Э. Ч. ТИТЧМАРШ

ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ИНТЕГРАЛОВ ФУРЬЕ

ПЕРЕВОД С АНГЛИЙСКОГО
Д. А. РАЙКОВА

ОГИЗ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1948 ЛЕНИНГРАД

Редактор *Б.М. Левитан.* Техн. редактор *Н.А. Тумаркина.*
OCR обработка и конвертация в TEX — *E.G.A.* (www.ega-math.narod.ru)
Подписано к печати 26/I 1948 г. 30 печ. л. 32,19 уч.-изд. л. 42 800 тип. зн. в печ. л.
Тираж 6 000 экз. А 10016. Цена книги 19 р. Переплёт 2 р. Заказ № 725.

16-я типография треста «Полиграфкнига» ОГИЗа при Совете Министров СССР.
Москва, Трёхпрудный, 9.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Цель этой книги — дать более систематическое изложение элементов теории интегралов Фурье, чем это делалось до сих пор. Однако, я не касаюсь здесь ряда важных разделов недавнего происхождения: винеровских тауберовых теорем; применений к почти периодическим функциям, квазианалитическим функциям и целым функциям; интегралов Фурье–Стилтьеса; общего гармонического анализа; обобщённых интегралов Бохнера, а также теории интегралов Фурье для функций нескольких переменных, краткое изложение которой дано в книге Бохнера[1].

От читателя требуется знакомство с анализом, включая элементы теории рядов Фурье. Предлагаемую книгу можно рассматривать как продолжение моей книги «Теория функций»[1].

В литературе можно встретить большое количество самых разнообразных применений интегралов Фурье, часто в форме «операторов», часто также в работах авторов, по-видимому не интересовавшихся специально аналитической стороной вопроса. Некоторые из этих применений я изложил здесь в качестве упражнений, обработав их так, как представлялось мне наиболее интересным для аналитика. Я сохранил, ввиду их образности, некоторые ссылки на «тепло», «излучение» и т.п.; но интерес всюду сосредоточен на чисто аналитической стороне вопроса, так что читатель мог бы и вовсе не знать о существовании этих вещей.

Автор

---

[1] См. список руководств и монографий на стр. 397.

ОГЛАВЛЕНИЕ

I. Сходимость и суммируемость

II. Вспомогательные формулы

III. Трансформации из класса L^2

IV. Трансформации из других L-классов

V. Сопряжённые интегралы; трансформации Гильберта

VI. Единственность и смешанные теоремы

VII. Примеры и применения

VIII. Обобщённые трансформации

IX. Функции, двойственные себе

X. Дифференциальные и разностные уравнения

XI. Интегральные уравнения

I
СХОДИМОСТЬ И СУММИРУЕМОСТЬ

1.1. Формулы Фурье. Начало теории интегралов Фурье было положено «Аналитической теорией теплоты» Фурье[1]. Рассуждение Фурье, которое с современной точки зрения нельзя назвать доказательством, — в основных чертах следующее. Пусть функция $f(x)$, имеющая период $2\pi\lambda$, представлена рядом Фурье:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\frac{nx}{\lambda} + b_n \sin\frac{nx}{\lambda} \right).$$

Коэффициенты a_m, b_m получаются формально путём умножения на $\cos\frac{mx}{\lambda}$ или $\sin\frac{mx}{\lambda}$ и почленного интегрирования в пределах от $-\pi\lambda$ до $\pi\lambda$. Это даёт:

$$a_m = \frac{1}{\pi\lambda} \int_{-\pi\lambda}^{\pi\lambda} f(t) \cos\frac{mt}{\lambda}\, dt, \qquad b_m = \frac{1}{\pi\lambda} \int_{-\pi\lambda}^{\pi\lambda} f(t) \sin\frac{mt}{\lambda}\, dt,$$

и формула для $f(x)$ может быть записана в виде

$$f(x) = \frac{1}{2\pi\lambda} \int_{-\pi\lambda}^{\pi\lambda} f(t)\, dt + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi\lambda} \int_{-\pi\lambda}^{\pi\lambda} f(t) \cos\frac{n(x-t)}{\lambda}\, dt.$$

Если положить $\frac{n}{\lambda} = u$, $\frac{1}{\lambda} = \delta u$ и перейти формально к пределу по $\lambda \to \infty$, то сумма превратится в интеграл, и мы получим

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} du \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos u(x-t)\, dt. \tag{1.1.1}$$

Это и есть *интегральная формула Фурье*. Интеграл, стоящий в правой части этой формулы, называют *двойным интегралом Фурье*.

Формула (1.1.1) может быть записана также в форме

$$f(x) = \int_0^{\infty} [a(u) \cos xu + b(u) \sin xu]\, du \tag{1.1.2}$$

[1] См. список руководств и монографий на стр. 397.

(аналогичной форме ряда Фурье), где

$$a(u) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos ut\,dt, \qquad b(u) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin ut\,dt. \tag{1.1.3}$$

Если $f(x)$ — чётная функция, то

$$a(u) = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty} f(t)\cos ut\,dt,$$

а $b(u)$ обращается в нуль; формула принимает вид

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\cos xu\,du\int_{0}^{\infty} f(t)\cos ut\,dt. \tag{1.1.4}$$

Это — *косинус-формула Фурье*. Аналогично, если $f(x)$ нечётна, то $a(u)$ обращается в нуль, и мы получаем *синус-формулу Фурье*:

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\sin xu\,du\int_{0}^{\infty} f(t)\sin ut\,dt. \tag{1.1.5}$$

Формулу (1.1.1) можно рассматривать также как простую комбинацию формул (1.1.4) и (1.1.5). Действительно, $f(x)$ можно представать (и притом единственным образом) в виде суммы чётной функции $g(x)$ и нечётной функции $h(x)$:

$$f(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} + \frac{f(x)-f(-x)}{2} = g(x) + h(x);$$

тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos u(x-t)\,dt = 2\cos ux\int_{0}^{\infty} g(t)\cos ut\,dt + 2\sin ux\int_{0}^{\infty} h(t)\sin ut\,dt,$$

и формула (1.1.1) даёт

$$\begin{aligned} g(x) + h(x) = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\cos xu\,du\int_{0}^{\infty} g(t)\cos ut\,dt &+ \\ + \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\sin xu\,du\int_{0}^{\infty} h(t)\sin ut\,dt&, \end{aligned}$$

т.е. сумму косинус-формулы для $g(x)$ и синус-формулы для $h(x)$.

Рассмотренные формулы были независимо от Фурье открыты Коши[1] в его исследованиях по распространению волн. Коши дал этим соотношениям следующее формальное обоснование. Правая часть фор-

[1] Cauchy (1), (2); см. список оригинальных работ, упомянутых в тексте, на стр. 398—416.

мулы (1.1.1) является, формально, пределом при $\delta \to 0$ выражения

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} e^{-\delta u}\,du \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos u(x-t)\,dt =$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt \int_0^{\infty} e^{-\delta u}\cos u(x-t)\,du = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\frac{\delta}{\delta^2+(x-t)^2}\,dt.$$

Множитель при $f(t)$ в последнем интеграле стремится к нулю для всех значений t, кроме $t = x$, где он стремится к бесконечности. Поэтому можно рассчитывать, что значение интеграла не изменится, если мы заменим $f(t)$ на $f(x)$; но это даст

$$\frac{f(x)}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\delta}{\delta^2+(x-t)^2}\,dt = f(x),$$

снова подтверждая формулу (1.1.1).

Коши предложил также следующую формулу, эквивалентную формуле (1.1.1):

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixu}\,du \int_{-\infty}^{\infty} e^{iut} f(t)\,dt. \tag{1.1.6}$$

Полагая, как прежде, $f(x) = g(x)+h(x)$, где g — чётная и h — нечётная функции, имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{iut} f(t)\,dt = 2\int_0^{\infty} g(t)\cos ut\,dt + 2i\int_0^{\infty} h(t)\sin ut\,dt,$$

и правая часть формулы (1.1.6) приводится к

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\cos xu\,du\int_0^{\infty} g(t)\cos ut\,dt + \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\sin xu\,du\int_0^{\infty} h(t)\sin ut\,dt =$$
$$= g(x)+h(x) = f(x).$$

Мы будем называть (1.1.6) *экспоненциальной формой формулы Фурье.*

Формула несколько отличного типа получается, если представить внешний интеграл в (1.1.1) как предел интеграла, взятого по интервалу $(0, \lambda)$, и обратить под знаком предела порядок интегрирования. В результате получим

$$f(x) = \lim_{\lambda\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\frac{\sin\lambda(x-t)}{x-t}\,dt. \tag{1.1.7}$$

Это же соотношение может быть выведено таким же способом из формулы (1.1.6). Формулу (1.1.7) называют представлением функции $f(x)$ в виде *простого интеграла Фурье.*

1.2. Трансформации Фурье. Как отметил Коши, рассмотренные формулы приводят к взаимным или, как мы будем говорить, — двойственным соотношениям между парами функций. Если положить

$$F_c(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(t) \cos ut \, dt, \tag{1.2.1}$$

то формула (1.1.4) даст

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty F_c(u) \cos xu \, du, \tag{1.2.2}$$

и мы видим, что соотношение между $f(x)$ и $F_c(x)$ — взаимное. Коши назвал такие функции взаимными функциями первого рода. Мы будем называть функции, связанные указанным образом, *косинус-трансформациями Фурье* одна для другой или *парой косинус-трансформаций Фурье*. Так,

$$e^{-x}, \quad \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{1+x^2}$$

есть пара косинус-трансформаций Фурье.

Аналогично, из синус-формулы Фурье получаем

$$F_s(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(t) \sin ut \, dt, \tag{1.2.3}$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty F_s(u) \sin xu \, du. \tag{1.2.4}$$

Эти функции Коши назвал взаимными функциями второго рода. Мы будем называть их *синус-трансформациями Фурье* одна для другой или *парой синус-трансформаций Фурье*. Так,

$$e^{-x}, \quad \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{x}{1+x^2}$$

есть пара синус-трансформаций Фурье.

Формула (1.1.6) приводит аналогичным образом к (несимметричным) формулам

$$F(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty e^{iut} f(t) \, dt, \tag{1.2.5}$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty e^{-ixu} F(u) \, du. \tag{1.2.6}$$

Мы будем называть такие функции просто *трансформациями Фурье* одна для другой или *парой трансформаций Фурье*. Так,

$$f(x) = e^{-|x|}, \qquad F(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{1+x^2}$$

есть пара трансформаций Фурье.

Если $f(x)$ чётна, то $F(x) = F_c(x)$; если $f(x)$ нечётна, то $F(x) = iF_s(x)$.

1.3. Обобщённые интегралы Фурье. Существование интеграла, определяющего $F(u)$, накладывает некоторое ограничение на поведение функции $f(x)$ в бесконечности. Но даже если $F(u)$ не существует, функции

$$F_+(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{iwt} f(t)\,dt, \tag{1.3.1}$$

$$F_-(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{iwt} f(t)\,dt, \tag{1.3.2}$$

где $w = u + iv$, могут, тем не менее, существовать: первая — для достаточно больших положительных v, вторая — для достаточно больших по абсолютной величине отрицательных v. Действительно,

$$F_+(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-vt} e^{iut} f(t)\,dt, \tag{1.3.3}$$

так что $F_+(w)$ есть трансформация Фурье функции, равной $e^{-vt} f(t)$ при $t > 0$ и 0 при $t < 0$. Двойственной к (1.3.3) служит формула

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty e^{-ixu} F_+(u + iv)\,du = \begin{cases} e^{-vx} f(x) & (x > 0), \\ 0 & (x < 0), \end{cases}$$

или

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty e^{-ix(u+iv)} F_+(u + iv)\,du = \begin{cases} f(x) & (x > 0), \\ 0 & (x < 0). \end{cases}$$

Аналогичная формула имеет место и для F_-. Складывая эти формулы, мы можем записать

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{ia-\infty}^{ia+\infty} e^{-ixw} F_+(w)\,dw + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{ib-\infty}^{ib+\infty} e^{-ixw} F_-(w)\,dw, \tag{1.3.4}$$

где a есть достаточно большое положительное число, а b — достаточно большое по абсолютной величине отрицательное число.

Так, например, если $f(x) = e^x$, то

$$F_+(w) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{1 + iw}, \qquad F_-(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{1 + iw}.$$

В этом случае справедливость равенства (1.3.4) непосредственно проверяется с помощью теории вычетов.

В этой обобщённой форме интегральная формула Фурье может быть применена к периодическим функциям. Пусть $f(x)$ имеет период 2π. Тогда для $v > 0$

$$F_+(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{ixw} f(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{2\pi n}^{2\pi(n+1)} e^{ixw} f(x)\,dx =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{2\pi} e^{i(\xi+2\pi n)w} f(\xi)\,d\xi =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\xi w}}{1-e^{2\pi i w}} f(\xi)\,d\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\varphi(w)}{1-e^{2\pi i w}},$$

где

$$\varphi(w) = \int_0^{2\pi} e^{i\xi w} f(\xi)\,d\xi.$$

Аналогично,

$$F_-(w) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\varphi(w)}{1-e^{2\pi i w}} \qquad (v < 0).$$

Двойственной формулой является поэтому

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{ia-\infty}^{ia+\infty} e^{-ixw} \frac{\varphi(w)}{1-e^{2\pi i w}}\,dw - \frac{1}{2\pi} \int_{ib-\infty}^{ib+\infty} e^{-ixw} \frac{\varphi(w)}{1-e^{2\pi i w}}\,dw.$$

Здесь $\varphi(w)$ — целая функция. Если её поведение в бесконечности позволяет вычислить правую часть непосредственным применением теоремы о вычетах, то получаем

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi(n) e^{-inx}.$$

Мы возвращаемся таким образом к ряду Фурье для $f(x)$.

1.4. Формулы Лапласа. Выражение

$$\varphi(s) = \int_0^\infty e^{-sx} f(x)\,dx \tag{1.4.1}$$

известно под наименованием *интеграла Лапласа.* Функция $\varphi(s)$, вообще говоря, аналитична для $\operatorname{Re} s > 0$. Двойственной формулой служит

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{k-i\infty}^{k+i\infty} e^{sx} \varphi(s)\,ds = \begin{cases} f(x) & (x > 0), \\ 0 & (x < 0). \end{cases} \tag{1.4.2}$$

С формальной точки зрения эти формулы представляют собой частный случай формул § 1.2, в чём убеждаемся, положив $s = k + it$.

В качестве ещё более специального случая мы получаем двойственные соотношения между парами аналитических функций. Пусть

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

и предположим, что после подстановки этого ряда для $f(x)$ в интеграл (1.4.1) можно произвести почленное интегрирование. Тогда

$$\varphi(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^{\infty} e^{-sx} x^n \, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!\, a_n}{s^{n+1}},$$

или

$$\frac{1}{s}\, \varphi\left(\frac{1}{s}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} n!\, a_n s^n.$$

При надлежащих ограничениях, наложенных на $f(x)$, $\varphi(s)$ будет аналитической функцией, регулярной в окрестности $s = \infty$.

Тогда для замкнутого контура C, окружающего точку $w = 0$, но отстоящего от неё достаточно далеко, имеем

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C e^{zw} \varphi(w)\, dw = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} n!\, a_n \int_C \frac{e^{zw}}{w^{n+1}}\, dw = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = f(z). \quad (1.4.3)$$

Таким образом, функция $f(z)$ может быть представлена в виде тригонометрического интеграла, но уже по замкнутому контуру.

1.5. Формулы Меллина. Та же самая формальная идея воплощается также в следующей паре формул:

$$\mathfrak{F}(s) = \int_0^{\infty} f(x) x^{s-1}\, dx, \quad (1.5.1)$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \mathfrak{F}(s) x^{-s}\, ds. \quad (1.5.2)$$

Идея такой двойственности встречается в знаменитом мемуаре Римана о простых числах[1]. Впервые она была явно формулирована Каэном[2] и строго проведена Меллином[3]. Мы будем называть формулы (1.5.1)–(1.5.2) формулами обращения Меллина.

Эти формулы естественно возникают в теории рядов Дирихле. Действительно, частный их случай

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{s-1}\, dx, \quad e^{-x} = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \Gamma(s) x^{-s}\, ds \quad (c > 0)$$

[1] Riemann (1).
[2] Cahen (1).
[3] Mellin (1), (2).

хорошо известен. Пусть теперь $\varphi(s)$ — функция, представимая рядом Дирихле:

$$\varphi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}\,.$$

Тогда имеем формально:

$$\varphi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} e^{-nx} x^{s-1}\,dx = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} f(x) x^{s-1}\,dx,$$

где

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-nx};$$

и обратно,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \varphi(s)\Gamma(s) x^{-s}\,ds = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \Gamma(s)(nx)^{-s}\,ds = \\ = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-nx} = f(x).$$

Полагая $\varphi(s)\Gamma(s) = \mathfrak{F}(s)$, мы приходим к формулам (1.5.1), (1.5.2).

Формулы Меллина можно получить также с помощью подстановки из экспоненциальной формы формулы Фурье. А именно, если положить $x = e^{\xi}$ и $s = c + it$, то (1.5.1) примет вид

$$\mathfrak{F}(c+it) = \int_{-\infty}^{\infty} f(e^{\xi}) e^{\xi(c+it)}\,d\xi,$$

а (1.5.2) — вид

$$f(e^{\xi}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathfrak{F}(c+it) e^{-\xi(c+it)}\,dt.$$

Таким образом, каждая из функций $\sqrt{2\pi}\, e^{c\xi} f(e^{\xi})$, $\mathfrak{F}(c+it)$ есть трансформация Фурье для другой.

Предположим, что в формулах Меллина функция $f(x)$ аналитична в точке $x = 0$ и в области, содержащей положительную вещественную ось. Рассмотрим интеграл

$$\int_{\Gamma} f(z)(-z)^{s-1}\,dz,$$

где $(-z)^{s-1}$ определено как $e^{(s-1)\ln(-z)}$ с $\ln(-z)$, вещественным на отрицательной вещественной оси, а Γ есть контур, идущий из бесконечности параллельно положительной вещественной оси, обходящий точку $z = 0$ в положительном направлении и затем снова возвращающийся в бесконечность параллельно положительной вещественной оси. Будем стягивать Γ к вещественной оси. Часть контура Γ, лежащая над вещественной осью, даст

$$-\int_0^\infty f(x)e^{(s-1)(\ln x-\pi i)}\,dx = e^{-\pi is}\int_0^\infty f(x)x^{s-1}\,dx,$$

а часть, лежащая под вещественной осью, даст

$$\int_0^\infty f(x)e^{(s-1)(\ln x+\pi i)}\,dx = -e^{\pi is}\int_0^\infty f(x)x^{s-1}\,dx.$$

Поэтому

$$\int_\Gamma f(z)(-z)^{s-1}\,dz = -2i\sin\pi s\,\mathfrak{F}(s).$$

Полагая

$$\pi\chi(s) = \mathfrak{F}(s)\sin\pi s,$$

мы получаем двойственные формулы:

$$\chi(s) = -\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(z)(-z)^{s-1}\,dz, \tag{1.5.3}$$

$$f(z) = \frac{1}{2i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{\chi(s)z^{-s}}{\sin\pi s}\,ds. \tag{1.5.4}$$

Простой пример представляют функции

$$f(z) = e^{-z}, \quad \chi(s) = \frac{1}{\Gamma(1-s)}\,.$$

Подобные формулы имеют важные применения в теории функций комплексной переменной[1]; однако, мы не имеем возможности более останавливаться на них здесь.

1.6. Читателю, интересующемуся ранней историей формул Фурье–Коши, мы можем рекомендовать статью Буркхардта в Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften[2].

Теоремы этой главы в основном аналогичны классическим теоремам из теории рядов Фурье. Впрочем, мы фактически нигде не будем основываться на знании этой последней теории. Почти все теоремы о рядах Фурье имеют аналогию для интегралов. В некоторых случаях соответственные теоремы столь сходны, что перенесение их с рядов на интегралы не представляет никакого труда. В других случаях теория интегралов Фурье представляет новые и интересные особенности, являясь иногда даже более простой.

---

[1] Carlson (1).

[2] См. список руководств и монографий на стр. 397.

1.7. Обозначения и терминология. Мы будем употреблять символ

$$\int_0^\infty f(x)\,dx$$

для обозначения интеграла Лебега от $f(x)$ по области $(0,\infty)$, предполагая при этом, что интеграл абсолютно сходится, т.е. что существует интеграл

$$\int_0^\infty |f(x)|\,dx.$$

Если $f(x)$ интегрируема по интервалу $(0,X)$ для любого X и

$$\lim_{X\to\infty}\int_0^X f(x)\,dx$$

существует, то мы будем обозначать этот предел символом

$$\int_0^{\to\infty} f(x)\,dx.$$

Такой интеграл называют интегралом в смысле Коши. Аналогичные обозначения мы будем употреблять и в случае других пределов. Так,

$$\int_{\to 0}^1 f(x)\,dx$$

будет обозначать предел интеграла

$$\int_\delta^1 f(x)\,dx,$$

когда δ стремится к нулю, проходя положительные значения.

В «формальных» рассмотрениях мы будем пользоваться символом $\int_0^\infty f(x)\,dx$ для обозначения интеграла в обоих смыслах. Опасность их смешения, вообще говоря, невелика.

Мы будем говорить, что $f(x)$ принадлежит к $L^p(a,b)$, если $f(x)$ измерима и

$$\int_a^b |f(x)|^p\,dx < \infty.$$

Вместо L^1 мы будем писать просто L.

Через

$$\operatorname*{l.i.m.}_{X\to\infty}\int_0^X f(x,\alpha)\,dx$$

(limit in mean — предел в среднем) мы будем обозначать функцию $\varphi(\alpha)$ такую, что

$$\lim_{X\to\infty}\int_a^b \left|\varphi(\alpha)-\int_0^X f(x,\alpha)\,dx\right|^p d\alpha = 0,$$

где a, b и p имеют заданные значения.

Для комплексных переменных мы будем употреблять обозначения

$$z = x+iy,\quad w = u+iv,\quad s=\sigma+it,\quad \zeta=\xi+i\eta.$$

Если заданная функция есть $f(x)$, то функции, определённые формулами (1.2.5), (1.2.1), (1.2.3), (1.3.1), (1.3.2), (1.5.1), мы будем обозначать, соответственно, через

$$F(x),\quad F_c(x),\quad F_s(x),\quad F_+(w),\quad F_-(w),\quad \mathfrak{F}(s).$$

При этом в каждом случае будет предполагаться, что соответствующий интеграл существует в том или ином смысле. Для того, чтобы избежать путаницы из-за двузначности выражения «трансформация Фурье», связанной с асимметрией формул (1.2.5), (1.2.6), мы стандартизуем употребление строчных и прописных букв, принятое в указанных формулах. Точно так же будет стандартизовано употребление и других букв, как g, G, G_+, G_- и т.п.

Через A мы будем обозначать абсолютную постоянную, не обязательно одну и ту же во всех случаях. Через K мы будем обозначать постоянную, зависящую от данных рассматриваемого вопроса.

Мы будем говорить, что сходимость последовательности $f_n(x)$ к пределу $f(x)$ *ограниченная*, если $|f_n(x)| \leqslant K$ для всех n и x, и *мажорированная*, если $|f_n(x)| \leqslant \varphi(x)$, где $\varphi(x)$ принадлежит к L на рассматриваемом множестве. Как известно[1], в случае ограниченной или мажорированной сходимости

$$\lim_{n\to\infty}\int f_n(x)\,dx = \int f(x)\,dx;$$

при этом в случае ограниченной сходимости предполагается, что мера множества, по которому берутся интегралы, конечна.

1.8. Фундаментальные теоремы. В теории интегралов Фурье, как и в теории рядов Фурье, фундаментальную роль играет теорема Римана–Лебега. Она формулируется следующим образом.

Теорема 1. *Пусть $f(x)\in L(-\infty,\infty)$. Тогда интегралы*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\lambda x\,dx,\quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin\lambda x\,dx \tag{1.8.1}$$

[1] Титчмарш, Теория функций, §§ 10.5, 10.8. [См. также И.П. Натансон, Основы теории функций вещественной переменной, гл. V, § 3 и гл. VI, § 3, или П.С. Александров и А.Н. Колмогоров, Введение в теорию функций действительного переменного, 3-е изд., гл. IX, § 6. — *Прим. перев.*]

стремятся к нулю при $\lambda \to \infty$.

Доказательство. Рассмотрим, например, первый из этих интегралов. Пусть ε — заданное положительное число. Тогда можно выбрать столь большое X, чтобы

$$\int_X^\infty |f(x)|\,dx < \varepsilon, \quad \int_{-\infty}^{-X} |f(x)|\,dx < \varepsilon,$$

и, следовательно,

$$\left|\int_X^\infty f(x)\cos\lambda x\,dx\right| < \varepsilon, \quad \left|\int_{-\infty}^{-X} f(x)\cos\lambda x\,dx\right| < \varepsilon$$

для всех значений λ. Далее, можно найти функцию $\varphi(x)$, абсолютно непрерывную в интервале $(-X, X)$ и такую, что

$$\int_{-X}^{X} |f(x) - \varphi(x)|\,dx < \varepsilon.$$

Тогда

$$\left|\int_{-X}^{X} [f(x) - \varphi(x)]\cos\lambda x\,dx\right| < \varepsilon$$

для всех значений λ. Наконец,

$$\int_{-X}^{X} \varphi(x)\cos\lambda x\,dx = \\ = \frac{\varphi(X)\sin\lambda X}{\lambda} + \frac{\varphi(-X)\sin\lambda X}{\lambda} - \frac{1}{\lambda}\int_{-X}^{X} \varphi'(x)\sin\lambda x\,dx,$$

и (при фиксированном X) можно выбрать столь большое λ_0, чтобы это выражение при $\lambda > \lambda_0$, было по абсолютной величине меньше, чем ε. Тогда будем иметь

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\lambda x\,dx\right| < 4\varepsilon \quad (\lambda > \lambda_0).$$

Это доказывает теорему для интеграла, содержащего косинус. Аналогичное доказательство применимо и к интегралу, содержащему синус.

Теорема 2. *Пусть* $f(x) \in L(-\infty, \infty)$. *Тогда для того, чтобы*

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\to\infty} du \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos u(x-t)\,dt = a, \tag{1.8.2}$$

необходимо и достаточно, чтобы для каждого фиксированного δ

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_0^\delta [f(x+y) + f(x-y) - 2a]\frac{\sin\lambda y}{y}\,dy = 0. \tag{1.8.3}$$

Доказательство. Так как $|f(t)\cos u(x-t)| \leqslant |f(t)|$, то интеграл
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos u(x-t)\,dt$$
сходится равномерно в любом конечном интервале изменения u. Поэтому
$$\int_0^{\lambda} du \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos u(x-t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt \int_0^{\lambda} \cos u(x-t)\,du = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\frac{\sin\lambda(x-t)}{x-t}\,dt.$$
Так как функция $f(t)/(x-t)$ интегрируема на интервалах $(-\infty, x-\delta)$ и $(x+\delta, \infty)$, то из теоремы Римана–Лебега следует, что при фиксированном δ
$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_{-\infty}^{x-\delta} f(t)\frac{\sin\lambda(x-t)}{x-t}\,dt = 0, \quad \lim_{\lambda\to\infty}\int_{x+\delta}^{\infty} f(t)\frac{\sin\lambda(x-t)}{x-t}\,dt = 0.$$
Далее,
$$\int_{x-\delta}^{x+\delta} f(t)\frac{\sin\lambda(x-t)}{x-t}\,dt = \int_0^{\delta}[f(x+y)+f(x-y)]\frac{\sin\lambda y}{y}\,dy,$$
а
$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_0^{\delta} 2a\,\frac{\sin\lambda y}{y}\,dy = \lim_{\lambda\to\infty} 2a\int_0^{\lambda\delta}\frac{\sin v}{v}\,dv = 2a\int_0^{\to\infty}\frac{\sin v}{v}\,dv = \pi a.$$
Эти соотношения в совокупности показывают, что (1.8.2) и (1.8.3) эквивалентны.

1.9. Мы теперь в состоянии перенести все обычные признаки сходимости рядов Фурье на интегралы Фурье. Однако, мы ограничимся лишь доказательством следующих двух предложений, аналогичных, соответственно, признакам Жордана и Дини.

Теорема 3. *Пусть $f(t) \in L(-\infty, \infty)$. Если в некотором интервале, содержащем внутри точку x, $f(t)$ имеет ограниченное изменение, то*
$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\to\infty} du \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos u(x-t)\,dt. \tag{1.9.1}$$
Если $f(t)$ в интервале (a, b) непрерывна и имеет ограниченное изменение, то
$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\to\infty} du \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos u(x-t)\,dt, \tag{1.9.2}$$

причём интеграл равномерно сходится в любом интервале, внутреннем к (a, b).

Доказательство. Пусть $f(x)$ удовлетворяет условиям первой части теоремы. Тогда функция

$$\psi(y) = f(x+y) + f(x-y) - f(x+0) - f(x-0)$$

имеет ограниченное изменение в интервале $(0, \delta)$ с достаточно малым δ, и $\psi(y) \to 0$ при $y \to 0$. Поэтому

$$\psi(y) = \psi_1(y) - \psi_2(y),$$

где $\psi_1(y)$ и $\psi_2(y)$ — положительные неубывающие ограниченные функции, определённые в интервале $(0, \delta)$ и стремящиеся к нулю при $y \to 0$.

Для каждого заданного положительного числа ε существует число η такое, что $\psi_1(y) \leqslant \varepsilon$ при $y \leqslant \eta$. Имеем

$$\int_0^\delta \psi_1(y) \frac{\sin \lambda y}{y}\, dy = \int_0^\eta \psi_1(y) \frac{\sin \lambda y}{y}\, dy + \int_\eta^\delta \psi_1(y) \frac{\sin \lambda y}{y}\, dy.$$

По второй теореме о среднем значении первый интеграл в правой части равен

$$\psi_1(\eta) \int_\xi^\eta \frac{\sin \lambda y}{y}\, dy = \psi_1(\eta) \int_{\lambda\xi}^{\lambda\eta} \frac{\sin v}{v}\, dv \quad (0 < \xi < \eta),$$

и так как интеграл $\displaystyle\int_{\lambda\xi}^{\lambda\eta} \frac{\sin v}{v}\, dv$ ограничен для всех λ и ξ, то

$$\left| \int_0^\eta \psi_1(y) \frac{\sin \lambda y}{y}\, dy \right| < A\varepsilon$$

для всех значений λ. Далее, при фиксированном η функция $\dfrac{\psi_1(y)}{y}$ интегрируема на интервале (η, δ), так что, по теореме Римана–Лебега,

$$\lim_{\lambda \to \infty} \int_\eta^\delta \psi_1(y) \frac{\sin \lambda y}{y}\, dy = 0.$$

Так как ε произвольно мало, то получаем, что

$$\lim_{\lambda \to \infty} \int_0^\delta \psi_1(y) \frac{\sin \lambda y}{y}\, dy = 0.$$

Таким же образом покажем, что и аналогичный интеграл, содержащий $\psi_2(y)$, стремится к нулю. Следовательно,

$$\lim_{\lambda \to \infty} \int_0^\delta \psi(y) \frac{\sin \lambda y}{y}\, dy = 0,$$

что, в силу теоремы 2, и доказывает первое утверждение теоремы 3.

Если теперь $f(x)$ непрерывна в (a,b), то $\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]=f(x)$; и так как $f(x)$ равномерно непрерывна во всяком интервале, содержащемся внутри (a,b), то условия, на которые опиралось проведённое только что доказательство, выполняются равномерно во всяком таком интервале, а следовательно, и сходимость равномерна.

Теорема 4. *Пусть $f(x)\in L(-\infty,\infty)$. Тогда при заданном x равенство* (1.9.2) *имеет место, если интеграл*

$$\int_0^\delta\left|\frac{f(x+y)+f(x-y)-2f(x)}{y}\right|dy \tag{1.9.3}$$

существует для некоторого положительного δ. В частности, это равенство имеет место, если $f(x)$ дифференцируема в точке x.

Утверждение этой теоремы непосредственно следует из теорем 1 и 2 с $a=f(x)$. Если $f(x)$ дифференцируема, то подынтегральное выражение в (1.9.3) ограничено, так что условие теоремы автоматически выполнено.

Теорема 5[1]. *Пусть $\dfrac{f(t)}{1+|t|}\in L(-\infty,\infty)$. Пусть, далее, функции*

$$a_1(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(y)\frac{\sin\lambda y}{y}\,dy \tag{1.9.4}$$

и

$$b_1(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}f(y)\frac{1-\cos xy}{y}\,dy-\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\infty}^{-1}+\int_1^{\infty}\right)f(y)\frac{\cos xy}{y}\,dy \tag{1.9.5}$$

абсолютно непрерывны на каждом конечном интервале $0<\delta\leqslant x\leqslant\Delta$, и $a(x)$, $b(x)$, соответственно, — их производные. Пусть, наконец, $f(t)$ в окрестности точки $t=x$ удовлетворяет условиям теоремы 3 *или теоремы* 4. *Тогда*

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=\int_{\to 0}^{\to\infty}[a(u)\cos xu+b(u)\sin xu]\,du.$$

Доказательство. Предположим сначала, что при $|x|\geqslant 1$ функция $f(x)$ тождественно равна нулю. Тогда

$$\frac{1}{\pi}\int_0^x d\xi\int_{-1}^{1}f(y)\cos\xi y\,dy=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}f(y)\frac{\sin xy}{y}\,dy=a_1(x),$$

так что

$$a(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}f(y)\cos xy\,dy$$

[1] Hahn (2).

почти для всех x. Аналогично убедимся в том, что и

$$b(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} f(y)\sin xy\,dy$$

почти для всех x. Утверждение теоремы следует тогда из теоремы 3 или 4.

Пусть теперь $f(x) = 0$ при $|x| < 1$. Тогда $\dfrac{f(x)}{x} \in L(-\infty, \infty)$. Поэтому, в силу теоремы 3 или 4,

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2x} = \int_{\to 0}^{\to\infty} [-b_1(u)\cos xu + a_1(u)\sin xu]\,du.$$

Но

$$\int_{0}^{\to\infty} b_1(u)\cos xu\,du = b_1(u)\frac{\sin xu}{x}\Big|_0^{\infty} - \frac{1}{x}\int_{\to 0}^{\to\infty} b(u)\sin xu\,du = \\ = -\frac{1}{x}\int_{\to 0}^{\to\infty} b(u)\sin xu\,du,$$

так как $b_1(u) \to 0$ при $u \to \infty$. Точно так же

$$\int_{0}^{\to\infty} a_1(u)\sin xu\,du = -a_1(u)\frac{\cos xu}{x}\Big|_0^{\infty} + \frac{1}{x}\int_{\to 0}^{\to\infty} a(u)\cos xu\,du = \\ = \frac{1}{x}\int_{\to 0}^{\to\infty} a(u)\cos xu\,du,$$

так как $a_1(u) \to 0$ при $u \to 0$ и $u \to \infty$. Тем самым и в этом случае утверждение теоремы доказано.

Общий случай сводится к рассмотренным двум случаям разбиением функции $f(x)$ на сумму двух функций, равных нулю, соответственно, при $|x| \geqslant 1$ и при $|x| < 1$ и совпадающих в остальных точках с $f(x)$.

1.10. Монотонные функции[1]**.** Нижеследующие теоремы основываются на том обстоятельстве, что если $f(t)$ при $t \to \infty$ монотонно стремится к нулю, то интегралы

$$\int_{0}^{\to\infty} f(t)\cos ut\,dt, \qquad \int_{0}^{\to\infty} f(t)\sin ut\,dt$$

при $u > 0$ существуют даже в том случае, когда интеграл $\displaystyle\int_0^{\infty} f(t)\,dt$ не существует. Здесь несколько более удобно рассмотреть интегралы, содержащие косинус и синус, отдельно.

[1] Pringsheim (1).

Т е о р е м а 6. *Пусть $f(t)$ — функция, не возрастающая в интервале $(0,\infty)$ и интегрируемая на любом конечном интервале, начинающемся в точке 0, и пусть $f(t)\to 0$ при $t\to\infty$. Тогда для каждого положительного x*

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=\frac{2}{\pi}\int_{\to 0}^{\to\infty}\cos xu\,du\int_0^{\to\infty}f(t)\cos ut\,dt.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. По второй теореме о среднем значении

$$\left|\int_T^{T'}f(t)\cos ut\,dt\right|=\left|f(T+0)\int_T^{T''}\cos ut\,dt\right|\leqslant\frac{2f(T+0)}{u}\,.$$

Поэтому интеграл $\int_0^{\to\infty}f(t)\cos ut\,dt$ сходится равномерно в интервале $0<\lambda\leqslant u\leqslant\mu$ изменения u. Отсюда следует, что

$$\int_\lambda^\mu\cos xu\,du\int_0^{\to\infty}f(t)\cos ut\,dt=$$
$$=\int_0^{\to\infty}f(t)\,dt\int_\lambda^\mu\cos xu\,\cos ut\,du=\frac{1}{2}\int_0^{\to\infty}f(t)\,\times$$
$$\times\left(\frac{\sin\mu(x-t)}{x-t}-\frac{\sin\lambda(x-t)}{x-t}+\frac{\sin\mu(x+t)}{x+t}-\frac{\sin\lambda(x+t)}{x+t}\right)dt.$$

Но

$$\left|\int_T^{\to\infty}f(t)\frac{\sin\mu(x-t)}{x-t}\,dt\right|=\left|f(T+0)\int_T^{T'}\frac{\sin\mu(x-t)}{x-t}\,dt\right|<Af(T+0),$$

и аналогичные сценки верны для интегралов от остальных трёх слагаемых. Мы можем поэтому взять столь большое $T_0(\varepsilon)$, что

$$\left|\int_T^{\to\infty}f(t)\left(\frac{\sin\mu(x-t)}{x-t}-\ldots\right)dt\right|<\varepsilon$$

для $T>T_0(\varepsilon)$ при всех значениях λ и μ. Но при фиксированном T

$$\lim_{\mu\to\infty}\int_0^T f(t)\frac{\sin\mu(x-t)}{x-t}\,dt=\pi\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$$

вследствие теоремы 3, и

$$\lim_{\mu\to\infty}\int_0^T f(t)\frac{\sin\mu(x+t)}{x+t}\,dt=0$$

по теореме Римана–Лебега. Далее,

$$\left|\int_0^T f(t)\frac{\sin\mu(x\pm t)}{x\pm t}\,dt\right|\leqslant\lambda\int_0^T f(t)\,dt\to 0$$

при $\lambda \to 0$. Из полученных оценок и соотношений и вытекает утверждение теоремы.

Т е о р е м а 7. *Пусть $f(t)$ удовлетворяет условиям теоремы* 6. *Тогда для всякого положительного x*

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\to\infty} \sin xu\,du \int_0^{\to\infty} f(t)\sin ut\,dt.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как

$$\left|\int_1^{\to\infty} f(t)\sin ut\,dt\right| = \left|f(1+0)\int_1^T \sin ut\,dt\right| = \\ = f(1+0)\left|\frac{\cos u - \cos uT}{u}\right| \leqslant \frac{2f(1+0)}{u}$$

и

$$\int_0^1 f(t)\sin ut\,dt = O(1)$$

при $u \to 0$, то интеграл по u абсолютно сходится в окрестности нижнего предела. В остальном доказательство проводится точно так же, как и для теоремы 6.

Очевидно, формулы Фурье могут быть установлены и при более общих условиях сложением функций, удовлетворяющих, соответственно, условиям теоремы 3 и теоремы 4.

1.11. Функции, содержащие периодический множитель[1].

Т е о р е м а 8. *Пусть $f(t) = g(t)\cos at$ $(a > 0)$, где $g(t)$ не возрастает, интегрируема на интервале $(0, 1)$ и стремится к нулю при $t \to \infty$. Тогда для всякого положительного x*

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} = \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\to a} + \int_{\to a}^{\to\infty}\right)\cos xu\,du \int_0^{\to\infty} f(t)\cos ut\,dt.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Внутренний интеграл, равный

$$\int_0^{\to\infty} g(t)\cos at\cos ut\,dt,$$

равномерно сходится в каждом конечном интервале изменения u, не содержащем ни внутри, ни на конце точку $u = a$. Мы можем поэтому для каждого $\delta > 0$ обратить в интеграле

$$\int_0^{a-\delta} \cos xu\,du \int_0^{\to\infty} g(t)\cos at\cos ut\,dt$$

[1] Pringsheim (1).

порядок интегрирования. Следовательно, для того чтобы доказать, что

$$\int_0^{\to a} \cos xu\,du \int_0^{\to\infty} g(t)\cos at\cos ut\,dt = \int_0^{\to\infty} \ldots \int_0^{\to a} \ldots, \tag{1.11.1}$$

достаточно доказать, что

$$\lim_{\delta\to 0} \int_0^{\to\infty} g(t)\cos at\,dt \int_{a-\delta}^{a} \cos xu\cos ut\,du = 0.$$

Но подобное соотношение очевидно верно, если интеграл по t взять в интервале $0 \leqslant t \leqslant T$, где T — любое конечное фиксированное число. Поэтому достаточно доказать, что

$$\lim_{\delta\to 0} \int_T^{\to\infty} g(t)\cos at\,dt \int_{a-\delta}^{a} \cos xu\cos ut\,du = 0,$$

или

$$\lim_{\delta\to 0} \int_T^{\to\infty} g(t)\cos at \left(\frac{\sin a(x-t) - \sin(a-\delta)(x-t)}{x-t} + \right.$$
$$\left. + \frac{\sin a(x+t) - \sin(a-\delta)(x+t)}{x+t}\right) dt = 0.$$

Очевидно, при $T > x$

$$\int_T^{\to\infty} g(t)\cos at\,[\sin a(x-t) - \sin(a-\delta)(x-t)] \left(\frac{1}{x-t} + \frac{1}{t}\right) dt \to 0,$$

так как этот интеграл сходится равномерно относительно δ. То же верно и для аналогичного интеграла, содержащего $x+t$. Поэтому достаточно рассмотреть

$$\int_T^{\to\infty} \frac{g(t)\cos at}{t}\,[\sin a(x+t) - \sin(a-\delta)(x+t) -$$
$$- \sin a(x-t) + \sin(a-\delta)(x-t)]\,dt =$$
$$= 2\int_T^{\to\infty} \frac{g(t)\cos at}{t}\,[\cos ax\sin at - \cos(a-\delta)x\sin(a-\delta)t]\,dt.$$

Но интеграл

$$2\int_T^{\to\infty} \frac{g(t)}{t}\cos at\sin(a-\delta)t\,dt = \int_T^{\to\infty} \frac{g(t)}{t}\,[\sin(2a-\delta)t - \sin\delta t]\,dt$$

сходится равномерно относительно $\delta \to 0$, так как

$$\int_{T_1}^{T_2} \frac{g(t)}{t}\sin\delta t\,dt = g(T_1)\int_{T_1}^{T_2'} \frac{\sin\delta t}{t}\,dt = O\{g(T_1)\}$$

и аналогично

$$\int_{T_1}^{T_2} \frac{g(t)}{t} \sin(2a-\delta)t\,dt = g(T_1)\int_{T_1}^{T_2''} \frac{\sin(2a-\delta)t}{t}\,dt = O\{g(T_1)\}.$$

Поэтому

$$\int_{T}^{\to\infty} \frac{g(t)}{t} \cos at \sin(a-\delta)t\,dt \to \int_{T}^{\to\infty} \frac{g(t)}{t} \cos at \sin at\,dt,$$

и равенство (1.11.1) доказано.

Аналогичное рассуждение применимо и к интегралу, взятому по интервалу $(a+0,\lambda)$. Поэтому имеем

$$\left(\int_0^{\to a} + \int_{\to a}^{\lambda}\right) \cos xu\,du \int_0^{\to\infty} f(t)\cos ut\,dt =$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^{\to\infty} f(t)\left(\frac{\sin\lambda(x-t)}{x-t} + \frac{\sin\lambda(x+t)}{x+t}\right)dt.$$

Наконец, интеграл

$$\int_T^{T'} \cos at\,\frac{\sin\lambda(x-t)}{x-t}\,dt = \int_{T-x}^{T'-x} \cos a(x+y)\,\frac{\sin\lambda y}{y}\,dy =$$
$$= \cos ax \int_{T-x}^{T'-x} \frac{\cos ay \sin\lambda y}{y}\,dy - \sin ax \int_{T-x}^{T'-x} \frac{\sin ay\sin\lambda y}{y}\,dy$$

для фиксированных a и x ограничен при $T>2x$, $\lambda>2a$. Поэтому, в силу второй теоремы о среднем значении,

$$\int_T^{\to\infty} g(t)\cos at\,\frac{\sin\lambda(x-t)}{x-t}\,dt = O\{g(T)\},$$

и доказательство завершается как для теоремы 6.

Т е о р е м а 9. *Пусть $f(t)=g(t)\sin at$ $(a>0)$, где $g(t)$ удовлетворяет тем же условиям, что и в теореме 8. Тогда для любого положительного x*

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} = \frac{2}{\pi}\lim_{\delta\to 0}\left(\int_0^{a-\delta} + \int_{a+\delta}^{\to\infty}\right)\cos xu\,du\int_0^{\to\infty} f(t)\cos ut\,dt.$$

Если, кроме того, интеграл $\displaystyle\int^{\infty} \frac{g(t)}{t}\,dt$ *существует, то*

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} = \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\to a} + \int_{\to a}^{\to\infty}\right)\cos xu\,du\int_0^{\to\infty} f(t)\cos ut\,dt.$$

Доказательство. Рассуждая, как при доказательстве теоремы 8, находим, что для первого двойного интеграла, взятого по интервалу $0 \leqslant u \leqslant \lambda$ $(\lambda > a)$, порядок интегрирования можно обратить, если

$$\int_T^{\to\infty} \frac{g(t)\sin at}{t}\,[\cos(a+\delta)x\sin(a+\delta)t - \cos(a-\delta)x\sin(a-\delta)t]\,dt \to 0$$

при $\delta \to 0$, т.е. если

$$\cos ax\cos\delta x \int_T^{\to\infty} \frac{g(t)}{t}\,\sin at\cos at\sin\delta t\,dt -$$
$$- \sin ax\sin\delta x \int_T^{\to\infty} \frac{g(t)}{t}\,\sin^2 at\cos\delta t\,dt \to 0.$$

Первый из этих интегралов стремится к нулю вследствие равномерной сходимости относительно δ. Разобьём второй интеграл на два соответственно равенству $\sin^2 at = \frac{1}{2}(1-\cos 2at)$. Тогда интеграл

$$\int_T^{\to\infty} \frac{g(t)}{t}\,\cos 2at\cos\delta t\,dt$$

сходится равномерно относительно δ и потому стремится к конечному пределу, а

$$\int_T^{\to\infty} \frac{g(t)}{t}\,\cos\delta t\,dt = O\left\{\int_T^{1/\delta} \frac{dt}{t}\right\} + O\left\{\delta\, g\left(\frac{1}{\delta}\right)\int_{1/\delta}^{\xi} \cos\delta t\,dt\right\} =$$
$$= O\left(\ln\frac{1}{\delta}\right) + O\left\{g\left(\frac{1}{\delta}\right)\right\} = O\left(\ln\frac{1}{\delta}\right).$$

Так как $\sin\delta x\cdot\ln\dfrac{1}{\delta} \to 0$, то тем самым первая часть теоремы доказана.

Для доказательства второй части теоремы нам нужно рассмотреть интеграл

$$\int_T^{\to\infty} \frac{g(t)\sin at}{t}\,[\cos ax\sin at - \cos(a-\delta)x\sin(a-\delta)t]\,dt.$$

Этот интеграл содержит, как и в рассмотренных уже случаях, равномерно сходящиеся члены и, кроме того, члены, содержащие интеграл $\displaystyle\int_T^{\infty} \frac{g(t)}{t}\,dt$. Но последний интеграл абсолютно сходится, чем доказана и вторая часть теоремы.

Заметим, что верна также аналогичная пара теорем со взаимным обменом ролями синусов и косинусов.

Теорема 10[1]. *Пусть $f(t) = g(t)h(t)$, где $g(t)$, начиная с некоторого места, монотонно убывает до нуля, $\dfrac{g(t)}{1+|t|} \in L(-\infty,\infty)$, а $h(t)$ пе-*

---

[1] Hahn (2).

риодична (с периодом a) и интегрируема на интервале, равном по длине её периоду. Пусть $f(t)$ в окрестности точки $t=x$ удовлетворяет условию теоремы 3 или 4. Тогда для функции $f(x)$ верна формула Фурье в следующем смысле:

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\pi}\int_{\to 2\pi n/a}^{\to 2\pi(n+1)/a}du\int_{\to-\infty}^{\to\infty}f(t)\cos u(x-t)\,dt.$$

Доказательство. Если $g(t)$ монотонно убывает, то

$$\int_{na}^{(n+1)a}\frac{|f(t)|}{1+t}\,dt=\int_{na}^{(n+1)a}\frac{|g(t)h(t)|}{1+t}\,dt\leqslant$$
$$\leqslant\frac{g(na)}{1+na}\int_{na}^{(n+1)a}|h(t)|\,dt<K\,\frac{g(na)}{1+na}<K\int_{(n-1)a}^{na}\frac{g(t)}{1+t}\,dt.$$

Это показывает, что $\dfrac{f(t)}{1+|t|}\in L(-\infty,\infty)$. Тогда, так же, как и в теореме 5,

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2x}=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\to\infty}[-b_1(u)\cos xu+a_1(u)\sin xu]\,du,$$

где $a_1(u)$, $b_1(u)$ определены, соответственно, формулами (1.9.4), (1.9.5).

Далее,

$$\sum_{\nu=m}^{n}\int_{\nu a}^{(\nu+1)a}h(x)e^{ixy}\,dx=\sum_{\nu=m}^{n}\int_{0}^{a}h(x)e^{i(\nu a+x)y}\,dx=$$
$$=\frac{e^{imay}-e^{i(n+1)ay}}{1-e^{iay}}\int_{0}^{a}h(x)e^{ixy}\,dx,$$

последнее же выражение ограничено во всяком интервале, не содержащем ни внутри, ни на концах, точек $y=0,\ \pm\dfrac{2\pi}{a},\ \pm\dfrac{4\pi}{a},\ \ldots$ Поэтому интегралы

$$\int_{x_1}^{x_2}h(x)\,{\cos\atop\sin}\,xy\,dx$$

ограничены для всех x_1 и x_2 в любом указанном интервале значений y.

Из второй теоремы о среднем значении следует тогда, что интегралы

$$\frac{1}{\pi}\int_{\to-\infty}^{\to\infty}g(x)h(x)\,{\cos\atop\sin}\,xy\,dx$$

в каждом таком интервале равномерно сходятся; пусть $a(y)$, $b(y)$ — их значения. Функции $a_1(y)$, $b_1(y)$ являются интегралами от $a(y)$, $b(y)$ внутри указанных интервалов, и

$$\int_{2\pi n/a}^{2\pi(n+1)/a} b_1(u)\cos xu\,du =$$
$$= b_1(u)\frac{\sin xu}{x}\Big|_{2\pi n/a}^{2\pi(n+1)/a} - \frac{1}{x}\int_{2\pi n/a}^{2\pi(n+1)/a} b(u)\sin xu\,du;$$

аналогичную формулу получаем для $a_1(u)$ и $a(u)$.

Но a_1 и b_1 непрерывны. Поэтому при суммировании все проинтегрированные члены сокращаются, и мы получаем требуемый результат.

1.12. Сильно колеблющиеся функции. В предыдущих теоремах условия, налагаемые на $f(x)$, сводились, главным образом, к ограничениям на её колебания. Сейчас мы получим теорему о представлении функции $f(x)$ интегралом Фурье, зависящую, наоборот, от достаточной быстроты колебаний этой функции, в предположении, что они вместе с тем достаточно правильны.

Теорема 11[1]. *Пусть* $f(t) = \varphi(t)\cos\psi(t)$ *или* $f(t) = \varphi(t)\sin\psi(t)$, *где* $\varphi(t)$ *интегрируема на каждом конечном интервале, непрерывна и имеет ограниченное изменение на каждом интервале, не начинающемся в точке* $t = 0$, *и для достаточно больших значений* t *монотонна. Пусть, далее,* $\psi(t)$ *дважды дифференцируема,* $\psi'(t)$ *и* $\dfrac{\psi'(t)}{\varphi(t)}$, *начиная с достаточно больших значений* t, *монотонно возрастают до бесконечности и*

$$\varphi(t) = o\left(t\sqrt{\psi''(t)}\right). \tag{1.12.1}$$

Тогда

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\to\infty} \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\, xu\,du \int_0^{\to\infty} f(t)\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\, ut\,dt, \tag{1.12.2}$$

если

(I) $\psi''(t)$ *не убывает,* $\psi''(t+1) = O\{\psi''(t)\}$, $\varphi(t+1) = O\{\varphi(t)\}$,

или

(II) $\psi''(t)$ *убывает,* $t\psi''(t) > K$, $\varphi(2t) = O\{\varphi(t)\}$.

Доказательство будет основываться на следующей лемме.

Лемма. *Если* $\dfrac{\varphi(t)}{h'(t)}$ — *монотонная функция, а* $g(t)$ *монотонно убывает, то*

$$\int_a^b \varphi(t)g(t)\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} h(t)\,dt = O\left(g(a)\max\frac{\varphi(t)}{h'(t)}\right).$$

[1] На эту теорему я был наведён теоремой Ландау; см. Landau, Vorlesungen über Zahlentheorie, Satz 413.

Действительно, предполагая, что $\dfrac{\varphi(t)}{h'(t)}$ возрастает, и повторно применяя вторую теорему о среднем значении, получаем

$$\int_a^b \varphi(t)g(t)\cos h(t)\,dt = \int_a^b \frac{\varphi(t)}{h'(t)}g(t)h'(t)\cos h(t)\,dt \overset{(a<\alpha<b)}{=}$$

$$= \frac{\varphi(b)}{h'(b)}\int_\alpha^b g(t)h'(t)\cos h(t)\,dt \overset{(\alpha<\beta<b)}{=} \frac{\varphi(b)}{h'(b)}g(\alpha)\int_\alpha^\beta h'(t)\cos h(t)\,dt =$$

$$= \frac{\varphi(b)}{h'(b)}g(\alpha)[\sin h(\beta) - \sin h(\alpha)].$$

Аналогичные соотношения получим и в других случаях. Из этих соотношений непосредственно следует утверждение леммы. Перейдём теперь к доказательству теоремы. Внутренний интеграл в (1.12.2) сходится, если

$$\lim_{T,T'\to\infty}\int_T^{T'} \varphi(t)\cos\bigl(\psi(t) \pm ut\bigr)\,dt = 0. \tag{1.12.3}$$

Но

$$\frac{\varphi(t)}{\psi'(t) \pm u} = \frac{\varphi(t)}{\psi'(t)}\,\frac{\psi'(t)}{\psi'(t) \pm u}\,.$$

Первый множитель в правой части, согласно условию теоремы, монотонно стремится к нулю, а второй равен

$$1 \mp \frac{u}{\psi'(t) \pm u}\,,$$

где последнее слагаемое монотонно убывает по абсолютной величине. Поэтому соотношение (1.12.3) следует из леммы; при этом сходимость, очевидно, равномерна в любой конечной области значений u. Отсюда следует, что

$$\int_0^\lambda \cos xu\,du \int_0^{\to\infty} f(t)\cos ut\,dt = \int_0^{\to\infty} f(t)\,dt \int_0^\lambda \cos xu\cos ut\,du.$$

Как и в предыдущих теоремах, теперь достаточно доказать, что для достаточно большого T

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_T^\infty f(t)\frac{\sin\lambda(x-t)}{x-t}\,dt = 0.$$

Пусть имеет место случай (I). Предположим, что $\varphi(t)$ не убывает при $t \geqslant T$, и рассмотрим, например, интеграл

$$\int_T^\infty \frac{\varphi(t)}{t-x}\cos\bigl(\psi(t) + \lambda(x-t)\bigr)\,dt = \int_T^{t_0-\delta} + \int_{t_0-\delta}^{t_0+\delta} + \int_{t_0+\delta}^\infty = J_1 + J_2 + J_3,$$

где $\psi'(t_0) = \lambda$. Так как $\dfrac{\varphi(t)}{\lambda - \psi'(t)}$ монотонно возрастает при $t < t_0$, то, в силу леммы,

$$J_1 = O\left(\frac{\varphi(t_0-\delta)}{t_0[\psi'(t_0) - \psi'(t_0-\delta)]}\right) = O\left(\frac{\varphi(t_0)}{t_0\delta\psi''(t_0-\delta)}\right) = \\ = O\left(\frac{\varphi(t_0)}{t_0\delta\psi''(t_0)}\right), \qquad (1.12.4)$$

в предположении, что $\delta = O(1)$. Далее,

$$\frac{\varphi(t)}{\psi'(t)-\lambda} = \frac{\varphi(t)}{\psi'(t)}\left(1 + \frac{\lambda}{\psi'(t)-\lambda}\right)$$

при $t > t_0$ убывает. Поэтому, как и в случае J_1,

$$J_3 = O\left(\frac{\varphi(t_0)}{t_0\delta\psi''(t_0)}\right).$$

Наконец,

$$J_2 = O\left(\int_{t_0-\delta}^{t_0+\delta}\left|\frac{\varphi(t)}{x-t}\right| dt\right) = O\left(\frac{\delta\varphi(t_0)}{t_0}\right).$$

Беря $\delta = \dfrac{1}{\sqrt{\psi''(t_0)}}$ и принимая во внимание (1.12.1), получаем

$$J_1 + J_2 + J_3 = O\left(\frac{\varphi(t_0)}{t_0\sqrt{\psi''(t_0)}}\right) = o(1).$$

Соответствующий интеграл с $-\lambda$ вместо λ проще, так как для его оценки нет необходимости вводить t_0. Тем самым утверждение теоремы для случая неубывающей функции $\varphi(t)$ доказано.

Если $\varphi(t)$ убывает, то вместо (1.12.4) мы получаем

$$J_1 = O\left(\frac{\varphi(T)}{t_0\delta\psi''(t_0)}\right)$$

и приходим к требуемому результату, полагая $\delta = 1$.

В случае (II) доказательство в существенных чертах то же самое.

Примерами на оба случая могут служить, соответственно,

$$\varphi(t) = e^{t/2}, \quad \psi(t) = e^t \qquad \text{и} \qquad \varphi(t) = 1, \quad \psi(t) = t\ln t.$$

1.13. Постоянная в формуле Фурье. По ходу нашего доказательства постоянная π вносится в формулу Фурье интегралом

$$\int_0^{\to\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}\,.$$

Если мы примем значение этого интеграла за фундаментальную постоянную, обозначив его через C, то, например, косинус-формула Фурье примет вид

$$f(x) = \frac{1}{C} \int_0^{\to\infty} \cos xu \, du \int_0^{\infty} f(t) \cos ut \, dt.$$

Значения ряда других известных интегралов выразятся тогда через C. Так, взяв $f(t) = e^{-t}$ и $x = 0$, мы получим

$$1 = \frac{1}{C} \int_0^{\to\infty} du \int_0^{\infty} e^{-t} \cos ut \, dt = \frac{1}{C} \int_0^{\infty} \frac{du}{1+u^2},$$

так что

$$\int_0^{\infty} \frac{du}{1+u^2} = C.$$

Взяв $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ $(x > 0)$, мы получим (по теореме 6)

$$\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{C} \int_0^{\to\infty} \cos xu \, du \int_0^{\to\infty} \frac{\cos ut}{\sqrt{t}} \, dt =$$
$$= \frac{1}{C} \int_0^{\to\infty} \frac{\cos xu}{\sqrt{u}} \, du \int_0^{\to\infty} \frac{\cos y}{\sqrt{y}} \, dy = \frac{1}{C\sqrt{x}} \left(\int_0^{\to\infty} \frac{\cos y}{\sqrt{y}} \, dy \right)^2,$$

так что

$$\int_0^{\to\infty} \frac{\cos y}{\sqrt{y}} \, dy = \sqrt{C}.$$

Много других подобных примеров можно вывести из формул главы VII.

Ниже, в § 1.27, мы приведём для одного случая формулы Фурье доказательство, в котором постоянная π получится из теоремы о вычетах.

1.14. Представление функции простым интегралом Фурье. Условия справедливости формулы (1.1.7), т.е. представимости функции простым интегралом Фурье, подсказываются уже рядом предшествующих теорем. Однако, эта формула справедлива и при более широких условиях, так как она не требует существования трансформаций Фурье функции $f(x)$.

Теорема 12[1]. *Формула*

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} = \lim_{\lambda\to\infty} \frac{1}{\pi} \int_{\to-\infty}^{\to\infty} f(t) \frac{\sin \lambda(x-t)}{x-t} \, dt$$

имеет место, если

[1] Prasad (1), Pringsheim (1), Hobson (1).

Ia) $\dfrac{f(x)}{1+|x|} \in L(-\infty, \infty)$,

или

Ib) $\dfrac{f(x)}{x}$ *имеет ограниченное изменение на интервалах* (a, ∞) *и* $(-\infty, -a)$ *для некоторого положительного значения* a *и стремится к нулю при* $x \to \pm\infty$,

или

Ic) $\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_1^x f(t)\,dt$ *имеет ограниченное изменение на интервале* (a, ∞), *стремясь к нулю при* $x \to \infty$, *и аналогичное условие выполнено для интервала* $(-\infty, -a)$,

и

II) *в некотором интервале, содержащем точку* x *внутри, функция* $f(t)$ *имеет ограниченное изменение или удовлетворяет какому-либо другому условию сходимости ряда или интеграла Фурье.*

Доказательство. После рассмотрений, проведённых в § 1.9, достаточно доказать существование столь большого T, что

$$\left|\int_T^\infty f(t)\frac{\sin\lambda(x-t)}{x-t}\,dt\right| < \varepsilon \quad \text{и} \quad \left|\int_{-\infty}^{-T} f(t)\frac{\sin\lambda(x-t)}{x-t}\,dt\right| < \varepsilon$$

для всех значений $\lambda > \lambda_0$. Очевидно, это имеет место при выполнении условия Ia). Далее, с помощью второй теоремы о среднем значении, как в § 1.10, убедимся в справедливости требуемого при выполнении условия Ib).

Остаётся доказать достаточность условия 1c). Положим

$$\varphi(x) = \frac{1}{x}\int_1^x f(t)\,dt.$$

Тогда

$$f(x) = x\varphi'(x) + \varphi(x),$$

и требуемый результат следует из того, что $x\varphi'(x)$ удовлетворяет условию Ia), тогда как $\varphi(x)$ удовлетворяет условию Ib).

Условие Ic) следует из Ia). Действительно,

$$\varphi'(x) = \frac{f(x)}{x} - \frac{1}{x^2}\int_1^x f(t)\,dt.$$

Но если условие Ia) выполнено, то первый член принадлежит к $L(1, \infty)$; то же верно и для второго, так как

$$\int_1^\xi \frac{dx}{x^2}\int_1^x |f(t)|\,dt = -\frac{1}{\xi}\int_1^\xi |f(t)|\,dt + \int_1^\xi \frac{1}{x}|f(x)|\,dx \leqslant$$
$$\leqslant \int_1^\xi \frac{1}{x}|f(x)|\,dx < K.$$

Поэтому $\varphi'(x)$ принадлежит к $L(1,\infty)$ и, следовательно, выполняется первое требование условия Ic). Далее, интегрируя по частям, получаем

$$\frac{1}{x}\int_1^x f(t)\,dt = \frac{1}{x}\int_1^x t\cdot\frac{f(t)}{t}\,dt = \int_1^x \frac{f(t)}{t}\,dt - \frac{1}{x}\int_1^x\left(\int_1^t \frac{f(u)}{u}\,du\right)dt,$$

и так как $\dfrac{f(t)}{t}$, по условию Ia), принадлежит к $L(1,\infty)$, то правая часть этого равенства стремится к нулю; следовательно, и второе требование условия Ic) выполнено.

Можно показать, что Ic) не следует из Ib).

1.15. Суммируемость интегралов. Говорят, что интеграл $\displaystyle\int_0^\infty f(x)\,dx$ суммируем (C,α), где $\alpha \geqslant 0$, к значению I, если

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_0^\lambda \left(1-\frac{x}{\lambda}\right)^\alpha f(x)\,dx = I.$$

В случае $\alpha=0$ это означает обыкновенную сходимость. В случае $\alpha=1$ имеем

$$\int_0^\lambda \left(1-\frac{x}{\lambda}\right) f(x)\,dx = \frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda dx\int_0^x f(y)\,dy,$$

т.е. выражение, аналогичное среднему арифметическому

$$\frac{s_1+s_2+\ldots+s_n}{n}$$

в определении $(C,1)$-суммируемости рядов. В общем случае мы имеем процесс, аналогичный хорошо известному C-суммированию рядов. Отметим только следующие два главных момента: (I) этот процесс более общ, чем обыкновенная сходимость; например,

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_0^\lambda \sin ax\,dx \quad (a>0)$$

не существует, тогда как

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_0^\lambda \left(1-\frac{x}{\lambda}\right)\sin ax\,dx = \lim_{\lambda\to\infty}\left(\frac{1}{a}-\frac{\sin a\lambda}{a^2\lambda}\right) = \frac{1}{a}\,;$$

(II) этот процесс согласован с обыкновенной сходимостью, в том смысле, что если интеграл сходится, то он суммируем (C,α), и притом к тому же пределу, для всякого $\alpha>0$. Это утверждение есть частный случай следующей теоремы.

Если некоторый интеграл суммируем (C,α), где $\alpha\geqslant 0$, то он суммируем (C,β) для всех $\beta>\alpha$ к тому же самому значению.

Действительно, пусть
$$\varphi(\lambda,\alpha)=\int_0^\lambda\left(1-\frac{x}{\lambda}\right)^\alpha f(x)\,dx.$$
Тогда при $\beta>\alpha$ имеем
$$\begin{aligned}\int_0^\mu\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)^{\beta-\alpha-1}&\lambda^\alpha\varphi(\lambda,\alpha)\,d\lambda=\\&=\int_0^\mu\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)^{\beta-\alpha-1}\lambda^\alpha\,d\lambda\int_0^\lambda\left(1-\frac{x}{\lambda}\right)^\alpha f(x)\,dx=\\&=\int_0^\mu f(x)\,dx\int_x^\mu\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)^{\beta-\alpha-1}\left(1-\frac{x}{\lambda}\right)^\alpha\lambda^\alpha\,d\lambda=\\&=\frac{\Gamma(\beta-\alpha)\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\beta+1)}\,\mu^{\alpha+1}\int_0^\mu\left(1-\frac{x}{\mu}\right)^\beta f(x)\,dx,\end{aligned}$$
т.е.
$$\varphi(\mu,\beta)=\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha)\Gamma(\alpha+1)}\,\frac{1}{\mu^{\alpha+1}}\int_0^\mu\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)^{\beta-\alpha-1}\lambda^\alpha\varphi(\lambda,\alpha)\,d\lambda.$$
Поэтому
$$\varphi(\mu,\beta)-I=\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha)\Gamma(\alpha+1)}\,\frac{1}{\mu^{\alpha+1}}\int_0^\mu\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)^{\beta-\alpha-1}\lambda^\alpha[\varphi(\lambda,\alpha)-I]\,d\lambda.$$

Пусть $\varphi(\lambda,\alpha)\to I$, и пусть $|\varphi(\lambda,\alpha)-I|\leqslant M$ для всех λ и $\leqslant\varepsilon$ для $\lambda\geqslant\Delta$. Тогда
$$\begin{aligned}|\varphi(\mu,\beta)-I|\leqslant\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha)\Gamma(\alpha+1)}\Biggl(\frac{\varepsilon}{\mu^{\alpha+1}}\int_\Delta^\mu\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)^{\beta-\alpha-1}\lambda^\alpha\,d\lambda&+\\+\frac{M}{\mu^{\alpha+1}}\int_0^\Delta\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)^{\beta-\alpha-1}\lambda^\alpha\,d\lambda\Biggr)&.\end{aligned}$$
Первый член в правой части $\leqslant\varepsilon$ (так как он равен ε при $\Delta=0$), а второй, при фиксированном Δ, есть $O(\mu^{-\alpha-1})$. Поэтому, выбирая сначала Δ, а затем μ, получаем требуемое соотношение $\varphi(\mu,\beta)\to I$.

1.16. Суммируемость интегралов Фурье. Формальное вычисление даёт
$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi}\int_0^\lambda\left(1-\frac{u}{\lambda}\right)du&\int_{-\infty}^\infty f(t)\cos u(x-t)\,dt=\\&=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty f(t)\,dt\int_0^\lambda\left(1-\frac{u}{\lambda}\right)\cos u(x-t)\,du=\\&=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty f(t)\frac{2\sin^2\frac{1}{2}\lambda(x-t)}{\lambda(x-t)^2}\,dt.\qquad(1.16.1)\end{aligned}$$

Этот интеграл аналогичен интегралу Фейера в теории рядов Фурье. Мы будем рассматривать его как частный пример к следующей общей теореме.

Т е о р е м а 13. *Пусть*

$$K(x,y,\delta)=\begin{cases} O\left(\dfrac{1}{\delta}\right) & (|x-y|\leqslant\delta), \qquad (1.16.2)\\ O\left(\dfrac{\delta^{\alpha}}{|x-y|^{\alpha+1}}\right) & (|x-y|>\delta) \qquad (1.16.3)\end{cases}$$

для некоторого положительного α *и*

$$\lim_{\delta\to0}\int_x^{\infty}K(x,y,\delta)\,dy=\frac{1}{2},\quad \lim_{\delta\to0}\int_{-\infty}^{x}K(x,y,\delta)\,dy=\frac{1}{2}.$$

Пусть $\dfrac{f(x)}{1+|x|^{\alpha+1}}\in L(-\infty,\infty)$. *Если тогда*

$$\int_0^h|f(x+t)-\varphi(x)|\,dt=o(h),\quad \int_0^h|f(x-t)-\psi(x)|\,dt=o(h) \tag{1.16.4}$$

при $h\to0$, *то*

$$\lim_{\delta\to0}\int_{-\infty}^{\infty}K(x,y,\delta)f(y)\,dy=\frac{\varphi(x)+\psi(x)}{2}. \tag{1.16.5}$$

Таким образом, этот результат, в частности, имеет место

(I) *с* $\varphi(x)=f(x+0)$, $\psi(x)=f(x-0)$, *если эти выражения имеют смысл;*

(II) *с* $\varphi(x)=\psi(x)=f(x)$, *если* $f(x)$ *непрерывна;*

(III) *с* $\varphi(x)=\psi(x)=f(x)$ *почти для всех* x.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточно доказать, что

$$\lim_{\delta\to0}\int_x^{\infty}K(x,y,\delta)[f(y)-\varphi(x)]\,dy=0$$

и что аналогичное соотношение имеет место для $\psi(x)$. В силу (1.16.2) и (1.16.3), выписанное сейчас соотношение справедливо, если

$$\lim_{\delta\to0}\frac{1}{\delta}\int_x^{x+\delta}[f(y)-\varphi(x)]\,dy=0$$

и

$$\lim_{\delta\to0}\delta^{\alpha}\int_{x+\delta}^{\infty}\frac{|f(y)-\varphi(x)|}{|x-y|^{\alpha+1}}\,dy=0.$$

Первое из этих равенств непосредственно следует из (1.16.4). Пусть теперь

$$\chi(h) = \int_0^h |f(x+t) - \varphi(x)|\,dt \leqslant \varepsilon h$$

для $h \leqslant \eta$. Тогда

$$\delta^\alpha \int_{x+\delta}^{x+\eta} \frac{|f(y) - \varphi(x)|}{|x-y|^{\alpha+1}}\,dy = \delta^\alpha \int_\delta^\eta \frac{|f(x+t) - \varphi(x)|}{t^{\alpha+1}}\,dt = \delta^\alpha\, \frac{\chi(t)}{t^{\alpha+1}}\bigg|_\delta^\eta + \\ + (\alpha+1)\delta^\alpha \int_\delta^\eta \frac{\chi(t)}{t^{\alpha+2}}\,dt \leqslant \varepsilon + \varepsilon(\alpha+1)\delta^\alpha \int_\delta^\eta \frac{dt}{t^{\alpha+1}} < \varepsilon\left(1 + \frac{\alpha+1}{\alpha}\right).$$

При фиксированном же η, очевидно,

$$\lim_{\delta\to 0} \delta^\alpha \int_{x+\eta}^\infty \frac{|f(y) - f(x)|}{|x-y|^{\alpha+1}}\,dy = 0.$$

Это завершает доказательство теоремы, так как доказательство для $\psi(x)$ совершенно аналогично.

Пусть, в частности, $\delta = \dfrac{1}{\lambda}$ и

$$K(x, y, \delta) = \frac{2\sin^2 \frac{1}{2}\lambda(x-y)}{\pi\lambda(x-y)^2}\,.$$

Тогда условия теоремы выполнены (с $\alpha = 1$), и мы получаем[1] следующий аналог теоремы Фейера о рядах Фурье:

Т е о р е м а 14. *Пусть* $f(t) \in L(-\infty, \infty)$. *Тогда интеграл*

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\infty du \int_{-\infty}^\infty f(t) \cos u(x-t)\,dt$$

суммируем $(C, 1)$ *к* $\frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)]$ *там, где это выражение имеет смысл; к* $f(x)$ *там, где* $f(x)$ *непрерывна; и к* $f(x)$ *почти для всех значений* x.

Из этой теоремы вытекает в качестве очевидного следствия, что *если* $f(t) \in L(-\infty, \infty)$, *а функции* $a(u)$, $b(u)$, *определённые формулами* (1.1.3), *равны нулю для всех* u, *то* $f(x) = 0$ *почти для всех* x.

В качестве другого примера возьмём

$$\begin{aligned} K\left(x, y, \frac{1}{\lambda}\right) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\lambda \left(1 - \frac{u}{\lambda}\right)^\alpha \cos u(x-y)\,du = \\ &= \frac{\lambda}{\pi} \int_0^1 (1-v)^\alpha \cos \lambda v(x-y)\,dv = \\ &= \frac{\alpha}{\pi(x-y)} \int_0^1 (1-v)^{\alpha-1} \sin \lambda v(x-y)\,dv = \\ &= \frac{\alpha}{\pi\lambda^\alpha |x-y|^{\alpha+1}} \int_0^{\lambda|x-y|} \frac{\sin(\lambda|x-y| - w)}{w^{1-\alpha}}\,dw. \end{aligned}$$

[1] Hardy (5).

Второе из этих равенств показывает, что $K\left(x, y, \dfrac{1}{\lambda}\right)$ есть $O(\lambda)$, а четвёртое — что $K\left(x, y, \dfrac{1}{\lambda}\right)$ есть $O\left(\dfrac{1}{\lambda^\alpha |x-y|^{\alpha+1}}\right)$. Кроме того,

$$\int_x^{\to\infty} K\left(x, y, \frac{1}{\lambda}\right) dy = \frac{\alpha}{\pi} \int_x^{\to\infty} \frac{dy}{y-x} \int_0^1 (1-v)^{\alpha-1} \sin \lambda v(y-x)\, dv =$$
$$= \frac{\alpha}{\pi} \int_0^1 (1-v)^{\alpha-1}\, dv \int_0^{\to\infty} \frac{\sin \lambda v t}{t}\, dt = \frac{\alpha}{2} \int_0^1 (1-v)^{\alpha-1}\, dv = \frac{1}{2}.$$

Поэтому заключаем:

Теорема 15. *Теорема* 14 *сохраняет силу, если заменить* $(C, 1)$ *на* (C, α), *где* $0 < \alpha < 1$.

1.17. Сингулярный интеграл Коши[1]. В теореме предыдущего параграфа мы заменили интеграл Фурье пределом вида

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \varphi(\delta u)\, du \int_{-\infty}^\infty f(t) \cos u(x-t)\, dt. \tag{1.17.1}$$

Для суммируемости (C, α) мы брали

$$\varphi(u) = \begin{cases} (1-u)^\alpha & (0 < u < 1), \\ \quad 0 & (u \geqslant 1). \end{cases} \tag{1.17.2}$$

Положим теперь

$$\varphi(u) = e^{-u}. \tag{1.17.3}$$

Интеграл в (1.17.1) будет тогда равен

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty f(t)\, dt \int_0^\infty e^{-\delta u} \cos u(x-t)\, du =$$
$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty f(t) \frac{\delta}{\delta^2 + (x-t)^2}\, dt. \tag{1.17.4}$$

Таким образом, здесь

$$K(x, y, \delta) = \frac{1}{\pi} \frac{\delta}{\delta^2 + (x-y)^2}, \tag{1.17.5}$$

и условия теоремы 13 с $\alpha = 1$ снова выполнены. Отсюда, в частности, следует, что (1.17.4) стремится к $f(x)$ почти для всех x.

Этим результатом даётся строгое обоснование рассуждения Коши, изложенного в § 1.1. Интеграл (1.17.4) можно назвать сингулярным интегралом Коши. Полученный здесь тип суммируемости аналогичен «A-суммируемости» рядов.

[1] Cauchy (1), Sommerfeld (1), Hardy (4), (5).

1.18. Сингулярный интеграл Вейерштрасса. Положим теперь

$$\varphi(u) = e^{-u^2}.$$

Интеграл (1.17.1) равен тогда

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt \int_{0}^{\infty} e^{-\delta^2 u^2}\cos u(x-t)\,du = \\ = \frac{1}{2\delta\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\exp\left(-\frac{(x-t)^2}{4\delta^2}\right)dt.$$

Таким образом, здесь

$$K(x,y,\delta) = \frac{1}{2\delta\sqrt{\pi}}\exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4\delta^2}\right). \tag{1.18.1}$$

Этот интеграл называют *сингулярным интегралом Вейерштрасса*[1].

Условия теоремы 13 в этом случае выполнены для всякого положительного α; однако, верен ещё более общий результат.

Теорема 16. *Если* $K(x,y,\delta)$ *определена формулой* (1.18.1), *то утверждение теоремы* 13 *справедливо для всякой функции* $f(x)$, *такой, что* $e^{-Cx^2}f(x) \in L(-\infty,\infty)$ *при некотором положительном* C (*а значит, и при всех бо́льших значениях* C).

Доказательство. К интегралам по интервалам $(x, x+\delta)$ и $(x+\delta, x+\eta)$ можно применить те же рассуждения, что и проведённые в § 1.16 (скажем, $\alpha = 1$). Таким образом, остаётся показать, что для фиксированных x и η и всякой функции $g(y)$ принадлежащей к L, имеет место соотношение

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{1}{\delta}\int_{x+\eta}^{\infty}\exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4\delta^2} + Cy^2\right)g(y)\,dy = 0.$$

Но

$$-\frac{(x-y)^2}{4\delta^2} + Cy^2 = -\frac{(x-y)^2}{4\delta^2} + C(x-y)^2\frac{y^2}{(x-y)^2} \leqslant -\frac{(x-y)^2}{4\delta^2} + \frac{(x-y)^2}{8\delta^2}\,,$$

если

$$C \leqslant \frac{1}{8\delta^2}\,\frac{\eta^2}{(x+\eta)^2}\,,$$

так как при $y \geqslant x+\eta$

$$\frac{\eta^2}{(x+\eta)^2} = \left(1 - \frac{x}{x+\eta}\right)^2 \leqslant \left(1 - \frac{x}{y}\right)^2 = \frac{(x-y)^2}{y^2}\,.$$

Поэтому выражение, стоящее под знаком предела, по абсолютной величине не превышает

[1] Weierstrass (1), Hobson (1), Lebesgue (1), Hardy (6).

$$\frac{1}{\delta}\exp\left(-\frac{\eta^2}{8\delta^2}\right)\int_{x+\eta}^{\infty}|g(y)|\,dy,$$

а это выражение стремится к нулю при $\delta\to 0$.

1.19. Суммируемость интегралов в общем случае. Если нас интересует лишь случай, когда существуют $f(x+0)$ и $f(x-0)$, то мы можем пользоваться следующей теоремой, более простой, чем теорема 13.

Теорема 17. *Пусть* $K(x,y,\delta)\geqslant 0$

$$\lim_{\delta\to 0}\int_x^b K(x,y,\delta)\,dy=\frac{1}{2},\quad \lim_{\delta\to 0}\int_a^x K(x,y,\delta)\,dy=\frac{1}{2} \tag{1.19.1}$$

и

$$\lim_{\delta\to 0}K(x,y,\delta)=0 \tag{1.19.2}$$

равномерно для всех x и y, удовлетворяющих условию $|x-y|\geqslant\varepsilon>0$; пусть, кроме того, в случае $a=-\infty$, $b=\infty$,

$$\lim_{\delta\to 0}\int_{-\infty}^{x-\varepsilon}K(x,y,\delta)\,dy=0,\quad \lim_{\delta\to 0}\int_{x+\varepsilon}^{\infty}K(x,y,\delta)\,dy=0 \tag{1.19.3}$$

для всякого фиксированного положительного ε. Если $f(x)\in L(a,b)$, то

$$\lim_{\delta\to 0}\int_a^b K(x,y,\delta)f(y)\,dy=\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}, \tag{1.19.4}$$

в предположении, что правая часть существует.

Если $f(x)$ непрерывна в точке x, то условие (1.19.1) *можно заменить условием*

$$\lim_{\delta\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}K(x,y,\delta)\,dy=1. \tag{1.19.5}$$

Доказательство. Нам нужно доказать, что

$$\int_x^b K(x,y,\delta)[f(y)-f(x+0)]\,dy\to 0$$

и что аналогичное соотношение имеет место для интервала (a,x). Но выписанный интеграл по абсолютной величине не превосходит

$$\max_{x\leqslant y\leqslant x+\varepsilon}|f(y)-f(x+0)|\int_x^b K(x,y,\delta)\,dy+$$
$$+\max_{y>x+\varepsilon}K(x,y,\delta)\int_{x+\varepsilon}^b|f(y)|\,dy+|f(x+0)|\int_{x+\varepsilon}^b K(x,y,\delta)\,dy,$$

а эта сумма стремится к нулю, как можно показать, выбирая сначала ε, а затем δ. Аналогично докажем стремление к нулю интеграла, взятого по интервалу (a,x).

Соответственные части теорем суммируемости являются очевидными частными случаями этой теоремы. Однако, их можно получить также основываясь непосредственно на виде суммирующего множителя. А именно, имеет место следующий общий результат:

Теорема 18. *Пусть* $\varphi(x) \in L(0, \infty)$ *и имеет на интервале* $(0, \infty)$ *только конечное число максимумов и минимумов; пусть* $\varphi(+0) = 1$, *и пусть* $\varphi(x)$ *является интегралом от своей производной* $\varphi'(x)$, *которая, начиная с некоторого значения* x, *отрицательна и не убывает. Пусть* $f(x) \in L(-\infty, \infty)$. *Тогда*

$$\lim_{\delta\to 0} \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \varphi(\delta u)\, du \int_{-\infty}^\infty f(t) \cos u(x-t)\, dt = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2},$$

предполагая, что выражение в правой части существует.

Доказательство. Утверждаемый результат будет следовать из предыдущей теоремы, если мы покажем, что

$$K(x, y, \delta) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \varphi(\delta u) \cos u(x-y)\, du$$

обладает требуемыми там свойствами.

Предположим сначала, что $\varphi'(x)$ отрицательна и не убывает для всех x. Тогда

$$\begin{aligned} K(x, y, \delta) &= \frac{\delta}{\pi(x-y)} \int_0^\infty [-\varphi'(\delta u)] \sin u(x-y)\, du = \\ &= \frac{\delta}{\pi|x-y|} \sum_{n=0}^\infty \int_{\frac{n\pi}{|x-y|}}^{\frac{(n+1)\pi}{|x-y|}} [-\varphi'(\delta u)] \sin u|x-y|\, du. \end{aligned}$$

Эта сумма положительна и не превосходит значения первого своего члена. Поэтому

$$\begin{aligned} 0 \leqslant K(x, y, \delta) &\leqslant \frac{\delta}{\pi|x-y|} \int_0^{\frac{\pi}{|x-y|}} [-\varphi'(\delta u)]\, du = \\ &= \frac{1}{\pi|x-y|} \left\{ \varphi(+0) - \varphi\left(\frac{\pi\delta}{|x-y|}\right) \right\}, \end{aligned}$$

и так как правая часть этого неравенства при $\delta \to 0$ стремится к нулю равномерно для $|x-y| \geqslant \varepsilon$, то условие (1.19.2) для $K(x, y, \delta)$ выполнено. Далее,

$$\begin{aligned} &\int_x^\infty K(x, y, \delta)\, dy = -\frac{\delta}{\pi} \int_x^\infty \frac{dy}{x-y} \int_0^\infty \varphi'(\delta u) \sin u(x-y)\, du = \\ &= -\frac{\delta}{\pi} \int_0^\infty \varphi'(\delta u)\, du \int_x^\infty \frac{\sin u(x-y)}{x-y}\, dy = -\frac{\delta}{2} \int_0^\infty \varphi'(\delta u)\, du = \frac{\varphi(+0)}{2} = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

где обращение порядка интегрирования законно в силу мажорированной сходимости, так как $\varphi'(\delta u)$, в силу предположения теоремы, принадлежит к $L(0,\infty)$. Аналогично докажем, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(x,y,\delta)\,dy = \frac{1}{2}\,;$$

следовательно, условие (1.19.1) также выполнено. Точно так же,

$$\begin{aligned}\int_{Y}^{\infty} K(x,y,\delta)\,dy = -\frac{\delta}{\pi}\int_{0}^{\infty} \varphi'(\delta u)\,du \int_{Y}^{\infty} \frac{\sin u(x-y)}{x-y}\,dy = \\ = O\left(\delta\int_0^1[-\varphi'(\delta u)]\,du\right) + O\left(\frac{\delta}{Y}\int_1^{\infty}[-\varphi'(\delta u)]\,du\right) = \\ = O\big(\varphi(+0)-\varphi(\delta)\big) + O\left(\frac{1}{Y}\right).\end{aligned}$$

Выбирая здесь сначала Y достаточно большим, а затем δ достаточно малым, убеждаемся в том, что условие (1.19.3) следует из (1.19.2). Тем самым в этом случае утверждение теоремы доказано.

В общем случае $\varphi(x) = \varphi_1(x) - \varphi_2(x)$, где $\varphi_1'(x)$ и $\varphi_2'(x)$ неотрицательны и не убывают. Пусть K_1 и K_2 — соответствующие K-функции. Тогда K_1 и K_2 положительны и удовлетворяют условию (1.19.2). Далее, интегралы

$$\int_{-\infty}^{\infty} K_1(x,y,\delta)\,dy, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} K_2(x,y,\delta)\,dy$$

ограничены, и, наконец, (1.19.1) по-прежнему выполняется. Но эти условия, очевидно, достаточны для справедливости утверждения теоремы.

1.20. Во всех рассмотренных частных случаях мы имели

$$K(x,y,\delta) = K(x-y,\delta),$$

где $K(u,\delta)$ — чётная функция от u,

$$\int_0^{\infty} K(u,\delta)\,du = \frac{1}{2}$$

и

$$\lim_{\delta\to 0}\int_{\eta}^{\infty} K(u,\delta)\,du = 0$$

для всякого положительного η. Но при этих условиях функция

$$\chi(x,\delta) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x-y,\delta) f(y)\,dy$$

стремится к $f(x)$ не только в отдельных точках, но и *в среднем.*

Т е о р е м а 19. *Если $f(x) \in L(-\infty, \infty)$ и $K(u, \delta)$ — положительная функция, удовлетворяющая перечисленным условиям, то*

$$\lim_{\delta\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} |\chi(x,\delta) - f(x)|\, dx = 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеем

$$\chi(x,\delta) - f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} K(u,\delta)[f(x-u) - f(x)]\, du,$$

и

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\chi(x,\delta) - f(x)|\, dx \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} K(u,\delta)|f(x-u) - f(x)|\, du = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} K(u,\delta) du \int_{-\infty}^{\infty} |f(x-u) - f(x)|\, dx.$$

Но функция

$$\psi(u) = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x-u) - f(x)|\, dx$$

ограничена для всех u: $|\psi(u)| \leqslant M$, и стремится к нулю при $u \to 0$. Пусть $|\psi(u)| \leqslant \varepsilon$ при $|u| \leqslant \eta$. Тогда

$$\left|\int_{-\eta}^{\eta} K(u,\delta)\psi(u)\, du\right| \leqslant \varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} K(u,\delta)\, du = \varepsilon$$

и

$$\left|\int_{\eta}^{\infty} K(u,\delta)\psi(u)\, du\right| \leqslant M \int_{\eta}^{\infty} K(u,\delta)\, du,$$

$$\left|\int_{-\infty}^{-\eta} K(u,\delta)\psi(u)\, du\right| \leqslant M \int_{\eta}^{\infty} K(u,\delta)\, du.$$

Но правая часть последних двух неравенств, согласно предположению, стремится к нулю при $\delta \to 0$. Тем самым теорема доказана.

Например, в случае суммируемости $(C, 1)$ интеграл

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(y) \frac{1 - \cos\lambda(x-y)}{\lambda(x-y)^2}\, dy$$

сходится, в указанном смысле, в среднем к $f(x)$ при $\lambda \to \infty$. (Взять $\lambda = \dfrac{1}{\delta}$.)

1.21. Дальнейшие теоремы о суммируемости. Во всех предшествующих теоремах мы накладывали на $f(t)$ условия, обеспечивающие существование, в том или ином смысле, внутреннего интеграла в формуле Фурье. Теперь мы докажем теорему, в которой, не накладывая непосредственно на $f(t)$ никаких специальных ограничений, мы прямо будем требовать лишь существования указанного интеграла.

Так как, однако, при этом нас не будет специально интересовать поведение $f(t)$ на конечных интервалах, то для простоты мы будем предполагать, что $f(t)$ непрерывна.

Теорема 20[1]. *Пусть $f(t)$ интегрируема на каждом конечном интервале и непрерывна в точке $t = x$, и пусть интеграл*

$$\int_{\to -\infty}^{\to\infty} f(t) \cos u(x-t)\, dt$$

равномерно сходится в каждом конечном интервале значений u. Тогда, если $g(x,u)$ — значение этого интеграла, то

$$\lim_{\lambda\to\infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{\lambda} \left(1 - \frac{u}{\lambda}\right) g(x,u)\, du = f(x).$$

Доказательство. Имеем

$$\int_0^{\lambda}\left(1-\frac{u}{\lambda}\right) g(x,u)\,du = \int_{\to-\infty}^{\to\infty} f(t)\,dt \int_0^{\lambda}\left(1-\frac{u}{\lambda}\right)\cos u(x-t)\,du =$$

$$= \int_{\to-\infty}^{\to\infty} f(t)\frac{2\sin^2 \frac{1}{2}\lambda(x-t)}{\lambda(x-t)^2}\,dt = \int_{\to-\infty}^{-T} + \int_{-T}^{T} + \int_{T}^{\to\infty} = J_1 + J_2 + J_3$$

$(T > |x|)$. Обращение порядка интегрирования здесь законно в силу предположенной равномерной сходимости интеграла $g(x,u)$.

Положим

$$f_1(t) = \int_0^t f(v)\,dv.$$

Полагая в условии теоремы $u = 0$, получаем, что $f_1(t)$ ограничена: $|f_1(t)| \leqslant M$. Но, интегрируя по частям, имеем

$$J_3 = -f_1(T)\,\frac{2\sin^2\frac{1}{2}\lambda(x-T)}{\lambda(x-T)^2} + \\ + \int_T^{\infty} f_1(t)\frac{\sin\lambda(x-t)}{(x-t)^2}\,dt - \int_T^{\infty} f_1(t)\frac{4\sin^2\frac{1}{2}\lambda(x-t)}{\lambda(x-t)^3}\,dt.$$

Поэтому

$$|J_3| \leqslant \frac{2M}{\lambda(T-x)^2} + M\int_T^{\infty}\frac{dt}{(t-x)^2} + M\int_T^{\infty}\frac{4\,dt}{\lambda(t-x)^3} = \frac{4M}{\lambda(T-x)^2} + \frac{M}{T-x}\,.$$

Выбирая соответствующим образом T, мы можем сделать правую часть произвольно малой для всех $\lambda > \lambda_0$. Аналогичным образом оценим J_1. Фиксируя затем T и заменяя $f(t)$ функцией, совпадающей с $f(t)$ при $|t| \leqslant T$ и равной нулю при $|t| > T$, мы получим на основании теоремы 14 § 1.16, что $J_2 \to \pi f(x)$. Это завершает доказательство теоремы.

[1] Аналогичная теорема для интегралов Меллина была доказана Харди (Hardy (8)). См. Macphail and Titchmarsh (1).

1.22. Общим результатом в том же направлении является следующее предложение: если внутренний интеграл суммируем (C, k), то внешний суммируем $(C, k+1)$. Доказанная только что теорема есть частный случай этого предложения, соответствующий значению $k = 0$, а сейчас мы установим справедливость этого предложения при $k = 1$. Доказательство для общего случая не потребовало бы никаких новых идей, однако изложение его заняло бы слишком много места.

Теорема 21. *Пусть $f(t)$ интегрируема на каждом конечном интервале и непрерывна в точке $t = x$, и пусть пределы*

$$\lim_{\mu\to\infty} \int_0^{\mu} \left(1 - \frac{t}{\mu}\right) f(t) \cos u(x-t)\, dt$$

и

$$\lim_{\mu\to\infty} \int_{-\mu}^{0} \left(1 - \frac{|t|}{\mu}\right) f(t) \cos u(x-t)\, dt$$

существуют, равномерно на каждом конечном интервале значений u. Тогда, если $g(x, u)$ — сумма этих пределов, то

$$\lim_{\lambda\to\infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{\lambda} \left(1 - \frac{u}{\lambda}\right)^2 g(x, u)\, du = f(x).$$

Доказательство. Достаточно будет рассмотреть случай, когда $f(t) = 0$ при $t < 0$. В силу предположенной равномерной сходимости имеем

$$\int_0^{\lambda} \left(1 - \frac{u}{\lambda}\right)^2 g(x, u)\, du =$$
$$= \lim_{\mu\to\infty} \int_0^{\lambda} \left(1 - \frac{u}{\lambda}\right)^2 du \int_0^{\mu} \left(1 - \frac{t}{\mu}\right) f(t) \cos u(x-t)\, dt.$$

Двойной интеграл в правой части равен

$$\int_0^{\mu} \left(1 - \frac{t}{\mu}\right) f(t)\, dt \int_0^{\lambda} \left(1 - \frac{u}{\lambda}\right)^2 \cos u(x-t)\, du =$$
$$= \int_0^{\mu} \left(1 - \frac{t}{\mu}\right) f(t) \left(\frac{2}{\lambda(x-t)^2} - \frac{2\sin\lambda(x-t)}{\lambda^2(x-t)^3}\right) dt = \int_0^{T} + \int_T^{\mu} = J_1 + J_2$$

$(|x| < T < \mu)$. Определим $f_1(t)$, как выше, и пусть

$$f_2(t) = \int_0^t f_1(v)\, dv = t \int_0^t \left(1 - \frac{v}{t}\right) f(v)\, dv.$$

Из существования предела $g(x, u)$ при $u = 0$ вытекает, что функция $\dfrac{f_2(t)}{t}$ ограничена.

Интегрируя дважды по частям, получаем

$$J_2 = -\left(1 - \frac{T}{\mu}\right) f_1(T)\varphi(T) + \frac{1}{\mu}\left[f_2(\mu)\varphi(\mu) - f_2(T)\varphi(T)\right] +$$
$$+\left(1 - \frac{T}{\mu}\right) f_2(T)\varphi'(T) - \frac{2}{\mu}\int_T^\mu f_2(t)\varphi'(t)\,dt + \int_T^\mu \left(1 - \frac{t}{\mu}\right) f_2(t)\varphi''(t)\,dt,$$

где

$$\varphi(t) = \frac{2}{\lambda(x-t)^2} - \frac{2\sin\lambda(x-t)}{\lambda^2(x-t)^3},$$
$$\varphi'(t) = \frac{4}{\lambda(x-t)^3} + \frac{2\cos\lambda(x-t)}{\lambda(x-t)^3} - \frac{6\sin\lambda(x-t)}{\lambda^2(x-t)^4},$$
$$\varphi''(t) = \frac{12}{\lambda(x-t)^4} + \frac{2\sin\lambda(x-t)}{(x-t)^3} + \frac{12\cos\lambda(x-t)}{\lambda(x-t)^4} - \frac{24\sin\lambda(x-t)}{\lambda^2(x-t)^5}.$$

Устремляя $\mu \to \infty$ и используя ограниченность $\dfrac{f_2(t)}{t}$, получаем

$$J_1 \to \int_0^T f(t)\varphi(t)\,dt,$$
$$J_2 \to -f_1(T)\varphi(T) + f_2(T)\varphi'(T) + \int_T^\infty f_2(t)\varphi''(t)\,dt.$$

Мы можем выбрать T столь большим, чтобы последние два слагаемых были произвольно малы для всех $\lambda > \lambda_0$. При фиксированном же T и $\lambda \to \infty$ имеем $f_1(T)\varphi(T) \to 0$, а

$$\int_0^T f(t)\varphi(t)\,dt \to \pi f(x)$$

согласно теории интеграла Фейера (§ 1.16) и теореме о согласованности C-суммируемостей различных порядков (§ 1.15). Это завершает доказательство теоремы.

1.23. Как мы видели, суммируемость $(C, 1)$ в теореме 14 может быть заменена суммируемостью (C, α) с произвольно малым α. Но для теоремы 20 это уже не имеет места: ни в теореме 20, ни в теореме 21 порядок суммируемости внешнего интеграла не может быть понижен. Мы это продемонстрируем сейчас на примерах.

Пусть

$$I_\alpha(\lambda, t) = \int_0^\lambda \left(1 - \frac{u}{\lambda}\right)^\alpha \cos ut\,dt.$$

Как и в §1.16, для $0 < \alpha < 1$

$$I_\alpha(\lambda, t) = \frac{\alpha}{\lambda^\alpha t^{\alpha+1}} \int_0^{\lambda t} v^{\alpha-1}\sin(\lambda t - v)\,dv = O\left(\frac{1}{\lambda^\alpha t^{\alpha+1}}\right)$$

при $\lambda \to \infty$, $t \to \infty$. Далее,

$$\frac{\partial I_\alpha}{\partial t} = \frac{\alpha\lambda^{1-\alpha}}{t^{\alpha+1}} \int_0^{\lambda t} v^{\alpha-1} \cos(\lambda t - v)\, dv - \frac{\alpha(\alpha+1)}{\lambda^\alpha t^{\alpha+2}} \int_0^{\lambda t} v^{\alpha-1} \sin(\lambda t - v)\, dv =$$
$$= \frac{\alpha\lambda^{1-\alpha}}{t^{\alpha+1}} \int_0^{\to\infty} v^{\alpha-1} \cos(\lambda t - v)\, dv + O\left(\frac{1}{t^2}\right) + O\left(\frac{1}{\lambda^\alpha t^{\alpha+2}}\right) =$$
$$= \frac{\Gamma(\alpha+1)\lambda^{1-\alpha}}{t^{1+\alpha}} \cos\left(\lambda t - \frac{\pi\alpha}{2}\right) + O\left(\frac{1}{t^2}\right).$$

Допустим, что мы желаем доказать теорему 20 с заменой $(C, 1)$ на (C, α) с $0 < \alpha < 1$. Рассуждая, как в проведённом выше доказательстве теоремы 20, мы придём к рассмотрению интеграла

$$J_3 = \int_T^\infty f(t) I_\alpha(\lambda, x-t)\, dt = -f_1(T) I_\alpha(\lambda, x-T) + \int_T^\infty f_1(t) \frac{\partial}{\partial t} I_\alpha(\lambda, x-t)\, dt.$$

Зафиксируем число T, большее $|x|$. Тогда в правой части последнего равенства будут ограничены все слагаемые, за исключением, быть может, члена

$$\Gamma(\alpha+1)\lambda^{1-\alpha} \int_T^\infty \frac{f_1(t)}{t^{1+\alpha}} \cos\left(\lambda x - \lambda t - \frac{\pi\alpha}{2}\right) dt.$$

Пусть

$$f(t) = \frac{2^\nu \sin 2^\nu t}{\nu^2} \qquad (\nu\pi \leqslant t < (\nu+1)\pi;\ \nu = 1, 2, \dots)$$

и $f(t) = 0$ для остальных значений t. Тогда

$$f_1(t) = \frac{1 - \cos 2^\nu t}{\nu^2} \qquad (\nu\pi \leqslant t < (\nu+1)\pi;\ \nu = 1, 2, \dots).$$

Очевидно, интеграл

$$\int_0^T f(t) \cos u(x-t)\, dt = f_1(T) \cos u(x-T) - u \int_0^T f_1(t) \sin u(x-t)\, dt$$

при $T \to \infty$ стремится к пределу равномерно относительно u, так что условия теоремы 20 выполнены.

Положим $\lambda = 2^\rho$. Тогда

$$\int_\pi^\infty \frac{f_1(t)}{t^{1+\alpha}} \cos\lambda t\, dt = \sum_{\nu=1}^\infty \frac{1}{\nu^2} \int_{\nu\pi}^{(\nu+1)\pi} \frac{(1 - \cos 2^\nu t)\cos 2^\rho t}{t^{\alpha+1}}\, dt.$$

Член с номером $\nu = \rho$ равен

$$-\frac{1}{2\rho^2} \int_{\rho\pi}^{(\rho+1)\pi} \frac{dt}{t^{\alpha+1}} + \frac{1}{\rho^2} \int_{\rho\pi}^{(\rho+1)\pi} \left(\cos 2^\rho t - \frac{\cos 2^{\rho+1} t}{2}\right) \frac{dt}{t^{\alpha+1}} <$$
$$< -\frac{1}{2\rho^2(\rho+1)^\alpha \pi^\alpha} + O\left(\frac{1}{2^\rho}\right).$$

Сумма остальных членов равна

$$\sum_{\nu\neq\rho}\frac{1}{\nu^2}\int_{\nu\pi}^{(\nu+1)\pi}\left(\cos 2^\rho t-\frac{\cos(2^\nu-2^\rho)t}{2}-\frac{\cos(2^\nu+2^\rho)t}{2}\right)\frac{dt}{t^{\alpha+1}}=$$
$$=\sum_{\nu\neq\rho}O\left(\frac{1}{\nu^{\alpha+3}|2^\rho-2^\nu|}\right)=O\left(\frac{1}{2^\rho}\right).$$

Аналогично,

$$\int_\pi^\infty\frac{f_1(t)\sin\lambda t}{t^{\alpha+1}}\,dt=O\left(\frac{1}{2^\rho}\right).$$

Поэтому при $\lambda=2^\rho$

$$|J_3|>A\left|\cos\left(\lambda x-\frac{\pi\alpha}{2}\right)\right|\frac{\lambda^{1-\alpha}}{\ln^{\alpha+2}\lambda}+O(1).$$

Однако, последовательность $\cos\left(2^\rho x-\frac{1}{2}\pi\alpha\right)$ не стремится к нулю, так как если один её член мал, то следующий близок к $\cos\left(\frac{1}{2}\pi\alpha\right)$. Поэтому интеграл J_3 неограничен.

Но, по теореме 15, J_2 стремится к пределу. Так как, кроме того, J_1 здесь равно нулю, то, следовательно, интеграл

$$J=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)I_\alpha(\lambda,x-t)\,dt$$

для рассмотренной функции $f(t)$ неограничен. Таким образом, в теореме 20 $(C,1)$ нельзя заменить на (C,α), если $\alpha<1$.

Если $1<\alpha<2$, то мы можем представить $I_\alpha(\lambda,t)$ в виде

$$I_\alpha(\lambda,t)=\frac{\alpha}{\lambda t^2}-\frac{\alpha(\alpha-1)}{\lambda^\alpha t^{\alpha+1}}\int_0^{\lambda t}\frac{\cos(\lambda t-v)}{v^{2-\alpha}}\,dv.$$

Поэтому $\dfrac{\partial^2 I_\alpha}{\partial t^2}$ содержит член

$$\frac{\alpha(\alpha-1)\lambda^{2-\alpha}}{t^{\alpha+1}}\int_0^{\lambda t}\frac{\cos(\lambda t-v)}{v^{2-\alpha}}\,dv=$$
$$=\frac{\Gamma(\alpha+1)\lambda^{2-\alpha}}{t^{\alpha+1}}\sin\left(\lambda t-\frac{\pi\alpha}{2}\right)+O\left(\frac{1}{t^3}\right),$$

и рассуждая, как в §1.22, мы придём к рассмотрению выражения

$$\Gamma(\alpha+1)\lambda^{2-\alpha}\int_T^\infty\frac{f_2(t)}{t^{1+\alpha}}\sin\left(\lambda x-\lambda t-\frac{\pi\alpha}{2}\right)dt.$$

Пусть

$$f(t)=\frac{2^{2\nu}\cos 2^\nu t}{\nu^2}\qquad(\nu\pi\leqslant t<(\nu+1)\pi;\ \nu=1,2,\dots)$$

и $f(t)=0$ для остальных значений t. Тогда

$$f_2(t)=\frac{1-\cos 2^\nu t}{\nu^2} \qquad (\nu\pi\leqslant t<(\nu+1)\pi;\ \nu=1,2,\ldots).$$

Так как

$$\int_0^\mu\left(1-\frac{t}{\mu}\right)f(t)\cos u(x-t)\,dt=f_2(\mu)\frac{\cos u(x-\mu)}{\mu}-\\ -\int_0^\mu f_2(t)\left(\frac{2u}{\mu}\sin u(x-t)+\left(1-\frac{t}{\mu}\right)u^2\cos u(x-t)\right)dt,$$

очевидно, стремится к пределу при $\mu\to\infty$, то условия теоремы 21 выполнены.

Доказательство неограниченности выделенного члена проводится, как выше. Ограниченность остальных членов легко проверяется, и мы получаем, что и в теореме 21 $(C,2)$ нельзя заменить на (C,α), если $\alpha<2$.

1.24. Интегрированная форма формулы Фурье. Хорошо известно, что результат формального почленного интегрирования ряда Фурье сходится к интегралу соответствующей функции, независимо от того, сходится ли первоначальный ряд или нет. Соответствующая теорема для интегралов Фурье формулируется следующим образом.

Теорема 22. *Если $f(x)\in L(-\infty,\infty)$, то*

$$\int_0^\xi f(x)\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\to\infty}\frac{du}{u}\int_{-\infty}^\infty f(t)[\sin u(\xi-t)+\sin ut]\,dt, \tag{1.24.1}$$

$$\int_0^\xi f(x)\,dx=\frac{1}{2\pi}\lim_{\lambda\to\infty}\int_{-\lambda}^\lambda\frac{e^{-i\xi u}-1}{-iu}\,du\int_{-\infty}^\infty e^{iut}f(t)\,dt \tag{1.24.2}$$

для всех значении ξ, и

$$\int_0^\xi f(x)\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\to\infty}\frac{\sin\xi u}{u}\,du\int_0^\infty f(t)\cos ut\,dt, \tag{1.24.3}$$

$$\int_0^\xi f(x)\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\to\infty}\frac{1-\cos\xi u}{u}\,du\int_0^\infty f(t)\sin ut\,dt \tag{1.24.4}$$

для $\xi\geqslant 0$.

Доказательство. Эти формулы отвечают соответственно формулам (1.1.1), (1.1.6), (1.1.4), (1.1.5). Рассмотрим, например, (1.24.2). В силу равномерной сходимости имеем

$$\int_{-\lambda}^\lambda\frac{e^{-i\xi u}-1}{-iu}\,du\int_{-\infty}^\infty e^{iut}f(t)\,dt=\int_{-\infty}^\infty f(t)\,dt\int_{-\lambda}^\lambda\frac{e^{iu(t-\xi)}-e^{iut}}{-iu}\,du.$$

Внутренний интеграл, равный

$$2\int_0^\lambda \frac{\sin tu - \sin(t-\xi)u}{u}\,du,$$

ограничен для всех t и λ и при $\lambda \to \infty$ стремится к 2π, если $0 < t < \xi$, и к нулю, если $t < 0$ или $t > \xi$. Требуемое равенство получается теперь предельным переходом по $\lambda \to \infty$ на основании мажорированной сходимости. Остальные формулы легко выводятся из этой, либо могут быть доказаны аналогичным образом.

1.25. Комплексная форма интеграла Фурье. Теория комплексной формы интеграла Фурье в основном совпадает с теорией рассмотренных уже форм. Мы установим здесь вкратце наиболее существенные результаты.

До сих пор мы предполагали все функции вещественными. Однако, рассмотрение комплексных функций вещественной переменной не доставляет никаких дополнительных затруднений, и естественно применять комплексную форму теоремы Фурье именно к таким функциям. Все нужные определения непосредственно распространяются на комплексные функции вещественного переменного: такая функция $f(x)$ интегрируема, имеет ограниченное изменение и т.д., если соответствующими свойствами обладают в отдельности её вещественная и мнимая части.

Теорема 23. *Пусть $f(t)$ принадлежит к $L(-\infty, \infty)$, и пусть она имеет ограниченное изменение в окрестности точки $t = x$. Тогда*

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} = \frac{1}{2\pi}\lim_{\lambda\to\infty}\int_{-\lambda}^{\lambda} e^{-ixu}\,du\int_{-\infty}^{\infty} e^{iut}f(t)\,dt. \qquad (1.25.1)$$

Если $f(t)$ в окрестности точки $t = x$ удовлетворяет условиям теоремы 4, то левую часть формулы (1.25.1) можно заменить на $f(x)$.

Доказательство. В силу равномерной сходимости, можно обратить порядок интегрирования в правой части формулы (1.25.1). Тогда получим

$$\int_{-\lambda}^{\lambda} e^{-ixu}\,du\int_{-\infty}^{\infty} e^{iut}f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt\int_{-\lambda}^{\lambda} e^{-iu(x-t)}\,du = \\ = 2\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\frac{\sin\lambda(x-t)}{x-t}\,dt,$$

откуда требуемый результат будет следовать, как в доказательстве теоремы 3.

В качестве частного случая предположим дополнительно, что $f(z)$ аналитична для $y \geqslant 0$, причём $f(z) \to 0$, когда $|z| \to \infty$, равномерно для $0 \leqslant \arg z \leqslant \pi$. Тогда, как следует из леммы Жордана[1], $F(u) = 0$ для $u > 0$. Производя замену переменных, получаем формулы Лапласа (1.4.1), (1.4.2).

Используя функции $F_+(w)$ и $F_-(w)$, мы придём к теореме, налагающей меньшие ограничения на поведение $f(x)$ в бесконечности.

Теорема 24. *Пусть $e^{-c|t|}f(t) \in L(-\infty, \infty)$ для некоторого положительного c, так что функции $F_+(w)$, $F_-(w)$, определённые формулами* (1.3.1), (1.3.2), *существуют при $v \geqslant c$, $v \leqslant -c$ соответственно. Тогда, если $f(t)$ в окрестности точки $t = x$ удовлетворяет условиям, соответствующим условиям теорем* 3 *или* 4, *то*

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{\lambda\to\infty} \int_{ia-\lambda}^{ia+\lambda} e^{-ixw} F_+(w)\,dw + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{\lambda\to\infty} \int_{ib-\lambda}^{ib+\lambda} e^{-ixw} F_-(w)\,dw,$$

где $a \geqslant c$, $b \leqslant -c$.

Доказательство. Положим

$$g(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0), \\ e^{-ax} f(x) & (x > 0). \end{cases}$$

Тогда, по предыдущей теореме,

$$\frac{g(x+0)+g(x-0)}{2} = \frac{1}{2\pi} \lim_{\lambda\to\infty} \int_{-\lambda}^{\lambda} e^{-ixu}\,du \int_{-\infty}^{\infty} e^{iut} g(t)\,dt =$$
$$= \frac{1}{2\pi} \lim_{\lambda\to\infty} \int_{-\lambda}^{\lambda} e^{-ixu}\,du \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(u+ia)t} f(t)\,dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{\lambda\to\infty} \int_{-\lambda}^{\lambda} e^{-ixu} F_+(u+ia)\,du$$

или

$$e^{ax} \frac{g(x+0)+g(x-0)}{2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{\lambda\to\infty} \int_{ia-\lambda}^{ia+\lambda} e^{-ixw} F_+(w)\,dw.$$

Аналогично, полагая

$$h(x) = \begin{cases} e^{bx} f(x) & (x < 0), \\ 0 & (x > 0), \end{cases}$$

будем иметь

$$e^{-bx} \frac{h(x+0)+h(x-0)}{2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{\lambda\to\infty} \int_{ib-\lambda}^{ib+\lambda} e^{-ixw} F_-(w)\,dw.$$

Требуемый результат получим сложением.

[1] См. Уиттекер и Ватсон, Курс современного анализа, § 6.222.

1.26. Формула Перрона[1]**.** Из теоремы 24 может быть выведена формула, известная в теории рядов Дирихле под названием формулы Перрона.

Т е о р е м а 25. *Пусть ряд*

$$f(s)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$$

с вещественными монотонно возрастающими до бесконечности показателями λ_n *сходится при* $\sigma>\sigma_0$, *и пусть*

$$A(x)=\sum_{\lambda_n\leqslant x} a_n.$$

Тогда при $k>\max(0,\sigma_0)$,

$$\frac{A(x+0)+A(x-0)}{2}=\frac{1}{2\pi i}\lim_{T\to\infty}\int_{k-iT}^{k+iT} e^{sx}\,\frac{f(s)}{s}\,ds.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим

$$A_0=0,\quad A_n=a_1+a_2+\ldots+a_n.$$

Сумма $\sum\limits_{\nu=1}^{m} a_\nu e^{-\lambda_\nu\beta}$ при $\beta>\sigma_0$ ограничена для всех m, и потому, предполагая, кроме того, что $\beta>0$, имеем

$$A_n=\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu e^{-\lambda_\nu\beta}\cdot e^{\lambda_\nu\beta}=O\left(e^{\lambda_n\beta}\right).$$

Отсюда, обозначая через N наибольший номер n, для которого $\lambda_n\leqslant x$, получаем

$$A(x)=A_N=O\left(e^{\lambda_N\beta}\right)=O\left(e^{\beta x}\right).$$

Следовательно, для $\sigma>\beta$

$$f(s)=\sum_{n=1}^{\infty}(A_n-A_{n-1})e^{-\lambda_n s}=\sum_{n=1}^{\infty}A_n(e^{-\lambda_n s}-e^{-\lambda_{n+1}s})=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}A_n s\int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} e^{-sy}\,dy=s\int_0^{\infty} e^{-sy}A(y)\,dy.$$

Так как $A(y)$ имеет ограниченное изменение в каждом конечном интервале, то требуемый результат следует теперь из теоремы 24.

1.27. Теорема Фурье для аналитических функций. Следующая форма теоремы Фурье применима к некоторому классу аналитических функций.

[1] См. H a r d y and R i e s z, The General Theory of Dirichlet's Series, pp. 12—14.

Т е о р е м а 26. *Пусть $f(z)$ — аналитическая функция, регулярная в полосе $-a<y<b$, где $a>0$, $b>0$, и пусть в каждой полосе, внутренней к $-a<y<b$,*

$$f(z)=\begin{cases} O(e^{-(\lambda-\varepsilon)x}) & (x\to\infty),\\ O(e^{(\mu-\varepsilon)x}) & (x\to-\infty)\end{cases} \tag{1.27.1}$$

для всякого положительного ε, причём λ и μ — некоторые фиксированные положительные числа. Тогда функция $F(w)$, определённая формулой (1.2.5), удовлетворяет условиям, аналогичным наложенным на $f(z)$, с заменой a, b, λ, μ на λ, μ, b, a, и

$$f(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-izw}F(w)\,dw \tag{1.27.2}$$

для каждого z в полосе $-a<y<b$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеем:

$$F(w)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\zeta w}f(\zeta)\,d\zeta, \tag{1.27.2}$$

где интеграл равномерно сходится в полосе $-\lambda<v<\mu$. Поэтому $F(w)$ аналитична в этой полосе. Очевидное применение теоремы Коши позволяет заменить интеграл в правой части последней формулы интегралом по любой прямой, параллельной вещественной оси и лежащей в указанной полосе. Таким образом,

$$F(w)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i(\xi+i\eta)(u+iv)}f(\xi+i\eta)\,d\xi=O(e^{-\eta u}),$$

и выбирая η произвольно близким к $-a$ или b, мы получаем требуемую оценку порядка убывания функции $F(w)$.

Двойственная формула (1.27.2) может быть выведена из теоремы 23; она может быть также непосредственно доказана с помощью теоремы о вычетах. Пусть $-a<-\alpha<y<\beta<b$. Тогда

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty}e^{-izw}F(w)\,dw=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty}e^{-izw}\,dw\int_{i\beta-\infty}^{i\beta+\infty}e^{i\zeta w}f(\zeta)\,d\zeta=$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{i\beta-\infty}^{i\beta+\infty}f(\zeta)\,d\zeta\int_{0}^{\infty}e^{-i(z-\zeta)w}\,dw=\frac{1}{2\pi i}\int_{i\beta-\infty}^{i\beta+\infty}\frac{f(\zeta)}{z-\zeta}\,d\zeta,$$

где обращение порядка интегрирования законно в силу абсолютной сходимости интеграла. Аналогично,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0}e^{-izw}F(w)\,dw=\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\alpha-\infty}^{-i\alpha+\infty}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta,$$

и очевидное применение теоремы о вычетах показывает, что сумма правых частей этих формул равна $f(z)$.

1.28. Суммируемость комплексной формы интеграла Фурье. Ряд теорем суммируемости очевидным образом распространяется на комплексную форму интеграла Фурье. Достаточно будет привести одну из таких теорем.

Т е о р е м а 27. *Пусть* $f(t) \in L(-\infty, \infty)$ *или, более обще, пусть*

$$\int_{\to-\infty}^{\to\infty} e^{iut} f(t)\, dt$$

равномерно сходится в каждом конечном интервале. Тогда

$$\frac{1}{2\pi} \lim_{\lambda\to\infty} \int_{-\lambda}^{\lambda} \left(1 - \frac{|u|}{\lambda}\right) e^{-ixu}\, du \int_{\to-\infty}^{\to\infty} e^{iut} f(t)\, dt$$

равно $\frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)]$, *когда это выражение имеет смысл; равно* $f(x)$, *когда* $f(x)$ *непрерывна; и во всяком случае равно* $f(x)$ *почти для всех значений* x.

Действительно, после обращения порядка интегрирования рассматриваемый интеграл принимает вид (1.16.1), и утверждения теоремы следуют тогда из теорем 14 и 20.

1.29. Формула обращения Меллина. Теоремы, относящиеся к формуле Меллина, могут быть получены из теорем, относящихся к формуле Фурье, путём замены переменной — так же, как и сама формула Меллина была получена из формулы Фурье в § 1.5; разумеется, никакого труда не представило бы, путём соответствующего перевода всех рассуждений, получить в каждом отдельном случае непосредственное доказательство.

Мы сформулируем здесь лишь наиболее важные теоремы.

Т е о р е м а 28. *Пусть* $y^{k-1} f(y) \in L(0, \infty)$, *и пусть* $f(y)$ *имеет ограниченное изменение в окрестности точки* $y = x$. *Положим*

$$\mathfrak{F}(s) = \int_0^\infty f(x) x^{s-1}\, dx \quad (s = k + it). \tag{1.29.1}$$

Тогда

$$\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} = \frac{1}{2\pi i} \lim_{T\to\infty} \int_{k-iT}^{k+iT} \mathfrak{F}(s) x^{-s}\, ds. \tag{1.29.2}$$

Т е о р е м а 29. *Пусть* $\mathfrak{F}(k + iu) \in L(-\infty, \infty)$ *и имеет ограниченное изменение в окрестности точки* $u = t$. *Положим*

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{k-i\infty}^{k+i\infty} \mathfrak{F}(s) x^{-s}\, ds. \tag{1.29.3}$$

Тогда

$$\frac{\mathfrak{F}(k+i(t+0))+\mathfrak{F}(k+i(t-0))}{2}=\lim_{\lambda\to\infty}\int_{1/\lambda}^{\lambda}f(x)x^{k+it-1}\,dx. \qquad (1.29.4)$$

Обе теоремы получаются с помощью замены переменной из теоремы 23.

В некоторых применениях требуется следующая теорема:

Теорема 30. *Пусть*

$$\mathfrak{F}(k+it)=\varphi(t)e^{i\psi(t)},$$

где $\varphi(t)$ *и* $\psi(t)$ *удовлетворяют условиям теоремы* 11 *как при* $t\to\infty$, *так и* $t\to-\infty$; *либо пусть*

$$e^{kx}f(e^x)=\varphi(x)e^{i\psi(x)},$$

где φ *и* ψ *удовлетворяют указанным условиям. Тогда имеют место формулы Меллина, с не абсолютно сходящимися интегралами.*

Эта теорема получается из теоремы 11 с помощью обычных подстановок.

Теорема 31. *Пусть* $f(z)$ — *аналитическая функция от* $z=re^{i\theta}$ *регулярная при* $-\alpha<\theta<\beta$, *где* $0<\alpha\leqslant\pi$, $0<\beta\leqslant\pi$, *и пусть* $f(z)$ *есть* $O(|z|^{-a-\varepsilon})$ *для малых* z *и* $O(|z|^{-b+\varepsilon})$ *для больших* z, *равномерно в любом угле, внутреннем к указанному выше, причём* $a<b$. *Тогда* $\mathfrak{F}(s)$, *определённая формулой* (1.29.1), *есть аналитическая функция от* s, *регулярная при* $a<\sigma<b$ *и удовлетворяющая условиям*

$$\mathfrak{F}(s)=\begin{cases}O(e^{-(\beta-\varepsilon)t}) & (t\to\infty),\\ O(e^{(\alpha-\varepsilon)t}) & (t\to-\infty)\end{cases}$$

для всякого положительного ε, *равномерно в каждой полосе, внутренней к* $a<\sigma<b$, *причём имеет место формула* (1.29.3) *при* $a<k<b$.

Обратно, если $\mathfrak{F}(s)$ *есть заданная функция, удовлетворяющая указанным условиям, то функция* $f(x)$, *определённая формулой* (1.29.3), *удовлетворяет наложенным на неё раньше условиям, и имеет место формула* (1.29.1).

Эта теорема следует из теоремы 26 и может быть также легко доказана с помощью аналогичного рассуждения.

Теорема 32. *Пусть* $x^{k-1}f(x)\in L(0,\infty)$, *или, более обще, пусть интеграл*

$$\int_{\to 0}^{\to\infty}f(x)x^{k-1}\,dx=\mathfrak{F}(s) \qquad (1.29.5)$$

равномерно сходится для $s=k+it$ *в любом конечном интервале изменения* t. *Тогда*

$$\frac{1}{2\pi i}\lim_{\lambda\to\infty}\int_{k-i\infty}^{k+i\infty}\left(1-\frac{|t|}{\lambda}\right)\mathfrak{F}(s)x^{-s}\,ds$$

равно $\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]$, *когда последнее выражение имеет смысл; в частности, равно* $f(x)$, *когда* $f(x)$ *непрерывна; и, наконец, во всяком случае, равно* $f(x)$ *почти для всех* x.

Обратно, если $\mathfrak{F}(k+it)$ *принадлежит к* L, *то почти всюду*

$$\lim_{\mu\to\infty}\int_{1/\mu}^{\mu}\left(1-\frac{|\ln x|}{\ln\mu}\right)f(x)x^{s-1}\,dx=\mathfrak{F}(s).$$

Эта теорема следует из теоремы 27 с помощью обычной замены переменной.

В частном случае[1] получаем, что если интегралы

$$\int_{\to 0}f(x)x^{a-1}\,dx,\quad \int^{\to\infty}f(x)x^{b-1}\,dx,$$

где $a<b$, сходятся, то утверждение теоремы выполняется при $a<k<b$. Действительно, тогда интеграл (1.29.5) равномерно сходится в каждой конечной области, внутренней к полосе $a<\sigma<b$. В этом случае $\mathfrak{F}(s)$ аналитична в указанной полосе.

1.30. Формулы Лапласа. Простейшей теоремой, относящейся к формуле (1.4.3), является

Т е о р е м а 33. *Для того, чтобы* $f(z)$ *была представима в виде*

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}e^{zw}\varphi(w)\,dw,\tag{1.30.1}$$

где Γ — *замкнутый контур, окружающий начало координат, необходимо и достаточно, чтобы* $f(z)$ *была целой функцией экспоненциального типа, т.е. чтобы* $f(z)=O(e^{c|z|})$ *для некоторого* $c>0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Формула (1.30.1), очевидно, определяет целую функцию от z; и если на контуре Γ выполнено неравенство $|w|\leqslant c$, то $f(z)=O(e^{c|z|})$. Таким образом, условие теоремы необходимо.

Обратно, предположим, что оно выполнено, и пусть

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n.$$

Тогда, по неравенству Коши,

$$|a_n|\leqslant\frac{1}{r^n}\max_{|z|=r}|f(z)|<\frac{Ke^{cr}}{r^n}$$

[1] Hardy (8).

для всех значений r. В частности, при $r = n$ получаем

$$|a_n| < Ke^{cn}n^{-n}.$$

Поэтому ряд

$$\varphi(w) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!a_n}{w^{n+1}}$$

сходится при достаточно больших w, скажем, при $|w| > M$. Пусть Γ — простой замкнутый контур, окружающий начало координат и лежащий целиком вне окружности $|w| = M$. Тогда, в силу равномерной сходимости,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{zw}\varphi(w)\,dw = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!a_n}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{e^{zw}}{w^{n+1}}\,dw = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = f(z),$$

что и завершает доказательство теоремы.

Как и в § 1.4, двойственной формулой служит

$$\varphi(w) = \int_0^\infty e^{-xw} f(x)\,dx,$$

но она имеет место, вообще говоря, лишь при $\operatorname{Re} w > c$.

Для того, чтобы функция $f(z)$, определённая формулой (1.30.1), тождественно обращалась в нуль, очевидно, не обязательно, чтобы $\varphi(w)$ обращалась в нуль: достаточно, чтобы $\varphi(w)$ была регулярна внутри Γ. Поэтому, при заданных $f(z)$ и Γ, формула (1.30.1) не определяет однозначным образом $\varphi(w)$. Однако, если дополнительно потребовать, чтобы $\varphi(w)$ была в бесконечности регулярна и равна нулю, то эта функция уже однозначно определяется формулой (1.30.1). Мы установим сейчас более общий результат в том же направлении.

Теорема 34. *Пусть $\varphi(w)$ регулярна для достаточно больших w, за исключением полюса n-го порядка в бесконечности, Если тогда*

$$\int_\Gamma e^{tw}\varphi(w)\,dw = 0$$

для всех t, где Γ — простой замкнутый контур, окружающий начало, то

$$\varphi(w) = a_0 + a_1 w + \ldots + a_n w^n.$$

Доказательство. Положим

$$\psi(w) = \varphi(w) - a_0 - a_1 w - \ldots - a_n w^n,$$

где $a_0 + a_1 w + \ldots + a_n w^n$ — главная часть функции $\varphi(w)$ в бесконечности. Тогда

$$\int_\Gamma e^{tw}\psi(w)\,dw = 0,$$

причём $\psi(w) \to 0$, когда $|w| \to \infty$. Умножая на e^{-zt}, где $\operatorname{Re} z > \max\limits_{\Gamma} \operatorname{Re} w$, и интегрируя от 0 до ∞, мы получим

$$\int_{\Gamma} \frac{\psi(w)}{z-w}\, dw = 0,$$

и это равенство аналитически продолжается на всю область значений z, внешнюю к Γ. Поэтому, обозначая через Γ' окружность радиуса $R > |z|$, имеем

$$\psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'} \frac{\psi(w)}{w-z}\, dw = 0.$$

Но правая часть этого равенства при $R \to \infty$ стремится к нулю. Следовательно, $\psi(z) = 0$.

II
ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ФОРМУЛЫ

2.1. Формальные соотношения. Если $F(x)$ и $G(x)$ суть трансформации Фурье функций $f(x)$ и $g(x)$ соответственно, то имеем формально

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(x)G(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} G(x)\,dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt} f(t)\,dt =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt \int_{-\infty}^{\infty} G(x)e^{ixt}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(-t)\,dt. \qquad (2.1.1)$$

Если $g(t)$ заменить на $\overline{g(-t)}$, то $G(x)$ заменится на $\overline{G(x)}$, и мы получим равносильную формулу

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(x)\overline{G(x)}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}\,dx. \qquad (2.1.2)$$

В частности, при $g = f$ получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(x)|^2\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\,dx. \qquad (2.1.3)$$

Для чётных функций эти формулы приводятся к

$$\int_0^{\infty} F_c(x)G_c(x)\,dx = \int_0^{\infty} f(x)g(x)\,dx \qquad (2.1.4)$$

и

$$\int_0^{\infty} [F_c(x)]^2\,dx = \int_0^{\infty} f^2(x)\,dx, \qquad (2.1.5)$$

а для нечётных функций — к

$$\int_0^{\infty} F_s(x)G_s(x)\,dx = \int_0^{\infty} f(x)g(x)\,dx \qquad (2.1.6)$$

и

$$\int_0^{\infty} [F_s(x)]^2\,dx = \int_0^{\infty} f^2(x)\,dx. \qquad (2.1.7)$$

Эти формулы аналогичны формуле Парсеваля

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f^2(x)\,dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$$

из теории рядов Фурье; поэтому мы их также будем называть *формулами Парсеваля*[1].

Далее, снова формально,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixt}F(t)G(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixt}F(t)\,dt\int_{-\infty}^{\infty} e^{itu}g(u)\,du = \\ = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g(u)\,du\int_{-\infty}^{\infty} e^{-it(x-u)}F(t)\,dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} g(u)f(x-u)\,du. \tag{2.1.8}$$

Таким образом, функции

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} g(u)f(x-u)\,du, \quad F(x)G(x) \tag{2.1.9}$$

представляют собой пару трансформаций Фурье. Интеграл в правой части формулы (2.1.8) называется *свёрткой* функций $f(x)$ и $g(x)$. Процесс образования свёртки можно, очевидно, повторять. Мы получим, что функции

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} h(v)\,dv\int_{-\infty}^{\infty} g(u)f(x-u-v)\,du, \quad F(x)G(x)H(x) \tag{2.1.10}$$

являются парой трансформаций Фурье, и то же верно вообще для функций

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{-\infty}^{\infty} f_n(u_n)\,du_n\int_{-\infty}^{\infty} f_{n-1}(u_{n-1})\,du_{n-1}\ldots \\ &\qquad\qquad \ldots\int_{-\infty}^{\infty} f_1(u_1)f(x-u_1-\ldots-u_n)\,du_1 \\ &\qquad\qquad \text{и} \qquad F(x)F_1(x)\ldots F_n(x). \end{aligned}\right\} \tag{2.1.11}$$

Аналогичные формулы имеют место и для трансформаций Меллина. Их можно получить путём преобразования приведённых выше формул, либо вывести непосредственно следующим образом. Если $\mathfrak{F}(s)$, $\mathfrak{G}(s)$ суть трансформации Меллина функций $f(x)$ и $g(x)$, то

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{k-i\infty}^{k+i\infty} \mathfrak{F}(s)\mathfrak{G}(1-s)\,ds = \frac{1}{2\pi i}\int_{k-i\infty}^{k+i\infty} \mathfrak{G}(1-s)\,ds\int_0^{\infty} f(x)x^{s-1}\,dx = \\ = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{\infty} f(x)\,dx\int_{k-i\infty}^{k+i\infty} \mathfrak{G}(1-s)x^{s-1}\,ds = \int_0^{\infty} f(x)g(x)\,dx, \tag{2.1.12}$$

[1] Первое известное мне упоминание об этих формулах имеется у Рэлея (Rayleigh (1)). См. также Hardy (3–5), Ramanujan (1).

или, иначе,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{k-i\infty}^{k+i\infty}\mathfrak{F}(s)\mathfrak{G}(1-s)\,ds=\frac{1}{2\pi i}\int_{k-i\infty}^{k+i\infty}\mathfrak{F}(s)\,ds\int_0^\infty g(x)x^{-s}\,dx=$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty g(x)\,dx\int_{k-i\infty}^{k+i\infty}\mathfrak{F}(s)x^{-s}\,ds=\int_0^\infty g(x)f(x)\,dx.$$

Подобным же образом

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{k-i\infty}^{k+i\infty}\mathfrak{F}(s)\mathfrak{G}(s)\,ds=$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty g(x)\,dx\int_{k-i\infty}^{k+i\infty}\mathfrak{F}(s)x^{s-1}\,ds=\int_0^\infty g(x)f\left(\frac{1}{x}\right)\frac{dx}{x}. \qquad (2.1.13)$$

Если $g=f$, причём f вещественна, то (2.1.12) с $k=\frac{1}{2}$ даёт

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty\left|\mathfrak{F}\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2dt=\int_0^\infty f^2(x)\,dx. \qquad (2.1.14)$$

Далее

$$\int_0^\infty f(x)g(x)x^{s-1}\,dx=\frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty g(x)x^{s-1}\,dx\int_{k-i\infty}^{k+i\infty}\mathfrak{F}(w)x^{-w}\,dw=$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{k-i\infty}^{k+i\infty}\mathfrak{F}(w)\,dw\int_0^\infty g(x)x^{s-w-1}\,dx=$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{k-i\infty}^{k+i\infty}\mathfrak{F}(w)\mathfrak{G}(s-w)\,dw, \qquad (2.1.15)$$

т.е. функции

$$f(x)g(x),\quad \frac{1}{2\pi i}\int_{k-i\infty}^{k+i\infty}\mathfrak{F}(w)\mathfrak{G}(s-w)\,dw \qquad (2.1.16)$$

являются парой трансформаций Меллина.

С другой стороны,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{k-i\infty}^{k+i\infty}\mathfrak{F}(s)\mathfrak{G}(s)x^{-s}\,ds=$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty g(u)\,du\int_{k-i\infty}^{k+i\infty}\mathfrak{F}(s)u^{s-1}x^{-s}\,ds=\int_0^\infty g(u)f\left(\frac{x}{u}\right)\frac{du}{u}; \qquad (2.1.17)$$

последний интеграл можно рассматривать как свёртку особого вида. Мы получили, таким образом, в качестве пары трансформаций Меллина пару функций

$$\int_0^\infty g(u)f\left(\frac{x}{u}\right)\frac{du}{u},\quad \mathfrak{F}(s)\mathfrak{G}(s). \qquad (2.1.18)$$

Повторно применяя тот же процесс, мы получим в качестве пары трансформаций Меллина

$$\left.\begin{aligned}\int_0^\infty f_n(u_n)\,\frac{du_n}{u_n}\int_0^\infty f_{n-1}(u_{n-1})\frac{du_{n-1}}{u_{n-1}}\ldots\int_0^\infty f_1(u_1)f\left(\frac{x}{u_1u_2\ldots u_n}\right)\frac{du_1}{u_1}\,,\\ \mathfrak{F}(s)\mathfrak{F}_1(s)\ldots\mathfrak{F}_n(s).\end{aligned}\right\} \tag{2.1.19}$$

Из интегральной формулы Лапласа мы выведем аналогичным образом формулы

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_{k-i\infty}^{k+i\infty}\varphi(s)\psi(s)e^{sx}\,ds &= \frac{1}{2\pi i}\int_{k-i\infty}^{k+i\infty}\psi(s)e^{sx}\,ds\int_0^\infty f(y)e^{-sy}\,dy = \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty f(y)\,dy\int_{k-i\infty}^{k+i\infty}\psi(s)e^{s(x-y)}\,ds = \\ &= \int_0^x f(y)g(x-y)\,dy \qquad (2.1.20)\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_{k-i\infty}^{k+i\infty}\varphi(s)\psi(-s)e^{sx}\,ds &= \frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty f(y)\,dy\int_{k-i\infty}^{k+i\infty}\psi(-s)e^{s(x-y)}\,ds = \\ &= \int_{\max(x,0)}^\infty f(y)g(y-x)\,dy. \qquad (2.1.21)\end{aligned}$$

Можно также, не меняя существенно формул, ввести в них параметры. Так как

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty e^{ixy}f(ay)\,dy = \frac{1}{a\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty e^{ixu/a}f(u)\,dy = \frac{1}{a}\,F\left(\frac{x}{a}\right),$$

то трансформацией функции $f(ay)$ служит $\frac{1}{a}\,F\left(\frac{x}{a}\right)$. Таким образом, имеем, например,

$$\int_{-\infty}^\infty f(at)g(-bt)\,dt = \frac{1}{ab}\int_{-\infty}^\infty F\left(\frac{x}{a}\right)G\left(\frac{x}{b}\right)dx. \tag{2.1.22}$$

Аналогичные изменения могут быть произведены и в других формулах. Так, например,

$$\int_0^\infty f(ax)x^{s-1}\,dx = a^{-s}\int_0^\infty f(\xi)\xi^{s-1}\,d\xi,$$

так что трансформацией Меллина функции $f(ax)$ служит $a^{-s}\mathfrak{F}(s)$. Поэтому

$$\int_0^\infty f(ax)g(bx)\,dx = \frac{1}{2\pi i}\int_{k-i\infty}^{k+i\infty}\mathfrak{F}(s)\mathfrak{G}(1-s)a^{-s}b^{s-1}\,ds, \tag{2.1.23}$$

и аналогично в других формулах.

2.2. Условия применимости. Мы дадим теперь ряд условий, при которых применимы формулы, выведенные формально в предыдущем параграфе. Некоторые наиболее важные условия связаны с теорией сходимости в среднем и должны быть отложены до следующих глав. Условия, которые будут даны сейчас, устанавливаются с помощью методов, сходных с применёнными в главе I.

Мы начнём с формулы (2.1.1) и её частных случаев.

Теорема 35. *Если $f(x)$ и $G(x)$ принадлежат к $L(-\infty,\infty)$, а $F(x)$ и $g(x)$ — их трансформации Фурье, то формула* (2.1.1) *имеет место.*

Действительно, обращение порядка интегрирования, применённое при выводе формулы (2.1.1), законно вследствие абсолютной сходимости интегралов. В теореме предполагается, что f и G суть заданные функции, а F и g определены как их трансформации Фурье.

В этой теореме, разумеется, содержатся соответствующие теоремы для косинус- и синус-трансформаций Фурье.

Из теоремы 35 следует также, что если $f(x)$ и $g(x)$ принадлежат к $L(-\infty,\infty)$, а $G(x)$, определённая как трансформация Фурье функции $g(x)$, также принадлежит к $L(-\infty,\infty)$, то формула (2.1.1) справедлива. Действительно, тогда, по теореме 27, $g(x)$ есть трансформация Фурье функции $G(x)$.

2.3. Теперь мы обратимся к некоторым случаям формулы Парсеваля, на которые наводит теорема 6. Здесь условия более удобно формулируются для полупрямой $(0,\infty)$, и мы рассмотрим косинус- и синус-трансформации раздельно.

Теорема 36[1]. *Пусть $f(x)$ принадлежит к $L(0,\infty)$ и в некотором интервале, имеющем своим левым концом* 0, *монотонно стремится к пределу при $x\to 0$. Пусть, далее, $g(x)$ — косинус-трансформация Фурье функции $G_c(x)$, интегрируемой на каждом конечном интервале и монотонно стремящейся к нулю при $x\to\infty$. Тогда*

$$\int_0^{\to\infty} F_x(x)G_c(x)\,dx = \int_{\to 0}^{\infty} f(x)g(x)\,dx. \tag{2.3.1}$$

Доказательство. Нам надлежит установить справедливость равенства

$$\int_0^{\to\infty} G_c(y)\,dy\int_0^{\infty} f(x)\cos xy\,dx = \int_{\to 0}^{\infty} f(x)\,dx\int_0^{\to\infty} G_c(y)\cos xy\,dy. \tag{2.3.2}$$

[1] Hardy (5).

Но, в силу равномерной сходимости,

$$\int_0^{\lambda} G_c(y)\,dy \int_{\delta}^{\infty} f(x)\cos xy\,dx = \int_{\delta}^{\infty} f(x)\,dx \int_0^{\lambda} G_c(y)\cos xy\,dy \tag{2.3.3}$$

для каждого конечного λ. Далее, по второй теореме о среднем значении,

$$\int_{\lambda}^{\to\infty} G_c(y)\cos xy\,dy = G_c(\lambda)\int_{\lambda}^{\lambda'} \cos xy\,dy = O\left(\frac{G_c(\lambda)}{x}\right).$$

Поэтому

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_{\delta}^{\infty} f(x)\,dx \int_{\lambda}^{\to\infty} G_c(y)\cos xy\,dy = 0, \tag{2.3.4}$$

и равенства (2.3.3), (2.3.4) дают

$$\int_0^{\to\infty} G_c(y)\,dy \int_{\delta}^{\infty} f(x)\cos xy\,dx = \int_{\delta}^{\infty} f(x)\,dx \int_0^{\to\infty} G_c(y)\cos xy\,dy \tag{2.3.5}$$

для каждого $\delta > 0$. Теперь достаточно доказать, что

$$\lim_{\delta\to 0}\int_0^{\to\infty} G_c(y)\,dy \int_0^{\delta} f(x)\cos xy\,dx = 0. \tag{2.3.6}$$

Но

$$\int_{y_1}^{y_2} G_c(y)\,dy \int_0^{\delta} f(x)\cos xy\,dx = \int_0^{\delta} f(x)\,dx \int_{y_1}^{y_2} G_c(y)\cos xy\,dy =$$
$$= f(+0)\int_0^{\xi} dx \int_{y_1}^{y_2} G_c(y)\cos xy\,dy = f(+0)\int_{y_1}^{y_2} G_c(y)\frac{\sin\xi y}{y}\,dy,$$

где $0 < \xi < \delta$; далее,

$$\int_Y^{y_2} G_c(y)\frac{\sin\xi y}{y}\,dy = G_c(Y)\int_Y^{\eta}\frac{\sin\xi y}{y}\,dy = O\{G_c(Y)\}$$

равномерно для всех ξ, тогда как, при фиксированном Y,

$$\int_{y_1}^{Y} G_c(y)\frac{\sin\xi y}{y}\,dy \to 0,$$

когда $\xi \to 0$. Таким образом, мы получим требуемый результат, выбрав сначала Y достаточно большим и затем δ достаточно малым.

Теорема 37. *Аналогичная теорема верна и для синус-трансформаций Фурье, если дополнительно предположить, что функция* $\dfrac{G_s(x)}{x}$ *принадлежит к* $L(1,\infty)$.

Действительно, в этом случае мы встречаемся на последнем этапе доказательства с интегралом

$$\int_{y_1}^{y_2} G_s(y)\frac{1-\cos\xi y}{y}\,dy,$$

и дополнительное условие обеспечивает стремление его к нулю при $\xi \to 0$ на основании мажорированной сходимости.

2.4. В предыдущих теоремах ограничения накладывались на функции, находящиеся в противоположных частях формулы Парсеваля. Теперь мы докажем теорему, в которой подвергнуты ограничению функции, находящиеся на одной и той же стороне[1].

Теорема 38. *Пусть* $f(x) \in L(0,\infty)$. *Пусть, далее,* $g(x)$ *положительна, не возрастает и стремится к нулю при* $x \to \infty$. *Пусть, наконец,*

$$\int_0^1 \frac{|f(t)|}{t}\,dt \int_0^t g(u)\,du < \infty. \tag{2.4.1}$$

Тогда

$$\int_{\to 0}^{\to\infty} F_c(x)G_c(x)\,dx = \int_0^\infty f(x)g(x)\,dx, \tag{2.4.2}$$

и аналогичная формула верна для синус-трансформаций Фурье.

Доказательство. Имеем

$$\int_\xi^X F_c(x)G_c(x)\,dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_\xi^X G_c(x)\,dx\int_0^\infty f(t)\cos xt\,dt =$$
$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(t)\,dt\int_\xi^X G_c(x)\cos xt\,dx =$$
$$= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(t)\,dt\int_\xi^X \cos xt\,dx\int_0^{\to\infty} g(u)\cos xu\,du =$$
$$= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(t)\,dt\int_0^{\to\infty} g(u)\,du\int_\xi^X \cos xt\cos xu\,dx =$$
$$= \int_0^\infty f(t)\big[g(t,X)-g(t,\xi)+g(-t,X)-g(-t,\xi)\big]\,dt, \tag{2.4.3}$$

где

$$g(t,x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\to\infty} g(u)\frac{\sin x(u-t)}{u-t}\,du.$$

Обращение порядка интегрирования по x и t здесь законно вследствие равномерной сходимости интеграла по t, а обращение порядка интегрирования по x и u — вследствие равномерной сходимости интеграла по u.

[1] См. Hardy and Titchmarsh (5).

Так как $g(t)$ не возрастает, то $g(t,X) \to g(t)$ при $X \to \infty$ почти для всех положительных значений t, а $g(-t,X) \to 0$. Далее, при $\xi \to 0$

$$g(t,\xi) = \int_0^U g(u)\,\frac{\sin\xi(u-t)}{u-t}\,du + O\{g(U)\} =$$
$$= O\biggl(\xi\int_0^U g(u)\,du\biggr) + O\{g(U)\} = o(1)$$

(выбирая сначала U, а затем ξ). Теперь[1]

$$\left|\int_{t/2}^{\to\infty} g(u)\frac{\sin x(u-t)}{u-t}\,du\right| = \left|g\Bigl(\frac{t}{2}+0\Bigr)\int_{t/2}^{T}\frac{\sin x(u-t)}{u-t}\,du\right| <$$
$$< Ag\Bigl(\frac{t}{2}\Bigr) < \frac{A}{t}\int_0^{t/2} g(u)\,du < \frac{A}{t}\int_0^t g(u)\,du$$

и

$$\left|\int_0^{t/2} g(u)\frac{\sin x(u-t)}{u-t}\,du\right| \leqslant \int_0^{t/2}\frac{g(u)}{u-t}\,du \leqslant \frac{2}{t}\int_0^{t/2} g(u)\,du \leqslant \frac{2}{t}\int_0^t g(u)\,du.$$

Поэтому

$$|f(t)g(t,x)| \leqslant A\frac{|f(t)|}{t}\int_0^t g(u)\,du.$$

Но правая часть принадлежит к $L(0,1)$ по предположению и к $L(1,\infty)$, так как $f(t) \in L(1,\infty)$, а

$$\frac{1}{t}\int_0^t g(u)\,du \to 0.$$

Мы получим теперь требуемый результат, взяв в (2.4.3) $X \to \infty$, $\xi \to 0$ и опираясь на мажорированную сходимость.

Из теоремы 38 вытекают как непосредственные следствия следующие предложения:

(I) *Если функция $f(x)$ принадлежит к $L(0,\infty)$, а функция $g(x)$ имеет ограниченное изменение в $(0,\infty)$ и стремится к нулю при $x \to \infty$, то имеет место равенство* (2.4.2).

(II) *Если $f(x)$ принадлежит к $L(0,1)$, а $g(x)$ измерима и ограничена в интервале $(0,1)$, то выполняется условие* (2.4.1) *и при выполнении остальных условий, наложенных в теореме* 38 *на f и g, утверждение теоремы справедливо.*

[1] Напомню, что буквой A обозначается абсолютная постоянная, не обязательно одна и та же во всех случаях. — *Прим. перев.*

(III) *Если* $f(x)$ *измерима и ограничена в интервале* $(0,1)$, *а* $g(x)\ln\dfrac{1}{x}$ *принадлежит к* $L(0,1)$, *то выполняется условие* (2.4.1) *и при выполнении остальных условий, наложенных в теореме* 38 *на* f *и* g, *утверждение теоремы справедливо.*

Очевидно, ограниченность f в интервале $(0,1)$ и принадлежность g к $L(0,1)$ недостаточны для справедливости утверждения теоремы 38, даже при выполнении остальных условий (кроме (2.4.1)).

2.5. В седьмой главе мы познакомимся с некоторыми примерами на формулу Парсеваля, не подходящими ни под одну из приведённых выше теорем. В этих примерах существование трансформаций и сходимость встречающихся интегралов достаточно очевидны, и всё, что необходимо доказать, это — равенство обеих сторон формулы Парсеваля. В некоторых из таких случаев вопрос может быть разрешён с помощью следующей теоремы.

Теорема 39. *Пусть* $f(x)$ *и* $g(x)$ *интегрируемы на каждом конечном интервале. Пусть, далее, функции*

$$F(x,a)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-a}^{a}e^{ixt}f(t)\,dt,\quad G(x,a)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-a}^{a}e^{ixt}g(t)\,dt$$

и

$$\chi(x,a,b)=\int_{-a}^{b}g(u)f(x-u)\,du$$

суть все $O(e^{c|x|})$ *с некоторым положительным* c, *независимо от* a *и* b, *и при* $a\to\infty$, $b\to\infty$ *стремятся к* $F(x)$, $G(x)$ *соответственно и* $\chi(x)$ *почти для всех* x. *Тогда*

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_{-\lambda}^{\lambda}F(x)G(x)\,dx=\frac{\chi(+0)+\chi(-0)}{2}\,,$$

в предположении, что указанные пределы существуют.

Доказательство. Пусть $\lambda>0$. Тогда, в силу мажорированной сходимости,

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}F(t)\exp\left(-\frac{t^2}{4\lambda}+iut\right)dt&=\lim_{a\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}F(t,a)\exp\left(-\frac{t^2}{4\lambda}+iut\right)dt=\\&=\lim_{a\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-a}^{a}f(x)\,dx\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{t^2}{4\lambda}+iut+ixt\right)dt=\\&=\lim_{a\to\infty}\sqrt{2\lambda}\int_{-a}^{a}f(x)e^{-\lambda(x+u)^2}\,dx,\end{aligned}$$

причём сходимость к пределу равномерна в каждом конечном интервале изменения u. Поэтому, в силу мажорированной сходимости,

$$\begin{aligned}
\int_{-b}^{b} g(u)\,du \int_{-\infty}^{\infty} F(t)\exp\left(-\frac{t^2}{4\lambda}+iut\right)dt =\\
&= \lim_{a\to\infty}\sqrt{2\lambda}\int_{-b}^{b} g(u)\,du\int_{-a}^{a} f(x)e^{-\lambda(x+u)^2}\,dx =\\
&= \lim_{a\to\infty}\sqrt{2\lambda}\int_{-b}^{b} g(u)\,du\int_{-a+u}^{a+u} f(x-u)e^{-\lambda x^2}\,dx =\\
&= \lim_{a\to\infty}\sqrt{2\lambda}\int_{-a-b}^{a+b} e^{-\lambda x^2}\,dx\int_{\max(x-a,-b)}^{\min(x+a,b)} g(u)f(x-u)\,du =\\
&= \sqrt{2\lambda}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda x^2}\chi(x,b,b)\,dx.
\end{aligned}$$

Далее, в силу равномерной сходимости, можно обратить порядок интегрирования в левой части равенства, что даст там

$$\sqrt{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{4\lambda}}F(t)G(t,b)\,dt,$$

и при $b\to\infty$, опираясь на мажорированную сходимость, получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{4\lambda}}F(t)G(t)\,dt = \sqrt{\frac{\lambda}{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda x^2}\chi(x)\,dx.$$

Переходя теперь к пределу при $\lambda\to\infty$, мы придём к требуемому результату в силу теоремы 16.

В частности, утверждение теоремы справедливо, если функции f и g принадлежат к $L(-\infty,\infty)$ и одна из них ограничена.

2.6. Трансформация Фурье свёртки. Мы обращаемся теперь к формуле (2.1.8), дающей трансформацию Фурье произведения или свёртки. При каждом фиксированном значении x эту формулу можно рассматривать просто как частный случай формулы Парсеваля, так как $f(x-u)$ есть трансформация Фурье функции $F(t)e^{-ixt}$. Однако, при одновременном рассмотрении всех значений x возникает новая проблема. А именно, нас может тогда интересовать, представляют ли собой функции (2.1.9) пару трансформаций Фурье, принадлежащих к одному из рассмотренных уже общих классов.

Т е о р е м а 40. *Пусть $f(x)$ — трансформация Фурье функции $F(x)$, принадлежащей к $L(-\infty,\infty)$, и пусть $g(x)$ принадлежит к $L(-\infty,\infty)$ (так что её трансформация Фурье $G(x)$ ограничена). Тогда произведение $\sqrt{2\pi}\,F(x)G(x)$ принадлежит к $L(-\infty,\infty)$, и его трансформация Фурье есть*

$$k(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(u)f(x-u)\,du.$$

Действительно, обращение порядка интегрирования, произведённое при формальном выводе формулы (2.1.8), законно вследствие абсолютной сходимости.

Т е о р е м а 41. *Пусть $f(x)$ и $g(x)$ принадлежат к $L(-\infty,\infty)$. Тогда $k(x)$ также принадлежит к $L(-\infty,\infty)$, и её трансформацией Фурье служит $\sqrt{2\pi}\,F(x)G(x)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеем

$$\int_{-a}^{a} e^{ixu}k(u)\,du = \int_{-a}^{a} e^{ixu}\,du \int_{-\infty}^{\infty} f(v)g(u-v)\,dv =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(v)\,dv \int_{-a}^{a} e^{ixu}g(u-v)\,du = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixv}f(v)\,dv \int_{-a-v}^{a-v} e^{ixt}g(t)\,dt.$$

Но внутренний интеграл ограниченно сходится к $\sqrt{2\pi}\,G(x)$. Поэтому

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ixu}k(u)\,du = \sqrt{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ixv}f(v)G(x)\,dv = 2\pi F(x)G(x).$$

2.7. Трансформации Меллина.

Т е о р е м а 42. *Пусть $x^{k-1}f(x)\in L(0,\infty)$ и $\mathfrak{G}(1-k-it)\in L(-\infty,\infty)$, либо $\mathfrak{F}(k+it)\in L(-\infty,\infty)$ и $x^{-k}g(x)\in L(0,\infty)$. Тогда справедлива формула* (2.1.12).

Действительно, обращение порядка интегрирования, приводящее к этой формуле, законно вследствие абсолютной сходимости.

Т е о р е м а 43. *Пусть $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на каждом конечном интервале с положительными концами. Пусть, далее, функции*

$$\mathfrak{F}(s,a) = \int_{1/a}^{a} f(x)x^{s-1}\,dx, \quad \mathfrak{G}(s,a) = \int_{1/a}^{a} g(x)x^{s-1}\,dx$$

соответственно при $\sigma = k$, $\sigma = 1-k$ стремятся к $\mathfrak{F}(s)$, $\mathfrak{G}(s)$ почти для всех t, причём так, что $e^{-c|s|}\mathfrak{F}(s,a)$, $e^{-c|s|}\mathfrak{G}(s,a)$ для некоторого положительного c, остаются ограниченными равномерно относительно a. Пусть, наконец, функция

$$\frac{1}{\xi^c+\xi^{-c}}\int_a^b f(x)g(\xi x)\,dx$$

ограничена для всех a, b, ξ и при $a\to 0$, $b\to 0$ стремится к непрерывному пределу в окрестности точки $\xi = 1$. Тогда

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\to k-i\infty}^{\to k+i\infty} \mathfrak{F}(s)\mathfrak{G}(1-s)\,ds = \int_{\to 0}^{\to\infty} f(x)g(x)\,dx,$$

в предположении, что интеграл в левой части существует.

Эта теорема непосредственно следует из теоремы 39.

Аналогом теоремы 41 является

Теорема 44. *Пусть* $x^k f(x)$ *и* $x^k g(x)$ *принадлежат к* $L(0,\infty)$, *и пусть*

$$h(x) = \int_0^\infty f(y)\, g\left(\frac{x}{y}\right) \frac{dy}{y}\,.$$

Тогда $x^k h(x)$ *принадлежит к* $L(0,\infty)$, *и её трансформация Меллина равна* $\mathfrak{F}(s)\mathfrak{G}(s)$ *с* $\sigma = k+1$.

2.8. Формула Пуассона. Так называется формула

$$\sqrt{\beta}\left(\frac{F_c(0)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} F_c(n\beta)\right) = \sqrt{\alpha}\left(\frac{f(0)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} f(n\alpha)\right), \tag{2.8.1}$$

где $\alpha\beta = 2\pi$, $\alpha > 0$.

Мы докажем следующую теорему[1].

Теорема 45. *Если* $f(x)$ *имеет ограниченное изменение в интервале* $(0,\infty)$ *и стремится к нулю при* $x \to \infty$, *то*

$$\sqrt{\beta}\sum_{n=1}^{\infty} F_c(n\beta) = \sqrt{\alpha}\lim_{M\to\infty}\left(\frac{f(+0)}{2} + \right.$$
$$\left. + \sum_{m=1}^{M} \frac{f(m\alpha - 0) + f(m\alpha + 0)}{2} - \frac{1}{\alpha}\int_0^{(M+1/2)\alpha} f(t)\, dt\right). \tag{2.8.2}$$

Если также $\int_0^{\to\infty} f(t)\, dt$ *существует, то*

$$\sqrt{\beta}\left(\frac{F_c(0)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} F_c(n\beta)\right) = \sqrt{\alpha}\left(\frac{f(+0)}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{f(m\alpha - 0) + f(m\alpha + 0)}{2}\right). \tag{2.8.3}$$

Если, кроме того, $f(x)$ *непрерывна, то имеет место равенство* (2.8.1).

Доказательство. Так как $f(t)$ есть разность двух невозрастающих функций, каждая из которых стремится к нулю при $x \to \infty$, то достаточно рассмотреть случай, когда $f(t)$ сама есть такая функция. Интеграл

$$F_c(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\to\infty} f(t) \cos xt\, dt$$

---

[1] Мне неизвестно, была ли опубликована эта теорема в предлагаемой редакции где-нибудь ранее. Я получил её путём комбинации одной моей теоремы с теоремой, которую сообщил мне Феррар (W.L. Ferrar). По поводу других методов см. Linfoot (1), Mordell (1).

существует при $x > 0$, и

$$\sqrt{\beta}\sum_{m=1}^{n} F_c(m\beta) = \sqrt{\frac{2\beta}{\pi}}\int_0^{\to\infty} f(t)\sum_{m=1}^{n}\cos m\beta t\,dt =$$

$$= \sqrt{\frac{2\beta}{\pi}}\int_0^{\to\infty} f(t)\left(\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\beta t}{2\sin\frac{1}{2}\beta t} - \frac{1}{2}\right)dt =$$

$$= \lim_{M\to\infty}\left\{\sqrt{\frac{2\beta}{\pi}}\sum_{m=0}^{M}\int_{2m\pi/\beta}^{(2m+1)\pi/\beta}\left[f(t) - f\left(\frac{2m\pi}{\beta}+0\right)\right]\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\beta t}{2\sin\frac{1}{2}\beta t}\,dt + \right.$$

$$+ \sqrt{\frac{2\beta}{\pi}}\sum_{m=1}^{M}\int_{(2m-1)\pi/\beta}^{2m\pi/\beta}\left[f(t) - f\left(\frac{2m\pi}{\beta}-0\right)\right]\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\beta t}{2\sin\frac{1}{2}\beta t}\,dt +$$

$$+ \sqrt{\frac{\beta}{2\pi}}\left[f(+0) + \sum_{m=1}^{M}\left[f\left(\frac{2m\pi}{\beta}+0\right) + f\left(\frac{2m\pi}{\beta}-0\right)\right]\right] -$$

$$\left. - \sqrt{\frac{\beta}{2\pi}}\int_0^{(2M+1)\pi/\beta} f(t)\,dt\right\}. \tag{2.8.4}$$

Но, в силу второй теоремы о среднем значении,

$$\int_{2m\pi/\beta}^{(2m+1)\pi/\beta}\left[f(t) - f\left(\frac{2m\pi}{\beta}+0\right)\right]\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\beta t}{2\sin\frac{1}{2}\beta t}\,dt =$$

$$= \int_0^{\pi/\beta}\left[f\left(\frac{2m\pi}{\beta}+t\right) - f\left(\frac{2m\pi}{\beta}+0\right)\right]\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\beta t}{2\sin\frac{1}{2}\beta t}\,dt =$$

$$= \left[f\left(\frac{(2m+1)\pi}{\beta}-0\right) - f\left(\frac{2m\pi}{\beta}+0\right)\right]\int_\xi^{\pi/\beta}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\beta t}{2\sin\frac{1}{2}\beta t}\,dt.$$

Последний интеграл, равный

$$\int_\xi^{\pi/\beta}\sin\left(n+\tfrac{1}{2}\right)\beta t\left(\frac{1}{2\sin\frac{1}{2}\beta t} - \frac{1}{\beta t}\right)dt + \frac{1}{\beta}\int_{(n+1/2)\beta\xi}^{(n+1/2)\pi}\frac{\sin u}{u}\,du,$$

равномерно ограничен для всех n и ξ, а ряд

$$\sum\left|f\left(\frac{(2m+1)\pi}{\beta}-0\right) - f\left(\frac{2m\pi}{\beta}+0\right)\right|$$

сходится. Поэтому первый ряд в правой части формулы (2.8.4) сходится при $M\to\infty$ равномерно относительно n; и так как каждый член этого ряда стремится к нулю при $n\to\infty$, то и сумма ряда стремится к нулю. То же самое верно и для второго ряда, Этим доказано соотношение (2.8.2). А (2.8.3) и (2.8.1), очевидно, следуют из (2.8.2) при сформулированных условиях.

Существуют также более сложные формулы того же типа. Так, например, Рамануджан[1] дал формулы

$$\sqrt{\beta}\big[F_c(\beta)-F_c(3\beta)-F_c(5\beta)+F_c(7\beta)+\ldots\big]= \\ =\sqrt{\alpha}\big[f(\alpha)-f(3\alpha)-f(5\alpha)+f(7\alpha)+\ldots\big],$$

где $\alpha\beta=\frac{\pi}{4}$, и

$$\sqrt{\beta}\big[F_c(\beta)-F_c(5\beta)-F_c(7\beta)+F_c(11\beta)+F_c(13\beta)-\ldots\big]= \\ =\sqrt{\alpha}\big[f(\alpha)-f(5\alpha)-f(7\alpha)+f(11\alpha)+f(13\alpha)-\ldots\big],$$

где $\alpha\beta=\frac{\pi}{6}$, а $1, 5, 7, 11, 13,$ ... суть числа, взаимно простые с 6.

Справедливость этих формул легко проверить с помощью изложенного метода.

2.9. Приведём интересный формальный метод вывода формулы Пуассона[2]. Предположим, что $f(x)$ представима интегралом Меллина:

$$f(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\mathfrak{F}(s)x^{-s}\,ds.$$

Тогда, формально,

$$\sum_{n=1}^{\infty}f(n\alpha)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\mathfrak{F}(s)\sum_{n=1}^{\infty}(n\alpha)^{-s}\,ds=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\mathfrak{F}(s)\zeta(s)\alpha^{-s}\,ds,$$

где $c>1$ и $\zeta(s)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$ — дзета-функция Римана.

Переместим контур интегрирования из $\sigma=c$ в $\sigma=-b$, где $b>0$; функция $\zeta(s)$ имеет простой полюс в $s=1$ с вычетом 1, а

$$\mathfrak{F}(s)=\frac{f(0)}{s}+\int_0^1\big[f(x)-f(0)\big]x^{s-1}\,dx+\int_1^{\infty}f(x)x^{s-1}\,dx$$

имеет, вообще, простой полюс в $s=0$ с вычетом $f(0)$. Так как $\zeta(0)=-\frac{1}{2}$, то получаем

$$\frac{f(0)}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}f(n\alpha)-\frac{\mathfrak{F}(1)}{\alpha}=\frac{1}{2\pi i}\int_{-b-i\infty}^{-b+i\infty}\mathfrak{F}(s)\zeta(s)\alpha^{-s}\,ds= \\ =\frac{1}{2\pi i}\int_{1+b-i\infty}^{1+b+i\infty}\mathfrak{F}(1-s)\zeta(1-s)\alpha^{s-1}\,ds= \\ =\frac{1}{\pi i\alpha}\int_{1+b-i\infty}^{1+b+i\infty}\mathfrak{F}(1-s)\Gamma(s)\cos\Big(\frac{\pi s}{2}\Big)\zeta(s)\Big(\frac{2\pi}{\alpha}\Big)^{-s}\,ds=$$

[1] Ramanujan (2).

[2] Ferrar (2).

$$= \frac{1}{\pi i\alpha}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{1+b-i\infty}^{1+b+i\infty}\mathfrak{F}(1-s)\Gamma(s)\cos\left(\frac{\pi s}{2}\right)\left(\frac{2n\pi}{\alpha}\right)^{-s}ds.$$

Но по формуле (2.1.23) с переставленными f и g и

$$g(x) = \cos x, \quad \mathfrak{G}(s) = \Gamma(s)\cos\left(\frac{\pi s}{2}\right), \quad b = 1$$

имеем

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,F_c(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_{k-i\infty}^{k+i\infty}\mathfrak{F}(1-s)\Gamma(s)\cos\left(\frac{\pi s}{2}\right)a^{-s}\,ds.$$

Тем самым мы снова получили (2.8.1).

Мы не ставим себе целью обосновать здесь изложенный вывод. Главный его интерес заключается в том, что он наводит на метод преобразования сумм вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} d(n)f(n),$$

где $d(n)$ означает число делителей числа n. Так, например, эта сумма даёт

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\mathfrak{F}(s)\zeta^2(s)\,ds = \frac{f(0)}{4} + \mathfrak{F}'(1) - 2\gamma\mathfrak{F}(1) + \frac{1}{2\pi i}\int_{-b-i\infty}^{-b+i\infty}\mathfrak{F}(s)\zeta^2(s)\,ds,$$

последний же член равен

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{1+b-i\infty}^{1+b+i\infty}\mathfrak{F}(1-s)\zeta^2(1-s)\,ds =$$
$$= \frac{2}{\pi i}\int_{1+b-i\infty}^{1+b+i\infty}\mathfrak{F}(1-s)\Gamma^2(s)\cos^2\left(\frac{\pi s}{2}\right)2^{-2s}\pi^{-2s}\zeta^2(s)\,ds =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2d(n)}{\pi i}\int_{1+b-i\infty}^{1+b+i\infty}\mathfrak{F}(1-s)\Gamma^2(s)\cos^2\left(\frac{\pi s}{2}\right)(4\pi^2 n)^{-s}\,ds.$$

Но из формул (7.9.7) и (7.9.11) будет следовать:

$$\frac{2}{\pi}K_0(x) - Y_0(x) = \frac{1}{2\pi^2 i}\int_{k-i\infty}^{k+i\infty}\Gamma^2\left(\frac{s}{2}\right)\cos^2\left(\frac{\pi s}{4}\right)2^s x^{-s}\,ds \qquad (k > 1);$$

поступая, как выше, мы придём к следующему результату:

$$\sum_{n=1}^{\infty} d(n)f(n) = \frac{f(0)}{4} + \mathfrak{F}'(1) - 2\gamma\mathfrak{F}(1) +$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty} d(n)\int_0^{\infty} f(x)\left[K_0(4\pi\sqrt{nx}) - \frac{\pi}{2}Y_0(4\pi\sqrt{nx})\right]dx.$$

2.10. Примеры.

(I) Пусть $f(x)=e^{-x}$, так что $F_c(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{1}{1+x^2}$. Тогда получаем

$$\sqrt{\alpha}\left(\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}e^{-n\alpha}\right)=\sqrt{\frac{2\beta}{\pi}}\left(\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n^2\beta^2}\right).$$

(II) Пусть $f(x)=e^{-x^2/2}$, так что $F_c(x)=e^{-x^2/2}$. Тогда получаем

$$\sqrt{\alpha}\left(\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\alpha^2n^2/2}\right)=\sqrt{\beta}\left(\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\beta^2n^2/2}\right).$$

(III) Пусть $f(x)=e^{-x^2/2}\cos kx$. Тогда $F_c(x)=e^{-(k^2+x^2)/2}\operatorname{ch}kx$, и мы получаем

$$\sqrt{\alpha}\left(\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\alpha^2n^2/2}\cos k\alpha n\right)=\sqrt{\beta}e^{-k^2/2}\left(\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\beta^2n^2/2}\operatorname{ch}k\beta n\right).$$

(IV) Функция $f(x)=\dfrac{\sin\sqrt{x}}{1+x}$ удовлетворяет условиям теоремы 45, однако, не принадлежит к $L(0,\infty)$.

(V) Пусть $f(x)=x^{-s}\sin^2 x$ $(1<\sigma<2)$. Тогда

$$F_c(x)=\frac{\Gamma(1-s)\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)}{\sqrt{2\pi}}\left(x^{s-1}-\frac{|x-2|^{s-1}+|x+2|^{s-1}}{2}\right)\quad(x>2),$$

$$F_c(0)=\frac{\Gamma(1-s)\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)}{\sqrt{2\pi}}\,(-2^{s-1}).$$

При $\alpha=\frac{\pi}{2}$, $\beta=4$ получаем

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left[\left(\frac{\pi}{2}\right)^{-s}+\left(\frac{3\pi}{2}\right)^{-s}+\ldots\right]=\frac{2\Gamma(1-s)\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)}{\sqrt{2\pi}}\times$$
$$\times\left(-2^{s-2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[(4n)^{s-1}-\frac{(4n-2)^{s-1}+(4n+2)^{s-1}}{2}\right]\right),$$

или

$$1+\frac{1}{3^s}+\frac{1}{5^s}+\ldots=\pi^{s-1}\Gamma(1-s)\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)\times$$
$$\times\left(-\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{(2n)^{1-s}}-\frac{1}{2(2n-1)^{1-s}}-\frac{1}{2(2n+1)^{1-s}}\right]\right).$$

Это — функциональное уравнение для $(1-2^{-s})\zeta(s)$.

(VI) Пусть

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2^{\frac{1}{2}-\nu}}{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\left(1-x^2\right)^{\nu-\frac{1}{2}} & (0 < x < 1), \\ 0 & (x \geqslant 1). \end{cases}$$

Тогда[1]

$$F_c(x) = \frac{J_\nu(x)}{x^\nu} \quad (x > 0), \qquad F_c(0) = \frac{1}{2^\nu \Gamma(\nu+1)}\,.$$

Поэтому получаем

$$\frac{1}{2^{\nu+1}\Gamma(\nu+1)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_\nu(n\beta)}{(n\beta)^\nu} = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\,\frac{2^{\frac{1}{2}-\nu}}{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{1}{2} + \sum_{n \leqslant 1/\alpha}\left(1-n^2\alpha^2\right)^{\nu-\frac{1}{2}}\right),$$

где в случае $\nu = \frac{1}{2}$ член с номером $n = 1/\alpha$ (если $1/\alpha$ — целое) должен быть взят с коэффициентом $\frac{1}{2}$.

При $\nu \geqslant \frac{1}{2}$ это — частный случай теоремы 45. Легко видеть, что то же самое доказательство применимо и при $-\frac{1}{2} < \nu < \frac{1}{2}$, в предположении, что α не есть обратная величина целого числа.

2.11. Аналог формулы Пуассона для синус-трансформаций Фурье. Следующая теорема даёт формулу для синус-трансформаций Фурье, соответствующую формуле Пуассона.

Теорема 46. *Пусть $f(x)$ интегрируема на интервале $(0, \delta)$, где $0 < \delta < \frac{\pi}{2}$, имеет ограниченное изменение на интервале (δ, ∞) и стремится к нулю при $x \to \infty$. Тогда*

$$\sqrt{\beta}\big[F_s(\beta) - F_s(3\beta) + \ldots\big] = \\ = \sqrt{\alpha}\left[\frac{f(\alpha+0)+f(\alpha-0)}{2} - \frac{f(3\alpha+0)+f(3\alpha-0)}{2} + \ldots\right], \qquad (2.11.1)$$

где $\alpha\beta = \frac{\pi}{2}$. Ряд в правой части формулы необходимо сходится.

Доказательство. Поступая, как выше, получаем

$$\sqrt{\beta}\big[F_s(\beta) - F_s(3\beta) + \ldots + (-1)^n F_s((2n+1)\beta)\big] = \\ = (-1)^n \sqrt{\frac{\beta}{2\pi}} \int_0^\infty f(t)\frac{\sin(2n+2)\beta t}{\cos\beta t}\,dt = \\ = (-1)^n \sqrt{\frac{\beta}{2\pi}} \sum_{m=1}^{\infty} \int_{\pi(m-1)/\beta}^{\pi m/\beta} f(t)\frac{\sin(2n+2)\beta t}{\cos\beta t}\,dt = \\ = \frac{1}{\sqrt{2\pi\beta}} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f\left(\frac{\left(m-\frac{1}{2}\right)\pi + v}{\beta}\right)\frac{\sin(2n+2)v}{\sin v}\,dv.$$

[1] См. (7.1.11).

Это отличается от правой части формулы (2.11.1) на

$$\frac{\sqrt{\alpha}}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m-1}\times$$
$$\times\left\{\int_{-\pi/2}^{0}\left[f\left(\frac{\left(m-\frac{1}{2}\right)\pi+v}{\beta}\right)-f\left(\frac{\left(m-\frac{1}{2}\right)\pi}{\beta}-0\right)\right]\frac{\sin(2n+2)v}{\sin v}\,dv+\right.$$
$$\left.+\int_{0}^{\pi/2}\left[f\left(\frac{\left(m-\frac{1}{2}\right)\pi+v}{\beta}\right)-f\left(\frac{\left(m-\frac{1}{2}\right)\pi}{\beta}+0\right)\right]\frac{\sin(2n+2)v}{\sin v}\,dv\right\},$$

и требуемый результат получается таким же рассужденнием, как и в доказательстве теоремы 45.

Пример. Пусть $f(x)=x^{-s}$ $(0<\sigma<1)$. Тогда

$$F_s(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\Gamma(1-s)\cos\left(\frac{\pi s}{2}\right)x^{s-1},$$

и

$$\sqrt{\frac{2\beta}{\pi}}\,\Gamma(1-s)\cos\left(\frac{\pi s}{2}\right)\left[\beta^{s-1}-(3\beta)^{s-1}+\ldots\right]=\sqrt{\alpha}\left[\alpha^{-s}-(3\alpha)^{-s}+\ldots\right],$$

или

$$\left(\frac{\pi}{2}\right)^{s-1}\Gamma(1-s)\cos\left(\frac{\pi s}{2}\right)L(1-s)=L(s),\quad L(s)=1-\frac{1}{3^s}+\frac{1}{5^s}-\ldots$$

2.12. Более общие условия. В следующей, более общей теореме $f(x)$ не обязательно должна иметь ограниченное изменение.

Теорема 47. *Пусть $f(x)$ интегрируема на каждом конечном интервале и пусть интеграл*

$$\int_{0}^{\to\infty} f(y)\cos xy\,dy \tag{2.12.1}$$

сходится для $x\geqslant 0$, притом так, что

$$\left|\int_{0}^{Y} f(y)\cos xy\,dy\right|<Ke^{ax} \tag{2.12.2}$$

для некоторых a, K и всех Y. Пусть, кроме того, ряд

$$\chi(y)=\sum_{n=1}^{\infty}f(y+n\alpha)$$

мажорированно сходится при $-\frac{\alpha}{2}\leqslant y\leqslant\frac{\alpha}{2}$, т.е.

$$\left|\sum_{n=1}^{N}f(y+n\alpha)\right|\leqslant\varphi(y),$$

где $\varphi(y) \in L$. *Тогда*

$$\lim_{\delta\to 0}\sqrt{\beta}\left(\frac{F_c(0)}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}F_c(n\beta)e^{-\delta n^2}\right)=\sqrt{\alpha}\left(\frac{f(+0)}{2}+\frac{\chi(+0)}{2}+\frac{\chi(-0)}{2}\right),$$

в предположении, что правая часть существует.

Доказательство. Положим

$$K(y,\lambda)=\sqrt{\frac{\alpha}{2\pi\lambda}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{-\frac{(y-n\alpha)^2}{2\lambda}}=\sqrt{\frac{2\beta}{\pi}}\left(\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\lambda n^2\beta^2/2}\cos n\beta y\right),$$

согласно примеру (III) § 2.10. Тогда

$$\int_0^Y f(y)K(y,\lambda)\,dy=$$
$$=\sqrt{\frac{2\beta}{\pi}}\left(\frac{1}{2}\int_0^Y f(y)\,dy+\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\lambda n^2\beta^2/2}\int_0^Y f(y)\cos n\beta y\,dy\right).$$

В силу условия (2.12.2) мы можем перейти к пределу по $Y\to\infty$; мы получим тогда

$$\int_0^{\to\infty}f(y)K(y,\lambda)\,dy=\sqrt{\beta}\left(\frac{F_c(0)}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\lambda n^2\beta^2/2}F_c(n\beta)\right).$$

Но $K(y,\lambda)$ периодична с периодом α. Так как, кроме того, $K(y,\lambda)$ при фиксированном λ ограничена, то, опираясь на мажорированную сходимость, получаем для левой части последнего равенства выражение

$$\int_0^{\alpha/2}f(y)K(y,\lambda)\,dy+\sum_{m=1}^{\infty}\int_{(m-1/2)\alpha}^{(m+1/2)\alpha}f(y)K(y,\lambda)\,dy=$$
$$=\int_0^{\alpha/2}f(y)K(y,\lambda)\,dy+\sum_{m=1}^{\infty}\int_{-\alpha/2}^{\alpha/2}f(y+m\alpha)K(y,\lambda)\,dy=$$
$$=\int_0^{\alpha/2}f(y)K(y,\lambda)\,dy+\int_{-\alpha/2}^{\alpha/2}\chi(y)K(y,\lambda)\,dy.$$

Требуемый результат теперь следует из теоремы 17, с $x=0$, $a=-\dfrac{\alpha}{2}$, $b=\dfrac{\alpha}{2}$ и $K(0,y,\lambda)=\dfrac{K(y,\lambda)}{\sqrt{\alpha}}$; выполнение условий теоремы 17 легко проверить, основываясь на любой из двух формул, определяющих $K(y,\lambda)$.

III
ТРАНСФОРМАЦИИ ИЗ КЛАССА L^2

3.1. Теория Планшереля трансформаций Фурье. Формулы (1.2.1), (1.2.2), связывающие пару косинус-трансформаций Фурье $f(x)$, $F_c(x)$, выражают соотношение, в которое эти функции формально входят симметричным образом. Однако, во всех доказанных до сих пор теоремах указанные функции подчинялись совершенно различным условиям, так что симметрия была только формальной.

Вполне симметричную теорию впервые построил Планшерель[1]. Она связана не с обычной сходимостью или суммируемостью, а со сходимостью в среднем.

Для комплексной формы трансформаций Фурье теорема Планшереля состоит в следующем:

Т е о р е м а 48. *Пусть $f(x)$ — функция из класса $L^2(-\infty,\infty)$ (вещественная или комплексная), и пусть*

$$F(x,a)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-a}^{a}e^{ixy}f(y)\,dy. \tag{3.1.1}$$

Тогда $F(x,a)$ при $a\to\infty$ сходится в среднем на $(-\infty,\infty)$ к некоторой функции $F(x)$ из $L^2(-\infty,\infty)$; и обратно,

$$f(x,a)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-a}^{a}e^{-ixy}F(y)\,dy \tag{3.1.2}$$

сходится в среднем к $f(x)$.

Трансформации $f(x)$, $F(x)$ связаны формулами

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{\infty}f(y)\frac{e^{ixy}-1}{iy}\,dy, \tag{3.1.3}$$

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{\infty}F(y)\frac{e^{-ixy}-1}{-iy}\,dy, \tag{3.1.4}$$

где равенства имеют место почти для всех x.

[1] Plancherel (1), (2), (3), (4).

Из доказательства будет видно, что можно было бы заменить $F(x,a)$ на

$$F(x,a,b)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-a}^{b}e^{ixy}f(y)\,dy,$$

где $a\to\infty$ и $b\to\infty$ независимо друг от друга.

Одновременно получается

Теорема 49. *Если $f(x)$, $F(x)$ и $g(x)$, $G(x)$ суть пары трансформаций Фурье в смысле теоремы 48, то имеют место соотношения (2.1.1), (2.1.2) и (2.1.3).*

Для косинус- и синус-трансформаций Фурье имеют место следующие теоремы.

Теорема 50. *Пусть $f(x)\in L^2(0,\infty)$, и пусть*

$$F_c(x,a)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^a f(y)\cos xy\,dy.$$

Тогда $F_c(x,a)$ при $a\to\infty$ сходится в среднем на $(0,\infty)$ к некоторой функции $F_c(x)$ из $L^2(0,\infty)$; и обратно,

$$f_c(x,a)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^a F_c(y)\cos xy\,dy$$

сходится в среднем к $f(x)$. При этом почти для всех x

$$F_c(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{d}{dx}\int_0^\infty f(y)\frac{\sin xy}{y}\,dy,\quad f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{d}{dx}\int_0^\infty F_c(y)\frac{\sin xy}{y}\,dy.$$

Теорема 51. *Для синус-трансформаций Фурье имеет место аналог теоремы 50, с заменой $\cos xy$ на $\sin xy$ и $\sin xy$ на $1-\cos xy$.*

Теорема 52. *Для косинус- и синус-трансформаций Фурье из L^2 имеют место соотношения (2.1.4), (2.1.5), (2.1.6) и (2.1.7).*

Теоремы, относящиеся к косинус- и синус-трансформациям Фурье, можно получить, выбирая в теореме, относящейся к комплексной форме трансформации Фурье, функцию $f(x)$ чётной или нечётной.

Мы изложим несколько различных доказательств этих теорем.

3.2. Трансформации Фурье; первый метод[1]**.** На этот метод наводит формальный вывод самого Фурье (§1.1). Пусть

$$a_\nu=\int_{\nu/\lambda}^{(\nu+1)/\lambda}f(x)\,dx\quad(\nu=0,\pm1,\ldots)$$

[1] Titchmarsh (1), (2).

и

$$\Phi_n(x) = \sum_{\nu=-n}^{n} a_\nu e^{i\nu x/\lambda}.$$

Тогда при $b > 0$ и $n = [\lambda b] - 1$

$$\lim_{\lambda\to\infty} \Phi_n(x) = \int_{-b}^{b} e^{ixy} f(y)\,dy$$

равномерно в каждом конечном интервале. Действительно,

$$\left|\Phi_n(x) - \int_{-b}^{b} e^{ixy} f(y)\,dy\right| = \left|\sum_{\nu=-n}^{n} \int_{\nu/\lambda}^{(\nu+1)/\lambda} \left(e^{i\nu x/\lambda} - e^{ixy}\right) f(y)\,dy - \right.$$
$$\left. - \int_{(n+1)/\lambda}^{b} e^{ixy} f(y)\,dy - \int_{-b}^{-n/\lambda} e^{ixy} f(y)\,dy \right| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{x}{\lambda}\int_{-b}^{b} |f(y)|\,dy + \int_{(n+1)/\lambda}^{b} |f(y)|\,dy - \int_{-b}^{-n/\lambda} |f(y)|\,dy \to 0,$$

так как в каждом интеграле $\left|e^{i\nu x/\lambda} - e^{ixy}\right| \leqslant \dfrac{x}{\lambda}$.

Далее,

$$|a_\nu|^2 \leqslant \int_{\nu/\lambda}^{(\nu+1)/\lambda} |f(x)|^2\,dx \int_{\nu/\lambda}^{(\nu+1)/\lambda} dx = \frac{1}{\lambda}\int_{\nu/\lambda}^{(\nu+1)/\lambda} |f(x)|^2\,dx.$$

Поэтому при $X \leqslant \pi\lambda$

$$\int_{-X}^{X} |\Phi_n(x)|^2\,dx \leqslant \int_{-\pi\lambda}^{\pi\lambda} |\Phi_n(x)|^2\,dx =$$
$$= \int_{-\pi\lambda}^{\pi\lambda} \left(\sum_{\nu=-n}^{n} a_\nu e^{i\nu x/\lambda} \sum_{\mu=-n}^{n} \bar{a}_\mu e^{-i\mu x/\lambda}\right) dx =$$
$$= 2\pi\lambda \sum_{\nu=-n}^{n} |a_\nu|^2 \leqslant 2\pi \int_{-n/\lambda}^{(n+1)/\lambda} |f(x)|^2\,dx \leqslant 2\pi \int_{-b}^{b} |f(x)|^2\,dx.$$

Фиксируя X и переходя к пределу по $\lambda \to \infty$, получаем

$$\int_{-X}^{X} \left|\int_{-b}^{b} e^{ixy} f(y)\,dy\right|^2 dx \leqslant 2\pi \int_{-b}^{b} |f(x)|^2\,dx.$$

Предельный переход по $X \to \infty$ приводит теперь к неравенству

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left|\int_{-b}^{b} e^{ixy} f(y)\,dy\right|^2 dx \leqslant 2\pi \int_{-b}^{b} |f(x)|^2\,dx. \tag{3.2.1}$$

Если мы положим $f(y) = 0$ при $-a < y < a$, то неравенство (3.2.1) даст

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(x,b) - F(x,a)|^2\, dx \leqslant \left(\int_{-b}^{-a} + \int_{a}^{b}\right) |f(x)|^2\, dx,$$

что стремится к нулю при $a \to \infty$, $b \to \infty$. Поэтому $F(x,a)$ сходится в среднем к некоторой функции $F(x)$ из $L^2(-\infty,\infty)$; при этом, переходя в (3.2.1) к пределу при $b \to \infty$, получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(x)|^2\, dx \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\, dx. \tag{3.2.2}$$

Аналогичное рассуждение показывает теперь, что и $f(x,a)$ сходится в среднем к некоторой функции $\varphi(x)$. Остаётся лишь доказать, что $\varphi(x) = f(x)$ почти для всех x, а для этого достаточно показать, что

$$\int_0^{\xi} \varphi(x)\, dx = \int_0^{\xi} f(x)\, dx$$

для всех значений ξ. Но

$$\int_0^{\xi} \varphi(x)\, dx = \lim_{a\to\infty} \int_0^{\xi} f(x,a)\, dx = \lim_{a\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\xi} dx \int_{-a}^{a} F(y) e^{-ixy}\, dy =$$
$$= \lim_{a\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^{a} F(y) \frac{e^{-i\xi y} - 1}{-iy}\, dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(y) \frac{e^{-i\xi y} - 1}{-iy}\, dy.$$

G другой стороны, формула (1.24.2) теоремы 22, с $f(x) = 0$ при $|x| > a$, даёт

$$\int_0^{\xi} f(x)\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\xi u} - 1}{-iu} F(u,a)\, du \qquad (|\xi| < a).$$

Но

$$\lim_{a\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\xi u} - 1}{u} F(u,a)\, du = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\xi u} - 1}{u} F(u)\, du,$$

так как $\dfrac{e^{-i\xi u} - 1}{u}$ принадлежит к $L^2(-\infty,\infty)$. Тем самым наше утверждение доказано.

Одновременно мы доказали соотношение (3.1.4); так как мы можем теперь таким же точно образом рассуждать, исходя из (3.1.2) вместо (3.1.1), то доказано также соотношение (3.1.3).

Вместе с тем мы можем в (3.2.2) поменять местами f и F. Поэтому, действительно,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(x)|^2\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\, dx.$$

Если $G(x)$ есть в том же смысле трансформация функции $g(x)$, то $F+G$ есть трансформация суммы $f+g$; поэтому

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(x)+G(x)|^2\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)+g(x)|^2\,dx,$$

т.е.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Big(|F(x)|^2 + |G(x)|^2 + 2\,\mathrm{Re}[F(x)\overline{G(x)}]\Big)dx = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \Big(|f(x)|^2 + |g(x)|^2 + 2\,\mathrm{Re}[f(x)\overline{g(x)}]\Big)dx.$$

Отсюда

$$\mathrm{Re}\int_{-\infty}^{\infty} F(x)\overline{G(x)}\,dx = \mathrm{Re}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}\,dx.$$

Применяя аналогичное рассуждение к $f+ig$, убеждаемся в том, что и мнимые части указанных интегралов равны. Следовательно,

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(x)\overline{G(x)}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}\,dx.$$

3.3. Трансформации Фурье; второй метод[1]**.** Пусть $f(x)$ принадлежит к $L^2(-\infty,\infty)$. Тогда можно построить такую последовательность функций $f_n(x)$, каждая из которых непрерывна и имеет ограниченное изменение на конечном интервале, обращаясь в нуль вне этого интервала, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)-f_n(x)|^2\,dx \to 0.$$

Положим

$$F_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ixu} f_n(u)\,du.$$

Тогда

$$\int_{-\lambda}^{\lambda} |F_n(x)|^2\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\lambda}^{\lambda} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixu} f_n(u)\,du \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixv}\overline{f_n(v)}\,dv = \\ = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f_n(u)\,du \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f_n(v)}\,dv \int_{-\lambda}^{\lambda} e^{ix(u-v)}\,dx = \\ = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f_n(u)\,du \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f_n(v)}\,\frac{2\sin\lambda(u-v)}{u-v}\,dv.$$

[1] Б о х н е р, Лекции об интегралах Фурье, § 41.

Согласно результатам § 1.9 внутренний интеграл при $\lambda \to \infty$ стремится к $2\pi\overline{f_n(u)}$ равномерно на каждом конечном интервале; поэтому

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F_n(x)|^2\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} |f_n(u)|^2\,du.$$

Аналогично,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F_m(x) - F_n(x)|^2\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} |f_m(u) - f_n(u)|^2\,du,$$

и так как правая часть стремится к нулю при $m \to \infty$ и $n \to \infty$, то $F_n(x)$ сходится в среднем к некоторой функции $F(x)$ из $L^2(-\infty, \infty)$. При этом

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(x)|^2\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |F_n(x)|^2\,dx = \\ = \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f_n(x)|^2\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\,dx.$$

Конечно, ещё не очевидно, что функция $F(x)$ эквивалентна трансформации Фурье функции $f(x)$, полученной в предыдущем параграфе, или даже, что она единственна, так как последовательность $f_n(x)$ не единственна. Однако, мы имеем

$$\int_0^{\xi} F_n(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\xi} dx \int_{-\infty}^{\infty} f_n(u) e^{ixu}\,du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(u) \frac{e^{i\xi u} - 1}{iu}\,du$$

(так как область интегрирования в действительности конечна). Переходя к пределу по $n \to \infty$, получаем

$$\int_0^{\xi} F(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \frac{e^{i\xi u} - 1}{iu}\,du,$$

так как $\dfrac{e^{i\xi u} - 1}{iu}$ принадлежит к L^2. Поэтому почти для всех x

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \frac{e^{ixu} - 1}{iu}\,du,$$

а это показывает, что функция $F(x)$ однозначно определена (с точностью до множества меры 0) и что она эквивалентна трансформации Фурье, полученной первым методом.

При первом методе мы вывели формулу Парсеваля из двойственных соотношений между трансформациями Фурье; при настоящем же методе мы уже доказали формулу Парсеваля и, наоборот, выведем двойственные соотношения из неё. Как и выше, формула Парсеваля даёт

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(x)\overline{G(x)}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}\,dx.$$

Пусть $g(x)=1$ при $0 \leqslant x \leqslant \xi$ и $g(x)=0$ при $x<0$ и $x>\xi$. Тогда

$$G(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{d}{dx}\int_0^{\xi}\frac{e^{ixu}-1}{iu}\,du=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{d}{dx}\int_0^{\xi x}\frac{e^{iu}-1}{iu}\,du=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{e^{i\xi x}-1}{ix}.$$

Поэтому

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}F(x)\frac{e^{-i\xi x}-1}{-ix}\,dx=\int_0^{\xi}f(x)\,dx,$$

что показывает, что $f(x)$ есть трансформация Фурье функции $F(x)$.

Далее, пусть $h(x)=f(x)$ при $-a \leqslant x \leqslant a$ и $h(x)=0$ при $|x|>a$. Тогда

$$H(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{d}{dx}\int_{-a}^{a}f(u)\frac{e^{ixu}-1}{iu}\,du=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-a}^{a}f(u)e^{ixu}\,du=F(x,a).$$

Поэтому трансформация Фурье разности $F(x)-F(x,a)$ равна разности $f(x)-h(x)$, т.е. равна 0 при $|x| \leqslant a$ и $f(x)$ при $|x|>a$. Следовательно,

$$\int_{-\infty}^{\infty}|F(x)-F(x,a)|^2\,dx=\left(\int_{-\infty}^{-a}+\int_a^{\infty}\right)|f(x)|^2\,dx,$$

что стремится к нулю при $a\to\infty$. Таким образом,

$$F(x)=\underset{a\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\,F(x,a).$$

3.4. Трансформации Фурье; третий метод[1]**.** Предположим сначала, что $f(x)$ принадлежит одновременно к L и L^2, и пусть

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{ixt}f(t)\,dt.$$

Тогда

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{\delta^2x^2}{2}\right)|F(x)|^2\,dx=\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{\delta^2x^2}{2}\right)dx\int_{-\infty}^{\infty}e^{ixu}f(u)\,du\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ixv}\overline{f(v)}\,dv=\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(u)\,du\int_{-\infty}^{\infty}\overline{f(v)}\,dv\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{\delta^2x^2}{2}+ix(u-v)\right)dx=\\&=\frac{1}{\delta\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(u)\,du\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{(u-v)^2}{2\delta^2}\right)\overline{f(v)}\,dv,\end{aligned}\tag{3.4.1}$$

[1] F. Riesz (2).

и по неравенству Шварца для двойных интегралов

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{(u-v)^2}{2\delta^2}\right)f(u)\overline{f(v)}\,du\,dv\right| = \\
&= \left|\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{(u-v)^2}{4\delta^2}\right)f(u)\exp\left(-\frac{(u-v)^2}{4\delta^2}\right)\overline{f(v)}\,du\,dv\right| \leqslant \\
&\leqslant \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{(u-v)^2}{2\delta^2}\right)|f(u)|^2\,du\,dv} \times \\
&\qquad\qquad \times \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{(u-v)^2}{2\delta^2}\right)|\overline{f(v)}|^2\,du\,dv} = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{(u-v)^2}{2\delta^2}\right)|f(u)|^2\,du\,dv = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}|f(u)|^2\,du\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{t^2}{2\delta^2}\right)dt = \delta\sqrt{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|f(u)|^2\,du.
\end{aligned}$$

Поэтому

$$\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{\delta^2x^2}{2}\right)|F(x)|^2\,dx \leqslant \int_{-\infty}^{\infty}|f(u)|^2\,du,$$

и, переходя к пределу по $\delta \to 0$, получаем, что $F(x)$ принадлежит к $L^2(-\infty,\infty)$.

Далее, (3.4.1) эквивалентно равенствам

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\delta\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(u)\,du\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{t^2}{2\delta^2}\right)\overline{f(u+t)}\,dt = \\
&\qquad = \frac{1}{\delta\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{t^2}{2\delta^2}\right)dt\int_{-\infty}^{\infty}f(u)\overline{f(u+t)}\,du = \\
&\qquad = \frac{1}{\delta\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{t^2}{2\delta^2}\right)\psi(t)\,dt,
\end{aligned}$$

где

$$\psi(t) = \int_{-\infty}^{\infty}f(u)\overline{f(u+t)}\,du.$$

Так как f принадлежит к L^2, то ψ ограничена и непрерывна Поэтому, согласно теории сингулярного интеграла Вейерштрасса (§ 1.18),

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty}|F(x)|^2\,dx = \lim_{\delta\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{\delta^2x^2}{2}\right)|F(x)|^2\,dx = \\
&\qquad = \lim_{\delta\to 0}\frac{1}{\delta\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{t^2}{2\delta^2}\right)\psi(t)\,dt = \psi(0) = \int_{-\infty}^{\infty}|f(u)|^2\,du.
\end{aligned}$$

Существование F для любой функции f из L^2 и двойственные соотношения могут быть теперь доказаны изложенным выше методом.

3.5. Полиномы Эрмита[1]**.** Полином Эрмита n-го порядка определяется формулой

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}\, e^{-x^2}. \tag{3.5.1}$$

Мы положим

$$\varphi_n(x) = e^{-x^2/2} H_n(x) = (-1)^n e^{x^2/2} \frac{d^n}{dx^n}\, e^{-x^2}. \tag{3.5.2}$$

Интерес, который эти функции представляют для нашей теории, заключается в том, что они образуют ортогональную последовательность, каждый член которой совпадает, с точностью до тривиального множителя, со своей собственной трансформацией Фурье.

Мы имеем

$$\varphi_n''(x) = (-1)^n e^{x^2/2} \left((x^2+1) \frac{d^n}{dx^n}\, e^{-x^2} + 2x \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\, e^{-x^2} + \frac{d^{n+2}}{dx^{n+2}}\, e^{-x^2} \right)$$

и

$$\frac{d^{n+2}}{dx^{n+2}}\, e^{-x^2} = \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} \left(-2x e^{-x^2}\right) = -2x \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}\, e^{-x^2} - 2(n+1) \frac{d^n}{dx^n}\, e^{-x^2}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \varphi_n''(x) &= (-1)^n e^{x^2/2} \left((x^2+1) \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} - 2(n+1) \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} \right) = \\ &= (x^2 - 2n - 1)\varphi_n(x). \end{aligned} \tag{3.5.3}$$

Таким образом, $y = \varphi_n(x)$ служит решением дифференциального уравнения

$$\frac{d^2y}{dx^2} - x^2 y = -(2n+1)y. \tag{3.5.4}$$

Полагая $y = e^{-x^2/2}u$, мы получаем

$$\frac{d^2u}{dx^2} - 2x\frac{du}{dx} = -2nu, \tag{3.5.5}$$

так что $H_n(x)$ есть решение этого дифференциального уравнения. При этом $H_n(x)$ есть единственное полиномиальное решение. Действительно, пусть

$$u = a_0 + a_1 x + \ldots$$

[1] См. В и н е р, Интеграл Фурье, стр. 51–71.

— решение уравнения (3.5.5). Тогда

$$\sum_{r=2}^{\infty} a_r r(r-1)x^{r-2} - 2\sum_{r=1}^{\infty} a_r r x^r = -2n\sum_{r=0}^{\infty} a_r x^r,$$

откуда

$$(r+1)(r+2)a_{r+2} = 2(r-n)a_r.$$

Это показывает, что общее решение есть сумма двух рядов: одного обрывающегося, в котором r имеет ту же чётность, что и n, и другого — необрывающегося.

Эрмитовы функции $\varphi_n(x)$ образуют ортогональное семейство. Действительно, в силу равенства (3.5.3)

$$\varphi_m''(x)\varphi_n(x) - \varphi_n''(x)\varphi_m(x) = 2(n-m)\varphi_m(x)\varphi_n(x),$$

откуда

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_m(x)\varphi_n(x)\,dx = \frac{1}{2(n-m)}\left[\varphi_m'(x)\varphi_n(x) - \varphi_n'(x)\varphi_m(x)\right]\Big|_{-\infty}^{\infty} = 0,$$

если $m \neq n$.

3.6.

Теорема 53[1]. *При* $|t| < 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-(x^2+y^2)/2}}{2^n n!}\,t^n H_n(x)H_n(y) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\exp\left(\frac{x^2-y^2}{2} - \frac{(x-yt)^2}{1-t^2}\right). \tag{3.6.1}$$

Доказательство. Имеем

$$e^{-x^2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2+2ixu}\,du,$$

откуда

$$H_n(x) = \frac{(-2i)^n e^{x^2}}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} u^n e^{-u^2+2ixu}\,du.$$

Поэтому

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{-(x^2+y^2)/2}}{2^n n!}\,t^n H_n(x)H_n(y) =$$

$$= \frac{e^{(x^2+y^2)/2}}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(-2tuv)^n}{n!}\,e^{-u^2-v^2+2ixu+2iyv}\,du\,dv =$$

[1] См. Watson (3).

$$
\begin{aligned}
&= \frac{e^{(x^2+y^2)/2}}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2-v^2+2ixu+2iyv-2tuv}\, du\, dv = \\
&= \frac{e^{(x^2-y^2)/2}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(1-t^2)u^2+2i(x-yt)u}\, du = \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \exp\left(\frac{x^2-y^2}{2} - \frac{(x-yt)^2}{1-t^2} \right).
\end{aligned}
$$

Обращение порядка суммирования и интегрирования законно, так как

$$
\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2\rho uv)^n}{n!}\, e^{-u^2-v^2+2Au+2Bv}\, du\, dv
$$

сходится при $\rho < 1$.

Теорема 54. *Функции*

$$
\psi_n(x) = \frac{\varphi_n(x)}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}}
$$

образуют ортонормальное семейство на интервале $(-\infty, \infty)$, *т.е.*

$$
\int_{-\infty}^{\infty} \psi_m(x)\psi_n(x)\, dx = \begin{cases} 1 & (m = n), \\ 0 & (m \neq n). \end{cases}
$$

Доказательство. При $m \neq n$ утверждение теоремы непосредственно следует из доказанного в § 3.5. Полагая теперь в (3.6.1) $x = y$, получаем

$$
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n e^{-x^2} [H_n(x)]^2}{2^n n! \sqrt{\pi}} = \frac{1}{\sqrt{\pi(1-t^2)}} \exp\left(-\frac{1-t}{1+t}\, x^2 \right).
$$

Следовательно,

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{2^n n! \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} [H_n(x)]^2\, dx &= \frac{1}{\sqrt{\pi(1-t^2)}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1-t}{1+t}\, x^2 \right) dx = \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi(1-t^2)}} \sqrt{\pi \frac{1+t}{1-t}} = \frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n.
\end{aligned}
$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях переменной t, находим

$$
\int_{-\infty}^{\infty} [\varphi_n(x)]^2\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} [H_n(x)]^2\, dx = 2^n n! \sqrt{\pi},
$$

откуда и следует требуемый результат.

3.7.

Т е о р е м а 55. *Пусть $f(x)$ — произвольная функция из $L^2(-\infty,\infty)$. Положим*

$$a_m = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\psi_m(x)\,dx \qquad (m = 0,1,2,\ldots). \tag{3.7.1}$$

Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left| f(x) - \sum_{m=0}^{\infty} a_m\psi_m(x) \right|^2 dx = 0. \tag{3.7.2}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Формулу (3.6.1) можно представить в виде

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n\psi_n(x)\psi_n(y) = \frac{1}{\sqrt{\pi(1-t^2)}} \exp\left(\frac{x^2-y^2}{2} - \frac{(x-yt)^2}{1-t^2}\right). \tag{3.7.3}$$

Обозначим правую часть через $K(x,y,t)$. Имеем $K(x,y,t) \geqslant 0$ и (полагая $y = \dfrac{2xt}{1+t^2} + u$)

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(x,y,t)\,dy =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{\pi(1-t^2)}} \exp\left(-\frac{1-t^2}{1+t^2}\frac{x^2}{2}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1+t^2}{1-t^2}\frac{u^2}{2}\right) du =$$
$$= \sqrt{\frac{2}{1+t^2}} \exp\left(-\frac{1-t^2}{1+t^2}\frac{x^2}{2}\right) \to 1$$

при $t \to 1$. Условия (1.19.2), (1.19.3), очевидно, также выполнены. Таким образом, если $f(x)$ — произвольная непрерывная функция, тождественно равная нулю вне некоторого конечного интервала, то, по теореме 17,

$$\lim_{t\to 1} \int_{-\infty}^{\infty} K(x,y,t)f(y)\,dy = f(x). \tag{3.7.4}$$

Поэтому, умножая обе части равенства (3.7.3) на $f(y)$ и интегрируя по $(-\infty,\infty)$, получаем

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \psi_n(x) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x,y,t)f(y)\,dy \to f(x)$$

при $t \to 1$, причём сходимость, очевидно, ограниченная. Умножая на $f(x)$ и снова интегрируя, находим

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 t^n = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(x)\,dx,$$

так что

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(x)\,dx.$$

Пусть теперь $f(x)$ — произвольная функция из $L^2(-\infty,\infty)$. Пусть, далее, $f_\nu(x)$ — непрерывная функция, тождественно равная нулю вне конечного интервала и такая, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x) - f_\nu(x)|^2\,dx < \varepsilon,$$

и пусть

$$a_{n,\nu} = \int_{-\infty}^{\infty} f_\nu(x)\psi_n(x)\,dx.$$

Тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty}\Big(f(x) - \sum_{m=1}^{n} a_{m,\nu}\psi_m(x)\Big)^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(x)\,dx + \sum_{m=1}^{n} a_{m,\nu}^2 - 2\sum_{m=1}^{n} a_{m,\nu}a_m \geqslant$$

$$\geqslant \int_{-\infty}^{\infty} f^2(x)\,dx - \sum_{m=1}^{n} a_m^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\Big(f(x) - \sum_{m=1}^{n} a_m\psi_m(x)\Big)^2 dx$$

и, вместе с тем,

$$\leqslant 2\int_{-\infty}^{\infty}\Big(f(x) - f_\nu(x)\Big)^2 dx + 2\int_{-\infty}^{\infty}\Big(f_\nu(x) - \sum_{m=1}^{n} a_{m,\nu}\psi_m(x)\Big)^2 dx <$$

$$< 2\varepsilon + 2\int_{-\infty}^{\infty} f_\nu^2(x)\,dx - 2\sum_{m=1}^{n} a_{m,\nu}^2 < 3\varepsilon$$

для достаточно большого n. Этим доказано соотношение (3.7.2).

Теорема 56. *Для любой заданной последовательности вещественных чисел $a_1, a_2, \ldots$ со сходящимся рядом квадратов существует функция $f(x)$ из $L^2(-\infty,\infty)$, которая удовлетворяет соотношениям* (3.7.1).

Это — теорема Фишера—Рисса для семейства функций $\psi_n(x)$.

Доказательство. По теореме 54

$$\int_{-\infty}^{\infty}\Big|\sum_{m=n}^{N} a_m\psi_m(x)\Big|^2 dx = \sum_{m=n}^{N} a_m^2,$$

что стремится к нулю при $N \to \infty$. Поэтому

$$\sum_{m=0}^{n} a_m\psi_m(x)$$

при $n \to \infty$ сходится в среднем к некоторой функции $f(x)$, и

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\psi_r(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{m=0}^{n} a_m\psi_m(x)\psi_r(x)\,dx = a_r.$$

3.8.

Теорема 57. *Трансформация Фурье функции $\varphi_n(x)$ равна $i^n\varphi_n(x)$.*

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ixy}\varphi_n(x)\,dx &= (-1)^n\int_{-\infty}^{\infty} e^{ixy+x^2/2}\frac{d^n}{dx^n}\,e^{-x^2}\,dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\frac{d^n}{dx^n}\,e^{ixy+x^2/2}\,dx = \\ &= e^{y^2/2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\frac{d^n}{dx^n}\,e^{(x+iy)^2/2}\,dx = \\ &= (-i)^n e^{y^2/2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\frac{d^n}{dy^n}\,e^{(x+iy)^2/2}\,dx = \\ &= (-i)^n e^{y^2/2}\frac{d^n}{dy^n}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2+ixy-y^2/2}\,dx = \\ &= (-i)^n e^{y^2/2}\frac{d^n}{dy^n}\sqrt{2\pi}\,e^{-y^2} = i^n\sqrt{2\pi}\,\varphi_n(y).\end{aligned}$$

Можно рассуждать также следующим образом. Пусть

$$\Phi_n(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ixy}\varphi_n(x)\,dx.$$

Тогда

$$\Phi_n''(y) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ixy}x^2\varphi_n(x)\,dx.$$

С другой стороны, дважды интегрируя по частям, получаем

$$\Phi_n(y) = -\frac{1}{y^2\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ixy}\varphi_n''(x)\,dx.$$

Поэтому

$$\begin{aligned}&\Phi_n''(y) - y^2\Phi_n(y) + (2n+1)\Phi_n(y) = \\ &\qquad = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ixy}[\varphi_n''(x) - x^2\varphi_n(x) + (2n+1)\varphi_n(x)]\,dx = 0.\end{aligned}$$

Таким образом, функция $\Phi_n(x)$ удовлетворяет тому же дифференциальному уравнению, что и функция $\varphi_n(x)$; при этом легко видеть, что если $e^{x^2/2}\varphi_n(x)$ — полином, то и $e^{x^2/2}\Phi_n(x)$ —полином. Следовательно,

$$\Phi_n(x) = c_n\varphi_n(x).$$

Но

$$e^{-x^2/2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixy-y^2/2}\, dy,$$

откуда

$$\frac{d^n}{dx^n}\, e^{-x^2/2} = \frac{i^n}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixy-y^2/2} y^n\, dy;$$

с другой стороны,

$$\frac{d^n}{dx^n}\, e^{-x^2/2} = e^{-x^2/2}\Big((-1)^n x^n + \ldots\Big).$$

Поэтому

$$\frac{i^n}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixy-y^2/2} y^n\, dy = e^{-x^2/2}\Big((-1)^n x^n + \ldots\Big),$$

откуда

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixy}\varphi_n(x)\, dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixy-y^2/2}(2^n y^n + \ldots)\, dy = \\ = i^n e^{-x^2/2}(2^n x^n + \ldots).$$

Следовательно,

$$c_n = i^n.$$

3.9. Трансформации Фурье; четвёртый метод. Возьмём, например, чётную функцию $f(x)$ из $L^2(0,\infty)$, и пусть

$$a_n = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\psi_n(x)\, dx.$$

Тогда

$$a_1 = a_3 = \ldots = 0,$$
$$a_{2n} = 2\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\psi_{2n}(x)\, dx$$

и

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{2n}^2 = 2\int_0^{\infty} f^2(x)\, dx.$$

По теореме 56, существует чётная функция $g(x)$ такая, что

$$(-1)^n a_{2n} = 2\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\psi_{2n}(x)\,dx \qquad (n = 0, 1, \ldots),$$

и

$$\int_0^{\infty} g^2(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n}^2 = \int_0^{\infty} f^2(x)\,dx.$$

Соотношение между f и g, очевидно, взаимное.

Мы покажем теперь, что $g(x)$ совпадает с полученной ранее косинус-трансформацией Фурье функции $f(x)$. Имеем

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin xy}{y}\,\psi_{2n}(y)\,dy = (-1)^n\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}\frac{\sin xy}{y}\,dy\int_0^{\infty}\psi_{2n}(t)\cos yt\,dt =$$
$$= (-1)^n\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}\psi_{2n}(t)\,dt\int_0^{\infty}\frac{\sin xy\,\cos yt}{y}\,dy = (-1)^n\sqrt{\frac{\pi}{2}}\int_0^{x}\psi_{2n}(t)\,dt,$$

так как $\psi_{2n}(t)$ принадлежит к $L(0,\infty)$ и интеграл по y ограниченно сходится. Поэтому

$$\int_0^{\infty} g(y)\,\frac{\sin xy}{y}\,dy = \lim_{N\to\infty}\int_0^{\infty}\frac{\sin xy}{y}\sum_{n=0}^{N}(-1)^n a_{2n}\psi_{2n}(y)\,dy =$$
$$= \lim_{N\to\infty}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sum_{n=0}^{N} a_{2n}\int_0^{x}\psi_{2n}(t)\,dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\int_0^{x} f(t)\,dt,$$

так что f и g являются парой косинус-трансформаций Фурье в обычном смысле.

Аналогично, взяв $f(x)$ нечётной, мы получим теорему для синус-трансформаций Фурье.

3.10. Сходимость и суммируемость. Мы можем теперь для функций из L^2 доказать теоремы, соответствующие теоремам 3 и 14.

Т е о р е м а 58. *Если $f(t)$ принадлежит к $L^2(-\infty,\infty)$ и имеет ограниченное изменение в окрестности точки $t = x$, то*

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\lim_{\lambda\to\infty}\int_{-\lambda}^{\lambda} e^{-ixu}F(u)\,du.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Трансформация Фурье функции $G(u)$, равной e^{-ixu} при $|u| < \lambda$ и 0 при $|u| > \lambda$, есть

$$g(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\lambda}^{\lambda} e^{-ixu-iuv}\,du = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\sin\lambda(x+v)}{x+v}\,.$$

Поэтому, согласно формуле Парсеваля,

$$\int_{-\lambda}^{\lambda} e^{-ixu} F(u)\, du = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(v)\, \frac{\sin \lambda(x-v)}{x-v}\, dv.$$

Утверждаемый результат вытекает теперь из теории простого интеграла Фурье (теорема 12, случай Ia).

Т е о р е м а 59[1]. *Если* $f(t) \in L^2(-\infty, \infty)$, *то*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{\lambda\to\infty} \int_{-\lambda}^{\lambda} \left(1 - \frac{|u|}{\lambda}\right) F(u) e^{-ixu}\, du$$

для всякой точки x, *в которой выполнено условие*

$$\int_0^h |f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)|\, dt = o(h)$$

при $h \to 0$, *значит — почти для всех* x. *При этом* $f(x)$ *почти всюду представима двойным интегралом Фурье, если в нём каждый из интегралов понимать в смысле* $(C, 1)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Трансформация Фурье функции $G(u)$, равной $\left(1 - \dfrac{|u|}{\lambda}\right) e^{-ixu}$ при $|u| < \lambda$ и 0 при $|u| > \lambda$, есть

$$g(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\lambda}^{\lambda} \left(1 - \frac{|u|}{\lambda}\right) e^{-ixu - iuv}\, du = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \frac{2\sin^2 \frac{1}{2}\lambda(x+v)}{\lambda(x+v)^2}\, .$$

Поэтому, согласно формуле Парсеваля,

$$\int_{-\lambda}^{\lambda} \left(1 - \frac{|u|}{\lambda}\right) F(u) e^{-ixu}\, du = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \frac{2\sin^2 \frac{1}{2}\lambda(x-v)}{\lambda(x-v)^2}\, dv,$$

и, как в § 1.16, первое утверждение теоремы следует из теоремы 13.

Из справедливости того же результата при перестановке f и F следует и второе утверждение теоремы.

Из этой теоремы вытекает

Т е о р е м а 60. *Если*

$$f(x) = \lim_{a\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^{a} e^{-ixt} \psi(t)\, dt,$$

где $\psi \in L^2$, *и одновременно*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixt} \chi(t)\, dt,$$

[1] Plancherel (3).

где $\chi \in L$, *то* $\psi \equiv \chi$.

Действительно, по предыдущей теореме предел

$$\lim_{\lambda\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\lambda}^{\lambda} \left(1 - \frac{|t|}{\lambda}\right) f(t) e^{ixt}\, dt$$

почти всюду равен $\psi(x)$, а по теореме 14 он почти всюду равен $\chi(x)$.

3.11. Сходимость почти всюду. Если $f(t)$ принадлежит к L^2, то интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt} f(t)\, dt$$

сходится в среднем. Вместе с тем, в силу теоремы 59, он также суммируем $(C, 1)$ почти всюду, так как в этой теореме f и F можно переменить местами.

Неизвестно, обязательно ли сходится указанный интеграл почти всюду в обычном смысле. Как и в теореме 58, можно было бы легко добиться сходимости его почти всюду путём наложения дополнительных условий на $F(x)$. Предметом ближайших параграфов будет установление простых дополнительных условий на саму функцию $f(x)$, обеспечивающих сходимость этого интеграла почти всюду.

Теорема 61[1]. *Если* $f(t) \in L^2(-\infty, \infty)$, *то*

$$\int_{-\lambda}^{\lambda} e^{ixt} f(t)\, dt = o(\ln \lambda) \tag{3.11.1}$$

для всякой точки x, *в которой выполнено условие*

$$\chi(h) = \int_0^h |F(x+y) + F(x-y) - 2F(x)|\, dy = o(h)$$

при $h \to 0$, *значит — почти для всех* x.

Доказательство. Как и в доказательстве теоремы 58, получаем

$$\int_{-\lambda}^{\lambda} e^{ixt} f(t)\, dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(x+y) \frac{\sin \lambda y}{y}\, dy.$$

Но

$$\left| \int_1^{\infty} F(x+y) \frac{\sin \lambda y}{y}\, dy \right|^2 \leqslant \int_1^{\infty} |F(x+y)|^2\, dy \int_1^{\infty} \frac{dy}{y^2} \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |F(t)|^2\, dt$$

[1] Plancherel (3).

и аналогично для интеграла по $(-\infty, -1)$. С другой стороны,

$$\int_{-1}^{1} F(x+y)\,\frac{\sin\lambda y}{y}\,dy = \int_0^1 [F(x+y)+F(x-y)]\,\frac{\sin\lambda y}{y}\,dy =$$
$$= \int_0^1 [F(x+y)+F(x-y)-2F(x)]\,\frac{\sin\lambda y}{y}\,dy + O(1),$$

если $F(x)$ конечна. Последний интеграл по абсолютной величине не превосходит

$$\lambda\int_0^{1/\lambda}\bigl|F(x+y)+F(x-y)-2F(x)\bigr|\,dy+\int_{1/\lambda}^{1}\bigl|F(x+y)+F(x-y)-2F(x)\bigr|\,\frac{dy}{y}\,.$$

Если $\chi(h)=o(h)$, то первый член есть $o(1)$, а второй равен

$$\int_{1/\lambda}^{1}\frac{\chi'(y)}{y}\,dy = \frac{\chi(y)}{y}\bigg|_{1/\lambda}^{1} + \int_{1/\lambda}^{1}\frac{\chi(y)}{y^2}\,dy = O(1)+o\left(\int_{1/\lambda}^{1}\frac{dy}{y}\right) = o(\ln\lambda).$$

Это доказывает теорему.

Т е о р е м а 62[1]. *Если функции $f(t)$ и $f(t)\ln(|t|+2)$ принадлежат к $L^2(-\infty,\infty)$, то почти для всех x*

$$\lim_{\lambda\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\lambda}^{\lambda} e^{ixt}f(t)\,dt = F(x). \tag{3.11.2}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеем

$$\int_{-\lambda}^{\lambda} e^{ixt}f(t)\,dt = \int_{-\lambda}^{\lambda} e^{ixt}\left(1-\frac{|t|}{\lambda}\right)f(t)\,dt + \frac{1}{\lambda}\int_{-\lambda}^{\lambda} e^{ixt}|t|f(t)\,dt.$$

Первый член, по теореме 59, почти всюду сходится к $\sqrt{2\pi}F(x)$. Поэтому достаточно доказать, что почти для всех x

$$\int_{-\lambda}^{\lambda} e^{ixt}|t|f(t)\,dt = o(\lambda).$$

Но по теореме 61

$$\varphi(\lambda) = \int_0^{\lambda} e^{ixt}f(t)\ln(t+2)\,dt = o(\ln\lambda)$$

почти для всех x. Если x — точка, в которой выполняется это соотношение, то

[1] Plancherel (3).

$$\int_0^\lambda e^{ixt} t f(t)\,dt = \int_0^\lambda \frac{t\varphi'(t)}{\ln(t+2)}\,dt =$$
$$= \frac{t\varphi(t)}{\ln(t+2)}\Big|_0^\lambda - \int_0^\lambda \left(\frac{1}{\ln(t+2)} - \frac{t}{(t+2)\ln^2(t+2)}\right)\varphi(t)\,dt =$$
$$= \frac{\lambda}{\ln(\lambda+2)}\,o(\ln\lambda) + \int_0^\lambda o(1)\,dt = o(\lambda),$$

что и доказывает теорему.

3.12. Результат, полученный в предыдущем параграфе, можно улучшить, хотя проведённый вывод, казалось бы, опирается на столь точные оценки, что не остаётся уже места для дальнейшего уточнения.

Теорема 63. *Если функции $f(t)$ и $f(t)\sqrt{\ln(|t|+2)}$ принадлежат к $L^2(-\infty,\infty)$, то соотношение* (3.11.2) *имеет место почти для всех x*[1].

Доказательство. Положим

$$\Phi(x) = \int_{-\lambda(x)}^{\lambda(x)} e^{ixt} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt} f(t)\omega(x,t)\,dt,$$

где $\lambda(x)$ — произвольная функция от x, удовлетворяющая условию $\lambda(x) \leqslant a$, а $\omega(x,t) = 1$ при $|t| \leqslant \lambda(x)$ и $= 0$ при $|t| > \lambda(x)$, так что $\omega(x,t) = 0$ при $|t| > a$ для всякого x. Тогда

$$\int_0^\xi \Phi(x)\,dx = \int_0^\xi dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt} f(t)\omega(x,t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sqrt{\ln(|t|+2)}\,\chi(t)\,dt,$$

где

$$\chi(t) = \frac{1}{\sqrt{\ln(|t|+2)}} \int_0^\xi e^{ixt}\omega(x,t)\,dx$$

(область интегрирования по t на самом деле конечна). Поэтому

$$\left|\int_0^\xi \Phi(x)\,dx\right|^2 \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 \ln(|t|+2)\,dt \int_{-\infty}^{\infty} |\chi(t)|^2\,dt.$$

Но

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\chi(t)|^2\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{\ln(|t|+2)} \int_0^\xi e^{ixt}\omega(x,t)\,dx \int_0^\xi e^{-iyt}\omega(y,t)\,dy =$$
$$= \int_0^\xi dx \int_0^\xi dy \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(x-y)t}\,\frac{\omega(x,t)\,\omega(y,t)}{\ln(|t|+2)}\,dt =$$
$$= \int_0^\xi dx \int_0^\xi dy \int_{-\lambda(x,y)}^{\lambda(x,y)} \frac{e^{i(x-y)t}}{\ln(|t|+2)}\,dt,$$

[1] Аналогичная теорема для рядов была дана Плеснером [Plessner (2)].

где $\lambda(x,y)=\min\{\lambda(x),\lambda(y)\}$. Полагая $\lambda(x,y)=\lambda$ и дважды интегрируя по частям, имеем

$$\int_0^\lambda \frac{\cos(x-y)t}{\ln(t+2)}\,dt=\frac{\sin(x-y)\lambda}{(x-y)\ln(\lambda+2)}+\frac{1-\cos(x-y)\lambda}{(x-y)^2(\lambda+2)\ln(\lambda+2)}+$$
$$+\frac{1}{(x-y)^2}\int_0^\lambda[1-\cos(x-y)t]\,\frac{\ln(t+2)+2}{(t+2)^2\ln^3(t+2)}\,dt=$$
$$=J_1+J_2+J_3.$$

Заметим теперь, что *если* $F(x,y,t)=F(y,x,t)$, *то*

$$\left|\int_0^\xi\!\!\int_0^\xi F(x,y,\lambda(x,y))\,dx\,dy\right|\leqslant 2\int_0^\xi dx\int_0^\xi|F(x,y,\lambda(x))|\,dy.$$

Действительно, пусть Q — квадрат $0\leqslant x\leqslant\xi$, $0\leqslant y\leqslant\xi$, и

$$Q_1=Q\{\lambda(x)\leqslant\lambda(y)\},\quad Q_2=Q\{\lambda(x)>\lambda(y)\}.$$

Тогда в Q_1 $\lambda(x,y)=\lambda(x)$, а в Q_2 $\lambda(x,y)=\lambda(y)$. Поэтому

$$\left|\iint_Q F(x,y,\lambda(x,y))\,dx\,dy\right|\leqslant\left|\iint_{Q_1}F(x,y,\lambda(x))\,dx\,dy\right|+$$
$$+\left|\iint_{Q_2}F(x,y,\lambda(y))\,dx\,dy\right|\leqslant 2\int_0^\xi dx\int_0^\xi\bigl|F(x,y,\lambda(x))\bigr|\,dy$$

в силу симметричной роли x и y.

Отсюда следует, что

$$\left|\int_0^\xi\!\!\int_0^\xi J_1\,dx\,dy\right|\leqslant 2\int_0^\xi dx\int_0^\xi\left|\frac{\sin((x-y)\lambda(x))}{(x-y)\ln(\lambda(x)+2)}\right|\,dy.$$

Но если $0\leqslant x\leqslant\xi$, то

$$\int_0^\xi\left|\frac{\sin((x-y)\lambda(x))}{x-y}\right|\,dy\leqslant 2\int_0^{\xi\lambda(x)}\left|\frac{\sin u}{u}\right|\,du\leqslant$$
$$\leqslant 2\left(1+\int_1^{\xi[\lambda(x)+2]}\frac{du}{u}\right)=2\Bigl[1+\ln\xi+\ln\bigl(\lambda(x)+2\bigr)\Bigr].$$

Поэтому

$$\left|\int_0^\xi\!\!\int_0^\xi J_1\,dx\,dy\right|\leqslant 4\int_0^\xi\frac{1+\ln\xi+\ln(\lambda(x)+2)}{\ln(\lambda(x)+2)}\,dx<K(\xi).$$

Аналогично

$$\left|\int_0^\xi\int_0^\xi J_2\,dx\,dy\right| \leqslant$$
$$\leqslant 2\int_0^\xi \frac{dx}{(\lambda(x)+2)\ln^2(\lambda(x)+2)}\int_0^\xi \frac{1-\cos\bigl((x-y)\lambda(x)\bigr)}{(x-y)^2}\,dy <$$
$$< A\int_0^\xi \frac{\lambda(x)}{(\lambda(x)+2)\ln^2(\lambda(x)+2)}\,dx < K(\xi).$$

Далее

$$\left|\int_0^\xi\int_0^\xi J_3\,dx\,dy\right| \leqslant 2\int_0^\infty \frac{\ln(t+2)+2}{(t+2)^2\ln^3(t+2)}\,dt\int_0^\xi dx\int_0^\xi \frac{1-\cos(x-y)t}{(x-y)^2}\,dy <$$
$$< K(\xi)\int_0^\infty \frac{t[\ln(t+2)+2]}{(t+2)^2\ln^3(t+2)}\,dt = K(\xi).$$

Поэтому для любой функции $\lambda(x)$ справедливо неравенство

$$\left|\int_0^\xi \Phi(x)\,dx\right|^2 < K(\xi)\int_{-\infty}^\infty f^2(t)\ln(|t|+2)\,dt.$$

Пусть

$$\varphi(x,T,T') = \max_{T\leqslant\lambda(x)\leqslant T'}\int_T^{\lambda(x)} f(t)\cos xt\,dt.$$

Функция $\varphi(x,T,T')$ есть разность между вещественными частями двух интегралов типа Φ, в которых $f(t)=0$ при $t<T$ и $t>T'$. Поэтому

$$\left|\int_0^\xi \varphi(x,T,T')\,dx\right|^2 <$$
$$< K(\xi)\int_T^{T'} f^2(t)\ln(t+2)\,dt < K(\xi)\int_T^\infty f^2(t)\ln(t+2)\,dt.$$

При $T'\to\infty$

$$\varphi(x,T,T') \to \varphi(x,T) = \max_{T\leqslant\lambda(x)}\int_T^{\lambda(x)} f(t)\cos xt\,dt,$$

и $\varphi(x,T,T')\geqslant 0$, так как $\displaystyle\int_T^{\lambda(x)} f(t)\cos xt\,dt = 0$, когда $\lambda(x)=T$. Следовательно[1],

$$\left|\int_0^\xi \varphi(x,T)\,dx\right|^2 < K(\xi)\int_T^\infty f^2(t)\ln(t+2)\,dt.$$

[1] По теореме Фату; см. Т и т ч м а р ш, Теория функций, § 10.8.1. [См. также И. П. Н а т а н с о н, Основы теории функций вещественной переменной, стр. 125. — *Прим. перев.*]

Но $\varphi(x,T) \geqslant 0$, а при $T \to \infty$ функция $\varphi(x,T)$ не возрастает и, следовательно, стремится к некоторому пределу $\varphi_1(x)$. Поэтому

$$\int_0^\xi \varphi_1(x)\,dx \leqslant \lim_{T\to\infty} \int_0^\xi \varphi(x,T)\,dx = 0,$$

откуда $\varphi_1(x) = 0$ почти для всех x. Аналогично, обозначая через $\psi(x,T)$ соответствующую функцию с заменой «max» на «min», получим, что $\psi(x,T) \to 0$ почти для всех x.

Так как теперь

$$\psi(x,T) \leqslant \int_T^U f(t)\cos xt\,dt \leqslant \varphi(x,T),$$

то $\displaystyle\int_T^U f(t)\cos xt\,dt \to 0$ почти для всех x, когда $T \to \infty$ и $U \to \infty$ произвольным образом. Следовательно, интеграл

$$\int_0^{\to\infty} f(t)\cos xt\,dt$$

существует почти для всех x. Аналогично убедимся в том, что и синус-интеграл сходится почти для всех x. Тем самым доказано, что предел (3.11.2) существует почти для всех x. Так как обычный предел почти всюду равен пределу в среднем, то, в силу теоремы 48, его значение почти всюду равно $F(x)$.

3.13. Теоремы о свёртках.

Теорема 64. *Если $f(x)$ и $g(x)$ принадлежат к $L^2(-\infty,\infty)$, то функции* (2.1.9) *образуют пару трансформаций Фурье в том смысле, что равенство* (2.1.8) *выполняется для всех x.*

Доказательство. Трансформация Фурье функции $f(u+t)$, где t фиксировано, равна

$$\operatorname*{l.i.m.}_{a\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^{a} e^{ixu} f(u+t)\,du = \operatorname*{l.i.m.}_{a\to\infty} \frac{e^{-ixt}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a+t}^{a+t} e^{ixv} f(v)\,dv = e^{-ixt}F(x).$$

Требуемый результат следует поэтому из формулы Парсеваля, доказанной в теореме 49.

Теорема 65. *Если $f(x) \in L^2(-\infty,\infty)$, а $g(x) \in L(-\infty,\infty)$, то функции* (2.1.9) *суть трансформации Фурье из класса L^2.*

Доказательство. Так как F принадлежит к L^2, а G ограничена, то произведение FG принадлежит к L^2. Интеграл от его трансформации Фурье есть

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(u)G(u)\frac{e^{-ixu}-1}{-iu}\,du. \tag{3.13.1}$$

Но трансформация Фурье произведения $G(u)\dfrac{e^{-ixu}-1}{-iu}$ равна

$$\begin{aligned}
&\underset{a\to\infty}{\text{l.i.m.}}\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-a}^{a} e^{-iyu}\,G(u)\frac{e^{-ixu}-1}{-iu}\,du = \\
&\quad= \underset{a\to\infty}{\text{l.i.m.}}\,\frac{1}{2\pi}\int_{-a}^{a} e^{-iyu}\,\frac{e^{-ixu}-1}{-iu}\,du\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi u}g(\xi)\,d\xi = \\
&\quad= \underset{a\to\infty}{\text{l.i.m.}}\,\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g(\xi)\,d\xi\int_{0}^{a}\frac{\sin(x+y-\xi)u-\sin(y-\xi)u}{u}\,du = \\
&\quad= \int_{y}^{x+y} g(\xi)\,d\xi \qquad (x>0),
\end{aligned}$$

где обычный интеграл существует в силу мажорированной сходимости. Следовательно, интеграл (3.13.1) равен

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\,dy\int_{-y}^{x-y} g(\xi)\,d\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\,dy\int_{0}^{x} g(u-y)\,du = \\
&\qquad= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{x} du\int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(u-y)\,dy,
\end{aligned}$$

где обращение порядка интегрирования законно в силу абсолютной сходимости. Дифференцирование по x завершает доказательство теоремы.

Непосредственное доказательство того, что если f принадлежит к L^2, а g — к L, то

$$h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)\,dy$$

принадлежит к L^2, доставляется неравенствами[1]

$$\begin{aligned}
|h(x)|^2 &\leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |f(y)|^2|g(x-y)|\,dy\cdot\int_{-\infty}^{\infty}|g(x-y)|\,dy = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} |f(y)|^2|g(x-y)|\,dy\cdot\int_{-\infty}^{\infty}|g(u)|\,du,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty}|h(x)|^2\,dx &\leqslant \int_{-\infty}^{\infty}|g(u)|\,du\cdot\int_{-\infty}^{\infty}|f(y)|^2\,dy\int_{-\infty}^{\infty}|g(x-y)|\,dx = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}|f(y)|^2\,dy\left(\int_{-\infty}^{\infty}|g(u)|\,du\right)^2.
\end{aligned}$$

[1] Существование интеграла $\int_{-\infty}^{\infty}|f(y)|^2|g(x-y)|\,dy$ почти всюду легко получается с помощью теоремы Фубини. — *Прим. перев.*

Т е о р е м а 66. *Если $f(x)$ положительна, чётна и принадлежит к $L(-\infty, \infty)$, то её трансформация Фурье $F(x)$ может быть представлена в виде*

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\varphi(x-t)\,dt, \tag{3.13.2}$$

где φ принадлежит к $L^2(-\infty, \infty)$. И обратно, если $F(x)$ может быть представлена в указанном виде, то

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\to\infty} F(t)\cos xt\,dt$$

положительна и принадлежит к L.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $f(x)$ положительна и принадлежит к L, то $\sqrt{f(x)}$ принадлежит к L^2. Пусть $G(x)$ — трансформация Фурье последней функции. Тогда G принадлежит к L^2 и, по теореме 64,

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(t)G(x-t)\,dt$$

есть трансформация Фурье произведения $\sqrt{f} \cdot \sqrt{f} = f$.

Обратно, если имеет место равенство (3.13.2), то f равна квадрату трансформации Фурье функции φ, следовательно, f положительна и принадлежит к L.

Т е о р е м а 67. *Если f принадлежит к L, то*

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\psi(x-t)\,dt,$$

где φ и ψ принадлежат к L^2, и обратно.

Эта теорема следует из предшествующей в силу тождества

$$f = \sqrt{|f|} \cdot \sqrt{|f|}\,\operatorname{sgn} f.$$

3.14. Специальные теоремы.

Т е о р е м а 68. *Если одновременно $f(x)$ и $f'(x)$ принадлежат к L^2, то одновременно $F(x)$ и $xF(x)$ принадлежат к L^2, и обратно.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеем

$$f^2(x) - f^2(0) = 2\int_0^x f(t)f'(t)\,dt,$$

что стремится к пределу при $x \to \infty$. Так как, однако, функция $f^2(x)$ принадлежит к L, то она не может стремиться к пределу, отличному от нуля; следовательно, $f(x)$ стремится к нулю при $x \to \infty$.

Но теперь

$$\int_{-a}^{a} e^{ixu} f'(u)\,du = e^{ixu} f(u)\Big|_{-a}^{a} - ix \int_{-a}^{a} e^{ixu} f(u)\,du.$$

При $a \to \infty$ левая часть сходится в среднеквадратичном к $\sqrt{2\pi}\Phi(x)$. Первый член в правой части, по доказанному, стремится к нулю равномерно относительно x. Второй же член правой части сходится в среднеквадратичном к $-\sqrt{2\pi}ixF(x)$, по крайней мере на конечных интервалах значений x. Следовательно,

$$\Phi(x) = -ixF(x),$$

и требуемый результат следует теперь из того, что $\Phi(x)$ принадлежит к L^2.

Обратно, пусть функция $xF(x)$ принадлежит к L^2 и $\varphi(x)$ — её трансформация Фурье. Так как F и xF принадлежат к L^2, то $F(u)$ принадлежит к $L(-\infty, \infty)$[1]. Поэтому

$$\int_0^x \varphi(u)\,du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} uF(u)\,\frac{e^{-ixu}-1}{-iu}\,du = \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(u) e^{-ixu}\,du - C.$$

Но первый член в правой части почти всюду равен $if(x)$, и мы можем принять его по определению за $if(x)$ всюду. Тогда для всех x

$$\int_0^x \varphi(u)\,du = if(x) - C,$$

откуда непосредственно следует второе утверждение теоремы.

Полученный результат, очевидно, может быть распространён на производные любого порядка.

3.15.

Т е о р е м а 69. *Если $f(x)$, $F_c(x)$ — пара косинус-трансформаций Фурье из L^2, то и*

$$\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt, \qquad \int_x^{\infty} \frac{F_c(t)}{t}\,dt$$

— такая пара. Аналогичное предложение имеет место и для синус-трансформаций Фурье.

---

[1] Действительно, неравенство Шварца даёт

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F|\,dx = \int_{|x|\leqslant 1} |F|\,dx + \int_{|x|>1} \frac{1}{|x|}\,|xF|\,dx \leqslant \sqrt{2\int_{|x|\leqslant 1} |F|^2\,dx} + \sqrt{2\int_{|x|>1} |xF|^2\,dx}.$$

— Прим. перев.

Доказательство. То, что вторая пара функций принадлежит к L^2, есть теорема Харди[1]. Докажем, что эти функции образуют пару косинус-трансформаций Фурье. Имеем

$$\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty F_c(y)\frac{\sin xy}{xy}\,dy.$$

Но косинус-трансформация Фурье правой части почти всюду равна

$$\begin{aligned}\frac{2}{\pi}\frac{d}{du}\int_0^\infty \frac{\sin xu}{x}\,dx\int_0^\infty F_c(y)\,\frac{\sin xy}{xy}\,dy &=\\ &= \frac{2}{\pi}\frac{d}{du}\int_0^\infty \frac{F_c(y)}{y}\,dy\int_0^\infty \frac{\sin xu\,\sin xy}{x^2}\,dx =\\ &= \frac{d}{du}\int_0^\infty \frac{F_c(y)}{y}\,\min(u,y)\,dy =\\ &= \frac{d}{du}\left(\int_0^u F_c(y)\,dy + u\int_u^\infty \frac{F_c(y)}{y}\,dy\right) = \int_u^\infty \frac{F_c(y)}{y}\,dy.\end{aligned}$$

---

[1] См. Титчмарш, Теория функций, гл. XII, упр. 14. [Определим функции $\varphi(x)=\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt$, $\psi(x)=\int_x^\infty \frac{f(t)}{t}\,dt$. Теорема Харди состоит в том, что одновременно с f также φ и ψ принадлежат к $L^2(0,\infty)$. Подстановки $t=\frac{1}{u}$, $x=\frac{1}{y}$ показывают, что $\frac{1}{u}f\left(\frac{1}{u}\right)$ принадлежит к $L^2(0,\infty)$ и

$$\int_0^\infty \left|\int_0^\infty \frac{f(t)}{t}\,dt\right|^2 dx = \int_0^\infty \left|\frac{1}{y}\int_0^y \frac{1}{u}\,f\left(\frac{1}{u}\right)\,du\right|^2 dy;$$

следовательно, достаточно доказать утверждение теоремы Харди для φ.

Положим $f_1(x)=\int_0^x f(t)\,dt$. Применяя неравенство Шварца, получаем

$$f_1^2(x)\leqslant x\int_0^x f^2(t)\,dt$$

и

$$f_1^2(x)\leqslant 2f_1^2(\xi)+2[f_1(x)-f_1(\xi)]^2\leqslant 2f_1^2(\xi)+2(x-\xi)\int_\xi^x f^2(t)\,dt.$$

Отсюда следует, что $\frac{1}{x}\,f_1^2(x)\to 0$ при $x\to 0$ и $x\to\infty$. Пусть $0<a<b<\infty$. Интегрируя по частям и применяя неравенство Шварца, имеем

$$\begin{aligned}\int_a^b \varphi^2(x)\,dx = \int_a^b f_1^2(x)\,\frac{dx}{x^2} &= -\frac{f_1^2(x)}{x}\Bigg|_a^b + 2\int_a^b \varphi(x)f(x)\,dx \leqslant\\ &\leqslant -\frac{f_1^2(x)}{x}\Bigg|_a^b + 2\sqrt{\int_a^b \varphi^2(x)\,dx}\sqrt{\int_a^b f^2(x)\,dx}.\end{aligned}$$

Переходя к пределу по $a\to 0$, $b\to\infty$ и принимая во внимание доказанное относительно $\frac{1}{x}\,f_1^2(x)$ получаем $\sqrt{\int_0^\infty \varphi^2(x)\,dx}\leqslant 2\sqrt{\int_0^\infty f^2(x)\,dx}$, и теорема Харди доказана. — *Прим. перев.*]

Обращение порядка интегрирования законно здесь в силу абсолютной сходимости. Действительно, при $y < u$

$$\int_0^\infty \left| \frac{\sin xu \, \sin xy}{x^2} \right| dx \leqslant \int_0^{1/u} uy \, dx + \int_{1/u}^{1/y} \frac{y}{x} \, dx + \int_{1/y}^\infty \frac{dx}{x^2} =$$
$$= y + y \ln \frac{u}{y} + y = \left(2 + \ln \frac{u}{y}\right) y,$$

и аналогично при $u < y$; но интеграл

$$\int_0^u |F_c(y)| \left(2 + \ln \frac{u}{y}\right) dy + u \int_u^\infty \frac{|F_c(y)|}{y} \left(2 + \ln \frac{y}{u}\right) dy$$

сходится, если F_c принадлежит к L^2.

3.16. Один случай формулы Парсеваля.

Т е о р е м а 70. *Если f принадлежит к L, а g — к L^2 и ограничена, то*

$$\lim_{\lambda \to \infty} \int_{-\lambda}^{\lambda} \left(1 - \frac{|x|}{\lambda}\right) F(x) G(x) \, dx = \int_{-\infty}^\infty f(x) g(-x) \, dx.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеем

$$\int_{-\lambda}^{\lambda} \left(1 - \frac{|x|}{\lambda}\right) F(x) G(x) \, dx =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\lambda}^{\lambda} \left(1 - \frac{|x|}{\lambda}\right) G(x) \, dx \int_{-\infty}^\infty e^{ixt} f(t) \, dt =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty f(t) \, dt \int_{-\lambda}^{\lambda} e^{ixt} \left(1 - \frac{|x|}{\lambda}\right) G(x) \, dx,$$

где обращение порядка интегрирования законно вследствие равномерной сходимости. Как и в доказательстве теоремы 59, внутренний интеграл равен

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^\infty g(u) \, \frac{2 \sin^2 \frac{1}{2} \lambda (t+u)}{\lambda (t+u)^2} \, du.$$

Последний интеграл ограничен, если $g(u)$ ограничена, и стремится к $\sqrt{2\pi} g(-t)$ почти для всех t. Требуемый результат следует отсюда на основании мажорированной сходимости.

3.17. Трансформации Меллина. Мы будем говорить, что $f(x)$ принадлежит к $\mathfrak{L}^2$, если

$$\int_0^\infty \frac{|f(x)|^2}{x} \, dx < \infty.$$

Теорема 71. *Пусть $x^k f(x)$ принадлежит к $\mathfrak{L}^2$. Тогда*

$$\mathfrak{F}(s,a)=\int_{1/a}^{a} f(x)x^{s-1}\,dx \quad (\operatorname{Re} s = k)$$

сходится в среднеквадратичном на прямой $(k-i\infty, k+i\infty)$ к некоторой функции $\mathfrak{F}(s)$;

$$f(x,a)=\frac{1}{2\pi i}\int_{k-ia}^{k+ia}\mathfrak{F}(s)x^{-s}\,ds$$

сходится в среднем к $f(x)$ в том смысле, что

$$\lim_{a\to\infty}\int_0^\infty |f(x)-f(x,a)|^2 x^{2k-1}\,dx=0,$$

и

$$\int_0^\infty |f(x)|^2 x^{2k-1}\,dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|\mathfrak{F}(k+it)|^2\,dt.$$

Этот результат получается из теоремы Планшереля с помощью обычной подстановки.

Теорема 72. *Пусть $x^k f(x)$ и $x^{1-k}g(x)$ принадлежат к $\mathfrak{L}^2$. Тогда*

$$\int_0^\infty f(x)g(x)\,dx=\frac{1}{2\pi i}\int_{k-i\infty}^{k+i\infty}\mathfrak{F}(s)\mathfrak{G}(1-s)\,ds.$$

Это — соответствующее преобразование теоремы 49.

Теорема 73. *Пусть $x^k f(x)$ и $x^{\sigma-k}g(x)$ принадлежат к $\mathfrak{L}^2$. Тогда*

$$f(x)g(x), \quad \frac{1}{2\pi i}\int_{k-i\infty}^{k+i\infty}\mathfrak{F}(w)\mathfrak{G}(s-w)\,dw$$

есть пара трансформаций Меллина в том смысле, что

$$\int_0^\infty f(x)g(x)x^{s-1}\,dx=\frac{1}{2\pi i}\int_{k-i\infty}^{k+i\infty}\mathfrak{F}(w)\mathfrak{G}(s-w)\,dw$$

для всех значений t.

Этот результат получается из предыдущей теоремы заменой $g(x)$ на $g(x)x^{s-1}$.

IV
ТРАНСФОРМАЦИИ ИЗ ДРУГИХ L-КЛАССОВ

4.1. Трансформации Фурье функций из L^p. Теорема Планшереля может быть перенесена с показателя 2 на общий показатель p. Всюду в настоящей главе мы будем пользоваться обозначением $p' = \dfrac{p}{p-1}$ и аналогично для других букв.

Т е о р е м а 74[1]. *Пусть $f(x) \in L^p(-\infty, \infty)$, где $1 < p \leqslant 2$. Тогда*

$$F(x,a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^{a} e^{ixt} f(t)\, dt \tag{4.1.1}$$

при $a \to \infty$ сходится в среднем с показателем p'. Предел в среднем $F(x)$, называемый трансформацией Фурье функции $f(x)$, удовлетворяет неравенству

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(x)|^{p'}\, dx \leqslant \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}p'-1}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p\, dx \right)^{\frac{1}{p-1}}. \tag{4.1.2}$$

Имеют место двойственные соотношения, в том смысле, что почти для всех x

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{e^{ixt}-1}{it}\, dt, \tag{4.1.3}$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{\infty} F(t) \frac{e^{-ixt}-1}{-it}\, dt. \tag{4.1.4}$$

Как и в случае L^2, можно было бы заменить $F(x,a)$ на

$$F(x,a,b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^{b} e^{ixt} f(t)\, dt,$$

где $a \to \infty$ и $b \to \infty$ независимо друг от друга.

4.2. Наиболее очевидный источник подобных результатов заключён в формулах (2.1.11). Если k — целое положительное, то трансформацией

---

[1] Titchmarsh (2).

Фурье степени $[F(x)]^k$ формально служит $\dfrac{1}{(2\pi)^{\frac{k-1}{2}}}\,\varphi_k(x)$, где

$$\varphi_k(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u_{k-1})\,du_{k-1} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} f(u_1) f(x - u_1 - \ldots - u_{k-1})\,du_1.$$

Средства для обращения с подобными интегралами доставляются следующими леммами[1].

Л е м м а α. (Н е р а в е н с т в о Ю н г а.) *Если функции $f(x)$ и $g(x)$ принадлежат к классам $L^{\frac{1}{1-\lambda}}$ и $L^{\frac{1}{1-\mu}}$ соответственно, где $\lambda > 0$, $\mu > 0$, $\lambda + \mu < 1$, то*

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} fg\,dx\right| \leqslant$$
$$\leqslant \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f|^{\frac{1}{1-\lambda}} |g|^{\frac{1}{1-\mu}}\,dx\right)^{1-\lambda-\mu} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f|^{\frac{1}{1-\lambda}}\,dx\right)^{\mu} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |g|^{\frac{1}{1-\mu}}\,dx\right)^{\lambda}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Неравенство Гёльдера для трёх функций есть

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} \varphi\psi\chi\,dx\right| \leqslant \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi|^{\frac{1}{\alpha}}\,dx\right)^{\alpha} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^{\frac{1}{\beta}}\,dx\right)^{\beta} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\chi|^{\frac{1}{\gamma}}\,dx\right)^{\gamma},$$

где $\alpha + \beta + \gamma = 1$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$. Положив в нём

$$|\varphi|^{\frac{1}{\alpha}} = |\psi|^{\frac{1}{\beta}} |\chi|^{\frac{1}{\gamma}}, \quad |\psi|^{1+\frac{\alpha}{\beta}} = |f|, \quad |\chi|^{1+\frac{\alpha}{\gamma}} = |g|$$

и $\gamma = \lambda$, $\beta = \mu$, получим требуемый результат.

Л е м м а β. *Пусть*

$$\mathfrak{F}_p(f) = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Если

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) g(x-t)\,dt,$$

то

$$\mathfrak{F}_{\frac{1}{1-\lambda-\mu}}(\varphi) \leqslant \mathfrak{F}_{\frac{1}{1-\lambda}}(f)\,\mathfrak{F}_{\frac{1}{1-\mu}}(g).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Неравенство Юнга даёт

$$|\varphi(x)| \leqslant \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^{\frac{1}{1-\lambda}} |g(x-t)|^{\frac{1}{1-\mu}}\,dt\right)^{1-\lambda-\mu} \left(\mathfrak{F}_{\frac{1}{1-\lambda}}(f)\right)^{\frac{\mu}{1-\lambda}} \left(\mathfrak{F}_{\frac{1}{1-\mu}}(f)\right)^{\frac{\lambda}{1-\mu}}.$$

[1] См. Х а р д и, Л и т л в у д и П о л и а, Неравенства, стр. 169–173.

Поэтому

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x)|^{\frac{1}{1-\lambda-\mu}}\,dx \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^{\frac{1}{1-\lambda}}\,dt \int_{-\infty}^{\infty} |g(x-t)|^{\frac{1}{1-\mu}}\,dx \times$$
$$\times \left(\mathfrak{F}_{\frac{1}{1-\lambda}}(f)\right)^{\frac{\mu}{(1-\lambda)(1-\lambda-\mu)}} \left(\mathfrak{F}_{\frac{1}{1-\mu}}(g)\right)^{\frac{\lambda}{(1-\mu)(1-\lambda-\mu)}} =$$
$$= \left(\mathfrak{F}_{\frac{1}{1-\lambda}}(f)\right)^{\frac{1}{1-\lambda}\left(1+\frac{\mu}{1-\lambda-\mu}\right)} \left(\mathfrak{F}_{\frac{1}{1-\mu}}(g)\right)^{\frac{1}{1-\mu}\left(1+\frac{\lambda}{1-\lambda-\mu}\right)},$$

откуда и следует требуемый результат.

Л е м м а γ. *Если $f(x)$ принадлежит к $L^{\frac{2k}{2k-1}}$, то $\varphi_k(x)$ принадлежит к L^2, и*

$$\int_{-\infty}^{\infty} [\varphi_k(x)]^2\,dx \leqslant \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^{\frac{2k}{2k-1}}\,dx\right)^{2k-1}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеем

$$\varphi_k(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\varphi_{k-1}(x-t)\,dt.$$

Повторно применяя предшествующую лемму, получаем

$$\mathfrak{F}_{\frac{1}{1-\frac{k}{2k}}}(\varphi_k) \leqslant \mathfrak{F}_{\frac{1}{1-\frac{k-1}{2k}}}(\varphi_{k-1})\mathfrak{F}_{\frac{1}{1-\frac{1}{2k}}}(f) \leqslant$$
$$\leqslant \mathfrak{F}_{\frac{1}{1-\frac{k-2}{2k}}}(\varphi_{k-2}) \left(\mathfrak{F}_{\frac{1}{1-\frac{1}{2k}}}(f)\right)^2 \leqslant \ldots \leqslant \left(\mathfrak{F}_{\frac{1}{1-\frac{1}{2k}}}(f)\right)^k,$$

что и утверждается леммой γ.

4.3. Доказательство теоремы 74 для $p = \dfrac{2k}{2k-1}$[1]**.** Предположим сначала, что $f(x)$ и $g(x)$ принадлежат к L^2 и вне некоторого конечного интервала тождественно равны нулю. Тогда

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(u_1)f(x-u_1)\,du_1$$

удовлетворяет тем же условиям и (например, по теореме 64) трансформацией Фурье этой функции служит $F(x)G(x)$.

Повторно применяя это $k-1$ раз и выбирая все функции равными, мы видим, что функции $[F(x)]^k$ и $\dfrac{1}{(2\pi)^{\frac{k-1}{2}}}\varphi_k(x)$ образуют пару транс-

[1] Метод доказательства аналогичен методу, применённому Юнгом (W.H. Young) для рядов Фурье. Список работ Юнга см. в библиографии, помещённой в книге Зигмунда.

формаций Фурье из класса L^2. Поэтому

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(x)|^{2k}\,dx = \frac{1}{(2\pi)^{k-1}} \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi_k(x)|^{2k}\,dx \leqslant \\ \leqslant \frac{1}{(2\pi)^{k-1}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^{\frac{2k}{2k-1}}\,dx\right)^{2k-1}.$$

Этим неравенство (4.1.2) доказано для специального класса рассмотренных функций и $p = \dfrac{2k}{2k-1}$.

Пусть теперь $f(x)$ — произвольная функция из класса $L^{\frac{2k}{2k-1}}$. Функция, равная $f(x)$ при $x \in (-b,-a) \cup (a,b)$ и равная нулю при других значениях x, принадлежит к выделенному специальному классу. В применении к этой функции полученный выше результат даёт

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(x,b)-F(x,a)|^{2k}\,dx \leqslant \frac{1}{(2\pi)^{k-1}} \left\{\left(\int_{-b}^{-a} + \int_{a}^{b}\right)|f(x)|^{\frac{2k}{2k-1}}\,dx\right\}^{2k-1}.$$

Но при $a \to \infty$, $b \to \infty$ правая часть этого неравенства стремится к нулю. Следовательно, $F(x,a)$ сходится в среднем к некоторой функции $F(x)$. Имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(x)|^{2k}\,dx = \lim_{a\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |F(x,a)|^{2k}\,dx \leqslant \\ \leqslant \lim_{a\to\infty} \frac{1}{(2\pi)^{k-1}} \left(\int_{-a}^{a} |f(x)|^{\frac{2k}{2k-1}}\,dx\right)^{2k-1} = \frac{1}{(2\pi)^{k-1}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^{\frac{2k}{2k-1}}\,dx\right)^{2k-1}.$$

Далее,

$$\int_0^{\xi} F(x)\,dx = \lim_{a\to\infty} \int_0^{\xi} F(x,a)\,dx = \lim_{a\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\xi} dx \int_{-a}^{a} e^{ixt} f(t)\,dt = \\ = \lim_{a\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^{a} f(t)\frac{e^{i\xi t}-1}{it}\,dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\frac{e^{i\xi t}-1}{it}\,dt,$$

так что почти для всех x

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\frac{e^{ixt}-1}{it}\,dt.$$

Наконец, при $0 < \xi < a$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(u,a)\frac{e^{-i\xi u}-1}{-iu}\,du = \\ = \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^{a} f(t)\,dt \int_{-\infty}^{\infty} e^{iut}\,\frac{e^{-i\xi u}-1}{-iu}\,du = \int_0^{\xi} f(t)\,dt,$$

где обращение порядка интегрирования законно вследствие ограниченной сходимости интеграла по u. Переходя к пределу по $a \to \infty$, мы получаем

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(u)\, \frac{e^{-i\xi u} - 1}{-iu}\, du = \int_0^{\xi} f(t)\, dt,$$

так как $\dfrac{e^{-i\xi u} - 1}{-iu}$ принадлежит к $L^{\frac{2k}{2k-1}}$. Следовательно,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{\infty} F(u)\, \frac{e^{-ixu} - 1}{-iu}\, du = f(x)$$

почти для всех $x > 0$. Таким же образом получим аналогичный результат для $x < 0$.

4.4. Распространение на случай общего *p*. С целью распространения доказанной теоремы на другие значения p мы сначала докажем соответствующую теорему для тригонометрических полиномов.

Лемма δ. *Для любых заданных чисел* c_m $(-n \leqslant m \leqslant n)$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{m=-n}^{n} c_m e^{imx} \right|^{p'} dx \leqslant \left(\sum_{m=-n}^{n} |c_m|^p \right)^{\frac{1}{p-1}}. \tag{4.4.1}$$

Мы дадим два доказательства этой леммы: первоначальное доказательство Юнга и Хаусдорфа и более позднее доказательство Харди и Литлвуда.

(I)[1]. Пусть $f(t)$ — функция из $L(-\pi, \pi)$, и пусть

$$c_m = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-imt} f(t)\, dt \quad (m = 0, \pm 1, \ldots). \tag{4.4.2}$$

Введём следующие обозначения:

$$J_p(f) = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^p\, dt \right)^{\frac{1}{p}} \tag{4.4.3}$$

и

$$S_p(f) = \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} |c_m|^p \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{4.4.4}$$

Нам нужно доказать, что для любого тригонометрического полинома $f(t)$ выполняется неравенство

$$J_{p'} \leqslant S_p \quad (1 < p \leqslant 2). \tag{4.4.5}$$

[1] Hausdorff (1).

Если p имеет вид $\dfrac{2k}{2k-1}$, то это получается путём применения к суммам рассуждений, аналогичных приведённым выше для интегралов. Если

$$f(x)=\sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m e^{imx}, \quad g(x)=\sum_{m=-\infty}^{\infty} \gamma_m e^{imx},$$

то

$$f(x)g(x)=\sum_{m=-\infty}^{\infty} d_m e^{imx}, \quad \text{где} \quad d_m=\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\gamma_{m-k}.$$

Аналогом леммы β служит поэтому неравенство

$$S_{\frac{1}{1-\lambda-\mu}}(fg)\leqslant S_{\frac{1}{1-\lambda}}(f)S_{\frac{1}{1-\mu}}(g), \tag{4.4.6}$$

и, как и в лемме γ, отсюда следует, что

$$S_2(f^k)\leqslant \left(S_{\frac{1}{1-\frac{1}{2k}}}(f)\right)^k. \tag{4.4.7}$$

Но для любого тригонометрического полинома φ

$$S_2(\varphi)=J_2(\varphi). \tag{4.4.8}$$

Таким образом,

$$S_2(f^k)=J_2(f^k)=[J_{2k}(f)]^k,$$

что в соединении с неравенством (4.4.7) и даёт (4.4.5) для $p=\dfrac{2k}{2k-1}$.

Для распространения неравенства (4.4.5) на другие значения p мы рассмотрим «максимальные полиномы», т.е. тригонометрические полиномы, для которых $J_{p'}^{p'}$, принимает максимальное значение при заданном значении S_p^p и заданном n. Так как S_p^p, $J_{p'}^{p'}$ суть непрерывные функции с непрерывными частными производными по компонентам x_m, y_m коэффициентов $c_m=x_m+iy_m$, то максимальные полиномы существуют и могут быть найдены обычным методом дифференциального исчисления. Положим

$$\varphi=\sum_{m=-n}^{n}(x_m^2+y_m^2)^{p/2}, \qquad \psi=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|^{p'}\,dt.$$

Тогда условия максимума суть

$$\frac{\dfrac{\partial\psi}{\partial x_m}}{\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_m}}=\frac{\dfrac{\partial\psi}{\partial y_m}}{\dfrac{\partial\varphi}{\partial y_m}}=\lambda \qquad (m=-n,\ldots,n).$$

Поэтому

$$\frac{\dfrac{\partial\psi}{\partial x_m}+i\dfrac{\partial\psi}{\partial y_m}}{\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_m}+i\dfrac{\partial\varphi}{\partial y_m}}=\lambda \qquad (m=-n,\ldots,n).$$

Но[1]

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_m}+i\frac{\partial\varphi}{\partial y_m}=p(x_m+iy_m)(x_m^2+y_m^2)^{\frac{p}{2}-1}=p|c_m|^{p-1}\operatorname{sgn}c_m.$$

Далее,

$$|f(t)|^2=f(t)\overline{f(t)},$$

$$2|f(t)|\frac{\partial}{\partial x_m}|f(t)|=\overline{f(t)}\frac{\partial}{\partial x_m}f(t)+f(t)\frac{\partial}{\partial x_m}\overline{f(t)}=\overline{f(t)}e^{imt}+f(t)e^{-imt},$$

и аналогично

$$2|f(t)|\frac{\partial}{\partial y_m}|f(t)|=\overline{f(t)}\,ie^{imt}-f(t)\,ie^{-imt}.$$

Поэтому

$$2|f(t)|\left(\frac{\partial}{\partial x_m}+i\frac{\partial}{\partial y_m}\right)|f(t)|=2f(t)e^{-imt},$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_m}+i\frac{\partial}{\partial y_m}\right)|f(t)|=e^{-imt}\operatorname{sgn}f(t),$$

откуда

$$\frac{\partial\psi}{\partial x_m}+i\frac{\partial\psi}{\partial y_m}=\frac{p'}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-imt}|f(t)|^{p'-1}\operatorname{sgn}f(t)\,dt.$$

Следовательно,

$$\frac{p'}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-imt}|f(t)|^{p'-1}\operatorname{sgn}f(t)\,dt=\lambda p|c_m|^{p-1}\operatorname{sgn}c_m \quad (m=-n,\ldots,n). \tag{4.4.9}$$

Для нахождения λ умножим данное равенство на $\bar{c}_m$ и просуммируем по всем m. Получим

$$\frac{p'}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|^{p'}\,dt=\lambda p\sum_{m=-n}^{n}|c_m|^p.$$

т.е.

$$p'J_{p'}^{p'}=\lambda pS_p^p. \tag{4.4.10}$$

[1] $\operatorname{sgn}z=\dfrac{z}{|z|}$ $(z\neq 0)$, $\operatorname{sgn}(0)=0$.

Но формула (4.4.9) даёт первые $2n+1$ коэффициентов Фурье функции $|f(t)|^{p'-1}\operatorname{sgn} f(t)$. Поэтому неравенство Бесселя для этой функции даёт

$$\sum_{m=-n}^{n}\left|\frac{\lambda p}{p'}\,|c_m|^{p-1}\operatorname{sgn} c_m\right|^2 \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Bigl||f(t)|^{p'-1}\operatorname{sgn} f(t)\Bigr|^2\,dt,$$

т. е.

$$\frac{\lambda^2 p^2}{p'^2}\sum_{m=-n}^{n}|c_m|^{2p-2} \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|^{2p'-2}\,dt,$$

или

$$\lambda^2 p^2 S_{2p-2}^{2p-2} \leqslant p'^2 J_{2p'-2}^{2p'-2}. \tag{4.4.11}$$

Из (4.4.10) и (4.4.11) следует, что для каждого максимального полинома

$$\frac{J_{p'}^{p'}}{S_p^p} \leqslant \frac{J_{2p'-2}^{p'-1}}{S_{2p-2}^{p-1}}\,. \tag{4.4.12}$$

Пусть

$$r' = 2p' - 2, \quad r = \frac{2}{3-p}\,.$$

Тогда из неравенства Гёльдера следует, что

$$S_r^{p'-1} \leqslant S_{2p-2}^{p-1} S_p^{p'-p}, \tag{4.4.13}$$

и неравенства (4.4.12) и (4.4.13) дают

$$\left(\frac{J_{p'}}{S_p}\right)^{p'} \leqslant \left(\frac{J_{r'}}{S_r}\right)^{p'-1}. \tag{4.4.14}$$

Предположим теперь, что неравенство (4.4.5) выполняется для $p' = r'$ и всех полиномов. Тогда из (4.4.14) следует, что то же неравенство имеет место для $p' = \frac{r'}{2} + 1$ и максимальных полиномов, а, значит, тем более для всех полиномов. Но мы уже доказали это неравенство для $p' = 2k$. Следовательно, мы получаем его последовательно для

$$p' = k+1,\ \frac{k+3}{2},\ \frac{k+7}{4}, \ldots,$$

т.е. оно верно для всех рациональных чисел, знаменателями которых служат степени двойки. Так как эти числа расположены всюду плотно, а S_p и $J_{p'}$ как функции от p непрерывны, то тем самым неравенство (4.4.5) доказано в общем виде.

(II)[1]. Мы снова рассмотрим максимальные полиномы. Однако, вместо общего условия максимума функции от нескольких переменных мы используем тот факт, что в неравенстве Гёльдера

$$\sum a_m b_m \leqslant \left(\sum |a_m|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum |b_m|^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}}$$

равенство достигается только, когда $|a_m|^p$ и $|b_m|^{p'}$ пропорциональны. Вместе с тем доказательство не будет зависеть от лемм § 4.2.

Мы определяем S_p и J_p, как выше, и полагаем

$$f_n(x) = \sum_{m=-n}^{n} c_m e^{imx}.$$

Обозначим верхнюю грань отношений $\dfrac{S_{p'}(f_n)}{J_p(f)}$ для всех f через $M = M(n) = M_p(n)$, а верхнюю грань отношений $\dfrac{J_{p'}(f_n)}{S_p(f_n)}$ для всех совокупностей c_m через $M' = M'(n) = M'_p(n)$; в обоих случаях n и p предполагаются фиксированными. Мы прежде всего покажем, что M и M' существуют, т.е. конечны для всякого n.

Из соображений однородности можно предполагать, что $S_{p'}(f_n) = 1$. Тогда $|c_m|^{p'} \geqslant \dfrac{1}{2n+1}$ для некоторого значения m. Поэтому

$$\frac{1}{(2n+1)^{1/p'}} \leqslant |c_m| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|\, dx \leqslant J_p$$

и, значит,

$$M_p(n) \leqslant (2n+1)^{1/p'}.$$

Положим, далее,

$$g_n(x) = |f_n(x)|^{p'-1} \operatorname{sgn} f_n(x)$$

и

$$\gamma_m = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-imx} g_n(x)\, dx.$$

Тогда

$$J_{p'}^{p'}(f_n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f_n(x)} g_n(x)\, dx = \sum_{m=-n}^{n} c_m \gamma_m \leqslant \sum_{m=-n}^{n} |c_m \gamma_m| \leqslant$$
$$\leqslant S_p(f_n) S_{p'}(g_n) \leqslant M S_p(f_n) J_p(g_n) = M S_p(f_n) J_{p'}^{\frac{1}{p-1}}(f_n). \quad (4.4.15)$$

Деля обе части на $J_{p'}^{\frac{1}{p-1}}(f_n)$, замечаем, что M' конечно, причём $M' \leqslant M$.

[1] Hardy and Littlewood (1). См. также F. Riesz (1).

С другой стороны, полагая

$$h_n(x) = \sum_{m=-n}^{n} |c_m|^{p'-1} \operatorname{sgn} c_m \, e^{imx},$$

получаем (очевидным почленным интегрированием)

$$S_{p'}^{p'}(f_n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) h_n(x)\, dx \leqslant$$
$$\leqslant J_p(f) J_{p'}(h_n) \leqslant M' J_p(f) S_p(h_n) = M' J_p(f) S_{p'}^{p'-1}(f_n),$$

откуда $M \leqslant M'$. Таким образом, $M = M'$. Пример функции $f(x) = 1$ показывает, что $M \geqslant 1$.

Пусть теперь $f_n(x)$ — полином, для которого достигается максимум M' отношения $\dfrac{J_{p'}(f_n)}{S_p(f_n)}$ (так как это отношение есть непрерывная функция переменных c_m, то такой полином существует). Так как $M = M'$, то крайние члены цепи неравенств (4.4.15) равны, а значит, равны между собой и все члены. Таким образом, неравенство Гёльдера в этом случае обращается в равенство, и поэтому

$$|c_m|^p = \lambda |\gamma_m|^{p'} \qquad (-n \leqslant m \leqslant n),$$

где λ не зависит от m. Следовательно,

$$S_p^p(f_n) = \lambda S_{p'}^{p'}(g_n).$$

Но так как f_n — максимальный полином, то, принимая во внимание равенство пятого и шестого членов в (4.4.15), имеем

$$S_p(f_n) = \frac{J_{p'}(f_n)}{M} = \frac{J_p^{p-1}(g_n)}{M} = \frac{S_{p'}^{p-1}(g_n)}{M^p}.$$

Поэтому

$$\lambda = M^{-p^2} S_{p'}^{p^2-p-p'}(g_n).$$

Пусть

$$r' = 2p' - 2, \quad r = \frac{2}{3-p}.$$

Тогда, используя неравенство Бесселя,

$$S_2^2(g_n) \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |g_n|^2\, dx = J_{r'}^{r'}(f_n) \leqslant M_r^{r'} S_r^{r'}(f_n) = M_r^{r'} \lambda^{\frac{r'}{p}} \left(S_{\frac{r}{p-1}}(g_n) \right)^{\frac{r'}{p-1}} =$$
$$= M_r^{r'} M_p^{-pr'} \left(S_{p'}(g_n) \right)^{r'\left(p-1-\frac{1}{p-1}\right)} \left(S_{\frac{r}{p-1}}(g_n) \right)^{\frac{r'}{p-1}}.$$

Так как

$$\sum |\gamma_m|^{\frac{r}{p-1}} \leqslant \left(\sum |\gamma_m|^2\right)^{\frac{p-1}{3-p}} \left(\sum |\gamma_m|^{\frac{p}{p-1}}\right)^{\frac{2(2-p)}{3-p}},$$

то произведение двух последних множителей правой части полученного неравенства не превосходит $S_2^2(g_n)$. Поэтому

$$1 \leqslant M_r^{r'} M_p^{-pr'}$$

и, значит,

$$M_r \geqslant M_p^p \geqslant M_p.$$

Мы можем теперь повторить это рассуждение с заменой p на r и r на $s = \dfrac{2}{3-r}$ и так далее, до бесконечности. Мы получим таким образом последовательность значений p, стремящихся к 1 (так как $r' - 2 = 2(p'-2)$ и т.д.), вдоль которой M_p не убывает. Но

$$M_p(n) \leqslant (2n+1)^{1/p'} \to 1$$

при фиксированном n и $p \to 1$, $p' \to \infty$. Следовательно, $M_p(n) = 1$.

4.5. Мы можем теперь доказать теорему 74 методом, применённым в § 3.2. Пусть $f(x) \in L^p$, $1 < p < 2$. Определим a_ν и $\Phi_n(x)$, как в § 3.2. Тогда, по доказанной выше лемме,

$$\int_{-\pi\lambda}^{\pi\lambda} |\Phi_n(x)|^{p'}\, dx = \lambda \int_{-\pi}^{\pi} \left|\sum_{\nu=-n}^{n} a_\nu e^{i\nu x}\right|^{p'} dx \leqslant 2\pi\lambda \left(\sum_{\nu=-n}^{n} |a_\nu|^p\right)^{\frac{1}{p-1}}.$$

Но

$$|a_\nu|^p \leqslant \int_{\nu/\lambda}^{(\nu+1)/\lambda} |f(x)|^p\, dx \left(\int_{\nu/\lambda}^{(\nu+1)/\lambda} dx\right)^{p-1} = \frac{1}{\lambda^{p-1}} \int_{\nu/\lambda}^{(\nu+1)/\lambda} |f(x)|^p\, dx.$$

Следовательно,

$$\int_{-\pi\lambda}^{\pi\lambda} |\Phi_n(x)|^{p'}\, dx \leqslant 2\pi \left(\int_{-b}^{b} |f(x)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p-1}}.$$

Как и в § 3.2, отсюда следует, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(x,b) - F(x,a)|^{p'}\, dx \leqslant \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}p'-1}} \left\{ \left(\int_{-b}^{-a} + \int_{a}^{b}\right) |f(x)|^p\, dx \right\}^{\frac{1}{p-1}}.$$

Поэтому $F(x,a)$ при $a \to \infty$ сходится в среднем с показателем p' к некоторой функции $F(x)$. Остающаяся часть доказательства проводится совершенно так же, как и в частном случае $p' = 2k$.

Другое доказательство теоремы 74 может быть получено из общей теоремы М. Рисса о функциональных операциях; см. монографию Зигмунда, § 9.2.

4.6. Формула Парсеваля.

Теорема 75. *Если* $f(x)$ *и* $G(x)$ *принадлежат к* $L^p(-\infty, \infty)$, *где* $1 < p < 2$, *а* $F(x)$ *и* $g(x)$ *— их трансформации Фурье, то имеет место соотношение* (2.1.1).

Доказательство. Как известно, если $\varphi(x)$ принадлежит к L^p, а $\psi(x, a)$ сходится в среднем к $\psi(x)$ с показателем p', то[1]

$$\lim_{a\to\infty} \int [\psi(x) - \psi(x, a)]\varphi(x)\, dx = 0. \tag{4.6.1}$$

Но

$$\int_{-b}^{b} F(x, a)G(x)\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-b}^{b} G(x)\, dx \int_{-a}^{a} e^{ixt} f(t)\, dt =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^{a} f(t)\, dt \int_{-b}^{b} e^{ixt} G(x)\, dx = \int_{-a}^{a} f(t)g(-t, b)\, dt.$$

Переходя к пределу по $a \to \infty$ и применяя к левой части соотношение (4.6.1), получаем

$$\int_{-b}^{b} F(x)G(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(-t, b)\, dt.$$

Переходя теперь к пределу по $b \to \infty$ и применяя (4.6.1) к правой части, мы получаем (2.1.1).

Имеют место также очевидные обобщения теорем 58–62.

4.7. Теоремы о свёртках.

Теорема 76. *Если* $f(x)$, $F(x)$ *— пара трансформаций Фурье из* L^p, $L^{p'}$, *а* $g(x)$, $G(x)$ *— из* $L^{p'}$, L^p, *то функции* (2.1.9) *также образуют пару трансформаций Фурье в том смысле, что равенство* (2.1.8) *имеет место для всех значений* x.

Доказательство проводится аналогично доказательству теоремы 64.

Теорема 77. *Если* $f(x)$, $F(x)$ *— пара трансформаций Фурье из* L^p, $L^{p'}$, *а* $g(x)$ *принадлежит к* L, *то функции* (2.1.9) *представляют собой пару трансформаций Фурье из* L^p, $L^{p'}$.

Доказательство проводится аналогично доказательству теоремы 65.

[1] Титчмарш, Теория функций, § 12.53. [Действительно, в силу неравенства Гёльдера,

$$\left| \int [\psi(x) - \psi(x, a)]\varphi(x)\, dx \right| \leqslant \left(\int |\psi(x) - \psi(x, a)|^{p'}\, dx \right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int |\varphi(x)|^p\, dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

откуда и следует (4.6.1). — *Прим. перев.*

Т е о р е м а 78. *Пусть* $f(x)$, $F(x)$ — *пара трансформаций Фурье из* L^p, $L^{p'}$, *а* $g(x)$, $G(x)$ — *из* L^q, $L^{q'}$, *где*

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}>1. \tag{4.7.1}$$

Тогда

$$F(x)G(x), \qquad \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)\,dy$$

есть пара трансформаций Фурье из классов $L^{P'}$, L^P *соответственно, где*

$$P=\frac{pq}{p+q-pq}\,.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. То, что свёртка функций f и g принадлежит к L^P, следует из леммы β § 4.2, с $1-\lambda=\dfrac{1}{p}$, $1-\mu=\dfrac{1}{q}$. То, что функция FG принадлежит к $L^{P'}$, непосредственно усматривается из неравенства Гёльдера, записанного в виде

$$\int |FG|^{P'}\,dx \leqslant \left(\int |F|^{p'}\,dx\right)^{\frac{P'}{p'}}\left(\int |G|^{q'}\,dx\right)^{\frac{P'}{q'}}.$$

Из условия (4.7.1) следует, что $p<q'$, $q<p'$. Пусть, например, $p<q$. Тогда $p<p'$, т.е. $p<2$.

Предположим, что $1<P'\leqslant 2$. Тогда FG обладает трансформацией Фурье, интеграл которой равен

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F(u)G(u)\frac{e^{-ixu}-1}{-iu}\,du.$$

Но $G(u)\dfrac{e^{-ixu}-1}{-iu}$ принадлежит к L и $L^{q'}$, а значит, и к L^p и, по теореме 74,

$$\int_y^{x+y} g(\xi)\,d\xi=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} G(u)\frac{e^{-ixu}-1}{-iu}e^{-iyu}\,du,$$

т.е. интеграл, стоящий в левой части, есть трансформация Фурье функции $G(u)\dfrac{e^{-ixu}-1}{-iu}$. Следовательно, по теореме 75,

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(u)G(u)\frac{e^{-ixu}-1}{-iu}\,du=\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\,dy\int_{-y}^{x-y} g(\xi)\,d\xi=$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\,dy\int_0^x g(u-y)\,du=\int_0^x du\int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(u-y)\,dy,$$

и дифференцируя по x, получаем утверждаемый результат.

Предположим теперь, что $1 < P < 2$. Тогда

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) g(x-y)\, dy$$

обладает трансформацией Фурье, интегралом которой служит

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ixu}-1}{iu}\, du \int_{-\infty}^{\infty} f(y) g(u-y)\, dy.$$

Последнее выражение при $a \to \infty$ есть предел[1] выражения

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ixu}-1}{iu}\, du \int_{-a}^{a} f(y) g(u-y)\, dy = \\ = \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^{a} f(y)\, dy \int_{-\infty}^{\infty} g(u-y)\, \frac{e^{ixu}-1}{iu}\, du,$$

а по формуле Парсеваля (для q, q') внутренний интеграл равен

$$\sqrt{2\pi} \int_0^x e^{ivy} G(v)\, dv.$$

Таким образом, получаем

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^{a} f(y)\, dy \int_0^x e^{ivy} G(v)\, dv = \\ = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x G(v)\, dv \int_{-a}^{a} e^{ivy} f(y)\, dy \to \int_0^x G(v) F(v)\, dv,$$

так как $G(v)$ принадлежит к L^p на $(0, x)$. Это завершает доказательство теоремы.

Если $p = 1$ и $q = 1$, то $P = 1$; см. теорему 41.

4.8. Другое обобщение теоремы Планшереля. Мы изложим теперь обобщение теоремы Планшереля в другом направлении, принадлежащем Харди и Литлвуду[2].

Т е о р е м а 79. *Если функция $|f(x)|^q |x|^{q-2}$ при $q > 2$ принадлежит к $L(-\infty, \infty)$, то трансформация Фурье $F(x)$ функции $f(x)$ существует и принадлежит к L^q, причём*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(x)|^q\, dx \leqslant K(q) \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^q |x|^{q-2}\, dx.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. (1) Рассмотрим случай $q = 4$.

---

[1] Так как $\int_{-\infty}^{\infty} \ldots dy = \underset{(P)}{\text{l.i.m.}} \int_{-a}^{a} \ldots dy$.

[2] Hardy and Littlewood (1).

Предположим сначала, что $f(x)$ принадлежит к L^2 и тождественно равна нулю вне некоторого конечного интервала. Тогда $F(x)$ принадлежит к L^2 и ограничена, и $\sqrt{2\pi}[F(x)]^2$ есть трансформация Фурье функции

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) f(x-y)\, dy,$$

также принадлежащей к L^2. Поэтому

$$2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |F(x)|^4\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x)|^2\, dx.$$

Но $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{|x|}}\, g(x)$, где $g(x)$ принадлежит к L^4. Следовательно,

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(y) g(x-y)}{|y|^{\frac{1}{2}} |x-y|^{\frac{1}{2}}}\, dy = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(y)}{|y|^{\frac{1}{8}}} \cdot \frac{g(x-y)}{|x-y|^{\frac{1}{8}}} \cdot \frac{dy}{|y|^{\frac{3}{8}} |x-y|^{\frac{3}{8}}},$$

$$|\varphi(x)|^2 \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|g(y)|^2}{|y|^{\frac{1}{4}}} \cdot \frac{|g(x-y)|^2}{|x-y|^{\frac{1}{4}}}\, dy \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{|y|^{\frac{3}{4}} |x-y|^{\frac{3}{4}}} = \\ = \frac{A}{|x|^{\frac{1}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|g(y)|^2}{|y|^{\frac{1}{4}}} \cdot \frac{|g(x-y)|^2}{|x-y|^{\frac{1}{4}}}\, dy,$$

откуда

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x)|^2\, dx \leqslant A \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|g(y)|^2 |g(x-y)|^2}{|x|^{\frac{1}{2}} |y|^{\frac{1}{4}} |x-y|^{\frac{1}{4}}}\, dx\, dy = \\ = A \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|g(y)|^2 |y|^{\frac{1}{16}}}{|x|^{\frac{1}{4}} |x-y|^{\frac{5}{16}}} \cdot \frac{|g(x-y)|^2 |x-y|^{\frac{1}{16}}}{|x|^{\frac{1}{4}} |y|^{\frac{5}{16}}}\, dx\, dy < \\ < A \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{|g(y)|^4 |y|^{\frac{1}{8}}}{|x|^{\frac{1}{2}} |x-y|^{\frac{5}{8}}} + \frac{|g(x-y)|^4 |x-y|^{\frac{1}{8}}}{|x|^{\frac{1}{2}} |y|^{\frac{5}{8}}} \right) dx\, dy = \\ = A \int_{-\infty}^{\infty} |g(y)|^4\, dy \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|y|^{\frac{1}{8}}}{|x|^{\frac{1}{2}} |x-y|^{\frac{5}{8}}}\, dx = A \int_{-\infty}^{\infty} |g(y)|^4\, dy.$$

Таким образом,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(x)|^4\, dx < A \int_{-\infty}^{\infty} x^2 |f(x)|^4\, dx.$$

Доказательство завершается теперь обычным путём. Пусть $f(x)$ — произвольная функция, но такая, что $x^2 f^4(x) \in L$. Аппроксимируя $f(x)$ на (a, b) последовательностью функций рассмотренного специального вида, мы докажем, как в § 4.3, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(x, a) - F(x, b)|^4\, dx < A \left(\int_{-b}^{-a} + \int_{a}^{b} \right) x^2 |f(x)|^4\, dx.$$

Таким образом, $F(x,a)$ сходится в среднем с показателем 4, и дальнейший путь доказательства теоремы очевиден.

(II). Изложенный метод можно перенести на случай произвольного чётного q. Однако, как и в случае теоремы Юнга–Хаусдорфа, для остальных значений q требуется привлечь новые соображения.

Наиболее простой путь — это начать с доказательства соответствующего результата для рядов, и мы здесь просто сошлёмся на Зигмунда[1]. В рассматриваемом случае этот результат гласит, что если $f(x)$ имеет коэффициенты Фурье c_m, то

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^q \, dx \leqslant K(q) \sum_{m=-\infty}^{\infty} |c_m|^q (|m|+1)^{q-2}.$$

Отсюда, определяя a_ν и $\Phi_n(x)$, как прежде, получаем

$$\int_{-\pi\lambda}^{\pi\lambda} |\Phi_n(x)|^q \, dx = \lambda \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{\nu=-n}^{n} a_\nu e^{i\nu x} \right|^q dx \leqslant \lambda K(q) \sum_{\nu=-n}^{n} |a_\nu|^q (|\nu|+1)^{q-\varepsilon}.$$

Но при $\nu \geqslant 1$

$$|a_\nu|^q \leqslant \frac{1}{\lambda^{q-1}} \int_{\nu/\lambda}^{(\nu+1)/\lambda} |f(x)|^q \, dx \leqslant \frac{1}{\lambda \nu^{q-2}} \int_{\nu/\lambda}^{(\nu+1)/\lambda} x^{q-2} |f(x)|^q \, dx,$$

и аналогичное неравенство имеет место для $\nu \leqslant -2$; далее,

$$|a_0| = \left| \int_0^{1/\lambda} f(x) x^{1-\frac{2}{q}} x^{\frac{2}{q}-1} \, dx \right| \leqslant$$
$$\leqslant \left(\int_0^{1/\lambda} x^{q-2} |f(x)|^q \, dx \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^{1/\lambda} x^{\left(\frac{2}{q}-1\right)\frac{q}{q-1}} \, dx \right)^{1-\frac{1}{q}} = o\left(\frac{1}{\lambda^{1/q}} \right)$$

и аналогично для a_{-1}. Поэтому, переходя к пределу при $\lambda \to \infty$, получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(x,b) - F(x,a)|^q \, dx < K(q) \left(\int_{-b}^{-a} + \int_a^b \right) |x|^{q-2} |f(x)|^q \, dx.$$

Доказательство завершается теперь, как в предыдущих случаях.

4.9.

Т е о р е м а 80[2]. *Если $f(x)$ принадлежит к L^p $(1 < p < 2)$, то*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x|^{p-2} |F(x)|^p \, dx \leqslant K(p) \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p \, dx.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $g(x)$ — функция из $L^{p'}$, тождественно

[1] З и г м у н д, Тригонометрические ряды, § 9.4.

[2] Hardy and Littlewood (1).

равная нулю вне некоторого конечного интервала (a, b), где $a > 0$. Тогда она принадлежит также к L^p. Поэтому, в силу теоремы 75,

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(x)g(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)G(x)\,dx.$$

Далее, в силу теоремы 79 с $q = p'$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |G(x)|^{p'}\,dx \leqslant K(p)\int_{-\infty}^{\infty} |x|^{p'-2}|g(x)|^{p'}\,dx.$$

Следовательно,

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} F(x)g(x)\,dx\right| \leqslant \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{-\infty}^{\infty} |G(x)|^{p'}\,dx\right)^{\frac{1}{p'}} \leqslant$$
$$\leqslant K(p)\left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{-\infty}^{\infty} |x|^{p'-2}|g(x)|^{p'}\,dx\right)^{\frac{1}{p'}}.$$

Положим, в частности,

$$g(x) = |x|^{p-2}|F(x)|^{p-1}\operatorname{sgn} F(x) \qquad (a \leqslant x \leqslant b).$$

Тогда

$$\int_a^b |x|^{p-2}|F(x)|^p\,dx \leqslant K(p)\left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b |x|^{p-2}|F(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p'}}.$$

и следовательно,

$$\int_a^b |x|^{p-2}|F(x)|^p\,dx \leqslant K(p)\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p\,dx.$$

Переходя к пределу по $a \to 0$, $b \to \infty$, мы получим требуемый результат для интеграла по $(0, \infty)$. Тот же метод применим и к интегралу по $(-\infty, 0)$.

4.10. Новый случай формулы Парсеваля.

Теорема 81. *Пусть $f(x)$ и $|G(x)|^{p'}|x|^{p'-2}$ принадлежат к L^p и L соответственно, причём $1 < p < 2$. Тогда, если F и g суть трансформации Фурье функций f и G, имеет место соотношение* (2.1.1).

Доказательство проводится аналогично доказательству теоремы 75, но теперь

$$\int_{-b}^{b} [F(x,a) - F(x)]G(x)\,dx = \int_{-b}^{b} [F(x,a) - F(x)]|x|^{1-\frac{2}{p}}G(x)|x|^{1-\frac{2}{p'}}\,dx$$

стремится к нулю вследствие того, что, по теореме 80, $F(x,a)|x|^{\frac{p-2}{p}}$ сходится в среднем к $F(x)|x|^{\frac{p-2}{p}}$ с показателем p. Доказательство завершается так же, как и раньше, однако, опирается не на теорему 74, а на теорему 79.

4.11. Невыполнение теорем 75 и 79 для $p > 2$. То, что теорема Юнга—Хаусдорфа неверна для $p > 2$, вытекает, как побочный результат, из теоремы 80. Действительно, если $f(x)$ принадлежит к L^p, то интегрируема не только функция $|F(x)|^{p'}$, но и $|F(x)|^p|x|^{p-2}$, а потому и

$$|F(x)|^r|x|^{\frac{r}{p'}-1} \quad (p \leqslant r \leqslant p'). \tag{4.11.1}$$

Обозначим класс функций, обладающих последним свойством через $L_1^{p'}$, так что $L_1^{p'}$ есть подмножество класса $L^{p'}$.

Если функция $f(x)$ принадлежит к L^q $(q > 2)$, то она не обязательно принадлежит к L_1^q и потому не обязательно является трансформацией Фурье функции из $L^{q'}$.

Но мы можем показать на примерах, что даже если $f(x)$ принадлежит к L_1^q $(q > 2)$, то $f(x)$ всё же не обязана быть трансформацией Фурье функции из класса $L^{q'}$. По-видимому, никакое условие, требующее лишь существования какого-нибудь интеграла, содержащего $|f(x)|$, не является достаточным для того, чтобы $f(x)$ была трансформацией Фурье функции из $L^{q'}$.

Пусть a и b таковы, что $0 < a < 1$ и $a < b$. Рассмотрим функцию[1]

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{\to 0}^{1} \frac{\cos\dfrac{1}{t^b}\cos xt}{t^{a+1}}\,dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\to 0}^{1} \cos\left(xt + \frac{1}{t^b}\right)\frac{dt}{t^{a+1}} + \\ + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\to 0}^{1} \cos\left(xt - \frac{1}{t^b}\right)\frac{dt}{t^{a+1}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,[\varphi(x) + \psi(x)]. \tag{4.11.2}$$

Представим $\varphi(x)$ в виде

$$\varphi(x) = \int_{\to 0}^{c_1} + \int_{c_1}^{c_2} + \int_{c_2}^{1} = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3,$$

где $c_1 = \left(\dfrac{b}{x} - \xi\right)^{\frac{1}{b+1}}$, $c_2 = \left(\dfrac{b}{x} + \xi\right)^{\frac{1}{b+1}}$ и $\xi = o\left(\dfrac{1}{x}\right)$ при $x \to \infty$. Тогда

$$\varphi_1 = \int \frac{d\sin\left(xt + \dfrac{1}{t^b}\right)}{xt^{a+1} - bt^{a-b}},$$

причём здесь выражение $\dfrac{1}{bt^{a-b} - xt^{a+1}}$ положительно, монотонно возрастает и меньше, чем

$$\frac{t^{b-a}}{x\left(\dfrac{b}{x} - t^{b+1}\right)} \leqslant \frac{\left(\dfrac{b}{x}\right)^{\frac{b-a}{b+1}}}{x\xi}.$$

[1] Titchmarsh (2).

Поэтому, в силу второй теоремы о среднем значении,

$$\varphi_1 = O\Big(\frac{1}{\xi}\, x^{\frac{a-2b-1}{b+1}}\Big).$$

В φ_3 выражение $\dfrac{1}{xt^{a+1} - bt^{a-b}}$ положительно и монотонно убывает, и мы получаем тот же результат, что и для φ_1. Наконец,

$$|\varphi_2| \leqslant \frac{\left(\dfrac{b}{x} + \xi\right)^{\frac{1}{b+1}} - \left(\dfrac{b}{x} - \xi\right)^{\frac{1}{b+1}}}{\left(\dfrac{b}{x} - \xi\right)^{\frac{a+1}{b+1}}} = O\left(\frac{x^{-\frac{1}{b+1}} x\xi}{x^{-\frac{a+1}{b+1}}}\right) = O\big(\xi\, x^{\frac{a+b+1}{b+1}}\big).$$

Полагая $\xi = x^{-\frac{3b+2}{2b+2}}$, получаем, что при $x \to \infty$

$$\varphi(x) = O\big(x^{\frac{2a-b}{2b+2}}\big).$$

Далее,

$$\psi(x) = \int \frac{d \sin\Big(xt - \dfrac{1}{t^b}\Big)}{xt^{a+1} + bt^{a-b}}\,.$$

Но выражение $\dfrac{1}{xt^{a+1} + bt^{a-b}}$ монотонно возрастает от нуля до максимума вида $Kx^{\frac{a-b}{b+1}}$, где K зависит только от a и b, а затем монотонно убывает. Поэтому вторая теорема о среднем значении даёт

$$\psi(x) = O\big(x^{\frac{a-b}{b+1}}\big).$$

Таким образом, при $x \to \infty$

$$f(x) = O\big(x^{\frac{2a-b}{2b+2}}\big)$$

и, очевидно, $f(x) = O(1)$ при $x \to 0$. Следовательно, для любого заданного q, большего чем 2, функция $f(x)$ принадлежит к L_1^q при достаточно большом b.

Если бы теперь $f(x)$ была трансформацией Фурье функции $F(x)$ из $L^{q'}$, то мы имели бы

$$F(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{d}{dx}\int_0^\infty \frac{\sin xu}{u}\, f(u)\,du.$$

Если бы здесь можно было, подставив (4.11.2) вместо $f(u)$, обратить порядок интегрирования, то мы получили бы

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^{a+1}} \cos \dfrac{1}{x^b} & (0 < x < 1), \\ \qquad 0 & (x > 1), \end{cases}$$

что, однако, не принадлежит к L^r ни для какого $r \geqslant 1$. Таким образом, это дало бы требуемый результат.

Обращение порядка интегрирования законно, если порядок интегрирования можно обратить в

$$\int_0^{\to\infty} \frac{\sin xu}{u}\,du \int_0^1 (1-\cos ut)\,\frac{1}{t^{a+1}}\,\cos\frac{1}{t^b}\,dt,$$

а это, в свою очередь, возможно, если

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_0^1 \frac{1}{t^{a+1}}\,\cos\frac{1}{t^b}\,dt\int_\lambda^{\to\infty}\frac{\sin xu(1-\cos ut)}{u}\,du = 0.$$

Но

$$\left|\int_\lambda^{\to\infty}\frac{\sin xu(1-\cos ut)}{u}\,du\right| =$$
$$= \frac{1}{2}\left|\int_{\lambda x}^{\lambda(x+t)}\frac{\sin v}{v}\,dv - \int_{\lambda|x-t|}^{\lambda x}\frac{\sin v}{v}\,dv\right| \leqslant \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+t}{x-t}\right|,$$

что, в силу мажорируемой сходимости, и приводит к требуемому результату.

4.12. Специальные условия. В этом параграфе мы дадим два достаточных условия специального типа для того, чтобы $f(x)$ была трансформацией Фурье функции из L^p $(1<p<2)$.

Т е о р е м а 82[1]. *Пусть $f(x)$ — чётная положительная функция, не возрастающая для $x>0$, причём $f(\infty)=0$, и пусть $x^{p-2}f^p(x)$ $(1<p<2)$ принадлежит к $L(0,\infty)$. Тогда $F(x)$ принадлежит к L^p.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $f(x)$ не возрастает и $f(\infty)=0$, то интеграл

$$F(x) = F_c(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\to\infty} f(y)\cos xy\,dy$$

сходится для всякого $x>0$. Имеем

$$F(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{1/x} f(y)\cos xy\,dy + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{1/x}^{\to\infty} f(y)\cos xy\,dy = F_1(x)+F_2(x).$$

По второй теореме о среднем значении

$$F_2(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,f\left(\frac{1}{x}\right)\int_{1/x}^{\xi}\cos xy\,dy = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,f\left(\frac{1}{x}\right)\frac{\sin x\xi - \sin 1}{x}\,.$$

Поэтому

$$|F_2(x)| \leqslant 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{1}{x}\,f\left(\frac{1}{x}\right),$$

и

$$\int_0^\infty |F_2(x)|^p\,dx < A\int_0^\infty \left[\frac{1}{x}\,f\left(\frac{1}{x}\right)\right]^p dx = A\int_0^\infty t^{p-2}f^p(t)\,dt,$$

[1] См. Hardy and Littlewood (3).

что, по условию, конечно. Далее,

$$|F_1(x)| \leqslant \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{1/x} f(y)\,dy,$$

и достаточно доказать, что правая часть, или,— что то же самое, — что

$$\frac{1}{x^{2/p}} \int_0^x f(y)\,dy$$

принадлежит к L^p. Но нам дано, что $f(x) = g(x)x^{\frac{2}{p}-1}$, где $g(x) \in L^p$. Поэтому

$$\frac{1}{x^{2/p}} \int_0^x f(y)\,dy = \frac{1}{x^{2/p}} \int_0^x g(y)y^{\frac{2}{p}-1}\,dy \leqslant \frac{1}{x} \int_0^x g(y)\,dy,$$

и так как правая часть, по теореме Харди[1], принадлежит к L^p, то теорема доказана.

Из нашего предположения должно заодно следовать, что $f(x)$ принадлежит к $L^{p'}$ и действительно,

$$K > \int_{x/2}^x t^{p-2} f^p(t)\,dt \geqslant \frac{x}{2}\, f^p(x) \Big(\frac{x}{2}\Big)^{p-2} \quad \Rightarrow \quad f(x) < \frac{K}{x^{\frac{p-1}{p}}} \quad \Rightarrow$$
$$f^{p'}(x) < K f^p(x)\, x^{p-2}.$$

Т е о р е м а 83. *Пусть $f(x)$ — интеграл порядка $\dfrac{2-p}{p}$ от функции $\varphi(x)$, принадлежащей к L^p, т.е.*

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma\Big(\dfrac{2}{p} - 1\Big)} \int_0^x (x-t)^{\frac{2}{p}-2} \varphi(t)\,dt.$$

Тогда $F_c(x)$ существует и принадлежит к L^p.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим

$$\Phi_a(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^a \varphi(t) \sin\Big(xt + \frac{\pi}{p}\Big)\,dt.$$

Тогда, по теореме 80, $x^{1-\frac{2}{p}}\,\Phi_a(x)$ сходится в среднем с показателем p к некоторой функции $g(x)$. Пусть $G_c(x)$ — косинус-трансформация Фурье функции $g(x)$. Тогда $G_c(x)$ принадлежит к $L^{p'}$. Далее,

$$\int_0^y G_c(x)\,dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty g(x)\,\frac{\sin xy}{x}\,dx = \lim_{a\to\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty x^{1-\frac{2}{p}}\,\Phi_a(x)\,\frac{\sin xy}{x}\,dx =$$
$$= \lim_{a\to\infty} \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin xy}{x^{2/p}}\,dx \int_0^a \varphi(t) \sin\Big(xt + \frac{\pi}{p}\Big)\,dt =$$

[1] См. Т и т ч м а р ш, Теория функций, гл. XII, упр. 14. [См. сноску на стр. 106. — *Прим. перев.*]

$$= \lim_{a\to\infty} \frac{2}{\pi}\int_0^a \varphi(t)\,dt \int_0^\infty \frac{\sin xy}{x^{2/p}}\,\sin\Bigl(xt+\frac{\pi}{p}\Bigr)\,dx,$$

где обращение порядка интегрирования законно вследствие равномерной сходимости. Но внутренний интеграл равен

$$\begin{cases} \dfrac{\pi}{2\,\Gamma\Bigl(\dfrac{2}{p}\Bigr)}\,(y-t)^{\frac{2}{p}-1} & (t<y),\\ \qquad 0 & (t>y). \end{cases}$$

Следовательно, в силу нашего предположения,

$$\int_0^y G_c(x)\,dx = \frac{1}{\Gamma\Bigl(\dfrac{2}{p}\Bigr)}\int_0^y (y-t)^{\frac{2}{p}-1}\varphi(t)\,dt = \int_0^y f(x)\,dx.$$

Таким образом, $G_c(x)=f(x)$ почти для всех x, и $g(x)=F(x)$ принадлежит к L^p.

4.13. Условия Липшица. В этом параграфе мы дадим условие совершенно другого типа для того, чтобы функция обладала трансформацией Фурье, принадлежащей к определённым L-классам. Отправным пунктом излагаемых рассмотрений послужили теоремы Бернштейна и Сасса о рядах Фурье[1].

Теорема 84. *Пусть $f(x)\in L^p$ $(1<p\leqslant 2)$, и пусть при $h\to 0$*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x+h)-f(x-h)|^p\,dx = O(h^{\alpha p}) \quad (1<\alpha\leqslant 1). \tag{4.13.1}$$

Тогда $F(x)\in L^\beta$ для всех β, удовлетворяющих двойному неравенству

$$\frac{p}{p+\alpha p-1} < \beta \leqslant \frac{p}{p-1}\,.$$

Доказательство. Для каждого фиксированного h трансформацией Фурье функции $f(x+h)$ служит $e^{-ixh}F(x)$. Поэтому трансформация Фурье разности $f(x+h)-f(x-h)$, рассматриваемой как функция от x, равна $-2i\sin xh\,F(x)$. Следовательно,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |2\sin xh\,F(x)|^{p'}dx < K(p)\left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x+h)-f(x-h)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p-1}} <$$
$$< K(p)h^{\alpha p'}.$$

Так как $|\sin xh| > Axh$ для $x\leqslant \dfrac{1}{h}$, то левая часть больше, чем

$$A\int_0^{1/h} x^{p'}\,h^{p'}|F(x)|^{p'}\,dx.$$

[1] См. Titchmarsh (12).

Поэтому
$$\int_0^{1/h} x^{p'}|F(x)|^p\,dx = O(h^{(\alpha-1)p'}).$$

Положим
$$\varphi(\xi) = \int_1^{\xi} |xF(x)|^{\beta}\,dx$$
Тогда при $\beta < p'$
$$\varphi(\xi) \leqslant \left(\int_1^{\xi} |xF(x)|^p\,dx\right)^{\frac{\beta}{p'}} \left(\int_1^{\xi} dx\right)^{1-\frac{\beta}{p'}} = O\Big(\xi^{1-\alpha\beta+\frac{\beta}{p}}\Big).$$
Следовательно,
$$\int_1^{\xi} |F(x)|^{\beta}\,dx = \int_1^{\xi} \frac{\varphi'(x)}{x^{\beta}}\,dx = \frac{\varphi(\xi)}{\xi^{\beta}} + \beta\int_1^{\xi}\frac{\varphi(x)}{x^{\beta+1}}\,dx =$$
$$= O\Big(\xi^{1-\beta-\alpha\beta+\frac{\beta}{p}}\Big) + O\left(\int_1^{\xi} x^{-\beta-\alpha\beta+\frac{\beta}{p}}\,dx\right) = O\Big(\xi^{1-\beta-\alpha\beta+\frac{\beta}{p}}\Big),$$
что остаётся ограниченным при $\xi \to \infty$, если $1-\beta-\alpha\beta+\dfrac{\beta}{p} \leqslant 0$, т.е. если
$$\beta > \frac{p}{p+\alpha p-1}\,.$$
Аналогично обстоит дело и с интегралом по интервалу $(-\xi,-1)$, и теорема доказана.

Частным случаем, соответствующим исходной теореме Бернштейна, является утверждение, что если выполняется условие теоремы с $\alpha > \dfrac{1}{p}$, то $F(x)$ принадлежит к $L(0,\infty)$, так что интеграл Фурье
$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt}F(t)\,dt$$
абсолютно сходится для всех значений x.

Чтобы показать, что указанная в последней теореме область значений β не может быть расширена, рассмотрим чётную функцию, определённую формулой
$$f(x) = \frac{1}{x^a+x} \quad (x>0),$$
где $0 < a < \dfrac{1}{p}$. При $x > 2h$
$$|f(x+h)-f(x-h)| = 2h|f'(x+\theta h)| \qquad (-1<\theta<1),$$
$$\leqslant 2h|f'(x-h)| \leqslant 2h\left|f'\left(\frac{x}{2}\right)\right|,$$

так как $|f'(x)|$ положительно и монотонно убывает. Поэтому

$$\int_{2h}^{\infty} |f(x+h)-f(x-h)|^p\,dx = O\left\{h^p\int_{2h}^{\infty}\left|f'\left(\frac{x}{2}\right)\right|^p dx\right\} = \\ = O\left\{h^p\left(\int_{2h}^{1}\frac{dx}{x^{(a+1)p}}+\int_{1}^{\infty}\frac{dx}{x^2}\right)\right\} = O(h^{1-ap}).$$

Точно так же

$$\int_{2h}^{\infty} |f(x+h)-f(x-h)|^p\,dx = O\left(\int_{0}^{2h}\frac{dx}{|x-h|^{ap}}\right) = O(h^{1-ap}).$$

Таким образом, условия теоремы выполнены с $\alpha = \dfrac{1}{p} - a$. Поэтому $F(x)$ принадлежит к L^β для $\beta > \dfrac{1}{1-a}$. Но[1] $F(x) \sim Kx^{a-1}$ при $x\to\infty$, так что $F(x) \notin L^{\frac{1}{1-a}}$.

В случае $\alpha < 1$, $p = 2$ доказанной теореме можно придать форму, допускающую обращение.

Теорема 85. *Если $f(x) \in L^2$, то условия*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x+h)-f(x-h)|^2\,dx = O(|h|^{2\alpha}) \quad (0<\alpha<1), \tag{4.13.2}$$

$$\left(\int_{-\infty}^{-X}+\int_{X}^{\infty}\right)|F(x)|^2\,dx = O(X^{-2\alpha}) \quad (X\to\infty) \tag{4.13.3}$$

эквивалентны.

Доказательство. Вместо неравенства мы теперь получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} 4\sin^2 xh|F(x)|^2\,dx = \int_{-\infty}^{\infty}|f(x+h)-f(x-h)|^2\,dx. \tag{4.13.4}$$

Предположим, что условие (4.13.2) выполнено. Тогда (4.13.4) даёт

$$\int_{\frac{1}{2h}}^{\frac{1}{h}} |F(x)|^2\,dx < A\int_0^{\infty}\sin^2 xh|F(x)|^2\,dx = O(h^{2\alpha}).$$

Поэтому

$$\int_X^{\infty}|F(x)|^2\,dx = \int_X^{2X}+\int_{2X}^{4X}+\ldots = O\left(\frac{1}{X^{2\alpha}}+\frac{1}{(2X)^{2\alpha}}+\ldots\right) = O\left(\frac{1}{X^{2\alpha}}\right)$$

и аналогично для $(-\infty, -X)$.

С другой стороны, если выполнено условие (4.13.3), то, полагая

$$\varphi(X) = \int_X^{\infty}|F(x)|^2\,dx,$$

[1] См., например, нижеследующие теоремы 126—127.

имеем

$$\int_0^X x^2|F(x)|^2\,dx = -\int_0^X x^2\varphi'(x)\,dx = -X^2\varphi(X) + 2\int_0^X x\varphi(x)\,dx \leqslant \leqslant 2\int_0^X O(x^{1-2\alpha})\,dx = O(X^{2-2\alpha}).$$

Поэтому

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sin^2 xh\,|F(x)|^2\,dx = O\left\{h^2\int_{-\frac{1}{h}}^{\frac{1}{h}} x^2|F(x)|^2\,dx\right\} + + O\left\{\left(\int_{-\infty}^{-\frac{1}{h}} + \int_{\frac{1}{h}}^{\infty}\right)|F(x)|^2\,dx\right\} = O(h^{2\alpha}),$$

и (4.13.2) следует теперь из (4.13.4).

Так как при $\beta < 2$

$$\int_X^{2X} |F(x)|^\beta\,dx \leqslant \left(\int_X^{2X} |F(x)|^2\,dx\right)^{\beta/2} \left(\int_X^{2X} dx\right)^{1-\beta/2} = = O(X^{-\alpha\beta})O(X^{1-\beta/2}) = O(X^{1-\alpha\beta-\beta/2}),$$

то снова получаем, что $F(x)\in L^\beta$, если $\beta > \dfrac{1}{\alpha+\frac{1}{2}}$ (случай $p=2$ теоремы 84). Но это последнее предложение, конечно, уже необратимо.

4.14. Трансформации Меллина из класса L^p. Обозначим через $\mathfrak{L}^p$ класс функций $f(x)$ таких, что

$$\int_0^\infty \frac{|f(x)|^p}{x}\,dx < \infty.$$

Имеют место следующие теоремы.

Т е о р е м а 86. *Если $\mathfrak{F}(k+it)\in L^p$ $(1<p<2)$, то её трансформация Меллина $f(x)$ существует и $x^k f(x)\in\mathfrak{L}^{p'}$.*

Если $x^k f(x)\in\mathfrak{L}^p$, то трансформация Меллина $\mathfrak{F}(s)$ функции $f(x)$ существует и $\mathfrak{F}(k+it)\in L^{p'}$.

Т е о р е м а 87. *Если $\mathfrak{F}(k+it)\in L^p$ и $x^{1-k}g(x)\in\mathfrak{L}^p$, то*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{k-i\infty}^{k+i\infty} \mathfrak{F}(s)\mathfrak{G}(1-s)\,ds = \int_0^\infty f(x)g(x)\,dx.$$

Эти теоремы легко получаются с помощью подстановки из теорем 74 и 75.

Укажем ещё следующие две теоремы (соответствующие теоремам 77 и 78).

Теорема 88. *Если* $\mathfrak{F}(k+iv)$, $x^k f(x)$ *есть пара трансформаций Меллина из* L^p, $\mathfrak{L}^{p'}$, *а* $x^{s-k}g(x)$, $\mathfrak{G}(s-k-iv)$ — *из* $\mathfrak{L}^{p'}$, L^p, *то имеет место соотношение* (2.1.15).

Теорема 89. *Если* $\mathfrak{F}(k+iv)$, $x^k f(x)$ *есть пара трансформаций Меллина из* L^p, $\mathfrak{L}^{p'}$ *и* $\mathfrak{G}(s-k-iv)$, $x^{s-k}g(x)$ — *из* L^q, $\mathfrak{L}^{q'}$, *то функции* (2.1.16) *представляют собой пару трансформаций Меллина из* $\mathfrak{L}^{P'}$, L^P.

Замечание. Недавно Зигмунд[1] показал, что *если* $f(x)$ *принадлежит к* L^p, $1<p<2$, *то соотношение* (3.11.2) *выполняется почти всюду*, причём никаких логарифмических множителей не требуется. Если $f(x)$ удовлетворяет условию теоремы 79, то $f(x)\ln x$ принадлежит к $L^2(1,\infty)$ (применить неравенство Гёльдера к интегралам по интервалам $(2^n, 2^{n+1})$). Поэтому (3.11.2), в силу теоремы 62, имеет место почти для всех x.

[1] Zygmund (2).

V
СОПРЯЖЁННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ; ТРАНСФОРМАЦИИ ГИЛЬБЕРТА

5.1. Сопряжённые интегралы. Интегральная формула Фурье может быть записана в виде

$$f(x) = \int_0^\infty [a(t)\cos xt + b(t)\sin xt]\,dt, \tag{5.1.1}$$

где

$$\begin{cases} a(t) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\cos ut\,du, \\ b(t) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\sin ut\,du. \end{cases} \tag{5.1.2}$$

Интеграл в (5.1.1), формально, есть предел при $y \to 0$ интеграла

$$\int_0^\infty e^{-yt}[a(t)\cos xt + b(t)\sin xt]\,dt = U(x,y), \tag{5.1.3}$$

а последний представляет собой вещественную часть функции

$$\int_0^\infty e^{izt}[a(t) - ib(t)]\,dt = \Phi(z), \tag{5.1.4}$$

где $z = x + iy$.

Мнимая часть функции $\Phi(z)$ есть

$$-\int_0^\infty e^{-yt}[b(t)\cos xt - a(t)\sin xt]\,dt = V(x,y). \tag{5.1.5}$$

Полагая $-V(x,0) = g(x)$, получаем

$$g(x) = \int_0^\infty \big[b(t)\cos xt - a(t)\sin xt\big]\,dt, \tag{5.1.6}$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty dt \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\sin(u-x)t\,du. \tag{5.1.7}$$

Интеграл (5.1.7) называется *сопряжённым интегралом* к интегралу Фурье. Он получается формально из (5.1.1) заменой a на b и b на $-a$.

Повторяя ещё один раз этот процесс, мы возвращаемся к исходному интегралу, взятому со знаком минус. Таким образом, соотношение между $f(x)$ и $g(x)$ — «косо-взаимное», т.е. взаимное, отвлекаясь от знака минус.

Далее, имеем формально

$$a(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\bigl[F(t) + F(-t)\bigr], \qquad b(t) = \frac{1}{i\sqrt{2\pi}}\bigl[F(t) - F(-t)\bigr],$$

откуда

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{1}{i\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty \bigl[F(t) - F(-t)\bigr]\cos xt\,dt - \\ &\quad - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty \bigl[F(t) + F(-t)\bigr]\sin xt\,dt = \\ &= \frac{1}{i\sqrt{2\pi}}\left(\int_0^\infty e^{-ixt}F(t)\,dt - \int_0^\infty e^{ixt}F(-t)\,dt\right) = \\ &= \frac{1}{i\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty e^{-ixt}F(t)\operatorname{sgn} t\,dt. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$G(t) = -iF(t)\operatorname{sgn} t. \tag{5.1.8}$$

Если $f(x)$ — чётная, то $b(t) = 0$, и $g(x)$ есть синус-трансформация от косинус-трансформации функции $f(x)$, взятая со знаком минус. Аналогично, если $f(x)$ — нечётная, то $g(x)$ есть косинус-трансформация от синус-трансформации функции $f(x)$.

Далее, имеем формально

$$\begin{aligned} g(x) &= \lim_{\lambda\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^\lambda dt\int_{-\infty}^\infty f(u)\sin(u-x)t\,du = \\ &= \lim_{\lambda\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty f(u)\frac{1-\cos\lambda(u-x)}{u-x}\,du = \\ &= \lim_{\lambda\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^\infty [f(x+t) - f(x-t)]\frac{1-\cos\lambda t}{t}\,dt. \end{aligned}$$

Если $f(x)$ — достаточно гладкая функция, то часть последнего интеграла, содержащая $\cos\lambda t$, будет при $\lambda\to\infty$ стремиться к нулю, и мы будем иметь

$$g(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{f(x+t) - f(x-t)}{t}\,dt; \tag{5.1.9}$$

и аналогично

$$f(x) = -\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{g(x+t) - g(x-t)}{t}\,dt. \tag{5.1.10}$$

Двойственность, выражаемая формулами (5.1.9), (5.1.10), была впервые замечена Гильбертом, и две функции, связанные этими формулами, называют парой *трансформаций Гильберта.*

Формулы (5.1.9), (5.1.10) эквивалентны формулам

$$g(x) = \frac{1}{\pi}\, P\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{t-x}\, dt, \qquad f(x) = -\frac{1}{\pi}\, P\int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(t)}{t-x}\, dt, \tag{5.1.11}$$

где P обозначает главное значение интеграла при $t = x$.

Приведём следующие простые примеры пар сопряжённых функций $f(x)$, $g(x)$:

$$\begin{cases} 1 & (0 < x < a), \\ 0 & (x < 0,\ x > a), \end{cases} \qquad \frac{1}{\pi} \ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|;$$

$$\frac{1}{1+x^2}, \qquad -\frac{x}{1+x^2};$$

$$\cos x, \qquad -\sin x.$$

Отправляясь от подходящих аналитических функций $\Phi(z)$, можно получить любое количество таких примеров. Примерами из главы VII являются:

$$\frac{J_\nu(|x|)}{|x|^\nu}, \qquad -\operatorname{sgn} x \frac{\mathbf{H}_\nu(|x|)}{|x|^\nu}$$

из (7.1.11) и (7.2.8);

$$\operatorname{sgn} x\, |x|^\nu J_\nu(|x|), \qquad -|x|^\nu Y_\nu(|x|)$$

из (7.11.2) и (7.11.3); и

$$J_0(2\sqrt{|x|}), \qquad -\operatorname{sgn} x \left(\frac{2}{\pi}\, K_0(2\sqrt{|x|}) + Y_0(2\sqrt{|x|})\right)$$

из (7.11.2), с $\nu = 0$ и $x = \frac{1}{2}\left(\frac{u}{a} + \frac{a}{u}\right)$, и (7.12.8).

5.2. Трансформации Гильберта из класса L^2. Обоснование приведённых выше формальных соотношений в их непосредственной форме было бы слишком сложно. Наиболее простой строгий путь приводит к двойственным соотношениям несколько отличного вида.

Т е о р е м а 90[1]. *Пусть $f(x) \in L^2(-\infty, \infty)$. Тогда формула*

$$g(x) = -\frac{1}{\pi}\, \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \ln\left|1 - \frac{x}{t}\right|\, dt \tag{5.2.1}$$

[1] Titchmarsh (5).

определяет почти всюду некоторую функцию $g(x)$, также принадлежащую к $L^2(-\infty,\infty)$. При этом почти для всех x имеет место также двойственная формула

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{\infty}g(t)\ln\left|1-\frac{x}{t}\right|dt, \tag{5.2.2}$$

и

$$\int_{-\infty}^{\infty}f^2(x)\,dx=\int_{-\infty}^{\infty}g^2(x)\,dx. \tag{5.2.3}$$

Если бы мы могли произвести дифференцирование под знаками интегралов, то получили бы двойственные соотношения указанного ранее вида. Позже мы увидим, что это действительно возможно; но начнём мы с той формы двойственных отношений, к которой теория трансформаций Фурье приводит непосредственным образом.

Перейдём к доказательству теоремы 90. Пусть $F(x)$ — трансформация Фурье функции $f(x)$, $G(x)=-iF(x)\operatorname{sgn}x$ и $g(x)$ — трансформация Фурье функции $G(x)$. Тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty}|g(x)|^2\,dx=\int_{-\infty}^{\infty}|G(x)|^2\,dx=\int_{-\infty}^{\infty}|F(x)|^2\,dx=\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2\,dx$$

и

$$g(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{\infty}G(y)\frac{e^{-ixy}-1}{-iy}\,dy=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{\infty}F(y)\frac{e^{-ixy}-1}{|y|}\,dy.$$

Трансформацией Фурье $H(y)=\dfrac{e^{-ixy}-1}{|y|}$ служит

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-iuy}\frac{e^{-ixy}-1}{|y|}\,dy&=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{\infty}\frac{\cos(x+u)y-\cos uy}{y}\,dy=\\&=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\lim_{\delta\to0}\int_{\delta}^{\infty}\frac{\cos(x+u)y-\cos uy}{y}\,dy=\\&=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\lim_{\delta\to0}\Bigl(\int_{\delta|x+u|}^{\infty}\frac{\cos v}{v}\,dv-\int_{\delta|u|}^{\infty}\frac{\cos v}{v}\,dv\Bigr)=\\&=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\lim_{\delta\to0}\int_{\delta|x+u|}^{\delta|u|}\frac{\cos v}{v}\,dv=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\lim_{\delta\to0}\int_{\delta|x+u|}^{\delta|u|}\frac{dv}{v}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\ln\left|\frac{u}{x+u}\right|.\end{aligned}$$

Поэтому формула Парсеваля даёт

$$\int_{-\infty}^{\infty}F(y)\frac{e^{-ixy}-1}{|y|}\,dy=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(u)\ln\left|\frac{u}{x-u}\right|du,$$

откуда и следует (5.2.1). Так как соотношение между F и G, а значит, и между f и g, косо-взаимное, то тем самым доказано также (5.2.2).

5.3.

Т е о р е м а 91[1]. *Пусть $f(x) \in L^2(-\infty, \infty)$. Тогда формула*

$$g(x) = \frac{1}{\pi} \int_{\to 0}^{\infty} \frac{f(x+t) - f(x-t)}{t}\, dt \tag{5.3.1}$$

определяет почти всюду некоторую функцию $g(x) \in L^2(-\infty, \infty)$. Почта всюду имеет место также двойственная формула

$$f(x) = -\frac{1}{\pi} \int_{\to 0}^{\infty} \frac{g(x+t) - g(x-t)}{t}\, dt, \tag{5.3.2}$$

и

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} g^2(x)\, dx. \tag{5.3.3}$$

Функции $g(x)$ теорем 90 и 91 эквивалентны, т.е. совпадают почти для всех x.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Интегралы (5.1.2), определяющие $a(t)$ и $b(t)$, существуют в смысле сходимости в среднеквадратичном, и

$$a(t) - ib(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, F(-t).$$

Пусть $H(t)$ равна e^{izt} при $t > 0$ и равна 0 при $t < 0$. Тогда

$$h(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{izt - iut}\, dt = \frac{1}{i\sqrt{2\pi}(u-z)}\,.$$

Поэтому формула Парсеваля, в форме

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(-t) H(t)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) h(t)\, dt,$$

в применении к (5.1.4) даёт

$$\Phi(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{t-z}\, dt \quad (\operatorname{Im} z > 0). \tag{5.3.4}$$

Разделяя вещественную и мнимую части, получаем

$$U(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{(t-x)^2 + y^2}\, f(t)\, dt, \tag{5.3.5}$$

$$V(x, y) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t-x}{(t-x)^2 + y^2}\, f(t)\, dt. \tag{5.3.6}$$

[1] Аналогичная теорема для рядов принадлежит Плеснеру (1). См. также Hardy (14).

Определим g и G, как в § 5.2, понимая интегралы в смысле сходимости в среднеквадратичном. Тогда имеем также

$$\Phi(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty e^{izt}F(-t)\,dt = -i\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty e^{izt}G(-t)\,dt =$$
$$= -i\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{-\infty}^\infty G(-t)H(t)\,dt = -i\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{-\infty}^\infty g(t)h(t)\,dt =$$
$$= -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty \frac{g(t)}{t-z}\,dt. \tag{5.3.7}$$

Поэтому

$$U(x,y) = -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty \frac{t-x}{(t-x)^2+y^2}\,g(t)\,dt, \tag{5.3.8}$$
$$V(x,y) = -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty \frac{y}{(t-x)^2+y^2}\,g(t)\,dt. \tag{5.3.9}$$

По теории сингулярного интеграла Коши (§ 1.17), $U(x,y)\to f(x)$ при $y\to 0$ почти для всех значений x и $V(x,y)\to -g(x)$ почти для всех x. Для завершения доказательства теоремы 91 мы используем теперь следующую теорему.

Т е о р е м а 92. *Пусть* $f(x)\in L(0,1)$ *и* $\dfrac{f(x)}{x}\in L(1,\infty)$. *Пусть* $V(x,y)$ *определена формулой* (5.3.6). *Тогда почти для всех значений* x

$$\lim_{y\to 0}\left(V(x,y) + \frac{1}{\pi}\int_y^\infty \frac{f(x+t)-f(x-t)}{t}\,dt\right) = 0. \tag{5.3.10}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Как известно,

$$\omega(y) = \int_0^y |f(x+t)-f(x-t)|\,dt = o(y)$$

почти для всех значений x. Пусть x — какая-нибудь точка, в которой выполняется это соотношение. Имеем

$$V(x,y) + \frac{1}{\pi}\int_y^\infty \frac{f(x+t)-f(x-t)}{t}\,dt =$$
$$= -\frac{1}{\pi}\int_0^y \frac{t[f(x+t)-f(x-t)]}{t^2+y^2}\,dt + \frac{y^2}{\pi}\int_y^1 \frac{f(x+t)-f(x-t)}{t(t^2+y^2)}\,dt +$$
$$+ \frac{y^2}{\pi}\int_1^\infty \frac{f(x+t)-f(x-t)}{t(t^2+y^2)}\,dt = J_1+J_2+J_3.$$

Но при $y\to 0$

$$|J_1| \leqslant \frac{1}{2\pi y}\int_0^y |f(x+t)-f(x-t)|\,dt = o(1),$$

$$\begin{aligned}|J_2| &\leqslant \frac{y^2}{\pi}\int_y^1 \frac{|f(x+t)-f(x-t)|}{t(t^2+y^2)}\,dt = \\ &= \frac{y^2}{\pi}\,\frac{\omega(t)}{t(t^2+y^2)}\bigg|_y^1 + \frac{y^2}{\pi}\int_y^1 \frac{3t^2+y^2}{t^2(t^2+y^2)^2}\omega(t)\,dt \leqslant \\ &\leqslant \frac{y^2}{\pi}\,\frac{\omega(1)}{1+y^2} + o\left(y^2\int_y^1 \frac{3t^2+y^2}{t(t^2+y^2)^2}\,dt\right) = \\ &= O(y^2) + o\left(\int_1^{1/y} \frac{3u^2+1}{u(u^2+1)^2}\,du\right) = o(1),\end{aligned}$$

и, очевидно, $J_3 = o(1)$. Тем самым теорема доказана.

Так как, теперь, почти всюду $V(x,y) \to -g(x)$, то (5.3.1) следует из (5.3.10). Вследствие того, что соотношение между f и g косо-взаимное, тем самым доказано и (5.3.2). А равенство (5.3.3) устанавливается тем же путём, что и раньше. Таким образом, и доказательство теоремы 91 завершено.

5.4. В настоящем параграфе мы покажем, что та же самая совокупность формул может быть получена из другого источника. Мы можем принять за исходную некоторую аналитическую функцию $\Phi(z)$, удовлетворяющую определённым условиям.

Теорема 93. *Пусть $\Phi(z)$ — аналитическая функция, регулярная для $y > 0$, и пусть интеграл*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Phi(x+iy)|^2\,dx$$

существует для каждого положительного y и равномерно ограничен. Тогда при $y \to 0$ функция $\Phi(x+iy)$ сходится в среднем к некоторой функции $\Phi(x)$, причём $\Phi(x+iy) \to \Phi(x)$ также почти для всех x. Для $y > 0$

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Phi(u)}{u-z}\,du.$$

Если $\Phi(z) = U(x,y) + iV(x,y)$, $\Phi(x) = f(x) - ig(x)$, то функции U, V, f и g связаны формулами предыдущего параграфа, и, в частности, f и g являются сопряжёнными.

Докажем сначала следующую лемму.

Лемма. *Пусть $\Phi(z)$ аналитична и интеграл*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Phi(x+iy)|^p\,dx \qquad (p > 1)$$

существует и ограничен для $y_1 \leqslant y \leqslant y_2$. Тогда $\Phi(x+iy) \to 0$ при $x \to \pm\infty$ равномерно в каждой полосе $y_1 + \delta \leqslant y \leqslant y_2 - \delta$.

Доказательство. Пусть $y_1+\delta \leqslant y \leqslant y_2-\delta$. Тогда при $0<\rho\leqslant\delta$

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|w-z|=\rho}\frac{\Phi(w)}{w-z}\,dw=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Phi(z+\rho e^{i\varphi})\,d\varphi.$$

Поэтому

$$\frac{\delta^2}{2}\,\Phi(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\delta}\rho\,d\rho\int_0^{2\pi}\Phi(z+\rho e^{i\varphi})\,d\varphi,$$

$$\frac{\delta^2}{2}\,|\Phi(z)|\leqslant\frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{\delta}\!\!\int_0^{2\pi}|\Phi|^p\rho\,d\rho\,d\varphi\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^{\delta}\!\!\int_0^{2\pi}\rho\,d\rho\,d\varphi\right)^{1-\frac{1}{p}}\leqslant$$

$$\leqslant K(\delta)\left(\int_{y_1}^{y_2}dv\int_{x-\delta}^{x+\delta}|\Phi(u+iv)|^p\,du\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Но интеграл

$$\int_{x-\delta}^{x+\delta}|\Phi(u+iv)|^p\,du$$

ограничен при $y_1\leqslant v\leqslant y_2$ и стремится к нулю при $x\to\infty$ каждого v. Следовательно, правая часть последнего неравенства стремится к нулю, и лемма доказана.

Переходим теперь непосредственно к доказательству теоремы. Положим

$$\varphi_a(t,y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-a}^{a}e^{-itx}\Phi(x)\,dx.$$

При $a\to\infty$ эта функция для каждого y сходится в среднем к некоторой функции $\varphi(t,y)$. Рассмотрим, однако, интеграл

$$\int e^{-itz}\Phi(z)\,dz,$$

взятый по прямоугольнику с вершинами в точках $\pm a+iy_1$, $\pm a+iy_2$, где $0<y_1<y_2$. Интеграл вдоль правой стороны этого прямоугольника равен

$$\int_{y_1}^{y_2}e^{-it(a+iy)}\Phi(a+iy)i\,dy=ie^{-ita}\int_{y_1}^{y_2}e^{ty}\Phi(a+iy)\,dy,$$

что, в силу леммы, при фиксированных y_1 и y_2 стремится к нулю, когда $a\to\infty$. Аналогично, и интеграл по левой стороне прямоугольника стремится к нулю. Следовательно, при $a\to\infty$

$$\int_{-a}^{a}e^{-it(x+iy_1)}\Phi(x+iy_1)\,dx-\int_{-a}^{a}e^{-it(x+iy_2)}\Phi(x+iy_2)\,dx\to 0,$$

т.е.

$$e^{ty_1}\varphi_a(t,y_1)-e^{ty_2}\varphi_a(t,y_2)\to 0.$$

Поэтому предел этого выражения в среднеквадратичном по любому конечному интервалу изменения t также равен нулю, т.е.

$$e^{ty_1}\varphi(t,y_1)=e^{ty_2}\varphi(t,y_2)$$

почти для всех t. Мы можем поэтому (полагая, например, $\varphi(t)=e^t\varphi(t,1)$) представить $\varphi(t,y)$ в виде

$$\varphi(t,y)=e^{-ty}\varphi(t),$$

где $\varphi(t)$ не зависит от y.

Далее, по теореме Парсеваля,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2ty}|\varphi(t)|^2\,dt=\int_{-\infty}^{\infty}|\Phi(x+iy)|^2\,dx.$$

Так как правая часть остаётся ограниченной при $y\to\infty$, то необходимо $\varphi(t)\equiv 0$ для $t<0$; действительно,

$$\int_{-\infty}^{-\delta}|\varphi(t)|^2\,dt\leqslant e^{-2\delta y}\int_{-\infty}^{-\delta}e^{-2ty}|\varphi(t)|^2\,dt<Ke^{-2\delta y}\to 0,$$

так что

$$\int_{-\infty}^{0}|\varphi(t)|^2\,dt=0.$$

Так как то же выражение остаётся ограниченным и при $y\to 0$, то $\varphi(t)$ принадлежит к $L^2(0,\infty)$.

Далее, функция $\varphi(t)(e^{-ty_1}-e^{-ty_2})$ есть трансформация Фурье разности $\Phi(x+iy_1)-\Phi(x+iy_2)$. Поэтому

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\Phi(x+iy_1)-\Phi(x+iy_2)|^2\,dx=\int_0^{\infty}|\varphi(t)|^2(e^{-ty_1}-e^{-ty_2})^2\,dt,$$

что стремится к нулю при $y_1\to 0$, $y_2\to 0$. Поэтому $\Phi(x+iy)$ при $y\to 0$ сходится в среднем к некоторой функции $\Phi(x)$.

Далее, при $y>0$

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\frac{\Phi(w)}{w-z}\,dw,$$

где интегрирование производится по прямоугольнику с вершинами в точках $\pm a+iv_1$, $\pm a+iv_2$, где $a>|x|$ и $v_1<y<v_2$. Как и раньше, интегралы вдоль правой и левой сторон прямоугольника при $a\to\infty$ стремятся к нулю, и мы получаем

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\Phi(u+iv_1)}{u+iv_1-z}\,du-\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\Phi(u+iv_2)}{u+iv_2-z}\,du.$$

Но

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\Phi(u+iv_2)}{u+iv_2-z}\,du\right|^2\leqslant$$
$$\leqslant\int_{-\infty}^{\infty}|\Phi(u+iv_2)|^2\,du\int_{-\infty}^{\infty}\frac{du}{(u-x)^2+(v_2-y)^2}<\frac{K}{v_2-y},$$

что стремится к нулю при $v_2\to\infty$. Поэтому

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\Phi(u+iv_1)}{u+iv_1-z}\,du, \tag{5.4.1}$$

откуда, переходя к пределу по $v_1\to 0$, получаем

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\Phi(u)}{u-z}\,du. \tag{5.4.2}$$

Полагая $\Phi(z)=U(x,y)+iV(x,y)$, $\Phi(u)=f(u)-ig(u)$, мы получаем формулы предыдущих параграфов, а из теории сингулярного интеграла Коши и формул (5.3.5) и (5.3.9) следует, что $\Phi(z)\to\Phi(x)$ почти для всех значений x.

Т е о р е м а 94. *Если $\psi(z)$ регулярна и ограничена для $y>0$, то $\psi(z)$ при $y\to 0$ стремится к пределу почти для всех x.*

Действительно, $\dfrac{\psi(z)}{z+i}$ удовлетворяет условиям предыдущей теоремы и, таким образом, почти всюду стремится к пределу.

Заметим также, что $\varphi(t)$ в предыдущей теореме есть трансформация Фурье функции $\Phi(x)$. Действительно, обозначая через $\chi(t)$ трансформацию Фурье функции $\Phi(x)$, имеем при $y\to 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\chi(t)-e^{-ty}\varphi(t)|^2\,dt=\int_{-\infty}^{\infty}|\Phi(x)-\Phi(x+iy)|^2\,dx\to 0,$$
$$\int_{-\infty}^{\infty}|\chi(t)-\varphi(t)|^2\,dt=0,$$

откуда $\chi(t)\equiv\varphi(t)$.

5.5. Докажем также следующее предложение.

Т е о р е м а 95. *Для того, чтобы комплексная функция $\Phi(x)$ из $L^2(-\infty,\infty)$ была пределом при $z\to x$ аналитической функции $\Phi(z)$, такой, что*

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\Phi(x+iy)|^2\,dx<K,$$

необходимо и достаточно выполнение любого из следующих двух условий:

(I) *$\Phi(x)=f(x)-ig(x)$, где f и g суть сопряжённые функции из класса L^2;*

(II) *трансформация Фурье* $\varphi(x)$ *функции* $\Phi(x)$ *равна нулю при* $x<0$.

Доказательство. Необходимость и достаточность условия (I) непосредственно следуют из предыдущих теорем.

Необходимость условия (II) была доказана в процессе доказательства теоремы 93. Обратно, пусть $\varphi(x)\equiv 0$ при $x<0$ и пусть Φ — трансформация Фурье функции φ. Тогда

$$\Phi(u)=\underset{a\to\infty}{\text{l.i.m.}}\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^a e^{ixu}\varphi(x)\,dx.$$

Положим

$$\Phi(u+iv)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty e^{ix(u+iv)}\varphi(x)\,dx \quad (v>0).$$

Тогда $\Phi(u+iv)$ аналитична для $v>0$, и

$$\int_{-\infty}^\infty |\Phi(u+iv)|^2\,du=\int_0^\infty e^{-2xv}|\varphi(x)|^2\,dx\leqslant\int_0^\infty |\varphi(x)|^2\,dx.$$

Поэтому, в силу теоремы 93, $\Phi(u+iv)$ сходится в среднем, а также почти всюду к некоторой функции $\Psi(u)$; при этом

$$\int_0^U \Phi(u)\,du=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty \frac{e^{ixU}-1}{ix}\,\varphi(x)\,dx=$$

$$=\lim_{v\to 0}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty \frac{e^{ix(U+iv)}-1}{ix}\,\varphi(x)\,dx=\lim_{v\to 0}\int_0^U \Phi(u+iv)\,du=\int_0^U \Psi(u)\,du.$$

Следовательно,

$$\Psi(u)\equiv\Phi(u).$$

Тот же результат вытекает также из формул для трансформаций Фурье. Действительно, если Φ удовлетворяет указанным условиям, то Φ, f и g связаны, как в § 5.1, и, в силу (5.1.8),

$$\varphi(x)=\underset{a\to\infty}{\text{l.i.m.}}\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-a}^a e^{-ixu}[f(u)-ig(u)]\,du=$$

$$=F(-x)-iG(-x)=0 \qquad (x<0).$$

Обратно, пусть $\varphi(x)\equiv 0$ для $x<0$. Пусть $\Phi(u)=f(u)-ig(u)$, функции $a(x)$ и $b(x)$ определены через f, как выше, а функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ аналогично определены через g. Тогда

$$a(x)+ib(x)-i[\alpha(x)+i\beta(x)]=0 \qquad (x<0),$$

т.е.

$$a(x)=-\beta(x),\quad b(x)=\alpha(x) \qquad (x<0).$$

Поэтому g является сопряжённой к f, и достаточность условия (II) следует из условия (I).

5.6.

Т е о р е м а 96. *Для того, чтобы $\Phi(x)$ была пределом при $y \to 0$ аналитической функции $\Phi(z)$, такой, что*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Phi(x+iy)|^2\,dx = O(e^{2ky}),$$

необходимо и достаточно, чтобы $\varphi(x) \equiv 0$ при $x < -k$.

Если k — наименьшее число, для которого $\varphi(x) \equiv 0$ при $x < -k$, то

$$\lim_{y\to\infty} \frac{1}{y} \ln \int_{-\infty}^{\infty} |\Phi(x+iy)|^2\,dx = 2k.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\Phi(z)$ удовлетворяет указанным условиям. Положим

$$\Phi(z) = e^{-ikz}\Psi(z).$$

Тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(x+iy)|^2\,dx = e^{-2ky} \int_{-\infty}^{\infty} |\Phi(x+iy)|^2\,dx = O(1).$$

Поэтому $\Psi(z) \to \Psi(x)$ почти для всех x, и трансформация Фурье $\psi(x)$ функции $\Psi(x)$ тождественно равна нулю для $x < 0$. Но

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \underset{a\to\infty}{\text{l.i.m.}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^{a} e^{-ixu}\Phi(u)\,du = \\ &= \underset{a\to\infty}{\text{l.i.m.}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^{a} e^{-i(x+k)u}\Psi(u)\,du = \psi(x+k).\end{aligned}$$

Поэтому $\varphi(x) \equiv 0$ для $x < -k$. В силу предыдущей теоремы, это рассуждение может быть проведено в обратном порядке. Это доказывает первую часть теоремы.

Далее, так как функция $\Phi(x+iy)$ есть трансформация Фурье функции $e^{-uy}\varphi(u)$, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Phi(x+iy)|^2\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2uy}|\varphi(u)|^2\,du = \int_{-k}^{\infty} e^{-2uy}|\varphi(u)|^2\,du.$$

Но правая часть этого равенства

$$\leqslant e^{2ky} \int_{-k}^{\infty} |\varphi(u)|^2\,du;$$

с другой стороны, полагая

$$\omega(u) = \int_{-k}^{u} |\varphi(u)|^2\,du,$$

имеем

$$\int_{-k}^{\infty} e^{-2uy}|\varphi(u)|^2\,du = 2y \int_{-k}^{\infty} e^{-2uy}\omega(u)\,du \geqslant$$

$$\geqslant 2y\omega(-k+\delta)\int_{-k+\delta}^{\infty} e^{-2uy}\,du = \omega(\delta-k)e^{2(k-\delta)y}.$$

Это доказывает вторую часть теоремы.

5.7. Для функции, имеющей среднее значение в конечной полосе, соответствующая теорема такова:

Теорема 97. *Пусть $\Phi(z)$ — аналитическая функция, регулярная в полосе $y_1 < y < y_2$ и такая, что интеграл*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Phi(x+iy)|^2\,dx$$

существует и ограничен для $y_1 < y < y_2$. Тогда существуют граничные функции $\Phi(x+iy_1)$ и $\Phi(x+iy_2)$ как пределы в среднеквадратичном, а также как пределы почти всюду функции $\Phi(x+iy)$. При этом для $y_1 < y < y_2$

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Phi(u+iy_1)}{u+iy_1-z}\,du - \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Phi(u+iy_2)}{u+iy_2-z}\,du.$$

Трансформация Фурье функции $\Phi(x+iy)$ имеет вид $e^{-ty}\varphi(t)$, где $e^{-ty}\varphi(t)$ принадлежит к L^2 для $y_1 \leqslant y \leqslant y_2$.

Это — очевидное следствие проведённых рассуждений, за исключением, быть может, существования предела $\Phi(x+iy)$ при $y \to y_1$ или $y \to y_2$ почти для всех x. Однако, предшествующие рассмотрения показывают, что интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Phi(u+iy_1)}{u+iy_1-z}\,du$$

почти всюду стремится к пределу, когда y стремится сверху к y_1, а интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Phi(u+iy_2)}{u+iy_2-z}\,du$$

регулярен для всех $y < y_2$ и, значит, всюду стремится к пределу при $y \to y_1$. Аналогичное верно для случая $y \to y_2$.

5.8.

Теорема 98. *Пусть $f(x) \in L^2(-\infty,\infty)$. Тогда*

$$f(x) = f_+(x) + f_-(x),$$

где $f_+(x) \in L^2(-\infty,\infty)$ является пределом в среднеквадратичном некоторой аналитической функции $f_+(z)$, регулярной для $\operatorname{Im} z > 0$, и, аналогично, $f_-(x)$ есть предел в среднеквадратичном функции $f_-(z)$, регулярной для $\operatorname{Im} z < 0$.

Доказательство. Пусть $F(x)$ — трансформация Фурье функции $f(x)$, и

$$f_+(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-izu} F(u)\, du, \quad f_-(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{-izu} F(u)\, du.$$

Очевидно, $f_+(z)$ и $f_-(z)$ регулярны для $y > 0$ и $y < 0$ соответственно. Остальные утверждения теоремы получаются, как в § 5.4.

Теорема 99. *Пусть* $f(x) \in L^2(0, \infty)$. *Тогда*

$$f(x) = f_{(+)}(x) + f_{(-)}(x),$$

где $f_{(+)}(x) \in L^2(0, \infty)$ *является пределом в среднеквадратичном при* $\arg z \to +0$ *некоторой аналитической функции* $f_{(+)}(z)$, *регулярной для* $\arg z > 0$, *и, аналогично,* $f_{(-)}(x)$ *есть предел в среднеквадратичном при* $\arg z \to -0$ *функции* $f_{(-)}(z)$, *регулярной для* $\arg z < 0$.

Эта теорема может быть получена из предыдущей теоремы путём замены z (в настоящей теореме) на e^ζ. Её можно также непосредственно вывести с помощью трансформаций Меллина. Действительно,

$$f_{(+)}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{1/2 - i\infty}^{1/2} \mathfrak{F}(s)\, z^{-s}\, ds, \quad f_{(-)}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{1/2}^{1/2 + i\infty} \mathfrak{F}(s)\, z^{-s}\, ds,$$

5.9.

Теорема 100[1]. *Если* $f(x) \in L(-\infty, \infty)$, *то*

$$\int_{\to 0}^\infty \frac{f(x+t) - f(x-t)}{t}\, dt$$

существует почти для всех значений x.

Доказательство. Мы можем без ограничения общности предполагать, что $f(x) \geqslant 0$. Пусть $U(x, y)$ и $V(x, y)$ — функции, определённые формулами (5.3.5) и (5.3.6) соответственно, и

$$\Phi(z) = U(x, y) + iV(x, y) = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^\infty \frac{f(t)}{t - z}\, dt \qquad (y > 0).$$

Из определения функции $U(x, y)$ ясно, что она неотрицательна.

Положим

$$\Psi(z) = e^{-\Phi(z)} = e^{-U(x,y) - iV(x,y)}.$$

Так как $U(x, y) \geqslant 0$, то $|\Psi(z)| \leqslant 1$. Поэтому $\Phi(z)$ при $y \to 0$ стремится к конечному пределу почти для всех x (теорема 94); и этот предел может быть равен нулю лишь на множестве меры нуль, так как $U(x, y)$ почти для всех x стремится к конечному пределу $f(x)$. Таким образом,

[1] Plessner (1). Приводимый здесь вариант доказательства принадлежит, насколько мне известно, Литлвуду.

$\Psi(z)$ почти всюду стремится к конечному пределу, отличному от нуля. Поэтому $\Phi(z)$ почти всюду стремится к конечному пределу, а следовательно, $V(x,y)$ почти всюду стремится к конечному пределу. Требуемый результат следует теперь из теоремы 92.

5.10. Трансформации Гильберта из класса L^p.

Теорема 101. *Пусть $f(x) \in L^p(-\infty,\infty)$, где $p>1$. Тогда формула*

$$g(x) = \frac{1}{\pi}\int_{\to 0}^{\infty} \frac{f(x+t)-f(x-t)}{t}\,dt \tag{5.10.1}$$

определяет почти всюду функцию $g(x) \in L^p(-\infty,\infty)$. Также двойственная формула

$$f(x) = -\frac{1}{\pi}\int_{\to 0}^{\infty} \frac{g(x+t)-g(x-t)}{t}\,dt \tag{5.10.2}$$

имеет место почти всюду, и

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|^p\,dx \leqslant M_p^p \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p\,dx, \tag{5.10.3}$$

где M_p зависит только от p.

Это — обобщение теоремы 91, принадлежащее М. Риссу[1].

Доказательство. Мы рассмотрим отдельно три случая.

(I) Пусть p — целое чётное число. Положим

$$\Phi_a(z) = \frac{1}{\pi i}\int_{-a}^{a} \frac{f(t)}{t-z}\,dt = U_a(x,y) + iV_a(x,y) \quad (y>0)$$

и рассмотрим интеграл

$$\int [\Phi_a(z)]^p\,dz,$$

взятый по прямолинейному отрезку, соединяющему точки $-R+iy$ и $R+iy$, и построенной над ним полуокружности. $\Phi_a(z) = O\left(\frac{1}{|z|}\right)$ при фиксированном a и $|z|\to\infty$. Поэтому, переходя к пределу по $R\to\infty$, получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} [\Phi_a(x+iy)]^p\,dx = 0, \quad \text{т.е.} \quad \int_{-\infty}^{\infty} (U_a+iV_a)^p\,dx = 0.$$

Развернув подынтегральное выражение по биномиальной теореме и взяв вещественную часть, получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left\{ V_a^p - \binom{p}{2} V_a^{p-2}U_a^2 + \binom{p}{4} V_a^{p-4}U_a^4 - \ldots \pm U_a^p \right\} dx = 0.$$

[1] M. Riesz (1), (2). Другой метод см. в Titchmarsh (7).

Поэтому

$$\int_{-\infty}^{\infty} V_a^p\,dx \leqslant \binom{p}{2}\int_{-\infty}^{\infty} V_a^{p-2}U_a^2\,dx + \ldots + \int_{-\infty}^{\infty} U_a^p\,dx.$$

Но

$$\int_{-\infty}^{\infty} V_a^{p-2k}U_a^{2k}\,dx \leqslant \left(\int_{-\infty}^{\infty} V_a^p\,dx\right)^{\frac{p-2k}{p}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} U_a^p\,dx\right)^{\frac{2k}{p}}.$$

Полагая

$$X^p = \frac{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} V_a^p\,dx}{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} U_a^p\,dx},$$

получаем, таким образом, что

$$X^p \leqslant \binom{p}{2}X^{p-2} + \binom{p}{4}X^{p-4} + \ldots + 1.$$

Поэтому X не превосходит наибольшего положительного корня уравнения

$$X^p - \binom{p}{2}X^{p-2} - \ldots - 1 = 0$$

и, значит,

$$X \leqslant M_p,$$

где M_p зависит только от p, т.е.

$$\int_{-\infty}^{\infty} V_a^p\,dx \leqslant M_p^p\int_{-\infty}^{\infty} U_a^p\,dx.$$

Но

$$|U_a(x,y)| = \frac{y}{\pi}\left|\int_{-a}^{a}\frac{f(t)}{(t-x)^2+y^2}\,dt\right| \leqslant \frac{y}{\pi}\int_{-a}^{a}\frac{|f(t)|}{(t-x)^2+y^2}\,dt,$$

$$|U_a(x,y)|^p \leqslant \frac{y^p}{\pi^p}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|f(t)|^p}{(t-x)^2+y^2}\,dt\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dt}{(t-x)^2+y^2}\right)^{p-1} =$$

$$= \frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|f(t)|^p}{(t-x)^2+y^2}\,dt,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}|U_a|^p\,dx \leqslant \frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^p\,dt\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(t-x)^2+y^2} = \int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^p\,dt. \tag{5.10.4}$$

Поэтому

$$\int_{-\infty}^{\infty}|V_a(x,y)|^p\,dx \leqslant M_p^p\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^p\,dt.$$

При $a \to \infty$ получаем, что

$$V_a(x,y) \to V(x,y) = -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{t-x}{(t-x)^2+y^2}\, f(t)\, dt, \tag{5.10.5}$$

а при $y \to 0$, принимая во внимание теоремы 92 и 100, получаем, что $V(x,y) \to -g(x)$ почти для всех x. Поэтому из (5.10.5) и теоремы Фату[1] вытекает справедливость неравенства (5.10.3).

(II) Пусть теперь p — не целое. Без ограничения общности можно предполагать, что $f(t) \geqslant 0$. Тогда $U(x,y) > 0$, и $U_a(x,y) > 0$ для $y > 0$, $a > a_0$.

Некоторая осторожность требуется теперь в определении p-х степеней. Пусть

$$(U+iV)^p = \exp\left(\frac{p}{2}\ln(U^2+V^2) + ip\operatorname{arctg}\frac{V}{U}\right),$$

где $-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg}\frac{V}{U} < \frac{\pi}{2}$ для $U > 0$. Переходя к пределу по $U \to 0$, мы получаем

$$(iV)^p = \begin{cases} |V|^p e^{\frac{1}{2}\pi i p}, & (V>0),\\ |V|^p e^{-\frac{1}{2}\pi i p}, & (V<0). \end{cases}$$

С этими определениями имеем

$$|(U+iV)^p - (iV)^p| = p\left|\int_{iV}^{U+iV} z^{p-1}\, dz\right| \leqslant$$
$$\leqslant pU(U^2+V^2)^{\frac{p-1}{2}} \leqslant 2^{\frac{p-1}{2}} p(U^p + U|V|^{p-1}).$$

Применяя это к U_a, V_a, получаем

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} [(U_a+iV_a)^p - (iV_a)^p]\, dx\right| \leqslant K_p\left(\int_{-\infty}^{\infty} U_a^p\, dx + \int_{-\infty}^{\infty} U_a|V_a|^{p-1}\, dx\right).$$

Но, как и прежде,

$$\int_{-\infty}^{\infty} (U_a+iV_a)^p\, dx = 0,$$

[1] См. Т и т ч м а р ш, Теория функций, § 10.8.1. [См. также И. П. Н а т а н с о н, Основы теории функций вещественной переменной, стр. 125. Теорема Фату формулируется следующим образом: пусть E — измеримое множество и $f_n(x) \geqslant 0$ для всех x из E и всех n; если $f_n(x) \to f(x)$ почти для всех x из E, то $\int_E f(x)\, dx \leqslant \varliminf\limits_{n\to\infty} \int_{E_n} f_n(x)\, dx$. В указанной книге Титчмарша эта теорема доказывается в предположении, что E — ограниченное множество; в книге Натансона тоже делается это предположение и, кроме того, сама теорема устанавливается и несколько более слабой форме, однако, достаточной для настоящей цели. Переход к приведённой выше общей форме теоремы Фату, с произвольным, не обязательно ограниченным, измеримым множеством E не представит никакого труда. — *Прим. перев.*]

а
$$\left|\int_{-\infty}^{\infty}(iV_a)^p\,dx\right| \geqslant \left|\operatorname{Re}\int_{-\infty}^{\infty}(iV_a)^p\,dx\right| = \left|\cos\frac{\pi p}{2}\right|\int_{-\infty}^{\infty}|V_a|^p\,dx.$$
Поэтому
$$\left|\cos\frac{\pi p}{2}\right|\int_{-\infty}^{\infty}|V_a|^p\,dx \leqslant K_p\int_{-\infty}^{\infty}U_a^p\,dx + K_p\int_{-\infty}^{\infty}U_a|V_a|^{p-1}\,dx,$$
и доказательство формул (5.10.1) и (5.10.3) может быть теперь закончено, как в предыдущем случае.

Предшествующее доказательство теряет силу, когда p — нечётное целое число. Оставляя этот случай на время в стороне, мы докажем теперь, что соотношение (5.10.2) выполняется в рассмотренных случаях.

Имеем
$$|U(x,y)-f(x)|^p \leqslant \frac{y^p}{\pi^p}\left|\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(t+x)-f(x)}{t^2+y^2}\,dt\right|^p < \\ < \frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|f(t+x)-f(x)|^p}{t^2+y^2}\,dt,$$
$$\int_{-\infty}^{\infty}|U(x,y)-f(x)|^p\,dx < \frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dt}{t^2+y^2}\int_{-\infty}^{\infty}|f(t+x)-f(x)|^p\,dx.$$
Внутренний интеграл в правой части последнего неравенства ограничен для всех t и стремится к нулю при $t \to 0$.[1] Поэтому правая часть меньше, чем
$$K_p\,y\int_{\delta}^{\infty}\frac{dt}{t^2+y^2} + \varepsilon(\delta)y\int_0^{\delta}\frac{dt}{t^2+y^2} < \\ < K_p\,y\int_{\delta}^{\infty}\frac{dt}{t^2} + \varepsilon(\delta)y\int_0^{\infty}\frac{dt}{t^2+y^2} < K_p\frac{y}{\delta} + \frac{\pi}{2}\varepsilon(\delta).$$
Выбирая сначала δ, а затем y, убеждаемся в том, что последнее выражение может быть сделано произвольно малым. Таким образом, для любого p
$$\lim_{y\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}|U(x,y)-f(x)|^p\,dx = 0.$$

[1] См. Т и т ч м а р ш, Теория функций, гл. XII, упр. 17—19. [Для непрерывной функции $f(x)$, отличной от нуля лишь на конечном интервале, это следует из равномерной непрерывности; для произвольной же функции из L^p это следует из того, что непрерывные функции, отличные от нуля лишь на конечных интервалах, всюду плотны в L^p. — *Прим. перев.*]

Далее, в силу неравенства (5.10.4),

$$\int_{-\infty}^{\infty} |U(x,y) - U_a(x,y)|^p \, dx \leqslant \left(\int_{-\infty}^{-a} + \int_{a}^{\infty} \right) |f(t)|^p \, dt \to 0,$$

при $a \to \infty$, равномерно относительно y. Поэтому

$$\int_{-\infty}^{\infty} |U_a(x,y) - f(x)|^p \, dx \to 0 \tag{5.10.6}$$

при произвольном стремлении $a \to \infty$, $y \to 0$.

С другой стороны, по теореме о вычетах

$$\frac{1}{\pi i} P \int_{y=\eta} \frac{\Phi_a(z)}{z - \xi - i\eta} \, dz = \Phi_a(\xi + i\eta) \qquad (\eta > 0)$$

или, приравнивая мнимые части,

$$\frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{U_a(x,\eta)}{x - \xi} \, dx = -V_a(\xi, \eta).$$

Таким образом, $-V_a(x,y)$ служит для $U_a(x,y)$ трансформацией Гильберта и из (5.10.3) следует, что для рассматривавшихся уже нами значений p

$$\int_{-\infty}^{\infty} |V_a(x,y) + g(x)|^p \, dx < K_p \int_{-\infty}^{\infty} |U_a(x,y) - f(x)|^p \, dx. \tag{5.10.7}$$

Соединяя (5.10.6) и (5.10.7), получаем, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Phi_a(z) - [f(x) - ig(x)]|^p \, dx \to 0$$

при произвольном стремлении $y \to 0$, $a \to \infty$.

Далее, по теореме о вычетах,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Phi_a(z)}{z - \xi - i\eta} \, dz = \Phi_a(\xi + i\eta) \qquad (y < \eta).$$

Переходя к пределу по $a \to \infty$, $y \to 0$, получаем, что

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x) - ig(x)}{x - \xi - i\eta} \, dx = \Phi(\xi + i\eta),$$

и потому

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-ig(x)}{x - \xi - i\eta} \, dx = \frac{\Phi(\xi + i\eta)}{2}\,.$$

Беря вещественные части, получаем

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x-\xi}{(x-\xi)^2+\eta^2}\,g(x)\,dx=-U(\xi,\eta).$$

Но при $\eta\to 0$ левая часть этого равенства, по теореме 92, почти всюду стремится к трансформации Гильберта функции $g(x)$, а правая часть (сингулярный интеграл Коши) почти всюду стремится к $-f(x)$. Этим соотношение (5.10.2) доказано.

(III) Для доказательства теоремы в случае нечётного целого p мы покажем, что если теорема верна для какого-нибудь p, то она верна также для $2p$. Так как уже доказано, что теорема верна для случая, когда p равно половине целого нечётного числа, то тем самым будет доказана справедливость теоремы и для нечётного целого p.

Применяя теорему о вычетах, как выше, но теперь уже к $[\Phi_a(z)]^2$, получаем

$$\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{[\Phi_a(x+iy)]^2}{x-\xi}\,dx=[\Phi_a(\xi+iy)]^2\qquad(y>0),$$

т.е.

$$\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{U_a^2-V_a^2+2iU_aV_a}{x-\xi}\,dx=U_a^2(\xi,y)-V_a^2(\xi,y)+2iU_a(\xi,y)V_a(\xi,y).$$

Приравнивание мнимых частей показывает, что трансформацией Гильберта для $U_a^2-V_a^2$ служит $-2U_aV_a$. Пусть $\psi(x)$ — трансформация Гильберта для U_a^2 и $\chi(x)$ — для V_a^2. Тогда

$$\psi(x)-\chi(x)=-2U_aV_a,$$

откуда

$$|\chi(x)|^p\leqslant 2^p|\psi(x)|^p+2^{2p}|U_aV_a|^p,$$
$$\int_{-\infty}^{\infty}|\chi(x)|^p\,dx\leqslant 2^p\int_{-\infty}^{\infty}|\psi(x)|^p\,dx+2^{2p}\int_{-\infty}^{\infty}|U_aV_a|^p\,dx.$$

Но

$$\int_{-\infty}^{\infty}|U_aV_a|^p\,dx\leqslant\sqrt{\int_{-\infty}^{\infty}|U_a|^{2p}\,dx\int_{-\infty}^{\infty}|V_a|^{2p}\,dx}$$

и по фундаментальному неравенству (5.10.3) (для p),

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\psi(x)|^p\,dx<K_p\int_{-\infty}^{\infty}|U_a|^{2p}\,dx,$$
$$\int_{-\infty}^{\infty}|V_a|^{2p}\,dx<K_p\int_{-\infty}^{\infty}|\chi(x)|^p\,dx.$$

Соединяя все эти неравенства, получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} |V_a|^{2p}\,dx < K_p \int_{-\infty}^{\infty} |U_a|^{2p}\,dx + K_p \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |U_a|^{2p}\,dx \int_{-\infty}^{\infty} |V_a|^{2p}\,dx}\,.$$

Требуемый результат для $2p$ устанавливается теперь, как в предыдущих случаях. Это завершает доказательство теоремы.

5.11.

Теорема 102[1]. *Пусть $f(x)$, $g(x)$ — пара трансформаций Гильберта из класса L^p и $h(x)$, $k(x)$ — пара трансформаций Гильберта из класса $L^{p'}$, где $p' = \dfrac{p}{p-1}$. Тогда*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)h(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)k(x)\,dx. \tag{5.11.1}$$

Доказательство. При $p = 2$ также $p' = 2$, и (5.3.3) даёт

$$\int_{-\infty}^{\infty} [f(x) + h(x)]^2\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} [g(x) + k(x)]^2\,dx, \tag{5.11.2}$$

откуда утверждение теоремы следует обычным путём.

В общем случае определим $U_a(x, y)$, $V_a(x, y)$, как прежде, и пусть $P_b(x, y)$, $Q_b(x, y)$ — соответствующие функции для h и k. Как мы видели, трансформацией Гильберта для U_a служит $-V_a$; аналогично, трансформацией Гильберта для P_b служит $-Q_b$. Так как эти трансформации принадлежат к L^2, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} U_a(x, y)P_b(x, y')\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} V_a(x, y)Q_b(x, y')\,dx. \tag{5.11.3}$$

Но при $a \to \infty$, $y \to 0$, $b \to \infty$, $y' \to 0$, U_a и V_a сходятся в среднем с показателем p соответственно к f и $-g$, а P_b и Q_b сходятся в среднем с показателем p' соответственно к h и $-k$. Это и доказывает утверждение теоремы.

Пример. Пусть $h(x) = \dfrac{1}{x-a}$ при $|x - a| > \delta$ и $= 0$ при $|x - a| \leqslant \delta$. Тогда

$$\begin{aligned} k(x) &= \frac{1}{\pi}\, P\int_{-\infty}^{\infty} \frac{h(u)}{u-x}\,du = \\ &= \frac{1}{\pi}\, P\left(\int_{-\infty}^{a-\delta} \frac{du}{(u-a)(u-x)} + \int_{a+\delta}^{\infty} \frac{du}{(u-a)(u-x)}\right) = \\ &= \frac{1}{\pi(a-x)} \ln\left|\frac{a+\delta-x}{a-\delta-x}\right|. \end{aligned}$$

---

[1] M. Riesz (1), (2).

Поэтому

$$\int_{\delta}^{\infty} \frac{f(a+x)-f(a-x)}{x}\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\ln\left|\frac{a+\delta-x}{a-\delta-x}\right|\,\frac{dx}{a-x} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g(t+a)\ln\left|\frac{\delta+t}{\delta-t}\right|\,\frac{dt}{t}\,. \qquad (5.11.4)$$

Формулу (5.11.1) можно использовать для нового доказательства теоремы 101 с нечётным целым p.

Пусть $h(x)$, $k(x)$ — пара трансформаций Гильберта из $L^{p'}$. Так как теорема была доказана для p', то, переходя в (5.11.3) к пределу при $b \to \infty$, $y' \to 0$, мы получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} U_a(x,y)h(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} V_a(x,y)k(x)\,dx.$$

Поэтому

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} V_a(x,y)k(x)\,dx\right| \leqslant \left(\int_{-\infty}^{\infty} |U_a|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |h(x)|^{p'}\,dx\right)^{\frac{1}{p'}} \leqslant$$

$$\leqslant M_{p'}\left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |k(x)|^{p'}\,dx\right)^{\frac{1}{p'}}$$

по неравенствам (5.10.4) и (5.10.3), уже доказанным для p'. Здесь $k(x)$ может быть произвольной функцией из $L^{p'}$. Возьмём

$$k(x) = |V_a(x,y)|^{p-1}\operatorname{sgn} V_a(x,y).$$

Тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} |V_a|^p\,dx \leqslant M_{p'}\left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |V_a|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p'}},$$

или

$$\int_{-\infty}^{\infty} |V_a|^p\,dx \leqslant M_{p'}^p \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^p\,dt.$$

Доказательство теоремы для p завершается теперь прежним путём.

Мы получили, вместе с тем, что если M_p — наименьшая постоянная, для которой выполняется неравенство (5.10.3), то $M_p \leqslant M_{p'}$. А так как p и p' можно поменять местами, то $M_p = M_{p'}$.

5.12.

Т е о р е м а 103. *Пусть* $\Phi(z)$ *— аналитическая функция, регулярная для* $y > 0$, *и пусть*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Phi(x+iy)|^p\,dx < K \qquad (p > 1) \qquad (5.12.1)$$

для всех значений y. Тогда $\Phi(x+iy)$ при $y \to 0$ сходится почти всюду, а также в среднем порядка p, к $f(x) - ig(x)$, где $f(x)$, $g(x)$ — пара трансформаций Гильберта из класса L^p.

Для доказательства удобно использовать следующую лемму.

Лемма. *Пусть $\lambda_n(x)$ — последовательность функций, почти всюду на (a,b) стремящаяся к нулю и такая, что*

$$\int_a^b |\lambda_n(x)|^p \, dx < K.$$

Тогда для всякой функции $\mu(x)$ из $L^{p'}$

$$\int_a^b \lambda_n(x)\mu(x) \, dx \to 0.$$

Доказательство. Предположим сначала, что интервал (a,b) конечен. По теореме Егорова[1] $\lambda_n(x) \to 0$ равномерно на некотором множестве E меры $b-a-\delta$, и потому

$$\int_E \lambda_n(x)\mu(x) \, dx \to 0.$$

С другой стороны,

$$\left| \int_{CE} \lambda_n(x)\mu(x) \, dx \right| \leqslant \left(\int_{CE} |\lambda_n(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{CE} |\mu(x)|^{p'} \, dx \right)^{\frac{1}{p'}} <$$
$$< K \left(\int_{CE} |\mu(x)|^{p'} \, dx \right)^{\frac{1}{p'}},$$

что стремится к нулю вместе с δ и не зависит от n. Это и доказывает утверждение леммы в указанном случае.

Если $b = \infty$, но $a \neq -\infty$, то берём сначала X столь большим, что

$$\left| \int_X^\infty \lambda_n(x)\mu(x) \, dx \right| \leqslant K \left(\int_X^\infty |\mu(x)|^{p'} \, dx \right)^{\frac{1}{p'}} < \varepsilon,$$

а затем повторяем проведённое рассуждение для интервала (a, X). Аналогично поступаем и в случаях $a = -\infty$, $b < \infty$ и $a = -\infty$, $b = \infty$.

Перейдём теперь непосредственно к доказательству теоремы. Если $\Phi(z) \to f(x) - ig(x)$, то из теоремы Фату следует, что f и g принадлежат к L^p. Тогда (5.4.1) доказываем, как прежде, а (5.4.2) следует из (5.4.1) в силу леммы с

[1] Титчмарш, Теория функций, § 10.5.2. [См. также П. С. Александров и А. Н. Колмогоров, Введение в теорию функций действительного переменного, 3-е изд., стр. 182, или И. П. Натансон. Основы теории функций вещественной переменной, стр. 89. — *Прим. перев.*]

$$\lambda_n(u) = [\Phi(u+iv) - f(u) + ig(u)]\frac{u-x+iy}{u-x+i(v-y)} \qquad (n=v)$$

и

$$\mu(x) = \frac{1}{u-x+iy}\,.$$

Поэтому

$$\Phi(z) = \tfrac{1}{2}(U+iV) - \tfrac{1}{2}i(P+iQ),$$

где U и V определены формулами (5.3.5), (5.3.6), а P, Q аналогично определены по g вместо f. Возьмём теперь $y \to 0$. Обозначая через f^* функцию, сопряжённую к f, и через g^* — функцию, сопряжённую к g, мы получим

$$f - ig = \tfrac{1}{2}(f - if^*) - \tfrac{1}{2}i(g - ig^*).$$

Следовательно, $f = -g^*$, $g = f^*$ почти для всех x.

Сходимость функции $\Phi(z)$ в среднем с индексом p к некоторой функции $f(x) - ig(x)$ следует из рассуждений, проведённых в § 5.10.

Сходимость $\Phi(z)$ почти для всех x была выведена Хилле и Тамаркиным[1] из соответствующей теоремы для рядов[2]. Она может быть непосредственно доказана следующим образом. Если $\Phi(z)$ не имеет нулей, то требуемый результат получается применением теоремы 93 к $[\Phi(z)]^{p/2}$. В противном случае, пусть z_ν пробегает нули функции $\Phi(z)$ в полуплоскости $y > 0$, и пусть

$$B_n(z) = \prod_{\nu=1}^{n} \frac{z - z_\nu}{z - \bar{z}_\nu} \cdot \frac{\bar{z}_\nu + i}{z_\nu + i} \cdot \left|\frac{z_\nu + i}{\bar{z}_\nu + i}\right|$$

(в предположении, что ни одно z_ν не совпадает с i). При фиксированном n, $|B_n| \geqslant 1 - \varepsilon$ для $y \leqslant \eta$ и всех x. Пусть $\Phi(z) = G_n(z)B_n(z)$. Тогда для $y \leqslant \eta$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |G_n(x+iy)|^p\,dx < \frac{K}{(1-\varepsilon)^p}\,.$$

Так как $G_n(x+iy')$, $G_n(x+iy)$ $(y < y')$ связаны, как прежние $\Phi(z)$, $f(x) - ig(x)$, то из рассуждений, проведённых в § 5.10 (и, в частности, (5.10.4)), следует, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} |G_n(x+iy)|^p\,dx < K'$$

для всех y, где K' зависит только от K и p.

Если $\Phi(z)$ имеет бесконечно много нулей, то из формулы Карлемана[3] легко следует, что ряд

[1] Hille and Tamarkin (5).

[2] З и г м у н д, Тригонометрические ряды, § 7.53.

[3] Т и т ч м а р ш, Теория функций, § 3.7.

$$\sum \frac{\operatorname{Im} z_\nu}{1+|z_\nu|^2}$$

сходится, и потому $B(z) = \lim B_n(z)$ и $G(z) = \lim G_n(z)$ существуют и аналитичны. Отсюда следует, что $\Phi(z) = G(z)B(z)$, где $G(z)$ удовлетворяет условию (5.12.1) с некоторым K и не имеет нулей, а $|B(z)| \leqslant 1$. Поэтому $G(z)$, по предыдущему, почти всюду стремится к пределу, и то же, по теореме 94, верно для $B(z)$.

5.13.

Т е о р е м а 104. *Пусть $f(x) \in L^p$ $(p > 1)$, и $g(x)$ — сопряжённая к ней функция. Пусть, далее, $\lambda(x) \in L^q$, где $q > 1$, $pq \leqslant p + q$, и*

$$h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda(t) f(x-t)\, dt, \quad k(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda(t) g(x-t)\, dt.$$

Тогда в случае $pq < p + q$ функции $h(x)$ и $k(x)$ представляют собой пару сопряжённых функций класса L^P, где $P = \dfrac{pq}{p+q-pq}$. Если же $pq = p + q$, то $h(x)$ и $k(x)$ сопряжены в том смысле, что

$$k(x) = \frac{1}{\pi} \int_{\to 0}^{\to\infty} \frac{h(x+u) - h(x-u)}{u}\, du$$

обратно для всех значений x.

Д о к а з а т е л ь с т в о. (1) Предположим сначала, что $pq < p + q$. Тогда, по лемме β § 4.2, функции $h(x)$ и $k(x)$ принадлежат к L^P. Мы должны доказать, что они сопряжены.

Пусть $\Phi(z)$ — аналитическая функция, принимающая на границе значения $f(x) - ig(x)$, и пусть

$$\Psi(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda(t) \Phi(z-t)\, dt \qquad (y > 0). \tag{5.13.1}$$

Из леммы § 5.4 следует, что $\Phi(z)$ ограничена в любой полосе $0 < y_1 \leqslant \leqslant y \leqslant y_2$. Поэтому

$$\left| \int_T^{T'} \lambda(t) \Phi(z-t)\, dt \right| \leqslant \int_T^{T'} |\lambda(t)| \cdot |\Phi(z-t)|^{\frac{p}{q'}} |\Phi(z-t)|^{1-\frac{p}{q'}}\, dt \leqslant$$
$$\leqslant K(y_1, y_2) \left(\int_T^{T'} |\lambda(t)|^q\, dt \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_T^{T'} |\Phi(z-t)|^p\, dt \right)^{\frac{1}{q'}}.$$

Отсюда следует, что интеграл (5.13.1) равномерно сходится для $y_1 \leqslant \leqslant y \leqslant y_2$ и, значит, $\Psi(z)$ аналитична для $y > 0$. Далее, по лемме β § 4.2,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(z)|^P\, dx \leqslant \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\lambda(t)|^q\, dt \right)^{\frac{P}{q}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\Phi(z-t)|^p\, dt \right)^{\frac{P}{p}},$$

что ограниченно; и аналогично

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\Psi(z)-h(x)+ik(x)|^P\,dx \leqslant$$
$$\leqslant \left(\int_{-\infty}^{\infty}|\lambda(t)|^q\,dt\right)^{\frac{P}{q}}\left(\int_{-\infty}^{\infty}|\Phi(z-t)-f(x-t)+ig(x-t)|^p\,dt\right)^{\frac{P}{p}},$$

что стремится к нулю при $y\to 0$. Следовательно, по теореме 103, функции $h(x)$ и $k(x)$ сопряжены.

(II) Если $pq=p+q$, то $h(x)$ и $k(x)$ непрерывны и стремятся к нулю при $x\to\infty$[1]. В этом случае интеграл, определяющий $h(x)$, равномерно сходится в каждой конечной области. Поэтому

$$\frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{\Delta}\frac{h(x+u)-h(x-u)}{u}\,du=$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{\Delta}\frac{du}{u}\int_{-\infty}^{\infty}\lambda(t)[f(x+u-t)-f(x-u-t)]\,dt=$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\lambda(t)\,dt\int_{\delta}^{\Delta}\frac{f(x+u-t)-f(x-u-t)}{u}\,du=$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda(t)[g_\delta(x-t)-g_\Delta(x-t)]\,dt,$$

где

$$g_\delta(x)=\frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{\infty}\frac{f(x+t)-f(x-t)}{t}\,dt.$$

Но при $\delta\to 0$, $\Delta\to\infty$

$$g_\delta(x-t)\to g(x-t),\qquad g_\Delta(x-t)\to 0$$

[1] См. Титчмарш, Теория функций, гл. XII, упр. 20, 21. [Действительно, в этом случае $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$. Применяя неравенство Гёльдера, получаем

$$|h(x+\tau)-h(x)|\leqslant\left(\int_{-\infty}^{\infty}|f(x+\tau-t)-f(x-t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{-\infty}^{\infty}|\lambda(t)|^q\,dt\right)^{\frac{1}{q}}$$

и правая часть стремится к нулю при $\tau\to 0$ (см. сноску на стр. 152). Далее,

$$|h(x)|\leqslant\left|\int_{-\infty}^{x/2}f(x-t)\lambda(t)\,dt\right|+\left|\int_{x/2}^{\infty}f(x-t)\lambda(t)\,dt\right|,$$

откуда, снова применяя неравенство Гёльдера, получаем

$$|h(x)|\leqslant\left(\int_{x/2}^{\infty}|f(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{-\infty}^{x/2}|\lambda(t)|^q\,dt\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\int_{-\infty}^{x/2}|f(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{x/2}^{\infty}|\lambda(t)|^q\,dt\right)^{\frac{1}{q}},$$

что, очевидно, стремится к нулю при $x\to\pm\infty$. — *Прим. перев.*]

почти для всех t. Поэтому, в силу леммы § 5.12, достаточно доказать, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g_\delta(x)|^p \, dx < K$$

для всех δ. В силу (5.11.4)

$$g_\delta(x) = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} g(t+x) \, \ln\left|\frac{\delta+t}{\delta-t}\right| \frac{dt}{t} \, .$$

Поэтому

$$|g_\delta(x)|^p \leqslant \frac{1}{\pi^{2p}} \int_{-\infty}^{\infty} |g(x+t)|^p \left|\ln\left|\frac{\delta+t}{\delta-t}\right|\right| \frac{dt}{|t|} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left|\ln\left|\frac{\delta+t}{\delta-t}\right|\right| \frac{dt}{|t|} \right)^{p-1},$$

и полагая в последнем интеграле в правой части $t = \delta u$, получаем

$$|g_\delta(x)|^p < K \int_{-\infty}^{\infty} |g(x+t)|^p \left|\ln\left|\frac{\delta+t}{\delta-t}\right|\right| \frac{dt}{|t|} \, .$$

Интегрируя по x и обращая в правой части порядок интегрирования, мы приходим к требуемому результату.

5.14. Случай $p = 1$. До сих пор мы предполагали, что $f(x) \in L^p$, где $p > 1$. Общая теорема 101 теряет силу при $p = 1$, когда $f(x) \in L$. Мы видели (теорема 100), что $g(x)$ в этом случае ещё существует почти всюду. Однако, $g(x)$ уже не обязательно принадлежит к L. Пусть, например,

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{t \ln^2 t} & (t > 0), \\ 0 & (t \leqslant 0). \end{cases}$$

Тогда для $x > 0$

$$g(-x) = \frac{1}{\pi} \, P\!\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{t+x} \, dt > \frac{1}{\pi} \, P\!\int_{0}^{x} \frac{dt}{2tx \ln^2 t} = \frac{1}{2\pi x \ln x} \, ,$$

и следовательно, $g(x)$ не принадлежит к L. Можно даже построить примеры, в которых $g(x)$ не принадлежит к L ни на каком, сколь угодно малом, интервале.

Однако, имеет место следующая теорема[1].

Т е о р е м а 105. *Пусть $f(x) \in L(-\infty, \infty)$. Тогда формула*

$$g(x) = \frac{1}{\pi} \int_{\to 0}^{\infty} \frac{f(x+t) - f(x-t)}{t} \, dt \tag{5.14.1}$$

[1] Соответствующая теореме Колмогорова о рядах Фурье; см. Littlewood (1), Titchmarsh (13), З и г м у н д, Тригонометрические ряды, § 7.24.

определяет $g(x)$ почти для всех значений x, и интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|g(x)|^p}{1+x^2}\,dx \tag{5.14.2}$$

сходится при $0<p<1$.

Доказательство. Мы можем предполагать без ограничения общности, что $f(t)\geqslant 0$ и что $f(t)$ — не нуль. Положим, как прежде,

$$\Phi_a(z)=\frac{1}{\pi i}\int_{-a}^{a}\frac{f(t)}{t-z}\,dt=U_a+iV_a \qquad (y>0).$$

Тогда

$$U_a(x,y)=\frac{y}{\pi}\int_{-a}^{a}\frac{f(t)}{(t-x)^2+y^2}\,dt>0$$

для достаточно больших a. Пусть $0<p<1$ и пусть

$$[\Phi_a(z)]^p=(U_a+iV_a)^p=\exp\left(\frac{p}{2}\ln(U_a^2+V_a^2)+ip\operatorname{arctg}\frac{V_a}{U_a}\right),$$

где $-\frac{\pi}{2}<\operatorname{arctg}\frac{V_a}{U_a}<\frac{\pi}{2}$. При фиксированном a, $\Phi_a(z)=O\left(\frac{1}{|z|}\right)$ $(|z|\to\infty)$, и теорема о вычетах даёт

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{[\Phi_a(z)]^p}{z^2+1}\,dz=\pi[\Phi_a(i)]^p \qquad (0<y<1).$$

Но

$$|\Phi_a(i)|=\left|\frac{1}{\pi i}\int_{-a}^{a}\frac{f(t)}{t-i}\,dt\right|\leqslant\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|\,dt.$$

Поэтому

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(U_a+iV_a)^p}{z^2+1}\,dz\right|<K_p. \tag{5.14.3}$$

Если $U>0$, $|V|\geqslant 1$, то

$$|(U+iV)^p-(iV)^p|=\left|p\int_{iV}^{U+iV}z^{p-1}\,dz\right|\leqslant pU|V|^{p-1}\leqslant U,$$

а если $U>0$, $|V|<1$, то

$$|(U+iV)^p-(iV)^p|\leqslant(U+1)^p+1\leqslant U+2.$$

Поэтому

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(U_a+iV_a)^p-(iV_a)^p}{z^2+1}\,dz\right|\leqslant\int_{-\infty}^{\infty}\frac{U_a+2}{x^2+1}\,dx\leqslant\int_{-\infty}^{\infty}U_a\,dx+2\pi=$$

$$= \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-a}^{a} \frac{f(t)\,dt}{(t-x)^2+y^2} + 2\pi = \int_{-a}^{a} f(t)\,dt + 2\pi \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt + 2\pi. \tag{5.14.4}$$

Из (5.14.3) и (5.14.4) следует, что

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(iV_a)^p}{z^2+1}\,dz \right| < K_p.$$

Но

$$\operatorname{Re} \frac{(iV_a)^p}{z^2+1} = |V_a|^p \frac{(x^2-y^2+1)\cos\dfrac{\pi p}{2} \pm 2xy \sin\dfrac{\pi p}{2}}{(x^2-y^2+1)^2+4x^2y^2} > K_p \frac{|V_a|^p}{x^2+1}$$

для достаточно малых y и всех x. Поэтому

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|V_a|^p}{x^2+1}\,dx < K_p,$$

и требуемый результат следует, как в доказательстве теоремы 101.

5.15. Условия Липшица.

Т е о р е м а 106[1]. *Пусть $f(x) \in L^p$ $(p > 1)$ и удовлетворяет условию Липшица*

$$|f(x+h) - f(x)| < K|h|^\alpha \qquad (0 < \alpha < 1) \tag{5.15.1}$$

при $h \to 0$ равномерно относительно x (скажем, для всех x и $0 < h \leqslant 1$). Тогда двойственные формулы Гильберта (5.1.9), (5.1.10) *имеют место для всех значений x. При этом $g(x)$ также принадлежит к L^p и удовлетворяет условию Липшица с тем же α, что и $f(x)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В рассматриваемом случае интеграл (5.1.9), очевидно, существует для всех значений x.

Заметим сначала, что если $f(x)$ удовлетворяет указанным условиям, то она ограничена, — в действительности она стремится к нулю при $x \to \infty$. В самом деле, так как функция $f(x)$ непрерывна, то точки, где $|f(x)| \geqslant \delta > 0$, образуют семейство интервалов. Длина такого интервала (x_1, x_2) стремится к нулю при $x_1 \to \infty$, так как

$$(x_2 - x_1)\delta^p \leqslant \int_{x_1}^{x_2} |f(x)|^p\,dx \to 0.$$

Но так как $|f(x_1)| = \delta$, то

$$|f(x)| \leqslant |f(x_1)| + |f(x) - f(x_1)| \leqslant \delta + K|x - x_1|^\alpha \leqslant \delta + K|x_2 - x_1|^\alpha,$$

что можно сделать произвольно малым выбором δ и затем x_1. Следовательно, $f(x) \to 0$.

[1] Titchmarsh (5). Эта теорема соответствует теореме Привалова для рядов Фурье. См. З и г м у н д, Тригонометрические ряды, § 7.4.

Из доказанного вытекает, что если условие (5.15.1) выполняется для малых h, то оно выполняется вообще для всех h с возможным изменением постоянной K.

Теперь при $y \to 0$

$$V(x,y)+g(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\left(\frac{1}{t}-\frac{t}{t^2+y^2}\right)[f(x+t)-f(x-t)]\,dt=$$

$$=\frac{y^2}{\pi}\int_0^\infty\frac{f(x+t)-f(x-t)}{t(t^2+y^2)}\,dt=O\left(y^2\int_0^\infty\frac{t^{\alpha-1}}{t^2+y^2}\,dt\right)=O(y^\alpha).$$

Далее,

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial x}&=-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(t-x)^2-y^2}{[(t-x)^2+y^2]^2}\,f(t)\,dt=-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{t^2-y^2}{(t^2+y^2)^2}\,f(t+x)\,dt=\\&=-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{t^2-y^2}{(t^2+y^2)^2}\,[f(t+x)-f(x)]\,dt=\\&=O\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|t^2-y^2|}{(t^2+y^2)^2}\,|t|^\alpha\,dt\right)=O(y^{\alpha-1}).\end{aligned}$$

Поэтому при $h>0$

$$|g(x+h)-g(x)|\leqslant$$
$$\leqslant|g(x+h)-V(x+h,h)|+|V(x+h,h)-V(x,h)|+|g(x)+V(x,h)|=$$
$$\leqslant O(h^\alpha)+O\left(\left|\int_x^{x+h}\frac{\partial V(\xi,h)}{\partial\xi}\,d\xi\right|\right)+O(h^\alpha)=O(h^\alpha),$$

так что $g(x)$ действительно удовлетворяет требуемому условию Липшица.

Двойственная формула (5.1.10), которая, как мы уже знаем, имеет место почти для всех значений x, оказывается теперь справедливой для всех значений x, так как обе её части непрерывны.

Если $\alpha=1$, то аналогично получаем

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial x}&=O\left(\int_{-1}^{1}\frac{|t^2-y^2|}{(t^2+y^2)^2}\,|t|\,dt\right)+O\left(\int_1^\infty\frac{dt}{t^2}\right)=\\&=O\left(\frac{1}{y}\int_{-1/y}^{1/y}\frac{|u^2-1|}{u^2+1}\,|u|\,du\right)+O(1)=O\left(\frac{1}{y}\,\ln\frac{1}{y}\right),\end{aligned}$$

откуда следует, что

$$g(x+h)-g(x)=O\left(|h|\ln\frac{1}{|h|}\right).$$

5.16. Сопряжённый интеграл. Вернёмся теперь к сопряжённому интегралу (5.1.7), который формально равен $g(x)$. Мы можем теперь доказать следующую теорему.

Теорема 107. *Пусть $f(x) \in L(-\infty, \infty)$. Тогда сопряжённый интеграл суммируем (C, α) для всякого положительного α к $g(x)$ во всякой точке x, где*

$$g(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{f(x+t) - f(x-t)}{t}\, dt \tag{5.16.1}$$

существует, и

$$\int_0^h |f(x+t) - f(x-t)|\, dt = o(h), \tag{5.16.2}$$

значит, — почти для всех значений x.

Доказательство. Очевидно, достаточно предположить, что $0 < \alpha < 1$. Нам нужно рассмотреть

$$\lim_{\lambda\to\infty} \int_0^\lambda \left(1 - \frac{u}{\lambda}\right)^\alpha du \int_{-\infty}^\infty f(x+t) \sin ut\, dt =$$
$$= \lim_{\lambda\to\infty} \int_0^\infty [f(x+t) - f(x-t)]\, dt \int_0^\lambda \left(1 - \frac{u}{\lambda}\right)^\alpha \sin ut\, du.$$

Но

$$\int_0^\lambda \left(1 - \frac{u}{\lambda}\right)^\alpha \sin ut\, du = \lambda \int_0^1 (1-v)^\alpha \sin \lambda tv\, dv =$$
$$= -\frac{1}{t}(1-v)^\alpha \cos \lambda tv \Big|_0^1 + \frac{\alpha}{t} \int_0^1 (1-v)^{\alpha-1} \cos \lambda tv\, dv =$$
$$= \frac{1}{t} + \frac{\alpha}{\lambda^\alpha t^{\alpha+1}} \int_0^{\lambda t} \frac{\cos(\lambda t - w)}{w^{1-\alpha}}\, dw.$$

Поэтому

$$\left| \int_0^\lambda \left(1 - \frac{u}{\lambda}\right)^\alpha \sin ut\, du - \frac{1}{t} \right| < \frac{K(\alpha)}{\lambda^\alpha t^{\alpha+1}}\,.$$

Отсюда сразу следует, что при $\delta > 0$

$$\lim_{\lambda\to\infty} \int_\delta^\infty [f(x+t) - f(x-t)]\, dt \int_0^\lambda \left(1 - \frac{u}{\lambda}\right) \sin ut\, du =$$
$$= \int_\delta^\infty \frac{f(x+t) - f(x-t)}{t}\, dt.$$

Далее,

$$\int_{1/\lambda}^\delta [f(x+t) - f(x-t)]\, dt \int_0^\lambda \left(1 - \frac{u}{\lambda}\right) \sin ut\, du =$$

$$= \int_{1/\lambda}^{\delta} \frac{f(x+t)-f(x-t)}{t}\,dt + O\left(\int_{1/\lambda}^{\delta} \frac{|f(x+t)-f(x-t)|}{\lambda^\alpha t^{\alpha+1}}\,dt\right),$$

и, при выполнении условия (5.16.2), последний член есть

$$\left[\frac{1}{\lambda^\alpha t^{\alpha+1}} \int_0^t |f(x+u)-f(x-u)|\,du\right]\Bigg|_{t=1/\lambda}^{t=\delta} +$$

$$+ \frac{\alpha+1}{\lambda^\alpha} \int_{1/\lambda}^{\delta} \frac{dt}{t^{\alpha+2}} \int_0^t |f(x+u)-f(x-u)|\,du =$$

$$= o(1) + o\left(\frac{1}{\lambda^\alpha} \int_{1/\lambda}^{\delta} \frac{dt}{t^{\alpha+1}}\right) = o(1),$$

в чём убеждаемся, выбирая сначала δ, а затем λ. Наконец,

$$\left|\int_0^\lambda \left(1-\frac{u}{\lambda}\right)^\alpha \sin ut\,du\right| < K\lambda$$

и

$$\left|\int_0^{1/\lambda} [f(x+t)-f(x-t)]\,dt \int_0^\lambda \left(1-\frac{u}{\lambda}\right) \sin ut\,du\right| <$$

$$< K\lambda \int_0^{1/\lambda} |f(x+t)-f(x-t)|\,dt = o(1).$$

Это завершает доказательство теоремы.

5.17. Применение к трансформациям Фурье. В настоящем параграфе мы изложим одно применение сопряжённых функций к теории трансформаций Фурье. Эта последняя теория в одном отношении ещё не полна. Мы показали, что если $f(x)$ принадлежит к L^p $(1 < p < 2)$, то $f(x)$ обладает трансформацией Фурье $F(x)$, принадлежащей к $L^{p'}$, и $F(x) = \text{l.i.m.}\, F(x,a)$. Но мы ещё не были в состоянии показать, что имеет место также двойственное соотношение $f(x) = \text{l.i.m.}\, f(x,a)$, где

$$f(x,a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^{a} e^{-ixt} F(t)\,dt.$$

Теперь мы заполним этот пробел[1].

Т е о р е м а 108. *Если* $f(x) \in L^p$ $(1 < p < 2)$, *то* $f(x) = \text{l.i.m.}\, f(x,a)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из формулы Парсеваля следует (как и в доказательстве теоремы 58), что

$$f(x,a) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \frac{\sin(x-u)a}{x-u}\,du =$$

[1] Hille and Tamarkin (3).

$$= \frac{\sin xa}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(u)\cos ua}{x-u}\, du - \frac{\cos xa}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(u)\sin ua}{x-u}\, du =$$
$$= \varphi_a(x)\sin xa - \psi_a(x)\cos xa,$$

где интегралы понимаются в смысле главных значений при $u = x$. По теореме 101,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi_a(x)|^p\, dx < K_p \int_{-\infty}^{\infty} |f(u)\cos ua|^p\, du < K_p \int_{-\infty}^{\infty} |f(u)|^p\, du,$$

и аналогично для $\psi_a(x)$. Поэтому

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x,a)|^p\, dx \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} [2^p|\varphi_a(x)|^p + 2^p|\psi_a(x)|^p]\, dx < K_p \int_{-\infty}^{\infty} |f(u)|^p\, du.$$

Это показывает, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x) - f(x,a)|^p\, dx$$

остаётся ограниченным при $a \to \infty$. Нам нужно доказать, что на самом деле этот интеграл стремится к нулю.

Пусть $f^*(x)$ — ступенчатая функция, равная нулю при $|x| > X$ и такая, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x) - f^*(x)|^p\, dx < \varepsilon.$$

Тогда

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x) - f(x,a)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x) - f^*(x)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}} +$$
$$+ \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f^*(x) - f^*(x,a)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f^*(x,a) - f(x,a)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}} =$$
$$= J_1^{\frac{1}{p}} + J_2^{\frac{1}{p}} + J_3^{\frac{1}{p}}.$$

По предположению, $|J_1| < \varepsilon$, а согласно доказанному выше,

$$|J_3| < K_p|J_1| < K_p\varepsilon.$$

Далее, $f^*(x,a)$ ограниченно сходится к $f^*(x)$ в каждом конечном интервале $(-\xi, \xi)$. Но если $\xi > 2X$, то

$$\int_{\xi}^{\infty} |f^*(x) - f^*(x,a)|^p\, dx = \int_{\xi}^{\infty} \left| \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-X}^{X} f^*(t) \frac{\sin(x-t)a}{x-t}\, dt \right|^p dx <$$
$$< K_p \int_{\xi}^{\infty} \left| \int_{-X}^{X} \frac{|f^*(t)|}{x-X}\, dt \right|^p dx < K_p \int_{\xi}^{\infty} \frac{dx}{(x-X)^p} \left(\int_{-X}^{X} |f^*(t)|^p\, dt \right)^p.$$

Значение ξ можно выбрать столь большим, чтобы последнее выражение (не зависящее от a) было меньше ε; фиксируя затем ξ, будем иметь, в силу ограниченной сходимости,

$$\int_{-\xi}^{\xi} |f^*(x) - f^*(x, a)|^p \, dx \to 0.$$

Это завершает доказательство теоремы,

5.18. Дальнейшие случаи формулы Парсеваля. Мы уже видели, что соотношение (2.1.1) выполняется, если f и G принадлежат к L^p $(1 < p < 2)$. Если f и g — заданные функции, принадлежащие соответственно к L^p и $L^{p'}$, то мы не можем утверждать справедливость того же результата, так как существование G неизвестно; в этом случае нам потребуется дополнительное условие,

Т е о р е м а 109. *Если $f \in L^p$ $(1 < p < 2)$, $g \in L^2 \cap L^{p'}$, то*

$$\lim_{\lambda \to \infty} \int_{-\lambda}^{\lambda} F(x) G(x) \, dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) g(-x) \, dx.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть G — трансформация Фурье функции g. Тогда функция

$$\begin{cases} G(x) & (|x| < \lambda), \\ 0 & (|x| > \lambda) \end{cases}$$

и функция $g(x, \lambda)$, определённая, как в (3.1.2), представляют собой пару трансформаций Фурье из L^2, причём первая принадлежит также к L^p. Они являются поэтому трансформациями Фурье из L^p, $L^{p'}$, и теорема 75 даёт

$$\int_{-\lambda}^{\lambda} F(x) G(x) \, dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) g(-x, \lambda) \, dx.$$

Но, как в предыдущем параграфе,

$$\underset{\lambda \to \infty}{\text{l.i.m.}} (p') g(-x, \lambda) = g(-x),$$

что и завершает доказательство теоремы.

Т е о р е м а 110. *Если $f \in L^p$ $(1 < p < 2)$, $g \in L^{p'}$, и если интеграл, определяющий трансформацию Фурье функции g, равномерно сходится в каждом интервале $0 < \delta \leqslant x \leqslant \lambda$, то*

$$\lim_{\substack{\delta \to 0 \\ \lambda \to \infty}} \left(\int_{-\lambda}^{-\delta} + \int_{\delta}^{\lambda} \right) F(x) G(x) \, dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) g(-x) \, dx.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Опираясь на равномерную сходимость, можно доказать, что функция

$$\begin{cases} G(x) & (\delta \leqslant |x| \leqslant \lambda), \\ 0 & (|x| < \delta,\ |x| > \lambda) \end{cases}$$

есть трансформация Фурье для

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(u) \frac{\sin \lambda(u-x) - \sin \delta(u-x)}{u-x}\, du.$$

Дальнейший ход доказательства таков же, как и прежде, однако, для завершения доказательства требуется показать, что

$$\lim_{\delta \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx \int_{-\infty}^{\infty} g(u) \frac{\sin \delta(u-x)}{u-x}\, du = 0.$$

Но

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} g(u) \frac{\sin \delta(u-x)}{u-x}\, du \right| \leqslant \\ \leqslant \delta \int_{x-1/\delta}^{x+1/\delta} |g(u)|\, du + \left(\int_{-\infty}^{x-1/\delta} + \int_{x+1/\delta}^{\infty} \right) \frac{|g(u)|}{|u-x|}\, du \to 0$$

при $\delta \to 0$ для любого фиксированного x. Кроме того, как и прежде, интеграл от p'-й степени левой части ограничен равномерно для всех δ. Поэтому требуемый результат вытекает из леммы § 5.12.

VI
ЕДИНСТВЕННОСТЬ И СМЕШАННЫЕ ТЕОРЕМЫ

6.1. Единственность тригонометрических интегралов. Классическая проблема единственности для тригонометрических рядов заключается в том, чтобы показать, что если

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)=0$$

для всех значений $x\in(0,2\pi)$, или для всех значений с некоторыми исключениями, то $a_n=0,\ \ b_n=0$ для всех значений n. Соответствующая проблема для интегралов состоит в том, чтобы показать, что если

$$\int_0^{\infty}\big[a(y)\cos xy+b(y)\sin xy\big]\,dy=0 \tag{6.1.1}$$

в том или ином смысле для всех значений x, за некоторыми возможными исключениями, то почти всюду $a(y)=0,\ \ b(y)=0$. Более общая проблема заключается в том, чтобы показать, что если заданная функция $f(x)$ представима, в некотором смысле, тригонометрическим интегралом

$$\int_0^{\infty}\big[a(y)\cos xy+b(y)\sin xy\big]\,dy=f(x), \tag{6.1.2}$$

то этот интеграл — необходимо типа Фурье, т.е., в некотором смысле,

$$a(y)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\cos xy\,dx,\qquad b(y)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\sin xy\,dx.$$

В силу симметрии интегральной формулы Фурье относительно функции и её трансформации, эта проблема в интегральном случае, формально, не является новой. Она просто сводится к вопросу, представимы ли $a(x)$ и $b(x)$ интегралами Фурье; и в некоторых случаях ответ следует из уже доказанных нами теорем.

Предположим, например, что $a(x)$ и $b(x)$ принадлежат к $L(0,\infty)$ и что

$$\int_0^{\infty}\big[a(y)\cos xy+b(y)\sin xy\big]\,dy=0$$

почти для всех значений x. Прибавляя к этой формуле и вычитая из неё формулу, получающуюся заменой x на $-x$, находим, что одновременно

$$\int_0^\infty a(y)\cos xy\,dy = 0, \qquad \int_0^\infty b(y)\sin xy\,dy = 0$$

почти для всех x. Но по теореме 14 (для чётной функции)

$$\lim_{\lambda\to\infty}\frac{2}{\pi}\int_0^\lambda \left(1-\frac{u}{\lambda}\right)\cos xu\,du \int_0^\infty a(y)\cos uy\,dy = a(x)$$

почти для всех x. Так как в данном случае левая часть равна нулю для всех x, то $a(x)=0$ почти для всех x. Аналогично убеждаемся в том, что $b(x)=0$ почти для всех x.

Тот же результат может быть получен с помощью теоремы 22.

Предположим теперь, что $a(y)\in L^2(0,\infty)$ и что

$$\int_0^{\to\infty} a(y)\cos xy\,dy = 0$$

почти для всех значений x. Так как предел и предел в среднем, в случае если они оба существуют, почти всюду совпадают, то косинус-трансформация Фурье функции $a(x)$, понимаемая в смысле теоремы 48, равна нулю, и потому функция $a(x)$, как предел в среднем последовательности функций, равных нулю, сама равна нулю.

Теория единственности рядов Фурье наводит на теоремы другого типа, в которых множество возможных значений x, где не выполняется условие (3.1.1), значительно сильнее ограничено, но зато $a(x)$ и $b(x)$ не обязательно принадлежат к L-классам. Основная разница между теорией единственности для рядов и для интегралов состоит в том, что, например, сходимость ряда $\sum a_n\cos nx$ на множестве положительной меры влечёт за собой, что $a_n\to 0$, тогда как из сходимости интеграла

$$\int_0^{\to\infty} a(y)\cos xy\,dy$$

не следует, что $a(x)\to 0$ при $x\to\infty$; так, например, для функции $a(x)=e^x\cos e^{2x}$ интеграл сходится.

6.2. Выражение

$$\lim_{h\to 0}\frac{\Phi(x+h)+\Phi(x-h)-2\Phi(x)}{h^2} \tag{6.2.1}$$

называется обобщённой второй производной от $\Phi(x)$. Теория единственности рядов Фурье основывается на следующей теореме Шварца[1]: *если* $\Phi(x)$ *непрерывна и во всех точках некоторого интервала её обобщённая*

[1] См. Титчмарш, Теория функций, § 13.8.4. [См. также Валле-Пуссен, Курс анализа бесконечно малых, т. II, гл. IV, § 7.]

вторая производная существует и равна нулю, то $\Phi(x)$ *есть линейная функция на этом интервале.* Мы же обратимся здесь сразу к общей проблеме, с $f(x)$, и воспользуемся более общим предложением.

Теорема 111[1]. *Пусть* $\Phi(x)$ *непрерывна в* (a,b) *и в каждой точке этого интервала имеет конечную обобщённую вторую производную* $f(x)$, *принадлежащую к* $L(a,b)$. *Тогда*

$$\Phi(x)=\int_a^x du\int_a^u f(v)\,dv+a_0+a_1x \qquad (a\leqslant x\leqslant b), \tag{6.2.2}$$

где a_0 *и* a_1 — *постоянные.*

Докажем сначала две леммы.

Лемма 1. *Пусть* $\Phi(x)$ *непрерывна в* (a,b), *и пусть*

$$\overline{\lim_{h\to 0}}\,\frac{\Phi(x+h)+\Phi(x-h)-2\Phi(x)}{h^2} \tag{6.2.3}$$

неотрицателен для всякого $x\in(a,b)$. *Тогда никакая часть какой бы то ни было дуги кривой* $y=\Phi(x)$ *не может находиться над хордой этой дуги.*

Доказательство. Предположим, что некоторые точки дуги (x_1,x_2) лежат над её хордой PQ. Положим

$$\Phi_\varepsilon(x)=\Phi(x)+\tfrac{1}{2}\varepsilon(x-x_1)(x-x_2) \qquad (\varepsilon>0).$$

Тогда при достаточно малом ε также некоторые точки соответствующей дуги кривой $y=\Phi_\varepsilon(x)$ лежат над хордой. Пусть M — та из этих точек, которая удалена от PQ не меньше, чем любая другая, и пусть x — абсцисса точки M. Тогда, обозначая через λ тангенс угла, образуемого хордой PQ с осью x, имеем

$$\frac{\Phi_\varepsilon(x+h)-\Phi_\varepsilon(x)}{h}\leqslant\lambda, \qquad \frac{\Phi_\varepsilon(x)-\Phi_\varepsilon(x-h)}{h}\geqslant\lambda.$$

Поэтому

$$\Phi_\varepsilon(x+h)+\Phi_\varepsilon(x-h)-2\Phi_\varepsilon(x)\leqslant 0,$$

т. е.

$$\Phi(x+h)+\Phi(x-h)-2\Phi(x)\leqslant -\varepsilon,$$

для всех достаточно малых h. Но это противоречит предположению, и тем самым лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть* $\Phi(x)$ *непрерывна в* (a,b), *и пусть выражение* (6.2.3) *неотрицательно почти для всех* $x\in(a,b)$, *причём нигде не равно* $-\infty$. *Тогда никакая часть какой бы то ни было дуги кривой* $y=\Phi(x)$ *не может находиться над хордой этой дуги.*

[1] Валле-Пуссен, Курс анализа бесконечно малых. т. I, гл. VII, § 4.

Доказательство. Если (6.2.3) нигде не отрицательно, то утверждаемый результат вытекает из предыдущей леммы. В противном случае, пусть E — множество меры 0, где (6.2.3) отрицательно. Пусть $\chi(x)$ — неубывающая абсолютно непрерывная функция, такая, что $\chi'(x) = +\infty$ на E и $\chi(b) - \chi(a) < \varepsilon$ [1]. Положим

$$\chi_1(x) = \int_a^x \chi(u)\,du.$$

Если x — точка множества E, то для сколь угодно большого положительного M существует такое $\delta > 0$, что

$$\frac{\chi(x+u) - \chi(x-u)}{2u} \geqslant M \qquad (|u| \leqslant \delta).$$

Поэтому при $h \leqslant \delta$

$$\begin{aligned}\frac{\chi_1(x+h) + \chi_1(x-h) - 2\chi_1(x)}{h^2} &= \frac{1}{h^2}\int_0^h [\chi(x+u) - \chi(x-u)]\,du \geqslant \\ &\geqslant \frac{1}{h^2}\int_0^h 2uM\,du = M,\end{aligned}$$

и, значит, левая часть стремится к бесконечности при $h \to 0$.

Положим

$$\Omega(x) = \Phi(x) + \chi_1(x).$$

Тогда

$$\varlimsup_{h\to 0} \frac{\Omega(x+h) + \Omega(x-h) - 2\Omega(x)}{h^2} \geqslant 0$$

для всякого $x \in (a, b)$, Поэтому никакая часть какой бы то ни было дуги кривой $y = \Omega(x)$ не может находиться над хордой этой дуги. Так как это верно для произвольно малого ε, то тот же результат верен и для $y = \Phi(x)$.

Доказательство теоремы 111. Пусть

$$p(x) = \min[f(x), n], \qquad q(x) = \max[f(x), -n].$$

Тогда $p(x) \leqslant f(x) \leqslant q(x)$, и так как f интегрируема, то то же верно и для p и q. Положим

[1] См., например, Титчмарш, Теория функций, § 11.8.2. [Заключим E в такую последовательность открытых множеств $O_1, O_2, \ldots, O_n, \ldots$, что $O_1 \supset O_2 \supset \ldots$, $m(O_n) < \frac{\varepsilon}{2^n}$, где $m(A)$ обозначает лебегову меру множества A. Пусть $f_n(x)$ — характеристическая функция множества O_n, $\varphi_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k(x)$ и $\varphi(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(x)$. Так как $\int_a^x \varphi_n(x)\,dx < \varepsilon$, то $\varphi(x)$ почти всюду конечна и интегрируема. Легко видеть, что функция $\chi(x) = \int_a^x \varphi(t)\,dt = \lim\limits_{n\to\infty} \int_a^x \varphi_n(t)\,dt$ обладает требуемым свойством. — *Прим. перев.*]

$$p_1(x) = \int_a^x p(u)\,du, \qquad p_2(x) = \int_a^x p_1(u)\,du$$

и аналогично для q. Тогда $q_2(x) - \Phi(x)$ имеет почти всюду обобщённую вторую производную $q(x) - f(x) \geqslant 0$, и

$$\frac{q_2(x+h) + q_2(x-h) - 2q_2(x)}{h^2} = \frac{1}{h^2}\int_0^h du \int_{x-u}^{x+u} q(v)\,dv \geqslant$$
$$\geqslant \frac{1}{h^2}\int_0^h du \int_{x-u}^{x+u} (-n)\,dv = -n.$$

Поэтому обобщённая вторая производная разности $q_2(x) - \Phi(x)$ нигде не равна $-\infty$. Следовательно, никакая дуга кривой $y = q_2(x) - \Phi(x)$ не поднимается выше своей хорды.

Хорда, соединяющая точки кривой с крайними абсциссами a и b, имеет уравнение

$$y = \frac{x-a}{b-a}\,[q_2(b) - \Phi(b) + \Phi(a)] - \Phi(a),$$

и потому

$$q_2(x) - \Phi(x) \leqslant \frac{x-a}{b-a}\,[q_2(b) - \Phi(b) + \Phi(a)] - \Phi(a) \qquad (a \leqslant x \leqslant b).$$

Аналогично никакая дуга кривой $y = p_2(x) - \Phi(x)$ не опускается ниже своей хорды, откуда следует, что

$$p_2(x) - \Phi(x) \geqslant \frac{x-a}{b-a}\,[p_2(b) - \Phi(b) + \Phi(a)] - \Phi(a) \qquad (a \leqslant x \leqslant b).$$

Но при $n \to \infty$ обе функции $p_2(x)$ и $q_2(x)$ стремятся к пределу

$$f_2(x) = \int_a^x du \int_a^u f(v)\,dv.$$

Следовательно,

$$f_2(x) - \Phi(x) = \frac{x-a}{b-a}\,[f_2(b) - \Phi(b) + \Phi(a)] - \Phi(a) \qquad (a \leqslant x \leqslant b),$$

что и представляет собой требуемый результат.

6.3.

Теорема 112. *Пусть $a(y)$ и $b(y)$ интегрируемы на каждом конечном интервале и равны нулю в некотором интервале, содержащем точку $y = 0$. Пусть*

$$\int_0^{\to\infty} [a(y)\cos xy + b(y)\sin xy]\,dy = f(x)$$

для всех x в каком-нибудь интервале. Тогда

$$\Phi(x) = -\int_0^{\to\infty} [a(y)\cos xy + b(y)\sin xy]\,\frac{dy}{y^2}$$

существует для всех x из этого интервала и имеет обобщённую вторую производную, равную $f(x)$.

Доказательство. Сходимость интеграла, определяющего функцию $\Phi(x)$, следует из второй теоремы о среднем, значении. Так как

$$\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\,(x+h)y + \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\,(x-h)y - \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\,xy = -4\sin^2\frac{hy}{2}\,\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\,xy,$$

то

$$\frac{\Phi(x+h)+\Phi(x-h)-2\Phi(x)}{h^2} = \int_0^{\to\infty} [a(y)\cos xy + b(y)\sin xy]\,\frac{4\sin^2\dfrac{hy}{2}}{h^2y^2}\,dy, \tag{6.3.1}$$

и достаточно доказать, что этот интеграл сходится равномерно относительно h для $h > 0$.

Положим

$$\int_Y^{\to\infty} [a(y)\cos xy + b(y)\sin xy]\,dy = r(Y),$$

так что $|r(Y)| \leqslant \varepsilon$ для $Y \geqslant Y_0(\varepsilon)$. Тогда

$$\left|\int_{Y_0}^{\infty} [a(y)\cos xy + b(y)\sin xy]\,\frac{4\sin^2\dfrac{hy}{2}}{h^2y^2}\,dy\right| =$$

$$= \left|\left[-r(y)\frac{4\sin^2\dfrac{hy}{2}}{h^2y^2}\right]\Bigg|_{Y_0}^{\infty} + \int_{Y_0}^{\infty} r(y)\frac{d}{dy}\left(\frac{4\sin^2\dfrac{hy}{2}}{h^2y^2}\right)dy\right| \leqslant \varepsilon\,\frac{4\sin^2\dfrac{hY_0}{2}}{h^2Y_0^2} +$$

$$+\,\varepsilon\int_{Y_0}^{\infty}\left|\frac{d}{dy}\left(\frac{4\sin^2\dfrac{hy}{2}}{h^2y^2}\right)\right|dy < \varepsilon + \varepsilon\int_0^{\infty}\left|\frac{d}{du}\left(\frac{4\sin^2\dfrac{u}{2}}{u^2}\right)\right|du = A\varepsilon$$

для всех $h > 0$, что и завершает доказательство теоремы.

6.4. Мы докажем теперь теорему единственности в предположении, что $\dfrac{a(y)}{1+y^2}$ и $\dfrac{b(y)}{1+y^2}$ принадлежат к $L(0,\infty)$. Ниже будет показано, что это условие излишне.

Теорема 113[1]. *Пусть $\dfrac{a(y)}{1+y^2}$ и $\dfrac{b(y)}{1+y^2}$ принадлежат к $L(0,\infty)$, и пусть*

$$\int_0^{\to\infty} [a(y)\cos xy + b(y)\sin xy]\,dy = f(x) \tag{6.4.1}$$

[1] Pollard (3), Jacob (2). Тот же результат без указанного ограничения следует из работы Offord (7). Приводимое здесь доказательство принадлежит Оффорду и автору.

для всех значений x, где $f(x)$ всюду конечна и интегрируема на каждом конечном интервале. Тогда почти для всех положительных значений y

$$a(y) = \frac{1}{\pi} \lim_{\lambda\to\infty} \int_{-\lambda}^{\lambda} \left(1 - \frac{|x|}{\lambda}\right) f(x) \cos xy\, dx, \tag{6.4.2}$$

$$b(y) = \frac{1}{\pi} \lim_{\lambda\to\infty} \int_{-\lambda}^{\lambda} \left(1 - \frac{|x|}{\lambda}\right) f(x) \sin xy\, dx. \tag{6.4.3}$$

В частности, если $f(x) = 0$, то почти всюду $a(y) = 0$, $b(y) = 0$.

Условие (6.4.1) *может нарушаться для конечного числа значений x, если $a(y)\to 0$, $b(y)\to 0$ при $y\to\infty$.*

Доказательство. Заменяя в (6.4.1) x на $-x$ и складывая или вычитая, мы получим аналогичные формулы, содержащие под знаком интеграла только косинус или синус. Мы можем, таким образом, рассматривать эти формулы по отдельности.

Предположим сначала, что $b(y) = 0$. Предположим также, что $a(y) = 0$ для $0 < y < \delta$, и пусть

$$\Phi(x) = -\int_0^{\infty} \frac{a(y)}{y^2} \cos xy\, dy. \tag{6.4.4}$$

По теореме 112, $\Phi(x)$ имеет в качестве обобщённой второй производной $f(x)$, причём здесь $f(x)$ интегрируема. Следовательно, по теореме 111,

$$\Phi(x) = \int_0^x du \int_0^u f(v)\, dv + p + qx,$$

где p и q — постоянные; при этом в данном случае $q = 0$, так как Φ и f — чётные. Полагая

$$f_1(u) = \int_0^u f(v)\, dv,$$

мы имеем

$$\Phi(x) = \int_0^x f_1(u)\, du + p,$$

и

$$\int_0^{\lambda} \left(1 - \frac{x}{\lambda}\right) f(x) \cos xy\, dx = \int_0^{\lambda} f_1(x) \left\{\frac{\cos xy}{\lambda} + \left(1 - \frac{x}{\lambda}\right) y \sin xy\right\} dx =$$

$$= \left[\Phi(x) \left\{\frac{\cos xy}{\lambda} + \left(1 - \frac{x}{\lambda}\right) y \sin xy\right\}\right]\Bigg|_0^{\lambda} +$$

$$+ \int_0^{\lambda} \Phi(x) \left\{\frac{2y \sin xy}{\lambda} - y^2 \left(1 - \frac{x}{\lambda}\right) \cos xy\right\} dx =$$

$$= \frac{\Phi(\lambda)\cos\lambda y}{\lambda} - \frac{p}{\lambda} + \frac{2y}{\lambda}\int_0^\lambda \Phi(x)\sin xy\,dx - y^2\int_0^\lambda \left(1-\frac{x}{\lambda}\right)\Phi(x)\cos xy\,dx. \tag{6.4.5}$$

Так как $\dfrac{a(y)}{y^2} \in L$, то из (6.4.4) и теоремы 14 следует, что

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_0^\lambda \left(1-\frac{x}{\lambda}\right)\Phi(x)\cos xy\,dx = -\frac{\pi}{2}\,\frac{a(y)}{y^2} \tag{6.4.6}$$

почти для всех y. Кроме того, по теореме 1, $\Phi(x)\to 0$ при $x\to\infty$, так что остальные члены в (6.4.5) стремятся к нулю при $\lambda\to\infty$. Поэтому

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_0^\lambda \left(1-\frac{x}{\lambda}\right)f(x)\cos xy\,dx = \frac{\pi}{2}\,a(y), \tag{6.4.7}$$

и утверждаемый результат, при указанных условиях, доказан.

Чтобы устранить ограничение, что $a(y)=0$ на $(0,\delta)$, положим

$$a_\delta(x) = \begin{cases} a(x), & x\geqslant\delta,\\ 0, & x<\delta,\end{cases}$$

и пусть

$$\int_0^\delta a(y)\cos xy\,dy = \chi(x).$$

Тогда полученный нами результат показывает, что

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_0^\lambda \left(1-\frac{x}{\lambda}\right)[f(x)-\chi(x)]\cos xy\,dx = \frac{\pi}{2}\,a_\delta(y)$$

почти для всех y. Вместе с тем, по теореме 14,

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_0^\lambda \left(1-\frac{x}{\lambda}\right)\chi(x)\cos xy\,dx = 0$$

почти для всех $y\in(\delta,\infty)$. Поэтому

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_0^\lambda \left(1-\frac{x}{\lambda}\right)f(x)\cos xy\,dx = \frac{\pi}{2}\,a(y)$$

почти для всех $y\in(\delta,\infty)$ и, значит, так как δ произвольно мало, — почти для всех $y\in(0,\infty)$. Это есть утверждение теоремы для интеграла, содержащего косинус.

Пусть теперь $a(y)=0$, и предположим, что $b(y)=0$ в $(0,\delta)$. Положим

$$\Psi(x) = -\int_0^\infty \frac{b(y)}{y^2}\,\sin xy\,dy. \tag{6.4.8}$$

Рассуждая, как раньше, мы получим, что

$$\Psi(x) = \int_0^x du\int_0^u f(v)\,dv + qx,$$

и

$$\int_0^\lambda \left(1-\frac{x}{\lambda}\right) f(x)\sin xy\,dx = \int_0^\lambda [f_1(x)+q]\left[\frac{\sin xy}{\lambda} - \left(1-\frac{x}{\lambda}\right) y\cos xy\right] dx =$$
$$= \frac{\Psi(\lambda)\sin\lambda y}{\lambda} - \frac{2y}{\lambda}\int_0^\lambda \Psi(x)\cos xy\,dx - y^2\int_0^\lambda \left(1-\frac{x}{\lambda}\right)\Psi(x)\sin xy\,dx. \tag{6.4.9}$$

Доказательство завершается теперь, как в предыдущем случае.

Если имеются исключительные точки, где равенство (6.4.1) нарушается, то наши рассуждения показывают лишь, что

$$y = \Phi(x) - \int_0^x du \int_0^u f(v)\,dv \tag{6.4.10}$$

в интервалах между этими точками есть линейная функция. Но теперь, если

$$|a(y)| \leqslant \varepsilon, \qquad |b(y)| \leqslant \varepsilon, \qquad \text{для } y \geqslant \Delta,$$

то

$$\left|\int_0^\infty [a(y)\cos xy + b(y)\sin xy]\,\frac{4\sin^2\dfrac{hy}{2}}{h^2y^2}\,dy\right| \leqslant$$
$$\leqslant \int_0^\Delta [|a(y)| + |b(y)|]\,dy + 2\varepsilon\int_\Delta^\infty \frac{4\sin^2\dfrac{hy}{2}}{h^2y^2}\,dy < K(\Delta) + \frac{A\varepsilon}{h}\,.$$

Умножая (6.3.1) на h и выбирая сначала ε, а затем h, убеждаемся в том, что

$$\lim_{h\to 0}\left\{\frac{\Phi(x+h)-\Phi(x)}{h} - \frac{\Phi(x)-\Phi(x-h)}{h}\right\} = 0.$$

Для случая, когда x — одна из исключительных точек, это показывает, что прямолинейные отрезки графика функции (6.4.10), лежащие по обе стороны от x, имеют одинаковый наклон. Следовательно, (6.4.10) есть на самом деле единая линейная функция, и доказательство требуемого результата завершается так же, как выше.

6.5. Чтобы устранить ограничение, наложенное на $a(y)$ и $b(y)$, нам понадобится ещё несколько предварительных теорем.

Т е о р е м а 114. *Если интеграл*

$$\int_0^{\to\infty} f(t)\cos yt\,dt$$

равномерно сходится в каждом конечном интервале, то, обозначая его значение через $\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}F_c(y)$, *имеем*

$$\lim_{\lambda\to\infty}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\lambda\left(1-\frac{y}{\lambda}\right)F_c(y)\cos xy\,dy=f(x)$$

почти для всех x.

Это — лишь вариант теоремы 20; доказательство его в существенных чертах — то же самое и использует сходимость интеграла

$$\int_0^{\to\infty} f(t)\,dt,$$

содержащуюся, как частный случай, в условии теоремы.

Нам нужна также аналогичная теорема для интеграла, содержащего синус, однако, в этом случае доказательство более сложно.

Т е о р е м а 115[1]. *Пусть x_n — бесконечно возрастающая последовательность чисел, такая, что*

$$x_n \geqslant k^{n-1}x_{n-1} \qquad (n=2,3,\ldots),$$

где $k>1$. Тогда для любого заданного интервала (α,β) существуют число $\Omega\in(\alpha,\beta)$ и последовательность целых чисел y_1, y_2, $\ldots$, такие, что

$$x_n\Omega-(2y_n+1)\to 0. \tag{6.5.1}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что $0<\alpha<\beta$, и разобьём интервал (α,β) на три равные части: (α,γ), (γ,δ), (δ,β). Пусть x_ν — первое из чисел x_n, удовлетворяющее неравенству

$$x_\nu>\max\left(\frac{3}{(k-1)(\beta-\alpha)},\ \frac{6}{\beta-\alpha}\right).$$

Выберем y_ν так, чтобы $\dfrac{2y_\nu+1}{x_\nu}$ попало в (γ,δ). Это возможно, так как $x_\nu>\dfrac{6}{\beta-\alpha}$. Затем определим $y_{\nu+1}$, $y_{\nu+2}$, $\ldots$ так, чтобы

$$\left|(2y_{n+1}+1)-(2y_n+1)\frac{x_{n+1}}{x_n}\right|\leqslant 1 \qquad (n=\nu,\nu+1,\ldots).$$

Если в каком-нибудь случае имеется более чем одно такое y_{n+1}, то возьмём наименьшее; $y_{\nu+1}$, $y_{\nu+2}$, $\ldots$ определяются тогда однозначно. Числа же y_1, $\ldots$, $y_{\nu-1}$ могут иметь произвольные значения.

Числа x_n и y_n определяют теперь последовательность дробей $\dfrac{2y_n+1}{x_n}$, стремящуюся к некоторому пределу Ω; действительно, по предыдущему неравенству,

$$\left|\frac{2y_{n+m}+1}{x_{n+m}}-\frac{2y_n+1}{x_n}\right|\leqslant\frac{1}{x_{n+1}}+\ldots+\frac{1}{x_{n+m}}\to 0.$$

[1] Cantor (1).

Вместе с тем,

$$\left|\Omega - \frac{2y_n+1}{x_n}\right| \leqslant \frac{1}{x_{n+1}} + \frac{1}{x_{n+2}} + \ldots \leqslant \frac{1}{x_n}\left(\frac{1}{k^n} + \frac{1}{k^{2n}} + \ldots\right) = \frac{1}{x_n(k^n-1)},$$

так что условие (6.5.1) также выполнено. Наконец, Ω лежит в (α, β), так как

$$\left|\Omega - \frac{2y_\nu+1}{x_\nu}\right| \leqslant \frac{1}{x_\nu(k^\nu-1)} \leqslant \frac{1}{x_\nu(k-1)} < \frac{\beta-\alpha}{3}.$$

Т е о р е м а 116. *Если интеграл*

$$\int_0^{\to\infty} \varphi(u)\sin xu\,du$$

сходится для всех значений x, то при $n\to\infty$

$$r_n = \max_{0\leqslant\xi\leqslant1}\int_n^{n+\xi}\varphi(u)\,du \to 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если теорема неверна, то существуют положительное ε и последовательность n_ν такие, что $|r_{n_\nu}| \geqslant \varepsilon$, а из этой последовательности можно выбрать подпоследовательность n_μ, удовлетворяющую условию $n_\mu \geqslant 2^{\mu-1}n_{\mu-1}$. Следовательно, существуют такое число $x\in\left(0, \frac{\pi}{8}\right)$ и такая последовательность целых чисел y_1, $y_2, \ldots$, что

$$\frac{2xn_\mu}{\pi} - (2y_\mu+1) \to 0.$$

Поэтому, если μ достаточно велико,

$$\left|xn_\mu - \left(y_\mu + \frac{1}{2}\right)\pi\right| \leqslant \frac{\pi}{8}.$$

Следовательно, для $n_\mu \leqslant u \leqslant n_\mu+\xi$, где $\xi\leqslant1$, число $xu-\pi y_\mu$ заключено между $\frac{\pi}{4}$ и $\frac{3\pi}{4}$ и, значит, $\sin xu$ имеет не более чем два интервала монотонности и $|\sin xu| \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$. Если, например, $\sin xu$ монотонно возрастает, то, по второй теореме о среднем значении,

$$\int_{n_\mu}^{n_\mu+\xi}\varphi(u)\,du = \int_{n_\mu}^{n_\mu+\xi}\frac{\varphi(u)\sin xu}{\sin xu}\,du = \frac{1}{\sin xn_\mu}\int_{n_\mu}^{n_\mu+\xi'}\varphi(u)\sin xu\,du,$$

и правая часть стремится к нулю. Аналогично обстоит дело и в остальных случаях.

Т е о р е м а 117. *Если интеграл*

$$\int_0^{\to\infty} f(t)\sin yt\,dt \tag{6.5.2}$$

сходится равномерно в каждом конечном интервале к некоторой функции $\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,F_s(y)$, *то*

$$\lim_{\lambda\to\infty}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\lambda}\left(1-\frac{y}{\lambda}\right)F_s(y)\sin xy\,dy=f(x) \tag{6.5.3}$$

почти для всех x.

Доказательство. В силу равномерной сходимости мы можем, подставив (6.5.2) в (6.5.3), обратить порядок интегрирования. Мы получим

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\to\infty}f(t)\left\{\frac{1-\cos\lambda(x-t)}{\lambda(x-t)^2}-\frac{1-\cos\lambda(x+t)}{\lambda(x+t)^2}\right\}dt. \tag{6.5.4}$$

Рассмотрим

$$I=\int_T^{\to\infty}\frac{f(t)\cos\lambda t}{\lambda(x-t)^2}\,dt=\left(\int_T^{\frac{\pi N}{2\lambda}}+\sum_{n=N}^{\infty}\int_{\frac{\pi n}{2\lambda}}^{\frac{\pi(n+1)}{2\lambda}}\right)\frac{f(t)\cos\lambda t}{\lambda(x-t)^2}\,dt,$$

где $T>x$ и N — наименьшее целое число, большее чем $\frac{2\lambda T}{\pi}$. По второй теореме о среднем значении,

$$\int_{\frac{\pi n}{2\lambda}}^{\frac{\pi(n+1)}{2\lambda}}\frac{f(t)\cos\lambda t}{\lambda(x-t)^2}\,dt=O\left(\frac{1}{\lambda\left(\frac{n}{\lambda}\right)^2}\int_\xi^\eta f(t)\,dt\right),$$

где $\frac{\pi n}{2\lambda}\leqslant\xi<\eta\leqslant\frac{\pi(n+1)}{2\lambda}$. По теореме 116 последний интеграл при $n\to\infty$ стремится к нулю равномерно для $\lambda>\frac{2}{\pi}$. Поэтому

$$I=o\left(\frac{\lambda}{N^2}+\sum_{n=N}^{\infty}\frac{\lambda}{n^2}\right)=o\left(\frac{\lambda}{N}\right)=o\left(\frac{1}{T}\right)$$

равномерно относительно λ. Аналогичные рассуждения применимы и к остальной части интеграла (6.5.4), распространённой на значения $t\geqslant T$. С другой стороны, часть, распространённая на значения $t<T$, при фиксированном T почти всюду стремится к $f(x)$. Это завершает доказательство теоремы.

6.6.

Теорема 118. *Утверждения теоремы* 113 *справедливы, если* $a(y)$ *и* $b(y)$ *интегрируемы на каждом конечном интервале, и имеет место* (6.4.1).

Доказательство. Мы снова определим $\Phi(x)$ формулой (6.4.4), но теперь интеграл не обязательно абсолютно сходится и $\Phi(x)$ не обязательно стремится к нулю при $x\to\infty$. Однако, так как

$$a_1(y)=\int_0^y a(u)\,du \to \text{к пределу}$$

при $y\to\infty$ (положить в (6.4.1) $x=0$!), и

$$\int_0^Y \frac{a(y)}{y^2}\cos xy\,dy=\frac{a_1(Y)\cos xY}{Y^2}+\int_0^Y a_1(y)\left(\frac{x\sin xy}{y^2}+\frac{2\cos xy}{y^3}\right)dy,$$

то интеграл (6.4.4) равномерно сходится на каждом конечном интервале. Поэтому (6.4.6) следует из теоремы 114. Далее, по теореме 1,

$$\Phi(x)=-\int_0^\infty a_1(y)\left(\frac{x\sin xy}{y^2}+\frac{2\cos xy}{y^3}\right)dy=o(x)$$

при $x\to\infty$, и, для фиксированного y,

$$\begin{aligned}\int_0^\lambda \Phi(x)\sin xy\,dx&=\int_0^\lambda\left(o(1)-\int_{y+1}^\infty a_1(u)\frac{x\sin xu}{u^2}\,du\right)\sin xy\,dx=\\&=o(\lambda)-\frac{1}{2}\int_{y+1}^\infty\frac{a_1(u)}{u^2}\left(\frac{\lambda\sin\lambda(u-y)}{u-y}-\frac{1-\cos\lambda(u-y)}{u-y}-\right.\\&\qquad\left.-\frac{\lambda\sin\lambda(u+y)}{u+y}+\frac{1-\cos\lambda(u+y)}{u+y}\right)du=o(\lambda)\end{aligned}$$

при $\lambda\to\infty$. Поэтому (6.4.7) следует из (6.4.5).

В случае интеграла, содержащего синус, мы получаем (6.4.8) прежним путём, но теперь подстановка $x=0$ в (6.4.1) ничего не даёт; вместо этого мы используем теоремы 115–117.

Имеем

$$\int_{y_1}^{y_2}\frac{b(y)}{y^2}\sin xy\,dy=\left(\int_{y_1}^{\frac{\pi m}{2x}}+\sum_{\nu=m}^{n}\int_{\frac{\pi\nu}{2x}}^{\frac{\pi(\nu+1)}{2x}}+\int_{\frac{\pi(n+1)}{2x}}^{y_2}\right)\frac{b(y)}{y^2}\sin xy\,dy.$$

Вторая теорема о среднем значении даёт

$$\int_{\frac{\pi\nu}{2x}}^{\frac{\pi(\nu+1)}{2x}}\frac{b(y)}{y^2}\sin xy\,dy=O\left(\frac{x^2}{\nu^2}\int_\xi^\eta b(y)\,dy\right),$$

где $\dfrac{\pi\nu}{2x}\leqslant\xi<\eta\leqslant\dfrac{\pi(\nu+1)}{2x}$, последний же интеграл есть $o(1)$ при $\nu\to\infty$, $x\to\infty$ и $o\left(\dfrac{1}{x}\right)$ при $\nu\to\infty$, $x\to 0$ (в чём убеждаемся рассмотрением $O\left(\dfrac{1}{x}\right)$ членов типа r_n теоремы 116). Поэтому при стремлении x к 0 или к ∞

$$\int_{y_1}^{y_2}\frac{b(y)}{y^2}\sin xy\,dy=o\left\{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)\frac{1}{m}\right\}=o\left(\frac{x+1}{y_1}\right).$$

Следовательно, интеграл (6.4.8) равномерно сходится в каждом конечном интервале, и

$$\Psi(x) = o(x)$$

при $x \to \infty$. Кроме того, рассуждение, аналогичное применённому в предыдущем случае к $\Phi(x)$, показывает, что

$$\int_0^\lambda \Psi(x)\cos xy\,dx =$$
$$= o(\lambda) - \frac{1}{2}\int_{y+1}^{\to\infty} \frac{b(u)}{u^2}\left(\frac{1-\cos\lambda(u+y)}{u+y} + \frac{1-\cos\lambda(u-y)}{u-y}\right)du = o(\lambda)$$

при $\lambda \to \infty$. Доказательство завершается теперь, как в предыдущем случае.

Полученный результат можно формулировать также, как теорему, относящуюся непосредственно к интегральной формуле Фурье.

Теорема 119. *Пусть $f(x)$ интегрируема на каждом конечном интервале, и пусть*

$$\lim_{\mu\to\infty}\int_{-\mu}^{\mu} f(t)\cos xt\,dt, \qquad \lim_{\mu\to\infty}\int_{-\mu}^{\mu} f(t)\sin xt\,dt,$$

рассматриваемые как функции от x, имеют конечные значения для каждого x и интегрируемы на любом конечном интервале. Тогда

$$f(x) = \lim_{\lambda\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\lambda}^{\lambda}\left(1-\frac{|u|}{\lambda}\right)\left\{\lim_{\mu\to\infty}\int_{-\mu}^{\mu} f(t)\cos u(x-t)\,dt\right\}du.$$

6.7. Интегралы в комплексной форме. Для этой формы интегралов Фурье последний результат принимает следующий вид.

Теорема 120. *Пусть $F(y)$ интегрируема на каждом конечном интервале, и пусть*

$$\lim_{\lambda\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\lambda}^{\lambda} e^{-ixy}F(y)\,dy = f(x) \tag{6.7.1}$$

для всех значений x, где $f(x)$ почти всюду конечна и интегрируема на каждом конечном интервале. Тогда почти для всех y

$$F(y) = \lim_{\lambda\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\lambda}^{\lambda}\left(1-\frac{|x|}{\lambda}\right)e^{ixy}f(x)\,dx. \tag{6.7.2}$$

В частности, если $f(x) = 0$, то $F(y) = 0$ почти для всех значений y.

Действительно, так как

$$\int_{-\lambda}^{\lambda} e^{-ixy}F(y)\,dy = 2\int_0^\lambda \bigl\{[F(y)+F(-y)]\cos xy - i[F(y)-F(-y)]\sin xy\bigr\}\,dy,$$

то эта теорема эквивалентна теореме 118.

В случае $f(x) = 0$ утверждение теоремы можно доказать следующим простым способом[1]. Положим

$$F_1(x) = \int_0^x F(u)\,du.$$

Тогда

$$\int_{-\lambda}^{\lambda} e^{-ixy} F(y)\,dy = e^{-ix\lambda} F_1(\lambda) - e^{ix\lambda} F_1(-\lambda) + ix \int_{-\lambda}^{\lambda} e^{-ixy} F_1(y)\,dy.$$

Заменяя x на $-x$ и складывая, получаем

$$\int_{-\lambda}^{\lambda} F(y) \cos xy\,dy = [F_1(\lambda) - F_1(-\lambda)] \cos x\lambda + x \int_{-\lambda}^{\lambda} F_1(y) \sin xy\,dy.$$

Но в условии теоремы содержится, как частный случай, соотношение

$$F_1(\lambda) - F_1(-\lambda) = \int_{-\lambda}^{\lambda} F(y)\,dy \to 0$$

при $\lambda \to \infty$. Поэтому

$$\lim_{\lambda\to\infty} x \int_{-\lambda}^{\lambda} F_1(y) \sin xy\,dy = 0$$

и, значит,

$$\lim_{\lambda\to\infty} \int_0^{\lambda} [F_1(y) - F_1(-y)] \sin xy\,dy = 0$$

для $x \neq 0$ — из предыдущего соотношения, а для $x = 0$ — вследствие того, что подынтегральное выражение равно нулю.

Из теоремы 118 мы выводим, что

$$F_1(y) - F_1(-y) \equiv 0.$$

Но при этом теперь $b(y)$ ограничена, и требуемые свойства функции $\Psi(x)$ очевидны из её определения. Из последнего равенства, дифференцируя, получаем

$$F(y) + F(-y) \equiv 0.$$

Так как проведённое рассуждение равным образом применимо, если заменить $F(y)$ на $e^{i\xi y} F(y)$ с произвольным ξ, то

$$e^{i\xi y} F(y) + e^{-i\xi y} F(-y) \equiv 0$$

для всех y и ξ. Следовательно, $F(y) \equiv 0$.

---

[1] Offord (6).

Оффорд[1] доказал следующую замечательную теорему: *если* $F(y)$ *интегрируема на каждом конечном интервале, и интеграл* (6.7.1) *суммируем* $(C,1)$ *к нулю для всех* x, *т.е.*

$$\lim_{\lambda\to 0}\int_{-\lambda}^{\lambda}\left(1-\frac{|y|}{\lambda}\right)e^{-ixy}F(y)\,dy=0$$

для всех x, *то* $F(y)=0$ *почти для всех* y.

Эта теорема является наиболее «точной», как в том смысле, что наличие одной исключительной точки может быть достаточно для неверности утверждения теоремы, так и в том, что $(C,1)$ нельзя заменить на $(C,1+\delta)$ ни для какого положительного δ. Так,

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{ixu}\,du=0\quad (C,1)\quad (x\neq 0)$$

и

$$\int_{-\infty}^{\infty}ue^{ixu}\,du=0\quad (C,1+\delta)$$

для всех x.

6.8. Формула Парсеваля. Полученные результаты дают возможность доказать ещё одну теорему, относящуюся к формуле Парсеваля.

Предположим, что f и g — заданные функции, f принадлежит к $L(-\infty,\infty)$, G существует, в том или ином смысле, как трансформация Фурье функции g и принадлежит к $L(-\infty,\infty)$. Мы не имеем возможности применить теорему 35, так как не знаем, является ли g трансформацией Фурье функции G. Однако, имеет место следующая теорема.

Теорема 121. *Пусть* $f(x)\in L(-\infty,\infty)$, $g(x)$ *интегрируема на каждом конечном интервале, и пусть*

$$G(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\lim_{\lambda\to\infty}\int_{-\lambda}^{\lambda}e^{ixt}g(t)\,dt \tag{6.8.1}$$

для всех x, *причём* $G(x)$ *всюду конечна и принадлежит к* $L(-\infty,\infty)$. *Тогда имеет место равенство* (2.1.1).

Если $g(x)\to 0$ *при* $x\to\pm\infty$, *то сходимость в* (6.8.1) *может нарушаться для конечного числа значений* x.

Действительно, по теореме 120, $g(x)$ есть трансформация Фурье для $G(x)$, и требуемый результат следует из теоремы 35.

6.9. Другая теорема единственности. Мы докажем сейчас теорему единственности другого типа, в которой интеграл (6.4.1) не обязательно сходится, но зато выполняется некоторое дополнительное условие.

[1] Offord (7).

Теорема 122[1]. *Пусть* $e^{-yt}a(t)$, $e^{-yt}b(t)$ *принадлежат к* $L(0,\infty)$ *для всякого положительного* y, *и пусть функция*

$$U(x,y) = \int_0^\infty e^{-yt}[a(t)\cos xt + b(t)\sin xt]\,dt$$

ограничена для $y > 0$ *и всех* x. *Тогда предел*

$$\lim_{y\to 0} U(x,y) = f(x)$$

существует и конечен почти для всех значений x, *и*

$$a(t) = \frac{1}{\pi}\lim_{\lambda\to\infty}\int_{-\lambda}^{\lambda}\left(1 - \frac{|x|}{\lambda}\right)f(x)\cos xt\,dx,$$

$$b(t) = \frac{1}{\pi}\lim_{\lambda\to\infty}\int_{-\lambda}^{\lambda}\left(1 - \frac{|x|}{\lambda}\right)f(x)\sin xt\,dx$$

почти для всех значений t.

Доказательство. Пусть

$$\Phi(z) = \int_0^\infty e^{izt}[a(t) - ib(t)]\,dt$$

— аналитическая функция, вещественной частью которой служит функция $U(x,y)$, и пусть $\Psi(z) = e^{-\Phi(z)}$. Тогда $|\Psi(z)|$ ограничен сверху и снизу. Следовательно, по теореме 94, $\Psi(z)$ при $y \to 0$ стремится к конечному пределу, отличному от нуля, почти для всех значений x. Поэтому $\Phi(z)$, а значит, и $U(x,y)$ стремится к конечному пределу почти для всех x. Пусть $f(x)$ — предел $U(x,y)$. Для $y > 0$, $\eta > 0$ имеем

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}&\frac{\eta}{(\xi - x)^2 + \eta^2}\,U(x,y)\,dx = \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-yt}a(t)\,dt\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\eta\cos xt}{(\xi - x)^2 + \eta^2}\,dx + \\
&\qquad + \frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-yt}b(t)\,dt\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\eta\sin xt}{(\xi - x)^2 + \eta^2}\,dx = \\
&= \int_0^\infty e^{-yt}[a(t)e^{-\eta t}\cos\xi t + b(t)e^{-\eta t}\sin\xi t]\,dt = U(\xi, y + \eta),
\end{aligned}$$

где обращение порядка интегрирования законно в силу абсолютной сходимости. Переходя к пределу по $y \to 0$, в силу мажорированной сходимости получаем

$$U(\xi,\eta) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\eta}{(\xi - x)^2 + \eta^2}\,f(x)\,dx.$$

---

[1] Verblunsky (2).

По теореме 14, для каждого положительного y

$$
\begin{aligned}
e^{-yt}a(t) &= \frac{1}{\pi}\lim_{\lambda\to\infty}\int_{-\lambda}^{\lambda}\left(1-\frac{|x|}{\lambda}\right)U(x,y)\cos xt\,dx = \\
&= \frac{1}{\pi}\lim_{\lambda\to\infty}\frac{1}{\lambda}\int_{0}^{\lambda}d\xi\int_{-\xi}^{\xi}U(x,y)\cos xt\,dx
\end{aligned}
\tag{6.9.1}
$$

почти для всех значений t. Но

$$
\begin{aligned}
\int_{-\xi}^{\xi}U(x,y)\cos xt\,dx &= \frac{1}{\pi}\int_{-\xi}^{\xi}\cos xt\,dx\int_{-\infty}^{\infty}\frac{y}{(x-u)^2+y^2}\,f(u)\,du = \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(u)\,du\int_{-\xi}^{\xi}\frac{y\cos xt}{(x-u)^2+y^2}\,dx = \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}[f(u)+f(-u)]\,du\int_{0}^{\xi}\left(\frac{y\cos xt}{(x-u)^2+y^2}+\frac{y\cos xt}{(x+u)^2+y^2}\right)dx = \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\int_{0}^{\xi}\int_{0}^{\infty}-\int_{0}^{\xi}\int_{\xi}^{\infty}+\int_{\xi}^{\infty}\int_{0}^{\xi}\right) = \frac{1}{\pi}(J_1+J_2+J_3).
\end{aligned}
$$

Кроме того,

$$
\begin{aligned}
\int_{0}^{\infty}\left(\frac{y\cos xt}{(x-u)^2+y^2}+\frac{y\cos xt}{(x+u)^2+y^2}\right)dx &= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{y\cos xt}{(x-u)^2+y^2}\,dx = \\
&= \pi e^{-yt}\cos ut.
\end{aligned}
$$

Следовательно,

$$
J_1 = \pi e^{-yt}\int_{0}^{\xi}[f(u)+f(-u)]\cos ut\,du. \tag{6.9.2}
$$

Далее, по второй теореме о среднем значении,

$$
\left|\int_{\xi}^{\infty}\frac{y\cos xt}{(x+u)^2+y^2}\,dx\right| \leqslant \frac{2}{t}\,\frac{y}{(u+\xi)^2+y^2}\,,
$$

$$
\left|\int_{\xi}^{\infty}\frac{y\cos xt}{(x-u)^2+y^2}\,dx\right| \leqslant \frac{2}{t}\,\frac{y}{(u-\xi)^2+y^2}\,,
$$

и также

$$
\leqslant \int_{-\infty}^{\infty}\frac{y}{(x-u)^2+y^2}\,dx = \pi.
$$

Поэтому, если $|f(u)+f(-u)|\leqslant M$,

$$
\begin{aligned}
|J_2| &\leqslant \frac{2M}{t}\int_{0}^{\xi}\frac{y\,dx}{(x+\xi)^2+y^2}+\frac{2M}{t}\int_{0}^{\xi-\sqrt{y}}\frac{y\,dx}{(\xi-x)^2+y^2}+M\pi\int_{\xi-\sqrt{y}}^{\xi}dx = \\
&= \frac{2M}{t}\left(\operatorname{arctg}\frac{2\xi}{y}-\operatorname{arctg}\frac{\xi}{y}\right)+\frac{2M}{t}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{y}}-\operatorname{arctg}\frac{\xi}{\sqrt{y}}\right)+M\pi\sqrt{y}.
\end{aligned}
$$

Кроме того, если $u > \xi$,

$$\left|\int_0^\xi \frac{y\cos xt}{(x+u)^2+y^2}\,dx\right| \leqslant \frac{2}{t}\,\frac{y}{u^2+y^2}\,,$$

$$\left|\int_0^\xi \frac{y\cos xt}{(x-u)^2+y^2}\,dx\right| \leqslant \frac{2}{t}\,\frac{y}{(u-\xi)^2+y^2}$$

и также, как прежде,

$$\leqslant \pi.$$

Поэтому

$$|J_3| \leqslant \frac{2M}{t}\int_\xi^\infty \frac{y\,du}{u^2+y^2} + \frac{2M}{t}\int_{\xi+\sqrt{y}}^\infty \frac{y\,du}{(u-\xi)^2+y^2} + M\pi\int_\xi^{\xi+\sqrt{y}} du =$$
$$= \frac{2M}{t}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{\xi}{y}\right) + \frac{2M}{t}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{y}}\right) + M\pi\sqrt{y}.$$

Пусть y_1, y_2, ... — последовательность значений y, стремящаяся к нулю, и пусть E — множество тех значений t, для которых соотношение (6.9.1) не имеет места хотя бы для одного из этих значений y. Тогда E имеет меру 0. Пусть t — точка, не принадлежащая множеству E. Тогда мы можем выбрать столь малое $y = y_n$, чтобы доля J_2 и J_3 в (6.9.1) была меньше ε для всех $\lambda > 1$. При фиксированном же y получаем из (6.9.2), что

$$\left|e^{-yt}a(t) - e^{-yt}\frac{1}{\pi\lambda}\int_0^\lambda d\xi\int_0^\xi [f(u)+f(-u)]\cos ut\,du\right| < 2\varepsilon$$

для достаточно больших λ. Следовательно,

$$a(t) = \lim_{\lambda\to\infty}\frac{1}{\pi\lambda}\int_0^\lambda d\xi\int_0^\xi [f(u)+f(-u)]\cos ut\,du.$$

Аналогично доказывается соответствующий результат для $b(t)$.

6.10. Специальные свойства трансформаций Фурье. В этом параграфе мы рассмотрим некоторые специальные свойства синус- и косинус-трансформаций Фурье.

Теорема 123. *Пусть $f(x)$ не возрастает на $(0,\infty)$, интегрируема на $(0,1)$ и стремится к нулю при $x\to\infty$. Тогда $F_s(x) \geqslant 0$.*

Доказательство. Имеем

$$F_s(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\to\infty} f(y)\sin xy\,dy = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sum_{n=0}^\infty \int_{\frac{\pi n}{x}}^{\frac{\pi(n+1)}{x}} f(y)\sin xy\,dy.$$

В правой части стоит знакопеременный ряд с невозрастающими по абсолютной величине членами. Следовательно, его сумма неотрицательна.

Теорема 124. *Пусть $f(x)$ — ограниченная функция, монотонно убывающая до нуля при $x \to \infty$ и выпуклая снизу. Тогда $F_c(x)$ положительна и принадлежит к $L(0, \infty)$.*

Доказательство. Из условий теоремы следует, что $f(x)$ есть интеграл от своей производной $f'(x)$, которая неотрицательна, не убывает и стремится к пределу при $x \to \infty$; так как $f(x)$ ограничена, то предел этот равен нулю. Мы можем теперь произвести в косинус-интеграле Фурье интегрирование по частям. Это даёт

$$F_c(x) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{1}{x}\int_0^{\infty} f'(y)\sin xy\,dy,$$

что, по предыдущей теореме, положительно. Далее, мы можем теперь положить $x = 0$ в рассуждениях, проведённых при доказательстве теоремы 6, что даёт

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{\to 0}^{\to\infty} F_c(u)\,du = \frac{f(+0)}{2}\,.$$

Следовательно, $F_c(x) \in L(0, \infty)$.

Ни одна из этих теорем не остаётся верной при замене синус-трансформации на косинус-трансформацию и обратно. Так, если

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (0 \leqslant x \leqslant 1), \\ 0 & (x > 1), \end{cases}$$

то $F_c(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\sin x}{x}$, т.е. принимает значения обоих знаков. Если $f(x) = e^{-x}$, то $F_s(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{x}{1+x^2}$, т.е. положительна, но не принадлежит к $L(0, \infty)$. В действительности, если $F_s(x) \in L(0, \infty)$, то $f(x) \to 0$ как при $x \to 0$, так и при $x \to \infty$, и потому не может быть монотонной.

6.11. Построить монотонную функцию $f(x)$, для которой $F_c(x)$ *не* интегрируема на $(0, \infty)$, не так легко[1]. Чтобы сделать это, мы докажем сначала, что *существует функция*

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \lambda_n x$$

с $b_n \geqslant 0$, сходящимся рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ и расходящимся интегралом

$$\int_0^1 \frac{|\varphi(x)|}{x}\,dx.$$

Действительно,

[1]По поводу аналогичного результата для рядов см. Szidon (1).

$$\int_{1/\lambda_n}^{1} \frac{|\varphi(x)|}{x}\,dx \geqslant \int_{1/\lambda_n}^{1} b_n|\sin\lambda_n x|\frac{dx}{x} - \int_{1/\lambda_n}^{1}\left|\sum_{\nu=1}^{n-1} b_\nu \sin\lambda_\nu x\right|\frac{dx}{x} - \\ - \int_{1/\lambda_n}^{1}\left|\sum_{\nu=n+1}^{\infty} b_\nu \sin\lambda_\nu x\right|\frac{dx}{x} = J_1 - J_2 - J_3.$$

Но

$$J_1 = b_n \int_1^{\lambda_n}\left|\frac{\sin u}{u}\right| du > Ab_n \ln\lambda_n,$$

$$J_2 < \int_0^1 \sum_{\nu=1}^{n-1} b_\nu\lambda_\nu\,dx = \sum_{\nu=1}^{n-1} b_\nu\lambda_\nu,$$

$$J_3 < \int_{1/\lambda_n}^{1} \sum_{\nu=n+1}^{\infty} b_\nu \frac{dx}{x} = \ln\lambda_n \sum_{\nu=n+1}^{\infty} b_\nu.$$

Поэтому $J_3 < \frac{1}{2}J_1$, если $b_\nu = k^{-\nu}$ с достаточно большим k; и $J_1 \to \infty$, $J_2 = o(J_1)$, если, например, $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_n = 2^{\frac{\lambda_1+\ldots+\lambda_{n-1}}{b_n}}$. Таким образом, в этом случае

$$\int_{1/\lambda_n}^{1} \frac{|\varphi(x)|}{x}\,dx \to \infty,$$

что нам и требовалось.

Т е о р е м а 125. *Существует функция $f(x)$, непрерывная и монотонно убывающая до нуля при $x \to \infty$, и такая, что $F_c(x) \notin L(0,\infty)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Установим сначала аналогичный результат с невозрастающей функцией. Пусть $f(x) = c_n$ в $(a_{n-1}+\delta, a_n-\delta)$, где c_n монотонно $\to 0$, a_n монотонно $\to \infty$ и $0 < \delta < 1$; в остальных же интервалах $f(x)$ непрерывна и линейна. Тогда, выбирая $a_0 + \delta = 0$, имеем

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,F_c(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \int_{a_{n-1}+\delta}^{a_n-\delta} \cos xt\,dt + \\ + \sum_{n=1}^{\infty}\int_{a_n-\delta}^{a_n+\delta}\left(\frac{c_n+c_{n+1}}{2} + \frac{(c_n-c_{n+1})(a_n-t)}{2\delta}\right)\cos xt\,dt = \\ = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \frac{\sin(a_n-\delta)x - \sin(a_{n-1}+\delta)x}{x} + \sum_{n=1}^{\infty}\biggl(c_{n+1}\frac{\sin(a_n+\delta)x}{x} - \\ - c_n\frac{\sin(a_n-\delta)x}{x} + \frac{c_n-c_{n+1}}{2\delta x^2}[\cos(a_n-\delta)x - \cos(a_n+\delta)x]\biggr) = \\ = \frac{\sin\delta x}{\delta x^2}\sum_{n=1}^{\infty}(c_n-c_{n+1})\sin a_n x.$$

Но в силу леммы мы можем выбрать c_n и a_n так, чтобы интеграл

$$\int_0^1 \left| \sum_{n=1}^{\infty} (c_n - c_{n+1}) \sin a_n x \right| \frac{dx}{x}$$

был расходящимся, а тогда будет расходиться и $\int_0^1 |F_c(x)|\,dx$, так как $\dfrac{\sin\delta x}{\delta x} \to 1$ при $x \to 0$.

Мы можем теперь, очевидно, построить монотонно убывающую функцию $g(x)$, имеющую производные сколь угодно высоких порядков и такую, что $f(x) - g(x)$ принадлежит к $L(0,\infty)$. Тогда косинус-трансформация Фурье разности $f(x) - g(x)$ ограничена, и потому косинус-трансформация Фурье функции $g(x)$ не будет принадлежать к $L(0,\infty)$.

6.12. При некоторых специальных ограничениях функции $F_c(x)$ и $F_s(x)$ при $x \to 0$ или $x \to \infty$ или в том и другом случае асимптотически ведут себя как степени x. Приведём здесь две простейшие теоремы этого типа[1].

Т е о р е м а 126. *Пусть* $f(x) = \dfrac{\varphi(x)}{x^\alpha}$, *где* $0 < \alpha < 1$ *и* $\varphi(x)$ *имеет ограниченное изменение на* $(0,\infty)$. *Тогда*

$$F_c(x) \sim \varphi(+0)\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\Gamma(1-\alpha)\sin\frac{\pi\alpha}{2}\,x^{\alpha-1} \qquad (x\to\infty),$$
$$F_c(x) \sim \varphi(\infty)\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\Gamma(1-\alpha)\sin\frac{\pi\alpha}{2}\,x^{\alpha-1} \qquad (x\to 0).$$

$F_s(x)$ *удовлетворяет аналогичным условиям с заменой* $\sin\dfrac{\pi\alpha}{2}$ *на* $\cos\dfrac{\pi\alpha}{2}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Мы можем предполагать, что $\varphi(x)$ положительна и не возрастает на $(0,\infty)$. Рассмотрим случай $x\to\infty$. Имеем

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,F_c(x) = \int_0^\infty \frac{1}{t^\alpha}\,\varphi(t)\,\cos xt\,dt = x^{\alpha-1}\int_0^\infty \frac{1}{u^\alpha}\,\varphi\Big(\frac{u}{x}\Big)\cos u\,du =$$
$$= x^{\alpha-1}\left(\int_0^\Delta + \int_\Delta^\infty\right) = x^{\alpha-1}(I_1+I_2).$$

По второй теореме о среднем значении,

$$I_2 = \varphi\Big(\frac{\Delta}{x}\Big)\int_\Delta^{\Delta'} \frac{\cos u}{u^\alpha}\,du = O\Big(\frac{1}{\Delta^\alpha}\Big)$$

равномерно относительно x. Далее, при фиксированном Δ,

$$\int_0^\Delta \Big[\varphi(+0) - \varphi\Big(\frac{u}{x}\Big)\Big]\frac{\cos u}{u^\alpha}\,du =$$

[1] Titchmarsh (9).

$$= \left[\varphi(+0) - \varphi\left(\frac{\Delta}{x}\right)\right] \int_\delta^\Delta \frac{\cos u}{u^\alpha}\,du = O\left\{\varphi(+0) - \varphi\left(\frac{\Delta}{x}\right)\right\} = o(1),$$

и

$$\varphi(+0) \int_0^\Delta \frac{\cos u}{u^\alpha}\,du \to \varphi(+0) \int_0^\infty \frac{\cos u}{u^\alpha}\,du = \varphi(+0)\Gamma(1-\alpha)\sin\frac{\pi\alpha}{2}\,.$$

Тем самым требуемый результат доказан. Доказательство для случая $x \to 0$ аналогично.

Т е о р е м а 127. *Пусть $f(x)$ и $f'(x)$ интегрируемы на каждом ограниченном интервале, не имеющем своим концом точку $x = 0$. Пусть, далее, $x^{\alpha+1}f'(x)$ ограничено для всех x и $f(x) \sim \frac{1}{x^\alpha}$ при $x \to \infty$ $(x \to 0)$. Тогда при $x \to 0$ $(x \to \infty)$*

$$F_c(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\Gamma(1-\alpha)\sin\frac{\pi\alpha}{2}\,x^{\alpha-1}.$$

$F_s(x)$ удовлетворяет аналогичным условиям с заменой $\sin\frac{\pi\alpha}{2}$ на $\cos\frac{\pi\alpha}{2}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим случай $x \to \infty$. Имеем

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,F_c(x) = \int_0^\infty f(t)\cos xt\,dt = \int_0^{\Delta/x} + \int_{\Delta/x}^\infty = I_1 + I_2.$$

Далее,

$$I_2 = -f\left(\frac{\Delta}{x}\right)\frac{\sin\Delta}{x} - \frac{1}{x}\int_{\Delta/x}^\infty f'(t)\sin xt\,dt =$$
$$= O\left(\frac{x^{\alpha-1}}{\Delta^\alpha}\right) + \frac{1}{x}\int_{\Delta/x}^\infty O\left(\frac{1}{t^{\alpha+1}}\right)dt = O\left(\frac{x^{\alpha-1}}{\Delta^\alpha}\right).$$

Положим $m(\xi) = \max\limits_{x\leqslant\xi}|x^\alpha f(x) - 1|$, так что $m(\xi) \to 0$ при $\xi \to 0$. Имеем

$$I_1 = \int_0^{\Delta/x} \frac{\cos xt}{t^\alpha}\,dt + \int_0^{\Delta/x} [t^\alpha f(t) - 1]\frac{\cos xt}{t^\alpha}\,dt =$$
$$= x^{\alpha-1}\int_0^\Delta \frac{\cos u}{u^\alpha}\,du + O\left\{m\left(\frac{\Delta}{x}\right)\left(\frac{\Delta}{x}\right)^{1-\alpha}\right\} =$$
$$= x^{\alpha-1}\int_0^\infty \frac{\cos u}{u^\alpha}\,du + O\left(\frac{x^{\alpha-1}}{\Delta^\alpha}\right) + O\left\{m\left(\frac{\Delta}{x}\right)\left(\frac{\Delta}{x}\right)^{1-\alpha}\right\},$$

и выбирая Δ, а затем x достаточно большими, получаем требуемый результат.

Доказательство для случая $x \to 0$ аналогично.

6.13. Порядок убывания трансформаций Фурье. Существует ряд более или менее тривиальных результатов, относящихся к асимптотическому поведению трансформаций Фурье. Так, если $(1+|x|^n)f(x)$ принадлежит к $L(-\infty, \infty)$, то равенство

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt} f(t)\, dt$$

можно дифференцировать n раз. Отсюда следует, что все функции $F(x)$, $F'(x)$, $\ldots$, $F^{(n)}(x)$ непрерывны и стремятся к нулю при $x \to \pm\infty$.

Если $f(x)$, $f'(x)$, $\ldots$, $f^{(n-1)}(x)$ непрерывны и стремятся к нулю при $x \to \pm\infty$, а $f^{(n)}(x) \in L$, то повторное интегрирование по частям даёт

$$F(x) = \left(\frac{i}{x}\right)^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt} f^{(n)}(t)\, dt.$$

Следовательно, $x^n F(x) \to 0$ при $x \to \pm\infty$.

Аналогично, если $(1+|x|^n) f(x) \in L^2(-\infty, \infty)$, то функции $F(x)$, $F'(x)$, $\ldots$, $F^{(n-1)}(x)$ непрерывны и стремятся к нулю при $x \to \pm\infty$, а $F^{(n)}(x)$ принадлежит к $L^2(-\infty, \infty)$, и обратно.

Другие результаты этого рода содержались также в теореме 26.

В основе теоремы, излагаемой в настоящем параграфе, лежит та идея, что *функция и её трансформация Фурье одновременно не могут быть очень малы при стремлении аргумента к* $\pm\infty$ [1]. Точный результат таков:

Т е о р е м а 128. *Пусть $f(x)$ и $F_c(x)$ — пара косинус-трансформаций Фурье и пусть каждая из них есть $O(e^{-x^2/2})$ при $x \to \infty$. Тогда*

$$f(x) = F_c(x) = Ce^{-x^2/2}.$$

Мы используем следующую лемму.

Л е м м а. *Пусть $\varphi(z)$ — целая функция, такая, что $\varphi(z) = O(e^{-a|z|})$ для всех z и $\varphi(x) = O(e^{-ax})$ для вещественных положительных $x \to \infty$, где a — положительная постоянная. Тогда $\varphi(z) = Ce^{-az}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. По условию, существует постоянная C такая, что

$$|\varphi(x)| \leqslant Ce^{-ax}, \qquad |\varphi(re^{i\alpha})| \leqslant Ce^{ar},$$

где $0 < \alpha < \pi$. Поэтому, в силу теоремы Фрагмена и Линделёфа[2],

$$|\varphi(re^{i\theta})| \leqslant Ce^{rH(\theta)}, \qquad (0 \leqslant \theta \leqslant \alpha),$$

где

$$H(\theta) = \frac{-a\sin(\alpha-\theta) + a\sin\theta}{\sin\alpha} = a\frac{\sin\left(\theta - \frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}}\,.$$

Мы можем здесь зафиксировать значение θ и устремить α к π. Тогда

[1] Hardy (19), Ingham (1), Morgan (1); В и н е р и П э л и, Преобразование Фурье, § 19.

[2] См. Т и т ч м а р ш, Теория функций, § 5.7.1; положить в доказательстве $\delta = 0$.

$H(\theta) \to -a\cos\theta$ и, следовательно,

$$|\varphi(z)| \leqslant Ce^{-ar\cos\theta} \qquad (0 \leqslant \theta < \pi).$$

Аналогичным способом получаем то же неравенство для $-\pi < \theta \leqslant 0$; по непрерывности оно имеет место также для $\theta = \pi$. Таким образом, $e^{az}\varphi(z)$ есть ограниченная целая функция и, следовательно, тождественно равна постоянной.

Переходим теперь к доказательству теоремы. Имеем

$$F_c(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(t)\cos zt\,dt.$$

По условию, наложенному на $f(t)$, это есть чётная целая функция от z, и при $|z| = r$

$$|F_c(z)| \leqslant K \int_0^\infty e^{-t^2/2}\operatorname{ch} rt\,dt = Ke^{r^2/2}.$$

Поэтому $F_c(\sqrt{z})$ есть целая функция, удовлетворяющая условиям леммы с $a = \frac{1}{2}$, и следовательно,

$$F_c(\sqrt{z}) = Ce^{-z/2},$$
$$F_c(z) = Ce^{-z^2/2}.$$

Тогда, по хорошо известной формуле, тому же выражению равна и функция $f(z)$.

Аналогичным путём могут быть получены и более общие результаты. Предположим, например, что

$$f(x) = O(x^{2k}e^{-x^2/2}), \qquad F_c(x) = O(x^{2k}e^{-x^2/2}),$$

где k — целое число. Тогда $F_c(z)$ — чётная целая функция, и

$$|F_c(z)| < K \int_0^\infty e^{-t^2/2}t^{2k}\operatorname{ch} rt\,dt = K\,\frac{d^{2k}}{dr^{2k}}\int_0^\infty e^{-t^2/2}\operatorname{ch} rt\,dt =$$
$$= K\,\frac{d^{2k}}{dr^{2k}}\,e^{r^2/2} = O(r^{2k}e^{r^2/2}).$$

Положим $\varphi(z) = F_c(\sqrt{z})$. Тогда $\varphi(z)$ — целая функция и, при подходящем выборе коэффициентов $a_0, \ldots, a_{k-1}$, то же верно и для

$$\psi(z) = z^{-2k}\Big[\varphi(z) - (a_0 + a_1 z + \ldots + a_{k-1}z^{k-1})e^{-z/2}\Big].$$

Поэтому $\psi(z)$ удовлетворяет условиям леммы и, значит, равна $Ce^{-z/2}$. Следовательно,

$$F_c(z) = (a_0 + a_1 z^2 + \ldots + a_k z^{2k})e^{-z^2/2},$$

а $f(z)$ — другое выражение того же вида.

VII
ПРИМЕРЫ И ПРИМЕНЕНИЯ [1]

7.1. Косинус-трансформации Фурье. Приведём простые пары косинус-трансформаций Фурье:

$$\begin{cases} 1 & (0 < x < a), \\ 0, & (x > a), \end{cases} \qquad \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\sin ax}{x}\,, \tag{7.1.1}$$

$$\begin{cases} \cos x & (0 < x < a), \\ 0, & (x > a), \end{cases} \qquad \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{\sin a(1-x)}{1-x} + \frac{\sin a(1+x)}{1+x}\right), \tag{7.1.2}$$

$$\begin{cases} \sin x, & (0 < x < a), \\ 0, & (x > a), \end{cases} \qquad \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1-\cos a(1-x)}{1-x} + \frac{1-\cos a(1+x)}{1+x}\right), \tag{7.1.3}$$

$$e^{-x}, \qquad \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{1}{1+x^2}\,. \tag{7.1.4}$$

Вообще, косинус-трансформация Фурье любой чётной рациональной функции, регулярной на вещественной оси и равной $O\Big(\dfrac{1}{x^2}\Big)$ при $x \to \pm\infty$, может быть вычислена с помощью контурного интегрирования; в качестве примера укажем пару косинус-трансформаций

$$\frac{1}{1+x^4}\,, \qquad \sqrt{\frac{\pi}{2}}\; e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}} \sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{4}\right). \tag{7.1.5}$$

Другой хорошо известный приём контурного интегрирования даёт пару

$$\frac{1}{\operatorname{ch} \pi x}\,, \qquad \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\operatorname{ch}\frac{x}{2}}\,. \tag{7.1.6}$$

Далее, применяя теорему Кошн, получаем

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty e^{-x^2/2} \cos xu\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty e^{ixu - x^2/2}\, dx =$$

$$= \frac{e^{-u^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty e^{-(x-iu)^2/2}\, dx = \frac{e^{-u^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty e^{-\xi^2/2}\, d\xi = Ce^{-u^2/2}.$$

[1] Обширный список трансформаций Фурье приведён в книге Campbell and Foster, Fourier Integrals for Practical Applications.

Косинус-формула Фурье даёт тогда $C^2=1$, откуда $C=1$, так как $C>0$. Таким образом, получаем пару

$$e^{-x^2/2}, \qquad e^{-x^2/2}. \tag{7.1.7}$$

Все приведённые примеры принадлежат к L-классам.

Далее, косинус-трансформацией Фурье для $\cos\dfrac{x^2}{2}$ служит

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\to\infty}\cos\frac{y^2}{2}\cos xy\,dy=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\to-\infty}^{\to\infty}\cos\Bigl(\frac{y^2}{2}-xy\Bigr)dy=$$
$$=\left|\begin{matrix}\text{замена}\\ y=x+u\end{matrix}\right|=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\to-\infty}^{\to\infty}\cos\Bigl(\frac{x^2-u^2}{2}\Bigr)du=a\cos\frac{x^2}{2}+b\cos\frac{x^2}{2},$$

где a и b — некоторые постоянные, подлежащие определению. Аналогично, косинус-трансформацией Фурье для $\sin\dfrac{x^2}{2}$ служит $a\cos\dfrac{x^2}{2}-b\sin\dfrac{x^2}{2}$. Складывая и сравнивая, находим, что $a=b=\dfrac{1}{2a}$. Так как при этом

$$\int_0^{\to\infty}\sin\frac{u^2}{2}\,du=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\to\infty}\frac{\sin v}{\sqrt{v}}\,dv>0,$$

как показывает рассмотрение колебаний $\sin v$, то $a=b=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Таким образом, получаем пары

$$\cos\frac{x^2}{2}, \qquad \frac{1}{\sqrt{2}}\Bigl(\cos\frac{x^2}{2}+\sin\frac{x^2}{2}\Bigr), \tag{7.1.8}$$

$$\sin\frac{x^2}{2}, \qquad \frac{1}{\sqrt{2}}\Bigl(\cos\frac{x^2}{2}-\sin\frac{x^2}{2}\Bigr). \tag{7.1.9}$$

Вытекающие отсюда формулы Фурье дают примеры на теорему 11, случай (I).

Функция Бесселя ν-го порядка определяется формулой

$$J_\nu(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\Bigl(\dfrac{x}{2}\Bigr)^{\nu+2n}}{n!\,\Gamma(\nu+n+1)} \qquad (\nu>-1). \tag{7.1.10}$$

Имеем[1]

$$\int_0^1(1-y^2)^{\nu-\frac12}\cos xy\,dy=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}\int_0^1(1-y^2)^{\nu-\frac12}y^{2n}\,dy=$$
$$=\frac12\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\Gamma\Bigl(\nu+\frac12\Bigr)\Gamma\Bigl(n+\frac12\Bigr)}{(2n)!\,\Gamma(\nu+n+1)}\,x^{2n}=$$

[1] В а т с о н, Теория бесселевых функций, т. 1, § 3.3 (2). Эта книга будет в дальнейшем кратко цитироваться «В а т с о н».

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\Gamma\Big(\nu + \frac{1}{2}\Big)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n} n!\,\Gamma(\nu+n+1)}\,.$$

Таким образом, получаем пару косинус-трансформаций Фурье

$$\begin{cases} (1-x^2)^{\nu-\frac{1}{2}} & (0<x<1),\\ 0 & (x>1), \end{cases} \qquad 2^{\nu-\frac{1}{2}}\Gamma\Big(\nu+\frac{1}{2}\Big)x^{-\nu}J_\nu(x). \tag{7.1.11}$$

Эти функции принадлежат к L^2, если $\nu>0$, и к L^p, $L^{p'}$ соответственно, если $\frac{1}{p} > \frac{1}{2} - \nu$, $\nu > -\frac{1}{2}$.

Во всех рассмотренных случаях можно ввести параметр, основываясь на том, что косинус-трансформацией Фурье функции $f(\lambda x)$ служит $\frac{1}{\lambda}F_c\left(\frac{x}{\lambda}\right)$, и аналогично для синус-трансформаций.

7.2. Синус-трансформации Фурье. Простым примером служит пара

$$e^{-x}, \qquad \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{x}{1+x^2}\,. \tag{7.2.1}$$

Вообще, синус-трансформация Фурье любой нечётной рациональной функции, регулярной на вещественной оси и равной $O\Big(\frac{1}{x}\Big)$ при $x\to\pm\infty$, может быть вычислена с помощью контурного интегрирования.

Другие хорошо известные приёмы контурного интегрирования дают пары

$$\frac{1}{e^{x\sqrt{2\pi}}-1} - \frac{1}{x\sqrt{2\pi}}\,, \qquad \frac{1}{e^{x\sqrt{2\pi}}-1} - \frac{1}{x\sqrt{2\pi}}\,, \tag{7.2.2}$$

$$\frac{1}{\operatorname{sh}\Big(x\sqrt{\frac{\pi}{2}}\Big)} - \frac{1}{x\sqrt{\frac{\pi}{2}}}\,, \qquad \operatorname{th}\Big(x\sqrt{\frac{\pi}{2}}\Big) - 1. \tag{7.2.3}$$

Пара

$$xe^{-x^2/2}, \qquad xe^{-x^2/2} \tag{7.2.4}$$

может быть получена дифференцированием из (7.1.7). Далее[1],

$$\int_0^\infty \frac{\sin y}{y}\,\sin xy\,dy = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\cos(1-x)y - \cos(1+x)y}{y}\,dy = \frac{1}{2}\,\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|.$$

Поэтому имеем пару

$$\frac{\sin x}{x}\,, \qquad \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|. \tag{7.2.5}$$

Если $\nu > \frac{1}{2}$, то из (7.1.11) интегрированием по частям получаем пару

[1] Например, как в § 5.2.

$$\begin{cases} x(1-x^2)^{\nu-\frac{3}{2}} & (0<x<1), \\ 0 & (x>1), \end{cases} \qquad 2^{\nu-\frac{3}{2}}\Gamma\Big(\nu-\frac{1}{2}\Big)x^{1-\nu}J_\nu(x). \tag{7.2.6}$$

Функция Струве[1] порядка ν определяется формулой

$$\mathbf{H}_\nu(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\Big(\dfrac{x}{2}\Big)^{\nu+2n+1}}{\Gamma\Big(n+\dfrac{3}{2}\Big)\,\Gamma\Big(\nu+n+\dfrac{3}{2}\Big)} \qquad (\nu > -\tfrac{3}{2}). \tag{7.2.7}$$

Имеем

$$\int_0^1 (1-y^2)^{\nu-\frac{1}{2}} \sin xy\,dy = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \int_0^1 (1-y^2)^{\nu-\frac{1}{2}} y^{2n+1}\,dy =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\Gamma\Big(\nu+\dfrac{1}{2}\Big)\,n!}{(2n+1)!\,\Gamma\Big(\nu+n+\dfrac{3}{2}\Big)}\,x^{2n+1} =$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\Gamma\Big(\nu+\frac{1}{2}\Big)\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2^{2n}\Gamma\Big(n+\dfrac{3}{2}\Big)\,\Gamma\Big(\nu+n+\dfrac{3}{2}\Big)}\,.$$

Таким образом, получаем пару синус-трансформаций Фурье

$$\begin{cases} (1-x^2)^{\nu-\frac{1}{2}} & (0<x<1), \\ 0 & (x>1), \end{cases} \qquad 2^{\nu-\frac{1}{2}}\Gamma\Big(\nu+\frac{1}{2}\Big)x^{-\nu}\mathbf{H}_\nu(x). \tag{7.2.8}$$

7.3. Формулы Парсеваля. Мы получим простые примеры на формулы (2.1.4) и (2.1.6), выбирая в качестве f и g рациональные функции. Пусть, например, $f(x) = \dfrac{1}{x^2+a^2}$, $F_c(x) = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\,e^{-ax}$, и аналогично $g(x) = \dfrac{1}{x^2+b^2}$, $G_c(x) = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\,e^{-bx}$. Получаем

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} = \frac{\pi}{2}\int_0^\infty e^{-ax}e^{-bx}\,dx = \frac{\pi}{2(a+b)}\,. \tag{7.3.1}$$

В качестве примера другого типа пусть

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (0<x<a), \\ 0 & (x \geqslant a), \end{cases}$$

так что $F_c(x) = \dfrac{\sin ax}{x}$, и пусть g, G_c определены аналогично, с заменой a на b. Получаем

$$\int_0^\infty \frac{\sin ax \sin bx}{x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\min(a,b)} dx = \frac{\pi}{2}\,\min(a,b). \tag{7.3.2}$$

[1] В а т с о н, § 10.4.

Аналогично из (2.1.6) и (7.2.5), принимая во внимание (7.3.2), получаем

$$\int_0^\infty \ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| \ln\left|\frac{b+x}{b-x}\right| dx = 2\pi \int_0^\infty \frac{\sin ax \sin bx}{x^2}\, dx = \pi^2 \min(a, b); \tag{7.3.3}$$

тот же результат можно получить и непосредственно из теоремы 91. Все предыдущие формулы подходят под теорему 52.

Некоторые из известных формул для гамма-функции можно вывести из формулы Парсеваля[1]. Определим $\Gamma(a)$ формулой

$$\Gamma(a) = \int_0^\infty e^{-x} x^{a-1}\, dx \qquad (a > 0), \tag{7.3.4}$$

и пусть

$$c(a) = \int_0^\infty x^{a-1} \cos x\, dx \qquad (0 < a < 1), \tag{7.3.5}$$

$$s(a) = \int_0^\infty x^{a-1} \sin x\, dx \qquad (-1 < a < 1). \tag{7.3.6}$$

Тогда косинус-трансформацией Фурье для x^{a-1} служит

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty y^{a-1} \cos xy\, dy = x^{-a} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty u^{a-1} \cos u\, du = x^{-a} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, c(a).$$

Аналогично, синус-трансформацией Фурье для x^{a-1} служит $x^{-a}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\, s(a)$.

Можно показать с помощью контурного интегрирования или почленного интегрирования ряда, что

$$\int_0^\infty \frac{x^{-a}}{1+x^2}\, dx = \frac{\pi}{2\cos\frac{\pi a}{2}} \qquad (-1 < a < 1). \tag{7.3.7}$$

Положим в (2.1.4) $f(x) = e^{-x}$, $g(x) = x^{a-1}$. Мы получим, применяя, например, теорему 35 или теорему 37:

$$\Gamma(a) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{x^{-a}}{1+x^2}\, c(a)\, dx = \frac{c(a)}{\cos\frac{\pi a}{2}} \qquad (0 < a < 1). \tag{7.3.8}$$

Аналогично по формуле (2.1.6)

$$\Gamma(a) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{x^{1-a}}{1+x^2}\, s(a)\, dx = \frac{s(a)}{\sin\frac{\pi a}{2}} \qquad (0 < a < 1). \tag{7.3.9}$$

Далее, по выведенной выше формуле, косинус-трансформация Фурье функции $x^{-a}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\, c(a)$ равна

[1] См. Hardy (3).

$$x^{a-1}\,\frac{2}{\pi}\,c(a)c(1-a);$$

так как, согласно теореме 6, она также равна x^{a-1}, то, следовательно,

$$c(a)c(1-a)=\frac{\pi}{2}\qquad(0<a<1).\tag{7.3.10}$$

Аналогично

$$s(a)s(1-a)=\frac{\pi}{2}\qquad(0<a<1).\tag{7.3.11}$$

Соединяя (7.3.8) и (7.3.10), получаем

$$\Gamma(a)\Gamma(1-a)=\frac{c(a)c(1-a)}{\frac{1}{2}\sin\pi a}=\frac{\pi}{\sin\pi a}\,.\tag{7.3.12}$$

В частности,

$$c\Big(\frac{1}{2}\Big)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,,\quad s\Big(\frac{1}{2}\Big)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,,\quad \Gamma\Big(\frac{1}{2}\Big)=\sqrt{\pi}.\tag{7.3.13}$$

Одновременно мы получили пару косинус-трансформаций Фурье

$$x^{a-1},\qquad \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\Gamma(a)\cos\frac{\pi a}{2}\,x^{-a}\quad(0<a<1)\tag{7.3.14}$$

и пару синус-трансформаций Фурье

$$x^{a-1},\qquad \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\Gamma(a)\sin\frac{\pi a}{2}\,x^{-a}\quad(0<a<1).\tag{7.3.15}$$

7.4. Некоторые примеры, содержащие бесселевы функции. Из (2.1.4), (7.1.11) и (7.3.14) получаем[1]

$$\int_0^\infty J_\nu(x)x^{a-\nu-1}\,dx=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\Gamma(a)\cos\frac{\pi a}{2}}{2^{\nu-\frac{1}{2}}\Gamma\Big(\nu+\frac{1}{2}\Big)}\int_0^1(1-x^2)^{\nu-\frac{1}{2}}x^{-a}\,dx=$$

$$=\frac{\Gamma(a)\cos\frac{\pi a}{2}}{2^{\nu-1}\sqrt{\pi}\,\Gamma\Big(\nu+\frac{1}{2}\Big)}\,\frac{\Gamma\Big(\nu+\frac{1}{2}\Big)\Gamma\Big(\frac{1-a}{2}\Big)}{2\Gamma\Big(\nu-\frac{a}{2}+1\Big)}=\frac{2^{a-\nu-1}\Gamma\Big(\frac{a}{2}\Big)}{\Gamma\Big(\nu-\frac{a}{2}+1\Big)}\,.\tag{7.4.1}$$

При $\nu>-\frac{1}{2}$, $0<a<1$ это — случай теоремы 37, если выбрать

$$f(x)=\begin{cases}(1-x^2)^{\nu-\frac{1}{2}} & (0<x<1),\\ 0 & (x>1)\end{cases}$$

и $g(x)=x^{-a}$. На самом деле интеграл сходится при $0<a<\nu+\frac{3}{2}$, так что аналитическое продолжение даёт справедливость результата в более широкой области.

Аналогично из (2.1.6), (7.2.8) и (7.3.15) получаем[2]

---

[1] Ватсон, § 13.24 (1).

[2] Ватсон, § 13.24 (2).

$$\int_0^\infty \mathbf{H}_\nu(x)x^{a-\nu-1}\,dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\Gamma(a)\sin\dfrac{\pi a}{2}}{2^{\nu-\frac12}\Gamma\left(\nu+\dfrac12\right)}\int_0^1 \left(1-x^2\right)^{\nu-\frac12}x^{-a}\,dx =$$
$$= \frac{2^{a-\nu-1}\Gamma\left(\dfrac{a}{2}\right)\operatorname{tg}\dfrac{\pi a}{2}}{\Gamma\left(\nu-\dfrac{a}{2}+1\right)} \qquad (-1 < a < \nu+\tfrac32). \qquad (7.4.2)$$

В качестве примера на формулу (2.1.8) пусть $-\frac12 < \nu < 0$,

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\Gamma(2\nu+1)\cos\pi\nu\,|x|^{-2\nu-1}\operatorname{sgn}x, \qquad F(x) = -|x|^{2\nu}\operatorname{sgn}x$$

в силу (7.3.15), и

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{\left(1-x^2\right)^{\nu-\frac12}}{2^{\nu-\frac12}\Gamma\left(\nu+\dfrac12\right)} & (|x|<1),\\ 0 & (|x|>1), \end{cases} \qquad G(x) = |x|^{-\nu}J_\nu(|x|).$$

в силу (7.1.11). Тогда при $x \neq 1$

$$2\int_0^{\to\infty} t^\nu J_\nu(t)\sin xt\,dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\Gamma(2\nu+1)\cos\pi\nu}{2^{\nu-\frac12}\Gamma\left(\nu+\dfrac12\right)}\times$$
$$\times\int_{-1}^1 \left(1-u^2\right)^{\nu-\frac12}|x-u|^{-2\nu-1}\operatorname{sgn}(x-u)\,du. \qquad (7.4.3)$$

Справедливость этой формулы может быть доказана с помощью теоремы 37, с перестановкой f и g и заменой $g(u)$ на $g(u+x)$.

Если $x>1$, то интеграл в правой части равен[1]

$$\int_{-1}^1 \left(1-u^2\right)^{\nu-\frac12}(x-u)^{-2\nu-1}\,du = \frac{\Gamma^2\left(\nu+\dfrac12\right)}{\Gamma(2\nu+1)}\,\frac{2^{2\nu}}{(x^2-1)^{\nu+\frac12}}.$$

Если $0<x<1$, то интеграл равен нулю. В самом деле, рассмотрим

$$\int \left(1-w^2\right)^{\nu-\frac12}(x-w)^{-2\nu-1}\,dw.$$

Этот интеграл, взятый по окружности с центром в начале и радиусом R, стремится к нулю при $R\to\infty$. С другой стороны, сводя контур интегрирования к отрезку $(-1,1)$ вещественной оси, обходимому дважды, и принимая во внимание изменение значения подынтегрального выражения в точках -1, x и 1, мы получаем величину, кратную вычисленному выше интегралу.

---

[1] См. Титчмарш, Теория функций, гл. I, упр. 19. [Сделать подстановку $u = \dfrac{(2t-1)x+1}{2t-1+x}$. — *Прим. перев.*]

Таким образом, имеем пару синус-трансформаций Фурье[1]

$$x^\nu J_\nu(x), \qquad \begin{cases} \dfrac{2^{\nu+\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\dfrac{1}{2}-\nu\right)(x^2-1)^{\nu+\frac{1}{2}}} & (x>1), \\ 0 & (0<x<1). \end{cases} \tag{7.4.4}$$

На самом деле интеграл (7.4.3) сходится при $\nu < \frac{1}{2}$, и аналитическое продолжение даёт справедливость результата в более широкой области. Функции (7.4.4) принадлежат к L^p, $L^{p'}$, если

$$p > \frac{1}{\frac{1}{2}-\nu} \quad (\nu \geqslant 0), \qquad \frac{1}{\frac{1}{2}-\nu} < p < \frac{1}{2\nu} \quad (-\tfrac{1}{2} < \nu < 0). \tag{7.4.5}$$

Из равенства (2.1.6), обобщённого, как в (2.1.20) и (7.2.6), и (7.4.4), мы получаем при $0<a<b$:

$$\int_0^\infty (ax)^\mu J_\mu(ax)(bx)^{1-\nu} J_\nu(bx)\,dx =$$
$$= \frac{1}{ab}\int_a^b \frac{2^{\mu+\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\dfrac{1}{2}-\mu\right)}\left(\frac{x^2}{a^2}-1\right)^{-\mu-\frac{1}{2}} \frac{2^{\frac{3}{2}-\nu}}{\Gamma\left(\nu-\dfrac{1}{2}\right)}\,\frac{x}{b}\left(1-\frac{x^2}{b^2}\right)^{\nu-\frac{3}{2}} dx,$$

тогда как при $0<b\leqslant a$ левая часть равна нулю. Поэтому

$$\int_0^\infty x^{\mu-\nu+1} J_\mu(ax) J_\nu(bx)\,dx = \begin{cases} \dfrac{2^{\mu-\nu+1} a^\mu (b^2-a^2)^{\nu-\mu-1}}{\Gamma(\nu-\mu) b^\nu} & (0<a<b), \\ 0 & (a\geqslant b). \end{cases} \tag{7.4.6}$$

При $-\frac{1}{4}<\mu<0$ и $\nu>1$ справедливость этой формулы устанавливается с помощью теории трансформаций Фурье из класса L^2. Как обычно, результат сохраняет силу и в более широкой области.

Пусть теперь

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}, \qquad F(x) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{\pi}{2}} & (|x|<1), \\ 0 & (|x|>1), \end{cases}$$

и

$$g(x) = \begin{cases} J_0(x) & (x>0), \\ 0 & (x<0), \end{cases}$$

$$G(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty e^{ixy} J_0(x)\,dy = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi(1-x^2)}} & (|x|<1), \\ \dfrac{i\,\mathrm{sgn}\,x}{\sqrt{2\pi(x^2-1)}} & (|x|>1), \end{cases}$$

[1] Ватсон, § 6.13 (3).

в силу (7.1.11) и (7.4.4). Тогда (2.1.8) даёт[1]

$$\int_0^\infty J_0(t)\,\frac{\sin(x-t)}{x-t}\,dt = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{e^{-ixt}}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \int_0^1 \frac{\cos xt}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \frac{\pi}{2}\,J_0(x). \tag{7.4.7}$$

Здесь $f(x)$ и $G(x)$ принадлежат к L^p, если $1<p<2$.

Из (7.2.1), (7.4.4) и (2.1.6) выводим[2]

$$\int_0^\infty e^{-ax}x^\nu J_\nu(x)\,dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_1^\infty \frac{x}{a^2+x^2}\,\frac{2^{\nu+\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)(x^2-1)^{\nu+\frac{1}{2}}}\,dx =$$

$$= \frac{2^\nu}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)}\int_0^1 \frac{2^{\nu-\frac{1}{2}}}{(a^2u+1)(1-u)^{\nu+\frac{1}{2}}}\,du = \frac{2^\nu\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,(a^2+1)^{\nu+\frac{1}{2}}}. \tag{7.4.8}$$

Здесь теория трансформаций Фурье из L^p применима, если p удовлетворяет условию (7.4.5). В силу аналитического продолжения результат сохраняет силу, если $\nu > -\frac{1}{2}$.

7.5. Некоторые интегралы Рамануджана.[3] Пусть

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-\pi i u^2 - ixu}}{\operatorname{ch}\pi u}\,du. \tag{7.5.1}$$

Тогда

$$\varphi(x+\pi i)+\varphi(x-\pi i) = 2\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi i u^2 - ixu}\,du = 2e^{\frac{ix^2}{4\pi}-\frac{\pi i}{4}}. \tag{7.5.2}$$

Далее, в силу (7.1.8) и (7.1.9), трансформацией Фурье для $e^{-\pi i x^2}$ служит $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{\frac{ix^2}{4\pi}-\frac{\pi i}{4}}$, а трансформацией Фурье для $\frac{1}{\operatorname{ch}\pi x}$ служит $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\operatorname{ch}\frac{x}{2}}$. Поэтому, в силу (2.1.8),

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{\frac{i(x-u)^2}{4\pi}-\frac{\pi i}{4}}}{\operatorname{ch}\frac{u}{2}}\,du = e^{\frac{ix^2}{4\pi}-\frac{\pi i}{4}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{\pi i v^2 - ixv}}{\operatorname{ch}\pi v}\,dv.$$

Последний интеграл — того же типа, что и исходный, и мы можем применить к нему подход, использованный при выводе (7.5.2). Мы получим

$$e^{-\frac{i(x+\pi i)^2}{4\pi}}\varphi(x+\pi i)+e^{-\frac{i(x-\pi i)^2}{4\pi}}\varphi(x-\pi i) = 2e^{-\frac{\pi i}{4}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\pi i v^2 - ixv}\,dv = 2e^{-\frac{ix^2}{4\pi}},$$

[1] В а т с о н, § 13.55 (4).

[2] В а т с о н, § 13.2 (5).

[3] Ramanujan (2), (5), Watson (5).

т.е.

$$e^{\frac{x}{2}}\varphi(x+\pi i)+e^{-\frac{x}{2}}\varphi(x-\pi i)=2e^{-\frac{\pi i}{4}}. \tag{7.5.3}$$

Исключение $\varphi(x-\pi i)$ даёт

$$\left(e^{\frac{x}{2}}-e^{-\frac{x}{2}}\right)\varphi(x+\pi i)=2e^{-\frac{\pi i}{4}}\left(1-e^{\frac{ix^2}{4\pi}-\frac{x}{2}}\right), \tag{7.5.4}$$

и, заменяя x на $x-\pi i$, мы получаем

$$\varphi(x)=\frac{e^{\frac{\pi i}{4}}-ie^{\frac{ix^2}{4\pi}}}{\operatorname{ch}\frac{x}{2}}. \tag{7.5.5}$$

Отделяя вещественную и мнимую части, получаем формулы

$$\int_0^\infty \frac{\cos\pi u^2\,\cos xu}{\operatorname{ch}\pi u}\,du=\frac{\sin\frac{x^2}{4\pi}+\frac{1}{\sqrt{2}}}{2\operatorname{ch}\frac{x}{2}}, \tag{7.5.6}$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin\pi u^2\,\cos xu}{\operatorname{ch}\pi u}\,du=\frac{\cos\frac{x^2}{4\pi}-\frac{1}{\sqrt{2}}}{2\operatorname{ch}\frac{x}{2}}. \tag{7.5.7}$$

Аналогичные интегралы со знаменателем $\operatorname{sh}\pi u$ могут быть либо вычислены тем же путём, либо выведены из только что полученных следующим образом. Имеем

$$\varphi(x+\pi i)=\int_{-\infty}^\infty e^{-\pi iu^2-ixu}\frac{e^{\pi u}}{\operatorname{ch}\pi u}\,du=\int_{-\infty}^\infty e^{-\pi iu^2-ixu}(1+\operatorname{th}\pi u)\,du=$$
$$=e^{\frac{ix^2}{4\pi}-\frac{\pi i}{4}}-2i\int_0^\infty e^{-\pi iu^2}\sin xu\,\operatorname{th}\pi u\,du. \tag{7.5.8}$$

Но, в силу (7.5.4),

$$\varphi(x+\pi i)-e^{\frac{ix^2}{4\pi}-\frac{\pi i}{4}}=e^{-\frac{\pi i}{4}}\left(\frac{1-e^{\frac{ix^2}{4\pi}-\frac{x}{2}}}{\operatorname{sh}\frac{x}{2}}-e^{\frac{ix^2}{4\pi}}\right)=\frac{e^{-\frac{\pi i}{4}}}{\operatorname{sh}\frac{x}{2}}\left(1-e^{\frac{ix^2}{4\pi}}\operatorname{ch}\frac{x}{2}\right).$$

Кроме того,

$$\operatorname{th}\pi u=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\frac{\sin uv}{\operatorname{sh}\frac{v}{2}}\,dv.$$

Поэтому второй член в правой части формулы (7.5.8) равен

$$-\frac{2i}{\pi}\int_0^\infty e^{-\pi iu^2}\sin xu\,du\int_0^\infty\frac{\sin uv}{\operatorname{sh}\frac{v}{2}}\,dv=$$
$$=-\frac{2i}{\pi}\int_0^\infty\frac{dv}{\operatorname{sh}\frac{v}{2}}\int_0^\infty e^{-\pi iu^2}\sin xu\,\sin vu\,du=$$

$$= -\frac{1}{\pi} e^{\frac{ix^2}{4\pi} - \frac{\pi i}{4}} \int_0^\infty \frac{e^{\frac{iv^2}{4\pi}} \sin \dfrac{xv}{2\pi}}{\operatorname{sh} \dfrac{v}{2}}\, dv = -2e^{\frac{ix^2}{4\pi} - \frac{\pi i}{4}} \int_0^\infty \frac{e^{\pi i y^2} \sin xy}{\operatorname{sh} \pi y}\, dy.$$

Следовательно,

$$\int_0^\infty \frac{e^{\pi i y^2} \sin xy}{\operatorname{sh} \pi y}\, dy = \frac{\operatorname{ch} \dfrac{x}{2} - e^{-\frac{ix^2}{4\pi}}}{2 \operatorname{sh} \dfrac{x}{2}},$$

т.е.

$$\int_0^\infty \frac{\cos \pi y^2 \, \sin xy}{\operatorname{sh} \pi y}\, dy = \frac{\operatorname{ch} \dfrac{x}{2} - \cos \dfrac{x^2}{4\pi}}{2 \operatorname{sh} \dfrac{x}{2}}, \tag{7.5.9}$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin \pi y^2 \, \sin xy}{\operatorname{sh} \pi y}\, dy = \frac{\sin \dfrac{x^2}{4\pi}}{2 \operatorname{sh} \dfrac{x}{2}}. \tag{7.5.10}$$

7.6. Некоторые формулы, содержащие гамма-функцию[1]. Формула

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{ixt} \cos^{a-2} t\, dt = \frac{\pi \Gamma(a-1)}{2^{a-2} \Gamma\left(\dfrac{a+x}{2}\right) \Gamma\left(\dfrac{a-x}{2}\right)} \quad (a > 1) \tag{7.6.1}$$

может быть получена путём вычисления интеграла

$$\int \left(w + \frac{1}{w}\right)^{a-2} w^{x-1}\, dw,$$

взятого по контуру, образованному отрезком мнимой оси, соединяющим точки $-i$, i, и правой половиной единичной окружности.

Двойственной является формула

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{-ixt}}{\Gamma\left(\dfrac{a+x}{2}\right) \Gamma\left(\dfrac{a-x}{2}\right)}\, dx = \begin{cases} \dfrac{2^{a-1} \cos^{a-2} t}{\Gamma(a-1)} & \left(|t| < \dfrac{\pi}{2}\right), \\ 0 & \left(|t| \geqslant \dfrac{\pi}{2}\right), \end{cases} \tag{7.6.2}$$

или, полагая $a = \alpha + \beta$, $x = 2u + \alpha - \beta$, $t = \dfrac{y}{2}$,

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{-iuy}}{\Gamma(\alpha + u) \Gamma(\beta - u)}\, du = \begin{cases} \dfrac{\left(2 \cos \dfrac{y}{2}\right)^{\alpha+\beta-2} e^{\frac{iy(\alpha-\beta)}{2}}}{\Gamma(\alpha+\beta-1)} & (|y| < \pi), \\ 0 & (|y| \geqslant \pi). \end{cases} \tag{7.6.3}$$

[1] Ramanujan (4), (6).

Здесь
$$F(u)=\frac{1}{\Gamma(\alpha+u)\Gamma(\beta-u)}=O(|u|^{1-\alpha-\beta})$$
при $u\to\pm\infty$. Функции $F(u)$, $f(y)$, связанные соотношением (7.6.3), при $\alpha+\beta>2$ принадлежат обе к L^p $(p\geqslant 1)$; при $1<\alpha+\beta\leqslant 2$ они принадлежат к L^p, $L^{p'}$ соответственно, где $p(\alpha+\beta-1)>1$. В последнем случае интеграл (7.6.3) — не абсолютно сходящийся, как это можно проверить либо с помощью асимптотических выражений для гамма-функций, либо на основании теоремы 59 и её распространения на класс L^p.

В частности, при $y=0$ получаем
$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{du}{\Gamma(\alpha+u)\Gamma(\beta-u)}=\frac{2^{\alpha+\beta-2}}{\Gamma(\alpha+\beta-1)}\qquad(\alpha+\beta>1).\tag{7.6.4}$$
Так как
$$\frac{\sin\pi m u}{\sin\pi u}=e^{i(m-1)\pi u}+e^{i(m-2)\pi u}+\ldots+e^{-i(m-1)\pi u},$$
то (7.6.3) с $\alpha=\beta$ даёт:
$$\int_0^{\infty}\frac{\sin\pi m u}{\sin\pi u}\,\frac{du}{\Gamma(\alpha+u)\Gamma(\alpha-u)}=\begin{cases}\dfrac{2^{2\alpha-3}}{\Gamma(2\alpha-1)} & (m\text{ — нечётное}),\\ 0 & (m\text{ — чётное}).\end{cases}\tag{7.6.5}$$
В частности, при $\alpha=n+1$ (где n — целое) получаем
$$\int_0^{\infty}\frac{\sin\pi m u\,du}{u\left(1-\frac{u^2}{1^2}\right)\left(1-\frac{u^2}{2^2}\right)\ldots\left(1-\frac{u^2}{n^2}\right)}=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}\,\dfrac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!} & (m\text{ — нечётное}),\\ 0 & (m\text{ — чётное}).\end{cases}\tag{7.6.6}$$
Далее, положим в (2.1.1)
$$F(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha+x)\Gamma(\beta-x)},\qquad G(x)=\frac{1}{\Gamma(\gamma+x)\Gamma(\delta-x)}.$$
Тогда, в силу (7.6.3), при $\alpha+\beta+\gamma+\delta>3$ получаем
$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{\Gamma(\alpha+x)\Gamma(\beta-x)\Gamma(\gamma+x)\Gamma(\delta-x)}=$$
$$=\frac{1}{2\pi}\,\frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta-1)\Gamma(\gamma+\delta-1)}\int_{-\pi}^{\pi}\left(2\cos\frac{y}{2}\right)^{\alpha+\beta+\gamma+\delta-4}e^{\frac{iy}{2}(\alpha-\beta-\gamma+\delta)}dy=$$
$$=\frac{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+\delta-3)}{\Gamma(\alpha+\beta-1)\Gamma(\gamma+\delta-1)\Gamma(\alpha+\delta-1)\Gamma(\beta+\gamma-1)},\tag{7.6.7}$$
применяя снова (7.6.1). Здесь F и g принадлежат к L^p, если $2-\gamma-\delta<\dfrac{1}{p}<\alpha+\beta-1$.

Формула (2.1.8) с теми же функциями и $x=\pi$, $\alpha+\delta=\beta+\gamma$ даёт

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\pi i x}}{\Gamma(\alpha+x)\Gamma(\beta-x)\Gamma(\gamma+x)\Gamma(\delta-x)}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\,\frac{e^{\frac{\pi i}{2}(\alpha-\beta)}}{\Gamma(\alpha+\beta-1)\Gamma(\gamma+\delta-1)} \int_0^{\pi} \left(2\cos\frac{y}{2}\right)^{\alpha+\beta-2} \left(2\sin\frac{y}{2}\right)^{\gamma+\delta-2} dy =$$

$$= \frac{e^{\frac{\pi i}{2}(\alpha-\beta)}}{2\Gamma\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\gamma+\delta}{2}\right)\Gamma(\alpha+\delta-1)}\,. \tag{7.6.8}$$

В частности,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos\pi x}{\Gamma^2(\alpha+x)\Gamma^2(\alpha-x)}\,dx = \frac{1}{4\Gamma(2\alpha-1)\Gamma^2(\alpha)}\,. \tag{7.6.9}$$

Тем же путём могут быть вычислены и некоторые другие интегралы. Так, если $2(\alpha-\beta)=\gamma-\delta$, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\pi i x}}{\Gamma(\alpha+x)\Gamma(\beta-x)\Gamma(\gamma+2x)\Gamma(\delta-2x)}\,dx =$$

$$= \frac{2^{\alpha+\beta+\gamma+\delta-5} e^{\frac{\pi i}{2}(\beta-\alpha)}\Gamma\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma+\delta-3}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\Gamma(\gamma+\delta-1)\Gamma(2\alpha+\delta-2)}\,. \tag{7.6.10}$$

Если $\alpha+\beta+\gamma+\delta=4$, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos\pi(x+\beta+\gamma)}{\Gamma(\alpha+x)\Gamma(\beta-x)\Gamma(\gamma+2x)\Gamma(\delta-2x)}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2\Gamma(\gamma+\delta-1)\Gamma(2\alpha+\delta-2)\Gamma(2\beta+\gamma-2)}\,. \tag{7.6.11}$$

Если $2(\alpha-\beta)=\gamma-\delta+k$, где k есть ±1 или ±2, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin\pi(2x+\alpha-\beta)}{\Gamma(\alpha+x)\Gamma(\beta-x)\Gamma(\gamma+2x)\Gamma(\delta-2x)}\,dx =$$

$$= \pm\frac{2^{2\alpha-\gamma-3}}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\beta+\gamma-\alpha+\frac{1}{2}\right)\Gamma(2\alpha+\delta-2)}\,. \tag{7.6.12}$$

Если $3(\alpha-\beta)=\gamma-\delta+k$, где k есть ±1 или ±2, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin\pi(2x+\alpha-\beta)}{\Gamma(\alpha+x)\Gamma(\beta-x)\Gamma(\gamma+3x)\Gamma(\delta-3x)}\,dx =$$

$$= \pm\frac{3^{3\alpha+\delta-4}\Gamma(2\alpha-\beta+\delta-2)}{4\pi\Gamma(\gamma+\delta-1)\Gamma(3\alpha+\delta-3)}\,. \tag{7.6.13}$$

Во всех случаях знак правой части совпадает со знаком k.

Возьмём теперь некоторые интегралы аналогичного вида, но с гамма-функциями в числителе. Рассмотрим

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+x)}{\Gamma(\beta+x)}\, e^{ixt}\, dx = \left| \begin{array}{c} \text{при} \\ \operatorname{Im}\alpha < 0 \end{array} \right| = \\ = \pi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(\beta+x)\Gamma(1-\alpha-x)}\, \frac{e^{ixt}}{\sin\pi(\alpha+x)}\, dx. \qquad (7.6.14)$$

Так как

$$\frac{1}{\sin\pi(\alpha+x)} = \frac{2i}{e^{\pi i(\alpha+x)} - e^{-\pi i(\alpha+x)}} = 2i \sum_{m=0}^{\infty} e^{-\pi i(2m+1)(\alpha+x)},$$

то

$$I = 2\pi i \sum_{m=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ixt-\pi i(2m+1)(\alpha+x)}}{\Gamma(\beta+x)\Gamma(1-\alpha-x)}\, dx.$$

Но в правой части стоят интегралы вида (7.6.3) с $y = (2m+1)\pi - t$. Следовательно, $I = 0$ при $t \leqslant 0$. Если $t > 0$, то единственным отличным от нуля интегралом в правой части является интеграл с $m = \left[\dfrac{t}{2\pi}\right]$; таким образом, значение I может быть получена из формулы (7.6.3).

Мы можем теперь вычислить

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(\alpha+x)\Gamma(\beta-x)\, e^{ixt}\, dx. \qquad (7.6.15)$$

При $\operatorname{Im}\beta < 0$ этот интеграл равен

$$\pi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+x)}{\Gamma(1-\beta+x)}\, \frac{e^{ixt}}{\sin\pi(\beta-x)}\, dx = \\ = 2\pi i \sum_{m=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+x)}{\Gamma(1-\beta+x)}\, e^{ixt-\pi i(2m+1)(\beta-x)}\, dx.$$

Таким образом, интеграл (7.6.15) может быть выражен через (7.6.14).

Полученные результаты могут быть использованы для вычисления некоторых интегралов, содержащих бесселевы функции, порядок которых служит переменной интегрирования[1]. Применяя (7.6.4), имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{J_{\mu+x}(a)}{a^{\mu+x}}\, \frac{J_{\nu-x}(b)}{b^{\nu-x}}\, dx = \\ = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+n}}{m!\, n!}\, \frac{a^{2m} b^{2n}}{2^{\mu+\nu+2m+2n}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\Gamma(\mu+x+m+1)\Gamma(\nu-x+n+1)} =$$

[1] В а т с о н, § 13.8.

$$= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+n}}{m!\,n!}\,\frac{a^{2m}b^{2n}}{2^{\mu+\nu+2m+2n}}\,\frac{2^{\mu+\nu+m+n}}{\Gamma(\mu+\nu+m+n+1)} =$$
$$= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{2^r\Gamma(\mu+\nu+r+1)} \sum_{m=0}^{r} \frac{a^{2m}b^{2r-2m}}{m!\,(r-m)!} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r(a^2+b^2)^r}{2^r\Gamma(\mu+\nu+r+1)\,r!},$$

т.е.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{J_{\mu+x}(a)}{a^{\mu+x}}\,\frac{J_{\nu-x}(b)}{b^{\nu-x}}\,dx = \frac{J_{\mu+\nu}\{\sqrt{2(a^2+b^2)}\}}{\left(\frac{a^2+b^2}{2}\right)^{\frac{\mu+\nu}{2}}}. \tag{7.6.16}$$

В частности,

$$\int_{-\infty}^{\infty} J_{\mu+x}(a)J_{\nu-x}(a)\,dx = J_{\mu+\nu}(2a). \tag{7.6.17}$$

Значения соответствующих интегралов, содержащих множитель e^{inx}, могут быть выведены аналогичным способом из (7.6.3).

7.7. Трансформации Меллина. Простейший пример пары трансформаций Меллина представляют

$$f(x) = e^{-x}, \qquad \mathfrak{F}(s) = \Gamma(s) \quad (\sigma > 0). \tag{7.7.1}$$

Здесь $f(x)x^{k-1}$ принадлежит к $L(0,\infty)$, если $k>0$, а $\mathfrak{F}(s)$ принадлежит к $L(k-i\infty, k+i\infty)$ для $k>0$.

Другими простыми примерами служат

$$\begin{cases} 1 & (x<a), \\ 0 & (x \geqslant a), \end{cases} \qquad \frac{a^s}{s} \quad (\sigma>0), \tag{7.7.2}$$
$$\begin{cases} \ln\dfrac{a}{x} & (x<a), \\ 0 & (x \geqslant a), \end{cases} \qquad \frac{a^s}{s^2} \quad (\sigma>0), \tag{7.7.3}$$
$$\frac{1}{e^x-1}, \qquad \Gamma(s)\zeta(s) \quad (\sigma>1), \tag{7.7.4}$$
$$\frac{1}{e^x+e^{-x}}, \qquad \Gamma(s)L(s) \quad (\sigma>0), \tag{7.7.5}$$

где функция $L(s)$ определена формулой (9.12.1). Здесь $f(x)x^{k-1}$ для $k>0$ принадлежит к $L(0,\infty)$ во всех случаях, за исключением (7.7.4), где эта функция принадлежит к $L(0,\infty)$ для $k>1$.

Заметим также, что если $f(x)$ и $\mathfrak{F}(s)$ есть пара трансформаций Меллина, то такими же парами будут $x^\lambda f(x)$ и $\mathfrak{F}(s+\lambda)$, а также $f(x^\alpha)$ и $\frac{1}{\alpha}\,\mathfrak{F}\left(\frac{s}{\alpha}\right)$. Это позволяет во всех случаях вводить параметры.

Рассмотрим теперь интеграл

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{k-i\infty}^{k+i\infty} \frac{\Gamma(s)\Gamma(a-s)\Gamma(b-s)}{\Gamma(c-s)} \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} z^{-s}\, ds, \tag{7.7.6}$$

где $\operatorname{Re} a > 0$, $\operatorname{Re} b > 0$, c отлично от $0, -1, \ldots$ и $0 < k < \min(\operatorname{Re} a, \operatorname{Re} b)$.

Так как

$$\frac{\Gamma(s)\Gamma(a-s)\Gamma(b-s)}{\Gamma(c-s)} = O(e^{-\pi|t|}|t|^{\operatorname{Re}(a+b-c)-1}), \qquad |z^{-s}| = r^{-\sigma} e^{\theta t},$$

то интеграл (7.7.6) представляет аналитическую функцию от z, регулярную для $r>0$, $-\pi<\theta<\pi$. Если $z=x$, где $0<x<1$, то этот интеграл может быть вычислен путём смещения контура интегрирования влево до бесконечности и нахождения вычетов в $s = 0, -1, \ldots$. Мы получим

$$f(x) = 1 - \frac{ab}{c \cdot 1!}\, x + \frac{a(a+1)\cdot b(b+1)}{c(c+1)\cdot 2!}\, x^2 - \ldots = F(a, b; c; -x),$$

где мы пользуемся обычным обозначением, принятым для гипергеометрических рядов. Поэтому функция $f(x)$ для $x>1$ есть аналитическое продолжение ряда $F(a, b; c; -x)$ (и может быть, конечно, выражена в виде суммы гипергеометрических рядов с помощью другого перемещения контура интегрирования). Мы получаем, таким образом, пары трансформаций Меллина

$$f(x) = F(a, b; c; -x), \qquad \mathfrak{F}(s) = \frac{\Gamma(s)\Gamma(a-s)\Gamma(b-s)}{\Gamma(c-s)} \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}$$
$$\big(0 < \sigma < \min(\operatorname{Re} a, \operatorname{Re} b)\big). \tag{7.7.7}$$

Частными случаями являются:

$$\frac{1}{1+x}, \qquad \frac{\pi}{\sin \pi s} \qquad (0 < \sigma < 1), \tag{7.7.8}$$

$$\frac{1}{(1+x)^a}, \qquad \frac{\Gamma(s)\Gamma(a-s)}{\Gamma(a)} \qquad (0 < \sigma < \operatorname{Re} a), \tag{7.7.9}$$

$$\frac{\ln(1+x)}{x}, \qquad \frac{\pi}{(1-s)\sin \pi s} \qquad (0 < \sigma < 1), \tag{7.7.10}$$

$$\frac{1}{(1+x)^m} P_{m-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right), \qquad \frac{\Gamma(s)\Gamma^2(m-s)}{\Gamma(1-s)\Gamma^2(m)} \qquad (0 < \sigma < m), \tag{7.7.11}$$

где $P_n(x)$ — полином Лежандра n-го порядка.

Во всех этих случаях $\mathfrak{F}(\sigma + it)$ принадлежит к $L(-\infty, \infty)$ для указанной области значений σ. В случаях (7.7.8), (7.7.9) и (7.7.10) легко доказать, что интеграл

$$\int_0^\infty f(x)x^{s-1}\,dx \tag{7.7.12}$$

равен $\mathfrak{F}(s)$.

Другой парой трансформаций Меллина того же типа является

$$f(x) = \frac{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)^a}{\sqrt{x^2+1}}, \quad \mathfrak{F}(s) = \frac{\Gamma(s)\Gamma\left(\dfrac{1+a-s}{2}\right)}{2^s\Gamma\left(\dfrac{1+a+s}{2}\right)} \quad (0<\sigma<\operatorname{Re}a+1). \tag{7.7.13}$$

Здесь интеграл (7.7.12) может быть вычислен с помощью подстановки

$$x = \frac{y}{2\sqrt{y+1}}\,.$$

Ещё один класс трансформаций Меллина представляют функция

$$\begin{cases} (1-x)^{a-1} & (0<x<1), \\ 0 & (x\geqslant 1), \end{cases} \qquad \frac{\Gamma(s)\Gamma(a)}{\Gamma(s+a)} \quad (\sigma>0, \operatorname{Re}a>0), \tag{7.7.14}$$

$$\begin{cases} 0 & (0<x\leqslant 1), \\ (x-1)^{-a} & (x>1), \end{cases} \qquad \frac{\Gamma(a-s)\Gamma(1-a)}{\Gamma(1-s)} \quad (\sigma<\operatorname{Re}a<1), \tag{7.7.15}$$

$$\left.\begin{aligned} &\begin{cases} 0 & (0<x\leqslant 1), \\ \dfrac{(x-\sqrt{x^2-1})^a+(x-\sqrt{x^2-1})^{-a}}{\sqrt{x^2-1}} & (x>1), \end{cases} \\ &\frac{\Gamma\left(\dfrac{1+a-s}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{1-a-s}{2}\right)}{2^s\Gamma(1-s)} \qquad (\sigma<|\operatorname{Re}a|+1), \end{aligned}\right\} \tag{7.7.16}$$

$$\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|, \qquad \frac{\pi}{s}\operatorname{tg}\frac{\pi s}{2} \quad (-1<\sigma<1). \tag{7.7.17}$$

Во всех этих случаях $f(x)$ представляет различные аналитические функции при $0<x<1$ и при $x>1$, а $x^{k-1}f(x)$ принадлежит к $L(0,\infty)$ для некоторого k. В случаях (7.7.14) и (7.7.15) интеграл (7.7.12) вычисляется непосредственно. Для (7.7.16) делаем подстановку $x=\dfrac{1}{2}\left(y+\dfrac{1}{y}\right)$. Для (7.7.17) имеем

$$\int_0^1 \ln\frac{1+x}{1-x}\,x^{s-1}\,dx = 2\int_0^1\left(x+\frac{x^3}{3}+\ldots\right)x^{s-1}\,dx = \\ = 2\left(\frac{1}{1+s}+\frac{1}{3(3+s)}+\ldots\right),$$

$$\int_1^\infty \ln\frac{1+x}{1-x}\,x^{s-1}\,dx = \int_0^1 \ln\frac{1+u}{1-u}\,u^{1-s}\,\frac{du}{u^2} = 2\left(\frac{1}{1-s}+\frac{1}{3(3-s)}+\ldots\right),$$

и

$$\mathfrak{F}(s) = 4\left(\frac{1}{1^2-s^2}+\frac{1}{3^2-s^2}+\ldots\right) = \frac{\pi}{s}\,\operatorname{tg}\frac{\pi s}{2}\,.$$

7.8. Дальнейшие формулы, содержащие гамма-функции. Положим в (2.1.12) $f(x)=x^a e^{-x}$, $\mathfrak{F}(s)=\Gamma(s+a)$, $g(x)=x^{b-1}e^{-x}$, $\mathfrak{G}(s)= =\Gamma(s+b-1)$. Тогда при $-a<k<b$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{k-i\infty}^{k+i\infty}\Gamma(a+s)\Gamma(b-s)\,ds = \int_0^\infty x^{a+b-1}e^{-2x}\,dx = \frac{\Gamma(a+b)}{2^{a+b}}. \qquad (7.8.1)$$

Эта и дальнейшие формулы основываются на теореме 42. Результат представляет собой частный случай двойственных соотношений (7.7.9).

При $b=a$, выбирая в качестве пути интегрирования мнимую ось, получаем

$$\int_0^\infty |\Gamma(a+it)|^2\,dt = \frac{\pi\Gamma(2a)}{2^{2a}} \qquad (a>0). \qquad (7.8.2)$$

Аналогичные частные случаи имеются и для следующих далее формул.

Пусть теперь

$$f(x)=\frac{x^b}{(1+x)^a}\,, \qquad \mathfrak{F}(s)=\frac{\Gamma(b+s)\Gamma(a-b-s)}{\Gamma(a)}\,,$$

и g, $\mathfrak{G}$ определены аналогично, с заменой a, b на c, d. Тогда

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{k-i\infty}^{k+i\infty}\frac{\Gamma(b+s)\Gamma(a-b-s)\Gamma(d+1-s)\Gamma(c-d-1+s)}{\Gamma(a)\Gamma(c)}\,ds =$$

$$= \int_0^\infty \frac{x^{b+d}}{(1+x)^{a+c}}\,dx = \frac{\Gamma(b+d+1)\Gamma(a+c-b-d-1)}{\Gamma(a+c)}\,,$$

или, полагая $c-d-1=\alpha$, $b=\beta$, $1+d=\gamma$, $a-b=\delta$[1],

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{k-i\infty}^{k+i\infty}\Gamma(\alpha+s)\Gamma(\beta+s)\Gamma(\gamma-s)\Gamma(\delta-s)\,ds =$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+\gamma)\Gamma(\alpha+\delta)\Gamma(\beta+\gamma)\Gamma(\beta+\delta)}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+\delta)} \qquad (7.8.3)$$

$$(-\alpha<k,\ -\beta<k,\ \gamma>k,\ \delta>k).$$

Пусть

$$f(x)=\begin{cases} x^b(1-x)^{a-1} & (0<x<1),\\ 0 & (x>1),\end{cases} \qquad \mathfrak{F}=\frac{\Gamma(b+s)\Gamma(a)}{\Gamma(a+b+s)},$$

и g, $\mathfrak{G}$ определены аналогично, с заменой a, b на c, d. Тогда

[1] Barnes (1); см. Уиттекер и Ватсон, Курс современного анализа, § 14.52.

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{k-i\infty}^{k+i\infty}\frac{\Gamma(b+s)\Gamma(a)\Gamma(d+1-s)\Gamma(c)}{\Gamma(a+b+s)\Gamma(c+d+1-s)}\,ds=\int_0^1 x^{b+d}(1-x)^{a+c-2}\,dx=$$
$$=\frac{\Gamma(b+d+1)\Gamma(a+c-1)}{\Gamma(a+b+c+d)},$$

или, полагая $a=\beta-\alpha$, $b=\alpha$, $c=\delta-\gamma$, $d=\gamma-1$,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{k-i\infty}^{k+i\infty}\frac{\Gamma(\alpha+s)\Gamma(\gamma-s)}{\Gamma(\beta+s)\Gamma(\delta-s)}\,ds=\frac{\Gamma(\alpha+\gamma)\Gamma(\beta+\delta-\alpha-\gamma-1)}{\Gamma(\beta-\alpha)\Gamma(\delta-\gamma)\Gamma(\beta+\delta-1)} \tag{7.8.4}$$
$$(-\alpha<k,\ -\beta<k,\ \gamma>k,\ \delta>k).$$

Определяя $f(x)$, как в последнем примере, и $g(x)$, как в (7.8.3), мы получаем

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{k-i\infty}^{k+i\infty}\frac{\Gamma(b+s)\Gamma(a)\Gamma(d+1-s)\Gamma(c-d-1+s)}{\Gamma(a+b+s)\Gamma(c)}\,ds=$$
$$=\int_0^1\frac{x^{b+d}(1-x)^{a-1}}{(1+x)^c}\,dx.$$

Последний интеграл может быть выражен в конечном виде, если $c=1-a$; он равен тогда

$$\int_0^1 x^{b+d}(1-x^2)^{a-1}\,dx=\frac{1}{2}\int_0^1 y^{\frac{b+d-1}{2}}(1-y)^{a-1}\,dy=\frac{\Gamma\left(\frac{b+d+1}{2}\right)\Gamma(a)}{2\Gamma\left(a+\frac{b+d+1}{2}\right)}.$$

Полагая $b=\alpha$, $a=1-\beta-\gamma$, $d=\gamma-1$, получаем

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{k-i\infty}^{k+i\infty}\frac{\Gamma(\alpha+s)\Gamma(\beta+s)\Gamma(\gamma-s)}{\Gamma(1+\alpha-\beta-\gamma+s)}\,ds=\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)\Gamma(\beta+\gamma)}{2\Gamma\left(1-\beta+\frac{\alpha-\gamma}{2}\right)} \tag{7.8.5}$$
$$(-\alpha<k,\ -\beta<k,\ \gamma>k,\ \beta+\gamma-\alpha-1<k).$$

Другая формула Барнеса[1]:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{k-i\infty}^{k+i\infty}\frac{\Gamma(\alpha+s)\Gamma(\beta+s)\Gamma(\gamma+s)\Gamma(\delta-s)\Gamma(-s)}{\Gamma(\varepsilon+s)}\,ds=$$
$$=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha+\delta)\Gamma(\beta+\delta)\Gamma(\gamma+\delta)}{\Gamma(\varepsilon-\alpha)\Gamma(\varepsilon-\beta)\Gamma(\varepsilon-\gamma)}, \tag{7.8.6}$$

где $\alpha+\beta+\gamma+\delta=\varepsilon$.

Для её доказательства мы используем формулу

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{k-i\infty}^{k+i\infty}\mathfrak{F}_1(s)\mathfrak{F}_2(s)\mathfrak{F}_3(s)\,ds=\int_0^\infty\int_0^\infty f_1(u)f_2(v)f_3\left(\frac{1}{uv}\right)\frac{du\,dv}{uv},$$

[1] Barnes (2).

получаемую из (2.1.19) при $n = 2$. Возьмём

$$f_1(x) = \frac{x^\alpha}{(1+x)^{\alpha+\delta}}, \qquad \mathfrak{F}_1(s) = \frac{\Gamma(\alpha+s)\Gamma(\delta-s)}{\Gamma(\alpha+\delta)},$$

$$f_2(x) = \frac{x^\beta}{(1+x)^{\beta}}, \qquad \mathfrak{F}_2(s) = \frac{\Gamma(\beta+s)\Gamma(-s)}{\Gamma(\beta)},$$

$$f_3(x) = \begin{cases} x^\gamma(1-x)^{\varepsilon-\gamma-1} & (0<x<1), \\ 0 & (x>1), \end{cases} \qquad \mathfrak{F}_3(s) = \frac{\Gamma(\gamma+s)\Gamma(\varepsilon-\gamma)}{\Gamma(\varepsilon+s)}.$$

Обозначая левую часть формулы (7.8.6) через I, получаем

$$\frac{\Gamma(\varepsilon-\gamma)}{\Gamma(\alpha+\delta)\Gamma(\beta)}\, I = \iint\limits_{uv>1} \frac{u^\alpha}{(1+u)^{\alpha+\delta}}\, \frac{v^\beta}{(1+v)^\beta}\, \frac{1}{(uv)^\gamma} \left(1 - \frac{1}{uv}\right)^{\varepsilon-\gamma-1} \frac{du\,dv}{uv}.$$

Подстановка $u = \dfrac{1}{x} - 1$, $v = \dfrac{1}{y} - 1$ приводит правую часть к виду

$$\iint\limits_{x+y<1} x^{\gamma+\delta-1} y^{\gamma-1} (1-x)^{\alpha-\varepsilon} (1-y)^{\beta-\varepsilon} (1-x-y)^{\varepsilon-\gamma-1}\, dx\, dy,$$

после чего, полагая $y = z(1-x)$, получаем

$$\int_0^1 z^{\gamma-1}(1-z)^{\varepsilon-\gamma-1}\, dz \int_0^1 x^{\gamma+\delta-1}(1-x)^{\alpha-1}(1-z+xz)^{\beta-\varepsilon}\, dx.$$

Если $\alpha+\beta+\gamma+\delta = \varepsilon$, то внутренний интеграл может быть выражен через гамма-функции, а именно, он равен тогда[1]

$$\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma+\delta)}{\Gamma(\alpha+\gamma+\delta)}\, \frac{1}{(1-z)^\alpha}.$$

Поэтому получаем

$$\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma+\delta)}{\Gamma(\alpha+\gamma+\delta)} \int_0^1 z^{\gamma-1}(1-z)^{\varepsilon-\gamma-\alpha-1}\, dz = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma+\delta)\Gamma(\gamma)\Gamma(\varepsilon-\gamma-\alpha)}{\Gamma(\alpha+\gamma+\delta)\Gamma(\varepsilon-\alpha)},$$

откуда и следует требуемый результат. Потребовавшиеся обращения порядка интегрирования законны в силу абсолютной сходимости соответствующих интегралов.

7.9. Бесселевы функции. В формуле (7.4.1) можно взять $a = s$ комплексным, предполагая, что $0 < \sigma < \nu + \frac{3}{2}$. Таким образом, получаем пары трансформаций Меллина[2]

[1] См. Титчмарш, Теория функций, гл. I, упр. 19. [Сделать подстановку $x = \dfrac{(1-z)t}{1-zt}$. — *Прим. перев.*]

[2] Ватсон, § 6.5 (7).

$$x^{-\nu}J_\nu(x), \qquad \frac{2^{s-\nu-1}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(\nu-\frac{s}{2}+1\right)} \quad (0<\sigma<\nu+\tfrac{3}{2}). \tag{7.9.1}$$

Им эквивалентны пары

$$J_\nu(x), \qquad \frac{2^{s-1}\Gamma\left(\frac{s+\nu}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu-s}{2}+1\right)} \quad (-\nu<\sigma<\tfrac{3}{2}), \tag{7.9.2}$$

$$x^\nu J_\nu(x), \qquad \frac{2^{s+\nu-1}\Gamma\left(\frac{s}{2}+\nu\right)}{\Gamma\left(1-\frac{s}{2}+1\right)} \quad (-2\nu<\sigma<\tfrac{3}{2}-\nu) \tag{7.9.3}$$

и

$$\sqrt{x}\,J_\nu(x), \qquad \frac{2^{s-\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{s+\nu}{2}+\frac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu-s}{2}+\frac{3}{4}\right)} \quad (-\nu-\tfrac{1}{2}<\sigma<1). \tag{7.9.4}$$

Полагая в последней паре $\nu=-\frac{1}{2}$, $\nu=\frac{1}{2}$, получаем

$$\cos x, \qquad \frac{2^{s-1}\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)} = \Gamma(s)\cos\frac{\pi s}{2} \quad (0<\sigma<1), \tag{7.9.5}$$

$$\sin x, \qquad \frac{2^{s-1}\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{1+s}{2}\right)}{\Gamma\left(1-\frac{s}{2}\right)} = \Gamma(s)\sin\frac{\pi s}{2} \quad (-1<\sigma<1). \tag{7.9.6}$$

Положим

$$Y_\nu(x) = \frac{J_\nu(x)\cos\pi\nu - J_{-\nu}(x)}{\sin\pi\nu}.$$

В силу (7.9.2), трансформация Меллина функции $Y_\nu(x)$ равна

$$\frac{1}{\sin\pi\nu}\left\{\frac{2^{s-1}\Gamma\left(\frac{\nu+s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu-s}{2}+1\right)}\cos\pi\nu - \frac{2^{s-1}\Gamma\left(\frac{s-\nu}{2}\right)}{\Gamma\left(1-\frac{\nu+s}{2}\right)}\right\} =$$

$$= \frac{2^{s-1}\Gamma\left(\frac{s+\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s-\nu}{2}\right)}{\pi\sin\pi\nu}\left[\sin\pi\left(\frac{s-\nu}{2}\right)\cos\pi\nu - \sin\pi\left(\frac{s+\nu}{2}\right)\right] =$$

$$= -\frac{2^{s-1}}{\pi}\,\Gamma\left(\frac{s+\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s-\nu}{2}\right)\cos\pi\left(\frac{s-\nu}{2}\right).$$

Таким образом, имеем пары трансформаций Меллина[1]

[1] В а т с о н, § 13.24 (5).

$$Y_\nu(x), \quad -\frac{2^{s-1}}{\pi}\Gamma\left(\frac{s+\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s-\nu}{2}\right)\cos\pi\left(\frac{s-\nu}{2}\right) \quad \left(|\nu|<\sigma<\tfrac{3}{2}\right), \tag{7.9.7}$$

$$x^{-\nu}Y_\nu(x), \quad -\frac{2^{s-\nu-1}}{\pi}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s}{2}-\nu\right)\cos\pi\left(\frac{s}{2}-\nu\right) \quad \left(\nu+|\nu|<\sigma<\nu+\tfrac{3}{2}\right). \tag{7.9.8}$$

Из (7.9.2) получаем также

$$J_\nu(x)+J_{-\nu}(x), \quad \frac{2^s}{\pi}\Gamma\left(\frac{s+\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s-\nu}{2}\right)\sin\frac{\pi s}{2}\,\cos\frac{\pi\nu}{2} \quad \left(|\nu|<\sigma<\tfrac{3}{2}\right), \tag{7.9.9}$$

$$J_\nu(x)-J_{-\nu}(x), \quad -\frac{2^s}{\pi}\Gamma\left(\frac{s+\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s-\nu}{2}\right)\cos\frac{\pi s}{2}\,\sin\frac{\pi\nu}{2} \quad \left(|\nu|<\sigma<\tfrac{3}{2}\right). \tag{7.9.10}$$

Далее, в силу (7.9.1) и (7.9.8),

$$\begin{aligned} x^{-\nu}[J_\nu(x)+iY_\nu(x)] &= \\ &= \frac{1}{2\pi^2 i}\int_{k-i\infty}^{k+i\infty} 2^{s-\nu-1}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s}{2}-\nu\right)\times \\ &\qquad\times\left[\sin\pi\left(\frac{s}{2}-\nu\right)-i\cos\pi\left(\frac{s}{2}-\nu\right)\right]x^{-s}\,ds = \\ &= -\frac{1}{2\pi^2}\int_{k-i\infty}^{k+i\infty} 2^{s-\nu-1}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s}{2}-\nu\right)e^{\pi i(\frac{s}{2}-\nu)}x^{-s}\,ds, \end{aligned}$$

причём здесь можно (основываясь на аналитическом продолжении) заменить x на ix. Мы получаем[1]

$$\begin{aligned} x^{-\nu}e^{-\frac{\pi i\nu}{2}}\,\frac{2}{\pi i}\,e^{-\frac{\pi i\nu}{2}}\,K_\nu(x) &= \\ &= -\frac{1}{2\pi^2}\int_{k-i\infty}^{k+i\infty} 2^{s-\nu-1}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s}{2}-\nu\right)e^{\pi i(\frac{s}{2}-\nu)}x^{-s}e^{-\frac{\pi i s}{2}}\,ds. \end{aligned}$$

Таким образом, имеем пару трансформаций Меллина[2]

$$x^{-\nu}K_\nu(x), \qquad 2^{s-\nu-2}\,\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s}{2}-\nu\right) \quad \big(\sigma>\max(0,2\nu)\big); \tag{7.9.11}$$

ей эквивалентна пара

$$x^{\nu}K_\nu(x), \qquad 2^{s+\nu-2}\,\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s}{2}+\nu\right) \quad \big(\sigma>\max(0,-2\nu)\big). \tag{7.9.12}$$

Отсюда видно, что $K_\nu(x)$ есть чётная функция от ν. При $\nu=\frac{1}{2}$ пара (7.9.12) сводится к паре (7.7.1).

---

[1] В а т с о н, § 3.7 (8).

[2] Там же, § 6.5 (3–6).

Из (7.4.2) получаем пару

$$x^{-\nu}\mathbf{H}_\nu(x), \qquad \frac{2^{s-\nu-1}\,\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\operatorname{tg}\dfrac{\pi s}{2}}{\Gamma\left(\nu-\frac{s}{2}+1\right)} \quad (-1<\sigma<\nu+\tfrac{3}{2}); \tag{7.9.13}$$

варианты её могут быть легко получены описанным способом.

Чтобы обосновать для предшествующих случаев формулы обращения, рассмотрим, например, (7.9.1). Мы получили (7.4.1) прямым подсчётом. Обратной формулой является

$$\frac{1}{2\pi i}\lim_{\lambda\to\infty}\int_{k-i\lambda}^{k+i\lambda}\frac{2^{s-\nu-1}\,\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(\nu-\frac{s}{2}+1\right)}\,x^{-s}\,ds=\frac{J_\nu(x)}{x^\nu}\,. \tag{7.9.14}$$

При $0<k<\nu+\frac{1}{2}$ она следует из теоремы 28, а при $0<k\leqslant\nu+1$ — из теоремы 30. Главные члены в асимптотическом разложении для $x^{-\nu}J_\nu(x)$ имеют вид $x^{-\nu-\frac{1}{2}}(a\cos x+b\sin x)$. Поэтому в теореме 30

$$\varphi(x)=e^{(k-\nu-\frac{1}{2})x}, \qquad \psi(x)=e^x,$$

и решающее условие (1.12.1) выполнено при $k\leqslant\nu+1$.

Мы могли бы также начать с доказательства формулы (7.9.14) с помощью теории вычетов. Тогда нам нужно было бы вывести (7.4.1). Но при $t\to\infty$

$$\frac{2^{s-\nu-1}\,\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(\nu-\frac{s}{2}+1\right)}=e^{\frac{\pi i(\nu-1)}{2}+i(t\ln t-t)}t^{\sigma-\nu-1}\left\{1+\frac{a}{t}+O\left(\frac{1}{t^2}\right)\right\},$$

и требуемый результат следует из теоремы 29, если $0<k<\nu$. Можно также применить теорему 11; здесь

$$\varphi(t)=t^{k-\nu-1}, \qquad \psi(t)=t\ln t-t,$$

и условие (1.12.1) выполнено при $k<\nu+\frac{3}{2}$.

7.10. Произведения бесселевых функций. В силу (2.1.16) и (7.9.1) трансформацией Меллина для $x^{-\mu-\nu}J_\mu(x)J_\nu(x)$ служит

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{k-i\infty}^{k+i\infty}\frac{2^{w-\mu-1}\,\Gamma\left(\frac{w}{2}\right)}{\Gamma\left(1+\mu-\frac{w}{2}\right)}\frac{2^{s-w-\nu-1}\,\Gamma\left(\dfrac{s-w}{2}\right)}{\Gamma\left(1+\nu-\dfrac{s-w}{2}\right)}\,dw.$$

Полагая $w=2w'$ и используя (7.8.4), мы получаем пару трансформаций Меллина[1]

[1] В а т с о н, § 13.41 (1), (2), § 13.33 (1).

$$\frac{J_\mu(x)J_\nu(x)}{x^{\mu+\nu}}, \quad \frac{2^{s-\mu-\nu-1}\,\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\Gamma(1+\mu+\nu-s)}{\Gamma\left(1+\nu-\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(1+\mu-\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(1+\mu+\nu-\frac{s}{2}\right)}. \tag{7.10.1}$$

Аналогично, в силу (7.9.11), трансформацией Меллина для $\dfrac{K_\mu(x)K_\nu(x)}{x^{\mu+\nu}}$ служит

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{k-i\infty}^{k+i\infty} 2^{w-\mu-2}\,\Gamma\left(\frac{w}{2}\right)\Gamma\left(\frac{w}{2}-\mu\right)2^{s-w-\nu-2}\,\Gamma\left(\frac{s-w}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s-w}{2}-\nu\right)dw,$$

и с помощью (7.8.3) мы получаем пару трансформаций Меллина

$$\frac{K_\mu(x)K_\nu(x)}{x^{\mu+\nu}}, \quad \frac{2^{s-\mu-\nu-1}\,\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s}{2}-\mu\right)\Gamma\left(\frac{s}{2}-\nu\right)\Gamma\left(\frac{s}{2}-\mu-\nu\right)}{\Gamma(s-\mu-\nu)}. \tag{7.10.2}$$

В силу (7.9.1) и (7.9.11), трансформацией Меллина для $\dfrac{J_\nu(x)K_\nu(x)}{x^{2\nu}}$ служит

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{k-i\infty}^{k+i\infty} 2^{w-\nu-2}\,\Gamma\left(\frac{w}{2}\right)\Gamma\left(\frac{w}{2}-\nu\right)\frac{2^{s-w-\nu-1}\,\Gamma\left(\frac{s-w}{2}\right)}{\Gamma\left(1+\nu-\frac{s-w}{2}\right)}\,dw,$$

и с помощью (7.8.5) мы получаем пару трансформаций Меллина

$$\frac{J_\nu(x)K_\nu(x)}{x^{2\nu}}, \quad \frac{2^{s-2\nu-2}\,\Gamma\left(\frac{s}{4}\right)\Gamma\left(\frac{s}{2}-\nu\right)}{\Gamma\left(1+\nu-\frac{s}{4}\right)}. \tag{7.10.3}$$

Комбинируя частные случаи пар (7.10.1), получаем в качестве пары трансформаций Меллина

$$J_\nu(x)Y_\nu(x), \quad -\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s}{2}+\nu\right)}{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)\Gamma\left(1+\nu-\frac{s}{2}\right)}. \tag{7.10.4}$$

Другие частные случаи пар (7.10.1) дают пары трансформаций Меллина

$$J_\nu(x)\cos x, \quad \frac{2^{s-1}\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{s+\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-s\right)}{\Gamma\left(1+\frac{\nu-s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-\nu-s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+\nu-s}{2}\right)}. \tag{7.10.5}$$

$$J_\nu(x)\sin x, \quad \frac{2^{s-1}\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{1+s+\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-s\right)}{\Gamma\left(\frac{1+\nu-s}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{\nu+s}{2}\right)\Gamma\left(1+\frac{\nu-s}{2}\right)}. \tag{7.10.6}$$

Комбинируя их, получаем

$$e^{ix}J_\nu(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{k-i\infty}^{k+i\infty} \frac{2^{-s}}{\sqrt{\pi}}\, \frac{\Gamma(s+\nu)\Gamma\left(\frac{1}{2}-s\right)}{\Gamma(1+\nu-s)}\, e^{\frac{\pi i(s+\nu)}{2}}\, x^{-s}\, ds.$$

Как и в (7.9.11), мы можем теперь заменить x на ix и получить пару трансформаций Меллина

$$e^{-x}I_\nu(x), \qquad \frac{\Gamma(s+\nu)\Gamma\left(\frac{1}{2}-s\right)}{2^s\sqrt{\pi}\,\Gamma(1+\nu-s)}. \tag{7.10.7}$$

Далее, в силу (7.10.1) и (7.10.4), трансформацией Меллина для $J_\nu(x)[J_\nu(x)+iY_\nu(x)]$ служит

$$-\frac{ie^{\frac{\pi is}{2}}}{2\pi\sqrt{\pi}}\, \frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}+\nu\right)\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)}{\Gamma\left(1+\nu-\frac{s}{2}\right)}\,.$$

Поэтому, заменяя x на ix, мы получаем в качестве пары трансформаций Меллина

$$I_\nu(x)K_\nu(x), \qquad \frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}+\nu\right)\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)}{4\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(1+\nu-\frac{s}{2}\right)}. \tag{7.10.8}$$

Аналогично, трансформацией Меллина для $e^{-ix}[J_\nu(x)+iY_\nu(x)]$ служит

$$-\frac{ie^{\frac{\pi i(s-\nu)}{2}}\cos\pi\nu}{2^{s-1}\pi\sqrt{\pi}}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}-s\right)\Gamma(s+\nu)\Gamma(s-\nu),$$

и заменяя x на ix, мы получаем в качестве пары трансформаций Меллина[1]

$$e^{x}K_\nu(x), \qquad \frac{\cos\pi\nu}{2^s\sqrt{\pi}}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}-s\right)\Gamma(s+\nu)\Gamma(s-\nu). \tag{7.10.9}$$

Формальные заключения, применённые в этом параграфе., могут быть обоснованы с помощью теоремы 73. Так, например, $x^k x^{-\mu}J_\mu(x)$ принадлежит к $\mathfrak{L}^2$, если $0<k<\mu+\frac{1}{2}$, и $x^{\sigma-k}x^{-\nu}J_\nu(x)$ принадлежит к $\mathfrak{L}^2$, если $0<\sigma-k<\nu+\frac{1}{2}$. Мы можем выбрать σ и k, удовлетворяющие этим условиям, если $\mu>-\frac{1}{2}$, $\nu>-\frac{1}{2}$. Это не дало бы непосредственно (7.10.5); но для этой цели можно было бы сначала рассмотреть функции $(1-\cos x)J_\nu(x)$, $x^k(1-\cos x)$, принадлежащие к $\mathfrak{L}^2$, если $-2<k<0$. Конечно, можно также с помощью аналитического продолжения расширить области применимости формул.

[1] В а т с о н, § 6.51.

7.11. Интегралы, содержащие бесселевы функции. Мы теперь в состоянии вычислить широкий класс интегралов, содержащих бесселевы функции.

С помощью подстановки мы получаем из (7.7.15) пару трансформаций Меллина

$$\begin{cases} (x^2-1)^{-\nu-\frac{1}{2}} & (x>1), \\ 0 & (x<1), \end{cases} \qquad \frac{\Gamma\left(\nu+\dfrac{1-s}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{1}{2}-\nu\right)}{2\Gamma\left(1-\frac{s}{2}\right)}. \tag{7.11.1}$$

В силу этого и (7.9.6), (7.9.3), соотношение (2.1.22) даёт[1]

$$\int_1^\infty \frac{\sin ax}{(x^2-1)^{\nu+\frac{1}{2}}}\,dx =$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{k-i\infty}^{k+i\infty} 2^{s-1}\sqrt{\pi}\,\frac{\Gamma\left(\dfrac{1+s}{2}\right)}{\Gamma\left(1-\frac{s}{2}\right)}\,\frac{\Gamma\left(\nu+\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)}{2\Gamma\left(\dfrac{1+s}{2}\right)}\,a^{-s}\,ds =$$
$$= \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)}{4\pi i}\int_{k-i\infty}^{k+i\infty} 2^{s-1}\frac{\Gamma\left(\nu+\frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(1-\frac{s}{2}\right)}\,a^{-s}\,ds =$$
$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2^{\nu+1}}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)a^\nu J_\nu(a) \qquad \left(-\tfrac{1}{2}<\nu<\tfrac{1}{2}\right). \tag{7.11.2}$$

Эта формула двойственна (в смысле синус-трансформаций Фурье) к (7.4.3). Аналогично, используя (7.9.5) и (7.9.7), получаем[2]

$$\int_1^\infty \frac{\cos ax}{(x^2-1)^{\nu+\frac{1}{2}}}\,dx = -\frac{\sqrt{\pi}}{2^{\nu+1}}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)a^\nu Y_\nu(a) \qquad \left(-\tfrac{1}{2}<\nu<\tfrac{1}{2}\right). \tag{7.11.3}$$

Эти вычисления подходят под теорему 42, если $\frac{1}{4}<\nu<\frac{1}{2}$. Действительно,

$$\mathfrak{F}(s) = 2^{s-1}\sqrt{\pi}\,\frac{\Gamma\left(\dfrac{1+s}{2}\right)}{\Gamma\left(1-\frac{s}{2}\right)}\,a^{-s} = O\left(|t|^{k-\frac{1}{2}}\right),$$

что принадлежит к L, если $k<-\frac{1}{2}$, а $\dfrac{1}{x^k(x^2-1)^{\nu+\frac{1}{2}}}$ принадлежит к L, если $-\frac{1}{2}k<\nu<\frac{1}{2}$. На всю область $-\frac{1}{2}<\nu<\frac{1}{2}$ полученный результат может быть распространён с помощью аналитического продолжения. Можно также применить теорему 43. Действительно, для $0<\sigma<1$

---

[1] Ватсон, § 6.13 (3).

[2] Ватсон, § 6.13 (4).

$$\int_a^1 x^{s-1}\sin x\,dx = O(1),$$

и

$$\int_1^b x^{s-1}\sin x\,dx = -x^{s-1}\cos x\Big|_1^b + (s-1)\int_1^b x^{s-2}\cos x\,dx = \\ = O(1) + O(|t|) = O(|t|).$$

Далее, при $\sigma = 1-k$

$$\int_1^b \frac{x^{s-1}}{(x^2-1)^{\nu+\frac{1}{2}}}\,dx = O(1),$$

если $-\frac{1}{2}k < \nu < \frac{1}{2}$. Очевидно, что при $-\frac{1}{2} < \nu < \frac{1}{2}$ выполнены остальные условия. Выбирая k произвольно близким к 1, получаем требуемый результат.

Далее, отправляясь от пар трансформаций Меллина

$$x^{\nu+1}J_\nu(ax), \qquad \frac{2^{s+\nu}\Gamma\left(\nu + \dfrac{1+s}{2}\right)}{a^{s+\nu+1}\Gamma\left(\dfrac{1-s}{2}\right)}, \tag{7.11.4}$$

$$\frac{1}{(x^2+1)^{\mu+1}}, \qquad \frac{\Gamma\left(\dfrac{s}{2}\right)\Gamma\left(\mu+1-\dfrac{s}{2}\right)}{2\Gamma(\mu+1)} \tag{7.11.5}$$

(получающихся с помощью подстановок из (7.9.3) и (7.7.9)), находим[1]

$$\int_0^\infty \frac{x^{\nu+1}J_\nu(ax)}{(x^2+1)^{\mu+1}}\,dx = \\ = \frac{1}{2\pi i}\int_{k-i\infty}^{k+i\infty} \frac{2^{s+\nu}\Gamma\left(\nu+\dfrac{1+s}{2}\right)}{a^{s+\nu+1}\Gamma\left(\dfrac{1-s}{2}\right)}\,\frac{\Gamma\left(\dfrac{1-s}{2}\right)\Gamma\left(\mu+\dfrac{1+s}{2}\right)}{2\Gamma(\mu+1)}\,ds = \\ = \frac{1}{4\pi i\Gamma(\mu+1)}\int_{k+2\nu+1-i\infty}^{k+2\nu+1+i\infty} 2^{s'-\nu-1}a^{-s'+\nu}\Gamma\left(\frac{s'}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s'}{2}+\mu-\nu\right)ds' = \\ = \frac{a^\mu K_{\mu-\nu}(a)}{2^\mu\Gamma(\mu+1)}, \tag{7.11.6}$$

в силу пары (7.9.12). Здесь функция $\mathfrak{F}(s)$ из (7.11.4) принадлежит к $L(k-i\infty, k+i\infty)$, если $-2\nu-1<k<-\nu-1$, и $\dfrac{1}{x^k(x^2+1)^{\mu+1}}$ принадлежит к L, если $-2\mu-1<k<1$. Эти условия совместимы при выполнении неравенств $0<\nu<2\mu$, и требуемый результат следует теперь из теоремы 42. Полученная формула в действительности справедлива при $-1<\nu<2\mu+\frac{3}{2}$. На эту полную область она может быть распространена

[1] В а т с о н, § 13.6 (2).

либо путём аналитического продолжения, либо по теореме 43.

Следующие примеры могут быть получены аналогичным путём и не представляют никаких специальных затруднений[1]:

$$\int_1^\infty e^{-ax}(x^2-1)^{\nu-\frac{1}{2}}\,dx = \frac{2^\nu\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)K_\nu(a)}{\sqrt{\pi}\,a^\nu}\,, \tag{7.11.7}$$

$$\int_0^\infty e^{-ax}J_\nu(x)x^\nu\,dx = \frac{2^\nu\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,(a^2+1)^{\nu+\frac{1}{2}}}\,, \tag{7.11.8}$$

(=7.4.8)

$$\int_0^\infty e^{-ax}J_\nu(x)\,dx = \frac{(\sqrt{1+a^2}-a)^\nu}{\sqrt{1+a^2}}\,, \tag{7.11.9}$$

$$\int_0^\infty e^{-bx^2}J_\nu(ax)x^{\nu+1}\,dx = \frac{a^\nu}{(2b)^{\nu+1}}\,e^{-\frac{a^2}{4b}}, \tag{7.11.10}$$

$$\int_0^\infty e^{-bx^2}J_\nu(ax)\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{b}}\,e^{-\frac{a^2}{8b}}I_{\nu/2}\left(\frac{a^2}{8b}\right), \tag{7.11.11}$$

$$\int_0^\infty K_\mu(ax)J_\nu(bx)x^{\mu+\nu+1}\,dx = \frac{(2a)^\mu(2b)^\nu\Gamma(\mu+\nu+1)}{(a^2+b^2)^{\mu+\nu+1}}\,, \tag{7.11.12}$$

$$\int_0^\infty \frac{J_\nu(ax)}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = I_{\nu/2}\left(\frac{a}{2}\right)K_{\nu/2}\left(\frac{a}{2}\right), \tag{7.11.13}$$

$$\int_0^\infty \frac{J_\nu(ax)x^{\nu+1}}{(x^4+4)^{\nu+\frac{1}{2}}}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}\,a^\nu J_\nu(a)K_\nu(a)}{2^{3\nu}\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}. \tag{7.11.14}$$

Более тонким примером является[2]

$$\begin{aligned}\int_0^\infty J_\nu(ax)J_{\nu+1}(x)\,dx &= \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{k-i\infty}^{k+i\infty} \frac{2^{s-1}\Gamma\left(\frac{\nu+s}{2}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{\nu-s}{2}\right)}\,\frac{2^{-s}\Gamma\left(1+\frac{\nu-s}{2}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{\nu+s}{2}\right)}\,a^{-s}\,ds = \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{k-i\infty}^{k+i\infty}\frac{a^{-s}}{\nu+s}\,ds \qquad (k>-\nu), \\ &= \begin{cases} a^\nu, & (0<a<1), \\ \frac{1}{2}, & (a=1), \\ 0, & (a>1). \end{cases}\end{aligned} \tag{7.11.15}$$

[1] Соответствующие формулы в книге Ватсона: § 6.15 (4), § 13.2 (5), § 13.2 (8), § 33.3 (4), § 33.3 (5), § 13.45 (1), § 13.6 (3), § 13.6 (5).

[2] Ватсон, § 13.42 (8).

При $a \neq 1$ равенство (7.11.15) может быть обосновано с помощью теоремы 43. Определим функцию $\chi(\xi)$ равенством

$$\chi(\xi) = \int_0^\infty J_\nu(ax) J_{\nu+1}(\xi x)\, dx.$$

Выполнение условий теоремы может быть проверено как в доказательстве формул (7.11.1). Если $a = 1$, то функция $\chi(\xi)$ разрывна в точке $\xi = 1$, и значение $\chi(1)$ не может быть вычислено указанным методом. Эту трудность можно обойти, либо доказав непосредственно, что $\chi(1) = \dfrac{\chi(1+0)+\chi(1-0)}{2}$, либо применив описанный метод в обратном направлении, что даёт полный результат, однако, требует более утомительных вычислений; либо же, наконец, мы можем записать

$$\int_0^\infty J_\nu(x) J_{\nu+1}(x)\, dx = \int_0^\infty \frac{d}{dx}\left[x^{\nu+1} J_{\nu+1}(x)\right] \cdot x^{\nu+1} J_{\nu+1}(x)\, \frac{dx}{x^{2\nu+2}} =$$
$$= -\int_0^\infty x^{\nu+1} J_{\nu+1}(x) \left(\frac{x^{\nu+1} J_\nu(x)}{x^{2\nu+2}} - (2\nu+2)\frac{x^{\nu+1} J_{\nu+1}(x)}{x^{2\nu+3}} \right) dx,$$

так что

$$\int_0^\infty J_\nu(x) J_{\nu+1}(x)\, dx = (\nu+1) \int_0^\infty \frac{J_{\nu+1}^2(x)}{x}\, dx.$$

Полагая в (7.10.1) $\nu = \mu$, $s = 2\mu$, получаем, что последний интеграл равен $\dfrac{1}{2\nu+2}$.

В качестве примера на формулу (7.8.6) имеем, в силу (7.9.12) и (7.10.8),

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}} K_\mu(2x) I_\nu(x) K_\nu(x)\, dx =$$
$$= \frac{1}{8\sqrt{\pi}} \frac{1}{2\pi i} \int_{k-i\infty}^{k+i\infty} \Gamma\left(\frac{s-\mu}{2} - \frac{1}{4}\right) \times$$
$$\times \Gamma\left(\frac{s+\mu}{2} - \frac{1}{4}\right) \frac{\Gamma\left(\nu + \frac{1-s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(\nu + \frac{1+s}{2}\right)}\, ds =$$
$$= \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{1}{2}(k-1)-i\infty}^{\frac{1}{2}(k-1)+i\infty} \Gamma\left(s' - \frac{\mu}{2} + \frac{1}{4}\right) \times$$
$$\times \Gamma\left(s' + \frac{\mu}{2} + \frac{1}{4}\right) \frac{\Gamma(\nu - s')\Gamma\left(\frac{1}{2} + s'\right)\Gamma(-s')}{\Gamma(1+\nu+s')}\, ds =$$
$$= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4} - \frac{\mu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4} + \frac{\mu}{2}\right)\Gamma\left(\nu + \frac{1}{4} - \frac{\mu}{2}\right)\Gamma\left(\nu + \frac{1}{4} + \frac{\mu}{2}\right)}{4\Gamma\left(\nu + \frac{3}{4} + \frac{\mu}{2}\right)\Gamma\left(\nu + \frac{3}{4} - \frac{\mu}{2}\right)}. \qquad (7.11.16)$$

Из (7.7.11) и (7.11.4) при $\nu = 0$ получаем

$$\int_0^\infty \frac{1}{(1+x^2)^n} P_{n-1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) x J_0(ax)\, dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{k-i\infty}^{k+i\infty} 2^s \frac{\Gamma\left(\frac{1+s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)} \frac{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\Gamma^2\left(n - \frac{1-s}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{1+s}{2}\right)\Gamma^2(n)} a^{-s-1}\, ds =$$

$$= \frac{1}{2\pi i\, \Gamma^2(n)} \int_{k-i\infty}^{k+i\infty} 2^{s-1}\, \Gamma^2\left(n - \frac{1-s}{2}\right) a^{-s-1}\, ds =$$

$$= \frac{1}{2\pi i\, \Gamma^2(n)} \int_{k+2n-1-i\infty}^{k+2n-1+i\infty} 2^{s'-2n} \Gamma^2\left(\frac{s'}{2}\right) a^{-s'-2+2n}\, ds' =$$

$$= \frac{1}{\Gamma^2(n)} \left(\frac{a}{2}\right)^{2n-2} K_0(a). \tag{7.11.17}$$

7.12. Некоторые неабсолютно сходящиеся интегралы. В силу (7.9.5) и (7.9.6), имеем пары трансформаций Меллина

$$\cos x^\alpha, \qquad \frac{1}{\alpha}\,\Gamma\left(\frac{s}{\alpha}\right) \cos\frac{\pi s}{2\alpha}\,, \tag{7.12.1}$$

$$\sin x^\alpha, \qquad \frac{1}{\alpha}\,\Gamma\left(\frac{s}{\alpha}\right) \sin\frac{\pi s}{2\alpha}\,. \tag{7.12.2}$$

Из (7.12.1), с $\alpha = 1$ и $\alpha = 2$, получаем

$$\int_0^{\to\infty} \cos x^2\, \cos ax\, dx =$$

$$= \frac{1}{4\pi i} \int_{k-i\infty}^{k+i\infty} \Gamma(s) \cos\frac{\pi s}{2}\, \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \cos\frac{\pi(1-s)}{4}\, a^{-s}\, ds =$$

$$= \frac{1}{4\pi i} \int_{k-i\infty}^{k+i\infty} 2^{s-1}\sqrt{\pi}\, \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \cos\frac{\pi(1-s)}{4}\, a^{-s}\, ds =$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cos\frac{\pi - a^2}{4}, \tag{7.12.3}$$

в силу (7.12.1) и (7.12.2) с $\alpha = 2$. Аналогично

$$\int_0^{\to\infty} \sin x^2\, \cos ax\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sin\frac{\pi - a^2}{4}. \tag{7.12.4}$$

Полученные результаты эквивалентны (7.1.8) и (7.1.9). Вычисление может быть обосновано теоремой 39. Как и в § 7.11, имеем

$$\int_\lambda^\mu x^{s-1} \cos x\, dx = O(|t|)$$

для всех λ и μ. Далее,

$$\int_\lambda^\mu \cos(ax - x^2)\,dx = \int_\lambda^{\frac{a}{2}-1} + \int_{\frac{a}{2}-1}^{\frac{a}{2}+1} + \int_{\frac{a}{2}+1}^{\mu} = J_1 + J_2 + J_3$$

(с очевидными изменениями, если $\lambda > \dfrac{a}{2} - 1$ или $\mu < \dfrac{a}{2} + 1$). Ясно, что $J_2 = O(1)$. По второй теореме о среднем значении,

$$J_3 = \int_{x=\frac{a}{2}+1}^{\mu} \frac{d\sin(ax - x^2)}{a - 2x} = -\frac{1}{2}\int_{x=\frac{a}{2}+1}^{\xi} d\sin(ax - x^2) = O(1).$$

Аналогично $J_1 = O(1)$. Таким образом, условия теоремы 39 выполнены.

Скомбинируем теперь случаи $\alpha = 1$ и $\alpha = 3$ формул (7.12.1). Мы получим

$$\int_0^{\to\infty} \cos x^3 \cos ax\,dx = \frac{1}{6\pi i}\int_{k-i\infty}^{k+i\infty} \Gamma(s)\cos\frac{\pi s}{2}\,\Gamma\Big(\frac{1-s}{3}\Big)\cos\frac{\pi(1-s)}{6}\,a^{-s}\,ds.$$

Но

$$\Gamma(s)\Gamma\Big(\frac{1-s}{3}\Big) = \frac{3^{s-\frac{1}{2}}}{2\pi}\,\Gamma\Big(\frac{s}{3}\Big)\Gamma\Big(\frac{1+s}{3}\Big)\Gamma\Big(\frac{2+s}{3}\Big)\Gamma\Big(\frac{1-s}{3}\Big) =$$

$$= \frac{3^{s-\frac{1}{2}}}{2}\,\frac{\Gamma\Big(\dfrac{s}{3}\Big)\Gamma\Big(\dfrac{1+s}{3}\Big)}{\sin\dfrac{\pi(1-s)}{3}}.$$

Таким образом, интеграл, стоящий в правой части, равен

$$\frac{1}{24\pi i}\int_{k-i\infty}^{k+i\infty} 3^{s-\frac{1}{2}}\left[1 + 2\cos\frac{\pi(1-s)}{3}\right]\Gamma\Big(\frac{s}{3}\Big)\Gamma\Big(\frac{1+s}{3}\Big)a^{-s}\,ds.$$

Полагая в первой части $s = \dfrac{3s'}{2}$, получаем, в силу (7.9.12),

$$\frac{1}{16\pi i\sqrt{3}}\int_{\frac{2k}{3}-i\infty}^{\frac{2k}{3}+i\infty} 3^{\frac{3s'}{2}}\,\Gamma\Big(\frac{s'}{2}\Big)\Gamma\Big(\frac{1}{3} + \frac{s'}{2}\Big)a^{-\frac{3s'}{2}}\,ds' =$$

$$= \frac{1}{4\pi i\sqrt[3]{2}\sqrt{3}}\int_{\frac{2k}{3}-i\infty}^{\frac{2k}{3}+i\infty} 2^{s'+\frac{1}{3}-2}\Gamma\Big(\frac{s'}{2}\Big)\Gamma\Big(\frac{1}{3} + \frac{s'}{2}\Big)\Big\{2\Big(\frac{a}{3}\Big)^{3/2}\Big\}^{-s'}ds' =$$

$$= \frac{\sqrt{a}}{6}\,K_{1/3}\Big\{2\Big(\frac{a}{3}\Big)^{3/2}\Big\}.$$

Полагая во второй части $s = \dfrac{3s' - 1}{2}$, получаем, в силу (7.9.9),

$$\frac{1}{8\pi i}\int_{\frac{2k+1}{3}-i\infty}^{\frac{2k+1}{3}+i\infty} 3^{\frac{3s'}{2}-1}\sin\frac{\pi s'}{2}\,\Gamma\Big(\frac{s'}{2} - \frac{1}{6}\Big)\Gamma\Big(\frac{s'}{2} + \frac{1}{6}\Big)a^{-\frac{3s'-1}{2}}\,ds' =$$

$$= \frac{\sqrt{a}}{24\pi i}\int_{\frac{2k+1}{3}-i\infty}^{\frac{2k+1}{3}+i\infty} 2^{s'}\sin\frac{\pi s'}{2}\,\Gamma\Big(\frac{s'}{2} - \frac{1}{6}\Big)\Gamma\Big(\frac{s'}{2} + \frac{1}{6}\Big)\Big\{2\Big(\frac{a}{3}\Big)^{3/2}\Big\}^{-s'}ds' =$$

$$= \frac{\pi\sqrt{a}}{6\sqrt{3}} \left[J_{1/3}\left\{2\left(\frac{a}{3}\right)^{3/2}\right\} + J_{-1/3}\left\{2\left(\frac{a}{3}\right)^{3/2}\right\}\right].$$

Поэтому[1]

$$\int_0^{\to\infty} \cos x^3 \cos ax\, dx = \frac{\pi\sqrt{a}}{6\sqrt{3}} \left[J_{1/3}\left\{2\left(\frac{a}{3}\right)^{3/2}\right\} + J_{-1/3}\left\{2\left(\frac{a}{3}\right)^{3/2}\right\}\right] + \\ + \frac{\sqrt{a}}{6} K_{1/3}\left\{2\left(\frac{a}{3}\right)^{3/2}\right\}. \qquad (7.12.5)$$

Аналогично получим

$$\int_0^{\to\infty} \sin x^3 \cos ax\, dx = \frac{\pi\sqrt{a}}{6\sqrt{3}} \left[J_{1/3}\left\{2\left(\frac{a}{3}\right)^{3/2}\right\} + J_{-1/3}\left\{2\left(\frac{a}{3}\right)^{3/2}\right\}\right] - \\ - \frac{\sqrt{a}}{6} K_{1/3}\left\{2\left(\frac{a}{3}\right)^{3/2}\right\}. \qquad (7.12.6)$$

Как и в предыдущем случае, вычисление может быть обосновано теоремой 39. Как прежде, имеем

$$\int_\lambda^\mu x^{s-1} \cos x^\alpha\, dx = \frac{1}{\alpha}\int_{\lambda'}^{\mu'} \xi^{\frac{s}{\alpha}-1} \cos \xi\, d\xi = O(|t|)$$

для $0 < \dfrac{\sigma}{\alpha} < 1$. Вместе с тем, интегралы

$$\int_0^{\to\infty} \cos(ax \pm x^3)\, dx$$

равномерно сходятся в любом конечном интервале изменения a.

Далее,

$$x^{\nu-1} \cos\frac{a^2}{x} = \frac{1}{2\pi i}\int_{k-i\infty}^{k+i\infty} \Gamma(s) \cos\frac{\pi s}{2}\, x^{\nu-1}\left(\frac{a^2}{x}\right)^{-s} ds = \\ = \frac{1}{2\pi i}\int_{1-\nu-k-i\infty}^{1-\nu-k+i\infty} \Gamma(1-\nu-s) \cos\frac{\pi(1-\nu-s)}{2}\, a^{-2+2\nu+2s} x^{-s}\, ds.$$

Эта трансформация Меллина в соединении с трансформацией Меллина для $\cos x$ даёт[2]

$$\int_0^\infty \cos x \cos\frac{a^2}{x}\, x^{\nu-1}\, dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{k-i\infty}^{k+i\infty} \Gamma(s)\cos\frac{\pi s}{2}\,\Gamma(s-\nu)\cos\frac{\pi(s-\nu)}{2}\, a^{2\nu-2s}\, ds =$$

$$= \frac{1}{8\pi i}\int_{2k-2\nu-i\infty}^{2k-2\nu+i\infty} \Gamma\left(\nu+\frac{s'}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s'}{2}\right)\left[\cos\frac{\pi\nu}{2} + \cos\frac{\pi(s'+\nu)}{2}\right] a^{-s'}\, ds' =$$

---

[1] В а т с о н, § 6.4.

[2] В а т с о н, § 6.23.

$$= \cos\frac{\pi\nu}{2}\, a^\nu K_\nu(2a) + \frac{\pi a^\nu}{4\sin\frac{\pi\nu}{2}}\big[J_{-\nu}(2a) - J_\nu(2a)\big], \tag{7.12.7}$$

в силу (7.9.12) и (7.9.10). Аналогично

$$\int_0^\infty \sin x \sin\frac{a^2}{x}\, x^{\nu-1}\, dx =$$
$$= \cos\frac{\pi\nu}{2}\, a^\nu K_\nu(2a) - \frac{\pi a^\nu}{4\sin\frac{\pi\nu}{2}}\big[J_{-\nu}(2a) - J_\nu(2a)\big]. \tag{7.12.8}$$

Вывод может быть обоснован так же, как в предшествующих случаях.

7.13. Трансформация Лапласа. Простыми примерами функций $f(x)$ и $\varphi(s)$, связанных соотношениями (1.4.1), (1.4.2), являются

$$e^{-x}, \qquad \frac{1}{1+s}, \tag{7.13.1}$$

$$\cos x, \qquad \frac{s}{1+s^2}, \tag{7.13.2}$$

$$\sin x, \qquad \frac{1}{1+s^2}, \tag{7.13.3}$$

$$x^{\alpha-1}, \qquad \Gamma(\alpha)s^{-\alpha}, \tag{7.13.4}$$

$$\frac{e^{-1/x}}{\sqrt{x}}, \qquad \sqrt{\frac{\pi}{s}}\, e^{-2\sqrt{s}}. \tag{7.13.5}$$

Пара

$$x^\nu J_\nu(x), \qquad \frac{2^\nu\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,(1+s^2)^{\nu+\frac{1}{2}}} \tag{7.13.6}$$

получается из (7.4.8); пара

$$J_\nu(x), \qquad \frac{(\sqrt{1+s^2}-s)^\nu}{\sqrt{1+s^2}} \tag{7.13.7}$$

— из (7.11.9); пара

$$\frac{J_\nu(x)}{x}, \qquad \frac{(\sqrt{1+s^2}-s)^\nu}{\nu} \tag{7.13.8}$$

— интегрированием (7.11.9) по a; пару

$$x^{\nu/2} J_\nu(\sqrt{x}), \qquad \frac{1}{2^\nu s^{\nu+1}}\, e^{-\frac{1}{4s}} \tag{7.13.9}$$

даёт формула (7.11.10).

Полагая

$$C(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x \frac{\cos u}{\sqrt{u}}\, du, \qquad S(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x \frac{\sin u}{\sqrt{u}}\, du, \tag{7.13.10}$$

имеем

$$\int_0^\infty e^{-xs} C(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \frac{\cos u}{\sqrt{u}}\,du \int_u^\infty e^{-xs}\,dx =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,s} \int_0^\infty \frac{\cos u}{\sqrt{u}}\,e^{-us}\,du = \frac{1}{2s}\sqrt{\frac{1}{\sqrt{1+s^2}} + \frac{s}{1+s^2}}\,, \quad (7.13.11)$$

например, в силу (7.13.7). Аналогично, имеем пару

$$S(x), \qquad \frac{1}{2s}\sqrt{\frac{1}{\sqrt{1+s^2}} - \frac{s}{1+s^2}}\,. \quad (7.13.12)$$

Полагая

$$\vartheta(x) = 1 + 2\sum_{n=1}^\infty e^{-\pi n^2 x}, \quad (7.13.13)$$

имеем

$$\int_0^\infty e^{-xs}\vartheta(x)\,dx = \int_0^\infty e^{-xs}\,dx + 2\sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty e^{-(s+\pi n^2)x}\,dx =$$
$$= \frac{1}{s} + 2\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{s+\pi n^2} = \frac{1}{\sqrt{s}\ \operatorname{th}\sqrt{s}}\,. \quad (7.13.14)$$

В каждом случае вещественная часть s должна быть больше некоторого нижнего предела, которым во всех приведённых примерах служит нуль.

7.14. Формула (2.1.20) доставляет ряд интересных примеров. Простейший из них получается, если взять $f(x)$, $\varphi(s)$ как в (7.13.4), а g, ψ — такие же, но с заменой α на β. Это даёт хорошо известный результат

$$\int_0^x y^{\alpha-1}(x-y)^{\beta-1}\,dy = \frac{1}{2\pi i}\int_{k-i\infty}^{k+i\infty} \Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\frac{e^{xs}}{s^{\alpha+\beta}}\,ds = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}\,x^{\alpha+\beta-1}. \quad (7.14.1)$$

Формула (2.1.20) эквивалентна формуле Парсеваля для пары трансформаций Фурье

$$\begin{cases} e^{-kx}f(x) & (x>0), \\ 0 & (x<0), \end{cases} \qquad \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\varphi(k+it)$$

и аналогичной пары с g и ψ. Здесь наличие множителя e^{-kx} делает вопросы, относящиеся к поведению f и g на бесконечности, тривиальными. В предшествующем случае теория трансформаций Фурье из L^2 применима, если $\alpha > \frac{1}{2}$ и $\beta > \frac{1}{2}$. Результат остаётся верным для $\alpha > 0$, $\beta > 0$. Распространение его на эту область может быть произведено, например, на основании теоремы 38.

Нижеследующие примеры легко обосновать аналогичным путём.

Возьмём $f(x)$ и $\varphi(s)$ как в (7.13.6), но с параметром μ, а g, ψ — с параметром ν. Тогда получим[1]

$$\int_0^x y^\mu J_\mu(y)(x-y)^\nu J_\nu(x-y)\,dy =$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{k-i\infty}^{k+i\infty} \frac{2^{\mu+\nu}}{\pi}\,\Gamma\Big(\mu+\frac{1}{2}\Big)\Gamma\Big(\nu+\frac{1}{2}\Big)\,\frac{e^{xs}}{(1+s^2)^{\mu+\nu+1}}\,ds =$$
$$= \frac{\Gamma\Big(\mu+\frac{1}{2}\Big)\Gamma\Big(\nu+\frac{1}{2}\Big)}{\sqrt{2\pi}\,\Gamma(\mu+\nu+1)}\,x^{\mu+\nu+\frac{1}{2}} J_{\mu+\nu+\frac{1}{2}}(x). \tag{7.14.2}$$

В частном случае $\mu = \frac{1}{2}$, $\nu = 0$ имеем

$$\int_0^x J_0(x-y)\sin y\,dy = xJ_1(x). \tag{7.14.3}$$

Ряд аналогичных формул, выводимых отсюда, приводится в книге Ватсона, § 12.21.

В частном случае $\mu = 0$, $\nu = 0$ имеем

$$\int_0^x J_0(y)J_0(x-y)\,dy = \sin x. \tag{7.14.4}$$

Аналогично, (7.13.8) даёт

$$\int_0^x \frac{J_\mu(y)J_\nu(x-y)}{y(x-y)}\,dy = \frac{1}{2\pi i\mu\nu}\int_{k-i\infty}^{k+i\infty} (\sqrt{1+s^2}-s)^{\mu+\nu} e^{xs}\,ds =$$
$$= \frac{\mu+\nu}{\mu\nu}\,\frac{J_{\mu+\nu}(x)}{x}\,. \tag{7.14.5}$$

Выбирая f, φ как в (7.13.8), но с заменой ν на μ, а g, ψ — как в (7.13.7), получаем

$$\int_0^x \frac{J_\mu(y)J_\nu(x-y)}{y}\,dy = \frac{1}{2\pi i\mu}\int_{k-i\infty}^{k+i\infty} \frac{(\sqrt{1+s^2}-s)^{\mu+\nu}}{\sqrt{1+s^2}}\,e^{xs}\,ds = \frac{J_{\mu+\nu}(x)}{\mu}\,. \tag{7.14.6}$$

Выбирая g, ψ как в (7.13.7), а f, φ — такие же, но с заменой ν на μ, получаем

$$\int_0^x J_\mu(y)J_\nu(x-y)\,dy = \frac{1}{2\pi i}\int_{k-i\infty}^{k+i\infty} \frac{(\sqrt{1+s^2}-s)^{\mu+\nu}}{1+s^2}\,e^{xs}\,ds =$$
$$= \frac{1}{\pi i}\int_{k-i\infty}^{k+i\infty} \Big[(\sqrt{1+s^2}-s)^{\mu+\nu+1} - (\sqrt{1+s^2}-s)^{\mu+\nu+3} + \ldots\Big]\frac{e^{xs}}{\sqrt{1+s^2}}\,ds =$$
$$= 2\big[J_{\mu+\nu+1}(x) - J_{\mu+\nu+3}(x) + \ldots\big]. \tag{7.14.7}$$

[1] Hardy (10), Ватсон, §§ 12.2–12.22.

Если $\mu+\nu$ — целое, то этот интеграл представим в конечном виде; например,

$$\int_0^x J_{-\nu}(y)J_\nu(x-y)\,dy = \frac{1}{2\pi i}\int_{k-i\infty}^{k+i\infty}\frac{e^{xs}}{1+s^2}\,ds = \sin x. \tag{7.14.8}$$

Формулы несколько отличного типа получаются, если взять

$$f(x) = x^{\mu/2}J_\mu(a\sqrt{x}), \qquad \varphi(s) = \frac{a^\mu}{2^\mu s^{\mu+1}}\,e^{-\frac{a^2}{4s}},$$

а g, ψ — такие же, но с заменой a, μ на b, ν. Тогда получаем[1]

$$\begin{aligned}\int_0^x y^{\mu/2}J_\mu(a\sqrt{y})(x-y)^{\nu/2}J_\nu(b\sqrt{x-y})\,dy &= \\ = \frac{1}{2\pi i}\int_{k-i\infty}^{k+i\infty}\frac{a^\mu b^\nu}{2^{\mu+\nu}s^{\mu+\nu+2}}\,\exp\left(-\frac{a^2+b^2}{4s}+xs\right)ds &= \\ = \frac{2a^\mu b^\nu}{(a^2+b^2)^{(\mu+\nu+1)/2}}\,J_{\mu+\nu+1}\left\{\sqrt{(a^2+b^2)x}\right\}.&\end{aligned} \tag{7.14.9}$$

Выбирая g, ψ те же, а f, φ — из (7.13.4), получаем[2]

$$\begin{aligned}\int_0^x y^{\alpha-1}(x-y)^{\nu/2}J_\nu(b\sqrt{x-y})\,dy &= \\ = \frac{1}{2\pi i}\int_{k-i\infty}^{k+i\infty}\frac{\Gamma(\alpha)b^\nu}{2^\nu s^{\nu+\alpha+1}}\,\exp\left(-\frac{b^2}{4s}+xs\right)ds &= \\ = \frac{2^\alpha\Gamma(\alpha)}{b^\alpha}\,x^{\nu/2}J_{\nu+\alpha}\big(b\sqrt{x}\big).&\end{aligned} \tag{7.14.10}$$

Из (7.13.11) и (7.13.12) получаем[3]

$$\int_0^x C(y)S(x-y)\,dy = \frac{1}{8\pi i}\int_{k-i\infty}^{k+i\infty}\frac{e^{xs}}{s^2(1+s^2)}\,ds = \frac{x-\sin x}{4}, \tag{7.14.11}$$

$$\begin{aligned}\int_0^x \big[C(y)C(x-y)-S(y)S(x-y)\big]\,dy = \frac{1}{4\pi i}\int_{k-i\infty}^{k+i\infty}\frac{e^{xs}}{s(1+s^2)}\,ds &= \\ = \frac{1}{4\pi i}\int_{k-i\infty}^{k+i\infty}\left(\frac{1}{s}-\frac{s}{1+s^2}\right)e^{xs}\,ds = \frac{1-\cos x}{2},&\end{aligned} \tag{7.14.12}$$

и имеют место некоторые аналогичные формулы, содержащие J_0, и J_1.

---

[1] Эквивалентный результат — Ватсон, § 12.13 (1).

[2] Ватсон. § 12.11 (1).

[3] Humbert (1).

Изложенный метод приводит также к интегральному уравнению Ф. Бернштейна[1], которому удовлетворяет функция $\vartheta(x)$. Из (7.13.14) выводим

$$\int_0^x \vartheta(y)\vartheta(x-y)\,dy = \frac{1}{2\pi i}\int_{k-i\infty}^{k+i\infty} \frac{e^{xs}}{s\,\mathrm{th}^2\sqrt{s}}\,ds.$$

Но

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\mathrm{th}\sqrt{s}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{s}} - \frac{1}{2\sqrt{s}\,\mathrm{th}^2\sqrt{s}}\,.$$

Поэтому интеграл в правой части равен

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_{k-i\infty}^{k+i\infty}\frac{e^{xs}}{s}\,ds - \frac{1}{\pi i}\int_{k-i\infty}^{k+i\infty}\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{\mathrm{th}\sqrt{s}}\right)\frac{e^{xs}}{\sqrt{s}}\,ds =\\ = 1 + \frac{1}{\pi i}\int_{k-i\infty}^{k+i\infty}\frac{1}{\mathrm{th}\,\sqrt{s}}\left(\frac{x}{\sqrt{s}} - \frac{1}{2s\sqrt{s}}\right)e^{xs}\,ds =\\ = 1 + 2x\vartheta(x) - \int_0^x \vartheta(u)\,du,\end{aligned}$$

так как

$$\int_0^x \vartheta(u)\,du = \frac{1}{2\pi i}\int_{k-i\infty}^{k+i\infty}\frac{e^{xs}}{s\sqrt{s}\,\mathrm{th}\sqrt{s}}\,ds - \frac{1}{2\pi i}\int_{k-i\infty}^{k+i\infty}\frac{ds}{s\sqrt{s}\,\mathrm{th}\sqrt{s}}\,,$$

а последний член равен нулю, в чём убеждаемся, удаляя путь интегрирования вправо. Тем самым мы доказали, что

$$\int_0^x \vartheta(y)\vartheta(x-y)\,dy = 1 + 2x\vartheta(x) - \int_0^x \vartheta(u)\,du. \tag{7.14.13}$$

[1] См. Hardy (10).

VIII
ОБОБЩЁННЫЕ ТРАНСФОРМАЦИИ

8.1. Обобщение формул Фурье. В предыдущих главах мы изучали две формулы вида

$$f(x) = \int_0^\infty k(xu)\,du \int_0^\infty k(uy) f(y)\,dy, \tag{8.1.1}$$

имеющие место для произвольной функции $f(x)$; $k(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos x$ даёт косинус-формулу Фурье, а $k(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin x$ — синус-формулу Фурье. Существуют, однако, другие формулы такого же вида; наиболее известная из них — формула Ганкеля, в которой

$$k(x) = \sqrt{x}\, J_\nu(x). \tag{8.1.2}$$

Существуют также формулы вида

$$f(x) = \int_0^\infty k(xu)\,du \int_0^\infty h(uy) f(y)\,dy, \tag{8.1.3}$$

в которых два косинуса формулы Фурье заменены двумя различными функциями. Простейшей формулой этого типа является формула, в которой

$$k(x) = \sqrt{x}\, Y_\nu(x), \qquad h(x) = \sqrt{x}\, \mathbf{H}_\nu(x). \tag{8.1.4}$$

Как обычно, формула (8.1.1) может быть записана в виде пары двойственных формул

$$g(x) = \int_0^\infty f(y) k(xy)\,dy, \tag{8.1.5}$$

$$f(x) = \int_0^\infty g(y) k(xy)\,dy. \tag{8.1.6}$$

Функцию $k(x)$, для которой имеет место формула вида (8.1.1), мы будем называть *ядром Фурье*. Главным предметом настоящей главы будет являться изучение таких функций[1].

Умножим (8.1.5) на x^{s-1} и проинтегрируем от 0 до ∞. Мы получим

[1] Hardy and Titchmarsh (8), Ватсон (2).

формально

$$\int_0^\infty g(x)x^{s-1}\,dx = \int_0^\infty x^{s-1}\,dx \int_0^\infty f(y)k(xy)\,dy =$$
$$= \int_0^\infty f(y)\,dy \int_0^\infty k(xy)x^{s-1}\,dx = \int_0^\infty f(y)y^{-s}\,dy \int_0^\infty k(u)u^{s-1}\,du,$$

т.е., пользуясь обычным обозначением для трансформаций Меллина,

$$\mathfrak{G}(s) = \mathfrak{F}(1-s)\mathfrak{K}(s). \tag{8.1.7}$$

Аналогично (8.1.6) даёт

$$\mathfrak{F}(s) = \mathfrak{G}(1-s)\mathfrak{K}(s). \tag{8.1.8}$$

Заменяя в одном из этих равенств s на $1-s$ и перемножая затем оба равенства, получим

$$\mathfrak{K}(s)\mathfrak{K}(1-s) = 1. \tag{8.1.9}$$

Таким образом, мы имеем основание ожидать, что ядро Фурье $k(x)$ имеет вид

$$k(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \mathfrak{K}(s)x^{-s}\,ds, \tag{8.1.10}$$

где интеграл понимается в каком-нибудь определённом смысле, а $\mathfrak{K}$ удовлетворяет функциональному уравнению (8.1.9).

8.2. Можно ожидать, что условие (8.1.9) в некотором смысле также достаточно.

Характеристическим свойством ядра Фурье $k(x)$ является то, что если

$$k_1(x) = \int_0^x k(u)\,du, \tag{8.2.1}$$

то

$$\int_0^\infty k(xu)\frac{k_1(\xi u)}{u}\,du = \begin{cases} 1 & (0 < x < \xi), \\ 0 & (x > \xi). \end{cases} \tag{8.2.2}$$

Действительно, полагая в (8.1.1)

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (0 < x < \xi), \\ 0 & (x > \xi), \end{cases}$$

мы получим (8.2.2); и обратно, если выполнено (8.2.2), то

$$\int_0^x f(y)\,dy = \int_0^\infty f(y)\,dy \int_0^\infty k(yu)\frac{k_1(xu)}{u}\,du =$$
$$= \int_0^\infty \frac{k_1(xu)}{u}\,du \int_0^\infty k(uy)f(y)\,dy,$$

откуда (8.1.1) получается формальным дифференцированием.

Но теперь (8.1.10) даёт формально

$$k_1(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \mathfrak{K}(s)\frac{x^{1-s}}{1-s}\,ds. \tag{8.2.3}$$

Поэтому формальным применением формулы Парсеваля для трансформаций Меллина в форме (2.1.20) получаем

$$\int_0^\infty k(xu)\frac{k_1(\xi u)}{u}\,du = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \mathfrak{K}(s)\frac{\mathfrak{K}(1-s)}{s}\,x^{-s}\xi^s\,ds = \left|\begin{array}{c}\text{при}\\ c>0\end{array}\right| =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\left(\frac{\xi}{x}\right)^s\frac{ds}{s} = \begin{cases}1 & (0<x<\xi),\\ 0 & (x>\xi).\end{cases}$$

Поэтому (8.2.2), а значит, и формула Фурье, является формальным следствием соотношения (8.1.9).

8.3. Аналогичную формальную теорию допускают и несимметричные формулы, порождаемые соотношением (8.1.3). Полагая теперь

$$f(x) = \int_0^\infty k(xu)g(u)\,du, \tag{8.3.1}$$

$$g(u) = \int_0^\infty h(uy)f(y)\,dy, \tag{8.3.2}$$

получим следующие соотношения между трансформациями Меллина:

$$\mathfrak{F}(s) = \mathfrak{G}(1-s)\mathfrak{K}(s), \tag{8.3.3}$$

$$\mathfrak{G}(s) = \mathfrak{F}(1-s)\mathfrak{H}(s), \tag{8.3.4}$$

откуда, исключая $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{G}$, находим

$$\mathfrak{K}(s)\mathfrak{H}(1-s) = 1. \tag{8.3.5}$$

Мы можем рассматривать (8.3.2) как решение интегрального уравнения (8.3.1) для неизвестной функции $g(u)$, с «резольвентой» $h(x)$, заданной формулой

$$h(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\mathfrak{H}(s)x^{-s}\,ds = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{x^{-s}}{\mathfrak{K}(1-s)}\,ds.$$

8.4. Примеры. Прежде, чем идти дальше, мы рассмотрим ряд примеров.

(1) Если

$$\mathfrak{K}(s) = 2^{s-\frac{1}{2}}\,\frac{\Gamma\left(\dfrac{\nu+s}{2}+\dfrac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{\nu-s}{2}+\dfrac{3}{4}\right)} \qquad (\nu > -1),$$

то

$$k(x) = \sqrt{x}\, J_\nu(x),$$

и мы получаем формулу Ганкеля; значениям $\nu = -\frac{1}{2}$ и $\nu = \frac{1}{2}$ соответствуют косинус- и синус-формулы Фурье.

Если $-2 < \nu < -1$, то

$$k(x) = \sqrt{x}\left(J_\nu(x) - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^\nu}{\Gamma(\nu+1)}\right),$$

и вообще, если $-m-1 < \nu < -m$, то

$$k(x) = \sqrt{x}\left(J_\nu(x) - \sum_{n=0}^{m} \frac{(-1)^n \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2n}}{n!\,\Gamma(\nu+n+1)}\right),$$

где сумма содержит первые $m+1$ членов степенного ряда для $J_\nu(x)$.

(2) Если[1]

$$k(x) = \sqrt{x}\, Y_\nu(x),$$

то, в силу (7.9.7),

$$\mathfrak{K}(s) = -\frac{2^{s-\frac{1}{2}}}{\pi}\,\Gamma\left(\frac{s+\nu}{2}+\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{s-\nu}{2}+\frac{1}{4}\right)\cos\left[\left(\frac{s-\nu}{2}+\frac{1}{4}\right)\pi\right].$$

Эта функция не удовлетворяет уравнению (8.1.9), так что $k(x)$ не есть ядро Фурье. Но (8.3.5) даёт

$$\mathfrak{H}(s) = 2^{s-\frac{1}{2}}\,\frac{\Gamma\left(\frac{\nu+s}{2}+\frac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu-s}{2}+\frac{3}{4}\right)}\,\operatorname{tg}\left[\left(\frac{s+\nu}{2}+\frac{1}{4}\right)\pi\right].$$

Тогда из (7.9.13) следует, что

$$h(x) = \sqrt{x}\,\mathbf{H}_\nu(x).$$

(3) Существует ряд весьма общих трансформаций, принадлежащих Фоксу[2], в которых $k(x)$ и $h(x)$ представляют собой линейные комбинации обобщённых гипергеометрических функций. Мы можем прийти к ним следующим образом.

Пусть $\alpha_1 > 0$, ρ_1 и ρ_2 — любые вещественные числа, не являющиеся целыми отрицательными, и

$$\varphi = \alpha_1 - \rho_1 - \rho_2 + \frac{1}{2}\,,$$

и пусть

[1] Titchmarsh (3).

[2] Fox (1).

$$\mathfrak{K}(s) = 2^{s-1}\,\frac{\Gamma\Bigl(\alpha_1 + \dfrac{\varphi - s}{2}\Bigr)\Gamma\Bigl(\dfrac{s-\varphi}{2}\Bigr)}{\Gamma\Bigl(\rho_1 + \dfrac{\varphi - s}{2}\Bigr)\Gamma\Bigl(\rho_2 + \dfrac{\varphi - s}{2}\Bigr)}.$$

С помощью теоремы о вычетах находим, что

$$k(x) = \Bigl(\frac{x}{2}\Bigr)^{-\varphi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\alpha_1+n)}{\Gamma(\rho_1+n)\Gamma(\rho_2+n)}\,\frac{\Bigl(-\dfrac{x^2}{4}\Bigr)^n}{n!} =$$
$$= \Bigl(\frac{x}{2}\Bigr)^{-\varphi}{}_1F_2\Bigl(\alpha_1;\rho_1,\rho_2;-\frac{x^2}{4}\Bigr),$$

пользуясь обычным обозначением, принятым для гипергеометрических рядов. Вычисляя теперь $\mathfrak{H}(s)$ из (8.3.5), а затем $h(x)$ суммированием вычетов, получаем, что

$$h(x) = h_1(x) + h_2(x),$$

где

$$h_1(x) = \frac{\sin(\alpha_1-\rho_1)\pi}{\sin(\rho_2-\rho_1)\pi}\Bigl(\frac{x}{2}\Bigr)^{2\rho_1+\varphi-1}{}_1F_2\Bigl(1-\alpha_1+\rho_1;1-\rho_2+\rho_1,\rho_1;-\frac{x^2}{4}\Bigr),$$

а $h_2(x)$ получается из $h_1(x)$ перестановкой ρ_1 и ρ_2. Полученные так формулы совпадают с формулами первой теоремы Фокса для случая $p=1$. В общем случае $\mathfrak{K}(s)$ представляется в виде более сложного произведения гамма-функций того же типа.

Случай $\alpha_1 = 1$, $\rho_1 = \frac{3}{2}$, $\rho_2 = \nu + \frac{3}{2}$ даёт рассмотренный выше пример (2). Случай $\alpha_1 = 1$, $\rho_1 = a+1$, $\rho_2 = \nu + a + 1$ даёт более общие трансформации, найденные Харди[1] и исследованные Куком[2]. Случай $\alpha_1 = \nu + \frac{3}{2}$, $\rho_1 = \nu+1$, $\rho_2 = 2\nu+1$ даёт

$$k(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\frac{d}{dx}\Bigl\{xJ_\nu^2\Bigl(\frac{x}{2}\Bigr)\Bigr\},\qquad h(x) = -\sqrt{\pi}\,J_\nu\Bigl(\frac{x}{2}\Bigr)Y_\nu\Bigl(\frac{x}{2}\Bigr)$$

— трансформацию Бэйтмена[3]. Случай $\alpha_1 = \nu + a + \frac{1}{2}$, $\rho_1 = \nu + a + 1$, $\rho_2 = 2\nu + a + 1$ даёт более общую трансформацию Титчмарша[4]. Более подробное рассмотрение этих трансформаций можно найти в § 5.2 работы Фокса.

Если мы возьмём

$$\mathfrak{K}(s) = 2^{s-\frac{1}{2}}\,\frac{\Gamma\Bigl(a_1+\dfrac{s}{2}\Bigr)\Gamma\Bigl(a_2+\dfrac{s}{2}\Bigr)\Gamma\Bigl(a_3-\dfrac{s}{2}\Bigr)}{\Gamma\Bigl(b_1+\dfrac{s}{2}\Bigr)\Gamma\Bigl(b_2-\dfrac{s}{2}\Bigr)\Gamma\Bigl(b_3-\dfrac{s}{2}\Bigr)},$$

---

[1] Hardy (13).

[2] Cooke (1).

[3] Bateman (1), (2).

[4] Titchmarsh (6).

где
$$a_1 + a_2 + a_3 + \frac{1}{2} = b_1 + b_2 + b_3,$$
то получим примеры на вторую теорему Фокса. Так, если
$$a_1 = \frac{\mu+\nu+1}{2}, \qquad a_2 = \frac{1-\mu-\nu}{2}, \qquad a_3 = \frac{1}{2},$$
$$b_1 = 1, \qquad b_2 = \frac{\nu-\mu+1}{2}, \qquad b_3 = \frac{\mu-\nu+1}{2},$$
то функции $k(x)$ и $h(x)$ представляют собой, каждая, комбинацию двух гипергеометрических функций и могут быть приведены к виду
$$k(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}\,\sin\dfrac{\pi(\mu+\nu)}{2}}\, x\left[J_{-\mu}\left(\frac{x}{2}\right)J_{-\nu}\left(\frac{x}{2}\right) - J_{\mu}\left(\frac{x}{2}\right)J_{\nu}\left(\frac{x}{2}\right)\right],$$
$$h(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}\,\cos\dfrac{\pi(\mu-\nu)}{2}}\, \frac{d}{dx}\left\{x\left[J_{\mu}\left(\frac{x}{2}\right)J_{-\nu}\left(\frac{x}{2}\right) + J_{-\mu}\left(\frac{x}{2}\right)J_{\nu}\left(\frac{x}{2}\right)\right]\right\}.$$

(4) Если
$$k(x) = \sqrt{x}\left[Y_\nu(x) + \frac{2\cos\pi a}{\pi}K_\nu(x)\right],$$
то, в силу (7.9.7) и (7.9.11),
$$\mathfrak{K}(s) = 2^{2s-1}\frac{\Gamma\left(\dfrac{s+\nu}{4}+\dfrac{1}{8}\right)\Gamma\left(\dfrac{s+\nu}{4}+\dfrac{5}{8}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{s-\nu}{4}+\dfrac{1}{8}+\dfrac{a}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{\nu-s}{4}+\dfrac{7}{8}-\dfrac{a}{2}\right)}\times$$
$$\times\frac{\Gamma\left(\dfrac{s-\nu}{4}+\dfrac{1}{8}\right)\Gamma\left(\dfrac{s-\nu}{4}+\dfrac{5}{8}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{s-\nu}{4}+\dfrac{1}{8}-\dfrac{a}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{\nu-s}{4}+\dfrac{7}{8}+\dfrac{a}{2}\right)}.$$
В этом случае $h(x)$ снова есть сумма двух гипергеометрических рядов. Отметим два интересных частных случая. Если $\nu = 0$, $a = 1$, то
$$\mathfrak{K}(s) = -2^{2s-1}\frac{\Gamma^2\left(\dfrac{s}{4}+\dfrac{1}{8}\right)}{\Gamma^2\left(\dfrac{3}{8}-\dfrac{s}{4}\right)},$$
что удовлетворяет уравнению (8.1.9), так что
$$k(x) = \sqrt{x}\left[Y_0(x) - \frac{2}{\pi}K_0(x)\right]$$
в силу (7.9.7), (7.9.11) есть ядро Фурье. Если $\nu = 2$, $a = 0$, то
$$\mathfrak{K}(s) = 2^{2s-1}\frac{\Gamma^2\left(\dfrac{s}{4}+\dfrac{9}{8}\right)}{\Gamma^2\left(\dfrac{11}{8}-\dfrac{s}{4}\right)}\,\frac{\dfrac{s}{4}-\dfrac{3}{8}}{\dfrac{s}{4}+\dfrac{1}{8}},$$

и $\mathfrak{K}(s)\mathfrak{K}(1-s)=-1$, так что

$$k(x)=-h(x)=\sqrt{x}\left[Y_2(x)+\frac{2}{\pi}K_2(x)\right].$$

Формулы для последнего случая принадлежат А.Л. Диксону и Харди[1]. Значительно более общие формулы аналогичного характера были получены Стином[2] и Кэтнером[3].

(5) Если

$$\mathfrak{K}(s)=e^{-ia\left(s-\frac{1}{2}\right)^2} \qquad (a>0),$$

то

$$\mathfrak{H}(s)=e^{ia\left(s-\frac{1}{2}\right)^2}.$$

Полагая $c=\dfrac{1}{2}$ в (8.1.10), находим, что

$$k(x)=\frac{1}{2\pi\sqrt{x}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{iat^2}\cos(t\ln x)\,dt=\frac{e^{\frac{\pi i}{4}}}{2\sqrt{\pi a x}}\,e^{-\frac{i\ln^2 x}{4a}}$$

и что $h(x)$ есть сопряжённая функция. Получаемая таким путём формула Фурье может быть приведена с помощью подстановки к экспоненциальной форме обычной формулы Фурье. Действительно, имеем

$$f(x)=\frac{1}{4\pi a}\int_0^{\infty}e^{-\frac{i\ln^2 xu}{4a}}\,\frac{du}{\sqrt{xu}}\int_0^{\infty}e^{\frac{i\ln^2 uy}{4a}}\,\frac{f(y)}{\sqrt{uy}}\,dy;$$

и, полагая $a=\dfrac{1}{2}$ и

$$x=e^{\xi},\quad u=e^{\zeta},\quad y=e^{\eta},\quad g(\xi)=e^{\frac{i\xi^2+\xi}{2}}f(e^{\xi}),$$

получим

$$g(\xi)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\xi\zeta}\,d\zeta\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\zeta\eta}g(\eta)\,d\eta.$$

Эта формула не подходит под нашу стандартную форму, так как пределами здесь служат $-\infty$ и ∞, а не 0 и ∞.

(6) Если

$$\mathfrak{K}(s)=e^{a\left(s-\frac{1}{2}\right)^3} \qquad (a>0),$$

то $k(x)$ есть ядро Фурье. Полагая $c=\dfrac{1}{2}$ в (8.1.10) и принимая во внимание (7.12.5) и (7.12.6), находим

[1] Hardy (17); см. также Hardy and Titchmarsh (8).
[2] Steen (1).
[3] Kuttner (1).

$$k(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{x}} \int_0^{\to\infty} \cos(at^3 + t\ln x)\, dt =$$
$$= \begin{cases} \dfrac{\sqrt{-\ln x}}{3\sqrt{3ax}} \left[J_{1/3}\left(\dfrac{2(-\ln x)^{3/2}}{3\sqrt{3a}}\right) + J_{-1/3}\left(\dfrac{2(-\ln x)^{3/2}}{3\sqrt{3a}}\right)\right] & (0 < x < 1), \\ \dfrac{\sqrt{\ln x}}{3\pi\sqrt{ax}} K_{1/3}\left(\dfrac{2(\ln x)^{3/2}}{3\sqrt{3a}}\right) & (x > 1). \end{cases}$$

(7) Если

$$\mathfrak{K}(s) = \exp\left(ie^{-i\,(s-\frac{1}{2})}\right) = \exp(ie^t) \qquad (s = \tfrac{1}{2} + it),$$

то

$$\mathfrak{H}(s) = \exp(-ie^{-t}).$$

Получаем

$$k(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(ie^t) x^{-\frac{1}{2} - it}\, dt = \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{iu} u^{-i\ln x} \frac{du}{u} =$$
$$= \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-v} \left(ve^{\frac{\pi i}{2}}\right)^{-i\ln x} \frac{dv}{v} = \frac{x^{\frac{\pi - 1}{2}}}{2\pi} \Gamma(-i\ln x),$$

и $h(x)$ — сопряжённая функция[1].

(8) Если

$$\mathfrak{K}(s) = 1,$$

то уравнение (8.1.9) выполняется, но интеграл (8.1.10) не сходится. Рассматривая, однако, (8.2.3) с $0 < c < 1$ как определение функции $k_1(x)$, будем иметь

$$k_1(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{x^{1-s}}{1-s}\, ds = \begin{cases} 0 & (0 < x < 1), \\ 1 & (x > 1). \end{cases}$$

Если мы заменим (8.1.5), (8.1.6) на

$$g(x) = \frac{1}{x} \int_0^{\infty} f(y)\, dk_1(xy), \qquad f(x) = \frac{1}{x} \int_0^{\infty} g(y)\, dk_1(xy),$$

то наши формулы приведутся к формулам

$$g(x) = \frac{1}{x} f\left(\frac{1}{x}\right), \qquad f(x) = \frac{1}{x} g\left(\frac{1}{x}\right),$$

очевидно вытекающим одна из другой.

[1] Винер и Пэли, Преобразование Фурье, § 16.

(9) Во всех этих примерах $\mathfrak{K}(s)$ аналитична. Предположим теперь, что $c = \frac{1}{2}$, и

$$\mathfrak{K}\Big(\frac{1}{2} + it\Big) = i \operatorname{sgn} t.$$

Тогда функция $\mathfrak{H}$, определённая уравнением (8.3.5), равна $-\mathfrak{K}$. Интеграл (8.1.10) не сходится, но формально равен

$$\frac{i}{2\pi\sqrt{x}}\bigg(\int_0^\infty x^{-it}\,dt - \int_{-\infty}^0 x^{-it}\,dt\bigg) = \frac{1}{\pi\sqrt{x}}\int_0^\infty \sin(t\ln x)\,dt = \frac{1}{\pi\sqrt{x}\,\ln x}\,,$$

где интеграл суммируем $(C,1)$. Наши формулы принимают вид

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{g(y)\,dy}{\sqrt{xy}\,\ln xy}\,, \qquad g(x) = -\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{f(y)\,dy}{\sqrt{xy}\,\ln xy}\,.$$

Если мы заменим x и y на e^ξ и e^η и будем понимать интегралы в смысле главных значений, то получим формулы, эквивалентные формулам теории трансформаций Гильберта.

(10) Если

$$\mathfrak{K}(s) = \operatorname{ctg}\frac{\pi s}{2}\,,$$

то уравнение (8.1.9) удовлетворяется. Интеграл (8.1.10) здесь — того же типа, что и в (9). Формальное применение теоремы о вычетах даёт

$$k(x) = \frac{2}{\pi}\,\frac{1}{1 - x^2}\,,$$

и мы снова получаем формулы типа формул для трансформаций Гильберта.

(11) Формулы несколько отличного типа мы получим, положив

$$\mathfrak{K}\Big(\frac{1}{2} + it\Big) = e^{i/t}.$$

Здесь уравнение (8.1.9) удовлетворяется, и

$$k(x) = \frac{1}{2\pi\sqrt{x}}\int_{-\infty}^\infty e^{i/t}x^{-it}\,dt = \frac{1}{\pi\sqrt{x}}\int_0^\infty \cos\Big(\frac{1}{t} - t\ln x\Big)dt.$$

При $x \neq 1$ интеграл суммируем $(C,1)$ и имеет значение

$$\begin{cases} -\dfrac{J_1(2\sqrt{-\ln x})}{\sqrt{-x\ln x}} & (0 < x < 1), \\ \quad 0 & (x > 1). \end{cases}$$

Если $x = 1$, то интеграл для $k(x)$ расходится к бесконечности, и $k_1(x)$ имеет разрыв, как в примере (8). Таким образом, в итоге получаем формулу

$$g(x) = \frac{1}{x}\, f\left(\frac{1}{x}\right) - \int_0^{1/x} \frac{J_1(2\sqrt{-\ln(xy)}\,)}{\sqrt{-xy\ln(xy)}}\, f(y)\, dy.$$

Сделав подстановку

$$x = e^{-\xi}, \quad y = e^{-\eta}, \quad e^{-\xi/2} f(e^{-\xi}) = \varphi(\xi), \quad e^{-\xi/2} g(e^{-\xi}) = \psi(\xi),$$

получим

$$\psi(\xi) = \varphi(-\xi) - \int_{-\xi}^{\infty} \frac{J_1(2\sqrt{\xi+\eta}\,)}{\sqrt{\xi+\eta}}\, \varphi(\eta)\, d\eta.$$

Двойственная формула находится путём перестановки φ и ψ. Получающуюся формулу Фурье можно проверить с помощью интеграла[1]

$$\int_{-\lambda}^{\infty} \frac{J_1(2\sqrt{x+\lambda}\,)}{\sqrt{x+\lambda}}\, \frac{J_1(2\sqrt{x+\mu}\,)}{\sqrt{x+\mu}}\, dx = \frac{J_1(2\sqrt{\mu-\lambda}\,)}{\sqrt{\mu-\lambda}} \qquad (\lambda < \mu).$$

(12) Ядра, к которым приводят формулы суммирования, полученные в § 2.9 формальным путём, суть ядра Фурье. Так, например, рассуждения § 2.9 приводят к функциям

$$2\cos 2\pi x, \qquad 4K_0(4\pi\sqrt{x}) - 2\pi Y_0(4\pi\sqrt{x}),$$

как к трансформациям Меллина соответственно для

$$\frac{\zeta(1-s)}{\zeta(s)}, \quad \frac{\zeta^2(1-s)}{\zeta^2(s)}.$$

Последние функции, конечно, удовлетворяют уравнению (8.1.9).

Заметим также, что вместе с $k(x)$ также $\sqrt{a}\, k(ax)$ и $\lambda x^{(\lambda-1)/2} k(x^\lambda)$ являются ядрами Фурье.

8.5. L^2-теория. В теории интегралов Фурье мы доказывали теоремы двух типов: теоремы о сходимости в обычном смысле и теоремы о сходимости в среднем. И для обобщённых трансформаций имеются теоремы обоих типов; но здесь теория сходимости в среднем является одновременно и более лёгкой, и более общей, и мы начнём поэтому с неё.

Прежде всего достаточно предполагать существование функции $\mathfrak{K}(s)$ лишь на прямой $\sigma = \frac{1}{2}$. Уравнение (8.1.9) принимает тогда вид

$$\mathfrak{K}\left(\frac{1}{2} + it\right) \mathfrak{K}\left(\frac{1}{2} - it\right) = 1. \tag{8.5.1}$$

Можно было бы писать просто $\mathfrak{K}\left(\frac{1}{2} + it\right) = \varphi(t)$ и $\varphi(t)\varphi(-t) = 1$; однако,

[1] В а т с о н, § 13.47 (10).

мы удержим прежнее обозначение для того, чтобы сохранить внешний вид формул.

Мы должны были бы теперь иметь формально

$$k(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathfrak{K}\Big(\frac12+it\Big)x^{-\frac12-it}\,dt. \tag{8.5.2}$$

Но нет никаких оснований предполагать, что этот интеграл сходится в каком бы то ни было смысле. Однако, формула для $k_1(x)$, получающаяся из (8.5.2) путём формального интегрирования, будет существовать, в том смысле, что

$$k_1(x)=\frac{x}{2\pi}\operatorname*{l.i.m.}_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}\frac{\mathfrak{K}\Big(\frac12+it\Big)}{\frac12-it}\,x^{-\frac12-it}\,dt. \tag{8.5.3}$$

Если, как в большинстве наших формул, $\mathfrak{K}(s)$ принимает сопряжённые значения для сопряжённых значений s, то (8.5.1) даёт

$$\Big|\mathfrak{K}\Big(\frac12+it\Big)\Big|=1. \tag{8.5.4}$$

Поэтому $\dfrac{\mathfrak{K}\Big(\frac12+it\Big)}{\frac12-it}\in L^2(-\infty,\infty)$, интеграл в (8.5.3) существует в смысле сходимости в среднем, и $\dfrac{k_1(x)}{x}\in L^2(0,\infty)$.

Таким образом, наши теоремы должны формулироваться в терминах не $k(x)$, а $k_1(x)$. Так, например, формула (8.2.2) уже не имеет смысла. Однако, из неё формальным интегрированием по x получается формула

$$\int_0^{\infty}k_1(xu)k_1(\xi u)\,\frac{du}{u^2}=\min(x,\xi). \tag{8.5.5}$$

Этот интеграл абсолютно сходится в обычном смысле, и интеграл (8.5.5) сам может быть положен в основу теории Фурье.

Теория принимает разные формы в зависимости от того, принимается ли прямо соотношение (8.5.5) или нет. Её результаты могут быть сведены в следующие теоремы.

Теорема 129. *Пусть* $\mathfrak{K}\Big(\frac12+it\Big)$ *— произвольная функция от* t, *удовлетворяющая условиям* (8.5.1) *и* (8.5.4), *так что*

$$\frac{\mathfrak{K}\Big(\frac12+it\Big)}{\frac12-it}$$

принадлежит к $L^2(-\infty,\infty)$. *Пусть* $k_1(x)$ *— функция, определенная формулой* (8.5.3). *Тогда для любой функции* $f(x)$ *из* $L^2(0,\infty)$ *формула*

$$g(x) = \frac{d}{dx} \int_0^\infty k_1(xu) f(u) \frac{du}{u} \tag{8.5.6}$$

определяет почти всюду функцию $g(x)$, также принадлежащую к $L^2(0, \infty)$; двойственная формула

$$f(x) = \frac{d}{dx} \int_0^\infty k_1(xu) g(u) \frac{du}{u} \tag{8.5.7}$$

также имеет место почти всюду, и

$$\int_0^\infty f^2(x)\, dx = \int_0^\infty g^2(x)\, dx. \tag{8.5.8}$$

Теорема 130. *Если $\mathfrak{K}\left(\frac{1}{2} + it\right)$ удовлетворяет условиям теоремы* 129, *то $\dfrac{k_1(x)}{x} \in L^2(0, \infty)$, и имеет место соотношение* (8.5.5).

Теорема 131. *Пусть функция $k_1(x)$ такова, что $\dfrac{k_1(x)}{x} \in L^2(0, \infty)$ и соотношение* (8.5.5) *имеет место для всех значений x и ξ. Тогда имеют место двойственные формулы теоремы* 129.

Таким образом, теорема 129 является следствием теорем 130 и 131. Но она может быть доказана и непосредственно.

Изложенная теория принадлежит Ватсону[1]. Будем далее называть функции $f(x)$ и $g(x)$, связанные соотношениями (8.5.6), (8.5.7), парой k-трансформаций, а соотношение (8.5.8) — формулой Парсеваля для k-трансформаций.

8.6. Доказательство теорем 129, 130[2]. Пусть $f(s)$ — произвольная функция из $L^2(0, \infty)$ и $\mathfrak{F}(s)$ — её трансформация Меллина, так что $\mathfrak{F}\left(\frac{1}{2} + it\right) \in L^2(-\infty, \infty)$. Так как $\left|\mathfrak{K}\left(\frac{1}{2} + it\right)\right| = 1$, то $\mathfrak{K}\left(\frac{1}{2} + it\right)\mathfrak{F}\left(\frac{1}{2} - it\right)$ также принадлежит к L^2. Пусть $g(x)$ — её трансформация Меллина. Тогда[3]

$$\int_0^x g(u)\, du = \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{1}{2} - i\infty}^{\frac{1}{2} + i\infty} \mathfrak{K}(s) \mathfrak{F}(1 - s) \frac{x^{1-s}}{1 - s}\, ds.$$

Но $\dfrac{k_1(x)}{x}$ есть трансформация Меллина для $\dfrac{\mathfrak{K}(s)}{1 - s}$. Поэтому, в силу формулы Парсеваля для трансформаций Меллина,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{1}{2} - i\infty}^{\frac{1}{2} + i\infty} \frac{\mathfrak{K}(s)}{1 - s} \mathfrak{F}(1 - s) x^{-s}\, ds = \int_0^\infty \frac{k_1(xy)}{xy} f(y)\, dy.$$

[1] Watson (2).

[2] Busbridge (1).

[3] Эта и следующая формулы подходят под теорему 72, расширенную как в (2.1.23).

Следовательно,

$$\int_0^x g(u)\,du = \int_0^\infty \frac{k_1(xy)}{xy}\,f(y)\,dy.$$

откуда вытекает, что почти всюду имеет место равенство (8.5.6). Таким образом, k-трансформация $g(x)$ функции $f(x)$ является трансформацией Меллина для $\mathfrak{K}(s)\mathfrak{F}(1-s)$ (на прямой $\sigma = \frac{1}{2}$). На том же основании k-трансформация функции $g(x)$ является трансформацией Меллина для

$$\mathfrak{K}(s)\mathfrak{K}(1-s)\mathfrak{F}(s) = \mathfrak{F}(s).$$

Таким образом, k-трансформация функции $g(x)$ равна $f(x)$. Все эти трансформации принадлежат к L^2, так что необходимые теоремы единственности выполняются. Наконец,

$$\int_0^\infty g^2(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \left|\mathfrak{K}\Big(\frac{1}{2}+it\Big)\mathfrak{F}\Big(\frac{1}{2}-it\Big)\right|^2 dt = \\ = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \left|\mathfrak{F}\Big(\frac{1}{2}+it\Big)\right|^2 dt = \int_0^\infty f^2(x)\,dx,$$

т.е. верна и формула Парсеваля для k-трансформаций.

Теорема 130 также непосредственно следует из формулы Парсеваля для трансформаций Меллина. Так как $\dfrac{k_1(x)}{x}$ есть трансформация Меллина для $\dfrac{\mathfrak{K}(s)}{1-s}$, то, принимая во внимание функциональное уравнение для $\mathfrak{K}(s)$, имеем

$$\int_0^\infty \frac{k_1(ax)}{ax}\,\frac{k_1(bx)}{bx}\,dx = \frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty} \frac{\mathfrak{K}(s)a^{-s}}{1-s}\,\frac{\mathfrak{K}(1-s)b^{s-1}}{s}\,ds = \\ = \frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty} \frac{a^{-s}b^{s-1}}{(1-s)s}\,ds.$$

Если $a > b$, то последний интеграл может быть вычислен путём перемещения пути интегрирования вправо; в результате получаем для интеграла значение $\dfrac{1}{a}$. Если же $a < b$, то значение интеграла, получаемое перемещением пути интегрирования влево, равно $\dfrac{1}{b}$. Кроме того, интеграл, стоящий слева, непрерывен при $a = b$. Отсюда и следует утверждаемый результат.

8.7. Доказательство теоремы 131[1]. Предположим сначала, что $f(x)$ имеет непрерывную производную и тождественно обращается в нуль для всех достаточно малых и достаточно больших значений x. Пусть

[1] Titchmarsh (15); см. также Plancherel (6).

$$g_1(y) = \int_0^\infty \frac{k_1(xy)}{x} f(x)\,dx = \int_0^\infty \frac{k_1(u)}{u} f\left(\frac{u}{y}\right) du.$$

Тогда $g_1(y)$, очевидно, дифференцируема, и

$$g(y) = g_1'(y) = -\frac{1}{y^2} \int_0^\infty k_1(u) f'\left(\frac{u}{y}\right) du = -\frac{1}{y} \int_0^\infty k_1(xy) f'(x)\,dx,$$

$$\begin{aligned}\int_0^\infty g^2(y)\,dy &= \int_0^\infty \frac{dy}{y^2} \int_0^\infty k_1(xy) f'(x)\,dx \int_0^\infty k_1(\xi y) f'(\xi)\,d\xi = \\ &= \int_0^\infty f'(x)\,dx \int_0^\infty f'(\xi)\,d\xi \int_0^\infty \frac{k_1(xy)k_1(\xi y)}{y^2}\,dy = \\ &= \int_0^\infty f'(x)\,dx \int_0^\infty f'(\xi) \min(x,\xi)\,d\xi = \\ &= \int_0^\infty f'(x) x\,dx \int_x^\infty f'(\xi)\,d\xi + \int_0^\infty f'(\xi)\xi\,d\xi \int_\xi^\infty f'(x)\,dx = \\ &= -2\int_0^\infty f(x) f'(x) x\,dx = -x f^2(x)\Big|_0^\infty + \int_0^\infty f^2(x)\,dx = \\ &= \int_0^\infty f^2(x)\,dx.\end{aligned}$$

Легко проверить, что все проведённые выкладки законны, если $f(x)$ удовлетворяет поставленным условиям.

Пусть теперь $f(x)$ — произвольная функция из $L^2(0,\infty)$. Тогда, как известно, существует последовательность функций $f_n(x)$, каждая из которых удовлетворяет условиям, наложенным выше на $f(x)$, такая, что

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \big[f(x) - f_n(x)\big]^2\,dx = 0.$$

Пусть $g_n(x)$ таким же образом соответствует $f_n(x)$, как выше $g(x)$ соответствовала $f(x)$. Тогда

$$\int_0^\infty \big[g_m(x) - g_n(x)\big]^2\,dx = \int_0^\infty \big[f_m(x) - f_n(x)\big]^2\,dx,$$

что стремится к нулю, когда m и n стремятся к бесконечности. Поэтому последовательность функций $g_n(x)$ сходится в среднем к некоторой функции $g(x)$. Тогда

$$\int_0^\infty g^2(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^\infty g_n^2(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^\infty f_n^2(x)\,dx = \int_0^\infty f^2(x)\,dx,$$

т.е. и для функций $f(x)$ и $g(x)$ верна формула Парсеваля.

Далее,

$$\int_0^y g(u)\,du = \lim_{n\to\infty}\int_0^y g_n(u)\,du = \\ = \lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \frac{k_1(xy)}{x} f_n(x)\,dx = \int_0^\infty \frac{k_1(xy)}{x} f(x)\,dx,$$

так что

$$g(y) = \frac{d}{dy}\int_0^\infty \frac{k_1(xy)}{x} f(x)\,dx,$$

т.е. $g(y)$ есть k-трансформация функции $f(x)$.

Пусть $\varphi(x)$ — другая функция из $L^2(0,\infty)$ и $\psi(x)$ — её k-трансформация. Тогда формула Парсеваля даёт

$$\int_0^\infty g(x)\psi(x)\,dx = \int_0^\infty f(x)\varphi(x)\,dx.$$

В частности, пусть

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & (x \leqslant u), \\ 0 & (x > u). \end{cases}$$

Тогда

$$\int_0^\infty \frac{k_1(xy)}{x}\,\varphi(x)\,dx = \int_0^u \frac{k_1(xy)}{x}\,dx = \int_0^{uy} \frac{k_1(x)}{x}\,dx,$$

и потому

$$\psi(y) = \frac{d}{dy}\int_0^{uy} \frac{k_1(x)}{x}\,dx = \frac{k_1(uy)}{y}\,.$$

Следовательно,

$$\int_0^\infty \frac{k_1(ux)}{x}\,g(x)\,dx = \int_0^u f(x)\,dx,$$

откуда вытекает двойственная формула (8.5.7).

8.8. Необходимость условий теоремы 131[1]**.** Легко также видеть, что условия, наложенные в последней теореме на $k_1(x)$ и $\mathfrak{K}(s)$, необходимы. В самом деле, предположим, что двойственные формулы

$$\int_0^x f(y)\,dy = \int_0^\infty \frac{k_1(xu)}{u}\,g(u)\,du, \tag{8.8.1}$$

$$\int_0^x g(y)\,dy = \int_0^\infty \frac{k_1(xu)}{u}\,f(u)\,du \tag{8.8.2}$$

верны для любой функции $f(x) \in L^2(0,\infty)$. Возьмём $f(x) = \begin{cases} 1 & (x \leqslant \xi), \\ 0 & (x > \xi). \end{cases}$

Тогда (8.8.2) даёт

[1] Busbridge (1).

$$\int_0^x g(y)\,dy = \int_0^\xi \frac{k_1(xu)}{u}\,du = \int_0^{\xi x} \frac{k_1(v)}{v}\,dv,$$

так что

$$g(x) = \frac{k_1(\xi x)}{x}\,.$$

Подставляя данное выражение в (8.8.1), получаем

$$\int_0^\infty \frac{k_1(xu)k_1(\xi u)}{u^2}\,du = \min(x,\xi).$$

Отсюда, в частности (при $x=\xi=1$), следует, что $\dfrac{k_1(u)}{u} \in L^2(0,\infty)$.

Если $\dfrac{\mathfrak{K}(s)}{1-s}$ есть трансформация Меллина функции $\dfrac{k_1(x)}{x}$, то формула Парсеваля для трансформации Меллина даёт

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\frac12-i\infty}^{\frac12+i\infty} \frac{\mathfrak{K}(s)a^{-s}}{1-s}\,\frac{\mathfrak{K}(1-s)b^{s-1}}{s}\,ds = \int_0^\infty \frac{k_1(ax)}{ax}\,\frac{k_1(bx)}{bx}\,dx = \frac{\min(a,b)}{ab}\,.$$

Но, с другой стороны,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\frac12-i\infty}^{\frac12+i\infty} \frac{a^{-s}}{1-s}\,\frac{b^{s-1}}{s}\,ds = \frac{\min(a,b)}{ab}\,.$$

Поэтому (полагая $b=1$) получаем, что

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\frac12-i\infty}^{\frac12+i\infty} \frac{1-\mathfrak{K}(s)\mathfrak{K}(1-s)}{(1-s)s}\,a^{-s}\,ds = 0$$

для всех значений a. Так как подынтегральное выражение (как произведение двух функций из L^2) принадлежит к L, то из теоремы 32 следует, что оно должно быть равно нулю, т.е.

$$\mathfrak{K}(s)\mathfrak{K}(1-s) = 1.$$

8.9. Несимметричные формулы. Аналогичная группа теорем имеет место для трансформаций, порождаемых уравнением (8.3.5). Мы будем предполагать теперь, что функции $\mathfrak{H}\Big(\dfrac12+it\Big)$ и $\mathfrak{K}\Big(\dfrac12+it\Big)$ обе ограничены. Пусть $\dfrac{h_1(x)}{x}$ и $\dfrac{k_1(x)}{x}$ — трансформации Меллина функций $\dfrac{\mathfrak{H}\Big(\dfrac12+it\Big)}{\dfrac12-it}$ и $\dfrac{\mathfrak{K}\Big(\dfrac12+it\Big)}{\dfrac12-it}$. Тогда заданная функция $f(x)$ из $L^2(0,\infty)$ имеет две трансформации:

$$g_h(x) = \frac{d}{dx}\int_0^\infty \frac{h_1(xy)}{y}\,f(y)\,dy, \quad g_k(x) = \frac{d}{dx}\int_0^\infty \frac{k_1(xy)}{y}\,f(y)\,dy.$$

При этом k-трансформация функции $g_h(x)$ и h-трансформация функции $g_k(x)$ равны $f(x)$. Обычная формула Парсеваля заменяется соотношением

$$\int_0^\infty g_h(x)g_k(x)\,dx = \int_0^\infty f^2(x)\,dx$$

совместно с неравенствами

$$\int_0^\infty |g_h(x)|^2\,dx < c\int_0^\infty f^2(x)\,dx,$$
$$\int_0^\infty |g_k(x)|^2\,dx < c\int_0^\infty f^2(x)\,dx.$$

Доказательство теоремы 129 распространяется на этот случай без существенных изменений. Доказательство теоремы 131 сохраняет силу лишь если $\mathfrak{K}\left(\frac{1}{2}+it\right)$ и $\mathfrak{H}\left(\frac{1}{2}+it\right)$ являются комплексно сопряжёнными, так что $g_h(x)g_k(x) = |g_h(x)|^2$. Тем не менее, и в общем случае результат остаётся справедливым, но теперь нужно доказывать (8.3.5), как в § 8.8, а затем поступать, как в доказательстве теоремы 129.

8.10. Теорема сходимости. В предшествующей теории трансформация выражалась через функцию $k_1(x)$, которая необязательно дифференцируема. Для получения форм (8.1.5), (8.1.6) требуются дальнейшие ограничения как на ядра, так и на представляемую функцию[1].

Т е о р е м а 132. *Предположим:* (I) *что* $\mathfrak{K}\left(\frac{1}{2}+it\right)$ *удовлетворяет условиям* (8.5.1) *и* (8.5.4), *так что функция* $\frac{k_1(x)}{x}$, *где* $k_1(x)$ *определена интегралом* (8.2.3) *с* $c=\frac{1}{2}$, *принадлежит к* $L^2(0,\infty)$, (II) *что* $k_1(x)$ *есть интеграл от* $k(x)$, (III) *что отношение* $\frac{k_1(x)}{\sqrt{x}}$ *ограничено.*

Пусть

$$f(x) = \frac{1}{x}\int_0^x \varphi(y)\,dy, \tag{8.10.1}$$

где $\varphi(y)\in L^2(0,\infty)$. *Тогда*

$$f(x) = \int_{\to 0}^{\to\infty} k(xu)\,du \int_{\to 0}^{\to\infty} k(uy)f(y)\,dy \tag{8.10.2}$$

для всякого положительного x.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеем

$$|f(x)| \leqslant \frac{1}{x}\sqrt{\int_0^x |\varphi(y)|^2\,dy \int_0^x dy} = o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$$

[1] Hardy and Titchmarsh (8); см. также Morgan (2).

при $x \to 0$; кроме того,

$$|f(x)| \leqslant \frac{1}{x}\int_0^X |\varphi(y)|\,dy + \frac{1}{x}\sqrt{\int_X^\infty |\varphi(y)|^2\,dy \int_0^x dy} = o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$$

при $x \to \infty$, в чём убеждаемся, выбирая сначала X, а затем x.

Пусть $\psi(x)$ — k-трансформация функции $\varphi(x)$. Тогда $\psi(x) \in L^2$ и

$$\int_0^x \varphi(y)\,dy = \int_0^\infty \frac{k_1(xu)}{u}\,\psi(u)\,du.$$

Положим

$$g(u) = \int_u^\infty \frac{\psi(v)}{v}\,dv. \tag{8.10.3}$$

Тогда

$$\int_0^x \varphi(y)\,dy = -\int_0^\infty k_1(xu)g'(u)\,du =$$
$$= \lim_{\substack{\delta\to 0\\ \Delta\to\infty}} \left\{-k_1(xu)g(u)\Big|_\delta^\Delta + x\int_\delta^\Delta k(xu)g(u)\,du\right\}. \tag{8.10.4}$$

Но

$$|g(u)| \leqslant \sqrt{\int_u^\infty |\psi(v)|^2\,dv \int_u^\infty \frac{dv}{v^2}} = o\left(\frac{1}{\sqrt{u}}\right)$$

при $u \to \infty$; кроме того,

$$|g(u)| \leqslant \int_\delta^\infty \left|\frac{\psi(v)}{v}\right| dv + \sqrt{\int_0^\delta |\psi(v)|^2\,dv \int_u^\infty \frac{dv}{v^2}} = o\left(\frac{1}{\sqrt{u}}\right)$$

при $u \to 0$, в чём убеждаемся, выбирая сначала δ, а затем u. Поэтому проинтегрированные члены в (8.10.4) стремятся к нулю, и мы получаем

$$f(x) = \frac{1}{x}\int_0^x \varphi(y)\,dy = \int_{\to 0}^{\to\infty} k(xu)g(u)\,du. \tag{8.10.5}$$

Далее, (8.10.3) может быть записано в виде

$$g(u) = \int_0^\infty \psi(v)\mu(v)\,dv,$$

где $\mu(v) = \begin{cases} 0 & (v < u), \\ 1/v & (v > u). \end{cases}$ Поэтому по формуле Парсеваля

$$g(u) = \int_0^\infty \varphi(v)\lambda(v)\,dv,$$

где

$$\lambda(v) = \frac{d}{dv}\int_0^\infty \mu(t)\frac{k_1(vt)}{t}\,dt = \frac{d}{dv}\int_u^\infty \frac{k_1(vt)}{t^2}\,dt =$$

$$= \frac{d}{dv}\left\{v\int_{uv}^{\infty}\frac{k_1(\xi)}{\xi^2}\,d\xi\right\} = \int_{uv}^{\infty}\frac{k_1(\xi)}{\xi^2}\,d\xi - \frac{k_1(uv)}{uv}\,.$$

Следовательно,

$$g(u) = \int_0^{\infty}\varphi(v)\,dv\int_{uv}^{\infty}\frac{k_1(\xi)}{\xi^2}\,d\xi - \int_0^{\infty}\varphi(v)\,\frac{k_1(uv)}{uv}\,dv = g_1(u) - g_2(u). \tag{8.10.6}$$

Интегрирование по частям даёт

$$g_1(u) = \left[vf(v)\int_{uv}^{\infty}\frac{k_1(\xi)}{\xi^2}\,d\xi\right]\Bigg|_0^{\infty} + \int_{\to 0}^{\to\infty} vf(v)u\,\frac{k_1(uv)}{u^2v^2}\,dv. \tag{8.10.7}$$

Проинтегрированные члены здесь исчезают, так как $vf(v) = o(\sqrt{v})$, и, поскольку $\dfrac{k_1(\xi)}{\xi}\in L^2$,

$$\int_{uv}^{\infty}\frac{k_1(\xi)}{\xi^2}\,d\xi = o\left(\frac{1}{\sqrt{v}}\right),$$

как в случае $g(u)$. Точно так же

$$g_2(u) = \left[vf(v)\,\frac{k_1(uv)}{uv}\right]\Bigg|_0^{\infty} - \int_{\to 0}^{\to\infty} vf(v)\,\frac{k(uv)}{v}\,dv + \int_{\to 0}^{\to\infty} vf(v)\,\frac{k(uv)}{uv^2}\,dv, \tag{8.10.8}$$

где проинтегрированные члены исчезают, так как $\dfrac{k_1(uv)}{\sqrt{v}} = O(1)$.

Из (8.10.6), (8.10.7) и (8.10.8) следует, что

$$g(u) = \int_{\to 0}^{\to\infty} k(uv)f(v)\,dv. \tag{8.10.9}$$

Формулы (8.10.5) и (8.10.9) дают утверждение теоремы.

8.11. Свёртка двух ядер Фурье[1]**.** Пусть

$$m(x) = \int_0^{\infty} k(xy)l(y)\,dy$$

— свёртка функций $k(x)$ и $l(x)$. Тогда формальное правило состоит в том, что *если $k(x)$ и $l(x)$ — ядра Фурье, то и $m(x)$ — ядро Фурье.* Мы можем, например, положить

$$\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} m(xu)m(ut)f(t)\,du\,dt =$$
$$= \int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} k(xuy)k(utz)l(y)l(z)f(t)\,du\,dt\,dy\,dz,$$

[1] Hardy (20).

и если k и l — ядра Фурье, то подстановка $t = \dfrac{v}{z}$, $y = zw$ даёт

$$\int_0^\infty \int_0^\infty l(z)l(zw)\,dz\,dw \int_0^\infty \int_0^\infty k(xzwu)k(uv)f\left(\frac{v}{z}\right)du\,dv = \\ = \int_0^\infty \int_0^\infty l(z)l(zw)f(wx)\,dz\,dw = f(x).$$

Для той же цели можно воспользоваться также трансформациями Меллина. Обозначая через $\mathfrak{K}$ и $\mathfrak{L}$ трансформации Меллина функций k и l, имеем для трансформации Меллина функции m

$$\mathfrak{M}(s) = \int_0^\infty m(x)x^{s-1}\,dx = \int_0^\infty x^{s-1}\,dx \int_0^\infty k(xy)l(y)\,dy = \\ = \int_0^\infty l(y)\,dy \int_0^\infty k(xy)x^{s-1}\,dx = \int_0^\infty l(y)y^{-s}\,dy \int_0^\infty k(u)u^{s-1}\,du = \\ = \mathfrak{L}(1-s)\mathfrak{K}(s).$$

Поэтому

$$\mathfrak{M}(s)\mathfrak{M}(1-s) = \mathfrak{K}(s)\mathfrak{K}(1-s)\mathfrak{L}(1-s)\mathfrak{L}(s) = 1,$$

что снова даёт утверждаемый результат. Разумеется, все эти выкладки пока — чисто формальные.

L^2-теория позволяет теперь доказать следующее предложение.

Т е о р е м а 133. *Пусть $k_1(x)$ и $l_1(x)$ удовлетворяют условиям теоремы* 131, *и пусть $m_1\left(\dfrac{1}{x}\right)$ есть l-трансформация функции $\dfrac{k_1(x)}{x}$. Тогда $m_1(x)$ также удовлетворяет условиям теоремы* 131.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Здесь $m_1\left(\dfrac{1}{x}\right)$ определена равенством

$$\int_0^x m_1\left(\frac{1}{u}\right)du = \int_0^\infty \frac{l_1(xu)}{u}\,\frac{k_1(u)}{u}\,du.$$

Но $m_1\left(\dfrac{a}{x}\right)$ есть l-трансформация функции $\dfrac{k_1(ax)}{x}$. Поэтому, в силу формулы Парсеваля для l-трансформаций,

$$\int_0^\infty \frac{m_1(ax)m_1(bx)}{x^2}\,dx = \int_0^\infty m_1\left(\frac{a}{x}\right)m_1\left(\frac{b}{x}\right)dx = \\ = \int_0^\infty \frac{k_1(ax)k_1(bx)}{x^2}\,dx = \min(a,b),$$

что и утверждается теоремой.

Пусть, в частности, $s_1(x) = \begin{cases} 0 & (x < 1), \\ 1 & (x \geqslant 1), \end{cases}$ так что

$$g(x) = \frac{1}{x}\,f\left(\frac{1}{x}\right), \qquad f(x) = \frac{1}{x}\,g\left(\frac{1}{x}\right).$$

Мы будем называть это трансформацией s. Если $k_1 = l_1$, то

$$\int_0^x m_1\left(\frac{1}{y}\right) dy = \int_0^\infty \frac{k_1(t)k_1(xt)}{t^2}\, dt = \min(1, x),$$

и $m_1 \equiv s_1$. Если $l_1 = s_1$, то

$$\int_0^x m_1\left(\frac{1}{y}\right) dy = \int_{1/x}^\infty \frac{k_1(t)}{t^2}\, dt = \int_0^x k_1\left(\frac{1}{t}\right) dt,$$

и $m_1 \equiv k_1$. Таким образом, свёртка k и k есть s, свёртка k и s есть k.

П р и м е р ы.

(1) Если k — косинус-трансформация и l — синус-трансформация, то

$$m_1(x) = \frac{1}{\pi}\, \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|, \qquad m(x) = \frac{2}{\pi}\, \frac{1}{1-x^2}\,,$$

и m-трансформация есть

$$g(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{f(t)}{1 - x^2t^2}\, dt.$$

Если f — чётная функция, то это даёт

$$\frac{1}{x}\, g\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{f(t)}{x-t}\, dt,$$

т.е. трансформацию Гильберта для $f(t)$.

Свёртка этой трансформации и k определяется формулой

$$m(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{k(xt)}{1-t^2}\, dt,$$

или, считая $k(x)$ чётной, — формулой

$$m(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{k(t)}{x-t}\, dt.$$

Таким образом, *ядро, сопряжённое к ядру Фурье, само есть ядро Фурье.*

(2) Функция $l_1(x) = \begin{cases} x & (x < 1), \\ 0 & (x \geqslant 1) \end{cases}$ удовлетворяет условию (8.5.5). Мы заключаем, что если $k(x)$ — ядро Фурье, то ядром Фурье является и

$$m(x) = \int_0^\infty k(xt)\, dl_1(t) = \int_0^1 k(xt)\, dt - k(x) = \frac{1}{x} \int_0^x k(u)\, du - k(x).$$

Аналогично, при $l_1(x) = \begin{cases} 0 & (x < 1), \\ \ln x - 1 & (x \geqslant 1) \end{cases}$ мы находим, что

$$\int_x^\infty \frac{k(u)}{u}\, du - k(x)$$

есть ядро Фурье.

(3) Свёртка $\sqrt{t}\,J_\nu(t)$ и $\dfrac{1}{t\sqrt{t}}\,J_\nu\Big(\dfrac{1}{t}\Big)$ есть[1] $J_{2\nu-1}(2\sqrt{t})$.

(4) Свёртка $\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\cos x$ и $\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\,\dfrac{1}{x}\cos\dfrac{1}{x}$ есть (§ 7.12)

$$\frac{2}{\pi}\big[K_0(2\sqrt{x}) - Y_0(2\sqrt{x})\big];$$

свёртка $\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\sin x$ и $\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\,\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$ есть

$$\frac{2}{\pi}\big[K_0(2\sqrt{x}) + Y_0(2\sqrt{x})\big].$$

Последнее ядро является также сопряжённым к $J_0(2\sqrt{x})$.

(5) Свёртка $J_0(2\sqrt{x})$ и $\cos x$ есть $-\sin x$, а свёртка $J_0(2\sqrt{x})$ и $\sin x$ есть $\cos x$. Это может быть доказано, как в § 7.12.

(6) Имеем при $x \neq 1$

$$\sqrt{x}\int_0^\infty tJ_\mu(xt)J_{-\mu}(t)\,dt = -\frac{2\sin\pi\mu}{\pi}\,\frac{x^{\mu+\frac{1}{2}}}{1-x^2} \quad (C,1),$$

тогда как при $x = 1$ интеграл расходится как

$$\frac{\cos\pi\mu}{\pi}\int^\infty dt.$$

Расходимость указывает, что при образовании свёртки $\sqrt{x}\,J_\mu(x)$ и $\sqrt{x}\,J_{-\mu}(x)$ у функции $m_1(x)$ будет разрыв в точке $x=1$. И действительно

$$m_1(x) = -\frac{2\sin\pi\mu}{\pi}\int_0^x \frac{t^{\mu+\frac{1}{2}}}{1-t^2}\,dt + \begin{cases} 0 & (x<1),\\ \cos\pi\mu & (x \geqslant 1).\end{cases}$$

Формулы обращения суть

$$g(x) = -\frac{2\sin\pi\mu}{\pi}\int_0^\infty \frac{(xt)^{\mu+\frac{1}{2}}}{1-x^2t^2}\,f(t)\,dt + \frac{\cos\pi\mu}{x}\,f\Big(\frac{1}{x}\Big)$$

и двойственная ей формула.

(7) Если мы образуем свёртку $m(x)$ ядер $\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\cos x$ и $J_{1/2}(2\sqrt{x})$, а затем заменим $m(x)$ на $\dfrac{1}{\sqrt{2x}}\,m\Big(\dfrac{1}{2x}\Big)$, то получим ядро Фурье

$$\sqrt{2x}\Big[\cos\Big(x-\frac{\pi}{8}\Big)J_{3/4}(x) + \sin\Big(x-\frac{\pi}{8}\Big)J_{-1/4}(x)\Big].$$

[1] В а т с о н, § 13.61 (1), или как в § 7.12.

8.12. Сходимость k-интегралов. Мы оставим теперь теорию трансформаций и докажем совершенно независимо одну теорему о сходимости в обычном смысле. Для этого нам придётся сделать весьма специальные предположения и предлагаемая теория будет практически ограничена теми примерами из § 8.4, в которых $\mathfrak{K}(s)$ есть произведение гамма-функций. Однако, для таких функций мы получим прямое обобщение теоремы 3.

Теорема 134[1]. *Пусть $\mathfrak{K}(s)$ регулярна в полосе $\sigma_1 < \sigma < \sigma_2$, где $\sigma_1 < 0$, $\sigma_2 > 1$, за исключением, быть может, конечного числа простых полюсов на мнимой оси, и пусть $\mathfrak{K}(s)$ для больших положительных и больших отрицательных t имеет, соответственно, вид*

$$\mathfrak{K}_0(s) \cdot \left\{\alpha + \frac{\beta}{s} + O\left(\frac{1}{|s|^2}\right)\right\}, \qquad \mathfrak{K}_0(s) \cdot \left\{\gamma + \frac{\delta}{s} + O\left(\frac{1}{|s|^2}\right)\right\},$$

где

$$\mathfrak{K}_0(s) = \Gamma(s) \cos \frac{\pi s}{2}$$

есть трансформация Меллина для $\cos x$. Пусть $\mathfrak{K}(s)$ удовлетворяет уравнению (8.1.9) и $k(x)$ есть трансформация Меллина для $\mathfrak{K}(s)$.

Тогда, если $f(y)$ принадлежит к $L(0, \infty)$ и имеет ограниченное изменение в окрестности точки $y = x$ $(x > 0)$, то

$$\int_0^{\to\infty} k(xu)\, du \int_0^{\infty} k(uy) f(y)\, dy = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}. \tag{8.12.1}$$

Функция $\mathfrak{K}_0(s)$ регулярна в любой полосе $\sigma_1 < \sigma < \sigma_2$, за исключением конечного числа простых полюсов в точках с $\sigma \leqslant 0$. Если t велико и положительно, то

$$\mathfrak{K}_0(\sigma + it) = Ct^{\sigma - \frac{1}{2}} e^{i(t \ln t - t)} \left\{1 + \frac{a}{t} + O\left(\frac{1}{t^2}\right)\right\},$$

где C и a — комплексные и a зависит от σ; а $\mathfrak{K}_0(\sigma - it)$ удовлетворяет комплексно сопряжённому равенству.

Функции

$$\Gamma(s) \sin \frac{\pi s}{2}, \quad \Gamma(s) \frac{\cos \frac{\pi s}{2}}{1 - s}, \quad \Gamma(s) \frac{\sin \frac{\pi s}{2}}{2 - s}$$

суть трансформации Меллина для

$$\sin x, \quad \frac{\sin x}{x}, \quad \frac{\sin x - x \cos x}{x^2}$$

[1] Hardy and Titchmarsh (8).

и имеют для больших t вид

$$\mathfrak{K}_0(s)\left\{i\operatorname{sgn}t+O\left(\frac{1}{|s|^2}\right)\right\},\quad \mathfrak{K}_0(s)\left\{-\frac{1}{s}+O\left(\frac{1}{|s|^2}\right)\right\},$$
$$\mathfrak{K}_0(s)\left\{-\frac{i\operatorname{sgn}t}{s}+O\left(\frac{1}{|s|^2}\right)\right\}.$$

Если $\mathfrak{K}_0(s)$ удовлетворяет условиям теоремы, то мы можем найти такие постоянные a_1, a_2, a_3, a_4, что

$$\mathfrak{K}(s)=\mathfrak{K}^{(1)}(s)+\mathfrak{K}^{(2)}(s)+\mathfrak{K}^{(3)}(s),$$

где

$$\mathfrak{K}^{(1)}(s)=a_1\Gamma(s)\cos\frac{\pi s}{2}+a_2\Gamma(s)\sin\frac{\pi s}{2},$$
$$\mathfrak{K}^{(2)}(s)=a_3\Gamma(s)\frac{\cos\frac{\pi s}{2}}{1-s}+a_4\Gamma(s)\frac{\sin\frac{\pi s}{2}}{2-s}$$

и

$$\mathfrak{K}^{(3)}(s)=O\big(|\mathfrak{K}_0(s)s^{-2}|\big)=O\big(|t|^{\sigma-5/2}\big)$$

для больших s в полосе. Пусть $k^{(1)}(x),\ldots$ будут трансформации Меллина для $\mathfrak{K}^{(1)}(s),\ldots$ соответственно.

8.13.

Л е м м а α. *Функция $k(x)$ равномерно ограничена для всех положительных x.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Это верно для $k^{(1)}(x)$ и $k^{(2)}(x)$, так что достаточно доказать ограниченность

$$k^{(3)}(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\mathfrak{K}^{(3)}(s)x^{-s}\,ds.$$

Если $x\geqslant 1$, то возьмём $c=1+\delta$, где $0<\delta<\frac{1}{2}$, $1+\delta<\sigma_2$. Так как тогда $\mathfrak{K}^{(3)}(s)$ есть $O\big(|s|^{\delta-3/2}\big)$, то $k^{(3)}(x)$ ограничена и даже, более того, есть $O(x^{-1-\delta})$. Если $0<x\leqslant 1$, то возьмём $c=-\delta$, где $\sigma_1<-\delta<0$. Тогда

$$k^{(3)}(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\delta-i\infty}^{-\delta+i\infty}\mathfrak{K}^{(3)}(s)x^{-s}\,ds+\rho,$$

где последний член есть сумма вычетов по всем полюсам на мнимой оси. Ясно, что ρ ограничено, а интеграл ограничен, так как $\mathfrak{K}^{(3)}(s)=O\big(|s|^{-\delta-5/2}\big)$. Следовательно, $k(x)$ ограничена для всех положительных x.

8.14.

Лемма β. *Пусть*

$$\varphi(\lambda, x, y) = \int_{1/\lambda}^{\lambda} k(xu)k(yu)\,du, \tag{8.14.1}$$

где $\lambda > 1$ и x положительно и фиксировано. Тогда

$$|\varphi| < B(x, \zeta) \tag{8.14.2}$$

для всех положительных y, для которых $|y - x| \geqslant \zeta$.

Доказательство. В силу леммы α мы можем заменить φ на

$$\chi(\lambda, x, y) = \int_1^{\lambda} k(xu)k(yu)\,du = \\ = \int_1^{\lambda} \left[k^{(1)}(xu) + k^{(2)}(xu)\right]\left[k^{(1)}(yu) + k^{(2)}(yu) + k^{(3)}(yu)\right] du + \\ + \int_1^{\lambda} k^{(3)}(xu)k(yu)\,du.$$

Последний член ограничен, так как $k^{(3)}(xu) = O(u^{-1-\delta})$, а $k(yu)$ ограничена.

Обозначим интеграл, содержащий $k^{(p)}(xu)k^{(q)}(yu)$, через $\chi_{p,q}$. Тогда $\chi_{1,1}$, очевидно, ограничен. Далее, $\chi_{1,2}$ распадается на четыре слагаемых, типа интеграла

$$\int_1^{\lambda} \sin xu\, \frac{\sin yu - yu\cos yu}{y^2u^2}\,du = \int_1^{1/y} \sin xu\, \frac{\sin yu - yu\cos yu}{y^2u^2}\,du + \\ + \int_{1/y}^{\lambda} \frac{\sin xu\, \sin yu}{y^2u^2}\,du - \int_{1/y}^{\lambda} \frac{\sin xu\, \cos yu}{yu}\,du.$$

Так как выражение $\dfrac{\sin x - x\cos x}{x^2}$ положительно и убывает при $0 < x < 1$, то первый член в правой части равен

$$(\sin 1 - \cos 1)\int_{u_1}^{1/y} \sin xu\,du,$$

где $0 < u_1 < 1/y$. Второй и третий члены равны

$$\int_{1/y}^{u_2} \sin xu\, \sin yu\,du, \quad -\int_{1/y}^{u_3} \sin xu\, \cos yu\,du,$$

где $u_2 > 1/y$, $u_3 > 1/y$. Все эти выражения ограничены, и таким же образом можно установить ограниченность остальных слагаемых, входящих в $\chi_{1,2}$. Следовательно, интеграл $\chi_{1,2}$ ограничен.

Аналогичные рассуждения применимы к $\chi_{2,1}$ и $\chi_{2,2}$. Так, типичный член интеграла $\chi_{2,2}$ есть

$$\int_1^\lambda \frac{\sin xu}{xu}\,\frac{\sin yu}{yu}\,du = \int_1^{1/y} + \int_{1/y}^\lambda = \\ = \frac{\sin y}{y}\int_1^{u_1}\frac{\sin xu}{xu}\,du + \int_{1/y}^{u_2}\frac{\sin xu}{xu}\,\sin yu\,du,$$

и каждое из слагаемых правой части ограничено.

Типичный член интеграла $\chi_{1,3}$ есть

$$\frac{1}{2\pi i}\int_1^\lambda \cos xu\,du \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \mathfrak{K}^{(3)}(s)(yu)^{-s}\,ds.$$

Если $\mathfrak{K}^{(3)}$ не имеет полюсов на мнимой оси, то мы можем взять $c=0$ и обратить порядок интегрирования, что даёт

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathfrak{K}^{(3)}(it)y^{-it}\,dt \int_1^\lambda \frac{\cos xu}{u^{it}}\,du.$$

Внутренний интеграл при $t>\lambda$ есть $O(\lambda)=O(t)$, а при $0<t<\lambda$ он отличается на $O(t)$ от

$$\int_t^\lambda \frac{\cos xu}{u^{it}}\,du = \left[\frac{\sin xu}{xu^{it}}\right]_t^\lambda - it\left[\frac{\cos xu}{x^2u^{it+1}}\right]_t^\lambda - \frac{it(it+1)}{x^2}\int_t^\lambda \frac{\cos xu}{u^{it+2}}\,du,$$

где каждый член есть $O(t)$. Так как $\mathfrak{K}^{(3)}(it)=O(|t|^{-5/2})$ для больших t, то рассматриваемый член ограничен.

Если на мнимой оси имеются полюса, то достаточно рассмотреть один из них, скажем в $s=i\tau$ с вычетом C. Пусть

$$\mathfrak{K}^{(3)}(s) = C\Gamma(s-i\tau) + \mathfrak{K}^{(4)}(s), \quad k^{(3)}(x) = Cx^{-i\tau}e^{-x} + k^{(4)}(x).$$

Тогда $\mathfrak{K}^{(4)}$ удовлетворяет условиям, наложенным выше на $\mathfrak{K}^{(3)}$, дополнительный член есть

$$Cy^{-i\tau}\int_1^\lambda e^{-yu}\,\frac{\cos xu}{u^{i\tau}}\,du = Cy^{-i\tau}\int_1^{\lambda'} \frac{\cos xu}{u^{i\tau}}\,du = O(1)$$

по тем же причинам, что и для рассмотренного выше внутреннего интеграла. Следовательно, $\chi_{1,3}$ ограничен. Практически то же самое рассуждение показывает, что и $\chi_{2,3}$ ограничен, что завершает доказательство леммы.

8.15.

Л е м м а γ. *Пусть*

$$\psi(\lambda,x,y) = \int_{1/\lambda}^\lambda k(xu)\,\frac{k_1(yu)}{u}\,du,$$

где
$$k_1(x) = \int_0^x k(u)\,du = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \mathfrak{K}(s)\,\frac{x^{1-s}}{1-s}\,ds.$$
Тогда $|\psi| < B(x,\zeta)$ *для* $\lambda > 1$, $x > 0$ *и* $0 < x-\zeta < y < z+\zeta$, *и* $\psi(\lambda, x, y)$ *при* $\lambda \to \infty$ *сходится* (*ограниченно*) *к пределу*
$$\begin{cases} 0 & (y < x), \\ \frac{1}{2} & (y = x), \\ 1 & (y > x). \end{cases}$$

Доказательство. Так как $k(u) = O(1)$, $k_1(u) = O(u)$ для малых u, то интеграл по интервалу $(1/\lambda, 1)$ ограничен. Представим теперь $k(x)$ в виде
$$k(x) = k^{(1)}(x) + k^{(5)}(x),$$
где $k^{(1)}$ — то же, что и раньше. Имеем
$$\int_1^\lambda k(xu)\,\frac{k_1(yu)}{u}\,du = \int_1^\lambda k^{(1)}(xu)\,\frac{k_1^{(1)}(yu)}{u}\,du + \\ + \int_1^\lambda k(xu)\,\frac{k_1^{(5)}(yu)}{u}\,du + \int_1^\lambda k^{(5)}(xu)\,\frac{k_1^{(1)}(yu)}{u}\,du.$$
Первый член кратен
$$\int_1^\lambda (a_1\cos xu + a_2\sin xu)\,\frac{a_1\sin yu + a_2(1-\cos yu)}{u}\,du = \\ = a_1^2\int_1^\lambda \frac{\cos xu\,\sin yu}{u}\,du + a_1a_2\int_1^\lambda \frac{\cos xu - \cos(x+y)u}{u}\,du + \\ + a_2^2\int_1^\lambda \frac{\sin xu(1-\cos yu)}{u}\,du,$$
где каждое слагаемое в правой части ограниченно сходится. Далее, $k(u)$ и $k_1^{(1)}(u)$ ограничены,
$$k^{(5)}(u) = O\left(\int_{-\infty}^{\infty} (1+|t|)^{\sigma-\frac{3}{2}} u^{-\sigma}\,dt\right) = O\big(u^{-\frac{1}{2}+\delta}\big)$$
(полагая $\sigma = \frac{1}{2}-\delta$), а $k_1^{(5)}(u)$, подобно $uk^{(3)}(u)$, есть $O(u^{-\delta})$. Поэтому и остальные члены ограничены.

Это доказывает лемму за исключением утверждения о значении предела. Для его непосредственного вычисления требуется некоторое дальнейшее развитие метода; но требуемый результат может быть получен из теории трансформаций. Действительно, мы фактически доказали, что интеграл

$$\int_0^\infty \frac{k_1(u)k(xu)}{u}\,du$$

сходится ограниченно для $x \geqslant \delta$, где $0<\delta<1$, и равномерно за исключением окрестности точки $x=1$. Поэтому, если его значение есть $\varphi(x)$,

$$\int_\delta^x \varphi(u)\,du = \int_0^\infty \frac{k_1(u)[k_1(xu)-k_1(\delta u)]}{u^2}\,du = \min(x,1)-\delta$$

и, следовательно,

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & (x<1),\\ 0 & (x>1). \end{cases}$$

Если $x=1$, то

$$\int_0^X \frac{k_1(u)k(u)}{u}\,du = \frac{k_1^2(X)}{X} - \int_0^X \frac{k(u)k_1(u)}{u}\,du + \int_0^X \frac{k_1^2(u)}{u^2}\,du,$$

и так как каждый интеграл стремится к пределу при $X\to\infty$, то к пределу стремится и $\dfrac{k_1^2(X)}{X}$, причем этот предел должен быть равен нулю, так как $\dfrac{k_1^2(X)}{X^2}$ принадлежит к $L(0,\infty)$. Следовательно,

$$2\int_0^\infty \frac{k_1(u)k(u)}{u}\,du = \int_0^\infty \frac{k_1^2(u)}{u^2}\,du = 1.$$

8.16. Теорема Римана–Лебега заменяется здесь следующей теоремой, принадлежащей Гобсону[1].

Лемма δ. *Пусть $f(t)\in L(a,b)$ и $\varphi(\lambda,t)\in L(a,b)$ для всех значений λ. Пусть $\varphi(\lambda,t)$ равномерно ограничена относительно λ в (a,b), и*

$$\int_\alpha^\beta \varphi(\lambda,t)\,dt \to 0$$

при $\lambda\to\infty$ равномерно относительно α и β для $a\leqslant\alpha<\beta\leqslant b$. Тогда

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_a^b f(t)\varphi(\lambda,t)\,dt = 0.$$

Доказательство. Предположим сначала, что $f(t)$ абсолютно непрерывна в (a,b). Пусть

$$\int_a^t \varphi(\lambda,u)\,du = \varphi_1(\lambda,t).$$

Тогда

$$\int_a^b f(t)\varphi(\lambda,t)\,dt = f(b)\varphi_1(\lambda,b) - \int_a^b f'(t)\varphi_1(\lambda,t)\,dt.$$

[1] Hobson (1).

Для любого заданного $\varepsilon > 0$ имеем

$$|\varphi_1(\lambda, t)| < \varepsilon \qquad (\lambda > \lambda_0(\varepsilon),\ a \leqslant t \leqslant b),$$

и потому

$$\left|\int_a^b f(t)\varphi(\lambda, t)\, dt\right| \leqslant \varepsilon\left(|f(b)| + \int_a^b |f'(t)|\, dt\right) \qquad (\lambda > \lambda_0).$$

Тем самым в этом случае результат доказан.

В общем случае можно при любом заданном $\varepsilon > 0$ указать такую абсолютно непрерывную функцию $\chi(t)$, что

$$\int_a^b |f(t) - \chi(t)|\, dt < \varepsilon.$$

Зафиксировав ε и $\chi(t)$, мы можем, по доказанному, выбрать λ_0 столь большим, чтобы

$$\left|\int_a^b \chi(t)\varphi(\lambda, t)\, dt\right| < \varepsilon \qquad (\lambda > \lambda_0).$$

Тогда, если $|\varphi(\lambda, t)| \leqslant M$, имеем

$$\left|\int_a^b f(t)\varphi(\lambda, t)\, dt\right| \leqslant \left|\int_a^b \chi(t)\varphi(\lambda, t)\, dt\right| + \left|\int_a^b |f(t) - \chi(t)|\, \varphi(\lambda, t)\, dt\right| \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon + M\varepsilon \qquad (\lambda > \lambda_0).$$

Это завершает доказательство леммы.

8.17. Доказательство теоремы 134. В силу леммы α интеграл

$$\int_0^\infty k(uy)f(y)\, dy$$

равномерно сходится для $1/\lambda \leqslant u \leqslant \lambda$, так что мы можем умножить на $k(xu)$ и проинтегрировать под знаком интеграла. Следовательно,

$$\int_{1/\lambda}^\lambda k(xu)\, du \int_0^\infty k(uy)f(y)\, dy = \int_0^\infty f(y)\varphi(\lambda, x, y)\, dy =$$
$$= \int_0^\delta + \int_\delta^{x-\zeta} + \int_{x-\zeta}^x + \int_x^{x+\zeta} + \int_{x+\zeta}^\Delta + \int_\Delta^\infty =$$
$$= I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5 + I_6.$$

Из леммы β вытекает, что

$$|I_1| \leqslant B \int_0^\delta |f(y)|\, dy < \varepsilon, \qquad |I_6| \leqslant B \int_\Delta^\infty |f(y)|\, dy < \varepsilon$$

для $\delta = \delta(\varepsilon)$, $\Delta = \Delta(\varepsilon)$, $\lambda > 2$.

Далее,

$$\int_{\alpha}^{\beta} \varphi(y)\,dy = \int_{1/\lambda}^{\lambda} k(xu)\,\frac{k_1(\beta u) - k_1(\alpha u)}{u}\,du = \psi(\lambda, x, \beta) - \psi(\lambda, x, \alpha).$$

Если $\alpha < \beta < x$, или $x < \alpha < \beta$, то, по лемме γ, правая часть стремится к нулю при $\lambda \to \infty$. Поэтому, в силу леммы δ,

$$\lim_{\lambda\to\infty} I_2 = 0, \qquad \lim_{\lambda\to\infty} I_5 = 0$$

при фиксированных ζ, δ и Δ.

Мы можем предполагать ζ столь малым, чтобы $f(y)$ имела ограниченное изменение в интервале $(x-\zeta, x+\zeta)$. Тогда там

$$f(y) - f(x-0) = f_1(y) - f_2(y),$$

где f_1 и f_2 положительны, убывают и стремятся к нулю, когда $y \to x-0$. Тогда

$$I_3 = f(x-0)\bigl[\psi(\lambda, x, x) - \psi(\lambda, x, x-\zeta)\bigr] + \\ + \int_{x-\zeta}^{x} f_1(y)\psi(\lambda, x, y)\,dy - \int_{x-\zeta}^{x} f_2(y)\psi(\lambda, x, y)\,dy.$$

Первое слагаемое стремится к $\frac{1}{2}f(x-0)$. Второе равно

$$f_1(x-\zeta)\int_{x-\zeta}^{\eta} \varphi(y)\,dy = f(x-\zeta)\bigl[\psi(\lambda, x, \eta) - \psi(\lambda, x, x-\zeta)\bigr],$$

где $x-\zeta < \eta < x$, и так как ψ ограничено, то последнее выражение меньше ε (для всех рассматриваемых λ), если ζ достаточно мало. Аналогичное рассуждение применимо и к третьему члену. Поэтому для достаточно малого ζ

$$\Bigl|\varlimsup_{\lambda\to\infty} I_3 - \tfrac{1}{2}f(x-0)\Bigr| \leqslant 2\varepsilon.$$

Аналогичный результат верен для I_4, и следовательно,

$$\lim_{\lambda\to\infty} \int_{1/\lambda}^{\lambda} k(xu)\,du \int_0^{\infty} k(uy)f(y)\,dy = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}.$$

Но подынтегральное выражение в интеграле по u ограничено, когда $u \to 0$. Следовательно, полученную формулу можно заменить на (8.12.1), и теорема доказана.

Легко проверить, что $\mathfrak{K}(s)$, для которых верна теорема Ганкеля, удовлетворяют поставленным условиям, если $\nu \geqslant -\frac{1}{2}$, и то же верно и для других $\mathfrak{K}$, являющихся произведениями гамма-функций, если входящие в них параметры подвергнуты соответствующим ограничениям.

8.18. Теорема Ганкеля[1]**.** Наиболее важен тот частный случай предыдущей теоремы, когда $k(x)=\sqrt{x}\,J_\nu(x)$. Он может быть получен значительно более простым путём.

Теорема 135. *Если $f(x)\in L(0,\infty)$ и имеет ограниченное изменение в окрестности точки x, то для $\nu \geqslant -\frac{1}{2}$*

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=\int_0^\infty J_\nu(xu)\sqrt{xu}\,du\int_0^\infty J_\nu(uy)\sqrt{uy}\,f(y)\,dy. \tag{8.18.1}$$

Доказательство. Пусть $\delta>0$ — малое число. Тогда

$$\int_0^\lambda J_\nu(xu)\sqrt{xu}\,du\int_0^{x-\delta} J_\nu(uy)\sqrt{uy}\,f(y)\,dy=$$
$$=\sqrt{x}\int_0^{x-\delta}\sqrt{y}\,f(y)\,dy\int_0^\lambda J_\nu(xu)J_\nu(uy)u\,du=$$
$$=\sqrt{x\lambda}\int_0^{x-\delta}\frac{xJ_{\nu+1}(\lambda x)J_\nu(\lambda y)-yJ_{\nu+1}(\lambda y)J_\nu(\lambda x)}{x^2-y^2}\sqrt{y}\,f(y)\,dy \tag{8.18.2}$$
$$=O(\sqrt{\lambda})\int_0^{x-\delta}J_\nu(\lambda y)\frac{\sqrt{y}\,f(y)}{x^2-y^2}\,dy+O(\sqrt{\lambda})\int_0^{x-\delta}J_{\nu+1}(\lambda y)\frac{y\sqrt{y}\,f(y)}{x^2-y^2}\,dy \tag{8.18.3}$$

для любых фиксированных x и δ. Но

$$\int_0^{1/\lambda}J_\nu(\lambda y)\frac{\sqrt{y}\,f(y)}{x^2-y^2}\,dy=O\left(\int_0^{1/\lambda}(\lambda y)^\nu\sqrt{y}\,|f(y)|\,dy\right)=$$
$$=O\left(\lambda^\nu\int_0^{1/\lambda}y^{\nu+\frac{1}{2}}|f(y)|\,dy\right)=O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\int_0^{1/\lambda}|f(y)|\,dy\right)=o\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right).$$

Для $\lambda y\geqslant 1$ имеем

$$J_\nu(\lambda y)=\frac{A\cos\lambda y+B\sin\lambda y}{\sqrt{\lambda y}}+O\left(\frac{1}{\lambda y\sqrt{\lambda y}}\right).$$

O-член даёт в первом интеграле в (8.18.3) слагаемое порядка

$$O\left(\frac{1}{\lambda\sqrt{\lambda}}\int_{1/\lambda}^{x-\delta}\frac{|f(y)|}{y}\,dy\right)=$$
$$=O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\int_0^{1/\sqrt{\lambda}}|f(y)|\,dy\right)+O\left(\frac{1}{\lambda}\int_{1/\sqrt{\lambda}}^{x-\delta}|f(y)|\,dy\right)=o\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right),$$

а основной член, по теореме Римана–Лебега, — слагаемое

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\int_{1/\lambda}^{x-\delta}(A\cos\lambda y+B\sin\lambda y)\frac{f(y)}{x^2-y^2}\,dy=o\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right).$$

[1] Ватсон, гл. 14.

Второй член в (8.18.3) можно оценить аналогичным способом. Следовательно, (8.18.2) стремится к нулю при $\lambda \to \infty$.

Далее, мы можем обратить порядок интегрирования в

$$\int_0^\lambda J_\nu(xu)\sqrt{xu}\,du \int_{x+\delta}^\infty J_\nu(uy)\sqrt{uy}\,f(y)\,dy,$$

так как интеграл по y равномерно сходится. Доказательство того, что эта часть интеграла (8.18.1) стремится к нулю, аналогично, но проще, так как здесь y не мало.

Мы можем предположить δ столь малым, что $f(y)$ на интервале $(x-\delta, x+\delta)$ имеет ограниченное изменение. То же верно тогда и для $y^{-\nu-1/2}f(y)$. Поэтому мы можем в $(x, x+\delta)$ записать

$$y^{-\nu-\frac{1}{2}}f(y) = x^{-\nu-\frac{1}{2}}f(x+0) + \chi_1(y) - \chi_2(y),$$

где χ_1 и χ_2 положительны, возрастают и меньше ε. Тогда

$$\int_0^\lambda J_\nu(xu)\sqrt{xu}\,du \int_x^{x+\delta} J_\nu(uy)\sqrt{uy}\,f(y)\,dy =$$
$$= \sqrt{x}\int_0^\lambda J_\nu(xu)u\,du \int_x^{x+\delta} J_\nu(uy)y^{\nu+1}\left[x^{-\nu-\frac{1}{2}}f(x+0) + \chi_1(y) - \chi_2(y)\right]dy.$$

Первый член в скобках даёт

$$x^{-\nu}f(x+0)\int_0^\lambda J_\nu(xu)\Big[J_{\nu+1}\big\{(x+\delta)u\big\}(x+\delta)^{\nu+1} - J_{\nu+1}(xu)x^{\nu+1}\Big]\,du \to$$
$$\to x^{-\nu}f(x+0)\big[x^\nu - \tfrac{1}{2}x^\nu\big] = \tfrac{1}{2}f(x+0),$$

в силу (7.11.15). Второй член даёт

$$\sqrt{x}\int_0^\lambda J_\nu(xu)u\,du \int_x^{x+\delta} J_\nu(uy)y^{\nu+1}\chi_1(y)\,dy =$$
$$= \sqrt{x}\int_x^{x+\delta}\chi_1(y)y^{\nu+1}\,dy \int_0^\lambda J_\nu(xu)J_\nu(yu)u\,du =$$
$$= \sqrt{x}\,\chi_1(x+\delta)\int_\xi^{x+\delta} y^{\nu+1}\,dy \int_0^\lambda J_\nu(xu)J_\nu(yu)u\,du =$$
$$= \sqrt{x}\,\chi_1(x+\delta)\int_0^\lambda J_\nu(xu)\Big[J_{\nu+1}\big\{(x+\delta)u\big\}(x+\delta)^{\nu+1} - J_{\nu+1}(\xi u)\xi^{\nu+1}\Big]\,du,$$

где $x < \xi < x+\delta$. Но для $x \geqslant x_0 \geqslant 0$, $y \geqslant x_0$

$$\int_0^\lambda J_\nu(xu)J_{\nu+1}(yu)\,du = O(1) + \frac{2}{\pi}\int_1^\lambda \cos\Big(x - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4}\Big) \times$$
$$\times \sin\Big(y - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4}\Big)\frac{du}{\sqrt{xy}\,u} + \int_1^\lambda O\Big(\frac{1}{u\sqrt{u}}\Big)du = O(1)$$

для всех λ. Таким образом, член с χ_1 вносит величину порядка $O(\varepsilon)$. Аналогично убеждаемся в том, что то же верно для члена с χ_2. Поэтому мы получим теперь утверждение теоремы, выбрав δ достаточно малым, а затем, зафиксировав δ и взяв λ достаточно большим.

8.19. Формулы, вытекающие из теоремы Ганкеля. Из (7.4.6), (7.11.6), (7.11.8)–(7.11.15) и (7.11.17) могут быть получены простые пары трансформаций Ганкеля. Другой изящный пример пары трансформаций Ганкеля дают функции

$$\left.\begin{array}{l} 2^{3\nu-1}\sqrt{\pi}\,\Gamma\Big(\nu+\dfrac{1}{2}\Big)\Big(\dfrac{pq}{x}\Big)^{\nu}\sqrt{x}\,J_\nu(px)J_\nu(qx), \\ \begin{cases} \left(\dfrac{x}{[x^2-(p-q)^2][(p+q)^2-x^2]}\right)^{\frac{1}{2}-\nu} & \big(|p-q|<x<p+q\big), \\ 0 & \text{для других значений } x. \end{cases} \end{array}\right\} \tag{8.19.1}$$

Для доказательства[1] положим в (7.14.9) $\nu=-\frac{1}{2}$, $\mu=\lambda-\frac{1}{2}$, $x=1$, $y=\sin^2\theta$. Мы получаем

$$a^{\lambda-\frac{1}{2}}\frac{J_\lambda(\sqrt{a^2+b^2}\,)}{(a^2+b^2)^{\frac{\lambda}{2}}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\pi \sin^{\lambda+\frac{1}{2}}\theta\,J_{\lambda-\frac{1}{2}}(a\sin\theta)e^{ib\cos\theta}\,d\theta. \tag{8.19.2}$$

Полагая $a=q\sin\varphi$, $b=p-q\cos\varphi$, умножая на $\sin^{\lambda+\frac{1}{2}}\varphi$ и интегрируя, имеем

$$\begin{aligned} &\int_0^\pi \frac{J_\lambda(\sqrt{p^2+q^2-2pq\cos\varphi}\,)}{(p^2+q^2-2pq\cos\varphi)^{\frac{\lambda}{2}}}\,\sin^{2\lambda}\varphi\,d\varphi= \\ &=\frac{q^{-\lambda+\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\pi \sin^{\lambda+\frac{1}{2}}\varphi\,d\varphi\,\times \\ &\qquad\qquad\times\int_0^\pi \sin^{\lambda+\frac{1}{2}}\theta\,J_{\lambda-\frac{1}{2}}(q\sin\varphi\,\sin\theta)e^{i\cos\theta(p-q\cos\varphi)}\,d\theta= \\ &=\frac{q^{-\lambda+\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\pi \sin^{\lambda+\frac{1}{2}}\theta\,e^{ip\cos\theta}\,d\theta\,\times \\ &\qquad\qquad\times\int_0^\pi \sin^{\lambda+\frac{1}{2}}\varphi\,J_{\lambda-\frac{1}{2}}(q\sin\theta\,\sin\varphi)e^{-iq\cos\theta\cos\varphi}\,d\varphi= \\ &=\frac{J_\lambda(q)}{q^\lambda}\int_0^\pi \sin^{\lambda+\frac{1}{2}}\theta\,e^{ip\cos\theta}\sin^{\lambda-\frac{1}{2}}\theta\,d\theta=2^\lambda\sqrt{\pi}\,\Gamma\Big(\lambda+\frac{1}{2}\Big)\frac{J_\lambda(p)J_\lambda(q)}{(pq)^\lambda}. \end{aligned} \tag{8.19.3}$$

Сформулированный выше результат получится теперь, если взять за новую переменную $p^2+q^2-2pq\cos\varphi=\xi$.

[1] Это — доказательство Сонина. См. Ватсон, § 11.41.

Двойственная формула[1] есть

$$\int_0^\infty x^{1-\nu} J_\nu(px) J_\nu(qx) J_\nu(ux)\,dx =$$
$$= \begin{cases} \dfrac{\{[u^2-(p-q)^2][(p+q)^2-u^2]\}^{\nu-\frac12}}{2^{3\nu-1}\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\nu+\frac12\right)(pqu)^\nu} & \left(|p-q|<u<p+q\right), \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \tag{8.19.4}$$

Из формулы Парсеваля могут быть теперь выведены ещё другие результаты[2]. Например, (7.11.12) даёт трансформации Ганкеля

$$x^{\lambda+\nu+\frac12} K_\lambda(ax), \qquad 2^{\lambda+\nu} a^\lambda \Gamma(\lambda+\nu+1)\,\frac{x^{\nu+\frac12}}{(a^2+x^2)^{\lambda+\nu+1}}, \tag{8.19.5}$$

и мы получаем

$$\int_0^\infty x^{\lambda+\mu+2\nu+1} K_\lambda(ax) K_\mu(bx)\,dx =$$
$$= 2^{\lambda+\mu+2\nu} a^\lambda b^\mu \Gamma(\lambda+\nu+1)\Gamma(\mu+\nu+1) \int_0^\infty \frac{x^{2\nu+1}\,dx}{(a^2+x^2)^{\lambda+\nu+1}(b^2+x^2)^{\mu+\nu+1}}.$$

Мы можем положить $x=b\operatorname{tg}\theta$ и разложить интеграл по степеням $1-\dfrac{a^2}{b^2}$; при $a=b$ имеем $\left(\text{с } \nu = \dfrac{\rho-\lambda-\mu}{2}-1\right)$

$$\int_0^\infty K_\lambda(ax) K_\mu(ax) x^{\rho-1}\,dx =$$
$$= \frac{2^{\rho-3}}{a^\rho \Gamma(\rho)}\,\Gamma\left(\frac{\rho+\lambda-\mu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\rho-\lambda+\mu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\rho-\lambda-\mu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\rho+\lambda+\mu}{2}\right). \tag{8.19.6}$$

Аналогично, из пары трансформаций Ганкеля

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2^{3\nu} a^{2\nu} \Gamma\left(\nu+\frac12\right)}\, x^{\nu+\frac12} J_\nu(ax) K_\nu(ax), \qquad \left(\frac{x}{x^4+4a^4}\right)^{\nu+\frac12} \tag{8.19.7}$$

(см. (7.11.14)) выводим

$$\int_0^\infty J_\nu^2(ax) K_\nu^2(ax) x^{2\nu+1}\,dx =$$
$$= \frac{2^{\nu-3}}{\sqrt{\pi}\,a^{2\nu+2}\Gamma(\nu+1)}\,\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{2\nu+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3\nu+1}{2}\right). \tag{8.19.8}$$

и из (8.19.1), с $p=q$, выводим

$$\int_0^\infty J_\nu^4(px) x^{1-4\nu}\,dx = \frac{p^{2\nu-2}}{2\pi}\,\frac{\Gamma(\nu)\Gamma(2\nu)}{\Gamma^2\left(\nu+\frac12\right)\Gamma(3\nu)}\,. \tag{8.19.9}$$

[1] См. Titchmarsh (11).
[2] В а т с о н, § 13.46; Nicholson (1).

IX
ФУНКЦИИ, ДВОЙСТВЕННЫЕ СЕБЕ

9.1. Формальные соотношения. В предыдущих главах мы встретили ряд функций, являющихся своими собственными косинус- или синус-трансформациями Фурье, т.е. функций $f(x)$ таких, что

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(y) \cos xy \, dy \tag{9.1.1}$$

или

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(y) \sin xy \, dy. \tag{9.1.2}$$

Простейшие решения уравнения (9.1.1) суть

$$\frac{1}{\sqrt{x}}, \quad e^{-x^2/2}, \quad \frac{1}{\operatorname{ch}\left(x\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)}.$$

Аналогичные решения уравнения (9.1.2) суть

$$\frac{1}{\sqrt{x}}, \quad xe^{-x^2/2}, \quad \frac{1}{e^{x\sqrt{2\pi}} - 1} - \frac{1}{x\sqrt{2\pi}}.$$

Существуют также функции, являющиеся своими собственными трансформациями Ганкеля порядка ν, т.е. решениями уравнения

$$f(x) = \int_0^\infty f(y) \sqrt{xy}\, J_\nu(xy) \, dy. \tag{9.1.3}$$

Решения уравнений (9.1.1), (9.1.2), (9.1.3) мы будем обозначать соответственно R_c, R_s, R_ν.

Другие функции «косо-двойственны» себе, т.е. удовлетворяют уравнениям, получающимся из (9.1.1), (9.1.2) или (9.1.3) путём изменения знака правой части. Такие функции мы будем обозначать соответственно $-R_c$, $-R_s$, $-R_\nu$.

Первой задачей настоящей главы будет определение всех функций, двойственных себе, или (так как полная общность здесь вряд ли достижима) всех таких функций из определённых классов, как L^2. Мы возьмём (9.1.1) как типичный случай.

В некотором смысле задача решается непосредственно. Если $g(x)$ принадлежит к L^2, то $g(x)+G_c(x)$ также есть функция из L^2 и, очевидно, двойственна себе. С другой стороны, каждая функция $f(x)$, двойственная себе, может быть представлена в виде

$$\frac{f(x)+f(x)}{2} = \frac{f(x)+F_c(x)}{2}.$$

Таким образом, формула $g(x)+G_c(x)$ даёт полное решение задачи.

Однако, с другой стороны, очевидно, что ни один из указанных выше примеров не был получен этим путём, и приведённое сейчас решение не даёт нам возможности установить (не прибегая к фактической проверке), является ли заданная функция $f(x)$ двойственной себе. Установление того, имеет ли $f(x)$ вид $g+G_c$, равносильно решению другого интегрального уравнения, а именно,

$$f(x) = g(x) + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty g(y)\cos xy\, dy. \tag{9.1.4}$$

Мы рассмотрим такие уравнения в § 11.15. Однако, легче иметь дело непосредственно с уравнением (9.1.1).

Пусть $\mathfrak{F}(s)$ — трансформация Меллина функции $f(x)$. Тогда (9.1.1) формально даёт

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}(s) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty x^{s-1}\, dx \int_0^\infty f(y)\cos xy\, dy = \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(y)\, dy \int_0^\infty x^{s-1}\cos xy\, dx = \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \Gamma(s)\cos\frac{\pi s}{2} \int_0^\infty f(y) y^{-s}\, dy,\end{aligned}$$

т.е. $\mathfrak{F}(s)$ удовлетворяет функциональному уравнению

$$\mathfrak{F}(s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \Gamma(s)\cos\frac{\pi s}{2}\, \mathfrak{F}(1-s). \tag{9.1.5}$$

Если мы теперь положим $\mathfrak{F}(s) = 2^{s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\psi(s)$, то

$$\psi(s) = \psi(1-s), \tag{9.1.6}$$

и, в силу формулы Меллина,

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} 2^{s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\psi(s) x^{-s}\, ds. \tag{9.1.7}$$

Мы можем поэтому ожидать, что (9.1.7), где $\psi(s)$ удовлетворяет условию (9.1.6), т.е. является чётной функцией от $\frac{1}{2}+s$, будет общей формулой для функций R_c.

Простейшим примером служит

$$\psi(s) = 1, \quad f(x) = 2e^{-x^2/2}.$$

Аналогичный способ можно применить и к (9.1.2) или, более обще, к (9.1.3). Если $f(x)$ удовлетворяет уравнению (9.1.3), то

$$\mathfrak{F}(s) = \int_0^\infty y^{1/2} f(y)\,dy \int_0^\infty x^{s-1/2} J_\nu(xy)\,dx = \\ = 2^{s-1/2}\,\frac{\Gamma\left(\dfrac{\nu+s}{2}+\dfrac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{\nu-s}{2}+\dfrac{3}{4}\right)} \int_0^\infty f(y) y^{-s}\,dy,$$

т.е.

$$\mathfrak{F}(s) = 2^{s-1/2}\,\frac{\Gamma\left(\dfrac{\nu+s}{2}+\dfrac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{\nu-s}{2}+\dfrac{3}{4}\right)}\,\mathfrak{F}(1-s). \tag{9.1.8}$$

Полагая $\mathfrak{F}(s) = 2^{s/2}\Gamma\left(\dfrac{\nu+s}{2}+\dfrac{1}{4}\right)\psi(s)$, мы получаем в качестве общего решения уравнения (9.1.3) формулу

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} 2^{s/2}\Gamma\left(\frac{\nu+s}{2}+\frac{1}{4}\right)\psi(s) x^{-s}\,ds, \tag{9.1.9}$$

где $\psi(s)$ снова удовлетворяет условию (9.1.6).

9.2. Другой формальный путь решения задачи даёт рассмотрение трансформации

$$\chi(s) = \int_0^\infty e^{-s^2x^2/2} f(x)\,dx. \tag{9.2.1}$$

Здесь (9.1.1) даёт

$$\chi(s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty e^{-s^2x^2/2}\,dx \int_0^\infty f(y)\cos xy\,dy = \\ = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(y)\,dy \int_0^\infty e^{-s^2x^2/2}\cos xy\,dx = \frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-\frac{y^2}{2s^2}} f(y)\,dy,$$

т.е.

$$\chi(s) = \frac{1}{s}\,\chi\left(\frac{1}{s}\right). \tag{9.2.2}$$

Полагая $\mu(s) = \sqrt[4]{s}\,\chi(\sqrt{s})$, имеем тогда

$$\mu(s) = \mu\left(\frac{1}{s}\right). \tag{9.2.3}$$

Мы можем записать (9.2.1) в виде

$$\chi(\sqrt{s}) = \int_0^\infty e^{-su}\,\frac{f(\sqrt{2u})}{\sqrt{2u}}\,du,$$

и двойственной формулой будет

$$\frac{f(\sqrt{2u})}{\sqrt{2u}} = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{su}\chi(\sqrt{s})\,ds,$$

или

$$f(x) = \frac{x}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{sx^2/2}\mu(s)s^{-1/4}\,ds. \tag{9.2.4}$$

Поэтому мы можем ожидать, что функция (9.2.4), где $\mu(s)$ удовлетворяет условию (9.2.3), есть R_c.

Простейшим примером служит

$$\mu(s) = 1, \quad f(x) = \frac{2^{3/4}}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}\frac{1}{\sqrt{x}}\,.$$

Пусть теперь

$$\chi(s) = \int_0^\infty e^{-s^2x^2/2}f(x)x^{\nu+1/2}\,dx \tag{9.2.5}$$

с произвольным ν. Тогда (9.1.3) даёт

$$\begin{aligned}\chi(s) &= \int_0^\infty e^{-s^2x^2/2}x^{\nu+1/2}\,dx\int_0^\infty f(y)\sqrt{xy}\,J_\nu(xy)\,dy = \\ &= \int_0^\infty f(y)\sqrt{y}\,dy\int_0^\infty e^{-s^2x^2/2}x^{\nu+1}J_\nu(xy)\,dx = \\ &= \int_0^\infty f(y)\sqrt{y}\,\frac{y^\nu}{s^{2\nu+2}}\,e^{-\frac{y^2}{2s^2}}\,dy = \frac{1}{s^{2\nu+2}}\chi\left(\frac{1}{s}\right).\end{aligned}$$

Функция $\mu(s) = s^{\frac{\nu+1}{2}}\chi(\sqrt{s})$ снова удовлетворяет условию (9.2.3), и

$$f(x) = \frac{x^{\frac{1}{2}-\nu}}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{\frac{x^2s}{2}}\mu(s)s^{-\frac{\nu+1}{2}}\,ds. \tag{9.2.6}$$

9.3. Ряд других формул того же типа может быть получен заменой функции $e^{-x^2/2}$ другими функциями, также двойственными себе и являющимися ядрами обобщённых трансформаций. Мы можем, например, взять функцию

$$\sqrt{x}\,J_{-1/4}\left(\frac{x^2}{2}\right).$$

Поступая, как прежде, получим

$$\chi(s) = \int_0^\infty \sqrt{sx}\,J_{-1/4}\left(\frac{s^2x^2}{2}\right)f(x)\,dx = \frac{1}{s}\,\chi\left(\frac{1}{s}\right),$$

и $f(x)$ по теореме Ганкеля можно будет выразить через $\chi(s)$. Эту трансформацию детально исследовал Мэротра[1].

[1] Mehrotra (3).

9.4. Функции из L^2. Мы дадим теперь обоснование изложенных выше формальных выводов при различных условиях. Простейшие условия доставляются L^2-теорией трансформаций Меллина.

Теорема 136[1]. *Для того, чтобы функция $f(x)$ из $L^2(0,\infty)$ была своей собственной косинус-трансформацией Фурье, необходимо и достаточно, чтобы $f(x)$ была представима в виде* (9.1.7), *где $c = \frac{1}{2}$, интеграл понимается в смысле сходимости в среднем,*

$$\mathfrak{F}\Big(\frac{1}{2}+it\Big) = 2^{\frac{1}{4}+\frac{it}{2}}\Gamma\Big(\frac{1}{4}+\frac{it}{2}\Big)\psi\Big(\frac{1}{2}+it\Big) \tag{9.4.1}$$

принадлежит к $L^2(-\infty,\infty)$ и ψ удовлетворяет условию (9.1.6), *т.е. $\psi\Big(\dfrac{1}{2}+it\Big)$ есть чётная функция от t.*

Доказательство. В силу L^2-теории трансформаций Меллина дело сводится к доказательству того, что двойственность функции $f(x)$ самой себе эквивалентна выполнению условия (9.1.6).

Но $f(y)$ и $\dfrac{\sin xy}{y}$ принадлежат к $L^2(0,\infty)$, и трансформация Меллина второй из этих функций равна

$$\Gamma\Big(\frac{1}{2}+it\Big)\cos\Big[\Big(\frac{1}{2}+it\Big)\frac{\pi}{2}\Big]\,\frac{x^{\frac{1}{2}-it}}{\frac{1}{2}-it}.$$

Поэтому

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(y)\frac{\sin xy}{y}\,dy =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathfrak{F}\Big(\frac{1}{2}-it\Big)\Gamma\Big(\frac{1}{2}+it\Big)\cos\Big[\Big(\frac{1}{2}+it\Big)\frac{\pi}{2}\Big]\,\frac{x^{\frac{1}{2}-it}}{\frac{1}{2}-it}\,dt.$$

С другой стороны,

$$\int_0^x f(y)\,dy = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathfrak{F}\Big(\frac{1}{2}+it\Big)\frac{x^{\frac{1}{2}-it}}{\frac{1}{2}-it}\,dt.$$

Если f двойственна себе, то правые части этих равенств должны быть равны между собой, и так как подынтегральные выражения в этих интегралах принадлежат к $L(-\infty,\infty)$, то они должны быть равны почти всюду (теорема 32). Отсюда следует, что функция $\psi\Big(\dfrac{1}{2}+it\Big)$ — чётная. И обратно, если $\psi\Big(\dfrac{1}{2}+it\Big)$ — чётная функция, то правые, а значит, и левые части равны, и следовательно, f двойственна себе.

[1] Hardy and Titchmarsh (4). Идея доказательства принадлежит мисс Бэсбридж.

9.5. Функции из L^p.

Т е о р е м а 137. *Если функция $f(x)$ из $L^p(0,\infty)$, где $1<p<2$, является своей собственной косинус-трансформацией, то она представима в виде* (9.1.7)*, где*

$$\mathfrak{F}(s) = 2^{s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\psi(s)$$

есть аналитическая функция, которая (I) *регулярна в полосе*

$$\frac{1}{p'} < \sigma < \frac{1}{p} \qquad \left(p' = \frac{p}{p-1}\right), \tag{9.5.1}$$

(II) *равномерно стремится к нулю при $s \to \infty$ в любой внутренней полосе и* (III) *удовлетворяет уравнению* (9.1.5)*; при этом интеграл в* (9.1.7) *понимается в смысле сходимости в среднем на любой прямой из полосы* (9.5.1).

Это — односторонняя теорема с условиями лишь необходимыми, но не достаточными.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $f(x)$ принадлежит к L^p, то её косинус-трансформация Фурье принадлежит к $L^{p'}$, так что $f(x)$ принадлежит здесь одновременно к L^p и $L^{p'}$, а потому и ко всем промежуточным классам L^q. В частности, она принадлежит к L^2 и, значит, удовлетворяет условиям теоремы 136.

Функция $\mathfrak{F}(s)$ при $s = \frac{1}{2} + it$ приводится к функции $\mathfrak{F}\left(\frac{1}{2}+it\right)$ теоремы 136, но теперь она является аналитической функцией, регулярной в полосе (9.5.1). В самом деле,

$$\int_0^\infty |f(x)| x^{\sigma-1}\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int_0^1 |f|^{p'}\,dx\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_0^1 x^{p(\sigma-1)}\,dx\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_1^\infty |f|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_1^\infty x^{p'(\sigma-1)}\,dx\right)^{\frac{1}{p'}},$$

а эти интегралы сходятся для всех указанных значений σ. Но отсюда обычным образом следует, что $\mathfrak{F}(s)$ регулярна в полосе (9.5.1) и ограничена в каждой внутренней полосе.

Далее, мы можем представить $\mathfrak{F}(s)$ в виде

$$\mathfrak{F}(s) = \left(\int_0^\delta + \int_\delta^\Delta + \int_\Delta^\infty\right) f(x) x^{\sigma-1} x^{it}\,dx = \mathfrak{F}_1(s) + \mathfrak{F}_2(s) + \mathfrak{F}_3(s).$$

Пусть $\eta > 0$ и

$$\frac{1}{p'} + \eta \leqslant \sigma \leqslant \frac{1}{p} - \eta. \tag{9.5.2}$$

Тогда

$$|\mathfrak{F}_1(s)| \leqslant \left(\int_0^\delta |f|^{p'}\,dx\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_0^\delta x^{p(\sigma-1)}\,dx\right)^{\frac{1}{p}} = O(\delta^\eta)$$

при $\delta \to 0$, и мы можем поэтому выбрать δ так, чтобы $|\mathfrak{F}_1(s)| < \varepsilon$ для всех s из полосы (9.5.2). Аналогично, можно выбрать Δ так, чтобы $|\mathfrak{F}_3(s)| < \varepsilon$. При фиксированных же δ и Δ, $\mathfrak{F}_2(s) \to 0$ при $s \to \infty$ равномерно в полосе (9.5.2). Следовательно, $\mathfrak{F} \to 0$ равномерно в полосе (9.5.2).

Из теоремы 136 следует, что $\mathfrak{F}(s)$ удовлетворяет уравнению (9.1.5) на прямой $s = \dfrac{1}{2} + it$, а значит, и во всей полосе (9.5.1).

Таким образом, $\mathfrak{F}(s)$ обладает всеми свойствами, указанными в теореме, и остаётся только доказать справедливость равенства (9.1.7). Но по теореме 136 оно верно при $c = \frac{1}{2}$, так что достаточно доказать, что значение интеграла не зависит от c, а это достигается с помощью рассуждений, применённых в § 5.4.

9.6. Доказанная только что теорема является теоремой односторонней, и вследствие асимметрии теории трансформаций из классов, отличных от L^2, мы не можем в рассматриваемом случае ожидать существования теоремы, столь же удовлетворительной, как теорема 136. Однако, имеется очень похожий класс функций, для которых можно получить полное решение.

Мы будем говорить, что $f(x)$ принадлежит к $L_p^*(0, \infty)$, где $1 < p < 2$, если $x^\alpha f(x)$ принадлежит к $L^2(0, \infty)$ для

$$-\alpha_0 = -\frac{1}{p} + \frac{1}{2} < \alpha < \frac{1}{p} - \frac{1}{2} = \alpha_0.$$

Ясно, что $f(x)$ принадлежит тогда к $L^q(0, 1)$ для $q \leqslant 2$. Предположим теперь, что $p < q < 2$. Тогда мы можем выбрать $\alpha < \alpha_0$ такое, что $2q\alpha >$ $> 2 - q$, а тогда

$$\int_1^\infty |f|^q \, dx \leqslant \left(\int_1^\infty x^{2\alpha} |f|^2 \, dx \right)^{\frac{q}{2}} \left(\int_1^\infty x^{-\frac{2q\alpha}{2-q}} \, dx \right)^{\frac{2-q}{2}} < \infty,$$

так что $f(x)$ принадлежит к $L^q(0, \infty)$. Если, кроме того, $f(x)$ есть своя собственная косинус-трансформация Фурье, то она принадлежит и к $L^{q'}$. Таким образом, двойственная себе функция $f(x)$ из L_p^* принадлежит ко всем L-классам, заключённым между L^p и $L^{p'}$, хотя обычно и не принадлежит ни к одному из этих двух крайних классов.

Мы видим, что класс двойственных себе функций из L_p^* в этом отношении несколько шире класса таких же функций из L^p. В других отношениях он у́же. Предположим, например, что

$$h(x) = 2^{-n} \quad (n! - 1 \leqslant x \leqslant n! + 1, \ n = 2, 3, \ldots)$$

и $h(x) = 0$ для всех других значений x. Тогда $h(x)$ принадлежит к L^r для всякого положительного r, но не принадлежит к L_p^*, так как $\sum 2^{-rn}$

сходится, но $\sum (n!)^{2\alpha} 2^{-2n}$ расходится для всякого положительного α. Косинус-трансформацией Фурье функции $h(x)$ служит функция

$$H_c(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum \frac{1}{2^n} \int_{n!-1}^{n!+1} \cos xy\, dy = 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \frac{\sin x}{x} \sum \frac{\cos n!x}{2^n}\,,$$

которая непрерывна и при $x \to \pm\infty$ есть $O\left(\frac{1}{x}\right)$, так что $H_c(x)$ принадлежит к L^r для $r > 1$ и к L_p^* для $1 < p < 2$. Таким образом, $h(x) + H_c(x)$ есть двойственная себе функция, принадлежащая к L^r для всех $r > 1$, но не принадлежащая ни к одному L_p^*.

Теорема 138. *Для того, чтобы функция* $f(x)$ *из* $L_p^*(0, \infty)$ *была своей собственной косинус-трансформацией Фурье, необходимо и достаточно, чтобы она была представима в виде* (9.1, 7), *где* $\mathfrak{F}(s)$ *удовлетворяет условиям* (I), (II), (III) *теоремы* 137 *и* (IV) *как функция от* t, *принадлежит к* $L^2(-\infty, \infty)$ *для всех* σ, *удовлетворяющих неравенствам* (9.5.1).

Доказательство. (I) Условие необходимо. Так как $f(x)$ принадлежит к L^r для $p < r < p'$, то нам нужно показать лишь, что $\mathfrak{F}(s)$ удовлетворяет условию (IV). Но это непосредственно следует из теории трансформаций, так как

$$\mathfrak{F}(s) = \int_0^\infty f(x) x^{\sigma - \frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2} + it}\, dx,$$

а $x^{\sigma - \frac{1}{2}} f(x)$ принадлежит L^2, если $\left|\sigma - \frac{1}{2}\right| < \alpha_0$, т.е. если $\frac{1}{p'} < \sigma < \frac{1}{p}$.

(II) Условие достаточно. Так как $\mathfrak{F}(s)$ принадлежит к L^2 на прямой $s = c + it$, то интеграл (9.1.7) в смысле сходимости в среднем существует для всех рассматриваемых значений c и, как прежде, его значение не зависит от c. Он определяет поэтому функций $f(x)$, не зависящую от c. Так как

$$x^{c - \frac{1}{2}} f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathfrak{F}(c + it) x^{\frac{1}{2} - it}\, dt$$

для $\left|c - \frac{1}{2}\right| < \alpha_0$, и правая часть принадлежит к L^2 для каждого такого c, то $f(x)$ принадлежит к L_p^*. Наконец, по теореме 136, $f(x)$ двойственна себе.

9.7. Аналитические функции. Мы будем говорить, что $f(x)$ принадлежит к $A(\alpha, a)$, где $0 < \alpha \leqslant \pi$, $a < \frac{1}{2}$, если (I) она является аналитической функцией от $x = re^{i\theta}$, регулярной в угле $r > 0$, $|\theta| < \alpha$, и (II) она есть $O(|x|^{-a-\varepsilon})$ для малых x и $O(|x|^{a-1+\varepsilon})$ для больших x, для каждого положительного ε и равномерно в каждом угле $|\theta| \leqslant \alpha - \eta < \alpha$.

Т е о р е м а 139. *Для того, чтобы функция $f(x)$ из $A(\alpha, a)$ была своей собственной косинус-трансформацией Фурье, необходимо и достаточно, чтобы она была представима в виде* (9.1.7), *где $\psi(s)$ регулярна и удовлетворяет условию* (9.1.6) *в полосе*

$$a < \sigma < 1 - a; \tag{9.7.1}$$

далее,

$$\psi(s) = O\Big(e^{\left(\frac{\pi}{4} - a + \eta\right)|t|}\Big) \tag{9.7.2}$$

для каждого положительного η и равномерно в каждой полосе, внутренней к (9.7.1), *и, наконец, c есть любое значение σ из интервала* (9.7.1).

Д о к а з а т е л ь с т в о. (I) У с л о в и е н е о б х о д и м о. Действительно, интеграл

$$\int_0^\infty f(x) x^{s-1}\, dx \tag{9.7.3}$$

абсолютно сходится при $a < \sigma < 1 - a$, так что $\mathfrak{F}(s)$ регулярна в полосе (9.7.1). Далее, $f(x)$ принадлежит к L^2, и из теоремы 136 следует, что $\mathfrak{F}(s)$ удовлетворяет уравнению (9.1.5) на прямой $\sigma = \dfrac{1}{2}$, а значит, и во всей полосе (9.7.1), или, что то же самое, $\psi(s)$ удовлетворяет условию (9.1.6). Кроме того, $f(x)$ удовлетворяет условиям теоремы 31, с $\beta = \alpha$ и $b = 1 - a$. Так как

$$\psi(s) = \frac{\mathfrak{F}(s)\, 2^{-s/2}}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}, \quad \left|\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\right| \sim C e^{-\frac{\pi|t|}{4}} \left|\frac{t}{2}\right|^{\frac{\sigma-1}{2}},$$

то отсюда следует, что $\psi(s)$ удовлетворяет поставленным условиям.

(II) У с л о в и е также д о с т а т о ч н о, так как теоремы 31 и 136, на которых основывалось предшествующее рассуждение, обратимы.

9.8. Более общие условия. Следующая теорема имеет более общий характер; в ней $f(x)$ может не принадлежать ни к одному из L- или $A(\alpha, a)$-классов.

Т е о р е м а 140. *Пусть $f(x)$ интегрируема на каждом конечном интервале; пусть, далее,*

$$F_c(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\to\infty} f(y) \cos xy\, dy \tag{9.8.1}$$

существует для всякого x, и пусть, наконец,

$$\mathfrak{F}(s) = \int_{\to 0}^{\to\infty} f(x) x^{s-1}\, dx \tag{9.8.2}$$

существует для $\left|\sigma - \frac{1}{2}\right| < \alpha$, *где* $\alpha > 0$. *Тогда для того, чтобы почти для всех* x *имело место равенство* $F_c(x) = f(x)$, *необходимо и достаточно, чтобы* $\mathfrak{F}(s)$ *удовлетворяла уравнению* (9.1.5) *для* $\left|\sigma - \frac{1}{2}\right| < \alpha$.

Доказательство. Пусть $\frac{1}{2} < \beta < \frac{1}{2} + \alpha$, и

$$g(x) = \int_1^x f(\xi)\xi^{\beta-1}\,d\xi.$$

Тогда $g(x)$ ограничена. Поэтому при $\sigma < \beta$

$$\int_1^X f(x)x^{s-1}\,dx = \int_1^X g'(x)x^{s-\beta}\,dx =$$
$$= g(X)X^{s-\beta} - (s-\beta)\int_1^X g(x)x^{s-\beta-1}\,dx =$$
$$= O(1) + O\left(|s|\int_1^X x^{\sigma-\beta-1}\,dx\right) = O(|t|)$$

для всех X. Аналогично,

$$\int_{1/X}^1 f(x)x^{s-1}\,dx = O(|t|)$$

при $\sigma > \frac{1}{2} - \alpha$. Таким образом,

$$\int_{1/X}^X f(x)x^{s-1}\,dx = O(|t|)$$

в любой полосе, внутренней к $\left|\sigma - \frac{1}{2}\right| < \alpha$.

На основании мажорированной сходимости отсюда следует, что

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty} \mathfrak{F}(s)\,\frac{x^{3-s}}{(s-1)(s-2)(s-3)}\,ds =$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\to 0}^{\to\infty} f(\xi)\frac{x^3}{\xi}\,d\xi\int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty}\frac{\left(\frac{x}{\xi}\right)^{-s}}{(s-1)(s-2)(s-3)}\,ds =$$
$$= -\frac{1}{2}\int_0^x f(\xi)(x-\xi)^2\,d\xi,$$

и

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty}\frac{\Gamma(s)\cos\frac{\pi s}{2}}{(s-1)(s-2)(s-3)}\,\mathfrak{F}(1-s)x^{3-s}\,ds =$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty} \Gamma(s-3)\cos\frac{\pi s}{2}\,\mathfrak{F}(1-s)x^{3-s}\,ds = \\
&= \frac{x^3}{2\pi i}\int_{\to 0}^{\to\infty} f(\xi)\,d\xi \int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty} \Gamma(s-3)\cos\frac{\pi s}{2}\,(x\xi)^{-s}\,ds = \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{\to 0}^{\to\infty} \frac{f(\xi)}{\xi^3}\,d\xi \int_{-\frac{5}{2}-i\infty}^{-\frac{5}{2}+i\infty} \Gamma(s)\sin\frac{\pi s}{2}\,(x\xi)^{-s}\,ds = \\
&= \int_0^{\to\infty} f(\xi)\frac{\sin x\xi - x\xi}{\xi^3}\,d\xi.
\end{aligned}
$$

Поэтому, если $\mathfrak{F}(s)$ удовлетворяет уравнению (9.1.5), то

$$\frac{1}{2}\int_0^x f(\xi)(x-\xi)^2\,d\xi = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\to\infty} f(\xi)\frac{x\xi - \sin x\xi}{\xi^3}\,d\xi.$$

Но, как в доказательстве теоремы 118, (9.8.1) даёт

$$\int_0^x du\int_0^u F_c(v)\,dv = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\to\infty} f(\xi)\frac{1-\cos x\xi}{\xi^2}\,d\xi.$$

В силу равномерной сходимости, правую часть можно интегрировать по $(0, x)$ под знаком интеграла; поэтому

$$\frac{1}{2}\int_0^x f(\xi)(x-\xi)^2\,d\xi = \int_0^x d\xi\int_0^\xi du\int_0^u F_c(v)\,dv.$$

Трижды дифференцируя это равенство, получаем, что $f(x) = F_c(x)$ почти для всех x.

Обратно, если $f(x) = F_c(x)$ почти для всех x, то проведённые рассуждения показывают, что

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty} \frac{\mathfrak{F}(s) - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\Gamma(s)\cos\frac{\pi s}{2}\,\mathfrak{F}(1-s)}{(s-1)(s-2)(s-3)}\,x^{-s}\,ds = 0$$

для всех значений x. А так как подынтегральное выражение принадлежит к L, то оно должно быть равно нулю (вторая часть теоремы 32). Поэтому $\mathfrak{F}(s)$ удовлетворяет уравнению (9.1.5) на прямой $\sigma = \frac{1}{2}$, а следовательно, и во всей своей области регулярности.

Если условия теоремы выполнены, то $f(x)$, по теореме 32, представима формулой (9.1.7) в смысле $(C, 1)$.

9.9. Общая теорема. Даже если (как в случае $f(x) = 1/\sqrt{x}$) интеграл (9.8.2) не существует ни для какого значения s, всё же оказывается возможным получить результат, соответствующий формуле (9.1.5), но относящийся к функциям $\mathfrak{F}_+(s)$, $\mathfrak{F}_-(s)$. Мы выведем наш результат из следующей теоремы, оказывающейся часто полезной.

Теорема 141. *Пусть $\varphi(w)$ регулярна в полосе $a_1 \leqslant v \leqslant a_2$, и пусть $\varphi(u+iv)$ принадлежит к $L(-\infty,\infty)$ (или $L^2(-\infty,\infty)$) и при $u \to \pm\infty$ стремится к нулю для всех v из указанного интервала. Пусть, далее, $\psi(w)$ обладает аналогичными свойствами для $b_1 \leqslant v \leqslant b_2$, где $b_2 < a_1$, и для всех x*

$$\int_{ia-\infty}^{ia+\infty} e^{-ixw}\varphi(w)\,dw + \int_{ib-\infty}^{ib+\infty} e^{-ixw}\psi(w)\,dw = 0, \tag{9.9.1}$$

где $a_1 < a < a_2$, $b_1 < b < b_2$. Тогда φ и ψ регулярны для $b_1 < v < a_2$, их сумма равна нулю во всей этой полосе, и при $u \to \pm\infty$ они стремятся к нулю равномерно в каждой внутренней полосе.

Доказательство. Рассмотрим сначала тот случай, когда φ и ψ принадлежат к L. Умножим (9.9.1) на $e^{ix\zeta}$, где $\zeta = \xi + i\eta$, $a < \eta < a_2$, и проинтегрируем по x от 0 до ∞. В силу абсолютной сходимости, мы можем обратить порядок интегрирования и получить

$$\int_{ia-\infty}^{ia+\infty} \frac{\varphi(w)}{w-\zeta}\,dw + \int_{ib-\infty}^{ib+\infty} \frac{\psi(w)}{w-\zeta}\,dw = 0 \quad (a < \eta < a_2). \tag{9.9.2}$$

Сместим теперь путь интегрирования интеграла, содержащего φ, на прямую $v = a_2$. Мы получим

$$\int_{ia_2-\infty}^{ia_2+\infty} \frac{\varphi(w)}{w-\zeta}\,dw + \int_{ib-\infty}^{ib+\infty} \frac{\psi(w)}{w-\zeta}\,dw = -2\pi i\,\varphi(\zeta) \quad (a < \eta < a_2). \tag{9.9.3}$$

Но левая часть теперь регулярна для $b < \eta < a_2$. Поэтому она доставляет аналитическое продолжение функции $-2\pi i\varphi(\zeta)$ на всю эту полосу.

Аналогично, умножая (9.9.1) на $e^{ix\zeta}$, где $b_1 < \eta < b$, и интегрируя по x от $-\infty$ до 0, мы получим (9.9.2) с $b_1 < \eta < b$. Смещая путь интегрирования интеграла, содержащего ψ, на прямую $\eta = b_1$, получим

$$\int_{ia-\infty}^{ia+\infty} \frac{\varphi(w)}{w-\zeta}\,dw + \int_{ib_1-\infty}^{ib_1+\infty} \frac{\psi(w)}{w-\zeta}\,dw = 2\pi i\,\psi(\zeta) \quad (b_1 < \eta < b). \tag{9.9.4}$$

Для функции $2\pi i\psi(\zeta)$ это даёт аналитическое продолжение на полосу $b_1 < \eta < a$.

Если $b < \eta < a$, то очевидное применение теоремы Коши показывает, что левые части формул (9.9.3) и (9.9.4) равны. Поэтому

$$\varphi(\zeta) = -\psi(\zeta)$$

во всей этой полосе.

Далее,

$$\left| \int_{ia_2-\infty}^{ia_2+\infty} \frac{\varphi(w)}{w-\zeta}\,dw \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{|a_2-\eta|}\left(\int_{-\infty}^{-U}+\int_U^{\infty}\right)|\varphi(u+ia_2)|\,du+\frac{1}{|U-\xi|}\int_{-U}^{U}|\varphi(u+ia_2)|\,du,$$

что при $\xi\to\pm\infty$ стремится к нулю, как в этом можно убедиться, выбирая сначала U, а затем ξ. Аналогично убеждаемся в том же для другого члена в левой части равенства (9.9.3). Следовательно, $\varphi(\zeta)\to 0$ равномерно в полосе.

В случае, когда φ и ψ принадлежат к L^2, равенство (9.9.2) следует из (9.9.1) в силу формулы Парсеваля, а дальнейшее рассуждение проводится, как прежде; при этом в последней части доказательства мы пользуемся оценкой

$$\left|\int_{ia_2-\infty}^{ia_2+\infty}\frac{\varphi(w)}{w-\zeta}\,dw\right|\leqslant\sqrt{\int_{-\infty}^{-U}\frac{du}{|w-\zeta|^2}\cdot\int_{-\infty}^{-U}|\varphi(u+ia_2)|^2\,du}+$$

$$+\sqrt{\int_U^{\infty}\frac{du}{|w-\zeta|^2}\cdot\int_U^{\infty}|\varphi(u+ia_2)|^2\,du}+\frac{1}{|U-\xi|}\int_{-U}^{U}|\varphi(u+ia_2)|\,du,$$

снова выбирая сначала U, а затем ξ.

9.10. Применение.

Т е о р е м а 142. *Пусть $f(x)$ интегрируема на каждом конечном интервале и стремится к нулю при $x\to\infty$, и пусть*

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\to\infty}f(y)\cos xy\,dy \tag{9.10.1}$$

за возможным исключением конечного числа значений x. Тогда почти всюду

$$f(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}\mathfrak{F}_+(s)x^{-s}\,ds+\frac{1}{2\pi i}\int_{-\beta-i\infty}^{-\beta+i\infty}\mathfrak{F}_-(s)x^{-s}\,ds \tag{9.10.2}$$
$$(\beta<0,\ \alpha<1),$$

где интегралы понимаются в смысле сходимости $(C,1)$. Функция $\mathfrak{F}_-(s)$ регулярна для $\sigma<0$, а функция $\mathfrak{F}_+(s)$ — для $\sigma>1$, и функции

$$\left.\begin{aligned}&\mathfrak{F}_+(s)-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\mathfrak{F}_-(1-s)\Gamma(s)\cos\frac{\pi s}{2},\\&\mathfrak{F}_-(s)-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\mathfrak{F}_+(1-s)\Gamma(s)\cos\frac{\pi s}{2}\end{aligned}\right\} \tag{9.10.3}$$

регулярны для $0\leqslant\sigma\leqslant 1$, за исключением, возможно, простого полюса в точке $s=0$, причём их сумма равна нулю во всей этой полосе.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть

$$f_1(x)=\int_0^x f(u)\,du,\qquad f_2(x)=\int_0^x f_1(u)\,du$$

и т.д. Тогда, как и в доказательстве теоремы 113, равенство (9.10.1) даёт

$$f_2(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(y)\, \frac{1-\cos xy}{y^2}\, dy. \tag{9.10.4}$$

Пусть

$$\mathfrak{F}_-(s) = \int_1^\infty f(x) x^{s-1}\, dx, \qquad \mathfrak{F}_+(s) = \int_0^1 f(x) x^{s-1}\, dx.$$

Очевидно, эти функции регулярны, соответственно, для $\sigma < 0$ и $\sigma > 1$. При этом, в силу $(C, 1)$-аналога теоремы 24 для интегралов Меллина, имеет место формула (9.10.2). Пусть

$$\begin{aligned}
\Phi(x) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\frac{1}{2}-i\infty}^{-\frac{1}{2}+i\infty} \mathfrak{F}_-(s) \frac{x^{2-s}}{(s-1)(s-2)}\, ds - \\
&- \frac{1}{2\pi i} \int_{-\frac{1}{2}-i\infty}^{-\frac{1}{2}+i\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \mathfrak{F}_+(1-s)\Gamma(s) \cos\frac{\pi s}{2}\, \frac{x^{2-s}}{(s-1)(s-2)}\, ds + \\
&+ \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{3}{2}-i\infty}^{\frac{3}{2}+i\infty} \mathfrak{F}_+(s) \frac{x^{2-s}}{(s-1)(s-2)}\, ds - \\
&- \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{3}{2}-i\infty}^{\frac{3}{2}+i\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \mathfrak{F}_-(1-s)\Gamma(s) \cos\frac{\pi s}{2}\, \frac{x^{2-s}}{(s-1)(s-2)}\, ds = \\
&= \Phi_1(x) + \Phi_2(x) + \Phi_3(x) + \Phi_4(x).
\end{aligned}$$

В силу абсолютной сходимости, мы можем, подставив сюда определённые выше интегралы для $\mathfrak{F}_-(s)$, $\mathfrak{F}_+(s)$, обратить порядок интегрирования. Мы получим

$$\begin{aligned}
\Phi_1(x) = \frac{x}{2\pi i} \int_1^\infty f(y)\, dy \int_{-\frac{1}{2}-i\infty}^{-\frac{1}{2}+i\infty} \frac{\left(\dfrac{x}{y}\right)^{1-s}}{(s-1)(s-2)}\, ds &= \\
&= \begin{cases} \displaystyle\int_1^x f(y)(x-y)\, dy & (x > 1), \\ 0 & (x < 1), \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Phi_3(x) = \frac{x}{2\pi i} \int_0^1 f(y)\, dy \int_{\frac{3}{2}-i\infty}^{\frac{3}{2}+i\infty} \frac{\left(\dfrac{x}{y}\right)^{1-s}}{(s-1)(s-2)}\, ds &= \\
&= \begin{cases} \displaystyle -\int_0^1 y f(y)\, dy & (x > 1), \\ \displaystyle -\int_0^x y f(y)\, dy - x \int_x^1 f(y)\, dy & (x < 1), \end{cases}
\end{aligned}$$

откуда

$$\Phi_1(x) + \Phi_3(x) = \int_0^x f(y)(x-y)\,dy - x\int_0^1 f(y)\,dy$$

для всех $x > 0$. Далее,

$$\Phi_2(x) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{x^2}{2\pi i}\int_0^1 f(y)\,dy\int_{-\frac{1}{2}-i\infty}^{-\frac{1}{2}+i\infty}\Gamma(s-2)\cos\frac{\pi s}{2}\,(xy)^{-s}\,ds =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^1 f(y)\,\frac{\cos xy - 1 - \dfrac{x^2y^2}{2}}{y^2}\,dy,$$

$$\Phi_4(x) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{x^2}{2\pi i}\int_1^\infty f(y)\,dy\int_{\frac{3}{2}-i\infty}^{\frac{3}{2}+i\infty}\Gamma(s-2)\cos\frac{\pi s}{2}\,(xy)^{-s}\,ds =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_1^\infty f(y)\,\frac{\cos xy - 1}{y^2}\,dy.$$

В совокупности найденные равенства дают

$$\Phi(x) = f_2(x) - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(y)\,\frac{1-\cos xy}{y^2}\,dy + ax + bx^2,$$

где a и b — постоянные. Следовательно, в силу (9.10.4),

$$\int_{-\frac{1}{2}-i\infty}^{-\frac{1}{2}+i\infty}\left\{\mathfrak{F}_-(s) - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\mathfrak{F}_+(1-s)\Gamma(s)\cos\frac{\pi s}{2} + \right.$$

$$\left. + a + 2b\frac{s-1}{s}\right\}\frac{x^{2-s}}{(s-1)(s-2)}\,ds +$$

$$+\int_{\frac{3}{2}-i\infty}^{\frac{3}{2}+i\infty}\left\{\mathfrak{F}_+(s) - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\mathfrak{F}_-(1-s)\Gamma(s)\cos\frac{\pi s}{2} - \right.$$

$$\left. - a - 2b\frac{s-1}{s}\right\}\frac{x^{2-s}}{(s-1)(s-2)}\,ds = 0$$

для каждого положительного x. Утверждаемый результат вытекает теперь с помощью очевидной подстановки из теоремы 141.

Аналогичный результат имеет место и в том случае, когда $f(x)$ не стремится к нулю, но зато равенство (9.10.1) имеет место для всех значений x. Доказательство проводится аналогично, но с введением в знаменатель дополнительного множителя $s-3$.

9.11. Второе решение. Аналогичная последовательность теорем может быть установлена и для второго решения, полученного в § 9.2. Пожалуй, достаточно будет доказать одну из них, и мы возьмём случай аналитических функций. Мы будем говорить, что $f(x)$ принадлежит к $A^*(\omega, a)$, где $0<\omega\leqslant\frac{\pi}{4}$, $0<a<\frac{1}{2}$, если (I) $f(x)$ — аналитическая функция от $x=re^{i\theta}$, регулярная в угле A^*, определённом неравенствами $r>0$, $|\theta|<\omega$, и (II) $f(x)$ есть $O\Big(|x|^{-a-\frac{1}{2}-\delta}\Big)$ для малых x и $O\Big(|x|^{a-\frac{1}{2}+\delta}\Big)$ для больших x, для каждого положительного δ и равномерно в каждом угле $|\theta|\leqslant\omega-\eta<\omega$.

Теорема 143. *Для того, чтобы функция $f(x)$ из $A^*(\omega, a)$ была своей собственной косинус-трансформацией Фурье, необходимо и достаточно, чтобы она была представима в виде* (9.2.4), *где c — любое положительное число, интеграл понимается в смысле главного значения, т.е. как предел интеграла по $(c-iT, c+iT)$, а $\mu(s)$ обладает следующими свойствами:*

(I) *$\mu(s)=\mu(\rho e^{i\varphi})$ есть аналитическая функция от s, регулярная в угле $B(\omega, a)$, определённом неравенствами $\rho>0$, $|\varphi|<\frac{\pi}{2}+2\omega$;*

(II) *$\mu(s)$ есть $O\Big(|s|^{-\frac{a}{2}-\delta}\Big)$ для малых s и $O\Big(|s|^{\frac{a}{2}+\delta}\Big)$ для больших s, для каждого положительного δ и равномерно в каждом угле $|\varphi|\leqslant\frac{\pi}{2}+2\omega-\zeta<\frac{\pi}{2}+2\omega$;*

(III) *$\mu(s)$ удовлетворяет в $B(\omega, a)$ условию* (9.2.3).

Доказательство. Условия регулярности и порядка следуют из теоремы 31. Таким образом, остаётся только доказать, что условие (9.2.3) необходимо и достаточно для того, чтобы $f(x)$ была двойственной себе.

Интегрируя (9.2.4), мы получаем

$$f_1(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{e^{x^2s/2}-1}{s}\,\mu(s)s^{-1/4}\,ds=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}e^{x^2s/2}\,\mu(s)s^{-5/4}\,ds,$$

так как второй член, как показывает очевидное применение теоремы Коши, равен нулю. Далее.

$$\frac{\sin xy}{y}=\frac{\sqrt{\pi}}{4\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}e^{x^2s-\frac{y^2}{4s}}s^{-3/2}\,ds,$$

и потому

$$\begin{aligned}\int_0^\infty f(y)\frac{\sin xy}{y}\,dy&=\frac{\sqrt{\pi}}{4\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}e^{x^2s}s^{-3/2}\,ds\int_0^\infty f(y)e^{-\frac{y^2}{4s}}\,dy=\\&=\frac{\sqrt{\pi}}{4\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}e^{x^2s}s^{-3/2}\chi\Big(\frac{1}{\sqrt{2s}}\Big)\,ds=\\&=\frac{\sqrt{2\pi}}{4\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}e^{x^2s/2}s^{-5/4}\mu\Big(\frac{1}{s}\Big)\,ds,\end{aligned}$$

где обращение порядка интегрирования законно в силу абсолютной сходимости. Следовательно,

$$f_1(x)-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(y)\frac{\sin xy}{y}\,dy=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}e^{x^2s/2}s^{-5/4}\left[\mu(s)-\mu\left(\frac{1}{s}\right)\right]ds,$$

и потому условие (9.2.3) и необходимо, и достаточно.

9.12. Примеры.

(1) Если в (9.1.7) и (9.1.9) положить $\psi(s)=1$, то $f(x)=2e^{-x^2/2}$ в случае косинус-трансформации и $f(x)=2^{(3-2\nu)/4}x^{\nu+1/2}e^{-x^2/2}$ в общем случае. Условия теоремы 139 (и a fortiori — менее специальных теорем) выполнены.

Если $\psi(s)=P\left(\frac{1}{2}-s\right)$, где $P(u)$ — чётный полином или чётная целая функция, порядок которой меньше чем 1, то получаем, что функция

$$f(x)=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\,P\Big(2n+\tfrac{1}{2}\Big)\Big(-\tfrac{x^2}{2}\Big)^n$$

есть своя собственная косинус-трансформация Фурье. Если $P(u)$ — полином, то $f(x)=e^{-x^2/2}Q(x^2)$, где $Q(u)$ — полином.

(2) Полиномы Сонина $T_n^{(\nu)}(x)$ определяются формулой[1]

$$T_n^{(\nu)}(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{n-k}x^k}{k!\,(n-k)!\,\Gamma(k+\nu+1)}\,.$$

Если

$$f(x)=e^{-x/2}x^\nu\,T_n^{(\nu)}(x),$$

то

$$\begin{aligned}\varphi(s)&=\int_0^\infty e^{-sx}f(x)\,dx=\\&=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{n-k}}{k!\,(n-k)!\,\Gamma(k+\nu+1)}\int_0^\infty e^{-(s+1/2)x}x^{k+\nu}\,dx=\\&=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{n-k}}{k!\,(n-k)!}\,\frac{1}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^{k+\nu+1}}=\frac{1}{n!}\,\frac{\left(\frac{1}{2}-s\right)^n}{\left(\frac{1}{2}+s\right)^{n+\nu+1}}\,.\end{aligned}$$

[1] С точностью до множителя они совпадают с полиномами Лагерра

$$L_n^{(\nu)}(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{\Gamma(n+\nu+1)}{\Gamma(k+\nu+1)}\,\frac{(-x)^k}{k!\,(n-k)!}\qquad(\nu>-1),$$

которые гораздо более известны. — *E.G.A.*

Если
$$g(x) = e^{-x^2/2} x^{\nu+1/2}\, T_n^{(\nu)}(x^2),$$
то
$$\mu(s) = s^{(\nu+1)/2} \int_0^\infty e^{-x^2 s/2} x^{\nu+1/2} g(x)\, dx =$$
$$= \frac{s^{(\nu+1)/2}}{2} \int_0^\infty e^{-\xi s/2} f(\xi)\, d\xi = \frac{2^\nu}{n!} \left(s^{1/2} + s^{-1/2}\right)^{-\nu-1} \left(\frac{1-s}{1+s}\right)^n.$$
Поэтому
$$\mu(s) = (-1)^n \mu\left(\frac{1}{s}\right),$$
и $g(x)$ есть $\pm R_\nu$ соответственно тому, чётно или нечётно n.[1]

Параболические цилиндрические функции $D_n(x)$ могут быть определены для целого n формулами
$$T_n^{(-1/2)}(x^2) = \frac{2^n}{\sqrt{\pi}\,(2n)!}\, e^{x^2/2}\, D_{2n}(x\sqrt{2})$$
и
$$x T_n^{(1/2)}(x^2) = \frac{2^{n+1/2}}{\sqrt{\pi}\,(2n+1)!}\, e^{x^2/2}\, D_{2n+1}(x\sqrt{2}).$$
Таким образом, $D_{2n}(x\sqrt{2})$ есть $\pm R_c$, а $D_{2n+1}(x\sqrt{2})$ есть $\pm R_s$, соответственно тому, чётно или нечётно n. Это эквивалентно свойству двойственности себе полиномов Эрмита (§ 3.8). В самом деле, легко проверить, что
$$H_{2n}(x) = \sqrt{\pi}\,(2n)!\, T_n^{(-1/2)}(x^2), \qquad H_{2n+1}(x) = \sqrt{\pi}\,(2n+1)!\, x T_n^{(1/2)}(x^2).$$

В случае $\nu = \frac{1}{2}$ формула Парсеваля даёт
$$\int_0^\infty e^{-sx} f^2(x)\, dx = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \varphi(w)\varphi(s-w)\, dw =$$
$$= \frac{1}{2\pi i\,(n!)^2} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\left(\frac{1}{2} - w\right)^n \left(\frac{1}{2} - s + w\right)^n}{\left(\frac{1}{2} + w\right)^{n+3/2} \left(\frac{1}{2} + s - w\right)^{n+3/2}}\, dw.$$
Обозначая это через $\omega(s)$ и полагая $w = w' + \frac{1}{2}$, мы получаем
$$\omega(s) = \frac{1}{2\pi i\,(n!)^2} \int_{c'-i\infty}^{c'+i\infty} \frac{\left[\left(\frac{1-s}{2}\right)^2 - w'^2\right]^n}{\left[\left(\frac{1+s}{2}\right)^2 - w'^2\right]^{n+3/2}}\, dw'.$$

[1] A. Milne (1), B.M. Wilson (1).

Заменяя s на $\dfrac{1}{s}$ и полагая затем $w' = \dfrac{w''}{s}$, мы находим, что

$$\omega\left(\frac{1}{s}\right) = s^2\omega(s).$$

Если теперь положить

$$\mu_1(s) = s\int_0^\infty x^{-1/2}D^2_{2n+1}(x)\cdot e^{-x^2s/2}x^{3/2}\,dx,$$

то имеем

$$\mu_1(s) = \frac{\pi\,[(2n+1)!]^2}{2^{2n+1}}\,s\omega(s),$$

и $\mu(s)$ удовлетворяет условию (9.2.3). Следовательно[1],

$$x^{-1/2}D^2_{2n+1}(x)$$

есть R_1.

Для отрицательных (не обязательно целых) n имеем

$$D_n(x) = \frac{e^{-x^2/4}}{\Gamma(-n)}\int_0^\infty e^{-tx-t^2/2}t^{-n-1}\,dt.$$

Отсюда следует, что

$$\int_0^\infty x^{s-1}e^{x^2/4}D_n(x)\,dx = \frac{\Gamma(s)\Gamma\left(-\dfrac{n+s}{2}\right)}{2^{(n+s)/2+1}\Gamma(-n)}\,.$$

Теперь с помощью формул § 9.1 легко проверить, что[2]

$$x^{\nu+1/2}e^{x^2/4}D_{-2\nu-3}(x), \qquad x^{\nu-1/2}e^{x^2/4}D_{-2\nu}(x)$$

суть R_ν.

(3) Если $f(x) = \dfrac{1}{\operatorname{ch}\left(x\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\right)}$, то находим, что

$$\mathfrak{F}(s) = 2\left(\frac{2}{\pi}\right)^{s/2}\Gamma(s)L(s),$$

где

$$L(s) = \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{(2k+1)^s} \tag{9.12.1}$$

и $\mathfrak{F}(s)$ удовлетворяет уравнению (9.1.5) в силу функционального уравнения для $L(s)$ (§ 2.11). Это — новый пример на теорему 139.

Если

$$f(x) = \frac{1}{e^{x\sqrt{2\pi}}-1} - \frac{1}{x\sqrt{2\pi}}\,,$$

[1] Mitra (1), Watson (4).
[2] Varma (1).

то находим, что $\mathfrak{F}(s) = (2\pi)^{-s/2}\Gamma(s)\zeta(s)$. Полагая $\nu = \frac{1}{2}$ в формулах в конце § 9.1, получаем

$$\psi(s) = \frac{1}{2}\,\frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)}{\pi^{s/2}} = \frac{\xi(s)}{s(s-1)}\,,$$

где $\xi(s)$ есть ξ-функция Римана. Это — пример на аналог теоремы 139 для синус-трансформаций Фурье.

Аналогично, с функциональными уравнениями для других L-функций Дирихле связаны другие функции, двойственные себе. Так, например, функции

$$\frac{\operatorname{ch}\left(\frac{x\sqrt{\pi}}{2}\right)}{\operatorname{ch}(x\sqrt{\pi})}\,, \qquad \frac{1}{2\operatorname{ch}\left(x\sqrt{\frac{2\pi}{3}}\right)+1}$$

суть R_c; они связаны соответственно с

$$L_1(s) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{1}{(4k+1)^s} + \frac{1}{(4k+3)^s}\right),$$

$$L_2(s) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{(3k+1)^s} - \frac{1}{(3k+2)^s}\right).$$

Далее,

$$\frac{\operatorname{sh}\left(\frac{x\sqrt{\pi}}{2}\right)}{\operatorname{ch}(x\sqrt{\pi})}\,, \qquad \frac{\operatorname{sh}\left(x\sqrt{\frac{\pi}{6}}\right)}{2\operatorname{ch}\left(x\sqrt{\frac{2\pi}{3}}\right)-1}$$

суть R_s; они связаны соответственно с

$$L_3(s) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{1}{(4k+1)^s} - \frac{1}{(4k+3)^s}\right),$$

$$L_4(s) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{1}{(6k+1)^s} - \frac{1}{(6k+5)^s}\right).$$

(4) Легко проверить с помощью (7.1.8), (7.1.9), что функция

$$f(x) = \cos\left(\frac{x^2}{2} - \frac{\pi}{8}\right)$$

есть своя собственная косинус-трансформация Фурье. Она не принадлежит ни к какому L-классу, представляя собой пример на теорему 140. Интеграл (9.8.2) существует для $0 < \sigma < 2$, и функция

$$\mathfrak{F}(s) = 2^{s/2-1}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\,\cos\left(s - \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{4}$$

удовлетворяет уравнению (9.1.5).

(5) Функция $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ есть своя собственная косинус-трансформация Фурье и представляет собой пример на теорему 142. Здесь

$$\mathfrak{F}_+(s) = \frac{1}{s-\frac{1}{2}}, \qquad \mathfrak{F}_-(s) = -\frac{1}{s-\frac{1}{2}},$$

и

$$\mathfrak{F}_+(s) - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\mathfrak{F}_-(1-s)\Gamma(s)\cos\frac{\pi s}{2} = \frac{1-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\Gamma(s)\cos\frac{\pi s}{2}}{s-\frac{1}{2}};$$

последняя функция имеет простой полюс в точке $s=0$ и регулярна для $\sigma > 0$.

Более общим примером того же типа служит

$$f(x) = \frac{2^{a/2}\Gamma\left(\frac{a}{2}\right)}{x^a} + \frac{2^{(1-a)/2}\Gamma\left(\frac{1-a}{2}\right)}{x^{1-a}} \qquad (0 < a < 1).$$

(6) Из (7.5.6) и (7.5.7) следует, что

$$\frac{\cos\frac{x^2}{2} + \sin\frac{x^2}{2}}{\operatorname{ch}\left(x\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)}$$

есть R_c, а из (7.5.10) — что

$$\frac{\sin\frac{x^2}{2}}{\operatorname{sh}\left(x\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)}$$

есть R_s. Это — примеры на теоремы 139 и 143, но функции $\psi(s)$ и $\mu(s)$ здесь не особенно просты.

(7) Полагая

$$f(x) = \sqrt{x}\,J_{\nu/2}\left(\frac{x^2}{2}\right),$$

находим

$$\psi(s) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{(2\nu+3)/4}\,\Gamma\left(\frac{5}{8}+\frac{\nu+s}{4}\right)\Gamma\left(\frac{7}{8}+\frac{\nu-s}{4}\right)},$$

так что $\psi(s)=\psi(1-s)$. По теореме 140, $f(x)$ есть своя собственная трансформация Ганкеля порядка ν. Однако, в этом случае $f(x)$ ведёт себя как $x^{\nu+1/2}$ для малых x и как $x^{-1/2}$ для больших x и не принадлежит к L^2, равно как и ни к какому L^p с $p \leqslant 2$.

В случае $\nu = -\dfrac{1}{2}$ получаем формулу

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \sqrt{y}\,J_{-1/4}\left(\frac{y^2}{2}\right)\cos xy\,dy = \sqrt{x}\,J_{-1/4}\left(\frac{x^2}{2}\right).$$

Дважды дифференцируя по x, находим формально

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty y^{5/2}\,J_{-1/4}\Bigl(\frac{y^2}{2}\Bigr)\cos xy\,dy = x^{5/2}\,J_{-1/4}\Bigl(\frac{x^2}{2}\Bigr).$$

Это равенство справедливо, если интеграл понимается в смысле $(C,1)$, но оно не подходит ни под какую из наших общих теорем. Функции, двойственные себе в этом смысле, исследовал Мэротра[1].

(8) Пусть $b>0$ и

$$f(x)=\begin{cases} 0 & (0<x<b),\\ x^{1/2-\nu}(x^2-b^2)^{(\nu-1)/4}\,J_{(\nu-1)/2}(b\sqrt{x^2-b^2}) & (x>b).\end{cases}$$

Тогда, принимая во внимание (7.11.6), имеем

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}(s) &= \int_b^\infty x^{s-\nu-1/2}(x^2-b^2)^{(\nu-1)/4}\,J_{(\nu-1)/2}(b\sqrt{x^2-b^2})\,dx = \\ &= b^{s-\nu/2}\int_0^\infty (1+u^2)^{(2s-2\nu-3)/4}u^{(\nu+1)/2}J_{(\nu-1)/2}(b^2u)\,du = \\ &= \frac{b^{(\nu-1)/2}K_{(1-2s)/4}(b^2)}{2^{(2\nu-2s-1)/4}\,\Gamma\Bigl(\dfrac{3}{4}+\dfrac{\nu-s}{2}\Bigr)},\end{aligned}$$

и так как $K_\mu(x)$ — чётная функция от μ, то получаем, что $\mathfrak{F}(s)$ удовлетворяет уравнению (9.1.8).

Здесь $f(x)$ есть $O\Bigl((x-b)^{\frac{\nu-1}{2}}\Bigr)$ в окрестности точки $x=b$ и $O\Bigl(x^{-\frac{\nu+1}{2}}\Bigr)$ в бесконечности; она принадлежит к L^2, если $\nu>0$, и к L^p и L_p^*, если $\nu>\Bigl|1-\dfrac{2}{p}\Bigr|$. При $-1<\nu\leqslant 0$ имеем случай теоремы 140.

(9) Функция

$$f(x)=\frac{x^{\nu+1/2}}{(x^2+a^2)^{(\nu+1)/4}}\,K_{(\nu+1)/2}\bigl(a\sqrt{x^2+a^2}\bigr) \qquad (a>0)$$

в силу формулы[2]

$$\int_0^\infty \frac{K_\mu(a\sqrt{y^2+a^2})}{(y^2+a^2)^{\mu/2}}\,y^{\nu+1}J_\nu(xy)\,dy = \\ = \frac{x^\nu}{a^\mu}\Bigl(\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a}\Bigr)^{\mu-\nu-1}K_{\mu-\nu-1}\bigl(a\sqrt{x^2+a^2}\bigr)$$

есть R_ν. В силу формулы[3]

---

[1] Mehrotra (8).

[2] В а т с о н, § 13.47 (2). [См. также Р.О. Кузьмин, Бесселевы функции, 2-е изд., стр. 151, формула (31).]

[3] В а т с о н, § 13.47 (6). [См. также Р.О. Кузьмин, Бесселевы функции, 2-е изд., стр. 151, формула (34).]

$$\int_0^\infty \frac{K_\mu(a\sqrt{x^2+a^2})}{(x^2+a^2)^{\mu/2}}\, x^{2\nu+1}\,dx = \frac{2^\nu}{a^\mu}\,\Gamma(\nu+1)K_{\mu-\nu-1}(a^2)$$

находим

$$\psi(s) = 2^{-5/4}\left(\frac{2}{a}\right)^{(\nu+1)/2} K_{(2s-1)/4}(a^2).$$

9.13. Формулы для числа целых точек. Ряд интересных примеров на двойственные себе функции имеется в аналитической теории чисел[1]. Пусть $r(n)$ обозначает число представлений числа n в виде суммы двух квадратов, и пусть

$$\bar{P}(x) = {\sum_{0\leqslant n\leqslant x}}' r(n) - \pi x, \tag{9.13.1}$$

где штрих указывает, что при x целом последний член суммы должен быть взят с коэффициентом $\frac{1}{2}$. *Тогда*

$$f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x}}\left\{\bar{P}\left(\frac{x^2}{2\pi}\right) - 1\right\} \tag{9.13.2}$$

есть R_2.

Действительно, из определения ясно, что $f(x) = O(\sqrt{x})$ при $x \to 0$. То, что $\bar{P}(x) = O(\sqrt{x})$ при $x \to \infty$, — сравнительно тривиально, и на самом деле известно[2], что $\bar{P}(x) = O(\sqrt[3]{x})$. Поэтому $f(x) = O(x^{-5/6})$ при $x \to \infty$. Следовательно, $f(x)$ принадлежит к L^2 и также к L^p и L_p^* при $p > \frac{6}{5}$.

Имеем

$$\mathfrak{F}(s) = \int_0^\infty \left\{\bar{P}\left(\frac{x^2}{2\pi}\right) - 1\right\} x^{s-\frac{5}{2}}\,dx = \frac{(2\pi)^{\frac{2s-3}{4}}}{2}\int_0^\infty \left\{\bar{P}(x) - 1\right\} x^{\frac{2s-7}{4}}\,dx,$$

где интеграл сходится, и $\mathfrak{F}(s)$ аналитична для $-\frac{1}{2} < \sigma < \frac{5}{6}$. Последний интеграл равен

$$\int_0^\infty \left\{\sum_{1\leqslant n\leqslant x} r(n) - \pi x\right\} x^{\frac{2s-7}{4}}\,dx = -\frac{\pi}{\frac{s}{2}+\frac{1}{4}} + \int_1^\infty \left\{\sum_{1\leqslant n\leqslant x} r(n) - \pi x\right\} x^{\frac{2s-7}{4}}\,dx,$$

и это даёт аналитическое продолжение функции $\mathfrak{F}(s)$ на полуплоскость $\sigma < -\frac{1}{2}$ и показывает, что $\mathfrak{F}(s)$ имеет простой полюс в точке $s = -\frac{1}{2}$. Если $\sigma < -\frac{1}{2}$, то

$$\int_1^\infty (-\pi x) x^{\frac{2s-7}{4}}\,dx = \frac{\pi}{\frac{s}{2}+\frac{1}{4}}$$

[1] См. Hardy (17), Hardy and Titchmarsh (4), 212–213.

[2] L a n d a u, Vorlesungen über Zahlentheorie, Bd. 2, S. 204–208.

и

$$\int_1^\infty \sum_{1\leqslant n\leqslant x} r(n)\, x^{\frac{2s-7}{4}}\, dx = \sum_{k=1}^\infty \int_k^{k+1} \bigl[r(1)+\ldots+r(k)\bigr] x^{\frac{2s-7}{4}}\, dx =$$

$$= \sum_{k=1}^\infty \bigl[r(1)+\ldots+r(k)\bigr]\, \frac{(k+1)^{\frac{2s-3}{4}} - k^{\frac{2s-3}{4}}}{\frac{s}{2}-\frac{3}{4}} =$$

$$= -\frac{1}{\frac{s}{2}-\frac{3}{4}} \sum_{k=1}^\infty r(k) k^{\frac{2s-3}{4}} = \frac{Z\Bigl(\frac{3}{4}-\frac{s}{2}\Bigr)}{\frac{3}{4}-\frac{s}{2}},$$

где

$$Z(s) = \sum_{n=1}^\infty \frac{r(n)}{n^s} = 4\zeta(s)L(s),$$

причём $L(s)$ определена формулой (9.12.1). Поэтому

$$\mathfrak{F}(s) = \frac{1}{2}\,(2\pi)^{\frac{2s-3}{4}}\, \frac{Z\Bigl(\frac{3}{4}-\frac{s}{2}\Bigr)}{\frac{3}{4}-\frac{s}{2}}.$$

Но

$$Z(1-s) = \pi^{1-2s}\, \frac{\Gamma(s)}{\Gamma(1-s)}\, Z(s),$$

как это следует из функциональных уравнений для $\zeta(s)$ и $L(s)$ (см. стр. 76 и 78), либо может быть получено независимо от них[1]. Поэтому $\mathfrak{F}(s)$ удовлетворяет уравнению (9.1.8) с $\nu = 2$, и, значит, $f(x)$ есть R_2.

Из аналога теоремы 136 для J_2-трансформаций следует, что равенство (9.1.3), с $\nu = 2$, имеет место в смысле сходимости в среднеквадратичном. В действительности оно имеет место и в обычном смысле, т.е.

$$\frac{1}{\xi\sqrt{\xi}}\left\{\bar{P}\left(\frac{\xi^2}{2\pi}\right)-1\right\} = \int_0^{\to\infty} \frac{1}{y\sqrt{y}}\left\{\bar{P}\left(\frac{y^2}{2\pi}\right)-1\right\} J_2(\xi y)\sqrt{\xi y}\, dy \quad (9.13.3)$$

для каждого положительного ξ. Для доказательства нам нужен аналог теоремы 58 для J_2-трансформаций. Этот аналог легко получить, соответствующим образом приспосабливая рассуждения, проведённые в § 8.18. Там мы основывали обращение порядка интегрирования в

$$\int_0^\lambda J_\nu(xu)\sqrt{xu}\, du \int_0^\infty J_\nu(uy)\sqrt{uy}\, f(y)\, dy$$

на равномерной сходимости внутреннего интеграла. Если же $f(x)\in L^2$, то обращение порядка интегрирования законно в силу того, что внут-

[1] См., например, Mordell (2), Potter (1).

ренний интеграл сходится в среднем, и результат представляет собой частный случай формулы Парсеваля для трансформаций Ганкеля. После обращения порядка интегрирования доказательство протекает, как в § 8.18.

Полагая в (9.13.3) $y=\frac{t}{\xi}$, $\xi=\sqrt{2\pi x}$, получаем

$$\frac{\bar P(x)-1}{2\pi x}=\int_0^{\to\infty}\left\{\bar P\left(\frac{t^2}{4\pi^2 x}\right)-1\right\}\frac{J_2(t)}{t}\,dt=\int_0^{\to\infty}\bar P\left(\frac{t^2}{4\pi^2 x}\right)\frac{J_2(t)}{t}\,dt-\frac{1}{2}\,.$$

Но

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi\sqrt{(N+1)x}}\bar P\left(\frac{t^2}{4\pi^2 x}\right)\frac{J_2(t)}{t}\,dt=\\
&=\sum_{n=0}^{N}\int_{2\pi\sqrt{nx}}^{2\pi\sqrt{(n+1)x}}\left\{r(0)+\ldots+r(n)-\frac{t^2}{4\pi x}\right\}\frac{J_2(t)}{t}\,dt=\\
&=\sum_{n=0}^{N}\big[r(0)+\ldots+r(n)\big]\left\{\frac{J_1(2\pi\sqrt{nx})}{2\pi\sqrt{nx}}-\frac{J_1(2\pi\sqrt{(n+1)x})}{2\pi\sqrt{(n+1)x}}\right\}-\\
&\qquad\qquad-\frac{1}{4\pi x}\int_0^{2\pi\sqrt{(N+1)x}}tJ_2(t)\,dt=\\
&=\sum_{n=0}^{N}r(n)\,\frac{J_1(2\pi\sqrt{nx})}{2\pi\sqrt{nx}}-\big[r(0)+\ldots+r(N)\big]\,\frac{J_1(2\pi\sqrt{(N+1)x})}{2\pi\sqrt{(N+1)x}}-\\
&-\frac{1}{4\pi x}\left\{-2\pi\sqrt{(N+1)x}\,J_1\big\{2\pi\sqrt{(N+1)x}\big\}+2\int_0^{\to\infty}J_1(t)\,dt+o(1)\right\}
\end{aligned}$$

при $N\to\infty$ и фиксированном x. Члены, содержащие $J_1\big\{2\pi\sqrt{(N+1)x}\big\}$, суть

$$-\big[r(0)+\ldots+r(N)-(N+1)\pi\big]\frac{J_1(2\pi\sqrt{(N+1)x})}{2\pi\sqrt{(N+1)x}}=O\big(N^{-1/4}\big),$$

и так как $\int_0^{\to\infty}J_1(t)\,dt=1$, то окончательно получаем[1]

$$\bar P(x)=\sqrt{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r(n)}{\sqrt n}\,J_1(2\pi\sqrt{nx}).\tag{9.13.4}$$

Вальфиш[2] и Оппенгейм[3] показали, что если $r_p(n)$ есть число представлений числа n в виде суммы p квадратов, и

[1] См. Hardy and Landau (1), Hardy (15).

[2] Walfisz (1), (2).

[3] Oppenheim (1).

$$\bar{P}_p(x) = \sum_{0\leqslant n\leqslant x}{}' r_p(n) - \frac{(\pi x)^{p/2}}{\Gamma\left(1+\frac{p}{2}\right)},$$

то

$$\bar{P}_p(x) = x^{p/4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r_p(n)}{n^{p/4}}\,J_{p/2}(2\pi\sqrt{nx}),$$

где ряд суммируем чезаровскими средними достаточно высокого порядка. Отсюда следует, что

$$x^{-(1+p)/2}\left\{\bar{P}_p\left(\frac{x^2}{2\pi}\right) - 1\right\}$$

есть $R_{1+p/2}$. Полагая $p=3$ и используя результат Вальфиша, согласно которому $\bar{P}_3(x) = O\left(x^{\frac{43}{58}+\varepsilon}\right)$, мы найдём, что $f(x)$ подходит под очевидное расширение теоремы 136. Это уже не верно ни для одного большего значения p.

Полагая $p=1$, мы найдём, что

$$f(x) = \frac{1}{x}\left(\frac{x}{\sqrt{2\pi}} - \left[\frac{x}{\sqrt{2\pi}}\right]\right),$$

где $[u]$ обозначает целую часть от u, есть $R_{3/2}$, что может быть и непосредственно проверено.

9.14. Формулы, связывающие различные классы функций, двойственных себе[1]**.** Простейшая формула этого рода доставляется следующим правилом:

П р а в и л о 1. *Если $f(x)$ есть своя собственная косинус- (синус-) трансформация, то*

$$g(x) = \int_0^\infty e^{-xt} f(t)\,dt \tag{9.14.1}$$

есть своя собственная синус- (косинус-) трансформация.

Предполагая, например, что $f(x)$ есть своя собственная косинус-трансформация, мы имеем

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty g(t)\sin xt\,dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \sin xt\,dt\int_0^\infty e^{-ty}f(y)\,dy =$$
$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(y)\,dy\int_0^\infty e^{-ty}\sin xt\,dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(y)\,\frac{x}{x^2+y^2}\,dy.$$

Но $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\dfrac{x}{x^2+y^2}$ есть косинус-трансформация для e^{-xy}, а $f(y)$ есть своя собственная косинус-трансформация. Поэтому теорема Парсеваля для

[1] Phillips (1), Hardy and Titchmarsh (6), Mehrotra (1), (6).

косинус-трансформаций даёт

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(y)\,\frac{x}{x^2+y^2}\,dy=\int_0^\infty e^{-xy}f(y)\,dy=g(x),$$

что и доказывает сформулированное правило. Пример с

$$f(t)=\frac{1}{\operatorname{ch}\left(t\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)},\quad g(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(t)\sin xt\,dt$$

был отмечен рядом авторов. Правило 1 есть частный случай следующего правила.

П р а в и л о 2. *Если* $f(x)$ *есть* R_μ *и*

$$k(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}2^s\Gamma\left(\frac14+\frac{\mu+s}{2}\right)\Gamma\left(\frac14+\frac{\nu+s}{2}\right)\chi(s)x^{-s}\,ds,\tag{9.14.2}$$

где

$$\chi(s)=\chi(1-s),\tag{9.14.3}$$

то

$$g(x)=\int_0^\infty f(y)k(xy)\,dy\tag{9.14.4}$$

есть R_ν.

Действительно, общий вид указанных функций $f(x)$ есть

$$f(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}2^{s/2}\Gamma\left(\frac14+\frac{\mu+s}{2}\right)\psi(s)x^{-s}\,ds,\tag{9.14.5}$$

где $\psi(s)=\psi(1-s)$. В силу (2.1.22),

$$\begin{aligned}g(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}&2^{(1-s)/2}\Gamma\left(\frac34+\frac{\mu-s}{2}\right)\psi(1-s)\times\\&\times 2^s\Gamma\left(\frac14+\frac{\mu+s}{2}\right)\Gamma\left(\frac14+\frac{\nu+s}{2}\right)\chi(s)x^{-s}\,ds=\\&=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}2^{s/2}\Gamma\left(\frac14+\frac{\nu+s}{2}\right)\psi_1(s)x^{-s}\,ds,\end{aligned}$$

где

$$\psi_1(s)=\sqrt{2}\,\Gamma\left(\frac34+\frac{\mu-s}{2}\right)\Gamma\left(\frac14+\frac{\mu+s}{2}\right)\psi(1-s)\chi(s).$$

Но так как

$$\psi_1(s)=\psi_1(1-s),$$

то $g(x)$ имеет тот же вид, что и (9.14.5), с заменой μ на ν. Это и завершает доказательство правила 2.

Так как это правило симметрично относительно μ и ν, то ядро, преобразующее функции R_μ в функции R_ν, осуществляет и обратное преобразование.

Полагая $\mu=\frac{1}{2}$, $\nu=-\frac{1}{2}$, или наоборот, мы получаем общий вид ядра, преобразующего функции R_c в R_s (или наоборот):

$$k(x) = \frac{2\sqrt{\pi}}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \Gamma(s)\chi(s)x^{-s}\,ds,$$

где $\chi(s)$ удовлетворяет условию (9.14.3). При $\chi(s)=\dfrac{1}{2\sqrt{\pi}}$ снова приходим к правилу 1. Полагая

$$\chi(s)=\frac{1}{2\Gamma\left(\frac{1+s}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{s}{2}\right)}, \quad \frac{1}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)}, \quad \frac{\sqrt{3}}{4\pi}\Gamma\left(s-\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{2}{3}-s\right),$$

мы получаем в качестве других ядер, обладающих тем же свойством,

$$k(x) = J_0(x), \quad xJ_0(x), \quad e^{x/2}x^{-1/6}K_{1/6}\left(\frac{x}{2}\right).$$

Полагая в общем правиле $\chi(s) = 2^{\frac{\mu+\nu-3}{2}}$, мы получаем

$$k(x) = x^{\frac{\mu+\nu+1}{2}}K_{\frac{\nu-\mu}{2}}(x);$$

в частности, $K_0(x)$ преобразует совокупность функций R_c в себя.

При выборе

$$\chi(s) = \frac{2^{\frac{\nu-\mu-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{\mu+s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}+\frac{\mu-s}{2}\right)},$$

мы получаем

$$k(x) = x^{\frac{\nu-\mu+1}{2}}J_{\frac{\mu+\nu}{2}}(x);$$

а при выборе

$$\chi(s) = \frac{2^{\frac{\mu-\nu-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{4}+\frac{\nu+s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}+\frac{\nu-s}{2}\right)},$$

мы получаем

$$k(x) = x^{\frac{\mu-\nu+1}{2}}J_{\frac{\mu+\nu}{2}}(x).$$

Разумеется, каждое из этих правил, как только оно получено, может быть и непосредственно проверено тем же путём, что и правило 1.

9.15. Комбинируя уже известные правила, мы можем получить ряд новых. Так, например, повторно применяя правило 1, получаем

$$g(x) = \int_0^\infty e^{-xy}\,dy \int_0^\infty e^{-yt} f(t)\,dt = \int_0^\infty \frac{f(t)}{x+t}\,dt \tag{9.15.1}$$

как функцию, являющуюся функцией R_c (R_s), если $f(x)$ есть R_c (R_s). Это не есть трансформация рассмотренного выше вида. Но она имеет вид

$$g(x) = \frac{1}{x}\int_0^\infty f(y) k\left(\frac{y}{x}\right) dy, \tag{9.15.2}$$

с $k(u) = \dfrac{1}{1+u}$. Это наводит на следующее общее правило для трансформаций такого типа.

П р а в и л о 3. *Если $f(x)$ есть R_μ, и*

$$k(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \Gamma\left(\frac{1}{4} + \frac{\mu+s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4} + \frac{\nu-s}{2}\right)\chi(s) x^{-s}\,ds, \tag{9.15.3}$$

где $\chi(s) = \chi(1-s)$, то (9.15.2) *есть R_ν.*

Действительно, если $f(x)$ задана равенством (9.14.5), то (2.1.17) даёт

$$g(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} 2^{s/2}\Gamma\left(\frac{1}{4} + \frac{\nu+s}{2}\right)\psi_1(s) x^{-s}\,ds,$$

где

$$\psi_1(s) = \Gamma\left(\frac{1}{4} + \frac{\mu+s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4} + \frac{\mu-s}{2}\right)\psi(s)\chi(1-s).$$

Сформулированное правило следует отсюда так же, как и в предыдущем случае.

В том частном случае, когда $\mu = \nu$, (9.15.3) приводится просто к

$$k(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \chi_1(s) x^{-s}\,ds,$$

где $\chi_1(s) = \chi_1(1-s)$, а это эквивалентно равенству

$$k\left(\frac{1}{x}\right) = xk(x). \tag{9.15.4}$$

Отсюда

П р а в и л о 4. *Если $f(x)$ есть R_ν, а $k(x)$ удовлетворяет уравнению* (9.15.4), *то функция $g(x)$, определённая формулой* (9.15.2), *есть R_ν.*

Это правило легко проверить и непосредственно, обычным путём.

Частные случаи представляют

$$k(x) = \frac{1}{(1+x^\alpha)^{1/\alpha}}$$

или, более обще,

$$k(x) = \frac{x^{(\alpha\beta-1)/2}}{(1+x^\alpha)^\beta}\,.$$

Полагая $f(x) = e^{-x^2/2}x^{\nu+1/2}$, что является функцией R_ν, и $\alpha = 2$, $\beta = 1-\nu$, мы получаем, что

$$g(x) = \frac{1}{x}\int_0^\infty e^{-y^2/2}y^{\nu+1/2}\left(\frac{y}{x}\right)^{-\nu+1/2}\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)^{\nu-1}dy = \\ = x^{-\nu+1/2}e^{x^2/2}\int_x^\infty e^{-t^2/2}t^{2\nu-1}\,dt$$

(полагая $x^2+y^2=t^2$) есть функция R_ν. В частности[1],

$$e^{x^2/2}\int_x^\infty e^{-t^2/2}\,dt$$

есть R_s.

Полагая $f(x) = e^{-x^2/2}x^{\nu+1/2}$, можно с помощью очевидных преобразований вывести из правила 4 следующую формулу для функций R_ν:

$$g(x) = x^{\nu+1/2}\int_0^\infty e^{-x^2y^2/2}y^{\nu+1/2}h(y)\,dy,$$

где $h(y) = h\left(\dfrac{1}{y}\right)$.

При $\mu = -\frac{1}{2}$, $\nu = \frac{1}{2}$ получаем

П р а в и л о 5. *Если $f(x)$ есть R_c, и*

$$k(x) = \frac{1}{2i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{\chi(s)}{\sin\frac{\pi s}{2}}\,x^{-s}\,ds,$$

где $\chi(s) = \chi(1-s)$, то

$$g(x) = \frac{1}{x}\int_0^\infty f(y)k\left(\frac{y}{x}\right)dy$$

есть R_s.

Например, если $\chi(s) = 1$, то

$$k(x) = \frac{1}{1+x^2} \qquad \text{и} \qquad g(x) = x\int_0^\infty \frac{f(y)}{x^2+y^2}\,dy.$$

Если $\chi(s) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\dfrac{1+s}{2}\right)\Gamma\left(1-\dfrac{s}{2}\right)}$, то

$$k(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} & (0<x<1), \\ 0 & (x>1) \end{cases} \qquad \text{и} \qquad g(x) = \int_0^x \frac{f(y)}{\sqrt{x^2-y^2}}\,dy\,.$$

[1] Hardy (1).

Разумеется, аналогичные правила существуют и для трансформаций, переводящих функции R_s в R_c.

9.16. Главный интерес предыдущих правил заключается в их форме. По поводу этих правил можно было бы дать множество разнообразных теорем[1]. Мы приведём здесь только одну, относящуюся к правилу 2. Читателю не доставит особого труда формулировка и доказательство аналогичных теорем для других правил.

Т е о р е м а 144. *Пусть $f(x)$ и $k(x)$ принадлежат к $L^2(0,\infty)$, и пусть $f(x)$ есть R_μ. Пусть*

$$g(x) = \int_0^\infty f(y)k(xy)\,dy \tag{9.16.1}$$

также принадлежит к $L^2(0,\infty)$. Тогда для того, чтобы $g(x)$ была функцией R_ν, необходимо и достаточно, чтобы трансформация Меллина $\mathfrak{K}(s)$ функции $k(x)$ была представима в виде

$$\mathfrak{K}(s) = 2^s\Gamma\Big(\frac{1}{4}+\frac{\mu+s}{2}\Big)\Gamma\Big(\frac{1}{4}+\frac{\nu+s}{2}\Big)\chi(s), \tag{9.16.2}$$

где $\chi(s)=\chi(1-s)$, а правая часть формулы (9.16.2) *принадлежит к $L^2\big(\frac{1}{2}-i\infty,\frac{1}{2}+i\infty\big)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. По теореме 72, с заменой $g(x)$ на $k(xy)$,

$$\int_0^\infty f(y)k(xy)\,dy = \frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty}\mathfrak{F}(s)\mathfrak{K}(1-s)y^{s-1}\,ds.$$

Поэтому трансформацией Меллина для $g(x)$ служит

$$\mathfrak{G}(s) = \mathfrak{F}(1-s)\mathfrak{K}(s).$$

В силу аналога теоремы 136 для R_μ,

$$\mathfrak{F}(s) = 2^{s/2}\Gamma\Big(\frac{1}{4}+\frac{\mu+s}{2}\Big)\psi(s),$$

где $\psi(s)=\psi(1-s)$. Если $g(x)$ есть R_ν, имеем также

$$\mathfrak{G}(s) = 2^{s/2}\Gamma\Big(\frac{1}{4}+\frac{\nu+s}{2}\Big)\omega(s),$$

где $\omega(s)=\omega(1-s)$. Поэтому

$$\mathfrak{K}(s) = \frac{2^{s/2}\Gamma\Big(\frac{1}{4}+\frac{\nu+s}{2}\Big)\omega(s)}{2^{(1-s)/2}\Gamma\Big(\frac{3}{4}+\frac{\mu-s}{2}\Big)\psi(1-s)},$$

т.е. $\mathfrak{K}(s)$ есть функция вида (9.16.2) с

[1] См., например, Mehrotra (1).

$$\chi(s) = \sqrt{2}\,\Gamma\Big(\frac{1}{4} + \frac{\mu+s}{2}\Big)\Gamma\Big(\frac{3}{4} + \frac{\mu-s}{2}\Big)\,\frac{\omega(s)}{\psi(1-s)}\,,$$

удовлетворяющей условию $\chi(s) = \chi(1-s)$. Тем самым условие (9.16.2) необходимо. Проводя рассуждение в обратном порядке, убеждаемся в том, что это условие также достаточно.

9.17. Ряд формул для двойственных себе функций может быть выведен с помощью функции

$$f(x) = \frac{1}{x}\left(\frac{x}{\sqrt{2\pi}} - \left[\frac{x}{\sqrt{2\pi}}\right]\right),$$

являющейся функцией $R_{3/2}$. Пусть $k(x)$ — ядро, преобразующее функции R_c в R_ν. Тогда, по правилу 3,

$$k(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} 2^s\Gamma\Big(\frac{s}{2}\Big)\Gamma\Big(\frac{1}{4} + \frac{\nu+s}{2}\Big)\chi(s)x^{-s}\,ds,$$

и

$$xk'(x) = -\frac{1}{\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} 2^s\Gamma\Big(1 + \frac{s}{2}\Big)\Gamma\Big(\frac{1}{4} + \frac{\nu+s}{2}\Big)\chi(s)x^{-s}\,ds$$

есть ядро, преобразующее функции $R_{3/2}$ в R_ν. Поэтому

$$g(x) = \int_0^\infty f(y)\,xy\,k'(xy)\,dy = \sum_{n=1}^\infty x\int_{(n-1)\sqrt{2\pi}}^{n\sqrt{2\pi}}\left(\frac{y}{\sqrt{2\pi}} - n + 1\right)k'(xy)\,dy =$$

$$= \sum_{n=1}^\infty\left\{\left(\frac{y}{\sqrt{2\pi}} - n + 1\right)k(xy)\Bigg|_{(n-1)\sqrt{2\pi}}^{n\sqrt{2\pi}} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{(n-1)\sqrt{2\pi}}^{n\sqrt{2\pi}} k(xy)\,dy\right\} =$$

$$= \sum_{n=1}^\infty k(nx\sqrt{2\pi}) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,x}\int_0^\infty k(u)\,du$$

должно быть функцией R_ν.

Это правило может быть проверено следующим образом. Пусть

$$k(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \mathfrak{K}(s)x^{-s}\,ds \qquad (c > 0).$$

Тогда

$$\sum_{n=1}^\infty k(nx\sqrt{2\pi}) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c'-i\infty}^{c'+i\infty} \mathfrak{K}(s)\sum_{n=1}^\infty (nx\sqrt{2\pi})^{-s}\,ds \qquad (c' > 1),$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{c'-i\infty}^{c'+i\infty} \mathfrak{K}(s)(2\pi)^{-s/2}\zeta(s)x^{-s}\,ds =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \mathfrak{K}(s)(2\pi)^{-s/2}\zeta(s)x^{-s}\,ds + \frac{\mathfrak{K}(1)}{\sqrt{2\pi}\,x}\,.$$

Поэтому

$$g(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \mathfrak{K}(s)(2\pi)^{-s/2}\zeta(s)x^{-s}\,ds.$$

Если $k(x)$ преобразует функции R_c в R_ν, то, по правилу 3,

$$\mathfrak{K}(s) = 2^s\,\Gamma\Big(\frac{s}{2}\Big)\Gamma\Big(\frac{1}{4}+\frac{\nu+s}{2}\Big)\chi(s),$$

где $\chi(s) = \chi(1-s)$. Поэтому

$$\mathfrak{G}(s) = \mathfrak{K}(s)(2\pi)^{-s/2}\zeta(s) = 2^{s/2}\,\Gamma\Big(\frac{1}{4}+\frac{\nu+s}{2}\Big)\chi_1(s),$$

где

$$\chi_1(s) = \pi^{-s/2}\,\Gamma\Big(\frac{s}{2}\Big)\zeta(s)\chi(s).$$

Тогда, в силу функционального уравнения для $\zeta(s)$,

$$\chi_1(s) = \chi_1(1-s).$$

Следовательно, в силу (9.1.9), $g(x)$ есть R_ν.

Например, для $k(x) = e^{-x}$, $\nu = \frac{1}{2}$ получаем, что

$$g(x) = \frac{1}{e^{x\sqrt{2\pi}}-1} - \frac{1}{x\sqrt{2\pi}}$$

есть R_s, как в § 9.12 (3).

Для $k(x) = J_0(x)$ в качестве другой функции R_s получаем[1]

$$\sum_{n=1}^{\infty} J_0(nx\sqrt{2\pi}) - \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sum_{n<\frac{x}{\sqrt{2\pi}}}\frac{1}{\sqrt{x^2-2\pi n^2}} - \frac{1}{2}\,.$$

Если $k(x) = x^{\frac{2\nu+1}{4}}K_{\frac{2\nu+1}{4}}(x)$, то получаем[2], что

$$\sum_{n=1}^{\infty}(nx\sqrt{2\pi})^{\frac{2\nu+1}{4}}K_{\frac{2\nu+1}{4}}(nx\sqrt{2\pi}) - \frac{2^{\frac{2\nu-5}{4}}\,\Gamma\Big(\dfrac{2\nu+3}{4}\Big)}{x}$$

есть R_ν.

[1] См. § 2.10 (VI).

[2] Watson (1).

X
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ И РАЗНОСТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

10.1. Введение. В этой главе мы используем интегральную формулу Фурье и связанные с ней формулы для нахождения решений некоторых дифференциальных уравнений. Общий метод заключается в преобразовании дифференциального (или другого функционального) уравнения, содержащего неизвестную функцию, в соотношение, содержащее трансформацию Фурье, или какую-либо аналогичную трансформацию, исходной функции. Новое соотношение может быть более простым и приводить к решению задачи.

То, что некоторые дифференциальные уравнения могут быть решены с помощью определённых интегралов, обнаружили ещё Лаплас и Коши. Основная задача этой главы — изложить некоторые применения этого хорошо известного метода как упражнения на интегральную формулу Фурье.

Таким образом, настоящая глава является просто собранием примеров, иллюстрирующих вовможности метода. Эти примеры в большинстве хорошо известны, и их решения могут быть найдены в руководствах. Однако, применяемые там методы обычно более или менее неточны и часто не опираются явно на теорему Фурье. Мы ставим здесь своей целью найти решения уравнений, накладывая простые условия, a priori обосновывающие применяемые методы.

10.2. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Мы изложим сначала метод решения обыкновенных линейных дифференциальных уравнений, принадлежащий Бромвичу[1]. Этот метод, в его строгой форме, опирается на теоремы 33 и 34.

Одним из примеров Бромвича является система

$$\begin{cases} \left(\dfrac{d^2}{dt^2} - 4\dfrac{d}{dt}\right)x - \left(\dfrac{d}{dt} - 1\right)y = 0, \\ \left(\dfrac{d}{dt} + 6\right)x + \left(\dfrac{d^2}{dt^2} - \dfrac{d}{dt}\right)y = 0, \end{cases} \tag{10.2.1}$$

[1] Bromwich (1).

где $x(0) = x_0$, $x'(0) = x_1$, $y(0) = y_0$, $y'(0) = y_1$ — заданные постоянные числа.

Можно видеть a priori, что $x(t)$ и $y(t)$ суть целые функции экспоненциального типа. Например, дифференцирование первого уравнения и исключение y дают

$$x'''(t) + c_1 x''(t) + c_2 x'(t) + c_3 x(t) = 0,$$

откуда

$$x^{(n+3)}(t) + c_1 x^{(n+2)}(t) + c_2 x^{(n+1)}(t) + c_3 x^{(n)}(t) = 0.$$

Если $|x^{(m)}(t)| \leqslant K^m(t)$ для $m = 1, 2, \ldots, n+2$, то отсюда следует, что

$$|x^{(n+3)}(t)| \leqslant \big(|c_1| + |c_2| + |c_3|\big) K^{n+2}(t) \leqslant K^{n+3}(t),$$

предполагая, что $K(t) \geqslant 1$, $K(t) \geqslant |c_1| + |c_2| + |c_3|$. Поэтому $x(t)$ может быть разложена в ряд Тейлора, и

$$|x(t)| = \left|\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{(n)}(0)\, t^n}{n!}\right| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \frac{K^n(0)\, |t|^n}{n!} = e^{K(0)|t|},$$

так что $x(t)$ есть целая функция экспоненциального типа. Так же убедимся в этом для $y(t)$.

Следовательно, по теореме 33,

$$x(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_C e^{wt} \xi(w)\, dw, \qquad y(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_C e^{wt} \eta(w)\, dw, \tag{10.2.2}$$

где $\xi(w)$ и $\eta(w)$ регулярны при $|w| > R$ для некоторого R и обращаются в нуль на бесконечности, а C — простой замкнутый контур, охватывающий окружность $|w| = R$.

Дифференциальные уравнения дают тогда

$$\left\{\begin{aligned} &\int_C e^{wt}\big[\xi(w)(w^2 - 4w) - \eta(w)(w-1)\big]\, dw = 0,\\ &\int_C e^{wt}\big[\xi(w)(w+6) + \eta(w)(w^2 - w)\big]\, dw = 0. \end{aligned}\right. \tag{10.2.3}$$

Положим

$$\left\{\begin{aligned} \xi(w)(w^2 - 4w) - \eta(w)(w-1) &= p(w),\\ \xi(w)(w+6) + \eta(w)(w^2 - w) &= q(w). \end{aligned}\right. \tag{10.2.4}$$

Тогда $p(w)$ и $q(w)$ регулярны при $|w| > R$, за исключением простых полюсов в бесконечности. Следовательно, по теореме 34, они являются линейными функциями от w, скажем,

$$p(w) = a + bw, \qquad q(w) = \alpha + \beta w. \tag{10.2.5}$$

Далее, из (10.2.2),

$$x_0 = \frac{1}{2\pi i}\int_C \xi(w)\,dw, \qquad x_1 = \frac{1}{2\pi i}\int_C \xi(w)w\,dw,$$

и потому, в силу теоремы Лорана,

$$\xi(w) = \frac{x_0}{w} + \frac{x_1}{w^2} + O\left(\frac{1}{|w|^3}\right) \tag{10.2.6}$$

для больших $|w|$. Аналогично

$$\eta(w) = \frac{y_0}{w} + \frac{y_1}{w^2} + O\left(\frac{1}{|w|^3}\right). \tag{10.2.7}$$

Подставляя (10.2.5), (10.2.6), (10.2.7) в (10.2.4) и приравнивая коэффициенты, находим

$$p(w) = (w-4)x_0 + x_1 - y_0,$$
$$q(w) = x_0 + (w-1)y_0 + y_1.$$

Разрешая уравнения (10.2.4) относительно ξ и η, мы получаем

$$\xi(w) = \frac{wp(w)+q(w)}{(w+1)(w-2)(w-3)},$$
$$\eta(w) = \frac{-(w+6)p(w) + (w^2-4w)q(w)}{(w^2-1)(w-2)(w-3)}.$$

Значения функций $x(t)$ и $y(t)$ находятся теперь из (10.2.2) с помощью теории вычетов. Например, полюсу в точке $w=-1$ соответствует в $x(t)$ член

$$\frac{-p(-1)+q(-1)}{12}\,e^{-t} = \frac{6x_0 - x_1 - y_0 + y_1}{12}\,e^{-t}.$$

Разумеется, изложенный метод совершенно общ. Другим простым примером может служить система

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} + 2n\dfrac{dx}{dt} + n^2x = 0, \\[2mm] \dfrac{d^2y}{dt^2} + 2n\dfrac{dy}{dt} + n^2y = \mu\dfrac{dx}{dt}, \end{cases}$$

где $x(0)=0$, $x'(0)=\lambda$, $y(0)=0$, $y'(0)=0$. Она приведена в книге Jeffreys, Operational Methods, § 3.31, в качестве примера на операционный эквивалент изложенного метода.

10.3. Если дано линейное уравнение, коэффициентами которого служат полиномы степени m, то, применяя к нему изложенный выше метод, мы должны m раз интегрировать по частям, что приводит к дифференциальному уравнению m-го порядка для трансформации исходной функции. Рассмотрим, например, уравнение Бесселя

$$\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{1}{x}\,\frac{dz}{dx} + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right)z = 0,$$

где $\nu > 0$. Полагая $z = x^\nu y$, получаем

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{2\nu+1}{x}\,\frac{dy}{dx} + y = 0.$$

Будем искать решение, являющееся целой функцией экспоненциального типа. Пусть это будет

$$y = \frac{1}{2\pi i}\int_C e^{xw}\eta(w)\,dw.$$

Тогда

$$\begin{aligned} xy &= -\frac{1}{2\pi i}\int_C e^{xw}\eta'(w)\,dw,\\ \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{2\pi i}\int_C e^{xw}w\eta(w)\,dw,\\ x\frac{d^2y}{dx^2} &= -\frac{1}{2\pi i}\int_C e^{xw}\big[2w\eta(w) + w^2\eta'(w)\big]\,dw, \end{aligned}$$

и следовательно,

$$\int_C e^{xw}\big[(1+w^2)\eta'(w) - (2\nu-1)w\eta(w)\big]\,dw = 0.$$

Выражение в фигурных скобках регулярно в бесконечно удалённой точке. Поэтому, в силу теоремы 34,

$$(1+w^2)\eta'(w) - (2\nu-1)w\eta(w) = a,$$
$$\eta(w) = a(1+w^2)^{\nu-1/2}\int\frac{dw}{(1+w^2)^{\nu+1/2}} + b(1+w^2)^{\nu-1/2}.$$

Так как $\eta(w)$ регулярна в бесконечности, то $b = 0$, и

$$\eta(w) = a(1+w^2)^{\nu-1/2}\int_w^\infty \frac{d\zeta}{(1+\zeta^2)^{\nu+1/2}},$$

где берутся ветви функций $(1+w^2)^{\nu-1/2}$ и $(1+\zeta^2)^{\nu+1/2}$, вещественные на вещественной оси, и предполагается, что на комплексной плоскости сделан разрез по отрезку мнимой оси от $-i$ до i. Тогда

$$y = \frac{a}{2\pi i}\int_C e^{xw}(1+w^2)^{\nu-1/2}\,dw\int_w^\infty \frac{d\zeta}{(1+\zeta^2)^{\nu+1/2}}\,.$$

Это выражение может быть приведено к более простому виду. Пусть w — точка на мнимой оси между 0 и i и w' — та же точка на противоположном краю разреза, т.е. после полного обхода вокруг i. Тогда

$$\eta(w)-\eta(w') = a(1+w^2)^{\nu-1/2}\int_w^{\infty}\frac{d\zeta}{(1+\zeta^2)^{\nu+1/2}} - \\ - ae^{2\pi i(\nu-1/2)}(1+w^2)^{\nu-1/2}\int_w^{-\infty}\frac{d\zeta}{(1+\zeta^2)^{\nu+1/2}}.$$

Но

$$\int_w^{-\infty}\frac{d\zeta}{(1+\zeta^2)^{\nu+1/2}} = -e^{-2\pi i(\nu+1/2)}\int_{-\infty}^{w}\frac{d\zeta}{(1+\zeta^2)_1^{\nu+1/2}},$$

где индексом 1 обозначена ветвь, получаемая с помощью разрезов от $-i\infty$ до $-i$ и от i до $i\infty$. Поэтому

$$\eta(w)-\eta(w') = a(1+w^2)^{\nu-1/2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\zeta}{(1+\zeta^2)_1^{\nu+1/2}} = aK(1+w^2)^{\nu-1/2},$$

где K зависит только от ν. Отсюда следует, что

$$y = K_1\int_{-1}^{1}e^{ixv}(1-v^2)^{\nu-1/2}\,dv = K_2\int_0^1(1-v^2)^{\nu-1/2}\cos xv\,dv.$$

10.4. Если мы в уравнении Бесселя положим $z=x^{-\nu}y$, $x^2=4t$, то получим

$$t\,\frac{d^2y}{dt^2}+(1-\nu)\frac{dy}{dt}+y=0. \tag{10.4.1}$$

Решение, соответствующее $z=J_\nu(x)$, не является целой функцией для произвольного ν. Вместо этого будем искать такие решения $y(t)$, что $y(t)=O(e^{ct})$ при $t\to\infty$ для некоторого положительного c, и $y(0)=0$.

В силу теоремы 24, такое решение представимо интегралом Фурье. Пусть

$$f(t)=\begin{cases} y(t) & (t>0),\\ 0 & (t<0).\end{cases}$$

Тогда $F_-(w)=0$, а $F_+(w)$ равна

$$Y(w)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty}e^{iwt}y(t)\,dt \tag{10.4.2}$$

для $v>c$. Так как $y(t)$ непрерывна и имеет ограниченное изменение в каждом конечном интервале, то теорема 24 даёт

$$y(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\lim_{\lambda\to\infty}\int_{ia-\lambda}^{ia+\lambda}e^{-iwt}Y(w)\,dw \tag{10.4.3}$$

для $t>0$, $a>c$.

Интегрируя (10.4.2) по частям, получаем

$$\sqrt{2\pi}\,Y(w) = -\frac{1}{iw}\int_0^{\to\infty} e^{iwt}y'(t)\,dt \tag{10.4.4}$$

(проинтегрированный член исчезает). Аналогично,

$$\sqrt{2\pi}\,Y'(w) = \int_0^{\infty} e^{iwt}ity(t)\,dt = -\frac{1}{w}\int_0^{\to\infty} e^{iwt}\big[y(t)+ty'(t)\big]\,dt. \tag{10.4.5}$$

Снова интегрируя по частям и принимая во внимание уравнение (10.4.1), находим

$$\begin{aligned}\sqrt{2\pi}\,Y'(w) &= \frac{1}{iw^2}\int_0^{\to\infty} e^{iwt}\big[2y'(t)+ty''(t)\big]\,dt = \\ &= \frac{1}{iw^2}\int_0^{\to\infty} e^{iwt}\big[(\nu+1)y'(t)-y(t)\big]\,dt.\end{aligned} \tag{10.4.6}$$

Действительно, последний интеграл сходится, так как сходится (10.4.4); поэтому проинтегрированный член

$$-\frac{e^{iwt}}{iw^2}\big[y(t)+ty'(t)\big]$$

должен стремиться к пределу при $t\to\infty$ и этим пределом может быть только 0.

Из (10.4.2), (10.4.4) и (10.4.6) следует, что

$$Y'(w) = \left(-\frac{\nu+1}{w} - \frac{1}{iw^2}\right)Y(w).$$

Поэтому

$$Y(w) = K\frac{e^{\frac{1}{iw}}}{w^{\nu+1}}, \qquad y(t) = \frac{K}{\sqrt{2\pi}}\int_{ia-\infty}^{ia+\infty}\frac{e^{-iwt+\frac{1}{iw}}}{w^{\nu+1}}\,dw.$$

В силу (7.13.9) последнее выражение есть в действительности кратное от $t^{\nu/2}J_\nu(2\sqrt{t})$.

10.5. Аналогичный метод может быть применён и к решению дифференциальных уравнений с заданной функцией в правой части. Для простоты рассмотрим уравнение

$$\frac{d^2y}{dt^2} + k^2y = \varphi(t) \qquad (t \geqslant 0),$$

где все участвующие функции — вида $O(e^{ct})$ при $t\to\infty$. При $v>c$, интегрируя дважды по частям, получаем

$$\sqrt{2\pi}\,Y(w) = \int_0^{\infty} e^{iwt}y(t)\,dt = -\frac{y(0)}{iw} - \frac{y'(0)}{w^2} - \frac{1}{w^2}\int_0^{\infty} e^{iwt}y''(t)\,dt.$$

Поэтому

$$\Phi(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{iwt} \varphi(t)\, dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{iwt} \big[y''(t) + k^2 y(t)\big]\, dt =$$
$$= -w^2 Y(w) + \frac{iwy(0)}{\sqrt{2\pi}} - \frac{y'(0)}{\sqrt{2\pi}} + k^2 Y(w),$$

т.е.

$$Y(w) = \frac{\Phi(w)}{k^2 - w^2} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{iwy(0) - y'(0)}{k^2 - w^2}\, .$$

Следовательно, для достаточно большого a, и в частности, для $a > k$,

$$y(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{\lambda\to\infty} \int_{ia-\lambda}^{ia+\lambda} e^{-iwt} \left(\frac{\Phi(w)}{k^2 - w^2} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{iwy(0) - y'(0)}{k^2 - w^2} \right) dw.$$

В первом члене мы можем, подставив вместо $\Phi(w)$ интеграл Фурье и опираясь на абсолютную сходимость, обратить порядок интегрирования. Мы получим

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \varphi(x)\, dx \int_{ia-\infty}^{ia+\infty} \frac{e^{iw(x-t)}}{k^2 - w^2}\, dw = \frac{1}{k} \int_0^t \varphi(x) \sin k(t-x)\, dx,$$

где значение внутреннего интеграла определено по теореме о вычетах. Остальные члены суть

$$y(0) \cos kt + y'(0) \frac{\sin kt}{k}\, .$$

Таким образом, получаем обычное решение

$$y(t) = y(0) \cos kt + y'(0) \frac{\sin kt}{k} + \frac{1}{k} \int_0^t \varphi(x) \sin k(t-x)\, dx.$$

10.6. Дифференциальные уравнения в частных производных. *Найти решение $v(x,t)$ уравнения*

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \qquad (-\infty < x < \infty, \quad t > 0) \tag{10.6.1}$$

такое, что

$$v(x, 0) = f(x) \qquad (-\infty < x < \infty).$$

Это — классическая задача о распространении тепла в бесконечном стержне при заданном начальном распределении температуры, если трактовать v как температуру, t — как время и x — как расстояние вдоль стержня[1].

[1] Riemann–Weber, 2, § 36; Карслоу, Теория теплопроводности, § 16.

Формально мы поступаем следующим образом. Положим

$$V(\xi, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi} v(x, t)\, dx.$$

Тогда, дважды интегрируя по частям и предполагая, что проинтегрированные члены исчезают, получаем

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi} \frac{\partial v}{\partial t}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\, dx =$$
$$= -\frac{\xi^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi} v\, dx = -\xi^2 V.$$

Следовательно,

$$V(\xi, t) = e^{-\xi^2 t} A(\xi),$$

где $A(\xi)$ зависит только от ξ. Подстановка $t = 0$ даёт

$$A(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi} f(x)\, dx = F(\xi),$$

где F — трансформация Фурье функции f. Таким образом,

$$V(\xi, t) = e^{-\xi^2 t} F(\xi),$$

и решение есть

$$v(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2 t - ix\xi} F(\xi)\, d\xi.$$

Выражая его через $f(x)$, получаем

$$v(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2 t - ix\xi}\, d\xi \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi u} f(u)\, du =$$
$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\, du \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2 t - i\xi(x-u)}\, d\xi =$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-u)^2}{4t}} f(u)\, du. \qquad (10.6.2)$$

То, что действительно $v(x, t) \to f(x)$ при $t \to 0$, следует из теории сингулярного интеграла Вейерштрасса. Для обоснования изложенного метода достаточно было бы предположить, например, что все рассматриваемые функции принадлежат к $L(-\infty, \infty)$. Но способ, который мы сейчас применим, приведёт к значительно более общему результату.

Будем предполагать, что $|v(x, t)| < Ke^{c|x|}$ *для некоторого* c *и всех* t *и что аналогичным условиям удовлетворяют все частные производные функции* $v(x, t)$*, которые нам встретятся.* Мы будем называть такую функцию функцией экспоненциального типа.

Пусть $v(x,t) \to f(x)$ при $t \to 0$ почти для всех значений x. Тогда почти всюду $|f(x)| < Ke^{c|x|}$.

Положим

$$V_+(\zeta,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{ix\zeta}\, v(x,t)\,dx, \quad V_-(\zeta,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{ix\zeta}\, v(x,t)\,dx,$$

где $\zeta = \xi + i\eta$. Тогда V_+ существует и регулярна для $\eta > c$, а V_- — для $\eta < -c$. Но при $\eta > c$

$$\begin{aligned}\sqrt{2\pi}\,\frac{\partial V_+}{\partial t} &= \int_0^\infty e^{ix\zeta}\,\frac{\partial v}{\partial t}\,dx = \int_0^\infty e^{ix\zeta}\,\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\,dx = \\ &= \left(e^{ix\zeta}\,\frac{\partial v}{\partial x}\right)\Big|_0^\infty - i\zeta \int_0^\infty e^{ix\zeta}\,\frac{\partial v}{\partial x}\,dx = \\ &= \left(e^{ix\zeta}\,\frac{\partial v}{\partial x}\right)\Big|_0^\infty - i\zeta\big(e^{ix\zeta}v\big)\Big|_0^\infty - \zeta^2 \int_0^\infty e^{ix\zeta}\,v\,dx = \\ &= -v_x(0,t) + i\zeta v(0,t) - \zeta^2\sqrt{2\pi}\,V_+(\zeta,t).\end{aligned}$$

Это — обыкновенное дифференциальное уравнение, решение которого (см., например, § 10.5) есть

$$V_+(\zeta,t) = e^{-\zeta^2 t}A(\zeta) - \frac{e^{-\zeta^2 t}}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{\zeta^2\tau}\big[v_x(0,\tau) - i\zeta v(0,\tau)\big]\,d\tau.$$

Полагая здесь $t \to 0$, получаем

$$A(\zeta) = \lim_{t\to 0} V_+(\zeta,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{ix\zeta} f(x)\,dx = F_+(\zeta),$$

в силу мажорированной сходимости, имеющей здесь место, так как $v(x,t) \to f(x)$ почти для всех x и

$$|e^{ix\zeta}v(x,t)| < Ke^{(c-\eta)x}.$$

Таким образом,

$$V_+(\zeta,t) = e^{-\zeta^2 t}F_+(\zeta) - \chi(\zeta,t),$$

где $\chi(\zeta,t)$ есть целая функция от ζ, стремящаяся к нулю при $\xi \to \pm\infty$.

В аналогичном рассуждении, применённом к V_-, проинтегрированные члены появляются с противоположным знаком, и мы получаем

$$V_-(\zeta,t) = e^{-\zeta^2 t}F_-(\zeta) + \chi(\zeta,t),$$

Поэтому, в силу теоремы 24,

$$\begin{aligned}v(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{\lambda\to\infty} \int_{ia-\lambda}^{ia+\lambda} e^{-ix\zeta}\big[e^{-\zeta^2 t}F_+(\zeta) - \chi(\zeta,t)\big]\,d\zeta\, + \\ + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{\lambda\to\infty} \int_{ib-\lambda}^{ib+\lambda} e^{-ix\zeta}\big[e^{-\zeta^2 t}F_-(\zeta) + \chi(\zeta,t)\big]\,d\zeta.\end{aligned}$$

Сумма членов, содержащих χ, очевидно, равна нулю. Член, содержащий F_+, есть

$$\frac{1}{2\pi}\int_{ia-\infty}^{ia+\infty} e^{-\zeta^2 t - ix\zeta}\,d\zeta \int_0^\infty e^{iu\zeta} f(u)\,du = \\ = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty f(u)\,du \int_{ia-\infty}^{ia+\infty} e^{-\zeta^2 t - i\zeta(x-u)}\,d\zeta$$

(где обращение порядка интегрирования законно в силу абсолютной сходимости)

$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_0^\infty e^{-\frac{(x-u)^2}{4t}} f(u)\,du.$$

Аналогично вычисляя член, содержащий F_-, мы приходим к прежней формуле (10.6.2).

Мы не знаем, необходимо ли для единственности решения предполагать, что $v(x,t)$ есть функция экспоненциального типа. Но во всяком случае подчинение не только $f(x)$, но и $v(x,t)$ какому-либо условию необходимо. Действительно, легко проверить, что если $v(x,t)$ есть решение уравнения (10.6.1), то решением будет также

$$\frac{1}{\sqrt{t}}\,e^{-\frac{x^2}{4t}}\,v\left(\frac{x}{t}, -\frac{1}{t}\right),$$

а так как $v(x,t) = x$ есть решение, то и

$$\frac{x}{t\sqrt{t}}\,e^{-\frac{x^2}{4t}}$$

есть решение, как легко можно проверить и непосредственно. Но эта функция, стремясь к нулю при $t \to 0$ для всякого x, не обращается тождественно в нуль. Разумеется, она неограниченна в окрестности точки $x=0$ при $t \to 0$ (в чём убеждаемся, полагая, например, $x=\sqrt{t}$), и, значит, не удовлетворяет принятому нами условию.

10.7. *Найти решение $v(x,t)$ уравнения*

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \qquad (x > 0,\quad t > 0)$$

такое, что $v(x,0) = 0 \ \ (x > 0),\quad v(0,t) = f(t)\ \ (t > 0).$

Это — задача[1] о распространении тепла в полубесконечном стержне, имевшем вначале температуру 0, конец которого внезапно нагрет и поддерживается затем при температуре, являющейся заданной функцией $f(t)$ от времени t.

---

[1] R i e m a n n–W e b e r, 2, § 40; К а р с л о у, Теория теплопроводности, § 22.

Для формального решения положим

$$V_s(\xi, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty v(x, t) \sin \xi x \, dx.$$

Тогда

$$\begin{aligned}\frac{\partial V_s}{\partial t} &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \frac{\partial v}{\partial t} \sin \xi x \, dx = \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \sin \xi x \, dx = -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \xi \int_0^\infty \frac{\partial v}{\partial x} \cos \xi x \, dx = \\ &= -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \xi \left(v \cos \xi x \Big|_0^\infty + \xi \int_0^\infty v \sin \xi x \, dx \right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \xi f(t) - \xi^2 V_s,\end{aligned}$$

откуда

$$V_s = e^{-\xi^2 t} A(\xi) + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, e^{-\xi^2 t} \xi \int_0^t e^{\xi^2 u} f(u) \, du.$$

Так как $v(x, 0) = 0$, то $V_s(\xi, 0) = 0$ и потому $A(\xi) = 0$. Следовательно,

$$\begin{aligned}v(x, t) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty e^{-\xi^2 t} \xi \sin \xi x \, d\xi \int_0^t e^{\xi^2 u} f(u) \, du = \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^t f(u) \, du \int_0^\infty e^{\xi^2 (u - t)} \xi \sin \xi x \, d\xi = \\ &= \frac{x}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-\frac{x^2}{4(t-u)}} \frac{f(u)}{(t-u)^{3/2}} \, du.\end{aligned}$$

То, что полученное выражение при $t \to 0$ стремится к $f(x)$, следует, вообще говоря, из теоремы 13.

Для строгого доказательства предположим снова, что $v(x, t)$ есть функция экспоненциального типа. Пусть

$$V(\zeta, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{i\zeta x} v(x, t) \, dx \qquad (\eta > c).$$

Тогда, дважды интегрируя по частям, получаем

$$\sqrt{2\pi}\, \frac{\partial V}{\partial t} = \int_0^\infty e^{i\zeta x} \frac{\partial v}{\partial t} \, dx = \int_0^\infty e^{i\zeta x} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \, dx = -v_x(0, t) + i\zeta f(t) - \sqrt{2\pi}\, \zeta^2 V.$$

Следовательно,

$$V(\zeta, t) = e^{-\zeta^2 t} A(\zeta) + \frac{e^{-\zeta^2 t}}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{\zeta^2 u} \big[i\zeta f(u) - v_x(0, u) \big] \, du.$$

Как и выше, $A(\zeta) = 0$. Если $f(u)$ и $v_x(0, u)$ ограничены в интервале интегрирования, то при $\xi \to \pm\infty$ остальные члены равны

$$O\left(e^{-\xi^2 t} \int_0^t e^{\xi^2 u} \, |\xi| \, du \right) = O\left(\frac{1}{|\xi|} \right).$$

Следовательно, по L^2-теории трансформаций Фурье,

$$v(x,t) = \frac{1}{2\pi}\frac{d}{dx}\int_{ia-\infty}^{ia+\infty} e^{-\zeta^2 t}\,\frac{e^{-i\zeta x}-1}{-i\zeta}\,d\zeta\int_0^t e^{\zeta^2 u}\big[i\zeta f(u) - v_x(0,u)\big]\,du$$

для $x > 0$ и $v(x,t) = 0$ для $x < 0$. Так как двойной интеграл, стоящий в правой части, абсолютно сходится, то мы можем обратить порядок интегрирования, после чего можем заменить a на 0. Член, содержащий $f(u)$, даст

$$\frac{1}{2\pi}\frac{d}{dx}\int_0^t f(u)\,du\int_{-\infty}^{\infty}(1-e^{-i\xi x})e^{\xi^2(u-t)}\,d\xi =$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\frac{d}{dx}\int_0^t\Big(1-e^{-\frac{x^2}{4(t-u)}}\Big)\frac{f(u)}{\sqrt{t-u}}\,du = \frac{x}{4\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-\frac{x^2}{4(t-u)}}\,\frac{f(u)}{(t-u)^{3/2}}\,du,$$

а второй член даст чётную функцию от x. Заменяя x на $-x$ и вычитая, мы получим результат, найденный выше формально.

10.8. *Найти решение уравнения*

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \alpha^2 v$$

такое, что $v(x,0) = 0 \ \ (x > 0), \ \ v(0,t) = f(t) \ \ (t > 0)$.

Поступая, как прежде, получаем

$$\frac{\partial V_s}{\partial t} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \alpha^2 v\right)\sin\xi x\,dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\xi f(t) - \xi^2 V_s - \alpha^2 V_s,$$

откуда

$$V_s = e^{-(\xi^2+\alpha^2)t}A(\xi) + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,e^{-(\xi^2+\alpha^2)t}\,\xi\int_0^t e^{(\xi^2+\alpha^2)u}\,f(u)\,du.$$

Как и раньше, $A(\xi) = 0$, и

$$v(x,t) = \frac{2}{\pi}\int_0^t f(u)\,du\int_0^{\infty} e^{(\xi^2+\alpha^2)(u-t)}\,\xi\sin\xi x\,d\xi =$$
$$= \frac{x}{2\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-\alpha^2(t-u)-\frac{x^2}{4(t-u)}}\,\frac{f(u)}{(t-u)^{3/2}}\,du.$$

Строгое решение может быть дано тем же способом, что и выше.

10.9. *Найти решение уравнения*[1]

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \alpha^2 v \qquad (0 < x < l,\ t > 0)$$

такое, что $v(0,t) = v_0, \ \ v(x,0) = 0, \ \ v_x(l,t) = 0$.

[1] См. J e f f r e y s, Operational Methods, p. 70.

Здесь мы в качестве переменной в интеграле Фурье возьмём t и предположим, что $|v(x,t)| < Ke^{c|t|}$ для всех x. Пусть

$$V(x,\zeta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{i\zeta t}\, v(x,t)\, dt \qquad (\eta > c).$$

Тогда

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{i\zeta t}\, \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\, dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{i\zeta t} \left(\frac{\partial v}{\partial t} + \alpha^2 v\right) dt = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(e^{i\zeta t}\, v\right)\Big|_0^\infty - \frac{i\zeta}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{i\zeta t}\, v\, dt + \frac{\alpha^2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{i\zeta t}\, v\, dt = \\ &= (\alpha^2 - i\zeta) V\end{aligned}$$

и, следовательно,

$$V = A(\zeta)\operatorname{ch}(x\sqrt{\alpha^2 - i\zeta}) + B(\zeta)\operatorname{sh}(x\sqrt{\alpha^2 - i\zeta}).$$

Но при $x = 0$

$$V(0,\zeta) = \frac{v_0}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{i\zeta t}\, dt = -\frac{v_0}{i\zeta\sqrt{2\pi}}\,.$$

Поэтому

$$A(\zeta) = -\frac{v_0}{i\zeta\sqrt{2\pi}}\,.$$

Далее, при $x = l$ имеем $\dfrac{\partial V}{\partial x} = 0$, поэтому

$$A(\zeta)\operatorname{sh}(l\sqrt{\alpha^2 - i\zeta}) + B(\zeta)\operatorname{ch}(l\sqrt{\alpha^2 - i\zeta}) = 0.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}V &= -\frac{v_0}{i\zeta\sqrt{2\pi}} \left(\operatorname{ch}(x\sqrt{\alpha^2 - i\zeta}) - \frac{\operatorname{sh}(l\sqrt{\alpha^2 - i\zeta})\operatorname{sh}(x\sqrt{\alpha^2 - i\zeta})}{\operatorname{ch}(l\sqrt{\alpha^2 - i\zeta})}\right) = \\ &= -\frac{v_0}{i\zeta\sqrt{2\pi}}\, \frac{\operatorname{ch}((x-l)\sqrt{\alpha^2 - i\zeta})}{\operatorname{ch}(l\sqrt{\alpha^2 - i\zeta})}\,.\end{aligned}$$

Отсюда при $t > 0$

$$v(x,t) = -\frac{v_0}{2\pi i} \int_{ia-\infty}^{ia+\infty} e^{-i\zeta t}\, \frac{\operatorname{ch}((x-l)\sqrt{\alpha^2 - i\zeta})}{\operatorname{ch}(l\sqrt{\alpha^2 - i\zeta})}\, \frac{d\zeta}{\zeta}\,.$$

Полагая $\alpha^2 - i\zeta = -\zeta'^2 = -\xi'^2 + \eta'^2 - 2i\xi'\eta'$, получаем, что

$$v(x,t) = \frac{v_0}{\pi i} \int_\Gamma e^{-(\alpha^2 + \zeta'^2)t} \frac{\cos\zeta'(x-l)}{\cos\zeta' l}\, \frac{\zeta'}{\alpha^2 + \zeta'^2}\, d\zeta',$$

где Γ есть верхняя ветвь гиперболы $\xi'^2 - \eta'^2 = -(\alpha^2 + a)$.

10.10. *Найти решение уравнения*[1]

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} \qquad (t > 0, \ \ r > a)$$

такое, что $v(r,0) = 0 \ \ (r > a), \quad v(a,t) = f(t)$.

Предположим, что $v(r,t) = O(e^{cr+ct})$. Полагая

$$V(r,\zeta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{i\zeta t}\, v(r,t)\, dt \qquad (\eta > c),$$

имеем тогда

$$\sqrt{2\pi}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r}\right) = \int_0^\infty e^{i\zeta t}\, \frac{\partial v}{\partial t}\, dt =$$
$$= e^{i\zeta t}\, v\Big|_0^\infty - i\zeta \int_0^\infty e^{i\zeta t} v\, dt = -i\zeta\sqrt{2\pi}\, V.$$

Решение этого уравнения может быть записано в виде

$$V(r,\zeta) = A(\zeta) H_0^{(1)}(r\sqrt{i\zeta}) + B(\zeta) H_0^{(2)}(r\sqrt{i\zeta}),$$

где

$$H_0^{(1)}(z) = J_0(z) + iY_0(z), \qquad H_0^{(2)}(z) = J_0(z) - iY_0(z).$$

Положим $\zeta = \xi + ik$, $\sqrt{i\zeta} = \zeta' = \xi' + i\eta'$. Тогда

$$\xi'^2 - \eta'^2 = -k,$$

т.е. ζ' пробегает ветвь этой равносторонней гиперболы, например, верхнюю. На ней

$$|H_0^{(1)}(r\zeta')| \sim \frac{Ae^{-r\eta'}}{\sqrt{|r\zeta'|}}, \qquad |H_0^{(2)}(r\zeta')| \sim \frac{Ae^{r\eta'}}{\sqrt{|r\zeta'|}},$$

и так как на верхней полуплоскости $V(r,\zeta) = O(e^{cr})$, то мы должны иметь $B(\zeta) = 0$.

Далее, при $r \to a$

$$V(r,\zeta) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{i\zeta t} f(t)\, dt = F(\zeta).$$

Поэтому

$$A(\zeta) = \frac{F(\zeta)}{H_0^{(1)}(a\sqrt{i\zeta})},$$

и решение есть

$$v(r,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{ik-\infty}^{ik+\infty} e^{-i\zeta t}\, \frac{H_0^{(1)}(r\sqrt{i\zeta})}{H_0^{(1)}(a\sqrt{i\zeta})}\, F(\zeta)\, d\zeta,$$

[1] См. Nicholson (2), Goldstein (2).

или
$$v(r,t) = \frac{\sqrt{2}}{i\sqrt{\pi}} \int_\Gamma e^{-\zeta'^2 t} \frac{H_0^{(1)}(r\zeta')}{H_0^{(1)}(a\zeta')} F(-i\zeta'^2)\zeta'\,d\zeta',$$
где Γ есть верхняя ветвь равносторонней гиперболы $\xi'^2 - \eta'^2 = -k$.

Для функций $f(t)$, удовлетворяющих подходящим условиям, можно перейти к пределу по $k \to 0$ и получить решение в форме интеграла, взятого по прямой.

10.11. *Найти решение уравнения*
$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \qquad (x > 0,\ \ 0 < y < b)$$
такое, что
$$v = \begin{cases} f(x) & (y = 0,\ \ 0 < x < \infty), \\ \ \ 0 & (y = b,\ \ 0 < x < \infty), \\ \ \ 0 & (x = 0,\ \ 0 < y < b). \end{cases}$$
Это — задача об установившемся распределении тепла в полубесконечной полосе, на краях которой поддерживается заданная температура[1].

Для формального решения положим
$$V_s(\xi, y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty v(x,y)\sin\xi x\,dx.$$

Тогда
$$\frac{\partial^2 V_s}{\partial y^2} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \sin\xi x\,dx = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \sin\xi x\,dx =$$
$$= -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{\partial v}{\partial x} \sin\xi x\right)\Bigg|_0^\infty + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\xi \int_0^\infty \frac{\partial v}{\partial x} \cos\xi x\,dx =$$
$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\bigl(\xi v\cos\xi x\bigr)\Big|_0^\infty + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\xi^2 \int_0^\infty v\sin\xi x\,dx = \xi^2 V_s,$$
откуда
$$V_s = A(\xi)\operatorname{ch}\xi y + B(\xi)\operatorname{sh}\xi y.$$

Переходя здесь к пределу при $y \to 0$, получаем
$$A(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(x)\sin\xi x\,dx,$$
так что $A(\xi)$ есть синус-трансформация функции $f(x)$, $A(\xi) = F_s(\xi)$.

Полагая $y = b$, получаем
$$A(\xi)\operatorname{ch}\xi b + B(\xi)\operatorname{sh}\xi b = 0,$$

[1] К а р с л о у, Теория теплопроводности, § 45.

откуда
$$B(\xi) = -F_s(\xi)\operatorname{cth}\xi b.$$
Таким образом,
$$V_s = F_s(\xi)\big(\operatorname{ch}\xi y - \operatorname{sh}\xi y \operatorname{cth}\xi b\big) = F_s(\xi)\,\frac{\operatorname{sh}\xi(b-y)}{\operatorname{sh}\xi b}$$
и
$$v(x,y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty F_s(\xi)\,\frac{\operatorname{sh}\xi(b-y)}{\operatorname{sh}\xi b}\,\sin\xi x\,d\xi.$$
Выражая правую часть через f, получаем
$$\begin{aligned} v(x,y) &= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(u)\,du\int_0^\infty \frac{\operatorname{sh}\xi(b-y)}{\operatorname{sh}\xi b}\,\sin\xi x\,\sin\xi u\,d\xi = \\ &= \frac{1}{2b}\sin\frac{\pi y}{b}\int_0^\infty f(u)\left(\frac{1}{\cos\dfrac{\pi(b-y)}{b} + \operatorname{ch}\dfrac{\pi(x-u)}{b}} - \right. \\ &\qquad\qquad \left. - \frac{1}{\cos\dfrac{\pi(b-y)}{b} + \operatorname{ch}\dfrac{\pi(x+u)}{b}}\right)du. \end{aligned}$$

То, что это выражение стремится к $\frac{1}{2}\big[f(x+0)+f(x-0)\big]$, когда последнее выражение существует, следует из теоремы 18, так как
$$\frac{\operatorname{sh}\xi(b-y)}{\operatorname{sh}\xi b} = e^{-\xi y} - e^{-\xi b}\,\frac{\operatorname{sh}\xi y}{\operatorname{sh}\xi b}\,,$$
а последнее слагаемое, очевидно, даёт 0.

Предположим теперь, что $v(x,y) = O(e^{cx})$ при $x\to\infty$ равномерно относительно y, причём $\frac{\pi}{b} < c < \frac{2\pi}{b}$.

Положим
$$V(\zeta,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty e^{i\zeta x}\,v(x,y)\,dx,$$
где $c<\eta<\dfrac{2\pi}{b}$. Тогда
$$\begin{aligned} \sqrt{2\pi}\,\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} &= \int_0^\infty e^{i\zeta x}\,\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\,dx = -\int_0^\infty e^{i\zeta x}\,\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\,dx = \\ &= -\left(e^{i\zeta x}\,\frac{\partial v}{\partial x}\right)\Big|_0^\infty + i\zeta\big(e^{i\zeta x}\,v\big)\Big|_0^\infty + \zeta^2\int_0^\infty e^{i\zeta x}\,v\,dx = g(y) + \sqrt{2\pi}\,\zeta^2 V, \end{aligned}$$
где $g(y) = v_x(0,y)$. Следовательно,
$$V(\zeta,y) = A(\zeta)\operatorname{ch}\zeta y + B(\zeta)\operatorname{sh}\zeta y + \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\zeta}\int_0^y g(u)\operatorname{sh}\zeta(y-u)\,du.$$
Переходя здесь к пределу при $y\to 0$, мы получаем, в силу мажорированной сходимости,

$$A(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{i\zeta x} f(x)\,dx = F(\zeta),$$

а полагая $y \to b$, получаем

$$0 = A(\zeta)\operatorname{ch}\zeta b + B(\zeta)\operatorname{sh}\zeta b + \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\zeta} \int_0^b g(u)\operatorname{sh}\zeta(b-u)\,du.$$

Таким образом,

$$V(\zeta, y) = F(\zeta)\,\frac{\operatorname{sh}\zeta(b-y)}{\operatorname{sh}\zeta b} + \frac{\operatorname{sh}\zeta(y-b)}{\sqrt{2\pi}\,\zeta\operatorname{sh}\zeta b} \int_0^y g(u)\operatorname{sh}\zeta u\,du - \\ - \frac{\operatorname{sh}\zeta y}{\sqrt{2\pi}\,\zeta\operatorname{sh}\zeta b} \int_y^b g(u)\operatorname{sh}\zeta(b-u)\,du.$$

Следовательно, при $c < a < \dfrac{2\pi}{b}$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{ia-\infty}^{ia+\infty} e^{-i\zeta x} F(\zeta)\,\frac{\operatorname{sh}\zeta(b-y)}{\operatorname{sh}\zeta b}\,d\zeta + \\ + \frac{1}{2\pi} \int_0^y g(u)\,du \int_{ia-\infty}^{ia+\infty} e^{-i\zeta x}\,\frac{\operatorname{sh}\zeta(y-b)\,\operatorname{sh}\zeta u}{\zeta\operatorname{sh}\zeta b}\,d\zeta - \\ - \frac{1}{2\pi} \int_y^b g(u)\,du \int_{ia-\infty}^{ia+\infty} e^{-i\zeta x}\,\frac{\operatorname{sh}\zeta y\,\operatorname{sh}\zeta(b-u)}{\zeta\operatorname{sh}\zeta b}\,d\zeta = \begin{cases} v(x,y) & (x>0), \\ 0 & (x<0). \end{cases}$$

Заменяя x на $-x$ и вычитая, мы получаем, что для $x > 0$ значение функции $v(x, y)$ равно выражению, получающемуся из только что найденного путём замены $e^{-i\zeta x}$ на $-2i\sin\zeta x$.

В этой форме, если мы заменим в последних двух членах a на 0, то получим 0; но если $a > \dfrac{\pi}{b}$, то полюс в точке $\zeta = \dfrac{\pi i}{b}$ даёт вычет вида

$$K\sin\frac{\pi y}{b}\operatorname{sh}\frac{\pi x}{b}\,. \tag{10.11.1}$$

В первом члене мы можем, подставив вместо $F(\zeta)$ интеграл Фурье, обратить, в силу абсолютной сходимости, порядок интегрирования. В результате (снова благодаря полюсу в $\zeta = \dfrac{\pi i}{b}$) получим

$$\int_0^\infty f(u)\chi(u)\,du,$$

где

$$\chi(u) = \frac{1}{2b}\sin\frac{\pi y}{b}\left(\frac{1}{\cos\dfrac{\pi(b-y)}{b} + \operatorname{ch}\dfrac{\pi(x-u)}{b}} - \right. \\ \left. - \frac{1}{\cos\dfrac{\pi(b-y)}{b} + \operatorname{ch}\dfrac{\pi(x+u)}{b}} - 4\operatorname{sh}\frac{\pi x}{b}\,e^{-\pi u/b}\right).$$

Мы получили то же решение, что и выше, плюс член вида (10.11.1), являющийся решением соответствующей задачи с $f=0$. Таким образом, решение в этом случае будет не единственным, если не сделать какого-либо предположения, исключающего указанный дополнительный член.

10.12. *Найти решение уравнения*

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \qquad (-\infty < x < \infty, \quad t > 0)$$

такое, что $y(x,0) = f(x), \quad y_t(x,0) = g(x)$.

Это — задача о движении бесконечной струны с заданными начальными смещениями и скоростями, если под y понимать смещение точки, находящейся на расстоянии x вдоль струны, в момент времени t.

Для формального решения положим

$$Y(\xi,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x} y(x,t)\, dx.$$

Тогда, дважды интегрируя по частям, получим

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\, dx = -\xi^2 Y,$$

откуда

$$Y = A(\xi)\cos\xi t + B(\xi)\sin\xi t,$$

причём, очевидно, $A(\xi) = F(\xi)$, $\xi B(\xi) = G(\xi)$. Следовательно,

$$y(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} F(\xi)\cos\xi t\, d\xi + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} \frac{G(\xi)}{\xi} \sin\xi t\, d\xi.$$

Первый член равен

$$\frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{-i\xi(x+t)} + e^{-i\xi(x-t)}\right) d\xi \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi u} f(u)\, du = \frac{f(x+t)+f(x-t)}{2},$$

а второй член равен

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} \frac{\sin\xi t}{\xi}\, d\xi \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi u} g(u)\, du =$$
$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(u)\, du \int_0^{\infty} \frac{\sin\xi t\, \cos\xi(x-u)}{\xi}\, d\xi = \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} g(u)\, du.$$

Таким образом, получаем классическое решение

$$y(x,t) = \frac{f(x+t)+f(x-t)}{2} + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} g(u)\, du.$$

Для строгого решения примем, что $y(x,t) = O(e^{c|x|})$, причём тому же условию удовлетворяют и частные производные от $y(x,t)$. Положим

$$Y_+(\zeta,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty e^{i\zeta x} y(x,t)\,dx, \qquad Y_-(\zeta,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^0 e^{i\zeta x} y(x,t)\,dx,$$

где Y_+ существует для $\eta > c$, а Y_- — для $\eta < -c$. Имеем

$$\begin{aligned}\sqrt{2\pi}\,\frac{\partial^2 Y_+}{\partial t^2} &= \int_0^\infty e^{i\zeta x}\,\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\,dx = \int_0^\infty e^{i\zeta x}\,\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\,dx = \\ &= \left(e^{i\zeta x}\,\frac{\partial y}{\partial x}\right)\Big|_0^\infty - i\zeta\big(e^{i\zeta x}\,y\big)\Big|_0^\infty - \zeta^2\int_0^\infty e^{i\zeta x}\,y\,dx = \\ &= -\varphi(t) + i\zeta\psi(t) - \sqrt{2\pi}\,\zeta^2 Y_+,\end{aligned}$$

где $\varphi(t) = y_x(0,t)$, $\psi(t) = y(0,t)$. Следовательно,

$$Y_+ = A(\zeta)\cos\zeta t + B(\zeta)\sin\zeta t - \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\zeta}\int_0^t \big[\varphi(u) - i\zeta\psi(u)\big]\sin\zeta(t-u)\,du,$$

и начальные условия дают $A(\zeta) = F_+(\zeta)$, $\zeta B(\zeta) = G_+(\zeta)$. Таким образом,

$$Y_+(\zeta,t) = F_+(\zeta)\cos\zeta t + \frac{G_+(\zeta)}{\zeta}\,\sin\zeta t + \chi(\zeta,t),$$

где χ есть целая функция, стремящаяся к нулю при $\zeta = \xi + ik$, $\xi \to \pm\infty$. Аналогично,

$$Y_-(\zeta,t) = F_-(\zeta)\cos\zeta t + \frac{G_-(\zeta)}{\zeta}\,\sin\zeta t - \chi(\zeta,t).$$

Теперь

$$y(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\lim_{\lambda\to\infty}\int_{ia-\lambda}^{ia+\lambda} e^{-i\zeta x}\,Y_+(\zeta,t)\,d\zeta + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\lim_{\lambda\to\infty}\int_{ib-\lambda}^{ib+\lambda} e^{-i\zeta x}\,Y_-(\zeta,t)\,d\zeta,$$

где $a > c$, $b < -c$. Члены, содержащие $\chi(\zeta,t)$, дают 0. Члены, содержащие F, дают

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\lim_{\lambda\to\infty}\int_{ia-\lambda}^{ia+\lambda} F_+(\zeta)\,\frac{e^{-i\zeta(x+t)} + e^{-i\zeta(x-t)}}{2}\,d\zeta + \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\lim_{\lambda\to\infty}\int_{ib-\lambda}^{ib+\lambda} F_-(\zeta)\,\frac{e^{-i\zeta(x+t)} + e^{-i\zeta(x-t)}}{2}\,d\zeta = \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2}\,.\end{aligned}$$

Член, содержащий G_+, даёт

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty g(u)\,du\int_{ia-\infty}^{ia+\infty} e^{i\zeta(u-x)}\,\frac{\sin\zeta t}{\zeta}\,d\zeta$$

(где порядок интегрирования обращён на основании ограниченной сходимости интеграла по ζ). Но интеграл по ζ равен π, если $x-t<u<x+t$, и равен 0 в противной случае. Аналогично вычисляется член, содержащий G_-, и мы приходим тем самым к результату, найденному выше формально.

10.13. *Найти решение уравнения*[1]

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \qquad (0<x<l, \quad t>0)$$

такое, что $y(0,t)=0$, $y(l,t)=0$, $y(x,0)=f(x)$ *и* $y_t(x,0)=0$.

Это — задача о колебаниях упругой струны с закреплёнными концами, если под y понимать смещение точки, находящейся на расстоянии x вдоль струны, в момент времени t.

Примем, что $y(x,t)$ *и её производные равны* $O(e^{ct})$ *для некоторого* c. Положим

$$Y(x,\zeta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty e^{i\zeta t}y(x,t)\,dt$$

при $\eta>c$. Тогда

$$\begin{aligned}\sqrt{2\pi}\,\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}&=\int_0^\infty e^{i\zeta t}\,\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\,dt=\int_0^\infty e^{i\zeta t}\,\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\,dt=\\&=\left(e^{i\zeta t}\,\frac{\partial y}{\partial t}\right)\Bigg|_0^\infty-i\zeta\int_0^\infty e^{i\zeta t}\,\frac{\partial y}{\partial t}\,dt=\\&=-i\zeta\big(e^{i\zeta t}\,y\big)\Big|_0^\infty-\zeta^2\int_0^\infty e^{i\zeta t}\,y\,dt=i\zeta f(x)-\sqrt{2\pi}\,\zeta^2Y,\end{aligned}$$

откуда

$$Y=A(\zeta)\cos\zeta x+B(\zeta)\sin\zeta x+\frac{i}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x f(u)\sin\zeta(x-u)\,du.$$

Начальные условия дают $Y(0,\zeta)=0$, $Y(l,\zeta)=0$. Поэтому $A(\zeta)=0$ и

$$B(\zeta)\sin\zeta l+\frac{i}{\sqrt{2\pi}}\int_0^l f(u)\sin\zeta(l-u)\,du=0.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}Y&=-\frac{i}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{\sin\zeta x}{\sin\zeta l}\int_0^l f(u)\sin\zeta(l-u)\,du+\frac{i}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x f(u)\sin\zeta(x-u)\,du=\\&=-\frac{i}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{\sin\zeta(l-x)}{\sin\zeta l}\int_0^x f(u)\sin\zeta u\,du-\frac{i}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{\sin\zeta x}{\sin\zeta l}\int_x^l f(u)\sin\zeta(l-u)\,du\end{aligned}$$

[1] R i e m a n n–W e b e r, 2, § 85.

и

$$y(x,t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{ia-\infty}^{ia+\infty} e^{-i\zeta t}\,\frac{\sin\zeta(l-x)}{\sin\zeta l}\,d\zeta\int_0^x f(u)\sin\zeta u\,du+\\ +\frac{1}{2\pi i}\int_{ia-\infty}^{ia+\infty} e^{-i\zeta t}\,\frac{\sin\zeta x}{\sin\zeta l}\,d\zeta\int_x^l f(u)\sin\zeta(l-u)\,du. \qquad (10.13.1)$$

Заменяя t на $t+2l$ и вычитая, мы введём множитель $2ie^{-i\zeta l}\sin\zeta l$, и полученные интегралы для $t>0$ будут стремиться к нулю при $a\to-\infty$. Это показывает, что решение имеет период $2l$, и мы можем предполагать, что $0<t<2l$. Сделаем в (10.13.1) преобразование

$$\frac{1}{\sin\zeta l}=-2ie^{i\zeta l}+\frac{e^{2i\zeta l}}{\sin\zeta l}\,.$$

Тогда при $a\to\infty$ легко видеть, что второй член даёт в (10.13.1) нуль. Влияние первого члена может быть определено с помощью теоремы Фурье. Например, в первом слагаемом правой части равенства (10.13.1) он даёт

$$\frac{1}{4\pi}\int_{ia-\infty}^{ia+\infty}\left(e^{i\zeta(2l-x-t)}-e^{i\zeta(x-t)}\right)d\zeta\int_0^x f(u)\left(e^{i\zeta u}-e^{-i\zeta u}\right)du.$$

Первые члены в скобках дают

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}f(2l-x-t) & \text{при } 2l-2x<t<2l-x,\\ \quad 0 & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

Полное решение может быть записано в виде

$$\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2}\,,$$

где $f(x)$ определена вне интервала $(0,l)$ как нечётная периодическая функция с периодом $2l$.

Если $f''(x)$ всюду существует и непрерывна, то все наши выводы действительно обоснованы. В других же случаях дифференциальное уравнение не всюду выполняется, и поставленные условия не являются строго совместными.

Предположим, например, что

$$f(x)=\begin{cases} x & \text{при } 0\leqslant x\leqslant \frac{1}{2}l,\\ l-x & \text{при } \frac{1}{2}l\leqslant x\leqslant l.\end{cases}$$

Тогда $f'(x)=1$ или -1, и $f''(x)=0$ всюду, где существует. Чтобы охватить случаи этого рода, можно было бы несколько изменить постановку задачи, потребовав, чтобы функция y вместо дифференциального уравнения удовлетворяла уравнению

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x=x_2} - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x=x_1} = \frac{\partial^2}{\partial t^2}\int_{x_1}^{x_2} y\,dx$$

для всех t и всех, за исключением конечного числа, значений x, и чтобы $\dfrac{\partial y}{\partial x}$ как функция от x была ограниченной для каждого t. Тогда

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial Y}{\partial x}\right)_{x=x_2} - \left(\frac{\partial Y}{\partial x}\right)_{x=x_1} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty e^{i\zeta t}\left[\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x=x_2} - \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x=x_1}\right]dt = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty e^{i\zeta t}\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int_{x_1}^{x_2} y\,dx\right]dt = \\ &= -\frac{i\zeta}{\sqrt{2\pi}}\left(e^{i\zeta t}\int_{x_1}^{x_2} y\,dx\right)\Bigg|_0^\infty - \frac{\zeta^2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty e^{i\zeta t}\,dt\int_{x_1}^{x_2} y\,dx\end{aligned}$$

$\left(\text{в предположении, что } \dfrac{\partial}{\partial t}\displaystyle\int_{x_1}^{x_2} y\,dx \to 0 \text{ при } t \to 0\right)$

$$= \frac{i\zeta}{\sqrt{2\pi}}\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx - \zeta^2\int_{x_1}^{x_2} Y\,dx.$$

Отсюда следует, что $\dfrac{\partial^2 Y}{\partial x^2}$ существует и равно $\dfrac{i\zeta f(x)}{\sqrt{2\pi}} - \zeta^2 Y$, и дальше рассуждаем, как выше.

Аналогичным способом может быть решено и уравнение[1]

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = g \qquad (0 < x < l),$$

где $g = \text{const}$, $\quad y(x,0) = g\left(lx - \frac{1}{2}x^2\right), \quad y(0,t) = 0, \quad y_t(x,0) = 0.$

10.14. Задача[2] о волнах на плоском неглубоком слое воды, вызванных возмущающей силой $f(t)$, сосредоточенной в фиксированной точке, принимаемой за начало координат, приводит к уравнению

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) \qquad (r > 0,\ t > 0),$$

где

$$\lim_{r\to 0}\left(-2\pi r\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) = f(t) \qquad (t > 0).$$

Положим

$$\Phi(r,\zeta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty e^{i\zeta t}\varphi(r,t)\,dt.$$

---

[1] J e f f r e y s, Operational Methods, p. 59.

[2] Л а м б, Гидродинамика, стр. 297.

Тогда
$$c^2\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\,\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty e^{i\zeta t}\,\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\,dt.$$
Если вода имеет вначале плоскую покоящуюся поверхность, то $\varphi(r,0)=$ $=0$ и $\varphi_t(r,0)=0$, и обычное интегрирование по частям показывает, что правая часть равна $-\zeta^2\Phi$. Поэтому[1]
$$\Phi(r,\zeta)=A(\zeta)H_0^{(1)}\left(\frac{r\zeta}{c}\right)+B(\zeta)H_0^{(2)}\left(\frac{r\zeta}{c}\right).$$
Так как Φ должна быть ограниченной при $\operatorname{Im}\zeta>0$, то $B(\zeta)=0$. Далее,
$$F(\zeta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty e^{i\zeta t}\,f(t)\,dt=\lim_{r\to0}\left\{-\sqrt{2\pi}\,r\int_0^\infty e^{i\zeta t}\,\frac{\partial\varphi}{\partial r}\,dt\right\}=$$
$$=\lim_{r\to0}\left\{-2\pi r\,\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right\}=\lim_{r\to0}\frac{2\pi r\zeta}{c}\,A(\zeta)H_1^{(1)}\left(\frac{r\zeta}{c}\right)=2\pi A(\zeta).$$
Следовательно,
$$\Phi(r,\zeta)=\frac{1}{2\pi}\,F(\zeta)H_0^{(1)}\left(\frac{r\zeta}{c}\right),$$
$$\varphi(r,t)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int_{ia-\infty}^{ia+\infty}e^{-i\zeta t}F(\zeta)H_0^{(1)}\left(\frac{r\zeta}{c}\right)d\zeta=$$
$$=\frac{1}{4\pi^2}\int_0^\infty f(u)\,du\int_{ia-\infty}^{ia+\infty}e^{i\zeta(u-t)}H_0^{(1)}\left(\frac{r\zeta}{c}\right)d\zeta.$$
Но внутренний интеграл равен 0 для $t<u+\dfrac{r}{c}$ и равен
$$\frac{2\pi}{\sqrt{(t-u)^2-\dfrac{r^2}{c^2}}}$$
для остальных значений t. Следовательно,
$$\varphi(r,t)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{t-\frac{r}{c}}\frac{f(u)\,du}{\sqrt{(t-u)^2-\dfrac{r^2}{c^2}}}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\frac{1}{\operatorname{ch}\frac{ct}{r}}}f\left(t-\frac{r}{c}\operatorname{ch}\lambda\right)d\lambda.$$

10.15. *Найти решение уравнения*[2]
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}=u\qquad(x>0,\ y>0),$$
такое, что $u(x,0)=a,\quad u(0,y)=a.$

[1] В а т с о н, § 3.6.
[2] B a t e m a n, Partial Differential Equations, p. 125.

Положим
$$U(\zeta, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{i\zeta x} u(x, y)\, dx$$
при $\eta > c$. Тогда
$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{i\zeta x} \frac{\partial u}{\partial y}\, dx = \\ = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{e^{i\zeta x}}{i\zeta} \frac{\partial u}{\partial y} \right) \Bigg|_0^\infty - \frac{1}{i\zeta\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{i\zeta x} \frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y}\, dx = -\frac{U}{i\zeta},$$
так как (при достаточной гладкости) $u_y(0, y) = 0$. Отсюда
$$U(\zeta, y) = e^{iy/\zeta} A(\zeta).$$
При $y \to 0$ получаем
$$A(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{i\zeta x} a\, dx = -\frac{a}{i\zeta\sqrt{2\pi}}.$$
Следовательно, принимая во внимание (7.13.9), имеем
$$u(x, y) = -\frac{a}{2\pi i} \int_{ik-\infty}^{ik+\infty} \frac{e^{-ix\zeta + iy/\zeta}}{\zeta}\, d\zeta = a I_0(2\sqrt{xy}).$$

10.16. Дифференциально-разностные уравнения. Общей формой дифференциально-разностных уравнений является
$$\sum_{\mu=0}^{m} \sum_{\nu=0}^{n} a_{\mu,\nu} f^{(\nu)}(x + b_\mu) = g(x).$$
Частными случаями служат линейные дифференциальные уравнения и линейные уравнения в конечных разностях.

Мы проиллюстрируем наш общий метод решения на простом специальном случае.

Найти решение уравнения
$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$
такое, что $f(x) = O(e^{c|x|})$.

Повторное обращение к уравнению показывает, что $f(x)$ имеет производные всех порядков, каждая из которых есть $O(e^{c|x|})$. Далее, вместе с $f(x)$ уравнению удовлетворяет также функция
$$f^*(x) = f(x) - f(0) - x f'(0),$$
и так как $f^*(0) = 0$, $f^{*\prime}(0) = 0$, то без ограничения общности можно предполагать, что решение $f(x)$ удовлетворяет условиям $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$.

Определим $F_+(w)$ и $F_-(w)$, как обычно, для $v > c$ и $v < -c$ соответственно. Тогда

$$F_+(w) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}\, w^2} \int_0^{\infty} e^{ixw} f''(x)\, dx = O\left(\frac{1}{|w|^3}\right)$$

при $|w| \to \infty$, и то же верно для $F_-(w)$.

Но при $a > c$, $b < -c$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{ia-\infty}^{ia+\infty} e^{-ixw} F_+(w)\, dw + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{ib-\infty}^{ib+\infty} e^{-ixw} F_-(w)\, dw,$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{ia-\infty}^{ia+\infty} (-iw) e^{-ixw} F_+(w)\, dw + \\ + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{ib-\infty}^{ib+\infty} (-iw) e^{-ixw} F_-(w)\, dw,$$

и уравнение даёт

$$\int_{ia-\infty}^{ia+\infty} e^{-ixw} F_+(w) \left(-iw - \frac{e^{-ihw} - e^{ihw}}{2h}\right) dw + \\ + \int_{ib-\infty}^{ib+\infty} e^{-ixw} F_-(w) \left(-iw - \frac{e^{-ihw} - e^{ihw}}{2h}\right) dw = 0.$$

Поэтому из теоремы 141 следует, что

$$\left(i\zeta + \frac{e^{-ih\zeta} - e^{ih\zeta}}{2h}\right) F_+(\zeta) = \chi(\zeta),$$
$$\left(i\zeta + \frac{e^{-ih\zeta} - e^{ih\zeta}}{2h}\right) F_-(\zeta) = -\chi(\zeta),$$

где $\chi(\zeta)$ регулярна для $b \leqslant \eta \leqslant a$, и $\chi(\zeta) \to 0$ при $\xi \to \pm\infty$. Следовательно,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{ia-\infty}^{ia+\infty} e^{-ixw} \frac{\chi(w)}{iw + \dfrac{e^{-ihw} - e^{ihw}}{2h}}\, dw - \\ - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{ib-\infty}^{ib+\infty} e^{-ixw} \frac{\chi(w)}{iw + \dfrac{e^{-ihw} - e^{ihw}}{2h}}\, dw.$$

Правая часть есть сумма вычетов, соответствующих полюсам, лежащим в полосе $b < v < a$. Полюс третьего порядка в точке $w = 0$ даёт квадратный трёхчлен относительно x. Остальные нули знаменателя дают показательные члены. *Таким образом,*

$$f(x) = A + Bx + Cx^2 + \sum e^{-ixw_\nu},$$

где w_ν *пробегает нули функции* $\sin hw - hw$, *для которых* $|\operatorname{Im} w_\nu| \leqslant c$.

10.17. *Решить уравнение*[1]

$$f^{(n)}(x)+\sum_{\nu=0}^{n-1}a_\nu f^{(\nu)}(x+b_\nu)=g(x),$$

где каждая функция есть $O(e^{c|x|})$.

Пусть

$$\varphi(x)=f(x)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(0)\,x^k}{k!}\,.$$

Тогда $\varphi(0)=\varphi'(0)=\ldots=\varphi^{(n-1)}(0)=0$, и повторное интегрирование по частям даёт

$$\Phi_+(w)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty e^{ixw}\varphi(x)\,dx=\frac{(-1)^n}{\sqrt{2\pi}\,(iw)^n}\int_0^\infty e^{ixw}\varphi^{(n)}(x)\,dx.$$

Это показывает, что $w^n\Phi_+(w)\in L^2(ia-\infty,ia+\infty)$ с $a>c$.

Заданное уравнение эквивалентно уравнению

$$\varphi^{(n)}(x)+\sum_{\nu=0}^{n-1}a_\nu\varphi^{(\nu)}(x+b_\nu)=\psi(x),$$

где $\psi(x)$ отличается от $g(x)$ на некоторый полином степени $n-1$. Как в предыдущем параграфе, получаем, что

$$\int_{ia-\infty}^{ia+\infty}e^{ixw}\big[\Phi_+(w)K(w)-\Psi_+(w)\big]\,dw+\\+\int_{ib-\infty}^{ib+\infty}e^{ixw}\big[\Phi_-(w)K(w)-\Psi_-(w)\big]\,dw=0,$$

где

$$K(w)=(iw)^n+\sum_{\nu=0}^{n-1}a_\nu(iw)^\nu e^{ib_\nu w},$$

и интегралы принимаются в смысле среднеквадратичного. Следовательно, по теореме 141,

$$\Phi_+(w)K(w)-\Psi_+(w)=\chi(w),\qquad \Phi_-(w)K(w)-\Psi_-(w)=-\chi(w),$$

где $\chi(w)$ регулярна для $b\leqslant v\leqslant a$. Далее,

$$\Psi_+(w)=G_+(w)+\tilde\omega\Big(\frac{1}{w}\Big),\qquad \Psi_-(w)=G_-(w)-\tilde\omega\Big(\frac{1}{w}\Big),$$

где $\tilde\omega$ есть полином степени $n-1$.

[1] По поводу другого метода см. Schmidt (1).

Поэтому

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{ia-\infty}^{ia+\infty} e^{-ixw} \, \frac{G_+(w) + \chi(w) + \tilde{\omega}\Bigl(\dfrac{1}{w}\Bigr)}{K(w)} \, dw + \\ + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{ib-\infty}^{ib+\infty} e^{-ixw} \, \frac{G_-(w) - \chi(w) - \tilde{\omega}\Bigl(\dfrac{1}{w}\Bigr)}{K(w)} \, dw,$$

где a и b могут быть выбраны так, чтобы в полосе $b \leqslant w \leqslant a$ содержались все нули функции $K(w)$, для которых $-c \leqslant v \leqslant c$, и только эти нули. Члены, содержащие χ и $\tilde{\omega}$, можно вычислить по теореме о вычетах. Если $K(x)$ имеет в полосе $-c \leqslant v \leqslant c$ простые нули w_ν, то получаем

$$p(x) + \sum C_\nu e^{-ixw_\nu},$$

где $p(x)$ — полином, а C_ν — постоянные. Если w_ν — двукратный корень, то C_ν — линейная функция от x, и т.д. Поэтому

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{ia-\infty}^{ia+\infty} e^{-ixw} \, \frac{G_+(w)}{K(w)} \, dw + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{ib-\infty}^{ib+\infty} e^{-ixw} \, \frac{G_-(w)}{K(w)} \, dw + \\ + \sum C_\nu e^{-ixw_\nu} + q(x),$$

где $q(x)$ — полином.

Подставляя это в исходное уравнение, получим

$$q^{(n)}(x) + \sum_{\nu=0}^{n-1} a_\nu q^{(\nu)}(x + b_\nu) = 0.$$

Это уравнение показывает, что если $a_0 \neq 0$, то коэффициент при старшей степени x в $q(x)$ должен быть равен нулю, и следовательно, $q(x)$ должна тождественно обращаться в нуль. Аналогично, если $a_0 = 0$ и $a_1 \neq 0$, то $q(x)$ есть постоянная, и т.д.

Таким образом, *решением рассматриваемого уравнения является*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{ia-\infty}^{ia+\infty} e^{-ixw} \, \frac{G_+(w)}{K(w)} \, dw + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{ib-\infty}^{ib+\infty} e^{-ixw} \, \frac{G_-(w)}{K(w)} \, dw + \\ + \sum C_\nu e^{-ixw_\nu},$$

где C_ν есть полином степени $p-1$, если w_ν есть нуль p-го порядка функции $K(w)$.

Мы использовали в доказательстве L^2-теорию трансформаций Фурье, но легко обойтись и без неё, например, предварительно дважды проинтегрировав, так что все рассматриваемые интегралы станут абсолютно сходящимися.

10.18. Разностные уравнения. Чистое уравнение в конечных разностях может быть решено тем же способом. Рассмотрим, например, уравнение

$$f(x+1) - f(x) = g(x),$$

с обычными предположениями относительно f и g. Оно эквивалентно уравнению

$$\int_{ia-\infty}^{ia+\infty} \left[e^{-i(x+1)w} F_+(w) - e^{-ixw} F_+(w) - e^{-ixw} G_+(w)\right] dw + \\ + \int_{ib-\infty}^{ib+\infty} \left[e^{-i(x+1)w} F_-(w) - e^{-ixw} F_-(w) - e^{-ixw} G_-(w)\right] dw = 0.$$

Отсюда

$$F_+(w)(e^{-iw} - 1) - G_+(w) = \chi(w),$$
$$F_-(w)(e^{-iw} - 1) - G_-(w) = -\chi(w),$$

где $\chi(w)$ регулярна для $b < v < a$. Следовательно,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{ia-\infty}^{ia+\infty} e^{-ixw} \frac{\chi(w) + G_+(w)}{e^{-iw} - 1} dw - \\ - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{ib-\infty}^{ib+\infty} e^{-ixw} \frac{\chi(w) - G_-(w)}{e^{-iw} - 1} dw.$$

Члены, содержащие $\chi(w)$, представляют просто периодическую функцию с периодом 1, являющуюся очевидной составной частью решения. Таким образом, искомое решение есть

$$f(x) = f^*(x) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{ia-\infty}^{ia+\infty} e^{-ixw} \frac{G_+(w)}{e^{-iw} - 1} dw + \\ + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{ib-\infty}^{ib+\infty} e^{-ixw} \frac{G_-(w)}{e^{-iw} - 1} dw,$$

где $f^*(x)$ — произвольная функция с периодом 1.

Эти формулы имеют место в смысле L^2, если $g(x)e^{-c|x|}$ для некоторого $c > 0$ принадлежит к L^2. При более специальных предположениях мы можем придать им другие формы. Так, разлагая $\dfrac{1}{e^{-iw} - 1}$ в ряд по степеням e^{-iw}, получим формально

$$f(x) = f^*(x) - g(x) - g(x+1) - \ldots\ ,$$

что, очевидно, является решением, если ряд сходится.

XI
ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

11.1. Введение. Наиболее известной формой интегрального уравнения является

$$f(x) = g(x) + \lambda \int_a^b k(x, y) f(y)\, dy,$$

где $g(x)$ и $k(x, y)$ — заданные функции, а $f(x)$ — искомая.

Это уравнение в некоторых специальных случаях может быть решено с помощью интегралов Фурье; грубо говоря, это — случаи, когда $k(x, y)$ такова, что интеграл является «свёрткой» того или иного рода.

Мы будем обычно опускать множитель λ, не играющий никакой роли в большинстве наших результатов.

Возьмём сначала $k(x, y) = k(x - y)$ и пределы интегрирования $\pm\infty$, так что уравнение будет

$$f(x) = g(x) + \int_{-\infty}^{\infty} k(x - y) f(y)\, dy \qquad (-\infty < x < \infty). \tag{11.1.1}$$

Формальное решение может быть получено следующим образом. В наших стандартных обозначениях имеем

$$\begin{aligned} F(u) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixu} \left\{ g(x) + \int_{-\infty}^{\infty} k(x - y) f(y)\, dy \right\} dx = \\ &= G(u) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\, dy \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixu} k(x - y)\, dx = \\ &= G(u) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\, dy \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(y+t)u} k(t)\, dt = \\ &= G(u) + \sqrt{2\pi}\, F(u) K(u). \end{aligned} \tag{11.1.2}$$

Отсюда

$$F(u) = \frac{G(u)}{1 - \sqrt{2\pi}\, K(u)}, \tag{11.1.3}$$

и решение получается в виде

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixu} \frac{G(u)}{1 - \sqrt{2\pi}\, K(u)}\, du. \tag{11.1.4}$$

Равенство (11.1.4) даёт

$$f(x)-g(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ixu}\left\{\frac{G(u)}{1-\sqrt{2\pi}\,K(u)}-G(u)\right\}du=$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ixu}\,\frac{G(u)K(u)}{1-\sqrt{2\pi}\,K(u)}\,du.$$

Обозначая через $m(x)$ трансформацию Фурье функции

$$M(u)=\frac{K(u)}{1-\sqrt{2\pi}\,K(u)}\,,$$

получаем отсюда

$$f(x)=g(x)+\int_{-\infty}^{\infty}m(x-t)g(t)\,dt \tag{11.1.5}$$

— другое формальное решение.

Уравнение

$$f(x)=g(x)+\int_{0}^{\infty}f(y)k\left(\frac{x}{y}\right)\frac{dy}{y} \tag{11.1.6}$$

может быть приведено к виду (11.1.1), либо решено аналогичным способом с помощью интегралов Меллина. Формально имеем

$$\mathfrak{F}(s)=\mathfrak{G}(s)+\int_{0}^{\infty}x^{s-1}\,dx\int_{0}^{\infty}f(y)k\left(\frac{x}{y}\right)\frac{dy}{y}=$$
$$=\mathfrak{G}(s)+\int_{0}^{\infty}f(y)\,\frac{dy}{y}\int_{0}^{\infty}k\left(\frac{x}{y}\right)x^{s-1}\,dx=$$
$$=\mathfrak{G}(s)+\int_{0}^{\infty}f(y)\,y^{s-1}\,dy\int_{0}^{\infty}k(u)\,u^{s-1}\,du=$$
$$=\mathfrak{G}(s)+\mathfrak{F}(s)\mathfrak{K}(s),$$

и решение получается в виде

$$f(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{\mathfrak{G}(s)}{1-\mathfrak{K}(s)}\,x^{-s}\,ds. \tag{11.1.7}$$

Оно также может быть приведено к виду, соответствующему (11.1.5).

Простейшие условия, при которых, проведённые выкладки законны, даются следующей теоремой.

Т е о р е м а 145. *Пусть* $g(x)\in L^2(-\infty,\infty)$, $k(x)\in L(-\infty,\infty)$, *и пусть* $\sup K(u)<\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$. *Тогда* (11.1.4) *даёт решение уравнения, принадлежащее к классу* L^2, *и всякое другое решение из* L^2 *совпадает с ним почти для всех* x.

Доказательство. Очевидно, $\dfrac{G(u)}{1-\sqrt{2\pi}\,K(u)} \in L^2$, так что (11.1.4) существует в смысле L^2 и определяет функцию $f(x)$ из L^2. Как в § 3.13,

$$h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} k(x-y)f(y)\,dy$$

существует почти для всех x и принадлежит к L^2, и по теореме 65, обозначая через F, H, K трансформации Фурье соответственно функций f, h, k, имеем

$$H(u) = \sqrt{2\pi}\,F(u)K(u) = \frac{\sqrt{2\pi}\,G(u)K(u)}{1-\sqrt{2\pi}\,K(u)}\,.$$

Поэтому трансформация Фурье суммы $g(x)+h(x)$ есть

$$G(u) + \frac{\sqrt{2\pi}\,G(u)K(u)}{1-\sqrt{2\pi}\,K(u)} = \frac{G(u)}{1-\sqrt{2\pi}\,K(u)} = F(u),$$

и следовательно,

$$g(x)+h(x) = f(x)$$

почти для всех x, т. е. уравнение действительно удовлетворяется функцией (11.1.4).

Обратно, если функции f и g принадлежат к L^2, функция k принадлежит к L и имеет место равенство (11.1.1), то по теореме 65 имеет место (11.1.2), а следовательно, и (11.1.4). Это завершает доказательство теоремы.

Если также k принадлежит к L^2, то это же верно и для K и M, и формула (11.1.5) эквивалентна (11.1.4).

11.2. Однородное уравнение. Мы показали, что в рамках класса L^2 решение единственно. Но при некоторых специальных условиях могут существовать также другие решения, не принадлежащие к L^2. Если существуют два решения уравнения (11.1.1), то их разность должна удовлетворять однородному уравнению

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} k(x-y)f(y)\,dy \qquad (-\infty < x < \infty). \tag{11.2.1}$$

Это уравнение формально удовлетворяется функцией $f(x) = e^{ax}$, где a таково, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-at}k(t)\,dt = 1. \tag{11.2.2}$$

Мы покажем теперь, что при весьма простых предположениях функции этого вида являются единственными решениями однородного уравнения (11.2.1).

Теорема 146. *Пусть* $0 < c < c'$, *функция* $e^{c'|x|}k(x)$ *принадлежит к* L, *а функция* $e^{-c|x|}f(x)$ — *к* $L^2(-\infty, \infty)$. *Тогда, если* $f(x)$ *удовлетворяет уравнению* (11.2.1), *то она имеет вид*

$$f(x) = \sum_{\nu} \sum_{p=1}^{q} C_{\nu,p} x^{p-1} e^{-iw_\nu x}, \tag{11.2.3}$$

где w_ν *пробегает все нули функции* $1 - \sqrt{2\pi}\, K(w)$, *удовлетворяющие неравенству* $|\operatorname{Im} w_\nu| \leqslant c$, $C_{\nu,p}$ — *постоянные коэффициенты и* q — *кратность нуля* w_ν.

Доказательство. То, что функция (11.2.3) является решением уравнения (11.2.1), проверяется непосредственно. Заметим теперь, что в наших обычных обозначениях $K(w)$ аналитична для $-c' < v < c'$, $F_+(w)$ — для $v > c$ и $F_-(w)$ — для $v < -c$. Для $c < a < c'$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{ia-\infty}^{ia+\infty} e^{-ixw} F_+(w)\, dw = \begin{cases} f(x) & (x > 0), \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$$

в смысле среднеквадратичного, а по теореме 65

$$\int_0^\infty k(x-y) f(y)\, dy = \int_{ia-\infty}^{ia+\infty} e^{-ixw} F_+(w) K(w)\, dw$$

в том же смысле. Аналогичное верно для $F_-(w)$ с заменой a на b, где $-c' < b < -c$. Следовательно, (11.2.1) даёт

$$\int_{ia-\infty}^{ia+\infty} e^{-ixw} F_+(w) \bigl[1 - \sqrt{2\pi}\, K(w)\bigr]\, dw + \\ + \int_{ib-\infty}^{ib+\infty} e^{-ixw} F_-(w) \bigl[1 - \sqrt{2\pi}\, K(w)\bigr]\, dw = 0$$

в смысле среднеквадратичного.

Поэтому из теоремы 141 следует, что функции $F_+(w)\bigl[1 - \sqrt{2\pi}\, K(w)\bigr]$ и $F_-(w)\bigl[1 - \sqrt{2\pi}\, K(w)\bigr]$ могут быть обе продолжены на всю полосу $b < v < a$, причём в этой полосе $F_+(w) = -F_-(w)$. Поэтому $F_+(w)$ и $F_-(w)$ регулярны во всех точках указанной полосы, за исключением, возможно, полюсов и нулей функции $1 - \sqrt{2\pi}\, K(w)$.

Мы можем теперь записать

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{ia-\infty}^{ia+\infty} e^{-ixw} F_+(w)\, dw - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{ib-\infty}^{ib+\infty} e^{-ixw} F_+(w)\, dw,$$

и так как $F_+(w) \to 0$ при $u \to \pm\infty$, то правая часть может быть вычислена обычным методом теории вычетов, что и завершает доказательство теоремы.

В частности, утверждаемый результат верен, если $k(x) = O(e^{-c'|x|})$ и $f(x) = O(e^{c|x|})$, где $0 < c < c'$. В этом случае он может быть получен без ссылки на L^2-теорию. Действительно, при $c<a<\eta$, в силу мажорированной сходимости,

$$\lim_{T\to\infty}\int_{ia-T}^{ia+T}\frac{F_+(w)}{w-\zeta}\,dw=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{ia-T}^{ia+T}\frac{dw}{w-\zeta}\int_0^\infty e^{ixw}f(x)\,dx=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty f(x)\,dx\lim_{T\to\infty}\int_{ia-T}^{ia+T}\frac{e^{ixw}}{w-\zeta}\,dw=\sqrt{2\pi}\,i\int_0^\infty e^{ix\zeta}f(x)\,dx,$$

и аналогично

$$\lim_{T\to\infty}\int_{ia-T}^{ia+T}\frac{F_+(w)K(w)}{w-\zeta}\,dw=$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty f(x)\,dx\int_{-\infty}^\infty k(y)\,dy\lim_{T\to\infty}\int_{ia-T}^{ia+T}\frac{e^{iw(x+y)}}{w-\zeta}\,dw=$$
$$=i\int_0^\infty f(x)\,dx\int_{-x}^\infty e^{i\zeta(x+y)}k(y)\,dy=i\int_0^\infty e^{i\zeta t}\,dt\int_0^\infty k(t-x)f(x)\,dx.$$

Поэтому

$$\int_{ia-\infty}^{ia+\infty}\frac{F_+(w)\bigl[1-\sqrt{2\pi}\,K(w)\bigr]}{w-\zeta}\,dw=$$
$$=\sqrt{2\pi}\,i\int_0^\infty e^{i\zeta t}\,dt\left\{f(t)-\int_0^\infty k(t-x)f(x)\,dx\right\}.$$

Аналогично

$$\int_{ib-\infty}^{ib+\infty}\frac{F_-(w)\bigl[1-\sqrt{2\pi}\,K(w)\bigr]}{w-\zeta}\,dw=-\sqrt{2\pi}\,i\int_0^\infty e^{i\zeta t}\,dt\int_{-\infty}^0 k(t-x)f(x)\,dx.$$

Следовательно, сумма левых частей равна нулю, теорема 141 снова применима и утверждение теоремы 146 получается прежним путём[1].

11.3. Примеры.

(I) Пусть

$$g(x)=e^{-|x|},\qquad k(x)=\begin{cases}\lambda e^x & (x<0),\\ 0 & (x>0).\end{cases}$$

Тогда

$$G(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty e^{ixu-|x|}\,dx=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{1}{1+u^2}\,,$$
$$K(u)=\frac{\lambda}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^0 e^{ixu+x}\,dx=\frac{\lambda}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{1}{1+iu}\,.$$

[1] Решение при других условиях дал Бохнер [Bochner (2)].

Поэтому решение из класса L^2 есть

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ixu}}{(1-iu)(1-\lambda+iu)}\,du.$$

Предположим, например, что $0<\lambda<1$. Тогда

$$f(x) = \frac{2}{2-\lambda}\cdot\begin{cases}\lambda e^{-x} & (x \geqslant 0),\\ e^{(1-\lambda)x} & (x<0).\end{cases}$$

Очевидно, эта функция действительно является решением, а значит, и единственным решением из класса L^2. Аналогичные решения существуют для других значений λ.

Рассматриваемое уравнение

$$f(x) = e^{-|x|} + \lambda e^{x}\int_{x}^{\infty} e^{-y} f(y)\,dy \tag{11.3.1}$$

приводится к дифференциальным уравнениям. Пусть

$$\varphi(x) = \int_{x}^{\infty} e^{-y} f(y)\,dy, \quad \varphi'(x) = -e^{-x}f(x).$$

Тогда для $x>0$

$$-\varphi'(x) = e^{-2x} + \lambda\varphi(x),$$

так что

$$\varphi(x) = \frac{e^{-2x}}{2-\lambda} + Ce^{-\lambda x}.$$

Для $x<0$

$$-\varphi'(x) = 1 + \lambda\varphi(x),$$

так что

$$\varphi(x) = -\frac{1}{\lambda} + C'e^{-\lambda x}.$$

Так как $\varphi(x)$ в точке $x=0$ непрерывна, то $C' = C + \dfrac{1}{2-\lambda} + \dfrac{1}{\lambda}$. Поэтому

$$f(x) = \begin{cases}\dfrac{2}{2-\lambda}\,e^{-x} + C\lambda e^{(1-\lambda)x} & (x>0),\\ \left(\dfrac{2}{2-\lambda} + C\lambda\right)e^{(1-\lambda)x} & (x<0).\end{cases}$$

Таким образом, полное решение содержит член с произвольной постоянной; и действительно, функция

$$f(x) = e^{(1-\lambda)x}$$

является решением однородного уравнения

$$f(x) = \lambda\int_{x}^{\infty} e^{x-y} f(y)\,dy, \tag{11.3.2}$$

соответствующим нулю $w = i(1-\lambda)$ функции
$$1-\sqrt{2\pi}\,K(w) = 1-\frac{\lambda}{1+iw}\,.$$

(II) Пусть[1] $k(x) = \lambda e^{-|x|}$ $(\lambda < \frac{1}{2})$. Тогда
$$K(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\lambda}{1+u^2}\,, \quad M(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\lambda}{1+u^2-2\lambda}\,, \quad m(x) = \frac{\lambda e^{-|x|\sqrt{1-2\lambda}}}{\sqrt{1-2\lambda}}\,,$$
и если $g(x)$ принадлежит к L^2, то решением из класса L^2 служит
$$f(x) = g(x) + \frac{\lambda}{\sqrt{1-2\lambda}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t-x|\sqrt{1-2\lambda}}\,g(t)\,dt.$$
С другой стороны,
$$1-\sqrt{2\pi}\,K(w) = \frac{1+w^2-2\lambda}{1+w^2}\,,$$
так что
$$Ae^{x\sqrt{1-2\lambda}} + Be^{-x\sqrt{1-2\lambda}}$$
является решением однородного уравнения, если $\lambda > 0$.

(III) Рассмотреть однородное уравнение, в котором $k(x) = e^{-x^2/2}$.

(IV) Пусть $\lambda = \dfrac{1}{\pi}$, $k(x) = \dfrac{1}{\pi}\,\dfrac{1}{1+x^2}$, $g(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$. Тогда
$$K(u) = \frac{e^{-|u|}}{\sqrt{2\pi}}\,, \quad G(u) = \pi i e^{-|u|}\operatorname{sgn} u,$$
и решение есть
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixu}\frac{\pi i e^{-|u|}\operatorname{sgn} u}{1-e^{-|u|}}\,du = \\ = \sqrt{2\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sin xu}{e^u-1}\,du = \sqrt{2\pi}\left(\frac{\pi}{2}\,\operatorname{cth}\pi x - \frac{1}{2x}\right).$$
Это решение как раз не подходит под поставленные выше условия, и действительно $f(x)$ не принадлежит к L^2.

(V) Пусть $k(x) = \dfrac{\lambda}{1+x}$ в (11.1.6)[2]. Тогда $\mathfrak{K}(s) = \dfrac{\pi\lambda}{\sin\pi s}$, и решение есть
$$f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{\mathfrak{G}(s)}{1-\dfrac{\pi\lambda}{\sin\pi s}}\,x^{-s}\,ds,$$
или
$$f(x) = g(x) + \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{\pi\lambda}{\sin\pi s-\pi\lambda}\,\mathfrak{G}(s)x^{-s}\,ds.$$

---
[1] Picard (1).
[2] A.C. Dixon (1).

Если $\pi\lambda = \sin\pi\alpha$, где $0 < \alpha < \frac{1}{2}$, то имеем

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\sin\pi\alpha}{\sin\pi s - \sin\pi\alpha}\, u^{-s}\, ds = \frac{\operatorname{tg}\pi\alpha}{\pi}\, \frac{u^{-\alpha} - u^{1+\alpha}}{1-u^2}\,,$$

и, в силу формулы Парсеваля, решение может быть записано в виде

$$f(x) = g(x) + x\,\frac{\operatorname{tg}\pi\alpha}{\pi}\int_0^\infty g(y)\frac{\left(\dfrac{y}{x}\right)^{1+\alpha} - \left(\dfrac{x}{y}\right)^{\alpha}}{y^2 - x^2}\, dy.$$

(VI) Однородное уравнение

$$f(x) = \lambda\int_0^\infty \frac{f(y)}{x+y}\, dy \tag{11.3.3}$$

приводится с помощью подстановки

$$x = e^\xi, \quad y = e^\eta, \quad e^{\xi/2} f(e^\xi) = \varphi(\xi)$$

к уравнению

$$\varphi(\xi) = \lambda\int_{-\infty}^\infty \frac{\varphi(\eta)}{2\operatorname{ch}\dfrac{\xi-\eta}{2}}\, d\eta.$$

Единственными решениями этого уравнения, удовлетворяющими условию $\varphi(\xi) = O(e^{c|\xi|})$, $0 < c < \dfrac{1}{2}$, являются показательные функции. Имеем

$$k(\xi) = \frac{\lambda}{2\operatorname{ch}\dfrac{\xi}{2}}\,, \qquad K(w) = \frac{\lambda\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}\,\operatorname{ch}\pi w}\,,$$

и

$$1 - \sqrt{2\pi}\, K(w) = 1 - \frac{\pi\lambda}{\operatorname{ch}\pi w}\,.$$

Эта функция имеет бесконечное множество нулей, часть которых может лежать в полосе $-\dfrac{1}{2} < v < \dfrac{1}{2}$ и давать решения. Например, если $\lambda = \dfrac{1}{\pi}$, то в точке $w = 0$ имеем двукратный нуль, и

$$\varphi(\xi) = A + B\xi$$

есть решение, т. е.

$$f(x) = \frac{A + B\ln x}{\sqrt{x}}$$

есть решение уравнения (11.3.3).

Харди и Титчмарш[1] показали, что уравнение (11.3.3) не имеет вообще никаких других решений какого бы то ни было типа.

[1] Hardy and Titchmarsh (3).

(VII) Однородное уравнение

$$x^\alpha f(x) = \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-y)^{\alpha-1} f(y)\,dy \qquad (0<\alpha<1) \tag{11.3.4}$$

приводится с помощью подстановки

$$x = e^\xi, \quad y = e^\eta, \quad e^{\alpha\xi} f(e^\xi) = \varphi(\xi)$$

к уравнению

$$\varphi(\xi) = \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^{\xi} (e^{\xi-\eta}-1)^{\alpha-1}\varphi(\eta)\,d\eta.$$

Здесь

$$k(\xi) = \begin{cases} \dfrac{\lambda}{\Gamma(\alpha)}\,(e^\xi-1)^{\alpha-1} & (\xi \geqslant 0), \\ 0 & (\xi < 0), \end{cases}$$

и

$$K(w) = \frac{\lambda}{\sqrt{2\pi}} \frac{\Gamma(1-iw-\alpha)}{\Gamma(1-iw)} \qquad \bigl(v > -(1-\alpha)\bigr).$$

11.4. Некоторые другие виды интегральных уравнений. К только что рассмотренному типу уравнений могут быть приведены уравнения различных других видов.

Например, рассмотрим уравнение[1]

$$f(x) = g(x) + \int_0^x \frac{1}{y}\,k\left(\frac{y}{x}\right) f(y)\,dy. \tag{11.4.1}$$

Полагая $x = e^{-\xi}$, $y = e^{-\eta}$ и вводя обозначения

$$f(e^{-\xi}) = \varphi(\xi), \quad g(e^{-\xi}) = \psi(\xi), \quad k(e^\xi) = \varkappa(\xi),$$

получаем

$$\varphi(\xi) = \psi(\xi) + \int_\xi^\infty \varkappa(\xi-\eta)\varphi(\eta)\,d\eta. \tag{11.4.2}$$

Мы пришли к уравнению стандартного типа с $\varkappa(\xi) = 0$ при $\xi > 0$.

Другой родственный класс образуют уравнения вида

$$g(x) = \int_0^x k\left(\frac{y}{x}\right) f(y)\,dy. \tag{11.4.3}$$

Если $f_1(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$ и k есть интеграл, то

$$\int_0^x k\left(\frac{y}{x}\right) f(y)\,dy = k(1) f_1(x) - \frac{1}{x}\int_0^x k'\left(\frac{y}{x}\right) f_1(y)\,dy,$$

[1] Browne (1).

и при $k(1) \neq 0$ уравнение может быть записано в виде

$$f_1(x) = \frac{g(x)}{k(1)} + \int_0^x \frac{1}{y} \frac{1}{k(1)} \frac{y}{x} k'\left(\frac{y}{x}\right) f_1(y)\, dy$$

и тем самым приведено к форме (11.4.1).

11.5. Уравнение с конечными пределами интегрирования. Другое интересное уравнение получается, если в (11.1.1) функции $f(x)$, $g(x)$ и $k(x)$ равны нулю для отрицательных значений x. Мы приходим к уравнению

$$f(x) = g(x) + \int_0^x k(x-y) f(y)\, dy \qquad (x > 0), \tag{11.5.1}$$

рассмотренному Дёчем[1] и Фоком[2]. Разумеется, теорема 145 здесь ещё применима, но теперь существует более общее решение того же типа.

Т е о р е м а 147. *Пусть для некоторого положительного c функция $e^{-cx} g(x)$ принадлежит к $L^2(0,\infty)$, а функция $e^{-cx} k(x)$ — к $L(0,\infty)$. Тогда существует точно одно решение $f(x)$ уравнения* (11.5.1) *такое, что $e^{-c'x} f(x)$ принадлежит к $L^2(0,\infty)$ для некоторого положительного c'; оно даётся формулой*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \operatorname*{l.i.m.}_{\lambda\to\infty} \int_{ia-\lambda}^{ia+\lambda} e^{-ixw} \frac{G(w)}{1 - \sqrt{2\pi}\, K(w)}\, dw \tag{11.5.2}$$

при достаточно большом a.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Уравнение (11.5.1) не изменится, если мы заменим $f(x)$, $g(x)$ и $k(x)$ соответственно на $e^{-ax} f(x)$, $e^{-ax} g(x)$ и $e^{-ax} k(x)$. Поэтому мы можем вести рассуждения применительно к этим последним функциям, или, что сводится к тому же, мы можем применить рассуждения § 11.1 к $K(u + ia)$ и т.д. вместо $K(u)$. Но для достаточно большого a

$$|K(u+ia)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-ax} |k(x)|\, dx < \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,,$$

и дальнейший ход решения — тот же, что и раньше.

Решение (11.5.2) может быть также записано в виде

$$f(x) = g(x) + \operatorname*{l.i.m.}_{\lambda\to\infty} \int_{ia-\lambda}^{ia+\lambda} e^{-ixw}\, G(w) \frac{K(w)}{1 - \sqrt{2\pi}\, K(w)}\, dw. \tag{11.5.3}$$

Предположим, что $e^{-cx} k(x)$ принадлежит также к L^2. Тогда $K(w)$, а потому и

[1] Doetsch (1), (2).
[2] Fock (1).

$$M(w) = \frac{K(w)}{1 - \sqrt{2\pi}\, K(w)} \tag{11.5.4}$$

и

$$m(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \operatorname*{l.i.m.}_{\lambda\to\infty} \int_{ia-\lambda}^{ia+\lambda} e^{-ixw}\, M(w)\, dw$$

принадлежат к L^2.

Переходя к пределу при $a \to \infty$, мы получаем, что $m(x) = 0$ при $x < 0$. Поэтому решение может быть представлено в виде

$$f(x) = g(x) + \int_0^x m(x-y)g(y)\, dy. \tag{11.5.5}$$

Соотношение (11.5.4) эквивалентно соотношению

$$m(x) = k(x) + \int_0^x m(x-t)k(t)\, dt; \tag{11.5.6}$$

и действительно, прямая подстановка (11.5.5) в (11.5.1) показывает, что функция (11.5.5) является решением уравнения (11.5.1), если имеет место соотношение (11.5.6) и обращение порядка интегрирования законно.

Равенство (11.5.4) даёт также

$$M(w) = \sum_{n=1}^{\infty} (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} \big[K(w)\big]^n,$$

что эквивалентно равенству

$$m(x) = \sum_{n=1}^{\infty} k^{(n)}(x),$$

где

$$k^{(1)}(x) = k(x), \qquad k^{(n)}(x) = \int_0^x k(t)k^{(n-1)}(x-t)\, dt.$$

Это — хорошо известная форма решения уравнения (11.5.1), принадлежащая Вольтерра[1].

Винер доказал[2], что если $k(x) \in L(0,\infty)$, то для того, чтобы уравнение (11.5.6) имело решение $h(x)$, принадлежащее к $L(0,\infty)$, необходимо и достаточно, чтобы $1 - \sqrt{2\pi}\, K(u) \neq 0$ для всех вещественных u. Этот результат связан с тауберовской теорией Винера, которая здесь не рассматривается.

П р и м е р ы.

(I) Пусть

$$k(x) = \begin{cases} \lambda e^x & (x > 0), \\ 0 & (x < 0). \end{cases}$$

[1] См. Г у р с а, Курс математического анализа, т. 3, §§ 548–549.

[2] В и н е р и П э л и, Преобразование Фурье, § 18.

Тогда

$$\sqrt{2\pi}\,K(w) = -\frac{\lambda}{1+iw}\,, \quad M(w) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{\lambda}{1+\lambda+iw}\,, \quad m(x) = \lambda e^{(1+\lambda)x}.$$

Поэтому решением уравнения

$$f(x) = g(x) + \lambda\int_0^x e^{x-y} f(y)\,dy$$

служит

$$f(x) = g(x) + \lambda\int_0^x e^{(1+\lambda)(x-y)} g(y)\,dy.$$

Если $\varphi(x) = \int_0^x e^{-y} f(y)\,dy$, то рассматриваемое уравнение приводится к дифференциальному уравнению

$$\varphi'(x) - \lambda\varphi(x) = e^{-x} g(x).$$

Это даёт для $f(x)$ указанное выше решение с добавочным членом $Ae^{(1+\lambda)x}$; но $A = 0$, так как все остальные члены обращаются в нуль при $x < 0$.

(II) Пусть[1] $k(x)$— конечная сумма показательных функций:

$$k(x) = Pe^{px} + Qe^{qx} + \ldots \qquad (x > 0).$$

Тогда

$$K(w) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{P}{p+iw} + \frac{Q}{q+iw} + \ldots\right).$$

Поэтому $M(w)$ есть рациональная функция и может быть записана в виде

$$M(w) = \frac{(p+iw)(q+iw)\ldots}{(\alpha+iw)(\beta+iw)\ldots}\,K(w),$$

где $i\alpha$, $i\beta$, … — нули функции $1-\sqrt{2\pi}\,K(w)$. Теория вычетов даёт тогда

$$m(x) = -\sum \frac{(p-\alpha)(q-\alpha)\ldots}{(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)\ldots}\,e^{\alpha x},$$

так как $\sqrt{2\pi}\,K(i\alpha) = 1$.

Аналогичное выражение для решения может быть получено и в том случае, когда $k(x)$ есть полином.

(III) Пусть[2] $g(x) = k(x) = \lambda J_0(x)$. Тогда

$$G(w) = K(w) = \frac{\lambda}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty e^{ixw} J_0(x)\,dx = \frac{\lambda}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{1}{\sqrt{1-w^2}}\,,$$

[1] E.T. Whittaker (1).

[2] Fock (1).

и решение есть

$$f(x) = \frac{\lambda}{2\pi}\int_{ia-\infty}^{ia+\infty}\frac{e^{-ixw}}{\sqrt{1-w^2}-\lambda}\,dw = \frac{\lambda}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{e^{xs}}{\sqrt{1+s^2}-\lambda}\,ds \quad (a>0),$$
$$= \frac{\lambda}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{xs}\,\frac{\sqrt{1+s^2}-s}{1-\lambda^2+s^2}\,ds + \frac{\lambda}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{xs}\,\frac{s}{1-\lambda^2+s^2}\,ds +$$
$$+\frac{\lambda^2}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{e^{xs}}{1-\lambda^2+s^2}\,ds = \frac{\lambda}{\sqrt{1-\lambda^2}}\int_0^x \sin\bigl\{\sqrt{1-\lambda^2}(x-y)\bigr\}\frac{J_1(y)}{y}\,dy +$$
$$+\lambda\cos\bigl(x\sqrt{1-\lambda^2}\bigr) + \frac{\lambda^2}{\sqrt{1-\lambda^2}}\sin\bigl(x\sqrt{1-\lambda^2}\bigr),$$

в силу (7.13.2), (7.13.3) и (7.13.8).

11.6. Другой тип интегральных уравнений. Другим интегральным уравнением, которое может быть формально решено с помощью интегралов Фурье, является

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} k(x-y)f(y)\,dy. \tag{11.6.1}$$

Имеем формально

$$\begin{aligned} G(u) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ixu}\,dx\int_{-\infty}^{\infty} k(x-y)f(y)\,dy = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\,dy\int_{-\infty}^{\infty} e^{ixu}k(x-y)\,dx = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\,dy\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(y+t)u}k(t)\,dt = \\ &= \sqrt{2\pi}\,F(u)K(u), \end{aligned} \tag{11.6.2}$$

и, следовательно, решение есть

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixu}\,\frac{G(u)}{K(u)}\,du. \tag{11.6.3}$$

Для того, чтобы это действительно было решением, функция $K(u)$ должна удовлетворять специальным условиям.

Теорема 148. *Пусть $g(x)\in L^2(-\infty,\infty)$, $k(x)\in L(-\infty,\infty)$. Тогда, для того чтобы существовало решение $f(x)$ уравнения* (11.6.1), *принадлежащее к $L^2(-\infty,\infty)$, необходимо и достаточно, чтобы отношение $\dfrac{G(u)}{K(u)}$ принадлежало к $L^2(-\infty,\infty)$.*

Доказательство. Предположим, что g, k и f принадлежат к указанным L-классам и уравнение (11.6.1) удовлетворено. Тогда, по теореме 65, имеет место равенство (11.6.2), и так как F принадлежит к

L^2, то, значит, отношение $\dfrac{G}{K}$ принадлежит к L^2.

Обратно, если $\dfrac{G}{K}$ принадлежит к L^2, то функция f, определённая формулой (11.6.3), также принадлежит к L^2, и по теореме 65 трансформация Фурье правой части формулы (11.6.1) равна

$$\sqrt{2\pi}\, K(u)\, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, \frac{G(u)}{K(u)} = G(u).$$

Следовательно, равенство (11.6.1) действительно выполняется. Аналогичным уравнением, решаемым с помощью трансформаций Меллина, является

$$g(x) = \int_0^\infty k(xy) f(y)\, dy. \tag{11.6.4}$$

Формально имеем

$$\begin{aligned}\mathfrak{G}(s) = \int_0^\infty x^{s-1}\, dx \int_0^\infty k(xy) f(y)\, dy = \int_0^\infty f(y)\, dy \int_0^\infty k(xy) x^{s-1}\, dx = \\ = \int_0^\infty f(y) y^{-s}\, dy \int_0^\infty k(u) u^{s-1}\, du = \mathfrak{F}(1-s)\mathfrak{K}(s),\end{aligned}$$

откуда

$$\mathfrak{F}(s) = \frac{\mathfrak{G}(1-s)}{\mathfrak{K}(1-s)}\,,$$

и решение есть

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\mathfrak{G}(1-s)}{\mathfrak{K}(1-s)}\, x^{-s}\, ds. \tag{11.6.5}$$

11.7. Интегральное уравнение Лапласа. Так называют уравнение

$$g(x) = \int_0^\infty e^{-xy} f(y)\, dy. \tag{11.7.1}$$

Формальное его решение

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{1}{2}-i\infty}^{\frac{1}{2}+i\infty} \frac{\mathfrak{G}(1-s)}{\Gamma(1-s)}\, x^{-s}\, ds \tag{11.7.2}$$

доставляется формулой (11.6.5). Но рассматриваемое уравнение может быть также решено непосредственно с помощью интегральной формулы Фурье. Действительно, из (11.7.1) имеем

$$g(ix) = \int_0^\infty e^{-ixy} f(y)\, dy,$$

и потому

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{ixy} g(iy)\,dy & (x > 0), \\ 0 & (x < 0). \end{cases} \tag{11.7.3}$$

Если $g(x)$ задана первоначально для вещественных x, то решение (11.7.3) предполагает обращение к аналитическому продолжению. Решение в форме (11.7.2), с обычным определением трансформации $\mathfrak{G}$, явно опирается только на значения $g(x)$ для вещественных x; но оно содержит множитель $\dfrac{1}{\Gamma(1-s)}$, имеющий экспоненциальный порядок на бесконечности. Поэтому представляется трудным обосновать это решение, не прибегая к аналитическому продолжению функции $g(x)$. В действительности уравнение (11.7.1) может удовлетворяться лишь если $g(x)$ имеет значения, принимаемые на вещественной оси некоторой аналитической функцией $g(z)$, регулярной для $x > 0$, так что в той или иной мере ссылка на аналитический характер функции $g(x)$ представляется почти неизбежной.

Мы докажем, что *для того, чтобы равенство* (11.7.2) *существовало в смысле сходимости в среднеквадратичном и определяло решение уравнения* (11.7.1), *принадлежащее к* $L^2(0,\infty)$, *необходимо и достаточно, чтобы* $g(x)$ *имела значения, принимаемые на вещественной оси аналитической функцией* $g(z)$, *регулярной для* $|\arg z| < \frac{\pi}{2}$ *и такой, что*

$$\int_0^{\infty} |g(re^{i\theta})|^2\,dr < K \tag{11.7.4}$$

для $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$.

Предположим сначала, что $f(x)$ удовлетворяет уравнению и принадлежит к $L^2(0,\infty)$. Ясно, что тогда $g(z)$ регулярна для $\operatorname{Re} z > 0$, т. е. для $|\arg z| < \frac{\pi}{2}$. Но, по теореме 99, мы можем представить $f(u)$ в виде

$$f(u) = f_{(+)}(u) + f_{(-)}(u)$$

где $f_{(+)}(w)$ регулярна для $\arg w > 0$, а $f_{(-)}(w)$ — для $\arg w < 0$. Тогда, если $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$,

$$g(re^{i\theta}) = \int_0^{\infty} e^{-re^{i\theta}u} f_{(+)}(u)\,du + \int_0^{\infty} e^{-re^{i\theta}u} f_{(-)}(u)\,du.$$

В первом интеграле мы можем повернуть путь интегрирования на угол $\frac{\pi}{2} - \theta$, а во втором — на угол $-\frac{\pi}{2} - \theta$. Мы получим

$$g(re^{i\theta}) = e^{i\left(\frac{1}{2}\pi - \theta\right)} \int_0^{\infty} e^{-ir\rho} f_{(+)}\bigl(\rho e^{i\left(\frac{1}{2}\pi - \theta\right)}\bigr)\,d\rho + \\ + e^{-i\left(\frac{1}{2}\pi + \theta\right)} \int_0^{\infty} e^{ir\rho} f_{(-)}\bigl(\rho e^{-i\left(\frac{1}{2}\pi + \theta\right)}\bigr)\,d\rho,$$

откуда и следует (11.7.4), так как $f_{(+)}(u)$ и $f_{(-)}(u)$ принадлежат к L^2 на каждой прямой $\arg w = \mathrm{const}$.

Обратно, предположим, что $g(z)$ удовлетворяет указанным условиям. Имеем

$$\mathfrak{G}(1-s) = \int_0^\infty g(x)x^{-s}\,dx.$$

Если $t > 0$, то поворачиваем путь интегрирования на $-\frac{\pi}{2}$, что даёт

$$\mathfrak{G}(1-s) = -i\int_0^\infty g(-iy)\big(ye^{-\frac{\pi i}{2}}\big)^{-s}\,dy = -ie^{\frac{\pi i\sigma}{2}}e^{-\frac{\pi t}{2}}\int_0^\infty g(-iy)y^{-\sigma-it}\,dy.$$

Для $\sigma=\frac{1}{2}$ это есть произведение $e^{-\pi t/2}$ на функцию из $L^2(0,\infty)$. При $t<0$ аналогичный приём с поворотом на $\frac{\pi}{2}$ показывает, что $\mathfrak{G}(1-s)$ есть произведение $e^{-\pi|t|/2}$ на функцию из $L^2(-\infty,\infty)$. Так как, кроме того,

$$\left|\frac{1}{\Gamma(1-s)}\right| = O\big(e^{\frac{\pi|t|}{2}}\big),$$

то интеграл в (11.7.2) существует в смысле сходимости в среднеквадратичном. Тот факт, что определяемая им функция $f(x)$ удовлетворяет уравнению (11.7.1), следует из теоремы 72.

Решение в других формах дали Виддер[1] и Пэли и Винер[2].

11.8. Интегральное уравнение Стилтьеса. Итерируя предыдущее уравнение, т. е. полагая

$$g(x) = \int_0^\infty e^{-xy}f(y)\,dy, \qquad h(x) = \int_0^\infty e^{-xy}g(y)\,dy,$$

мы получим формально

$$\begin{aligned} h(x) &= \int_0^\infty e^{-xy}\,dy\int_0^\infty e^{-yu}f(u)\,du = \\ &= \int_0^\infty f(u)\,du\int_0^\infty e^{-(x+u)y}\,dy = \int_0^\infty \frac{f(u)}{x+u}\,du \end{aligned} \tag{11.8.1}$$

— новое интегральное уравнение аналогичного типа. Это уравнение рассматривалось в связи со стилтьесовской проблемой моментов[3].

Подстановки

$$x = e^\xi, \quad y = e^\eta, \quad e^{\xi/2}h(e^\xi) = \psi(\xi), \quad e^{\xi/2}f(e^\xi) = \varphi(\xi)$$

приводят уравнение (11.8.1) к виду

[1] Widder (1).
[2] В и н е р и П э л и, Преобразование Фурье, § 13.
[3] См. Hardy (7); В и н е р и П э л и, Преобразование Фурье, § 14.

$$\psi(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\eta)}{2\operatorname{ch}\dfrac{\xi-\eta}{2}}\, d\eta. \tag{11.8.2}$$

Это — уравнение типа (11.6.1) с

$$k(\xi) = \frac{1}{2\operatorname{ch}\dfrac{\xi}{2}}, \qquad K(u) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{1}{\operatorname{ch}\pi u},$$

и формальное его решение есть

$$\varphi(\xi) = \frac{1}{\pi\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi u}\Psi(u)\operatorname{ch}\pi u\, du =$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{-i(\xi+\pi i)u} + e^{-i(\xi-\pi i)u}\right)\Psi(u)\, du = \frac{\psi(\xi+\pi i) + \psi(\xi-\pi i)}{2\pi}, \tag{11.8.3}$$

или

$$f(x) = \frac{i}{2\pi}\left[h\left(xe^{\pi i}\right) - h\left(xe^{-\pi i}\right)\right]. \tag{11.8.4}$$

И здесь, очевидно, предполагается обращение к аналитическому продолжению.

Мы покажем, что *для того, чтобы формула* (11.8.3) *определяла решение уравнения* (11.8.2), *принадлежащее к* $L^2(-\infty, \infty)$, *необходимо и достаточно, чтобы* $\psi(z)$ *была аналитической функцией, регулярной в полосе* $-\pi < y < \pi$, *и чтобы*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x+iy)|^2\, dy < K$$

для $-\pi < y < \pi$.

Как в § 5.4, из этих условий следует существование предельных функций $\psi(x+\pi i)$ и $\psi(x-\pi i)$, принадлежащих к $L^2(-\infty, \infty)$.

Если $\varphi \in L^2$ и ψ определена формулой (11.8.2), то $\psi(z)$, очевидно, аналитична для $-\pi < y < \pi$, и по теореме 64

$$\psi(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-izu}\frac{\Phi(u)}{\operatorname{ch}\pi u}\, du,$$

где Φ есть трансформация Фурье функции φ. Поэтому

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x+iy)|^2\, dy = \pi^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{2yu}\,\frac{\Phi^2(u)}{\operatorname{ch}^2\pi u}\, du \leqslant \pi^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi|u|}\,\frac{\Phi^2(u)}{\operatorname{ch}^2\pi u}\, du.$$

Таким образом, условие необходимо.

Обратно, если ψ имеет указанный вид, то

$$e^{\pm\pi u}\Psi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi u}\psi(\xi \pm \pi i)\, du$$

принадлежат соответственно к $L^2(0,\infty)$ и $L^2(-\infty,0)$. Поэтому функция $\Phi(u)\operatorname{ch}\pi u$ принадлежит к $L^2(-\infty,\infty)$, и формула (11.8.3) определяет функцию φ из L^2. То, что она является решением уравнения (11.8.2), следует из теоремы 64.

В терминах исходных функций необходимое и достаточное условие того, чтобы уравнение (11.8.1) имело решение из класса L^2, состоит в том, чтобы $g(z)=g(re^{i\theta})$ была аналитична для $-\pi<\theta<\pi$ и чтобы интеграл

$$\int_0^\infty |g(re^{i\theta})|^2\,dr$$

был равномерно ограничен для $-\pi<\theta<\pi$.

То, что функция (11.8.4) является решением исходной задачи, легко проверить. Действительно, подставляя (11.8.4) в правую часть уравнения (11.8.1), получаем

$$\frac{i}{2\pi}\int_0^\infty \frac{h(ue^{\pi i})}{x+u}\,du-\frac{i}{2\pi}\int_0^\infty \frac{h(ue^{-\pi i})}{x+u}\,du.$$

Поворачивая путь интегрирования во втором интеграле на 2π и принимая во внимание вычет в $u=xe^{\pi i}$, мы видим, что последнее выражение действительно равно $h(x)$.

11.9. Проблема моментов Стилтьеса[1]. Нелишне будет остановиться здесь немного на самой стилтьесовской проблеме моментов. Проблема состоит в нахождении функции $f(x)$, для которой

$$\int_0^\infty x^n f(x)\,dx=c_n \qquad (n=0,1,\ldots),$$

где c_0, c_1, ... — заданные числа.

Предположим, что $f(x)e^{k\sqrt{x}}\in L(0,\infty)$ *для некоторого положительного* k. Пусть

$$\varphi(s)=\sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n c_n s^{2n}}{(2n)!}=\int_0^\infty f(x)\sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n x^n s^{2n}}{(2n)!}\,dx=$$
$$=\int_0^\infty f(x)\cos(s\sqrt{x})\,dx=2\int_0^\infty \xi f(\xi^2)\cos s\xi\,d\xi.$$

Перемена порядка суммирования и интегрирования законна здесь, в предположении, что $|s|<k$, в силу абсолютной сходимости интеграла

$$\int_0^\infty |f(x)|\sum_{n=0}^\infty \frac{x^n|s|^{2n}}{(2n)!}\,dx=\int_0^\infty |f(x)|\operatorname{ch}(|s|\sqrt{x})\,dx.$$

---
[1] См. Hardy (7).

Однако, последний интеграл сходится для $s=\sigma+it$, $-k<t<k$. Поэтому $\varphi(s)$ есть аналитическая функция, регулярная в указанной полосе, и $\varphi(s)\to 0$, когда $\sigma\to\pm\infty$ в этой полосе. Далее,

$$\xi f(\xi^2)=\frac{1}{\pi}\lim_{\lambda\to\infty}\int_0^{\lambda}\left(1-\frac{s}{\lambda}\right)\varphi(s)\cos s\xi\,ds$$

почти для всех ξ. Следовательно, $f(x)$ единственна с точностью до значений на множествах меры нуль.

Покажем, что эта функция действительно является решением поставленной задачи. Имеем

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{ia-\infty}^{ia+\infty}\frac{e^{-is\xi}}{s^{2n+1}}\,ds=\begin{cases}\dfrac{(-1)^{n+1}\xi^{2n}}{(2n)!} & (\xi>0),\\ 0 & (\xi<0)\end{cases}\qquad (a>0).$$

Поэтому

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty}x^n f(x)\,dx&=2\int_0^{\infty}\xi^{2n+1}f(\xi^2)\,d\xi=\\ &=\frac{(-1)^{n+1}(2n)!}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}|\xi|f(\xi^2)\,d\xi\int_{ia-\infty}^{ia+\infty}\frac{e^{-is\xi}}{s^{2n+1}}\,ds=\\ &=\frac{(-1)^{n+1}(2n)!}{\pi i}\int_{ia-\infty}^{ia+\infty}\frac{ds}{s^{2n+1}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-is\xi}|\xi|f(\xi^2)\,d\xi=\\ &=\frac{(-1)^{n+1}(2n)!}{\pi i}\int_{ia-\infty}^{ia+\infty}\frac{\varphi(s)}{s^{2n+1}}\,ds.\end{aligned}$$

Обращение порядка интегрирования законно в силу абсолютной сходимости, если $n>0$, и в силу ограниченной сходимости интеграла по s, если $n=0$; в последнем случае окончательный интеграл понимается, как $\lim\limits_{\lambda\to\infty}\int_{ia-\lambda}^{ia+\lambda}$. Разумеется, полученное равенство есть частный случай формулы Парсеваля.

Но

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(\sigma+ia)}{(\sigma+ia)^{2n+1}}\,d\sigma=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(-\sigma'+ia)}{(-\sigma'+ia)^{2n+1}}\,d\sigma'=-\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(\sigma'-ia)}{(\sigma'-ia)^{2n+1}}\,d\sigma',$$

так как φ чётна. Следовательно, по теореме о вычетах,

$$\frac{1}{\pi i}\int_{ia-\infty}^{ia+\infty}\frac{\varphi(s)}{s^{2n+1}}\,ds=\frac{1}{2\pi i}\left(\int_{ia-\infty}^{ia+\infty}-\int_{-ia-\infty}^{-ia+\infty}\right)\frac{\varphi(s)}{s^{2n+1}}\,ds=\frac{(-1)^{n+1}c_n}{(2n)!},$$

что и доказывает требуемый результат.

Изложенный метод, разумеется, не даёт возможности решить, соответствует ли данная определённая последовательность чисел c_n функции $f(x)$ рассмотренного класса. Например, если $c_n = 1$ для всякого n, то $\varphi(s) = \cos s$, что не является трансформацией Фурье функции, интегрируемой в обычном смысле. В таких как раз случаях возникает необходимость введения интегралов Стилтьеса.

Если $c_n = \dfrac{1}{n+1}$, то

$$\varphi(s) = \frac{2(s\sin s + \cos s - 1)}{s^2},$$

и

$$\xi f(\xi^2) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \left(\frac{2\sin s}{s} - \frac{1-\cos s}{s^2}\right)\cos s\xi\, ds = \begin{cases} \xi & (0 < \xi < 1), \\ 0 & (\xi > 1). \end{cases}$$

Далее, так как

$$\int_0^\infty x^n e^{-x^\mu \cos\alpha} \sin\bigl(x^\mu \sin\alpha\bigr) dx = \frac{1}{\mu}\,\Gamma\left(\frac{n+1}{\mu}\right) \sin\frac{(n+1)\alpha}{\mu}$$

при $\mu > 0$ и $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$, то функция

$$f(x) = e^{-x^\mu \cos \pi\mu} \sin\bigl(x^\mu \sin \pi\mu\bigr)$$

для каждого значения μ, меньшего, чем $\dfrac{1}{2}$, обладает тем свойством, что

$$\int_0^\infty x^n f(x)\, dx = 0 \qquad (n = 0, 1, \ldots).$$

Поэтому решение проблемы моментов не будет единственным, если мы потребуем лишь, чтобы $f(x) = O\bigl(e^{-kx^\mu}\bigr)$, где $\mu < \dfrac{1}{2}$.

11.10. Уравнения с конечными пределами интегрирования. Уравнение

$$g(x) = \int_0^x k(x-y) f(y)\, dy \qquad (x > 0) \tag{11.10.1}$$

формально является частным случаем уравнения (11.6.1), в котором $f(x)$ и $k(x)$, а следовательно, и $g(x)$, обращаются в нуль при $x < 0$. Формальные выкладки § 11.6 дают, как прежде,

$$G(w) = \sqrt{2\pi}\, F(w) K(w), \tag{11.10.2}$$

и формальное решение есть

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{ia-\infty}^{ia+\infty} e^{-ixw}\frac{G(w)}{K(w)}\, dw. \tag{11.10.3}$$

Как и раньше, для того, чтобы это действительно было решением, требуется, чтобы $K(w)$ удовлетворяла специальным условиям, либо чтобы $G(w)$ и $K(w)$ были специальным образом связаны друг с другом.

Т е о р е м а 149. *Пусть* $e^{-cx}g(x) \in L^2(0, \infty)$, *а* $e^{-cx}k(x) \in L(0, \infty)$. *Тогда для того, чтобы уравнение* (11.10.1) *обладало решением* $f(x)$ *таким, что* $e^{-cx}f(x) \in L^2(0, \infty)$, *необходимо и достаточно, чтобы отношение* $\dfrac{G(u+iv)}{K(u+iv)}$, *как функция от* u, *принадлежало к* $L^2(-\infty, \infty)$ *для* $v \geqslant c$. *Решением служит тогда* (11.10.3), *где* $a \geqslant c$.

Действительно, уравнение (11.10.1) можно записать в виде

$$e^{-ax}g(x) = \int_0^x e^{-a(x-y)}k(x-y)e^{-ay}f(y)\,dy,$$

где $a \geqslant c$, и утверждаемый результат следует тогда из теоремы 148.

То, что решение уравнения (11.10.1) в случае, если оно существует, единственно, может быть доказано в более общем виде.

Т е о р е м а 150. *Пусть функции* $e^{-cx}f(x)$, $e^{-cx}k(x)$ *для некоторого положительного* c *принадлежат к* $L(0, \infty)$, *и пусть*

$$\int_0^x k(x-y)f(y)\,dy = 0 \qquad (x > 0).$$

Тогда по крайней мере одна из функций k *и* f *есть нуль.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно,

$$\begin{aligned} F(w)K(w) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty f(y)\,dy\int_0^\infty e^{i(t+y)w}k(t)\,dt = \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty f(y)\,dy\int_y^\infty e^{ixw}k(x-y)\,dx = \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty e^{ixw}\,dx\int_0^x k(x-y)f(y)\,dy = 0, \end{aligned}$$

где обращение порядка интегрирования законно в силу абсолютной сходимости. Так как здесь $F(w)$ и $K(w)$ аналитичны для $v > c$, то, по крайней мере, одна из этих функций тождественно равна нулю, и по теореме 14 равна нулю также соответствующая функция k или f.

В следующем параграфе мы покажем, что тот же результат справедлив даже без ограничения, наложенного выше на поведение рассматриваемых функций в бесконечности. Доказательство[1] будет опираться на одно свойство нулей целых функций.

[1] Упрощённое Титчмаршем [Titchmarsh (8)]. Тот же результат может быть выведен также с помощью винеровских тауберовых теорем; см. В и н е р и П э л и, Преобразование Фурье, гл. V.

Соответствующая задача для сумм, т. е. решение системы уравнений

$$\sum_{m=0}^{n} a_{n-m}x_m = 0 \qquad (n = 0, 1, \ldots),$$

тривиальна. Можно было бы ожидать, что существует решение интегральной задачи, опирающееся лишь на свойства точечных множеств; однако, такое доказательство до сих пор не было найдено.

11.11.

Теорема 151. *Пусть*

$$F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{izt} f(t)\,dt, \tag{11.11.1}$$

где a и b конечны, $a < b$ и $f(t)$ — не нуль в окрестности a или b. Пусть $z_n = r_n e^{i\theta_n}$ — нули функции $F(z)$ и

$$\varphi(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{y^2}{r_n^2}\right). \tag{11.11.2}$$

Тогда

$$\lim_{y\to\infty} \frac{\varphi(y)}{y} = b - a.$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что можно принять $a = -1$, $b = 1$. Действительно,

$$F(z) = \frac{b-a}{2\sqrt{2\pi}}\, e^{(a+b)z/2} \int_{-1}^{1} e^{i\zeta t} g(t)\,dt,$$

где

$$g(t) = f\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}\,t\right), \qquad \zeta = \frac{b-a}{2}\,z.$$

Если ζ_n — нули нового интеграла, $|\zeta_n| = \rho_n$, и в указанном специальном случае теорема верна, то

$$\varphi(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{\rho_n^2}\left[\frac{b-a}{2}\,y\right]^2\right) \sim (b-a)y,$$

так что теорема верна и в общем случае.

Мы можем также предполагать, что $F(0) \neq 0$. Действительно, если $F(0) = 0$, то

$$F(z) = -\frac{iz}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{izt} f_1(t)\,dt,$$

где $f_1(t) = \displaystyle\int_a^t f(u)\,du$, и мы можем рассматривать $\dfrac{F(z)}{z}$, если нуль в $z = 0$ — простой. В случае кратного нуля повторно применяем тот же приём.

Докажем теперь две леммы (принимая $a = -1$, $b = 1$).

Лемма α.

$$\varlimsup_{y\to\infty} \frac{\varphi(y)}{y} \leqslant 2. \tag{11.11.3}$$

Действительно,

$$|F(z)| \leqslant \frac{e^{r|\sin\theta|}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{1} |f(t)|\, dt. \tag{11.11.4}$$

Пусть $n(x)$ — число тех r_n, которые не превосходят x, и

$$N(r) = \int_0^r \frac{n(x)}{x}\, dx.$$

Тогда, по теореме Иенсена[1],

$$N(r) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \ln|F(re^{i\theta})|\, d\theta - \ln|F(0)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} r|\sin\theta|\, d\theta - K = \frac{2r}{\pi} - K.$$

Но

$$\varphi(y) = \sum_{n=1}^{\infty} n\left[\ln\left(1 + \frac{y^2}{r_n^2}\right) - \ln\left(1 + \frac{y^2}{r_{n+1}^2}\right)\right] = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{r_n}^{r_{n+1}} \frac{2y^2}{r(y^2+r^2)}\, dr =$$
$$= 2y^2 \int_0^{\infty} \frac{n(r)}{r(y^2+r^2)}\, dr = 4y^2 \int_0^{\infty} \frac{rN(r)}{(y^2+r^2)^2}\, dr.$$

Следовательно,

$$\varphi(y) \leqslant \frac{8y^2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{r^2}{(y^2+r^2)^2}\, dr - Ky^2 \int_0^{\infty} \frac{r}{(y^2+r^2)^2}\, dr = 2y - O(1),$$

откуда и вытекает справедливость утверждения леммы.

Лемма β.

$$\varlimsup_{y\to\infty} \frac{\ln|F(iy)|}{y} = 1. \tag{11.11.5}$$

Действительно, в силу (11.11.4), $F(iy) = O(e^y)$. Предположим, что $F(iy) = O(e^{(1-\delta)y})$, где $0 < \delta < 1$. Так как $F(x) = O(1)$ для вещественных x, то из теоремы Фрагмена–Линделёфа[2] следует, что

$$F(z) = O(e^{(1-\delta)r\sin\theta}) \tag{11.11.6}$$

равномерно в верхней полуплоскости. Но

$$e^{iz}F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^2 e^{izu} f(u-1)\, du$$

[1] Т и т ч м а р ш, Теория функций, § 3.6.1. [П р и в а л о в, Введение в теорию функций комплексного переменного, гл. IX, § 3.]

[2] Т и т ч м а р ш, Теория функций, § 5.7.1.

и потому, в силу теоремы 22,

$$\int_0^u f(v-1)\,dv = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{\lambda\to\infty} \int_{-\lambda}^{\lambda} e^{iz}F(z)\,\frac{e^{-izu}-1}{-iz}\,dz.$$

Но если имеет место (11.11.6), то обычным способом интегрирования по полуокружности большого радиуса в верхней полуплоскости получаем, что правая часть последнего соотношения равна нулю для $u<\delta$. Следовательно, $f(v-1)$ есть нуль в интервале $(0,\delta)$, что, однако, противоречит предположению.

Доказательство теоремы 151. По теореме Адамара о произведении Вейерштрасса для целых функций,

$$F(z) = F(0)e^{(\alpha+i\beta)z} \prod_{n=1}^{\infty}\Big(1-\frac{z}{z_n}\Big)e^{z/z_n}$$

с некоторыми α и β, и потому

$$|F(iy)|^2 = |F(0)|^2 e^{-2\beta y} \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{2y\sin\theta_n}{r_n}+\frac{y^2}{r_n^2}\right)e^{-\frac{2y\sin\theta_n}{r_n}}.$$

Но так как функция $e^{iz}F(z)$ ограничена в верхней полуплоскости, а функция $e^{-iz}F(z)$ — в нижней, то ряд

$$\sum \frac{|\sin\theta_n|}{r_n}$$

сходится[1]. Мы можем поэтому представить $|F(iy)|^2$ в виде произведения

$$|F(iy)|^2 = |F(0)|^2 e^{Cy} \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{2y\sin\theta_n}{r_n}+\frac{y^2}{r_n^2}\right)$$

с некоторым C, и

$$2\ln|F(iy)| = 2\ln|F(0)| + Cy + \sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1-\frac{2y\sin\theta_n}{r_n}+\frac{y^2}{r_n^2}\right).$$

Пусть

$$l_n = \ln\left(1-\frac{2y\sin\theta_n}{r_n}+\frac{y^2}{r_n^2}\right) - \ln\left(1+\frac{y^2}{r_n^2}\right) = \ln\left(1-\frac{\dfrac{2y\sin\theta_n}{r_n}}{1+\dfrac{y^2}{r_n^2}}\right).$$

Тогда

$$l_n \leqslant \ln\left(1+\frac{2|y\sin\theta_n|}{r_n}\right),$$

[1] Титчмарш, Теория функций, § 3.7.1.

и при $y \to \infty$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{2|y\sin\theta_n|}{r_n}\right) = O(N\ln y) + \sum_{n=N+1}^{\infty} O\left(\frac{|y\sin\theta_n|}{r_n}\right) = o(|y|),$$

выбирая, например, $N = [\sqrt{y}]$. Следовательно,

$$2\ln|F(iy)| \leqslant Cy + \varphi(y) + o(|y|). \tag{11.11.7}$$

Пусть

$$L = \varlimsup_{y\to\infty} \frac{\varphi(y)}{y}\,.$$

Тогда, по лемме α, $L \leqslant 2$. Кроме того, по лемме β, $2 \leqslant C + L$. Следовательно, $C \geqslant 0$. То же рассуждение при $y \to -\infty$ показывает, что $C \leqslant 0$. Таким образом, $C = 0$.

Далее,

$$\int_0^R \frac{l_n}{y}\,dy = \int_0^{R/r_n} \ln\left(1 - \frac{2u\sin\theta_n}{1+u^2}\right)\frac{du}{u} > \\ > -A\int_0^{R/r_n} \frac{|\sin\theta_n|}{1+u^2}\,du > -A|\sin\theta_n|\min\left(\frac{R}{r_n}\,,1\right),$$

если $|\sin\theta_n| \leqslant \frac{1}{2}$ или если $R \leqslant \frac{r_n}{2}$. Если же $|\sin\theta_n| \geqslant \frac{1}{2}$ и $R \geqslant \frac{r_n}{2}$, то

$$\int_0^R \frac{l_n}{y}\,dy \geqslant \int_0^{\infty} \ln\left(1 - \frac{2u}{1+u^2}\right)\frac{du}{u} = -A > -A|\sin\theta_n|\,\frac{R}{r_n}\,.$$

Следовательно,

$$\int_0^R \sum_{n=1}^{\infty} \frac{l_n}{y}\,dy > -A\sum_{r_n<\sqrt{R}} 1 - AR\sum_{r_n\geqslant\sqrt{R}} \frac{|\sin\theta_n|}{r_n} > o(R).$$

Отсюда

$$2\int_0^R \frac{\ln|F(iy)|}{y}\,dy \geqslant \int_0^R \frac{\varphi(y)}{y}\,dy + o(R),$$

и в силу (11.11.7), где теперь $C = 0$, знак «$\geqslant$» может быть заменён на знак равенства.

Положим

$$G(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-1}^{1/2} e^{izt} f(t)\,dt + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{1/2}^{1} e^{izt}\,dt,$$

так что, при $y \to +\infty$,

$$G(iy) = F(iy) + O(e^{-y/2}), \qquad G(-iy) = \frac{e^y}{y} + O(e^{y/2}).$$

Применяя найденный результат к $G(iy)$ и $G(-iy)$ и вычитая, получаем

$$\int_0^R \frac{\ln|F(iy)+O(e^{-y/2})|}{y}\,dy = \int_0^R \frac{\ln|G(iy)|}{y}\,dy = \\ = \int_0^R \frac{\ln|G(-iy)|}{y}\,dy + o(R) = R + o(R).$$

Поэтому, для каждого фиксированного положительного δ

$$\int_R^{(1+\delta)R} \frac{\ln|F(iy)+O(e^{-y/2})|}{y}\,dy \sim \delta R.$$

Отсюда следует, что интервал $(R, R+\delta R)$, при $R > R_0(\varepsilon)$, содержит точки, где $|F(iy)| > e^{(1-\varepsilon)y}$ и, следовательно, в силу (11.11.7), — точки, где $\varphi(y) > (2-3\varepsilon)y$. Так как $\varphi(y)$ монотонно возрастает, то отсюда следует, что

$$\varliminf_{y\to\infty} \frac{\varphi(y)}{y} \geqslant 2.$$

В соединении с леммой α это и даёт утверждаемый результат.

Т е о р е м а 152. *Пусть $f(x)$ и $k(x)$ принадлежат к $L(0,\gamma)$, и пусть*

$$\int_0^x k(x-y)f(y)\,dy = 0$$

почти для всех $x \in (0,\gamma)$. Тогда $f(x) = 0$ почти для всех $x \in (0,\alpha)$ и $k(x) = 0$ почти для всех $x \in (0,\beta)$, где $\alpha+\beta=\gamma$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Мы можем положить, по определению,

$$f(x) = k(x) = \begin{cases} 1 & (\gamma < x \leqslant \gamma+1), \\ 0 & (x > \gamma+1). \end{cases}$$

Пусть

$$g(x) = \int_0^x k(x-y)f(y)\,dy \qquad (0 < x < \infty).$$

Тогда $g(x) = 0$ для $x < \gamma$ и $x > 2\gamma+2$. Для $2\gamma+1 < x < 2\gamma+2$ имеем

$$g(x) = \int_{x-\gamma-1}^{\gamma+1} dy = 2\gamma+2-x.$$

Пусть F, G, K — трансформации Фурье функций f, g, k. Тогда

$$G(w) = \sqrt{2\pi}\,F(w)K(w).$$

Обозначая через φ_1, φ_2 функции, связанные с K и G, как функция φ теоремы 151 связана с F, получаем

$$\varphi_2(y) = \varphi(y) + \varphi_1(y).$$

Тогда, если f — нуль в $(0,\alpha)$, k — в $(0,\beta)$ и g — в $(0,\gamma)$, из теоремы 151 следует, что

$$(2\gamma+2)-\gamma=(\gamma+1)-\alpha+(\gamma+1)-\beta, \quad \text{или} \quad \alpha+\beta=\gamma.$$

Теорема 153. *Если f и k интегрируемы на каждом конечном интервале, k — не нуль и*

$$\int_0^x k(x-y)f(y)\,dy=0 \qquad (0<x<\infty),$$

то f есть нуль в $(0,\infty)$.

Действительно, по предыдущей теореме функция f есть нуль в $(0,\alpha)$, где $\alpha+\beta=\gamma$; но γ произвольно велико, а β ограничено.

11.12. Примеры. Бэйтмен[1] рассмотрел следующий пример на уравнение (11.10.1). Торговец покупает и продаёт различные товары. Предположим: (I) что покупка и продажа суть непрерывные процессы и что купленые товары немедленно поступают в продажу; (II) что торговец приобретает каждую новую партию любого товара в таком количестве, какое он может продать в промежуток времени T, один и тот же для всех покупок; (III) что каждая новая партия распродаётся равномерно в течение времени T.

Торговец начинает продажу новой партии товара, общая стоимость которой равна единице, и требуется найти закон, по которому он должен производить покупки, для того, чтобы стоимость наличного товара оставалась всё время постоянной.

Стоимость первоначального товара, оставшегося к моменту t, равна $k(t)$, где

$$k(t)=\begin{cases} 1-\dfrac{t}{T} & (t\leqslant T),\\ \quad 0 & (t>T). \end{cases}$$

Предположим, что в промежуток времени между моментами τ и $\tau+\delta\tau$ покупается товаров на сумму $f(\tau)\,\delta\tau$. Этот запас уменьшается вследствие продаж таким образом, что стоимость остатка к моменту $t>\tau$ равна $k(t-\tau)f(\tau)\,d\tau$. Поэтому стоимость непроданной части товаров, приобретённых путём покупок, будет к моменту t равна

$$\int_0^t k(t-\tau)f(\tau)\,d\tau.$$

Таким образом, f должна удовлетворять интегральному уравнению

$$1-k(t)=\int_0^t k(t-\tau)f(\tau)\,d\tau.$$

[1] Bateman (6).

Здесь

$$K(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^T e^{iwt}\left(1 - \frac{t}{T}\right) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(-\frac{1}{iw} + \frac{1 - e^{iwT}}{w^2T}\right)$$

и

$$G(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{iwt}\, dt - K(w) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}\, iw} - K(w) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1 - e^{iwT}}{w^2T}\,.$$

Мы можем взять $\operatorname{Im} w > 0$ и получим в качестве решения

$$f(t) = -\frac{1}{2\pi} \int_{ia-\infty}^{ia+\infty} e^{-iwt}\, \frac{1 - e^{iwT}}{1 + iwT - e^{iwT}}\, dw \qquad (a > 0).$$

Последний интеграл может быть преобразован различными способами. Если мы переместим путь интегрирования в параллельную прямую, проходящую через $w = -ib$, где $b > 0$, то получим

$$f(t) = \frac{2}{T} - \frac{1}{2\pi} \int_{-ib-\infty}^{-ib+\infty} e^{-iwt}\, \frac{1 - e^{iwT}}{1 + iwT - e^{iwT}}\, dw,$$

и последний интеграл имеет экспоненциальный порядок малости при $t \to \infty$. Дальнейшие члены разложения порождаются нулями знаменателя[1].

11.13. В качестве другого примера мы найдём сумму ряда[2]

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nJ_n(\xi)J_n(x). \tag{11.13.1}$$

Имеем $|J_n(x)| \leqslant 1$ для всех n и x, и потому

$$|J_n(x)| = \left|\frac{x}{2n}\left[J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x)\right]\right| \leqslant x$$

для $n \geqslant 1$ и $x \geqslant 0$. Кроме того, при фиксированном ξ и $n \to \infty$,

$$J_n(\xi) = O\left(\frac{(\xi/2)^n}{n!}\right).$$

Поэтому мы можем умножить (11.13.1) на $\dfrac{J_0(t-x)}{x}$ и почленно проинтегрировать от 0 до t. Мы получим

$$\int_0^t \frac{f(x)}{x} J_0(t-x)\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} nJ_n(\xi) \int_0^t \frac{J_n(x)}{x} J_0(t-x)\, dx =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} J_n(\xi)J_n(t) = \frac{J_0(t-\xi) - J_0(\xi)J_0(t)}{2}\,,$$

[1] См. также Goldstein (1).

[2] В а т с о н, § 16.32.

в силу (7.14.6) и «теоремы сложения» для бесселевых функций[1].

Мы пришли к интегральному уравнению для $\dfrac{f(x)}{x}$ вида (11.10.1): в силу приведённых выше неравенств, $\dfrac{f(x)}{x}$ ограничена. Поэтому $\dfrac{f(x)}{x}$ определяется формулой (11.10.3). Здесь

$$K(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{ixw} J_0(x)\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-w^2)}}\,,$$

где $u > 0$ и взята ветвь, вещественная и положительная на вещественной оси. Аналогично

$$\begin{aligned} G(w) &= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{ixw} \big[J_0(x-\xi) - J_0(x)J_0(\xi)\big]\, dx = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\, \frac{1}{iw} \int_0^\infty e^{ixw} \big[J_1(x-\xi) - J_1(x)J_0(\xi)\big]\, dx \end{aligned}$$

(последнее равенство получаем интегрированием по частям). Следовательно,

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{1}{4\pi} \lim_{\lambda\to\infty} \int_{ia-\lambda}^{ia+\lambda} e^{-ixw}\, \frac{\sqrt{1-w^2}}{iw}\, dw \int_0^\infty e^{itw} \big[J_1(t-\xi) - J_1(t)J_0(\xi)\big]\, dt,$$

где $a > 0$. Но

$$\begin{aligned} &\frac{J_1(x-\xi) - J_1(x)J_0(\xi)}{2} = \\ &\qquad = \frac{1}{4\pi} \lim_{\lambda\to\infty} \int_{ia-\lambda}^{ia+\lambda} e^{-ixw}\, dw \int_0^\infty e^{itw} \big[J_1(t-\xi) - J_1(t)J_0(\xi)\big]\, dt, \end{aligned}$$

поэтому, складывая последние два равенства, мы получим

$$\begin{aligned} &\frac{f(x)}{x} + \frac{J_1(x-\xi) - J_1(x)J_0(\xi)}{2} = \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{ia-\infty}^{ia+\infty} e^{-ixw}\, \frac{\sqrt{1-w^2}+iw}{iw}\, dw \int_0^\infty e^{itw} \big[J_1(t-\xi) - J_1(t)J_0(\xi)\big]\, dt = \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty \big[J_1(t-\xi) - J_1(t)J_0(\xi)\big]\, dt \int_{ia-\infty}^{ia+\infty} e^{i(t-x)w}\, \frac{\sqrt{1-w^2}+iw}{iw}\, dw. \end{aligned}$$

Внутренний интеграл при $t \geqslant x$ равен нулю (в чём убеждаемся, устремляя $a \to \infty$), а при $t < x$, в силу (7.13.8), его производная по t равна $-2\pi\, \dfrac{J_1(t-x)}{t-x}$. Поэтому, интегрируя найденный нами двойной интеграл

[1] В а т с о н, § 2.4. [См. также Р.О. Кузьмин, Бесселевы функции, 2-е изд., гл. III, § 8.]

по частям и принимая во внимание (7.14.6), получаем

$$\frac{f(x)}{x}+\frac{J_1(x-\xi)-J_1(x)J_0(\xi)}{2}= \\ =\frac{1}{2}\int_0^x\left[J_0(t-\xi)-J_0(t)J_0(\xi)\right]\frac{J_1(t-x)}{t-x}\,dt= \\ =\frac{1}{2}\int_0^x J_0(t-\xi)\,\frac{J_1(t-x)}{t-x}\,dt-\frac{J_1(x)J_0(\xi)}{2},$$

и, снова пользуясь формулой (7.14.6), окончательно находим

$$\frac{f(x)}{x}=\frac{1}{2}\int_0^x J_0(t-\xi)\frac{J_1(t-x)}{t-x}\,dt-\frac{J_1(x-\xi)}{2}= \\ =\frac{1}{2}\int_0^\xi J_0(t-\xi)\frac{J_1(t-x)}{t-x}\,dt.$$

11.14. Интегральное уравнение Абеля. Так называется уравнение

$$g(x)=\int_0^x\frac{f(y)}{(x-y)^\alpha}\,dy\qquad(0<\alpha<1).$$

Это — уравнение вида (11.10.1) с $k(x)=\dfrac{1}{x^\alpha}$. Здесь

$$K(w)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty e^{ixw}\,\frac{dx}{x^\alpha}=\frac{(-iw)^{\alpha-1}\,\Gamma(1-\alpha)}{\sqrt{2\pi}},$$

где выражение $(-iw)^{\alpha-1}$ вещественно на положительной мнимой полуоси. Поэтому формальным решением является

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\Gamma(1-\alpha)}\int_{ia-\infty}^{ia+\infty}e^{-ixw}\,\frac{G(w)}{(-iw)^{\alpha-1}}\,dw.$$

Если это решение принадлежит к L^2, то его интеграл есть

$$f_1(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\Gamma(1-\alpha)}\int_{ia-\infty}^{ia+\infty}\frac{1-e^{-ixw}}{iw}\,\frac{G(w)}{(-iw)^{\alpha-1}}\,dw= \\ =\frac{1}{2\pi\,\Gamma(1-\alpha)}\int_{ia-\infty}^{ia+\infty}\frac{e^{-ixw}-1}{(-iw)^\alpha}\,dw\int_0^\infty e^{iwt}g(t)\,dt= \\ =\frac{1}{2\pi\,\Gamma(1-\alpha)}\int_0^\infty g(t)\,dt\int_{ia-\infty}^{ia+\infty}\frac{e^{iw(t-x)}-e^{iwt}}{(-iw)^\alpha}\,dw.$$

Внутренний интеграл при $t>x$ равен нулю (в чём убеждаемся, устремляя $a\to\infty$). При $0<t<x$ часть этого интеграла, содержащая e^{iwt}, равна ещё нулю; деформируя же путь интегрирования в отрицательную

мнимую полуось, получаем, что остающаяся часть указанного интеграла равна

$$\int_0^\infty e^{v(t-x)}v^{-\alpha}(e^{i\pi\alpha}-e^{-i\pi\alpha})(-i)dv = 2\sin\pi\alpha\,\Gamma(1-\alpha)(x-t)^{\alpha-1}.$$

Таким образом,

$$f_1(x) = \frac{\sin\pi\alpha}{\pi}\int_0^x (x-t)^{\alpha-1}g(t)\,dt,$$

и мы получаем обычную форму решения интегрального уравнения Абеля[1]:

$$f(x) = \frac{\sin\pi\alpha}{\pi}\frac{d}{dx}\int_0^x (x-t)^{\alpha-1}g(t)\,dt.$$

11.15. Уравнение Фокса. Другим уравнением типа «свёртки» является

$$f(x) = g(x) + \int_{-\infty}^\infty k(x+y)f(y)\,dy. \qquad (11.15.1)$$

Оно эквивалентно одному уравнению, рассмотренному Фоксом[2]. Решение его несколько более сложно. Как и раньше, имеем

$$\begin{aligned} F(u) &= G(u) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty e^{ixu}\,dx\int_{-\infty}^\infty k(x+y)f(y)\,dy = \\ &= G(u) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty f(y)\,dy\int_{-\infty}^\infty e^{ixu}k(x+y)\,dx = \\ &= G(u) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty f(y)\,dy\int_{-\infty}^\infty e^{i(t-y)u}k(t)\,dt = \\ &= G(u) + \sqrt{2\pi}\,F(-u)K(u). \end{aligned}$$

Меняя знак u, имеем

$$F(-u) = G(-u) + \sqrt{2\pi}\,F(u)K(-u)$$

и, исключая $F(-u)$, получаем

$$F(u) = \frac{G(u)+\sqrt{2\pi}\,G(-u)K(u)}{1-2\pi K(u)K(-u)}.$$

Следовательно,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^\infty e^{-ixu}\frac{G(u)+\sqrt{2\pi}\,G(-u)K(u)}{1-2\pi K(u)K(-u)}\,du. \qquad (11.15.2)$$

[1] По поводу непосредственного исследования решения см. Bosanquet (1).
[2] Fox (2).

Фокс непосредственно рассматривал уравнение

$$f(x) = g(x) + \int_{-\infty}^{\infty} k(ux) f(u)\, du, \tag{11.15.3}$$

связанное с (11.15.1) очевидной подстановкой. Соответствующие вычисления для этого уравнения проводятся в терминах трансформаций Меллина, и решение есть

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\mathfrak{G}(s) + \mathfrak{K}(s)\mathfrak{G}(1-s)}{1 - \mathfrak{K}(s)\mathfrak{K}(1-s)}\, x^{-s}\, ds. \tag{11.15.4}$$

Т е о р е м а 154. *Пусть* $g(x) \in L^2$ *и* $k(x) \in L$, *и пусть верхняя грань* $K(u)K(-u)$ *меньше* $\frac{1}{2\pi}$. *Тогда уравнение* (11.15.1) *имеет точно одно решение из* L^2, *и это решение даётся формулой* (11.15.2).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Как и в § 11.1, функция $f(x)$, определяемая формулой (11.15.2), принадлежит к L^2 и удовлетворяет уравнению. Далее, разность между двумя решениями, принадлежащими к L^2, должна удовлетворять уравнению

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} k(x+y) f(y)\, dy, \tag{11.15.5}$$

откуда её трансформация Фурье удовлетворяет уравнению

$$F(u) = \sqrt{2\pi}\, F(-u) K(u). \tag{11.15.6}$$

Поэтому

$$F(-u) = \sqrt{2\pi}\, F(u) K(-u)$$

и, значит,

$$F(u)F(-u)\big[1 - 2\pi K(u)K(-u)\big] = 0.$$

Отсюда следует, что или $F(u)$, или $F(-u)$ равна нулю почти для всех u. Но, в силу (11.15.6), если $F(-u) = 0$, то и $F(u) = 0$. Таким образом, $F(u) = 0$ почти для всех u, и значит, $f(x) = 0$ почти для всех x.

Доказанная теорема допускает очевидные расширения; так, например, мы могли бы потребовать просто, чтобы

$$\big|1 - 2\pi K(u)K(-u)\big| \geqslant A > 0.$$

П р и м е р ы.

(I). Пусть в (11.15.3)

$$k(x) = \lambda \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos x.$$

Тогда

$$\mathfrak{K}(s) = \lambda \Gamma(s) \cos\frac{\pi s}{2} \qquad \text{и} \qquad \mathfrak{K}(s)\mathfrak{K}(1-s) = \lambda^2.$$

Поэтому, если $\lambda^2 \neq 1$, решение будет

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i(1-\lambda^2)} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \left[\mathfrak{G}(s) + \lambda\mathfrak{G}(1-s)\Gamma(s)\cos\frac{\pi s}{2}\right] x^{-s}\, ds =$$
$$= \frac{g(x)}{1-\lambda^2} + \frac{\lambda}{1-\lambda^2}\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty g(u)\cos xu\, du.$$

Его можно проверить с помощью косинус-формулы Фурье.

(II) Пусть в (11.15.3)

$$k(x) = \frac{e^{-x}}{\sqrt{\pi}}, \qquad g(x) = \frac{\ln(1+x)}{x} - \begin{cases} 0 & (0 < x < 1), \\ \dfrac{\pi}{x} & (x > 1). \end{cases}$$

Тогда

$$\mathfrak{K}(s) = \frac{\Gamma(s)}{\sqrt{\pi}}, \qquad \mathfrak{G}(s) = \frac{\pi}{1-s}\left(\frac{1}{\sin\pi s} - 1\right),$$

и решение есть

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \left(\frac{\pi}{1-s} - \sqrt{\pi}\,\Gamma(s-1)\right) x^{-s}\, ds =$$
$$= \sqrt{\pi}\,\frac{1-e^{-x}}{x} - \begin{cases} 0 & (0 < x < 1), \\ \dfrac{\pi}{x} & (x > 1). \end{cases}$$

11.16. «Парные» интегральные уравнения. В некоторых задачах неизвестная функция удовлетворяет одному интегральному уравнению на одной части области $(0, \infty)$ и совсем другому уравнению на остальной части этой области.

Так, например[1], пусть $v(\rho, z)$ будет потенциал плоского круглого наэлектризованного диска из проводника, и пусть центр этого диска принят за начало координат, а ось — за ось z. Потенциал удовлетворяет тогда дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial^2 v}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial v}{\partial\rho} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0. \tag{11.16.1}$$

Положим

$$V(u, z) = \int_0^\infty \rho v(\rho, z) J_0(\rho u)\, d\rho \qquad (z > 0). \tag{11.16.2}$$

Тогда

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \int_0^\infty \rho\,\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} J_0(\rho u)\, d\rho = -\int_0^\infty \left(\rho\,\frac{\partial^2 v}{\partial\rho^2} + \frac{\partial v}{\partial\rho}\right) J_0(\rho u)\, d\rho,$$

[1] Riemann–Weber, 1, § 134.

и
$$\int_0^\infty \rho\,\frac{\partial^2 v}{\partial\rho^2}\,J_0(\rho u)\,d\rho = -\int_0^\infty \frac{\partial v}{\partial\rho}\bigl[J_0(\rho u)+\rho u J_0'(\rho u)\bigr]\,d\rho.$$
Поэтому
$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \int_0^\infty \frac{\partial v}{\partial\rho}\,\rho u J_0'(\rho u)\,d\rho = -u\int_0^\infty v\bigl[J_0'(\rho u)+\rho u J_0''(\rho u)\bigr]d\rho = \\ = u^2\int_0^\infty v\rho J_0(\rho u)\,d\rho = u^2 V,$$
и следовательно,
$$V = A(u)e^{-uz} + B(u)e^{uz},$$
причём, очевидно, $B(u)=0$. Следовательно, по теореме Ганкеля
$$v(\rho,z) = \int_0^\infty e^{-uz}uA(u)J_0(\rho u)\,du.$$

Если принять радиус диска за единицу, то краевые условия будут
$$v = \mathrm{const}\ \ (z=0,\ 0<\rho<1); \qquad \frac{\partial v}{\partial z} = 0\ \ (z=0,\ \rho>1).$$
Поэтому функция $f(u)=uA(u)$ должна удовлетворять уравнениям
$$\int_0^\infty f(u)J_0(\rho u)\,du = g(\rho) \qquad (0<\rho<1), \tag{11.16.3}$$
$$\int_0^\infty uf(u)J_0(\rho u)\,du = 0 \qquad (\rho>1), \tag{11.16.4}$$
где в рассматриваемом случае $g(\rho)$ — постоянная.

Для формального решения этих уравнений[1] применим к левым частям формулу Парсеваля для трансформаций Меллина. Мы получим
$$\frac{1}{2\pi i}\int_{k-i\infty}^{k+i\infty}\mathfrak{F}(s)\,\frac{2^{-s}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1+s}{2}\right)}\,\rho^{s-1}\,ds = g(\rho) \qquad (0<\rho<1), \tag{11.16.5}$$
$$\frac{1}{2\pi i}\int_{k-i\infty}^{k+i\infty}\mathfrak{F}(s)\,\frac{2^{1-s}\Gamma\left(1-\frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}\,\rho^{s-2}\,ds = 0 \qquad (\rho>1), \tag{11.16.6}$$
где $0<k<1$. Полагая
$$\mathfrak{F}(s) = \frac{2^s\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)}\,\chi(s), \tag{11.16.7}$$

[1] См. также I. Busbridge (2).

мы приведём эти уравнения к виду

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{k-i\infty}^{k+i\infty}\frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1+s}{2}\right)}\chi(s)\rho^{s-1}\,ds=g(\rho)\qquad(0<\rho<1),\tag{11.16.8}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{k-i\infty}^{k+i\infty}\frac{\Gamma\left(1-\frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)}\chi(s)\rho^{s-1}\,ds=0\qquad(\rho>1).\tag{11.16.9}$$

В этой форме множитель, содержащий гамма-функции, в уравнении (11.16.8) не имеет ни полюсов, ни нулей для $\sigma>0$, а в уравнении (11.16.9) — для $\sigma<1$.

Умножая (11.16.8) на ρ^{-w}, где $\sigma-u>0$, и интегрируя от 0 до 1, мы получаем

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{k-i\infty}^{k+i\infty}\frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1+s}{2}\right)}\frac{\chi(s)}{s-w}\,ds=\int_0^1 g(\rho)\rho^{-w}\,d\rho=\mathfrak{G}(1-w)\quad(u<k).$$

Перенося путь интегрирования в прямую $\sigma=k'<u$, находим

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{k'-i\infty}^{k'+i\infty}\frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1+s}{2}\right)}\frac{\chi(s)}{s-w}\,ds=\mathfrak{G}(1-w)-\frac{\Gamma\left(\frac{w}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1+w}{2}\right)}\chi(w).$$

Левая часть регулярна для $u>k'$ и, значит, для $u>0$ (так как k' — произвольное число, лежащее между нулём и u). Поэтому регулярна для $u>0$ и правая часть, а значит, и разность

$$\chi(w)-\frac{\Gamma\left(\frac{1+w}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{w}{2}\right)}\mathfrak{G}(1-w).$$

Следовательно (при выполнении соответствующих условий на бесконечности),

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{k-i\infty}^{k+i\infty}\left(\chi(s)-\frac{\Gamma\left(\frac{1+s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}\mathfrak{G}(1-s)\right)\frac{ds}{s-w}=0\quad(u<k).\tag{11.16.10}$$

Аналогично, умножая (11.16.9) на ρ^{-w}, где $\sigma-u<0$, и интегрируя от 1 до ∞, мы получаем

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{k'-i\infty}^{k'+i\infty}\frac{\Gamma\left(1-\frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)}\frac{\chi(s)}{s-w}\,ds=0\qquad(u>k').$$

Как и выше заключаем, что $\dfrac{\Gamma\left(1-\frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)}\chi(s)$, а значит, и $\chi(s)$, регулярна для $\sigma < 1$. Поэтому

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{k'-i\infty}^{k'+i\infty}\frac{\chi(s)}{s-w}\,ds = 0 \qquad (u > k').$$

Переносця путь интегрирования с прямой $\sigma = k'$ в прямую $\sigma = k > u$, находим

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{k-i\infty}^{k+i\infty}\frac{\chi(s)}{s-w}\,ds = \chi(w) \qquad (u < k). \tag{11.16.11}$$

Из (11.16.10) и (11.16.11) получаем

$$\chi(w) = \frac{1}{2\pi i}\int_{k-i\infty}^{k+i\infty}\frac{\Gamma\left(\frac{1+s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}\,\frac{\mathfrak{G}(1-s)}{s-w}\,ds \qquad (u < k), \tag{11.16.12}$$

а тогда (11.16.7) и формула обращения Меллина дают искомое решение $f(x)$.

Если $g(\rho) = v_0 = \text{const}$, то

$$\mathfrak{G}(1-s) = v_0\int_0^1 \rho^{-s}\,d\rho = \frac{v_0}{1-s}\,,$$

и

$$\chi(w) = \frac{v_0}{2\pi i}\int_{k-i\infty}^{k+i\infty}\frac{\Gamma\left(\frac{1+s}{2}\right)}{(1-s)\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}\,\frac{ds}{s-w} = \frac{v_0}{\sqrt{\pi}\,(1-w)}$$

(благодаря полюсу в $s = 1$). Поэтому

$$\mathfrak{F}(s) = \frac{v_0}{\sqrt{\pi}\,(1-s)}\,\frac{2^s\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)} = \frac{v_0\,2^{s-1}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{3-s}{2}\right)}\,,$$

и, в силу (7.9.6),

$$f(u) = \frac{2v_0}{\pi}\,\frac{\sin u}{u}\,. \tag{11.16.13}$$

Отсюда

$$v = \frac{2v_0}{\pi}\int_0^\infty e^{-zu}J_0(\rho u)\,\frac{\sin u}{u}\,du =$$
$$= \frac{2v_0}{\pi}\arcsin\frac{2}{\sqrt{(\rho-1)^2+z^2}+\sqrt{(\rho+1)^2+z^2}}$$

— решение, найденное Вебером.

Аналогичным образом может быть решена пара уравнений[1]

$$\int_0^\infty y^\alpha f(y) J_\nu(xy)\, dy = g(x) \qquad (0 < x < 1), \tag{11.16.14}$$

$$\int_0^\infty f(y) J_\nu(xy)\, dy = 0 \qquad (x > 1). \tag{11.16.15}$$

Они эквивалентны уравнениям

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{k-i\infty}^{k+i\infty} \frac{\Gamma\left(\dfrac{1+\nu+s}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{1+\nu-\alpha+s}{2}\right)} \chi(s) x^{s-1-\alpha}\, ds = g(x) \quad (0 < x < 1), \tag{11.16.16}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{k-i\infty}^{k+i\infty} \frac{\Gamma\left(\dfrac{1+\nu-s}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{1+\nu+\alpha-s}{2}\right)} \chi(s) x^{s-1}\, ds = 0 \qquad (x > 1), \tag{11.16.17}$$

где $\mathfrak{F}(s) = \dfrac{2^{s-\alpha}\Gamma\left(\dfrac{1+\nu+s}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{1+\nu+\alpha-s}{2}\right)} \chi(s)$.

Умножая (11.16.16) на $x^{\alpha-w}$, где $\sigma - u > 0$, и интегрируя от 0 до 1, мы получаем

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{k-i\infty}^{k+i\infty} \frac{\Gamma\left(\dfrac{1+\nu+s}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{1+\nu-\alpha+s}{2}\right)} \frac{\chi(s)}{s-w}\, ds = \int_0^1 g(x) x^{\alpha-w}\, dx = \mathfrak{G}(\alpha - w + 1).$$

Перенося путь интегрирования в прямую $\sigma = k' < u$, находим

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{k'-i\infty}^{k'+i\infty} \frac{\Gamma\left(\dfrac{1+\nu+s}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{1+\nu-\alpha+s}{2}\right)} \frac{\chi(s)}{s-w}\, ds = \\ = \frac{\Gamma\left(\dfrac{1+\nu+w}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{1+\nu-\alpha+w}{2}\right)} \chi(w) + \mathfrak{G}(\alpha + 1 - w).$$

Поэтому правая часть регулярна для $u > 0$, и мы выводим, как выше, что

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{k-i\infty}^{k+i\infty} \left(\chi(s) - \frac{\Gamma\left(\dfrac{1+\nu-\alpha+s}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{1+\nu+s}{2}\right)} \mathfrak{G}(\alpha+1-s)\right) \frac{ds}{s-w} = 0 \quad (u < k).$$

С другой стороны, из (11.16.17), как и раньше, следует (11.16.11).

[1] См. King (1).

Таким образом,

$$\chi(w)=\frac{1}{2\pi i}\int_{k-i\infty}^{k+i\infty}\frac{\Gamma\left(\dfrac{1+\nu-\alpha+s}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{1+\nu+s}{2}\right)}\,\frac{\mathfrak{G}(\alpha+1-s)}{s-w}\,ds=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{k-i\infty}^{k+i\infty}\frac{\Gamma\left(\dfrac{1+\nu-\alpha+s}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{1+\nu+s}{2}\right)}\,ds\int_0^1 g(\lambda)\lambda^{\alpha-s}\,d\lambda\int_0^1 \mu^{s-w-1}\,d\mu=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_0^1 g(\lambda)\lambda^{\alpha}\,d\lambda\int_0^1 \mu^{-w-1}\,d\mu\int_{k-i\infty}^{k+i\infty}\frac{\Gamma\left(\dfrac{1+\nu-\alpha+s}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{1+\nu+s}{2}\right)}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{-s}ds=$$

$$=\frac{2}{\Gamma\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)}\int_0^1 g(\lambda)\lambda^{\alpha}\,d\lambda\int_\lambda^1 \mu^{-w-1}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{\nu-\alpha+1}\left(1-\frac{\lambda^2}{\mu^2}\right)^{\frac{\alpha}{2}-1}d\mu=$$

$$=\frac{2}{\Gamma\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)}\int_0^1 \mu^{-w-1}\,d\mu\int_0^\mu g(\lambda)\lambda^{\alpha}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{\nu-\alpha+1}\left(1-\frac{\lambda^2}{\mu^2}\right)^{\frac{\alpha}{2}-1}d\lambda=$$

$$=\frac{2}{\Gamma\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)}\int_0^1 \mu^{\alpha-w}\,d\mu\int_0^1 g(\rho\mu)\rho^{\nu+1}(1-\rho^2)^{\frac{\alpha}{2}-1}\,d\rho.$$

Следовательно,

$$f(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{k-i\infty}^{k+i\infty}\frac{2^{s-\alpha}\Gamma\left(\dfrac{1+\nu+s}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{1+\nu+\alpha-s}{2}\right)}\,\chi(s)x^{-s}\,ds=$$

$$=\frac{1}{\pi i\,\Gamma\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)}\int_0^1 \mu^{\alpha}\,d\mu\int_0^1 g(\rho\mu)\rho^{\nu+1}(1-\rho^2)^{\frac{\alpha}{2}-1}\,d\rho\,\times$$

$$\times\int_{k-i\infty}^{k+i\infty}\frac{2^{s-\alpha}\Gamma\left(\dfrac{1+\nu+s}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{1+\nu+\alpha-s}{2}\right)}\,(\mu x)^{-s}\,ds=$$

$$=\frac{(2x)^{1-\frac{\alpha}{2}}}{\Gamma\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)}\int_0^1 \mu^{1+\frac{\alpha}{2}}J_{\nu+\frac{\alpha}{2}}(\mu x)\,d\mu\int_0^1 g(\rho\mu)\rho^{\nu+1}(1-\rho^2)^{\frac{\alpha}{2}-1}d\rho.$$

Для существования решения в этой форме мы должны предположить, что $\alpha>0$; предыдущие же уравнения соответствуют случаю $\nu=0$, $\alpha=-1$.

Например, если $\alpha=1$, $\nu=0$, $g(x)=1$, то решение есть

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\left(\frac{\sin x}{x^2}-\frac{\cos x}{x}\right).$$

11.17. Метод Хопфа и Винера[1]. Теперь мы изложим метод Хопфа и Винера решения однородного уравнения

$$f(x) = \int_0^\infty k(x-y)f(y)\,dy \qquad (0 < x < \infty). \tag{11.17.1}$$

Он опирается на следующую лемму.

Лемма. *Пусть $\varphi(w)$ — аналитическая функция, регулярная в полосе $-1 < v < 1$, и пусть*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(u+iv)|^2\,du < K = K(\alpha)$$

в каждой внутренней полосе $-1 < -\alpha \leqslant v \leqslant \alpha < 1$ (так что, в частности, в силу леммы § 5.4, $\varphi(u+iv) \to 0$ при $u \to \pm\infty$ равномерно в каждой внутренней полосе).

В каждой внутренней полосе $-1 < -\beta \leqslant v \leqslant \beta < 1$ функция $1-\varphi(w)$ имеет только конечное число нулей. Тогда, если $w_1, \ldots, w_n$ — эти нули, то

$$1-\varphi(w) = \frac{\varphi_1(w)}{\varphi_2(w)}\,(w-w_1)\ldots(w-w_n), \tag{11.17.2}$$

где функция $\varphi_1(w)$ регулярна и не имеет нулей в полуплоскости $v \leqslant \beta$, функция $\varphi_2(w)$ регулярна и не имеет нулей в полуплоскости $v \geqslant -\beta$, и в соответствующих полуплоскостях регулярности

$$|\varphi_1(w)| > K|w|^{-\frac{n}{2}-k}, \qquad |\varphi_2(w)| > K|w|^{\frac{n}{2}-k}, \tag{11.17.3}$$

где k — положительное целое число, зависящее от φ.

Пусть

$$\psi(w) = \bigl[1-\varphi(w)\bigr]\,\frac{(w^2+1)^{n/2}}{(w-w_1)\ldots(w-w_n)}\left(\frac{w-i}{w+i}\right)^k,$$

где $(w^2+1)^{n/2}$ — та однозначная ветвь в полосе $-\beta \leqslant v \leqslant \beta$, которая ведёт себя для больших w как w^n, а k — пока ещё не определённое целое число. Так как $\psi(w) \to 1$ при $u \to \pm\infty$, то мы можем выбрать k так, чтобы изменение $\ln\psi(w)$ вдоль всей указанной полосы было равно нулю. Фиксируя k, обозначим через $\ln\psi(w)$ ветвь, стремящуюся к нулю при $u \to \pm\infty$. Так как

$$\psi(w) = \bigl[1-\varphi(w)\bigr]\left\{1 + O\Bigl(\frac{1}{|w|}\Bigr)\right\},$$

[1] Wiener and Hopf (1). Хопф, Radiative Equilibrium, Chap. IV; Винер и Пэли, Преобразование Фурье, гл. IV.

то $|\ln\psi(w)|$ принадлежит к L^2 равномерно в полосе. Поэтому

$$\ln\psi(w) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-i\gamma-\infty}^{-i\gamma+\infty}\frac{\ln\psi(z)}{z-w}\,dz - \frac{1}{2\pi i}\int_{i\gamma-\infty}^{i\gamma+\infty}\frac{\ln\psi(z)}{z-w}\,dz = \\ = \chi_1(w)-\chi_2(w) \qquad (-\gamma<v<\gamma),$$

где $0<\beta<\gamma<1$, а $\gamma-\beta$ столь мало, что ни один нуль функции $\psi(w)$ не лежит в полосе $\beta<v\leqslant\gamma$. Но $\chi_1(w)$ регулярна для $v>-\gamma$ и регулярна и ограничена для $v\geqslant-\beta$; аналогично, $\chi_2(w)$ регулярна и ограничена для $v\leqslant\beta$. Так как

$$1-\varphi(w) = \frac{e^{\chi_1(w)}}{e^{\chi_2(w)}}\,\frac{(w-i)^{-\frac{n}{2}-k}}{(w+i)^{\frac{n}{2}-k}}\,(w-w_1)\ldots(w-w_n),$$

то отсюда следует утверждаемый результат.

Предположим теперь, что $f(x)$ удовлетворяет уравнению (11.17.1) для *всех* вещественных x, и пусть $k(x)=O(e^{-|x|})$, или, более обще, пусть $e^{\lambda|x|}k(x)\in L^2(-\infty,\infty)$ для всех $\lambda<1$. Предположим также, что

$$f(x)=O(e^{c|x|}) \qquad (0<c<1).$$

Тогда функция $F_+(w)$ регулярна для $v>c$, функция $F_-(w)$ регулярна для $v<-c$ и $K(w)$ регулярна для $-1<v<1$. Но

$$\int_0^\infty k(x-y)f(y)\,dy = \int_{-\infty}^\infty k(x-y)f_1(y)\,dy, \quad \text{где} \quad f_1(y)=\begin{cases} f(y) & (y>0),\\ 0 & (y<0),\end{cases}$$

или, в силу теоремы 64,

$$\int_0^\infty k(x-y)f(y)\,dy = \int_{ia-\infty}^{ia+\infty} e^{-ixw}F_+(w)K(w)\,dw \qquad (c<a<1).$$

Поэтому уравнение (11.17.1) даёт

$$\int_{ia-\infty}^{ia+\infty} e^{-ixw}F_+(w)\left[1-\sqrt{2\pi}\,K(w)\right]dw + \int_{-ia-\infty}^{-ia+\infty} e^{-ixw}F_-(w)\,dw = 0.$$

Следовательно, подынтегральные выражения обоих интегралов регулярны в полосе $-a\leqslant v\leqslant a$, и в этой полосе

$$F_+(w)\left[1-\sqrt{2\pi}\,K(w)\right]+F_-(w)=0.$$

Если $w_1,\ \ldots,\ w_n$ — нули функции $1-\sqrt{2\pi}\,K(w)$ в полосе $-a\leqslant v\leqslant a$, то, в силу леммы,

$$F_+(w)\,\frac{\varphi_1(w)}{\varphi_2(w)}\,(w-w_1)\ldots(w-w_n)+F_-(w)=0,$$

где φ_1 и φ_2 обладают указанными в лемме свойствами. Это равенство можно записать в виде

$$\frac{F_+(w)}{\varphi_2(w)}(w-w_1)\ldots(w-w_n) = -\frac{F_-(w)}{\varphi_1(w)},$$

где левая часть регулярна для $v \geqslant -a$, а правая — для $v \leqslant a$. Следовательно, обе части последнего равенства представляют целую функцию. В силу (11.17.3), эта функция должна быть полиномом, степень которого не превышает $\frac{n}{2} - k$. Таким образом,

$$F_+(w) = \frac{\varphi_2(w)P(w)}{(w-w_1)\ldots(w-w_n)},$$

где $P(w)$ — полином, и, следовательно, функция

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{ia-\infty}^{ia+\infty} e^{-ixw}\frac{\varphi_2(w)P(w)}{(w-w_1)\ldots(w-w_n)}\,dw$$

удовлетворяет уравнению (11.17.1) (и обращается в нуль для $x<0$).

В качестве простого примера пусть

$$k(x) = \lambda e^{-|x|} \qquad \left(0<\lambda<\frac{1}{2}\right),$$

$$K(w) = \frac{\lambda}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|+ixw}\,dx = \frac{2\lambda}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{1+w^2},$$

$$1-\sqrt{2\pi}\,K(w) = 1-\frac{2\lambda}{1+w^2} = \frac{w^2-(2\lambda-1)}{w^2+1}.$$

Нули этой функции суть $w = \pm\sqrt{2\lambda-1} = w_1, w_2$, и

$$1-\sqrt{2\pi}\,K(w) = \frac{(w-w_1)(w-w_2)}{(w-i)(w+i)},$$

$$\varphi_1(w) = \frac{1}{w-i}, \quad \varphi_2(w) = w+i,$$

$$F_+(w) = \frac{w+i}{w^2-2\lambda+1}P(w), \quad P(w) = \text{const},$$

$$f(x) = \frac{C}{\sqrt{2\pi}}\int_{ia-\infty}^{ia+\infty} e^{-ixw}\frac{w+i}{w^2-2\lambda+1}\,dw =$$
$$= C'\left(e^{x\sqrt{1-2\lambda}}\frac{1+\sqrt{1-2\lambda}}{2\sqrt{1-2\lambda}} - e^{-x\sqrt{1-2\lambda}}\frac{1-\sqrt{1-2\lambda}}{2\sqrt{1-2\lambda}}\right).$$

11.18. Уравнение А. Диксона. Аналогичную задачу представляет уравнение[1]

$$f(x) = g(x) + \lambda\int_0^1 \frac{f(t)}{x+t}\,dt. \qquad (11.18.1)$$

[1] A.C. Dixon (2).

Формальным его решением служит функция

$$f(x) = g(x) + \lambda \int_0^1 g(t)\chi(x,t)\,dt, \tag{11.18.2}$$

где $\chi(x,t)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$\chi(x,t) = \frac{1}{x+t} + \lambda \int_0^1 \frac{\chi(y,t)}{x+y}\,dy. \tag{11.18.3}$$

Подстановка $x = e^{-\xi}$, $y = e^{-\eta}$, $t = e^{-\beta}$ приводит его к виду

$$e^{-\xi/2}\chi(e^{-\xi}, e^{-\beta}) = \frac{e^{-\xi/2}}{e^{-\xi}+e^{-\beta}} + \lambda \int_0^\infty \frac{e^{-\eta/2}\chi(e^{-\eta}, e^{-\beta})}{2\operatorname{ch}\dfrac{\xi-\eta}{2}}\,d\eta,$$

или, при обозначении $e^{-\xi/2}\chi(e^{-\xi}, e^{-\beta}) = \varphi(\xi)$, — к виду

$$\varphi(\xi) = \frac{e^{-\xi/2}}{e^{-\xi}+e^{-\beta}} + \lambda \int_0^\infty \frac{\varphi(\eta)}{2\operatorname{ch}\dfrac{\xi-\eta}{2}}\,d\eta. \tag{11.18.4}$$

Предположим, что $\varphi(\xi) = O(e^{c|\xi|})$, где $0<c<\frac12$. Пусть $c<a<\frac12$. Тогда (11.18.4) эквивалентно уравнению

$$\int_{ia-\infty}^{ia+\infty} e^{ixw}\,\Phi_+(w)\,dw + \int_{-ia-\infty}^{-ia+\infty} e^{ixw}\,\Phi_-(w)\,dw =$$
$$= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_{ib-\infty}^{ib+\infty} e^{ixw}\,\frac{e^{iw\beta+\beta/2}}{\operatorname{ch}\pi w}\,dw + \pi\lambda \int_{ia-\infty}^{ia+\infty} e^{ixw}\,\frac{\Phi_+(w)}{\operatorname{ch}\pi w}\,dw,$$

где $-\frac12<b<\frac12$. Мы можем положить $b = a$. Тогда получаем, что

$$\Phi_+(w)\left(1 - \frac{\pi\lambda}{\operatorname{ch}\pi w}\right) - \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{e^{iw\beta+\beta/2}}{\operatorname{ch}\pi w} \tag{11.18.5}$$

и $-\Phi_-(w)$ регулярны и совпадают в полосе $-a < v < a$. Следовательно, функция (11.18.5) регулярна для $v<\frac12$, а значит, $\Phi_+(w)$ регулярна для $v<\frac12$, за исключением, возможно, простых полюсов и нулей функции $\operatorname{ch}\pi w - \pi\lambda$. Предположим, например, что $\pi\lambda = \sin\pi\alpha$, где $0<\alpha<\frac12$. Тогда $\operatorname{ch}\pi w - \pi\lambda$ имеет нули в

$$\left(\frac12 - \alpha\right)i,\ \left(-\frac32 - \alpha\right)i,\ \ldots\ \left(-\frac12 + \alpha\right)i,\ \left(-\frac52 + \alpha\right)i,\ \ldots\ ,$$

и потому

$$\Psi(w) = \frac{\Phi_+(w)}{\Gamma\left(-\dfrac14 + \dfrac{\alpha - iw}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac14 - \dfrac{\alpha+iw}{2}\right)}$$

регулярна для $v<\frac12$.

Для погашения в (11.18.5) полюсов функции $\dfrac{1}{\operatorname{ch}\pi w}$ мы должны также иметь

$$\Phi_+(w) = -\frac{e^{iw\beta+\beta/2}}{\lambda\sqrt{2\pi}}$$

в $w = -\frac{1}{2}\,i, \ldots, -\left(n+\frac{1}{2}\right)i, \ldots$ Поэтому

$$\Psi\left\{-\left(n+\frac{1}{2}\right)i\right\} = -\frac{1}{\lambda\sqrt{2\pi}}\,\frac{e^{(n+1)\beta}}{\Gamma\left(\dfrac{\alpha-n}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{1-\alpha-n}{2}\right)} = a_n.$$

Простейшей функцией, обладающей этими свойствами, является

$$\Psi(w) = \frac{i}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-iw\right)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\,\frac{a_n}{w+\left(n+\frac{1}{2}\right)i}\,,$$

и легко проверить, что она действительно даёт решение.

Разность между двумя решениями уравнения (11.18.4) удовлетворяет уравнению

$$\varphi(\xi) = \lambda\int_0^{\infty}\frac{\varphi(\eta)}{2\operatorname{ch}\dfrac{\xi-\eta}{2}}\,d\eta, \tag{11.18.6}$$

имеющему вид (11.17.1). Здесь

$$\begin{aligned}
1-\sqrt{2\pi}\,K(w) &= 1-\frac{\pi\lambda}{\operatorname{ch}\pi w} = \\
&= \frac{2\pi\Gamma\left(\frac{1}{2}-iw\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+iw\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{4}-\frac{\alpha-iw}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}-\frac{\alpha+iw}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}+\frac{\alpha+iw}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}+\frac{\alpha-iw}{2}\right)} = \\
&= \frac{\varphi_1(w)}{\varphi_2(w)}\left(\frac{1}{4}-\frac{\alpha-iw}{2}\right)\left(\frac{1}{4}-\frac{\alpha+iw}{2}\right),
\end{aligned}$$

где функции

$$\varphi_1(w) = \frac{2\pi\Gamma\left(\frac{1}{2}+iw\right)}{\Gamma\left(-\frac{3}{4}-\frac{\alpha-iw}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}+\frac{\alpha+iw}{2}\right)}\,,$$

$$\varphi_2(w) = \frac{\Gamma\left(-\frac{3}{4}-\frac{\alpha+iw}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}+\frac{\alpha-iw}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-iw\right)}$$

обладают свойствами, указанными в § 11.17.

11.19. Задача о лучистом равновесии[1]**.** Рассмотрим среду, состоящую из плоских слоёв, перпендикулярных к оси x, неограниченно простирающуюся в положительную сторону от своей границы $x = 0$.

Пусть I (функция от x и θ) — интенсивность излучения всех длин волн в произвольной точке в направлении, составляющем угол θ с отрицательным направлением оси x. Пусть ρ — плотность в произвольной точке и k — коэффициент поглощения на единицу массы, предполагаемый не зависящим от длины волны. Пусть B (функция от x) — интенсивность излучения абсолютно чёрного тела, соответствующая температуре вещества в плоскости x.

Из излучения в телесном угле ω единица объёма поглощает энергию

$$k\rho \iint I\,d\omega$$

и излучает энергию

$$k\rho \iint B\,d\omega = k\rho B\omega.$$

Рассмотрим узкий круговой цилиндр с площадью поперечного сечения a, ось которого составляет с отрицательной полуосью x угол θ и имеет концы в x и x'. Энергия, излучаемая из конца x' через площадку, лежащую в направлении оси цилиндра и настолько удалённую, что из левой точки цилиндра она видна приближённо под одним и тем же малым телесным углом ω, есть $I(x', \theta)a\omega$. Она составляется из излучения $I(x, \theta)a\omega$ конца x и излучения

$$\int k\rho(B - I)\omega\,dv$$

внутренней части цилиндра, где v — элемент объёма.

В пределе при $a \to 0$, $\omega \to 0$ мы получаем

$$I(x', \theta) = I(x, \theta) - \int_x^{x'} \frac{k\rho(B - I)}{\cos\theta}\,d\xi,$$

и, переходя к пределу по $x' \to x$,

$$\frac{\partial I}{\partial x} = \frac{k\rho(I - B)}{\cos\theta}\,. \tag{11.19.1}$$

Для равновесия излучения энергия, поглощаемая единицей объёма со всех направлений, должна быть равна энергии, испускаемой по всем направлениям. Это даёт

$$4\pi k\rho B = k\rho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} I \sin\theta\,d\theta = 2\pi k\rho \int_0^{\pi} I \sin\theta\,d\theta,$$

[1] E.A. Milne (1), Hopf (3); H o p f, Radiative Equilibrium.

т.е.

$$2B = \int_0^{\pi} I \sin\theta \, d\theta. \tag{11.19.2}$$

Подстановка

$$\tau = \int_0^{x} k\rho \, dx$$

преобразует (11.19.1) в

$$\frac{\partial I}{\partial \tau} = \frac{I - B}{\cos\theta}\,. \tag{11.19.3}$$

Следовательно,

$$I = e^{\frac{\tau}{\cos\theta}} \left(K - \int_0^{\tau} e^{-\frac{t}{\cos\theta}} \, \frac{B(t)}{\cos\theta} \, dt \right).$$

Граничное условие состоит в том, что извне на рассматриваемую среду не падает излучения, т.е. что $I = 0$ для $x = 0$, $\dfrac{\pi}{2} < \theta \leqslant \pi$. Отсюда

$$I = -e^{\frac{\tau}{\cos\theta}} \int_0^{\tau} e^{-\frac{t}{\cos\theta}} \, \frac{B(t)}{\cos\theta} \, dt \qquad \left(\frac{\pi}{2} < \theta \leqslant \pi \right). \tag{11.19.4}$$

Для $0 < \theta \leqslant \dfrac{\pi}{2}$ мы выбираем K так, чтобы I не была экспоненциально большой при $\tau \to \infty$, т.е. получаем

$$I = e^{\frac{\tau}{\cos\theta}} \int_{\tau}^{\infty} e^{-\frac{t}{\cos\theta}} \, \frac{B(t)}{\cos\theta} \, dt \qquad \left(0 < \theta \leqslant \frac{\pi}{2} \right).$$

Подстановка этих результатов в (11.19.2) даёт

$$\begin{aligned} B(\tau) = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} e^{\frac{\tau}{\cos\theta}} \, \sin\theta \, d\theta \int_{\tau}^{\infty} e^{-\frac{t}{\cos\theta}} \, \frac{B(t)}{\cos\theta} \, dt - \\ - \frac{1}{2} \int_{\pi/2}^{\pi} e^{\frac{\tau}{\cos\theta}} \, \sin\theta \, d\theta \int_0^{\tau} e^{-\frac{t}{\cos\theta}} \, \frac{B(t)}{\cos\theta} \, dt = \\ = \frac{1}{2} \int_{\tau}^{\infty} B(t) \, dt \int_0^{\pi/2} e^{\frac{\tau - t}{\cos\theta}} \, \operatorname{tg}\theta \, d\theta - \frac{1}{2} \int_0^{\tau} B(t) \, dt \int_{\pi/2}^{\pi} e^{\frac{\tau - t}{\cos\theta}} \, \operatorname{tg}\theta \, d\theta = \\ = \int_0^{\infty} k(\tau - t) B(t) \, dt, \end{aligned} \tag{11.19.5}$$

где

$$k(x) = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} e^{-\frac{|x|}{\cos\theta}} \, \operatorname{tg}\theta \, d\theta = \frac{1}{2} \int_{|x|}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}}{\lambda} \, d\lambda.$$

Мы можем опереться теперь на теорию, изложенную в § 11.17. При $v < 1$ мы получаем

$$K(w)=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{ixw}\,dx\int_{|x|}^{\infty}\frac{e^{-\lambda}}{\lambda}\,d\lambda=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty}\cos xw\,dx\int_{x}^{\infty}\frac{e^{-\lambda}}{\lambda}\,d\lambda=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,w}\int_{0}^{\infty}\frac{e^{-\lambda}}{\lambda}\,\sin w\lambda\,d\lambda=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{\operatorname{arctg}w}{w},$$

так что

$$1-\sqrt{2\pi}\,K(w)=1-\frac{\operatorname{arctg}w}{w}.$$

Эта функция имеет двухкратный нуль в начале и ни одного другого нуля в полосе $-1<v<1$. Поэтому мы полагаем, в обозначениях § 11.17,

$$\psi(w)=\left(1-\frac{\operatorname{arctg}w}{w}\right)\frac{w^2+1}{w^2},$$

без всякого дополнительного множителя. Следовательно,

$$\chi_2(w)=\frac{1}{2\pi i}\int_{i\gamma-\infty}^{i\gamma+\infty}\ln\left\{\left(1-\frac{\operatorname{arctg}z}{z}\right)\frac{z^2+1}{z^2}\right\}\frac{dz}{z-w}\qquad(v<\gamma).$$

Далее, $P(w)=\alpha+\beta w$, где α и β — постоянные, и решение есть

$$B(\tau)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{ia-\infty}^{ia+\infty}e^{-i\tau w+\chi_2(w)}\,\frac{\alpha+\beta w}{w^2}\,dw.$$

11.20. Предельная форма уравнения Милна[1]. Полагая

$$\int_0^x B(\tau)\,d\tau=f(x),$$

можно переписать уравнение (11.19.5) в виде

$$f'(x)=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}f'(t)\,dt\int_{|x-t|}^{\infty}\frac{e^{-y}}{y}\,dy=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\frac{e^{-y}}{y}\,dy\int_{\max(0,x-y)}^{x+y}f'(t)\,dt=$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^{x}\frac{e^{-y}}{y}\big[f(x+y)-f(x-y)\big]\,dy+\frac{1}{2}\int_x^{\infty}\frac{e^{-y}}{y}f(x+y)\,dy. \tag{11.20.1}$$

Для больших значений x это приближённо совпадает с уравнением

$$f'(x)=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\frac{e^{-y}}{y}\,\big[f(x+y)-f(x-y)\big]\,dy. \tag{11.20.2}$$

Т е о р е м а 155. *Если $f(x)=O(e^{c|x|})$, где $0<c<1$, и обе части уравнения* (11.20.2) *конечны и равны для каждого x, то $f(x)$ есть полином второй степени.*

[1] E.A. Milne (1), Hardy and Titchmarsh (1), (2). См. также Hopf (2).

Доказательство. Формальный ход доказательства аналогичен использованному в § 11.2. Имеем

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{ia-\infty}^{ia+\infty} e^{-ixw}\, F_+(w)\, dw + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{ib-\infty}^{ib+\infty} e^{-ixw}\, F_-(w)\, dw, \tag{11.20.3}$$

где $c < a < 1$, $-1 < b < -c$. Поэтому

$$f(x+y) - f(x-y) = -\frac{2i}{\sqrt{2\pi}} \int_{ia-\infty}^{ia+\infty} e^{-ixw}\, F_+(w) \sin yw\, dw - \ldots ,$$

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{e^{-y}}{y} \big[f(x+y) - f(x-y)\big]\, dy = \\ &= -\frac{2i}{\sqrt{2\pi}} \int_{ia-\infty}^{ia+\infty} e^{-ixw}\, F_+(w)\, dw \int_0^\infty \frac{e^{-y}}{y} \sin yw\, dy - \ldots = \\ &= -\frac{2i}{\sqrt{2\pi}} \int_{ia-\infty}^{ia+\infty} e^{-ixw}\, F_+(w) \operatorname{arctg} w\, dw - \ldots , \end{aligned} \tag{11.20.4}$$

где многоточием во всех случаях указывается соответствующий член, содержащий $F_-(w)$. Далее,

$$f'(x) = -\frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{ia-\infty}^{ia+\infty} e^{-ixw}\, F_+(w) w\, dw - \ldots \tag{11.20.5}$$

Поэтому (11.20.2) даёт

$$\int_{ia-\infty}^{ia+\infty} e^{-ixw}\, F_+(w) \big[w - \operatorname{arctg} w\big]\, dw + \ldots = 0.$$

Отсюда, в силу теоремы 141, следует, что $F_+(w)$ и $F_-(w)$ регулярны для $b \leqslant v \leqslant a$, за исключением, возможно, полюса третьего порядка в начале координат, соответствующего трёхкратному нулю функции $w - \operatorname{arctg} w$; и $F_+(w) = -F_-(w)$. Вычисление правой части формулы (11.20.3) с помощью теории вычетов показывает, что $f(x)$ есть полином второй степени.

Для обоснования проделанного вывода мы докажем прежде всего, что *функция* $e^{-c'|x|} f'(x)$ *принадлежит к* $L^2(-\infty, \infty)$ *для всякого* $c' > c$. Действительно, (11.20.2) даёт

$$\begin{aligned} f'(x) = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{f(x+y) - f(x-y)}{y}\, dy + \\ &+ \frac{1}{2} \left(\int_0^1 \frac{e^{-y} - 1}{y} \big[f(x+y) - f(x-y)\big]\, dy + \right. \\ &\left. + \int_1^\infty \frac{e^{-y}}{y} \big[f(x+y) - f(x-y)\big]\, dy \right) = \frac{\varphi(x)}{2} + \frac{\psi(x)}{2}\, . \end{aligned}$$

Если $|f(x)| \leqslant Ke^{c|x|}$, то

$$|\psi(x)| \leqslant K \int_0^1 \left(e^{c|x+y|} + e^{c|x-y|}\right) dy + \int_1^\infty e^{-y}\left(e^{c|x+y|} + e^{c|x-y|}\right) dy < Ke^{c|x|}.$$

Мы можем представить $\varphi(x)$ в виде

$$\varphi(x) = \int_{x-1}^{x+1} \frac{f(t)}{t-x}\, dt,$$

где интеграл понимается в смысле главного значения при $t = x$. Используем теперь теорию сопряжённых функций. Пусть

$$\varphi_1(x) = \int_{\xi-2}^{\xi+2} \frac{f(t)}{t-x}\, dt.$$

Тогда, в силу (5.3.3),

$$\int_{\xi-1}^{\xi+1} |\varphi_1(x)|^2\, dx \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi_1(x)|^2\, dx = \pi^2 \int_{\xi-2}^{\xi+2} |f(t)|^2\, dt.$$

Далее, для $\xi - 1 < x < \xi + 1$,

$$|\varphi_1(x) - \varphi(x)| \leqslant \left| \int_{\xi-2}^{x-1} \frac{f(t)}{t-x}\, dt \right| + \left| \int_{x+1}^{\xi+2} \frac{f(t)}{t-x}\, dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\int_{\xi-2}^{x-1} \frac{dt}{(t-x)^2} \cdot \int_{\xi-2}^{x-1} |f(t)|^2\, dt} + \sqrt{\int_{x+1}^{\xi+2} \frac{dt}{(t-x)^2} \cdot \int_{x+1}^{\xi+2} |f(t)|^2\, dt} <$$

$$< A \sqrt{\int_{\xi-2}^{\xi+2} |f(t)|^2\, dt}.$$

В совокупности это даёт

$$\int_{\xi-1}^{\xi+1} |\varphi(x)|^2\, dx < A \int_{\xi-2}^{\xi+2} |f(x)|^2\, dx < Ke^{2c|\xi|}.$$

Но в таком случае

$$\int_{\xi-1}^{\xi+1} |f'(x)|^2\, dx < Ke^{2c|\xi|},$$

$$\int_{\xi-1}^{\xi+1} e^{-2c'|x|} |f'(x)|^2\, dx < Ke^{2(c-c')|\xi|},$$

откуда и следует утверждаемый результат.

Теперь заключаем, что интегралы (11.20.5) при $a > c$ существуют в смысле сходимости в среднеквадратичном, причём $wF_+(w)$ принадлежит к $L^2(ia - \infty, ia + \infty)$. Далее, обращение порядка интегрирования в (11.20.4) законно вследствие абсолютной сходимости. Действительно,

$\sin yw$ есть $O(e^{ay})$ для всех y и $O(|yw|)$ для малых $|yw|$, и тем самым $O(e^{ay}|yw|^{1/4})$ для всех y и w; интеграл же

$$\int_{ia-\infty}^{ia+\infty} |F_+(w)w^{1/4}\,dw| \int_0^\infty e^{(a-1)y}y^{-3/4}\,dy$$

сходится. Это завершает доказательство.

Более сложным методом доказано[1], что тот же результат сохраняет силу и при менее стеснительных ограничениях.

11.21. Уравнение Бейтмена[2]. Предположим, что функция $f(x)$ представима простым интегралом Фурье (1.1.7) не только в пределе, но и для некоторого значения λ (скажем, $\lambda = a$) — точно, т. е. что

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\,\frac{\sin a(x-y)}{x-y}\,dy \tag{11.21.1}$$

для заданного a и всех x.

Это — интегральное уравнение вида (11.2.1), однако условия § 11.2 здесь не выполнены, и решение принимает совершенно другой вид.

Предположим, что $f(x)\in L^2(-\infty,\infty)$. Пусть

$$g(x) = \frac{\sin ax}{x}, \qquad G(x) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{\pi}{2}} & (|x| < a), \\ 0 & (|x| > a). \end{cases}$$

Тогда (2.1.8) даёт

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\,\frac{\sin a(x-y)}{x-y}\,dy = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\int_{-a}^{a} e^{-ixt}F(t)\,dt. \tag{11.21.2}$$

Следовательно,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-a}^{a} e^{-ixt}F(t)\,dt, \tag{11.21.3}$$

т. е. $f(x)$ является тригонометрическим интегралом с конечными пределами. Обратно, если $f(x)$ имеет вид (11.21.3), где $F\in L^2$, то (11.21.1) следует из (11.21.2). Таким образом, имеем следующую теорему:

Теорема 156. *Для того, чтобы функция $f(x)$, принадлежащая к L^2, была решением уравнения* (11.21.1), *необходимо и достаточно, чтобы она была представима в виде* (11.21.3), *где $F\in L^2(-a,a)$.*

Однако, существуют простые решения уравнения (11.21.1), не принадлежащие к L^2; например, $\cos bx$ и $\sin bx$ являются решениями, если $-a<b<a$, и не являются решениями, если $|b|>|a|$. Следующая теорема охватывает эти решения.

[1] Hardy and Titchmarsh (9).

[2] Bateman (1), Hardy (2), Hardy and Titchmarsh (1), (2).

Т е о р е м а 157. *Пусть* $\dfrac{f(x)}{1+|x|} \in L^2(-\infty,\infty)$, *и пусть интегралы*

$$\int^{\to\infty} \frac{f(x)}{x} \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\, ax\,dx, \qquad \int_{\to-\infty} \frac{f(x)}{x} \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\, ax\,dx$$

существуют. Тогда, если $f(x)$ *удовлетворяет уравнению* (11.21.1), *она представима в виде*

$$f(x) = f(0) + x\int_{-a}^{a} e^{-ixu}\chi(u)\,du,$$

где $\chi(u) \in L^2(-a,a)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Легко проверить, что

$$\int_{-a}^{a} e^{-ixu}\big(e^{iyu} - e^{iya\operatorname{sgn} u}\big)\,du = \frac{2y}{x}\left(\frac{\sin a(x-y)}{x-y} - \frac{\sin ay}{y}\right).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} f(x) - f(0) &= \frac{1}{\pi}\int_{\to-\infty}^{\to\infty}\left(\frac{\sin a(x-y)}{x-y} - \frac{\sin ay}{y}\right) f(y)\,dy = \\ &= \frac{x}{2\pi}\int_{\to-\infty}^{\to\infty}\frac{f(y)}{y}\,dy\int_{-a}^{a} e^{-ixu}\big(e^{iyu} - e^{iya\operatorname{sgn} u}\big)\,du = \\ &= \frac{x}{2\pi}\int_{-a}^{a} e^{-ixu}\,du\int_{\to-\infty}^{\to\infty}\frac{f(y)}{y}\,\big(e^{iyu} - e^{iya\operatorname{sgn} u}\big)\,dy \end{aligned}$$

если только обращение порядка интегрирования допустимо. Но оно, очевидно, допустимо для части, распространённой на значения $|y|<1$, а также для части, содержащей $e^{iya\operatorname{sgn} u}$ и распространённой на значения $|y|>1$. Далее, $\dfrac{f(y)}{y} \in L^2(-\infty,-1)\cap L^2(1,\infty)$, и интегралы

$$\int_{-\infty}^{-1} e^{iyu}\,\frac{f(y)}{y}\,dy, \qquad \int_{1}^{\infty} e^{iyu}\,\frac{f(y)}{y}\,dy$$

существуют в смысле сходимости в среднеквадратичном. Для них обращение порядка интегрирования есть частный случай применения формулы Парсеваля. Интеграл по y представляет функцию, принадлежащую к $L^2(-a,a)$, и утверждение теоремы полностью доказано.

Т е о р е м а 158. *Пусть*

$$f(x) = f(0) + x\int_{-a}^{a} e^{-ixu}\chi(u)\,du,$$

где $\dfrac{\chi(u)}{a^2-u^2} \in L(-a,a)$. *Тогда*

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\lim_{\lambda\to\infty}\int_{-\lambda}^{\lambda} f(x-y)\,\frac{\sin ay}{y}\,dy.$$

Доказательство. Мы можем предполагать, что $f(0)=0$. Тогда

$$\int_{-\lambda}^{\lambda} f(x-y)\,\frac{\sin ay}{y}\,dy = \int_{-\lambda}^{\lambda}(x-y)\,\frac{\sin ay}{y}\,dy \int_{-a}^{a} e^{-i(x-y)u}\chi(u)\,du =$$
$$= x\int_{-a}^{a} e^{-ixu}\chi(u)\,du \int_{-\lambda}^{\lambda} e^{iyu}\,\frac{\sin ay}{y}\,dy - \int_{-a}^{a} e^{-ixu}\chi(u)\,du \int_{-\lambda}^{\lambda} e^{iyu}\,\sin ay\,dy.$$

Первый член стремится к $\pi x \int_{-a}^{a} e^{-ixu}\chi(u)\,du = \pi f(x)$ в силу ограниченной сходимости внутреннего интеграла. Второй член равен

$$-2i\int_{-a}^{a} e^{-ixu}\chi(u)\,du \int_{0}^{\lambda} \sin ay \sin yu\,dy =$$
$$= -i\int_{-a}^{a} e^{-ixu}\chi(u)\left(\frac{\sin\lambda(a-u)}{a-u} - \frac{\sin\lambda(a+u)}{a+u}\right)du,$$

что при заданных условиях стремится к нулю, когда $\lambda\to\infty$. Тем самым утверждение теоремы доказано.

Функция $f(x) = \sin bx \quad (|b| < a)$ подходит под условия обеих последних теорем; функция же $f(x) = \sin ax$ не является решением уравнения (11.21.1).

Далее, при $0 \leqslant m \leqslant n$ функция $\dfrac{J_n(x)}{x^m}$ является решением уравнения (11.21.1) с $a = 1$. Действительно,

$$\frac{J_n(x)}{x^m} = \frac{x^{n-m}}{2^n\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)} \int_{-1}^{1} e^{ixy}(1-y^2)^{n-\frac{1}{2}}\,dy =$$
$$= \frac{i^{n-m}}{2^n\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)} \int_{-1}^{1} e^{ixy}\,\frac{d^{n-m}}{dy^{n-m}}\,(1-y^2)^{n-\frac{1}{2}}\,dy.$$

11.22. Уравнение Кэптейна[1]**.** Рядом Неймана (для нечётной функции) называется разложение вида

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1}J_{2n+1}(x). \tag{11.22.1}$$

Если $f(x)$ задана, то коэффициенты a_{2n+1} могут быть формально получены следующим образом. Мы имеем (например, из (7.10.1))

$$\int_0^{\infty} \frac{J_{2m+1}(t)J_{2n+1}(t)}{t}\,dt = \begin{cases} \dfrac{1}{4n+2} & (m=n), \\ 0 & (m\neq n). \end{cases} \tag{11.22.2}$$

[1] Ватсон, § 16.4, Hardy and Titchmarsh (1).

Поэтому, умножая (11.22.1) на $\dfrac{J_{2m+1}(t)}{t}$ и интегрируя от 0 до ∞, получаем

$$a_{2m+1} = (4m+2)\int_0^\infty f(t)\,\frac{J_{2m+1}(t)}{t}\,dt. \tag{11.22.3}$$

Подстановка этих коэффициентов в ряд (11.22.1) даёт

$$\sum_{n=0}^\infty (4n+2)J_{2n+1}(x)\int_0^\infty f(t)\,\frac{J_{2n+1}(t)}{t}\,dt =$$
$$= \int_0^\infty \frac{f(t)}{t}\sum_{n=0}^\infty (4n+2)J_{2n+1}(x)J_{2n+1}(t)\,dt =$$

(в предположении, что можно интегрировать почленно)

$$= \frac{1}{2}\int_0^\infty f(t)\,dt\int_0^x \left(\frac{J_1(t-v)}{t-v}+\frac{J_1(t+v)}{t+v}\right)J_0(x-v)\,dv =$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^x J_0(x-v)\,dv\int_0^\infty f(t)\left(\frac{J_1(t-v)}{t-v}+\frac{J_1(t+v)}{t+v}\right)dt,$$

согласно § 11.12. Внутренний интеграл равен

$$\int_{-v}^\infty f(u+v)\,\frac{J_1(u)}{u}\,du + \int_v^\infty f(u-v)\,\frac{J_1(u)}{u}\,du =$$
$$= \int_0^\infty \big[f(u+v)+f(u-v)\big]\,\frac{J_1(u)}{u}\,du + 2\int_0^v f(v-u)\,\frac{J_1(u)}{u}\,du,$$

и последний член даёт, с помощью интегрирования по частям:

$$\int_0^x J_0(x-v)\,dv\int_0^v f(u)\,\frac{J_1(v-u)}{v-u}\,du =$$
$$= \int_0^x f(u)\,du\int_u^x J_0(x-v)\,\frac{J_1(v-u)}{v-u}\,dv =$$
$$= \int_0^x f(u)J_1(x-u)\,du = f(x) - \int_0^x f'(u)J_0(x-u)\,du.$$

Поэтому сумма ряда равна $f(x)$, если

$$\int_0^x f'(u)J_0(x-u)\,du = \frac{1}{2}\int_0^x J_0(x-u)\,du\int_0^\infty \big[f(\xi+u)+f(\xi-u)\big]\frac{J_1(\xi)}{\xi}\,d\xi.$$

Но, согласно теореме 150, отсюда следует, что

$$f'(u) = \frac{1}{2}\int_0^\infty \big[f(\xi+u)+f(\xi-u)\big]\frac{J_1(\xi)}{\xi}\,d\xi. \tag{11.22.4}$$

Это и есть интегральное уравнение Кэптейна.

11.23. Прежде чем перейти к строгому анализу связи между уравнением (11.22.4) и рядом (11.22.1), докажем следующую лемму.

Л е м м а. *При $x > 0$, $t > 0$ имеем*

$$\sum_{n=0}^{\infty} (4n+2)\left|J_{2n+1}(x)J_{2n+1}(t)\right| = O\left\{\min(x^3, x^{5/2})\min(t^3, t^{-1/2})\right\}.$$

Действительно,

$$J_n(x) = O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) \qquad \left(n \leqslant \frac{x}{2}\right), \tag{11.23.1}$$

$$J_n(x) = O(1) \qquad (\text{для всех } n \text{ и } x), \tag{11.23.2}$$

и

$$J_n(x) = O\left(\frac{(x/2)^n}{n!}\right) = O\left\{\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{xe}{2n}\right)^n\right\} \quad (\text{для всех } n \text{ и } x), \tag{11.23.3}$$

так что, в частности,

$$J_n(x) = O\left(\frac{1}{2^n}\right) \qquad (n \geqslant ex). \tag{11.23.4}$$

Поэтому для $x > 1$, $2ex \leqslant t$ рассматриваемая сумма есть

$$\sum_{2n+1=3}^{ex} O\left(\frac{n}{\sqrt{t}}\right) + \sum_{ex}^{t/2} O\left(\frac{n}{2^n\sqrt{t}}\right) + \sum_{t/2}^{\infty} O\left(\frac{n}{2^n}\right) = \\ = O\left(\frac{x^2}{\sqrt{t}}\right) + O\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right) + O\left(e^{-At}\right) = O\left(\frac{x^2}{\sqrt{t}}\right).$$

Для $1 < x < t < 2ex$ она есть

$$\sum_{2n+1=3}^{ex} O(n) + \sum_{ex}^{\infty} O\left(\frac{n}{2^n}\right) = O(x^2) = O(x^{5/2}t^{-1/2}).$$

Для $x \leqslant 1 < t$ она есть

$$\sum_{2n+1=3}^{t/2} O\left\{\frac{x^3}{\sqrt{t}}\sqrt{n}\left(\frac{e}{2^n}\right)^n\right\} + \sum_{t/2}^{\infty} O\left\{x^3\sqrt{n}\left(\frac{e}{2^n}\right)^n\right\} = \\ = O\left(\frac{x^3}{\sqrt{t}}\right) + O(x^3e^{-At}) = O\left(\frac{x^3}{\sqrt{t}}\right).$$

Для $x \leqslant 1$, $t \leqslant 1$ она есть

$$\sum_{n=0}^{\infty} O\left\{x^3t^3\left(\frac{e}{2^n}\right)^{2n}\right\} = O(x^3t^3).$$

Теорема 159. *Пусть $f(x)$ — такая нечётная функция, что отношение* $\dfrac{f(x)}{(1+|x|)^{3/2}}$ *принадлежит к* $L(-\infty,\infty)$. *Тогда для того, чтобы $f(x)$ была представима рядом Неймана* (11.22.1) *с коэффициентами* (11.22.3), *необходимо и достаточно, чтобы $f(x)$ удовлетворяла уравнению* (11.22.4).

Доказательство. Предположим сначала, что $f(x)$ представима указанным рядом.

Из леммы следует, что при фиксированном x

$$\sum_{n=0}^{\infty}(4n+2)\,|J_{2n+1}(x)J_{2n+1}(t)| = O\left\{\min(1,t^{-1/2})\right\},$$

и потому произведённое выше обращение порядка суммирования и интегрирования законно вследствие абсолютной сходимости.

Из (11.23.3) явствует также, что если функция $f(x)$ представима рядом (11.22.1), то она (подобно сумме степенного ряда) дифференцируема неограниченное число раз внутри области сходимости ряда (здесь — в интервале от 0 до ∞). Поэтому интегрирование по частям, произведённое в конце формального вывода, изложенного в § 11.22, также законно. Тем самым $f(x)$ удовлетворяет уравнению Кэптейна.

Обратно, если $f(x)$ удовлетворяет уравнению (11.22.4), то, в силу равномерной сходимости интеграла в правой части этого уравнения, $f'(u)$ непрерывна, и потому весь вывод, изложенный в § 11.22, может быть проведён в обратном порядке.

11.24. Решение уравнения Кэптейна. Так как функция $f(x)$ в § 11.22 нечётна, то уравнение (11.22.4) может быть записано в виде

$$f'(u) = \frac{1}{2}\int_0^{\infty}\left[f(u+\xi)-f(u-\xi)\right]\frac{J_1(\xi)}{\xi}\,d\xi, \tag{11.24.1}$$

или

$$f'(x) = -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)\,\frac{J_1(y)}{y}\,\operatorname{sgn} y\,dy. \tag{11.24.2}$$

При последнем виде уравнения можно не предполагать, что $f(x)$ нечётна.

Теорема 160. *Пусть $f(x)\in L^2(-\infty,\infty)$. Тогда для того, чтобы она удовлетворяла уравнению* (11.24.2) *для всех значений x, необходимо и достаточно, чтобы*

$$f(x) = \int_{-1}^{1} e^{-ixu}\varphi(u)\,du,$$

где $\varphi(u)\in L^2(-1,1)$.

Доказательство. Для функции $g(x)=\dfrac{J_1(x)}{x}\operatorname{sgn} x$ трансформация Фурье есть

$$G(x)=i\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \frac{J_1(y)}{y}\sin xy\,dy = i\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\begin{cases} x & (|x|\leqslant 1),\\ \dfrac{\operatorname{sgn} x}{|x|+\sqrt{x^2-1}} & (|x|>1).\end{cases}$$

Поэтому, если F есть трансформация Фурье для f, имеем

$$\int_{-\infty}^\infty f(x-y)\,\frac{J_1(y)}{y}\operatorname{sgn} y\,dy = -i\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{-\infty}^{-1}\frac{e^{-ixt}F(t)}{|t|+\sqrt{t^2-1}}\,dt + \\ + i\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{-1}^{1} e^{-ixt}\,tF(t)\,dt + i\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_1^\infty \frac{e^{-ixt}F(t)}{t+\sqrt{t^2-1}}\,dt.$$

Но $-\frac{1}{2}$ от интеграла правой части по x есть

$$-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{-1}\frac{e^{-ixt}F(t)}{|t|+\sqrt{t^2-1}}\,\frac{dt}{t} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-1}^{1} e^{-ixt}\,F(t)\,dt + \\ + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_1^\infty \frac{e^{-ixt}F(t)}{t+\sqrt{t^2-1}}\,\frac{dt}{t},$$

и, по теории главы III, для того, чтобы последнее выражение было равно $f(x)$ или отличалось от неё постоянным слагаемым, необходимо и достаточно, чтобы $F(t)\equiv 0$ для $|t|>1$. Этим утверждение теоремы и доказано.

Теорема 161. *Если*

$$f(x)=f(0)+x\int_{-1}^{1} e^{-ixu}\chi(u)\,du,$$

где $\dfrac{\chi(u)}{\sqrt{1-u^2}}\in L(-1,1)$, *то* $f(x)$ *является решением уравнения* (11.24.1).

Доказательство. Слагаемое $f(0)$ является решением и потому может быть опущено. Мы имеем тогда[1]

$$\frac{1}{2}\int_0^\infty \big[f(x+\xi)-f(x-\xi)\big]\frac{J_1(\xi)}{\xi}\,d\xi = \\ = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{J_1(\xi)}{\xi}\,(x+\xi)\,d\xi\int_{-1}^{1} e^{-i(x+\xi)u}\chi(u)\,du - \\ - \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{J_1(\xi)}{\xi}\,(x-\xi)\,d\xi\int_{-1}^{1} e^{-i(x-\xi)u}\chi(u)\,du =$$

[1] Ватсон, § 13.42.

$$= -ix\int_{-1}^{1} e^{-ixu}\chi(u)\,du\int_{0}^{\infty}\frac{J_1(\xi)}{\xi}\,\sin\xi u\,d\xi +$$
$$+\int_{-1}^{1} e^{-ixu}\chi(u)\,du\int_{0}^{\infty} J_1(\xi)\cos\xi u\,d\xi =$$
$$= -ix\int_{-1}^{1} e^{-ixu}\chi(u)u\,du + \int_{-1}^{1} e^{-ixu}\chi(u)\,du = f'(x),$$

если только обращения порядка интегрирования законны.

Но двойной интеграл, стоящий множителем при $-ix$, абсолютно сходится; обращение же порядка интегрирования в другом интеграле будет допустимо в силу мажорированной сходимости, если установить, что

$$\left|\int_0^T J_1(\xi)\cos\xi u\,d\xi\right| < \frac{K}{\sqrt{1-u^2}}$$

для всех T. Но здесь главный член асимптотического разложения даёт слагаемые типа

$$\int_1^T \frac{\cos\xi\,\cos\xi u}{\sqrt{\xi}}\,d\xi = \int_1^T \frac{\cos\xi(1-u)}{\sqrt{\xi}}\,d\xi + \ldots = O\left(\frac{1}{\sqrt{1-u}}\right) + \ldots\,,$$

что и завершает доказательство теоремы.

Примером на эту теорему может служить $f(x) = \sin x$.

Т е о р е м а 162. *Пусть функция* $\dfrac{f(x)}{1+|x|}$ *принадлежит к* $L^2(-\infty,\infty)$ *и функция* $\dfrac{f(x)}{(1+|x|)^{3/2}}$ *— к* $L(-\infty,\infty)$*. Тогда, если* $f(x)$ *удовлетворяет уравнению Кэптейна, то*

$$f(x) = x\int_{-1}^{1} e^{-ixu}\chi(u)\,du,$$

где $\chi(u)\in L^2(-1,1)$*.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Формальный вывод здесь таков. Если $f(x)$ удовлетворяет уравнению Кэптейна, то она представима в форме ряда (11.22.1), и тогда

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\frac{\sin(\xi-x)}{\xi-x}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_{2n+1}}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(\xi-x)}{\xi-x}\,J_{2n+1}(x)\,dx =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1}J_{2n+1}(\xi) = f(\xi).$$

Таким образом, $f(x)$ удовлетворяет уравнению Бэйтмена (с $a=1$) и потому равна интегралу Фурье с пределами интегрирования -1 и 1. Однако, из-за трудностей, связанных с вопросами сходимости, нам придётся выбрать другой способ. Вместо проведённых выше выкладок мы во всяком случае имеем

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x)-a_1J_1(x)}{x^3}\cdot\frac{\sin(\xi-x)}{\xi-x}\,dx=$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{2n+1}}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{J_{2n+1}(x)}{x^3}\cdot\frac{\sin(\xi-x)}{\xi-x}\,dx=\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n+1}\frac{J_{2n+1}(\xi)}{\xi^3}=$$
$$=\frac{f(\xi)-a_1J_1(\xi)}{\xi^3}.$$

Здесь обращение порядка суммирования и интегрирования законно, так как лемма § 11.23 показывает, что

$$\sum_{n=1}^{\infty}(4n+2)\int_0^{\infty}\left|\frac{f(t)}{t}\,J_{2n+1}(t)\right|dt\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{\sin(\xi-x)}{\xi-x}\right|\cdot\left|\frac{J_{2n+1}(x)}{x^3}\right|dx$$

сходится.

Из теоремы 156 следует теперь, что

$$\frac{f(x)-a_1J_1(x)}{x^3}=\int_{-1}^{1}e^{-ixu}\varphi(u)\,du,$$

где $\varphi(u)\in L^2(-1,1)$. Отсюда

$$\varphi(u)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{ixu}\,\frac{f(x)-a_1J_1(x)}{x^3}\,dx\qquad(-1<u<1),$$

и так как $\dfrac{f(x)-a_1J_1(x)}{x}\in L^2(-\infty,\infty)$, то $\varphi(u)$ есть интеграл от интеграла от функции, принадлежащей к L^2. Дважды интегрируя по частям, мы получаем

$$\frac{f(x)-a_1J_1(x)}{x}=x(ae^{ix}+be^{-ix})+(ce^{ix}+de^{-ix})+\int_{-1}^{1}e^{-ixu}\chi(u)\,du,$$

где $\chi(u)\in L^2(-1,1)$. Но так как левая часть принадлежит к $L^2(-\infty,\infty)$, то a, b, c и d должны быть равны нулю. Это доказывает теорему.

11.25. Дифференциальное уравнение дробного порядка. Интегральное уравнение[1]

$$f(x)=\frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)}\int_x^{\infty}(y-x)^{\alpha-1}f(y)\,dy\tag{11.25.1}$$

можно рассматривать как дифференциальное уравнение порядка α. Предположим, например, что α есть целое положительное число p,

[1] Hardy and Titchmarsh (7).

функция $f(x)$ при $x \to \infty$ достаточно быстро стремится к нулю, и положим

$$f_1(x) = \int_x^\infty f(y)\,dy, \quad f_2(x) = \int_x^\infty f_1(y)\,dy, \quad \ldots$$

Тогда повторное интегрирование по частям приводит уравнение (11.25.1) к виду

$$\frac{d^p z}{dx^p} = (-1)^p \lambda z,$$

где $z = f_p(x)$. Единственными решениями последнего уравнения служат конечные комбинации показательных функций.

Общее уравнение (11.25.1) есть уравнение вида (11.2.1) с

$$k(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} & (x > 0), \\ 0 & (x < 0). \end{cases}$$

Теория § 11.2 здесь неприменима, так как $k(x)$ не удовлетворяет условию теоремы 146. Однако, уравнение всё же обладает показательными решениями. А именно $f(x) = e^{-ax}$ является решением, если выполнены следующие условия: $\operatorname{Re} a > 0$ и $\lambda = a^\alpha$, где a^α обозначает $e^{\alpha \ln a}$, причём $\ln a$ принимает своё главное значение. Если $\lambda > 0$, то a может иметь любое из значений

$$\lambda^{1/\alpha} e^{2\pi i r/\alpha} \qquad (r = 0, \pm 1, \ldots),$$

для которых $\left|\dfrac{2\pi r}{\alpha}\right| < \dfrac{\pi}{2}$. При $\alpha \leqslant 4$, и, в частности, при $\alpha < 1$, единственным допустимым значением a служит $\lambda^{1/\alpha}$. Мы докажем, что по крайней мере в этом случае решение единственно.

Теорема 163. *Пусть $f(x)$ интегрируема на каждом конечном интервале $0 < x_1 \leqslant x \leqslant x_2$. Далее, $\lambda > 0$, $0 < \alpha < 1$, и*

$$f(x) = \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)} \int_{\to x}^{\to\infty} f(y)(y-x)^{\alpha-1}\,dy \tag{11.25.2}$$

для всякого положительного x. Тогда

$$f(x) = Ce^{-ax},$$

где $a = \lambda^{1/\alpha}$ и $C = \mathrm{const}$.

Если $\mathfrak{F}(s)$ — трансформация Меллина функции $f(x)$, то формально имеем

$$\mathfrak{F}(s) = \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty x^{s-1}\,dx \int_x^\infty f(y)(y-x)^{\alpha-1}\,dy =$$
$$= \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty f(y)\,dy \int_0^y x^{s-1}(y-x)^{\alpha-1}\,dx = \frac{\lambda\Gamma(s)}{\Gamma(s+\alpha)}\,\mathfrak{F}(s+\alpha).$$

Мы докажем, что полученное равенство действительно имеет место, и на этом построим доказательство теоремы; однако, мы не в состоянии обосновать законность обращения порядка интегрирования, использованного при этом выводе, и будем вынуждены идти другим путём. Нам потребуется следующая лемма.

Пусть[1]

$$f^*_\alpha(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{\to x}^{c} f(y)(y-x)^{\alpha-1}\,dy$$

для каждого положительного x. *Тогда при* $\beta > 0$

$$\frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_{\to\xi}^{c} f^*_\alpha(x)(x-\xi)^{\beta-1}\,dx = \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_{\to\xi}^{c} f(y)(y-\xi)^{\alpha+\beta-1}\,dy,$$

т.е.

$$(f^*_\alpha)^*_\beta = f^*_{\alpha+\beta}. \tag{11.25.3}$$

Для доказательства нужно установить законность равенства

$$\int_{\to\xi}^{c} (x-\xi)^{\beta-1}\,dx \int_{\to x}^{c} f(y)(y-x)^{\alpha-1}\,dy = \\ = \int_{\to\xi}^{c} f(y)\,dy \int_{\xi}^{y} (x-\xi)^{\beta-1}(y-x)^{\alpha-1}\,dx.$$

Так как, очевидно,

$$\int_{\xi+\delta}^{c} \dots \int_{\to x}^{c} \dots = \int_{\xi+\delta}^{c} \dots \int_{\xi+\delta}^{y} \dots\,,$$

то достаточно доказать, что при $\delta \to 0$

$$I = \int_{\to\xi}^{\xi+\delta} f(y)\,dy \int_{\xi}^{y} (x-\xi)^{\beta-1}(y-x)^{\alpha-1}\,dx \to 0$$

и

$$J = \int_{\xi+\delta}^{c} f(y)\,dy \int_{\xi}^{\xi+\delta} (x-\xi)^{\beta-1}(y-x)^{\alpha-1}\,dx \to 0.$$

Но

$$I = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_{\to\xi}^{\xi+\delta} f(y)(y-\xi)^{\alpha+\beta-1}\,dy,$$

и наше утверждение для этого интеграла следует из второй теоремы о среднем значении и существования $\displaystyle\int_{\to\xi} f(y)(y-\xi)^{\alpha-1}\,dy$.

[1] Доказательство при значительно более общих условиях см. в Bosanquet (1).

Далее,

$$J=\int_{\xi+\delta}^{c} f(y)(y-\xi)^{\alpha-1}\,dy\int_{\xi}^{\xi+\delta}(x-\xi)^{\beta-1}\left(\frac{y-x}{y-\xi}\right)^{\alpha-1}dx,$$

а внутренний интеграл монотонно возрастает вместе с y, и его значение при $y=c$ есть $O(\delta^{\beta})$. Поэтому и для интеграла J наше утверждение следует из второй теоремы о среднем значении.

Доказательство теоремы 163. Запишем $f(x)$ в виде

$$f(x)=\frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)}\int_{\to x}^{c} f(y)(y-x)^{\alpha-1}\,dy+\frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)}\int_{c}^{\to\infty} f(y)(y-x)^{\alpha-1}\,dy = \\ =\lambda f_{\alpha}^{*}(x)+\lambda g(x),$$

где $c>1$ и $0<x\leqslant \frac{c}{2}$. Тогда, в силу (11.25.3),

$$f_{\alpha}^{*}(x)=\frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)}\int_{\to x}^{c}\big[f_{\alpha}^{*}(y)+g(y)\big](y-x)^{\alpha-1}\,dy=\lambda f_{2\alpha}^{*}(x)+\lambda g_{\alpha}^{*}(x),$$

откуда

$$f(x)=\lambda g(x)+\lambda^{2}g_{\alpha}^{*}(x)+\lambda^{2}f_{2\alpha}^{*}(x).$$

Повторно применяя этот приём, получаем

$$f(x)=\lambda g(x)+\lambda^{2}g_{\alpha}^{*}(x)+\ldots+\lambda^{n}g_{(n-1)\alpha}^{*}(x)+\lambda^{n}f_{n\alpha}^{*}(x), \qquad (11.25.4)$$

где

$$f_{n\alpha}^{*}(x)=\frac{1}{\Gamma(n\alpha)}\int_{x}^{c} f(y)(y-x)^{n\alpha-1}\,dy.$$

Выбирая n достаточно большим, в частности, $n\alpha>1$, мы заключаем, что

$$|f(x)|\leqslant \varphi(x)+\frac{1}{2c}\int_{x}^{c}|f(y)|\,dy, \qquad (11.25.5)$$

где $\varphi(x)$ ограничена при $x\to 0$. Это показывает, что $f(x)$ остаётся ограниченной при $x\to 0$; в самом деле, в противном случае должна была бы существовать последовательность значений x, для которых $|f(x)|\geqslant f(y)$ $(x\leqslant y\leqslant c)$ и $|f(x)|\to\infty$, что, однако, несовместимо с неравенством (11.25.5). Отсюда следует, что $f_{n\alpha}^{*}(x)$, а потому и $f(x)$, непрерывна для $0\leqslant x\leqslant c$. Обозначим предел $f(x)$ при $x\to 0$ через $f(0)$.

Мы можем также дифференцировать (11.25.4) и получим, что $f'(x)$ ограничена в окрестности точки $x=0$. Этот приём можно было бы неограниченно повторять, однако, единственное, что нам нужно, а именно доказательство соотношения

$$f(x)-f(0)=O(x) \qquad (x\to 0),$$

мы уже получили.

Теперь

$$\mathfrak{F}(s) = \int_0^1 \big[f(x) - f(0)\big] x^{s-1}\,dx + \int_1^{\to\infty} f(x) x^{s-1}\,dx + \frac{f(0)}{s},$$

первоначально для $0<\sigma<\alpha$, а затем, в качестве аналитического продолжения функции $\mathfrak{F}(s)$, — и для $-1<\sigma<\alpha$. Так как

$$\int_1^{\infty} f(0) x^{s-1}\,dx = -\frac{f(0)}{s} \qquad (\sigma < 0),$$

то имеем

$$\mathfrak{F}(s) = \int_0^{\to\infty} \big[f(x) - f(0)\big] x^{s-1}\,dx \qquad (-1 < \sigma < 0).$$

Подставляя сюда значения $f(x)$ и $f(0)$ из формулы (11.25.2), мы получаем формально

$$\begin{aligned}
\mathfrak{F}(s) = \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\to\infty} x^{s-1}\,dx \int_x^{\to\infty} f(y)\big[(y-x)^{\alpha-1} - y^{\alpha-1}\big]\,dy &+ \\
+ \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\to\infty} x^{s-1}\,dx \int_0^x f(y) y^{\alpha-1}\,dy &= \\
= \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\to\infty} f(y)\,dy \int_0^y x^{s-1}\big[(y-x)^{\alpha-1} - y^{\alpha-1}\big]\,dx &+ \\
+ \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\to\infty} f(y) y^{\alpha-1}\,dy \int_y^{\to\infty} x^{s-1}\,dx &= \\
= \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\to\infty} f(y) \left(\frac{\Gamma(s)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(s+\alpha)}\, y^{s+\alpha-1} - \frac{y^{s+\alpha-1}}{s}\right) dy &+ \\
+ \frac{\lambda}{s\Gamma(\alpha)} \int_0^{\to\infty} f(y) y^{s+\alpha-1}\,dy &= \\
= \frac{\lambda\Gamma(s)}{\Gamma(s+\alpha)} \int_0^{\to\infty} f(y) y^{s+\alpha-1}\,dy = \frac{\lambda\Gamma(s)}{\Gamma(s+\alpha)}\, \mathfrak{F}(s+\alpha)&.
\end{aligned}$$

Покажем, что эти преобразования законны, если $-\alpha<\sigma<0$.

Что касается первого члена, то в интеграле, распространённом на значения $y \leqslant N$, порядок интегрирования, очевидно, может быть обращён, так что достаточно доказать, что

$$\int_0^N x^{s-1}\,dx \int_N^{\to\infty} f(y)\big[(y-x)^{\alpha-1} - y^{\alpha-1}\big]\,dy \tag{11.25.6}$$

и

$$\int_N^{\to\infty} x^{s-1}\,dx \int_x^{\to\infty} f(y)\big[(y-x)^{\alpha-1} - y^{\alpha-1}\big]\,dy \tag{11.25.7}$$

стремятся к нулю при $N \to \infty$.

Но по второй теореме о среднем значении,

$$\int_N^{\to\infty} f(y)\big[(y-x)^{\alpha-1} - y^{\alpha-1}\big]\,dy = \left[\left(1-\frac{x}{N}\right)^{\alpha-1} - 1\right]\int_N^{\xi} f(y)y^{\alpha-1}\,dy;$$

второй интеграл ограничен, и соотношение

$$\int_0^N x^{\sigma-1}\left[\left(1-\frac{x}{N}\right)^{\alpha-1} - 1\right]dx = N^{\sigma}\int_0^1 u^{\sigma-1}\big[(1-u)^{\alpha-1} - 1\big]\,du = O(N^{\sigma})$$

даёт утверждаемый результат для (11.25.6). Выражение же (11.25.7) равно

$$\frac{\Gamma(\alpha)}{\lambda}\int_N^{\to\infty} f(x)x^{s-1}\,dx - \int_N^{\infty} x^{s-1}\,dx \int_x^{\to\infty} f(y)y^{\alpha-1}\,dy,$$

что, очевидно, стремится к нулю.

Обращение порядка интегрирования во втором члене эквивалентно интегрированию по частям:

$$\int_0^{\to\infty} x^{s-1}\,dx \int_0^x f(y)y^{\alpha-1}\,dy = \\ = \left[\frac{x^s}{s}\int_0^x f(y)y^{\alpha-1}\,dy\right]\Bigg|_0^{\infty} - \frac{1}{s}\int_0^{\to\infty} f(x)x^{s+\alpha-1}\,dx,$$

и проинтегрированный член стремится к нулю при стремлении x к обоим пределам.

Положим

$$\chi(s) = \lambda^{s/\alpha}\,\frac{\mathfrak{F}(s)}{\Gamma(s)}\,.$$

Тогда полученный результат эквивалентен равенству

$$\chi(s+\alpha) = \chi(s).$$

Таким образом, $\chi(s)$ имеет период α и регулярна для $-1 < \sigma < 0$, а значит, и всюду. Далее, полагая

$$h(x) = \int_x^{\to\infty} f(y)y^{\alpha-1}\,dy = o(1),$$

имеем

$$\mathfrak{F}(s) = O(1) + \int_1^{\to\infty} f(x)x^{s-1}\,dx = \\ = O(1) + h(1) + (s-\alpha)\int_1^{\to\infty} h(x)x^{s-\alpha-1}\,dx = \\ = O(|t|) \qquad (-1 < \sigma < 0).$$

Отсюда

$$\chi(s) = O\big(|t|^A e^{\pi|t|/2}\big)$$

для $-1<\sigma<0$, а значит, и на любой прямой, параллельной мнимой оси. Поэтому функция

$$\chi\left(\frac{\alpha \ln z}{2\pi i}\right)$$

однозначна и есть $O\left(r^{\alpha/4}\ln^A r\right)$ при $|z| = r \to \infty$ и $O\left(r^{-\alpha/4}\ln^A \frac{1}{r}\right)$ при $r \to 0$. Следовательно, $\chi(s)$ есть постоянная,

$$\mathfrak{F}(s) = C\Gamma(s)\lambda^{-s/\alpha},$$

и, по теореме 32,

$$f(x) = \frac{C}{2\pi i}\int_{k-i\infty}^{k+i\infty} \Gamma(s)\lambda^{-s/\alpha}x^{-s}\,ds = Ce^{-x\lambda^{1/\alpha}} \qquad (0 < k < \alpha).$$

11.26. Задача из теории вероятностей[1]**.** Неотрицательная функция $f(x)$, удовлетворяющая равенству

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1,$$

задаёт *закон распределения ошибок*, согласно которому вероятность того, что ошибка при определённом измерении заключена в интервале (x_1, x_2), равна $\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx$, или, иначе, — вероятность того, что ошибка заключена в интервале $(x, x+\delta x)$, при малом δx равна в первом приближении $f(x)\delta x$.

Предположим, что мы наблюдаем две величины P и Q, ошибки в наблюдении которых, p и q, не зависят друг от друга и распределены, соответственно, по законам $f(x)$ и $g(x)$. Требуется найти закон распределения для суммы $P+Q$.

Если p и q могут принимать только целые значения и частота, с которой p принимает значение x, есть $f(x)$, а частота, с которой q принимает значение y, есть $g(y)$, то частота, с которой $p+q$ принимает значение ξ, равна

$$\sum_{\substack{x,\,y\\ x+y=\xi}} f(x)g(y) = \sum_x f(x)g(\xi - x),$$

т. е. «свёртке» f и g.

В непрерывном случае аналогичное рассуждение с $f(x)\delta x$ и $g(y)\delta y$ приводит к

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(\xi - x)\,dx,$$

[1] Pólya (2).

как к закону распределения вероятностей для $p+q$. Строго это можно доказать следующим образом. Будем через $P\{\ \}$ обозначать вероятность события, указанного в фигурных скобках. По условию, имеем

$$P\{p \leqslant x\} = \int_{-\infty}^{x} f(u)\,du, \qquad P\{q \leqslant x\} = \int_{-\infty}^{x} g(u)\,du.$$

Положим

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)\,du, \qquad g_1(x) = \int_{-\infty}^{x} g(u)\,du$$

и рассмотрим сумму

$$S = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_1(\xi - n\delta)\bigl[f_1\{(n+1)\delta\} - f_1(n\delta)\bigr].$$

В силу предположенной независимости величин p и q, n-й член этой суммы представляет вероятность того, что одновременно p заключено в интервале $\bigl(n\delta, (n+1)\delta\bigr)$, а $q \leqslant \xi - n\delta$; в этом случае $p+q \leqslant \xi + \delta$. С другой стороны, если $p+q \leqslant \xi$, то, для некоторого n, $n\delta \leqslant p \leqslant (n+1)\delta$ и $q \leqslant \xi - n\delta$. Таким образом,

$$P\{p+q \leqslant \xi\} \leqslant S \leqslant P\{p+q \leqslant \xi+\delta\}.$$

Но так как f принадлежит к L, а g_1 непрерывна и стремится к 0 при $x \to -\infty$ и к 1 при $x \to \infty$, то

$$\lim_{\delta \to 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{n\delta}^{(n+1)\delta} f(t)\bigl[g_1(\xi - t) - g_1(\xi - n\delta)\bigr]\,dt = 0,$$

откуда

$$\lim_{\delta \to 0} S = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) g_1(\xi - t)\,dt.$$

С другой стороны, так как p и q, по предположению, распределены непрерывным образом, то

$$\lim_{\delta \to 0} P\{p+q \leqslant \xi+\delta\} = P\{p+q \leqslant \xi\}.$$

Следовательно, получаем

$$P\{p+q \leqslant \xi\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) g_1(\xi - t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt \int_{-\infty}^{\xi - t} g(x)\,dx =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt \int_{-\infty}^{\xi} g(u-t)\,du = \int_{-\infty}^{\xi} du \int_{-\infty}^{\infty} f(t) g(u-t)\,dt,$$

что эквивалентно утверждаемому результату.

Если $f(x)$ задаёт закон распределения ошибок, то тем же свойством обладает и $\dfrac{1}{a} f\left(\dfrac{x}{a}\right)$. Мы поставим теперь вопрос: для какого закона распределения ошибок $f(x)$ свёртка двух законов вида $\frac{1}{a} f\left(\frac{x}{a}\right)$ сама есть закон того же вида?

Т е о р е м а 164. *Пусть $f(x) \geqslant 0$, функции $f(x)$ и $x^2 f(x)$ принадлежат к $L(-\infty, \infty)$, и пусть для каждого x*

$$\frac{1}{c} f\left(\frac{x}{c}\right) = \frac{1}{ab} \int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{y}{a}\right) f\left(\frac{x-y}{b}\right) dy, \tag{11.26.1}$$

где a, b, c — заданные положительные числа.

Тогда указанные условия совместны лишь при $c^2 = a^2 + b^2$, и в этом случае почти для всех x

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi k}} e^{-\frac{x^2}{2k}},$$

где k — постоянная.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу наших предположений, интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^m f(x)\, dx = K_m$$

существует для $m = 0$, 1, 2. Но, в силу равенства (11.26.1),

$$\frac{1}{c} \int_{-\infty}^{\infty} x^m f\left(\frac{x}{c}\right) dx = \frac{1}{ab} \int_{-\infty}^{\infty} x^m\, dx \int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{y}{a}\right) f\left(\frac{x-y}{b}\right) dy =$$
$$= \frac{1}{ab} \int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{y}{a}\right) dy \int_{-\infty}^{\infty} (y+u)^m f\left(\frac{u}{b}\right) du,$$

что при $m = 0$, 1, 2 даёт

$$K_0 = K_0^2, \tag{11.26.2}$$
$$cK_1 = aK_1K_0 + bK_0K_1, \tag{11.26.3}$$
$$c^2K_2 = a^2K_2K_0 + 2abK_1^2 + b^2K_0K_2. \tag{11.26.4}$$

Так как мы, естественно, предполагаем, что $f(x)$ не равна тождественно нулю, то (11.26.2) даёт $K_0 = 1$. Поэтому (11.26.3) даёт

$$(a + b - c)K_1 = 0, \tag{11.26.5}$$

а (11.26.4) даёт

$$(c^2 - a^2 - b^2)K_2 = 2abK_1^2. \tag{11.26.6}$$

Но, в силу неравенства Шварца,

$$K_1^2 < K_0K_2 = K_2,$$

так что (11.26.6) даёт

$$c^2 - a^2 - b^2 < 2ab,$$
$$c < a + b.$$

Но тогда из (11.26.5) имеем $K_1 = 0$, а из (11.26.6)

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Положим

$$\alpha = \frac{a}{c}, \qquad \beta = \frac{b}{c}.$$

Тогда, подставляя в (11.26.1) $x = c\xi$, $y = c\eta$, получаем

$$f(\xi) = \frac{1}{\alpha\beta}\int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{\eta}{\alpha}\right) f\left(\frac{\xi-\eta}{\beta}\right) d\eta, \tag{11.26.7}$$

где

$$\alpha^2 + \beta^2 = 1. \tag{11.26.8}$$

Пусть

$$\Phi(x) = \sqrt{2\pi}\, F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt} f(t)\, dt.$$

Тогда, по теореме 41, (11.26.7) даёт

$$\Phi(x) = \Phi(\alpha x)\Phi(\beta x). \tag{11.26.9}$$

Применяя то же равенство (11.26.9) к каждому члену в правой части, мы получаем

$$\Phi(x) = \Phi(\alpha^2 x)\Phi(\beta\alpha x)\Phi(\alpha\beta x)\Phi(\beta^2 x),$$

и, повторно применяя тот же приём, — вообще

$$\Phi(x) = \Phi(\gamma_{m,1}x)\Phi(\gamma_{m,2}x)\ldots\Phi(\gamma_{m,m}x),$$

где $m = 2^n$, а числа $\gamma_{m,1}$, $\gamma_{m,2}$, $\ldots$, $\gamma_{m,m}$ суть 2^n членов разложения $(\alpha + \beta)^n$. Отсюда

$$\gamma_{m,1}^2 + \gamma_{m,2}^2 + \ldots + \gamma_{m,m}^2 = (\alpha^2+\beta^2)^n = 1.$$

Далее, $\gamma_{m,\mu}$ имеет вид $\alpha^p\beta^q$, где $p + q = n$; поэтому, предполагая $\alpha \geqslant \beta$, имеем

$$\gamma_{m,\mu} \leqslant \alpha^n \qquad (\mu = 1,\, 2,\, \ldots,\, m)$$

и, следовательно, $\max\limits_{\mu} \gamma_{m,\mu} \to 0$ при $m \to \infty$.

Но так как $f(x)$, $xf(x)$ и $x^2 f(x)$ принадлежат к L, то $\Phi(x)$, $\Phi'(x)$ и $\Phi''(x)$ непрерывны; при этом

$$\Phi(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, dt = K_0 = 1,$$

$$\Phi'(0) = \int_{-\infty}^{\infty} itf(t)\, dt = K_1 = 0,$$

а
$$\Phi''(0) = -\int_{-\infty}^{\infty} t^2 f(t)\,dt,$$
так что, обозначая $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} t^2 f(t)\,dt$ через k, имеем
$$\Phi''(0) = -k.$$
Поэтому в окрестности точки $x = 0$
$$\ln \Phi(x) = u(x) + iv(x),$$
где $u(x)$ и $v(x)$ непрерывны, причём
$$u(0) = v(0) = u'(0) = v'(0) = 0,$$
и
$$u''(0) = -k, \qquad v''(0) = 0.$$
Следовательно,
$$\ln \Phi(x) = \sum_{\mu=1}^{m} \bigl[u(\gamma_{m,\mu}x) + iv(\gamma_{m,\mu}x)\bigr] =$$
$$= \frac{x^2}{2} \sum_{\mu=1}^{m} \gamma_{m,\mu}^2 \bigl[u''(\theta_{m,\mu}\gamma_{m,\mu}x) + iv''(\theta'_{m,\mu}\gamma_{m,\mu}x)\bigr],$$
где $0<\theta_{m,\mu}<1$, $0<\theta'_{m,\mu}<1$. Но при $m\to\infty$ каждое из чисел $\gamma_{m,\mu}$, а потому и $\theta_{m,\mu}\gamma_{m,\mu}$ стремится к нулю, и притом равномерно относительно μ. Таким образом,
$$\ln \Phi(x) = \frac{x^2}{2} \sum_{\mu=1}^{m} \gamma_{m,\mu}^2 \bigl\{-k + o(1)\bigr\} = -\frac{kx^2}{2} + o(1),$$
т.е.
$$\ln \Phi(x) = -\frac{kx^2}{2} \qquad \Phi(x) = e^{-\frac{kx^2}{2}}.$$
Следовательно (по теореме 27), почти всюду
$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixt-\frac{kx^2}{2}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi k}}\, e^{-\frac{x^2}{2k}}.$$
Итак, единственным законом распределения ошибок, обладающим указанными свойствами, является закон Гаусса (с произвольным параметром k).

11.27. Задача из статистической динамики[1]**.** Рассмотрим систему атомов, движущихся в одном измерении таким образом, что относительное количество тех из них, скорости которых заключены между v и $v + \delta v$, равно $\int_v^{v+\delta v} f(x)\,dx$. Пусть $\int_w^{w+\delta w} \varphi(v,x)\,dx$ — относительное количество тех атомов, имеющих скорость v, которые к некоторому следующему моменту получили приращения скорости, заключённые между w и $w + \delta w$. Тогда на основании, аналогичном изложенному в предыдущем параграфе, относительное количество тех атомов, которые в результате приобретут скорости, заключённые между v' и $v' + \delta v'$ будет равно $\int_{v'}^{v'+\delta v'} g(x)\,dx$, где

$$g(v') = \int_{-\infty}^{\infty} f(v)\varphi(v, v' - v)\,dv. \tag{11.27.1}$$

Для устойчивого состояния имеем $g \equiv f$, так что f удовлетворяет интегральному уравнению

$$f(v') = \int_{-\infty}^{\infty} f(v)\varphi(v, v' - v)\,dv. \tag{11.27.2}$$

Предположим теперь, что движение обладает следующими свойствами. Центр масс атомов, имевших скорость v, движется со скоростью, удовлетворяющей уравнению

$$\frac{dV}{dt} = -\lambda V \qquad (\lambda > 0),$$

так что по истечении времени t его скорость равна $ve^{-\lambda t}$. На это накладывается движение атомов, сообщающее им по истечении времени t приращения скоростей u, причём относительное количество атомов, получивших приращения скоростей, заключённых между u и $u + \delta u$, равно $\psi(u)\delta u$, и эти приращения не коррелированы с v, так что относительное количество тех из последних атомов, которые имели скорость v, также равно $\psi(u)\delta u$. Отсюда следует, что

$$\varphi(v, ve^{-\lambda t} - v + u) = \psi(u),$$

где $\psi(u)$ не зависит от v, но, разумеется, зависит от t. С помощью подстановки $v' = ve^{-\lambda t} + u$ это равенство преобразуется в

$$\varphi(v, v' - v) = \psi(v' - ve^{-\lambda t}).$$

Таким образом, условием устойчивого состояния является выполнение интегрального уравнения

[1] E.A. Milne (2): Fowler, Statistical Mechanics, § 19.5. Метод самого Милна требует более сильных ограничений, чем принимаемые нами.

$$f(v') = \int_{-\infty}^{\infty} f(v)\psi(v' - ve^{-\lambda t})\,dv,$$

где, как в последнем параграфе,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)\,dx = 1.$$

Пусть F и Ψ — трансформации Фурье функций f и ψ. Тогда

$$\begin{aligned}
F(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi v'}\,dv' \int_{-\infty}^{\infty} f(v)\psi(v' - ve^{-\lambda t})\,dv = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(v)\,dv \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi v'}\psi(v' - ve^{-\lambda t})\,dv' = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(v)\,dv \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi ve^{-\lambda t} + i\xi x}\psi(x)\,dx = \sqrt{2\pi}\,F(\xi e^{-\lambda t})\Psi(\xi).
\end{aligned}$$

Мы покажем теперь, что принятие некоторых предположений относительно функции $\psi(x)$ и, в частности, относительно её предельного поведения при $t \to 0$ полностью определяет все рассматриваемые функции. А именно, мы предположим, что положительные и отрицательные приращения u равновероятны, так что $\psi(u) = \psi(-u)$, а также, что при $t \to 0$ для каждого фиксированного $\delta > 0$

$$\int_{0}^{\delta} x^2\psi(x)\,dx \sim at, \qquad \int_{\delta}^{\infty} \psi(x)\,dx = o(t),$$

где a — некоторая постоянная.

Действительно, тогда при $t \to 0$ и фиксированном ξ

$$\begin{aligned}
\sqrt{2\pi}\,\Psi(\xi) - 1 &= \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)(e^{i\xi x} - 1)\,dx = 2\int_{0}^{\infty} \psi(x)(\cos\xi x - 1)\,dx = \\
&= -\xi^2 \int_{0}^{\delta} x^2\psi(x)\,dx + \int_{0}^{\delta} \psi(x)O(x^4)\,dx + O\left(\int_{\delta}^{\infty} \psi(x)\,dx\right) = \\
&= -\xi^2\bigl\{at + o(t)\bigr\} + O(\delta^2 t) + o(t),
\end{aligned}$$

и, выбирая δ, а затем t достаточно малым, получаем, что

$$\sqrt{2\pi}\,\Psi(\xi) - 1 \sim -\xi^2 at.$$

Отсюда

$$\frac{F(\xi) - F(\xi e^{-\lambda t})}{\xi - \xi e^{-\lambda t}} = \frac{F(\xi e^{-\lambda t})[\sqrt{2\pi}\,\Psi(\xi) - 1]}{\xi - \xi e^{-\lambda t}} \to -\frac{a}{\lambda}\,\xi F(\xi)$$

при $t \to 0$, т. е.

$$F'(\xi) = -\frac{a}{\lambda}\,\xi F(\xi).$$

Тогда

$$F(\xi) = Ce^{-\frac{a\xi^2}{2\lambda}},$$

причём $C = F(0) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$. Следовательно,

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi - \frac{a\xi^2}{2\lambda}}\, d\xi = \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi a}}\, e^{-\frac{\lambda x^2}{2a}},$$

т. е. искомое распределение — «максвеллово».

Кроме того, имеем также

$$\Psi(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{F(\xi)}{F(\xi e^{-\lambda t})} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{a\xi^2}{2\lambda}\,(1 - e^{-2\lambda t})\right),$$

откуда

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi a(1 - e^{-2\lambda t})}}\, \exp\left(-\frac{\lambda x^2}{2a(1 - e^{-2\lambda t})}\right).$$

РУКОВОДСТВА И МОНОГРАФИИ

H. B a t e m a n, Partial Differential Equations of Mathematical Physics, Cambridge, 1932.

S. B o c h n e r, Vorlesungen über Fouiriersche Integrale, Leipzig, 1932. [Имеется перевод: С. Б о х н е р. Лекции об интегралах Фурье. — М.: Физматгиз, 1962.]

H. B u r k h a r d t, Trigonometrische Reihen und Integrale, Encyklopädie der Math. Wiss., II, 1 (ii). 819—1354.

G.A. C a m p b e l l and R.M. F o s t e r, Fourier Integrals for Practical Applications, Bell Telephone System Technical Publications, U.S.A., 1931.

H.S. C a r s l a w, Fourier's Series and Integrals, 3rd ed., London, 1930.

H.S. C a r s l a w, Mathematical Theory of the Conduction of Heat in Solids, 2nd ed., London, 1921. [Имеется перевод: Г. К а р с л о у. Теория теплопроводности. — М.: Гостехиздат, 1947.]

R. C o u r a n t and D. H i l b e r t, Methoden der mathematischen Physik, I, 2nd ed., Berlin, 1931. [Имеется перевод: Р. К у р а н т и Д. Г и л ь б е р т. Методы математической физики. — М.: Гостехиздат, 1951, т. I, II.]

J. F o u r i e r, The Analytical Theory of Heat, translated by A. Freeman, Cambridge, 1878.

R.H. F o w l e r, Statistical Mechanics, 2nd ed., Cambridge, 1936.

G.H. H a r d y, J.E. L i t t l e w o o d and G. P ó l y a, Inequalities, Cambridge, 1934. [Имеется перевод: Г.Г. Х а р д и, Дж.И. Л и т л в у д и Г. П о л и а. Неравенства. — М.: Гостехиздат, 1948.]

W. H o b s o n, The Theory of Functions of a Real Variable, 2nd ed., Cambridge, 1925.

E. H o p f, Mathematical Problems of Radiative Equilibrium, Cambridge tracts, No. 31, 1933.

E.L. I n c e, Ordinary Differential Equations, London, 1927. [Имеется перевод: Э.Л. А й н с. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — Харьков: ОНТИ, 1939.]

H. J e f f r e y s, Operational Methods in Mathematical Physics, Cambridge tracts, No. 23, 2nd ed., 1931.

H. L a m b, Hydrodynamics, 6th ed., Cambridge, 1932. [Имеется перевод: Г. Л а м б. Гидродинамика. — М.: Гостехиздат, 1947.]

H. L e b e s g u e, Leçons sur les séries trigonométriques. Paris, 1906.

S. M a n d e l b r o j t, Séries de Fourier et classes quasi-analytiques de fonctions, Paris, 1935,

R.E.A.C. P a l e y and N. W i e n e r, Fourier Transforms in the Complex Domain, American Math. Soc. Colloquium Publications, XIX, New York, 1934. [Имеется перевод: Н. В и н е р и Р. П э л и. Преобразование Фурье в комплексной плоскости. — М.: Наука, 1964.]

M.H. S t o n e, Linear Transformations in Hilbert Space, and their Applications to Analysis, American Math. Soc. Colloquium Publications, XV, New York, 1932.

E.C. T i t c h m a r s h, The Theory of Functions. Oxford, 1932. [Имеется перевод: Э.Ч. Т и т ч м а р ш. Теория функций. — М.: Наука, 1980.]

L. T o n e l l i, Serie trigonometriche, Bologna, 1928.

C. d e l a V a l l é e - P o u s s i n, Cours d'analyse infinitésimale, 3rd ed., Louvain, 1914.

G.N. W a t s o n, Theory of Bessel Functions, Cambridge, 1922. [Имеется перевод: Дж.Н. В а т с о н. Теория бесселевых функций. — М.: Гостехиздат, 1949.] (В тексте кратко цитируется «В а т с о н».)

H. W e b e r, Die partiellen Differential-Gleichungen der mathematischen Physik, nach Riemann's Vorlesungen, Braunschweig, 1900. (В тексте кратко цитируется «R i e m a n n–W e b e r».)

E.T. W h i t t a k e r and G.N. W a t s o n, Modern Analysis, 4th ed., Cambridge, 1927. [Имеется перевод: Э.Т. У и т т е к е р и Дж.Н. В а т с о н. Курс современного анализа. — М.: Физматгиз, 1963, т. I, II.]

N. W i e n e r, The Fourier Integral, Cambridge, 1932. [Имеется перевод: Н. В и н е р. Интеграл Фурье и некоторые его приложения. — М.: Наука, 1963.]

A. Z y g m u n d, Trigonometrical Series, Warsaw, 1935. [Имеется перевод: А. З и г м у н д. Тригонометрические ряды. — М.: Мир, 1965.]

ОРИГИНАЛЬНЫЕ РАБОТЫ, УПОМЯНУТЫЕ В ТЕКСТЕ

R. B a d e s c u

(1) Sur une equation intégrate. Mathesis, **42** (1928), 414—416.

W.N. B a i l e y

(1) Some classes of functions which are their own reciprocals in the Fourier—Bessel integral transform. Journal London Math. Soc. **5** (1930), 258—265.

(2) On the solutions of some integral equations, Journal London Math. Soc. **6** (1931), 242—247.

(3) On a function which is its own reciprocal in the Fourier—Bessel integral transform, Journal London Math. Soc. **5** (1930), 92–95.

(4) A note on an integral due to Ramanujan, Journal London Math. Soc. **6** (1931), 216—217.

E.W. Barnes

(1) A new development of the theory of the hypergeometric functions. Proc. London Math. Soc. (2) **6** (1908), 141-177.

(2) A transformation of generalized hypergeometric series, Quart. J. of Math. **41** (1910), 136—140.

H. Bateman

(1) The inversion of a definite integral, Proc. London Math. Soc. (2) **4** (1906), 461—498.

(2) Report on the history and present state of the theory of integral equations. Reports of the British Association (1910), 354—424.

(3) The solution of partial differential equations by means of definite integrals, Messenger of Math. **41** (1911), 94—101.

(4) Some simple definite integrals derived from the formulae of Fourier and Abel, Messenger of Math. **41** (1911), 180—184.

(5) The solution of linear differential equations by means of definite integrals, Trans. Camb. Phil. Soc. **21** (1912), 171—-196.

(6) An integral equation occurring in a mathematical theory of retail trade, Messenger of Math. **49** (1920), 134—137.

(7) The equation for the transverse vibrations of thin rods, Messenger of Math. **57** (1928), 145—154.

F. Bernstein

(1) Über das Fourierintegral $\int_0^\infty e^{-x^4} \cos tx\, dx$, Math. Annalen, **79** (1919), 265—268.

(2) Die Integralgleichung der elliptischen Thetanullfunktion, Berliner Sitzungsberichte (1920), 735—747.

F. Bernstein and G. Doetsch

(1) Probleme aus der Theorie der Wärmeleitung I, Math. Zeitschrift, **22** (1925), 285—292.

A.C. Berry

(1) The Fourier transform identity theorem, Annals of Math. (2) **32** (1931), 227—232.

(2) Necessary and sufficient conditions in the theory of Fourier transforms, там же, 830—838.

R.P. Boas

(1) Some theorems on Fourier transforms and conjugate trigonometrical integrals, Trans. Amer. Math. Soc. **40** (1936), 287—308.

S. Bochner

(1) Darstellung reellvariabler und analytischer Funktionen durch verallgemeinerte Fourier-und Laplace-Integrale, Math. Annalen, **97** (1927), 635—662.

(2) Über erne Klasse singulärer Integralgleichungen. Berliner Sitzungsberichte, **22** (1930), 403—411.

(3) Inversion formulae and unitary transformations, Annals of Math. **35** (1934), 111—115.

S. Bochner and G.H. Hardy

(1) Notes on two theorems of Norbert Wiener, Journal London Math. Soc. **1** (1926), 240—244.

L.S. Bosauquet

(1) On Abel's integral equation and fractional integrals, Proc. London Math. Soc. (2) **31** (1930), 134—143.

F.W. Bradley

(1) An extension of the Fourier—Bessel integral, Proc. London Math. Soc. (2) **41** (1936), 209—214.

T.J.I.A. Bromwich

(1) Normal coordinates in dynamical systems, Proc. London Math. Soc. (2) **15** (1915), 401—448.

T.A. Brown

(1) Fourier's integral, Proc. Edin. Math. Soc. **34** (1915), 3—10.

P.J. Browne

(1) Sur une formule directe pour la solution d'une équation intégrale d'Abel, Comptes rendus, **158** (1914), 1562—1565.

J.C. Burkill

(1) On Mellin's inversion formula, Proc. Camb. Phil. Soc. **23** (1926), 256—260.

(2) The expression in Stieltjes integrals of the inversion formulae of Fourier and Hankel, Proc. London Math. Soc. (2) **25** (1926), 513—524.

I.W. Busbridge

(1) On general transforms with kernels of the Fourier type, Journal London Math. Soc. **9** (1934), 179—187.

(2) Dual integral equations, Proc. London Math. Soc. (2) **44** (1938), 115—129.

E. Cahen

(1) Sur la fonction $\zeta(s)$ de Riemann et sur des functions analogues. Ann. de l'Éc. Norm. (3) **11** (1894), 75—164.

B.H. Camp

(1) Multiple integrals over infinite fields, and the Fourier multiple integral, Amer. Journal of Math. **39** (1917), 311—334.

G. Cantor

(1) Über trigonometrische Reihen, Math. Annalen, **4** (1871), 139—143. (Werke, 87—91.)

F. Carlson

(1) Sur une classe de séries de Taylor, Thèse, Upsala, 1914.)

H.S. Carslaw

(1) Gibbs's phenomenon in the sum (C, r) for $r > 0$ of Fourier's integral, Journal London Math. Soc. **1** (1926), 101—104.

L. Casper

(1) Über eine Erwelterung der Fourierschen Integralformel, Jahresbericht D.M.V. **37** (1228), 251—253.

A.L. Cauchy

(1) Mémoire sur la théorie des ondes, Oevres, Sér. 1, 1, 5—318; особенно VI, 133—139, и XIX, Sur les fonctions réciproques, 300—303.

(2) Mémoire sur l'intégration des équations linéaires, Oevres, Sér. 2, 1, 275—357.

R.G. Cooke

(1) The inversion formulae of Hardy and Titchmarsh, Proc. London Math. Soc. (2) **24** (1925), 381—420.

(2) Gibbs's Phenomenon in Fourier—Bessel series and integrals. Proc. London Math. Soc. (2) **27** (1928), 371—392.

J. Cossar

(1) A note on Fourier integrals, Journal London Math. Soc. **7** (1932), 38—46.

L. Crijns

(1) Over een eigenfvmctie bij een integraalvergelijking, Handel. Nederl. Natuur-en Geneesk. Congr. **19** (1923), 116—117. (Fortschritte der Math. **49** (1923), 296—297.)

D.P. Dalzell

(1) Heaviside's operational method, Proc. Phys. Soc. **42** (1930), 75—81.

A.C. Dixon

(1) Some limiting cases in the theory of integral equations, Proc. London Math. Soc. (2) **22** (1923), 201—222.

(2) On the solving nuclei of certain integral equations whose nuclei are homogeneous and of degree -1, and the solution of a class of linear functional equations, Proc. London Math. Soc. (2) **27** (1926), 233—272.

A.L. Dixon and W.L. Ferrar

(1) Infinite integrals of Bessel functions, Quart. J. of Math. (Oxford), **6** (1935), 161—174.

G. Doetsch

(1) Die Integrodifferentialgleichungen vom Faltungstypus, Math. Annalen **89** (1923), 192–207.

(2) Bemerkung zu der Arbeit von V. Fock, Math. Zeitschrift, **24** (1925), 785—791.
(3) Probleme aus der Theorie der Wärmeleitung II, Math. Zeitschrift, **22** (1925), 293—306.
(4) Die Anwendung von Funktionaltransformationen in der Theorie der Differentialgleichungen und die symbolische Methode (Operatorenkalkül), Jahresbericht D.M.V., **43** (1934), 238—251.

W. Dorn
(1) Fouriersche Integrale als Grenzwerte Fourierscher Reihen, Sitz. Wiener Akad. der Wissensch. **135** (1926), 127—147.

H. Eyraud
(1) La sommation des intégrales divergentes dans la théorie des spectres, Comptes rendus, **190** (1930), 254—256.

W.L. Ferrar
(1) Summation formulae and their relation to Dirichlet's series, Compositio Math. **1** (1935), 344—360.
(2) Summation formulae and their relation to Dirichlet's series, II, Gompositio Math. **4** (1937), 394—405.

V. Fock
(1) Über eine Klasse von Integralgleichungen, Math. Zeitschrift, **21** (1924), 161—173.

R.H. Fowler
(1) A simple extension of Fourier's integral theorem, and some physical applications, in particular to the theory of quanta, Proc. Royal Soc. (A) **99** (1921), 462—471.

C. Fox
(1) A generalization of the Fourier—Bessel transform, Proc. London Math. Soc. (2) **29** (1929), 401—452.
(2) A note on Hankel's theorem, Proc. London Math. Soc. (2) **30** (1929), 18—22.
(3) Applications of Mellin's transformation to integral equations, Proc. London Math. Soc. (2) **38** (1935), 495—502.

R. Gibrat
(1) Sur un type assez général d'équations intégrales singulières, Comptes rendus. **197** (1933). 1571-1574.

S. Goldstein
(1) Note on the operational solution of an integral equation, Journal London Math. Soc. **6** (1931), 262—268.
(2) Some two-dimensional diffusion problems with circular symmetry. Proc. London Math. Soc. **34** (1932), 51—88.
(3) Operational representations of Whittaker's confluent hypergeometric function and Weber's parabolic cylinder function, Proc. London Math. Soc. (3) **34** (1932), 103—125.

G. G r a z i a n i

(1) Sulla formula integrale di Fourier, Rom. Accad. L. Rend. (5) **18** (1909), 169—172.

(2) Funzioni rappresentabili con la formula integrals di Fourier, там же, 596—601.

M.E. G r i m s h a w

(1) A case of distinction between Fourier integrals and Fourier series, Proc. Camb. Phil. Soc. **23** (1927), 755—767.

(2) Summation of the integral conjugate to the Fourier integral of finite type, там же, 871—881.

(3) A contribution to the theory of uniqueness of representation by trigonometrical integrals. Proc. London Math. Soc. (2) **29** (1929), 243—256.

H. H a h n

(1) Über die Methode der arithmetischen Mittel in der Theorie der verallgemeinerten Fourierintegrale, Sitz. Wiener Akad. der Wissensch. (1925), 449—470.

(2) Über eine Verallgemeinerung der Fourierschen Integralformel, Acta Math. **49** (1927), 301—353.

G.H. H a r d y

(1) Note on the function $\int_x^\infty e^{\frac{1}{2}(x^2-t^2)}\,dt$, Quart. J. of Math. **35** (1904), 193—207.

(2) On an integral equation, Proc. London Math. Soc. (2) **7** (1909), 445—472.

(3) Some cases of the inversion of the order of integration, Messenger of Math. **41** (1911), 102—109.

(4) Further researches in the theory of divergent series and integrals, Trans. Camb. Phil. Soc. **21** (1912), 1—48.

(5) Fourier's double integral and the theory of divergent integrals, там же, 427—451.

(6) On Weierstrass's singular integral, and on a theorem of Lerch, Messenger of Math. **46** (1916), 43—48.

(7) On Stieltjes' «probième des moments», Messenger of Math. **46** (1917), 175—182 и **47** (1917), 81—88.

(8) On Mellin's inversion formula, Messenger of Math. **47** (1918), 178—184.

(9) On some definite integrals considered by Mellin, Messenger of Math. **49** (1919), 85—91.

(10) Further notes on Mellin's inversion formulae, Messenger of Math. **50** (1920), 165—171.

(11) On Fourier's series and Fourier's integral, Messenger of Math. **52** (1922), 49—58.

(12) On Fourier transforms, Messenger of Math. **53** (1923), 135—142.

(13) Some formulae in the theory of Bessel functions, London Math. Soc. Records. June 12, 1924: Proc. London Math. Soc. (2) **23** (1924), lxi—lxiii.

(14) On Hilbert transforms, Messenger of Math. **54** (1924), 20—27 и 81—88.

(15) The lattice points of a circle, Proc. Roy. Soc. (A) **107** (1925), 623—635.

(16) Some further applications of Mellin's inversion formula, Messenger of Math. **56** (1926), 186—192.

(17) A discontinuous integral, Messenger of Math. **57** (1928), 113—120.

(18) Summation of a series of polynomials of Laguerre, Journal London Math. Soc. **7** (1932), 138—139.

(19) A theorem concerning Fourier transforms. Journal London Math. Soc. **8** (1933), 227—231.

(20) The resultant of two Fourier kernels, Proc. Camb. Phil. Soc. **31** (1935), 1—6.

G.H. Hardy and E. Landau

(1) The lattice points of a circle, Proc. Royal Soc. (A) **105** (1925), 244—258.

G.H. Hardy and J.E. Littlewood

(1) Some new properties of Fourier constants, Math. Annalen **97** (1926), 159—209.

(2) A point in the theory of conjugate functions, Journal London Math. Soc. **4** (1929), 242—245.

(3) Some new properties of Fourier constants. Journal London Math. Soc. **6** (1931), 3—9.

(4) Some more theorems concerning Fourier series and Fourier power series, Duke Math. Journal **2** (1936), 354—382.

G.H. Hardy and E.C. Titchmarsh

(1) Solutions of some integral equations considered by Bateman, Kapteyn, Littlewood, and Milne, Proc. London Math. Soc. (2) **23** (1924), 1—26.

(2) Additional note on certain integral equations, Proc. London Math. Soc. (2) **30** (1929), 95—106.

(3) Solution of an integral equation. Journal London Math. Soc. **4** (1929), 300—304.

(4) Self-reciprocal functions, Quart. J. of Math. (Oxford), **1** (1930), 196—231.

(5) A note on Parseval's theorem for Fourier transforms, Journal London Math. Soc. **6** (1931), 44—48.

(6) Formulae connecting different classes of self-reciprocal functions, Proc. London Math. Soc. (2) **33** (1931), 225—232.

(7) An integral equation, Proc. Camb. Phil. Soc. **28** (1932), 165—173.

(8) A class of Fourier kernels, Proc. London Math. Soc. (2) **35** (1933), 116—155.

(9) New solution of an integral equation, Proc. London Math. Soc. (2) **41** (1936). 1—15.

F. Hausdorff

(1) Eine Ausdehnung des Parsevalschen Satzes über Fourierreihen, Math. Zeitschrift, **16** (1923), 163—169.

A.E. Heins

(1) Applications of the Fourier transform theorem. J. Math. Phys. Mass. Inst. Tech. **14** (1935), 437—442.

E. Hilb

(1) Über Integraldarstellung willkürlicher Funktionen, Math. Annalen **66** (1909), 1—66.

E. Hille

(1) A class of reciprocal functions, Annals of Math. (2) **27** (1926), 427—464.

(2) On Laplace integrals, 8 Skanrt. Mat. Kongr. (1935), 216—227.

E. Hille and J.D. Tamarkin

(1) On the theory of Laplace integrals, Proc. Nat. Acad. Sci, U.S.A. **19** (1933), 908—912.

(2) On a theorem of Paley and Wiener, Annals of Math. (2) **34** (1933), 606—614.

(3) On the theory of Fourier transforms. Bull. Amer. Math. Soc. **39** (1933), 768—774.

(4) A remark on Fourier transforms and functions analytic in a half-plane, Compositio Math. **1** (1934), 98—102.

(5) On the absolute integrabiHty of Fourier transforms, Fundamenta Math. **25** (1935), 329—352.

E. Hille, A.C. Offord and J.D. Tamarkin

(1) Some observations on the theory of Fourier transforms, Bull. Amer. Math. Soc. **41** (1935), 427—436.

E.W. Hobson

(1) On a general convergence theorem, and the theory of the representation of a function by series of normal functions, Proc. London Math. Soc. (2) **6** (1908), 349—395 (особ. 367—370).

E. Hopf

(1) Über lineare Integralgleichungen mit positivem Kern, Sitz. Berlin, Akad. Wiss. 1928, No. 18.

(2) Über eine Klasse singulärer Integralgleichungen; Bemerkungen zur Methode von Hardy und Titchmarsh, Journal London Math. Soc. **4** (1929), 23—27.

(3) Mathematisches zur Strahlungsgleichgewichtstheorie der Fixsternatmosphären. Math. Zeitschrift **33** (1931), 109.

P. Humbert

(1) Sur les intégrales de Fresnel, Mathematica **10** (1935), 32—36 (Zentralblatt für Math. **10**, 398).

A.E. Ingham

(1) A note on Fourier transforms, Journal London Math. Soc. **9** (1934), 29—32.

S. Izumi

(1) Remarks on the Fourier's inversion formulas, Tôhoku Math. Journal **29** (1928), 268—277.

(2) Über die Summierbarkeit der Fourierschen Integralformel, Tôhoku Math. Journ. **30** (1929), 96—110.

(3) On the Cahen—Mellin inversion formula, Tôhoku Math. Journal **30** (1929), 111—114.

(4) On Hankel transforms, Proc. Acad. Tôkyo **5** (1929), 113—115.

(5) Hankel transforms, Tôhoku Math. Journal, **32** (1929), 54—58.

(6) Remarks on Fourier integrals, Science Reports of the Tôhoku Imperial University (1) **23** (1934), 484—490.

(7) On the generalized Fourier integrals, Science Reports of the Tôhoku Imperial University, **23** (1935), 880—919.

(8) On Wiener's proof of Plancherel's theorem, Science Reports Tôhoku **24** (1935), 55—62.

(9) A remark on an integral equation, Proc. Imp. Acad. Tôkyo **11** (1935), 210—211.

(10) On the Wiener's formula, Science Reports Tôhoku **24** (1935), 63—76.

S. Izumi and T. Kitagawa

(1) On some integral equations I, Jap. Journal of Math. **12** (1935), 81—94.

(2) On some integral equations II, Science Reports of the Tôhoku Imperial University (1) **25** (1936), 50—55.

(3) On the linear operations, Tôhoku Math: Journal **42** (1936), 54—64.

M. Jacob

(1) Über die Cesàro'sche Summierbarkeit des Fourier'schen Integrales, Bull. Acad. Polonaise (1926), 41—74.

(2) Über den Eindeutigkeitssatz in der Theorie der trigonometrischen Integrale, Math. Annalen **97** (1927), 663—674.

(3) Über den Eindeutigkeitssatz in der Theorie der verallgemeinerten trigonometrischen Integrale, Math. Annalen **100** (1928), 278—294.

(4) Über die Summierbarkeit von Fourierschen Reihen und Integralen, Math. Zeitschrift, **29** (1928), 20—33.

S. Kaczmarz

(1) Note on general transforms, Studia Math. **4** (1933), 146—151.

T. Kameda

(1) Theory of generating functions and its application to the theory of probability, Journal of the Faculty of Science, Tôkyo, **2** (1925), 1—62.

L.V. King

(1) On the acoustic radiation pressure on circular discs, inertia and diffraction corrections, Proc. Royal Soc. (A), **153** (1935), 1—16.

Н.С. Кошляков

(1) Об одной общей сумматорной формуле и её приложениях, Доклады АН СССР **4** (1934), 187—190.

B. K u t t n e r

(1) Divisor functions; Fourier integral theorems, Proc. London Math. Soc. (2) **37** (1934), 161—208.

H. L e b e s g u e

(1) Sur les intégrales singulières, Annales de Toulouse (3) **1** (1909), 25—118. (особ. 90—92).

N. L e v i n s o n

(1) On a class of non-vanishing functions, Proc. London Math. Soc. (2) **41** (1936), 393—407.

P. L é v y

(1) Sur le rôle de la loi de Gauss dans la théorie des erreurs, Comptes rendus **174** (1922), 855—857.

(2) Sur une application de la dérivée d'ordre non entier au calcul des probabilités, Comptes rendus **176** (1923), 1118—1120.

(3) Sur une équation intégrale considerée par M. Picard, Bull. Sc. Math. (2) **52** (1928), 156—160.

E.H. L i n f o o t

(1) A sufficiency condition for Poisson's formula, Journal London Math. Soc. **4** (1928), 54—61.

J.E. L i t t l e w o o d

(1) On a theorem of Kolmogoroff, Journal London Math. Soc. **1** (1926), 229—231.

H.M. M a c d o n a l d

(1) Some applications of Fourier's theorem, Proc. London Math. Soc. (1) **35** (1903), 428—443.

M.S. M a c p h a i l and E.C. T i t c h m a r s h

(1) The summability of Fourier's integral, Journal London Math. Soc. **11** (1936), 313—318.

M. M a t h i a s

(1) Über positive Fourier-Integrale, Math. Zeitschrift **16** (1923), 103—125.

А.Г. М а й е р и Е.А. Л е о н т о в и ч

(1) Об одном неравенстве, связанном с интегралом Фурье, Доклады АН СССР **4** (1934), 353—356.

B.M. M e h r o t r a

(1) Some theorems on self-reciprocal functions, Proc. London Math. Soc. (2) **34** (1932), 231—240.

(2) On some self-reciprocal functions, Bull. Calcutta Math. Soc. **25** (1933), 167—172.

(3) A few self-reciprocal functions, Broc. Physico-Math. Soc. of Japan (3) **16** (1934), 273—274.

(4) A list of self-reciprocal functions, Journal Indian Math. Soc. (New Series) **1** (1934), 93—104.

(5) Some definite integrals involving self-reciprocal functions, Bull. Amer. Math. Soc. **40** (1934). 265—266.

(6) Theorems connecting different classes of self-reciprocal functions, Proc. Edinburgh Math. Soc. (2) **4** (1934), 53—56.

(7) An integral representing self-reciprocal functions, Bull. Calcutta Math. Soc. **26** (1934), 35—38.

(8) Self-reciprocal functions, Tôhoku Math. Journal **40** (1935), 451—485.

(9) A brief history of self-reciprocal functions, Journal Indian Math. Soc. (New Series). **1** (1934), 209—227.

H. M e l l i n

(1) Über die fundamentale Wichtigkeit des Satzes von Cauchy für die Theorien der Gamma- und der hypergeometrischen Funktionen, Acta Soc. Fennicae, **21** (1896), No. 1, 1—115.

(2) Über den Zusammenhang zwischen den linearen Differential- und Differenzengleichungen, Acta Math. **25** (1902), 139—164.

(3) Eine Formel für den Logarithmus transcendenter Functionen von endlichem Geschlecht, Acta Math. **25** (1902), 165—183.

(4) Abriss einer einheitlichen Theorie der Gamma- und der hypergeometrischen Funktionen, Math. Annalen **68** (1910), 305—337.

A. M i l n e

(1) On the equation of the parabolic cylinder function, Proc. Edin. Math. Soc. **32** (1914), 2—14.

E.A. M i l n e

(1) Radiative equilibrium in the outer layers of a star, Monthly Notices of the R.A.S. **81** (1921), 361—375.

(2) Maxwell's law, and the absorption and emission of radiation, Proc. Camb. Phil. Soc. **23** (1926), 465—471.

S.C. M i t r a

(1) An integral equation satisfied by the square of Weber's parabolic cylinder function, Journal London Math. Soc. **11** (1936), 252—256.

L.J. M o r d e l l

(1) Poisson's summation formula and the Riemann zeta-function, Journal London Math. Soc. **4** (1928), 285—291.

(2) The zeta-functions arising from quadratic forms, and their functional equations, Quart. J. of Math. (Oxford) **1** (1930), 77—101.

G.W. M o r g a n

(1) A note on Fourier transforms, Journal London Math. Soc. **9** (1934) 187—192.

(2) On the convergence of transform integrals, Proc. London Math. Soc. (2) **41** (1936), 199—208.

Н.И. Мусхелов

(1) Решение одного интегрального уравнения, встречающегося в теории чёрного излучения. Журнал Русского Физико-химического общества **61** (1924), 30—39.

J. Neufeld

(1) On the operational solution, of linear mixed difference-differential equations, Proc. Camb. Phil. Soc. **30** (1934), 389—391.

(2) On multiplication of operational expressions. Tôhoku Math. Journal **40** (1935), 449—450.

F. Nevanlinna

(1) Über die Summation der Fourierschen Reihen und Integrale, Finska Vet. Soc. Förh. (A) **64** (1922), No. 3.

J.W. Nicholson

(1) Generalisation of a theorem due to Sonine, Quart. J. of Math. **48** (1920), 321—329.

(2) A problem in the theory of heat conduction, Proc. Royal Soc. (A) **100** (1921), 226—240.

A.C. Offord

(1) On Fourier transforms, Proc. London Math. Soc. (2) **28** (1934), 197—216.

(2) On Hankel transforms, Proc. London Math. Soc. (2) **39** (1935), 49—67.

(3) The uniqueness of a certain trigonometrical integral, Proc. Camb. Phil. Soc. **31** (1935). 382—389.

(4) On Fourier transforms II, Proc. London Math. Soc. (2) **40** (1935), 281—289.

(5) On Fourier transforms III, Trans. Amer. Math. Soc. **38** (1935), 250—266.

(6) Note on the uniqueness of the representation of a function by a trigonometric integral, Journal London Math. Soc. **11** (1936), 171—174.

(7) On the uniqueness of the representation of a function by a trigonometric integral, Proc. London Math. Soc. (2) **42** (1937), 422—480.

A. Oppenheim

(1) Some identities in the theory of numbers, Proc. London Math. Soc. (2) **26** (1927), 295—350.

L. Orlando

(1) Sulla formula integrale di Fourier, Rom. Accad. L. Rend. (5), $\mathbf{17_2}$ (1908), 367—371.

(2) Nuove osservazioni sulla formula integrale di Fourier, Rom. Accad. L. Rend. (5) $\mathbf{18_2}$ (1909), 343—348.

(3) Sopra un nuovo aspetto della formula integrale di Fourier, Rom. Accad. L. Rend. (5) $\mathbf{22_1}$ (1913), 65—66.

W.M.F. O r r

(1) Extensions of Fourier's and the Bessel—Fourier theorems, Proc. Royal Irish Acad. **27** (1909), Sect. A. 205—248; и там же **29** (1911), Sect. A, 10-32.

P.M. O w e n

(1) The Riemannian theory of Hankel transforms. Proc. London Math. Soc. (2) **39** (1935), 295—320.

R.E.A.C. P a l e y and N. W i e n e r

(1)–(7) Notes on the theory and. application of Fourier transforms. Notes I–II, Trans. Amer. Math. Soc. **35** (1933), 348—355; Notes III–VII, там же, 761–791.

E.G. P h i l l i p s

(1) Note on a problem of Ramanujan, Journal London Math. Soc. **4** (1929), 310—313.

E. P i c a r d

(1) Sur un exemple simple d'une équation singulière de Fredholm où la nature analytique de la solution dépend du second membre, Ann. de l'Éc. Norm. (3) **28** (1911), 313—324.

S. P i n c h e r l e

(1) Studi sopra alcune operazioni funzionali, Mem. di Bologna (4) **7** (1886), 393—442.

M. P l a n c h e r e l

(1) Contribution à l'étude de la représentation d'une fonction arbitraire par des intégrates définies, Rend. di Palermo **30** (1910), 289—335.

(2) Zur Konvergenztheorie der Integrale $\lim\limits_{z=\infty}\int_a^z f(x)\cos xy\,dx$, Math. Annalen **74** (1913), 573—578.

(3) Sur la convergence et sur la sommation par les moyennes de Cesàro de $\lim\limits_{z=\infty}\int_a^z f(x)\cos xy\,dx$, Math. Annalen **76** (1915), 315—326.

(4) Sur les formules d'inversion de Fourier et de Hankel, Proc. London Math. Soc. (2) **24** (1925), 62—70.

(5) Formule de Parseval et transformations fonctionelles orthogonales, Commentarii math. Helvetici **1** (1929), 273—288.

(6) Sur les formules de réciprocité du type de Fourier, Journal London Math. Soc. **8** (1933), 220—226.

A. P l e s s n e r

(1) Zur Theorie der konjugierten trigonometrischen Reihen, Dissertation, Giessen, 1923.

(2) Über Konvergenz von trigonometrischen Reihen, Journal für Math. **155** (1925), 15—25.

H. P o i n c a r é

(1) Sur la théorie des quanta, Journal de physique (5) **2** (1912), 5—34.

B. von der P o l

(1) On the operational solution of linear differential equations and an investigation of the properties of these solutions, Phil. Mag (7) **8** (1929), 861—898.

S. P o l l a r d

(1) The evaluation of certain definite integrals involving trigonometrical functions by means of Fourier's integral theorem, Messenger of Math. **50** (1920), 151—156.

(2) The summation of a Fourier integral of finite type, Proc. Camb. Phil. Soc. **23** (1926), 373—382.

(3) Identification of the coefficients in a trigonometrical integral, Proc. London Math. Soc. (2) **25** (1926), 451—468.

(4) On Fourier's integral, Proc. London Math. Soc. (2) **26** (1927), 12—24.

G. P ó l y a

(1) On the zeros of an integral function represented by Fourier's integral, Messenger of Math. **52** (1923), 185—188.

(2) Herleitung des Gauss'schen Fehlergesetzes aus einer Funktionalgleichung, Math. Zeitschrift **18** (1923), 96—108.

(3) On the zeros of certain trigonometric integrals, Journal London Math. Soc. **1** (1926), 98—99.

(4) Über trigonometrische Integrale mit nur reellen Nullstellen, Journal für Math. **158** (1927), 6—18.

H.S.A. P o t t e r

(1) Approximate equations for the Epstein zeta-function, Proc. London Math. Soc. (2) **36** (1933), 501—515.

N. P r a s a d

(1) A new theorem on the representation of a function by Fourier's single integral, Journal London Math. Soc. **7** (1932), 36—38.

A. P r i n g s h e i m

(1) Über neue Gültigkeitsbedingungen für die Fouriersche Integralformel, Math. Annalen **68** (1910), 367—408.

(2) Nachtrag zu der Abhandlung: über neue..., Math. Annalen **71** (1911), 289—298.

S. R a m a n u j a n

(1) Some definite integrals, Messenger of Math. **44** (1915), 10—18.

(2) Some definite integrals connected with Gauss's sums, Messenger of Math. **44** (1915), 75—85.

(3) New expressions for Riemann's functions $\xi(s)$ and $\Xi(t)$, Quart. J. of Math. **46** (1915), 253—260.

(4) Some definite integrals, Proc. London Math. Soc. (2) **17** (1918), Records for Jan. 17, 1918.

(5) Some definite integrals, Journal Indian Math. Soc. **11** (1919), 81—87.

(6) A class of definite integrals, Quart. J. of Math. **43** (1920), 294—310.

Lord Rayleigh

(1) On the character of the complete radiation at a given temperature, Phil. Mag. (5) **27** (1889), 460—469.

B. Riemann

(1) Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebener Grösse, Werke (1876), 136—144.

F. Riesz

(1) Über eine Verallgemeinerung der Parsevalschen Formel, Math. Zeitschrift **18** (1923), 117—124.

(2) Sur la formule d'inversion de Fourier, Acta Szeged **3** (1927), 235—241.

M. Riesz

(1) Les functions conjuguées et les séries de Fourier, Comptes rendus **178** (1924), 1464—1467.

(2) Sur les fonctions conjuguées, Math. Zeitschrift **27** (1927), 218—244.

F. Sbrana

(1) Sopra alcune formule di risoluzione di certe equazione integrali di Volterra, Rom. Accad. L. Rend. (5) **31** (1922), 454—456.

(2) Sopra un gruppo di operatori funzionali che interessano la fisica, Annali di Mat. (4) **7** (1929), 33—45.

(3) Sulla integrazione delle equazioni lineari alle derivate parziali a coefficienti constanti, Atti Soc. Ligust. Sci. Geneva **13** (1934), 177—211.

E. Schmidt

(1) Über eine Klasse linearer funktionaler Differentialgleichungen, Math. Annalen **70** (1911), 499—524.

F. Schürer

(1) Eine gemeinsame Methode zur Behandlung gewisser Funktionalgleichungsprobleme, Leipziger Berichte **70** (1918), 185—240.

A. Schuster

(1) On interference phenomena, Phil. Mag. (5) **37** (1894), 509—545.

A. Sommerfeld

(1) Die willkürlichen Funktionen in der mathematischen Physik, Inaug. Diss., Königsberg, 1901.

P.L. Srivastava

(1) Sur une classe de séries de Taylor et les fonctions eatières associées, Bulletin S.M.F. **57** (1929), 160—173.

S.W.P. Steen

(1) Divisor functions, Proc. London Math. Soc. (2) **31** (1930), 47—80; там же **32** (1931), 356—368.

(2) Note on transforms, Journal London Math. Soc. **10** (1935), 151—160.

S. S z i d o n

(1) Reihentheoretische Sätze und ihre Anwendungen in der Theorie der Fourierschen Reihen, Math. Zeitschrift **10** (1921), 121—127.

T. T a k a h a s h i

(1) On the conjugate function of an integrable function and Fourier series and Fourier transform, Sci. Rep. Tôhoku Univ. (1) **25** (1936), 56—78.

J.D. T a m a r k i n

(1) On Laplace's integral equations, Trans. Amer. Math. Soc. **28** (1926), 417—425.

E.C. T i t c h m a r s h

(1) Hankel transforms, Proc. Camb. Phil. Soc. **21** (1923), 463—473.

(2) A contribution to the theory of Fourier transforms, Proc. London Math. Soc. (2) **23** (1923), 279—289.

(3) A pair of inversion formulae, London Math. Soc. Records, May 1923; Proc. London Math. Soc. (2) **22** (1923), xxxiv—xxxv.

(4) Extensions of Fourier's integral formula to formulae involving Bessel functions, London Math. Soc. Records, Jan. 1924; Proc. London Math. Soc. (2) **23** (1924), xxii—xxiv.

(5) Conjugate trigonometrical integrals, Proc. London Math. Soc. (2), **24** (1924), 109—130.

(6) An inversion formula involving Bessel functions, London Math. Soc. Records, Nov. 1924; Proc. London Math. Soc. (2) **24** (1925), vi—vii.

(7) Reciprocal formulae involving series and integrals, Math. Zeitschrift **25** (1926), 321—347, и Correction, там же **26** (1927).

(8) The zeros of certain integral functions, Proc. London Math. Soc. (2) **25** (1926), 283—302.

(9) A theorem on infinite products, Journal London Math. Loc. **1** (1926), 35—37.

(10) A note on Hankel transforms, Journal London Math. Soc. **1** (1926), 195—196.

(11) Some integrals involving Bessel functions, Journal London Math. Soc. **2** (1927), 97—99.

(12) A note on Fourier transforms, Journal London Math. Soc. **2** (1927), 148—150.

(13) On conjugate functions, Proc. London Math. Soc. (2) **29** (1928), 49—80.

(14) Additional note on conjugate functions. Journal London Math. Soc. **4** (1930), 204—206.

(15) A proof of a theorem of Watson, Journal London Math. Soc. **8** (1933), 217—220.

F. T r i c o m i

(1) Trasformazione di Laplace e polinomi di Laguerre I, Rend. Lincei (6) **21** (1935), 232—239.

(2) Sulla trasformazione di Laplace, Conferenze di fisica e matematica, Torino (1935), 1—15.

(3) Autovalori e autofunzioni del nucleo di Hankel, Reale Acc. delle Scienze di Torino **71** (1935), 1—7.

(4) Sulla trasformazione e il teorema di reciprocita di Hankel, Rend. Lincei (6) **22** (1935), 564—571.

(5) Un teorema abeliano per la transformazione di Hankel e alcune nuove applicazioni di una formula sulle furizioni di Bessel, Rend. Lincei (6) **22** (1935), 572—576.

(6) Sulle trasformazioni funzionali lineari commutabili con la derivazione, Commentarii Math. Helvetici **8** (1935), 70—87.

(7) Über Doetschs Umkehrformel der Gauss-Transformation und eine neue Umkehrung der Laplace-Transformation, Math. Zeitschrift **40** (1936), 720-726.

R.S. Varma

(1) Some functions which are self-reciprocal in the Hankel transform, Proc. London Math. Soc. (2) **42** (1936), 9—17.

S. Verblinsky

(1) Some theorems on moment constants and functions, Proc. London Math. Soc. (2) **37** (1934), 338—382.

(2) Trigonometric integrals and harmonic functions, Proc. London Math. Soc. (2) **38** (1934), 1—48.

(3) On positive harmonic functions in a half-plane, Proc. Camb. Phil. Soc. **31** (1935), 482—507.

A. Walfitz

(1) Über die sumrnatorischen Funktionen einiger Dirichletscher Reihen, Dissertation, Göttingen, 1922.

(2) Über zwei Gitterpunktprobleme, Math. Annalen **95** (1926), 69—83.

G.N. Watson

(1) Some self-reciprocal functions, Quart. J. of Math. (Oxford) **2** (1931), 298—309.

(2) General transforms, Proc. London Math. Soc. (2) **35** (1933), 156—199.

(3) Notes on generating functions of polynomials: (2) Hermite polynomials, Journal London Math. Soc. **8** (1933), 194—199.

(4) An integral equation for the square of a Laguerre polynomial, Journal London Math. Soc. **11** (1936), 256—261.

(5) Ramanujan's integrals and Gauss's sums, Quart. J. of Math. **7** (1936), 175—183.

H.A. Webb

(1) On the solution of linear difference equations by definite integrals, Messenger of Math. **34** (1904), 40—45.

K. W e i e r s t r a s s

(1) Über die analytische Darstellbarkeitsogenannter willkürlicher Functionen reeller Argumente, Berliner Sitzungsberichte (1885), 633—639, 789—805 (Werke, III. 1—37).

H. W e y l

(1) Singuläre Integralgleichungen, Math. Annalen **66** (1908) 273—324.

E.T. W h i t t a k e r

(1) On the numerical solution of integral equations. Proc. Royal Soc. (A) **94** (1917), 367—383.

D.V. W i d d e r

(1) The inversion of the Laplace integral and the related moment problem, Trans. Amer. Math. Soc. **36** (1934), 107—201.

(2) An application of Laguerre polynomials, Duke Math. Journal, **1** (1935), 126—136.

N. W i e n e r

(1) The operational calculus. Math. Annalen **95** (1916), 557—854.

(2) On the representation of functions by trigonometrical integrals, Math. Zeitschrift **24** (1925), 575—616.

(3) Hermitian polynomials and Fourier analysis, J. Math. Phys. Mass. Inst. Tech. **7** (1928), 161—184.

N. W i e n e r and E. H o p f

(1) Über eine Klasse singulärer Integralgleichungen, Sitz. Berlin. Akad. Wiss. (1931), 696—706.

B.M. W i l s o n

(1) On an extension of Milne's integral equation, Messenger of Math. **53** (1923). 157—160.

F. W o l f

(1) On the (C, k) summability of a trigonometrical integral, Proc. London Math. Soc. (2) **40** (1936), 502—523.

F.M. W o o d

(1) Reciprocal integral formulae, Proc. London Math. Soc. (2) **29** (1929), 29—48.

D.M. W r i n c h and J.W. N i c h o l s o n

(1) A class of integral equations occuring in physics, Phil. Mag. (7) **4** (1927), 531—560.

W.H. Y o u n g

(1) On Fourier's repeated integral, Proc. Royal Soc. Edin. **31** (1912), 559—586.

(2) On Sommerfeld's form of Fourier's repeated integrals, Proc. Royal Soc. Edin. **31** (1912), 587—603.

A. Zygmund

(1) Über die Beziehung der Eindeutigkeitsfragen in den Theorien der trigonometrischen Reihen und Integrale, Math. Annalen **99** (1928), 562—589.

(2) A remark on Fourier transforms, Proc. Camb. Phil. Soc. **32** (1936), 321—327.

ОПЕЧАТКИ, НАЙДЕННЫЕ В КНИГЕ И ИСПРАВЛЕННЫЕ В ФАЙЛЕ

Формат поправки: страница книги, строка на странице, направление отсчёта (сверху/снизу), формула или её часть с ошибкой → исправленный вариант.

- 15, 4 св.: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \to \sum\limits_{n=1}^{\infty}$
- 104, 3 сн.: $\dfrac{e^{(x^2-y^2)/2}}{\pi} \to \dfrac{e^{(x^2-y^2)/2}}{\sqrt{\pi}}$
- 146, 3 св.: $x^{\left(\frac{2}{q}-\right)\frac{q}{q-1}} \to x^{\left(\frac{2}{q}-1\right)\frac{q}{q-1}}$
- 156, 8 св.: $O(x^{-2\alpha}) \to O(X^{-2\alpha})$
- 213, 5 св.: $\left|\Omega - \dfrac{2y_\lambda+1}{x_\nu}\right| \to \left|\Omega - \dfrac{2y_\nu+1}{x_\nu}\right|$
- 222, 7 сн.: $\dfrac{y\cos xt}{(x+u)^2+t^2} \to \dfrac{y\cos xt}{(x+u)^2+y^2}$
- 222, 6 сн.: $\dfrac{y\cos xt}{(x-u)^2+t^2} \to \dfrac{y\cos xt}{(x-u)^2+y^2}$
- 231, 6 св.: $\left(\dfrac{d}{dt}\right)^{2k} \to \left(\dfrac{d}{dr}\right)^{2k}$
- 231, 7 св.: $\left(\dfrac{d}{dt}\right)^{2k} \to \left(\dfrac{d}{dr}\right)^{2k}$
- 245, 9 сн.: $F(x) \to F(u)$
- 269, 4 св.: $3^{\frac{2}{3}s' - \frac{1}{2}} \to 3^{\frac{3}{2}s' - \frac{1}{2}}$
- 282, 13 сн.: $a_2 = \frac{1}{2} \to a_3 = \frac{1}{2}$
- 286, 2 св.: $\displaystyle\int_0^x \sin(t\ln x)\,dt = \frac{1}{\pi\sqrt{x}\ln} \to \int_0^\infty \sin(t\ln x)\,dt = \frac{1}{\pi\sqrt{x}\ln x}$
- 293, 6 св.: $0\ (x>0) \to 0\ (x>u)$
- 301, 5 св.: $\sqrt{\dfrac{2}{x}} \to \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}$
- 308, 3 св.: $k_1(x) \to k_1(u)$
- 314, 8 св.: $\sin\!\left(x - \dfrac{\nu\pi}{2} - \dfrac{\pi}{4}\right) \to \sin\!\left(y - \dfrac{\nu\pi}{2} - \dfrac{\pi}{4}\right)$
- 315, 6 св.: $e^{i\cos\theta(p-q\cos\theta)} \to e^{i\cos\theta(p-q\cos\varphi)}$
- 323, 11 св.: $\displaystyle\int_1^\infty |f(x)|x^{\sigma-1}\,dx \to \int_0^\infty |f(x)|x^{\sigma-1}\,dx$

- 335, 1 сн.: $\Gamma n(+\nu - r + 1) \to \Gamma(n + \nu - r + 1)$
- 341, 1 св.: $\displaystyle\int_b^\infty \ldots = \to \int_b^\infty \ldots dx =$
- 344, 9 св.: $J_\nu(xy)\sqrt{xu} \to J_\nu(xu)\sqrt{xu}$
- 363, 9 сн.: $-v_x(0,t) - i\zeta v(0,t) \to -v_x(0,t) + i\zeta v(0,t)$
- 368, 3 сн.: $\dfrac{\operatorname{ch}\{\sqrt{\alpha^2 - i\zeta}\,(x-t)\}}{\operatorname{ch}(\sqrt{\alpha^2 - i\zeta}\,t)} \to \dfrac{\operatorname{ch}\{\sqrt{\alpha^2 - i\zeta}\,(x-t)\}}{\operatorname{ch}(\sqrt{\alpha^2 - i\zeta}\,t)}\Bigg]$
- 369, 11 св.: $ve^{i\zeta i}\,dt \to ve^{i\zeta t}\,dt$
- 372, 9 сн.: $t\zeta\left[ve^{i\zeta x}\right] \to i\zeta\left[ve^{i\zeta x}\right]$
- 380, 9 св.: $-\sqrt{2\pi r} \to -\sqrt{2\pi}\,r$
- 381, 6 сн.: $a_{\mu,\nu} f^\nu(x + b_\mu) \to a_{\mu,\nu} f^{(\nu)}(x + b_\mu)$
- 382, 6 св.: $(Oe^{c|x|}) \to O(e^{c|x|})$
- 389, 15 сн.: $\dfrac{\sqrt{2\pi}\ :\ G(u)K(u)}{1 - \sqrt{2\pi}\ :\ K(u)} \to \dfrac{\sqrt{2\pi}\,G(u)K(u)}{1 - \sqrt{2\pi}\,K(u)}$
- 393, 3 сн.: $K(u) \to K(x)$
- 393, 3 сн.: $M(u) \to M(x)$
- 395, 2 св.: $u^{-s}\,du \to u^{-s}\,ds$
- 400, 4 сн.: $e^{ixu}\,du \to e^{ixu}\,dx$
- 400, 3 сн.: $e^{ixu}\,du \to e^{ixu}\,dx$
- 413, 2 св.: $\dfrac{1 - e^{-izu}}{-iz} \to \dfrac{e^{-izu} - 1}{-iz}$
- 419, 10 св.: $\dfrac{2\pi J_1(t-x)}{t-x} \to -\dfrac{2\pi J_1(t-x)}{t-x}$
- 423, 4 сн.: $J_0(\rho u)\,du \to J_0(\rho u)\,d\rho$
- 426, 3 сн.: $\rho^{-s}\,ds \to \rho^{-s}\,d\rho$
- 437, 8 сн.: $\cos xw\,dw \to \displaystyle\int_0^\infty \cos xw\,dx$