№ 879 МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИСиС»

Кафедра математики

В.А. Треногин
И.С. Недосекина

Методы математической физики

Практикум

Рекомендовано редакционно-издательским
советом университета

МИСиС
ИЗДАТЕЛЬСКИЙ ДОМ

Москва 2012

УДК 53:51
Т66

Рецензент
канд. физ.-мат. наук *С.И. Валянский*

Треногин, В.А.

Т66 Методы математической физики : практикум / В.А. Треногин, И.С. Недосекина. – М. : Изд. Дом МИСиС, 2012. – 196 с.
ISBN 978-5-87623-611-1

Практикум описывает методы решения нескольких важных задач математической физики. Излагаемый теоретический материал дополнен большим количеством задач, которые могут быть использованы при проведении практических занятий. Основная задача практикума – научить читателя на сравнительно небольшом материале осмысленно применять основные методы решения задач математической физики.

Предназначен для студентов физико-химических специальностей и специальности «Прикладная математика» технических вузов.

УДК 53:51

ISBN 978-5-87623-611-1

© В.А. Треногин,
И.С. Недосекина, 2012

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 7
1. Смешанная задача для уравнения диффузии (теплопроводности). Построение формального решения задачи методом Фурье в простейших случаях 9
1.1. Постановка задачи 9
1.2. Физическая интерпретация задачи 10
1.3. Построение решения задачи в простейших случаях 11
1.4. Сведение смешанной задачи к случаю однородных граничных условий 17
1.5. Задачи для самостоятельного решения 19
2. Собственные значения и собственные элементы симметрических неотрицательных линейных операторов. Задачи на собственные значения для оператора второй производной 22
2.1. Симметрические неотрицательные линейные операторы 22
2.2. Задачи на собственные значения для оператора второй производной 23
2.3. Задачи для самостоятельного решения 34
2.4. Таблица собственных значений и собственных функций дифференциального оператора $L = -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}$ с простейшими типами краевых условий 36
3. Смешанная задача для уравнения диффузии (теплопроводности) в случае краевых условий общего вида 37
3.1. Возможная физическая интерпретация граничных условий 37
3.2. Построение формального решения смешанной задачи методом Фурье в случае однородных краевых условий общего вида 37
3.3. Задачи для самостоятельного решения 47
4. Свойства решений смешанной задачи для уравнения диффузии (теплопроводности) 53
4.1. Принцип максимума (минимума) 53
4.2. Единственность классического решения смешанной задачи 54
4.3. Теорема существования классического решения смешанной задачи для уравнения диффузии (теплопроводности) 54
5. Смешанная задача для одномерного волнового уравнения 56
5.1. Постановка задачи 56
5.2. Физический смысл смешанных задач для волнового уравнения 57

5.3. Единственность классического решения смешанной задачи для волнового уравнения 58
5.4. Решение смешанной задачи для уравнения струны методом Фурье 61
5.5. Задачи для самостоятельного решения 68
6. Смешанная задача для уравнения диффузии (теплопроводности) в плоской области. Построение решения в случае прямоугольной пластины 74
6.1. Постановка задачи 74
6.2. Собственные значения и собственные функции оператора $L = -\Delta$ с краевыми условиями первого рода в случае прямоугольной области 75
6.3. Построение формального решения смешанной задачи для уравнения диффузии (теплопроводности) с однородными граничными условиями в прямоугольной области 78
6.4. Собственные значения и собственные функции оператора $L = -\Delta$ в прямоугольной области в случае краевых условий общего вида 80
6.5. Задачи для самостоятельного решения 81
7. Построение решения смешанной задачи для уравнения диффузии (теплопроводности) в круглой пластине 83
7.1. Уравнение и функции Бесселя 83
7.2. Выражение оператора Лапласа в полярных координатах 85
7.3. Собственные значения и собственные функции оператора Лапласа в круге 86
7.4. Построение решения смешанной задачи для уравнения диффузии (теплопроводности) в круглой пластине 90
7.5. Задача для самостоятельного решения 92
8. Смешанная задача для волнового уравнения в плоской области. Колебания прямоугольной и круглой мембраны 93
8.1. Постановка задачи 93
8.2. Построение формального решения смешанной задачи для уравнения колебаний прямоугольной мембраны 94
8.3. Построение решения смешанной задачи для уравнения колебаний круглой мембраны 97
8.4. Задачи для самостоятельного решения 100
9. Краевые задачи для уравнений Лапласа и Пуассона в плоской области. Построение формального решения краевых задач для уравнения пуассона в прямоугольнике методом Фурье 102

9.1. Постановка краевых задач для уравнения Пуассона в плоской области ... 102
9.2. Гармонические функции ... 103
9.3. Единственность классического решения внутренней задачи Дирихле ... 104
9.4. Построение формального решения краевых задач для уравнения Пуассона в прямоугольнике методом Фурье ... 105
9.5. Задачи для самостоятельного решения ... 112
10. Решение задачи Дирихле для уравнений Лапласа и Пуассона в круге ... 124
10.1. Уравнение Лапласа ... 124
10.2. Уравнение Пуассона ... 129
10.3. Задачи для самостоятельного решения ... 133
11. Решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа во внешности круга и в кольце. Задача Неймана в круге ... 137
11.1. Задача Дирихле во внешности круга ... 137
11.2. Задача Дирихле в кольце ... 140
11.3. Задача Неймана в круге ... 144
11.4. Задачи для самостоятельного решения ... 146
12. Задача Коши для уравнения диффузии (теплопроводности) ... 149
12.1. Постановка задачи Коши для одномерного уравнения диффузии (теплопроводности). Теорема единственности решения ... 149
12.2. Краткие сведения о преобразовании Фурье ... 150
12.3. Построение решения задачи Коши для однородного уравнения диффузии теплопроводности с помощью преобразования Фурье ... 151
12.4. Функция ошибок ... 157
12.5. Решение задачи Коши для неоднородного уравнения с нулевой начальной функцией ... 158
12.6. Задачи для самостоятельного решения ... 162
13. Решение смешанной задачи для уравнения диффузии (теплопроводности) на полуоси ... 167
13.1. Постановка задачи ... 167
13.2. Метод продолжения ... 168
13.3. Некоторые примеры решения задач ... 171
13.4. Задачи для самостоятельного решения ... 174
14. Метод подобия для уравнения диффузии (теплопроводности) и его приложения ... 177

14.1. Построение решения смешанной задачи на полуоси методом подобия 177
14.2. Двухпараметрическое семейство решений однородного уравнения диффузии (теплопроводности) 179
14.3. Решение смешанной задачи для уравнения диффузии (теплопроводности) с неоднородным граничным условием 181
14.4. Задачи для самостоятельного решения 183
15. Задача Коши для уравнения струны 185
15.1. Постановка задачи Коши для уравнения струны 185
15.2. Построение решения задачи Коши для однородного уравнения колебаний 186
15.3. Физическая интерпретация формулы Даламбера–Эйлера 187
15.4. Неоднородное уравнение колебаний 191
15.5. Существование и единственность классического решения задачи Коши для уравнения колебаний 191
15.6. Задачи для самостоятельного решения 192
Библиографический список 195

ПРЕДИСЛОВИЕ

Практикум знакомит с методами решения нескольких важных задач математической физики. Математическая физика занимается изучением математических моделей, описывающих разнообразные физические явления в основном в форме тех или иных задач для дифференциальных уравнений (ДУ) с частными производными. При этом обычно оказывается, что одна и та же математическая задача описывает сразу несколько, казалось бы, далеких друг от друга явлений.

В данном практикуме рассмотрены несколько наиболее важных классических задач математической физики, опираясь на простейшие соображения математического и функционального анализа и линейной алгебры. Практикум составлен на основе семестрового курса лекций, которые на протяжении многих лет читаются авторами студентам МИСиС, обучающимися по ряду физико-химических специальностей и специальности «Прикладная математика».

Первая часть начинается с изложения метода Фурье в применении к решению задач математической физики в пространственно ограниченных областях, который трактуется не как традиционный метод разделения переменных, а как более простой, на наш взгляд, геометрический метод разложения параметров задачи по некоторому базису – ортогональной системе собственных функций вспомогательного дифференциального оператора. Полученный в качестве решения функциональный ряд назван формальным решением задачи. Определенное внимание уделяется и таким важным вопросам теории, как классическое решение, его единственность, принцип максимума и энергетические соображения. При построении базиса из собственных функций используются такие простейшие понятия функционального анализа, как симметричность и неотрицательность линейных операторов в пространстве со скалярным произведением, а также свойства собственных значений и собственных функций таких операторов. Этот подход не только позволяет лучше понять структуру решения, но и существенно сократить вычисления.

Вторая часть посвящена задачам в пространственно неограниченных областях, для построения решений которых использован метод интегрального преобразования Фурье. Здесь же рассматриваются и другие важные для современного инженера-исследователя методы, например, метод подобия.

Теоретический материал иллюстрируется большим количеством решенных задач. В конце соответствующих разделов приведены задачи для самостоятельной работы. Это позволяет использовать данный материал при проведении практических занятий.

1. СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ (ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ). ПОСТРОЕНИЕ ФОРМАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ МЕТОДОМ ФУРЬЕ В ПРОСТЕЙШИХ СЛУЧАЯХ

1.1. Постановка задачи

Начнем с описания следующей задачи. Рассмотрим (рис. 1.1) в полуполосе

$$Q = \{(x, t): 0 < x < l, 0 < t < +\infty\}$$

следующее дифференциальное уравнение (ДУ), называемое *уравнением диффузии* (*теплопроводности)*:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t), \quad (x,t) \in Q, \tag{1.1}$$

где $a^2 > 0$ – известный числовой параметр; правая часть $f(x, t)$ – известная функция, определенная на Q; $u = u(x, t)$ – неизвестная функция; t играет роль времени; x – пространственная переменная.

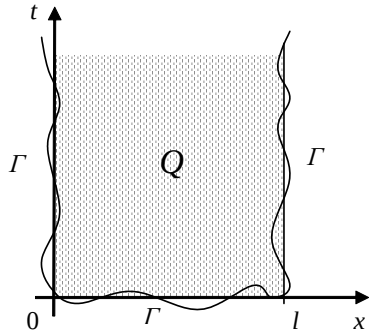


Рис. 1.1. Область определения функции u (x, t)

Дифференциальное уравнение (1.1) является уравнением с частными производными первого порядка по переменной t и второго порядка по x. По аналогии с обыкновенными ДУ, для устранения произвола в определении $u(x, t)$ следует задать дополнительные условия: одно по переменной t и два по x.

Дополнительное условие по переменной t (функция $\varphi(x)$ предполагается известной)

$$u(x,0)=\varphi(x), \qquad x\in[0,l] \tag{1.2}$$

называется начальным условием (оно задано на нижнем основании полуполосы Q).

Два дополнительных условия по переменной x

$$u(0,t)=\alpha_0(t), \;\; u(l,t)=\alpha_l(t), \quad t\in[0,+\infty) \tag{1.3}$$

называются граничными (или краевыми) условиями (они заданы на боковых сторонах полуполосы Q). Функции $\alpha_0(t)$ и $\alpha_l(t)$ также предполагаются известными.

Задача (1.1) – (1.3) называется смешанной задачей для ДУ диффузии (теплопроводности). В ней присутствуют и начальные, и граничные (краевые) условия. Иногда ее называют начально-краевой задачей.

Сформулируем, что мы будем понимать под решением задачи (1.1) – (1.3).

Обозначим через Γ границу области Q, тогда $\overline{Q}=Q\cup\Gamma$ – соответствующая замкнутая область. Существуют различные определения решения задачи (1.1) – (1.3). Ограничимся простейшим и наиболее употребляемым определением.

Определение 1.1. Функция $u(x, t)$, определенная в $\overline{Q}$, называется *классическим решением смешанной задачи* (1.1) – (1.3), если:

1) $u(x, t)$ непрерывна в $\overline{Q}$ и удовлетворяет на ее границе Γ условиям (1.2) – (1.3);

2) частные производные $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ и $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ непрерывны в Q, а $u(x, t)$ удовлетворяет в Q уравнению (1.1).

Замечание 1.1. Если смешанная задача (1.1) – (1.3) имеет классическое решение, то функция $f(x, t)$ непрерывна в Q, $\varphi(x)$ непрерывна на $[0, l]$, а $\alpha_0(t)$ и $\alpha_l(t)$ непрерывны на $[0, +\infty)$ и, кроме того, выполнены условия согласования начального и граничных условий

$$\varphi(0)=\alpha_0(0), \;\; \varphi(l)=\alpha_l(0)\,. \tag{1.4}$$

1.2. Физическая интерпретация задачи

Смешанная задача (1.1) – (1.3) имеет ряд полезных физических интерпретаций:

1. Является математической моделью явления распространения (иначе − диффузии) вещества (раствора, газа, расплавленного металла, нейтронов в металле и т.п.). Пусть задана трубка длины l (пустая или пористая). Коэффициент a^2 называется коэффициентом диффузии, он определяется физическими параметрами задачи. Внутри трубки могут существовать источники диффундирующего вещества. Функция $f(x, t)$ характеризует их плотность в сечении трубки с координатой x в момент времени t. В начальный момент задано распределение $\varphi(x)$ вещества в трубке (см. начальное условие (1.2)). На концах трубки вещество подается по законам $\alpha_0(t)$ и $\alpha_l(t)$ (см. граничные условия (1.3)). Требуется определить концентрацию вещества $u(x, t)$ в сечении x в момент времени t.

2. Дифференциальное уравнение (1.1) описывает также явление распространения тепла. Пусть задан стержень длины l. Боковая поверхность стержня предполагается теплоизолированной, т.е. тепло может проникать в стержень только через его концы. Коэффициент a^2 ($a > 0$) называется коэффициентом температуроводности. Он определяется характеристиками материала стержня. Внутри стержня может возникать или поглощаться тепло (например, при прохождении тока, вследствие химических реакций и т.п.). Функция $f(x, t)$ характеризует плотность тепловых источников внутри стержня. В начальный момент задано распределение $\varphi(x)$ температуры в стержне. На концах стержня температура меняется по законам $\alpha_0(t)$ и $\alpha_l(t)$. Требуется определить температуру стержня $u(x, t)$ в сечении x в момент времени t.

1.3. Построение решения задачи в простейших случаях

Отложим пока важный вопрос о том, существует ли решение задачи (1.1) – (1.3), единственно ли оно, и займемся формальным построением решения в простейших случаях.

Пример 1.1. Рассмотрим смешанную задачу для ДУ с нулевой правой частью и нулевыми граничными значениями (задача об остывании стержня, на концах которого поддерживается нулевая температура):

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0;$$
$$u(x, 0) = \sin x, \quad 0 \le x \le \pi;$$
$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad t \ge 0.$$

Найдем ее решение в виде

$$u(x,t) = A(t)\sin x,$$

где $A(t)$ – неизвестная пока функция.

Заметим, что граничные условия в этом случае автоматически выполняются, так как $\sin 0 = \sin \pi = 0$. Остается подобрать функцию $A(t)$ так, чтобы искомое решение удовлетворяло ДУ и начальному условию. Сначала найдем производные

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A'(t)\sin x, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -A(t)\sin x.$$

Подставим их в ДУ и получим

$$\left[A'(t) + A(t)\right]\sin x = 0.$$

Так как последнее равенство должно выполняться при любых значениях x, то

$$A'(t) + A(t) = 0.$$

Воспользуемся начальным условием

$$u(x,0) = A(0)\sin x = \sin x,$$

откуда получим, что $A(0) = 1$.

Итак, неизвестная функция $A(t)$ может быть найдена как решение следующей задачи Коши для линейного ДУ первого порядка:

$$\begin{cases} A'(t) + A(t) = 0, \\ A(0) = 1. \end{cases}$$

Общее решение этого ДУ имеет вид

$$A(t) = ce^{-t},$$

где c – произвольная постоянная.

Используя начальные условия, получим решение задачи Коши

$$A(t) = e^{-t}.$$

Таким образом, искомое формальное решение задачи (1.1) – (1.3) дается следующей формулой:

$$u(x,t) = e^{-t}\sin x.$$

Проверить, что это решение является классическим решением рассматриваемой задачи!

Рассмотрим теперь задачу (1.1) – (1.3) при дополнительном существенном предположении, что граничные условия (1.3) однородные, т.е. $\alpha_0(t) = \alpha_l(t) = 0$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t), \quad (x,t) \in Q,$$
$$u(x,0) = \varphi(x), \qquad x \in [0,l],$$
$$u(0,t) = u(l,t) = 0, \qquad t \in [0,+\infty).$$

Оказывается, решение этой задачи можно формально построить в виде ряда Фурье по тригонометрической системе функций $\left\{\sin\frac{k\pi x}{l}\right\}_{k=1}^{\infty}$.

Обратим внимание, что все функции этой системы удовлетворяют рассматриваемым однородным краевым условиям. Важно также то обстоятельство, что данная система функций ортогональна на отрезке $[0, l]$ и является базисом в пространстве непрерывных на $[0, l]$ функций. Напомним, что всякая ортогональная система линейно независима.

Геометрическая идея метода Фурье состоит в следующем.

Разложим в ряд Фурье по ортогональной системе $\left\{\sin\frac{k\pi x}{l}\right\}_{k=1}^{\infty}$ начальную функцию $\varphi(x)$ и правую часть уравнения $f(x, t)$, т.е. представим их в виде

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k \sin\frac{k\pi x}{l}, \quad f(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) \sin\frac{k\pi x}{l},$$

где $\varphi_k = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx$; $f_k(t) = \frac{2}{l}\int_0^l f(x,t)\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx$.

Решение задачи будем искать в виде аналогичного ряда Фурье

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) \sin\frac{k\pi x}{l}.$$

Таким образом, здесь реализуется идея известного из курса аналитической геометрии метода разложения по базису.

Неизвестные пока коэффициенты $T_k(t)$ являются функциями от t и будут определены в процессе решения. Заметим, что функция $u(x, t)$ формально удовлетворяет краевым условиям, так как этим условиям удовлетворяют все члены ряда ($\sin 0 = \sin k\pi = 0$).

Найдем формально входящие в уравнение производные от функции $u(x, t)$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k'(t) \sin\frac{k\pi x}{l},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = -\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 T_k(t)\sin\frac{k\pi x}{l} = -\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k T_k(t)\sin\frac{k\pi x}{l},$$

где $\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2$, $k = 1,\ 2, \ldots$.

Подставляя соответствующие ряды в ДУ, получим

$$\sum_{k=1}^{\infty}(T_k' + a^2\lambda_k T_k)\sin\frac{k\pi x}{l} = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t)\sin\frac{k\pi x}{l}.$$

Воспользуемся начальным условием (1.2)

$$u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(0)\sin\frac{k\pi x}{l} = \varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k \sin\frac{k\pi x}{l}.$$

Приравнивая в выписанных рядах коэффициенты при $\sin\frac{k\pi x}{l}$, получим для определения $T_k(t)$ следующие задачи Коши для обыкновенных ДУ:

$$\begin{cases} T_k' + a^2\lambda_k T_k = f_k(t), \\ T_k(0) = \varphi_k, \end{cases} \qquad k = 1,\ 2,\ \ldots.$$

Решение каждой из этих задач можно записать в виде (проверить!)

$$T_k(t) = \varphi_k e^{-a^2\lambda_k t} + \int_0^t e^{-a^2\lambda_k (t-s)} f_k(s)\mathrm{d}s.$$

Итак, построено формальное решение смешанной задачи

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k e^{-a^2\lambda_k t}\sin\frac{k\pi x}{l} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\int_0^t e^{-a^2\lambda_k (t-s)} f_k(s)ds\right)\sin\frac{k\pi x}{l}.$$

Вопрос о том, сходится ли ряд, представляющий функцию $u(x, t)$, а тем более ряды для производных $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ и $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, будет рассмотрен далее (п. 4.3).

Заметим, что первая сумма в полученной формуле для $u(x, t)$ дает формальное решение задачи с нулевой правой частью, описывающей остывание стержня. Вторая сумма – формальное решение задачи с нулевой начальной функцией.

Пример 1.2. Решим смешанную задачу для неоднородного ДУ с нулевой начальной функцией и однородными граничными условиями

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 1, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0;$$
$$u(x,0) = 0, \quad 0 \le x \le \pi;$$
$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \quad t \ge 0.$$

В данном случае $l = \pi$ и решение задачи будем строить в виде разложения по базису $\{\sin kx\}_{k=1}^{\infty}$.

Сначала разложим по этому базису правую часть уравнения

$$f(x,t) = 1 = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \sin kx,$$

где $f_k = \dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin kx\,dx = -\dfrac{2}{\pi k}\cos kx\Big|_0^{\pi} = \dfrac{2}{\pi k}(1-(-1)^k).$

Решение задачи ищем в виде

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t)\sin kx.$$

Для определения $T_k(t)$ запишем следующие задачи Коши для обыкновенных ДУ:

$$\begin{cases} T_k' + k^2 T_k = f_k, \\ T_k(0) = 0, \end{cases} \qquad k = 1,\ 2,\ \ldots.$$

Решая эти задачи, получим

$$T_k(t) = \frac{f_k}{k^2}(1 - e^{-k^2 t}).$$

Итак, формальное решение рассматриваемой задачи построено и имеет следующий вид:

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2(1-(-1)^k)}{\pi k^3}(1-e^{-k^2t})\sin kx.$$

Заметим, что в полученном выражении слагаемые с четными номерами равны нулю. Поэтому окончательный ответ можно записать в виде

$$u(x,t)=\sum_{l=1}^{\infty}\frac{4}{\pi(2l-1)^3}(1-e^{-(2l-1)^2t})\sin(2l-1)x.$$

Пример 1.3. Решим задачу для неоднородного ДУ с однородными граничными условиями и ненулевой начальной функцией

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\sin x,\quad 0<x<\pi,\quad t>0;$$
$$u(x,0)=\sin 2x,\quad 0\le x\le\pi;$$
$$u(0,t)=u(\pi,t)=0,\quad t\ge 0.$$

Следуя методу Фурье, правую часть $f(x, t) = \sin x$ необходимо разложить по базису $\{\sin kx\}_{k=1}^{\infty}$. Однако функция $\sin x$ сама является элементом этого базиса, т.е.

$$f(x,t)=\sin x=\sum_{k=1}^{\infty}f_k\sin kx,$$

где $f_k=\begin{cases}1, & k=1,\\ 0, & k\ne 1.\end{cases}$

Аналогично начальная функция

$$\varphi(x)=\sin 2x=\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k\sin kx,$$

где $\varphi_k=\begin{cases}1, & k=2,\\ 0, & k\ne 2.\end{cases}$

В соответствии с методом Фурье решение ищем в виде

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}T_k(t)\sin kx.$$

Поскольку в разложении правой части уравнения и начальной функции присутствуют лишь две базисные функции ($\sin x$ и $\sin 2x$), то и в решении останутся только слагаемые с этими функциями, т.е. решение можно найти в виде

$$u(x,t) = T_1(t)\sin x + T_2(t)\sin 2x.$$

Подставляя последнее выражение в ДУ и учитывая начальное условие, приходим к следующей паре задач Коши для определения неизвестных коэффициентов:

$$\begin{cases} T_1' + T_1 = 1, \\ T_1(0) = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} T_2' + 4T_2 = 0, \\ T_2(0) = 1. \end{cases}$$

Нетрудно проверить, что решением этих задач являются функции

$$T_1(t) = 1 - e^{-t}, \;\; T_2(t) = e^{-4t}.$$

Запишем окончательный ответ, представляющий классическое решение рассматриваемой смешанной задачи

$$u(x,t) = (1 - e^{-t})\sin x + e^{-4t}\sin 2x.$$

1.4. Сведение смешанной задачи к случаю однородных граничных условий

Отметим, что описываемый нами вариант метода Фурье применим только к случаю смешанных задач с однородными граничными условиями. Если граничные условия (1.3) не являются однородными, то простой заменой неизвестной функции исходную задачу можно свести к задаче с однородными граничными условиями.

Пусть функции $\alpha_0(t)$ и $\alpha_l(t)$ непрерывно дифференцируемы на полуоси $[0, +\infty)$. Сделаем замену неизвестной функции, полагая

$$u(x, t) = v(x, t) + w(x, t),$$

где $v(x, t)$ – новая неизвестная функция; $w(x, t)$ – любая дважды дифференцируемая по x и один раз по t известная функция, удовлетворяющая граничным условиям (1.3).

Например,

$$w(x, t) = \alpha_0(t) + \frac{x}{l}\left[\alpha_l(t) - \alpha_0(t)\right],$$

тогда

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial t} + \alpha_0'(t) + \frac{x}{l}\left[\alpha_l'(t) - \alpha_0'(t)\right]$$

и для новой неизвестной функции $v(x, t)$ получаем уравнение

$$\frac{\partial v}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = F(x,t),$$

где $F(x,t) = f(x,t) - \alpha_0'(t) - \frac{x}{l}\left[\alpha_l'(t) - \alpha_0'(t)\right]$.

Далее

$$u(x,0) = v(x,0) + \alpha_0(0) + \frac{x}{l}\left[\alpha_l(0) - \alpha_0(0)\right],$$

значит, для функции $v(x, t)$ имеем начальное условие

$$v(x,0) = \varphi(x) - \alpha_0(0) - \frac{x}{l}\left[\alpha_l(0) - \alpha_0(0)\right] \equiv \Phi(x).$$

Наконец, граничные условия для $v(x, t)$ приобретают вид

$$v(0,t) = v(l,t) = 0.$$

Итак, для определения функции $v(x, t)$ получили смешанную задачу

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial v}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = F(x,t), \quad 0 < x < l, \quad t > 0;\\
&v(x,0) = \Phi(x), \quad 0 \le x \le l;\\
&v(0,t) = v(l,t) = 0, \quad t \ge 0.
\end{aligned}$$

Заметим, что если выполнено условие согласования (1.4), то аналогичное условие выполнено и для $v(x, t)$.

1.5. Задачи для самостоятельного решения

Решить следующие смешанные задачи:

Задача 1

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0,\quad 0<x<\pi,\quad t>0;$$
$$u(x,0)=\sin x-\sin 3x,\quad 0\le x\le\pi;$$
$$u(0,t)=u(\pi,t)=0,\quad t\ge 0.$$

Задача 2

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0,\quad 0<x<\pi,\quad t>0;$$
$$u(x,0)=\sin^3 x,\quad 0\le x\le\pi;$$
$$u(0,t)=u(\pi,t)=0,\quad t\ge 0.$$

Задача 3

$$\frac{\partial u}{\partial t}-4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0,\quad 0<x<2,\quad t>0;$$
$$u(x,0)=x^2-2x,\quad 0\le x\le 2;$$
$$u(0,t)=u(2,t)=0,\quad t\ge 0.$$

Задача 4

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0,\quad 0<x<2,\quad t>0;$$
$$u(x,0)=\varphi(x)=\begin{cases} x, & 0\le x\le 1,\\ 2-x, & 1<x\le 2,\end{cases}\quad 0\le x\le 2;$$
$$u(0,t)=u(2,t)=0,\quad t\ge 0.$$

Задача 5

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=e^{-t}\sin x,\quad 0<x<\pi,\quad t>0;$$
$$u(x,0)=0,\quad 0\le x\le\pi;$$
$$u(0,t)=u(\pi,t)=0,\quad t\ge 0.$$

Задача 6

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=e^{-2t},\quad 0<x<1,\quad t>0;$$
$$u(x,0)=x(1-x),\quad 0\le x\le 1;$$
$$u(0,t)=u(1,t)=0,\quad t\ge 0.$$

Задача 7

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0,\quad 0<x<\pi,\quad t>0;$$
$$u(x,0)=0,\quad 0\le x\le \pi;$$
$$u(0,t)=\sin t,\quad u(\pi,t)=0,\quad t\ge 0.$$

Задача 8

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=1,\quad 0<x<\pi,\quad t>0;$$
$$u(x,0)=\sin x,\quad 0\le x\le \pi;$$
$$u(0,t)=t,\quad u(\pi,t)=t,\quad t\ge 0.$$

Задача 9

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=te^{-t}\sin x,\quad 0<x<\pi,\quad t>0;$$
$$u(x,0)=2\sin x-2x,\quad 0\le x\le \pi;$$
$$u(0,t)=0,\quad u(\pi,t)=-2\pi,\quad t\ge 0.$$

Задача 10

$$\frac{\partial u}{\partial t}-4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=te^{-16t}\sin 2x,\quad 0<x<\pi,\quad t>0;$$
$$u(x,0)=3x-2\sin 2x,\quad 0\le x\le \pi;$$
$$u(0,t)=0,\quad u(\pi,t)=3\pi,\quad t\ge 0.$$

Ответы

1. $u(x,t)=e^{-t}\sin x-e^{-9t}\sin 3x$.
2. $u(x,t)=\frac{3}{4}e^{-t}\sin x-\frac{1}{4}e^{-9t}\sin 3x$.

3. $u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{16}{(\pi k)^3}((-1)^k-1)e^{-\pi^2k^2t}\sin\frac{k\pi x}{2}=$

$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-32}{\pi^3(2n-1)^3}e^{-\pi^2(2n-1)^2t}\sin\frac{(2n-1)\pi x}{2}.$

4. $u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{8}{(\pi k)^2}\sin\frac{k\pi}{2}e^{-\frac{\pi^2k^2}{4}t}\sin\frac{k\pi x}{2}=$

$=\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2}e^{-\frac{\pi^2(2n-1)^2}{4}t}\sin\frac{(2n-1)\pi x}{2}.$

5. $u(x,t)=te^{-t}\sin x$.

6. $u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}(1-(-1)^k)\left(\frac{4}{(\pi k)^3}e^{-\pi^2k^2t}+\frac{2}{\pi k}\frac{e^{-2t}-e^{-\pi^2k^2t}}{\pi^2k^2-2}\right)\sin k\pi x$.

7. $u(x,t)=\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{k^4+1}\left(e^{-k^2t}-\cos t-\frac{\sin t}{k^2}\right)\sin kx+\sin t\left(1-\frac{x}{\pi}\right)$.

8. $u(x,\,t)=e^{-t}\sin x+t$.

9. $u(x,\,t)=\left(\frac{t^2}{2}+2\right)e^{-t}\sin x-2x$.

10. $u(x,\,t)=\left(\frac{t^2}{2}-2\right)e^{-16t}\sin 2x+3x$.

2. СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ И СОБСТВЕННЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ СИММЕТРИЧЕСКИХ НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ. ЗАДАЧИ НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ДЛЯ ОПЕРАТОРА ВТОРОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

2.1. Симметрические неотрицательные линейные операторы

Пусть H – вещественное линейное пространство со скалярным произведением, L – оператор с областью определения $D(L) \subset H$ и со значениями в H, т.е. каждому элементу $u \in D(L)$ поставлен в соответствие определенный элемент $Lu \in H$.

Определение 2.1. Оператор L называется *линейным*, если для любых $u_1, u_2 \in D(L)$ и любых чисел α_1, α_2:

1) $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 \in D(L)$;

2) $L(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) = \alpha_1 Lu_1 + \alpha_2 Lu_2$.

Определение 2.2. Число $\lambda \in \mathbf{R}$ называется *собственным значением линейного оператора* L, если существует ненулевой элемент $v \in D(L)$ такой, что

$$Lv = \lambda v.$$

При этом элемент v называется *собственным элементом* оператора L, отвечающим собственному значению λ.

В линейной алгебре в случае конечномерного (евклидова) пространства H в предположении, что $D(L) = H$ (оператор L определен во всем пространстве), был установлен ряд свойств собственных значений и собственных векторов. Эти факты частично переносятся на интересующий нас бесконечномерный случай. Они будут использованы затем в общей абстрактной схеме метода Фурье, позволяющей с единой точки зрения рассмотреть многие задачи математической физики.

Определение 2.3. Линейный оператор L называется *симметрическим*, если для любых $u_1, u_2 \in D(L)$ имеет место равенство

$$(Lu_1, u_2) = (u_1, Lu_2).$$

Определение 2.4. Линейный оператор L называется *положительным* (*неотрицательным*), если для $\forall\ u \in D(L)$, $u \neq 0$ справедливо неравенство

$$(Lu, u) > 0 \ ((Lu, u) \geq 0).$$

Приведем две важные простые теоремы о собственных значениях и собственных элементах.

Теорема 2.1. Собственные элементы, отвечающие различным собственным значениям симметрического оператора, ортогональны. (Другими словами, если оператор L симметричен и v_1, v_2 − его собственные элементы, отвечающие собственным значениям λ_1 и λ_2 соответственно, причем $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то $(v_1, v_2) = 0$.)

Теорема 2.2. Все собственные значения положительного (неотрицательного) оператора положительны (неотрицательны).

В линейной алгебре (пространство H конечномерно) доказывается, кроме того, важная теорема о том, что из собственных векторов линейного симметрического оператора можно образовать базис в H. Аналогичный факт справедлив и в бесконечномерном случае при некоторых дополнительных ограничениях, накладываемых на оператор L.

В дальнейшем будем иметь дело с линейными неотрицательными симметрическими операторами L, собственные элементы которых образуют базис в пространстве H, т.е. *полную ортогональную систему* $\{v_k\}_{k=1}^{\infty}$ такую, что любой элемент $u \in H$ представим сходящимся к нему в метрике пространства H рядом Фурье по этой системе

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} u_k v_k ,$$

где числа $u_k = \dfrac{(u, v_k)}{(v_k, v_k)} = \dfrac{(u, v_k)}{\|v_k\|^2}$ – коэффициенты Фурье элемента u по системе $\{v_k\}_{k=1}^{\infty}$.

2.2. Задачи на собственные значения для оператора второй производной

Пусть $H = C[0, l]$ – линейное пространство, состоящее из всех непрерывных на отрезке $[0, l]$ функций со скалярным произведением

$$(u, v) = \int_0^l u(x)v(x)\mathrm{d}x.$$

Рассмотрим в пространстве H линейный оператор $L = -\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}$ с областью определения $D(L)$, состоящей из дважды непрерывно диффе-

ренцируемых на $[0, l]$ функций $u(x)$, удовлетворяющих однородным краевым условиям, которые, в общем случае, можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} &Au(0) - Bu'(0) = 0, \quad Cu(l) + Du'(l) = 0 \\ &(A \geq 0, B \geq 0, A + B > 0; \quad C \geq 0, D \geq 0, C + D > 0). \end{aligned} \tag{2.1}$$

Рассматриваемый оператор называется в научной литературе *дифференциальным оператором Штурма – Лиувилля*. Нетрудно показать, что это симметрический неотрицательный оператор (ниже мы сделаем это на нескольких типичных примерах). Следовательно, его собственные значения неотрицательны, а собственные элементы, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны. Оказывается, из этих ортогональных собственных элементов можно построить базис в пространстве H. Сформулируем важнейшее свойство оператора Штурма – Лиувилля, доказанное выдающимся российским математиком В.А. Стекловым и лежащее в основе метода Фурье.

Теорема 2.3 (***теорема разложимости В.А. Стеклова***). Собственные значения оператора Штурма–Лиувилля $L = -\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}$ с областью определения $D(L)$, состоящей из дважды непрерывно дифференцируемых на $[0, l]$ функций $u(x)$, удовлетворяющих однородным краевым условиям (2.1), образуют последовательность чисел $\{\lambda_n\}$

$$0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_k \leq \ldots ,$$

а из соответствующих им собственных элементов можно сформировать *полную ортогональную систему функций* в пространстве H. Всякая функция $u(x) \in D(L)$ разлагается в абсолютно и равномерно сходящийся ряд Фурье по этой системе.

Пример 2.1. Исследуем линейный оператор, определяемый дифференциальным выражением $L = -\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}$, с областью определения $D(L) = \left\{ u(x) \in C^2[0,l] :\ u(0) = u(l) = 0 \right\}$, что соответствует случаю $B = D = 0$ в выражении (2.1).

Докажем, что L – *симметрический положительный* оператор.

Пусть $u_1(x), u_2(x) \in D(L)$. Интегрируя по частям, имеем

$$(Lu_1, u_2) = \int_0^l \left(-\frac{\mathrm{d}^2 u_1(x)}{\mathrm{d}x^2} \right) u_2(x)\mathrm{d}x = -\frac{\mathrm{d}u_1(x)}{\mathrm{d}x} u_2(x) \Big|_0^l +$$

$$+ \int_0^l \frac{\mathrm{d}u_1(x)}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}u_2(x)}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x = (u_1', u_2'),$$

здесь слагаемое

$$\frac{\mathrm{d}u_1(x)}{\mathrm{d}x}u_2(x)\Big|_0^l = 0$$

в силу граничных условий $u_2(0) = u_2(l) = 0$. Правая часть полученного равенства симметрична по u_1, u_2. Поэтому, меняя u_1 и u_2 ролями, получим

$$(Lu_1, u_2) = (u_1, Lu_2),$$

т.е. рассматриваемый оператор симметрический.

Пусть теперь в приведенной выше цепочке вычислений $u_1 = u_2 = u \neq 0$, тогда

$$(Lu, u) = \int_0^l \left(\frac{\mathrm{d}u(x)}{\mathrm{d}x}\right)^2 \mathrm{d}x = (u', u') \geq 0.$$

При этом $(u', u') = 0$ только в случае $u'(x) \equiv 0$ на $[0, l]$, что имеет место при $u = C = \text{const}$ на $[0, l]$. Краевые условия $u(0) = u(l) = 0$ могут быть выполнены, если $C = 0$, что нас не устраивает, так как мы ищем ненулевые решения. Следовательно, $(u', u') > 0$.

Итак, мы установили, что

$$(Lu, u) > 0, \quad \forall u \in D(L), \quad u \neq 0,$$

т.е. рассматриваемый оператор положителен и может иметь лишь положительные собственные значения.

Наконец, решим задачу на собственные значения и собственные функции для оператора L, т.е. найдем те значения параметра λ (собственные значения), при которых ДУ

$$-u'' = \lambda u$$

с краевыми условиями $u(0) = u(l) = 0$ имеет нетривиальные решения (собственные функции), и найдем соответствующие линейно независимые решения. Здесь возникает следующая краевая задача для обыкновенного линейного ДУ с постоянными коэффициентами второго порядка:

$$\begin{cases} u'' + \lambda u = 0, \;\; 0 < x < l, \\ u(0) = u(l) = 0. \end{cases}$$

Так как оператор L положителен, то $\lambda > 0$ и характеристическое уравнение

$$p^2 - \lambda = 0$$

имеет чисто мнимые корни $p = \pm i\sqrt{\lambda}$. В силу этого общее решение ДУ имеет вид

$$u(x) = c_1 \cos(\sqrt{\lambda}x) + c_2 \sin(\sqrt{\lambda}x).$$

Подставляя сюда краевые условия, получим

$$u(0) = c_1 = 0; \;\; c_2 \sin(\sqrt{\lambda}l) = 0.$$

Так как $c_2 \neq 0$ (в противном случае $u(x) \equiv 0$ на $[0, l]$, а мы ищем ненулевые решения), то $\sin(\sqrt{\lambda}l) = 0$, что выполняется, если $\sqrt{\lambda}l = k\pi$, $k = 1, 2, \ldots$. Следовательно, $\sqrt{\lambda} = \dfrac{k\pi}{l}$ и все ненулевые решения краевой задачи имеют вид

$$u(x) = c_2 \sin\frac{k\pi x}{l}, \;\; k = 1, 2, \ldots.$$

Таким образом, возникает последовательность собственных значений рассматриваемого оператора

$$\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2, \;\; k = 1, 2, \ldots .$$

Им соответствует ортогональная на $[0, l]$ система из собственных функций

$$\{X_k(x)\}_{k=1}^{\infty} = \left\{\sin\frac{k\pi x}{l}\right\}_{k=1}^{\infty}.$$

Ортогональность построенной системы собственных функций есть следствие того, что все ее элементы отвечают различным собственным значениям.

Вычислим квадраты норм полученных собственных функций

$$\|X_k\|^2 = \int_0^l \sin^2 \frac{k\pi x}{l}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^l \left(1 - \cos\frac{2k\pi x}{l}\right)\mathrm{d}x = \frac{l}{2}.$$

Пример 2.2. Пусть оператор $L = -\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}$, а его область определения $D(L) = \left\{ u(x) \in C^2[0,l]:\ u'(0) = u'(l) = 0 \right\}$, т.е. $A = C = 0$ в выражении (2.1). Исследуем его по той же схеме, что и в примере 2.1.

Сначала докажем, что L – *симметрический неотрицательный* оператор.

Пусть $u_1(x)$, $u_2(x) \in D(L)$. Как и в примере 2.1, имеем

$$(Lu_1, u_2) = \int_0^l \left(-\frac{\mathrm{d}^2 u_1(x)}{\mathrm{d}x^2}\right) u_2(x)\mathrm{d}x = -\frac{du_1(x)}{dx} u_2(x)\Big|_0^l + \int_0^l \frac{\mathrm{d}u_1(x)}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}u_2(x)}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x = (u_1', u_2').$$

В данном случае слагаемое $\dfrac{\mathrm{d}u_1(x)}{\mathrm{d}x} u_2(x)\Big|_0^l = 0$ в силу краевых условий $u_1'(0) = u_1'(l) = 0$. Так как правая часть равенства симметрична по u_1, u_2, меняя ролями u_1 и u_2, получим

$$(Lu_1, u_2) = (u_1, Lu_2),$$

т.е. оператор L симметрический.

Пусть $u_1 = u_2 = u \neq 0$, тогда

$$(Lu, u) = \int_0^l \left(\frac{\mathrm{d}u(x)}{\mathrm{d}x}\right)^2 \mathrm{d}x = (u', u') \geq 0.$$

Заметим, что $u(x) \equiv C$ на $[0, l]$, где C – любая отличная от нуля константа, удовлетворяющая рассматриваемым краевым условиям $u'(0) = u'(l) = 0$, поэтому

$$(Lu, u) \geq 0, \quad \forall u \in D(L), \quad u \neq 0,$$

т.е. рассматриваемый оператор неотрицателен и его собственные значения $\lambda \geq 0$.

Для определения собственных значений и собственных функций оператора L имеем краевую задачу

$$\begin{cases} u'' + \lambda u = 0, \quad 0 < x < l, \\ u'(0) = u'(l) = 0. \end{cases}$$

Пусть сначала $\lambda > 0$, тогда, как и в предыдущем примере, общее решение ДУ имеет вид

$$u(x) = c_1 \cos(\sqrt{\lambda} x) + c_2 \sin(\sqrt{\lambda} x).$$

Продифференцировав это выражение, получим

$$u'(x) = \sqrt{\lambda}(-c_1 \sin(\sqrt{\lambda} x) + c_2 \cos(\sqrt{\lambda} x)).$$

Из краевого условия $u'(0) = \sqrt{\lambda} c_2 = 0$ имеем $c_2 = 0$. Так как мы ищем нетривиальные решения, то $c_1 \neq 0$ и второе краевое условие $u'(l) = -\sqrt{\lambda} c_1 \sin(\sqrt{\lambda} l)$ может быть выполнено лишь если $\sin(\sqrt{\lambda} l) = 0$, т.е. $\sqrt{\lambda} l = k\pi, \quad k = 1, 2, \ldots$. Следовательно, $\sqrt{\lambda} = \dfrac{k\pi}{l}$ и все ненулевые решения краевой задачи при $\lambda > 0$ имеют вид

$$u(x) = c_1 \cos \frac{k\pi x}{l}, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Пусть теперь $\lambda = 0$. В этом случае рассматривается краевая задача

$$\begin{cases} u'' = 0, \quad 0 < x < l, \\ u'(0) = u'(l) = 0. \end{cases}$$

Здесь общее решение ДУ имеет вид

$$u(x) = c_1 x + c_2 \cdot 1.$$

Из первого краевого условия получим

$$u'(l) = c_1 = 0.$$

Тогда все нетривиальные решения задачи имеют вид

$$u(x) = c_2 \cdot 1, \; c_2 \neq 0.$$

Итак, возникает последовательность собственных значений оператора L

$$\lambda_0 = 0, \quad \lambda_k = \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2, \quad k = 1, 2, \ \ldots \ .$$

Им соответствует ортогональная на [0, l] система из собственных функций

$$X_0(x) \equiv 1, \quad \{X_k(x)\}_{k=1}^{\infty} = \left\{\cos\frac{k\pi x}{l}\right\}_{k=1}^{\infty}.$$

Как и в примере 2.1, ортогональность построенной системы собственных функций есть следствие того, что все ее элементы отвечают различным собственным значениям оператора L.

Вычислим квадраты норм полученных собственных функций

$$\|X_k\|^2 = \int_0^l \cos^2\frac{k\pi x}{l}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^l\left(1+\cos\frac{2k\pi x}{l}\right)\mathrm{d}x = \frac{l}{2}, \quad k = 1, 2, \ \ldots$$

$$\|X_0\|^2 = \int_0^l 1\,\mathrm{d}x = l.$$

Пример 2.3. Исследуем линейный оператор $L = -\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}$ с более сложной областью определения $D(L) = \{u(x) \in C^2\ [0, l]$: $u(0) = u(l) + \alpha u'(l)\ 0, = \alpha > 0\}$.

Покажем, что оператор *симметрический положительный*. Пусть $u_1(x)$, $u_2(x) \in D(L)$. После интегрирования по частям с учетом граничных условий получим

$$(Lu_1, u_2) = \int_0^l\left(-\frac{\mathrm{d}^2u_1(x)}{\mathrm{d}x^2}\right)u_2(x)\mathrm{d}x = -\frac{\mathrm{d}u_1(x)}{dx}u_2(x)\Big|_0^l +$$

$$+ \int_0^l \frac{\mathrm{d}u_1(x)}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}u_2(x)}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha}u_1(l)u_2(l) + (u_1', u_2').$$

Поскольку правая часть равенства симметрична по u_1, u_2, приходим к выводу, что

$$(Lu_1, u_2) = (u_1, Lu_2).$$

Пусть $u_1 = u_2 = u$, тогда

$$(Lu, u) = \frac{1}{\alpha} u^2(l) + (u', u') \geq 0,$$

если $(Lu, u) = 0$, то $u'(x) = 0$ и $u(l) = 0$, это значит, что $u(x) \equiv 0$ на $[0, l]$. Следовательно, $(Lu, u) = 0 > 0$, т.е. оператор положителен и его собственные значения могут быть только положительными.

Найдем собственные значения и собственные функции оператора L. Для их определения возникает следующая краевая задача:

$$\begin{cases} u'' + \lambda u = 0, \quad 0 < x < l, \\ u(0) = 0, \quad u(l) + \alpha u'(l) = 0. \end{cases}$$

Здесь $\lambda > 0$ и общее решение ДУ имеет вид

$$u(x) = c_1 \cos(\sqrt{\lambda} x) + c_2 \sin(\sqrt{\lambda} x).$$

Из условия $u(0) = 0$ следует, что $c_1 = 0$. Потребуем выполнения второго граничного условия

$$u(l) + \alpha u'(l) = c_2 \left[\sin(\sqrt{\lambda} l) + \alpha \sqrt{\lambda} \cos(\sqrt{\lambda} l) \right] = 0,$$

отсюда для определения возможных собственных значений получим трансцендентное уравнение

$$\sin(\sqrt{\lambda} l) + \alpha \sqrt{\lambda} \cos(\sqrt{\lambda} l) = 0.$$

Обозначим $\mu = \sqrt{\lambda} l$ и перепишем последнее уравнение в виде

$$\operatorname{tg}\mu = -\frac{\alpha}{l} \mu. \qquad (2.2)$$

Положительные корни этого уравнения – это точки пересечения графиков функций $y = \operatorname{tg} \mu$ и $y = -\frac{\alpha}{l} \mu$ (рис. 2.1). При заданных α и l они могут быть найдены численными методами.

Итак, возникает последовательность собственных значений оператора L

$$\lambda_k = \left(\frac{\mu_k}{l} \right)^2, \quad k = 1, 2, \ \ldots .$$

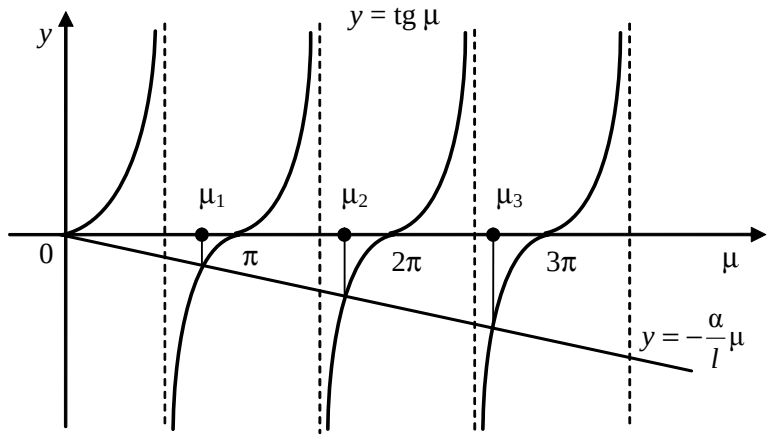


Рис. 2.1. Графическое решение уравнения (2.2)

Им соответствует ортогональная на $[0, l]$ система собственных функций

$$\left\{X_k(x)\right\}_{k=1}^{\infty} = \left\{\sin\frac{\mu_k x}{l}\right\}_{k=1}^{\infty}.$$

Пример 2.4. Пусть $H = C[-\pi, \pi]$ – линейное пространство, состоящее из всех непрерывных на $[-\pi, \pi]$ функций со скалярным произведением

$$(u, v) = \int_{-\pi}^{\pi} u(x)v(x)\mathrm{d}x\,.$$

Рассмотрим в пространстве H линейный оператор $L = -\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}$ с областью определения $D(L)$, состоящей из дважды непрерывно дифференцируемых на $[-\pi, \pi]$ функций, удовлетворяющих следующим (периодическим) краевым условиям:

$$u(-\pi) = u(\pi), \qquad u'(-\pi) = u'(\pi),$$

т.е. область определения равна

$$D(L) = \left\{\, u(x) \in C^2[-\pi, \pi]:\ u(-\pi) = u(\pi),\, u'(-\pi) = u'(\pi) \,\right\}.$$

Убедимся, что оператор L – *симметрический*. Возьмем произвольные функции $u_1(x)$, $u_2(x) \in D(L)$. Вычислим скалярное произведение

$$(Lu_1, u_2) = \int_{-\pi}^{\pi} \left(-\frac{\mathrm{d}^2 u_1(x)}{\mathrm{d}x^2} \right) u_2(x)\mathrm{d}x =$$

$$= -\frac{\mathrm{d}u_1(x)}{\mathrm{d}x} u_2(x)\Big|_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{d}u_1(x)}{\mathrm{d}x} \frac{\mathrm{d}u_2(x)}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x =$$

$$= \left(\frac{\mathrm{d}u_2(x)}{\mathrm{d}x} u_1(x) - \frac{\mathrm{d}u_1(x)}{\mathrm{d}x} u_2(x) \right)\Big|_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} \left(-\frac{\mathrm{d}^2 u_2(x)}{\mathrm{d}x^2} \right) u_1(x)\mathrm{d}x =$$

$$= (u_1(\pi)u_2'(\pi) - u_1(-\pi)u_2'(-\pi)) + (u_1'(-\pi)u_2(-\pi) - u_1'(\pi)u_2(\pi)) + (u_1, Lu_2).$$

Из граничных условий следует, что в последнем выражении

$$u_1(\pi)u_2'(\pi) - u_1(-\pi)u_2'(-\pi) = 0 \text{ и } u_1'(-\pi)u_2(-\pi) - u_1'(\pi)u_2(\pi) = 0.$$

Следовательно,

$$(Lu_1, u_2) = (u_1, Lu_2) \text{ для любых } u_1, u_2 \in D(L).$$

Нетрудно проверить, что L – *неотрицательный* оператор. Возьмем произвольную функцию $u \in D(L)$, $u \neq 0$. Интегрируя по частям, с учетом граничных условий, получим

$$(Lu, u) = \int_{-\pi}^{\pi} \left(-\frac{\mathrm{d}^2 u(x)}{\mathrm{d}x^2} \right) u(x)\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{\mathrm{d}u(x)}{\mathrm{d}x} \right)^2 \mathrm{d}x \geq 0.$$

т.е. для любых $u \in D(L)$, $u \neq 0$ справедливо неравенство $(Lu, u) \geq 0$.

Далее решим задачу на собственные значения и собственные функции для рассматриваемого оператора, т.е. найдем те значения параметра λ, при которых ДУ

$$-u'' = \lambda u$$

с краевыми условиями

$$u(-\pi) = u(\pi), \qquad u'(-\pi) = u'(\pi)$$

имеет ненулевые решения, и найдем эти решения.

Так как оператор неотрицательный, то его собственные значения $\lambda \geq 0$.

Пусть $\lambda = \mu^2 > 0$. В этом случае требуется решить следующую краевую задачу:

$$\begin{cases} u'' + \mu^2 u = 0, \quad -\pi < x < \pi, \\ u(\pi) = u(-\pi), \quad u'(\pi) = u'(-\pi). \end{cases}$$

Общее решение ДУ здесь имеет вид

$$u(x) = c_1\cos(\mu x) + c_2\sin(\mu x),$$

а его производная

$$u'(x) = \mu(-c_1\sin(\mu x) + c_2\cos(\mu x)).$$

Подставляя $u(x)$ и $u'(x)$ в краевые условия, получим

$$c_1\cos(\mu\pi) + c_2\sin(\mu\pi) = c_1\cos(\mu\pi) - c_2\sin(\mu\pi);$$
$$-c_1\sin(\mu\pi) + c_2\cos(\mu\pi) = c_1\sin(\mu\pi) + c_2\cos(\mu\pi).$$

Отсюда имеем систему для определения c_1 и c_2

$$\begin{cases} c_1\sin(\mu\pi) = 0, \\ c_2\sin(\mu\pi) = 0. \end{cases}$$

Так как c_1 и c_2 одновременно не могут быть равны нулю, то $\sin(\mu\pi) = 0$, что выполняется, если $\mu = k$ ($k = 1, 2, \ldots$). Следовательно, все ненулевые решения рассматриваемой краевой задачи имеют вид

$$u(x) = c_1\cos(kx) + c_2\sin(kx),$$

т.е. представляют собой линейную комбинацию ортогональных на $[-\pi, \pi]$ функций

$$X_k^{(1)}(x) = \cos(kx),\ X_k^{(2)}(x) = \sin(kx),\ k = 1, 2, \ldots .$$

Пусть теперь $\lambda = 0$. Решим соответствующую этому случаю краевую задачу:

$$\begin{cases} u'' = 0, \quad -\pi < x < \pi, \\ u(\pi) = u(-\pi), \quad u'(\pi) = u'(-\pi). \end{cases}$$

Здесь общее решение ДУ

$$u(x) = c_1x + c_2,$$

а его производная

$$u'(x) = c_1.$$

Подставляя $u(x)$ в первое краевое условие, получим

$$c_1\pi + c_2 = -c_1\pi + c_2,$$

откуда имеем

$$c_1 = 0.$$

При этом второе краевое условие выполняется автоматически. Таким образом, ненулевым решением рассматриваемой краевой задачи является любая отличная от нуля константа c_2, т.е. его можно записать как

$$u(x) = c_2 \cdot 1.$$

Итак, установили, что собственному значению $\lambda_0 = 0$ соответствует одна собственная функция $X_0(x) \equiv 1$, а каждому собственному значению $\lambda_k = k^2$ ($k = 1, 2, \dots$) отвечают две линейно независимые собственные функции $X_k^{(1)}(x) = \cos kx$ и $X_k^{(2)}(x) = \sin kx$.

Таким образом, собственные функции оператора $L = -\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}$ с периодическими краевыми условиями образуют тригонометрическую систему

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots .$$

Известно, что для всякой непрерывной на $[-\pi, \pi]$ функции $f(x)$ ряд Фурье по тригонометрической системе (обычный тригонометрический ряд Фурье) сходится к $f(x)$ в среднем (см., например, [1]). Следовательно, тригонометрическая система является полной в пространстве $H = C[-\pi, \pi]$.

2.3. Задачи для самостоятельного решения

Задача 1

Исследовать линейный оператор, определяемый дифференциальным выражением $L = -\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}$, с областью определения $D(L) = \{u(x) \in C^2[0, l]: u(0) = u'(l) = 0\}$, что соответствует случаю $B = 0$, $C = 0$ в (2.1). Доказать, что L – *симметрический положительный* оператор. Найти последовательность его собственных значений и соответствующую им систему собственных функций $\{X_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$. Вычислить квадраты норм собственных функций.

Задача 2

Исследовать линейный оператор, определяемый дифференциальным выражением $L = -\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}$ с областью определения $D(L)$ = $= \{u(x) \in C^2[0, l]: u'(0) = u(l) = 0\}$, что соответствует случаю $A = 0$, $D = 0$ в (2.1)). Доказать, что L – *симметрический положительный* оператор. Найти последовательность его собственных значений и соответствующую им систему собственных функций $\{X_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$. Вычислить квадраты норм собственных функций.

Задача 3

Исследовать линейный оператор $L = -\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}$, с областью определения $D(L) = \left\{ u(x) \in C^2[0,l]: u'(0) = u(l) + \alpha u'(l) = 0, \alpha > 0 \right\}$, что соответствует случаю $A = 0$, $C = 1$, $D = \alpha$ в (2.1)). Доказать, что L – *симметрический положительный* оператор. Найти последовательность его собственных значений и соответствующую им систему собственных функций $\{X_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$.

Ответы

1. $\lambda_k = \left(\dfrac{(2k-1)\pi}{2l} \right)^2$, $k = 1, 2, \ldots$, $\{X_k(x)\}_{k=1}^{\infty} = \left\{ \sin \dfrac{(2k-1)\pi x}{2l} \right\}_{k=1}^{\infty}$,

$\|X_k\|^2 = \dfrac{l}{2}$.

2. $\lambda_k = \left(\dfrac{(2k-1)\pi}{2l} \right)^2$, $k = 1, 2, \ldots$, $\{X_k(x)\}_{k=1}^{\infty} = \left\{ \cos \dfrac{(2k-1)\pi x}{2l} \right\}_{k=1}^{\infty}$,

$\|X_k\|^2 = \dfrac{l}{2}$.

3. $\lambda_k = \left(\dfrac{\mu_k}{l} \right)^2$, $k = 1, 2, \ldots$, $\{X_k(x)\}_{k=1}^{\infty} = \left\{ \cos \dfrac{\mu_k x}{l} \right\}_{k=1}^{\infty}$, где μ_k – положительные корни уравнения $\operatorname{ctg}\mu = \dfrac{\alpha}{l}\mu$.

2.4. Таблица собственных значений и собственных функций дифференциального оператора $L = -\dfrac{\mathbf{d}^2}{\mathbf{d}x^2}$ с простейшими типами краевых условий

Результаты проведенных выше исследований сведем в таблицу:

$-u'' = \lambda u,\ 0 < x < l$			
Краевые условия	Последовательность собственных значений λ_k	Ортогональная на $[0, l]$ система собственных функций $X_k(x)$	Квадраты норм собственных функций $\|X_k\|^2$
$u(0) = u(l) = 0$	$\left(\dfrac{k\pi}{l}\right)^2,\quad k = 1, 2, \ldots$	$\left\{\sin\dfrac{k\pi x}{l}\right\}_{k=1}^{\infty}$	$\dfrac{l}{2}$
$u(0) = u'(l) = 0$	$\left(\dfrac{(2k-1)\pi}{2l}\right)^2,\quad k = 1, 2, \ldots$	$\left\{\sin\dfrac{(2k-1)\pi x}{2l}\right\}_{k=1}^{\infty}$	$\dfrac{l}{2}$
$u'(0) = u(l) = 0$	$\left(\dfrac{(2k-1)\pi}{2l}\right)^2,\quad k = 1, 2, \ldots$	$\left\{\cos\dfrac{(2k-1)\pi x}{2l}\right\}_{k=1}^{\infty}$	$\dfrac{l}{2}$
$u'(0) = u'(l) = 0$	$0,\ \left(\dfrac{k\pi}{l}\right)^2,\quad k = 1, 2, \ldots$	$1, \left\{\cos\dfrac{k\pi x}{l}\right\}_{k=1}^{\infty}$	$\begin{bmatrix} l, & k = 0; \\ \dfrac{l}{2}, & k = 1, 2, \ldots \end{bmatrix}$

3. СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ (ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ) В СЛУЧАЕ КРАЕВЫХ УСЛОВИЙ ОБЩЕГО ВИДА

3.1. Возможная физическая интерпретация граничных условий

Обратимся к рассмотренному выше уравнению (1.1) с начальным условием (1.2). Заметим, что вместо краевых условий $u(0, t) = \alpha_0(t)$, $u(l, t) = \alpha_l(t)$, которые обычно называют *краевыми условиями первого рода*, можно рассмотреть и другие их типы. Остановимся на физической интерпретации распространения тепла в стержне.

Если заданы тепловые потоки $Q_0(t)$ и $Q_l(t)$, протекающие через торцевые сечения стержня длины l, то соответствующие граничные условия запишутся следующим образом:

$$k\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=0} = Q_0(t), \quad k\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=l} = -Q_l(t),$$

где $k > 0$ – коэффициент теплопроводности.

Если на концах стержня происходит теплообмен с окружающей средой согласно закону Ньютона, то граничные условия имеют вид

$$\left(k\frac{\partial u}{\partial x} - h(u - u_0)\right)\bigg|_{x=0} = 0, \quad \left(k\frac{\partial u}{\partial x} + h(u - u_0)\right)\bigg|_{x=l} = 0,$$

где $h > 0$ – коэффициент теплообмена, $u_0 = u_0(x, t)$ – температура окружающей среды.

Возможны также ситуации, когда на одном конце стержня задана температура, а на другом задан тепловой поток или происходит теплообмен.

3.2. Построение формального решения смешанной задачи методом Фурье в случае однородных краевых условий общего вида

Пример 3.1. Решим задачу об остывании тонкого однородного стержня длины l с теплоизолированной боковой поверхностью, если начальное распределение температуры стержня задается функцией

$\varphi(x) = \cos\dfrac{\pi x}{2l}$, $x \in [0, l]$, на левом конце стержня тепловой поток равен нулю, а на правом конце поддерживается нулевая температура. Математической моделью рассматриваемого процесса будет следующая начально-краевая задача:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < l, \quad t > 0;$$

$$u(x,0) = \cos\frac{\pi x}{2l}, \quad x \in [0,l];$$

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = u(l,t) = 0, \quad t \in [0,+\infty).$$

Обратим внимание на то, что начальная функция $\varphi(x) = \cos\dfrac{\pi x}{2l}$ удовлетворяет заданным однородным краевым условиям. Более того, она является собственной функцией дифференциального оператора $-\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}$ с областью определения $D(L)$, состоящей из дважды непрерывно дифференцируемых на $[0, l]$ функций, удовлетворяющих краевым условиям $u'(0) = u(l) = 0$. Найдем решение задачи в виде

$$u(x, t) = T(t)\cos\frac{\pi x}{2l}.$$

Вычислим производные

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = T'(t)\cos\frac{\pi x}{2l}, \quad \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = -\left(\frac{\pi}{2l}\right)^2 T(t)\cos\frac{\pi x}{2l}$$

и подставим их в ДУ

$$T'(t)\cos\frac{\pi x}{2l} + a^2\left(\frac{\pi}{2l}\right)^2 T(t)\cos\frac{\pi x}{2l} = 0.$$

Приравнивая коэффициенты при косинусах, для определения неизвестной функции $T(t)$ получим ДУ

$$T'(t) + \left(\frac{a\pi}{2l}\right)^2 T(t) = 0,$$

общее решение которого

$$T(t) = C\exp\left[-\left(\frac{a\pi}{2l}\right)^2 t\right].$$

Далее воспользуемся начальными условиями

$$u(x,\,0) = T(0)\cos\frac{\pi x}{2l} = \cos\frac{\pi x}{2l},$$

откуда имеем

$$T(0) = 1,$$

следовательно $C = 1$.

Итак, формальное решение рассматриваемой начально-краевой задачи построено и имеет вид

$$u(x,\,t) = \exp\left[-\left(\frac{a\pi}{2l}\right)^2 t\right]\cos\frac{\pi x}{2l}.$$

Приведенный пример – частный случай более общей ситуации.

Рассмотрим ДУ

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t), \quad 0 < x < l, \;\; t > 0 \tag{3.1}$$

с начальным условием

$$u(x,\,0) = \varphi(x), \quad x \in [0,\,l] \tag{3.2}$$

и однородными краевыми условиями, которые в общем случае можно записать так:

$$\left(Au - B\frac{\partial u}{\partial x}\right)\Big|_{x=0} = \left(Cu + D\frac{\partial u}{\partial x}\right)\Big|_{x=l} = 0, \qquad t \in [0,\,\infty) \tag{3.3}$$

$$(A, B, C, D \geq 0; \;\; A + B > 0; \;\; C + D > 0).$$

Найдем формальное решение задачи (3.1) – (3.3) методом Фурье в виде ряда

$$u(x,\,t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t)\,X_k(x),$$

где $T_k(t)$ – неизвестные функции, подлежащие определению, $X_k(x)$ – собственные функции линейного дифференциального оператора $L = -\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}$ с областью определения, состоящей из дважды непрерывно дифференцируемых на $[0, l]$ функций $u(x)$, удовлетворяющих краевым условиям

$$Au(0) - Bu'(0) = 0, \;\; A \geq 0, B \geq 0, A + B > 0;$$
$$Cu(l) + Du'(l) = 0, C \geq 0, D \geq 0, C + D > 0.$$

В соответствии с теоремой 2.3 (теорема разложимости В.А. Стеклова), система $\{X_k\}_{k=1}^{\infty}$ образует ортогональный базис в пространстве $C[0, l]$.

Итак, если λ_k – собственные значения, а $X_k(x)$ – соответствующие им собственные функции рассматриваемого дифференциального оператора, то для них выполнены условия

$$\begin{cases} -X_k'' = \lambda_k X_k, \;\; 0 < x < l, \\ AX_k(0) - BX_k'(0) = 0, \;\; CX_k(l) + DX_k'(l) = 0, \end{cases} \qquad k = 1, 2, \ldots . \qquad (3.4)$$

Разложим в ряд Фурье по базису $\{X_k\}_{k=1}^{\infty}$ функции $\varphi(x)$ и $f(x, t)$, т.е. представим их в виде

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k X_k(x), \;\; f(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) X_k(x),$$

где $\varphi_k = \dfrac{(\varphi, X_k)}{(X_k, X_k)} = \dfrac{\int_0^l \varphi(x) X_k(x)\mathrm{d}x}{\int_0^l X_k^2(x)\mathrm{d}x}$, $f_k(t) = \dfrac{(f, X_k)}{(X_k, X_k)} = \dfrac{\int_0^l f(x, t) X_k(x)\mathrm{d}x}{\int_0^l X_k^2(x)\mathrm{d}x}$.

Решение смешанной задачи (3.1) – (3.3) будем искать в виде аналогичного ряда

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) X_k(x),$$

коэффициенты которого $T_k(t)$ – неизвестные функции от переменной t.

Найдем производные от $u(x, t)$, входящие в уравнение (3.1)

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \sum_{k=1}^{\infty} T_k'(t) X_k(x);$$

$$\frac{\partial^2 u(x,\,t)}{\partial x^2} = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) X_k''(x) = -\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k T_k(t) X_k(x).$$

При вычислении второй производной по переменной x мы воспользовались условием (3.4), согласно которому $X_k''(x) = -\lambda_k X_k(x)$.

Подставляя ряды в ДУ (3.1), получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} (T_k' + a^2 \lambda_k T_k) X_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) X_k(x).$$

Приравнивая коэффициенты при базисных функциях $X_k(x)$, имеем

$$T_k' + a^2 \lambda_k T_k = f_k(t), \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Далее используем начальные условия

$$u(x,\,0) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(0) X_k(x) = \varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k X_k(x),$$

откуда следует, что $T_k(0) = \varphi_k$. В результате для определения $T_k(t)$ получим задачи Коши для обыкновенного ДУ

$$\begin{cases} T_k' + a^2 \lambda_k T_k = f_k(t), \ t > 0, \ k = 1, 2, \ldots, \\ T_k(0) = \varphi_k, \end{cases}$$

решения которых

$$T_k(t) = \varphi_k e^{-a^2 \lambda_k t} + \int_0^t e^{-a^2 \lambda_k (t-s)} f_k(s) \mathrm{d}s.$$

Итак, формальное решение смешанной задачи (3.1) – (3.3) найдено:

$$u(x,\,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k e^{-a^2 \lambda_k t} X_k(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_0^t e^{-a^2 \lambda_k (t-s)} f_k(s) \mathrm{d}s \right) X_k(x).$$

В частности, если краевые условия имеют вид

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l} = 0,$$

то собственные значения и собственные функции соответствующего дифференциального оператора

$$\lambda_0 = 0, \quad X_0(x) \equiv 1, \quad \lambda_k = \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2, \quad X_k(x) = \cos\frac{k\pi x}{l}, \quad k = 1, 2, \ \ldots$$

и решение смешанной задачи записывается следующим образом:

$$u(x, t) = \varphi_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k e^{-a^2\lambda_k t} \cos\frac{k\pi x}{l} +$$

$$+ \int_0^t f_0(s)\mathrm{d}s + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\int_0^t e^{-a^2\lambda_k (t-s)} f_k(s)\mathrm{d}s\right)\cos\frac{k\pi x}{l}.$$

Замечание. Если рассматривается задача с неоднородными граничными условиями, то прежде чем строить ее решение методом Фурье, надо заменой неизвестной функции свести исходную задачу к новой задаче с однородными граничными условиями.

Пример 3.2.

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0;$$

$$u(x,0) = 1, \quad x \in [0, \pi];$$

$$u(0,t) = e^{-t}, \quad \frac{\partial u(\pi, t)}{\partial x} = 0, \quad t \in [0, +\infty).$$

Здесь граничное условие при $x = 0$ является неоднородным. Чтобы применение метода Фурье стало возможным, нужно сначала свести рассматриваемую задачу к задаче с однородными граничными условиями. Для этого сделаем замену неизвестной функции, полагая

$$u(x, t) = v(x, t) + w(x, t),$$

где $v(x, t)$ – новая неизвестная функция; $w(x, t)$ – функция, которая мы должна удовлетворять граничным условиям

$$w(0,t) = e^{-t}, \quad \frac{\partial w(\pi, t)}{\partial x} = 0\,.$$

Найдем эту функцию в виде

$$w(x, t) = a(t)x + b(t).$$

Неизвестные $a(t)$ и $b(t)$ определим из условий

$$w(0, t) = b(t) = e^{-t}, \quad \frac{\partial w(\pi, t)}{\partial x} = a(t) = 0.$$

следовательно, $w(x,t) = e^{-t}$.

В результате для новой неизвестной функции $v(x, t)$ имеем задачу

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = e^{-t}, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0;$$
$$v(x,0) = 0, \quad x \in [0, \pi];$$
$$v(0,t) = \frac{\partial v(\pi, t)}{\partial x} = 0, \quad t \in [0, +\infty).$$

Теперь найдем систему базисных функций $\{X_k\}$, необходимую для построения ее решения, рассмотрев вспомогательную задачу на собственные значения

$$\begin{cases} -v'' = \lambda v, & 0 < x < \pi, \\ v(0) = v'(\pi) = 0. \end{cases}$$

Согласно полученным ранее результатам (см. п. 2.4), имеем

$$\lambda_k = \left(\frac{2k-1}{2} \right)^2, \quad X_k(x) = \sin \frac{(2k-1)x}{2}, \quad k = 1, 2, \ \ldots \ .$$

Разложим в ряд Фурье по найденному базису правую часть уравнения

$$f(x, t) = e^{-t} = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) \sin \frac{(2k-1)x}{2},$$

где $f_k(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} e^{-t} \sin \frac{(2k-1)x}{2} \mathrm{d}x = -\frac{2}{\pi} e^{-t} \frac{2}{2k-1} \cos \frac{(2k-1)x}{2} \Big|_0^{\pi} = \frac{4e^{-t}}{\pi(2k-1)}.$

Решение $v(x, t)$ будем искать в виде разложения в ряд по базисным функциям

$$v(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) \sin \frac{(2k-1)x}{2}.$$

Вычислим входящие в ДУ производные от $v(x, t)$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \sum_{k=1}^{\infty} T_k'(t) \sin \frac{(2k-1)x}{2};$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2k-1}{2} \right)^2 T_k(t) \sin \frac{(2k-1)x}{2} = -\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k T_k(t) \sin \frac{(2k-1)x}{2}.$$

Подставив соответствующие ряды в ДУ и начальные условия, получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} T_k'(t)\sin\frac{(2k-1)x}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k T_k(t)\sin\frac{(2k-1)x}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t)\sin\frac{(2k-1)x}{2};$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} T_k(0)\sin\frac{(2k-1)x}{2} = 0\,.$$

Приравняв коэффициенты при одинаковых базисных функциях и используя начальные условия, имеем следующие задачи Коши для определения неизвестных функций $T_k(t)$:

$$\begin{cases} T_k' + \lambda_k T_k = f_k(t), \\ T_k(0) = 0, \end{cases} \qquad k = 1,\ 2,\ \ldots\ .$$

Решая эти задачи, получим

$$T_k(t) = \int_0^t e^{-\lambda_k(t-s)} f_k(s)\mathrm{d}s = \int_0^t e^{-\lambda_k(t-s)}\frac{4e^{-s}}{\pi(2k-1)}\mathrm{d}s =$$

$$= \frac{4e^{-\lambda_k t}}{\pi(2k-1)}\int_0^t e^{(\lambda_k-1)s}\mathrm{d}s = \frac{4(e^{-t}-e^{-\lambda_k t})}{\pi(2k-1)(\lambda_k-1)}$$

$$= \frac{4\left(e^{-t} - e^{-\left(\frac{2k-1}{2}\right)^2 t}\right)}{\pi(2k-1)\left(\frac{(2k-1)^2}{4}-1\right)} = \frac{16\left(e^{-t} - e^{-\left(\frac{2k-1}{2}\right)^2 t}\right)}{\pi(2k-1)(2k+1)(2k-3)}.$$

Теперь можем записать окончательный ответ:

$$u(x,\,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{16}{\pi(4k^2-1)(2k-3)}\left(e^{-t} - e^{-\left(\frac{2k-1}{2}\right)^2 t}\right)\sin\frac{(2k-1)x}{2} + e^{-t}.$$

Пример 3.3.

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = x^2 + x, \qquad 0 < x < 1,\ \ t > 0;$$

$$u(x,0) = \sin^2(\pi x), \qquad x \in [0,1];$$

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = t, \qquad \frac{\partial u(1,t)}{\partial x} = 3t, \quad t \in [0,+\infty).$$

Сведем задачу к задаче с однородными краевыми условиями с помощью замены неизвестной функции, полагая

$$u(x, t) = v(x, t) + w(x, t),$$

где $v(x, t)$ – новая неизвестная функция; $w(x, t)$ – дважды дифференцируемая по переменной x и один раз по переменной t функция, удовлетворяющая краевым условиям

$$\frac{\partial w(0,t)}{\partial x} = t, \quad \frac{\partial w(1,t)}{\partial x} = 3t.$$

Заметим, что в большинстве случаев функцию $w(x, t)$ можно, как в предыдущем примере, подобрать в виде

$$w(x, t) = a(t)x + b(t).$$

Однако, если на обоих концах отрезка задана производная, линейной по переменной x функции недостаточно. Найдем необходимую функцию в виде

$$w(x, t) = a(t)x^2 + b(t)x.$$

Из краевых условий

$$\frac{\partial w(0,\, t)}{\partial x} = b(t) = t, \quad \frac{\partial w(1,\, t)}{\partial x} = 2a(t) + b(t) = 3t$$

находим $a(t) = t$, $b(t) = t$, т.е.

$$w(x, t) = t(x^2 + x).$$

Для новой неизвестной функции получим следующую задачу:

$$\frac{\partial v}{\partial t} - 4\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 8t, \qquad 0 < x < 1, \quad t > 0;$$

$$v(x, 0) = \sin^2(\pi x), \qquad x \in [0, 1];$$

$$\frac{\partial v(0,t)}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial v(1,t)}{\partial x} = 0, \quad t \in [0, +\infty).$$

Для построения системы базисных функций $\{X_k\}$ запишем вспомогательную задачу на собственные значения

$$\begin{cases} -v'' = \lambda v, & 0 < x < 1, \\ v'(0) = v'(1) = 0. \end{cases}$$

Обратившись к п. 2.4, получим

$\lambda_0 = 0$, $X_0(x) = 1$; $\lambda_k = (k\pi)^2$, $X_k(x) = \cos(k\pi x)$, $k = 1, 2, \ldots$.

Разложим в ряд Фурье по найденному базису правую часть уравнения и начальную функцию. Заметим, что в данном случае

$$f(x, t) = 8t \cdot 1 = f_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) \cos k\pi x,$$

т.е. $f_k(t) = \begin{cases} 8t, & k = 0, \\ 0, & k = 1,\ 2,\ \ldots \end{cases}$

Начальная функция может быть представлена в виде

$$\varphi(x) = \sin^2(\pi x) = \frac{1}{2} \cdot 1 + \left(-\frac{1}{2} \right) \cos 2\pi x = \varphi_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k \cos k\pi x,$$

т.е. $\varphi_k = \begin{cases} 1/2, & k = 0, \\ -1/2, & k = 2, \\ 0, & k = 1, 3, 4,\ \ldots \end{cases}$

Так как в разложениях для $f(x, t)$ и $\varphi(x)$ отличны от нуля коэффициенты лишь при двух базисных функциях, то и в разложении решения задачи будут лишь два соответствующих слагаемых, т.е.

$$v(x, t) = T_0(t) + T_2(t) \cos 2\pi x.$$

Подставим последнее разложение в ДУ

$$T_0'(t) + T_2'(t) \cos 2\pi x + 4 \cdot T_2(t) (2\pi)^2 \cos 2\pi x = 8t$$

и в начальные условия

$$v(x, 0) = T_0(0) + T_2(0) \cos 2\pi x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\pi x.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых базисных функциях, запишем для определения $T_0(t)$ и $T_2(t)$ следующие задачи Коши:

$$\begin{cases} T_0' = 8t, \\ T_0(0) = \dfrac{1}{2}, \end{cases} \quad \begin{cases} T_2' + 16\pi^2 T_2 = 0, \\ T_2(0) = -\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Решая эти задачи, получим

$$T_0(t) = 4t^2 + \frac{1}{2}, \quad T_2(t) = -\frac{1}{2} e^{-16\pi^2 t}.$$

Наконец, запишем окончательный ответ рассматриваемой смешанной задачи

$$u(x,\,t) = 4t^2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-16\pi^2 t}\cos 2\pi x + (x^2 + x)t.$$

3.3. Задачи для самостоятельного решения

Решить смешанные задачи:

Задача 1

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0;$$
$$u(x,0) = x(2\pi - x), \quad 0 \le x \le \pi;$$
$$u(0,t) = \frac{\partial u(\pi,t)}{\partial x} = 0, \quad t \ge 0.$$

Задача 2

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 36\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < 2, \quad t > 0;$$
$$u(x,0) = x^2 - 4x, \quad 0 \le x \le 2;$$
$$u(0,t) = \frac{\partial u(2,t)}{\partial x} = 0, \quad t \ge 0.$$

Задача 3

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < 2, \quad t > 0;$$
$$u(x,0) = \varphi(x) = \begin{cases} 5x, & 0 \le x \le 1, \\ 5, & 1 < x \le 2; \end{cases}$$
$$u(0,t) = \frac{\partial u(2,t)}{\partial x} = 0, \quad t \ge 0.$$

Задача 4

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 9\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0;$$
$$u(x,0) = x^2 - x^3, \quad 0 \le x \le \pi;$$
$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = u(1,t) = 0, \quad t \ge 0.$$

Задача 5

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 25\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < 2, \quad t > 0;$$
$$u(x,0) = \varphi(x) = \begin{cases} 3, & 0 \le x \le 1, \\ 6 - 3x, & 1 < x \le 2, \end{cases} \quad 0 \le x \le 2;$$
$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = u(2,t) = 0, \quad t \ge 0.$$

Задача 6

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0;$$
$$u(x,0) = 3x^2 - 2x^3, \quad 0 \le x \le 1;$$
$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = \frac{\partial u(1,t)}{\partial x} = 0, \quad t \ge 0.$$

Задача 7

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 16\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < 3, \quad t > 0;$$
$$u(x,0) = \varphi(x) = \begin{cases} 2, & 0 \le x \le 1, \\ 3 - x, & 1 < x \le 2, \\ 1, & 2 < x \le 3; \end{cases}$$
$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = \frac{\partial u(3,t)}{\partial x} = 0, \quad t \ge 0.$$

Задача 8

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=t\cos x,\quad 0<x<\pi,\quad t>0;$$
$$u(x,0)=0,\quad 0\le x\le\pi;$$
$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x}=\frac{\partial u(\pi,t)}{\partial x}=0,\quad t\ge 0.$$

Задача 9

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=(t+1)\sin\frac{x}{2}+5\sin\frac{3x}{2},\quad 0<x<\pi,\quad t>0;$$
$$u(x,0)=\sin\frac{3x}{2}+2x,\quad 0\le x\le\pi;$$
$$u(0,t)=0,\quad \frac{\partial u(\pi,t)}{\partial x}=2,\quad t\ge 0.$$

Задача 10

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=e^{-3t}\sin\frac{x}{2}+3\sin\frac{3x}{2},\quad 0<x<\pi,\quad t>0;$$
$$u(x,0)=\sin\frac{x}{2}+2x,\quad 0\le x\le\pi;$$
$$u(0,t)=0,\quad \frac{\partial u(\pi,t)}{\partial x}=2,\quad t\ge 0.$$

Задача 11

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=1,\quad 0<x<\pi,\quad t>0;$$
$$u(x,0)=0,\quad 0\le x\le\pi;$$
$$u(0,t)=t,\quad \frac{\partial u(\pi,t)}{\partial x}=0,\quad t\ge 0.$$

Задача 12

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=1,\quad 0<x<\pi,\quad t>0;$$

$$u(x,0)=\sin\frac{x}{2}+1,\quad 0\le x\le\pi;$$

$$u(0,t)=1,\quad \frac{\partial u(\pi,t)}{\partial x}=0,\quad t\ge 0.$$

Задача 13

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=e^{-t}\cos\frac{x}{2}+\cos\frac{3x}{2},\quad 0<x<\pi,\quad t>0;$$

$$u(x,0)=2\cos\frac{3x}{2}+5(x-\pi),\quad 0\le x\le\pi;$$

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x}=5,\quad u(\pi,t)=0,\quad t\ge 0.$$

Задача 14

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=2\cos\frac{3x}{2}+3,\quad 0<x<\pi,\, t>0;$$

$$u(x,0)=\cos\frac{x}{2}+1,\quad 0\le x\le\pi;$$

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x}=0,\quad u(\pi,t)=3t+1,\quad t\ge 0.$$

Задача 15

$$\frac{\partial u}{\partial t}-4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=e^{-4t}\cos x,\quad 0<x<\pi,\quad t>0;$$

$$u(x,0)=2\cos x-\cos 2x+2x,\quad 0\le x\le\pi;$$

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x}=2,\quad \frac{\partial u(\pi,t)}{\partial x}=2,\quad t\ge 0.$$

Задача 16

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=te^{-2t}\cos x-t\cos 2x,\quad 0<x<\pi,\quad t>0;$$
$$u(x,0)=3\cos 3x-x,\quad 0\le x\le\pi;$$
$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x}=\frac{\partial u(\pi,t)}{\partial x}=-1,\quad t\ge 0.$$

Задача 17

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=t\cos\frac{3x}{2}+e^{-3t}\cos\frac{5x}{2},\quad 0<x<\pi,\quad t>0;$$
$$u(x,0)=2\cos\frac{x}{2}+x-\pi,\quad 0\le x\le\pi;$$
$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x}=1,\quad u(\pi,t)=0,\quad t\ge 0.$$

Ответы

1. $u(x,t)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{32}{\pi(2k-1)^3}e^{-\frac{(2k-1)^2}{4}t}\sin\frac{(2k-1)x}{2}$.

2. $u(x,t)=-128\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\pi^3(2k-1)^3}e^{-\frac{9}{4}\pi^2(2k-1)^2t}\sin\frac{(2k-1)\pi x}{4}$.

3. $u(x,t)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{80}{\pi^2(2k-1)^2}\sin\frac{(2k-1)\pi}{4}e^{-\frac{\pi^2(2k-1)^2}{4}t}\sin\frac{(2k-1)\pi x}{4}$.

4. $u(x,t)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{64}{\pi^3(2k-1)^3}\left(\sin\frac{(2k-1)\pi}{2}-\frac{3}{\pi(2k-1)}\right)e^{-\frac{9}{4}\pi^2(2k-1)^2t}\times$
$\times\cos\frac{(2k-1)\pi x}{2}$.

5. $u(x,t)=48\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\cos\frac{(2k-1)\pi}{4}}{\pi^2(2k-1)^2}\right)e^{-\frac{25}{16}\pi^2(2k-1)^2t}\cos\frac{(2k-1)\pi x}{4}$.

6. $u(x,t)=\frac{1}{2}+\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{24}{k^4\pi^4}(1-(-1)^k)e^{-4\pi^2k^2t}\cos k\pi x$.

7. $u(x,t)=\frac{3}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{6}{(\pi k)^2}\left(\cos\frac{k\pi}{3}-\cos\frac{2k\pi}{3}\right)e^{-\frac{9}{16}\pi^2k^2t}\cos\frac{k\pi x}{3}$.

8. $u(x,t)=(e^{-t}+t-1)\cos x$.

9. $u(x,t)=2x+\left(12e^{-\frac{t}{4}}+4t-12\right)\sin\frac{x}{2}+\left(\frac{20}{9}-\frac{11}{9}e^{-\frac{9t}{4}}\right)\sin\frac{3x}{2}$.

10. $u(x,t)=2x+\frac{1}{11}\left(15e^{-\frac{t}{4}}-4e^{-3t}\right)\sin\frac{x}{2}+\frac{4}{3}\left(1-e^{-\frac{9t}{4}}\right)\sin\frac{3x}{2}$.

11. $u(x,t)=t$.

12. $u(x,t)=t+1+e^{-\frac{t}{4}}\sin\frac{x}{2}$.

13. $u(x,t)=5(x-\pi)+\frac{4}{3}\left(e^{-\frac{t}{4}}-e^{-t}\right)\cos\frac{x}{2}+\left(\frac{14}{9}e^{-\frac{9}{4}t}+\frac{4}{9}\right)\cos\frac{3x}{2}$.

14. $u(x,t)=3t+1+e^{-\frac{t}{4}}\cos\frac{x}{2}+\frac{8}{9}\left(1-e^{-\frac{9t}{4}}\right)\cos\frac{3x}{2}$.

15. $u(x,t)=2x+e^{-4t}(t+2)\cos x-e^{-16t}\cos 2x$.

16. $u(x,t)=-x+\left(e^{-t}-e^{-2t}(t+1)\right)\cos x+\frac{1}{16}\left(1-4t-e^{-4t}\right)\cos 2x+$
$+3e^{-9t}\cos 3x$.

17. $u(x,t)=2e^{-\frac{t}{4}}\cos\frac{x}{2}+\frac{16}{81}\left(e^{-\frac{9}{4}t}+\frac{9}{4}t-1\right)\cos\frac{3x}{2}+$
$+\frac{4}{13}\left(e^{-3t}-e^{-\frac{25}{4}t}\right)\cos\frac{5x}{2}+(x-\pi)$.

4. СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ (ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ)

4.1. Принцип максимума (минимума)

Фиксируем $T > 0$ и рассмотрим смешанную задачу (1.1) – (1.3) для уравнения диффузии (теплопроводности) в прямоугольнике $Q_T = \{(x, t): 0 < x < l, 0 < t \le T\}$ (рис. 4.1). Обозначим Γ_T – часть границы прямоугольника, состоящую из его нижнего основания и боковых сторон.

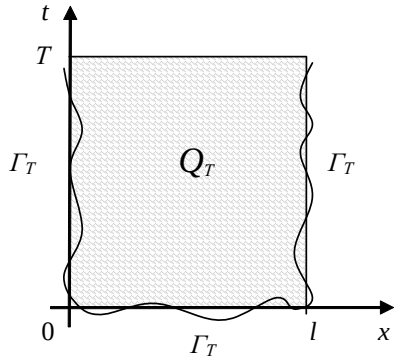


Рис. 4.1. Область определения функции $u(x, t)$

Сформулируем (без доказательства) важное свойство решений задачи.

Теорема 4.1 (*принцип максимума*). Пусть $u(x, t)$ является классическим решением смешанной задачи (1.1) – (1.3) в прямоугольнике Q_T. Если $f(x ,t) \le 0$ в замкнутом прямоугольнике $\overline{Q}_T = Q_T \cup \Gamma_T$, то наибольшее значение функции $u(x, t)$ в $\overline{Q}_T$ достигается на Γ_T.

Следствие 4.1 (*принцип минимума*). Пусть $u(x, t)$, является классическим решением смешанной задачи (1.1) – (1.3) в прямоугольнике Q_T и $f(x, t) \ge 0$ в замкнутом прямоугольнике $\overline{Q}_T = Q_T \cup \Gamma_T$. Тогда функция $u(x, t)$ достигается своего наименьшего значения в $\overline{Q}_T$ на Γ_T.

Следствие 4.2. Пусть $u(x, t)$ − классическое решение смешанной задачи (1.1) – (1.3) в прямоугольнике Q_T в случае $f(x, t) = 0$ в $\overline{Q}_T$. Тогда

функция $u(x, t)$ достигает своего наибольшего и наименьшего значений на Γ_T (т.е. в начальный момент времени или на концах отрезка).

Замечание 4.1. Пусть задача (1.1) – (1.3) описывает процесс распространения тепла в стержне с теплоизолированной боковой поверхностью. Физически принцип максимума означает, что при отсутствии источников температура тела во внутренней точке стержня не может стать большей, чем в начальный момент времени или на его концах.

4.2. Единственность классического решения смешанной задачи

Важным следствием принципа максимума является теорема единственности решения.

Теорема 4.2. Задача (1.1) – (1.3) может иметь не более одного классического решения.

Доказательство. Пусть $u_1(x, t)$, $u_2(x, t)$ – два классических решения задачи (1.1) – (1.3). Их разность

$$u(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t)$$

есть решение следующей смешанной задачи:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & (x, t) \in Q, \\ u(x, 0) = 0, & x \in [0, l], \\ u(0, t) = u(l, t) = 0, & t \in [0, +\infty). \end{cases}$$

Возьмем любое $T > 0$, тогда $u(x, t) = 0$ на Γ_T. По следствию 4.2, $u(x, t) = 0$ на Q_T. В силу произвольности T, $u(x, t) = 0$ на $\overline{Q}$, значит $u_1(x, t) = u_2(x, t)$ на $\overline{Q}$.

4.3. Теорема существования классического решения смешанной задачи для уравнения диффузии (теплопроводности)

Рассмотрим для простоты смешанную задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad (x, t) \in Q; \tag{4.1}$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \qquad x \in [0, l]; \tag{4.2}$$

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, \qquad t \in [0, +\infty). \tag{4.3}$$

Ее формальное решение дается формулой

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k e^{-\left(\frac{ak\pi}{l}\right)^2 t} \sin\frac{k\pi x}{l}; \tag{4.4}$$

$$\varphi_k = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx. \tag{4.5}$$

Какие условия достаточно наложить на функцию $\varphi(x)$, чтобы ряд (4.4) представлял собой классическое решение задачи? Ответ на этот вопрос дает следующая теорема, которую мы сформулируем без доказательства.

Теорема 4.3. Пусть функция $\varphi(x)$ непрерывна на $[0, l]$, имеет кусочно-непрерывную производную на $[0, l]$ и удовлетворяет условиям $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$. Тогда существует классическое решение задачи (4.1) – (4.3), представимое рядом (4.4) с коэффициентами (4.5).

5. СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНОМЕРНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

5.1. Постановка задачи

По аналогии с рассмотренным выше ДУ диффузии (теплопроводности) (1.1) рассмотрим в полуполосе

$$Q = \{(x, t): 0 < x < l, 0 < t < +\infty\}$$

следующее ДУ с частными производными, которое называется одномерным *волновым уравнением* (или *уравнением колебаний струны*):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t), \quad (x, t) \in Q. \tag{5.1}$$

где $a^2 > 0$ – известный числовой параметр; правая часть $f(x, t)$ – достаточно гладкая известная функция, определенная на Q, $u = u(x, t)$ – неизвестная функция; t играет роль времени; x – пространственная переменная.

В отличие от уравнения диффузии (теплопроводности) (1.1), уравнение (5.1) является ДУ второго порядка по переменной t. Следовательно, для устранения произвола в определении $u(x, t)$ необходимо задать два дополнительных условия по переменной t (начальные условия)

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \psi(x), \quad x \in [0, l] \tag{5.2}$$

и два – по x (краевые условия), например, такие:

$$u(0, t) = \alpha_0(t), \; u(l, t) = \alpha_l(t), \; t \in [0, +\infty), \tag{5.3}$$

где $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $\alpha_0(t)$ и $\alpha_l(t)$ – достаточно гладкие известные функции.

Задача (5.1) – (5.3) называется смешанной задачей для одномерного волнового уравнения. Сформулируем, что нужно понимать под решением этой задачи.

Обозначим через Γ границу области Q, тогда $\overline{Q} = Q \cup \Gamma$ – соответствующая замкнутая область.

Определение 5.1. Функция $u(x, t)$, определенная на множестве $\overline{Q}$, называется *классическим решением смешанной задачи* (5.1) – (5.3), если

1) $u(x,t)$ и $\dfrac{\partial u(x,\,t)}{\partial t}$ непрерывны на $\overline{Q}$ и удовлетворяют на Γ условиям (5.1) – (5.3);

2) частные производные $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ и $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ непрерывны на Q, а $u(x,\,t)$ удовлетворяет на Q ДУ (5.1).

Как и в случае уравнения диффузии (теплопроводности), необходимым условием существования классического решения задачи является согласование начальных и граничных условий

$$\varphi(0)=\alpha_0(0),\quad \varphi(l)=\alpha_l(0),\quad \psi(0)=\alpha_0'(0),\quad \psi(l)=\alpha_l'(0)\,.$$

5.2. Физический смысл смешанных задач для волнового уравнения

Одномерное волновое уравнение часто называют ДУ струны. Пусть дана гибкая струна длиной l, занимающая в состоянии покоя отрезок $0 \le x \le l$. Пусть T_0 – постоянное натяжение струны, ρ – постоянная плотность материала струны, $F(x,\,t)$ – нагрузка внешней силы, приложенная к струне в точке x в момент времени t, рассчитанная на единицу длины. Пусть $a^2=\dfrac{T_0}{\rho}$, $f(x,\,t)=\dfrac{F(x,\,t)}{\rho}$, $u(x,\,t)$ – амплитуда колебаний в точке x в момент времени t. Тогда ДУ (5.1) описывает малые поперечные колебания струны, причем при $f(x,\,t)=0$ – свободные колебания, а при $f(x,\,t)\neq 0$ – вынужденные колебания. Начальные условия (5.2) имеют следующий смысл: функция $\varphi(x)$ задает начальную форму струны, а $\psi(x)$ – начальное распределение её скоростей. Граничные условия на концах струны могут быть различными. Они определяются в зависимости от способов закрепления концов струны. Если заданы законы движения концов струны, то граничные условия имеют вид (5.3). В частности, если

$$u(0,\,t)=u(l,\,t)=0,\ t\in[0,\,+\infty),$$

то концы струны жестко закреплены. Если концы струны свободны (могут свободно двигаться вдоль прямых $x=0$ и $x=l$ плоскости $(x,\,t)$), то граничные условия будут следующими:

$$\frac{\partial u(0,\,t)}{\partial x}=\frac{\partial u(l,\,t)}{\partial x}=0.$$

Возможны также граничные условия, связывающие при $x = 0$ (или при $x = l$) значения функции u и ее производной $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, что соответствует упругому закреплению, а также случаи, когда на разных концах заданы условия разного типа.

Уравнение (5.1) описывает также продольные колебания однородного стержня ($a^2 = \dfrac{E}{\rho}$, E – модуль Юнга, ρ – плотность материала стержня), колебания электрического тока в проводе при отсутствии сопротивления и потерь через изоляцию ($a^2 = \dfrac{1}{LC}$, L – коэффициент самоиндукции, C – коэффициент ёмкости, $u(x, t)$ – сила тока или напряжение), а также другие колебательные процессы.

5.3. Единственность классического решения смешанной задачи для волнового уравнения

Рассмотрим смешанную задачу для уравнения струны (5.1) – (5.3).

Теорема 5.1. Задача (5.1) – (5.3) имеет не более одного классического решения.

Доказательство. Пусть $u_1(x, t)$, $u_2(x, t)$ – два классических решения задачи (5.1) – (5.3). Их разность

$$u(x, t) = u_1(x, t) - u_2(x, t)$$

есть решение следующей смешанной задачи:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad (x, t) \in Q; \tag{5.4}$$

$$u(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0, \quad x \in [0, l]; \tag{5.5}$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \; t \in [0, +\infty). \tag{5.6}$$

Докажем, что эта задача имеет только нулевое решение.

Рассмотрим функцию

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right)^2 \mathrm{d}x + \frac{a^2}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right)^2 \mathrm{d}x$$

и покажем, что она является постоянной, т.е. не зависит от t. Физический смысл функции $E(t)$ – полная энергия колебаний струны в момент времени t, причем,

$$E_k(t) = \frac{1}{2}\int_0^l \left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right)^2 \mathrm{d}x \ -$$

кинетическая энергия, а

$$E_p(t) = \frac{a^2}{2}\int_0^l \left(\frac{\partial u(x,\,t)}{\partial x}\right)^2 \mathrm{d}x \ -$$

потенциальная энергия.

Таким образом, применяемый метод доказательства основан на энергетических соображениях.

Продифференцируем функцию $E(t) = E_k(t) + E_p(t)$ по t, выполняя при этом дифференцирование под знаком интеграла. Вычислив $E'_k(t)$ и воспользовавшись затем уравнением (5.4), получим

$$E'_k(t) = \int_0^l \frac{\partial u(x,\,t)}{\partial t}\frac{\partial^2 u(x,\,t)}{\partial t^2}\mathrm{d}x = a^2\int_0^l \frac{\partial u(x,\,t)}{\partial t}\frac{\partial^2 u(x,\,t)}{\partial x^2}\mathrm{d}x.$$

Далее, вычислив $E'_p(t)$ и проинтегрировав полученный интеграл по частям, имеем

$$E'_p(t) = a^2\int_0^l \frac{\partial u(x,\,t)}{\partial x}\frac{\partial^2 u(x,\,t)}{\partial x \partial t}\mathrm{d}x = \frac{\partial u(x,\,t)}{\partial x}\frac{\partial u(x,\,t)}{\partial t}\Bigg|_0^l -$$

$$- \ a^2\int_0^l \frac{\partial u(x,\,t)}{\partial t}\frac{\partial^2 u(x,\,t)}{\partial x^2}\mathrm{d}x = -a^2\int_0^l \frac{\partial u(x,\,t)}{\partial t}\frac{\partial^2 u(x,\,t)}{\partial x^2}\mathrm{d}x.$$

Здесь внеинтегральное слагаемое обращается в 0 в силу граничных условий (5.6)

$$u(0,\,t) = u(l,\,t) = 0,\ t \in [0,\,+\infty),$$

откуда следует, что и

$$\frac{\partial u(0,\,t)}{\partial t} = \frac{\partial u(l,\,t)}{\partial t}0, \quad t \in [0,\,+\infty)\,.$$

Таким образом,

$$E'(t) = E'_k(t) + E'_p(t) = 0,\ t \in \ (0,\,+\infty).$$

Следовательно, функция $E(t) = \mathrm{const}$ на полуоси $(0,\,+\infty)$. Согласно начальным условиям (5.5)

$$\frac{\partial u(x,\,0)}{\partial t} = 0,\;\; u(x,\,0) = 0, \qquad \forall x \in [0,\,l]\,,$$

откуда

$$\frac{\partial u(x,\,0)}{\partial x} = 0, \qquad \forall x \in [0,\,l],$$

поэтому

$$E(0) = \frac{1}{2}\int_0^l \left(\frac{\partial u(x,\,0)}{\partial t}\right)^2 \mathrm{d}x + \frac{a^2}{2}\int_0^l \left(\frac{\partial u(x,\,0)}{\partial x}\right)^2 \mathrm{d}x = 0.$$

В силу непрерывности функции $E(t)$ на $[0, +\infty)$, имеем

$$E(t) = \text{const} = E(0) = 0,\; t \in [0, +\infty).$$

Обращаясь к выражению для $E(t)$, приходим к выводу, что

$$\frac{\partial u(x,\,t)}{\partial t} = \frac{\partial u(x,\,t)}{\partial x} = 0, \quad (x,\,t) \in \overline{Q}.$$

Отсюда следует, что

$$u(x,\,t) = \text{const} = C,\;\; (x,\,t) \in \overline{Q}\,.$$

Используя начальное условие, находим

$$u(x,\,0) = C = 0.$$

Тем самым доказано, что

$$u(x,\,t) \equiv 0,\;\; (x,\,t) \in \overline{Q}\,.$$

Следовательно, если существуют две функции $u_1(x,\,t)$ и $u_2(x,\,t)$, удовлетворяющие условиям теоремы, то $u_1(x,\,t) \equiv u_2(x,\,t)$. Теорема доказана.

Замечание 5.1. Аналогичные соображения можно применить для доказательства теоремы единственности в случае краевых условий другого типа.

Замечание 5.2. Примененный здесь метод, основанный на энергетических соображениях, широко используется при доказательстве теорем единственности в различных задачах математической физики, например, в теории электромагнитных полей, теории упругости и гидродинамике.

5.4. Решение смешанной задачи для уравнения струны методом Фурье

Несмотря на то, что смешанные задачи для уравнения струны и для уравнения диффузии (теплопроводности) описывают принципиально разные физические процессы, их решение может быть построено по аналогичной схеме в виде ряда Фурье по собственным функциям дифференциального оператора $L = -\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}$ с соответствующими однородными краевыми условиями.

Рассмотрим смешанную задачу с однородными краевыми условиями

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t), \quad 0 < x < l, \ t > 0; \tag{5.7}$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \ \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \psi(x), \quad 0 \le x \le l; \tag{5.8}$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad t \ge 0. \tag{5.9}$$

Напомним, что сначала нужно найти систему базисных функций, необходимую для построения решения. Для этого рассмотрим в пространстве $H = \mathrm{C}[0, l]$ линейный оператор $L = -\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}$ с областью определения

$$D(L) = \left\{ u(x) \in C^2[0, l] : u(0) = u(l) = 0 \right\}$$

и решим для него задачу на собственные значения и собственные функции. Эта задача была рассмотрена в примере 2.1. В результате ее решения возникает последовательность собственных значений рассматриваемого оператора

$$\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{l} \right)^2, \quad k = 1, 2, \ \ldots \ .$$

Им соответствует ортогональная на $[0, l]$ система из собственных функций

$$\left\{ X_k(x) \right\}_{k=1}^{\infty} = \left\{ \sin \frac{k\pi x}{l} \right\}_{k=1}^{\infty}.$$

Как отмечалось ранее, эта система образует ортогональный базис в пространстве $C[0, l]$.

Разложим в ряд Фурье по найденному базису данные задачи

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k X_k(x), \quad \psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k X_k(x), \quad f(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) X_k(x).$$

Решение задачи (5.7) – (5.9) будем искать в виде аналогичного ряда

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) X_k(x). \tag{5.10}$$

Подставляя соответствующие ряды в уравнение (5.7) и начальные условия (5.8) и приравнивая коэффициенты при одинаковых базисных функциях, получим следующие задачи Коши для определения неизвестных функций $T_k(t)$:

$$\begin{cases} T_k'' + a^2 \lambda_k T_k = f_k(t), \\ T_k(0) = \varphi_k, \\ T_k'(0) = \psi_k, \qquad k = 1,\ 2,\ \ldots\ . \end{cases} \tag{5.11}$$

Решение каждой из этих задач можно найти методом вариации произвольных постоянных. Согласно этому методу, сначала построим фундаментальные системы решений соответствующих однородных ДУ. Обозначим $\omega_k = a\sqrt{\lambda_k}$ и запишем характеристическое уравнение

$$p^2 + \omega_k^2 = 0.$$

Это уравнение имеет чисто мнимые корни $p = \pm i\omega_k$, следовательно, фундаментальная система решений имеет вид

$$\{\cos(\omega_k t), \sin(\omega_k t)\}.$$

Общие решения ДУ в задачах (5.11) будем искать в виде

$$T_k(t) = C_1(t)\cos(\omega_k t) + C_2(t)\sin(\omega_k t),$$

где производные от неизвестных функций $C_1(t)$, $C_2(t)$ находятся из следующей, линейной относительно этих производных, системы алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} C_1'\cos\omega_k t + C_2'\sin\omega_k t = 0, \\ C_1'(\cos\omega_k t)' + C_2'(\sin\omega_k t)' = f_k(t), \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} C_1'\cos\omega_k t + C_2'\sin\omega_k t = 0, \\ -C_1'\sin\omega_k t + C_2'\cos\omega_k t = \dfrac{f_k(t)}{\omega_k}. \end{cases}$$

Решая последнюю систему, получим

$$C_1'(t) = -\frac{f_k(t)}{\omega_k}\sin\omega_k t;\ \ C_2'(t) = \frac{f_k(t)}{\omega_k}\cos\omega_k t\,,$$

откуда

$$C_1(t) = -\frac{1}{\omega_k}\int_0^t f_k(s)\sin(\omega_k s)\mathrm{d}s + C_3\,;\ C_2(t) = \frac{1}{\omega_k}\int_0^t f_k(s)\cos(\omega_k s)\mathrm{d}s + C_4$$

и, следовательно,

$$T_k(t) = \left(-\frac{1}{\omega_k}\int_0^t f_k(s)\sin(\omega_k s)\mathrm{d}s + C_3\right)\cos\omega_k t +$$

$$+\left(\frac{1}{\omega_k}\int_0^t f_k(s)\cos(\omega_k s)\mathrm{d}s + C_4\right)\sin\omega_k t =$$

$$= C_3\cos\omega_k t + C_4\sin\omega_k t + \frac{1}{\omega_k}\int_0^t f_k(s)\sin(\omega_k(t-s))\mathrm{d}s\,.$$

Наконец, осталось определить произвольные постоянные, воспользовавшись начальными условиями. Продифференцируем последнее выражение

$$T_k'(t) = \omega_k(-C_3\sin\omega_k t + C_4\cos\omega_k t) + \int_0^t f_k(s)\cos(\omega_k(t-s))\mathrm{d}s\,.$$

Подставляя начальные условия, получим

$$T_k(0) = C_3 = \varphi_k,\ \ T_k'(0) = \omega_k C_4 = \psi_k \Rightarrow C_3 = \varphi_k,\ \ C_4 = \frac{\psi_k}{\omega_k}.$$

Итак, решение задач (5.11) в рассматриваемом случае имеет вид

$$T_k(t) = \varphi_k \cos(a\sqrt{\lambda_k}\,t) + \frac{\psi_k}{a\sqrt{\lambda_k}} \sin(a\sqrt{\lambda_k}\,t) +$$

$$+ \frac{1}{a\sqrt{\lambda_k}} \int_0^t f_k(s) \sin(a\sqrt{\lambda_k}\,(t-s))\mathrm{d}s = \varphi_k \cos\frac{ka\pi t}{l} +$$

$$+ \psi_k \frac{l}{ka\pi} \sin\frac{ka\pi t}{l} + \frac{l}{ka\pi} \int_0^t f_k(s) \sin\frac{ka\pi(t-s)}{l}\mathrm{d}s\,.$$

Подставляя найденные функции $T_k(t)$ в формулу (5.10), получим формальное решение задачи (5.7) – (5.9).

Аналогично может быть построено решение смешанной задачи с однородными краевыми условиями более общего вида.

Если краевые условия неоднородные, то сначала надо свести задачу к задаче с однородными краевыми условиями путем замены неизвестной функции, полагая

$$u(x, t) = v(x, t) + w(x, t),$$

где $v(x, t)$ – новая неизвестная функция; $w(x, t)$ – дважды дифференцируемая по x и по t известная функция, удовлетворяющая заданным краевым условиям.

Рассмотрим некоторые примеры.

Пример 5.1. Однородная струна длиной l жестко закреплена на концах $x = 0$ и $x = l$. Струну отклонили от положения равновесия и в момент $t = 0$ отпустили без начальной скорости. Требуется определить отклонения $u(x, t)$ струны в любой момент времени, если ее начальное отклонение задается функцией $\varphi(x) = Ax(l - x)$, $A > 0$ (рис. 5.1).

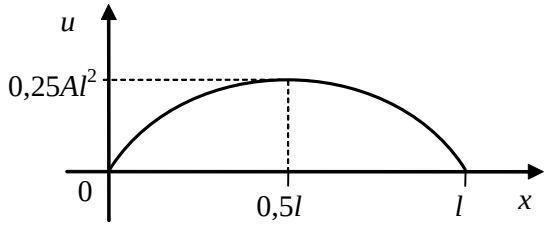


Рис. 5.1. Начальный профиль струны $u(x,0) = \varphi(x)$

Математической моделью рассматриваемого процесса является следующая начально-краевая задача для однородного уравнения струны:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < l, \quad t > 0;$$

$$u(x, 0) = Ax(l - x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0, \quad x \in [0, l];$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad t \in [0, +\infty).$$

В данном случае, как было установлено выше, системой базисных функций будет

$$\{X_k(x)\}_{k=1}^{\infty} = \left\{\sin\frac{k\pi x}{l}\right\}_{k=1}^{\infty}.$$

Разложим в ряд Фурье по найденному базису начальную функцию

$$\varphi(x) = Ax(l - x) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k \sin\frac{k\pi x}{l},$$

$$\varphi_k = \frac{2}{l}\int_0^l Ax(l - x)\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx = \frac{4Al^2}{(k\pi)^3}(1 + (-1)^{k+1}).$$

Решение будем искать в виде

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t)\sin\frac{k\pi x}{l}.$$

Подставляя соответствующие ряды в уравнение и начальные условия и приравнивая коэффициенты при одинаковых базисных функциях, для отыскания неизвестных функций $T_k(t)$ получим задачи Коши для линейных ДУ второго порядка с постоянными коэффициентами

$$\begin{cases} T_k'' + \left(\dfrac{ak\pi}{l}\right)^2 T_k = 0, \\ T_k(0) = \varphi_k, \\ T_k'(0) = 0, \qquad\qquad k = 1,\ 2, \end{cases}$$

Характеристическое уравнение, соответствующее каждому ДУ, имеет чисто мнимые корни $\pm\dfrac{ka\pi}{l}i$ и общее решение ДУ запишется как

$$T_k(t) = c_1 \cos\frac{ka\pi t}{l} + c_2 \sin\frac{ka\pi t}{l}.$$

Подставляя сюда начальные условия, получим

$$T_k(t) = \varphi_k \cos\frac{ka\pi t}{l}.$$

Итак, искомая амплитуда колебаний струны меняется по закону

$$u(x,t) = \frac{4Al^2}{\pi^3}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(1+(-1)^{k+1})}{k^3}\cos\frac{ak\pi t}{l}\sin\frac{k\pi x}{l} =$$

$$= \frac{8Al^2}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^3}\cos\frac{(2n-1)a\pi t}{l}\sin\frac{(2n-1)\pi x}{l}.$$

Пример 5.2. Рассмотрим задачу о вынужденных колебаниях струны, закрепленной на концах, если ее начальное отклонение и начальная скорость тождественно равны нулю на [0, l], а правая часть уравнения $f(x,t) = e^{-t}\sin\frac{k\pi x}{l}$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = e^{-t}\sin\frac{\pi x}{l}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0;$$

$$u(x,\,0) = 0, \quad \frac{\partial u(x,\,0)}{\partial t} = 0, \quad x \in [0,\,l];$$

$$u(0,\,t) = u(l,\,t) = 0, \quad t \in [0,\,+\infty).$$

Для построения решения также используем систему базисных функций

$$\{X_k(x)\}_{k=1}^{\infty} = \left\{\sin\frac{k\pi x}{l}\right\}_{k=1}^{\infty}.$$

Заметим, что правая часть уравнения уже разложена в ряд по данному базису, причем, это разложение содержит лишь первую базисную функцию, а начальная скорость и начальное отклонение тождественно равны нулю на [0, l]. Следовательно, решение задачи будем искать в виде

$$u(x,\,t) = T_1(t)\sin\frac{\pi x}{l}.$$

Подставим последнее выражение в ДУ

$$T_1''\sin\frac{\pi x}{l}+\left(\frac{\pi a}{l}\right)^2 T_1\sin\frac{\pi x}{l}=e^{-t}\sin\frac{\pi x}{l}$$

и в начальные условия

$$u(x,0)=T_1(0)\sin\frac{\pi x}{l}=0,$$
$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=T_1'(0)\sin\frac{\pi x}{l}=0.$$

Приравнивая коэффициенты при синусах, запишем задачу Коши для определения неизвестной функции $T_1(t)$:

$$\begin{cases} T_1''+\left(\dfrac{a\pi}{l}\right)^2 T_1=e^{-t}, \\ T_1(0)=0,\ \ T_1'(0)=0. \end{cases}$$

Здесь фундаментальная система решений соответствующего однородного ДУ состоит из функций

$$\cos\frac{a\pi t}{l},\ \ \sin\frac{a\pi t}{l}.$$

В соответствии с правой частью неоднородного ДУ, его частное решение подберем в виде

$$T_{\text{част}}(t)=Ae^{-t}.$$

Подставляя последнее выражение в ДУ, находим

$$A=\frac{1}{1+\left(\dfrac{a\pi}{l}\right)^2}.$$

Теперь можем записать общее решение ДУ

$$T_1(t)=c_1\cos\frac{a\pi t}{l}+c_2\sin\frac{a\pi t}{l}+\frac{e^{-t}}{1+\left(\dfrac{\pi a}{l}\right)^2}.$$

Определив произвольные постоянные c_1 и c_2 из начальных условий, получим решение задачи Коши

$$T_1(t)=\frac{1}{1+\left(\frac{\pi a}{l}\right)^2}\left(e^{-t}-\cos\frac{\pi a t}{l}+\frac{l}{\pi a}\sin\frac{\pi a t}{l}\right).$$

Подставляя найденную функцию $T_1(t)$ в выражение для $u(x, t)$, запишем окончательное решение задачи

$$u(x,t)=\frac{1}{1+\left(\frac{\pi a}{l}\right)^2}\left(e^{-t}-\cos\frac{\pi a t}{l}+\frac{l}{\pi a}\sin\frac{\pi a t}{l}\right)\sin\frac{\pi x}{l}.$$

5.5. Задачи для самостоятельного решения

Решить следующие смешанные задачи:

Задача 1

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-9\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0,\quad 0<x<4,\quad t>0;$$

$$u(x,0)=\varphi(x)=\begin{cases} x, & 0\le x\le 2,\\ 4-x, & 2<x\le 4,\end{cases}\quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=0;$$

$$u(0,t)=u(4,t)=0,\quad t\ge 0.$$

Задача 2

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-16\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0,\quad 0<x<6,\quad t>0;$$

$$u(x,0)=0,\quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=\psi(x)=\begin{cases}0, & 0\le x<2,\\ 5, & 2\le x\le 4,\\ 0, & 4<x\le 6;\end{cases}$$

$$u(0,t)=u(6,t)=0,\quad t\ge 0.$$

Задача 3

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0,\quad 0<x<\pi,\quad t>0;$$

$$u(x,0)=\sin^3 x,\quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=0,\quad 0\le x\le\pi;$$

$$u(0,t)=u(\pi,t)=0,\quad t\ge 0.$$

Задача 4

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < \pi, t > 0;$$
$$u(x,0) = \sin x, \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \cos x;$$
$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0.$$

Задача 5

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < 3, \quad t > 0;$$
$$u(x,0) = \varphi(x) = \begin{cases} 2, & 0 \le x \le 1, \\ 3 - x, & 1 < x \le 3, \end{cases} \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0, \quad 0 \le x \le 3;$$
$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = u(3,t) = 0, \quad t \ge 0.$$

Задача 6

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 81\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < 4, \quad t > 0;$$
$$u(x,0) = 0, \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \psi(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x < 2, \\ 3, & 2 \le x \le 4, \end{cases} \quad 0 \le x \le 4;$$
$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = \frac{\partial u(4,t)}{\partial x} = 0, \quad t \ge 0.$$

Задача 7

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0;$$
$$u(x,0) = \sin^2 x, \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0, \quad 0 \le x \le \pi;$$
$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = \frac{\partial u(\pi,t)}{\partial x} = 0, \quad t \ge 0.$$

Задача 8

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = e^{-t-2x}, \quad 0 < x < \pi, t > 0,$$
$$u(x,0) = 0, \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0,$$
$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0.$$

Задача 9

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 1, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0;$$
$$u(x,0) = 1, \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0, \quad 0 \le x \le 1;$$
$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = u(1,t) = 0, \quad t \ge 0.$$

Задача 10

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \cos^2 x, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0;$$
$$u(x,0) = \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0, \quad 0 \le x \le \pi;$$
$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = \frac{\partial u(\pi,t)}{\partial x} = 0, \quad t \ge 0.$$

Задача 11

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \cos x, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0;$$
$$u(x,0) = 0, \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \cos^2 x, \quad 0 \le x \le \pi;$$
$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = \frac{\partial u(\pi,t)}{\partial x} = 0, \quad t \ge 0.$$

Задача 12

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < 2, \quad t > 0;$$
$$u(x,0) = 3\sin(2\pi x) - 1 + 3x, \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0;$$
$$u(0,t) = -1, \quad u(2,t) = 5, \quad t \geq 0.$$

Задача 13

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 64\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < 3, \quad t > 0;$$
$$u(x,0) = 2 - 3x, \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 24\pi\sin(3\pi x);$$
$$u(0,t) = 2, \quad u(2,t) = -7, \quad t \geq 0.$$

Задача 14

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 49\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < 2, \quad t > 0;$$
$$u(x,0) = 0, \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 2\pi\cos(3\pi x) + 4x, \quad 0 \leq x \leq 2;$$
$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = \frac{\partial u(2,t)}{\partial x} = 4t, \quad t \geq 0.$$

Задача 15

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \sin x, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0;$$
$$u(x,0) = \frac{x}{\pi}, \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \sin 2x + 1, \quad 0 \leq x \leq \pi;$$
$$u(0,t) = t, \quad u(\pi,t) = t + 1, \quad t \geq 0.$$

Задача 16

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 25\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -7x\sin t, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0;$$

$$u(x,0) = 2\cos(\pi x), \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 7x, \quad 0 \le x \le 1;$$

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = \frac{\partial u(1,t)}{\partial x} = 7\sin t, \quad t \ge 0.$$

Задача 17

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \cos x - 1, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0;$$

$$u(x,0) = x^2, \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0, \quad 0 \le x \le \pi;$$

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u(\pi,t)}{\partial x} = 2\pi, \quad t \ge 0.$$

Ответы

1. $u(x,\,t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{16}{(\pi k)^2} \sin\frac{k\pi}{2} \cos\frac{3k\pi t}{4} \sin\frac{k\pi x}{4}$.

2. $u(x,\,t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{15}{(\pi k)^2} \left(\cos\frac{k\pi}{3} - \cos\frac{2k\pi}{3} \right) \sin\frac{2k\pi t}{3} \sin\frac{k\pi x}{6}$.

3. $u(x,\,t) = \frac{1}{4}(3\cos t \sin x - \cos 3t \sin 3x)$.

4. $u(x,\,t) = \cos t \sin x + \frac{2}{\pi} \sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{1 + (-1)^k}{k^2 - 1} \sin kt \sin kx =$

$= \cos t \sin x + \frac{4}{\pi} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} \sin(2nt) \sin(2nx)$.

5. $u(x,\,t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{24}{\pi^2 (2k-1)^2} \cos\frac{(2k-1)\pi}{6} \cos\frac{(2k-1)\pi t}{3} \cos\frac{(2k-1)\pi x}{6}$.

6. $u(x,\,t) = \frac{3t}{2} - \frac{8}{3} \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\sin\frac{k\pi}{2}}{\pi^2 k^2} \sin\frac{9k\pi t}{4} \cos\frac{k\pi x}{4}$.

7. $u(x,\,t)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\cos 2t\cos 2x$.

8. $u(x,\,t)=\dfrac{2}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{k(1+(-1)^k e^{-2\pi})}{(k^2+4)(k^2+1)}\left(\dfrac{\sin kt}{k}-\cos kt+e^{-t}\right)\sin kx$.

9. $u(x,\,t)=\dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)}\left(1-\dfrac{4}{(2k-1)^2\pi^2}\right)\cos\dfrac{(2k-1)t}{2}\cos\dfrac{(2k-1)x}{2}$.

10. $u(x,\,t)=\dfrac{t^2}{4}+\dfrac{1}{8}(1-\cos 2t)\cos 2x$.

11. $u(x,\,t)=\dfrac{t}{2}+(1-\cos t)\cos x+\dfrac{1}{4}\sin 2t\cos 2x$.

12. $u(x,\,t)=3x-1+3\cos(4\pi t)\sin(2\pi x)$.

13. $u(x,\,t)=2-3x+\sin(24\pi t)\sin(3\pi x)$.

14. $u(x,\,t)=4tx+\dfrac{2}{21}\sin(21\pi t)\cos(3\pi x)$.

15. $u(x,\,t)=(1-\cos t)\sin x+\dfrac{\sin 2t}{2}\sin 2x+t+\dfrac{x}{\pi}$.

16. $u(x,\,t)=7x\sin t+2\cos(5\pi t)\cos(\pi x)$.

17. $u(x,\,t)=-\dfrac{3t^2}{2}+(1-\cos t)\cos x+x^2$.

6. СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ (ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ) В ПЛОСКОЙ ОБЛАСТИ. ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЯ В СЛУЧАЕ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ

6.1. Постановка задачи

Пусть G – ограниченная односвязная область на плоскости переменных (x, y) с достаточно гладкой границей Γ. В цилиндре (рис. 6.1)

$$Ц = \{(x, y, t): (x, y) \in G, 0 < t < +\infty\}$$

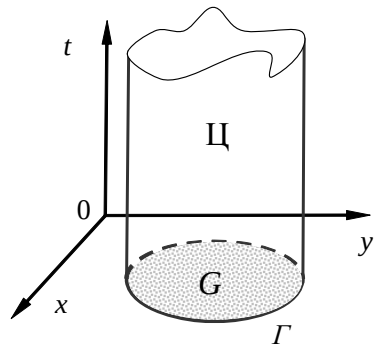


Рис. 6.1. Область определения функции $u(x, y, t)$

рассмотрим следующую смешанную задачу:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \Delta u = f(x, y, t), \quad (x, y, t) \in Ц; \tag{6.1}$$

$$u(x, y, 0) = \varphi(x, y), \quad (x, y) \in \bar{G}; \tag{6.2}$$

$$u = \omega(x, y, t), \quad (x, y) \in \Gamma, \quad t \in [0, +\infty), \tag{6.3}$$

где $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ – двумерный оператор Лапласа. Предполагается, что функция $f(x, y, t)$ непрерывна на $\bar{Ц} = \{(x, y, t): (x, y) \in \bar{G}, t \in [0, +\infty)\}$, $\varphi(x, y)$ непрерывна на $\bar{G}$, а $\omega(x, y, t)$ непрерывна на множестве $\{(x, y, t): (x, y) \in \Gamma, t \in [0, +\infty)\}$. Кроме того, пусть выполнено условие согласования начального и граничного условий

$$\varphi(x, y) = \omega(x, y, 0). \qquad (6.4)$$

Определение 6.1. Функция $u(x, y, t)$, определенная в $\overline{Ц}$, называется *классическим решением смешанной задачи* (6.1) – (6.3), если:

1) $u(x, y, t)$ непрерывна в $\overline{Ц}$ и удовлетворяет условиям (6.2) – (6.3);

2) частные производные $\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ непрерывны в $Ц$, а $u(x, y, t)$ удовлетворяет в Ц уравнению (6.1).

Замечание 6.1. Для классического решения задачи справедливы принцип максимума, теорема единственности.

Замечание 6.2. Краевые условия (6.3) называют *краевыми условиями первого рода*. Можно рассмотреть и другие типы краевых условий. Например, на границе области G или ее части может задаваться нормальная к ней производная.

Если граничная функция $\omega(x, y, t) = 0$, то формальное решение задачи может быть построено методом Фурье.

Пусть H – евклидово пространство непрерывных на $\overline{G}$ функций со скалярным произведением

$$(u_1, u_2) = \iint_G u_1(x, y) u_2(x, y) \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Рассмотрим линейный оператор $L = -\Delta$ с областью определения, состоящей из дважды непрерывно дифференцируемых на $\overline{G}$ функций, удовлетворяющих граничному условию $u\big|_{\Gamma} = 0$. С помощью несложных выкладок можно установить, что оператор L – *симметрический* и *положительный*.

Перейдем теперь к построению формального решения задачи в виде ряда Фурье по собственным функциям этого оператора в двух важных для приложений случаях, когда плоская область – прямоугольник или круг.

6.2. Собственные значения и собственные функции оператора $L = -\Delta$ с краевыми условиями первого рода в случае прямоугольной области

Пусть область G – прямоугольник, т.е.

$$G = \{(x, y): \ 0 < x < a, \ \ 0 < y < b\}.$$

Найдем собственные значения и собственные функции оператора $L = -\Delta$ с областью определения, состоящей из дважды непрерывно дифференцируемых на $\bar{G}$ функций, обращающихся в ноль на границе прямоугольника. Для их определения возникает краевая задача ($\lambda = \mu^2 > 0$, так как оператор L положителен):

$$-\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) = \mu^2 v, \quad (x, y) \in G; \tag{6.5}$$

$$v(0, y) = v(a, y) = 0; \tag{6.6}$$

$$v(x, 0) = v(x, b) = 0. \tag{6.7}$$

Решение этой задачи будем искать в виде

$$v(x, y) = Y(y) \sin\frac{k\pi x}{a}, \tag{6.8}$$

где $\sin\frac{k\pi x}{a}$ – собственная функция оператора $L_1 = -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}$ с краевыми условиями (6.6).

Подставляя (6.8) в (6.5), (6.7), для определения $Y(y)$ получим следующую краевую задачу:

$$\begin{cases} -Y''(y) = \left[\mu^2 - \left(\frac{k\pi}{a}\right)^2\right] Y(y), \\ Y(0) = Y(b) = 0. \end{cases}$$

Это означает, что $Y(y)$ является собственной функцией оператора $L_2 = -\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}y^2}$ с краевыми условиями (6.7), соответствующей собственному значению $\mu^2 - \left(\frac{k\pi}{a}\right)^2$. В соответствии с результатом, установленным в разделе 2, имеем

$$\mu^2 - \left(\frac{k\pi}{a}\right)^2 = \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2, \quad Y_m(y) = \sin\frac{m\pi y}{b}, \quad m = 1, 2, \ldots.$$

Следовательно, искомые собственные значения задачи (6.5) – (6.7) следующие:

$$\mu_{km}^2 = \left(\frac{k\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2, \qquad k, m = 1, 2, \ldots. \tag{6.9}$$

Им отвечают собственные функции

$$v_{km}(x, y) = \sin\frac{k\pi x}{a} \cdot \sin\frac{m\pi y}{b}, \quad k, m = 1, 2, 3, \ldots \tag{6.10}$$

Вычислим квадраты норм полученных собственных функций

$$\|v_{km}\|^2 = \iint\limits_G v_{km}^2(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_0^a \sin^2\left(\frac{k\pi x}{a}\right)\mathrm{d}x \int\limits_0^b \sin^2\left(\frac{m\pi y}{b}\right)\mathrm{d}y =$$

$$= \left\|\sin\left(\frac{k\pi x}{a}\right)\right\|^2 \left\|\sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right)\right\|^2 = \frac{ab}{4}.$$

Замечание 6.3. Найденные собственные функции оператора Лапласа в прямоугольнике равны произведению собственных функций по каждой переменной, т.е. $X_k(x)\cdot Y_m(y)$, а собственные значения равны сумме собственных значений одномерных задач.

Замечание 6.4. Собственные значения в данном случае могут повторяться (быть кратными). Однако ортогональность полученной системы собственных функций (6.10) в прямоугольнике можно проверить непосредственными вычислениями.

Пример 6.1. Пусть $G = \{(x, y) : 0 < x < \pi, \ 0 < y < \pi\}$ – квадрат, тогда

$$\mu_{km}^2 = k^2 + m^2, \qquad k, m = 1, \ 2, \ \ldots,$$

отсюда получим

$$\mu_{11}^2 = 2, \ \mu_{12}^2 = \mu_{21}^2 = 5, \ \mu_{22}^2 = 8, \ \mu_{13}^2 = \mu_{31}^2 = 10, \ \ldots,$$

здесь, например, второе собственное значение двукратно. Ему соответствуют две различные собственные функции $v_{12}(x, y) = \sin x \sin 2y$, $v_{21}(x, y) = \sin 2x \sin y$. Вычислим скалярное произведение

$$(v_{12}, v_{21}) = \iint\limits_G \sin x \sin 2y \sin 2x \sin y \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_0^\pi \sin x \sin 2x \mathrm{d}x \int\limits_0^\pi \sin y \sin 2y \mathrm{d}y = 0.$$

6.3. Построение формального решения смешанной задачи для уравнения диффузии (теплопроводности) с однородными граничными условиями в прямоугольной области

Рассмотрим смешанную задачу, описывающую явления теплопроводности или диффузии в плоской прямоугольной пластинке $G = \{(x,\ y):\ \ 0 < x < a,\ \ 0 < y < b\}$

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \Delta u = f(x,y,t),\ \ (x,y) \in G,\ \ t > 0; \tag{6.11}$$

$$u(x,y,0) = \varphi(x,y),\ \ (x,y) \in \bar{G}; \tag{6.12}$$

$$u(0,y,t) = u(a,y,t) = 0, \tag{6.13}$$

$$u(x,0,t) = u(x,b,t) = 0. \tag{6.14}$$

Разложим правую часть уравнения и начальную функцию в двойные ряды Фурье по синусам

$$f(x,y,t) = \sum_{k,m=1}^{\infty} f_{km}(t) \sin\frac{k\pi x}{a} \sin\frac{m\pi y}{b};$$

$$f_{km}(t) = \frac{(f, v_{km})}{(v_{km}, v_{km})} = \frac{4}{ab} \int_0^a \mathrm{d}x \int_0^b f(x,y,t) \sin\frac{k\pi x}{a} \sin\frac{m\pi y}{b} \mathrm{d}y;$$

$$\varphi(x,y) = \sum_{k,m=1}^{\infty} \varphi_{km} \sin\frac{k\pi x}{a} \sin\frac{m\pi y}{b};$$

$$\varphi_{km} = \frac{(\varphi, v_{km})}{(v_{km}, v_{km})} = \frac{4}{ab} \int_0^a \mathrm{d}x \int_0^b \varphi(x,y) \sin\frac{k\pi x}{a} \sin\frac{m\pi y}{b} \mathrm{d}y.$$

Решение задачи будем искать в виде аналогичного разложения

$$u(x,y,t) = \sum_{k,m=1}^{\infty} T_{km}(t) \sin\frac{k\pi x}{a} \sin\frac{m\pi y}{b}.$$

Подставляя ряды в дифференциальное уравнение (6.11) и начальные условия (6.12) и приравнивая коэффициенты при одинаковых базисных функциях, получим задачи Коши для определения $T_{km}(t)$:

$$\begin{cases} T'_{km} + a^2 \mu_{km}^2 T_{km} = f_{km}(t), \\ T_{km}(0) = \varphi_{km},\ \ k,m = 1,\ \ 2,\ \ \ldots\ . \end{cases} \tag{6.15}$$

Решения этих задач могут быть записаны в виде

$$T_{km}(t) = \varphi_{km} e^{-a^2 \mu_{km}^2 t} + \int_0^t e^{-a^2 \mu_{km}^2 (t-s)} f_{km}(s)\mathrm{d}s.$$

Итак, формальное решение смешанной задачи для уравнения теплопроводности в прямоугольнике имеет вид

$$u(x,y,t) = \sum_{k,m=1}^{\infty} \varphi_{km} e^{-a^2 \mu_{km}^2 t} \sin\frac{k\pi x}{a} \sin\frac{m\pi y}{b} +$$

$$+ \sum_{k,m=1}^{\infty} \left(\int_0^t e^{-a^2 \mu_{km}^2 (t-s)} f_{km}(s)\mathrm{d}s \right) \sin\frac{k\pi x}{a} \sin\frac{m\pi y}{b}.$$

Пример 6.2.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0, \quad (x,y) \in G = \{(x,y) : 0 < x < \pi, \quad 0 < y < \pi\}, \quad t > 0, \\ u(x,y,0) = 3\sin x \sin 2y, \quad (x,y) \in \bar{G}, \\ u(0,y,t) = u(\pi,y,t) = u(x,0,t) = u(x,\pi,t) = 0. \end{cases}$$

Здесь начальная функция $\varphi(x, y) = 3\sin x \sin 2y = 3v_{12}(x, y)$, т.е. она уже разложена в ряд Фурье по ортогональной на области G системе функций (6.10). Поскольку в разложении данных задачи присутствует лишь одна базисная функция, ее решение будем искать в виде

$$u(x,y,t) = T(t)\sin x \sin 2y\,.$$

Подставляя это выражение в ДУ и начальные условия, получим для определения неизвестной функции $T(t)$ следующую задачу Коши:

$$\begin{cases} T' + 5T = 0, \\ T(0) = 3, \end{cases}$$

отсюда $T(t) = 3e^{-5t}$, тогда можно записать решение начально-краевой задачи

$$u(x,y,t) = 3e^{-5t} \sin x \sin 2y\,,$$

являющееся ее классическим решением.

6.4. Собственные значения и собственные функции оператора $L = -\Delta$ в прямоугольной области в случае краевых условий общего вида

Как было отмечено выше, на практике, помимо краевых условий первого рода, встречаются и другие. Например, на границе прямоугольника или на ее части может задаваться нормальная к ней производная, собственные функции оператора Лапласа в прямоугольнике равны

$$v_{km}(x, y) = X_k(x)Y_m(y),$$

где $X_k(x)$ – собственные функции оператора $L_1 = -\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}$;, $Y_m(y)$ – собственные функции оператора $L_2 = -\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}y^2}$ с соответствующими краевыми условиями, а собственные значения равны сумме собственных значений этих операторов. Проиллюстрируем это на примере.

Пример 6.3. Найдем собственные значения λ и собственные функции $v(x, y)$ оператора $L = -\Delta$ с областью определения, состоящей из дважды непрерывно дифференцируемых на прямоугольнике $G = \{(x, y):\ 0 \le x \le a,\ 0 \le y \le b\}$ функций $u(x, y)$, удовлетворяющих краевым условиям $\dfrac{\partial u(0, y)}{\partial x} = \dfrac{\partial u(a, y)}{\partial x} = \dfrac{\partial u(x, 0)}{\partial y} = \dfrac{\partial u(x, b)}{\partial y} = 0$. Для их определения возникает краевая задача

$$-\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) = \lambda v,\ \ 0 < x < a,\ \ 0 < y < b; \tag{6.16}$$

$$\frac{\partial v(0, y)}{\partial x} = \frac{\partial v(a, y)}{\partial x} = 0,\ \ 0 \le y \le b; \tag{6.17}$$

$$\frac{\partial v(x, 0)}{\partial y} = \frac{\partial v(x, b)}{\partial y} = 0,\ \ 0 \le x \le a. \tag{6.18}$$

Пусть $\lambda_k^{(1)}$ – собственные значения, а $X_k(x)$ – соответствующие им собственные функции оператора $L_1 = -\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}$ с краевыми условиями $X_k'(0) = X_k'(a) = 0$, $k = 0, 1, \ldots$, т.е.

$$\begin{cases} -X_k'' = \lambda_k^{(1)} X_k, \quad 0 < x < a, \\ X_k'(0) = X_k'(a) = 0, \end{cases} \qquad k = 0, 1, 2, \ \ldots \ .$$

Решение задачи (6.16) − (6.18) будем искать в виде

$$v(x, y) = Y(y) X_k(x). \tag{6.19}$$

Заметим, что краевые условия (6.17) в этом случае выполнены. Подставляя выражение (6.19) в ДУ (6.16) и условия (6.18), получим для определения $Y(y)$ краевую задачу

$$\begin{cases} -Y''(y) = (\lambda - \lambda_k^{(1)}) Y(y), \quad 0 < y < b, \\ Y'(0) = Y'(b) = 0, \end{cases}$$

отсюда следует, что $\lambda - \lambda_k^{(1)} = \lambda_m^{(2)}$ – собственные значения, а $Y(y) = Y_m(y)$ – соответствующие им собственные функции оператора $L_2 = -\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}y^2}$ с краевыми условиями $Y_m'(0) = Y_m'(b) = 0, m = 0, 1, \ldots$, т.е.

$$\begin{cases} -Y_m'' = \lambda_m^{(2)} Y_m, \quad 0 < y < b, \\ Y_m'(0) = Y_m'(b) = 0, \end{cases} \qquad m = 0, \ 1, \ 2, \ \ldots \ .$$

Таким образом, собственные значения двумерного оператора $-\Delta$ с рассматриваемыми краевыми условиями

$$\lambda_{km} = \lambda_k^{(1)} + \lambda_m^{(2)} = \left(\frac{k\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2,$$

а соответствующие им собственные функции

$$v_{km}(x, y) = \cos\frac{k\pi x}{a} \cos\frac{m\pi y}{b}, \qquad k, m = 0, 1, 2, \ \ldots \ .$$

6.5. Задачи для самостоятельного решения

Задача 1

Найти собственные значения λ и собственные функции $v(x, y)$ оператора $L = -\Delta$ с областью определения, состоящей из дважды непрерывно дифференцируемых на прямоугольнике $G = \{(x, y): \ 0 \le x \le a,$

$0 \le y \le b\}$ функций $u(x, y)$, удовлетворяющих краевым условиям $\dfrac{\partial u(0,\ y)}{\partial x} = u(a,\ y) = 0$, $u(x,\ 0) = \dfrac{\partial u(x,\ b)}{\partial y} = 0$.

Задача 2

Решить смешанную задачу в прямоугольнике:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - a^2 \Delta u = \sin t \sin x \sin y,\ (x, y) \in G = \{(x, y) : 0 < x < \pi,\ 0 < y < \pi\},\ t > 0, \\ u(x, y, 0) = 0,\ \ (x, y) \in \bar{G}, \\ u(0, y, t) = u(\pi, y, t) = u(x, 0, t) = u(x, \pi, t) = 0. \end{cases}$$

Ответы

1. $\lambda_{km} = \left(\dfrac{(2k-1)\pi}{2a}\right)^2 + \left(\dfrac{(2m-1)\pi}{2b}\right)^2$,

$v_{km}(x,\ y) = \cos\dfrac{(2k-1)\pi x}{2a} \sin\dfrac{(2m-1)\pi y}{2b}$, $k, m = 1, 2, \ldots$

2. $u(x,\ y,\ t) = \dfrac{1}{1+4a^2}(e^{-2a^2 t} + 2a^2 \sin t - \cos t)\sin x \sin y$.

7. ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЯ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ (ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ) В КРУГЛОЙ ПЛАСТИНЕ

7.1. Уравнение и функции Бесселя

Приведем необходимые факты о бесселевых функциях. Эти функции обычно изучаются в курсе обыкновенных ДУ.

Уравнением Бесселя (или уравнением *цилиндрических функций*) называется линейное однородное ДУ второго порядка следующего вида ($p \geq 0$ – числовой параметр):

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - p^2) y = 0 . \qquad (7.1)$$

Любое нетривиальное решение этого ДУ называется *цилиндрической функцией*.

Как всякое линейное однородное ДУ второго порядка, уравнение Бесселя на полуоси $x > 0$ имеет два линейно независимых решения. Эти решения могу быть построены в виде обобщенных степенных рядов [2]. Одно из этих двух линейно независимых решений имеет вид

$$J_p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(p+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+p} . \qquad (7.2)$$

Это решение называется функцией Бесселя порядка p, здесь $\Gamma(p + k + 1)$ – гамма-функция Эйлера [1].

Пусть в уравнении Бесселя параметр $p = n$ – целое число. (Именно эта ситуация встретится в данном курсе.) В этом случае функции Бесселя (7.2) представимы сходящимися на всей оси обычными степенными рядами

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(n+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n} .$$

Например, функция Бесселя нулевого порядка может быть задана формулой

$$J_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} = 1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{2^2}\left(\frac{x}{2}\right)^4 - \dots .$$

Этот ряд напоминает разложение Тейлора функции $\cos\frac{x}{2}$. График функции $J_0(x)$ при $x \geq 0$ изображен на рис. 7.1, он описывает затухающие колебания.

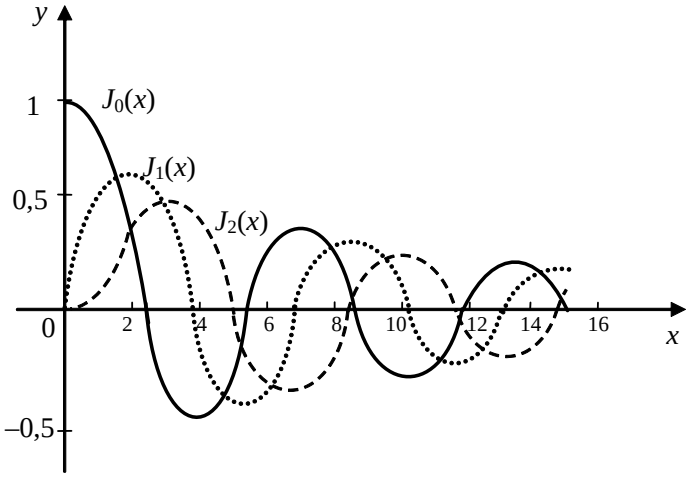


Рис. 7.1. Графики функций Бесселя $J_0(x)$, $J_1(x)$ и $J_2(x)$

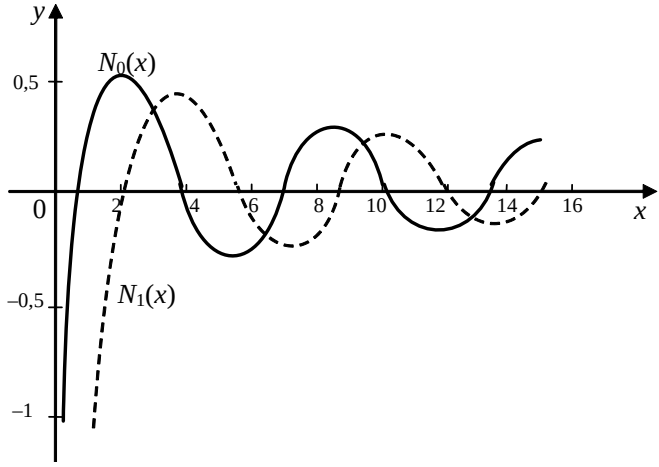


Рис. 7.2. Графики функций Неймана $N_0(x)$ и $N_1(x)$

Аналогичные графики имеют бесселевы функции $J_n(x)$, $n > 0$. Однако эти функции обращаются в ноль при $x = 0$. Их графики похожи

на «затухающий синус». Каждая из функций $J_n(x)$, $n \geq 0$ имеет последовательность нулей $\mu_n^{(s)}$, $s = 1, 2, 3, \ldots$. В частности, нули функции $J_0(x)$ следующие: $\mu_0^{(1)} \approx 2{,}4048$; $\mu_0^{(2)} \approx 5{,}5201$; $\mu_0^{(3)} \approx 8{,}6537 \ldots$.

Вторым, линейно независимым с $J_n(x)$, решением уравнения Бесселя является так называемая функция Неймана $N_n(x)$. Для дальнейших целей важно, что эта функция не ограничена при $x \to +0$. Графики функций Неймана порядка 0 и 1 приведены на рис. 7.2.

Заметим, что цилиндрические функции Бесселя хорошо изучены, для них имеются подробные таблицы и т.д. [2].

7.2. Выражение оператора Лапласа в полярных координатах

Рассмотрим область $D \subset \mathbf{R}^2$ переменных x, y и область $G \subset \mathbf{R}^2$ переменных r, φ. Пусть замена переменных (переход к полярным координатам)

$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi \tag{7.3}$$

отображает G на D взаимно однозначно, т.е. каждой точке $(r, \varphi) \in G$ ставится в соответствие точка $(x, y) \in D$, причем существует обратное отображение.

Пусть в области D задана дважды непрерывно дифференцируемая функция $u(x, y)$, обозначим

$$v(r, \varphi) = u(r\cos\varphi, r\sin\varphi) \tag{7.4}$$

и поставим задачу – выразить

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

через функцию $v(r, \varphi)$ и ее частные производные, т.е. найти вид двумерного оператора Лапласа в полярных координатах.

Применив правила дифференцирования сложной функции и сложив полученные выражения для $\dfrac{\partial^2 v}{\partial r^2}$, $\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v}{\partial r}$, $\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2}$, имеем

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\,.$$

Более компактно выражение для оператора Лапласа в полярных координатах можно переписать следующим образом:

$$\Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2}. \qquad (7.5)$$

Пусть теперь функция $u(x, y)$ дважды непрерывно дифференцируема в круге $x^2 + y^2 < R^2$ и непрерывна в замкнутом круге $x^2 + y^2 \le R^2$. В этом случае отображение (7.3) не является взаимнооднозначным и переход к полярным координатам оказывается затруднительным. Проблема решается, если к функции $v(r, \varphi)$, в которую в результате замены переменных переходит функция $u(x, y)$, добавить дополнительные условия

$$v(r, -\pi) = v(r, \pi),\ r \in (0, R); \qquad (7.6)$$

$$\frac{\partial v(r, -\pi)}{\partial \varphi} = \frac{\partial v(r, \pi)}{\partial \varphi},\quad r \in (0, R), \qquad (7.7)$$

которые называются *условиями* 2π-*периодичности* функции $v(r, \varphi)$ по переменной φ.

Обратим внимание, что выражение для оператора Лапласа в декартовых координатах определено в начале координат. В полярных же координатах (7.5) это выражение не определено при $r = 0$. Однако в силу непрерывности

$$u(x, y) \to u(0, 0) \text{ при } (x, y) \to (0, 0).$$

Следовательно, в соответствии с (7.4),

$$v(r, \varphi) \to u(0, 0) \text{ при } r \to 0.$$

отсюда следует, что функция $v(r, \varphi)$ должна быть ограничена при $r \to 0$, что кратко будем записывать следующим образом:

$$\left| v(0, \varphi) \right| < +\infty. \qquad (7.8)$$

7.3. Собственные значения и собственные функции оператора Лапласа в круге

Напомним, что в разделе 6 мы рассмотрели линейный оператор

$$-\Delta = -\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)$$

с областью определения

$$D(-\Delta)=\{u(x,\,y)\in C^2(\bar{G}):\;\; u\big|_{\Gamma}=0\},$$

где G – область в плоскости переменных x, y; Γ – ее граница. Отметили, что этот оператор симметрический и положительный, а также решили для него задачу на собственные значения и собственные функции в случае прямоугольной области.

Пусть теперь область $G=\{(x,y):\;\; x^2+y^2<R^2\}$ – круг радиуса R с центром в начале координат, $\Gamma=\{(x,y):\;\; x^2+y^2=R^2\}$. Рассмотрим задачу на собственные значения

$$\begin{cases} -\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)=\mu^2 u,\;\; (x,\,y)\in G, \\ \qquad\qquad u\big|_{\Gamma}=0. \end{cases} \tag{7.9}$$

В полярных координатах эта задача приобретает следующий вид:

$$\begin{cases} -\left(\dfrac{\partial^2 v}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v}{\partial r}+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2}\right)=\mu^2 v,\;\; r\in(0,\,R),\varphi\in(-\pi,\,\pi), \\ \qquad\qquad v(R,\,\varphi)=0. \end{cases} \tag{7.10}$$

При этом функция $v(r,\varphi)$ должна быть 2π-периодичной по переменной φ и ограниченной при $r\to 0$, т.е. должна удовлетворять также и следующим граничным условиям:

$$v(r,-\pi)=v(r,\varphi),\;\; \frac{\partial v(r,-\pi)}{\partial\varphi}=\frac{\partial v(r,\pi)}{\partial\varphi}; \tag{7.11}$$

$$\left|v(0,\varphi)\right|<+\infty. \tag{7.12}$$

Перейдем к решению поставленной задачи.

Выделим в правой части ДУ (7.10) оператор $L=-\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\varphi^2}$ с областью определения $D(L)$, состоящей из дважды непрерывно дифференцируемых на $[-\pi,\,\pi]$ функций $\Phi(\varphi)$, удовлетворяющих периодическим краевым условиям

$$\Phi(-\pi)=\Phi(\pi),\qquad \Phi'(-\pi)=\Phi'(\pi).$$

Согласно примеру 2.4, собственные функции оператора L составляют тригонометрическую систему

$$1,\ \cos\varphi,\ \sin\varphi,\ \cos 2\varphi,\ \sin 2\varphi,\ \dots, \tag{7.13}$$

причем, собственная функция 1 отвечает собственному значению 0, а $\cos k\varphi$, $\sin k\varphi$ отвечают собственному значению k^2. Будем искать частные решения нашей задачи в виде произведения этих функций на неизвестные функции, зависящие от r, т.е. в виде

$$a_0(r)\cdot 1,\ a_k(r)\cos k\varphi,\ b_k(r)\sin k\varphi,\ k = 1, 2, \dots . \tag{7.14}$$

Подставляя последовательно выражения (7.14) в (7.10) вместо $v(r, \varphi)$ и учитывая условия (7.12), для определения неизвестных функций получим следующие краевые задачи:

$$\begin{cases} -a_k'' - \dfrac{1}{r}a_k' + \dfrac{1}{r^2}a_k = \mu^2 a_k, \\ |a_k(0)| < +\infty, \quad a_k(R) = 0, \quad k = 0,\ 1,\ \dots, \end{cases} \tag{7.15}$$

$$\begin{cases} -b_k'' - \dfrac{1}{r}b_k' + \dfrac{1}{r^2}b_k = \mu^2 b_k, \\ |b_k(0)| < +\infty, \quad b_k(R) = 0, \quad k = 1,\ 2,\ \dots . \end{cases} \tag{7.16}$$

Любую из этих задач можно записать в виде

$$\begin{cases} r^2 c'' + rc' + (\mu^2 r^2 - k^2)c = 0, \quad 0 < r < R, \\ |c(0)| < +\infty, \quad c(R) = 0. \end{cases} \tag{7.17}$$

Сделаем замену независимой переменной и неизвестной функции, полагая

$$\mu r = \rho, \quad c(r) = w(\rho).$$

В результате задача перепишется следующим образом:

$$\begin{cases} \rho^2 w'' + \rho w' + (\rho^2 - k^2)w = 0, \quad 0 < \rho < \mu R, \\ |w(0)| < +\infty, \quad w(\mu R) = 0. \end{cases} \tag{7.18}$$

Получили краевую задачу для уравнения Бесселя с целочисленным параметром k.

Решение уравнения Бесселя, ограниченное в нуле, имеет вид

$$w(\rho) = J_k(\rho),\ k = 0, 1, 2, \dots ,$$

где $J_k(\rho)$ – функция Бесселя порядка k.

Воспользуемся вторым краевым условием

$$w(\mu R) = J_k(\mu R) = 0.$$

Это равенство означает, что

$$\mu R = \mu_k^{(s)},\ k = 0, 1, 2, \dots ,\ s = 1, 2, \dots ,$$

где $\mu_k^{(s)}$ – нули соответствующих функций Бесселя.

Таким образом, ненулевые решения задачи (7.22), т.е. собственные функции, существуют только при значениях параметра

$$\mu^2 = \left(\frac{\mu_k^{(s)}}{R} \right)^2 ,\ k = 0, 1, 2, \dots ,\ s = 1, 2, \dots , \qquad (7.19)$$

являющихся собственными значениями оператора Лапласа с рассматриваемыми краевыми условиями. При этом каждому собственному значению $\left(\frac{\mu_0^{(s)}}{R} \right)^2$ отвечает собственная функция $J_0\left(\frac{\mu_0^{(s)} r}{R} \right)$, а каждому собственному значению $\left(\frac{\mu_k^{(s)}}{R} \right)^2$ с $k \geq 1$ отвечают две собственные функции

$$J_k\left(\frac{\mu_k^{(s)} r}{R} \right)\cos k\varphi, \quad J_k\left(\frac{\mu_k^{(s)} r}{R} \right)\sin k\varphi.$$

Построенная система собственных функций (так называемая *система Фурье-Бесселя*)

$$\begin{cases} J_k\left(\dfrac{\mu_k^{(s)} r}{R} \right)\cos k\varphi, \quad k = 0, 1, 2, \ \dots \ , \\ J_l\left(\dfrac{\mu_l^{(s)} r}{R} \right)\sin k\varphi, \quad l = 1, 2, \ \dots \ , \ s = 1, 2, \ \dots \ . \end{cases} \qquad (7.20)$$

ортогональна на области $\overline{G}$. Этот факт доказывается с использованием свойств бесселевых функций.

7.4. Построение решения смешанной задачи для уравнения диффузии (теплопроводности) в круглой пластине

Рассмотрим смешанную задачу (6.1) – (6.3) в случае, когда плоская область – круг радиуса R с центром в начале координат, а граничная функция равна 0. Согласно изложенному выше, в полярных координатах поставленная задача запишется так:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} - a^2\left(\dfrac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2}\right) = f(r,\varphi,t),\ r\in(0,R),\varphi\in(-\pi,\pi),\ t>0, \\ v(r,\varphi,0) = h(r,\varphi),\quad r\in(0,R),\quad \varphi\in(-\pi,\pi), \\ v(R,\varphi,t) = 0,\quad |v(0,\varphi,t)| < +\infty,\quad \varphi\in(-\pi,\pi), t\ge 0, \\ v(r,-\pi,t) = v(r,\pi,t),\quad \dfrac{\partial v(r,-\pi,t)}{\partial\varphi} = \dfrac{\partial v(r,\pi,t)}{\partial\varphi},\qquad r\in(0,R), t\ge 0. \end{cases} \tag{7.21}$$

В соответствии с общей схемой метода Фурье, начальную функцию и правую часть уравнения следует разложить в ряды по ортогональной системе Фурье–Бесселя (7.23), т.е. представить в виде

$$h(r,\varphi) = \sum_{s=1}^{\infty}\left\{ a_{0s} J_0\left(\frac{\mu_0^{(s)} r}{R}\right) + \sum_{k=1}^{\infty}\left[a_{ks} J_k\left(\frac{\mu_k^{(s)} r}{R}\right)\cos k\varphi + b_{ks} J_k\left(\frac{\mu_k^{(s)} r}{R}\right)\sin k\varphi\right]\right\}; \tag{7.22}$$

$$f(r,\varphi,t) = \sum_{s=1}^{\infty}\left\{ \tilde{a}_{0s}(t) J_0\left(\frac{\mu_0^{(s)} r}{R}\right) + \sum_{k=1}^{\infty}\left[\tilde{a}_{ks}(t) J_k\left(\frac{\mu_k^{(s)} r}{R}\right)\cos k\varphi + \tilde{b}_{ks}(t) J_k\left(\frac{\mu_k^{(s)} r}{R}\right)\sin k\varphi\right]\right\}, \tag{7.23}$$

где коэффициенты разложения находятся через интегралы от бесселевых функций, на вычислении которых не останавливаемся, обращая внимание лишь на идею метода.

Решение задачи (7.21) будем искать в виде аналогичного ряда

$$v(r,\varphi,t) = \sum_{s=1}^{\infty}\left\{ v_{0s}(t) J_0\left(\frac{\mu_0^{(s)} r}{R}\right) + \sum_{k=1}^{\infty}\left[v_{ks}(t) J_k\left(\frac{\mu_k^{(s)} r}{R}\right)\cos k\varphi + \right.\right.$$

$$+u_{ks}(t)J_k\left(\frac{\mu_k^{(s)}r}{R}\right)\sin k\varphi\Bigg]\Bigg\}, \tag{7.24}$$

коэффициенты которого определяются как решения следующих задач Коши:

$$\begin{cases} v'_{ks}+a^2\left(\dfrac{\mu_k^{(s)}}{R}\right)^2 v_{ks}=\tilde{a}_{ks}(t), \quad t>0, \\ v_{ks}(0)=a_{ks}, \quad k=0,1,2, \ \ldots\ , \quad s=1,2, \ \ldots\ , \end{cases} \tag{7.25}$$

$$\begin{cases} u'_{ks}+a^2\left(\dfrac{\mu_k^{(s)}}{R}\right)^2 u_{ks}=\tilde{b}_{ks}(t), \quad t>0, \\ u_{ks}(0)=b_{ks}, \quad k=1,2, \ \ldots\ , \quad s=1,2, \ \ldots\ . \end{cases} \tag{7.26}$$

Пример 7.1. Дан бесконечный однородный круговой цилиндр радиуса R, начальное распределение температуры в котором задается функцией

$$h(r)=AJ_0\left(\frac{\mu_0^{(3)}r}{R}\right), \quad 0\le r\le R, \quad A=\text{const}.$$

На поверхности цилиндра поддерживается температура, равная нулю. Требуется найти распределение температуры внутри цилиндра в любой момент времени t. Математической моделью изучаемого процесса является смешанная задача для уравнения теплопроводности в круге типа (7.21), где правая часть ДУ равна 0, коэффициент a^2 определяется характеристиками материала цилиндра. Так как уравнение однородно, а начальная функция не зависит от угла φ, то неизвестная функция тоже не зависит от угла φ, т.е. рассматривается задача о радиальном распределении температуры $v(r, t)$, которая записывается так:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t}-a^2\left(\dfrac{\partial^2 v}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v}{\partial r}\right)=0, \quad r\in(0,R), t>0, \\ v(r,0)=AJ_0\left(\dfrac{\mu_0^{(3)}r}{R}\right), \quad 0\le r\le R, \\ v(R,t)=0, \quad |v(0,t)|<+\infty, \quad t\ge 0. \end{cases}$$

Уравнение теплопроводности рассматривается с однородными краевыми условиями Дирихле, следовательно, в соответствии с методом Фурье решение строится в виде ряда Фурье–Бесселя (7.24). Здесь начальная функция $h(r) = AJ_0\left(\dfrac{\mu_0^{(3)} r}{R}\right)$ уже разложена в подобный ряд, причем, в этом разложении отлично от нуля лишь одно слагаемое. Решение задачи в этом случае будет иметь вид

$$v(r, t) = v_{03}(t) J_0\left(\frac{\mu_0^{(3)} r}{R}\right).$$

Подставляя последнее выражение в ДУ и начальные условия, получим задачу Коши для определения неизвестной функции от t

$$\begin{cases} v_{03}' + \left(\dfrac{a\mu_0^{(3)}}{R}\right)^2 v_{03} = 0, \quad t > 0, \\ v_{03}(0) = A. \end{cases}$$

Отсюда $v_{03}(t) = A\exp\left[-\left(\dfrac{a\mu_0^{(3)}}{R}\right)^2 t\right]$, следовательно, закон распределения температуры в любом сечении цилиндра, перпендикулярном его оси, имеет вид

$$v(r, t) = A\exp\left[-\left(\frac{a\mu_0^{(3)}}{R}\right)^2 t\right] J_0\left(\frac{\mu_0^{(3)} r}{R}\right).$$

7.5. Задача для самостоятельного решения

Найти распределение температуры в неограниченном круговом цилиндре радиусом R, если его поверхность поддерживается при нулевой температуре, начальная температура равна нулю, а внутри цилиндра действуют тепловые источники с плотностью $f(r,t) = AJ_0\left(\dfrac{\mu_0^{(1)} r}{R}\right)$, где $\mu_0{}^{(1)}$ – первый положительный корень функции Бесселя $J_0(x)$, A = const.

Ответ

$$v(r,t) = A\left(\frac{R}{a\mu_0^{(1)}}\right)\left\{1 - \exp\left[-\left(\frac{a\mu_0^{(1)}}{R}\right)^2 t\right]\right\} J_0\left(\frac{\mu_0^{(1)} r}{R}\right).$$

8. СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ В ПЛОСКОЙ ОБЛАСТИ. КОЛЕБАНИЯ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ И КРУГЛОЙ МЕМБРАНЫ

8.1. Постановка задачи

Пусть G – ограниченная односвязная область на плоскости переменных (x, y) с достаточно гладкой границей Γ. В цилиндре $Ц = \{(x, y, t): (x, y) \in G, 0 < t < +\infty\}$ рассмотрим смешанную задачу

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \Delta u = f(x, y, t), \quad (x, y, t) \in Ц; \tag{8.1}$$

$$u(x, y, 0) = \varphi(x, y), \quad \frac{\partial u(x, y, 0)}{\partial t} = \psi(x, y), \quad (x, y) \in \bar{G}; \tag{8.2}$$

$$u = \omega(x, y, t), \quad (x, y) \in \Gamma, \quad t \in [0, +\infty), \tag{8.3}$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ – двумерный оператор Лапласа; $f(x, y, t)$, $\varphi(x, y)$, $\psi(x, y)$, $\omega(x, y, t)$ – достаточно гладкие на рассматриваемых областях известные функции.

Уравнение (8.1) называется волновым уравнением (или уравнением колебаний). Мы уже рассматривали подобное уравнение в случае одной пространственной переменной, так называемое уравнение струны. В данном случае уравнение (8.1) может описывать колебания мембраны – тонкой пленки или пластинки.

Если функция $f(x, y, t)$ непрерывна на $\bar{Ц} = \{(x, y, t): (x, y) \in \bar{G}, t \in [0, +\infty)\}$, функции $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ непрерывны на $\bar{G}$, $\omega(x, y, t)$ и $\frac{\partial \omega(x, y, t)}{\partial t}$ непрерывны на множестве $\{(x, y, t): (x, y) \in \Gamma, t \in [0, +\infty)\}$ и выполнены условия согласования начальных и граничных условий

$$\omega(x, y, 0) = \varphi(x, y), \quad \frac{\partial \omega(x, y, 0)}{\partial t} = \psi(x, y), \tag{8.4}$$

то можно сформулировать определение классического решения смешанной задачи.

Определение 8.1. Функция $u(x, y, t)$ называется *классическим решением смешанной задачи* (8.1) – (8.3), если

1) $u(x, y, t)$ и $\dfrac{\partial u(x,y,t)}{\partial t}$ непрерывны на $\bar{Ц}$ и удовлетворяют условиям (8.2) – (8.3);

2) частные производные $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ непрерывны на Ц, а $u(x, y, t)$ удовлетворяет на Ц уравнению (8.1).

Замечание 8.1. Смешанная задача (8.1) – (8.3) имеет не более одного классического решения.

Замечание 8.2. Имеет место непрерывная зависимость классического решения от параметров задачи.

Если граничная функция $\omega(x, y, t) = 0$, то формальное решение задачи может быть построено методом Фурье.

8.2. Построение формального решения смешанной задачи для уравнения колебаний прямоугольной мембраны

Пусть $G = \{(x, y) : 0 < x < a;\ \ 0 < y < b\}$ – прямоугольник на плоскости. Рассмотрим смешанную задачу, описывающую колебания прямоугольной мембраны, закрепленной по краям

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \Delta u = f(x, y, t),\ \ (x, y) \in G,\ \ t > 0; \tag{8.5}$$

$$u(x, y, 0) = \varphi(x, y),\ \ \frac{\partial u(x, y, 0)}{\partial t} = \psi(x, y),\ \ (x, y) \in \bar{G}; \tag{8.6}$$

$$u(x, 0, t) = u(x, b, t) = 0,\ \ t \geq 0. \tag{8.7}$$

Согласно методу Фурье, будем искать решение задачи в виде ряда Фурье по ортогональной на области $\bar{G} = \{(x, y) : 0 \leq x \leq a;\ 0 \leq y \leq b\}$ системе функций – собственным функциям оператора $L = -\Delta$ с однородными краевыми условиями (8.7). Как было показано в разделе 6, такой системой будет система синусов

$$v_{km}(x, y) = \sin\frac{k\pi x}{a} \sin\frac{m\pi y}{b}, \qquad k, m = 1, 2, 3, \ \ldots\ . \tag{8.8}$$

Разложим правую часть уравнения и начальные функции в двойные ряды Фурье по системе (8.8):

$$f(x,y,t)=\sum_{k,m=1}^{\infty} f_{km}(t)\sin\frac{k\pi x}{a}\sin\frac{m\pi y}{b};$$

$$f_{km}(t)=\frac{(f,v_{km})}{(v_{km},v_{km})}=\frac{4}{ab}\int_0^a dx\int_0^b f(x,y,t)\sin\frac{k\pi x}{a}\sin\frac{m\pi y}{b}\mathrm{d}y;$$

$$\varphi(x,y)=\sum_{k,m=1}^{\infty}\varphi_{km}\sin\frac{k\pi x}{a}\sin\frac{m\pi y}{b};$$

$$\varphi_{km}=\frac{(\varphi,v_{km})}{(v_{km},v_{km})}=\frac{4}{ab}\int_0^a \mathrm{d}x\int_0^b\varphi(x,y)\sin\frac{k\pi x}{a}\sin\frac{m\pi y}{b}\mathrm{d}y;$$

$$\psi(x,y)=\sum_{k,m=1}^{\infty}\psi_{km}\sin\frac{k\pi x}{a}\sin\frac{m\pi y}{b};$$

$$\psi_{km}=\frac{(\psi,v_{km})}{(v_{km},v_{km})}=\frac{4}{ab}\int_0^a \mathrm{d}x\int_0^b\psi(x,y)\sin\frac{k\pi x}{a}\sin\frac{m\pi y}{b}\mathrm{d}y\,.$$

Решение задачи будем искать в виде аналогичного разложения

$$u(x,y,t)=\sum_{k,m=1}^{\infty} T_{km}(t)\sin\frac{k\pi x}{a}\sin\frac{m\pi y}{b}. \qquad (8.9)$$

Подставив ряды в ДУ (8.5) и начальные условия (8.6), получим задачи Коши для определения $T_{km}(t)$

$$\begin{cases} T_{km}'' + a^2\mu_{km}^2 T_{km} = f_{km}(t), \quad t>0, \\ T_{km}(0)=\varphi_{km}, \quad T_{km}'(0)=\psi_{km} \qquad k,m=1,\,2,\ \ldots\ , \end{cases} \qquad (8.10)$$

где $\mu_{km}^2=\left(\frac{k\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2$ – собственные значения оператора $L=-\Delta$ с краевыми условиями (8.7).

С задачами типа (8.10) мы уже имели дело в разделе 5 при изучении уравнения струны и установили, что их решения могут быть записаны в виде

$$T_{km}(t)=\varphi_{km}\cos(a\mu_{km}t)+\frac{\psi_k}{a\mu_{km}}\sin(a\mu_{km}t)+$$

$$+\frac{1}{a\mu_{km}}\int_0^t f_k(s)\sin(a\mu_{km}(t-s))\mathrm{d}s\,. \qquad (8.11)$$

Подставляя (8.11) в (8.8), можем записать окончательное решение нашей задачи.

Пример 8.1. Решим задачу о свободных колебаниях однородной мембраны, имеющей форму квадрата со стороной π, если начальное отклонение задается функцией $\varphi(x,y)=A\sin x\sin 2y$, а начальная скорость $\psi(x,y)=B\sin 3x\sin 4y$, где A и B − постоянные. Математической моделью данного процесса является смешанная задача (8.5) − (8.7), где правая часть ДУ равна 0, а коэффициент a^2 определяется характеристиками материала пластины, т.е.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)=0,\ \ 0<x<\pi,\ \ 0<y<\pi,\ \ t>0, \\ u(x,y,0)=A\sin x\sin 2y,\ \dfrac{\partial u(x,y,0)}{\partial t}=B\sin 3x\sin 4y,\ \ 0\le x\le\pi,\ \ 0\le y\le\pi, \\ u(0,y,t)=u(\pi,y,t)=u(x,0,t)=u(x,\pi,t)=0,\ \ t\ge 0. \end{cases}$$

Решение задачи будем искать в виде разложения (8.9). Здесь правая часть ДУ равна нулю, а начальные функции являются элементами ортогонального базиса (8.8), по которому будем раскладывать решение задачи. Следовательно, в разложении (8.9) останутся лишь слагаемые с соответствующими базисными функциями, т.е.

$$u(x,y,t)=T_{12}(t)\sin x\sin 2y+T_{34}(t)\sin 3x\sin 4y.$$

Подставляя последнее разложение в ДУ и начальные условия, получим следующие задачи для определения неизвестных функций:

$$\begin{cases} T_{12}''+a^2\mu_{12}^2T_{12}=0, \\ T_{12}(0)=A,\ \ T_{12}'(0)=0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} T_{34}''+a^2\mu_{34}^2T_{34}=0, \\ T_{34}(0)=0,\ \ T_{34}'(0)=B. \end{cases}$$

Решая эти задачи, получим

$$T_{12}(t)=A\cos(a\mu_{12}t)=A\cos(a\sqrt{5}t),$$

$$T_{34}(t)=\frac{B}{a\mu_{34}}\sin(a\mu_{34}t)=\frac{B}{5a}\sin(5at).$$

Итак, решение задачи, описывающей колебания мембраны, найдено и имеет вид

$$u(x,y,t)=A\cos(\sqrt{5}at)\sin x\sin 2y+\frac{B}{5a}\sin(5at)\sin 3x\sin 4y.$$

8.3. Построение решения смешанной задачи для уравнения колебаний круглой мембраны

Рассмотрим смешанную задачу (8.1) – (8.3) в случае, когда плоская область – круг радиуса R с центром в начале координат, а граничная функция равна 0. По аналогии с соответствующей задачей для ДУ диффузии (теплопроводности), в полярных координатах поставленная задача запишется так:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2}-a^2\left(\dfrac{\partial^2 v}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v}{\partial r}+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 v}{\partial\varphi^2}\right)=f(r,\varphi,t),\ r\in(0,R),\varphi\in(-\pi,\pi),\ t>0,\\ v(r,\varphi,0)=h(r,\varphi),\ \dfrac{\partial v(r,\varphi,0)}{\partial t}=g(r,\varphi),\ \in(0,R),\ \varphi\in(-\pi,\pi),\\ v(R,\varphi,t)=0,\ \left|v(0,\varphi,t)\right|<+\infty,\ \varphi\in(-\pi,\pi),t\ge 0,\\ v(r,-\pi,t)=v(r,\pi,t),\ \dfrac{\partial v(r,-\pi,t)}{\partial\varphi}=\dfrac{\partial v(r,\pi,t)}{\partial\varphi},\ r\in(0,R),\ t\ge 0.\end{cases}\qquad(8.11)$$

В соответствии с общей схемой метода Фурье, правую часть уравнения и начальные функции следует разложить в ряды по ортогональной системе Фурье-Бесселя (7.20), т.е. представить в виде

$$f(r,\varphi,t)=\sum_{s=1}^{\infty}\left\{a_{0s}(t)J_0\left(\frac{\mu_0^{(s)}r}{R}\right)+\right.$$

$$\left.+\sum_{k=1}^{\infty}\left[a_{ks}(t)J_k\left(\frac{\mu_k^{(s)}r}{R}\right)\cos k\varphi+b_{ks}(t)J_k\left(\frac{\mu_k^{(s)}r}{R}\right)\sin k\varphi\right]\right\};$$

$$h(r,\varphi)=\sum_{s=1}^{\infty}\left\{\tilde{a}_{0s}J_0\left(\frac{\mu_0^{(s)}r}{R}\right)+\right.$$

$$\left.+\sum_{k=1}^{\infty}\left[\tilde{a}_{ks}J_k\left(\frac{\mu_k^{(s)}r}{R}\right)\cos k\varphi+\tilde{b}_{ks}J_k\left(\frac{\mu_k^{(s)}r}{R}\right)\sin k\varphi\right]\right\};$$

$$g(r,\varphi)=\sum_{s=1}^{\infty}\left\{\tilde{\tilde{a}}_{0s}J_0\left(\frac{\mu_0^{(s)}r}{R}\right)+\right.$$

$$\left.+\sum_{k=1}^{\infty}\left[\tilde{\tilde{a}}_{ks}J_k\left(\frac{\mu_k^{(s)}r}{R}\right)\cos k\varphi+\tilde{\tilde{b}}_{ks}J_k\left(\frac{\mu_k^{(s)}r}{R}\right)\sin k\varphi\right]\right\},$$

где коэффициенты разложений вычисляются через интегралы от бесселевых функций.

Решение задачи (8.11) будем искать в виде аналогичного ряда

$$v(r,\varphi,t)=\sum_{s=1}^{\infty}\left\{v_{0s}(t)J_0\left(\frac{\mu_0^{(s)}r}{R}\right)+\right.$$

$$\left.+\sum_{k=1}^{\infty}\left[v_{ks}(t)J_k\left(\frac{\mu_k^{(s)}r}{R}\right)\cos k\varphi+u_{ks}(t)J_k\left(\frac{\mu_k^{(s)}r}{R}\right)\sin k\varphi\right]\right\},$$

коэффициенты которого определяются как решения следующих задач Коши:

$$\begin{cases}v_{ks}''+a^2\left(\dfrac{\mu_k^{(s)}}{R}\right)^2 v_{ks}=a_{ks}(t),\\ v_{ks}(0)=\tilde{a}_{ks},\ \ v_{ks}'(0)=\tilde{\tilde{a}}_{ks},\quad k=0,1,2,\ \ldots\ ,\end{cases}$$

$$\begin{cases}u_{ks}''+a^2\left(\dfrac{\mu_k^{(s)}}{R}\right)^2 u_{ks}=b_{ks}(t),\\ u_{ks}(0)=\tilde{b}_{ks},\ \ u_{ks}'(0)=\tilde{\tilde{b}}_{ks},\quad k=1,2,\ldots\ .\end{cases}$$

Пример 8.2. Решим задачу о свободных колебаниях однородной круглой мембраны радиусом R при условии, что начальное отклонение задается функцией $AJ_0\left(\dfrac{\mu_0^{(m)}r}{R}\right)$, $0\le r\le R$ (A = const, $\mu_0^{(m)}$ – m-й корень функции Бесселя нулевого порядка), начальная скорость равна нулю.

Математической моделью данного процесса является смешанная задача (8.11), где правая часть ДУ равна 0, а коэффициент a^2 определяется характеристиками материала пластины. Так как уравнение однородно, начальная функция не зависит от угла φ, а начальная

скорость равна нулю, то и неизвестная функция не зависит φ, т.е. $v = v(r, t)$. Итак, рассмотрим задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} - a^2\left(\dfrac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v}{\partial r}\right) = 0, \quad r \in (0, R), t > 0, \\ v(r,0) = AJ_0\left(\dfrac{\mu_0^{(m)} r}{R}\right), \quad \dfrac{\partial v(r,0)}{\partial t} = 0, \quad 0 \le r \le R, \\ v(R,t) = 0, \quad |v(0,t)| < +\infty, \quad t \ge 0. \end{cases}$$

В соответствии с методом Фурье формальное решение задачи можно построить в виде ряда Фурье–Бесселя (7.24). Обратим внимание на то, что в данных задачи отлична от нуля лишь начальная функция $h(r) = AJ_0\left(\dfrac{\mu_0^{(m)} r}{R}\right)$. Причем, она уже разложена в подобный ряд, где отлично от нуля лишь одно слагаемое. Решение задачи в этом случае будет иметь вид

$$v(r, t) = v_{0k}(t) J_0\left(\frac{\mu_0^{(m)} r}{R}\right).$$

Подставляя последнее выражение в ДУ и начальные условия, получим задачу Коши для определения неизвестной функции от t

$$\begin{cases} v_{0m}'' + \left(\dfrac{a\mu_0^{(m)}}{R}\right)^2 v_{0m} = 0, \quad t > 0, \\ v_{0m}(0) = A, \quad \dfrac{\partial v_{0m}(0)}{\partial t} = 0. \end{cases}$$

Нетрудно проверить, что решением этой задачи является функция

$$v_{0m}(t) = A\cos\left(\frac{a\mu_0^{(m)}}{R} t\right).$$

Следовательно, амплитуда колебаний мембраны меняется по закону

$$v(r, t) = A\cos\left(\frac{a\mu_0^{(m)}}{R} t\right) J_0\left(\frac{\mu_0^{(m)} r}{R}\right).$$

8.4. Задачи для самостоятельного решения

Задача 1

Решить смешанную задачу о вынужденных колебаниях прямоугольной мембраны:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = \sin t \sin x \sin y, \ 0 < x < \pi, \ 0 < y < \pi, \ t > 0, \\ u(x, y, 0) = 0, \ \dfrac{\partial u(x, y, 0)}{\partial t} = 0, \ 0 \le x \le \pi, \ 0 \le y \le \pi, \\ u(0, y, t) = u(\pi, y, t) = u(x, 0, t) = u(x, \pi, t) = 0, \ t \ge 0. \end{cases}$$

Задача 2

Решить смешанную задачу о вынужденных колебаниях прямоугольной мембраны:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = t \cos 3x \cos 4y, \ 0 < x < \pi, \ 0 < y < \pi, \ t > 0, \\ u(x, y, 0) = 0, \ \dfrac{\partial u(x, y, 0)}{\partial t} = 0, \ 0 \le x \le \pi, \ 0 \le y \le \pi, \\ \dfrac{\partial u(0, y, t)}{\partial x} = \dfrac{\partial u(\pi, y, t)}{\partial x} = \dfrac{\partial u(x, 0, t)}{\partial y} = \dfrac{\partial u(x, \pi, t)}{\partial y} = 0, \ t \ge 0. \end{cases}$$

Задача 3

Решить смешанную задачу для волнового уравнения в неограниченном круговом цилиндре радиуса R:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \left(\dfrac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r} \dfrac{\partial v}{\partial r} \right) = J_0 \left(\dfrac{\mu_0^{(1)} r}{R} \right), \ r \in (0, R), t > 0, \\ v(r, 0) = 0, \ \dfrac{\partial v(r, 0)}{\partial t} = 0, \ 0 \le r \le R, \\ v(R, t) = 0, \ |v(0, t)| < +\infty, \ t \ge 0, \end{cases}$$

где $\mu_0^{(1)}$ – первый положительный корень функции Бесселя $J_0(x)$.

Ответы

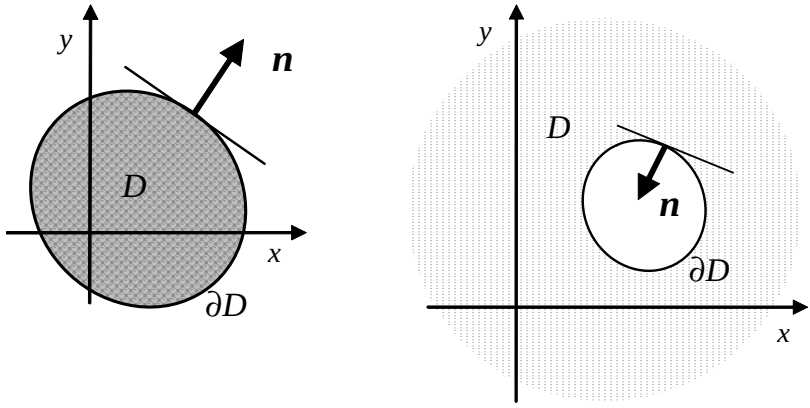
1. $u(x,y,t) = (\sin t - \sin(\sqrt{2}t))\sin x \sin y$.
2. $u(x,y,t) = \dfrac{1}{125}(5t - \sin 5t)\cos 3x \cos 4y$.
3. $v(r,t) = \left(\dfrac{R}{\mu_0^{(1)}}\right)^2 \left(1 - \cos\left(\dfrac{\mu_0^{(1)}}{R}t\right)\right) J_0\left(\dfrac{\mu_0^{(1)} r}{R}\right)$.

9. КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ЛАПЛАСА И ПУАССОНА В ПЛОСКОЙ ОБЛАСТИ. ПОСТРОЕНИЕ ФОРМАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА В ПРЯМОУГОЛЬНИКЕ МЕТОДОМ ФУРЬЕ

9.1. Постановка краевых задач для уравнения Пуассона в плоской области

Пусть $D \subset \mathrm{R}^2$ – ограниченная область с кусочно-гладкой границей ∂D, $\vec{n}$ – единичный вектор нормали к границе области (рис. 9.1), а Δ – двумерный оператор Лапласа:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$



а *б*

Рис. 9.1. Область определения функции $u(x, y)$:
а – внутренняя краевая задача; *б* – внешняя краевая задача

Рассмотрим уравнение

$$\Delta u = f(x, y),\ (x, y) \in D, \tag{9.1}$$

где $f(x, y)$ – известная функция, определенная на $\overline{D}$.

В учебной литературе это уравнение называется *уравнением Пуассона*. В случае $f(x, y) \equiv 0$ уравнение (9.1) принимает вид

$$\Delta u = 0$$

и называется *уравнением Лапласа*.

Наиболее часто ДУ (9.1) рассматривается вместе с краевыми условиями одного из следующих видов:

I. $u = \omega(x, y), \ (x, y) \in \partial D$ (*первая краевая задача, или задача Дирихле*);

II. $\dfrac{\partial u}{\partial n} = \omega(x, y), \ (x, y) \in \partial D$ (*вторая краевая задача, или задача Неймана*);

III. $\dfrac{\partial u}{\partial n} + hu = \omega(x, y), \ (x, y) \in \partial D$ (*третья краевая задача*).

Здесь $\omega(x, y)$ – известная функция, заданная на границе ∂D, $h > 0$; $\dfrac{\partial u}{\partial n}$ – производная по направлению внешней нормали к границе ∂D области, в которой ищется решение.

Требуется найти функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую во внутренних точках области D (рис. 9.1, *а*) уравнению (9.1), а на границе области – одному из приведенных выше краевых условий. Такая задача называется *внутренней* краевой задачей.

Краевые задачи для уравнения Пуассона описывают многие физические явления. В частности, оказывается, что решение смешанной задачи диффузии в плоской пластине (в случае, когда правая часть уравнения и граничное условие не зависят от t) при $t \to +\infty$, независимо от начального условия, стремится к решению соответствующей краевой задачи. Таким образом, эта задача описывает стационарное явление диффузии, т.е. распределение диффундирующего вещества, устанавливающееся при $t \to +\infty$.

Иногда требуется найти решение в неограниченной области, внешней по отношению к границе ∂D (рис. 9.1, *б*). В этом случае соответствующую задачу называют *внешней* краевой задачей.

9.2. Гармонические функции

Определение 9.1. Функция $u(x, y)$, имеющая в области $D \subset \mathbf{R}^2$ непрерывные частные производные первого и второго порядка и удовлетворяющая в этой области уравнению Лапласа

$$\Delta u = 0,$$

называется *гармонической* в области $D \subset \mathbf{R}^2$.

Для гармонических функций справедливо следующее важное предложение (его доказательство имеется в [3]).

Теорема 9.1. (*принцип максимума для гармонических функций*) Пусть $u(x, y)$ – гармоническая в ограниченной области D и непрерывная в соответствующей замкнутой области $\bar{D}$ функция. Тогда наибольшее и наименьшее значения $u(x, y)$ достигаются на границе ∂D области D.

9.3. Единственность классического решения внутренней задачи Дирихле

Рассмотрим внутреннюю задачу Дирихле для уравнения Пуассона

$$\begin{cases} \Delta u = f(x, y), & (x, y) \in D, \\ u = \omega(x, y), & (x, y) \in \partial D. \end{cases} \tag{9.2}$$

Определение 9.2. Функция $u(x, y)$ называется классическим решением задачи (9.2), если она:

1) непрерывна в замкнутой области $\bar{D}$ и удовлетворяет граничному условию;

2) имеет непрерывные в области D производные $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ и обращает уравнение в тождество.

Теорема 9.2. Задача Дирихле (9.2) имеет не более одного классического решения.

Доказательство. Пусть $u_1(x, y)$, $u_2(x, y)$ – два классических решения задачи (9.2), тогда их разность

$$u(x, y) = u_1(x, y) - u_2(x, y)$$

есть решение следующей задачи:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & (x, y) \in D, \\ u = 0, & (x, y) \in \partial D. \end{cases}$$

Согласно принципу максимума для гармонических функций, функция $u(x, y)$ достигает своего наибольшего и наименьшего значений на границе ∂D области D. Так как $u(x, y) = 0$ на границе области, то $u(x, y) = 0$ и в $\bar{D}$, т.е. $u_1(x, y) = u_2(x, y)$.

Отметим без доказательства следующие факты.

Замечание 9.1. В отличие от задачи Дирихле, задача Неймана имеет такие особенности. Если решение $u(x, y)$ существует, то всякое другое ее решение равно $u(x, y) + C$, где C – произвольная постоянная. Для существования решения необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\iint_D f(x,\ y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \oint_{\partial D} \omega(x,\ y)\mathrm{d}s = 0.$$

Замечание 9.2. Как и задача Дирихле, внутренняя третья краевая задача может иметь не более одного классического решения.

9.4. Построение формального решения краевых задач для уравнения Пуассона в прямоугольнике методом Фурье

Пусть $D = \{(x, y) : 0 < x < a;\ 0 < y < b\}$ – прямоугольник на плоскости.

Рассмотрим в прямоугольнике D задачу Дирихле (рис. 9.2)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y), \qquad (x, y) \in D, \\ u(0, y) = \varphi_0(y),\ \ u(a, y) = \varphi_a(y),\ 0 \le y \le b, \\ u(x, 0) = \psi_0(x),\ \ u(x, b) = \psi_b(x),\ 0 \le x \le a. \end{cases} \tag{9.3}$$

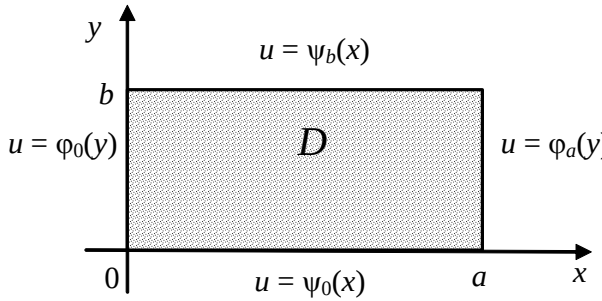


Рис. 9.2. Прямоугольная область определения функции $u(x, y)$

Решим задачу (9.3), придерживаясь следующего алгоритма.

1. Сведем (9.3) к задаче с однородными краевыми условиями по одной из переменных, например, по переменной x. Для этого подберем функцию $w(x, y)$, удовлетворяющую условиям

$$w(0,\ y) = \varphi_0(y),\quad w(a,\ y) = \varphi_a(y).$$

В данном случае примем

$$w(x,\ y) = \varphi_0(y) + \frac{x}{a}\left(\varphi_a(y) - \varphi_0(y)\right),$$

сделаем в уравнении замену неизвестной функции, полагая

$$u = v + w,$$

где $v(x, y)$ – новая неизвестная функция.

В результате задача приобретет следующий вид:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} = f(x,y) - \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} \equiv F(x,y),\ (x,y) \in D, \\ v(0,y) = v(a,y) = 0,\quad 0 \le y \le b, \\ v(x,0) = \psi_0(x) - w(x,0) \equiv \Psi_0,\ v(x,b) - w(x,b) \equiv \Psi_b,\ 0 \le x \le a. \end{cases} \tag{9.4}$$

Обозначим $L = -\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$ и перепишем задачу (9.4)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} - Lv = F(x,y),\ (x,y) \in D, \\ v(0,y) = v(a,y) = 0,\ 0 \le y \le b, \\ v(x,0) = \Psi_0(x),\quad v(x,b) = \Psi_b(x),\ 0 \le x \le a. \end{cases} \tag{9.5}$$

2. Рассмотрим задачу на собственные значения и собственные функции для дифференциального оператора $L = -\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}$ с областью определения $D(L) = \{v(x) \in C^2[0,a] : v(0) = v(a) = 0\}$

$$\begin{cases} v'' + \lambda v = 0,\quad 0 < x < a, \\ v(0) = v(a) = 0. \end{cases}$$

Как было показано ранее (см. пример 2.1), в данном случае его собственные значения и собственные функции следующие:

$$\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{a}\right)^2,\ X_k(x) = \sin\frac{k\pi x}{a},\ k = 1, 2, \ldots .$$

3. Найдем решение задачи (9.5) в виде ряда Фурье по найденной ортогональной системе собственных функций $\left\{\sin\frac{k\pi x}{a}\right\}_{k=1}^{\infty}$, т.е. в виде

$$v(x,\ y) = \sum_{k=1}^{\infty} Y_k(y) X_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} Y_k(y) \sin\frac{k\pi x}{a}. \qquad (9.6)$$

Предварительно разложим в аналогичные ряды функции $F(x,y)$, $\Psi_0(x)$, $\Psi_b(x)$:

$$F(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} F_k(y) \sin\frac{k\pi x}{a},\ F_k(y) = \frac{2}{a}\int_0^a F(x,y) \sin\frac{k\pi x}{a}\,\mathrm{d}x;$$

$$\Psi_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \Psi_{0k} \sin\frac{k\pi x}{a},\ \Psi_{0k} = \frac{2}{a}\int_0^a \Psi_0(x) \sin\frac{k\pi x}{a}\,\mathrm{d}x;$$

$$\Psi_b(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \Psi_{bk} \sin\frac{k\pi x}{a},\ \Psi_{bk} = \frac{2}{a}\int_0^a \Psi_b(x) \sin\frac{k\pi x}{a}\,\mathrm{d}x.$$

Найдем входящие в ДУ производные

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \sum_{k=1}^{\infty} Y_k''(y) \sin\frac{k\pi x}{a},\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k\pi}{a}\right)^2 Y_k(y) \sin\frac{k\pi x}{a}.$$

Подставляя соответствующие ряды в ДУ, получим

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(Y_k''(y) - \left(\frac{k\pi}{a}\right)^2 Y_k(y)\right)\sin\frac{k\pi x}{a} = \sum_{k=1}^{\infty} F_k(y) \sin\frac{k\pi x}{a}.$$

Используем краевые условия по переменной y

$$v(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} Y_k(0) \sin\frac{k\pi x}{a} = \Psi_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \Psi_{0k} \sin\frac{k\pi x}{a},$$

$$v(x,b)=\sum_{k=1}^{\infty}Y_k(b)\sin\frac{k\pi x}{a}=\Psi_b(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\Psi_{bk}\sin\frac{k\pi x}{a}.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых собственных функциях, получим следующие краевые задачи для неизвестных функций $Y_k(y)$:

$$\begin{cases} Y_k''-\left(\dfrac{k\pi}{a}\right)^2 Y_k=F_k(y),\ \ 0<y<b, \\ Y_k(0)=\Psi_{0k},\ \ Y_k(b)=\Psi_{bk},\ \ k=1,\ 2,\ \ldots\ . \end{cases} \tag{9.7}$$

Найдем их решения. Сначала найдем фундаментальную систему решений соответствующего обыкновенного линейного однородного ДУ второго порядка. Решим характеристическое уравнение

$$p^2-\left(\frac{k\pi}{a}\right)^2=0\ \ \Rightarrow\ \ p=\pm\frac{k\pi}{a}.$$

Таким образом, в качестве фундаментальной системы решений (ФСР) могут быть выбраны функции $\exp\left(\dfrac{k\pi y}{a}\right)$, $\exp\left(-\dfrac{k\pi y}{a}\right)$, но для дальнейшего гораздо удобнее использовать функции $\operatorname{sh}\left(\dfrac{k\pi y}{a}\right)$, $\operatorname{ch}\left(\dfrac{k\pi y}{a}\right)$, являющиеся их линейными комбинациями. Общее решение линейного неоднородного ДУ из (9.7) можно искать методом вариации произвольных постоянных в виде

$$Y_k(y)=C_1(y)\operatorname{sh}\left(\frac{k\pi y}{a}\right)+C_2(y)\operatorname{ch}\left(\frac{k\pi y}{a}\right), \tag{9.8}$$

где производные неизвестных функций $C_1(y)$ и $C_2(y)$ находятся из линейной алгебраической системы Лагранжа

$$\begin{cases} C_1'(y)\operatorname{sh}\left(\dfrac{k\pi y}{a}\right)+C_2'(y)\operatorname{ch}\left(\dfrac{k\pi y}{a}\right)=0, \\ C_1'(y)\operatorname{ch}\left(\dfrac{k\pi y}{a}\right)+C_2'(y)\operatorname{sh}\left(\dfrac{k\pi y}{a}\right)=\dfrac{a}{\pi k}F_k(y). \end{cases} \tag{9.9}$$

Решая систему (9.9), получим

$$C_1'(y) = \frac{a}{\pi k} F_k(y) \mathrm{ch}\left(\frac{k\pi y}{a}\right),\ C_2'(y) = -\frac{a}{\pi k} F_k(y) \mathrm{sh}\left(\frac{k\pi y}{a}\right).$$

Интегрируя последние выражения, имеем

$$C_1(y) = \frac{a}{\pi k} \int_0^y F_k(\xi) \mathrm{ch}\left(\frac{k\pi\xi}{a}\right) \mathrm{d}\xi + C_3,\ C_2(y) = -\frac{a}{k\pi} \int_0^y F_k(\xi) \mathrm{sh}\left(\frac{k\pi\xi}{a}\right) \mathrm{d}\xi + C_4.$$

Подставляя найденные $C_1(y)$ и $C_2(y)$ в выражение (9.8), после небольших преобразований получим общее решение ДУ

$$Y_k(y) = C_3 \mathrm{sh}\left(\frac{k\pi y}{a}\right) + C_4 \mathrm{ch}\left(\frac{k\pi y}{a}\right) + \frac{a}{k\pi} \int_0^y F_k(\xi) \mathrm{sh}\left(\frac{k\pi(y-\xi)}{a}\right) \mathrm{d}\xi.$$

Подставим краевые условия

$$Y_k(0) = C_3 \mathrm{sh}(0) + C_4 \mathrm{ch}(0) + \frac{a}{k\pi} \int_0^0 F_k(\xi) \mathrm{sh}\left(\frac{k\pi(-\xi)}{a}\right) \mathrm{d}\xi = C_4 = \Psi_{0k},$$

$$Y_k(b) = C_3 \mathrm{sh}\left(\frac{k\pi b}{a}\right) + \Psi_{0k} \mathrm{ch}\left(\frac{k\pi b}{a}\right) + \frac{a}{k\pi} \int_0^b F_k(\xi) \mathrm{sh}\left(\frac{k\pi(b-\xi)}{a}\right) \mathrm{d}\xi = \Psi_{bk},$$

откуда

$$C_3 = \left(\Psi_{bk} - \Psi_{0k} \mathrm{ch}\left(\frac{k\pi b}{a}\right) - \frac{a}{k\pi} \int_0^b F_k(\xi) \mathrm{sh}\left(\frac{k\pi(b-\xi)}{a}\right) \mathrm{d}\xi \right) \frac{1}{\mathrm{sh}\left(\frac{k\pi b}{a}\right)}.$$

Окончательно решение задачи (9.7)

$$Y_k(y) = \Psi_{0k} \frac{\mathrm{sh}\left(\frac{k\pi(b-y)}{a}\right)}{\mathrm{sh}\left(\frac{k\pi b}{a}\right)} + \Psi_{bk} \frac{\mathrm{sh}\left(\frac{k\pi y}{a}\right)}{\mathrm{sh}\left(\frac{k\pi b}{a}\right)} -$$

$$- \frac{a}{k\pi} \int_0^b F_k(\xi) \mathrm{sh}\left(\frac{k\pi(b-\xi)}{a}\right) \mathrm{d}\xi \frac{\mathrm{sh}\left(\frac{k\pi y}{a}\right)}{\mathrm{sh}\left(\frac{k\pi b}{a}\right)} + \frac{a}{k\pi} \int_0^y F_k(\xi) \mathrm{sh}\left(\frac{k\pi(y-\xi)}{a}\right) \mathrm{d}\xi. \quad (9.10)$$

Запишем решение задачи (9.4), подставив найденные выражения (9.10) для $Y_k(y)$ в формулу (9.6).

Таким же образом может быть построено формальное решение краевой задачи для уравнения Пуассона с граничными условиями другого типа.

Пример 9.1. Рассмотрим смешанную задачу для уравнения Пуассона в прямоугольнике с краевыми условиями Дирихле

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \sin y \sin 2\pi x, \qquad 0 < x < 1; \;\; 0 < y < 2, \\ u(0,\, y) = u(1,\, y) = 1, \\ u(x,\, 0) = 1, \qquad u(x,\, 2) = 1 - \sin \pi x. \end{cases}$$

Нетрудно заметить, что замена

$$u = v + 1$$

приводит к следующей задаче с однородными краевыми условиями по переменной x:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \sin y \sin 2\pi x, \qquad 0 < x < 1; \;\; 0 < y < 2, \\ v(0, y) = v(1, y) = 0, \\ v(x, 0) = 0, \qquad v(x, 2) = -\sin \pi x. \end{cases}$$

Её решение можно найти в виде ряда Фурье по ортогональной системе

$$\left\{ \sin \frac{k\pi x}{a} \right\}_{k=1}^{\infty} = \left\{ \sin k\pi x \right\}_{k=1}^{\infty},$$

т.е. в виде

$$v(x,\, y) = \sum_{k=1}^{\infty} Y_k\,(y) \sin k\pi x\,.$$

В данном случае правая часть уравнения и краевые условия по переменной y раскладываются в ряды Фурье следующим образом:

$$F(x,y)=\sin y\sin 2\pi x=\sum_{k=1}^{\infty}F_k(y)\sin k\pi x,\ F_k(y)=\begin{cases}\sin y, & k=2,\\ 0, & k\neq 2,\end{cases}$$

$$\Psi_2(x)=-\sin\pi x=\sum_{k=1}^{\infty}\Psi_{2k}\sin k\pi x,\ \Psi_{2k}=\begin{cases}-1, & k=1,\\ 0, & k\neq 1.\end{cases}$$

Так как в разложениях данных задачи отличны от нуля коэффициенты лишь при двух базисных функциях, то и в разложении решения будут присутствовать слагаемые только с этими базисными функциями, т.е. решение имеет вид

$$v(x, y) = Y_1(y)\sin(\pi x) + Y_2(y)\sin(2\pi x).$$

Подставим последнее выражение в ДУ и в краевые условия и приравняем коэффициенты при одинаковых базисных функциях. В результате получим краевые задачи для определения коэффициентов $Y_k(y)$, k =1, 2. Приведем их решения.

1) $\begin{cases}Y_1''-\pi^2Y_1=0, & 0<y<2,\\ Y_1(0)=0, & Y_1(2)=-1.\end{cases}$

Общее решение ДУ здесь имеет вид

$$Y_1(y)=C_1\mathrm{sh}(\pi y)+C_2\mathrm{ch}(\pi y).$$

Подставляя краевые условия, получим

$$Y_1(y)=-\frac{\mathrm{sh}(\pi y)}{\mathrm{sh}(2\pi)}.$$

2) $\begin{cases}Y_2''-4\pi^2Y_2=\sin y, & 0<y<2,\\ Y_1(0)=0, & Y_1(2)=0.\end{cases}$

ФСР соответствующего однородного ДУ в данном случае

$$\{\mathrm{sh}(2\pi y),\ \ \mathrm{ch}(2\pi y)\}.$$

Далее можно решать задачу методом вариации произвольных постоянных, однако здесь правая часть ДУ позволяет подобрать частное решение. Будем искать его в виде

$$Y_{2\text{част}}(y)=A\cos y+B\sin y.$$

Подставляя последнее выражение в ДУ и приравнивая коэффициенты при одинаковых функциях, получим

$$A=0,\ \ B=-\frac{1}{1+4\pi^2}.$$

Теперь, согласно принципу суперпозиции, общее решение неоднородного ДУ можно представить как сумму общего решения однородного ДУ и найденного частного решения неоднородного ДУ, т.е.

$$Y_2(y)=C_1\mathrm{sh}(2\pi y)+C_2\mathrm{ch}(2\pi y)-\frac{\sin y}{1+4\pi^2}.$$

Далее, подставляя краевые условия, получим

$$Y_2(0)=C_2=0,$$

$$Y_2(2)=C_1\mathrm{sh}(4\pi)-\frac{\sin 2}{1+4\pi^2}=0\Rightarrow C_1=\frac{\sin 2}{(1+4\pi^2)\mathrm{sh}(4\pi)}.$$

В итоге

$$Y_2(y)=\frac{(\sin 2)\mathrm{sh}(2\pi y)}{(1+4\pi^2)\mathrm{sh}(4\pi)}-\frac{\sin y}{1+4\pi^2}.$$

Наконец, можно записать окончательный ответ

$$u(x,y)=1-\frac{\mathrm{sh}(\pi y)}{\mathrm{sh}(2\pi)}\sin(\pi x)+\frac{1}{1+4\pi^2}\left(\frac{\sin 2}{\mathrm{sh}(4\pi)}\mathrm{sh}(2\pi y)-\sin y\right)\sin(2\pi x).$$

9.5. Задачи для самостоятельного решения

Решить задачи Дирихле для уравнения Лапласа в прямоугольнике:
Задача 1

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\quad 0<x<1,\,0<y<\pi,$$

$$u(0,y)=\sin y+\pi-y,\ \ u(1,y)=\sin 3y+\pi-y,\ \ 0\le y\le\pi,$$

$$u(x,0)=\pi,\ \ u(x,\pi)=0,\ \ 0\le x\le 1.$$

Задача 2

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\quad 0<x<\pi,\,0<y<\pi,$$
$$u(0,y)=\sin y,\quad u(\pi,y)=\sin 2y,\quad 0\le y\le\pi,$$
$$u(x,0)=u(x,\pi)=0,\quad 0\le x\le\pi.$$

Задача 3

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\quad 0<x<\pi,\,0<y<\pi,$$
$$u(0,y)=1,\quad u(\pi,y)=0,\quad 0\le y\le\pi,$$
$$u(x,0)=1,\quad u(x,\pi)=0,\quad 0\le x\le\pi.$$

Задача 4

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\quad 0<x<\pi,\,0<y<\pi,$$
$$u(0,y)=\sin y,\quad u(\pi,y)=0,\quad 0\le y\le\pi,$$
$$u(x,0)=0,\quad u(x,\pi)=\sin x,\quad 0\le x\le\pi.$$

Задача 5

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\quad 0<x<1,\,0<y<2,$$
$$u(0,y)=u(1,y)=1,\quad 0\le y\le 2,$$
$$u(x,0)=u(x,2)=1-\sin\pi x,\quad 0\le x\le 1.$$

Задача 6

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\sin x\cdot\sin y,\quad 0<x<\pi,\,0<y<\pi,$$
$$u(0,y)=u(\pi,y)=0,\quad 0\le y\le\pi,$$
$$u(x,0)=u(x,\pi)=0,\quad 0\le x\le\pi.$$

Задача 7

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, \quad 0<x<\pi,\ 0<y<1,$$
$$u(0,y)=u(\pi,y)=0,\ 0\le y\le 1,$$
$$u(x,0)=\sin x,\ \frac{\partial u(x,1)}{\partial y}=0,\ 0\le x\le \pi.$$

Задача 8

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, \quad 0<x<\pi,\ 0<y<\pi,$$
$$u(0,y)=u(\pi,y)=0,\ 0\le x\le \pi,$$
$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial y}=\sin x,\ \frac{\partial u(x,\pi)}{\partial y}=\sin 2x,\ 0\le x\le \pi.$$

Задача 9

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, \quad 0<x<2,\ 0<y<\pi,$$
$$u(0,y)=\varphi(y)=\begin{cases} y, & 0\le y\le \dfrac{\pi}{2}, \\ \pi-y, & \dfrac{\pi}{2}<y\le \pi, \end{cases} \quad \frac{\partial u(2,y)}{\partial x}=0,\ 0\le y\le \pi,$$
$$u(x,0)=u(x,\pi)=0,\ 0\le x\le 2.$$

Задача 10

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, \quad 0<x<\pi,\ 0<y<2,$$
$$\frac{\partial u(0,y)}{\partial x}=u(\pi,y)=0,\ 0\le y\le 2,$$
$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial y}=0,\ u(x,2)=\cos\frac{x}{2},\ 0\le x\le \pi.$$

Задача 11

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, \qquad 0<x<\pi, 0<y<2,$$

$$\frac{\partial u(0,y)}{\partial x}=\frac{\partial u(\pi,y)}{\partial x}=0, \ 0\le y\le 2,$$

$$u(x,0)=x^2, \ \ u(x,2)=0, \ 0\le x\le \pi.$$

Задача 12

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, \qquad 0<x<\pi, \ 0<y<2,$$

$$u(0,y)=\frac{\partial u(\pi,y)}{\partial x}=0, \ 0\le y\le 2,$$

$$u(x,0)=\varphi(x)=\begin{cases} x, & 0\le x\le \dfrac{\pi}{2}, \\ \dfrac{\pi}{2}, & \dfrac{\pi}{2}<x\le \pi, \end{cases} \quad u(x,2)=0, \ 0\le x\le \pi.$$

Задача 13

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, \qquad 0<x<2, \ 0<y<\pi,$$

$$u(0,y)=\varphi(y)=\begin{cases} 2y, & 0\le y\le \dfrac{\pi}{2}, \\ \pi, & \dfrac{\pi}{2}<y\le \pi, \end{cases} \quad \frac{\partial u(2,y)}{\partial x}=0, \ 0\le y\le \pi,$$

$$u(x,0)=u(x,\pi)=0, \ 0\le x\le 2.$$

Задача 14

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, \qquad 0<x<\pi, \ 0<y<1,$$

$$u(0,y)=\frac{\partial u(\pi,y)}{\partial x}=0, \ 0\le y\le 1,$$

$$u(x,0)=0, \ \ u(x,1)=\sin\frac{3x}{2}, \ 0\le x\le \pi.$$

Задача 15

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, \qquad 0<x<\pi,\ 0<y<2,$$
$$\frac{\partial u(0,y)}{\partial x}=\frac{\partial u(\pi,y)}{\partial x}=0,\ 0\le y\le 2,$$
$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial y}=\cos x,\ \ u(x,2)=0,\ 0\le x\le \pi.$$

Задача 16

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, \qquad 0<x<\pi, 0<y<\pi,$$
$$u(0,y)=0,\ \ u(\pi,y)=1,\ 0\le y\le \pi,$$
$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial y}=1,\ \ \frac{\partial u(x,\pi)}{\partial y}=0,\ 0\le x\le \pi.$$

Задача 17

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=xy, \qquad 0<x<1,\ 0<y<\pi,$$
$$u(0,y)=\frac{\partial u(1,y)}{\partial x}=0,\ 0\le y\le \pi,$$
$$u(x,0)=u(x,\pi)=0,\ 0\le x\le 1.$$

Задача 18

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\sin^2 x, \qquad 0<x<\pi,\ 0<y<\pi,$$
$$\frac{\partial u(0,y)}{\partial x}=\frac{\partial u(\pi,y)}{\partial x}=0,\ 0\le y\le \pi,$$
$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial y}=u(x,\pi)=0,\ 0\le x\le \pi.$$

Задача 19

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\cos^2 x, \qquad 0<x<\pi,\ 0<y<\pi,$$
$$\frac{\partial u(0,y)}{\partial x}=\frac{\partial u(\pi,y)}{\partial x}=0,\ 0\le y\le\pi,$$
$$u(x,0)=\frac{u(x,\pi)}{\partial y}=0,\ 0\le x\le\pi.$$

Задача 20

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\sin x\cos y, \qquad 0<x<\pi,\ 0<y<\pi,$$
$$u(0,y)=u(\pi,y)=0,\ 0\le y\le\pi,$$
$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial y}=\frac{\partial u(x,\pi)}{\partial y}=0,\ 0\le x\le\pi.$$

Задача 21

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=2\cos x\sin y, \qquad 0<x<\pi,\ 0<y<\pi,$$
$$\frac{\partial u(0,y)}{\partial x}=\frac{\partial u(\pi,y)}{\partial x}=0,\ 0\le y\le\pi,$$
$$u(x,0)=u(x,\pi)=0,\ 0\le x\le\pi.$$

Задача 22

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\cos x\sin y, \qquad 0<x<\pi,\ 0<y<\pi,$$
$$\frac{\partial u(0,y)}{\partial x}=\frac{\partial u(\pi,y)}{\partial x}=0,\ 0\le y\le\pi.$$
$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial y}=u(x,\pi)=0,\ 0\le x\le\pi.$$

Задача 23

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\cos x\cos y,\qquad 0<x<\pi,\ 0<y<\pi,$$
$$\frac{\partial u(0,y)}{\partial x}=\frac{\partial u(\pi,y)}{\partial x}=0,\ 0\le y\le\pi,$$
$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial y}=u(x,\pi)=0,\ 0\le x\le\pi.$$

Задача 24

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\sin x\cos y,\qquad 0<x<\pi,\ 0<y<\pi,$$
$$u(0,y)=u(\pi,y)=0,\ 0\le y\le\pi,$$
$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial y}=u(x,\pi)=0,\ 0\le x\le\pi.$$

Задача 25

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\sin x\sin 2y,\qquad 0<x<\pi,\ 0<y<\pi,$$
$$u(0,y)=u(\pi,y)=0,\ 0\le y\le\pi,$$
$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial y}=u(x,\pi)=0,\ 0\le x\le\pi.$$

Задача 26

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\sin x\sin 2y,\qquad 0<x<\pi,\ 0<y<\pi;$$
$$u(0,y)=u(\pi,y)=0,\ 0\le y\le\pi,$$
$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial y}=\frac{\partial u(x,\pi)}{\partial y}=0,\ 0\le x\le\pi.$$

Задача 27

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\cos y, \qquad 0<x<\pi,\ 0<y<\pi,$$
$$u(0,y)=2,\ \ u(\pi,y)=1,\ \ 0\le y\le\pi,$$
$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial y}=\frac{\partial u(x,\pi)}{\partial y}=0,\ \ 0\le x\le\pi.$$

Задача 28

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=e^{-3x}\sin\frac{y}{2}, \qquad 0<x<1,\ 0<y<\pi;$$
$$\frac{\partial u(0,y)}{\partial x}=\sin\frac{7y}{2},\ \ u(1,y)=2\sin\frac{3y}{2},\ \ 0\le y\le\pi,$$
$$u(x,0)=\frac{\partial u(x,\pi)}{\partial y}=0,\ \ 0\le x\le 1.$$

Задача 29

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=e^{-y}\cos\frac{3x}{2}, \qquad 0<x<\pi,\ 0<y<1,$$
$$\frac{\partial u(0,y)}{\partial x}=7,\ \ u(\pi,y)=0,\ \ 0\le y\le 1,$$
$$u(x,0)=\cos\frac{5x}{2}+7(x-\pi),\ \ \frac{\partial u(x,1)}{\partial y}=0,\ \ 0\le x\le\pi.$$

Задача 30

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=e^{-3y}\sin\frac{x}{2}, \qquad 0<x<\pi,\ 0<y<1,$$
$$u(0,y)=y,\ \ \frac{\partial u(\pi,y)}{\partial x}=0,\ \ 0\le y\le 1$$
$$u(x,0)=\sin\frac{3x}{2},\ \ \frac{\partial u(x,1)}{\partial y}=1,\ \ 0\le x\le\pi.$$

Задача 31

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=e^{-2y}\cos\frac{3x}{2},\qquad 0<x<\pi,\ 0<y<1,$$

$$\frac{\partial u(0,y)}{\partial x}=3,\ \ u(\pi,y)=0,\ \ 0\le y\le 1,$$

$$u(x,0)=\cos\frac{x}{2}+3(x-\pi),\ \ \frac{\partial u(x,1)}{\partial y}=0,\ \ 0\le x\le\pi.$$

Задача 32

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=e^{-2y}\sin\frac{3x}{2},\qquad 0<x<\pi,\ 0<y<2,$$

$$u(0,y)=y,\ \ \frac{\partial u(\pi,y)}{\partial x}=0,\ \ 0\le y\le 2,$$

$$u(x,0)=\sin\frac{5x}{2},\ \ \frac{\partial u(x,2)}{\partial y}=1,\ \ 0\le x\le\pi.$$

Ответы

1. $u(x,y)=\pi-y+\dfrac{\operatorname{sh}(1-x)}{\operatorname{sh}1}\sin y+\dfrac{\operatorname{sh}(3x)}{\operatorname{sh}3}\sin 3y$.
2. $u(x,y)=\dfrac{\operatorname{sh}(\pi-x)}{\operatorname{sh}\pi}\sin y+\dfrac{\operatorname{sh}(2x)}{\operatorname{sh}2\pi}\sin 2y$.
3. $u(x,y)=1-\dfrac{y}{\pi}-\dfrac{2}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\operatorname{sh}(kx)+(-1)^k\operatorname{sh}(k(\pi-x))}{k\operatorname{sh}(k\pi)}\sin ky$.
4. $u(x,y)=\dfrac{\operatorname{sh}y}{\operatorname{sh}\pi}\sin x+\dfrac{\operatorname{sh}(\pi-x)}{\operatorname{sh}\pi}\sin y$.
5. $u(x,y)=1-\dfrac{\operatorname{sh}(\pi(2-y))+\operatorname{sh}(\pi y)}{\operatorname{sh}2\pi}\sin\pi x$.
6. $u(x,y)=-\dfrac{1}{2}\sin x\sin y$.
7. $u(x,y)=\dfrac{\operatorname{ch}(1-y)}{\operatorname{ch}1}\sin x$.
8. $u(x,y)=-\dfrac{\operatorname{ch}(\pi-y)}{\operatorname{sh}\pi}\sin x+\dfrac{\operatorname{ch}(2y)}{2\operatorname{sh}(2\pi)}\sin 2x$.

9. $u(x,y)=\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{k\pi}{2}}{k^2}\frac{\mathrm{ch}(k(x-2))}{\mathrm{ch}(2k)}\sin ky$.

10. $u(x,y)=\frac{\mathrm{ch}\frac{y}{2}}{\mathrm{ch}1}\cos\frac{x}{2}$.

11. $u(x,y)=\frac{\pi^2}{3}\left(1-\frac{y}{2}\right)+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{4}{k^2}\frac{\mathrm{sh}(k(2-y))}{\mathrm{sh}2k}\cos kx$.

12. $u(x,y)=4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{(2k-1)\pi}{4}}{(2k-1)^2}\frac{\mathrm{sh}\frac{(2k-1)(2-y)}{2}}{\mathrm{sh}(2k-1)}\sin\frac{(2k-1)x}{2}$.

13. $u(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\left((-1)^{k+1}\frac{2}{k}+\frac{4}{\pi k^2}\sin\frac{\pi k}{2}\right)\frac{\mathrm{ch}(k(2-x))}{\mathrm{ch}(2k)}\sin ky$.

14. $u(x,y)=\frac{\mathrm{sh}\frac{3y}{2}}{\mathrm{sh}\frac{3}{2}}\sin\frac{3x}{2}$.

15. $u(x,y)=\frac{\mathrm{sh}(y-2)}{\mathrm{ch}2}\cos x$.

16. $u(x,y)=\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k-1}{k^2}\frac{\mathrm{ch}(k(\pi-y))}{\mathrm{sh}(k\pi)}\sin kx+\frac{x}{\pi}$.

17. $u(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{2}{k^4}\left(kx-\frac{\mathrm{sh}(kx)}{\mathrm{ch}(k)}\right)\sin ky$.

18. $u(x,y)=\frac{y^2-\pi^2}{4}+\frac{1}{8}\left(1-\frac{\mathrm{ch}(2y)}{\mathrm{ch}(2\pi)}\right)\cos 2x$.

19. $u(x,y)=\frac{y^2}{4}-\frac{\pi y}{2}+\frac{1}{8}\left(\frac{\mathrm{ch}(2(\pi-y))}{\mathrm{ch}(2\pi)}-1\right)\cos 2x$.

20. $u(x,y)=-\frac{1}{2}\sin x\cos y$.

21. $u(x,y)=-\cos x\sin y$.

22. $u(x,y)=\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{sh}(y-\pi)}{\mathrm{ch}\pi}-\sin y\right)\cos x$.

23. $u(x,y)=-\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{ch}y}{\mathrm{ch}\pi}+\cos y\right)\cos x$.

24. $u(x,y)=-\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{ch}y}{\mathrm{ch}\pi}+\cos y\right)\sin x$.

25. $u(x,y)=\frac{2}{5}\left(\frac{\mathrm{sh}(y-\pi)}{\mathrm{ch}\pi}-\frac{\sin 2y}{2}\right)\sin x$.

26. $u(x,y)=\frac{2}{5}\left(\mathrm{sh}y+\frac{1-\mathrm{ch}\pi}{\mathrm{sh}\pi}\mathrm{ch}y-\frac{\sin 2y}{2}\right)\sin x$.

27. $u(x,y)=\left(\frac{\mathrm{sh}x+\mathrm{sh}(\pi-x)}{\mathrm{sh}\pi}-1\right)\cos y-\frac{x}{\pi}+2$.

28. $u(x,y)=\frac{4}{35}\left(\frac{6\mathrm{sh}\frac{x-1}{2}-e^{-3}\mathrm{ch}\frac{x}{2}}{\mathrm{ch}\frac{1}{2}}+e^{-3x}\right)\sin\frac{y}{2}+2\frac{\mathrm{ch}\frac{3x}{2}}{\mathrm{ch}\frac{3}{2}}\sin\frac{3y}{2}+$

$+\frac{2\mathrm{sh}\frac{7(x-1)}{2}}{7\mathrm{ch}\frac{7}{2}}\sin\frac{7y}{2}$.

29. $u(x,y)=7(x-\pi)+\frac{4}{5}\left(\frac{\mathrm{ch}\frac{3(1-y)}{2}}{\mathrm{ch}\frac{3}{2}}-\frac{2}{3e}\frac{\mathrm{sh}\frac{3y}{2}}{\mathrm{ch}\frac{3}{2}}-e^{-y}\right)\cos\frac{3x}{2}+.$

$+\frac{\mathrm{ch}\frac{5(1-y)}{2}}{\mathrm{ch}\frac{5}{2}}\cos\frac{5x}{2}$

30. $u(x,y)=y+\frac{4}{35}\left(-\frac{\mathrm{ch}\frac{1-y}{2}}{\mathrm{ch}\frac{1}{2}}+\frac{6}{e^3}\frac{\mathrm{sh}\frac{y}{2}}{\mathrm{ch}\frac{1}{2}}+e^{-3y}\right)\sin\frac{x}{2}+$

$+\frac{\mathrm{ch}\frac{3(1-y)}{2}}{\mathrm{ch}\frac{3}{2}}\sin\frac{3x}{2}$.

31. $u(x,y)=\dfrac{\operatorname{ch}\dfrac{y-1}{2}}{\operatorname{ch}\dfrac{1}{2}}\cos\dfrac{x}{2}+\dfrac{4}{7}\left(\dfrac{4e^{-2}\operatorname{sh}\dfrac{3y}{2}}{3\operatorname{ch}\dfrac{3}{2}}+e^{-2y}-\dfrac{\operatorname{ch}\dfrac{3(1-y)}{2}}{\operatorname{ch}\dfrac{3}{2}}\right)\cos\dfrac{3x}{2}+$

$+3(x-\pi)$.

32. $u(x,y)=\dfrac{4}{7}\left(\dfrac{4e^{-4}\operatorname{sh}\dfrac{3y}{2}}{3\operatorname{ch}3}+e^{-2y}-\dfrac{\operatorname{ch}\dfrac{3(2-y)}{2}}{\operatorname{ch}3}\right)\sin\dfrac{3x}{2}+$

$+\dfrac{\operatorname{ch}\dfrac{5(2-y)}{2}}{\operatorname{ch}5}\sin\dfrac{5x}{2}+y$.

10. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ЛАПЛАСА И ПУАССОНА В КРУГЕ

10.1. Уравнение Лапласа

Пусть $D = \{(x, y): x^2 + y^2 < R^2\}$ – круг в плоскости (x, y) (рис. 10.1). Рассмотрим в этом круге внутреннюю задачу Дирихле:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (x, y) \in D, \\ u = \omega(x, y), \quad (x, y) \in \partial D = \{(x, y): x^2 + y^2 = R^2\}. \end{cases} \tag{10.1}$$

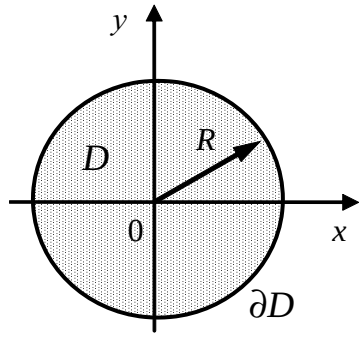


Рис. 10.1. Круговая область определения функции $u(x, y)$

Запишем задачу (10.1) в полярных координатах, полагая

$$x = r\cos\varphi, \; y = r\sin\varphi,$$

тогда

$$u(x, y) = u(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = v(r, \varphi);$$
$$\omega(x, y) = \omega(R\cos\varphi, R\sin\varphi) = f(\varphi).$$

Как было показано ранее, при переходе к полярным координатам оператор Лапласа запишется следующим образом:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2}.$$

Напомним (см. разд. 7), что функция $v(r, \varphi)$, полученная из $u(x, y)$ в результате перехода к полярным координатам, должна удовлетворять условию ограниченности при $r \to 0$

$$|v(0, \varphi)| < +\infty$$

и условиям 2π – периодичности по переменной φ

$$v(r, -\pi) = v(r, \pi), \quad \frac{\partial v(r, -\pi)}{\partial \varphi} = \frac{\partial v(r, \pi)}{\partial \varphi}, \qquad r \in (0, R).$$

Итак, в полярных координатах рассматриваемая задача принимает вид

$$\begin{cases} \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial v}{\partial r}\right) + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} = 0, \quad 0 < r < R, \ -\pi \le \varphi \le \pi, \\ v(R, \varphi) = f(\varphi), \quad |v(0, \varphi)| < +\infty. \end{cases} \tag{10.2}$$

Применим к решению этой задачи метод Фурье. Разложим граничную функцию в тригонометрический ряд Фурье на отрезке $[-\pi, \pi]$

$$f(\varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi), \tag{10.3}$$

где $a_0 = \dfrac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(\varphi)\mathrm{d}\varphi$, $a_k = \dfrac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(\varphi)\cos k\varphi \mathrm{d}\varphi$, $b_k = \dfrac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(\varphi)\sin k\varphi \mathrm{d}\varphi$.

Решение будем искать в виде аналогичного ряда Фурье, коэффициенты которого – неизвестные функции от r, т.е. в виде

$$v(r, \varphi) = \frac{A_0(r)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k(r)\cos k\varphi + B_k(r)\sin k\varphi). \tag{10.4}$$

Найдем входящие в уравнение (10.2) производные

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v}{\partial r}\right) = \frac{1}{2}\left(rA_0'(r)\right)' + \sum_{k=1}^{\infty}\left(rA_k'(r)\right)'\cos k\varphi + \left(rB_k'(r)\right)'\sin k\varphi;$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} = \sum_{k=1}^{\infty}(-k^2 A_k(r)\cos k\varphi - k^2 B_k(r)\sin k\varphi).$$

Подставляя их в ДУ, получим

$$\frac{1}{2r}\left(rA_0'(r)\right)' + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{r}\left(rA_k'(r)\right)' - \frac{k^2}{r^2}A_k(r)\right)\cos k\varphi + \\ + \left(\frac{1}{r}\left(rB_k'(r)\right)' - \frac{k^2}{r^2}A_k(r)\right)\sin k\varphi = 0. \qquad (10.5)$$

Используем граничные условия

$$v(R,\varphi) = \frac{A_0(R)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k(R)\cos k\varphi + B_k(R)\sin k\varphi\right) = \\ = f(\varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos k\varphi + b_k\sin k\varphi\right). \qquad (10.6)$$

Приравнивая в выражениях (10.5) и (10.6) коэффициенты при одинаковых функциях тригонометрической системы и используя условие ограниченности решения при $r \to 0$, получим следующие задачи для определения неизвестных коэффициентов ряда (10.4):

$$\frac{1}{r}\left(rA_0'\right)' = 0,\ \left|A_0(0)\right| < +\infty,\ A_0(R) = a_0; \qquad (10.7)$$

$$\frac{1}{r}\left(rA_k'\right)' - \frac{k^2}{r^2}A_k = 0,\ \left|A_k(0)\right| < +\infty,\ A_k(R) = a_k,\ k = 1, 2, \ldots; \qquad (10.8)$$

$$\frac{1}{r}\left(rB_k'\right)' - \frac{k^2}{r^2}B_k = 0,\ \left|B_k(0)\right| < +\infty,\ B_k(R) = b_k,\ k = 1, 2, \ldots. \qquad (10.9)$$

Дважды непосредственно интегрируя уравнение (10.7), получим его общее решение

$$A_0(r) = C_0\ln r + D_0.$$

Условие ограниченности при $r \to 0$ можно выполнить, если $C_0 = 0$. С учетом второго граничного условия окончательно получим, что

$$A_0(r) = a_0.$$

Для нахождения общего решения ДУ (10.8) попытаемся найти его частное решение в виде $A_k = r^{\alpha}$. Подставляя последнее выражение в ДУ (10.8), получим

$$\frac{1}{r}\left(\alpha r^{\alpha}\right)' - \frac{k^2}{r^2} r^{\alpha} = (\alpha^2 - k^2) r^{\alpha-1} = 0,$$

откуда для неизвестного α имеем уравнение

$$\alpha^2 - k^2 = 0,$$

т.е. $\alpha = \pm k$. Итак, в качестве фундаментальной системы решений линейного ДУ (10.8), определяющего r, можно взять функции r^k и r^{-k} и записать его общее решение в виде

$$A_k(r) = C_k r^k + D_k r^{-k}.$$

Далее воспользуемся краевыми условиями

$$|A_k(0)| < +\infty \Rightarrow D_k = 0;$$

$$A_k(R) = C_k R^k = a_k \quad \Rightarrow \quad C_k = \frac{a_k}{R^k}.$$

Таким образом, получим

$$A_k(r) = a_k \left(\frac{r}{R}\right)^k.$$

Аналогично находим

$$B_k(r) = b_k \left(\frac{r}{R}\right)^k$$

Подставляя найденные неизвестные функции в ряд (10.4), получим

$$v(r,\varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^k (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi). \qquad (10.10)$$

Данная формула дает формальное решение задачи. Если функция $f(\varphi)$ достаточно гладкая, то решение будет классическим.

Пример 10.1. Решим задачу Дирихле для уравнения Лапласа в круге:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & (x,y) \in D = \{(x,y) : x^2 + y^2 < 9\}, \\ u = 3y + 4xy + x^2, & (x,y) \in \partial D = \{(x,y) : x^2 + y^2 = 9\}. \end{cases}$$

Перейдем к полярным координатам, полагая $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, тогда

$$u(x, y) = u(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = v(r, \varphi),$$

$$v\Big|_{r=3} = \left(3r\sin\varphi + 4r^2\cos\varphi\sin\varphi + r^2\cos^2\varphi\right)\Bigg|_{r=3} =$$

$$= 9\sin\varphi + 36\cos\varphi\sin\varphi + 9\cos^2\varphi = \frac{9}{2} + 9\sin\varphi + \frac{9}{2}\cos 2\varphi + 18\sin 2\varphi.$$

Итак, в полярных координатах задача запишется следующим образом:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial v}{\partial r}\right) + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 v}{\partial\varphi^2} = 0, \quad 0 < r < 3, \quad -\pi \le \varphi \le \pi, \\ v(3,\varphi) = \dfrac{9}{2} + 9\sin\varphi + \dfrac{9}{2}\cos 2\varphi + 18\sin 2\varphi, \quad |v(0,\varphi)| < +\infty. \end{cases}$$

Разложим граничную функцию в тригонометрический ряд Фурье

$$f(\varphi) = \frac{9}{2} + 9\sin\varphi + \frac{9}{2}\cos 2\varphi + 18\sin 2\varphi = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos k\varphi + b_k\sin k\varphi),$$

где $a_0 = 9;\ a_2 = \dfrac{9}{2};\ b_2 = 18;\ a_k = b_k = 0;\ k \ge 2.$

Согласно формуле (10.10), можно записать решение задачи

$$v(r,\varphi) = \frac{9}{2} + \frac{r}{3}9\sin\varphi + \left(\frac{r}{3}\right)^2\left(\frac{9}{2}\cos 2\varphi + 18\sin 2\varphi\right) =$$

$$= \frac{9}{2} + 3r\sin\varphi + r^2\left(\frac{1}{2}\cos 2\varphi + 2\sin 2\varphi\right).$$

Возвращаясь к старым переменным, запишем полученное решение в декартовых координатах

$$u(x, y) = \frac{9}{2} + 3y + \frac{x^2 - y^2}{2} + 4xy.$$

10.2. Уравнение Пуассона

Рассмотрим задачу Дирихле для уравнения Пуассона

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = h(x,y), \quad (x,y) \in D = \{(x,y) : x^2 + y^2 < R^2\}, \\ u = \omega(x,y), \quad (x,y) \in \partial D = \{(x,y) : x^2 + y^2 = R^2\}. \end{cases} \tag{10.11}$$

Ее решение можно представить в виде $u = u_1 + u_2$, где u_1 – уже найденное решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} = 0, \quad (x,y) \in D = \{(x,y) : x^2 + y^2 < R^2\}, \\ u_1 = \omega(x,y), \quad (x,y) \in \partial D = \{(x,y) : x^2 + y^2 = R^2\}, \end{cases} \tag{10.12}$$

а u_2 – решение задачи Дирихле для уравнения Пуассона с нулевой граничной функцией

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} = h(x,y), \quad (x,y) \in D = \{(x,y) : x^2 + y^2 < R^2\}, \\ u_2 = 0, \quad (x,y) \in \partial D = \{(x,y) : x^2 + y^2 = R^2\}. \end{cases} \tag{10.13}$$

Запишем задачу для u_2 в полярных координатах

$$\begin{cases} \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r \dfrac{\partial v}{\partial r} \right) + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} = F(r,\varphi), \quad 0 < r < R, \quad -\pi \le \varphi \le \pi, \\ v(R,\varphi) = 0, \quad |v(0,\varphi)| < +\infty. \end{cases} \tag{10.14}$$

Разложим в тригонометрический ряд Фурье на $[-\pi, \pi]$ правую часть уравнения

$$F(r,\varphi) = \frac{a_0(r)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k(r)\cos k\varphi + b_k(r)\sin k\varphi);$$

$$a_0(r) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(r,\varphi)\,d\varphi, \quad a_k(r) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(r,\varphi)\cos k\varphi\, d\varphi;$$

$$b_k(r) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(r,\varphi)\sin k\varphi\, d\varphi.$$

Решение задачи будем искать в виде аналогичного ряда Фурье

$$v(r,\varphi)=\frac{A_0(r)}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(A_k(r)\cos k\varphi+B_k(r)\sin k\varphi).$$

Для определения неизвестных коэффициентов этого ряда, с учетом граничных условий, получим следующие задачи:

$$\frac{1}{r}\left(rA_0'\right)'=a_0(r),\qquad |A_0(0)|<+\infty,\quad A_0(R)=0; \tag{10.15}$$

$$\frac{1}{r}\left(rA_k'\right)'-\frac{k^2}{r^2}A_k=a_k(r),\qquad |A_k(0)|<+\infty,\quad A_k(R)=0; \tag{10.16}$$

$$\frac{1}{r}\left(rB_k'\right)'-\frac{k^2}{r^2}B_k=b_k(r),\qquad |B_k(0)|<+\infty,\quad B_k(R)=0. \tag{10.17}$$

Здесь функция $A_0(r)$ может быть найдена непосредственным интегрированием.

Как было показано при рассмотрении уравнения Лапласа, в задачах (10.16) и (10.17) соответствующие однородные ДУ имеют ФСР $\{r^k,\ r^{-k}\}$. Общее решение неоднородного ДУ в (10.16) может быть найдено методом вариации произвольных постоянных в виде

$$A_k(r)=C_1(r)r^k+C_2(r)r^{-k},$$

где производные от неизвестных функций определяются как решения следующей линейной алгебраической системы:

$$\begin{cases}C_1'r^k+C_2'r^{-k}=0,\\ k(C_1'r^{k-1}-C_2'r^{-k-1})=a_k(r).\end{cases}$$

Аналогично решаются задачи для $B_k(r)$.

Пример 10.2. Решим задачу Дирихле для уравнения Пуассона в круге

$$\begin{cases}\Delta u=2(x-y)^2, & (x,y)\in D=\{(x,y):x^2+y^2<4\},\\ u=0, & (x,y)\in \partial D=\{(x,y):x^2+y^2=4\}.\end{cases}$$

Перейдём к полярным координатам, полагая

$$x=r\cos\varphi,\ y=r\sin\varphi,$$

тогда

$$h(x, y) = 2(x - y)^2 = 2r^2(\cos^2\varphi - 2\sin\varphi\cos\varphi + \sin^2\varphi) =$$
$$= 2r^2(1 - \sin 2\varphi) = F(r, \varphi);$$
$$u(x, y) = u(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = v(r, \varphi)$$

и задача запишется следующим образом:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial v}{\partial r}\right) + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} = 2r^2 - 2r^2\sin 2\varphi, \ 0 < r < 2, \ -\pi \le \varphi \le \pi, \\ v(2, \varphi) = 0, \ \ |v(0, \varphi)| < +\infty. \end{cases}$$

Разложим в тригонометрический ряд Фурье правую часть ДУ

$$F(r, \varphi) = 2r^2 - 2r^2\sin 2\varphi = \frac{a_0(r)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k(r)\cos k\varphi + b_k(r)\sin k\varphi),$$

где $a_0(r) = 4r^2$; $b_2(r) = -2r^2$; $a_k = 0$, $k \ne 0$; $b_k = 0$, $k \ne 2$.

Заметим, что в данном случае ненулевые решения будут иметь только задачи для $A_0(r)$ и $B_2(r)$. Для прочих коэффициентов записываются линейные однородные ДУ с нулевыми краевыми условиями, имеющие лишь тривиальные решения. Найдем указанные ненулевые решения.

1) $\dfrac{1}{r}\left(rA_0'\right)' = 4r^2, \qquad |A_0(0)| < +\infty, \quad A_0(2) = 0.$

Интегрируя один раз, получим

$$rA_0' = \int 4r^3 dr = r^4 + C_1 .$$

После второго интегрирования имеем

$$A_0(r) = \int\left(r^3 + C_1\frac{1}{r}\right)\mathrm{d}r = \frac{r^4}{4} + C_1\ln r + C_2 .$$

Далее воспользуемся краевыми условиями

$$|A_0(0)| < +\infty \Rightarrow C_1 = 0,$$
$$A_0(2) = \frac{2^4}{4} + C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = -4 .$$

Итак,

$$A_0(r) = \frac{r^4}{4} - 4 .$$

2) $\frac{1}{r}\left(rB_2'\right)' - \frac{2^2}{r^2}B_2 = -2r^2, \quad \left|B_2(0)\right| < +\infty, \quad B_2(2) = 0.$

Заметим, что ФСР соответствующего однородного ДУ в данном случае

$$\{r^2, r^{-2}\}.$$

Общее решение линейного неоднородного ДУ, определяющего B_2, будем искать методом вариации произвольных постоянных в виде

$$B_2(r) = C_1(r)r^2 + C_2(r)r^{-2}.$$

Для определения производных неизвестных функций запишем систему Лагранжа

$$\begin{cases} C_1'r^2 + C_2'r^{-2} = 0, \\ 2(C_1'r - C_2'r^{-3}) = -2r^2, \end{cases}$$

решая которую, находим

$$\begin{cases} C_1' = -\frac{r}{2}, \\ C_2' = \frac{r^5}{2}, \end{cases}$$

отсюда

$$C_1(r) = -\frac{1}{2}\int r\mathrm{d}r = -\frac{r^2}{4} + \tilde{C}_1, \; C_2(r) = \frac{1}{2}\int r^5\mathrm{d}r = \frac{r^6}{12} + \tilde{C}_2.$$

Теперь можно записать общее решение ДУ

$$B_2(r) = \tilde{C}_1r^2 + \tilde{C}_2r^{-2} - \frac{r^4}{4} + \frac{r^4}{12} = \tilde{C}_1r^2 + \tilde{C}_2r^{-2} - \frac{r^4}{6}.$$

Далее воспользуемся краевыми условиями

$$\left|B_2(0)\right| < +\infty \Rightarrow \tilde{C}_2 = 0,$$

$$B_2(2) = \tilde{C}_1 2^2 - \frac{2^4}{6} = 0 \Rightarrow \tilde{C}_1 = \frac{2}{3}.$$

Итак,

$$B_2(r)=\frac{2}{3}r^2-\frac{r^4}{6}.$$

Запишем построенное решение исходной задачи в полярных координатах

$$v(r,\varphi)=\frac{A_0(r)}{2}+B_2(r)\sin 2\varphi=\frac{r^4}{8}-2+\left(\frac{2}{3}r^2-\frac{r^4}{6}\right)\sin 2\varphi.$$

В декартовых координатах это решение имеет вид

$$u(x,y)=\frac{(x^2+y^2)^2}{8}-2+\left(\frac{2}{3}-\frac{x^2+y^2}{6}\right)2xy.$$

Нетрудно проверить, что найденное решение является классическим.

10.3. Задачи для самостоятельного решения

Решить задачи Дирихле для уравнения Лапласа внутри круга:
Задача 1

$$\begin{cases} \Delta u=0, & (x,y)\in D=\{(x,y): x^2+y^2<25\},\\ u=y+2x^2, & (x,y)\in \partial D=\{(x,y): x^2+y^2=25\}. \end{cases}$$

Задача 2

$$\begin{cases} \Delta u=0, & (x,y)\in D=\{(x,y): x^2+y^2<1\},\\ u=3xy+2x, & (x,y)\in \partial D=\{(x,y): x^2+y^2=1\}. \end{cases}$$

Задача 3

$$\begin{cases} \Delta u=0, & (x,y)\in D=\{(x,y): x^2+y^2<16\},\\ u=4y^2-x, & (x,y)\in \partial D=\{(x,y): x^2+y^2=16\}. \end{cases}$$

Задача 4

$$\begin{cases} \Delta u=0, & (x,y)\in D=\{(x,y): x^2+y^2<2\},\\ u=(x-y)^2, & (x,y)\in \partial D=\{(x,y): x^2+y^2=2\}. \end{cases}$$

Задача 5

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & (x,y) \in D = \{(x,y) : x^2 + y^2 < 25\}, \\ u = 4x^2 - 3y, & (x,y) \in \partial D = \{(x,y) : x^2 + y^2 = 25\}. \end{cases}$$

Задача 6

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & (x,y) \in D = \{(x,y) : x^2 + y^2 < 1\}, \\ u = 4 - 2x + xy, & (x,y) \in \partial D = \{(x,y) : x^2 + y^2 = 1\}. \end{cases}$$

Задача 7

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & (x,y) \in D = \{(x,y) : x^2 + y^2 < 4\}, \\ u = 1 + 3x - 2y^2, & (x,y) \in \partial D = \{(x,y) : x^2 + y^2 = 4\}. \end{cases}$$

Задача 8

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & (x,y) \in D = \{(x,y) : x^2 + y^2 < 4\}, \\ u = x + (x-y)^2, & (x,y) \in \partial D = \{(x,y) : x^2 + y^2 = 4\}. \end{cases}$$

Задача 9

$$\begin{cases} \Delta u = (x+y)^2, & (x,y) \in D = \{(x,y) : x^2 + y^2 < 9\}, \\ u = 0, & (x,y) \in \partial D = \{(x,y) : x^2 + y^2 = 9\}. \end{cases}$$

Задача 10

$$\begin{cases} \Delta u = 3xy, & (x,y) \in D = \{(x,y) : x^2 + y^2 < 4\}, \\ u = 0, & (x,y) \in \partial D = \{(x,y) : x^2 + y^2 = 4\}. \end{cases}$$

Задача 11

$$\begin{cases} \Delta u = 2y^2, & (x,y) \in D = \{(x,y) : x^2 + y^2 < 4\}, \\ u = 0, & (x,y) \in \partial D = \{(x,y) : x^2 + y^2 = 4\}. \end{cases}$$

Задача 12

$$\begin{cases} \Delta u = x^2 - y^2, & (x,y) \in D = \{(x,y) : x^2 + y^2 < 1\}, \\ u = 0, & (x,y) \in \partial D = \{(x,y) : x^2 + y^2 = 1\}. \end{cases}$$

Задача 13

$$\begin{cases} \Delta u = 2xy, & (x,y) \in D = \{(x,y) : x^2 + y^2 < 16\}, \\ u = 6y^2, & (x,y) \in \partial D = \{(x,y) : x^2 + y^2 = 16\}. \end{cases}$$

Задача 14

$$\begin{cases} \Delta u = y^2, & (x,y) \in D = \{(x,y) : x^2 + y^2 < 4\}, \\ u = x, & (x,y) \in \partial D = \{(x,y) : x^2 + y^2 = 4\}. \end{cases}$$

Задача 15

$$\begin{cases} \Delta u = 2(x+y)^2, & (x,y) \in D = \{(x,y) : x^2 + y^2 < 1\}, \\ u = 5, & (x,y) \in \partial D = \{(x,y) : x^2 + y^2 = 1\}. \end{cases}$$

Задача 16

$$\begin{cases} \Delta u = 4x^2, & (x,y) \in D = \{(x,y) : x^2 + y^2 < 4\}, \\ u = 2y, & (x,y) \in \partial D = \{(x,y) : x^2 + y^2 = 4\}. \end{cases}$$

Ответы

1. $u(x,y) = x^2 - y^2 + y + 25$; $v(r,\varphi) = 25 + r^2 \cos 2\varphi + r \sin \varphi$.
2. $u = 2x + 3xy$; $v(r,\varphi) = 2r \cos \varphi + \dfrac{3r^2}{2} \sin 2\varphi$.
3. $u(x,y) = -2x^2 + 2y^2 - x + 32$; $v(r,\varphi) = 32 - r \cos \varphi - 2r^2 \cos 2\varphi$.
4. $u(x,y) = 2 - 2xy$; $v(r,\varphi) = 2 - r^2 \sin 2\varphi$.
5. $u(x,y) = 50 + 2(x^2 - y^2) - 3y$; $v(r,\varphi) = 50 - 3r \sin \varphi + 2r^2 \cos 2\varphi$.
6. $u(x,y) = 4 - 2x + xy$.
7. $u(x,y) = -3 + 3x + x^2 - y^2$; $v(r,\varphi) = -3 + 3r \cos \varphi + r^2 \cos 2\varphi$.
8. $u(x,y) = 4 + x - 2xy$; $v(r,\varphi) = 4 + r \cos \varphi - r^2 \sin 2\varphi$.
9. $u(x,y) = \dfrac{1}{16}((x^2 + y^2)^2 - 81) + \dfrac{1}{6}(x^2 + y^2 - 9)xy$;

   $v(r,\varphi) = \dfrac{1}{16}(r^4 - 81) + \dfrac{1}{12}(r^4 - 9r^2) \sin 2\varphi$.

10. $u(x,y)=\frac{1}{4}(x^2+y^2-4)xy$; $v(r,\varphi)=\frac{1}{8}(r^4-4r^2)\sin 2\varphi$.

11. $u(x,y)=\frac{(x^2+y^2)^2}{16}-1+\frac{(4-x^2-y^2)(x^2-y^2)}{12}$;

$v(r,\varphi)=\frac{r^4}{16}-1+\frac{r^2(4-r^2)}{12}\cos 2\varphi$.

12. $u(x,y)=\frac{1}{12}(x^2+y^2-1)(x^2-y^2)$; $v(r,\varphi)=\frac{1}{12}(r^4-r^2)\cos 2\varphi$.

13. $u(x,y)=48-3(x^2-y^2)+\frac{x^2+y^2-16}{6}xy$;

$v(r,\varphi)=48-3r^2\cos 2\varphi+\frac{r^4-16r^2}{12}\sin 2\varphi$.

14. $u(x,y)=\frac{(x^2+y^2)^2}{16}-1+x+\frac{1}{24}(4-x^2-y^2)(x^2-y^2)$;

$v(r,\varphi)=\frac{r^4}{16}-1+\frac{1}{24}(4r^2-r^4)\cos 2\varphi+r\cos\varphi$.

15. $u(x,y)=\frac{(x^2+y^2)^2+19}{4}+\frac{1}{3}(x^2+y^2-1)xy$;

$v(r,\varphi)=\frac{1}{4}(r^4-1)+5+\frac{1}{6}(r^4-r^2)\sin 2\varphi$.

16. $u(x,y)=\frac{(x^2+y^2)^2-16}{4}+2y+\frac{1}{6}(x^2+y^2-4)(x^2-y^2)$;

$v(r,\varphi)=\frac{r^4-16}{4}+2r\sin\varphi+\frac{1}{6}(r^4-4r^2)\cos 2\varphi$.

11. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА ВО ВНЕШНОСТИ КРУГА И В КОЛЬЦЕ. ЗАДАЧА НЕЙМАНА В КРУГЕ

11.1. Задача Дирихле во внешности круга

Пусть $D = \{(x, y): x^2 + y^2 > R^2\}$ – внешность круга с центром в начале координат на плоскости (x, y) (рис. 11.1). Рассмотрим внешнюю задачу Дирихле для уравнения Лапласа

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (x, y) \in D, \\ u = \omega(x, y), \quad (x, y) \in \partial D = \{(x, y): x^2 + y^2 = R^2\}. \end{cases} \tag{11.1}$$

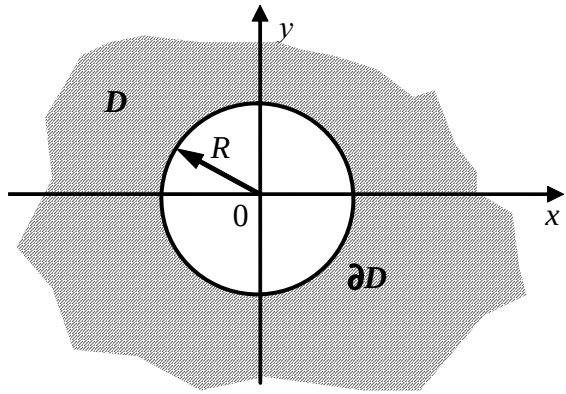


Рис. 11.1. Область определения
функции $u(x, y)$ – плоскость с круговым вырезом

В полярных координатах рассматриваемая задача принимает вид

$$\begin{cases} \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial v}{\partial r}\right) + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} = 0, \quad r > R, \quad -\pi \le \varphi \le \pi, \\ v(R, \varphi) = f(\varphi), \quad |v(+\infty, \varphi)| < +\infty. \end{cases} \tag{11.2}$$

Последнее условие в задаче (11.2) – требование ограниченности решения на бесконечности. Это условие естественно с точки зрения

физических интерпретаций задачи и обеспечивает единственность решения. Кроме того, как и в случае построения решения внутри круга, непрерывность $u(x, y)$ приводит к требованию 2π-периодичности по переменной φ функций $v(r, \varphi)$ и $\dfrac{\partial v(r,\varphi)}{\partial \varphi}$.

Будем решать задачу, придерживаясь той же схемы, что и при решении внутренней задачи.

Разложим граничную функцию в тригонометрический ряд Фурье на $[-\pi, \pi]$:

$$f(\varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi);$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi)\mathrm{d}\varphi,\ a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi)\cos k\varphi \mathrm{d}\varphi,\ b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi)\sin k\varphi \mathrm{d}\varphi.$$

Решение будем искать в виде аналогичного ряда Фурье, коэффициенты которого – неизвестные функции от r

$$v(r,\varphi) = \frac{A_0(r)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k(r)\cos k\varphi + B_k(r)\sin k\varphi). \qquad (11.3)$$

Подставляя ряд (11.3) в ДУ и приравнивая коэффициенты при одинаковых функциях тригонометрической системы, а также используя условие ограниченности решения при $r \to +\infty$, получим задачи для определения неизвестных коэффициентов ряда

$$\frac{1}{r}\left(rA_0'\right)' = 0, \quad |A_0(+\infty)| < +\infty, \quad A_0(R) = a_0; \qquad (11.4)$$

$$\frac{1}{r}\left(rA_k'\right)' - \frac{k^2}{r^2}A_k = 0,\ |A_k(+\infty)| < +\infty,\ A_k(R) = a_k,\ k = 1,\ 2,\ldots; \qquad (11.5)$$

$$\frac{1}{r}\left(rB_k'\right)' - \frac{k^2}{r^2}B_k = 0,\ |B_k(+\infty)| < +\infty,\ B_k(R) = b_k,\ k = 1,\ 2,\ldots. \qquad (11.6)$$

Напомним, что общее решение ДУ (11.4) имеет вид

$$A_0(r) = C_0 \ln r + D_0.$$

Из условия ограниченности при $r \to +\infty$ следует, что $C_0 = 0$. С учетом второго граничного условия окончательно получим, что $D_0 = a_0$, т.е.

$$A_0(r) = a_0.$$

Запишем общее решение ДУ (11.5)

$$A_k(r) = C_k r^k + D_k r^{-k}.$$

Воспользуемся краевыми условиями

$$\left|A_k(+\infty)\right| < +\infty \Rightarrow C_k = 0;$$
$$A_k(R) = D_k R^{-k} = a_k \Rightarrow D_k = a_k R^k$$

Таким образом,

$$A_k(r) = a_k \left(\frac{R}{r}\right)^k.$$

Аналогично получим, что

$$B_k(r) = b_k \left(\frac{R}{r}\right)^k.$$

Подставляя найденные неизвестные функции в ряд (11.3), запишем формальное решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа вне круга

$$v(r,\varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^k (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi). \qquad (11.7)$$

Пример 11.1. Рассмотрим задачу Дирихле для уравнения Лапласа вне круга

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & (x,y) \in D = \{(x,y) : x^2 + y^2 > 4\}, \\ u = 1 + xy, & (x,y) \in \partial D = \{(x,y) : x^2 + y^2 = 4\}. \end{cases}$$

Перейдем к полярным координатам, полагая

$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi.$$

В результате задача запишется так:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial v}{\partial r}\right) + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} = 0, \quad r > 2, \quad -\pi \le \varphi \le \pi, \\ v(2,\varphi) = 1 + 2\sin 2\varphi, \quad \left|v(+\infty,\varphi)\right| < +\infty. \end{cases}$$

Разложим граничную функцию в тригонометрический ряд Фурье

$$f(\varphi) = 1 + 2\sin\varphi = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi).$$

Заметим, что здесь

$$a_k = \begin{cases} 2, & k = 0, \\ 0, & k = 1, 2, \ \dots \ , \end{cases} \qquad b_k = \begin{cases} 2, & k = 2, \\ 0, & k \neq 2. \end{cases}$$

Подставив найденные коэффициенты в формулу (11.7), запишем решение задачи

$$v(r, \varphi) = 1 + \frac{8}{r^2} \sin 2\varphi .$$

Возвращаясь к декартовым координатам, устанавливаем (проверьте!), что

$$u(x, y) = 1 + \frac{16xy}{\left(x^2 + y^2\right)^2} .$$

11.2. Задача Дирихле в кольце

Пусть теперь область $D = \{(x, y) : R_1^2 < x^2 + y^2 < R_2^2\}$ – кольцо между двумя окружностями (рис. 11.2). Рассмотрим задачу Дирихле для уравнения Лапласа

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & (x, y) \in D, \\ u = \omega_1(x, y), & x^2 + y^2 = R_1^2, \\ u = \omega_2(x, y), & x^2 + y^2 = R_2^2. \end{cases} \tag{11.8}$$

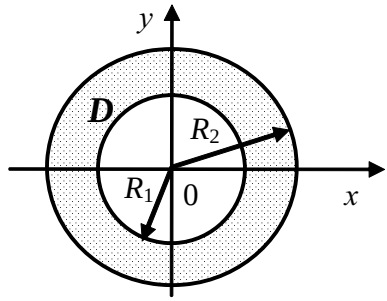


Рис. 11.2. Область определения функции $u(x, y)$ – кольцо

Перейдя к полярным координатам, получим задачу

$$\begin{cases} \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial v}{\partial r}\right)+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2}=0, \quad 0<R_1<r<R_2, \quad -\pi\le\varphi\le\pi, \\ v(R_1,\varphi)=f_1(\varphi), \quad v(R_2,\varphi)=f_2(\varphi). \end{cases} \tag{11.9}$$

Разложим граничные функции в тригонометрические ряды Фурье

$$f_1(\varphi)=\frac{a_{10}}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_{1k}\cos k\varphi+b_{1k}\sin k\varphi);$$

$$f_2(\varphi)=\frac{a_{20}}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_{2k}\cos k\varphi+b_{2k}\sin k\varphi).$$

Решение будем искать в виде аналогичного ряда Фурье, коэффициенты которого – неизвестные функции от r

$$v(r,\varphi)=\frac{A_0(r)}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(A_k(r)\cos k\varphi+B_k(r)\sin k\varphi).$$

Для определения $A_0(r)$ получаем краевую задачу

$$\frac{1}{r}\left(rA_0'\right)'=0, \quad A_0(R_1)=a_{10}, \quad A_0(R_2)=a_{20}.$$

Общее решение ДУ здесь имеет вид

$$A_0(r)=C_0\ln r+D_0.$$

Подставляя краевые условия, получим систему для определения неизвестных констант

$$\begin{cases} C_0\ln R_1+D_0=a_{10}, \\ C_0\ln R_2+D_0=a_{20}. \end{cases}$$

Эта система однозначно разрешима, так как ее определитель

$$\Delta=\begin{vmatrix}\ln R_1 & 1\\ \ln R_2 & 1\end{vmatrix}=\ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right)\neq 0.$$

Для определения $A_k(r)$ имеем краевые задачи

$$\frac{1}{r}\left(rA_k'\right)'-\frac{k^2}{r^2}A_k=0, \quad A_k(R_1)=a_{1k}, \quad A_k(R_2)=a_{2k}, \quad k=1,\,2,\ \ldots\ .$$

Здесь общее решение ДУ имеет вид

$$A_k(r) = C_k r^k + D_k r^{-k}.$$

Подставляя краевые условия, получим систему для определения неизвестных констант

$$\begin{cases} C_k R_1^{\,k} + D_k R_1^{-k} = a_{1k}, \\ C_k R_2^{\,k} + D_k R_2^{-k} = a_{2k}. \end{cases}$$

Эта система также однозначно разрешима, так как

$$\Delta = \begin{vmatrix} R_1^{\,k} & R_1^{-k} \\ R_2^{\,k} & R_2^{-k} \end{vmatrix} = \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^k - \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^k \neq 0.$$

Аналогично

$$B_k(r) = E_k r^k + F_k r^{-k},$$

причем константы однозначно находятся из системы

$$\begin{cases} E_k R_1^{\,k} + F_k R_1^{-k} = b_{1k}, \\ E_k R_2^{\,k} + F_k R_2^{-k} = b_{2k}. \end{cases}$$

Замечание 11.1. В решении задачи Дирихле для уравнения Лапласа в кольце могут присутствовать функции $\ln r$ и r^{-k}, $k = 1, 2, \ldots$, в отличие от соответствующих задач внутри и вне круга.

Пример 11.2. Пусть требуется найти функцию $v(r, \varphi)$, гармоническую в кольце $1 < r < 2$ и удовлетворяющую граничным условиям

$$v(1, \varphi) = \sin\varphi + \cos\varphi,\ v(2, \varphi) = \sin\varphi - \cos\varphi,$$

т.е. нужно решить следующую задачу для отыскания 2π-периодической функции $v(r, \varphi)$:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial v}{\partial r}\right) + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} = 0, \quad 1 < r < 2, \quad -\pi \le \varphi \le \pi, \\ v(1, \varphi) = \sin\varphi + \cos\varphi, \quad v(2, \varphi) = \sin\varphi - \cos\varphi. \end{cases}$$

Разложим граничные функции в тригонометрические ряды Фурье

$$f_1(\varphi)=\sin\varphi+\cos\varphi=\frac{a_{10}}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_{1k}\cos k\varphi+b_{1k}\sin k\varphi)\Rightarrow$$

$$a_{1k}=\begin{cases}1, & k=1,\\ 0, & k\neq 1,\end{cases}\quad b_{1k}=\begin{cases}1, & k=1,\\ 0, & k\neq 1,\end{cases}$$

$$f_2(\varphi)=\sin\varphi-\cos\varphi=\frac{a_{20}}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_{2k}\cos k\varphi+b_{2k}\sin k\varphi)\Rightarrow$$

$$a_{2k}=\begin{cases}-1, & k=1\\ 0, & k\neq 1;\end{cases}\quad b_{2k}=\begin{cases}1, & k=1,\\ 0, & k\neq 1.\end{cases}$$

Решение задачи ищем в виде

$$v(r,\varphi)=\frac{A_0(r)}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(A_k(r)\cos k\varphi+B_k(r)\sin k\varphi).$$

Заметим, что в силу граничных условий этот ряд будет содержать всего два ненулевых слагаемых, т.е.

$$v(r,\varphi)=A_1(r)\cos\varphi+B_1(r)\sin\varphi\,.$$

Для определения $A_1(r)$ имеем следующую краевую задачу:

$$\frac{1}{r}\left(rA_1'\right)'-\frac{1}{r^2}A_1=0,\qquad A_1(1)=a_{11}=1,\quad A_1(2)=a_{21}=-1.$$

Общее решение ДУ имеет вид

$$A_1(r)=C_1r+D_1r^{-1}\,.$$

Подставляя краевые условия, получим систему для определения неизвестных констант

$$\begin{cases}C_1+D_1=1,\\ 2C_1+2^{-1}D_1=-1.\end{cases}$$

Аналогичная задача получается для определения $B_1(r)$:

$$\frac{1}{r}\left(rB_1'\right)'-\frac{1}{r^2}B_1=0,\qquad B_1(1)=b_{11}=1,\quad B_1(2)=b_{21}=1.$$

Общее решение ДУ здесь также имеет вид

$$B_1(r) = E_1 r + F_1 r^{-1}.$$

Для определения неизвестных констант имеем систему

$$\begin{cases} E_1 + F_1 = 1, \\ 2E_1 + 2^{-1} F_1 = 1. \end{cases}$$

Решив две системы линейных алгебраических уравнений, получим

$$\begin{cases} C_1 = -1, \\ D_1 = 2, \end{cases} \quad \begin{cases} E_1 = 1/3, \\ F_1 = 2/3, \end{cases}$$

следовательно,

$$A_1(r) = -r + \frac{2}{r}, \; B_1(r) = \frac{1}{3}\left(r + \frac{2}{r} \right).$$

Итак, окончательно имеем

$$v(r, \varphi) = \left(-r + \frac{2}{r} \right) \cos\varphi + \frac{1}{3}\left(r + \frac{2}{r} \right) \sin\varphi.$$

11.3. Задача Неймана в круге

Обратим внимание на некоторые особенности задачи Неймана, отмеченные в замечании 9.1.

Пусть $D = \{(x, y): x^2 + y^2 < R^2\}$. Рассмотрим в этом круге внутреннюю задачу Неймана для уравнения Лапласа. Для отыскания 2π-периодической функции $v(r, \varphi)$ имеем в полярных координатах следующую задачу:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r \dfrac{\partial v}{\partial r} \right) + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} = 0, \quad 0 < r < R, \quad -\pi \le \varphi \le \pi, \\ \dfrac{\partial v(R, \varphi)}{\partial r} = f(\varphi), \quad |v(0, \varphi)| < +\infty. \end{cases} \tag{11.10}$$

Следуя рассмотренной для задачи Дирихле схеме метода Фурье, разложим граничную функцию в тригонометрический ряд

$$f(\varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi)$$

и будем искать решение задачи (11.10) в виде ряда (11.3), тогда

$$\frac{\partial v(R,\varphi)}{\partial r} = \frac{A_0'(R)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k'(R)\cos k\varphi + B_k'(R)\sin k\varphi)$$

и для определения неизвестных коэффициентов ряда (11.3) получим следующие задачи:

$$\frac{1}{r}\left(rA_0'\right)' = 0, \qquad \left|A_0(0)\right| < +\infty, \quad A_0'(R) = a_0; \tag{11.11}$$

$$\frac{1}{r}\left(rA_k'\right)' - \frac{k^2}{r^2}A_k = 0, \ \left|A_k(0)\right| < +\infty, \ A_k'(R) = a_k, \ k = 1, 2, \ldots; \tag{11.12}$$

$$\frac{1}{r}\left(rB_k'\right)' - \frac{k^2}{r^2}B_k = 0, \ \left|B_k(0)\right| < +\infty, \ B_k'(R) = b_k, \ k = 1, 2, \ldots. \tag{11.13}$$

Запишем общее решение ДУ (11.11)

$$A_0(r) = C_0 \ln r + D_0.$$

Из условия ограниченности при $r \to 0$ получим, что $C_0 = 0$, тогда $A_0(r) = D_0$ и $A_0'(r) = 0$. Отсюда следует, что задача (11.11) имеет бесконечно много решений $A_0(r) = \text{const}$, причем, лишь в случае, когда в разложении граничной функции в тригонометрический ряд Фурье $a_0 = 0$, т.е. граничное значение удовлетворяет условию

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi)\mathrm{d}\varphi = 0. \tag{11.14}$$

Решив задачи (11.12) и (11.13), получим

$$A_k(r) = a_k \frac{r^k}{kR^{k-1}}, \ B_k(r) = b_k \frac{r^k}{kR^{k-1}}.$$

Теперь можно записать формальное решение задачи (11.10)

$$v(r,\varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{r^k}{kR^{k-1}}(a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi) + C. \tag{11.15}$$

Итак, задача Неймана (11.10) имеет бесконечное множество формальных решений, определенных с точностью до произвольной по-

стоянной C, причем решение существует только при дополнительном ограничении на функцию $f(\varphi)$ (11.14)

Аналогично решается задача Неймана для уравнения Лапласа вне круга и в кольце.

11.4. Задачи для самостоятельного решения

1. Решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа вне круга $r \ge R$, $-\pi \le \varphi \le \pi$ с граничным условием $u(R, \varphi) = 8\cos^4\varphi$.

2. Решить задачу Неймана для уравнения Лапласа внутри круга $0 \le r \le R$, $-\pi \le \varphi \le \pi$ с граничным условием $\dfrac{\partial u(R,\varphi)}{\partial r} = 4\sin^3\varphi$.

3. Решить задачу Неймана для уравнения Лапласа вне круга $r \ge R$, $-\pi \le \varphi \le \pi$ с граничным условием $\dfrac{\partial u(R,\varphi)}{\partial r} = \sin\varphi + 4\sin^3\varphi$.

4. Решить краевую задачу для уравнения Лапласа в кольце $2 \le r \le 3$, $-\pi \le \varphi \le \pi$ с граничными условиями $u(2, \varphi) = 2$, $u(3, \varphi) = 3$.

5. Решить краевую задачу для уравнения Лапласа в кольце $1 \le r \le 2$, $-\pi \le \varphi \le \pi$ с граничными условиями $u(1, \varphi) = \sin\varphi$, $u(2, \varphi) = \sin 2\varphi$.

6. Решить краевую задачу для уравнения Лапласа в кольце $1 \le r \le 2$, $-\pi \le \varphi \le \pi$ с граничными условиями $u(1, \varphi) = 1$, $u(2, \varphi) = \cos 2\varphi$.

7. Решить краевую задачу для уравнения Лапласа в кольце $1 \le r \le 3$, $-\pi \le \varphi \le \pi$ с граничными условиями $\dfrac{\partial u(1,\varphi)}{\partial r} = 1$, $u(3,\varphi) = 1$.

8. Решить краевую задачу для уравнения Лапласа в кольце $1 \le r \le 2$, $-\pi \le \varphi \le \pi$ с граничными условиями $\dfrac{\partial u(1,\varphi)}{\partial r} = \cos\varphi$, $u(2,\varphi) = \cos 2\varphi$.

9. Решить краевую задачу для уравнения Лапласа в кольце $1 \le r \le 2$, $-\pi \le \varphi \le \pi$ с граничными условиями $\dfrac{\partial u(1,\varphi)}{\partial r} = \cos\varphi$, $u(2,\varphi) = \cos\varphi$.

10. Решить краевую задачу для уравнения Лапласа в кольце $1 \le r \le 2$, $-\pi \le \varphi \le \pi$ с граничными условиями $\dfrac{\partial u(1,\varphi)}{\partial r} = \sin\varphi$, $u(2,\varphi) = \sin\varphi$.

11. Решить краевую задачу для уравнения Лапласа в кольце $1 \le r \le 2$, $-\pi \le \varphi \le \pi$ с граничными условиями $\dfrac{\partial u(1,\varphi)}{\partial r} = \cos^2 \varphi$, $u(2,\varphi) = 2$.

12. Решить краевую задачу для уравнения Лапласа в кольце $1 \le r \le 2$, $-\pi \le \varphi \le \pi$ с граничными условиями $u(1,\varphi) = \sin \varphi$, $\dfrac{\partial u(2,\varphi)}{\partial r} = \sin 2\varphi$.

13. Решить краевую задачу для уравнения Лапласа в кольце $1 \le r \le 2$, $-\pi \le \varphi \le \pi$ с граничными условиями $u(1,\varphi) = 1$, $\dfrac{\partial u(2,\varphi)}{\partial r} = \cos^2 \varphi$.

14. Решить краевую задачу для уравнения Лапласа в кольце $1 \le r \le 2$, $-\pi \le \varphi \le \pi$ с граничными условиями $u(1,\varphi) = \cos 2\varphi$, $\dfrac{\partial u(2,\varphi)}{\partial r} = 1$.

Ответы

1. $u(r,\varphi) = 3 + 4\left(\dfrac{R}{r}\right)^2 \cos 2\varphi + \left(\dfrac{R}{r}\right)^4 \cos 4\varphi$.

2. $u(r,\varphi) = 3r \sin \varphi - \dfrac{R}{3}\left(\dfrac{r}{R}\right)^3 \sin 3\varphi + \text{const}$.

3. $u(r,\varphi) = -\dfrac{3R^2}{r} \sin \varphi + \dfrac{R^4}{3r^3} \sin 3\varphi + \text{const}$.

4. $u(r,\varphi) = \dfrac{\ln \dfrac{9r}{8}}{\ln \dfrac{3}{2}}$.

5. $u(r,\varphi) = \dfrac{1}{3}\left(-r + \dfrac{4}{r}\right) \sin \varphi + \dfrac{4}{15}\left(r^2 - \dfrac{1}{r^2}\right) \sin 2\varphi$.

6. $u(r,\varphi) = 1 - \dfrac{\ln r}{\ln 2} + \dfrac{4}{15}\left(r^2 - \dfrac{1}{r^2}\right) \cos 2\varphi$.

7. $u(r,\varphi) = \ln \dfrac{r}{3} + 1$.

8. $u(r,\varphi)=\frac{1}{5}\left(r-\frac{4}{r}\right)\cos\varphi+\frac{4}{17}\left(r^2+\frac{1}{r^2}\right)\cos 2\varphi$.

9. $u(r,\varphi)=\frac{1}{5}\left(3r-\frac{2}{r}\right)\cos\varphi$.

10. $u(r,\varphi)=\frac{1}{5}\left(3r-\frac{2}{r}\right)\sin\varphi$.

11. $u(r,\varphi)=\frac{1}{2}\ln\frac{r}{2}+2+\frac{1}{68}\left(r^2-\frac{16}{r^2}\right)\cos 2\varphi$.

12. $u(r,\varphi)=\frac{1}{5}\left(r+\frac{4}{r}\right)\sin\varphi+\frac{4}{17}\left(r^2-\frac{1}{r^2}\right)\sin 2\varphi$.

13. $u(r,\varphi)=\ln r+1+\frac{2}{17}\left(r^2-\frac{1}{r^2}\right)\cos 2\varphi$.

14. $u(r,\varphi)=2\ln r+\frac{1}{17}\left(r^2+\frac{16}{r^2}\right)\cos 2\varphi$.

12. ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ (ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ)

12.1. Постановка задачи Коши для одномерного уравнения диффузии (теплопроводности). Теорема единственности решения

Рассмотрим в полуплоскости $Q = \{(x, t): -\infty < x < +\infty, t > 0\}$ уравнение диффузии (теплопроводности)

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t), \quad (x,t) \in Q. \tag{12.1}$$

Требуется найти функцию $u(x, t)$, удовлетворяющую этому ДУ и начальному условию

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad -\infty < x < +\infty. \tag{12.2}$$

Заметим, что в постановке данной задачи отсутствуют граничные условия, а задано только начальное условие. Такая задача называется задачей Коши. Данная задача описывает, например, процесс диффузии (теплопроводности) в бесконечном стержне, что в ряде случаев является удобной физической и математической идеализацией. Стержень предполагается настолько длинным, что влиянием его концов можно пренебречь.

Определение 12.1. Если $f(x, t)$ непрерывна при $t \geq 0$, а $\varphi(x)$ непрерывна на $(-\infty, +\infty)$, то под классическим решением задачи (12.1) – (12.2) понимается функция $u(x, t)$:

– непрерывная при $t \geq 0$ и удовлетворяющая начальному условию (12.2);

– имеющая при $t > 0$ непрерывные частные производные $\frac{\partial u}{\partial t}$ и $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ и обращающая уравнение (12.1) в тождество.

Сформулируем без доказательства следующее утверждение.

Теорема 12.1 ***(о единственности классического решения).*** Если функция $\varphi(x)$ непрерывна и ограничена на $(-\infty, +\infty)$, то задача Коши

(12.1) – (12.2) может иметь только одно классическое решение, и это решение ограничено в области $\overline{Q} = \{(x,t): -\infty < x < +\infty,\ \ t \geq 0\}$.

12.2. Краткие сведения о преобразовании Фурье

Напомним [1], что преобразованием Фурье функции $f(x)$ называется отображение, ставящее в соответствие этой функции функцию $\tilde{f}(\lambda)$, задаваемую как следующий несобственный интеграл, зависящий от параметра λ:

$$\tilde{f}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\lambda x} \mathrm{d}x, \qquad (12.3)$$

или кратко

$$\tilde{f}(\lambda) = F[f(x)](\lambda).$$

Для восстановления $f(x)$ по известному ее Фурье-образу $\tilde{f}(\lambda)$ имеет место формула обращения, использующая обратное преобразование Фурье F^{-1}:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(\lambda) e^{i\lambda x} \mathrm{d}\lambda, \qquad (12.4)$$

или кратко

$$f(x) = F^{-1}[\tilde{f}(\lambda)](x).$$

Прямое и обратное преобразования Фурье определены, в частности, для всех функций, несобственный интеграл от которых по промежутку $(-\infty, +\infty)$ абсолютно сходится. Такие функции называются *абсолютно интегрируемыми* на $(-\infty, +\infty)$. При $x \to \infty$ они стремятся к нулю. Сформулируем *основные свойства преобразования Фурье*, которые нам потребуются для решения нашей задачи.

Лемма 12.1 (*линейность преобразования Фурье*). Пусть для функций f_1 и f_2 существует преобразование Фурье. Тогда, каковы бы ни были числа α_1 и α_2, для функции $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2$ также существует преобразование Фурье, причем

$$F[\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2] = \alpha_1 F[f_1] + \alpha_2 F[f_2].$$

(Аналогичное свойство имеет место и для обратного преобразования Фурье.)

Лемма 12.2 (*Преобразование Фурье производных*). Пусть абсолютно интегрируемая на промежутке $(-\infty, +\infty)$ функция f имеет n абсолютно интегрируемых и непрерывных на $(-\infty, +\infty)$ производных, тогда

$$F[f^{(k)}] = (i\lambda)^k F[f], \; k = 1, 2, \ldots, n.$$

Определение 12.2. Поставим в соответствие паре функций f_1 и f_2 функцию $(f_1 * f_2)(x)$, определяемую как следующий несобственный интеграл, зависящий от параметра x:

$$(f_1 * f_2)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\xi) f_2(x-\xi) d\xi.$$

Этот интеграл называется сверткой функций f_1 и f_2.

Лемма 12.3. (*преобразование Фурье свертки*). Пусть для функций f_1 и f_2 существует преобразование Фурье, тогда

$$F[f_1 * f_2] = \sqrt{2\pi} F[f_1] F[f_2].$$

12.3. Построение решения задачи Коши для однородного уравнения диффузии (теплопроводности) с помощью преобразования Фурье

Рассмотрим сначала задачу Коши для однородного уравнения

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad -\infty < x < +\infty, \;\; t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), \qquad -\infty < x < +\infty. \end{cases} \tag{12.5}$$

Применим для нахождения ее решения преобразование Фурье.

Предположим, что начальная функция $\varphi(x)$ абсолютно интегрируема на промежутке $(-\infty, +\infty)$. Будем искать решение в классе функций $u(x, t)$, удовлетворяющих следующим условиям:

1) функции $u(x, t)$, $\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial x}$, $\dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t}$ абсолютно интегрируемы на промежутке $(-\infty, +\infty)$ оси x при любом фиксированном $t \geq 0$;

2) для функции $\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t}$ на каждом конечном промежутке $0 \le t \le T$ найдется абсолютно интегрируемая функция $f(x)$ такая, что

$$\left|\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right| \le f(x), \ \forall t \in [0,T].$$

Выполним в задаче (12.5) преобразование Фурье по переменной x. Обозначим

$$\tilde{\varphi}(\lambda) = F[\varphi(x)], \ \tilde{u}(\lambda,t) = F[u(x,t)].$$

Согласно лемме 12.2, имеем

$$F\left[\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\right] = -\lambda^2 F[u(x,t)] = -\lambda^2 \tilde{u}(\lambda,t).$$

Воспользовавшись определением преобразования Фурье (формула (12.3)) и теоремой о дифференцировании несобственного интеграла по параметру t [1]), получим

$$F\left[\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}e^{-i\lambda x}\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\partial}{\partial t}\int_{-\infty}^{+\infty}u(x,t)e^{-i\lambda x}\mathrm{d}x = \frac{\partial \tilde{u}(\lambda,t)}{\partial t}.$$

Заметим, что произведенное дифференцирование под знаком интеграла законно. Действительно, в силу условия 2), наложенного на функцию $\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t}$, имеем оценку

$$\left|\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}e^{-i\lambda x}\right| = \left|\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}(\cos\lambda x + i\sin\lambda x)\right| \le 2\left|\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right| \le 2f(x), \ \forall t \in [0,T].$$

Так как $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ сходится, то по признаку Вейерштрасса $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}e^{-i\lambda x}\mathrm{d}x$ сходится равномерно по t на любом конечном промежутке $[0, T]$. Следовательно, дифференцирование по параметру законно на $[0, T]$, а в силу произвольности T – при $t \ge 0$.

В результате преобразования Фурье задача (12.5) превращается в задачу Коши для обыкновенного ДУ

$$\begin{cases} \dfrac{d\tilde{u}}{dt} + a^2\lambda^2\tilde{u} = 0, \quad t > 0, \\ \tilde{u}(\lambda, 0) = \tilde{\varphi}(\lambda). \end{cases}$$

Ее решением будет функция

$$\tilde{u}(\lambda, t) = \tilde{\varphi}(\lambda) e^{-a^2\lambda^2 t}.$$

Остается найти ту функцию $u(x, t)$, преобразованием Фурье которой является $\tilde{u}(\lambda, t)$.

Обозначим $\tilde{g}(\lambda) = e^{-a^2\lambda^2 t}$. Поставим задачу − найти функцию $g(x)$, преобразованием Фурье которой является $\tilde{g}(\lambda)$. По формуле обращения имеем

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{g}(\lambda) e^{i\lambda x} \mathrm{d}\lambda = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2\lambda^2 t} e^{i\lambda x} \mathrm{d}\lambda =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2\lambda^2 t} (\cos\lambda x + i \sin\lambda x) \mathrm{d}\lambda = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{+\infty} e^{-a^2\lambda^2 t} \cos\lambda x \mathrm{d}\lambda.$$

Вычислим интеграл, зависящий от параметра

$$I(x) = \int_{0}^{+\infty} e^{-a^2\lambda^2 t} \cos\lambda x \mathrm{d}\lambda.$$

Дифференцируя интеграл по параметру x, получим

$$I'(x) = -\int_{0}^{+\infty} \lambda e^{-a^2\lambda^2 t} \sin\lambda x \mathrm{d}\lambda.$$

Применение правила дифференцирования по параметру законно, так как подынтегральная функция $e^{-a^2\lambda^2 t}\cos\lambda x$ непрерывна при $\lambda \geq 0$, $x \in \mathbf{R}$, интеграл $I(x)$ сходится при каждом $x \in \mathbf{R}$, а интеграл, полученный формальным дифференцированием по параметру, сходится равномерно по x на $\mathbf{R}$ (по признаку Вейерштрасса). Далее применим интегрирование по частям

$$I'(x) = \frac{1}{2a^2 t} \int_{0}^{+\infty} \sin\lambda x \mathrm{d}(e^{-a^2\lambda^2 t}) = \frac{1}{2a^2 t} \left(\sin\lambda x e^{-a^2\lambda^2 t} \Big|_{0}^{+\infty} - x \int_{0}^{+\infty} e^{-a^2\lambda^2 t} \cos\lambda x \mathrm{d}x \right),$$

откуда следует, что

$$I'(x) = -\frac{x}{2a^2 t} I(x).$$

Проинтегрировав полученное ДУ, имеем

$$I(x) = C \exp\left(-\frac{x^2}{4a^2 t} \right).$$

Заметив, что

$$I(0) = \int_0^{+\infty} e^{-a^2\lambda^2 t} \mathrm{d}\lambda = \int_0^{+\infty} e^{-a^2\lambda^2 t} \mathrm{d}\lambda = \frac{1}{a\sqrt{t}} \int_0^{+\infty} e^{-y^2} \mathrm{d}y = \frac{\sqrt{\pi}}{2a\sqrt{t}},$$

получаем

$$I(x) = \frac{1}{a\sqrt{2t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4a^2 t} \right).$$

Итак,

$$g(x) = \frac{1}{a\sqrt{2t}} e^{\frac{-x^2}{4a^2 t}}.$$

таким образом,

$$\tilde{g}(\lambda) = e^{-a^2\lambda^2 t} = F\left[\frac{1}{a\sqrt{2t}} e^{\frac{-x^2}{4a^2 t}} \right]$$

и

$$\tilde{u}(\lambda, t) = \tilde{\varphi}(\lambda)\tilde{g}(\lambda) = F[\varphi] \cdot F[g] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} F[\varphi * g] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} F\left[\varphi(x) * \frac{1}{a\sqrt{2t}} e^{\frac{-x^2}{4a^2 t}} \right].$$

Здесь мы воспользовались леммой 12.3 о преобразовании Фурье свертки двух функций.

Следовательно, функция $u(x, t)$, преобразованием Фурье которой является функция $\tilde{u}(\lambda, t)$, имеет вид

$$u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \, d\xi . \qquad (12.6)$$

Это так называемая *формула Пуассона*.

Непосредственной проверкой можно убедиться в справедливости следующего факта.

Теорема 12.2. Если функция $\varphi(x)$ непрерывна и ограничена на **R**, то формула Пуассона (12.6) дает классическое решение задачи (12.5)

Пример 12.1. Пусть требуется найти закон остывания неограниченного стержня с теплоизолированной боковой поверхностью, если начальное распределение температуры в стержне задается функцией $\varphi(x) = e^{-x^2}$, $-\infty < x < +\infty$. Математической моделью рассматриваемого процесса является задача Коши

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad -\infty < x < +\infty, \quad t > 0, \\ u(x,0) = e^{-x^2}, \qquad -\infty < x < +\infty. \end{cases}$$

Воспользуемся формулой Пуассона (12.6)

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \, d\xi = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2 - \frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \, d\xi .$$

Сведем полученный интеграл к известному интегралу Пуассона

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} \, dy = \sqrt{\pi}.$$

Для этого выделим в показателе экспоненты полный квадрат по переменной ξ

$$-\xi^2 - \frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t} = -\frac{(4a^2 t + 1)\xi^2 + x^2 - 2\xi x}{4a^2 t} = -\frac{4a^2 t + 1}{4a^2 t}\left(\xi - \frac{x}{4a^2 t + 1}\right)^2 - \frac{x^2}{4a^2 t + 1}$$

и сделаем замену переменной интегрирования, полагая

$$\frac{\sqrt{4a^2t+1}}{2a\sqrt{t}}\left(\xi-\frac{x}{4a^2t+1}\right)=y\,.$$

тогда

$$u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4a^2t+1}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{4a^2t+1}{4a^2t}\left(\xi-\frac{x}{4a^2t+1}\right)^2}\mathrm{d}\xi=\frac{e^{-\frac{x^2}{4a^2t+1}}}{\sqrt{4a^2t+1}}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-y^2}\mathrm{d}y=$$

$$=\frac{e^{-\frac{x^2}{1+4a^2t}}}{\sqrt{1+4a^2t}}.$$

Замечание 12.1. Если начальная функция $\varphi(x)$ ограничена на **R** и имеет конечное число точек разрыва первого рода, то интеграл Пуассона (12.6) представляет ограниченное решение задачи Коши (12.5).

Пример 12.2. Рассмотрим задачу Коши, в которой начальная функция не является непрерывной на всей числовой оси

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}-a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0, & -\infty<x<+\infty,\ t>0,\\ u(x,0)=\varphi(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ u_0, & x>0.\end{cases} & (u_0=\mathrm{const})\end{cases}$$

Воспользовавшись формулой Пуассона, получим

$$u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}\mathrm{d}\xi=\frac{u_0}{2a\sqrt{\pi t}}\int\limits_{0}^{+\infty}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}\mathrm{d}\xi\,.$$

Сделаем в интеграле замену переменной, полагая

$$\frac{\xi-x}{2a\sqrt{t}}=y\,,$$

тогда

$$u(x,t)=\frac{u_0}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{+\infty}e^{-y^2}\mathrm{d}y=\frac{u_0}{2}\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{0}^{+\infty}e^{-y^2}\mathrm{d}y+\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{0}e^{-y^2\mathrm{d}y}\right)=$$

$$= \frac{u_0}{2}\left(1 + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{2a\sqrt{t}}} e^{-y^2}\,\mathrm{d}y\right).$$

Забегая вперед, заметим, что последний интеграл с переменным верхним пределом представляет собой известную функцию от верхнего предела, так называемую функцию ошибок (12.7), о которой мы будем говорить ниже. Таким образом, решение нашей задачи найдено и может быть записано как

$$u(x,t) = \frac{u_0}{2}\left[1 + \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)\right]$$

12.4. Функция ошибок

Рассмотрим следующий интеграл с переменным верхним пределом

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t\,. \qquad (12.7)$$

Этот интеграл называют ***функцией ошибок*** (error function). Геометрический смысл функции ошибок иллюстрирует рис. 12.1.

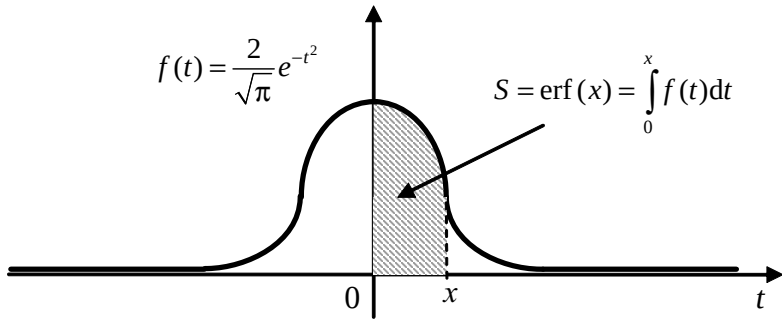


Рис. 12.1. Геометрическая интерпретация erf(x)

Непосредственно из определения erf(x) (рис. 12.2) следуют ее важные для практики свойства:

1) $\operatorname{erf}(0) = 0$;

2) $\operatorname{erf}(+\infty) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = 1;$

3) $\operatorname{erf}(-x) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{-x} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = -\dfrac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-x}^{0} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = -\dfrac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{x} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = -\operatorname{erf}(x);$

4) $\operatorname{erf}(-\infty) = -1;$

5) $\dfrac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_x^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = 1 - \operatorname{erf}(x).$

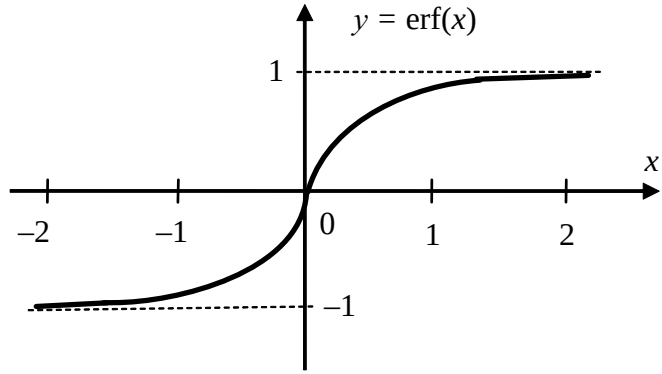


Рис. 12.2. Эскиз графика функции $y = \operatorname{erf}(x)$

12.5. Решение задачи Коши для неоднородного уравнения с нулевой начальной функцией

Рассмотрим задачу Коши для неоднородного ДУ диффузии (теплопроводности) с нулевой начальной функцией

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t), \quad -\infty < x < +\infty, \quad t > 0, \\ u(x,0) = 0, \qquad\qquad -\infty < x < +\infty. \end{cases} \tag{12.8}$$

Можно показать, что решение задачи (12.8) дается формулой, которая также называется *формулой Пуассона*

$$u(x,t) = \int\limits_0^t \frac{\mathrm{d}\tau}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\xi,\tau) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} \mathrm{d}\xi\,. \tag{12.9}$$

Пример 12.3. Решим задачу Коши для неоднородного ДУ с нулевой начальной функцией

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \sin 3t, \quad -\infty < x < +\infty, \quad t > 0, \\ u(x,0) = 0, \quad -\infty < x < +\infty. \end{cases}$$

Согласно формуле (12.9), имеем

$$u(x,t) = \int_0^t \frac{\mathrm{d}\tau}{2\sqrt{\pi(t-\tau)}} \int_{-\infty}^{+\infty} \sin 3\tau e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(t-\tau)}} \mathrm{d}\xi = \int_0^t \frac{\sin 3\tau d\tau}{2\sqrt{\pi(t-\tau)}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(t-\tau)}} \mathrm{d}\xi =$$

$$= \int_0^t \frac{\sin 3\tau \mathrm{d}\tau}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} \mathrm{d}y = \int_0^t \sin 3\tau \mathrm{d}\tau = \frac{1}{3}(1 - \cos 3t).$$

Получили решение задачи, непосредственно вычислив интеграл (12.6). В данном случае можно было бы поступить проще. Заметим, что правая часть ДУ зависит только от переменной *t*. Естественно предположить, что решением задачи будет функция $u(t)$, также зависящая только от переменной *t*, причем $u(0) = 0$. Подставляя неизвестную функцию $u(t)$ в ДУ, получим для её определения следующую задачу:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \sin 3t, \\ u(0) = 0, \end{cases}$$

решением которой будет функция $u(t) = \dfrac{1}{3}(1 - \cos 3t)$.

Пример 12.4. Решим задачу Коши для неоднородного уравнения диффузии (теплопроводности) с ненулевой начальной функцией

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = e^{-t} \sin x, \quad -\infty < x < +\infty, \quad t > 0, \\ u(x,0) = xe^{-x^2} + 3\cos x, \quad -\infty < x < +\infty. \end{cases}$$

Применим принцип суперпозиции для линейных ДУ, согласно которому можем разбить нашу задачу на три следующие задачи:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial t} - 4\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = e^{-t}\sin x, \\ u_1(x,0) = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial u_2}{\partial t} - 4\dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} = 0, \\ u_2(x,0) = 3\cos x; \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial u_3}{\partial t} - 4\dfrac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} = 0, \\ u_3(x,0) = xe^{-x^2}, \end{cases}$$

тогда

$$u(x, t) = u_1(x, t) + u_2(x, t) + u_3(x, t).$$

Решение первой задачи найдем в виде

$$u_1(x, t) = y(t)\sin x,$$

где $y(t)$ – неизвестная функция, удовлетворяющая нулевому начальному условию. Подставляя это выражение в ДУ, получим

$$y'\sin x + 4y\sin x = e^{-t}\sin x\,.$$

Приравнивая коэффициенты при $\sin x$, получим для определения $y(t)$ задачу Коши

$$\begin{cases} y'(t) + 4y(t) = e^{-t}, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Ее решение, как нетрудно проверить, имеет вид

$$y(t) = \frac{1}{3}\left(e^{-t} - e^{-4t}\right).$$

Итак,

$$u_1(x,t) = \frac{1}{3}\left(e^{-t} - e^{-4t}\right)\sin x\,.$$

Аналогично, решение второй задачи будем искать в виде

$$u_2(x, t) = z(t)\cos x,$$

где $z(t)$ – неизвестная функция, удовлетворяющая начальному условию $z(0) = 3$. Подставляя выражение для $u_2(x, t)$ в ДУ, получим

$$z'\cos x + 4z\cos x = 0.$$

Приравнивая коэффициенты при $\cos x$, получим для определения $z(t)$ задачу Коши

$$\begin{cases} z'(t)+4z(t)=0, \\ z(0)=3. \end{cases}$$

Ее решением будет функция

$$z(t)=3e^{-4t}.$$

Следовательно,

$$u_2(x,t)=3e^{-4t}\cos x.$$

Решение третьей задачи будем искать, используя формулу Пуассона (12.6), согласно которой

$$u_3(x,t)=\frac{1}{2\cdot 2\sqrt{\pi t}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\xi e^{-\xi^2}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\cdot 4t}}\,\mathrm{d}\xi=\frac{1}{4\sqrt{\pi t}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\xi e^{-\xi^2-\frac{(x-\xi)^2}{16t}}\,\mathrm{d}\xi.$$

Выделим в показателе экспоненты полный квадрат по переменной ξ

$$-\xi^2-\frac{(x-\xi)^2}{16t}=-\frac{16t+1}{16t}\left(\xi-\frac{x}{16t+1}\right)^2-\frac{x^2}{16t+1}$$

и сделаем замену переменной интегрирования, полагая

$$\frac{\sqrt{16t+1}}{4\sqrt{t}}\left(\xi-\frac{x}{16t+1}\right)=y,$$

тогда

$$\xi=\frac{4\sqrt{t}}{\sqrt{16t+1}}y+\frac{x}{16t+1},\ \ \mathrm{d}\xi=\frac{4\sqrt{t}}{\sqrt{16t+1}}\mathrm{d}y$$

и

$$u_3(x,t)=\frac{1}{4\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{16t+1}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\xi e^{-\frac{16t+1}{16t}\left(\xi-\frac{x}{16t+1}\right)^2}\,\mathrm{d}\xi=$$

$$=\frac{e^{-\frac{x^2}{16t+1}}}{\sqrt{16t+1}}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{4\sqrt{t}}{\sqrt{16t+1}}y+\frac{x}{16t+1}\right)e^{-y^2}\mathrm{d}y=$$

$$=\frac{e^{-\frac{x^2}{16t+1}}}{(16t+1)}\frac{4\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}ye^{-y^2}\mathrm{d}y+\frac{xe^{-\frac{x^2}{16t+1}}}{(16t+1)^{3/2}}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-y^2}\mathrm{d}y=\frac{x}{(16t+1)^{3/2}}e^{-\frac{x^2}{16t+1}}.$$

Итак, мы нашли решение задачи

$$u(x,t)=\frac{1}{3}\left(e^{-t}-e^{-4t}\right)\sin x+3e^{-4t}\cos x+\frac{x}{(16t+1)^{3/2}}e^{-\frac{x^2}{16t+1}}.$$

12.6. Задачи для самостоятельного решения

Решить следующие задачи Коши:

Задача 1

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{1}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0,\quad -\infty<x<+\infty,\quad t>0;$$
$$u(x,0)=e^{2x-x^2},\quad -\infty<x<+\infty.$$

Задача 2

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0,\quad -\infty<x<+\infty,\quad t>0;$$
$$u(x,0)=xe^{-x^2},\quad -\infty<x<+\infty.$$

Задача 3

$$\frac{\partial u}{\partial t}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0,\quad -\infty<x<+\infty,\quad t>0;$$
$$u(x,0)=\cos(\sqrt{2}x)+5\sin(\pi x),\quad -\infty<x<+\infty.$$

Задача 4

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\cos\omega t,\quad -\infty<x<+\infty,\quad t>0;$$
$$u(x,0)=0,\quad -\infty<x<+\infty.$$

Задача 5

$$\frac{\partial u}{\partial t}-9\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\cos t,\quad -\infty<x<+\infty,\quad t>0;$$
$$u(x,0)=4\sin x-5e^{-x^2},\quad -\infty<x<+\infty.$$

Задача 6

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=t^2+\sin 3x,\quad -\infty<x<+\infty,\quad t>0;$$
$$u(x,0)=2e^{-x^2}+6,\quad -\infty<x<+\infty.$$

Задача 7

$$\frac{\partial u}{\partial t}-16\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=(t+1)\sin 2x,\quad -\infty<x<+\infty,\quad t>0;$$
$$u(x,0)=\cos x,\quad -\infty<x<+\infty.$$

Задача 8

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=e^{-3t}\cos x,\quad -\infty<x<+\infty,\quad t>0;$$
$$u(x,0)=e^{-2x^2}+5,\quad -\infty<x<+\infty.$$

Задача 9

$$\frac{\partial u}{\partial t}-25\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0,\quad -\infty<x<+\infty,\quad t>0;$$
$$u(x,0)=\begin{cases}0, & x<0,\\ -3, & x>0.\end{cases}$$

Задача 10

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0,\quad -\infty<x<+\infty,\quad t>0;$$
$$u(x,0)=\begin{cases}0, & x<1,\\ 1, & x\ge 1.\end{cases}$$

Задача 11

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0,\quad -\infty<x<+\infty,\quad t>0;$$
$$u(x,0)=|x|,\quad -\infty<x<+\infty.$$

Задача 12

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0,\quad -\infty<x<+\infty,\quad t>0;$$

$$u(x,0)=\begin{cases}e^{x}, & x<0,\\ 0, & x\geq 0.\end{cases}$$

Задача 13

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0,\quad -\infty<x<+\infty,\quad t>0;$$

$$u(x,0)=\begin{cases}e^{x}, & x<0,\\ e^{-x}, & x\geq 0.\end{cases}$$

Задача 14

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0,\quad -\infty<x<+\infty,\quad t>0;$$

$$u(x,0)=\begin{cases}x, & x<0,\\ 1, & x\geq 0.\end{cases}$$

Задача 15

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0,\quad -\infty<x<+\infty,\quad t>0;$$

$$u(x,0)=\begin{cases}0, & x<0,\\ xe^{-x}, & x\geq 0.\end{cases}$$

Задача 16

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0,\quad -\infty<x<+\infty,\quad t>0;$$

$$u(x,0)=\begin{cases}1, & x<0,\\ e^{-x}, & x\geq 0.\end{cases}$$

Задача 17

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0,\quad -\infty<x<+\infty,\quad t>0;$$
$$u(x,0)=xe^{-|x|},\quad -\infty<x<+\infty.$$

Задача 18

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=e^{-t},\quad -\infty<x<+\infty,\quad t>0;$$
$$u(x,0)=e^{-|x|},\quad -\infty<x<+\infty.$$

Ответы

1. $u(x,t)=\dfrac{1}{\sqrt{1+t}}\exp\left(\dfrac{2x-x^2+1}{1+t}\right)$.

2. $u(x,t)=\dfrac{x}{(1+4t)^{\frac{3}{2}}}\exp\left(\dfrac{-x^2}{1+4t}\right)$.

3. $u(x,t)=e^{-2a^2t}\cos(\sqrt{2}x)+5e^{-(\pi a)^2 t}\sin(\pi x)$.

4. $u(x,t)=\dfrac{\sin\omega t}{\omega}$.

5. $u(x,t)=\sin t+4e^{-9t}\sin x-\dfrac{5}{\sqrt{1+36t}}\exp\left(-\dfrac{x^2}{1+36t}\right)$.

6. $u(x,t)=\dfrac{t^3}{3}+\dfrac{1-e^{-9t}}{9}\sin 3x+\dfrac{2}{\sqrt{1+4t}}\exp\left(-\dfrac{x^2}{1+4t}\right)+6$.

7. $u(x,t)=e^{-16t}\cos x+\dfrac{1}{64^2}(64t+63-63e^{-64t})\sin 2x$.

8. $u(x,t)=\dfrac{e^{-t}-e^{-3t}}{2}\cos x+\dfrac{1}{\sqrt{1+8t}}\exp\left(-\dfrac{2x^2}{1+8t}\right)+5$.

9. $u(x,t)=-\dfrac{3}{2}\left[1+\operatorname{erf}\left(\dfrac{x}{10\sqrt{t}}\right)\right]$.

10. $u(x,t)=\dfrac{1}{2}\left[1+\operatorname{erf}\left(\dfrac{x-1}{2\sqrt{t}}\right)\right]$.

11. $u(x,t)=2\sqrt{\frac{t}{\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right)+x\operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right)$

12. $u(x,t)=\frac{e^{x+t}}{2}\left[1-\operatorname{erf}\left(\frac{x+2t}{2\sqrt{t}}\right)\right].$

13. $u(x,t)=\frac{e^{t}}{2}\left\{e^{-x}\left[1+\operatorname{erf}\left(\frac{x-2t}{2\sqrt{t}}\right)\right]+e^{x}\left[1-\operatorname{erf}\left(\frac{x+2t}{2\sqrt{t}}\right)\right]\right\}.$

14. $u(x,t)=-\sqrt{\frac{t}{\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right)+\frac{1}{2}\left\{x\left[1-\operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right)\right]+1+\operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right)\right\}.$

15. $u(x,t)=\left\{\sqrt{\frac{t}{\pi}}\exp\left(-\frac{(x-2t)^2}{4t}\right)+\frac{1}{2}(x-2t)\left[1+\operatorname{erf}\left(\frac{x-2t}{2\sqrt{t}}\right)\right]\right\}e^{-x+t}.$

16. $u(x,t)=\frac{1}{2}\left[1-\operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right)\right]+\frac{e^{-x+t}}{2}\left[1+\operatorname{erf}\left(\frac{x-2t}{2\sqrt{t}}\right)\right].$

17. $u(x,t)=\left\{-\sqrt{\frac{t}{\pi}}\exp\left(-\frac{(x+2t)^2}{4t}\right)+\frac{1}{2}(x+2t)\left[1-\operatorname{erf}\left(\frac{x+2t}{2\sqrt{t}}\right)\right]\right\}e^{x+t}+$

$+\left\{\sqrt{\frac{t}{\pi}}\exp\left(-\frac{(x-2t)^2}{4t}\right)+\frac{1}{2}(x-2t)\left[1+\operatorname{erf}\left(\frac{x-2t}{2\sqrt{t}}\right)\right]\right\}e^{-x+t}.$

18. $u(x,t)=\frac{e^{t}}{2}\left\{e^{-x}\left(1+\operatorname{erf}\left(\frac{x-2t}{2\sqrt{t}}\right)\right)+e^{x}\left[1-\operatorname{erf}\left(\frac{x+2t}{2\sqrt{t}}\right)\right]\right\}+1-e^{-t}.$

13. РЕШЕНИЕ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ (ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ) НА ПОЛУОСИ

13.1. Постановка задачи

Рассмотрим следующую смешанную задачу для уравнения диффузии (теплопроводности) на полуоси $x > 0$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t), \quad x > 0, \quad t > 0; \tag{13.1}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad x \geq 0; \tag{13.2}$$

$$u(0,t) = \omega(t), \quad t \geq 0. \tag{13.3}$$

Здесь помимо начального условия (13.2) присутствует граничное условие (13.3).

Руководствуясь принципом суперпозиции для линейных ДУ, решение задачи (13.1) – (13.3) можно представить в виде суммы

$$u(x, t) = u_1(x, t) + u_2(x, t) + u_3(x, t),$$

где $u_1(x, t)$, $u_2(x, t)$, $u_3(x, t)$ – решения следующих трех задач:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial t} - a^2 \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = 0, & x > 0, \quad t > 0, \\ u_1(x,0) = \varphi(x), & x \geq 0, \\ u_1(0,t) = 0, & t \geq 0. \end{cases} \tag{13.4}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_2}{\partial t} - a^2 \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} = f(x,t), & x > 0, \quad t > 0, \\ u_2(x,0) = 0, & x \geq 0, \\ u_2(0,t) = 0, & t \geq 0. \end{cases} \tag{13.5}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_3}{\partial t} - a^2 \dfrac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} = 0, \quad x > 0, \quad t > 0, \\ u_3(x,0) = 0, \qquad x \geq 0, \\ u_3(0,t) = \omega(t), \qquad t \geq 0. \end{cases} \tag{13.6}$$

Задачу (13.4) будем решать методом продолжения начальной функции; аналогично, задачу (13.5) – методом продолжения правой части уравнения. Решение задачи (13.6) пока отложим. Мы вернемся к ней чуть позже.

13.2. Метод продолжения

Займемся построением решения задачи (13.4). Пусть функция $\tilde{\varphi}(x)$ определена на $(-\infty, +\infty)$ и удовлетворяет условию

$$\tilde{\varphi}(x) \equiv \varphi(x), \quad x \geq 0 .$$

Рассмотрим вспомогательную задачу Коши

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \tilde{u}_1}{\partial t} - a^2 \dfrac{\partial^2 \tilde{u}_1}{\partial x^2} = 0, \quad -\infty < x < +\infty, \quad t > 0, \\ \tilde{u}_1(x,0) = \tilde{\varphi}(x), \qquad -\infty < x < +\infty. \end{cases} \tag{13.7}$$

Ее решение дается формулой Пуассона (12.6)

$$\tilde{u}_1(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\varphi}(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \, d\xi =$$

$$= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \left(\int_{-\infty}^{0} \tilde{\varphi}(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \, d\xi + \int_{0}^{+\infty} \varphi(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \, d\xi \right).$$

В первом интеграле заменим ξ на $-\xi$, тогда

$$\int_{-\infty}^{0} \tilde{\varphi}(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \, d\xi = \int_{0}^{+\infty} \tilde{\varphi}(-\xi) e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2 t}} \, d\xi .$$

Следовательно,

$$\tilde{u}_1(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_0^{+\infty}\left(\varphi(\xi)e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}+\tilde{\varphi}(-\xi)e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}}\right)\mathrm{d}\xi. \qquad (13.8)$$

Прдположим, что $\tilde{u}_1(0,t)=0$, получим

$$\tilde{u}_1(0,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_0^{+\infty}\left(\varphi(\xi)+\tilde{\varphi}(-\xi)\right)e^{-\frac{\xi^2}{4a^2t}}\mathrm{d}\xi=0.$$

Последнее равенство выполняется, если $\tilde{\varphi}(-\xi)=-\varphi(\xi)$, т.е. $\tilde{\varphi}(x)$ – нечетное продолжение функции $\varphi(x)$ на отрицательную полуось (рис. 13.1):

$$\tilde{\varphi}(x)=\begin{cases}\varphi(x), & x\geq 0,\\ -\varphi(-x), & x<0.\end{cases}$$

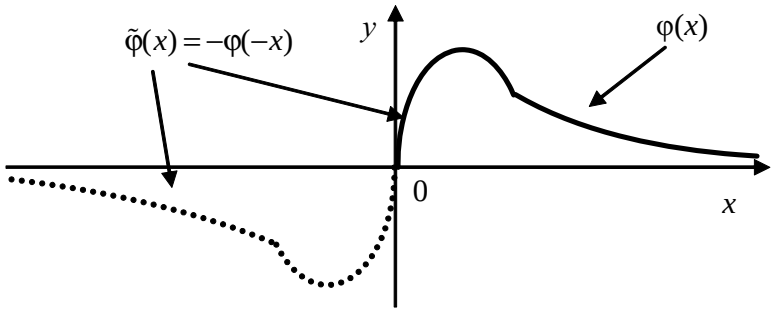


Рис. 13.1. Нечетное продолжение функции $\varphi(x)$ на отрицательную полуось

Выбирая такое продолжение, находим решение задачи (13.4)

$$u_1(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_0^{+\infty}\varphi(\xi)\left(e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}-e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}}\right)\mathrm{d}\xi. \qquad (13.9)$$

Аналогично можно показать, что решение задачи (13.5) может быть получено с помощью нечетного продолжения по переменной x функции $f(x, t)$ и имеет следующий вид:

$$u_2(x,t)=\int_0^t \frac{d\tau}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}\int_0^{+\infty} f(\xi,\tau)\left(e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}-e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}\right)d\xi. \quad (13.10)$$

Итак, функция $u(x, t) = u_1(x,t) + u_2(x,t)$, где $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$ определяются формулами (13.9) и (13.10) соответственно, есть решение ДУ (13.1) с начальным условием (13.2) и краевым условием $u(0, t) = 0$.

Рассмотрим теперь эту же задачу, но с краевым условием $\frac{\partial u(0,t)}{\partial x}=0$. Соответствующая задача для $u_1(x, t)$ в этом случае запишется следующим образом:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial t}-a^2\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}=0, & x>0, \quad t>0, \\ u_1(x,0)=\varphi(x), & x\ge 0, \\ \dfrac{\partial u_1(x,0)}{\partial x}=0, & t\ge 0. \end{cases} \quad (13.4a)$$

Сначала будем действовать по той же схеме, что и при решении задачи (13.4). Запишем вспомогательную задачу Коши (13.7) и построим ее решение (13.8).

Продифференцируем это решение по переменной x

$$\frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x}=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_0^{+\infty}\left(\varphi(\xi)\frac{\xi-x}{2a^2t}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}-\tilde{\varphi}(-\xi)\frac{x+\xi}{2a^2t}e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}}\right)d\xi.$$

Далее потребуем выполнения краевого условия

$$\frac{\partial \tilde{u}_1(0,t)}{\partial x}=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_0^{+\infty}\left((\varphi(\xi)-\tilde{\varphi}(-\xi))\frac{\xi}{2a^2t}e^{-\frac{\xi^2}{4a^2t}}\right)d\xi=0.$$

Последнее равенство выполняется, если $\tilde{\varphi}(-\xi)=\varphi(\xi)$, т.е. $\tilde{\varphi}(x)$ – четное продолжение функции $\varphi(x)$ на отрицательную полуось (рис. 13.2):

$$\tilde{\varphi}(x)=\begin{cases}\varphi(x), & x\ge 0,\\ \varphi(-x), & x<0.\end{cases}$$

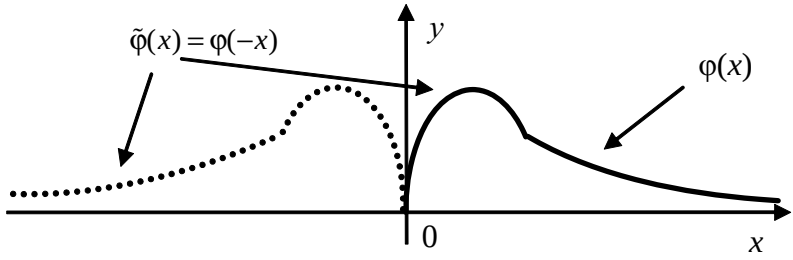


Рис. 13.2. Четное продолжение функции $\varphi(x)$
на отрицательную полуось

Выбирая такое продолжение для начальной функции, находим решение задачи (13.4а):

$$u_{1A}(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_0^{+\infty}\varphi(\xi)\left(e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}+e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}}\right)\mathrm{d}\xi\,. \qquad (13.9а)$$

Задача для $u_2(x, t)$ в случае краевого условия второго типа запишется так:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u_2}{\partial t}-a^2\dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}=f(x,t), & x>0, \quad t>0,\\ u_2(x,0)=0, & x\ge 0,\\ \dfrac{\partial u_2(0,t)}{\partial x}=0, & t\ge 0.\end{cases} \qquad (13.5а)$$

Ее решение также может быть получено с помощью четного продолжения по переменной x функции $f(x, t)$ и выглядит следующим образом:

$$u_{2A}(x,t)=\int_0^t\frac{\mathrm{d}\tau}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}\int_0^{+\infty}f(\xi,\tau)\left(e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}+e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}\right)\mathrm{d}\xi\,. \qquad (13.10а)$$

13.3. Некоторые примеры решения задач

Пример 13.1. Процесс остывания полубесконечного стержня, начальная температура которого постоянна, а конец поддерживается

при нулевой температуре, описывается следующей начально-краевой задачей:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad x > 0, \quad t > 0, \\ u(x,0) = u_0, \qquad x \geq 0, \\ u(0,t) = 0, \qquad t \geq 0. \end{cases}$$

Воспользовавшись полученной формулой (13.9), запишем решение

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^{+\infty} u_0 \left(e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} - e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2 t}} \right) \mathrm{d}\xi = \frac{u_0}{\sqrt{\pi}} (I_1 - I_2),$$

где $I_1 = \dfrac{1}{2a\sqrt{t}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \mathrm{d}\xi$, $I_2 = \dfrac{1}{2a\sqrt{t}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2 t}} \mathrm{d}\xi$.

Сделаем в первом интеграле замену переменной интегрирования, полагая

$$\frac{\xi - x}{4a\sqrt{t}} = y,$$

Тогда, используя свойства функции ошибок, получим

$$I_1 = \int_{-\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{+\infty} e^{-y^2} \mathrm{d}y = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left(1 - \operatorname{erf}\left(-\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right) \right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left(1 + \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right) \right).$$

Аналогично во втором интеграле

$$\frac{\xi - x}{4a\sqrt{t}} = y,$$

тогда

$$I_2 = \int_{+\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{+\infty} e^{-y^2} \mathrm{d}y = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left(1 - \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right) \right).$$

В результате имеем закон остывания стержня

$$u(x,t) = u_0 \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right).$$

Пример 13.2. Теперь рассмотрим процесс остывания полубесконечного стержня, если тепловой поток через его конец $x = 0$ равен нулю, а начальная температура определяется кусочно-постоянной функцией

$$\varphi(x) = \begin{cases} u_0, & 0 \le x \le l, \\ 0, & x > l. \end{cases}$$

В этом случае требуется решить следующую начально-краевую задачу:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & x > 0, \quad t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), & x \ge 0, \\ \dfrac{\partial u(0,t)}{\partial x} = 0, & t \ge 0. \end{cases}$$

Согласно формуле (13.9а), решение этой задачи можно записать так:

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^{+\infty} \varphi(\xi) \left(e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} + e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2 t}} \right) d\xi =$$

$$= \frac{u_0}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^{l} \left(e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} + e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2 t}} \right) d\xi = \frac{u_0}{\sqrt{\pi}} (I_1 + I_2),$$

где $I_1 = \dfrac{1}{2a\sqrt{t}} \displaystyle\int_0^{l} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} d\xi$, $I_2 = \dfrac{1}{2a\sqrt{t}} \displaystyle\int_0^{l} e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2 t}} d\xi$.

Сделаем в первом интеграле замену переменной интегрирования, полагая

$$\frac{\xi - x}{4a\sqrt{t}} = y,$$

тогда

$$I_1 = \int\limits_{-\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{\frac{l-x}{2a\sqrt{t}}} e^{-y^2}\,\mathrm{d}y = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(\operatorname{erf}\left(\frac{l-x}{2a\sqrt{t}}\right) + \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)\right).$$

Аналогично во втором интеграле обозначим

$$\frac{\xi + x}{4a\sqrt{t}} = y\,,$$

тогда

$$I_2 = \int\limits_{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{\frac{l+x}{2a\sqrt{t}}} e^{-y^2}\,\mathrm{d}y = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\left[\operatorname{erf}\left(\frac{l+x}{2a\sqrt{t}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)\right].$$

В результате получим решение задачи

$$u(x,t) = \frac{u_0}{2}\left[\operatorname{erf}\left(\frac{l-x}{2a\sqrt{t}}\right) + \operatorname{erf}\left(\frac{l+x}{2a\sqrt{t}}\right)\right].$$

13.4. Задачи для самостоятельного решения

Решить смешанные задачи на полуоси:
Задача 1

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < +\infty, \quad t > 0;$$
$$u(x,0) = e^{-x}, \quad 0 < x < +\infty;$$
$$u(0,t) = 0, \quad t \geq 0.$$

Задача 2

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < +\infty, \quad t > 0;$$
$$u(x,0) = e^{-5x^2} + 2, \quad 0 < x < +\infty;$$
$$u(0,t) = 0, \quad t \geq 0.$$

Задача 3

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0,\quad 0<x<+\infty,\quad t>0;$$

$$u(x,0)=\begin{cases}1, & 0<x<4,\\ 0, & x\geq 4,\end{cases}$$

$$u(0,t)=0,\quad t\geq 0.$$

Задача 4

$$\frac{\partial u}{\partial t}-4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0,\quad 0<x<+\infty,\quad t>0;$$

$$u(x,0)=5e^{-\frac{x^2}{2}},\quad 0<x<+\infty;$$

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x}=0,\quad t\geq 0.$$

Задача 5

$$\frac{\partial u}{\partial t}-25\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0,\quad 0<x<+\infty,\quad t>0;$$

$$u(x,0)=\sin^2 x,\quad 0<x<+\infty;$$

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x}=0,\quad t\geq 0.$$

Задача 6

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0,\quad 0<x<+\infty,\quad t>0;$$

$$u(x,0)=x,\quad 0<x<+\infty;$$

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x}=0,\quad t\geq 0.$$

Задача 7

$$\frac{\partial u}{\partial t}-9\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0,\quad 0<x<+\infty,\quad t>0;$$

$$u(x,0)=\begin{cases}0, & 0\leq x<2,\\ 7, & x\geq 2,\end{cases}$$

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x}=0,\quad t\geq 0.$$

Задача 8

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\sin 3x,\quad 0<x<+\infty,\quad t>0;$$
$$u(x,0)=0,\quad 0<x<+\infty;$$
$$u(0,t)=0,\quad t\geq 0.$$

Задача 9

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=e^{-t},\quad 0<x<+\infty,\quad t>0;$$
$$u(x,0)=0,\quad 0<x<+\infty;$$
$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x}=0,\quad t\geq 0.$$

Ответы

1. $u(x,t)=\dfrac{e^t}{2}\left\{e^{-x}\left[1+\operatorname{erf}\left(\dfrac{x-2t}{2\sqrt{t}}\right)\right]-e^{x}\left[1-\operatorname{erf}\left(\dfrac{x+2t}{2\sqrt{t}}\right)\right]\right\}.$

2. $u(x,t)=2\operatorname{erf}\left(\dfrac{x}{4\sqrt{t}}\right)+\dfrac{1}{\sqrt{1+80t}}\exp\left(\dfrac{-5x^2}{1+80t}\right)\operatorname{erf}\left(\dfrac{x}{4\sqrt{80t^2+t}}\right).$

3. $u(x,t)=\operatorname{erf}\left(\dfrac{x}{2\sqrt{t}}\right)-\dfrac{1}{2}\left[\operatorname{erf}\left(\dfrac{x+4}{2\sqrt{t}}\right)+\operatorname{erf}\left(\dfrac{x-4}{2\sqrt{t}}\right)\right].$

4. $u(x,t)=\dfrac{5}{\sqrt{1+8t}}\exp\left(\dfrac{-x^2}{2+16t}\right).$

5. $u(x,t)=\dfrac{1}{2}(1-e^{-100t}\cos 2x).$

6. $u(x,t)=2\sqrt{\dfrac{t}{\pi}}\exp\left(-\dfrac{x^2}{4t}\right)+x\operatorname{erf}\left(\dfrac{x}{2\sqrt{t}}\right).$

7. $u(x,t)=7+\dfrac{7}{2}\left[\operatorname{erf}\left(\dfrac{x-2}{6\sqrt{t}}\right)-\operatorname{erf}\left(\dfrac{x+2}{6\sqrt{t}}\right)\right].$

8. $u(x,t)=\dfrac{1-e^{-9t}}{9}\sin 3x.$

9. $u(x,t)=1-e^{-t}.$

14. МЕТОД ПОДОБИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ (ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ) И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

14.1. Построение решения смешанной задачи на полуоси методом подобия

Рассмотрим смешанную задачу для уравнения диффузии (теплопроводности) на полуоси:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad x > 0, \quad t > 0; \tag{14.1}$$

$$u(x,0) = u_0, \quad x > 0; \tag{14.2}$$

$$u(0,t) = u_1, \quad t > 0. \tag{14.3}$$

где u_0 и u_1 – постоянные. Если $u_1 = u_0$, то, $u(x,t) = u_0$ – классическое решение задачи, если $u_0 \neq u_1$, тогда решение задачи не будет классическим, так как имеет разрыв в начале координат.

Для решения задачи воспользуемся следующими соображениями подобия. Покажем, что уравнение теплопроводности остается неизменным при преобразовании переменных

$$x_1 = kx, \; t_1 = k^2 t.$$

Пусть $u(x_1, t_1) = u(kx, k^2 t)$, тогда

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t_1}\frac{dt_1}{dt} = k^2 \frac{\partial u}{\partial t_1}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dx} = k\frac{\partial u}{\partial x_1};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x_1}\right) = k\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\frac{dx_1}{dx} = k^2 \frac{\partial^2 u}{\partial {x_1}^2}.$$

Таким образом, ДУ (14.1) приобретает вид

$$\frac{\partial u}{\partial t_1} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial {x_1}^2} = 0,$$

т.е. оно не меняется при произведенном преобразовании переменных. Начальное условие (14.2) также остается без изменения при данном преобразовании переменных. Следовательно, для решения задачи должно иметь место равенство

$$u(x, t) = u(kx, k^2 t)$$

при любых значениях x, t, k. Эта инвариантность подсказывает следующий путь рассуждений.

Положим формально $k = \dfrac{1}{\sqrt{t}}$, тогда

$$u(x,t) = u\left(\frac{x}{\sqrt{t}}, 1\right)$$

и решение задачи можно попытаться искать в виде

$$u(x,t) = v(z), \;\; z = \frac{x}{\sqrt{t}}.$$

Найдем производные, входящие в уравнение (14.1)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = v'(z)\left(-\frac{x}{2t^{3/2}}\right), \;\; \frac{\partial u}{\partial x} = v'(z)\frac{1}{\sqrt{t}}, \;\; \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = v''(z)\frac{1}{t}.$$

тогда

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = v'(z)\left(-\frac{x}{2t^{3/2}}\right) - a^2 v''(z)\frac{1}{t} = -\frac{a^2}{t}\left(v''(z) + \frac{z}{2a^2}v'(z)\right).$$

В результате уравнение (14.1) переходит в обыкновенное ДУ второго порядка

$$v''(z) + v'(z)\frac{z}{2a^2} = 0, \;\; 0 < z < +\infty.$$

Далее, $z \to +0$ при $x \to +0$, значит краевое условие (14.3) переходит в

$$u(x,t)\big|_{x=0} = u\left(\frac{x}{\sqrt{t}}, 1\right)\Bigg|_{x=0} = v(0) = u_1.$$

При $t \to +0$ и $x > 0$ имеем $z \to +\infty$. Следовательно, начальное условие (14.2) переходит в условие

$$u(x,t)\big|_{t=0} = u\left(\frac{x}{\sqrt{t}}, 1\right)\Bigg|_{t=0} = v(+\infty) = u_0.$$

В результате получили краевую задачу на полуоси для обыкновенного ДУ второго порядка

$$v''(z)+v'(z)\frac{z}{2a^2}=0,\quad 0<z<+\infty; \tag{14.4}$$

$$v(0)=u_1; \tag{14.5}$$

$$v(+\infty)=u_0. \tag{14.6}$$

Интегрируя ДУ (14.4), имеем

$$\frac{\mathrm{d}v'(z)}{v'(z)}=-\frac{z}{2a^2}\mathrm{d}z,\quad v'(z)=ce^{-z^2/4a^2},$$

$$v(z)=c\int_0^z e^{-\xi^2/4a^2}\mathrm{d}\xi+c_2=c_1\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{z/2a}e^{-s^2}\mathrm{d}s+c_2=c_1\mathrm{erf}\left(\frac{z}{2a}\right)+c_2.$$

Используя граничные условия (14.5) и (14.6), получим систему для определения c_1 и c_2

$$\begin{cases}c_1\mathrm{erf}\,(0)+c_2=u_1,\\ c_1\mathrm{erf}\,(+\infty)+c_2=u_0.\end{cases}$$

Напомним, что erf(0) = 0, erf(+ ∞) = 1, следовательно, $c_2 = u_1$, $c_1 = u_0 - u_1$ и

$$v(z)=(u_0-u_1)\mathrm{erf}\left(\frac{z}{2a}\right)+u_1.$$

Итак, решение смешанной задачи (14.1) – (14.3) имеет вид

$$u(x,t)=(u_0-u_1)\mathrm{erf}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)+u_1. \tag{14.7}$$

14.2. Двухпараметрическое семейство решений однородного уравнения диффузии (теплопроводности)

Заметим, что методом подобия мы получили двухпараметрическое семейство решений однородного уравнения диффузии (теплопроводности) (14.1) вида

$$u(x,t) = c_1 \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right) + c_2. \tag{14.8}$$

В научной литературе такого рода специальные решения иногда называют *автомодельными решениями*.

Пример 14.1. Используя формулу (14.8), найдем решение задачи Коши

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \qquad -\infty < x < +\infty, \quad t > 0, \\ u(x,0) = \begin{cases} u_0, & x > 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases} \quad (u_0 = \text{const}). \end{cases} \tag{14.9}$$

Заметим, что решение аналогичной задачи ранее было получено с помощью формулы Пуассона (см. пример 12.2).

Для определения постоянных c_1 и c_2 в (14.8) воспользуемся начальным условием. Заметим, что

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{x}{\sqrt{t}} = \begin{cases} +\infty, & x > 0, \\ -\infty, & x < 0. \end{cases}$$

Следовательно, для определения c_1 и c_2 имеем систему

$$\begin{cases} c_1 \operatorname{erf}(+\infty) + c_2 = u_0, \\ c_1 \operatorname{erf}(-\infty) + c_2 = 0, \end{cases}$$

решив которую, получим

$$c_1 = c_2 = \frac{u_0}{2}.$$

Теперь можем записать решение задачи (14.9)

$$u(x,t) = \left[1 + \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)\right]\frac{u_0}{2}. \tag{14.10}$$

Нетрудно проверить, что в случае начальных условий

$$u(x,0) = \begin{cases} u_0, & x > x_1, \\ 0, & x < x_1, \end{cases} \tag{14.11}$$

соответствующая задача Коши имеет решение

$$u(x,t)=\frac{u_0}{2}\left[1+\operatorname{erf}\left(\frac{x-x_1}{2a\sqrt{t}}\right)\right]. \tag{14.12}$$

Если начальная функция задается в виде

$$u(x,0)=\begin{cases}0, & x<x_1,\\ u_0, & x_1<x<x_2,\\ 0, & x>x_2,\end{cases} \tag{14.13}$$

то задача Коши имеет решение

$$u(x,t)=\frac{u_0}{2}\left[\operatorname{erf}\left(\frac{x-x_1}{2a\sqrt{t}}\right)-\operatorname{erf}\left(\frac{x-x_2}{2a\sqrt{t}}\right)\right]. \tag{14.14}$$

14.3. Решение смешанной задачи для уравнения диффузии (теплопроводности) с неоднородным граничным условием

Вернемся к задаче (13.6), решение которой мы временно отложили. Запишем ее еще раз:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}-a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0, & x>0, \quad t>0,\\ u(x,0)=0, & x\ge 0,\\ u(0,t)=\omega(t), & t\ge 0.\end{cases} \tag{14.15}$$

Сначала решим вспомогательную задачу с начальным условием при $t=\tau$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial U}{\partial t}-a^2\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2}=0, & x>0, \quad t>\tau,\\ U(x,\tau)=0, & x\ge 0,\\ U(0,t)=1, & t\ge 0.\end{cases} \tag{14.16}$$

Заметим, что эта задача при $\tau = 0$ совпадает с рассмотренной выше задачей (14.1) – (14.3), решение которой дается формулой(14.7). Нетрудно проверить, что решение задачи (14.16) можно записать так:

$$U(x,t-\tau)=1-\operatorname{erf}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t-\tau}}\right)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{\frac{x}{2a\sqrt{t-\tau}}}^{+\infty}e^{-y^2}\,\mathrm{d}y.$$

Функция $U(x, t - \tau)$ определена при $t \geq \tau$. Продолжим ее на значения $t < \tau$, предположив, что $U(x, t - \tau) \equiv 0$ при $t < \tau$. Тогда решение задачи (14.15), как показано в [3], дается формулой

$$u(x,t)=\int_0^t\frac{\partial U(x,t-\tau)}{\partial t}\omega(\tau)\mathrm{d}\tau. \qquad (14.17)$$

Вычислим

$$\frac{\partial U(x,t-\tau)}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{\frac{x}{2a\sqrt{t-\tau}}}^{+\infty}e^{-y^2}\,\mathrm{d}y\right)=\frac{x}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)^3}}e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}}.$$

Таким образом, искомое решение задачи (14.15) в случае произвольной функции $\omega(t)$ может быть представлено в виде

$$u(x,t)=\frac{x}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}}}{(t-\tau)^{3/2}}\omega(\tau)\mathrm{d}\tau. \qquad (14.18)$$

Примененный выше прием, называемый *принципом Дюамеля*, показывает, что если задача с постоянным граничным значением решена, то решение краевой задачи с переменным граничным условием представляется формулой (14.17).

14.4. Задачи для самостоятельного решения

Решить начально-краевую задачи на полуоси:
Задача 1

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0,\quad 0<x<+\infty,\quad t>0;$$
$$u(x,0)=1,\quad 0<x<+\infty;$$
$$u(0,t)=3,\quad t\geq 0.$$

Задача 2

$$\frac{\partial u}{\partial t}-4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0,\quad 0<x<+\infty,\quad t>0;$$
$$u(x,0)=\begin{cases}0, & 0\leq x<3,\\ 5, & x\geq 3,\end{cases}$$
$$u(0,t)=2,\quad t\geq 0.$$

Задача 3

$$\frac{\partial u}{\partial t}-25\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0,\quad 0<x<+\infty,\quad t>0;$$
$$u(x,0)=e^{-\frac{x^2}{2}},\quad 0<x<+\infty,$$
$$u(0,t)=5,\quad t\geq 0.$$

Задача 4

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\sin t\cos(\sqrt{3}x+5),\quad -\infty<x<+\infty,\quad t>0;$$
$$u(x,0)=\begin{cases}0, & x<1,\\ 3, & 1<x<3,\\ 0, & x>3.\end{cases}$$

Ответы

1. $u(x,t)=3-2\operatorname{erf}\left(\dfrac{x}{2\sqrt{t}}\right).$

2. $u(x,t)=2\left[1-\operatorname{erf}\left(\frac{x}{4\sqrt{t}}\right)\right]+\frac{5}{2}\left[\operatorname{erf}\left(\frac{x+3}{4\sqrt{t}}\right)+\operatorname{erf}\left(\frac{x-3}{4\sqrt{t}}\right)\right]$.

3. $u(x,t)=5\left[1-\operatorname{erf}\left(\frac{x}{10\sqrt{t}}\right)\right]+$

$+\frac{1}{\sqrt{1+50t}}\exp\left(\frac{-x^2}{2+100t}\right)\operatorname{erf}\left(\frac{x}{10\sqrt{50t^2+t}}\right)$.

4. $u(x,t)=\frac{1}{2}\left[\operatorname{erf}\left(\frac{x-1}{2\sqrt{t}}\right)-\operatorname{erf}\left(\frac{x-3}{2\sqrt{t}}\right)\right]+$

$+\frac{1}{10}(e^{-3t}+3\sin t-\cos t)\cos(\sqrt{3}x+5)$.

15. ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СТРУНЫ

15.1. Постановка задачи Коши для уравнения струны

В случае простейшей задачи, описывающей процесс поперечных колебаний струны, для однозначного определения решения к уравнению колебаний нужно еще добавить начальные и граничные условия. Если точка струны с координатой x достаточно удалена от границы, то влияние граничных условий сказывается в этой точке через достаточно большой промежуток времени. Поэтому, если нас интересует явление в течение не очень большого промежутка времени, то вместо смешанной задачи можно рассматривать задачу с начальными условиями для неограниченной струны. Эта идеализированная задача ставится следующим образом:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t), \quad -\infty < x < +\infty, \quad t > 0; \tag{15.1}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \psi(x), \quad -\infty < x < +\infty. \tag{15.2}$$

Напомним, что задача, в постановке которой отсутствуют граничные условия, а заданы только начальные условия, называется задачей Коши.

Определение 15.1. Если $f(x, t)$ непрерывна в полуплоскости $t \geq 0$, а $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ непрерывны на всей числовой оси $-\infty < x < +\infty$, то под классическим решением задачи (15.1) – (15.2) понимается функция $u(x, t)$,

– непрерывная и имеющая непрерывную производную $\frac{\partial u}{\partial t}$ в полуплоскости $t \geq 0$ и удовлетворяющая начальным условиям (15.2);

– имеющая в полуплоскости $t > 0$ непрерывные производные $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ и обращающая уравнение (15.1) в тождество.

Учитывая линейность задачи (15.1) – (15.2), можно представить ее решение в виде суммы решений двух задач

$$u(x, t) = u_1(x, t) + u_2(x, t),$$

где $u_1(x, t)$ – решение задачи Коши для однородного уравнения колебаний с неоднородными начальными условиями; $u_2(x, t)$ – решение задачи Коши для неоднородного уравнения колебаний с однородными начальными условиями.

15.2. Построение решения задачи Коши для однородного уравнения колебаний

Рассмотрим задачу

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad -\infty < x < +\infty, \quad t > 0; \tag{15.3}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \psi(x), \quad -\infty < x < +\infty. \tag{15.4}$$

Как и в случае задачи Коши для уравнения диффузии (теплопроводности), решение задачи (15.3) – (15.4) может быть построено с помощью преобразования Фурье. Но для разнообразия, выберем другой способ.

Пусть $A(x)$ и $B(x)$ − произвольные дважды непрерывно дифференцируемые функции. Нетрудно проверить, что в этом случае функция

$$u(x,t) = A(x - at) + B(x + at) \tag{15.5}$$

является решением ДУ (15.3).

Покажем, что функции A и B в (15.5) можно подобрать так, чтобы выполнялись начальные условия (15.4). При $t = 0$ имеем

$$u(x,0) = A(x) + B(x) = \varphi(x);$$
$$u'_t(x,0) = -aA'(x) + aB'(x) = \psi(x).$$

Интегрируя последнее равенство на $[0, x]$, получим

$$-A(x) + B(x) = \frac{1}{a}\int_0^x \psi(s)\mathrm{d}s + c,$$

где $c = -A(0) + B(0)$.

Итак, для определения функций A и B имеем систему линейных уравнений

$$\begin{cases} A(x)+B(x)=\varphi(x), \\ -A(x)+B(x)=\dfrac{1}{a}\displaystyle\int_0^x \psi(s)\mathrm{d}s+c, \end{cases}$$

решая которую, находим

$$A(x)=\frac{\varphi(x)}{2}-\frac{1}{2a}\int_0^x \psi(s)\mathrm{d}s-\frac{c}{2},\quad B(x)=\frac{\varphi(x)}{2}+\frac{1}{2a}\int_0^x \psi(s)\mathrm{d}s+\frac{c}{2}.$$

Отсюда

$$A(x-at)=\frac{\varphi(x-at)}{2}-\frac{1}{2a}\int_0^{x-at} \psi(s)\mathrm{d}s-\frac{c}{2},$$

$$B(x+at)=\frac{\varphi(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_0^{x+at} \psi(s)\mathrm{d}s+\frac{c}{2}.$$

Складывая эти равенства, согласно (15.5), получаем формулу

$$u(x,t)=\frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi)\mathrm{d}\xi. \qquad (15.6)$$

Формула (15.6) называется *формулой Даламбера–Эйлера*.

15.3. Физическая интерпретация формулы Даламбера–Эйлера

Обратим внимание на физический смысл полученной формулы. Функция $u(x, t)$, определяемая формулой (15.6), представляет процесс распространения начального отклонения и начальной скорости. Если фиксировать некоторый момент времени $t = t_0$, то функция $u(x, t_0)$ дает профиль струны в момент t_0; фиксируя точку $x = x_0$, получим функцию $u(x_0, t)$, описывающую процесс движения точки x_0.

Пример 15.1. Пусть $\psi(x) \equiv 0$, т.е. возмущение вызывается только начальной функцией $\varphi(x)$. Рассмотрим процесс распространения волны при $t > 0$.

Пусть

$$\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{l}+1, & x\in[-l,0],\\ -\dfrac{x}{l}+1, & x\in[0,l],\\ 0, & |x|\ge l.\end{cases}$$

Формула Даламбера

$$u(x,t)=\frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2}$$

показывает, что при $t>0$ начальное возмущение $\varphi(x)$ распадается на два возмущения половинной интенсивности. Их можно интерпретировать как две волны, движущиеся вправо и влево со скоростью a. Построим в плоскости (x, u) графики функции $u(x, t)$ при $t=0$, $t=\dfrac{l}{2a}$, $t=\dfrac{l}{a}$, $t=\dfrac{2l}{a}$ (рис. 15.1).

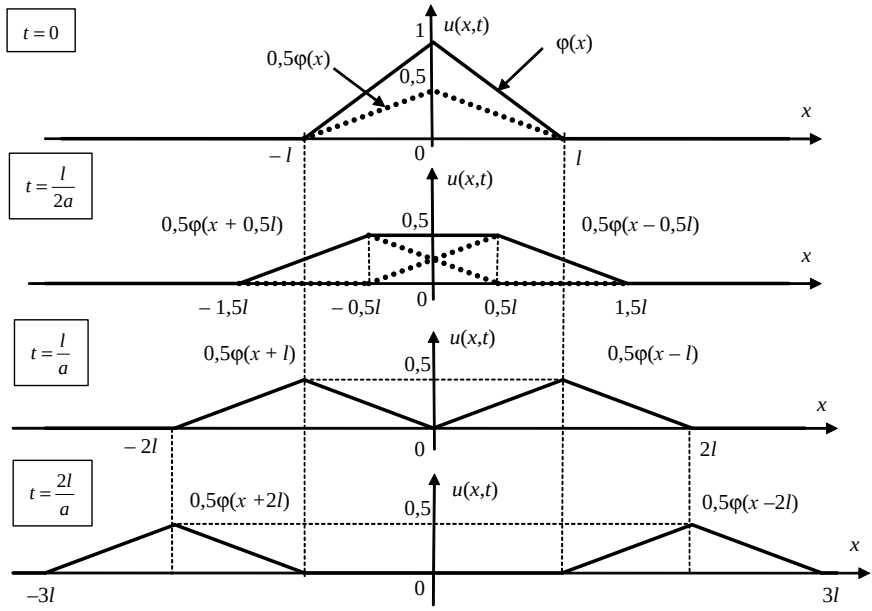


Рис. 15.1. Процесс распространения возмущения, вызванного начальной функцией $\varphi(x)$

Пример 15.2. Рассмотрим задачу о колебаниях струны под действием сосредоточенного импульса. В начальный момент времени точкам струны $x \in [x_1, x_2]$ сообщается постоянная скорость ψ_0 (например, струну ударяют молоточком), т.е. к этому участку струны прикладывается импульс. Таким образом, мы должны решить задачу о колебаниях струны с начальным отклонением $\varphi(x) \equiv 0$ и начальной скоростью

$$\psi(x) = \begin{cases} \psi_0 = \text{const}, & x \in [x_1, x_2], \\ 0, & x \notin [x_1, x_2]. \end{cases}$$

По формуле Даламбера–Эйлера, имеем

$$u(x,t) = \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} \psi(\xi)\mathrm{d}\xi = \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{0} \psi(\xi)\mathrm{d}\xi + \frac{1}{2a}\int\limits_{0}^{x+at} \psi(\xi)\mathrm{d}\xi = \\ = \Psi(x+at) - \Psi(x-at),$$

где $\Psi(x) = \dfrac{1}{2a}\int\limits_0^x \psi(\xi)\mathrm{d}\xi$.

Вычислив последний интеграл, получим

$$\Psi(x) = \frac{1}{2a}\int\limits_0^x \psi(\xi)\mathrm{d}\xi = \begin{cases} 0, & x < x_1, \\ \dfrac{\psi_0}{2a}(x - x_1), & x_1 \le x \le x_2, \\ \dfrac{\psi_0}{2a}(x_2 - x_1), & x > x_2. \end{cases}$$

График функции $\Psi(x)$ приведен на рис. 15.2.

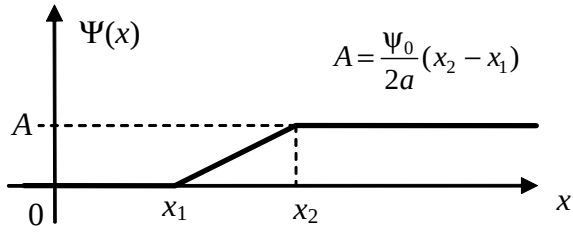


Рис. 15.2. График вспомогательной функции $\psi(x)$

На рис. 15.3 построено решение через промежутки времени $\Delta t = \dfrac{x_2 - x_1}{8a}$.

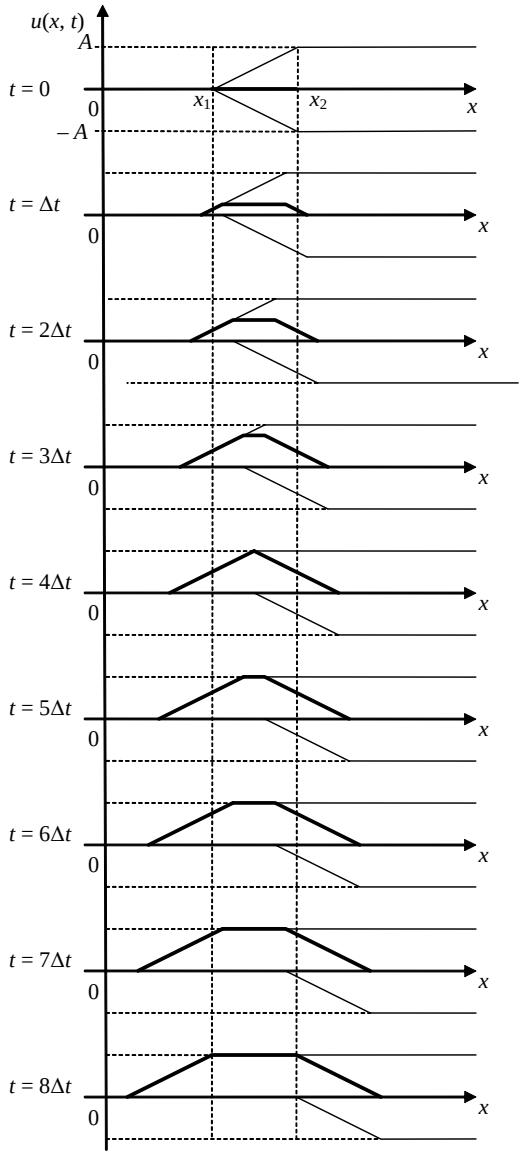


Рис. 15.3. Процесс распространения возмущения вызванного начальной скоростью $\psi(x)$

15.4. Неоднородное уравнение колебаний

Рассмотрим неоднородное ДУ с нулевыми начальными условиями

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t), \quad -\infty < x < +\infty, \quad t > 0; \tag{15.7}$$

$$u(x,0) = 0, \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0, \quad -\infty < x < +\infty. \tag{15.8}$$

Решение задачи (15.7) – (15.8) найдем с помощью формулы

$$u(x,t) = \frac{1}{2a} \int_0^t \mathrm{d}\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)\mathrm{d}\xi. \tag{15.9}$$

Читателю предлагается проверить это утверждение непосредственной подстановкой интеграла (15.9) в (15.7) – (15.8), продифференцировав его предварительно нужное число раз по параметрам t и x.

15.5. Существование и единственность классического решения задачи Коши для уравнения колебаний

Полученные формулы (15.6) и (15.9), дающие решение однородного ДУ с ненулевыми начальными условиями и неоднородного ДУ с нулевыми начальными условиями соответственно, позволяют доказать существование и единственность классического решения задачи Коши для уравнения колебаний.

Теорема 15.1. Пусть функция $\varphi(x)$ дважды непрерывно дифференцируема на **R**, функция $\psi(x)$ непрерывно дифференцируема на R, $f(x, t)$ и $\dfrac{\partial f(x,t)}{\partial x}$ непрерывны в полуплоскости $t \geq 0$. Тогда существует единственное классическое решение задачи Коши для уравнения струны (15.1) − (15.2) и дается формулой Даламбера–Эйлера:

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x+at) + \varphi(x-at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi)\mathrm{d}\xi +$$

$$+ \frac{1}{2a} \int_0^t \mathrm{d}\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)\mathrm{d}\xi. \tag{15.10}$$

Пример 15.3.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \cos t \cos 2x, & -\infty < x < +\infty, \quad t > 0, \\ u(x,0) = 1 + \cos t, \quad \dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \cos 3x, & -\infty < x < +\infty. \end{cases}$$

Воспользуемся формулами Даламбера–Эйлера. Тогда решение однородного ДУ с ненулевыми начальными условиями

$$u_1(x,t) = \frac{1}{2}(1 + \cos(x+at) + 1 + \cos(x-at)) + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} \cos 3\xi \, d\xi =$$

$$= 1 + \cos at \cos x + \frac{1}{3a} \sin 3at \cos 3x \, .$$

Решение неоднородного ДУ с нулевыми начальными условиями

$$u_2(x,t) = \frac{1}{2a}\int_0^t d\tau \int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} \cos\tau \cos 2\xi \, d\xi = \frac{1}{4a}\int_0^t \cos\tau \sin 2\xi \Big|_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} d\tau =$$

$$= \frac{1}{4a^2 - 1}(\cos t - \cos 2at)\cos 2x \, .$$

Решение всей задачи Коши можно записать

$$u(x,t) = u_1(x,t) + u_2(x,t) \, .$$

15.6. Задачи для самостоятельного решения

Решить следующие задачи Коши:

Задача 1

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = xt, \quad -\infty < x < +\infty, \quad t > 0;$$

$$u(x,0) = x^2, \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = x, \quad \infty < x < +\infty.$$

Задача 2

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 16\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = t\sin 2x, \quad -\infty < x < +\infty, \quad t > 0;$$

$$u(x,0) = x^3, \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \cos x, \quad \infty < x < +\infty.$$

Задача 3

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 9\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = t\cos 2x, \quad -\infty < x < +\infty, \quad t > 0;$$

$$u(x,0) = x^2, \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \sin x, \quad \infty < x < +\infty.$$

4 Задача 4

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \sin t \sin 3x, \quad -\infty < x < +\infty, \quad t > 0;$$

$$u(x,0) = 1 + \sin x, \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \sin 2x, \quad \infty < x < +\infty.$$

Задача 5

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \cos t \cos 2x, \quad -\infty < x < +\infty, \quad t > 0;$$

$$u(x,0) = 1 + \cos x, \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \cos 3x, \quad \infty < x < +\infty.$$

Задача 6

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = e^{-t}\cos(\alpha x + \beta), \quad \alpha > 0, \quad -\infty < x < +\infty, \quad t > 0;$$

$$u(x,0) = 0, \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0, \quad -\infty < x < +\infty.$$

Ответы

1. $u(x,t) = x^2 + t^2 + xt + \frac{1}{6}xt^3$.

2. $u(x,t) = x^3 + 48xt^2 + \frac{\sin 4t \cos x}{4} + \left(t - \frac{\sin 8t}{8}\right)\frac{\sin 2x}{64}$.

3. $u(x,t) = x^2 + 9t^2 + \dfrac{\sin 3t \sin x}{3} + \left(t - \dfrac{\sin 6t}{6} \right) \dfrac{\cos 2x}{36}$.

4. $u(x,t) = 1 + \cos t \sin x + \dfrac{\sin 2t \sin 2x}{2} + \left(\sin t - \dfrac{\sin 3t}{3} \right) \dfrac{\sin 3x}{8}$.

5. $u(x,t) = 1 + \cos t \cos x + \dfrac{1}{3}(\cos t - \cos 2t) \cos 2x + \dfrac{1}{3} \sin 3t \cos 3x$.

6. $u(x,t) = \dfrac{1}{1+\alpha^2} \left(-\cos \alpha t + \dfrac{\sin \alpha t}{\alpha} + e^{-t} \right) \cos(\alpha x + \beta)$.

Библиографический список

1. *Кудрявцев Л.Д.* Краткий курс математического анализа: В 2-х т. – М: Физматлит, 2005.

2. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. – М: Наука, 1977.

3. *Треногин В.А.* Методы математической физики. – Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002.

4. *Треногин В.А.* Функциональный анализ. – М: Физматлит, 2002.

5. *Треногин В.А.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М: Физматлит, 2009.

Учебное издание

Треногин Владилен Александрович
Недосекина Ирина Сергеевна

МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Практикум

Редактор *О.В. Иванова*

Компьютерная верстка *М.А. Шамариной*

Подписано в печать 02.07.12	Бумага офсетная	
Формат $60 \times 90\ ^{1}/_{16}$	Печать офсетная	Уч.-изд. л. 12,25
Рег. № 316	Тираж 350 экз.	Заказ 3625

Национальный исследовательский
технологический университет «МИСиС»,
119049, Москва, Ленинский пр-т, 4

Издательский Дом МИСиС,
119049, Москва, Ленинский пр-т, 4
Тел. (495) 638-45-22

Отпечатано в типографии Издательского Дома МИСиС
119049, Москва, Ленинский пр-т, 4
Тел. (499) 236-76-17, тел./факс (499) 236-76-35