\frac{R}{r} \right)^k.$$

Подставляя найденные неизвестные функции в ряд (11.3), запишем формальное решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа вне круга

$$v(r, \varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{R}{r} \right)^k (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi). \quad (11.7)$$

Пример 11.1. Рассмотрим задачу Дирихле для уравнения Лапласа вне круга

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & (x, y) \in D = \{(x, y) : x^2 + y^2 > 4\}, \\ u = 1 + xy, & (x, y) \in \partial D = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 4\}. \end{cases}$$

Перейдем к полярным координатам, полагая

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi.$$

В результате задача запишется так:

$$\begin{cases} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} = 0, & r > 2, \quad -\pi \leq \varphi \leq \pi; \\ v(2, \varphi) = 1 + 2 \sin 2\varphi, & |v(+\infty, \varphi)| < +\infty. \end{cases}$$

Разложим граничную функцию в тригонометрический ряд Фурье:

$$f(\varphi) = 1 + 2 \sin \varphi = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi).$$

Заметим, что здесь

$$a_k = \begin{cases} 2, & k = 0, \\ 0, & k = 1, 2, \dots, \end{cases} \quad b_k = \begin{cases} 2, & k = 2, \\ 0, & k \neq 2. \end{cases}$$

Подставив найденные коэффициенты разложения в формулу (11.7), запишем решение задачи

$$v(r, \varphi) = 1 + \frac{8}{r^2} \sin 2\varphi.$$

Возвращаясь к декартовым координатам, устанавливаем (проверьте!), что

$$u(x, y) = 1 + \frac{16xy}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Задача Дирихле в кольце. Пусть теперь область $D = \{(x, y) : R_1^2 < x^2 + y^2 < R_2^2\}$ — кольцо между двумя окружностями (рис. 11.2). Рассмотрим задачу Дирихле для уравнения Лапласа

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & (x, y) \in D, \\ u = \omega_1(x, y), & x^2 + y^2 = R_1^2, \\ u = \omega_2(x, y), & x^2 + y^2 = R_2^2. \end{cases} \quad (11.8)$$

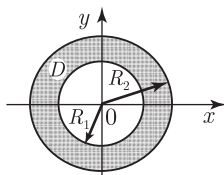


Рис. 11.2

Перейдя к полярным координатам, получим задачу

$$\begin{cases} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} = 0, & 0 < R_1 < r < R_2, \quad -\pi \leq \varphi \leq \pi; \\ v(R_1, \varphi) = f_1(\varphi), \quad v(R_2, \varphi) = f_2(\varphi). \end{cases} \quad (11.9)$$

Разложим граничные функции в тригонометрические ряды Фурье:

$$f_1(\varphi) = \frac{a_{10}}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_{1k} \cos k\varphi + b_{1k} \sin k\varphi),$$

$$f_2(\varphi) = \frac{a_{20}}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_{2k} \cos k\varphi + b_{2k} \sin k\varphi).$$

Решение будем искать в виде аналогичного ряда Фурье, коэффициенты которого — неизвестные функции от r :

$$v(r, \varphi) = \frac{A_0(r)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k(r) \cos k\varphi + B_k(r) \sin k\varphi).$$

Для определения $A_0(r)$ получаем краевую задачу

$$\frac{1}{r} (r A_0')' = 0, \quad A_0(R_1) = a_{10}, \quad A_0(R_2) = a_{20}.$$

Общее решение ДУ здесь имеет вид

$$A_0(r) = C_0 \ln r + D_0.$$

Подставляя краевые условия, получим систему для определения неизвестных констант

$$\begin{cases} C_0 \ln R_1 + D_0 = a_{10}, \\ C_0 \ln R_2 + D_0 = a_{20}. \end{cases}$$

Эта система однозначно разрешима, так как ее определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} \ln R_1 & 1 \\ \ln R_2 & 1 \end{vmatrix} = \ln \left(\frac{R_1}{R_2} \right) \neq 0.$$

Для определения $A_k(r)$ имеем краевые задачи

$$\frac{1}{r} (r A_k')' - \frac{k^2}{r^2} A_k = 0, \quad A_k(R_1) = a_{1k},$$

$$A_k(R_2) = a_{2k}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Здесь общее решение ДУ имеет вид

$$A_k(r) = C_k r^k + D_k r^{-k}.$$

Подставляя краевые условия, получим систему для определения неизвестных констант

$$\begin{cases} C_k R_1^k + D_k R_1^{-k} = a_{1k}, \\ C_k R_2^k + D_k R_2^{-k} = a_{2k}. \end{cases}$$

Эта система также однозначно разрешима, так как

$$\Delta = \begin{vmatrix} R_1^k & R_1^{-k} \\ R_2^k & R_2^{-k} \end{vmatrix} = \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^k - \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^k \neq 0.$$

Аналогично

$$B_k(r) = E_k r^k + F_k r^{-k},$$

причем константы однозначно находятся из системы

$$\begin{cases} E_k R_1^k + F_k R_1^{-k} = b_{1k}, \\ E_k R_2^k + F_k R_2^{-k} = b_{2k}. \end{cases}$$

Замечание 11.1. В решении задачи Дирихле для уравнения Лапласа в кольце могут присутствовать функции $\ln r$ и r^{-k} , $k = 1, 2, \dots$, в отличие от соответствующих задач внутри и вне круга.

Пример 11.2. Пусть требуется найти функцию $v(r, \varphi)$, гармоническую в кольце $1 < r < 2$ и удовлетворяющую граничным условиям

$$v(1, \varphi) = \sin \varphi + \cos \varphi, \quad v(2, \varphi) = \sin \varphi - \cos \varphi.$$

Таким образом, нужно решить следующую задачу для отыскания 2π -периодической функции $v(r, \varphi)$:

$$\begin{cases} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} = 0, & 1 < r < 2, \quad -\pi \leq \varphi \leq \pi, \\ v(1, \varphi) = \sin \varphi + \cos \varphi, & v(2, \varphi) = \sin \varphi - \cos \varphi. \end{cases}$$

Разложим граничные функции в тригонометрические ряды Фурье:

$$f_1(\varphi) = \sin \varphi + \cos \varphi = \frac{a_{10}}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_{1k} \cos k\varphi + b_{1k} \sin k\varphi) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_{1k} = \begin{cases} 1, & k = 1, \\ 0, & k \neq 1, \end{cases} \quad b_{1k} = \begin{cases} -1, & k = 1, \\ 0, & k \neq 1; \end{cases}$$

$$f_2(\varphi) = \sin \varphi - \cos \varphi = \frac{a_{20}}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_{2k} \cos k\varphi + b_{2k} \sin k\varphi) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_{2k} = \begin{cases} 1, & k = 1, \\ 0, & k \neq 1, \end{cases} \quad b_{2k} = \begin{cases} 1, & k = 1, \\ 0, & k \neq 1. \end{cases}$$

Решение задачи ищем в виде

$$v(r, \varphi) = \frac{A_0(r)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k(r) \cos k\varphi + B_k(r) \sin k\varphi).$$

Заметим, что в силу граничных условий этот ряд будет содержать всего два ненулевых слагаемых, т. е.

$$v(r, \varphi) = A_1(r) \cos \varphi + B_1(r) \sin \varphi.$$

Для определения $A_1(r)$ имеем следующую краевую задачу:

$$\frac{1}{r} (rA_1')' - \frac{1}{r^2} A_1 = 0, \quad A_1(1) = a_{11} = 1, \quad A_1(2) = a_{21} = -1.$$

Общее решение ДУ имеет вид

$$A_1(r) = C_1 r + D_1 r^{-1}.$$

Подставляя краевые условия, получим систему для определения неизвестных констант

$$\begin{cases} C_1 + D_1 = 1, \\ 2C_1 + 2^{-1}D_1 = -1. \end{cases}$$

Аналогичная задача получается для определения $B_1(r)$:

$$\frac{1}{r} (rB_1')' - \frac{1}{r^2} B_1 = 0, \quad B_1(1) = b_{11} = 1, \quad B_1(2) = b_{21} = 1.$$

Общее решение ДУ здесь также имеет вид

$$B_1(r) = E_1 r + F_1 r^{-1}.$$

Для определения неизвестных констант имеем систему

$$\begin{cases} E_1 + F_1 = 1, \\ 2E_1 + 2^{-1}F_1 = 1. \end{cases}$$

Решив две системы линейных алгебраических уравнений, получим:

$$\begin{cases} C_1 = -1, \\ D_1 = 2, \end{cases} \quad \begin{cases} E_1 = 1/3, \\ F_1 = 2/3. \end{cases}$$

Следовательно,

$$A_1(r) = -r + \frac{2}{r}, \quad B_1(r) = \frac{1}{3} \left(r + \frac{2}{r} \right).$$

Итак, окончательно имеем

$$v(r, \varphi) = \left(-r + \frac{2}{r} \right) \cos \varphi + \frac{1}{3} \left(r + \frac{2}{r} \right) \sin \varphi.$$

Задача Неймана в круге. Обратим внимание на некоторые особенности задачи Неймана, отмеченные в замечании 9.1.

Пусть $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 < R^2\}$. Рассмотрим в этом круге внутреннюю задачу Неймана для уравнения Лапласа. Для отыскания 2π -периодической функции $v(r, \varphi)$ имеем в полярных координатах следующую задачу:

$$\begin{cases} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} = 0, & 0 < r < R, \quad -\pi \leq \varphi \leq \pi; \\ \frac{\partial v(R, \varphi)}{\partial r} = f(\varphi), & |v(0, \varphi)| < +\infty. \end{cases} \quad (11.10)$$

Следуя схеме метода Фурье, рассмотренной для задачи Дирихле, разложим граничную функцию в тригонометрический ряд

$$f(\varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi)$$

и будем искать решение задачи (11.10) в виде ряда (11.3). Тогда

$$\frac{\partial v(R, \varphi)}{\partial r} = \frac{A'_0(R)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (A'_k(R) \cos k\varphi + B'_k(R) \sin k\varphi),$$

и для определения неизвестных коэффициентов ряда (11.3) получим следующие задачи:

$$\frac{1}{r} (rA'_0)' = 0, \quad |A_0(0)| < +\infty, \quad A'_0(R) = a_0; \quad (11.11)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} (rA'_k)' - \frac{k^2}{r^2} A_k &= 0, \quad |A_k(0)| < +\infty, \\ A'_k(R) &= a_k, \quad k = 1, 2, \dots; \end{aligned} \quad (11.12)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} (rB'_k)' - \frac{k^2}{r^2} B_k &= 0, \quad |B_k(0)| < +\infty, \\ B'_k(R) &= b_k, \quad k = 1, 2, \dots. \end{aligned} \quad (11.13)$$

Запишем общее решение ДУ (11.11)

$$A_0(r) = C_0 \ln r + D_0.$$

Из условия ограниченности при $r \rightarrow 0$ получим, что $C_0 = 0$. Тогда $A_0(r) = D_0$ и $A'_0(r) = 0$. Отсюда следует, что задача (11.11) имеет бесконечно много решений $A_0(r) = \text{const}$, причем лишь в случае, когда в разложении граничной функции в тригонометрический ряд Фурье $a_0 = 0$, т. е. граничное значение удовлетворяет условию

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi) d\varphi = 0. \quad (11.14)$$

Решив задачи (11.12) и (11.13), получим:

$$A_k(r) = a_k \frac{r^k}{k R^{k-1}}, \quad B_k(r) = b_k \frac{r^k}{k R^{k-1}}.$$

Теперь можно записать формальное решение задачи (11.10)

$$v(r, \varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{r^k}{kR^{k-1}} (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi) + C. \quad (11.15)$$

Итак, задача Неймана (11.10) имеет бесконечное множество формальных решений, определенных с точностью до произвольной постоянной C , причем решение существует только при дополнительном ограничении на функцию $f(\varphi)$ (11.14).

Аналогично решается задача Неймана для уравнения Лапласа вне круга и в кольце.

Лекция 12

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ/ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Постановка задачи Коши для одномерного уравнения диффузии/теплопроводности. Теорема единственности решения. Рассмотрим в полуплоскости $Q = \{(x, t) : -\infty < x < +\infty, t > 0\}$ уравнение диффузии/теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t), \quad (x, t) \in Q. \quad (12.1)$$

Требуется найти функцию $u(x, t)$, удовлетворяющую этому уравнению и начальному условию

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad -\infty < x < +\infty. \quad (12.2)$$

Заметим, что в постановке данной задачи отсутствуют граничные условия, а задано только начальное условие. Такая задача называется задачей Коши.

Данная задача описывает, например, процесс диффузии (или теплопроводности) в бесконечном стержне, что в ряде случаев является удобной физической и математической идеализацией. Стержень предполагается настолько длинным, что влиянием его концов можно пренебречь.

Определение 12.1. Если $f(x, t)$ непрерывна при $t \geq 0$, а $\varphi(x)$ непрерывна на $(-\infty, +\infty)$, то под классическим решением задачи (12.1)–(12.2) понимается функция $u(x, t)$, которая:

- непрерывна при $t \geq 0$ и удовлетворяет начальному условию (12.2);

- имеет при $t > 0$ непрерывные частные производные $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ и обращает уравнение (12.1) в тождество.

Сформулируем без доказательства следующее утверждение.

Теорема 12.1 (о единственности классического решения). Если функция $\varphi(x)$ непрерывна и ограничена на $(-\infty, +\infty)$, то задача Коши (12.1)–(12.2) может иметь только одно классическое решение, и это решение ограничено в области $\overline{Q} = \{(x, t): -\infty < x < +\infty, t \geq 0\}$.

Построение решения задачи Коши для однородного уравнения теплопроводности с помощью преобразования Фурье. Рассмотрим сначала задачу Коши для однородного уравнения

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & -\infty < x < +\infty, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = \varphi(x), & -\infty < x < +\infty. \end{cases} \quad (12.3)$$

Применим для нахождения ее решения преобразование Фурье.

Напомним (см., например, [4]), что преобразованием Фурье функции $f(x)$ называется отображение, ставящее в соответствие этой функции функцию $\tilde{f}(\lambda)$, задаваемую как следующий несобственный интеграл, зависящий от параметра λ :

$$\tilde{f}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\lambda x} dx, \quad (12.4)$$

или кратко

$$\tilde{f}(\lambda) = F[f(x)](\lambda).$$

Для восстановления $f(x)$ по известному ее Фурье-образу $\tilde{f}(\lambda)$ имеет место формула обращения, использующая обратное преобразование Фурье F^{-1} :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda, \quad (12.5)$$

или кратко

$$f(x) = F^{-1}[\tilde{f}(\lambda)](x).$$

Прямое и обратное преобразования Фурье определены, в частности, для всех функций, несобственный интеграл от которых по промежутку $(-\infty, +\infty)$ абсолютно сходится. Такие функции называются *абсолютно интегрируемыми* на промежутке $(-\infty, +\infty)$. При $x \rightarrow \infty$ они стремятся к нулю.

Сформулируем основные свойства преобразования Фурье, которые нам потребуются для решения нашей задачи.

Лемма 12.1 (линейность преобразования Фурье). Пусть для функций f_1 и f_2 существует преобразование Фурье. Тогда, каковы бы ни были числа α_1 и α_2 , для функции $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2$ также существует преобразование Фурье, причем

$$F[\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2] = \alpha_1 F[f_1] + \alpha_2 F[f_2]$$

(Аналогичное свойство имеет место и для обратного преобразования Фурье.)

Лемма 12.2 (преобразование Фурье производных). Пусть абсолютно интегрируемая на промежутке $(-\infty, +\infty)$ функция f имеет n абсолютно интегрируемых и непрерывных на $(-\infty, +\infty)$ производных. Тогда

$$F[f^{(k)}] = (i\lambda)^k F[f], \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Определение 12.2. Поставим в соответствие паре функций f_1 и f_2 функцию $(f_1 * f_2)(x)$, определяемую как следующий несобственный интеграл, зависящий от параметра x :

$$(f_1 * f_2)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\xi) f_2(x - \xi) d\xi.$$

Этот интеграл называется сверткой функций f_1 и f_2 .

Лемма 12.3 (преобразование Фурье свертки). Если для функций f_1 и f_2 существует преобразование Фурье, то

$$F[f_1 * f_2] = \sqrt{2\pi} F[f_1] \cdot F[f_2].$$

Перейдем к решению задачи (12.3). Предположим, что начальная функция $\varphi(x)$ абсолютно интегрируема на $(-\infty, +\infty)$. Будем искать решение в классе функций $u(x, t)$, удовлетворяющих следующим условиям:

1) функции $u(x, t)$, $\frac{\partial u(x, t)}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}$, $\frac{\partial u(x, t)}{\partial t}$ абсолютно интегрируемы на промежутке $(-\infty, +\infty)$ оси x при любом фиксированном $t \geq 0$;

2) для функции $\frac{\partial u(x, t)}{\partial t}$ на каждом конечном промежутке $0 \leq t \leq T$ найдется абсолютно интегрируемая функция $f(x)$, такая, что

$$\left| \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right| \leq f(x) \quad \forall t \in [0, T].$$

Выполним в задаче (12.3) преобразование Фурье по переменной x . Обозначим

$$\tilde{\varphi}(\lambda) = F[\varphi(x)], \quad \tilde{u}(\lambda, t) = F[u(x, t)].$$

Согласно лемме 12.2, имеем

$$F\left[\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}\right] = -\lambda^2 F[u(x, t)] = -\lambda^2 \tilde{u}(\lambda, t).$$

Воспользовавшись определением преобразования Фурье (формула (12.4)) и теоремой о дифференцировании несобственного интеграла по параметру t (см., например, [4, т. 2]), получим

$$\begin{aligned} F\left[\frac{\partial u(x, t)}{\partial t}\right] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} e^{-i\lambda x} dx = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x, t) e^{-i\lambda x} dx = \frac{\partial \tilde{u}(\lambda, t)}{\partial t}. \end{aligned}$$

Заметим, что произведенное дифференцирование под знаком интеграла законно. Действительно, в силу условия 2), наложенного на функцию $\frac{\partial u(x, t)}{\partial t}$, имеем оценку

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} e^{-i\lambda x} \right| &= \\ &= \left| \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} (\cos \lambda x + i \sin \lambda x) \right| \leq 2 \left| \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right| \leq 2f(x) \quad \forall t \in [0, T]. \end{aligned}$$

Так как $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ сходится, то по признаку Вейерштрасса

$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} e^{-i\lambda x} dx$ сходится равномерно по t на любом конечном промежутке $[0, T]$. Следовательно, дифференцирование по параметру законно на $[0, T]$, а в силу произвольности T — при $t \geq 0$.

В результате преобразования Фурье задача (12.3) превращается в задачу Коши для обыкновенного ДУ

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{u}}{dt} + a^2 \lambda^2 \tilde{u} = 0, & t > 0, \\ \tilde{u}(\lambda, 0) = \tilde{\varphi}(\lambda). \end{cases}$$

Ее решением будет функция

$$\tilde{u}(\lambda, t) = \tilde{\varphi}(\lambda) e^{-a^2 \lambda^2 t}.$$

Остается найти ту функцию $u(x, t)$, преобразованием Фурье которой является $\tilde{u}(\lambda, t)$.

Обозначим $\tilde{g}(\lambda) = e^{-a^2 \lambda^2 t}$. Поставим задачу — найти функцию $g(x)$, преобразованием Фурье которой является $\tilde{g}(\lambda)$. По формуле обращения имеем

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{g}(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2 \lambda^2 t} e^{i\lambda x} d\lambda = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2 \lambda^2 t} (\cos \lambda x + i \sin \lambda x) d\lambda = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-a^2 \lambda^2 t} \cos \lambda x d\lambda. \end{aligned}$$

Вычислим интеграл, зависящий от параметра,

$$I(x) = \int_0^{+\infty} e^{-a^2 \lambda^2 t} \cos \lambda x d\lambda.$$

Дифференцируя интеграл по параметру x , получим

$$I'(x) = - \int_0^{+\infty} \lambda e^{-a^2 \lambda^2 t} \sin \lambda x d\lambda.$$

Применение правила дифференцирования по параметру законно, так как подынтегральная функция $e^{-a^2 \lambda^2 t} \cos \lambda x$ непрерывна при $\lambda \geq 0$, $x \in \mathbf{R}$, интеграл $I(x)$ сходится при каждом $x \in \mathbf{R}$, а интеграл, полученный формальным дифференцированием по параметру, сходится равномерно по x на $\mathbf{R}$ (по признаку Вейерштрасса). Далее применим интегрирование по частям:

$$\begin{aligned} I'(x) &= \frac{1}{2a^2 t} \int_0^{+\infty} \sin \lambda x d(e^{-a^2 \lambda^2 t}) = \\ &= \frac{1}{2a^2 t} \left(\sin \lambda x \cdot e^{-a^2 \lambda^2 t} \Big|_0^{+\infty} - x \int_0^{+\infty} e^{-a^2 \lambda^2 t} \cos \lambda x d\lambda \right), \end{aligned}$$

откуда следует, что

$$I'(x) = -\frac{x}{2a^2t}I(x).$$

Проинтегрировав полученное ДУ, имеем

$$I(x) = C \exp\left(-\frac{x^2}{4a^2t}\right).$$

Заметив, что

$$I(0) = \int_0^{+\infty} e^{-a^2\lambda^2t} d\lambda = \int_0^{+\infty} e^{-a^2\lambda^2t} d\lambda = \frac{1}{a\sqrt{t}} \int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2a\sqrt{t}},$$

получаем

$$I(x) = \frac{1}{a\sqrt{2t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4a^2t}\right).$$

Итак,

$$g(x) = \frac{1}{a\sqrt{2t}} e^{-x^2/(4a^2t)}.$$

Таким образом,

$$\tilde{g}(\lambda) = e^{-a^2\lambda^2t} = F\left[\frac{1}{a\sqrt{2t}} e^{-x^2/(4a^2t)}\right]$$

и

$$\begin{aligned} \tilde{u}(\lambda, t) &= \tilde{\varphi}(\lambda) \cdot \tilde{g}(\lambda) = F[\varphi] \cdot F[g] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} F[\varphi * g] = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} F\left[\varphi(x) * \frac{1}{a\sqrt{2t}} e^{-x^2/(4a^2t)}\right]. \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались леммой 12.3 о преобразовании Фурье свертки двух функций. Следовательно, функция $u(x, t)$, преобразованием Фурье которой является функция $\tilde{u}(\lambda, t)$, имеет вид

$$u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} d\xi. \quad (12.6)$$

Это так называемая *формула Пуассона*.

Непосредственной проверкой можно убедиться в справедливости следующего факта.

Теорема 12.2. Если функция $\varphi(x)$ непрерывна и ограничена на $\mathbf{R}$, то формула Пуассона (12.6) дает классическое решение задачи (12.3).

Пример 12.1. Пусть требуется найти закон остывания неограниченного стержня с теплоизолированной боковой поверхностью, если начальное распределение температуры в стержне задается функцией $\varphi(x) = e^{-x^2}$, $-\infty < x < +\infty$. Математической моделью рассматриваемого процесса является задача Коши для однородного уравнения теплопроводности

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & -\infty < x < +\infty, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = e^{-x^2}, & -\infty < x < +\infty. \end{cases}$$

Воспользуемся формулой Пуассона (12.6):

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2} e^{-(x-\xi)^2/(4a^2 t)} d\xi = \\ &= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2 - (x-\xi)^2/(4a^2 t)} d\xi. \end{aligned}$$

Сведем полученный интеграл к известному интегралу Пуассона

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy = \sqrt{\pi}.$$

Для этого выделим в показателе экспоненты полный квадрат по переменной ξ :

$$\begin{aligned} -\xi^2 - \frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t} &= -\frac{(4a^2 t + 1)\xi^2 + x^2 - 2\xi x}{4a^2 t} = \\ &= -\frac{4a^2 t + 1}{4a^2 t} \left(\xi - \frac{x}{4a^2 t + 1} \right)^2 - \frac{x^2}{4a^2 t + 1} \end{aligned}$$

и сделаем замену переменной интегрирования, полагая

$$\frac{\sqrt{4a^2t+1}}{2a\sqrt{t}} \left(\xi - \frac{x}{4a^2t+1} \right) = y.$$

Тогда

$$u(x, t) =$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-x^2/(4a^2t+1)} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left[-\frac{4a^2t+1}{4a^2t} \left(\xi - \frac{x}{4a^2t+1} \right)^2 \right] d\xi = \\ &= \frac{e^{-x^2/(4a^2t+1)}}{\sqrt{4a^2t+1}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy = \frac{e^{-x^2/(1+4a^2t)}}{\sqrt{1+4a^2t}}. \end{aligned}$$

Замечание 12.1. Если начальная функция $\varphi(x)$ ограничена на $\mathbf{R}$ и имеет конечное число точек разрыва первого рода, то интеграл Пуассона (12.6) представляет собой ограниченное решение задачи Коши (12.3).

Пример 12.2. Рассмотрим задачу Коши, в которой начальная функция не является непрерывной на всей числовой оси:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & -\infty < x < +\infty, t > 0, \\ u(x, 0) = \varphi(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ u_0, & x > 0 \end{cases} \quad (u_0 = \text{const}). \end{cases}$$

Воспользовавшись формулой Пуассона, получим

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) e^{-(x-\xi)^2/(4a^2t)} d\xi = \\ &= \frac{u_0}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^{+\infty} e^{-(x-\xi)^2/(4a^2t)} d\xi. \end{aligned}$$

Сделаем в интеграле замену переменной, полагая

$$\frac{\xi - x}{2a\sqrt{t}} = y.$$

Тогда

$$\begin{aligned}
 u(x, t) &= \frac{u_0}{\sqrt{\pi}} \int_{-x/(2a\sqrt{t})}^{+\infty} e^{-y^2} dy = \\
 &= \frac{u_0}{2} \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{-x/(2a\sqrt{t})}^0 e^{-y^2} dy \right) = \\
 &= \frac{u_0}{2} \left(1 + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{x/(2a\sqrt{t})} e^{-y^2} dy \right).
 \end{aligned}$$

Забегаая вперед, заметим, что последний интеграл с переменным верхним пределом представляет собой известную функцию от верхнего предела, так называемую функцию ошибок, о которой мы будем говорить в следующей лекции. Таким образом, решение нашей задачи найдено.

Решение задачи Коши для неоднородного уравнения с нулевой начальной функцией. Теперь рассмотрим задачу Коши для неоднородного ДУ диффузии/теплопроводности с нулевой начальной функцией

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t), & -\infty < x < +\infty, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = 0, & -\infty < x < +\infty. \end{cases} \quad (12.7)$$

Можно показать, что решение задачи (12.7) дается формулой

$$u(x, t) = \int_0^t \frac{d\tau}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi, \tau) e^{-(x-\xi)^2/[4a^2(t-\tau)]} d\xi, \quad (12.8)$$

которая также называется *формулой Пуассона*.

Пример 12.3. Решим задачу Коши для неоднородного ДУ с нулевой начальной функцией

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \sin 3t, & -\infty < x < +\infty, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = 0, & -\infty < x < +\infty. \end{cases}$$

Согласно формуле (12.8), имеем

$$\begin{aligned}
 u(x, t) &= \int_0^t \frac{d\tau}{2\sqrt{\pi(t-\tau)}} \int_{-\infty}^{+\infty} \sin 3\tau \cdot e^{-(x-\xi)^2[4(t-\tau)]} d\xi = \\
 &= \int_0^t \frac{\sin 3\tau d\tau}{2\sqrt{\pi(t-\tau)}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-\xi)^2[4(t-\tau)]} d\xi = \\
 &= \int_0^t \frac{\sin 3\tau d\tau}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy = \int_0^t \sin 3\tau d\tau = \frac{1}{3}(1 - \cos 3t).
 \end{aligned}$$

Итак, мы получили решение задачи, непосредственно вычислив интеграл (12.8).

В данном случае можно было бы поступить проще. Заметим, что правая часть ДУ зависит только от переменной t . Естественнo предположить, что решением задачи будет функция $u(t)$, также зависящая только от переменной t , причем $u(0) = 0$. Подставляя неизвестную функцию $u(t)$ в ДУ, получим для ее определения следующую задачу:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = \sin 3t, \\ u(0) = 0, \end{cases}$$

решением которой будет функция $u(t) = \frac{1}{3}(1 - \cos 3t)$.

Пример 12.4. Решим задачу Коши для неоднородного уравнения диффузии/теплопроводности с ненулевой начальной функцией

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = e^{-t} \sin x, & -\infty < x < +\infty, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = xe^{-x^2} + 3 \cos x, & -\infty < x < +\infty \end{cases}$$

Применим принцип суперпозиции для линейных ДУ, согласно которому мы можем разбить нашу задачу на следующие три задачи:

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial t} - 4 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = e^{-t} \sin x, & \begin{cases} \frac{\partial u_2}{\partial t} - 4 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} = 0, \\ u_2(x, 0) = 3 \cos x; \end{cases} \\ u_1(x, 0) = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u_3}{\partial t} - 4 \frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} = 0, \\ u_3(x, 0) = x e^{-x^2}. \end{cases}$$

Тогда

$$u(x, t) = u_1(x, t) + u_2(x, t) + u_3(x, t).$$

Решение первой задачи попробуем найти в виде

$$u_1(x, t) = y(t) \sin x,$$

где $y(t)$ — неизвестная функция, удовлетворяющая нулевому начальному условию. Подставляя это выражение в ДУ, имеем

$$y' \sin x + 4y \sin x = e^{-t} \sin x.$$

Приравнявая коэффициенты при $\sin x$, получим для определения $y(t)$ задачу Коши

$$\begin{cases} y'(t) + 4y(t) = e^{-t}, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Ее решение, как нетрудно проверить, имеет вид

$$y(t) = \frac{1}{3} (e^{-t} - e^{-4t}).$$

Итак,

$$u_1(x, t) = \frac{1}{3} (e^{-t} - e^{-4t}) \sin x.$$

Аналогично, решение второй задачи будем искать в виде

$$u_2(x, t) = z(t) \cos x,$$

где $z(t)$ — неизвестная функция, удовлетворяющая начальному условию $z(0) = 3$. Подставляя выражение для $u_2(x, t)$ в ДУ, имеем

$$z' \cos x + 4z \cos x = 0.$$

Приравнявая коэффициенты при $\cos x$, получим для определения $z(t)$ задачу Коши

$$\begin{cases} z'(t) + 4z(t) = 0, \\ z(0) = 3. \end{cases}$$

Ее решением будет функция

$$z(t) = 3e^{-4t}.$$

Следовательно,

$$u_2(x, t) = 3e^{-4t} \cos x.$$

Решение третьей задачи будем искать, используя формулу Пуассона (12.6), согласно которой

$$\begin{aligned} u_3(x, t) &= \frac{1}{2 \cdot 2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \xi e^{-\xi^2} e^{-(x-\xi)^2/(4 \cdot 4t)} d\xi = \\ &= \frac{1}{4\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \xi e^{-\xi^2 - (x-\xi)^2/(16t)} d\xi. \end{aligned}$$

Выделим в показателе экспоненты полный квадрат по переменной ξ :

$$-\xi^2 - \frac{(x-\xi)^2}{16t} = -\frac{16t+1}{16t} \left(\xi - \frac{x}{16t+1} \right)^2 - \frac{x^2}{16t+1}$$

и сделаем замену переменной интегрирования, полагая

$$\frac{\sqrt{16t+1}}{4\sqrt{t}} \left(\xi - \frac{x}{16t+1} \right) = y.$$

Тогда

$$\xi = \frac{4\sqrt{t}}{\sqrt{16t+1}} y + \frac{x}{16t+1}, \quad d\xi = \frac{4\sqrt{t}}{\sqrt{16t+1}} dy$$

и

$$\begin{aligned} u_3(x, t) &= \\ &= \frac{1}{4\sqrt{\pi t}} e^{-x^2/(16t+1)} \int_{-\infty}^{+\infty} \xi \exp \left[-\frac{16t+1}{16t} \left(\xi - \frac{x}{16t+1} \right)^2 \right] d\xi = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{e^{-x^2/(16t+1)}}{\sqrt{16t+1}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{4\sqrt{t}}{\sqrt{16t+1}} y + \frac{x}{16t+1} \right) e^{-y^2} dy = \\
&= \frac{e^{-x^2/(16t+1)}}{(16t+1)} \frac{4\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} y e^{-y^2} dy + \frac{x e^{-x^2/(16t+1)}}{(16t+1)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy = \\
&= \frac{x}{(16t+1)^{3/2}} \cdot e^{-x^2/(16t+1)}.
\end{aligned}$$

Итак, мы нашли решение задачи

$$\begin{aligned}
u(x, t) = \frac{1}{3} \left(e^{-t} - e^{-4t} \right) \sin x + \\
+ 3e^{-4t} \cos x + \frac{x}{(16t+1)^{3/2}} \cdot e^{-x^2/(16t+1)}.
\end{aligned}$$

Лекция 13

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ/ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ НА ПОЛУОСИ. МЕТОД ПРОДОЛЖЕНИЯ

Постановка задачи. Рассмотрим следующую смешанную задачу для уравнения диффузии/теплопроводности на полуоси $x > 0$:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t), & x > 0, \quad t > 0, \end{cases} \quad (13.1)$$

$$\begin{cases} u(x, 0) = \varphi(x), & x \geq 0, \end{cases} \quad (13.2)$$

$$\begin{cases} u(0, t) = \omega(t), & t \geq 0. \end{cases} \quad (13.3)$$

Здесь, помимо начального условия (13.2), присутствует граничное условие (13.3).

Руководствуясь принципом суперпозиции для линейных ДУ, решение задачи (13.1)–(13.3) можно представить в виде суммы

$$u(x, t) = u_1(x, t) + u_2(x, t) + u_3(x, t),$$

где $u_1(x, t)$, $u_2(x, t)$, $u_3(x, t)$ — решения следующих трех задач:

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = 0, & x > 0, \quad t > 0, \\ u_1(x, 0) = \varphi(x), & x \geq 0, \\ u_1(0, t) = 0, & t \geq 0; \end{cases} \quad (13.4)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u_2}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} = f(x, t), & x > 0, \quad t > 0, \\ u_2(x, 0) = 0, & x \geq 0, \\ u_2(0, t) = 0, & t \geq 0; \end{cases} \quad (13.5)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u_3}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} = 0, & x > 0, \quad t > 0, \\ u_3(x, 0) = 0, & x \geq 0, \\ u_3(0, t) = \omega(t), & t \geq 0. \end{cases} \quad (13.6)$$

Задачу (13.4) будем решать методом продолжения начальной функции; аналогично, задачу (13.5) — методом продолжения правой части уравнения. Решение задачи (13.6) пока отложим. Мы вернемся к ней на следующей лекции.

Метод продолжения. Сейчас мы займемся построением решения задачи (13.4). Пусть функция $\tilde{\varphi}(x)$ определена на $(-\infty, +\infty)$ и удовлетворяет условию

$$\tilde{\varphi}(x) \equiv \varphi(x), \quad x \geq 0.$$

Рассмотрим вспомогательную задачу Коши

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 \tilde{u}_1}{\partial x^2} = 0, & -\infty < x < +\infty, \quad t > 0, \\ \tilde{u}_1(x, 0) = \tilde{\varphi}(x), & -\infty < x < +\infty. \end{cases} \quad (13.7)$$

Ее решение дается формулой Пуассона (12.6)

$$\begin{aligned} \tilde{u}_1(x, t) &= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\varphi}(\xi) e^{-(x-\xi)^2/(4a^2 t)} d\xi = \\ &= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \left(\int_{-\infty}^0 \tilde{\varphi}(\xi) e^{-(x-\xi)^2/(4a^2 t)} d\xi + \int_0^{+\infty} \varphi(\xi) e^{-(x-\xi)^2/(4a^2 t)} d\xi \right). \end{aligned}$$

В первом интеграле заменим ξ на $-\xi$. Тогда

$$\int_{-\infty}^0 \tilde{\varphi}(\xi) e^{-(x-\xi)^2/(4a^2 t)} d\xi = \int_0^{+\infty} \tilde{\varphi}(-\xi) e^{-(x+\xi)^2/(4a^2 t)} d\xi.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \tilde{u}_1(x, t) &= \\ &= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^{+\infty} \left(\varphi(\xi) e^{-(x-\xi)^2/(4a^2 t)} + \tilde{\varphi}(-\xi) e^{-(x+\xi)^2/(4a^2 t)} \right) d\xi. \end{aligned} \quad (13.8)$$

Потребовав далее, чтобы $\tilde{u}_1(0, t) = 0$, получим

$$\tilde{u}_1(0, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^{+\infty} (\varphi(\xi) + \tilde{\varphi}(-\xi)) e^{-\xi^2/(4a^2 t)} d\xi = 0.$$

Последнее равенство заведомо выполняется, если $\tilde{\varphi}(-\xi) = -\varphi(\xi)$, т. е. $\tilde{\varphi}(x)$ — нечетное продолжение $\varphi(x)$ на отрицательную полуось (рис. 13.1):

$$\tilde{\varphi}(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \geq 0, \\ -\varphi(-x), & x < 0. \end{cases}$$

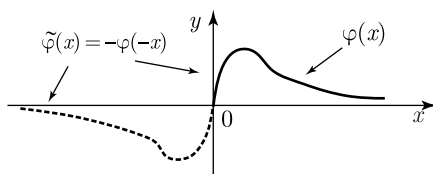


Рис. 13.1. Нечетное продолжение функции $\varphi(x)$ на отрицательную полуось

Выбирая такое продолжение, находим решение задачи (13.4):

$$u_1(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^{+\infty} \varphi(\xi) \left(e^{-(x-\xi)^2/(4a^2 t)} - e^{-(x+\xi)^2/(4a^2 t)} \right) d\xi. \quad (13.9)$$

Аналогично можно показать, что решение задачи (13.5) может быть получено с помощью нечетного по переменной x продолжения функции $f(x, t)$ и имеет следующий вид:

$$u_2(x, t) = \int_0^t \frac{d\tau}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} \times \int_0^{+\infty} f(\xi, \tau) \left(e^{-(x-\xi)^2/[4a^2(t-\tau)]} - e^{-(x+\xi)^2/[4a^2(t-\tau)]} \right) d\xi. \quad (13.10)$$

Итак, функция $u(x, t) = u_1(x, t) + u_2(x, t)$, где $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$ определяются формулами (13.9) и (13.10) соответственно, есть решение ДУ (13.1) с начальным условием (13.2) в случае краевого условия $u(0, t) = 0$. Рассмотрим теперь аналогично задачу, но с краевым условием $\frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = 0$. Соответствующая задача для $u_1(x, t)$ в этом случае запишется следующим образом:

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = 0, & x > 0, \quad t > 0, \\ u_1(x, 0) = \varphi(x), & x \geq 0, \\ \frac{\partial u_1(x, 0)}{\partial x} = 0, & t \geq 0. \end{cases} \quad (13.11)$$

Сначала будем действовать по той же схеме, что и при решении задачи (13.4). Запишем вспомогательную задачу Коши (13.7) и построим ее решение (13.8).

Затем продифференцируем это решение по переменной x :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x} &= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \times \\ &\times \int_0^{+\infty} \left(\varphi(\xi) \frac{\xi - x}{2a^2 t} e^{-(x-\xi)^2/(4a^2 t)} - \tilde{\varphi}(-\xi) \frac{x + \xi}{2a^2 t} e^{-(x+\xi)^2/(4a^2 t)} \right) d\xi. \end{aligned}$$

Далее потребуем выполнения краевого условия:

$$\frac{\partial \tilde{u}_1(0, t)}{\partial x} = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^{+\infty} \left((\varphi(\xi) - \tilde{\varphi}(-\xi)) \frac{\xi}{2a^2 t} e^{-\xi^2/(4a^2 t)} \right) d\xi = 0.$$

Последнее равенство заведомо выполняется, если $\tilde{\varphi}(-\xi) = \varphi(\xi)$, т. е. $\tilde{\varphi}(x)$ — четное продолжение функции $\varphi(x)$ на отрицательную полуось (рис. 13.2):

$$\tilde{\varphi}(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \geq 0, \\ \varphi(-x), & x < 0. \end{cases}$$

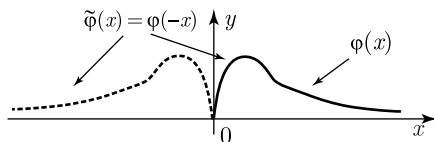


Рис. 13.2. Четное продолжение функции $\varphi(x)$ на отрицательную полуось

Выбирая такое продолжение для начальной функции, находим решение задачи (13.11):

$$u_1(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^{+\infty} \varphi(\xi) \left(e^{-(x-\xi)^2/(4a^2t)} + e^{-(x+\xi)^2/(4a^2t)} \right) d\xi. \quad (13.12)$$

Задача для $u_2(x, t)$ в случае краевого условия второго типа запишется так:

$$\begin{cases} \frac{\partial u_2}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} = f(x, t), & x > 0, \quad t > 0, \\ u_2(x, 0) = 0, & x \geq 0, \\ \frac{\partial u_2(0, t)}{\partial x} = 0. & t \geq 0. \end{cases} \quad (13.13)$$

Ее решение также может быть получено с помощью четного по переменной x продолжения функции $f(x, t)$ и выглядит следующим образом:

$$u_2(x, t) = \int_0^t \frac{d\tau}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} \times \int_0^{+\infty} f(\xi, \tau) \left(e^{-(x-\xi)^2/[4a^2(t-\tau)]} + e^{-(x+\xi)^2/[4a^2(t-\tau)]} \right) d\xi. \quad (13.14)$$

Функция ошибок. Рассмотрим следующий интеграл с переменным верхним пределом:

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt. \quad (13.15)$$

Этот интеграл называют *функцией ошибок* (error function). Сформулируем ее основные свойства, которые нам потребуются при решении ряда задач. Геометрический смысл функции ошибок иллюстрирует рис. 13.3.

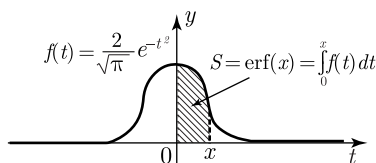


Рис. 13.3. Геометрическая интерпретация $\operatorname{erf}(x)$

Непосредственно из определения функции $\operatorname{erf}(x)$ следуют ее следующие свойства, важные для практики.

1. $\operatorname{erf}(0) = 0$.

2. $\operatorname{erf}(+\infty) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = 1$.

3. $\operatorname{erf}(-x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{-x} e^{-t^2} dt = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{-x}^0 e^{-t^2} dt = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt = -\operatorname{erf}(x)$.

4. $\operatorname{erf}(-\infty) = -1$.

5. $\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt = 1 - \operatorname{erf}(x)$.

Свойства функции $\operatorname{erf}(x)$ иллюстрирует рис. 13.4.

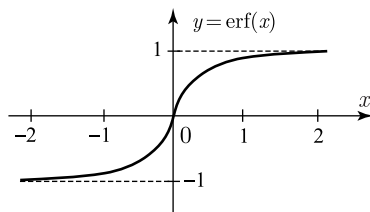


Рис. 13.4. Приблизительный эскиз графика функции $y = \operatorname{erf}(x)$

Примеры решения задач.

Пример 13.1. Процесс остывания полубесконечного стержня, начальная температура которого постоянна, а конец под-

держивается при нулевой температуре, описывается следующей начально-краевой задачей:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & x > 0, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = u_0, & x \geq 0, \\ u(0, t) = 0, & t \geq 0. \end{cases}$$

Воспользовавшись полученной формулой (13.9), запишем решение

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^{+\infty} u_0 \left(e^{-(x-\xi)^2/(4a^2t)} - e^{-(x+\xi)^2/(4a^2t)} \right) d\xi = \\ &= \frac{u_0}{\sqrt{\pi}} (I_1 - I_2), \end{aligned}$$

где

$$I_1 = \frac{1}{2a\sqrt{t}} \int_0^{+\infty} e^{-(x-\xi)^2/(4a^2t)} d\xi, \quad I_2 = \frac{1}{2a\sqrt{t}} \int_0^{+\infty} e^{-(x+\xi)^2/(4a^2t)} d\xi$$

Сделаем в первом интеграле замену переменной интегрирования, полагая

$$\frac{\xi - x}{4a\sqrt{t}} = y.$$

Тогда, используя свойства функции ошибок, получим

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{-x/(2a\sqrt{t})}^{+\infty} e^{-y^2} dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left(1 - \operatorname{erf} \left(-\frac{x}{2a\sqrt{t}} \right) \right) = \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left(1 + \operatorname{erf} \left(\frac{x}{2a\sqrt{t}} \right) \right). \end{aligned}$$

Аналогично во втором интеграле

$$\frac{\xi - x}{4a\sqrt{t}} = y,$$

тогда

$$I_2 = \int_{x/(2a\sqrt{t})}^{+\infty} e^{-y^2} dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left(1 - \operatorname{erf} \left(\frac{x}{2a\sqrt{t}} \right) \right).$$

В результате имеем закон остывания стержня

$$u(x, t) = u_0 \operatorname{erf} \left(\frac{x}{2a\sqrt{t}} \right).$$

Пример 13.2. Теперь рассмотрим процесс остывания полубесконечного стержня, для которого тепловой поток через конец $x = 0$ равен нулю, а начальная температура определяется кусочно-постоянной функцией

$$\varphi(x) = \begin{cases} u_0, & 0 \leq x \leq l, \\ 0, & x > l. \end{cases}$$

В этом случае требуется решить следующую начально-краевую задачу:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & x > 0, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = \varphi(x), & x \geq 0, \\ \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = 0, & t \geq 0. \end{cases}$$

Согласно формуле (13.12), решение этой задачи можно записать так:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^{+\infty} \varphi(\xi) \left(e^{-(x-\xi)^2/(4a^2t)} + e^{-(x+\xi)^2/(4a^2t)} \right) d\xi = \\ &= \frac{u_0}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^l \left(e^{-(x-\xi)^2/(4a^2t)} + e^{-(x+\xi)^2/(4a^2t)} \right) d\xi = \frac{u_0}{\sqrt{\pi}} (I_1 + I_2), \end{aligned}$$

где

$$I_1 = \frac{1}{2a\sqrt{t}} \int_0^l e^{-(x-\xi)^2/(4a^2t)} d\xi, \quad I_2 = \frac{1}{2a\sqrt{t}} \int_0^l e^{-(x+\xi)^2/(4a^2t)} d\xi.$$

Сделаем в первом интеграле замену переменной интегрирования, полагая

$$\frac{\xi - x}{4a\sqrt{t}} = y.$$

Тогда

$$I_1 = \int_{-x/(2a\sqrt{t})}^{l-x/(2a\sqrt{t})} e^{-y^2} dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left(\operatorname{erf} \left(\frac{l-x}{2a\sqrt{t}} \right) + \operatorname{erf} \left(\frac{x}{2a\sqrt{t}} \right) \right).$$

Аналогично во втором интеграле положим

$$\frac{\xi + x}{4a\sqrt{t}} = y,$$

тогда

$$I_2 = \int_{x/(2a\sqrt{t})}^{l+x/(2a\sqrt{t})} e^{-y^2} dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left(\operatorname{erf} \left(\frac{l+x}{2a\sqrt{t}} \right) - \operatorname{erf} \left(\frac{x}{2a\sqrt{t}} \right) \right).$$

В результате получим решение задачи

$$u(x, t) = \frac{u_0}{2} \left(\operatorname{erf} \left(\frac{l-x}{2a\sqrt{t}} \right) + \operatorname{erf} \left(\frac{l+x}{2a\sqrt{t}} \right) \right).$$

Лекция 14

МЕТОД ПОДОБИЯ В ЗАДАЧЕ ДИФФУЗИИ/ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ. ЗАДАЧА О ФАЗОВОМ ПЕРЕХОДЕ

Метод подобия. Рассмотрим следующую смешанную задачу для уравнения диффузии/теплопроводности на полуоси:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & x > 0, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = u_0, & x > 0 \end{cases} \quad (14.1)$$

$$(14.2)$$

$$\begin{cases} u(0, t) = u_1, & t > 0. \end{cases} \quad (14.3)$$

Здесь u_0 и u_1 — постоянные. Если $u_1 = u_0$, то и решение задачи $u(x, t) = u_0$. Пусть $u_0 \neq u_1$, тогда решение задачи не будет классическим, так как имеет разрыв в начале координат.

Для решения задачи воспользуемся следующими соображениями подобия. Покажем, что уравнение теплопроводности остается неизменным при преобразовании переменных

$$x_1 = kx, \quad t_1 = k^2 t.$$

Пусть $u(x_1, t_1) = u(kx, k^2 t)$. Тогда:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t_1} \frac{dt_1}{dt} = k^2 \frac{\partial u}{\partial t_1}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dx} = k \frac{\partial u}{\partial x_1},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) = k \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \frac{dx_1}{dx} = k^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}.$$

Таким образом, ДУ (14.1) приобретает вид

$$\frac{\partial u}{\partial t_1} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} = 0,$$

т. е. оно не меняется при произведенном преобразовании переменных. Начальное условие (14.2) также остается без изменения при данном преобразовании переменных. Следовательно, для решения задачи должно иметь место равенство

$$u(x, t) = u(kx, k^2 t)$$

при любых значениях x , t , k . Эта инвариантность подсказывает следующий путь рассуждений.

Положим $k = \frac{1}{\sqrt{t}}$. Тогда

$$u(x, t) = u\left(\frac{x}{\sqrt{t}}, 1\right),$$

и решение задачи можно попытаться искать в виде

$$u(x, t) = v(z), \quad z = \frac{x}{\sqrt{t}}.$$

Найдем производные, входящие в уравнение (14.1):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = v'(z) \left(-\frac{x}{2t^{3/2}}\right), \quad \frac{\partial u}{\partial x} = v'(z) \frac{1}{\sqrt{t}}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = v''(z) \frac{1}{t}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= v'(z) \left(-\frac{x}{2t^{3/2}}\right) - a^2 v''(z) \frac{1}{t} = \\ &= -\frac{a^2}{t} \left(v''(z) + \frac{z}{2a^2} v'(z)\right). \end{aligned}$$

В результате уравнение (14.1) переходит в обыкновенное ДУ второго порядка

$$v''(z) + v'(z) \frac{z}{2a^2} = 0, \quad 0 < z < +\infty.$$

Далее, $z \rightarrow +0$ при $x \rightarrow +0$, и, значит, краевое условие (14.3) переходит в

$$u(x, t)|_{x=0} = u\left(\frac{x}{\sqrt{t}}, 1\right)\Big|_{x=0} = v(0) = u_1.$$

При $t \rightarrow +0$ и $x > 0$ имеем $z \rightarrow +\infty$. Следовательно, начальное условие (14.2) переходит в условие

$$u(x, t)|_{t=0} = u\left(\frac{x}{\sqrt{t}}, 1\right)\bigg|_{t=0} = v(+\infty) = u_0.$$

В результате мы получили краевую задачу на полуоси для обыкновенного ДУ второго порядка

$$\begin{cases} v''(z) + v'(z)\frac{z}{2a^2} = 0, & 0 < z < +\infty, \\ v(0) = u_1, \\ v(+\infty) = u_0. \end{cases} \quad (14.4)$$

$$(14.5)$$

$$(14.6)$$

Интегрируя ДУ (14.4), имеем:

$$\frac{dv'(z)}{v'(z)} = -\frac{z}{2a^2}dz, \quad v'(z) = ce^{-z^2/(4a^2)},$$

$$\begin{aligned} v(z) &= c \int_0^z e^{-\xi^2/(4a^2)} d\xi + c_2 = c_1 \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{z/(2a)} e^{-s^2} ds + c_2 = \\ &= c_1 \operatorname{erf}\left(\frac{z}{2a}\right) + c_2. \end{aligned}$$

Используя граничные условия (14.5) и (14.6), получим систему для определения c_1 и c_2

$$\begin{cases} c_1 \operatorname{erf}(0) + c_2 = u_1, \\ c_1 \operatorname{erf}(+\infty) + c_2 = u_0. \end{cases}$$

Напомним, что $\operatorname{erf}(0) = 0$, $\operatorname{erf}(+\infty) = 1$. Следовательно, $c_2 = u_1$, $c_1 = u_0 - u_1$ и

$$v(z) = (u_0 - u_1) \operatorname{erf}\left(\frac{z}{2a}\right) + u_1.$$

Итак, решение смешанной задачи (14.1)–(14.3) имеет вид

$$u(x, t) = (u_0 - u_1) \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right) + u_1. \quad (14.7)$$

Заметим, что методом подобия мы получили двухпараметрическое семейство решений однородного уравнения диффузии/теплопроводности (14.1), имеющее вид

$$u(x, t) = c_1 \operatorname{erf} \left(\frac{x}{2a\sqrt{t}} \right) + c_2. \quad (14.8)$$

В научной литературе такого рода специальные решения иногда называют *автомодельными решениями*.

Пример 14.1. Используя формулу (14.8), найдем решение задачи Коши

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & -\infty < x < +\infty, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = \begin{cases} u_0, & x > 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases} \quad (u_0 = \text{const}) \end{cases} \quad (14.9)$$

Заметим, что решение аналогичной задачи ранее было получено нами с помощью формулы Пуассона (см. пример 12.2).

Для определения постоянных c_1 и c_2 в (14.8) воспользуемся начальным условием. Заметим, что

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{t}} = \begin{cases} +\infty, & x > 0, \\ -\infty, & x < 0. \end{cases}$$

Следовательно, для определения c_1 и c_2 имеем систему

$$\begin{cases} c_1 \operatorname{erf}(+\infty) + c_2 = u_0, \\ c_1 \operatorname{erf}(-\infty) + c_2 = 0, \end{cases}$$

решив которую, получим

$$c_1 = c_2 = \frac{u_0}{2}.$$

Теперь можем записать решение задачи (14.9):

$$u(x, t) = \left(1 + \operatorname{erf} \left(\frac{x}{2a\sqrt{t}} \right) \right) \frac{u_0}{2}. \quad (14.10)$$

Нетрудно проверить, что в случае начальных условий

$$u(x, 0) = \begin{cases} u_0, & x > x_1, \\ 0, & x < x_1 \end{cases} \quad (14.11)$$

соответствующая задача Коши имеет решение

$$u(x, t) = \frac{u_0}{2} \left(1 + \operatorname{erf} \left(\frac{x - x_1}{2a\sqrt{t}} \right) \right). \quad (14.12)$$

Если начальная функция задается в виде

$$u(x, 0) = \begin{cases} 0, & x < x_1, \\ u_0, & x_1 < x < x_2, \\ 0, & x > x_2, \end{cases} \quad (14.13)$$

то задача Коши имеет решение

$$u(x, t) = \frac{u_0}{2} \left(\operatorname{erf} \left(\frac{x - x_1}{2a\sqrt{t}} \right) - \operatorname{erf} \left(\frac{x - x_2}{2a\sqrt{t}} \right) \right). \quad (14.14)$$

Решение смешанной задачи для уравнения диффузии/теплопроводности полуоси с переменным граничным условием. Вернемся к задаче (13.6) из предыдущей лекции, решение которой мы временно отложили. Запишем ее еще раз:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & x > 0, \quad t > 0; \\ u(x, 0) = 0, & x \geq 0, \\ u(0, t) = \omega(t), & t \geq 0. \end{cases} \quad (14.15)$$

Сначала решим вспомогательную задачу с начальным условием при $t = \tau$

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0, & x > 0, \quad t > \tau; \\ U(x, \tau) = 0, & x \geq 0, \\ U(0, t) = 1, & t \geq 0. \end{cases} \quad (14.16)$$

Заметим, что эта задача при $\tau = 0$ совпадает с рассмотренной выше задачей (14.1)–(14.3), решение которой дается формулой (14.7). Нетрудно проверить, что решение задачи (14.16) можно записать так:

$$U(x, t - \tau) = 1 - \operatorname{erf} \left(\frac{x}{2a\sqrt{t - \tau}} \right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{x/(2a\sqrt{t - \tau})}^{+\infty} e^{-y^2} dy.$$

Функция $U(x, t - \tau)$ определена при $t \geq \tau$. Продолжим ее на значения $t < \tau$, предположив, что $U(x, t - \tau) \equiv 0$ при $t < \tau$. Тогда решение задачи (14.15), как показано в [10], дается формулой

$$u(x, t) = \int_0^t \frac{\partial U(x, t - \tau)}{\partial t} \omega(\tau) d\tau. \quad (14.17)$$

Вычислим

$$\begin{aligned} \frac{\partial U(x, t - \tau)}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{x/(2a\sqrt{t-\tau})}^{+\infty} e^{-y^2} dy \right) = \\ &= \frac{x}{2a\sqrt{\pi}(t-\tau)^{3/2}} e^{-x^2/[4a^2(t-\tau)]}. \end{aligned}$$

Таким образом, искомое решение задачи (14.15) в случае произвольной функции $\omega(t)$ может быть представлено в виде

$$u(x, t) = \frac{x}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{e^{-x^2/[4a^2(t-\tau)]}}{(t-\tau)^{3/2}} \omega(\tau) d\tau. \quad (14.18)$$

Примененный выше прием, называемый *принципом Дюамеля*, показывает, что если задача с постоянным граничным значением решена, то решение краевой задачи с переменным граничным значением представляется формулой (14.17).

Задача Стефана о фазовом переходе. Рассмотрим следующую задачу для системы двух уравнений диффузии/теплопроводности.

Пусть γ — достаточно гладкая кривая на плоскости (x, t) , задаваемая уравнением с граничными условиями

$$\gamma : \begin{cases} x = \omega(t), & 0 \leq t < +\infty, \\ \omega(0) = 0, \\ \omega(+\infty) = +\infty, \end{cases}$$

G — область, ограниченная осью t и кривой γ , т.е. $G = \{(x, t) : 0 < x < \omega(t), t > 0\}$, D — область, ограниченная кривой γ и осью x , т.е. $D = \{(x, t) : \omega(t) < x < +\infty, t > 0\}$ (рис. 14.1).

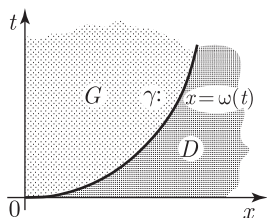


Рис. 14.1

В области G задано уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad (x, t) \in G, \quad (14.19)$$

с граничным условием

$$u|_{x=0} = c_1. \quad (14.20)$$

В области D задано уравнение

$$\frac{\partial v}{\partial t} - b^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0, \quad (x, t) \in D, \quad (14.21)$$

с начальным условием

$$v|_{t=0} = c_0. \quad (14.22)$$

Здесь a^2 , b^2 , c_0 , c_1 — постоянные величины.

Кроме того, заданы следующие граничные условия на кривой γ :

$$u|_{x=\omega(t)} = 0, \quad v|_{x=\omega(t)} = 0, \quad (14.23)$$

$$\left(k \frac{\partial u}{\partial x} - l \frac{\partial v}{\partial x} \right) \Big|_{x=\omega(t)} = \lambda \rho \omega'(t). \quad (14.24)$$

Здесь k , l , λ , ρ — положительные константы.

Заметим, что условия (14.19)–(14.23) однозначно определяют неизвестные функции u , v , если считать кривую заданной.

Мы будем считать эту кривую неизвестной (переменная граница). Дополнительное условие (14.24) как раз и послужит для определения функции $\omega(t)$, т.е. границы γ . Сформулированная задача называется *задачей о фазовом переходе*, или *задачей Стефана*.

Простейшая физическая модель, описываемая задачей Стефана, — это задача о замерзании воды (рис. 14.2). В начальный

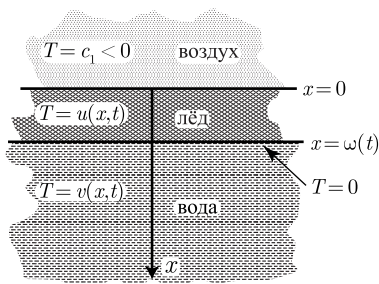


Рис. 14.2. Задача о замерзании воды

момент $t = 0$ при $x > 0$ вода находится при температуре $c_0 > 0$. На поверхности $x = 0$ при $t > 0$ поддерживается температура $c_1 < 0$. Тогда граница замерзания с течением времени будет проникать в глубь жидкости. В этом случае параметры задачи имеют следующий физический смысл:

a^2, b^2 — коэффициенты теплопроводности твердой и жидкой фаз соответственно;

k, l — соответствующие коэффициенты теплопроводности;

λ — скрытая теплота плавления.

Согласно формуле (14.8), каждое из уравнений (14.19) и (14.21) имеет двухпараметрическое семейство решений

$$u(x, t) = A_1 + B_1 \operatorname{erf} \left(\frac{x}{2a\sqrt{t}} \right), \quad (14.25)$$

$$v(x, t) = A_2 + B_2 \operatorname{erf} \left(\frac{x}{2b\sqrt{t}} \right). \quad (14.26)$$

Для нахождения произвольных постоянных A_1, A_2, B_1, B_2 воспользуемся начальными и граничными условиями:

$$u(0, t) = A_1 = c_1,$$

$$v(x, 0) = A_2 + B_2 \operatorname{erf} (+\infty) = A_2 + B_2 = c_0,$$

$$u(\omega(t), t) = A_1 + B_1 \operatorname{erf} \left(\frac{\omega(t)}{2a\sqrt{t}} \right) = 0,$$

$$v(\omega(t), t) = A_2 + B_2 \operatorname{erf} \left(\frac{\omega(t)}{2b\sqrt{t}} \right) = 0.$$

Последние два условия должны иметь место при любых значениях t . Это возможно лишь при выполнении соотношения

$$\omega(t) = \beta\sqrt{t}, \quad (14.27)$$

где β — неизвестная пока постоянная. Соотношение (14.27) определяет закон движения границы замерзания.

Для постоянных A_1, B_1, A_2, B_2 и β получаются выражения

$$\left\{ \begin{array}{l} A_1 = c_1, \quad B_1 = \frac{-c_1}{\operatorname{erf}\left(\frac{\beta}{2a}\right)}, \\ A_2 = \frac{-c_0 \operatorname{erf}\left(\frac{\beta}{2b}\right)}{1 - \operatorname{erf}\left(\frac{\beta}{2b}\right)}, \quad B_2 = \frac{c_0}{1 - \operatorname{erf}\left(\frac{\beta}{2b}\right)}. \end{array} \right.$$

Чтобы определить постоянную β , нужно воспользоваться условием (14.24) на границе раздела фаз. Сначала найдем производные, входящие в это соотношение:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= B_1 \frac{\partial}{\partial x} \left(\operatorname{erf} \left(\frac{x}{2a\sqrt{t}} \right) \right) = \\ &= B_1 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{x/(2a\sqrt{t})} e^{-s^2} ds \right) = B_1 \frac{1}{a\sqrt{\pi t}} e^{-x^2/(4a^2t)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial x} &= B_2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\operatorname{erf} \left(\frac{x}{2b\sqrt{t}} \right) \right) = \\ &= B_2 \frac{1}{b\sqrt{\pi t}} e^{-x^2/(4b^2t)}, \quad \omega'(t) = (\beta\sqrt{t})' = \frac{\beta}{2\sqrt{t}}. \end{aligned}$$

На границе раздела имеем

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=\beta\sqrt{t}} = B_1 \frac{1}{a\sqrt{\pi t}} e^{-\beta^2/(4a^2)}, \quad \left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{x=\beta\sqrt{t}} = B_2 \frac{1}{b\sqrt{\pi t}} e^{-\beta^2/(4b^2)}.$$

Теперь условие (14.24) можно записать в виде

$$\frac{kc_1 e^{-[\beta/(2a)]^2}}{a \cdot \operatorname{erf}\left(\frac{\beta}{2a}\right)} + \frac{lc_0 e^{-[\beta/(2b)]^2}}{b \cdot \left(1 - \operatorname{erf}\left(\frac{\beta}{2b}\right)\right)} = -\lambda\rho\beta \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \quad (14.28)$$

В результате получено трансцендентное уравнение для определения параметра β . В случае задачи о замерзании ($c_0 > 0$,

$c_1 < 0$) это уравнение имеет хотя бы одно решение, так как при изменении β от 0 до $+\infty$ левая часть уравнения (14.28)

$$f_1(\beta) = \frac{kc_1 e^{-[\beta/(2a)]^2}}{a \cdot \operatorname{erf}\left(\frac{\beta}{2a}\right)} + \frac{lc_0 e^{-[\beta/(2b)]^2}}{b \cdot \left(1 - \operatorname{erf}\left(\frac{\beta}{2b}\right)\right)}$$

изменяется от $-\infty$ до $+\infty$ (вспомним соответствующие свойства функции ошибок). Правая часть этого же уравнения

$$f_2(\beta) = -\lambda\rho\beta\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

изменяется от 0 до $-\infty$ (см. рис. 14.3).

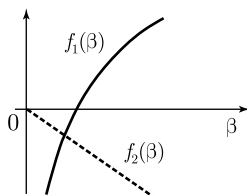


Рис. 14.3

Решая уравнение (14.28) приближенными методами, можно найти значения β . Тем самым будет определен закон движения границы замерзания (14.27).

Лекция 15

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СТРУНЫ. ФОРМУЛЫ Д'АЛАМБЕРА–ЭЙЛЕРА

Постановка задачи Коши для неограниченной струны.

В случае простейшей задачи, описывающей процесс поперечных колебаний струны, для однозначного определения решения нужно к уравнению колебаний еще добавить начальные и граничные условия. Если точка струны с координатой x достаточно удалена от границы, то влияние граничных условий сказывается в этой точке через достаточно большой промежуток времени. Поэтому если нас интересует явление в течение не очень большого промежутка времени, то вместо смешанной задачи можно рассматривать задачу с начальными условиями для неограниченной струны. Эта идеализированная задача ставится следующим образом:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t), & -\infty < x < +\infty, \quad t > 0, \end{cases} \quad (15.1)$$

$$\begin{cases} u(x, 0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \psi(x), & -\infty < x < +\infty. \end{cases} \quad (15.2)$$

Напомним, что задача, в постановке которой отсутствуют граничные условия, а заданы только начальные условия, называется задачей Коши.

Определение 15.1. Если $f(x, t)$ непрерывна в полуплоскости $t \geq 0$, а $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ непрерывны на всей числовой оси $-\infty < x < +\infty$, то под классическим решением задачи (15.1)–(15.2) понимается функция $u(x, t)$, которая:

- непрерывна и имеет непрерывную производную $\frac{\partial u}{\partial t}$ в полуплоскости $t \geq 0$ и удовлетворяет начальным условиям (15.2);

• имеет в полуплоскости $t > 0$ непрерывные производные $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ и обращает уравнение (15.1) в тождество.

Учитывая линейность задачи (15.1)–(15.2), можно представить ее решение в виде суммы решений двух задач

$$u(x, t) = u_1(x, t) + u_2(x, t),$$

где $u_1(x, t)$ — решение задачи Коши для однородного уравнения колебаний с неоднородными начальными условиями, $u_2(x, t)$ — решение задачи Коши для неоднородного уравнения колебаний с однородными начальными условиями.

Построение решения задачи Коши для однородного уравнения колебаний с помощью преобразования Фурье. Рассмотрим задачу

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & -\infty < x < +\infty, \quad t > 0, \end{cases} \quad (15.3)$$

$$\begin{cases} u(x, 0) = \varphi(x), & \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \psi(x), & -\infty < x < +\infty. \end{cases} \quad (15.4)$$

Предположим, что функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ абсолютно интегрируемы на $(-\infty, +\infty)$. Будем искать решение задачи (15.3)–(15.4) в классе функций $u(x, t)$, удовлетворяющих следующему условию: при любом фиксированном $t \geq 0$ функции $u(x, t)$, $\frac{\partial u(x, t)}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}$, $\frac{\partial u(x, t)}{\partial t}$, $\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}$ абсолютно интегрируемы на промежутке $(-\infty, +\infty)$ оси x .

Применим к задаче (15.3)–(15.4) преобразование Фурье по переменной x . Обозначим

$$\tilde{\varphi}(\lambda) = F[\varphi(x)], \quad \tilde{\psi}(\lambda) = F[\psi(x)], \quad \tilde{u}(\lambda, t) = F[u(x, t)].$$

Согласно лемме 12.2, имеем

$$F \left[\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \right] = -\lambda^2 F[u(x, t)] = -\lambda^2 \tilde{u}(\lambda, t).$$

Преобразование Фурье функции $\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}$ найдем, исходя из определения (формула (12.4)), воспользовавшись теоремой о дифференцировании несобственного интеграла по параметру t :

$$\begin{aligned}
 F \left[\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} \right] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} e^{-i\lambda x} dx = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} u(x, t) e^{-i\lambda x} dx \right) = \frac{\partial^2 \tilde{u}(\lambda, t)}{\partial t^2}.
 \end{aligned}$$

Заметим, что в данном случае дифференцирование под знаком интеграла возможно, если интегралы

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} e^{-i\lambda x} dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} e^{-i\lambda x} dx$$

сходятся равномерно по t на любом конечном промежутке $[0, T]$.

В результате преобразования Фурье задача (15.3)–(15.4) превращается в задачу Коши для обыкновенного линейного ДУ второго порядка

$$\frac{d^2 \tilde{u}}{dt^2} + a^2 \lambda^2 \tilde{u} = 0, \quad t > 0, \quad (15.5)$$

$$\tilde{u}(\lambda, 0) = \tilde{\varphi}(\lambda), \quad \frac{d\tilde{u}(\lambda, 0)}{dt} = \tilde{\psi}(\lambda). \quad (15.6)$$

Общее решение ДУ (15.5) имеет вид

$$\tilde{u}(\lambda, t) = c_1 \cos(a\lambda t) + c_2 \sin(a\lambda t).$$

Определив произвольные постоянные из начальных условий (15.6), получим

$$\tilde{u}(\lambda, t) = \tilde{\varphi}(\lambda) \cos(a\lambda t) + \frac{\tilde{\psi}(\lambda)}{a\lambda} \sin(a\lambda t).$$

Далее, воспользовавшись формулой обращения (12.5), имеем

$$\begin{aligned}
 u(x, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{u}(\lambda, t) e^{i\lambda x} d\lambda = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\tilde{\varphi}(\lambda) \cos(a\lambda t) + \frac{\tilde{\psi}(\lambda)}{a\lambda} \sin(a\lambda t) \right) e^{i\lambda x} d\lambda = I_1 + I_2,
 \end{aligned}$$

где

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\varphi}(\lambda) \cos(a\lambda t) e^{i\lambda x} d\lambda,$$

$$I_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tilde{\psi}(\lambda)}{a\lambda} \sin(a\lambda t) e^{i\lambda x} d\lambda.$$

Рассмотрим интеграл I_1 . Используя формулу Эйлера

$$\cos(a\lambda t) = \frac{e^{ia\lambda t} + e^{-ia\lambda t}}{2},$$

получим

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\varphi}(\lambda) \frac{e^{ia\lambda t} + e^{-ia\lambda t}}{2} e^{i\lambda x} d\lambda =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\varphi}(\lambda) e^{i\lambda(x+at)} d\lambda + \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\varphi}(\lambda) e^{i\lambda(x-at)} d\lambda \right).$$

Согласно формуле обращения (12.5), имеем:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\varphi}(\lambda) e^{i\lambda(x+at)} d\lambda = \varphi(x+at),$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\varphi}(\lambda) e^{i\lambda(x-at)} d\lambda = \varphi(x-at).$$

Тогда

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\varphi}(\lambda) \cos(a\lambda t) e^{i\lambda x} d\lambda = \frac{1}{2} (\varphi(x+at) + \varphi(x-at)).$$
(15.7)

Далее обратимся к интегралу I_2 . Заметим, что

$$\frac{\sin(a\lambda t)}{a\lambda} = \int_0^t \cos(a\lambda \tau) d\tau.$$

Подставляя последнее выражение в I_2 и меняя порядок интегрирования в двойном интеграле, получим

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\psi}(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda \int_0^t \cos(a\lambda\tau) d\tau = \\ &= \int_0^t \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\psi}(\lambda) \cos(a\lambda\tau) e^{i\lambda x} d\lambda \right) d\tau. \end{aligned}$$

Воспользовавшись результатами вычисления интеграла I_1 (15.7), можно найти внутренний интеграл

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\psi}(\lambda) \cos(a\lambda\tau) e^{i\lambda x} d\lambda = \frac{1}{2} (\psi(x + a\tau) + \psi(x - a\tau)).$$

Тогда

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{2} \int_0^t (\psi(x + a\tau) + \psi(x - a\tau)) d\tau = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^t \psi(x + a\tau) d\tau + \frac{1}{2} \int_0^t \psi(x - a\tau) d\tau = \\ &= \frac{1}{2a} \int_x^{x+at} \psi(\xi) d\xi - \frac{1}{2a} \int_x^{x-at} \psi(\xi) d\xi = \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Итак, формальное решение задачи (15.3)–(15.4) построено и имеет вид

$$u(x, t) = \frac{1}{2} (\varphi(x + at) + \varphi(x - at)) + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi. \quad (15.8)$$

Формула (15.8) называется *формулой Д'Аламбера–Эйлера*.

Элементарный вывод формулы Д'Аламбера–Эйлера. Справедливость формулы (15.8), дающей решение задачи Коши (15.3)–(15.4), может быть установлена и без применения

преобразования Фурье. Заметим, что ДУ (15.3) можно преобразовать к более простому виду, допускающему непосредственное интегрирование. Сделаем в уравнении замену независимых переменных, полагая

$$\xi = x - at, \quad \eta = x + at.$$

Неизвестную функцию $u(x(\xi, \eta), t(\xi, \eta))$ обозначим через $v(\xi, \eta) = v(x - at, x + at)$. Тогда по правилу дифференцирования сложной функции получим:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} = -a \frac{\partial v}{\partial \xi} + a \frac{\partial v}{\partial \eta},$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial \eta} \right) = \\ &= \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial \eta \partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \\ &= \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= -a \left(\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial v}{\partial \xi} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial v}{\partial \eta} \right) \right) = a^2 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} - 2 \frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} \right), \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= -4a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta}. \end{aligned}$$

Таким образом, в новых переменных уравнение приобретает вид

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} = 0.$$

Полученное в результате замены переменных ДУ легко интегрируется. Так как $\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial v}{\partial \eta} \right) = 0$, то $\frac{\partial v}{\partial \eta} = f(\eta)$, где $f(\eta)$ — произвольная непрерывная функция от η . Пусть $A(\eta) = \int_0^\eta f(s) ds$ — первообразная функции $f(\eta)$ на $\mathbf{R}$. Тогда, интегрируя уравнение

$\frac{\partial v}{\partial \eta} = f(\eta)$, получим, что $v(\xi, \eta) = A(\eta) + B(\xi)$, где $B(\xi)$ — произвольная функция.

Итак, если $A(\eta)$ и $B(\xi)$ — произвольные дважды непрерывно дифференцируемые функции, то общее решение уравнения струны имеет следующий вид:

$$u(x, t) = A(x - at) + B(x + at). \quad (15.9)$$

Покажем теперь, что функции A и B в (15.9) можно подобрать так, чтобы выполнялись начальные условия (15.4). При $t = 0$ имеем:

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= A(x) + B(x) = \varphi(x), \\ u'_t(x, 0) &= -aA'(x) + aB'(x) = \psi(x). \end{aligned}$$

Интегрируя последнее равенство на $[0, x]$, получим

$$-A(x) + B(x) = \frac{1}{a} \int_0^x \psi(s) ds + c,$$

где $c = -A(0) + B(0)$.

Итак, для определения функций A и B имеем систему линейных уравнений

$$\begin{cases} A(x) + B(x) = \varphi(x), \\ -A(x) + B(x) = \frac{1}{a} \int_0^x \psi(s) ds + c, \end{cases}$$

решая которую, находим:

$$A(x) = \frac{\varphi(x)}{2} - \frac{1}{2a} \int_0^x \psi(s) ds - \frac{c}{2}, \quad B(x) = \frac{\varphi(x)}{2} + \frac{1}{2a} \int_0^x \psi(s) ds + \frac{c}{2}.$$

Отсюда

$$A(x - at) = \frac{\varphi(x - at)}{2} - \frac{1}{2a} \int_0^{x-at} \psi(s) ds - \frac{c}{2},$$

$$B(x+at) = \frac{\varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_0^{x+at} \psi(s)ds + \frac{c}{2}.$$

Складывая эти равенства согласно (15.9), получаем формулу Д'Аламбера–Эйлера (15.8).

Физическая интерпретация формулы Д'Аламбера–Эйлера. Обратим внимание на физический смысл полученной формулы. Функция $u(x, t)$, определяемая формулой (15.8), представляет процесс распространения начального отклонения и начальной скорости. Если фиксировать некоторый момент времени $t = t_0$, то функция $u(x, t_0)$ дает профиль струны в момент t_0 ; фиксируя точку $x = x_0$, получим функцию $u(x_0, t)$, описывающую процесс движения точки x_0 .

Пример 15.1. Пусть $\psi(x) \equiv 0$, т. е. возмущение вызывается только начальной функцией $\varphi(x)$. Рассмотрим процесс распространения волны при $t > 0$. Пусть

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{x}{l} + 1, & x \in [-l, 0], \\ -\frac{x}{l} + 1, & x \in [0, l], \\ 0, & |x| \geq l. \end{cases}$$

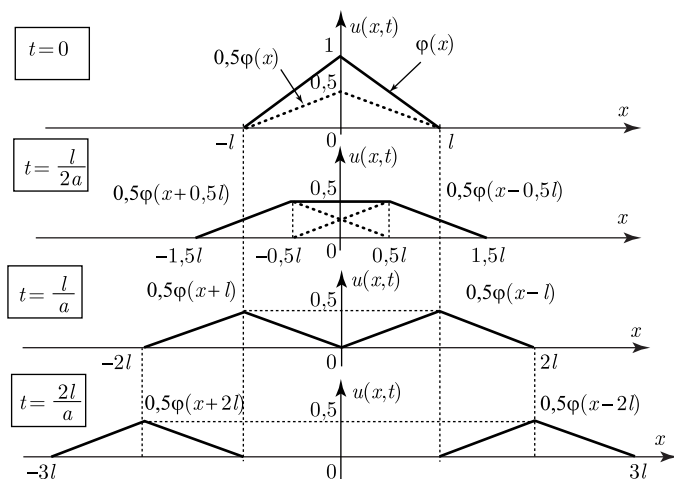


Рис. 15.1

Формула Д'Аламбера

$$u(x, t) = \frac{1}{2} (\varphi(x + at) + \varphi(x - at))$$

показывает, что при $t > 0$ начальное возмущение $\varphi(x)$ распадается на два возмущения половинной интенсивности. Их можно интерпретировать как две волны, движущиеся вправо и влево со скоростью a . Построим в плоскости (x, u) графики функции $u(x, t)$ при $t = 0$, $t = \frac{l}{2a}$, $t = \frac{l}{a}$, $t = \frac{2l}{a}$ (рис. 15.1).

Пример 15.2. Теперь рассмотрим задачу о колебаниях струны под действием сосредоточенного импульса. В начальный момент времени точкам струны $x \in [x_1, x_2]$ сообщается постоянная скорость ψ_0 (например, струну ударяют молоточком), т. е. к этому участку струны приложен импульс. Таким образом, мы должны решить задачу о колебаниях струны с начальным отклонением $\varphi(x) \equiv 0$ и начальной скоростью

$$\psi(x) = \begin{cases} \psi_0 = \text{const}, & x \in [x_1, x_2], \\ 0, & x \notin [x_1, x_2]. \end{cases}$$

По формуле Д'Аламбера–Эйлера имеем

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi = \frac{1}{2a} \int_{x-at}^0 \psi(\xi) d\xi + \frac{1}{2a} \int_0^{x+at} \psi(\xi) d\xi = \\ &= \Psi(x + at) - \Psi(x - at), \end{aligned}$$

где

$$\Psi(x) = \frac{1}{2a} \int_0^x \psi(\xi) d\xi.$$

Вычислив последний интеграл, получим

$$\Psi(x) = \frac{1}{2a} \int_0^x \psi(\xi) d\xi = \begin{cases} 0, & x < x_1, \\ \frac{\psi_0}{2a}(x - x_1), & x_1 \leq x \leq x_2, \\ \frac{\psi_0}{2a}(x_2 - x_1), & x > x_2. \end{cases}$$

График функции $\Psi(x)$ приведен на рис. 15.2.

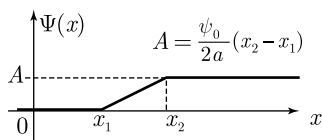


Рис. 15.2

Решение $u(x, t)$ есть разность правой и левой волн с профилем $\Psi(x)$. На рис. 15.3 построено это решение через промежутки времени $\Delta t = \frac{x_2 - x_1}{8a}$. Профиль струны при $t \geq 4\Delta t$ имеет форму трапеции, расширяющейся равномерно с течением времени.

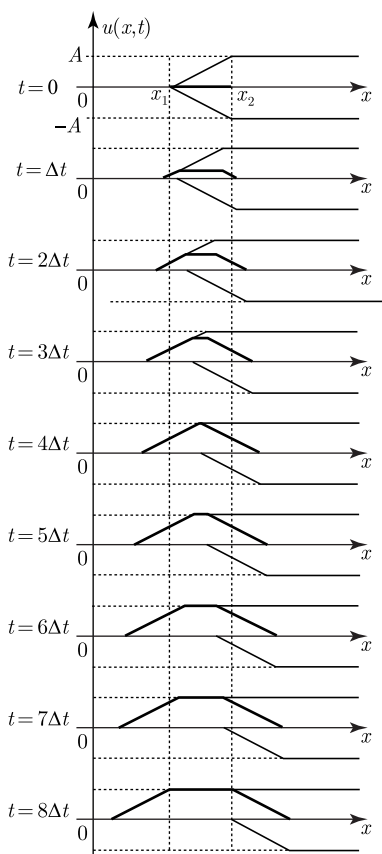


Рис. 15.3

Неоднородное уравнение колебаний. Теперь рассмотрим неоднородное ДУ с нулевыми начальными условиями

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t), & -\infty < x < +\infty, \quad t > 0, \end{cases} \quad (15.10)$$

$$\begin{cases} u(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0, & -\infty < x < +\infty. \end{cases} \quad (15.11)$$

Пусть $v(x, t; \tau)$ — решение вспомогательной задачи Коши с начальными условиями, заданными при $t = \tau$,

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0, & -\infty < x < +\infty, \quad t > \tau, \end{cases} \quad (15.12)$$

$$\begin{cases} v(x, \tau; \tau) = 0, \quad \frac{\partial v(x, \tau; \tau)}{\partial t} = f(x, \tau), & -\infty < x < +\infty. \end{cases} \quad (15.13)$$

Покажем, что решение задачи (15.10)–(15.11) имеет вид

$$u(x, t) = \int_0^t v(x, t; \tau) d\tau. \quad (15.14)$$

Дифференцируя функцию (15.14) и учитывая условия (15.13), находим:

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \int_0^t \frac{\partial v(x, t; \tau)}{\partial t} d\tau + v(x, t; t) = \int_0^t \frac{\partial v(x, t; \tau)}{\partial t} d\tau,$$

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = \int_0^t \frac{\partial^2 v(x, t; \tau)}{\partial t^2} d\tau + \frac{\partial v(x, t; t)}{\partial t} = \int_0^t \frac{\partial^2 v(x, t; \tau)}{\partial t^2} d\tau + f(x, t),$$

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = \int_0^t \frac{\partial^2 v(x, t; \tau)}{\partial x^2} d\tau.$$

Отсюда, с учетом (15.12), получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} &= \\ &= \int_0^t \left(\frac{\partial^2 v(x, t; \tau)}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 v(x, t; \tau)}{\partial x^2} \right) d\tau + f(x, t) = f(x, t). \end{aligned}$$

Следовательно, функция $u(x, t)$, определяемая формулой (15.14), удовлетворяет ДУ (15.10). Нетрудно проверить, что начальные условия (15.11) также выполняются.

Решение задачи Коши (15.12)–(15.13), согласно формуле Д'Аламбера–Эйлера (15.8), имеет вид

$$v(x, t; \tau) = v(x, t - \tau) = \frac{1}{2a} \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi, \tau) d\xi.$$

Подставляя эту функцию в формулу (15.14), получим решение задачи (15.10)–(15.11)

$$u(x, t) = \frac{1}{2a} \int_0^t d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi, \tau) d\xi. \quad (15.15)$$

Существование и единственность классического решения задачи Коши для уравнения колебаний. Полученные формулы (15.8) и (15.15), дающие решение однородного ДУ с ненулевыми начальными условиями и неоднородного ДУ с нулевыми начальными условиями соответственно, позволяют доказать существование и единственность классического решения задачи Коши для уравнения колебаний.

Теорема 15.1. Пусть функция $\varphi(x)$ дважды непрерывно дифференцируема на $\mathbf{R}$, функция $\psi(x)$ непрерывно дифференцируема на $\mathbf{R}$, $f(x, t)$ и $\frac{\partial f(x, t)}{\partial x}$ непрерывны в полуплоскости $t \geq 0$. Тогда классическое решение задачи Коши для уравнения струны (15.1)–(15.2) существует, единственно и дается формулой Д'Аламбера–Эйлера:

$$u(x, t) = \frac{1}{2} (\varphi(x + at) + \varphi(x - at)) + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi + \frac{1}{2a} \int_0^t d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi, \tau) d\xi. \quad (15.16)$$

Пример 15.3.

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \cos t \cdot \cos 2x, & -\infty < x < +\infty, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = 1 + \cos x, & \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \cos 3x, \quad -\infty < x < +\infty. \end{cases}$$

Воспользуемся формулой Д'Аламбера–Эйлера. Тогда решение однородного ДУ с ненулевыми начальными условиями имеет вид

$$u_1(x, t) = \frac{1}{2}(1 + \cos(x + at) + 1 + \cos(x - at)) + \\ + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \cos 3\xi d\xi = 1 + \cos at \cdot \cos x + \frac{1}{3a} \cdot \sin 3at \cdot \cos 3x.$$

Решение неоднородного ДУ с нулевыми начальными условиями:

$$u_2(x, t) = \frac{1}{2a} \int_0^t d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} \cos \tau \cdot \cos 2\xi d\xi = \\ = \frac{1}{4a} \int_0^t \cos \tau \cdot \sin 2\xi \Big|_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} d\tau = \frac{1}{4a^2 - 1} \cdot (\cos t - \cos 2at) \cdot \cos 2x.$$

Наконец, решение всей задачи Коши можно записать как

$$u(x, t) = u_1(x, t) + u_2(x, t).$$

Лекция 16

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ПОЛУОГРАНИЧЕННОЙ СТРУНЫ. МЕТОД ПРОДОЛЖЕНИЯ

Постановка задачи. Рассмотрим следующую смешанную задачу для полуограниченной струны:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t), & x > 0, \quad t > 0; \end{cases} \quad (16.1)$$

$$\begin{cases} u(x, 0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \psi(x), & x \geq 0; \end{cases} \quad (16.2)$$

$$\begin{cases} u(0, t) = 0, t \geq 0. \end{cases} \quad (16.3)$$

Граничное условие (16.3) означает, что левый конец струны закреплен. Струна предполагается настолько длинной, что влиянием правого конца можно пренебречь.

Как и в случае рассмотренной ранее аналогичной задачи для уравнения диффузии/теплопроводности (13.1)–(13.3), продолжим данные задачи нечетным образом на полуось $x < 0$, полагая:

$$\tilde{\varphi}(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \geq 0, \\ -\varphi(-x), & x < 0; \end{cases} \quad \tilde{\psi}(x) = \begin{cases} \psi(x), & x \geq 0, \\ -\psi(-x), & x < 0; \end{cases}$$

$$\tilde{f}(x, t) = \begin{cases} f(x, t), & x \geq 0, \\ -f(-x, t), & x < 0. \end{cases}$$

Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} = \tilde{f}(x, t), & -\infty < x < +\infty, \quad t > 0, \\ \tilde{u}(x, 0) = \tilde{\varphi}(x), \quad \frac{\partial \tilde{u}(x, 0)}{\partial t} = \tilde{\psi}(x), & -\infty < x < +\infty. \end{cases} \quad (16.4)$$

Ее решение на положительной полуоси совпадает с решением задачи (16.1)–(16.3) и дается формулой Д’Аламбера–Эйлера

$$\begin{aligned} \tilde{u}(x, t) = & \frac{1}{2} (\tilde{\varphi}(x + at) + \tilde{\varphi}(x - at)) + \\ & + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \tilde{\psi}(\xi) d\xi + \frac{1}{2a} \int_0^t d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} \tilde{f}(\xi, \tau) d\xi. \end{aligned}$$

Таким образом, рассматривая $\tilde{u}(x, t)$ только для $x \geq 0$, $t \geq 0$, получим функцию, удовлетворяющую всем условиям задачи (16.1)–(16.3). Возвращаясь к исходным данным задачи, можем записать

$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{\varphi(x + at) + \varphi(x - at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi + \\ + \frac{1}{2a} \int_0^t d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi, \tau) d\xi, & 0 \leq t \leq \frac{x}{a}, \quad x \geq 0; \\ \frac{\varphi(x + at) - \varphi(at - x)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{at-x}^{x+at} \psi(\xi) d\xi + \\ + \frac{1}{2a} \int_0^t d\tau \int_{a(t-\tau)-x}^{x+a(t-\tau)} f(\xi, \tau) d\xi, & t \geq \frac{x}{a}, \quad x \geq 0. \end{cases} \quad (16.5)$$

Заметим, что при $0 < t \leq \frac{x}{a}$ возмущение, вышедшее из точки $x = 0$ в момент $t = 0$, не успевает достичь границы, влияние граничного условия не сказывается на характере решения и выражение (16.5) совпадает с решением (15.11) для бесконечной прямой. При $t \geq \frac{x}{a}$ возникает волна, отраженная от границы.

Аналогично, если вместо краевого условия (16.3) используется условие

$$\frac{\partial u(0, t)}{\partial t} = 0,$$

что соответствует свободному левому концу струны, то смешанную задачу можно свести к задаче Коши с помощью четного

продолжения начальных функций и правой части уравнения на полуось $x < 0$, т. е. полагая:

$$\tilde{\varphi}(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \geq 0, \\ \varphi(-x), & x < 0; \end{cases} \quad \tilde{\psi}(x) = \begin{cases} \psi(x), & x \geq 0, \\ \psi(-x), & x < 0; \end{cases}$$

$$\tilde{f}(x, t) = \begin{cases} f(x, t), & x \geq 0, \\ f(-x, t), & x < 0. \end{cases}$$

Решение задачи в этом случае запишется так:

$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi + \\ + \frac{1}{2a} \int_0^t d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi, \tau) d\xi, & 0 \leq t < \frac{x}{a}, \quad x \geq 0; \\ \frac{\varphi(x+at) + \varphi(at-x)}{2} + \frac{1}{2a} \left(\int_0^{x+at} \psi(\xi) d\xi + \int_0^{at-x} \psi(\xi) d\xi \right) + \\ + \frac{1}{2a} \int_0^t \left(\int_0^{x+a(t-\tau)} f(\xi, \tau) d\xi + \int_0^{a(t-\tau)-x} f(\xi, \tau) d\xi \right) d\tau, & t \geq \frac{x}{a}, \quad x \geq 0. \end{cases} \quad (16.6)$$

Пример 16.1. Рассмотрим следующую смешанную задачу на полуоси:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & x > 0, \quad t > 0; \\ u(x, 0) = \varphi(x) = \begin{cases} 2x - 2, & x \in [1, 2], \\ -2x + 6, & x \in [2, 3], \\ 0, & x \notin [1, 3], \end{cases} \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0, \quad x \geq 0; \\ u(0, t) = 0, \quad t \geq 0. \end{cases}$$

Построим графики решения $u(x, t)$ в разные фиксированные моменты времени, в частности, при $t = 0, 1, \frac{3}{2}, \frac{7}{4}, 2, \frac{9}{4}, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}$.

Сначала построим начальную функцию $\varphi(x)$ (рис. 16.1) и продолжим ее нечетным образом на полуось $x < 0$, полагая

$$\tilde{\varphi}(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \geq 0, \\ -\varphi(-x), & x < 0. \end{cases}$$

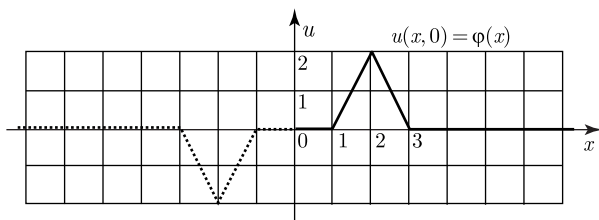


Рис. 16.1. График начального отклонения и его нечетное продолжение на отрицательную полуось

Согласно изложенному выше, решение рассматриваемой задачи дается формулой

$$u(x, t) = \frac{1}{2} (\tilde{\varphi}(x + t) + \tilde{\varphi}(x - t)), \quad x \geq 0.$$

Построим график вспомогательной функции $\frac{1}{2}\tilde{\varphi}(x)$ (рис. 16.2). Затем будем последовательно при фиксированных значениях t строить графики функций $\frac{1}{2}\tilde{\varphi}(x + t)$ и $\frac{1}{2}\tilde{\varphi}(x - t)$, складывая которые, будем получать на полуоси $x \geq 0$ графики искомого решения задачи $u(x, t)$.

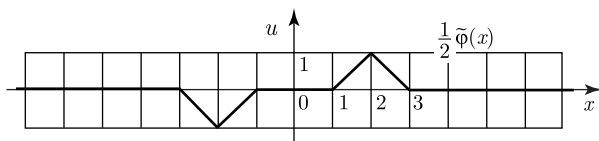
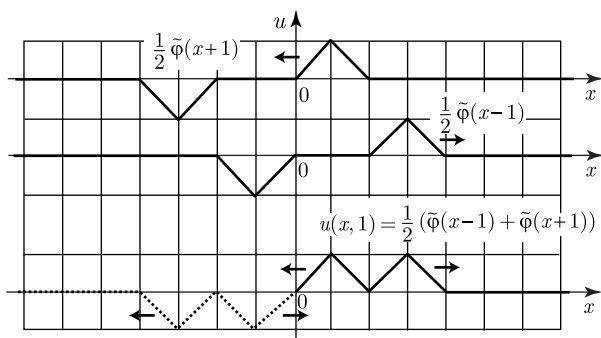
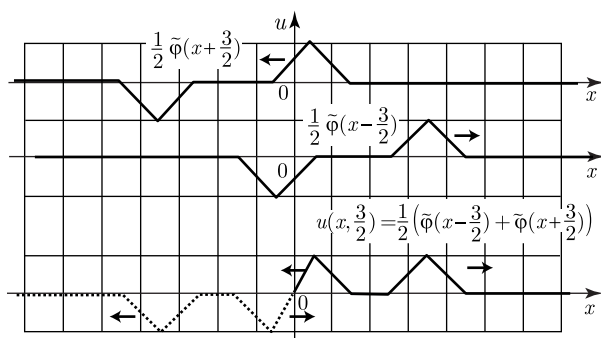
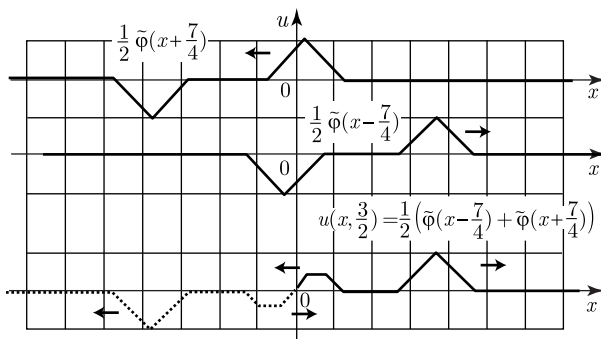
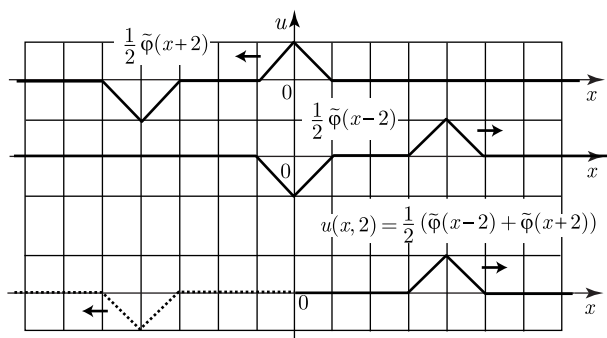
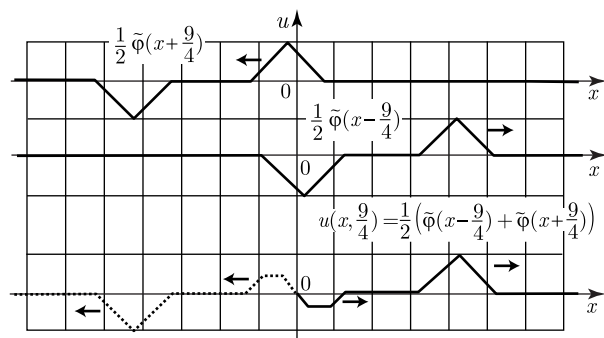
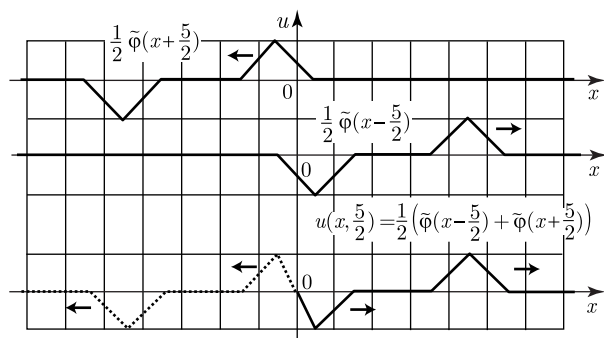


Рис. 16.2. График вспомогательной функции $\frac{1}{2}\tilde{\varphi}(x)$

Процесс распространения волн изображен на рис. 16.3–16.10. Вначале процесс идет так же, как и на неограниченной прямой. Заданное начальное отклонение разбивается на две волны, разбегающиеся в противоположные стороны с постоянной скоростью, причем это продолжается до тех пор, пока волна, идущая влево, не дойдет до точки $x = 0$ (рис. 16.3). В момент

Рис. 16.3. Построение профиля струны в момент $t = 1$ Рис. 16.4. Построение профиля струны в момент $t = 1,5$ Рис. 16.5. Построение профиля струны в момент $t = 1,75$

$t = 1$ к точке $x = 0$ слева подходит полуволна с «обратной фазой». В последующие моменты происходит отражение полуволны от закрепленного конца. Профиль отражающейся волны

Рис. 16.6. Построение профиля струны в момент $t = 2$ Рис. 16.7. Построение профиля струны в момент $t = 2,25$ Рис. 16.8. Построение профиля струны в момент $t = 2,5$

укорачивается, отклонения исчезают, затем отклонения появляются с обратным знаком и, наконец, отраженная волна пойдет вправо за ушедшей туда полуволной с той же скоростью. Таким

образом, при отражении волны от закрепленного конца струны ее отклонение меняет знак.

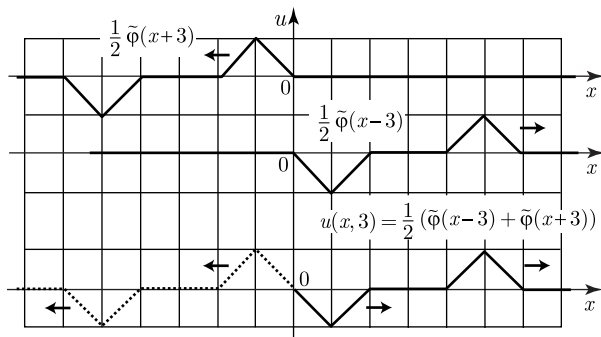


Рис. 16.9. Построение профиля струны в момент $t = 3$

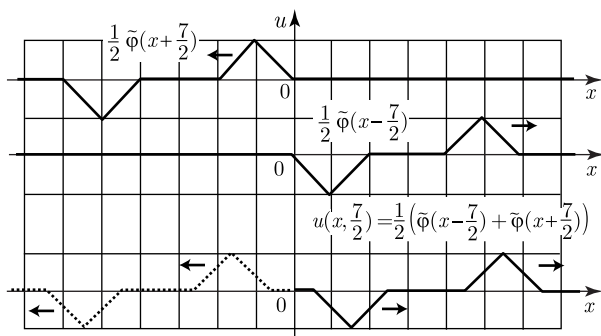


Рис. 16.10. Построение профиля струны в момент $t = 3,5$

Пример 16.2. Рассмотрим следующую задачу:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad x > 0, \quad t > 0; \\ u(x, 0) = \varphi(x) = 0, \\ \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \psi(x) = \begin{cases} \psi_0 = \text{const}, & x \in [1, 2], \\ 0, & x \notin [1, 2], \end{cases} \quad x \geq 0; \\ u(0, t) = 0, \quad t \geq 0. \end{array} \right.$$

Здесь у полуограниченной струны, закрепленной при $x = 0$, начальное отклонение равно нулю, а начальная скорость отлична от нуля только на отрезке $[1, 2]$. Построим профиль струны через

промежутки времени, кратные $\Delta t = \frac{1}{4a}$ (аналогичная задача на бесконечной прямой была рассмотрена в примере 15.2).

Сначала построим начальную функцию $\psi(x)$ (рис. 16.11) и продолжим ее нечетным образом на полуось $x < 0$, полагая

$$\tilde{\psi}(x) = \begin{cases} \psi(x), & x \geq 0, \\ -\psi(-x), & x < 0. \end{cases}$$

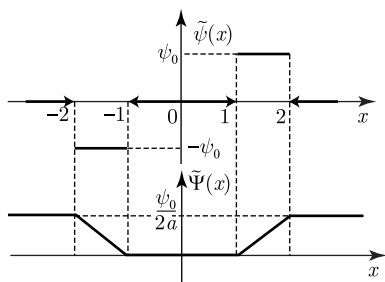


Рис. 16.11. Графики функций $\tilde{\psi}(x)$ и $\tilde{\Psi}(x)$

Решение соответствующей задачи Коши можно записать так:

$$\begin{aligned} \tilde{u}(x, t) &= \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \tilde{\psi}(\xi) d\xi = \frac{1}{2a} \int_{x-at}^0 \tilde{\psi}(\xi) d\xi + \\ &+ \frac{1}{2a} \int_0^{x+at} \tilde{\psi}(\xi) d\xi = \tilde{\Psi}(x+at) - \tilde{\Psi}(x-at), \end{aligned}$$

где

$$\tilde{\Psi}(x) = \frac{1}{2a} \int_0^x \tilde{\psi}(\xi) d\xi.$$

Рассматривая $\tilde{u}(x, t)$ только для $x \geq 0$, $t \geq 0$, получим функцию $u(x, t)$, являющуюся решением рассматриваемой задачи.

Вычислим вспомогательную функцию

$$\tilde{\Psi}(x) = \frac{1}{2a} \int_0^x \tilde{\psi}(\xi) d\xi = \begin{cases} \frac{\psi_0}{2a}, & x < -2, \\ -\frac{\psi_0}{2a}(x+1), & -2 \leq x \leq -1, \\ 0, & -1 < x < 1, \\ \frac{\psi_0}{2a}(x-1), & 1 \leq x \leq 2, \\ \frac{\psi_0}{2a}, & x > 2. \end{cases}$$

и построим ее график (рис. 16.11).

Складывая графики функций $\tilde{\Psi}(x + at)$ и $-\tilde{\Psi}(x - at)$, построенные при фиксированных значениях t , на полуоси $x \geq 0$ получим графики искомого решения задачи $u(x, t)$. Этот процесс представлен на рис. 16.12.

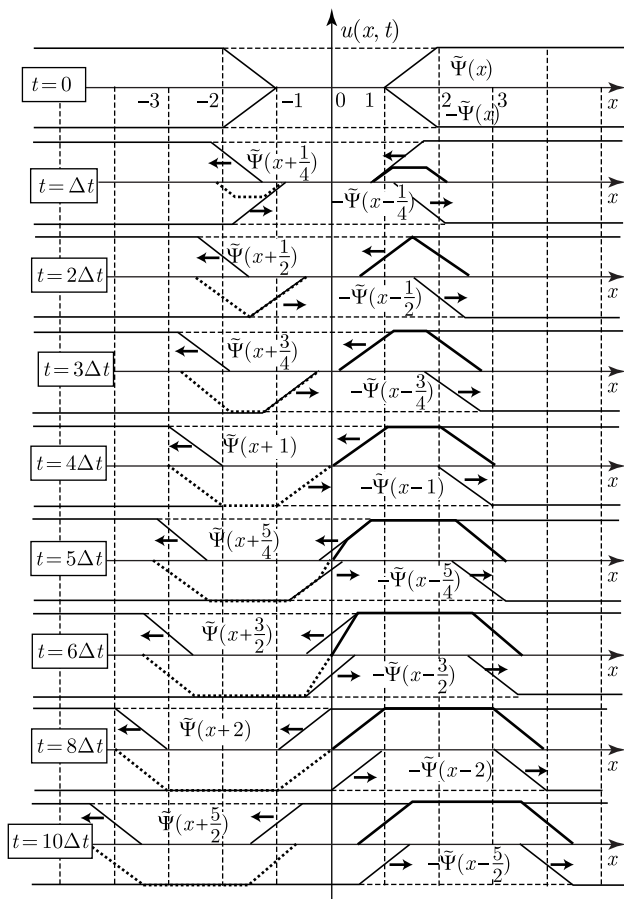


Рис. 16.12

Как видно из рисунка, на начальной стадии процесс идет на положительной полуоси так же, как и на бесконечной прямой. При $t = 4\Delta t$ происходит отражение от закрепленного конца. Наконец, при $t \geq 8\Delta t$ волна с профилем в виде равнобедренной трапеции с постоянной скоростью движется вправо.

Лекция 17

ПРИМЕНЕНИЕ РАЗНОСТНЫХ МЕТОДОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

В предыдущих лекциях мы познакомились с некоторыми аналитическими методами решения дифференциальных уравнений в частных производных. Однако явное представление решения задачи математической физики в виде ряда или интеграла не всегда возможно, а для нелинейных задач возможно лишь в исключительных случаях. В приложениях часто применяются приближенные методы, широко использующие современную компьютерную технику.

Одним из наиболее эффективных методов приближенного решения большого класса задач для дифференциальных уравнений является *метод конечных разностей* (или *метод сеток*). Идея его состоит в следующем. Область непрерывного изменения аргументов искомой функции заменяется дискретным множеством точек (узлов), называемым *сеткой*; вместо функций непрерывного аргумента рассматриваются функции дискретного аргумента, определенные в узлах сетки и называемые *сеточными функциями*. Производные, входящие в ДУ, заменяются разностными отношениями, а ДУ при этом заменяется системой алгебраических уравнений. Начальные и граничные условия тоже заменяются соответствующими условиями для сеточной функции. В результате строится *разностная схема* — конечная система алгебраических уравнений, поставленная в соответствие данной задаче, содержащей дифференциальное уравнение и дополнительные условия. Решение разностной схемы называется *приближенным* (или *сеточным*) *решением* дифференциальной задачи. При этом естественно требовать, чтобы построенная разностная схема была однозначно разрешима и соответствующее сеточное решение при мелкости сетки, стремящейся к нулю, неограниченно приближалось к решению задачи для ДУ. Здесь возникают такие важные

понятия, как *сходимость*, *аппроксимация* и *устойчивость* разностной схемы (см., например, [7, 12]), которые мы обсудим несколько позже. Ниже мы ограничиваемся рассмотрением простейших разностных схем.

Решение смешанной задачи для одномерного уравнения диффузии/теплопроводности методом сеток. В прямоугольнике $Q = \{(x, t) : 0 < x < l, 0 < t \leq T\}$ рассмотрим смешанную задачу

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t), & (x, t) \in Q, \\ u(x, 0) = \varphi(x), & x \in [0, l], \\ u(0, t) = \alpha(t), \quad u(l, t) = \beta(t), & t \in [0, T]. \end{cases} \quad (17.1)$$

Правая часть уравнения, начальная и граничные функции предполагаются достаточно гладкими в рассматриваемой области, чтобы задача имела единственное классическое решение. Займемся построением приближенного решения задачи методом сеток.

Разделим отрезок $[0, l]$ оси x на n равных частей точками

$$x_i = ih, \quad i = 0, 1, \dots, n,$$

где $h = \frac{l}{n}$ — шаг по x .

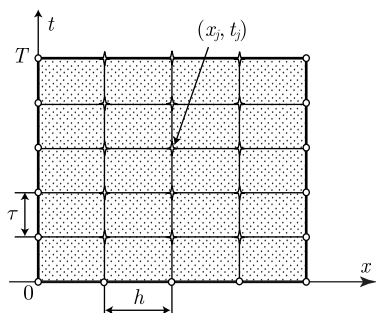


Рис. 17.1

Далее разделим отрезок $[0, T]$ оси t на m равных частей точками

$$t_j = j\tau, \quad j = 0, 1, \dots, m,$$

где $\tau = \frac{T}{m}$ — шаг по t .

В результате прямоугольник $\overline{Q} = \{(x, t) : 0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T\}$ разобьется на частные прямоугольники с вершинами (x_i, t_j) ($i = 0, 1, \dots, n; j = 0, 1, \dots, m$), как показано на рис. 17.1. Мно-

жество этих вершин аппроксимирует (приближает) множество точек прямоугольника $\overline{Q}$.

Сеточным множеством (сеткой) $Q_{n,m}$, аппроксимирующим прямоугольник Q , будем называть множество

$$Q_{n,m} = \{(x_i, t_j), i = 1, \dots, n-1; j = 1, \dots, m\}.$$

Сеточным множеством $\Gamma_{n,m}$, аппроксимирующим границу, будем называть множество

$$\Gamma_{n,m} = \{(0, t_j), j = 1, \dots, m\} \cup \{(l, t_j), j = 1, \dots, m\} \cup \{(x_i, 0), i = 0, \dots, n\}.$$

Точки (x_i, t_j) называются *узлами сетки*, причем

$$(x_i, t_j) \in Q_{n,m} — \text{внутренние узлы},$$

$$(x_i, t_j) \in \Gamma_{n,m} — \text{граничные узлы}.$$

Вместо функций непрерывного аргумента будем рассматривать функции дискретного аргумента, заданные в узлах сетки. Такие функции называются *сеточными функциями*.

Далее мы попытаемся найти приближенные значения классического решения $u(x, t)$ смешанной задачи в узлах сетки. Воспользуемся приближенными равенствами для производных, вытекающими из формул Тейлора:

$$\frac{\partial u}{\partial t} \approx \frac{u(x, t + \tau) - u(x, t)}{\tau},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{u(x + h, t) - u(x, t)}{h}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{u(x, t) - u(x - h, t)}{h},$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &\approx \frac{\frac{u(x + h, t) - u(x, t)}{h} - \frac{u(x, t) - u(x - h, t)}{h}}{h} = \\ &= \frac{u(x - h, t) - 2u(x, t) + u(x + h, t)}{h^2}. \end{aligned}$$

Обозначим через u_i^j приближенное значение функции $u(x, t)$, дающей точное классическое решение задачи (17.1), в узле сетки (x_i, t_j) . Верхний индекс в такой форме записи сеточной функции традиционно указывает на номер слоя по времени, нижний — на номер узла сетки по пространственной координате. Тогда за приближенные значения производных в этом же узле примем следующие разностные отношения:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_j) \approx \frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\tau}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_j) \approx \frac{u_{i-1}^j - 2u_i^j + u_{i+1}^j}{h^2}.$$

На рис. 17.2 выделено множество узлов сетки, значения сеточной функции в которых мы использовали для аппроксимации производных на каждом элементарном шаге вычислений. Такое множество часто называется *шаблоном*. В данном случае мы имеем четырехточечный шаблон.

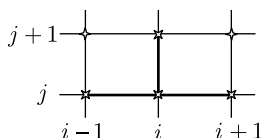


Рис. 17.2. Шаблон для явной разностной схемы

Таким образом, аппроксимируя производные разностными отношениями, мы приходим к следующей разностной схеме:

$$\begin{cases} \frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\tau} - a^2 \frac{u_{i-1}^j - 2u_i^j + u_{i+1}^j}{h^2} = f(x_i, t_j), \\ 1 \leq i \leq n-1, \quad 0 \leq j \leq m-1, \end{cases} \quad (17.2)$$

$$\begin{cases} u_i^0 = \varphi(x_i), \quad 0 \leq i \leq n, \\ u_0^j = \alpha(t_j), \quad u_n^j = \beta(t_j), \quad 1 \leq j \leq m. \end{cases} \quad (17.3)$$

$$(17.4)$$

Перепишем разностное уравнение (17.2) в виде

$$u_i^{j+1} = (1 - 2a^2 \frac{\tau}{h^2}) u_i^j + a^2 \frac{\tau}{h^2} (u_{i-1}^j + u_{i+1}^j) + \tau f(x_i, t_j). \quad (17.5)$$

Такая форма записи позволяет находить неизвестные значения сеточных функций по «временным слоям». При $j = 0$ (на нулевом слое) решение известно, оно определяется условием (17.3). Тогда, используя выражение (17.5), можно записать решение во внутренних узлах первого слоя:

$$u_i^1 = \left(1 - 2a^2 \frac{\tau}{h^2}\right) u_i^0 + a^2 \frac{\tau}{h^2} (u_{i-1}^0 + u_{i+1}^0) + \tau f(x_i, 0),$$

$$1 \leq i \leq n-1.$$

Затем при $j = 2$ найдем выражения для неизвестных u_i^2 через уже известные u_i^1 , и т. д. Таким образом, установлено, что задача (17.2)–(17.4) имеет единственное решение.

Мы построили разностную схему для задачи (17.1), где на концах отрезка задавались функции. В этом случае известны значения искомой функции в граничных точках. Теперь обратим

внимание на особенности разностной схемы, если на концах отрезка заданы производные.

Пусть левое граничное условие имеет вид

$$\frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = \alpha(t),$$

т. е. в точке $(0, t)$ задана правая производная по переменной x , которую можно приближенно записать как

$$\frac{\partial u(0, t)}{\partial x} \approx \frac{u(h, t) - u(0, t)}{h}.$$

Тогда левое граничное условие в разностной задаче запишется так (рис. 17.3, а):

$$\frac{u_1^j - u_0^j}{h} = \alpha(t_j) \Rightarrow u_0^j = u_1^j - h\alpha(t_j), \quad 1 \leq j \leq m.$$

В частности, на первом слое

$$u_0^1 = u_1^1 - h\alpha(t_1),$$

где u_1^1 — уже найденное значение в соседнем внутреннем узле, и т. д.

Пусть теперь правое граничное условие имеет вид

$$\frac{\partial u(l, t)}{\partial x} = \beta(t).$$

Воспользовавшись приближенным равенством для левой производной по переменной x в точке (l, t)

$$\frac{\partial u(l, t)}{\partial x} \approx \frac{u(l, t) - u(l - h, t)}{h},$$

запишем правое граничное условие в соответствующей разностной задаче (рис. 17.3, б):

$$\frac{u_n^j - u_{n-1}^j}{h} = \beta(t_j) \Rightarrow u_n^j = u_{n-1}^j + h\beta(t_j), \quad 1 \leq j \leq m.$$

Здесь аналогично на первом слое

$$u_n^1 = u_{n-1}^1 + h\beta(t_1),$$

где u_{n-1}^1 — уже найденное значение в соседнем внутреннем узле, и т. д.

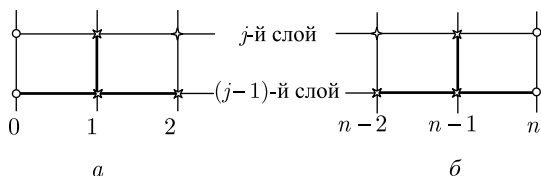


Рис. 17.3. Шаблоны для явной схемы, включающие граничные точки

Итак, вычислительный алгоритм построен. В результате получим следующую таблицу значений функции, являющейся приближенным решением задачи, в узлах сетки:

m	$m\tau$	u_0^m	u_1^m	u_2^m	$\dots$	u_n^m
$\cdot$						
$\cdot$						
$\cdot$						
2	2τ	u_0^2	u_1^2	u_2^2	$\dots$	u_n^2
1	τ	u_0^1	u_1^1	u_2^1	$\dots$	u_n^1
0	0	u_0^0	u_1^0	u_2^0	$\dots$	u_n^0
j	t x	0	h	$2h$	$\dots$	nh
	i	0	1	2	$\dots$	n

Возникает естественный вопрос: насколько хорошо эта таблица воспроизводит точное решение задачи?

Чтобы сеточные функции u_i^j действительно приближались (сходились) к решению данного уравнения $u(x, t)$, нужно потребовать, чтобы было выполнено так называемое *условие сходимости*

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ \tau \rightarrow 0}} \left(\max_{i,j} |u(x_i, t_j) - u_i^j| \right) = 0. \quad (17.6)$$

При доказательстве *сходимости* разностной схемы важную роль играют условия ее *аппроксимации* и *устойчивости*. Посмотрим, что понимается под этими терминами.

Зададим на сеточном множестве $Q_{n,m} = \{(x_i, t_j), i = 1, \dots, n-1; j = 1, \dots, m\}$ функцию

$$r(x_i, t_j) = \frac{u(x_i, t_j + \tau) - u(x_i, t_j)}{\tau} - a^2 \frac{u(x_i - h, t_j) - 2u(x_i, t_j) + u(x_i + h, t_j)}{h^2} - f(x_i, t_j),$$

где $u(x, t)$ — точное решение задачи (17.1). Функция $r(x, t)$ — *невязка*, возникающая при подстановке в разностное уравнение (17.2) точного решения исходной задачи (17.1). Если

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ m \rightarrow \infty}} \left(\max_{Q_{n,m}} |r(x_i, t_j)| \right) = 0, \quad (17.7)$$

то будем говорить, что разностная схема (17.2)–(17.4) *аппроксимирует* смешанную задачу (17.1), или выполняется *условие аппроксимации*. Условие (17.7) характеризует связь между разностной и дифференциальной задачами и устанавливает факт близости этих задач.

Разностная схема называется *устойчивой*, если малые погрешности, допущенные по ходу решения, затухают или остаются ограниченными в процессе счета. В противном случае схема называется *неустойчивой*.

Можно доказать (см., например, [11, с. 87–90]), что разностная схема (17.2)–(17.4) является устойчивой только при выполнении условия

$$a^2 \frac{\tau}{h^2} \leq \frac{1}{2}. \quad (17.8)$$

В этом случае шаг по времени должен быть достаточно мал по сравнению с шагом по пространственной переменной. Вообще говоря, нарушение условия (17.8) может привести к вычислительной катастрофе, когда

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ \tau \rightarrow 0}} \left(\max_{i,j} |u(x_i, t_j) - u_i^j| \right) = \infty.$$

Еще раз обратим внимание на то, что в задаче (17.2)–(17.4) решение на каждом временном слое мы получали непосредственно из данных предыдущего слоя. Разностные схемы такого типа называются *явными*. Если же на верхнем временном слое для

определения значений сеточной функции необходимо решать систему алгебраических уравнений, то схема называется *неявной*.

Построим неявную схему для нашей задачи (17.1). В соответствии с шаблоном, представленным на рис. 17.4, эта задача аппроксимируется следующей разностной задачей:

$$\begin{cases} \frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\tau} - a^2 \frac{u_{i-1}^{j+1} - 2u_i^{j+1} + u_{i+1}^{j+1}}{h^2} = f(x_i, t_{j+1}), \\ 1 \leq i \leq n-1, \quad 0 \leq j \leq m-1, \end{cases} \quad (17.9)$$

$$u_i^0 = \varphi(x_i), \quad 0 \leq i \leq n, \quad (17.10)$$

$$u_0^j = \alpha(t_j), \quad u_n^j = \beta(t_j), \quad 1 \leq j \leq m. \quad (17.11)$$

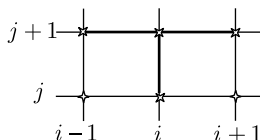


Рис. 17.4. Шаблон для неявной разностной схемы

В отличие от явной схемы, здесь на каждом слое получается система $(n+1)$ линейных уравнений относительно неизвестных u_{i-1}^{j+1} , u_i^{j+1} , u_{i+1}^{j+1} ($i = 1, 2, \dots, n-1$). Она может решаться обычными методами линейной алгебры. Для решения алгебраических систем подобного вида удобно применять специально разработанный так называемый *метод прогонки* [10].

Неявная схема сложнее в вычислительном плане. Однако известно, что она устойчива без дополнительных условий. В данном случае нет необходимости использовать слишком мелкий шаг по времени, так как условие сходимости (17.6) выполняется при любом соотношении шагов по времени и по пространственной переменной.

Решение задачи Дирихле для уравнения Пуассона в прямоугольнике методом сеток. Рассмотрим следующую краевую задачу:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y), \quad (x, y) \in Q; \quad (17.12)$$

$$u|_{\Gamma} = \varphi(x, y), \quad (x, y) \in \Gamma. \quad (17.13)$$

Здесь $Q = \{(x, y) : 0 < x < a; 0 < y < b\}$ — прямоугольник, Γ — его граница. Правая часть ДУ и граничная функция предпо-

лагаются настолько гладкими в $\bar{Q}$ и на Γ соответственно, что у задачи (17.12)–(17.13) существует единственное классическое решение $u(x, y)$, имеющее столько непрерывных частных производных, сколько нам понадобится в дальнейших рассуждениях.

Разделим отрезок $[0, a]$ оси x на n равных частей точками $x_i = ih$, $i = 0, 1, \dots, n$, где $h = \frac{a}{n}$ — шаг по x . Затем разделим отрезок $[0, b]$ оси y на m равных частей точками $y_j = jg$, $j = 0, 1, \dots, m$, где $g = \frac{b}{m}$ — шаг по y . В результате получим разбиение прямоугольника $\bar{Q} = \{(x, y) : 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b\}$ на частные прямоугольники с вершинами (x_i, y_j) , $i = 0, 1, \dots, n$; $j = 0, 1, \dots, m$, как показано на рис. 17.5. Сеточным множеством (сеткой) $Q_{n,m}$, аппроксимирующим прямоугольник Q , будем называть множество

$$Q_{n,m} = \{(x_i, y_j), i = 1, \dots, n-1; j = 1, \dots, m\}.$$

Сеточным множеством $\Gamma_{n,m}$, аппроксимирующим границу Γ , будем называть множество точек $(x_i, y_j) \in \Gamma$, за исключением вершин прямоугольника.

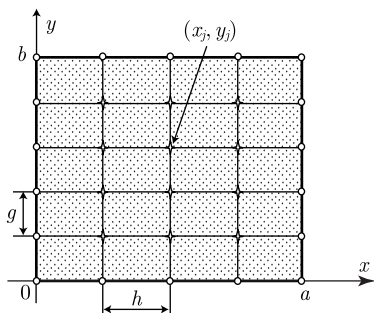


Рис. 17.5

Вместо функций непрерывного аргумента будем рассматривать функции дискретного аргумента, заданные в узлах сетки, — сеточные функции.

Воспользуемся приближенными выражениями для производных, входящих в ДУ (17.12):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{u(x-h, y) - 2u(x, y) + u(x+h, y)}{h^2}, \quad (17.14)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \approx \frac{u(x, y-g) - 2u(x, y) + u(x, y+g)}{g^2}. \quad (17.15)$$

Обозначим через u_{ij} приближенное значение функции $u(x, y)$, дающей точное классическое решение задачи (17.12)–(17.13), в узле сетки (x_i, y_j) . Используя приближенные равенства (17.14), (17.15) и пятиточечный шаблон, приведенный на рис. 17.6, запишем следующую разностную задачу, аппроксимирующую задачу (17.12)–(17.13):

$$\frac{u_{(i-1)j} - 2u_{ij} + u_{(i+1)j}}{h^2} + \frac{u_{i(j-1)} - 2u_{ij} + u_{i(j+1)}}{g^2} = f(x_i, y_j), \quad 1 \leq i \leq n-1, \quad 1 \leq j \leq m-1; \quad (17.16)$$

$$u_{ij} = \varphi(x_i, y_j), \quad (x_i, y_j) \in \Gamma_{m,n}. \quad (17.17)$$

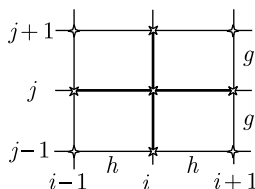


Рис. 17.6. Пятиточечный шаблон для аппроксимации оператора Лапласа

Поскольку, согласно (17.7), значения u_{ij} на границе прямоугольника известны, то (17.16) представляет собой систему $(n-1) \cdot (m-1)$ линейных уравнений с $(n-1) \cdot (m-1)$ неизвестными. Возникают естественные вопросы: имеет ли данная система решение? единственно ли оно? Ответить на эти вопросы нам поможет лемма, доказательство которой можно найти в [11].

Лемма 17.1. Для решения задачи (17.16)–(17.17) справедлива оценка

$$\max_{Q_{n,m}} |u_{ij}| \leq \max_{\Gamma_{n,m}} |\varphi(x_i, y_j)| + \frac{a^2 + b^2}{2} \max_{Q_{n,m}} |f(x_i, y_j)|. \quad (17.18)$$

Из оценки (17.18), в частности, следует, что соответствующая однородная задача ($\varphi = 0$, $f = 0$) имеет только тривиальное решение. В этом случае определитель соответствующей системы линейных уравнений (17.16) не равен нулю и эта система имеет единственное решение. Таким образом, мы пришли к важному выводу: *разностная задача (17.16)–(17.17) имеет единственное решение.*

Теперь мы докажем сходимость разностной схемы (17.16)–(17.17), а именно, будет установлено, что

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ m \rightarrow \infty}} \left(\max_{Q_{n,m}} |u(x_i, y_j) - u_{ij}| \right) = 0, \quad (17.19)$$

где u_{ij} — сеточное решение, а $u(x_i, y_j)$ — значение классического решения исходной задачи в узле сетки (x_i, y_j) .

Отметим, что оценка (17.18) — условие устойчивости разностной схемы. При доказательстве сходимости, помимо устойчивости, важную роль играет условие аппроксимации, которое в нашем случае выглядит так:

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ m \rightarrow \infty}} \max_{Q_{n,m}} |r(x_i, y_j)| = 0, \quad (17.20)$$

где

$$r(x_i, y_j) = \frac{u(x_i - h, y_j) - 2u(x_i, y_j) + u(x_i + h, y_j)}{h^2} + \\ + \frac{u(x_i, y_j - g) - 2u(x_i, y_j) + u(x_i, y_j + g)}{g^2} - f(x_i, y_j).$$

Если функция $u(x, y)$ имеет в области Q ограниченные производные $\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}$ и $\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}$, то можно показать, пользуясь формулой Тейлора и уравнением (17.12), что

$$\max_{Q_{n,m}} |r(x_i, y_j)| = O(h^2 + g^2) \quad \text{при} \quad n, m \rightarrow \infty \quad (h, g \rightarrow 0). \quad (17.21)$$

Таким образом, условие аппроксимации (17.20) выполняется.

Для доказательства условия сходимости (17.19) перейдем в (17.16)–(17.17) к новым переменным, полагая

$$u_{ij} = u(x_i, y_j) + z_{ij}.$$

Для переменных z_{ij} получим следующую задачу:

$$\begin{cases} \frac{z_{(i-1)j} - 2z_{ij} + z_{(i+1)j}}{h^2} + \frac{z_{i(j-1)} - 2z_{ij} + z_{i(j+1)}}{g^2} = r(x_i, y_j), \\ 1 \leq i \leq n-1, \quad 1 \leq j \leq m-1; \\ z_{ij} = 0, \quad (x_i, y_j) \in \Gamma_{m,n}. \end{cases} \quad (17.22)$$

$$(17.23)$$

Применяя к задаче (17.22)–(17.23) условие устойчивости (17.18), а также оценку (17.21), получим

$$\max_{Q_{n,m}} |z_{ij}| \leq + \frac{a^2 + b^2}{2} \max_{Q_{n,m}} |r(x_i, y_j)| = O(h^2 + g^2)$$

при $n, m \rightarrow \infty$ ($h, g \rightarrow 0$).

Следовательно, выполняется условие сходимости

$$\max_{Q_{n,m}} |u(x_i, y_j) - u_{ij}| \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad n, m \rightarrow \infty.$$

Приложение 1

КЛАССИФИКАЦИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Как уже неоднократно отмечалось, математические модели многих физических задач описываются соответствующими задачами для дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка относительно искомой функции. Ниже обсуждаются вопросы классификации таких уравнений.

Пусть u — неизвестная функция от пространственных переменных и времени, описывающая изучаемый физический процесс, причем количество пространственных переменных определяется размерностью физического пространства, в котором изучается явление (интервал на прямой, область на плоскости или в трехмерном пространстве). В общем случае $u = u(x, y, z, t)$, где t — время (если изучается стационарный процесс, то $u = u(x, y, z)$). Пусть Δ — оператор Лапласа (одно-, дву- или трехмерный), а f — известная функция от пространственных переменных и времени, характеризующая изучаемое явление. Простейшие задачи математической физики сводятся к следующим трем типам дифференциальных уравнений в частных производных:

1) уравнения аналитической теории тепла, диффузии, например,

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \Delta u = f;$$

2) уравнения, описывающие волновые процессы (уравнения звука, света, электричества, магнетизма), например,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \Delta u = f;$$

3) уравнения установившихся (стационарных) физических процессов, например,

$$\Delta u = f.$$

В общем случае линейное ДУ второго порядка относительно неизвестной функции u имеет вид

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u = f(x), \quad (\text{П1.1})$$

где $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$; $a_{ij}(x)$, $b_i(x)$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$), $c(x)$, $f(x)$ — известные функции от n переменных, определенные в некоторой области $G \in \mathbf{R}^n$. В этой записи к независимым переменным равноправно относятся и пространственные переменные, и время. Поставим задачу — преобразовать это уравнение к наиболее простому виду.

Будем предполагать, что решения уравнения (П1.1) — функции $u(x)$, имеющие непрерывные в области G производные до второго порядка включительно. В этом случае смешанные производные $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$ можно вычислять в произвольном порядке. Следовательно, матрицу $A(x) = \|a_{ij}(x)\|$, состоящую из коэффициентов при старших производных, можно считать симметрической, т. е. $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$).

Пусть $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ — произвольная фиксированная точка области G . Рассмотрим постоянную матрицу $A(x^0) = \|a_{ij}(x^0)\|$. Так как эта матрица симметрическая, то ее собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ — вещественные числа. Классификация уравнений проводится в зависимости от того, сколько среди них положительных, отрицательных и нулевых собственных значений.

Обозначим

n_+ — число положительных собственных значений матрицы $A(x^0)$,

n_- — число отрицательных собственных значений матрицы $A(x^0)$,

n_0 — число нулевых собственных значений матрицы $A(x^0)$; при этом

$$n_+ + n_- + n_0 = n.$$

Уравнение (П1.1) называется *уравнением эллиптического типа в точке x^0* , если все собственные значения λ_i матрицы $A(x^0)$ одного знака, т. е.

$$n_+ = n \quad \text{или} \quad n_- = n.$$

Уравнение называется *эллиптическим на множестве $D \subset G$* , если оно эллиплично в каждой точке этого множества.

Пример П1.1. Рассмотрим в $\mathbf{R}^n$ уравнение Пуассона

$$\Delta u = f(x),$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$ — n -мерный оператор Лапласа. Здесь матрица

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

и, как нетрудно заметить, $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 1$, т. е. $n_+ = n$. Таким образом, уравнение Пуассона эллиплично всюду в $\mathbf{R}^n$.

Уравнение (П1.1) называется *уравнением гиперболического типа в точке x^0* , если все собственные значения λ_i матрицы $A(x^0)$ отличны от нуля, но среди них имеются как положительные, так и отрицательные, т. е.

$$n_0 = 0, 1 \leq n_+ \leq n - 1.$$

Если уравнение гиперболично в каждой точке множества $D \subset G$, то оно называется *гиперболическим на D* .

Пример П1.2. Рассмотрим уравнение колебаний струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

Здесь неизвестная функция зависит от одной пространственной переменной x и времени t . В этом случае матрица коэффициентов при вторых производных

$$A = \begin{pmatrix} -a^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ее собственные значения $\lambda_1 = -a^2$, $\lambda_2 = 1$. Следовательно, здесь $n_+ = n_- = 1$. Таким образом, уравнение колебаний струны гиперболично всюду в $\mathbf{R}^2$.

Как было показано в лекции 15, с помощью замены независимых переменных

$$\xi = x - at, \quad \eta = x + at.$$

рассмотренное уравнение струны можно преобразовать к еще более простому виду, допускающему непосредственное интегрирование, т. е. к виду

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} = 0.$$

Здесь матрица коэффициентов при старших производных

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно проверить, что ее собственные значения $\lambda_{1,2} = \pm 1/2$, что также соответствует уравнению гиперболического типа.

Уравнение (П1.1) называется *уравнением параболического типа в точке x^0* , если хотя бы одно собственное значение $\lambda_i = 0$, т. е. $n_0 \neq 0$. Уравнение называется *параболическим на множестве $D \subset G$* , если оно параболично в каждой точке этого множества.

Пример П1.3. Рассмотрим уравнение диффузии/теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = f(x, y, t).$$

Здесь неизвестная функция зависит от двух пространственных переменных и времени, причем уравнение не содержит второй производной по переменной t . В этом случае матрица

$$A = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ее собственные значения: $\lambda_1 = \lambda_2 = a^2 > 0$, $\lambda_3 = 0$. Таким образом, здесь $n_0 \neq 0$ всюду в $\mathbf{R}^3$, что соответствует уравнению параболического типа.

Итак, можно отметить, что процессы распространения тепла и диффузии описываются уравнениями параболического типа, волновые процессы — уравнениями гиперболического типа, а стационарные процессы — уравнениями эллиптического типа.

Используя замену переменных, будем упрощать группу старших членов в уравнении (П1.1) так, чтобы в новых переменных уравнение имело наиболее простую форму.

Пусть $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ — некоторая точка области G . Обозначим

$$\xi_i = F_i(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad i = 1, \dots, n$$

(в векторной записи $\xi = F(x)$) преобразование, взаимно однозначно отображающее некоторую окрестность точки x^0 на

окрестность соответствующей точки $\xi^0 = F(x^0)$, а $x = g(\xi)$ — соответствующее обратное преобразование. Будем предполагать, что функции $\xi_i = F_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $i = 1, \dots, n$, дважды непрерывно дифференцируемы в окрестности точки x^0 и что матрица Якоби

$$J(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} \quad (\text{П1.2})$$

преобразования $\xi = F(x)$ не вырождена, т. е. что якобиан преобразования $\det J(x) \neq 0$.

В результате замены переменных уравнение (П1.1) приобретает вид

$$\sum_{k,m=1}^n \tilde{a}_{km} \frac{\partial^2 v}{\partial \xi_k \partial \xi_m} = \Phi \left(\xi_1, \dots, \xi_n, v, \frac{\partial v}{\partial \xi_1}, \dots, \frac{\partial v}{\partial \xi_n} \right), \quad (\text{П1.3})$$

где Φ — некоторая функция, не зависящая от вторых производных функции v , а

$$\tilde{a}_{km} = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial F_m}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial F_k}{\partial x_i}. \quad (\text{П1.4})$$

Заметим, что матрицы $\tilde{A} = \|\tilde{a}_{ij}\|$ и $A = \|a_{ij}\|$ связаны равенством

$$\tilde{A} = JAJ^T,$$

где J — матрица Якоби преобразования (П1.2), а J^T — соответствующая ей транспонированная матрица. Согласно известной теореме алгебры, числа положительных, отрицательных и нулевых собственных значений матрицы $\tilde{A}$, полученной из матрицы A с помощью невырожденного линейного преобразования, совпадают с соответствующими числами для матрицы A . Это означает, что в любой точке ξ уравнение (П1.3) имеет тот же тип, что и уравнение (П1.1) в соответствующей точке $x = g(\xi)$. Этим обстоятельством можно воспользоваться для упрощения уравнения (П1.1).

Зафиксировав точку x^0 , рассмотрим квадратичную форму

$$Q(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x^0) \tau_i \tau_j, \quad (\text{П1.5})$$

коэффициенты которой равны коэффициентам a_{ij} уравнения (П1.1) в точке x^0 . Невырожденным линейным преобразованием

$$s_i = \sum_{j=1}^n p_{ij} \tau_j, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad \det \|p_{ij}\| \neq 0,$$

квадратичная форма всегда может быть приведена к каноническому виду с матрицей

$$P^T A(x^0) P = \begin{pmatrix} \overbrace{+1 \dots +1}^{n_+} & & 0 \\ & \underbrace{-1 \dots -1}_{n_-} & \\ 0 & & \underbrace{0 \dots 0}_{n_0} \end{pmatrix},$$

т. е. к виду

$$\tilde{Q}(s_1, s_2, \dots, s_n) = \sum_{i=1}^{n_+} s_i^2 - \sum_{i=n_++1}^{n_++n_-} s_i^2.$$

Теперь ясно, что в уравнении (П1.1) целесообразно выбрать такую замену переменных $\xi = F(x)$, для которой $J = P^T$, т. е. взять линейную замену. В этом случае уравнение (П1.4) при $x = x^0$ примет вид

$$\sum_{i=1}^{n_+} \frac{\partial^2 v}{\partial \xi_i^2} - \sum_{i=n_++1}^{n_++n_-} \frac{\partial^2 v}{\partial \xi_i^2} = \Phi_1, \quad (\text{П1.6})$$

где функция Φ_1 не зависит от вторых производных функции v . Этот вид называется *каноническим видом* уравнения (П1.1) в точке x^0 .

Таким образом, для любой точки $x^0 \in G$ можно указать невырожденное линейное преобразование независимых переменных, приводящее уравнение (П1.1) к каноническому виду в этой точке. Поскольку преобразование зависит лишь от значений коэффициентов при старших производных в точке x^0 , то в случае постоянных коэффициентов найденное линейное преобразование приводит уравнение к каноническому виду во всей области G .

Пример П1.4. Рассмотрим уравнение с переменными коэффициентами

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Определим тип этого уравнения в разных точках плоскости (x, y) . Пусть (x, y) — произвольная фиксированная точка на плоскости, такая, что $x^2 + y^2 > 0$. Выпишем матрицу коэффициентов при старших производных

$$A = \begin{pmatrix} x^2 & xy \\ xy & y^2 \end{pmatrix}$$

и найдем ее собственные значения, решив характеристическое уравнение $\det(A - \lambda E) = 0$, которое в данном случае имеет вид

$$\lambda^2 - (x^2 + y^2)\lambda = 0.$$

Его решение:

$$\lambda_1 = x^2 + y^2 > 0, \quad \lambda_2 = 0.$$

Отсюда ясно, что в рассматриваемой точке это уравнение параболического типа. Нетрудно заметить, что тип уравнения сохраняется на всей плоскости.

Покажем, что с помощью замены переменных $\xi = -\frac{y}{x}$, $\eta = y$ уравнение может быть приведено к каноническому виду.

Обозначим

$$u(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)) = v(\xi, \eta) = v\left(-\frac{y}{x}, y\right).$$

Воспользовавшись правилами дифференцирования сложной функции, вычислим производные:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial \xi} \cdot \frac{y}{x^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = -\frac{1}{x} \frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta},$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial \xi} \cdot \frac{y}{x^2} \right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial \xi} \right) \frac{y}{x^2} - 2 \frac{y}{x^3} \frac{\partial v}{\partial \xi} = \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} \cdot \frac{y^2}{x^4} - 2 \frac{y}{x^3} \frac{\partial v}{\partial \xi}, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial \eta} \right) = \frac{1}{x^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} - \frac{2}{x} \frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2},$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial \xi} \cdot \frac{y}{x^2} \right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial \xi} \right) \frac{y}{x^2} + \frac{1}{x^2} \frac{\partial v}{\partial \xi} = -\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} \cdot \frac{y}{x^3} + \frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} \cdot \frac{y}{x^2} + \frac{1}{x^2} \frac{\partial v}{\partial \xi}. \end{aligned}$$

Подставив производные в ДУ, получим

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = y^2 \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} = 0.$$

Итак, замена $\xi = -\frac{y}{x}$, $\eta = y$ приводит наше уравнение к каноническому виду

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} = 0.$$

Непосредственным интегрированием найдем его общее решение

$$v(\xi, \eta) = f(\xi)\eta + \varphi(\xi),$$

где $f(\xi)$, $\varphi(\xi)$ — произвольные дважды непрерывно дифференцируемые функции. Возвращаясь к старым переменным, получим

$$u(x, y) = f\left(-\frac{y}{x}\right)y + \varphi\left(-\frac{y}{x}\right).$$

Приложение 2

ВЫВОД ОСНОВНЫХ УРАВНЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Р.И. Соколовский, В.А. Треногин

Вывод уравнения малых поперечных колебаний струны. Рассматривается гибкая упругая однородная струна. Пусть в положении равновесия струна совпадает с отрезком $[0, l]$ оси абсцисс, а ее концы как-либо закреплены. В отклоненном положении в каждый момент времени t струна описывается кривой $u = u(x, t)$.

Будем аппроксимировать струну длины l цепочкой, состоящей из n одинаковых шариков суммарной массы m , помещенных в точках с координатами $x = ih$, где $i = 0, 1, 2, \dots, n - 1$, $h = \frac{l}{n - 1}$ и соединенных одинаковыми невесомыми пружинками жесткости k (рис. П2.1). Обозначим через $u(x, t)$ малое вертикальное отклонение i -го шарика от положения равновесия.

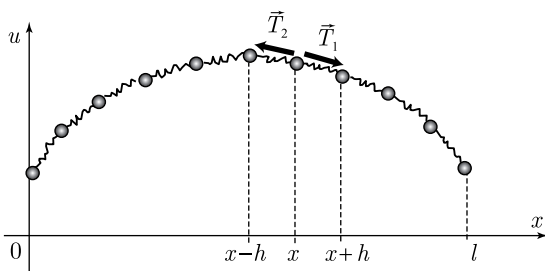


Рис. П2.1

Пусть $\rho = \frac{m}{l}$ — линейная плотность материала струны, тогда масса шарика с координатой x равна ρh , а сила, действующая на этот шарик, равна $\rho h \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}$. С другой стороны, эту силу можно подсчитать как результирующую сил натяжения $\vec{T}_1$ и $\vec{T}_2$. Абсолютные величины горизонтальных составляющих этих сил $k\sqrt{h^2 + (u(x, t) - u(x - h, t))^2}$ и $k\sqrt{h^2 + (u(x, t) - u(x + h, t))^2}$ можно считать равными, так как при $h \rightarrow 0$ каждая из них экви-

валентна величине $kh\sqrt{1 + \left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right)^2}$. Следовательно, с точностью до малых высшего порядка сила, действующая на шарик с координатой x со стороны шарика с координатой $x - h$ (соответственно $x + h$) направлена вертикально вниз (соответственно вверх) и равна $k(u(x - h, t) - u(x, t))$ (соответственно $k(u(x + h, t) - u(x, t))$). Следовательно, суммарная сила, действующая на этот шарик, равна $k(u(x - h, t) - 2u(x, t) + u(x + h, t))$. Заметим еще, что жесткость k выражается через силу натяжения струны T формулой $k = \frac{T}{h}$.

Согласно второму закону Ньютона, получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающую движение системы грузиков ($x = ih$, $i = 1, 2, \dots, n - 1$)

$$\rho h \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = \frac{T}{h} (u(x - h, t) - 2u(x, t) + u(x + h, t)).$$

Заметим теперь, что по формуле Тейлора

$$(u(x - h, t) - u(x, t)) = -\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} h + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u(\xi, t)}{\partial x^2} h^2,$$

где ξ заключено между $x - h$ и x . Аналогично,

$$(u(x + h, t) - u(x, t)) = \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} h + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u(\eta, t)}{\partial x^2} h^2,$$

где η заключено между x и $x + h$. Следовательно,

$$(u(x - h, t) - 2u(x, t) + u(x + h, t)) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u(\xi, t)}{\partial x^2} h^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u(\eta, t)}{\partial x^2} h^2.$$

Подставим найденное разложение в уравнения движения системы шариков. Разделив полученное выражение на ρh , перейдем к пределу при $h \rightarrow 0$, тогда $\xi \rightarrow x$ и $\eta \rightarrow x$. В результате получим уравнение поперечных колебаний струны, иногда называемое также *телеграфным уравнением*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Постоянная $a = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$ называется *скоростью распространения волн в струне*.

Поперечные волны в струне. Рассмотрим малые поперечные колебания в горизонтально расположенной струне, один конец которой закреплен, а к другому приложена горизонтально направленная сила натяжения $\vec{T}$. Свяжем со струной горизонтальную ось x , начало которой совпадает с закрепленным концом струны, а другой конец струны имеет координату l . Вертикальные смещения точек струны от положения равновесия будем описывать функцией $u(x, t)$. Струну будем считать очень гибкой и нерастяжимой.

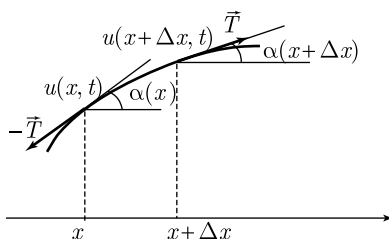


Рис. П2.2

Выделим малый кусок струны, расположенный между координатами x и $x + \Delta x$ (см. рис. П2.2). Справа на него действует сила $\vec{T}$, направленная вдоль касательной к кривой $u(x, t)$ в точке $x + \Delta x$. С осью x она составляет угол $\alpha(x + \Delta x)$, причем

$$\operatorname{tg}(\alpha(x + \Delta x)) = \frac{\partial u(x + \Delta x, t)}{\partial x}.$$

Слева приложена такая же по величине сила вдоль касательной к кривой $u(x, t)$ в точке x . Эта сила направлена в противоположном направлении. Равенство сил обеспечивается условием, что нить нерастяжима. С осью x она составляет угол $\alpha(x)$, и

$$\operatorname{tg}(\alpha(x)) = \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}.$$

Под действием приложенных сил рассматриваемый участок струны движется в вертикальном направлении. Из второго закона Ньютона следует, что

$$\Delta m \cdot \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = T(\sin(\alpha(x + \Delta x)) - \sin(\alpha(x))),$$

где $\Delta m = \rho \Delta x$, ρ — линейная плотность материала струны. Считая отклонения элементов струны от положения равновесия

малыми и достаточно плавными, можно заменить в полученном уравнении синусы на тангенсы, разделить обе части уравнения на Δx , а затем устремить Δx к нулю. В результате получим

$$\rho \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2},$$

или

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2},$$

где $a = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$ — скорость распространения волн в струне.

Продольные волны в сплошной среде. Рассмотрим упругое тело, которое заполняет часть пространства, и свяжем с ним декартову систему координат так, что ее начало O находится в центральной части тела. Обозначим через $u(x, y, z, t)$ смещение от положения равновесия, которое испытывает в момент времени t частица тела, ранее находившаяся в покое в точке с координатами x, y, z . Поле смещений в упругой среде всегда связано с полем напряжений $\sigma(x, y, z, t)$ сил, стремящихся возвратить частицы среды в положение равновесия. Смещения возникают в результате внешнего воздействия на границу тела и затем распространяются в теле в виде волн. В простейшем случае плоской волны, распространяющейся вдоль оси x , все смещения частиц и соответствующие напряжения в плоскости $x = \text{const}$ одинаковы, т. е.

$$u = u(x, t), \quad \sigma = \sigma(x, t).$$

Разница двух смещений в близких точках пространства, отнесенная к расстоянию между этими точками, дает относительное удлинение ε , причем тем точнее, чем меньше расстояние между этими точками. Иными словами,

$$\varepsilon = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x, t) - u(x, t)}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Удлинение ε связано с напряжением σ линейной зависимостью по закону Гука

$$\sigma = E\varepsilon,$$

где E — модуль Юнга.

Рассмотрим плоский слой среды толщиной dx (см. рис. П2.3) и запишем уравнение движения этого слоя (уравнение второго закона Ньютона), отнеся все величины к единице площади:

$$\rho_0 dx \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x, t) = d\sigma(x, t),$$

или

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma}{\partial x},$$

где ρ_0 — плотность материала, в котором распространяется волна.

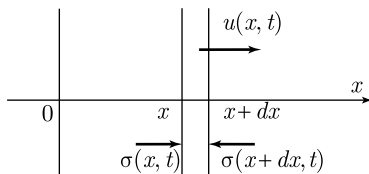


Рис. П2.3

Выражая с помощью закона Гука напряжение через смещение и подставляя его в полученное уравнение, приходим к уравнению, описывающему закон распространения упругих волн

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (\text{П2.1})$$

где $v = \sqrt{\frac{E}{\rho_0}}$ — скорость распространения волны.

В жидкостях и газе роль поля напряжений играет поле давлений, которое при распространении возмущений изменяется, совершая колебания $\Delta p(t, x)$ около невозмущенного значения. Соответственно основное уравнение распространения волн принимает вид

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{\partial \Delta p}{\partial x}. \quad (\text{П2.2})$$

Волна в жидкости или газе представляет собой бегущую по среде цепочку сжатий и разрежений. В выбранном слое толщиной dx невозмущенной среды при прохождении через него упругой волны изменяются плотность ρ , давление p и температура T . Эти три величины связаны между собой уравнением состояния. Масса газа остается постоянной, следовательно,

$$\rho_0 dx = \rho(1 + \varepsilon)dx,$$

или

$$\Delta \rho = -\varepsilon \rho \approx -\varepsilon \rho_0,$$

так как плотность среды при распространении в ней волны меняется незначительно.

При сжатии газа он нагревается, а при расширении — охлаждается. Если эти процессы происходят достаточно медленно, то можно считать, что температура среды остается постоянной, т. е. процесс изотермический. В этом случае уравнение изотермы для единицы площади слоя имеет вид

$$\Delta p = \Delta \rho \frac{RT}{\mu} = -\varepsilon \rho_0 \frac{RT}{\mu} = -\varepsilon p_0.$$

Подставляя найденное выражение в уравнение распространения упругой волны (П2.2), опять приходим к уравнению (П1.1), где теперь

$$v = \sqrt{\frac{p_0}{\rho_0}}. \quad (\text{П2.3})$$

Формула (П2.3) была получена Ньютоном. Подставляя в нее данные атмосферного воздуха, найдем, что $v = 290$ м/с. Экспериментальные исследования дают значение $v = 331$ м/с. Лаплас предположил, что колебания плотности при распространении звука происходят достаточно быстро, чтобы процесс можно было считать адиабатическим. Из уравнения адиабаты для единицы площади слоя следует, что

$$p_0^{1/\gamma} = (p_0 + \Delta p)^{1/\gamma} (1 + \varepsilon),$$

где γ — показатель адиабаты, или

$$p_0 = (p_0 + \Delta p)(1 + \varepsilon)^\gamma.$$

Отсюда с точностью до бесконечно малых высшего порядка, согласно формуле Тейлора, имеем

$$\Delta p = -\gamma \varepsilon p_0.$$

Подставляя найденную формулу в уравнение (П2.2), опять приходим к волновому уравнению, где теперь

$$v = \sqrt{\gamma \frac{p_0}{\rho_0}}. \quad (\text{П2.4})$$

Формула (П2.4) носит название *формулы Лапласа*. Подставляя в нее параметры воздуха, найдем, что $v = 340$ м/с. Срав-

нивая с экспериментальным результатом полученное значение скорости распространения волн в воздухе, видим, что процесс распространения звука в воздухе ближе к адиабатическому процессу, чем к изотермическому. Отсутствие теплообмена исключает механизм затухания звуковой волны, а так как звуковые волны в воздухе все-таки затухают, то более естественно считать процесс звуковых колебаний политропическим с показателем политропы n . Вывод выражения для скорости звука в этом случае отличается от приведенного выше только заменой γ на n . В результате для скорости звука получается формула

$$v = \sqrt{n \frac{p_0}{\rho_0}}, \quad (\text{П2.5})$$

обобщающая формулы (П2.3) и (П2.4).

Значение n можно найти в исследованиях по затуханию звуковых волн в воздухе. При изотермическом процессе распространения звука в воздухе $n = 1$, а при адиабатическом $n = \gamma$.

Распространение тепла в сплошной среде. В основе теории теплопроводности лежит закон Ж. Фурье, согласно которому вектор $\vec{q}$ потока тепла в среде пропорционален градиенту температуры:

$$\vec{q} = -\lambda \cdot \text{grad}(u), \quad (\text{П2.6})$$

где множитель λ носит название *коэффициента теплопроводности* и определяется свойствами материала, в котором происходит распространение тепла. Коэффициент теплопроводности служит макроскопической характеристикой среды, в которой распространяется тепло.

В частном случае плоскостной среды, когда направление потока тепла происходит вдоль нормали к плоскости, которой параллельны слои, температурное поле зависит от одной координаты x , отсчитываемой от начала первого слоя до конца последнего. Поверхности равных температур представляют собой

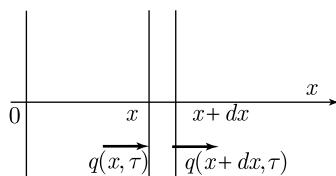


Рис. П2.4

параллельные плоскости (рис. П2.4), а закон Фурье (П2.6) принимает наиболее простой вид

$$q = -\lambda \cdot \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (\text{П2.7})$$

где q — плотность теплового потока.

В случае, когда поле температур зависит не только от координаты x , но и от времени t , разность тепловых потоков в двух произвольно выбранных бесконечно близких сечениях (см. рис. П2.4)

$$q(x, t) - q(x + dx, t) = -\frac{\partial q}{\partial x} dx$$

расходуется на нагрев среды, расположенной между этими сечениями. За промежуток времени dt поступающее тепло идет на увеличение температуры. Для единицы поверхности

$$-\frac{\partial q}{\partial x} dx dt = \rho c_p dx du, \quad (\text{П2.8})$$

где ρ — плотность материала, c_p — его удельная теплоемкость.

Из уравнения баланса (П2.8) следует, что

$$\rho c_p \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial q}{\partial x},$$

откуда с учетом закона Фурье (П2.7) получаем дифференциальное уравнение

$$\rho c_p \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad (\text{П2.9})$$

которому удовлетворяет температурное поле в среде.

Уравнение (П2.9) упрощается, если λ постоянно или мало связано с изменением температуры u и с изменением координаты x , зависимостью от которых можно пренебречь. В этом случае вместо уравнения (П2.9) возникает уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (\text{П2.10})$$

где параметр $a = \frac{\lambda}{\rho c_p}$ называется коэффициентом температуропроводности.

Приложение 3

ПОРТРЕТНО-БИОГРАФИЧЕСКАЯ ГАЛЕРЕЯ СОЗДАТЕЛЕЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Предлагаем читателю ознакомиться с портретами и краткими неформальными биографиями ученых, чьи имена встречаются в книге. Все они внесли выдающийся вклад в создание и развитие современной математической физики. Предлагаемые материалы мы расположили в хронологическом порядке.

Основы математической физики были заложены академиками Петербургской академии наук великим Леонардом Эйлером и Даниилом Бернулли, а также выдающимся французским математиком Д'Аламбером. Дальнейшее ее развитие осуществлялось в основном достижениями французских ученых; затем пальма первенства опять вернулась в Россию.

Сначала дадим краткое описание вклада в развитие математической физики представленных в галерее ученых.

- *Л. Эйлер* и *Ж.Л. Д'Аламбер* дали вывод уравнения струны, получили формулу колебаний бесконечной струны с заданными начальными условиями.

- *Д. Бернулли* ввел класс специальных тригонометрических рядов, названных впоследствии рядами Фурье, и широко применял их для нахождения решений уравнения струны. Он же при исследовании колебаний тяжелой цепи ввел дифференциальное уравнение цилиндрических функций (известное теперь как уравнение Бесселя) и цилиндрическую функцию нулевого порядка.

- *П.С. Лаплас* при исследовании задач электромагнетизма ввел ДУ, получившее его имя. Он был и автором одного из вариантов операционного исчисления (преобразование Лапласа).

- *Ж. Фурье* в ходе создания своей теории теплоты вывел уравнение теплопроводности. Широко пропагандировал для решения возникающих здесь задач мало известные современникам ряды Бернулли, названные впоследствии рядами Фурье. Ввел их непрерывный интегральный аналог — операционное исчисление в форме преобразования Фурье.

- *С. Пуассон* исследовал уравнение Лапласа с ненулевой правой частью — уравнение Пуассона.

- Именем *О.Л. Коши* называются задачи во всем пространстве с заданными начальными условиями.

- *П.Г. Дирихле* провел систематическое изучение краевых задач для уравнения Лапласа.
- *Ш.Ф. Штурм* и *Ж. Лиувиль* изучали общую краевую задачу для обыкновенного линейного ДУ второго порядка.
- *Й. Стефан* изучил новый класс задач математической физики — задачи о фазовом переходе.
- *К.Г. Нейман* рассматривал краевые задачи с нормальной производной на границе области.
- *А.М. Ляпунов* провел строгое исследование пространственных задач математической физики.
- *В.А. Стеклов* обосновал разложения функций в ряд по собственным функциям оператора Штурма–Лиувилля.
- *Б.Г. Галёркин* предложил и разработал эффективный метод приближенного решения нелинейных задач математической физики, существенно обобщающий метод Фурье.
- *С.Л. Соболев*, применяя функциональный анализ к задачам математической физики, ввел понятие обобщенных функций (распределений) и различных их пространств. Он доказал теоремы вложения различных классов таких пространств. Современные математическая физика и вычислительная математика базируются на теории Соболева.
- *И.Г. Петровский* внес крупнейший вклад практически во все разделы математической физики. Ему принадлежит, в частности, доказательство единственности решения задачи Дирихле.
- *А.Н. Тихонов* доказал общий вариант теоремы единственности решения задачи Коши для уравнения струны. Он построил теорию регуляризации некорректных задач, составляющих новую важнейшую прикладную область математики.
- *А.А. Самарский* разработал общую теорию разностных схем и общую теорию математического моделирования.

Перейдем к более подробным биографиям этих ученых.

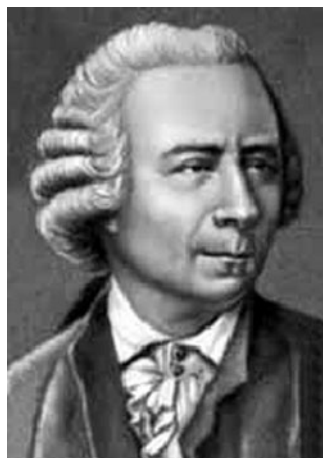
ЭЙЛЕР (Euler) Леонард (1707–1783)

Один из величайших ученых всех времен и народов. Швейцарский, российский и немецкий математик, механик, физик и астроном. По происхождению швейцарец. Еще девятнадцатилетним юношей он победил в конкурсе Парижской академии наук на тему «Оптимальное расположение мачты на корабле».

С 1727 по 1741 гг. работал в России, в Петербургской академии наук. Через год после приезда в Петербург он уже бегло говорил по-русски. Кроме теоретических исследований Эйлер занимался картографией, консультировал кораблестроителей и ар-

тиллеристов, проектировал пожарные насосы. Астрономические расчеты, на которые группа академиков просила три месяца, Эйлер в одиночку выполнил за три дня, но от перенапряжения ослеп на правый глаз. От составления астрологических гороскопов Эйлер отказывался, направляя искателей к профессионалам. Известно лишь, что он составил гороскоп малолетнего российского императора Ивана VI, ужаснулся полученному результату и сообщил его только доверенному лицу.

Когда в России началась серия государственных переворотов и дела академии пришли в упадок, Эйлер переехал в Германию, стал директором математического департамента Берлинской академии наук и проработал там 25 лет. Оставаясь ведущим математиком Европы, Эйлер был вынужден заниматься также лотереей, проблемами чеканки новых монет, прокладки водопровода, пенсионного обеспечения и другими техническими вопросами. При этом он не порывал связи с Россией, оставаясь ее почетным академиком с постоянным окладом, публикуя там свои труды и поддерживая научные контакты.



Во время Семилетней войны русская артиллерия разрушила дом Эйлера. Фельдмаршал Салтыков сразу же возместил возможные потери, а императрица Елизавета Петровна, кроме того, прислала ученому значительно более крупную сумму денег. В 1766 г., по приглашению Екатерины II, Эйлер возвратился в Россию, где оставался до своей смерти.

Эйлеру принадлежат свыше 800 работ по математическому анализу, дифференциальной геометрии, теории чисел, приближенным вычислениям, небесной механике, математической физике, оптике, баллистике, кораблестроению, теории музыки и другим областям знания, оказавших значительное влияние на развитие науки.

Современники Эйлера вспоминали, как он, сидя на кухне в окружении домочадцев, полуслепой, с кошкой на плече и с внуком на коленях, проводил свои выдающиеся математические исследования. Ослепнув совершенно, Эйлер, обладая необыкновенными памятью и мышлением, диктовал свои труды помощникам.

Эйлер был исключительно доброжелательным человеком. Зная о работах Лагранжа по вариационному исчислению, он придерживал публикацию своих работ в этой области, чтобы дать молодому человеку зарекомендовать себя в науке. Эйлер и Лагранж общепризнанно считаются создателями вариационного исчисления. Эйлер помог и научной карьере Ломоносова, дав прекрасный отзыв о его работах по физике и химии.

Младший сын Эйлера стал генерал-лейтенантом от артиллерии в Российской армии.

БЕРНУЛЛИ (Bernoulli) Даниил (1700–1782)



Выдающийся швейцарский и российский физик и математик. Принадлежал к великой математической семье Бернулли, крупнейшими представителями которой были Якоб, его брат Иоганн и сыновья последнего, Николай и Даниил. Начальное обучение прошел под руководством отца и брата. Получил медицинское образование в Базеле. Основные его научные достижения — это создание кинетической теории газов, гидродинамической теории.

Вместе с Д'Аламбером и Эйлером Даниил Бернулли является основателем математической физики. Он широко использовал разложения решений уравнения струны в тригонометрические ряды и отстаивал в споре с Эйлером их важнейшую роль при решении задач математической физики. Много позже эти ряды были названы именем Фурье, который широко применял их в задачах созданной им теории теплоты. Бернулли ввел принцип суперпозиции колебаний, понятия периодических и гармонических колебаний. Изучая задачу о колебаниях тяжелой цепи, Бернулли ввел также уравнение цилиндрической функции нулевого порядка. Цилиндрическая функция порядка $\frac{1}{3}$ была известна его дяде Якобу Бернулли. Многие годы спустя подобные функции были названы функциями Бесселя по имени немецкого астронома Бесселя, применившего их при решении одной астрономической задачи.

В 1725 г. Даниил приехал в Россию, где стал академиком Петербургской академии наук сначала в области медицины, а затем — математики. Вскоре он уговорил своего друга Леонарда Эйлера также переехать в Россию. Из-за серии государственных переворотов в России Даниил Бернулли вернулся в Швейцарию в качестве выдающегося медика, оставшись российским почетным академиком. Из 75 его научных работ 47 были опубликованы в России, чему способствовала его постоянная дружеская и научная переписка с Эйлером. С этим же была связана сравнительно малая известность его исследований на Западе. Все же Бернулли высоко ценился международным научным сообществом, являясь членом нескольких академий.

Д'АЛАМБЕР (D'Alembert) Жан Лерон (1717–1783)

Французский математик, механик и философ-просветитель, иностранный почетный член Петербургской АН (1764).

Незаконнорожденный сын маркизы и артиллерийского офицера, ставшего впоследствии генералом, Д'Аламбер жил как приемный ребенок в семье стекольщика. В дальнейшем он заботился о приемных отце и матери, с гордостью считая их своими родителями. Но и биологический отец не забывал о нем, дав сыну прекрасное образование наравне с другими своими детьми. Д'Аламбер готовился стать адвокатом, но все больше увлекался наукой. В 22-летнем возрасте он был награжден премией Парижской академии, а через год стал ее адъюнктом.



В своем трактате о динамике Д'Аламбер сформулировал принцип составления дифференциальных уравнений движения материальных систем, названный впоследствии принципом Д'Аламбера. Создал теорию приливов и воздушных течений. Доказал основную теорему высшей алгебры о числе корней алгебраического уравнения, которую называют иногда теоремой Д'Аламбера–Гаусса. Ему принадлежат также исследования систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Д'Аламбер первым, до Бернулли и Эйлера, начал изучение уравнения

струны. Занимался обоснованием теории возмущения планет. Изложил элементы музыкальной теории и практики.

Д'Аламбер, совместно с Дидро, являлся создателем и автором «Энциклопедии наук, искусств и ремесел», для которой написал все статьи по математике и физике. Здесь, в частности, впервые время рассматривается как четвертое измерение. Статьи Д'Аламбера по философии, носящие антирелигиозный характер, создали ему бесчисленных врагов в клерикальных кругах. Он считал также, что нравственные принципы всеобщи и не зависят от среды.

В светских салонах Д'Аламбер выделялся своим остроумием, умением вести беседу, хотя имел невзрачную внешность, тонкий голос, низкий рост и незнатное происхождение.

ЛАПЛАС (Laplace) Пьер Симон (1749–1827)



Выдающийся французский астроном, математик, физик, иностранный почетный член Петербургской АН (1802). Лапласа называли французским Ньютоном.

Лаплас родился в крестьянской семье. Существует гипотеза, что он был внебрачным ребенком знатного человека. С раннего детства мальчик имел большую материальную поддержку и получил прекрасное образование. Лаплас знал языки, историю, философию, химию, биологию. Молодым человеком он представил Д'Аламберу исследование об основных принципах меха-

ники, начав свой грандиозный путь в науку.

Лаплас был одним из создателей теории вероятностей, автором множества выдающихся трудов в области дифференциальных уравнений и математической физики. Он является одним из разработчиков методов операционного исчисления (преобразование Лапласа).

Лапласа называют в числе создателей небесной механики. Он дал глубокий анализ движения небесных тел. Ему принадлежит гипотеза об образовании Солнечной системы из газовой туманности.

Лаплас занимал различные крупные административные посты. Будучи экзаменатором королевского корпуса артиллеристов,

он высоко оценил на экзамене успехи 17-летнего Бонапарта и с тех пор находился с ним в теплых отношениях. На второй день после государственного переворота Наполеон назначил Лапласа министром внутренних дел. Затем Лаплас стал графом Империи, получил все ее высшие награды. Предполагая, что великий математик хорошо считает, Наполеон назначил его министром финансов Франции, но очень быстро был вынужден признать свою ошибку: ведь выдающиеся математические свершения обычно отнюдь не связаны с умением хорошо считать. После отстранения Наполеона Лаплас получил титул маркиза, стал пэром Франции и председателем сената.

Лаплас высоко ценил Эйлера: *«Читайте, читайте Эйлера, он наш учитель во всем»*.

На первом этаже Эйфелевой башни в списке величайших ученых стоит имя Лапласа.

ФУРЬЕ (Fourier) Жан Батист Жозеф (1768–1830)

Выдающийся французский математик и физик, иностранный почетный член Петербургской АН (1829).

Родился во французском городе Осере. Отец Фурье был портным, однако один из его предков был заметной личностью в Париже, являясь настоятелем капитула каноников при соборе Нотр-Дам-де-Пари. В возрасте девяти лет мальчик потерял обоих родителей и нашел приют в доме органиста и учителя музыки при соборе в Осере. Епископ, подметивший в мальчике необыкновенные умственные способности, устроил его в местную



военную школу, находившуюся под управлением бенедиктинцев. Здесь Фурье пристрастился к изучению математики. По окончании курса юноша мог бы поступить на службу в артиллерию или в инженеры, но так как туда допускались только дворяне, ему пришлось стать послушником в аббатстве св. Бенедикта на Луаре. В самом начале революции он, однако, вышел из аббатства и был принят профессором математики в военную школу, где прежде учился.

В 1794 г. Национальный конвент Франции выразил желание, чтобы в Париже была учреждена *«нормальная Школа, где*

были бы призваны из всех частей Республики уже образованные в полезных науках граждане, чтобы под руководством наиболее ученых во всех областях профессоров обучаться искусству преподавания». В числе таковых граждан оказался и Фурье. Здесь на его математический талант обратили внимание Лагранж, Лаплас и Монж.

В 1798 г. Фурье принимал участие в экспедиции Наполеона в Египет в составе Научного легиона. Здесь он проявил недюжинный административный и дипломатический талант, что часто позволяло избегать кровопролития. Уже в пожилом возрасте Фурье говорил, что жара пустыни очень полезна, жил в жарко натопленной квартире и одевался наподобие мумии, написал историческое введение к «Описанию Египта».

В 1802 г. он был назначен префектом Изерского департамента и занимал эту должность в течение 13 лет. Там, среди прочих административных занятий, он был инициатором дела осушения болот в его департаменте. В 1808 г. Жан Фурье получает от Наполеона титул барона и награждается орденом Почетного легиона. После поражения Наполеона под Ватерлоо и конца «ста дней» Фурье был отстранен от должности префекта и переехал в Париж, где некоторое время работал директором Статистического бюро.

В 1817 г. Парижская академия наук избирает его своим членом (первая попытка была предпринята в 1816 г., но король Людовик XVIII отменил избрание). Фурье становится одним из самых влиятельных академиков, и в 1822 г. его избирают пожизненным секретарем Академии. В этом же году он издает свою знаменитую «Аналитическую теорию тепла» (*Théorie analytique de la chaleur*), которую позже один из величайших физиков лорд Кельвин назовет «Великой математической поэмой».

Фурье принадлежит теорема о числе вещественных корней уравнения на интервале. Но главным делом его жизни была созданная им аналитическая теория тепла. Он вывел уравнение теплопроводности в пространстве, предложил метод разделения переменных. Краевые задачи с различными граничными условиями решались им с широким использованием специального класса тригонометрических рядов. Эти ряды ныне принято называть рядами Фурье, хотя эпизодически они использовались еще Эйлером и Клеро, а впервые были введены Даниилом Бернулли, отмечавшим их важнейшую роль при решении задач математической физики. Заслугой Фурье является детальная разработка соответствующей теории и систематическая пропаганда приме-

нения таких рядов. Строгое обоснование метод Фурье получил лишь в XX в., начиная с работ российского и советского математика В.А.Стеклова. Далеким успешным потомком метода Фурье является метод другого российского и советского ученого Б.Г.Галёркина — это один из важнейших современных математических методов.

Для решения некоторых задач Фурье широко использует введенное им представление заданной функции в виде специального интеграла, названного впоследствии интегралом Фурье. Фактически здесь используется специальное интегральное преобразование, которое стали называть преобразованием Фурье. В современной математике преобразование Фурье, наряду с преобразованием Лапласа, является одним из самых эффективных средств в математических и прикладных исследованиях.

На первом этаже Эйфелевой башни в списке величайших ученых стоит имя Жана Фурье.

ПУАССОН (Poisson) Симеон Дени (1781–1840)

Знаменитый французский математик, механик и физик, член Парижской АН (1812), иностранный почетный член Петербургской АН (1826).

Его отец был нотариусом в маленьком городе, а после Французской революции главой городского совета. После неудачных попыток сделать из сына нотариуса, а затем — врача, отец усомнился в его способностях. Однако, увлекшись решением математических задач из журнала Политехнической школы, 17-летний Пуассон поступил туда,

сдав вступительные экзамены лучше всех. Здесь его учителями стали великие Лаплас и Лагранж, которых он привлёк своим математическим талантом. Политехническая школа была создана Революционным конвентом, чтобы готовить инженерные и офицерские кадры и в перспективе — высших технических и государственных деятелей.

В 19 лет Пуассон опубликовал две научные статьи, сделавшие его имя широко известным в научном мире. Будучи прямым учеником Лапласа, он продолжил его деятельность в тех же на-



учных направлений. В математической физике он изучал электростатику и магнетизм, уравнение Пуассона дает связь электрического потенциала с плотностью пространственного распределения электричества. Известное в теории вероятностей распределение Пуассона и другие его результаты используются в теории игр, в теории массового обслуживания, в статистической физике, в теории радиоактивного распада. В астрономии он исследовал вопросы устойчивости Солнечной системы, возмущения планетарных орбит, магнитное поле Земли. Пуассон внес также вклад в теорию упругости, в гидромеханику (распространение волн в глубоком бассейне), в теорию колебаний и в теорию распространения света.

О высоком авторитете Пуассона говорит тот факт, что ему был поручен контроль над преподаванием математики во всех учебных заведениях Франции. При Наполеоне Пуассон стал бароном, а при Луи-Филиппе — пэром Франции.

БЕССЕЛЬ (Bessel) Фридрих Вильгельм (1784–1846)



Выдающийся немецкий астроном, член Берлинской академии наук, иностранный почетный член Петербургской АН (1814).

Родился в семье мелкого судебного чиновника. Не желая изучать латынь, в 13 лет бросил гимназию и получал домашнее образование под руководством отца. В 14 лет, без астрономических инструментов, пользуясь лишь своим превосходным зрением, сделал первое свое астрономическое открытие: установил, что созвездие Лиры является двойной звездой. В течение семи лет Бессель работал в крупной фирме, готовя себя к международной ком-

мерческой деятельности. Он изучил ряд иностранных языков и навигационную астрономию. В 20 лет он вычислил орбиту кометы Галлея.

Когда Бесселю предложили в фирме административный пост с высоким окладом, он неожиданно для всех отказался от этого предложения и стал ассистентом в частной астрономической обсерватории. Глубокие знания Бесселя в астрономии и матема-

тике, полученные самообразованием, были высоко оценены его другом и учителем, великим Гауссом. Ему было поручено создание в Кёнигсберге (ныне Калининград) новой астрономической обсерватории, директором которой он оставался до самой смерти. Не имея формально ни школьного, ни вузовского образования, Бессель был также профессором математики и астрономии Кёнигсбергского университета. Он внес большой вклад в изучение масштабов Вселенной. Разработал теорию солнечных затмений, определил массы планет и элементы спутников Сатурна.

В историю науки Бессель вошел и как один из крупных математиков. Он широко использовал так называемые цилиндрические функции для вычисления возмущенного движения планет. Цилиндрические функции первого рода, как и дифференциальное уравнение, которому они удовлетворяют, называют теперь по имени Бесселя, хотя и эти функции, и уравнение были получены еще Л. Эйлером при изучении колебаний мембраны в 1766 г., т. е. почти за 50 лет до работ Бесселя, а функция Бесселя нулевого порядка была введена еще в 1738 г. в работе Даниила Бернулли, в которой изучались колебания тяжелой цепи. Бесселевы функции нашли впоследствии широкое применение в математической физике. Именем Бесселя названо также известное неравенство для коэффициентов ряда Фурье по произвольной ортогональной системе, доказанное Бесселем для тригонометрической системы функций.

Похоронен Ф.В. Бессель на знаменитом профессорском кладбище в Калининграде. Именем Бесселя назван кратер на видимой стороне Луны.

КОШИ (Cauchy) Огюстен Луи (1789–1857)

Выдающийся французский математик, иностранный почетный член Петербургской АН (1831).

Родился в Париже, в семье государственного чиновника. Его первым учителем был отец, который занимался с сыновьями историей и древними языками, античных авторов они читали в подлинниках. Окончив Политехническую школу, Коши поступил в Институт путей сообщения, затем работал в городе Шербуре военным инженером на строительстве порта. С 1813 г. он начал публиковать работы по математике, а в 1816 г. был назначен членом Парижской академии наук вместо Г. Монжа, уволенного по политическим причинам. После свержения Карла X Коши, будучи ревностным роялистом, покинул вместе с ним Францию и вернулся в Париж только через много лет. Во время эмиграции

он давал уроки математики, физики и химии внуку короля — герцогу Бордоскому.



Научные работы Коши посвящены арифметике, теории чисел, алгебре, математическому анализу, дифференциальным уравнениям, механике, математической физике и др. Всего он написал свыше 800 работ, полное собрание его сочинений содержит 27 томов.

Заслугой Коши является систематическое строгое изложение дифференциального и интегрального исчисления Ньютона–Лейбница, сделавшее их доступными широкому кругу учащихся. База математического ана-

лиза — теория пределов — и ныне преподается по Коши.

Коши разработал ряд разделов современной теории функций комплексной переменной, в частности, теорию вычетов.

В теории дифференциальных уравнений Коши впервые поставил общую задачу о нахождении решения дифференциального уравнения с заданными начальными условиями (называемую с тех пор задачей Коши). Ему принадлежит основополагающая теорема существования и единственности решения такой задачи.

ДИРИХЛЕ (Dirichlet) Петер Густав (1805–1859)



Немецкий математик, иностранный член-корреспондент Петербургской АН (1837).

Был домашним учителем в Париже, где примыкал к кругу учеников Фурье. Затем работал в Берлине, заняв пост профессора Берлинского университета после Гаусса.

Основные труды по аналитической теории чисел, теории рядов (ввел понятие условной сходимости), теории функций, математической физике (краевые задачи), строго доказал теорему о разложимости в ряд Фурье кусочно-непрерывной монотонной функции.

ШТУРМ (Sturm) Шарль Франсуа (1803–1855)

Французский математик, член Парижской АН (1836), иностранный член-корреспондент Петербургской АН (1836). С 1840 — профессор Политехнической школы в Париже, где стал преемником С. Пуассона.

Основные работы Штурма относятся к решению краевых задач уравнений математической физики и связанной с этим задачей о разыскании собственных значений и собственных функций для обыкновенных дифференциальных уравнений (задача Штурма–Лиувилля). С его именем связано создание теории колебаний струны. Штурм дал общий метод для определения числа корней алгебраических уравнений, лежащих на заданном отрезке (правило Штурма). Ему принадлежат также работы по оптике и механике.

**ЛИУВИЛЛЬ (Liouville) Жозеф (1809–1882)**

Французский математик и механик, член Парижской АН (1839), иностранный член-корреспондент Петербургской АН (1840).

Окончил Политехническую школу и со временем стал ее профессором. Был членом Национального собрания Франции.

Труды по теории функций, дифференциальным уравнениям, механике. В 1837–41 гг. совместно со Штурмом исследовал краевую задачу для линейных дифференциальных уравнений второго порядка (задача Штурма–Лиувилля). Дал доказательство существования трансцендентных чисел и указал прием фактического их построения. Ввел конформные отображения. Установил фундаментальную в механике теорему о сохранении фазового объема, известную как теорема Лиувилля. Сформу-



лировал и доказал теорему об интегрировании канонических уравнений динамики.

СТЕФАН (Stefan) Йозеф (1835–1893)



Австрийский физик, член Австрийской АН (1865). Учился в Венском университете, где впоследствии стал профессором, а затем директором Института экспериментальной физики университета и ректором университета. Работы в области оптики, акустики, электромагнетизма, кинетической теории газов, гидродинамики, теории теплового излучения. Разработал теорию диффузии газов (1871), изучал их теплопроводность, нашел значения коэффициентов

теплопроводности многих газов. В 1879 г. экспериментально установил пропорциональность энергии, излучаемой нагретым телом, четвертой степени абсолютной температуры (закон Стефана–Больцмана). Важную в приложениях роль играют известные в математической физике задача Стефана и обратная задача Стефана с движущейся границей.

НЕЙМАН (Neumann) Карл Готфрид (1832–1925)



Немецкий математик, профессор университетов в Галле, Тюбингене и Лейпциге. Родился в Кёнигсберге (ныне Калининград), в семье профессора Кёнигсбергского университета Ф.Э.Неймана (1798–1895). Франц Эрнст Нейман известен как создатель научной школы, иностранный почетный член Петербургской АН, разработчик первой математической теории электромагнитной индукции, автор выдающихся работ по кристаллофизике; некоторые историки науки называют его крупнейшим немецким

физиком XIX в. Старший сын Ф.Э.Неймана Карл проявил себя его достойным учеником.

В теории дифференциальных уравнений с частными производными К.Г. Нейману принадлежат работы, относящиеся к теории потенциала (в частности, к теории логарифмического потенциала), в которых он предложил метод (метод Неймана) решения задачи Дирихле для случая выпуклых контуров (на плоскости) и выпуклых поверхностей (в пространстве). Он исследовал вторую краевую задачу (так называемую задачу Неймана). К.Г. Нейман занимался также проблемами физики.

ЛЯПУНОВ Александр Михайлович (1857–1918)

Российский математик и механик, академик Петербургской АН, ученик П.Л. Чебышёва.

Работы А.М. Ляпунова посвящены теории устойчивости движения и равновесия механических систем, теории фигур равновесия равномерно вращающейся жидкости, математической физике, дифференциальным уравнениям и теории вероятностей. Важнейшим достижением А.М. Ляпунова является создание современной теории устойчивости движения и равновесия механических систем, определяемых конечным числом параметров. Метод определения и исследования устойчивости решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений называется теперь методом Ляпунова. Наряду с Анри Пуанкаре и Эрхардом Шмидтом Ляпунов является создателем теории ветвления и бифуркаций, исследующей критические явления. Ныне развитию этой теории, исключительно важной для приложений, посвящены многие десятки монографий и тысячи научных публикаций.

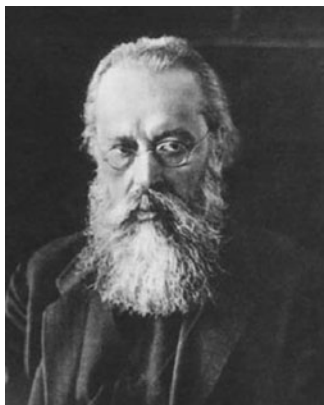


В математической физике А.М. Ляпунов также получил ряд важнейших результатов. Он исследовал особенности потенциала системы зарядов и диполей, непрерывно распределенных на некоторой произвольной поверхности. В теории вероятностей он развил метод характеристических функций, дал при весьма широких условиях доказательство центральной предельной теоремы, высказанной, но не доказанной полностью его учителем, выдающимся российским математиком П.Л. Чебышёвым. Метод,

использованный здесь Ляпуновым, является ныне одним из основных в теории вероятностей.

Жизнь Ляпунова завершилась трагически. В 1918 г. в период гражданской войны он для лечения любимой жены, больной туберкулезом легких, переехал в Одессу. Здесь он узнал, что погибли его научные рукописи, оставленные в Петербурге. Вслед за тем умерла его жена. Не выдержав этих катастрофических потерь, находясь в состоянии тяжелой депрессии, Александр Михайлович выстрелил себе в голову и через три дня, не приходя в сознание, скончался.

СТЕКЛОВ Владимир Андреевич (1863/64–1926)



Российский математик и механик, академик (с 1912 г.). В 1919–26 гг. вице-президент Академии наук.

По его инициативе в 1921 г. в Петрограде был организован Физико-математический институт Российской академии наук, директором которого он оставался до конца своей жизни. В 1926 г. имя В.А.Стеклова было присвоено Физико-математическому институту, который позднее переехал в Москву, а затем разделился на два института — Математический институт им. В.А.Стеклова и Физический институт им. П.Н.Лебедева.

Окончил Харьковский университет, где его обучение проходило под сильным влиянием А.М. Ляпунова. Позже стал там же профессором. Затем работал в Петербургском университете.

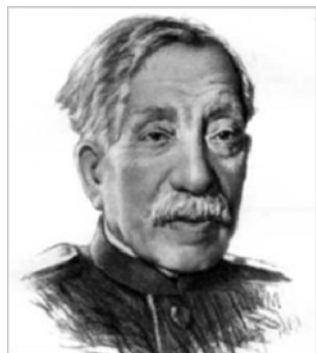
Основные направления научного творчества Стеклова относятся к математической физике. Он занимался задачами распространения тепла, вопросами колебаний струны и стержня. Им исследованы вопросы разложения функций в ряды по наперед заданным ортогональным системам функций, возникающие при решении краевых задач математической физики. В основе этих исследований лежит введенное Стекловым понятие замкнутости системы ортогональных функций. Он вплотную подошел к понятию гильбертова пространства. В механике Стеклов исследовал движение твердого тела в жидкости и теорию вихрей.

В.А.Стеклов известен также как историк математики, философ и писатель.

ГАЛЁРКИН Борис Григорьевич (1871–1945)

Российский и советский инженер, ученый в области теории упругости и математики, академик АН СССР, инженер-генерал-лейтенант.

Академик Галёркин был признанным авторитетом в среде инженеров-проектировщиков. Его приглашали в качестве консультанта при проектировании и строительстве в СССР ряда крупных гидроэлектростанций (Волховская ГЭС, Днепрогэс и других) и тепловых электростанций.



В 1915 г. Галёркиным был предложен приближенный метод решения краевых задач для дифференциальных уравнений. Этот метод состоит в нахождении приближенного решения нелинейной задачи в виде линейной комбинации элементов заданной линейно независимой системы и является широким обобщением метода Фурье. Он был применен к большому числу задач о равновесии стержней и пластин и назван в честь автора методом Галёркина. В наши дни методом Галёркина доказываются теоремы существования решений абстрактных нелинейных уравнений. Он лежит в основе компьютерных программ для решения большого круга нелинейных задач.

ПЕТРОВСКИЙ Иван Георгиевич (1901–1973)

Советский математик, академик (1946) и член Президиума (с 1953) АН СССР, Герой Социалистического Труда (1969).

Родился в городе Севске Брянской области, в купеческой семье. Городское реальное училище окончил в 1917 г. с отличными отметками по всем дисциплинам, кроме двух: математики и рисования. Однако живопись он всегда любил. Будучи студентом Московского университета, Иван Георгиевич Петровский числился тугодумом, и преподаватели не сразу разобрались, как было ранее и в школе, что за его задержками с ответами скрываются необычно



глубокие и нестандартные соображения. После окончания Московского университета в 1927 г. Петровский работал там же, с 1933 — профессором, с 1951 — ректором.

Основные его труды относятся к теории дифференциальных уравнений в частных производных, алгебраической геометрии, теории вероятностей, качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений, математической физике и другим областям математики. В математической физике Петровский заложил основы общей теории систем дифференциальных уравнений в частных производных; выделил и изучил классы эллиптических, гиперболических и параболических систем; установил аналитичность решений эллиптических систем, изучил задачу Коши для гиперболических и параболических систем, исследовал зависимость решений задачи Коши от начальных данных, установив условия существования лакунов и диффузии волн.

Руководя МГУ более двадцати лет, Петровский привлек к работе в университете крупнейших ученых страны (в том числе более ста членов АН СССР). Коллеги Ивана Георгиевича по университету отмечали — как самые привлекательные черты его характера — доступность и интерес ко всему окружающему. У него не было определенных часов приема, так как он принимал всегда, когда выдавалась свободная минута, стараясь помочь всем, кто обращался к нему за помощью, будь то общественная или личная просьба.

СОБОЛЕВ Сергей Львович (1908–1989)

Советский математик и механик, один из великих ученых двадцатого столетия. Академиком АН СССР он стал в 1939 г. в возрасте 31 года за выдающийся вклад в математическую физику, а затем был избран депутатом Верховного Совета СССР.

С 1934 г. С.Л. Соболев был заведующим отделом дифференциальных уравнений с частными производными в Математическом институте АН СССР; позднее, кроме того, заведовал кафедрой вычислительной математики в МГУ. По его инициативе был создан Вычислительный центр МГУ.

С.Л. Соболев — один из организаторов и исполнителей советского Атомного проекта, он был там заместителем академика И.В. Курчатова по науке.

Сергей Львович был также одним из создателей Сибирского отделения АН СССР, начавшегося строительством Новосибирского Академгородка. Там он возглавил Институт математики, ныне носящий его имя. В Сибири появились крупные математические школы в области функционального анализа, диф-

ференциальных уравнений, математической экономики, алгебры и логики, геометрии и топологии, кибернетики.

С.Л. Соболев широко применял методы функционального анализа к задачам теории уравнений в частных производных. Им введен класс функциональных пространств, получивших название пространств Соболева, сыгравших исключительную роль в формировании современных математических воззрений в теоретической и прикладной математике. Он ввел понятия обобщенных решений уравнений в частных производных и дал первое (1935) строгое определение обобщенных функций; с помощью этих понятий и теорем Соболева и ныне систематически изучаются различные линейные и нелинейные краевые задачи для уравнений с частными производными.

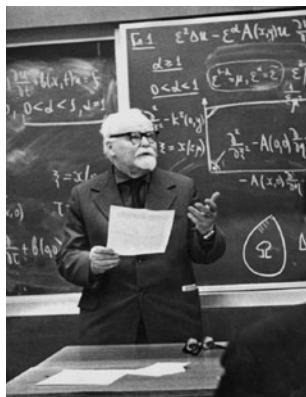


Научные и государственные заслуги С.Л. Соболева были отмечены высокими государственными наградами. Он был лауреатом Государственных премий и Героем Социалистического Труда (1968), награжден семью орденами Ленина и другими наградами.

ТИХОНОВ Андрей Николаевич (1906–1993)

Выдающийся советский математик и ученый в области прикладных наук, академик АН СССР.

Первые работы А.Н. Тихонова, сделанные в студенческие годы, посвящены топологии и функциональному анализу. О них говорится во многих научных справочниках. Затем он занялся вопросами разведки полезных ископаемых и стал членом-корреспондентом АН СССР в области геофизики. Фундаментальные результаты были получены им по методам применения электромагнитных полей для изучения внутреннего строения земной коры, а также в теории моделирования физико-химических процессов.



В 1948 г. А.Н.Тихонов предложил правительству организовать Вычислительную Лабораторию для расчета процессов, связанных с взрывом атомной бомбы, и стал одним из организаторов и руководителей Атомного проекта.

В 1978–89 гг. Тихонов был директором Института прикладной математики АН СССР (ИМП), возглавив его после смерти академика М.В.Келдыша — организатора и первого директора ИМП, главного теоретика космонавтики СССР.

Тихонов создал факультет ВМК (вычислительной математики и кибернетики) МГУ и многие годы был его деканом. Он руководил работой Научно-методического совета по математике Министерства высшего образования СССР, обеспечивавшего высокий стандарт математического образования в стране.

А.Н.Тихонов является одним из основоположников теории дифференциальных уравнений с малым параметром при старшей производной. Под его руководством созданы алгоритмы решения многих прикладных задач. В частности, совместно со своим учеником академиком А.А.Самарским он разработал теорию однородных разностных схем.

Работа над проблемами поиска полезных ископаемых привела А.Н.Тихонова к созданию крупного научного направления по исследованию обратных и некорректных задач и по разработке методов их регуляризации. Сюда относятся многие важные в приложениях задачи математической физики.

Государственные и научные заслуги академика Тихонова были высоко оценены. Он был дважды Героем Социалистического Труда (1953, 1986), лауреатом Ленинской премии за создание теории некорректных задач.

САМАРСКИЙ Александр Андреевич (1919–2008)



Советский и российский математик, академик, основоположник отечественной школы математического моделирования и численного эксперимента, создатель фундаментальной общей теории разностных схем, активный участник Атомного проекта, Герой Социалистического Труда (1969). Вместе со своим учителем академиком А.Н.Тихоновым внес большой вклад в развитие вычислительной математики. А.А.Самарский организовал и возглавил Институт математического моделирования АН СССР.

Итак, мы ознакомились с биографиями ученых. Перед нами вырисовывается ясная картина величия их научного труда. Подавляющее большинство крупных ученых оказываются людьми высочайшей культуры, энциклопедистами своего времени. Увлеченные математикой и ее приложениями, они часто достигают успеха и в других сферах человеческой деятельности.

Человек рожден на Земле со способностями, дарованными ему природой или высшими силами, не для того, чтобы растратить их на потакание своим физиологическим или низменным потребностям, зачастую совершенно излишнее. Прожить жизнь следует достойно, реализовав по возможности свои силы и способности во имя благородных целей. Этим жизненным принципам следовали многие деятели науки и искусства.

Следующее замечательное высказывание напрямую воспекает математику и провозглашает ее глубокую связь с великим искусством. Оно принадлежит выдающемуся математику и философу, лауреату Нобелевской премии лорду Бертррану Расселу:

«Математика владеет не только истиной, но и высшей красотой — красотой молодой и суровой, подобно красоте скульптуры, возвышенно чистая и способная к такому строгому совершенствованию, которое доступно только величайшему искусству».

Список литературы

1. Буда́к Б.М., Самарский А.А., Тихоно́в А.Н. Сборник задач по математической физике. — 4-е изд. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003.
2. Влади́миров В.С. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1981.
3. Ва́шарин А.А., Влади́миров В.С., Ка́римова Х.Х., Миха́йлов В.П. и др. — 4-е изд. — Сборник задач по уравнениям математической физики. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003.
4. Ку́дрявцев Л.Д. Краткий курс математического анализа. В 2 т. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005.
5. Масленникова В.Н. Дифференциальные уравнения в частных производных. — М.: Изд-во РУДН, 1997.
6. Пику́лин В.П., По́хожаев С.И. Практический курс по уравнениям математической физики. — М.: МЦНМО, 2004.
7. Самарский А.А. Введение в теорию разностных схем. — М.: Наука, 1971.
8. Со́болев С.Л. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1966.
9. Сте́клов В.А. Основные задачи математической физики. — М.: Наука, 1983.
10. Тихоно́в А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1977.
11. Трено́гин В.А. Методы математической физики. — Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002.
12. Трено́гин В.А. Функциональный анализ. — 4-е изд. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007.
13. Трено́гин В.А. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009.
14. Петро́вский И.Г. Лекции об уравнениях с частными производными. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009.

Учебное издание

ТРЕНОГИН Владилен Александрович
НЕДОСЕКИНА Ирина Сергеевна

УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Редактор *В.С. Аролович*
Оригинал-макет: *Е.В. Сабеева*
Оформление переплета: *Д.Б. Белуха*

Подписано в печать 07.02.2013. Формат 60×90/16.
Бумага офсетная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 14,25.
Уч.-изд. л. 14,3. Тираж 500 экз. Заказ №

Издательская фирма «Физико-математическая литература»
МАИК «Наука/Интерпериодика»
117997, Москва, ул. Профсоюзная, 90
E-mail: fizmat@maik.ru, fmlsale@maik.ru;
<http://www.fml.ru>

Отпечатано в ГУП
«ИПК Чувашия», 428019
г. Чебоксары, пр-т И.Яковлева, 13

ISBN 978-5-9221-1448-6



9 785922 114486