Тирский Г.А.
Сахаров В.И.
Ковалев В.Л.
Власов В.И. и др.

Гиперзвуковая аэродинамика и тепломассообмен современных космических аппаратов и зондов

МОСКВА
ФИЗМАТЛИТ ®

УДК 533.49
ББК 39.68
Г 50

Издание осуществлено при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований по проекту 09-01-07070

Авторский коллектив:
Тирский Г.А., Сахаров В.И., Ковалев В.Л., Власов В.И., Горшков А.Б., Ковалев Р.В., Боровой В.Я., Егоров И.В., Белошицкий А.В., Горский В.В., Брыкина И.Г., Афонина Н.Е., Громов В.Г., Кирютин Б.А., Лунев В.В., Скуратов А.С., Алексин В.А., Рогов Б.В., Дядькин А.А., Журин С.В.

Гиперзвуковая аэродинамика и тепломассообмен спускаемых космических аппаратов и планетных зондов. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2011. — 548 с. — ISBN 978-5-9221-1322-9.

Излагаются результаты теоретических и экспериментальных исследований задач сверх- и гиперзвукового обтекания моделей космических аппаратов реальных конфигураций: ВКС «Буран», крылатый конус (конфигурация самолетного типа), Клипер, марсианский межпланетный зонд. Теоретические исследования проводятся на основе решения двумерных и трехмерных уравнений Навье–Стокса и их асимптотически упрощенных моделей, с учетом равновесных и неравновесных химических реакций, протекающих на фоне релаксации возбужденных внутренних степеней свободы частиц в ударном слое и на обтекаемой поверхности. Развито направление, связанное с разработкой крупных программных комплексов, предназначенных для сопряженного расчета задач баллистики, аэродинамики, тепломассообмена аппарата и тепловой прочности конструкции с переменной массой и формой, на всех этапах проектирования современных образцов ракетно-космической техники.

Монография будет интересна научным работникам и инженерам, работающим в области аэрокосмической техники, студентам старших курсов и аспирантам университетов и физико-технических факультетов технических вузов того же профиля.

Издание осуществлено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, издательский проект № 09-01-07070, и ГОУ ВПО Московский физико-технический институт (государственный университет).

ISBN 978-5-9221-1322-9

Содержание

Введение

Интенсивное освоение космоса экономически развитыми странами — Россией, США, Францией, Германией, Китаем, Японией — ставит задачу создания новых экономичных транспортных систем по доставке экипажей космонавтов, грузов на околоземную орбиту и возвращение их на Землю, а также возвращаемых планетных и невозвращаемых космических зондов различного назначения, в том числе для исследования планет и Луны и, в итоге, всей Солнечной системы. Важнейшей задачей в этом отношении как в России, так и в США считается планируемая на перспективу высадка космонавтов на Луну и Марс и возвращение их на Землю, а также промышленное освоение Луны. Президент США определил в 2004 г. цель космических достижений — ступить на поверхность Луны и Марса.

Начиная с 1980-х годов в ведущих космических державах стали интенсивно разрабатываться принципиально новые перспективные гиперзвуковые летательные аппараты (ЛА), такие как трансатмосферные, межорбитальные, высокоманевренные ЛА, совершающие аэродинамические маневры и/или рикошеты при гиперзвуковых скоростях в верхних слоях атмосферы Земли при перелете с верхних орбит на нижние без использования двигателей, но с помощью торможения в атмосфере с использованием подъемной силы, а также малоразмерные транспортные воздушно-космические экономичные самолеты.

Здесь следует упомянуть, что первый опыт использования рикошетирования (аэрозахвата, аэроторможения — aerobraking) в атмосфере Земли для перевода подлетной к планете гиперболической скорости космического аппарата (КА) в орбитальную был приобретен в СССР еще в 1968 году при возвращении на земную поверхность после облета Луны аппаратов серии «Зонд». Эти аппараты совершали трех- и двукратные погружения в атмосферу на глубину до 50 км с последующим выходом за счет перекладки аэродинамического качества на высоты более 100 км. Летные эксперименты показали, насколько существенно была преувеличена тепловая защита этих аппаратов вследствие недостаточности на тот момент знаний ряда проблем аэротермодинамики, в частности механизма уноса массы теплозащитных покрытий.

В совокупности все перечисленные выше проекты выявили ряд аэротермодинамических проблем слабо или вообще не исследованных широко как в экспериментальных программах, так и в теоретических исследованиях, выполненных в 1960-х и 1970-х годах и направленных главным образом на создание и использование таких консервативных по сегодняшним понятиям схем, как Space Shuttle, юпитерианский зонд Galileo, аппараты, спускаемые

по баллистическим траекториям и другие. Используемые в настоящее время для выхода на орбиту Земли и спуска с нее пилотируемые транспортные системы «Союз» и «Шаттл» в обозримом будущем будут заменены как в России, так и в США (например планируется, что система «Спейс Шаттл» будет снята с эксплуатации в 2012 г., хотя была вероятность продолжения срока ее эксплуатации) новой космической техникой, сочетающей в себе надежность корабля «Союз», обеспечение достаточно низких перегрузок на экипаж при спуске с орбиты, комфорт и возможность многоразового использования, характерные для КА «Шаттл» и его отечественного аналога «Энергия-Буран», при уменьшенных эксплуатационных и временных затратах при его создании и послеполётном восстановлении. В наибольшей степени этим условиям удовлетворяет ныне разрабатываемый в России аппарат «Клипер», могущий совершать планирующий спуск в атмосфере и самолетный способ посадки на аэродром.

В настоящее время работы по проектированию и отработке летных гиперзвуковых демонстраторов, являющихся прообразами аппаратов многоразового использования, ведутся в рамках таких национальных программ, как «Клипер» в России, X-38 (транспортное средство спасения команды) в США, Pré–X во Франции, Hyper–X и Hope–X (Надежда H-11 Орбитальный самолет) в Японии, Hopper в Германии, USV в Италии и другие.

После создания и успешных полетов таких транспортных систем, как Space Shuttle (США), «Энергия-Буран» (Россия), все промышленно развитые страны в конце 80-х годов включились в разработку и создание своих КА: в Англии — HOTOL (Horisontal Take off and Landing), в Германии — ZAENGER, HYTEX (Hypersonic Technology Experimental Vehicle — летающая лаборатория на основе технологии ВКА ZAENGER), во Франции — HERMES (минишаттл), в Японии — HOPE, HIMES (Highly Manoeuvrable Experimental Space Vehicle).

Хотя конкретная реализация многих из указанных проектов по ряду причин (в основном финансовых) в настоящее время приостановилась, научно-исследовательские работы по этим или несколько измененным проектам продолжаются и расширяются как в университетских лабораториях, так и в национальных исследовательских институтах. Западноевропейские страны, начавшие с начала 90-х годов вести собственные научные исследования и технические разработки по гиперзвуковым ЛА, рассмотрели возможность создания многонациональных научно-исследовательских объединений, которые могли бы представить серьезную конкуренцию США в этой области. Примером тому является нынешнее объединение общих усилий 17-ти европейских стран в рамках ESA (European Space Agency) с центром в ESTEC (European Space Research and Technology Center), находящемся в городке Noordwijk (The Netherlands). Под эгидой ESA регулярно проводятся научно-технические европейские конференции и коллоквиумы по аэротермодинамике космических аппаратов, а также симпозиумы под эгидой IUTAM

«Аэротермохимия космических аппаратов и соответствующие гиперзвуковые течения». Главной целью этих форумов, как ее сформулировал председатель одного из таких форумов проф. R. Brun (Франция), является «выяснение взаимодействия между механическими и физико-химическими явлениями высокоэнтальпийных потоков, присущих гиперзвуковым течениям».

Активность Китая в области космических полетов с человеком на борту приобрела мировую известность после успешного запуска 21 ноября 1999 г. беспилотного Shenzhou («Космический корабль»), космического ЛА и затем запуска своего первого космонавта. В 2008 г. китайский космонавт впервые вышел в открытый космос.

Японские специалисты также ведут работы по созданию двухступенчатой космической транспортной системы (КТС), в перспективе планируется создание одноступенчатого КА. Финансирование исследований по гиперзвуковой аэротермодинамике и тепломассообмену в Японии неуклонно растет.

В России также ведутся работы в этом направлении в рамках правительственной программы по созданию пилотируемого транспортного корабля нового поколения (ПТКНП). Ракетно-космической корпорации «Энергия» им. С. П. Королева поручено разработать новый пилотируемый космический корабль, способный доставлять экспедиции к Луне. Начато экспертное проектирование корабля. Новый многоразовый самолет, известный пока под аббревиатурой ППТС (перспективная пилотируемая транспортная система) должен прийти на смену кораблю «Союз». Предполагается, что конструкция ППТС позволит выводить на околоземную орбиту экипаж из шести человек и доставить к Луне четырех космонавтов (экипаж «Союза», который эксплуатируется уже 40 лет, состоит из трех человек). Корабль будет капсульного типа по аналогии с разрабатываемым сейчас в США новым космическим кораблем. Необходимость в более вместительном самолете возникла в связи с планами увеличить состав постоянного экипажа МКС до шести человек и обеспечить перспективными программами полетов к Луне.

Новый запуск пилотируемого корабля планируется осуществить в 2018 году. Наряду с аппаратом капсульного типа с малым аэродинамическим качеством исследуются компоновки типа «несущий корпус» самолетного типа и трансформеры, меняющие свою конфигурацию в процессе полета. Ведутся работы в области гиперзвуковых двигательных установок, в том числе по сверхзвуковому горению и технологии прямоточных воздушно-реактивных двигателей (ПВРД).

В США разрабатывается новое поколение транспортных КА Space Shuttle TAF (Transatmospheric Vehicles) — это NASP (National Aero-Space Plane). Главная мотивация интереса к этим проектам состоит в желании создать одноступенчатую систему, выводящую КА на орбиту Земли с помощью воздушно-реактивного двигателя (ГПВРД), работающего на водороде, т. е. с использованием воздуха как окислителя в противоположность жидкостно-реактивным двигателям (ЖРД), использующим бортовой запас

окислителя. Кроме того, в последние 20 лет в США разрабатывается также новая космическая транспортная система AOTV (Aeroassisted Orbital Transfer Vehicle — орбитальный транспортный космический аппарат (буксир), использующий аэродинамическую подъемную силу при маневрировании в верхних слоях атмосферы Земли), которая будет возвращаться с геоцентрической орбиты к высоким или низким орбитам спутников Земли со скоростями в диапазоне 7–11 км/с и делать аэродинамический маневр (рикошет) в атмосфере на высотах 70–100 км. Использование при этом маневре аэродинамических сил вместо двигателей признано более экономичным.

Планируется, что аппараты AOTV будут применяться также при возвращении зондов с Луны и Марса. Так, автоматические или управляемые человеком аппараты, возвращающиеся с орбиты Марса на Землю, будут входить в атмосферу Земли со скоростями до 16 км/с. Со сверхорбитальными скоростями будут двигаться в атмосферах планет зонды, проектируемые для исследования планет и других малых космических тел Солнечной системы, например проект HUYGENS, предназначенный для проведения измерений в атмосфере и затем посадки на поверхность Титана, спутника Сатурна, проект ROSETTA, предназначенный для посадки КА на комету и возвращения его на Землю с образцами кометных ядер, зонды MARSNET, MSR (Mars Sample Return) на Марс с роботами, собирающими образцы грунта Марса и возвращающимися на Землю. Проект Deep Impact (США) предполагает удар специального зонда по комете Temply-I, а проект ESA планирует эксперимент «Дон Кихот», в котором предполагается осуществить удар по астероиду.

У возвращающихся на Землю планетных зондов аэродинамический лобовой экран защищен уносимым теплозащитным покрытием (ТЗП) PICA (Phenolic impregnated carbon ablator) — матрица из углеродных волокон, связанных (пропитанных) фенолформальдегидной (бакелитовой) смолой. Этот материал уже использовался в 2006 г. для теплозащиты космического зонда Stardust, собравшего образцы пыли у ядра кометы Wild-2 и вернувшегося на Землю с подлетной скоростью 13 км/с (это был самый быстрый управляемый спуск).

Из всего вышеизложенного следует масштабность и многообразие проблем аэротермодинамики, подлежащих решению силами мирового сообщества ученых. Описанию состояния этих проблем на текущий момент и посвящена настоящая монография.

В период создания и развития космических транспортных систем в 1960-х и 1970-х годах в отсутствие необходимых вычислительных мощностей и развитых эффективных численных методов для решения уравнений Эйлера, Навье–Стокса и Рейнольдса были развиты приближенные инженерные аналитические методы, основанные на схеме Прандтля: внешнее невязкое течение плюс пограничный слой. В рамках такой методологии как в США, так и в Советском Союзе, которая получила максимальное развитие в период создания ВКС многоразового использования «Энергия–Буран» и «Спейс Шаттл», реальная

трехмерная конфигурация КА разбивалась на ряд секций, которые могли быть аппроксимированы простыми геометрическими формами.

Граничные условия на внешней границе пограничного слоя (ПС) определялись из приближенных аналитических (например, касательных клиньев или конусов) или численных решений уравнений Эйлера. При необходимости при больших числах Маха и для малых и умеренных чисел Рейнольдса (режимы высотной гиперзвуковой аэродинамики) эти решения уточнялись с учетом эффектов второго порядка теории пограничного слоя, в частности эффекта вязко-невязкого взаимодействия. Соответственно тепловые потоки, распределение температуры по поверхности КА и скорость уноса массы ТЗП определялись или из численного решения уравнений ПС, или с помощью приближенных их решений: автомодельных решений, методами эффективной длины, осесимметричной аналогии, среднемассовых величин или методом последовательных приближений и др.

В настоящее время, в резком контрасте с упомянутыми выше ранними годами развития гиперзвуковой аэродинамики и тепломассообмена, вычислительная гидродинамика (CFD) заняла лидирующее положение в разработке программ создания современных КА, позволяя рассчитывать аэродинамические и тепловые характеристики реальных конфигураций КА с учетом всех основных физико-химических процессов, протекающих в ударном слое и на обтекаемой поверхности. Это объясняется впечатляющим и продолжающимся увеличением мощности ЭВМ (350-кратное увеличение производительности Супер–ЭВМ от 1 терафлопса в 1996 году до 350 терафлопс в 2006 г. и одновременно 60-кратное снижение стоимости вычислений) и возможностей вычислительного программного обеспечения и оборудования за последние десятилетия. В 2011 году супервычислитель МГУ «Ломоносов» должен достичь пиковой производительности в 1 петафлопс. Такой машины нет даже в Японии, Канаде, Франции.

Ключ к успеху на 80–90% — это программы для решения рационально поставленных задач, параллельные алгоритмы, математика, ориентированных на компьютеры с параллельной архитектурой петафлопсного класса. Это есть на сегодня наиболее трудная часть проблемы и наиболее важная. Сегодня без преувеличения можно сказать, что вычислительная гидродинамика (численное моделирование) превратилась в критическую (ключевую) технологию, представляющую неограниченную возможность для эффективного проектирования и дальнейшего развития КА, в частности для моделирования поля течения около полной компоновки самолета. Это явилось следствием недавнего прогресса в моделировании геометрии, генерации поверхностной и объемной разностной сетки и в создании эффективных численных методов.

В гиперзвуковом течении около КА проявляется полный набор атомно-молекулярных высокотемпературных физических явлений, включающий разреженность, релаксацию внутренних степеней свободы, многокомпонентную диффузию, диссоциацию и рекомбинацию как в потоке,

так и на стенке, ионизацию, радиацию и неравновесность (термическую, химическую и термодинамическую), проявляется, в общем, в макроскопической форме в виде широкого диапазона изменения определяющих параметров подобия — чисел $\mathbf{M}$ (Маха), $\mathbf{Re}$ (Рейнольдса), $\mathbf{Kn}$ (Кнудсена), $\mathbf{Dam}$ (число Дамкеллера), $\mathbf{Sc}$ (число Шмидта), $\mathbf{Le}$ (число ЛьюисаСеменова) и др. Отсюда следует, что эффективное экспериментальное моделирование гиперзвуковых высотных течений в наземных условиях жестко ограничено. С другой стороны, разумная и надежная экстраполяция численных результатов на условия полета требует летных экспериментов.

Вся эта методология: аналитические методы, численные методы, наземный и летный эксперимент отражены в настоящей монографии.

Реализация указанных космических программ требует глубокого теоретического анализа аэротермохимических задач в широком диапазоне чисел Маха $(1 \div 30)$ и Рейнольдса $(\mathbf{Re} \geqslant 1)$ и тем самым включает их исследования при континуальном, переходном и свободномолекулярном режимах обтекания КА с учетом сопровождающих их физико-химических процессов, т. к. эти процессы существенно (иногда определяющим образом) влияют на параметры газа в ударном слое, на аэродинамические характеристики аппаратов, тепло- и массоперенос, образование плазмы и спектр излучения и оказываются важными при оценке воздействия потока на органы управления (элевоны, щитки, управляющие струи и др). На больших высотах $(60 \div 100\,\text{км})$ эти процессы протекают термохимически неравновесно, иногда с большим отклонением от локального термодинамического равновесия, и не всегда моделируются в существующих наземных установках.

В представленной монографии ведущих отечественных специалистов по гиперзвуковым течениям и тепло- и массопереносу разработаны теоретические основы реальных неравновесных физико-химических процессов, протекающих в ударном слое около КА в континуальном и переходном режимах обтекания, создан обширный комплекс программ для численного моделирования обтекания реальных гиперзвуковых ЛА в широком диапазоне полетных чисел Маха $\mathbf{M}$ $(1 \div 30)$ и Рейнольдса $(\mathbf{Re} \geqslant 1)$.

В данном труде разработано фундаментальное научное направление (аэротермодинамика — аэротермохимия), связанное с исследованием гиперзвуковых течений многокомпонентных термохимически равновесных и неравновесных смесей газов и плазмы с разными диффузионными свойствами компонентов около многоразовых теплозащитных покрытий (ТЗП), обладающих конечной каталитичностью, а также около уносимых ТЗП в широком диапазоне высот и скоростей полета, включая переходной режим обтекания. В частности, получена новая простая и точная форма соотношений переноса (определяющих соотношений) массы компонентов и тепла в форме «термодинамические силы через потоки», с использованием которых время счета задач пропорционально числу компонентов, а не квадрату и выше, как это имеет место при использовании в полном виде классической формы

соотношений переноса «потоки через термодинамические силы» с введением многокомпонентных коэффициентов диффузии и термодиффузии.

Созданы оригинальные эффективные вычислительные технологии, позволяющие в рамках уравнений Навье–Стокса (НС), Рейнольдса и их асимптотически упрощенных математических моделей аэротермодинамики (уравнения пограничного слоя (ПС), вязкого ударного слоя (ВУС), параболизованные уравнения Навье–Стокса (ПУНС)) определять аэротермодинамические параметры возвращаемых КА, сопровождать расчетными исследованиями эксперименты в аэродинамических и высокоэнтальпийных наземных установках ЦНИИМаш, ЦАГИ, ИПМех РАН и др., определять каталитические свойства теплозащитных материалов многоразовых КА и эффективные энтальпии уноса массы различных ТЗП для траекторий спуска КА разного назначения в атмосферах Земли и Марса, проектировать, разрабатывать и оптимизировать формы новых классов КА с реальной геометрией формы с минимальным проведением дорогостоящих и часто практически невыполнимых надежных экспериментов.

Созданные вычислительные технологии позволили существенно повысить производительность расчетов, снизить сроки и стоимость проведения проектных работ в аэрокосмической индустрии. С их помощью уже проводился детальный анализ тепломассобмена ряда существующих и перспективных изделий аэрокосмической отрасли, в том числе разработанных в Московском институте теплотехники, НПО машиностроения, ГНПГКЦ «ЦСКБ-Прогресс», ПО «Полет», РКК «Энергия» им. С. П. Королева и ряде академических и прикладных институтов. Разработанные расчетные методики широко используются при планировании сложных экспериментов, обработке их результатов и переносе полученных данных на натурные условия (индукционные плазмотроны ВГУ-4 ИПМех РАН и ЦНИИМаш).

В частности, разработана концепция выбора аэродинамической компоновки челночного КА «Клипер», спускаемого с экипажем с орбиты Земли. Выполненные исследования в РКК «Энергия» им. С. П. Королева и ЦНИИМаш с использованием программных комплексов численного моделирования, разработанных в данной работе, позволили реализовать траекторию спуска КА «Клипер» с орбиты Земли с необходимым аэродинамическим качеством для обеспечения заданной боковой дальности, приемлемых перегрузок и условий посадки на аэродром. Получены расчетным путем аэродинамические характеристики и теплообмен аппаратов типа «Крылатая ракета». Результаты сравнены с экспериментом.

Разработаны оригинальные физико-математические модели, детально учитывающие основные термически неравновесные гомогенные и гетерогенные каталитические процессы, и обнаружено их влияние на аэродинамические силы, моменты и тепловые потоки при моделировании входа спускаемых с орбиты Земли космических аппаратов по баллистическим, планирующим

и рикошетирующим траекториям, а также космических зондов, возвращаемых в околоземное пространство после облета планет Солнечной системы.

Внедрение указанных оригинальных методов и программ, соответствующих мировому уровню в ракетно-космической науке и технике, позволило существенно повысить качество проектных расчетов в области аэродинамики и теплообмена и производительность труда инженеров-расчетчиков, улучшить проектные характеристики изделий и снизить затраты, связанные с их созданием, во многих ракетно-космических опытно-конструкторских и исследовательских организациях России.

Кратко перечислим основные результаты исследований авторов настоящей монографии.

1. Точные соотношения и коэффициенты переноса в форме «термодинамической силы через потоки». Методами строгой кинетической теории газов и термодинамики необратимых процессов получена в 1980–1990-х годах новая точная и простая форма замыкающих соотношений для переноса массы компонентов и тепла в многокомпонентных многотемпературных смесях газов и плазмы с разными коэффициентами бинарной диффузии при наличии и/или отсутствии внешних электромагнитных полей в форме «термодинамические силы через потоки». Старая «классическая» форма соотношений переноса «потоки через термодинамические силы» весьма сложна (необходимо двойное обращение матриц порядка $N\xi$, где N — число компонентов, ξ — число членов, удерживаемых при разложении возмущенной функции распределения по полиномам Сонина), причем при втором обращении элементами матрицы являются определители порядка $N\xi$. По этой причине «классическая» форма соотношений переноса в полной постановке не применяется при решении конкретных задач. Аналогичные соотношения переноса были получены с учетом возбуждения внутренних степеней свободы частиц и для умеренно плотных смесей газов.

Таким образом, уравнения движения многокомпонентного и многотемпературного газа с использованием оригинальной формы соотношений переноса в форме «термодинамические силы через потоки» с точными и более простыми по сравнению «классическими» коэффициентами переноса служат в настоящее время достоверной научной основой для решения газодинамических задач, связанных с исследованием термохимически неравновесных течений многокомпонентных многотемпературных вязких теплопроводных как идеальных, так и слабонеидеальных смесей газов и плазмы, как с учетом, так и без учета внешних электромагнитных полей. Уравнения позволяют рассчитывать течения в широком диапазоне давлений и температур (до сотен тысяч градусов). Они являются основой для решения широкого круга задач физико-химической гидродинамики.

2. Уравнения для термохимически равновесных течений смесей газов и плазмы. С использованием новой формы соотношений переноса впервые были выведены уравнения для термохимически равновесных течений:

температуры поступательных и температуры всех внутренних степеней свободы равны между собой (термическое равновесие) и, кроме того, имеет место в рассматриваемой области течения быстрое протекание химических и ионизационных реакций, т. е. имеет место и локальное химическое равновесие. Такой режим течения реализуется при обтекании КА на высотах примерно ниже 55 км над поверхностью Земли.

Определен полный набор всех эффективных коэффициентов переноса, а не только одного эффективного коэффициента теплопроводности, как это делалось до сих пор в литературе.

Предложенная новая форма соотношений переноса как для термохимически неравновесных, так и для равновесных течений позволила записать основные уравнения аэротермодинамики (уравнения пограничного слоя (ПС), вязкого ударного слоя (ВУС), параболизованные уравнения Навье–Стокса (ПУНС), полные уравнения Навье–Стокса) в виде, разрешенном относительно первых производных по нормальной к обтекаемой поверхности координате от всех искомых величин: концентраций компонентов (для термохимически неравновесных течений), концентраций химических элементов (для термохимически равновесных течений), температуры, а также потоков тепла и диффузии, т. е. в форме Коши. Это дало возможность развить эффективные численные методы высокого порядка точности (четвертого по поперечной координате) для указанных газодинамических моделей, время счета по которым пропорционально числу компонентов, а не их квадрату и выше, как при использовании старых «классических» соотношений переноса массы компонентов и тепла.

Благодаря точной форме соотношений переноса, учитывающих различные диффузионные свойства компонентов в смеси, был открыт эффект разделения химических элементов в термохимически равновесных течениях смеси газов и плазмы. Определены границы необходимости учета высших приближений (числа коэффициентов разложений возмущенных функций распределения в ряды по полиномам Сонина для получения заданной точности) для высокотемпературной воздушной плазмы.

3. Модель частичного термохимического равновесия для решения задач гиперзвукового обтекания тел вязким теплопроводным газом. Проанализирована и реализована возможность использования весьма полезной для практических расчетов концепции частичного химического равновесия, позволяющей для класса химически неравновесных моделей газовой среды, используя различия в масштабах времен протекающих химических процессов в потоке, существенно упростить задачу и уменьшить жесткость системы уравнений химической кинетики. Показано, что введение в рамках модели частичного химического равновесия так называемых «медленных переменных» для смесей, моделирующих земную и марсианскую атмосферы, позволяет получать решения, практически совпадающие с решением задач в полной диффузионно-кинетической постановке, для теплонапряженных участков

движения по планирующим траекториям спуска аппаратов в атмосферах Земли и Марса.

4. Термохимически неравновесные режимы гиперзвукового обтекания тел. При высоких температурах газа за головной ударной волной (десятки тысяч градусов) в вязком ударном слое времена релаксации колебательных степеней свободы становятся порядка времен реакций диссоциации, и в этом случае диссоциация происходит на фоне релаксации колебательных степеней свободы — происходит так называемое колебательно-диссоциационное взаимодействие, повышающее температуру в ударном слое (УС) и, следовательно, тепловой поток до 26% и уменьшающее отход головной ударной волны до 20% по сравнению с моделью термически равновесных констант химических реакций. Эта теория была впервые разработана в лаборатории физико-химической газодинамики Научно-исследовательского института механики МГУ под руководством Г. А. Тирского и внедрена в практику расчета тепловых потоков к КС «Буран». В настоящее время она стала общепринятой в мировой практике расчета аэродинамики и теплообмена в переходном режиме обтекания.

Аналогичная теория разработана и для электронно-ионизационного взаимодействия, когда реакции ионизации идут на фоне релаксации возбужденных электронных степеней свободы атомов и молекул. Это сложная теория как по физико-химической постановке, так и по фактическому численному решению задач гиперзвукового обтекания КА, входящих в атмосферу Земли со сверхорбитальными скоростями.

5. Граничные условия скольжения на каталитической стенке в многокомпонентном многотемпературном химически реагирующем потоке газа с возбужденными внутренними степенями свободы частиц. При увеличении разреженности газа (увеличении числа Кнудсена) течение около обтекаемой поверхности (в слое Кнудсена толщиной порядка длины среднего свободного пробега молекул) правильно не описывается континуальными (газодинамическими) моделями. В этом слое около стенки решаются кинетические уравнения и выводятся эффективные граничные условия для скорости скольжения и скачков температуры и концентраций для решения континуальных уравнений.

В представленной монографии дан вывод граничных условий со скольжением на поверхности с произвольной каталитической активностью по отношению рекомбинации и деионизации частично диссоциированного и ионизованного газа, обтекаемой многокомпонентным многотемпературным реагирующим газом с возбужденными колебательными степенями свободы частиц, методом потоков Максвелла и более точным методом Лоялки. При этом учитывалась разная степень аккомодации колебательных степеней свободы на стенке.

Следует отметить общий вывод: в режиме обтекания со скольжением и в переходном режиме аэродинамические и тепловые характеристики более

чувствительны к точности задания коэффициентов переноса, чем в режиме обтекания без скольжения, т. е. в чисто континуальном режиме обтекания.

На высотах переходного режима обтекания (выше 100 км при радиусе затупления 1 м) граничные условия скольжения существенным образом влияют на аэродинамическое сопротивление (особенно сопротивление трения, которое дает существенный вклад в полное сопротивление на больших высотах) и теплообмен ЛА, совершающих длительные полеты (маневрирование, рикошетирование), и их учет совершенно необходим, если задача решается в рамках уравнений вязкого ударного слоя или Навье–Стокса. Как было выяснено в работах авторов монографии, корректный учет эффектов скольжения дает возможность существенно расширить область применимости модели вязкого ударного слоя до высот порядка 140 км, т. е. физически адекватно предсказывать коэффициенты сопротивления и теплопередачи в переходном режиме обтекания.

6. Исследование влияния гетерогенных каталитических процессов на низкокаталитических теплозащитных покрытиях КА на тепловой поток. При движении КА по планирующей траектории входа, менее теплонапряженной по сравнению с баллистической, сопровождающейся, как правило, значительным уносом массы ТЗП, применяется теплозащита с помощью низкокаталитических покрытий (плиток), позволяющая сохранить форму наветренной части аппарата («Буран», «Space Shuttle»). Тепловые потоки к поверхностям с различными каталитическими свойствами по отношению к рекомбинации атомов отличаются в несколько раз. Для расчета каталитических свойств тепловой защиты нужны сведения фундаментального характера о физико-химических процессах взаимодействия частично или полностью диссоциированного газа с низкокаталитическими поверхностями. В настоящее время не существует прямых методов измерения коэффициентов рекомбинации и аккомодации энергии рекомбинации даже при комнатных температурах поверхности. Не существует и замкнутых теорий, которые могли бы априори предсказать каталитические свойства конкретного материала.

В работах Научно-исследовательского института механики МГУ были впервые разработаны в 80-х годах кинетические модели, основанные на детальном учете механизмов физической и химической адсорбции частиц на активных центрах, взаимодействии адсорбированных компонентов между собой в реакциях Ленгмюра–Хиншельвуда (ассоциативный механизм рекомбинации) и реакциях Или–Райдила (ударный механизм рекомбинации). Для диссоциированных воздуха и углекислого газа получены формулы для скоростей рекомбинации на поверхности, учитывающие оба механизма рекомбинации. Показано, что каталитическая деионизация заряженных частиц существенно влияет на уровень ионизации на обтекаемой поверхности.

Существенное влияние на тепловые потоки к теплозащитным покрытиям космических аппаратов оказывает неполная аккомодации энергии гетерогенной рекомбинации, связанная с образованием на поверхности частиц

с возбужденными внутренними степенями свободы. При высоком уровне ионизации модель бинарной диффузии может завышать величину теплового потока к некаталитической стенке на 30% и выше. Для этого высокотемпературного режима течения в ударном слое в работе была предложена модифицированная модель бинарной диффузии, которая дает результаты по тепловым потокам, практически совпадающие с точными.

Разработаны модели гетерогенных каталитических процессов при входе в атмосферу Марса. Показано, что в разреженной CO_2 атмосфере Марса влияние гетерогенного катализа на теплообмен еще более существенно, чем при входе в атмосферу Земли.

Для различных покрытий рассчитаны тепловые потоки при входе аппарата «Mars Miniprobe» в атмосферу Марса. Показано, что в углекислом газе боросиликатное покрытие, также как и в диссоциированном воздухе, имеет низкую каталитическую активность. Оно позволяет снизить максимальный тепловой поток в 2,5 раза по сравнению с тепловым потоком к идеально каталитической поверхности, что соответствует снижению равновесно-радиационной температуры стенки примерно на 500 К.

Исследования тепловых потоков к низкокаталитическим покрытиям были выполнены и аналитически в случае химически неравновесного течения в многокомпонентном пограничном слое на стенке с произвольной каталитической активностью. С помощью аналитического решения были интерпретированы экспериментальные данные по вероятности рекомбинации на теплозащитном покрытии «Space Shuttle», а также обнаружен и объяснен эффект диффузионного разделения химических элементов смеси, обусловленный разной избирательностью каталитического воздействия обтекаемой поверхности на рекомбинацию атомов кислорода и азота.

Разработаны эффективные численные методы анализа теплообмена, учитывающие реальные гетерогенные и гомогенные физико-химические процессы как для ламинарного, так и для турбулентного режимов течений в ударном слое у спускаемых аппаратов. Детальное сравнение с летными и наземными экспериментальными данными показало, что разработанные модели гетерогенных каталитических реакций для атмосфер Земли и Марса позволяют правильно интерпретировать лабораторные эксперименты и предсказывать теплообмен к низкокаталитическим реальным неразрушаемым теплозащитным покрытиям космических аппаратов в натурных условиях. Это нашло применение при проектировании и расчете тепловых потоков на КС «Буран».

7. Численное моделирование термически и химически неравновесных течений и теплообмена в недорасширенных струях индукционного плазмотрона. В работе верификация физико-химических моделей, методов численного решения и определение каталитических свойств реальных низкокаталитических покрытий опирались на эксперименты в индукционном ВЧ-плазмотроне ВГУ–4 (ИПМех РАН), где возможно получение как дозвуковых, так и сверхзвуковых высокоэнтальпийных потоков различных газов

в широком диапазоне значений температуры и давления торможения. Парадоксально, но расчет течений в плазмотроне (разрядная камера, сопло, рабочая часть с обтекаемой моделью в недорасширенных химически неравновесных струях) намного сложнее решения исходной задачи расчета теплообмена при гиперзвуковом обтекании тел, для экспериментального исследования которого этот плазмотрон был применен. Однако детальный расчет течений в плазмотроне совершенно необходим для правильной интерпретации полученных экспериментальных данных и перенесения этих данных на реальные условия обтекания при гиперзвуковом полете. В работе представлено численное решение этой комплексной задачи, основанной на технологии численного интегрирования уравнений Навье–Стокса, взаимодействующей с базами данных по термодинамическим и переносным свойствам индивидуальных газовых веществ (HIGHTEMP), разрабатываемой в Научно-исследовательском институте механики МГУ. Учитывались неравновесные процессы возбуждения колебательных степеней свободы молекул газовых смесей, различие в температурах электронов и тяжелых частиц, химические реакции и ионизация. Сравнение рассчитанных тепловых потоков с измеренными в экспериментах на установке ВГУ–4 позволило определить каталитические свойства ряда теплозащитных материалов для траекторий снижения аппаратов в атмосферах Земли и Марса.

8. Численное исследование особенностей в теплообмене при гиперзвуковом обтекании затупленного конуса, лежащего на треугольной пластине с притупленными кромками. Эта задача была численно решена в рамках уравнений Навье–Стокса. Летательный аппарат представлял собой затупленную треугольную пластину с лежащим на ней затупленным круговым конусом. Для практики важным обстоятельством являются выявленные экспериментально и подтвержденные теоретически некоторые особенности обтекания, приводящие к локальному повышению тепловых потоков на поверхности модели. В расчетных распределениях тепловых потоков обнаружены локальные максимумы, появляющиеся на наветренной и подветренной сторонах компоновки в определенных режимах ее обтекания. Тепловые потоки к поверхности при довольно сложной картине обтекания модели полностью совпали с экспериментами, проведенными в ЦАГИ и ЦНИИМаш. Таким образом, сравнение результатов численных расчетов с экспериментом может предсказать и объяснить такие аномальные эффекты.

9. Теплообмен в донной области Марсианского спускаемого аппарата. Это исследование проведено в связи с ведущимися в России и в ЕС разработками Марсианских спускаемых аппаратов. При спуске в атмосфере Марса тепловой поток в донную область настолько мал, что появляется принципиальная возможность обойтись без теплозащиты донной поверхности, что дало бы большую экономию массы, выводимой на Марсианскую орбиту. В ЦАГИ был поставлен уникальный эксперимент по определению тепловых потоков в донной области без донной державки. В качестве прототипа

марсианского спускаемого аппарата была выбрана конфигурация, разработанная в ЦНИИмаш.

Экспериментально установлено, что максимальный тепловой поток в донной области аппарата исследованной конфигурации при больших значениях числа Маха и малых значениях числа Рейнольдса, характерных для теплонапряженного участка спуска в атмосфере Марса, составляет при нулевом угле атаки $6 \div 7\,\%$ от теплового потока в лобовой точке торможения. При турбулентном течении максимальный тепловой поток в донной области модели исследованной формы соизмерим с тепловым потоком в лобовой точке торможения. Результаты численного моделирования, выполненного с учетом турбулентности, согласуются с экспериментальными данными.

Методика указанного эксперимента используется в ЦАГИ для исследования теплообмена и других характеристик потока на типовой модели Марсианского спускаемого аппарата, разрабатываемого Европейским Космическим Агентством.

10. Численное моделирование течения вязкого газа и теплообмена при гиперзвуковых скоростях. В монографии представлены результаты численного моделирования задач внешней и внутренней аэродинамики с помощью вычислительных технологий, разработанных авторами в соответствующих организациях. Созданные технологии позволяют проводить решение поставленных задач в двух- и трехмерных постановках в рамках полных уравнений Навье–Стокса (Сахаров В. И., Егоров И. В., Власов В. И. и Горшков А. Б.) и в рамках уравнений Рейнольдса (Егоров И. В.). Были разработаны также эффективные численные методы для решения уравнений вязкого ударного слоя (Громов В. Г., Афонина Н. Е., Ковалев В. Л., Рогов Б. В., Тирский Г. А), которые успешно применены в ряде важнейших прикладных исследований. Использование MPI технологии позволило адаптировать созданные коды для проведения расчетов на современной многопроцессорных вычислительных системах.

В рамках разработанных технологий исследованы течения вязкого газа с учетом неравновесных физико-химических процессов (химических реакций, реакций ионизации), играющих важную роль при движении воздушно-космических летательных аппаратов на теплонапряженных участках траектории полета. Получено хорошее совпадение численной плотности электронов в ударном слое с летным экспериментом RAM-C. Проведена верификация моделей колебательной релаксации на основе сравнения интенсивности излучения, полученного в расчетных исследованиях и летном эксперименте Bow Shock-2.

Проведено систематическое сопровождение расчетными исследованиями экспериментов в аэродинамических установках ЦАГИ. Это расчеты моделей ракеты-носителя Атлас II, обтекание тел с выемкой и других задач, а также обтекание тел применительно к сопровождению экспериментов в гиперзвуковых аэродинамических трубах ЦАГИ: Т-117, УТ-12, ИТ-2 и ВАТ-104.

Проведено численное исследование особенностей в теплообмене при гиперзвуковом обтекании затупленного конуса, лежащего на треугольной пластине с притупленными кромками. Сравнение результатов численных расчетов с экспериментом дало хорошее совпадение аномальных распределений тепловых потоков, появляющихся на наветренной и подветренной сторонах компоновки в определенных режимах ее обтекания.

Проблема возникновения турбулентности в пристеночных течениях — одна из фундаментальных проблем аэродинамики. В настоящей работе применен подход прямого численного моделирования к изучению ранней стадии ламинарно-турбулентного перехода, включающей возбуждение и развитие неустойчивых возмущений в гиперзвуковом пограничном слое. Выявлено качественно другое поведение роста возмущений в гиперзвуковом потоке по сравнению с ростом возмущений в дозвуковом потоке.

11. Расчет гиперзвуковых химически неравновесных течений воздуха около летательных аппаратов (ЛА). В рамках многотемпературной термохимически неравновесной модели с детальным уточнением и использованием экспериментальных данных по константам скоростей гомогенных и гетерогенных реакций были созданы программные комплексы для моделирования высокотемпературных течений многокомпонентного газа и плазмы и процессов ламинарного и турбулентного теплообмена и температурных режимов теплозащиты на основе решения уравнений Навье–Стокса и Рейнольдса.

С целью тестирования программного комплекса, предназначенного для решения уравнений Навье–Стокса, было проведено численное исследование ламинарного ближнего следа за тонкими конусами при гиперзвуковом обтекании совершенным газом.

Для верификации численного метода для моделирования турбулентных течений были выполнены расчёты распределений параметров в донной области затупленного тела и проведено их сравнение с экспериментальными данными, полученными в аэродинамической трубе ЦНИИМаш. Сравнение разных моделей турбулентности с экспериментом дало удовлетворительное совпадение — расхождение расчетного и экспериментального тепловых потоков не более 10%. С целью проверки работоспособности предложенной методики для расчёта сложных пространственных течений проводилось исследование течения на наветренной стороне затупленного треугольного крыла с углом стреловидности $\lambda = 75°$. Сравнение с экспериментом дало хорошее совпадение давлений и тепловых потоков на крыле.

С целью верификации физико-химической модели воздуха и программ расчета течений неравновесных смесей газов было проведено математическое моделирование обтекания и теплообмена для условий летных экспериментов OREX и RAM-C. Установлено хорошее согласие расчетных и экспериментальных данных на высотах более 92 км. На меньших высотах некоторые различия можно объяснить конечной каталитической активностью поверхности

аппарата по отношению к реакции гетерогенной рекомбинации атомов кислорода и азота.

Проведено детальное исследование с использованием оригинальной физико-химической модели распределения электронной плотности в ударном слое около 9-градусного затупленного конуса с радиусом затупления 0,1524 м и длиной 1,295 м, входящего в атмосферу со скоростью 7,65 км/с (эксперименты по программе RAM-C).

С использованием разработанного комплекса программ были проведены уникальные параметрические расчеты распределений тепловых потоков и газодинамических параметров течения для различных геометрических конфигураций разрабатываемого в РКК «Энергия» многоразового возвращаемого аппарата (ВА) «Клипер» для широкого диапазона изменения определяющих параметров, чисел $\mathbf{M}$ и $\mathbf{Re}$. Это позволило провести оптимизацию геометрии формы аппарата «Клипер» с целью обеспечения допустимого уровня тепловых нагрузок. Было проведено сравнение уровней ламинарного и турбулентного теплообмена на высоте 50 км полета аппарата «Клипер», на которой ожидается ламинарно-турбулентный переход на наветренной поверхности аппарата. При переходе к турбулентному режиму обтекания величина равновесно-радиационной температуры поверхности на теплонапряжённых участках поверхности возрастает примерно на $200 \div 400$ К. На основании численного анализа этой сложной пространственной задачи были предложены изменения геометрии возвращаемого аппарата «Клипер» для уменьшения нагрева наиболее теплонапряженных участков обтекаемой поверхности.

12. Теоретические основы расчета процессов тепло- и массообмена при аэротермохимическом разрушении теплозащитных материалов. Разработана новая эффективная методология решения комплексной задачи течения многокомпонентного частично ионизированного селективно излучающего и поглощающего газа в ударном слое над поверхностью разрушающегося теплозащитного материала. Эта уникальная методология позволяет существенно сократить затраты машинного времени и тем самым провести большой объем расчетов, необходимых при проведении научно-исследовательских и опытно-конструкторских работ с сохранением высокой точности вычислений.

Развито научное направление, связанное с применением на всех этапах проектирования современных образцов ракетно-космической техники крупных программных комплексов, предназначенных для параллельного сопряженного расчета задач динамики движения, аэродинамики, газовой динамики, тепловых процессов и тепловой прочности конструкции летательных аппаратов. Разработана эффективная технология построения таких комплексов, и на ее базе создана целая совокупность таких комплексов для изделий различного назначения. Применение этого подхода позволило:

— существенно снизить трудоемкость проектных расчетов и время проектирования;
— существенно повысить качество проектных расчетов;

— существенно снизить экономические затраты, связанные с выполнением расчетно-теоретических исследований на всех этапах проектирования.

В некоторых случаях, как, например, при использовании специализированного крупного программного комплекса, предназначенного для расчета:

— динамики движения затупленных тел вращения в плотных слоях атмосферы Земли под нулевым углом атаки,

— их аэродинамических и массово-инерционных характеристик,

— конвективного теплообмена, прогрева и уноса массы тепловой защиты, удается на всех этапах проектирования получить строгое сопряженное численное решение всего комплекса задач с учетом, в частности, влияния обгара тепловой защиты на аэродинамические тепловые и динамические характеристики изделия.

13. Новые транспортные системы в освоении космического пространства. Одной из ключевых проблем создания многоразового крылатого аппарата малого размера является проблема обеспечения допустимого нагрева наиболее теплонапряженных поверхностей — носового затупления и наветренных кромок крыльев при сохранении их высокого аэродинамического качества. Существенное уменьшение характерного размера аппарата по сравнению с ВКС «Буран» приводит к росту равновесно-радиационных температур более чем на 300 градусов.

В результате проведенных в РКК «Энергия» исследований разработан принцип построения носовой и наветренной частей фюзеляжа, позволяющий уменьшить интенсификацию теплообмена на кромках крыльев, заключающийся в дополнительном отклонении набегающего потока в боковом направлении за счет соответствующей профилировки носовой и наветренной части аппарата.

Исследования, проведенные в РКК «Энергия» и ЦНИИМаш с использованием программных комплексов моделирования, позволили выбрать и оптимизировать форму аппарата «Клипер» самолетного типа. Как показали расчеты, выбранная форма аппарата обеспечивает приемлемые аэродинамические характеристики на всех режимах полета и допустимые для современных теплозащитных материалов уровни температур всех обтекаемых поверхностей.

14. Численное моделирование гиперзвукового теплообмена на наветренной стороне ВКС «Буран». Проведено численное моделирование обтекания воздушно-космического самолета (ВКС) «Буран», спускающегося с орбиты по планирующей траектории входа с большим углом атаки ($\alpha = 35 \div 40°$) на высотах $80 \div 65$ км, когда вся наветренная сторона поверхности самолета испытывает максимальные тепловые потоки, но недостаточные для появления фазовых переходов ТЗП, приводящих к уносу его массы. Неизменная форма ВКС обеспечивается применением низкокаталитических покрытий (плиток с напылением карбида кремния), существенно замедляющих гетерогенные экзотермические реакции рекомбинации на обтекаемой поверхности и тем самым уменьшающих тепловой поток к ней. Методика численного решения

пространственной задачи обтекания основана на использовании системы уравнений вязкого ударного слоя с учетом реальных свойств высокотемпературного воздуха, позволяющей получать решение при значительной экономии вычислительных ресурсов ЭВМ. Ранние работы авторов по этой тематике были основными теоретическими исследования при разработке советского ВКС «Буран».

15. Моделирование турбулентных сжимаемых пристенных течений. Представлен обзор полуэмпирических моделей турбулентности для численного расчета пристенных течений сжимаемого газа. Рассмотрены алгебраические и дифференциальные классы моделей, основополагающие гипотезы турбулентности и системы дифференциальных уравнений, дополненные граничными условиями. Приведены примеры вариантов учета процессов взаимодействия ламинарного и турбулентного режимов течений вблизи твердой поверхности обтекаемого тела, используемые в моделях турбулентности, как для несжимаемой жидкости, так и в условиях сжимаемого газа и теплообмена. Исследуются вопросы модификации как алгебраических, так и дифференциальных моделей, первоначально созданных для низкоскоростных течений, для исследования сверх- и гиперзвуковых пристенных потоков в условиях интенсивного теплообмена с обтекаемой поверхностью, пределы их применимости, определяемые параметрами набегающего потока и температурным фактором поверхности. Рассмотренные модели позволяют замкнуть системы осредненных уравнений пограничного слоя и Рейнольдса для решения их численными методами.

16. Итерационно-маршевый метод решения уравнений вязкого ударного слоя в широком диапазоне чисел Рейнольдса. Разработан и математически обоснован новый итерационно-маршевый метод численного решения уравнений ВУС. В данном алгоритме применяется оригинальный способ расщепления маршевого градиента давления, ответственного за передачу возмущений вверх по потоку, на гиперболическую и эллиптическую составляющие. Эллиптическая составляющая рассчитывается по оригинальной формуле, которая минимизирует эту часть продольного градиента давления, по которой реализуются глобальные итерации. Использование указанного расщепления позволяет уменьшить число итераций до одной — двух для получения основных характеристик (сопротивления, теплопередачи) с приемлемой для практики точностью. Аналогичный алгоритм разработан и для решения прямой задачи сопла Лаваля.

17. Аналитический метод определения теплообмена, трения и давления на затупленных телах, обтекаемых гиперзвуковым потоком разреженного газа, в переходном режиме. Обосновано существование уникальной континуальной модели — модели тонкого вязкого ударного слоя (ТВУС), которая дает правильное решение для коэффициентов сопротивления и теплопередачи в переходном режиме обтекания вплоть до выхода на свободномолекулярный режим при $\mathbf{Re} \to 0$. Разработан аналитический метод решения

уравнений ТВУС при малых числах $\mathbf{Re}$ с использованием интегрального метода последовательных приближений и асимптотического разложения в ряды. Выявлены параметры подобия гиперзвукового обтекания тел разреженным газом. Получены простые аналитические решения для коэффициентов теплообмена, трения и давления в зависимости от параметров набегающего потока и геометрических параметров обтекаемого тела в случае осесимметричных и плоских течений, а также в случае трехмерных течений в окрестности точки торможения и в окрестности плоскости симметрии тела при малых числах $\mathbf{Re}$. Показано, что эти решения достаточно точны в большей части переходного режима и при стремлении числа $\mathbf{Re}$ к нулю приближаются к решениям в свободномолекулярном потоке. Полученные аналитические зависимости полезны для проведения многочисленных оценочных расчетов теплообмена и сопротивления тел при варьировании параметров обтекания, необходимых при оптимизации формы новых проектируемых аппаратов.

Важное свойство уравнений ТВУС — давать при $\mathbf{Re} \to 0$ правильный предельный переход к значениям в свободномолекулярном потоке для коэффициентов сопротивления и теплопередачи открывает возможность единого континуального подхода к решению задач гиперзвукового обтекания затупленных тел во всем диапазоне чисел $\mathbf{Re}$, решая при больших и умеренных числах $\mathbf{Re}$ уравнения ВУС или Навье–Стокса, а при малых числах $\mathbf{Re}$ — уравнения ТВУС. Такой подход является альтернативой континуально-кинетическим методам, требующим существенно больших затрат вычислительных ресурсов.

Из содержания монографии и многочисленных ссылок можно получить представление о состоянии исследований по гиперзвуковой аэротермодинамике и тепло- и массопереносу современных и разрабатываемых на перспективу выводимых и спускаемых космических аппаратов и планетных зондов как в России, так и за рубежом.

В заключение выражаю большую благодарность А. А. Дядькину (ОАО РКК «Энергия» им. С. П. Королева), Б. А. Землянскому (ЦНИИМаш) и В. С. Финченко (НПО им. С. А. Лавочкина) за обсуждение при написании данного введения.

Г. А. Тирский

1

АСИМПТОТИЧЕСКИ УПРОЩЕННЫЕ ГАЗОДИНАМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ СВЕРХ- И ГИПЕРЗВУКОВОЙ АЭРОДИНАМИКИ И ТЕПЛООБМЕНА

Г. А. Тирский
Московский Физико-технический институт,
Научно-исследовательский институт механики МГУ им. М.В. Ломоносова

При спуске космических аппаратов с орбиты Земли, при возвращении космических зондов в околоземное пространство после облета или посадки на планеты Солнечной системы и Луну, а также при полете метеороидов сквозь атмосферу Земли и других планет, все эти объекты последовательно проходят различные режимы гиперзвукового (высокоскоростного) обтекания от малых до больших полетных чисел Рейнольдса (соответственно от больших до малых чисел Кнудсена):

1) свободномолекулярный режим,

2) режим первых и вторых столкновений частиц (молекул, атомов, ионов, электронов),

3) переходной режим (числа Кнудсена $\mathbf{Kn} = O(1)$),

4) режим начала образования головной ударной волны (УВ),

5) режим размытой головной ударной волны,

6) режим вязкого ударного слоя с влиянием вязкости, теплопроводности и диффузии во всем ударном слое, включая область непосредственно за УВ, заменяемой обобщенными условиями Ренкина–Гюгонио,

7) режим слабого и сильного вихревого взаимодействия невязкого газа с пограничным слоем (ПС),

8) и, наконец, при больших числах Рейнольдса, — режим пограничного слоя (ПС) с внешним невязким течением.

В каждом из этих различных режимов обтекания течение газа традиционно описывается адекватной своему режиму математической моделью, несмотря на то, что все эти режимы в принципе могут быть строго описаны в рамках единой модели, основанной на решении кинетического уравнения Больцмана для одночастичной функции распределения, представляющего собой нелинейное интегро-дифференциальное уравнение, в общем случае от шести независимых переменных фазового пространства (трех координат, трех компонент скорости (импульса) частиц) и времени, с пятикратным (для одноатомного или многоатомного газа без учета возбуждения внутренних степеней свободы) интегралом столкновений. Кратность интеграла столкновений повышается при учете возбуждения внутренних степеней свободы частиц

(молекул, атомов, ионов). Из-за высокой размерности фазового пространства независимых переменных уравнения Больцмана решение сколько-нибудь содержательных задач гиперзвуковой аэродинамики и теплообмена с использованием этого уравнения представляет до сих пор непростую вычислительную проблему [1–3].

Практически важным направлением является построение более простых модельных кинетических уравнений. Первой из них была модель Крука [4, 5] (модель BGK) для уравнения Больцмана с весьма простым релаксационным членом, приближенно заменяющим интеграл столкновения Больцмана. Уравнение Крука сохраняет все черты уравнения Больцмана, связанные со свободным движением частиц, и приближенно, среднестатистически, описывает их столкновения. Количественные результаты, получаемые на основе решения уравнения Крука, за исключением весьма редких случаев, отличаются от соответствующих результатов, полученных на основе решения уравнения Больцмана. В частности, при переходе к сплошной среде (число $\mathbf{Kn} \to 0$) уравнение Крука дает число Прандтля, равное единице, в то время как точное его значение для одноатомного газа равно 2/3 [5]. Уравнения молекулярного переноса (соотношения переноса), полученные из уравнения Крука, не содержат членов с термодиффузией. Однако решение этого модельного уравнения дает физически правильную картину течения и довольно точное решение для силы сопротивления, что позволяет использовать его для получения качественных и приближенных решений.

С 1960-х годов развивается построение более содержательных модельных уравнений Больцмана. В настоящее время широкое распространение получило модельное уравнение неполного третьего приближения, получившее название S-модели [6, 7]. Несмотря на то, что это модельное кинетическое уравнение проще, чем точное уравнение Больцмана, оно также является достаточно сложным интегро-дифференциальным уравнением высокой размерности. Типичной трудностью численного решения как модельных, так и точного кинетического уравнения Больцмана при больших числах $\mathbf{Kn}$, является необходимость учитывать в потоке разрывы функции распределения, что существенно усложняет численный алгоритм и его программную реализацию [8]. С другой стороны, численное решение кинетических уравнений при малых числах $\mathbf{Kn}$ (приближение к континуальному режиму течения) требует построения полностью консервативных методов высокого (не менее второго) порядка аппроксимации. Как уравнение Больцмана, так и его модельные кинетические аналоги в основном используются при решении задач гиперзвуковой аэродинамики и теплообмена при числе Кнудсена $O(1)$.

Альтернативой кинетическим уравнениям при решении указанных задач при $\mathbf{Kn} = O(1)$, особенно популярной в настоящее время, являются различные приближенные методы прямого статистического моделирования Монте–Карло (ПСМ) (Direct Simulation Monte-Carlo — DSMC) [9–14]. Эти методы в настоящее время являются основным математическим инструментом

изучения сложных двумерных и трехмерных гиперзвуковых течений по следующим основным причинам: сравнительная простота перехода от одномерных к дву- и трехмерным задачам, возможность использования различных моделей взаимодействия частиц с возбуждением внутренних степеней свободы, а также возможность учитывать химические реакции без существенного усложнения вычислительного алгоритма и, наконец, возможность эффективной реализации метода на современных ЭВМ с параллельной и векторной архитектурой.

Несмотря на широкое применение методов ПСМ, отметим ряд их недостатков. При моделировании околоконтинуальных течений дополнительные вычисления на более мелкой сетке и с большим числом моделирующих частиц становятся затруднительными, и в этом случае возникает вопрос о точности результатов, о том, как далеко они находятся от решения уравнения Больцмана. Анализ точности решения затрудняется из-за наличия статистических ошибок, связанных с пространственной и временной дискретизацией и ошибок, связанных с ограниченными возможностями задания достаточно большого числа моделирующих частиц. Не до конца выяснена связь метода ПСМ с решением уравнения Больцмана.

Наличие в безразмерном уравнении Больцмана числа $\mathbf{Kn}$ перед конвективным членом (перед полной производной от функции распределения в фазовом пространстве координат и скоростей) позволяет построить асимптотические решения этого уравнения, которые эффективно решают задачи гиперзвуковой аэродинамики и теплообмена при достаточно больших и достаточно малых числах $\mathbf{Kn}$ и тем самым снимаются математические трудности, которые имеют место при решении уравнения Больцмана при $\mathbf{Kn} = \mathrm{O}(1)$. В первом — свободномолекулярном режиме обтекания ($\mathbf{Kn} \to \infty$) уравнение Больцмана допускает точное решение в виде равновесной по скоростям и внутренним степеням свободы частиц функции распределения Максвелла–Больцмана, определенной по температуре и плотности набегающего потока. В этом режиме обтекания трудность решения краевых задач аэродинамики и теплообмена переносится на правильный количественный учет граничных условий для функции распределения [15, 16].

Получение этих условий сводится к квантово-механической задаче расчета коллективного взаимодействия падающих на обтекаемую поверхность частиц с заданной кристаллической решеткой тела, решение которой приводит в итоге, на уровне функции распределения, к определению граничной трансформанты — плотности вероятности отраженных от поверхности частиц, через которую находится распределение скоростей этих частиц, и, тем самым, передаваемые ими обтекаемому телу импульса и энергии.

Эта проблема является скорее квантово-механической и решается для простых модельных представлений о кристаллической решетке обтекаемой поверхности. На практике, в аэродинамических расчетах, как правило, используется грубая, но практически применимая феноменологическая схема

зеркально-диффузионного отражения, когда граничная трансформанта выражается всего через две макровеличины: через коэффициент диффузности или аккомодации (отдельно для касательного и нормального импульса падающих частиц) и коэффициент аккомодации энергии, которые берутся из эксперимента.

Важно заметить, что в задачах аэродинамики и теплообмена влияние законов взаимодействия частиц (молекул, атомов, ионов и электронов) между собой и с обтекаемыми поверхностями проявляется тем сильнее, чем более газ разрежен. В континуальном режиме обтекания, т. е. при достаточно больших числах Рейнольдса (достаточно малых числах Кнудсена при конечных числах Маха) эти проблемы с граничными условиями не возникают, т. к. в этом режиме данная молекула около поверхности многократно с ней сталкивается и, в итоге, почти полностью теряет свой касательный импульс (выполняется условие прилипания), а также передает свою энергию (коэффициент аккомодации энергии равен единице). После определения функции распределения, удовлетворяющей заданным граничным условиям, определение аэродинамических сил и потоков тепла на стенку сводится в аэродинамике разреженного газа к квадратурам, которые для простейших форм обтекаемых тел (пластина, цилиндр, сфера, клин, конус и т. п.) вычисляются явно, а для сложных поверхностей — численно.

Режим свободномолекулярного течения является одним из немногих примеров механики газа, когда сопротивление и теплопередача могут быть получены из точного решения для функции распределения путем квадратур. Окончательные результаты представляются с точностью до коэффициентов аккомодации нормального и касательного импульсов и коэффициента аккомодации энергии. Имеющиеся к настоящему времени экспериментальные и теоретические данные указывают границу наступления свободномолекулярного режима обтекания, равную примерно $\mathbf{Kn}_\infty = l_\infty/L \geqslant 10$, где индекс $_\infty$ относится к условиям в набегающем потоке.

В другом крайнем случае — континуальном режиме обтекания, когда число $\mathbf{Kn}$ достаточно мало, имеется другое сингулярно-асимптотическое решение уравнения Больцмана (малый параметр стоит перед старшими производными) — это разложение функции распределения в окрестности локального термодинамического равновесия (в окрестности равновесной по скоростям функции Максвелла) по целым степеням числа $\mathbf{Kn}$ (метод Энскога) и последующее нахождение нормального решения, которое в нулевом приближении приводит к уравнениям Эйлера, а в первом приближении — к уравнениям Навье–Стокса (НС), с потерей возможности описывать процессы, протекающие за время порядка среднего времени между столкновениями частиц ($\sim 10^{-9}$ с при нормальных условиях) и в областях порядка средней длины свободного пробега, например, в кнудсеновских слоях, в структуре ударных волн, в окрестности острых передних кромок и носков.

Исходное уравнение Больцмана, в противоположность уравнениям гидродинамики, описывает процессы, протекающие в масштабах временны́х и пространственных кнудсеновских слоев, но, в свою очередь, не описывает во времени и пространстве процессы столкновения частиц. Столкновение протекает мгновенно и в точке. При сравнении уравнения Больцмана с уравнениями Эйлера и НС следует также отметить, что последние допускают в ряде случаев аналитические решения довольно содержательных краевых задач, в то время как решение начально-краевых задач в рамках уравнения Больцмана требует с самого начала применения весьма трудоемких численных методов.

Во втором приближении метода Энскога приходим к уравнениям Барнетта и далее — к уравнениям супербарнетта [17]. В последние годы наметился возросший интерес к учету высших приближений метода Энскога, в частности, к уравнениям Барнетта, с надеждой расширить область применимости континуальных моделей в задачах гиперзвукового обтекания в сторону больших чисел **Kn** (или меньших чисел Рейнольдса). Это обусловлено, в первую очередь, успехом последних в задаче об ультразвуке и удовлетворительном решении задачи о структуре ударной волны [17] (навье-стоксовская структура ударной волны дает при больших числах Маха существенно меньшую ее толщину при сравнении с экспериментом).

Однако попытки использования уравнений Барнетта для решения начально-краевых задач наталкиваются на принципиальные трудности. Во-первых, появление в выражении для тензора напряжений вторых производных по пространственным координатам от температуры и в потоке тепла — вторых производных от компонент вектора скорости приводит, в итоге, к третьим производным: от давления и температуры в уравнении импульса и от скорости в уравнении энергии, что приводит к проблеме постановки дополнительных (при сравнении с числом граничных условий для уравнений НС), не вытекающих из механической постановки задачи, граничных условий.

Кроме того, появление коротковолновой неустойчивости в уравнениях Барнетта [18, 19] приводит к тому, что для получения решения при более мелком шаге численной сетки необходимо разрабатывать дополнительные меры по стабилизации численного решения [20]. Так, для подавления неустойчивости при решении стационарных задач обтекания методом установления, используются «расширенные» («исправленные») уравнения Барнетта, в которые включаются некоторые специально подобранные волевым способом внепорядковые члены [21].

Вместе с тем, дополнительные исследования дифференциальных приближений уравнений Барнетта в режиме течения со скольжением показали, что эти приближения могут нарушать второй закон термодинамики [21]. Более того, численное решение задачи обтекания пластины с острой передней кромкой показало [22], что уравнения Барнетта дают менее точное описание поля течения, чем уравнения НС. В [9, 23, 24], показано, что учет барнеттовских

членов приводит к худшему совпадению теоретических и экспериментальных результатов при числах $\mathbf{Kn}$, приближающихся к границе применимости уравнений НС. Эта граница в задачах гиперзвукового обтекания зависит от определяющих параметров задачи, области течения около тела и от метода решения и, как установлено из численных расчетов, соответствует числам $\mathbf{Kn}_\infty = 0{,}1 \div 0{,}8$. Уравнения Барнетта могут улучшить решение задач обтекания только там, где уравнения НС имеют приемлемую точность, т. е. где число $\mathbf{Kn}$ достаточно мало, но там, где уравнения НС непригодны, там непригодны и уравнения Барнетта [24]. Таким образом, надежды на улучшение решения задач сверх- и гиперзвукового обтекания в области малых чисел $\mathbf{Re}$ с применением уравнений Барнетта по сравнению с результатами, полученными на основе использования уравнений НС, не оправдались. Это же замечание относится и к супербарнеттовым уравнениям. Подробно современный статус уравнений Барнетта изложен в обзорной статье [17].

В самом начале появления научного интереса (1940–1950-е годы) к исследованиям задач внешнего обтекания тел высокоскоростными потоками газов низкой плотности, программа которых была изложена в 1946 г. в известной статье Цянь Сюэ-Сэня [25], этот интерес относился к свободномолекулярному гиперзвуковому режиму обтекания. Позже были предприняты исследования по выяснению возможности распространения континуального подхода для решения задач гиперзвукового обтекания при умеренных и малых числах $\mathbf{Re}$ [26–28].

Численные исследования [26] показали, что уравнения ПС, решаемые во всем ударном слое около тела с классическими условиями Ренкина–Гюгонио на головной ударной волне, дают более удовлетворительные результаты по теплообмену при более низких числах Re, чем полные уравнения НС. Последующие численные решения указанных задач показали [29], что при стремлении числа $\mathbf{Re}$ к нулю уравнения НС и их асимптотически упрощенные варианты — параболизованные уравнения НС (ПУНС), уравнения вязкого ударного слоя (ВУС) (обсуждение этих моделей проводится в [30, 31]) дают для коэффициентов теплопередачи и трения неограниченно возрастающие значения, превышающие свободномолекулярный предел, т. е. дают физически неверные результаты, начиная с некоторых достаточно малых чисел $\mathbf{Re}$. Учет скорости скольжения и скачка температуры на поверхности обтекаемого тела и на ударной волне (обобщенные условия Ренкина–Гюгонио [32–34]) несколько снижают эти коэффициенты и таким образом расширяют область применимости указанных континуальных моделей до более низких чисел $\mathbf{Re}$, но не устраняют тенденцию к неограниченному возрастанию этих коэффициентов при дальнейшем уменьшении числа $\mathbf{Re}$. Ограничение области применимости континуальных моделей при уменьшении числа $\mathbf{Re}$ (увеличении числа Kn) находится также и в согласии с асимптотическим выводом уравнений НС из уравнения Больцмана при малых числах Kn с учетом членов порядка O(1) и O(Kn) в методе Энскога. Кроме того, параболизованные уравнения НС

и уравнения ВУС были асимптотически выведены из полных уравнений НС при числе $\mathbf{Re} \gg 1$, и, естественно, не следует ожидать, что эти упрощенные континуальные модели могут дать удовлетворительные и физически правильные результаты при малых числах Рейнольдса.

1. Теория пограничного слоя второго приближения

В конце 1950-х и в начале 1960-х годов стала развиваться теория ПС второго приближения (первое приближение относится к классической схеме Прандтля — внешнее невязкое течение плюс ПС, справедливой при $\mathbf{Re} \to \infty$ и оставлении в уравнениях ПС членов O(1)). Суть теории ПС второго приближения состоит в том, что по сравнению с классической теорией ПС при $\mathbf{Re} \to \infty$ в уравнениях НС учитываются эффекты второго порядка, т.е члены $O(\mathbf{Re}^{-1/2})$. К ним относятся:

A. Кривизна поверхности обтекаемого тела.

1. Продольная кривизна.
2. Поперечная кривизна.

B. Взаимодействие ПС с внешним (невязким) течением.

3. Влияние толщины вытеснения ПС на невязкое течение.
4. Градиент энтропии во внешнем к ПС течении.
5. Градиент энтальпии торможения во внешнем к ПС течении.

C. Неконтинуальные (кинетические) эффекты около обтекаемой поверхности.

6. «Скольжение» скорости на обтекаемой поверхности.
7. «Температурный скачок» на обтекаемой поверхности.
8. «Концентрационный скачок» на обтекаемой поверхности.

Первые два эффекта относятся к геометрии обтекаемой стенки или тела, причем второй эффект отсутствует для двумерных плоских течений. При обтекании полубесконечной пластины отсутствуют оба эффекта, связанные с кривизной обтекаемой поверхности. При обтекании реальных (пространственных) тел проявляются оба эффекта. Эффект вытеснения (п. 3), вызываемый самим ПС, т. е. эффект первого порядка, сравнительно слабо смещает линии тока невязкого течения от поверхности тела. Решение во втором приближении, учитывающее продольную кривизну и толщину вытеснения, дает вклад около 2% при $\mathbf{Re} \approx 10^2$.

Наибольший вклад второго приближения дает градиент энтропии во внешней области течения, вызываемый кривизной головной ударной волны (УВ) вниз по потоку от ее вершины; течение за УВ становится вихревым

и не гомоэнтропическим. Градиент энтальпии торможения (п. 5) обычно производится неоднородным добавлением тепла или горением в набегающем потоке, и, вследствие этого, невязкое течение вниз по потоку не будет гомоэнергетическим. В частности, эти градиенты с очевидностью появляются в потоках горящего газа, где топливо и окислитель не перемешаны. Примерами являются струи ракетных двигателей и химические лазеры со сверхзвуковым перемешиванием.

Неоднородность по пространству подвода энергии без горения, например, появляется, когда неоднородный лазерный луч используется для возбуждения молекул в потоке газа. Важным примером проявления указанного эффекта является процесс разделения изотопов. Хотя внешняя завихренность проявляется довольно часто, т. к. она генерируется как неоднородным подводом тепла в поток или горением, так и искривленной УВ, она не указана в вышеприведенном списке эффектов второго порядка. Из уравнения Крокко, справедливого для установившегося течения, при отсутствии массовых сил завихренность определяется градиентами энтропии и энтальпии торможения. Следовательно, завихренность не является независимым эффектом. При неустановившемся течении внешняя завихренность является независимым эффектом и должна быть добавлена к вышеприведенному списку.

Эффекты, связанные со вторым коэффициентом вязкости или объемной вязкостью ζ, появляющиеся в выражении для тензора напряжений, относятся к эффектам третьего порядка [35]. Для некоторых газов, таких как N_2O и CO_2 [36], объемная вязкость ζ проявляется как величина третьего или более высокого порядков по сравнению с динамической вязкостью μ. В уравнениях количества движения и энергии ζ умножается на дивергенцию скорости $\operatorname{div}\mathbf{v} = \nabla \cdot \mathbf{v}$. В высокоскоростном ПС, где дивергенция $\nabla \cdot \mathbf{v}$ может быть значительной, может возникнуть необходимость в оставлении члена с объемной вязкостью, когда имеют дело с вышеуказанными газами [37]. Эти члены должны быть отнесены ко второму и даже первому порядку.

В потоке CO_2 в гиперзвуковом ПС учет коэффициента объемной вязкости ζ дает увеличение в теплопередаче, но не изменяет поверхностное трение [37]. Как правило, величины ζ/μ или λ/μ предполагаются величинами первого порядка.

Рассмотрим теперь эффекты второго порядка, связанные с нарушением континуального подхода и уменьшением числа Рейнольдса, а именно: эффекты скольжения скорости и скачков температуры и концентраций на обтекаемой поверхности. Эти эффекты в качественном отношении отличны от предыдущих. Они связаны с учетом разреженности набегающего потока. Их учет расширяет применимость континуального подхода в область более малых чисел Рейнольдса. При уменьшении числа $\mathbf{Re}$ (увеличение числа Кнудсена) континуальный подход в задачах сверх- и гиперзвуковой аэродинамики нарушается прежде всего около обтекаемой стенки, на которой функция

распределения скоростей отраженных молекул тем сильнее отличается от функции распределения падающих молекул, чем меньше число **Re**.

Решение кинетического уравнения в окрестности стенки дает эффективные граничные условия для скорости скольжения и скачков температуры и концентраций для решения континуальных уравнений (далее просто скорости скольжения (СС)). Использование эффективных граничных условий СС может увеличить физически правильные решения в сторону малых чисел Рейнольдса до двух порядков. Впервые теоретический анализ явления скольжения, возникающего при течении газа вдоль твердой поверхности, был проведен Максвеллом [38]. Максвелл исходил из предположения о том, что функция распределения движущихся к стенке молекул газа вблизи поверхности не отличается от ее распределения в объеме газа вдали от стенки. Обобщение элементарного рассмотрения Максвелла на случай неоднородной по составу смеси газов приводит к выводу о существовании, помимо «вязкого» и «теплового», еще и «диффузионного» скольжения [39], связанного с составляющей градиента концентрации касательной к поверхности.

Предположение Максвелла дает грубую истинную картину распределения молекул газа по скоростям вблизи стенки, что приводит к определенной (часто значительной) погрешности в вычислении коэффициентов в формулах для скольжения скорости, температуры и концентраций. В действительности, на расстоянии от поверхности порядка длины свободного пробега молекул газа (т. е. в слое Кнудсена) функция распределения падающих на стенку молекул будет отличаться от функции распределения в объеме газа вследствие столкновения с отраженными от стенки молекулами. Поэтому корректное описание течения газа вблизи поверхности должно опираться на решение кинетического уравнения Больцмана.

Точные решения этой задачи [40–42] известны только для модельных форм интеграла столкновений. В качестве основных приближенных методов вычисления скорости скольжения газа следует отметить, во-первых, метод Максвелла, во-вторых — метод Лоялки [43, 44], и, в-третьих — метод полупространственных моментов [45]. Лоялковский метод представляет собой модифицированный метод Максвелла. Он применим для произвольных законов взаимодействия молекул газа между собой и с поверхностью. Этот метод без особых затруднений может быть обобщен на случай многокомпонентных смесей газов. Однако точность лоялковского метода может быть оценена только сравнением с результатами, полученными другими методами. Кроме того, метод Лоялки применим для ограниченного круга задач. Так, например, в настоящее время не известно, как обобщить этот метод на случай скольжения газа вдоль искривленной поверхности.

Метод полупространственных моментов состоит в том, что отклонение функции распределения в слое Кнудсена от функции распределения в объеме раскладывается в ряд по полупространственным полиномам скорости. Коэффициенты разложения являются функциями расстояния до поверхности,

которые определяются из решения моментных уравнений. Для получения последних уравнение Больцмана умножается на соответствующие полиномы от скорости и далее интегрируется по всему пространству скоростей. В качестве граничных кинетических условий используется закон отражения молекул газа от поверхности. Кроме того, на большом расстоянии от стенки функция распределения должна переходить в функцию распределения в объеме газа (навье-стоксовское распределение Чепмена–Энскога [46]).

Метод полупространственных моментов позволяет провести учет влияния кривизны поверхности на скорость скольжения [45]. Однако применение этого метода связано с вычислением моментов интеграла столкновений (скобочных интегралов) от разрывных функций распределения. Ввиду сложности вычисления подобных моментов большинство исследователей использует модельные операторы столкновений в кинетическом уравнении [47].

Для формулировки граничных условий скольжения (ГУС) оценим сначала число Кнудсена. По известной формуле для коэффициента динамической вязкости [46]:

$$\mu = 0{,}499\rho\,\langle\mathbf{v}\rangle\,l, \quad \langle\mathbf{v}\rangle = \sqrt{\frac{8p}{\pi\rho}} = \sqrt{\frac{8}{\pi\,\gamma}}\;a, \quad \gamma = \frac{c_p}{c_v},$$

где l — средняя длина свободного пробега молекул,

$$l = \frac{1}{0{,}499}\left(\frac{\pi\gamma}{8}\right)^{1/2}\left(\frac{\mu}{\rho a}\right),$$

$\langle\mathbf{v}\rangle$ — средняя скорость свободного пробега молекул. Тогда число Кнудсена будет равно

$$\mathbf{Kn} = \frac{l}{\delta} = \frac{l}{L}\,\frac{L}{\delta} = 1{,}255\sqrt{\gamma}\,\frac{\mathbf{M}}{\mathbf{Re}}, \quad \mathbf{Re} = \frac{\rho v L}{\mu}, \quad \mathbf{M} = \frac{v}{a}. \tag{1.1}$$

Здесь L — длина стенки от ее начала или радиус кривизны затупленного тела в его вершине, δ — подходящим образом выбираемая далее характерная длина. Континуальный режим и режим со скольжением ограничены следующими величинами чисел Кнудсена:

$0 < \mathbf{Kn} \leqslant 10^{-2}$	— континуальное течение,
$10^{-2} \leqslant \mathbf{Kn} \leqslant 10^{-1}$	— течение (слабо разреженного газа) со скольжением,
$10^{-1} \leqslant \mathbf{Kn} \leqslant 10$	— переходный режим течения,
$10 \leqslant \mathbf{Kn}$	— свободномолекулярный режим течения.

По мере того, как число Рейнольдса увеличивается, ПС постепенно переходит от течения со скольжением, скачком температуры и концентраций на стенке к другому режиму без этих эффектов (выполняется условие прилипания и равенство на стенке температуры газа и стенки). В ПС несжимаемой жидкости имеем $\mathbf{Kn} = 0$ и, таким образом, обтекание в этом случае не

обладает скольжением и скачком температуры независимо от величины числа Рейнольдса.

Рассмотрим теперь ПС на плоской полубесконечной пластине. Толщина вытеснения ПС δ будет тогда наиболее соответствующей макроскопической длиной, чем длина вдоль пластины L. Тогда из теории ПС следует:

$$\frac{\delta}{L} \sim \frac{1}{\sqrt{\mathbf{Re}}} \quad \text{и соответствующее число Кнудсена будет} \quad \mathbf{Kn} \approx \frac{\sqrt{\gamma}\,\mathbf{M}}{\mathbf{Re}^{1/2}}.$$

Следовательно, когда $L = \delta$, получается зависимость от параметра $\mathbf{Re}^{1/2}$, указывающая на появление эффекта второго порядка. Если же течение происходит при малых числах Рейнольдса, то исчезает само понятие о пограничном слое, справедливое при $\mathbf{Re} \to \infty$. Можно сказать, что ПС становится сравнимым по толщине с потоком в целом ($\delta \approx L$), и тогда в отличие от формулы для числа $\mathbf{Kn}$, полученной при больших числах $\mathbf{Re}$, при малых числах Рейнольдса будет снова справедлива формула (1.1).

Приведенные отличия связаны с тем, что уравнения ПС справедливы, во-первых, при больших числах $\mathbf{Re}_\infty$ и, во-вторых, при условии сравнительной малости средней длины свободного пробега молекул по отношению к толщине ПС. Последнее условие означает, что газ не должен быть сильно разреженным.

Физическая постановка задачи со скольжением, т. е. получение граничных условий скольжения и скачка температуры, состоит в следующем. При любом сколь угодно малом числе Кнудсена вблизи границы имеется область (слой), в которой уравнения НС становятся неточными. Эта область имеет размер (толщину) порядка величины средней длины свободного пробега молекул газа, т. е. при обычных условиях незначительна и не вносит существенных искажений в получаемые в рамках уравнений НС решения. Однако, когда газ существенно разрежен и число $\mathbf{Re}$ становится достаточно малым, полученные в рамках модели сплошной среды решения без учета скольжения могут привести к большим ошибкам. В работе [48] получены граничные условия скольжения с учетом колебательных температур молекулярных компонентов при произвольной каталитической активности стенки относительно аккомодации различных видов внутренней энергии. Предложена схема учета гетерогенных химических реакций (см. гл. 4).

Остановимся кратко на общей характеристике вклада эффектов второго порядка в режиме применимости континуальных уравнений при умеренных и малых числах Рейнольдса. Имеется довольно много сравнений результатов второго приближения как с решением уравнений НС для сжимаемого газа, так и с экспериментом. В эксперименте эффекты второго приближения могут быть малы и часто сразу проявляются несколько из них. Более того, они (эти эффекты) взаимодействуют между собой, часто подавляя друг друга. Другая трудность состоит в том, что одна измеренная величина может совпадать

с теорией, но другая — не совпадать с ней. Например, в работе [49] отмечалось плохое согласие теории с экспериментом для теплообмена, но хорошее согласие того, что относилось к измеренному давлению при поперечном гиперзвуковом обтекании кругового цилиндра.

Теория ПС во втором приближении начала развиваться с большими трудностями и грубыми оценками с 1950-х годов и в начале 1960-х с использованием различных математических подходов. Разноречивые результаты, полученные в ранних исследованиях этой проблемы, были разрешены с помощью систематического применения регулярного метода сращиваемых внешних и внутренних асимптотических разложений [50, 51] к решению уравнений НС для несжимаемой жидкости. Аналитическая теория третьего приближения получила небольшое развитие, в частности, из-за значительной сложности теории второго приближения. Позже было показано, что последовательное исследование третьего приближения должно основываться скорее на использовании уравнений Барнетта [35], чем на уравнениях НС.

Несмотря на многообещающее начало теории второго приближения ПС и важность рассматриваемых в ней механических явлений в гиперзвуковых течениях, эта теория не оказала большого влияния на газодинамику. Во-первых, уже теория первого приближения часто обеспечивала адекватные результаты для инженерных целей. Во-вторых, относительная сложность теории второго приближения также не способствовала ее широкому распространению. В-третьих, еще большие математические трудности возникают при расчете ПС во втором приближении при наличии реакций в ПС. В-четвертых, априори не ясна точность второго приближения, как и всякого асимптотического решения. Для получения надежных данных необходимо сравнение с решением уравнений НС или экспериментом. В-пятых, например, в задаче обтекания сферы с числом $\mathbf{M}_\infty = 10$ в области с небольшим благоприятным градиентом давления некоторые величины второго порядка становятся больше соответствующих, вычисленных из теории ПС первого порядка. Например, нормальная составляющая скорости во втором приближении v_2 становится больше скорости v_1, вычисленной в первом приближении [52]. Это указывает на то, что асимптотические разложения в области ПС по параметру $\mathbf{Re}_0^{-1/2}$ не являются равномерно пригодными в окрестности отрыва ПС. Этот факт давно был известен, но никогда прежде указанным асимптотическим анализом не исследовался.

Наконец, другой неблагоприятный результат асимптотического разложения наблюдался в задаче обтекания гиперболоида при $\mathbf{M}_\infty \to \infty$. В этом случае, как и ожидалось при обтекании такого тела, эффект вихревого взаимодействия растет вниз по потоку. Это должно приводить к тому, что эффект вихревого взаимодействия будет становиться эффектом первого порядка при достаточном удалении от вершины гиперболоида. Так как теория второго приближения ПС представляет приближенное решение уравнений НС, то

всегда желательно сравнение ее результатов с решениями НС или ВУС [53]. Начиная с 1970-х годов исследование этой теории практически прекратилось.

Там, где теория второго приближения дает удовлетворительные результаты, она продвигает решение, получаемое в рамках континуума (уравнения НС или их асимптотически упрощенные варианты плюс условия скольжения скорости и скачка температуры и концентраций) в область малых чисел Рейнольдса на полтора — два порядка. Несмотря на ограниченность теории второго приближения ПС, отмеченную выше, она имеет большое значение для понимания явлений, происходящих при сверх- и гиперзвуковом обтекании тел вязким теплопроводным газом при умеренных и малых числах Рейнольдса, когда остается еще справедливым континуальный подход.

2. Композитные системы уравнений вязкой жидкости. Уравнения вязкого ударного слоя. Параболизованные уравнения Навье–Стокса

Дальнейший прогресс в создании адекватных (газодинамических) моделей, более простых, чем полные уравнения Навье–Стокса, для решения задач сверх- и гиперзвукового обтекания тел вязким теплопроводным газом пошел по применению композитных уравнений, вытекающих из асимптотического анализа уравнений НС, содержащих, за некоторым исключением, все члены уравнений Эйлера и асимптотически оцененных членов с вязкостью и теплопроводностью разного порядка при $\mathbf{Re} \to \infty$. При гиперзвуковых скоростях обтекания ($\mathbf{M}_\infty \geqslant 5 \div 6$) система уравнений Навье–Стокса дополняется уравнениями для определения концентраций компонентов, энергий внутренних степеней свободы, излучения и других параметров физико–химических процессов, протекающих в ударном слое около обтекаемого тела [54]. При этом соответствующим образом изменяются определяющие уравнения для тензора напряжений и потока тепла, а также добавляются определяющие уравнения (соотношения переноса) для потоков диффузии (соотношения Стефана–Максвелла). При всем возможном усложнении течения физико-химическими процессами главные трудности при получении решения (аналитического или численного) обычно связаны с решением уравнений НС для однородного газа. Хотя современные численные методы, а также скорость расчетов на современных ЭВМ и позволяют получать численные решения довольно сложных задач в рамках решения полных уравнений НС, такие решения еще не стали сегодня рутинной работой из-за значительных затрат ресурсов ЭВМ, особенно при учете неравновесных физико-химических процессов и решении трехмерных задач при обтекании реальных конфигураций летательных аппаратов (ЛА). Для двумерных задач решения уравнений НС с учетом основных физико-химических процессов можно получить с высокой степенью точности и их

совпадение с экспериментальными данными является для экспериментатора не менее убедительным, чем для вычислителя.

Областью применимости полных уравнений НС в задачах сверх- и гиперзвукового обтекания тел являются исследования течений разреженного газа в условиях применимости модели сплошной среды (низкие числа Рейнольдса), а также детальные исследования структуры сложных течений с сильным вязко-невязким взаимодействием, отрывом потока в областях рециркуляции за донным срезом и в ближнем следе. Но во многих практически важных случаях описание всего поля течения, а чаще только его части, с достаточной точностью, практически совпадающей с решением полных уравнений НС, обеспечивается в рамках более простых математических моделей, реализация которых требует существенно меньших затрат ресурсов ЭВМ.

При проведении серийных расчетов или в случае решения задач со сложной физико-химической постановкой часто обращаются к использованию упрощенных моделей [55]. Ранее, до широкого внедрения ЭВМ в практику аэродинамических расчетов, основной математической моделью в задачах обтекания была классическая схема Прандтля. Однако эта модель недостаточно эффективна из-за сильной ограниченности снизу по диапазону чисел Рейнольдса, а также в силу необходимости реализации сращивания решения уравнений ПС с решением уравнений Эйлера, хотя эта процедура принципиально более проста, чем метод сращиваемых внешних и внутренних асимптотических решений в теории ПС второго приближения. Поэтому, для широкого класса задач обтекания, в которых характерной чертой является наличие выделенного направления течения, начиная с 1970-х годов, получили большое распространение, различные системы упрощенных уравнений Навье–Стокса (УУНС). Среди значительного количества таких систем (не менее10) [56] следует выделить систему параболизованных уравнений НС [57] и систему уравнений вязкого ударного слоя [52, 58, 59]. Такие системы уравнений обладают достаточно широкой областью применимости и имеют эволюционный вид по одной из пространственных переменных (маршевой координате). Системы упрощенных уравнений НС позволяют находить решение во всей наветренной области без явного выделения пограничного слоя, и они автоматически, учитывают все эффекты теории ПС второго порядка. Решение даже таких систем уравнений остается весьма трудоемкой проблемой в случае учета реальных физико-химических процессов, протекающих в ударном слое около обтекаемого тела, что делает актуальным развитие эффективных специально ориентированных численных методов.

Несмотря на эволюционный вид систем ВУС и ПУНС, задача Коши для них по маршевой координате является некорректной [57–59]. Первая попытка разработки эффективного итерационного метода для решения упрощенной системы уравнений НС применительно к уравнениям ВУС с учетом их специфики принадлежит Р. Т. Дэвису [58]. Он предложил решать систему уравнений ВУС итерационным методом, так что на каждой итерации оператор

при векторе искомых переменных обращается маршевым образом. Такие итерации получили со временем название глобальных. Он предложил проводить глобальные итерации (ГИ) по нормальной составляющей скорости, входящей в уравнение импульсов в проекции на нормаль, и по наклону ударной волны. При этом дифференциальный оператор, обращаемый на текущей ГИ, был близок по своей структуре к соответствующему оператору системы уравнений пограничного слоя. Организация ГИ таким образом не является оптимальной, т. к. передача возмущений вверх по потоку главным образом определяется продольной составляющей градиента давления [60]. Ударная волна в модели ВУС является свободной границей и для определения ее положения в области затупления также требовался итерационный процесс, учитывающий передачу возмущений вверх по потоку.

С. А. Васильевский и Г. А. Тирский [61] реализовали ГИ по двум двумерным функциям (рассматривалась двумерная постановка) по маршевой составляющей градиента давления и отходу ударной волны, что позволило при специальном подборе релаксационных параметров получить лучшую сходимость по сравнению с оригинальным методом Дэвиса. Тем не менее данный подход также не являлся оптимальным. В дальнейшем метод ГИ постоянно применялся и претерпевал различные модификации в работах многих других авторов (в том числе и для исследования внутренних течений), среди которых можно выделить работы [62–67]. Отметим работы [68, 69], в которых продольный градиент давления на разностном уровне расщепляется на «гиперболическую» и «эмитическую» составляющие, что позволило сократить число глобальных итераций до двух (см. гл. 16).

С помощью метода глобальных итераций удалось исследовать большое количество содержательных задач с учетом неравновесных физико-химических процессов в ударном слое, решение которых ранее было затруднительно ввиду повышенных требований к ресурсам ЭВМ.

3. Приближение тонкого вязкого ударного слоя (ТВУС)

Исторически первой системой УНС является модель тонкого (гиперзвукового) вязкого ударного слоя (ТВУС), развитая *H. K. Cheng'ом* [70] для задач внешнего обтекания. При предположении, что показатель адиабаты $\gamma \to 1$, число Маха набегающего потока $\mathbf{M}_\infty \to \infty$ и число Рейнольдса $\mathbf{Re} = \rho_\infty v_\infty L/\mu_\infty \to \infty$, но при условии, что величина $(\gamma - 1)\mathbf{Re} = \mathrm{O}(1)$, вся область наветренного течения при гиперзвуковом обтекании достаточно гладких выпуклых тел разбивается на два слоя: вязкий ударный слой, примыкающий непосредственно к телу, и слой перехода через головную ударную волну. При указанных выше условиях асимптотическое приближение уравнений НС приводит к уравнениям ТВУС [70, 71], имеющим в естественной системе координат, связанной с поверхностью обтекаемого тела, следующий

вид:

$$\left.\begin{aligned}
&(r_w^v \rho u)_x + (r_w^v \rho\, v)_y = 0,\\
&\rho\,(u u_x + v\, u_y) + p_x = (\mu\, u_y)_y\,,\\
&\kappa \rho\, u^2 + p_y = 0,\\
&\rho\,(u\, H_x + v\, H_y) = \left\{\mu\, \sigma^{-1}\left[H + 0{,}5\,(\sigma - 1)\, u^2\right]_y\right\}_y,\\
&H = \frac{u^2}{2} + h, \quad \sigma = \frac{\mu\, c_p}{\lambda},
\end{aligned}\right\} \tag{1.2}$$

где x, y — координаты вдоль и по нормали к поверхности, u, v — компоненты скорости по осям x и y, h — удельная энтальпия, H — полная энтальпия, p — давление, ρ — плотность, σ — число Прандтля, μ — коэффициент вязкости, κ — кривизна поверхности, r_w — расстояние от поверхности тела до оси симметрии тела, $\nu = 0$ или $\nu = 1$ соответственно для плоских контуров и осесимметричных тел. Система (1.2) содержит все члены уравнений ПС и уравнений невязкого ударного слоя в гиперзвуковом приближении [72] и имеет на единицу пониженный по нормальной координате порядок по сравнению с уравнениями НС. Поэтому вместо задания для полной системы уравнений НС четырех граничных условий для u, v, p и H на бесконечности в набегающем потоке для системы (1.2) нужно задать всего три условия. Но вместо этого можно задать четыре условия на искомой линии (границе), причем добавочное четвертое условие позволяет найти саму эту линию. Такими условиями на этой границе в задачах гиперзвукового обтекания при малых и умеренных числах Рейнольдса являются обобщенные условия Ренкина–Гюгонио, выставляемые на внутренней стороне головной ударной волны, которые вытекают из полной системы обыкновенных дифференциальных уравнений, являющейся следствием решения одномерных уравнений НС типа решения Беккера для структуры ударной волны. Причем, когда обобщенные условия Ренкина–Гюгонио используются как граничные условия, они предварительно упрощаются в соответствии с принятыми в ударном слое оценками [73]. Сама структура ударной волны может быть найдена после решения уравнений ТВУС. К уравнениям (1.2) следует добавить уравнение состояния идеального (неплотного) газа.

Асимптотический анализ модели ТВУС был выполнен в работах [73, 74], а при наличии вдува с поверхности обтекаемого тела — в работе [75].

Уравнения ТВУС представляют собой композитную систему уравнений, пригодную как в невязкой, так и в вязкой областях течения. Поэтому при их применении, также как и для других моделей УУНС, исключается необходимость асимптотического сращивания решений уравнений ПС и уравнений Эйлера. Система уравнений ТВУС имеет ту же математическую природу, что и уравнения ПС и имеет не вполне параболический тип в предположении безотрывного обтекания тела.

Задача Коши для уравнений ТВУС является корректной (в направлении потока), когда они интегрируется вдоль ударного слоя от линии торможения. Значения параметров газа при $x = 0$ находятся из автономного решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений, т. е. уравнений (1.2), записанных при $x = 0$, которое служит «начальным» условием для интегрирования уравнений ТВУС при $x > 0$, т. е. имеет место полная аналогия с характером решения уравнений ПС. При этом угол наклона ударной волны при решении задачи гиперзвукового обтекания в каждом сечении по маршевой координате ($x = \mathrm{const}$) в асимптотическом пределе тонкого слоя совпадает с наклоном касательной к обтекаемой поверхности (головная ударная волна эквидистантна поверхности тела).

В процессе решения задачи, из-за наличия условия задания поперечной составляющей, скорости на ударной волне, из которого вытекают балансовые соотношения расхода массы (расход массы через ударную волну от $x = 0$ до текущего x равен расходу массы через сечение ударного слоя $x = \mathrm{const}$), может быть найден отход ударной волны $y_s = y_s(x)$.

Аналогом уравнений ТВУС для внутренних течений является приближение узкого канала [76] и тонких струй, хотя в этих случаях не всегда удается получить равномерные оценки порядков величин для соответствующих членов уравнений НС. При упрощении уравнений используются такие предположения, как наличие преимущественного направления течения, большие числа Рейнольдса, малость поперечного размера течения по сравнению с продольным.

В силу математической простоты уравнений ТВУС, в рамках этой модели было решено много одномерных (на линии растекания) и двумерных содержательных задач с учетом разнообразных физико-химических процессов в ударном слое [71]. Была выяснена иерархия этих процессов и их влияние на сопротивление и теплообмен летательных аппаратов типа «Буран» и «Space Shuttle» [77]. В последнее время создан эффективный численный алгоритм решения пространственных задач обтекания в рамках модели ТВУС [78].

В соответствии с допущениями, принятыми при построении модели ТВУС, ее точность уменьшается при уменьшении числа Маха и увеличении числа Рейнольдса. Предположение о малой толщине ударного слоя становится менее оправданным по мере удаления от передней точки торможения тела. Пределы применимости модели ТВУС в зависимости от чисел Маха и Рейнольдса и геометрических характеристик обтекаемого тела исследовались в [79]. Основной недостаток рассматриваемой модели связан с ограничениями на форму обтекаемой поверхности и уменьшением точности при удалении от линии торможения. Так, например, при обтекании сферы при $\kappa \cong 1$ получаются физически нереальные результаты (нулевое давление на теле и отрыв ударного слоя вниз по течению). Модель неприменима в случае обтекания сильно затупленных тел, например с плоской носовой частью [73]. В этом случае задача на линии торможения является незамкнутой. Поэтому

здесь не удается получить автономного решения, необходимого для начала интегрирования вдоль поверхности тела.

Следует также отметить, что модель ТВУС не содержит всех эффектов второго порядка теории ПС. В частности, в системе (1.2) опущены продольная и поперечная кривизны обтекаемой поверхности: $H_1 = 1 + \kappa y \approx 1$, $r = r_w + y\cos\alpha \approx r_w$. Кроме того, при исследовании структуры ударной волны (второй слой в двухслойной схеме Ченга) оставляется в уравнении импульсов по нормали член $(\mu v_y)_y$, который относится к эффекту третьего порядка $\mathrm{O}(\mathbf{Re}^{-1})$, в то время как другие члены третьего порядка опускаются. Опущенные члены с кривизной можно оставить в системе (1.2), и последняя при этом не изменит свой параболический тип, так как члены с кривизной содержат производные более низкого порядка.

Авторами работы [80] был предложен оптимальный подход, связанный с усовершенствованием модели ТВУС. В силу асимптотического характера модели ТВУС в ней не используется геометрическое соотношение на ударной волне:

$$\operatorname{tg}\beta_S = \frac{1}{1+\kappa\, y_S}\ \frac{dy_S}{dx}, \tag{1.3}$$

где $\beta_S(x)$ и $y_S(x)$ — наклон и отход ударной волны, $\beta_S \to 0$. Поэтому уравнение (1.3) может быть рассмотрено с точки зрения возможности получения приближенного (не асимптотического) решения. Рассматривая уравнение (1.3) как невязку, можно организовать итерационный процесс, существенно уточняющий решение, полученное по модели ТВУС. Заметим, что задача Коши для уравнений (1.2) вместе с уравнениями (1.3) для определения наклона ударной волны является некорректной. Поэтому для определения формы ударной волны с использованием (1.3) необходима итерационная процедура, учитывающая распространение возмущений вверх по потоку. В [79] этот процесс организован следующим образом. Если из (1.3) по найденному из решения уравнений ТВУС (1.2) отходу ударной волны $y_S(x)$ определить новый угол наклона ударной волны $\beta_S\ (x)$ и использовать его в следующей итерации, решая систему (1.2), то сходящееся решение практически совпадает с решением системы полных уравнений вязкого ударного слоя (см. п. 4) и при удалении от линии торможения. Этот факт указывает на то, что положение ударной волны несет существенно большую информацию о решении, чем отброшенные члены в уравнении импульсов по нормали (третье уравнение в системе (1.2)), имеющие порядок $\varepsilon = \rho_\infty/\rho_S \cong (\gamma-1)/(\gamma+1)$ в модели ТВУС. Как было показано в [79], модель ТВУС дает большую погрешность в случае обтекания сферически затупленных конусов даже в случае итерационного уточнения положения ударной волны.

В силу основных предположений, принятых при выводе уравнений ТВУС, они имеют довольно ограниченную область применимости, связанную с наличием тонкого ударного слоя, и поэтому не годятся для расчета течения, например, далеко вниз по потоку при обтекании затупленных тел или при

не очень больших числах Маха затупленных тел. По этой причине, а также, главным образом, в связи с развитием эффективных численных методов для решения задач сверх- и гиперзвукового обтекания тел были созданы более универсальные упрощенные модели НС, но математически более сложные. К ним относится модель вязкого ударного слоя (ВУС), иногда называемая моделью полных уравнений вязкого ударного слоя (ПВУС).

4. Уравнения вязкого ударного слоя

Впервые система уравнений вязкого ударного слоя (ВУС) была приведена в работе *R. T. Davis'a* и *I. Flugge-Lotz'a* [52] в связи с численными расчетами на ее основе эффектов второго порядка теории пограничного слоя. С применением метода сращиваемых асимптотических разложений ее численное решение как композитной системы впервые было получено только через шесть лет в работе [58]. Уравнения ВУС одновременно включают в себя все члены полных уравнений НС, вносящие вклад во второе приближение теории ПС, т. е. члены порядка $\mathrm{O}(\mathbf{Re}^{-1/2})$ как для внутреннего, так и для внешнего разложений решения уравнений НС по степеням $\mathbf{Re}^{-1/2}$. Предположение о тонкости ударного слоя в этой модели в отличие от модели ТВУС не делается. Поэтому система ВУС содержит, в отличие от уравнений ТВУС, все члены уравнений Эйлера, т. е. в ней содержится механизм передачи возмущений вверх по потоку, и она имеет в системе естественных координат, связанной с поверхностью обтекаемого тела (см. п. 1), следующий вид:

$$\left.\begin{aligned}
&(r^\nu \rho\, u\, r)_x + (\sqrt{g}\ \rho u)_y = 0,\\
&\rho\left[uH_1^{-1}u_x + vu_y + u\,v\ (R\,H_1)^{-1}\right] + H_1^{-1}p_x = g^{-\frac{1}{2}}\left[g^{\frac{1}{2}}\mu\left(u_y - (H_1R)^{-1}\,u\right)\right]_y,\\
&\rho\left[u\,H_1^{-1}v_x + v\,u_y - (R\,H_1)^{-1}\,u^2\right] + p_y = 0,\\
&\rho\left(uH_1^{-1}H_x + vH_y\right) = \frac{1}{\sqrt{g}}\left[\sqrt{g}\,\mu\sigma^{-1}\left(H_y + (\sigma-1)\,uu_y\right) - \sigma\,(R_1H)^{-1}\,u^2\right]_y,\\
&\sqrt{g} = H_1 r^\nu, \quad H_1 = 1 + \kappa y, \quad r = r_w + y\cos\alpha.
\end{aligned}\right\} \tag{1.4}$$

Для уравнений (1.4) ставятся граничные условия на теле в количестве трех условий для u, vи H и граничные условия в виде четырех обобщенных соотношений Ренкина–Гюгонио на искомой ударной волне, точнее на заднем ее фронте. Пониженный порядок системы (1.4) (отсутствует слагаемое со второй производной от нормальной компоненты скорости v по y) позволяет воспользоваться «лишним» условием для определения положения ударной волны. В отличие от модели ТВУС в данном случае не предполагается эквидистантность ударной волны поверхности тела, т. е. геометрическая связь (1.3) используется при решении задачи. На теле учитываются условия скольжения и скачка температуры, содержащие члены того же порядка, т. е. $\mathrm{O}(\mathbf{Re}^{-1/2})$, что и в самих уравнениях ВУС.

Важен вопрос о выяснении математической природы системы уравнений ВУС. Исследование характеристик этой системы уравнений показывает, что имеются два возможных решения для характеристик. Если через α обозначить параметр вдоль кривой, определяющей характеристики, то можно найти два решения для характеристик:

$$\left(\frac{dx\,(\alpha)}{d\alpha}\right)^2 = 0 \quad \text{или} \quad x = \text{const}\,,$$

и

$$\frac{dy}{dx} = \left[\frac{v}{u} \pm \frac{1}{u}\left(\frac{p}{\rho}\right)^{1/2}\right](1 + ky)\,.$$

Первое решение говорит о том, что система ВУС имеет параболический тип (характеристики — нормали к поверхности), в то время как второе решение показывает, что система уравнений ВУС гиперболического типа. Этот вывод сразу вносит неопределенность, пока не отмечено, что высшие производные от v и p появляются в уравнении неразрывности и уравнении количества движения в проекции на нормаль к поверхности, в то время как высшие производные от u и T в них отсутствуют. Это означает, что эти два уравнения оказываются гиперболического типа и они одни определяют природу решения для v и p.

Расчеты, выполненные в [81–83] и позже многими другими авторами, показали, что уравнения ВУС позволяют получить решение более точное и с меньшими затратами вычислительных ресурсов, чем в случае применения асимптотических решений высокого порядка теории ПС [84].

Уравнения ВУС, также как и уравнения ТВУС, применимы в случае наличия выделенного направления потока при умеренных и больших числах Рейнольдса. В отличие от уравнений ТВУС система ВУС имеет эллиптический тип в дозвуковых областях течения (в окрестности затупления и в дозвуковых пристеночных областях течения) и гиперболико-параболический тип в сверхзвуковых областях течения. Действительно, учет членов $\mathrm{O}(\mathbf{Re}^{-1/2})$ приводит к удержанию в системе уравнений ВУС слагаемых, ответственных за передачу возмущений вверх по потоку. В дозвуковых областях они учитывают распространение возмущений вверх по потоку, которое осуществляется посредством невязкого механизма через продольную составляющую градиента давления $\partial p/\partial x$. По этой причине в дозвуковых областях начально-краевая задача для ВУС является некорректной. Сказанное выше легко проиллюстрировать на примере системы упрощенных уравнений, которую в декартовой системе координат x, y в плоском случае можно записать в виде:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) = 0, \tag{1.5}$$

$$\rho u\frac{\partial u}{\partial x} + \rho v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial y}\right), \tag{1.6}$$

$$\rho u\frac{\partial v}{\partial x}+\rho v\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{\partial p}{\partial y}, \tag{1.7}$$

$$\rho u\frac{\partial h}{\partial x}+\rho v\frac{\partial h}{\partial y}-u\frac{\partial p}{\partial x}-v\frac{\partial p}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2. \tag{1.8}$$

После исключения $\partial p/\partial x$ из уравнения (1.6) с использованием уравнений состояния $p=\rho RT$, неразрывности (1.6) и баланса энергии (1.8) можно получить следующий результат:

$$\rho u\frac{\mathbf{M}^2-1}{\mathbf{M}^2}\,\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial y}\right)-\rho v\frac{\partial u}{\partial y}-\ldots, \tag{1.9}$$

где $\mathbf{M}=u/a$ — местное число Маха для продольной компоненты скорости. Из (1.9) видно, что если $u>0$, то при $\mathbf{M}>1$ коэффициент при производной $\partial u/\partial x$, определяющий знак эффективной вязкости, положителен. При $\mathbf{M}<1$ эффективная вязкость становится отрицательной. В этом случае интегрирование в направлении возрастания x соответствует решению некорректной задачи Коши. Легко видеть, что указанная выше особенность не имеет места, если продольный градиент давления является заданной величиной, как в классической теории ПС. В этом случае начально-краевая задача для этой системы корректна при любых значениях числа $\mathbf{M}$. Такой результат, очевидно, можно получить, считая известной производную $\partial u/\partial x$ в уравнении неразрывности. Даже слабая эллиптичность системы ВУС, которая всегда имеет место в пристенной области внутри ПС, требует рассмотрения задачи как краевой, т. е. задания давления вниз по потоку. Граничное условие для давления вниз по потоку является необходимым условием для хорошей обусловленности краевой задачи сверхзвукового обтекания тел вязким газом в рамках ВУС.

Эти особенности системы ВУС приводят к тому, что задача Коши для нее является плохо обусловленной. В результате при маршевом интегрировании системы появляются так называемые ветвящиеся решения: в некоторой точке вниз по потоку возникает неустойчивость, приводящая в конце концов к экспоненциально растущим решениям. Это свойство уравнений отмечалось в [58] на основе некоторых качественных соображений и более строго в работе [59]. Впервые эффект передачи возмущений вверх по потоку в области сверхзвукового ПС был обнаружен в [60]. Поэтому для решения уравнений ВУС необходимо применять какую-либо итерационную процедуру с учетом возможного распространения возмущений вверх по потоку. Понимание того, что в рамках уравнений ВУС обеспечивается возможность передачи возмущений вверх по потоку, является ключевым при создании маршевых методов решения уравнений ВУС для расчета таких смешанных течений. Более подробно об этом см. гл. 16.

Уравнения ВУС, являясь композитной системой, позволяют учитывать все эффекты второго приближения теории ПС, включая эффекты вытеснения ПС, вихревого взаимодействия, влияния продольной и поперечной кривизн,

скольжения скорости и скачка температуры. В частности, автоматически учитывается влияние эффекта поглощения энтропийного слоя, который является определяющим при обтекании тел большого удлинения при умеренно больших числах Рейнольдса. Сравнение с экспериментальными данными, а также с решениями полных уравнений НС показало, что модель ВУС позволяет получить решение задачи обтекания с точностью не хуже 1% для чисел Рейнольдса $\mathbf{Re}$ порядка 10^3 и выше в окрестности затупления.

Применение модели ВУС позволило определить влияние эффектов второго приближения при ламинарном и турбулентном [81–85] обтекании тел большого удлинения. В рамках модели ВУС были решены задачи гиперзвукового обтекания воздухом тел большого удлинения с учетом пространственного переноса излучения и равновесных реакций [86, 87] с учетом неравновесных термических и химических процессов [81, 88], задачи сверхзвукового обтекания конусов неравномерным потоком типа следа [89, 90] и многие другие. Проведение подобных численных исследований с использованием полных уравнений НС не привело бы практически к какому-либо уточнению результатов, но потребовало бы существенного увеличения вычислительных ресурсов. Использование же при решении этих задач второго приближения теории ПС является либо весьма проблематичным, либо практически невозможным.

5. Параболизованные уравнения Навье–Стокса (ПУНС)

Параболизованные или упрощенные уравнения НС, в последнее время их называют уравнениями тонкого слоя, были предложены А. И. Толстых [57] и несколько позже Ю. П. Головачевым и Ф. Д. Поповым [91] для задач сверхзвукового обтекания лобовой и боковой поверхности тел в предположении наличия преимущественного направления течения. Записывая систему уравнений НС в естественной системе координат x, y, связанной с поверхностью обтекаемого тела (см. п. 1), и оставляя в ней при больших числа Рейнольдса члены O(1) и O($\mathbf{Re}^{-1/2}$) и опуская члены O($\mathbf{Re}^{-1}$), получим систему ПУНС:

$$(r^\nu \rho u)_x + (\sqrt{g}\,\rho v)_y = 0, \tag{1.10}$$

$$\rho Du + \rho\,(RH)^{-1}\,uv + H_1^{-1} p_x = g^{-1/2}\left(g^{1/2}\tau_{xy}\right)_y + (RH_1)^{-1}\,\tau_{xy}, \tag{1.11}$$

$$\rho Dv - \rho\,(RH_1)^{-1}\,u^2 + p_y = \left(\frac{4}{3}\right) g^{-1/2}\left(\mu g^{1/2} v_y\right)_y, \tag{1.12}$$

$$\rho DT - Dp = g^{-1/2}\left(\mu\sigma^{-1} g^{1/2} T_y\right)_y + \mu H_1^2\left(uH_1^{-1}\right)_y^2 + \left(\frac{4}{3}\right)\mu v_y^2, \tag{1.13}$$

где

$$\tau_{xy} = \mu\left[u_y - (RH_1)^{-1}\,u\right], \quad D = H_1^{-1} u\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}, \quad g^{1/2} = r^\nu H_1, \quad H_1 = 1 + \kappa y.$$

Здесь обозначения совпадают с обозначениями п.п. 3 и 4. Следует отметить, что в третьем уравнении (уравнение импульсов в проекции на нормаль к поверхности) справа опущены некоторые члены, имеющие формально порядок

$O(\mathbf{Re}^{-1/2})$. Однако дополнительные оценки, связанные с тонкостью слоя и оценки производных по x и по y во фронте ударной волны и около стенки показывают, что оставленный справа в уравнении (1.12) член имеет наибольший порядок по крайней мере в ударном слое. Если учесть эти слагаемые и некоторые другие «вязкие» члены в (1.11) и (1.12), например смешанные производные, или провести некоторые дополнительные упрощения правых частей уравнений (1.11) и (1.12), то можно получить не менее десяти различных упрощенных систем уравнений НС [56]. Но все они будут обладать следующими, по крайней мере, тремя общими свойствами. Во-первых, все они содержат полностью члены уравнений Эйлера. Во-вторых, все они содержат вторую производную по поперечной координате y от нормальной компоненты вектора скорости v, т. е. сохраняют порядок системы уравнений НС по поперечной координате и, наконец, все они не содержат вторых производных вдоль переменной x, соответствующей выделенному маршевому направлению.

Первое свойство привносит в ПУНС механизм передачи возмущений вверх по потоку, который, как отмечалось выше, реализуется посредством невязкого механизма через продольную составляющую градиента давления в дозвуковых областях течения. Это свойство содержится и в модели ВУС. Второе свойство сохраняет порядок системы по поперечной координате y и дает возможность ставить, например для однородного газа, четыре граничных условия на бесконечности в набегающем потоке и для задач сверхзвукового обтекания тел, тем самым, переходить сквозным счетом через навье-стоксовскую структуру ударной волны. Это свойство присуще только полным уравнениям НС и модели ПУНС, и оно не содержится в модели ТВУС и ВУС, в которых структура ударной волны может быть найдена отдельно только после решения задачи о течении в вязком ударном слое. Заметим, что иногда уравнения ПУНС решают только в области вязкого ударного слоя с четырьмя граничными условиями Ренкина–Гюгонио на искомой ударной волне. В этом случае возникает необходимость в дополнительном замыкающем соотношении для определения отхода ударной волны, которое может быть выставлено на разностном уровне.

Различные способы получения этого соотношения, не вытекающие из механической постановки задачи, были предложены в ряде работ, и они лишь позволяют надеяться на успех. И, наконец, третье свойство, связанное с опусканием некоторых членов порядка $O(\mathbf{Re}^{-1/2})$, физически означает, что пренебрегается эффектами, ответственными за молекулярный перенос массы (если учитывается диффузия), импульса и энергии вдоль маршевого направления. Это упрощение содержится как в модели ТВУС, так и в модели ВУС и, следовательно, является характерным для всех упрощенных моделей уравнений НС.

В случае трехмерных течений, например для задач внешней аэродинамики, ПУНС включают в себя слагаемые, учитывающие молекулярный перенос в окружном поперечном направлении, что позволяет адекватно

описывать поперечные возвратные течения. Также как и уравнения ВУС, система ПУНС является эволюционной относительно переменной, связанной с основным направлением потока, и имеет эллиптический тип в дозвуковых областях течения [59]. В нестационарных задачах модели ВУС и ПУНС обладают свойствами, близкими к свойствам полной системы НС, и для них ставится задача с начальными условиями по времени и краевыми условиями по пространственным координатам.

Оценки, с помощью которых были получены модели ВУС и ПУНС, справедливы при условии безотрывного обтекания гладких тел. В этом случае пределы применимости упрощенных уравнений определяются только значениями числа Рейнольдса. Количественная информация об этих пределах была получена из сравнения результатов решения упрощенных уравнений с результатами применения более общих математических моделей [83]. Результаты этих и некоторых других расчетов, приведенных в монографии [65], показали, что область применимости ПУНС практически совпадает с областью применимости полных уравнений НС. При $\mathbf{Re} \geqslant 10^3$ как уравнения ВУС, так и уравнения ПУНС приводят в задачах обтекания затупленных тел на наветренной стороне к одинаковым результатам, совпадающим с решениями уравнений невязкого газа и пограничного слоя.

Имеющиеся в литературе решения задачи стационарного обтекания носового затупления космического корабля «Буран» и проведеннные сравнения различных газодинамических моделей с учетом химически неравновесных течений в рамках модели локально-автомодельного приближения уравнений НС, уравнений ПУНС, ВУС и ТВУС показали, что в точке торможения различие по тепловому потоку между рассмотренными моделями не превышает 8%, а по равновесной температуре поверхности — 30 К. На боковой поверхности отличие более сильное.

При сверхорбитальных скоростях входа на больших высотах ($H \geqslant 70$ км) становятся существенными реакции ионизации и неравновесное излучение в ударном слое. Поэтому для правильного количественного определения радиационных потоков становится важным размер всей возмущенной области ударного слоя, включая и область структуры ударной волны. Следовательно, в этом случае модель ПУНС, а еще лучше полные уравнения НС, являются более предпочтительными, чем модель ВУС, хотя они и дают в свою очередь заниженную толщину возмущенной области наветренного течения около тела при уменьшении числа Рейнольдса (увеличении высоты) по сравнению с реальной картиной течения. Это расхождение связано с тем, что число Кнудсена при этих режимах обтекания не является малым и потому модель сплошной среды, представимая уравнениями Навье–Стокса и их асимптотически упрощенными вариантами ВУС, ПУНС, теряет силу. Важно заметить, что модель ТВУС при $\mathbf{Re} \to 0$ дает правильные результаты для коэффициентов трения и теплоотдачи с выходом на свободно-молекулярные значения этих коэффициентов [92].

6. Общие замечания

Итак, модели упрощенных УУНС объединяются следующими общими свойствами: уравнения, описывающие эти модели, являются эволюционными — пригодными во всей расчетной области течения при больших и умеренно больших числах Рейнольдса; предполагается, что течение имеет выделенное направление потока и система координат, в которой записаны уравнения движения, связана с выделенным направлением потока. Следует заметить, что, строго говоря, решение УУНС зависит от выбора системы координат, в выборе которой существует известный произвол. При этом физическая обоснованность упрощенных УНС зависит от того, насколько удачно выбирается система координат. R. T. Davis и S. G. Rubin [93] показали, что при выборе «оптимальной» системы координат модель ПНС обеспечивает хорошую точность даже при $\mathbf{Re} = 0$. С. Г. Черным [94] был предложен метод построения криволинейной системы координат, в которой маршевые координаты выбираются локально близкими к линиям тока, а поперечные координаты ортогональными к маршевым в области существенного влияния вязкостных эффектов. Применение такого подхода позволяет провести расчеты сверхзвукового течения около боковой поверхности некоторых тел, имеющих сложную пространственную конфигурацию в рамках модели ПУНС [95].

Имеющийся опыт практического использования упрощенных УНС свидетельствует о том, что область их применения для получения основных аэродинамических и тепловых характеристик шире формальных пределов, следующих из их асимптотических оценок. Несмотря на то, что УУНС являются обоснованными лишь в случае безотрывного обтекания в последние годы они широко применяются и для моделирования течений с зонами обратных токов. Сравнение решений полных уравнений НС и уравнений ВУС для таких течений [96] показало, что при достаточно больших числах Рейнольдса упрощенные УНС, кроме модели ТВУС, довольно точно описывают структуру течения, его геометрические характеристики, распределение давления по поверхности тела, тепловые потоки и напряжение трения за точкой присоединения потока. В то же время в области циркуляционного течения при числах $\mathbf{Re} \leqslant 10^4$ наблюдаются существенные расхождения результатов, полученных из решения полных и упрощенных уравнений НС.

С другой стороны, ниоткуда не следует, что для иных классов течений, отличных от задач обтекания, случайный выбор модели упрощенных УНС из набора уравнений, различающихся только в «вязких» членах порядка $\mathbf{Re}^{-1/2}$ и выше окажется удачным в смысле точности описания течения в конкретной задаче. Выбор УУНС для решения конкретной задачи должен вытекать из асимптотических оценок членов уравнения НС для данного класса течений. Как было показано в работе [56], в некоторых случаях неудачный выбор модели УНС может даже качественно исказить картину течения, в то время как некоторые другие УУНС дают адекватное решение. В работе [56] было

рассмотрено 10 моделей УУНС, предложенных в разных работах. Эти модели рассматривались на решении семи тестовых задачах, для которых имеются точные решения уравнений НС. Было отмечено, что только модели упрощенных уравнений НС, предложенные А. И. Толстых [57], хорошо описывают решения всех тестовых задач. По-видимому, это связано с тем, что в упрощенных уравнениях А. И. Толстых сохранено наибольшее число наиболее важных «вязких» членов по сравнению с другими моделями упрощенных УНС.

7. Уравнения Навье–Стокса

В литературе можно встретить утверждение: наиболее общей математической моделью течений газа в этом режиме (режиме сплошной среды) является система уравнений Навье–Стокса. Однако это не так. В уравнениях НС при их выводе методом Чепмена–Энскога (разложение возмущенной функции распределения по степеням числа Kn) учитываются внепорядковые по числу $\mathbf{Kn}$ члены, носящие не асимптотический, а «композитный» характер.

Известным преимуществом этих уравнений является их эффективное применение при сквозных численных расчетах, включая переход через ударные волны, в частности, через головную ударную волну при сверхзвуковом обтекании тел. Толщина ударной волны, полученная при решении уравнений НС, получается соответственно тоньше, чем по расчетам по уравнению Больцмана и в эксперименте. Таким образом, не следует с полной гарантией ожидать дополнительных физически правильных результатов, полученных из решения уравнений НС, по сравнению с расчетами по модели ВУС. Последняя включает все члены $\mathrm{O}(1)$ и $\mathrm{O}(\mathbf{Re}^{-1/2})$ при $\mathbf{Re} \to \infty$ и не включает члены $\mathrm{O}(\mathbf{Re}^{-1})$. Конкретные численные расчеты показывают, что при сверхзвуковом обтекании сферы вязким совершенным газом при числах $\mathbf{Re}_\infty \geqslant 500$ решения, полученные с помощью моделей ВУС, ПУНС и НС, близки между собой.

При $\mathbf{M}_\infty > 2$, $\mathbf{Re}_\infty \geqslant 100$ величины тепловых потоков и напряжение трения на сфере слабо зависят от принятой модели уравнений [97]. Более того, недавние расчеты по обтеканию вдоль траектории возвращаемого аппарата OREX [98], который представляет собой 50-градусный конус с радиусом притупления 1,35 м и радиусом миделя 1,7 м, показали, что в диапазоне высот $z = 84 \div 105$ км расчеты, выполненные на основе уравнений ВУС и полных уравнений НС, показали хорошее согласие температуры и концентраций химических компонентов для высот $z \leqslant 100$ км ($\mathbf{Re}_\infty \geqslant 300$, $\mathbf{Re}_0 \geqslant 5$). Численные результаты для теплового потока в точке торможения и электронной концентрации хорошо согласуются с данными, полученными в летном эксперименте, во всем рассмотренном диапазоне высот.

Обращение к полным уравнениям Навье–Стокса в задачах гиперзвукового обтекания связано главным образом с исследованиями отрывных и возвратно-циркулярных течений, т. е. течений, где трудно выделить преимущественное направление потока, хотя и в этом случае, как было отмечено выше,

применение упрощенных уравнений НС может дать удовлетворительные результаты. Применение же уравнений НС для описания гладких течений в задачах обтекания при низких числах Рейнольдса ограничено условием малости чисел Кнудсена $\mathbf{Kn} \approx \mathbf{M}_\infty/\mathbf{Re}_\infty \leqslant 0{,}1$, что приводит при гиперзвуковых скоростях полета ($\mathbf{M}_\infty \geqslant 10$) к надежному описанию течения с помощью полных уравнений НС только при $\mathbf{Re}_\infty > 100$. Но с этого диапазона чисел $\mathbf{Re}_\infty$ удовлетворительные результаты дают и УУНС. Для меньших чисел $\mathbf{Re}_\infty$ при решении задач гиперзвукового обтекания необходимо обращаться к кинетическим моделям (уравнения Больцмана, Крука, прямое статистическое моделирование и др.), т. к. гидродинамическое приближение в этом диапазоне чисел Рейнольдса становится непригодным.

8. Численное решение упрощенных УНС

Как уже отмечалось выше, все системы УУНС имеют эволюционный тип. С другой стороны, кроме модели ТВУС, остальные модели УУНС имеют эллиптический тип в дозвуковых областях течения. Поэтому в случае наличия в потоке дозвуковых областей, а такие области всегда имеются в задачах обтекания сжимаемым газом, необходимо применение каких-либо итерационных методов или метод установления.

Применение метода установления для нахождения стационарного решения такой системы является неэкономичным, т. к. время расчета для нахождения решения близко к требуемым временным затратам в случае решения полной системы уравнений НС.

R. T. Davis [58] первым предложил решать систему уравнений ВУС итерационным методом, так что на каждой итерации оператор при векторе искомых переменных обращается маршевым образом. Такие итерации получили со временем название глобальных. Он предложил проводить глобальные итерации (ГИ) по нормальной составляющей скорости, входящей в уравнение импульсов в проекции на нормаль для нахождения решения уравнений ВУС. Организация ГИ, таким образом, не является оптимальной, т. к. передача возмущений вверх по потоку определяется продольной составляющей градиента давления, что было показано в [60] для задач вязко-невязкого взаимодействия. По этой причине ГИ не сходились в задаче обтекания конуса, а была решена задача обтекания 45°-го гиперболоида, для которой ударный слой был тонким. A. Lin и S. G. Rubin [99] предложили применять ГИ для решения системы ПУНС с итерациями по градиенту давления. В дальнейшем этот подход был развит на случай наличия в потоке возвратно-циркуляционных зон (см., например, [100, 102]). Для исследования течений в каналах впервые метод ГИ был предложен П. А. Войновичем и А. А. Фурсенко [62] в рамках модели ВУС.

Для задач сверх- и гиперзвукового обтекания метод ГИ для решения уравнений ВУС был развит в работе С. А. Васильевского, Г. А. Тирского

и С. В. Утюжникова [63]. При этом положение ударной волны определяется глобальными итерациями в сочетании с итерациями по маршевой составляющей градиента давления. Решение находится на основе единообразного алгоритма вдоль всей поверхности тела, включая область затупления и ПС.

Вне области затупления вниз по потоку положение ударной волны можно определять маршевым образом [64]. В работе [64] был развит также блочно-маршевый метод нахождения решения задачи обтекания длинных тел в сочетании с глобальными итерациями в рамках модели ВУС. При этом итерации по ударной волне осуществляются только там, где это необходимо. В области затупления требуется около 8 ГИ, а далее вниз по потоку — 2 или 3. Такой подход позволяет значительно сократить затраты времени (до 10 раз) и памяти ЭВМ. Этот метод нашел развитие в работе [68], где при переходе к следующей ГИ полученный отход ударной волны и маршевая проекция градиента давления сглаживались с помощью минимизации некоего функционала, что наряду с аппроксимацией маршевого градиента давления разностями вперед реализовывало распространение возмущений вверх по потоку. При этом скорость сходимости итераций не зависела от шага сетки в поперечном направлении и допускала любой мелкий шаг. Результаты расчетов хорошо согласуются с экспериментом как при ламинарном, так и при турбулентном режимах течения в ударном слое в задаче обтекания затупленного конуса.

В случае метода ГИ на каждой итерации решается не вполне параболическая система уравнений. Корректность метода ГИ впервые была исследована для уравнений ВУС в работах [63, 64], а для уравнений ПУНС — С. В. Мелешко и С. Г. Черного [96], В. М. Ковени, Г. А. Тарнавского и С. Г. Черного [103] и А. И. Толстых [104]. Метод простых итераций был развит также для решения ПУНС [103] с предварительным сглаживанием продольного градиента давления.

Корректность задачи Коши для каждой ГИ при наличии больших дозвуковых зон течения в окрестности затупления и в пристеночной области обеспечивалась аппроксимацией производной от давления по маршевой координате по значениям давления в точках вверх по потоку, вычисляемых из предыдущей ГИ, тем самым смешанная задача решается единым алгоритмом. Было показано, что при любом способе сглаживания (минимизация функционала, интерполяция многочленами, метод наименьших квадратов и др.) ГИ сходятся при любых малых шагах по продольной координате и окончательные результаты не зависят способа сглаживания продольного градиента давления.

Используемые в [63, 68, 97] разностные схемы обладают высокими порядками аппроксимации $O(h_x^2,\ h_y^4)$. Как показывают оценки, аппроксимационная вязкость на несколько порядков меньше физической, что позволяет получать тонкую структуру ПС при больших числах Рейнольдса (до $10^8 \div 10^9$) и навье-стоксовскую структуру ударной волны (до $\mathbf{Re} \cong 10^4$). В работе [105] метод ГИ был распространен на решение задачи сверхзвукового обтекания под малыми углами атаки затупленных конусов.

Следует отметить, что при исследовании течений в рамках модели УНС с малыми дозвуковыми зонами по сравнению с характерным размером эффективными могут быть различные приближенные подходы, основанные на регуляризации задачи Коши. В работах [99, 101] дан анализ различных способов регуляризации задачи Коши, связанных либо с заданием нулю части градиента давления в дозвуковой области, либо с его сносом из сверхзвуковой зоны, либо с его экстраполяцией и т. д. Н. Н. Яненко, В. М. Ковеня и С. Г. Черный [100] для регуляризации задачи Коши предложили вводить в уравнения две управляющие функции таким образом, чтобы в сверхзвуковой области их влияние на решение было порядка $O(\mathbf{Re}^{-1/2})$, а в дозвуковой области задача Коши была корректно поставленной.

Таким образом, применение моделей упрощенных УНС позволяет находить решение многих практически важных двумерных задач с хорошей степенью точности в рамках единого алгоритма на ЭВМ средней мощности. Для решения систем уравнений упрощенных УНС эффективными являются итерационно-маршевые подходы, основанные на проведении итераций по составляющей градиента давления на выделенное направление потока (см. гл. 16).

В настоящее время существует обширная литература по численному решению полных уравнений Навье–Стокса применительно к задачам гиперзвукового обтекания реальных конфигураций космических аппаратов [106]. В представленной монографии приведены три численных метода решения уравнений Навье–Стокса применительно к решению пространственных задач обтекания реальных космических аппаратов и зондов (В. И. Сахаров, В. Я. Боровой, И. В. Егоров, А. С. Скуратов, В. И. Власов и А. Б. Горшков, Р. В. Ковалев, В. В. Лунев).

Исследования поддержаны Роснаукой (Гос. контракты 02.740.11.0615 и П594) и Российским фондом фундаментальных исследований (РФФИ) (Грант 11-01-00504 а).

Список литературы

1. *Tcheremissin F. G.* Direct numerical solution of the Boltzmann equation // Proc. 24-th Intern. Symp. an Gas Dynamics. 2004. July 10–16. P. 667–685.
2. *Aristov V. V.* Direct Methods for Solving the Boltzmann Equation and Study of Non-equilibrium Flows. Kluwer academic publishers. Dordrecht/Bosten/London. 2001. 298 p.
3. *Kolobov V. I., Arslanbekov R. R., Aristov V. V.* et al. Unifed Solver for Rarefied and Continuum Flow with Adaptive Mesh and Algorithm Refinement // Journ. of Comp. Phys. 2007. 223. P. 589–608.
4. *Bhatnagar P. L., Gross E. P., Krook M.* A model for collision processes in gases // Phys. Rev. 1954. V. 94, № 3. P. 511–525.

5. *Krook M.* Continuum equation in the dynamics of rarefied gases // J. of Fluid Mechanics. 1959. V. 6. Pt. 4. P. 523–531.

6. *Шахов Е. М.* Метод исследования движений разреженного газа. — М.: Наука. 1974. 208 с.

7. *Nobuyuki Satotuka, Koji Morinishi and Tsutomu Oishi* Numerical solution of the kinetic model equations for hypersonic flows // Computational Mechanics. 1993. V. 11. P. 452–464.

8. *Семенов И. Л.* Продольное обтекание тонкой пластины сверхзвуковым потоком разреженного газа. Отчет Ин-та механики МГУ. 2008. № 4940. 50 с.

9. *Bird G.* Molecular gas dynamics and the direct simulation of gas flows. Clarendon Press. Oxford. 1994. P. 458.

10. *Ivanov M. S. and Gimelshein S. F.* Computational hypersonic rarefied flows // Annu. Rev. Fluid Mech. 1998. V. 30. P. 469–505.

11. *Muntz E. P.* Rarefied Gas Dynamics // Annu. Rev. Fluid Mech. 1989. V. 21. P. 387–417.

12. *Белоцерковский О. М., Яницкий В. Е.* Статистический метод частиц в ячейках I /ЖВМиМФ, 1975. Т. 15, С. 1553–1567.

13. *Бёрд Г.* Молекулярная газовая динамика. — М.: ИИЛ, 1984. 320 с.

14. *Белоцерковский О. М., Хлопков Ю. И.* Методы Монте-Карло в прикладной математике и вычислительной аэродинамике. //ЖВМиМФ, 2006. Т. 46, № 8, с. 1494–1518.

15. *Баранцев Р. Г.* Взаимодействие разреженных газов с обтекаемыми поверхностями. — М.: Наука, ГРФМЛ. 1975. 344с. Сб. ст. Взаимодействие газов с поверхностями. — М.: Мир. 1965. 228с.

16. *Пярнпуу А. А.* Взаимодействие молекул газа с поверхностями. — М.: Наука. 1974. 192 с.

17. *Галкин В. С., Шавалиев М. Ш.* Газодинамические уравнения высших приближений метода Чепмена–Энскога // Изв. РАН. МЖГ. 1998. № 4. С. 3–28.

18. *Бобылев А. В.* О методах Чепмена–Энскога и Грэда решения уравнения Больцмана // Докл. АН СССР. 1982. Т. 262, № 1. С. 71–75.

19. *Zhong X., MacCormack R. W., Chapman D. R.* Stabilization of the Burnett equations and application to hypersonic flows // AIAA J. 1993. V. 31, № 6. P. 1036–1043.

20. *Zhong X., Furumoto G. H.* Augmented Burnett–Equation Solutions over Axisymmetric Blunt Bodies in Hypersonic Flow // J. of Spacecraft and Rockets. 1995. V. 32, № 4. P. 588–595.

21. *Comeaux K. A., Chapman D. R., MacCormack R. W.* An analysis of the Burnett equations based on the second law of thermodynamics // AIAA Paper. 1995. № 95–0415.

22. *Tannehill J. C., Eisler G. R.* Numerical computation of the hypersonic leading edge problem using the Burnett equations // Phys. Fluids. 1976. V. 19, № 1. P. 9–15.

23. *Implay S. T.* Solution of the Burnett equations for hypersonic flows near the continuum limit // AIAA Paper. 1992. № 92–2922. 10 p.

24. *Коган М. Н.* Динамика разреженных газов. — М.: Наука. 1967. с.

25. *Tsien H. S.* Superaerodynamics, mechanics of rarefied gases // J. Aeronaut. Sci. 1946. V. 13, № 12. P. 653–664. (Перевод: Цянь Сюэ-Сэнь. Аэродинамика разреженных газов // В сб. Газовая динамика. — М.: ИЛ. 1950.)

26. *Probstein R. F., Kemp N. H.* Viscous aerodynamic characteristics in hypersonic rarefied gas flow // J. of the Aero/Space Sciences. 1960. V. 27. № 3. P. 174–192. (Перевод: Пробстейн Р., Кемп Н. Вязкие аэродинамические характеристики в гиперзвуковом потоке разреженного газа // Механика. 1961. С. 59–95.)

27. *Ho H. T., Probstein R. F.* The compressible viscous layer in rarefied hypersonic flow // Proc. Second Int. Symposium on Rarefied Gas Dynamics. Ed. By L.Talbot. Academic Press. N.Y. 1961.

28. *Толстых А. И.* Аэродинамические характеристики охлажденного сферического затупления в гиперзвуковом потоке слаборазреженного газа // Изв. АН СССР. МЖГ. 1969, № 6. С. 163–166.

29. *Gupta R. N., Simmonds A.L.* Hypersonic low-density solutions of the Navier –Stockes equations with chemical nonequilibrium and multicomponent surface slip // AIAA Paper. 1986. № 86–1349. 18 p.

30. *Тирский Г. А.* Континуальные модели в задачах гиперзвукового обтекания затупленных тел разреженным газом // ПММ. 1997. Т. 61. Вып. 6. С. 903–930.

31. *Брыкина И. Г., Рогов Б. В., Тирский Г. А.* Континуальные модели разреженных потоков газа в задачах гиперзвуковой аэродинамики // ПММ. 2006. Т. 70. Вып. 6. С. 999–1025.

32. *Седов Л. И., Михайлова М. П., Черный Г. Г.* О влиянии вязкости и теплопроводности на течение газа за сильно искривленной ударной волной // Вестн. МГУ. Сер. физ.-мат. и естествен. наук. 1953. № 3. С. 95–100.

33. *Cheng H. K.* Hypersonic shock-layer theory of the stagnation region at low Reynolds Number // Proc. 1961 Heat Transfer and Fluid Mech. Inst. Stanford, Calif.: Stanford Univ. Press. 1961. P. 161–175.

34. *Cheng H. K.* The blunt body problem in hypersonic flow at low Reynolds number // IAS Paper. 1963. № 63–92. 100 p.

35. *Ван–Дайк М.* Теория сжимаемого пограничного слоя во втором приближении с применением к обтеканию затупленных тел гиперзвуковым потоком // В сб. Исследование гиперзвуковых течений. — М.: Мир. 1964. с. 35–58.

36. *Emanuel G.* Bulk Viscosity of a Dilute Polyatomic Gas // Phys. Fluids A4, 1990. P. 2252–2254.

37. *Emanuel G.* Effect of Bulk Viscosity on a Hypersonic Boundary Layer // Phys. Fluids A4, 1992. P. 491–493.

38. *Maxwell J.мC.* The scientific papers: In V. N4., Dover. 1965. V. 1 607 p., V. 2 608 p.

39. *Kramers H. A., Kistemaker J.* On the slip of a diffusing gas mixture along a wall // Physica. 1943. V. 10, № 8, P. 699–713.

40. *Черчиниани К.* Теория и приложения уравнения Больцмана. — М.: Мир. 1978. 495 с.

41. *Cercigniani C.* Elementary solutions of the liniarized gas-dynamic Boltzmann equations and their application to the slip flow // Ann. Phys. 1962. V. 20, P 219–233.

42. *Kriess J. T., Chang T. S., Stewart C. E.* Elementary solutions of couplet model equations in the kinetic theory of gases // Int. J. Eng. Sci. 1974, V. 12, P. 441–470.

43. *Loyalka S. K.* Approximate method in the kinetic theory // Phys. Fluids, 1971, V. 14, № 5, P. 2291–2294.

44. *Loyalka S. K.* Temperature jump in the gas mixter // Phys. Fluids, 1974, V. 17, № 5, P. 897–899.

45. *Савков С. А., Юшканов А. А., Яламов Ю. И.* Граничные условия скольжения бинарной смеси газов вдоль поверхности малой кривизны // Физическая кинетика и гидродинамика дисперсных систем: сборник/ МОПИ им. Н.К.Крупской. — М.: 1986. с. 57–80. Деп. В ВИНИТИ № 53212–В86.

46. *Чепмен С., Каулинг Т.* Математическая теория неоднородных газов. — М.: ИИЛ, 510 с.

47. *Yalamov Yu.I., Yushkanov A.A.* Theory of thermal slip along the spherical surface of a binary mixtures of gases // Phys. Fluids, 1977, V. 20, № 11, P. 1805–1809.

48. *Тирский Г.А., Кирютин Б.А.* Граничные условия скольжения на каталитической поверхности в многокомпонентном потоке газа //Изв. РАН. МЖГ. 1996 № 1. С. 159–168.

49. *Fannelop T.K. and Flugge-Lotz I.* Viscous Hypersonic Flow over Simple Blant Bodies: Comparision of a Second Order Theory with Experimental Results/ J/ Mechanique, 1962. V. 5, p. 69–78.

50. *Van Dyke M.* Higher Approximations in Boundary –Layer Theory. Part I. General Analysis. J. Fluid Mech. 1963. V. 14, P. 161–177.

51. *Van Dyke M.* Higher-Order Boundary –Layer Effects in Hypersonic Flow Past Axisymmetric Blant Bodies. J. Fluid Mech. 1969. P. 265-292.

52. *Davis R.T., Flugge-Lotz I.* Second-order boundary-layer effects in hypersonic flow past axisymmetric blunt bodies // J. of Flu1d Mech. 1964. V. 20. № 4. P. 593–623.

53. *Ганьжа Д.Х., Тирский Г.А., Утюжников С.В.* и др. О влиянии эффектов второго приближения теории пограничного слоя при гиперзвуковом обтекании притупленных конусов большого удлинения // Изв. РАН. МЖГ. 1992. № 4. С. 129–134.

54. *Tirskiy G.A.* Up–to–date gasdynamic models of hypersonic aerodynamics and heat transfer with real gas properties // 1993 Annu. Rev. Fluid Mech. V. 25. P. 151–181.

55. *Тирский Г.А., Утюжников С.В.* Современные газодинамические модели внешних и внутренних задач сверх– и гиперзвуковой аэродинамики // Моделирование в механике. 1993 Т. 7(24). № 2. С. 5–28.

56. *Gao Zhi* Simplified Navie-Stokes Equations // Scienta Sinica (Serles A) . 1988. V .XXX1 .№ 3. p. 322–339.

57. *Толстых J.И.* О численном расчете сверхзвукового обтекания затупленных тел потоком вязкого газа // ЖВМиМФ. 1966. Т.6. NI. С. II3–120.

58. *Davis R.T.* Numerical so1ution of the hypersonic viscous shock layer equations // AIAA J, 1970. V. 8. №5. P. 843–851.

59. *Ковеня В.М., Яненко Н.Н.* Методы расщепления в задачах газовой динамики. Новосибирск: Наука, 1981. 303 с.

60. *Lighthill H.J.* On boundary layers and upstream influence. II. Supersonic flow without separat1on // Proceed. Roy. Soc. Ac. 1953. V. 21. № 7. P. 478-517.

61. *Васильевский С.А., Тирский Г.А.* О некоторых способах численного решения уравнений вязкого ударного слоя // Аэродинамика гиперзвуковых течений при наличии вдува. — М.: Изд-во МГУ. 1979. С. 87–98.

62. *Войнович П.А., Фурсенко А.А.* Метод глобальных итераций для расчета смешанных течений вязкого газа // Дифференциальные уравнения. I984. Т. 20. № 7. С. 1151–1156.

63. *Васильевский С.А., Тирский Г.А., Утюжников С.В.* Численный метод решения уравнений вязкого ударного слоя // ДАН СССР. 1986. Т. 290. № 5. С. 1058–1062.

64. *Утюжников С.В.* Метод глобальных итераций для решения уравнений вязкого ударного слоя // Математические методы управления и обработки информации. — М.: МФТИ, 1985. С. 141–145.

65. *Головачев Ю.П.* Численное моделирование течений вязкого газа в ударном слое. — М.: Наука, 1996. 376 с.

66. *Ковеня В.М., Черный С.Г.* Маршевый метод решения стационарных упрощенных уравнений Навье–Стокса // ЖВМиМФ. I983. № 5. С. 1186–1198.

67. *Ковалев В. Л., Крупнов А. А., Тирский Г. А.* Метод численного решения задач сверхзвукового обтекания тел в рамках модели полного вязкого ударного слоя. Препринт Ин-та механики МГУ № 4233-92. — М.: Изд-во МГУ, 1992. 67 с.

68. *Рогов Б. В.* Сквозной маршевый метод расчета трансзвуковых вязких течений // Мат. Моделирование. 2004. Т. 16. № 5. С. 3–22.

69. *Rogov B. V., Tirskiy G. A.* The Accelerated Method of Global Iterations for Solving the External and Internal Problems of Aerohydrodynamics // Proc. 4-th Europ. Symp. Aerothermodynamics for Space Applications, 15-18 Oct. 2001. Capua, Italy. ESA SP-487. March 2002. P. 537–544

70. *Cheng B. K.* The Blunt-Body Problem in Hypersonic Flow at Low Reynolds Number // JAS Paper. 1963. № 63-92.

71. *Гершбейн Э. А., . Пейгин С. В. Тирский Г. А.* Сверхзвуковое обтекание тел при малых и умеренных числах Рейнольдса // Итоги науки в техники. ВИНИТИ. Мех. жидкости и газа. 1985. Т. 19. С. 3–85.

72. *Черный Г. Г.* Течения газа с большой сверхзвуковой скоростью. — М.: Изд-во ФМЛ, 1959. 220 с.

73. *Магомедов К.* Гиперзвуковое обтекание тупых тел вязким газом // Изв. АН СССР. Сер. МЖГ. 1970. № 2. С. 45–56.

74. *Bush W. B.* On the Viscous Hypersonic Blunt Body Problem. // J. Fluid Mech. 1964. V. 20. № 3. P. 353–367.

75. *Гершбейн Э. А.* Асимптотическое доследование задачи пространственного гиперзвукового обтекания вязким газом затупленных тел с проницаемой поверхностью // Гиперзвуковые пространственные течения при наличии физ.-хим. превращений. — М.: Изд-во МГУ. 1981. С. 29–51.

76. *Лапин Ю. В., Стрелец М. Х.* Внутренние течения газовых смесей — М.: Наука, 1989. 368 с.

77. *Щербак В. Г.* Численное исследование обтекания термически и химически неравновесным вязким потоком воздуха. // Автореф. дис. на соиск. уч. ст. доктора физ.-мат. наук. — М.: МФТИ, 1992. 350 с.

78. *Бородин А. И., Казаков В. Ю., Пейгин С. В.* Многокомпонентный пространственный вязкий слой на затупленных телах о каталитической поверхностью обтекаемых под углами атаки и скольжения // Изв. АН СССР. МЖГ. 1990. № 1. С. 143–150.

79. *Тирский Г. А., Утюжников С. В.* Сравнение моделей тонкого и полного вязкого ударного слоя в задаче сверхзвукового обтекания притупленных конусов вязким газом // ПММ. 1989. Т. 53. Вып. 6. С. 963–969.

80. *Васильевский С. А., Тирский Г. А.* О некоторых спсобах численного решения. уравнений вязкого ударного слоя // Аэродинамика гиперзвуковых течений при наличии вдува. — М.: Изд-во МГУ, 1979. С. 87–98.

81. *Zhluktov S. V., Utyuzhnikov S. V., Tirskiy G. A.* Numerical Investigation of Thermal and Chemical Non-equilibrium Flows past Slender Blunted Cones // J. of Thermophysics and Heat Transfer. 1996. V. 10. № 1. P. 131–147.

82. *Утюжников С. В.* Численное решение полных уравнений вязкого ударного слоя в задаче гиперзвукового обтекания притупленных тел // Числен. методы механики сплошной среды. Новосибирск. 1986. Т. 17. № 6. С. 125–131.

83. *Головачев Ю. П. , Кузьмин Ф. Д., Попов Ф. Д.* О расчете сверхзвукового обтекания затупленных тел с использованием полных и упрощенных уравнений Навье–Стокса // ЖВМиМФ.1973. Т. 13. № 4. С. 1021–1028.

84. *Белоцерковский О. М., Головачев Ю. П.* и др. Численное исследование современных задач газовой динамики. — М.: Наука. 1974. 399 с.

85. *Паламарчук, И. И., Тирский Г. А., Утюжников С. В.* и др. Исследование турбулентиого гиперзвукового обтекания длинных затупленных конусов // Изв. РАН. МЖГ. 1993. № 5. С. 101–113.

86. *Андриатис А. В.,. Утюжников С. В.* Численное моделирование вязкого теплопроводного газа в ударном слое около затупленных тел большой длины с учетом реальных свойств среды и пространственного переноса излучения // Моделирование в механике. I988. Т. 2(19). № 1. С. 3–10.

87. *Утюжников С. В.* Численное исследование сверхзвукового обтекания затупленных конусов болыпой длины потоком вязкого газа с учетом равновесных физико-химических превращений // Изв. РАН. МЖГ. I990. № 1. С. 202–206.

88. *Тирский Г. А., Жлуктов С. В.* Влияние колебательно-диссоциационного взаимодействия на теплопередачу и сопротивление при гиперзвуковом обтекании тел // Изв. АН СССР. МЖГ. 1990. № 1. С. 158–167.

89. *Головачев Ю. П., Земляков В. В.* нестационарное сверхзвуковое обтекание затупленного тела в тепловых неоднородностях при турбулентном режиме течения в ударном слое // ЖВМиМФ. 1993. Т. 33. № 1. С. 151–154.

90. *Пилюгин Н. Н., Талипов Р. Ф.* Теплообмен на затупленных конусах при сверхзвуковом неравномерном обтекании и наличии вдува с поверхности // ТВТ. I993. Т. 31. Вып. 1. С. 97–I04.

91. *Головачев Ю. П., Попов Ф. Д.* Расчет сверхзвукового обтекания затупленных тел вязким газом при больших числах Рейнольдса // ЖВМиМФ. I972. Т. 12. № 5. С. 1292–1303.

92. *Брыкина И. Г., Рогов Б. В., Тирский Г. А.* Континентальные модели течений разреженного газа в задачах гиперзвуковой аэротермодинамики // ПММ. 2006. Т. 70. Вып. 6. С. 990–1016.

93. *Davis R. T., Rubin S. G.* Non Navier-Stokes Viscous Flow Computation // Comp. and Fluids. 1980. V. 8. № 1. P. 101–131.

94. *Черный С. Г.* О выборе системы координат для численного решения упрощенных уравнений Навье–Стокса маршевым методом // Числ. методы механики сплошной среды. Новосибирск. 1982. Т. 13. № 1. С. 132–146.

95. *Черный С. Г.* Расчеты пространственных течений около тел сложной конфигурации. Препринт № 7-83 Ин-та теор. и прикл. механики. СО АН СССР. Новосибирск: Изд-во СО АН СССР, Ин-т теор. и прикл. механики. 1983.

96. *Мелешко С. В., Черный С. Г.* Исследования вязких сжимаемых течений на основе параболизованых уравненй Навье–Стокса. Препринт № 7-83 Ин-та теор. и прикл. механики. СО АН СССР. Новосибирск: Изд-во СО АН СССР, Ин-т теор. и прикл. механики. 1983.

97. *Жлуктов С. В., Утюжников С. В., Щелин В. С., и др.* Сравнение газодинамических моделей при гиперзвуковом обтекании тел // ПММ. 1992. Т. 56. Вып. 6. С. 202–206.

98. *Власов В. И., Горшков А. Б.* Сравнение результатов расчетов гиперзвукового обтекания затупленных тел с летным экспериментом OREX // Изв. РАН. МЖГ. 2001. № 5. С. 160–168.

99. *Lin T. C., Rubin S. G.* A Numerical Model for Supersonic Viscous Flow over Slender Reentry Vehicle //AIAA Paper. 1979. № 79–205. 10 p.

100. *Ковеня В. М., Черный С. Г., Яненко Н. Н.* Упрощенные уравнения для описания течения вязкого газа // ДАН СССР. 1979. Т. 245. № 6. С. 1322–1324.

101. *Rubin S. G., Reddy D. R.* Analysis of Global Pressure Relaxation for Flows with Strong Interaction and Separation // J. Comp. Fluids. 1983. №4. P. 281–306.

102. *Khosla P. K., Lai H. T.* Global PNS Solution for Subsonic Strong Interaction Flow over a Cone-Cylinder-Boattail Configuration // J. Comp. Fluids. 1983. №4. P. 325–339.

103. *Ковеня В. М., Тарнавский Г. А., Черный С. Г.* Применение метода расщепления в задачах аэродинамики. Новосибирск: Наука, 1990. 246 с.

104. *Толстых А. И.* Компактные разностные схемы и их применение в задачах аэродинамики. — М.: Наука, 1990. 230 с.

105. *Тирский Г. А. Утюжников С. В., Ямалеев Н. К.* Применение метода малого параметра к задаче пространственного обтекания тел потоком вязкого газа // ПММ. 1992. Т. 56, вып. 6. С.1023–1032.

106. *Agarwal R.* Computational Fluid Dynamics of Whole-Body Aircraft // Annu. Rev. Fluid Mech. 1999. V. 31. P. 125–169.

2

ОБОБЩЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЯЗКОГО УДАРНОГО СЛОЯ С УСЛОВИЯМИ СКОЛЬЖЕНИЯ НА ОБТЕКАЕМОЙ ПОВЕРХНОСТИ И ГОЛОВНОЙ УДАРНОЙ ВОЛНЕ

Г. А. Тирский
Московский Физико-технический институт,
Научно-исследовательский институт механики МГУ им. М.В. Ломоносова

Рассматриваются плоская и осесимметричная задачи сверх- и гиперзвукового обтекания затупленного тела вязким теплопроводным совершенным газом. Из уравнений Навье–Стокса (НС) асимптотическим методом при больших числах Рейнольдса выводятся обобщенные уравнения вязкого ударного слоя, учитывающие все эффекты второго порядка теории пограничного слоя, т. е. члены $O(\mathbf{Re}^{-1/2})$, а также удерживаются все внепорядковые члены третьего $O(\mathbf{Re}^{-1})$ и более высокого порядка, за исключением членов со вторыми производными по маршевой координате. Тем самым, только наличие членов со вторыми производными по маршевой координате в уравнениях НС, определяющих эллиптические свойства полной системы уравнений НС, отличает ее от обобщенных уравнений вязкого ударного слоя, в которых эти члены отсутствуют.

С той же степенью точности приводятся условия скольжения и скачка температуры на обтекаемой поверхности, а также выводятся обобщенные условия Ренкина–Гюгонио на головной ударной волне (УВ), учитывающие эффекты вязкости и теплопроводности, в том числе при определении давления. Отмечаются эффективность итерационно-маршевых методов решения обобщенных уравнений вязкого ударного слоя, а также свойство последних давать правильное решение для коэффициентов сопротивления и теплопередачи в переходном режиме обтекания, т. е. при умеренных числах Рейнольдса, если решение строится с учетом скольжения и скачка температуры на обтекаемой поверхности и головной ударной волне.

В 1960–80-х годах было предложено много упрощенных асимптотическими и другими оценочными методами, с использованием свойств конкретной задачи, уравнений НС для решения различных внешних и внутренних задач аэродинамики вязкого теплопроводного газа [1–8]. Расчеты стационарных течений на основе полных уравнений НС методом установления достаточно трудоемки, особенно для течений многокомпонентных химически

реагирующих газов. При больших числах Рейнольдса и большой протяженности области интегрирования (длинные тела) потребности в ресурсах ЭВМ значительно возрастают. Например, для расчетов простого газодинамического стационарного течения методом установления с помощью наиболее эффективных монотонных разностных неявных схем необходимо несколько сотен временны́х итераций [4, 5]. В то же время для безотрывных вязких течений необходимость использования полных уравнений НС возникает только при умеренных и малых числах Рейнольдса. Однако в этом случае, даже с появлением отрывных течений, во многих практически важных случаях описание такого течения с достаточной точностью возможно и в рамках более простых математических моделей, требующих существенно меньших вычислительных затрат. Поэтому, наряду с использованием полной системы уравнений НС для расчета стационарных течений в соплах, каналах и в задачах внешнего обтекания, широко применяются упрощенные уравнения НС, позволяющие использовать для их численного решения эффективные эволюционно-маршевые по пространству методы [9–12].

Для внешних течений существует, по-видимому, не менее десяти таких моделей [13]. Упрощенные уравнения получаются из уравнений НС опусканием, главным образом, членов с вязкостью и теплопроводностью разного порядка по малому параметру $\mathbf{Re}^{-1/2}$. При выводе уравнений пограничного слоя опускаются все малые члены, остаются только члены O(1).

Однако общая отличительная особенность упрощенных уравнений — отсутствие в членах с вязкостью и теплопроводностью вторых производных от компонент вектора скорости и температуры (энтальпии) вдоль маршевой координаты, отсчитываемой в преимущественном направлении течения газа, и удержание в них всех членов системы уравнений Эйлера за исключением приближения тонкого вязкого ударного слоя (ТВУС), в уравнениях которого используется приближение тонкости ударного слоя (УС) и, как следствие, опускание членов с нормальной составляющей вектора скорости в инерционных членах.

Вследствие этого появляется возможность получения численного решения стационарных задач эффективными итерационно-маршевыми методами, что особенно важно при расчете течений с учетом реальных физико-химических процессов, протекающих в ударном слое и на обтекаемой поверхности [6, 14, 15].

Для задач внешнего обтекания наиболее известны модели тонкого вязкого ударного слоя [1], полного вязкого ударного слоя [16, 17], параболизованные уравнения Навье–Стокса [3], параболо-гиперболическая модель вязкого ударного слоя [8, 12] и др.

В настоящей главе, наряду с известными упрощенными уравнениями НС, выводятся новые, более содержательные упрощенные уравнения НС. При числе Рейнольдса $\mathbf{Re} \to \infty$ удерживаются члены O(1), $O(\mathbf{Re}^{-1/2})$ и те члены третьего порядка малости $O(\mathbf{Re}^{-1})$, которые не повышают порядок

производных вдоль маршевой координаты до двух. Этим исключается появление эллиптических свойств в упрощенной системе уравнений за счет учета эффектов вязкости и теплопроводности, которые присущи полным уравнениям НС. Однако в упрощенных уравнениях НС эллиптические свойства проявляются за счет члена с продольной (маршевой) компонентой градиента давления в дозвуковых областях течения, что приводит к необходимости применения каких-либо итерационных методов глобальных итераций [9, 10]. Наиболее эффективный из них — метод [11, 12], основанный на специальном расщеплении маршевой составляющей градиента давления на гиперболическую и эллиптическую составляющие. Число требуемых итераций по эллиптической составляющей сводится к одной — двум, что и составляет общее число глобальных итераций.

Этот метод также применим и для решения обобщенных уравнений вязкого ударного слоя, полученных в настоящей главе. Кроме того, последние результаты показали [18, 19], что учет эффектов скольжения и скачка температуры на обтекаемой поверхности и головной ударной волне, т. е. эффектов разреженности, существенно расширяет применимость упрощенных уравнений НС для решения задач высотной аэротермодинамики в область переходного режима обтекания и выводятся также и точные обобщенные соотношения Ренкина–Гюгонио, которые в литературе получены и используются или в приближенной формулировке [2, 5, 20], или с ошибками [17].

1. Двумерные уравнения Навье–Стокса в естественной системе координат, связанной с обтекаемой поверхностью

Рассмотрим двумерные задачи о стационарном сверхзвуковом ламинарном обтекании затупленного осесимметричного или затупленного плоского тела вязким теплопроводным совершенным газом без учета реальных физико-химических процессов, протекающих при больших скоростях в ударном слое и на обтекаемой поверхности, учет которых не изменяет математическую природу задачи, но существенно усложняет ее численную реализацию. Имея в виду распространение модели на умеренные и малые числа Рейнольдса, сформулируем также граничные условия скольжения и скачка температуры на обтекаемой поверхности и на головной ударной волне (обобщенные условия Ренкина–Гюгонио при умеренных и малых числах Рейнольдса).

В задачах обтекания затупленных тел с гладкой поверхностью удобно пользоваться связанной с поверхностью тела ортогональной криволинейной системой координат [7]. Предполагая контур плоского или осесимметричного тела достаточно гладким (в каждой точке плоского контура можно провести только одну определенную касательную плоскость или нормаль к контуру с возможным разрывом кривизны контура), будем рассматривать обтекание его поступательным стационарным сверхзвуковым потоком газа со скоростью V_∞, направленным вдоль оси симметрии тела $0z$ (рис. 2.1), в ортогональной

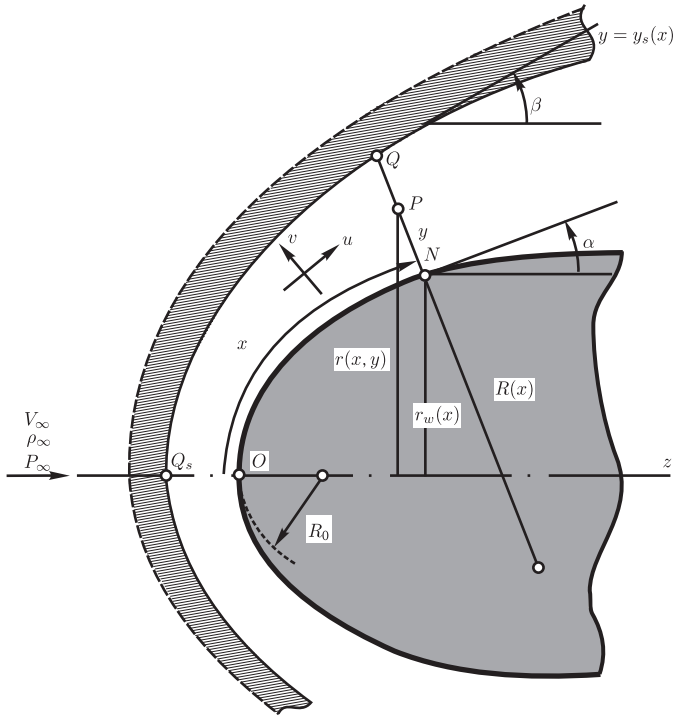


Рис. 2.1.

криволинейной системе координат, связанной с его поверхностью. В этой системе координат положение точки P в потоке около тела определяется ее расстоянием $yR_0 = PN$, отсчитываемым от поверхности тела в точке N вдоль внешней нормали к контуру, и длиной дуги $xR_0 = ON$ вдоль контура, отсчитываемой от его вершины 0 до основания N нормали. Здесь $R_0 = R(0)$ — радиус кривизны тела в его вершине, x и y — безразмерные, отнесенные к R_0 координаты вдоль и по нормали к контуру. Третья координата φ будет определять положение меридиональной плоскости, проходящей через ось $0z$.

Основную систему уравнений движения газа запишем в безразмерном виде, вводя вместо размерных (обозначаемых штрихами) величин безразмерные (без штриха) параметры потока и физические свойства газа по формулам:

$$\rho' = \rho_\infty \rho, \quad p' = \rho_\infty V_\infty^2 p, \quad v_x' = V_\infty v_x, \quad v_y' = V_\infty v_y, \quad \mu' = \mu\mu_0, \quad \zeta' = \zeta\mu_0.$$

Здесь ρ, p, v_x, v_y, μ, ζ — безразмерные величины: плотность, давление, компоненты вектора скорости, коэффициенты сдвиговой и объемной вязкости, μ_0 — характерное значение коэффициента вязкости, например коэффициент вязкости при температуре адиабатически заторможенного потока идеального газа T_0 или другое подходящее характерное его значение, например коэффициент вязкости в набегающем потоке μ_∞. Все величины с размерностью длины будем относить к радиусу кривизны тела в его вер-

шине R_0:

$$x' = R_0 x, \quad y' = R_0 y, \quad r'_w = R_0 r_w, \quad r' = R_0 r, \quad R' = R_0 R,$$

где r'_w — расстояние от точки контура до оси симметрии тела $0z$, r' — расстояние от точки в потоке до оси симметрии тела $0z$, R — переменный радиус кривизны контура тела. Далее физические компоненты тензора вязких напряжений τ'_{ij} образмерим согласно их размерности следующим образом:

$$\tau'_{ij} = \frac{\mu_0 V_\infty}{R_0} \tau_{ij}, \qquad i, j = x, y, \varphi,$$

где τ_{ij} — безразмерные величины.

В выбранной системе координат уравнения НС, записанные в приведенных выше безразмерных величинах для плоских ($\nu = 0$) и осесимметричных ($\nu = 1$) задач, запишутся в следующем виде [7]:

— уравнение неразрывности

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(r^\nu \rho v_x\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(H_1 r^\nu \rho v_y\right) = 0, \tag{2.1}$$

— уравнение количества движения в проекции на ось x

$$\rho\left(\mathcal{D}\, v_x + \frac{v_x v_y}{R H_1}\right) = -\frac{1}{H_1}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\mathbf{Re}}\left(\nabla \cdot \widehat{\boldsymbol{\tau}}\right)_x, \tag{2.2}$$

— уравнение количества движения в проекции на ось y

$$\rho\left(\mathcal{D}\, v_y - \frac{v_x^2}{R H_1}\right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\mathbf{Re}}\left(\nabla \cdot \widehat{\tau}\right)_y, \tag{2.3}$$

где

$$\mathcal{D} = \frac{v_x}{H_1}\frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y}, \quad \mathbf{Re} = \frac{\rho_\infty V_\infty R_0}{\mu_0}.$$

Уравнение баланса энергии, записанное через безразмерную (отнесенную к V_∞^2) полную энтальпию $H = h + \frac{1}{2}\left(v_x^2 + v_y^2\right)$, будет

$$\rho \mathcal{D}\, H + \frac{1}{\mathbf{Re}}\left(\nabla \cdot \mathbf{J},\right) = 0, \tag{2.4}$$

где $H' = V_\infty^2 H$ и $h' = V_\infty^2 h$ соответственно полная и термодинамическая (размерные) энтальпии, H и h — безразмерные величины.

Уравнение состояния для совершенного газа

$$p = \frac{\rho\, R_A T}{V_\infty^2}, \tag{2.5}$$

где R_A — удельная (отнесенная к молекулярной массе) абсолютная газовая постоянная, $m R_A$ — абсолютная газовая постоянная, m — средняя молекулярная масса газа, T' — размерная абсолютная температура.

В силу рассматриваемой симметрии осесимметричной задачи $v'_\varphi = 0$, $\partial/\partial\varphi \equiv 0$. Далее:

$$H_1 = H_x = 1 + y R^{-1}(x), \quad H_2 = H_y = 1, \quad H_3 = H_\varphi = r^\nu = \left[r_w(x) + y\cos\alpha(x)\right]^\nu,$$

где H_1, H_2, H_3 — коэффициенты (параметры) Ламе используемой метрики, $\alpha(x)$ — угол между касательной к контуру обтекаемого тела и осью симметрии тела $0z$ (рис. 2.1). Функции, характеризующие геометрию тела $r_w(x)$, $\alpha(x)$, $R(x)$, для выпуклого тела с возможными разрывами кривизны его контура связаны очевидными геометрическими соотношениями:

$$r_w(x) = \int\limits_0^x \sin\alpha(t)\,dt = \int\limits_{\alpha(x)}^{\pi/2} R(t)\sin t\,dt, \quad \frac{dr_w}{dx} = \sin\alpha(x), \quad \frac{dr_w}{d\alpha} = -R(x)\sin\alpha(x),$$

$$-\frac{d\alpha}{dx} = \frac{1}{R(x)}, \quad \frac{\partial r}{\partial x} = H_1\sin\alpha(x), \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \cos\alpha(x). \tag{2.6}$$

Далее в этих функциях аргумент x будем опускать.

Безразмерные физические составляющие дивергенции тензора вязких напряжений $\widehat{\boldsymbol{\tau}}$ по осям x и y можно представить каждый в двух видах:

$$\begin{aligned}
(\nabla\cdot\widehat{\boldsymbol{\tau}})_x &= \frac{1}{H_1 r^\nu}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(r^\nu\tau_{xx}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(H_1 r^\nu\tau_{xy}\right)\right] + \frac{\tau_{xy}}{RH_1} - \frac{\nu\sin\alpha}{r}\tau_{\varphi\varphi} = \\
&= \frac{1}{H_1}\frac{\partial}{\partial x}\tau_{xx} + \frac{1}{H_1^2 r^\nu}\frac{\partial}{\partial y}\left(H_1^2 r^\nu\tau_{xy}\right) + \frac{\nu\sin\alpha}{r}\left(\tau_{xx} - \tau_{\varphi\varphi}\right), \\
(\nabla\cdot\widehat{\boldsymbol{\tau}})_y &= \frac{1}{H_1 r^\nu}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(r^\nu\tau_{xy}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(H_1 r^\nu\tau_{yy}\right)\right] - \frac{\tau_{xx}}{RH_1} - \frac{\nu\cos\alpha}{r}\tau_{\varphi\varphi} = \\
&= \frac{1}{H_1}\frac{\partial}{\partial x}\tau_{xy} + \frac{\partial}{\partial y}\tau_{yy} + \frac{\nu\sin\alpha}{r}\tau_{xy} + \frac{1}{RH_1}\left(\tau_{yy} - \tau_{xx}\right) + \\
&+ \frac{\nu\cos\alpha}{r}\left(\tau_{yy} - \tau_{\varphi\varphi}\right).
\end{aligned} \tag{2.7}$$

При этом физические безразмерные (размерные отнесены к $\mu_0 V_\infty/R_0$) компоненты тензора вязких напряжений $\tau_{ij}\,(i,j = x,y,\varphi)$ в рассматриваемой ортогональной криволинейной системе координат для плоской и осесимметричной задач имеют следующий вид (обобщенный закон Ньютона):

$$\begin{gathered}
\tau_{xx} = \left(\zeta - \frac{2}{3}\mu\right)\nabla\cdot\mathbf{v} + 2\,\mu e_{xx}, \quad \tau_{yy} = \left(\zeta - \frac{2}{3}\mu\right)\nabla\cdot\mathbf{v} + 2\mu e_{yy}, \\
\tau_{\varphi\varphi} = \left(\zeta - \frac{2}{3}\mu\right)\nabla\cdot\mathbf{v} + 2\mu e_{\varphi\varphi}, \\
\tau_{xy} = 2\,\mu e_{xy}, \qquad \tau_{y\varphi} = 0, \qquad \tau_{\varphi x} = 0,
\end{gathered} \tag{2.8}$$

где физические безразмерные (размерные отнесены к V_∞/R_0) составляющие тензора скоростей деформации e_{ij} $(i,j = x,y,\varphi)$ имеют вид:

$$\begin{gathered}
e_{xx} = \frac{1}{H_1}\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{v_y}{RH_1}, \quad e_{yy} = \frac{\partial v_y}{\partial y}, \quad e_{\varphi\varphi} = \frac{\nu}{r}(v_x\sin\alpha + v_y\cos\alpha), \\
2e_{xy} = \frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{v_x}{RH_1} + \frac{1}{H_1}\frac{\partial v_y}{\partial x}, \quad e_{y\varphi} = 0, e_{\varphi x} = 0,
\end{gathered} \tag{2.9}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{v}=\frac{1}{H_1 r^\nu}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(r^\nu v_x\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(H_1 r^\nu v_y\right)\right]=e_{xx}+e_{yy}+e_{\varphi\varphi},$$
$$\nabla\cdot\mathbf{J}=\frac{1}{H_1\, r^\nu}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(r^\nu J_x\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(H_1\, r^\nu J_y\right)\right]= \tag{2.10}$$
$$=\frac{1}{H_1\, r^\nu}\frac{\partial}{\partial y}\left(H_1\, r^\nu J_y\right)+\frac{\nu\,\sin\alpha}{r}J_x+\frac{1}{H_1}\frac{\partial}{\partial x}J_x\,.$$

Безразмерный вектор плотности потока полной энергии $\mathbf{J}$ в уравнении энергии (2.4), записанный через безразмерные (отнесенные к V_∞^2) энтальпии h и H, имеет следующее выражение ($\mathbf{J}'$ — размерное выражение для этого потока):

$$\mathbf{J}=\frac{R_0}{\mu_0\, V_\infty^2}\mathbf{J}'=-\frac{\lambda'}{\mu_0\, V_\infty^2}\nabla T'-\widehat{\boldsymbol{\tau}}\cdot\mathbf{v}=-\frac{\mu\, c_p'}{\sigma V_\infty^2}\nabla T'-\widehat{\boldsymbol{\tau}}\cdot\mathbf{v}=$$
$$=-\frac{\mu}{\sigma}\nabla h-\widehat{\boldsymbol{\tau}}\cdot\mathbf{v}=-\frac{\mu}{\sigma}\left[\nabla H+\frac{\sigma}{\mu}\widehat{\boldsymbol{\tau}}\cdot\mathbf{v}-\nabla\frac{v_x^2+v_y^2}{2}\right], \tag{2.11}$$

где

$$\widehat{\boldsymbol{\tau}}\cdot\mathbf{v}=\left(\tau_{xx}\, v_x+\tau_{xy}v_y\right)\mathbf{e}_1+\left(\tau_{xy}v_x+\tau_{yy}v_y\right)\mathbf{e}_2,\quad \sigma=\frac{\mu' c_p'}{\lambda'}=\frac{\mu\mu_0 c_p'}{\lambda'},$$

λ' — размерный коэффициент теплопроводности, c_p' — размерная удельная (на единицу массы) теплоемкость газа при постоянном давлении, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ — единичные векторы (орты) вдоль координатных осей x и y.

Градиенты функций T, h и H имеют вид:

$$\nabla f=\frac{1}{H_1}\frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{e}_1+\frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{e}_2,\quad f=\{T',h,H\}\,.$$

При задании зависимостей коэффициентов ζ, μ, λ' и c_p' от температуры система уравнений НС (2.1) — (2.5) при учете соотношений переноса (определяющих уравнений) (2.8), (2.11) представляет собой замкнутую систему пяти уравнений для определения пяти функций: v_x, v_y, ρ, p, H (или T'). Так как глава 2 посвящена установлению газодинамических моделей сверх- и гиперзвукового обтекания затупленных тел в различных диапазонах чисел Рейнольдса (Кнудсена), то здесь не будем учитывать физико-химические процессы, протекающие в потоке и на самой поверхности обтекаемого тела, неизбежно сопутствующие задачам обтекания тел с большими сверхзвуковыми скоростями. Их учет в настоящее время хорошо разработан, не вызывает принципиальных затруднений [6, 15, 16], см. гл. 5, и не будет менять основные выводы, касающиеся установления газодинамических моделей при разных предельных значениях основных определяющих параметров задачи: чисел Маха, Рейнольдса набегающего потока, температурного фактора и др. Конечно же, учет физико-химических процессов будет менять количественные результаты, не меняя газодинамические модели, вид и свойства которых зависят от способа упрощения только основных уравнений (2.2)–(2.4) и уравнений конвективной диффузии с учетом химических реакций и реак-

ций ионизации, которые добавляются к этим уравнениям, если учитываются диффузия, химические реакции и реакции ионизации [15].

Из второго вида представления членов с вязкостью (2.7) сразу следует важный вывод — без учета первых членов во вторых выражениях (2.7), которые как раз и доставляют вторые производные по продольной координате x «эллиптические члены» в уравнениях НС и второго члена во втором выражении $(\nabla \cdot \widehat{\boldsymbol{\tau}})_y$, который выпадает в модели ВУС, члены с вязкостью не будут содержать коэффициент объемной вязкости.

Действительно, нормальные составляющие вязких напряжений на площадках координатных поверхностей $x = \text{const}$, $y = \text{const}$, $\varphi = \text{const}$ суть величины τ_{xx}, τ_{yy}, $\tau_{\varphi\varphi}$, содержащие коэффициент объемной вязкости ζ, входят в члены с вязкостью в виде разностей и поэтому слагаемые, содержащие этот коэффициент (см. (2.8)), взаимно уничтожаются. Таким образом, члены с объемным коэффициентом вязкости относятся к эффектам третьего порядка, имеющим порядок $\mathrm{O}(\mathbf{Re}^{-1})$ и этот коэффициент будет входить в первый член $(\nabla \cdot \widehat{\boldsymbol{\tau}})_x$ и второй член $(\nabla \cdot \widehat{\boldsymbol{\tau}})_y$ (2.7), которые как раз и опускаются при выводе обобщенных уравнений ВУС (см. п. 10).

2. Граничные условия

Объекты (космические аппараты, планетные зонды, метеороиды и др.) при движении сквозь атмосферу Земли или планет Солнечной системы испытывают последовательное прохождение различных режимов обтекания от свободномолекулярного, далее переходного и затем континуального. Здесь ограничимся рассмотрением последних двух режимов, когда, как будет показано далее, можно применять модели сплошной среды. В свободномолекулярном режиме обтекания уравнение Больцмана имеет точное решение в виде равновесной функции распределения Максвелла, и определение сопротивления и теплопередачи сводится тогда к квадратурам при известных граничных условиях для функции распределения. Это, пожалуй, единственное точное решение целого раздела механики газов.

При достаточно больших числах Рейнольдса граничные условия для скорости, при условии нормального к обтекаемой поверхности заданного (вынужденного) вдува или отсоса газа, по своим физическим свойствам совпадающим со свойствами газа набегающего потока, в рамках данной постановки задачи, не учитывающей физико-химические процессы в газе и на обтекаемом теле, будут такими:

$$v'_x(x,\,0) = 0, (\rho_\infty \rho v'_y)_w = q\,(x)\,, \tag{2.12}$$

где $q(x)$ — заданный в рассматриваемой постановке задачи распределенный по поверхности массовый удельный (отнесенный к единице площади) расход газа за единицу времени. В случае обтекания уносимого в газовой фазе

теплозащитного покрытия расход $q(x)$ будет определяться из решения задачи (см. далее).

На поверхности тела задается температура

$$T(x,\,0) = T_w(x), \tag{2.13}$$

или условие баланса энергии для определения равновесно радиационной температуры обтекаемой поверхности, которое при отсутствии касательной составляющей скорости на поверхности, т. е. при $v_x\,(x,0) = 0$ (условие прилипания), будет

$$\left[\frac{\mu}{\sigma}\left(\frac{\partial H}{\partial y} - v_y\frac{\partial v_y}{\partial y}\right) + v_y\tau_{yy}\right]_{y=0} = \frac{R_0\,\varepsilon}{\mu_0\,V_\infty^2}\sigma_B T_w'^4(x). \tag{2.14}$$

Здесь: ε — степень черноты поверхности тела, σ_B — постоянная Стефана–Больцмана, $T_w'(x)$ — заданная (условие (2.13)) или искомая (условие (2.14)) температура поверхности тела. Условие (2.14) записано в предположении, что тепловой поток внутрь тела пренебрежимо мал по сравнению с излучением с поверхности. Это условие выполняется с хорошей точностью при теплообмене газа с поверхностью при больших скоростях движения тел в атмосфере. Кроме того, при формулировке граничных условий (2.12)–(2.14) предполагалось отсутствие скачка касательной составляющей скорости и температуры газа на поверхности, что выполняется при достаточно больших числах Рейнольдса.

Выпишем теперь соотношение баланса тепла, обобщающее условие (2.14) на случай уноса массы в газообразном виде без образования жидкой пленки (или в пренебрежении ее наличия), т. е. для процесса сублимации. Оно имеет вид [21]:

$$\left[\frac{\mu}{\sigma}\left(\frac{\partial H}{\partial y} - v_y\frac{\partial v_y}{\partial y}\right) + v_y\tau_{yy}\right]_w - \frac{R_0\,\varepsilon\sigma_B}{\mu_0 V_\infty^2}T_w'^4(x) = \frac{R_0}{\mu_0\,V_\infty^2}\left(\rho_\infty\rho v_y'\right)_w H_\text{ф}, \tag{2.15}$$

где $H_\text{ф} = \Delta + h_w - h_{-\infty}$, T_w' — размерная температура.

Здесь Δ — удельная теплота фазового перехода испаряющегося материала поверхности, $h_w - h_{-\infty}$ — перепад энтальпии материала тела от температуры фазового перехода до начальной температуры тела. Однако условие (2.15) не замыкает задачу, так как в него входит неизвестная температура испаряющейся поверхности T_w'. Ее необходимо связать с парциальным давлением паров и использовать кривую упругости пара [21] и добавлять уравнение конвективной диффузии для пара. Записанные выше граничные условия определяют решение в области теплонапряженного участка траектории спуска КА или для достаточно крупных метеороидов, максимальный унос массы с которых происходит в режиме континуального обтекания. При приближении к переходному режиму обтекания, т. е. при уменьшении числа Рейнольдса (увеличении числа Кнудсена), начинают появляться существенно неравновесные по поступательным степеням свободы области течения — эффект разреженного

режима течения. Это, прежде всего, появление непосредственно около обтекаемой поверхности термодинамически неравновесного слоя Кнудсена и довольно толстой неравновесной структуры головной ударной волны. Течение в этих областях описывается кинетическими уравнениями, решение которых должно сопрягаться с решением континуальных уравнений (с решением уравнений НС или с их асимптотически упрощенными вариантами). Решение того или иного кинетического уравнения в слое Кнудсена и сопряжение его с решением уравнений НС дают условия скольжения и скачка температуры на внешней границе слоя Кнудсена, которая сносится на стенку, и имеют в простейшем варианте вид [22, 23]:

$$\begin{aligned} v_x(x,0) &= \frac{2-\theta}{\theta}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{\mu}{Re\sqrt{p\rho}}\,\frac{\partial v_x}{\partial y}\bigg|_{y=0}, \\ T(x,0) &= T_w + \frac{2-\alpha}{\alpha\sigma}\,\frac{2\gamma}{\gamma+1}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{\mu}{\mathbf{Re}\sqrt{p\rho}}\,\frac{\partial T}{\partial y}\bigg|_{y=0}, \end{aligned} \tag{2.16}$$

где θ — коэффициент диффузионного отражения тангенциального импульса, α — коэффициент аккомодации энергии.

При появлении скольжения и скачка температуры безразмерные касательные напряжения трения на поверхности (2.8), (2.9) и безразмерный тепловой поток (2.11) должны находиться из выражений (при учете вдува с поверхности, т. е. при $v_y(x,0) \neq 0$):

$$\begin{aligned} &\tau_{xy}(x,0) = 2\mu_w e_{xy}(x,0) = \mu_w\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{v_x}{R} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right)_w, \\ &J_{yw} = \frac{R_0}{\mu_0 V_\infty^2}J'_{yw} = \frac{\mu_w}{\sigma_w}\left[\frac{\partial H}{\partial y} - v_x\frac{\partial v_x}{\partial y} - v_y\frac{\partial v_y}{\partial y}\right]_w + (\tau_{xy}v_x + \tau_{yy}v_y)_w, \end{aligned}$$

и эти выражения должны заменить в условиях (2.16) справа производные $\partial v_x/\partial y$ и $\partial T/\partial y$ на стенке.

При сверхзвуковом обтекании в набегающем потоке на бесконечности при решении уравнений НС должны быть заданы вектор скорости набегающего потока и функции p, ρ и H (или T), согласованные с уравнением состояния (2.5):

$$\begin{aligned} &v_x[x, y_s(x)] = v_{x\infty} = \cos\alpha, \qquad v_y\,[x, y_s\,(x)] = v_{y\infty} = \sin\alpha, \\ &\rho[x, y_s(x)] = 1, \qquad p[x, y_s(x)] = \frac{1}{\gamma M_\infty^2}, \qquad \gamma = \frac{c'_p}{c'_v}, \\ &H[x, y_s(x)] = H_\infty = h_\infty + (v_{x\infty}^2 + v_{y\infty}^2)\cdot\frac{1}{2}(\text{или} \quad T[x, y_s(x)] = T_\infty). \end{aligned} \tag{2.17}$$

Здесь: $y = y_s(x)$ — условная заданная граница, расположенная достаточно далеко перед телом, на которой задаются параметры невозмущенного набегающего потока, c'_v– удельная теплоемкость при постоянном объеме, которая, так же как и c'_p, будет считаться постоянной величиной, равной $c_v = c_{v\infty}$, γ — показатель адиабаты (в набегающем потоке $\gamma = \gamma_\infty$).

При сверхзвуковом обтекании при достаточно больших числах Рейнольдса $\mathbf{Re}$, когда толщиной (пропорциональной $\mathbf{Re}^{-1}$) и, тем самым, структурой головной ударной волны (УВ) можно пренебречь, граничные условия на бесконечности в набегающем потоке удобно заменить, чтобы численно не переходить через тонкую навье-стоксовскую структуру УВ с большими градиентами, соответствующими условиям на искомой УВ. При $\mathbf{Re} \to \infty$ это будут обычные условия Ренкина–Гюгонио на сильном разрыве, которые будут давать при заданных параметрах в набегающем потоке однопараметрическое семейство решений для $v_x[x, y_s(x)]$, $v_y[x, y_s(x)]$, $p[x, y_s(x)]$, $\rho[x, y_s(x)]$ и $H[x, y_s(x)]$ (или $T[x, y_s(x)]$) непосредственно за УВ, зависящее от угла наклона (параметра) УВ $\beta(x)$. Угол $\beta(x)$ и отход $y = y_s\ (x)$ связаны очевидным геометрическим соотношением (см. рис. 2.1):

$$\frac{dy_s}{dx} = H_{1s} tg\beta_s, \quad H_{1s} = 1 + \frac{y_s(x)}{R(x)}, \quad \beta_s = \beta - \alpha, \tag{2.18}$$

где $\beta_s(x)$ — угол наклона касательной к УВ по отношению к касательной к координатной линии x.

Уравнение (2.18) связывает две неизвестные величины: $\beta_s(x)$ и $y = y_s(x)$. Поэтому при постановке задачи сверхзвукового обтекания в рамках полных уравнений НС (2.1)–(2.5), имеющей седьмой порядок по производным по координате y, с четырьмя граничными условиями для v_x, v_y, p, H (или T) на искомой УВ (см. (2.17)) и тремя условиями на теле для v_x, v_y и T не будет хватать одного условия для определения отхода УВ $y = y_s(x)$.

Тем не менее, при такой постановке задачи (решение полных уравнений НС с границей на искомой УВ вместо задания граничных условий в набегающем потоке достаточно далеко от тела) в некоторых работах ставят дополнительное (не вытекающее из механической постановки задачи) условие на стенке $\partial p/\partial y(x, 0) = 0$ или замыкают такую постановку задачи на разностном уровне, что делается разными авторами по-разному [5], тем самым порождая неединственность решения. Чтобы избежать этой искусственной неединственности, остается альтернатива: или решать задачу, не выделяя УВ, тогда она получается при сквозном расчете при соответствующем методе прохождения структуры УВ, что весьма не просто при больших числах Рейнольдса, или понизить порядок системы уравнений НС по переменной y на единицу с постановкой тогда граничных условий на искомой УВ. Последняя процедура автоматически реализуется асимптотически в двухслойной модели (собственно ударный слой и структура УВ) для задачи обтекания как при больших, так и умеренных числах $\mathbf{Re}$. Важно отметить, что в получающейся при этом модели ВУС выпадают как раз внепорядковые члены, содержащие вторые производные по нормальной координате y, пропорциональные $\mathbf{Re}^{-1}$.

При уменьшении числа Рейнольдса толщина навье-стоксовской структуры УВ, имеющая величину порядка числа Кнудсена, будет возрастать и классические соотношения Ренкина–Гюгонио, справедливые при достаточно

больших числах Рейнольдса, т. е. для идеального газа, должны быть обобщены на случай учета вязкости и теплопроводности. Эти динамические условия, выражающие законы сохранения массы, импульса и энергии при переходе через скачок, можно получить интегрированием через УВ уравнений (2.1)–(2.4), записанных в интегральном виде по нормальной к поверхности разрыва координате [24] с сохранением членов с вязкостью и теплопроводностью на обращенной к телу стороне и опусканием этих членов со стороны набегающего потока в силу их малости и низкой плотности перед УВ. В результате получаем [24]:

$$\left.\begin{aligned}
&[\rho v_n] = 0, \quad [\rho v_n \mathbf{v} - \mathbf{p}_n] = 0, \quad \mathbf{p}_n = -p\mathbf{n} + \frac{1}{\mathbf{Re}}\widehat{\boldsymbol{\tau}} \cdot \mathbf{n}, \\
&\left[\rho v_n H + \frac{1}{\mathbf{Re}}\mathbf{J} \cdot \mathbf{n}\right] = 0, \\
&\mathbf{J} \cdot \mathbf{n} = \frac{R_0}{\mu_0 V_\infty^2}\mathbf{J}' \cdot \mathbf{n} = -\frac{\mu}{\sigma}\left[\frac{\partial H}{\partial n} + \frac{\sigma}{\mu}\left(\widehat{\boldsymbol{\tau}} \cdot \mathbf{v}\right)_n - \frac{\partial}{\partial n}\frac{v_x^2 + v_y^2}{2}\right].
\end{aligned}\right\} \tag{2.19}$$

Здесь, как обычно, квадратные скобки обозначают разность величин по обе стороны разрыва, $[f] = f_\infty - f_s$, $V_\infty v_n$ — проекция скорости на нормаль к УВ, $V_\infty \mathbf{v}$ — вектор скорости, $\mathbf{n}$ — орт нормали к кривой $y = y_s(x)$, направленный в сторону набегающего потока.

При детальной записи соотношений (2.19) пренебрежем эффектами вязкости и теплопроводности со стороны набегающего потока в силу малости составляющих проекций градиентов параметров вдоль касательной к УВ по сравнению с нормальными составляющими. Это достигается отодвиганием внешней границы контура интегрирования при получении соотношений (2.19). Кроме того, толщина зарождающейся при малых числах Рейнольдса УВ много меньше ее радиуса кривизны [25].

Учитывая вышесказанное, из (2.19) получаем:

$$v_{n\infty} = \rho_s v_{ns}, \tag{2.20}$$

$$v_{n\infty}\mathbf{v}_\infty + \frac{\mathbf{n}}{\gamma M_\infty^2} = \rho_s v_{ns}\mathbf{v}_s + p_s\mathbf{n} - \frac{1}{\mathbf{Re}}(\widehat{\boldsymbol{\tau}} \cdot \mathbf{n})_s, \tag{2.21}$$

$$v_{n\infty}H_\infty = \rho_s v_{ns}H_s - \frac{\mu_s}{\sigma_s \mathbf{Re}}\left[\frac{\partial H}{\partial n} + \frac{\sigma}{\mu}\left(\widehat{\boldsymbol{\tau}} \cdot \mathbf{v}\right)_n - \frac{\partial}{\partial n}\frac{v_x^2 + v_y^2}{2}\right]_s. \tag{2.22}$$

Соотношения (2.20)–(2.22) вместе с (2.5) дают пять уравнений для определения пяти величин на УВ: v_{xs}, v_{ys}, p_s, ρ_s, H_s (или T_s), зависящих от угла наклона УВ $\beta_s = \beta - \alpha$ и тензора вязких напряжений $\widehat{\boldsymbol{\tau}}$ непосредственно за УВ.

Из условия (2.20) и векторного соотношения (2.21), взятого в проекции на касательную к кривой $y = y_s(x)$, получаем два уравнения для определения компонентов скорости v_{xs}, v_{ys} на УВ ($v_{n\infty} = \sin\beta$, $v_{\tau\infty} = \cos\beta$):

$$\begin{aligned} v_{ns} &= -k\sin\beta_{=} - v_{xs}\sin\beta_s + v_{ys}\cos\beta_s, \\ v_{\tau s} &= \cos\beta - \overline{\tau}_{n\tau s} = v_{xs}\cos\beta_s + v_{ys}\sin\beta_s, \end{aligned} \tag{2.23}$$

где

$$k = \frac{\rho_\infty}{\rho_\infty\rho_s} = \frac{1}{\rho_s}, \qquad \overline{\tau}_{n\tau s} = \frac{\tau_{n\tau s}}{\mathbf{Re}\sin\beta},$$

$$\tau_{n\tau s} = [(\widehat{\boldsymbol{\tau}}\cdot\mathbf{n})\cdot\boldsymbol{\tau}]_s = \left[\left(\widehat{P}\cdot\mathbf{n}\right)\cdot\boldsymbol{\tau}\right]_s = \left[(\tau_{yy}-\tau_{xx})\operatorname{tg}\beta_s + \tau_{xy}\left(1-\operatorname{tg}^2\beta_s\right)\right]_s\cos^2\beta_s.$$

Здесь: $\boldsymbol{\tau}$ — орт касательной к УВ, k — отношение плотности в набегающем потоке к плотности за скачком (на искомом контуре $y = y_s(x)$), $\tau_{n\tau s}$ — проекция вектора вязких напряжений $\boldsymbol{\tau}_n = \widehat{\boldsymbol{\tau}}\cdot\mathbf{n}$, действующих на площадке с нормалью $\mathbf{n}$ к УВ на касательную к УВ, $\widehat{\mathbf{P}}$ — полный тензор напряжений, отнесенный к $\rho_\infty V_\infty^2$.

Из алгебраических уравнений (2.23) находим безразмерные компоненты вектора скорости на УВ:

$$v_{xs} = v_{xi} - \frac{\cos\beta_s}{\mathbf{Re}\sin\beta}\tau_{n\tau s}, \quad v_{ys} = v_{yi} - \frac{\sin\beta_s}{\mathbf{Re}\sin\beta}\tau_{n\tau s} = v_{xs}\operatorname{tg}\beta_s - k\frac{\sin\beta}{\cos\beta_s}, \tag{2.24}$$

где

$$\begin{aligned} v_{xi} &= \cos\beta\cos\beta_s + k\sin\beta\sin\beta_s = \cos^2\beta_s\left[\left(1+k\operatorname{tg}^2\beta_s\right)\cos\alpha - (1-k)\operatorname{tg}\beta_s\sin\alpha\right], \\ v_{yi} &= \cos\beta\sin\beta_s - k\sin\beta\cos\beta = -\cos^2\beta_s\left[\left(k+\operatorname{tg}^2\beta_s\right)\sin\alpha - (1-k)\operatorname{tg}\beta_s\cos\alpha\right] = \\ &= v_{xi}\operatorname{tg}\beta_s - k\frac{\sin\beta}{\cos\beta_s}. \end{aligned}$$

Здесь v_{xi} и v_{yi} — безразмерные компоненты вектора скорости на УВ по осям x и y в идеальном газе, т. е. при бесконечно большом числе Рейнольдса.

Из второго уравнения (2.21) в проекции на нормаль к УВ получаем

$$p_s = \frac{1}{\gamma M_\infty^2} + (1-k)\sin^2\beta + \frac{1}{\mathbf{Re}}\tau_{nns}, \tag{2.25}$$

где

$$\tau_{nns} = [(\widehat{\boldsymbol{\tau}}\cdot\mathbf{n})\cdot\mathbf{n}]_s = \left(\tau_{yy} + \tau_{xx}\operatorname{tg}^2\beta_s - 2\tau_{xy}\operatorname{tg}\beta_s\right)_s\cos^2\beta_s.$$

Из уравнения (2.22) следует выражение для полной энтальпии на УВ

$$H_s = H_\infty + \frac{1}{\mathbf{Re}\sin\beta}\left(\mathbf{J}\cdot\mathbf{n}\right)_s, \tag{2.26}$$

где

$$\begin{aligned} &(\mathbf{J}\cdot\mathbf{n})_s = (J_y - J_x\operatorname{tg}\beta_s)_s\cos\beta_s, \\ &J_x = -\frac{\mu}{\sigma}\left[\frac{1}{H_1}\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\sigma}{\mu}\left(v_x\tau_{xx} + v_y\tau_{xy}\right) - \frac{1}{H_1}\frac{\partial}{\partial x}\frac{v_x^2+v_y^2}{2}\right], \\ &J_y = -\frac{\mu}{\sigma}\left[\frac{\partial H}{\partial y} + \frac{\sigma}{\mu}\left(v_x\tau_{xy} + v_y\tau_{yy}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\frac{v_x^2+v_y^2}{2}\right]. \end{aligned} \tag{2.27}$$

Наконец, из уравнения состояния (2.5) получаем

$$\frac{1}{\rho_s} = k = \frac{R_A T_s'}{p_s V_\infty^2} = \frac{\gamma - 1}{2\gamma p_s}\frac{T_s'}{T_0}, \quad T_0 = \frac{V_\infty^2}{2c_p'}, \tag{2.28}$$

где T_0 — температура адиабатически замороженного набегающего потока (за вычетом температуры набегающего потока).

Соотношения (2.13)–(2.26) переходят в классические соотношения Ренкина–Гюгонио на УВ нулевой толщины, если пренебречь вязкостью и теплопроводностью газа, т. е. устремить число Рейнольдса к бесконечности. В этом случае при заданном угле $\beta_s = \beta_s(x)$ пяти соотношений (2.13)–(2.26), (2.28) достаточно для определения пяти параметров на УВ. При учете эффектов вязкости и теплопроводности, которые начинают проявляться при достаточно малых числах Рейнольдса, этого сделать нельзя до решения задачи.

В связи с этим заметим, что производные по нормали к УВ, входящие в выражения (2.21)–(2.26), в работе [20] вычислялись из уравнения Эйлера и тем самым были получены приближенные выражения для параметров потока на УВ. Однако точность результатов такого подхода априори трудно оценить. Условия ((2.24)–(2.26), (2.28)) представляют собой граничные условия на УВ, иногда называемые условиями скольжения и скачка температуры из-за несовпадения касательной составляющей скорости и полной энтальпии H за УВ с соответствующими величинами перед УВ за счет влияния эффектов вязкости и теплопроводности, т. е. $v_{\tau s} \neq v_{\tau\infty}$, $H_s \neq H_\infty$. Эти эффекты проявляются при достаточно низких числах Рейнольдса, как видно из ((2.24)–(2.26), (2.28)). В идеальном газе, т. е. при $\mathbf{Re} \to \infty$, величины v_τ и H остаются непрерывными при переходе через УВ. Нормальная к УВ составляющая скорости, давление и плотность при $M_\infty > 1$ как в идеальном, так и в вязком теплопроводном газе испытывают разрыв (скачок), но разный по величине из-за влияния вязкости и теплопроводности.

Граничное условие (2.24) для скорости v_{ys} на УВ можно заменить эквивалентным условием, вытекающим из условия сохранения массы газа, протекающей через замкнутый контур $ONQO_s$ (см. рис. 2.1), которое записывается в виде:

$$\rho_\infty V_\infty \pi^\nu r_s^{\nu+1} = \int\limits_0^{y_s(x)} (2\pi r)^\nu \rho_\infty \rho v_x' dy - \int\limits_0^x \left(\rho_\infty \rho v_y'\right)_w (2\pi r_w)^\nu \, dx, \tag{2.29}$$

или через безразмерные величины

$$r_s^{\nu+1} = (\nu+1) \int\limits_0^{y_s(x)} \rho v_x r^\nu dy - (\nu+1) \int\limits_0^x (\rho v_y)_w r_w^\nu dx, r_s = r_w + y_s \cos\alpha. \tag{2.30}$$

Здесь второе слагаемое справа в (2.29) дает суммарный массовый ежесекундный вдув (или отсос) газа через поверхность обтекаемого тела от вершины

тела до текущего значения x. При решении уравнений НС или ВУС с граничными условиями на заданной границе $y = y_s(x)$, условие (2.30) может служить дополнительным контролем точности решения задачи.

3. Коэффициенты сопротивления и теплопередачи

После решения задачи сформулированной выше, обычно требуется найти: коэффициент давления

$$C_p = \frac{\rho_\infty V_\infty^2 p_w - p_\infty}{\rho_\infty V_\infty^2/2} = 2\left(p_w - \frac{1}{\gamma M_\infty^2}\right). \tag{2.31}$$

Локальный коэффициент трения — безразмерное напряжение трения, действующее на единичную касательную площадку к обтекаемой поверхности тела с внешней нормалью $\mathbf{n}$ в направлении вектора набегающего потока при учете вдува (отсоса) и скольжения потока на обтекаемой поверхности, будет определяться выражением ($v_x(x,0) \neq 0$, $v_y(x,0) \neq 0$)

$$C_f = \frac{F_\tau}{\rho_\infty V_\infty^2/2} = \frac{2}{\mathbf{Re}}\left(\tau_{xy}\cos\alpha - \tau_{yy}\sin\alpha\right)_w, \tag{2.32}$$

где безразмерные напряжения τ_{xy} и τ_{yy} даются выражениями (2.8).

Локальный и суммарный коэффициенты конвективной теплопередачи ($(H_\infty - H_w)$ — безразмерная разность полных энтальпий)

$$C_H = \frac{J_y'}{\rho_\infty V_\infty^3 (H_\infty - H_w)} = \\ = \frac{1}{(H_\infty - H_w)}\frac{\mu_w}{\sigma_w \mathbf{Re}}\left[\frac{\partial H}{\partial y} + \frac{\sigma}{\mu}\left(v_x\tau_{xy} + v_y\tau_{yy}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\frac{v_x^2 + v_y^2}{2}\right]_w, \tag{2.33}$$

$$C_{H\sum} = \frac{2^\nu}{(H_\infty - H_w)\, Re\, r_w^{\nu+1}}\int\limits_0^x \left[\frac{\partial H}{\partial y} + \frac{\sigma}{\mu}\left(v_x\tau_{xx} + v_y\tau_{xy}\right) - \right. \\ \left. - \frac{1}{H_1}\frac{\partial}{\partial y}\frac{v_x^2 + v_y^2}{2}\right]_w \frac{\mu_w}{\sigma_w} r_w^\nu dx. \tag{2.34}$$

Локальный и суммарный коэффициенты сопротивления

$$C_D = \frac{2F_z}{\rho_\infty V_\infty^2} = \frac{2}{\mathbf{Re}}\left[\tau_{xy}\cos\alpha + \left(p_w - \frac{1}{\gamma \mathbf{M}_\infty^2} - \tau_{yy}\right)\sin\alpha\right],$$

$$C_{D\sum} = \frac{2F_z}{\rho_\infty V_\infty^2 r_w^{\nu+1}} = \frac{2^{\nu+1}}{\mathbf{Re}\, r_w^{\nu+1}}\int\limits_0^x \left[\tau_{xy}\cos\alpha + \left(p_w - \frac{1}{\gamma \mathbf{M}_\infty^2} - \tau_{yy}\right)\sin\alpha\right] r_w^\nu dx. \tag{2.35}$$

Здесь F_z — суммарная сила, действующая на тело с длиной контура x в направлении вектора набегающего потока (вдоль оси $0z$ (фигура)).

4. Обобщенные уравнения вязкого ударного слоя при малых, умеренных и больших числах Рейнольдса

При $\mathbf{Re} \to \infty$ и предположении, что в пристеночной области силы вязкости имеют тот же порядок, что и силы инерции (гипотеза Прандтля), из уравнений (2.2) и (2.1) получаем классические оценки для толщины этой области и нормальной компоненты скорости в ней: $y \sim \mathbf{Re}^{-1/2}$, $v \sim \mathbf{Re}^{-1/2}$. При учете этих оценок, оставляя в уравнениях (2.2)–(2.4) все инерционные члены, члены с вязкостью и теплопроводностью O(1), O $\left(\mathbf{Re}^{-1/2}\right)$ и члены, не содержащие вторых производных по маршевой координате x (внепорядковые члены O$(\mathbf{Re}^{-1})$), получаем следующую композитную систему обобщенных уравнений вязкого ударного слоя (ОУ ВУС):

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(r^{\nu}\rho v_x\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(H_1 r^{\nu}\rho v_y\right) = 0, \tag{2.36}$$

$$\rho\left(\mathcal{D}\, v_x + \frac{v_x v_y}{RH_1}\right) + \frac{1}{H_1}\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{H_1^2 r^{\nu}\mathbf{Re}}\frac{\partial}{\partial y}\left(H_1^2 r^{\nu}\tau_{xy}\right) + \frac{\nu\sin\alpha}{r\mathbf{Re}}\left(\tau_{xx} - \tau_{\varphi\varphi}\right), \tag{2.37}$$

$$\rho\left(\mathcal{D}v_y - \frac{v_x^2}{RH_1}\right) + \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\nu\sin\alpha}{r\mathbf{Re}}\tau_{xy} + \frac{1}{RH_1\mathbf{Re}}\left(\tau_{yy} - \tau_{xx}\right) + \frac{\nu\cos\alpha}{r\mathbf{Re}}\left(\tau_{yy} - \tau_{\varphi\varphi}\right), \tag{2.38}$$

$$\rho\mathcal{D}H = \frac{1}{H_1 r^{\nu}\mathbf{Re}}\frac{\partial}{\partial y}\left(H_1 r^{\nu} J_y\right) + \frac{\nu\sin\alpha}{r\mathbf{Re}}J_x. \tag{2.39}$$

Безразмерные компоненты тензора вязких напряжений τ_{ij} $(i,\ j = x,\ y,\ \varphi)$ даются формулами (2.8), (2.9), из которых получаем нужные разности компонент тензора напряжений, входящие в уравнения (2.37), (2.38):

$$\begin{aligned}
&\tau_{xx} - \tau_{\varphi\varphi} = 2\mu\left(e_{xx} - e_{\varphi\varphi}\right) = 2\mu\left[\frac{1}{H_1}\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{v_y}{RH_1} - \frac{\nu}{r}(v_x\sin\alpha + v_y\cos\alpha)\right],\\
&\tau_{yy} - \tau_{xx} = 2\mu\left(e_{yy} - e_{xx}\right) = 2\mu\left(\frac{\partial v_y}{\partial y} - \frac{1}{H_1}\frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{v_y}{RH_1}\right),\\
&\tau_{yy} - \tau_{\varphi\varphi} = 2\mu\left(e_{yy} - e_{\varphi\varphi}\right) = 2\mu\left[\frac{\partial v_y}{\partial y} - \frac{\nu}{r}(v_x\sin\alpha + v_y\cos\alpha)\right],
\end{aligned} \tag{2.40}$$

а также выражения (2.27) для J_x и J_y. Таким образом, в систему ОУ ВУС не входит объемный коэффициент вязкости.

Все разности (2.40) — порядка единицы, поэтому последний член справа в уравнении (2.37) и два последних члена справа в уравнении (2.38) имеют порядок $\mathbf{Re}^{-1}$. Такой же порядок имеет последнее слагаемое справа в уравнении (2.39).

В асимптотическом смысле они имеют, таким образом, третий порядок малости и в классических уравнениях ВУС опускаются [7]. Однако их удержание не меняет математической природы системы уравнений (2.36)–(2.39) как при малых, умеренных, так и при больших числах Рейнольдса. При их учете будет уточняться решение классических уравнений ВУС, приближая его к решению полных уравнений НС.

5. Обобщенные граничные условия на головной ударной волне

Как видно из общей записи динамических условий совместности на головной ударной волне ((2.24)–(2.26), (2.28)), эффекты вязкости и теплопроводности в них пропорциональны $\mathbf{Re}^{-1}$. Поэтому при $\mathbf{Re} \to \infty$ эти условия переходят в классические условия Ренкина–Гюгонио для идеального газа. Однако при умеренных и малых числах Рейнольдса, соответствующих высотам 75 км, $\leqslant z \leqslant 110$ км (для аппаратов типа «Буран» или «Шаттл»), происходит утолщение ударного слоя и пограничного слоя и смыкание их с образованием сплошной области неизэнтропического течения в ударном слое на наветренной стороне обтекаемого тела [25]. На еще больших высотах, порядка 120 км, реализуется переходной режим обтекания между континуальным и свободномолекулярным. На высотах порядка 130 км реализуется почти свободномолекулярный режим обтекания [25].

Как показывают последние исследования [19], учет скорости скольжения и скачка температуры на обтекаемой поверхности и головной УВ расширяют область применимости классической модели ВУС для расчета теплопередачи на наветренной стороне холодного затупленного тела, движущегося с гиперзвуковой скоростью по траектории входа «Space Shuttle» (при радиусе затупления 1 м) до высот от 140 до 150 км, соответствующих числам Кнудсена $\mathbf{Kn}_\infty$ от 15 до 20. Поэтому есть основание утверждать, что если в обобщенных условиях Ренкина–Гюгонио учесть члены $\mathrm{O}\left(\mathbf{Re}^{-1/2}\right)$ при условии, что производные $\partial/\partial y = \mathrm{O}\left(\mathbf{Re}^{1/2}\right)$ (как и в теории пограничного слоя), то получаемые таким образом соотношения и их использование в качестве граничных условий для обобщенных уравнений ВУС (2.36)–(2.39) будут уточнять решение этих континуальных уравнений в переходном и почти свободномолекулярном режимах обтекания и, возможно, расширяют область их применения до еще более разреженных режимов течения.

Точные соотношения на УВ, получаемые из соотношений (2.24)–(2.26) и (2.8), (2.9), (2.11), в безразмерных переменных запишутся в виде:

$$v_{xs} = v_{xi} - \frac{\cos^3\beta_s}{\mathbf{Re}\sin\beta}\left[(\tau_{yy} - \tau_{xx})\operatorname{tg}\beta_s + \left(1 - \operatorname{tg}^2\beta_s\right)\tau_{xy}\right], \tag{2.41}$$

$$v_{ys} = v_{xs}\operatorname{tg}\beta_S - k\frac{\sin\beta}{\cos\beta_s}, \tag{2.42}$$

$$p_s = \frac{1}{\gamma M_\infty^2} + (1-k)\sin^2\beta + \frac{\cos^2\beta_s}{\mathbf{Re}}\left[\tau_{yy} + \tau_{xx}\operatorname{tg}^2\beta_s - 2\tau_{xy}\operatorname{tg}\beta_s\right], \tag{2.43}$$

$$H_s = H_\infty + \frac{\cos\beta_s}{\mathbf{Re}\sin\beta}\left(J_y - J_x\operatorname{tg}\beta_s\right). \tag{2.44}$$

Безразмерные компоненты тензора вязких напряжений и компоненты вектора удельного потока энергии $\mathbf{J}$ даются выражениями соответственно (2.8) и (2.27). Безразмерная плотность ρ_s или обратная величина $k = 1/\rho_s$ будут вычисляться из уравнения состояния (2.5).

Оценим члены с вязкостью и теплопроводностью в первом и двух последних соотношениях (2.41)–(2.44) в предположении, что $\partial v_x/\partial y$, $\partial H/\partial y \sim \sim \mathrm{O}\left(\mathbf{Re}^{1/2}\right)$, $\partial v_y/\partial y \sim \mathrm{O}\,(1)$ (из уравнения неразрывности), т. е. сохраняя порядок оценки членов с вязкостью и теплопроводностью, следующий из предположения Прандтля о равенстве порядков инерционных членов и членов с вязкостью, а также равенстве порядков конвективных членов и членов с теплопроводностью. Это будет верхняя (максимальная) оценка диссипативных членов, т. е. фактическая величина оставляемых членов с вязкостью и теплопроводностью не будет больше величины главных членов в соотношениях в (2.41)–(2.44), имеющих порядок единицы.

Тогда из соотношений (2.41)–(2.44) получаем с точностью $\mathrm{O}(\mathbf{Re}^{-1})$ обобщенные условия на УВ в виде:

$$v_{xs} = v_{xi} - \frac{\cos\beta_s \sin 2\beta_s}{\mathbf{Re}\sin\beta}\left(\mu\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)_s + \mathrm{O}\left(\mathbf{Re}^{-1}\right), \tag{2.45}$$

$$v_{ys} = v_{xs}\,\mathrm{tg}\,\beta_s - k\frac{\sin\beta}{\cos\beta_s} + \mathrm{O}\left(\mathbf{Re}^{-1}\right), \tag{2.46}$$

$$p_s = \frac{1}{\gamma M_\infty^2} + (1-k)\sin^2\beta + \frac{\sin 2\beta_s}{\mathbf{Re}}\left(\mu\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)_s + \mathrm{O}\left(\mathbf{Re}^{-1}\right), \tag{2.47}$$

$$H_s = H_\infty - \frac{\mu_s\cos\beta_s}{\mathbf{Re}\sigma_s\sin\beta}\left[\frac{\partial H}{\partial y} + (\sigma-1)\frac{\partial v_x^2}{\partial y}\right]_s + \mathrm{O}\left(\mathbf{Re}^{-1}\right). \tag{2.48}$$

Заметим, что известные и используемые в численных расчетах в литературе [5, 9, 17] условия (2.45), (2.47), (2.48) записаны без учета членов с вязкостью в (2.47), а множители $\cos\beta_s\sin 2\beta_s$ в (2.45) и $\cos\beta_s$ в (2.48) заменены единицей. Это не приводит к заметной ошибке при достаточно больших числах $\mathbf{Re}$ и/или при расчете ближней окрестности точки торможения, где $\beta_s = \beta - \alpha \to 0$ при $\mathbf{M}_\infty \to \infty$.

6. Уравнения Навье–Стокса и граничные условия в переменных Дородницына–Лиза

При аналитическом и численном решении задач аэродинамики и теплообмена важно рационально выбрать как независимые, так и зависимые переменные. В теории ПС использование переменных Дородницына в форме Лиза приводит к более слабой зависимости искомых функций от коэффициентов уравнений, чем в исходных (физических) переменных, слабой зависимости (для ламинарных течений) толщины пограничного слоя от продольной координаты, возможности получения при определенных условиях автомодельных и квазиавтомодельных решений. Более того, было показано, что в переменных Дородницына в рамках модели тонкого невязкого ударного слоя толщина УС, профили скоростей и продольный градиент давления в окрестности точки торможения, не зависят от профилей плотности вдоль оси, переменность которых может быть обусловлена сжимаемостью или другими физико-химическими

процессами в УС. В указанных переменных устанавливается слабая зависимость отхода головной ударной волны от определяющих параметров задачи, а также законы подобия [7].

Так как все эффекты второго порядка в теории ПС являются поправками $\mathrm{O}\left(\mathbf{Re}^{-1/2}\right)$ к результатам классического ПС и содержатся в композитной системе уравнений ВУС (гл. 1), отличающейся от полной системы уравнений НС малыми членами $\mathrm{O}(\mathbf{Re}^{-1} \sim \mathbf{Kn})$, то естественно записать исходную систему уравнений НС (2.1)–(2.5) и вытекающие из нее упрощенные модели в переменных Дородницына–Лиза.

Поэтому в данной главе проводится идея, что если переменные Дородницына–Лиза эффективны для получения и представления решения задач теории ПС, то они будут так же эффективны и для получения и представления решения задач сверхзвукового обтекания в рамках более сложных газодинамических моделей, в частности модели ВУС, включая и полные уравнения НС.

Итак, преобразуем уравнения НС (2.1)–(2.5), граничные условия на теле (2.12)–(2.15) и УВ (2.13)–(2.27) к новым независимым переменным, обобщающим переменные типа Дородницына–Лиза ξ, η:

$$\xi = \xi\left(x\right), \eta = \eta\left(x, y\right) \equiv \frac{1}{\Delta\left(x\right)} \int\limits_0^y \rho \overline{r}^{\nu} dy, \overline{r} = \frac{r}{r_w} = 1 + y\frac{\cos\alpha}{r_w}. \tag{2.49}$$

В теории пограничного слоя в силу малости $y \sim \mathbf{Re}^{-1/2}$ получаем $\overline{r} = 1$, тогда переменные (2.49) переходят в переменные Дородницына–Лиза при соответствующем выборе функций $\xi(x)$ и $\Delta(x)$ [7]. Здесь $\xi(x)$ и $\Delta(x)$ — произвольные пока функции, выбираемые далее из соображений простоты записи уравнений и граничных условий, а также для облегчения получения предварительных оценок и, главным образом, численных решений уравнений ВУС. Особо отметим роль функции $\Delta\left(x\right)$, которая будет использована для нормировки толщины ударного слоя на единицу, а также играть роль масштабной функции, определяющей толщину вязкой области течения в ударном слое около тела, в частности при больших числах Рейнольдса — толщину пограничного слоя [7].

Обратное к (2.49) преобразование будет:

$$x = x\left(\xi\right), \quad \overline{r}^{\nu+1} = 1 + \omega\overline{\Delta}, \tag{2.50}$$

где

$$\overline{\Delta} = \left(\nu + 1\right)\Delta\frac{\cos\alpha}{r_w}, \quad \omega \equiv \omega\left(\xi, \eta\right) = \int\limits_0^{\eta} \frac{dt}{\rho\left(\xi, t\right)}.$$

Из (2.50) находим y как функцию новых переменных ξ, η:

$$y\left(\xi,\eta\right)\frac{\cos\alpha}{r_w}=\left(1+\omega\overline{\Delta}\right)^{\frac{1}{\nu+1}}-1. \tag{2.51}$$

Для плоской задачи $\nu=0$, и зависимость y от новых переменных ξ, η (2.51) приобретает простейший вид: $y=\Delta\omega$. Выберем теперь функцию $\Delta\left(x\right)$ из условия нормировки в переменных ξ, η толщины ударного слоя на единицу, т. е. положим $\eta=1$ на УВ. Тогда в переменной x из (2.49) получаем связь $\Delta\left(x\right)$ с функцией $y_s(x)$:

$$\Delta\left(x\right)=\int\limits_0^{y_s(x)}\rho\overline{r}^{\nu}dy. \tag{2.52}$$

В новой переменной ξ из (2.50) получаем эту связь в виде:

$$\overline{\Delta}=\frac{\overline{r}_s^{\nu+1}-1}{\omega_s},\quad \overline{r}_s=1+y_s\frac{\cos\alpha}{r_w},\quad \omega_s=\omega_s\left(\xi\right)=\int\limits_0^1\frac{1}{\rho\left(\xi,\eta\right)}d\eta. \tag{2.53}$$

Для плоской задачи ($\nu=0$) эта связь становится максимально простой: $\Delta=y_s/\omega_s$. Таким образом, y, y_s выражаются через пока неизвестную нормировочную функцию $\Delta(x)$.

Перейдем далее к преобразованию системы уравнений НС к новым независимым переменным ξ, η (2.49).

Определим функцию тока $\psi(x,y)$ из системы уравнений, тождественно удовлетворяющей уравнению неразрывности (2.36):

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}=-(2\pi)^{\nu}H_1r^{\nu}\rho v_y,\quad \frac{\partial\psi}{\partial y}=(2\pi)^{\nu}r^{\nu}\rho v_x, \tag{2.54}$$

и будем искать ее в новых переменных в виде:

$$\psi(x,y)=b(x)f(\xi,\eta),\quad b(x)=(2\pi)^{\nu}u_*r_w^{\nu}\Delta. \tag{2.55}$$

Функцию $f(\xi,\eta)$ назовем приведенной функцией тока. Если ввести еще характерные безразмерные величины $u_*=u_*(x)=\cos\alpha$, $v_*=v_*(x)=\sin\alpha$ для максимального учета направления вектора скорости в ударном слое по формулам:

$$u=\frac{v_x}{u_*}=\frac{v_x'}{V_\infty u_*},\quad v=\frac{v_y}{v_*}=\frac{v_y'}{V_\infty v_*}, \tag{2.56}$$

то из уравнений (2.54) получаем для u и v выражения через приведенную функцию тока в виде:

$$u = \frac{\partial f}{\partial \eta}, \quad \rho\left(k_1 u + k_2 v\right) = -\left(\beta_0 f + x\xi'(x)\frac{\partial f}{\partial \xi}\right),$$

или (2.57)

$$v = -\frac{k_1}{k_2}u - \left(\beta_0 f + x\xi'(x)\frac{\partial f}{\partial \xi}\right)\frac{1}{\rho k_2}.$$

Безразмерные коэффициенты β_0, k_1, k_2 даются приводимыми ниже формулами.

Введем далее вместо безразмерных величин $\tau_{ij}(x,y)$ $(i,\ j = x,\ y,\ \varphi)$, даваемых формулами (2.8), и вместо величин $J_x(x,y), J_y(x,y)$, даваемых формулами (2.27), соответственно безразмерные компоненты тензора вязких напряжений $\tau_{ij}(\xi,\eta)$ $(i,\ j = \xi,\ \eta,\ \zeta)$ и безразмерные проекции вектора потока энергии $\overline{X}(\xi,\eta)$ и $Y(\xi,\eta)$ в переменных ξ, η по формулам:

$$\begin{aligned}
&\tau_{xx}(x,y) = \frac{\mu u_*}{xH_1}\tau_{\xi\xi}(\xi,\eta), \quad \tau_{yy}(x,y) = \frac{\mu u_*}{xH_1}\tau_{\eta\eta}(\xi,\eta),\\
&\tau_{\varphi\varphi}(x,y) = \frac{\mu u_*}{xH_1}\tau_{\zeta\zeta}(\xi,\eta),\\
&\tau_{xy}(x,y) = \frac{\mu u_*\rho\overline{r}^{\nu}}{\Delta}\tau_{\xi\eta}(\xi,\eta) = \frac{l}{\Delta^2}\frac{u_*^2\Delta}{xH_1\overline{r}^{\nu}}\tau_{\xi\eta}.
\end{aligned} \tag{2.58}$$

$$\begin{aligned}
&J_x(x,y) = -\frac{\mu}{\sigma x H_1}X(\xi,\eta),\\
&J_y(x,y) = -\frac{\mu\rho\overline{r}^{\nu}}{\sigma\Delta}Y(\xi,\eta) = -\frac{l}{\sigma\Delta^2}\frac{u_*\Delta}{xH_1\overline{r}^{\nu}}Y(\xi,\eta),
\end{aligned} \tag{2.59}$$

где

$$l = \frac{\mu\rho x H_1\overline{r}^{2\nu}}{u_*}.$$

Тогда остальные уравнения (2.2)–(2.4) в переменных (2.49) с учетом уравнений (2.57) перепишутся в виде

$$\beta_1 u^2 + k_3 uv + x\xi'(x)u\frac{\partial u}{\partial \xi} - \left(\beta_0 f + x\xi'(x)\frac{\partial f}{\partial \xi}\right)\frac{\partial u}{\partial \eta} + \\ + \frac{1}{\rho u_*^2}\left(x\xi'(x)\frac{\partial p}{\partial \xi} + \rho k_1\frac{\partial p}{\partial \eta}\right) = (\nabla\tau)_\xi, \tag{2.60}$$

$$\beta_2 uv - k_4 u^2 + x\xi'(x)u\frac{\partial v}{\partial \xi} - \left(\beta_0 f + x\xi'(x)\frac{\partial f}{\partial \xi}\right)\frac{\partial v}{\partial \eta} + k_5\frac{\partial p}{\partial \eta} = (\nabla\tau)_\eta, \tag{2.61}$$

$$x\xi'(x)u\frac{\partial H}{\partial \xi} - \left(\beta_0 f + x\xi'(x)\frac{\partial f}{\partial \xi}\right)\frac{\partial H}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{l}{\mathbf{Re}\sigma\Delta^2}Y\right) + \varepsilon_1 X', \tag{2.62}$$

где каждый член с вязкостью в (2.60), (2.61) $(\nabla\tau)_\xi$, $(\nabla\tau)_\eta$ (не дивергенции тензора) представляется в двух эквивалентных видах:

$$(\nabla\tau)_\xi = \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{l}{\mathbf{Re}\Delta^2}\tau_{\xi\eta}\right) + \frac{lk_6}{\mathbf{Re}\Delta^2}\tau_{\xi\eta} + \varepsilon_1\tau'_{\xi\xi} - \varepsilon_2\tau_{\zeta\zeta} = \\ = \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{l}{\mathbf{Re}\Delta^2}\tau_{\xi\eta}\right) + \frac{lk_6}{\mathbf{Re}\Delta^2}\tau_{\xi\eta} + \varepsilon_1\widetilde{\tau}'_{\xi\xi} + \varepsilon_2\left(\tau_{\xi\xi} - \tau_{\zeta\zeta}\right), \tag{2.63}$$

$$
\begin{aligned}
(\nabla\tau)_\eta &= \frac{\partial}{\partial\eta}\left(\varepsilon_3\tau_{\eta\eta}\right) + \varepsilon_3\tau'_{\xi\eta} - \varepsilon_4\tau_{\xi\xi} - \varepsilon_5\tau_{\zeta\zeta} = \\
&= \frac{H_1\overline{r}^{\,\nu}}{\mathbf{Re}v_*\Delta}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\mu}{H_1}\tau_{\eta\eta}\right) + \varepsilon_3\tau'_{\xi\eta} + \varepsilon_4\left(\tau_{\eta\eta} - \tau_{\xi\xi}\right) + \varepsilon_5\left(\tau_{\eta\eta} - \tau_{\zeta\zeta}\right) = \\
&= \frac{\overline{r}^{\,\nu}}{\mathbf{Re}v_*\Delta}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\mu\tau_{\eta\eta}\right) + \varepsilon_3\tau'_{\xi\eta} - \varepsilon_4\tau_{\xi\xi} + \varepsilon_5\left(\tau_{\eta\eta} - \tau_{\zeta\zeta}\right). \qquad (2.64)
\end{aligned}
$$

Здесь

$$
\begin{aligned}
&\tau_{\xi\xi}(\xi,\eta) = \left(\overline{\zeta} - \frac{2}{3}\right)\nabla'\cdot\mathbf{v} + 2e_{\xi\xi}, \quad \overline{\zeta} = \frac{\zeta}{\mu} = \frac{\zeta'}{\mu\mu_0} = \frac{\zeta'}{\mu'}, \\
&\tau_{\eta\eta}(\xi,\eta) = \left(\overline{\zeta} - \frac{2}{3}\right)\nabla'\cdot\mathbf{v} + 2e_{\eta\eta}, \\
&\tau_{\zeta\zeta}(\xi,\eta) = \left(\overline{\zeta} - \frac{2}{3}\right)\nabla'\cdot\mathbf{v} + 2e_{\zeta\zeta}, \\
&\tau_{\xi\eta}(\xi,\eta) = e_{\xi\eta}, \quad \text{где} \quad e_{\xi\xi} = \beta_1 u + k_3 v + Du, \quad e_{\eta\eta} = \rho k_2\frac{\partial v}{\partial\eta}, \\
&e_{\zeta\zeta} = \nu\left(n_1 u + n_2 v\right), \quad e_{\xi\eta} = \frac{\partial u}{\partial\eta} - k_6 u + k_7\left(\beta_2 v + Dv\right), \\
&\tau'_{\xi\xi} = m_1\tau_{\xi\xi} + \frac{1}{\mu}D\left(\mu\tau_{\xi\xi}\right), \quad \widetilde{\tau}'_{\xi\xi} = \widetilde{m}_1\tau_{\xi\xi} + \frac{1}{\mu}D\left(\mu\tau_{\xi\xi}\right), \\
&\varepsilon_1\tau'_{\xi\xi} = \varepsilon_1\widetilde{\tau}'_{\xi\xi} + \varepsilon_2\tau_{\xi\xi}, \quad \widetilde{m}_1 = m_1 - \nu\frac{xH_1\sin\alpha}{r} = m_1 - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}, \\
&\tau'_{\xi\eta} = m_2\tau_{\xi\eta} + \frac{\Delta^2}{l}D\left(\frac{l}{\Delta^2}\tau_{\xi\eta}\right), \\
&\nabla'\cdot\mathbf{v} = e_{\xi\xi} + e_{\eta\eta} + e_{\zeta\zeta} = \beta_1 u + k_3 v + Du + \rho k_2\frac{\partial v}{\partial\eta} + \nu\left(n_1 u + n_2 v\right), \\
&X = DH - D\left(v_x^2 + v_y^2\right)\cdot\frac{1}{2} + \sigma u_*^2\left(u\tau_{\xi\xi} + \rho k_2 v\tau_{\xi\eta}\right), \\
&\sigma X' = m_3 X + \frac{\sigma}{\mu}D\left(\frac{\mu}{\sigma}X\right), \quad D = x\xi'(x)\frac{\partial}{\partial\xi} + \rho k_1\frac{\partial}{\partial\eta} = x\frac{\partial}{\partial x}, \\
&Y = \frac{\partial H}{\partial\eta} - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(v_x^2 + v_y^2\right) + \sigma u_*^2\left(u\tau_{\xi\eta} + k_7 v\tau_{\eta\eta}\right).
\end{aligned} \qquad (2.65)
$$

В систему уравнений (2.57), (2.60)–(2.62) входит ряд безразмерных коэффициентов, которые выражаются как через заданные $(u_*, v_*, r_w, \alpha, R)$, так и неизвестные до решения, определяемые в процессе решения задачи, величины ρ, Δ, y следующим образом:

$$
\begin{aligned}
&\beta_0 = \frac{d\ln b}{d\ln x}, \quad \beta_1 = \frac{d\ln u_*}{d\ln x}, \quad \beta_2 = \frac{d\ln v_*}{d\ln x}, \\
&m_1 = \beta_1 + \frac{\nu}{r}xH_1\sin\alpha + \frac{y}{RH_1}\frac{d\ln R}{d\ln x} - 1, \\
&m_2 = 2\beta_1 + \frac{d\ln\Delta}{d\ln x} + \frac{\nu}{r_w}x\sin\alpha + \frac{y}{RH_1}\frac{d\ln R}{d\ln x} - 1, \\
&m_3 = m_1 - \beta_1, \quad n_1 = \frac{xH_1\sin\alpha}{r}, \quad n_2 = \frac{xH_1 v_*\cos\alpha}{ru_*},
\end{aligned} \qquad (2.66)
$$

$$k_1 = \frac{x}{\rho}\frac{\partial\eta}{\partial x} = -\frac{\overline{r}^{\nu}}{\Delta}x\xi'(x)\frac{\partial y}{\partial\xi}, \quad k_2 = \frac{xH_1\overline{r}^{\nu}v_*}{u_*\Delta}, \quad k_3 = \frac{xv_*}{Ru_*},$$
$$k_4 = \frac{xu_*}{Rv_*}, \quad k_5 = \frac{xH_1\overline{r}^{\nu}}{u_*v_*\Delta}, \quad k_6 = \frac{\Delta}{\rho H_1\overline{r}^{\nu}R}, \quad k_7 = \frac{v_*\Delta}{\rho u_* x H_1\overline{r}^{\nu}},$$
$$\varepsilon_1 = \frac{\mu}{\rho u_* x H_1}\frac{1}{\mathbf{Re}}, \quad \varepsilon_2 = \nu\frac{\mu\sin\alpha}{\rho u_* r}\frac{1}{\mathbf{Re}}, \quad \varepsilon_3 = \frac{\mu\overline{r}^{\nu}}{v_*\Delta}\frac{1}{\mathbf{Re}},$$
$$\varepsilon_4 = \frac{\mu}{\rho v_* R H_1}\frac{1}{\mathbf{Re}}, \quad \varepsilon_5 = \nu\frac{\mu\cos\alpha}{\rho v_* r}\frac{1}{\mathbf{Re}}.$$

Все эти коэффициенты являются безразмерными, а все коэффициенты ε_i ($i = 1 \div 5$) обратны числу $\mathbf{Re}$.

Исключим из уравнения (2.60) производную $\partial p/\partial\eta$ с помощью уравнения (2.61) и одновременно слагаемое k_3uv, подставляя в него выражение для v из второго уравнения (2.57). Тогда получим более простое и удобное для дальнейшего асимптотического анализа и решения уравнение количества движений в проекции на ось x:

$$\beta_1u^2 + x\xi'(x)u\frac{\partial u}{\partial\xi} - \left(\beta_0 f + x\xi'(x)\frac{\partial f}{\partial\xi}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial\eta} + k_6u\right) =$$
$$= -\frac{1}{\rho u_*^2}x\xi'(x)\frac{\partial p}{\partial\xi} + \frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{l}{\mathbf{Re}\Delta^2}\tau_{\xi\eta}\right) + \frac{lk_6}{\mathbf{Re}\Delta^2}\tau_{\xi\eta} + \mathbf{\Phi}_v + \mathbf{\Phi}_\tau, \quad (2.67)$$

где

$$\mathbf{\Phi}_v = \rho k_1k_7\left[\beta_2uv + x\xi'(x)\frac{\partial v}{\partial\xi} - \left(\beta_0 f + x\xi'(x)\frac{\partial f}{\partial\xi}\right)\frac{\partial v}{\partial\eta}\right],$$
$$\mathbf{\Phi}_\tau = \varepsilon_1\widetilde{\tau}'_{\xi\xi} + \varepsilon_2\left(\tau_{\xi\xi} - \tau_{\zeta\zeta}\right) - \rho k_1k_7\left[\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\varepsilon_3\tau_{\eta\eta}\right) + \varepsilon_3\tau'_{\xi\eta} - \varepsilon_4\tau_{\xi\xi} - \varepsilon_5\tau_{\zeta\zeta}\right]. \quad (2.68)$$

Таким образом, окончательная система уравнений НС в переменных ξ, η будет состоять из шести уравнений (2.57), (2.60)–(2.62), (2.67), (2.51) для определения шести функций: u, f, v, p, ρ, T (или H).

7. Граничные условия в переменных ξ, η

Граничные условия на стенке (2.12) в переменных ξ, η будут

$$u(\xi, 0) = 0, \quad (\rho v)_w = \frac{q(x)}{\rho_\infty V_\infty v_*}. \quad (2.69)$$

Граничное условие при заданной температуре стенки (2.13) не изменит свой вид:

$$T(\xi, 0) = T_w(\xi), \quad (2.70)$$

или это условие заменяется при определении равновесно-радиационной температуры стенки при условии прилипания касательной составляющей

скорости и заданном вдуве (отсосе) балансовым условием (2.14), которое в переменных ξ, η принимает вид:

$$\left[\frac{\mu\rho}{\sigma\Delta}\left(\frac{\partial H}{\partial\eta}-v_*^2 v\frac{\partial v}{\partial\eta}\right)+\frac{\mu u_* v_*}{x}v\tau_{\eta\eta}\right]_{\eta=0}=\frac{R_0\varepsilon}{\mu_0 V_\infty^2}\sigma_B T_w^4. \tag{2.71}$$

При наличии уноса массы с обтекаемой поверхности в газовой фазе того же химического состава, что и набегающий поток, под действием конвективного нагрева условие (2.15) в переменных ξ, η перепишется в виде:

$$\left[\frac{\mu\rho}{\sigma\Delta}\left(\frac{\partial H}{\partial\eta}-v_*^2 v\frac{\partial v}{\partial\eta}\right)+\frac{u_* v_*\mu}{x}v\tau_{\eta\eta}\right]_{y=0}-\frac{R_0\varepsilon\sigma_B T_w^4}{\mu_0 V_\infty^2}=\frac{v_*\mathbf{Re}}{V_\infty^2}\left(\rho v\right)_w H_\Phi. \tag{2.72}$$

Условия скольжения скорости и скачка температуры в переменных ξ, η будут:

$$\begin{aligned} u\left(x,0\right)&=\frac{2-\theta}{\theta}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{\mu\rho}{\mathbf{Re}\Delta\sqrt{p\rho}}\frac{\partial u}{\partial\eta}\bigg|_{\eta=0},\\ T\left(x,0\right)&=T_w+\frac{2-\alpha}{\alpha\sigma}\frac{2\gamma}{\gamma+1}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{\mu\rho}{\mathbf{Re}\Delta\sqrt{p\rho}}\frac{\partial T}{\partial\eta}\bigg|_{\eta=0}. \end{aligned} \tag{2.73}$$

Граничные условия в набегающем потоке для решения полной системы уравнений НС, если принять $u_*=\cos\alpha$, $v_*=\sin\alpha$, будут:

$$\begin{aligned} &u(\xi,\infty)=\frac{v_{x\infty}}{u_*}=1,\quad v(\xi,\infty)=\frac{v_{y\infty}}{v_*}=1,\\ &\rho(\xi,\infty)=1,\quad p(\xi,\infty)=\frac{1}{\gamma M_\infty^2},\quad H'(\xi,\infty)=H'_\infty\equiv c_p T'_\infty+\frac{V_\infty^2}{2}. \end{aligned} \tag{2.74}$$

Граничные условия на искомой УВ $y=y_s(x)$ (или $\eta_s=1$) (2.13)–(2.26) при использовании (2.58) запишутся в виде:

$$u(\xi,1)=u_i-m_{4s}\frac{\cos^3\beta_s}{\sin\beta}\left[\frac{l\tau_{\xi\eta}}{\mathbf{Re}\Delta^2}\left(1-\mathrm{tg}^2\beta_s\right)-\varepsilon_6\left(\tau_{\eta\eta}-\tau_{\xi\xi}\right)\mathrm{tg}\,\beta_s\right]_s, \tag{2.75}$$

где

$$u_i=\left[1+k\ \mathrm{tg}^2\beta_s-(1-k)\ \mathrm{tg}\ \beta_s\ \mathrm{tg}\ \alpha\right]\cos^2\beta_s,$$

$$v(\xi,1)=\frac{u_*}{v_*}u(\xi,1)\ \mathrm{tg}\ \beta_s-\frac{k}{v_*}\frac{\sin\beta}{\cos\beta_s},$$

$$\begin{aligned} p(\xi,1)&=\frac{1}{\gamma M_\infty^2}+(1-k)\sin^2\beta+\\ &+m_{5s}\cos^2\beta_s\left[-\frac{2\,l\,\tau_{\xi\eta,}}{\mathbf{Re}\Delta^2}\mathrm{tg}\,\beta_s+\varepsilon_6\left(\tau_{\eta\eta}+\tau_{\xi\xi}\,\mathrm{tg}^2\beta_s\right)\right]_s, \end{aligned} \tag{2.76}$$

$$H(\xi,1)=H_\infty-m_{4s}\frac{\cos\beta_s}{\sin\beta}\left(\frac{l}{\mathbf{Re}\Delta^2\sigma}Y-\varepsilon_6 X\right)_s,$$

$$k = \frac{1}{\rho_s} = \frac{R_A}{V_\infty^2}\frac{T_s}{p_s} = \frac{\gamma - 1}{2\gamma p_s}\frac{T_s}{T_0},$$

где

$$m_4 = \frac{u_* \Delta}{x H_1 \overline{r}^\nu}, \quad m_5 = \frac{u_*^2 \Delta}{x\, H\, \overline{r}^\nu} = m_4 u_*,$$

$$\varepsilon_6 = \frac{\mu \overline{r}^\nu}{u_* \Delta}\frac{1}{\mathbf{Re}}, \quad 1 = \frac{1}{\Delta}\int\limits_0^{y_s(x)} \rho \overline{r}^\nu dy.$$

Индекс s в (2.75), (2.76) означает, что соответствующие выражения должны вычисляться при $y = y_s(x)$.

В коэффициенты сформулированной выше задачи в переменных ξ, η входит неизвестная (не определенная явно до решения задачи) функция $\Delta(x)$, связанная в переменных ξ, η с отходом УВ $y = y_s(x)$ через решение соотношением (2.53). В исходных переменных x, y эта связь дается (2.52). Можно получить дополнительное уравнение, связывающее $\Delta(x)$ с $y = y_s(x)$ в переменных ξ, η, и тем самым выразить $\Delta(x)$ и $y_s(x)$ через искомое решение. Для этого воспользуемся балансовым соотношением (2.30). В переменных ξ, η оно перепишется, если положить характерную скорость $u_* = \cos\alpha$ в виде:

$$\overline{r}_s^{\nu+1} = \overline{\Delta}\int\limits_0^1 u d\eta - Q, \quad \overline{\Delta} = (\nu+1)\,\Delta\frac{\cos\alpha}{r_w}, \quad Q = \frac{\nu+1}{r_w^{\nu+1}}\int\limits_0^x (\rho\, v_y)_w\, r_w^\nu dx, \quad (2.77)$$

где Q — безразмерный суммарный расход газа через поверхность тела от его вершины до текущего значения координаты x. Соотношение (2.77) и есть дополнительное условие, связывающее $\Delta(x)$ с $y_s(x)$. Запишем его через приведенную функцию тока на УВ $f_s = f(\xi, 1)$. Интегрируя первое уравнение (2.57) от 0 до 1, получим

$$f_s = \int\limits_0^1 u d\eta + f_w(\xi)\,. \quad (2.78)$$

Приведенная функция тока на стенке f_w с учетом первого равенства (2.54) и (2.55) будет связана с расходом Q соотношением

$$-f_w = Q/\overline{\Delta}. \quad (2.79)$$

Исключая $\int\limits_0^1 u d\eta$ из (2.78), с использованием (2.77) и (2.79) найдем

$$\overline{\Delta} f_s = \overline{r}_s^{\nu+1}. \quad (2.80)$$

Это выражение для f_s, представляющее приведенную функцию тока f_s на УВ, т. е. при $\eta = 1$, можно также получить из второго уравнения (2.57),

записанного на контуре $y = y_s(x)$. Из уравнений (2.53) и (2.80) находим окончательное выражение для $\overline{\Delta}$ и $y_s(x)$:

$$\overline{\Delta} = \frac{1}{f_s - \omega_s}, \quad y_s = \frac{r_w}{\cos\alpha}\left[\left(1 + \frac{\omega_s}{f_s - \omega_s}\right)^{\frac{1}{\nu+1}} - 1\right]. \tag{2.81}$$

Для плоской задачи выражение для отхода УВ y_s принимает совсем простой вид:

$$y_s = \frac{r_w}{\cos\alpha}\,\frac{\omega_s}{f_s - \omega_s}.$$

Формулы (2.81) дают масштабную (вспомогательную) функцию Δ и отход УВ, выраженные через искомое решение. Функции $y(\xi, \eta)$ с использованием (2.51) и выражения для $\overline{\Delta}$ (2.81) можно дать окончательное выражение

$$y\,(\xi, \eta) = \frac{r_w}{\cos\alpha}\left[\left(1 + \frac{\omega}{f_s - \omega_s}\right)^{\frac{1}{\nu+1}} - 1\right]. \tag{2.82}$$

Подставляя выражения для $\overline{\Delta}$ из (2.81) в (2.79), получим

$$-f_w = (f_s - \omega_s)\,Q.$$

Таким образом, выражения (2.81), (2.82) замыкают через искомое решение все коэффициенты (2.66), входящие в уравнения НС, и граничные условия (2.76).

8. Оценка порядка коэффициентов системы уравнений НС в переменных ξ, η

При сверх- и гиперзвуковом обтекании затупленных тел характерными определяемыми параметрами являются отношение плотностей $k = \rho_\infty/(\rho_\infty \rho_s)$ до и сразу после головного скачка уплотнения и число $\mathbf{Re}$. Для совершенного газа с постоянными теплоемкостями при больших числах Маха и $\mathbf{Re}$ параметр k можно вычислять явно, а его наибольшее значение в УС равно $k = (\gamma - 1)/(\gamma + 1)$. При учете физико-химических процессов вязкости и теплопроводности в УС для газа эта величина меняется в пределах $k = 0{,}05 \div 0{,}2$, при метеорных скоростях порядка нескольких десятков километров в секунду k становится еще меньше. При движении тел в атмосфере Земли с числами Маха $\mathbf{M}_\infty \geqslant 6$ этот параметр определяет толщину ударного слоя: $y_s \sim k$ (см. также (2.81)) и будет далее варьироваться как определяющий параметр от единицы до нуля. Число $\mathbf{Re}$ также является определяющим параметром и характеризует толщину ПС и толщину структуры УВ.

Для вывода асимптотически упрощенных уравнений НС при умеренных и больших числах Рейнольдса необходимо сначала оценить порядок всех коэффициентов (2.66), входящих в уравнения НС, и граничные условия (2.76), записанных в переменных Дородницына–Лиза ξ, η.

Из (2.66) получаем в окрестности линии торможения ($\Delta = \Delta_0 + x^2\Delta_2 + \ldots$, $R = R_0 + x^2 R_2 + \ldots$, $u_* = \cos\alpha$, $v_* = \sin\alpha$),

$$\beta_0 = \frac{x\,\mathrm{tg}\,\alpha}{R} + \nu\frac{x\sin\alpha}{r_w} + x\frac{\Delta'_x}{x}, \qquad \beta_0(0) = \nu + 1,$$
$$\beta_1 = \frac{d\ln u_*}{d\ln x} = \frac{x\ \mathrm{tg}\ \alpha}{R}, \qquad \beta_1(0) = 1,$$
$$\beta_2 = \frac{d\ln v_*}{d\ln x} = -\frac{x}{R\ \mathrm{tg}\,\alpha}, \qquad \beta_2(0) = 0,$$
$$m_1(0) = \nu, \qquad m_2(0) = \nu + 1, \qquad m_3(0) = \nu - 1,$$
$$n_1 = \frac{x\,H_1\cos\alpha}{r\,u_*}, \qquad n_1(0) = 1,$$
$$n_2 = \frac{x\,H_1\sin\alpha}{r}, \qquad n_2(0) = 1.$$

Следовательно, все приведенные здесь коэффициенты имеют порядок единицы:

$$\beta_0 \sim \beta_1 \sim \beta_2 \sim 1, \quad m_1 \sim m_2 \sim m_3 \sim 1, \quad n_1 \sim n_2 \sim 1. \tag{2.83}$$

Из (2.77) или (2.81) находим:

$$\Delta'(x) \sim R_0 = R(0), \quad \Delta(x) \sim 1. \tag{2.84}$$

Так как физическая область интегрирования ударного слоя в нормированных переменных (2.49), (2.52) преобразуется в полуполосу постоянной ширины: $0 \leqslant \xi < \xi_\star$, $0 < \eta < 1$, т. е. $\eta \sim 1$. Тогда $f_s \sim 1$, $\omega_s \sim k < 1$ и из (2.82) получаем оценку:

$$y \sim \omega\Delta \sim k\Delta \sim k, \quad \omega \sim k \sim \rho^{-1} < 1. \tag{2.85}$$

С учетом (2.84), (2.85) из (2.66) получаем следующие оценки для всех коэффициентов k_i ($i = 1, \ldots, 7$):

$$k_1 \sim k, \quad \rho k_1 \sim 1, \quad k_2 \sim k_3 \sim k_4 \sim k_5 \sim 1, \quad k_6 \sim k_7 \sim k. \tag{2.86}$$

Все коэффициенты ε_i ($i = 1, \ldots, 5$) по порядку обратны числу Рейнольдса:

$$\varepsilon_1 \sim \varepsilon_2 \sim \varepsilon_4 \sim \varepsilon_5 \sim k\mathbf{Re}^{-1}, \quad \varepsilon_3 \sim \mathbf{Re}^{-1}. \tag{2.87}$$

Коэффициенты, входящие в граничные условия на УВ (2.75) (2.76), имеют следующий порядок:

$$m_{4s} \sim m_{5s} \sim 1, \quad \varepsilon_{6s} \sim \mathbf{Re}^{-1}. \tag{2.88}$$

Из (2.57) следует: $v \sim k$.

Оценки для безразмерных компонентов тензора вязких напряжений $\tau_{ij}(i, j = \xi, \eta, \zeta)$ (2.65) и потоков энергии $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ (2.65) будут

$$\tau_{\xi\xi} \sim \tau_{\eta\eta} \sim \tau_{\zeta\zeta} \sim \tau_{\xi\eta} \sim \tau'_{\xi\xi} \sim \tau'_{\xi\eta} \sim \nabla' \cdot \mathbf{v} \sim X \sim X' \sim Y \sim 1. \tag{2.89}$$

Наконец,

$$\Phi_v \sim k^2, \quad \Phi_\tau \sim k\mathbf{Re}^{-1}. \tag{2.90}$$

Полученные оценки будут использоваться при выводе обобщенных уравнений ВУС (см. п. 10).

9. Коэффициенты сопротивления и теплопередачи в переменных ξ, η.

Коэффициент давления остается в прежнем виде (2.31). Локальный коэффициент трения в направлении вектора набегающего потока (2.32) в переменных ξ, η преобразуется к виду ($u_* = \cos\alpha$, $v_* = \sin\alpha$)

$$C_f = \frac{2}{\mathbf{Re}} \frac{\mu_w \rho_w \cos^2\alpha}{\Delta} \left(\tau_{\xi\eta} - k_7 \tau_{\eta\eta}\right)_w . \tag{2.91}$$

Локальный и суммарный коэффициенты конвективного теплообмена будут:

$$\begin{gathered} C_H = \frac{J'}{\rho_\infty V_\infty^3 \left(H_\infty - H_w\right)} = \frac{\mu_w \rho_w}{\left(H_\infty - H_w\right) \sigma_w \mathbf{Re}\, \Delta} \left[\frac{\partial H}{\partial \eta} + \sigma u_*^2 \left(u \tau_{\xi\eta} + \right.\right. \\ \left.\left. + k_7 v\, \tau_{\eta\eta}\right) - \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{u_*^2 u^2 + v_*^2 v^2}{2}\right)\right]_w , \\ C_{H\Sigma} = \frac{2^\nu}{\left(H_\infty - H_w\right) \mathbf{Re}\, r_w^{\nu+1}} \int\limits_0^x \frac{\mu_w \rho_w}{\sigma_w \Delta} \left[\frac{\partial H}{\partial \eta} + \sigma u_*^2 \left(u\, \tau_{\xi\eta} + k_7 v\, \tau_{\eta\eta}\right) - \right. \\ \left. - \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{u_*^2 u^2 + v_*^2 v^2}{2}\right)\right]_w r_w^\nu dx. \end{gathered} \tag{2.92}$$

Локальный и суммарный коэффициенты сопротивления в переменных ξ, η будут:

$$C_D = \frac{2}{\mathbf{Re}} \frac{\mu_w \rho_w \cos^2\alpha}{\Delta} \left[\tau_{\xi\eta} + \frac{\Delta}{\mu \rho \cos^2\alpha} \left(p_w - \frac{1}{\gamma M_\infty^2}\right) - k_7 \tau_{\eta\eta}\right]_w , \tag{2.93}$$

$$C_{D\Sigma} = \frac{2^{\nu+1}}{\mathbf{Re}} \int\limits_0^x \frac{\mu_w \rho_w \cos^2\alpha}{\Delta} \left[\tau_{\xi\eta} + \frac{\Delta}{\mu \rho \cos^2\alpha} \left(p_w - \frac{1}{\gamma M_\infty^2}\right) - k_7 \tau_{\eta\eta}\right]_w r_w^\nu dx.$$

Здесь безразмерные напряжения трения $\tau_{\xi\eta}$ и $\tau_{\eta\eta}$ даются формулами (2.65).

10. Обобщенные уравнения вязкого ударного слоя с условиями скольжения и скачка температуры на обтекаемой поверхности и обобщенными условиями Ренкина–Гюгонио на головной ударной волне

Главным параметром, по которому будет производиться оценка членов уравнений НС, записанных в переменных ξ, η, будет число Рейнольдса, стремящееся к бесконечности. Малый параметр $k \sim \rho^{-1}$ (степень сжатия газа в ударном слое) будет играть вспомогательную роль. Будем исходить из предположения, что $u \sim 1$, $f \sim 1$. Тогда из уравнений (2.57) следует, что первое уравнение (2.57) есть равенство величин одного порядка O(1). Правая часть второго уравнения имеет O(k). Откуда следует, что $v \sim k$, т. к. $k_1 \sim k$,

$k_2 \sim 1$. Таким образом, уравнения (2.57) не упрощаются, т. е. уравнение неразрывности, следствием которого являются уравнения (2.57), остается в неизменном (точном) виде.

Рассмотрим далее уравнение (2.60) и его следствие (2.67). Инерционные члены в (2.60) имеют O(1) за исключением члена $k_3 uv \sim k$. Если не делать гиперзвукового приближения, т. е. не устремлять k к нулю, то этот член следует оставить.

Далее на основании гипотезы Прандтля, что в пристенном слое силы вязкости и силы инерции имеют один порядок, получаем $\mathbf{Re}\Delta^2 \sim 1$, откуда Δ и, следовательно, y (см. (2.49)) в этом слое имеем порядки $\Delta \sim \mathbf{Re}^{-1/2}$, $y \sim k\mathbf{Re}^{-1/2}$. Порядок этих величин во всем ударном слое, как уже отмечалось раньше (2.85), будет $\Delta \sim 1$, $y \sim k$. Второй член в $(\nabla\tau)_\xi$ в пристеночном слое будет $lk_6/\mathbf{Re}\Delta^2 \sim k\mathbf{Re}^{-1/2}$, т. е. этот член второго порядка теории пограничного слоя и в уравнениях ВУС оставляется.

Следует заметить, что в обобщенном параметре Чепмена–Рубезина $l = \mu\rho x\, H_1 \overline{r}^{2\nu}/u_*$ есть члены $\sim \mathbf{Re}^{-1/2}$ и $\mathbf{Re}^{-1}$, которые при строгом асимптотическом анализе следует опустить. Однако эти члены не изменяют главного порядка как в первом, так и во втором слагаемом в уравнении (2.63). Поэтому их мы будем оставлять в точном виде и далее. Члены с коэффициентами ε_1, $\varepsilon_2 \sim k\mathbf{Re}$ являются внепорядковыми — члены третьего приближения. Однако мы их будем оставлять, т. к. они не повышают порядок уравнения (содержат только сами искомые функции и их первые производные по координатам, см. (2.63)).

Наконец, член $\varepsilon_1 \tau'_{\xi\xi}$ или во втором представлении эквивалентный член $\varepsilon_1 \widetilde{\tau}'_{\xi\xi}$ имеют третий порядок малости $\sim \mathbf{Re}^{-1}$ и должны быть опущены. Однако они содержат три сорта слагаемых: сами искомые функции, их первые производные по координатам и, наконец, вторые производные по продольной координате x, которые доставляют эллиптические свойства в полной системе уравнений НС и будут опускаться в обобщенной системе уравнений вязкого ударного слоя. Действительно (см. (2.65)):

$$\tau'_{\xi\xi} = m_1 \tau_{\xi\xi} + \left(\frac{1}{\mu}\right) D\left(\mu\tau_{\xi\xi}\right), \tag{2.94}$$

где

$$\tau_{\xi\xi} = 2\left(\beta_1 u + k_3 v + D\,u\right) + \left(\overline{\zeta} - \frac{2}{3}\right)\nabla' \cdot \mathbf{v} = \tau^-_{\xi\xi} + \left(\overline{\zeta} + \frac{4}{3}\right) D\,u, \tag{2.95}$$

$$\tau^-_{\xi\xi} = \left(\overline{\zeta} + \frac{4}{3}\right)\left(\beta_1 u + k_3 v\right) + \left(\overline{\zeta} - \frac{2}{3}\right)\left[\rho k_2 \frac{\partial v}{\partial \eta} + \nu\left(n_1 u + n_2 v\right)\right].$$

Оператор D в (2.94) появляется от наличия первой производной по продольной координате x в $\tau_{\xi\xi}$:

$$D(\ldots) = x\,\xi'(x)\,\frac{\partial(\ldots)}{\partial\xi} + \rho k_2 \frac{\partial(\ldots)}{\partial\eta} \equiv x\frac{\partial(\ldots)}{\partial x}.$$

Тогда подстановка $\tau_{\xi\xi}$ (2.95) во второе слагаемое в (2.94) порождает вторые производные по x. Поэтому, если не учитывать вторые производные по маршевой координате x, то выражение (2.94), входящее в $(\nabla\tau)_\xi$, следует записать в виде

$$\left(\tau_{\xi\xi}^{-}\right)' = m_1\tau_{\xi\xi} + \frac{1}{\mu}D\left(\mu\tau_{\xi\xi}^{-}\right) = m_1\left[\tau_{\xi\xi}^{-} + \left(\overline{\zeta} + \frac{4}{3}\right)Du\right] + \frac{1}{\mu}D\left(\mu\tau_{\xi\xi}^{-}\right), \quad (2.96)$$

которое уже не будет содержать вторых производных по маршевой координате x, однако вторые смешанные производные в (2.96) останутся.

Обратимся теперь к выражению $\widetilde{\tau}'_{\xi\xi}$, входящему во второе представление $(\nabla\tau)_\xi$ в (2.63). По определению (2.65)

$$\widetilde{\tau}'_{\xi\xi} = \widetilde{m}_1\tau_{\xi\xi} + \frac{1}{\mu}D\left(\mu\tau_{\xi\xi}\right) = \left(m_1 - \nu\frac{x\,H_1\sin\alpha}{r}\right)\tau_{\xi\xi} + \frac{1}{\mu}D\left(\mu\tau_{\xi\xi}\right). \quad (2.97)$$

Опуская опять вторые производные по x от безразмерной скорости u в (2.97), получим вместо (2.96):

$$\left(\widetilde{\tau}_{\xi\xi}^{-}\right)' = \widetilde{m}_1\tau_{\xi\xi} + \frac{1}{\mu}D\left(\mu\,\tau_{\xi\xi}^{-}\right), \quad \widetilde{m}_1 = m_1 - \nu\frac{x\,H_1\sin\alpha}{r}. \quad (2.98)$$

В итоге «вязкие» члены, входящие в уравнение (2.60) в параболизованном приближении (пренебрежении вторыми производными по маршевой координате), запишутся в двух эквивалентных видах:

$$\begin{aligned}(\nabla\tau)_\xi &= \frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{l}{\mathbf{Re}\Delta^2}\,\tau_{\xi\eta}\right) + \frac{l\,k_6}{\mathbf{Re}\Delta^2}\,\tau_{\xi\eta} + \varepsilon_1\left(\tau_{\xi\xi}^{-}\right)' - \varepsilon_2\tau_{\zeta\zeta} = \\ &= \frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{l}{\mathbf{Re}\Delta^2}\,\tau_{\xi\eta}\right) + \frac{l\,k_6}{\mathbf{Re}\Delta^2}\,\tau_{\xi\eta} + \varepsilon_1\left(\widetilde{\tau}_{\xi\xi}^{-}\right)' + \varepsilon_2\left(\tau_{\xi\xi} - \tau_{\zeta\zeta}\right). \quad (2.99)\end{aligned}$$

Далее рассмотрим порядки членов в выражениях (2.64). Снова члены с множителями $\varepsilon_4 \sim \varepsilon_5 \sim k\mathbf{Re}^{-1}$ являются малыми третьего порядка, и мы, тем не менее, будем их удерживать в уравнении потому, что они не повышают порядок производных по x выше первого. Рассмотрим первый член в третьем выражении (2.64), пропорциональный $(\partial/\partial\eta)\left(\mu\tau_{\eta\eta}\right)$. В невязкой области он пропорционален $\mathbf{Re}^{-1}$, в пристенной области имеет порядок $\mathbf{Re}^{-1/2}$. Однако его удержание возможно только в полной системе уравнений НС. В параболизованных уравнениях ВУС он будет повышать порядок производных по η, и, тем самым, в них не будет хватать одного условия для определения отхода УВ. Поэтому в уравнениях ВУС и обобщенных уравнениях ВУС этот член опускается. Его появление в уравнениях НС дает возможность исследовать навье-стоксовскую структуру УВ.

Вторые производные по маршевой координате x в $(\nabla\tau)_\eta$ будут содержаться в члене $\varepsilon_3\tau'_{\xi\eta}$ (2.64). Действительно, имеем (2.65):

$$\tau'_{\xi\eta} = m_2\tau_{\xi\eta} + \frac{\Delta^2}{l}D\left(\frac{l}{\Delta^2}\tau_{\xi\eta}\right), \quad \tau_{\xi\eta} = \frac{\partial u}{\partial\eta} - k_6u + k_7\left(\beta_2 v + D\,v\right). \quad (2.100)$$

Подстановка $\tau_{\xi\eta}$ в $\tau'_{\xi\eta}$ приводит к появлению второй производной $\partial^2 v/\partial\xi^2$(или $\partial^2 v/\partial x^2$). Поэтому, вводя обозначение для сокращенного выражения для напряжения $\tau^-_{\xi\eta}$, без слагаемого $k_7 Dv$ в (2.100):

$$\tau^-_{\xi\eta} = \frac{\partial u}{\partial\eta} - k_6 u + k_7\beta_2 v, \tag{2.101}$$

$$\left(\tau^-_{\xi\eta}\right)' = m_2\tau_{\xi\eta} + \frac{\Delta^2}{l} D\left(\frac{l}{\Delta^2}\,\tau^-_{\xi\eta}\right), \tag{2.102}$$

не содержащего второй производной от v по ξ (или x).

В итоге, выражение для вязких членов $(\nabla\tau)_\eta$ в обобщенных уравнениях ВУС в переменных ξ, η можно записать в следующих трех видах:

$$\begin{aligned}(\nabla\tau)_\eta &= \varepsilon_3\left(\tau^-_{\xi\eta}\right)' - \varepsilon_4\tau_{\xi\xi} - \varepsilon_5\tau_{\zeta\zeta} = \\ &= \varepsilon_3\left(\tau^-_{\xi\eta}\right)' + \varepsilon_4\left(\tau_{\eta\eta} - \tau_{\xi\xi}\right) + \varepsilon_5\left(\tau_{\eta\eta} - \tau_{\zeta\zeta}\right) = \\ &= \varepsilon_3\left(\tau^-_{\xi\eta}\right)' - \varepsilon_4\tau_{\xi\xi} + \varepsilon_5\left(\tau_{\eta\eta} - \tau_{\zeta\zeta}\right).\end{aligned} \tag{2.103}$$

Важно отметить, что количественно все эти три выражения отличаются друг от друга на малую величину $\sim k\mathbf{Re}^{-1}$.

Обратимся теперь к параболизации уравнения (2.65). Функция $\Phi_v \sim k^2$ и ее следует оставить в обобщенных уравнениях ВУС. Функцию Φ_τ согласно преобразованиям напряжений $\tau'_{\xi\xi}$ и $\tau'_{\xi\eta}$ (2.63) и опускания вторых производных по η следует заменить на

$$\Phi^-_\tau = \varepsilon_1\left(\tau^-_{\xi\xi}\right)' - \varepsilon_2\left(\tau_{\xi\xi} - \tau_{\zeta\zeta}\right) - \rho k_1 k_7\left[\varepsilon_3\left(\tau^-_{\xi\eta}\right)' - \varepsilon_4\tau_{\xi\xi} - \varepsilon_5\tau_{\zeta\zeta}\right]. \tag{2.104}$$

Последние два слагаемых согласно оценкам k_1, k_7, ε_4, ε_5 будут $\sim k^2\mathbf{Re}^{-1}$.

Наконец, уравнение энергии (2.62) после опускания вторых производных по x от H, v_x и v_y принимает следующий вид:

$$x\,\xi'(x)\,u\frac{\partial H}{\partial\xi} - \left(\beta_0 f + x\xi'(x)\frac{\partial f}{\partial\xi}\right)\frac{\partial H}{\partial\eta} = \frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{l}{\mathbf{Re}\sigma\Delta^2}Y\right) + \varepsilon_1\left(X^-\right)', \tag{2.105}$$

где

$$\left(X^-\right)' = m_3 X + \frac{1}{\mu}\,D\left(\mu X^-\right), \quad X^- = \sigma u_*^2\left(u\,\tau_{\xi\xi} + \rho k_2 v\,\tau_{\xi\eta}\right).$$

Важно заметить, что при замене операторов $\frac{1}{a}D(a\,\tau)$ на $\frac{1}{a}D(a\,\tau^-)$ опускаются не только вторые производные по продольной координате x, но и некоторые первые производные по x. Если опускать только производные второго порядка по x, то усложняются выражения для τ^-. Этот более детальный вывод обобщенных уравнений ВУС будет опубликован в последующих статьях.

Итак, система обобщенных уравнений ВУС будет состоять из уравнений (2.57), (2.60) (выражение в нем для $(\nabla\tau)_\xi$ будет (2.99)) или уравнения (2.65) (выражение в нем для Φ_τ будет Φ^-_τ (2.104)), уравнения (2.61) (выражение в нем для $(\nabla\tau)_\eta$ будет (2.103)) и, наконец, уравнения (2.62) и будет

заменяться на уравнение (2.105). Граничные условия на обтекаемой поверхности (2.69)–(2.73) для этой системы уравнений останутся без изменений. Граничные условия на УВ (2.75), (2.76) также останутся без изменений.

Ясно, что полученные выше обобщенные уравнения ВУС будут давать уточнение решения уравнений ВУС, приближая его к решению полных уравнений НС в некотором диапазоне промежуточных чисел Рейнольдса.

Именно при достаточно больших числах Рейнольдса обобщенные уравнения ВУС будут давать решение, близкое к решению уравнений НС. При уменьшении же числа $\mathbf{Re}$ обобщенные уравнения ВУС будут уточнять решение уравнений ВУС, но начиная с некоторого достаточно малого числа Рейнольдса они, так же как и уравнения ВУС и НС, не будут давать физически правильного решения. Например, коэффициент теплопередачи становится больше единицы. Установление нижней границы по числу Рейнольдса применимости обобщенных уравнений ВУС и верхней границы, ниже которой эти уравнения уточняют решение ВУС, может быть получено только численно. Обобщенные уравнения ВУС выведены асимптотическим (в итоге приближенным) методом.

В заключение приведем уравнения ВУС в переменных ξ, η, т. е. опустим в обобщенных уравнениях ВУС члены $\mathrm{O}(\mathbf{Re}^{-1})$, независимо от величины параметра k. Получаем:

$$\left.\begin{aligned}
&u = \frac{\partial f}{\partial \eta}, \rho\,(k_1\,u + k_2 v) = -\left(\beta_0 f + x\,\xi'(x)\,\frac{\partial f}{\partial \xi}\right),\\
&\beta_1 u^2 + x\,\xi'(x)\;u\frac{\partial u}{\partial \xi} - \left(\beta_0 f + x\,\xi'(x)\,\frac{\partial f}{\partial \xi}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial \eta} + k_6 u\right) =\\
&\qquad\qquad = -\frac{x\,\xi'(x)}{\rho\cos\alpha}\,\frac{\partial p}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{l}{\mathbf{Re}\,\Delta^2}\,\tau_{\xi\eta}\right) + \frac{l\,k_6}{\mathbf{Re}\,\Delta^2} + \Phi_v,\\
&\beta_2 u\,v - k_4 u^2 + x\,\xi'(x)\;u\frac{\partial v}{\partial \xi} - \left(\beta_0 f + x\,\xi'(x)\;\frac{\partial f}{\partial \xi}\right)\;\frac{\partial v}{\partial \eta} = -k_5\,\frac{\partial p}{\partial \eta},\\
&x\,\xi'(x)\;u\frac{\partial H}{\partial \xi} - \left(\beta_0 f + x\,\xi'(x)\;\frac{\partial f}{\partial \xi}\right)\;\frac{\partial H}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{l}{\mathbf{Re}\sigma\Delta^2}\,Y\right),
\end{aligned}\right\} \qquad (2.106)$$

где Φ_v сохраняет выражение (2.68),

$$\begin{aligned}
&Y = \frac{\partial H}{\partial \eta} - u_*^2\,u\,\frac{\partial u}{\partial \eta} + \sigma u_*^2\,(u\,\tau_{\xi\eta} + k_2 v\,\tau_{\eta\eta}),\\
&\tau_{\xi\eta} = \frac{\partial u}{\partial \eta} - k_6 u + k_7\beta_2 v, \quad l = \frac{\mu\rho\,x\,H_1\overline{r}^{2\nu}}{u_*},\\
&\tau_{\eta\eta} = \left(\zeta - \frac{2}{3}\right)\left[\beta_1 u + k_3 v + \nu\,(n_1 u + n_2 v)\right].
\end{aligned}$$

При этом входящие в коэффициенты уравнений, в частности в выражение для l, величины H_1, $\overline{r}$ остаются в точном виде, хотя и повышают порядок малости до $\mathrm{O}(\mathbf{Re}^{-1})$ в некоторых их членах.

Условия на УВ (разд. 7) после опускания членов $\mathrm{O}(\mathbf{Re}^{-1})$ для уравнений ВУС будут:

$$
\begin{aligned}
&u\,(\xi,1) = u_i - m_{4s}\frac{\cos\beta_s\sin 2\beta_s}{\mathbf{Re}\,\Delta^2\sin\beta}\,(l\,\tau_{\xi\eta})_{\eta=1}\,,\\
&v\,(\xi,1) = \frac{u_*}{v_*}\,u\,(\xi,1)\,\mathrm{tg}\;\beta_s - \frac{k}{v_*}\frac{\sin\beta}{\cos\beta_s},\\
&p\,(\xi,1) = \frac{1}{\gamma M_\infty^2} + (1-k)\sin^2\beta + \sin 2\,\beta_s\left(\frac{l\,m_5}{\mathbf{Re}\Delta^2}\tau_{\xi\eta}\right)_s,\\
&H\,(\xi,1) = H_\infty - \frac{\mu_s\cos\beta_s}{\mathbf{Re}\sigma_s\sin\beta}Y_s.
\end{aligned}
\tag{2.107}
$$

Заметим, что используемые в литературе [5, 9, 17] условия (2.107) — без учета члена вязкости для $p\,(\xi,1)$, а множители $\cos\beta_s\sin 2\beta_s$ в $u\,(\xi,1)$ и $\cos\beta_s$ в $H\,(\xi,1)$ заменены на единицу. Это вносит ошибку при достаточно больших x при умеренных числах $\mathbf{M}_\infty$, когда отклонение УВ от контура тела становится достаточно большим.

Заключение

Полученные в последнее время результаты показали [19], что упрощенные уравнения Навье–Стокса (уравнения вязкого ударного слоя) с условиями скольжения и скачка температуры на обтекаемой поверхности и головной ударной волне дают правильное значение тепловых потоков и сопротивления в задачах гиперзвукового стационарного ламинарного обтекания затупленных тел в переходном режиме обтекания до высот 120 км на траектории спуска аппарата «Space Shuttle».

Получена новая обобщенная система уравнений вязкого ударного слоя, в которой при $\mathbf{Re} = \rho_\infty V_\infty R_0/\mu_0 \to \infty$ удерживаются члены $\mathrm{O}(1), \mathrm{O}\left(\mathbf{Re}^{-1/2}\right)$, а также члены $\mathrm{O}\left(\mathbf{Re}^{-1}\right)$, не повышающие порядок этой системы по пространственной маршевой координате, что дает возможность применять для ее решения эффективный эволюционно-маршевый метод глобальных итераций по продольному градиенту давления ($1 \div 2$ итерации), разработанный ранее [11, 12]. Неявные методы установления решения уравнений Навье–Стокса требуют $200 \div 300$ итераций по временному разностному шагу. Попутно выявлена роль объемного коэффициента вязкости. Показано, что его учет относится к эффектам третьего порядка и этот коэффициент не входит в уравнения ВУС и обобщенные уравнения ВУС.

Получены также обобщенные условия Ренкина–Гюгонио на головной ударной волне, которые уточняют приближенные классические условия, широко используемые в современных работах по аэротермодинамике, и распространяют область применимости континуальных моделей на область переходного режима обтекания.

Сравнения решений уравнений вязкого ударного слоя показывают их практическое совпадение с решением УНС. Таким же свойством, как ясно

из предыдущего, обладают и обобщенные уравнения вязкого ударного слоя. Полученная модель этих уравнений будет весьма экономной по временным затратам при расчете течений многокомпонентных реагирующих газов, как и классическая модель вязкого ударного слоя [15].

Решения УНС можно будет получить методом глобальных итераций по «эллиптическим» диссипативным членам (первые слагаемые в выражениях (2.7)) вместе с объединением их с глобальными итерациями по продольному (маршевому) градиенту давления $\partial p/\partial x$ в обобщенных уравнениях вязкого ударного слоя.

Обобщенные параболизованные УНС получаются из системы уравнений (2.36)–(2.39) добавлением в уравнение (2.38) справа члена $(1/\mathbf{Re})\,(\partial/\partial y)\,\tau_{yy}$, повышающего его порядок по нормальной координате на единицу, и тогда для этой системы необходимо выставить граничные условия в набегающем потоке (2.17), как для полной системы УНС. Головная УВ будет получаться в результате сквозного расчета от условий в набегающем потоке до обтекаемого тела.

Исследования поддержаны Роснаукой (Гос. контракты 02.740.11.0615 и П594) и Российским фондом фундаментальных исследований (РФФИ) (Грант 11–01–00504 а).

Список литературы

1. *Cheng H.K.* The blunt body problem in hypersonic flow at low Reynolds number // IAS Paper. 1963. № 63–92. 100 p.
2. *Толстых А.И.* О численном расчете сверхзвукового обтекания затупленных тел потоком вязкого газа // Ж. вычисл. математики и мат. физики. 1966. Т. 6. № 1. С. 113–120.
3. *Гершбейн Э.А., Пейгин С.В., Тирский Г.А.* Сверхзвуковое обтекание тел при малых и умеренных числах Рейнольдса // Итоги науки и техники. Сер. Механика жидкости и газа. М.: ВИНИТИ. 1985. Т. 19. С. 3–85.
4. *Лапин Ю.В., Стрелец М.Х.* Внутренние течения газовых смесей. — М.: Наука, 1989. 368 с.
5. *Головачев Ю.П.* Численное моделирование течений вязкого газа в ударном слое. — М.: Наука. Физматлит, 1996. 374 с.
6. *Тирский Г.А.* Современные газодинамические модели гиперзвуковой аэродинамики и теплообмена с учетом вязкости и реальных свойств газа // Современные газодинамические и физико-химические модели гиперзвуковой аэродинамики и теплообмена / Под ред. Л.И. Седова. — М.: Изд-во МГУ, 1994. Ч. 1. С. 9–43.
7. *Тирский Г.А.* Континуальные модели в задачах гиперзвукового обтекания затупленных тел разреженным газом // ПММ. 1997. Т. 61. Вып. 6. С. 903–938.
8. *Рогов Б.В., Соколова И.А.* Обзор моделей вязких внутренних течений // Мат. моделирование. 2002. Т. 14. № 1. С. 41–72.

9. *Васильевский С.А., Тирский Г.А., Утюжников С.В.* Численный метод решения уравнений вязкого ударного слоя // Ж. вычисл. математики и мат. физики. 1987. Т. 27. № 5. С. 741–750.

10. *Ковалев В.Л., Крупнов А.А., Тирский Г.А.* Решение уравнений вязкого ударного слоя методом простых глобальных итераций по градиенту давления и форме ударной волны // Докл. РАН. 1994. Т. 338. № 3. С. 333–336.

11. *Рогов Б.В., Соколова И.А.* Гиперболическое приближение уравнений Навье–Стокса для вязких смешанных течений // Изв. РАН. МЖГ. 2002. № 3. С. 30–49.

12. *Rogov B.V., Tirskiy G.A.* The accelerated method of global iterations for solving the external and internal problems of aerothermodynamics // Proc. 4th Europ. Symp. on Aerothermodynamics for Space Vehicles. 2001, 15–18 Oct. CIRA, Capua, Italy. ESA SP-487. 2002. P. 537–544.

13. *Gao Zhi.* Simplified Navier–Stokes equations // Scilentia Sinica (Series A). 1988. V. 31. № 3. P. 322–339.

14. *Tirskiy G.A.* Up-to-date gasdynamic models of hypersonic aerodynamics and heat transfer with real gas properties // Annu. Rev. Fluid Mech. 1993. V. 25. P. 151–181.

15. *Tirskiy G.A., Utyuzhnikov S.V., Zhluktov S.V.* Numerical investigation of thermal and chemical nonequilibrium flows past slender blunted cones // J. Thermophys. and Heat Transfer. 1996. V. 10. № 1. P. 137–147.

16. *Тирский Г.А.* Уравнения гидродинамики для химически равновесных течений многоэлементной плазмы с точными коэффициентами переноса // ПММ. 1999. Т. 63. Вып. 6. С. 899–922.

17. *Davis R.T.* Numerical solution of the hypersonic viscous shock layer equation // AIAA Journal. 1970. V. 8. № 5. P. 843–851.

18. *Brykina I.G., Rogov B.V., Tirskiy G.A.* Heat transfer and skin friction prediction along the plane of symmetry of blunt bodies for hypersonic rarefied gas flow // Proc. 26th Intern. Symp. on Rarefied Gas Dynamics / Ed. by T. Abe. Kyoto, Japan. 2008. P. 778–783.

19. *Брыкина И.Г., Рогов Б.В., Тирский Г.А.* О применимости континуальных моделей в переходном режиме гиперзвукового обтекания затупленных тел // ПММ. 2009. Вып. 5. с. 700–716

20. *Седов Л.И., Михайлова М.П., Черный Г.Г.* О влиянии вязкости и теплопроводности на течения газа за сильно искривленной ударной волной // Вестн. МГУ. Сер. Физ.-мат. и естеств. наук. 1953. № 3. С. 95–100.

21. *Тирский Г.А.* Условия на поверхностях сильного разрыва в многокомпонентных смесях // ПММ. 1961. Т. 25. № 2. С. 196–208.

22. *Шидловский В.П.* Введение в динамику разреженного газа. — М.: Наука. 1965. 218 с.

23. *Кирютин Б.А., Тирский Г.А.* Граничные условия скольжения на каталитической поверхности в многокомпонентном потоке газа // Изв. РАН МЖГ. 1996. № 1. С. 159–168.

24. *Седов Л.И.* Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. — М.–Л.: Гостехиздат, 1950. 444 С.

25. *Семенов И.Л.* Продольное обтекание тонкой пластины сверхзвуковым потоком разреженного газа. Метод Монте-Карло // Отчет НИИ механики МГУ, 2008. № 4941. 50 с. Деп. ВИНИТИ. 396–В 2009.

3

НОВАЯ ФОРМА СООТНОШЕНИЙ ПЕРЕНОСА «СИЛЫ ЧЕРЕЗ ПОТОКИ» ДЛЯ МНОГОКОМПОНЕНТНЫХ СМЕСЕЙ ГАЗОВ И ПЛАЗМЫ С ТОЧНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ ПЕРЕНОСА И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Г. А. Тирский
Московский Физико-технический институт,
Научно-исследовательский институт механики МГУ им. М.В. Ломоносова

Уравнения гидродинамики для смесей газов и плазмы в настоящее время выводятся двумя принципиально различными способами.

Первый из них — феноменологический, основывается на применении к среде понятий механики сплошной среды, законов сохранения массы, количества движения и энергии и методов термодинамики необратимых процессов. Этот подход обладает большой общностью и может быть применен для широкого класса сред даже в тех случаях, для которых не сформулированы соответствующие кинетические уравнения. Присущий ему недостаток — отсутствие алгоритма вычисления коэффициентов переноса (коэффициентов вязкости, теплопроводности, диффузии, термодиффузии, диффузионного термоэффекта, электропроводности и многих других перекрестных коэффициентов, появляющихся в случае плазмы с электромагнитными полями).

Второй — статистический, основывается на молекулярно-кинетических представлениях о веществе и применяется для вывода уравнений гидродинамики для сред, для которых сформулированы соответствующие кинетические уравнения (разреженный и умеренно плотный газ, идеальная и неидеальная плазма, релятивистский газ и др.). При этом подходе, во-первых, выясняется, при каких условиях среда (жидкость, газ, плазма и др.) может быть описана гидродинамическими (макроскопическими) уравнениями. Во-вторых, при молекулярно-кинетическом подходе возможно получение явных выражений соответствующих коэффициентов переноса при известных (заданных) потенциалах взаимодействия между частицами. Последние добываются или из эксперимента, или из квантово-механических вычислений.

Коэффициенты молекулярного переноса являются фундаментальными характеристиками вещества и выявление их зависимости от гидродинамических переменных, т. е. установление связи между микроскопическими и макроскопическими свойствами вещества, представляет собой одну из основных задач кинетической теории вещества, которая успешно решается для газов и плазмы.

В итоге, однако, феноменологический и кинетический подходы очевидно дают одинаковую структуру универсальных уравнений сохранения массы, количества движения и энергии и оба способа базируются на представлениях сплошной среды, предполагающих введение физически бесконечно малого объема для определения понятия «точка», а с другой стороны — «жидкой частицы», обладающей свойствами самой среды. В одной и той же точке могут присутствовать сразу несколько сортов частиц. Последнее есть также одно из предположений как гидродинамического, так и кинетического подходов. Корпускулярное строение вещества при кинетическом подходе проявляется только при рассмотрении процесса столкновений частиц. Для получения уравнений сохранения в замкнутом виде необходимо знание соотношений переноса (определяющих уравнений среды), чему и посвящена данная глава.

1. Классическая (старая) форма соотношений переноса в виде «потоки через термодинамические силы»

Для замыкания универсальных уравнений сохранения (балансовых уравнений) необходимы соотношения переноса (СП) — выражения для потоков диффузии, тепла и тензора напряжений через причины, их вызывающие.

Классический подход для вывода СП одноатомных и многоатомных газовых смесей основывается на решении при достаточно малых числах Кнудсена систем кинетических уравнений с интегралами столкновений соответственно в форме Больцмана и Ван Чанг–Уленбека. Эти системы уравнений при малых числах Кнудсена решаются с помощью традиционного метода Чепмена–Энскога (МЧЭ) (функции распределения компонентов ищутся в виде асимптотических рядов по целым степеням числа Кнудсена) или методом моментов Грэда (ММГ), которые позволяют получать как уравнения сохранения массы, импульса и энергии для смеси газов (уравнения многокомпонентной гидродинамики и плазмы), так и замыкающие их линейные СП для диффузионных потоков компонентов смеси, потока тепла и тензора напряжений. В классической схеме МЧЭ, развитой Дж. Гиршфелдером, Ч. Кертиссом и Р. Бердом [1, 2], для получения соотношений переноса в многокомпонентных смесях, состоящих из N компонентов, записываются в виде, разрешенном относительно диффузионных потоков $\mathbf{J}_i$ $(i = 1, \ldots, N)$ и потока тепла $\mathbf{J}_q$ через градиенты молярных долей (концентраций) $\mathbf{x}_i = n_i/n$ $(i = 1, \ldots, N)$ компонентов, градиенты давления, температуры и разности массовых внешних сил, действующих на различные компоненты смеси (например, электромагнитные силы). Вязкая часть тензора напряжений при этом линейно зависит от тензора скоростей деформации и дивергенции среднемассовой скорости (сдвиговая и объемная вязкость). В данной главе не рассматривается обращение тензора напряжений, т. е. представление тензора скоростей деформации через тензор напряжений, т. к. эта операция тривиальна. Поэтому далее мы не будем рассматривать уравнение количества движения, а все наши выводы будут

касаться только диффузионно-тепловой части полной системы уравнений многокомпонентной гидродинамики и плазмы.

Итак, в классической форме записи соотношения переноса в виде «потоки через силы» имеют вид [1, 2]:

$$\mathbf{J}_i = \rho \sum_{j=1}^{N} \frac{m_i\, m_j}{m^2}\, D_{ij}\, \mathbf{d}_j - D_i^T\, \nabla \ln T, \quad i = 1, \ldots, N, \tag{3.1}$$

$$\mathbf{J}_q = -\lambda' \nabla T + \sum_{k=1}^{N} h_k \mathbf{J}_k - n\, k\, T \sum_{k=1}^{N} \frac{D_k^T}{\rho_k} \mathbf{d}_k, \tag{3.2}$$

где

$$\mathbf{d}_i = \nabla\, x_i + (x_i - c_i)\, \nabla \ln p + \frac{c_i}{p} \left(\sum_{k=1}^{N} \rho_k \mathbf{F}_k - \rho\, \mathbf{F}_i \right), \quad i = 1, \ldots, N.$$

Здесь $\mathbf{d}_i$, $\mathbf{h}_i$, $\mathbf{m}_i$, $\boldsymbol{\rho}_i$, $\mathbf{x}_i$, $\mathbf{c}_i$, $\boldsymbol{\rho}$, $\mathbf{T}$, $\mathbf{p}$, $\mathbf{n}$, $\mathbf{k}$, $\mathbf{m}$ — векторы диффузионных «сил», удельная энтальпия, молекулярная масса, массовая плотность, молярная и массовая концентрации i-го компонента, плотность, температура, давление, числовая концентрация смеси, постоянная Больцмана, средняя молекулярная масса смеси. Эту форму записи уравнении переноса будем называть далее кратко «потоки через силы», и по ней важно отметить следующие особенности.

Многокомпонентные коэффициенты диффузии D_{ij} и термодиффузии D_i^T, коэффициент λ' даются в виде отношений определителей порядка $N\xi + 1$ к определителям порядка $N\xi$, где ξ — число приближений (число удерживаемых первых коэффициентов в разложении возмущенных вязкостью, теплопроводностью, диффузией частей функций распределения компонентов в ряды по полиномам Сонина (метод Чепмена–Каулинга (МЧК)). Элементы этих определителей выражаются через полные интегральные скобки («скобочные» интегралы), которые, в свою очередь, выражаются известным образом через интегралы столкновений (Ω — интегралы), зависящие от потенциалов взаимодействия между различными парами частиц, от их масс и температуры. Коэффициент λ' в (3.2) не равен обычно определяемому коэффициенту теплопроводности. Согласно выражению (3.2) λ' можно интерпретировать как коэффициент теплопроводности смеси, в которой отсутствуют диффузионные «силы» $\mathbf{d}_i$ $(i = 1, \ldots, N)$, т. е. отсутствуют градиенты относительных молярных концентраций x_i $(i = 1, \ldots N)$, градиент давления и все массовые силы одинаковы ($\mathbf{F}_i = \mathbf{F}$, $i = 1, \ldots N$).

Если в первоначально однородной по пространству газовой смеси создать постоянный по пространству только градиент температуры и измерить коэффициент теплопроводности до того, как проявится диффузионный термоэффект (последнее слагаемое в (3.2)), то это измерение дает коэффициент λ', так называемый «мгновенный» коэффициент теплопроводности. С течением

времени, однако, появятся градиенты концентраций, и диффузионные «силы» $\mathbf{d}_i$ будут нарастать до тех пор, пока не исчезнут диффузионные потоки $\mathbf{J}_i$, (пока не наступит стационарное состояние). Измерение коэффициента теплопроводности в этом стационарном состоянии и даст истинный (экспериментальный) коэффициент теплопроводности λ. Из этого следует, что для получения истинного коэффициента теплопроводности λ в любом приближении и, соответственно, потока тепла, необходимо разрешить соотношения переноса (3.1) относительно векторов $\mathbf{d}_i$ $(i = 1, \dots N)$. Тогда это решение можно записать в виде:

$$\mathbf{d}_i = \frac{\rho}{n^2} \sum_{k=1}^{N} \frac{E_{i\,k}}{m_k} \mathbf{J}_k + \frac{\rho}{n^2} \sum_{k=1}^{N} \frac{E_{i\,k} D'_k}{m_k} \nabla \ln T, \tag{3.3}$$

где E_{ik} — элементы матрицы, обратной к матрице с элементами $m_j D_{ij}$. Подставляя решение (3.3) в (3.2), получим искомое выражение

$$\mathbf{J}_q = -\lambda \nabla T + \sum_{i=1}^{N} h_i \mathbf{J}_i + \frac{\rho\, k\, T}{n} \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} \frac{D_k^T E_{kj}}{m_j \rho_k} \mathbf{J}_j, \tag{3.4}$$

уже с истинным коэффициентом теплопроводности, равным

$$\lambda = \lambda' + \frac{\rho\, k}{n} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \frac{E_{ij}\, D_i^T\, D_j^T}{\rho_i\, m_i}. \tag{3.5}$$

Двойная сумма (последнее слагаемое) в (3.4) представляет собой диффузионный термоэффект, и коэффициенты в ней перед $\mathbf{J}_j$, так же как и двойная сумма в (3.5), являются весьма сложными выражениями в случае многокомпонентных смесей, так как коэффициенты E_{ik} — элементы обратной матрицы к матрице, в которой, в свою очередь, элементами являются отношения определителей порядка $(N\xi + 1)$ и $N\xi$. Для неионизованных смесей, когда термодиффузионные коэффициенты малы, вклад двойной суммы в коэффициент теплопроводности мал (порядка нескольких процентов). Однако в случае плазмы, особенно многократно ионизованной, это приводит к заметной погрешности, так как наличие электронов и ионов в смеси приводит к увеличению диффузионного термоэффекта до величины порядка $z + 1$, где ze — заряд ионов [3]. Вычисление диссипативной функции, а также вычисления по формуле (3.5) показывают, что мгновенное значение коэффициента теплопроводности больше истинного коэффициента теплопроводности, т. е. $\lambda' > \lambda$. Например, для полностью ионизованной водородной плазмы $\lambda' \sim 1,3\lambda$ [4].

Таким образом, классический подход МЧЭ дает для истинного коэффициента теплопроводности и диффузионного термоэффекта весьма сложные выражения, практически мало пригодные для решения задач аэродинамики и тепломассообмена, и поэтому они в полном виде не используются при решении конкретных газодинамических задач, в частности, для течений частично

или полностью ионизованных смесей, когда необходимо учитывать высшие приближения (для ионизованного воздуха $\xi \geqslant 3$, см. далее).

Во-вторых, оценки показывают, что время счета задач гиперзвукового обтекания с использованием соотношений переноса массы и энергии в классической форме «потоки через силы» (3.1), (3.2) растет пропорционально квадрату и выше числа компонентов.

В-третьих, существует еще одно важное обстоятельство, затрудняющее использование выражений (3.1), (3.2). Подстановка этих выражений (под знак div) в уравнения сохранения (баланса) массы компонентов и энергии для смеси в целом приводит к системе уравнений, не разрешенных относительно старших производных по пространственным координатам, поскольку в каждом из уравнений будут присутствовать одновременно вторые производные от всех концентраций и температуры. В настоящее время нет общих методов эффективного численного решения таких систем уравнений даже в приближении различных асимптотически упрощенных по числу Рейнольдса вариантов уравнений Навье–Стокса (уравнений погранслоя, вязкого ударного слоя, параболизованных уравнений Навье–Стокса и др.). Поэтому распространенным подходом к решению уравнений многокомпонентной гидродинамики до сих пор является приближенная модель бинарной диффузии, т. е. вместо уравнений (3.1) используется закон Фика с одним и тем же коэффициентом диффузии для всех компонентов. Для смесей с сильно различающимися молекулярными массами такой подход приводит к неконтролируемой ошибке.

В-четвертых, при использовании модели бинарной диффузии исчезает важный эффект разделения химических элементов, который имеет место всегда в смесях, образованных двумя химическими элементами и более, с разными диффузионными свойствами компонентов. Модель бинарной диффузии с одним коэффициентом диффузии, выбираемым часто волевым образом, приписывает одинаковые диффузионные свойства всем компонентам, что приводит к потере эффекта разделения химических элементов. Эффект разделения элементов был открыт Н. А. Анфимовым и автором данной главы в 1964 г. [5–7] в замороженном пограничном слое, затем позже для химически равновесных [8–11] и неравновесных течений [12, 13], течений с учетом равновесных и неравновесных гетерогенных реакций, в частности при гетерогенном катализе на низкокаталитических покрытиях [12–22].

Сделаем еще несколько общих замечаний, касающихся учета высших приближений, и других. Для одноатомных газов, образованных из электронейтральных частиц, наблюдается быстрая сходимость указанных рядов по полиномам Сонина. Поэтому для получения разумной точности при вычислении коэффициентов переноса достаточно учитывать лишь первые не нулевые члены разложения в методе Чепмена–Каулинга (МЧК). В интервале температур от комнатных до $2000 \div 3000$ К это дает ошибку, не превышающую, как правило, 0,3% для вязкости, 0,5% для теплопроводности и 10% для термодиффузии [2].

Учет высших приближений при расчете коэффициентов переноса становится принципиально существенным в случае частично или полностью ионизованных газовых смесей ($T \geqslant 8000$ K) [4, 20–22]. Заметим, что методы решения кинетических уравнений при малых числах Кнудсена, развитые для нейтральных газов, вполне успешно применяются и в случае плазмы, если рассматривать последнюю как многокомпонентную смесь нейтральных и заряженных частиц и устранять возникающую расходимость при вычислении эффективных (проинтегрированных по углу рассеяния) сечений столкновений заряженных частиц с помощью экранированного кулоновского потенциала или с помощью операции формального обрезания параметра столкновений на длине порядка радиуса Дебая. Некоторые математические усложнения возникают при наличии магнитного поля, однако они вполне преодолеваются с помощью простого обобщения МЧЭ или метода моментов Грэда (ММГ).

Следует отметить, что выражения для коэффициентов переноса, получаемые из решения линейных интегральных уравнений для возмущенных частей функции распределения с помощью как вариационного метода, так и непосредственным разложением в ряды по полиномам Сонина (МЧК), оказываются полностью идентичными [1]. Поскольку эти интегральные уравнения являются самосопряженными, вариационный метод дает монотонно убывающую или монотонно возрастающую сходящуюся последовательность значений коэффициентов переноса (за исключением, может быть, коэффициента термодиффузии). Из этого следует, что в каждом более высоком приближении получается более точное значение, чем в предыдущем, причем не происходит никаких осцилляций с увеличением номера приближения.

Как показывают проведенные к настоящему времени расчеты коэффициентов переноса, скорость сходимости разложений для разных коэффициентов переноса различна и зависит от характера поведения потенциальной функции взаимодействующих частиц (например, «крутизна» потенциала) и от соотношения масс компонентов (в частности, от присутствия в смеси легкого компонента). Для полностью ионизованной плазмы молекулярных газов значения коэффициентов переноса, близкие к точным, дает третье приближение, для слабоионизованных газов порядок приближения для электронных коэффициентов переноса, обеспечивающий необходимую точность, существенно зависит от характера зависимости сечения электрон-атомных столкновений от энергии электрона. Так, в случае частично ионизованного аргона резко выраженный рамзауэровский минимум в этой зависимости, наблюдаемый при низких энергиях электронов, приводит к заметному ухудшению сходимости приближений: при промежуточных степенях ионизации, например, для получения более или менее точного значения электропроводности аргоновой плазмы требуется по крайней мере шестое приближение, а в лорентцевском пределе — даже 12-е приближение не обеспечивает нужной точности [23, 24]. В связи с этим заметим, что формулы для расчета электронных коэффициентов переноса могут быть заметно упрощены, если воспользоваться

малостью отношения массы электрона к массе тяжелых частиц. Разумеется, объем вычислений существенно возрастает, если рассматриваются высшие приближения для коэффициентов переноса тяжелых компонентов (атомов, молекул и ионов), поскольку при этом приходится рассчитывать определители высокого порядка со сложными по структуре элементами, зависящими от отношений масс компонентов, концентраций и температуры.

Частично ионизованная плазма воздуха, образующаяся за головной ударной волной при входе космических аппаратов в атмосферу Земли со второй космической скоростью (11,2 км/с) и выше, содержит (без учета аргона) до одиннадцати компонентов (молекулы, атомы, ионы основных составляющих воздушной смеси и электроны). В задачах тепломассообмена при этих скоростях за счет вдува газообразных продуктов испарения и диссоциации теплозащитных покрытий и их химического взаимодействия с продуктами ионизованного воздуха в ударном слое образуется до нескольких десятков компонентов. Многократно ионизованная плазма с большим числом компонентов образуется в ударном слое около метеороидов, влетающих в атмосферы Земли и других планет. Поэтому расчеты течения в ударном слое многоэлементной частично ионизованной газовой смеси с учетом высших приближений (например, второго — для коэффициента вязкости, третьего — для теплопроводности и термодиффузии) с использованием классического представления «потоки через силы» в виде (3.1), (3.2) оказываются практически неосуществимыми и до сего времени не проводились. Данная глава представляет краткий обзор получения уравнений переноса в более простой («термодинамические силы через потоки»), точной и удобной для решения задач форме вместо (3.1) и (3.2) с учетом высших приближений.

2. Новая точная форма соотношений переноса массы компонентов и тепла смеси, разрешенных относительно градиентов гидродинамических переменных через потоки, — «силы через потоки». Точные соотношения Стефана–Максвелла.

Для устранения указанных выше недостатков соотношений переноса в классическом представлении (3.1), (3.2) автором совместно с А. Ф. Колесниковым было показано, что соотношения переноса для многокомпонентной смеси газов и плазмы в представлении «силы через потоки» могут быть получены без обращения матриц некоторым специальным видоизменением метода решения бесконечной системы алгебраических уравнений для определения коэффициентов разложения возмущенных частей функций распределения в МЧК. При этом первые несколько коэффициентов выражаются через интересующие нас диффузионный и тепловой потоки, которые и могут быть найдены непосредственно, что нам и нужно, из решения общей системы уравнений в любом заданном приближении по числу полиномов Сонина

в разложении возмущенных частей функций распределения. Эти соотношения переноса («силы через потоки») получаются в следующем виде [25–27]:

$$\mathbf{d}_i = \sum_{j=1}^{N} \frac{x_i\, x_j f_{ij}\,(\xi)}{D_{ij}\,(1)} \left(\frac{\mathbf{J}_j}{\rho_j} - \frac{\mathbf{J}_i}{\rho_i} \right) - k_{Ti}\,(\xi)\, \nabla \ln T, \quad i = 1, \ldots, N, \tag{3.6}$$

$$\mathbf{J}_q = -\lambda\,(\xi)\ \nabla T + \sum_{j=1}^{N} \left(h_j + \frac{n\,k\,T}{\rho_j} k_{Tj}\,(\xi) \right) \mathbf{J}_j, \tag{3.7}$$

где $f_{ij}\,(\xi) = f_{ji}\,(\xi) = 1 - \varphi_{ij}\,(\xi)$ — поправочные коэффициенты на высшие приближения. Здесь термодиффузионные отношения $k_{Ti}(\xi)$ $(i = 1, \ldots, N)$, истинный коэффициент теплопроводности $\lambda(\xi)$ сразу выражаются в виде отношения определителей порядка $N(\xi - 1) + 1$ к определителям порядка $N(\xi - 1)$, т. е. определители на N порядков меньше, чем в коэффициентах уравнений переноса (3.1), (3.2). Более того, элементами этих определителей являются непосредственно интегральные скобки полиномов Сонина. Но главный результат состоит, во-первых, в том, что не нужно двойного обращения матриц для вычисления коэффициента теплопроводности $\lambda(\xi)$ и термодиффузионных отношений $k_{Ti}(\xi)$ $(i = 1, \ldots N)$, а также поправочных функций $f_{ij}\,(\xi)$. Это сильно упрощает решение задач. Как и следовало ожидать из общих принципов термодинамики необратимых процессов, структура уравнений переноса (3.6) совпадает со структурой соотношений Стефана–Максвелла в любом приближении МЧК, в (3.6) уточняются только коэффициенты, но не появляются новые слагаемые справа. Уравнения переноса, найденные таким способом, были также получены для случая плазмы с учетом внешнего электромагнитного поля, а также для ионизованных многокомпонентных двухтемпературных смесей (температура электронов не равняется температуре тяжелых частиц) [28, 29].

Соотношения переноса в форме (3.6), (3.7) были получены также методом термодинамики необратимых процессов двумя способами. Первый состоял в получении соотношений переноса в форме «потоки через силы» [30], а затем обращения этой формы к виду «силы через потоки». Второй состоял в получении соотношений переноса сразу в виде «силы через потоки» [31]. Кроме того, соотношения переноса были получены методом термодинамики необратимых процессов и для неидеальных (умеренно плотных) смесей газов и жидкостей [30, 31]. В работе [32] эти соотношения были получены также и из кинетического уравнения Энскога для плотных смесей газов.

Соотношения переноса в форме (3.6), (3.7) вместе с параболизованными уравнениями Навье–Стокса (упрощенные с помощью отбрасывания в уравнении импульса в проекции на нормаль к обтекаемой поверхности и уравнении энергии членов со вторыми производными по маршевой (продольной) координате, которые имеют порядок обратного числа Рейнольдса) дают систему уравнений, разрешенных относительно первых производных по нормали

к обтекаемой поверхности от концентраций, температуры, а также от потоков диффузии и тепла, т. е. в нормальной форме Коши [33–35], для которой разработаны в коллективе автора данной главы, весьма эффективные численные итерационно-маршевые методы [36], см. также главу 16. Преимущество соотношений переноса в форме «силы через потоки» состоит еще в том, что эта форма записи как бы специально приспособлена для вычисления всех эффективных коэффициентов переноса в конечном виде в случае локально-термохимически равновесных течений с меняющимися в потоке концентрациями химических элементов. Учет многокомпонентной диффузии в этом случае с использованием новой формы соотношений переноса позволил без больших вычислений обнаружить явление разделения химических элементов.

Независимым способом вывода соотношений переноса и расчета коэффициентов переноса, альтернативным МЧЭ, является метод моментов Грэда (ММГ). Было показано [27], что применение этого метода в случае многокомпонентной газовой смеси дает возможность уже в известном приближении $13N$ моментов получить соотношения переноса массы компонентов в форме уравнений Стефана–Максвелла, т. е. в форме «силы через потоки», и выражение для потока тепла, записываемое сразу с «истинным» коэффициентом теплопроводности. Однако получаемые при этом результаты соответствуют по точности расчета коэффициентов переноса только второму приближению в разложении возмущенных частей функций распределения компонентов по полиномам Сонина в МЧК и тем самым не дают хорошей точности для плазмы.

Вместе с тем автором было указано, что возможно обобщение ММГ на случай учета большего числа полиномов и соответствующих им коэффициентов в разложении функции распределения, что позволяет развить схему получения выражений для диффузионных и тепловых потоков в многокомпонентной газовой смеси в форме «силы через потоки» с коэффициентами переноса, вычисляемыми в любом приближении. Это было сделано в работе [27]. В ней обсуждаются также различные формы представления соотношений переноса и выражений для коэффициентов переноса в произвольном порядке приближений, что позволяет, в частности, установить непосредственную связь результатов, получаемых различными независимыми подходами, и яснее проследить те ограничения, которые фактически используются при применении обычной и модифицированной процедуры решения системы кинетических уравнений Больцмана в МЧЭ.

Таким образом, соотношения переноса (3.6), (3.7) с точными и более простыми коэффициентами переноса получены без двойного обращения матриц и служат основой для решения гидродинамических задач, связанных с исследованиями течений многокомпонентных смесей газов и плазмы и, в частности, как бы специально представлены в форме, удобной для преобразования уравнений движения многокомпонентных смесей термохимически равновесных

течений к каноническому виду с полным набором всех эффективных коэффициентов переноса, даваемых в явном виде, что будет изложено далее.

3. Приложения

3.1. Уравнения гидродинамики для термохимически равновесных течений многоэлементной плазмы. Новая форма соотношений переноса (3.6), (3.7) была применена к преобразованию уравнений многокомпонентной гидродинамики для случая термохимически равновесных течений электронейтральных и заряженных компонентов (плазма), когда температуры всех сортов частиц и температуры их внутренних степеней свободы совпадают между собой (термическое равновесие), и время протекания самой медленной реакции много меньше характерного гидродинамического времени, например времени пребывания жидкой частицы в рассматриваемой области течения, т. е. рассматриваются течения с «быстрыми» реакциями. Идея преобразования уравнений состоит в использовании условий равновесия (закон действующих масс) для исключения диффузионных потоков и градиентов концентраций продуктов реакций в линейно независимых реакциях. Для многокомпонентных покоящихся смесей ($\mathbf{v} = 0$, $\nabla p = 0$) с произвольным конечным числом протекающих химических реакций выражение для эффективного коэффициента теплопроводности $\lambda_{\text{eff}} = \lambda + \lambda_r$, было получено Дж. Гиршфелдером [37] и Р. Брокау [38], для частично ионизованных химически равновесных смесей — И.А. Кринбергом [39]. Здесь λ_r — так называемый реакционный коэффициент теплопроводности, который в сумме с обычным коэффициентом теплопроводности дает эффективный коэффициент теплопроводности λ_{eff}. Эти исследования и ряд других работ в этой области не решают вопрос полного и точного гидродинамического описания термохимически равновесных течений многокомпонентных смесей газов и плазмы с разными диффузионными свойствами компонентов, поскольку были выполнены вне контекста исходной полной системы уравнений сохранения массы компонентов и энергии и содержат ряд существенных явных и неявных упрощающих предположений.

Во-первых, уравнение энергии для термохимически равновесных течений записывались в ранних работах 60-х годов вольным образом так же, как и для однородного газа, только с заменой обычного коэффициента теплопроводности λ на λ_{eff}.

Во-вторых, эти работы ограничивались вычислением только λ_{eff} и только в изобарических условиях ($\nabla p = 0$). Учет градиента давления приводит в уравнении энергии к появлению дополнительного слагаемого (см. (3.8)).

В-третьих, вывод λ_r основан на использовании соотношений переноса массы компонентов в форме Стефана–Максвелла, записанного в низших приближениях без учета эффектов термо- и бародиффузии.

В-четвертых, для случая плазмы предполагается квазинейтральность (около электропроводящих стенок-электродов в слое Дебая квазинейтральность нарушается) и отсутствие поля внешних электромагнитных сил.

В-пятых, в литературе рассматривается перенос тепла и массы компонентов только с заданным (фиксированным) элементным составом, обычно равным элементному составу набегающего потока по всему полю течения, т. е. без учета диффузии элементов, которая с необходимостью появляется при наличии градиента температуры или бародиффузии, или главным образом разных диффузионных свойств компонентов (см. (3.9), (3.10)). Таким образом, в работах автора [10, 11] было показано, что в общем случае для термохимически равновесных течений смесей не существует первых интегралов с постоянными концентрациями химических элементов ($c_j^* = \mathrm{const}$) и нулевыми диффузионными потоками элементов ($\mathbf{J}_j^* = 0,\ j = 1, \ldots, L$ — число элементов, из которых составлена вся N — компонентная реагирующая смесь). Учет диффузии элементов в термохимически равновесных течениях приводит к появлению еще целого ряда эффективных перекрестных коэффициентов переноса, в результате чего диффузионный поток какого-либо элемента зависит от градиентов концентраций всех других элементов.

Наконец, исходные формулы для получения λ_{eff} основывались на использовании низших приближений — первых ненулевых коэффициентов при отыскании коэффициентов переноса в виде рядов по полиномам Сонина в МЧК.

Автором настоящей главы на основании точных соотношений переноса (3.6), (3.7) были получены все эффективные коэффициенты переноса в конечном виде в любом приближении без каких-либо допущений и ограничений.

Идея вывода эффективных коэффициентов переноса и соответствующих уравнений баланса массы компонентов и энергии смеси состоит в использовании условий химического равновесия (закона действующих масс Гульберга–Вааге для химических реакций и условий равновесия Саха́ для реакций ионизации) как первых интегралов уравнений многокомпонентной смеси, которых будет N–L. Вычисляя ∇c_i $(i =, \ldots, N - L)$ через ∇T, ∇p и ∇c_j^* $(j =, \ldots, L)$ и вычисляя потоки диффузии продуктов реакций $\mathbf{J}_i (i = 1, \ldots N - L)$ через ∇T и $\mathbf{J}_j^*$ $(j = 1 \ldots, L)$, с использованием условий равновесия получаем для потока тепла [10, 11, 21, 26]:

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_q &= -\frac{\mu}{\sigma_{\mathrm{eff}}} \left[\nabla h + a \nabla \ln p + \sum_{j=1}^{L} \left(a_j^* \nabla c_j^* + \frac{\sigma_{\mathrm{eff}}}{\mu} b_j^* \mathbf{J}_j^* \right) \right], \\ \sigma_{\mathrm{eff}} &= \frac{\mu \left(c_p + c_{pr} \right)}{\lambda + \lambda_r}. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Здесь c_j^* и $\mathbf{J}_j^*$ соответственно массовая концентрация (доля) и массовый диффузионный поток j-го элемента. Слагаемые в (3.8), пропорциональные ∇p, ∇c_j^* и $\mathbf{J}_j^*$, в литературе отсутствовали, оставался только первый

член $\sim \nabla h$. Для коэффициентов a, a_j^*, b_j^* и c_{pr}, λ_r получены явные выражения [10, 11, 21, 26]. Соотношения переноса массы элементов получены в виде:

$$\mathbf{d}_j^{(e)} = -\frac{S_j}{\mu}\,\mathbf{J}_j^* + \frac{m_j\,S_j}{\mu}\sum_{l=1}^{L} a_{jl}^{(e)}\,\mathbf{J}_l^*, \quad j = 1, \ldots, L, \tag{3.9}$$

где векторы диффузионных сил элементов равны

$$\mathbf{d}_j^{(e)} = \nabla\, c_j^* + \left(K_{Tj}^* - \frac{m_j}{m}\,\delta_j^{(e)}\right)\nabla \ln T + K_{pj}\,\nabla \ln p, \quad j = 1, \ldots, L. \tag{3.10}$$

Входящие в выражения (3.8), (3.9), (3.10) коэффициенты получены в явном виде как функции температуры, давления и c_j^* $(j = 1, \ldots, L)$. Уравнения переноса (3.8), (3.9) вместе с уравнениями баланса энергии для смеси в целом и баланса массы элементов будут давать замкнутую точную систему уравнений диффузионно-тепловой части полной системы уравнений гидродинамики термохимически равновесных течений. Из (3.10) следует, что даже при неучете эффектов термо- и бародиффузии, т. е. когда $K_{Tj}^* = K_{pj}^* = 0$, $j = 1, \ldots L$, будет происходить разделение элементов из-за того, что $\delta_j^{(e)} \neq 0$ при разных коэффициентах бинарной диффузии. Если все бинарные коэффициенты равны, то, как следует из теории, $\delta_j^{(e)} \equiv 0$ и из (3.9), (3.10) и уравнения баланса массы элементов (уравнения неразрывности элементов) будет следовать при неучете эффектов термо- и бародиффузии тривиальное решение: $c_j^* = \mathrm{const}$, $\mathbf{J}_j^* \equiv 0$, $j = 1, \ldots L$, т. е. разделения элементов не будет. Эти приближения только и использовались во всей литературе.

Были проведены обширные численные расчеты всех эффективных коэффициентов переноса, и на плоскости «давление–температура» для равновесного воздуха были определены области, в которых необходимо вычислить эффективные коэффициенты переноса в нужных приближениях для обеспечения их точности с ошибкой не более 5% [21].

3.2. Эффект разделения химических элементов. Численное решение задачи гиперзвукового обтекания затупленного тела воздухом в рамках решения уравнений замороженного пограничного слоя на холодной идеально каталитической сфере ($T_w \ll T_s$) радиуса $R = 1$ м, летящей со скоростями от 4 до 18 км/с на высоте $30 \div 50$ км, показало, что при учете многокомпонентной диффузии происходит значительное разделение элемента кислорода: вместо $(\mathrm{C}_\mathrm{O}^*)_\infty = 0{,}23$ в набегающем потоке на стенке концентрация $(\mathrm{C}_\mathrm{O}^*)_w$ увеличивалась до 0,29. Коэффициент теплообмена увеличивается до 8% по сравнению с бинарной моделью диффузии, когда использовался закон Фика без учета термодиффузии и высших приближений для коэффициентов переноса [22].

Эффект разделения элементов из-за разных диффузионных свойств компонентов был обнаружен автором с сотрудниками для химически замороженных течений при обтекании тела с поверхностью с разной каталитической

активностью по отношению к рекомбинации — атомарных кислорода и азота [13–16].

В последнем случае были исследованы два варианта. В первом варианте поверхность была идеально каталитической по отношению к рекомбинации атомов кислорода и некаталитическая по отношению к атомам азота. Во втором варианте каталитические свойства кислорода и азота менялись местами.

В первом случае было обнаружено, что $(\mathrm{C}_{\mathrm{O}}^{*})_w$ слабо уменьшается от максимального значения 0,27 с увеличением атомов на внешней границе погранслоя $(\mathrm{C}_{\mathrm{O}} + \mathrm{C}_{\mathrm{N}})_e$ от 0,231 до 1,0. Для второго случая $(\mathrm{C}_{\mathrm{O}}^{*})_w$ уменьшается существенно (от 0,231 до 0,194). Таким образом, в противоположность случаю идеально (полностью) каталитической стенки по отношению к рекомбинации как атомов O, так и атомов N, концентрация элементов кислород/азот на стенке может увеличиваться/уменьшаться в зависимости от избирательности каталитических свойств по отношению к атомам O и N даже в случае полной диссоциации на внешней границе погранслоя, когда к стенке диффундируют только атомы O и N (в замороженном погранслое молекулы в нем не образуются), обладающие близкими диффузионными свойствами.

Далее было показано, что диффузионное разделение элементов при обтекании некаталитической поверхности появляется и при неравновесных гомогенных химических реакциях в потоке из-за существенного различия констант скоростей реакций рекомбинации атомов O и N.

В случае уноса массы теплозащитного покрытия или вдува инородного газа со стороны обтекаемой поверхности влияние многокомпонентной диффузии и разделения элементов на тепловые потоки и силы вязкого трения может быть много больше, чем в чистом воздухе, если в погранслое или вязком ударном слое (большие, умеренные и малые числа Рейнольдса) одновременно присутствуют легкие (H_2) и тяжелые (SiO_2, SiO) компоненты. Этот вопрос на сегодняшний день не исследован [40].

Итак, главный вывод по разделению химических элементов состоит в следующем. При равных коэффициентах бинарной диффузии для всех компонентов (что для диссоциированного и ионизованного газа строго никогда не выполняется) эффект разделения химических элементов в потоке и на стенке исчезает независимо от избирательного каталитического воздействия стенки на рекомбинацию атомов и нейтрализацию ионов (разные константы скоростей каталитических реакций) и независимо от констант скоростей гомогенных реакций. Этот эффект появляется только при точном описании диффузии в смесях с разными диффузионными свойствами компонентов.

3.3. Дальнейшие применения новой формы уравнений переноса. В планетную астрономию внедряется новая форма уравнений переноса («силы через потоки») [41].

А.Ф. Колесниковым с использованием новой формы соотношений переноса для двухтемпературной плазмы с температурой электронов T_e не равной

температуре тяжелых (остальных) частиц ($T_h \neq T_e$) был исследован механизм влияния этой термической неравновесности на форму и отход головной ударной волны, а также ее влияния на навье-стоксовскую структуру [42, 43].

Была рассмотрена (численно) задача о сверхзвуковом движении затупленного тела через слабоионизованный аргон, для которой имеется эксперимент [44].

Был обнаружен глобальный амбиполярный термо-бародиффузионный эффект в профилях концентрации ионов внутри структуры УВ и пограничного слоя. Этот эффект состоит в появлении сильной диффузии ионов вверх против потока и возникновении эффекта диффузионного предвестника. Толщина слоя этого предвестника зависит от отношения T_e/T_h и может значительно превышать отход УВ, если температура электронов в набегающем потоке достаточно высока. УВ работает как «ионный термобародиффузионный насос», доставляя заряженные частицы обратно к набегающему потоку. Ионный перенос через ударный слой работает как «эстафета»: термодиффузия в пограничном слое $\rightarrow$ баротермодиффузия внутри скачка — обычная диффузия вне структуры скачка со стороны набегающего потока. В итоге фактически работает амбиполярное электрическое поле, возникающее за счет разделения заряда в ударном слое. При некоторых условиях амплитуда этого электрического поля становится достаточной для начала ионизации внутри структуры скачка.

Обнаружено, что развитая модель с точным описанием амбиполярной диффузии в двухтемпературной плазме объясняет некоторые «аномальные» эффекты в структуре УВ, уменьшая отход и ослабляя интенсивность головного скачка при обтекании тела сверхзвуковым ионизованным аргоном при степени ионизации выше 10^{-3}. Дальнейшее исследование этой задачи, основывающейся на новой форме соотношений переноса, по-видимому, может объяснить многие экспериментальные результаты по размыванию головного скачка перед телом, движущимся в предварительно ионизованном потоке.

Заключение

Новая форма соотношений переноса в виде «термодинамические силы через потоки» вместе с уравнениями баланса массы компонентов и энергии, записанных в параболизованном приближении (с пренебрежением членов $O(1/\mathbf{Re})$ [45, 46]), представляет систему уравнений, разрешенную относительно первых производных от концентраций, температуры, продольной (маршевой) компоненты вектора скорости, потоков диффузии, тепла и касательных напряжений, для которой развиты в коллективе автора настоящей главы оригинальные эффективные численные методы решения внешних и внутренних задач аэродинамики. Четвертый порядок аппроксимации по нормальной к обтекаемой поверхности координате, итерационно-маршевые методы глобальных итераций (нужны всего $1 \div 2$ итерации для получения решения

с точностью 1% в противоположность методу установления, требующему даже для неявных схем до нескольких сотен итерационных шагов по времени).

Таким образом, сделан важный шаг в рациональной постановке задач сверх- и гиперзвукового обтекания тел и их решений с учетом равновесных и неравновесных реакций, многокомпонентной диффузии в смесях и плазме с разными диффузионными свойствами компонентов (разными бинарными коэффициентами диффузии) при возможном уносе массы с поверхности обтекаемого тела или с различной ее каталитической активностью. Все эти задачи важны для проектирования новых гиперзвуковых аппаратов и для развиваемой в последние годы автором настоящей главы аэротермобаллистики космических тел, влетающих в атмосферы Земли и планет со сверхорбитальными скоростями.

Исследования поддержаны Роснаукой (Гос. контракты 02.740.11.0615 и П594) и Российским фондом фундаментальных исследований (РФФИ) (Грант 11-01-00504 а).

Список литературы

1. *Curtiss C.F., Hirschfelder J.O.* Transport Properties of Multicomponent Gas Mixtures // J. of Chemical Physics. 1949. V. 17, № 6. P. 550–555.
2. *Гиршфелдер Дж., Кертисс Ч., Берд Р.* Молекулярная теория газов и жидкостей. — М.: ИЛ. 1962. 929 с.
3. *Chapman S.* Thermal Diffusion in Ionized Gases // Proc. of the Physical Society. London. 1958. V. 72. Pt. 3. № 465. P. 353–363.
4. *Devoto R.S.* Transport properties of ionized monatomic gases // Phys. Fluids. 1966. V. 9, № 6. P. 1230–1240.
5. *Анфимов Н.А.* О некоторых эффектах, связанных с многокомпонентным характером газовых смесей // Изв. АН СССР. Сер. Механика и машиностр. 1963. № 5. С. 117–123.
6. *Тирский Г.А.* Определение эффективных коэффициентов диффузии в ламинарном многокомпонентном пограничном слое // Доклады АН СССР. 1964. Т. 155, № 6. С. 1278–1281.
7. *Анфимов Н.А.* Диффузионное разделение смеси газов при наличии диссоциации // Доклады АН СССР. 1964. Т 156. № 6. С. 1316–1319.
8. *Суслов О.Н., Тирский Г.А., Щенников В.В.* Описание химически равновесных течений с учетом реакции ионизации в рамках уравнений Навье–Стокса и Прандтля // Ж. прикладн. механики и технич. физики. 1971. № 1. С. 73–89.
9. *Vasil'evskiy S.A., Tirskiy G.A.* Rigorous Modeling of the PuH Chemical Equilibrium Flows with Reference to Hypersonic Aerodynamic and Heat Transfer Problems // Proc. West East High Speed Flow Fields 2002. Aerospace Application from High Subsonic to Hypersonic Regimes. Marseille, France. 2002, 22-26 April. CIMNE. Barselona, Spain. 2003. P. 221–232.
10. *Тирский Г.А.* Уравнения низкотемпературной многокомпонентной плазмы в условиях химического и ионизационного равновесия // Энциклопедия по низкотемпературной плазме. Под ред. В.Е. Фортова. — М.: Наука. МАИК. Наука/ Интерпериодика. 2000. Т. 1. С. 523–536.

11. *Тирский Г.А.* Уравнения гидродинамики для химически равновесных течений многокомпонентной плазмы с точными коэффициентами переноса // ПММ. 1999. Т. 63. Вып. 6. С. 905–939.

12. *Tirskiy G.A., Vasil'evskiy S.A.* Elements separation in hypersonic flow over a body due to the mu1ti-component diffusion, non-equilibrium homogeneous chemical reactions and heterogeneous surface recombination // Proc. of the 23 Internat. Symp. оп Shock Waves. Fort Worth, Texas, USA. 2001, July 22–27. P. 231–238.

13. *Ковалев В.Л., Суслов О.Н.* Асимптотические формулы для исследования тепломассообмена в химически неравновесном пограничном слое на каталитической поверхности // Доклады РАН. 1995. Т. 345, № 4. С. 483–486.

14. *Ковалев В.Л.* Моделирование процессов диффузии при описании химически неравновесных течений у каталитической поверхности // Вестник МГУ. Сер. 1. Математика. Механика. 1995. № 1. С. 86–89.

15. *Ковалев В.Л., Суслов О.Н.* Эффект диффузионного разделения химических элементов на каталитической поверхности // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газов. 1988. № 1. С. 115–121.

16. *Стрелец М.Х.* Турбулентный пограничный слой на пластине в сверхзвуковом потоке равновесно диссоциированного и ионизованного газа // Инженерно-физический журнал. 1975. Т. 24, № 4. С. 682–689.

17. *Tirskiy G., Vasil'evskiy S., Kovalev V.* Elements Separation in Hypersonic Flow over a Body Due to the Multicomponent Diffusion. Non-equilibrium Homogeneous Chemical Reactions and Heterogeneous Surface Recombination // 23rd Intern. Symp. on Shock Waves. Paper 2783. Real Gas–Non-equilibrium 2. 2000, July 23–27. P. 1018–1024.

18. *Васильевский С.А.* Расчет течения и теплопередачи в окрестности оси симметрии затупленного тела с учетом диффузии элементов и высших приближений для коэффициентов переноса // Исслед. по гиперзв. аэродинам. и теплообмену с учетом неравновесн. химич. реакций. Под ред. Г.А.Тирского. — М.: Изд-во МГУ. 1987. С. 30–45.

19. *Васильевский С.А., Тирский Г.А.* Эффект диффузии элементов и его влияние на теплообмен в химически равновесных течениях многокомпонентного газа // Современ. газодинамич. и физ.-хим. модели гиперзв. аэродинамики и теплообмена. Под ред. ак. Л.И. Седова. 1994. Ч. I. С. 138–177. — М.: Изд-во МГУ.

20. *Васильевский С.А., Соколова И.А., Тирский Г.А.* Точные уравнения и коэффициенты переноса для многокомпонентной смеси газов и частично ионизованной плазмы // Ж. прикладн. механики и технич. физики. 1984. № 4. С. 15–24.

21. *Васильевский С.А., Соколова И.А., Тирский Г.А.* Определение и вычисление эффективных коэффициентов переноса для химически равновесных течений частично диссоциированных и ионизованных смесей газов // Ж. прикладн. механики и технич. физики. 1986. № 1. С. 68–79.

22. *Васильевский С.А., Тирский Г.А.* Влияние многокомпонентной диффузии и высших приближений для коэффициентов переноса на теплопередачу при гиперзвуковом обтекании затупленного тела // Прикладные вопросы аэродинамики летательных аппаратов. Киев: Наукова думка. 1984. С. 100–103.

23. *Devoto R.S.* Transport Coefficients of Partially Ionized Argon // Phys. Fluids. 1967. V. 10, № 2. P. 354–364.

24. *Митчнер М., Кригер Ч.* Частично ионизованные газы. — М.: Мир, 1976. 496 с.

25. *Генс А.В., Тирский Г.А.* Уравнения гидродинамики для многокомпонентных смесей с коэффициентами переноса в высших приближениях // Изв. АН СССР. МЖГ. 1972. № 6. С. 153–157.

26. *Колесников А.Ф., Тирский Г.А.* Уравнения гидродинамики для частично ионизованных многокомпонентных смесей газов с коэффициентами переноса в высших приближениях // Молекулярная газодинамика. — М.: Наука. 1982. С. 20–44.

27. *Жданов В.М., Тирский Г.А.* Применение метода моментов к выводу уравнений переноса газа и плазмы с кинетическими коэффициентами в высших приближениях // ПММ. 2003. Т. 67. Вып. 3. С. 406–433.

28. *Колесников А.Ф., Тирский Г. А.* Соотношения Стефана–Максвелла для диффузионных потоков плазмы в магнитном поле // Изв. АН СССР. МЖГ. 1984. № 4. С. 148–154.

29. *Колесников А.Ф., Тирский Г.А.* Гидродинамические уравнения и уравнения переноса для ионизованных многокомпонентных двухтемпературных смесей газов // Сб. докл. 5-й Всесоюзн. школы по моделям механики сплошной среды. Рига, 1979. «Модели в механике сплошной среды». Новосибирск: Изд-во ИТПМ СО АН СССР. С. 114–134.

30. *Колесниченко А.В., Тирский Г.А.* Соотношения Стефана–Максвелла и поток тепла для неидеальных многокомпонентных сплошных сред // Числен. методы механики сплошн. среды. Новосибирск: Изд-во ВЦ СО АН СССР. 1976. Т. 7. № 4. С. 106–121.

31. *Тирский Г.А* Гидродинамическое описание химически равновесных течений частично ионизованных неидеальных смесей газов // Некоторые вопросы механики сплошной среды. — М.: Изд-во МГУ, 1978. С. 114–143.

32. *Тирский Г.А., Крупа В.Г.* Уравнения гидродинамики многокомпонентных неидеальных смесей газов // Проблемы современной механики. Сб., посвящ. 85-летию ак. Г. Г. Черного. — М.: Изд-во МГУ. 2008. С. 535–553.

33. *Тирский Г.А.* Уравнения движения частично ионизованных многокомпонентных смесей газов в нормальной форме Коши с точными коэффициентами переноса // Научн. труды Ин-та механики МГУ. 1974. № 32. С. 6–22.

34. *Тирский Г.А.* Современные газодинамические модели гиперзвуковой аэродинамики и теплообмена с учетом вязкости и реальных свойств газа // Современ. газодинамические и физ.-хим. модели гиперзвуковой аэродинамики и теплообмена. Под ред. Л. И. Седова. 1994. Ч. 1. С. 9–43. — М.: Изд-во МГУ.

35. *Tirskiy G.A* Up-to-day Gasdynamic Models of Hypersonic Aerodynamics and Heat Transfer with Real Gas Properties // Annual Rev. Fluid Mech. 1993. V. 25. P. 151–181.

36. *Rogov B.V., Tirskiy G.A.* The Accelerated Method of Global Iterations for Solving the External and Internal Problems of Aerothermodynamics // Proc. IV Europ. Symp. on Aerothermodynamics for Space Vehicles. 2001, 15–18 Oct. CIRA, Capua, Italy. ESA SP–487. 2002. P. 537–544.

37. *Hirschfelder J.O.* Heat Transfer in Chemical Reaction Mixtures // J. Chem. Physics. 1957. V. 26. P. 108–112.

38. *Brokaw R.S.* Thermal Conductivity of Gas Mixtures in Chemical Equilibrium 2 // J. Chem. Physics. 1960. V. 32. № 4. P. 936–939.

39. *Кринберг И.А.* Влияние реакций ионизации на теплопроводность плазмы // ТВТ. 1965. Т. 3. № 6. С. 838–844

40. *Тирский Г.А.* Анализ химического состава ламинарного многокомпонентного пограничного слоя на поверхности горящих пластиков // Космические исследования. 1964. Т. 11. № 4. С 571–594 С.

41. *Маров М.Я., Колесниченко А.В.* Введение в планетную астрономию. — М.: Наука. 1987. 456 с.

42. *Kolesnikov A.F.* Stefan–Maxwell Relation for Multicomponent Ambipolar Diffusion and Thermal-Baro Diffusion Effects in Two-Temperature Plasmas // AIAA Paper. 2000. № 2000–2570. 10 p.

43. *Kolesnikov A.F.* Mechanism of the Ion Baro- Thermal Diffusion Pumping in Weakly Ionized Shock Layer // AlAA Paper. 2000. № 2000–2871. 7 p.

44. *Lowry H., Smith M. at. all.* Ballistic Range Teste in Weakly Ionized Argon // AlAA Paper. 1999. № 99–4822. 11 p.

45. *Tirskiy G.A.* The General Gasdynamic Model for the Problems of Hypersonic Flow past Blunt Nosed Bodies over the whole Range of Reynolds Numbers // Proc. 3rd Europ. Symp. оп Aerothermodynamics for Space Vehicles: ESTEC. 24–26 Nov. 1998. Noordwijk, the Netherlands: ESA SP-426, 1999. P. 127–135.

46. *Tirskiy G.A.* Continuum models for the problem of hypersonic flow of rarefied gas over blunt body // Systems Analysis Modeling Simulation. (SAMS). 1999. V. 34. № 4. P. 205–240.

4

ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ СКОЛЬЖЕНИЯ НА КАТАЛИТИЧЕСКОЙ СТЕНКЕ В МНОГОКОМПОНЕНТНОМ МНОГОТЕМПЕРАТУРНОМ ХИМИЧЕСКИ РЕАГИРУЮЩЕМ ПОТОКЕ ГАЗА С ВОЗБУЖДЕННЫМИ ВНУТРЕННИМИ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ ЧАСТИЦ

Б. А. Кирютин, Г. А. Тирский
Московский Физико-технический институт,
Научно-исследовательский институт механики МГУ им. М.В. Ломоносова

Учет скольжения и скачков температуры и концентраций компонентов в качестве граничных условий для полных или параболизованных уравнений Навье–Стокса позволяет, как известно, заметно улучшить решения в задачах гиперзвукового обтекания для тепловых потоков и вязкого трения до чисел Кнудсена $\mathbf{Kn} = O(1)$. В настоящей работе эти условия для многокомпонентной смеси газов обобщены на учет гетерогенных химических реакции и различную каталитическую активность колебательных степеней свободы молекул. Температуры колебательных степеней свободы компонентов предполагаются различными. При выводе указанных условий дается обобщение метода Максвелла–Лоялки на учет релаксации колебательных степеней свободы. Окончательные результаты представлены в виде, удобном для решения задач обтекания, в частности граничные условия для концентрации записаны через истинные концентрации компонентов на стенке.

1. Кинетическое обоснование газодинамических уравнений в случае релаксации внутренних степеней свободы для многокомпонентных химически реагирующих смесей газов

1.1. Кинетические уравнения и нулевое приближение. Для смеси газов с внутренними степенями свободы рассмотрим функцию распределения $f_{i\alpha\beta}\left(\mathbf{u}, \varepsilon^R_{i\alpha}, \varepsilon^V_{i\beta}, \mathbf{r}, t\right)$ (полуклассическое приближение). Эта функция определяется из кинетических уравнений Ванг–Чанга–Уленбека [1, 2]:

$$\frac{\partial}{\partial t} f_{i\,\alpha\beta} + \mathbf{u}\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} f_{i\,\alpha\beta} = \frac{1}{K} L^{(0)}_{i\alpha\beta} + L^{(1)}_{i\,\alpha\beta}. \tag{4.1}$$

Здесь i — номер сорта частиц, α — номер вращательного квантового уровня частицы, $\varepsilon^R_{i\,\alpha}$ — соответствующая вращательная энергия, β — номер колебательного квантового уровня частицы, $\varepsilon^V_{i\,\beta}$ — соответствующая колебательная энергия, $\mathbf{r}$ — радиус-вектор точки, t — время, K — формально малый параметр [2, 3].

Интеграл столкновений справа в (4.1) разбит на две части. Слагаемое $L^{(1)}_{i\alpha\beta}$ дает вклад в изменение функции распределения за счет процессов с «затрудненной» передачей энергии при столкновении частиц (столкновения редкого типа или медленные процессы), слагаемое $L^{(0)}_{i\,\alpha\beta}$ соответствует процессам с «легкой» передачей энергии (столкновения быстрого типа или быстрые процессы). К быстрым процессам в континуальном режиме относятся TT-процессы (упругие, т. е. изменяются только поступательные энергии сталкивающихся частиц) и TR-процессы (поступательно-вращательные, т. е. происходит быстрый обмен между поступательной и вращательной модами). Сюда также относятся резонансные столкновения с VV-обменом (колебательно-колебательным) между одинаковыми молекулами. При таких столкновениях суммарная колебательная энергия сохраняется.

К медленным процессам относятся TV–, RV– и, вообще говоря, VV' — процессы (т. е. резонансный обмен колебательной энергией между молекулами разного сорта), например, столкновения между молекулами O_2 и N_2. Столкновения, проводящие к химическим реакциям, в большинстве случаев относятся к медленным процессам.

Решение, согласно методу Чепмена–Энскога, будем искать в виде разложения по параметру K

$$f^{(1)}_{i\alpha\beta} = f^{(0)}_{i\alpha\beta}\left(1 + K\,\Phi_{i\,\alpha\beta}\right). \tag{4.2}$$

Подставляя (4.2) в (4.1) и сравнивая члены при одинаковых степенях K, получим в нулевом и первом приближениях соответственно уравнения:

$$L^{(0)}_{i\,\alpha\beta}\left(f^{(0)}_{i\,\alpha\beta}\right) = 0, \tag{4.3}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\, f^{(0)}_{i\,\alpha\beta} + \mathbf{u}\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\, f^{(0)}_{i\,\alpha\beta} - L^{(1)}_{i\,\alpha\beta}\left(f^{(0)}_{i\,\alpha\beta}\right) = I^{(0)}_{i\,\alpha\beta}\left(\mathbf{\Phi}\right), \tag{4.4}$$

где $I^{(0)}_{i\,\alpha\beta}$ — линеаризованный интеграл столкновений $L^{(0)}_{i\,\alpha\beta}$, $\mathbf{\Phi}$ — означает полный набор функций $\Phi_{i\alpha\beta}$, т. е. $I^{(0)}_{i\,\alpha\beta}$ зависит от совокупности $\Phi_{j\sigma\varepsilon}$ с разными индексами j, σ, ε.

Единственным решением уравнений (4.3) является максвелл–больцмановское распределение [2–4]:

$$f^{(0)}_{i\alpha\beta} = \frac{n_i}{Q^R\,Q^V}\left(\frac{m_i}{2\pi kT}\right)^{3/2}\exp\left(-\frac{m_i\mathbf{c}^2}{2\,kT} - \frac{\varepsilon^R_{i\alpha}}{kT} - \frac{\varepsilon^V_{i\beta}}{kT^V_i}\right), \tag{4.5}$$

$$Q^R = \sum_\alpha \exp\left(-\frac{\varepsilon^R_{i\alpha}}{kT}\right), \quad Q^V = \sum_\beta \exp\left(-\frac{\varepsilon^V_{i\alpha}}{kT^V_i}\right), \quad \mathbf{c} = \mathbf{u} - \mathbf{v},$$

где n_i, m_i — числовая плотность и масса молекул,$\mathbf{v}$ — среднемассовая скорость смеси, k — постоянная Больцмана, Q^R и Q^V — статсуммы.

1.2. Гидродинамические уравнения в нулевом приближении. Балансовые уравнения для гидродинамических переменных в нулевом приближении получаются умножением уравнений (4.1) на инварианты столкновений и последующим интегрированием по пространству скоростей $\mathbf{u}$ и суммированием

по энергетическим уровням α и β. Вычисляя при этом все выражения по функции (4.5), получим систему газодинамических уравнений для многокомпонентного газа с общей поступательно-вращательной температурой T и различными температурами колебательных степеней свободы компонентов T_i^V:

$$\rho\frac{d}{dt}c_i = \dot{\omega}_i, \quad \frac{d}{dt}\rho = -\rho\mathrm{div}\ \mathbf{v}, \quad \rho\frac{d}{dt}\mathbf{v} = -\mathrm{grad}\,p, \tag{4.6}$$

$$\rho\frac{d}{dt}e = -p\mathrm{div}\ \mathbf{v}, \quad \rho\frac{d}{dt}\left(c_i e_i^V\right) = \dot{\omega}_i^V,$$

где $c_i = \rho_i/\rho$ — массовая концентрация, ρ_i — массовая плотность i-го компонента, ρ — плотность смеси, p — давление, e — энергия на единицу массы, e_i^V — колебательная энергия i-го компонента на единицу массы, $\dot{\omega}_i$ — изменение концентраций за счет химических реакций, $\dot{\omega}_i^V$ — изменение колебательной энергии за счет нерезонансных столкновений.

В этом приближении имеются химические реакции и релаксация колебательных степеней за счет нерезонансных столкновений; вязкость, теплопроводность и диффузия компонентов отсутствуют.

1.3. Первое приближение. Для получения первого приближения следует подставить выражение (4.2) в правую часть уравнения (4.4) и искать его решение в соответствии с видом производной в левой части (4.4) [3, 4]:

$$\Phi_{i\,\alpha\beta} = \sum_j \mathbf{c}_{i\,\alpha\beta}^{(j)} \cdot \mathbf{d}_j + \mathbf{A}_{i\,\alpha\beta} \cdot \frac{\partial T}{\partial \mathbf{r}} + \sum_j \mathbf{A}_{i\,\alpha\beta}^j \cdot \frac{\partial T_j^V}{\partial \mathbf{r}} + \\ + \widetilde{B}_{i\,\alpha\beta} : \widetilde{e}^{(d)} + D_{i\,\alpha\beta}\mathrm{div}\ \mathbf{v} + G_{i\,\alpha\beta}. \tag{4.7}$$

Здесь $\mathbf{d}_i$ — векторы диффузионных сил, скалярные $D_{i\alpha\beta}$ и $G_{i\alpha\beta}$, векторные $\mathbf{A}_{i\alpha\beta}$, $\mathbf{A}_{i\alpha\beta}^j$ и $\mathbf{c}_{i\alpha\beta}^{(j)}$ и тензорные $\widetilde{B}_{i\,\alpha\beta}$ неизвестные коэффициенты являются функциями T, T_i^V, $\varepsilon_{i\alpha}^R$, ε_β^V, $\mathbf{c}$, n_i и определяются из соответствующих линейных интегральных уравнений и через них определяются коэффициенты переноса. В частности, $D_{i\alpha\beta}$ определяет коэффициенты объемной вязкости [5], $G_{i\alpha\beta}$ определяет релаксационный добавок к давлению и связан с химическими реакциями и релаксацией колебательных температур [3]. Для гиперзвуковых течений слаборазреженного газа эти эффекты малы и поэтому соответствующие члены в (4.7) далее опускаются.

Представим функцию (4.7) в более удобном для дальнейшего виде. В кинетической теории диффузионные потоки $\mathbf{J}_i = \rho_i(\mathbf{v}_i - \mathbf{v})$ вычисляются по формулам

$$J_i = \sum_{\alpha,\beta} \int\!\!\int\!\!\int_{-\infty}^{+\infty} m_i \mathbf{c}\, f_{i\,\alpha\beta} d\mathbf{u}, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{4.8}$$

Подставляя сюда выражения (4.2), с учетом (4.7) получаем соотношения переноса для $\mathbf{J}_i$ через градиентные вектора $\mathbf{d}_i$, ∇T и ∇T_i^V. Разрешая эти

уравнения относительно векторов $\mathbf{d}_i$ и подставляя их в (4.7), получим, что функции $\Phi_{i\alpha\beta}$ можно записать в виде

$$\Phi_{i\alpha\beta} = \sum_j Q^j_{i\alpha\beta}\mathbf{W}_i\cdot\mathbf{J}_j - \sum_j A^j_{i\alpha\beta}\mathbf{W}_i\cdot\operatorname{grad}\left(\ln\left(T^V_j\right)\right) - \\ - B_{i\alpha\beta}\mathbf{W}_i\mathbf{W}_i : \widetilde{e}^{(d)} - A_{i\alpha\beta}\mathbf{W}_i\cdot\operatorname{grad}\left(\ln\left(T\right)\right), \quad (4.9)$$

где мы учли, что коэффициенты в (4.7) являются тензорами первого и второго рангов и зависят только от вектора $\mathbf{W}_i = \sqrt{m_i/(2kT)}\,\mathbf{c}$, из которого можно представить эти коэффициенты только в виде (4.9), где уже Q, A, B будут искомыми скалярными функциями, зависящими от $\mathbf{W}_i^2$.

Для дальнейшего введем интегральные скобки:

$$n_i\left\langle h_{i\alpha\beta}\right\rangle_i = \sum_{\alpha,\beta}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int\!\!\int h_{i\alpha\beta}\, f^{(0)}_{i\alpha\beta}\, d\mathbf{u}, \quad n\left\langle h_{i\alpha\beta}\right\rangle = \sum_i n_i\left\langle h_{i\alpha\beta}\right\rangle_i, \quad (4.10)$$

где $h_{i\alpha\beta}$ — любая функция координат, времени, скорости молекулы $\mathbf{u}$ и ее вращательной и колебательной энергии. Для обеспечения единственности решения интегральных уравнений (4.4) в виде (4.9) достаточно потребовать [4], чтобы концентрации компонентов, макроскопическая скорость газа $\mathbf{v}$, средняя колебательная энергия каждого компонента, а также суммарная энергия активных степеней свободы определялись нулевым приближением, т. е. потребуем выполнения равенств:

$$\left\langle\Phi_{i\alpha\beta}\right\rangle_i = 0, \quad \left\langle m_i\mathbf{u}\Phi_{i\alpha\beta}\right\rangle = 0, \quad (4.11)$$

$$\left\langle\varepsilon^V_{i\beta}\Phi_{i\alpha\beta}\right\rangle_i = 0, \quad \left\langle\left(m_i\frac{\mathbf{c}^2}{2} + \varepsilon^R_{i\alpha}\right)\Phi_{i\alpha\beta}\right\rangle = 0. \quad (4.12)$$

Искомые величины $Q^j_{i\alpha\beta}$, $A^j_{i\alpha\beta}$, $A_{i\alpha\beta}$, $B_{i\alpha\beta}$ зависят от переменных $\mathbf{W}_i^2$, $\varepsilon^R_{i\alpha}$, $\varepsilon^V_{i\beta}$. Разложим эти величины в тройные ряды по полиномам Сонина $S^{(k)}_l$ от $\mathbf{W}_i^2$, Ванг–Чанга–Уленбека $P^k_{i\alpha}$ от $\varepsilon^R_{i\alpha}$ и $P^k_{i\beta}$ от $\varepsilon^V_{i\beta}$ [2]. Учитывая условия ортогональности этих полиномов, а также (4.8), (4.11), (4.12) с точностью до первых ненулевых членов разложения, получим:

$$\Phi_{i\alpha\beta} = b_i\mathbf{W}_i\mathbf{W}_i : \widetilde{e}^{(d)} + \frac{2}{\rho_i}\sqrt{\frac{m_i}{2kT}}\,\mathbf{W}_i\cdot\mathbf{J}_i - \\ - \left(a_i^T\, S^{(1)}_{3/2} + a_i^R\,\boldsymbol{\varepsilon}^R_{i\alpha}\right)\mathbf{W}_i\cdot\frac{\partial}{\partial\,\mathbf{r}}\ln\left(T\right) - a_i^V\boldsymbol{\varepsilon}^V_{i\beta}\mathbf{W}_i\cdot\frac{\partial}{\partial\,\mathbf{r}}\ln\left(T^V_i\right), \quad (4.13)$$

где

$$\boldsymbol{\varepsilon}^R_{i\alpha} = \frac{\varepsilon^R_{i\alpha} - \left\langle\varepsilon^R_{i\alpha}\right\rangle_i}{kT}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}^V_{i\beta} = \frac{\varepsilon^V_{i\beta} - \left\langle\varepsilon^V_{i\beta}\right\rangle_i}{kT^V_i}, \quad S^{(1)}_{3/2} = 5/2 - \mathbf{W}_i^2.$$

Коэффициенты a_i^T, a_i^R, a_i^V, b_i могут быть найдены из (4.4) следующим образом. После вычисления производных в левой части этого уравнения получается выражение, линейное по тензорам $\mathbf{J}_j$, $\widetilde{e}^{(d)}$, $\nabla \ln T$ и $\nabla \ln \left(T_i^V\right)$.

Так как эти тензоры не зависят от $\mathbf{u}$, в правой части (4.4) их можно вынести из-под знака интеграла. Приравняв теперь коэффициенты при одинаковых тензорах в правой и левой частях, получим для коэффициентов a_i^T, a_i^R, a_i^V, b_i, c_i^V, c_i^R интегральные уравнения:

$$\begin{aligned}
I_{i\alpha\beta}^{(0)}\left(\mathbf{h}^1\right) &= \left(\boldsymbol{\varepsilon}_{i\alpha}^R - S_{3/2}^{(1)}\right) u_y, \\
I_{i\alpha\beta}^{(0)}\left(\mathbf{h}^{2,\,l}\right) &= 2\, W_{il}\, W_{iy}, \quad l = x, y, z, \\
I_{i\alpha\beta}^{(0)}\left(\mathbf{h}^3\right) &= \delta_{ij} \boldsymbol{\varepsilon}_{i\beta}^V u_y, \\
h_{i\alpha\beta}^1 &= -W_{iy}\left(a_i^T S_{3/2}^{(1)} + a_i^R \boldsymbol{\varepsilon}_{i\alpha}^R\right), \\
h_{i\alpha\beta}^{2,l} &= -b_i\, W_{il} W_{iy}, \quad l = x, y, z, \\
h_{i\alpha\beta}^{3(j)} &= -a_j^V\, \delta_{ij} \boldsymbol{\varepsilon}_{i\beta}^V\, W_{iy}, \quad j = 1, \ldots, N.
\end{aligned} \tag{4.14}$$

Здесь выписаны не все уравнения, а только те из них, которые понадобятся в дальнейшем.

1.4. Уравнения Навье–Стокса и коэффициенты переноса. Применяя стандартную процедуру получения гидродинамических уравнений [2, 9] с функцией распределения в первом приближении (4.2), (4.13), получим:

$$\rho \frac{d}{dt}\left(c_i\, e_i^V\right) = -\mathrm{div}\ \mathbf{q}_i^V + \sum_\beta \varepsilon_{i\beta}^V\, \dot{n}_{i\beta}, \quad \frac{\partial}{\partial t}\rho_i = -\mathrm{div}\ \left(\rho_i\, \mathbf{v} + \mathbf{J}_i\right) + \dot{\omega}_i, \tag{4.15}$$

$$\rho \frac{d}{dt}\mathbf{v} = \mathrm{div}\ \widetilde{P}, \quad \rho \frac{d}{dt} e = -\mathrm{div}\ \mathbf{q} + \widetilde{e} : \widetilde{P},$$

где

$$\begin{aligned}
\widetilde{P} &= -nkT\widetilde{g} + 2\,\mu\, \widetilde{e}^{(d)}, \\
\mathbf{q}_i^V &= e_i^V\, \mathbf{J}_i - \lambda_i^V \mathrm{grad}\ T_i^V, \\
\mathbf{q} &= \sum_i h_i\, \mathbf{J}_i - \lambda^a \mathrm{grad}\, T - \sum_i \lambda_i^V\, \mathrm{grad}\, T_i^V.
\end{aligned} \tag{4.16}$$

Здесь $\widetilde{g}$ — метрический тензор, $\widetilde{e}^{(d)}$ — девиатор тензора скоростей деформаций. Система уравнений (4.15), (4.16) полностью совпадает с полученной феноменологическим путем [10]. Кроме того, изложенный здесь метод также дает следующие выражения для источниковых членов и коэффициентов переноса:

$$\dot{n}_{i\beta} = \sum_{\alpha} \iiint\limits_{-\infty}^{+\infty} L^{(1)}_{i\alpha\beta} d\mathbf{u}, \quad \dot{\omega}_i = m_i \sum_{\beta} \dot{n}_{i\beta}, \quad \mu = \frac{kT}{2} \sum_i b_i\, n_i,$$
$$\lambda_i^V = \sqrt{\frac{2kT}{m_i}}\, \frac{n_i\, m_i\, a_i^V c_i^V}{2}, \quad \lambda^a = \sum_i \left(\lambda_i^T + \lambda_i^R\right), \tag{4.17}$$
$$\lambda_i^R = \sqrt{\frac{2kT}{m_i}}\, \frac{n_i\, m_i\, a_i^R c_i^R}{2}, \quad \lambda_i^T = -\frac{5}{4} k\, n_i \sqrt{\frac{2\,kT}{m_i}}\, a_i^T.$$

Отметим, что в рассматриваемом релаксационном случае коэффициенты переноса определяются только сечениями упругих столкновений.

В общем случае произвольной частоты неупругих столкновений (в том числе и большой, когда слагаемые справа в уравнении (4.1) имеют один порядок), зависимость коэффициентов вязкости и диффузии от сечений неупругих столкновений слабая и для наших целей ею можно пренебречь. Зависимость коэффициента теплопроводности от неупругих столкновений учитывается с высокой точностью поправкой Эйкена [4].

2. Граничные условия для химически реагирующего газа с различными колебательными температурами компонентов

Хорошо известно, что обычно применяемые к гидродинамическим уравнениям (4.15), (4.16) условия прилипания, равенства температур стенки и газа на ней и т.д. справедливы лишь в нулевом приближении по числу Кнудсена [6]. При учете первого приближения по числу Кнудсена асимптотическое разложение (4.2) с учетом (4.13) в слое Кнудсена становится несправедливым при любом сколь угодно малом числе Кнудсена, т. к. оно не удовлетворяет на кинетическом уровне граничным условиям для функции распределения на стенке. Следовательно, в этом слое несправедливы и гидродинамические уравнения (4.15), (4.16). Таким образом, когда этот слой имеет существенную толщину (т. е. при больших числах Кнудсена), внутри слоя Кнудсена необходимо решать кинетическую задачу с заданными истинными граничными условиями на стенке для функции распределения. При этом асимптотическое разложение (4.2), (4.5), (4.13) является внешним и дает верхнее граничное условие для кинетической задачи в слое Кнудсена. Решение этой задачи даст эффективные (фиктивные) граничные условия для гидродинамических уравнений (4.15), (4.16), которые называются условиями скольжения и скачка температуры.

В данной работе эта задача решается с учетом релаксации колебательных степеней свободы молекул и возможных гетерогенных реакций. Возможна произвольная каталитичность стенки относительно аккомодации различных степеней свободы молекул газа на стенке.

2.1. Кинетические граничные условия. Итак, будем рассматривать течение около стенки многокомпонентной термохимически неравновесной смеси газов с гетерогенными химическими реакциями и различными колебательными температурами компонентов смеси (T может отличаться от T_i^V; T_i^V и T_j^V могут быть различны при $i \neq j$), так называемое модовое приближение. Граничное условие для функции распределения зададим в виде:

$$\begin{gathered} f_{i\alpha\beta}^{\uparrow} = (1-\theta_i)\ f_{i\alpha\beta}^{\downarrow} + (\theta_i - \gamma_i)\ f_{i\alpha\beta}^{w}, \qquad u_y > 0, \\ f_{i\alpha\beta}^{w} = f_{i\alpha\beta}^{[0]}\left(n_i = n_{wi}, \quad T = T_r, \quad T_i^V = T_{ri}^V, \quad \mathbf{v} = 0\right). \end{gathered} \tag{4.18}$$

Здесь γ_i — доля от числа падающих на стенку частиц, которая появляется ($\gamma_i < 0$) или исчезает ($\gamma_i > 0$) за счет гетерогенных химических реакций, θ_i — доля диффузно отраженных частиц. Вместо вспомогательных параметров T_r и T_{ri}^V можно ввести коэффициенты аккомодации колебательной энергии (β_i^V) и энергии активных (поступательная и вращательная) степеней свободы (β):

$$\beta_i^V = \frac{T_{ri}^V - T_i^V}{T_w - T_i^V}, \quad \beta = \frac{T_r - T}{T_w - T}, \tag{4.19}$$

где T_w — температура стенки. Условия (4.18), (4.19) являются обобщением обычных зеркально–диффузных граничных условий [3] на случай с различными колебательными температурами компонентов и гетерогенными химическими реакциями. Вспомогательные величины n_{wi} в (4.18) могут быть получены из следующих соображений. Если гетерогенные химические реакции не протекают ($\gamma_i = 0$), то все падающие на стенку молекулы i-го сорта отражаются. Тогда из условия баланса падающих и отраженных молекул i-го компонента

$$\sum_{\alpha,\beta} \iiint\limits_{u_y>0} u_y\, f_{i\alpha\beta}^{\uparrow}\,(\gamma_i = 0, y_1 = 0)\ d\mathbf{u} = -\sum_{\alpha,\beta} \iiint\limits_{u_y<0} u_y\, f_{i\alpha\beta}^{\downarrow}\,(y_1 = 0,)\ d\mathbf{u} \tag{4.20}$$

и определяются параметры n_{wi}. Ось Oy перпендикулярна стенке, оси Ox и Oz направлены вдоль стенки. Система координат — декартова.

Отметим, что часто считается, что n_{wi} — концентрация компонентов на стенке, на самом деле это просто вспомогательный параметр задачи.

Действительно, из кинетической теории газов для истинной концентрации на стенке n_{si} имеем очевидное выражение

$$n_{si} = \sum_{\alpha,\beta} \left\{ \iiint\limits_{u_y>0} f_{i\alpha\beta}^{\uparrow}\, d\mathbf{u} + \iiint\limits_{u_y<0} f_{i\alpha\beta}^{\downarrow}\, d\mathbf{u} \right\}. \tag{4.21}$$

В работе [7] показано, что величина n_{wi} и реальная концентрация на стенке n_{si} различаются между собой.

Для дальнейших целей удобно линеаризовать $f^w_{i\alpha\beta}$ относительно $f^{(0)}_{i\alpha\beta}(x, y = 0, z)$. Получим

$$f^w_{i\alpha\beta} = f^{(0)}_{i\alpha\beta}\left(1 + K\phi^w_{i\alpha\beta}\right), \tag{4.22}$$

где

$$\phi^w_{i\alpha\beta} = \frac{n_{wi} - n_i}{n_i} + \beta\frac{T_w - T}{T}\left(\boldsymbol{\varepsilon}^R_{i\alpha} - S^{(1)}_{3/2}\right) + \beta^V_i\frac{T_w - T^V_i}{T^V_i}\boldsymbol{\varepsilon}^V_{i\beta} - \sqrt{\frac{m_i}{2\,kT}}\,\mathbf{v}\cdot\mathbf{W}_i. \tag{4.23}$$

2.2. Асимптотическое уравнение и нулевое приближение внутренней задачи. Легко видеть, что асимптотическое решение (4.2), (4.5), (4.13) уравнений (4.1) не удовлетворяет граничным условиям (4.18), (4.19), (4.20). Следовательно, согласно общей процедуре построения решения задач с сингулярным вырождением (уравнение (4.1) содержит малый параметр перед старшей производной), необходимо ввести в рассмотрение область около стенки (в данном случае слой Кнудсена) и построить там внутреннее, удовлетворяющее кинетическим граничным условиям (4.18), (4.19), (4.20), решение и срастить его с внешним решением (4.2), (4.5), (4.13). Для этого введем в пристеночном слое Кнудсена новую координату, перпендикулярную стенке, $y_1 = y/K$, которая в этом слое имеет порядок O(1). Тогда кинетическое уравнение (4.1) примет вид

$$\frac{\partial}{\partial t}f_{i\alpha\beta} + u_x\frac{\partial}{\partial x}f_{i\alpha\beta} + \frac{1}{K}u_{y_1}\frac{\partial}{\partial y}f_{i\alpha\beta} + u_z\frac{\partial}{\partial z}f_{i\alpha\beta} = \frac{1}{K}L^{(0)}_{i\alpha\beta} + L^{(1)}_{i\alpha\beta}. \tag{4.24}$$

Асимптотическое решение в слое Кнудсена (внутреннее решение) будем искать в виде:

$$f_{i\alpha\beta} = f^{[0]}_{i\alpha\beta}\left(1 + K\phi_{i\alpha\beta}\right). \tag{4.25}$$

Тогда для нулевого приближения $f^{[0]}_{i\alpha\beta}$ получим задачу:

$$u_y\frac{\partial}{\partial y_1}f^{[0]}_{i\alpha\beta} = L^{(0)}_{i\alpha\beta}\left(f^{[0]}_{i\alpha\beta}\right), \tag{4.26}$$

$$f^{[0]}_{i\alpha\beta}(y_1 \to \infty) = f^{(0)}_{i\alpha\beta}(y = 0).$$

На стенке функция распределения $f^{[0]}_{i\alpha\beta}$ должна удовлетворять граничным условиям (4.18), (4.19), (4.20) с точностью до O(K).

Далее везде будем рассматривать случай малых и умеренных гетерогенных реакций, т. е.

$$\gamma_i = O(K). \tag{4.27}$$

Отметим здесь для примера, что на реальных низкокаталитических теплозащитных плитках, изготовленных на основе SiO_2, вероятность реакции рекомбинации $\gamma \sim 0{,}01$ (см. [11]).

Убедимся теперь, что функция

$$f^{[0]}_{i\alpha\beta}\left(x, y_1, z\right) \equiv f^{(0)}_{i\alpha\beta}\left(x, y = 0, z\right), \tag{4.28}$$

для всех y_1, является решением искомой задачи в нулевом приближении. Действительно, эта функция удовлетворяет соотношениям (4.26) в силу (4.3), а принимая во внимание (4.22) и (4.27), легко видеть, что функция распределения (4.28) удовлетворяет граничным условиям (4.18), (4.19) и (4.20) с точностью до $\mathrm{O}(K)$. Таким образом, (4.28) является решением внутренней задачи в нулевом приближении.

2.3. Постановка задачи для первого приближения. Исследуем далее первое приближение. Условия сращивания асимптотических разложений для первого приближения дают:

$$\phi_{i\alpha\beta}\left(y_1\right) - y_1 \frac{\partial}{\partial y} \ln\left(f^{(0)}_{i\alpha\beta}\Big|_{y=0}\right) - \Phi_{i\alpha\beta}\left(y = 0\right) \to 0, \quad \text{при} \quad y_1 \to \infty. \tag{4.29}$$

Подставляя разложение (4.25) в (4.24) с учетом найденного нулевого приближения, получим уравнение для первого приближения

$$\frac{\partial}{\partial t} f^{(0)}_{i\alpha\beta} + u_x \frac{\partial}{\partial x} f^{(0)}_{i\alpha\beta} + u_y \frac{\partial}{\partial y_1}\left(f^{(0)}_{i\alpha\beta}\,\phi_{i\alpha\beta}\right) + u_z \frac{\partial}{\partial z} f^{(0)}_{i\alpha\beta} = \\ = f^{(0)}_{i\alpha\beta} I^{(0)}_{i\alpha\beta}\left(\boldsymbol{\varphi}\right) + L^{(1)}_{i\alpha\beta}\left(f^{(0)}_{i\alpha\beta}\right). \tag{4.30}$$

Здесь $\boldsymbol{\varphi}$ — полный набор функций $\phi_{j\sigma\varepsilon}$, т. е. j, σ, ε пробегают все возможные значения.

Чтобы получить граничное условие на стенке для первого приближения $\phi_{i\alpha\beta}$, подставим (4.22) и (4.25) в (4.18). Учитывая (4.27) и нулевое приближение (4.28), получим

$$\phi^{\uparrow}_{i\alpha\beta} = \left(1 - \theta_i\right)\, \phi^{\downarrow}_{i\alpha\beta}\left(-u_y\right) + \theta_i\, \phi^{w}_{i\alpha\beta} - \gamma_i. \tag{4.31}$$

Соотношения (4.29–(4.31) представляют собой задачу для первого приближения. Эта задача не имеет пока аналитического решения даже в случае простого газа [4].

2.4. Метод Максвелла–Лоялки и граничные условия. Для получения граничных условий скольжения воспользуемся методом Максвелла–Лоялки [8]. Для этого получим некоторые интегралы уравнения (4.30). С учетом найденного нулевого приближения (4.28) для внутренней задачи, уравнение (4.30) перепишем в виде

$$u_y \frac{\partial}{\partial y_1}\, \phi_{i\,\alpha\beta} - I^{(0)}_{i\alpha\beta}\left(\boldsymbol{\varphi}\right) = K\left(x, z\right), \tag{4.32}$$

где $K(x,z)$ включает все члены уравнения (4.30), не зависящие от y_1. Интеграл $I^{(0)}_{i\alpha\beta}$ не содержит нерезонансных столкновений. Значит, суммарная колебательная энергия для каждого компонента смеси сохраняется:

$$\left\langle \varepsilon^V_{i\beta}\, I^{(0)}_{i\alpha\beta}\,(\boldsymbol{\varphi})\right\rangle_i = 0. \tag{4.33}$$

Аналогичные соотношения можно записать для всех инвариантов столкновений, т. е. для величин, суммарная величина которых не меняется в столкновениях [4]. Т.к. интеграл $I^{(0)}_{i\alpha\beta}$ не включает столкновений, приводящих к химическим реакциям или к переходу колебательной энергии в другие виды энергии, то число частиц каждого сорта, суммарный импульс и суммарная энергия активных степеней свободы сохраняются в столкновениях:

$$\begin{gathered}\left\langle I^{(0)}_{i\alpha\beta}\,(\boldsymbol{\varphi})\right\rangle_i = 0; \quad \left\langle m_i\, u_k I^{(0)}_{i\alpha\beta}\,(\boldsymbol{\varphi})\right\rangle = 0, \quad k = x,y,z,\\ \left\langle \left(\frac{1}{2}\, m_i \mathbf{u}^2 + \varepsilon^R_{i\alpha}\right)\, I^{(0)}_{i\,\alpha\beta}\,(\boldsymbol{\varphi})\right\rangle_i = 0.\end{gathered} \tag{4.34}$$

Соотношениям (4.33), (4.34) соответствуют инварианты столкновений:

$$\psi_{i\alpha\beta} = \delta_{ij}, \quad \delta_{ij}\varepsilon^V_{i\beta}, \quad m_i u_k, \frac{1}{2} m_i \mathbf{u}^2 + \varepsilon^R_{i\alpha}, \quad k = x,y,z, \quad j = 1,\ldots,N. \tag{4.35}$$

Любая линейная комбинация инвариантов столкновений — тоже инвариант.

Умножим теперь (4.32) последовательно на различные инварианты столкновений (4.35) с последующим взятием интегральных скобок. С учетом (4.33) и (4.34), получим:

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial y_1}\left\langle u_y\, \phi_{i\alpha\beta}\, \varepsilon^V_{i\beta}\right\rangle_i = K_{1i}, \quad \frac{\partial}{\partial y_1}\left\langle u_y\, \phi_{i\alpha\beta}\, m_i\, u_l\right\rangle = K_{3l}, \quad l = x,y,z,\\ \frac{\partial}{\partial y_1}\left\langle u_y\, \phi_{i\alpha\beta}\right\rangle_i = K_{2i}, \quad \frac{\partial}{\partial y_1}\left\langle u_y\, \phi_{i\,\alpha\beta}\, \left(\frac{1}{2} m_i \mathbf{u}^2 + \varepsilon^R_{i\alpha}\right)\right\rangle = K_4,\end{gathered} \tag{4.36}$$

где K_1–K_4 не зависят от y_1.

Следуя Лоялке [8], получим вторую группу интегральных соотношений, базирующуюся на следующем свойстве линеаризованного интеграла столкновений [4, 9].

$$\left\langle h_{i\alpha\beta}\, I^{(0)}_{i\alpha\beta}\,(\boldsymbol{\varphi})\right\rangle = \left\langle \phi_{i\alpha\beta}\, I^{(0)}_{i\alpha\beta}\,(\mathbf{h})\right\rangle, \tag{4.37}$$

для двух произвольных наборов функций $h_{j\sigma\varepsilon}$, $\phi_{j\sigma\varepsilon}$, где$j$, σ, ε пробегают все возможные значения. Заметим теперь, что соотношения (4.14) можно записать в едином виде

$$I^{(0)}_{i\alpha\beta}\,(\mathbf{h}) = \psi_{i\alpha\beta} u_y, \tag{4.38}$$

где $\psi_{i\alpha\beta}$ — инвариант столкновений, а h принимает значения:

$$\begin{aligned} h^1_{i\alpha\beta} &= -W_{iy}\left(a^T_i\, S^{(1)}_{3/2} + a^R_i \boldsymbol{\varepsilon}^R_{i\alpha}\right),\\ h^{2,\,l}_{i\alpha\beta} &= -b_i\, W_{il}\, W_{iy}, \quad l = x,y,z,\\ h^{3(j)}_{i\alpha\beta} &= -a^V_j\, \delta_{ij} \boldsymbol{\varepsilon}^V_{i\beta} W_{iy}, \quad j = 1,\ldots,N.\end{aligned} \tag{4.39}$$

Учитывая (4.37), получим

$$\left\langle h_{i\alpha\beta} I^{(0)}_{i\alpha\beta}(\boldsymbol{\varphi})\right\rangle = \left\langle \phi_{i\alpha\beta}\, I^{(0)}_{i\alpha\beta}(\mathbf{h})\right\rangle = \langle \phi_{i\alpha\beta}\, u_y\, \psi_{i\alpha\beta}\rangle = \Psi, \tag{4.40}$$

где Ψ — линейная функция от y_1 в силу (4.36). Умножая (4.32) на $h_{i\alpha\beta}$ и взяв интегральные скобки, получим (учитывая (4.40))

$$\frac{\partial}{\partial y_1}\langle u_y\, h_{i\,\alpha\beta}\, \phi_{i\alpha\beta}\rangle - \Psi = M, \tag{4.41}$$

где функция M не зависит от y_1. Возьмем производную $\partial/(\partial y_1)$ от правой и левой части (4.40). Так как Ψ — линейная функция y_1, получим:

$$\frac{\partial^2}{\partial y_1^2}\langle u_y\, h_{i\alpha\beta}\phi_{i\alpha\beta}(y_1)\rangle = \mathrm{const}\ (x,z), \tag{4.42}$$

для всех $h_{i\alpha\beta}$ из (4.39). В силу (4.29) из (4.36), (4.42) следует:

$$\langle u_y\, \phi_{i\alpha\beta}(y_1=0)\rangle_i = \langle u_y\, \Phi_{i\alpha\beta}(y=0)\rangle_i, \tag{4.43}$$

$$\langle b_i\, W_{il}\, W_{iy} u_y\, \phi_{i\alpha\beta}(y_1=0)\rangle = \langle b_i W_{il}\, W_{iy} u_y\, \Phi_{i\alpha\beta}(y=0)\rangle, \tag{4.44}$$

$$\langle m_i\, u_l\, u_y\, \phi_{i\alpha\beta}(y_1=0)\rangle = \langle m_i\, u_l\, u_y\, \Phi_{i\alpha\beta}(y=0)\rangle, \quad l = x,y,z,$$

$$\left\langle \left(\frac{1}{2} m_i \mathbf{u}^2 + \varepsilon^R_{i\,\alpha}\right) u_y\, \phi_{i\alpha\beta}(y_1=0)\right\rangle = \left\langle \left(\frac{1}{2} m_i \mathbf{u}^2 + \varepsilon^R_{i\alpha}\right) u_y\, \Phi_{i\alpha\beta}(y=0)\right\rangle,$$

$$\left\langle \varepsilon^V_{i\beta}\, u_y\, \phi_{i\alpha\beta}(y_1=0)\right\rangle_i = \left\langle \varepsilon^V_{i\beta}\, u_y\, \Phi_{i\alpha\beta}(y=0)\right\rangle_i,$$

$$\left\langle \boldsymbol{\varepsilon}^V_{i\beta}\, W_{iy}\, u_y\, \phi_{i\alpha\beta}(y_1=0)\right\rangle_i = \left\langle \boldsymbol{\varepsilon}^V_{i\beta}\, W_{iy}\, u_y\, \Phi_{i\alpha\beta}(y=0)\right\rangle_i,$$

$$\left\langle W_{iy}\, u_y \left(a_i^T\, S^{(1)}_{3/2} + a_i^R \boldsymbol{\varepsilon}^R_{i\alpha}\right) \phi_{i\alpha\beta}(y_1=0)\right\rangle = \\ = \left\langle W_{iy}\, u_y \left(a_i^T\, S^{(1)}_{3/2} + a_i^R \boldsymbol{\varepsilon}^R_{i\alpha}\right) \Phi_{i\alpha\beta}(y=0)\right\rangle.$$

Чтобы записать эти соотношения в явном виде, необходимо знать $\phi_{i\alpha\beta}$ $(y_1 = 0)$. Строго говоря, $\phi_{i\alpha\beta}$ является решением задачи (4.29)–(4.31). Поскольку аналитического решения этой задачи пока не существует, воспользуемся следующей идеей Лоялки [8]. Аппроксимируем функцию распределения падающих на стенку молекул с помощью выражения

$$\phi^{\downarrow}_{i\alpha\beta} = \eta_y W_{iy} + \eta_a \left(\boldsymbol{\varepsilon}^R_{i\alpha} - S^{(1)}_{3/2}\right) - \sum_s \left(a_i^T S^{(1)}_{3/2} + a_i^R \boldsymbol{\varepsilon}^R_{i\,\alpha}\right) w_{is} \frac{\partial}{\partial x^s} \ln(T) - \\ - \eta_i^V \sum_s a_i^V \boldsymbol{\varepsilon}^V_{i\beta} w_{is} \frac{\partial}{\partial x^s} \ln\left(T_i^V\right) + \eta_x b_i W_{ix} W_{iy} + \eta_z b_i W_{iz} W_{iy} + \\ + \eta_2 b_i \sum_{s,l} W_{il} W_{is} : \widetilde{e}^{(d)}_{sl}, \tag{4.45}$$

здесь параметры η являются неизвестными и находятся из соотношений (4.43), (4.44). Чтобы замкнуть систему (4.43), (4.44), перепишем (4.20), (4.21), используя (4.25), (4.28). Получим:

$$\frac{n_{si}-n_i}{n_i}=\langle\phi_{i\alpha\beta}\left(y_1=0\right)\rangle_i\,, \tag{4.46}$$

$$\langle u_y\phi_{i\alpha\beta}\left(\gamma_i=0,y_1=0\right)\rangle_i=0. \tag{4.47}$$

Чтобы вычислить окончательные соотношения, подставим (4.13) (4.23), (4.31), (4.45) в равенства (4.43), (4.44), (4.46), (4.47). Интегральные скобки можно вычислить, пользуясь методом, описанным в [4, 6, 9]. Разрешая полученную таким образом систему линейных уравнений, получим:

$$\beta_i^V\frac{T_i^V-T_w}{T_i^V}=\frac{4\sqrt{\pi}\,\left(2-\theta_i\right)a_i^V}{8-\left(4-\pi\right)\theta_i}\frac{\partial}{\partial y}\ln\left(T_i^V\right), \tag{4.48}$$

$$v_x=\xi^{(1)}\frac{\partial}{\partial x}\ln\left(T\right)+\sum_j\xi_j^{(2)}\,J_{jx}+\xi^{(3)}\left(\frac{\partial}{\partial x}v_y+\frac{\partial}{\partial y}v_x\right),$$
$$v_z=\xi^{(1)}\frac{\partial}{\partial z}\ln\left(T\right)+\sum_j\xi_j^{(2)}\,J_{jz}+\xi^{(3)}\left(\frac{\partial}{\partial z}v_y+\frac{\partial}{\partial y}v_z\right),$$

$$\beta\frac{T-T_w}{T_w}=\xi^{(4)}\frac{\partial}{\partial y}\ln\left(T\right)+\sum_j\xi_j^{(5)}J_{jy}+\xi^{(6)}\left(\frac{\partial}{\partial x}v_x+\frac{\partial}{\partial z}v_z-2\frac{\partial}{\partial y}v_y\right)+\sum_j\xi_j^{(\gamma)}\gamma_j,$$

$$\frac{n_{sj}-n_j}{n_j}=\frac{\theta_j}{4}\beta\frac{T-T_w}{T_w}+\xi^{(7)}\frac{\partial}{\partial y}\ln\left(T\right)+\sum_k\xi_k^{(8j)}\,J_{ky}+$$
$$+\xi_j^{(9)}\left(\frac{\partial}{\partial x}v_x+\frac{\partial}{\partial z}v_z-2\frac{\partial}{\partial y}v_y\right)+\sum_k\xi_j^{(\gamma_k)}\gamma_k.$$

Коэффициенты ξ даны в приложении 1.

2.5. Применение граничных условии скольжения. Соотношения (4.48) являются искомыми макроскопическими граничными условиями для уравнений Навье–Стокса (4.15), (4.16) на стенке, при удовлетворении которых решение этих уравнений вне слоя Кнудсена совпадает с точностью до первого приближения по числу Кнудсена с решением уравнений Больцмана с заданными истинными граничными условиями на стенке (4.18), (4.19), (4.20). Другими словами, для разреженного газа следует использовать (4.48) вместо обычных условий прилипания.

Компоненты макроскопической скорости (в (4.48)) v_x и v_z являются фиктивными скоростями, которые называются соответственно скоростями скольжения вдоль осей $0x$ и $0z$. Истинная скорость газа на стенке остается

неизвестной, и она для макроскопической задачи не нужна. Истинная касательная макроскопическая скорость газа на стенке (истинная скорость проскальзывания) должна находиться из решения кинетической задачи с детальным законом отражения молекул от стенки, т. к. при любом реальном законе отражения молекул происходит потеря касательного импульса при взаимодействии молекул со стенкой. Далее, в (4.48) T_i^V, T, n_i являются соответственно фиктивными колебательными, поступательно-вращательными температурами и числовыми концентрациями компонентов, при которых должны решаться уравнения (4.15), (4.16). При этом используются заданные из эксперимента или определенные из квантово-механических расчетов коэффициенты аккомодации β, β_i^V. Температура T_w стенки задается, или на стенке выставляется соответствующее балансовое соотношение для потока тепла. В последнем случае T_w находится в процессе решения задачи [12].

Особое положение занимает истинная числовая концентрация компонентов газа на стенке n_{si}, аналоги которой для скорости и температур в условия (4.48) не входят и, как отмечалось выше, не нужны для гидродинамического решения задачи. Концентрации n_{si} априори в задачах обтекания реагирующей в потоке и на стенке смесью, как правило, неизвестны; для их определения нужны дополнительные условия, отражающие механизм гетерогенных химических реакции на стенке.

Пусть мы имеем какие-либо макроскопические граничные условия для концентраций, которые в общем случае гетерогенных реакций можно записать в виде

$$\mathbf{G}\left(n_i, J_{iy}\right) = 0,$$

где функции $\mathbf{G}$ определяются принятой моделью гетерогенных химических реакций. Тогда для случая течений разреженного газа естественно использовать эти же условия, но с подстановкой в них истинных концентраций n_{si} и истинных диффузионных потоков по нормали к стенке $(\mathbf{J}_{iy})_s$. Соотношение (4.43) метода Максвелла–Лоялки означает

$$\mathbf{J}_{iy} = \left(\mathbf{J}_{iy}\right)_s. \tag{4.49}$$

Значит для течения разреженного газа следует выставлять условия

$$\mathbf{G}\left(n_{si}, J_{iy}\right) = 0, \qquad i = 1, \ldots, N. \tag{4.50}$$

Например, для некаталитической стенки следует выставлять условие

$$\mathbf{J}_{iy} = 0, \quad i = 1, \ldots, N,$$

а для идеально каталитической — условие

$$n_{si} = n_{si}^e\left(T_w\right), \quad i = 1, \ldots, N,$$

где $n_{si}^e\left(T_w\right)$ — равновесные значения концентраций компонентов при температуре поверхности тела.

Соотношение типа (4.50) замыкает систему граничных условий (4.48).

Заключение

1. Дано кинетическое обоснование гидродинамических уравнений для многокомпонентного химически реагирующего термически неравновесного (колебательная мода каждого компонента может иметь свою собственную температуру) газа, выведенных ранее феноменологическим путем. Кинетический и феноменологический подход дают полностью совпадающие уравнения.

2. Методом Максвелла–Лоялки получены граничные условия скольжения, скачков температур и концентрации для многокомпонентного химически реагирующего термически неравновесного газа. Колебательная мода каждого компонента может иметь свою собственную температуру. При этом одновременно учитываются гетерогенные химические реакции и термическая неравновесность. Результаты верны для любой каталитической активности стенки относительно релаксации различных степеней свободы молекул. Окончательные результаты даны в удобном для практического использования виде.

Приложение 1 к главе 4

Коэффициенты:

$$\xi^{(1)} = \frac{1}{A}\left[\frac{1}{\pi}\sum_i \theta_i\, a_i^T \sum_j \frac{(\theta_j - 2)\, b_j^2}{\sqrt{m_j}} - \frac{1}{2}\sum_i \theta_i\, b_i \sum_j \frac{\theta_j\, b_j\, a_j^T}{\sqrt{m_j}}\right],$$

$$\xi_i^{(2)} = \frac{1}{A}\left[-\frac{2}{\sqrt{2}\, kT}\sum_j \theta_j\, b_j \frac{b_i}{n_i\, m_i}\right],$$

$$\xi^{(3)} = \frac{2}{A\sqrt{\pi}}\sum_i b_i \sum_j \frac{(2-\theta_j)\, b_j^2}{\sqrt{m_j}},$$

$$A = \frac{1}{2\sqrt{2kT}}\left(\sum_i \theta_i b_i\right)^2 + \frac{2}{\pi\sqrt{2kT}}\sum_i \theta_i\sqrt{m_i}\sum_j \frac{(2-\theta_j)\, b_j^2}{\sqrt{m_j}},$$

$$\xi^{(4)} = -\frac{1}{\Omega^{(1)} 8\sqrt{\pi}\, k}\sum_i \frac{2-\theta_i}{\sqrt{m_i}}\left(13k\left(a_i^T\right)^2 + 4m_i c_i^R\left(a_i^T\right)^2\right) + \frac{\Omega_A^{(T)}}{32k}\sum_i \frac{2-\theta_i}{\sqrt{m_i}}\times$$
$$\times\left(5ka_i^T - 2m_i a_i^R c_i^R\right) + \frac{15\Omega_B^{(T)}}{8}\sum_i (2-\theta_i)\frac{b_i a_i^T}{\sqrt{m_i}} - \frac{\Omega_C^{(T)}}{4\sqrt{\pi}}\sum_i (2-\theta_i)\, a_i^T,$$

$$\xi_j^{(5)} = \frac{5\Omega_A^{(T)} + 24\Omega_B^{(T)} b_j}{8\sqrt{2kT}\, m_j n_j},$$

$$\xi^{(6)} = \frac{1}{6\Omega^{(1)}} \sum_i \frac{b_i a_i^T}{\sqrt{m_i}} - \frac{1}{6}\Omega_C^{(T)} \sum_i b_i,$$

$$\xi_j^{(\gamma)} = \frac{\Omega_A^{(T)} + 4b_j \Omega_B^{(T)}}{4\sqrt{\pi m_j}} + \frac{\Omega_C^{(T)}}{4},$$

$$\xi_j^{(7)} = \frac{(2-\theta_j)\, a_j^T}{4\sqrt{\pi}} + \frac{15\Omega_{Bj}^{(n)}}{8} \sum_i (2-\theta_i)\, \frac{b_i a_i^T}{\sqrt{m_i}} - \frac{\Omega_{Cj}^{(n)}}{4\sqrt{\pi}} \sum_i (2-\theta_i)\, a_i^T -$$
$$- \frac{(2-\theta_j)}{16\sqrt{\pi}\, k\Omega^{(1)}} \sum_i \frac{2-\theta_i}{\sqrt{m_i}} \left(13k \left(a_i^T\right)^2 + 4m_i c_i^R \left(a_i^R\right)^2\right) +$$
$$+ \frac{\Omega_{Aj}^{(n)}}{32k} \sum_i \frac{2-\theta_i}{\sqrt{m_i}} \left(5k a_i^T - 2m_i a_i^R c_i^R\right),$$

$$\xi_j^{(8k)} = \frac{5\Omega_{Aj}^{(n)} + 24\Omega_{Bj}^{(n)} b_k}{8\sqrt{2kT}\, m_k n_k},$$

$$\xi_j^{(9)} = \frac{2-\theta_i}{12\Omega^{(1)}} \sum_i \frac{b_i a_i^T}{\sqrt{m_i}} - \frac{1}{6}\Omega_{Cj}^{(n)} \sum_i b_i,$$

$$\xi_j^{(\gamma_k)} = \frac{\Omega_{Aj}^{(n)} + 4b_k \Omega_{Bj}^{(n)}}{4\sqrt{\pi m_k}} + \frac{\Omega_{Cj}^{(n)}}{4} - \frac{\delta_j^k}{2}.$$

Коэффициенты Ω даны в приложении 2.

Приложение 2 к главе 4

Вспомогательные величины:

$$\Omega_{Aj}^{(n)} = 2\left(2-\theta_i\right)\Omega_4^{(6)} + \frac{1}{\Omega^{(2)}}\Bigg\{2\left(\Omega_4^{(5)}\Omega_{1j}^{(6)} + \Omega_{42}^{(4)}\Omega_{2j}^{(6)}\right) + \\ + \left(\Omega_{12}^{(4)}\Omega_4^{(5)} - \Omega_{42}^{(4)}\Omega_1^{(5)}\right)\left(\sum_i \theta_i b_i \Omega_{1j}^{(6)} - \sum_i \theta_i \Omega_{2j}^{(6)}\right) + \\ + \frac{4}{\sqrt{\pi}}\left(\Omega_{22}^{(4)}\Omega_4^{(5)} - \Omega_{42}^{(4)}\Omega_2^{(5)}\right)\left(\sum_i \frac{\theta_i b_i^2}{\sqrt{m_i}}\Omega_{1j}^{(6)} - \sum_i \frac{\theta_i b_i}{\sqrt{m_i}}\Omega_{2j}^{(6)}\right)\Bigg\},$$

$$\Omega_{Bj}^{(n)} = 2\left(2-\theta_i\right)\Omega_2^{(6)} + \frac{1}{\Omega^{(2)}}\Bigg\{2\left(\Omega_2^{(5)}\Omega_{1j}^{(6)} + \Omega_{22}^{(4)}\Omega_{2j}^{(6)}\right) + \\ + \left(\Omega_{12}^{(4)}\Omega_2^{(5)} - \Omega_{22}^{(4)}\Omega_1^{(5)}\right)\left(\sum_i \theta_i b_i \Omega_{1j}^{(6)} - \sum_i \theta_i \Omega_{2j}^{(6)}\right) + \\ + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\Omega_{22}^{(4)}\Omega_4^{(5)} - \Omega_{42}^{(4)}\Omega_2^{(5)}\right)\left(\sum_i \frac{\theta_i}{\sqrt{m_i}}\Omega_{2j}^{(6)} - \sum_i \frac{\theta_i b_i}{\sqrt{m_i}}\Omega_{1j}^{(6)}\right)\Bigg\},$$

$$\Omega_{Cj}^{(n)} = 2\left(2-\theta_i\right)\Omega_1^{(6)} + \frac{1}{\Omega^{(2)}}\Bigg\{2\left(\Omega_1^{(5)}\Omega_{1j}^{(6)} + \Omega_{12}^{(4)}\Omega_{2j}^{(6)}\right) + \\ + \frac{4}{\sqrt{\pi}}\left(\Omega_{12}^{(4)}\Omega_2^{(5)} - \Omega_{22}^{(4)}\Omega_1^{(5)}\right)\left(\sum_i \frac{\theta_i b_i}{\sqrt{m_i}}\Omega_{2j}^{(6)} - \sum_i \frac{\theta_i b_i^2}{\sqrt{m_i}}\Omega_{1j}^{(6)}\right) + \\ + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\Omega_{12}^{(4)}\Omega_4^{(5)} - \Omega_{42}^{(4)}\Omega_1^{(5)}\right)\left(\sum_i \frac{\theta_i}{\sqrt{m_i}}\Omega_{2j}^{(6)} - \sum_i \frac{\theta_i b_i}{\sqrt{m_i}}\Omega_{1j}^{(6)}\right)\Bigg\},$$

$$\Omega_A^{(T)} = -4\Omega_{4T}^{(4)} + \frac{1}{\Omega^{(2)}}\Bigg\{2\left(\Omega_4^{(5)}\Omega_{1T}^{(5)} + \Omega_{42}^{(4)}\Omega_{2T}^{(5)}\right) + \\ + \left(\Omega_{12}^{(4)}\Omega_4^{(5)} - \Omega_{42}^{(4)}\Omega_1^{(5)}\right)\left(\sum_i \theta_i b_i \Omega_{1T}^{(5)} - \sum_i \theta_i \Omega_{2T}^{(5)}\right) + \\ + \frac{4}{\sqrt{\pi}}\left(\Omega_{22}^{(4)}\Omega_4^{(5)} - \Omega_{42}^{(4)}\Omega_2^{(5)}\right)\left(\sum_i \frac{\theta_i b_i^2}{\sqrt{m_i}}\Omega_{1T}^{(5)} - \sum_i \frac{\theta_i b_i}{\sqrt{m_i}}\Omega_{2T}^{(5)}\right)\Bigg\},$$

$$\Omega_B^{(T)} = -4\Omega_{2T}^{(4)} + \frac{1}{\Omega^{(2)}}\left\{2\left(\Omega_2^{(5)}\Omega_{1T}^{(5)} + \Omega_{22}^{(4)}\Omega_{2T}^{(5)}\right) + \right.$$
$$+ \left(\Omega_{12}^{(4)}\Omega_2^{(5)} - \Omega_{22}^{(4)}\Omega_1^{(5)}\right)\left(\sum_i \theta_i b_i \Omega_{1T}^{(5)} - \sum_i \theta_i \Omega_{2T}^{(5)}\right) +$$
$$\left. + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\Omega_{22}^{(4)}\Omega_4^{(5)} - \Omega_{42}^{(4)}\Omega_2^{(5)}\right)\left(\sum_i \frac{\theta_i}{\sqrt{m_i}}\Omega_{2T}^{(5)} - \sum_i \frac{\theta_i b_i}{\sqrt{m_i}}\Omega_{1T}^{(5)}\right)\right\},$$

$$\Omega_C^{(T)} = -4\Omega_{1T}^{(4)} + \frac{1}{\Omega^{(2)}}\left\{2\left(\Omega_1^{(5)}\Omega_{1T}^{(5)} + \Omega_{12}^{(4)}\Omega_{2T}^{(5)}\right) + \right.$$
$$+ \frac{4}{\sqrt{\pi}}\left(\Omega_{12}^{(4)}\Omega_2^{(5)} - \Omega_{22}^{(4)}\Omega_1^{(5)}\right)\left(\sum_i \frac{\theta_i b_i}{\sqrt{m_i}}\Omega_{2T}^{(5)} - \sum_i \frac{\theta_i b_i^2}{\sqrt{m_i}}\Omega_{1T}^{(5)}\right) +$$
$$\left. + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\Omega_{12}^{(4)}\Omega_4^{(5)} - \Omega_{42}^{(4)}\Omega_1^{(5)}\right)\left(\sum_i \frac{\theta_i}{\sqrt{m_i}}\Omega_{2T}^{(5)} - \sum_i \frac{\theta_i b_i}{\sqrt{m_i}}\Omega_{1T}^{(5)}\right)\right\},$$

$$\Omega_{1j}^{(6)} = \frac{\theta_j}{2} + \frac{2-\theta_j}{2}\left(\Omega_1^{(6)}\sum_i \theta_i + \frac{4\Omega_2^{(6)}}{\sqrt{\pi}}\sum_i \frac{\theta_i b_i}{\sqrt{m_i}} + \frac{\Omega_4^{(6)}}{\sqrt{\pi}}\sum_i \frac{\theta_i}{\sqrt{m_i}}\right),$$

$$\Omega_{2j}^{(6)} = \frac{\theta_j b_j}{2} + \frac{2-\theta_j}{2}\left(\Omega_1^{(6)}\sum_i \theta_i b_i + \frac{4\Omega_2^{(6)}}{\sqrt{\pi}}\sum_i \frac{\theta_i b_i^2}{\sqrt{m_i}} + \frac{\Omega_4^{(6)}}{\sqrt{\pi}}\sum_i \frac{\theta_i b_i}{\sqrt{m_i}}\right),$$

$$\Omega^{(2)} = 1 + \frac{1}{2}\left(\Omega_{12}^{(4)}\sum_i \theta_i b_i + \Omega_1^{(5)}\sum_i \theta_i\right) + \frac{2}{\sqrt{\pi}}\Omega_{22}^{(4)}\sum_i \frac{\theta_i b_i^2}{\sqrt{m_i}} +$$
$$+ \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\Omega_2^{(5)} + \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\Omega_{42}^{(4)}\right)\sum_i \frac{\theta_i b_i}{\sqrt{m_i}} + \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\Omega_4^{(5)}\sum_i \frac{\theta_i}{\sqrt{m_i}} +$$
$$+ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\Omega_{12}^{(4)}\Omega_2^{(5)} - \Omega_{22}^{(4)}\Omega_1^{(5)}\right)\left(\sum_i \theta_i b_i \sum_i \frac{\theta_i b_i}{\sqrt{m_i}} - \sum_i \frac{\theta_i b_i^2}{\sqrt{m_i}}\sum_i \theta_i\right) +$$
$$+ \frac{1}{4\sqrt{\pi}}\left(\Omega_{12}^{(4)}\Omega_4^{(5)} - \Omega_{42}^{(4)}\Omega_1^{(5)}\right)\left(\sum_i \theta_i b_i \sum_i \frac{\theta_i}{\sqrt{m_i}} - \sum_i \frac{\theta_i b_i}{\sqrt{m_i}}\sum_i \theta_i\right) +$$
$$+ \frac{1}{\pi}\left(\Omega_{22}^{(4)}\Omega_4^{(5)} - \Omega_{42}^{(4)}\Omega_2^{(5)}\right)\left(\sum_i \frac{\theta_i b_i^2}{\sqrt{m_i}}\sum_i \frac{\theta_i}{\sqrt{m_i}} - \left(\sum_i \frac{\theta_i b_i}{\sqrt{m_i}}\right)^2\right),$$

$$\Omega_1^{(6)} = \Omega_{1T}^{(4)} + \frac{1}{\Omega^{(3)}}\left[\frac{6+9\pi}{4\pi\sqrt{\pi}}\left(\sum_i \frac{\theta_i b_i}{\sqrt{m_i}}\right)^2 - \frac{3}{\pi}\sum_i \frac{\theta_i b_i^2}{\sqrt{m_i}}\sum_i \frac{\theta_i}{\sqrt{m_i}}\left(\frac{4+5\sqrt{\pi}}{4} + \frac{m_i c_i^R}{k}\right)\right],$$

$$\Omega_2^{(6)} = \Omega_{2T}^{(4)} + \frac{1}{\Omega^{(3)}} \left[\frac{3}{2\pi} \sum_i (2-\theta_i) \sum_i \frac{\theta_i b_i}{\sqrt{m_i}} - \right.$$
$$\left. - \sum_i (2-\theta_i)\, b_i \sum_i \frac{\theta_i}{\sqrt{m_i}} \left(\frac{4+5\sqrt{\pi}}{8\sqrt{\pi}} + \frac{m_i c_i^R}{2\sqrt{\pi}\, k} \right) \right],$$

$$\Omega_4^{(6)} = \Omega_{4T}^{(4)} + \frac{1}{\Omega^{(3)}} \left[\frac{2+3\pi}{\pi} \sum_i \frac{\theta_i b_i}{\sqrt{m_i}} \sum_i (2-\theta_i)\, b_i - \frac{12}{\pi} \sum_i (2-\theta_i) \sum_i \frac{\theta_i b_i^2}{\sqrt{m_i}} \right],$$

$$\Omega_{12}^{(4)} = -\frac{1}{4\sqrt{\pi}\,\Omega^{(3)}} \sum_i \frac{\theta_i b_i}{\sqrt{m_i}} \sum_i \frac{\theta_i}{\sqrt{m_i}} \left(1 + \frac{6 m_i c_i^R}{k} \right),$$

$$\Omega_{22}^{(4)} = -\frac{1}{\pi \Omega^{(3)}} \sum_i (2-\theta_i) \sum_i \frac{\theta_i}{\sqrt{m_i}} \left(1 + \frac{m_i c_i^R}{k} \right),$$

$$\Omega_{42}^{(4)} = \frac{4}{\pi \Omega^{(3)}} \sum_i (2-\theta_i) \sum_i \frac{\theta_i b_i}{\sqrt{m_i}},$$

$$\Omega_1^{(5)} = \frac{1}{\Omega^{(3)}} \left\{ \sum_i \frac{\theta_i b_i^2}{\sqrt{m_i}} \sum_i \frac{\theta_i}{\sqrt{m_i}} \left(\frac{27}{4\sqrt{\pi}} + \frac{3 m_i c_i^R}{\sqrt{\pi}\, k} \right) - \frac{15}{4\sqrt{\pi}} \left(\sum_i \frac{\theta_i b_i}{\sqrt{m_i}} \right)^2 \right\},$$

$$\Omega_2^{(5)} = \frac{1}{\Omega^{(3)}} \left\{ \sum_i (2-\theta_i) b_i \sum_i \frac{\theta_i}{\sqrt{m_i}} \left(\frac{9}{8} + \frac{m_i c_i^R}{2k} \right) - \frac{3}{2\pi} \sum_i (2-\theta_i) \sum_i \frac{\theta_i b_i}{\sqrt{m_i}} \right\},$$

$$\Omega_4^{(5)} = \frac{1}{\Omega^{(3)}} \left\{ \frac{12}{\pi} \sum_i (2-\theta_i) \sum_i \frac{\theta_i b_i^2}{\sqrt{m_i}} - 5 \sum_i (2-\theta_i)\, b_i \sum_i \theta_i b_i \right\},$$

$$\Omega^{(1)} = \sum_i \frac{a_i^T}{\sqrt{m_i}} \left(\frac{5}{4} - \frac{m_i a_i^R c_i^R}{2k a_i^T} \right),$$

$$\Omega^{(3)} = \sum_i \frac{\theta_i b_i}{\sqrt{m_i}} \sum_i (2-\theta_i)\, b_i \sum_i \frac{\theta_i}{\sqrt{m_i}} \left(\frac{6 m_i c_i^R}{k} - 1 \right) - \frac{3}{\pi\sqrt{\pi}} \sum_i (2-\theta_i) \times$$
$$\times \left(\sum_i \frac{\theta_i b_i}{\sqrt{m_i}} \right)^2 + \frac{6}{\pi\sqrt{\pi}} \sum_i (2-\theta_i) \sum_i \frac{\theta_i b_i^2}{\sqrt{m_i}} \sum_i \frac{\theta_i}{\sqrt{m_i}} \left(1 + \frac{m_i c_i^R}{k} \right),$$

$$\Omega_{1T}^{(4)} = \frac{1}{\Omega^{(1)}\Omega^{(3)}} \left\{ \sum_i \frac{(2-\theta_i)\, a_i^T}{\sqrt{m_i}} \left(\frac{5}{8} - \frac{m_i a_i^R c_i^R}{4k a_i^T} \right) \left[\frac{15}{4\sqrt{\pi}} \sum_i \frac{\theta_i}{\sqrt{m_i}} \sum_i \frac{\theta_i b_i^2}{\sqrt{m_i}} - \right.\right.$$

$$\left. - \frac{9}{4\sqrt{\pi}} \left(\sum_i \frac{\theta_i b_i}{\sqrt{m_i}} \right)^2 \right] + \sum_i \frac{\theta_i}{\sqrt{m_i}} \left(1 + \frac{m_i c_i^R}{k} \right) \times$$

$$\times \left[\frac{3}{8\sqrt{\pi}} \sum_i \frac{\theta_i b_i}{\sqrt{m_i}} \sum_i \frac{(2-\theta_i)\, b_i a_i^T}{\sqrt{m_i}} - \frac{3}{4\pi\sqrt{\pi}} \sum_i \frac{(2-\theta_i)\, a_i^T}{\sqrt{m_i}} \sum_i \frac{\theta_i b_i^2}{\sqrt{m_i}} \right] +$$

$$\left. + \frac{3}{\pi\sqrt{\pi}} \sum_i \frac{(2-\theta_i)\, a_i^T}{\sqrt{m_i}} \left(\sum_i \frac{\theta_i b_i}{\sqrt{m_i}} \right)^2 - \frac{5}{16\sqrt{\pi}} \sum_i \frac{(2-\theta_i)\, b_i a_i^T}{\sqrt{m_i}} \sum_i \frac{\theta_i b_i}{\sqrt{m_i}} \sum_i \frac{\theta_i}{\sqrt{m_i}} \right\},$$

$$\Omega_{2T}^{(4)} = \frac{1}{\Omega^{(1)}\Omega^{(3)}} \left\{ \sum_i \frac{\theta_i}{\sqrt{m_i}} \left(1 + \frac{m_i c_i^R}{k} \right) \left[\frac{1}{4\pi} \sum_i (2-\theta_i) \sum_i \frac{(2-\theta_i)\, b_i a_i^T}{\sqrt{m_i}} - \right.\right.$$

$$\left. - \frac{1}{8\pi} \sum_i \frac{(2-\theta_i)\, a_i^T}{\sqrt{m_i}} \sum_i (2-\theta_i)\, b_i \right] + \sum_i \frac{(2-\theta_i)\, a_i^T}{\sqrt{m_i}} \left(\frac{5}{8} - \frac{m_i a_i^T c_i^R}{4k a_i^T} \right) \times$$

$$\left. \times \left[\frac{5}{8} \sum_i \frac{\theta_i}{\sqrt{m_i}} \sum_i (2-\theta_i)\, b_i - \frac{3}{2\pi} \sum_i (2-\theta_i) \sum_i \frac{\theta_i b_i}{\sqrt{m_i}} \right] \right\},$$

$$\Omega_{4T}^{(4)} = \frac{1}{\Omega^{(1)}\Omega^{(3)}} \left\{ \sum_i \frac{(2-\theta_i)\, a_i^T}{\sqrt{m_i}} \left(\frac{5}{8} - \frac{m_i a_i^R c_i^R}{4k a_i^T} \right) \left[\frac{12}{\pi} \sum_i (2-\theta_i) \sum_i \frac{\theta_i b_i^2}{\sqrt{m_i}} - \right.\right.$$

$$\left. - 3 \sum_i (2-\theta_i)\, b_i \sum_i \frac{\theta_i b_i}{\sqrt{m_i}} \right] + \frac{1}{2\pi} \sum_i (2-\theta_i)\, b_i \sum_i \frac{\theta_i b_i}{\sqrt{m_i}} \sum_i \frac{(2-\theta_i)\, a_i^T}{\sqrt{m_i}} -$$

$$\left. - \frac{1}{\pi} \sum_i (2-\theta_i) \sum_i \frac{\theta_i b_i}{\sqrt{m_i}} \sum_i \frac{(2-\theta_i)\, b_i a_i^T}{\sqrt{m_i}} \right\}.$$

Здесь a_i, b_i, a_i^T, a_i^R, c_i^R — коэффициенты разложения коэффициентов функции распределения (4.13) по полиномам Сонина в методе Чепмена–Энскога (см. (4.14), (4.17), (4.39)).

Исследования поддержаны Роснаукой (Гос. контракты 02.740.11.0615 и П594).

Список литературы

1. *Wang Chang* C.8. Uhlenbeck G.E. Transport Phenomena in Polyatomic Gases. University Michigan Rep. C. — М.: 1951. 681 с
2. *Жданов В.М., Алиевский М.Я.* Процессы переноса и релаксации в молекулярных газах. — М.: Наука, 1989. 335 с.
3. *Коган М.Н.* Динамика разреженного газа. — М.: Наука, 1967. 440 с.
4. *Ferziger J.H., Kaper Y.G.* Mathematical Theory of Transport Processes in Gases. Amsterdam; London. North-Holland, 1972. Перевод: Ферцигер Дж., Капер Г. Математическая теория процессов переноса в газах. — М.: Мир, 1976. 554 с.
5. *Кузнецов В.М.* К теории коэффициента объемной вязкости // Известия АН СССР. Механика жидкости и газа. 1967. № 6. с. 89–93.
6. *Шидловский В.П.* Введение в динамику разреженного газа. — М.: Наука, 1965. 220 с.
7. *Кирютин Б.А., Тирский Г.А.* Граничные условия скольжения на каталитической поверхности в многокомпонентном потоке газа // Известия АН СССР. Механика жидкости и газа. 1996. № 1. С. 159–168.
8. *Loyalka S.K.* Approximate method in the kinetic theory // Physics of Fluids. 1971. V. 114. № 11, p. 2291–2294.
9. *Hirschfelder J.O., Curtiss C.F., Bird R.B.* Molecular Theory of Gases and Liquids. N.Y.: Wiley; L.: Chapman and Hall, 1954. Перевод: Гиршфелдер Дж., Кертисс Ч., Берд Р. Молекулярная теория газов и жидкостей. — М.: Изд-во ИЛ., 1962. 929 с.
10. *Тирский Г.А., Щербак В.Г.* Гиперзвуковое обтекание тел с учетом неравновесного возбуждения внутренних степеней свободы. Отчет Института механики МГУ. 1988. № 3643. 240 с.
11. *Kovalev V.L., Suslov U.N., Tirskiy G.A.* Phenomenological theory for heterogeneous recombination of partially dissociated air оп high-temperature surfaces // Molecular physics and hypersonic flows, by ed. M. Capitelli. 1996. P. 193–201.
12. *Тирский Г.А.* Условия на поверхностях сильного разрыва в многокомпонентных смесях // Прикладная математика и механика. 1961. Т. 25. Вып. 2. С. 196–208.

5
ФИЗИКО-ХИМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ГИПЕРЗВУКОВЫХ ТЕЧЕНИЙ

Г. А. Тирский
Московский Физико-технический институт,
Научно-исследовательский институт механики МГУ им. М.В. Ломоносова

Эффекты, которые отличают гиперзвуковые течения ($\mathbf{M} \geqslant 5$), от просто сверхзвуковых течений связаны: во-первых, с большими числами Маха и во-вторых, с высокой энергией потока. Первые являются эффектами гидродинамическими, а вторые по своей природе — физико-химическими. Второй фундаментальный параметр подобия, число Рейнольдса, определяет режимы обтекания: при малых и умеренных числах Рейнольдса имеет место свободно-молекулярный и переходной режимы обтекания, при больших — континуальный (ламинарный или турбулентный). Асимптотические упрощения уравнений Навье–Стокса при больших и малых числах Рейнольдса были рассмотрены в главе 1. В этой главе мы рассмотрим эффекты, связанные с большими числами $\mathbf{M}$ набегающего потока, которые в одних случаях приводят к упрощению постановок задач и возможности получения приближенных аналитических решений, а в других — к значительному усложнению.

Упрощения имеют место, главным образом, при обтекании поверхностей под большими углами атаки к основному потоку, для которых при увеличении скорости распределение давления по обтекаемой поверхности, например, перестает зависеть от числа $\mathbf{M}$. Течение хорошо описывается течением ньютоновского газа, в котором не учитывается взаимодействие между молекулами газа, а давление на поверхности тела считается возникающим в результате потери набегающими частицами газа составляющей количества движения только по нормали к поверхности. Другие упрощения возникают при обтекании тонких тел, для которых возмущения скорости в направлении набегающего потока малы. В этом случае течение в поперечном направлении можно считать не зависящим от течения в продольном направлении, что приводит к двумерной нестационарной задаче.

Можно сказать, что упрощение постановок и решения задач при больших числах $\mathbf{M}$ связано с рассмотрением задач гиперзвукового обтекания в рамках идеального газа, т. е. с определением давления на обтекаемой поверхности. Остальные возможные упрощения задач обтекания тел идеальным газом при больших числах $\mathbf{M}$ можно найти в монографиях [1–4].

Однако можно указать случаи и усложнения задач газодинамики при больших числах $\mathbf{M}$. Например, метод линеаризации уравнений движения, который является чрезвычайно полезным при изучении сверхзвуковых потоков, не применим для гиперзвукового течения. Даже сильно искривленная

вблизи затупленного носка летящего с гиперзвуковой скоростью тела головная ударная волна создает большой градиент энтропии поперек потока, что делает классическое предположение об изоэнтропичности течения нереальным. Кроме того, нельзя больше пользоваться классической схемой Прандтля: невязкое течение плюс пограничный слой. При гиперзвуковых скоростях полета толщина ПС может стать значительной по сравнению с толщиной тела, что приводит к возникновению взаимодействия между вязким течением в ПС и внешним, по существу невязким потоком, что в свою очередь приводит к увеличению теплового потока к обтекаемой поверхности.

Выводы об эффекте влияния на течение газа при больших числах Маха можно получить из рассмотрения интеграла Бернулли

$$\frac{v^2}{2} + h = \mathrm{const}\,,$$

где: v — местная скорость течения, h — удельная (на единицу массы) энтальпия,. Это уравнение выражает очевидный факт, что для движущегося газа сумма кинетической энергии единицы массы $v^2/2$ и удельной энтальпии есть величина постоянная. Для отношения этих двух слагаемых можно получить для совершенного газа следующее выражение:

$$\frac{\text{кинетическая энергия}}{\text{энтальпия}} = \frac{v^2}{2h} = \frac{v^2}{2c_pT} = \frac{v^2}{2}\frac{\gamma R}{a^2 c_p} = \frac{\gamma - 1}{2}\mathbf{M}^2,$$

где γ – отношение удельных теплоемкостей, a — скорость звука, R — универсальная газовая постоянная. Очевидно, что для чисел $\mathbf{M} \geqslant 5$ энтальпия $h = c_pT$ становится малой величиной по сравнению с кинетической энергией. Этот факт означает, что в газе, движущемся с гиперзвуковой скоростью, влияние хаотического движения атомов или молекул имеет относительно малое значение и что движение газа в первом приближении можно рассматривать как поток не взаимодействующих между собой частиц. Эта картина течения и есть модель обтекания тел газом, которую в 1687 г. рассмотрел И. Ньютон [5], и идея которой была развита для гиперзвукового течения Буземанном в 1933 г. и Карманом в 1935 г [1, 2].

Далее, при торможении газа в головной ударной волне почти вся кинетическая энергия набегающего потока переходит в нагрев газа до высокой температуры (десятки тысяч градусов) непосредственно за ударной волной, которая далее, при приближении к обтекаемому телу, спадает за счет эндотермических реакций диссоциации и ионизации. При столь высоких температурах времена релаксации колебательных и электронных степеней свободы сравниваются с временами реакций и становится необходимым учитывать колебательно-диссоциационное и электронно-ионизационное взаимодействия. Таким образом, в ударном слое происходит течение многокомпонентного термохимически неравновесного газа с разными температурами поступательных, колебательных и электронных степеней свободы.

В данной главе приведен строгий математический вывод основных гидродинамических уравнений, учитывающих указанные выше физико-химические процессы.

1. Уравнения сохранения (баланса) массы, импульса и энергии для смесей газов

Математической основой гиперзвуковой аэродинамики и теплообмена при наличии диссипативных и физико–химических процессов являются гидродинамические уравнения многокомпонентной, многотемпературной, химически реагирующей, релаксирующей и излучающей смеси газов и плазмы, состоящей из нейтральных и заряженных частиц при отсутствии внешнего электромагнитного поля. Эти уравнения можно получить как феноменологическим, так и кинетическим способами.

Феноменологический вывод этих уравнений, основанный на применении основных законов классической механики и термодинамики к взаимопроникающим и взаимодействующим континуумам [6], понятие о которых ввели еще Максвелл [7] и Стефан [8], дается в курсах термодинамики необратимых процессов [9, 10]. Т. Карман в лекциях, прочитанных в 1951 г. в Сорбонне и в 1953 г. в Принстонском университете, изложил основы тогда еще нового раздела гидродинамики — аэротермохимии, изучающей течения химически реагирующих газов. Эти результаты опубликовал в своей книге Пеннер [11].

Другой подход — кинетический, основан на получении уравнений гидродинамики из кинетических уравнений Больцмана как соответствующих моментов этих уравнений. Оба способа вывода уравнений дают совершенно одинаковую структуру уравнений, хотя феноменологический вывод имеет более общий характер, поскольку он не связан с конкретной моделью кинетических уравнений, получение которых всегда связано с определенными допущениями (бинарные столкновения, независимость корреляций, молекулярный хаос и др.). Для N-компонентной смеси эти уравнения имеют вид [12]:

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_i \mathbf{v} + \mathbf{J}_i) = \omega_i, \tag{5.1}$$

$$\frac{\partial (\rho_i \mathbf{v}_i)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_i \mathbf{v}\mathbf{v} + \mathbf{v}\mathbf{J}_i + \mathbf{J}_i\mathbf{v}) - \nabla \cdot \widehat{\mathbf{P}}_i = \rho_i \mathbf{F}_{gi} + \rho_i \mathbf{F}_{qi} + \rho_i \mathbf{F}_{\tau i} + \omega_i \mathbf{v}, \tag{5.2}$$

$$\partial \frac{\left[\rho_i \left(v^2/2 + e_i + \mathbf{v}\mathbf{V}_i\right)\right]}{\partial t} + \nabla \cdot \left[\rho_i \left(\frac{v^2}{2} + e_i\right) \mathbf{v} - \widehat{\mathbf{P}}_i \cdot \mathbf{v} + \mathbf{J}_{qi} + \mathbf{J}_i \left(\frac{\mathbf{v}^2}{2}\right) + \right.$$
$$\left. + (\mathbf{J}_i \cdot \mathbf{v})\, \mathbf{v} - \mathbf{J}_{Ri}\right] = \rho_i \left(\mathbf{F}_{gi} + \mathbf{F}_{qi}\right) \cdot \mathbf{v} + \rho_i \mathbf{F}_{\tau i} \cdot \mathbf{v} + \omega_i \left(\frac{v^2}{2}\right) + Q_i, \tag{5.3}$$

$$p_i = n_i k T_i, \quad i = 1, \ldots, N, \tag{5.4}$$

где:

$$\mathbf{v} = \sum_{k=1}^{N} c_k \mathbf{v}_k, \quad c_i = \frac{\rho_i}{\rho}, \quad \rho = \sum_{k=1}^{N} \rho_k, \quad \rho_i = n_i m_i,$$
$$\mathbf{V}_i = \mathbf{v}_i - \mathbf{v}, \quad \mathbf{J}_i = \rho_i \mathbf{V}_i, \quad \widehat{P}_i = -p_i \widehat{I} + \widehat{\tau}_i,$$
$$\mathbf{F}_{\tau i} = \sum_{k=1}^{N} \nu_{ik} \left(\mathbf{v}_k - \mathbf{v}_i\right), \quad \mathbf{F}_{qi} = \frac{q_i}{m_i} \left[E + c^{-1} \left(\mathbf{v}_i \times H\right)\right].$$

Здесь: n_i, m_i, ρ_i, c_i, $\mathbf{v}_i$, $\mathbf{V}_i$, $\mathbf{J}_i$, ω_i, $\mathbf{F}_{gi}$, $\mathbf{F}_{qi}$, $\mathbf{F}_{\tau i}$, e_i, $\mathbf{J}_{Ri}$, Q_i, $\widehat{P}_i$, p_i, $\widehat{\tau}_i$, T_i, q_i, ν_{ik} соответственно величины для i-го компонента — числовая плотность частиц, масса частиц, плотность, массовая концентрация, среднестатистическая скорость, диффузионная скорость, массовый диффузионный поток, источник массы за счет химических реакций, массовая сила неэлектромагнитной природы, массовая сила электромагнитной природы, массовая сила сопротивления, действующая на i-ый континуум со стороны остальных, удельная внутренняя энергия (включающая энергию образования), удельный радиационный поток, обменный член энергии с остальными компонентами, парциальный тензор напряжений, парциальное давление, парциальный тензор вязких напряжений, абсолютная температура, заряд, эффективная частота столкновений частиц i-го сорта с частицами k-го сорта, E, H — напряженности электрического и магнитного полей, ρ — массовая плотность смеси, $\mathbf{v}$ — среднемассовая скорость смеси, c — скорость света, k — постоянная Больцмана, $\widehat{I}$ — единичный тензор, $\nabla \equiv \mathrm{div}$ — оператор дивергенции, точка означает скалярное умножение.

Если из уравнения (5.3) вычесть уравнение (5.2), предварительно умноженное на $\mathbf{v}$, то получим уравнение притока тепла для i-го континуума:

$$\frac{d\left(\rho_i e_i\right)}{dt} + \rho_i e_i \nabla \cdot \mathbf{v} + \nabla \cdot \left(\mathbf{J}_{qi} - \mathbf{J}_{Ri}\right) + \mathbf{J}_i \cdot \left(\frac{\mathbf{dv}}{\mathbf{dt}}\right) - \widehat{P}_i : \nabla \mathbf{v} = \\ = \left(\mathbf{F}_{gi} + \mathbf{F}_{qi}\right) \cdot \mathbf{J}_i + Q_i, \quad i = 1, \ldots, N. \quad (5.5)$$

Складывая последовательно уравнения (5.1)–(5.4), получим с учетом сохранения суммарной массы во всех реакциях, суммарного импульса во всех столкновениях и суммарной обменной энергии уравнения гидродинамики для смеси в целом:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\boldsymbol{\rho} \mathbf{v}) = 0, \quad (5.6)$$

$$\frac{\partial \left(\rho \mathbf{v}\right)}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\rho \mathbf{v} \mathbf{v}\right) + \nabla p - \nabla \cdot \widehat{\tau} = \sum_{k=1}^{N} \rho_k \left(\mathbf{F}_{gk} + \mathbf{F}_{qk}\right), \quad (5.7)$$

$$\frac{\partial \left[\rho \left(v^2/2 + e\right)\right]}{\partial t} + \nabla \cdot \left[\rho \left(\frac{v^2}{2} + e\right) \mathbf{v} + p \mathbf{v} - \widehat{\boldsymbol{\tau}} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{J}_q - \mathbf{J}_R\right] = \sum_{k=1}^{N} \rho_k \mathbf{F}_k \cdot \mathbf{v}_k, \quad (5.8)$$

$$p = \sum_{j=1}^{N} n_j k T_j, \tag{5.9}$$

где

$$p = \sum_{k=1}^{N} p_k, \quad \widehat{\tau} = \sum_{k=1}^{N} \widehat{\tau}_k, \quad \rho e = \sum_{k=1}^{N} \rho_k e_k, \quad \mathbf{J}_q = \sum_{k=1}^{N} \mathbf{J}_{qk},$$

$$\mathbf{J}_R = \sum_{k=1}^{N} \mathbf{J}_{Rk}, \quad \mathbf{F}_i = \mathbf{F}_{gi} + \mathbf{F}_{qi}.$$

Здесь: p, $\widehat{\boldsymbol{\tau}}$, e, $\mathbf{J}_q$, $\mathbf{J}_R$ соответственно давление в смеси, тензор вязких напряжений в смеси, удельная внутренняя энергия смеси, суммарный удельный поток тепла, суммарный радиационный поток тепла, $\mathbf{F}_i$ — внешняя массовая сила, действующая на i-ый континуум.

Для замыкания приведенной системы уравнений для смеси газов необходимо получить явное выражение для внутренних энергий компонентов e_i, выражения для векторных потоков $\mathbf{J}_i$, $\mathbf{J}_q$, $\mathbf{J}_R$ и тензора напряжений $\widehat{\tau}$, а также выписать выражения для источниковых членов ω_i и Q_i.

2. Внутренняя энергия компонентов

Предполагая локально равновесное (максвелловское) распределение энергии поступательных степеней свободы частиц и локально равновесное (больцмановское) распределение энергии внутренних степеней свободы частиц (молекул, атомов, ионов), выражение для внутренней энергии i-го сорта частиц будет

$$e_i = e_i^{(T)}(T_i) + e_i^{(R)}\left(T_i^{(R)}\right) + e_i^{(V)}\left(T_i^{(V)}\right) + e_i^{(E)}\left(T_i^{(E)}\right) + h_{i0}, \quad i = 1, \ldots, N, \tag{5.10}$$

где слагаемые являются соответственно удельными энергиями, приходящимися на поступательные (T), вращательные (R), колебательные (V) и элекронно–возбужденные степени свободы (E) частиц i-го сорта при своих температурах, h_{i0} — энергия образования (удельная теплота реакции при абсолютном нуле) i-го компонента. Это так называемое модовое приближение. Для условий гиперзвукового обтекания на высотах $H \leqslant 100$ км можно считать с достаточной точностью, что энергии поступательных и вращательных степеней свободы (активные степени свободы) тяжелых частиц (не электронов) находятся в равновесии между собой, т. е. $T_i = T_i^{(R)} = T$. Выражения для $e_i^{(V)}\left(T_i^{(V)}\right)$ и $e_i^{(E)}\left(T_i^{(E)}\right)$ можно найти в справочной литературе. Для модели гармонического осциллятора для $e_i^{(V)}$ имеем:

$$e_i^{(V)} = \frac{k}{m_i} \frac{\Theta_{vi}}{\exp(t_i) - 1}, \quad \Theta_{vi} = \frac{h\nu_i}{k}, \quad t_i = \frac{\Theta_{vi}}{T_i^{(V)}}, \tag{5.11}$$

где Θ_{vi} — характеристическая колебательная температура, ν_i — частота колебаний i-го компонента.

Электронные уровни возбуждаются в основном свободными электронами. Энергия свободных электронов характеризуется электронной температурой T_e. Обычно предполагается, что электронные уровни энергии имеют равновесное (больцмановское) распределение с температурой, равной T_e, т. е. $T_i^{(E)} = T_e$. Это сильное предположение приближенно верно для низких электронных состояний. Высоковозбужденные электронные уровни отклоняются от равновесного, но их вклад в энергию до температур $T \leqslant 10000$ K (что и выполняется для рассматриваемых задач практически во всей толщине ударного слоя) пренебрежимо мал. До наступления полного термического равновесия за головной ударной волной происходит релаксация (выравнивание) колебательных температур молекул и молекулярных ионов $T_i^{(V)}$и электронной температуры T_e до температуры поступательных степеней свободы T. Таким образом, при наличии релаксации внутренних степеней свободы со своими квазиравновесными температурами $T_i^{(V)}$, $T_i^{(E)} = T_e$ необходимо иметь соответствующие уравнения баланса энергии колебательных степеней свободы частиц и уравнение для определения температуры свободных электронов T_e.

3. Уравнение сохранения (баланса) энергии внутренних степеней свободы частиц

Если уравнение баланса числа частиц i-го сорта, находящихся в квантовом состоянии α, умножить на энергию $\varepsilon_{i\alpha}$ частицы, находящейся в α-ом квантовом состоянии, и затем просуммировать по всем α, то получим искомые уравнения [13, 14]:

$$\rho \frac{d\left(c_i e_i^{(in)}\right)}{dt} + \nabla \cdot \mathbf{q}_i^{(in)} = Q_i^{(in)}, \quad i = 1, \ldots, N, \tag{5.12}$$

где

$$e_i^{(in)} = \frac{\langle \varepsilon_i \rangle}{m_i}, \quad n_i \langle \varepsilon_i \rangle = \sum_\alpha n_{i\alpha} \varepsilon_{i\alpha}, \quad n_i = \sum_\alpha n_{i\alpha},$$

$$\mathbf{q}_i^{(in)} = \sum_\alpha n_{i\alpha} \varepsilon_{i\alpha} \mathbf{V}_{i\alpha}, \quad \mathbf{V}_{i\alpha} = \mathbf{v}_{i\alpha} - \mathbf{v}, \quad Q_i^{(in)} = \sum_\alpha \varepsilon_{i\alpha} \dot{n}_{i\alpha}.$$

Здесь $\mathbf{q}_i^{(in)}$ — удельный поток энергии внутренних степеней свободы частиц i-го сорта, $e_i^{(in)}$ — средняя удельная энергия внутренних степеней свободы частиц i-го сорта, которая в случае больцмановского распределения энергии внутренних степеней свободы колебаний для гармонического осциллятора будет равна (5.11), $Q_i^{(in)}$ — обменные источниковые члены. Для замыкания уравнений (5.12) необходимы выражения для потоков $\mathbf{q}_i^{(in)}$ и источников $Q_i^{(in)}$.

4. Уравнение сохранения (баланса) энергии электронной компоненты

Температура электронов T_e в ударном слое непосредственно за головным скачком остается ниже температуры тяжелых частиц T из-за низкой скорости обмена поступательной энергией при столкновении электронов с тяжелыми частицами, что связано с большим различием масс этих частиц. Поэтому необходимо иметь уравнение для определения T_e или энергии свободных электронов $e_e = (3/2)\,k(T_e/m_e) + h_{e0}$. Таким уравнением будет одно из уравнений (5.5), которое через электронную температуру T_e запишется в виде

$$\frac{(3/2)\,d\,(n_e T_e)}{dt} + \left(\frac{5}{2}\right) n_e T_e \nabla\cdot\mathbf{v} + \nabla\cdot(\mathbf{J}_{qe} - h_{e0}\mathbf{J}_e - \mathbf{J}_{\mathbf{Re}}) + \\ + \mathbf{J}_i\cdot\frac{d\mathbf{v}}{dt} - \widehat{\tau}_e : \nabla\mathbf{v} = (\mathbf{F}_{ge} + \mathbf{F}_{qe})\cdot\mathbf{J}_e + Q_e - h_{e0}\dot{\omega}_e. \quad (5.13)$$

5. Молекулярные соотношения переноса и коэффициенты переноса

Центральным моментом при выводе замкнутой системы уравнений для многокомпонентной многотемпературной смеси газов является получение явных выражений для потоков диффузии $\mathbf{J}_i$ с разными диффузионными свойствами компонентов (разными бинарными коэффициентами диффузии), полного потока тепла $\mathbf{J}_q$, потоков внутренних энергий $\mathbf{q}_i^{(in)}$, радиационных потоков $\mathbf{J}_{Ri}$ и парциальных компонент тензора напряжений $\widehat{P}_i$, отдельных компонентов и для смеси в целом — так называемых соотношений переноса. На этом этапе применение принципов термодинамики необратимых процессов с использованием принципа Онзагера о симметрии кинетических коэффициентов [9] или кинетического подхода с использованием, например, метода Чепмена–Энскога для решения уравнений Больцмана, дает совершенно одинаковую структуру соотношений переноса [15].

Для смесей нейтральных одноатомных газов соотношения переноса, полученные в рамках низших приближений при вычислении возмущенной функции распределения по полиномам Сонина [16] до температур диссоциации ($2000 \div 4000$ K), дают ошибку, не превышающую, как правило, 0,3% для коэффициента вязкости, 0,5% для коэффициентов теплопроводности и до 10% для коэффициентов термодиффузии.

Для частично ионизованных газов необходимо учитывать высшие приближения [17]. Например, для вычисления коэффициентов теплопроводности ионизованного воздуха необходимо учитывать третье приближение и второе — для остальных коэффициентов переноса [18]. Стандартная процедура метода Чепмена–Энскога [16] приводит к уравнениям переноса в виде выражений для потоков через градиенты гидродинамических переменных («потоки через термодинамические силы»). При этом для коэффициента теплопроводности

$\lambda(\xi)$, многокомпонентных коэффициентов диффузии $D_{ij}(\xi)$ и термодиффузии $D_i\,(\xi)$ получаются сложные выражения в виде отношения определителей порядка $N\xi+1$ и $N\xi$, где ξ — число удерживаемых членов в разложении возмущенной части функции распределения по полиномам Сонина. В такой сложной форме соотношения переноса никогда не использовались в полной форме при решении конкретных задач. Точные соотношения переноса в любом приближении с более простыми коэффициентами («термодинамические силы через потоки») получены в [19, 20] и они имеют вид:

$$\mathbf{d}_i = \sum_{k=1}^{N} \frac{x_i x_k}{\mathcal{D}_{ik}\,(1)\, f_{ik}\,(\xi)}\,(\mathbf{V}_k - \mathbf{V}_i) - k_{Ti}\,(\xi)\,\nabla \ln T, \quad i = 1, \ldots, N, \tag{5.14}$$

$$\mathbf{J}_q = -\lambda\,(\xi)\,\nabla T + nkT \sum_{j=1}^{N} \left(\frac{k_{Tj}\,(\xi)}{\rho_j} \right) \mathbf{J}_j + \sum_{k=1}^{N} h_k \mathbf{J}_k, \tag{5.15}$$

где

$$\mathbf{d}_i = \nabla x_i + (x_i - c_i)\,\nabla \ln p - \frac{c_i}{p} \left(\rho \mathbf{F}_i - \sum_{k=1}^{N} \rho_k \mathbf{F}_k \right),$$

$$x_i = \frac{n_i}{n}, \quad n = \sum_{k=1}^{N} n_k, \quad m = \sum_{k=1}^{N} m_k x_k.$$

Причем коэффициенты в этих уравнениях ($f_{ik}(\xi)$ — поправочные функции, $k_{Ti}(\xi)$ — термодиффузионное отношение, $\lambda(\xi)$ — коэффициент теплопроводности) выражаются уже через определители порядка $N(\xi - l)$, элементами в которых являются непосредственно полные интегральные скобки, зависящие от интегралов столкновений частиц всех пар и состава смеси, $\mathcal{D}_{ik}\,(1)$ — бинарный коэффициент диффузии в первом приближении.

Соотношения переноса в виде (5.14), (5.15) были получены также и феноменологически с использованием методов термодинамики необратимых процессов [15, 21]. В такой форме они получили широкое распространение при решении различных задач течений вязкого многокомпонентного газа, особенно при применении численных методов высокого порядка аппроксимации, когда в качестве искомых функций наряду с гидродинамическими переменными вводятся потоки $\mathbf{J}_i$ $(i = 1, \ldots, N)$, $\mathbf{J}_q$ [19, 22, 23]. Эффективность использования соотношений переноса массы компонентов в виде (5.14) будет показана в разделе 13.

6. Потоки энергии внутренних степеней свободы

При предположении, что релаксация внутренних степеней свободы частиц не влияет на потенциалы взаимодействия частиц, а определяется только их

сортом (приближение Эйкена), в [13, 14] было получено для потока энергии внутренних движений частиц выражение

$$\mathbf{q}_i^{(in)} = \sum_\alpha n_{i_\alpha}\varepsilon_{i_\alpha}\mathbf{V}_{i_\alpha} = e_i^{(in)}\mathbf{J}_i - \rho_i D_i \nabla e_i^{(in)} =$$

$$= e_i^{(in)}\mathbf{J}_i + \rho D_i e_i^{(in)}\nabla c_i - \rho D_i \nabla\left(c_i e_i^{(in)}\right), \quad D_i^{-1} = \sum_{k=1}^{N} x\mathcal{D}_{ik}^{-1}. \quad (5.16)$$

С учетом соотношений переноса (5.14) для смеси электронейтральных компонентов ($F_i = F_{gi}$), выражения (5.16) принимают удобный для решения задач вид:

$$\mathbf{q}_i^{(in)} = -\rho D_i \nabla\left(c_i e_i^{(in)}\right) + c_i e_i^{(in)}\left[\left(\frac{m}{\Delta_i}\right)\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{\Delta_{ik}^{(0)}}{m_k}\right)\mathbf{J}_k - \right.$$

$$\left. - \rho D_i \alpha_{Ti}^{(0)}\nabla \ln T - \rho D_i \alpha_{pi}^{(0)}\nabla \ln p\right], \quad (5.17)$$

где

$$\Delta_{ik}^{(0)} = \Delta_{ik} + \sum_{s=1}^{N} x_s\left(\frac{m_k}{m} - \frac{m_s}{m}\right)\Delta_{ks}, \quad \Delta_{ik}^{-1} = n\mathcal{D}_{ik},$$

$$\Delta_i = \sum_{k=1}^{N} x_k \Delta_{ik}, \quad \alpha_{Ti}^{(0)} = \alpha_{Ti} - \sum_{s=1}^{N} c_s \alpha_{Ts}, \quad k_{Ti} = x_i \alpha_{Ti},$$

$$\alpha_{pi}^{(0)} = \alpha_{pi} - \sum_{s=1}^{N} c_s \alpha_{ps}, \quad k_{pi} = x_i \alpha_{pi} = x_i - c_i.$$

Здесь α_{Ti}, α_{pi} — термо- и бародиффузионные факторы i-го компонента. Заметим, что $c_i e_i^{(in)}$ представляют собой энергию внутренних степеней свободы частиц i-го сорта в единице массы смеси. Если имеет место больцмановское распределение частиц по внутренним квантовым состояниям энергии соответственно с температурами $T_i^{(in)}$, тогда:

$$\mathbf{q}_i^{(in)} = e_i^{(in)}\mathbf{J}_i - \lambda_i^{(in)}\nabla T_i^{(in)}, \quad \lambda_i^{(in)} = \rho D_i c_i c_{vi}^{(in)}, \quad c_{vi}^{(in)} = \frac{de_i^{(in)}}{dT_i^{(in)}}, \quad (5.18)$$

где $\lambda_i^{(in)}$ — коэффициент теплопроводности энергии внутренних степеней свободы i-го компонента, зависящий от температуры $T_i^{(in)}$ ($(in) \equiv R$, V, или E). Заметим, что если к выражению для полного потока тепла (5.15), записанного для бесструктурных частиц, добавить выражения (5.16), то получим полный поток тепла для смеси газов с возможными внутренними степенями свободы

$$\mathbf{J}_q = -\lambda\nabla T + \sum_{k=1}^{N} h_k^{(T)} J_k - \sum_{k=1}^{N} \rho_k D_k \nabla e_k^{(in)}, \quad (5.19)$$

где

$$h_i^{(T)} = h_i + \frac{\alpha_{Ti} kT}{m_i}, \quad h_i = e_i + \frac{kT}{m_i}.$$

Здесь e_i дается выражением (5.10). Для случая, когда выполняется выражение (5.18), будем иметь

$$\mathbf{J}_q = -\lambda \nabla T - \sum_{k=1}^{N} \lambda_k^{(in)} \nabla T_k^{(in)} + \sum_{k=1}^{N} h_k^{(T)} J_k. \tag{5.20}$$

Аналогичные выражения можно получить и для случая смеси, содержащей заряженные частицы (частично ионизованный газ), если исключить возникающее электрическое поле E в соотношениях (5.14) (образующееся за счет движения зарядов магнитное поле H имеет релятевистский эффект и им можно пренебречь) из условия квазинейтральности смеси. При этом видоизменяется только выражение для $\Delta_{ik}^{(0)}$ в (5.17) [24, 25].

7. Кинетика реакций диссоциации и ионизации для однотемпературной смеси газов и плазмы

При температурах поступательных степеней свободы за головной ударной волной меньше $8000 \div 10000$ K имеет место следующая иерархия характерных времен физико-химических процессов в воздухе [16, 24–26]:

$$\tau_{TT} \leqslant \tau_{RT} \ll \tau_{VT} \ll \tau_D < \tau_I, \tag{5.21}$$

где τ_{TT}, τ_{RT}, τ_{VT} соответственно времена релаксации энергии поступательных, вращательных и колебательных степеней свободы, τ_D — характерное время реакций диссоциации, τ_I — характерное время реакций ионизации. В этом случае релаксационная зона за ударной волной имеет характерную «полосатую» структуру. При этом реакции диссоциации и ионизации идут на фоне квазиравновесия энергии между всеми степенями свободы частиц, можно ввести одну температуру T.

Рассмотрим выражение для источниковых членов ω_i, входящих в уравнения (5.1), (5.5). Если установлено, что в смеси из N компонентов протекает R реакций:

$$\sum_{i=1}^{N} \nu'_{ir} A_i \underset{K_r^-}{\overset{K_r^+}{\rightleftarrows}} \sum_{i=1}^{N} \nu''_{ir} A_i, \quad r = 1, \ldots, R, \tag{5.22}$$

то с использованием закона кратных отношений и закона действующих масс можно получить выражение для ω_i:

$$\omega_i = m_i \dot{n}_i = m_i n \sum_{r=1}^{R} \frac{(\nu''_{ir} - \nu'_{ir})\, e_r}{\tau_r}, \tag{5.23}$$

где:

$$\tau_r^{-1} = \left(\frac{p}{kT}\right)^{\nu_r''-1} \times K_r^{-1} = n^{\nu_r''-1} K_r^{-1}, \quad e_r = K_{pr} p^{\nu_r''-\nu_r'} \prod_{k=1}^{N} x_k^{\nu_{kr}'} - \prod_{k=1}^{N} x_k^{\nu_{kr}''},$$

$$\nu_r' = \sum_{k=1}^{N} \nu_{kr}', \quad \nu_r'' = \sum_{k=1}^{N} \nu_{kr}'', \quad K_{pr} = K_r\,(kT)^{\nu_r''-\nu_r'}, \quad K_r = \frac{K_r^+}{K_r^-}.$$

Здесь ν_{ir}', ν_{ir}'' — стехиометрические коэффициенты, A_i — символы химических веществ, K_r^+, K_r^- — константы скоростей прямых и обратных реакций, τ_r — «химическое» время обратных реакций, e_r — величины, характеризующие отклонения реакций от химически равновесных реакций. На изложенном выше фактически и базируется феноменологическая кинетика, которая использует выражения для констант скоростей K_r^+, K_r^-, взятых в конечном итоге из эксперимента, который обрабатывается согласно классической теории столкновениий. В настоящее время в литературе имеются обобщающие системы данных по константам диссоциации и ионизации воздуха применительно к условиям входа летательных аппаратов в атмосферу Земли [27–32]. Все эти данные так или иначе использовались при решении задач гиперзвуковой аэродинамики и теплообмена, а также очень широко — в задаче о структуре релаксационной зоны за скачком уплотнения. Анализ этих систем данных [33] показывает, что константы диссоциации O_2 имеют разброс от 0,5 до 2 порядков, константы диссоциации N_2 имеют разброс не более $1 \div 1{,}5$ порядков.

Наибольший разброс констант скоростей. наблюдается для реакций диссоциации NO, достигающий трех порядков (массовая концентрация NO в диссоциированном воздухе, как правило, не более 0,05). Обменные реакции ($O + N_2 \rightleftarrows N + NO$, $O + NO \rightleftarrows N + O_2$) имеют разброс не более двух порядков. Существенно больший разброс имеют константы ионизации [34].

Расчет теплового потока по траектории «Буран» по всем указанным выше шести кинетическим данным показал его разброс до $20 \div 25\%$ [33], соответственно разброс равновесно-радиоционной температуры стенки в точке торможения достигал $60 \div 80$ K.

8. Термически и химически неравновесные режимы гиперзвукового обтекания тел

При температурах воздуха в ударном слое $T \approx 8000 \div 10000$ K время τ_V сравнивается с временами τ_D и τ_I [26]. В этом случае диссоциация начинается и протекает в условиях еще незавершенной колебательной релаксации. Это приводит к так называемому колебательно–диссоциационному взаимодействию, диссоциация происходит со всех возможных колебательных уровней, а не только с верхних, как это имеет место при достаточно низких темпера турах согласно «лестничной» модели диссоциации, в соответствии

с которой молекула должна совершить «подъем по лестнице колебательных уровней» с нижних уровней на верхние и оказаться в энергетическом интервале kT около предела диссоциации, тогда последующие столкновения приводят к диссоциации.

Так как константа диссоциации зависит от распределения заселенностей колебательных уровней молекул, которые при больцмановском равновесии внутри колебательной моды зависят от колебательной температуры, то в итоге константа диссоциации должна зависеть, кроме поступательной, еще и от колебательной температуры $T^{(V)}$, то есть:

$$\begin{gathered} K_D\left(T, T^{(V)}\right) = K_D\left(T\right) V\left(T, T^{(V)}\right), \\ V\left(T, T^{(V)}\right) \leqslant 1 \quad \text{при} \quad T^{(V)} \leqslant T, \quad V\left(T, T\right) \equiv 1, \end{gathered} \tag{5.24}$$

где $K_D(T) = K_r(T)$ — равновесная (однотемпературная) константа диссоциации, о которой шла речь в разделе 7. Множитель $V(T, T^{(V)})$ вводили в работах [35–37] и др. для объяснения свечения и структуры релаксационной зоны за сильными ударными волнами.

В работе [38] были обработаны экспериментальные данные по константам диссоциации O_2 и N_2, полученные в ударных трубах в 60-х и 70-х годах, в рамках двух температурной модели реакций. Было предположено, что константы скоростей K_D являются функциями среднегеометрической температуры между поступательной и колебательной температурами. Предложенная таким образом единая система констант диссоциации K_D в столкновениях с N_2, N, O_2 и O описала большое число экспериментальных данных с разбросом всего в 1,5 раза. Плотность и концентрации компонентов слабо зависят от этого разброса констант скоростей из-за отрицательной обратной связи, имеющейся в колебательно–диссоциационном взаимодействии (см. раздел 9).

В литературе на сегодняшний день предложено много моделей неравновесной кинетики в воздухе. Например, в [39] предложена формула

$$V = \frac{Q\left(T\right) Q\left(T_U\right)}{Q\left(T^{(\mathbf{V})}\right) Q\left(-U\right)},$$

где Q — статсуммы, $T_U^{-1} = (T^{(V)-1} - T^{-1} - U^{-1})$, U — характеристическая «отрицательная температура» распределения вероятностей по колебательным состояниям, которая входит в исходное соотношение для вероятности реакций p с колебательных уровней с энергией ε_α:

$$p \sim \exp\left[\frac{-\left(D - \varepsilon_\alpha\right)}{U}\right],$$

где D — энергия диссоциации. Величина U является параметром модели. При $U = \infty$ имеем равновероятное протекание реакций со всех колебательных уровней, с уменьшением U вероятность реакции растет с номером уровня. Другие выражения для V получены в работах [40–45]. Влияние

неравновесной кинетики на теплообмен при гиперзвуковом обтекании будет рассмотрено в следующем разделе.

9. Обменные члены в уравнениях баланса энергии внутренних степеней свободы. Эффект колебательно-диссоциационно-колебательного взаимодействия (КДКВ)

В уравнение баланса энергии внутренних степеней свободы (5.12) входят источниковые члены энергии обмена $Q_i^{(in)}$, которые для колебательных степеней свободы имеют в общем случае следующий вид:

$$Q_i^{(\mathbf{V})} = Q\left(T, V_i\right) + Q\left(e, V_i\right) + Q\left(R, V_i\right) + Q\left(V, V_i\right) + Q\left(E, V_i\right) + Q\left(c, V_i\right), \quad (5.25)$$

где первое слагаемое представляет собой скорость обмена колебательной энергии i-го компонента с поступательными степенями свободы тяжелых частиц (в единице объема за единицу времени), второе — с поступательными степенями свободы свободных электронов, третье — с вращательными степенями свободы, четвертое — с колебательными степенями свободы частиц другого сорта, отличного от i-го сорта, пятое — с электронными степенями свободы, и последнее слагаемое связано с появлением (исчезновением) колебательной энергии в химических реакциях.

При входе в атмосферу Земли с первой космической скоростью наибольший вклад вносят, в случае слабой ионизации, первый, четвертый и последний члены в (5.25). Для этих слагаемых в [45, 46] получены для диссоциированного воздуха с шестью стандартными реакциями (M — любая частица):

$$\mathrm{O_2} + M \underset{K_{1M}^-}{\overset{K_{1M}^+}{\rightleftarrows}} \mathrm{O} + \mathrm{O} + M, \qquad \mathrm{O} + \mathrm{N_2} \underset{K_{4M}^-}{\overset{K_{4M}^+}{\rightleftarrows}} \mathrm{N} + \mathrm{NO},$$

$$\mathrm{N_2} + M \underset{K_{2M}^-}{\overset{K_{2M}^+}{\rightleftarrows}} \mathrm{N} + \mathrm{N} + M, \qquad \mathrm{O} + \mathrm{N} \underset{K_{5M}^-}{\overset{K_{5M}^+}{\rightleftarrows}} \mathrm{ON} + \mathrm{O_2},$$

$$\mathrm{NO} + M \underset{K_{3M}^-}{\overset{K_{3M}^+}{\rightleftarrows}} \mathrm{N} + \mathrm{O} + M, \qquad \mathrm{O_2} + \mathrm{N_2} \underset{K_{6M}^-}{\overset{K_{6M}^+}{\rightleftarrows}} \mathrm{NO} + \mathrm{NO},$$

следующие выражения для модели гармонических осцилляторов:

$$Q\left(T, V_i\right) = \rho\left[e_i\left(T\right) - e_i\left(T_i^{(V)}\right)\right]\tau^{-1}\left(T, V_i\right),$$

$$Q\left(V, V_i\right) = \rho \sum_{l=mol} \frac{1}{t_i \tau_{il} u_i\left(T\right)}\left[\left(u_i + \gamma_i h\nu_i\right) u_i e^{t_i} - \left(u_i + \gamma_i h\nu_i\right) u_i e^{t_i}\right],$$

$$Q\left(c, V_i\right) \equiv Q\left(c, V_{\mathrm{O_2}}\right) = -n\tau_i^{-1}\left[\varepsilon_D\left(\mathrm{O_2}\right) K_{p1} p^{-1}\, V\left(T, T_{\mathrm{O_2}}^{(V)}\right) x_{\mathrm{O_2}} - \right.$$
$$\left. - \varepsilon_R\left(\mathrm{O_2}\right) x_{\mathrm{O}}^2\right] + n\tau_5^{-1}\left(K_5 x_O x_{\mathrm{NO}} - x_{\mathrm{NO}} x_{\mathrm{O_2}}\right) - n\tau_6^{-1}\left(x_{\mathrm{O_2}} x_{\mathrm{N_2}} - x_{\mathrm{NO}}\right),$$

где

$$\tau^{-1}\left(T, V_i\right) = \left(1 - e^{-t_i}\right) \sum_{k=1}^{N} z_{ik} \left(p_{10}\right)_i^{(k)},$$

$$\tau_{il}^{-1} = \tau_{il}^{-1}\left(V, V^1\right) = z_{il} \left(Q_{10}^{01}\right)_i^{(l)} e^{-t_i} = z_{il} Q_i^{(l)},$$

$$Q_i^{(l)} = \left(Q_{10}^{01}\right)_i^{(l)} e^{-t_i} = \left(Q_{10}^{01}\right)_i^{(l)} e^{-t_i}, \quad u_i\left(T\right) = \frac{c_i k T}{m_i}, \quad \gamma_i = \frac{c_i}{m_i}, \quad t_i = \frac{h\nu_i}{kT} = \frac{\Theta_{V_i}}{T},$$

$$\varepsilon_{D_i} = h\nu_i \left[\exp\left(t_{u_i}\right) - 1\right]^{-1} - d_i h\nu_i \left[\exp\left(d_i t_{u_i}\right) - 1\right]^{-1},$$

$$t_{u_i} = \left(\frac{h\nu_i}{k}\right)\left(T_i^{(V)-1} - T^{-1} - u_i^{-1}\right), \quad \varepsilon_{R_i} = \varepsilon_{D_i}\left(T_i^{(V)} = T\right).$$

Здесь: $\tau(T, V_i)$ — время релаксации между колебательными и поступательными степенями свободы i-го компонента, z_{ik} — частота бинарных столкновений, $(p_{10})_i^{(k)}$ — вероятность дезактивации первого колебательного уровня при столкновении частицы i-го сорта с частицей k-го сорта, τ_{ij} — время релаксации между колебательными степенями свободы i-го и j-го компонентов, $(Q_{10}^{01})_i^{(l)}$ — вероятность перехода молекулы i-го сорта с первого уровня на основной (нулевой) при столкновении ее с молекулой сорта l, которая переходит с основного уровня на первый, $\varepsilon_D(\mathrm{O}_2)$ — среднее изменение колебательной энергии, приходящееся на одну продиссоциированную частицу (на один акт диссоциации), $\varepsilon_R(\mathrm{O}_2)$ — то же самое для реакции рекомбинации, $(d-1)$ — число уровней обрезанного гармонического осциллятора. Данные по вероятностям перехода приведены в работах [47, 48].

Для высоких температур ($T > 10000\,\mathrm{K}$) времена релаксации колебательных степеней свободы, данные в [47], являются заниженными, что ведет к уменьшению расстояния от ударной волны, на котором излучение достигает максимума [49]. В работе [49] была усовершенствована модель колебательной релаксации с помощью введения эффективного сечения столкновений $\tau(T, V_i)$ для вычислений при высоких температурах.

Таким образом, учет двухтемпературной кинетики (5.24) и учет обратного влияния реакций через слагаемое $Q(c, V_i)$ в (5.25) приводит к так называемому колебательно–диссоциационно–колебательному взаимодействию (КДКВ). В работах [50, 51] в рамках модели ТВУС, затем в работах [52–54] в рамках модели полного вязкого ударного слоя было показано, что на траектории спуска «Space Shuttle» и «Бурана» эффект КДКВ может приводить к увеличению тепловых потоков до 25% и равновесной температуры стенки до 100 К. Однако имеющаяся неопределенность в вероятностях диссоциации с разных колебательных уровней не позволяет сделать окончательных количественных выводов о влиянии КДКВ на теплообмен, хотя это влияние и может быть существенным.

10. Гетерогенная рекомбинация и гетерогенная дезактивация внутренних степеней свободы частиц

Для изложения данного вопроса рассмотрим более подробно выражения для конвективного потока тепла на стенку (5.20).

Пусть L обозначает число независимых (базисных) компонентов, в качестве которых, в частности, можно взять химические элементы как таковые и электронную компоненту. Тогда химические символы остальных компонентов (продуктов реакций) A_i $(i = L+1, \ldots, N)$ можно выразить через символы базисных компонентов B_j, не нарушая общности, в следующем виде:

$$A_i = \sum_{j=1}^{L} \nu_{ij} B_j - q_i, \quad i = L+1, \ldots, N, \tag{5.26}$$

где ν_{ij} — элементы стехиометрической матрицы, q_i — теплоты реакций на один грамм продукта A_i. В соответствии с записью (5.26) будем иметь следующие выражения для энтальпий продуктов реакций:

$$h_i = \sum_{j=1}^{L} \nu_{ij} h_j - q_i, \quad i = L+1, \ldots, N. \tag{5.27}$$

Если определить концентрации элементов c_j^* и диффузионные потоки элементов J_j^* в соответствии с записью реакций (5.26) в виде:

$$c_j^* = c_j + \sum_{k=L+1}^{N} \nu_{kj} \frac{m_j}{m_k} c_k, \quad J_j^* = J_j + \sum_{k=L+1}^{N} \nu_{kj} \frac{m_j}{m_k} J_k, \tag{5.28}$$

то после исключения h_i $(i = L+1, \ldots, N)$ с помощью (5.27) и исключения J_j $(j = 1, \ldots, L)$ с помощью (5.28) из (5.20), получим:

$$J_q = -\lambda(\xi)\nabla T - \sum_{i=1}^{N} \lambda_i^{(in)} \nabla T_i^{(in)} + \sum_{j=1}^{L} h_j^{(T)} J_j^* - \sum_{k=L+1}^{N} q_k^{(T)} J_k, \tag{5.29}$$

где

$$h_j^{(T)} = h_j + \frac{kT\alpha_{T_j}}{m_j}, \quad j = 1, \ldots, L,$$

$$q_i^{(T)} = q_i - kT\left(\alpha_{T_i} - \sum_{j=1}^{L} \nu_{ij}\alpha_{T_j}\right) m_i^{-1}.$$

Отсюда следует, что если при учете диффузионного термоэффекта ($\alpha_{Ti} \neq \neq 0$) ввести вместо энтальпий продуктов реакций h_i $(i = L+1, \ldots, N)$ обобщенные удельные энтальпии $h_j^{(T)}$ и вместо теплот реакций q_i $(i = L+1, \ldots \ldots, N)$ обобщенные теплоты реакций $q_i^{(T)}$, то выражение для полного потока тепла (5.29) будет совпадать по форме записи с выражением для J_q при отсутствии диффузионного термоэффекта. После подстановки (5.29) в (5.8)

получим уравнение энергии для определения температуры газа в потоке с граничным условием теплового баланса на стенке ($y = 0$) для определения ее равновестно-радиационной температуры:

$$J_q\big|_w = \varepsilon\sigma T_w^4, \tag{5.30}$$

где ε — степень черноты поверхности, σ — постоянная Стефана–Больцмана.

Величина теплового потока (5.29), а тем самым радиационно-равновесная температура станки (5.30) будет существенно зависеть от граничных условий на стенке для концентраций компонентов. Граничные условия на термохимически не разрушающейся поверхности включают в себя L условий отсутствия диффузионных потоков элементов на стенку:

$$J_{jw}^* = 0, \quad j = 1, \ldots, L, \tag{5.31}$$

и уравнения баланса массы для продуктов реакций

$$J_{iw} = \rho_w k_{wi} c_{iw}, \quad i = L+1, \ldots, N, \tag{5.32}$$

где k_{wi} — эффективные константы каталитичности ($k_{wi} = 0$ — некаталитическая стенка, $k_{wi} = \infty$ — идеально-каталитическая стенка). Из (5.29) следует с учетом (5.30) выражение для теплового потока к стенке (для простоты рассуждений принимаем, что при подходе к стенке релаксация закончилась, т. е. $T_i^{(in)} \equiv T$, и вводим для наглядности качественных результатов один эффективный коэффициент диффузии для всех компонентов)

$$J_{qw} = -\lambda \left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{y=0} - \sum_{k=L+1}^{N} q_k^{(T)} J_k\Big|_{y=0}. \tag{5.33}$$

Таким образом, при $k_{wi} = 0$ мы получаем $J_{qw} = -\lambda \partial T/\partial y|_{y=0}$. Если $k_{wi} = \infty$ (и $c_{iw} = 0$ из (5.32)), тепловой поток увеличивается в $3 \div 4$ раза из-за второго члена в (5.33). При спуске аппаратов «Space Shuttle» и «Буран» перенос тепла за счет диффузии (второе слагаемое в (5.33)) дает до 50% полного теплового потока в максимуме теплового нагрева на высотах около 70 км [33, 55]. Поэтому знание констант каталитичности является весьма важным для правильного количественного определения теплового потока к стенке. Эти константы определяются, как правило, экспериментально.

Экспериментальные исследования по определению k_{wi} перспективных теплозащитных плиток на основе SiO_2 с низкой каталитичностью ($k_{wi} \sim 1\ ms^{-1}$) были выполнены на безэлектродном ВЧ-плазмотроне в работах [56–58], на дуговом плазмотроне — [59–61], на ударной трубе — [62–65]. Эти эксперименты охватывают температуры стенки до 1000 К, давление торможения выше 10^{-2} атм. Поэтому возникает необходимость теоретического получения выражений для k_{wi}.

В работах [66, 67] была разработана феноменологическая модель каталитических реакций, базирующаяся на учете процессов физической

и химической адсорбции и взаимодействия налетающих атомов с адатомами и адатомов между собой. При этом использовалась теория идеально-адсорбированного слоя Ленгмюра. Приведем простейшие выражения для констант k_{wi} диссоциированного воздуха, вытекающие из этой теории. Имеем:

$$\left.\begin{aligned} \frac{k_w(\mathrm{O})}{c_{\mathrm{O}_w}} &= K_w(\mathrm{O})\left[K_p(\mathrm{O})\,p^{-1}x_{\mathrm{O}_2} - x_{\mathrm{O}}^2\right]_w, \\ \frac{k_w(\mathrm{N})}{c_{\mathrm{N}_w}} &= K_w(\mathrm{N})\left[K_p(\mathrm{N})\,p^{-1}x_{\mathrm{N}_2} - x_{\mathrm{N}}^2\right]_w, \end{aligned}\right\} \tag{5.34}$$

где

$$K_w(\mathrm{O}) = \frac{m_{\mathrm{O}}}{m}\frac{k_w(\mathrm{O})\,pE}{1+pE\,(x_{\mathrm{O}}+x_{\mathrm{N}})}, \quad K_w(\mathrm{N}) = \frac{m_{\mathrm{N}}}{m}\frac{k_w(\mathrm{N})\,pE}{1+pE\,(x_{\mathrm{O}}+x_{\mathrm{N}})}.$$

Здесь E — кривая адсорбции атомов, $k_w(\mathrm{O})$ и $k_w(\mathrm{N})$ — функции от температуры, которые должны определяться из эксперимента.

Полученные таким образом структурные выражения для k_{wi} как функции температуры, давления и концентраций (5.34) позволили правильно интерпретировать имеющиеся в литературе эксперименты по определению констант k_{wi}, проведенные в узком интервале температур, и определить тепловые потоки в широком диапазоне изменения скорости и высоты полета к аппаратам, движущимся с гиперзвуковыми скоростями в верхних слоях атмосферы Земли. Эти исследования были продолжены и развиты в работе [68].

В случае течения релаксирующего газа возникает проблема постановки граничных условий для энергии (температуры) внутренних степеней свободы. Рассмотрим этот вопрос на примере колебательных степеней свободы. Если исходить из того, что колебательная энергия релаксирует при ударе о стенку и исчезает или возникает за счет реакций диссоциации, то можно получить [46, 69] следующие граничные условия (y — нормальная к стенке координата):

$$\begin{aligned} \left(e_i^{(V)}J_i - \rho D_i c_i \frac{\partial e_i^{(V)}}{\partial y}\right)_w &= \rho_w k_{wi}^{(V)}\left[e_i(T_w) - e_{iw}\right] - \\ &- \rho_w k_{wi} m_i^{-1}\left[\varepsilon_{i\,Dw} K_{p_i} p^{-1} V\left(T, T_i^{(V)}\right) x_{M_i} - \varepsilon_{iRw} x_{A_i}^2\right]_w, \end{aligned}$$

где $k_{wi}^{(V)}$ — гетерогенная константа дезактивации колебательных степеней свободы частиц i-го сорта, A_i — атом, M_i — молекула, ε_{iD}, ε_{iR} — средние изменения колебательной энергии в результате единичного акта соответственно гетерогенной реакции диссоциации и рекомбинации. В настоящее время стоит проблема количественного определения констант $k_{wi}^{(V)}$ для воздуха. Поэтому при решении задач рассматриваются два крайних случая: $k_{wi}^{(V)} = 0$ (стенка некаталитическая по отношению к дезактивации внутренних степеней свободы) и $k_{wi}^{(V)} = \infty$ (стенка идеально-каталитическая по отношению к дезактивации внутренних степеней свободы). Эти два крайних случая дают

максимальное различие в тепловых потоках на планирующей траектории входа в атмосферу Земли до 15% [33, 54].

В заключение этого раздела заметим, что каталитические свойства поверхности оказывают существенное влияние на диффузионное разделение элементов, вызванное совместным влиянием многокомпонентной диффузии и избирательного каталитического воздействия тела на атомы азота и кислорода. Максимальное отличие концентрации элемента кислорода на теле вдоль планирующей траектории входа для идеально-каталитической и некаталитической поверхностей составляет около 20% [70]. Распределение числовой плотности электронов n_e поперек ударного слоя слабо зависит от каталитических свойств поверхности.

11. Взаимодействие обменных газофазных реакций и гетерогенных реакций рекомбинации атомов в диссоциированном воздухе

Указанное взаимодействие существенно влияет на величину конвективного потока к телу при торможении его в верхних слоях атмосферы Земли [71, 72] и в характерных условиях проведения газодинамических экспериментов по определению каталитических свойств материалов при обтекании моделей диссоциированным воздухом [73]. При обтекании диссоциированным воздухом многих практически используемых теплозащитных покрытий гетерогенная рекомбинация атомов кислорода протекает с большей скоростью, чем рекомбинация атомов азота ($k_{wi}(\mathrm{O}) > k_{wi}(\mathrm{N})$). Вследствие этого около обтекаемой поверхности образуется значительное количество молекул $\mathrm{O_2}$, что приводит к интенсивному протеканию цикла газофазных обменных реакций:

$$\begin{aligned} &\mathrm{O_2 + N \to NO + O} + 32{,}4\,\text{ккал/мол},\\ &\mathrm{NO + N \to N_2 + O} + 76{,}4\,\text{ккал/мол}. \end{aligned} \tag{5.35}$$

Суммарный эффект одного цикла указанных реакций сводится к образованию молекулы азота и двух атомов кислорода и увеличению теплового потока к поверхности обтекаемого тела вследствие зкзотермичности этих реакций.

12. Образование возбужденных частиц в потоке и на поверхности обтекаемого тела

Вследствие замедленной релаксации внутренних степеней свободы в разреженном газе на больших высотах ($H \geqslant 60$ км) в результате рекомбинации могут образовываться электронно-возбужденные частицы. Например установлено, что при гетерогенной рекомбинации атомов кислорода в газовой фазе в результате десорбции с поверхности появляется значительное количество электронно-возбужденных молекул $\mathrm{O_2}$ в состояниях $a^1\Delta_g$, $b^1\Sigma_g^+$ и $A^3\Sigma_u^+$

[74, 75]. Образование метастабильных состояний молекул азота $A^3\Sigma_u^+$ и $B^3\Pi_g$ при гетерогенной рекомбинации атомов обнаружено в [76–78].

В работах [62, 63] была разработана кинетическая схема реакций гетерогенной и гомогенной рекомбинации кислорода (такие условия создаются на низких участках траекторий аппаратов многоразового использования, когда скорость полета не достаточна для диссоциации азота) с образованием электронно-возбужденных состояний молекул кислорода, энергия которых меньше энергии диссоциации, следующего вида:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{O}+\mathrm{O}-S &\longrightarrow \mathrm{O}_2+S,\\
\mathrm{O}+\mathrm{O}-S &\longrightarrow \mathrm{O}_2^*(a,b,A)+S_0,\\
\mathrm{O}_2^*(a,b,A)+M &\longrightarrow \begin{matrix}\mathrm{O}_2^*(a,b)+M\\ \mathrm{O}_2+M\end{matrix},\\
\mathrm{O}_2^*(A)+\mathrm{O} &\longrightarrow \mathrm{O}^*(S)+\mathrm{O}_2,\\
\mathrm{O}^*(S)+\mathrm{O}_2^*(a) &\longrightarrow \mathrm{O}_2^*(A)+\mathrm{O},\\
\mathrm{O}^*(S)+M &\longrightarrow \mathrm{O}+M,\\
\mathrm{O}_2^*(a,b,A)+S &\longrightarrow \begin{matrix}\mathrm{O}_2^*(a,b)+S,\\ \mathrm{O}_2+S,\end{matrix}\\
\mathrm{O}^*(S)+S &\longrightarrow \mathrm{O}+S,
\end{aligned}
$$

где $\mathrm{O}_2^*(a,b,A)$ — соответственно электронно-возбужденные состояния кислорода $a^1\Delta_g$, $b^1\Sigma_g^+$ и $A^3\Sigma_u^+$, S — поверхность обтекаемого тела, M — любая частица в газовой фазе.

В рамках данной схемы реакций решались уравнения пограничного слоя в окрестности точки торможения для следующих условий: $p \leqslant 10^{-3} \div 10^{-2}$ атм, $T = 3500 \div 4500\,\mathrm{K}$, $\beta = dU_e/dx|_{x=0} = 10^4 \div 10^5\,\mathrm{c}^{-1}$. Оказалось, что унос энергии возбужденными частицами может снижать тепловой поток к поверхности на $10 \div 20\%$. Это снижение теплового потока осуществляется в основном метастабильными и злектронно-возбужденными частицами — синглетным кислородом $\mathrm{O}_2^*(a)$. Этот факт необходимо учитывать при измерениях вероятности гетерогенной рекомбинации газодинамическими методами [75].

При низких давлениях электронно-возбужденные частицы образуются, в основном, на поверхности обтекаемого тела. Как показано в работах [79, 80], на ряде поверхностей при гетерогенной рекомбинации азота могут образовываться электронно-возбужденные молекулы $\mathrm{N}_2(A^3\Sigma_u^+)$ и $\mathrm{N}_2(B^3\Pi_g)$. При тушении молекул $\mathrm{N}_2(A^3\Sigma_u^+)$ в газовой фазе атомами азота образуются электронно-возбужденные атомы $\mathrm{N}(^2P)$ [79].

В работе [77–80] была предложена следующая схема образования и последующего тушения молекул $N_2^*(A,B)$ и атомов $N^*(P)$:

$$\begin{aligned}
N + N - S &\longrightarrow \begin{array}{r} N_2 + S, \\ N_2^*(A,B) + S, \end{array} \\
N_2^*(A) + N &\longrightarrow N_2 + N^*(P), \\
N_2^*(A) + N_2^*(A) &\longrightarrow N_2 + N_2^*(B), \\
N_2^*(A) + M &\longrightarrow N_2 + M, \\
N_2^*(B) + M &\longrightarrow N_2^*(A) + M, \\
N^*(P) + M &\longrightarrow N + M, \\
N_2^*(A,B), N^*(P) + S &\longrightarrow N_2, N + S, \\
N_2^*(B) &\longrightarrow N_2^*(A) + h\nu,
\end{aligned}$$

где $N_2^*(A,B)$ и $N^*(P)$ — соответственно электронно-возбужденные состояния молекулы азота $A^3\Sigma_u^+$, $B^3\Pi_g$ и атома азота $N(^2P)$. Решались с указанным набором неравновесных реакций уравнения пограничного слоя для условий газодинамических экспериментов в ударной трубе по определению вероятности гетерогенной рекомбинации и для натурных условий при спуске «Space Shuttle» при давлении в точке торможения меньше 10 атм, $T = 5500 \div 6500$ K и $\beta = dU_e/dx|_{x=0} = 10^4 \div 10^5$ с$^{-1}$.

Было обнаружено, что унос энергии возбужденными частицами может составлять до 40% [81–85]. Наиболее эффективно он осуществляется метастабильными электронно-возбужденными частицами $N_2(A)$. При этом сильное влияние на унос энергии могут оказывать колебательно-возбужденные молекулы N_2. Действительно, при повышении давления начинают интенсивней протекать газофазные реакции. В работах [83–86] для рекомбинации атомов азота в газовой фазе была разработана кинетическая схема, учитывающая образование и релаксацию электронно- и колебательно-возбужденных частиц. Учитывались два канала рекомбинации с конечным результатом

$$N\left(^4S\right) + N\left(^4S\right) + M \longrightarrow \begin{array}{l} N_2\left(X^1\Sigma_g^+, v = 50\right) + M, \\ N_2\left(X^1\Sigma_g^-, v = 25\right) + M, \end{array}$$

плюс поуровневая кинетика колебательного энергообмена в азоте, включающая 67 колебательных уровней. Для решения соответствующей системы газодинамических и кинетических уравнений в рамках теории пограничного слоя в окрестности точки торможения была разработана эволюционная численная схема решения. Расчеты показали, что для характерных условий на внешней границе ПС ($p = 0{,}1 \div 1$ атм, $T_e = 6000 \div 8000$ K) унос энергии колебательно-возбужденн:ым азотом может достигать $20 \div 40\%$ от полного потока тепла, что подтверждается экспериментальными исследованиями. При этом энергия уносится, в основном, молекулами с возбужденными колебательными

уровнями $v \leqslant 10 \div 15$. Распределение молекул N_2 по колебательным уровням является существенно небольцмановским, причем при низких температурах обтекаемых поверхностей $T_w \sim 300\,\mathrm{K}$ в пристеночном слое возможно образование инверсии.

13. Влияние электронно-возбужденных частиц на кинетику в газовой фазе

В результате проведенных исследований [86] было показано, что наиболее сильное влияние присутствие неравновесно-возбужденных частиц в потоке оказывает на цикл обменных реакций (5.35) около поверхности обтекаемого тела. Наличие большого количества синглетного кислорода, образующегося на поверхности, оказывает ингибирующее действие на указанный цикл реакций вследствие меньшей эффективности (примерно на два порядка) протекания первой реакции. Это обстоятельство имеет важное практическое значение, заключающееся в том, что в этом цикле уменьшается степень замены атомов азота на атомы кислорода по длине аппарата. Это, в свою очередь, оказывает существенное влияние на условия теплообмена, снижая его на $10 \div 15\%$.

14. Локально термохимически равновесные течения смесей газов с разными диффузионными свойствами компонентов

Этот раздел включен в данный обзор потому, что в литературе широко распространен и используется приближенный подход описания химически равновесных течений с учетом диссипативных процессов, только строго справедливый при одинаковых коэффициентах бинарной диффузии и пренебрежении эффектами термо- и бародиффузии. Если последние процессы для диссоциированного воздуха действительно вносят малый вклад в эффективные коэффициенты переноса, то учет разных коэффициентов диффузии имеет конечный эффект. Особенно это важно при рассмотрении течений около аблирующих и горящих поверхностей, когда в смеси имеются компоненты с сильно различающимися массами.

В воздухе создаются условия для химически равновесных течений (т. е. когда максимальное «химическое» время обратных реакций становится много меньше гидродинамического времени) при полете на высотах ниже $40 \div 50$ км при числе Маха $\mathbf{M}_\infty > 6$. Для этих условий, как правило, имеет место режим пограничного слоя с внешним невязким течением. Именно поэтому химически равновесные течения рассматривались ранее и рассматриваются сейчас в рамках уравнений Прандтля или уравнений Эйлера. При этом задачи решались с применением уравнений для однородного (однокомпонентного) газа, но записанными с использованием эффективного коэффициента теплопроводности и эффективной теплоемкостью, зависящей

от давления и температуры, и определяемыми при постоянной концентрации элементов.

В строгой постановке с учетом разных диффузионных свойств компонентов в потоке происходит разделение элементов, и в этом случае необходимо учитывать диффузию элементов [24, 87]. Рассмотрим основные особенности строгой постановки задачи о локально химически равновесных течениях многокомпонентного газа с разными диффузионными свойствами компонентов (разными бинарными коэффициентами диффузии).

Явлениям переноса в химически (ионизационно) равновесных смесях газов посвящена обширная литература. Впервые описание переноса тепла с учетом дополнительного диффузионного переноса «химической» энергии в покоящемся газе было предложено в [88]. В дальнейшем этот подход для покоящихся бинарных газовых смесей, в которых протекает одна реакция диссоциации, был развит в [89, 90]. Физическое обоснование этого процесса сводится к тому, что продукты реакций, протекающих в области с повышенной температурой, диффундируют в область с меньшей температурой, где вступают в обратные реакции и выделяют тепло, эффективно увеличивая коэффициент теплопроводности.

Для многокомпонентных покоящихся ($\nabla p = 0$) газовых смесей с произвольным числом быстро протекающих реакций диссоциации эффективный коэффициент теплопроводности был получен в [91, 92], для частично ионизованных равновесных смесей — в [93, 94]. В отмеченных работах рассматривался вывод только эффективного коэффициента теплопроводности в покоящейся среде, т. е. только молекулярный перенос тепла, но не молекулярный перенос массы в виде диффузии элементов, который с необходимостью появляется при наличии градиента температуры в многокомпонентной смеси с разными диффузионными свойствами компонентов (даже при отсутствии эффекта термодиффузии) или при наличии градиента давления в потоке. Диффузия элементов приводит к появлению дополнительного слагаемого в потоке тепла, наличие градиента давления — к появлению дополнительного слагаемого в уравнении энергии.

Диффузия элементов в термохимически равновесных течениях приводит к появлению еще целого ряда перекрестных эффективных коэффициентов переноса, в результате чего диффузионный поток какого-либо элемента зависит от градиентов концентраций всех элементов. Впервые на это было обращено внимание в [87, 95, 96].

В случае, когда максимальное «химическое» время реакций в потоке много меньше гидродинамического времени ($t_{hyd} \sim L/V$), уравнения конвективной диффузии для продуктов реакций вырождаются в условия локального химического равновесия (условия Гульберга–Вааге для химических реакций и условия Саха̀ для реакций ионизации, т. е. $e_r = 0$ в (5.23)). Уравнения $e_r = 0$ ($r = L + 1, \ldots, N$) можно рассматривать как первые интегралы уравнений Навье–Стокса и воспользоваться ими для упрощения оставшихся

дифференциальных уравнений. В результате полный конвективный поток тепла (5.29) для химически равновесных течений будет [24]:

$$J_q = -\lambda_{\text{eff}} \nabla T - \sum_{j=1}^{L} b_j^* J_j^*, \tag{5.36}$$

где

$$\lambda_{\text{eff}} = \lambda + \lambda_r, b_j^* = b_j\left(q_i\right) - h_j^T.$$

Здесь λ_{eff} — эффективный коэффициент теплопроводности, равный сумме молекулярного коэффициента теплопроводности, характеризующего передачу тепа в виде энергии поступательных и внутренних степеней свободы за счет столкновений, и коэффициента теплопроводности λ_r, характеризующего перенос энергии химических реакций с помощью диффузии продуктов реакций, b_j — известная функция теплот реакций и диффузионных свойств компонентов и состава смеси. Для открытой системы, каковой является жидкая частица в потоке, изменение энтальпии будет равно:

$$dh = c_{p\text{eff}}\, dT - a\left(\nu, q_i\right) \frac{dp}{\rho} - \sum_{j=1}^{L} a_j^* dc_j^*, \tag{5.37}$$

где

$$c_{p\text{eff}} = c_p + c_r, \quad a_j^* = a_j\left(q_i\right) - h_j.$$

Здесь: c_p — теплоемкость смеси при постоянном давлении, c_r — дополнительная теплоемкость, связанная с поглощением тепла за счет реакции, $a(v, q_i)$ и $a_j(q_i)$ — известные функции теплот реакций и химического состава [24].

С учетом (5.37) тепловой поток (5.36) будет

$$J_q = -\frac{\mu}{\sigma_{\text{eff}}} \left[\nabla h + a\left(\nu, q_i\right) \frac{\nabla p}{\rho} + \sum_{j=1}^{L} \left(a_j^* \nabla c_j^* + \frac{\sigma_{\text{eff}}}{\mu} b_j^* J_j^*\right)\right], \tag{5.38}$$

где эффективное число Прандтля равно $\sigma_{\text{eff}} = \mu c_{p\text{eff}} / \lambda_{\text{eff}}$. После подстановки (5.38) в уравнение энергии (5.8) получим уравнение энергии для термохимически равновесных течений:

$$\rho \frac{dH}{dt} - \frac{\partial p}{\partial t} = \nabla \left\{ \frac{\mu}{\sigma_{\text{eff}}} \left[\nabla H + \frac{\sigma_{\text{eff}}}{\mu} \widehat{\boldsymbol{\tau}} \cdot \mathbf{v} - \nabla \left(\frac{v^2}{2}\right) + \right.\right.$$
$$\left.\left. + a\left(\nu, q_i\right) \frac{\nabla p}{\rho} + \sum_{j=1}^{L} \left(a_j^* \nabla c_j^* + \frac{\sigma_{\text{eff}}}{\mu} b_j^* J_j^*\right)\right] + J_R \right\}. \tag{5.39}$$

Концентрации c_j^* и диффузионные потоки элементов J_j^* (5.28) должны находиться из уравнений диффузии элементов:

$$\rho \frac{dc_j^*}{dt} + \nabla \cdot J_j^* = 0, \quad j = 1, \ldots, L, \tag{5.40}$$

которые должны быть дополнены уравнениями переноса (5.14), которые для случая термохимически равновесных течений преобразуются к виду [18]:

$$\nabla c_j^* + \left(K_{Tj}^* - \frac{m_j}{m}\delta_j^{(e)}\right)\nabla \ln T + K_{pj}^*\nabla \ln p = \\ = -\frac{S_j}{\mu}J_j^* + \frac{m_j S_j}{\mu}\sum_{l=1}^{L}\frac{\alpha_{jl}^{(e)}}{m_i}J_i^*, \quad j = 1, \ldots, L. \quad (5.41)$$

Для модельной смеси с одинаковыми бинарными коэффициентами диффузии ($\mathcal{D}_{ij} = \mathcal{D}$), $\delta_j^{(e)} = 0$. Кроме того, правая часть (5.41) становится пропорциональной диффузионному потоку своего элемента, т. е. J_j^*. Тогда при пренебрежении термо- и бародиффузией из (5.41) получаем закон Фика для диффузии элементов: $J_j^* = -\rho D \nabla c_j^*$. В этом случае при решении задач теплообмена с граничными условиями:

$$c_j^*(\infty) = c_{j\infty}^*, \quad J_{jw}^* = 0, \quad j = 1, \ldots, L \quad (5.42)$$

существует решение $c_j^* = c_{j\infty}^*$, $J_j^* = 0\,(j = 1, \ldots, L)$ и уравнение энергии (5.39) принимает вид как для однородной жидкости с эффективным числом Прандтля. В такой приближенной. постановке, как правило, и решается большинство задач. Если не делать упрощающего предположения $\mathcal{D}_{ij} = \mathcal{D}$, то задача усложняется и мы приходим к эффекту разделения элементов в потоке, т. е. c_j^* не будет равняться концентрации элементов в набегающем потоке $c_{j\infty}^*$ (этот эффект был обнаружен в работе [95]), эффективные коэффициенты переноса для воздуха вычислены в [18].

Описание диффузии элементов существенно упрощается для двухэлементных смесей, каковыми являются атмосферы всех планет Солнечной системы: Земля (O_2, N_2), Венера и Марс (CO_2), Юпитер и Сатурн (H_2, He). Для третьего элемента — электрона, в силу квазинейтральности смеси $c_e^* = 0$ и для случая отсутствия электрического тока на обтекаемое тело $J_{ew}^* = 0$ [25]. В этом случае для химически равновесных течений соотношения (5.41) принимают вид законов Фика (i и l — два элемента):

$$J_j^* = -J_l^* = -\frac{\mu}{S_j^{(e)}}\left[\nabla c_j^* + \left(K_{Tj}^* - \frac{m_j}{m}\delta_j^{(e)}\right)\nabla \ln T + K_{pj}^*\nabla \ln p\right], \quad (5.43)$$

где $S_j^{(e)}$ — эффективное число Шмидта. Важно отметить, что коэффициент $(m_j/m)\,\delta_j^{(e)} \neq 0$ и эффект разделения элементов имеют, вообще говоря, конечный эффект. Однако влияние его на теплопередачу в воздушной атмосфере не велико ($\sim 5 \div 8\%$) [96].

Заключение

1. При полете на высотах более 50 км со скоростями более 4 км/с, когда температура поступательных степеней свободы в ударном слое становится выше $8 \div 10000$ K, время релаксации колебательных степеней свободы молекул

воздуха сравнивается с временем диссоциации, и поэтому диссоциация протекает на термически неравновесном фоне. Возникает так называемое колебательно-диссоциационное взаимодействие, приводящее к замедлению реакций диссоциации и повышению температуры в ударном слое, и соответственно к увеличению теплового потока к стенке.

2. С увеличением скорости полета ($V_\infty > 8$ км/с) существенным становится электронно-ионизационное взаимодействие.

3. При рекомбинации атомарного кислорода и азота около стенки и на самой стенке образуются электронно-возбужденные частицы, уносящие значительную долю энергии рекомбинации. что приводит г уменьшению теплового потока к стенке на планирующей траектории входа КА примерно до 20%.

4. Для точного количественного описания термически неравновесных процессов в ударном слое необходимы дополнительные эксперименты и более глубокие теории по уточнению кинетики диссоциации и ионизации воздуха при температурах выше $8000 \div 10000$ К.

5. Указанные выше термически и химически неравновесные процессы протекают на больших высотах полета ($H \geqslant 50$ км) при умеренных и малых числах Рейнольдса ($\mathbf{Re} \leqslant 10^4$), и поэтому для их описания необходимо привлекать более содержательные и, как следствие, более сложные по сравнению со схемой Прандтля газодинамические модели, такие, как уравнения вязкого ударного слоя, параболизованные и полные уравнения Навье–Стокса. Поэтому становится важной проблема развития эффективных численных методов решения указанных уравнений с неравновесными физико-химическими процессами в ударном слое.

Исследования поддержаны Роснаукой (Гос. контракты 02.740.11.0615 и П 594) и Российским фондом фундаментальных исследований (РФФИ). (Грант 11-01-00504 а).

Список литературы

1. *Черный Г.Г.* Течения газа с большой сверхзвуковой скоростью. — М.: Физматлит. 1959. 220 с.
2. *Хейз У.Д., Пробстин Р.Ф.* Теотия гиперзвуковых течений. — М.: Изд-во ИЛ, 1962. 608 с.
3. *Rasmussen U* Hypersonic flow, John Wiley & Sons, Inc., 1994. 639 p.
4. *Лунев В.В.* Течение реальных газов с большими скоростями. — М.: Физматлит. 2007. 759 с.
5. *Ньютон И.* Математические начала натуральной философии. Собр. трудов ак. А.Н. Крылова. Изд. АН СССР. М–Л. Т. 7. 1936.
6. *Седов Л.И.* Механика сплошной среды. — М.: Наука. Т. 1. 1994. 528 с.
7. *Maxwell J. C.* On the Dynamica1 Theory of Gases // Philosophical Magazine and Journal of Science. 1868, ser. 4. № 35 P. 185–217.

8. *Stefan J.* Uber das Gleichgewicht und die Bewegung insbesondere die Diffusion von Gasgemengen // Akad. der Wissenschaft Abheitlung II. 1871. Heft 1, P. 63–124.
9. *Де Гроот С., Мазур П.* Неравновесная термодинамика. — М.: Мир, 1964.
10. *Пригожин И.* Введение в термодинамику необратимых процессов. — М.: ИЛ, 1960.
11. *Penner S.S.* Introduction to the Study of Chemica1 Reaction in Flow Systems. London, 1955.
12. *Гогосов В.В., Полянский В.А.* Электродинамика: проблемы и применения, уравнения, разрывные решения // Итоги науки и техники. ВИНИТИ. Сер. Мех. жидкости и газа. 1976. Т. 10. С. 5–85.
13. *Галкин В.С., Коган М.Н.* Об уравнении неравновесного многоатомного газа в аппроксимации Эйкена // В кн. Проблемы газодинамики и механики сплошной среды. 1969. С. 119–128.
14. *Тирский Г.А.* Полуфеноменологический вывод уравнений гидродинамики многоатомных газовых смесей с возбуждением внутренних степеней свободы // В кн. Механика. Современные проблемы. — М.: 1987. С. 79–86.
15. *Колесниченко. А.В., Тирский Г.А.* Соотношения Стефана-Максвелла и поток тепла для неидеальных многокомпонентных сплошных сред // ЧММСС. 1976. Т. 7. № 4. С. 106–121.
16. *Hirschfelder J. O., Curtis C. F., Bird R. B.* Molecular theory of gases and liquids. John Wiley & Sons, Inc., New York. 1954.
17. *Ahtye W. F.* // Phys. Fluids. 1965. V.8. № 10. P. 87.
18. *Васильевский С.А., Соколова И.А., Тирский Г.А.* Определение и вычисление эффективных коэффициентов переноса для химически равновесных потоков частично ионизованных и диссоциированных смесей газов // ПМТФ. 1986. № 1. С. 68–79.
19. *Тирский Г.А.* Уравнения движения для частично ионизованной многокомпонентной смеси газов в нормальной форме Коши с точными коэффициентами переноса // Труды Ин-та мех. МГУ. 1974. № 32. С. 6–22.
20. *Колесников А.Ф., Тирский Г.А.* Уравнения гидродинамики для частично ионизованных многокомпонентных смесей газов с коэффициентами переноса в высших приближениях // В кн.: Молекулярная газодинамика. 1982. С. 20–44.
21. *Пилюгин Н.Н., Тирский Г.А.* Динамика ионизованного излучающего газа. — М.: Изд-во МГУ. 1989. 309 с.
22. *Ковалев В.Л., Суслов О.Н.* Разностный метод с повышенной точностью аппроксимации для интегрирования уравнений химически неравновесного многокомпонентного вязкого ударного слоя // В кн.: Гиперзвук. пространств. течения при наличии физ.-хим. превращений. — М.: 1981. С. 113–137.
23. *Пейгин С.В.* Численный метод высокого порядка аппроксимации для решения двумерных уравнений пограничного слоя // ЖВММФ. 1987. Т. 16. С. 118–133.
24. *Тирский Г.А.* Гидродинамическое описание химически равновесных течений частично ионизованных неидеальных смесей газов // В кн.: Некот. вопросы механики сплошной среды. — М.: Изд-во МГУ. 1978. С. 114–143.
25. *Бенилов М.С., Тирский Г.А.* К расчету электрических эффектов в ионизованном многокомпонентном газе около электропроводящих тел // ПММ. 1979. Т. 43. № 2. С. 288–304.
26. *Ступоченко Е.В., Лосев С.А., Осипов Л.И.* Релаксационные процессы в ударных волнах. — М.: Наука, 1965.
27. *Кривоносова О.Э., Лосев С.А., Наливайко В.П.* и др. Рекомендуемые данные о константах скорости химических реакций между молекулами, состоящими из атомов N и O // Химия плазмы. Вып.I4. — М.: Энергоиздат, 1987. С. 3–31.

28. *Lin S. C., Teare J. D.* Rate of ionization behind shock waves in air 2. Theoretical interpretation // Phys. Fluids, 1963. V. 6. P. 355–75
29. *Kang S. W., Dunn M. G.* Hypersonic viscous shock layer with chemical non-equilibrium for spherically blunted cones // AIAA J., 1972. V.10. P. 1361–62
30. *Blottner F. G.* Viscous shock layer at the stagnation point with non-equilibrium air chemistry // AIAA J., 1969. V. 7. P. 2281–2288.
31. *Bortner M. H.* A review of rate constants of selected reaction of interest in re-entry flow in the atmosphere // NBS Technical Note 484, 1969.
32. *Park C.* Problems of rate chemistry in the f1ight regimes of aeroassisted orbital transfer vehicles // AIAA Pap. 1984(b) № 84–1730.
33. *Тирский А.Г., Щелин В.С., Щербак В.Т.* Влияние неопределенности химической кинетики на конвективный теплообмен // Изв. АН СССР. МЖГ. 1990. № 6. С. 146–151.
34. *Гурович И.М., Тирский Г.А., Щербак В.Г.* Сравнение систем данных по химическим реакциям в ионизованном воздухе применительно к условиям гиперзвукового обтекания. Отчет Ин-та механики МГУ. 1990. № 4055. 61 с.
35. *Hammerling, P., Teare, J. D., Kivel, B.* Theory of radiation from luminous waves in nitrogen // Phys. Fluids. 1959. V. 2 P. 422–26.
36. *Лосев С.А., Генералов Н.А.* К исследованию явлений возбуждения колебаний и распада молекул кислорода при высоких температурах // ДАН СССР. 1961. Т. 141. № 5. С. 1072–1075.
37. *Treanore C. E., Marrone, P. V.* Effect of dissociation оп the rate vibrational re1axation // Phys. Fluids. 1962. V. 5 P. 1022–26
38. *Park, C.* Two-temperature interpretation of dissociation rate date for N_2 and O_2// AIAA Pap., 1988. № 88–0458.
39. *Marrone, P. V., Tranore, C. E.* Chemica1 relaxation with preferentia1 dissociation from excited vibrational1eve1s // Physics of Fluids. 1963. V. 6. P. 1215–21
40. *Куксенко Б.В., Лосев С.А.* Возбуждение и распад двухатомных молекул при атом-молекулярных столкновениях в газе высокой температуры // ДАН СССР. 1969. Т. I85. № 1. С. 69–72.
41. *Смехов Г.Д.* Применение адиабатического принципа к вычислению константы скорости диссоциации двухатомной молекулы // В кн. Неравновесные течения газа и оптимальные формы тел в гиперзв. потоке. — М.: Изд-во МГУ. I982. С. 30–38.
42. *Кузнецов Н.М.* Взаимодействие колебательной релаксации и процессов диссоциации двухатомных молекул // ДАН СССР. 1965. Т. 164. С. 1097–1100.
43. *Кузнецов Н.М.* Кинетика молекулярной диссоциации в молекулярном газе // Теорет. и эксперимент. химия. 1971. № 7. С. 22–33.
44. *Wray K. L., Feldman E. V., Lewis P. F.* Shock tube study of the effects of vibrational energy of N_2 on the kinetics of the $0 + N_2 \rightarrow NO + N$ reactions // J. Chem. Phys., 1970. V. 53. P. 4131–36
45. *Смехов Г.Д., Лосев С.А.* Влияние колебательно-вращательного возбуждения на диссоциацию двухатомных молекул // Теор. и. эксперимент. химия. 1979. Т. I5. С. 492–497.
46. *Тирский А.Г., Щербак В.Г.* Обтекание тел химически и термически неравновесным воздухом при малых и умеренных числах Рейнольдса. Отчет Ин-та мех. МГУ. 1988. № 3643. 240 с.
47. *Millikan R. C., White D. R.* Systematics of vibrational relaxation // J. Chem. Phys., 1963. 39: P. 3209–13
48. *Дмитриева И.К.* Анализ и оценка достоверности данных по временам и скоростям констант колебательной релаксации молекул азота и кислорода. Препринт ИТМО. 1987. № 11. 32 с.

49. *Park, C.* Calcu1ation of non-equilibrium radiation in AOTV flight regimes // AIAA Pap. 1984(a). № 84–0306.

50. *Ладнова Л.А.* Ламинарный пограничный слой на пластине с учетом термодинамической и химической неравновесности // Вестник ЛГУ. Сер. Мат. и мех. 1964. № 19. С. 114–128.

51. *Ладнова Л.А.* Неравновесный вязкий ударный слой с произвольной каталитической активностью поверхности // Вестник ЛГУ. Сер. Мат. и мех. 1969. № 13. С. 106–112.

52. *Тирский Г.А.* Термодинамически неравновесные эффекты при обтекании тел гиперзвуковым вязким потоком // В кн.: Модели механики неоднородных систем. Новосибирск. 1989. С. 66–92.

53. *Жлуктов С.В., Тирский Г.А.* Влияние колебательно-диссоциационного взаимодействия на тепловой поток и трение при гиперзвуковом обтекании // Изв. АН СССР. МЖГ. 1990. № 1. С. 158–167.

54. *Тирский А.Г., Щербак В.Г.* Влияние колебательной релаксации при обтекании тел химически неравновесным воздухом с учетом вязкости // Изв. АН.СССР. МЖГ. 1990. № I. С. 151–157.

55. *Щербак В.Г.* Численное исследование структуры неравновесного течения около затупленных тел при гиперзвуковом пространственном обтекании // Изв. АН СССР. МЖГ. 1987. № 5. С. I43–150.

56. *Гордеев А.Н., Колесников А.Ф., Якушин М.И.* Исследование теплообмена с использованием моделей в дозвуковых струйных потоках индукционного плазмотрона // Изв. АН СССР. МЖГ. № 6. С. 129–135.

57. *Гордеев А.Н., Колесников А.Ф., Якушин М.И.* Влияние каталитической активности поверхности на неравновесный теплообмен в дозвуковом потоке диссоциированного азота // Изв. АН СССР. МЖГ. 1985. № 3. С. 166–172.

58. *Колесников А.Ф., Якушин М.И.* Об определении эффективных вероятностей гетерогенной рекомбинации атомов по тепловому потоку к поверхности в диссоциированном потоке воздуха // Математич. моделирование. 1989. № 3. С. 44–60.

59. *Жестков Б.К., Книвел А.Я.* Экспериментальное исследование гетерогенной рекомбинации // Труды ЦАГИ. 1987. № 211 1. С. 215–227.

60. *Scott, C. P.*, Catalitic recombination of nitrogen and oxygen on high-temperature resuable surface insulation // AIAA Pap., 1980. № 80–1477.

61. *Stewart D. A., Henline W., D., Kolodziej P.* at al. Effect of surface cata1isis on heating to ceramic coated thermal protection systems for vehicles // AIAA Pap., 1988. № 88–2706.

62. *Беркут В.Д., Кудрявцев Н.Н., Новиков С.С.* Влияние образования электронновозбужденных молекул O_2 в результате гетерогенной рекомбинации атомов на тепловой поток при гиперзвуковом обтекании затупленных тел и пластины // В кн. Физическая газодинамика. Минск. ИТМО АН БССР. 1985. С. 74–92.

63. *Беркут В.Д., Ковтун В.В., Кудрявцев Н.Н.* и др. Метод определения вероятности гетерогенной рекомбинации атомов, вызванной взаимодействием сверхзвукового потока с поверхностями // Химическая физика. 1985. № 4. С. 673–683.

64. *Беркут В.Д., Ковтун В.В., Кудрявцев Н.Н.* и др. Определение моментальных значений вероятности гетерогенной рекомбинации атомов в экспериментах на ударных трубах. Препринт ИТМО. 1986. № 12.

65. *Беркут В.Д., Ковтун В.В., Кудрявцев Н.Н.* Термофизические свойства поверхностей, вызванные аккомодацией химической энергии сверхзвукового потока диссоциированного газа // В кн. Обзор по теплофизическим свойствам веществ. ИВТ АН СССР. 1986. Т. 58. № 2. С. 3–315.

66. *Тирский Г.А., Алферов В.И., Ковалев В.Л.* и др. Обтекание тел вязким потоком с учетом неравновесных гомогенных. и гетерогенных реакций // В кн.: Механика неоднородных систем. ИТПМ. 1985. С. 255–280.

67. *Ковалев В.Л., Суслов О.Н.* Модель взаимодействия частично ионизованного воздуха с каталитической поверхностью // В кн.: Исслед. по гиперзв. аэродинамике и теплообмену с учетом неравновесн. химич. реакций. — М.: Изд-во МГУ. 1987. С. 58–69.

68. *Кузнецов В.М., Кузнецов М.М., Колесников А.Ф.* и др. Теоретические и экспериментальные проблемы гетерогенного катализа на поверхностях в диссоциированном потоке газа // Моделирование в механике. 1987. № 3. С. 83–104.

69. *Колешко С.Б., Лунькин Ю.П.* Ламинарный пограничный слой на пластине с произвольными каталитическими свойствами при наличии колебательно-диссоциационной релаксации газа // Тр. Ленингр. политехн. Ин-та. 1970. № 313. С. 5–12.

70. *Ковалев В.Л., Суслов О.Н.* Эффект диффузионного разделения элементов на каталитической поверхности // Изв. АН СССР. МЖГ. 1988. № 4. С. 115–121.

71. *Rosner D. E., Cibrian R.* Non-equilibrium stagnation region aerodynamic heating of hypersonic glide vehicles // AIAA Pap., 1974. № 74–0755.

72. *Агафонов В.П., Никольский В.С.* Взаимодействие гомогенных и гетерогенных реакций в сильно диссоциированном потоке воздуха в пограничном слое // Ученые записки ЦАГИ. 1980. Т. 2. С. 46–53.

73. *Воронкин В.Г., Залогин Г.Н.* О механизме рекомбинации атомов азота около каталитической поверхности в диссоциированном потоке воздуха // Изв. АН СССР. МЖГ. 1980. № 3. С. 155–158.

74. *Melin G. A., Madix R. J.* Energy accomodation during oxygen atom recombination on metal surfaces // Trans. Far. Soc., 1971. 67: P. 198–206.

75. *Black G., Slanger T. G.* Production of $O_2(a^1\Delta_g)$ by oxygen atom recombination on pyrex surface // J. Chem. Phys., 1981. 74: 6517–19

76. *Harteck P., Reeves R. R., Mannella G.* Surface– catalyzed atom recombination that produce excited molecules // Can. J. Chem., 1960. 38: 1648–51

77. *Reeves R. R., Mannella G., Harteck P.* Formation of excited NO and N_2 by wall catalysis // J. Chem. Phys., 1960. 32: 946–47

78. *Пуб Б.Р.* Гетерогенная релаксация внутренней энергии молекул и неравновесные процессы на поверхности тела. Докт. дисс. ИХМ АН СССР. 1983. 284 с.

79. *Полак Л.С., Словетцкий Д.И., Тодезайте Р.Д.* Коэффициенты скорости возбуждения метастабильных частиц $N_2(A^3\Sigma_u^+,\ v = 1, 2)$ атомами азота и молекул // Химия высоких энергий. 1976. № 1. С. 54–70.

80. *Brennen W., McIntyre.* Vibrational relaxation and electronic mutation of metastable nitrogen molecules generated by nitrogen atom recombination оп cobalt and nickel // Chem. Phys. Lett., 1982. 90: P. 457–460.

81. *Беркут В.Д., Кудрявцев Н.Н., Новиков С.С.* Влияние образования электронно-возбужденных атомов азота в гетерогенных реакциях рекомбинации на тепловой поток к поверхности // Химия высоких энергий. 1986. № 4. С. 374–380.

82. *Беркут В.Д., Кудрявцев Н.Н., Новиков С.С.* Тепловой поток к поверхности, обтекаемой диссоциированным воздухом с образованием электронно-возбужденных молекул в гетерогенных реакциях рекомбинации // ТВТ. 1987. № 25. С. 340–348.

83. *Дорошенко В.М., Кудрявцев Н.К, Новиков В.В.* и др. Влияние образования колебательно возбужденных молекул азота на тепловой поток при рекомбинации атомов в пограничном слое // Докл. АН СССР. 1988. Т. 301. С. 1131–1135.

84. *Дорошенко В.М., Кудрявцев Н.К, Сметанин В.В.* Макроскопическая модель колебательной релаксации в задачах теплообмена при сверхзвуковом обтекании // ТВТ. 1990. № 5. С. 952–959.

85. *Дорошенко В.М., Кудрявцев Н.Н., Сметанин В.В.* Колебательная неравновесность в диссоциированном азоте при обтекании тел. Препринт ИВТ. 1990. № 294.

86. *Беркут В.Д., Кудрявцев Н.Н., Новиков С.С.* Влияние образования на поверхности электронно-возбужденных молекул на кинетику химических реакций при сверхзвуковом обтекании // 8-ой Всесоюзный симпозиум по горению и излучению. 1986. С. 106–110.

87. *Тирский Г.А.* Метод последовательных приближений для интегрирования уравнений многокомпонентного пограничного слоя с химическими реакциями. Отчет Ин-та мех. МГУ. 1969. № 1016.

88. *Von R. Haaве.* Zur thermodynamik der irreversibler prozess // Z. Nafurforsch., 1953. 8a: 71–80

89. *Von J.* Meixner Zur theorie der warmeleitfahigkeit reagierender fluider mischungen // Z. Nafurforsch., 1953. 7a: 57–64

90. *Hirschfelder J.O.* Heat transfer in chemical reaction mixtures // J. Chem. Phys., 1957. 26: 108–12

91. *Batler .J. N., Brokaw R. S.* Thermal conductivity of gas mixtures in chemical equilibrium // J. Chem. Phys., 1957. 26: P. 1470–1475.

92. *Brokaw R. S.* Thermal conductivity of gas mixtures in chemical equilibrium. 2 // J. Chem. Phys., 1960. 32: 936–39

93. *Кринберг И.А.* Влияние реакций ионизации на теплопроводность плазмы // ТВТ. 1965. № 3. С. 20–31.

94. *Лучина А.А.* Влияние химических реакций на тепловые и диффузионные потоки в плазме // ИФЖ. 1975. Т. 29. С. 7–14.

95. *Суслов О.Н., Тирский Г.А., Щенников В.В.* Описание химически равновесных многокомпонентных ионизованных смесей с использованием уравнений Навье–Стокса и Прандтля // ПМТФ. 1971. № 1. С. 73–89.

96. *Васильевский С.А., Тирский Г.А.* Эффект диффузии элементов в химически равновесных потоках многокомпонентного газа // Современные газодинамические и физико-химич. модели гиперзвуковой аэродинамики и теплообмена. — М.: Изд-во МГУ. 1991. С. 195–230

6

МОДЕЛИРОВАНИЕ КАТАЛИТИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ТЕПЛОЗАЩИТНЫХ ПОКРЫТИЙ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ

В. Л. Ковалев [1)]
Механико-математический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова

Большой практический интерес к изучению процессов взаимодействия многокомпонентных газовых смесей с каталитическими поверхностями при их сверхзвуковом обтекании возник при создании космических летательных аппаратов многоразового использования «Спейс Шаттл» и «Буран». Для таких аппаратов применение низкокаталитических покрытий позволяет существенно снизить тепловые потоки и, следовательно, уменьшить вес теплозащиты и увеличить полезную нагрузку. Проведенные лабораторные испытания и летные эксперименты на многоразовых аппаратах «Бор», «Буран» и «Спейс Шаттл» показали, что применение низкокаталитических покрытий позволяет снизить тепловые потоки к поверхности в 3–5 раз [1–5].

Интерес к указанной проблеме усилился в связи с созданием международной космической станции, а также в связи с разработкой гиперзвуковых транспортных систем, таких как NASP в США, Sanger в Германии, HOTOL в Англии, аэрокосмический планер в Японии и возвращаемых аппаратов типа европейского «мини–шаттла» Hermes и японского HOPE. Успешно развивается программа пилотируемых полетов и в Китае. Эти проекты вызвали значительную научную активность повсюду в мире как в области теоретических, так и экспериментальных исследований. Усилия, связанные с созданием спасательного космического корабля для возвращения с международной космической станции в случае опасности, также повысили интерес к эффективным теплозащитным системам.

Дальнейший толчок для будущих космических транспортных технологий должны дать программы создания гиперзвуковых многоразовых летательных аппаратов. Новые проблемы в области науки и технологии выдвигают также проекты научных экспедиций на Марс, которые могут быть реализованы в ближайшие годы.

Создание перспективных воздушно-космических летательных аппаратов требует решения принципиально новых научно-технических проблем. Одной из важнейших является создание многоразовой тепловой защиты. Для расчетов тепловых нагрузок и прогноза ресурса многоразовой тепловой защиты нужны сведения фундаментального характера о процессах термохимического

[1)] По материалам работ Ковалев В. Л., Колесников А. Ф., Известия РАН, МЖГ, № 5, 2005 и Ковалев В. Л. Погосбекян М. Ю. Известия РАН, МЖГ № 4, 2007

взаимодействия диссоциированных потоков с теплозащитными материалами. Необходимы новые научные данные о путях, методах решения этих проблем, включая разработку композиционных материалов из ультратонких кварцевых волокон и углерод-углеродных материалов для тепловой защиты орбитальных аппаратов на основе нанотехнологий.

Корректная интерпретация экспериментальных данных и исследование аэродинамического нагрева на всей траектории спуска в атмосфере возможны только на основе детального учета механизмов протекания гетерогенных каталитических реакций на теплозащитных покрытиях и достаточно полных моделей физико-химических процессов в газовой фазе и на поверхности.

1. Экспериментальные методы и установки

Методы исследования гетерогенной рекомбинации атомов на поверхностях твердых тел основаны на эффектах, сопутствующих рекомбинации — изменении концентрации атомов в потоке вблизи исследуемой поверхности и выделении на ней тепла.

Начало исследованиям катализа диффузионными методами было положено Ленгмюром, когда он показал, что в сосуде с газообразным водородом наблюдается уменьшение давления вследствие гетерогенной диссоциации молекул водорода на нагреваемой вольфрамовой нити. Подробный обзор диффузионно-кинетических методов дан в [4]. К их достоинствам относятся сравнительно высокая точность и принципиальная возможность восстановления как коэффициента рекомбинации γ, так и коэффициента аккомодации энергии рекомбинации β. Недостатки обусловлены принципиальными трудностями моделирования условий входа аппаратов в атмосферы Земли и Марса, в частности натурной среды и степени диссоциации потока за ударной волной.

Калориметрическими методами восстанавливаются эффективные коэффициенты передачи энергии каталитической рекомбинации γ_i' по тепловым потокам к исследуемой поверхности и ее температуре. Тепловой эффект гетерогенной рекомбинации атомов, по-видимому, впервые зарегистрировал Бонхофер [6], помещая в струю диссоциированного водорода шарик термометра, покрытый тонким слоем катализатора. Температура зависела от активности катализатора.

Данные о термохимической стойкости материалов и скоростях гетерогенной рекомбинации на теплозащитных покрытиях могут быть получены на основе экспериментов в высокоэнтальпийных потоках газов при натурных параметрах среды (высокая степень диссоциации, температура поверхности образца $T_w \sim 1000$–$2000\,\mathrm{K}$, давление торможения $p_0 \sim 10^{-3}$–10^{-1} атм). Эти условия существенно ограничивают возможности методов и подходов, традиционных в исследованиях катализа. Для решения проблемы высокотемпературного катализа в аэротермохимии используются установки с электродуговым нагревом газа, с высокочастотным нагревом газа и ударные трубы.

Электродуговые установки давно и широко применяются для испытаний материалов и элементов тепловой защиты [7]. При исследовании поверхностного катализа их применение ограничено присутствием продуктов термохимического разрушения электродов в потоке, загрязняющих поверхность. На электродуговой установке Центра НАСА им. Эймса обеспечен достаточно низкий уровень загрязнения сверхзвуковых потоков воздуха и определены каталитические свойства теплозащитных покрытий аппарата «Спейс Шаттл» при натурных значениях температуры поверхности и давления торможения [8, 9]. Заметим, что установки такого класса с большим расходом газа не используются для экспериментов с CO_2 из-за высокого содержания CO в высокоэнтальпийном потоке.

Сформулированным выше условиям наиболее полно отвечают индукционные плазмотроны мощностью 100–1000 кВт, на которых возможно создание потоков в широких диапазонах давления (10^{-2}–1 атм) и энтальпии (10–40 МДж/кг) [10–15]. В дозвуковых и сверхзвуковых потоках азота и воздуха определены каталитические свойства боросиликатного покрытия плитки и противоокислительного покрытия углерод-углерода, использовавшихся в системе тепловой защиты «Бурана» [11, 16–18], проведены многоцикловые испытания плиток на термохимическую стойкость [19].

Индукционные плазмотроны используются и для исследования теплозащитных материалов аппаратов, предназначенных для полетов на Марс [20–23]. В дозвуковых потоках диссоциированного углекислого газа определены эффективные коэффициенты γ_O и γ_{CO} на боросиликатном покрытии и углерод-углеродном материале с защитой от окисления [20, 21, 24].

В ударной трубе первые результаты по влиянию каталитичности поверхности на теплопередачу в потоках диссоциированного кислорода получены в [25]. Метод определения γ_O и γ_N при импульсном обдуве моделей сверхзвуковым потоком в ударной трубе и результаты, полученные на кварце, керамике, графите и силицированном графите, приведены в [4]. Однако, ударно-трубный эксперимент с характерной продолжительностью 100 мкс не решает проблему катализа на теплозащитных покрытиях в целом, поскольку не обеспечивает моделирования термохимического воздействия высокоэнтальпийного потока воздуха на поверхность по таким факторам, как время воздействия ($\sim$ 15 мин для «Спейс Шаттл и «Бурана»), степень диссоциации и диапазон давления.

Современный экспериментальный стенд MESOX [26] объединяет уникальный концентратор солнечного излучения с плотностью потока энергии до 4,5 мВт/м^2 для нагрева образцов до 2300 K и микроволновой генератор мощностью 1,2 кВт с частотой 2450 мГц для диссоциации воздуха. Установка применяется для исследований реакций каталитической рекомбинации атомов на поверхности и окисления при высокой температуре поверхности. Существенно, что MESOX в рамках одного эксперимента позволяет определять как коэффициент γ, так и коэффициент β.

Коэффициенты γ и β определяются расчетными методами из ограниченного числа измеряемых параметров. Поэтому диагностика высокоэнтальпийных потоков — одна из ключевых задач как эксперимента, так и численного моделирования. Принципиально важны поиск и реализация оптимальных режимов и параметров эксперимента, геометрия обтекания модели, измерения и расчетное восстановление параметров набегающего потока. Необходимы также материалы со стандартными каталитическими свойствами, модели катализа, численные методы расчета течений реагирующих газов и теплообмена. Существенным моментом является экстраполяция данных лабораторного эксперимента на натурные условия.

На высокоэнтальпийных установках используются как сверхзвуковые режимы обтекания моделей, так и дозвуковые. Преимуществом первых является то, что химические реакции в пограничном слое, как правило, «заморожены» и для определения γ' можно пользоваться формулой Гуларда для теплового потока [3], а для градиента скорости в критической точке модели — теорией тонкого ударного слоя. Однако неравновесность набегающего сверхзвукового потока диссоциированного газа принципиально осложняет его диагностику. В неравномерном сверхзвуковом потоке тепловой поток в критической точке весьма чувствителен к отклонениям модели от оси симметрии потока.

Оптимальны условия, при которых набегающий поток равновесный, а пограничный слой на модели замороженный. Они реализуются в дозвуковом режиме обтекания [17]. К его достоинствам относятся слабая чувствительность теплового потока в критической точке к положению модели относительно оси потока, возможность изменения степени неравновесности пограничного слоя от замороженного до равновесного, равномерная толщина пограничного слоя на плоском образце материала. Кроме того, в дозвуковых течениях пограничный слой достаточно толстый. Поэтому возбужденные молекулы, образовавшиеся в результате гетерогенной рекомбинации, дезактивируются в газовой фазе, что позволяет корректно вводить эффективный коэффициент γ [4]. Выбор оптимального режима для данного материала зависит также от диапазона изменения γ.

Используются две двумерные конфигурации обтекания моделей — осесимметричная и плоская. Соответственно тепловые потоки и температура поверхности измеряются и рассчитываются в критической точке цилиндрической модели с затупленным носком или на участке пластины.

Диагностика течений в плазмотронах основана на контактных измерениях статического давления, давления торможения, тепловых потоков к высококаталитическим и низкокаталитическим материалам, энтальпии [18–21, 27–30], а также на спектральных измерениях температур [31]. Измерение концентраций атомов c_{Ae} на внешней границе пограничного слоя, необходимых для восстановления γ все еще является проблемой. Для расчета равновесных концентраций c_{Ae} необходимо знать давление торможения и тепловой поток к эталонной высоко каталитической поверхности. В химически неравновесном

потоке при полной диссоциации молекул кислорода для определения c_{Ne} необходимы также измерения тепловых потоков к эталонной низкокаталитической поверхности [18].

Яркостная температура поверхности измеряется с помощью оптической пирометрии [20, 21] и инфракрасной техники [32, 33]. Для нахождения истинной температуры поверхности и теплового потока к ней нужны данные о спектральной и интегральной излучательных способностях покрытий при высоких температурах [34]. Определение этих характеристик в тех же условиях, при которых определяются каталитические свойства покрытия, все еще остается актуальной задачей. Один из подходов основан на одновременных измерениях температуры поверхности с помощью термопар и термовизионной системы [35].

Эталонные материалы со стабильной высокой и низкой каталитической активностью необходимы для восстановления энтальпии потока диссоциированного газа, например на основе формулы Фэя–Ридделла [36], и для восстановления концентрации атомов [30] и верификации данных по кинетике газофазных реакций [16]. Для воспроизводимости тепловых потоков на эталонных материалах окисная пленка должна быть стабильна, а ее каталитические свойства не должны изменяться в процессе длительного времени термохимического воздействия (около 20 мин). Так как на поверхности всегда имеются загрязняющие вещества, например адсорбированная вода, которые могут существенно изменять каталитическую активность покрытия, то необходимы предварительная очистка поверхности стандартными методами и достаточно длительная (около 10 мин) ее тренировка в потоке плазмы. Термохимическая очистка поверхности имеет место и в условиях полета.

Для высококаталитичных материалов данные о величинах γ противоречивы. Отчасти это вызвано тем, что наблюдаемая каталитичность зависит от условий обтекания поверхности. Наилучшим катализатором для каталитической рекомбинации атомов O при обтекании холодных поверхностей $T_w = 300\,\mathrm{K}$) диссоциированным кислородом является серебро [25, 37]. В дозвуковых потоках воздуха и азота бескислородная медь при $p_0 = 0{,}1$ атм и $T_w \sim 300\,\mathrm{K}$ может рассматриваться как эталонный высоко каталитичный материал [38], а в сверхзвуковых потоках воздуха — как материал с умеренной каталитичностью [39]. При температурах $T_w \sim 2000\,\mathrm{K}$ в потоке диссоциированного азота пирографит имеет высокую каталитическую активность ($\gamma_{\mathrm{N}} \sim 0{,}1$) [16]. В диссоциированном воздухе, азоте, кислороде и углекислом газе молибден при $T_w \sim 300\,\mathrm{K}$ некаталитичен, а при высоких температурах наименее каталитичным является боросиликатное покрытие [16, 37, 38]. Его и чистого кварца каталитические свойства близки, стабильны, и эти материалы могут использоваться в качестве эталонных вплоть до температур плавления.

Коэффициент каталитичности k_w восстанавливается из решения обратной задачи, постановка которой должна быть адекватной соответствующему

диффузионно-кинетическому или калориметрическому методу, где k_w входит в граничное условие для концентрации атомов на стенке.

В калориметрических методах используются приближенные формулы Гуларда [3] и Фея–Ридделла [36]. Первая применима для «замороженного» пограничного слоя на поверхности с каталитической активностью k_w, а вторая — для равновесного пограничного слоя или идеально каталитической стенки. Коэффициент k_w определяется с помощью формулы [3] по измеренным значениям теплового потока к исследуемой поверхности, известным значениям термодинамических параметров на внешней границе пограничного слоя и градиента скорости потока в критической точке. При этом энтальпия на внешней границе пограничного слоя определяется с помощью [36] по измеряемому тепловому потоку к эталонной идеально каталитической поверхности, а градиент скорости — с помощью решения [4, 41] с соответствующей корреляцией для моделей с несферическим носком, следующей из [36]. Такой подход использовался для определения $k_{w\mathrm{O}}$ и $k_{w\mathrm{N}}$ на теплозащитных покрытиях в сверхзвуковых потоках воздуха и азота [8, 9, 11, 42, 43].

В многокомпонентном неравновесном пограничном слое для определения k_w могут быть использованы асимптотические формулы [44–46] (рис. 6.1). С их помощью интерпретированы экспериментальные данные [9] по вероятностям рекомбинации на теплозащитном покрытии «Спейс Шаттла» обнаружен и объяснен эффект диффузионного разделения элементов смеси, обусловленный избирательностью каталитического воздействия поверхности на рекомбинацию атомов [45, 46, 48, 49].

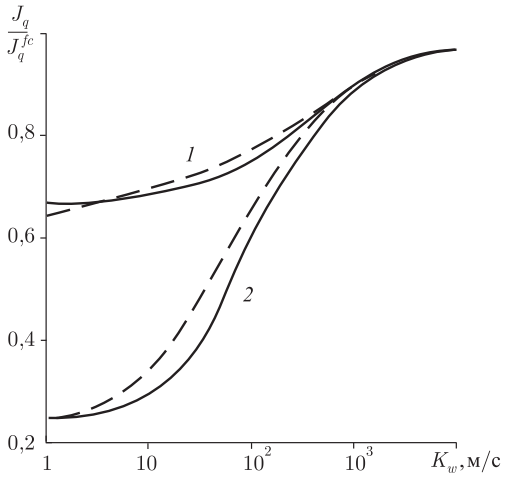


Рис. 6.1. Зависимость теплового потока $q^0 = q/q^{fc}$ в критической точке затупленного тела от k_w: *1* — неравновесный пограничный слой, *2* — замороженный. Сплошные кривые — расчет по асимптотическим формулам [44–46], штриховые — расчет [107], q^{fc} — тепловой поток к идеально каталитической поверхности. Радиус затупления $R_0 = 0{,}5$ м, $T_w = 700$ К, $T_e = 6900$ К, $p_e = 0{,}216$ атм

Совершенствование методик определения k_w связано с улучшением диагностики потока, уточнением физико–математических моделей процессов как в газовой фазе, так и на поверхности, применением современных численных методов. При дозвуковом режиме обтекания моделей диссоциированным воздухом использовались численные решения одномерных уравнений неравновесного пограничного слоя в критической точке [18]. Двумерные уравнения Навье–Стокса для неравновесного пятикомпонентного воздуха решались неявным

методом конечных элементов [49] в сопле, вдоль плоской пластины и волнистой поверхности [35, 50]. В работах [21, 37, 51] последовательно решались три задачи: о течении равновесной плазмы в разрядном канале плазмотрона на основе двумерных уравнений Навье–Стокса для закрученного потока и квазиодномерного уравнения для осредненной комплексной амплитуды электрического поля; об осесимметричном обтекании цилиндрической модели дозвуковым потоком равновесного диссоциированного газа в рамках уравнений Навье–Стокса и об одномерном неравновесном пограничном слое конечной толщины в критической точке модели. На основе уравнений Навье–Стокса и для осредненной комплексной амплитуды электрического поля в квазиодномерном и двумерном приближении рассчитывались равновесные [39] и неравновесные [53] дозвуковые течения воздушной плазмы в разрядных каналах плазмотронов и сверхзвуковые течения диссоциированного воздуха в недорасширенных струях [39].

Вопрос о соответствии процесса рекомбинации атомов на поверхности материала в экспериментальной установке натурным условиям полета — ключевой в проблеме определения каталитических характеристик поверхности. Моделирование теплообмена при наличии неравновесных газофазных и поверхностных каталитических реакций для условий гиперзвукового полета возможно только локально. Условия такого моделирования в критической точке затупленного тела сформулированы в [54]. Они включают равенства в полете и эксперименте полной энтальпии, давления торможения и градиента скорости. Масштабным фактором моделирования является отношение эффективных радиусов модели и тела. В [54] получен также критерий выбора дозвукового или сверхзвукового режимов обтекания модели в установке.

В [27] предложен эффективный инструмент определения k_w в виде карт тепловых потоков в координатах измеряемых параметров T_w и q_w (рис. 6.2). Они позволяют экстраполировать измеренные тепловые потоки и температуры поверхности на условия гиперзвукового полета [24, 55]. Каждому режиму обтекания соответствует своя карта тепловых потоков, зависящая от параметров набегающего потока и геометрии модели.

2. Данные лабораторных и летных экспериментов

Теплозащитные плитки аппаратов «Спейс Шаттл» покрыты реактивно обработанным боросиликатным стеклом, для которого экспериментальные значения γ приведены в [9, 42, 43, 56–59]. Они аппроксимированы в виде аррениусовских зависимостей $\gamma_A = a_A \exp(-E_A/T_w)$. В электродуговых установках получены значения $a_{\mathrm{O}} = 16$, $E_{\mathrm{O}} = 10271\,\mathrm{K}$, $a_{\mathrm{N}} = 0{,}0714$, $E_{\mathrm{N}} = 2219\,\mathrm{K}$ $(1090\,\mathrm{K} < T_w < 1670\,\mathrm{K})$ [9]. В [56] для лучшего соответствия летному эксперименту предложены значения $a_{\mathrm{O}} = 0{,}00941$, $E_{\mathrm{O}} = 658{,}9\,\mathrm{K}$. В [59] на основе летных экспериментов получены величины $a_{\mathrm{O}} = 8$, $E_{\mathrm{O}} = 8600\,\mathrm{K}$, $a_{\mathrm{N}} = 0{,}07$, $E_{\mathrm{N}} = 2219\,\mathrm{K}$. Они согласуют-

ся с результатами [9, 56] при $800\,\mathrm{K} < T_w < 1400\,\mathrm{K}$ и подчеркивают преобладание рекомбинации кислорода в этих условиях. Результаты лабораторных и летных экспериментов для плиточной теплозащиты аппарата «Спейс Шаттл» аппроксимируются зависимостями $k_w = 53\exp(-1875/T_w)$ м/с ($500\,\mathrm{K} \leqslant T_w \leqslant 900\,\mathrm{K}$), $k_w = 660\exp(-8017/T_w)$ м/с ($900\,\mathrm{K} \leqslant T_w \leqslant 1670\,\mathrm{K}$).

Значения k_w в случае рекомбинации атомов кислорода для покрытия теплозащитной плитки аппарата «Буран», полученные в [4, 11, 16, 18, 19, 38, 60, 61], приведены на рис. 6.2 и рис. 6.3.

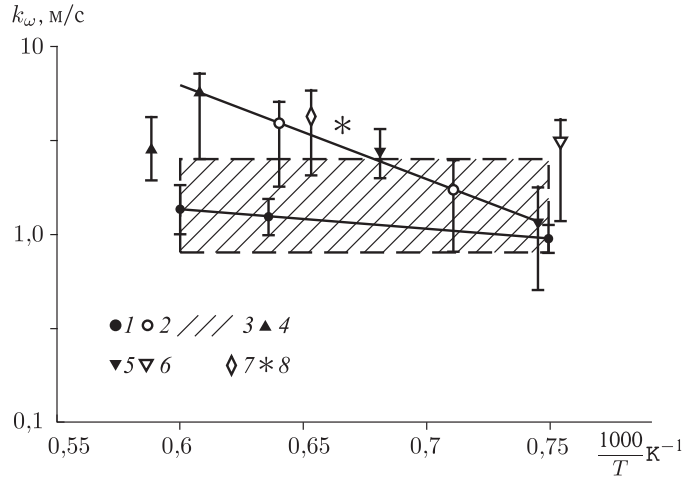


Рис. 6.2. Каталитичность теплозащитной плитки «Бурана». Точки *1*, *4* и *5* — данные [19], *2* и *7* — [61], *3* — [11], *6* — [4], *8* — летный эксперимент на аппарате «Буран» [1]

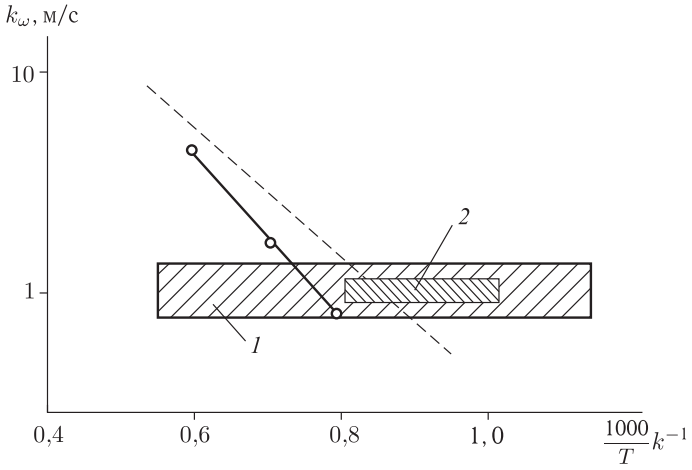


Рис. 6.3. Сравнение лабораторных и летных данных по каталитичности плиточной теплозащиты. *1* — данные [19], *2* — летный эксперимент на аппарате «Бор» [61], точки — лабораторные данные [61]

В [16, 19, 38] рекомендовано $k_{w\mathrm{O}} = k_{w\mathrm{N}} = k_w = 1{,}2$ м/с, аппроксимация $k_w = 553\exp(-8232/T_w)$ м/с дана в [61]. В [18, 59] предложены аппроксимации γ_{N} и эффективной вероятности рекомбинации атомов воздуха γ_A при $1230\,\mathrm{K} \leqslant T_w \leqslant 1990\,\mathrm{K}$ и $p = 10$–50 мбар с обратно пропорциональной зависимостью от парциального давления атомов. Данные летного эксперимента с аппаратом «Бор» оказались наиболее близкими к результатам [16, 19, 38] (рис. 6.3, [61]).

На рис. 6.4 [61] представлена зависимость равновесной температуры углерод-углеродного носка фезюляжа «Бурана» вдоль траектории. Летные данные [1, 61] согласуются с расчетами при $k_w = 3{,}5$ м/с. На рис. 6.5 [61] показано распределение равновесной температуры поверхности аппарата «Бор»

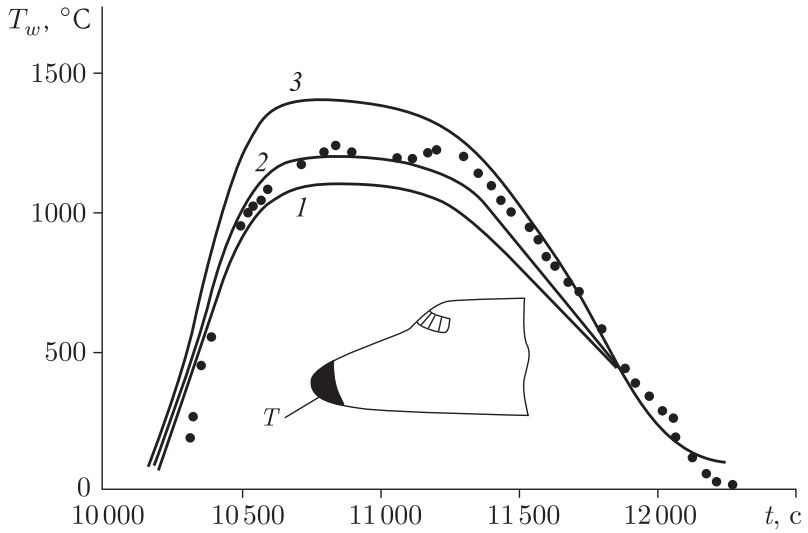


Рис. 6.4. Температура в критической точке углеродного носка фюзеляжа «Бурана» в зависимости от времени спуска; точки — данные летного эксперимента, кривые *1–3* — расчет при $k_w = 0$, 3,5 м/с и ∞

на высоте $h = 72{,}4$ км при скорости $V_\infty = 6{,}45$ км/с. Измеренная температура углерод-углеродного материала на носовом затуплении также соответствует $k_w = 3{,}5$ м/с. Данные для плиточной теплозащиты на линии растекания лежат между кривыми для $k_w = 1$ и 1,5 м/с.

Пик температуры на рис. 6.5 соответствует плитке, покрытой платиновой чернью. Скачок температуры вызван эффектом «сверхравновесного нагрева». Он обусловлен существенным увеличением рекомбинационной составляющей теплового потока к высококаталитической поверхности после прохождения участка с низкой каталитической способностью. Скачки температуры до 400 К на плитках, покрытых высоко-каталитичной шпинелью, наблюдались и в летных экспериментах на «Спейс Шаттле» [42]. «Сверхравновесный» скачок температуры 450 К на кольцевом участке шпинели, нанесенном

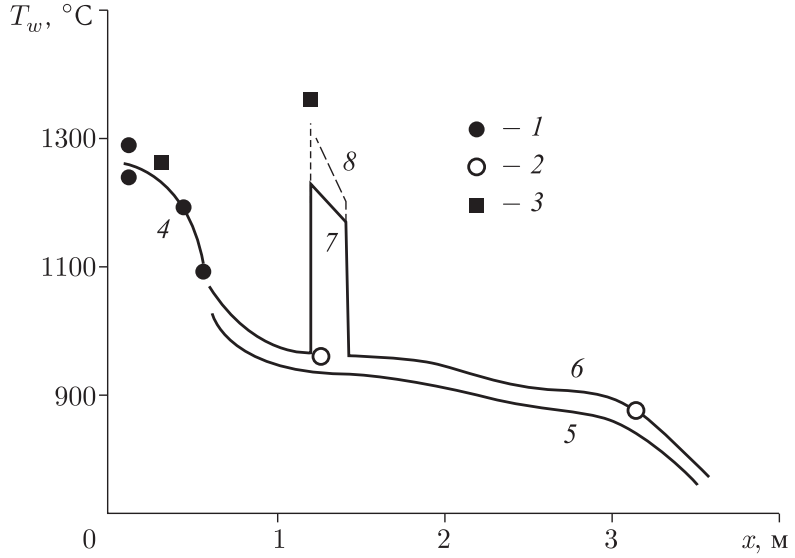


Рис. 6.5. Температура поверхности вдоль линии растекания аппарата «Бор». Точки (измерения) *1* — противоокислительное покрытие углерод–углеродного материала, *2* — плиточная теплозащита, *3* — плитка теплозащиты с покрытием из платиновой черни. Кривые *4–8* — расчеты при $k_w = 3{,}5,\ 1,\ 1{,}5,\ 10^2$ м/с и 10^3 м/с ($h = 72{,}4$ км, $V_\infty = 6{,}45$ км/с)

на поверхность теплозащитной плитки, обнаружен также в эксперименте на плазмотроне [33].

На титановой поверхности в потоке диссоциированного азота обнаружен эффект «аномального» увеличения теплового потока (на 20%) в критической точке модели при слабом вдуве кислорода в неравновесный пограничный слой [62]. Он объяснен взаимодействием газофазных обменных реакций и каталитической рекомбинации атомов O на поверхности, на которой сильно различаются коэффициенты рекомбинации ($k_{w\mathrm{N}} = 0$, $k_{w\mathrm{O}} = 2$ м/с).

В потоке диссоциированного азота наблюдался «аномально» высокий унос платинового покрытия, предварительно нанесенного на низкокаталитическую поверхность теплозащитной плитки [29, 32]. Он объяснен тем, что выделяющаяся при рекомбинации атомов энергия превышает энергию сублимации покрытия и достаточна для выбивания атомов **Pt** из решетки вследствие низкой теплопроводности кварца. В диссоциированном воздухе такого эффекта нет из-за обменных реакций, которые вблизи каталитической поверхности эффективно снижают концентрацию атомов N.

Многоцикловые испытания материалов на индукционных плазмотронах в реальном масштабе времени полета «Бурана» показали, что свойства покрытий меняются со временем в результате процессов окисления [19]. Происходит также образование и развитие пористого слоя в покрытии, изменяются его оптические свойства (уменьшается степень черноты)и морфология. Возрастает, хотя и не критично каталитичность плиточного покрытия. Например,

после 1000 мин суммарного времени воздействия потока диссоциированного воздуха на поверхности плитки коэффициент $k_{w\mathrm{N}}$ увеличился от 1,2 до 2 м/с при $T_w = 1300$–1800 K.

В диссоциированном воздухе для стекловидных покрытий экспериментально обнаружена немонотонная зависимость коэффициентов рекомбинации от температуры [43, 57]. В диссоциированном углекислом газе она также имеет место для $\gamma_{\mathrm{O}}(T_w)$ на боросиликатном покрытии [21]. Такое поведение эффективных коэффициентов рекомбинации объясняется в основном преобладанием процессов десорбции при высоких температурах [5, 63].

3. Теоретические модели гетерогенного катализа при входе в атмосферу Земли

Экспериментальные значения γ и β характеризуются большим разбросом, так как зависят от условий, в которых они получены. Поэтому использование эффективных коэффициентов в общем случае не позволяет корректно описать теплообмен на всей поверхности и на всей траектории спуска космического аппарата. Это приводит к необходимости учета детального механизма гетерогенных каталитических процессов. Выделяются три основные стадии: адсорбция частиц на активных центрах, взаимодействие адсорбированных компонентов между собой в реакциях Ленгмюра–Хиншельвуда (ассоциативный механизм) или реакциях Или–Райдила с частицами из газовой фазы (ударный механизм) и десорбция продуктов рекомбинации.

В исследованиях аэродинамического нагрева применяется теория идеального адсорбированного слоя Ленгмюра. Предполагается, что реакции протекают стационарно, а на единице площади поверхности имеется конечное и не изменяющееся в ходе процесса число энергетически равноценных и одинаково доступных для адсорбции активных центров, каждый из которых может адсорбировать одну частицу [5, 64]. При этом считается, что между адсорбированными частицами отсутствует какое-либо физическое взаимодействие, приводящее к изменению характера и прочности адсорбционной связи.

Для диссоциированного воздуха в [5] получены формулы для скоростей рекомбинации атомов на поверхности, учитывающие ударный и ассоциативный механизмы рекомбинации с образованием молекул O_2, N_2 и NO:

$$R_{\mathrm{O}} = -\rho(k_{w\mathrm{OO}} + k_{w\mathrm{ON}})c_{\mathrm{O}} = -\rho k_{w\mathrm{O}} c_{\mathrm{O}}, \quad R_{\mathrm{N}} = -\rho(k_{w\mathrm{NN}} + k_{w\mathrm{NO}})c_{\mathrm{N}} = -\rho k_{w\mathrm{N}} c_{\mathrm{N}},$$

$$R_{\mathrm{O}_2} = \rho k_{w\mathrm{OO}} c_{\mathrm{O}}, \quad R_{\mathrm{N}_2} = \rho k_{w\mathrm{NN}} c_{\mathrm{N}}, \quad R_{\mathrm{NO}} = \rho \frac{m_{\mathrm{O}}}{m_{\mathrm{NO}}} k_{w\mathrm{ON}}, \quad c_{\mathrm{O}} = \rho \frac{m_{\mathrm{N}}}{m_{\mathrm{NO}}} k_{w\mathrm{ON}} c_{\mathrm{N}},$$

В силу линейной зависимости системы стехиометрических уравнений гетерогенных каталитических и гомогенных химических реакций, скорости R_i можно выразить через отклонения от равновесия независимых гомогенных реакций v в виде $R = W_s \varepsilon_s^{-1} v$. Компоненты матриц W_s, ε_s зависят от температуры, парциальных давлений и коэффициентов скоростей обратных процессов

гетерогенных реакций, констант равновесия реакций адсорбции–десорбции и независимых гомогенных реакций [45].

Модели гетерогенной рекомбинации на теплозащитных покрытиях, имеющиеся в литературе, следуют из приведенных выше формул при определенных наборах параметров. Они отличаются детализацией механизма гетерогенных каталитических реакций и величинами коэффициентов скоростей элементарных стадий.

Параметры моделей катализа определяют зависимости коэффициентов скоростей элементарных стадий $k_i(T_w)$, их констант равновесия $K_i(T_w)$. К ним относятся — энергии десорбции E_{di}, энергии активации реакций Или–Райдила E_{eri}, реакций Ленгмюра–Хиншельвуда E_{lhi}, предэкспоненциальные множители, плотность активных центров адсорбции C_a, расстояние между ними Δ, а также множители P_i, учитывающие ряд неопределенностей, в том числе пространственную ориентацию частиц. В принципе, указанные величины могут быть определены методами статистической и квантовой механики. Например, в [65] для изолированных пар Si–O и Si–N с помощью потенциала Морзе вычислены потенциальные энергии атомов O и N на SiO_2, энергии миграции $E_{m\mathrm{O}} = 159{,}1$ кДж/моль и $E_{m\mathrm{N}} = 82{,}2$ кДж/моль. $C_a \approx 4{,}5 \cdot 10^{18}\,\mathrm{м}^{-2}$, а $\Delta \approx 5$ Å. Для различных видов кварца найдено, что $C_a \approx 4{,}5$ А. Это значение C_a согласуется с величинами, использованными в [66–70].

Квантово–механические расчеты представляют собой трудоемкую задачу. Поэтому используются полуэмпирические формулы, такие как соотношение Гиршфельдера $E_{eri} = 0{,}055E_{di}$ [58] и оценка $E_{lhi} = 2E_{di} - D_{ii}$ [71], где D_{ii} — энергия связи атомов в молекуле.

В задачах аэротермохимии параметры моделей катализа определяются подгонкой рассчитанных величин тепловых потоков к экспериментально измеренным. Значения параметров модели катализа существенно зависят от выбранного механизма гетерогенной рекомбинации. Например, в [72] в предположении, что рекомбинация идет по ударному механизму, для согласования с экспериментальными данными $E_{d\mathrm{N}} = 359{,}89$ кДж/моль, а если по ассоциативному, то $E_{d\mathrm{N}} = 574{,}340$ кДж/моль. При выбранном механизме различия в их значениях объясняются тем, что решение многопараметрической обратной задачи в общем случае неоднозначно. Так, в [73] показано, что на аппарате «Спейс Шаттл» одинаковый уровень тепловых потоков предсказывают модели [65, 67], учитывающие оба механизма рекомбинации с разными значениями параметров. Такой же уровень тепловых потоков дает и модель [74–76], основанная только на ударном механизме рекомбинации. Этот факт имеет место и для капсулы «OREX» (см. рис. 6.6 [73]).

Подробный анализ теоретических моделей гетерогенной рекомбинации, использующихся при исследовании аэродинамического нагрева в диссоциированном воздухе, дан в [5]. Ниже обсуждаются наиболее принципиальные результаты.

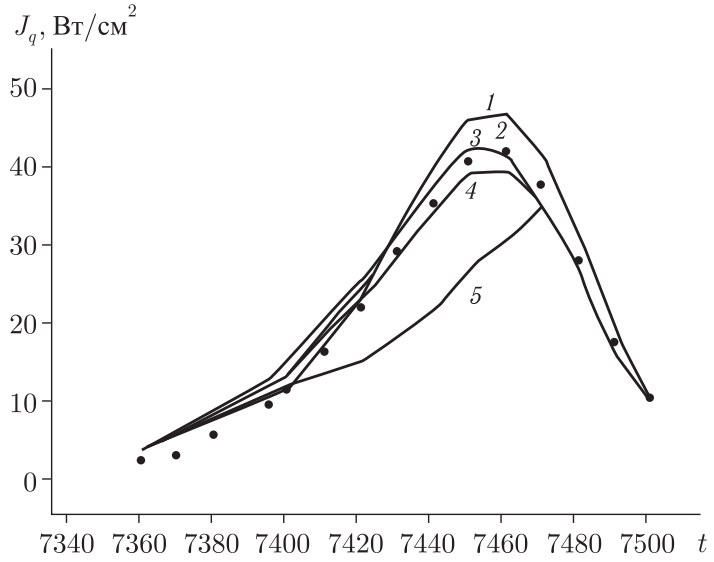


Рис. 6.6. Тепловые потоки в критической точке аппарата «OREX» и летные данные вдоль траектории (точки): модели [66] с замороженными и равновесными реакциями образования NO (кривые *1* и *2*), модель [74] (*3*), модели [68] с учетом и без учета образования NO (*4, 5*)

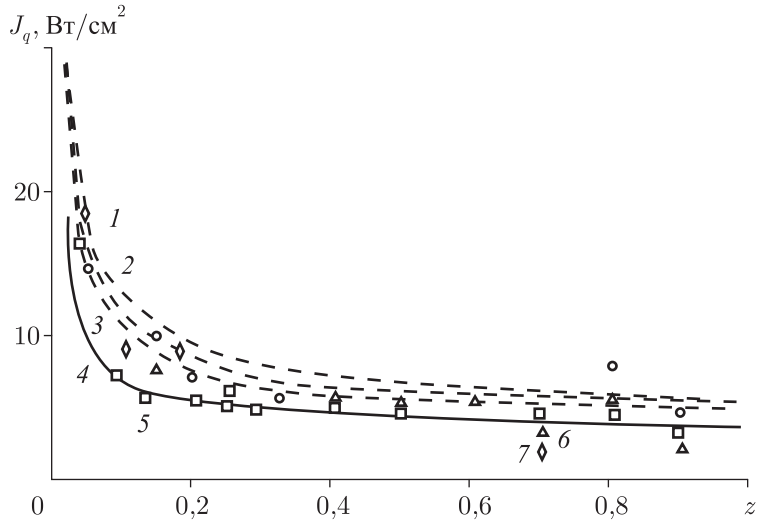


Рис. 6.7. Сравнение рассчитанных тепловых потоков вдоль линии растекания аппарата «Спейс Шаттл» с летными данными для различных моделей катализа. Кривые *1*, *2*, *3*, и *4* — модели [70, 68, 72, 75]. Точки *5*, *6*, и *7* — летный эксперимент [9]. $z = x/L$, x — расстояние от носа вдоль оси симметрии, L — длина аппарата

На рис. 6.7 [63] результаты расчетов тепловых потоков на линии растекания наветренной поверхности аппарата «Спейс Шаттл» сравниваются с измеренными на теплонапряженном участке траектории спуска. Модель [70] дает завышенные значения тепловых потоков на участке поверхности

$0{,}1 < x/L < 0{,}6$. Хорошее согласие с летными данными дает модель [74–76], в которой коэффициенты скоростей элементарных стадий определены по данным [77]. Модели [68, 72] дают промежуточные результаты. При $x/L > 0{,}5$, когда $T_w < 1000\,\mathrm{K}$, уровни тепловых потоков, предсказываемые различными моделями, различаются в пределах 10–25%. Аналогичные результаты имеют место и для других точек траектории.

На рис. 6.8 [63] сравниваются $k_{w\mathrm{O}}(T_w)$, рассчитанные в критической точке затупленного тела, с экспериментальными данными, полученными в индукционном плазмотроне [19]. При высоких T_w модель [70] дает существенно более высокие значения $k_{w\mathrm{O}}(T_w)$, чем эксперимент. Модель [74–76] хорошо согласуется с экспериментальными данными. Модели [68, 72] в области высоких T_w предсказывают близкие значения $k_{w\mathrm{O}}(T_w)$. Они занимают промежуточное

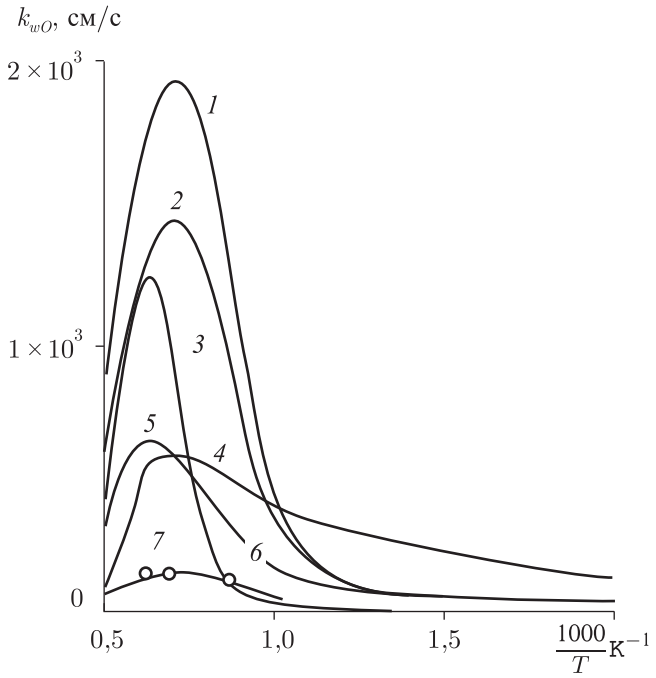


Рис. 6.8. Рассчитанный коэффициент каталитической активности $k_{w\mathrm{O}}$ теплозащитной плитки. Точки — эксперимент [19], кривые *1–3* соответствуют модели [71]: *1* — одновременно учитываются оба механизма рекомбинации, *2* — только ударный механизм рекомбинации, *3* — только ассоциативный. Кривые *4* и *5* — модели [69] и [73], основанные на ударном механизме рекомбинации, кривая *6* — модель [76]

положение между величинами, полученными с помощью моделей [70, 75]. Аналогичные результаты имеют место и для k_{wN}. Расчеты показали, что в условиях эксперимента [19] R_O на порядок больше, чем R_N, так как за счет обменных реакций концентрация атомов N у поверхности незначительна [78, 79], и количество адсорбированных атомов азота также мало. Реакции

Ленгмюра–Хиншельвуда в модели [70] не влияют существенно на степени заполнения поверхности адсорбированными атомами, а следовательно, и на скорость гетерогенной рекомбинации. Модели [72, 75] предсказывают значения тепловых потоков, близкие к некаталитической поверхности, а модель [70] дает тепловые потоки, соответствующие идеально каталитической поверхности. Другие модели занимают промежуточное положение.

Для кривых на рис. 6.8 характерно наличие максимума в области высоких температур. Уменьшение $\gamma(T_w)$ при высоких температурах объясняется преобладающей ролью десорбции [63]. Может сказаться и неполная аккомодация энергии каталитической рекомбинации [71]. Поверхностная рекомбинация может также подавляться разложением компонентов боросиликатного покрытия при $T_w 1500\,\mathrm{K}$ [80].

На рис. 6.9 [81] сравниваются $\gamma_{\mathrm{O}}(T_w)$, полученные с помощью моделей катализа [65, 68, 70], с экспериментальными данными для боросиликатного покрытия [43] и SiO_2 [82]. При низких Tw модель [70] занижает $\gamma_{\mathrm{O}}(T_w)$ более чем на порядок. Модели [65, 68] удовлетворительно согласуются с экспериментом. Они, так же как модель [74–76], предсказывают максимум при $T_w \approx 1600\,\mathrm{K}$.

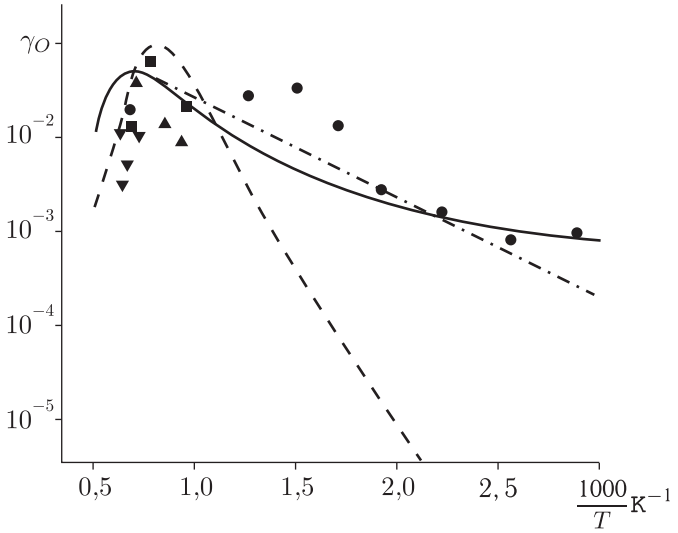


Рис. 6.9. Рассчитанные коэффициенты γ_{O} и экспериментальные данные. Сплошная — [69] , штриховая — [71], штрихпунктирная — [66]. Точки — данные для SiO_2 [83], квадратики и треугольники — для боросиликатного покрытия [43]

Важен вопрос о влиянии давления — измеряемого параметра — на коэффициенты рекомбинации. При больших T_w и малых p_i, когда преобладают процессы десорбции, оба механизма рекомбинации приводят к первому порядку зависимости γ_i от p_i, а при малых T_w и больших p_i, когда преобладают процессы адсорбции, ударный механизм приводит к нулевому порядку

зависимости γ_i от p_i, а ассоциативный — к обратно пропорциональной [5]. Например, в [18, 60] построена модель гетерогенной рекомбинации атомов на плиточном покрытии, в которой при больших T_w основным является ассоциативный механизм, приводящий к обратно пропорциональной зависимости от парциального давления атомов. Зависимость γ_i от полного давления p может быть иной, чем от парциальных давлений атомов p_A из–за существенного влияния p на степень диссоциации [63]. В рамках модели [74–76] при $p = 0{,}1$–1 атм и $T_w = 1000$–2000 K получено $k_{w\mathrm{N}}p^{-1}$. В том же диапазоне p такая же зависимость обнаружена экспериментально в диссоциированном азоте [19]. Уменьшение эффективного коэффициента γ с увеличением давления установлена и в диссоциированном углекислом газе [24].

За счет высокой энергии, выделяемой при интенсивном образовании NO на поверхности, тепловые потоки могут существенно увеличиться [83, 84]. В [67] этому процессу отведена основная роль. Если в этой модели образование NO игнорируется или недооценивается, то рассчитанные тепловые потоки в критической точке капсулы «OREX» на высотах $h \geqslant 60$ км заметно ниже экспериментальных. При достаточно больших скоростях образования NO на поверхности согласие летных и рассчитанных данных становится удовлетворительным. Модель [65] предсказывает тепловые потоки, согласующиеся с этими летными данными, при любой скорости образования NO на поверхности.

Такой же уровень тепловых потоков дает модель [74–76], в которой образование NO не учитывается (рис. 6.6 [73]). На линии растекания аппарата «Спейс Шаттл»в теплонапряженной точке траектории учет образования NO в равновесных реакциях на поверхности в рамках последней модели приводит к существенно более высоким значениям тепловых потоков по сравнению с летными данными. Рассчитанные и экспериментальные результаты согласуются, если образование NO не учитывать [84]. В целом, вопрос об образовании молекул NO на теплозащитных покрытиях остается открытым. Экспериментальные данные о скорости обазования NO на кварце имеются только при комнатных температурах поверхности [85].

Каталитическая рекомбинация заряженных частиц существенно сказывается на уровне ионизации у поверхности. Рассчитанная концентрация электронов в вязком ударном слое (рис. 6.10 [84]) и данные баллистических экспериментов на высоте $h = 81$ км ([86, 87]) около аппарата «RAM–C» хорошо согласуются для поверхности, идеально каталитической относительно рекомбинации заряженных частиц. Для некаталитической — распределение электронов качественно и количественно различается с измеренным. В [87] рассчитанная для такой поверхности электронная концентрация также убывает с увеличением поперечной координаты и отличается от экспериментальных данных почти на порядок. Отмеченный эффект наблюдался и в экспериментах на ударной электроразрядной трубе [88].

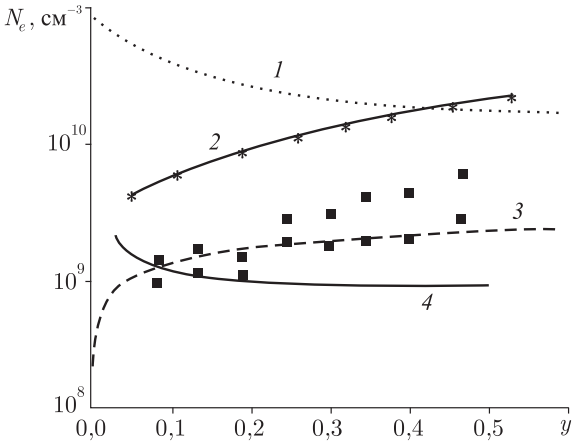


Рис. 6.10. Распределение плотности электронов у аппаратов серии RAM-C в сечении $x/R = 8{,}1$ при $h = 81$ км. Кривая *1* — некаталитическая поверхность, *2* — расчет [87], *3* — идеально каталитическая поверхность, *4* — расчет [88], точки — летные экспериментальные данные [88]

Механизмы каталитических процессов с участием заряженных частиц на теплозащитных покрытиях практически не изучены. Практически отсутствуют количественные оценки коэффициентов скоростей элементарных стадий. В основном рассматриваются предельные случаи каталитической активности поверхности. Граничные условия на поверхности при обтекании тела частично ионизованным воздухом на основе детального моделирования гетерогенных каталитических процессов получены в [74, 75, 89]. Показано, что $k_{w\mathrm{O}}$ и $k_{w\mathrm{N}}$ функции не только температуры и парциальных давлений, но и диффузионных потоков заряженных компонентов. Если эту зависимость не учитывать, то в условиях сильной ионизации тепловой поток к поверхности оказывается завышенным больше, чем на 10 % [89].

Эффект неполной аккомодации энергии гетерогенной рекомбинации связан с образованием на поверхности частиц с возбужденными внутренними степенями свободы. Возбужденные молекулы обнаружены при рекомбинации N и O на металлах [71, 90]. Влияние этого эффекта на теплоообмен рассматривалось в [4, 48, 71, 91–95]. Для металлов и их оксидов характерны умеренные и высокие значения $\beta \geqslant 0{,}5$–$0{,}7$ [4]. Для теплозащитных покрытий сравнение калориметрических измерений коэффициента γ [8, 9, 43] с измерениями γ [96, 97] показывает малую величину $\beta \approx 0{,}1$–$0{,}2$, что противоречит данным [11] ($\beta \approx 1$) для кварца.

В теоретических моделях имеет место неопределенность в выборе кинетического механизма и коэффициентов скоростей элементарных стадий. На величине β сказываются также полнота и точность моделирования физико–химических процессов в газовой фазе. Так, различия в описании диффузии и потока колебательной энергии в расчетах обтекания тел потоками

диссоциированного воздуха приводят к качественным различиям в зависимостях тепловых потоков от β [95].

Остановимся на некоторых характерных моделях, учитывающих неполную аккомодацию энергии рекомбинации. В [71] предполагалось, что на металлах при низких T_w гетерогенная рекомбинация N осуществляется ударным механизмом, а при высоких T_w — ассоциативным. В первом случае возбужденные молекулы быстро десорбируются ($\beta < 1$), а во втором они дольше находятся на поверхности и практически полностью передают ей энергию рекомбинации ($\beta \approx 1$). В результате β возрастает с увеличением T_w от малых величины до единицы. Такое поведение β наблюдалось на W. Однако, для Pt и Ir обнаружена немонотонная зависимость [71]. Это возможно, если при высоких T_w адсорбированные атомы медленно теряют свою энергию, и до стадии полной аккомодации могут сформировать возбужденные молекулы в реакциях Ленгмюра–Хиншельвуда [71, 98]. Немонотонное поведение β может быть вызвано и рекомбинацией хемосорбированного атома и атома — предвестника, находящегося в промежуточном состоянии.

В [4] при ударном механизме рекомбинации учитывались электронно–возбужденные O_2^*, O^*, N_2^*, N^* и колебательно-возбужденные N_2^{**}. Показано, что в сверхзвуковом потоке в критической точке затупленного тела максимальный унос энергии электронно-возбужденными молекулами с высоко каталитической поверхности может составлять 15–20%. Поэтому погрешность восстановления γ_O по измеренному тепловому потоку, достигает целого порядка. Для низко каталитических покрытий, снижение теплового потока за счет образования возбужденных молекул несущественно.

Ударный механизм рекомбинации атомов N с образованием электронно-возбужденных молекул N на поверхности стекловидного покрытия рассмотрен и в [48]. Установлено, что β монотонно меняется с температурой в пределах 0,3–1 при $T_w = 1000$–2000 K и $p_N = 10^{-4}$–1 атм.

В [94] методами молекулярной динамики на основе полуклассического траекторного приближении изучалась рекомбинация атомов O на SiO_2 и получено, что $\beta \leqslant 0{,}2$. Это связано с низкой вероятностью рекомбинации при больших T_w в реакциях Ленгмюра–Хиншельвуда в отличие от [71].

В [99] анализировалось влияние на теплообмен образования возбужденных частиц на поверхности SiO_2 в бинарной смеси O–O_2. Использовалась поуровневая кинетика с коэффициентами скоростей [100]. Показано, что образование возбужденных молекул на поверхности существенно сказывается на кинетике и скоростях реакций в газовой фазе.

В [101] построена модель, описывающая процессы в установке MESOX с учетом образования в газовой фазе и на поверхности электронно — возбужденных молекул. Для одной из разновидностей кварца получены тепловые потоки и коэффициенты γ и β, согласующиеся с экспериментальными данными.

При локальных числах Кнудсена $\mathbf{Kn} \leqslant 0{,}3$, соответствующих полету на больших высотах, наряду с эффектами скольжения на поверхности

[81, 102, 103] имеют место диссоциация адсорбированных молекул и диссоциативная адсорбция [5]. Эти реакции и неполная аккомодация энергии рекомбинации на SiO_2 учитывались в рамках ударного и ассоциативного механизмов рекомбинации в [66]. Для бинарной смеси $N–N_2$ получено, что величины γ_N и γ'_N сильно различаются при низких T_w ($\beta_{N_2} \approx 0{,}2$), где считалось, что преобладал ударный механизм рекомбинации, и близки при высоких T_w ($\beta_{N_2} = 1$), где преобладал ассоциативный механизм (рис. 6.11 [66]).

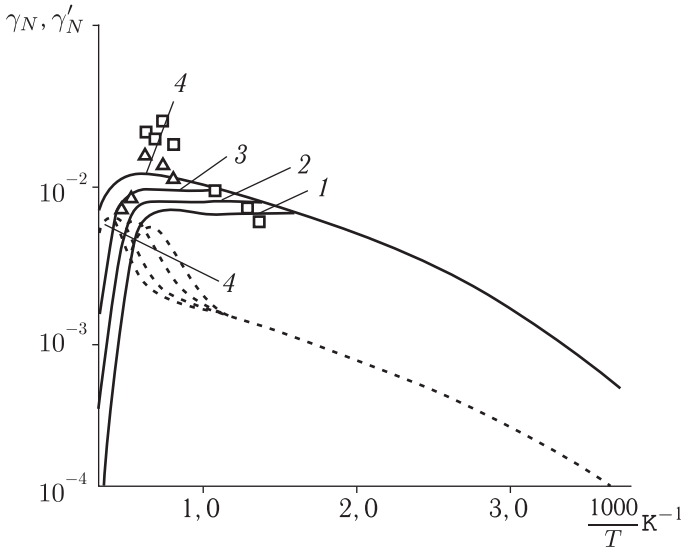


Рис. 6.11. Температурные зависимости коэффициентов рекомбинации γ_N (сплошные кривые) и передачи энергии рекомбинации γ'_N (штриховые) при давлениях 10, 10^2, 10^3, 10^4 Па (*1–4*). Точки — экспериментальные данные [9] (*а*) и [43] (*б*)

Для смеси $O–O_2$ получено $\beta_{O_2} \approx 0{,}4$. При этом, γ_O и γ'_O согласуются с экспериментальными данными [43]. Однако эта модель для $h = 92{,}35$ км на линии растекания аппарата «Спейс Шаттл» предсказывает тепловые потоки, соответствующие некаталитической поверхности, что ниже измеренных в полете. Для высот $h = 85{,}74$ и 77,91 км рассчитанные тепловые потоки находятся в хорошем согласии с летными данными.

Многокомпонентная диффузия в задачах обтекания тел потоками химически реагирующих газов анализировалась в [45, 49, 89, 104–108]. Нагрев поверхности аппаратов «Буран» и «Спейс Шаттл»практически не зависит от модели диффузии [108]. Однако при обтекании поверхностей смесями с достаточно высоким уровнем ионизации модель бинарной диффузии приводит к существенным ошибкам. Тепловой поток к некаталитической стенке при постоянных концентрациях химических элементов может быть на 30 % выше, чем при правильном учете многокомпонентной диффузии с учетом разделения элементов [89]. В [108] предложена модифицированная модель бинарной диффузии,

которая для диссоциированного воздуха дает результаты, практически совпадающие с точными.

При гиперзвуковом обтекании тела диссоциированным воздухом диффузионное разделение химических элементов существенно зависит от концентрации атомов на внешней границе пограничного слоя и от характера протекания гомогенных и гетерогенных каталитических реакций (рис. 6.12, 6.13 [45]).

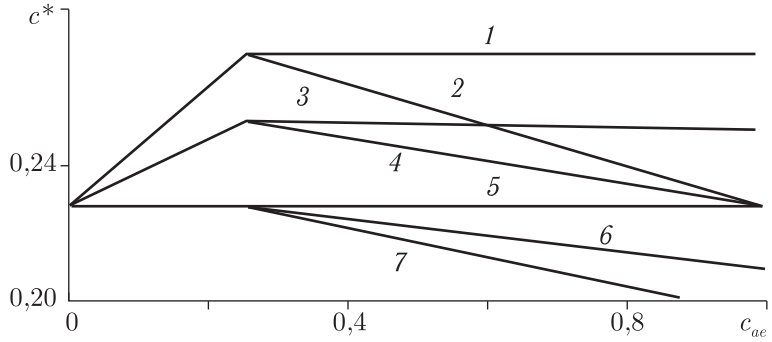


Рис. 6.12. Зависимость концентрации элемента кислорода c на поверхности от концентрации атомов на внешней границе пограничного слоя c_{ae} и скоростей гетерогенных каталитических реакций [45]. Линии соответствуют комбинациям безразмерных коэффициентам каталитичности (α_1, α_2): *1* — $(\infty, 0)$, *2* — (∞, ∞), *3* — $(1, 0)$, *4* – $(1, 1)$, *5* — $(0, 0)$, *6* — $(0, 1)$, *7* — $(0, \infty)$

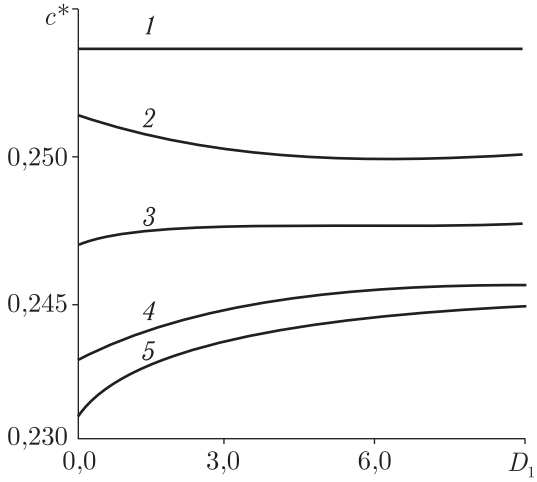


Рис. 6.13. Изменение концентрации элемента кислорода C в зависимости от безразмерной скорости рекомбинации атомов O в газовой фазе D_1. Кривые *1–5* соответствуют величинам безразмерной скорости рекомбинации атомов кислорода на поверхности $\alpha_1 = \infty$, 5, 1, 0,3, 0

В отличие от случая идеально каталитической стенки на поверхностях с избирательным каталитическим действием диффузионное разделение элементов имеет место даже тогда, когда на внешней границе пограничного

слоя присутствуют одни атомы. На химически нейтральной поверхности диффузионное разделение элементов может вызываться гомогенными химическими реакциями рекомбинации атомов кислорода и азота при условиях, когда их константы скорости существенно различаются [45, 49].

4. Гетерогенные каталитические процессы при входе в атмосферу Марса

В разреженной атмосфере Марса влияние гетерогенного катализа на теплообмен более существенно, чем при входе в атмосферу Земли [109–116].

Эффективные вероятности рекомбинации $\gamma = \gamma_{\mathrm{O}} = \gamma_{\mathrm{CO}}$ на трех различных теплозащитных покрытиях [34, 117] и кварце в потоках диссоциированного углекислого газа получены из экспериментов на индукционном плазмотроне [20, 21, 37]. В [118] каталитические свойства SiO_2 по отношению к рекомбинации O и CO при низких температурах определялись диффузионным методом.

Механизм гетерогенной рекомбинации продуктов диссоциации углекислого газа детально рассмотрен в [119, 120]. Модели каталитических свойств теплозащитных покрытий [2, 34, 117] и кварца на основе такого подхода разработаны в [111–116].

В [111–113] исследовался теплообмен при скоростях входа до 8 км/с. Учитывались неравновесные реакции адсорбции — десорбции атомов O и N, молекул CO_2 и их рекомбинация в реакциях Или–Райдила. Считалось, что адсорбция идет с нулевой энергией активации, а значения других параметров модели определялись из условия, что среднеквадратичное отклонение рассчитанных тепловых потоков не превышает 5 % от измеренных в эксперименте [20] при $T_w \geqslant 1500$ K. При этом оказалось, что выбор параметров модели неоднозначен (табл.6.1).

Таблица 6.1. Параметры модели катализа для различных покрытий

Кривая	a_1^{ER}	a_3^{ER}	a_4^{ER}	γ_5	γ_7	E_{O}^{ad}	E_{CO}^{ad}	E_1^{ER}	E_2^{ER}	E_3^{ER}
a	0,018	0,018	0	1,0	0	280	0	15	10	0
b	0,038	0,038	0	0,025	0	280	0	25	15	0
c	0,038	0,038	0,038	0,025	0,013	280	280	25	15	25
d	0,015	0,015	0	0,025	0	300	0	25	15	0
Покрытие II	0,016	0,016	0	0,016	0	380	0	20	25	0
Покрытие III	0,042	0,042	0	0,025	0	400	0	15	25	0

Для найденных наборов параметров при $400\,\mathrm{K} \leqslant T_w \leqslant 1400\,\mathrm{K}$ различие в тепловых потоках достигает 50 % (рис. 6.14), а также значителен разброс значений γ_{O} и γ_{CO} (рис. 6.15). Набор (d) дает зависимости $\gamma_{\mathrm{O}}\,(T_w)$ и $\gamma_{\mathrm{CO}}\,(T_w)$ для боросиликатного покрытия, хорошо согласующиеся с аппроксимацией экспериментальных данных [21]. Для покрытия углерод — углеродного

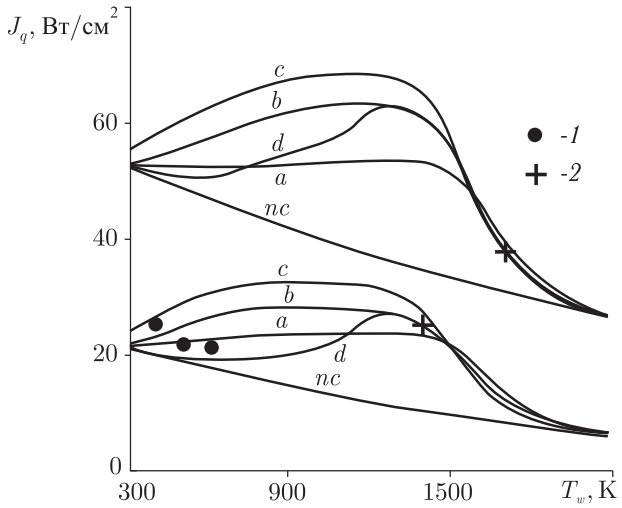


Рис. 6.14. Тепловые потоки к боросиликатному покрытию в диссоциированном углекислом газе. Кривые a–d соответствуют наборам параметров модели катализа из табл. 6.2, nc — некаталитическая поверхность. Точки *1, 2* — эксперименты [20, 21]

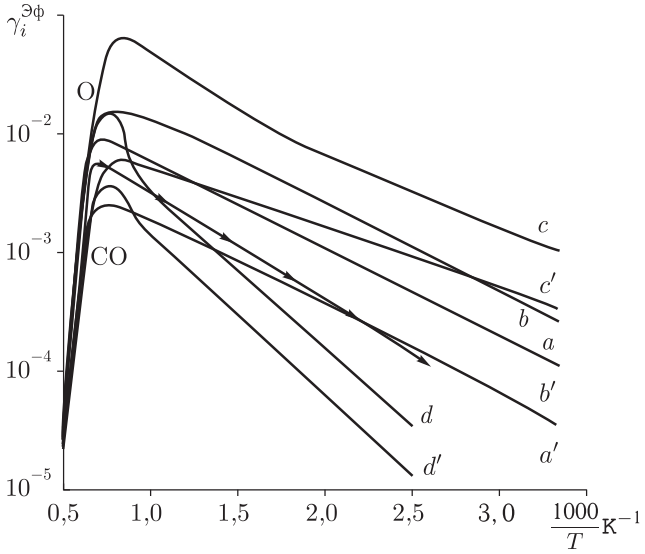


Рис. 6.15. Эффективные вероятности гетерогенной рекомбинации на боросиликатном покрытии: a–d — γ_{O}, a'–d' — γ_{CO}. Буквы соответствуют наборам параметров модели катализа из табл. 6.2

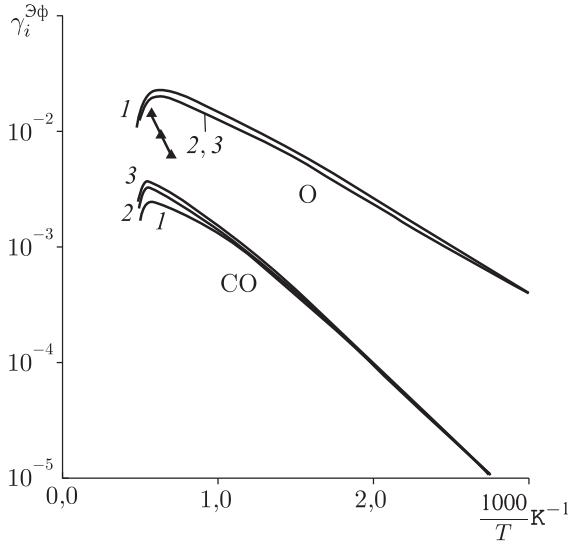


Рис. 6.16. Эффективные вероятности гетерогенной рекомбинации на противоокислительном покрытии углерод — углеродного материала

материала данные [20] располагаются между рассчитанными $\gamma_{\text{O}}(T_w)$ и $\gamma_{\text{CO}}(T_w)$ (рис. 6.16).

Расслоение кривых для разных условий эксперимента в плазмотроне обусловлено их зависимостью не только от T_w, но и от p_{O}, p_N. Различный характер зависимостей $\gamma(T_w)$ в высокотемпературной области, обнаруженный в [20] для боросиликатного и противоокислительных покрытий, в рамках теоретической модели объясняется разницей теплот адсорбции на этих покрытиях, определяющих положение точки максимума. Для боросиликатного покрытия эксперименты проводились при температурах, больших значения, при котором достигается максимум $\gamma(T_w)$, а для двух других — при меньших.

Для аппарата «Mars Miniprobe» расчеты с наборами параметров модели катализа из. табл. 6.1 дают близкие величины максимальных тепловых потоков (рис. 6.17). Это объясняется тем, что условия экспериментов [20], на основе которых выбраны параметры, корректно моделируют условия нагрева в теплонапряженной точке траектории. Так же как и в диссоциированном воздухе, боросиликатное покрытие имеет низкую каталитическую активность. Оно позволяет снизить максимальный тепловой поток в 2,5 раза по сравнению с расчетным тепловым потоком к идеально каталитической поверхности, что соответствует снижению температуры на 500 K. Более высокие температуры поверхности достигаются при использовании углерод–углеродных материалов с противоокислительными покрытиями (рис. 6.18), хотя максимальные температуры поверхности на данной траектории не превышают предельно допустимые.

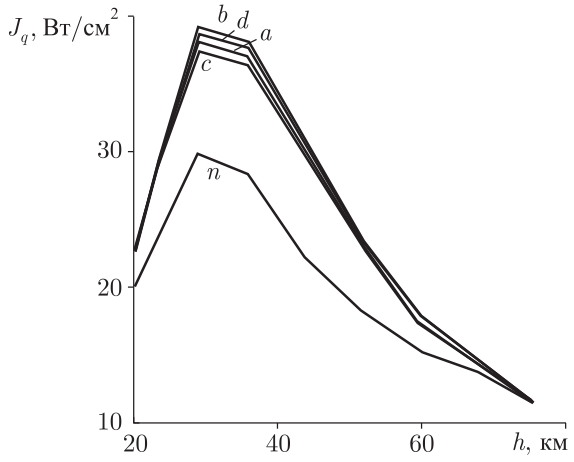


Рис. 6.17. Тепловые потоки на траектории «Mars Miniprobe» к боросиликатному покрытию в зависимости от высоты полета. Кривые *1,4* соответствуют параметрам из табл. 6.1, *5* — некаталитическая поверхность

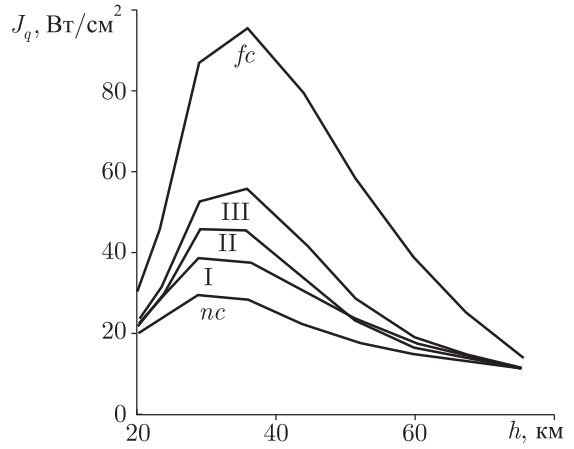


Рис. 6.18. Тепловые потоки для различных теплозащитных покрытий в зависимости от высоты при спуске аппарата «Mars Miniprobe». I — боросиликатное покрытие, II и III — углерод — углеродные материалы с противоокислительным покрытием [118], *1* — идеально каталитическая поверхность, *2* — некаталитическая поверхность

Физическая адсорбция атомов учитывалась при интерпретации экспериментальных данных в диффузионной трубке [58] и при исследовании химического состава у поверхности космического аппарата, движущегося на стационарной орбите [121]. Влияние физически адсорбированных атомов на теплообмен анализировалось в [114, 115]. Для химически адсорбированных атомов O в реакции Ленгмюра–Хиншельвуда использовались параметры, приведенные в [65, 66], для реакций Или–Райдила использовался набор параметров (*d*) из табл. 6.1, а для физически адсорбированных параметры выбраны на основе данных [58, 121] и условия согласования рассчитанных

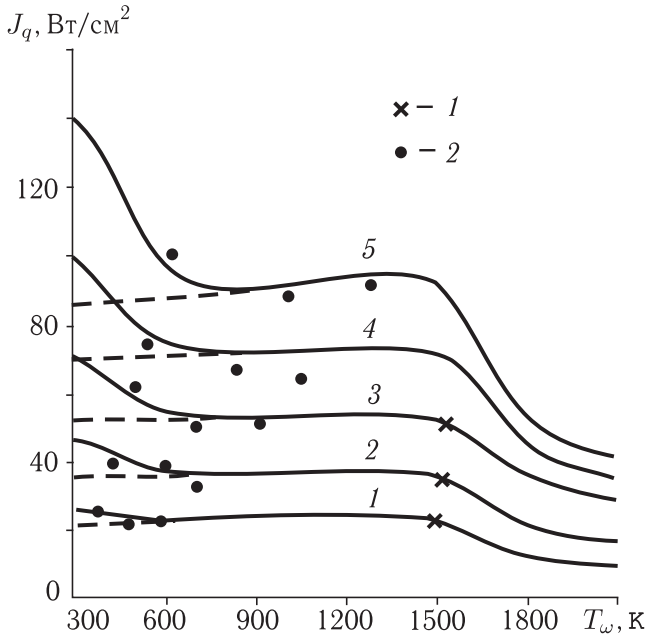


Рис. 6.19. Тепловые потоки к боросиликатному покрытию и кварц с учетом физической адсорбции. Точки *1, 2* — эксперименты [20, 21], цифры у кривых соответствуют экспериментальным режимам [21]

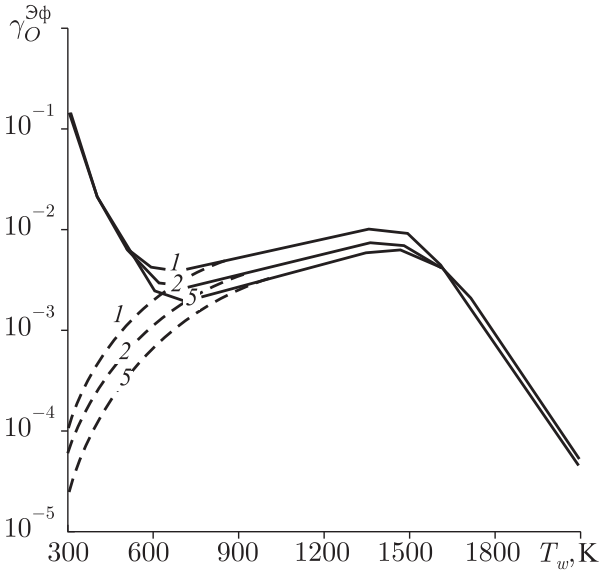


Рис. 6.20. Вероятности рекомбинации атомов кислорода γ_O на боросиликатном покрытии с учетом (сплошные) и без учета (штриховые) физической адсорбции. Цифры у кривых — экспериментальные режимы [21]

Таблица 6.2. Параметры модели гетерогенного катализа с участием физически адсорбированных атомов

№	Реакция	A	E кДж/моль	Q кДж/моль	Источник
1	$O + (S) \rightleftharpoons (O - S)$	0,025	0	300	[115]
2	$(O - S) + O \mapsto (S) + O_2$	0,015	25	—	[115]
3	$(O - S) + CO \mapsto (S) + CO_2$	0,015	15	—	[115]
4	$O + (F) \rightleftharpoons (O - F)$	0,5	0	20	[121]
5	$(O - F)+(S)\mapsto(F)+(O-S)$	0,053	0	—	[121]
6	$(O - S)+(O - F)\mapsto(F)+(S)+O_2$	0,053	0	—	[121]
7	$(O - S) + (O - S)\mapsto 2(S) + O_2$	0,02	125	—	[66]
		1,0	500	—	[83]

и измеренных тепловых потоков на кварце при низких температурах [21] (табл. 6.2).

Физическая адсорбция атомов O приводит к увеличению теплового потока при $T_w \leqslant 600\,\mathrm{K}$, что согласуется с экспериментальными данными (рис. 6.19), а при высоких температурах не влияет на теплообмен. При $T_w \leqslant 600\,\mathrm{K}$ она приводит к существенному увеличению γ_{O} (до трех порядков) и практически не сказывается на γ_{CO} (рис. 6.20).

Учет физической адсорбции атомов объясняет обнаруженный экспериментально минимум коэффициента рекомбинации при $T_w \leqslant 1000\,\mathrm{K}$ [4, 58]. Высокие значения γ имеют место при низких температурах, что обусловлено рекомбинацией на физически адсорбированных атомах и при высоких из-за рекомбинации на хемосорбированных атомах. В промежуточной области наблюдается минимум.

В кормовой части спускаемого аппарата уровень тепловых потоков на несколько порядков ниже, чем на лобовой поверхности. Тем не менее, учет влияния гетерогенной рекомбинации на теплообмен в этой области важен в связи с тем, что в кормовой части аппарата может быть расположена полезная нагрузка, чувствительная к нагреву [116].

5. Моделирование каталитических свойств теплозащитных покрытий космических аппаратов на основе квантовой механики и молекулярной динамики

Актуальность исследования каталитических свойств теплозащитных покрытий связана с разработкой перспективных гиперзвуковых летательных аппаратов, для которых разрабатываются новые материалы, обеспечивающие

тепловую защиту при температурах поверхности около 2000 K. Ведь при гиперзвуковом обтекании гетерогенные каталитические реакции определяют более половины потока тепла к поверхности тела. Кроме того, весьма актуальными стали вопросы снижения тепловых нагрузок на поверхность космических аппаратов и зондов, предназначенных для спуска в атмосфере Марса и последующем возвращении на Землю.

До настоящего времени гетерогенные каталитические процессы на теплозащитных покрытиях космических аппаратов остаются недостаточно изученными как в теоретическом, так и в экспериментальном плане [122, 123]. Большинство экспериментальных методик позволяет определять только интегральные характеристики процесса передачи энергии на поверхность, высвобождающейся в ходе гетерогенной рекомбинации. При этом, определенные экспериментально эффективные величины коэффициентов рекомбинации и аккомодации энергии рекомбинации у разных авторов отличаются на порядки в силу их зависимости от условий эксперимента. Построенные на основе учета детального механизма гетерогенных каталитических процессов кинетические модели включают ряд параметров, которые определяются из сравнения с экспериментальными данными. Однако, при многопараметрической зависимости такой подход может быть неоднозначен [124].

В связи с ростом производительности современных суперкомпьютеров стало возможным определение потенциалов взаимодействия молекулярных систем с достаточно хорошей точностью на основе квантовомеханических расчетов. Использование этих данных позволяет существенно повысить эффективность методов молекулярной динамики при исследовании гетерогенной каталитических процессов. Такие подходы позволяют лучше понять их механизм, проанализировать каждый шаг поверхностной реакции и оценить влияние различных микроструктур материалов на каталитические явления. При этом могут быть найдены коэффициенты скоростей элементарных поверхностных процессов, распределение энергии внутренних степеней свободы продуктов реакций, энергия обмена между поверхностью и химической системой. Эта информация очень важна для определения величины тепловых потоков к поверхности от формируемых на ней молекул. Большинство работ по катализу с использованием такого подхода выполнено для легких частиц на металлах. В последние годы такие работы появились и для теплозащитных материалов [125, 126].

В [126] в рамках классической молекулярной динамики разработан эффективный метод исследования процессов взаимодействия газовых смесей с каталитическими поверхностями, создан вычислительный комплекс «MD Trajectory» и проведены тестовые расчеты коэффициентов рекомбинации атомов кислорода и коэффициента аккомодации энергии рекомбинации на поверхности β — кристабалита и SiC в реакции Или–Райдила. Полученные результаты хорошо согласуются с расчетами [125], а также имеющимися экспериментальными данными [127, 128].

Исследовался процесс гетерогенной каталитической рекомбинации атомов кислорода в реакции Или–Райдила. Взаимодействующие атомы разбивались на две группы. Первая группа включала атомы из газовой фазы, а вторая — атомы кристаллической решетки твердого тела. В рамках классической молекулярной динамики уравнения движения атомов записывались в форме уравнений Гамильтона с гамильтонианом:

$$H = \sum_{i=1}^{n} \sum_{\gamma=x,y,z} \frac{1}{2M_i} P_{i\gamma}^2 + \sum_{k=1}^{N} \sum_{\gamma=x,y,z} \frac{1}{2M_k} P_{k\gamma}^2 + \\ + \sum_{i<j} V_{11}(R_{ij}) + \sum_{k<l} V_{22}(R_{kl}) + \sum_{ik} V_{12}(R_{ik}).$$

Здесь первые два члена описывают кинетическую энергию газовой фазы и поверхности, а последние три — потенциальную энергию взаимодействия между атомами газовой фазы V_{11}, атомами решетки V_{12} и атомов газовой фазы с поверхностью V_{22}.

В рамках классического приближения молекулярной динамики проведены вычисления коэффициентов коэффициентов рекомбинации γ и аккомодации энергии рекомбинации β при рекомбинации атомов кислорода на поверхностях β-кристобалита и SiC. Такие материалы часто используемого в теплозащитных системах космических аппаратов. Постановка задачи и метод расчета детально приведены в [126]. Там же обсуждаются возможности комплекса «MD Trajectory».

Коэффициенты γ и β были определены на основе расчета более чем 100000 траекторий в широком диапазоне изменения величины энергии столкновений атомов с кристаллической решеткой E_r. Траектории движения атомов исследовались для множества заданных случайным образом начальных условий. Расчеты проводились при фиксированной температуре поверхности $T_s = 1000\,\mathrm{K}$, которая характерна для теплозащитных покрытий при входе космических аппаратов в атмосферу. При численном моделировании рассматривалась поверхность размерностью 2×2 единичные ячейки, с заданными периодическими граничными условиями, моделирующими бесконечную поверхность.

Элементарная ячейка кристаллической решетки β-кристобалита имеет достаточно сложную структуру, включающую 9 слоев [129]. Исследовалась поверхность с атомами Si на верхнем слое (поверхность B из [125]). Слагаемые V_{11} и V_{12} потенциальной энергии для исследуемой системы были взяты из [125]. Взаимодействие атомов газовой фазы с поверхностью описывалось следующим образом:

$$V_{22}(R_1, R_2, R_3, \ldots, R_{\mathrm{N}}) = \sum_{i<j} V_2(R_i, R_j) + \sum_{i<j<k} V_3(R_i, R_j, R_k),$$

где слагаемые V_2 выражались с помощью модифицированного потенциала Борна–Майера:

$$V_2(R_i, R_j) = V_2(R_{ij}) = A_{ij} \exp\left(\frac{-R_{ij}}{\rho}\right) + \left(\frac{Z_i Z_j e^2}{R_{ij}}\right) \operatorname{erf} c \frac{R_{ij}}{\beta_{ij}},$$

$$A_{ij} = \left(1 + \frac{Z_i}{n_i} + \frac{Z_j}{n_j}\right) b \exp\left(\frac{\sigma_i + \sigma_j}{\rho}\right), \quad b = \text{const}\,.$$

Здесь Z_i — заряд иона, ρ, β_{ij} — прицельные параметры, n_i — число валентных электронов. Отметим, что поверхность потенциальной энергии учитывает не только парные потенциалы взаимодействия, но и трехатомные потенциалы взаимодействия [130]:

$$V_3(R_i, R_j, R_k) = h(R_{ij}, R_{ik}, \theta_{jik}) + h(R_{jk}, R_{ji}, \theta_{kji}) + h(R_{ki}, R_{kj}, \theta_{ikj}).$$

Считалось, что функции h принимают ненулевые значения

$$h(R_{ij}, R_{ik}, \theta_{jik}) = \lambda_i \exp\left[\frac{\gamma_i}{R_{ij} - R_i^c} + \frac{\gamma_i}{R_{ij} - R_i^c}\right] + \cos\theta_{jik} - \cos\theta_{ijk}^c,$$

только при

$$R_{ij} < R_i^c \quad \text{и} \quad R_{ij} < R_i^c.$$

Здесь λ_i, γ_i, R_i^c, $\cos\theta_{jik}^c$ — заданные постоянные, θ_{jik} — угол между R_{ij} и R_{ik}.

Параметры модифицированного потенциала Борна–Майера и параметры трехатомного потенциала взаимодействия приведены в табл. 6.3, 6.4 соответственно.

Таблица 6.3. Параметры модифицированного потенциала Борна–Майера

X–Y	A_{X-Y}, эВ	β_{X-Y}, Å
Si–O	1847	2,6
O–O	449	2,55
Si–Si	1173	2,53

Таблица 6.4. Параметры потенциала взаимодействия трех атомов

X	λ_X, эВ	γ_X, Å	r_X^c, Å	$\cos\theta_X^c$
Si	112	2,6	3,0	
O	2	2,0	2,6	
O-Si-O				$-1/3$
Si-O-Si				$-1/3$

Результаты расчетов распределения колебательной энергии в сформированных на поверхности β — кристобалита молекулах кислорода приведены на рис. 6.21. Они показывают наличие ярко выраженного максимума, который смещается при увеличении энергии столкновений атомов E_{coll} в сторону больших значений частоты колебаний.

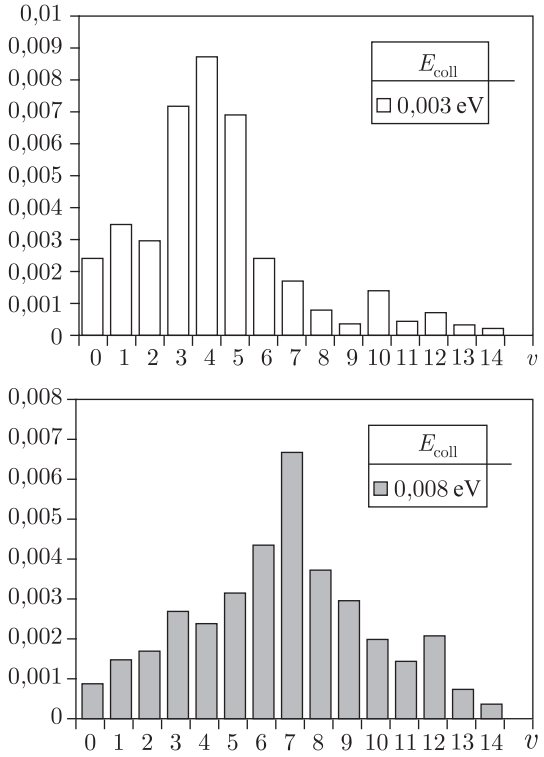


Рис. 6.21. Распределение колебательной энергии в сформированных реакции Или–Райдила молекулах O_2 на поверхности β — кристобалита для различных значений энергии столкновений C_{coll}

Для сравнения с приведенными в [127, 128] экспериментальными данными было проведено усреднение $\gamma(T_s,\ E_r)$ и по энергии столкновений атомов кислорода с поверхностью E_r в предположении, что реализуется ее Максвелловское распределение. Температура газа T_g считалась равной температуре поверхности T_s.

Результаты представленные в табл. 6.5, показывают, что полученная величина γ достаточно хорошо согласуются с экспериментальными данными, приведенными в [127, 128] для трех образцов β — кристобалита, а также с рассчитанной величиной γ [125], где при расчете свойств поверхности использовалось квантовомеханическое описание. Полученная величина коэффициента аккомодации энергии рекомбинации $\beta = 0{,}127$ хорошо согласуется с результатами расчетов [125].

Обнаружено также, что при возрастание энергии столкновений атомов вероятность реакции Или–Райдила уменьшается, а вероятность адсорбции атомов увеличивается. При высоких энергиях столкновений атомов с поверхностью для атомов наблюдается благоприятная тенденция быть пойманными в потенциальную яму и десорбироваться в атомарном состоянии,

Таблица 6.5. Коэффициент гетерогенной рекомбинации γ атомов O на поверхности β-кристобалита. Сравнение результатов расчета с экспериментальными данными [128] и расчетом [126]

	γ	T
эксперимент [129], образец 1	0,0255	1008 K
эксперимент [129], образец 2	0,0296	1005 K
эксперимент [129], образец 3	0,0255	1017 K
расчет [127]	0,029	1000 K
расчет в данной работе	0,026	1000 K

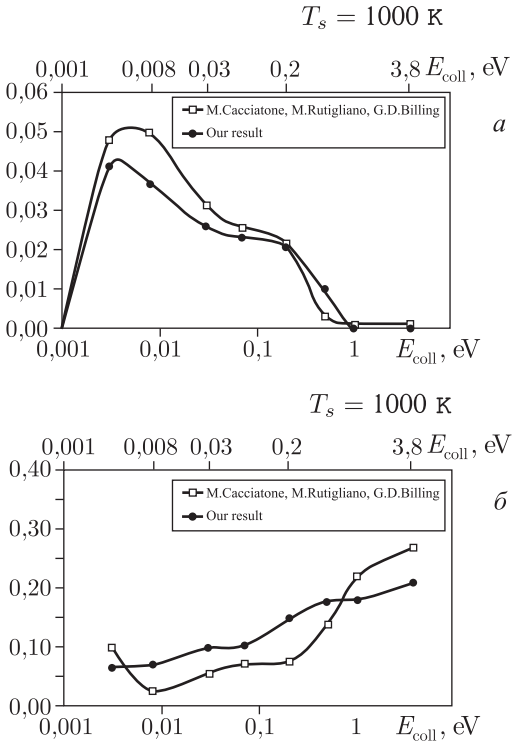


Рис. 6.22. *а* — коэффициент рекомбинации; *б* — коэффициент аккомодации химической энергии для реакции Или–Райдила $O + O_s \to O_2$

вместо того, чтобы вступить в реакцию рекомбинации и потом уже десорбироваться в составе молекулы.

При исследовании силицированного карбида 3C–SiC, фрагмент кристаллической матрицы которого показан на рис. 6.23, *а*, также рассматривалась поверхность с атомами Si на верхнем слое (см. рис. 6.23, *б*). Поверхность потенциальной энергии была взята из [131].

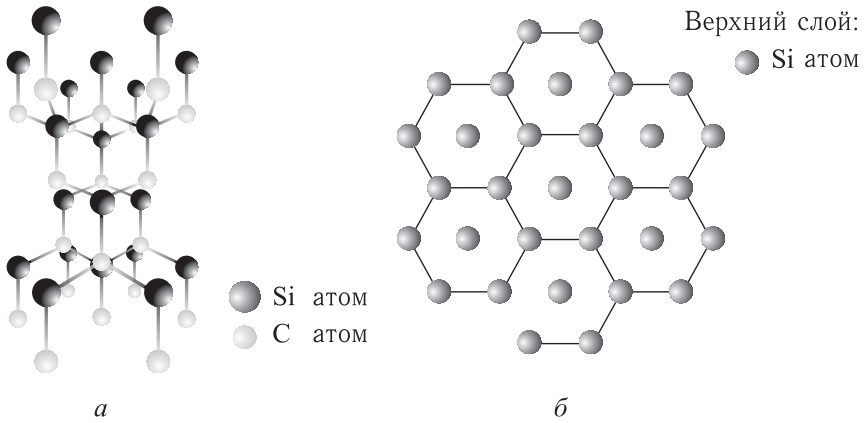


Рис. 6.23. *а* — фрагмент кристалической матрицы 3C–SiC, *б*— стркутура верхнего слоя поверхности 3C–SiC

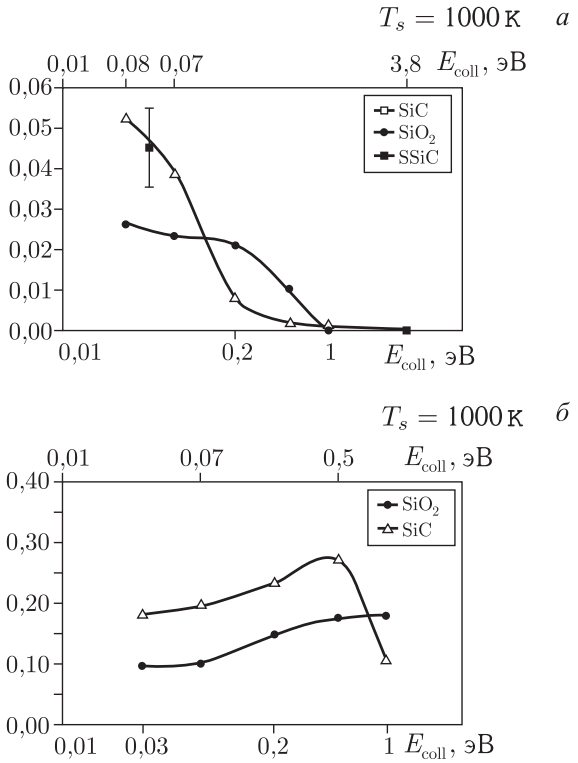


Рис. 6.24. Сравнение результатов расчетов для реакции рекомбинации Или–Райдила $O + O_s \to O_2$ для двух типов поверхности: *а* — коэффициенты рекомбинации атомов, *б* — коэффициенты аккомодации энергии рекомбинации

Сравнение полученных результатов для исследованных материалов приведено на рис. 6.24. Там же приведена величина коэффициента рекомбинации для металокерамического силицированного карбида SSiC (черный квадратик на рис. 6.24 *а*), полученная в экспериментах [132]. Видно, что при малых энергиях столкновений атомов с поверхностьюу $E_{\text{coll}} < 0{,}04$ эВ процесс рекомбинации более эффективен на поверхности SiC surface чем на SiO_2. Однако при более высоких энергиях ситуация меняется. Тем не менее,за счет рекомбинации атомомов кислорода поверхность SiC будет нагреваться сильнее чем SiO_2, так как коэффициент аккомодации химической энергии для SiC выше, чем для SiO_2 во всем диапазоне изменения E_{coll} (рис. 6.24 *б*).

Распределение колебательной энергии сформированных в реакции Или–Райдила молекул O_2 на поверхности SiC также как и на поверхности SiO_2 имеет максимум и этот максимум смешается в область больших значений частоты колебаний с ростом E_{coll}.

Заключение

Большой объем экспериментальных и теоретических исследований по высокотемпературному катализу в диссоциированном воздухе выполнен в связи с разработкой систем теплозащиты воздушно-космических самолетов «Спейс Шаттл» и «Буран». Изучены вопросы, связанные с термохимической стойкостью и каталитическими свойствами поверхности плиток из ультратонких кварцевых волокон со стекловидным покрытием и композиционных углерод — углеродных материалов. Эти материалы обеспечили допустимые уровни температуры поверхности многоразовой тепловой защиты при спуске в атмосфере Земли.

На основе молекулярно динамических расчетов дан анализ каталитических свойств силиконизированных материалов SiO2 и SiC, использующихся для теплозащиты космических аппаратов. Найдены величины коэффициентов рекомбинации и аккомодации химической энергии, распределения колебательной энергии сформированных в процессе рекомбинации молекул O_2. Рассчитанные величины вероятности рекомбинации атомов кислорода на поверхности β — кристобалита в реакции Или–Райдила и коэффициента аккомодации энергии рекомбинации хорошо согласуются с имеющимися экспериментальными данными и расчетами другим методом.

Обнаружено, что при малых энергиях столкновений атомов с поверхностью E_{coll} процесс рекомбинации более эффективен на поверхности SiC чем на SiO_2. Однако при более высоких энергиях ситуация меняется. Тем не менее,за счет рекомбинации атомомов кислорода поверхность SiC будет нагреваться сильнее чем SiO_2, так как коэффициент аккомодации химической энергии для SiC выше, чем для SiO_2 во всем диапазоне изменения E_{coll}.

Исследована возможность снижения тепловых нагрузок на поверхность космических аппаратов и зондов, предназначенных для спуска в атмосфере

Марса за счет применения низкокаталитических теплозащитных материалов относительно гетерогенной рекомбинации атомов O и молекул CO. Получены экспериментальные данные о каталитических свойствах в диссоциированном углекислом газе для указанных выше покрытий, построены теоретические модели с детальным учетом механизма гетерогенных каталитических процессов.

Разработанные модели позволяют с достаточной точностью предсказать тепловые потоки вдоль всей поверхности аппарата при входе в атмосферу Земли и Марса. Вместе с тем остается неопределенность механизмов протекания гетерогенных каталитических процессов на поверхности и скоростей протекания элементарных стадий (коэффициенты прилипания, предэкспоненцильные множители, энергии активации). В связи с этим необходимы расширение возможностей экспериментальных установок и разработка новых методов исследования для уточнения кинетики поверхностных процессов.

Несмотря на существенное увеличение производительности современных компьютеров, позволяющее многомерное моделирование на основе квантовой механики и молекулярной динамики, такие подходы требуют больших затрат и усилий. В настоящее время их все еще невозможно использовать для описания гетерогенных каталитических процессов на теплозащитных материалах в диссоциированных газах. Такое моделирование может быть эффективно использовано для определения некоторых параметров кинетических моделей.

Для теплозащитных систем перспективных воздушно–космических аппаратов требуются материалы, способные выдерживать температуры выше 2000 K. Необходима дальнейшая разработка моделей гетерогенного катализа с учетом процессов окисления и термохимического «старения» материалов многоразового использования в этих условиях.

Исследования поддержаны Роснаукой (Гос. контракты 02.740.11.0615).

Список литературы

1. *Лозино–Лозинский Г.Е.* Полет «Бурана» // Гагаринские научные чтения по космонавтике и авиации, 1989. — М.: Наука, 1990. С. 6–21.
2. Авиационно–космические системы / Под ред. Г.Е. Лозино–Лозинского и А.Г. Брабухина. — М.: МАИ, 1997. 437 с.
3. Goulard R. On catalytic recombination rates in hypersonic stagnation heat transfer // Jet Propuls. 1958. V. 28. № 11. P. 737–745.
4. *Беркут В.Д., Дорошенко В.М., Ковтун В.В. и др.* Неравновесные физико-химические процессы в гиперзвуковой аэродинамике. — М.: Энергоатомиздат, 1994. 399с.
5. *Ковалев В.Л.* Гетерогенные каталитические процессы в аэротермодинамике. — М.: Физматлит, 2002. 224 с.
6. *Bonhoeffer K.F.* Das Verhalten von aktiven Wasserstoff // Z. Physikalische Chemie. 1924. Bd. 113. H.3/4 S. 199–219.

7. *Анфимов Н.А., Беда Г.А., Даниленко И.П. и др.* Электродуговые газодинамические установки ЦНИИмаша. Схемы и методики испытаний // Космонавтика и ракетостроение. Калининград: Изд-во ЦНИИМаш, 1994. Вып. 2. С. 33–46.
8. *Stewart D.A., Chen Y.K. Bamford D.J. et al.* Predicting material surface catalytic effiency using arc–jet Tests // AIAA Paper. 1995. № 95–2013.
9. *Scott C.D.* Catalytic recombination of nitrogen and oxygen on high temperature reusable surface insulation // Progr. Astronautics and Aeronaut.: Aerotermo dynamics and Planetary Entry / Ed. A.L. Crosbie.— N.Y.: AIAA, 1981. P. 192–212.
10. *Баронец П.Н., Колесников А.Ф., Мысова В.М. и др.* Моделирование физико-химических процессов неравновесного теплообмена в дозвуковых струях индукционного плазмотрона // Проблемы физической газовой динамики: Тр. ЦАГИ. 1990. Вып. 2424. С. 283–293.
11. *Андронова Ю.И., Жестков Б.Е., Макаров И.Г. и др.* Определение каталитических свойств материалов по тепловому потоку // Аэродинамика аэрокосмических аппаратов. — М.: ЦАГИ, 1992. Т. 1. С. 209–216.
12. *Залогин Г.Н., Землянский Б.А., Кнотько В.Б. и др.* Высокочастотный плазмотрон — установка для исследований аэрофизических проблем с использованием высокоэнтальпийных газовых потоков // Космонавтика и ракетостроение. Калининград: Изд-во ЦНИИМаш, 1994. Вып. 2. С. 22–32.
13. *Auweter-Kurtz M., Kurtz H.L., Laure S.* Plasma generators for reentry simulation // J. Propulsion and Power. 1996. V. 12. № 6. P. 10531061.
14. *Bascle J.M., Conte D., Leroux R.* A new test facility for experimental characterization of high temperature composites and ceramics // 3rd Europ. Workshop on TPS. ESTEC, Noordwijk, The Netherlands, 1998.
15. *Garcia A., Chazot O., Fletcher D.* Investigations in plasmatron facilities on catalycity determination // Proc. 4th Europ. Symp. Aerothermo dynamics for Space Vehicles. 2001/ Ed. R.A. Harris. Capua, Italy. ESA SP-487. 2002. P. 489–495.
16. *Васильевский С.А., Колесников А.Ф., Якушин М.И.* Определение эффективных вероятностей гетерогенной рекомбинации атомов в условиях влияния газофазных реакций на тепловой поток // Теплофизика высоких температур. 1991. Т. 29. № 3. С. 521–529.
17. *Kolesnikov A.F.* The aerothermo dynamic simulation in sub-and supersonic high enthalpy jets: experiment and theory / Ed. J.J. Hunt: Proc. 2nd Europ. Symp. on Aerothermodynamics for Space Vehicles. ESTEC, Noordwijk, The Netherlands, 1994. ESA SP–367. 1995. P. 583–590.
18. *Власов В.И., Залогин Г.Н., Землянский Б.А. и др.* Методика и результаты экспериментального определения каталити-ческой активности материалов при высоких температурах. // Изв. РАН: МЖГ. 2003. № 5. С. 178–189.
19. *Баронец П.Н., Гордеев А.Н., Колесников А.Ф. и др.* Отработка теплозащитных материалов орбитального корабля «Буран» на индукционных плазмотронах // Гагаринские научные чтения по авиации и космонавтике 1990, 1991. — М.: Наука, 1991. С. 41–52.
20. *Быкова Н.Г., Васильевский С.А., Гордеев А.Н. и др.* Определение эффективных вероятностей каталитических реакций на поверхностях теплозащитных материалов в потоках диссоциированного углекислого газа // Изв. РАН. МЖГ. 1997. № 6. С. 144–157.
21. *Kolesnikov A.F., Pershin I.S., Vasil'evskii S.A. et al.* Study of quartz surface catalycity in dissociated carbon dioxide subsonic flows // J. Spacecraft and Rockets. 2000. V. 37. № 5. P. 573–579. (AIAA Paper 98–2847).
22. *Herdrich G., Auweter-Kurtz M., Endlich P.* Mars re-entry simulation using the inductively heated plasma generator IPG4 // AIAA Paper. 2001. № 2001–3013.
23. *Knotko V.B., Osipov V.A., Rumynsky A.N. et al.* Experimental study of different thermal protection materials in dissociated carbon dioxide flow // Proc. 3rd Europ. Symp. on Aerothermo dynamics for Space Vehicles/ Ed. R.A. Harris. ESTEC, Noordwijk, The Netherlands, 1998. ESA SP-426. 1999. P. 147–154.

24. *Kolesnikov A.F., Pershin I.S., Vasil'evskii S.A.* Predicting catalycity of Si-based coating and stagnation point heat transfer in high-enthalpy CO_2subsonic flows for the Mars entry conditions // Intern. Workshop on Planetary Probe Atmospheric Entry and Descent Trajectory Analysis and Science. Lisbon, Portugal, 2003. ESA SP–544. 2004. P. 77–83.
25. *Vidal R.J., Golian T.C.* Heat transfer measurements with a catalytic flat plate in dissociated oxygen // AIAA Journal. 1967. V. 5. № 8. P. 1579–1587.
26. *Balat M.J.H., Czerniak M., Badie J.M.* Ceramic catalysis evaluation at high temperature using thermal and chemical approaches // J. Spacecraft and Rockets. 1999. V. 36. № 2. P. 273–279.
27. *Гордеев А.Н., Колесников А.Ф., Якушин М.И.* Влияние каталитической активности поверхности на неравновесный теплообмен в дозвуковой струе диссоциированного азота // Изв. АН СССР. МЖГ. 1985. № 3. С. 166–172.
28. *Дорошенко В.М., Мысова В.М., Рулёв Ю.К., и др.* Измерение энтальпии в высокотемпературных дозвуковых струях азота и воздуха на индукционном плазмотроне // Инж.–физ. ж. 1987. Т. 53. № 3. С. 492–493.
29. *Залогин Г.Н., Кнотько В.Б., Лунев В.В. и др.* Измерение энтальпии в высокотемпературном дозвуковом потоке малой плотности // Инж.–физ. ж. 1988. Т. 54. № 1. С. 5–9.
30. *Власов В.И., Залогин Г.Н., Кнотько В.Б.* Диагностика нерав-новесного плазменного потока высокочастотного индукционного плазмоторона с применением двойного каталитического зонда // Космонавтика и ракетостроение. Калининград: Изд–во ЦНИИМаш, 2000. Вып. 19. С. 97–106.
31. *Быкова Н.Г., Васильевский С.А., Колесников А.Ф.* Влияние излучения на пространственное распределение температуры дозвуковых потоков индукционной плазмы // Теплофизика высоких температур. 2004. Т. 42. № 1. С. 16-22.
32. *Залогин Г.Н., Итин П.Г., Лунев В.В. и др.* Аномальный теплообмен на каталитической поверхности в потоке диссоциированного азота // Гагаринские научные чтения по космонавтике и авиации, 1988. — М.: Наука, 1989. С. 26–33.
33. *Баронец П.Н., Колесников А.Ф., Кубарев С.Н. и др.* Сверхравновесный нагрев поверхности теплозащитной плитки в дозвуковой струе диссоциированного воздуха // Изв. АН СССР. МЖГ. 1991. № 3. С. 144–150.
34. *Андрианова В.Г., Горячковский Ю.Г., Петров В.А. и др.* Исследование спектральной излучательной способности боросиликатных покрытий на высокотемпературных теплоизоляционных материалах // Теплофизика высоких температур. 1982. Т. 20. № 5. С. 992–995.
35. *Shvedchenko V.V., Zhestkov B.Eu., Fischer W.P.P.* Ebeling W.–D. Methodology and results of catalycity and plasma erosion tests on FEI components // SAE Techn. 1994. Paper № 941586.
36. *Fay J.A., Riddel F.R.* Theory of stagnation point heat transfer in dissociated air // J. Aeronaut. Sci. 1958. V. 25. № 2. P. 73–85.
37. *Kolesnikov A.F., Yakushin M.I., Vasil'evskii S.A. et al.* Catalysis heat effects on quartz surfaces in high–entalpy subsonic oxygen and carbon dioxide flows // Proc. 3rd Europ. Symp. on Aerothermo dynamics for Space Vehicles /Ed. R.A. Harris. ESTEC, Noordwijk, The Netherlands, 1998. ESA SP–426. 1999. P. 537–544.
38. *Колесников А.Ф., Якушин М.И.* Об определении эффективных вероятностей гетерогенной рекомбинации по тепловым потокам к поверхности, обтекаемой воздухом // Мат. моделирование. 1989. Т. 1. № 3. С. 44–60.
39. *Афонина Н.Е., Васильевский С.А., Громов В.Г. и др.* Течение и теплообмен в недорасширенных струях воздуха, истекающих из звукового сопла плазмотрона // Изв. РАН. МЖГ. 2002. № 5. С. 156–168.
40. *Черный Г.Г.* Течения газа с большой сверхзвуковой скоростью. — М.: Физматгиз, 1959. С 220.

41. *Лунев В.В.* Гиперзвуковая аэродинамика. — М.: Машиностроение, 1975. С 327
42. *Stewart D.A., Rakich I.V., Lafranco M.Z.* Catalytic surface effects experiment on Space Shuttle // Prog. Astronautics and Aeronautics / Ed. T.E. Horton. — N.Y.: AIAA, 1982. V. 82. P. 248–272.
43. *Kolodziej P., Stewart D.A.* Nitrogen recombination on high — temperature reusable surface insulation and the analysis of its effects on surface catalysis //AIAA Paper. 1987. № 87–1637.
44. *Суслов О.Н.* Асимптотическое интегрирование уравнений многокомпонентного химически неравновесного пограничного слоя // Аэродинамика гиперзвуковых течений при наличии вдува. — М.: Изд-во МГУ, 1979. С. 6–39.
45. *Ковалев В.Л., Суслов О.Н.* Эффект диффузионнного разделения химических элементов на каталитической поверхности // Изв. АН СССР: МЖГ. 1988. № 4. С. 115–121.
46. *Ковалев В.Л., Суслов О.Н.* Асимптотические формулы для исследования тепломассобмена в химически неравновесном пограничном слое на каталитической поверхности // Докл. РАН. 1995. Т. 345. № 4. С. 483–486.
47. *Воронкин В.Г., Гераскина Л.К.* Неравновесный ламинарный пограничный слой диссоциирующего воздуха на осесимметричных телах//Изв. АН СССР: МЖГ. 1969. № 3. С. 144–150.
48. *Suslov O.N., Tirskiy G.A.* The kinetics of the recombination of nitrogen atoms on HRSI in hypersonic termochemical non-equilibrium flows // 2nd Europ. Symp. on Aerothermodynamics for Space Vehicles. ESA– ESTEC Noordwijk, The Netherlands, 1994. P. 413–419.
49. *Tirskiy G., Vasil'evskiy S., Kovalev V.* Elements separation in hypersonic flow over a body due to the multicomponent diffusion, non-equilibrium homogeneous chemical reactions and heterogeneous surface recombination // Shock Waves: Proc. 23rd Intern. Symp. of Shock Waves/Ed. K. Lu. Frank. Fort Worth, Texas, USA, 2001. P. 1018–1024.
50. *Yegorov I.V., Yegorova M.V.,Ivanov D.V.* Simulation of non-equilibrium separated flows // AIAA. 1997. № 97–2583.
51. *Zhestkov B.Eu., Ivanov D.V., Shvedchenko V.V., Yegorov I.V., Fischer W.P.P., Antonenko J.* Calculated and experimental flat and wavy surface temperature distributions // AIAA Paper. 1999. № 99 –0733.
52. *Vasil'evskii S.A., Kolesnikov A.F., Yakushin M.I.* Mathematical models for plasma and gas flows in induction plasmatrons // Mol. Phys. and Hypersonic Flows / Ed. M. Capitelli. NATO ASI Series. Dordrecht: Kluwer, 1996. V. 482. P. 495–504.
53. *Vanden Abeele D., Degrez G.* Efficient model for inductive plasma computations // AIAA J. 2000. V.38. № 2. P. 234–242.
54. *Колесников А.Ф.* Условия моделирования в дозвуковых течениях теплоотдачи от высокоэнтальпийного потока к критической точке затупленного тела // Изв. РАН. МЖГ. 1993. № 1. С. 172–180.
55. *Kolesnikov A.F.* The concept of local simulation for stagnation point heat transfer in hypersonic flows: Applications and validation // AIAA Paper. 2000. № 2000–2515.
56. *Zoby E.V.* Analysis of STS-2 experimental heating rates and transition data // AIAA Paper. 1982. № 82–0822.
57. *Stewart D.A., Leiser D.B.* Catalitic surface effect on ceramic coating for an aeroassisted orbital transfer vehicle // Ceramic Eng. Sci. Proc. 1984. V. 5. P. 491–505.
58. *Kim Y.C., Boudart M.* Recombination of O, N and H atom on silica: Kinetics and mechanism // J. Langmuir. 1991. № 7. P. 2999–3005.
59. *Gubta R.N.* Reevaluation of flight–derived surface recombination–rate expressions for oxygen and nitrogen // J. Spacecraft and Rockets. 1996. V. 33. № 3. P. 451–454.
60. *Залогин Г.Н., Лунев В.В.* О каталитических свойствах материалов в неравновесном потоке диссоциированого воздуха // Изв. РАН. МЖГ. 1997. № 5. С. 161–170.

61. *Воинов Л.П., Залогин Г.Н., Лунев В.В. и др.* Сравнительный анализ лабораторных и натурных данных о каталитичности материалов теплозащиты летательных аппаратов «Бор» и «Буран» // Космонавтика и ракетостроение. — М.: Изд. ЦНИИмаш, 1994. № 2. С. 51–57.
62. *Васильевский С.А., Колесников А.Ф., Якушин М.И.* Эффект увеличения теплового потока к титановой поверхности при вдуве кислорода в неравновесный пограничный слой // Изв. АН СССР. МЖГ. 1991. № 4. С. 148–155.
63. *Ковалев В.Л., Колесников А.Ф., Крупнов А.А. и др.* Анализ феноменологических моделей, описывающих каталитические свойства поверхности высокотемпературной многоразовой теплоизоляции // Изв. РАН. МЖГ. 1996. № 6. С. 133–144.
64. *Агафонов В.П., Кузнецов М.М.* Моделирование неравновесных тепловых потоков к каталитической поверхности // Учен. зап. ЦАГИ. 1979. Т. 10. № 4. С.66–78.
65. *Nasuti F., Barbato M., Bruno C.* Material–dependent catalytic recombination modeling for hypersonic flows // J. Thermophys. and Heat Transfer. 1996. V. 10. № 1. P. 131–136.
66. *Daiss A., Fruhauf H.H.* Messerschmid E.W. Modeling of catalytic reactions on silica surfaces with consideration of slip effects // J. Thermophys. and Heat Transfer. 1997. V. 11. № 3. P. 346–352.
67. *Kurotaki T.* Construction of catalytic model on SiO_2–based surface and application to real trajectory // AIAA Paper. 2000. № 2000–2366.
68. *Jumper E.J., Seward W.A.* Model for oxigen atom recombination on silicon–dioxide surfaces // J. Thermophys. and Heat Transfer. 1991. V. 5. № 3. P. 284–291.
69. *Jumper E.J., Newman M., Seward W.A. et al.* Recombination of nitrogen on silica–based, Termal–Protection–Tile–Like Surfaces // AIAA Paper. 1993. № 93-0477.
70. *Deutschmann O., Riedel U., Warnatz J.* Modeling of nitrogen and oxygen recombination on partial catalytic surfaces. Universitat Stuttgart, Institut fur Technische Verbrennung. Preprint № 23. 1994.
71. *Halpern B., Rosner D.E.* Chemical Energy Accomodation at Catalytic Surfaces // Chem. Soc. Farad. Trans. J., 1978. V. 74. P. 1833–1912.
72. *Willey R.J.* Comparison of kinetic models for atom recombination on high–temperature reusable surface insulation // J. Thermophys. and Heat Transfer. 1993. V. 7. № 1. P. 55–62.
73. *Ковалев В.Л., Крупнов А.А.* Влияние образования оксида азота в гетерогенных каталитических реакциях на тепловые потоки к поверхности многоразовых космических аппаратов // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 2004. № 1. С. 31–36.
74. *Ковалев В.Л., Суслов О.Н.* Модель взаимодействия частично ионизованного воздуха с каталитической поверхностью // Исследования по гиперзвуковой аэродинамике и теплообмену с учетом неравновесных химических реакций. — М.: Изд–во МГУ, 1987. С. 58–69.
75. *Ковалев В.Л., Суслов О.Н.* Моделирование взаимодействия частично ионизованного воздуха с каталитической поверхностью высокотемпературной теплоизоляции // Изв. РАН. МЖГ. 1996. № 5. С. 179–190.
76. *Kovalev V.L., Suslov O.N., Tirskiy G.A.* Phemenologic theory for heterogeneous recombination of partially dissosiated air on high temperature surfaces // Proc. NATO Advanced Study Institute on Molecular Physics and Hypersonic Flows. NATO–ASI Series C: Mathematical and Physical Sciencies. Dordrecht: Kluwer. 1996. V. 482. P. 193–203.
77. *Scott C. D.* Effect of nonequilibrium and wall catalysis on shuttle heat transfer // J. Spacecraft and Rockets. 1985. V. 22. № 5. P. 489–499.
78. *Агафонов В.П., Никольский В.С.* Взаимодействие газофазных и поверхностных реакций при течении сильно диссоциированного воздуха в пограничном слое // Учен. зап. ЦАГИ. 1980. Т. 11. № 2. С. 46–53.

79. *Воронкин В.Г., Залогин Г.А.* О механизме рекомбинации атомарного азота вблизи каталитической поверхности, обтекаемой диссоциированным воздухом // Изв. АН СССР. МЖГ. 1980. № 3. С. 156–158.
80. *Stewart D.A., Leiser D.B.* Effect of radiant and convective heating on optical and thermochemical properties of reusable surface insulation // AIAA Paper. 1976. № 76–444.
81. *Sarma G.R.S.* Physico–chemical modeling in hypersonic flow simulation // Progr. in Aerospace Sciences. 2000. V. 36. P. 281–349.
82. *Greaves J.C., Linnett J.W.* Recombination of atoms at surfaces. P. 6. Recombination of oxygen atoms on silica from 20 °C to 600 °C // Trans. Faraday. Soc. 1978. V. 55. P. 623–634.
83. *Bruno C., Guarino L.* Re–entry problems // Nonequilibrium processes in ionized gases/ Eds. M. Capitelli and J.M. Beardsley. NATO–ASI Series B, ESTEC, ESA–SP–367, 1994. P. 413–429.
84. *Ковалев В.Л., Крупнов А.А.* Особенности моделирования теплообмена с каталитическими поверхностями при входе тел в атмосферу Земли // Вестн. Моск. ун–та. Сер. 1. Математика, механика. 1998. № 5. С. 64–67.
85. *Copelend R.A. Pallix J.B., Stewart D.A.* Surface–catalysed NO from recombination of N and O atoms // J. Thermophys. and Heat Transfer. 1998. V. 12. № 4. P.496–505.
86. *Воронкин В.Г.* Неравновесный вязкий ударный слой на притупленных конусах // Изв. АН СССР. МЖГ. 1979. № 6. С. 15–20.
87. *Candler G., MacCormack R.W.* The computation of hypersonic ionized flows in chemical and thermal nonequilibrium // AIAA Paper. 1989. № 89–0312.
88. *Gorelov V.A., Gladyshev M.K., Kireev A.Yu. et al.* Ionization near hypersonic vehicles: The experience of numerical, laboratory and flight investigations // AIAA Paper. 1995. № 95–1940.
89. *Ковалев В.Л., Суслов О.Н.* Многокомпонентный неравновесный вязкий ударный слой на каталитической поверхности // Гиперзвуковые течения при обтекании тел и в следах. — М.: Изд–во МГУ, 1983. С. 53–62.
90. *Melin G.A., Madix R.J.* Energy accomo dation during oxygen atom recombination on metal surfaces // Trans. Faraday Soc. 1971. V. 67. № 1. P. 198–211.
91. *Rosner D.E., Feng H.H.* Energy transfer effects of exited molecule production by surface–catalyzed atom recombination // Chem. Soc. Faraday Trans. Journal. 1974. V.70. P. 884–906.
92. *Залогин Г.Н., Перов С.Л.* Об эффекте неполной аккомодации энергии при гетерогенной рекомбинации атомов на каталитической поверхности // Вопросы гидродинамики, аэрофизики и прикладной математики. — М.: МФТИ, 1985.С.29-33.
93. *Daiss A., Fruhauf H. H., Messerschmid E.W.* Chemical reactions and thermal non–equilibrium on silica surface // Molecular Physics and Hypersonic Flows / Ed. M. Capitelli. NATO–ASI Ser. Dordrecht: Kluwer. 1996. V. C. 482. P. 203–218.
94. *Cacciatore M., Rutigliano M., Billing G.* Eley–Rideal and Lengmuir– Hinshelwood oxygen atom recombination reaction on silica: Energy transfer and recombination coefficient calculation // 1-st Electronic Conf. on Vibrational Kinetics in Non-equilibrium Flows, Bari, Italy, 1997.
95. *Barbato M., Bellucci V., Bruno C.* Effects of thermal non–equilibrium on catalytic boundary conditions for application to air inlets // System Analys. Modeling Simulation. 1999. V. 34. № 3. P 435–483.
96. *Scott C.D.* Wall catalytic recombination and boundary conditions in nonequilibrium hypersonic flows with applications // Advances in hypersonics. Modeling hypersonic flows / Eds. J.J. Bertin et al. Boston: Birkhauser, 1992. V. 2. P.176–250.

97. *Carleton K.L., Marinelli W.J.* Spacecraft thermal energy accomo dation from atomic recombination // J. Thermophys. and Heat Transfer. 1992. V. 6. № 4. P. 650–655.
98. *Halpern B., Rosner D.E.* Incomplete energy accomodation in surface–catalyzed reactions // Amer. Geophys. Union. 1982. V. 26. P. 167–171.
99. *Kustova E., Nagnibeda E., Armenise I. et al.* Nonequilibrium kinetics and heat transfer in O2/O mixtures near catalytic surfaces // J. Thermophys. and Heat Transfer. 2002. V. 16. № 2. P. 238–244.
100. *Cacciatore M., Rutigliano M., Billing G.* Eley–Rideal and Langmuir–Hinshelwood recombination coefficients for oxygen on silica // J. Thermophys. and Heat Transfer. 1999. V. 13. № 2. P. 195–203.
101. *Balat-Pichelin M.J.H., Kovalev V.L., Kolesnikov A.F. et al.* An analysis and predicting the efficiency of atomic oxygen recombination and chemical energy accommodation on heated silica surfaces // Rarefied Gas Dynamics: Proc. 24th Simp. Bary, Italy, 2004. P 6.
102. *Gubta R.N., Scott C.D., Moss J.N.* Surface–slip equations for low Reynolds number multicomponent air flow // AIAA Paper. 1984. № 84–1732.
103. *Кирютин Б.А., Тирский Г.А.* Граничные условия скольжения на каталитической поверхности в многокомпонентном потоке газа // Изв. РАН. МЖГ. 1996. № 1. С. 159–168.
104. *Анфимов Н.А.* О некоторых эффектах, связанных с многокомпонентным характером газовых смесей // Изв. АН СССР. Механика и машиностроение. 1963. № 5. С. 117–123.
105. *Тирский Г.А.* Определение эффективных коэффициентов диффузии в ламинарном многокомпонентном пограничном слое // Докл. АН СССР. 1964. Т. 155. № 6. С. 1278–1281.
106. *Громов В.Г.* Химически неравновесный ламинарный пограничный слой в диссоциированном воздухе // Изв. АН СССР. МЖГ. 1966. № 2. С. 3–9.
107. *Воронкин В.Г., Гераскина Л.К.* Неравновесный ламинарный пограничный слой диссоциирующего воздуха на осесимметричных телах // Изв. АН СССР: МЖГ. 1969. № 3. С. 144–150.
108. *Ковалев В.Л.* Моделирование процессов диффузии при описании химически неравновесных течений у каталитических поверхностей // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 1995. № 1. С. 86–89.
109. *Mitcheltree R.A., Gnoffo P.A.* Wake flow about the Mars Pathfinder entry vehicle // J. Spacecraft and Rockets. 1995. V. 32. № 5. P. 771–776.
110. *Gupta R.N., Lee K.P., Scott C.D.* Aerotermal study of Mars Pathfinder Aeroshell // J. Spacecraft and Rockets. 1996. V. 33. № 1. P. 61–69.
111. *Афонина Н.Е., Громов В.Г., Ковалев В.Л.* Моделирование каталитических свойств покрытий высокотемпературных теплозащитных материалов в диссоциированной смеси углекислого газа и азота // Изв. РАН. МЖГ. 2000. № 1. С. 106–116.
112. *Афонина Н. Е., Громов В.Г. Ковалев В. Л.* Модель гетерогенной рекомбинации на теплозащитных покрытиях космических аппаратов, входящих в атмосферу Марса, с учетом конечной скорости адсорбции атомов кислорода // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 2001. № 3. С. 40–45.
113. *Afonina N.E., Gromov V.G., Kovalev V.L.* Catalysis modeling for thermal protection systems of vehicles entering into martian atmosphere // AIAA Paper. 2001. № 01–2832.
114. *Афонина Н. Е., Громов В.Г. Ковалев В. Л.* Иследование влияния различных механизмов гетерогенной рекомбинации на тепловые потоки к каталитической поверхности в диссоциированном углекислом газе // Изв. РАН. МЖГ. 2002. № 1. С. 132–140.
115. *Afonina N.E., Gromov V.G., Kovalev V.L.* Effect of different geterogeneous recombination mechanisms on heat fluxes to catalytic surfaces in carbon dioxide // Proc. 4-th Europ. Symp. on Aerothermo dynamics for Space Vehicles. Capua, Italy, 2001. Noordwijk, The Neserlands. ESA Publ. Division, ESTEC, 2002. P. 131–136.

116. *Афонина Н.Е., Громов В.Г., Ковалев В.Л.* Об использовании низкокаталитических покрытий на подветренной поверхности входящего в атмосферу Марса спускаемого аппарата // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 2003. № 6. С. 18–22.
117. *Кравецкий Г.А., Кузнецов А.В., Костиков В.И. и др.* Жа-ростойкое противоокислительное защитное покрытие на углерод–углеродных, углерод–карбидокремниевых материалах и элементы конструкции из них для авиационной, ракетно–космической техники // Тр. 1-й Межд. авиационно–космической конф.«Человек–Земля–Космос». 1992. Т. 5. Материалы и технология производства авиационно–космической техники. — М.: Изд.–е. Инж. акад., 1995. С. 249–254.
118. *Sepka S., Copeland R., Chen Y-K. et al.* Experimental investigation of surface reactions in carbon monoxide and oxygen mixtures // J. Termophys. and Heat Transfer. 2000. V. 14. № 1. P. 45–52.
119. *Ковалев В.Л.* Феноменологические модели каталитических свойств теплозащитных покрытий космических аппаратов, входящих в атмосферу Марса // Тр. 14 сессии Междунар. школы по моделям механики сплошной среды. — М.: МФТИ, 1998. С. 83–91.
120. *Ковалев В.Л.* Моделирование каталитических свойств теплозащитных покрытий при входе в атмосферу Марса // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 1999. № 1. С. 37–43.
121. *Gordiets B.F., Ferreira C.M.* Self-consistent modelling of volume and surface processes in air plasma// AIAA J. 1998. V. 36. № 9. P. 1643– 1651.
122. *Ковалев В.Л.* Гетерогенные каталитические процессы в аэротермодинамике. — М.: Физматлит, 2002. 224 с.
123. *Ковалев В.Л., Колесников А.Ф.* Экспериментальное и теоретическое исследование гетерогенного катализа в аэротермохимии. Известия РАН. МЖГ. 2005, № 5. С. 3–33.
124. *Ковалев В.Л., Крупнов А.А.* Влияние образования оксида азота в гетерогенных каталитических реакциях на тепловые потоки к поверхности многоразовых космических аппаратов. Вестник Московского университета. Сер. 1. Математика. Механика. 2004. № 1. С. 31–36.
125. *M. Cacciatore, M. Rutigliano and G. D. Billing* Eley-Rideal and Lengmuir-Hinshelwod Recombination Coefficients for Oxygen on Silica Surfaces, Journal of Thermophysics and Heat Transfer, 13, P. 195–203 (1999).
126. *Ковалев В.Л., Погосбекян М.Ю.* Моделирование гетерогенной рекомбинации атомов на теплозащитных покрытиях космических аппаратов методами молекулярной динамики. Известия РАН. МЖГ, № 4, 2007, с. 176–183.
127. *M. Pichelin, V.L. Kovalev, A.F. Kolesnikov* Modeling the surface catalysis of high-temperature reusable thermal insulation and heat transfer of space vehicles entering the Earth and Martian atmospheres. French-Russian A.M. Liapunov Institute for Applied Mathematics and Computer Science. TRANSACTION. V. 4. Pp. 86–99.
128. *M. Balat-Pichelin, В.Л. Ковалев, А.Ф. Колесников и др.* Экспериментальное и теоретическое моделирование неполной аккомодации энергии гетерогенной рекомбинации в экспериментальной установке MESOX. Вестник Московского университета. Сер. 1; Математика. Механика, 2006. № 3.
129. *Ralph W. G. Wyckoff* The crystal structure of the high temperature form of cristobalite (SiO_2). American Journal of Science, Ser. 5 9, p. 448–459 (1925).
130. *B. P. Feuston and S. H. Garofalini* Empirical three-body for vitreous silica, Journal of Chemical Physics 89, p. 5818–5824 (1988).
131. *Tersoff J.* Modeling solidstate chemistry: Interatomic potentials for multicomponent systems. Physical Review B, 39: 5566–5568, 1989.
132. *Pidan S.P., Auweter-Kurtz M., Herdrich G.* and Fertig M. Recombination Coefficients and Spectral Emissivity of Silicon Carbide-Based Thermal Protection Materials. Journal of Thermophysics and Heat Transfer, 19: 566–577, 2005.

7

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НА ОСНОВЕ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ–СТОКСА ТЕЧЕНИЙ ХИМИЧЕСКИ И ТЕРМИЧЕСКИ НЕРАВНОВЕСНОЙ ВОЗДУШНОЙ ПЛАЗМЫ В РАЗРЯДНОМ КАНАЛЕ И В НЕДОРАСШИРЕННЫХ СТРУЯХ ИНДУКЦИОННОГО ПЛАЗМОТРОНА ВГУ–4

В. И. Сахаров
Научно-исследовательский институт механики МГУ им. М. В. Ломоносова

В главе представлены результаты численного моделирования течений химически и термически неравновесной воздушной плазмы в разрядном канале плазмотрона и в недорасширенных струях диссоциированного и частично ионизованного воздуха, обтекающих цилиндрическую модель с передним торцевым затуплением и охлаждаемой медной поверхностью, для условий экспериментов, реализованных на 100-киловаттном индукционном плазмотроне ВГУ-4 (ИПМех РАН) (см., например, [1, 2]). В расчетах учитывалось: неравновесное возбуждение колебательных степеней свободы молекул в модовом приближении, различие температуры электронов и поступательной температуры тяжелых частиц. Расчетные данные по картине течения, теплообмену и давлению в точке торможения сравнивались с результатами, полученными в рамках термически равновесной модели. Сопоставление с экспериментальными данными, полученными в ИПМех РАН (лаборатория взаимодействия плазмы и излучения с материалами) и любезно предоставленными для сравнения, дало удовлетворительное согласие.

Численное моделирование течений в разрядном канале ВЧ плазмотрона и многопараметрические расчеты теплопередачи к поверхности тел, обтекаемых струями газов, стали возможны благодаря разработке новых численных методов и современных вычислительных технологий моделирования течений плазмы и вязкого высокотемпературного газа [3–10]. Технология расчета таких течений [11], применяемая в настоящей работе, основана на комплексе программ численного интегрирования уравнений Навье–Стокса для азимутально закрученного потока и специальных программ-генераторов, взаимодействующих с базами данных по термодинамическим и переносным свойствам индивидуальных газовых веществ [12]. Для расчета усредненной по времени амплитуды тангенциальной составляющей напряженности высокочастотного электрического поля использовалась методика [13].

1. Установка ВГУ-4

Численное моделирование течений в разрядном канале плазмотрона с индукционным нагревом газов и в сверхзвуковых недорасширенных струях воздушной плазмы проводилось для условий работы 100-киловаттной установки ВГУ-4 (см. рис. 7.1). Воздух при комнатной температуре с постоянным расходом G подавался через кольцевое сопло с закруткой 45° по отношению к оси разрядного канала (кварцевой цилиндрической трубки длиной $X_c = 400$ мм и диаметром $D_c = 80$ мм) через нижнюю его часть и, нагреваясь в индукторе высокочастотным электрическим полем, вытекал в барокамеру через коническое звуковое сопло с диаметром критического сечения D_s, расположенное в верхней части разрядного канала.

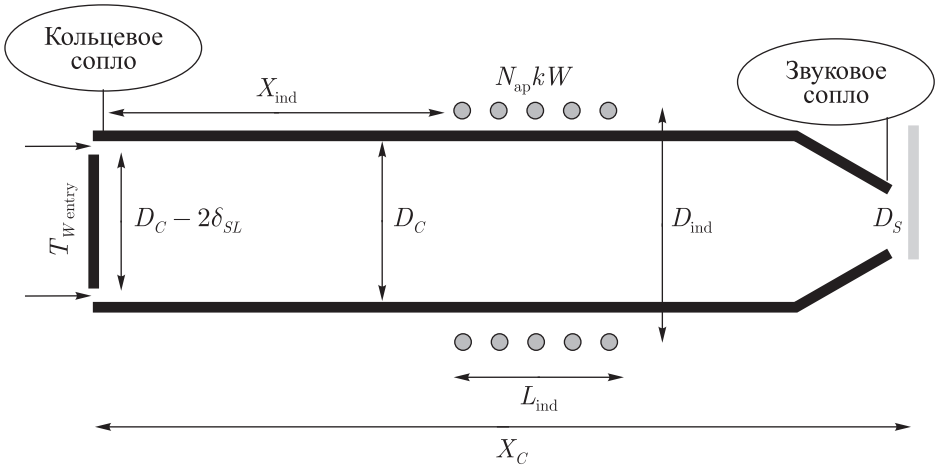


Рис. 7.1.

Цилиндрическая модель с плоским торцевым затуплением и встроенным в него датчиком для определения теплового потока располагалась соосно с вытекающей недорасширенной струей на некотором расстоянии от выхода из разрядного канала. Течение в свободной струе и около модели зависит от степени ее нерасчетности p_a/p_∞ (p_a — статическое давление в выходном сечении сопла, $p_\propto$ — в барокамере), которая варьировалась в расчетах и в экспериментах за счет следующих факторов:

а) применения звуковых сопел с различными диаметрами критического сечения D_s;

б) изменения статического давления $p_\propto$ в барокамере;

в) вариации расходов воздуха G, подаваемого в разрядный канал;

г) изменения мощности N_{pl}, вкладываемой в плазму.

Рассчитанные тепловые потоки в области точки торможения цилиндрической модели радиуса $R_m = 10$ мм с плоским торцом, обтекаемой недорасширенными струями высокоэнтальпийного воздуха, сравнивались с показаниями

проточного стационарного калориметра диаметром 11,8 мм из меди [14], применяемого в эксперименте. Температура тепловоспринимающей поверхности калориметров в расчетах и в процессе измерений тепловых потоков поддерживалась постоянной ($T_w = 300$ K). Точность измерений теплового потока $\pm 5\%$ обеспечивалась за счет стационарных условий теплопередачи.

2. Термохимическая модель

В данной модели воздух рассматривается как идеальная смесь совершенных газов с соответствующим уравнением состояния

$$p = \rho R_u \left(T \sum_{i \neq e} \gamma_i + T_e \gamma_e \right).$$

Здесь: p — давление, ρ — плотность, R_u — универсальная газовая постоянная, T и T_e — поступательная температура тяжелых частиц и электронов соответственно, γ_i — мольномассовая концентрация i-го компонента, индекс «e» относится к электронам. Вращения и колебания молекул описываются моделью «жесткий ротатор–гармонический осциллятор» с больцмановским распределением по энергетическим уровням. Предполагается, что все компоненты находятся в основном электронном состоянии, и вращательная температура молекул равна поступательной температуре. Учитывается неравновесное возбуждение колебаний молекул O_2 и N_2 в модовом приближении, и их колебательная температура рассматривается как общая колебательная температура T_V, отличная от температуры T тяжелых частиц. Температура электронов T_e считается отличной от T и T_V. В качестве термодинамических переменных для этой модели могут быть использованы давление p, поступательно-вращательная температура T, общая колебательная температура молекул T_V, электронная температура T_e и молярно-массовые концентрации компонентов $\gamma_1, \ldots, \gamma_N$. Учитывались 11 нейтральных и ионизованных компонентов воздушной смеси ($N = 11$): O, N, O_2 NO, N_2, O^+, N^+, NO^+, O_2^+, N_2^+ и e^-. Термодинамические и термохимические данные для рассматриваемых компонентов взяты из работы [12]. Числовые значения констант химических реакций, протекающих в высокотемпературной воздушной смеси, заимствованы из [15–18].

3. Уравнения Навье-Стокса в интегральной форме

Интегральная форма нестационарной системы уравнений Навье–Стокса, применяемая для расчета химически и термически неравновесных течений вязкого газа в цилиндрической системе координат $\mathbf{r}(x, y, \theta)$ в квазитрехмерной постановке, имеет вид:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int\limits_S \mathbf{U} y dS + \int\limits_{\delta S} \mathbf{n} \cdot \widehat{\mathbf{F}} y dl = \int\limits_S \mathbf{\Omega} y dS. \tag{7.1}$$

Здесь: S — фиксированная область в плоскости (x, y), δS — его граница, $\mathbf{n} = (n_x, n_y)$ — вектор единичной нормали к δS, $\mathbf{U}$ — вектор консервативных переменных в единичном объеме,

Потоки массы компонент смеси, импульса и энергии газа через поверхность δS можно разложить на сумму невязкой и вязкой составляющих

$$\int\limits_{\delta S} \mathbf{n} \cdot \widehat{\mathbf{F}} y dl = \mathbf{F}^{inv} + \mathbf{F}^{vis} = \int\limits_{\delta S} \mathbf{n} \cdot \widehat{\mathbf{F}}^{inv} y dl + \int\limits_{\delta S} \mathbf{n} \cdot \widehat{F}^{vis} y dl.$$

Вектор консервативных переменных $\mathbf{U}$, невязкие составляющие потоков $\mathbf{F}^{inv}$ и вектор источниковых членов $\mathbf{\Omega}$ являются функциями физических переменных $\mathbf{Z}$, которые определяются выбранной термохимической моделью газовой среды. Вязкие потоки $\mathbf{F}^{vis}$ являются линейными функциями от производных по координатам переменных $\mathbf{Z}$ с коэффициентами, зависящими от $\mathbf{Z}$. Для рассматриваемой модели газовой среды переменные, входящие в (7.1), имеют следующие выражения:

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho\gamma_1 \\ \vdots \\ \rho\gamma_N \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ \rho e_0 \\ \rho e_v \\ \rho\gamma_e e_e \end{pmatrix}, \quad \widehat{\mathbf{F}} = \begin{pmatrix} \rho\mathbf{u}\gamma_1 \\ \vdots \\ \rho\mathbf{u}\gamma_N \\ \rho\mathbf{u}u_{+}p\mathbf{n}n_x \\ \rho\mathbf{u}v + p\mathbf{n}n_y \\ \rho\mathbf{u}w \\ \rho\mathbf{u}h_0 \\ \rho\mathbf{u}e_v \\ \rho\mathbf{u}\gamma_e e_e \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{K}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{K}_N \\ \boldsymbol{\tau}_x \\ \boldsymbol{\tau}_y \\ \boldsymbol{\tau}_\theta \\ \mathbf{q} \\ \mathbf{q}_v \\ \mathbf{q}_e \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{\Omega} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_N \\ F_x^L \\ \left(p + \rho w^2 + \tau_{\theta\theta}\right)/y + F_y^L \\ -\left(\rho v w + \tau_{y\theta}\right)/y \\ \sigma\left|E_\theta\right|^2/2 \\ \omega_v \\ \omega_e - p_e div\mathbf{u} + \sigma\left|E_\theta\right|^2/2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Z} = \begin{pmatrix} p \\ \mathbf{u} \\ T \\ T_V \\ T_e \\ \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_N \end{pmatrix}, \tag{7.2}$$

$$h = \sum_{i=1}^{N} \gamma_i h_i, \quad e = \sum_{i=1}^{N} \gamma_i e_i, \quad e_v(\gamma_i, T_V) = \sum_{i^*} \gamma_{i^*} e_{i^*}^v,$$

$$e_0 = e + 0{,}5 \cdot (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}), \quad h_0 = e_0 + \frac{p}{\rho}, \quad h_e(T_e) = 2{,}5 R_u T_e, \quad e_e(T_e) = 1{,}5 R_u T_e.$$

Здесь: u, v, w — декартовы компоненты вектора скорости $\mathbf{u}$; e, h — энергия и энтальпия единицы массы газовой смеси; e_0, h_0 — полные энергия

и энтальпия единицы массы газа; e_i, h_i — молярная внутренняя энергия и энтальпия i-го компонента; e_e, h_e — молярная внутренняя энергия и энтальпия свободных электронов; e_v — общая колебательная энергия неравновесно возбужденных молекул (припишем им индекс i^*) единицы массы газовой смеси; $\omega_i = \sum\limits_j (v''_{ji} - v'_{ji})\overline{\omega}_j$ — молярная скорость образования i-го компонента в единице объема во всех химических реакциях. Здесь $\overline{\omega}_j = k_j^f \prod\limits_{i=1}^{N} (\rho\gamma_i)^{v'_{ji}} - k_j^r \prod\limits_{i=1}^{N} (\rho\gamma_i)^{v''_{ji}}$ — скорость j-й газофазной химической реакции, записанной в символьной форме $\sum\limits_i v'_{ji}[A_j] \Leftrightarrow \sum\limits_i v''_{ji}[A_j]$, где v'_{ji}, v''_{ji} — стехиометрические коэффициенты и $[A_j]$ — символ i-ой химической компоненты, k_j^f и k_j^r — константы скоростей прямой и обратной j-й реакции.

Вектор $\left(F_x^L, F_y^L, 0\right)$ — сила Лоренца; $\sigma\left|E_\theta\right|^2/2$ — источник Джоулева тепла; σ — проводимость плазмы.

Тензор вязких потоков импульса $\widehat{\boldsymbol{\tau}}$ имеет вид:

$$\widehat{\boldsymbol{\tau}} = -\mu\left[\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{r}}\right) + \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{r}}\right)^T - \frac{2}{3}\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mathbf{u}\right)\widehat{\mathbf{I}}\right].$$

Здесь $\widehat{\mathbf{I}}$ — единичный тензор, μ — коэффициент вязкости.

Суммарный поток тепла $\mathbf{q}$, вязкий поток колебательной энергии $\mathbf{q}_v$ и вязкий поток энергии электронного газа $\mathbf{q}_e$ задаются в виде:

$$\mathbf{q} = -\lambda\frac{\partial T}{\partial \mathbf{r}} + \sum_{i=1}^{N}\mathbf{K}_i h_i - \sum_{i^*} D_{i^*}\gamma_{i^*}\frac{\partial e_{i^*}^v}{\partial \mathbf{r}} - \lambda_e\frac{\partial T_e}{\partial \mathbf{r}} + \boldsymbol{\tau}\cdot\mathbf{u},$$

$$\mathbf{q}_v = \sum_{i^*}\mathbf{q}_{i^*}^v, \quad \mathbf{q}_{i^*}^v = e_{i^*}^v\mathbf{K}_{i^*} - D_{i^*}\gamma_{i^*}\frac{\partial e_{i^*}^v}{\partial \mathbf{r}},$$

$$\mathbf{q}_e = h_e\mathbf{K}_e - \lambda_e\frac{\partial T_e}{\partial \mathbf{r}}.$$

Молярные диффузионные потоки $\mathbf{K}_i$ определяются из соотношений Стефана–Максвелла [19] с учетом бародиффузии в двухтемпературном приближении [20]. Для вычисления коэффициентов вязкости и теплопроводности газовой смеси используются приближенные формулы типа Уилке–Васильевой [21]:

$$\mu = \sum_{i=1}^{N} M_i\gamma_i Sc_i D_i,$$

$$\lambda = \sum_{i\neq e}\gamma_i\left[c_{pi} + 2{,}5R_u(1{,}5Sc_i - 1)\right]D_i,$$

$$\lambda_e = \gamma_e\left[C_{pe} + 2{,}5R_u(1{,}5Sc_e - 1)\right]D_e.$$

Здесь $Sc_i(T) = \mu_i/\rho_i D_{ii}$ — число Шмидта i-го компонента, вычисленное по вязкости μ_i, плотности ρ_i и коэффициенту самодиффузии D_{ii} этого

компонента в чистом газе, C_{pi} — молярная теплоемкость частицы i, D_i — коэффициент диффузии, определяемый выражением

$$D_i = \left(\sum_{j=1}^{N} \gamma_j d_{ij} \right)^{-1}.$$

Проводимость плазмы σ определялась из соотношения Стефана–Максвелла для электронной компоненты в пренебрежении скоростью диффузии тяжелых частиц и градиентов параметров в окружном направлении

$$\sigma = \frac{F^2 \gamma_e}{R_u T_e \sum\limits_{j \neq e} d_{ej} \gamma_j}, \qquad d_{ij} = \frac{\overline{M}}{\rho D_{ij}}, \qquad \overline{M} = \left[\sum_{i=1}^{N} \gamma_i \right]^{-1}.$$

Здесь F — постоянная Фарадея; D_{ij} — бинарные коэффициенты диффузии; $\overline{M}$ — средний молекулярный вес смеси.

Значения $d_{ij}(T)$ и $Sc_i(T)$ определяются через транспортные сечения (интегралы столкновений)

$$d_{ij}(T) = 3{,}12 \cdot 10^5 \frac{\sqrt{2M_i M_j}\, \overline{\Omega}_{ij}^{(1,1)}(T)}{\sqrt{T(M_i + M_j)}}, \quad [d_{ij}] = \text{с} \cdot \text{м/кмоль}, [\Omega] = 10^{-20}\,\text{м},$$

$$Sc_i(T) = \frac{5\overline{\Omega}_{ii}^{(1,1)}}{6\overline{\Omega}_{ij}^{(2,2)}}.$$

Здесь $\overline{\Omega}_{ij}^{(1,1)}(T)$, $\overline{\Omega}_{ij}^{(2,2)}(T)$ — соответственно интегралы столкновений диффузионного и вязкого типов, вычисляемые на основе потенциалов межмолекулярного взаимодействия.

Сечения упругих столкновений диффузионного типа для нейтральных атомов и молекул между собой и с ионами, необходимые для расчета коэффициентов переноса, вычислялись по двухпараметрической интерполяционной формуле [22]

$$\overline{\Omega}_{ij}^{(1,1)}(T) = (a_{ij} + b_{ij} \ln T)^2,$$

в которых коэффициенты a_{ij} и b_{ij} находятся по заданным значениям интегралов столкновений при $T_1 = 300$ и $T_2 = 20000\,\text{K}$. Сечения столкновений типа нейтрал–нейтрал вычисляются по потенциалу Леннарда–Джонса при низкой температуре и по экспоненциальному отталкивающему потенциалу (потенциал Борна–Майера) при высокой температуре. Сечения столкновений типа нейтрал–ион при низкой температуре вычисляются с использованием поляризационного потенциала, а при высокой — также по экспоненциальному потенциалу. Значения параметров потенциалов взаимодействия идентичных частиц взяты из опубликованных данных или вычислены по приближенным методикам. Параметры потенциалов взаимодействия разных частиц вычисляются по

комбинаторным правилам [19]. При вычислении сечений столкновений пар нейтрал-родственный ион учитывается эффект перезарядки. Сечение столкновений электрона с нейтральными молекулами полагается равным 12×10^{20} м^2, с атомами — 3×10^{20} м^2. Взаимодействие заряженных частиц описывается экранированным Кулоновским потенциалом. Предполагается, что отношение значений всех сечений столкновений «вязкостного» типа к соответствующим сечениям «диффузионного» типа равно 1,1.

Источниковые члены в релаксационном уравнении для колебательной энергии и энергии электронов (7.2) записываются в виде

$$\omega_v = \omega_v^{VC} + \omega_v^{VT} + \omega_v^{eV}, \quad \omega_e = \omega_e^{eC} + \omega_e^{eT} + \omega_e^{eV}.$$

Скорость обмена между колебательной и поступательной энергиями тяжелых частиц имеет вид

$$\omega_v^{VT} = \sum_{i^*} \rho \gamma_{i^*} \omega_{i^*}^{VT}.$$

Значение $\omega_{i^*}^{VT}$определяется классической формулой Ландау–Теллера [23]

$$\omega_{i^*}^{VT} = \sum_j \frac{X_j}{\tau_{i^*,j}^{VT}} (e_{i^*}^v(T) - e_{i^*}^v(T_V)).$$

Здесь X_j — молярная концентрация j-ой компоненты и $\tau_{i^*,j}^{VT}$ — время релаксации для колебательно-поступательного обмена между колебательной энергией i^*-го компонента и поступательной энергией j-ого компонента и задается из [24].

Скорость образования колебательной энергии молекул i^*-го сорта в химических реакциях имеет вид

$$\omega_v^{VC} = \sum_{i^*} \sum_j E_{i^*,j}^v \omega_{i^*,j}^C.$$

Здесь $\omega_{i^*,j}^C$ — скорость образования i^*-го компонента в j-й химической реакции и $E_{i^*,j}^v$ — заданная колебательная энергия i^*-го компонента, теряемая или приобретаемая в j-й химической реакции. Для реакций диссоциации-рекомбинации $E_{i^*,j}^v$ есть некоторая доля (0,3–0,5) энергии диссоциации E_j, в остальных случаях полагалось $E_{i^*,j}^v = e_{i^*}^v$.

Скорость обмена между колебательной энергией молекул O_2 и N_2 и поступательной энергией электронов ω_v^{eV} имеет вид

$$\omega_v^{eV} = -\omega_e^{eV} = \sum_{i^*} \rho \gamma_{i^*} \frac{(e_{i^*}^v(T_e) - e_{i^*}^v)}{\tau_{ei^*}},$$

а время релаксации τ_{ei^*} задается из [25].

Скорость обмена энергией электрон — тяжелые частицы ω_e^{eT} задается в виде

$$\omega_e^{eT} = \frac{1{,}5R_u(T - T_e)}{\tau_{eh}}, \qquad \frac{1}{\tau_{eh}} = \frac{8}{3}\sum_{i\neq e}\rho\gamma_i\frac{M_e}{M_i}\sqrt{\frac{8R_uT_e}{\pi M_e}}\,\Omega_{ei}^{(1,1)}.$$

Здесь: τ_{eh} — выражение для времени релаксации, $\Omega_{ei}^{(1,1)}$ — интеграл упругих столкновений электрон — тяжелые частицы. Вычисление $\Omega_{ei}^{(1,1)}$ описано в [26].

Скорость образования энергии электронов в химических реакциях

$$\omega_e^{eC} = 1{,}5\cdot T_e\sum_j\omega_{e,j}^C + \sum_j E_j\omega_j^e.$$

Здесь: $\omega_{e,j}^C$ — скорость образования компонентов в j-й реакции ионизации; ω_j^e — скорость образования компонентов в реакции диссоциации (ионизации) электронным ударом, E_j — энергия диссоциации (ионизации).

Использовались следующие граничные условия для уравнений Навье–Стокса: во входном сечении канала задавались все необходимые параметры течения, включая тангенциальную компоненту скорости, угол закрутки потока на входе полагался равным 45°; на всех твердых поверхностях (стенка кварцевой трубки, торец входного участка разрядного канала, поверхность цилиндрической модели и звукового сопла) задавались нулевые значения компонент скорости и определенные значения поступательной температуры, а колебательная и электронная температуры предполагались равными поступательной; в выходном сечении расчетной области ставились «неотражающие» граничные условия; на оси канала использовались условия симметрии. Тепловые потоки в окрестности точки торможения тела рассчитывались для поверхности с конечной каталитичностью:

$$K_{n,w_A} = -\frac{2\gamma_w}{2-\gamma_w}\sqrt{\frac{R_uT_w}{2\pi M_A}}\,\rho\gamma_w, \quad K_{n,w_{A_2}} = -0{,}5\cdot K_{n,w_A}, \quad A = O, N,$$

при значениях вероятностей гетерогенной рекомбинации атомов азота и кислорода $\gamma_O = \gamma_N = \gamma_w = 0{,}1$, соответствующих рекомбинации на меди по данным [27]. По отношению к другим компонентам стенка предполагалась некаталитической.

4. Расчет течения индукционной плазмы в разрядном канале и в недорасширенных струях, истекающих из звукового сопла плазмотрона

При совместном расчете течения воздушной плазмы и электромагнитного поля в разрядном канале в качестве в одного из определяющих параметров задачи, кроме давления P_∞ и температуры газа T_∞ в барокамере, а также расхода газа G, задавалась мощность N_{pl}, вкладываемая в разряд,

а соответствующий ток в индукторе определялся в процессе решения. Значение N_{pl}, в свою очередь, определялось по измеренной в эксперименте мощности генератора N_{ap} по анодному питанию, умноженной на КПД плазмотрона. Электромагнитное поле, являясь суперпозицией поля индукционной катушки и кольцевых токов плазмы, считалось монохроматическим с заданной частотой f, определяемой высокочастотным током в индукторе. Частота тока в индукторе $f = 1{,}76$ МГц. Реальный индуктор [1, 2] в расчете заменялся пятью бесконечно тонкими кольцевыми витками. При расчете высокочастотного вихревого электрического поля на основе локально одномерного приближения использовались следующие предположения: плазма квазинейтральна; магнитная проницаемость плазмы $\mu = 1$, диэлектрическая проницаемость плазмы не зависит от электромагнитного поля и, следовательно, не зависит от координат; током смещения можно пренебречь; изменение электрического поля в осевом направлении пренебрежимо мало по сравнению с его изменением в радиальном направлении. Полная постановка задачи приведена в [13]. Похожие модели для расчета электромагнитного поля рассматривались и в более ранних работах [28, 29].

Таким образом, для нахождения электрического поля имеем следующую краевую задачу

$$\frac{d}{dy}\left(\frac{1}{y}\frac{d}{dy}(yE_\theta)\right) = -i\omega\mu_0\sigma E_\theta.$$

Здесь E_θ — осредненная за один период по времени комплексная амплитуда тангенциальной составляющей самосогласованного электрического поля, $\omega = 2\pi f$ — круговая частота.

Граничные условия для электрического поля формулируются в следующем виде:

на оси симметрии канала ($y = 0$): $E_\theta(x, 0) = 0$,

на стенке разрядного канала ($y = R_c$): $\dfrac{1}{R_c}\dfrac{d}{dy}(yE_\theta) = i\omega\mu_0 H_{xRc}(x)$.

Здесь $H_{xRc}(x)$ — напряженность магнитного поля на стенке разрядного канала, которая вычисляется из расчета напряженности магнитного поля N_c соосных кольцевых токов, моделирующих индуктор, по которому течет ток I_0 [30].

$$H_{xRc}(x) = \frac{\mu_0 I_0}{4\pi} \times \sum_{k=1}^{N_c} \frac{2}{\sqrt{(R_c + R_w)^2 + (x - x_k)^2}} \times$$
$$\times \left[K^*(l_k) + \frac{R_c^2 - R_w^2 - (x - x_k)^2}{(R_c - R_w)^2 + (x - x_k)^2} \cdot E^*(l_k)\right].$$

Здесь $l_k^2 = \dfrac{4R_cR_w}{(R_c+R_w)^2+(x-x_k)^2}$, а

$$K^*(l_k) = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1-l_k^2\cdot\sin^2\theta}}, \quad E^*(l_k) = \int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{1-l_k^2\cdot\sin^2\theta}\cdot d\theta,$$

— полные эллиптические интегралы первого и второго рода соответственно.

Расчеты проводились для следующих вариантов параметров:

Режим 1: $G=2{,}4$ г/с, $N_{pl}=29$ кВт, $P_\infty=6{,}3$ гПа, $T_\infty=293$ К, $D_s=40$ мм
Режим 2: $G=2{,}4$ г/с, $N_{pl}=29$ кВт, $P_\infty=8{,}3$ гПа, $T_\infty=293$ К, $D_s=40$ мм
Режим 3: $G=2{,}4$ г/с, $N_{pl}=29$ кВт, $P_\infty=10{,}3$ гПа, $T_\infty=293$ К, $D_s=40$ мм
Режим 4: $G=2{,}4$ г/с, $N_{pl}=41$ кВт, $P_\infty=6{,}2$ гПа, $T_\infty=293$ К, $D_s=40$ мм
Режим 5: $G=4{,}8$ г/с, $N_{pl}=41$ кВт, $P_\infty=12$ гПа, $T_\infty=293$ К, $D_s=40$ мм
Режим 6: $G=2{,}4$ г/с, $N_{pl}=41$ кВт, $P_\infty=6{,}2$ гПа, $T_\infty=293$ К, $D_s=30$ мм
Режим 7: $G=4{,}8$ г/с, $N_{pl}=41$ кВт, $P_\infty=12$ гПа, $T_\infty=293$ К, $D_s=30$ мм

Уровень противодавления в барокамере (*режимы 1-3*) не оказывает влияния на решение в разрядном канале, т. к. в выходном сечении реализуется звуковой режим истечения.

На рис. 7.2(*а*) и 7.3 представлено сравнение полей поступательных температур и линий тока в разрядном канале, полученных с использованием

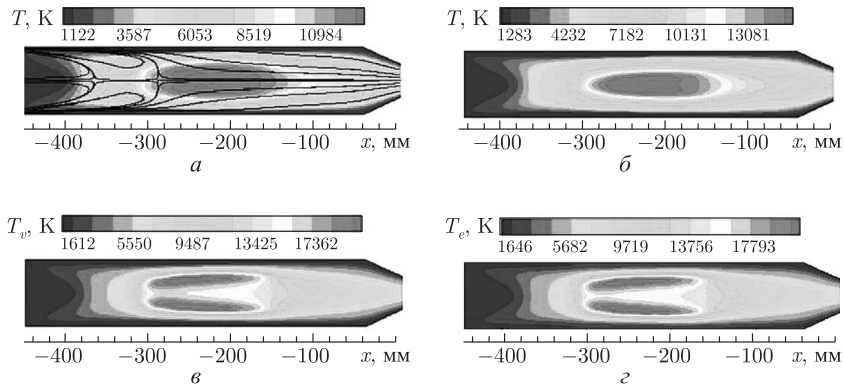


Рис. 7.2. Сравнение рассчитанных поступательной (*а, б*), колебательной (*в*) и электронной (*г*) температур: $P_\infty = 6{,}3$ гПа, $G = 2{,}4$ г/с, $N_{pl} = 29$ кВт, $D_s = 40$ мм

однотемпературной модели для *режимов 1* и *4*, т. е. показано влияние на решение значений вкладываемой в плазму мощности.

Увеличение мощности приводит к увеличению давления в разрядном канале, температуры в области энерговклада и уменьшению размеров отрывных зон. Для всех рассчитанных режимов, независимо от используемых моделей газовой среды, в разрядном канале формируется сложное течение,

содержащее две вложенные друг в друга зоны возвратно-циркуляционных течений, примыкающих к торцевой стенке канала, через которую подается рабочий газ. Форма и размеры этих зон зависят, в частности, от размеров выходного сечения звукового сопла D_s.

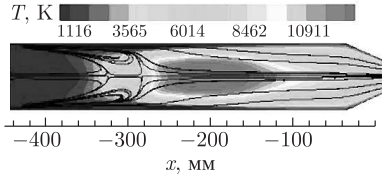


Рис. 7.3. Поступательная температура и линии тока в разрядном канале: $P_\infty = 6{,}2$ гПа, $G = 2{,}4$ г/с, $N_{pl} = 41$ кВт, $D_s = 40$ мм

Сравнение решений в разрядном канале для *режима 4* (рис. 7.3) и *режима 6* (рис. 7.4) позволяет оценить влияние размеров выходного сечения звукового сопла на уровень температуры и топологию возвратно-циркуляционных зон в разрядном канале плазмотрона для одного и того же значения противодавления в барокамере.

Уменьшение диаметра выходного сечения звукового сопла ведет к увеличению давления в разрядном канале, изменению формы (поджатию в продольном направлении) и размеров возвратно-циркуляционных зон, слабо влияя на значение максимальной температуры воздушной смеси в зоне энерговыделения.

Влияние колебательной неравновесности на распределение поступательной температуры в разрядном канале демонстрирует рис. 7.2, где представлено сравнение изотерм поступательной температуры для термически равновесной (*а*) и термически неравновесной модели (*б*) для *режима 1*. Здесь же приведены изотермы для колебательной (*в*) и электронной (*г*) температур. Для этого режима максимальное значение поступательной температуры T в зоне энерговыделения на ~ 500 К больше для однотемпературной газофазной модели, чем для многотемпературной.

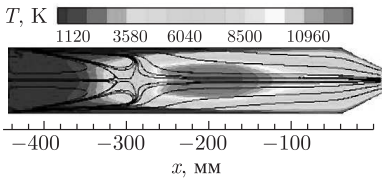


Рис. 7.4. Поступательная температура и линии тока в разрядном канале: $P_\infty = 6{,}2$ гПа, $G = 2{,}4$ г/с, $N_{pl} = 41$ кВт, $D_s = 30$ мм

При этом для многотемпературной модели характерен большой отрыв поступательной температуры от колебательной и электронной температуры в зоне энерговыделения, которые, в свою очередь, близки друг к другу. Это различие объясняется различием механизмов передачи энергии от электрического поля к воздушной плазме в разрядном канале. В трехтемпературной модели энергия поля передается электронам, а затем, благодаря различным механизмам энергообмена, учитывающихся в данной модели, переходит к колебательным и поступательным степеням свободы тяжелых частиц. В однотемпературной газофазной модели энергия поля непосредственно влияет на поступательную температуру. Чем больше давление газа в разрядном канале, тем ближе решения друг к другу для рассмотренных моделей газовой среды, т. е. тем ближе плазма в разрядном канале к термически равновесному состоянию. На рис. 7.5 приведены

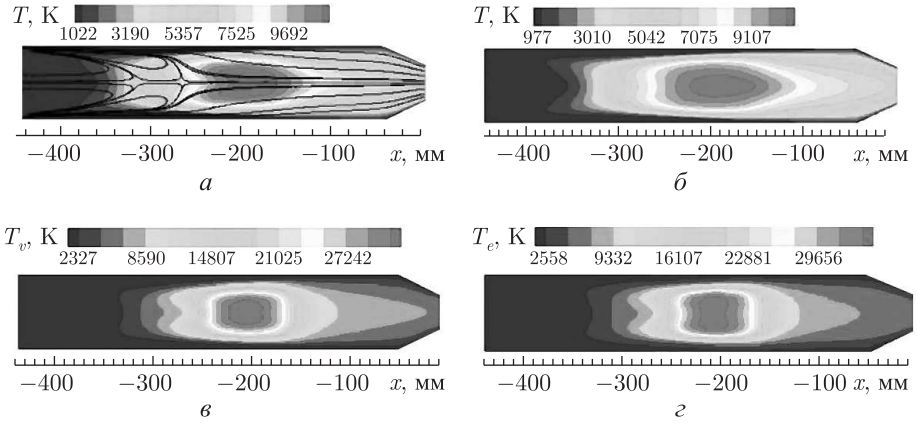


Рис. 7.5. Сравнение рассчитанных поступательной (*а,б*), колебательной (*в*) и электронной (*г*) температур: $P_\infty = 12$ гПа, $G = 4{,}8$ г/с, $N_{pl} = 41$ кВт, $D_s = 40$ мм

аналогичные изотермы для режима с большим значением расхода вдуваемого газа и энерговклада в плазму для *режима 5*.

Энергия поля, вложенная в зоне энерговыделения в поступательную энергию электронного газа и колебательные степени свободы молекул, в дальнейшем, в результате энергообмена с поступательными степенями свободы тяжелых частиц приводит к значительно большему повышению поступательной температуры T в приосевой области разрядного канала (ввиду большего давления в разрядном канале), по сравнению с *режимом 1*. Максимальное значение поступательной температуры T в этой зоне с использованием в расчетах многотемпературной газофазной модели на ~ 2500 K больше, чем для однотемпературной. При рассмотренных параметрах расчетные распределения колебательной температуры и температуры электронов близки, что также соответствует равновесию между колебательными степенями свободы молекул O_2, N_2 и электронным газом. Для этого режима различие между поступательной температурой и близкими друг к другу электронной и колебательной температурой в зоне энерговыделения значительно уменьшается по сравнению с *режимом 1*, изображенным на рис. 7.2. Вниз по потоку, на выходе из разрядного канала все температуры выравниваются.

Для сравнения, на рис. 7.6 изображены области постоянных значений Джоулева тепла, вкладываемого в плазму в разрядном канале, для двух рассмотренных *режимов 1 и 5*. Рис. 7.6 (*а*) отвечает меньшим значениям расхода и энергии электромагнитного поля, (*б*) — большим значениям.

Отметим необычную форму зон энерговыделения (область максимальных значений Джоулева тепла). Они имеют формы «тора», причем максимальные значения электронной и колебательной температур могут достигаться вне оси симметрии канала (см. рис. 7.7).

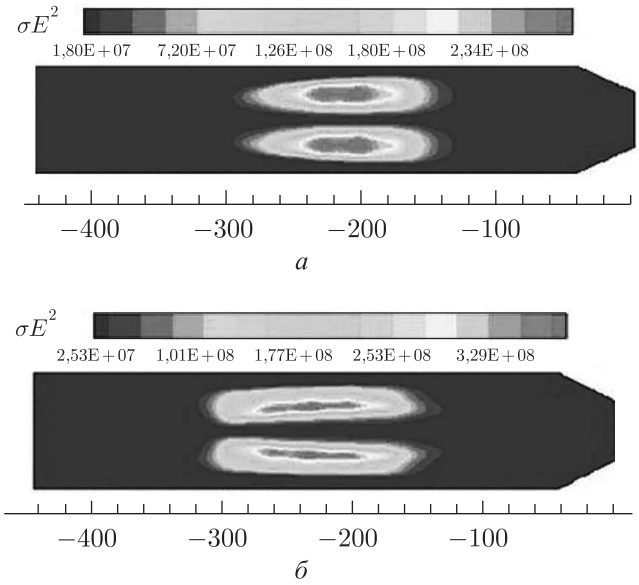


Рис. 7.6. Зоны тепловыделения в разрядном канале: *а* — $P_\infty = 6{,}3$ гПа, $G = 2{,}4$ г/с, $N_{pl} = 29$ кВт, $D_s = 40$ мм; *б* — $P_\infty = 12$ гПа, $G = 4{,}8$ г/с, $N_{pl} = 41$ кВт, $D_s = 40$ мм

На рис. 7.7 приведены распределения по радиусу поступательной, колебательной и электронной температур в сечении зон энерговыделения для двух, рассмотренных выше, режимов с различными энерговкладами в плазму и расходами воздуха. Сплошные линии относятся к расчетам в рамках многотемпературной модели, пунктирной линией изображена поступательная температура, полученная для однотемпературной модели.

Для второго режима положение максимума энерговклада совпадает с положением ярко выраженного максимума электронно-колебательной температуры. В [29] отмечено, что нагрев плазмы в области тепловыделения происходит по аналогии с фронтом медленного горения в газе, где тепло выделяется за счет химических процессов.

На рис. 7.8 для этих же режимов приведены распределения по радиусу концентраций электронов в 1 см^3. Числовая концентрация электронов для второго режима (с большим значением давления в разрядном канале) значительно выше, чем для первого, что и способствует более интенсивному обмену энергией между электронным газом с поступательными и колебательными степенями свободы.

Картина истечения газа из звукового сопла определяется степенью нерасчетности струи. Например, как показали расчеты, для *режима 3* отражение боковых скачков в свободной струе имеет регулярный характер, и обтекание модели в данном случае происходит в безотрывном режиме при всех местоположениях ее в струе. Однако при уменьшении противодавления, перед

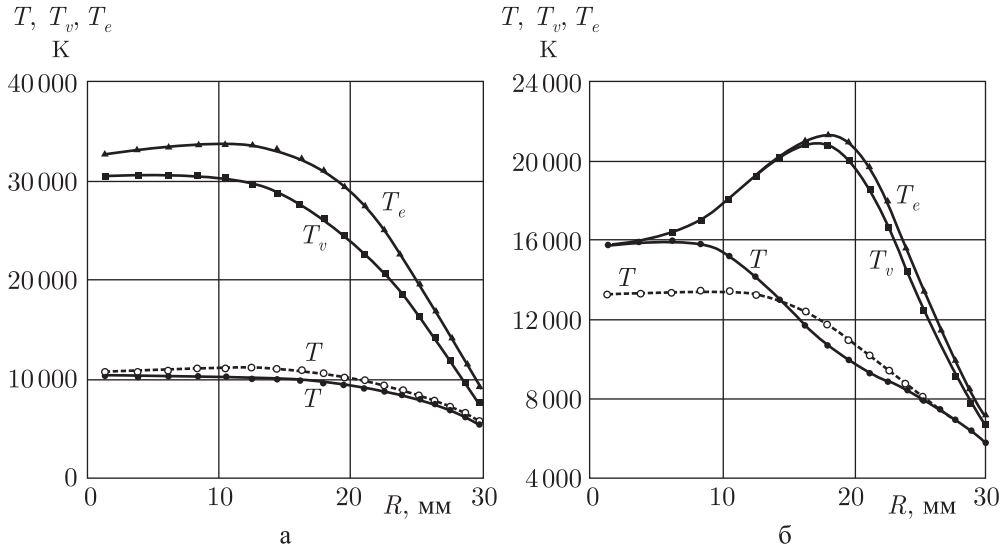


Рис. 7.7. Распределения температур по радиусу в разрядном канале *а* — $P_\infty = 6{,}3$ гПа, $G = 2{,}4$ г/с, $N_{pl} = 29$ кВт, $D_s = 40$ мм; *б* — $P_\infty = 12$ гПа, $G = 4{,}8$ г/с, $N_{pl} = 41$ кВт, $D_s = 40$ мм; сплошные кривые — многотемпературная модель, пунктирные — однотемпературная модель

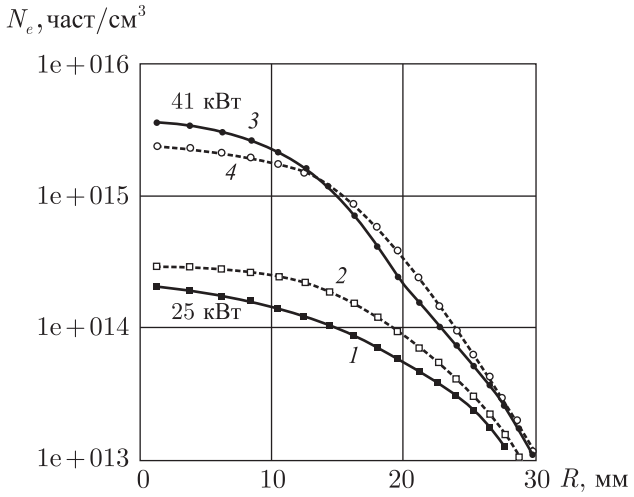


Рис. 7.8. Распределения электронов в 1 см^3 по радиусу в зоне энерговыделения: *1, 2* относятся к режиму: $P_\infty = 6{,}3$ гПа, $G = 2{,}4$ г/с, $N_{pl} = 29$ кВт, $D_s = 40$ мм; *3, 4* относятся к режиму: $P_\infty = 12$ гПа, $G = 4{,}8$ г/с, $N_{pl} = 41$ кВт, $D_s = 40$ мм; сплошные кривые — многотемпературная модель, пунктирные — однотемпературная модель

торцевым затуплением могут возникать зоны возвратно-циркуляционного течения, что приводит к изменению теплообмена с поверхностью модели.

На рис. 7.9–7.11 из [31, 32] для различных режимов представлены качественные сравнения экспериментальных, полученных в лабораториях вза-

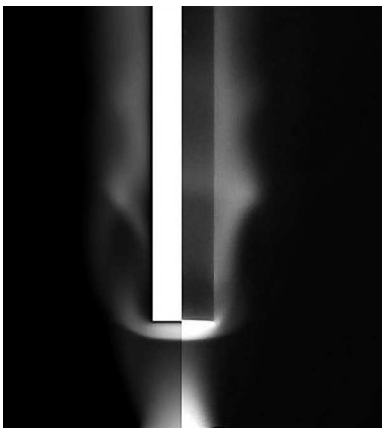


Рис. 7.9. Сравнение рассчитанной и экспериментальной [31] картин течения около цилиндрической модели: $P_\infty = 8{,}3$ гПа, $T_\infty = 293$ К, $G = 2{,}4$ г/с, $N_{pl} = 41$ кВт, $D_s = 30$ мм; $X_m = 30$ мм

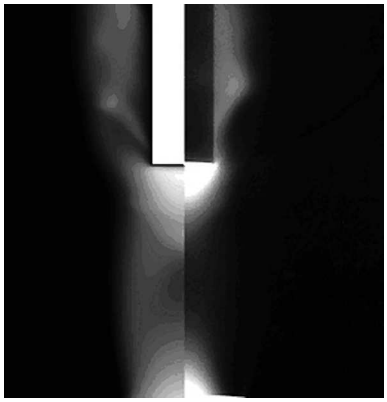


Рис. 7.10. Сравнение рассчитанной и экспериментальной [31] картин течения недорасширенной воздушной струи около цилиндрической модели: $P_\infty = 10{,}3$ гПа, $T_\infty = 293$ К, $G = 2{,}4$ г/с, $N_{pl} = 29$ кВт, $D_s = 40$ мм; $X_m = 70$ мм

имодействия плазмы и излучения с материалами ИПМех РАН, и рассчитанных картин обтекания недорасширенными струями воздушной плазмы цилиндрических моделей с передним торцевым затуплением, расположенных на различных расстояниях X_m от звукового сопла. На правой части рисунков даны экспериментальные цифровые фотографии картин обтекания, на левой для сравнения — температурные контуры полей течений, полученные расчетным путем.

На рис. 7.9 видно хорошее совпадение не только размеров ударно нагретых слоев газа около переднего затупления, но и сложных картин течения около боковой поверхности, полученных в эксперименте и в расчете. Течение для этого экспериментального режима и местоположения модели в струе является безотрывным в области перед затуплением.

Обтекание модели, представленное на рис. 7.10, происходит также в безотрывном режиме с образованием перед телом прямолинейного скачка уплотнения, хорошо видным на экспериментальной фотографии и на рассчитанном температурном контуре. Такая особенность в картине течения является следствием регулярного взаимодействием боковых скачков первой сверхзвуковой «бочки» и до-

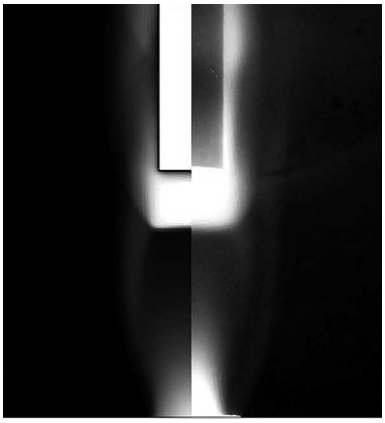


Рис. 7.11. Сравнение рассчитанной и экспериментальной [31] картин течения недорасширенной воздушной струи около цилиндрической модели: $P_\infty = 12$ гПа, $T_\infty = 293$ К, $G = 4{,}8$ г/с, $N_{pl} = 41$ кВт, $D_s = 30$ мм; $X_m = 70$ мм

статочно далеким расположением модели. Течение, представленное на рис. 7.11, происходит с отрывом потока около переднего торцевого затупления, наличие которого подтверждается рассчитанной картиной линий тока. Следствием такого характера течения являются наблюдаемые, как в расчете, так и в эксперименте, светлые протяженные области прямоугольной формы около торцевого затупления.

Влияние термической неравновесности на картину обтекания цилиндрической модели демонстрирует рис. 7.12. Здесь для термически неравновесного (верхняя часть) и равновесного (нижняя часть) случаев соответственно изображены линии постоянных значений чисел Маха для второго из приведенных выше режимов.

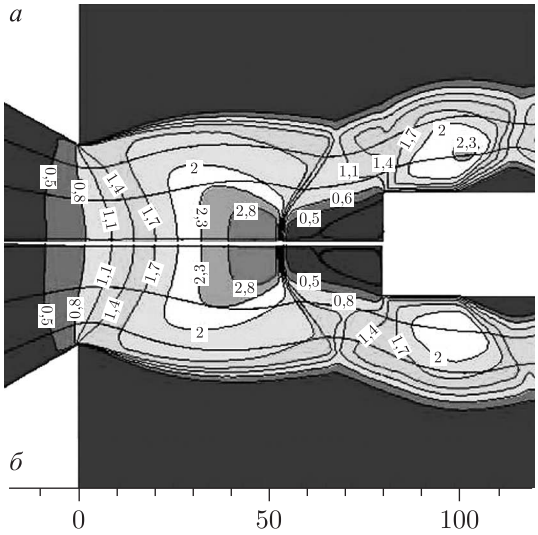


Рис. 7.12. Сравнение топологий течений в недорасширенных струях воздушной плазмы для термически неравновесного (*а*) и равновесного (*б*) случаев

Сравнивая картины течения для термически неравновесного и равновесного случаев, можно обнаружить лишь незначительные различия в степени раскрытия истекающих из сопла струй, в формах скачков перед торцевым затуплением и размерах отрывных зон перед телом.

На рис. 7.13 (*а, б, в*) представлено сравнение экспериментальных данных измерений теплового потока в области точки торможения цилиндрической модели (получено в ИПМех РАН) и рассчитанных для двух газофазных моделей при трех значениях противодавления: $P_\infty = 6{,}3$, $8{,}3$ и $10{,}3$ гПа *(режимы 1–3)* соответственно, т. е. при различной степени нерасчетности струи. Это различие влияет на расположение и протяженность зон сверх- и дозвукового течения в струе, и как следствие, сказывается на распределениях тепловых потоков и давления торможения в точке торможения модели.

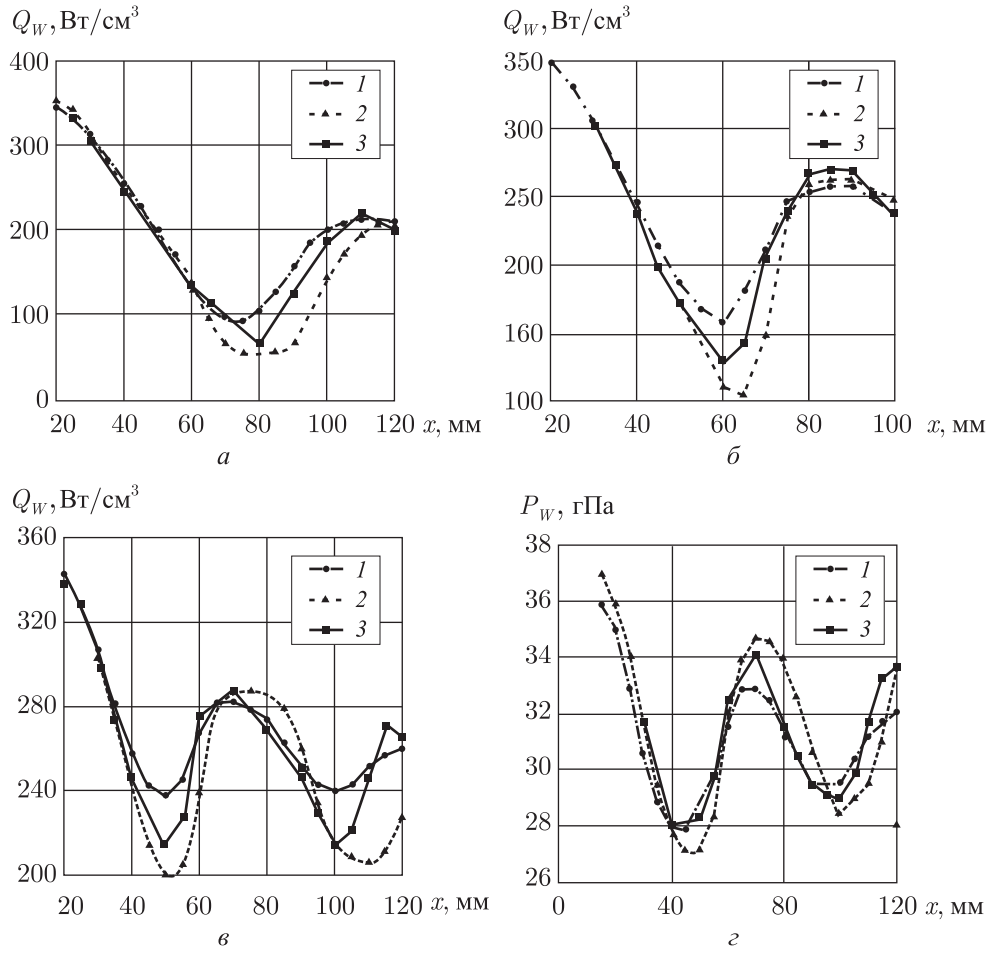


Рис. 7.13. Сравнение рассчитанных и экспериментальных данных по тепловому потоку и давлению в области точки торможения модели с плоским торцом: $G = 2{,}4$ г/с, $N_{pl} = 29$ кВт, $T_\infty = 293$ К, $D_s = 40$ мм; $P_\infty = 6{,}3$ гПа, (*а*), $P_\infty = 8{,}3$ гПа, (*б*), $P_\infty = 10{,}3$ гПа, (*в,г*). Кривая *1* — эксперимент; кривые *2* и *3* — термически равновесная и неравновесная модель соответственно

Для третьего из представленных выше вариантов на рис. 7.13 (*г*) даны сравнения для давления торможения. На рис. 7.14 приведены аналогичные сравнения тепловых потоков для других значений параметров в экспериментах (*режимы 4* и *6*).

Распределения теплового потока к каталитической стенке, как было отмечено в [3], и наблюдается во всех проведенных расчетах и экспериментах, хорошо коррелируют с изменением давления торможения по всей длине струи, а учет в расчетах термической неравновесности в большей степени влияет на тепловой поток.

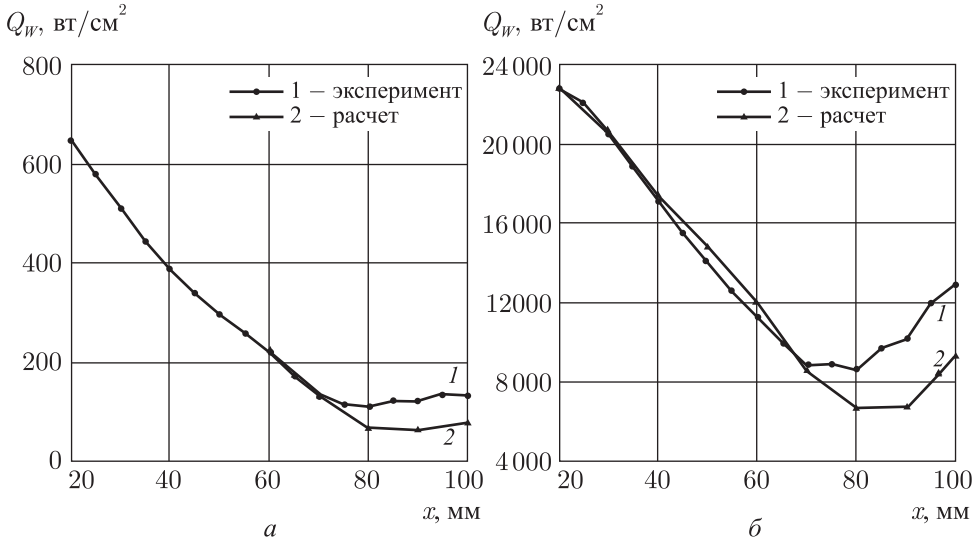


Рис. 7.14. Сравнение рассчитанных и экспериментальных данных по тепловому потоку в области точки торможения модели с плоским торцом: $P_\infty = 6{,}2$ гПа, $G = 2{,}4$ г/с, $N_{pl} = 41$ кВт, $T_\infty = 293$ К, $D_s = 30$ мм; (*а*), $D_s = 40$ мм (*б*). Кривая *1* — эксперимент, *2* — расчет по термически равновесной модели

Различия в распределениях тепловых потоков и давления торможения при использовании в расчетах однотемпературной и трехтемпературной моделей газовой среды обусловлено отмеченными ранее различиями в топологиях течений в струях в этих случаях. При этом, когда обтекание тела происходит в пределах первой от среза сопла сверхзвуковой зоны струи, рассчитанные тепловые потоки и давление торможения практически одинаковы для всех рассмотренных газофазных моделей и близки к экспериментальным значениям.

Различия в теплообмене с экспериментом становится более заметным в случае, когда перед торцевым затуплением образуется область возвратно-циркуляционного течения или модель дальше сдвинута вниз по потоку вдоль оси струи. Этот факт быть объяснен, отчасти, трехмерной картиной течения в струе и около модели, и проявляющейся в эксперименте сильнее на больших расстояниях. В распределениях тепловых потоков и давления торможения, полученных в рамках трехтемпературной газофазной модели по сравнению с однотемпературной, точки максимумов и минимумов смещены вдоль оси струи вверх по потоку, что обусловлено уже отмеченными различиями в течениях термически равновесных и неравновесных струй. При увеличении противодавления в барокамере это различие уменьшается.

Заключение

Для рассмотренных моделей газовой среды существенных различий в структуре течений в разрядном канале ВЧ плазмотрона не найдено. В расчетах с использованием термически неравновесной модели обнаружен отрыв электронной и колебательной температур от поступательной, особенно существенный при низких давлениях в разрядном канале. При увеличении давления в разрядном канале это различие уменьшается. Вниз по потоку происходит релаксация, в результате которой температуры в конце разрядного канала выравниваются.

Для всех рассмотренных газофазных моделей не найдено существенных различий в течениях недорасширенной струй в пределах первых от среза сопла сверхзвуковых зонах, а рассчитанные тепловые потоки и давление торможения практически одинаковы для термически равновесной и неравновесной газофазных моделей и близки к экспериментальным значениям. Влияние на теплообмен с поверхностью становится более заметным, когда цилиндрическая модель сдвигается вниз по потоку вдоль оси струи.

Автор благодарен В. Г. Громову, А. Ф. Колесникову, А. Н. Гордееву и коллективу лаборатории взаимодействия плазмы и излучения с материалами ИПМех РАН за помощь в работе и представленные экспериментальные данные.

Список литературы

1. *Быкова Н.Г., Васильевский С.А., Гордеев А.Н., и др.* Определение эффективных вероятностей каталитических реакций на поверхностях теплозащитных материалов в потоках диссоциированного углекислого газа // Изв. РАН МЖГ. 1997. № 6. С. 144–157.
2. *Kolesnikov A.F., Pershin I.S., Vasil'evskii S.A., Yakushin V.I.* Study of quartz surface catalycity in dissociated carbon dioxide subsonic flows // J. Spacecraft and Rockets. 2000. V. 37. № 5. P. 573–579.
3. *Афонина Н.Е., Васильевский С.А., Громов В.Г., и др.* Течение и теплообмен в недорасширенных струях воздуха, истекающих из звукового сопла плазмотрона // Изв. РАН. МЖГ. 2002. № 5. С. 156–168.
4. *Sakharov V. I., Gromov V.G., Kolesnikov A. F.,* CFD model and code-to-experiment validation for an under-expanded nonequilibrium plasmatron jet over a butt-end probe. West East High Speed Flow Field 2002 // CIMNE Barselona, Spain. 2003. P. 144–150.
5. *Sakharov V.I., Gromov V.G.* CFD modeling of thermally and chemically nonequilibrium flows in discharge channel and in under-expanded plasmatron jets over a butt-end probe // Proc. 5th Europ. Sympo. on Aerothermodynamics for Spase Vehicles. Cologne, Germany, 2005. SP 563. P. 119–123.
6. *Utyuzhnikov S.V., Konyukhov A.V., Rudenko D.V.* Simulation of subsonic and supersonic flows in inductive plasmatrons //AIAA J. 2004. V. 42. № 9. P. 1871–1877.

7. *Колесников А.Ф., Кубарев С.Н., Якушин М.И.* Численное исследование неравновесного течения диссоциированного азота в дозвуковой струе индукционного плазмотрона // Числ. методы мех. сплошной среды. СО АН СССР. ВЦ ИТПМ. Новосибирск. 1986. Т. 17. № 2. С. 106–113.
8. *Колесников А. Ф. Якушин М. И.* Об определении эффективных вероятностей гетерогенной рекомбинации атомов по тепловым потокам к поверхности, обтекаемой диссоциированным воздухом // Мат. моделирование 1989. Т. 1. № 3. С. 44–60.
9. *Власов В. И.* Теоретическое исследование течения высокотемпературного газа в разрядной и рабочей камерах ВЧ — плазмотрона // Космонавтика и Ракетостроение. ЦНИИ Машиностроение. 2003. № 23. С. 18–26.
10. *Горшков А. Б.* Численное моделирование обтекания моделей в струе высокочастотного плазмотрона // Космонавтика и Ракетостроение. ЦНИИ Машиностроение. 2004. № 3(36). С. 54–61.
11. *Afonina N. E., Gromov V. G., Sakharov V. I.* HIGHTEMP technique for high temperature gas flows simulations // Proc. 5*th* Europ. Sympo. on Aerothermodynamics for Spase Vehicles. Cologne, Germany, 2005. SP 563. P. 323–328.
12. Термодинамические свойства индивидуальных веществ. Справочное издание, — М: Наука, 1979. Т. 1. 495 с; Т. 2. 327 с.
13. *Васильевский С. А., Колесников А. Ф.* Численное моделирование течений равновесной индукционной плазмы в цилиндрическом канале плазмотрона // Изв. РАН. МЖГ. 2000. № 5. С. 164–173.
14. *Gordeev A. N., Kolesnikov A. F., Kononov S. V.* Comparative characterization of the IPG-4 nductive plasmatron in subsonic and supersonic regimes of air plasma flows // Proc. Int. Conf. on Methods of Aerophysical Research (ICMAR 2004). Novosibirsk, Russia. 2004. Publishing House «Nonparel». Part I. P. 106–111.
15. *Ибрагимова Л. Б., Смехов Г. Д., Шаталов О. П.* Константы скорости диссоциации двухатомных молекул в термически равновесных условиях // Изв. РАН. МЖГ. 1999. № 1. С. 181–186.
16. *Лосев С. А., Макаров В. Н., Погосбекян М. Ю.* Модель физико-химической кинетики за фронтом очень сильной ударной волны в воздухе // Изв. РАН. МЖГ. 1995. № 2. С. 169–182.
17. *Park C.* Review of chemical-kinetic problems of future NASA missons, Earth Entries // J. Thermophys and Heat Transfer. 1993. V. 7.№ 3. p.385–398.
18. *Losev S. A., Makarov V. N., Pogosbekyan M. Ju. et al.*, Thermochemical nonequilibrium kinetic models in strong shock waves on air, 1990. AIAA. Paper. 1994. № 1990.
19. *Hirschfelder J. O., Curtiss C. F., and Bird R. B.* Molecular Theory of Gases and Liquids. J. Wiley, — N. Y.: 1954. 1219 p.
20. *Kolesnikov A. F.* Steffan-Maxwell Relations for Multicomponent Ambipolar Diffusion and Thermal-Baro-Diffusion Effects in Two-Temperature Plasmas // 2000. AIAA Paper. № 2000–2570.
21. *Reid R. C., Prausnitz J. M., Sherwood T. K.* The Properties of Gases and Liquids, McGraw-Hill,— N. Y.: 1977. 688 p.
22. *Afonina N. E.,Gromov V. G.* Thermochemical Nonequilibrium Computations for a MARS express Probe // Proc. 3-rd Europ. Sympo. on Aerothermodynamics for Space Vehicles, ESTEC, Noordwijk, The Netherland. 1998. P. 179–186.
23. *Ступоченко Е. В., Лосев С. А., Осипов А. И.* Релаксационные процессы в ударных волнах. — М: Наука, 1965. 484 с.
24. *Losev S. A, Kozlov P. V., Kuznetsova L. A. et al.*, Radiation of a mixture CO_2–N_2–Ar in shock waves: Experiment and modeling

// Proc. 3-rd Europ. Sympo on Aerothermodynamics for Space Vehicles, ESTEC, Noordwijk, The Netherland. 1998. P. 437–444.

25. *Roberts T. P.* Implementation into TINA modeling for electron/electronic energy equation // 1996. AIAA Paper.№ 96–1851.
26. *Fertig M., Dohr A., Fruhauf H.-H.* Transport coefficient for high temperature nonequilibrium air flows // 1998. AIAA Paper. № 98–2937.
27. *Barbato M., Reggian S., Bruno C., at all*, Model for heterogeneous catalysis on metal surfaces with applications to hypersonic flows // J. Thermophys. and Heat Transfer. 2000. V. 14. № 3. P. 412–420.
28. *Райзер Ю. П.* Высокочастотный разряд высокого давления в потоке газа как процесс медленного горения // ПМТФ. 1968. № 3. С.3–10.
29. *Семин В. А.* К теории неравновесного индукционного высокочастотного разряда в потоке газа // Изв. АН СССР. МЖГ. 1981. № 2. С. 153–160.
30. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика. Т. 8 Электродинамика сплошных сред. — М.: Наука. 1982. 623 с.
31. *Sakharov V. I., Gromov V. G., Kolesnikov A. F. and Gordeev A. N.* CFD modeling of non-equilibrium flow in an under-expanded plasmotron air jet over a flat-end cylindrical model // The 7th internet. Workshop on magnetoplasma-aerodynamics, Moscow, 17–19 April, 2007. p. 45–50.
32. *А. Ф. Колесников, А. Н.Гордеев, В. И.Сахаров* Течение и теплообмен в сверхзвуковых струях воздушной плазмы: эксперимент на ВЧ-плазмотроне и численное моделирование // Всероссийская Школа-семинар «Аэрофизика и физическая механика классических и квантовых систем», Москва, ИПМех РАН, 3–4 декабря.

8

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ОСОБЕННОСТЕЙ В ТЕПЛООБМЕНЕ ПРИ ГИПЕРЗВУКОВОМ ОБТЕКАНИИ ЗАТУПЛЕННОГО КОНУСА, ЛЕЖАЩЕГО НА ТРЕУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНЕ С ПРИТУПЛЕННЫМИ КРОМКАМИ

В. И. Сахаров
Научно-исследовательский институт механики МГУ им. М.В. Ломоносова

Численное моделирование сверхзвукового обтекания пространственной конфигурации, состоящей из треугольной пластины с затупленными кромками и расположенным на ее поверхности круговым конусом проведено в рамках полных уравнений Навье–Стокса. В качестве моделей газовой среды в расчетах использовались совершенный газ и химически неравновесный воздух. Получено хорошее совпадение рассчитанных относительных тепловых потоков на наветренной поверхности компоновки и экспериментальных данных, полученных в [1] для наветренной стороны затупленной треугольной пластины. Проведено исследование влияния чисел $\mathbf{M}_\infty$ и $\mathbf{Re}_\infty$, а также моделей газовой среды на теплообмен вдоль поверхности, рассматриваемой конфигурации.

Введение

Несмотря на значительное количество полетов высокоскоростных летательных аппаратов в атмосфере Земли, интерес к задачам газовой динамики, возникающим при их разработке, не ослабевает. Это обусловлено как фундаментальными газодинамическими аспектами рассматриваемой проблемы, так и практическими приложениями, связанными с необходимостью расчетов параметров аэродинамики и теплообмена при проектировании летательных аппаратов с целью сокращения количества дорогостоящих экспериментов в аэродинамических установках.

Классический подход к решению задач обтекания при больших числах Рейнольдса состоит в разделении течения на внешнюю невязкую область и вязкий пограничный слой около поверхности тела с присущей ему проблемой учета вязко-невязкого взаимодействия. При решении задачи в рамках полных уравнений Навье–Стокса этой проблемы не возникает. Отметим, что для расчета течений вязкого газа около затупленных тел разработано много вычислительных алгоритмов, однако пока они не могут быть использованы

в качестве быстрого и надежного инструмента определения параметров обтекания пространственных конфигураций. К тому же попутно приходится решать не менее важную и трудоёмкую задачу построения расчетных сеток. Использование же асимптотически упрощенных, в той или иной степени, моделей уравнений Навье–Стокса кардинально не упрощают задачу, при этом внося существенные ограничения на их применение по характеристикам режимов обтекания.

Целями данной работы являются: демонстрация эффективности разработанной в [2] для решения полных уравнений Навье–Стокса вычислительной технологии, ее применение для исследования сверхзвукового обтекания компоновки, состоящей из связки конуса и затупленной треугольной пластины, а также подтверждение обнаруженных в эксперименте [1] особенностей в теплообмене на наветренной стороне треугольной пластины.

Течение около важного элемента такой компоновки — затупленного треугольного крыла или пластины с острыми кромками — интенсивно изучалось на протяжении последних десятилетий, как экспериментальными методами, так и численно. Исследованы многочисленные режимы обтекания заостренных конфигураций, зависящие от геометрических параметров крыльев и определяющих газодинамических параметров течения [3–5].

Во многих других работах исследования ограничивались также заостренными крыльями или рассматривались затупленные крылья малого относительного удлинения. Наличие затупления привносит различные сложности, добавляя к основным безразмерным параметрам дополнительные, связанные с отношением размеров, характеризующих форму крыла. Исследование обтекания более сложных компоновок летательных аппаратов, содержащих, кроме крыльев, и пространственные поверхности, моделирующие фюзеляж, представляет собой еще более уникальную задачу. Однако характерные особенности течения и теплообмена, обнаруженные при исследовании обтекания треугольного крыла, как элемента более сложной конфигурации, могут встретиться и при исследовании обтекания целой компоновки. В [1] при изучении экспериментальными методами теплообмена около наветренной поверхности затупленной треугольной пластины обнаружены области повышенных тепловых потоков. Позже, в [6], эти особенности в теплообмене были объяснены, а в [7] подтверждены численными расчетами.

Локальное повышение теплового потока, возникая с наветренной стороны затупленной треугольной пластины в области кромки на некотором удалении от затупления, простирается на расстояние несколько сотен калибров вниз по наветренной поверхности, практически, на одинаковом расстоянии от ее плоскости симметрии. Объяснение этого явления, данное в [6], связано со сложным характером взаимодействия течения за головным скачком от затупления с передней кромкой пластины.

Обнаруженные особенности в теплообмене существуют не для всех значений безразмерных параметров задачи, а проявляются в некотором диапазоне

чисел Маха, углов стреловидности пластины и углов атаки, и при этом не возникают для заостренной пластины. В [7] такая задача исследовалась численно в рамках уравнений Эйлера (расчет невязкого течения) и приближенного решения уравнений пограничного слоя (расчет теплообмена). В этой главе проанализирован возникающий эффект повышения теплового потока в зависимости от чисел Маха набегающего потока, углов атаки и стреловидности пластины. Однако провести количественное сравнение с экспериментом [1] по тепловым потокам не представилось возможным из-за отличия радиуса затупления пластины в расчете и в эксперименте, а также из-за неправомерности применения интегрального метода расчета течения в пограничном слое при интенсивном стекании газа к плоскости симметрии.

Основное внимание в данной работе уделено особенностям течения газа около рассматриваемой пространственной конфигурации в целом и распределению тепловых потоков вдоль ее поверхности. Проведено сравнение результатов расчета с имеющимися экспериментальными данными с учетом особенностей распределения тепловых потоков на наветренной стороне затупленной треугольной пластины [1]. Показано хорошее соответствие рассчитанных относительных тепловых потоков q/q_0 (q_0 — значение теплового потока в передней точке торможения) и экспериментальных данных. Проведено исследование влияния чисел Маха и Рейнольдса в набегающем потоке, а также реальных свойств газовой среды на теплообмен вдоль поверхности рассматриваемой конфигурации в зонах их усиления.

1. Термодинамические свойства

Воздушная среда рассматривается как идеальная квазинейтральная смесь совершенных газов из N компонентов с соответствующим уравнением состояния, при одинаковой температуре тяжелых частиц и электронов

$$p = \rho R_u T \sum_{i=1}^{N} \gamma_i.$$

Здесь p — давление, ρ — плотность смеси, $\gamma_i = c_i/m_i$ — молярно-массовые концентрации компонентов (c_i — массовые концентрации), R_u — универсальная газовая постоянная, T — поступательная температура частиц. Вращения и колебания молекул описываются моделью «жесткий ротатор — гармонический осциллятор» с больцмановским распределением по энергетическим уровням. Предполагается, что все атомные компоненты находятся в основном электронном состоянии, а вращательные и колебательные степени свободы возбуждены равновесно с поступательными.

При сделанных выше предположениях полная сумма по состояниям одного моля газа $i-$ ой компоненты для рассмотренной термохимической модели

имеет вид [8]:

$$Q_i = \frac{1}{N_A} Q_i^{tr} Q_i^e \quad \text{для атомов и электронов,}$$
$$Q_i = \frac{1}{N_A} Q_i^{tr} Q_i^r Q_i^v Q_i^e \quad \text{для молекул.}$$

Суммы по состояниям отдельных видов энергии представляются в виде [8]:

$$Q_i^{tr} = \left(\frac{2\pi M_i R_u T}{N_A^2 \hbar^2} \right)^{3/2} \cdot V_i,$$
$$Q_i^r = \frac{T}{\theta_i^r \sigma_{s,i}},$$
$$Q_i^v = \prod_k \left[\left(1 - \exp\left(-\frac{\theta_{ik}^\nu}{T} \right) \right)^{d_{ik}^\nu} \right]^{-1},$$
$$Q_i^e = g_i^e \exp\left(\frac{-\theta_i^e}{T} \right).$$

Здесь $\hbar$ — постоянная Планка, N_A — число Авогадро, $V_i = \dfrac{R_u T}{p}$ — молярный объем, $\sigma_{s,i}$ — число симметрии молекулы, θ_i^r — характеристическая вращательная температура i-го компонента, θ_{ik}^v, d_{ik}^v — соответственно колебательная характеристическая температура и вырождение k-й колебательной моды i-го компонента, θ_i^e, g_i^e — электронная характеристическая температура и статистический вес основного электронного состояния i-го компонента.

Молярная энтальпия h_i и молярная теплоемкость $C_{p,i}$ i — ого компонента определяются выражениями:

$$h_i = h_i^0 + R_u T^2 \frac{\partial \ln(Q_i)}{\partial T}, \quad C_{p,i} = \frac{\partial h_i}{\partial T}.$$

Здесь h_i^0 — теплота образования i — го компонента при $T = 0$.

Термодинамические и термохимические данные для рассматриваемых компонентов взяты из работы [8]. Энтальпия и внутренняя энергия единицы массы газовой смеси вычисляются по формулам

$$h = \sum_{i=1}^{N} \gamma_i h_i, \quad e = h - R_u T \sum_{i=1}^{N} \gamma_i.$$

2. Химическая и транспортные модели газовой среды

В качестве одной из моделей газовой среды рассматривался совершенный газ с показателем адиабаты $\gamma = 1,4$. Число Прандтля считалось постоянным $Pr = 0{,}7$, а коэффициент динамической вязкости рассчитывался по различным формулам в зависимости от предмета проводимого исследования:

— если таковым является сверхзвуковой полет ЛА в атмосфере Земли, то коэффициент динамической вязкости воздуха рассчитывается по формуле

$$\mu = \mu^* \left(\frac{T}{T^*}\right)^{0,7}.$$

Здесь T^* и μ^* — некоторые характерные значения температуры и коэффициента динамической вязкости;

— если таковым являются сверхзвуковые испытания модели ЛА в струях аэродинамических установок, обладающих крайне низкой температурой (порядка нескольких десятков градусов Кельвина), то расчёт коэффициента динамической вязкости воздуха проводится по формуле Сазерленда [9].

Наряду с совершенным газом, рассматривалась также модель химически неравновесного воздуха со следующими компонентами в высокотемпературной части потока ($N = 7$): O, N, O_2, N_2, NO, NO^+, e^-. Ниже перечислены химические процессы, включенные в газофазную модель:

$$\begin{aligned} &N_2 + M \Leftrightarrow N + N + M, && O_2 + M \Leftrightarrow O + O + M,\\ &NO + M \Leftrightarrow N + O + M, && N_2 + O \Leftrightarrow NO + N\ ,\\ &NO + O \Leftrightarrow O_2 + N, && N + O \Leftrightarrow NO^+ + e^-. \end{aligned}$$

Константы скорости реакций диссоциации компонентов смеси задавались в виде [10, 11]

$$k_j^f = A_j T^{b_j} \exp\left(\frac{-E_j}{T}\right)\left(1 - \exp\left(\frac{-\theta_j^v}{T}\right)\right).$$

Здесь θ_j^v — характеристическая колебательная температура диссоциирующей молекулы. Константы скоростей остальных реакций в прямом направлении аппроксимируются обобщенной формулой Аррениуса

$$k_j^f = a_j T^{b_j} \exp\left(\frac{-E_j}{R_u T}\right).$$

Константы скоростей обратных реакций k_j^r определяются из условия детального равновесия

$$K_{cj} = \frac{k_j^f}{k_j^r} = \prod_{i=1}^{N}\left(\frac{Q_i(T)}{V_i}\exp\left(-\frac{h_i^0}{R_u T}\right)\right)^{(\nu''_{ji} - \nu'_{ji})}.$$

Скорости учтенных химических реакций заимствованы из [10, 11].

Молярные диффузионные потоки, которые необходимы для вычисления вязких потоков массы, импульса и энергии, находились из соотношений Стефана–Максвелла с учетом бародиффузии (без учета термодиффузии) при

наличии электрического поля и в предположении, что ток проводимости равен нулю [12, 13].

$$\sum_{j=1}^{N} \overline{M} d_{ij}(\gamma_i \mathbf{K}_j - \gamma_j \mathbf{K}_i) = \frac{\partial \gamma_i \overline{M}}{\partial \mathbf{r}} + (x_i - c_i)\frac{\partial \ln p}{d\mathbf{r}} - \frac{\gamma_i \overline{M}}{R_u T} z_i F \mathbf{E},$$

$$i = 1, 2, ..., N-1,$$

$$\sum_{j=1}^{N} \mathbf{K}_j M_j = 0,$$

$$\sum_{j=1}^{N} \mathbf{K}_j z_j = 0,$$

здесь c_i, x_i и z_i — массовые, мольные концентрации и зарядовое число i-го компонента, F — число Фарадея, $\mathbf{E}$ — напряженность самосогласованного электрического поля, $d_{ij} = \overline{M}/\rho D_{ij}$, D_{ij} — бинарные коэффициенты диффузии, $\overline{M} = \left[\sum\limits_{i=1}^{N} \gamma_i\right]^{-1}$ — средний молекулярный вес смеси.

Для вычисления коэффициентов вязкости и теплопроводности газовой смеси использовались приближенные формулы Уилке–Васильевой [14]:

$$\mu = \sum_{i=1}^{N} M_i \gamma_i Sc_i D_i,$$

$$\lambda = \sum_{i=1}^{N} \gamma_i \left[C_{pi} + 2{,}5 R_u (1{,}5 Sc_i - 1)\right] D_i.$$

Здесь $Sc_i(T) = \mu_i/\rho_i D_{ii}$ — число Шмидта i-го компонента, вычисленное по вязкости μ_i, плотности ρ_i и коэффициенту самодиффузии D_{ii} этого компонента в чистом газе, C_{pi} — молярная теплоемкость частицы i, D_i — коэффициент диффузии, определяемый выражением

$$D_i = \left(\sum_{j=1}^{N} \gamma_j d_{ij}\right)^{-1}.$$

Значения $d_{ij}(T)$ определяются через сечения упругих столкновений частиц i-го и j-го сорта (интегралы столкновений):

$$d_{ij}(T) = 3{,}12 \cdot 10^5 \frac{\sqrt{2M_i M_j}\,\overline{\Omega}_{ij}^{(1,1)}(T)}{\sqrt{T(M_i + M_j)}}, \quad [d_{ij}] = \text{с} \cdot \text{м/кмоль}, \quad [\Omega] = 10^{-20}\text{м},$$

$$Sc_i(T) = \frac{5\overline{\Omega}_{ij}^{(1,1)}}{6\overline{\Omega}_{ij}^{(2,2)}}.$$

Здесь $\overline{\Omega}_{ij}^{(1,1)}(T)$, $\overline{\Omega}_{ij}^{(2,2)}(T)$ — соответственно интегралы столкновений диффузионного и вязкого типов, вычисляемые на основе потенциалов межмолекулярного взаимодействия.

Сечения упругих столкновений диффузионного типа для нейтральных атомов и молекул между собой и с ионами, необходимые для расчета коэффициентов переноса, вычислялись по двухпараметрической интерполяционной формуле [15], построенной на основе значений сечений при низкой температуре ($T = 300\,\mathrm{K}$) и высокой температуре ($T = 20000\,\mathrm{K}$). Сечения столкновений типа нейтрал-нейтрал вычислялись по потенциалу Леннард–Джонса при низкой температуре и по экспоненциальному отталкивающему потенциалу (потенциал Борна–Майера) при высокой температуре. Сечения столкновений типа нейтрал-ион при низкой температуре вычислялись с использованием поляризационного потенциала, а при высокой — также по экспоненциальному потенциалу. Значения параметров потенциалов Леннарда–Джонса и Борна–Майера для пар одинаковых частиц взяты из литературы. Параметры потенциалов разных частиц вычислялись по комбинаторным правилам [12]. При вычислении сечений столкновений пар нейтрал–родственный ион учитывался эффект перезарядки. Сечение столкновений электрона с нейтральными частицами полагалось равным постоянной величине. Взаимодействие заряженных частиц описывалось экранированным Кулоновским потенциалом. Предполагалось, что отношение значений всех сечений столкновений вязкостного типа к соответствующим значениям сечений диффузионного типа равно 1,1 для всех пар частиц.

3. Геометрия поверхности тела

Поверхность обтекаемого тела представляет собой треугольную пластину с затупленными передними кромками и лежащим на ее поверхности сферически затупленным круговым конусом с углом полураствора $\theta = 5^0$. Вершины конуса и треугольной пластины совпадают. Угол стреловидности пластины $\lambda = 75^0$, ее толщина бралась равной характерному радиусу затупления R. Верхняя плоскость пластины сопрягалась с поверхностью конуса гладким образом.

4. Метод решения

Интегральная форма нестационарной системы уравнений Навье–Стокса, применяемая для расчёта химически неравновесных ламинарных течений вязкого газа в декартовой системе координат X, Y, Z имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_V \mathbf{U}dV + \int\limits_{\delta_V} \mathbf{n}\cdot\widehat{\mathbf{F}}dS = \int\limits_V \mathbf{\Omega}dV. \tag{8.1}$$

Здесь:

V — фиксированная область в пространстве X, Y, Z;

δ_V — его граница;

$\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)$ — вектор единичной нормали к δ_V;

$\mathbf{U}$ — вектор консервативных переменных в единичном объеме;

$\mathbf{\Omega}$ — вектор источниковых членов.

Потоки массы компонент смеси, импульса и энергии газа через поверхность δ_V можно разложить на сумму невязкой и вязкой составляющих

$$\int\limits_{\delta_V} \mathbf{n} \cdot \widehat{\mathbf{F}} dS = \mathbf{F}^{in\nu} + \mathbf{F}^{\nu is} = \int\limits_{\delta_V} \mathbf{n} \cdot \widehat{\mathbf{F}}^{in\nu} dS + \int\limits_{\delta_V} \mathbf{n} \cdot \widehat{\mathbf{F}}^{\nu is} dS.$$

Вектор консервативных переменных $\mathbf{U}$, невязкие составляющие потоков $\mathbf{F}^{in\nu}$ и вектор источниковых членов $\mathbf{\Omega}$ являются функциями физических переменных $\mathbf{Z}$, которые определяются выбранной термохимической моделью газовой среды. Вязкие потоки $\mathbf{F}^{\nu is}$ являются линейными функциями от производных по координатам переменных $\mathbf{Z}$ с коэффициентами, зависящими от $\mathbf{Z}$. Для рассматриваемой модели газовой среды переменные, входящие в (8.1), имеют следующие выражения

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho\gamma_1 \\ \vdots \\ \rho\gamma_N \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ \rho e_0 \end{pmatrix}, \ \widehat{\mathbf{F}} = \begin{pmatrix} \rho\mathbf{u}\gamma_1 \\ \vdots \\ \rho\mathbf{u}\gamma_N \\ \rho\mathbf{u}u + p\mathbf{n}n_x \\ \rho\mathbf{u}v + p\mathbf{n}n_y \\ \rho\mathbf{u}w + p\mathbf{n}n_z \\ \rho\mathbf{u}h_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{K}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{K}_N \\ \widehat{\boldsymbol{\tau}}_x \\ \widehat{\boldsymbol{\tau}}_y \\ \widehat{\boldsymbol{\tau}}_z \\ \mathbf{q} \end{pmatrix}, \ \mathbf{\Omega} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_N \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{Z} = \begin{pmatrix} p \\ \mathbf{u} \\ T \\ \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_N \end{pmatrix}, \quad (8.2)$$

$$h = \sum_{i=1}^{N} \gamma_i h_i, \quad e = h - R_{\mathrm{u}} T \sum_{i=1}^{N} \gamma_i, \quad e_0 = e + 0{,}5 \cdot (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}), \quad h_0 = e_0 + \frac{p}{\rho}.$$

Здесь u, v, w — декартовы компоненты вектора скорости $\mathbf{u}$; e, h — энергия и энтальпия единицы массы газовой смеси; e_0, h_0 — полные энергия и энтальпия единицы массы газа, e_i, h_i, — молярная внутренняя энергия и энтальпия i-го компонента.

В случае модели совершенного газа в системе уравнений (8.1)–(8.2) «N» последних уравнений неразрывности для компонент заменяются уравнением неразрывности для смеси в целом.

Для модели химически реагирующего воздуха молярная скорость образования i-ой компоненты в единице объема во всех химических реакциях записывается в виде $\omega_i = \sum\limits_j (\nu''_{ji} - \nu'_{ji}) \overline{\omega}_j$.

Здесь $\overline{\omega}_j = k_j^f \prod\limits_{i=1}^{N} (\rho\gamma_i)^{\nu'_{ji}} - k_j^r \prod\limits_{i=1}^{N} (\rho\gamma_i)^{\nu''_{ji}}$ — скорость j-й газофазной химической реакции, записанной в символьной форме $\sum\limits_i \nu'_{ji}[A_j] \Leftrightarrow \sum\limits_i \nu''_{ji}[A_j]$, где ν'_{ji}, ν''_{ji} — стехиометрические коэффициенты и $[A_i]$ — символ i-й химической компоненты.

Тензор вязких потоков импульса $\boldsymbol{\tau}$ имеет вид

$$\widehat{\boldsymbol{\tau}} = -\mu \left[\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{r}} \right) + \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{r}} \right)^T - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mathbf{u} \right) \widehat{\mathbf{I}} \right].$$

Здесь $\widehat{\mathbf{I}}$ — единичный тензор, μ — коэффициент вязкости.

Суммарный поток тепла $\mathbf{q}$ задается в виде

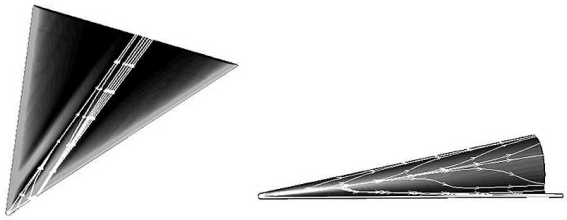
$$\mathbf{q} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial \mathbf{r}} + \sum_{i=1}^{N} \mathbf{K}_i h_i + \widehat{\boldsymbol{\tau}} \cdot \mathbf{u}.$$

Уравнения (8.1)–(8.2) решаются численно на структурированной криволинейной сетке методом конечного объема (МКО). Система конечно-разностных уравнений МКО состоит из численных аналогов уравнений сохранения для шестигранных ячеек, покрывающих расчетную область, и разностных аппроксимаций граничных условий. Методом конечного объема определяется приближенное решение $\mathbf{Z}_{jki}$ в центре каждой ячейки (x_{jki}, y_{jki}, z_{jki}) и в центре каждой стороны ячейки (x_{wki}, y_{wki}, z_{wki}), лежащей на поверхности тела. Невязкие потоки $\mathbf{F}_G^{inv}$ через границы вычисляются на основе точного решения задачи Римана о распаде произвольного разрыва, определяемой граничными значениями параметров в соседних ячейках. Для нахождения последних используется неосциллирующее одномерное восполнение исходных физических переменных: давления, температуры, декартовых составляющих скорости и концентраций компонентов смеси внутри ячеек по соответствующим координатным направлениям. Значения невязких потоков на границах рассчитываются по лимитированным одномерным экстраполяционным формулам вектора $\mathbf{Z}$ от центров ячеек к центрам сторон. Численные значения потоков $\mathbf{F}_G^{vis}$ через стороны ячеек определяются по центральным и односторонним разностным формулам второго порядка точности.

Решение конечно-разностных уравнений находится с помощью двухслойной неявной итерационной схемы. В неявной части конечно-разностного оператора используются направленные разности в соответствии со знаками собственных значений матриц Якоби конвективных слагаемых. Система разностных уравнений записывается в виде, удобном для применения итерационного процесса Гаусса–Зейделя по линиям, вдоль которых обращение неявного оператора проводится векторными трехточечными прогонками. Решение задачи проводится вначале для области затупления, в дальнейшем используется блочно-маршевый алгоритм с интегрированием последовательно в пересекающихся областях, выбранных вдоль продольной оси тела.

5. Построение расчетной сетки

Геометрия рассматриваемой пространственной конфигурации задавалась аналитически. Контур тела в поперечном сечении, представленный на рис. 8.1, состоит из гладко сопрягаемых отрезков прямых и дуг окружностей.



а *б*

Рис. 8.1. Изолинии теплового потока и приповерхностные линии тока на наветренной стороне пластины (*а*) и боковой поверхности конуса (*б*) ($\mathbf{M}_\infty = 14$, $\mathbf{Re}_\infty = 10^7$, $R = 0{,}26$ см, $T_\infty = 30$ К, $\alpha = 5°$)

При построении расчетной сетки для расстановки точек на контуре, заданного участками аналитических кривых, использовался эмпирический алгоритм, учитывающий локальную кривизну контура [16]. При такой расстановке точек на участках контура с большей кривизной происходило их сгущение. При этом, точки, попавшие на окружность, распределяются по ней равномерно, при переходе через точку разрыва кривизны контура, например, с окружности на прямую, применялся алгоритм, обеспечивающий гладкое изменение расстояний между расчетными точками. Внешняя граница расчетной области также задавалась аналитически, причем так, чтобы возмущения от тела при расчете течения не выходили за эту границу. Расчетная сетка около пространственной конфигурации строилась как набор плоских двумерных сечений, перпендикулярных продольной координате.

Для построения расчетной сетки в каждом сечении использовался комбинированный метод [16]. Вблизи поверхности тела численно решалась гиперболическая система уравнений с заданным распределением точек на контуре, что обеспечивало гладкость сеточных линий и их ортогональность вблизи контура тела. В процессе интегрирования гиперболической системы уравнений также учитывалось распределение расчетных точек на внешней границе. Далее для расстановки узлов в области поперечного сечения вплоть до внешней границы осуществлялась линейная интерполяция.

6. Параметры набегающего потока и данные для расчета

Расчеты проводились при значениях чисел Маха в набегающем потоке $\mathbf{M}_\infty$, числах Рейнольдса $\mathbf{Re}_\infty$, рассчитанных по параметрам набегающего потока и характерному размеру 1 м, угле атаки α, отсчитываемом от оси конуса.

Температурный фактор поверхности тела $t_w = T_w/T_0$, где T_0 — температура торможения, принимался равным 0,25, что соответствовало параметрам экспериментов [1].

7. Результаты расчетов

Параметры используемой в компоновке треугольной пластины и параметры внешнего обтекания близки к условиям эксперимента [1] и лежат в диапазоне, когда реализуется режим течения с растеканием потока на передней кромке крыла. При этом головной скачок от носового затупления взаимодействует с затупленной кромкой пластины, образуя в пристенных областях на наветренной стороне «инерционное» (с малым градиентом давления) растекание потока [6]. Вследствие этого приповерхностные линии тока в некоторой области на наветренной стороне пластины представляют собой слабо расходящийся веер, распространяющийся на значительное расстояние вдоль его поверхности. В подтверждение этого на рис. 8.1, *а* и 8.1, *б* для модели совершенного газа представлена картина изолиний относительных тепловых потоков и приповерхностные линии тока на наветренной стороне пластины и боковой поверхности конуса.

Наблюдается стекание газа в пограничном слое к плоскости симметрии пластины и растекание его от линии, отстоящей от плоскости симметрии на некоторое расстояние (рис. 8.1, *а*). На боковой поверхности конуса (рис. 8.1, *б*) так же видны линия растекания и соответствующая зона повышенного теплообмена, вызванные взаимодействием с поверхностью конуса потока, сошедшего с кромки пластины. Это согласуется с уменьшением теплового потока при приближении к плоскости симметрии пластины и увеличением его на линиях растекания (см. рис. 8.3).

На рис. 8.2, *а,б* изображены проекции линий тока на плоскость поперечного сечения, взятых на удалении $x/R = 66$ и $x/R = 110$ от переднего затупления. Здесь видна сложная картина взаимодействия потоков около пластины и конической части тела. На подветренной стороне поверхности пластины образуется линия стекания (точка **A** — ее пересечение с плоскостью поперечного сечения), где происходит встреча потоков, один из которых приходит от конической поверхности, а другой обтекает кромку. Растекание газа в пограничном слое на конической части ведет к увеличению теплообмена вдоль образующей конуса (точка **B** — ее пересечение с плоскостью сечения). Образование на некотором удалении от затупления спиралевидного вихря, поперечное сечение которого с центром в точке **C** видно на рис. 8.2 *б*, является также результатом взаимодействия потоков около пластины и конуса.

Следует отметить, что уменьшение угла атаки ведет к исчезновению спиралевидного вихря, образование которого обусловлено взаимодействием потоков около пластины и конуса, а также смещению линии стекания на

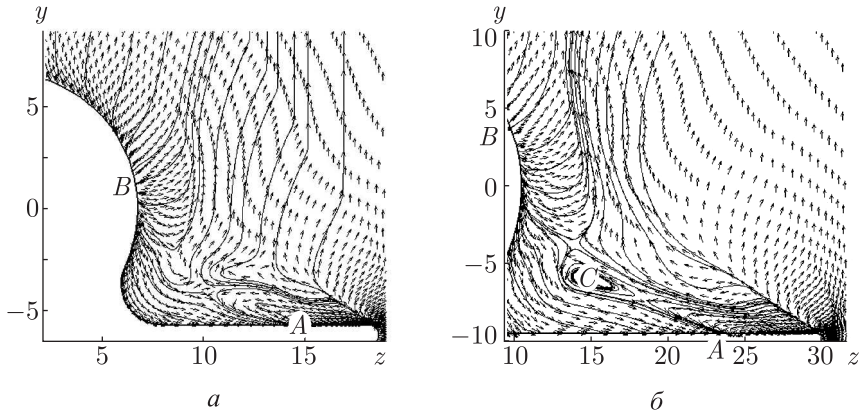


Рис. 8.2. Проекция линий тока на плоскость поперечного сечения тела ($\mathbf{M}_\infty = 14$, $\mathbf{Re}_\infty = 10^7$, $R = 0{,}26$ см, $T_\infty = 30$ К, $\alpha = 5°$)

подветренной стороне пластины к кромке крыла. Здесь же видно стекание газа к плоскости симметрии и, как следствие, понижение теплового потока при приближении к ней. На подветренной стороне пластины в области сопряжения конуса и крыла образуется также линия растекания. Эти особенности течения проявляются в распределениях теплового потока по поверхности, приведенных на рис. 8.3

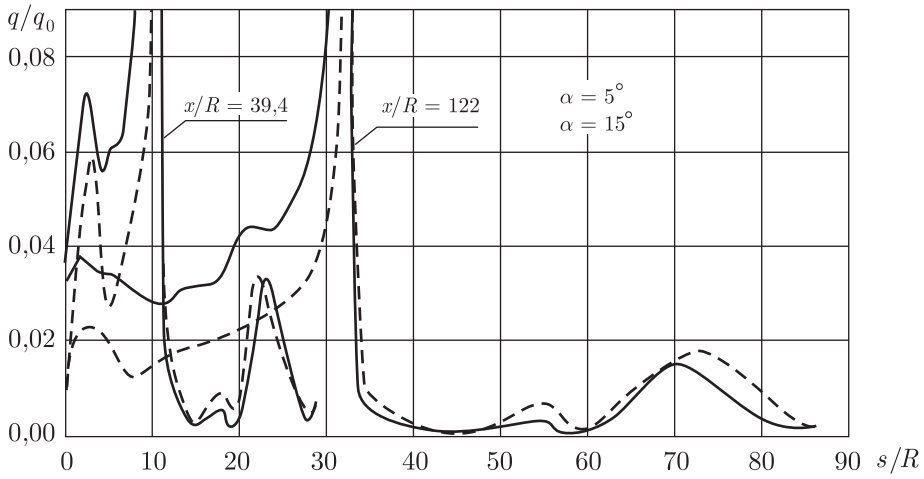


Рис. 8.3. Распределение теплового потока по криволинейной координате для двух поперечных сечений при углах атаки $\alpha = 5°$ и $\alpha = 15°$, ($\mathbf{M}_\infty = 15$, $\mathbf{Re}_\infty = 10^7$, $R = 0{,}26$ см, $T_\infty = 30K$)

На рис. 8.3 показано распределение относительных тепловых потоков на поверхности рассматриваемой конфигурации для двух сечений $x/R = 39{,}4$ и $x/R = 122$ и двух значений углов атаки $\alpha = 5°$ и $10°$ в зависимости от поперечной криволинейной координаты s/R, отсчитываемой от линии симметрии нижней поверхности пластины до верхней образующей конуса. Цифры около

кривых — безразмерные значения продольной координаты поперечных сечений. По результатам, представленным на рис. 8.3, можно сделать следующие выводы.

Характер распределений тепловых потоков в поперечных сечениях соответствует поведению приповерхностных линий тока на рис. 8.1 и проекций линий тока в поперечном сечении на рис. 8.2. На нижней линии симметрии пластины $s/R = 0$ (линия стекания) тепловые потоки как для угла атаки $\alpha = 5°$, так и для $\alpha = 15°$, слабо зависят от расстояния x/R, в то время как на линии растекания ($s/R = 3$–5) они заметно уменьшаются (примерно в 2,5–3 раза) с увеличением расстояния x/R от 39,4 до 122. Отличие в значениях тепловых потоков на линиях стекания и растекания уменьшается с ростом угла атаки. Отметим, что при угле атаки $\alpha = 5°$ тепловые потоки на линии растекания превосходят тепловые потоки на линии стекания в сечении $x/R = 39{,}4$ в 4 раза, а в сечении $x/R = 122$ — в 1,7 раза. При этом для угла атаки $\alpha = 15°$ тепловые потоки на линиях стекания и растекания отличаются для $x/R = 39{,}4$ и $x/R = 122$ примерно в 2,5 и в 1,2 раза соответственно. Аналогичная тенденция отмечалась в работах [1, 7].

Как показывает расчет, тепловой поток в поперечном сечении достигает наибольшего значения в районе передней кромки пластины и его величина практически не меняется вследствие постоянной кривизны кромки. Следующая особенность в распределении теплового потока имеет место на боковой поверхности конуса (при $s/R = 22$–23 для сечения $x/R = 39{,}4$ и при $s/R = 70$–73 для сечения $x/R = 122$) вдоль линии растекания на конической части, где тепловые потоки существенно превосходят тепловые потоки на остальной части конуса. Видно, что пиковые значения тепловых потоков слабо зависят от угла атаки, но заметно падают с увеличением расстояния от носка конуса. Тепловой поток на конусе достаточно большой, так при угле атаки $\alpha = 5°$ для $x/R = 122$ он соизмерим с тепловым потоком на наветренной поверхности пластины. На верхней стороне пластины вблизи конуса так же имеется линия растекания с повышенными значениями тепловых потоков. Интенсивность теплообмена в этой зоне примерно в 3 раза ниже, чем на конусе и уменьшается с ростом угла атаки, оставаясь существенно выше по сравнению с остальной частью верхней поверхности пластины.

Следует отметить еще один результат расчета — это повышение теплового потока при приближении координаты s/R к плоскости симметрии тела на подветренной стороне при угле атаки $\alpha = 15°$ для обоих рассматриваемых сечений в отличие от теплового потока при угле атаки $\alpha = 5°$, где этого повышения не наблюдается. Этот результат можно объяснить растеканием потока в плоскости симметрии с подветренной стороны конфигурации, имеющим место при больших углах атаки. Отметим так же, что, как показали расчеты, уменьшение угла атаки до $\alpha \leqslant 0°$ приводит к исчезновению областей локального повышения тепловых потоков на наветренной стороне пластины.

Это согласуется с выводами работ [1, 6, 7]. Одновременно линия растекания на конусе перемещается в плоскость симметрии подветренной стороны тела.

На рис. 8.4 приведено сопоставление результатов расчета в рамках уравнений Навье–Стокса с имеющимися экспериментальными данными для наветренной поверхности треугольной пластины с затупленными кромками в сечении $x/R = 33$ при угле отклонения пластины относительно потока $\delta = 10°$ и числе $\mathbf{M}_\infty = 14$ [1]. Отмечается хорошее совпадение с точностью $\sim 5\%$

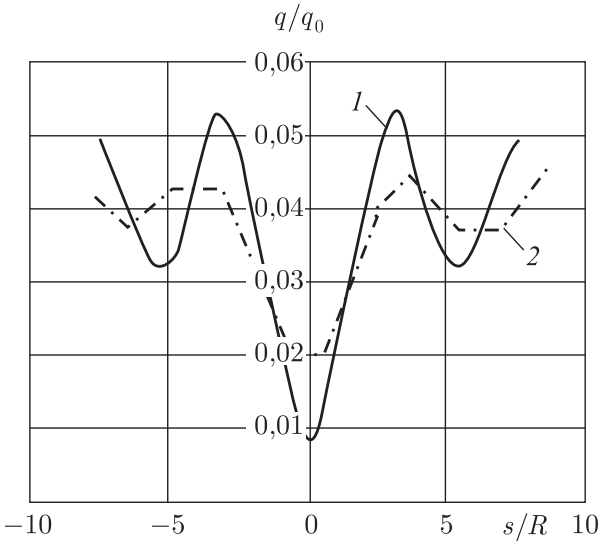


Рис. 8.4. Изменение тепловых потоков в поперечном сечении на наветренной стороне треугольной затупленной пластины ($\mathbf{M}_\infty = 14$, $\mathbf{Re}_\infty = 10^7$, $R = 0{,}26$ см, $T_\infty = 30$ К, $\delta = 10°$); *1* — настоящий расчет, *2* — эксперимент [1]

рассчитанных и экспериментально измеренных пиковых значений тепловых потоков. Места их расположения в расчете и в эксперименте также хорошо совпадают ($s/R \approx 4$). Заметное отличие расчета и эксперимента наблюдается в плоскости симметрии с наветренной стороны пластины ($s/R = 0$) в области минимальных тепловых потоков, где расчет дает значение тепловых потоков в 2 раза ниже. Столь заметное отличие возможно связано с погрешностью определения в эксперименте тепловых потоков при малых их величинах [7].

На рисунках 8.5 и 8.6 представлены результаты расчетов тепловых потоков на наветренной поверхности пластины и на поверхности конуса при угле атаки $\alpha = 5°$ для различных чисел $\mathbf{M}_\infty$ и чисел $\mathbf{Re}_\infty$.

На рис. 8.5 приведены данные пиковых значений тепловых потоков на линиях растекания для наветренной поверхности пластины и боковой поверхности конуса при числах $\mathbf{M}_\infty = 10$, 15 и 20 и числе $\mathbf{Re}_\infty = 0{,}8 \cdot 10^6$. Результаты показывают, что с ростом числа $\mathbf{M}_\infty$ изменения тепловых потоков на наветренной поверхности пластины и на боковой поверхности конуса имеют противоположные тенденции: на пластине они увеличиваются, а на конусе

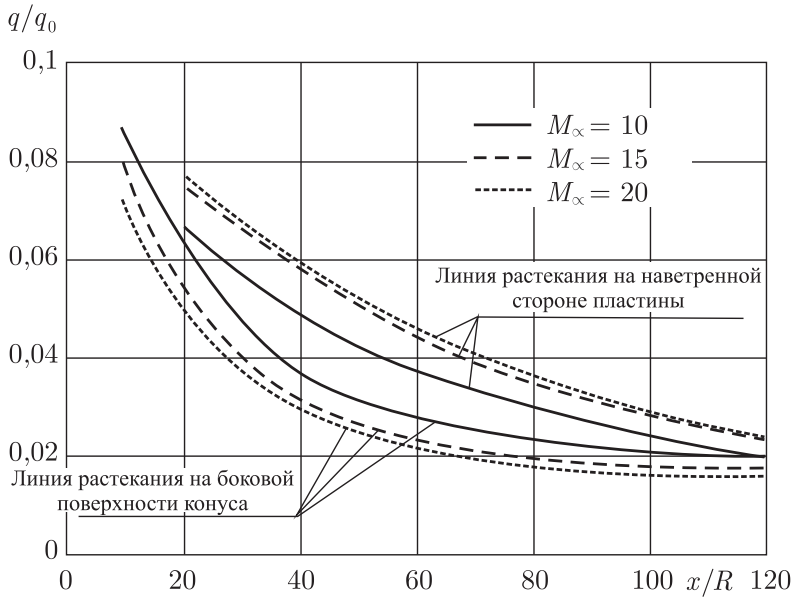


Рис. 8.5. Распределения относительных тепловых потоков на линиях растекания с наветренной стороны на пластине и с подветренной стороны на конусе при различных числах $\mathbf{M}_\infty$ ($\mathbf{Re}_\infty = 0{,}8 \cdot 10^6$, $R = 0{,}26$ см, $T_\infty = 30$ К, $\alpha = 5°$)

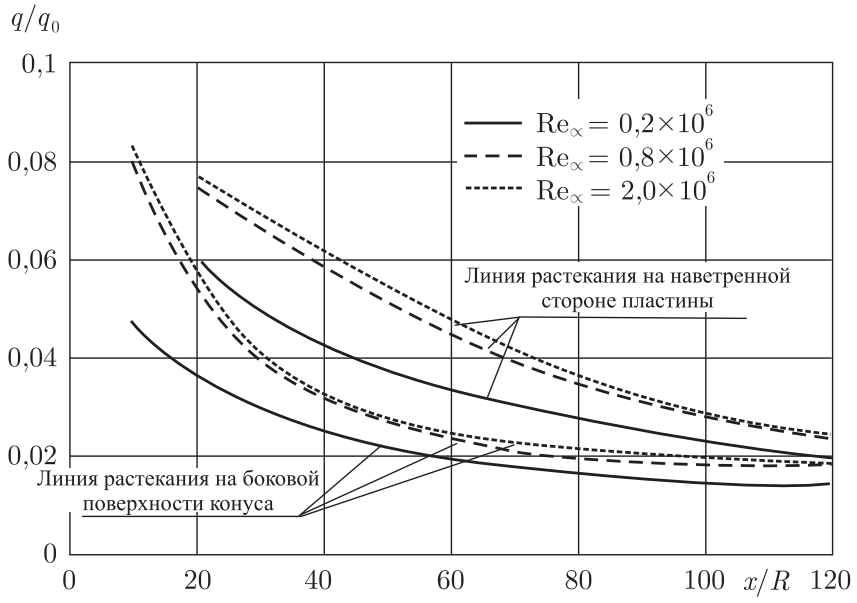


Рис. 8.6. Распределения относительных тепловых потоков на линиях растекания с наветренной стороны на пластине и с подветренной стороны на конусе при различных числах $\mathbf{Re}_\infty$ ($\mathbf{M}_\infty = 15$, $R = 0{,}26$ см, $T_\infty = 30$ К, $\alpha = 5°$)

уменьшаются. Видно также, что при $\mathbf{M}_\infty \geqslant 15$ наступает гиперзвуковая стабилизация течения. Несмотря на то, что конус расположен на подветренной поверхности треугольной пластины, тем не менее, тепловые потоки на его боковой поверхности достаточно высокие, а в районе $x/R \approx 10$ и $x/R \geqslant 110$ они практически соизмеримы с максимальными тепловыми потоками на наветренной стороне пластины.

На рис. 8.6 представлены аналогичные результаты по уровню теплообмена в тех же зонах рассматриваемой конфигурации при числе $\mathbf{M}_\infty = 15$ для чисел $\mathbf{Re}_\infty = 0{,}2 \cdot 10^6$, $0{,}8 \cdot 10^6$ и $2{,}0 \cdot 10^6$. Отмечается стабилизация изменения тепловых потоков при числах $\mathbf{Re}_\infty \geqslant 0{,}8 \cdot 10^6$. Тенденция изменения тепловых потоков на наветренной поверхности пластины и на боковой поверхности конуса при увеличении чисел $\mathbf{Re}_\infty$ одинаковая — с ростом чисел $\mathbf{Re}_\infty$ тепловые потоки в обеих зонах увеличиваются, в отличие от тенденции изменения тепловых потоков в этих зонах при изменении чисел $\mathbf{M}_\infty$ (см. рис. 8.5) — там она противоположная.

Результаты, представленные на рисунках 8.1–8.6, получены для модели совершенного газа. Влияние модели газовой среды на особенности теплообмена с поверхностью демонстрирует рис. 8.7. На нем дано сравнение распределений относительных тепловых потоков в поперечных сечениях для совершенного газа и химически реагирующего воздуха при $\mathbf{M}_\infty = 14$, $\mathbf{Re}_\infty = 10^7$, $R = 4{,}5$ см, $T_\infty = 250$ К, $\alpha = 5°$.

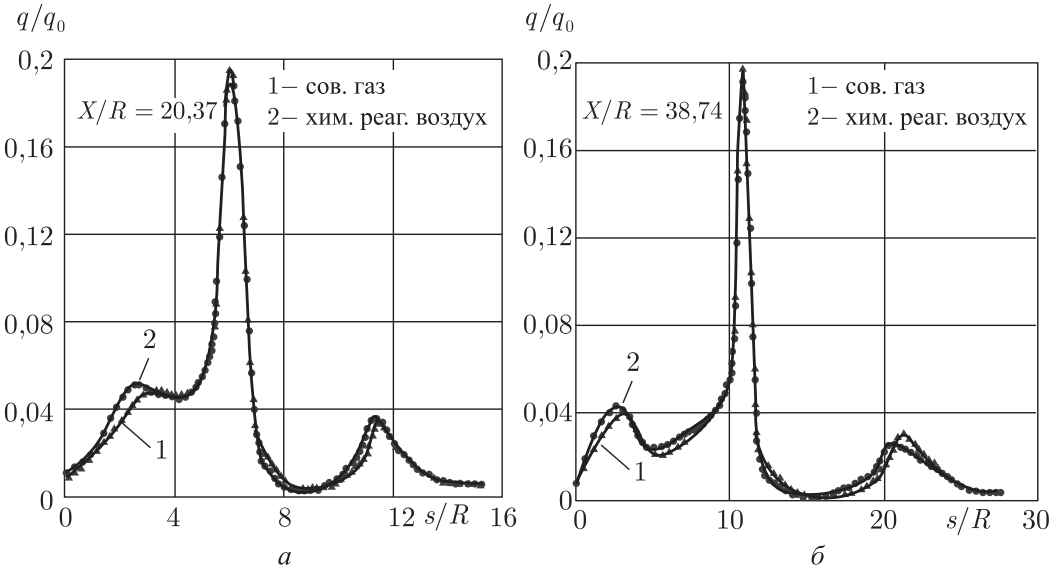


Рис. 8.7. Сравнение распределений относительных тепловых потоков в поперечных сечениях тела для модели совершенного газа (*1*) и химически неравновесного воздуха (*2*) ($\mathbf{M}_\infty = 14$, $\mathbf{Re}_\infty = 10^7$, $R = 4{,}5$ см, $T_\infty = 250$ К, $\alpha = 5°$)

Для химически неравновесной модели сохраняются зоны аномального нагрева на наветренной стороне пластины и на конической поверхности с подветренной стороны тела. Влияние моделей газовой среды на представленные величины наблюдается лишь в зонах аномального нагрева. Отметим, что почти полная рекомбинация атомов воздушной смеси в пограничном слое у тела в зонах повышенного теплообмена, начиная с некоторого расстояния от носка компоновки, делает практически неразличимыми распределения тепловых потоков для идеально каталитической и некаталитической поверхностей при рассматриваемых условиях обтекания. По сравнению с совершенным газом происходит незначительное смещение к плоскости симметрии области повышенных значений теплового потока с наветренной стороны пластины. Это связано с уменьшением отхода головной ударной волны от поверхности тела в случае модели химически реагирующего воздуха и потому более «ранним» (вдоль продольной оси тела) ее взаимодействием с кромкой пластины. Аналогичное смещение, но в противоположную сторону, наблюдается и с подветренной стороны для зон повышенного нагрева на конической поверхности.

Заключение

Проведенное в рамках полных уравнений Навье–Стокса численное исследование гиперзвукового обтекания пространственной конфигурации, состоящей из связки кругового конуса и треугольной пластины с затупленными кромками, подтвердило наличие особенностей в теплообмене на наветренной стороне компоновки, обнаруженных ранее для треугольной пластины с затупленными передними кромками в экспериментах и в численных расчетах в некотором диапазоне значений параметров задачи. Выявлена сложная вихревая картина течения около тела с подветренной стороны, зависящая также от параметров обтекания и обусловленная взаимодействием потоков от пластины и конуса, приводящая к образованию линии растекания с повышенным теплообменом на подветренной стороне пластины. В некотором диапазоне углов атаки обнаружены области локального повышения тепловых потоков на конусе, связанные с растеканием газа на конической поверхности. Установлено, что относительные тепловые потоки вдоль поверхности тела, в том числе и в зонах повышенного нагрева, близки для моделей совершенного газа и химически неравновесного воздуха при рассмотренных условиях обтекания.

Установлены предельные значения чисел Маха и Рейнольдса, превышение которых не меняет пиковые значения относительных тепловых потоков к поверхности рассмотренной конфигурации в зонах их усиления.

Список литературы

1. *Губанова О.И., Землянский Б.А., Лесин А.Б.* и др. Аномальный теплообмен на наветренной стороне треугольного крыла с затупленным носком при гиперзвуковом обтекании // Аэродинамика Воздушно–Космических систем, ЦАГИ. 1992. С.188–196.
2. *Afonina N.E., Gromov V.G., Sakharov V. I.* HIGHTEMP technique for high temperature gas flows simulations // Proc. 5th European Symposium on Aerothermodynamics for Space Vehicles, Cologne, Germany. 2005. SP 563. P. 323–328.
3. *Башкин В.А.* Треугольные крылья в гиперзвуковом потоке // —М.: Машиностроение. 1984. 136 с.
4. *Минайлос А.Н.* Расчет сверхзвукового обтекания крыльев с учетом сходящих с кромок тангенциальных разрывов в рамках модели, использующей систему уравнений Эйлера // Изв. РАН МЖГ. 1978. № 1. С.78–89.
5. *Косых А.П., МинайлосА.Н.* Влияние поперечной кривизны нижней поверхности на поле конического сверхзвукового течения у дельтавидного аппарата // Изв. РАН МЖГ. 1978. № 3. С. 103–110.
6. *Лесин А.Б., Лунев В.В.* О пиковых тепловых потоках на треугольной пластине с притупленным носком в гиперзвуковом потоке // Изв. РАН. МЖГ. 1994. № 2 . С. 131–137.
7. *Kovalev R., Vlasov V.* Numerical analysis of heat transfer on windward plane of a blunt delta wing // European conference for aerospace sciences (EUCASS). Moscow. 2005.
8. Термодинамические свойства индивидуальных веществ. Справочное издание в 4-х томах. Изд-во «Наука», Москва, 1979.
9. *Н.Ф. Краснов* Аэродинамика. Часть 1. Основы теории, аэродинамика профиля и крыла. — М.: Изд-во Высшая школа. 1980.
10. *Ибрагимова Л.Б., Смехов Г.Д., Шаталов О.П.* Константы скорости диссоциации двухатомных молекул в термически равновесных условиях. Изв. РАН. МЖГ. 1999. № 1. С. 181–186.
11. *Лосев С.А., Макаров В.Н., Погосбекян М.Ю.* Модель физико-химической кинетики за фронтом сильной ударной волны в воздухе // Изв. РАН. МЖГ. 1995. № 2. С. 169–181.
12. *Hirschfelder J.O., Curtiss C.F., Bird R.B.* Molecular Theory of Gases and Liquids, John Wiley, New York. 1954.
13. *Колесников А.Ф., Тирский Г.А.* Соотношения Стефана - Максвелла для диффузионных потоков плазмы в магнитном поле // Изв. АН СССР. МЖГ. 1984. № 4. С. 148–154.
14. *Reid R.C., Prausnitz J.M.* Sherwood T.K. The Properties of Gases and Liquids, McGraw-Hill Book Company, New York. 1977.
15. *Afonina N.E. Gromov V.G.* Thermochemical Nonequilibrium Computations for a MARS EXPRESS Probe // Proceedings of the 3-d European Symposium on Aerothermodynamics for Space Vehicles, ESTEC, Noordwijk. 1998. P. 179–186.
16. *Карловский В.Н., Одинцев О.В., Сахаров В.И.* Алгоритм построения разностных сеток в задачах сверхзвуковой аэродинамики // в сб. Современные газодинамические и физико-химические модели гиперзвуковой аэродинамики и теплообмена, под ред. акад. Л.И. Седова. Изд-во Моск. Ун-та. Часть 2. 1995. С. 66–78.

9

МОДЕЛЬ ЧАСТИЧНОГО ХИМИЧЕСКОГО РАВНОВЕСИЯ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ГИПЕРЗВУКОВОГО ОБТЕКАНИЯ ТЕЛ ВЯЗКИМ ГАЗОМ

В. И. Сахаров, Г. А. Тирский
Научно-исследовательский институт механики МГУ им. М.В. Ломоносова

Модель частичного химического равновесия разработана и применена для исследования задач гиперзвуковой аэродинамики в рамках полных уравнений Навье–Стокса (Н–С). На примере обтекания сферы химически неравновесным потоком воздуха и смеси газов, моделирующей марсианскую атмосферу, дано сравнение результатов, полученных в рамках модели частичного химического равновесия, с численным решением задачи в полной диффузионной постановке и в рамках уравнений вязкого ударного слоя. Исследован диапазон применимости модели частичного химического равновесия для решения задач в условиях входа тел по планирующим траекториям в атмосферы Земли и Марса.

Введение

Теоретические исследования по аэродинамике и теплообмену представляют собой важнейшее звено в создании образцов космической техники. Математическое моделирование в рамках аэротермодинамики является альтернативным аэродинамическому эксперименту (как наземному, так и летному) средством накопления баз данных для проектирования летательных аппаратов (ЛА).

Одна из ключевых проблем при этом моделирование защиты спускаемых аппаратов многоразового использования от интенсивных тепловых нагрузок при их движении в атмосфере Земли или других планет. При спуске космических аппаратов «Space Shuttle» и «Буран» по планирующей траектории в атмосфере Земли наиболее теплонапряженным является участок траектории на высотах от 80 км до 60 км, где скорость аппаратов изменяется от 8 км/с до 5,5 км/с. При столь высоких скоростях полета около поверхности аппаратов образуется высокотемпературная область течения газа, в которой происходят различные физико-химические процессы: возбуждение внутренних степеней свободы, химические реакции, ионизация и т.д. Эти процессы не только существенно влияют на характеристики полей течений, но и обуславливают теплообмен с поверхностью гиперзвуковых ЛА, меняют их аэродинамические характеристики [1–4]. В этой области в сильной степени проявляются также эффекты вязкости и теплопроводности. Поэтому важным фактором при

решении задач является правильный выбор физико-химических моделей для описания реальных процессов в сильно нагретой области потока около аппарата. Имеющиеся результаты численных расчетов обтекания затупленных по сфере конусов, параболоидов, гиперболоидов, реальных летательных аппаратов и сравнение их с экспериментальными данными позволяют заключить, что для теплонапряженного участка планирующей траектории необходимо учитывать неравновесный характер протекания только химических реакций. Вращательные и колебательные степени свободы молекул можно считать возбужденными равновесно с поступательными. Отметим, что при решении подобных задач важнейшим фактором, влияющим на расчет теплообмена с поверхностью ЛА, является выбор модели взаимодействия химически реагирующей газовой смеси с поверхностью [5].

При численном моделировании гиперзвукового обтекания возникают проблемы, которые характерны для описания высокотемпературных химически реагирующих течений. Во-первых, постановка задачи включает масштабы времен химических процессов, которые часто много меньше характерного газодинамического времени, связанного с конвекцией и диффузией. Поэтому система дифференциальных уравнений становится жесткой и требуются специальные приемы для ее численного решения, при этом жесткость системы увеличивается при стремлении реакций к полному равновесию. Во-вторых, число уравнений химической кинетики и количество неизвестных функций (концентраций компонентов и их диффузионных потоков) возрастают по мере усложнения состава смеси. В-третьих, с увеличением числа компонентов возрастает число химических реакций, которые необходимо учитывать. При этом механизмы некоторых из них неизвестны, а необходимые константы скоростей, особенно быстрых реакций, зачастую ненадежны. Эти проблемы ведут к резкому увеличению времени расчетов подобных задач и затрудняют использование их результатов в инженерных разработках, особенно в пространственном случае.

В ряде случаев эти проблемы можно решить, используя концепцию частичного химического равновесия (квазиравновесия), предположив, что химические реакции в смеси резко различаются по скоростям, и более быстрые реакции постоянно протекают равновесно, в то время как более медленные — с конечной скоростью. В этой модели часть дифференциальных уравнений диффузии по наибольшему числу быстрых независимых реакций вырождается в алгебраические соотношения детального химического равновесия. Источники образования компонентов в правых частях оставшихся уравнений диффузии для новых неизвестных функций (медленных переменных) не содержат членов, связанных с быстрыми реакциями [6–9].

В работе [10] для теплонапряженного участка траектории на основе модели частичного химического равновесия исследовано течение диссоциированного и частично ионизованного воздуха на линии торможения около затупленного тела в рамках уравнений пограничного слоя. Использование данной

модели основано на предварительном анализе чисел Дамкелера для всей системы химических реакций, протекающих в газовой фазе. Такой анализ, проведенный для пристенной области течения в пограничном слое, позволил ввести в качестве новых неизвестных функций одну медленную переменную и ее диффузионный поток. Это существенно упростило диффузионную часть задачи, сведя ее к двум дифференциальным уравнениям диффузии для этой переменной и химического элемента кислорода (вместо девяти исходных) и алгебраическим соотношениям детального химического равновесия. Аналогичный подход использовался в задачах горения [11, 12]. В работах [13, 14] в рамках частично равновесного подхода решалась проблема вычисления источника образования компонентов в равновесных реакциях. В [15, 16] модель частичного химического равновесия применена для решения задач в рамках уравнений Н–С, где исследовано обтекание сферы при движении ее по планирующей траектории входа в атмосфере Земли.

Основная идея другого подхода к упрощению кинетических моделей (так называемое квазистационарное приближение) состоит в выделении квазистационарных блоков химических реакций, обобщенные скорости которых близки к равновесным [17, 18]. По своей сути это приближение сродни методу квазистационарных концентраций [19–21] и теории стационарных реакций [21–23].

Существует ряд работ, в которых производится сокращение большого числа химических стадий после построения иерархии по степени их важности, основанной на сопоставлении скоростей отдельных процессов [24, 25].

Проблемы жесткости, возникающие при совместном решении газодинамических уравнений и уравнений химической кинетики, приводящие к чрезвычайно малым шагам интегрирования, могут быть ослаблены использованием неявных процедур расчета [26].

Методы, в которых конвективные члены вычисляются явно, а химические источниковые члены — неявно, предложены, например, в работах [27–29].

При численном исследовании гиперзвукового обтекания ЛА на различных участках траектории спуска для правильного описания движения газовой смеси около их поверхности могут использоваться различные газодинамические модели. Так модель свободномолекулярного потока корректно описывает течение газа около спускаемых аппаратов на высотах выше 100 км. На теплонапряженном участке траектории (80–60 км) и ниже используется модель сплошной среды. Решение задачи обтекания в рамках континуального подхода может быть получено с использованием уравнений Н–С — например, [30, 31], а на отдельных участках этой траектории на основе их упрощенных моделей: уравнений тонкого (ТВУС) [32] и полного вязкого ударного слоев (ПВУС) [33], параболизованных уравнений ПУНС [34, 35], модели невязкого течения [36–38] и пограничного слоя (ПС) [39]. Выбор той или иной модели осуществляется на основе предварительных, например, асимптотических оценок применимости упрощенных моделей и на основе

сравнений результатов решений друг с другом, а также с экспериментальными и летными данными.

В данной работе представлены результаты численного решения задачи обтекания сферы в рамках полных уравнений Н–С и 11-ти компонентной модели химически реагирующего воздуха [40] на части планирующей траектории спуска корабля многоразового использования «Space Shuttle». Проведено сравнение с результатами решения этой же задачи в рамках уравнений полного вязкого ударного слоя [33]. Поставленная задача также решена в рамках уравнений Н–С с использованием модели частичного химического равновесия. Аналогичная задача решена для гиперзвукового движения сферы в атмосфере, моделирующей марсианскую. Исследован диапазон применимости модели частичного химического равновесия для описания течений около лобовых частей спускаемых летательных аппаратов в атмосфере Земли и Марса.

1. Постановка задачи

Интегральная форма нестационарной системы уравнений Н–С, применяемая для расчета химически неравновесных течений вязкого газа в плоском или цилиндрическом случае ($\nu = 0{,}1$ соответственно) в системе координат $\mathbf{r}(x, y)$, имеет вид:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_S \mathbf{U} y^\nu dS + \int\limits_{\delta S} \mathbf{n}\cdot\mathbf{F} y^\nu dl = \int\limits_S \mathbf{\Omega} y^\nu dS. \tag{9.1}$$

Здесь S — фиксированная область в плоскости (x, y), δS — его граница, $\mathbf{n} = (n_x, n_y)$ — вектор единичной нормали к δS, $\mathbf{U}$ — вектор консервативных переменных в единичном объеме, $\mathbf{F} = \mathbf{F}^{inv} + \mathbf{F}^{vis}$ представляет сумму вязких и невязких потоков $\mathbf{U}$ через граничную поверхность объема, $\mathbf{\Omega}$ содержит источниковые члены. Вектор консервативных переменных $\mathbf{U}$, невязкие составляющие потоков $\mathbf{F}^{inv}$ и источниковый член $\mathbf{\Omega}$ являются функциями физических переменных $\mathbf{Z}$, которые определяются выбранной термохимической моделью среды. Вязкие потоки $\mathbf{F}^{vis}$ являются линейными функциями от производных по координатам переменных $\mathbf{Z}$ с коэффициентами, зависящими от $\mathbf{Z}$. Для рассматриваемой модели газовой среды переменные, входящие в (9.1), имеют следующие выражения

$$\mathbf{U} = \begin{Bmatrix} \rho\gamma_1 \\ \vdots \\ \rho\gamma_N \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho e_0 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{Bmatrix} \rho\mathbf{u}\gamma_1 \\ \vdots \\ \rho\mathbf{u}\gamma_N \\ \rho\mathbf{u}u + p\mathbf{n}n_x \\ \rho\mathbf{u}v + p\mathbf{n}n_y \\ \rho\mathbf{u}h_0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{K}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{K}_N \\ \boldsymbol{\tau}_x \\ \boldsymbol{\tau}_y \\ \mathbf{q} \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{\Omega} = \begin{Bmatrix} \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_N \\ 0 \\ \dfrac{\nu\,(p + \tau_{\theta\theta})}{y^\nu} \\ 0 \end{Bmatrix}, \tag{9.2}$$

$$\mathbf{Z} = \{p, \mathbf{u}, T, \gamma_1 \dots \gamma_N\}^T,$$

$$h = \sum_{i=1}^{N} \gamma_i h_i, \quad e = \sum_{i=1}^{N} \gamma_i e_i, \quad e_0 = e + 0{,}5 \cdot (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}), \quad h_0 = e_0 + \frac{p}{\rho}.$$

Суммарный поток тепла $\mathbf{q}$, задается в виде

$$\mathbf{q} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial \mathbf{r}} + \sum_{i=1}^{N} \mathbf{K}_i h_i + \widehat{\boldsymbol{\tau}} \cdot \mathbf{u}.$$

Тензор вязких потоков импульса $\widehat{\boldsymbol{\tau}}$ имеет вид

$$\widehat{\boldsymbol{\tau}} = -\mu \left[\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{r}} \right) + \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{r}} \right)^T - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mathbf{u} \right) \widehat{\mathbf{I}} \right].$$

Здесь $\widehat{\mathbf{I}}$ — единичный тензор; μ — коэффициент вязкости; p — давление; ρ — плотность; u, v — декартовы компоненты вектора скорости $\mathbf{u}$; T — температура смеси; γ_i — мольно-массовые концентрации; e, h — энергия и энтальпия единицы массы газовой смеси; e_0, h_0 — полные энергия и энтальпия единицы массы газа; e_i, h_i — молярная внутренняя энергия и энтальпия i-ого компонента; ω_i — мольная скорость образования i-го компонента в единице объема во всех химических реакциях; N — число продуктов реакций; $\mathbf{K}_i$ — мольные диффузионные потоки продуктов реакций.

Для вычисления диффузионных потоков $\mathbf{K}_i$ используется закон бинарной [41] или многокомпонентной диффузии [42]. Для вычисления коэффициентов вязкости и теплопроводности газовой смеси — приближенные формулы Уилке–Васильевой [43].

Решение задачи ищется в области, ограниченной поверхностью тела; поверхностью, лежащей в невозмущенной области течения, на которой ставятся условия в набегающем потоке: p_∞, V_∞, T_∞, $\gamma_{1\infty}, \dots, \gamma_{N\infty}$; осью симметрии, где используются условия симметричного или антисимметричного отражения в зависимости от четности рассматриваемых функций и некоторой линией, лежащей вниз по потоку и имеющей пространственный тип (скорость по нормали к этой линии больше скорости звука) вне пограничного слоя около тела. На ней используются «мягкие» граничные условия экстраполяционного типа.

На поверхности непроницаемой и неразрушающейся стенки с возможными гетерогенными каталитическими реакциями ставятся следующие граничные условия:

$$u = v = 0, \quad q_n = \lambda \frac{\partial T}{\partial n} - \sum_{i=1}^{N} K_{in} h_i = \varepsilon \sigma_b T_W^4, \quad (\text{ либо } T = T_W) \qquad (9.3)$$
$$K_{in} = \dot{s}_i, \quad i = 1, \dots, N.$$

Здесь σ_b — постоянная Стефана–Больцмана; ε — степень черноты поверхности; T_W — температура поверхности; $\dot{s}_i$ — поверхностная скорость образования i-го компонента за счет гетерогенных реакций. Нижний индекс n

обозначает нормальную составляющую векторов. Полученную выше систему уравнений и граничных условий будем называть постановкой задачи с полной диффузионной моделью (полной диффузионной постановкой).

2. Модель частичного химического равновесия

Система химических реакций, протекающих одновременно в смеси может быть записана в виде:

$$\sum_{i=1}^{N} \nu'_{ij} A_i = \sum_{i=1}^{N} \nu''_{ij} A_i, \qquad j = 1, \dots R.$$

Здесь R — общее число химических реакций, ν'_{ij}, ν''_{ij} — стехиометрические коэффициенты реакций, A_i — символы основных веществ и продуктов реакций. Тогда мольная скорость образования i-го компонента в единице объема во всех химических реакциях равна:

$$\omega_i = \sum_{j=1}^{R} \Gamma_{ij} \left(\frac{\rho}{m}\right)^{\nu''_j} k_{rj} v_j, \quad \nu'_j = \sum_{i=1}^{N} \nu'_{ij}, \quad \nu''_j = \sum_{i=1}^{N} \nu''_{ij}.$$

Здесь $\mathbf{\Gamma} = \{\Gamma_{ij}\} = \{(\nu''_{ij} - \nu'_{ij})\}$ — матрица, составленная из стехиометрических коэффициентов реакций, в которой первый индекс i связан с номером продукта реакций, а второй, j с номером химической реакции,

$$v_j = K_{cj} \left(\frac{\rho}{m}\right)^{\nu'_j - \nu''_j} m^{\nu'_j} \prod_{i=1}^{N} \gamma_i^{\nu'_{ij}} - m^{\nu''_j} \prod_{i=1}^{N} \gamma_i^{\nu''_{ij}}$$

— отклонение от равновесия, $K_{cj} = \dfrac{k_{fj}}{k_{rj}}$ — константа равновесия, k_{fj} и k_{rj} — константы скоростей прямой и обратной j-ой реакции.

Проведем анализ безразмерных скоростей (чисел Дамкелера $-Dm_j$) протекания химических реакций

$$Dm_j = \frac{1}{\varepsilon_{gj}} = \frac{\tau}{\tau_{gj}} = k_{rj} \left(\frac{\rho}{m}\right)^{\nu''_j - 1} \cdot \tau.$$

Здесь τ_{gj} — характерные времена химических реакций; $\tau = R/V^*$ — характерное газодинамическое время, V^* — характерная скорость, R — характерный размер (радиус затупления).

Предположим, что реакции в газовой смеси протекают с существенно различными скоростями и можно выделить группы быстрых и медленных реакций. Обозначим через R_f, R_s общее число быстрых ($\varepsilon_{gj} \ll 1$) и медленных ($\varepsilon_{gj} \geqslant 1$) реакций в смеси ($R_f + R_s = R$), r_f, r_s — число быстрых и медленных независимых в стехиометрическом отношении реакций ($r_f < r$, $r_f + r_s = r$), $r = N - N_e$ — число независимых в стехиометрическом отношении химических реакций, N_e — число химических элементов. Систему из r независимых реакций выберем таким образом, чтобы r_f было максимальным.

Представим ε_{gj} как $\varepsilon_{gj} = \varepsilon\,(\varepsilon_{gj}/\varepsilon)$ для $j \leqslant R_f$ (для быстрых реакций). Здесь $\varepsilon \ll 1$ (малый параметр) и $(\varepsilon_{gj}/\varepsilon) \sim 1$ (конечная величина). Тогда вектор скоростей образования компонентов смеси $\mathbf{w} = (\omega_1, \ldots, \omega_N)^T$ примет вид:

$$\mathbf{w} = \mathbf{\Gamma Y}, \quad \mathbf{Y} = \frac{\rho}{m}\begin{vmatrix} \frac{1}{\varepsilon}\mathbf{Y}^1 \\ \mathbf{Y}^2 \end{vmatrix},$$

$$Y_j^1 = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_{qj}} v_j \quad (j = 1, \ldots, R_f), \qquad Y_j^2 = \frac{1}{\varepsilon_{qj}} v_j \quad (j = R_f + 1, \ldots, R).$$

Первый индекс элемента Γ_{ij} стехиометрической матрицы $\mathbf{\Gamma}$ связан с номером продукта реакций, а второй — с номером химической реакции. Матрица $\mathbf{\Gamma}$ имеет размерность $(r + N_e) \times R$:

$$\mathbf{\Gamma} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \overbrace{\quad}^{R_f} & \overbrace{\quad}^{R_s} \end{array} \\ \left|\begin{array}{cc} \mathbf{\Gamma}_{11} & \mathbf{\Gamma}_{12} \\ \mathbf{\Gamma}_{21} & \mathbf{\Gamma}_{22} \\ \mathbf{\Gamma}_{31} & \mathbf{\Gamma}_{32} \end{array}\right| \begin{array}{l} \}r_f \\ \}r_s \\ \}N_e \end{array} \end{array} \quad \operatorname{rank}\mathbf{\Gamma} = r, \quad \operatorname{rank}\mathbf{\Gamma}_{11} = r_f.$$

Матрица стехиометрических коэффициентов $\mathbf{\Gamma}$ построена таким образом, что строки блока $\mathbf{\Gamma}_{21}$ являются линейными комбинациями строк блока $\mathbf{\Gamma}_{11}$:

$$\mathbf{\Gamma}_{21} = \mathbf{A}\mathbf{\Gamma}_{11}, \quad \mathbf{A} = \mathbf{\Gamma}_{21}(\mathbf{\Gamma}_{11})^T\left[\mathbf{\Gamma}_{11}(\mathbf{\Gamma}_{11})^T\right]^{-1}, \quad \det\left[\mathbf{\Gamma}_{11}(\mathbf{\Gamma}_{11})^T\right] \neq 0.$$

Проведем преобразования уравнений диффузии (первые N уравнений, входящие в (9.1)), умножая их слева на матрицу $\mathbf{T}$ (см. ниже). При этом соответствующим образом преобразуется вектор концентраций продуктов реакций $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, \ldots, \gamma_N)^T$:

$$\boldsymbol{\eta} = \mathbf{T}\boldsymbol{\gamma},$$

$$\mathbf{T} = \left|\begin{array}{ccc} \mathbf{E}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{A} & \mathbf{E}_2 & \mathbf{0} \\ n_{11} & \ldots & n_{1N} \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ n_{N_e 1} & \ldots & n_{N_e N} \end{array}\right| \begin{array}{l} \}r_f \\ \}r_s \\ \left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array}\right\}N_e \end{array}, \quad \boldsymbol{\eta} = \left|\begin{array}{c} \boldsymbol{\eta}^f \\ \boldsymbol{\eta}^s \\ \boldsymbol{\eta}^z \end{array}\right|, \quad \mathbf{I} = \left|\begin{array}{c} \mathbf{I}^f \\ \mathbf{I}^s \\ \mathbf{I}^z \end{array}\right| \begin{array}{l} \}r_f \\ \}r_s \\ \}N_e \end{array}.$$

Матрица $\mathbf{T}$ имеет постоянные компоненты. Единичные матрицы $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{E}_2$ имеют размерности $(r_f \times r_f)$ и $(r_s \times r_s)$, а n_{ki} — обозначает число химических элементов с индексом k в i-ом компоненте. Матрица, составленная из этих элементов и входящая в $\mathbf{T}$, имеет размерность $(N_e \times N)$.

Покомпонентная форма преобразования будет следующей:

$$\eta_i^f = \gamma_i, \quad I_i^f = K_i, \quad \eta_l^s = -\sum_{i=1}^{r_f} \alpha_{li}\gamma_i + \gamma_l, \quad I_l^s = -\sum_{i=1}^{r_f} \alpha_{li}K_l + K_i, \quad (\alpha_{li}) = \mathbf{A},$$

$$\eta_k^z = \sum_{i=1}^{N} n_{k-r,i}\gamma_i, \quad I_k^z = \sum_{i=1}^{N} n_{k-r,i}K_i,$$

$$(i = 1, \ldots, r_f, \quad l = r_f + 1, \ldots, r, \quad k = r + 1, \ldots, N)\,.$$

Функции η_l^s, являющиеся линейными комбинациями концентраций, названы медленными переменными, η_l^z — соответствует химическим элементам смеси. В результате проведенных преобразований уравнения диффузии из (9.1) примут вид:

$$\varepsilon\left(\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_S y^\nu \rho\boldsymbol{\eta}^f dS + \int\limits_{\delta S} y^\nu\left(\rho\boldsymbol{\eta}^f\,\mathbf{u}+\mathbf{I}^f\right)dl\right) - \int\limits_S y^\nu \mathbf{w}^f dS = 0, \tag{9.4}$$

$$\mathbf{w}^f = \boldsymbol{\Gamma}_{11}\mathbf{Y}^1 + \varepsilon\boldsymbol{\Gamma}_{12}\mathbf{Y}^2,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_S y^\nu \rho\boldsymbol{\eta}^s dS + \int\limits_{\delta S} y^\nu\left(\rho\boldsymbol{\eta}^s\mathbf{u}+\mathbf{I}^s\right)dl - \int\limits_S y^\nu \mathbf{w}^s dS = 0, \tag{9.5}$$

$$\mathbf{w}^s = \left(\boldsymbol{\Gamma}_{22} - \mathbf{A}\boldsymbol{\Gamma}_{12}\right)\mathbf{Y}^2,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_S y^\nu \rho\boldsymbol{\eta}^z dS + \int\limits_{\delta S} y^\nu\left(\rho\boldsymbol{\eta}^z\,\mathbf{u}+\mathbf{I}^z\right)\cdot dl = 0. \tag{9.6}$$

Заметим, что $\mathbf{w}^s$ зависят от массовых скоростей образования компонентов только в медленных химических реакциях.

При $\varepsilon \to 0$ уравнения (9.4) в случае частичного химического равновесия вырождаются в алгебраические соотношения детального химического равновесия для r_f быстрых независимых реакций

$$\mathbf{w}^f = 0 \Leftrightarrow \nu_i = 0 \quad (i = 1, \ldots, r_f)\,. \tag{9.7}$$

Граничные условия для уравнений (9.5), (9.6) в набегающем потоке состоят в задании $\eta_{l\infty}^s$ и $\eta_{k\infty}^z$, а граничные условия на теле следуют из (9.3):

$$I_{ln}^s = -\sum_{i=1}^{r_f}\alpha_{li}\frac{\dot{s}_i}{m_i} + \frac{\dot{s}_l}{m_l}, \quad I_{kn}^z = 0, \tag{9.8}$$

$$(l = r_f + 1, \ldots,\ r\,,\ k = r+1, \ldots, N)\,.$$

Итак, в (9.1) полная система уравнений диффузии заменяется на уравнения диффузии для медленных переменных (9.5), элементов (9.6) и соотношения детального химического равновесия (9.7).

Замечание. Краевая задача (9.5), (9.6), (9.8) содержит только уравнения для главных членов внешнего асимптотического разложения, поэтому для удовлетворения всех граничных условий необходимо исследовать систему уравнений для пограничных функций [45].

3. Сравнительный анализ решений задачи в рамках уравнений Н–С и ПВУС

Для расчета обтекания сферы вязким химически реагирующим воздухом применялась технология численного моделирования высокотемпературных течений газа [31], основанная на комплексе программ численного

интегрирования уравнений Н–С и специальных программ-генераторов, взаимодействующих с базами данных по термодинамическим и переносным свойствам индивидуальных газовых веществ. Учитывались 11 нейтральных и ионизованных компонентов воздушной смеси ($N = 11$): O, N, O_2, NO, N_2, O^+, N^+, NO^+, O_2^+, N_2^+ и e^-.

Учтем 33 реакции, протекающие в высокотемпературном потоке:

1. $O+N_2 = NO+N$,	2. $O+NO=O_2+N$,	3. $O+O=O_2^++e$,
4. $N+N=N_2^++e$,	5. $N+O=NO^++e$,	6. $N^++O_2=O+NO^+$,
7. $O^++N_2=N+NO^+$,	8. $N_2^++NO=N_2+NO^+$,	9. $N^++NO=N+NO^+$,
10. $O^++NO=O+NO^+$,	11. $O_2^++NO=O_2+NO^+$,	12. $N_2^++O_2=N_2+O_2^+$,
13. $N^++O_2=N+O_2^+$,	14. $O^++O_2=O+O_2^+$,	15. $N_2^++O=N_2+O^+$,
16. $N^++O=N+O^+$,	17. $N_2^++N=N_2+N^+$,	18. $N_2^++O_2=NO+NO^+$,
19. $O_2^++N=O+NO^+$,	20. $N_2^++O=N+NO^+$,	21. $O_2^++N_2=NO+NO^+$,
22. $N^++NO=N_2+O^+$,	23. $N^++O_2=NO+O^+$,	24. $O^++NO=N+O_2^+$,
25. $N^++NO=O+N_2^+$,	26. $O_2+M=O+O+M$,	27. $N_2+M=N+N+M$,
28. $NO+M=N+O+M$,	29. $N_2+e=N_2^++e+e$,	30. $N+K=N^++e+K$,
31. $O+K=O^++e+K$,	31. $O_2+e=O_2^++e+e$,	33. $NO+e=NO^++e+e$,

$$M = O_2,\ N_2,\ O,\ N,\ NO, \quad K = e,\ O,\ N.$$

Числовые значения констант 49-ти химических реакций, протекающих в высокотемпературной воздушной смеси, заимствованы из [40]. Термодинамические и термохимические данные для рассматриваемых компонентов взяты из работы [44]. Проведено сравнение численных решений задачи обтекания сферы вязким химически реагирующим воздухом, полученных в рамках уравнений Н–С и ПВУС [33] для условий, соответствующих четырем точкам теплонапряженной части траектории спуска корабля многоразового использования «Space Shuttle». Использованные в расчетах характеристики набегающего потока и соответствующие им значения определяющих параметров приведены в табл. 9.1. Температура поверхности тела предполагалась постоянной $T_W = 1350$ K или определялась из баланса теплового потока (9.3) для равновесно излучающей стенки. Поверхность тела считалась либо некаталитической, либо идеально каталитической. Расчеты в рамках уравнений Н–С проводились, в основном, на сетке, содержащей 30 лучей с 40 точками на каждом, а также 50×80, в рамках ПВУС -30×50.

Далее на рисунках представлены распределения следующих безразмерных величин: $p/\rho_\infty V_\infty^2$ — давления, T/T_∞ — температуры, $c_i = m_i\gamma_i$ — основных массовых концентраций компонентов воздуха в зависимости от безразмерной нормальной координаты к поверхности сферы y. Данные численных расчетов приведены для двух значений угловой координаты $\Theta = 1{,}8°$ и $80{,}5°$.

Таблица 9.1.

H, км	V_∞, км/с	ρ_∞, г/см^3	T_∞, К	$\mathbf{M}_\infty$	$\mathbf{Re}_\infty$	R, см
54	4,56	$0{,}411\cdot10^{-6}$	268	13,86	5631 56310	5 50
61,9	6,19	$0{,}998\cdot10^{-7}$	247	19,59	1963 19630	5 50
74,9	7,71	$0{,}392\cdot10^{-7}$	198	25,28	1039 10390	5 50
85	7,56	$0{,}6365\cdot10^{-8}$	198	26,66	1778	50

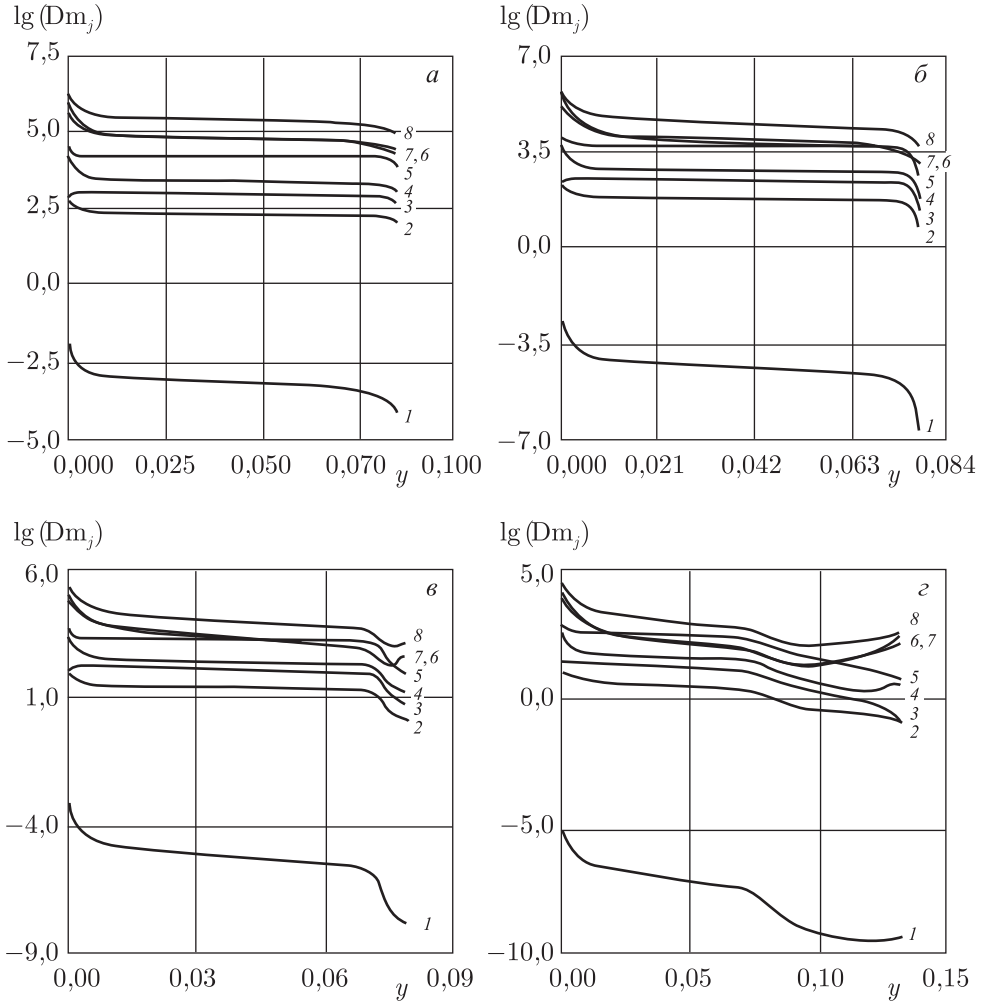


Рис. 9.1. Распределение на линии торможения чисел Дамкелера независимых реакций: $H = 54$ км (*а*), 61,9 км (*б*), 74,5 км (*в*), 85 км (*г*) соответственно; $R = 50$ см. Цифры на графиках — номера независимых реакций

Треугольные маркеры на всех рисунках соответствуют расчетам в рамках уравнений ВУС, а кружки — Н–С.

Анализ полученных результатов позволяет заключить, что для сферы с радиусом 50 см и всех рассмотренных высот $H = 54 - 75$ км решения задачи, полученные в рамках полных уравнений Н–С и уравнений ПВУС, практически совпадают. Совпадение наблюдается во всей области течения от линии торможения вплоть до миделевого сечения не только по всем газодинамическим параметрам, но и по значениям концентраций диссоциированного и частично ионизованного воздуха (рис. 9.2, 9.3).

Для сферы с радиусом $R = 5$ см для высоты 54 км ($\mathbf{Re}_\infty = 5631$) решения задачи в рамках Н–С и ПВУС также близки по всем параметрам. Для высоты 61,9 км ($\mathbf{Re}_\infty = 1963$) различие наблюдается в основном в размерах возмущений области течения около сферы

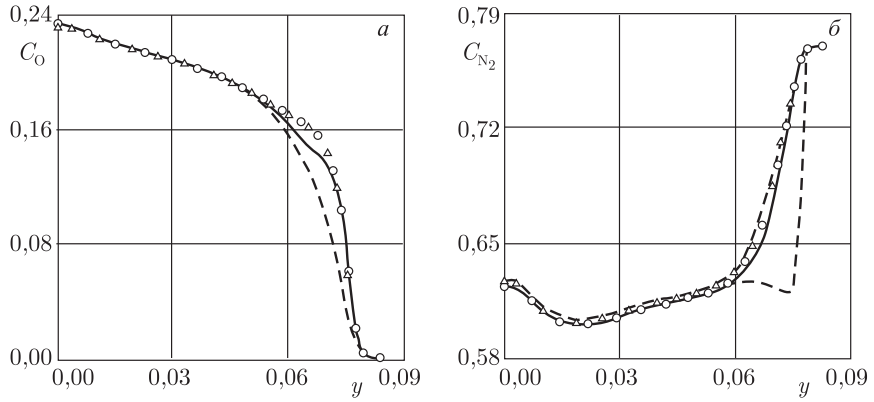


Рис. 9.2. Распределения массовых концентраций компонентов в зависимости от расстояния по нормали к поверхности сферы. $H = 61{,}9$ км, $R = 50$ см, $\theta = 1{,}8°$, поверхность некаталитическая

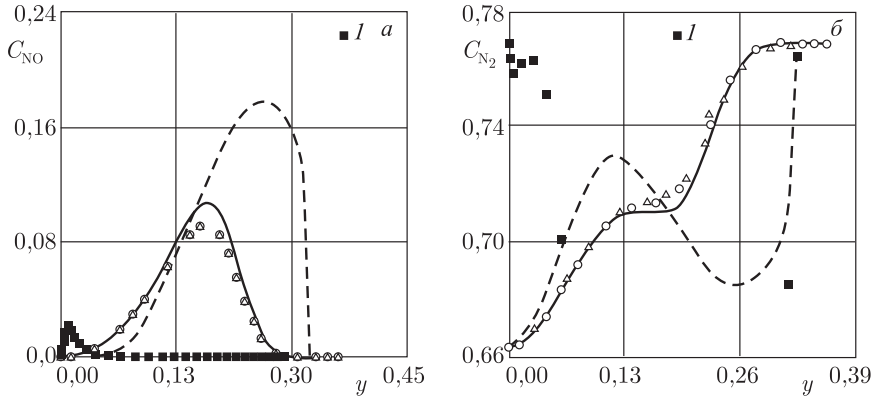


Рис. 9.3. Распределения массовых концентраций компонентов в зависимости от расстояния по нормали к поверхности сферы. $H = 61{,}9$ км, $R = 50$ см, $\theta = 80{,}5°$, поверхность некаталитическая. Точки *1* — равновесные значения

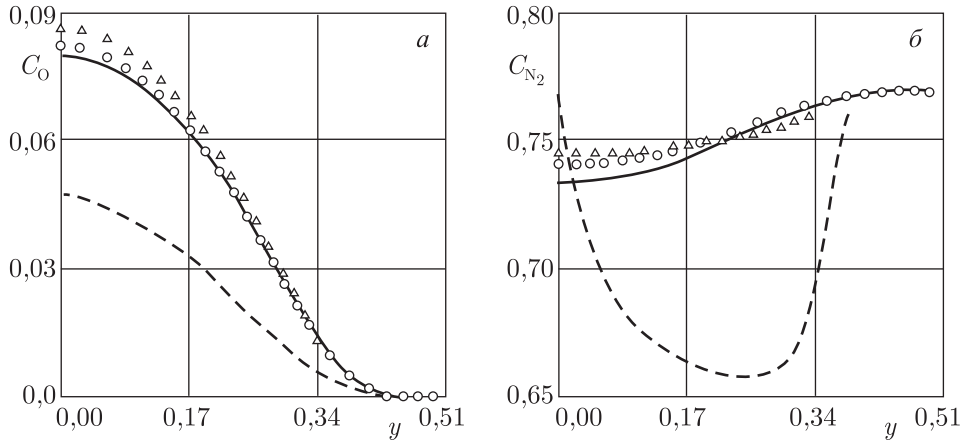


Рис. 9.4. Распределения массовых концентраций компонентов в зависимости от расстояния по нормали к поверхности сферы. $H = 74{,}9$ км, $R = 5$ см, $\theta = 80{,}5°$, поверхность некаталитическая

из-за влияния вязкости при умеренных числах Рейнольдса. Распределения же газодинамических параметров и основных компонентов диссоциированного воздуха в большей части ударного слоя (вне структуры ударной волны) для этих двух решений остаются по-прежнему близкими. Различие в решениях становится более существенным для высоты 74,9 км ($\mathbf{Re}_\infty = 1039$) (рис. 9.4). Вследствие малых значений чисел $\mathbf{Re}$ размер возмущенной области течения в окрестности линии торможения перед сферой в решении уравнений Н–С в 1,5 раза превосходит аналогичную величину, полученную при решении уравнений ПВУС. Здесь наблюдается различие в распределениях давления (рис. 9.5), связанное с влиянием ряда диссипативных членов, которые не учитываются в модели уравнений вязкого ударного слоя. В этой точке траекторий для сферы $R = 5$ см эффекты вязкости существенны во всей возмущенной области течения, здесь нет ярко выраженного пограничного слоя около тела и невязкого ядра потока. Аналогичные выводы можно сделать, сравнивая результаты расчетов задачи в двух постановках вниз по потоку от линии торможения, а также и для всей области течения в случае идеально-каталитической поверхности. Тепловые потоки

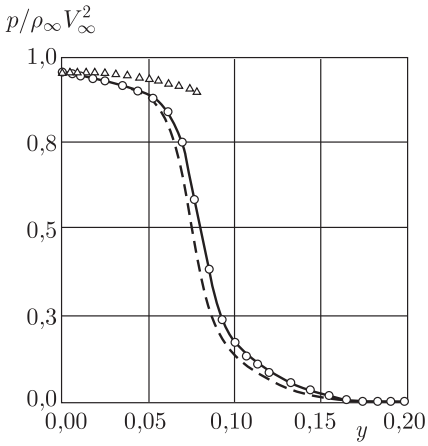


Рис. 9.5. Распределения безразмерного давления в зависимости от расстояния по нормали к поверхности сферы. $H = 74{,}9$ км, $R = 5$ см, $\theta = 1{,}8°$, поверхность некаталитическая

к поверхности, полученные из решения задачи в рамках уравнений Навье–Стокса и вязкого ударного слоя, близки (рис. 9.6, кривые *а*).

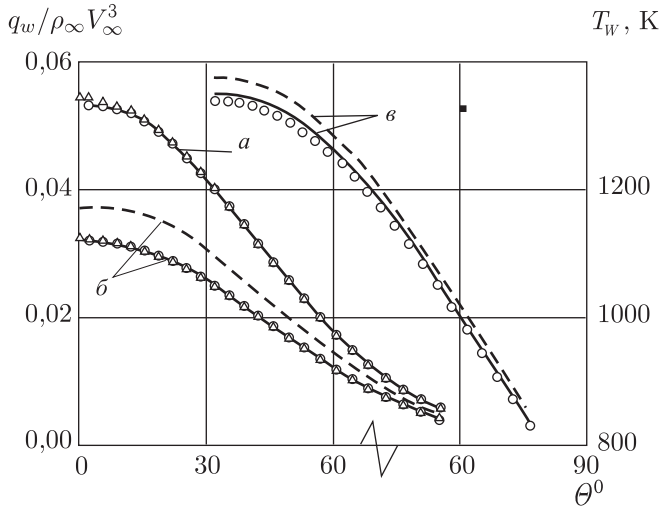


Рис. 9.6. Распределение безразмерного теплового потока (*а,б*) и температуры (*в*) в зависимости от угловой координаты θ вдоль поверхности сферы. *а*) $H = 74{,}9$ км, $R = 5$ см, поверхность идеально-каталитическая; *б*) $H = 54$ км, $R = 5$ см, поверхность некаталитическая; *в*) $H = 80$ км, $R = 50$ см, поверхность некаталитическая

4. Результаты решения задачи с использованием модели частичного химического равновесия

С использованием модели частичного химического равновесия решена задача в [10] гиперзвукового обтекания затупленного тела на линии торможения в рамках уравнений пограничного слоя. Анализ чисел Дамкелера, проведенный в этой работе для температур и давлений ($T \sim 1000$–20000 K, $p \geqslant 0{,}5$ атм) в пограничном слое около тела, движущегося по планирующей траектории спуска корабля «Space Shuttle» (высоты 54–75 км, скорости 4,5–7,2 км/с, $R \sim 1$ м), позволил ввести одну медленную переменную (линейную комбинацию концентраций компонентов) и ее диффузионный поток. Проведенные численные исследования задачи с использованием модели частичного химического равновесия и сравнение этих решений с результатами расчетов в полной постановке позволили сделать вывод о возможности применения модели частичного химического равновесия для описания течения на линии торможения в пограничном слое около тела с радиусом затупления ~ 1 м, движущегося по планирующей траектории спуска в атмосфере Земли.

Рассмотрим возможность применения модели частичного химического равновесия при решении задачи в рамках полных уравнений Н–С. На рис. 9.1 приведены распределения чисел Дамкелера на линии торможения,

рассчитанные по характерным значениям течения в ударном слое для следующих восьми независимых в стехиометрическом смысле реакций, приведенных в предыдущем разделе:

1. $O_2 + M = O + O + M$, — M третья частица $(O_2,\ N_2,\ O,\ N,\ NO)$
2. $O + N_2 = NO + N$
3. $O + NO = O_2 + N$
4. $O + NO^+ = N^+ + O_2$
5. $N + NO^+ = O^+ + N_2$
6. $N + N = N_2^+ + e$
7. $O + O = O_2^+ + e$
8. $N + O = NO^+ + e$

Анализ распределений чисел Дамкелера позволяет выделить либо одну медленную независимую реакцию диссоциации кислорода № 1 ($r_f = 7,\ r_s = 1$), либо две, если считать, что обменная реакция № 2 протекает также существенно медленнее оставшихся ($r_f = 6,\ r_s = 2$). Тогда в первом случае можно так же, как и в пограничном слое [10], ввести одну медленную переменную и ее диффузионный поток:

$$\begin{aligned} \eta_1^s &= \gamma_O + \gamma_N + 2\left(\gamma_{NO^+} + \gamma_{O_2^+} + \gamma_{N_2^+}\right) + 3\left(\gamma_{O^+} + \gamma_{N^+}\right), \\ I_1^s &= K_O + K_N + 2\left(K_{NO^+} + K_{O_2^+} + K_{N_2^+}\right) + 3\left(K_{O^+} + K_{N^+}\right), \end{aligned} \tag{9.9}$$

либо во втором — добавить еще одну медленную переменную, линейно независимую с первой:

$$\begin{aligned} \eta_2^s &= \gamma_N + \gamma_{NO} + \gamma_{NO^+} + \gamma_{N^+} + 2\left(\gamma_{O^+} + \gamma_{N_2^+}\right), \\ I_2^s &= K_N + K_{NO} + K_{NO^+} + K_{N^+} + 2\left(K_{O^+} + K_{N_2^+}\right). \end{aligned} \tag{9.10}$$

При этом вместо уравнений диффузии, входящих в (9.1)–(9.2), необходимо рассматривать либо одно уравнение диффузии для медленной переменной (9.9), либо два (для (9.9) и (9.10)), заменив отброшенные уравнения диффузии условиями детального химического равновесия. Полученные системы уравнений в первом и втором случаях назовем «первой» и «второй» моделями соответственно. На представленных рисунках результаты, полученные в рамках первой модели, изображены пунктирными линиями, а в рамках второй — сплошными. Условия обтекания те же, что и ранее, и даны в таблице 9.1.

В области линии торможения течения около сферы при $R = 50$ см, как в области пограничного слоя, так и вне его, наблюдается хорошее совпадение всех параметров течения, полученных из решения задачи в полной диффузионной постановке («точная» модель) и с использованием первой и второй моделей (рис. 9.2). Это согласуется с ранее сделанными выводами о применимости модели частичного химического равновесия при описании течений в окрестности линии торможения в рамках уравнений пограничного слоя [10]. Далее по обводу тела значения некоторых концентраций в пограничном слое,

полученные в первой модели, могут отличаться от «точных», вторая же модель дает более близкие к точной модели результаты (рис. 9.3).

На рис. 9.3 дано сравнение концентраций компонентов воздушной смеси в области линии торможения течения, полученных из решения задачи в рамках уравнений Навье–Стокса и модели частичного химического равновесия, с равновесными значениями. Из сравнения следует заключить, что в рассмотренных условиях обтекания полное равновесие не достигается.

Сравнивая полученные решения во всей области течения, можно заключить, что для тела с радиусом $R = 50$ см на всей траектории вторая и «точная» модели дают близкие результаты по всем параметрам, в том числе по величинам ионизованных компонентов, имеющих малые значения, во всей области течения, а решение по первой модели отличается от них даже в значениях основных концентраций диссоциированного воздуха. Причем отличие становится более заметным с увеличением высоты.

Сравнивая решения задачи для сферы $R = 5$ ($H = 54$–75 км) и 50 см ($H = 85$ км), можно сделать вывод о том, что для всех трех моделей соответствующие значения газодинамических параметров в возмущенной области течения близки друг другу, хотя первая модель дает несколько меньший размер возмущенной области. Профили концентраций, полученные по второй модели, ближе располагаются к «точным», чем профили решений первой модели (рис. 9.4).

Различия в значениях концентраций диссоциированных компонентов, полученных в рамках первой и второй моделей, характерные как для $R = 5$ см, так и для $R = 50$ см, можно объяснить главным образом тем, что обменная реакция ($O + N_2 = NO + N$), влияющая на перераспределение этих компонентов, не является быстрой во всем ударном слое около тела. По этой же причине вторая модель, в которой эта реакция считается идущей с конечной скоростью, дает результаты, наиболее близкие к «точным».

Распределения давления вдоль поверхности сферы идентичны для всех рассмотренных постановок. Совпадение давления на поверхности наблюдается даже тогда, когда в ударном слое эти величины, полученные из решения уравнений вязкого ударного слоя и Навье–Стокса значительно различаются (рис. 9.5).

Коэффициенты трения, полученные из решения задачи в рамках уравнений вязкого ударного слоя, Навье–Стокса в полной диффузионной постановке и Навье–Стокса с использованием двух моделей частичного химического равновесия, совпадают на всем рассмотренном участке траектории. Модель частичного химического равновесия с одной линейной комбинацией дает при малых размерах тел ($R = 5$ см) завышенные значения тепловых потоков по сравнению с «точными» значениями. Введение в рассмотрение второй медленной переменной (вторая модель) позволяет устранить эти различия (рис. 9.6, кривые *б*).

На рис. 9.6 (кривые *в*) для точки траектории ($H = 85$ км, $R = 50$ см) приведена температура вдоль поверхности сферы, рассчитанная с использованием граничных условий, соответствующих равновесно излучающей стенке

(9.3) для трех моделей: в полной диффузионной постановке и двух моделей частичного химического равновесия. Для всех моделей температуры близки.

5. Использование модели частичного химического равновесия в марсианской атмосфере

При входе летательного аппарата в атмосферу Марса в ударном слое перед телом $CO_2 - N_2$ смесь имеет высокую температуру, а химические процессы могут протекать в ней в неравновесном режиме. Из анализа, проведенного в [46], следует, что при небольшом радиусе затупления (менее 2,3 м) и высотах, больших 35 км, нельзя рассматривать течение в ударном слое как химически равновесное. Рассмотрим обтекание тела сферической формы в марсианской атмосфере при следующих характеристиках набегающего потока, приведенных в таблице 9.2 Поверхность тела будем считать либо некаталитической, либо идеально каталитической. Температуру поверхности примем постоянной $T_W = 1000$ K. Расчеты в рамках уравнений H–C проводились на сетке, содержащей 55 лучей с 80 точками на каждом.

Таблица 9.2.

H, км	V_∞, км/с	ρ_∞, г/см^3	T_∞, K	M_∞	$\mathbf{Re}_\infty$	R, см
30	4,0	$0{,}111 \cdot 10^{-5}$	150	20,1	461000	100
50	6,0	$0{,}111 \cdot 10^{-6}$	150	30,1	69395	100

Примем, что марсианская атмосфера состоит из 96,68% CO_2, 1,74% N_2, 1,47% Ar, 0,11% O_2, и в высокотемпературной смеси содержится 11 компонентов ($N = 11$): O, C, N, O_2, C_2 CO, CN, NO, CO_2, N_2, и Ar. Будем учитывать 20 гомогенных химических реакций:

1. $O_2 + M = O + O + M$, 2. $N_2 + M = N + N + M$, 3. $NO + M = N + O + M$,
4. $O + N_2 = NO + N$, 5. $O + NO = O_2 + N$, 6. $CO_2 + O = O_2 + CO$,
7. $CO + O = C + O_2$, 8. $CO + C = O + C_2$, 9. $CN + C = N + C_2$,
10. $NO + CO = CO_2 + N$, 11. $CO + N = CN + O$, 12. $N_2 + C = CN + N$,
13. $CN + O = NO + C$, 14.$CO + N = NO + C$, 15. $CO + CO = CO_2 + C$,
16. $CN + CO = C_2 + NO$, 17. $C_2 + M = C + C + M$, 18. $CN + M = C + N + M$,
19. $CO + M = C + O + M$, 20. $CO_2 + M = CO + O + M$,

$$M = O, C, N, O_2, C_2, CO, CN, NO, CO_2, N_2, Ar.$$

Выберем аналогично предыдущему случаю систему химических реакций, независимых в стехиометрическом смысле, чтобы число быстрых независимых реакций было максимально. Для этого рассмотрим распределения чисел Дамкелера на линии торможения в ударном слое для параметров обтекания, приведенных в таблице 9.2.

Анализ чисел Дамкелера (рис. 9.7, (*а,б*)) позволяет считать, что реакции №№ 3–7 — быстрые, а №№ 1–2 — медленные. То есть имеем $r_f = 5$, $r_s = 2$:

1. $O_2 + M = O + O + M$, где M-третья частица,
2. $CO + NO = CO_2 + N$,
3. $O + N_2 = NO + N$,
4. $NO + O = O_2 + N$,
5. $CO + O = C + O_2$,
6. $CN + O = NO + C$,
7. $CN + C = C_2 + N$.

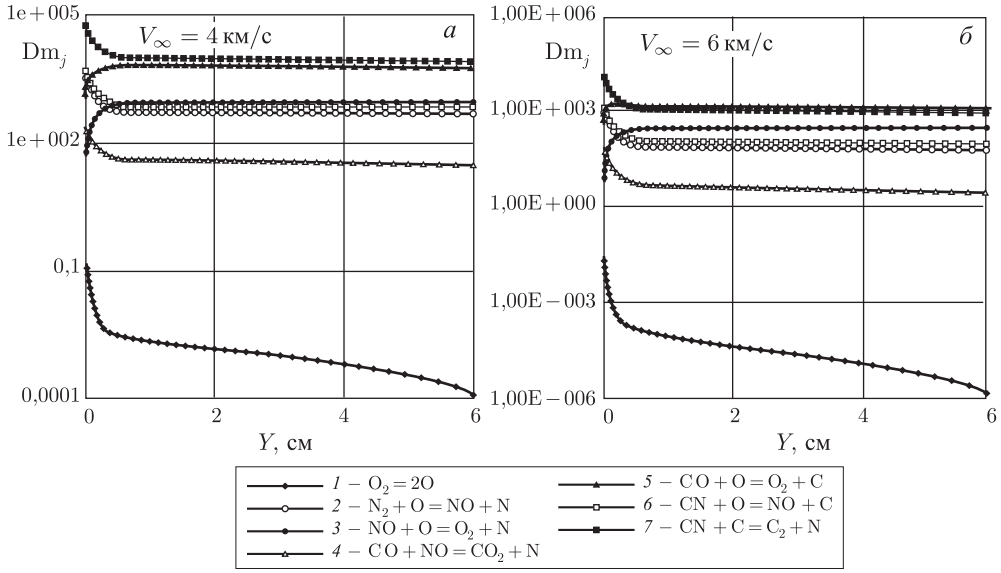


Рис. 9.7. Распределение на линии торможения чисел Дамкелера независимых реакций для параметров обтекания, представленных в таблице 9.2. Маркеры с цифрами соответствуют номерам независимых реакций

Отметим, что благодаря большей разреженности марсианской атмосферы и большим скоростям полета в ней (табл. 9.2) по сравнению с движением в земной атмосфере (табл. 9.1), числа Дамкелера здесь, по крайней мере, на порядок меньше. Поэтому использование модели частичного химического равновесия в этом случае лишь с использованием двух медленных переменных кажется целесообразным.

Итак, согласно теории, изложенной в разд. 2, можно ввести две медленные переменные, причем вторая совпадает с мольно-массовой концентрацией продукта реакции CO_2:

$$\eta_1^s = 2\gamma_{O_2} - \gamma_C + 2\gamma_{N_2} + \gamma_{CO} + \gamma_{CN} + 2\gamma_{NO} + 3\gamma_{CO_2},$$
$$\eta_2^s = \gamma_{CO_2}.$$

Далее на рисунках представлены распределения следующих величин: p — давления, T — температуры, $c_i = m_i\gamma_i$ — основных массовых концентраций компонентов в зависимости от нормальной координаты к поверхности

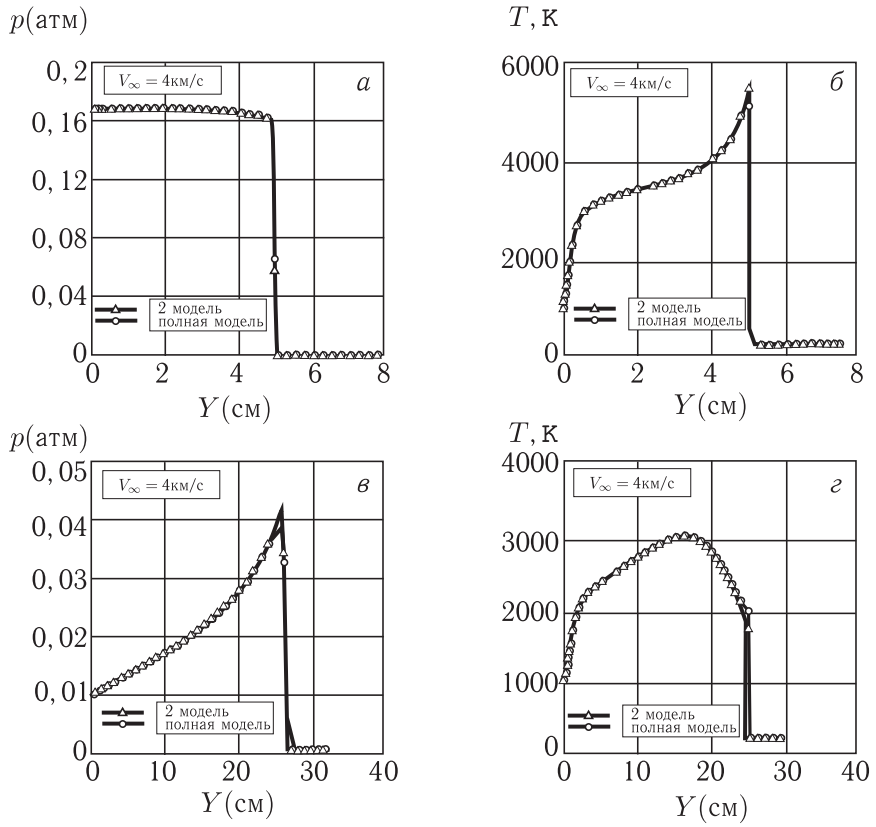


Рис. 9.8. Распределение давления (*а*, *в*) и температуры (*б*, *г*) поперек ударного слоя около сферы для $H = 30$ км, *а*,*б* — $\Theta = 0{,}75°$; *в*, *г* — $\Theta = 81{,}75°$. Поверхность некаталитическая

сферы y. Данные численных расчетов приведены для двух значений угловой координаты $\Theta = 0{,}75°$ и $\Theta = 81{,}75°$. На представленных рисунках результаты, полученные в рамках частично равновесной модели, изображены треугольными маркерами, а в рамках полной диффузионной постановки — кружками.

Сравнивая решения задачи для параметров обтекания, данных в таблице 9.2, можно сделать вывод о том, что для полной диффузионной и частично равновесной моделей соответствующие значения газодинамических параметров близки друг другу во всей возмущенной области течения для обеих точек траектории (см., например, распределения p, T на рис. 9.8, и рис. 9.11). Некоторое различие в температурах в ударном слое связано с различием в составах газовых смесей, полученных в расчетах для двух постановок, которое для высоты $H = 50$ км существенно больше. Профили концентраций C_{CO_2}, C_{CO}, C_O, C_{O_2} во всем ударном слое около сферы для высоты $H = 30$ км (рис. 9.9, 9.10), полученные по частично равновесной и точной моделям близки, как для идеально каталитической, так и некаталитической стенки. Для высоты $H = 50$ км (рис. 9.12, 9.13) появляются незначительные различия в распределениях этих

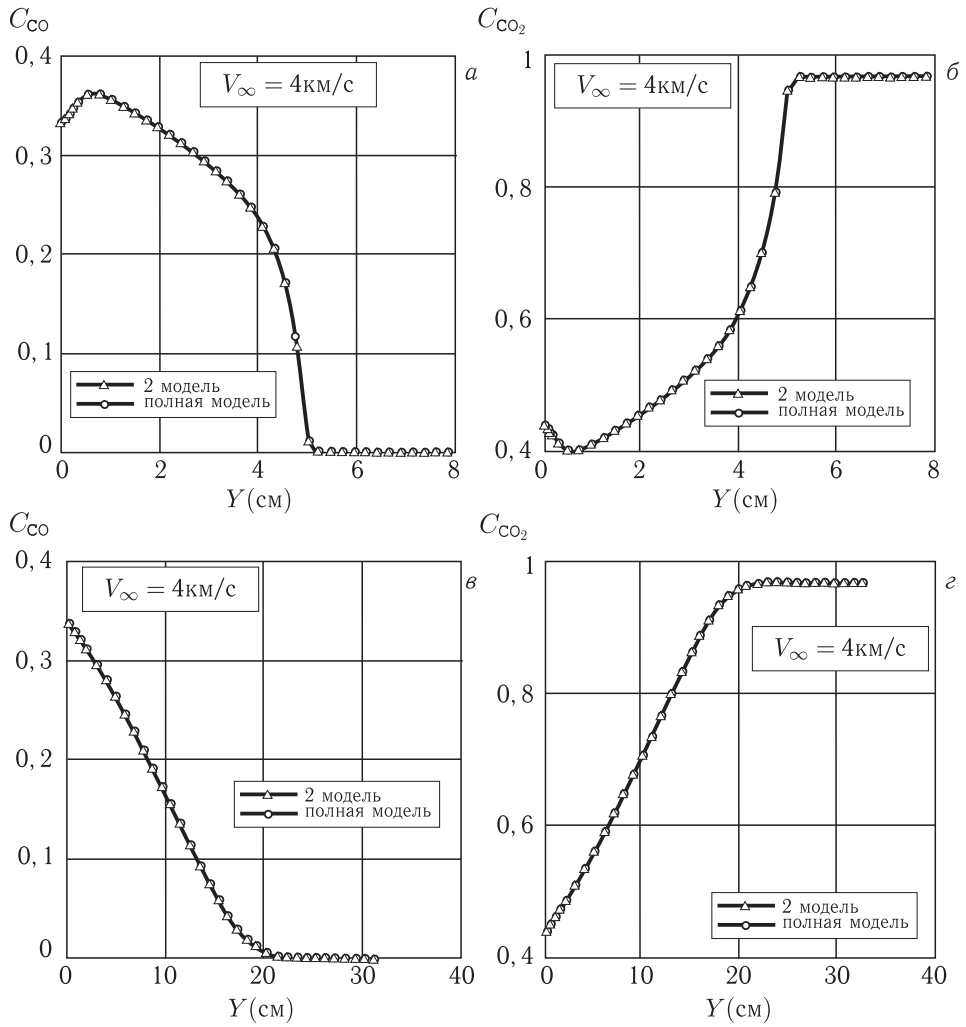


Рис. 9.9. Распределение массовых концентраций компонентов в ударном слое около сферы для для $H = 30$ км; *а, б* — $\Theta = 0{,}75°$, *в, г* — $\Theta = 81{,}75°$. Поверхность некаталитическая

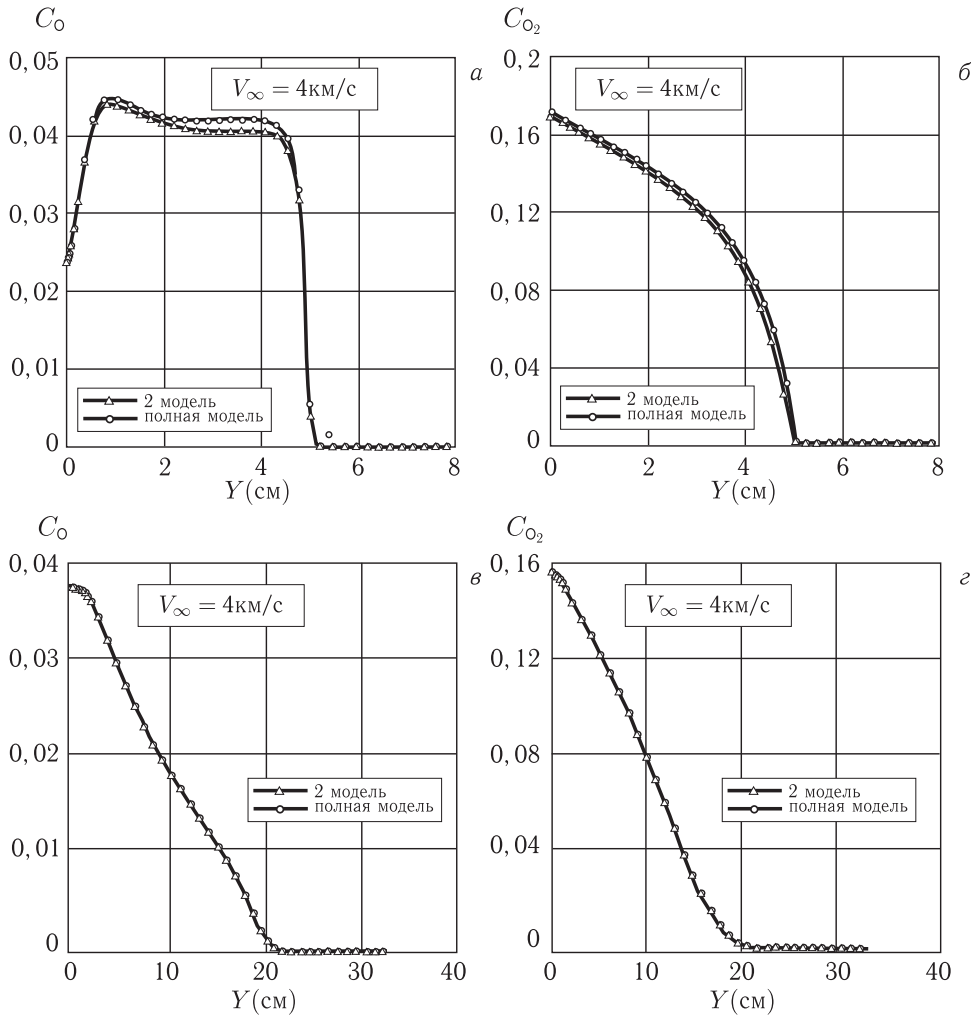


Рис. 9.10. Распределение массовых концентраций компонентов в ударном слое около сферы для $H = 30$ км; *а, б* — $\Theta = 0{,}75°$, *в, г* — для $\Theta = 81{,}75°$. Поверхность некаталитическая

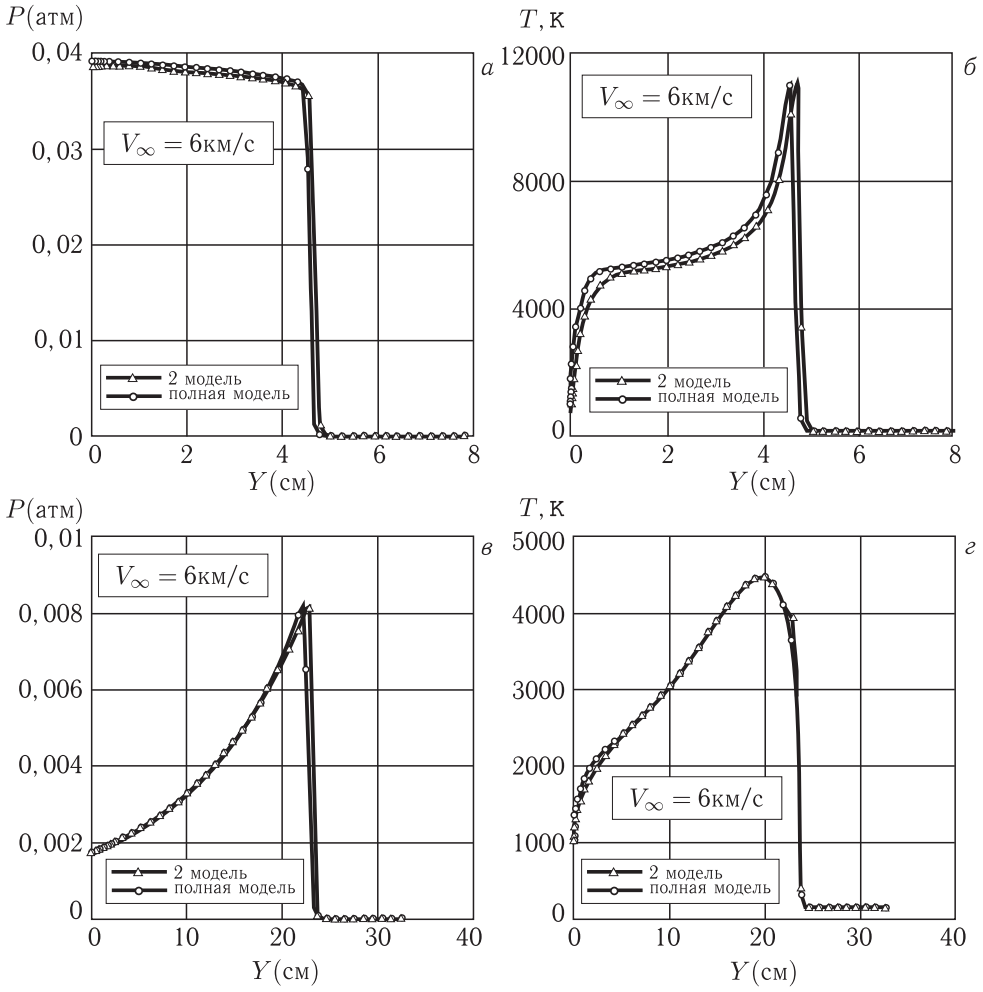


Рис. 9.11. Распределение давления *а, б* и температуры *в, г* поперек ударного слоя около сферы для $H = 50$ км. *а, б* — $\Theta = 0{,}75°$, *в, г* — $\Theta = 81{,}75°$. Поверхность идеально-каталитическая

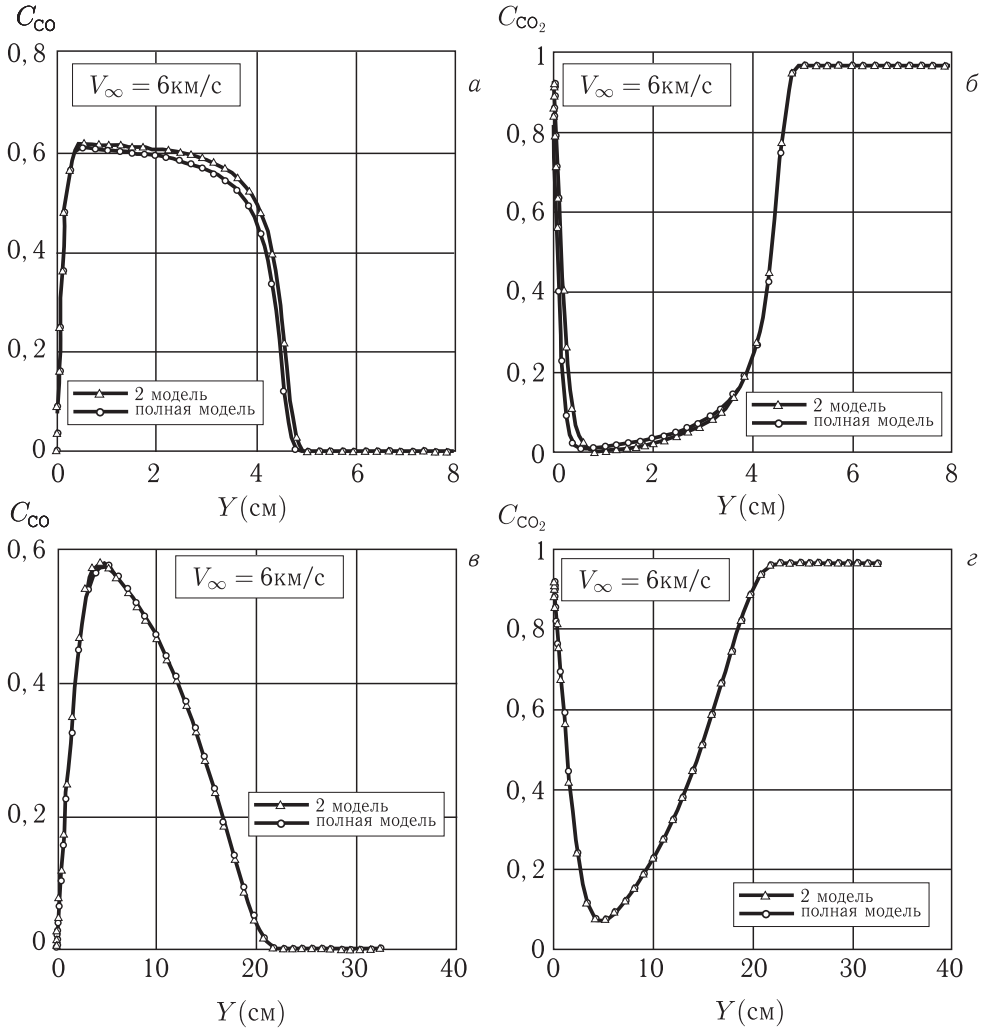


Рис. 9.12. Распределение массовых концентраций компонентов в ударном слое около сферы для $H = 50$ км; *а, б* — $\Theta = 0{,}75°$, *в, г* — $\Theta = 81{,}75°$. Поверхность идеально-каталитическая

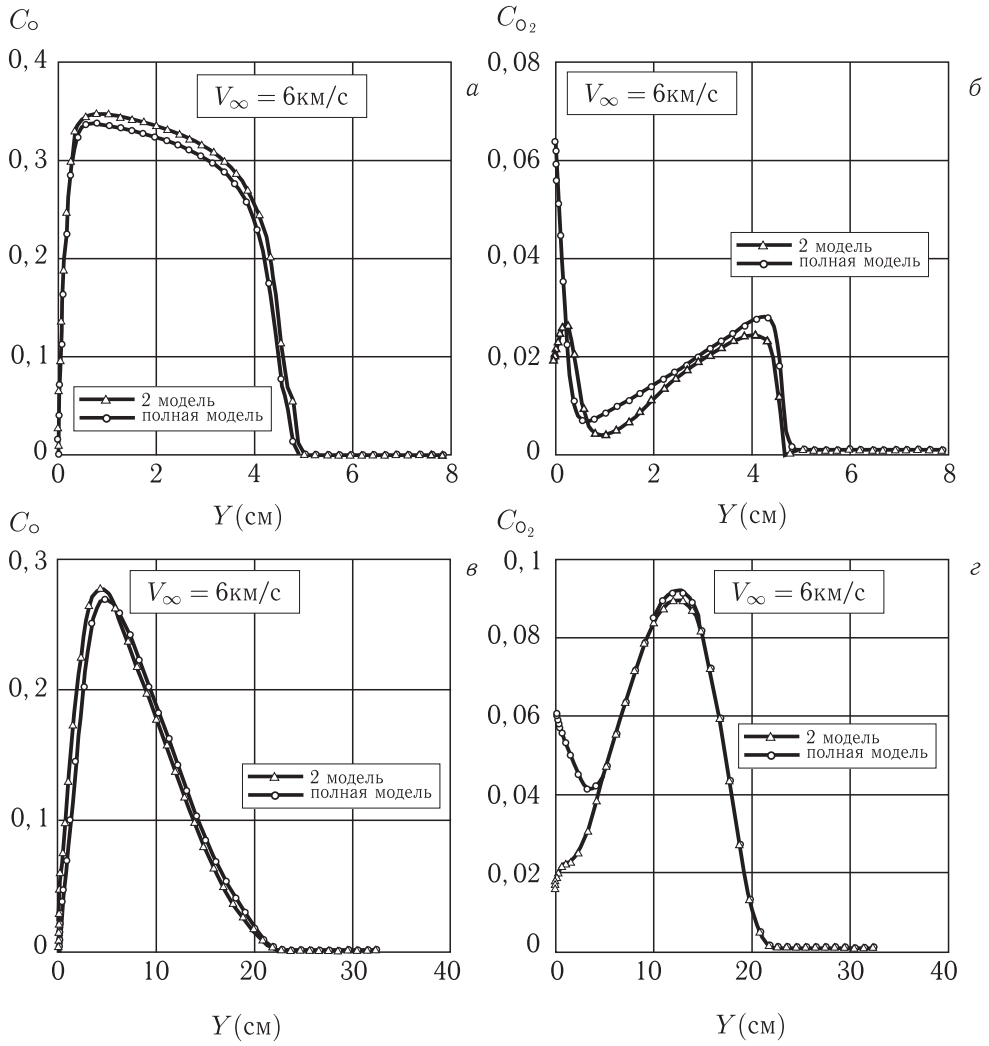


Рис. 9.13. Распределение массовых концентраций компонентов в ударном слое около сферы для $H = 50$ км; *а, б* — $\Theta = 0{,}75°$, *в, г* — $\Theta = 81{,}75°$. Поверхность идеально-каталитическая

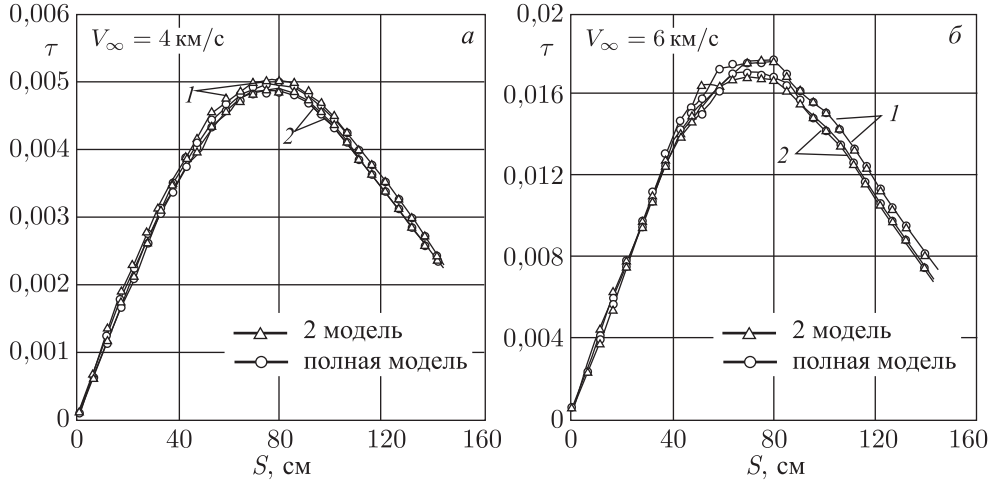


Рис. 9.14. Распределения вдоль поверхности сферы коэффициентов трения *1* — некаталитическая поверхность, *2* — идеально-каталитическая поверхность $V = 4$ км/с (*а*), $V = 6$ км/с (*б*)

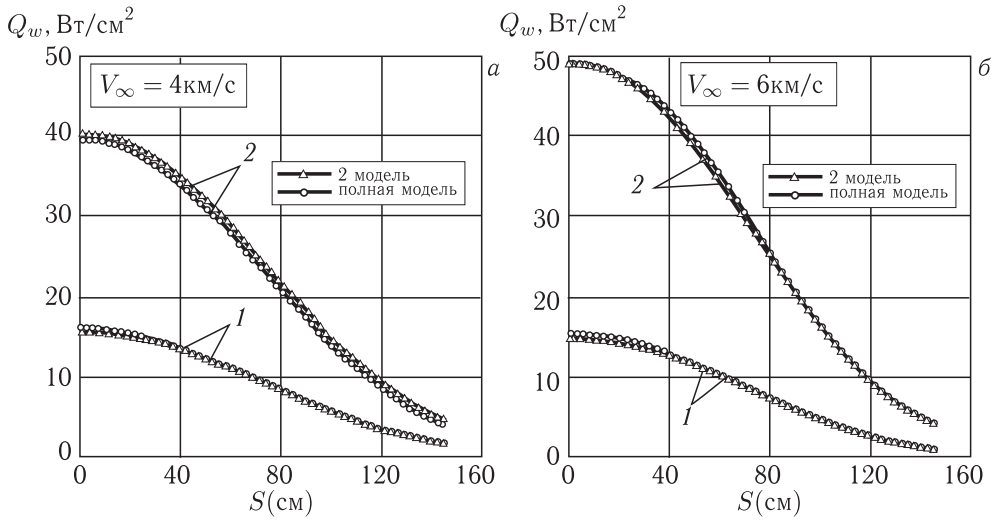


Рис. 9.15. Распределения вдоль поверхности сферы тепловых потоков *1* — некаталитическая поверхность, *2* — идеально-каталитическая поверхность $V = 4$ км/с (*а*), $V = 6$км/с (*б*)

величин. Более всего для сравниваемых моделей различаются распределения концентраций C_{O_2}, C_{N_2}, C_N в ударном слое, причем для высоты $H = 50$ км, это различие существеннее по сравнению с высотой $H = 30$ км.

На рис. 9.14, 9.15 представлены сравнения распределений коэффициентов трения $\tau_W = 2C_f^*/\left(\rho_\infty V_\infty^2\right)$ и тепловых потоков q_W вдоль поверхности сферы для идеально-каталитической и некаталитической поверхностей при всех рассмотренных параметрах обтекания. Обозначения аналогичны предыдущим.

Следует отметить, что коэффициенты трения и тепловые потоки вдоль поверхности тела, полученные из решения задачи в полной диффузионной постановке и с использованием модели частичного химического равновесия, близки на всем рассмотренном участке траектории, как для идеально-каталитической, так и некаталитической поверхностей.

Заключение

Модель частичного химического равновесия разработана и применена для численного исследования гиперзвуковых течений многокомпонентных газовых смесей около затупленных тел в рамках уравнений Навье–Стокса. Для рассмотренных в работе условий обтекания получено существенное упрощение диффузионной части задачи: точность предложенного подхода продемонстрирована сравнением с результатами расчетов задач в полной постановке.

Список литературы

1. *Maus J.R., Griffith B.J, Szema K.Y. et al.* Hypersonic Mach number and real gas effects on Space Shuttle Orbiter aerodynamics // AIAA Pap., 1983. № 83-0343, (пер. АКТ, 1984. Т. 2, № 11, с. 17–23).
2. *Griffith B.J., Maus J.R., Majors B.M. et al.* Addressing the hypersonic simulation problem // J. of Spacecraft and Rockets, 1987. V. 24, № 4, p. 334–341.
3. *Полянский О.Ю., Кузнецов М.М., Меньшиков В.Л. и др.* Влияние свойств реального газа на аэродинамические и тепловые характеристики гиперзвуковых летательных аппаратов // ЦАГИ, ОНТИ, Обзоры, 1987. № 676, 200 с.
4. *Сахаров В.И., Котенев В.П., Тирский Г.А.* Влияние химических реакций на аэродинамические характеристики затупленных конусов // Отчет НИИМ МГУ, № 3106, 1984. 16 с.
5. *Ковалев В.Л., Суслов О.Н.* Модель взаимодействия частично ионизованного воздуха с каталитической поверхностью //Исследования по гиперзвуковой аэродинамике и теплообмену с учетом неравновесных химических реакций, Изд-во МГУ, 1987. с. 58–69.
6. *Быстров Л.В., Горский В.Г.* Математическое описание кинетики сложной химической реакции с учетом принципа квазиравновесия // Химическая кинетика в катализе. Теоретические проблемы кинетики, Черноголовка: Ин-т хим. физики, 1985. с. 63–68.
7. *Горский В.Г., Кацман Е.А.* Швецова–Шиловская Т.Н. Математические аспекты квазиравновесия реакций в химической кинетике // Математические методы в химической кинетике, Новосибирск: Наука, 1990. с. 136–152.
8. *Дубровский А.Я., Фурман Г.А.* Интегрирование кинетических систем методом медленных комбинаций // Препринт отд. Ин-та хим. физики, Черноголовка, 1973. 12 с.
9. *Суслов О.Н., Фатеева Е.И.* Исследование течений многокомпонентных газовых смесей в условиях частичного химического равновесия // Изв. РАН МЖГ, 1996, № 1, с. 114–124.
10. *Сахаров В.И., Суслов О.Н., Фатеева Е.И.* Исследование течений около затупленных тел в условиях частичного химического равновесия в рамках уравнений ламинарного пограничного слоя // Изв. РАН МЖГ, № 2, 1997. с. 96–102.

11. *Кузнецов В.Р., Сабельников В.А.* Турбулентность и горение // — М.: Наука, 288 с.
12. *Бурико Ю.Я., Кузнецов В.Р.* Образование окислов азота в неравновесном диффузионном турбулентном пламени // Ж. физ. горения и взрыва, 1983. № 2, с.71–80.
13. *Ramshaw J.D.* Partial chemical equilibrium in fluid dynamics // J. Phys. Fluids, 1980. V. 23, № 4, p.675–680.
14. *Колесниченко А.В., Тирский Г.А.* Термодинамический анализ течений частично ионизованных смесей неидеальных газов в условиях неполного химического равновесия. — М.: Препринт ИПМат., 1979. № 77.
15. *В.Г. Громов, В.И. Сахаров, Е.И. Фатеева* Численное исследование гиперзвукового обтекания затупленных тел вязким химически реагирующим газом // Изв. РАН МЖГ, № 5, 1999. с. 177–186.
16. *В.Г. Громов, В.И. Сахаров, Е.И. Фатеева* Применение модели частичного химического равновесия для исследования задач гиперзвуковой аэродинамики // Препринт Института механики МГУ, № 58-2000. — М.: Институт механики МГУ им. М.В. Ломоносова, 2000. 90 с.
17. *Lam S.H., Goussis D.A., Konopka D.* Time-resolved simplified chemical kinetics modelling using computational singular perturbation // AIAA Pap., № 89-0575, 1989. 10 p.
18. *Горский В.Г., Зейналов М.З.* Маршруты, брутто-уравнения и стационарные скорости сложных реакций в квазистационарном и квазиравновесном приближении // Деп. в ВИНИТИ 08.07.97, № 2262–В97, 20 с.
19. *Саясов Ю.С., Васильева А.Б.* Обоснование условия применимости метода квазистационарных концентраций Семенова-Боденштейна // Ж. физ. хим., 1955. Т. 29, № 5.
20. *Васильев В.М., Вольперт А.И., Худяев С.И.* О методе квазистационарных концентраций для уравнений химической кинетики // Ж. выч. мат. и мат. физ., 1973. Т. 13, № 3, с. 683–697.
21. *Горский В.Г.* Планирование кинетических экспериментов. — М.: Наука, 1984. 242 с.
22. *Снаговский Ю.С., Островский Г.М.* Моделирование кинетики гетерогенных каталитических реакций. — М.: Химия, 1976. 248 с.
23. *Яблонский Г.С., Быков В.И., Горбань А.Н.* Кинетические модели каталитических реакций. Новосибирск: Наука, 1983. 256 с.
24. *Левицкий А.А., Лосев С.А., Макаров В.Н.* Задачи химической кинетики в автоматизированной системе научных исследований АВОГАДРО // Математические методы в химической кинетике. Новосибирск: Наука, 1990. с. 7–38.
25. *Макаров В.Н.* Определение механизма физико-химических процессов в всысокотемпературном воздухе // ПМТФ, 1996. Т. 37. № 2, с. 69–82.
26. *Curtiss C.F., Hirschfelder J.O.* Integration of stiff equations // Proc. of the National Academy of Science of the United States of America, 1952. V. 38.
27. *Eklund D.R., Hassan H.A., Drummond J.P.* The efficient calculation of chemically reacting flow // AIAA Pap., 1986. № 86–0563.
28. *Otey G.R., Dwyer H.A.* Numerical study of the interaction of fast chemistry and diffusion // AIAA J., 1983. V. 17, p.606–613.
29. *Бассинг Т.Р.А., Мермен И.М.* Конечно-объемный метод расчета течений сжимаемой жидкости с химическими реакциями // АКТ, 1989. № 8, с. 36–46, (см. также AIAA J., 1988. № 9, p. 1070–1078).
30. *Головачев Ю.П.* Численное моделирование течений вязкого газа в ударном слое. — М.: Наука-Физматлит, 1996. 375 с.
31. *Afonina N.E., Gromov V.G., Sakharov V. I.* HIGHTEMP technique for high temperature gas flows simulations // Proc. 5th Europ. Sympo. on Aerothermodynamics for Spase Vehicles. Cologne, Germany, 2005. SP 563. P. 323–328.

32. *Ковалев В.Л., Суслов О.Н., Суходольский С.А.* Исследование диссоциированого и слабо ионизованного вязкого ударного слоя на каталитической поверхности // Отчет НИИМ МГУ, 1983. № 2870, 98 с.
33. *Афонина Н.Е., Громов В.Г.* Численное моделирование гиперзвукового теплообмена на наветренной стороне поверхности ВКС «Буран» // Препринт НИИМ МГУ, 1996, № 17–96, 84 с.
34. *Глазков Ю.В., Тирский Г.А., Щербак В.Г.* Метод решения параболизованных уравнений Навье–Стокса с использованием глобальных итераций // Ж. Мат. моделирование, 1990. Т. 2. № 8, с. 31–41.
35. *Buellow D., Tannehill J, Levalts J.* A Three—Dimensional Upwind Parabolized Navier–Stokes Code for Chemically Reacting Flows // AIAA Pap., 1990. 90–0394, 12 p.
36. *Котенев В.П., Сахаров В.И., Тирский Г.А.* О расчете сверхзвукового обтекания пространственных затупленных тел химически неравновесным потоком газа // ЖВМ и МФ, Т. 27, 1987. № 3, с. 411–415.
37. *Карловский В.Н., Левин В.А., Сахаров В.И.* Аэродинамические характеристики длинных затупленных конусов при интенсивном массообмене // Изв. АН СССР МЖГ, 1987. № 5, с. 107–113.
38. *Rizzi W., Balley H.E.* Split Space-Marching Finite-Volume Method for Chemically Reacting Supersonic Flow // AIAA J., 1976. V. 14, № 5, p.621–628.
39. *Суслов О.Н.* Решение уравнений химически неравновесного многокомпонентного пограничного слоя разностным методом с повышенной точностью аппроксимации // Отчет НИИМ МГУ, 1978, № 2098, 41 с.
40. *Evans J.S., Schexnayder C.J., Huber P.W.* Computation of Ionization in Re-Entry Flowfields //AIAA J., 1970, № 6, p. 1082–1089. (Перевод: РТК, 1970, Т. 8, № 6, с.115–125).
41. *Дорренс У.Х.* Гиперзвуковые течения вязкого газа. — М.: Мир, 1966. 440 с.
42. *Гиршфельдер Дж., Кертисс Ч., Берд Р.* Молекулярная теория газов и жидкостей. — М.: ИЛ., 1961. 933 с.
43. *Reid R.C., Prausnitz J.M., Sherwood T.K.* The Properties of Gases and Liquids, McGraw-Hill,— N. Y.: 1977. 688 p.
44. Термодинамические свойства индивидуальных веществ Справочное издание. — М: Наука, 1979. Т. 1, 495 с; Т. 2. 327 с.
45. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений. — М: Наука, 1973. 272 с.
46. *Gupta R.N., Lee K.P.* An aerothermal study of MESUR pathfinder aeroshel // AIAA Paper. 1994. № 94–2025. 33 p.

10

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕПЛООБМЕНА ГИПЕРЗВУКОВЫХ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ ПРИ ПОЛЕТЕ В АТМОСФЕРЕ ЗЕМЛИ

В. И. Власов, А. Б. Горшков, Р. В. Ковалев, В. В. Лунев
ФГУП ЦНИИ машиностроения

Введение

При разработке гиперзвуковых летательных аппаратов (ГЛА), движущихся в атмосфере Земли со скоростями порядка первой космической, одной из основных проблем является надёжное предсказание уровня тепловых потоков и величины нагрева поверхности аппарата во время полета [1].

В плотных слоях атмосферы, где справедливо предположение о континуальности среды, детальный анализ параметров обтекания и теплообмена ГЛА может быть выполнен на основе численного интегрирования системы уравнений Навье–Стокса с учётом физико-химических процессов, протекающих в ударном слое при гиперзвуковых скоростях полёта. Для решения данной задачи вдоль траектории движения ГЛА требуются значительные вычислительные ресурсы, поэтому массовые расчёты обычно осуществляются по упрощённой методике, в рамках которой невязкое поле течения определяется путём численного интегрирования уравнений Эйлера с учётом физико-химических процессов, а параметры теплообмена оцениваются на основе интегрирования уравнений пограничного слоя. При этом возникает проблема верификации используемых методик путем сравнения полученных расчетных результатов с экспериментальными данными, а также оценки адекватности упрощённой методики поставленной задаче и надёжности предсказания параметров течения и теплообмена при её использовании.

1. Методы расчета

При численном решении уравнения Навье–Стокса аппроксимируются с использованием конечных разностей. Полученная система алгебраических уравнений решается неявным итерационным методом LU-SSOR [2]. При конечно-разностной аппроксимации как вязких, так и конвективных потоков, использовались центральные разности. Для обеспечения устойчивости счета в разностную схему вводилось дополнительное слагаемое, описывающее искусственную диссипацию. Ударная волна может рассчитываться насквозь или выделяться как поверхность разрыва, с выполнением на ней условий Ренкина–Гюгонио Более полно реализация численного метода описана в [3]. Для

уменьшения времени счета выполнено распараллеливание компьютерного кода [4] с использованием системы MPI для проведения расчетов на многопроцессорной вычислительной системе МВС-1000, установленной в ЦНИИМаш.

Система уравнений Эйлера решалась методом конечных объемов с узлами в центрах ячеек в декартовой системе координат. Вся область течения подразделяется на две части — область носового притупления с преимущественно дозвуковым течением за головной ударной волной и область около боковой поверхности аппарата, где течение сверхзвуковое. В первой области решение ищется методом установления по времени, а во второй — маршевой процедурой вниз по потоку вдоль продольной оси тела. Ударная волна рассчитывается насквозь, а параметры течения на поверхности используются как граничные условия на внешней границе пограничного слоя.

Параметры теплообмена на поверхности тела определяются по рассчитанному невязкому течению путём приближённого решения уравнений пограничного слоя, посредством интегрального метода локального подобия [5] с использованием осесимметричной аналогии. Уравнения метода эффективной длины расписывались на той же поверхностной конечно-разностной сетке, что и уравнения невязкого течения (кроме окрестности критической точки, где вводится локальная система координат с полюсом в этой точке), относительно декартовых компонентов вектора скорости. Более детально данный подход описан в [6].

В рамках метода эффективной длины можно также приближенно учесть эффект гетерогенных реакций на поверхности ГЛА. Для рассматриваемых условий обтекания в области ожидаемых максимальных уровней тепловых потоков (при давлении $P \leqslant 0{,}05$ атм) газофазные реакции в пограничном слое можно считать замороженными. При этом в невязком потоке и на поверхности химические реакции протекают неравновесным образом. Энтальпия воздуха у стенки рассчитывается с учетом диффузии поперек пограничного слоя и реакций рекомбинации на поверхности.

2. Физико-химическая модель воздуха

В случае неравновесного воздуха использовалась пятикомпонентная модель среды [7], и учитывались следующие химические компоненты — $M = \mathrm{N}_2$, O_2, NO, N, O, для которых имеют место три реакции диссоциации и две обменные реакции:

При решении уравнений Навье–Стокса диффузионные потоки i-й химической компоненты определяются согласно закону Фика и имеют вид (в направлении оси x):

$$d_{i,x} = -\rho D_i \frac{\partial c_i}{\partial x},$$

где $c_i = \rho_i/\rho$ — массовая концентрация i-й химической компоненты. Для определения коэффициентов диффузии D_i используется приближение постоянных

чисел Шмидта $Sc_i = \mu/\rho D_i$, которые принимаются равными 0,75 для нейтральных частиц. Полный поток тепла $\mathbf{q} = (q_x, q_y, q_z)$ есть сумма тепловых потоков за счёт теплопроводности и диффузии химических компонент:

$$q_x = -\kappa \frac{\partial T}{\partial x} + \sum_i h_i d_{i,x},$$

$$h_i = C_{p,i} T + e_{e,i} + e_{v,i} + h_{f,i},$$

где h_i — энтальпия i-й химической компоненты на единицу массы, $C_{p,i}$ — теплоемкость при постоянном давлении поступательно-вращательных степеней свободы, $e_{e,i}$, $e_{v,i}$ — энергии электронного и колебательного возбужденияi-й компоненты, $h_{f,i}$ — энтальпия образования i-й компоненты. В расчетах предполагалось, что температура электронных и колебательных степеней свободы атомных частиц равна поступательной. Вязкость μ и теплопроводность κ смеси находятся по формулам Уилки [8] и Масона–Саксены [9].

3. Граничные условия

Для уравнений Эйлера на поверхности тела ставятся условия непротекания. Для уравнений Навье–Стокса и пограничного слоя на поверхности тела используются условия прилипания потока и условие адиабатичности:

$$q_w = \varepsilon_w \sigma T_w^4$$

где q_w — полный тепловой поток за счет теплопроводности и диффузии химических компонент, $\varepsilon_w = 0{,}8$ — коэффициент черноты поверхности космического аппарата, σ — постоянная Стефана–Больцмана. Концентрации атомных химических компонент на поверхности находятся из уравнений массового баланса, которые имеют вид:

$$d_{i,n} + K_{i,w}\rho_i = 0; \quad K_{i,w} = \frac{2\gamma_{i,w}}{2-\gamma_{i,w}} \sqrt{\frac{1}{2\pi}\frac{RT}{M_i}}\,,$$

где $\gamma_{i,w}$ — вероятность гетерогенной рекомбинации i-й химической компоненты. Концентрации молекулярных компонент на поверхности получаются из условия сохранения химических элементов.

4. Тонкая треугольная пластина с притупленным носком в вязком гиперзвуковом потоке

Описанная методика использовалась в ряде исследовательских работ, посвященных изучению характеристик теплообмена на аппаратах сложной пространственной формы при их гиперзвуковом полете в атмосфере Земли. Одной из простейших конфигураций, вместе с тем обладающей рядом специфических особенностей, характерной для обтекания аппаратов планирующего спуска, является треугольная пластина с затупленным носком и кромками.

В работе [10] приведены результаты экспериментальных исследований ламинарного теплообмена на наветренной стороне тонкой треугольной пластины с притупленными носком и кромками со стреловидностью $\lambda = 75°$ при числе Маха внешнего потока $\mathbf{M}_\infty = 14$ и числах Рейнольдса $\mathbf{Re} = \rho_\infty U_\infty L/\mu_\infty \approx \approx 10^6$, где индекс ∞ относится к параметрам внешнего потока, L — длина пластины. В экспериментах был обнаружен следующий эффект: на поверхности пластины на некотором расстоянии (порядка радиуса затупления r_0) от оси симметрии и параллельно ей наблюдались узкие полосы повышенных тепловых потоков при отсутствии максимума давления в районе этих полос. Причем в точке максимума тепловые потоки существенно (в полтора-два раза) превышают соответствующие тепловые потоки на острой пластине. Как показывает эксперимент, для пластины с притупленным носком этот эффект присутствует (и с той же интенсивностью) как для притупленных, так и для острых кромок. Эти локальные максимумы располагаются в точках $z = z_A \approx 4r_0$ почти независимо от радиуса носка. Объяснение этого эффекта дано в работе [11] и книге [13] и вкратце сводится к следующему.

Общая схема обтекания такой пластины показана на рис. 10.1. Форма расчетной ударной волны *1* на рис. 10.1, *а*, индуцируемая носком как тупым телом, определяется закономерностями взрывной аналогии [12, 13], так что некоторая передняя часть пластины $x \leqslant x_{\mathrm{A}}$ будет располагаться внутри этой «взрывной», осесимметричной вначале ударной волны (рис. 10.1, *б*). Точка A с координатой x_A расположена в районе взаимодействия скачка *1* со скачком *2*, индуцируемым кромкой.

Для экспериментального числа Маха $\mathbf{M}_\infty = 14$ расчетное (в невязкой постановке) распределение давления на притупленной кромке радиусом $r_k = r_0$ пластины с притупленным носком для различных углов атаки и стреловидности показано на рис. 10.2, где введен локальный угол атаки по формуле

$$\sin\alpha^* = \sin\alpha\cos\varphi + \cos\alpha\sin\varphi\,\mathrm{tg}\,\varphi, \quad \mathrm{tg}\,\varphi = \frac{\sin\beta}{\mathrm{tg}\alpha}, \quad \beta = 90° - \lambda.$$

Это распределение имеет волнообразный характер (подобно давлению на притупленном конусе, см. [12, 13]) с локальным максимумом давления в конце волны (при $\alpha \leqslant 25°$, $\lambda = 75°$ и при $\alpha = 10°$, $\lambda = 30 - 60°$), обусловленном указанным выше взаимодействием кромки с головной ударной волной. Наибольшая величина максимума, как следует из рис. 10.2, достигается при $\alpha = 10°$, $\lambda = 75°$, т. е. для условий эксперимента [10]. В этом же случае реализуется наименьшая протяженность области повышенного давления. Очевидно, с ростом числа Маха давление в этой области должно возрастать, а расстояние до нее от носка — убывать, т. е. этот эффект имеет гиперзвуковой характер.

Таким образом, в области взаимодействия головного ударного слоя с передней кромкой крыла на ней возникает «пятно» повышенного давления, результатом чего является образование на наветренной поверхности пластины расходящегося пучка линий тока. Распределение линий тока по поверхности

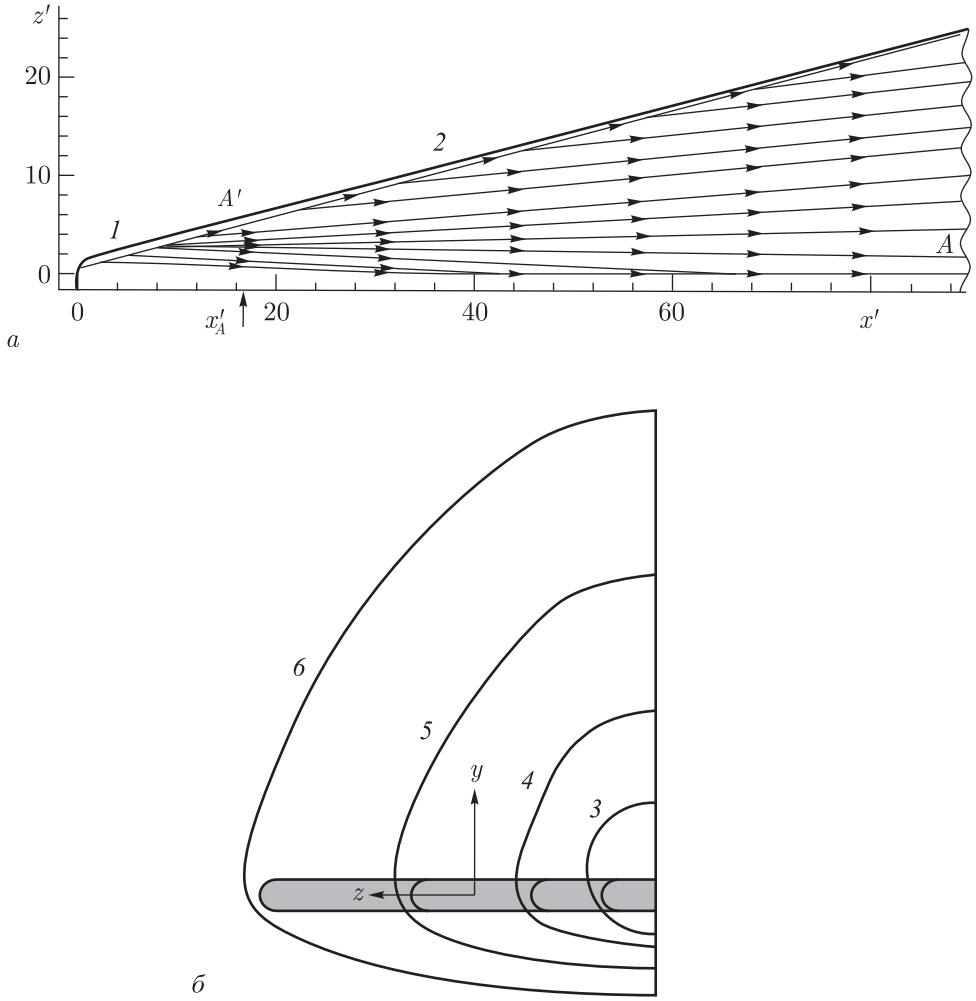


Рис. 10.1. Общая схема обтекания притупленной треугольной пластины *а* — и формы ударных волн *б* — в сечениях ($z' = z/r_0$, $x' = x/r_0$): *1* — $x' = 10$, *2* — $x' = 30$, *3* — $x' = 60$, *4* — $x' = 100$

пластины в невязком потоке на границе пограничного слоя показано на рис. 10.1, *а*. Расходимость этих линий тока внешне мало заметна. Однако, в рассматриваемом случае величиной, определяющей теплообмен на поверхности, является производная $\theta'_z = \partial\theta/\partial z$ по нормали к оси x. Эта величина в различных сечениях $x = \mathrm{const}$ показана на рис. 10.3. При этом на линии с $\theta''_z = 0$ реализуются максимальные скорости растекания при $\theta'''_z > 0$ и скорости стекания при $\theta'''_z < 0$. На рис. 10.1, *а* — это линия A–A', построенная по данным рис. 10.3. Эти особенности газодинамической картины течения на поверхности пластины и являются источником возникновения аномалии распределения тепловых потоков на ней.

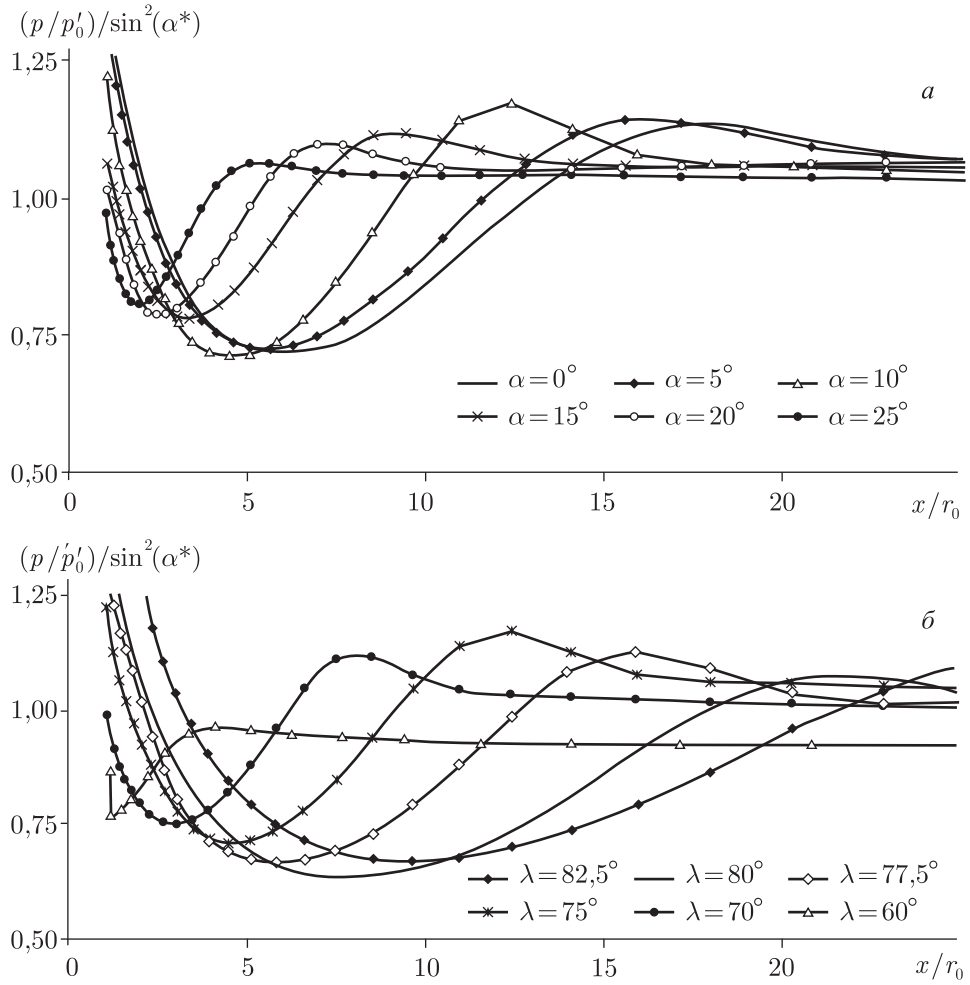


Рис. 10.2. Распределение давления по кромке пластины при различных её углах атаки — *а* и стреловидности — *б*

Численное исследование данной задачи проведено на основе двух вышеописанных методик. Некоторые результаты этих расчетов уже приведены выше, а также ранее в работах [14, 16]. Расчеты выполнены для пластины со сферическим носком и цилиндрической кромкой того же радиуса $r_k = r_0$. Числа Маха и Рейнольдса, рассчитанные по параметрам набегающего потока и длине крыла, равны $\mathbf{M}_\infty = 14$ и $\mathbf{Re}_\infty \sim 10^6$ соответственно, температурный фактор равен 0,25, угол атаки $\alpha = 10°$, стреловидность крыла $\lambda = 75°$.

На рис. 10.4, *а* показаны изолинии температуры торможения T_0 (K) в сечении $x = 90$, по которым хорошо видно относительное распределение толщины пограничного слоя (температура торможения набегающего потока равна 1200 K, температура стенки — 300 K). На наветренной поверхности крыла минимальная толщина пограничного слоя наблюдается на линии $z \approx z_A \approx 4r_0$,

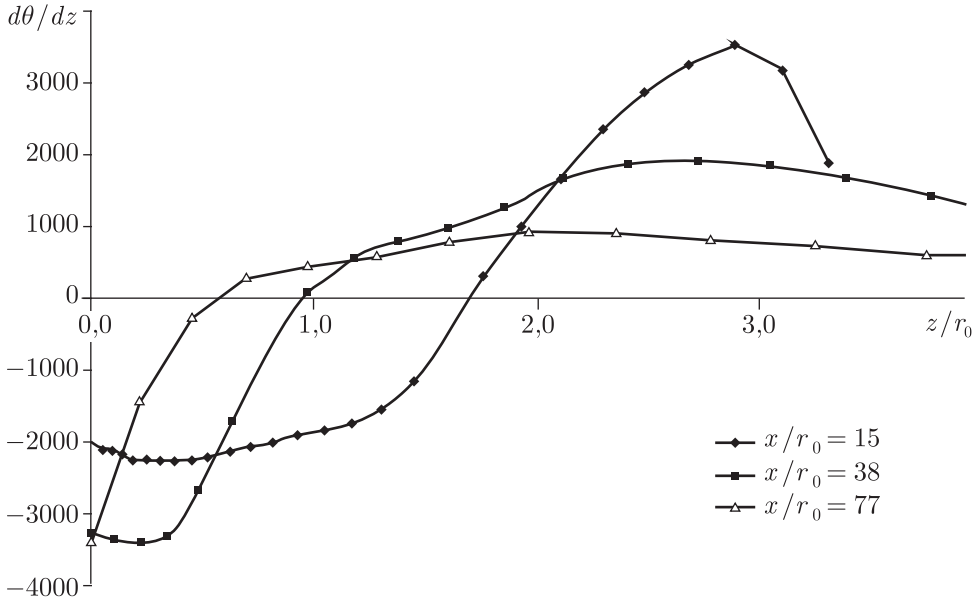
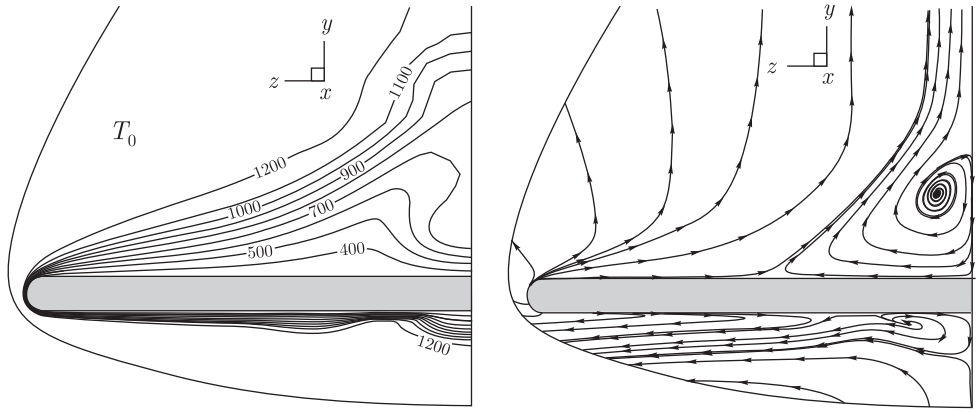


Рис. 10.3. Производная угла наклона поверхностных линий тока к плоскости симметрии по размаху крыла в нескольких сечениях

полученной при величине $x_{\text{A}} \approx 15r_0$, отвечающей точке максимума соответствующей кривой давления на кромке крыла (рис. 10.2). Примерно на тех же линиях $z \approx z_A$ расположены и максимумы замеренных в экспериментах тепловых потоков, которые вызваны резким уменьшением толщины пограничного слоя на этой линии (рис. 10.4, *а*). По обе стороны от нее идут линии стекания с более толстым пограничным слоем (примерно в 2 и 3 раза соответственно). Одной из линий стекания является плоскость симметрии. Здесь толщина



а *б*

Рис. 10.4. Изолинии температуры торможения T_0 *а* — проекции линий тока, *б* — в сечении $x' = 90$

пограничного слоя на наветренной стороне достигает максимума, составляя примерно одну треть от толщины ударного слоя.

На рис. 10.4, *б* показаны проекции линий тока на плоскость поперечного сечения $x = 90r_0$. Как видно, вне пограничного слоя линии тока отклоняются от оси симметрии к кромкам, что является следствием уменьшения нормальной к кромкам компоненты скорости при прохождении головной ударной волны в окрестности кромок, и довольно существенное падение давления к центру от кромок не в состоянии изменить эту ситуацию. Но тот же градиент давления разворачивает линии тока в пограничном слое к центру, образуя область отрывного течения, прилегающую к плоскости симметрии. На подветренной стороне пластины (рис. 10.4, *б*) линии тока вблизи плоскости симметрии образуют замкнутые кривые, являющиеся следом продольного (вдоль оси x) вихря.

Распределение давления в поперечном сечении крыла (вблизи концевого среза, при $x = 90r_0$) показано на рис. 10.5. Здесь левая половина рисунка соответствует расчету невязкого обтекания, а правая — вязкого. Относительно толстый пограничный слой на наветренной плоскости крыла приводит к оттеснению ударной волны ($\sim 20\%$ в сравнении с невязким решением), увеличению угла ее наклона и увеличению уровня давления на пластине ($\sim$ 5–10%). Распределение давления на кромке и в невязкой части течения на подветренной стороне (вне области спирального вязкого вихря) в обоих случаях близки между собой.

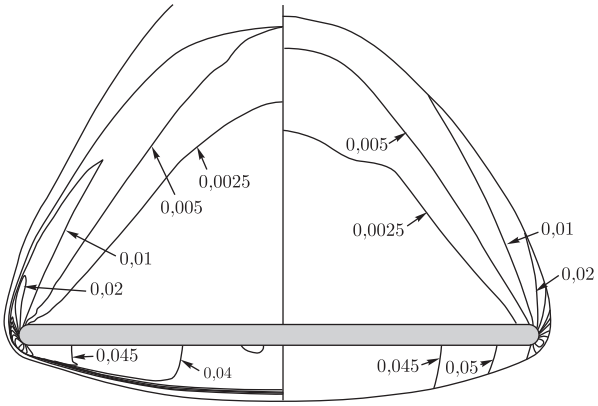


Рис. 10.5. Распределение давления в сечении x'=90

На рис. 10.6 показаны полученные в рамках уравнений Навье–Стокса распределения тепловых потоков q/q_0 (q_0 — тепловой поток в точке торможения сферического носка) на пластине в различных ее сечениях. На рис. 10.6, *а* на кривых при $r_0 = r_k$ внутренние максимумы тепловых потоков появляются лишь в сечениях $x > x_A \approx 15r_0$ (величина x_{A}определена по положению максимума соответствующей кривой давления на рис. 10.2) вблизи линии

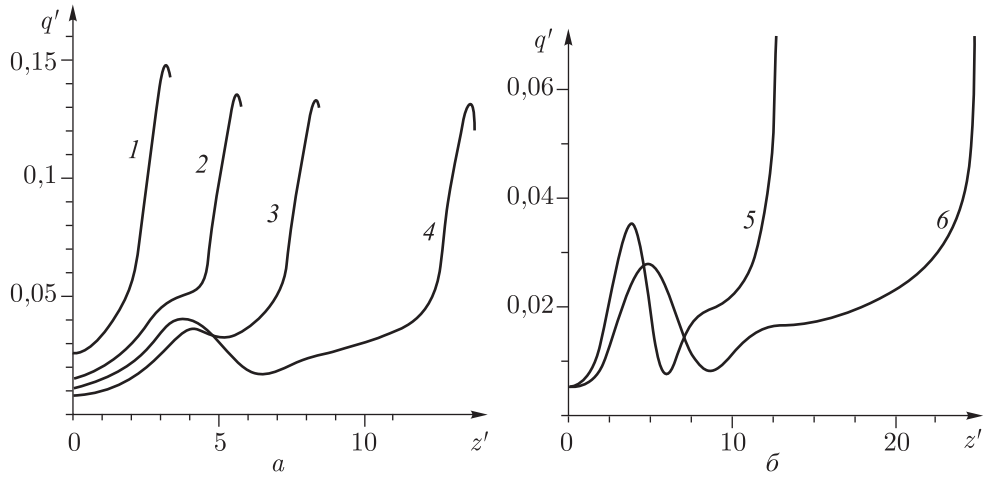


Рис. 10.6. Распределения теплового потока по пластине, полученные при решении уравнений Навье–Стокса, *а*) $r_0 = r_k$: *1* — $x' = 10$, *2* — $x' = 20$, *3* — $x' = 30$, *4* — $x' = 50$, *б*) $x' = 90$: *5* — $r_0 = r_k$, *6* — $r_0 = 2r_k$

$z = z_{\text{A}} = 4r_0$ и относительная интенсивность этих максимумов нарастает с удалением от носка.

На рис. 10.6, *б* дано распределение тепловых потоков по пластине с разными носками с $r_0 = r_k$ и $2r_k$ в сечении $x = 90r_0$. По оси абсцисс отложена координата $\widetilde{z} = z/r_0$, где величина r_0 своя в каждом случае (но тепловой поток отнесен к величине q_0, соответствующей радиусу кромки r_k).

На рис. 10.7 дано сравнение тепловых потоков, полученных различными методами, на притупленной ($r_k = r_0$) и острой пластине. Решения уравнений как Навье–Стокса, так и Эйлера, правильно предсказывают величину локального максимума теплообмена на линии растекания вблизи оси, однако само положение этих максимумов различно. Расчет по уравнениям Навье–Стокса дает близкое к экспериментальному положение максимумов тепловых потоков. По второму методу эти максимумы располагаются вблизи линии растекания A–A' на рис. 10.1, *а*, т. е. при $z \neq r_0 \approx 1{,}5 \div 2$.

В вязком течении эффекты вязко-невязкого взаимодействия и возникновение поперечного отрыва в пограничном слое, приводят к оттеснению линии растекания от оси симметрии (в сравнении с невязким расчётом). В итоге реальное расположение экстремальных точек оказалось близким к линии $z_A \approx 4$, проходящей через точку A на кромке пластины и совпадающие с экспериментом. В тоже время в областях $z > z_A$ оба расчётных метода неплохо согласуются между собой.

Эффект возникновения полос экстремального теплообмена на притупленной пластине реализуется в достаточно узком диапазоне определяющих параметров: углов α, λ. На рис. 10.8, *а* дано распределение тепловых потоков при тех же режимах обтекания и в том же, что и на рис. 10.7 сечении

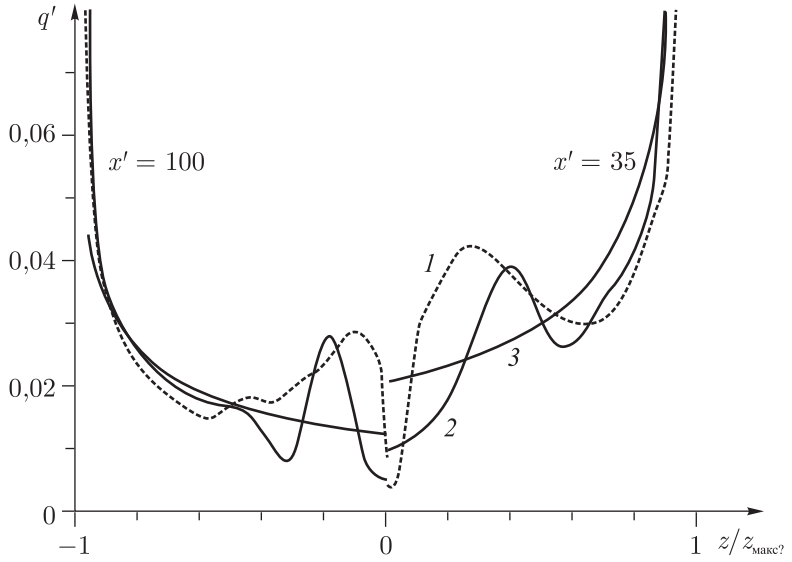


Рис. 10.7. Сравнение распределений теплового потока в сечениях $x' = 35$ и 100, полученных различными методами: *1* — уравнения Навье–Стокса, *2* — приближенный метод, *3* — острая пластина

$x = 90r_0$, для пластины с $\lambda = 75°$ ($\beta = 15°$), обтекаемой под различными углами атаки $\alpha = 0$–$20°$. Экстремальные полосы в этом случае четко проявляются при $\alpha = 7{,}5$–$15°$, при $\alpha = 20°$ эта полоса очень слабо выражена, а при $\alpha \leqslant 5°$ распределение тепловых потоков по центральной области почти равномерно. Этот результат согласуется с данными рис. 10.2, *а*, на котором максимумы давления на кромке крыла появляются лишь в диапазоне углов $\alpha \leqslant 20°$; причем при $\alpha \leqslant 5°$ головная индуцированная носком ударная волна пересекается с кромкой пластины под весьма малым углом, и область их взаимодействия сильно растянута. При больших же $\alpha > 20°$ начинает играть роль индуцированный притупленными кромками пластины эффект растекания газа от плоскости симметрии [13, 15] соизмеримый по интенсивности с растеканием, индуцированным интерференцией скачков в точке A кромки пластины.

На рис. 10.8, *б* приведено распределения тепловых потоков на пластинах с различными $\lambda = 45$–$85°$ при $\alpha = 10°$ (в том же сечении $x = 90r_0$). Полосы экстремальных тепловых потоков появляются лишь при больших стреловидностях $\lambda \geqslant 75°$, почти не ощутимы при $\lambda = 60°$ и отсутствуют вовсе при $\lambda = 45°$ по тем же причинам, что и при $\alpha \geqslant 20°$ на рис. 10.8, *а*.

Эту ситуацию дополнительно проясняет рис. 10.9, где приведены производная dw/dz на оси симметрии при разных α и λ, где w — компонента скорости по оси z на пластине (невязкий расчет). Эта производная положительна при малых $\alpha \leqslant 5°$ и больших $\lambda \geqslant 85°$, поскольку в этих случаях вся пластина оказывается в области преимущественного влияния ее

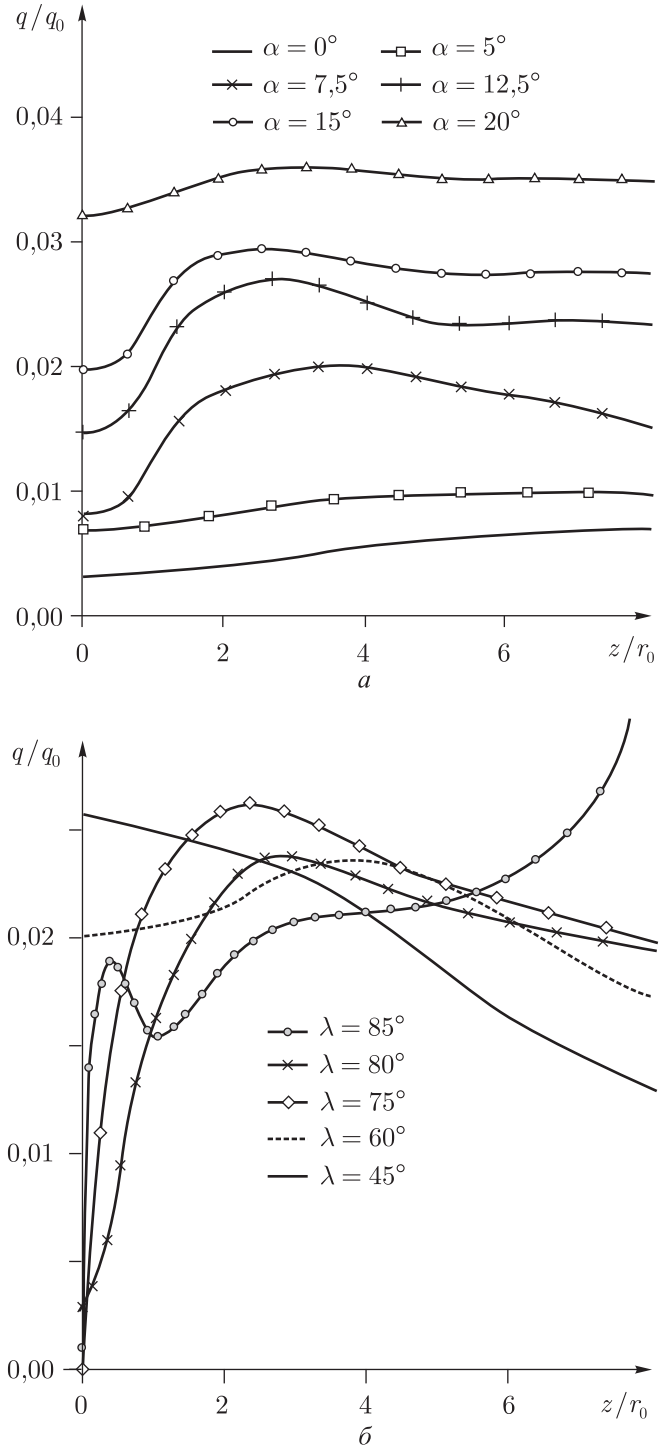


Рис. 10.8. Распределение тепловых потоков в сечении $x' = 90$ при различных углах атаки — *а* и стреловидности крыла — *б*

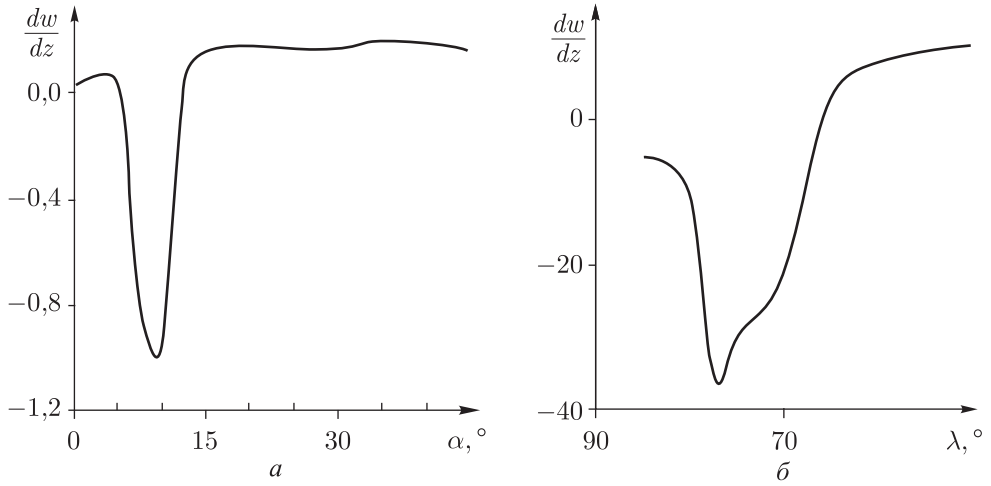


Рис. 10.9. Производная поперечной компоненты скорости в плоскости симметрии в сечении $x' = 90$ в зависимости от углов атаки, *а* — при постоянном угле стреловидности 75° и стреловидности крыла, *б* — при постоянном угле атаки 10°

носка, и экстремальные полосы не образуются. Производная dw/dz также положительна при больших $\alpha > 15°$ и умеренных $\lambda \leqslant 65°$ поскольку, как указано выше, в этих случаях доминирующим для всей пластины оказывается растекание газа, индуцируемое кромками. Но в промежуточном диапазоне параметров α и λ производная dw/dz на оси симметрии оказывается отрицательной, и это стекание газа обусловлено «оттесняющим» воздействием исходящим из точки A расходящимся пучком линий тока на центральные линии тока.

Приведенные материалы позволяют предсказывать появление полос экстремального теплообмена на крыльях типа притупленной пластины путем чисто геометрического сопоставления формы, индуцированной притупленным носком ударной волны, с формой крыла в плане.

5. Экспериментальное исследование теплообмена на модели ВА

В 2006–2007 г.г. на экспериментальной базе ЦНИИмаш (установка ПГУ–7) в соответствии с Контрактом № 60134 от 12.05.2006 г. между CNES (Франция) и ЦНИИМаш (Россия) были выполнены испытания модели европейского возвращаемого аппарата (ВА) Pre-X масштаба 1/15 типа несущий корпус [17]. В ходе экспериментов были определены характеристики теплообмена на поверхности с использованием термовизионного метода. Аппарат Pre-X предназначен для получения экспериментальным путем в условиях реального полета данных, относящихся к аэротермодинамическим явлениям, которые не моделируются

в наземных условиях, но определяют конструкцию возвращаемого с орбиты аппарата. А также для испытаний в условиях полета образцов многоразовых теплозащитных материалов в специально предписанных областях поверхности аппарата с целью оценки их фактической многоразовости. Целью аэротермодинамических испытаний на модели ВА было получение экспериментальных данных по теплообмену на его поверхности в условиях наземных испытаний для включения в базу данных аэротермодинамических параметров.

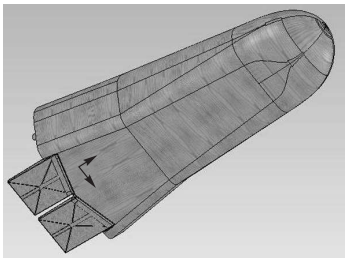


Рис. 10.10. Трёхмерная САПР-модель ВА Pre-X

Обработка термовизионных измерений проводилась в соответствии с методикой описанной в [18] и включала в себя определение температуры поверхности модели в ходе эксперимента, извлечение из этих данных распределений тепловых потоков

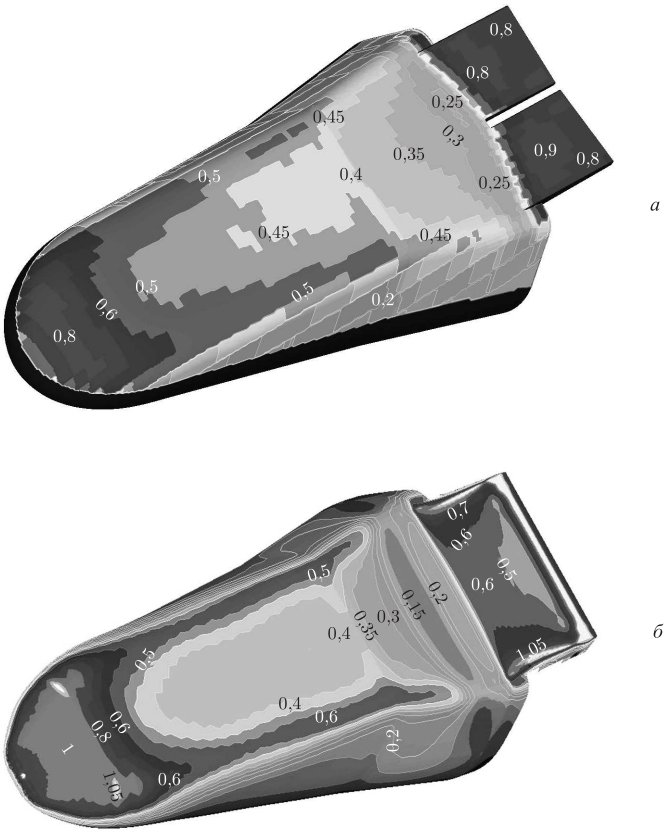


Рис. 10.11. Распределение тепловых потоков на поверхности модели Pre-X, угол отклонения тормозных щитков $\delta = 15^\circ$, *а* — эксперимент, *б* — расчёт

и привязку получаемого термовизионного кадра к трёхмерной САПР-модели ВА (рис. 10.10). Эта же САПР-модель использовалась и для проведения численного моделирования теплообмена на аппарате. Численное моделирование обтекания и теплообмена на поверхности аппарата проводилось для ламинарного режима с использованием полных уравнений Навье–Стокса.

Результаты экспериментальных и расчетных данных по теплообмену для номинальных условий испытаний (число $\mathbf{M}_\infty = 10$, число Рейнольдса на 1 м $\mathbf{Re}_{\infty 1} = 10^6$, температурный фактор $t_w = 0{,}2$, угол атаки 45° представлены на рис. 10.11, 10.12 для углов отклонёния щитков 5°, 10° и 15°. В качестве нормирующей величины принят тепловой поток q_{w0} в критической точке сферы с радиусом 70 мм, который рассчитывался по формуле Фэя–Ридделла. Удобство представления в указанном виде обусловлено консервативностью распределения относительной величины q_w/q_{w0} на большей части поверхности модели при вариациях определяющих параметров $\mathbf{M}_\infty$, $\mathbf{Re}_{\infty 1}$, t_w.

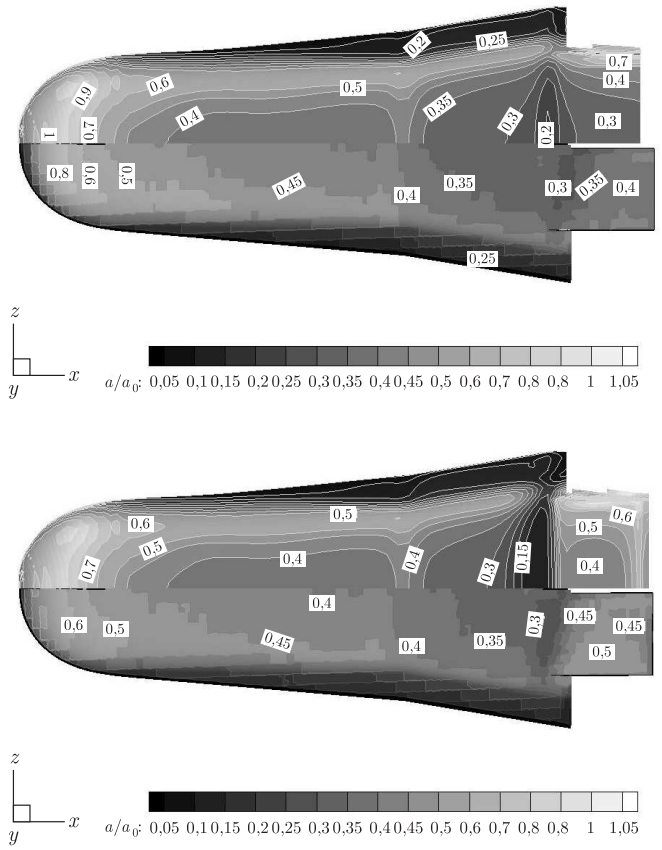


Рис. 10.12. Распределение тепловых потоков на поверхности модели Pre-X, угол отклонения тормозных щитков $\delta = 5°$ *а* — и 10° *б* — верх — расчёт, низ — эксперимент

Отметим, что в расчетах установленные на модели два щитка с щелью между ними, были заменены одним сплошным щитком.

Картина распределения тепловых потоков на поверхности щитков характеризуется большой неоднородностью. При увеличении угла отклонёния щитков образуется область пониженного теплового потока, вызванная отрывом пограничного слоя. Максимум теплообмена наблюдается в зоне присоединения оторвавшегося пограничного слоя, где уровень q_w в 2–3 раза превышает уровень q_w на неотклоненном щитке, а также в областях на кромках щитков и в области разреза (в эксперименте), характеризующихся интенсивным стеканием пограничного слоя. Совпадение результатов в передней части модели является удовлетворительным. Отличие в распределении тепловых потоков в окрестности щитков обусловлено начавшимся ламинарно-турбулентным переходом в отрывной области, индуцированной отклонёнными щитками.

6. Обтекание крылатого ГЛА типа среднеплан

Рассматривается атмосферный спуск крылатого ГЛА типа среднеплан (т. е. крылья находятся в средней части фюзеляжа), траектория которого показана на рис. 10.13 [10]. При проведении вычислений использованы рас-

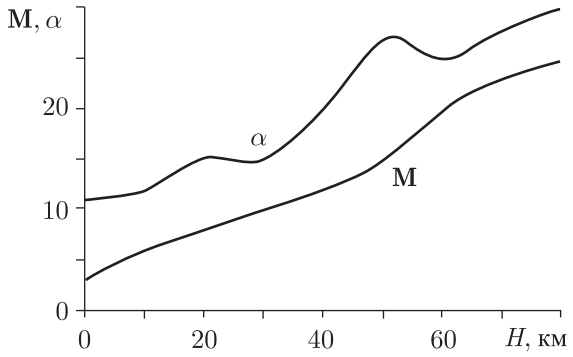


Рис. 10.13. Траектория полёта ГЛА типа среднеплан

четные сетки, построенные Д. А. Чураковым. На рис. 10.14 представлены значения теплового потока в критической точке ГЛА для четырех точек траектории, параметры которых приведены в таблице 10.1.

Расчеты проводились по двум сравниваемым методикам (уравнения Навье–Стокса и уравнения Эйлера и пограничный слой) для приближений равновесного и неравновесного воздуха при вероятности гетерогенной рекомбинации атомов O и N $\gamma_A = 0{,}01$. При данных условиях максимальные уровни теплообмена в окрестности критической точки достигаются на высоте около $H = 60$ км. Можно видеть, что в окрестности критической точки обе методики дают хорошее согласие между собой. Приближение равновесного воздуха дает завышение величины теплового потока во всем

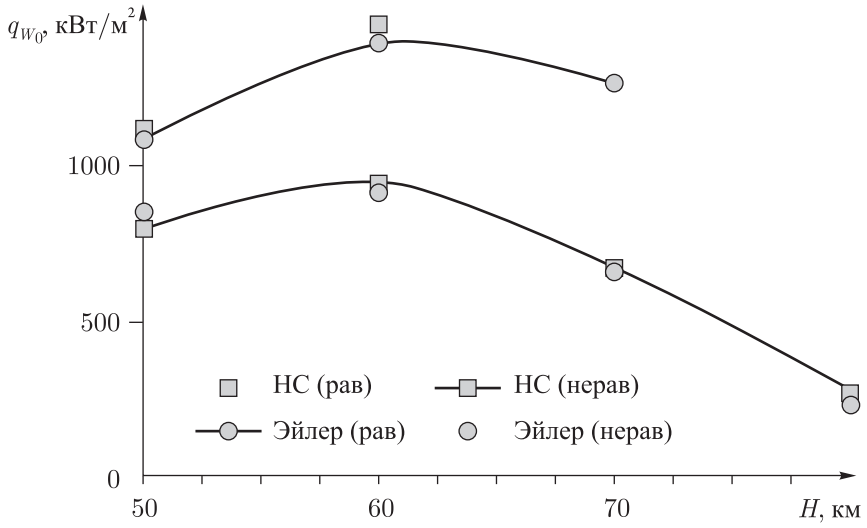


Рис. 10.14. Тепловой поток в критической точке для условий полёта ГЛА

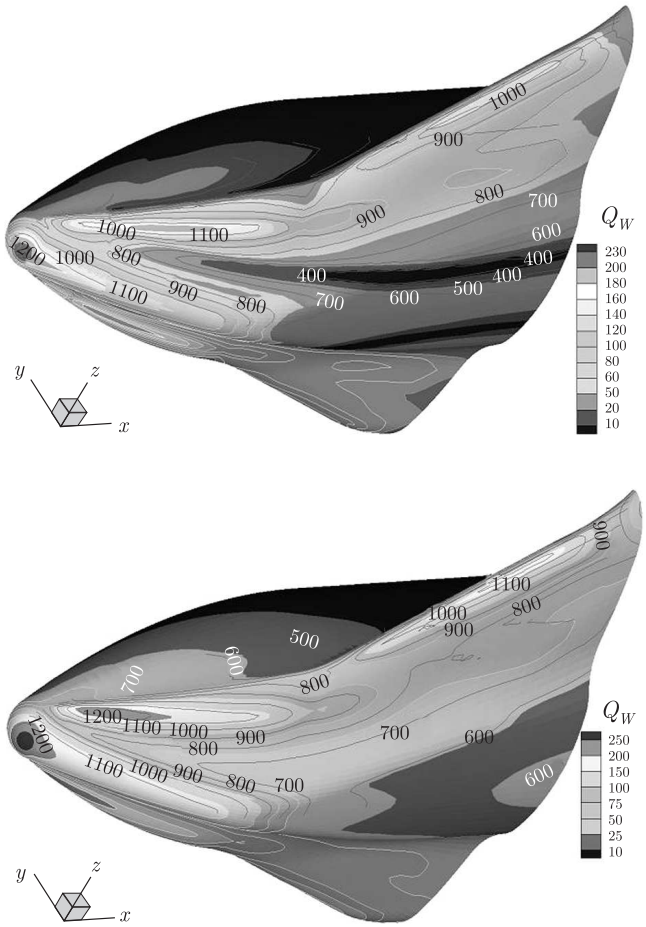
Таблица 10.1. Параметры траектории ГЛА типа среднеплан

H, км	V_∞, м/сек	$\mathbf{M}_\infty$	ρ_∞, кг/м^3	T_∞, К
50	4977	15	$1{,}08 \cdot 10^{-3}$	274,0
60	6382	20	$3{,}32 \cdot 10^{-4}$	253,4
70	7423	25	$9{,}27 \cdot 10^{-5}$	219,1
80	6818	25	$2{,}09 \cdot 10^{-5}$	184,9

рассмотренном диапазоне высот по сравнению с вариантом неравновесного воздуха. Превышение увеличивается с ростом высоты и достигает при $H = 70$ км около двух раз.

На рис. 10.15 представлены сравнения тепловых потоков и равновесно-радиационных температур на поверхности ГЛА, рассчитанные по двум методикам. В ходе численного анализа выявлено, что нижняя окрестность ребра или «наплыва» в начальной части крыла аппарата является участком с очень высоким уровнем теплообмена, в котором уровень теплового потока может для разных точек траектории превышать на 10–20% величину теплового потока в критической точке. Это объясняется повышением давления в этой области с последующими большими отрицательными градиентами давления из-за разворота потока на кромке; то и другое приводит к существенной интенсификации теплообмена.

В свою очередь столь существенное повышение давления обусловлено как бы «изолированным» (от внутреннего течения) обтеканием ребра потоком в ударном слое с большой плотностью в гиперзвуковых равновес-



а

б

Рис. 10.15. Распределение тепловых потоков (кВт/м^2) и линий постоянных температур (°C) ($H = 80$ км, $\alpha = 30°$, $\mathbf{M} = 25$, $V = 6800$ м/с, неравновесное обтекание, $\gamma_A = 0{,}01$), *а* — уравнения Эйлера и пограничный слой, *б* — уравнения Навье–Стокса

ных течениях. В то же время кромки ребра (как и далее, кромки крыльев) обтекаются «изнутри» разворачивающимся ударным слоем. И локальное повышение тепловых потоков перед кромками обусловлено большими отрицательными градиентами давления при его общем высоком уровне. Этот весьма неблагоприятный эффект появления зон повышенного нагрева заметно ослабевает с уменьшением числа $\mathbf{M}$, а также при переходе от равновесного газа к совершенному, поскольку в этих случаях происходит снижение уровня плотности, а следовательно и давления на выступающих элементах.

При удовлетворительном соответствии расчетных параметров, полученных по двум методикам на наветренной стороне ГЛА, наблюдается заметное отличие в результатах расчетов в окрестности кромок крыла и, особенно, в области повышенных тепловых потоков вблизи «наплыва» в начальной части

крыла. Это объясняется, во-первых, сильной искривленностью линий тока в этой области — по своему выводу метод эффективной длины пригоден лишь для слабо искривленных линий тока с пренебрежимо малыми вторичными течениями, и, во-вторых, наличием сильных градиентов давления, также не предусматриваемых условиями применимости этого метода. На существенное влияние вторичных течений указывает также наличие локального поперечного отрыва, обнаруженного с использованием уравнений Навье–Стокса и не описываемого в рамках уравнений Эйлера. В этой связи более надежными представляются результаты, полученные с применением уравнений Навье–Стокса. Второй метод, использующий уравнения Эйлера и пограничного слоя, как существенно более оперативный может быть использован для получения оценочных данных в широком диапазоне условий обтекания, тем более что на основной части аппарата оба метода дают вполне согласующиеся результаты.

7. Обтекание крылатого ГЛА типа нижнеплан

Были выполнены также расчеты параметров течения и теплообмена для другой конфигурации крылатого ГЛА типа нижнеплан [19], когда крылья находятся в нижней части фюзеляжа. Ударная волна рассчитывалась насквозь, поэтому на внешней границе задавались условия в набегающем потоке. В данном разделе приведены результаты для наиболее теплонапряженной точки траектории, параметры которой приведены в таблице 10.2. Угол атаки равен 35 градусам, режим течения — ламинарный. Расчетная сетка предоставлена Михалиным В.А. [20] и взята из расчета невязкого обтекания ГЛА совершенным газом при $\mathbf{M}_\infty = 16$. В расчете с использованием модели неравновесного воздуха поверхность аппарата считалась низкокаталитичной с вероятностью гетерогенной рекомбинации атомов O и N равной $\gamma_{\mathrm{A}} = 0{,}01$.

Таблица 10.2. Параметры точки траектории ГЛА типа нижнеплан

H, км	V_∞, м/сек	$\mathbf{Re}_\infty$	$\mathbf{M}_\infty$	ρ_∞, кг/м^3	T_∞, К
63	5150	$6{,}33 \cdot 10^5$	16,6	$1{,}59 \cdot 10^{-4}$	243

Для случаев равновесно-диссоциирующего и химически неравновесного воздуха на фиг. 10.16 приведены изолинии, показывающие распределения теплового потока Q_w, на наветренной и боковой поверхностях крылатого ГЛА. Сравнение распределений давления, теплового потока и равновесно-радиационной температуры вдоль поверхности аппарата в плоскости симметрии ($z = 0$) аппарата для моделей равновесно-диссоциирующего и химически неравновесного воздуха показаны на рис. 10.17.

Анализ рисунков показывает, что распределение давления на наветренной поверхности аппарата практически не зависит от физико-химической модели среды — различие составляет 1–2 %. С подветренной стороны уровень

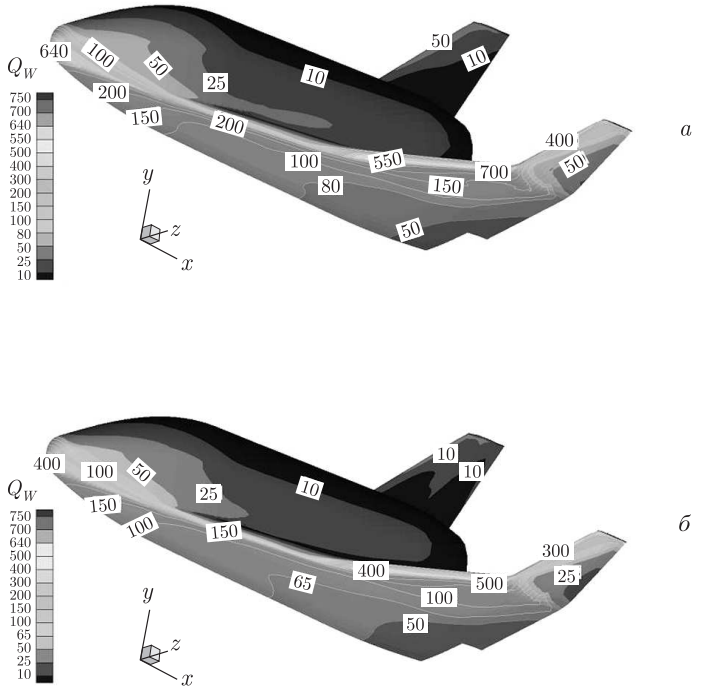


Рис. 10.16. Распределение тепловых потоков (кВт/м^2). Уравнения Навье–Стокса, *а* — равновесно-диссоциирующий воздух, *б* — неравновесный воздух, $\gamma_A = 0{,}01$

давления на поверхности для неравновесного воздуха может быть почти в два раза ниже, чем для равновесного (например, в окрестности хвостового оперения). Вероятно, это вызвано тем, что эффективный показатель адиабаты для неравновесного воздуха больше, чем для равновесного, поскольку при учете конечной скорости химических реакций течение с подветренной стороны является замороженным, и здесь наблюдается достаточно высокая концентрация атомов.

Учёт неравновесных химических процессов и конечной каталитической активности поверхности ($\gamma_{\text{A}} = 0{,}01$) заметно снижает расчетные уровни теплообмена по сравнению со случаем модели равновесно-диссоциирующего воздуха. Наиболее значительное снижение тепловых потоков наблюдается в окрестности носовой части аппарата (при $x \leqslant 1$ м) и в окрестности хвостового руля. Например в критической точке тепловой поток уменьшается примерно на 40 % — с 640 до 385 кВт/м^2, при этом температура поверхности уменьшается почти на 15 % — с 1670 до 1430 °C. Следует отметить высокий уровень нагрева поверхности на тонкой кромке крыльев сравнимый с уровнем в критической точке.

Особенно сильный нагрев наблюдается в месте излома крыла, где величины теплового потока и температуры даже несколько превосходят их значения в передней критической точке. В случае равновесного воздуха для теплового

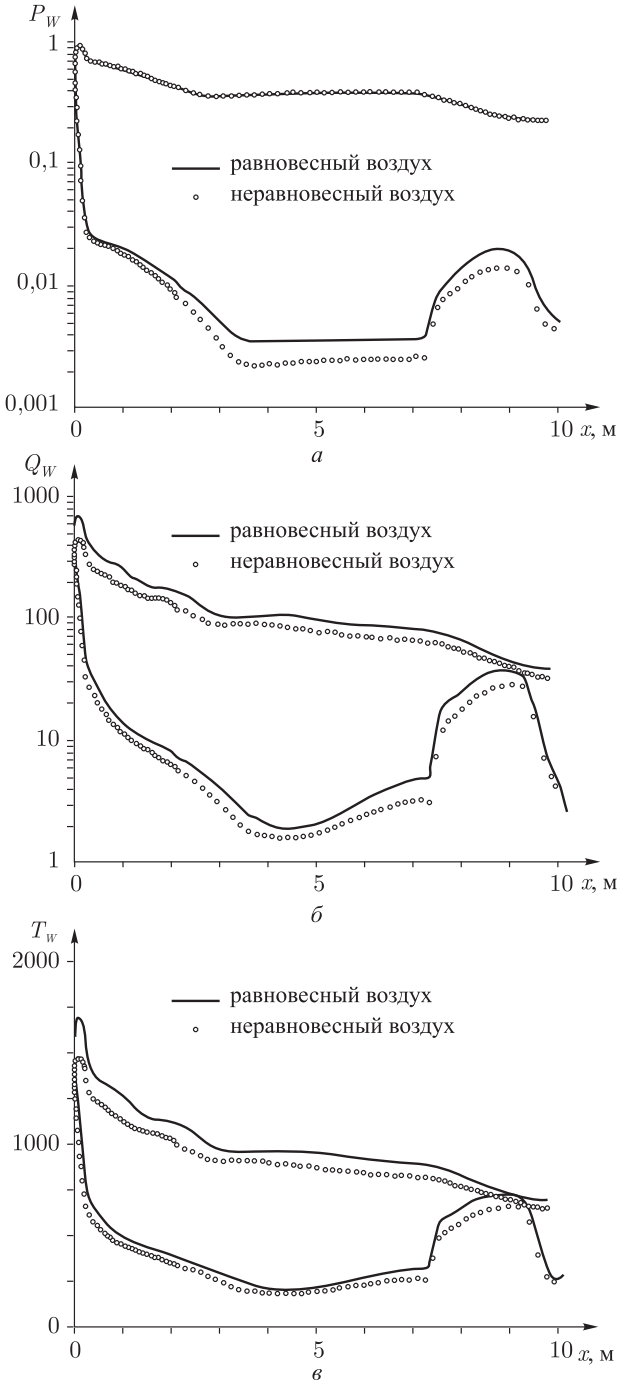


Рис. 10.17. Распределения вдоль поверхности ВА в плоскости симметрии: *а* — давления $p_w/\rho_\infty U_\infty^2$, *б* — тепловых потоков (кВт/м^2), *в* — температуры (°C). Уравнения Навье–Стокса, равновесно-диссоциирующий и неравновесный воздух, $\gamma_A = 0{,}01$

потока — на 10 % (710 и 640 °C), для температуры — на 3 % (1720 и 1670 °C). В случае неравновесного воздуха превышение более значительно, для теплового потока — на 30% (540 и 385 °C), для температуры — на 10 % (1570 против 1430 °C).

На остальной поверхности аппарата различие в уровнях теплообмена для двух моделей воздуха не столь значительно, причем оно уменьшается ниже по потоку, что обусловлено, по-видимому, постепенной рекомбинацией атомов в пограничном слое при течении вдоль поверхности в случае неравновесного воздуха.

Заключение

На основе компьютерного моделирования гиперзвукового обтекания различных форм крылатого ВА, движущегося в атмосфере Земли, получены характеристики теплообмена для различных точек траектории спуска. Исследованы области максимальных тепловых нагрузок к поверхности аппарата и их зависимость от определяющих параметров течения.

Наблюдается удовлетворительное соответствие расчетных параметров, полученных с использованием уравнений Эйлера и пограничного слоя и уравнений Навье–Стокса, на наветренной стороне ВА. В то же время имеется заметное отличие в результатах расчетов в окрестности кромок крыла и, особенно, в области повышенных тепловых потоков вблизи «наплыва» в начальной части крыла. Поэтому, использование уравнений Эйлера и пограничного слоя в областях, характеризующихся сильным вязко-невяким взаимодействием, а также на подветренной стороне аппарата, может приводить к заметным погрешностям и для правильного определения тепловых потоков необходимо использовать уравнения Навье–Стокса.

Показано, что в зависимости от конфигурации ВА приближение равновесно-диссоциирующего воздуха завышает величину теплового потока от 40% до двух раз для условий высотного полета по сравнению с моделью неравновесного воздуха с константой вероятности гетерогенной рекомбинации характерной для современных низкокаталитичных теплозащитных покрытий.

Список литературы

1. Многоразовый орбитальный корабль «Буран». Под ред. Ю. П. Семенова и Г. Е. Лозино-Лозинского. — М.: Машиностроение. 1995.
2. *Jameson A., Yoon S.* A LU-SSOR Scheme for the Euler and Navier-Stokes Equations // AIAA Paper. 1987. № 87–0600. 11 p.
3. *Горшков А.Б.* Расчет ламинарного донного теплообмена за телами в виде тонких конусов // Космонавтика и ракетостроение. 1997. вып. 11. С. 13–20.

4. *Горшков А.Б.* Алгоритм распараллеливания при численном решении двумерных стационарных уравнений Навье–Стокса с использованием неявной итерационной схемы // Математическое моделирование. 2005. Т. 17. № 11.
5. Основы теплопередачи в авиационной и ракетно-космической технике. Под. ред. Авдуевского В.С., Кошкина В. К. 2-е изд., перераб. и доп. — М.: Машиностроение, 1992. 528 с.
6. *Ковалёв Р.В.* Расчёт гиперзвукового течения около затупленных кромок рулей и крыльев летательных аппаратов при обтекании их неоднородным потоком // Космонавтика и ракетостроение. 2001. вып. 23.
7. *Власов В.И., Горшков А.Б.* Сравнение результатов расчётов гиперзвукового обтекания затупленных тел с лётным экспериментом OREX // Изв. РАН. МЖГ. 2001. № 5. С. 160–168.
8. *Wilke C.* A viscosity equation for gas mixtures // J. Chem. Phys. 1950. V. 18, № 4. P. 517–519.
9. *Mason E.A., Saxena S.C.* Approximate formula for the thermal conductivity of gas mixtures // Phys. Fluids. 1958. V. 1, № 5. P.361–369.
10. *Губанова О.И., Землянский Б.А., Лесин А.Б.и др.* Аномальный теплообмен на наветренной стороне треугольного крыла с затупленным носком при гиперзвуковом обтекании // Аэротермодинамика воздушно-космических систем. — М.: ЦАГИ, 1992. Ч. 1. С. 188–196,1992.
11. *Лесин А.Б., Лунёв В.В.* Аномальный теплообмен на треугольной пластине с затупленным носком в гиперзвуковом потоке // Механика жидкости и газа. 1994. № 2.
12. *Черный Г.Г.* Течения газа с большой сверхзвуковой скоростью. — М.: Физматлит, 1959. 220 с.
13. *Лунев В.В.* Течения реальных газов с большими скоростями. — М.: ФизМатЛит, 2007. 759 с.
14. *Kovalev R.V., Vlasov V.I.* Numerical Analysis of Heat Transfer on Windward Plane of a Blunt Delta Wing // EUCASS 2005. conference, Moscow.
15. *Лунев В.В.* Гиперзвуковое обтекание треугольной пластины с притупленными кромками // Изв. АН СССР. Механика и машиностроение. 1965. № 5.
16. *Власов В.И., Горшков А.Б., Землянский Б.А.и др.* Численное моделирование теплообмена при входе в атмосферу Земли спускаемых аппаратов типа «Клипер» // Космонавтика и ракетостроение. 2007. № 1 (46). С. 30–37.
17. *Baiocco P., Guedron S., Plotard P.* et al. The Pre-X atmospheric re-entry experimental lifting body: Program status and system synthesis // 57th International Astronautical Congress, 2–6 October 2006. IAC–06–D2. P. 2.2.
18. *Анфимов Н.А., Землянский Б.А., Кислых В.В. и др.* Исследование теплообмена на поверхности моделей ЛА в аэрогазодинамической установке кратковременного действия с помощью термовизионной системы, Космонавтика и Ракетостроение, 1994, № 2, С. 9–21.
19. *Ваганов А.В, Дмитриев В.Г., Задонский С.М. и др.* Оценки теплового режима малоразмерного крылатого возвращаемого аппарата на этапе его проектирования // Физико-химическая кинетика в газовой динамике.
www.chemphys.edu.ru/pdf/2006-11-20-002.pdf.
20. *Dmitriev V.G., Vaganov A.V., Gorshkov A.B.* et al. Analysis of Aerothermodynamic Parameters of Reusable Space Wing Vehicle // 2nd European Conference for Aero-Space Sciences. Brussels. Belgium. July 1–6, 2007.

11

ТЕПЛООБМЕН И СТРУКТУРА ТЕЧЕНИЯ У ПОВЕРХНОСТИ МЕЖПЛАНЕТНОГО ЗОНДА

В. Я. Боровой, И. В. Егоров, А. С. Скуратов
ФГУП «Центральный аэрогидродинамический институт
имени профессора Н. Е Жуковского»

В данной главе представлена методика численного решения нестационарных двух- и трехмерных уравнений Навье–Стокса и Рейнольдса, реализованная в виде комплекса программ, который обладает большой универсальностью и позволяет проводить исследования разнообразных газодинамических задач с использованием различных моделей движущейся газовой среды.

Проведено экспериментальное исследование гиперзвукового обтекания и нагрева двух моделей межпланетного зонда, отличающихся главным образом формой тыльной поверхности, моделирующей контейнер полезного груза, в диапазоне значений числа Маха от 6 до 20 и числа Рейнольдса $\mathbf{Re}_{\infty,D}$ от $0{,}7 \cdot 10^5$ до $16 \cdot 10^5$ и углах атаки от 0 до 20°. В частности, измерено распределение теплового потока по тыльной поверхности модели, включая окрестность задней точки торможения, где при симметричном обтекании (при $\alpha = 0$) локальный тепловой поток достигает максимального значения.

Проведено измерение распределение давления торможения позади модели и определена длина ближнего следа.

Определено число Рейнольдса, при котором происходит ламинарно-турбулентный переход в ближнем следе в диапазоне чисел Маха $\mathbf{M} = 6$–8.

Экспериментально и путем численного моделирования показано, что при турбулентном донном течении величина теплового потока к донной поверхности затупленного тела может быть соизмерима с величиной теплового потока в лобовой точке торможения.

Введение

В связи с осуществляемыми и проектируемыми экспедициями к планетам Солнечной системы изучение обтекания межпланетных зондов и их нагрева приобретает большое практическое значение. Современные вычислительные средства позволяют рассчитывать обтекание летательных аппаратов, в том числе с учетом реальных физико-химических процессов, протекающих при высоких температурах. Сравнение с экспериментальными данными указывает на достаточно высокую точность расчета ламинарного обтекания большей части поверхности зонда. В то же время при численном моделировании встречаются серьезные проблемы. Они обусловлены образованием позади зонда

обширной зоны отрыва (см. рис. 11.1) и возможностью ламинарно-турбулентного перехода.

Известно, что в гиперзвуковом потоке тыльная поверхность обтекаемого тела нагревается значительно слабее, чем лобовая поверхность. Поэтому может показаться, что нагрев тыльной поверхности, где обычно располагается контейнер полезного груза космического аппарата, не представляет практического интереса. В действительности это не так: если оторвавшийся поток присоединяется к боковой поверхности контейнера, то в зоне присоединения

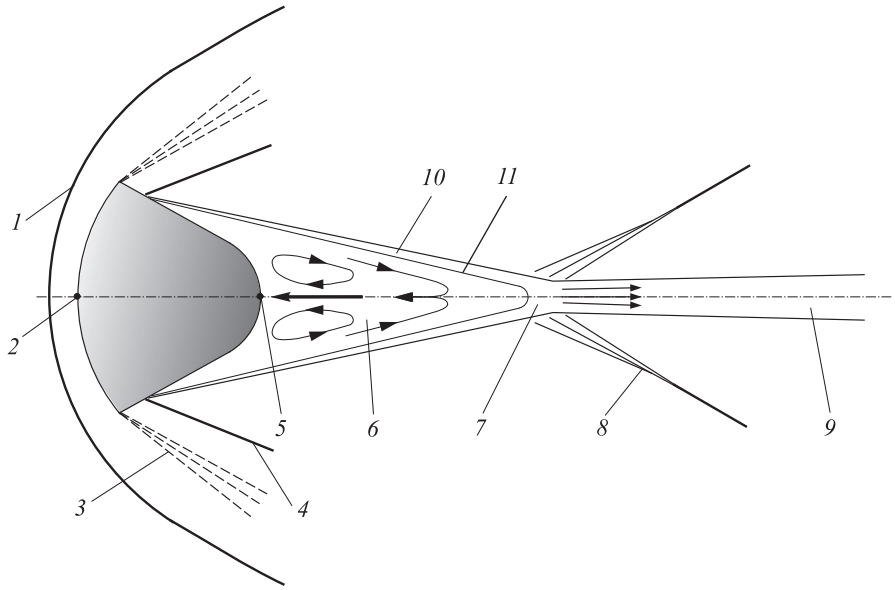


Рис. 11.1. Схема обтекания затупленного тела гиперзвуковым потоком: *1* — головная ударная волна, *2* — лобовая критическая точка, *3* — веер волн разрежения, *4* — скачок отрыв, *5* — тыльная критическая точка, *6* — ближний след, *7* — горло следа, *8* — хвостовой скачок, *9* — дальний след, *10* — слой смешения, *11* — граница зоны отрыва

теплоотдача существенно возрастает. При этом локальный нагрев может превысить допустимый уровень и привести к разрушению конструкции. Даже если оторвавшийся поток и не присоединяется к боковой поверхности контейнера, требование к точности определения максимальной температуры конструкции сохраняется: зная эту величину, можно ответить на вопрос, нуждается ли контейнер полезного груза в тепловой защите. Таким образом, необходимо детальное исследование теплообмена в донной области с целью определения размеров и формы контейнера полезного груза, приемлемых по условию ограничения его нагрева. Важность этой проблемы очевидна ввиду необходимости строгой экономии массы аппарата при межпланетных перелетах.

В 90-ые годы в США, России и Европе усилились проводившиеся и ранее численные и экспериментальные исследования обтекания

и аэродинамического нагрева межпланетных зондов. В США изучались три конфигурации межпланетного зонда:

1) Аппарат Pathfinder [1–3], предназначенный для посадки на Марс. Он состоит из двух конусов с общим основанием: лобовая поверхность имеет форму конуса (угол полураствора 70°) со скругленной вершиной; контейнер полезного груза представляет собой короткий усеченный конус (полуугол 50°) с плоским донным срезом.

2) Аппарат MSRO [4], предназначенный для доставки на Землю образца марсианского грунта. Он имеет асимметричную форму, так как рассчитан на вход в атмосферу Марса под углом атаки: лобовая поверхность наклонена по отношению к направлению невозмущенного потока, а цилиндрический контейнер полезного груза параллелен этому направлению, причем диаметр цилиндра вдвое меньше диаметра лобового щита. Исследование показало, что поток, оторвавшийся от кромки лобового щита, присоединяется к цилиндрической поверхности контейнера, что вызывает многократное усиление теплообмена, возрастающее при ламинарно-турбулентном переходе в зоне отрыва.

3) Проблемы, выявившиеся при изучении донного теплообмена, побудили организовать исследование моделей одной и той же формы в разных аэродинамических трубах США (использовалась также аэродинамические трубы Германии и Франции). Была выбрана конфигурация, отличающаяся от формы аппарата Pathfinder отсутствием заднего конуса. При этом тыльная поверхность модели представляет собой плоскость, перпендикулярную оси [5, 6]. Эксперименты проводились при числах Маха от 6 до 15,6 в различных средах (в воздухе, углекислом газе и фреоне) и при различных значениях полного давления и температуры торможения. Экспериментальная величина коэффициента теплоотдачи в конце зоны отрыва в два раза и более превышала рассчитанную величину.

К трем перечисленным конфигурациям следует добавить форму аппарата Project Fire II, входившего в атмосферу Земли по баллистической траектории со второй космической скоростью [7]. Лобовая поверхность аппарата представляет собой сферический сегмент, а тыльная поверхность имеет форму слабо затупленного конуса с полууглом 33°. При летном эксперименте, проведенном в 1965 году, в нескольких точках на боковой поверхности обратного конуса измерялся тепловой поток. В 2001 году было рассчитано обтекание тыльной поверхности зонда, причем расчеты проводились с учетом реальных свойств воздуха.

При наземных экспериментах перечисленные выше модели крепились в аэродинамических трубах на хвостовых державках. Вследствие этого исключалась возможность измерения теплового потока на оси симметрии донной поверхности, где коэффициент теплоотдачи достигает локального максимума при симметричном обтекании. Более того, наличие хвостовой державки может исказить течение газа и теплообмен во всей донной области,

так как при этом донное течение замыкается на твердой поверхности, а не в свободном потоке, как в отсутствие хвостовой державки. В данной работе для крепления модели использована тонкая боковая державка. Благодаря этому впервые удалось исследовать теплообмен на тыльной поверхности модели в области торможения потока. Хотя и при этом не удалось полностью исключить влияние державки на донный теплообмен, оно было слабым, как показал анализ экспериментальных данных.

В данной работе предпринято численное и экспериментальное исследование ламинарного, переходного и турбулентного обтекания моделей двух конфигураций. Они отличаются главным образом формой и размерами контейнера полезного груза. При выборе формы моделей учитывалась еще одна проблема, вытекающая из необходимости экономии массы межпланетного аппарата: расход топлива, необходимого для перехода аппарата с межпланетной траектории на Марсианскую орбиту, можно значительно сократить за счет торможения аппарата в атмосфере Марса. Для выполнения такого маневра необходимо создание подъемной силы. Балансировка аппарата под заданным углом атаки может быть достигнута с помощью балансировочных щитков. При этом возникает вопрос об аэродинамическом нагреве щитков и их влиянии на нагрев других поверхностей аппарата. Такое исследование также проведено в данной работе.

Эксперименты проводились в двух аэродинамических трубах ЦАГИ (УТ-1М и ИТ-2М) при числах Маха от 6 до 20 и различных углах атаки. Выбраны такие режимы, при которых химические процессы, протекающие в газе при высокой температуре, слабо влияют на течение. Это позволяет выделить влияние на теплообмен глобального отрыва потока и ламинарно-турбулентного перехода.

Обычно используемые в аэродинамических трубах оптические методы не позволяют определить длину ближнего следа при гиперзвуковых скоростях из-за малой плотности газа в донной области. В данной работе для решения этой задачи использован Т-образный насадок полного давления. С его помощью измерено осевое распределение давление торможения за моделью и определена длина зоны отрыва.

Для численного моделирования течений разработаны алгоритмы и комплексы программ, осуществляющих конечно-разностное решение уравнений Навье–Стокса и Рейнольдса. При выполнении расчетов выбирались те же характеристики набегающего потока, что и при экспериментах.

1. Исследованные конфигурации

Изучались модели двух конфигураций (рис. 11.2 и 11.3). Первая конфигурация (рис. 11.2, *а*) рассматривалась в НПО им. Лавочкина и ЦНИИМаш в связи с проектами аппаратов, использующих аэродинамическое торможение при входе в атмосферу Марса. Диаметр модели $D = 150$ мм, её лобовая

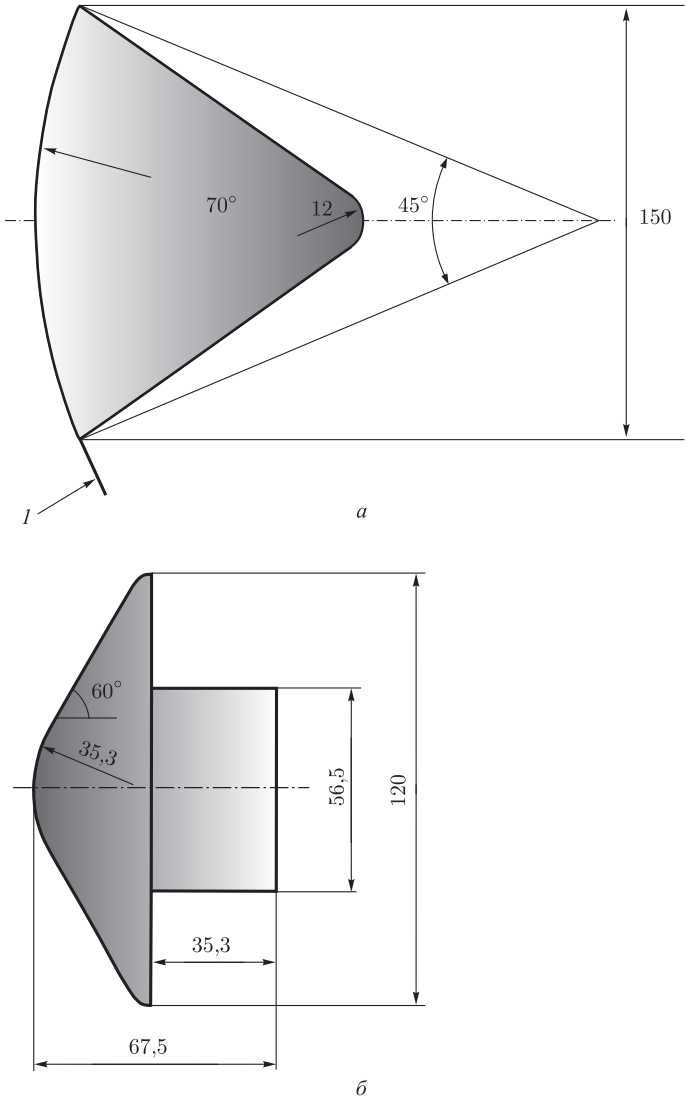


Рис. 11.2. Схемы моделей: *а* — модель № 1, *б* — модель № 2, *1* — балансировочный щиток

поверхность представляет собой сферический сегмент с центральным углом 45° и относительным радиусом $R/D = 1{,}3$. Тыльная часть модели представляет собой слабо затупленный конус (относительный радиус затупления $r/D = 0{,}08$) с углом раствора 70°. Эта модель сходна по форме с упомянутым выше аппаратом Project Fire II. К лобовой поверхности модели могут крепиться 3 балансировочных щитка. Модель может испытываться без щитков, с одним центральным щитком и с 3-мя щитками. Она крепится

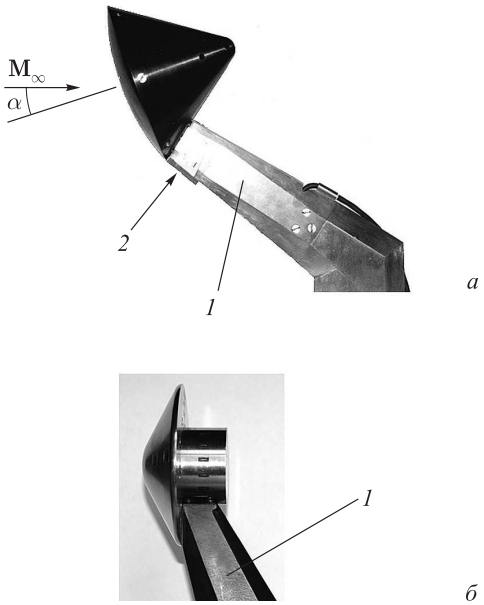


Рис. 11.3. Фотографии моделей: *а* — модель № 1, *б* — модель № 2; *1* — боковая державка, *2* — балансировочный щиток

в аэродинамической трубе на боковой державке толщиной 7 мм (рис. 11.3, *а*).

Вторая конфигурация (рис. 11.2, *б*) выбрана в Европе в качестве типичной конфигурации, используемой для верификации методов расчета радиационного и конвективного нагрева аппарата, входящего в атмосферу Марса. Модель имитирует лобовой щит, имеющий форму затупленного конуса (полуугол конуса 60°, радиус сферического затупления $R = 0{,}29D$). За щитом располагается цилиндрический контейнер полезного груза, его диаметр $d = 0{,}47D$. Эта модель, как и модель № 1, крепится на боковой державке, её толщина 6 мм (рис. 11.3, *б*). Модель № 2 предполагается использовать также в аэродинамических установках Франции и Бельгии. В связи с этим её диаметр ($D = 120$ мм) меньше диаметра модели № 1.

2. Аэродинамические трубы и параметры потока

Эксперименты проводились в ЦАГИ в двух аэродинамических трубах кратковременного действия: в импульсной трубе ИТ-2М и в ударной трубе УТ-1М. Режимы испытаний указаны в таблице 11.1.

Таблица 11.1.

Аэродинамическая труба	Рабочий газ	$\mathbf{M}_\infty$	$\mathbf{Re}_{\infty,1} \cdot 10^{-6}$, 1/м	P_0, бар	T_0, К
ИТ-2М	Азот	19,1, 19,8	0,47, 1,33	140, 590	2300, 2000
ИТ-2М	CO_2	12	0,40	350	1730
УТ-1М	Воздух	8	1,33–6,80	5–26	800
УТ-1М	Воздух	6	1,20–10,73	3–27	600

Импульсная труба ИТ-2М представляет собой многорежимную электроразрядную установку. Высокие значения давления и температуры газа достигаются в ней путем нагревания рабочего газа в замкнутом объеме

импульсным электрическим разрядом большой мощности. Электрическая энергия, необходимая для нагревания газа, (до 550 килоджоулей) аккумулируется в конденсаторной батарее. Расчетное течение в рабочей части сохраняется в течение около 100 миллисекунд. За это время полное давление и температура торможения газа существенно уменьшаются. Во время эксперимента измеряется давление газа в разрядной камере, а температура торможения вычисляется по отношению давлений до и после разряда с использованием уравнения состояния реального газа. Труба оснащена коническими соплами. В данной работе использовалось сопло с углом раствора 10°.

Труба УТ-1М может работать в двух вариантах: в виде классической ударной трубы с бегущей ударной волной и в виде трубы Людвига. В данной работе использован второй вариант. Рабочий газ (воздух) заключен в канал с внутренним диаметром 70 мм и длиной 6 м. Электрический подогреватель, охватывающий канал снаружи, нагревает газ до заданной температуры. В конце канала последовательно размещаются диафрагмы, профилированное сопло, рабочая часть диаметром 0,5 м и выхлопная система. Имеются профилированные сопла, рассчитанные на числа Маха $\mathbf{M} = 5$, 6, 8 и 10. После разрыва диафрагмы происходит стационарное истечение газа из канала в рабочую часть. Его продолжительность (до 40 мс) определяется временем пробега волны разрежения от сопла до противоположного конца канала и обратно до сопла. Измеряются давление и температура газа в канале до разрыва диафрагмы, а также полное давление газа P_0 перед соплом после разрыва диафрагмы. Температура торможения T_0 вычисляется по измеренной температуре в канале путем решения одномерных уравнений нестационарного течения газа.

3. Датчики теплового потока

Использовались датчики двух типов (рис. 11.4): типа «тонкая стенка» (рис. 11.4, *а* [8]) и типа «поверхностная термопара» (или «фольговый датчик», рис. 11.4, *б* [9]). Датчики первого типа использовались для измерения теплового потока на лобовой поверхности моделей, а датчики второго типа — на тыльной поверхности.

Чувствительный элемент датчика первого типа имеет в плане форму квадрата $0{,}2 \times 0{,}2$ мм. Он создается путем приварки термопарного провода диаметром 0,1 мм, предварительно раскатанного до толщины 0,03 мм, к полоске толщиной 0,2 мм, изготовленной из нихрома или нержавеющей стали и являющейся основным накопителем тепла. Тепловой поток вычисляется по простой формуле:

$$q = k\frac{dT}{d\tau},$$

где k — калибровочный коэффициент.

Фольговый датчик представляет собой ленточку шириной 0,2 мм и толщиной 0,03 ÷ 0,04 мм, изготовленную из спая двух термопарных проводов. Ленточка вклеивается в паз, выполненный в теплоизоляционном материале (прессованном стеклопластике), который в этом датчике является основным накопителем тепла. Некоторая часть тепла задерживается в термопаре и клее, что учитывается при интерпретации экспериментальных результатов, в ходе которой решается обратная задача теплопроводности.

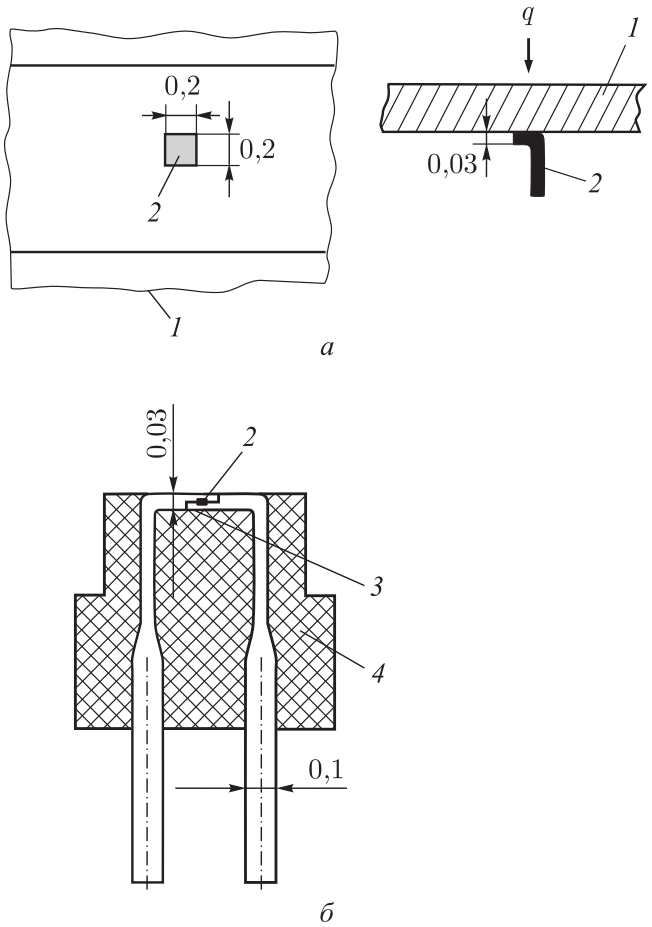


Рис. 11.4. Датчики теплового потока: *а* — датчик типа «тонкая стенка», *б* — фольговый датчик (типа «поверхностная термопара»); *1* — тонкая стенка, *2* — термопара, *3* — клей, *4* — теплоизолятор

Все датчики были прокалиброваны на импульсной тепловой градуировочной установке ИТГУ. В ней создается струя диаметром 2 мм, которая воздействует на калибруемый датчик известным тепловым потоком.

4. Метод численного моделирования ламинарного и турбулентного течения

4.1. Постановка задачи. рамках механики сплошной среды движение газообразной среды в общем случае описывается нестационарными трехмерными уравнениями Навье–Стокса, которые служат основой для прямого численного моделирования турбулентного течения.

Для изучения прикладных задач широко применяются уравнения Рейнольдса, которые выводятся из уравнений Навье–Стокса, с использованием гипотезы Буссинеска относительно напряжений Рейнольдса. Эти уравнения являются основой настоящего метода численного моделирования.

4.1.1. *Дифференциальные уравнения Навье–Стокса.*

Уравнения Навье–Стокса в произвольной криволинейной системе координат ξ, η, ζ, где $x = x(\xi,\eta,\zeta) = \overline{x}L$, $y = y(\xi,\eta,\zeta)$, $z = z(\xi,\eta,\zeta)$ — декартовы координаты, записываются в дивергентной форме

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \xi} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \eta} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \zeta} = 0. \tag{11.1}$$

Здесь $\mathbf{Q}$ — вектор консервативных зависимых переменных задачи, $\mathbf{E}$, $\mathbf{G}$, $\mathbf{F}$ — векторы потоков в криволинейной системе координат. Векторы $\mathbf{E}$, $\mathbf{G}$, $\mathbf{F}$ связаны с соответствующими векторами $\mathbf{E}_c$, $\mathbf{G}_c$, $\mathbf{F}_c$ в декартовой системе координат формулами:

$$\mathbf{Q} = J\mathbf{Q}_c, \qquad \mathbf{E} = J\left(\mathbf{E}_c\frac{\partial \xi}{\partial x} + \mathbf{G}_c\frac{\partial \xi}{\partial y} + \mathbf{F}_c\frac{\partial \xi}{\partial z}\right),$$

$$\mathbf{G} = J\left(\mathbf{E}_c\frac{\partial \eta}{\partial x} + \mathbf{G}_c\frac{\partial \eta}{\partial y} + \mathbf{F}_c\frac{\partial \eta}{\partial z}\right), \quad \mathbf{F} = J\left(\mathbf{E}_c\frac{\partial \zeta}{\partial x} + \mathbf{G}_c\frac{\partial \zeta}{\partial y} + \mathbf{F}_c\frac{\partial \zeta}{\partial z}\right),$$

где $J = \partial(x,y,z)/\partial(\xi,\eta,\zeta)$ — якобиан преобразования.

Декартовы компоненты векторов $\mathbf{E}_c$, $\mathbf{G}_c$, $\mathbf{F}_c$ для трехмерных уравнений Навье–Стокса имеют вид

$$\mathbf{Q}_c = \begin{vmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ \rho e \end{vmatrix}, \quad \mathbf{E}_c = \begin{vmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p + \tau_{x,x} \\ \rho uv + \tau_{x,y} \\ \rho uw + \tau_{x,z} \\ \rho uH + I_x \end{vmatrix}, \quad \mathbf{G}_c = \begin{vmatrix} \rho v \\ \rho uv + \tau_{x,y} \\ \rho v^2 + p + \tau_{yy} \\ \rho vw + \tau_{yz} \\ \rho vH + I_y \end{vmatrix}, \quad \mathbf{F}_c = \begin{vmatrix} \rho w \\ \rho wu + \tau_{x,z} \\ \rho wv + \tau_{yz} \\ \rho w^2 + p + \tau_{zz} \\ \rho wH + I_z \end{vmatrix},$$

где ρ — плотность газа; u, v, w — декартовы компоненты вектора скорости $\mathbf{V}$; p — давление; $e = h - p/\rho + (u^2+v^2+w^2)/2$ — полная энергия на единицу объема; $H = h + (u^2+v^2+w^2)/2$ — полная энтальпия, $h = C_pT$ — статическая энтальпия; T — температура, c_p — удельная теплоемкость при постоянном давлении, $\boldsymbol{\tau}$ — симметричный тензор вязких напряжений, связанный с тензором скоростей деформаций $\mathbf{s}$ линейной зависимостью

$$\boldsymbol{\tau} = -\mu\mathbf{s}.$$

Компоненты тензора скоростей деформаций $\mathbf{s}$ для сжимаемого газа имеют вид:

$$\mathbf{s}_{x,x} = 2\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3}\mathrm{div}\,\mathbf{V}, \quad \mathbf{s}_{yy} = 2\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3}\mathrm{div}\,\mathbf{V}, \quad \mathbf{s}_{zz} = 2\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{2}{3}\mathrm{div}\,\mathbf{V},$$

$$\mathbf{s}_{x,y} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \mathbf{s}_{x,z} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \mathbf{s}_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y},$$

а вектор теплового потока $\mathbf{I}$ определяется выражением

$$\mathbf{I} = -\lambda\,\mathrm{grad}\,(T) + \boldsymbol{\tau} V,$$

где μ и λ — коэффициенты молекулярной вязкости и теплопроводности.

Система уравнений (11.1) замыкается уравнением состояния и зависимостями коэффициентов переноса от температуры и давления, вид которых зависит от модели движущейся среды. В случае модели совершенного газа с уравнением состояния

$$p = \frac{\rho R T}{M},$$

где R — универсальная газовая постоянная, $\mathbf{M}$ — молярный вес газа, молекулярный коэффициент вязкости зависит только от температуры и вычисляется согласно степенному закону ($\mu/\mu_\infty = (T/T_\infty)^\omega$, $0{,}5 \leqslant \omega \leqslant 1$), а число Прандтля $\mathbf{Pr} = \mu c_p/\lambda$ принимается постоянным.

При обезразмеривании уравнений Навье–Стокса и Рейнольдса декартовы координаты $x = \overline{x}L$, $y = \overline{y}L$, $z = \overline{z}L$ отнесены к характерному линейному размеру L, время $t = \overline{t}L/V_\infty$ — к характерному времени L/V_∞, компоненты вектора скорости $u = \overline{u}V_\infty$, $v = \overline{v}V_\infty$, $w = \overline{w}V_\infty$ — к модулю вектора скорости набегающего потока V_∞, давление $p = \overline{p}(\rho_\infty V_\infty^2)$ — к удвоенному скоростному напору набегающего потока, остальные газодинамические переменные — к их значениям в набегающем потоке. Верхняя черта над символом означает то, что данная переменная является безразмерной, а символ ∞ обозначает значение данной переменной в невозмущенном потоке.

При таком обезразмеривании в уравнениях Навье–Стокса и Рейнольдса появляются основные параметры подобия: $\gamma = c_p/c_v$ — показатель адиабаты, $\mathbf{M}_\infty = V_\infty/a_\infty$ — число Маха набегающего потока (a — скорость звука), $\mathbf{Re}_\infty = (\rho_\infty V_\infty L)/\mu_\infty$ — число Рейнольдса, $\mathbf{Pr}$ — число Прандтля. Обезразмеренные таким образом уравнения Навье–Стокса и Рейнольдса использовались при численном интегрировании.

Большая часть расчетных данных приводится в безразмерных переменных, а верхняя черта для простоты опускается.

4.1.2. *Граничные и начальные условия.*

На границе расчетной области, совпадающей с твердой поверхностью, ставились граничные условия: условия прилипания $u = 0$, $v = 0$, $w = 0$; условие адиабатичности ($\partial T_w/\partial n = 0$) или изотермичности ($T = T_w = \mathrm{const}$) обтекаемой поверхности, либо какое-либо условие теплового баланса.

На внешней, по отношению к поверхности тела, границе задавались условия излучения, соответствующие расходящейся волне. Эти граничные условия, записанные в инвариантах Римана, имеют вид

$$\alpha_1 = \frac{2a}{\gamma-1} - \left(u\frac{\partial\eta}{\partial x} + v\frac{\partial\eta}{\partial y} + w\frac{\partial\eta}{\partial z}\right)\frac{1}{\Delta}, \quad \alpha_2 = \frac{p}{\rho^\gamma}, \quad \alpha_3 = u\frac{\partial\xi}{\partial x} + v\frac{\partial\xi}{\partial y} + w\frac{\partial\xi}{\partial z},$$

$$\alpha_4 = u\frac{\partial\varsigma}{\partial x} + v\frac{\partial\varsigma}{\partial y} + w\frac{\partial\varsigma}{\partial z}, \quad \alpha_5 = \frac{2a}{\gamma-1} + \left(u\frac{\partial\eta}{\partial x} + v\frac{\partial\eta}{\partial y} + w\frac{\partial\eta}{\partial z}\right)\frac{1}{\Delta},$$

$$\Delta = \sqrt{\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\eta}{\partial z}\right)^2}$$

При этом в каждой точке границы расчетной области при $\eta = \eta_{\max}$ анализировались знаки собственных чисел:

$$\lambda_1 = \left(u\frac{\partial\eta}{\partial x} + v\frac{\partial\eta}{\partial y} + w\frac{\partial\eta}{\partial z}\right)\frac{1}{\Delta} - a, \quad \lambda_2 = \left(u\frac{\partial\eta}{\partial x} + v\frac{\partial\eta}{\partial y} + w\frac{\partial\eta}{\partial z}\right)\frac{1}{\Delta},$$

$$\lambda_3 = \lambda_2, \quad \lambda_4 = \lambda_2, \quad \lambda_5 = \left(u\frac{\partial\eta}{\partial x} + v\frac{\partial\eta}{\partial y} + w\frac{\partial\eta}{\partial z}\right)\frac{1}{\Delta} + a,$$

определяющих направление распространения возмущений относительно $\eta = \mathrm{const}$. При $\lambda_i \leqslant 0$ («входная граница») соответствующий инвариант на входной границе вычислялся по значениям газодинамических переменных набегающего потока, при $\lambda_i > 0$ использовалась линейная экстраполяция α_i по значениям газодинамических переменных, соответствующих внутренним точкам расчетной области.

В качестве начального приближения можно использовать условие однородного набегающего потока с последующим развитием поля течения в процессе решения нестационарной задачи. При этом по мере формирования картины поля течения шаг по времени постепенно увеличивался, что в итоге делало возможным решение стационарной задачи. Очень эффективным оказался метод расчета, при котором задача на первом этапе решалась описанным выше способом на достаточно грубой сетке ($21 \times 21 \times 21$), а затем это поле использовалось (после применения интерполяции) в качестве начального приближения для более мелкой сетки.

При проведении систематических расчетов по числам Маха и Рейнольдса в качестве начального приближения использовались ранее полученные варианты с наиболее близкими к необходимым значениями изменяющихся параметров.

4.2. Осредненные по Рейнольдсу уравнения Навье–Стокса. Осредненные по Рейнольдсу уравнения Навье–Стокса являются незамкнутыми, и для их замыкания используются различные модели турбулентности, как алгебраические, так и дифференциальные [10].

В алгебраических моделях недостающие параметры определяются из алгебраических соотношений, как, например, в часто используемых двухслойных моделях Себеси–Смита и Балдвина–Ломакса [11]. Они просты,

не требуют дополнительных дифференциальных уравнений и не приводят к неустойчивости численной процедуры при моделировании. Одним из основных недостатков алгебраических моделей является независимость характеристик турбулентности от предыстории течения.

Дифференциальные модели турбулентности, в которых для определения недостающих параметров используются дополнительные дифференциальные уравнения, лишены этого недостатка. Например, двухпараметрические модели турбулентности: $k-\varepsilon$ модель, $q-\omega$ модель турбулентности [12]. Здесь k — кинетическая энергия турбулентных пульсаций, ε — скорость диссипации энергии турбулентных пульсаций, $q=\sqrt{k}$ и $\omega=\varepsilon/k$. Модель турбулентности $q-\omega$ разрабатывалась для сверхзвуковых течений сжимаемого газа. В частности в [12] приведены результаты тестирования этой модели на различных задачах в широком диапазоне определяющих параметров: $\mathbf{Re}_\infty = 5\cdot 10^5 \div 2\cdot 10^8$, $\mathbf{M}_\infty = 1{,}3 \div 10$. С этой целью в ней использовано осреднение по Фавру (плотностное осреднение), суть которого состоит в представлении компонентов вектора скорости (также как и энтальпии) в виде:

$$u_i = \widetilde{u}_i + u'', \quad \widetilde{u}_i = \frac{\overline{\rho u_i}}{\overline{\rho}}, \quad \overline{\rho}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{2T}\int\limits_{t-T}^{t+T} \rho(\mathbf{r},s)\,ds.$$

Осреднение по Фавру, а также некоторые другие отличительные особенности $q-\omega$ модели турбулентности позволили значительно повысить устойчивость численного решения задачи в широком диапазоне чисел Рейнольдса.

Для численного анализа осредненные по Рейнольдсу уравнения Навье–Стокса с двухпараметрической $q-\omega$ дифференциальной моделью турбулентности в произвольной криволинейной системе координат (ξ,η,ζ), где $x=x(\xi,\eta,\zeta)$, $y=y(\xi,\eta,\zeta)$, $z=z(\xi,\eta,\zeta)$ — декартовы координаты, записываются в дивергентной форме

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \xi} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \eta} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \zeta} = \mathbf{S}. \tag{11.2}$$

Здесь $\mathbf{Q}$ — вектор консервативных зависимых переменных задачи, $\mathbf{E}$, $\mathbf{G}$, $\mathbf{F}$ — векторы потоков в криволинейной системе координат, $\mathbf{S}$ — вектор источника. Векторы $\mathbf{Q}$, $\mathbf{E}$, $\mathbf{G}$, $\mathbf{F}$, $\mathbf{S}$ связаны с соответствующими векторами $\mathbf{Q}_c$, $\mathbf{E}_c$, $\mathbf{G}_c$, $\mathbf{F}_c$, $\mathbf{S}_c$ в декартовой системе координат по формулам:

$$\mathbf{Q} = J\mathbf{Q}_c, \quad \mathbf{S} = J\mathbf{S}_c, \quad \mathbf{E} = J\left(\mathbf{E}_c\frac{\partial\xi}{\partial x} + \mathbf{G}_c\frac{\partial\xi}{\partial y} + \mathbf{F}_c\frac{\partial\xi}{\partial z}\right),$$

$$\mathbf{G} = J\left(\mathbf{E}_c\frac{\partial\eta}{\partial x} + \mathbf{G}_c\frac{\partial\eta}{\partial y} + \mathbf{F}_c\frac{\partial\eta}{\partial z}\right), \quad \mathbf{F} = J\left(\mathbf{E}_c\frac{\partial\zeta}{\partial x} + \mathbf{G}_c\frac{\partial\zeta}{\partial y} + \mathbf{F}_c\frac{\partial\zeta}{\partial z}\right).$$

Декартовы компоненты векторов $\mathbf{E}_c$, $\mathbf{G}_c$, $\mathbf{F}_c$, $\mathbf{S}_c$ для трехмерных осредненных по Рейнольдсу (с использованием осреднения по Фавру) уравнений Навье–Стокса имеют вид:

$$\mathbf{Q}_c = \begin{vmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ \rho(e+q^2) \\ \rho q \\ \rho\omega \end{vmatrix}, \quad \mathbf{S}_c = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ h_1\rho\omega q \\ h_2\rho\omega^2 \end{vmatrix}, \quad \mathbf{E}_c = \begin{vmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p + \dfrac{2}{3}\rho q^2 + \tau_{x,x} \\ \rho uv + \tau_{x,y} \\ \rho uw + \tau_{x,z} \\ \rho uH + \dfrac{5}{3}\rho uq^2 + I_x \\ \rho uq + I_x^q \\ \rho u\omega + I_x^\omega \end{vmatrix},$$

$$\mathbf{G}_c = \begin{vmatrix} \rho v \\ \rho uv + \tau_{x,y} \\ \rho v^2 + p + \dfrac{2}{3}\rho q^2 + \tau_{yy} \\ \rho vw + \tau_{yz} \\ \rho vH + \dfrac{5}{3}\rho vq^2 + I_y \\ \rho vq + I_y^{\mathrm{q}} \\ \rho v\omega + I_y^\omega \end{vmatrix}, \quad \mathbf{F}_c = \begin{vmatrix} \rho w \\ \rho wu + \tau_{x,z} \\ \rho wv + \tau_{yz} \\ \rho w^2 + p + \dfrac{2}{3}\rho q^2 + \tau_{zz} \\ \rho wH + \dfrac{5}{3}\rho vq^2 + I_z \\ \rho wq + I_z^q \\ \rho w\omega + I_z^\omega \end{vmatrix},$$

где $\boldsymbol{\tau}$ — симметричный тензор вязких напряжений, связанный с тензором скоростей деформаций линейной зависимостью

$$\boldsymbol{\tau} = -(\mu + \mu_T)\mathbf{s},$$

а вектор теплового потока $\mathbf{I}$ вычисляется по формуле

$$\mathbf{I} = -(\lambda + \lambda_T)\mathrm{grad}\,(T) + \boldsymbol{\tau}\mathbf{V},$$

μ и λ — коэффициенты молекулярной вязкости и теплопроводности, μ_T и λ_T — коэффициенты турбулентной вязкости и теплопроводности, векторы самодиффузии $\mathbf{I}^q$ и $\mathbf{I}^\omega$ определяются соотношениями:

$$\mathbf{I}^{\mathbf{q}} = -\left(\mu + \frac{\mu_T}{\mathbf{Pr}_1}\right)\mathrm{grad}\,(q), \quad \mathbf{I}^\omega = -\left(\mu + \frac{\mu_T}{\mathbf{Pr}_2}\right)\mathrm{grad}\,(\omega).$$

Основные расчетные исследования проведены для модели совершенного газа.

В настоящей работе использована двухпараметрическая дифференциальная $q-\omega$ модель турбулентности [12] с выражениями для турбулентной вязкости:

$$\mu_T = C_\mu f\frac{\rho q^2}{\omega}, \quad f = 1 - \exp\left(-\alpha\frac{\rho r_w q}{\mu}\right), \quad \alpha = 0{,}02, \quad C_\mu = 0{,}09,$$

$$h_1 = C_{11}\left(C_\mu f\frac{S}{\omega^2} - \frac{2}{3}\frac{\mathrm{div}\,\mathbf{V}}{\omega}\right) - C_{12}, \quad h_2 = C_{21}\left(C_\mu\frac{S}{\omega^2} - C_{23}\frac{\mathrm{div}\,\mathbf{V}}{\omega}\right) - C_{22},$$

$$S = \frac{\partial u}{\partial x}s_{xx} + \frac{\partial v}{\partial y}s_{yy} + \frac{\partial w}{\partial z}s_{zz} + s_{xy}^2 + s_{xy}^2 + s_{yz}^2, \quad C_{21} = 0{,}055 + 0{,}5f(q, r_w, \rho, \mu),$$

где $C_{11} = C_{12} = 0{,}5$, $C_{22} = 0{,}833$, $C_{23} = 2{,}4$, $\mathbf{Pr}_1 = 2$, $\mathbf{Pr}_2 = 2$, r_w — расстояние от стенки.

Зависимость молекулярного коэффициента вязкости от температуры определялась по формуле $\mu/\mu_\infty = (T/T_\infty)^\omega$, $0{,}5 \leqslant \omega \leqslant 1$, а значения молекулярного и турбулентного чисел Прандтля принимались постоянными: $\mathbf{Pr} = \mu c_p/\lambda = 0{,}7$, $\mathbf{Pr}_T = \mu_T c_p/\lambda_T = 0{,}9$.

На границе расчетной области, совпадающей с твердой поверхностью, ставились граничные условия: условия прилипания $u = 0$, $v = 0$, $w = 0$; условие адиабатичности ($\partial T_w/\partial n = 0$) или изотермичности ($T = T_w = \mathrm{const}$) обтекаемой поверхности; условия затухание пульсаций ($q_w = 0$) и частотной непроницаемости ($\partial \omega_w/\partial n = 0$) на обтекаемой поверхности.

На внешней, по отношению к поверхности тела, границе задавались условия излучения, соответствующие расходящейся волне. Эти граничные условия, записанные в инвариантах Римана, имеют вид:

$$\alpha_1 = \frac{2a}{\gamma - 1} - \left(u\frac{\partial \eta}{\partial x} + v\frac{\partial \eta}{\partial y} + w\frac{\partial \eta}{\partial z}\right)\frac{1}{\Delta}, \quad \alpha_2 = \frac{p}{\rho^\gamma}, \quad \alpha_3 = u\frac{\partial \xi}{\partial x} + v\frac{\partial \xi}{\partial y} + w\frac{\partial \xi}{\partial z},$$

$$\alpha_4 = u\frac{\partial \varsigma}{\partial x} + v\frac{\partial \varsigma}{\partial y} + w\frac{\partial \varsigma}{\partial z}, \quad \alpha_5 = \frac{2a}{\gamma - 1} + \left(u\frac{\partial \eta}{\partial x} + v\frac{\partial \eta}{\partial y} + w\frac{\partial \eta}{\partial z}\right)\frac{1}{\Delta}, \quad \alpha_6 = q, \quad \alpha_7 = \omega,$$

$$\Delta = \sqrt{\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial z}\right)^2}.$$

При этом в каждой точке границы расчетной области анализировались знаки собственных чисел:

$$\lambda_1 = \left(u\frac{\partial \eta}{\partial x} + v\frac{\partial \eta}{\partial y} + w\frac{\partial \eta}{\partial z}\right)\frac{1}{\Delta} - a, \quad \lambda_2 = \left(u\frac{\partial \eta}{\partial x} + v\frac{\partial \eta}{\partial y} + w\frac{\partial \eta}{\partial z}\right)\frac{1}{\Delta},$$

$$\lambda_3 = \lambda_2, \quad \lambda_4 = \lambda_2, \quad \lambda_5 = \left(u\frac{\partial \eta}{\partial x} + v\frac{\partial \eta}{\partial y} + w\frac{\partial \eta}{\partial z}\right)\frac{1}{\Delta} + a, \quad \lambda_6 = \lambda_2, \quad \lambda_7 = \lambda_2,$$

определяющих направление распространения возмущений относительно $\eta = \mathrm{const}$. При $\lambda_i \leqslant 0$ («входная граница») соответствующий инвариант на входной границе вычислялся по значениям газодинамических переменных набегающего потока, при $\lambda_i > 0$ использовалась линейная экстраполяция α_i по значениям газодинамических переменных, соответствующих внутренним точкам расчетной области.

В случае, когда граница расчетной области совпадает с осью симметрии, на ней ставятся условия четности и/или нечетности зависимых переменных задачи.

4.3. Моделирование течений реального газа. При гиперзвуковых скоростях полета максимальные температуры воздуха в поле возмущенного течения достигают столь больших значений, что в полной мере проявляются эффекты реального газа, которые влияют как на локальные, так и на суммарные характеристики обтекаемого тела.

Для оценки влияния эффектов реального газа и каталитических свойств обтекаемой поверхности на аэродинамические характеристики тел различной геометрии используются различные математические модели движущейся неравновесной среды, которые отличаются составом газовой смеси и учитываемыми термохимическими процессами.

Постановка задачи численного моделирования неравновесного гиперзвукового течения вязкого газа описана в [13, 14]. В рассматриваемой модели среды учитывались реакции диссоциации, обмена и ассоциативной ионизации; при этом значения скоростей химических реакций определялись согласно [15].

Воздействие неравновесного возбуждения колебательных степеней свободы молекул на скорости реакций диссоциации учитывались через двухтемпературную зависимость константы равновесия. Для констант равновесия реакций диссоциации эта зависимость определялась на основе модели эффективного колебательного уровня, отстоящего от предела диссоциации на величину βT (β — модель диссоциации [16]). Для реакций обмена и ионизации использовалась однотемпературная зависимость константы равновесия. Моделирование взаимодействия между колебательными и поступательными степенями свободы осуществлялось на основе выражения Ландау–Тейлора. Учитывался также обмен энергией между колебательными степенями свободы молекул, а также изменение колебательной энергии за счет химических реакций.

При определении вязкости и теплопроводности смеси газов использованы полуэмпирические формулы [17] и [18]. Для вывода функциональной зависимости коэффициентов переноса применялся потенциал Леннарда–Джонса [19]. При расчете теплопроводности чистого газа учитывался вклад энергии, обусловленной вращательными степенями свободы (поправка Эйкена).

Коэффициенты диффузии определялись из условий постоянства чисел Шмидта, значения которых принимались равными 0,5 для нейтральных компонентов смеси газов и 0,25 для ионов. При определении коэффициентов самодиффузии в выражении для потока колебательной энергии использовано условие постоянства чисел Шмидта, значения которых принимались равными 0,5.

Наряду с указанной выше моделью широко применялся подход, в котором возбуждение колебательных степеней свободы принималось равновесным [20, 21]. Разработаны также программы для расчета неравновесного излучения [22], интенсивность которого определяется концентрацией заряженных частиц, уровнем возбуждения колебательных степеней свободы молекулярных компонентов и другими факторами. В частности, высокая степень возбуждения электронных степеней свободы молекулы NO сразу за фронтом ударной волны приводит к интенсивной ультрафиолетовой радиации в системе гамма–полос ($200 \div 230$ нм).

Решение задачи Римана о распаде произвольного разрыва для химически неравновесной смеси газов в общем случае сводится к решению нелинейной системы алгебраических уравнений. Приближенным методом решения этой

задачи можно считать представление матрицы Якоби $\mathbf{A} = \partial\mathbf{E}/\partial\mathbf{Q}$ в виде

$$\mathbf{A} = \mathbf{R}\mathbf{\Lambda}\mathbf{R}^{-1},$$

где $\mathbf{\Lambda}$ — диагональная матрица, элементами которой являются собственные значения оператора $\mathbf{A}$. Для химически неравновесной смеси (двумерная задача), состоящей из K компонент, $\mathbf{\Lambda}$ имеет вид:

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & . & 0 & \lambda + k_\xi a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \lambda - k_\xi a \end{vmatrix},$$

где

$$\lambda = \xi_x u + \xi_y v, \quad k_\xi = \sqrt{\xi_x^2 + \xi_y^2},$$

a — скорость звука смеси идеальных газов, вычисляемая по формуле

$$a = \sqrt{\frac{\partial p}{\partial \rho} + \frac{\partial p}{\partial e}(H - u^2 - v^2)}.$$

Для определения частных производных от p по зависимым переменным $\mathbf{Q}$ необходимо найти $p(\mathbf{Q})$. Для смеси идеальных газов давление может быть определено из уравнения состояния.

Переменная T не входит в базис зависимых переменных $\mathbf{Q}$, поэтому необходимо найти зависимость $T = T(\mathbf{Q})$. Для этого можно воспользоваться соотношением для полной энергии e:

$$e = \rho h - p + \frac{1}{2}\rho\,|V|^2,$$

в котором статическая энтальпия h определяется по формуле:

$$h = \sum_{i=1}^{K} C_i h_i(T), \quad C_i = \frac{\rho_i}{\rho}, \quad h_i(T) = \int\limits_{T_0}^{T} c_{p,i}(T)dT + h_i^\circ,$$

В общем случае $h_i(T)$ не является линейной функцией и, следовательно, невозможно выразить T через $\mathbf{Q}$. Приближенным вариантом решения этой проблемы может быть

$$h_i(T) = c_{p,i}T + h_i^\circ,$$

Это предположение позволяет записать выражение для полной энергии в виде:

$$e = \rho T \sum_{i=1}^{K} c_{v,i} C_i + \rho \sum_{i=1}^{K} h_i^\circ C_i + \frac{1}{2}\rho\,|V|^2.$$

где

$$c_{v,i} = c_{p,i} - \frac{R}{M_i}.$$

Следовательно, $T = T(\mathbf{Q})$ имеет вид:

$$T = \frac{e - \rho h^\circ - (1/2)\rho\,|V|^2}{\rho c_v}, \quad h^\circ = \sum_{i=1}^{K} h_i^\circ C_i, \quad c_v = \sum_{i=1}^{K} c_{v,i} C_i.$$

С учетом этого для p может быть получено следующее выражение

$$p = \frac{R}{M c_v}(e - \rho h^\circ - \tfrac{1}{2}\rho\,|V|^2),$$

а частные производные от p по $\mathbf{Q}$, используемые при определении операторов $\mathbf{R}$, $\mathbf{\Lambda}$, $\mathbf{R}^{-1}$, получаются в виде:

$$\frac{\partial p}{\partial \rho_i} = \frac{R}{M c_v}\left(c_v T\left(\frac{M}{M_i} - \frac{c_{v,i}}{c_v}\right) - h_i^\circ + \frac{|V|^2}{2}\right), \quad \frac{\partial p}{\partial e} = \frac{R}{M c_v}.$$

Выражения для частной производной от p по ρ и для скорости звука имеют вид:

$$\frac{\partial p}{\partial \rho} = \sum_{i=1}^{K} \frac{\partial p}{\partial \rho_i} C_i = \frac{R}{M c_v}\left(\frac{|V|^2}{2} - h^\circ\right), \quad a = \sqrt{\frac{R c_p}{M c_v} T}\,.$$

При вычислении собственных значений и собственных векторов для оператора $\partial\mathbf{G}/\partial\mathbf{Q}$ использованы те же самые соотношения с заменой ξ на η.

4.4. Аппроксимация уравнений. Сформулированная выше начально-краевая задача решалась численно на основе интегро-интерполяционного метода (метода конечного объема). Его применение к уравнениям Навье–Стокса (11.1) и уравнениям Рейнольдса (11.2) позволяет получить разностные аналоги законов сохранения

$$\frac{\mathbf{Q}_{i,j,k}^{n+1} - \mathbf{Q}_{i,j,k}^{n}}{\tau_{i,j,k}} + \frac{\mathbf{E}_{i+\frac{1}{2},j,k}^{n+1} - \mathbf{E}_{i-\frac{1}{2},j,k}^{n+1}}{h_\xi} + \frac{\mathbf{\Gamma}_{i,j+\frac{1}{2},k}^{n+1} - \mathbf{\Gamma}_{i,j-\frac{1}{2},k}^{n+1}}{h_\eta} + \frac{\mathbf{F}_{i,j,k+\frac{1}{2}}^{n+1} - \mathbf{F}_{i,j,k-\frac{1}{2}}^{n+1}}{h_\varsigma} = \mathbf{S}_{i,j,k}^{n+1},$$

где n — номер временного слоя; $\tau_{i,j,k}$ — величина шага по времени, определяемая по формуле

$$\tau_{i,j,k} = \tau_0\left(a_{\min} + (a_{\max} - a_{\min})\frac{J_{i,j,k} - \min(J_{i,j,k})}{\max(J_{i,j,k}) - \min(J_{i,j,k})}\right),$$

где τ_o — величина шага по времени, соответствующая максимальной по объему ячейке при заданных значениях параметров $a_{\min}$ и $a_{\max}$, например, $a_{\min} = 0{,}02$ и $a_{\max} = 1, i, j, k$ и h_ξ, h_η, h_ζ — номера узлов и шаги по координате ξ, η, ζ соответственно. Использование переменного по пространству временного шага, пропорционального объему элементарной ячейки, позволяет существенно (примерно на порядок) ускорить получение стационарного решения методом установления по времени.

Для монотонной разностной схемы вычисление потоков в полуцелых узлах осуществляется на основе решения задачи Римана о распаде произвольного разрыва. Математически эта задача сводится к решению нелинейной системы алгебраических уравнений.

При аппроксимации конвективной составляющей векторов потоков $\mathbf{E}$, $\mathbf{G}$, $\mathbf{F}$, в полуцелых узлах использована монотонная схема типа Годунова [23, 24] и приближенный метод Роу[25] решения задачи Римана о распаде произвольного разрыва. При этом расчетные формулы для векторов $\mathbf{E}$, $\mathbf{G}$, $\mathbf{F}$ аналогичны, поэтому ниже речь будет идти о векторе $\mathbf{E}$, их отличия от соответствующих формул для вектора $\mathbf{G}$ будут оговариваться особо. Для вектора $\mathbf{E}$ имеем:

$$\mathbf{E}_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{E}(\mathbf{Q_L}) + \mathbf{E}(\mathbf{Q_R}) - \mathbf{R}(\mathbf{Q}_{LR})\mathbf{\Phi}(\varphi(\lambda_i))\mathbf{R}(\mathbf{Q}_{LR})^{-1}(\mathbf{Q_R} - \mathbf{Q_L})\right),$$

где $\mathbf{\Phi}(\varphi(\lambda_i))$ — диагональная матрица, элементами которой являются $\phi(\lambda_i)$, а λ_i - собственные значения оператора $\mathbf{A} = \partial\mathbf{E}/\partial\mathbf{Q}$. $\mathbf{R}_{LR} = \mathbf{R}(\mathbf{Q}_{LR})$ — матрица, столбцами которой являются правые собственные векторы оператора $\mathbf{A}$.

При вычислении собственных значений и собственных векторов оператора $\mathbf{A}$ использован метод [25] приближенного решения задачи Римана о распаде произвольного разрыва. При этом $\mathbf{\Phi}(\phi(\lambda_i))$, $\mathbf{R}_{LR}$, $\mathbf{R}_{LR}^{-1}$ определялись по значениям зависимых переменных, имеющих вид:

$$u_{LR} = \frac{u_L\sqrt{\rho_L} + u_{\mathbf{R}}\sqrt{\rho_{\mathbf{R}}}}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_{\mathbf{R}}}}, \quad v_{LR} = \frac{v_L\sqrt{\rho_L} + v_{\mathbf{R}}\sqrt{\rho_{\mathbf{R}}}}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_{\mathbf{R}}}}, \quad w_{LR} = \frac{w_L\sqrt{\rho_L} + w_{\mathbf{R}}\sqrt{\rho_{\mathbf{R}}}}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_{\mathbf{R}}}},$$

$$H_{LR} = \frac{H_L\sqrt{\rho_L} + H_{\mathbf{R}}\sqrt{\rho_{\mathbf{R}}}}{\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_{\mathbf{R}}}}, \quad a_{LR}^2 = (\gamma - 1)\left(H_{LR} - \frac{1}{2}(u_{LR}^2 + v_{LR}^2 + w_{LR}^2)\right),$$

где a — местное значение скорости звука.

Ниже в качестве функции $\phi(\lambda_i)$, обеспечивающей выполнение энтропийного условия для физически правильного выбора численного решения, использовалась функция следующего вида:

$$\phi(\lambda) = \begin{cases} |\lambda|, & |\lambda| > \varepsilon, \\ \dfrac{\lambda^2 + \varepsilon^2}{2\varepsilon}, & |\lambda| \leqslant \varepsilon, \end{cases}$$

где ε — параметр, отвечающий за диссипативные свойства разностной схемы. В основном в расчетах принималось $\varepsilon = 10^{-1}$.

Для повышения порядка аппроксимации (до второго) при интерполяции зависимых переменных на грань элементарной ячейки использован принцип минимальных производных (MUSCL) [26–28]:

$$\mathbf{Q}_L = \mathbf{Q}_i + \frac{1}{2}m(\mathbf{Q}_i - \mathbf{Q}_{i-1}, \mathbf{Q}_{i+1} - \mathbf{Q}_i),$$

$$\mathbf{Q_R} = \mathbf{Q}_{i+1} - \frac{1}{2}m(\mathbf{Q}_{i+1} - \mathbf{Q}_i, \mathbf{Q}_{i+2} - \mathbf{Q}_{i+1}),$$

а функция $\mathbf{M}(a,b)$ бралась в виде:

$$m(a,b) = \begin{cases} a, & ab > 0, \quad |a| < |b|, \\ b, & ab > 0, \quad |a| > |b|, \\ 0, & ab \leqslant 0. \end{cases}$$

При аппроксимации диффузионной составляющей векторов потоков $\mathbf{E}$, $\mathbf{G}$ и $\mathbf{F}$ на грани элементарной ячейки применена разностная схема типа центральных разностей второго порядка точности. Вычисление производных осуществлялось по формулам:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \xi}_{i+\frac{1}{2},j,k} = \frac{\mathbf{U}_{i+1,j,k} - \mathbf{U}_{i,j,k}}{h_\xi},$$
$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \eta}_{i+\frac{1}{2},j,k} = \frac{1}{4h_\eta}(\mathbf{U}_{i+1,j+1,k} + \mathbf{U}_{i,j+1,k} - \mathbf{U}_{i+1,j-1,k} - \mathbf{U}_{i,j-1,k}),$$
$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \varsigma}_{i+\frac{1}{2},j,k} = \frac{1}{4h_\varsigma}(\mathbf{U}_{i+1,j,k+1} + \mathbf{U}_{i,j,k+1} - \mathbf{U}_{i+1,j,k-1} - \mathbf{U}_{i,j,k-1}).$$

Здесь $\mathbf{U}$ — вектор неконсервативных зависимых переменных задачи.

Шаблон разностной схемы, на котором аппроксимируются полные уравнения Навье–Стокса или Рейнольдса состоит из 25 точек (рис. 11.5), полученная неявная нелинейная разностная схема, по-видимому, является безусловно устойчивой на линейной задаче.

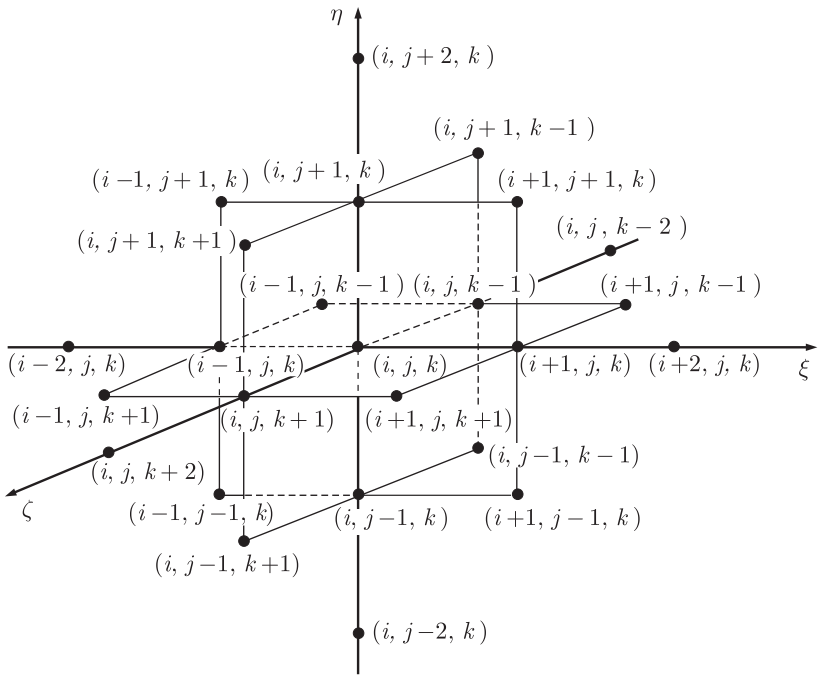


Рис. 11.5. Шаблон разностной схемы для трехмерного случая

4.5. Решение нелинейных сеточных уравнений. В результате описанной в разделе 11.4.4 разностной аппроксимации уравнений Навье–Стокса и Рейнольдса и соответствующих граничных условий на некоторой сетке интегрирование нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных сводится к решению системы нелинейных алгебраических уравнений

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}) = 0,$$

где $\mathbf{X}$ — вектор искомых сеточных переменных (узловых значений газодинамических переменных, включая граничные узлы расчетной сетки). Сформулированная задача эффективно решается с помощью хорошо известного итерационного метода Ньютона, главным преимуществом которого является квадратичная скорость сходимости. Для решения нелинейных сеточных уравнений $\mathbf{F}(\mathbf{X}) = 0$ использован модифицированный метод Ньютона

$$\mathbf{X}^{[k+1]} = \mathbf{X}^{[k]} - \tau_{k+1}\mathbf{D}_{k_0}^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{X}^k),$$

где $\mathbf{D}_{ko} = (\partial\mathbf{F}/\partial\mathbf{X})_{ko}$ — матрица Якоби, k, k_o — номера итераций, $k_o \leqslant k$. В процессе численного решения параметр регуляризации метода Ньютона относительно начального приближения τ_k определялся по формуле [29]

$$\tau_{k+1} = \frac{(\Delta\mathbf{X}^{[k]} - \Delta\mathbf{X}^{[k-1]}, \mathbf{X}^{[k]} - \mathbf{X}^{[k-1]})}{(\Delta\mathbf{X}^{[k]} - \Delta\mathbf{X}^{[k-1]})^2},$$

где $\Delta\mathbf{X}^{[k]}$ — вектор поправок. По мере сходимости итерационного процесса $\tau_k \to 1$, а скорость сходимости теоретически стремится к квадратичной.

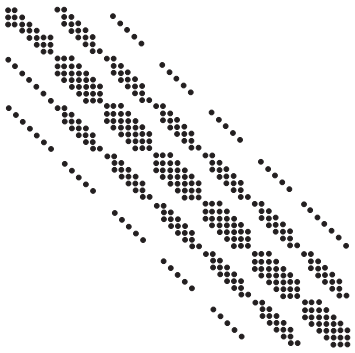
Наиболее трудоемкими элементами алгоритма при реализации метода Ньютона являются генерация матрицы $\mathbf{D}_k = \partial\mathbf{F}/\partial\mathbf{X}_k$ и последующее решение системы линейных уравнений с этой матрицей. Поскольку при аппроксимации уравнений в каждой из расчетных ячеек участвует лишь несколько соседних узлов (в пространственном случае 25 для схемы TVD), то трудоемкость генерации матрицы Якоби есть величина (N), где N — число узлов сеточной задачи. Формирование матрицы Якоби на итерации осуществлялось при помощи процедуры конечных приращений вектора невязки по вектору искомых сеточных переменных.

Такая методика универсальна, поскольку легко обобщается на произвольную систему сеточных уравнений с заранее не конкретизированным видом. Достаточно часто разностные уравнения, получаемые в результате аппроксимации дифференциальных, имеют очень сложный вид и аналитическое формирование матрицы Якоби становится весьма трудоемким. В частности, к такому случаю приводит применение для решения уравнений Навье–Стокса монотонизированных схем. Более того, при аналитическом формировании матрицы Якоби необходимое число арифметических и логических операций на ЭВМ, вообще говоря, может быть больше, чем при численном формировании этой матрицы с помощью процедуры конечных приращений. Применение к формированию матрицы Якоби именно метода конечных приращений

основано на многолетних исследованиях по численному моделированию задач газовой динамики. Например, в работе [30] аналогичная процедура использовалась при решении начально-краевых задач с применением адаптивной сетки.

4.6. Решение систем линейных алгебраических уравнений. При аппроксимации уравнений Навье–Стокса по описанной в разделе 11.4.5 разностной схеме второго порядка точности оператор $\partial\mathbf{F}/\partial\mathbf{X}_k$ имеет разреженную блочную 25-ти диагональную структуру, а элементарный блок ее представляет собой плотную матрицу размера 7×7 (турбулентная модель движущейся среды).

Для примера на рис. 11.6 показана структура оператора $\partial\mathbf{F}/\partial\mathbf{X}_k$, возникающего при аппроксимации уравнений Навье–Стокса для двумерного течения. В этом случае оператор $\partial\mathbf{F}/\partial\mathbf{X}_k$ имеет разреженную блочную 13-диагональную структуру при лексикографическом порядке нумерации узлов расчетной сетки, а элементарный блок ее представляет собой плотную матрицу размера 4×4. Следует отметить, что оператор $\partial\mathbf{F}/\partial\mathbf{X}_k$ включает в себя также фрагменты, соответствующие граничным узлам расчетной сетки.



43	44	45	46	47	48	49
36	37	38	39	40	41	42
29	30	31	32	33	34	35
22	23	24	25	26	27	28
15	16	17	18	19	20	21
8	9	10	11	12	13	14
1	2	3	4	5	6	7

Рис. 11.6. Структура матрицы Якоби и нумерация узлов расчетной сетки 7×7. Лексикографический порядок нумерации узлов расчетной сетки

4.6.1. *Прямой метод решения системы линейных алгебраических уравнений.* Решение системы линейных алгебраических уравнений, получаемых на итерации по нелинейности, осуществлялось при помощи прямого [31] и итерационного [32] методов. Эти методики были многократно опробованы в численных экспериментах и доказали свою надежность и высокую эффективность.

В первом подходе решение системы линейных алгебраических уравнений, получаемых на итерации по нелинейности, осуществлялось при помощи разложения матрицы $\partial\mathbf{F}/\partial\mathbf{X}_k$ в произведение двух треугольных матриц $\mathbf{L}$ и $\mathbf{U}$ таких, что $\mathbf{L}$ — нижняя треугольная матрица, $\mathbf{U}$ — верхняя (прямой

метод). Предварительно анализировалась структура разреженности матриц **L** и **U**. Для снижения суммарного числа арифметических операций и уменьшения оперативной памяти ЭВМ перенумеровывались неизвестные по обобщенному методу вложенных сечений [33, 34]. В качестве иллюстрации на рис. 11.7 приведена структура матрицы Якоби и нумерация узлов расчетной сетки 7×7 при аппроксимации уравнений Навье–Стокса для двумерного случая, полученные с помощью этого метода.

3	2	1	37	36	16	17
6	5	4	39	38	18	19
30	32	34	41	40	28	26
31	33	35	43	42	29	27
15	14	13	45	44	24	25
12	11	10	47	46	22	23
9	8	7	49	48	20	21

Рис. 11.7. Структура матрицы Якоби и нумерация узлов расчетной сетки 7×7. Обобщенный метод вложенных сечений

Применение такого упорядочивания позволяет понизить число арифметических операций до $O(N^{3/2})$ (по сравнению с $O(N^2)$ для ленточного метода), а также уменьшить объем требуемой памяти с $O(N^{3/2})$ до $O(N \ln_2 N)$. Эта методика была многократно опробована в численных экспериментах и доказала свою надежность и эффективность [31].

Однако даже эти оценки показывают, что при существенном увеличении числа узлов в сеточной задаче, необходимом для разрешения тонких структур течения в отрывных зонах, пограничных слоях и т. п., применение прямых методов, требующих, кроме огромных затрат машинного времени на вычисление треугольных сомножителей, еще и затрат на организацию обменов данными между оперативной и дисковой памятью (так как сомножители **L** и **U** не помещаются в оперативной памяти), становится неэффективным. Еще в большей степени это касается трехмерных сеточных задач, так как для них ширина ленты **LU** есть $O(N^{2/3})$, поэтому для ленточного метода можно получить оценки по вычислительным затратам $O(N^{7/3})$ и по памяти $O(N^{5/3})$.

4.6.2. *Итерационный метод решения системы линейных алгебраических уравнений.*

Альтернативой прямому методу являются итерационные методы решения системы линейных алгебраических уравнений. К сожалению, теория итерационных методов хорошо развита лишь для систем с симметричной положительно определенной матрицей **A** (см., например, [35]). В этом случае

все собственные значения λ_i матрицы $\mathbf{A}$ действительны, а скорость сходимости зависит от отношения $\lambda_{\min}/\lambda_{\max}$. Матрица системы уравнений, возникающая при решении методом Ньютона сеточной задачи для уравнений Навье–Стокса, является матрицей общего вида, т. е. она имеет отличную от нуля кососимметричную часть $(\mathbf{A} - \mathbf{A}^T)/2$, и часть ее собственных значений комплексные. Вследствие этого большинство известных итерационных методов на этой задаче либо вообще теряют сходимость, либо сходятся крайне медленно.

Среди множества итерационных методов наиболее привлекательными для решения задач с матрицами общего вида представляются методы вариационного типа, так как они для своей работы не требуют априорной информации о спектре собственных значений матрицы и являются в некотором смысле оптимальными, минимизируя на каждом своем шаге некоторую норму либо невязки системы уравнений, либо погрешности решения. Хорошо известными методами такого типа являются методы сопряженных направлений, в частности метод сопряженных градиентов для симметричных матриц. Все эти методы можно свести к построению некоторого базиса в k-мерном подпространстве Крылова и к последующей минимизации на этом подпространстве нормы либо невязки, либо ошибки. Проведенные численные эксперименты [32] показали, что наиболее надежным и быстрым является предложенный в [36] обобщенный метод минимальных невязок GMRES (k).

Рассмотрим алгоритм построения обобщенного метода минимальных невязок для системы уравнений

$$\mathbf{A}x = f.$$

Построим в подпространстве Крылова L_2-ортогональный базис. Для этого выберем каким-либо образом начальный вектор $\mathbf{v}_i$ и применим ортогонализацию Грама–Шмидта. Пусть уже построены j ортонормированных векторов $\mathbf{v}_i$. Вектор $\mathbf{v}_{j+1}$ будем искать в виде

$$\mathbf{v}_{j+1} = \mathbf{A}\mathbf{v}_j - \sum\nolimits_{i+1}^{j} h_{ij}\mathbf{v}_i.$$

Коэффициент h_{ij} найдем из условия $(\mathbf{v}_{j+1}, \mathbf{v}_i) = \mathrm{O}$. Раскрывая это скалярное произведение и учитывая ортонормированность уже найденных j векторов, получаем

$$h_{ij} = (\mathbf{A}\mathbf{v}_j, \mathbf{v}_i). \tag{11.3}$$

Процесс построения вектора $\mathbf{v}_{j+1}$, завершается его нормированием

$$\mathbf{v}_{j+1} = h_{j+1}\mathbf{v}_{j+1}, \quad h_{j+1,j} = (\sqrt{(\mathbf{v}_{j+1}, \mathbf{v}_{J+1})}\,)^{-1}.$$

Рассмотрим теперь матрицу $\mathbf{V}_k$ размера $N \times k$, составленную из компонент полученного L_2-ортонормированного базиса $\{\mathbf{v}_i\}$. Для этой матрицы справедливо соотношение $\mathbf{V}_k^T\mathbf{A}\mathbf{V}_k = \mathbf{H}_k$, где $\mathbf{H}_k$, — верхняя хессенбергова матрица размерности $k \times k$ с элементами h_{ij}, найденными в процессе

ортогонализации по формуле (11.3). Наряду с матрицей $\mathbf{H}_k$ рассмотрим матрицу $\mathbf{H}_{k1}$ размера $(k+1)\times k$, которая отличается от матрицы $\mathbf{H}_k$ дополнительной нижней строкой с единственным ненулевым элементом $h_{k+1,k}$ в правом нижнем углу. Векторы $\mathbf{v}_i$ и матрица $\mathbf{H}_k$ удовлетворяют важному соотношению

$$\mathbf{A}\mathbf{V}_k = \mathbf{V}_{k+1}\mathbf{H}_{k1}. \tag{11.4}$$

Выберем теперь начальное приближение $\mathbf{x}_0$ к решению, возьмем в качестве начального вектора $\mathbf{v}_i$ вектор невязки $\mathbf{r}_0 = \mathbf{f} - \mathbf{A}\mathbf{x}$, и сделаем k шагов процесса ортогонализации. Будем искать новое приближение к решению в виде $\mathbf{x}_k = \mathbf{x}_0 - V_k\mathbf{y}$, исходя из минимизации квадратичного функционала нормы невязки

$$\min|\mathbf{f} - \mathbf{A}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{V}_k\mathbf{y})| = \min|\mathbf{r}_0 - \mathbf{A}\mathbf{V}_k\mathbf{y}|\,. \tag{11.5}$$

При таком выборе нового приближения $\mathbf{x}_k$ к решению норма невязки является функцией $\mathbf{y}$:

$$J(\mathbf{y}) = |\beta\mathbf{v}_i - \mathbf{A}\mathbf{V}_k\mathbf{y}|\,,$$

где $\beta = \sqrt{(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_0)}$. С учетом (11.4) будем иметь

$$J(\mathbf{y}) = |\mathbf{V}_{k+1}(\beta\mathbf{e}_1 - \mathbf{H}_{k1}\mathbf{y})|\,,$$

где $\mathbf{e}_1$ — первый столбец единичной матрицы $(k+1)\times(k+1)$. Так как $\mathbf{V}_{k+1}$ является L_2-ортонормированным, то

$$J(\mathbf{y}) = |\beta\mathbf{e}_1 - \mathbf{H}_{k1}\mathbf{y}|\,. \tag{11.6}$$

Таким образом, решение задачи минимизации (11.5) есть $\mathbf{x}_k = \mathbf{x}_0 + \mathbf{V}_k\mathbf{y}_k$, где $\mathbf{y}_k$ минимизирует функцию $J(\mathbf{y})$, определяемую (11.6). В результате получается следующий

Алгоритм 1. Обобщенный метод минимальных невязок (GMRES)

Шаг 1. Start: выбираем $\mathbf{x}_0$ и вычисляем $\mathbf{r}_0 = \mathbf{f} - {}_0$ и $\mathbf{V}_1 = \mathbf{r}_0/|\mathbf{r}_0|$.

Шаг 2. Iterate: for j = 1, 2, …, k, …until satisfied do

$$h_{ij} = (\mathbf{A}\mathbf{v}_j, \mathbf{v}_i), \quad i = 1, 2, \ldots, j, \mathbf{v}_{j+1} = \mathbf{A}\mathbf{v}_j - \sum_{i=1}^{j} h_{ij}\mathbf{v}_i$$

$$h_{j+1,j} = |\mathbf{v}_{j+1}|\,, \quad \mathbf{v}_{j+1} = \frac{\mathbf{v}_{j+1}}{h_{j+1,j}}$$

Шаг 3. Формируем новое приближение к решению $\mathbf{x}_k = x_0 + V_k\mathbf{y}_k$, где $\mathbf{y}_k$ минимизирует (11.6).

В принципе полученный алгоритм можно рассматривать как прямой метод, который дает точное решение при некотором $k < N$. Однако при увеличении k память, необходимая для хранения базисных векторов, растет пропорционально k, а количество умножений при их вычислении — как $k^2N/2$. Чтобы обойти эти трудности, будем возобновлять процесс через каждые t шагов. Тогда получается следующий итерационный

Алгоритм 2. GMRES (m)

Шаг 1. Start: выбираем $\mathbf{x}_0$ и вычисляем $\mathbf{r}_0 = \mathbf{f} - {}_0$ и $\mathbf{V}_1 = \mathbf{r}_0/|\mathbf{r}_0|$.

Шаг 2. Iterate: for $j = 1, 2, \ldots, m$ do

$$h_{ij} = (\mathbf{A}\mathbf{v}_j, \mathbf{v}_i), \quad i = 1, 2, \ldots, j, \quad \mathbf{v}_{j+1} = \mathbf{A}\mathbf{v}_j - \sum_{i=1}^{j} h_{ij}\mathbf{v}_i$$

$$h_{j+1,j} = |\mathbf{v}_{j+1}|, \quad \mathbf{v}_{j+1} = \frac{\mathbf{v}_{j+1}}{h_{j+1,j}}$$

Шаг 3. Формируем новое приближение к решению $\mathbf{x}_m = x_0 + V_m\mathbf{y}_m$, где $\mathbf{y}_m$ минимизирует (11.6).

Шаг 4. Restart: Compute $\mathbf{r}_m = \mathbf{f} - {}_m$ if satisfied then stop else compute $\mathbf{x}_0 := \mathbf{x}_m$, $v_1 := \mathbf{r}_m/|\mathbf{r}_m|$ and go to 2.

Единственным невыясненным элементом алгоритма осталось решение задачи наименьших квадратов

$$\min_Y |\beta\mathbf{e}_1 - \mathbf{H}_{k1}\mathbf{y}|.$$

Для ее решения приведем верхнюю хессенбергову матрицу $\mathbf{H}_{k1}$ к верхней треугольной матрице с помощью матриц вращения, одновременно модифицируя правую часть $\beta\mathbf{e}_1$. Так как матрицы вращения являются унитарными, то значение функционала $J(\ )$ при этом не изменится. Обозначим через $\mathbf{Q}_k$ матрицу, являющуюся произведением последовательности матриц вращения, приводящих $\mathbf{H}_{k1}$ к верхнему треугольному виду. Тогда

$$J(\mathbf{y}) = |\beta\mathbf{r}_1 - \mathbf{H}_{k1}\mathbf{y}| = |\mathbf{Q}_k[\beta\mathbf{r}_1 - \mathbf{H}_{k1}\mathbf{y}]| = |\mathbf{t}_k - \mathbf{R}_k\mathbf{y}|, \tag{11.7}$$

где $\mathbf{t}_k$ и $\mathbf{R}_k$ — соответственно, результат применения $\mathbf{Q}_k$ к правой части и к матрице $\mathbf{H}_{k1}$. Так как последняя строка матрицы $\mathbf{R}_k$ нулевая, то задача минимизации (11.7) сводится к решению системы линейных уравнений с треугольной матрицей $\mathbf{R}_k$.

4.6.3. *Ускорение сходимости с помощью переобусловливания.*

Описанный выше метод оперирует только с исходной матрицей $\mathbf{A}$ системы уравнений, поэтому скорость сходимости его (при фиксированном значении параметра) зависит только от спектральных свойств матрицы $\mathbf{A}$. Существует эффективный способ ускорения сходимости основного итерационного метода, основанный на переходе от решения исходной системы уравнений $= \mathbf{f}$ к эквивалентной системе $= \mathbf{B}\mathbf{f}$, получаемой путем умножения системы на некоторую матрицу $\mathbf{B}$.

Скорость сходимости итерационного метода зависит от спектрального радиуса задачи. Поэтому в качестве $\mathbf{B}$ обычно выбирается такая матрица, которая при умножении на $\mathbf{A}$ дает матрицу, приближающуюся к единичной. В данной работе в качестве такой матрицы-переобусловливателя использовалось неполное разложение $\mathbf{A}$ на треугольные сомножители $\mathbf{L}$ и $\mathbf{U}$: $\mathbf{A}$=$\mathbf{LU}$+$\mathbf{E}$, где $\mathbf{E}$ — погрешность неполного разложения. В процессе *ILU*-разложения получаются лишь сомножители $\mathbf{L}$ и $\mathbf{U}$, матрица же $\mathbf{E}$, вообще говоря, остается неопределенной.

Существуют две основные стратегии **ILU**: разложение по позициям и разложение по значениям. Оба варианта отличаются от полного **LU** — разложения тем, что в процессе работы алгоритма каким-либо образом контролируется заполнение треугольных сомножителей вновь возникающими элементами, большая часть из которых отбрасывается.

В разложении по позициям заранее фиксируется некоторая структура разреженности матриц **L** и **U**, например совпадающая со структурой разреженности исходной матрицы.

В разложении по значениям выбирается некоторое пороговое значение ε величины возникающих элементов и элементы, меньшие этого порогового значения, отбрасываются. Эта стратегия более универсальна, так как путем понижения порогового значения и тем самым увеличения заполнения сомножителей можно сколь угодно близко подойти к точному LU — разложению, т. е. ценой удорожания метода удается добиться сходимости на сколь угодно плохих матрицах. Однако разложение по значениям имеет существенные недостатки. Первый из них состоит в том, что при уменьшении ε цена переобусловливания как по памяти, так и по числу арифметических операций может катастрофически возрасти. Второй заключается в сложности выбора самого значения ε, для которого не существует какой-либо хорошо обоснованной методики. В то же время разложение по позициям крайне просто реализуется программно, дешево с точки зрения памяти и числа операций и в большинстве случаев работает вполне удовлетворительно. По этой причине в данной работе использовалось именно неполное разложение по позициям.

4.7. Об эффективности численного решения сеточных уравнений. Объем требуемой оперативной памяти и времени CPU, затрачиваемый на решение системы линейных алгебраических уравнений на итерации по нелинейности

$$\left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{X}}\right)_{k_0} \mathbf{\Delta X}^{[k]} = -\mathbf{F}(\mathbf{X}^{[k]}),$$

существенно зависит от степени разреженности матрицы $(\partial\mathbf{F}/\partial\mathbf{X})$. Предварительные расчеты показали, что сходимость итерационного процесса по нелинейности существенно зависит от точек в шаблоне аппроксимации, используемых для конвективной составляющей, а также для прямых производных диссипативной составляющей уравнений Навье–Стокса. Использование «угловых» точек в шаблоне аппроксимации для смешанных производных диссипативной составляющей уравнений Навье–Стокса оказывает слабое влияние на сходимость итераций по нелинейности. Вследствие этого, а также для сокращения, примерно в два раза оперативной памяти и общего числа арифметических операций на итерации по нелинейности, в операторе $(\partial\mathbf{F}/\partial\mathbf{X})$ опущены диагонали, соответствующие смешанным производным. В результате оператор $\partial\mathbf{F}/\partial\mathbf{X}$ для пространственного случая имеет разреженную блочную 13-ти диагональную структуру.

На примере нестационарного течения совершенного вязкого газа в плоском канале было проведено сравнительное исследование затрат времени CPU и памяти ЭВМ [37], необходимых для решения системы дифференциальных уравнений прямым и итерационным методами, с использованием полного (5×5) и усеченного (3×3) шаблона формирования матрицы Якоби. Основной выигрыш во времени CPU достигается для случая, когда матрица Якоби формируется на усеченном шаблоне. Этот выигрыш очень велик и с избытком компенсирует некоторое ухудшение сходимости при реализации итерационного метода. Наличие или отсутствие смешанных производных практически не влияет на сходимость, однако приводит к некоторому уменьшению используемой памяти (на 4–25%) и времени CPU (на 6–40%) из-за более разреженной структуры матрицы системы. Этот выигрыш относительно выше при использовании усеченного шаблона. Модификация метода Ньютона-Рафсона также дает большой выигрыш во времени CPU (в 2–5 раз), но не влияет на используемую память [37].

Методика численного решения уравнений Навье–Стокса, описанная выше, использована для решения широкого класса задач наветренного обтекания затупленных тел с учетом равновесных и неравновесных физико-химических превращений [13, 38], и обобщена на случай моделирования отрывного течения вязкого химически неравновесного газа. Она включает в себя один из вариантов построения неявной монотонной разностной схемы второго порядка точности, модифицированный метод Ньютона-Рафсона решения нелинейных сеточных уравнений на каждом шаге по времени и итерационном методе обобщенных минимальных невязок GMRES для решения линейной системы алгебраических уравнений на итерации по нелинейности [39, 40].

4.8. Построение расчетной сетки. Для построения расчетных сеток могут быть использованы различные методы [41]. К наиболее простым можно отнести алгебраические методы. Они достаточно эффективны при рассмотрении простых топологий расчетной области. В настоящей работе большая часть расчетных исследований обтекания тел простой конфигурации (цилиндр, сфера, острый конус) проведена на сетках, построенных с помощью алгебраических преобразований. Для примера, на рис. 11.8 показана конфигурация расчетной сетки, использованной при решении задачи об обтекании цилиндра.

При рассмотрении более сложных топологий расчетной области необходимо использовать методы, основанные на интегральных, дифференциальных и вариационных принципах. Для двумерных задач активно использовался интегральный метод, основанный на численном построении конформного преобразования [42, 43]. Но более эффективным оказался дифференциальный метод, использующий решение уравнения Лапласа. Данный метод оказался достаточно универсальным, поскольку легко обобщается на трехмерный случай.

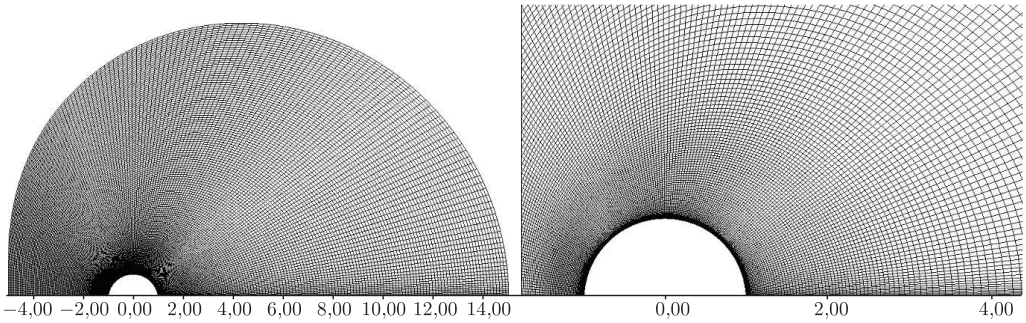


Рис. 11.8. Расчетная сетка 201 × 201. ($\mathbf{Re} = 106$, $\mathbf{M} = 5$) Турбулентная модель

Рассмотрим суть дифференциального метода построения расчетных сеток. Пусть требуется построить трехмерную расчетную сетку в односвязанной области Ω (рис. 11.9), ограниченной поверхностями, заданными в параметрическом виде:

$$\begin{array}{llllll}
\mathbf{r} = \mathbf{r}_{\mathrm{I}}(\eta, \zeta) & \text{при} & \xi = \xi_{\min}, & \mathbf{r} = \mathbf{r}_{\mathrm{II}}(\eta, \zeta) & \text{при} & \xi = \xi_{\max}, \\
\mathbf{r} = \mathbf{r}_{\mathrm{III}}(\xi, \zeta) & \text{при} & \eta = \eta_{\min}, & \mathbf{r} = \mathbf{r}_{\mathrm{IV}}(\xi, \zeta) & \text{при} & \eta = \eta_{\max}, \\
\mathbf{r} = \mathbf{r}_{\mathrm{V}}(\xi, \eta) & \text{при} & \zeta = \zeta_{\min}, & \mathbf{r} = \mathbf{r}_{\mathrm{VI}}(\xi, \eta) & \text{при} & \zeta = \zeta_{\max},
\end{array}$$

где ξ, η, ζ — произвольные параметры.

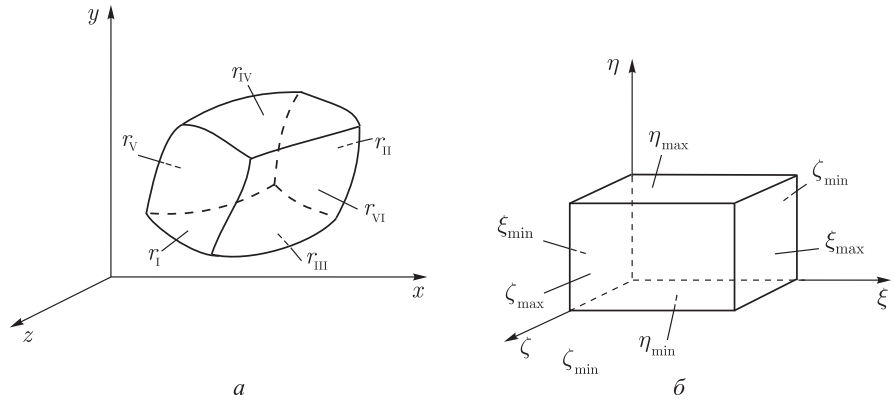


Рис. 11.9. Отображение объема из физической системы координат в математическую

Рассмотрим уравнения Лапласа в области Ω

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial z^2} = 0$$

для вектор-функции $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)^T$ с граничными условиями:

$$(u_1)_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_{\mathrm{I}}} = 0, \quad (u_1)_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_{\mathrm{II}}} = 1, \quad \left(\frac{\partial u_1}{\partial n}\right)_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_{\mathrm{III}}} = 0, \quad \left(\frac{\partial u_1}{\partial n}\right)_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_{\mathrm{IV}}} = 0,$$
$$\left(\frac{\partial u_1}{\partial n}\right)_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_{\mathrm{V}}} = 0, \quad \left(\frac{\partial u_1}{\partial n}\right)_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_{\mathrm{VI}}} = 0,$$

$$\left(\frac{\partial u_2}{\partial n}\right)_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_{\mathrm{I}}}=0,\quad \left(\frac{\partial u_2}{\partial n}\right)_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_{\mathrm{II}}}=0,\quad (u_2)_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_{\mathrm{III}}}=0,\quad (u_2)_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_{\mathrm{IV}}}=1,$$
$$\left(\frac{\partial u_2}{\partial n}\right)_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_{\mathrm{V}}}=0,\quad \left(\frac{\partial u_2}{\partial n}\right)_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_{\mathrm{VI}}}=0,$$

$$\left(\frac{\partial u_3}{\partial n}\right)_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_{\mathrm{I}}}=0,\quad \left(\frac{\partial u_3}{\partial n}\right)_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_{\mathrm{II}}}=0,\quad \left(\frac{\partial u_3}{\partial n}\right)_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_{\mathrm{III}}}=0,\quad \left(\frac{\partial u_3}{\partial n}\right)_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_{\mathrm{IV}}}=0,$$
$$(u_3)_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_{\mathrm{V}}}=0,\quad (u_3)_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_{\mathrm{VI}}}=1,$$

где n — нормаль к соответствующей поверхности. Решением этой задачи являются гармонические функции, а изоповерхности $u_1(x,y,z)=\mathrm{const}$, $u_2(x,y,z)=\mathrm{const}$, $u_3(x,y,z)=\mathrm{const}$ образуют искомую сетку. В системе координат ξ, η, ζ данная задача имеет вид:

$$\frac{\partial\widehat{\mathbf{u}}}{\partial\xi}+\frac{\partial\widehat{\mathbf{v}}}{\partial\eta}+\frac{\partial\widehat{\mathbf{w}}}{\partial\zeta}=0, \tag{11.8}$$
$$\widehat{\mathbf{u}}=J\left(\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x}\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial y}\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial z}\frac{\partial\xi}{\partial z}\right),\quad \widehat{\mathbf{v}}=J\left(\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial z}\frac{\partial\eta}{\partial z}\right),$$
$$\widehat{\mathbf{w}}=J\left(\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x}\frac{\partial\zeta}{\partial x}+\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial y}\frac{\partial\zeta}{\partial y}+\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial z}\frac{\partial\zeta}{\partial z}\right),$$

$$(u_1)_{\xi=\xi_{\min}}=0,\quad (u_1)_{\xi=\xi_{\max}}=1,\quad \left(\frac{\partial u_1}{\partial\eta}\right)_{\eta=\eta_{\min}}=0,\quad \left(\frac{\partial u_1}{\partial\eta}\right)_{\eta=\eta_{\max}}=0,$$
$$\left(\frac{\partial u_1}{\partial\zeta}\right)_{\zeta=\zeta_{\min}}=0,\quad \left(\frac{\partial u_1}{\partial\zeta}\right)_{\zeta=\zeta_{\max}}=0,$$

$$\left(\frac{\partial u_2}{\partial\xi}\right)_{\xi=\xi_{\min}}=0,\quad \left(\frac{\partial u_2}{\partial\xi}\right)_{\xi=\xi_{\max}}=0,\quad (u_2)_{\eta=\eta_{\min}}=0,\quad (u_2)_{\eta=\eta_{\max}}=1,$$
$$\left(\frac{\partial u_2}{\partial\zeta}\right)_{\zeta=\zeta_{\min}}=0,\quad \left(\frac{\partial u_2}{\partial\zeta}\right)_{\zeta=\zeta_{\max}}=0,$$

$$\left(\frac{\partial u_3}{\partial\xi}\right)_{\xi=\xi_{\min}}=0,\quad \left(\frac{\partial u_3}{\partial\xi}\right)_{\xi=\xi_{\max}}=0,\quad \left(\frac{\partial u_3}{\partial\eta}\right)_{\eta=\eta_{\min}}=0,\quad \left(\frac{\partial u_3}{\partial\eta}\right)_{\eta=\eta_{\max}}=0,$$
$$(u_3)_{\zeta=\zeta_{\min}}=0,\quad (u_3)_{\zeta=\zeta_{\max}}=1.$$

где $J=\partial(x,y,z)/\partial(\xi,\eta,\zeta)$ — якобиан преобразования.

Рассмотрим численное решение задачи (11.8) с соответствующими граничными условиями. Построим каким-либо простым (алгебраическим) методом расчетную сетку $\mathbf{r}_{ijk}=\mathbf{r}(\xi_i^\circ,\eta_j^\circ,\zeta_k^\circ)$, $(i=1,\ldots,I,\ j=1,\ldots,J,\ k=1,\ldots,K)$ для области Ω такую, что:

$$\mathbf{r}(\xi_1^\circ,\eta_j^\circ,\zeta_k^\circ)=\mathbf{r}_{\mathrm{I}},\quad \mathbf{r}(\xi_I^\circ,\eta_j^\circ,\zeta_k^\circ)=\mathbf{r}_{\mathrm{II}},\quad \mathbf{r}(\xi_i^\circ,\eta_1^\circ,\zeta_k^\circ)=\mathbf{r}_{\mathrm{III}},$$
$$\mathbf{r}(\xi_i^\circ,\eta_{\mathrm{J}}^\circ,\zeta_k^\circ)=\mathbf{r}_{\mathrm{IV}},\quad \mathbf{r}(\xi_i^\circ,\eta_j^\circ,\zeta_1^\circ)=\mathbf{r}_{\mathrm{V}},\quad \mathbf{r}(\xi_i^\circ,\eta_j^\circ,\zeta_{\mathrm{K}}^\circ)=\mathbf{r}_{\mathrm{VI}}.$$

Решая на этой сетке уравнения (11.8), получаем сеточную вектор-функцию $\mathbf{u}$, заданную в узлах $\mathbf{r}_{ijk} = \mathbf{r}(\xi_i^\circ,\ \eta_j^\circ, \zeta_k^\circ)$, $(i = 1, \ldots, I,\ j = 1, \ldots, J,$ $k = 1, \ldots, K)$. В настоящей работе для этого использован тот же самый алгоритм и программы численного решения, что при решении уравнений Навье–Стокса. Далее, проведя равномерное разбиение вектор-функции $\mathbf{u}_{ijk}$: $(u_1)_{ijk} = (i-1)/(I-1)$, $(u_2)_{jjk} = (j-1)/(J-1)$, $(u_3)_{ijk} = (k-1)/(K-1)$, будем искать координаты $\mathbf{r}_{ijk}$, соответствующие $\mathbf{u}_{ijk}$, решая обратную задачу $\mathbf{F}_{ijk} = \mathbf{u(r)\text{-}u}_{ijk} = 0$ модифицированным методом Ньютона–Рафсона

$$\mathbf{r}^{[k+1]} = \mathbf{r}^{[k]} - \tau_{k+1}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{r}^{[k]}),$$

где $\mathbf{D} = \partial\mathbf{F}/\partial\mathbf{u}$ — матрица Якоби, k — номер итерации. При этом непрерывная вектор–функция $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ получается из сеточной вектор–функции $\mathbf{u}_{ijk}$ с помощью линейной интерполяции. В результате решения этой задачи получаем новую сетку $\mathbf{r}_{ijk} = \mathbf{r}((u_1)_i, (u_2)_j, (u_3)_k)$, удовлетворяющую условию ортогональности. В качестве примера на рис. 11.10 показан фрагмент расчетной

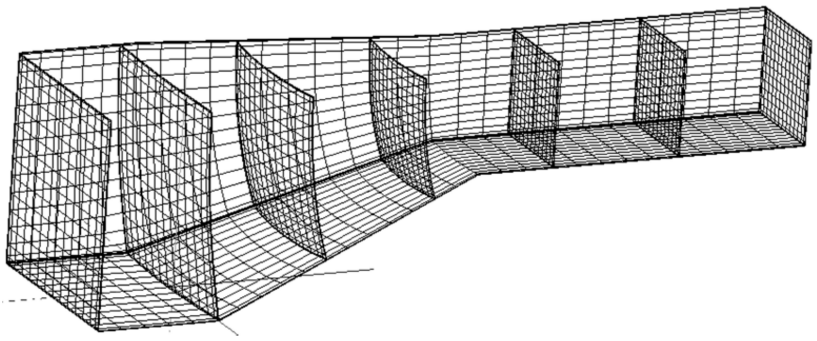


Рис. 11.10. Конфигурация расчетной сетки

сетки, построенной с помощью описанного выше метода. На этой сетке, содержащей $31 \times 21 \times 21$ узлов, проведено численное решение пространственной задачи сверхзвукового течения вязкого газа в канале переменного сечения с твердыми границами.

На рис. 11.11 показаны изолинии местного числа Маха на некоторых сеточных поверхностях в канале переменного сечения для определяющих параметров задачи $\mathbf{M}_\infty = 5$, $\mathbf{Re}_\infty = 10^5$, $T_w = 0{,}5$, $\gamma = 1{,}4$. Число Рейнольдса посчитано по стороне квадрата, представляющего собой входное сечение канала, и параметрам потока на входе в канал. Данные рис. 11.11 свидетельствуют о сложной, существенно пространственной структуре поле течения.

Для сгущения узлов расчетной сетки вблизи твердой поверхности особых поверхностей (твердая поверхность, след за телом и т.д.) применен алгоритм, основанный на алгебраическом преобразовании. Рассмотрим этот алгоритм для одномерного случая. Пусть на отрезке $[a_1, a_N]$ выделено несколько зон $[a_i, a_{i+1}]$, $i = 1, \ldots, N-1$, а сетка содержит $\mathbf{M}$ узлов. Требуется распределить

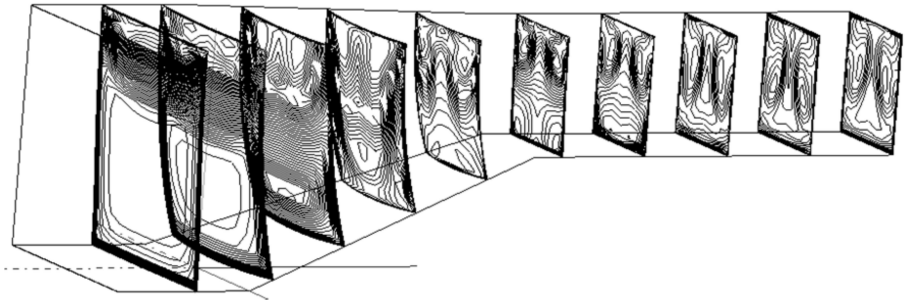


Рис. 11.11. Изолинии местного числа Маха. $\mathbf{M}_{\min} = 0$, $\mathbf{M}_{\max} = 5$, $\Delta M = 0{,}1$

узлы по зонам так, чтобы в каждой из них оказалась заданная доля p_i от общего числа узлов ($\Sigma p_i = 1$).

Непрерывный аналог этой дискретной задачи формулируется так: найти строго возрастающую функцию $f(\xi)$, которая без ограничения общности считается заданной на отрезке $[0, 1]$ и принимает в точках 0 и 1 значения a_1 и a_N соответственно, а в точках $\xi_{i+1/2} = (\xi_i + \xi_{i+1})/2$ — значения $(a_i + a_{i+1})/2$, $i = 1, \ldots, N-1$, где $\xi_1 = 0$, $\xi_i = \sum\limits_{k=1}^{i-1} p_k$. Причем функция $f(\xi)$ должна быть достаточно гладкой.

Решение подобной задачи не является единственным. Одно из возможных решений строится следующим образом. Рассмотрим функцию $h(\xi) = df/d\xi$, которая в непрерывной формулировке задачи будет аналогом шага расчетной сетки. Введем понятие характерного шага i-й зоны: $h_i = (a_{i+1} - a_i)/(\xi_{i+1}\xi_i)$, $i = 1, \ldots, N-1$. Если проинтегрировать кусочно-непрерывную функцию $h_*(\xi)(h_*(\xi) = h_i$ для $\xi \in [\xi_i^+, \xi_{i+1}^-]$, $i = 1, \ldots, N-1)$, то получится функция $f_*(\xi)$, удовлетворяющая условиям задачи, но не являющаяся достаточно гладкой: в точках ξ_i ее производная терпит разрыв первого рода.

Для устранения этого недостатка необходимо заменить разрывы первого рода функции $h_i(\xi)$ в точках ξ_i на непрерывное изменение $h(\xi)$ от h_{i-1} до h_i на отрезке, содержащем точку ξ_i $(i = 1, \ldots, N-1)$. Обозначим через $g_i(\xi)$ функцию, реализующую такое плавное изменение, а через $[y_1, y_2]$ — область ее определения для каждого i; при этом $(y_1 + y_2)/2 = \xi_i$. В качестве g можно использовать дважды непрерывно дифференцируемую функцию

$$g_i(\xi) = h_{i-1} + \frac{1}{2}(h_i - h_{i-1})\left(\sin\left(\frac{\pi(\xi - \xi_i)}{y_2 - y_1}\right) + 1\right).$$

Выбор области определения функции g_i в некоторой степени произволен; в настоящих расчетах она устанавливалась из условия $y_2 - y_1 = \min(p_i, p_{i-1})$ для каждого ξ_i.

Искомая функция $h(\xi)$ совпадает с $h_*(\xi)$ вне области определения функции g_i и дополняется до непрерывной функцией g_i на отрезке $[y_1, y_2]$. Функция распределения узлов $f(\xi)$ получается после интегрирования $h(\xi)$

в пределах от 0 до ξ. Построенная таким образом функция $f(\xi)$ дважды непрерывно дифференцируема.

Обобщим алгоритм сгущения узлов расчетной сетки на трехмерный случай. Пусть с помощью дифференциального метода построена сетка, являющаяся равномерной в объеме $(\xi_{ijk}, \eta_{ijk},\ \zeta_{ijk})$, $i = 1, \ldots, N_\xi$, $j = 1, \ldots, N_\eta$, $k = 1, \ldots, N_\zeta$. В пространстве (x, y, z) ей соответствует сетка $(X_{ijk},\ Y_{ijk},\ Z_{ijk})$, $i = 1, \ldots, N_X$, $j = 1, \ldots, N_Y$, $k = 1, \ldots, N_Z$. Предположим, что необходимо изменить распределение узлов в направлении по η. Пусть $i = i_0$, $k = k_0$. Используем для $X_{i_0jk_0}$, $Y_{i_0jk_0}$, $Z_{i_0jk_0}$ $(j = 1, \ldots, N_Y)$ описанный выше алгоритм сгущения узлов одномерной сетки по j и затем повторим эту операцию для всех $i_0 = 1, \ldots, N_X$, $k_0 = 1, \ldots, N_Z$. Полученная таким образом неравномерная сетка может быть применена в расчетах.

В переменных (ξ, η, ζ) расчетная область имеет форму параллелепипеда и покрывается равномерной сеткой с заданными шагами:

$$\Delta\xi = \frac{\xi_{\max} - \xi_{\min}}{N_X}, \quad \Delta\eta = \frac{\eta_{\max} - \eta_{\min}}{N_Y}, \quad \Delta\zeta = \frac{\zeta_{\max} - \zeta_{\min}}{N_Z}.$$

Метрические коэффициенты в полуцелых узлах сетки вычисляются по формулам численного дифференцирования. Например, в поле течения в полуцелом узле $(i + 1/2,\ j,\ k)$:

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{x_{i+1,j,k} - x_{i,j,k}}{\Delta\xi}, \quad \frac{\partial x}{\partial \eta} = \frac{x_{i+1,j+1,k} + x_{i,j+1,k} - x_{i+1,j-1,k} - x_{i,j-1,k}}{4\Delta\eta},$$
$$\frac{\partial x}{\partial \zeta} = \frac{x_{i+1,j,k+1} + x_{i,j,k+1} - x_{i+1,j,k-1} - x_{i,j,k-1}}{4\Delta\zeta},$$
$$\frac{\partial y}{\partial \xi} = \frac{y_{i+1,j,k} - y_{i,j,k}}{\Delta\xi}, \quad \frac{\partial y}{\partial \eta} = \frac{y_{i+1,j+1,k} + y_{i,j+1,k} - y_{i+1,j-1,k} - y_{i,j-1,k}}{4\Delta\eta},$$
$$\frac{\partial y}{\partial \zeta} = \frac{y_{i+1,j,k+1} + y_{i,j,k+1} - y_{i+1,j,k-1} - y_{i,j,k-1}}{4\Delta\zeta},$$
$$\frac{\partial z}{\partial \xi} = \frac{z_{i+1,j,k} - z_{i,j,k}}{\Delta\xi}, \quad \frac{\partial z}{\partial \eta} = \frac{z_{i+1,j+1,k} + z_{i,j+1,k} - z_{i+1,j-1,k} - z_{i,j-1,k}}{4\Delta\eta},$$
$$\frac{\partial z}{\partial \zeta} = \frac{z_{i+1,j,k+1} + z_{i,j,k+1} - z_{i+1,j,k-1} - z_{i,j,k-1}}{4\Delta\zeta}.$$

Остальные метрические коэффициенты определяются с помощью условия

$$\begin{vmatrix} x_\xi & x_\eta & x_\zeta \\ y_\xi & y_\eta & y_\zeta \\ z_\xi & z_\eta & z_\zeta \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y & \xi_z \\ \eta_x & \eta_y & \eta_z \\ \zeta_x & \zeta_y & \zeta_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

4.9. Разработка комплекса универсальных программ. На основе описанных выше численных методов разработана библиотека «гибких» универсальных программ, позволяющая быстро осуществлять постановку задачи, ее модификацию, аппроксимацию дифференциальных уравнений с помощью различных разностных схем, решение нелинейных разностных уравнений и различные методы решения линейных систем алгебраических уравнений,

получаемых на итерации по нелинейности. Это сделало возможным эффективное использование этого программного комплекса исследователями, не имеющими специальной подготовки в области численных методов. Все программы могут быть разделены на несколько основных блоков: аппроксимация дифференциальных уравнений, решение нелинейных разностных уравнений, решение линейных разностных уравнений, построение расчетной сетки для областей сложной конфигурации. В библиотеке имеются также некоторые вспомогательные блоки, отвечающие за распределение памяти и ресурсов ЭВМ, за контроль ошибок, и ряд других.

Архитектура библиотеки универсальных программ представлена на рис. 11.12. Стрелка, направленная от одного блока к другому (рис. 11.12), показывает на обращение одной группы модулей к другой в процессе работы программы.

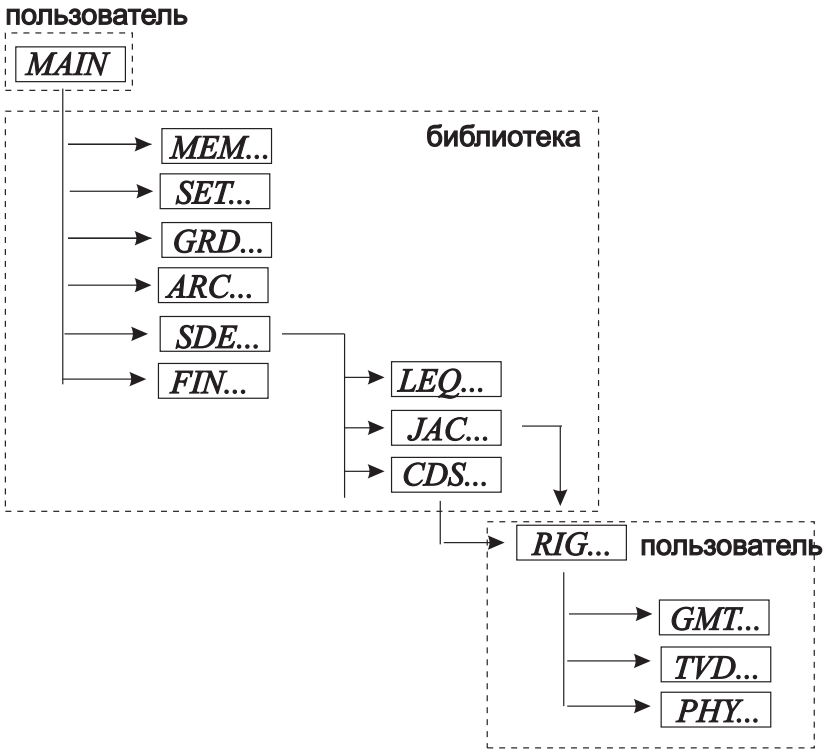


Рис. 11.12. Архитектура библиотеки универсальных программ

Работа комплекса программ может быть представлена следующим образом. Головная программа *MAIN* может быть написана как пользователем под свою конкретную задачу, так и выбираться из уже существующих и реализованных в библиотеке программ задач. «Динамическое» распределение памяти организуется с помощью безымянного *COMMON* блока и поддерживается

группой служебных модулей *MEM*..., отвечающих за распределение и контроль за переполнением оперативной памяти между различными этапами работы программы. В результате вся используемая программой память заказывается в головном модуле только один раз.

Группа модулей *SET*... отвечает за установку основных параметров вычислительного процесса: размерность задачи, число дифференциальных уравнений, тип граничных условий, число итераций, критерий окончания итерационного процесса, шаблон аппроксимации, различные параметры метода решения нелинейных разностных уравнений и систем линейных алгебраических уравнений и т.д.

Группа модулей *GRD*... отвечает за построение расчетной сетки для конкретной краевой задачи, сгущение узлов расчетной сетки в областях с большими градиентами зависимых переменных задачи (см. раздел 7).

Группа модулей *SDE*... отвечает за решение нелинейных разностных уравнений, возникающих при аппроксимации дифференциальных уравнений на шаге по времени. В этих модулях реализован модифицированный метод Ньютона–Рафсона, описанный в разделе 5.

Группа модулей *ARC*... осуществляет процедуру считывания-записи расчетных полей на жесткий диск; *FIN*... — служебные модули, осуществляющие подготовку информации о ресурсах ЭВМ (времени CPU и оперативной памяти), использованных при решении задачи.

Модули группы *SDE*... вызывают подпрограммы группы *LEQ*..., отвечающие за решение линейных систем алгебраических уравнений, получаемых на итерации по нелинейности. В них реализованы прямые и итерационные методы решения. В частности, наиболее активно используемым методом является итерационный метод обобщенных минимальных невязок *GMRES(k)* с неполным *LU* разложением в качестве переобуславливателя (см. раздел 6).

Группа модулей *CDS*... отвечает за аппроксимацию дифференциальных уравнений и граничных условий. В ней использован интегро-интерполяционный метод (метод конечного объема) аппроксимации уравнений, записанных в дивергентной форме (см. раздел 3). Для аппроксимации вектора потока на грани элементарной ячейки использованы линейные схемы типа центральных разностей. Группа модулей *JAC*... отвечает за численное формирование матрицы Якоби с применением процедуры конечных приращений.

Модули группы *CDS*... вызывают подпрограмму *RIG*..., в которой конкретизирована решаемая задача (уравнения и граничные условия). В свою очередь подпрограмма *RIG*..., создаваемая под конкретную задачу, может вызывать подпрограммы группы *GMT*..., в которой рассчитываются метрические коэффициенты перехода от криволинейной системы координат в декартову (см. раздел 1), группы *TVD*..., в которой осуществляется процедура построения монотонизированной разностной схемы (см. раздел 3) для конвективной составляющей вектора потока, группы *PHY*..., отвечающей за расчет коэффициентов переноса, теплофизические свойства компонентов

смеси газа, скорости изменения компонентов смеси газа на основе закона действующих масс и т.д.

Библиотека программ имеет необходимые служебные подпрограммы группы *ERR*..., позволяющие контролировать на всех уровнях выполнения программы возможную ошибку. При этом в случае возникновения ошибки на каком-либо уровне происходит корректная остановка выполнения программы с подробной диагностикой ошибки, как по ее содержанию, так и по месту расположения внутри программы.

Высокая эффективность работы программ может достигаться за счет настройки различных параметров. Пользователь может также написать свой собственный алгоритм и соответствующие ему подпрограммы для того или иного вычислительного этапа. В частности, к библиотеке программ могут быть подключены другие большие библиотеки, в которых могут быть реализованы более быстрые и эффективные алгоритмы (библиотеки линейной алгебры, и другие).

Как правило, для решения задачи с применением библиотеки программ пользователю необходимо написать программу MAIN и подпрограмму RIGTH по заданным правилам. При наличии определенных навыков на это уходит максимум несколько часов, что свидетельствует о высокой эффективности предлагаемого программного комплекса.

4.10. Исследование сходимости расчетных данных. Влияние числа узлов расчетной сетки $N \times N$ $(101 \leqslant N \leqslant 601)$ на точность определения полей газодинамических переменных было подробно исследовано на примере обтекания кругового цилиндра с изотермической поверхностью ($T_{wo} = 0{,}5$) сверхзвуковым потоком при числе Маха $\mathbf{M}_\infty = 5$ для двух значений числа Рейнольдса: $\mathbf{Re}_R = 10^4$ (ламинарная модель) и $\mathbf{Re}_R = 10^6$ (турбулентная модель). При анализе погрешности расчета в качестве «точного» решения использовались результаты расчетов при наибольшем числе узлов расчетной сетки (см. табл. 11.2).

Характерные затраты оперативной памяти ПВЭМ и времени CPU при решении задачи обтекания кругового цилиндра сверхзвуковым потоком при числе Маха $\mathbf{M}_\infty = 5$ и числе Рейнольдса $\mathbf{Re}_R = 10^4$ (ламинарная модель) представлены в таблице.

Результаты расчетов на основе уравнений Навье–Стокса показали, что для области возмущенного течения перед цилиндром изменение параметра N проявляется в поведении газодинамических переменных в окрестности головной ударной волны. Увеличение N приводит к лучшему разрешению головной ударной волны, но практически не оказывает влияния на значения газодинамических переменных в остальной части области течения. В качестве примера на рис. 11.13, *а* показано влияние N на распределение температуры на линии симметрии перед цилиндром.

Таблица 11.2. Параметры точки траектории ГЛА типа нижнеплан

Число узлов расчетной сетки, $N \times N$	Оперативная память для решения задачи, Mb	Среднее время установления на ПЭВМ с CPU Pentium-III 1000 МГц, часы
51×51	6	0,25
71×71	11	0,5
101×101	21	1,0
141×141	39	2,0
201×201	78	4,0
281×281	141	8,0
401×401	304	15
601×601	665	30

Иная ситуация наблюдается для области возмущенного течения за круговым цилиндром (ближний след): увеличение параметра N обуславливает более точное разрешение тонкой структуры ближнего следа и как следствие этого происходит уточнение полей газодинамических переменных. Сказанное выше наглядно иллюстрируется распределением скорости на оси ближнего следа (рис. 11.13, *б*).

При больших числах Рейнольдса, когда в поле возмущенного течения около цилиндра реализуются различные режимы движения газообразной среды, имеем такую же картину: для потока на наветренной стороне увеличение параметра N улучшает разрешение головной ударной волны и мало влияет на поля газодинамических переменных в остальной области течения. В ближнем

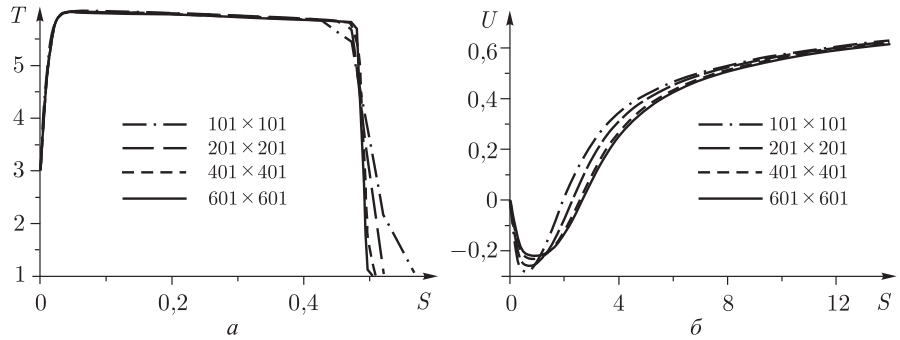


Рис. 11.13. Влияние числа узлов расчетной сетки $N \times N$ на распределения температуры T (*а*) и скорости u (*б*) на линии симметрии перед и за круговым изотермическим ($T_{wo} = 0{,}5$) цилиндром, соответственно, при числах $\mathbf{M}_\infty = 5$ и $\mathbf{Re}_R = 10^4$ ($s = s^\circ/R$ — расстояние, отсчитываемое от передней и задней критических точек соответственно)

следе возрастание параметра N позволяет более аккуратно и надежно установить тонкую структуру поля течения и вследствие этого наблюдается монотонная деформация полей газодинамических переменных с выходом на «точное» решение по мере увеличения числа узлов расчетной сетки. Это наглядно видно по распределениям на линии симметрии ближнего следа температуры T и параметра турбулентности q (рис. 11.14).

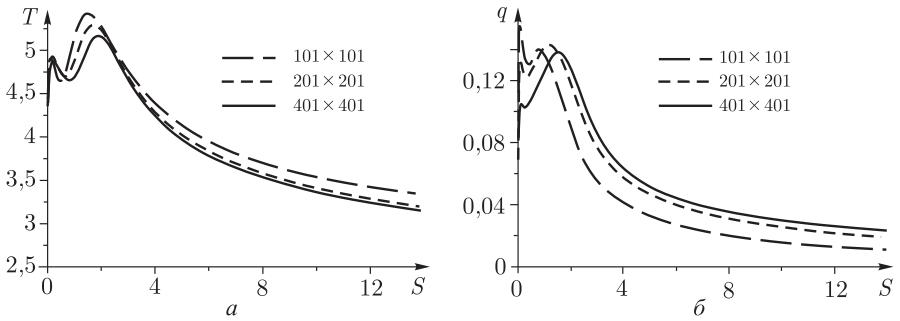


Рис. 11.14. Влияние числа узлов расчетной сетки $N \times N$ на распределения температуры T (*а*) и параметра турбулентности q (*б*) на линии симметрии за круговым изотермическим ($T_{wo} = 0{,}5$) цилиндром при числах $\mathbf{M}_\infty = 5$ и $\mathbf{Re}_R = 10^6$, турбулентная модель

Рассмотрим теперь влияние параметра N на точность расчета местных аэродинамических характеристик. Начнем с анализа точности расчета давления на поверхности цилиндра (напомним, что давление является одной из искомых газодинамических переменных).

Изменения расчетных значений давления в передней и задней критических точках кругового цилиндра в зависимости от параметра N показано на рис. 11.15 (ламинарный поток) и подтверждают сделанные выше выводы. В передней критической точке давление по мере увеличения числа узлов изменяется немонотонно и случайно с относительной погрешностью менее одного процента (см. рис. 11.16, *а*); это говорит о том, что расчетные данные получены в пределах точности самого вычислительного процесса.

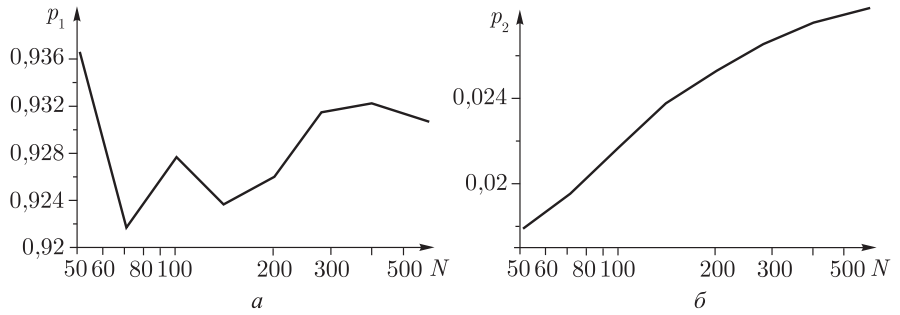


Рис. 11.15. Влияние числа узлов расчетной сетки $N \times N$ на давление в передней p_1 (*а*) и задней p_2 (*б*) критических точках кругового изотермического ($T_{wo} = 0{,}5$) цилиндра при числах $\mathbf{M}_\infty = 5$ и $\mathbf{Re}_R = 10^4$

В задней критической точке на относительно грубой сетке давление вычисляется с большой относительной погрешностью (порядка 38%), а монотонность изменения давления по абсолютной величине и монотонное уменьшение относительной погрешности его расчета с ростом параметра N свидетельствуют о повышении точности моделирования тонкой структуры ближнего следа.

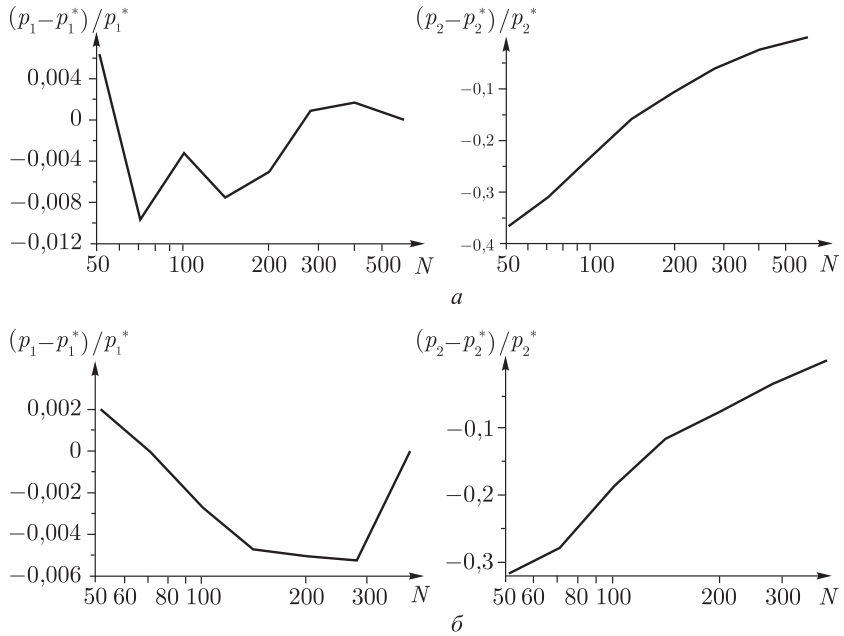


Рис. 11.16. Относительная погрешность определения давления в передней p_1 и задней p_2 критических точках кругового изотермического ($T_{wo} = 0{,}5$) цилиндра в зависимости от числа узлов расчетной сетки $N \times N$ при числе $\mathbf{M}_\infty = 5$: *а* — $\mathbf{Re}_R = 10^4$, ламинарная модель, *б* — $\mathbf{Re}_R = 10^6$, турбулентная модель

При больших числах Рейнольдса картина в качественном отношении остается той же: в передней критической точке давление и относительная погрешность его расчета (рис. 11.16, *б*) в зависимости от параметра N изменяются немонотонным, случайным образом, а в задней критической точке — монотонным образом.

В качестве аэродинамической характеристики, определение которой связано с расчетом производных от газодинамических переменных, рассмотрим местный тепловой поток.

Поведение местного теплового потока в передней и задней критических точках цилиндра при ламинарном режиме его обтекания в зависимости от параметра N показано на рис. 11.17. В отличие от давления значения теплового потока в обеих точках существенным образом зависят от числа узлов расчетной сетки. При этом относительная погрешность расчета теплового

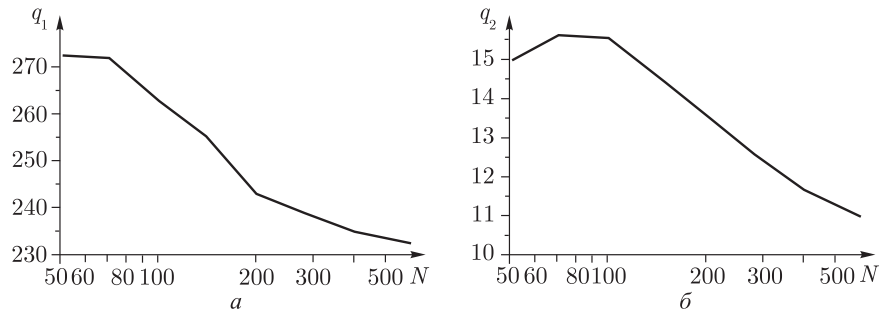


Рис. 11.17. Влияние числа узлов расчетной сетки $N \times N$ на величину безразмерного теплового потока ($q = \partial T/\partial n$) в передней q_1 (*а*) и задней q_2 (*б*) критических точках кругового изотермического ($T_{wo} = 0{,}5$) цилиндра при числах $\mathbf{M}_\infty = 5$ и $\mathbf{Re}_R = 10^4$

потока (рис. 11.18) на самой грубой сетке достаточно высокая — $\approx 18\%$ в передней и $\approx 40\%$ в задней критических точках. При переходе к более мелкой сетке погрешность расчета сначала остается на прежнем уровне, а затем монотонно уменьшается с ростом N.

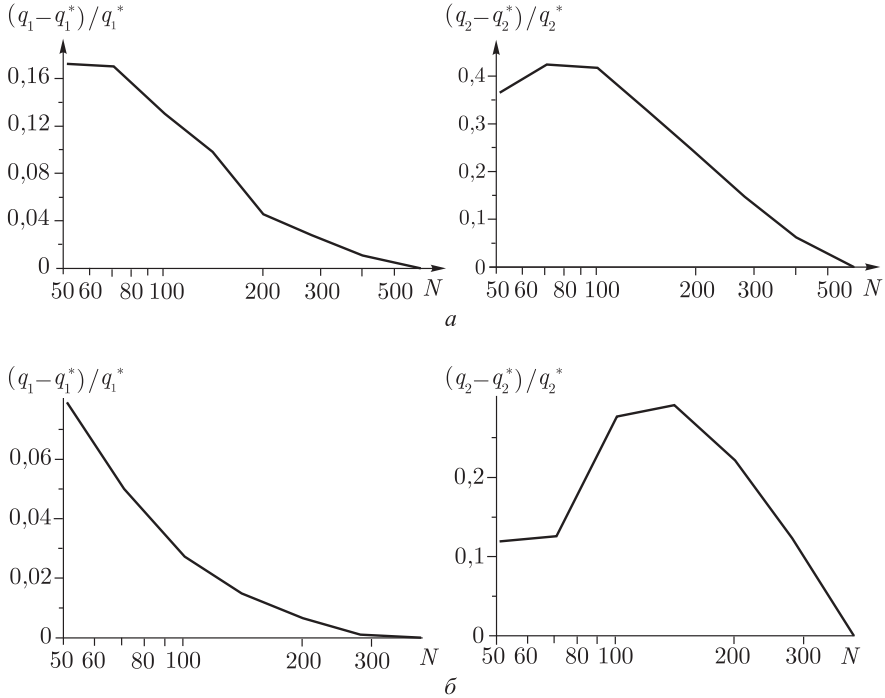


Рис. 11.18. Относительная погрешность определения теплового потока в передней q_1 и задней q_2 критических точках кругового изотермического ($T_{wo} = 0{,}5$) цилиндра в зависимости от числа узлов расчетной сетки $N \times N$ при числе $\mathbf{M}_\infty = 5$: *а* — $\mathbf{Re}_R = 10^4$, ламинарная модель, *б* — $\mathbf{Re}_R = 10^6$, турбулентная модель

Качественно аналогичная картина наблюдается и при больших числах Рейнольдса. Отметим одну особенность, связанную с расчетом ближнего следа. Поскольку при турбулентном течении в ближнем следе область отрывного течения менее развита по сравнению с ламинарным потоком, то для корректной разрешимости структуры поля течения необходима существенно более мелкая расчетная сетка. По этой причине монотонное уменьшение погрешности расчета теплового потока в задней критической точке имеет место при $N > 100$ для ламинарного течения ($\mathbf{Re}_R = 10^4$) и при $N > 180$ для турбулентного течения ($\mathbf{Re}_R = 10^6$).

Влияние числа узлов расчетной сетки на точность определения местного теплового потока на поверхности цилиндра показано на рис. 11.19, эти данные подтверждают сделанные выше выводы.

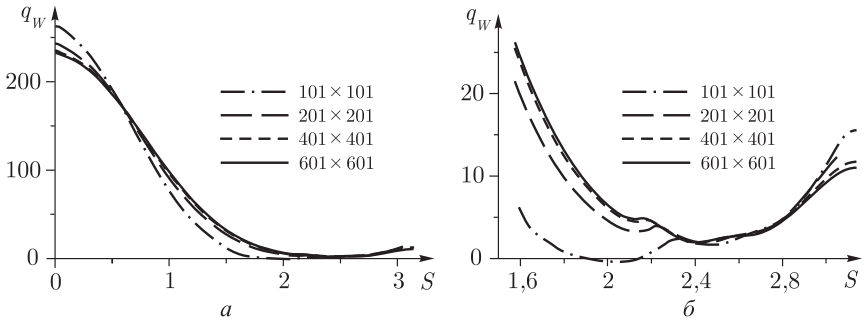
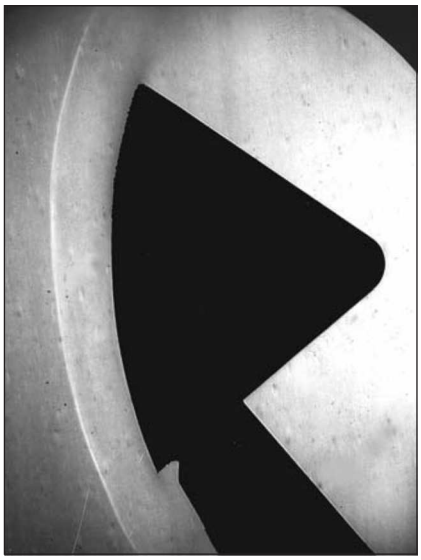


Рис. 11.19. Влияние числа узлов расчетной сетки $N \times N$ на распределение относительного теплового потока ($q = \partial T/\partial n$) по поверхности кругового изотермического ($T_{wo} = 0{,}5$) цилиндра при числах $\mathbf{M}_\infty = 5$ и $\mathbf{Re}_R = 10^4$

5. Структура течения и теплообмен у поверхности модели № 1

5.1. Ламинарное течение. На рис. 11.20, *а* представлена теневая фотография обтекания модели без балансировочных щитков азотом при $\mathbf{M}_\infty = 19{,}8$. Отчетливо видна лишь головная ударная волна перед моделью. Структуру течения в донной области не удается выявить из-за низкой плотности газа. Величина отхода головной ударной волны в потоке азота, определенная по теневым фотографиям, соответствует течению совершенного газа с отношением удельных теплоемкостей $\gamma = 1{,}4$. При обтекании углекислым газом для области течения между головной волной и поверхностью модели получена меньшая эффективная величина отношения теплоемкостей: $\gamma \approx 1{,}23$.

На рис. 11.20, *б* приведено распределение теплового потока по лобовой поверхности модели, обтекаемой азотом, при числах $\mathbf{M}_\infty = 19{,}1$ и $\mathbf{Re}_{\infty,D} \approx \approx 0{,}71 \times 10^5$. Координата S отсчитывается от центра лобовой поверхности вверх и отнесена к радиусу модели R. Локальный тепловой поток отнесен к тепловому потоку, измеренному в центре лобовой поверхности в отсутствие



а

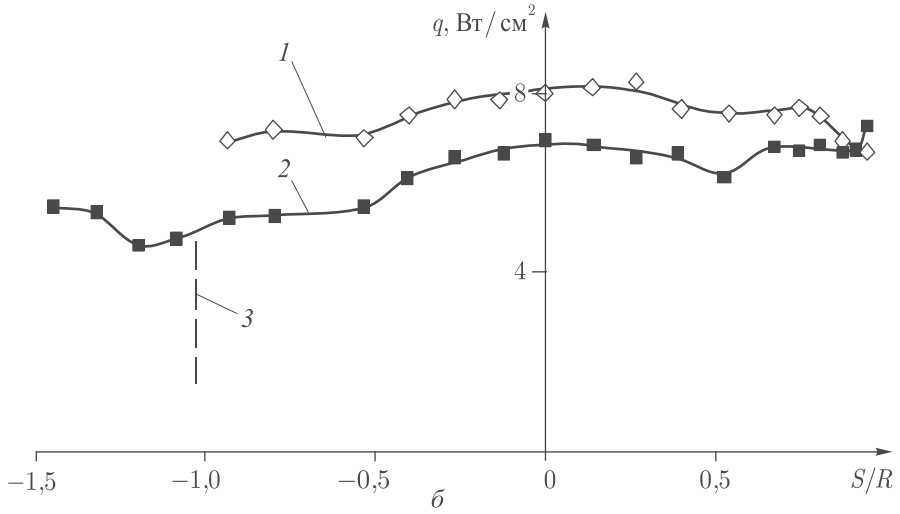


Рис. 11.20. Обтекание азотом модели № 1 и распределение теплового потока по её лобовой поверхности: *а* — $\mathbf{M}_\infty = 19{,}8$, $\mathbf{Re}_{\infty,D} = 2 \cdot 10^5$, *б* — $\mathbf{M}_\infty = 19{,}1$, $\mathbf{Re}_{\infty,D} = 0{,}71 \cdot 10^5$; *1* — без щитков, *2* — с 3 щитками, *3* — граница, отделяющая лобовую поверхность от щитка

щитков. Линиям сопряжения лобовой поверхности с тыльной поверхностью («плечу» модели) соответствуют координаты $S/R = 1{,}03$ и $-1{,}03$. Видно, что из-за присутствия щитков тепловой поток существенно уменьшается почти на всей лобовой поверхности. Это происходит вследствие увеличения габаритного размера модели и вызванного этим утолщения пограничного

слоя. При этом сами щитки подвергаются интенсивному нагреву: тепловой поток к поверхности центрального щитка достигает почти 70% от теплового потока в передней критической точке модели без щитков и возрастает по мере приближения к кромке щитка.

Распределение теплового потока в донной области модели без щитков при $\mathbf{M}_\infty = 19{,}8$ и $\mathbf{Re}_{\infty,D} = 2 \times 10^5$ приведено на рис. 11.21. Величины теплового потока находятся в диапазоне от 0,1 до 1 Вт/см^2. Закономерный характер распределения теплового потока свидетельствует о том, что чувствительность датчиков достаточна для измерения столь малых величин. На рис. 11.21 помечено положение центра тыльной поверхности ($S/R = 2{,}69$) и положение задней кромки державки ($S/R = 3{,}7$). Видно, что распределение теплового потока вблизи центра тыльной поверхности симметрично. Влияние державки сказывается лишь при $S/R > 3{,}3$, т. е. на значительном расстоянии от центра тыльной поверхности. На рис. 11.21 приведены также результаты численного расчета теплообмена, выполненного С.Т. Суржиковым для ламинарной модели течения [44]. Можно признать, что экспериментальные и расчетные величины теплового потока согласуются удовлетворительно, если учесть сложность течения. Это относится к тепловому потоку как вдали от задней критической

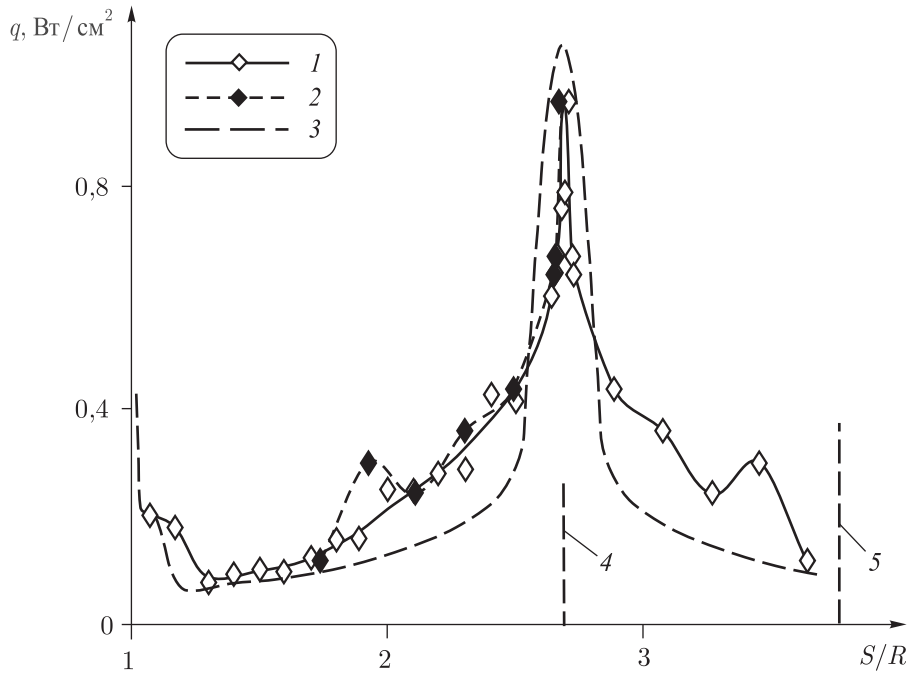


Рис. 11.21. Распределение теплового потока по тыльной поверхности модели № 1 при $\mathbf{M}_\infty = 19{,}8$, $\mathbf{Re}_{\infty,D} = 2 \cdot 10^5$ (азот): *1* — эксперимент, *2* — экспериментальные точки, условно перенесенные с нижней образующей ($S/R > 2{,}69$) на верхнюю ($S/R < 2{,}69$), *3* — расчет [44], *4* — ось модели, *5* — положение задней кромки державки

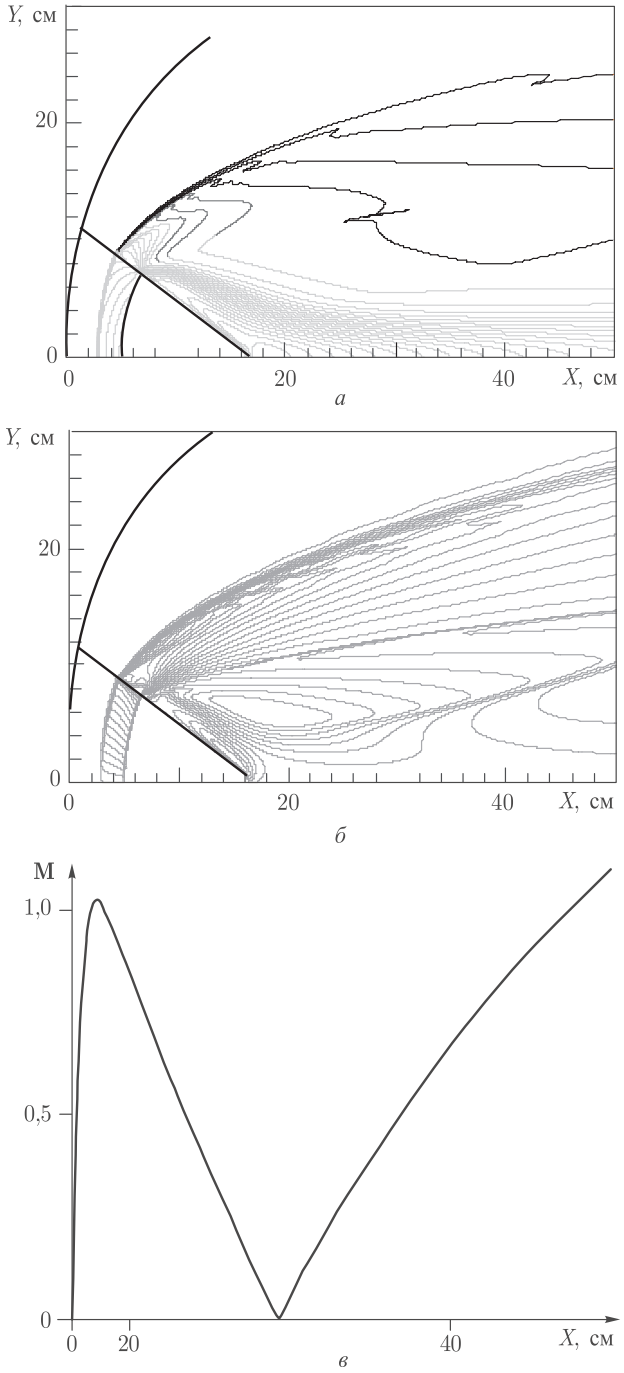


Рис. 11.22. Результаты численного моделирования обтекания модели № 1 потоком азота при $\mathbf{M}_\infty = 19{,}8$, $\mathbf{Re}_{\infty,D} = 2 \cdot 10^5$ [44]: *а* — линии постоянного значения скорости $V_x = V_x/V_\infty$, *б* — линии постоянного значения скорости $V_y = V_y/V_\infty$, *в* — распределение числа Маха вдоль оси симметрии ($x = 0$ соответствует тыльной поверхности модели)

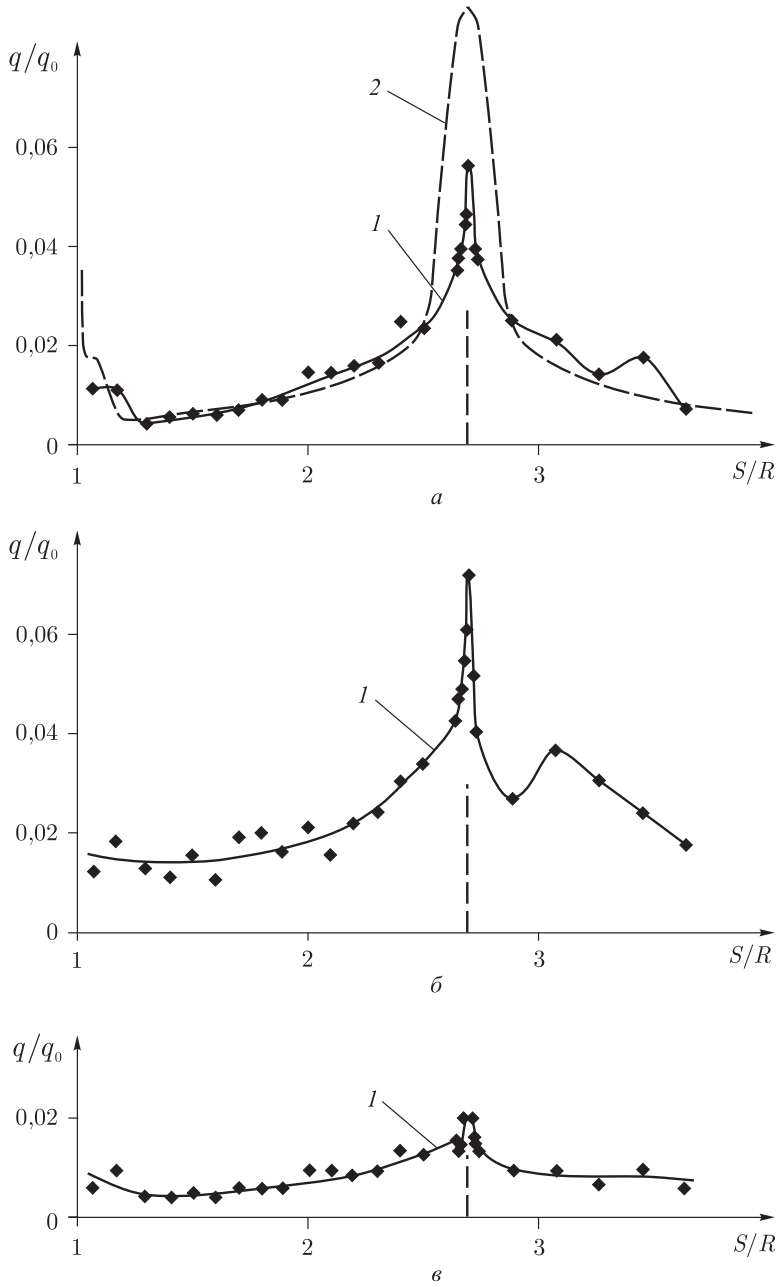


Рис. 11.23. Распределение относительного теплового потока в донной области модели № 1: *а* — $\mathbf{M}_\infty = 19{,}8$, $\mathbf{Re}_{\infty,D} = 2 \cdot 10^5$, азот; *б* — $\mathbf{M}_\infty = 12$, $\mathbf{Re}_{\infty,D} = 2 \cdot 10^5$, CO_2; *в* — $\mathbf{M}_\infty = 8$, $\mathbf{Re}_{\infty,D} = 4 \cdot 10^5$, воздух; *1* — эксперимент, *2* — расчет [44]

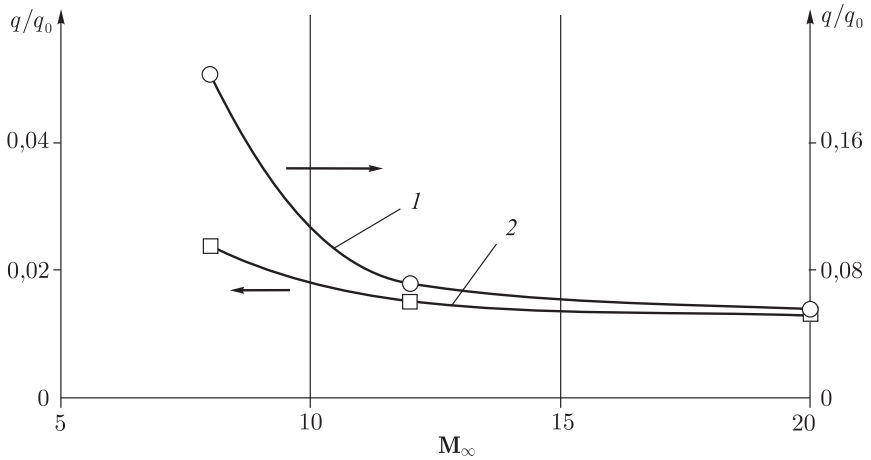


Рис. 11.24. Изменение максимальной относительной величины теплового потока в донной области в зависимости от числа Маха: *а* — модель № 1, *б* — модель № 2

точки, так и в её окрестности, хотя в расчете пик теплового потока несколько шире, чем в эксперименте.

Численное моделирование позволяет получить более детальную информацию о течении, чем эксперимент. На рис. 11.22, *а, б, в* показаны результаты численных расчетов обтекания модели азотом при числе $\mathbf{M}_\infty = 19{,}8$ при условиях, в которых проводился эксперимент. На рис. 11.22, *а* представлено поле продольной скорости V_x, на рис. 11.22, *б* — поле поперечной скорости V_y, а на рис. 11.22, *в* — распределение числа Маха на осевой линии в следе за моделью. По распределению скоростей можно представить следующую картину течения в донной области: газ огибает без отрыва «плечо» модели, но на небольшом расстоянии от него отрывается от поверхности обратного конуса; образуется замкнутая отрывная область (ближний след), которая простирается далеко вниз по потоку. В ближнем следе существует возвратное течение, о чем свидетельствуют отрицательные значения скорости V_x. По распределению числа $\mathbf{M}$ можно определить положение точки нулевой скорости ($X \approx 29$ см). Эта точка приблизительно соответствует горлу следа за телом. От неё газ течет обратно к задней точке торможения. Максимальная скорость возвратного течения соответствует числу Маха $\mathbf{M} = 1{,}07$. Натеканием достаточно высоконапорной возвратной струи на тыльную поверхность модели вблизи оси симметрии объясняется образование там максимума теплообмена. Длина ближнего следа от тыльной поверхности модели до точки нулевой скорости равна приблизительно $1{,}7R$, а от плеча модели — $3R$.

Результаты измерений теплового потока в донной области, приведенные на рис. 11.21 для азота при $\mathbf{M} = 19{,}8$, а также аналогичные результаты измерений для углекислого газа при $\mathbf{M} = 12$ и в воздухе при $\mathbf{M} = 8$ представлены на рис. 11.23 в безразмерном виде. Как и везде в данной работе, локальный тепловой поток отнесен к тепловому потоку, измеренному в тех же условиях

в лобовой критической точке. При $\mathbf{M} = 19{,}8$ экспериментальное значение теплового потока в задней критической точке составляет приблизительно 5,6% от соответствующей величины в передней критической точке ($q/q_0 \approx 0{,}056$, рис. 11.23, *а*). Численный расчет для ламинарного течения [44] дает несколько большее, но близкое значение: $q/q_0 \approx 0{,}088$. В углекислом газе при $\mathbf{M} = 12$ получено приблизительно такое же значение максимального теплового потока ($q/q_0 \approx 0{,}072$, рис. 11.23, *б*). Эти данные подтверждают ламинарный характер течения в донной области в обоих случаях. Однако при $\mathbf{M} = 8$ относительная величина максимального теплового потока значительно больше ($q/q_0 \approx 0{,}2$, рис. 11.23, *в*).

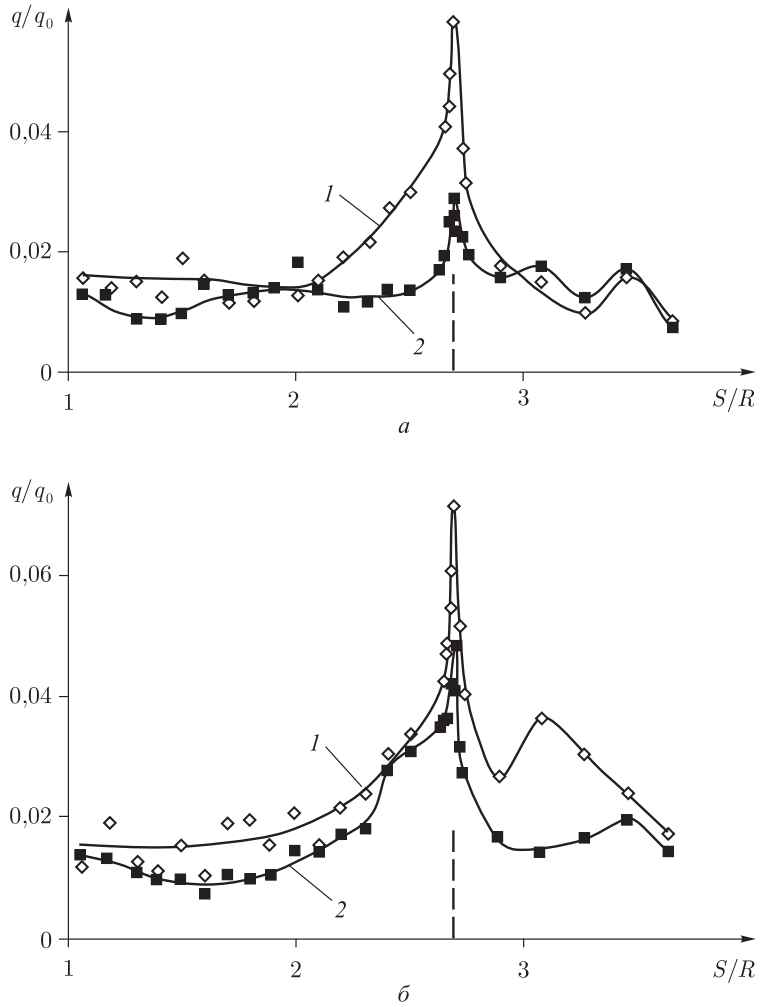


Рис. 11.25. Влияние щитков на теплообмен в донной области при $\alpha = 0$: *а* — $\mathbf{M}_\infty = 19{,}1$, $\mathbf{Re}_{\infty,D} = 0{,}71 \cdot 10^5$, *б* — $\mathbf{M}_\infty = 12$, $\mathbf{Re}_{\infty,D} = 2 \cdot 10^5$, CO_2; *1* — без щитков, *2* — с тремя щитками

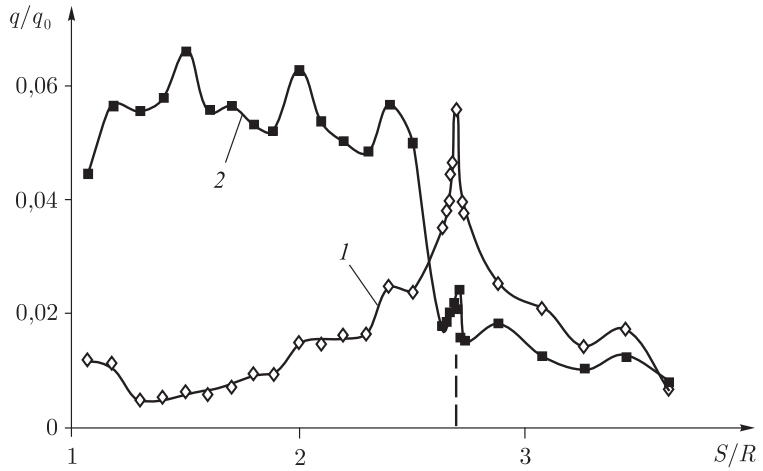


Рис. 11.26. Влияние угла атаки на теплообмен в донной области модели № 1 без щитков при $\mathbf{M}_\infty = 19{,}1$, $\mathbf{Re}_{\infty,D} = 0{,}71 \cdot 10^5$: *1* — $\alpha = 0$, *2* — $\alpha = 20^\circ$

На рис. 11.24 нормированные максимальные величины теплового потока в донной области представлены в зависимости от числа Маха. Эти данные указывают на то, что при исследованных условиях число Маха и состав газа оказывают слабое влияние на донное течение, по крайней мере, при $\mathbf{M} \geqslant 12$. Можно утверждать, что, начиная с некоторого числа Маха, в условиях ламинарного течения наступает гиперзвуковая стабилизация теплообмена в донной области затупленного тела. О существовании гиперзвуковой стабилизации обтекания лобовой поверхности тела известно давно. Точные решения и экспериментальные данные показывают, что аэродинамические коэффициенты многих тел практически перестают изменяться уже при числах Маха порядка 3–4 ([45]). Распределение давления на лобовой поверхности тела стабилизируется при числе Маха больше 4 ([46]). Одновременно стабилизируется распределение плотности и температуры, а, следовательно, — и коэффициента теплоотдачи, если сохраняется ламинарное состояние пограничного слоя. Приведенные данные указывают на то, при превышении некоторого числа Маха наступает гиперзвуковая стабилизация теплообмена и на тыльной поверхности тела. Однако согласно приведенным данным это происходит при значительно большем числе Маха, чем на лобовой поверхности.

Присутствие щитков приводит к ослаблению теплообмена не только на лобовой поверхности, но и в донной области. Это наблюдается как при $\mathbf{M} = 19{,}1$ в азоте (рис. 11.25, *а*), так и при меньшем числе Маха $\mathbf{M} = 12$ в углекислом газе (рис. 11.25, *б*). Щитки оказывают большее влияние на тепловой поток к тыльной поверхности модели, чем к её лобовой поверхности.

При обтекании модели под углом атаки сохраняется небольшое локальное усиление теплообмена в окрестности точки симметрии тыльной поверхности. Однако оно существенно меньше, чем при $\alpha = 0$, и не определяет максималь-

ный нагрев тыльной поверхности (рис. 11.26). Несимметричность обтекания приводит к усилению нагрева всей наветренной поверхности обратного конуса. При $\alpha = 20^\circ$ относительная величина теплового потока на наветренной образующей достигает приблизительно такого же значения, как в задней точке торможения при $\alpha = 0 : q/q_0 \approx 0{,}06$. В то же время на подветренной образующей (при $S/R > 2{,}7$) тепловой поток при $\alpha = 20^\circ$ меньше, чем при $\alpha = 0$ (рис. 11.26). При $\alpha = 20^\circ$ в задней точке торможения сохраняется локальный максимум теплового потока.

5.2. Переходное и турбулентное течение. Влияние ламинарно-турбулентного перехода на течение и теплообмен в донной области исследовалось в аэродинамической трубе УТ–1М при числах $\mathbf{M}_\infty = 8$ и 6 путем варьирования числа Рейнольдса.

При $\mathbf{M} = 8$ использовался также турбулизатор. В качестве турбулизатора использовались два проволочных кольца диаметром 0,2 мм. Они приваривались к лобовой поверхности модели вблизи её плеча, где локальное число Рейнольдса (по расстоянию от точки торможения) достигает максимального значения. Модель с турбулизатором испытывалась без щитков при нулевом угле атаки. На рис. 11.27 представлены экспериментальные распределения q/q_0 в донной области для двух значений числа Рейнольдса при наличии и отсутствии турбулизатора. При меньшем числе Рейнольдса $\mathbf{Re}_{\infty,D} \approx 4 \times 10^5$ (рис. 11.27, *а*) в отсутствие турбулизатора тепловой поток в задней точке торможения составляет около 20% от теплового потока в лобовой точке торможения, а при наличии турбулизатора он превышает тепловой поток в этой точке. Турбулизация течения приводит к усилению теплообмена на всей поверхности обратного конуса.

При большем числе Рейнольдса $\mathbf{Re}_{\infty,D} \approx 10^6$ (рис. 11.27, *б*) тепловой поток в окрестности задней критической точки имеет тот же порядок, что и в передней критической точке даже в отсутствие турбулизатора. Турбулизатор практически не влияет на теплообмен на всей поверхности обратного конуса. Это означает, что при $\mathbf{Re}_{\infty,D} \approx 10^6$ происходит естественный ламинарно-турбулентный переход в донном течении. Распределение теплового потока, полученное путем численного моделирования для $\mathbf{Re}_{\infty,D} \approx 10^6$, (рис. 11.27, *б*) в основном адекватно отражает экспериментальное распределение, но на боковой поверхности обратного конуса расчетный тепловой поток заметно ниже экспериментального, а в окрестности задней критической точки — несколько выше.

На рис. 11.28 приведены зависимости максимального значения относительного теплового потока в окрестности задней критической точки от числа Рейнольдса при наличии турбулизатора и без него. На основании этих данных можно заключить, что при числе $\mathbf{M}_\infty = 8$ естественный ламинарно-турбулентный переход в донном течении начинается приблизительно при числе Рейнольдса $\mathbf{Re}_{\infty,D} \approx 4 \times 10^5$, а заканчивается, когда число Рейнольдса приближается к значению $\mathbf{Re}_{\infty,D} \approx 6 \times 10^5$. В переходной об-

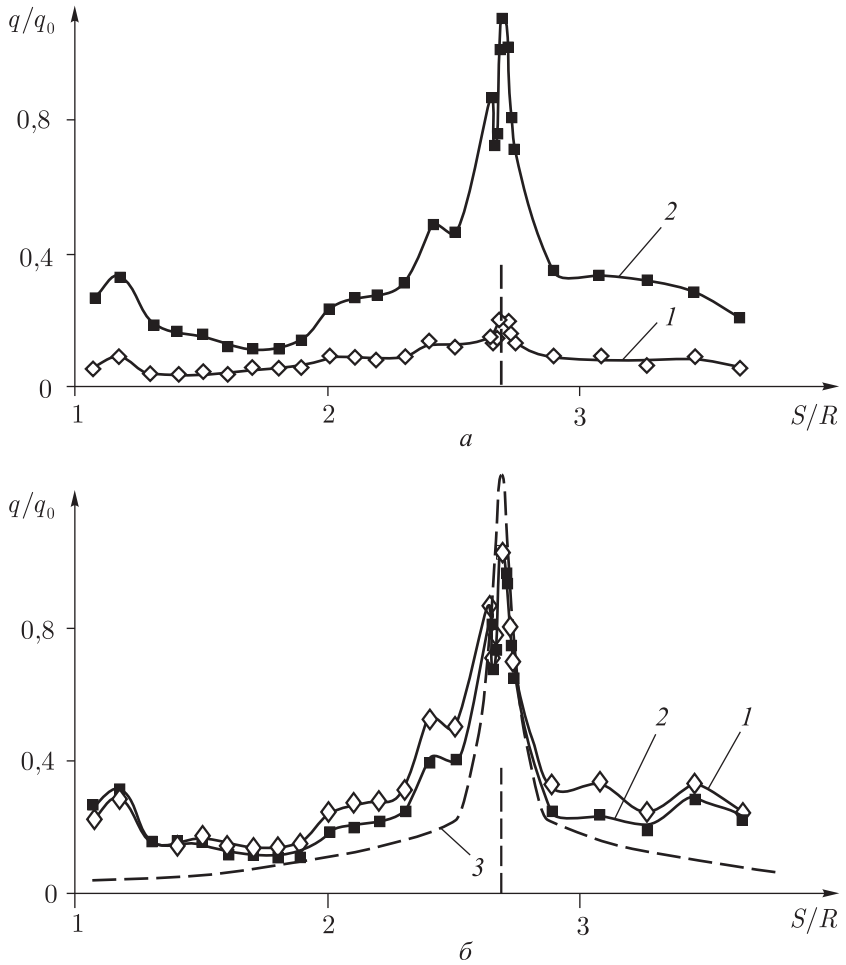


Рис. 11.27. Влияние турбулизатора на теплообмен в донной области модели № 1 при $\mathbf{M}_\infty = 8$: *а* — $\mathbf{Re}_{\infty,D} = 0{,}4 \cdot 10^6$, *б* — $\mathbf{Re}_{\infty,D} = 1 \cdot 10^6$; *1* — без турбулизатора, *2* — с турбулизатором, *3* — расчет с учетом турбулентности

ласти с увеличением числа Рейнольдса относительный тепловой поток q/q_0 возрастает от 0,2 до 1,0.

На рис. 11.29 приведены экспериментальные данные по ламинарно-турбулентному переходу в следе за сферой, острыми и затупленными конусами, клином и цилиндром [47]. Результаты представлены в виде зависимости приведенного числа Рейнольдса $\mathbf{Re}^*$ от числа Маха набегающего потока $\mathbf{M}_\infty$, причем $\mathbf{Re}^* = \mathbf{Re}_{\Delta X}(M_\infty/M_e)^2$, $\mathbf{Re}_{\Delta X}$ — число Рейнольдса, вычисленное по расстоянию ΔX от кормы тела до точки конца перехода, $\mathbf{M}_e$ — местное число Маха на внешней границе пограничного слоя перед точкой отрыва. Согласно численным расчетам обтекания модели № 1 $\mathbf{M}_e \approx 1{,}5$. Из рис. 11.29

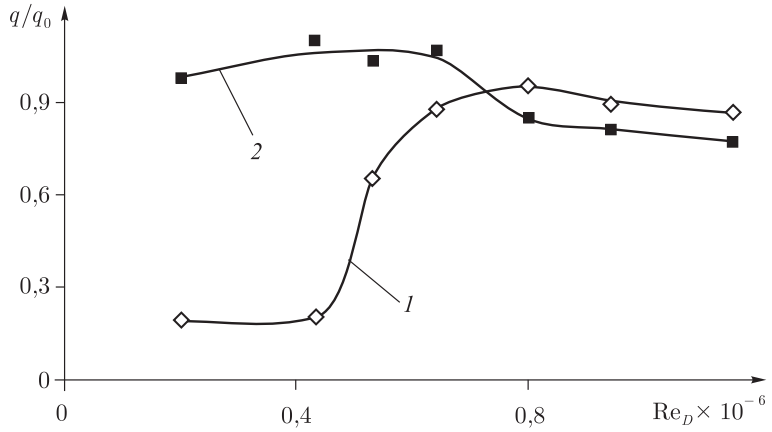


Рис. 11.28. Влияние числа Рейнольдса на максимальную относительную величину теплового потока в донной области модели № 1 при $\mathbf{M}_\infty = 8$: *1* — без турбулизатора, *2* — с турбулизатором

следует, что данные для перехода в следе за моделью № 1 попадают в коридор разброса данных для тел другой формы.

При $\mathbf{M} = 6$ также получены данные, свидетельствующие о естественном переходе донного течения из ламинарного состояния в турбулентное (рис. 11.30): при $\mathbf{Re}_{\infty,D} = 1{,}8 \times 10^5$ максимальный тепловой поток в донной области составляет около 0,4 от теплового потока в лобовой точке торможения, при $\mathbf{Re}_{\infty,D} = 6{,}7 \times 10^5$ он резко возрастает до уровня, превышающего тепловой поток в лобовой точке (до $q_m/q_o \approx 1{,}1$), а при дальнейшем увеличении числа Рейнольдса медленно убывает.

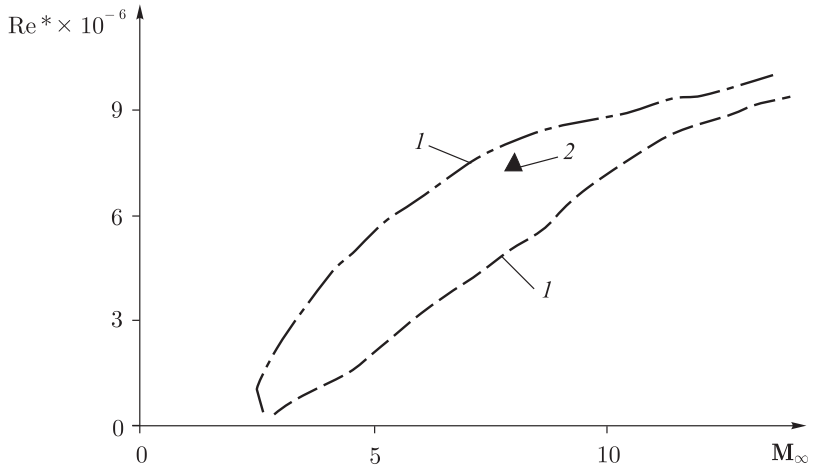


Рис. 11.29. Влияние числа Маха на число Рейнольдса перехода в следе за телами разной формы: *1* — граничные значения числа Рейнольдса [47], *2* — число Рейнольдса перехода в следе модели № 1

Примечательно, что при увеличении числа Рейнольдса более, чем в два раза, (от $6{,}7 \times 10^5$ до $16{,}3 \times 10^5$) относительная величина теплового потока почти на всей донной поверхности изменяется слабо (рис. 11.30), т. е. тепловой поток при турбулентном донном течении изменяется пропорционально

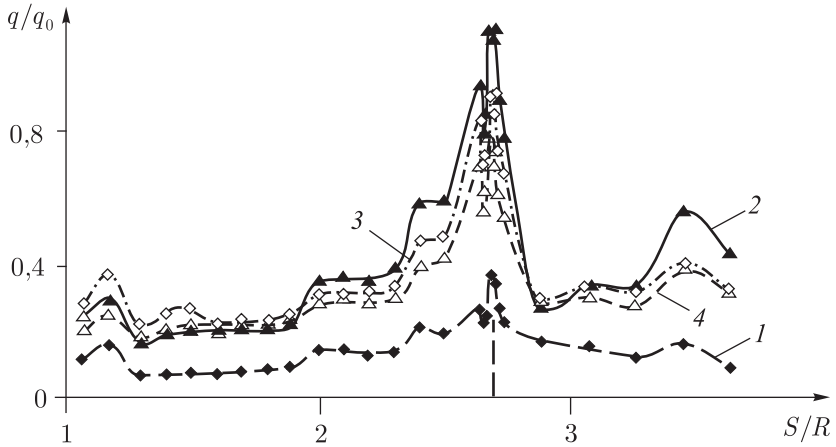


Рис. 11.30. Влияние числа Рейнольдса на относительный тепловой поток в донной области модели № 1 при $\mathbf{M}_\infty = 6$ (воздух); $\mathbf{Re}_{\infty,D} \cdot 10^{-6}$: *1* — 0,18, *2* — 0,67, *3* — 1,16, *4* — 1,63

тепловому потоку в лобовой критической точке. Это означает, что относительная толщина пограничного слоя в донной области (отнесенная к характерному размеру модели) изменяется пропорционально $\mathbf{Re}^{-1/2}$, как при ламинарном течении. Однако тепловой поток при этом значительно больше, чем при ламинарном течении из-за проникания турбулентных пульсаций в пограничный слой. Наблюдаемое течение сходно с ламинарным течением газа с повышенной вязкостью. Аналогичный эффект наблюдается при обтекании тел турбулентной струей (см. например [48]).

Обтекание модели № 1 было исследовано численно с учетом турбулентности потока при максимальном для данных опытов числе $\mathbf{Re}_{\infty,D} = 16 \times 10^5$ (рис. 11.31). Рис. 11.31, *а* дает представление об уровне значений числа Маха за головной ударной волной: здесь чем больше степень почернения, тем меньше число Маха. На рис. 11.31, *а* показаны также вектора скорости и выделена линия нулевого значения продольной скорости ($U = 0$), которая может рассматриваться как граница зоны отрыва. На рис. 11.31, *б* дано осевое распределение числа Маха в следе за моделью. Как и при ламинарном течении (рис. 11.22, *в*), обратный поток разгоняется перед тыльной поверхностью модели до скорости близкой к скорости звука. При большом числе Рейнольдса поток отрывается от поверхности тела непосредственно на линии сопряжения лобовой и тыльной поверхностей (у плеча модели, рис. 11.31, *а*). Длина зоны отрыва от тыльной поверхности до точки нулевой скорости равна

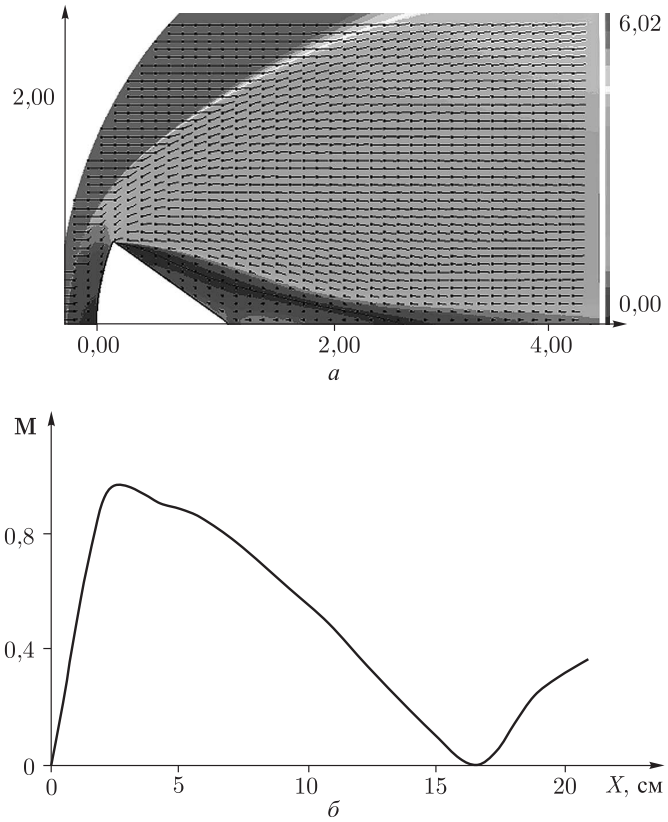


Рис. 11.31. Результаты численного моделирования обтекания модели № 1 при $\mathbf{M}_\infty = 6$, $\mathbf{Re}_{\infty,D} = 1{,}6 \cdot 10^6$: *а* — поле числа $\mathbf{M}$ с векторами скорости и изолинией $U = 0$, *б* — число $\mathbf{M}$ на линии симметрии за моделью

16,9 см, или $2{,}3R$, а от плеча — $L = 3{,}6R$, т. е. значительно меньше, чем при ламинарном течении и значительно большем числе Маха ($L = 5{,}2R$).

На рис. 11.32 расчетное распределение нормированного теплового потока по тыльной поверхности сопоставлено с экспериментальным распределением. Расчет, как и эксперимент, указывает на чрезвычайно высокую интенсивность теплообмена в донной области при турбулентном течении: величина максимального теплового потока в донной области близка к величине теплового потока в лобовой критической точке. Однако имеются существенные количественные расхождения: на поверхности обратного конуса расчетный тепловой поток ниже экспериментального, а в узкой окрестности задней критической точки наоборот выше его.

Следует отметить еще одно отличие расчетных данных от экспериментальных: согласно расчету максимум находится на оси модели, в точке $S/R = 2{,}69$; в эксперименте максимальное значение q/q_0 наблюдается в этой же точке лишь при ламинарном течении, а при турбулентном течении он

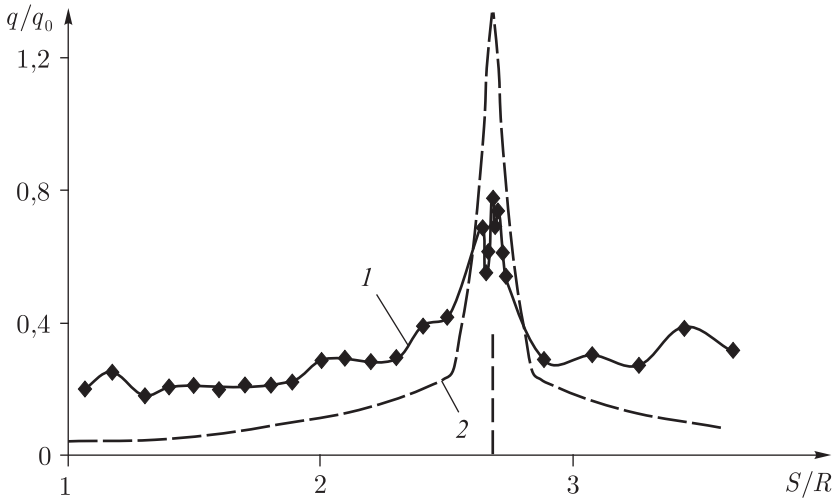


Рис. 11.32. Распределение относительного теплового потока в донной области модели № 1 при $\mathbf{M}_\infty = 6$, $\mathbf{Re}_{\infty,D} = 1{,}6 \cdot 10^6$: *1* — эксперимент, *2* — расчет

смещается на некоторое удаление от оси, в точку $S/R = 2{,}68$. Обращает на себя внимание также нерегулярность экспериментального распределения теплового потока при турбулентном течении, что может быть следствием нестационарности турбулентного донного течения.

Можно указать на две причины, из-за которых при описываемых экспериментах уровень теплового потока в окрестности задней точки торможения близок к уровню теплового потока в окрестности лобовой точки торможения, несмотря на большую разреженность газа позади затупленного тела:

1) на лобовую поверхность натекает ламинарный поток, в то время как на тыльную поверхность набегает турбулентный поток с высоким уровнем пульсаций;

2) радиус кривизны тыльной поверхности ($r = 12$ мм) в 6,25 раз меньше радиуса модели (75 мм), вследствие чего градиент скорости в задней критической точке значительно больше, чем в лобовой критической точке при одинаковой скорости набегающего потока.

При $\mathbf{M} = 6$, как и при $\mathbf{M} = 19{,}1$, исследовалось влияние щитков на теплообмен (рис. 11.33). Их влияние на распределение теплового потока по лобовой поверхности при $\mathbf{M} = 6$ (рис. 11.33, *а*) оказалось в основном таким же, как при описанных выше экспериментах: в присутствии щитков тепловой поток на лобовой поверхности уменьшается, причем этот эффект усиливается с увеличением количества щитков. При наличии 3-х щитков тепловой поток в окрестности точки торможения уменьшается приблизительно на 14% как при $\mathbf{M} = 6$, так и при $\mathbf{M} = 19{,}1$. Отличие наблюдается лишь в нагреве самих щитков: при $\mathbf{M} = 6$ тепловой поток на поверхности щитка больше, чем в прилегающей части лобовой поверхности модели; с приближением к кромке

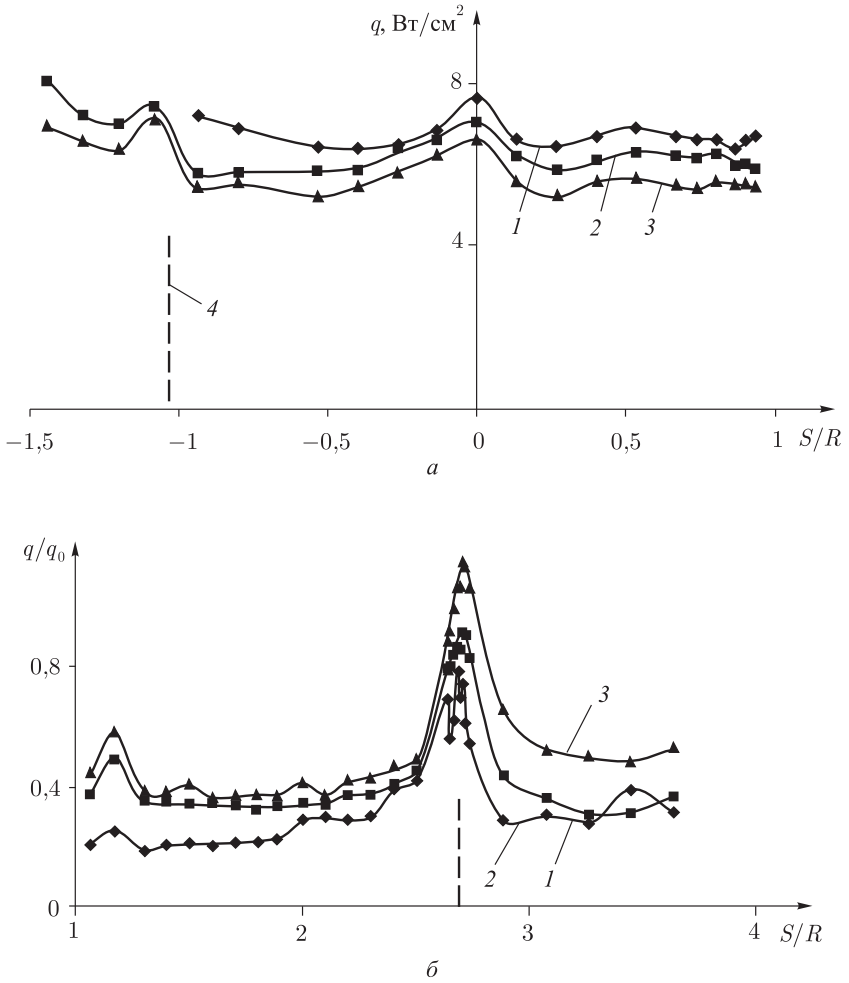


Рис. 11.33. Влияние щитков на распределение относительного теплового потока по лобовой (*а*) и донной (*б*) поверхностям модели № 1 при $\mathbf{M}_\infty = 6$, $\mathbf{Re}_{\infty,D} = 1{,}6 \cdot 10^6$: *1* — без щитков, *2* — с одним щитком, *3* — с тремя щитками, *4* — граница, отделяющая лобовую поверхность от щитка

щитка тепловой поток повышается до уровня, превышающего тепловой поток в точке торможения. Большее усиление теплообмена у кромки щитка при $\mathbf{M} = 6$ по сравнению с $\mathbf{M} = 19{,}1$ вызвано главным образом увеличением числа Рейнольдса и соответствующим утончением пограничного слоя.

На теплообмен в донной области щитки влияют по-разному, в зависимости от характера донного течения. При турбулентном течении щитки усиливают теплообмен в донной области (рис. 11.33, *б*). Это происходит, вероятно, из-за усиления турбулизации потока. При ламинарном течении, как уже отмечалось, щитки ослабляют теплообмен в донной области, как и на лобовой

поверхности, из-за увеличения характерного размера модели и соответствующего утолщения пограничного слоя и слоя смешения на границе зоны отрыва,

6. Структура течения и теплообмен у поверхности модели № 2

6.1. Теплообмен. На рис. 11.34 приведена теневая фотография обтекания модели № 2 углекислым газом при $\mathbf{M}_\infty = 12$. Отход волны от лобовой поверхности составляет $0{,}054R$. Численное моделирование течения позволило определить значения параметров потока CO_2, набегающего на модель:

$$U_\infty = 1907\,\text{м/с}, \quad \rho_\infty = 1{,}03 \times 10^{-3}\,\text{кг/м}^3, \quad T_\infty = 110\,\text{К}, \quad P_\infty = \rho RT/\mu = 21{,}4\,\text{Па},$$
$$\gamma = (c_p/c_v) = 1{,}21, \quad \mathbf{M}_\infty = 12{,}07, \quad \mathbf{Re}_{\infty,1\text{м}} = 2{,}8 \times 10^5.$$

Экспериментальное распределение теплового потока по поверхности лобового щита при $\mathbf{M}_\infty = 19{,}8$ и $\mathbf{Re}_\infty$, $D = 0{,}16 \times 10^6$ сопоставлено на рис. 11.35 с результатами расчетов. Можно констатировать удовлетворительное согласование экспериментальных и расчетных данных.

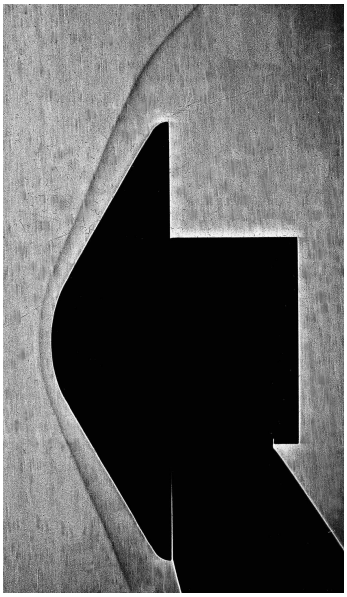


Рис. 11.34. Теневая фотография течения углекислого газа вблизи модели № 2 при $\mathbf{M}_\infty = 12$, $\mathbf{Re}_{\infty,D} = 1{,}6 \cdot 10^6$

Распределение нормированного теплового потока в донной области показано на рис. 11.36. Сплошными вертикальными линиями разделены разные участки тыльной поверхности модели. Обращают на себя внимание низкие уровни теплового потока при $\mathbf{M}_\infty = 12$ и 19,8. Так, на донной поверхности лобового щита и боковой поверхности цилиндра тепловой поток при $\mathbf{M}_\infty = 12$ и 19,8 не превышает 0,3% от величины теплового потока в передней критической точке. Только в окрестности задней точки торможения тепловой поток в этих условиях повышается до 1,4%. При этом максимум теплового потока несколько смещен вверх относительно геометрической оси цилиндра. Это может быть следствием высокой чувствительности обратного течения внутри зоны отрыва к небольшим нарушениям соосности модели с направлением невозмущенного потока.

На приведенном выше рис. 11.24 показано изменение максимальной относительной величины теплового потока в донной области модели № 2 в зависимости от числа Маха. Как и в случае модели № 1, наблюдается стабилизация величины q_m/q_o при числах Маха $\mathbf{M} \geqslant 12$.

На рис. 11.37 представлены результаты численного моделирования ламинарного донного течения азота позади модели № 2 при $\mathbf{M}_\infty = 19{,}8$ и $\mathbf{Re}_{\infty,D} = 0{,}16 \times 10^6$. На рис. 11.37, *а* длина штрихов пропорциональна

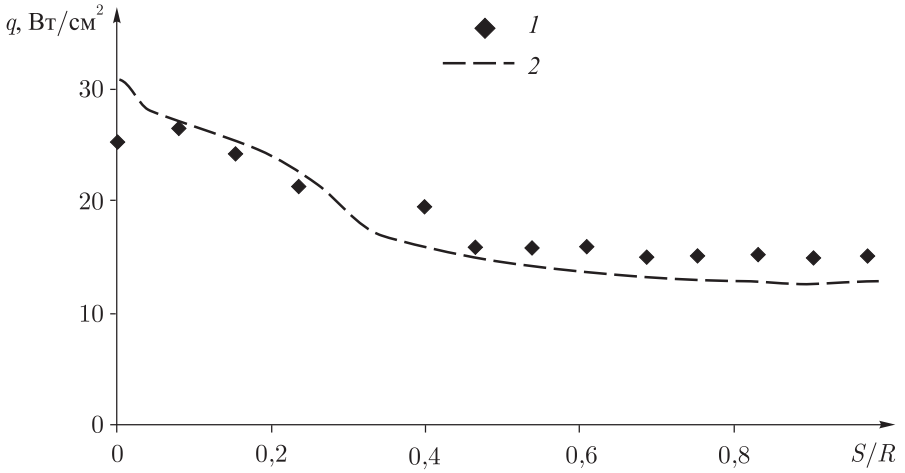


Рис. 11.35. Распределение теплового потока по лобовой поверхности модели № 2 при $\mathbf{M}_\infty = 19{,}8$, $\mathbf{Re}_{\infty,D} = 1{,}6 \cdot 10^5$, азот: *1* — эксперимент, *2* — расчет

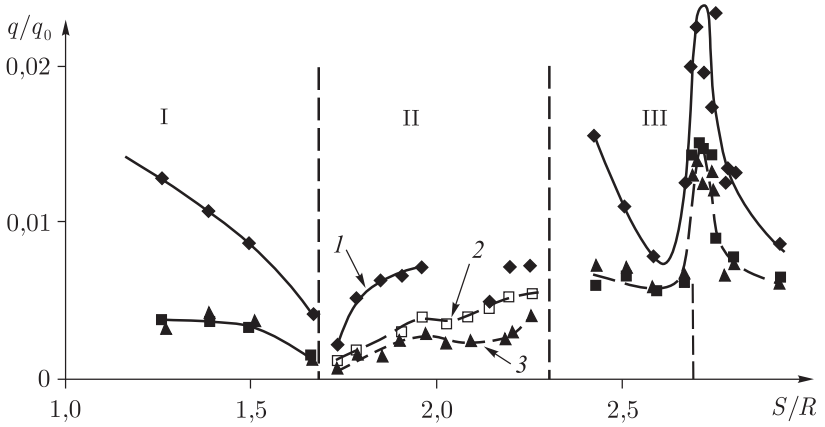


Рис. 11.36. Распределение относительного теплового потока по тыльной поверхности модели № 2 при различных условиях: *1* — $\mathbf{M}_\infty = 8$, $\mathbf{Re}_{\infty,D} = 2{,}57 \cdot 10^5$, воздух; *2* — $\mathbf{M}_\infty = 12$, $\mathbf{Re}_{\infty,D} = 1{,}6 \cdot 10^6$, CO_2; *3* — $\mathbf{M}_\infty = 19{,}8$, $\mathbf{Re}_{\infty,D} = 2 \cdot 10^5$, N_2. Участки тыльной поверхности: I — донная поверхность лобового щита, II — боковая поверхность цилиндра, III — задняя торцевая поверхность цилиндра

величине продольной скорости U_x. Здесь показаны также вектора скорости $\mathbf{U}$ и линия $U = 0$, ограничивающая область глобального отрыва с возвратным течением. Внутри зоны глобального отрыва формируется локальная зона вторичного отрыва, внутри которой существует циркуляционное течение. Еще одна зона локального отрыва образуется на донной поверхности лобового щита вблизи плеча модели. Однако величины скорости внутри локальных зон и на их внешних границах незначительны, и эти зоны слабо влияют на теплообмен. Граница зоны глобального отрыва проходит далеко от поверхности цилиндрического контейнера полезного груза из-за его малых

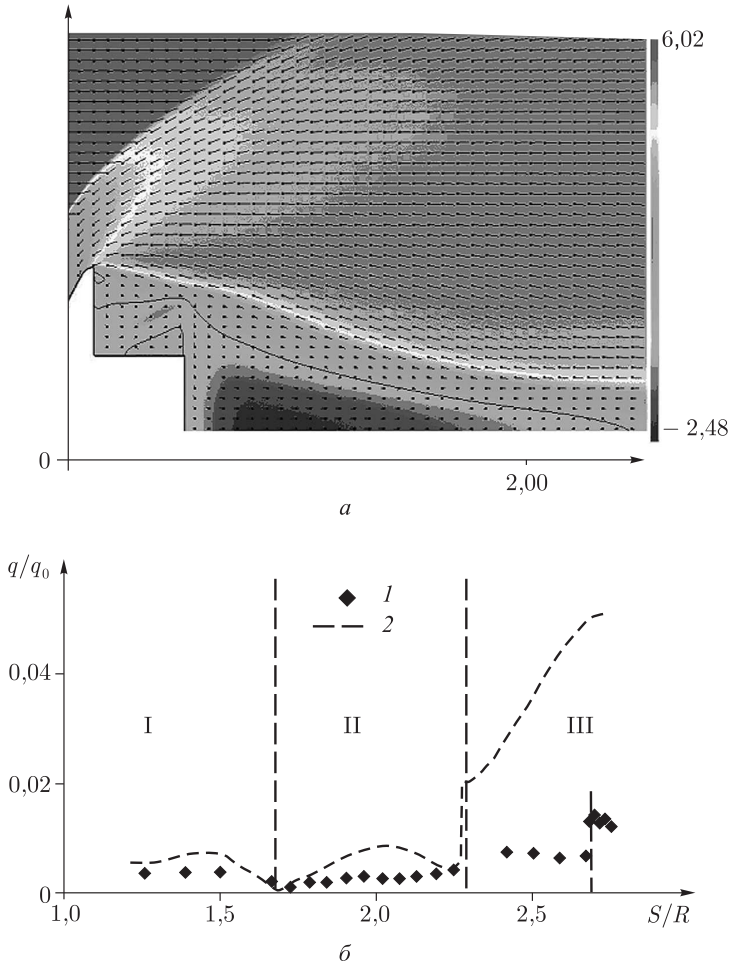


Рис. 11.37. Структура течения и распределение теплового потока по тыльной поверхности модели № 2, обтекаемой азотом, при $\mathbf{M}_\infty = 19{,}8$, $\mathbf{Re}_{\infty,D} = 1{,}6 \cdot 10^5$: *а* — поле продольной скорости с линиями $U = 0$ и векторной диаграммой полной скорости, расчет; *б* — распределение относительной величины теплового потока в донной области, *1* — эксперимент, *2* — расчет

размеров. Благодаря этому на поверхности цилиндра не происходит усиление теплообмена, характерное для зон присоединения оторвавшегося потока. На рис. 11.37, *б* результаты расчета для того же варианта течения сопоставлены с экспериментальными данными. На большей части донной поверхности модели результаты расчета согласуются с экспериментальными данными. Однако на торцевой поверхности цилиндра расчетный тепловой поток превышает экспериментальный почти в 4 раза (аналогичные результаты получены для других вариантов течения). Это указывает на не преодоленные пока трудности расчета отрывного течения.

6.2. Длина зоны отрыва. Для определения длины зоны отрыва по результатам измерения давления торможения был изготовлен T-образный насадок, схематически изображенный на рис. 11.38. Насадок устанавливается в трубе УТ-1М за моделью № 2 на её оси таким образом, что переднее приемное отверстие направлено навстречу невозмущенному потоку, а заднее — в противоположном направлении. Насадок можно передвигать в горизонтальном направлении и устанавливать на любом удалении от тыльной поверхности модели $X > 38{,}5$ мм.

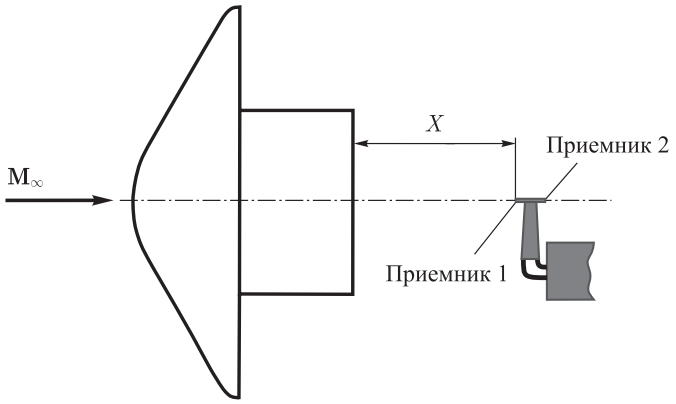


Рис. 11.38. Схема установки T-образного насадка в следе за моделью № 2

Показания обоих приемников представлены на рис. 11.39 в зависимости от координаты X. В точке $X_0 = 103$ мм показания обоих преемников практически совпадают. При $X > X_0$ показания переднего приемника больше показаний заднего приемника, причем по мере удаления от модели разница возрастает. Это означает, что при $X > X_0$ локальное направление скорости совпадает с направлением невозмущенного потока и по мере увеличения X скорость растет. При $X < X_0$ показания заднего датчика несколько ниже показаний переднего датчика, причем различие этих показаний мало. Это означает, что при $X < X_0$ локальная скорость мала по сравнению со скоростью невозмущенного потока и направлена навстречу ему. Точка $X_0 = 103$ мм является границей зоны отрыва (ближнего следа), т. е. относительная длина зоны отрыва от тыльной поверхности цилиндра до точки нулевой скорости $X_0/R \approx 1{,}72$ (соответственно, от плеча модели, где отрывается поток, $X_0'/R \approx 2{,}3$).

Длина зоны отрыва, определенная в результате численного моделирования течения при тех же условиях, существенно больше: $X_0' = 163$ мм, $X_0'/R \approx 2{,}72$. Это расхождение, так же как и расхождение в величине максимального теплового потока на донной торцевой поверхности модели, связано, вероятно, с погрешностями численного моделирования течения в конце зоны отрыва (в окрестности точки ветвления линии тока).

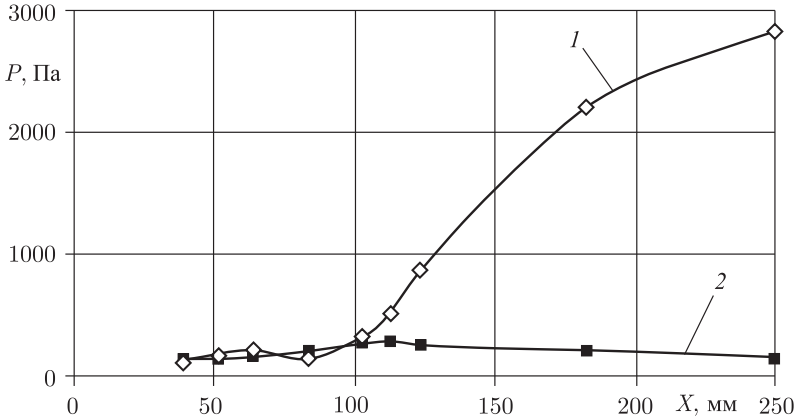


Рис. 11.39. Результаты измерений давления T-образным насадком в следе за моделью № 2 при $\mathbf{M}_\infty = 8$, $\mathbf{Re}_{\infty,D} = 2{,}57 \cdot 10^5$: *1* — передний приемник, *2* — задний приемник

Длина зоны отрыва при ламинарном течении была оценена также на основе теории Чепмена–Корста [49, 50]. Основное допущение этой теории состоит в том, что при стационарном течении полное давление газа на разделяющей линии тока равно статическому давлению за точкой ветвления потока (за критической точкой), замыкающей зону отрыва (цитируется по [51]). Последующее экспериментальное исследование [52] показало, что повышение статического давления продолжается и позади критической точки, т. е. полное давление на разделяющей линии тока должно быть несколько меньше, чем статическое давление в конце течения сжатия. Статическое давление в критической точке P_R вычислялось по эмпирической формуле [51, 52]:

$$P_R = 0{,}65P_1 + 0{,}35P_2$$

где P_1 — давление в зоне отрыва (и на разделяющей линии тока), а P_2 — давление в конце области сжатия. Полное давление на разделяющей линии тока приравнивалось давлению P_R. Кроме того, делались следующие допущения:

1) давление на лобовой поверхности модели может быть рассчитано по формуле Ньютона; при этом звуковая точка располагается на участке лобовой поверхности, наклоненном под углом $49{,}6^\circ$ к направлению невозмущенного потока;

2) от звуковой точки газ расширяется изэнтропически до давления P_1, сжатие газа от давления P_1 до давления P_2 осуществляется в косом скачке уплотнения (использовались соотношения для двумерных течений);

3) относительная скорость газа на разделяющей линии тока $U_d = 0{,}597$;

4) толщина пограничного слоя на линии отрыва слабо влияет на характеристики слоя смешения в зоне присоединения, т. к. длина линии тока от лобовой критической точки до линии отрыва существенно меньше длины разделяющей линии тока;

5) при расчете неадиабатических течений (при обтекании холодной поверхности) использовалось дополнительное предположение о том, что распределение температуры торможения в слое смешения подобно распределению скорости.

Расчет дал следующий результат: для течения без теплообмена ($T_w/T_0 = 1$) осевая протяженность зоны отрыва L равна $2{,}14R$, что несколько меньше экспериментального значения $L = 2{,}3R$. Для течения с теплообменом ($T_w/T_0 = 0{,}36$) получена на 33% меньшая величина, чем при $T_w/T_0 = 1$.

В работе [53] исследовано влияние температурного фактора (отношения T_w/T_0) на длину зоны отрыва, которая формируется при сверхзвуковом обтекании вогнутого угла. Показано, что с уменьшением температурного фактора зона отрыва существенно сокращается. Так, при отклонении потока на 20° уменьшение температурного фактора от 1 до 0,3 приводит к укорочению зоны отрыва на 25%. Однако, есть основания предполагать, что на длину донной зоны отрыва температурный фактор влияет слабее, чем на длину пристеночной зоны отрыва. Действительно, численное моделирование обтекания модели № 2 показало, что температура торможения слабо изменяется по длине следа и при температурном факторе $T_w/T_0 = 0{,}36$ для относительной температуры торможения в следе получено: $T_b/T_0 = 0{,}61$. Введение T_b/T_0 вместо T_w/T_0 ослабляет влияние температурного фактора на расчетную длину зоны отрыва: при $T_b/T_0 = 0{,}61$ получено $L = 1{,}8R$, что на 22% меньше экспериментальной величины.

7. Сравнение конфигураций № 1 и 2

В таблице 11.3 сопоставлены результаты измерений максимальных величин теплового потока на моделях № 1 и № 2 в одинаковых условиях. Здесь q_0 — тепловой поток в лобовой критической точке, а q_m — тепловой поток в задней точке торможения. Сравнивая величины q_0, необходимо учитывать, что диаметр модели № 2 на 20% меньше диаметра модели № 1. Это приводит к увеличению теплового потока в лобовой критической точке на 9,5%. Оставшаяся разница в 34% обусловлена отличиями формы лобовой поверхности: радиус кривизны лобовой поверхности в окрестности оси симметрии у модели № 2 значительно меньше, чем у модели № 1.

Относительная величина максимального теплового потока в донной области на модели № 2 при всех исследованных условиях в 4–5 раз меньше, чем на модели № 1. Можно указать на несколько возможных причин этого различия:

1) у модели № 2 радиус кормовой части равен $0{,}16R$, а у модели № 1 — $0{,}47R$;

2) кормовая часть модели № 1 имеет полусферическую форму, а модели № 2 — плоскую форму;

Таблица 11.3. Параметры точки траектории ГЛА типа нижнеплан

	$\mathbf{M}_\infty$=12, CO_2			$\mathbf{M}_\infty = 19{,}8$, N_2			$\mathbf{M}_\infty = 8$, воздух		
№ модели	q_0, Вт/см^2	q_m, Вт/см^2	q_m/q_0	q_0, Вт/см^2	q_m, Вт/см^2	q_m/q_0	q_0, Вт/см^2	q_m, Вт/см^2	q_m/q_0
1	12,44	0,89	0,0713	16,93	0,94	0,0557			
2	18,64	0,28	0,0150	25,18	0,35	0,0140	5,39	0,13	0,024

3) осевая протяженность кормовой части от плеча у модели № 2 равна лишь $0{,}59R$, а у модели № 1 — $1{,}3R$, т. е. кормовая часть модели № 2 глубже «утоплена» в зону отрыва, чем у модели № 1. Влияние первых двух факторов может быть оценено количественно: первый фактор уменьшает тепловой поток приблизительно в 1,7 раза, а второй фактор — в 2 раза. В то же время объем конического контейнера модели № 1 приблизительно в 3,5 раза больше объема цилиндрического контейнера модели № 2. Изложенные в разделе 6.2 результаты исследования размеров ближнего следа указывают на возможность увеличения размеров контейнера полезного груза без существенного усиления его нагрева.

Заключение

Методика численного анализа нестационарных двух- и трехмерных уравнений Навье–Стокса и Рейнольдса, разработанная и реализованная в виде комплексе программ, обладает большой универсальностью и позволяет проводить исследования разнообразных газодинамических задач с использованием различных моделей движущейся газовой среды. Проведенные методические расчеты позволяют выбрать оптимальные управляющие параметры численного алгоритма и оптимизировать вычислительный процесс; благодаря этому достигается высокая эффективность метода, что позволяет проводить систематические расчеты на современных персональных компьютерах.

Численное моделирование в основном адекватно описывает осесимметричное течение и теплообмен в донной области исследованных тел, но в некоторых случаях дает существенно большие величины максимального теплового потока, чем эксперимент.

Проведено экспериментальное исследование гиперзвукового обтекания и нагрева двух моделей межпланетного зонда, отличающихся главным образом формой тыльной поверхности, моделирующей контейнер полезного груза, в диапазоне значений числа Маха от 6 до 20 и числа Рейнольдса $\mathbf{Re}_{\infty,D}$ от $0{,}7 \times 10^5$ до 16×10^5.

Благодаря креплению модели на тонкой боковой державке удалось измерить распределение теплового потока по тыльной поверхности модели, включая окрестность задней точки торможения, где при симметричном

обтекании (при $\alpha = 0$) локальный тепловой поток достигает максимального значения.

При ламинарном течении в донной области относительная величина максимального теплового потока к тыльной поверхности q_m/q_0 уменьшается с увеличением числа Маха до $\mathbf{M} \approx 12$, а при дальнейшем увеличении $\mathbf{M}$ остается практически постоянной. Таким образом, экспериментально подтверждено, что существует гиперзвуковая стабилизация теплообмена у донной поверхности затупленного тела и что она наступает при существенно большем значении числа Маха, чем стабилизация теплообмена на лобовой поверхности аналогичного тела.

При $\mathbf{M} \geqslant 12$ и $\alpha = 0$ максимальная величина теплового потока в донной области составляет 0,015–0,08 от величины теплового потока в лобовой точке торможения, причем большие значения соответствуют меньшему радиусу кривизны тыльной поверхности тела.

При обтекании под углом атаки максимум теплового потока перемещается на наветренную поверхность тыльной части тела, и при $\alpha \approx 20^\circ$ тепловой поток на наветренной части тыльной поверхности приближается к уровню теплового потока в задней точке торможения при $\alpha = 0$,.

Длина глобальной зоны отрыва (ближнего следа) при ламинарном течении и $\mathbf{M} = 8$ составляет приблизительно $2{,}3R$ (R — радиус модели). Этот результат может быть использован при определении максимальных размеров контейнера полезного груза, приемлемых из условия ограничения его нагрева.

Ламинарно-турбулентный переход в донном течении начинается при числе Рейнольдса $\mathbf{Re}_{\infty,D} \approx 0{,}4 \cdot 10^6$ и заканчивается при $\mathbf{Re}_{\infty,D} \approx 0{,}6 \cdot 10^6$ ($\mathbf{M} = 6$–8). В результате ламинарно-турбулентного перехода теплообмен в донной области резко усиливается.

При турбулентном донном течении величина теплового потока в донной области соизмерима с величиной теплового потока в лобовой точке торможения. Численное моделирование течения с учетом турбулентности дает такой же результат.

Авторы благодарят И. В. Струминскую за участие в испытаниях модели № 2 и анализе экспериментальных данных по этой модели, а Н. А. Ковалеву — за помощь в подготовке рукописи к публикации.

Список литературы

1. *Hollis B.R., Perkins J.N.* Hypervelocity measurements in wake of Mars mission entry vehicle // AIAA Paper. 1995. № 95–2314. 12 p.
2. *Hollis B.R., Perkins J.N.* Hypervelocity heat-transfer measurements in an expansion tube // AIAA Paper. 1996. № 96–2240. 12 p.
3. *Hollis B.R., Perkins J.N.* Transition effects on heating in the wake of a blunt body // AIAA Paper. 1997. № 97–2569. 16 p.

4. *Horvath T.J., Heiner N.C., Olgium D.M., Cheatwood F.M., Gnoffo P.A* Afterbody heating characteristics of a proposed Mars Sample Return Orbiter // AIAA Paper. 2001. № 2001–3068. 16 p.
5. *Holden M., Harvey J., Boyd I., George J., Horvath T.* Experimental and computational studies of the flow over a sting mounted planetary probe configuration // AIAA Paper. 1997. № 97–0768. 22 p.
6. *Horvath T., Hannemann K.* Blunt body near-wake flow field at Mach 10 // AIAA Paper. 1997. № 97–0986. 23 p.
7. *Wright M., Lomis M., Papadopouls P.* Aerothermal analysis of the Project Fire II afterbody flow // AIAA Paper. 2001. № 2001–3065. 15 p.
8. *Богданов В.В., Плешакова Л.А.* Микротермопарный преобразователь тепловых потоков // Труды ЦАГИ. 1977. № 1847. С. 165–172.
9. *Боровой В.Я., Колочинский Ю.Ю.* Поверхностные термопары — средство исследования теплообмена в трубах периодического действия // Труды ЦАГИ. 1987. № 2340. С. 148–155.
10. *Гиневский А.С., Иоселевич В.А., Колесников А.В., Лапин Ю.В., Пипиленко В.Н.,Секундов А.Н.* Методы расчета турбулентного пограничного слоя // Итоги науки и техники. Механика жидкости и газа. — М., 1978. С. 155–304.
11. *Chang C.-C., Lei S.-Y*, On the Sources of Aerodynamic Forces: Steady Flow Around a Cylinder or Sphere // Proc. Roy. Soc. London. 1996.A. V. 452. № 1954. P. 2369–2395.
12. *Marvin J.G., Coakley T.J.* Turbulence Modeling for Hypersonic Flows // The third joint joint Europe / US short course in hypersonics. At the RWTH Aachen–University of Technology. 1990. D–5100.
13. *Егоров И.В., Никольский В.С.* Роль колебательно-диссоциационного взаимодействия при гиперзвуковом обтекании // Известия РАН. МЖГ. 1997. № 3. С. 150–163.
14. *Алферов В.И., Егоров И.В.* Гиперзвуковое обтекание в установке с МГД-ускорением и в натурных условиях // Прикладная механика и техническая физика. 1998. Т. 39. № 2. С. 91–102.
15. *Kang S.W., Jones W.L., Dunn M.G.* Theoretical and measured electron-density distributions at high altitudes // AIAA J. 1973. V. 11. № 2. P.141–149.
16. *Losev S.A., Makarov V.N., Pogosbekyan M.Ju, et al.*, Thermochemical Nonequilibrium kinetic models in strong shock waves on Air // AIAA Paper. 1994. № 1990.
17. *Wilke S.* A viscosity equation for gas mixture // J. Chem. Phys. 1950,V. 18, № 4. P. 517–519.
18. *Mason E.A., Saxena S.C.* Approximate formula for the thermal conductivity of gas mixtures. Phys. Fluids. 1958. V. 1. № 5. P. 361–369.
19. *Гиршфельдер Дж., Кертисс Ч., Берд Р.* Молекулярная теория газов и жидкостей. — М.: Изд-во иностр. лит. 1961.
20. *Егоров И.В.* К вопросу о влиянии реальных свойств воздуха на интегральные аэродинамические характеристики // Известия АН СССР. МЖГ. 1992. № 4. С. 156–164.
21. *Егоров И.В., Никольский В.С.*, 1996. Вязкие гиперзвуковые течения для различных аэрофизических моделей // Известия РАН. МЖГ. № 4. С. 151–161.
22. *Gorelov V.A., Gladyshev M.K., Kireev A.Y., et al.* Experimental and Numerical Study of Nonequilibrium Ultraviolet NO and N_2^+ Emission in Shock Layer. Journal of Thermophysics and Heat Transfer. 1998. V. 12. № 2. P. 172–179.
23. *Годунов С.К.* Конечно-разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений газовой динамики // Мат. сб. 1959. Т. 47. С. 271–291.
24. *Годунов С.К., Забродин А.В., Иванов М.Я., Крайко А.Н., Прокопов Г.П.* Численное решение многомерных задач газовой динамики // — М.: Наука. 1976. С. 400.

25. *Roe P.L.* Approximate Riemann solvers, parameter vectors, and difference scheme // J. Comput. Phys. 1981. V. 43. P. 357–372.
26. *Колган В.П.* Применение принципа минимальных значений производной к построению конечноразностных схем для расчета разрывных решений газовой динамики // Ученые записки ЦАГИ. 1972. Т. 3. № 6. С. 68–77.
27. *Harten A.* High resolution schemes for hyperbolic conservation laws // Journal Computational Physics. 1983. V. 49. P. 357–372.
28. *Иванов М.Я., Крупа В.Г., Нигматуллин Р.З.* Неявная схема С.К. Годунова повышенной точности для интегрирования уравнений уравнений Навье–Стокса // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1989. Т. 29. № 6. С. 888–901.
29. *Каримов Т.Х.* О некоторых итерационных методах решения нелинейных уравнений в гильбертовом пространстве // Докл. АН СССР. 1983. Т. 269. № 5. С. 1038–1046.
30. *Babikov P.E., Yegorov I.V.* On one version of the adaptive grid generation to solve evolution problems // Proc. Soviet Union-Japan SCFD. Khabarovsk. 1988. V. 2. P. 222–227.
31. *Егоров И.В., Зайцев О.Л.* Об одном подходе к численному решению двумерных уравнений Навье–Стокса методом сквозного счета // Ж. вычисл. математики и мат. физики. 1991. Т. 31. № 2. С. 286–299.
32. *Бабаев И.Ю., Башкин В.А., Егоров И.В.* Численное решение уравнений Навье–Стокса с использованием итерационных методов вариационного типа // Ж. вычисл. математики и мат. физики. 1994. Т. 34. № 11. С. 1693–1703.
33. *George A.* Nested dissection of a regular finite element mesh // SIAM J. Numer. Analys. 1973. V. 10. № 2. P. 347–358.
34. *Lipton R.J., Rose D.J., Tarjan R.E.* Generalized nested dissection // SIAM Journal Numer. Analys. 1979. V. 16. № 2. P. 346–358.
35. *Самарский А.А., Николаев Е.С.* Методы решения сеточных уравнений. — М.: Наука, 1978.
36. *Saad Y., Shultz M.H.* GMRES: a generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems // SIAM J. Scient. And Statist. Comput. 1986. V. 7. № 3. P. 856–869.
37. *Егоров И.В., Иванов Д.В.* Применение метода Ньютона при моделировании нестационарных отрывных течений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1998. Т. 38. № 3. С. 506–511.
38. *Yegorov I.* The Numerical Simulation of Vibration-Dissociation Interaction Overflow // AIAA Paper. 1996. № 1894. 11 p.
39. *Егоров И.В., Иванов Д.В.* Моделирование внутренних отрывных течений с учетом химической неравновесности // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1997. Т. 37. № 6. С. 751–758.
40. *Ivanov D.V., Yegorov I.V., Yegorova M.V.* Simulation of nonequilibrium separated flows // AIAA Paper. 1997. № 2583. 11 p.
41. *Лисейкин В.Д.* Обзор методов построения структурных адаптивных сеток // Ж. вычисл. матем. и мамем. физ. 1996. Т. 36. № 1. С. 3–41.
42. *Внуков А.Е.* Построение расчетных сеток около аэродинамических профилей на основе дискретного преобразования Кристоффеля–Шварца // — М., Препринт ЦАГИ. 1991. № 35. 15 с.
43. *Башкин В.А., Егоров И.В., Иванов Д.В.* Применение метода Ньютона к расчету внутренних сверхзвуковых отрывных течений // ПМТФ. 1997. № 1. С. 30–42.
44. *Borovoi V.Ya., Skuratov A.S., Surzhikov S.T.* Study of convective heating of segmental-conical Martian descent vehicle in shock wind tunnel // AIAA Paper. 2004. № 2634. 11 p.
45. *Черный Г.Г.* Течения газа с большой сверхзвуковой скоростью. — М.: Физматгиз, 1959. 220 с.

46. *Лунёв В.В.* Течение реальных газов с большими скоростями. — М.: Физматлит, 2007. 760 с.
47. *Чжен П.* Отрывные течения. — М.: Мир, 1973. Т. 2. 280 с.
48. *Юдаев Б.Н., Михайлов М.С., Савин В.К.* Теплообмен при взаимодействии струй с преградами. — М.: Машиностроение, 1977. 247 с.
49. *Chapman D., Kuehn D., Larson H.* Investigation of separated flows in supersonic and subsonic streams with emphasis on the effect of transition. NACA Report, 1958. 1356, 40 p.
50. *Korst H., Page R., Childs M.* A theory for base pressures in transonic and supersonic flow. J. Appl. Mech., 1956, V. 23. #4, pp. 593–600.
51. *Нейланд В.Я., Куканова Н.И.* Исследования течений со срывными зонами. Обзор № 19 Бюро Научной информации ЦАГИ, 1965. 174 с.
52. *Nash J.F.* An analysis of two-dimensional turbulent base flow including the effect of the approaching boundary layer. ARC RM, 1963. #3344, 39 p.
53. *Нейланд В.Я., Соколов Л.А., Шведченко В.В.* Влияние температурного фактора на структуру отрывного течения в свехзвуковом потоке газа. // Известия РАН, МЖГ, 2008. № 5, с. 39–51.

12

МЕТОДОЛОГИЯ ФОРМИРОВАНИЯ НАВЕТРЕННОЙ ПОВЕРХНОСТИ ВОЗВРАЩАЕМОГО С ОРБИТЫ АППАРАТА КРЫЛАТОГО ТИПА С ПОНИЖЕННЫМ ТЕПЛОВЫМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ

А. В. Белошицкий, А. А. Дядькин, С. В. Журин
ОАО Ракетно-космическая корпорация «Энергия» имени С. П. Королева

Расширенное присутствие человека в космосе, прогнозируемое на ближайшие десятилетия, требует создания новых транспортных пилотируемых систем, которые сочетают в себе комфорт и многоразовость системы «Space Shuttle» с надежностью и относительно низкой стоимостью системы «Союз». В соответствии с современными представлениями размер возвращаемого аппарата перспективного многоразового пилотируемого корабля должен быть меньше ОК «Space Shuttle» в ~ 5 раз.

Анализ показывает, что в наибольшей степени этим требованиям удовлетворяет аппарат, проходящий участок аэродинамического нагрева с достаточно большим аэродинамическим качеством, обеспечивающим требуемую боковую дальность, приемлемые для экипажа перегрузки и допустимые для многоразовых теплозащитных материалов тепловые воздействия. При этом аппарат должен обладать аэродинамическими и баллистическими характеристиками, позволяющими совершать посадку на аэродром без использования двигателей, аналогично «Бурану» или ОК «Space Shuttle».

Применение для решения этой задачи аэродинамических компоновок аппаратов, основанных на масштабировании ОК типа «Буран» с различными вариациями, сталкивается с проблемой повышенного аэродинамического нагрева теплонагруженных элементов конструкции- носового затупления и особенно кромок и наветренных поверхностей крыльев, поскольку уменьшение характерных размеров аппарата в 5 раз приводит к возрастанию удельных тепловых потоков в $\sim 2{,}2$ раза и увеличению максимальных температур кромок крыльев на ~ 400 °C. В результате температура теплозащитного покрытия достигает значения ~ 2000 °C, что недопустимо как для современных многоразовых теплозащитных материалов, так и материалов ближайшей перспективы. Использование в этих зонах теплозащитных материалов абляционного типа проблематично, поскольку изменение внешних обводов в результате термодеструкции и линейного уноса теплозащиты, а также увеличение шероховатости поверхности может привести к заметному изменению аэродинамических характеристик аппарата.

Процесс аэродинамического торможения и спуска крылатого аппарата, входящего в атмосферу, имеет особенность, которую можно использовать для решения проблемы аэродинамического нагрева наветренных кромок крыльев. Особенность эта заключается в том, что участок траектории с гиперзвуковыми скоростями, на котором реализуются максимальные тепловые потоки, крылатый аппарат проходит при углах атаки 30 град. и выше. Это позволяет формировать на гиперзвуковом режиме обтекание кромки крыла без образования на ней линии растекания потока и, тем самым, добиться значительного снижения теплового потока.

Для использования описанного свойства разработан принцип интеграции стреловидного крыла с носовой частью гиперзвукового летательного аппарата, который обеспечивает обтекание наветренной кромки крыла без образования на ней линии растекания при достаточно больших углах атаки на гиперзвуковом режиме и классическое обтекание крыла при умеренных углах атаки на дозвуковом режиме [1].

Этот принцип основан на отклонении набегающего потока в ударном слое около носовой части аппарата в боковом направлении с последующим его натеканием на нижнюю поверхность стреловидного крыла, установленного по схеме средне- или высокоплана. Выбором соответствующей формы и размеров носовой части, угла стреловидности крыла и плавного перехода от фюзеляжа к крылу формируется требуемое обтекание кромки крыла. Вид концептуальной модели и структура линий тока приведены на рис. 12.1, 12.2. Расчет течения [1] с использованием CFD (программного комплекса Aeroshape-3D [2]), показывает, что пограничный слой, обтекающий кромку крыла, начинает формироваться в плоскости симметрии носовой части аппарата и развивается вдоль линий тока, имеющих значительную протяженность. Следовательно, характерный размер течения, принимаемый в расчетах теплообмена, в этом

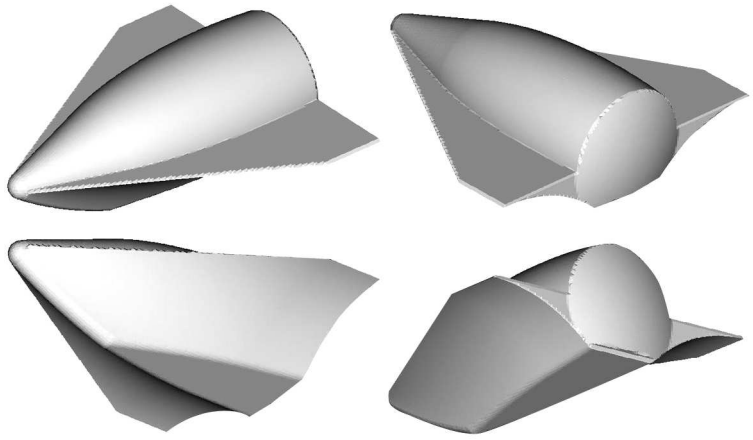


Рис. 12.1. Вид концептуальной модели

случае будет значительно больше, чем при классическом обтекании кромки крыла, что соответствующим образом приводит к снижению величины теплового потока.

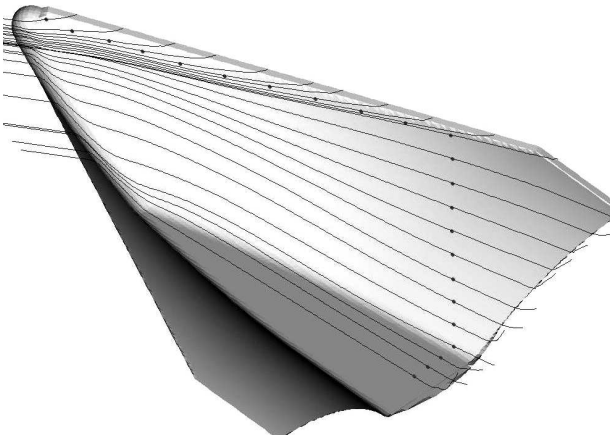


Рис. 12.2. Структура линий тока около концептуальной модели

Расчет теплообмена показал, что в рассматриваемой геометрии величины ламинарных тепловых потоков к кромке крыла более чем в полтора раза ниже, чем к критической точке носового затупления и в два раза ниже, чем к кромке крыла в традиционной схеме с нижним расположением крыла.

Описанный выше подход для выбора формы носовой части аппарата использован для создания аэродинамического облика аппарата, входящего в атмосферу с орбитальной скоростью и совершающего горизонтальную посадку на аэродром.

Предложенная аэродинамическая компоновка представлена на рис. 12.3.

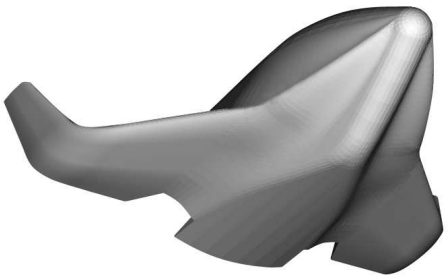


Рис. 12.3. Аэродинамическая компоновка

Расчетные исследования аэродинамических характеристик аппарата проведены с использованием CFD (программных комплексов Flow Vision [3] и Aeroshape-3D). Результаты расчетов, приведенные на рис. 12.4, показали, что разработанная компоновка обладает достаточно высоким гиперзвуковым

аэродинамическим качеством К $\sim$ 1,2 при угле атаки 30°, аэродинамическим качеством К $\sim$ 4,0 на посадочных скоростях при угле атаки $\sim$ 10°, и моментными характеристиками по тангажу, позволяющими обеспечить балансировку аппарата как на гиперзвуковых режимах полета при углах атаки $\sim$ 30°, так и на дозвуковых скоростях при углах атаки $\sim$ 5° за счет отклонения балансировочного щитка и соответствующего выбора положения центра масс($y_{\text{цм}} < 0$).

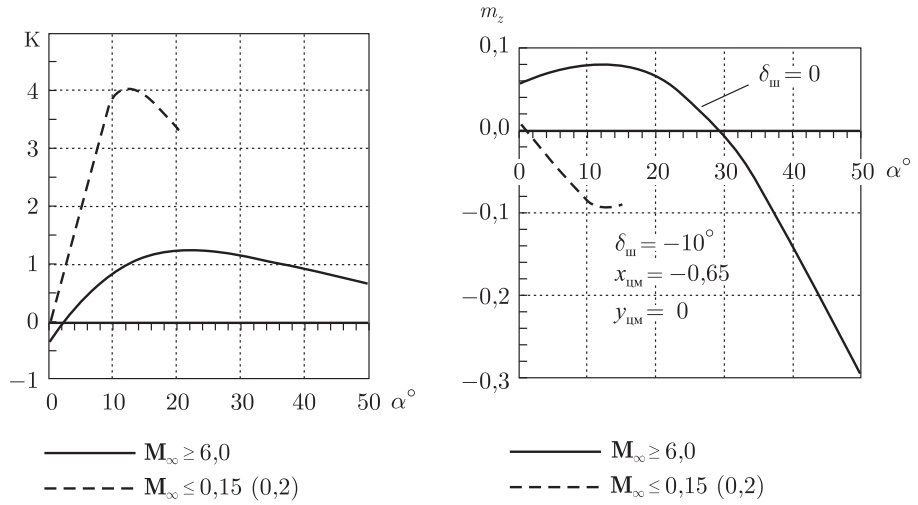


Рис. 12.4. Зависимости аэродинамического коэффициента качества K и коэффициента момента тангажа m_z от угла атаки

Распределения равновесно-радиационных температур по наветренной поверхности аппарата, полученные в рамках системы уравнений Навье–Стокса, с учетом процессов неравновесности потока и величин скоростей реакций на поверхности ТЗП, (см. гл. 10,) на участках траектории максимального аэродинамического нагрева, приведены на рис. 12.5 для ламинарного режима обтекания. Приведенные данные показывают, что разработанная компоновка обеспечивает нагрев наветренных кромок крыльев не выше, чем нагрев носового затупления аппарата.

Полученный результат стал возможным в результате отказа от естественного негласного постулата — наветренная поверхность ВА должна быть выполнена в виде гладкого монотонного профиля, исключающего возможность появления отрывных зон, зон сжатия потока и линий растекания для исключения возможности ранней турбулизации и интенсификации теплообмена на самой большой теплонапряженной поверхности аппарата.

Представленная концепция содержит протяженные зоны разворота потока в поверхностях сжатия в носовой части, и немонотонности профиля в средней и хвостовой частях корпуса. Эти особенности геометрии наветренной поверхности создают условия для потери устойчивости течения

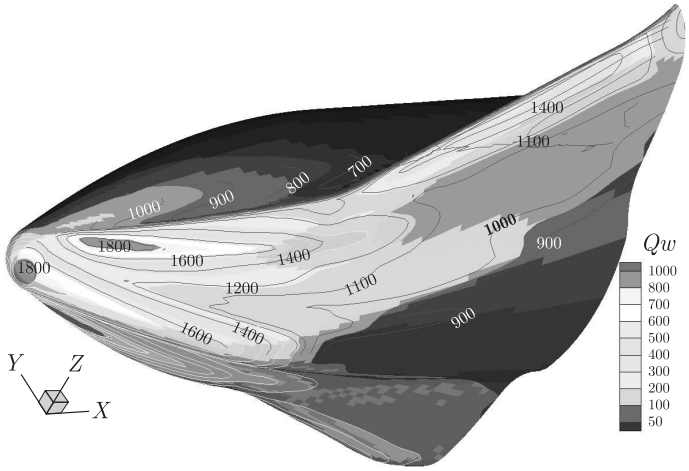


Рис. 12.5. Распределение тепловых потоков и равновесно-радиационных температур с учетом эффектов неравновесности

в пограничном слое, вихреобразованию и, как следствие, интенсификации теплообмена. Кроме того, в этих зонах несколько ухудшаются условия для излучения нагретых поверхностей, что снижает величину эффективной степени черноты теплозащиты.

Проведенный анализ показал, что проявление указанных особенностей течения приводит к интенсификации теплообмена и возрастанию температур, однако их повышение не приводит к качественным изменениям — на всей наветренной поверхности аппарата теплозащита может быть выполнена из теплозащитных материалов, разработанных по программе «Буран». Увеличение температур сказывается на толщине теплозащитного покрытия в указанных зонах и увеличении массы теплозащитного покрытия аппарата — это плата за возможность существенного снижения теплообмена на кромках крыльев до величин, позволяющих использование существующих теплозащитных материалов.

Список литературы

1. *С.В.Журин* Снижение максимальной равновесной температуры на кромках крыльев возвращаемого аппарата малой размерности путем профилирования нижней поверхности. Труды 48 научной конференции МФТИ. Современные проблемы фундаментальных и прикладных наук. Часть 3. Долгопрудный 2005 г.
2. Aeroshape-3D, Руководство пользователя. Computational Aerodynamics Systems Co., 1999
3. Flow Vision Версия 2003+ Руководство пользователя ООО «ТЕСИС», 1999–2004, Москва.

13

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ГИПЕРЗВУКОВОГО ТЕПЛООБМЕНА НА НАВЕТРЕННОЙ СТОРОНЕ ВКС «БУРАН»

Н. Е. Афонина, В. Г. Громов
Научно-исследовательский институт механики МГУ им. М.В. Ломоносова

Введение

Одной из ключевых проблем создания воздушно-космических самолетов (ВКС) является проблема защиты летательного аппарата (ЛА) от интенсивных тепловых нагрузок при входе в атмосферу Земли. При спуске по планирующей траектории, подобной траектории ВКС первого поколения «Space Shuttle» или «Буран», наиболее теплонапряженным является участок торможения самолета от скорости $V_\infty \approx 7{,}5$ км/с до $V_\infty \approx 5{,}5$ км/с, осуществляемого в интервале высот $H = 80$–65 км. Полет на этом участке траектории проходит при углах атаки $\alpha = 35$–$40°$, когда вся наветренная сторона поверхности ЛА испытывает значительные тепловые нагрузки, существенно превосходящие потоки тепла к подветренной стороне поверхности самолета. Воздействием газового потока на наветренную сторону поверхности аппарата в основном определяются в этих условиях и аэродинамические характеристики ВКС.

Для проведения исследований по аэродинамике и теплообмену ВКС в работах [1–3] предложена методика расчета течения в ударном слое около наветренной стороны поверхности удлиненных затупленных тел, движущихся в воздухе с большой сверхзвуковой скоростью. Расчетная схема основана на модели полного вязкого ударного слоя [4], позволяющей при значительной экономии ресурсов ЭВМ определить единым образом и с достаточной для приложений точностью структуру течения и основные характеристики взаимодействия газа с обтекаемым телом в широком диапазоне определяющих параметров. Методика реализована для двух моделей газовой среды в ударном слое: однородного газа и идеальной реагирующей смеси пяти основных компонентов диссоциирующего воздуха.

Решение уравнений вязкого ударного слоя ищется методом конечных разностей. Система разностных уравнений получена методом конечного объема с использованием симметричных аппроксимаций при вычислении потоков в направлении поперек ударного слоя и односторонних (ориентированных по направлению распространения возмущений) аппроксимаций при вычислении потоков по другим пространственным переменным. Расчетная система криволинейных координат, на основе которой строится совокупность

элементарных объемов, образована системой поверхностных координат и семейством нормалей к поверхности. Область применения такого способа дискретизации пространства ограничена случаем, когда радиус нормальной кривизны вогнутых участков поверхности превышает локальные значения отхода ударной волны. Для решения разностных уравнений предлагается использовать итерационный процесс, являющийся блочным вариантом метода последовательной релаксации. Релаксационный процесс построен на основе нестационарных или псевдонестационарных уравнений вязкого ударного слоя, т. е. в качестве параметра релаксации используется шаг по времени (или фиктивному времени). Переход от одного временного шага к другому осуществляется последовательно по блокам, в которые объединены уравнения для элементарных объемов, расположенных вдоль нормали к поверхности. Уравнения блоков решаются векторными прогонками. Обход блоков осуществляется только в направлении потока в ударном слое, начиная от передней критической линии. Односторонний обход блоков, облегчая реализацию схемы на ЭВМ с малой оперативной памятью, в то же время накладывает ограничения на шаг по времени типа условия КФЛ для возмущений, распространяющихся вдоль ударного слоя в направлении, противоположном направлению обхода блоков.

На основе предложенной схемы расчета построена обобщенная маршевая процедура, при проведении которой решение ищется в узких перекрывающихся областях, последовательно перемещающихся вдоль маршевого направления. Такую процедуру целесообразно применять для расчета течения в ударном слое на боковой поверхности тел даже при больших углах атаки. Необходимая степень подавления роста возмущений, вызванных некорректностью маршевого счета в дозвуковой зоне течения вблизи поверхности, достигается выбором соответствующей ширины локальных областей.

В настоящей главе описанный выше подход применен к исследованию теплообмена ВКС «Буран». В отличие от [1–3] для решения уравнений вязкого ударного слоя применяется разностная схема, имеющая второй порядок точности по всем координатам с использованием несимметричных аппроксимаций и при вычислении потоков в направлении поперек ударного слоя. Расчет выполнен для условий $H = 77{,}5$ км, $V_\infty = 7{,}38$км/с (режим I) и $H = 65{,}6$ км, $V_\infty = 5{,}58$ км/с (режим 2), соответствующих примерно началу и концу наиболее теплонапряженного участка траектории. С целью оценки влияния каталитических свойств поверхности на интенсивность теплообмена рассмотрены три модели гетерогенной рекомбинации: химически нейтральная поверхность, идеально каталитическая поверхность и частично каталитическая поверхность с заданным коэффициентом гетерогенной рекомбинации k_w, различным для покрытия «углерод-углеродного» материала и покрытия плиточной теплозащиты.

Представлен обширный графический материал как по структуре течения в ударном слое, так и основным характеристикам взаимодействия газа с поверхностью ВКС. Проведен краткий анализ полученных данных.

1. Описание модели среды

1.1. Основные параметры среды. Уравнение состояния. Сжатие воздуха в ударной волне приводит к его интенсивному нагреву, что в свою очередь вызывает различного рода высокотемпературные явления в газе и на поверхности обтекаемого тела. В интервале чисел Маха $15 < \mathbf{M} < 25$ основными физико-химическими процессами в ударном слое являются возбуждение внутренних степеней свободы частиц газа, диссоциация молекул и химические реакции с образованием окиси азота. Характерное время ряда процессов в рассматриваемом диапазоне определяющих параметров сравнимо с характерным временем течения, и они могут отклоняться от равновесного состояния. В настоящей постановке учитывается неравновесный характер протекания только химических реакций. Вращения и колебания молекул считаются возбужденными равновесно с поступательным движением, а возбуждение электронных степеней свободы не учитывается.

Диссоциирующий воздух рассматривается как одно температурная идеальная смесь совершенных газов, состоящая из пяти компонентов — O, N, NO, O_2, N_2. Термическое уравнение состояния такой смеси имеет вид:

$$p = \rho \mathbf{Ra} \frac{T}{m}, \tag{13.1}$$

где $\mathbf{Ra}$ — абсолютная газовая постоянная, p — давление, ρ — плотность, T — температура, $m = \left(\sum_i c_i/m_i\right)^{-1}$ — средний молекулярный вес газовой смеси, c_i, m_i — массовая концентрация и молекулярный вес i-го компонента соответственно.

1.2. Химические реакции в газовой фазе. В модель газовой среды включены шесть неравновесных газофазных реакций:

$$\begin{array}{ll} 1.\ M. \quad O_2 + M \Leftrightarrow O + O + M, & 4.\ NO + O \Leftrightarrow O_2 + N, \\ 2.\ M. \quad N_2 + M \Leftrightarrow N + N + M, & 5.\ N_2 + O \Leftrightarrow NO + N, \\ 3.\ M, \quad NO + M \Leftrightarrow N + O + M, & 6.\ N_2 + O_2 \Leftrightarrow NO + NO, \end{array}$$

$$M = O_2, O, N, NO, N_2. \tag{13.2}$$

Согласно закону действующих масс скорость реакции

$$\sum_i \nu_{ji} A_i \Leftrightarrow \sum_i \nu'_{ji} A_i,$$

где v_{ji}, ν'_{ji} — стехиометрические коэффициенты, а A_i — символы химических веществ, определяется выражением

$$\varpi_j = \frac{1}{\nu'_{ji} - \nu_{ji}} \frac{dn_i}{dt} = k_f(T) \prod_i n_i^{\nu_{ji}} - k_r(T) \prod_i n_i^{\nu'_{ji}}, \tag{13.3}$$

где $n_i = \rho c_i / m_i$ — число молей i-го компонента в единице объема, $k_f(T)$, $k_r(T)$ — константы скорости реакции в прямом и обратном направлении соответственно. В состоянии равновесия отношение скоростей реакции в прямом и обратном направлении равно константе равновесия реакции K_{cj}, зависящей от температуры и определяемой термодинамическими характеристиками компонентов, участвующих в реакции

$$\frac{k_{f,j}}{k_{r,j}} = K_{cj}(T) = \prod_i n_{i,eq}^{(\nu'_{ji} - \nu_{ji})}. \tag{13.4}$$

В принятой модели полагается, что соотношение (13.4) имеет место и при отклонении реакции от равновесия. При этом предположении для описания кинетики реакций достаточно задать либо константу скорости реакции в прямом направлении $k_f(T)$, либо в обратном $k_r(T)$. В модели используется представление констант скоростей реакций в форме обобщенного закона Аррениуса

$$k = AT^n \exp\left(\frac{-E}{\mathbf{Ra}T}\right). \tag{13.5}$$

В литературе приводится несколько систем констант скоростей реакций в диссоциирующем воздухе (главным образом в виде (13.5)), полученных на основе статистической обработки результатов экспериментальных исследований с привлечением теоретических представлений и моделей. В диапазоне температур от 2000 до 20000° K данные разных авторов по кинетике реакций могут различаться более чем на порядок, что связано как с ошибками измерений, так и с погрешностью модели, используемой для интерпретации результатов экспериментов.

В настоящей постановке для вычислений скоростей всех реакций, кроме 2.N, использованы аппроксимирующие выражения для k_f вида (13.5), приведенные в [5]. Для реакции 2.N, как и для других реакций этой группы, было положено $E = 224900$ кал/моль, а параметры A и n определены из условий:

$$k_r^{(2.N)}(2 \cdot 10^3\,\mathrm{K}) = 8 \cdot 10^{14}\,\text{см}^6/\text{моль}^2\text{с},$$
$$k_f^{(2.N)}(2 \cdot 10^4\,\mathrm{K}) = 3{,}2 \cdot 10^{12}\,\text{см}^3/\text{моль с}.$$

Первое значение рекомендовано в [6] на основе результатов измерений теплового потока к некаталитической поверхности в диссоциированном азоте, второе вычислено по аппроксимационной формуле (13.5) по данным [5]. Для

пересчета $k_r \to k_f$ при этом использовалась аппроксимационная формула для $K_c^{(2)}$, рекомендованная в [5] и приведенная в табл.13.1.

Таблица 13.1.

№	Константы реакций диссоциации	M	A	n
1	$O_2 + M \Leftrightarrow O + O + M$	O_2	$3{,}3 \cdot 10^{19}$	$-1{,}0$
	$E = 118000$ кал/моль	O	$9{,}0 \cdot 10^{19}$	$-1{,}0$
	$K_c^{(1)} = 1{,}2 \cdot 10^3 T^{-0{,}5} \exp(-E/\mathbf{Ra}T)$	N	$3{,}3 \cdot 10^{18}$	$-1{,}0$
		NO	$3{,}3 \cdot 10^{18}$	$-1{,}0$
		N_2	$7{,}2 \cdot 10^{18}$	$-1{,}0$
2	$N_2 + M \Leftrightarrow N + N + M$	O	$1{,}9 \cdot 10^{17}$	$-0{,}5$
	$E = 2249000$ кал/моль	O	$1{,}9 \cdot 10^{17}$	$-0{,}5$
	$K_c^{(2)} = 18 \exp(-E/\mathbf{Ra}T)$	N	$1{,}4 \cdot 10^{17}$	$-0{,}5$
		NO	$1{,}9 \cdot 10^{17}$	$-0{,}5$
		N_2	$4{,}8 \cdot 10^{17}$	$-0{,}5$
3	$NO + M \Leftrightarrow N + O + M$	O_2	$4{,}0 \cdot 10^{19}$	$-1{,}5$
	$E = 150000$ кал/моль	O	$7{,}9 \cdot 10^{19}$	$-1{,}5$
	$K_c^{(1)} = 4{,}0 \exp(-E/\mathbf{Ra}T)$	N	$7{,}9 \cdot 10^{18}$	$-1{,}0$
		NO	$7{,}9 \cdot 10^{18}$	$-1{,}5$
		N_2	$4{,}0 \cdot 10^{18}$	$-1{,}5$

Продолжение таблицы 13.1

№	Константы реакций обмена	E кал/моль	A	n
4	$NO + O \Leftrightarrow O_2 + N$	391002	$3{,}2 \cdot 10^9$	1,0
	$K_c^{(4)} = 0{,}24 \exp(-32020/\mathbf{Ra}T)$			
5	$N_2 + O \Leftrightarrow NO + N$	75500	$7{,}0 \cdot 10^{13}$	0
	$K_c^{(5)} = 4{,}5 \exp(-75000/\mathbf{Ra}T)$			
6	$N_2 + O_2 \Leftrightarrow NO + NO$	O2	$4{,}0 \cdot 10^{19}$	$-1{,}5$
	$K_c^{(6)} = 19{,}0 \exp(-42980/\mathbf{Ra}T)$	128500	$9{,}1 \cdot 10^{24}$	$-2{,}0$

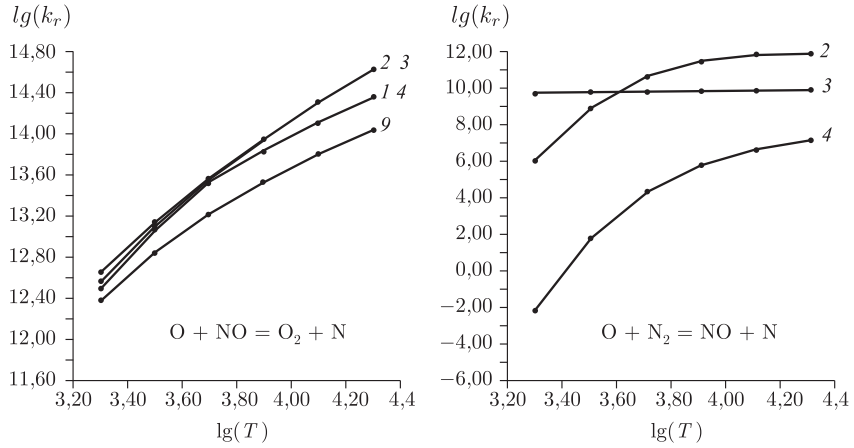


Рис. 13.1. Сравнение констант k_f, используемых в работе (кривая *1*) с данными других авторов для реакций *4* и *5*

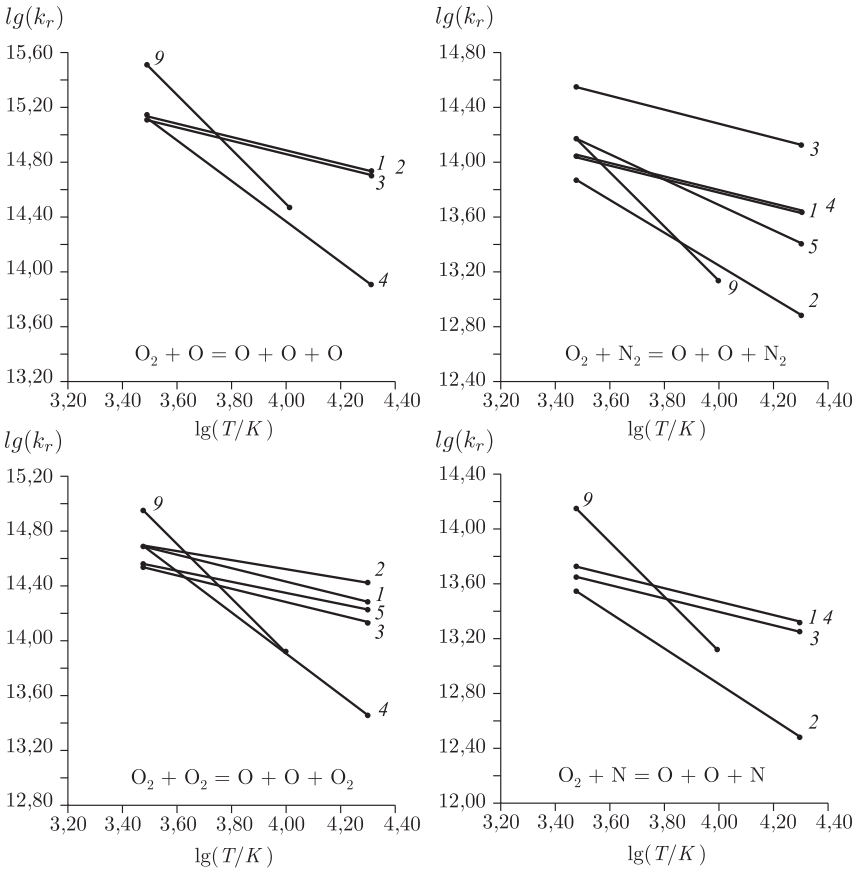


Рис. 13.2. Сравнение констант k_f, используемых в работе (кривая *1*) с данными других авторов для группы реакций 1M

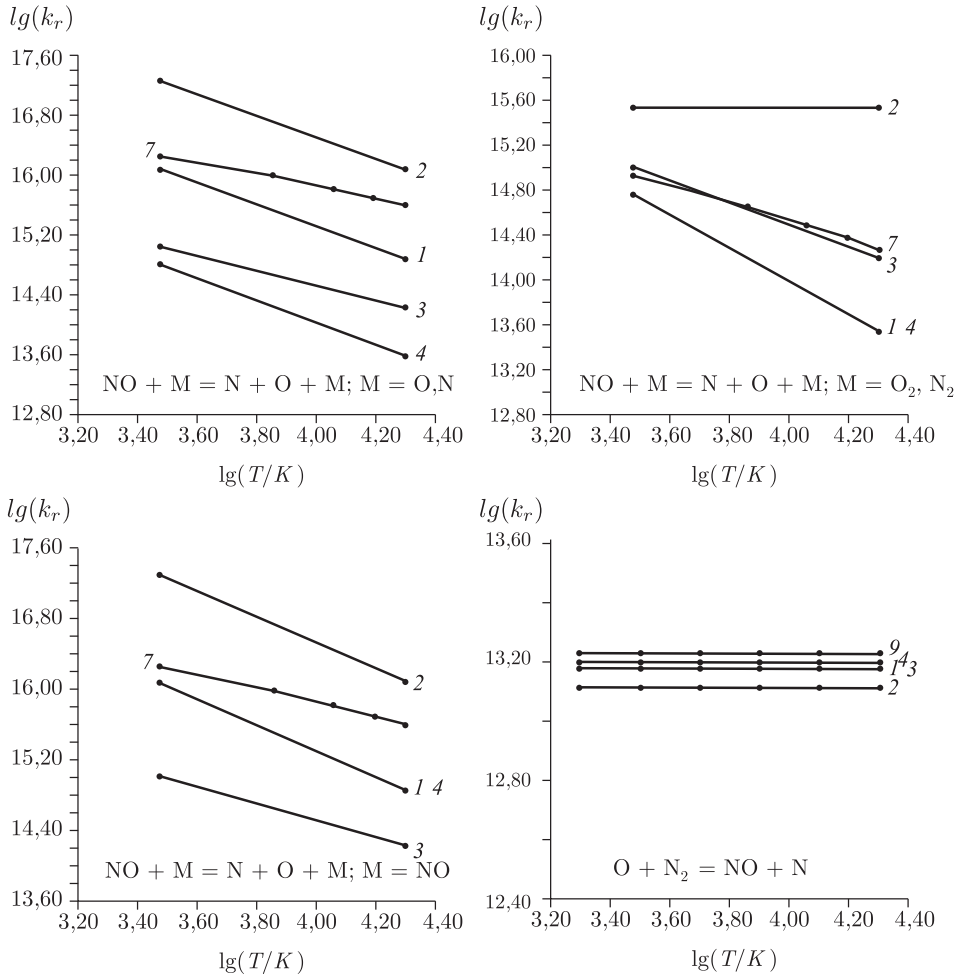


Рис. 13.3. Сравнение констант k_f, используемых в работе (кривая *1*) с данными других авторов для группы реакций 2.М

Сводка параметров констант скоростей реакций A, n, E, использованных в расчетах, приведена в табл. 13.1. На рис. 13.1–13.4 — значения k_r, рассчитанные на основе этих параметров (кривая *1*), сравниваются в диапазоне $3 \cdot 10^3 \leqslant T \leqslant 2 \cdot 10^4\,^\circ$K с данными, рекомендованными другими авторами (кривая *2* — данные работы [7], *3* — [9], *4* — [10], *5* — [12], *7,8* — [13, 14] *9* — [15]). При построении графиков для пересчета $k_r \to k_f$ использовались аппроксимационные выражения для K_c, приведенные в таблице 13.1.

Константы реакций диссоциации

$k_f = AT^n \exp(-E/\mathbf{R}\mathbf{a}T)$ $\quad [k_f] = \text{см}^3/\text{моль с}$; $\quad [T] = {}^\circ\,\text{K}$

Константы реакций обмена

$k_f = AT^n \exp(-E/\mathbf{R}\mathbf{a}T)$ $\quad [k_f] = \text{см}^3/\text{моль с}$; $\quad [T] = {}^\circ\,\text{K}$

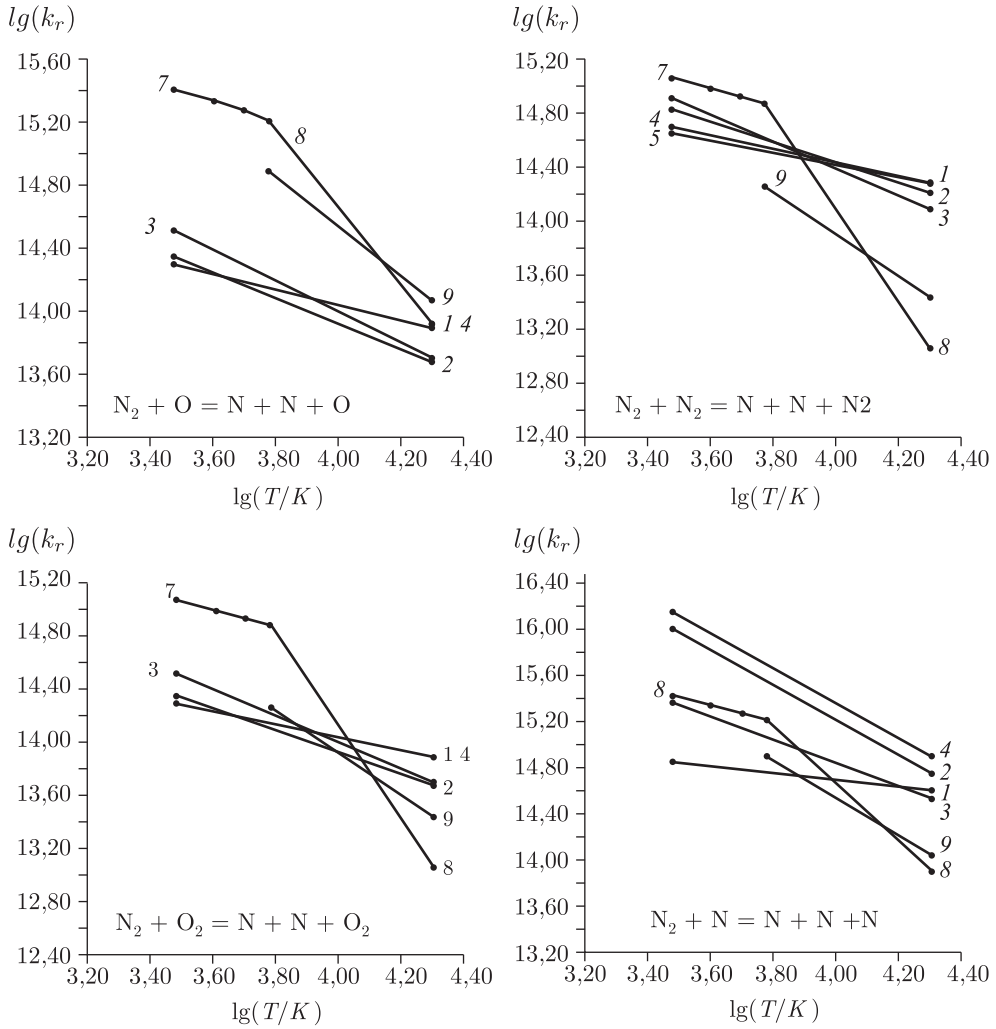


Рис. 13.4. Сравнение констант k_f, используемых в работе (кривая *1*) с данными других авторов для группы реакций 3.M

1.3. Термодинамические функции. Термодинамические функции компонентов смеси — молярная теплоемкость c_{pi} и энтальпия I_i, а также константы равновесия химических реакций K_c^J определяются через приведенный термодинамический потенциал Φ_i^* по формулам:

$$c_{pi} = \frac{dI_i}{dT}, \quad I_i = I_i(0) + T^2 \frac{d\Phi_i^*}{dT}, \tag{13.6}$$

$$K_c^{(j)} = (p_{\text{ст}}/\mathbf{Ra}T)^{r_J} \exp\left[\frac{1}{\mathbf{Ra}} \sum_i (\nu'_{ji} - \nu_{ji}) \left(\Phi_i^* - \frac{I_i(0)}{T}\right)\right],$$

где $p_{\text{ст}} = 1{,}013 \cdot 10^5$ Па; $r_j = \sum\limits_i^5 (\nu'_{ji} - \nu_{ji}) = \begin{cases} 1 & \text{для реакций 1.М–3.М} \\ 0 & \text{для реакций 4–6} \end{cases}$.

В принятой модели атомы рассматриваются как жесткие сферы, а молекулы описываются системой «жесткий ротатор–гармонический осциллятор». В этом случае выражения для $\Phi_i^*(T)$ имеет вид:

— для атомов:

$$\Phi_i^*(T) = \Phi_{0,i}^*(T) + 2{,}5\mathbf{Ra}\ln(T/10^4\,\text{K}),$$

— для молекул:

$$\Phi_i^*(T) = \Phi_{0,i}^*(T) + 3{,}5Ra\ln(T/10^4\,\text{K}) - \mathbf{Ra}\ln[1 - \exp(\theta_i/T)].$$

Значения параметров термодинамической модели $\Phi_i^*(T)$, θ_i, $I_i(0)$ заимствованы из [16] и приведены в табл. 13.2.

Таблица 13.2.

	Φ_i^* дж/моль град	θ_i °K	$I_i(0)$кдж/моль
O_2	278,80	2256	−8,56
O	213,48	—	242,4
N	205,34	—	466,36
NO	284,03	2722	81,27
N_2	264,67	3373	−8,56

1.4. Модель процессов молекулярного переноса. При гиперзвуковых скоростях обтекания толщина ударного слоя много меньше характерного размера тела, поэтому в поле течения преобладают поперечные градиенты его параметров. Это обстоятельство служит основой для построения приближенных подходов для описания течения в ударном слое. В настоящей постановке используется одна из самых распространенных моделей течения — модель вязкого ударного слоя (ВУС), основанная на следующих допущениях:

— молекулярный перенос массы, импульса и энергии учитывается только в направлении нормали к поверхности;

— пренебрегается молекулярным переносом нормальной составляющей импульса;

— ударная волна рассматривается как поверхность разрыва.

Расчет молекулярных потоков в направлении нормали $\mathbf{n}$ к поверхности тела проводится в приближении Навье–Стокса по формулам, в которых оставлены только наибольшие по порядку величины аддитивные составляющие: поток касательной к поверхности тела составляющей импульса:

$$\boldsymbol{\tau}_\alpha = -\mu\frac{d\mathbf{v}_\alpha}{dn}, \tag{13.7}$$

диффузионный поток (молярный) i-го компонента

$$K_i = -\sum_i D_{ij} \frac{d\gamma_j}{dn}, \tag{13.8}$$

диффузионный поток l-го химического элемента

$$\widetilde{K}_l = \sum_l \alpha_{li} K_i, \tag{13.9}$$

поток энергии

$$q = -\lambda \frac{dT}{dn} + \sum_i K_i I_i - \mu \frac{d}{dn} \left(\frac{\mathbf{v}_\alpha \cdot \mathbf{v}_\alpha}{2} \right). \tag{13.10}$$

Здесь $\mathbf{v}_\alpha$ — проекция вектора скорости $\mathbf{v}$ на плоскость, касательную к поверхности тела; μ, λ — коэффициенты вязкости и теплопроводности газовой смеси; D_{ij} — обобщенные коэффициенты диффузии; I_j — мольная энтальпия j-го компонента; $\gamma_i = c_i/m_i$; α_{li} — число атомов l-го элемента в i-ом компоненте.

Для вычисления коэффициентов вязкости $\mu(T, \gamma_i)$ и теплопроводности $\lambda(T, \gamma_i)$ используются приближенные формулы типа Уилке–Васильевой [17], аппроксимирующие формулы строгой кинетической теории газа [18]:

$$\begin{aligned} \mu &= \sum_i Sc_i(T) \gamma_i d_i m_i, \\ \lambda &= \sum_i \left(\left(\frac{15}{4} Sc_i - \frac{5}{2} \right) \mathbf{Ra} + c_{pi} \right) \gamma_i d_i, \end{aligned} \tag{13.11}$$

где c_{pi} — молярная теплоемкость при постоянном давлении i-го компонента;

$$d_i = \left(\sum_j \frac{\gamma_j m}{\rho D_{ij}} \right)^{-1}, \quad Sc_i(T) = \frac{\mu_i}{\rho D_{ii}},$$

D_{ii} — коэффициент бинарной диффузии.

Обобщенные коэффициенты диффузии D_{ij} определяются из соотношений Стефана–Максвелла [18], которые могут быть записаны в виде:

$$\sum_j \frac{1}{d_{ij}} \left(\gamma_i K_j - \gamma_j K_i \right) = \left(\frac{1}{m} \right) \frac{dm\gamma_i}{dn}, \quad i = 1 - 4, \tag{13.12}$$

$$\sum_j^{m_j} K_j = 0.$$

Значения $\rho D_{ij}/m$ вычисляются через интегралы столкновений $\Omega_{ij}^{(1,1)}(T)$ по формулам $[\Omega_{ij}^{(1,1)}(T)] = A^{\circ}$:

$$\frac{\rho D_{ij}}{m} = 2{,}63 \cdot 10^{-3}\mathbf{Ra}\frac{\sqrt{(m_i+m_j)/2m_im_jT}}{\Omega_{ij}^{(1,1)}(T)}\,\frac{\text{моль}}{\text{см с}}. \tag{13.13}$$

Для расчета интегралов столкновений необходимы данные о потенциалах упругого взаимодействия между компонентами смеси. Источником этих данных в рассматриваемой температурной области в настоящее время служат либо эксперименты по рассеянию быстрых атомных или молекулярных пучков на газовых мишенях, либо приближенные квантовомеханические расчеты. Подробный обзор работ, посвященных данному вопросу, содержится в [19, 20].

В принятой модели функции $\Omega_{ij}^{(1,1)}(T)$ и $Sc_i(T)$ аппроксимированы интерполяционными выражениями вида:

$$\begin{aligned} \Omega_{ij}^{(1,1)}(T) &= \left(a_{ij} - b_{ij}\ln\left(\frac{T}{10^4}\,\mathrm{K}\right)\right)^2, \\ Sc_i(T) &= \frac{0{,}808}{a_i + b_i\ln\left(\frac{T}{10^4}\,\mathrm{K}\right)}. \end{aligned} \tag{13.14}$$

Параметры этих формул вычислены по значениям $\Omega_{ij}^{(1,1)}(T)$ и $Sc_i(T)$ при $T1 = 2 \cdot 10^3$ и $T2 = 10^4$ K, которые в свою очередь выбраны путем критического анализа опубликованных данных по интегралам столкновений компонентов диссоциирующего воздуха.

Сводка опорных значений $\Omega_{ij}^{(1,1)}(T)$ и $Sc_i(T)$ для всех пар взаимодействующих частиц содержится в табл. 13.3–13.4. Для основных пар компонентов на рис. 13.5–13.7 проведено сопоставление принятых в настоящей работе значений $\Omega_{ij}^{(1,1)}(T)$ (кривая *1*) с рекомендациями других авторов, а именно: кривая *2* построена по данным работы [22], *3* — [21], *4* — [24], *5* —[23], *6* — [19, 20].

Таблица 13.3.

i	$Sc_i(T1)$	$Sc_i(T2)$
O_2	0,692	0,668
O	0,690	0,674
N	0,710	0,697
NO	0,694	0,674
N_2	0,694	0,674

Таблица 13.4.

$i-j$	$\Omega_{ij}^{(1,1)}(T1)$	$\Omega_{ij}^{(1,1)}(T2)$	Источник данных о потенциале
O_2-O_2	7,84	5,15	[23]
O_2-O	6,47	4,35	[21]
O_2-N	6,61	4,36	[21]
O_2-NO	8,37	5,89	[21]
O_2-N_2	8,50	6,00	оценка
$O-O$	5,27	3,34	[21]
$O-N$	5,52	3,25	[21]
$O-NO$	6,47	4,36	[21]
$O-N_2$	6,71	4,10	[23]
$N-N$	5,II	3,13	[21]
$N-NO$	6,64	4,28	[21]
$N-N_2$	6,48	3,72	[23]
$NO-NO$	8,44	5,82	[21]
$NO-N_2$	8,54	5,74	[21]
N_2-N_2	8,05	5,44	[23]

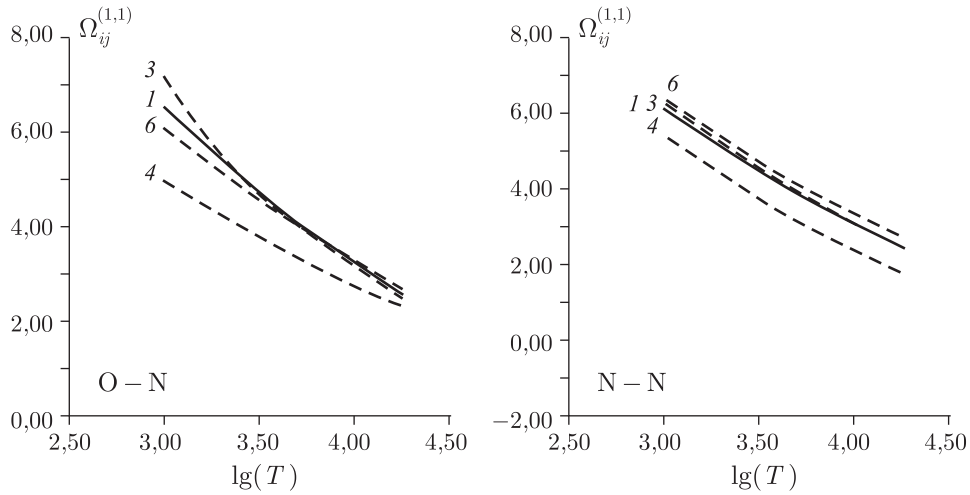


Рис. 13.5. Сопоставление принятых в работе значений $\Omega_{i,j}^{(1,1)}$ (кривая *1*) с рекомендациями других авторов для пар N–N, O–N

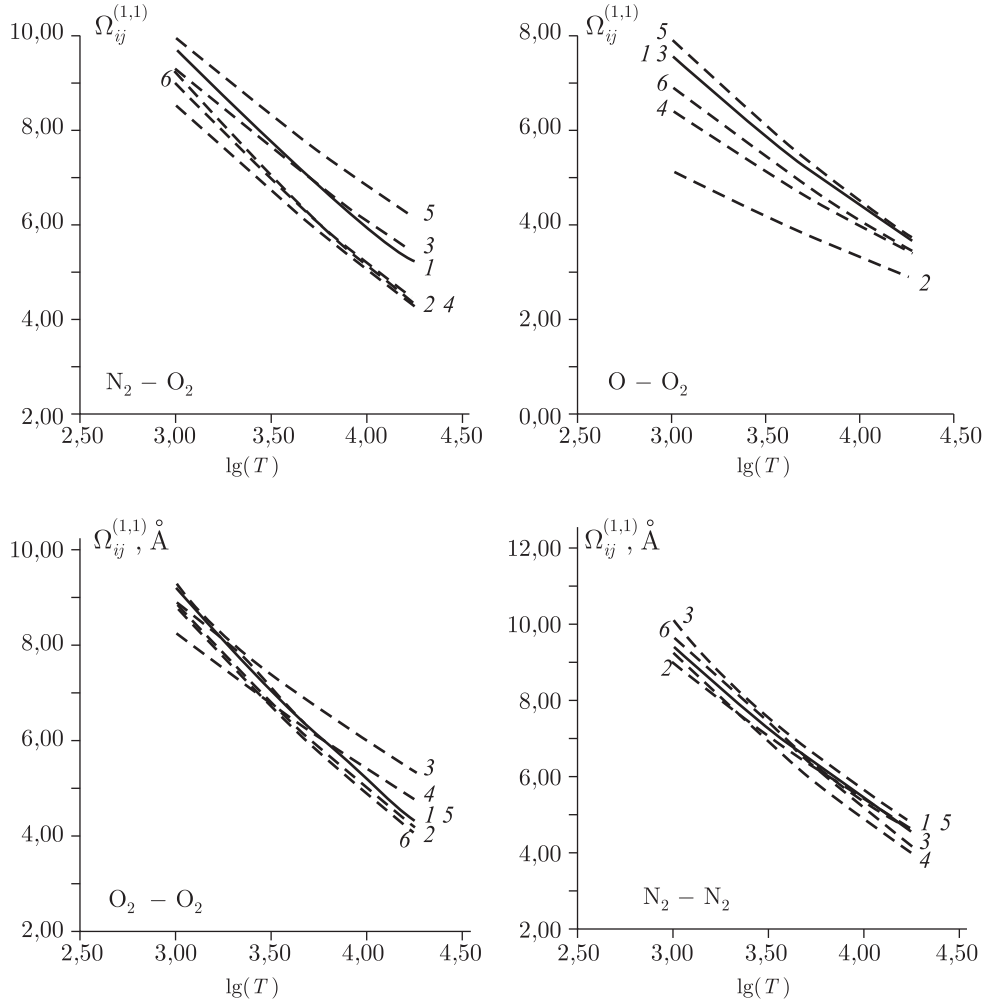


Рис. 13.6. Сопоставление принятых в работе значений $\Omega_{i,j}^{(1,1)}$ (кривая *1*) с рекомендациями других авторов для пар N_2–N_2, O_2–O_2, N_2–O_2, O–O_2

1.5. Модель гетерогенных процессов. Модель процессов взаимодействия газа с поверхностью обтекаемого тела построена на следующих основных предположениях:

1) поверхность тела непроницаема; в химических реакциях внешнее покрытие поверхности принимает участие только как катализатор;

2) в пристеночном слое (слое Кнудсена) функции распределения компонентов газа по скоростям определяются по балансовой методике [25];

3) коэффициенты аккомодации тепловой и внутренней энергии компонентов газовой смеси равны единице;

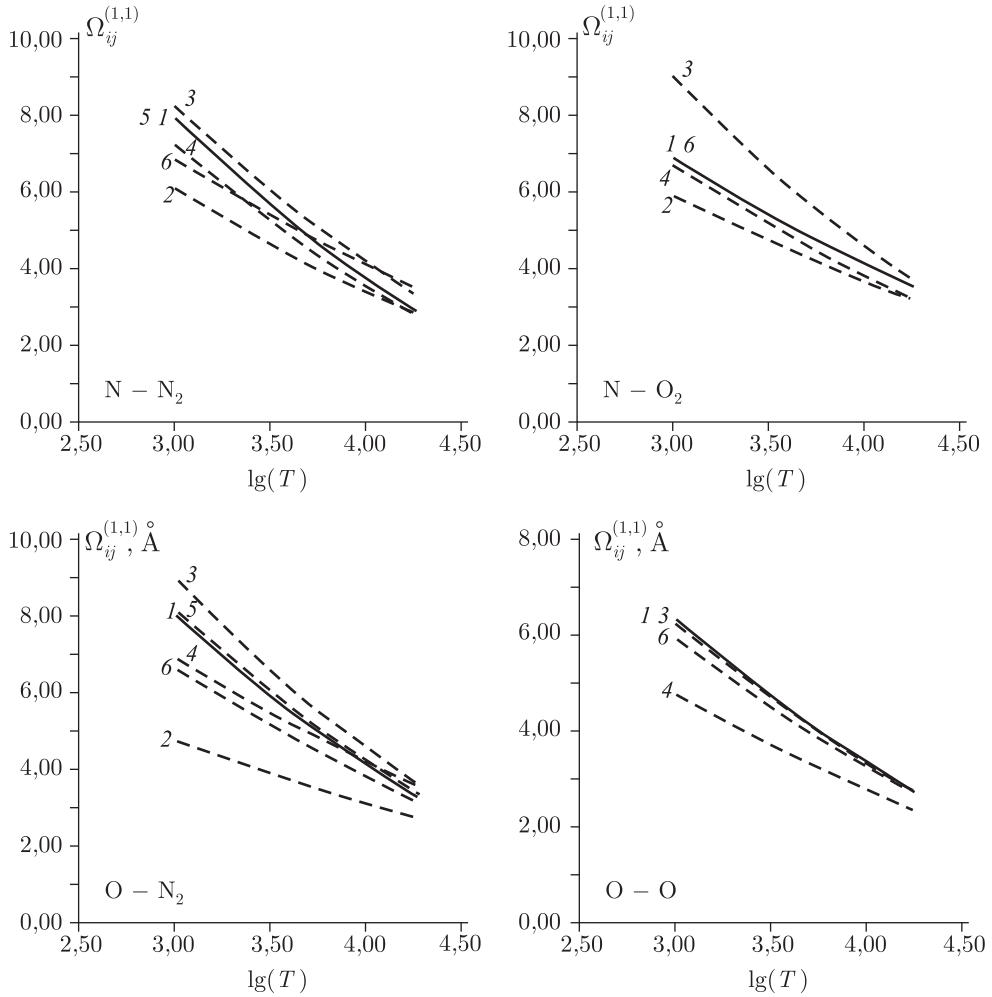


Рис. 13.7. Сопоставление принятых в работе значений $\Omega_{i,j}^{(1,1)}$ (кривая *1*) с рекомендациями других авторов для пар $N–N_2$, $O–N_2$, $N–O_2$, O–O

4) скорость гетерогенной рекомбинации радикалов описывается реакцией первого порядка с эффективным коэффициентом рекомбинации, зависящим только от температуры газа.

Предположения 1–3 приводят к следующим выражениям для определения скольжения и скачка температуры на поверхности, в которых оставлены наибольшие по порядку величины для рассматриваемого класса течений составляющие:

$$\mathbf{v}_\alpha = -\sqrt{\frac{\pi}{2\mathbf{Ra}T}}\,\frac{\boldsymbol{\tau}_\alpha}{\rho\sum\limits_i \sqrt{m_i}\,\gamma_i}, \tag{13.15}$$

$$T_w = T\frac{(1-\lambda/(2rT\mathbf{Ra})\cdot dT/dn)}{(1+(1/r)\sum\limits_i K_i)}, \tag{13.16}$$

$r = \rho\sqrt{\dfrac{2\mathbf{Ra}T}{\pi}}\sum\limits_i \dfrac{\gamma_i}{\sqrt{\mathrm{m}_i}}$, где T_w — температура поверхности тела.

Из предположения 4) следует, что скорость гетерогенной рекомбинации $\dot{\omega}_{w,i}$ определяется выражением $\dot{\omega}_{w,i} = -k_{w,i}(T)\rho\gamma_i$, i =O, N, NO.

Коэффициент рекомбинации $k_{w,i}$ непосредственно связан с эффективностью рекомбинации $\gamma_{w,i}$, определяемой как отношение числа рекомбинирующих частиц к общему числу частиц, падающих на единицу площади в единицу времени:

$$k_{w,i} = \gamma_{w,i}\sqrt{\frac{\mathbf{Ra}T}{2\pi m_i}}\,.$$

Величина $\gamma_{w,i}$ в первую очередь определяется материалом внешнего покрытия поверхности обтекаемого тела. Известно, что покрытия из меди и серебра, например, обладают значительно большей (на несколько порядков) эффективностью рекомбинации по сравнению с покрытиями из стекла и керамики [26–29].

Для придания определенных механических свойств, защиты от окисления и повышения излучательной способности внешняя поверхность высокотемпературной теплозащиты ВКС покрывается специальными стекловидными материалами. Вследствие значительного содержания кремнезема в этих материалах можно ожидать, что поверхность с таким покрытием будет обладать сравнительно низкой каталитической активностью по отношению к рекомбинации радикалов. Этот факт подтверждается как экспериментами в лабораторных условиях [30–33], так и данными натурных измерений тепловых потоков по ВКС «Space Shuttle» и «Буран» [34–36].

Следует отметить, что принятая модель гетерогенной рекомбинации имеет, по существу, полуэмпирический характер. Это означает, что входящие в неё параметры или функциональные зависимости должны быть определены из экспериментов (лабораторных или натурных), проводимых в условиях, адекватных исследуемой области параметров состояния газа.

2. Основные уравнения и метод решения задачи

2.1. Система координат. Предположим, что обтекаемое тело имеет плоскость симметрии Π^{sim} и вектор скорости набегающего потока $\mathbf{V}_\infty$ коллинеарен этой плоскости. Для описания течения в ударном слое около наветренной стороны поверхности тела (обозначим её S^{uw}) введем неподвижную декартову систему координат $\mathbf{r} = (x_1,\ x_2,\ x_3)$, ось x_1 которой параллельна продольной (например, строительной) оси тела, а плоскость $x_3 = 0$ совпадает с Π^{sim}. Для построения расчетной схемы введем также подвижную систему

координат (y_1, y_2, y_3), связанную с поверхностью тела и ударной волной. По предположению координаты (y_1, y_3) образуют на S^{uw} поверхностную систему координат (в общем случае неортогональную), причем линия $y_3 = 0$ лежит в плоскости Π^{sim}.

Линии $y_1 = \text{const}$ образуются сечением S^{uw} плоскостями $\Pi(y_1)$, ортогональными плоскости симметрии тела Π^{sim}. Координата y_1 задается соотношением $s_1 = L\eta_1(y_1)$, где s_1 — расстояние, измеренное вдоль контура сечения S^{uw} плоскостью Π^{sim} от некоторой точки этой линии до $\Pi(y_1)$, L — характерный размер тела, $\eta_1(y_1)$ — монотонно возрастающая функция «равномерной» переменной y_1 меняющейся в пределах от $y_1^{(1)}$ до $y_1^{(2)}$.

Координата y_3 точки, лежащей на контуре сечения S^{uw} плоскостью $\Pi(y_1)$, определяется соотношением

$$s_3 = s_3^{(2)}(y_1)\eta_3(y_1, y_3),$$

где s_3 — расстояние, измеренное вдоль контура сечения от Π^{sim} до рассматриваемой точки, $s_3^{(2)}(y_1)$ — измеренное таким же образом расстояние до некоторой характерной точки контура, $\eta_3(y_1, y_3)$ — монотонно возрастающая функция равномерной переменной $y_3 \in [0, y_3^2]$, в которую y_1 входит как параметр.

Координата y_2, значение которой меняется в пределах от 0 до 1, задается соотношением

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_b(y_1, y_3) + \varepsilon(t, y_1, y_3)\eta_2(y_2, \varsigma(t, y_1, y_3))\boldsymbol{\alpha}_2(y_1, y_3),$$

где $\mathbf{r}_b(y_1, y_3)$, $\boldsymbol{\alpha}_2(y_1, y_3)$, — соответственно радиус-вектор точки поверхности с координатами (y_1, y_3) и единичный вектор внешней нормали к поверхности в этой точке; $\varepsilon(t, y_1, y_3)$ — величина отхода ударной волны вдоль направления $\boldsymbol{\alpha}_2$; $\eta_2(y_2, \varsigma(t, y_1, y_3))$ — монотонно возрастающая функция y_2, удовлетворяющая условиям нормировки: $\eta_2(0, \varsigma) = 0$; $\eta_2(1, \varsigma) = 1$ и параметрически зависящая от t, y_1, y_3 через функцию ς.

Начиная с некоторого угла атаки $\alpha = \alpha_{\min}$, величина которого определяется формой поверхности, указанным выше способом можно построить на наветренной стороне поверхности обтекаемого тела невырожденную систему координат (рис. 13.8). В этом случае расчетная область на поверхности ограничивается линиями:

$$y_1 = y_1^{(1)}, \quad y_1 = y_1^{(2)}, \quad y_3 = 0, \quad y_3 = y_3^{(2)},$$

причем граничные линии одного семейства не пересекаются (область топологически эквивалентна квадрату). Граничные значения координат $y_1^{(1)}$, $y_1^{(2)}$, $y_3^{(2)}$ выбираются так, чтобы нормальная составляющая скорости протекания газа через соответствующие граничные поверхности вне области пограничного слоя превышала скорость звука («сверхзвуковые» границы).

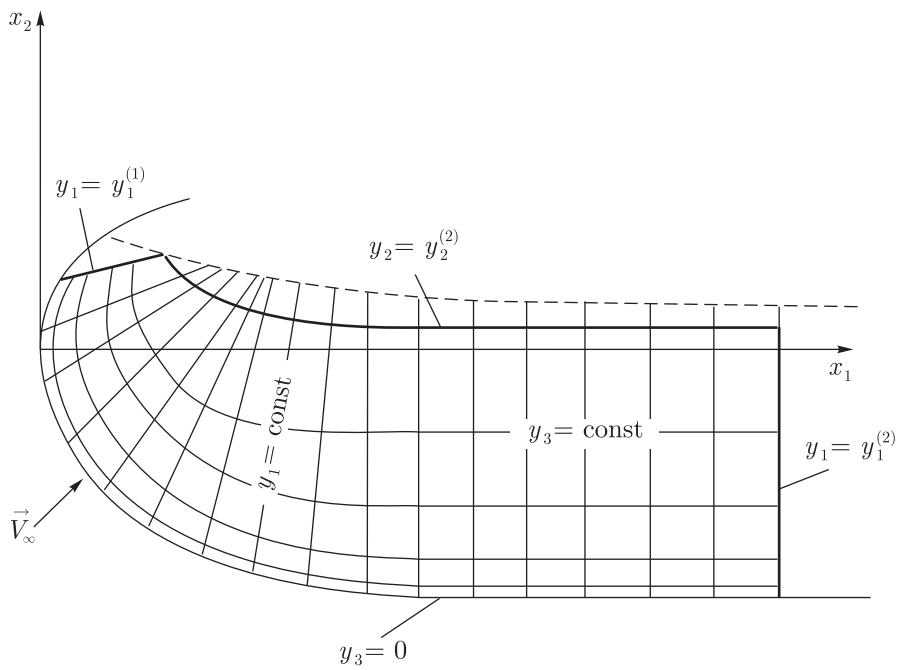


Рис. 13.8. Система координат на наветренной стороне поверхности ВКС

Использование нормалей к поверхности в качестве «пространственного» координатного направления ограничивает область применимости рассмотренной расчетной системы координат случаем, когда радиус нормальной кривизны вогнутых участков поверхности превышает локальные значения отхода ударной волны.

2.2. Основные уравнения. Пусть $\Omega(t)$ — некоторый шестигранник, образованный пересечением координатных поверхностей $y_m = y_{m,1}$; $y_m = y_{m,2}$; $y_{m,2} > y_{m,1}$ $m = 1, 2, 3$. Обозначим грани $\Omega(t)$, отвечающие поверхности $y_m = y_{m,j}$ символами $\Gamma_{m,j}$ Для построения численной модели течения в ударном слое воспользуемся системой параболизованных относительно направлений y_l, y_3 (в соответствии с п. 1.4) псевдонестационарных уравнений Навье–Стокса, записанных в форме законов сохранения для рассматриваемого шестигранника

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega} \mathbf{g} d\omega + \sum_{m=1}^{3}\left(\int\limits_{\Gamma m,2} \mathbf{a}^m d\sigma_m - \int\limits_{\Gamma m,1} \mathbf{a}^m d\sigma_m\right) + \int\limits_{\Omega} \mathbf{b} d\omega = 0. \qquad (13.17)$$

Для описанной в п.1 модели газа:

$$\begin{aligned}
\mathbf{g} &= \rho\mathbf{h}, \quad \mathbf{a}^m = \rho\mathbf{h}w_m + \boldsymbol{\eta}^m p, \quad m = 1,3,\\
\mathbf{a}^2 &= \rho\mathbf{h}(w_2 - w_\nu) + \mathbf{Q}^2 p + (\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{B}_2)\mathbf{Q},\\
\mathbf{h} &= \{1, v_1, v_2, v_3, I_0, \widetilde{\gamma}_{\mathrm{O}}, \gamma_{\mathrm{O}}, \gamma_{\mathrm{N}}, \gamma_{\mathrm{NO}}\},\\
\mathbf{Q}^m &= \{0, (\boldsymbol{\pi}_1\mathbf{B}_m), (\boldsymbol{\pi}_2\mathbf{B}_m), (\boldsymbol{\pi}_3\mathbf{B}_m), 0, \ldots, 0\}, \quad m = 1,2,3,\\
\mathbf{Q} &= \{0, \tau_1, \tau_2, \tau_3, q, \widetilde{\mathbf{K}}_{\mathrm{O}}\mathbf{K}_{\mathrm{O}}, \mathbf{K}_{\mathrm{N}}, \mathbf{K}_{\mathrm{NO}}\},\\
\mathbf{b} &= \{0, 0, 0, 0, 0, 0, -\dot{\omega}_{\mathrm{O}}, -\dot{\omega}_{\mathrm{N}}, -\dot{\omega}_{\mathrm{NO}}\},
\end{aligned}$$

$\boldsymbol{\pi}_m(\Omega)$, $m = 1,2,3$ — три взаимно ортогональных вектора, образующих в Ω локальный базис; ν_m — проекции вектора скорости $\mathbf{u}$ на вектора локального базиса; $\tau_m = (\boldsymbol{\tau}_a \cdot \boldsymbol{\pi}_m)$ — проекции вектора потока импульса $\boldsymbol{\tau}_a$ на вектора базиса; $\mathbf{B}_m$ — вектор нормали к поверхности $y_m = \mathrm{const}$, $w_m = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{B})_m$; $w_\nu = (\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{B}_2) \cdot \eta \cdot \varepsilon_t'$; $\dot{\omega}_i$ — скорость образования (молярная) i-го компонента в химических реакциях. Остальные обозначения приведены в п. 1.

Уравнения (13.17) содержат все невязкие члены уравнений Навье–Стокса и наибольшие из членов этих уравнений (для рассматриваемого класса течений), описывающих процессы молекулярного переноса.

2.3. Граничные условия. Решение задачи ищется в области, ограниченной ударной волной, поверхностью тела, плоскостью симметрии и линейчатой поверхностью, образованной нормалями к поверхности тела вдоль линий $y_1 = y_1^{(1)}$; $y_1 = y_1^{(2)}$; $y_3 = y_3^{(2)}$. Как уже говорилось, граничные значения координат y_1, y_3 выбираются так, что величина w_m вне пограничного слоя превышает локальную скорость звука v_s. На этой части граничной поверхности граничных условий не требуется. Однако в силу условий прилипания вблизи поверхности всегда существует область, где $w_m < v_s$, и для замыкания задачи здесь необходимы дополнительные условия. В настоящей постановке в качестве таковых используются общепринятые «мягкие» граничные условия экстраполяционного типа.

В плоскости симметрии используются условия симметричного или антисимметричного (в зависимости от четности функции) отображения. На поверхности тела замыкающие соотношения состоят из условия непроницаемости поверхности $\rho w_2 = 0$ и балансовых соотношений для импульса, энергии и массы химических элементов и компонентов, приведенных в п.1.

Значение параметров газа за ударной волной определяются из соотношений Ренкина–Гюгонио, которые могут быть записаны в виде: $\mathbf{a}^2 = \mathbf{a}^2_\infty$, где индекс ∞ обозначает, что компоненты вектора потоков $\mathbf{a}^2$ вычисляются по параметрам набегающего потока.

2.4. Дискретизация расчетной области. Разобьем расчетную область в переменных (y_1, y_2, y_3) на прямоугольные параллелепипеды (ячейки), определенные неравенствами

$$y_{1,i-1/2} \leqslant y_1 \leqslant y_{1,i+1/2}, \quad y_{1,i\pm1/2} = y^{(1)+(i-1/2\pm1/2)\Delta y_1} \quad i = 1, 2, \ldots, I, \tag{13.18}$$

$$\begin{aligned}
&y_{2,0} = 0 \leqslant y_2 \leqslant y_{2,1/2},\\
&y_{2,j-1/2} \leqslant y_2 \leqslant y_{2,j+1/2}, \quad y_{2,j\pm1/2} = (j \pm 1/2)\Delta y_2;\\
&j = 1, 2, \ldots, J-1, \quad \Delta y_2 = 1/J,\\
&y_{2,J-1/2} \leqslant y_2 \leqslant y_{2,J} = 1,
\end{aligned} \tag{13.19}$$

$$y_{3,k-1/2} \leqslant y_3 \leqslant y_3, \quad y_{3,k\pm1/2} = (k \pm 1/2)\Delta y_3; \quad k = 0, 1, 2, \ldots, K-1. \tag{13.20}$$

В физическом пространстве (x_1, x_2, x_3) ячейки (13.18)–(13.20) отображаются при $t = T_n$ на элементарные шестигранники, гранями которых в общем случае являются криволинейные поверхности, а координаты вершин определены соотношениями:

$$\mathbf{r}^n_{i\pm1/2,0,k\mp1/2} = (\mathbf{r}_b)_{i\pm1/2,k\pm1/2},$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}^n_{i\pm1/2,j\pm1/2,k\mp1/2} = (\mathbf{r}_b)_{i\pm1/2,k\pm1/2} +\\
+ \varepsilon^n_{i\pm1/2,k\pm1/2}(\eta_2)^n_{i\pm1/2,j\pm1/2,k\mp1/2}(\boldsymbol{\alpha}_2)_{i\pm1/2,k\pm1/2},
\end{aligned} \tag{13.21}$$

$$\begin{aligned}
&J = 1, 2, \ldots, J-1,\\
&\mathbf{r}^n_{i\pm1/2,j,k\mp1/2} = (\mathbf{r}_b)_{i\pm1/2,k\pm1/2} + \varepsilon^n_{i\pm1/2,k\pm1/2}(\boldsymbol{\alpha}_2)_{i\pm1/2,k\pm1/2},
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
&(\mathbf{r}_b)_{i\pm1/2,k\pm1/2} = \mathbf{r}_b(y_{1i\pm1/2}, y_{3,k\pm1/2}),\\
&\varepsilon^n_{i\pm1/2,k\pm1/2} = \varepsilon(T_n, y_{1,i\pm1/2,k\pm1/2}),\\
&(\eta_2)^n{}_{i\pm1/2,j\pm1/2,k\mp1/2} = \eta_2(y_{2,j\pm1/2}, \varsigma^n_{i\pm1/2,k\mp1/2}),\\
&\varsigma^n_{i\pm1/2,k\pm1/2} = \varsigma(T_n, y_{1,i\pm1/2,k\pm1/2}),\\
&(\boldsymbol{\alpha}_2)_{i\pm1/2,k\mp1/2} = (\boldsymbol{\alpha}_2)(y_{1,i\pm1/2}, y_{3,k\pm1/2}).
\end{aligned}$$

В дальнейшем элементарные шестигранники и их грани будем указывать мультииндексами (тройками сеточных индексов), являющимися средними арифметическими мультииндексов их вершин. Совокупность элементарных объемов, соответствующих паре фиксированных значений индексов i, k будем называть блоком и обозначать мультииндексом (i, k). Совокупность блоков, соответствующих фиксированному значению индекса i будем называть сегментом и указывать его этим индексом. Структура сегмента схематически показана на рис.13.9.

Наряду с (13.21) в области физических переменных (x_1, x_2, x_3) введем сетку с целочисленными номерами узлов, координаты которых определены следующими формулами:

$$\mathbf{r}^n{}_{i,j,k} = (\mathbf{r}_b)_{i,k} + \varepsilon^n_{i,k}\eta_2(y_{2,j}, \varsigma^n_{i,k})(\boldsymbol{\alpha}_2)_{i,k}; \tag{13.22}$$

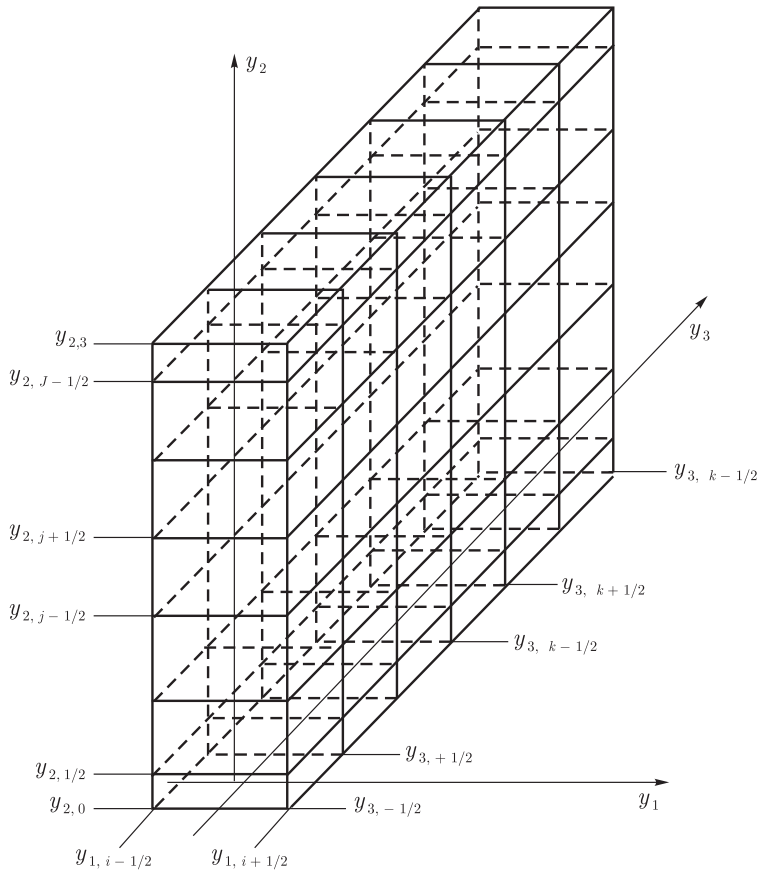


Рис. 13.9. Структура сегмента расчетной области

где

$$(\mathbf{r}_b)_{i,k} = 0{,}25[(\mathbf{r}_b)_{i-1/2,k-1/2} + (\mathbf{r}_b)_{i+1/2,k-1/2} + (\mathbf{r}_b)_{i-1/2,k+1/2} + (\mathbf{r}_b)_{i+1/2,k+1/2}],$$

$$(\boldsymbol{\alpha}_2)_{i,k} = \frac{\boldsymbol{\sigma}^2_{i,0,k}}{|\boldsymbol{\sigma}^2_{i,0,k}|},$$

$$\boldsymbol{\sigma}^2_{i,0,k} = 0{,}25[(\mathbf{r}_b)_{i-1/2,k+1/2} + (\mathbf{r}_b)_{i+1/2,k+1/2} - (\mathbf{r}_b)_{i-1/2,k-1/2} - (\mathbf{r}_b)_{i+1/2,k-1/2}]\times$$
$$\times\,[(\mathbf{r}_b)_{i+1/2,k+1/2} + (\mathbf{r}_b)_{i+1/2,k-1/2} - (\mathbf{r}_b)_{i-1/2,k-1/2} - (\mathbf{r}_b)_{i-1/2,k+1/2}],$$

$\varsigma^n_{i,k}$, $\varepsilon^n_{i,\,k}$ — сеточные функции, определяемые в процессе решения задачи. Значения сеточной функции f_h в узлах этой сетки будем обозначать $f_{i,j,k}$.

2.5. Система разностных уравнений. При использовании метода конечного объема разностная схема строится на основе законов сохранения, записанных для элементарных ячеек, на которые разбита расчетная область. Следуя этому принципу, применим уравнения (13.17) к построенным

шестигранникам (i, j_c, k), выбрав в качестве локального базиса в блоке (i, k) тройку векторов

$$\boldsymbol{\pi}_3 = (\boldsymbol{\alpha}_3)_{i,k}, \quad \boldsymbol{\pi}_2 = (\boldsymbol{\alpha}_2)_{i,k}, \quad \boldsymbol{\pi}_1 = (\boldsymbol{\alpha}_2 \times \boldsymbol{\alpha}_3)_{i,k}, \tag{13.23}$$

где $\boldsymbol{\alpha}_3$ — единичный вектор касательной к линии $y_1 = \mathrm{const}$ на поверхности тела. Заменив входящие в уравнения интегралы по объему ячеек и поверхности граней квадратурными формулами, а производные по t и n — разностными соотношениями, получим следующую систему разностных уравнений относительно значений компонентов вектора

$$\mathbf{Z}^{n+1}_{i,j,k} = (\rho, v_1, v_2, v_3, T, \gamma_{\mathrm{O2}}, \gamma_{\mathrm{O}}, \gamma_{\mathrm{N}}, \gamma_{\mathrm{NO}})^{n+1}_{i,j,k}$$

и отхода ударной волны $\varepsilon^{n+1}_{i,k}$:

$$\Omega_C \frac{\mathbf{q}^{n+1}_C - \mathbf{g}^n_C}{\tau_{i,k}} + \mathbf{g}^{n+1}_C \delta^2_C(\eta_2)(\boldsymbol{\alpha}_2\boldsymbol{\sigma}^2)_C \frac{\varepsilon^{n+1}_{i,k} - \varepsilon^n_{i,k}}{\tau_{i,k}} + (\sigma_1\boldsymbol{\alpha}^1)_{P1} - (\sigma_1\boldsymbol{\alpha}^1)_{M1} +$$
$$+ (\sigma_2\boldsymbol{\alpha}^2)_{P2} - (\sigma_2\boldsymbol{\alpha}^2)_{M2} + (\sigma_3\boldsymbol{\alpha}^3)_{P3} - (\sigma_3\boldsymbol{\alpha}^3)_{M3} + \Omega_C \mathbf{b}^{n+1}_C = 0. \tag{13.24}$$

Здесь $\tau_{i,k}$ — переменный от блока к блоку шаг по псевдовремени t, $\delta^2_C(\eta_2) = (\eta_2)_{P2} - (\eta_2)_{M2}$, $\boldsymbol{\sigma}^m$ — векторная площадь грани $y_m = \mathrm{const}$, векторная площадь грани $y_{\mathrm{т}} = \mathrm{const}$, $\sigma_m = |\boldsymbol{\sigma}^m|$, Ω_C — объем шестигранника. Символом C обозначен мультииндекс шестигранника, символами M_m и P_m — мультииндексы граней $\Gamma_{m,1}$ и $\Gamma_{m,2}$ соответственно.

Для каждой грани, не принадлежащей поверхности тела или ударной волне, определим «левое» (L) и «правое» (R) значения вектора

$$\mathbf{H} = (p, \rho, u_1, u_2, u_3, I_0, \widetilde{\gamma}_{\mathrm{O}}, \gamma_{\mathrm{O}}, \gamma_{\mathrm{N}}, \gamma_{\mathrm{NO}}),$$

вычисляемые с помощью линейной экстраполяции по значениям $\mathbf{H}$ в центрах ячеек, расположенных соответственно «слева» и «справа» от рассматриваемой грани. Например, для грани $(i + i/2, j_c, k)$ эти значения определяются так

$$\begin{aligned} \mathbf{H}^L_{i+1/2,j_c,k} &= 1{,}5\mathbf{H}^{n+l(1)}_{i,j_c,k} - 0{,}5\mathbf{H}^{n+l(1)}_{i-1,j_c,k}, \\ \mathbf{H}^R_{i+1/2,j_c,k} &= 1{,}5\mathbf{H}^{n+r(1)}_{i+1,j_c,k} - 0{,}5\mathbf{H}^{n+r(1)}_{i+2,j_c,k}. \end{aligned} \tag{13.25}$$

Для граней $y_2 = \mathrm{const}$ значения $1(2) = r(2) = 1$. Для остальных граней $l(m)$ и $r(m)$ принимает значения 0 или 1, выбор которых определяется структурой итерационного процесса решения уравнений, описанного ниже в п. 2.7. Формулы типа (13.24) применимы для граней, отстоящих от соответствующей границы не менее, чем на две ячейки. Для граней, не удовлетворяющих этому

условию, значения $\mathbf{H}^L$ и $\mathbf{H}^R$ вычисляются иным способом. Полагается

$$\begin{aligned}
&\mathbf{H}^L_{i\pm1/2,j_c,k} = \mathbf{H}^R_{i\pm1/2,j_c,k},\\
&\mathbf{H}^L_{I\pm1/2,j_c,k} = \mathbf{H}^R_{I\pm1/2,j_c,k},\\
&\mathbf{H}^L_{i,j_c,K-1\pm1/2} = \mathbf{H}^R_{i,j_c,K-1\pm1/2},\\
&\mathbf{H}^L_{i,1/2,k} = 0{,}5(\mathbf{H}^{n+1}_{i,0,k} + \mathbf{H}^{n+1}_{i,1,k}),\\
&\mathbf{H}^R_{i,J-1/2,k} = 0{,}5(\mathbf{H}^{n+1}_{i,J-1,k} + \mathbf{H}^{n+1}_{i,J,k}).
\end{aligned} \tag{13.26}$$

Значения $\mathbf{H}_{i,j_\pm1/2,\pm1/2}$ вычисляются по формуле (13.25) с использованием четного или нечетного продолжения компонентов $\mathbf{H}$ на узлы $(i,j,-1),(i,j,-2)$. Удельные (отнесенные к единице площади) потоки $\mathbf{a}^m$ через грани находятся по значениям $\mathbf{H}^R$ и $\mathbf{H}^L$ с помощью линейных интерполяционных формул. «Конвективные» составляющие потоков — $(\rho,\mathbf{h})$ вычисляются по скалярной интерполяционной формуле с коэффициентом интерполяции ψ, зависящим в основном от направления потока через рассматриваемую грань:

$$\left(\frac{\rho}{\mathbf{h}}\right)_G = (1-\psi_G)\left(\frac{\rho}{\mathbf{h}}\right)^L_G + \psi_G\left(\frac{\rho}{\mathbf{h}}\right)^R_G, \tag{13.27}$$

где

$$\begin{aligned}
&\psi_G = 0{,}5\left(1 - \frac{M^L_G + M^R_G}{|M^L_G| + |M^R_G|}\right),\\
&M^L_G = \frac{w^L_G}{v^L_{s,G}}, \qquad M^R_G = \frac{w^R_G}{v^R_{s,G}},\\
&w^L_G = (\boldsymbol{\beta}\mathbf{u}^L)_G, \qquad w^R_G = (\boldsymbol{\beta}\mathbf{u}^R)_G,\\
&-v^L_{l,G} = (\boldsymbol{\pi}_{l,C}\mathbf{u}^L_G), \quad v^R_{l,G} = (\boldsymbol{\pi}_{l,C}\mathbf{u}^R_G)\ \mathrm{l}{=}1,\ 2,\ 3.
\end{aligned} \tag{13.28}$$

Символом G обозначен мультииндекс грани, $\boldsymbol{\beta}_G$ — вектор нормали к ней, v_s скорость звука, вычисляемая по формуле $v_s = \sqrt{\kappa_{fr}p/\rho}$, где κ_{fr} показатель адиабаты при «замороженном» составе газа.

«Дивергентные» составляющие потоков w и p вычисляются по векторной формуле осреднения:

$$\left(\frac{w}{p}\right)_G = (E - A_G)\left(\frac{w}{p}\right)^L_G + A_G\left(\frac{w}{p}\right)^R_G, \tag{13.29}$$

где E — единичная матрица, A_G — весовая матрица, компоненты которой зависят от параметров с индексами L, R следующим образом:

$$\mathbf{A}_g = \begin{bmatrix} \varphi_{G,} & -\dfrac{\chi_G}{\rho_G v_{s,G}} \\ -\dfrac{\chi_G}{\rho_G v_{s,G}}, & \varphi_G \end{bmatrix}, \tag{13.30}$$

$$\varphi_G = \begin{bmatrix} \varphi^{LR}_G & \text{при } \left|0{,}5 - \varphi^{LR}_G\right| \leqslant \left|0{,}5 - \varphi^{RL}_G\right| \\ \varphi^{RL}_G & \text{при } \left|0{,}5 - \varphi^{LR}_G\right| > \left|0{,}5 - \varphi^{RL}_G\right| \end{bmatrix}, \tag{13.31}$$

$$\varphi_G^{LR} = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & \text{при } M_G^L > 1 \\ \dfrac{1 - M_G^L}{2 + M_G^{\mathrm{R}} - M_G^L} & \text{при } M_G^L < 1,\ M_G^{\mathrm{R}} \leqslant -1 \\ 1 & \text{при } M_G^R \leqslant -1 \end{array} \right\}, \tag{13.32}$$

$$\chi_G = (1 - \psi_G)\varphi_G + \psi_G(1 - \varphi_G^{)}; v_{s,G} = 0{,}5(v_{s,G}^L + v_{s,G}^R).$$

Выражение для φ_G^{LR} получается из (13.32) перестановкой индексов L и R.

Используемый в работе способ вычисления потоков через границы объемов является обобщением этой процедуры в «методе потоков» [37], в котором несимметричная аппроксимация применяется при вычислении только конвективных (экстенсивных по [37]) величин, а дивергентные (интенсивные) параметры потока вычисляются по симметричным формулам (осреднением по соседним ячейкам с весом 1/2). Применение несимметричных формул и для дивергентных величин сближает предложенную схему со схемами «распадного» типа [38, 39], в которых значение потоков на границах определяется из решения (точного или приближенного) задачи о распаде разрыва, характеризуемого параметрами $\mathbf{H}^L$ и $\mathbf{H}^R$.

При выбранном локальном базисе «вязкая» составляющая потока импульса через грани $(i, j + 1/2, k)$, $j = 0, 1, \ldots, J - l$ в проекции на $\boldsymbol{\pi}_2$ по порядку величины сравнима с погрешностью аппроксимации разностных уравнений и может быть опущена. Остальные компоненты вектора вязких потоков $\mathbf{Q}_{i,j\pm1/2,k}$ аппроксимируются с помощью формул вида:

$$\begin{aligned} &(\mu \frac{\partial f}{\partial n})_{i,j+1/2,k} = \mu(Z_{i,j+1/2,k}) \frac{1}{\varepsilon_{i,k}} \frac{f_{i,j+1,k} - f_{i,j,k}}{(\eta_2)_{i,j+1,k} - (\eta_2)_{i,j,k}}, \\ &Z_{i,j+1/2,k} = 0{,}5(Z_{i,j+1,k} + Z_{i,j,k}). \end{aligned} \tag{13.33}$$

Потоки через грани, принадлежащие поверхности или ударной волне, вычисляются с использованием балансовых соотношений на этих границах. На поверхности тела:

$$\begin{gathered} \mathbf{a}_{i,0,k}^2 = \{0, -r_1 v_1, p, -r_1 v_3, -\varepsilon_s \sigma_s T_w^4, 0, -\dot{\omega}_{w,O}, -\dot{\omega}_{w,N}, -\dot{\omega}_{w,NO}\}, \\ r_1 = \rho \sum_i \frac{m_i \gamma_i}{\sqrt{\pi/2 \mathbf{Ra} T}}. \end{gathered} \tag{13.34}$$

На ударной волне

$$\mathbf{a}_{i,J,k}^2 = (\mathbf{a}_\infty^2)_{i,k}. \tag{13.35}$$

2.6. Метрические коэффициенты. Метрические параметры элементарных шестигранников — площади граней $\boldsymbol{\sigma}^m = \sigma_m \cdot \boldsymbol{\beta}_m$, $m = 1, 2, 3$ и объем Ω_C вычисляются по формулам:

векторные площади «боковых граней»:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}_{G1}^1 &= \delta_{G1}^2(\eta_2)\varepsilon_{S1}(\boldsymbol{\alpha}_2)_{S1} \times (\delta_{s1}^3(\mathbf{r}_b) + (\eta_2)_{G1}\varepsilon_{S1}\delta_{s1}^3(\boldsymbol{\alpha}_2)_{S1}), \\ \boldsymbol{\sigma}_{G3}^3 &= -\delta_{G3}^2(\eta_2)\varepsilon_{s3}(\boldsymbol{\alpha}_2)_{S3} \times (\delta_{s3}^3(\mathbf{r}_b) + (\eta_2)_{G3}\varepsilon_{S3}\delta_{s_3}^3(\boldsymbol{\alpha}_2)_{S3}). \end{aligned} \tag{13.36}$$

Здесь

$$G1 = \left(i \pm \frac{1}{2}, j_c, k\right), \quad G3 = \left(i, j_c, k \pm \frac{1}{2}\right); \quad j_c = \frac{j_d + j_u}{2},$$

j_d, j_u — значения второго разностного индекса для «нижней » и «верхней» граней шестигранника соответственно;

$$S_1 = \left(j \pm \frac{1}{2}, k\right), \qquad S_3 = \left(i, k \pm \frac{1}{2}\right);$$

$$\left.\begin{aligned}
f_{S1} &= 0{,}5(f_{i\pm1/2,k-1/2} + f_{i\pm1/2,k+1/2}),\\
f_{S3} &= 0{,}5(f_{i-1/2,k\pm1/2} + f_{i+1/2,k\pm1/2}),\\
\delta^3_{S1} f &= f_{i\pm1/2,k+1/2} - f_{i\pm1/2,k-1/2},\\
\delta^1_{S3} f &= f_{i+1/2,k\pm1/2} - f_{i-1/2,k\pm1/2},
\end{aligned}\right\} \quad f = \mathbf{r}_b, \boldsymbol{\alpha}_2.$$

$$(\eta_2)_{G1} = 0{,}5\big(\eta_2(y_{2,j_D}, \varsigma_{S1}) + \eta_2(y_{2,j_U}, \varsigma_{S1})\big),$$
$$(\eta_2)_{G3} = 0{,}5\big(\eta_2(y_{2,j_D}, \varsigma_{S3}) + \eta_2(y_{2,j_U}, \varsigma_{S3})\big).$$

Значения ε_{Sm} и ζ_{Sm} вычисляются аналогично составляющим вектора потоков α:

$$\left.\begin{aligned}
f_{S1} &= (1 - \varphi_{W1}) f^L_{S1} + \varphi_{W1} f^R_{S1},\\
f_{S3} &= (1 - \varphi_{W3}) f^L_{S3} + \varphi_{W3} f^R_{S3},
\end{aligned}\right\} f = \varepsilon, \varsigma, \tag{13.37}$$

$$W_1 = \left(i \pm \frac{1}{2}, J - \frac{1}{2}, k\right), \quad W_3 = \left(i, J - \frac{1}{2}, k \pm \frac{1}{2}\right).$$

Функция φ_{Wm} определена формулой (13.31); величины f^L и f^R находятся по значениям $f_{i,j,k}$ с помощью линейных экстраполяционных формул (13.25)–(13.26).

Векторные площади $\boldsymbol{\sigma}^2$ «нижней» и «верхней» граней определяются с помощью рекуррентного соотношения, следующего из условия замкнутости поверхности шестигранника:

$$\boldsymbol{\sigma}^2_{i,j_U,k} = \boldsymbol{\sigma}^2_{i,j_d,k} + \boldsymbol{\sigma}^2_{i-1/2,j_c,k} - \boldsymbol{\sigma}^1_{i+1/2,j_c,k} + \boldsymbol{\sigma}^3_{i,j_c,k-1/2} - \boldsymbol{\sigma}^3_{i,j_c,k+1/2}, \tag{13.38}$$

$$\begin{aligned}
j_c &= \frac{j_d + j_u}{2},\\
j_u &= \frac{1}{2}, \quad \frac{3}{2}, \ldots, J - \frac{1}{2}, \quad J,\\
j_d &= 0, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{3}{2}, \ldots, J - \frac{1}{2},
\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{\sigma}^2_{i,0,k} = ((\mathbf{r}_b)_{i,k+1/2} - (\mathbf{r}_b)_{i,k-1/2}) \times ((\mathbf{r}_b)_{i+1/2,k} - (\mathbf{r}_b)_{i-1/2,k}),$$
$$(\mathbf{r}_b)_{i,k\pm1/2} = 0{,}5\big((\mathbf{r}_b)_{i-1/2,k\pm1/2} + (\mathbf{r}_b)_{i+1/2,k\pm1/2}\big),$$

где

$$(\mathbf{r}_b)_{i\pm1/2,k} = 0{,}5\big((\mathbf{r}_b)_{i\pm1/2,k-1/2} + (\mathbf{r}_b)_{i\pm1/2,k\pm1/2}\big).$$

Значение Ω_C вычисляется по формуле объема призмы:

$$\Omega_C = \varepsilon_{i,k}\delta_C^2(\eta_2)(\boldsymbol{\sigma}_C^2, (\boldsymbol{\alpha}_2)_{i,k}),$$

где $\delta_C^2(\eta_2) = \eta_2(y_{2,j_u}, \varsigma_{i,k}) - \eta_2(y_{2,j_d}, \varsigma_{i,k})$,

$$\boldsymbol{\sigma}_C^2 = 0{,}5(\boldsymbol{\sigma}_{i,j_u,k}^2 + \boldsymbol{\sigma}_{i,j_d,k}^2).$$

Построенная разностная схема консервативна по массе, импульсу и энергии и имеет на «гладких» сетках второй порядок аппроксимации по всем пространственным переменным.

2.7. Регуляризация разностных уравнений. Уравнения (13.24) запишем в виде:

$$F_{i,j_c,k} = 0, \tag{13.39}$$

$i = 1, 2, \ldots, l,\ j_c = 1/4, 1, 2, \ldots, J-1,\ J-1/4,\ k = 0, 1, \ldots, K-1.$

Вместе с граничными условиями на поверхности тела и ударной волне уравнения (13.39) образуют систему, состоящую из $N = I \times K \times ((J+1)9+8+9)$ уравнений относительно неизвестных $I \times K \times ((J+1)9+1+2x7) < N$ компонентов векторов $\mathbf{Z}_{i,j,k}$, $\mathbf{Q}_{i,0,k}$, $\mathbf{Q}_{i,J,k}$ и $\varepsilon_{i,k}$. Для регуляризации переопределенной системы выполним следующие преобразования:

1) Вместо $2 \times I \times K \times 9$ уравнений для элементарных объемов $\Omega_{i,J-1/4,k}$ и $\Omega_{i,J-1,k}$ введем $I \times K \times 9$ уравнений для ячеек $\Omega_{i,J-3/4,k} = \Omega_{i,J-1/4,k} + \Omega_{i,J-1,k}$:

$$F_{i,J-3/4,k} = F_{i,J-1/4,k} + F_{i,J-1,k} = 0. \tag{13.40}$$

и квазихарактеристическое уравнение для ячеек $\Omega_{i,J-1/4,k}$

$$F_{i,J-1/4,k}^{+} = \sum_{l=1}^{3} (\boldsymbol{\pi}_l)_{i,k} \cdot (\boldsymbol{\beta}_2)_{i,J-1/2,k}(F_{l+1})_{i,J-1/4,k} + (v_s - w_2)_{i,J-1/2,k}(F_1)_{i,J-1/4,k} = 0, \tag{13.41}$$

2) Для вычисления $Q_{i,J,k}$ применим формулу линейной экстраполяции

$$Q_{i,J,k} = 1{,}5Q_{i,J-1/2,k} - 0{,}5Q_{i,J-3/2,k}, \tag{13.42}$$

3) $2 \times (I \times K \times 9)$ уравнений для ячеек $\Omega_{i,1/4,k}$ и $\Omega_{i,1,k}$ заменим на $I \times K \times 9$ балансовых соотношений для ячеек $\Omega_{i,3/4,k} = \Omega_{i,1/4,k} + \Omega_{i,1,k}$:

$$F_{i,3/4,k} = F_{i,1/4,k} + F_{i,1,k} = 0, \tag{13.43}$$

и $I \times K \times 8$ квазихарактеристических уравнений для ячеек $\Omega_{i,1/4,k}$:

$$(F_2^{-})_{i,1/4,k} = \sum_{l=1}^{3} (\boldsymbol{\pi}_l)_{i,k} \cdot (\boldsymbol{\beta}_2)_{i,1/2,k}(F_{l+1})_{i,1/4,k} - (v_s + \mathrm{w}_2)_{i,1/2,k}(F_1)_{i,1/4,k} = 0, \tag{13.44}$$

$$(F_\nu^-)_{i,1/4,k} = (F_{\nu+1})_{i,1/4,k} - (h_{\nu+1})_{i,1/2,k}(F)_{i,1/4,k}, \quad \nu = 1, 3, 4, \ldots, 8. \quad (13.45)$$

Как показал опыт расчетов, описанное преобразование вместе с соотношением (13.26) обеспечивает корректность построенной разностной схемы в широком диапазоне определяющих параметров.

2.8. Организация расчета поля течения. Расчет поля течения в ударном слое проводится в два последовательных этапа. На первом этапе находится решение в области затупления ($l < i < i_1$), на втором — около боковой поверхности тела ($i_1 < i < I$).

Решение в области затупления находится в процессе глобальных итераций методом последовательной блочной релаксации. В качестве параметра релаксации используется шаг по псевдовремени $\tau_{i,k}$. Переход $n \Leftrightarrow n+1$ осуществляется последовательно по блокам, в которые объединены уравнения для элементарных объемов, расположенных вдоль нормали к поверхности. Блоки обходятся последовательно по сегментам, начиная от сегмента $i = i_b$, проходящего вблизи передней критической точки, сначала в направлении возрастания номера сегмента ($i = i_b,\ i_b + l, \ldots, i_i$), затем — в обратном направлении ($i = i_b - l,\ i_b - 2, \ldots, l$). При обходе в прямом направлении для $i > i_b$ в формулах (13.25) полагается $l(1)l,\ r(l) = 0$, в обратном — $l(1) = 0$, $r(l) = 1$. В начальном сегменте ($i = i_b$) $l(1) = r(l) = 0$.

В каждом сегменте блоки обходятся в одном направлении — направлении возрастания значения индекса k. Соответственно полагается $l(3) = r(3) = 0$ при $k = 0$, $l(3) = 1$, $r(3) = 0$ при $k > 0$.

Для ускорения итерационного процесса используется переменный от блока к блоку шаг по времени. Величина шага, постоянного внутри блока, определяется из условия типа КФЛ для возмущений, распространяющихся вдоль ударного слоя в направлении, противоположном направлению обхода блоков. Сходимость итераций контролируется по максимальному в расчетной области относительному изменению на шаге параметров течения.

Расчет поля течения около боковой поверхности тела проводится с помощью обобщенной маршевой процедуры. Реализация этой процедуры сводится к нахождению решения в узких перекрывающихся областях ($i_p - 1 < i < i_p - 1$), последовательно смещающихся вдоль тела на одно сечение. Решение в каждой локальной области находится с помощью описанного выше метода последовательной блочной релаксации с постоянным (вдоль тела) направлением обхода. Ширина локальной области (количество «счетных» сечений) выбирается из условия подавления роста возмущений, вызванного некорректностью маршевого счета в дозвуковой зоне течения вблизи поверхности. Проведенные методические исследования показали, что даже при больших углах атаки достаточно использовать локальные поля шириной в 2–3 счетных сегмента. Маршевая процедура начинается с $i_p = i_1 + 1$, т. е. с поля, полученного в результате глобальных итераций в области затупления. При продвижении локальной области на один сегмент вдоль тела в качестве начального

распределения параметров в этом сегменте используется результат линейной экстраполяции по двум предыдущим сегментам.

2.9. Решение уравнений блока. Как следует из предыдущего пункта, полученная система разностных уравнений расщепляется на последовательно решаемые подсистемы (блоки) со следующей структурой (здесь и далее опущены разностные индексы, соответствующие координатам y_1, y_3 и псевдовремени):

$$\begin{aligned}
&G_{w,l}(Z_0, Z_1, Z_2, \varepsilon) = 0, \quad l = 1, 2, \ldots, 9,\\
&F_{l,3/4}(Z_0, Z_1, Z_2, \varepsilon) = 0, \quad l = 1, 2, \ldots, 9,\\
&F_{l,j}(Z_{j-2}, Z_{j-1}, Z_j, Z_{j+1}, Z_{j+2}) = 0,\ l=1, 2, \ldots, 9,\ j=2, 3, \ldots, J-2,\\
&F_{l,j-3/4}(Z_{J-3}, Z_{J-2}, Z_{J-1}, Z_J, \varepsilon) = 0, \quad l = 1, 2, \ldots, 9,\\
&G_{S,l}(Z_{J-2}, Z_{J-1}, Z_J, \varepsilon) = 0, l = 1, 2, \ldots, 10,
\end{aligned} \tag{13.46}$$

2.9. Решение уравнений блока. Для решения уравнений (13.45) используется итерационная процедура, основанная на сочетании простых итераций с методом Ньютона. С целью сокращения объема вычислений система (13.45) разбивается на две группы уравнений, соответствующих значениям $l = l \div 4$, $l = 5 \div 9$. Первая группа уравнений приближенно линеаризуется относительно значений $Z^{(1)} = (\rho, v_1, v_2, v_3)$ и ε, полученных в предыдущей итерации, вторая — относительно значений $Z^{(2)} = (T, \gamma_{\mathrm{O}_2}, \gamma_{\mathrm{O}}, \gamma_{\mathrm{N}}, \gamma_{\mathrm{NO}})$.

Линеаризованные уравнения имеют блочную структуру следующего вида:

первая группа уравнений

$$\begin{aligned}
&A_{0,0}\delta\mathbf{Z}_0^{(1)} + A_{0,1}\delta\mathbf{Z}_1^{(1)} + A_{0,2}\delta\mathbf{Z}_2^{(1)} + \mathbf{a}_{0,\varepsilon}\delta\varepsilon + \mathbf{a}_0 = 0,\\
&A_{1,0}\delta\mathbf{Z}_0^{(1)} + A_{1,1}\delta\mathbf{Z}_1^{(1)} + A_{1,2}\delta\mathbf{Z}_2^{(1)} + A_{1,3}\delta\mathbf{Z}_3^{(1)} + \mathbf{a}_{1,\varepsilon}\delta\varepsilon + \mathbf{a}_1 = 0,\\
&A_{j,j-2}\delta\mathbf{Z}_{j-2}^{(1)} + A_{j,j-1}\delta\mathbf{Z}_{j-1}^{(1)} + A_{j,j}\delta\mathbf{Z}_j^{(1)} + A_{j,j+1}\delta\mathbf{Z}_{j+1}^{(1)} +\\
&\qquad + A_{j,j+2}\delta\mathbf{Z}_{j+2}^{(1)} + \mathbf{a}_{j,\varepsilon}\delta\varepsilon + \mathbf{a}_j = 0, \quad j = 2, 3, \ldots, J-2,\\
&A_{J-1,J-3}\delta\mathbf{Z}_{J-3}^{(1)} + A_{J-1,J-2}\delta\mathbf{Z}_{J-2}^{(1)} + A_{J-1,J-1}\delta\mathbf{Z}_{J-1}^{(1)} +\\
&\qquad + A_{J-1,J}\delta\mathbf{Z}_J^{(1)} + \mathbf{a}_{J-1,\varepsilon}\delta\varepsilon + \mathbf{a}_{J-1} = 0,\\
&A_{J,J-2}\delta\mathbf{Z}_{J-2}^{(1)} + A_{J,J-1}\delta\mathbf{Z}_{J-1}^{(1)} + A_{J,J}\delta\mathbf{Z}_J^{(1)} + \mathbf{a}_{J,\varepsilon}\delta\varepsilon + \mathbf{a}_J = 0,
\end{aligned} \tag{13.47}$$

вторая группа уравнений

$$B_{0,0}\delta\mathbf{Z}_0^{(2)} + B_{0,1}\delta\mathbf{Z}_1^{(2)} + B_{0,2}\delta\mathbf{Z}_2^{(2)} + \mathbf{b}_0 = 0,$$

$$B_{1,0}\delta\mathbf{Z}_0^{(2)} + B_{1,1}\delta\mathbf{Z}_1^{(2)} + B_{1,2}\delta\mathbf{Z}_2^{(2)} + B_{1,3}\delta\mathbf{Z}_3^{(2)} + \mathbf{b}_1 = 0,$$

$$\begin{aligned} &B_{j,j-2}\delta\mathbf{Z}_{j-2}^{(2)} + B_{j,j-1}\delta\mathbf{Z}_{j-1}^{(2)} + B_{j,j}\delta\mathbf{Z}_{j}^{(2)} + B_{j,j+1}\delta\mathbf{Z}_{j+1}^{(2)} + \\ &\qquad + B_{j,j+2}\delta\mathbf{Z}_{j+2}^{(2)} + \mathbf{b}_j = 0,\ j = 2, 3, \ldots, J-2, \\ &B_{J-1,J-3}\delta\mathbf{Z}_{J-3}^{(2)} + B_{J-1,J-2}\delta\mathbf{Z}_{J-2}^{(2)} + B_{J-1,J-1}\delta\mathbf{Z}_{J-1}^{(2)} + B_{J-1,J}\delta\mathbf{Z}_{J}^{(2)} + \\ &\qquad + B_{J-1,J}\delta\mathbf{Z}_{J}^{(2)} + B_{J-1,J}\delta\mathbf{Z}_{J}^{(2)} + \mathbf{b}_{J-1} = 0, \\ &B_{J,J-2}\delta\mathbf{Z}_{J-2}^{(2)} + B_{J,J-1}\delta\mathbf{Z}_{J-1}^{(2)} + B_{J,J}\delta\mathbf{Z}_{J}^{(2)} + \mathbf{b}_J = 0, \end{aligned} \tag{13.48}$$

Уравнения (13.47)–(13.48) решаются параллельно с использованием векторных прогонок. Способ построения разностных уравнений и структура «глобального» итерационного процесса обеспечивает диагональное преобладание в матрицах систем уравнений и, как следствие, устойчивость прогонок.

3. Расчет обтекания ВКС «Буран»

3.1. Описание наветренной стороны поверхности ВКС «Буран». В соответствии с особенностями конфигурации наветренная сторона ВКС была разбита на пять характерных участков, на каждом из которых для описания поверхности использовалось свое уравнение контура сечения поверхности плоскостью $x = \mathrm{const}$ вида:

$$f_k\big(x_2, x_3, a_1(x_1), \ldots a_{n_k}(x_1)\big) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, 5, \tag{13.49}$$

с параметрами a_n зависящими от x_1. Три основных параметра — $x_{2A}(x_1)$, $x_{2B}(x_1)$, $x_{3B}(x_1)$ (рис. 13.10) задают геометрические размеры и расположение «центра» сечения в плоскости (x_2, x_3). Остальные параметры определяют форму сечения.

Носовое затупление ВКС ($0 < x_1 < x_1^{(1)} \sim 0{,}5$ м) представляет собой сферический сегмент радиуса $r_T = 0{,}83$ м, центр которого в расчетной декартовой системе координат помещен в точке $\mathbf{r}_T = (r_T, 0, 0)$. Соответствующее уравнение контура сечения плоскостью $x_1 = \mathrm{const}$ может быть записано в виде

$$v^2 + w^2 = 1, \tag{13.50}$$

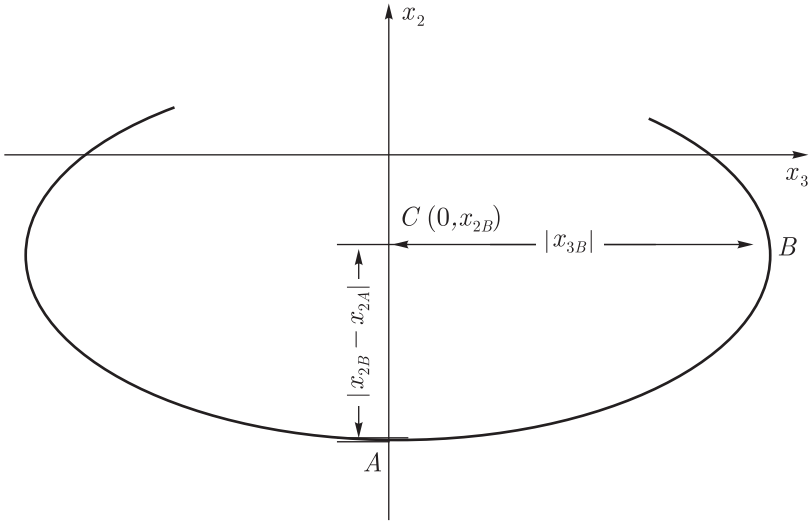


Рис. 13.10. Физический смысл основных параметров уравнений для описания поверхности ВКС

где

$$v = \frac{x_2 - x_{2B}}{x_{2A} - x_{2B}}, \quad w = \frac{x_3}{x_{3B}},$$
$$x_{2A} = -\sqrt{r_T^2 - (r_T - x_1)^2}\,, \quad x_{2B} = 0, \quad x_{3B} = \sqrt{r_T^2 - (r_T - x_1)^2}\,.$$

В интервале от $x_1 = 0{,}6$ м до начала наплыва крыла ($x_1 < x_1^{(3)} \sim 7{,}4$ м) контур сечения нижней стороны поверхности ВКС ($x_2 < x_{2B}$) описывается уравнением параболы

$$(w - v)^2 + 2(w + v) - 3{,}0 = 0. \tag{13.51}$$

На переходном участке $x_1^{(1)} < x_1 < 0{,}6$ м контур сечения составлен из дуг окружности и параболы, точка сопряжения которых перемещается при увеличении x_1 от точки A к точке B. При аппроксимации этой части поверхности для обеспечения более плавного сопряжения переходный участок был расширен до $x_1 = x_1^{(2)} = 0{,}9$ м, а контур сечения задан уравнением кривой второго порядка:

$$(w - v)^2 + b(w - 1)v + v^2 + d(w - 1) = 0, \tag{13.52}$$
$$b = -2\sigma(t), \quad d = 2(1 + \sigma(t)),$$
$$\sigma(t) = (3 - 2t)t^2, \quad t = \frac{x - x_1^{(1)}}{x_1^{(2)} - x_1^{(1)}}.$$

Контур сечения верхней поверхности ВКС ($x_2 > x_2$) при $x_1^{(2)} < x_1 < x_1^{(3)}$ составлен из отрезков прямых и дуг кривых второго порядка. Поскольку при рассмотренных здесь больших углах атаки в наветренную область попадает

лишь небольшая часть верхней поверхности для упрощения расчетов реальный контур сечения верхней поверхности был заменен эллипсом

$$\left[\frac{x_2 - x_{2B}}{x_{2A} + x_{2B}}\right]^2 + \left[\frac{x_3}{x_{3B}}\right]^2 - 1 = 0. \tag{13.53}$$

Гладкость аппроксимации поверхности (до первой производной включительно) обеспечивается непрерывностью функций $x_{2A}(x_1)$, $x_{2B}(x_1)$, $x_{3B}(x_1)$ и их первых производных в точке $x_1 = x_1^{(1)}$ и $x_1 = x_1^{(2)}$, а также выполнением соотношений

$$\sigma(0) = 0, \quad \sigma(1) = 1, \quad \sigma'(0) = \sigma'(1) = 0.$$

При представлении нижней стороны поверхности в области расположения наплыва и самого крыла ($x > x^{(3)}$) контур сечения был разбит на две части. Контур сечения фюзеляжа ($x_3 < x_{3D}(x_1)$) описан уравнением параболы

$$aw^2 + bw(v-1) + (v-1)^2 + d(v-1) = 0, \tag{13.54}$$

где $a = 0{,}25b^2$, а контур сечения наплыва крыла и самого крыла уравнением

$$\left(\frac{|v|}{s}\right)^n - \big((\varepsilon(1-w)+1)^n - 1\big)\frac{1}{\varepsilon} = 0. \tag{13.55}$$

Параметры $n(x_1)$ и $\varepsilon(x_1)$ были найдены методом наименьших квадратов по таблицам координат контуров 77 сечений, проведенных с шагом 0,3 м и аппроксимированы кубическими сплайнами. Параметры $s(x_1)$, $b(x_1)$, $d(x_1)$ в уравнениях (13.54), (13.55) определялись из условий

$$v_\Phi(w_D) = v_{\text{кр}}(w_D) = \frac{x_{2D} - x_{2B}}{x_{2A} - x_{2B}}, \qquad \left.\frac{dv}{dw}\right|_\Phi^D = \left.\frac{dv}{dw}\right|_{\text{кр}}^D,$$

где символом «D» отмечены значения величин в точке сопряжения фюзеляжа с крылом, а символами «Ф» и «кр» — значения v, определенные соответственно из уравнений (13.54) и (13.55). Значения $x_{2D}(x_1)$ были взяты из таблиц координат контуров сечений и также аппроксимированы кубическим сплайном.

В расчетах использовано упрощенное представление кормовой части поверхности: не учтены скос и скругление задней кромки крыла; принято, что поверхность элевонов гладко сопрягается с поверхностью фюзеляжа; не включена в рассмотрение поверхность тормозного щитка.

3.2. Расчетная система координат и разностная сетка. Система секущих плоскостей $\Pi(y_1)$, «производящих» на поверхности тела семейство координатных линий $y = \text{const}$, определяется зависимостью угла наклона Π к оси x_1 от координаты y_1. В проведенных расчетах эта зависимость

задавалась следующим образом

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{x_{2C} - x_{2B}(y_1)}{x_{1C} - x_{1B}(y_1)} \quad \text{при} \quad y_1^{(1)} \leqslant y_1 \leqslant y_{1D},$$
$$\varphi = \xi(y_1)\psi(y_1) + \big(1 - \xi(y_1)\big)\frac{\pi}{2}, \tag{13.56}$$

где

$$\xi(y_1) = \exp\left(\frac{-60(x_{1B}(y_1) - x_{1D})}{L}\right) \quad \text{при} \quad y_{1D} < y_1 < y_{1E},$$
$$\varphi = \frac{\pi}{2} \quad \text{при} \quad y_{1E} < y_1 < y_1^{(2)}.$$

Здесь B — точка пересечения плоскости $\Pi(y_1)$ с l_{sim} — контуром сечения поверхности плоскостью Π^{sim}; C — некоторая неподвижная точка, смещенная «вправо» и «вверх» относительно центра сферического затупления T; $\psi(y_1)$ — угол наклона к оси x_1 внутренней нормали $\mathbf{n}^{in}$ к l_{sim} в точке B, L — длина ВКС. Точка сопряжения D, лежащая на l_{sim}, выбирается из условия непрерывной зависимости φ от y_1; точка E из условия: $\xi(y_{1E}) = 10^{-3}$.

Схема построения плоскостей $\Pi(y_1)$ показана на рис. 13.11.

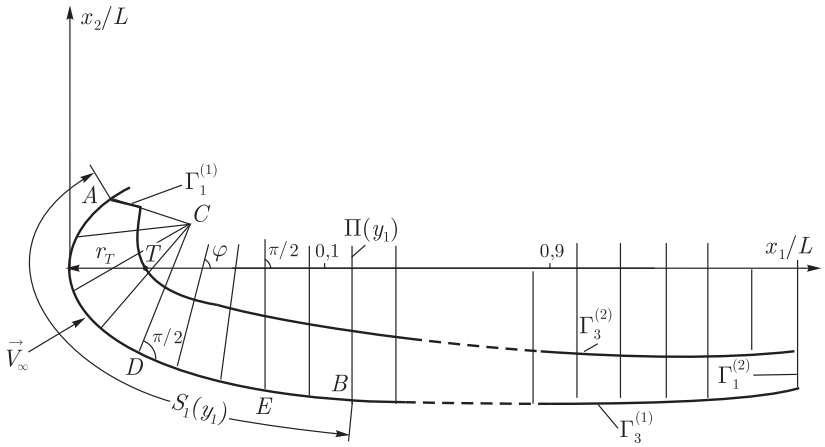


Рис. 13.11. Схема построения секущих ВКС плоскостей для получения на поверхности тела семейства координатных линий

Там же приведены в проекции на плоскость (x_1, x_2), граничные линии

$$\Gamma_1^{(1)}(y_1 = y_1^{(1)}), \qquad \Gamma_1^{(2)}(y_1 = y_1^{(2)}),$$
$$\Gamma_3^{(1)}(y_3 = 0), \qquad \Gamma_3^{(2)}(y_3 = y_3^{(2)}).$$

Линия $\Gamma_1^{(1)}$ по условию проходит через точку A на l_{sim} в которой определена условием: $(\mathbf{n}_A^{in}, \mathbf{v}_\infty)/v_\infty = 0{,}1$. $\Gamma_1^{(2)}$ определена условием $x_{1B}(y_1^{(2)}) = L$, $\Gamma_3^{(1)}$ совпадает с отрезком l_{sim}, заключенным в пределах $y_1^{(1)} \leqslant y_1 \leqslant y_1^{(2)}$. Линия $\Gamma_3^{(2)}$,

близкая к границе наветренной стороны поверхности, построена в интерактивном режиме с помощью специального алгоритма, обеспечивающего выполнение требования «сверхзвуковой» границы, сформулированного в п. 2.1.

Распределение узлов разностной сетки в области переменных $(x_l,\ x_2,\ x_3)$ определяется заданием функций $\eta_1(y_1)$, $\eta_2(y_2, \varsigma(y_1, y_3))$ и $\eta_3(y_1, y_3)$ (см.п. 2.1). В настоящих расчетах использовалась функция $\eta_1(y_1)$ вида:

$$\eta_1(y_1) = a(y_1 - y_1^{(1)}) + b(y_1 - y_1^{(1)})^2 \qquad \text{при} \quad y_1^{(1)} \leqslant y_1 \leqslant y_1^*,$$
$$\eta_1(y_1) = \eta_1(y_1^*) + c(y_1 - y_1^*) + b(y_1 - y_1^*)^2 \qquad \text{при} \quad y_1^* \leqslant y_1 \leqslant y_1^{(2)},$$

где $c = 0{,}5(a + 2b(y_1^* - y_1^{(1)}))$, $b > 0$, $x_{1B}(y_1^*)/L \approx 0{,}5$.

При таком выборе функции η_1 шаг сетки в продольном направлении увеличивается по линейному закону при возрастании y_1 от $y_1^{(1)}$ до y_1^*, затем скачкообразно уменьшается вдвое и снова растет по линейному закону. Принятый в работе способ построения функции $\eta_3(y_1, y_3)$, распределяющей узлы сетки в азимутальном направлении, поясняется рисунком 13.12, на котором изображено сечение тела плоскостью $\Pi(y_1)$. На этом рисунке l_Π — контур тела, τ_Π — линия, полученная из l_Π с помощью отображения

$$\mathbf{r} \Rightarrow \mathbf{r} + d \cdot \mathbf{n}^{ex}, \quad d = 0{,}04 \max_{y_3} |x_{3B}|\,, \tag{13.57}$$

$s_3(y_1, y_3)$ — расстояние, измеренное вдоль l_Π от точки пересечения l_Π с Π^{sim} (точка A) до точки B с координатами (y_1, y_3), $\overline{s}_3(y_1, y_3)$ расстояние, измеренное вдоль $\overline{l}_\Pi$ между отображениями точек A и B, $s_3^{(2)}(y_1)$ и $\overline{s}_3^{(2)}(y_1)$ — граничные значения этих величин.

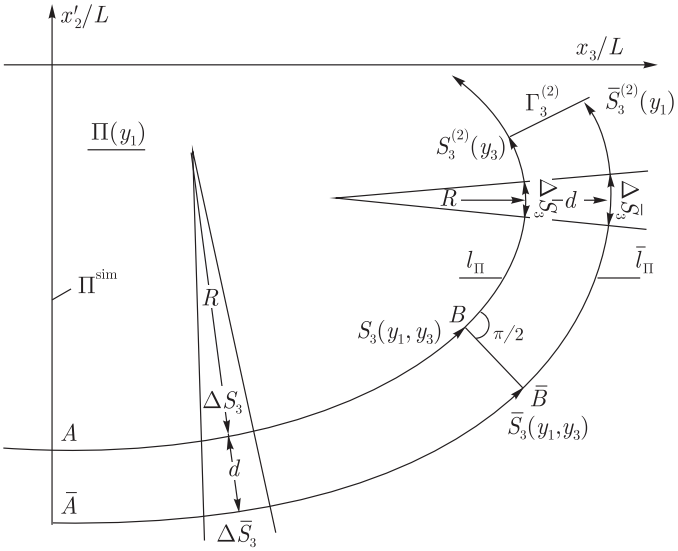


Рис. 13.12. Графическое пояснение к построению узлов сетки в азимутальном направлении

Координату y_3 определим соотношением

$$\frac{\overline{s}_3^{(2)}}{s_3^{(2)}(y_1)} = \overline{\eta}_3(y_1, y_3) = ay_3 + by_3^2 + cy_3^4, \tag{13.58}$$

где коэффициенты a, b, c находятся из условий:

$$\overline{\eta}_3(y_1, 1) = 1, \quad \left.\frac{d\overline{\eta}_3}{dy_3}\right|_{y_3=1} = \frac{r_T}{\overline{s}_3^2}, \quad \left.\frac{d^2\overline{\eta}_3}{dy_3^2}\right|_{y_3=1} = 0.$$

Тогда выражение для $\eta_3(y_1, y_3)$ может быть записано в виде

$$\eta_3(y_1, y_3) = \frac{s_3(\overline{s}_3)}{s_3^{(2)}(y_1)} = \frac{s_3(\overline{s}_3^{(2)}(y_1)\overline{\eta}_3(y_1, y_3))}{s_3^{(2)}(y_1)}. \tag{13.59}$$

Функция $\overline{\eta}_3$ определяет на $\overline{l}_\Pi$ сетку $\overline{s}_{3,k\pm1/2} = \overline{s}_3^{(2)}\overline{\eta}_3(y_1, y_{3,k\pm1/2})$, $k = 0, \ldots$ $\ldots, K-1$ с шагом $\Delta_k\overline{s}_3 = \overline{s}_{3,k+1/2} - \overline{s}_{3,k-1/2}$, монотонно убывающим при увеличении k от $\Delta_0\overline{s}_3 \approx (2\overline{s}_3^{(2)} - r_T)/K$ до $\Delta_{K-1}\overline{s}_3 \approx r_T/K = \mathrm{const}$. Отношение $\Delta_{K-1}\overline{s}_3/\Delta_0\overline{s}_3 \approx r_T/(2\overline{s}_3^{(2)} - r_T)$ меняется вдоль тела в пределах от $\approx 0{,}4$ до $\approx 0{,}03$. Использование в определении функции η_3 длины дуги линии $\overline{l}_\Pi$, построенной с помощью отображения (13.57), позволяет распределять узлы сетки вдоль контура сечения l_Π в зависимости от величины локального значения кривизны l_Π. В проведенных расчетах величина смещения d была подобрана так, чтобы получить дополнительное сгущение узлов сетки только на боковых кромках крыла, радиус кривизны которых $R < d$. На остальной части поверхности S^{uw} величина d, определенная формулой (13.57), существенно меньше R, и величина шага сетки Δs_3, мало отличается от $\Delta\overline{s}_3$.

Функция $\eta_2(y_2, \varsigma(t, y_1, y_3))$, формирующая распределение узлов сетки в направлении нормали к поверхности тела, находилась из уравнения

$$\eta_2 + \theta f\big(\eta_2, \varsigma(t, y_1, y_3)\big) = (1+\theta)y_2, \quad \text{где} \quad f = \frac{1 - \exp(-\varsigma\eta_2)}{1 - \exp(-\varsigma)}. \tag{13.60}$$

Параметр $\varsigma(t, y_1, y_3)$, величина которого обратно пропорциональна отношению толщины пограничного слоя к отходу ударной волны, определялся в ходе решения задачи из условия наилучшего приближения в среднем функции f к разностному профилю полной энтальпии I_0.

$$\frac{dQ}{d\varsigma} = 0, \quad Q = \sum_{j=0}^{j_e}\left(f(\eta_{2,j}, \varsigma) - \frac{(I_0)_j - (I_0)_0}{(I_0)_\infty^- (I_0)_0}\right)^2, \quad \text{где} \quad j_e \approx 0{,}8J.$$

Определенная таким образом функция η_2 «распределяет» узлы сетки по нормали так, что шаг сетки $h \approx \Delta\eta_2$ монотонно возрастает от значения $h_{\min} \approx (1+\theta)/(1+\varsigma\theta)J$ вблизи поверхности до $h_{\max} \approx (1+\theta)/J$ на внешней границе пограничного слоя и далее до ударной волны остается постоянным. Отношение $h_{\min}/h_{\max} = 1/(1+\varsigma\theta)$ определяется главным образом величиной ς. Число узлов, попадающих в область пограничного слоя, зависит

в основном от величины параметра θ и равно примерно $\theta/(1+\theta)$. В расчетах использовалось значение $\theta = 0{,}7$, что обеспечивало «попадание» в пограничный слой $\approx 40\%$ от общего числа узлов сетки в направлении нормали к телу во всей рассмотренной области течения.

Приведенные в главе результаты получены на сетке с параметрами: число сегментов $I = 206$, число блоков в сегменте $K = \begin{cases} 18 & \text{при} \quad x_1/L < 0{,}25 \\ 36 & \text{при} \quad x_1/L \geqslant 0{,}25, \end{cases}$ число элементарных объемов в блоке $J = 24$.

При удвоении числа блоков в сегменте необходимое восполнение параметров поля течения проводилось с помощью кусочно-квадратичной интерполяции.

3.3. Представление данных расчетов. Численное решение задачи обтекания ВКС «Буран» получено для условий, соответствующих двум точкам траектории спуска, находящимся примерно в начале и конце участка траектории, на котором ВКС испытывает наибольшие тепловые нагрузки. Использованные в расчетах характеристики набегающего потока и соответствующие им значения определяющих параметров представлены ниже в таблице 13.5:

Таблица 13.5.

№ режима	H км высота	α° угол атаки	V_∞ км/с скорость	P_∞ Па давление	ρ кг/м^3 плотность	T° К температура	$\mathbf{Re}_\infty, r_T$ число Рейнольдса	$\mathbf{M}_\infty$ число Маха
1	77,5	39	7,38	1,57	$2{,}74 \cdot 10^{-5}$	203	$1{,}24 \cdot 10^4$	25,8
2	65,6	39	5,58	10,0	$1{,}53 \cdot 10^{-4}$	232	$4{,}65 \cdot 10^4$	18,3

Для каждого из режимов обтекания расчеты выполнены для трех моделей гетерогенных химических процессов:

1) химически нейтральная поверхность (модель 1)

$$k_{w,i} = 0, \quad i = \mathrm{O},\ \mathrm{N},\ \mathrm{NO},$$

2) идеально каталитическая поверхность (модель 2)

$$\gamma_{w,i} = 0, \quad i = \mathrm{O},\ \mathrm{N},\ \mathrm{NO},$$

3) частично каталитическая поверхность (модель 3)

$$k_{w,O} = k_{w,\mathrm{N}} = 3{,}0\,\text{м/с}, \quad k_{w,\mathrm{NO}} = 0,$$

для покрытия углерод-углеродного теплозащитного материала на носке фюзеляжа и передней кромке крыльев, $k_{w,O} = k_{w,\mathrm{N}} = 0{,}5\,$м/с, $k_{w,\mathrm{NO}} = 0$ —для покрытия плиточной теплозащиты.

Во всех вариантах предполагалось, что коэффициент черноты поверхности $\varepsilon_s = 0{,}9$. В статье приведены распределения по поверхности ВКС расчетных значений следующих величин:

ε — отход ударной волны по нормали к поверхности тела (рис. 13.13);

$C_p = P_w/0{,}5\rho_\infty V_\infty^2$ — коэффициент давления (рис. 13.14);

T_w — равновесная радиационная температура поверхности (рис. 13.15);

q_w — тепловой поток к поверхности (рис. 13.16);

C_{O}^e — значение массовой концентрации атомарного кислорода на внешней границе пограничного слоя (только для случая идеально каталитической поверхности) (рис. 13.21);

C_{N}^e — то же для массовой концентрации атомарного азота (рис. 13.22);

Указанные данные представлены в виде: картин изолиний на всей нижней ($n_2^{ex} < 0$) поверхности ВКС в проекции на плоскость (x_1, x_3).

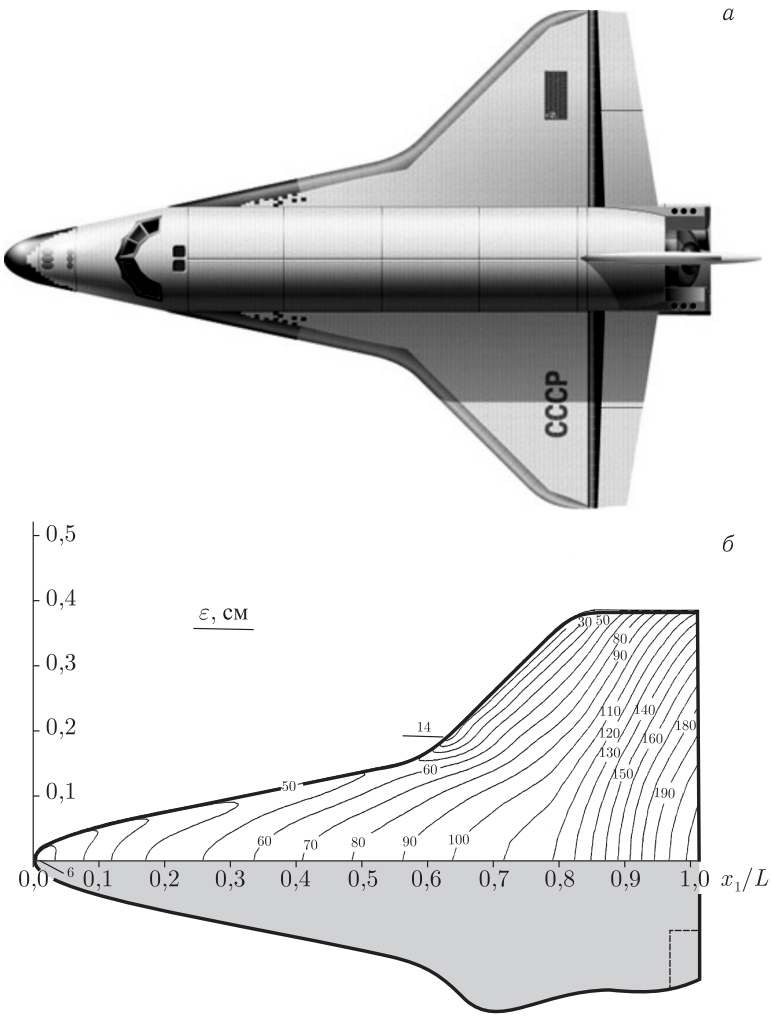


Рис. 13.13. Вид ВКС «Буран» сверху — *а*; отход ударной волны (наветренная сторона). Вариант 1.1 — *б*

В работе приведены также картины изолиний в сечении ударного слоя плоскостью симметрии следующей величины: $P/0{,}5\rho_\infty V_\infty^2$ — давления газа, отнесенного к половине скоростного напора (рис. 13.17);

Рассчитанная структура потока представлена также в виде картин изолиний значений давления, отнесенного к $0{,}5\rho_\infty V_\infty^2$, в двух характерных сечениях ударного слоя поверхности $y_1 = y_{1i}$, $i = 1,\ 2$ в развертке на некоторые

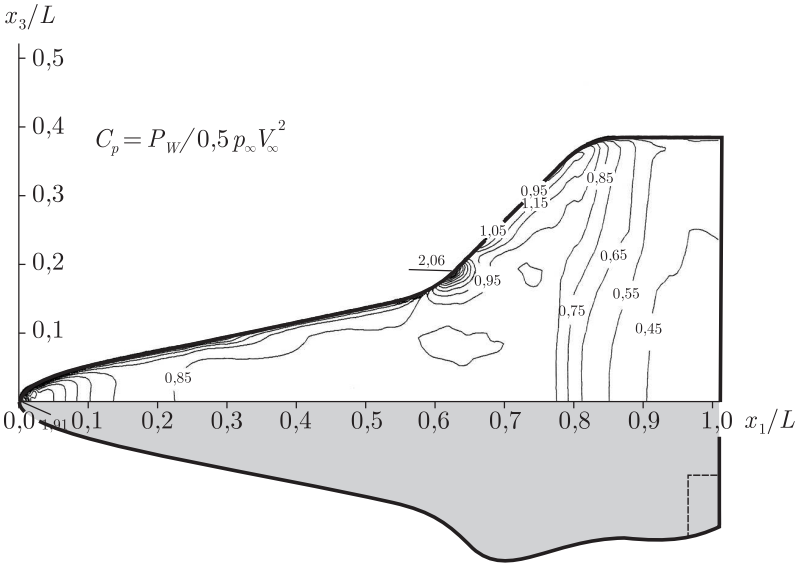


Рис. 13.14. Коэффициент давления. Вариант 1.1

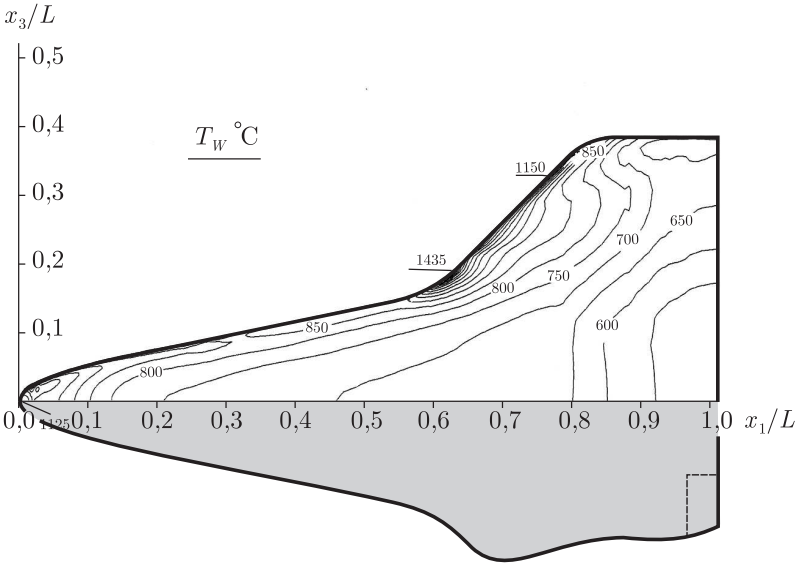


Рис. 13.15. Температура поверхности. Вариант 1.1

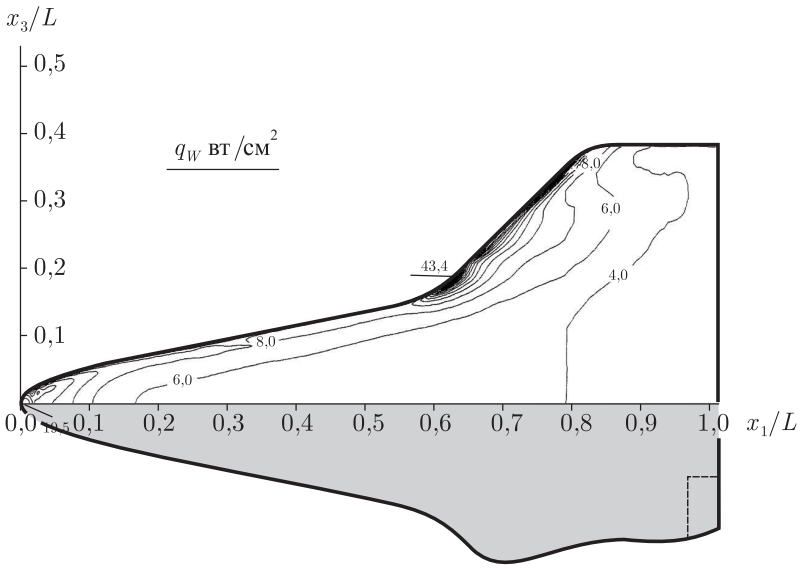


Рис. 13.16. Тепловой поток к поверхности. Вариант 1.1

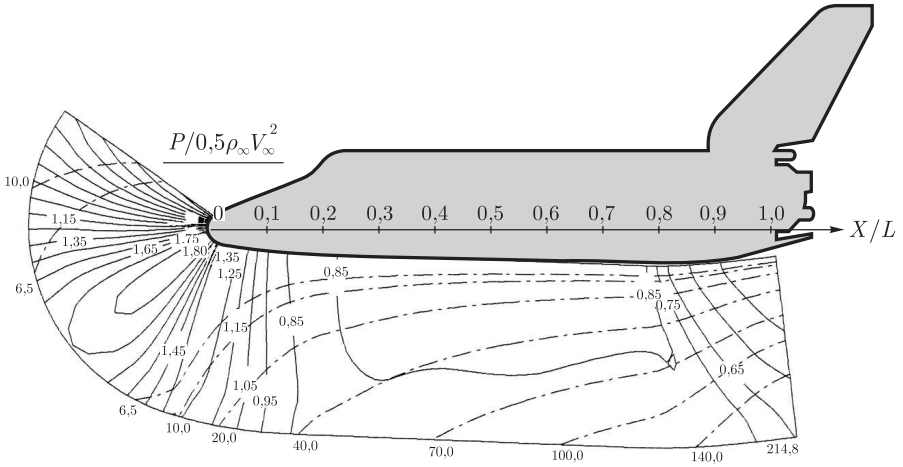


Рис. 13.17. Распределение давления в плоскости симметрии ВКС. Вариант 1.1

плоскости $\Pi(y_{1i})$, которые совпадают с плоскостями $x_1 = \mathrm{const}$ при следующих значениях x_1: сечение *1* — $x_1/L = 0{,}392$, *2* — $x_1/L = 0{,}895$. Сечение *1* ВКС в области начала наплыва крыла, а сечение *2* пересекает боковую кромку крыла ВКС «Буран». С целью повышения разрешающей способности этих рисунков расстояние $n = \varepsilon\eta_2$ до поверхности тела увеличено в δ/ε раз, где $\delta = L/3$. Для ориентировки на этих рисунках нанесены также штрих-пунктиром линии $n = \mathrm{const}$. Соответствующие им значения n на рисунках указаны в сантиметрах (рис. 13.19–13.20).

В подписях к рисункам кроме названия изображаемой величины приведен вариант расчета, состоящий из двух цифр, разделенных точкой. Первая цифра указывает номер режима обтекания, вторая — номер модели гетерогенных процессов.

3.4. Анализ результатов расчета теплообмена на наветренной стороне поверхности ВКС «Буран». Общее представление о структуре обтекания наветренной стороны поверхности ВКС «Буран» дает приведенная на рис. 13.18 картина предельных линий тока, соответствующая вариант (1.2). Как видно из этого рисунка, в рассмотренных условиях на наветренной стороне поверхности ВКС образуются две симметрично расположенные линии растекания, начинающиеся от передней критической точки. Эти линии отделяют часть потока, стекающего с фюзеляжа и передних кромок крыла, от потока, стекающего с боковых и задней кромок крыла.

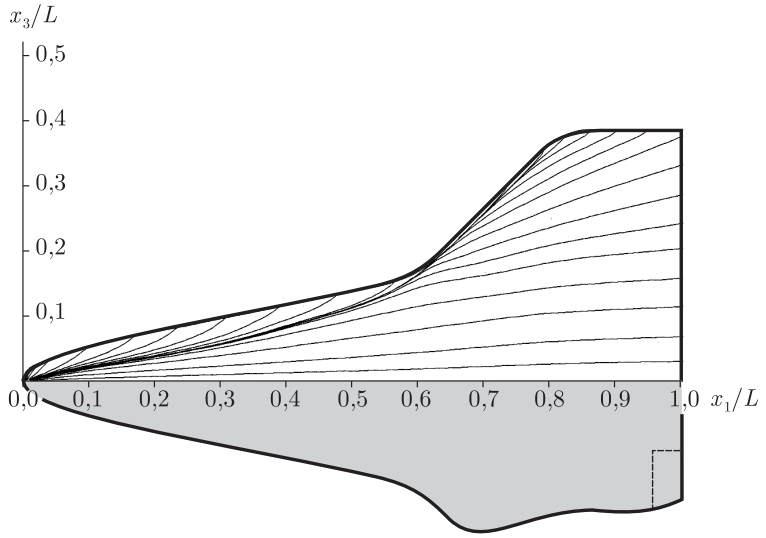


Рис. 13.18. Картина предельных линий тока на поверхности ВКС. Вариант 1.2

В распределении давления на наветренной стороне поверхности (рис. 13.14, 13.17–13.20) выделяются два локальных максимума, характерных для рассматриваемой конфигурации ВКС. Первый максимум образуется при торможении потока в окрестности геометрической критической точки и равен давлению торможения в этой точке. Второй связан с поворотом потока в области изменения угла стреловидности крыла (перехода наплыва в собственно крыло). Этот максимум давления расположен вблизи критической линии в узкой области между «последней» волной сжатия и «первой» из приходящих на поверхность волн разрежения, вызванных взаимодействием волн сжатия с головным скачком уплотнения. Значения коэффициента давления $C_p = P_w/0{,}5\rho_\infty V_\infty^2$ в точках максимума давления

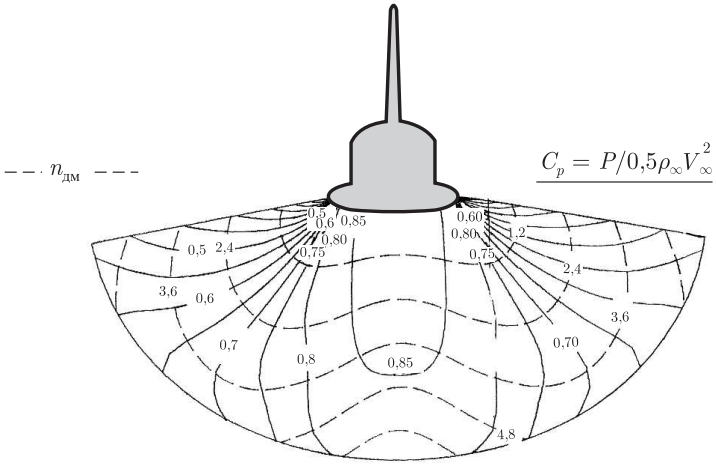


Рис. 13.19. Распределение давления в сечении 1 ($x/L = 0{,}392$). Вариант 1.1

близки к двум. Распределение C_p по поверхности ВКС практически не зависит от модели гетерогенных процессов. Наибольшее различие в локальных значениях C_p, полученных при двух рассмотренных режимах обтекания, имеет место в области разрежения потока около кромок крыла (до 15%). На линии симметрии эти значения различаются при $x_1/L < 0{,}85$ не более, чем на 1%, при $0{,}85 < x_1/L < 1$ — до 3,5%.

В рассмотренных условиях степень диссоциации воздуха в ударном слое достаточно высока, т. е. значительная часть энергии газа приходится на «энергию диссоциации» (энергию, затраченную на диссоциацию молекул кислорода и азота). Представление об уровне диссоциации воздуха в ударном слое дают приведенные рисунки 13.21, 13.22, на которых показаны

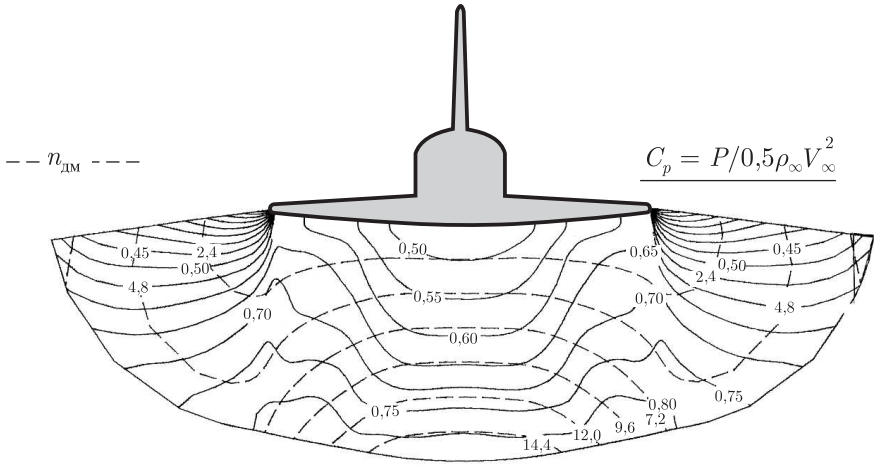


Рис. 13.20. Распределение давления в сечении 2 ($x/L = 0{,}895$). Вариант 1.1

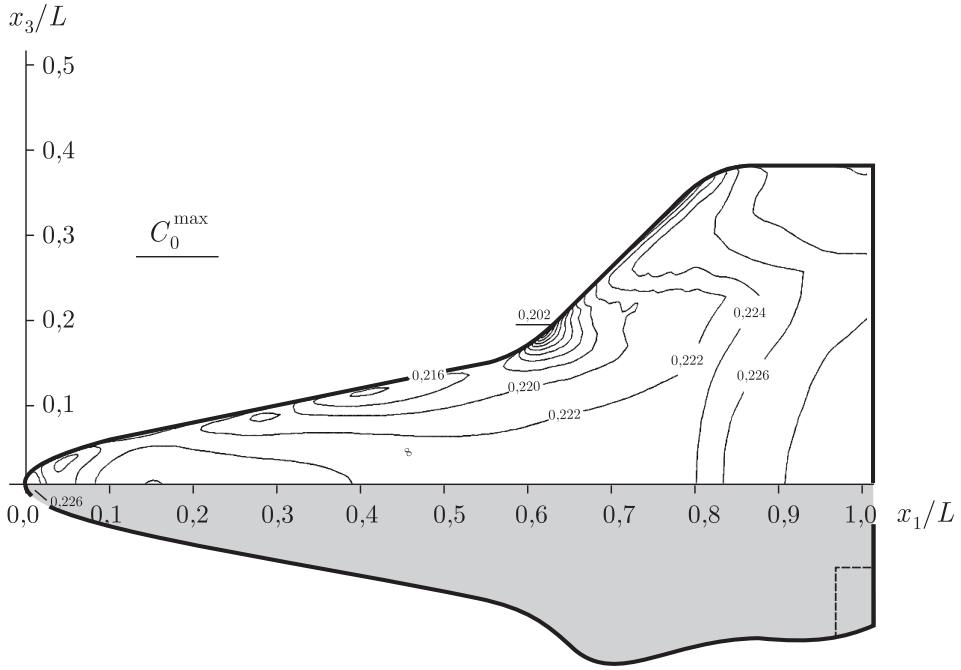


Рис. 13.21. Максимальное значение концентрации атомарного кислорода поперек ударного слоя. Вариант 1.2.

распределения значений массовых концентраций атомов азота и кислорода $C_i^e(y_1, y_3)$, $i =$O, N, на внешней границе пограничного слоя (для случая идеально каталитической поверхности). Из приведенных данных видно, что в первом режиме обтекания ($\mathbf{M} \sim 25$) во всей исследуемой области течения достигается уровень диссоциации кислорода, близкий к полной диссоциации ($C_{\mathrm{O}}^e = 0{,}232$). Высокая степень диссоциации кислорода сохраняется и во втором из рассмотренных режимов обтекания ($\mathbf{M} \sim 18$) $C_{\mathrm{O}}^e > 0{,}12$.

Наблюдается примерно одинаковая картина распределения вдоль поверхности C_{O}^e в этом режиме и C_{N}^e в обоих режимах обтекания. Уровень диссоциации максимален вблизи передней критической линии тока; вниз по потоку в области течения газа, прошедшего через головную ударную волну, значения C_i^e падают, и вновь возрастают в ударном слое на крыле, в области течения газа, прошедшего скачок уплотнения от передней кромки крыла. Важно отметить также, что в области взаимодействия головной волны с кромкой крыла уровень диссоциации воздуха в ударном слое близок к минимальному. Из-за различия в скорости набегающего потока режимы *1* и *2* существенно отличаются по абсолютному уровню диссоциации азота. В первом режиме значения C_{N}^e изменяются от $\sim 0{,}3$ в области торможения до $\sim 0{,}05$ в кормовой части крыла (рис. 13.22). Максимальное значение концентрации атомов N на внешней границе пограничного слоя на крыле составляет при этом $\sim 0{,}14$.

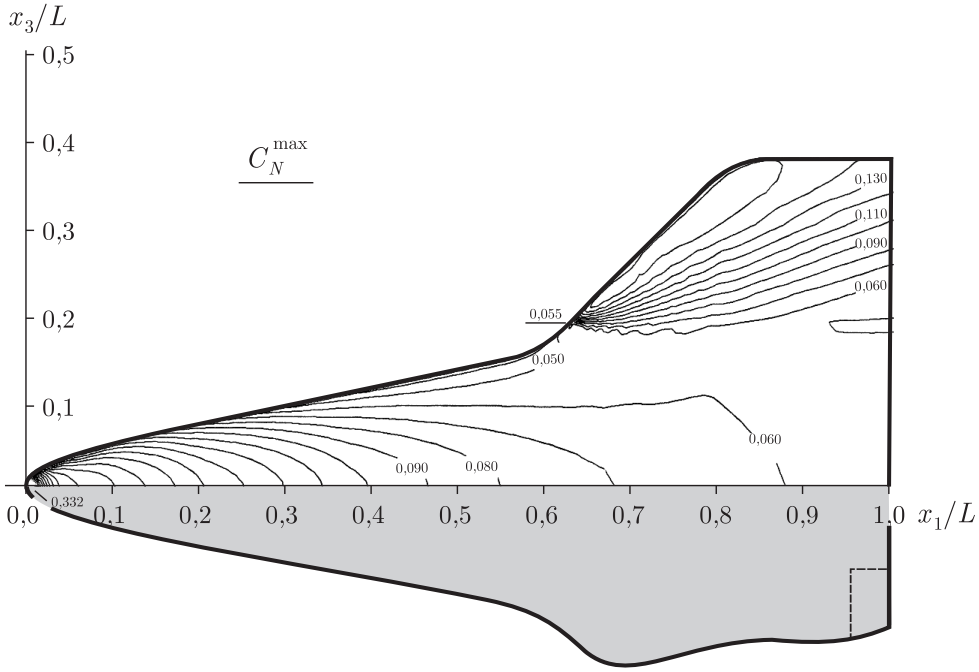


Рис. 13.22. Максимальное значение атомарного азота поперек ударного слоя. Вариант 1.2.

При втором режиме обтекания эти значения равны соответственно 0,1, $3{,}10^{-4}$, 0,016.

Доля энергии диссоциации в обмене энергией между высокотемпературным диссоциирующим воздухом и поверхностью обтекаемого тела определяется процессами рекомбинации атомов азота и кислорода, которые протекают как в газовой фазе при диффузии атомов через пограничный слой, так и на самой поверхности. В первом случае энергия диссоциации переходит в тепловую энергию газа, коэффициент аккомодации которой для всех материалов достаточно высок. При гетерогенной рекомбинации, в которой твердая фаза играет роль катализатора, энергия диссоциации выделяется непосредственно на поверхности. Исследования, начатые еще в 30-х годах и получившие наибольшее развитие в 70-80-х годах в связи с разработкой многоразовой высокотемпературной теплозащиты, показали, что каталитическая активность различных материалов может меняться в широких пределах. Наименьшую активность имеют стекла и керамики, наибольшую — такие металлы, как медь, серебро.

Из оценок характерных времен химических реакций и проведенных расчетов следует, что в рассмотренных условиях обтекания ВКС «Буран» роль газофазных процессов рекомбинации как атомов азота, так и, в особенности, атомов кислорода сравнительно невелика. Это означает, что величина теплового потока может быть значительно снижена за счет применения

низко каталитических покрытий поверхности. Как показали исследования, выполненные в ИПМ АН СССР [28, 30, 33], а также данные натурных испытаний модели ВКС Бор-4, такими свойствами обладают остекленные внешние покрытия системы теплозащиты ВКС «Буран», имеющие высокую излучательную способность ($\varepsilon_s \sim 0{,}8$–$0{,}9$) и предназначенные для предохранения теплозащиты от окисления и механической эррозии. Низкие значения коэффициентов гетерогенной рекомбинации ($k_{w,O} \approx 1$ м/с, $k_{w,N} \approx 3$ м/с) для аналогичных по свойствам покрытий RCC и RCG получены и при обработке результатов натурных экспериментов на ВКС «Space Shuttle».

Для анализа полученных данных по теплообмену используем представление теплового потока в виде произведения коэффициента теплообмена (α/c_p) на энтальпийный потенциал $\Delta I_0 = (I_{0,\infty} - I_{0,w})$, $q_w = (\alpha/c_p)\,(I_{0,\infty} - I_{0,w})$ Коэффициент теплообмена (α/c_p) в свою очередь может быть представлен в виде $(\alpha/c_p) = (\overline{\alpha}/\overline{c}_p)\,(\alpha/c_p)^*$, где символом $(*)$ отмечено значение этого коэффициента в передней критической точке. Как показывают результаты многочисленных расчетов обтекания вязким газом затупленных тел различной формы, значение безразмерного параметра $(\overline{\alpha}/\overline{c}_p)$ зависит прежде всего от конфигурации обтекаемого тела и угла атаки и в меньшей степени от других характерных параметров. «Главная часть» зависимости коэффициента теплообмена от параметров обтекания и характерного размера тела учитывается при такой записи величиной $(\alpha/c_p)^*$. Заметим, что это обстоятельство служит основанием для переноса распределения теплового потока $\overline{q}_w = q_w/q_w^*$, полученного в экспериментах на геометрически подобных моделях в аэродинамических трубах, на натурные объекты, поскольку в этих экспериментах, как правило, $\Delta I_0 \sim \mathrm{const}$ и $\overline{q}_w \sim (\overline{\alpha}/\overline{c}_p)$. Для пересчета в размерные величины в таких методиках используются либо аппроксимационные формулы для q_w^* типа известной формулы Фэя–Ридделла, либо результаты расчетов q_w^* в автомодельном приближении.

Полученные в настоящих расчетах данные по теплообмену, соответствующие одному углу атаки, подтверждают слабую зависимость $(\overline{\alpha}/\overline{c}_p)$ как от условий в набегающем потоке (в рассмотренном интервале), так и от степени каталитичности поверхности. В распределении $(\overline{\alpha}/\overline{c}_p)$, как и в распределении давления, имеются два локальных максимума, расположенных в тех же областях поверхности. Максимальное значение коэффициента теплообмена ($(\overline{\alpha}/\overline{c}_p) = 1{,}1$–$1{,}15$) достигается на кромке крыла в области «пересечения» с головной ударной волной. В сечении передней кромки плоскостью $x_l = \mathrm{const}$ коэффициент теплообмена принимает максимальное значение на линии растекания. Вне области взаимодействия с ударной волной значение $(\overline{\alpha}/\overline{c}_p)$ вдоль этой линии меняется в пределах 0,65–0,75. На «уплощенной» части поверхности ВКС ($x_1/L > 0{,}2$) величина $(\overline{\alpha}/\overline{c}_p)$ монотонно убывает вниз по потоку от $\sim 0{,}2$ до $\sim 0{,}05$.

В случае идеально каталитической поверхности концентрация атомов в газе вблизи поверхности мала. Поэтому энтальпия газа $I_{0,w}$ зависит

в основном от температуры газа. В просчитанных вариантах отношение $I_{0,w}/I_{0,\infty}$ меняется в пределах 0,07–0,12, т. е. энтальпийный потенциал остается практически постоянным. Распределение $\overline{q}_w$ по поверхности при этом остается таким же, как и распределение коэффициента теплообмена. При некаталитической поверхности концентрация атомов $C_{i,w}$ в газе вблизи поверхности сложным образом зависит от химических процессов вдоль линий тока, попадающих в «вязкую» область ударного слоя. Определение значений $C_{i,w}$, $i =$O, N, NO (а, следовательно, и соответствующего снижения энтальпийного потенциала за счет «нереализованной» части энергии диссоциации) с требуемой для приложений точностью представляет весьма сложную задачу из-за необходимости учета многих факторов как газодинамического, так и кинетического характера. Её решение в общем случае возможно только путем численного интегрирования уравнений вязкого ударного слоя (или более общих) с использованием достаточно полной модели газовой среды.

Существенное изменение величины энтальпийного потенциала вдоль некаталитической поверхности приводит к значительному отклонению распределения $\overline{q}_w = q_w/q_w^*$ от распределения $(\overline{\alpha}/\overline{c}_p)$ Значение $\overline{q}_w$ в соответствующих точках поверхности может отличаться от величины $(\overline{\alpha}/\overline{c}_p)$ в два с лишним раза. Очевидно, что использование значений $\overline{q}_w$, определенных из экспериментов в аэродинамических трубах, для получения распределения теплового потока q_w по найденным каким-либо образом значениям $q{*}_w$ может привести в этом случае к большим ошибкам. Наибольшее снижение энтальпийного потенциала при использовании некаталитического покрытия имеет место в окрестности передней критической точки, т. е. там, где уровень диссоциации воздуха максимален. Тепловой поток при этом снижается в 2,8 раза (с 54,1 до 19,5 вт/см^2 (рис. 13.16)) в первом режиме обтекания, и в 2,2 раза (с 47,9 до 21,5 вт/см^2) во втором режиме обтекания. Соответственно расчетные значения равновесной радиационной температуры поверхности Tw уменьшаются с 1531 °C до 1125° C (на 406°) в первом режиме (рис. 13.15) и с 1477 °C до 1160 °C (на 317 °C) во втором режиме.

Влияние каталитической активности поверхности на величину теплового потока в области максимума q_w на кромке крыла в рассмотренных условиях существенно меньше, что объясняется в первую очередь более низким уровнем диссоциации воздуха в этой области ударного слоя. В первом режиме при «замораживании» гетерогенной рекомбинации расчетное значение теплового потока снижается здесь с 59,4 до 43,4 вт/см^2 (в 1,4 раза), во втором — с 52,3 до 40,1 вт/см^2 (в 1,3 раза). Температура поверхности уменьшается при этом с 1574 °C до 1435 °C (на 139 °C) в первом режиме и с 1516 °C до 1401 °C (на 115 °C) во втором.

Заключение

Построенная разностная схема второго порядка точности позволяет получать более точное решение уравнений вязкого ударного слоя по сравнению с ранее использованной схемой первого порядка точности при сохранении хороших стабилизирующих свойств.

Предложенная методика успешно апробирована при моделировании гиперзвукового обтекания ВКС «Буран» для получения данных о структуре течения и основных характеристиках взаимодействия газа с обтекаемым телом в широком диапазоне определяющих параметров.

Обобщение разработанной методики на случай турбулентного режима течения в пограничном слое дано в работе[40]. Для описания процессов турбулентного переноса использована алгебраическая модель Себеси–Смит полуэмпирической теории турбулентности. Полученные в результате расчетов значения максимальных тепловых потоков при турбулизации течения, которые существенно, примерно в пять раз выше, чем при ламинарном режиме течения, необходимо учитывать при разработке системы теплозащиты ВКС «Буран».

Внесение некоторых изменений в описанную методику[41] позволило изучить течение около вогнутых участков поверхности ВКС, радиус кривизны которых меньше локального значения отхода ударной волны, и рассчитать обтекание наветренной стороны поверхности ВКС «Буран» с отклоненными органами управления, что на части траектории спуска облегчает управление аппаратом по углу рыскания.

Разработанная математическая модель стационарного обтекания тел получила дальнейшее развитие в работах [42–44], где приведены результаты расчетов ЛА различной конфигурации и элементов их конструкций, а также расчета течения во всем ударном слое, т. е. около наветренной и подветренной сторон поверхности тела.

Список литературы

1. *Афонина Н.Е., Громов В.Г., Власов А.Ю.* Расчет течения в пространственном вязком ударном слое на удлиненных телах. В сб. Численные методы механики сплошной среды, Т. 14, № 3. Новосибирск. 1983, стр.3–17.
2. *Афонина Н.Е., Громов В.Г., Власов А.Ю.* Численное исследование вязкого обтекания удлиненных затупленных тел под большими углами атаки гиперзвуковым потоком воздуха. В сб. Гидроаэро-механика и космические исследования. — М.: Наука, 1985. с. 53–65.
3. *Афонина Н.Е., Громов В.Г.* Методика расчета сверхзвукового обтекания тел сложной формы под большими углами атаки вязким реагирующим газом. Отчет Института механики МГУ, 1988. № 3628, 35 С.
4. *Тимошенко В.И.* Сверхзвуковые течения вязкого газа. — Киев.: Наукова думка, 1987. 184 С.

5. *Рей К.* Химическая кинетика воздуха при высокой температуре. В сб. Исследование гиперзвуковых течений, под ред. Ф.Ридделла — М.: Мир, 1964. с. 133–149.
6. *Воронкин В.Г., Яхлаков Ю.В.* Экспериментальное исследование теплообмена в окрестности критической точки при неравновесных физико-химических превращениях и определение константы скорости рекомбинации азота. Изв. АН СССР, МЖГ, 1973. № 3, с. 28–135.
7. *Bortner M.H.* A review of rate constants of selected reactions of interest in Re-entry flow fields in the atmosphere. NBS Techn. Note. 1969, № 484. (см. также [8]).
8. *Полянский О.Ю., Агафонов В.П., Кузнецов М.М. и др.* Неравновесная ионизация при движении гиперзвуковых летательных аппаратов (по материалам иностранной печати). Обзор № 527, 1977. ОНТИ ЦАГИ, П2 с.
9. *Мартин Дж.* Вход в атмосферу. — М.: Мир, 1969. 320 С.
10. *Lin S., Teage J.* Rate of ionization behind shock wave air. Part.n. Theoretical interpretations. Phys. of Fluids, 1963. Ш, V. 6, Ш. (см.также [11]).
11. *Полянский О.Ю., Агафонов В.П., Вертушкин В.К. и др.* Неравновесные физико-химические процессы в аэродинамике. — М.: Машиностроение, 1972. 343 С.
12. *Кондратьев В.Н.* Константы скорости газофазных реакций: Справочник. — М.: Наука, 1970. 351 С.
13. *Никитин Е.Е.* Теория элементарных атомно-молекулярных процессов в газах — М.: Химия, 1970. 354 С.
14. *Кривоносова О.Э., Лосев С.А., Наливайко В.П. и др.* Рекомендуемые данные по кинетике химических реакций в системе соединений атомов N-O. Реакции диссоциации-рекомбинации двухатомных молекул.В сб. Физико-химическая кинетика в газовой динамике. Изд-во Московского университета, 1986. с. 5–66.
15. *Baylch D.L., Drysdale D.D., Home D.C.* Evaluated kinetic data for high temperature reactions, V. 2. Homogeneous gas phase reactions of the H_2–N_2 $\sim$ 0_2 system.— London: Butterworths, 1973. 557 p.
16. Термодинамические свойства индивидуальных веществ. Справочное издание: в 4-х томах / *Л.В.Гурвич* и др./ 3-е изд., перераб. и расширен. т.Г, Кн. 1. — М.: Наука, 1982. 623 С.
17. *Рид Р., Праусниц Дж., Шервуд Т.* Свойства газов и жидкостей. — Л.: Химия, 1982. 591 С.
18. *Гиршфельдер Д., Кертисс Ч., Берд В.* Молекулярная теория газов и жидкостей. — М.: ИЛ, 1961. 933 С.
19. *Гордеев О.А., Калинин А.П., Комов А.Л. и др.* Потенциалы взаимодействия, упругие сечения, интегралы столкновений компонентов воздуха для температур до 20000° К. Обзоры по теплофизическим свойствам веществ / ТФЦ — М.: ИВТАН, № 5(55), 1965. 100 с.
20. *Герасимов Г.Я., Калинин А.П. и др.* Интегралы столкновений, потенциалы атомно-молекулярных и ионно-молекулярных взаимодействий компонентов воздуха до 20000° К. Обзоры по теплофизическим свойствам веществ / ТФЦ — М.: ИВТАН, № 5(67), 1987. 158 с.
21. *Yun, Mason E.A.* Collision integrals for the transport properties of dissociating air at high temperature. Phys. of fluids, V. 5, № 4, 1962.
22. *Калинин А.П., Леонас В.Б., Сермягин А.В.* Интегралы столкновений для компонент диссоциированных планетных атмосфер. Теплофизика высоких температур, 1971. Т. 9, с. 1066–1068.
23. *Беляев Ю.Н.* Исследование взаимодействия некоторых атомов и молекул при высоких температурах и расчет коэффициентов переноса. Отчет Института механики МГУ, 1980. № 2342.
24. *Cubley S.J., Mason E.A.* Atom-molecule and molecule-molecule potentials and transport collision integrals for high temperature air species // Phys. of Fluids, V. I8, № 9, 1975. p.1109–1111

25. *Scott C.D.* Reacting shock layers with slip and catalytic boundary conditions. AIAA J., V. I3, № 10, 1975. p. I27I–I278.
26. *Goulard R.* On catalytic recombination rates in hypersonic stagnation heat transfer // Jet Propuls. I958. V. 28, MI, 737–745
27. *Гордеев А.Н., Колесников А.Ф., Кубарев С.Н. и др.* Неравновесный теплообмен на каталитической поверхности, обтекаемой дозвуковой струей диссоциированного азота // Гагаринские научные чтения по космонавтике и авиации 1983–84гг. — М.: Наука, 1985. С. 181–184.
28. *Гордеев А.Н., Колесников А.Ф., Якушин М.И.* Влияние каталитической активности поверхности на неравновесный теплообмен в дозвуковой струе диссоциированного азота // Изв. АН СССР, МЖГ, 1985. № 3, с. 166–172.
29. *Жестков Б.Е., Книвель А.Я.* Взаимодействие диссоциированного потока азота с металлическими поверхностями // Уч. записки ЦАГИ. 1979. Т.X, № 6, с. 37–46.
30. *Колесников А.Ф., Якушин М.И.* Об определении эффективных вероятностей гетерогенной рекомбинации атомов азота и кислорода по тепловым потокам к поверхности // Гагаринские научные чтения по космонавтике и авиации. 1988. — М.: Наука. 1989. с. 43–45
31. *Scott CD.* Space Shuttle laminar heating with finite-rate catalytic recombination. AIAA Paper, 1981. № 1444, 8 pp.
32. *Жестков Б.Е., Книвель А.Я.* Экспериментальное исследование гетерогенной рекомбинации // Труды ЦАГИ. 7. 1981. вып. 2 Ш.
33. *Кузнецов В.М., Кузнецов М.М., Колесников А.Ф.* и др. Теоретические и экспериментальные задачи гетерогенного катализа на поверхностях, обтекаемых диссоциированным газом // Моделирование в механике. Новосибирск, 1987. С. 83–104. В сб. Научные труды ИТПМ СО АН СССР; Т. 1(18), № 3.
34. *Rakich J.V., Steward D.A., Langfranco M.J.* Results of a flight experiments on the catalytic efficiency of the Space Shuttle heat shield. AIAA Paper, 1982. № 944, 14 pp.
35. Испытания теплозащитного покрытия МВКА «Спейс Шаттл» в первых орбитальных полетах. Техническая информация ЦАГИ. № 14. 1985. с. 24.
36. *Лозино–Лозинский Г.Е.* Полет «Бурана» / Гагаринские научные чтения по космонавтике и авиации 1989. — М.: Наука, 1990. с. 6–21
37. *Белоцерковский О.М.* Численное моделирование в механике сплошных сред. 1984. — М.: Наука, 520 С.
38. *Годунов С.К., Забродин А.В., Иванов М.Я.* и др. Численное решение многомерных задач газовой динамики. 1976. — М.: Наука, 400 С.
39. *Osher S., Solomon F* Upwind difference schemes for hyperbolic systems of conservation laws. Math, of Comp., V. 38, № 158, April 82, p.339–374.
40. *Афонина Н.Е., Громов В.Г.* Численное моделирование теплообмена на наветренной стороне поверхности ВКС «Буран», Отчет № 4076 ИМ МГУ, 1991.
41. *Афонина Н.Е., Громов В.Г.* Численное исследование теплообмена на отклоненных органах управления ВКС «Буран». Отчет № 4203 ИМ МГУ, 1992 г.
42. *Афонина Н.Е., Громов В.Г. и др.* Разработка методов и программ расчета пространственных течений многокомпонентных реагирующих газовых сред. Отчет № 4210, ИМ МГУ, 1992.
43. *Афонина Н.Е., Громов В.Г.* Сверхзвуковое обтекание затупленных конусов потоков воздуха с учетом его реальных свойств. Препринт № 14–95 ИМ МГУ, Москва, 1995.
44. *Афонина Н.Е., Громов В.Г.* Численное исследование гиперзвукового теплообмена на наветренной стороне поверхности ВКС «Буран». Препринт № 17–96 ИМ МГУ, Москва, 1996.

14
МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ТЕПЛО- И МАССООБМЕНА ПРИ АЭРОТЕРМОХИМИЧЕСКОМ РАЗРУШЕНИИ ТЕПЛОЗАЩИТНЫХ МАТЕРИАЛОВ

В. В. Горский
ОАО Военно-промышленная корпорация «Научно-производственное объединение машиностроения»

Введение

Абляционная тепловая защита, т. е. тепловая защита уносом массы, относится к числу наиболее широко распространенных на практике инструментов предохранения элементов конструкции различных энергетических устройств (и в первую очередь изделий ракетно-космической техники), подверженных воздействию интенсивных тепловых нагрузок со стороны набегающих на них высоко скоростных и (или) высокотемпературных газовых потоков.

Наибольшее распространение на практике при этом получили различные композиционные теплозащитные материалы, представляющие собой матрицу, изготовленную из стойких по отношению к высоким температурам волокон и тканей, пропитанную органическими смолами. Эти материалы обладают достаточно высокими технологическими и физико-механическими характеристиками, стойкостью по отношению к агрессивным в химическом отношении средам, а в процессе термического разрушения эти материалы перегреваются до температур, превышающих 3000 °С, и поглощают большое количество тепла при переходе в газовую фазу.

Определение минимальной толщины тепловой защиты, обеспечивающей работоспособность защищаемой ею конструкции, имеет исключительно большое значение, так как стоимость каждой лишней единицы массы ракетно-космических систем весьма велика. В то же время отсутствует возможность качественного определения основных абляционных характеристик теплозащитных материалов в процессе их наземной экспериментальной отработки, так как существующие для этих целей стенды не позволяют удовлетворительно воспроизвести условия их натурной эксплуатации.

Чаще всего экспериментальная наземная отработка теплозащитных материалов проводится в струях воздушных электродуговых установок (ЭДУ) и в струях жидкостных ракетных двигателей (ЖРД). На установках первого типа удается обеспечить воспроизведение натурных значений энтальпии торможения набегающего газового потока и его химический состав,

однако малые геометрические размеры моделей не позволяют воспроизвести турбулентный режим течения газа в пограничном слое. Уровень давления торможения в струях таких установок также далек от тех давлений, которыми нагружается поверхность материала в условиях их натурной эксплуатации.

На установках второго типа, напротив, удается реализовать и турбулентный режим течения газа в пограничном слое, и близкий к натурным условиям, уровень давления торможения, однако все это достигается на фоне достаточно низких энтальпий торможения газового потока и его химического состава, кардинально отличающегося от химического состава воздуха.

Большое значение для установления абляционных характеристик теплозащитных материалов имеют также результаты летного эксперимента, которые, однако, обычно ограничиваются обгарными формами фрагментов конструкции, зафиксированными к концу полета.

В этой связи качественная оптимизация потребных толщин тепловой защиты оказывается невозможной без привлечения математического моделирования процессов тепло– и массообмена, протекающих при ее уносе массы. Однако при теоретическом описании процесса уноса массы высокотемпературных теплозащитных материалов мы сталкиваемся с целой совокупностью проблем, однозначное решение которых, на первый взгляд, не представляется возможным.

Дело в том, что слой материала, прилегающий к его внешней поверхности, обтекаемой набегающим газовым потоком, для ее обозначения будем использовать термин «стенка» — характеризуется неупорядоченной структурой, в которой протекают гетерогенные химические реакции. Под действием сил, приложенных к этому слою материала со стороны набегающего газового потока, отдельные компоненты материала в одних условиях могут сноситься механически в конденсированной фазе, а в других условиях — эти же компоненты могут сохранять механическую прочность и переходить в газовую фазу за счет физико-химических превращений, протекающих на «стенке».

Данные по свойствам теплозащитных материалов и кинетике протекающих в них гетерогенных физико-химических превращений, полученные различными исследователями, чаще всего значительно различаются между собой, что является следствием сложной картины взаимодействия целой совокупности физико-химических превращений, протекающих по-разному в различных условиях проведения экспериментальных исследований.

К числу основных элементов неопределенности, с которыми приходится сталкиваться при анализе экспериментальных данных по обгару тепловой защиты в летных условиях и в условиях испытаний в струях ЖРД, относятся также и эффективные размеры шероховатости стенки по отношению к возникновению турбулентного режима течения газа в пограничном слое и к усилению интенсивности теплообмена. При этом необходимо отдавать себе отчет в том, что при проведении расчетов целесообразно использовать характеристики шероховатости стенки, образовавшейся в процессе ее уноса

массы (и, естественно, не поддающейся измерению), а не находящейся в исходном состоянии или зафиксированной после завершения эксперимента.

Поэтому единственно возможным путем построения достоверных математических моделей протекания процессов тепло– и массообмена, сопровождающих унос массы теплозащитных материалов указанного класса, является:

— учет в их рамках возможности протекания всей совокупности основных физико-химических превращений, сопутствующих протеканию исследуемого явления;

— использование вариационного принципа определения как свойств материала, так и в действительности реализующихся физико-химических процессов из числа учтенных в математическом описании, на базе сопоставления теоретических и экспериментальных данных применительно к широкому кругу условий функционирования материалов рассматриваемого класса.

Исключительно важной при этом представляется необходимость рассмотрения всей совокупности вопросов, связанных с движением изделий, их аэродинамическими и массово-инерционными характеристиками, нагревом и обгаром их тепловой защиты, в комплексной взаимно сопряженной постановке.

Только в рамках использования такого комплексного подхода может быть проведен как качественный анализ экспериментальных данных, характеризующихся существенным изменением внешних обводов рассматриваемых элементов конструкции изделия за счет обгара их тепловой защиты, так и перенос результатов моделирования на натурные условия функционирования тепловой защиты.

Ниже рассматривается пример создания математического описания процессов тепло– и массообмена, протекающих при аэротермохимического разрушения композиционного теплозащитного материала на кремнеземной основе, которое пригодно для решения задач указанного типа.

Физико-математическая постановка задачи квазистационарного аэротермохимического разрушения стеклопластичных композиционных теплозащитных материалов в высокотемпературном газовом потоке

1. Объект исследований. Термическая деструкция связки

Будем рассматривать квазистационарное аэротермохимическое разрушение модельного композиционного теплозащитного покрытия, представляющего собой изотропную механическую смесь диоксида кремния и органической связки, в набегающем на него высокотемпературном газовом потоке в общем случае сложного химического состава.

Квазистационарный режим уноса массы теплозащитных материалов является частным, но в то же самое время одним из наиболее важных случаев функционирования тепловой защиты. Этот режим уноса массы характеризуется стационарностью данного процесса относительно наблюдателя,

находящегося на поверхности материала, обтекаемой набегающим газовым потоком. Только в рамках такого подхода удается достаточно глубоко разобраться с физикой рассматриваемого явления и установить основные закономерности его протекания, что, в свою очередь, открывает возможность для расчета параметров уноса массы теплозащитных материалов в нестационарных условиях их эксплуатации. Важным представляется также то обстоятельство, что во многих важных, с практической точки зрения, случаях результаты расчетов, полученные с использованием квазистационарной постановки задачи, крайне незначительно отличаются от аналогичных данных, полученных в нестационарной постановке.

Примем:

— что ρ_m — исходная плотность материала с размерностью кг/м^3,
— что $\varphi_{\mathrm{SiO_2}}$ и φ_r — весовые содержания диоксида кремния и связки в нем,
— что химический состав связки (в качестве которой будем рассматривать фенольные эпоксидные и кремнийорганические смолы) ограничен компонентами, образованными из химических элементов

$$\mathrm{C}, \quad \mathrm{O}, \quad \mathrm{H}, \quad \mathrm{N}, \quad \mathrm{Si}. \tag{14.1}$$

При тепловом разрушении композиционных материалов отдельные их компоненты могут претерпевать физико-химические превращения еще до выхода на поверхность, омываемую набегающим газовым потоком (т. е. при температурах, меньших температуры T_w этой поверхност).

Если исключить из рассмотрения процесс испарения влаги, не оказывающий заметного влияния на суммарный процесс уноса массы тепловой защиты, то самым низкотемпературным из числа подлежащих учету физико-химических превращений, претерпеваемых компонентами материала в процесс нагрева, является термическая деструкция (пиролиз) связки.

Прохождение этого процесса сопровождается необратимым изменением ее агрегатного состояния с образованием твердого остатка, газовой фазы и пор в материале, по которым газы «стравливаются» в окружающую среду, а также поглощением тепла. Одновременно с этим изменяются такие свойства материала как плотность, теплоемкость и теплопроводность.

При описании динамики протекания этого процесса будем использовать так называемую «фронтовую» постановку задачи. В рамках этого подхода принимается, что при достижении относительно невысокой температуры T_f происходит мгновенное указанное выше изменение агрегатного состояния связки и что химический состав образующейся при этом газовой фазы не изменяется в процессе фильтрации ее к нагреваемой поверхности.

Известно (см., например, работу [1]), что в действительности механизм пиролиза органической связки является существенно более сложным.

Во-первых, разрыв связей в ее полимерных цепочках происходит не мгновенно, а в некотором диапазоне температур, вследствие чего более логичным

на первый взгляд представляется использование для описания этого процесса не «фронтовой», а «кинетической» модели [1, 3] типа

$$\omega_d = \left(\rho'_r - \rho'_{r,\mathrm{end}}\right) \cdot f_d\,(T)\,. \tag{14.2}$$

Здесь:

ω_r — скорость потери массы связки;

ρ'_r — текущая «кажущаяся» плотность связки (т. е. ее масса, содержащаяся в единице объема материала);

$\rho'_{r,\mathrm{end}}$ — предельное значение этой плотности, соответствующее прохождению реакции «до конца»;

f_d — функция, характеризующая зависимость скорости реакции от температуры T.

Однако необходимо иметь в виду, что пиролиз связки представляет собой сложный многостадийный физико-химический процесс, структура протекания которого не ясна до сих пор. Кинетические константы процесса, полученные различными исследователями (см., например, [3, 4]), существенно различаются между собой (графический вид функций $f_d\,(T)$, построенных по кинетическим константам данных работ, приводится на рис. 14.1).

Помимо технологических факторов одной из основных причин указанного рассогласования является зависимость динамики протекания рассматриваемого процесса от темпа и предыстории нагрева, а значит и от методики

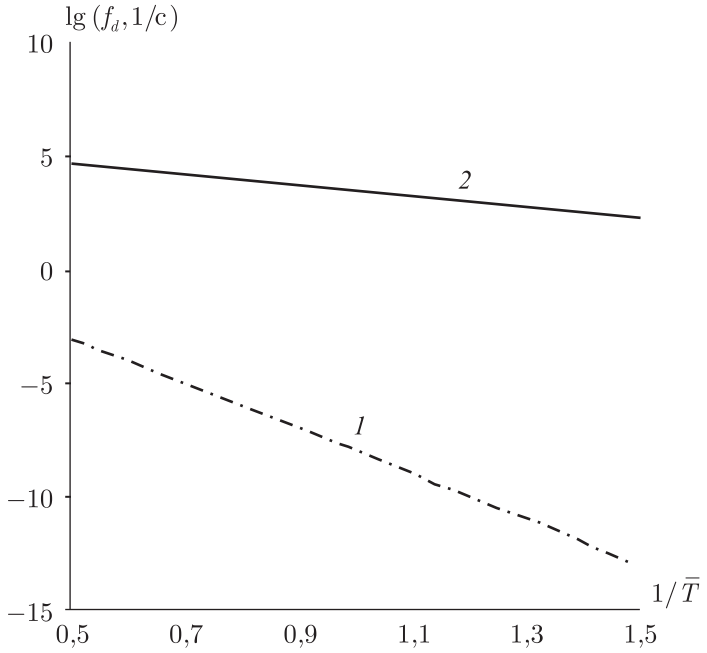


Рис. 14.1. Кинетика пиролиза фенольных смол по данным различных авторов (*1* — [3], *2* – [4], $\overline{T} = T/1000$)

проведения эксперимента. Использование кинетических констант процесса пиролиза смол, трактуемого как одностадийное физико-химическое превращение, в условиях, существенно отличающихся от условий проведения эксперимента, в которых они получены, сопряжено с возможностью не только внесения существенных ошибок в результаты счета, но и с получением информации, противоречащей физике протекания данного явления.

В качестве примера на рис. 14.2 приводятся результаты расчета нестационарного прогрева типичного стеклопластика под действием постоянной

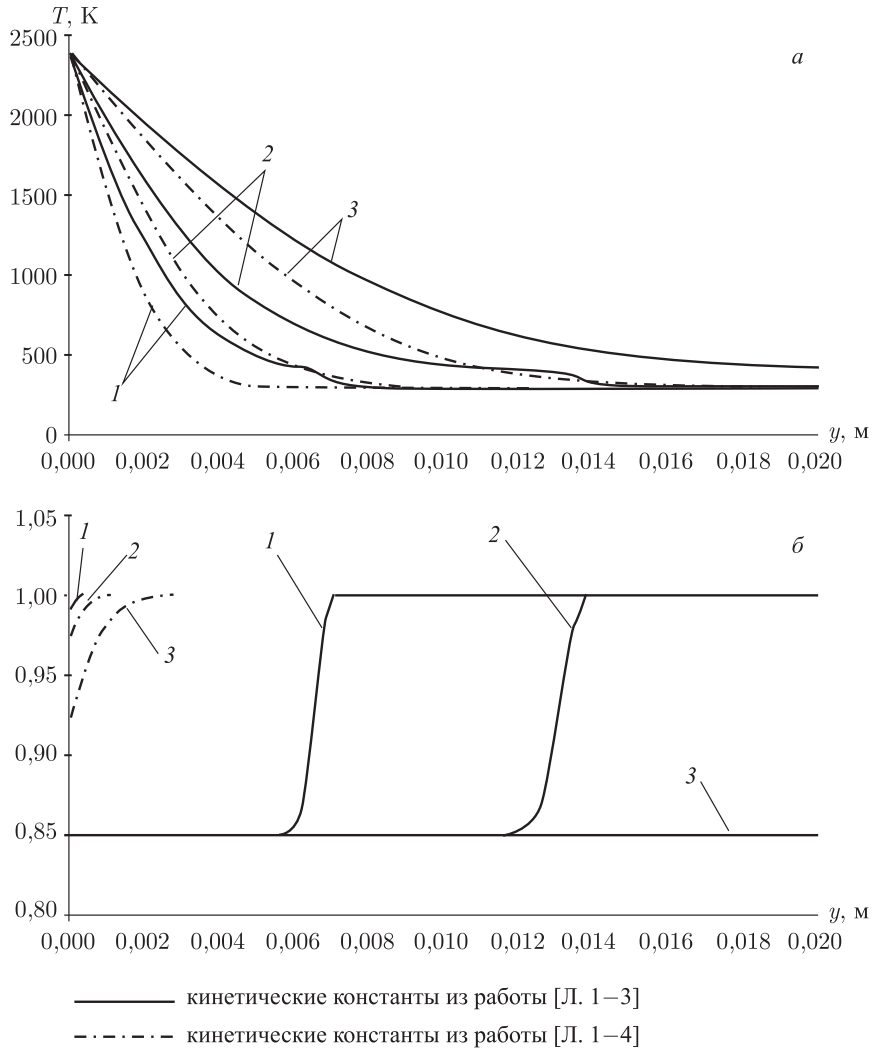


Рис. 14.2. Профили температуры и относительной плотности в материале при расчете нестационарного прогрева типичного стеклопластика под действием постоянной тепловой нагрузки (*1* — время прогрева 12 с, *2* — время прогрева 30 с, *3* — время прогрева 100 с)

тепловой нагрузки, в котором процесс пиролиза фенольной смолы описывался с использованием кинетических констант, взятых из работ различных авторов (здесь y — координата, отсчитываемая от «стенки» по нормали к ней).

Как видно из анализа приведенных данных, температурный интервал, внутри которого реализуется процесс пиролиза смолы, существенно зависит как от временной координаты, так и от используемых в расчетах кинетических констант. В частности, в одном случае из числа рассмотренных реакция смещается в область температур, превышающих 2000 K.

В то же самое время характерная температура пиролиза смол, при которой

$$\frac{\rho'_r - \rho'_{r,\mathrm{end}}}{\rho_m \varphi_r - \rho'_{r,\mathrm{end}}} = 0{,}5,$$

является достаточно стабильной величиной. Она зависит в основном от типа связующего, а ее числовые значения колеблются в диапазоне 600–1000 K. Для смол, пиролиз которых сопровождается образованием конденсированного «коксового» остатка, эта температура в литературе получила название «температуры коксования». Естественно, что в качестве введенного выше параметра T_f логичным представляется использовать именно указанную характерную температуру пиролиза смолы.

В работе [5] предложена математическая модель процесса пиролиза смол, в которой этот процесс представляется в виде совокупности независимых химических реакций, скорость протекания которых записываются в форме закона Аррениуса. Это направление исследований представляется перспективным, однако отсутствие надежных данных по кинетическим константам указанных реакций не позволяет пока использовать эту модель на практике.

Во-вторых, в образующейся при пиролизе смолы относительно низкотемпературной газовой фазе обычно значительное место занимают высокомолекулярные соединения [1, 3, 6, 7]. По мере фильтрации газообразных продуктов пиролиза связующего к «стенке» через вышележащие более высокотемпературные слои материала эти соединения постепенно подвергаются разложению до устойчивых низкомолекулярных соединений. При этом молекулярная масса смеси понижается, а на стенках пор имеет место осаждение сажи.

В частности, уже при температурах порядка 2000 K состав продуктов пиролиза связок рассматриваемого класса может быть ограничен следующим набором компонент:

— диоксид кремния и углерод (в конденсированной фазе),

— молекулярный водород, молекулярный азот и оксид углерода (в газовой фазе).

Учет детальной структуры разложения газообразных продуктов пиролиза встречает серьезные затруднения, что, в первую очередь, связано с ограниченностью сведений о кинетических константах соответствующих химических реакций. В то же самое время целесообразность рассмотрения достаточно подробной схемы протекания этих процессов представляется сомнительной

в силу того, что сложно ожидать существенного влияния, оказываемого указанными реакциями на суммарные характеристики уноса массы материала в целом.

Более логичным представляется использование сформулированной выше «фронтовой» модели процесса пиролиза связующего при следующих двух предельных случаях протекания вторичной деструкции его газовой фазы:

— она проходит одновременно с процессом первичного пиролиза связки, т. е. при температуре, равной T_f;

— она проходит на «стенке», температура которой равна T_w.

Ниже для этих случаев протекания процесса пиролиза связки будем использовать термины «схема пиролиза A» и «схема пиролиза B».

Предметом настоящего исследования будут связки, изготовленные на базе фенольных эпоксидных и кремнийорганических смол, характеризующиеся недостатком в их химических составах кислорода на предмет окисления содержащихся в них углерода до оксида углерода.

Тогда элементарный химический состав связки такого типа должен удовлетворять условию:

$$0 \leqslant \frac{\nu_{\mathrm{O},r}}{M_{\mathrm{O}}} - 2\frac{\nu_{\mathrm{Si},r}}{M_{\mathrm{Si}}} < \frac{\nu_{\mathrm{C},r}}{M_{\mathrm{C}}}, \tag{14.3}$$

где $\nu_{j,r}$ — массовое содержание j-го химического элемента в ней, а M_i — мольная масса i-го вещества.

Если далее:

— массовые доли связки, превратившейся в результате термической деструкции в i-е вещество на фронте первичного пиролиза и на поверхности материала, обтекаемой набегающим газовым потоком, обозначить соответственно $\pi_{i,f}$ и $\pi_{i,w}$,

— ввести весовой коэффициент W, равный единице для «схемы пиролиза A» и равный нулю для «схемы пиролиза B»,

то расчет указанных долей может быть выполнен по формулам вида:

$$\pi^{(s)}_{\mathrm{C},f} = k_1 + W\left[\nu_{\mathrm{C},r} - k_1 - \left(\nu_{\mathrm{O},r} - 2\nu_{\mathrm{Si},r}\frac{M_{\mathrm{O}}}{M_{\mathrm{Si}}}\right)\frac{M_{\mathrm{C}}}{M_{\mathrm{O}}}\right], \tag{14.4}$$

$$\pi^{(s)}_{\mathrm{SiO_2},f} = \nu_{\mathrm{Si},r}\frac{M_{\mathrm{SiO_2}}}{M_{\mathrm{Si}}}, \tag{14.5}$$

$$\pi^{(g)}_{\mathrm{H_2},f} = W \cdot \nu_{\mathrm{H},r}, \tag{14.6}$$

$$\pi^{(g)}_{\mathrm{N_2},f} = W \cdot \nu_{\mathrm{N},r}, \tag{14.7}$$

$$\pi^{(g)}_{\mathrm{CO},f} = W \cdot \left(\nu_{\mathrm{O},r} - 2\nu_{\mathrm{Si},r}\frac{M_{\mathrm{O}}}{M_{\mathrm{Si}}}\right)\frac{M_{\mathrm{CO}}}{M_{\mathrm{O}}}, \tag{14.8}$$

$$\pi^{(g)}_{\Omega,f} = (1-W)\left(1 - \pi^{(s)}_{\mathrm{C},f} - \pi^{(s)}_{\mathrm{SiO_2},f}\right), \tag{14.9}$$

$$\pi^{(s)}_{\mathrm{C},w} = (1-W)\left[\nu_{\mathrm{C},r} - k_1 - \left(\nu_{\mathrm{O},r} - 2\nu_{\mathrm{Si},r}\frac{M_{\mathrm{O}}}{M_{\mathrm{Si}}}\right)\frac{M_{\mathrm{C}}}{M_{\mathrm{O}}}\right], \tag{14.10}$$

$$\pi^{(s)}_{\mathrm{SiO_2},w} = 0, \tag{14.11}$$

$$\pi^{(g)}_{\mathrm{H}_2,w} = (1-W)\cdot\nu_{\mathrm{H},r}, \tag{14.12}$$

$$\pi^{(g)}_{\mathrm{N}_2,w} = (1-W)\cdot\nu_{\mathrm{N},r}, \tag{14.13}$$

$$\pi^{(g)}_{\mathrm{CO},w} = (1-W)\cdot\left(\nu_{\mathrm{O},r} - 2\nu_{\mathrm{Si},r}\frac{M_{\mathrm{O}}}{M_{\mathrm{Si}}}\right)\cdot\frac{M_{\mathrm{CO}}}{M_{\mathrm{O}}}, \tag{14.14}$$

$$\pi^{(g)}_{\Omega,w} = -\pi^{(g)}_{\Omega,f}. \tag{14.15}$$

При выводе этих формул принимается, что массовая доля k_1 связки, превратившейся в конденсированный углерод на первой стадии ее пиролиза, задана (в литературе для этого параметра обычно используется термин «коксовое число»). Подстрочный индекс Ω означает высокомолекулярную газовую фазу, а надстрочные индексы (s) и (g) соответствуют нахождению вещества в конденсированном и газовом состояниях.

Необходимо также отметить, что у коксующихся материалов, изготовленных с использованием фенольных смол, наблюдается резкое увеличение коэффициента теплопроводности с ростом температуры при переходе в область высоких температур — см., например, рис. 14.3 из работы [8]. Такой характер изменения коэффициента теплопроводности может быть связан с увеличением степени графитизации коксового остатка от пиролиза связки, и в этой связи изучение детальной структуры процесса пиролиза вызывает не только теоретический, но и практический интерес.

Те же самые причины, которые обусловливают существенный разброс литературных данных по кинетике пиролиза смол, лежат в основе аналогичной картины, наблюдающейся для теплового эффекта ΔQ_r этого процесса.

Так, например, в работе [1] для фенольной смолы используется значение ΔQ_r, равное 1640 кДж/кг, а в работе [5] — равное 1030 кДж/кг.

При изменении условий протекания данного процесса (и, в первую очередь, температуры) изменяется структура сопровождающих его физико-химических превращений и, как следствие, количество поглощенного при этом тепла (смолы рассматриваемого типа являются эндотермическими).

В таблицах 14.1 и 14.2 приводятся экспериментальные данные по изменению химического состава газообразных продуктов пиролиза фенольной смолы и теплового эффекта этого процесса в зависимости от температуры, опубликованные в работе [7].

Как следует из анализа представленных данных, при наиболее часто используемой на практике величине температуры коксования фенольных смол, равной 873 K, в газовой фазе содержится действительно большое число высокомолекулярных соединений. В то же самое время при температуре, равной 1173 K, массовые концентрации этих соединений столь резко уменьшаются, что при построении оценки дальнейшего повышения теплового эффекта пиролиза с ростом температур можно предположить, что оно в основном

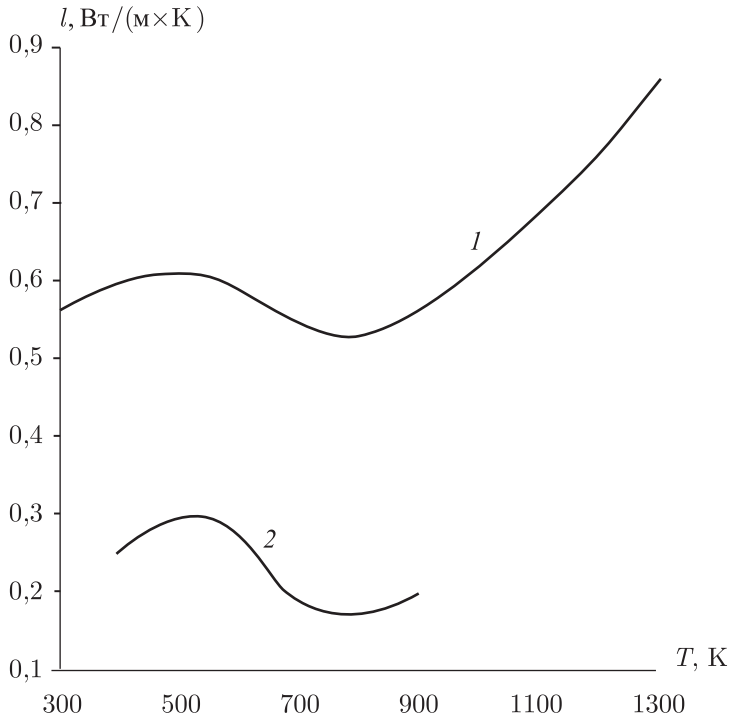


Рис. 14.3. Коэффициент теплопроводности асботекстолита (*1*) и стеклопластика (*2*) [8]

Таблица 14.1. Массовый химический состав газообразных продуктов пиролиза фенольной смолы в процентах

Вещество	Температура, К			Вещество	Температура, К		
	673	873	1153		673	873	1153
H_2	0,4	1,7	6,3	Бензол	0,3	3,0	1,5
CO	0,4	17,8	54,4	Толуол	0,3	5,3	2,4
H_2O	47,0	13,0	7,0	Ксилены	1,2	2,8	1,3
CH_4	1,8	9,4	5,3	Фенол	6,1	9,0	1,8
C_2H_6	0,1	4,0	1,2	Крезолы	12,1	12,5	2,1
N_2	6,1	9,6	9,4	Диметилфенол	4,6	4,7	0,0
CO_2	11,1	3,4	4,6	2-пропанол	4,8	0,0	0,0
O_2	0,0	3,8	2,7	Ацетон	3,7	0,0	0,0

Таблица 14.2. Тепловой эффект пиролиза фенольной смолы

Температура, К	ΔQ_r, кДж/кг
673	863
873	1177
1173	1725

обусловлено прохождением следующих химических реакций:

$$CH_4 \to C^{(s)} + 2H_2^{(g)}, \tag{14.16}$$

$$H_2O^{(g)} + C^{(s)} \to H_2^{(g)} + CO^{(g)}, \tag{14.17}$$

$$CO_2^{(g)} + C^{(s)} \to 2CO^{(g)}. \tag{14.18}$$

Тогда:

— принимая, что первая стадия пиролиза связки, характеризуемая «коксовым» числом, равным примерно 0,5, условно закончилась при температуре, равной 873 К,

— базируясь на данных, помещенных в таблицах 14.1 и 14.2,

— используя термодинамические свойства индивидуальных веществ, участвующих в реакциях (14.16)–(14.18), из работы [9], можно оценить максимально возможное увеличение теплового эффекта первичного пиролиза связующего за счет полного разложения высокомолекулярных газообразных соединений цифрой порядка 900 кДж/кг.

Если через $\Delta Q_{r,f}$ и $\Delta Q_{r,w}$ обозначить тепловые эффекты, связанные с поглощением тепла за счет прохождения пиролиза связки на фронте ее первичного пиролиза и на поверхности материала, обтекаемой набегающим газовым потоком, то формулы для указанных тепловых эффектов могут быть записаны в следующем виде:

$$\Delta Q_{r,f} = \Delta Q_{r,1} + W \cdot \Delta Q_{r,2}, \tag{14.19}$$

$$\Delta Q_{r,w} = (1 - W) \cdot \Delta Q_{r,2}. \tag{14.20}$$

Под $\Delta Q_{r,1}$ и $\Delta Q_{r,2}$ здесь понимаются тепловые эффекты первичного пиролиза связки и вторичной деструкции газообразных продуктов пиролиза соответственно.

2. Гетерогенное химическое взаимодействие между диоксидом кремния и углеродом во внутренних слоях материала

Одним из основных физико-химических превращений, претерпеваемых компонентами материала рассматриваемого класса в процессе нагрева, является гетерогенное химическое взаимодействие между диоксидом кремния и углеродом, образовавшемся в процессе термической деструкции связки.

Механизм этого взаимодействия может быть представлен следующим образом [10]:

— возгонка диоксида кремния с образованием парообразных частиц, находящихся в активном электронно-возбужденном состоянии;

— перенос активных частиц окисла к восстановителю и адсорбция на нем;

— непосредственно химическое взаимодействие окисла с углеродом с образованием конденсированного карбида кремния и газообразного окисла более низкой степени окисления (оксида кремния) или только газообразных продуктов (оксидов кремния и углерода);

— десорбция газообразных продуктов реакции с поверхности восстановителя.

Как и для всех многостадийных процессов, кинетика протекания рассматриваемого физико-химического взаимодействия может зависеть не только от температуры, но и от темпа и предыстории нагрева. Кроме этого на нее могут оказывать заметное влияние такие факторы как весовое соотношение реагентов, размер их частиц, давление в реакционной зоне и т.д.

Результаты исследования влияние ряда из указанных факторов на кинетику гетерогенного химического взаимодействия диоксида кремния и углерода приведены в работе [11]. Изменение в широких пределах весового содержания реагентов в образцах и размеров их частиц позволило авторам установить влияние этих факторов на кинетику исследуемого процесса.

Основные результаты цитируемой статьи приводятся на рис. 14.4, где цифры означают номера образцов, характеристики которых указаны в табл. 14.3. При этом образец № 5 «вырезан» из реального материала.

Таблица 14.3. Характеристики образцов, использованных в [12]

Номер образца	Размер частиц, мкм		Массовое	Мольное
	SiO_2	C	Отношение содержаний в материале SiO_2 и C	
1	2,800	0,017	5,0	1,00
2	2,800	0,017	15,0	3,00
3	0,015	0,017	5,0	1,00
5	10,000	—	4,3	0,86

Как следует из анализа представленных данных, гетерогенное химическое взаимодействие диоксида кремния с углеродом проходит с минимальной скоростью при весовом содержании реагентов в образцах, близком к их содержанию в реальных материалах (образцы 1 и 5). Если бы в этих условиях скорость реакции лимитировалась углеродом, то увеличение содержания диоксида кремния и измельчение его (т. е. переход от образца 1 к образцам 2

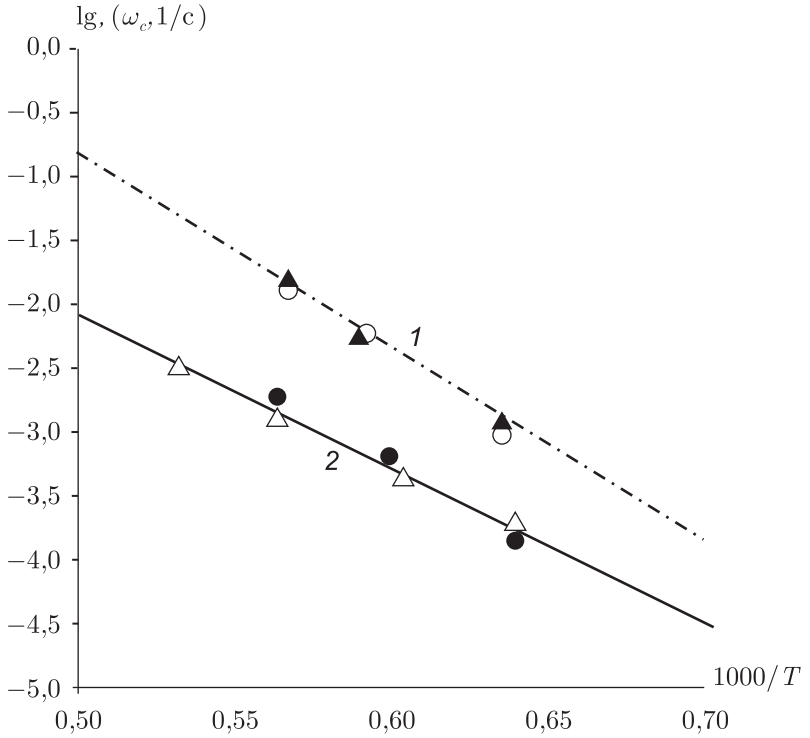


Рис. 14.4. Кинетика гетерогенного химического взаимодействия диоксида кремния с углеродом при различном содержании реагентов в материале [11] (*1* — формула (14.22), *2* — формула (14.23), — △ образец 1, ○ — образец 2, ▲ — образец 3; ●— образец 5).

и 3) не должно было бы привести к заметному изменению скорости процесса. Так как, однако, результаты проведенных экспериментов свидетельствуют об обратном, то можно предположить, что при испытаниях образцов 1 и 5 скорость реакции лимитировалась диоксидом кремния. К такому же выводу пришли и авторы работы [9]. В то же самое время практически полная идентичность результатов, полученных при увеличении содержания диоксида кремния в 3 раза (образец 2) и размера его частиц примерно в 200 раз (образец 3) по сравнению с образцом 1, позволяют предположить, что в этих условиях скорость процесса уже лимитируется углеродом.

В процессе химического взаимодействия исходное содержание реагентов в единице объема будет изменяться. Поэтому запись уравнения протекания рассматриваемого химического взаимодействия в форме:

$$\omega_{\text{into}} = \rho'_{\text{SiO}_2} \exp\left(\beta_{\text{into}} - \frac{\alpha_{\text{into}}}{T}\right) \frac{M_{\text{C}}}{M_{\text{SiO}_2}},$$

или

$$\omega_{\text{into}} = \rho'_C \exp\left(\beta_{\text{into}} - \frac{\alpha_{\text{into}}}{T}\right),$$

(так, в частности, делается в работе [12]), не будет в полной мере отражать физику процесса.

Здесь:

ω_{into} — скорость убыли массы углерода в единице объема, кг/(м^{2}с),

ρ'_i — кажущаяся плотность i-го вещества, т. е. масса этого вещества в единице объема, кг/м^3,

M_i — мольная масса i-го вещества, кг/кмоль,

α_{into} и β_{into} — кинетические константы.

В качестве первого приближения к более качественному описанию экспериментальных данных работы [11] может быть рекомендована система соотношений вида:

$$\omega_{\text{into}} = \rho'_C \omega_C(T) = \rho'_C \left[W_1 \omega_1(T) + (1 - W_1)\, \omega_2(T) \frac{\rho'_{\text{SiO}_2} M_{\text{C}}}{\rho'_{\text{C}} M_{\text{SiO}_2}} \right], \tag{14.21}$$

$$\omega_1(T) = \exp(\beta_1 - \alpha_1/T), \tag{14.22}$$

$$\omega_2(T) = \exp(\beta_2 - \alpha_2/T), \tag{14.23}$$

$$W_1 = \max\left\{0, \min\left[1, \left(\frac{\rho'_{\text{SiO}_2} M_{\text{C}}}{\rho'_{\text{C}} M_{\text{SiO}_2}} - 1\right) \cdot \frac{1}{2}\right]\right\}. \tag{14.24}$$

Здесь: $\alpha_1 = 34720$, $\beta_1 = 15{,}477$, $\alpha_2 = 27650$, $\beta_2 = 9{,}03$.

На рис. 14.4 функциональным зависимостям $\omega_1(T)$ и $\omega_2(T)$ соответствуют пунктирная и сплошная линии.

Отдельного рассмотрения заслуживает также вопрос о конечных продуктах рассматриваемого химического взаимодействия.

В работе [11] отмечается, что S — образная форма экспериментальных зависимостей давления реакционных паров от времени свидетельствует о многостадийном характере прохождения изучаемого процесса и что наиболее вероятная форма суммарного уравнения реакции имеет вид:

$$\text{SiO}_2^{(s)} + \text{C}^{(s)} \to \text{SiO}^{(g)} + \text{CO}^{(g)}. \tag{14.25}$$

Указанная схема химического взаимодействия между диоксидом кремния и углеродом использовалась, в частности, при теоретическом исследовании механизма уноса массы стеклопластиков в работе [12]. Анализ широкого круга экспериментальных данных по кинетике высокотемпературного гетерогенного взаимодействия между диоксидом кремния и углеродом, проведен в работе [13]. Здесь отмечается исключительно высокая активность карбида кремния к вступлению в химическое взаимодействие с диоксидом кремния и делается вывод о том, что наиболее вероятными конечными продуктами этого взаимодействия являются газообразные оксиды кремния и углерода при следующей схеме протекания процесса:

$$\text{SiO}_2^{(s)} + 3\text{C} \to \text{SiC}^{(s)} + 2\text{CO}^{(g)}, \tag{14.26}$$

$$2\text{SiO}_2^{(s)} + \text{SiC}^{(s)} \to 3\text{SiO}^{(g)} + \text{CO}^{(g)}. \tag{14.27}$$

Отмечается, что весьма вероятным является и прохождение реакции (14.27) в две фазы:

$$\mathrm{SiO}_2^{(s)} + \mathrm{SiC}^{(s)} \to \mathrm{Si}^{(s)} + \mathrm{SiO}^{(g)} + \mathrm{CO}^{(g)}, \tag{14.28}$$

$$\mathrm{SiO}_2^{(s)} + \mathrm{Si}^{(s)} \to 2\mathrm{SiO}^{(g)}. \tag{14.29}$$

На данном этапе исследований нам представляется целесообразным ограничиться рассмотрением схемы протекания процесса гетерогенного химического взаимодействия между диоксидом кремния и углеродом, записанной в форме (14.25), как наиболее простой и наиболее полно изученной. Однако в дальнейшем, по-видимому, целесообразно проанализировать и более детальную схему протекания этого процесса на тех режимах уноса массы материала, на которых данное химическое взаимодействие оказывает заметное влияние на унос массы материала в целом.

Если набор физико-химических превращений, протекающих во внутренних слоях материала ограничить рассмотренными выше процессами пиролиза связки и гетерогенного взаимодействия диоксида кремния с углеродом, то химический состав материала в области между фронтом пиролиза связующего и его поверхностью, обтекаемой набегающим газовым потоком, будет ограничен следующим набором компонент:

$$\mathrm{SiO}_2^{(s)}, \quad \mathrm{C}^{(s)}, \quad \mathrm{CO}^{(g)}, \quad \mathrm{H}_2^{(g)}, \quad \mathrm{N}_2^{(g)}, \quad \Omega^{(g)}, \quad \mathrm{SiO}^{(g)}. \tag{14.30}$$

Здесь не делается различия между диоксидом кремния, присутствовавшим в материале изначально и образовавшимся в процессе пиролиза связующего, а также между углеродом, образовавшимся на различных стадиях этой реакции. Под Ω в (14.30) понимаются высокомолекулярные газообразные продукты пиролиза.

3. Оплавление диоксида кремния

Как следует из результатов большого числа проведенных исследований (см., например, обзор по этому вопросу в работе [14]), эффективность стеклопластиков как системы тепловой защиты уносом массы в значительной степени определяется тем, какая доля содержащегося в них диоксида кремния перейдет в газовую фазу. Одним из процессов, способствующих газификации диоксида кремния, является рассмотренное выше гетерогенное химическое взаимодействие его с углеродом, а основным фактором, препятствующим газификации диоксида кремния, является его оплавление, под которым будем понимать унос массы диоксида кремния в жидкой фазе под действием сдвигающих сил со стороны набегающего газового потока.

В условиях интенсивного аэродинамического нагрева на поверхности стеклопластиков практически всегда образуется вязкая пленка расплава. Несмотря на малую толщину, эта пленка оказывает значительное влияние на процесс разрушения материала в целом, способствуя сцеплению частиц

поверхностного слоя и уменьшению их эрозионного разрушения. Кроме этого пленка создает серьезные препятствия на пути проникновения окислительных веществ из набегающего потока во внутренние слои материала к его химически активным компонентам [14].

Процессы плавления и течения пленок расплава у кристаллических и аморфных веществ имеют определенные отличия.

Кристаллическое вещество, как известно, обладает фиксированной величиной температуры плавления, при нагреве до которой оно практически мгновенно теряет вязкость. В условиях наличия значительных сдвигающих сил, как это обычно и имеет место в процессе эксплуатации теплозащитных материалов, указанное обстоятельство практически исключает возможность значительного перегрева расплава, а значит и возможность заметного его испарения. А величина теплового эффекта плавления вещества практически всегда значительно уступает величине теплового эффекта его испарения. Так, например, при испарении единицы массы диоксида кремния поглощается примерно в три раза больше тепла, чем при нагреве его до температуры испарения, включая тепловой эффект плавления [9].

Аморфные же вещества не имеют столь ярко выраженной температуры плавления. Вязкость их постепенно уменьшается с ростом температуры, однако для некоторых веществ она оказывается весьма значительной и при достаточно высоких значениях последней. Это обусловливает возможность перегрева пленок таких веществ до температур, при которых заметную роль в суммарном процессе уноса массы материала играет процесс испарения данного аморфного вещества. К веществам такого типа относится и диоксид кремния достаточно высокой чистоты, что и послужило одной из причин его широкого применения в рецептурах различных теплозащитных материалов [15].

Заметное «размягчение» диоксида кремния наблюдается с температур порядка 2000 K. При этом зависимость вязкости его расплава от температуры может быть записана в форме [16]: $\mu_{\mathrm{SiO_2}} \approx T^{-25}$.

Столь сильная связь вязкости диоксида кремния от температуры приводит к тому, что течение его расплава характеризуется крайне незначительной толщиной (это является причиной использования термина «пленка расплава») и относительно малыми числами Рейнольдса [17]. При этом поперечные градиенты температуры и нормальной составляющей вектора скорости в пленке значительно превосходят продольные градиенты этих функций. Вследствие этого повсеместно (см., например, работы [16–27]) для описания уноса массы диоксида кремния в жидкой фазе используются уравнения несжимаемого ламинарного пограничного слоя. Более того, как показали проведенные в работах [17, 19] оценки, инерционные члены в уравнении сохранения количества движения значительно меньше сил трения и ими можно пренебречь.

С учетом сказанного для описания динамической части теоретической модели двумерного оплавления затупленного тела вращения, изготовленного из однородного плавленого диоксида кремния, общепринятым является

использование системы дифференциальных уравнений вида:

$$\frac{\partial\left(\rho'_{\mathrm{SiO_2}} u_{\mathrm{SiO_2}} r\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(\rho'_{\mathrm{SiO_2}} v_{\mathrm{SiO_2}} r\right)}{\partial y} = 0, \tag{14.31}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu_{\mathrm{SiO_2}} \frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{dp_e}{dx}. \tag{14.32}$$

Здесь:

x — криволинейная координата, отсчитываемая вдоль образующей поверхности тела, обтекаемой набегающим потоком, от точки торможения этого потока (ниже для этой точки будем использовать общепринятый термин «критическая точка»);

y — координата, отсчитываемая вдоль внешней нормали к поверхности тела;

$u_{\mathrm{SiO_2}}$ — проекция вектора скорости движения расплава на ось x;

$v_{\mathrm{SiO_2}}$ — проекция вектора скорости движения расплава на ось y;

r — расстояние от внешней поверхности тела, обтекаемой набегающим газовым потоком, до его оси симметрии; внешней поверхности, обтекаемой набегающим газовым потоком;

p — давление в пленке расплава, равное давлению p_e на внешней границе газового пограничного слоя, которое зависит только от координаты x;

$\mu_{\mathrm{SiO_2}}$ — коэффициент динамической вязкости расплава, зависящий только от его температуры.

При этом кажущаяся плотность расплава тождественно равна плотности $\rho_{\mathrm{SiO_2}}$ вещества диоксид кремния.

Однако физическая картина течения расплава диоксида кремния в процессе уноса массы композиционного материала существенно отличается от аналогичной картины, наблюдаемой для оплавления материала, состоящего целиком из этого вещества (см., например, рис. 14.5, на котором приводится типичная фотография поверхности стеклопластика, подвергнутого высокотемпературному газодинамическому нагреву).

Во-первых, расплав диоксида кремния движется сквозь матрицу «коксового остатка», а во-вторых, в нем находятся не связанные с углеродной матрицей частички кокса и пузырьки «пробулькивающего» через него газа, образовавшегося во внутренних слоях материала. В результате этого при уносе массы стеклопластиков расплав диоксида кремния в большинстве случаев более всего похож на пену, образованную пузырьками газа.

Известно, что законы движения вспененных жидкостей существенно отличаются от законов движения однородных жидкостей. В первую очередь это связано с тем обстоятельством, что вязкость таких жидкостей, получивших в литературе название «неньютонианских», зависит не только от температуры, но и от действующих в них сил трения.

Наиболее подробно влияние, оказываемое на параметры уноса массы стеклопластиков наличием в расплаве диоксида кремния газовых и твердых включений, исследуется в работах [28–30].

В-третьих, даже для расплава однородного плавленого кварца данные различных авторов по вязкости различаются столь значительно, что соответствующий их использованию разброс по скорости термохимического разрушению этого материала оказывается недопустимо большим.

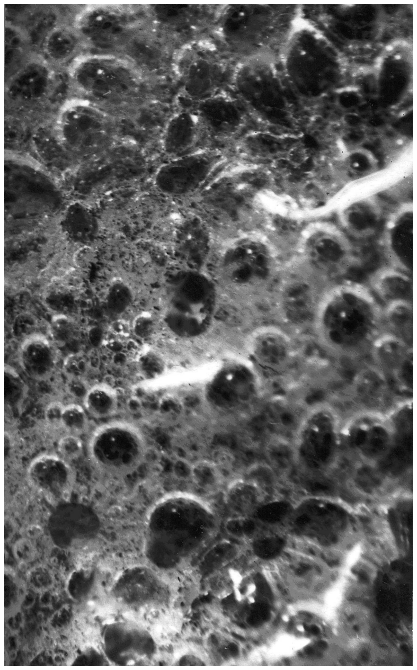


Рис. 14.5. Поверхность стеклопластика, подвергнутого высокотемпературному газодинамическому нагреву

Информация об указанном разбросе данных по вязкости плавленого кварца из работы [14] приводится на рис. 14.6, где под $\mu_{\mathrm{SiO_2},1}(T)$ и $\mu_{\mathrm{SiO_2},2}(T)$ понимаются функциональные зависимости вида:

$$\mu_{\mathrm{SiO_2},1} = \exp\left(\frac{68800}{T} - 22{,}315\right), \text{ кг/(м с)}, \tag{14.33}$$

$$\mu_{\mathrm{SiO_2},2} = \exp\left(\frac{61000}{T} - 16{,}657\right), \text{ кг/(м с)}. \tag{14.34}$$

Степень влияния неопределенности в вязкости плавленого кварца на скорость его уноса массы иллюстрируется рис. 14.7 из работы [14], где h_{eff} — эффективная энтальпия, под которой понимается количество тепла, поглощенное единицей унесенной массы материала в квазистационарных условиях, а h_{00} — энтальпия торможения набегающего воздушного потока.

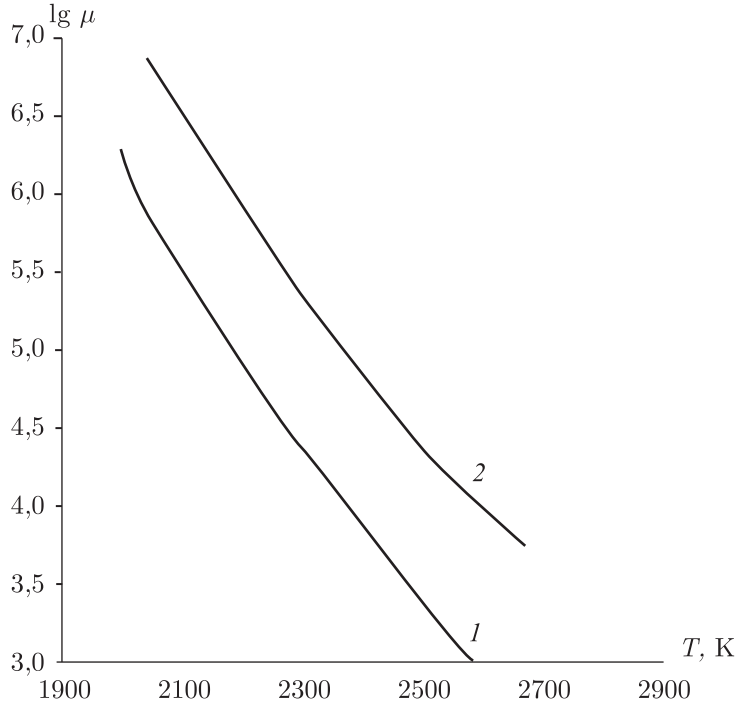


Рис. 14.6. Зависимость от температуры вязкости расплава кварцевого стекла *1* — расчет $\mu_{\mathrm{SiO_2},1}(T)$ по (14.33); *2* — расчет $\mu_{\mathrm{SiO_2},2}(T)$ по (14.34)

Практически полная неопределенность в эффективной вязкости расплава диоксида кремния в условиях уноса массы реальных теплозащитных материалов вынуждает рассматривать эту свойство расплава как параметр согласования теоретических и экспериментальных данных. Крайне небольшой объем экспериментальных данных, который обычно может использоваться для определения «свободных» параметров теоретической модели уноса массы теплозащитного материала, диктует необходимость жесткого ограничения числа этих параметров. В этой связи в данной теоретической модели уноса массы стеклопластиков используется предельно простая математическая модель оплавления диоксида кремния, крайне незначительно отличающаяся от модели оплавления однородного кварцевого стекла (14.31), (14.32).

Во-первых, в уравнение сохранения массы (14.31) добавляется член, соответствующий потере массы диоксида кремния за счет его гетерогенного химического взаимодействия с углеродом, так что это уравнение преобразуется к виду:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial\left(\rho'_{\mathrm{SiO_2}}u_{\mathrm{SiO_2}}r\right)}{\partial x}+\frac{\partial\left(\rho'_{\mathrm{SiO_2}}v_{\mathrm{SiO_2}}\right)}{\partial y}=-\omega_{\mathrm{into}}\frac{M_{\mathrm{SiO_2}}}{M_{\mathrm{C}}}.$$

Если далее для проекции вектора массовой скорости движения k-ой компоненты материала на ось y ввести обозначение G_k, а для массовой скорости

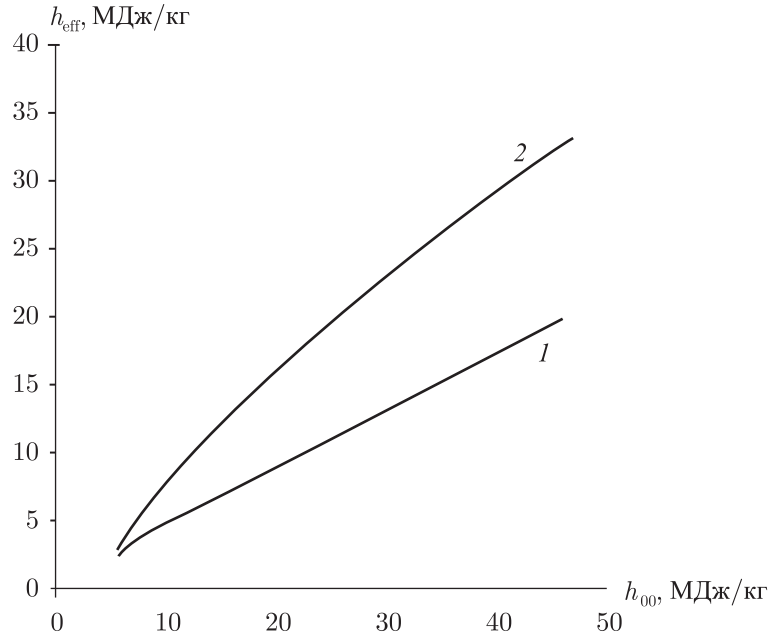


Рис. 14.7. Зависимость эффективной энтальпии от энтальпии торможения при различных законах изменения вязкости расплава *1* — расчет $\mu_{\text{SiO}_2,1}(T)$ по (14.33); *2* — расчет $\mu_{\text{SiO}_2,2}(T)$ по (14.34)

уноса диоксида кремния в жидкой фазе — обозначение $G_{\text{SiO}_2,L}$, то получим следующую окончательную форму записи уравнения сохранения массы:

$$\frac{\partial G_{\text{SiO}_2}}{\partial y} = -\omega_{\text{into}} \frac{M_{\text{SiO}_2}}{M_{\text{C}}} - G_{\text{SiO}_2,L}, \tag{14.35}$$

где

$$G_{\text{SiO}_2,L} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho'_{\text{SiO}_2} u_{\text{SiO}_2} r\right).$$

Во-вторых, в дифференциальные операторы уравнения (14.32) вводятся удельные доли поверхностей в материале s_{x,SiO_2} и s_{y,SiO_2}, по которым силы давления и трения действуют на расплав:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu_{\text{SiO}_2}\frac{\partial\left(u_{\text{SiO}_2} s_{y,\text{SiO}_2}\right)}{\partial y}\right] = \frac{\partial\left(p_e s_{x,\text{SiO}_2}\right)}{\partial x}.$$

Проводя интегрирование этого уравнения по координате y в пределах $[0, y]$ в предположении независимости s_{x,SiO_2} от координаты x, получаем

$$\mu_{\text{SiO}_2}\frac{\partial\left(u_{\text{SiO}_2} s_{y,\text{SiO}_2}\right)}{\partial y} - \left[\mu_{\text{SiO}_2}\frac{\partial\left(u_{\text{SiO}_2} s_{y,\text{SiO}_2}\right)}{\partial y}\right]_{\omega} = \frac{dp_e}{dx}\int\limits_0^y s_{x,\text{SiO}_2} dy'.$$

Вводя для объемной концентрации диоксида кремния в материале обозначение ξ_{SiO_2}и пренебрегая зависимостью от y отношения s_y/ξ_{SiO_2}, можно

переписать последнее уравнение в виде:

$$\frac{\mu_{\mathrm{SiO_2}}}{\rho_{\mathrm{SiO_2}}}\frac{s_y}{\xi_{\mathrm{SiO_2}}}\frac{\partial\left(\rho'_{\mathrm{SiO_2}}u_{\mathrm{SiO_2}}\right)}{\partial y}=\left[\mu_{\mathrm{SiO_2}}\frac{\partial\left(u_{\mathrm{SiO_2}}s_{y,\mathrm{SiO_2}}\right)}{\partial y}\right]_{\omega}+\frac{dp_e}{dx}\int\limits_0^y s_{x,\mathrm{SiO_2}}dy'. \qquad (14.36)$$

Если далее:

— обозначить через τ_w удельное напряжение трения, действующее на «стенку» со стороны набегающего на нее газового потока,

— пренебречь переменностью $s_{x,\mathrm{SiO_2}}$, $s_{y,\mathrm{SiO_2}}$ и $\xi_{\mathrm{SiO_2}}$,

— пренебречь отличием отношения $s_{x,\mathrm{SiO_2}}/s_{y,\mathrm{SiO_2}}$ от единицы,

— умножить на r все члены уравнения (14.36) и продифференцировать его по координате x, то получим следующую форму записи дифференциального уравнения, предназначенного для расчета скорости оплавления диоксида кремния:

$$\frac{\partial G_{\mathrm{SiO_2},L}}{\partial y}=\frac{\rho_{\mathrm{SiO_2}}\xi_{\mathrm{SiO_2}}}{r}\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{r}{\mu_{\mathrm{SiO_2}}}\left(\tau_w+y\frac{dp_e}{dx}\right)\right]. \qquad (14.37)$$

Для окрестности «критической точки», где, как известно,

$$r\approx x,\quad \frac{dp_e}{dx}\approx\frac{d^2p_e}{dx^2}x,\quad \tau_w\approx\frac{d\tau_w}{dx}x,\quad \mu_{\mathrm{SiO_2}}=\mu_{\mathrm{SiO_2}}(y),$$

уравнение (14.37) преобразуется к виду:

$$\frac{dG_{\mathrm{SiO_2},L}}{dy}=2\frac{\rho_{\mathrm{SiO_2}}\xi_{\mathrm{SiO_2}}}{\mu_{\mathrm{SiO_2}}}\left(\frac{d\tau_w}{dx}+y\frac{d^2p_e}{dx^2}\right). \qquad (14.38)$$

4. Механический унос массы углерода и газообразных продуктов разрушения материала

В условиях, характерных для функционирования теплозащитных материалов, углерод, в отличие от диоксида кремния, сохраняет твердое агрегатное состояние. Вследствие этого появление тангенциальной составляющей у его вектора скорости оказывается возможным только в том случае, если углеродный каркас, образовавшийся в материале в результате пиролиза связки, не может противостоять внутренним термическим напряжениям и сдвигающим силам со стороны набегающего газового потока.

Проблема механического уноса массы углерода имеет два основных аспекта.

Во-первых, прочность поверхностного слоя материала, в котором прошла реакция пиролиза связки, в значительной степени определяется прочностью образовавшегося при этом углеродистого каркаса. В частности, хорошие прочностные характеристики углеродистого каркаса, образующегося при пиролизе фенолоформальдегидных смол, послужили одной из основных причин их широкого распространения в производстве теплозащитных материалов [31, 32].

Естественно, что для каждого материала существуют предельные механическая и тепловая нагрузки, при превышении которых происходит последовательный скол его слоев и резкое снижение его эффективной энтальпии. Так, в частности, обстояло дело в процессе стендовой отработки стеклопластиков, описанной в работе [33]. Не умаляя значения теории уноса массы теплозащитных материалов за счет последовательного скола его слоев, развитой в работах [34, 35], следует отметить ограниченные возможности этой теории в части ее практического использования. Дело в том, что чаще всего при проектировании изделий предпочтение отдается материалам, обладающих достаточно высокой эффективной энтальпией, т. е. материалам, у которых процесс эрозии не играет решающей роли в суммарном механизме уноса массы. Поэтому при построении рассматриваемой теоретической модели теплового разрушения стеклопластиков предпочтение отдается схеме его «упорядоченного» уноса массы.

Во-вторых, от вида функции $G_{\mathrm{C}}^{(s)}(y)$ зависят характеристики тепло– и массообмена не только во внутренних слоях материала, но и на его внешней поверхности, обтекаемой набегающим газовым потоком, а также в газовом пограничном слое. При этом строгое решение задачи может быть получено только с помощью системы уравнений, описывающей прочностную часть рассматриваемой проблемы и включающей в себя целый ряд высокотемпературных характеристик материала, информация о которых в литературе практически отсутствует.

Базируясь на вышесказанном и следуя общему принципу формирования настоящей постановки задачи, будем базироваться на упрощенной модели процесса механического уноса массы углерода, в рамках которой можно проанализировать предельные случаи его протекания.

Указанные цели достигаются при использовании уравнения

$$\frac{\partial G_C^{(s)}}{\partial y} = -\omega_{\mathrm{into}}, \tag{14.39}$$

во всей области, простирающейся от фронта первичного пиролиза связки и вплоть до внешней поверхности материала, обтекаемой набегающим газовым потоком. В то же самое время, если не учитывать различия в прочностных характеристиках углерода, образовавшегося в материале на различных стадиях процесса пиролиза связки, то связь между массовым расходом углерода $G_{\mathrm{C}}^{(s)}(-0)$, подводимым к «стенке», и массовой скоростью $G_{\mathrm{C}}^{(s)}(+0)$ поступления углерода в газовый пограничный слой записывается в форме:

$$G_{\mathrm{C}}^{(s)}(+0) = \left[G_{\mathrm{C}}^{(s)}(-0) + G_{\Sigma,-\infty}\varphi_r\pi_{\mathrm{C},\omega}^{(s)}\right]\gamma_{\mathrm{C},\omega}. \tag{14.40}$$

Здесь:

$G_{\Sigma,-\infty}$ — массовая скорость разрушения материала в целом, кг/(м^2·с),

$\gamma_{i,w}$ — коэффициент газификации i-ой компоненты материала на его поверхности, обтекаемой набегающим газовым потоком.

Однако углерод, образующийся в процессе пиролиза органической связки, не является однородным по отношению к его механической прочности. В первую очередь, это связано с тем обстоятельством, что одна часть углеродного каркаса (образовавшаяся на первой фазе пиролиза связки) обладает достаточно значительной прочностью, а другая его часть (образовавшаяся в результате вторичной деструкции газообразных продуктов пиролиза, сопровождающейся выпадением сажи на стенках пор в материале) обычно обладает меньшей прочностью.

Если пренебречь различием в химической активности различных компонент углерода к вступлению в гетерогенное химическое взаимодействие с диоксидом кремния, то в рамках данной постановки задачи учет различия в их прочностных характеристиках можно учесть путем преобразования формулы (14.40) к виду:

$$G_{\mathrm{C}}^{(s)}(+0) = G_{\mathrm{C}}^{(s)}(-0)\frac{\pi_{\mathrm{C},f}^{(s)}\gamma_{\mathrm{C},f,\omega} + \pi_{\mathrm{C},\omega}^{(s)}\gamma_{\mathrm{C},\omega,\omega}}{\pi_{\mathrm{C},f}^{(s)} + \pi_{\mathrm{C},\omega}^{(s)}} + G_{\Sigma,-\infty}\varphi_r\pi_{\mathrm{C},\omega}^{(s)}\gamma_{\mathrm{C},\omega,\omega}. \qquad (14.41)$$

Под $\gamma_{C,i,w}$ здесь понимаются коэффициенты газификации углерода, образовавшегося на различных стадиях процесса пиролиза связки, на поверхности материала, обтекаемой набегающим газовым потоком.

Использование формул (14.40) и (14.41) позволяет в рамках достаточно простой постановки задачи проанализировать роль частичного механического уноса массы углерода, а также получить максимально возможный эффект, связанный с прохождением реакции (14.25).

Под действием перепада давления на поверхностном слое материала, обусловленного протеканием рассмотренных выше физико-химических превращений, образовавшиеся при этом газы фильтруются по порам к нагреваемой поверхности, «пробулькивают» через пленку расплавленного диоксида кремния и вдуваются в газовый пограничный слой [14].

Направление фильтрации газа в рассматриваемой пористой среде, в первую очередь определяемое вектором градиента давления, в общем случае не совпадает с направлением внешней нормали к «стенке». Однако в большинстве литературных публикаций (см., например, [14, 36]) процесс фильтрации газовой фазы по порам в материале рассматривается в одномерной постановке. Это, в частности, объясняется малостью градиента давления на внешней поверхности материала, обтекаемой набегающим газовым потоком, в таких важных зонах на поверхности изделий ракетно-космической техники как окрестность «критической» точки и боковые поверхности.

В процессе «пробулькивания» газовых пузырьков через движущуюся пленку расплава траектории их движения также, в принципе, должны искривляться. Однако ввиду малой толщины пленки и несоразмерности линейных скоростей движения газа и расплава и этим эффектом повсеместно пренебрегается [14].

В то же самое время необходимо отметить, что процесс фильтрации газов по порам в материале может оказаться и существенно не одномерным. В качестве примера здесь можно сослаться на работу [37], в которой данный процесс рассматривается в условиях значительного перепада давления по поверхности аппарата. В качестве другого примера можно привести испытания незащищенных со стороны боковой поверхности малогабаритных цилиндрических образцов материала в струе плазматрона, при проведении которых из-за бокового прогрева возможна значительная утечка газов из области «критической точки» в зону пониженного давления.

Следуя основной концепции построения данной методики расчета, для описания процесса фильтрации ниже используется компромиссный подход. С одной стороны в его рамках боковыми утечками газа в области между фронтом первичного пиролиза связки и внешней поверхностью материала пренебрегается, т. е. принимается, что:

$$\frac{\partial G_{\mathrm{CO}}^{(g)}}{\partial y} = \omega_{\mathrm{into}} \frac{M_{\mathrm{CO}}}{M_{\mathrm{C}}}, \tag{14.42}$$

$$\frac{\partial G_{\mathrm{SiO}}^{(g)}}{\partial y} = \omega_{\mathrm{into}} \frac{M_{\mathrm{SiO}}}{M_{\mathrm{C}}}, \tag{14.43}$$

$$\frac{\partial G_{i}^{(g)}}{\partial y} = 0, \quad i = \mathrm{H}_2, \mathrm{N}_2, \omega. \tag{14.44}$$

С другой стороны связь массового расхода i-го газообразного вещества, подводимого к внешней поверхности материала, и массовой скоростью вдува его в газовый пограничный слой записывается в форме, аналогичной (14.40):

$$G_i^{(g)}(+0) = \left[G_i^{(g)}(-0) + G_{\Sigma,-\infty}\varphi_r \pi_{i,w}^{(g)}\right]\gamma_{g,w}, \quad i = \mathrm{CO},\ \mathrm{SiO},\ \mathrm{H}_2,\ \mathrm{N}_2,\ \Omega. \tag{14.45}$$

При этом расход $G_{\Omega}^{(g)}(+0)$ оказывается тождественно равным нулю.

Под $\gamma_{g,w}$ здесь понимается коэффициент «газификации газовой фазы», т. е. доля расхода газа, подводимого изнутри к внешней поверхности материала, поступающая в газовый пограничный слой.

Использование такого подхода позволяет получать предельные оценки влияния, которое может оказать на суммарные характеристики уноса массы теплозащитного материала нарушение одномерности процесса фильтрации газообразных продуктов физико-химических превращений, протекающих в его внутренних слоях, без привлечения громоздких математических моделей.

Сформулированная динамическая часть задачи должна быть дополнена уравнением сохранения количества энергии и системой граничных условий.

5. Уравнение сохранения количества энергии

По аналогии с работой [14] двумерное уравнение сохранения энергии для химически реагирующей смеси, компоненты которой обладают в общем

случае различными температурами, может быть записано в форме:

$$\sum_k \left[\rho'_k c_{p,k}\left(u_k \frac{\partial T_k}{\partial x} + v_k \frac{\partial T_k}{\partial y}\right) + \omega_k h_k\right] = \frac{\partial}{\partial y}\left(Q_\lambda + Q_R\right) + Q_p + Q_{fr}. \quad (14.46)$$

Здесь:

$c_{p,k}$ — удельная теплоемкость k-го вещества (изобарная — для газового вещества);

Q_λ и Q_R — проекции векторов кондуктивного и радиационного теплового потока на ось y системы координат;

Q_p и Q_{fr} — работа сил давления и интенсивность тепловыделения, обусловленная работой сил трения (диссипативный член);

ω_k и h_k — массовая скорость образования k-го вещества в единице объема и его энтальпия.

Вопрос о различии между температурами конденсированного материала и фильтрующегося через него газами, рассмотрению которого, в частности, посвящены работы [14, 38, 39], наиболее всего актуален для задач пористого охлаждения.

Практически во всех работах, посвященных уносу массы композиционных материалов, отмечается, что ввиду крайне малого размера пор, образующихся в материале в процессе деструкции связки, коэффициент теплообмена между каркасом материала и фильтрующимся через него газом столь велик, что в первом приближении указанным выше различием температур можно пренебречь.

В этой связи необходимо отметить, что учет различия в температурах отдельных фаз материала не вызывает серьезных математических проблем [14]. Однако целесообразность использования такого подхода в рамках рассматриваемой постановки задачи представляется весьма сомнительной, так как в отличие от задач пористого охлаждения мы имеем дело с крайне неупорядоченной структурой пор в материале. Кроме этого практически полностью отсутствуют данные по интенсивности процесса теплопередачи между различными фазами материала.

Вследствие сказанного в рамках данной постановки задачи используется допущение о том, что интенсивность внутреннего теплообмена в материале столь велика, что можно пренебречь различием в температурах его отдельных компонент, т. е. принимается, что в уравнении (14.46)

$$T_k = T, \quad (14.47)$$

где T — единая для всех компонент материала температура.

Если далее:

— принять во внимание допущения, сделанные выше при формулировке динамической части задачи,

— использовать закон Фурье [40] для расчета кондуктивного теплообмена,

— так же, как в работах [17, 24], пренебречь работой сил давления и диссипацией энергии (ввиду малости скорости тангенциального движения диоксида кремния), то уравнение (14.46) может быть преобразовано к виду:

$$\sum_k \left(c_{p,k} G_k \frac{\partial T}{\partial y} + \omega_k h_k\right) + c_{p,\mathrm{SiO_2}} \rho'_{\mathrm{SiO_2}} u_{\mathrm{SiO_2}} \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda_m \frac{\partial T}{\partial y} - Q_R\right). \quad (14.48)$$

Под λ_m здесь понимается коэффициент теплопроводности материала.

Пренебрежение перетеканием тепла в тангенциальном направлении в достаточной степени строго может быть обосновано лишь в окрестности «критической точки» затупленного тела и на боковых поверхностях аппарата. Однако указанное допущение широко используется и при рассмотрении существенно более сложных ситуаций (см., например, работу [16]), что составляет основу метода «локальной автомодельности» — одного из самых распространенных методов теории пограничного слоя [41].

Следуя этому методу и принимая во внимание, что в области пространства, расположенной между фронтом первичного пиролиза связки и внешней поверхностью материала, единственной химической реакцией, протекание которой учитывается в данной постановке, является реакция (14.11), уравнение сохранения энергии принимает вид:

$$\sum_k c_{p,k} G_k \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda_m \frac{\partial T}{\partial y} - Q_R\right) - \omega_{\mathrm{into}} \Delta Q_{\mathrm{into}}, \quad (14.49)$$

где ΔQ_{into} — тепловой эффект этой реакции, вычисляемый по формуле:

$$\Delta Q_{\mathrm{into}} = \left(h^{(g)}_{\mathrm{CO}} M_{\mathrm{CO}} + h^{(g)}_{\mathrm{SiO}} M_{\mathrm{SiO}} - h^{(s)}_{\mathrm{C}} M_{\mathrm{C}} - h^{(s)}_{\mathrm{SiO_2}} M_{\mathrm{SiO_2}}\right) \cdot \frac{1}{M_{\mathrm{C}}}. \quad (14.50)$$

Гетерогенное химическое взаимодействие между диоксидом кремния и углеродом относится к числу высоко теплоемких процессов. Так согласно термодинамическим данным работы [9] величина ΔQ_{into} составляет ≈ 50 МДж/кг.

Отдельного рассмотрения заслуживает проблема учета радиационного теплопереноса в материалах рассматриваемого класса. В принципе, с точки зрения передачи тепла излучением эти материалы относятся к классу «полупрозрачных» материалов. Это связано как с частичной прозрачностью вспененного газообразными продуктами внутренних физико-химических превращений расплава диоксида кремния, так и с радиационным теплообменом в порах материала и в нитях диоксида кремния. Иногда частично прозрачными для излучения оказываются и некоторые смолы в исходном состоянии (известны случаи, когда при использовании радиационного источника нагрева термопары, отделенной от источника нагрева слоем эпоксидной смолы, отсутствует время задержки в регистрации повышения температуры). Однако если исключить из рассмотрения харизматический случай чистого плавленого кварца, являющегося классическим представителем «полупрозрачных» материалов — с математической точки зрения этот материал может рассматриваться как стеклопластик, у которого $\varphi_{\mathrm{SiO_2}} = 1$, — то в подавляющем

большинстве случаев длина свободного пробега излучения во внутренних слоях стеклопластиков оказывается существенно меньше длин, характерных для изменения температуры в материале. И тогда вполне достаточной для практических приложений точностью обладает простейшая схема расчета радиационного теплообмена — так называемая схема «лучистой теплопроводности» [42], — когда Q_R исключается из уравнения сохранения энергии типа (14.49), а к коэффициенту молекулярной теплопроводности λ_m добавляется коэффициент радиационной теплопроводности $\lambda_{m,R}$, пропорциональный температуре материала в третьей степени:

$$\lambda_{m,\mathrm{eff}} = \lambda_m + \lambda_{m,R} = \lambda_m + \frac{16 n_r \sigma T^3}{3\left(\kappa_R + \sigma_R\right)}. \tag{14.51}$$

Здесь:

n_r — коэффициент преломления материала;

σ — константа Стефана–Больцмана;

κ_R и σ_R — коэффициенты поглощения и рассеивания излучения в материале.

При экспериментальном определении коэффициента теплопроводности определяется именно эффективное его значение $\lambda_{m,\mathrm{eff}}$, равное сумме молекулярного и радиационного коэффициентов теплопроводности. При этом повсеместно в высокотемпературных областях наблюдается кубический закон возрастания $\lambda_{m,\mathrm{eff}}$ с ростом температуры.

В то же самое время необходимо отметить, что в принципе использование схемы «лучистой теплопроводности» неправомочно в небольшой по размеру прилегающей к «стенке» зоне, толщина которой обратно пропорциональна его коэффициенту ослабления излучения. Однако вследствие крайне незначительных размеров указанной зоны в подавляющем большинстве практических приложений ошибки, вносимые в расчет температурных режимов конструкции при использовании схемы «лучистой теплопроводности» во всем исследуемом объеме материала, оказываются крайне незначительными.

В процессе же уноса массы стеклопластиков профиль температур в указанной тонкой зоне материала, прилегающей к его нагреваемой поверхности, оказывает существенное влияние как на процесс уноса массы диоксида кремния в жидкой фазе, так и на интенсивность гетерогенного химического взаимодействие последней с углеродом. В этой связи правомочность использования схемы «лучистой теплопроводности» для материалов рассматриваемого класса по всей их толщине представляется сомнительной.

Впервые на важность радиационного теплообмена для оплавляющихся материалов указано в работах [43, 44]. В последней из них, в частности, отмечается, что использовании схемы «лучистой теплопроводности» может привести к существенным ошибкам при расчете эффективной энтальпии материалов типа плавленого кварца. В то же самое время проведение строгого расчета процесса радиационного теплообмена в стеклопластике встречает

значительные трудности, ибо объектом исследования является неупорядоченная оптическая среда, а на сегодняшний день не существует ни удовлетворительной оптической модели покрытия рассматриваемого класса, ни достаточно строгой теории переноса излучения в такой среде.

Одним из возможных путей решения указанной проблемы является использование расчетной модели, предложенной в работе [45]. В рамках этой модели предполагается, что пленка расплава и расположенные под ней слои материала представляют собой крайние случаи взаимодействия излучения с веществом: пленка расплава принимается абсолютно прозрачной, а остальная часть материала — абсолютно непрозрачной. При этом профиль температур в прозрачной пленке расплава формируется без учета излучения, испускаемого материалом в окружающую среду, а в балансе тепла на нагреваемой поверхности материала это излучение учитывается.

Как уже неоднократно отмечалось выше, все имеющиеся на сегодняшний день данные по свойствам стеклопластиков в целом и свойствам образующихся на их поверхностях пленок расплава диоксида кремния при высоких температурах не обладают достаточной для практического использования достоверностью. В этой связи единственным критерием достоверности этих характеристик является адекватное описание суммарных характеристик уноса массы материала в различных условиях их эксплуатации, базирующееся на их использовании. При этом весь клубок проблем, связанных с распределением температур в пленке расплава диоксида кремния, представляется целесообразным свести к неопределенности в ее эффективном коэффициенте теплопроводности при использовании схемы «лучистой теплопроводности» во всей расчетной области.

Естественно, что такой подход неприменим к анализу уноса массы материалов типа плавленого кварца, сопровождающемуся существенным вкладом радиационного теплообмена в большей части прогретого материала.

6. Сублимация конденсированных компонент материала со «стенки»

Современная трактовка процесса сублимации конденсированных веществ дается в работах [46–49]. Суммарная скорость уноса массы вещества за счет протекания этого процесса представляет собой разность скоростей его испарения и адсорбции поверхностью материала соударяющихся с ней молекул того же сорта.

Интенсивность прохождения первого из указанных процессов зависит только от температуры, а скорость адсорбции поверхностью соударяющихся с ней молекул пропорциональна их парциальному давлению над поверхностью материала. При достаточно длительном времени протекания процесса испарения вещества в замкнутую полость наступает состояние термодинамического равновесия, когда скорость захвата поверхностью соударяющихся с ней

молекул вещества становится равной скорости его испарения. Давление паров вещества над его поверхностью в таком состоянии (его называют давлением насыщенных паров) может быть использовано для расчета массовой скорости перехода вещества из конденсированной фазы в газовую фазу.

Вследствие этого для расчета скорости сублимации i-ой компоненты материала со «стенки» повсеместно применяется формула Ленгмюра-Кнудтсена (см., например, работу [14])

$$G_{\text{sub},i} = c_{\text{a},i} s_{y,w} \frac{p^*_{i,w} - p_{i,w}}{\sqrt{2\pi R_0 T_w / M_i}}. \tag{14.52}$$

Здесь:

$c_{\text{a},i}$ — коэффициент аккомодации поверхностью материала соударяющихся с ней молекул i-го сорта;

$p_{i,w}$ и $p^*_{i,w}$ — парциальное давление молекул i-го сорта на «стенке» и давление их насыщенного пара при температуре «стенки»;

R_0 — универсальная газовая постоянная.

Индекс w в формуле (14.52) и ниже относится к «стенке», т. е. к внешней поверхности материала, обтекаемой набегающим газовым потоком.

Если

$$p_{i,w} < p^*_{i,w}, \tag{14.53}$$

то говорят, что процесс сублимации вещества протекает в режиме его испарения, а в противном случае, — что процесс сублимации вещества протекает в режиме его конденсации.

7. Гетерогенные химические реакции, протекающие на «стенке»

К числу процессов, играющих определяющую роль в уносе массы теплозащитных материалов различных классов, относятся и гетерогенные химические реакции между их конденсированными компонентами и компонентами газовой фазы, протекающие на «стенке». В качестве примера здесь можно сослаться на работы [50–54], посвященные гетерогенному химическому взаимодействию углерода с компонентами набегающего воздушного потока. Существенное значение эти процессы могут иметь место и для стеклопластика, в общем случае содержащего конденсированный углерод, образовавшийся в результате пиролиза органической связки.

Процессы уноса массы k-го конденсированного вещества, обусловленные сублимацией и гетерогенными химическими реакциями, в общем случае могут протекать одновременно. Поэтому баланс массы этого вещества на «стенке» записывается в форме

$$G_{sub,k} + \omega_{k,w} + G_{\text{into},k,w+0} = G_{\Sigma,w+0} C_{k,w} + J_{\text{diff},k,w}. \tag{14.54}$$

Здесь:

$J_{\text{diff},k,w}$ — проекция вектора диффузионного потока массы на внешнюю нормаль, восстановленную к «стенке»,

$\omega_{k,w}$ — массовая скорость образования вещества за счет гомогенных химических реакций, протекающих на «стенке»,

$G_{\text{into},k,w+0}$ — интенсивность вдува вещества, образованного в результате физико-химических превращений, протекающих во внутренних слоях материала, в газовый пограничный слой,

$G_{\Sigma,w+0}$ — суммарная массовая скорость конвективного оттока газа от «стенки», равная массовой скорости вдува паров материала в газовый пограничный слой;

$C_{k,w}$ — массовая концентрация вещества в газовой смеси на «стенке».

При этом необходимо отметить, что член, связанный с поступлением из внутренних слоев материала вещества, разрушающегося на «стенке» за счет прохождения на ней гетерогенных химических реакций, включен в баланс массы (14.54) для общности. Для материалов рассматриваемого класса, как и для чисто углеродных материалов, $G_{\text{into},k,w+0} = 0$.

Если исключить из рассмотрения возможность уноса массы данного конденсированного вещества со «стенки», обусловленного прохождением гетерогенных химических реакций, то последнее соотношение может быть использовано для определения интенсивности его образования за счет гомогенных химических реакций.

При этом возможным является возникновение двух различных ситуаций: либо $\omega_{k,w} \geqslant 0$, либо $\omega_{k,w} < 0$. Возникновение первой из них свидетельствует об отсутствии на «стенке» газообразных реагентов для указанных гетерогенных химических реакций, а в случае отрицательности величины $\omega_{k,w}$ возможным является прохождения как гетерогенных, так и гомогенных химических реакций с участием k-го вещества. При этом, естественно, максимум скорости уноса массы конденсированной компоненты материала, обусловленного прохождением гетерогенных химических реакций, будет иметь место в том случае, когда весь избыток газообразного реагента на «стенке» пойдет на эту реакцию, а не на алогичную гомогенную реакцию, т. е. в том случае, если

$$\omega_{k,w} = 0. \tag{14.55}$$

Именно такой подход обычно и используется в литературных источниках, посвященных гетерогенному окислению углерода (см., например, работы [50, 53]).

Согласно сделанным выше предположениям, «стенки» достигают два конденсированных компонента материала — диоксид кремния и углерод. На базе уравнений (14.53)–(14.55) ниже формулируются соотношения, описывающие скорость их уноса массы с этой поверхности.

8. Унос массы диоксида кремния со «стенки»

Диоксид кремния достаточно широко применяется как в научных исследованиях, так и в промышленности, вследствие чего изучению ее физико-химических свойств посвящен целый ряд фундаментальных работ (см., например, [49, 55, 56]).

Даже при уносе массы материала в окислительных средах конденсированный диоксид кремния оказывается инертным к вступлению в гетерогенное химическое взаимодействие с компонентами газовой фазы на «стенке». Вследствие этого практически во всех литературных публикациях по этому вопросу (см., например, работы [18–21, 23–27]) унос массы конденсированного диоксида кремния за счет гетерогенных химических реакций с компонентами газовой фазы на «стенке» не учитывается.

В то же самое время известно, что газообразный диоксид кремния при температурах выше 2000 K весьма склонен к диссоциации до оксида кремния – особенно в нейтральной среде [49]. Причем во многих практически важных случаях степень диссоциации диоксида кремния оказывается столь значительной, что $p_{\mathrm{SiO_2},w}$ оказывается много меньше, чем $p_{\mathrm{SiO},w}$.

Основываясь на этом широко известном и экспериментально подтвержденном факте, иногда (см., например, работу [28]) процесс испарения диоксида кремния трактуется как гетерогенная химическая реакция вида

$$\mathrm{SiO_2^{(s)}} \to \mathrm{SiO^{(g)}} + 0{,}5\mathrm{O_2}. \tag{14.56}$$

При этом для описания скорости протекания данного процесса используется зависимость давления образующихся при этом паров от температуры, предложенная в работе [49].

Однако необходимо иметь в виду, что такая форма записи процесса испарения охватывает две его стадии — непосредственно испарение $\mathrm{SiO_2}$

$$\mathrm{SiO_2^{(s)}} \to \mathrm{SiO_2^{(g)}} \tag{14.57}$$

и последующую (в общем случае частичную) диссоциацию газообразных молекул диоксида кремния

$$\mathrm{SiO_2^{(g)}} \leftrightarrow \mathrm{SiO^{(g)}} + 0{,}5\mathrm{O_2}. \tag{14.58}$$

В принципе нельзя исключить возможность диссоциации непосредственно конденсированных молекул диоксида кремния согласно (14.56), однако нет никаких фактов, подтверждающих прохождение такой реакции.

Необходимо также обратить внимание на следующие два обстоятельства, связанные с применением схемы прохождения рассматриваемого процесса в форме (14.56) в задачах уноса массы стеклопластиков.

Во-первых, использование одностадийной схемы для описания процесса, протекающего в две стадии, сопряжено с возможностью внесения в расчет значительных ошибок в том случае, если условия функционирования

материала заметно отличаются от условий, в которых получены рекомендации по расчету давления паров, образующихся при этом на «стенке».

Во-вторых, в рамках такого подхода может быть описано протекание не процесса сублимации диоксида кремния в целом, а лишь его одной составной части — испарения. В то же самое время известно (см., например, работу [23]), что в некоторых важных в практическом отношении случаях процесс сублимации диоксида кремния может проходить в режиме конденсации.

С учетом вышесказанного «упорядоченный» унос массы диоксида кремния на «стенке» будем ограничивать случаем его неравновесной сублимации, скорость протекания которой согласно (14.52) записывается в виде

$$G_{\mathrm{sub,SiO_2}} = c_{a,\mathrm{SiO_2}} s_{y,w,\mathrm{SiO_2}} \frac{p^*_{\mathrm{SiO_2,w}} - p_{\mathrm{SiO_2,w}}}{\sqrt{2\pi R_0 T_w / M_{\mathrm{SiO_2}}}}. \qquad (14.59)$$

В общем случае наряду с испарением диоксида кремния может происходить также «неупорядоченный» механический унос его массы со «стенки» за счет разбрызгивания расплава и срыва отдельные его капель. Наиболее вероятным проявление последнего фактора представляется в тех случаях, когда процесс уноса массы материала не сопровождается образованием сплошной пленки расплава. Анализ же большого числа трубных и летных экспериментов показывает, что поверхность хорошо себя зарекомендовавших на практике стеклопластиков практически всегда оказывается покрытой сплошной пленкой расплава диоксида кремния (хотя и не такой обильной, как у плавленого кварца).

Поэтому в данной постановке задачи предполагается, что срыв отдельных капель расплава диоксида кремния не играет значительной роли в суммарном механизме уноса массы материала и что возможность прохождения этого процесса может быть исключена из рассмотрения.

Частичное разбрызгивание расплава диоксида кремния в первую очередь может быть связано с «пробулькиванием» газов, образовавшихся во внутренних слоях материала в результате пиролиза связки и гетерогенного химического взаимодействия углерода с диоксидом кремния. Построение корректной математической модели, учитывающей протекание этого процесса, сопряжено со значительными трудностями, и в то же самое время целесообразность использование такой модели при решении задачи рассматриваемого типа представляется проблематичным в силу тех же самых причин, которые перечислены выше в пункте 3. Более логичным представляется использование предположения о том, что механический унос массы диоксида кремния за счет разбрызгивания его расплава со «стенки» может быть учтен путем введения поправки к коэффициенту динамической вязкости расплава $\mu_{\mathrm{SiO_2}}$, который рассматривается как один из основных параметров согласование расчетно-теоретических и экспериментальных данных по суммарным характеристикам уноса массы материала.

9. Унос масс конденсированного углерода со «стенки»

В отличие от диоксида кремния углерод обладает значительной склонностью к вступлению в гетерогенное химическое взаимодействие с окислительными компонентами. Выше мы уже касались этого вопроса при рассмотрении гетерогенной химической реакции (14.25), в которой в качестве окислителя выступал конденсированный диоксид кремния. Еще значительно большей интенсивностью характеризуется процесс гетерогенного взаимодействия конденсированного углерода с газовыми окислительными веществами (в первую очередь, с кислородом).

Все гетерогенные химические реакции относятся к классу многостадийных процессов. И в данном случае сначала газообразные реагенты должны адсорбироваться поверхностью материала, а затем уже происходит непосредственно химическое взаимодействие с последующей десорбцией газообразных продуктов реакции. Убыль окислительных реагентов на «стенке», обусловленная прохождением химической реакции, компенсируется за счет подачи их массы к поверхности материала либо из набегающего газового потока (за счет диффузионного массопереноса в пограничном слое), либо из материала. При этом скорость процесса в целом, естественно, лимитируется скоростью самого медленного из указанных элементарных физико-химических превращений.

Установлено, что интенсивность протекания этого процесса в значительной степени зависит от уровня температур нагреваемой поверхности материала и состава внешней атмосферы. По мере роста температуры скорость уноса массы углерода увеличивается, постепенно переходя от режима кинетического гетерогенного окисления к режиму, на котором скорость процесса лимитируется скоростью подачи окислительных компонент к «стенке», и, наконец, — к режиму сублимации, на котором нарастание скорости уноса массы с ростом температуры носит экстремальный характер.

Несмотря на длительность изучения до сих пор отсутствует установившаяся точка зрения на механизм протекания процесса окисления углерода на кинетическом режиме, а данные различных авторов по его динамике существенно различаются между собой (достаточно подробно проблемные вопросы математического описания процесса окисления углерода изложены в работах [14, 57]).

Существенно проще формулируется математическая модель окисления углерода в тех условиях, когда скорость его протекания лимитируется интенсивностью подвода к «стенке» окислительных компонент из набегающего газового потока, т. е. на так называемом «диффузионном» режиме.

На рис. 14.8 приводятся расчетные данные из работы [54], относящиеся к зависимости скорости разрушения графита в воздушном газовом потоке от температуры «стенки», которые получены в достаточно широком диапазоне изменения кинетических констант окисления этого материала, из которых

следует, что кинетический режим окисления графита заканчивается при температурах порядка 1800–2700K.

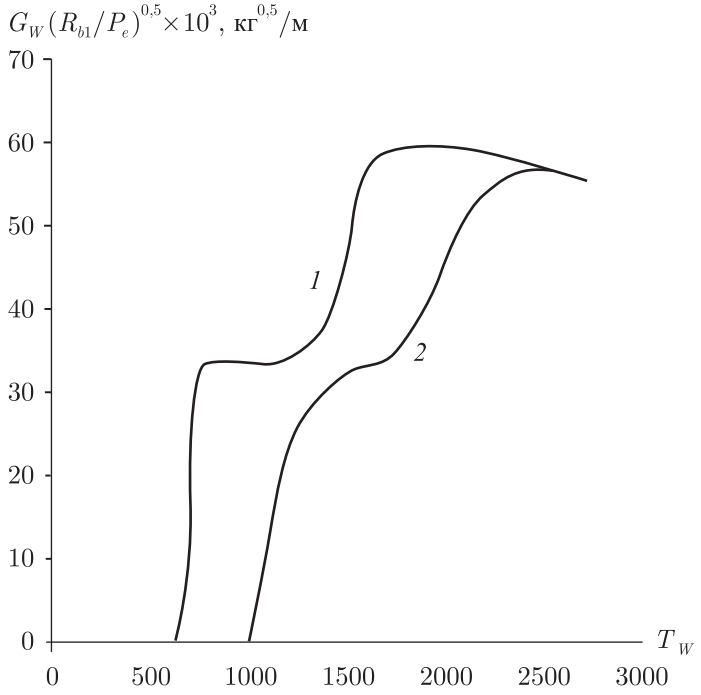


Рис. 14.8. Зависимость скорости уноса от температуры поверхности *1* — «быстрая кинетика», *2* — «медленная кинетика»

С точки зрения уноса массы стеклопластиков в целом наибольший интерес вызывают температуры «стенки», превышающие 2500 K, а в этих условиях, очевидно, режим окисления углерода близок к «диффузионному».

В работе [57] обращено внимание на возможность возникновения кинетического режима окисления углерода и при более высоких температурах, если возникают условия для заметной диссоциации оксида углерода. Однако учет указанной возможности в рамках рассматриваемой постановки задачи представляется нецелесообразным в силу следующих двух причин.

Во-первых, в подавляющем большинстве технических приложений линейная скорость разрушения углеродного каркаса в стеклопластиках, определенная с использованием модели его «диффузионного» окисления превышает аналогичную скорость разрушения диоксида кремния. Учет же указанной выше возможности возникновения кинетического режима окисления при высоких температурах приводит к еще большему увеличению скорости разрушения углерода (см., работу [57]), а согласно данной методике расчета (см. ниже) в указанных условиях скорость уноса массы углерода ограничивается его весовым содержанием в материале.

Во-вторых, учет возможности данного кинетического режима в законе уноса массы углерода неразрывно связан с использованием отсутствующих в литературе кинетических констант этого процесса. Рассмотрение же этих констант в качестве дополнительных параметров согласования расчетно-теоретических и экспериментальных данных по суммарным характеристикам уноса массы материала не представляется оправданным.

С учетом сказанного, в рамках данной математической модели для расчета скорости окисления углерода используется «диффузионная» модель, а обеспечение максимальной величины этой скорости осуществляется путем записи баланса массы чисто углеродных соединений с использованием уравнений (14.52), (14.54) и (14.55) в следующем виде

$$\sum_{i=1}^{3}\left(c_{\mathrm{a,C}_i}s_{y,C_i}\frac{p^*_{\mathrm{C}_i,w}-p_{\mathrm{C}_i,w}}{\sqrt{2\pi R_0T_w/M_{\mathrm{C}_i}}}-G_{\Sigma,w+0}C_{\mathrm{C}_i,w}-J_{\mathrm{diff,C}_i,w}\right)=0. \qquad (14.60)$$

Эта формула записи баланса массы чисто углеродных соединений практически идентична аналогичному расчетному соотношению из работы [50].

Наличие на «стенке» нескольких конденсированных веществ, унос массы которых определяется прохождением различных физико-химических превращений, в общем случае приводит к появлению различия в линейных скоростях их разрушения, рассчитанным с использованием выше выписанных соотношений (будем называть эти скорости «изолированными»). Однако в подавляющем большинстве важных в практическом отношении случаев теплозащитные материалы (и стеклопластики в том числе) разрушаются как единое целое, что вызывает необходимость выделения «лидирующей» конденсированной компоненты, определяющей скорость разрушения материала.

10. Корреляционная связь между скоростями разрушения конденсированных компонент материала

При выборе компоненты, «лидирующей» в установлении суммарной скорости уноса массы материала, представляется целесообразным решать этот вопрос с учетом соотношения между «изолированными» линейными скоростями $v_{\mathrm{SiO_2},-\infty}$ и $v_{\mathrm{C},-\infty}$, с которыми происходило бы разрушение диоксида кремния и углерода в соответствии с выписанными выше соотношениями. При этом возможным является возникновение двух альтернативных ситуаций, когда $v_{\mathrm{SiO_2},-\infty}\leqslant v_{\mathrm{C},-\infty}$ и когда наоборот $v_{\mathrm{SiO_2},-\infty}>v_{\mathrm{C},-\infty}$, анализ которых следует проводить с учетом различия фазовых состояний, в которых находятся рассматриваемые конденсированные компоненты материала.

Известно, что углерод обладает минимальной скоростью теплового разрушения по сравнению со всеми остальными теплозащитными материалами. Поэтому можно было ожидать, что наиболее вероятным является возникновение ситуации, когда $v_{\mathrm{SiO_2},-\infty}>v_{\mathrm{C},-\infty}$. Однако, из-за высокого окислительного

потенциала стеклопластиков в подавляющем большинстве возникающих на практике случаев наоборот $v_{\mathrm{SiO_2},-\infty} \leqslant v_{\mathrm{C},-\infty}$.

При выполнении последнего условия принимается:

— что линейная скорость разрушения материала совпадает с $v_{\mathrm{SiO_2},-\infty}$,

— что содержащийся в уносимом слое углерод переходит в газовую фазу с заданными коэффициентами газификации $\gamma_{\mathrm{C,w}}$, или $\gamma_{\mathrm{C},f,w}$ и $\gamma_{\mathrm{C,w,w}}$.

Физической основой такого допущения служит то обстоятельство, что при реализации повышенной скорости разрушения углерода его внешняя поверхность скрывается под пленкой расплава диоксида кремния, что создает дополнительные препятствия на пути поступления к ней окислительных компонент из газового пограничного слоя и способствует нивелированию линейных скоростей разрушения диоксида кремния и углерода.

В то же самое время не совсем ясно, за счет чего в указанных условиях может повыситься скорость разрушения диоксида кремния, чтобы сравняться со скоростью разрушения углерода.

Если же $v_{\mathrm{SiO_2},-\infty} > v_{\mathrm{C},-\infty}$, что, как уже отмечалось выше, исключительно редко реализуется на практике, то нивелировка «индивидуальных» скоростей разрушения конденсированных компонент материала, очевидно, происходит опять-таки за счет того, что скорость разрушения углерода подстраивается под скорость разрушения диоксида кремния. Действительно, в этой ситуации не видно объективных причин, по которым выступание углеродного каркаса за внешнюю поверхность расплава диоксида кремния может уменьшить скорость разрушения последней. А вот физические причины, по которым может возрасти скорость разрушения углерода, существуют и их даже несколько.

Во-первых, в сложившейся ситуации вполне вероятным представляется нагрев углерода до температур, превышающих температуру поверхности диоксида кремния T_w, что автоматически может привести к нивелировке индивидуальных скоростей разрушения углерода и диоксида кремния.

Во-вторых, выступающая за поверхность расплава диоксида кремния часть углеродистого каркаса может сноситься механически. Математическая модель исследуемого процесса при этом существенно усложняется, так как появляется новое неизвестное — коэффициент газификации конденсированного углерода, величина которого должна находиться из условия равенства индивидуальных скоростей разрушения конденсированных компонент материала.

С точки зрения потребностей практики более предпочтительным является использование для расчета заданных коэффициентов газификации углерода в формулах (14.40) или (14.41). В пользу этого свидетельствуют:

— и относительная простота расчетной схемы,

— и малая вероятность существенности влияния, которое может оказать учет частичного механического уноса массы углерода на суммарные характеристики разрушения материала в целом.

Поэтому при проведении прикладных исследований целесообразным представляется использование именно такого подхода

В то же самое время в академическом плане учет возможности частичного механического уноса массы конденсированного углерода представляет определенный интерес.

11. Система граничных условий на «стенке»

Пусть химический состав газового пограничного слоя включает в себя n различных веществ, образованных из m химических элементов. Причем компоненты газовой смеси пронумерованы таким образом, что все атомарные компоненты находятся в начале списка компонент, а последней в этом списке располагается нейтральная компонента, не принимающая участия в химических реакциях. Тогда рассматриваемая система граничных условий, включающая в себя балансы масс химических элементов и тепла, а также уравнения равновесия химических реакций, записывается в следующей общепринятой форме (см., например, работу [14]):

$$\left.\begin{aligned}\sum_k G_{k,w+0}\nu_{j,k} - \sum_{i=1}^{n-1}\left(G_{\Sigma,w+0}C_{i,w} + J_{\mathrm{diff},i,w}\right)\nu_{j,i} = 0, \quad j=\overline{1,m-1},\\ k=\mathrm{SiO}_2^{(s)},\quad \mathrm{C}^{(s)},\quad \mathrm{CO}^{(g)},\quad \mathrm{SiO}^{(g)},\quad \mathrm{H}_2^{(g)},\quad \mathrm{N}_2^{(g)},\Omega^{(g)},\end{aligned}\right\} \tag{14.61}$$

$$\sum_{i=1}^{n} C_{i,w} = 1, \tag{14.62}$$

$$\sum_{i=1}^{n} J_{\mathrm{diff},i,w} = 0, \tag{14.63}$$

$$p_{i,w} = \left(\prod_{j=1}^{m-1} p_{j,w}^{l_{j,i}}\right)/k_{\mathrm{eq},i}\left(T_w\right), \quad i=\overline{m,n-1}, \tag{14.64}$$

$$\left.\begin{aligned}\lambda_{m,\mathrm{eff}}\frac{\partial T}{\partial y}(-0) = \lambda_g\frac{\partial T}{\partial y}(+0) - \sum_{i=1}^{n}\left(G_{\Sigma,w+0}C_{i,w} + J_{\mathrm{diff},i,w}\right)h_{i,w} +\\ + \sum_k G_{k,w+0}h_{k,w} - G_{\Sigma,-\infty}\varphi_r\Delta Q_{r,w} - \varepsilon_w\sigma T_w^4,\\ k=\mathrm{SiO}_2^{(s)},\quad \mathrm{C}^{(s)},\quad \mathrm{CO}^{(g)},\quad \mathrm{SiO}^{(g)},\quad \mathrm{H}_2^{(g)},\quad \mathrm{N}_2^{(g)},\omega^{(g)},\end{aligned}\right\} \tag{14.65}$$

$$G_{\Sigma,w+0} = \sum_k G_{k,w+0}, \quad k=\mathrm{SiO}_2^{(s)},\mathrm{C}^{(s)},\mathrm{CO}^{(g)},\mathrm{SiO}^{(g)},\mathrm{H}_2^{(g)},\mathrm{N}_2^{(g)},\omega^{(g)}, \tag{14.66}$$

$$C_{i,w} = \frac{p_{i,w}M_i}{p_e M_{\Sigma,w}}, \quad i=\overline{1,n}, \tag{14.67}$$

$$M_{\Sigma,w} = \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n} C_{i,w}/M_i}. \tag{14.68}$$

Здесь:

$k_{\text{eq},i}$ — константа равновесия химической реакции образования i-го вещества из атомов;

$\nu_{j,i}$ — массовое содержание j-го химического элемента в i-м веществе;

$J_{\text{diff},i,w}$ — проекция на ось y вектора диффузионного потока массы i-го вещества на «стенке»;

$G_{\Sigma,-\infty}$ — суммарная удельная массовая скорость разрушения материала;

$G_{\Sigma,w+0}$ — суммарная удельная массовая скорость вдува паров материала в газовый пограничный слой;

$M_{\Sigma,w}$ — мольная масса газовой смеси на «стенке»;

ΔQ_r — составляющая теплового эффекта пиролиза связки, реализующаяся на «стенке»;

ε_w — степень черноты «стенки»;

σ — константа Стефана–Больцмана.

Известно (см., например, работы [14, 60]), что величина конвективного теплового потока, подводимого к «стенке», пропорциональна разности энтальпии восстановления T_r этого потока и энтальпии газа при температуре «стенки», т. е.:

$$Q_{w+0} = \lambda_g \frac{\partial T}{\partial y}(+0) - \sum_{i=1}^{n} J_{\text{diff},i,w} h_{i,w} = A_h \left(h_r - h_{\Sigma,w}\right), \tag{14.69}$$

где A_h — коэффициент теплообмена, а $h_{\Sigma,w}$ — энтальпия газовой смеси на «стенке».

Во многих случаях (и в данной работе тоже) вместо переменной вдоль поверхности летательного аппарата энтальпии восстановления h_r в (14.69) используют близкую к ней по величине энтальпию торможения h_{00}.

Известно также, что если течение газа в пограничном слое рассматривается в «замороженной» постановке, т. е. без учета прохождения химических реакций внутри него, то диффузионный поток массы вещества на «стенке» пропорционален перепаду его массовых концентраций на границах пограничного слоя, т. е.

$$J_{\text{diff},i,w} = A_{C,i}\left(C_{i,w} - C_{i,e}\right), \tag{14.70}$$

где $A_{C,i}$ — коэффициент массообмена, а индекс e относится к внешней границе пограничного слоя.

С использованием выписанных соотношений уравнения (14.61) и (14.65) преобразуются к виду:

$$\begin{aligned}(A_h + G_{\Sigma,w+0}) \sum_{i}^{n-1} \Delta_i l_{j,i} Z_i = \\ = \left(\sum_{i=1}^{n-1} A_{C,i} C_{i,e} + \sum_{k} G_{k,w+0} \nu_{j,k}\right) \cdot \frac{1}{M_j}, \quad j = \overline{1, m-1},\end{aligned} \tag{14.71}$$

$$\lambda_{m,\mathrm{eff}}\frac{\partial T}{\partial y}(-0) = A_h\cdot(h_{00}-h_{\Sigma,w}) + \sum_k G_{k,w+0}h_{k,\omega} - G_{\Sigma,w+0}h_{\Sigma,w} - \\ - \varepsilon_w\sigma T_w^4 - G_{\Sigma,-\infty}\varphi_r\Delta Q_{r,w}, \quad (14.72)$$

$$\Delta_i = \frac{A_{C_i}+G_{\Sigma,w+0}}{A_h+G_{\Sigma,w+0}}, \quad i=\overline{1,n-1}, \quad (14.73)$$

$$Z_i = \frac{C_{i,w}}{M_i}, \quad i=\overline{1,n-1}. \quad (14.74)$$

Здесь $l_{j,i}$ — число атомов j-го сорта в i-м веществе.

Задание коэффициентов тепло- и массообмена обычно базируется на использовании тех или иных решений уравнений пограничного слоя. При этом необходимо отметить, что решение задач, относящихся к уносу массы теплозащитных материалов, сопровождается использованием различных подходов к определению этих коэффициентов. В частности, наиболее строгие численные решения уравнений пограничного слоя применяются практически только для углеродных материалов (см., например, работы [50–53]), что обусловлено заметным влиянием, оказываемым на скорость уноса массы этих материалов интенсивностью подачи окислительных веществ с внешней границы пограничного слоя к «стенке» за счет процесса многокомпонентной диффузии.

В то же самое время для материалов типа стеклопластиков, для которых чувствительность скорости уноса массы к точности задания коэффициентов массообмена существенно ниже, повсеместно (см., например, работы [16–30]) применяется приближенный подход к расчету интенсивности массообмена и трения, основанный на использовании аналогии этих процессов с теплообменом.

Не останавливаясь подробно на выводе расчетных соотношений, соответствующих использованию этой аналогии, многократно описанном в литературе (см., например, работу [14]), констатируем, что в его рамках

$$A_{C,i} = A_h, \quad i=\overline{1,n}, \quad (14.75)$$

и

$$\tau_w = A_h u_e \mathbf{Pr}_w^{\mathrm{ind}} c_{\mathrm{form}}. \quad (14.76)$$

Здесь:

u_e — тангенциальная проекция вектора скорости на внешней границе газового пограничного слоя,

$\mathbf{Pr}_w$ — число Прандтля на «стенке»,

ind — показатель степени, равный 2/3 и 0,8 соответственно для ламинарного и турбулентного режимов течения газа в пограничном слое,

c_{form} — коэффициент формы.

В обосновании применения такого подхода, который и используется в данной постановке задачи, отметим, что даже для углеродных материалов его использование характеризуется внесением в расчет крайне небольших ошибок. В качестве примера, иллюстрирующего данное утверждение, на рис. 14.9

приводятся полученные в работе [61] результаты сопоставления безразмерных скоростей уноса массы и температуры «стенки» углерода, соответствующих использованию численных решений уравнений замороженного многокомпонентного пограничного слоя и аналогии между процессами тепло– и массообмена. Указанные расчеты выполнены для окрестности критической точки сферы радиуса 0,1 м, обтекаемой воздушным потоком в широком диапазоне изменения чисел Маха при давлении торможения 1 атм. При этом использовалась теоретическая модель уноса массы углерода, описанная в работе [57].

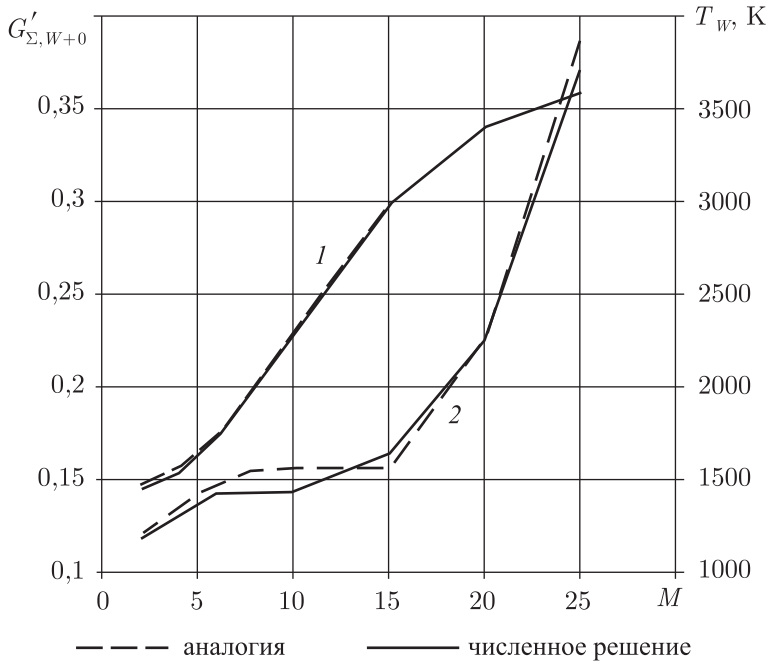


Рис. 14.9. Температура «стенки» (*1*) и безразмерная скорость уноса массы (*2*) углерода

В то же самое время задание коэффициента теплообмена необходимо производить с максимально возможной точностью. При этом для расчета коэффициента теплообмена на непроницаемой «стенке» $A_{h,0}$ необходимо использовать либо результаты численных и интегральных решений уравнений пограничного слоя, хорошо себя зарекомендовавших на практике при решении широкого круга прикладных задач теории пограничного слоя, либо результаты экспериментальных исследований.

В связи со сложным характером процесса ослабления интенсивности теплообмена в газовом пограничном слое за счет вдува в него паров материала сложного химического состава, единственно возможной альтернативой численному решению уравнений пограничного слоя является использование одного из приближенных подходов к учету этого фактора.

Для учета влияния заградительного эффекта вдува паров материала на теплообмен при этом допустимым является использование приближенных аппроксимационных подходов. В частности, возможным является применение формулы [14]:

$$\frac{A_h}{A_{h,0}} = \frac{1}{1 + c_{\text{blow}} G'_{\Sigma,w+0} + 3\left(c_{\text{blow}} G'_{\Sigma,w+0}\right)^2}, \tag{14.77}$$

где c_{blow} — коэффициент вдува, для которого согласно рекомендациям работы [14] используются постоянные значения, равные 0,6 и 0,2, а штрих означает измерение соответствующей величины в долях от коэффициента теплообмена на непроницаемой «стенке».

В заключение отметим, что использование в данном случае характеристик тепломассообмена и трения, соответствующих неподвижной «стенке», обосновано оценками, выполненными в работе [17]. Вследствие значительного различия скоростей движения газовой и жидкой фаз, имеющего место при оплавлении стеклообразных материалов, влияние тангенциального движения расплава на анализируемые параметры оказывается несущественным, так что в большинстве практически важных случаев им можно пренебречь.

12. Система граничных условий на фронте первичного пиролиза связки

Согласно принятой постановке задачи в области полупространства, ограниченной сверху координатой y_f, в которой температура материала равна T_f, возможностью прохождения физико-химических превращений пренебрегается. Поэтому выражение для теплового потока, поступающего в эту область, может быть записано в виде:

$$\lambda_{\text{init}} \frac{\partial T}{\partial y}\left(y_f - 0\right) = c_{\text{init}} G_{\Sigma,-\infty}\left(T_f - T_{-\infty}\right). \tag{14.78}$$

Здесь:

$T_{-\infty}$ — температура непрогретого материала;

c_{init} — среднеинтегральная удельная теплоемкость исходного материала в диапазоне изменения температур $\overline{T_{-\infty}}, \overline{T_f}$;

λ_{init} — коэффициент теплопроводности исходного материала при температуре T_f.

В свою очередь, тепловой поток, подводимый к рассматриваемой области со стороны высокотемпературных слоев материала, отличается от теплового потока, проникающего в нее, на количества тепла, поглощенного на прохождение первичного пиролиза связки. Поэтому искомое граничное условие для уравнения энергии имеет вид:

$$\lambda_{m,\text{eff}} \frac{\partial T}{\partial y}\left(y_f + 0\right) = G_{\Sigma,-\infty}\left[c_{\text{init}}\left(T_f - T_{-\infty}\right) + \varphi_r \Delta Q_{r,f}\right]. \tag{14.79}$$

С учетом сделанных выше допущений граничные условия для динамической части задачи записываются следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} &G_k\left(y_f+0\right)=G_{\Sigma,-\infty}\cdot\pi_{k,f},\\ &k=\mathrm{SiO}_2^{(s)},\mathrm{C}^{(s)},\mathrm{CO}^{(g)},\mathrm{SiO}^{(g)},\mathrm{H}_2^{(g)},\mathrm{N}_2^{(g)},\Omega^{(g)},\end{aligned}\right\} \tag{14.80}$$

$$G_{\mathrm{SiO}_2,L}\left(y_f+0\right)=0. \tag{14.81}$$

В заключение отметим, что примеры использования сформулированного физико-математического подхода к решению задачи об определении абляционных характеристик стеклопластиков на базе расчетно-теоретического анализа широкого круга экспериментальных данных, приводятся в работе [62].

Исследование поддержано РФФИ (проект №10–01–0841а).

Список литературы

1. *Бичер Н., Розенсвейг Р. Е.* Механизм абляции пластмасс с неорганическим армированием //Ракетная техника. 1961. Т. 1, № 4. С. 80–91.
2. *Анфимов Н. А., Полежаев Ю. В.* Нестационарное разрушение материалов в высокотемпературном потоке газа. – В кн.: Тепло- и массоперенос. Минск: Наука и техника. 1966. Т. 2. С. 11–16.
3. *Скала С. М., Гильберт Л. М.* Тепловое разрушение теплозащитного обугливающегося пластика при гиперзвуковых полетах //Ракетная техника. 1962. Т. 2, № 6. С. 189–196.
4. *Мадорский С.* Термическое разложение органических полимеров. — М.: Мир. 1967.
5. *Бишоп В. М., Минкович В. Дж.* Скорость разложения фенольной смолы //Ракетная техника и космонавтика. 1973. Т. 11, № 4. С. 27–34.
6. *Ладаки М., Гамильтон Дж. В., Коц С. Н.* Теплота пиролиза смолы в фенольно-кремнеземных аблирующих материалах //Ракетная техника и космонавтика. 1966. Т. 4, № 10. С. 132–137.
7. *Макэллистер Л., Уолкер А., Рой П.* Разработка и развитие разрушающихся материалов для сопел ракетных двигателей. Ч.1. Разработка аблирующих материалов и исследование их работы //Вопросы ракетной техники. 1964. № 2. С.49–63.
8. *Шленский О. Ф.* Тепловые свойства стеклопластиков. — М.: Химия. 1973.
9. *Гурвич Л. В., Хачкурузов Г. А., Медведев В. А.* Термодинамические свойства индивидуальных веществ — М.: Издательство АН СССР. 1962. Т. 2.
10. *Елютин В. П., Павлов Ю. А., Манухин А. В.* и др. Взаимодействие кремнезема с графитом при высоких температурах. – В кн.: Высокотемпературные материалы. — М.: Металлургия. 1968. С. 196–208.
11. *Блюменталь Дж. Л., Сэнти М. Дж., Бернс Е. А.* Исследование кинетики высокотемпературных реакций углерода и двуокиси кремния в прококсованных фенольных смолах, армированных двуокисью кремния //Ракетная техника и космонавтика. 1966. Т. 4, № 6. С. 120–126.

12. *Горский В. В., Савченко И. Я.* Исследование разрушения стеклопластика при дифференцированном выгорании углерода //Инженерно-физический журнал. 1973. Т. XXIV, № 4. С. 601–607.

13. *Ладаки М.* Карбид кремния в прококсованном слое аблирующего материала //Ракетная техника и космонавтика. 1966. Т. 4, № 8. С. 176–178.

14. *Полежаев Ю. В., Юревич Ф. Б.* Тепловая защита. — М.: Энергия. 1976.

15. *Шмидт Д. Л.* Абляционные материалы в космической технике //Вопросы ракетной техники. 1970. № 6. С. 9–35.

16. *Hidalgo H.* Ablation og glassy materials around blunt bodies of revolution //ARS J. 1960. V. 30, № 9. Pp. 806–814.

17. *Лиз Л.* Параметры подобия в процессе оплавления поверхности носовой части затупленных тел в высокоскоростном потоке газа //Вопросы ракетной техники. 1960. № 1. С. 40–61.

18. *Саттон Г.* Гидродинамика и теплообмен оплавляющейся поверхности //Вопросы ракетной техники. 1958. № 5. С. 37–46.

19. *Бете Х., Адамс К.* Теория абляции стекловидных материалов //Вопросы ракетной техники. 1960. № 2. С. 63–79.

20. *Полежаев Ю. В.* Расчет нестационарного плавления вязкого стеклообразного материала //Изв. АН СССР. Механика и машиностроение. 1963. № 3. С. 9–15.

21. *Пасконов В. М., Полежаев Ю. В.* Нестационарное плавление вязкого материала в окрестности точки торможения. В кн.: Численные методы в газовой динамике. — М.: Изд. МГУ. 1963. Выпуск 2. С. 123–134.

22. *Острах С., Макконнелл Д. Ж.* Унос массы плавлением при замедлении движения сферических тел //Ракетная техника и космонавтика. 1965. Т. 3, № 10. С. 122–131.

23. *Горский В. В., Полежаев Ю. В.* О некоторых особенностях, связанных с течением пленки расплава //Теплофизика высоких температур. 1966. № 3. С. 9–13.

24. *Апштейн Э. З., Ефимова Л. Г.* О лучистом переносе внутри оплавляющегося тела //Механика жидкости и газа. 1970. № 1. С.150–154.

25. *Апштейн Э. З.* Разрушение стекловидного тела в гиперзвуковом потоке газа с учетом лучистой теплопроводности внутри тела //Инженерно-физический журнал. 1969. Т. 17, № 1. С. 150–154.

26. *Сенченков А. С.* Влияние внешнего излучения на разрушение стекловидного тела в потоке газа //Механика жидкости и газа. 1976. № 5. С. 127–132.

27. *Сенченков А. С.* О некоторых эффектах взаимодействия излучения с разрушающимся стекловидным материалом //Механика жидкости и газа. 1978. № 5. С. 133–137.

28. *Сье К. Л., Сидер Дж. Д.* Абляция по поверхности армированного кварцем композиционного материала //Ракетная техника и космонавтика. 1973. Т. 11, № 8. С. 157–165.

29. *Стивердинг Б.* Теория уноса массы неньютонианских жидкостей в окрестности критической точки //Ракетная техника и космонавтика. 1965. Т. 3, № 7. С. 39–45.

30. *Стивердинг Б.* Температура поверхности и условия теплообмена при абляции псевдопластичных и дилатантных жидкостей //Теплопередача. 1969. Т. 89, № 1. С. 103–109.

31. Пластмассы в ракетной технике. Обзор. Часть 1 //Вопросы ракетной техники. 1961. № 7. С. 56–65.

32. Пластмассы в ракетной технике. Обзор. Часть 2 //Вопросы ракетной техники. 1961. № 8. С. 3–14.

33. *Грейвс А.* Абляция в условиях больших касательных напряжений //Ракетная техника и космонавтика. 1966. Т. 4, № 5. С. 109–116.

34. *Бишоп В. М., Ди-Кристина В.* Метод предсказания характеристик аблирующего материала в условиях входа в плотные слои атмосферы при высоких касательных напряжениях //Ракетная техника и космонавтика. 1968. Т. 6, № 1. С. 69–75.

35. *Шнайдер П. Дж., Долтон Т. А., Рид Г. В.* Механическая эрозия обугливающегося аблирующего материала при наземных испытаниях и в условиях спуска в атмосфере //Ракетная техника и космонавтика. 1968. Т. 6, № 1. С. 76–88.

36. *Николс Р. Дж., Сигал М.* Запаздывание по температуре и скорости абляции, вызванные периодическим подводом тепла //Ракетная техника и космонавтика. 1969. Т. 7, № 1. С. 164–179.

37. *Савелов М. В., Тимошенко В. П.* Нестационарная фильтрация газа в двухслойном теплозащитном материале //Механика жидкости и газа. 1975. № 6. С. 74–79.

38. *Василевский К. К., Федоров О. Г.* Исследование внутреннего теплообмена между газом и каркасом в разрушающемся материале.–В кн.: Тепло- и массоперенос. Минск: Наука и техника. 1968. Т. 2. С. 67–75.

39. Rannie et mal. Investigation of methods for transpiration cooling liquid rocket chambers //NASA CR-107268. 1969. P. 324.

40. *Лыков А. В.* Теория теплопроводности. — М.: Высшая школа. 1967.

41. *Хейз У. Д., Пробстин Р. Ф.* Теория гиперзвуковых течений. — М.: Изд. ИЛ. 1962.

42. *Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П.* Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. — М.: Физматгиз. 1963.

43. *Adams M. S., Povers W. E., Georgiev S.* An experimental and theoretical study of quartz ablation at stagnation point //JASS. 1960. V. 27, № 7. Pp. 535–543.

44. *Каданов Л. П.* Распространение лучистой энергии внутри аблирующего тела //Теплопередача. 1961. Т. 83, № 2. С. 147–160.

45. *Гидальго Г., Каданов Л. П.* Сравнение теоретических и летных данных по уносу массы //Ракетная техника и космонавтика. 1963. Т.1, № 1. С. 48–55.

46. *Полежаев Ю. В.* Сублимация. В кн. Физический энциклопедический словарь. — М.: Советская энциклопедия. 1966. Т.5. С. 101.

47. *Хирс Д., Паунд Г.* Испарение и конденсация. — М.: Металлургия. 1966.

48. *Пол Б.* Коэффициенты испарения //Ракетная техника. 1962. Т.2, № 9. С. 3–13.

49. *Schik H. L.* A thermodynamic analys of the high-temperature vaporization properties of silica //Chemical reviews. 1960. V. 60. Pp. 331–362.

50. *Анфимов Н. А.* Горение графита в потоке воздуха при высоких температурах //Известия АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. 1965. № 5. С. 3–11.

51. *Тирский Г. А.* Анализ химического состава ламинарного многокомпонентного пограничного слоя на поверхности горящих пластиков //Космические исследования. 1964. Т. 2, № 4. С. 92–96.

52. *Скала С. М., Гильберт Л. М.* Унос массы графита при гиперзвуковых скоростях //Ракетная техника и космонавтика. 1965. Т. 3, № 9. С. 87–100.

53. *Завелевич Ф. С.* Горение графита в химически равновесном пограничном слое //Механика жидкости и газа. 1966. № 1. С. 161–167.

54. *Барон Дж. Р., Бернштейн К.* Связь скорости разрушения поверхности с процессами в газовой фазе при окислении графита //Ракетная техника и космонавтика. 1971. Т. 9, № 8. С. 189–198.

55. *Торопов Н. А., Барзаковский В. П.* Высокотемпературная химия силикатов и других окисных систем. — М.-Л.: Изд. АН СССР. 1963.

56. *Прянишников В. П.* Система кремнезема. — Л.: Стройиздат. 1971.

57. *Горский В. В., Полежаев Ю. В.* Горение графита в высокотемпературных окислительных газовых потоках.–В кн.: Законы горения. — М.: Энергия. 2006. С. 198–215.

58. *Полежаев Ю. В.* Теоретический анализ нестационарного прогрева и разрушения стеклопластика в окрестности критической точки //Изв. АН СССР. Механика и машиностроение. 1964. № 3. С. 3–8.

59. *Горский В. В., Полежаев Ю. В.* Тепло- и массообмен на поверхности стеклографитовых материалов в высокотемпературном газовом потоке //Механика жидкости и газа. 1972. № 6. С. 71–87.

60. *Авдуевский В. С., Галицейский Б. М., Глебов Г. А. и др.* Основы теплопередачи в авиационной и ракетно-космической технике Под общей редакцией В. К. Кошкина. — М.: Машиностроение. 1975.

61. *Горский В. В., Лаврентьева А. Н.* Анализ ряда элементов механизма уноса массы углеродного материала в рамках полной термохимической модели его разрушения //Инженерно-физический журнал. 2009. Т. 83, № 1. С. 1–7.

62. *Горский В. В., Носатенко П. Я.* Математическое моделирование процессов тепло–и массообмена при аэротермохимическом разрушении композиционных теплозащитных материалов на кремнеземной основе. — М.: Научный мир. 2008.

15
МОДЕЛИРОВАНИЕ ТУРБУЛЕНТНЫХ СЖИМАЕМЫХ ПРИСТЕННЫХ ТЕЧЕНИЙ

В. А. Алексин
Институт проблем механики РАН

Представлен обзор полуэмпирических моделей турбулентности для численного расчета пристенных течений сжимаемого газа. Рассмотрены вопросы модификации как алгебраических, так и дифференциальных моделей, первоначально созданных для низкоскоростных течений, для исследования сверх- и гиперзвуковых пристенных потоков в условиях интенсивного теплообмена с обтекаемой поверхностью, пределы их применимости, определяемые параметрами набегающего потока и температурным фактором поверхности.

Введение

Для численных исследований внешних высокоскоростных течений сжимаемого газа с турбулентными режимами вводятся полуэмпирические модели турбулентности для замыкания систем осредненных уравнений Рейнольдса или пограничного слоя. Модели классифицируются на основании известных критериев. Среди них обычно выделяются два основных класса — алгебраические и дифференциальные, каждый из которых в свою очередь подразделяется по принятым гипотезам, а второй и по числу дифференциальных уравнений.

Дифференциальные модели можно разделить на одно- и двухпараметрические, и многопараметрические. Среди этих моделей выделяются как наиболее простые классы одно- и двухпараметрические, в основе которых лежат уравнения, предложенные А. Н. Колмогоровым [1] и Л. Прандтлем [2], и в дальнейшем развитые, например, в [3–5], и получившие широкое распространение не только при решении задач пограничного слоя, но и в более общих постановках течений жидкости и газа с учетом вязкости.

Наиболее эффективные модели этих классов, представленные здесь, созданы для расчетов низкоскоростных потоков с учетом свойств пристеночной области пограничного слоя. В дальнейшем круг решаемых задач с их использованием расширен на области с малыми числами Рейнольдса и ламинарно-турбулентного перехода, и отрыва потока. Возможен при этом учет пространственности течения с анизотропными свойствами. Круг этих задач расширен на расчеты высокоскоростных течений с теплообменом в потоке и с обтекаемой поверхностью. Для пристенных сверхзвуковых течений

использование моделей обосновывается гипотезой Морковина с учетом только переменности средней плотности потока. Расширение области применимости полуэмпирических моделей на гиперзвуковые неравновесные течения со скачками уплотнения и областями отрыва требует в ряде случаев их уточнения и модификации.

1. Особенности структуры турбулентных сжимаемых пристенных течений. Алгебраические модели

Структура турбулентных течений в пограничных слоях около твердой поверхности описана в [6–10]. На особенности влияния сжимаемости потока и теплообмена на структуру пристенных течений указывается в [6, 9, 10]. Сжимаемость высокоскоростных потоков может учитываться в определяющей системе уравнений во-первых, явно через переменность средней плотности, во-вторых, через турбулентные корреляции, в которые входят флуктуации плотности, что приводит к необходимости принятия дополнительных предположений для корректировки членов уравнений применяемых моделей. Эффект сжимаемости может неявно отражаться на изменении значений констант, входящих в коэффициенты моделей, которые апробированы в основном на экспериментальных данных для низкоскоростных потоков.

Флуктуации плотности учитываются в уравнениях переноса, в которых мгновенные значения параметров, кроме плотности и давления, представляются как суммы средневзвешенных и пульсационных величин [11]

$$f = \widetilde{f} + f''.$$

Здесь средневзвешенные значения параметра и комплекса параметров выделены волнистым надчеркиванием и треугольными скобками (осреднение А.Фавра)

$$\widetilde{f} = \frac{\overline{\rho f}}{\overline{\rho}}, \tag{15.1}$$

где черта сверху — осреднение комплекса и параметра по Рейнольдсу.

Тогда из (15.1) следует выполнение равенств:

$$\widetilde{f''} = 0, \quad \overline{\rho}\,\langle f''g''\rangle = \overline{\rho f''g''}, \quad \overline{f''} = -\frac{\overline{\rho' f'}}{\overline{\rho}} \neq 0.$$

Усредненные по Рейнольдсу уравнения сохранения количества движения и энергии содержат конвективные члены со средневзвешенными величинами:

$$\overline{\rho}\left\langle u_i'' u_j''\right\rangle = \overline{\rho}\overline{u_i' u_j'} - \overline{\rho}\cdot\overline{u}_i''\cdot\overline{u}_j'' + \overline{\rho' u_i' u_j'},$$

$$\overline{\rho}\,\langle u_i'' T''\rangle = \overline{\rho}\overline{u_i' T'} - \overline{\rho}\cdot\overline{u_i''}\cdot\overline{T''} + \overline{\rho' u_i' T'}, \tag{15.2}$$

$$\overline{u_k''} = -\frac{\overline{\rho' u_k'}}{\overline{\rho}}, \quad \overline{T''} = -\frac{\overline{\rho' T'}}{\overline{\rho}}. \tag{15.3}$$

Здесь флуктуации плотности входят в корреляции третьего порядка соотношений (15.2).

Гипотеза Морковина, основанная на анализе экспериментальных данных сжимаемых пограничных слоев, подтверждает незначительную роль членов (15.3) в соотношениях (15.2) для потоков с числами $\mathbf{M}_\infty \leqslant 5$.

1.1. Структура турбулентного пограничного слоя. В развитом двумерном турбулентном пограничном слое низкоскоростного потока выделяются несколько принципиально различных областей: внутренняя пристеночная область и внешняя область закона следа и надслоя. Пристеночная область состоит из вязкого подслоя, в который входит линейный участок и часть переходной зоны, и области логарифмического профиля скорости (рис. 15.1).

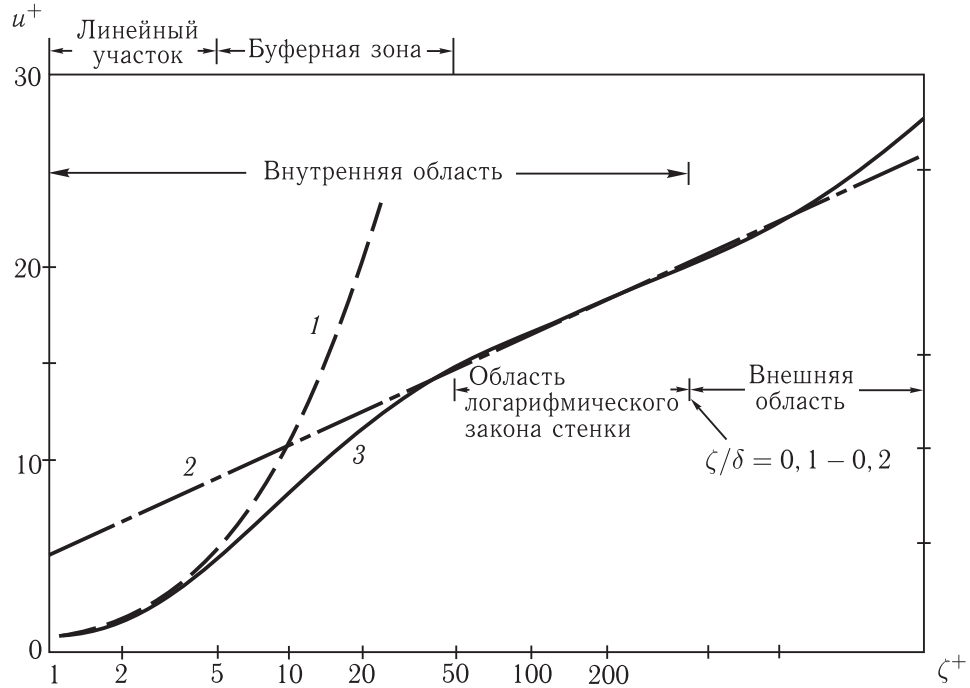


Рис. 15.1. Схема областей турбулентного пограничного слоя и профиль скорости: *1* — $u^+ = \zeta^+$ (ламинарный); *2* — $u^+ = \kappa^{-1} \ln \zeta^+ + C$ (логарифмический закон стенки); *3* — профиль скорости

Каждая из перечисленных областей характеризуется своими основными свойствами и закономерностями. В вязком подслое на линейном участке профиль скорости является линейным в динамических переменных закона стенки:

$$u^+ = \zeta^+,$$

$$u^+ = \frac{u}{u_*}, \quad \zeta^+ = \frac{u_* \zeta}{\nu}, \quad u_* = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}},$$

и вязкие касательные напряжения значительно больше турбулентных ($0 \leqslant \zeta^+ \leqslant \zeta_l^+$, $\zeta_l^+ = 5$–7).

Здесь протяженность границ приводится приближенно, u^+ — безразмерная продольная компонента и u_* — динамическая скорость, ζ^+ — нормальная координата задана как турбулентное число Рейнольдса. Толщина области, включающей вязкий подслой и буферную зону, изменяется в пределах 0,001–0,01 от толщины всего слоя δ (для динамической переменной $\zeta_b^+ \approx 30$–40). Толщина вязкого подслоя, т. е. значение координаты ζ^+, где кривые линейного и логарифмического профилей скорости пересекаются, заключена в пределах $\zeta_*^+ = 10$–12 для течений на пластине. Область полностью развитого турбулентного течения (область логарифмического профиля скорости или закона стенки), где турбулентные напряжения значительно больше вязких напряжений, составляет 0,1–0,2 от всей толщины $\delta (40 \leqslant \zeta^+ \leqslant 10^3)$. Закон стенки оказывается малочувствителен к изменениям внешних условий и более чувствителен к изменениям условий на поверхности. Профиль скорости в этой области представляется универсальной кривой

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln \zeta^+ + C,$$

где значения постоянных κ, C определены из экспериментальных данных. В этой области поток характеризуется мелкомасштабной турбулентностью с изотропными свойствами и возмущения затухают на нескольких толщинах пограничного слоя [12].

Внешний слой включает области закона следа и перемежаемости (надслой). Во внешней области, где силы вязкости малы, выполняется закон дефекта скорости [13]:

$$u_e^+ - u^+ = \vartheta\left(\zeta'\right), \quad \zeta' = \frac{\zeta}{\delta},$$

где δ — толщина пограничного слоя, $0{,}2 \leqslant \zeta' \leqslant 1$. Для описания профиля скорости в областях закона стенки и следа применяются общие эмпирические формулы [13]. Изменения внешних условий — градиента давления, степени турбулентности внешнего потока значительно воздействуют на эти распределения, меняются и границы областей. Развиты и получены другие аналитические функции для описания экспериментальных профилей скорости в потоках с положительными продольными градиентами давления. Законы подобия стенки и следа для профиля скорости распространены на пространственные течения в пограничных слоях [4, 7, 13, 14].

Приведенные величины масштабов границ основных зон турбулентного пограничного слоя носят приближенных характер и даны для низкоскоростных течений. Для сверх- и гиперзвуковых течений, кроме упомянутых выше факторов, на эти значения оказывают влияние также эффекты скоростной сжимаемости и теплообмена в потоке. Учет этого влияния в полуэмпирических моделях турбулентности производится через введение в них

функциональных зависимостей от параметров, описывающих эти факторы, или через изменение внутренних масштабов зон. Так повышение числа Маха $\mathbf{M}_\infty$ до 5 незначительно меняет масштабы зон пограничного слоя при малых продольных градиентах давления, что связано с малостью относительной флуктуации плотности. В то же время для гиперзвуковых течений экспериментальные данные показывают уже значительное влияние числа $\mathbf{M}_\infty$ для холодной стенки на масштаб вязкого подслоя и другие параметры пристеночной области.

1.2. Варианты модели Прандтля. Для расчета пространственных течений в пограничных слоях наиболее распространены алгебраические модели, основанные на гипотезах турбулентной вязкости и длины пути смешения Прандтля двумерных течений

$$\mu_T = \rho l^2 D^2 \left|\frac{\partial u}{\partial \zeta}\right|.$$

Здесь l — длина пути смешения определяется по эмпирическим зависимостям, D-демпфирующая функция Ван-Драйста [15]. В пристеночной области, где $l = \kappa\zeta$, турбулентная вязкость может быть представлена как:

$$\mu_T = \rho\kappa u_* \zeta D^2, \quad D = 1 - \exp(-\frac{\zeta^+}{A^+}).$$

Здесь κ — константа Кармана, A^+ — эмпирическая постоянная. В дальнейшем на основании многочисленных экспериментальных данных и численных расчетов показана зависимость величины A^+ от многих факторов течения [16, 17].

Зависимости для эффективных коэффициентов переноса, полученные для двумерных течений, обобщаются и используются для исследований пространственных течений [2, 7, 14, 18–25]. Эти зависимости учитывают взаимодействие молекулярного и молярного процессов в пристеночной области пограничного слоя, а также особенности течений во внешней области.

В изотропных коэффициентах турбулентной вязкости длина пути смешения в пространственном пограничном слое с учетом демпфирующего множителя Ван Драйста [15] — скалярная функция своих аргументов и зависит от полного трения $\boldsymbol{\tau}$ [21]. Турбулентная вязкость считается скалярной функцией модуля градиента скорости

$$\mu_T = \rho l^2 D^2 \left|\mathbf{G}\right|.$$

Демпфирующая функция D, учитывающая взаимодействие молекулярного и молярного обменов в пристеночной области, зависит от значений трения, вязкости, плотности в некоторой точке пограничного слоя и локального критического числа Рейнольдса A^+. Варианты функции D различаются в основном выбором точки, в которой заданы эти величины. Величина A^+

принимается либо постоянной, либо зависит от ряда параметров. Например, демпфирующая функция D введена в [23] в виде

$$D = 1 - \exp\left[-\frac{l v_{*w} \rho_w}{A^+ \kappa \mu}\right].$$

Длина пути смешения в этом варианте модели определяется одним выражением:

$$l = \beta_* \delta \operatorname{th}\left(\frac{\kappa}{\beta_*}\frac{\zeta}{\delta}\right), \quad v_{*w} = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho_w}}, \quad A^+ = 26, \quad \kappa = 0{,}41, \quad \beta_* = 0{,}085.$$

Во внешней области выполняется соотношение $l = \beta_* \delta$. Предложены варианты модели, в которых величина β_* зависит от локального числа Рейнольдса, построенного по толщине потери импульса, и факторов, связанных с условиями на поверхности [17].

Свойства турбулентного пограничного слоя в пристеночной и внешней областях учтены в [18] введением трех выражений для длины пути смешения l, в первые два из которых входит демпфирующий множитель D. Длину пути смешения l во внешней части пограничного слоя можно определять по формуле $l = \beta_* \delta \Phi_*(\zeta/\delta)$. Значения постоянной $\beta_* = 0{,}09$ и предела $\Phi_*(\zeta/\delta) \to 1$, $\zeta \to \infty$ использованы в [21].

Многослойные модели турбулентной вязкости применялись в [20, 22]. Во внутренней и внешней областях пограничного слоя турбулентная вязкость определялась различными выражениями. Во внешней части использовалась гипотеза Ф. Клаузера [12] с учетом эффектов перемежаемости введением эмпирического коэффициента так же, как для двумерных течений [20]. Применение этой гипотезы вполне удовлетворительно для описания равновесных турбулентных пограничных слоях. Модифицированные варианты этой формулы представлены в [10] для неравновесных течений с их подробным обоснованием.

Два варианта турбулентная вязкости для учета свойств турбулентности во внешней области предложены в [24]. В первом, турбулентная вязкость позволяет рассчитывать течения с немонотонными профилями, как в пристеночных струях. Во втором, вязкость связана с интенсивностью турбулентности q (или энергией турбулентности $K = q^2/2$). Анизотропные модели турбулентной вязкости разработаны в [22, 26].

1.3. Модели эффективных коэффициентов переноса. Для замыкания системы уравнений пространственного пограничного слоя при турбулентном режиме течения модель эффективных коэффициентов переноса [27] является непосредственным обобщением двумерной модели переноса [28, 29]. Использовано предположение об изотропности коэффициента турбулентной вязкости, т. е. турбулентная вязкость — скалярная функция координат и составляющих тензора скоростей деформации, а направление полного касательного напряжения $\boldsymbol{\tau}(\tau_1, \tau_2)$ совпадает с направлением результирующего градиента

скорости $\mathbf{G} = (\partial u/\partial\zeta,\ \partial w/\partial\zeta)$. Из этого предположения также следует, что путь смешения Прандтля — скалярная функция и не зависит от преобразования координат: $l_1 = l_2 = l$. Тогда обобщение гипотезы Прандтля для пространственного пограничного слоя дает формулу из [14]. Для неортогональной системы криволинейных координат, связанной с поверхностью тела, модуль градиента скорости определяется соотношением:

$$|\mathbf{G}| = \left[\left(\frac{\partial u}{\partial\zeta}\right)^2 + 2\cos\psi_0\frac{\partial u}{\partial\zeta}\frac{\partial w}{\partial\zeta} + \left(\frac{\partial w}{\partial\zeta}\right)^2\right]^{1/2}, \quad \cos\psi_0 = \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}}\sqrt{g_{22}}},$$

где u, w — физические компоненты скорости в продольном и поперечном направлениях, ζ — координата по нормали к поверхности, ψ_0 определяется через метрические коэффициенты g_{ij}, $i, j = 1,\ 2$.

Модель эффективных коэффициентов переноса, введенная В. Д. Совершенным [28] для двумерного пограничного слоя, представляет собой суперпозицию молекулярной и турбулентной вязкости

$$\mu_\Sigma = k_1\mu + k_2\mu_T.$$

Коэффициенты k_1 и k_2 выбраны так, чтобы в ламинарном подслое при $\zeta \to 0$ выполнялись пределы $k_1 \to 1$, $k_2 \to 0$; в турбулентном ядре при больших ζ они принимали значения $k_1 = 0$, $k_2 = 1$ как и в двухслойной модели. Коэффициенты k_1 и k_2 изменяются непрерывным образом от значений, соответствующих ламинарному подслою, до значений в турбулентном ядре: k_1 и k_2 — функции локального числа $\mathbf{Re}_\tau = l\sqrt{\tau/\rho}\,/\nu$ и критического числа Рейнольдса $\mathbf{Re}_*$. В ламинарном подслое демпфирующее действие молекулярной вязкости на турбулентные пульсации в этой модели переноса характеризуется степенью убывания слагаемого $k_2\mu_T$ при $\zeta \to 0$. Аналогично моделям эффективной вязкости [15, 24] и в соответствии с экспериментальными данными модель вязкости [27, 28] дает четвертый порядок убывания при $\zeta \to 0$: $k_2\mu_T \sim O(\zeta^4)$.

Выражение для эффективной вязкости $\varphi_* = \mu_\Sigma/\mu$ определено как функция чисел Рейнольдса $\mathbf{Re}_A = \mu_T/\mu$ и $\mathbf{Re}_*$

$$\varphi_* = \left(\mathbf{Re}_A^2 - \mathbf{Re}_*^2 + \sqrt{\left(\mathbf{Re}_A^2 - \mathbf{Re}_*^2\right)^2 + 4\mathbf{Re}_*^2\mathbf{Re}_A}\right)(2\mathbf{Re}_A)^{-1}.$$

По аналогии с коэффициентом эффективной вязкости для пространственного пограничного слоя коэффициент эффективной теплопроводности задается функцией:

$$\lambda_\Sigma = \lambda\varphi_* F\left(\mathbf{Re}_A, \mathbf{Re}_*, \mathbf{Pr}, \mathbf{Pr}_T\right),$$
$$F = \left\{1 + \left(\frac{\mathbf{Pr}}{\mathbf{Pr}_T} - 1\right)\mathbf{Re}_A^2\left[\mathbf{Re}_*^2\left(1 + \varphi_*\frac{\mathbf{Re}_A}{\mathbf{Re}_*^2}\right)\right]^{-1}\right\}.$$

Коэффициент полной теплопроводности λ_Σ зависит от чисел $\mathbf{Re}_A$, $\mathbf{Re}_*$, $\mathbf{Pr}$, $\mathbf{Pr}_T$. Числа Прандтля определяются по коэффициентам молекулярного и турбулентного переноса.

Величина $\mathbf{Re}_*$ в пространственном пограничном слое зависит, аналогично двумерному случаю, от параметров градиента давления, проницаемости, чисел Маха и Рейнольдса:

$$\mathbf{Re}_* = \mathbf{Re}_*(\mathbf{Re}_{\theta 1}, P^+, \upsilon_w^+, \Gamma_e),$$

$$P^+ = \frac{\nu_e}{\rho_w \upsilon_*^3}\frac{u_e^i}{U_e}\frac{\partial p_e}{\partial \xi^i}, \quad \frac{u_e^i}{U_e}\frac{\partial p_e}{\partial \xi^i} = \frac{\mathbf{U_e}}{|\mathbf{U_e}|}\nabla p_e, \quad \upsilon_w^+ = \frac{\upsilon_w}{\upsilon_{*w}}, \quad \upsilon_{*w} = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho_w}},$$

$$\tau = \left(\tau_1^2 + \tau_1^2 + 2\cos\psi_0\tau_1\tau_2\right)^{1/2}, \quad U_e = \left(u_e^2 + w_e^2 + 2\cos\psi_0 u_e w_e\right)^{1/2},$$

$$\mathbf{Re}_* = \mathbf{Re}_{*,0} R(\mathbf{M}_e)\left\{1 + a\left[\upsilon_w^+ + bP^+(1 + c\upsilon_w^+)^{-1}\right]\right\}^{-1},$$

где константы a, b, c равны соответственно 5,15; 5,86; 5,00. Функция $R(\mathbf{M}_e)$ учитывает влияние сжимаемости на характеристики турбулентного пограничного слоя. Выражение для функции $R(\mathbf{M}_e)$ получено при сопоставлении результатов численного исследования и экспериментальных данных в диапазоне числа Маха $\mathbf{M}_e$:

$$R = 1 + r_*\Gamma_e^{1/2}, \quad \Gamma_e = (\gamma - 1)\mathbf{M}_e^2, \quad r_* = 0{,}189,$$
$$0 \leqslant \mathbf{M}_e \leqslant 10, \quad 0{,}4 \leqslant t_w \leqslant 1.$$

Результаты экспериментальных исследований при гиперзвуковых скоростях течения [30–33] показывают значительное снижение турбулентного касательного напряжения с ростом числа Маха (см. рис. 15.2). Уменьшение температурного фактора t_w оказывает аналогичное воздействие на напряжения Рейнольдса, при этом основное влияние на механизм генерации и диссипации энергии турбулентности оказывает сжимаемость потока (число Маха). При больших гиперзвуковых числах Маха ($\mathbf{M}_e \geqslant 10$) в условиях холодной стенки $t_w = 0{,}11$–$0{,}15$ измерения турбулентной вязкости и длины пути смешения показывают падение безразмерной эффективной вязкости $\mu_\Sigma/u_e\delta\rho$ во внешней области, при этом постоянная β_* в формуле для длины пути смешения уменьшается с увеличением числа Маха.

При гиперзвуковых скоростях течения в условиях холодной стенки модель турбулентного переноса может быть уточнена введением функциональной зависимости для β_*

$$\beta_* = \beta_*(\mathbf{M}_e, t_w).$$

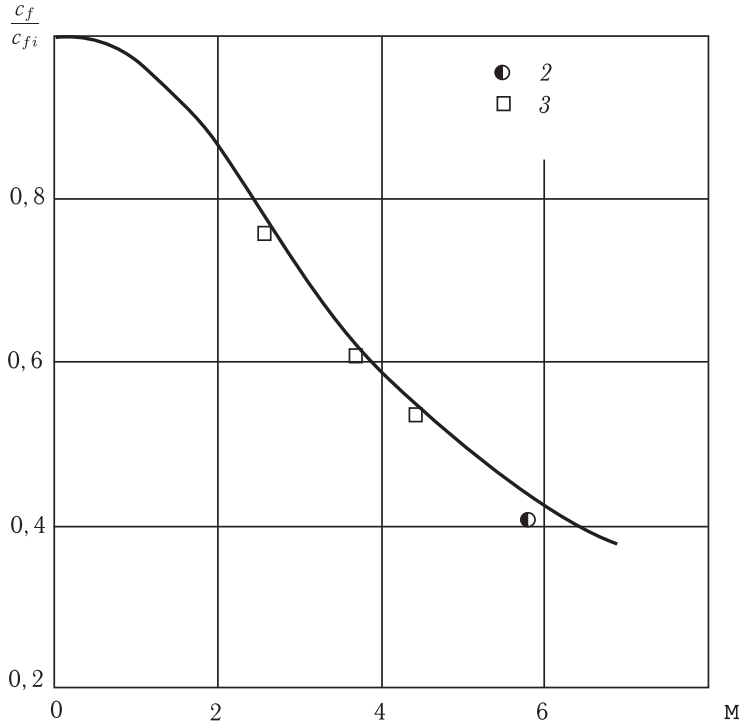


Рис. 15.2. Снижение отношения коэффициентов сопротивления трения в сжимаемом и несжимаемом потоках c_f/c_{fi} при одном и том же числе $\mathbf{Re}_\theta$ на плоской пластине в зависимости от $\mathbf{M}_\infty$: *1* — расчет по модели [27]; *2, 3* — экспериментальные данные (см. [30])

Турбулентное число Прандтля $\mathbf{Pr}_T$ задается в общем случае с помощью эмпирической зависимости:

$$\mathbf{Pr}_T = \mathbf{Pr}_T(\zeta^+, \mathbf{Pr}), \quad \zeta^+ = \frac{\zeta u_*}{\nu}, \quad u_* = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}\,.$$

Такая зависимость может быть найдена путем сопоставления численных результатов с экспериментальными данными. Полуэмпирические модели турбулентного числа Прандтля ([16, 34, 35]) построены таким образом, что они учитывают взаимодействие молекулярной и молярной природы вблизи стенки, а вдали от стенки принимают почти постоянное значение порядка 0,9. Результаты экспериментальных исследований по определению значений турбулентного числа Прандтля $\mathbf{Pr}_T$ ([35, 36]) показывают, что в пристеночной области пограничного слоя $\mathbf{Pr}_T > 1$, во внешней области пограничного слоя $\mathbf{Pr}_T < 1$. Влияние вдува и отсоса газа на $\mathbf{Pr}_T$ не обнаруживается [36]. Экспериментальные данные [35] для сверхзвуковых течений ($1{,}7 \leqslant \mathbf{M} \leqslant 2{,}9$) показывают аналогичное поведение турбулентного числа $\mathbf{Pr}_T$ поперек пограничного слоя, как для дозвуковых потоков. В практических расчетах принимается $\mathbf{Pr}_T = \mathrm{const}$. При течениях в сверхзвуковых потоках газа турбулентное число Прандтля определяется из сопоставления результатов расчета

с экспериментальными данными по коэффициенту восстановления температуры. Результаты такого сопоставления дают $\mathbf{Pr}_T = 0{,}9$.

Проблемы моделирования влияния сжимаемости потока при больших числах Маха на пристеночные турбулентные пограничные слои рассмотрены и проанализированы в [6, 7, 9] в основном для двумерных течений. Расчеты пространственных течений при обтекании тел пространственной конфигураций в рамках приближения пограничного слоя и в более общих постановках потребовали модификации дифференциальных моделей для учета сжимаемости потока для сверх- и гиперзвуковых течений. Проверка достоверности расчетных результатов, полученных на их основе, проведена в [37–40].

2. Дифференциальные однопараметрические модели турбулентности

При турбулентном режиме течения для замыкания систем осредненных уравнений Навье-Стокса (уравнения Рейнольдса) и пограничного слоя используются дифференциальные модели турбулентности, основываются на дополнительных дифференциальных уравнениях переноса (в частных производных).

Модели с одним дополнительным уравнением непосредственно для характеристики турбулентности (например, для кинетической энергии турбулентности [3] или турбулентной вязкости [5, 14], по которой определяются напряжения Рейнольдса, включены в класс однопараметрических моделей, к ним относится модельное уравнение прямо для напряжения Рейнольдса [4].

2.1. Модели с уравнением для турбулентной вязкости. Модели с одним дифференциальным уравнением для коэффициента турбулентной вязкости ν_T, введенные Нии, Коважным (см. [14]) для турбулентных течений несжимаемой жидкости

$$\frac{D\nu_T}{Dt} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x_k}\left[\rho\nu_T\frac{\partial\nu_T}{\partial x_k}\right] + A\nu_T\left|\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\right| - B\frac{\nu_T^2}{L^2},$$

где L — масштаб турбулентности, A, B — эмпирические константы, развиты в дальнейшем для широкого класса пристенных течений сжимаемого газа [5, 41, 42]. Так варианты модели А. Н. Секундова [5, 14], выведенной из уравнения для энергии турбулентности, и одной из совершенных моделей для турбулентной вязкости, учитывают многие факторы, в том числе сжимаемость потока и шероховатость стенки. Модель $\nu_T 92$ — одна из последних модифицированных версий модели [41].

В классе однопараметрических моделей дифференциальное уравнение может задаваться для функции $\widetilde{\nu}$ от турбулентной вязкости ν_T, которое в декартовых координатах для нестационарного трехмерного течения представляется модельным уравнением в общей форме

$$\frac{\partial\widetilde{\nu}}{\partial t} + u_k\frac{\partial\widetilde{\nu}}{\partial x_k} = D_{if} + D_s - E, \tag{15.4}$$

где D_{if}, D_s, E — члены, выражающие диффузию, производство и диссипацию определяемой характеристики турбулентности. В этих моделях учитывается влияние малых чисел Рейнольдса вблизи стенки на турбулентную вязкость. Напряжения Рейнольдса определяются по линейной связи с компонентами тензора скоростей деформаций. Диффузионный член состоит из слагаемых со вторыми производными по координатам от $\widetilde{\nu}$, кроме того, могут добавляться слагаемые с первыми производными. Наиболее сложный вид имеет член D_s, состоящий из нескольких слагаемых. Наиболее простой вид имеет стоковый член, учитывающий диссипацию, подобно уравнению (15.4).

В модели [42] уравнение переноса введено для функции $\widetilde{\nu}$, а для турбулентной вязкости ν_T влияние вязких эффектов при низких числах Рейнольдса производится за счет множителя $f_{\nu 1}$, зависящего от турбулентного числа Рейнольдса χ:

$$\nu_T = \widetilde{\nu} f_{v1}, \quad f_{v1} = \frac{\chi^3}{\chi^3 + c_{v1}^3}, \quad \chi \equiv \frac{\widetilde{\nu}}{\nu},$$

где $c_{v1} = \mathrm{const}$.

В модели [43] подобный множитель α составлен из двух демпфирующих функций типа Ван–Драйста:

$$\nu_T = \widetilde{\nu}\alpha, \quad \alpha = c_\mu D_1 D_2,$$

$$D_1 = 1 - \exp\left(\frac{-\zeta^+}{A_0^+}\right), \quad D_2 = 1 - \exp\left(\frac{-\zeta^+}{A_2^+}\right),$$

где постоянные модели $c_\mu = 0{,}09$, $A_0^+ = 26$, $A_2^+ = 10$, две первые из которых совпадают с величинами известной модели Прандтля–Колмогорова для турбулентной вязкости с соответствующим множителем Ван–Драйста.

2.2. Модель с уравнением для кинетической энергии турбулентности. Вводятся и используются в расчетах однопараметрические модели с уравнением переноса для энергии турбулентности K, при этом масштаб турбулентности L задается в соответствии с принятыми гипотезами по известным эмпирическим соотношениям. Набегающий поток характеризуется интенсивностью Tu_∞ в процентах и масштабом турбулентности L_∞. Здесь $Tu_\infty^2 = \dfrac{10^4 \times 2K_\infty}{3V_\infty^2}$, кинетическая энергия турбулентности $K = 0{,}5\langle u_i' u_i' \rangle$ $(i = 1{,}3)$.

Уравнение для кинетической энергии турбулентности K двумерного пограничного слоя в слабосжимаемом потоке газа в системе криволинейных координат ξ, ζ имеет вид

$$u\frac{\partial K}{\partial \xi} + \upsilon\frac{\partial K}{\partial \zeta} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \zeta}\left[\mu\frac{\partial K}{\partial \zeta} - \overline{p'\upsilon'} - \rho\overline{\upsilon' u' u'}\right] - \overline{u'\upsilon'}\frac{\partial u}{\partial \zeta} - \nu\overline{\frac{\partial u_i'}{\partial \xi_j}\frac{\partial u_i'}{\partial \xi_j}}.$$

Здесь, члены уравнения в правой части выражают процессы диффузии, производства P_k/ρ и диссипации энергии турбулентности $(-\varepsilon_k)$.

В соответствии с гипотезой о градиентном механизме диффузии для больших локальных чисел Рейнольдса А. Н. Колмогоровым [1] предложено соотношение

$$-\overline{p'v'} - \rho\overline{v'u'u'} = \frac{\mu_T}{\sigma_k}\frac{\partial K}{\partial \zeta}.$$

Коэффициент турбулентной вязкости μ_T определяется по гипотезе Колмогорова–Прандтля [1, 2], где в качестве масштабов скорости и длины турбулентного движения выбраны $K^{1/2}$ и интегральный масштаб L

$$\mu_T = c'_\mu \rho K^{1/2} L, \tag{15.5}$$

где c'_μ — эмпирическая константа.

Коэффициент полной (эффективной) вязкости $\mu_{\Sigma,k}$ зависит от коэффициентов молекулярной и турбулентной (вихревой) вязкостей (μ, μ_T) и числа Прандтля σ_k для K

$$\mu_{\Sigma,k} = \mu + \frac{\mu_T}{\sigma_k}. \tag{15.6}$$

Диссипативный член в уравнении для кинетической энергии K:

$$\varepsilon_k = \nu\overline{\frac{\partial u'_i}{\partial \xi_j}\frac{\partial u'_i}{\partial \xi_j}}, \quad i, j = 1, 3,$$

согласно предположению, введенному в [1], для больших чисел Рейнольдса равен изотропной части скорости диссипации ε и аппроксимируется соотношением от энергии K и масштаба диссипации L_ε, совпадающему с масштабом турбулентности L

$$\varepsilon_k = c_D K^{3/2} L^{-1}.$$

Влияние вязкости в областях вблизи стенки с малыми локальными числами Рейнольдса учитывается введением в диссипативный член ε_k дополнительного слагаемого D [44]: $D = c_1 \nu K/L^2$. В результате диссипативный член ε_k представляется суммой двух составляющих $\varepsilon + D$:

$$\varepsilon_k = \frac{c_D K^{3/2}}{L} + \frac{c_1 \nu K}{L^2} = \frac{K^{3/2}}{L}\left(c_D + \frac{c_1}{\mathbf{Re}_k}\right), \quad \mathbf{Re}_k = \frac{K^{1/2} L}{\nu}. \tag{15.7}$$

Считается, что основным недостатком однопараметрических моделей является необходимость задания масштаба турбулентности L, как в теории длины пути смешения Прандтля, но это и дает возможность успешно использовать накопленную информацию и достижения этой теории при расчетах ряда течений в пограничных слоях. В частности может быть принято $L = l_m$, где l_m — длина пути смешения Прандтля.

Рассматриваемая модель полной вязкости (15.5), (15.6) применима для расчета развитых турбулентных течений с большими локальными числами $\mathbf{Re}$, для областей вблизи стенки с малыми числами $\mathbf{Re}$ вводится демпфирующий множитель $f_\mu(\mathbf{Re})$ в (15.5)

$$\mu_T = c'_\mu f_\mu(\mathbf{Re}) \rho K^{1/2} L. \tag{15.8}$$

Вид функции $f_\mu(\mathbf{Re})$ в моделях различен, как выбор в качестве аргумента локального числа Рейнольдса $\mathbf{Re}$. В модели [45] функция f_μ выбрана подобно демпфирующему множителю Ван–Драйста [15], но зависящему от локального турбулентного числа $\mathbf{Re}_k$:

$$f_\mu = 1 - \exp(-A_\mu \mathbf{Re}_k),$$

$$\mathbf{Re}_k = K^{1/2}\frac{L}{\nu}, \quad c'_\mu = 0{,}224, \quad A_\mu = 0{,}012, \quad \sigma_k = 1{,}0.$$

Скорость диссипации ε_k определяется по формуле (15.7) с введенным демпфирующим множителем f_μ в первый член (около стенки $L = l_m \approx \kappa\zeta$): $c_D = 0{,}416$; $c_1 = 2$; $\kappa = 0{,}41$. При выборе $c_D = 2c'_\mu$ следует $\varepsilon_k = (\nu + \nu_T)2K/L^2$.

В вариантах модели [46, 47] применены подобные демпфирующие множители f_μ

$$f_\mu = 1 - \exp\left(\frac{-\mathbf{Re}_{k\varsigma}}{\widetilde{A}_\mu}\right),$$

но зависящие от близкого, но несколько иного локального турбулентного числа $\mathbf{Re}_{k\zeta}$

$$\mathbf{Re}_{k\zeta} = \frac{K^{1/2}\zeta}{\nu}.$$

Скорость диссипации ε_k задается в [46, 47] по формулам, аналогичным (15.7):

$$\varepsilon_k = \frac{K^{3/2}}{L}\left(1 + \frac{C_\varepsilon}{\mathbf{Re}_{k\zeta}}\right), \quad L = \kappa\zeta c_\mu^{-0{,}75}, \quad \widetilde{A}_\mu = 50{,}5, \quad C_\varepsilon = 5{,}3,$$

$$\varepsilon_k = \frac{K^{3/2}}{Lf_\varepsilon}, \quad f_\varepsilon = 1 - \exp\left(\frac{-\mathbf{Re}_{k\varsigma}}{\widetilde{A}_\varepsilon}\right), \quad L = \kappa\zeta c_\mu^{-0{,}75},$$

$$\widetilde{A}_\mu = 70{,}0, \quad \widetilde{A}_\varepsilon = 2\kappa c_\mu^{-0{,}75} = 5{,}1.$$

Для расчета полной области течения, включая переход, в [48] принимается вариант модели уравнения для кинетической энергии турбулентности:

$$u\frac{\partial K}{\partial \xi} + v\frac{\partial K}{\partial \zeta} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \zeta}\left[\mu_{\Sigma,k}\frac{\partial K}{\partial \zeta}\right] + \frac{P_k}{\rho} - \varepsilon_k, \tag{15.9}$$

$$\mu_{\Sigma,k} = \mu + \frac{\mu_T}{\sigma_k}, \quad \mu_T = c'_\mu f_\mu \rho K^{1/2} L, \quad f_\mu = 1 - \exp(-c_3\zeta^+),$$

$$P_k = \tau_T\frac{\partial u}{\partial \zeta}, \quad \tau_T = \mu_T\frac{\partial u}{\partial \zeta}, \quad \varepsilon_k = \frac{c_D f_\mu K^{3/2}}{L} + \frac{c_1 \nu K}{\zeta^2},$$

$$\zeta^+ = \frac{u_*\zeta}{\nu}, \quad u_* = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}},$$

$$c'_\mu = \frac{c_\mu}{c_D}, \quad c_\mu = 0{,}09, \quad c_D = 0{,}164, \quad c_1 = 2, \quad c_3 = 0{,}029, \quad \sigma_k = 1.$$

Масштаб турбулентности L как в модели длины пути смешения Прандтля [49] определяется эмпирической функцией:

$$L = \beta_* \delta \Phi_* \left(\beta_*, \kappa, \frac{\zeta}{\delta}\right),$$
$$\Phi_* = \left[1 - \exp\left(-\frac{2\kappa}{\beta_*}\frac{\zeta}{\delta}\right)\right]\left[1 + \exp\left(-0{,}75\frac{2\kappa}{\beta_*}\frac{\zeta}{\delta}\right)\right]^{-1}, \tag{15.10}$$

где $\kappa = 0{,}4$ — константа Кармана, $\beta_* = 0{,}1$, δ — толщина пограничного слоя, определяемая по профилю скорости u.

Модификация варианта модели (15.9) предполагает дополнительное введение в демпфирующую функцию f_μ вместо константы c_3 функцию c_3^*, связанную с параметрами переходной структуры пограничного слоя.

На поверхности и на внешней границе пограничного слоя задаются граничные условия для K.

3. Двухпараметрические модели

Среди двухпараметрических моделей наиболее распространены в практических приложениях модели для параметров $K - L$ [50] и (Нг, Сполдинг, см. [51]) и k–ε [52–54]. Классы K–ε—моделей и для $K - \omega$, $K - \omega^2$ [55, 56] получили развитие не только для численных исследований течений, описываемых приближениями пограничного слоя, но и более общими постановками движения вязкого газа. Вместо $K - \omega$–модели в [57] применена $q - \nu$–модель, где $q = K^{1/2}$, $\nu = \omega^{1/2}$.

Оба класса моделей для замыкания системы осредненных уравнений пограничного слоя предполагают введения на основании гипотезы Буссинеска турбулентной вязкости ν_T и линейной связи напряжения Рейнольдса со скоростью деформации, которая в плоском пограничном слое есть

$$\tau_T = -\rho\overline{u'v'} = \mu_T \frac{\partial u}{\partial \zeta}. \tag{15.11}$$

Модели с параметрами k–ε для сложных течений с анизотропными свойствами турбулентности модифицируются с применением нелинейного соотношения между тензорами напряжений Рейнольдса и скоростей деформации [58] вместо их линейной связи в приближении Буссинеска.

3.1. Двухпараметрические K–L-модели. Класс этих моделей содержит два уравнения: для K и комплекса $F = K^n L^m$. Примеры этих моделей и обоснование уравнениям для некоторых F даны в [14].

Двухпараметрическая K–L–модель Г. С. Глушко разработана для двумерных стационарных течений несжимаемой жидкости [50] в пристеночной области с учетом влияния молекулярной вязкости на турбулентный пульсации при малых локальных числах Рейнольдса, содержит два уравнений: для кинетической энергии K и квадрата масштаба турбулентности $\lambda = L^2/2$ $(n = 0, m = 2)$. Напряжение Рейнольдса определяется по соотношению (15.11).

3.2. Двухпараметрические K–ε-модели. В K–ε–модели [59] уравнение для скорости диссипации ε_k первоначально предложено только для области развитого турбулентного течения (при больших локальных числах Рейнольса), скорость диссипации ε_k имеет только изотропную составляющую ε.

В расчетах с замыканием на основе K–ε—модели для учета влияния вязкости на турбулентные пульсации как при малых локальных числах Рейнольдса вблизи стенки развитого турбулентного пограничного слоя, так и при ламинарно-турбулентном переходе к этому режиму распространены два подхода: с использованием пристеночных функций и введением демпфирующих функций в коэффициенты уравнений.

K–ε–модели на основе пристеночных функций. В основе метода использования пристеночных функций для класса K–ε–модели лежит идея интегрирования всех уравнений пограничного слоя от точки, лежащей в области логарифмического профиля скорости [59–62].

K–ε–модели с введением демпфирующих функций. В двухпараметрических K–ε–моделях уравнение для кинетической энергии турбулентности K используется совместно с уравнением для скорости ее диссипации $\varepsilon_k = \varepsilon + D$. Анализ этим моделям дан в [14, 63–66]. Уравнение для изотропной части скорости диссипации $\varepsilon = \varepsilon_k - D$ предложено в [52], где D — слагаемое, учитывающее влияние стенки.

Для плоского стационарного пограничного слоя уравнения для K и ε в системе координат ξ, ζ, связанной с поверхностью (ζ–нормальная к ней координата) представляются в виде:

$$u\frac{\partial K}{\partial \xi} + v\frac{\partial K}{\partial \zeta} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \zeta}\left[\mu_{\Sigma,k}\frac{\partial K}{\partial \zeta}\right] + \frac{P_k}{\rho} - \varepsilon_k, \tag{15.12}$$

$$u\frac{\partial \varepsilon}{\partial \xi} + v\frac{\partial \varepsilon}{\partial \zeta} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \zeta}\left[\mu_{\Sigma,\varepsilon}\frac{\partial \varepsilon}{\partial \zeta}\right] + \frac{P_\varepsilon}{\rho} - (D_\varepsilon + E), \tag{15.13}$$

$$\nu_T = c_\mu f_\mu \frac{K^2}{\varepsilon}, \quad \mu_{\Sigma,k} = \mu + \frac{\mu_T}{\sigma_k}, \quad \mu_{\Sigma,\varepsilon} = \mu + \frac{\mu_T}{\sigma_\varepsilon},$$

$$P_k = \tau_T \frac{\partial u}{\partial \zeta}, \quad P_\varepsilon = c_1 f_1 \frac{\varepsilon}{K}\mu_T\left[\frac{\partial u}{\partial \zeta}\right]^2.$$

Здесь μ_T — турбулентная вязкость с демпфирующей функцией f_μ, $\mu_{\Sigma,k}$, $\mu_{\Sigma,\varepsilon}$ — коэффициенты полной вязкости; σ_k, σ_ε — числа Прандтля для K и ε; члены P_k, P_ε описывают процессы производства в уравнениях для K, ε; D_ε— диссипативное слагаемое; член D введен в ε_k для учета влияния вязкости в областях вблизи стенки и с малыми локальными числами Рейнольдса, так же как E в уравнение для ε и функций f_1, f_2, f_4 — в члены P_ε, D_ε, E.

Функция f_μ в варианте модели [52] зависит от турбулентного числа Рейнольдса $R_t = \nu_T/\nu$, включающего K и ε:

$$f_\mu = \exp\left\{-\frac{2{,}5}{1{,}0 + R_t/50}\right\}, \tag{15.14}$$

$$D = 2\nu\left[\frac{\partial K^{1/2}}{\partial\zeta}\right]^2, \quad D_\varepsilon = c_2 f_2 \frac{\varepsilon^2}{K}, \quad E = 2\nu\nu_T\left[\frac{\partial^2 u}{\partial\zeta^2}\right]^2,$$

$$f_1 = 1, \quad f_2 = 1 - 0{,}3\exp(-R_t^2), \quad R_t = \frac{K^2}{\nu\varepsilon},$$

с постоянными $(c_\mu, c_1, c_2, \sigma_k, \sigma_\varepsilon) = (0{,}09; 1{,}55; 2{,}0; 1{,}0; 1{,}3)$.

Вариант модели [53] отличается от предыдущего варианта только демпфирующим множителем

$$f_\mu = \exp\left\{-\frac{3{,}4}{(1{,}0 + R_t/50)^2}\right\},$$

и значениями постоянных $(c_1, c_2) = (1{,}44; 1{,}92)$. Получил широкое развитие в модифицированных моделях для исследования вязких течений.

Кроме вариантов K–ε–модели [52, 53], использующих уравнение для изотропной части ε, разработана группа моделей, близких к ним, но отличающиеся видом функций f_μ и множителей, входящих в коэффициенты диссипативных членов D, D_ε и E, и самих членов [45, 64].

Вариант [64] отличается от (15.14) функциями и постоянными:

$$f_\mu = \left[1{,}0 - \exp\left(-\frac{\zeta^+}{26{,}5}\right)\right]^2, \quad f_2 = 1 - 0{,}3\exp(-\zeta^{+2}),$$

$$E = \nu\nu_T(1 - f_\mu)\left[\frac{\partial^2 u}{\partial\zeta^2}\right]^2, \quad (c_1, c_2) = (1{,}45; 1{,}9).$$

В варианте модели [45] используются функции:

$$f_\mu = [1 - \exp(-0{,}0015 R_t)], \quad D = 2\nu\frac{K}{\zeta^2},$$

$$E = -2\nu\left[\frac{\partial\zeta^{1/2}}{\partial\zeta}\right]^2, \quad (c_1, c_2) = (1{,}45; 2{,}0).$$

Вторая группа K–ε–моделей отличается от первой тем, что включает уравнение для полной скорости диссипации $\varepsilon_k = \varepsilon + D$. Различаются и граничные условия для этой функции. Наиболее распространены в практических приложениях варианты [67, 68].

В модели [67] в демпфирующую функцию введены два локальных числа Рейнольдса:

$$f_\mu = \left(1 + \frac{20{,}5}{R_t}\right)[1{,}0 - \exp(-0{,}0165 R_{k\zeta})]^2, \quad f_1 = 1 + \left(\frac{0{,}05}{f_\mu}\right)^3,$$

$$f_2 = 1 - \exp(-R_t^2), \quad D = E = 0, \quad R_{k\zeta} = \frac{\zeta K^{1/2}}{\nu}, \quad (c_1, c_2) = (1{,}44; 1{,}92).$$

В варианте [68] функции зависят от одного локального числа Рейнольдса R_t и нормальной к стенке координаты ζ^+:

$$f_\mu = \left[-\exp(-2{,}5) + \exp\left(-\frac{125}{50 + R_t}\right)\right], \quad f_1 = 1, \quad D = E = 0,$$

$$f_2 = 2\left(1 - 0{,}3\exp(-R_t^2)\right)\left[-\exp(-10) + \exp\left(-\frac{250}{25 + (\zeta^+)^3}\right)\right].$$

Аналогично определены функции в модели [69]:

$$f_\mu = \left(1 + \frac{3{,}45}{R_t^{1/2}}\right)\left[1 - \exp\left(-\frac{\zeta^+}{70}\right)\right], \quad f_1 = 1, \quad D = E = 0,$$

$$f_2 = \left(1 - \frac{2}{9}\exp\left\{-\left(\frac{R_t}{6}\right)\right\}\right)\left[1 - \exp\left(-\frac{\zeta^+}{5}\right)\right]^2.$$

Приведенные варианты моделей имеют граничные условия на стенке:

$$\zeta = 0, \quad K = 0, \quad \varepsilon = 0,$$

$$1) \quad \varepsilon_k = 0; \qquad 2) \quad \varepsilon_k = \nu\frac{\partial^2 K}{\partial \zeta^2}.$$

Для варианта [68] полная скорость диссипации ε_k не нулевая и применяется второе граничное условие.

Обычно демпфирующие функции f_μ зависят через локальное число $\mathbf{Re}$ от характеристик турбулентности. Так, в модели [67], используются число R_k, построенное по K и L, и константа A_μ (аналог A^+, входящей в функцию f_μ [64]). Для более точного описания экспериментальных данных по переходу вводится вместо константы A_μ функция A_μ^*, связанная с безразмерной толщиной вязкого подслоя η_*, являющейся одним из основных параметров не только развитого турбулентного режима, но и переходных процессов в пристенных течениях. Тогда величина η_* определяет переход не только при движении по нормали к стенке от ламинарного подслоя к турбулентному ядру, но и вдоль поверхности тела.

Два варианта K–ε–модели, модернизированные указанным выше способом, используются в расчетах с переходной областью в условиях высокой интенсивности турбулентности [49]. Профили продольной составляющей скорости и приведенной температуры в конце переходной области, рассчитанные с применением первой K–ε–модели, представлены на рис. 15.3, 15.4 в сравнении с экспериментальными данными [70] и ламинарным и логарифмическим распределениями.

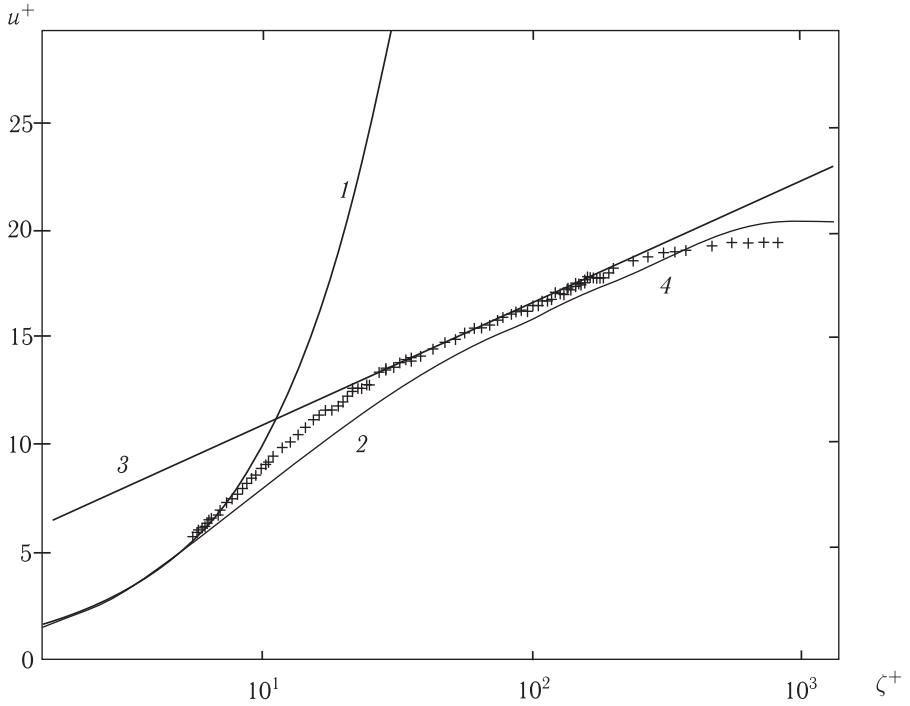


Рис. 15.3. Профиль скорости u^+: *1* — ламинарный ($u^+ = \zeta^+$), *2* — расчет, *3* — турбулентный ($u^+ = 5{,}81 \lg \zeta^+ + 5{,}1$), *4* — экспериментальные данные

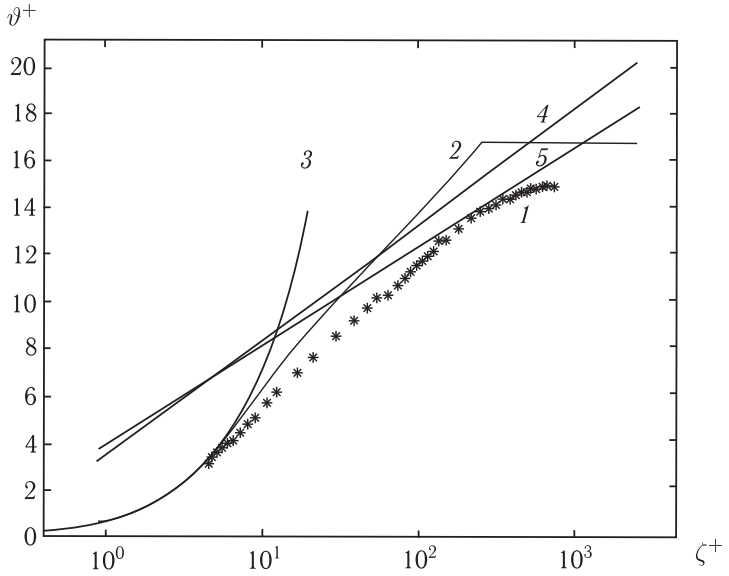


Рис. 15.4. Профиль приведенной температуры $\theta^+ = (T - T_w)/T_*$, $T_* = q_w/(c_p \rho u_*)$: *1* — экспериментальные данные, *2* — расчет, *3* — $\theta^+ = \mathbf{Pr}\zeta^+$, *4* — $\theta^+ = 2{,}12 \ln \zeta^+ + 3{,}5$, *5* — $\theta^+ = 4{,}2 \ln \zeta^+ + 3{,}9$

В варианте модели [54] функция f_μ зависит от безразмерной координаты ζ^+ по нормали к стенке и c_3^*, а не явно — от K–ε:

$$f_\mu = 1 - \exp(-c_3^*\zeta^+), \quad \zeta^+ = \frac{u_*\zeta}{\nu}, \quad u_* = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}, \quad c_3^* = \frac{D_0}{\eta_*^\alpha}. \tag{15.15}$$

Здесь η_* задается в виде функции от локального числа $\mathbf{Re}_\theta$ и двух параметров A_0', B_0', связанных в общем случае с параметрами набегающего потока и его турбулентности:

$$\eta_* = Z + B_0'\left\{\exp\left[(A - A_0')^2\right] - 1\right\}, \quad A = \lg \mathbf{Re}_\theta \tag{15.16}$$
$$Z = 10 + 3{,}58(A - 3{,}95), \quad A \leqslant 3{,}95, \quad Z = 10, \quad A \geqslant 3{,}95.$$

В расчетах формулы (15.15), (15.16) применяются только при $A \leqslant A_0'$, а при $A > A_0'$ принято $c_3^* = c_3$. Величина D_0 связана со значениями c_3, $Z(A_0')$. Здесь используется основывающаяся на опытных данных [71] эмпирическая зависимость:

$$A_0' = \lg\{300 + 2{,}667\exp(6{,}91 - 0{,}8Tu_\infty)\}, \quad B_0' = \mathrm{const}. \tag{15.17}$$

Функции f_1, f_2, f_4 представляются в соответствии с [54]

$$D = \frac{2\nu K}{\zeta^2}, \quad D_\varepsilon = c_2 f_2 \frac{\varepsilon^2}{K}, \quad E = \frac{2\nu f_4 \varepsilon}{\zeta^2},$$
$$f_1 = 1, \quad f_2 = 1 - 0{,}2222\exp\left\{-\left(\frac{R_t}{6}\right)^2\right\}, \quad f_4 = \exp\left(-c_4\zeta^+\right), \quad R_t = \frac{K^2}{\varepsilon\nu}.$$

При малых ζ параметры турбулентности имеют порядки: $K \approx \zeta^2$, $\varepsilon \approx \zeta^2$; $\nu_T \approx \zeta^3$. Константы принимают значения:

$$(c_\mu, c_1, c_2, c_3, c_4, \sigma_k, \sigma_\varepsilon) = (0{,}09;\ 1{,}44;\ 2{,}0;\ 0{,}0115;\ 0{,}5;\ 1{,}0;\ 1{,}3).$$

На стенке при $\zeta = 0$ выполняются условия: $K = 0$, $\varepsilon = 0$, но $D_w \neq 0$, $E_w \neq 0$. Они определяются из асимптотических условий, следующих из уравнений (15.12), (15.13) для K и ε при $\zeta \to 0$.

В модели [72] функция f_μ зависит от числа Рейнольдса R_k, в которое входит кроме координаты ζ энергия турбулентности K, и A_μ^*:

$$f_\mu = \frac{F_A}{F_B}, \quad F_A = 1 - \exp(-A_\mu^* R_{k\zeta}), \quad F_B = 1 - \exp(-B_\mu R_{k\zeta}), \tag{15.18}$$
$$R_{k\zeta} = \frac{K^{1/2}\zeta}{\nu}, \quad B_\mu = 0{,}263, \quad f_1 = 1 + \frac{P_k'}{P_k}, \quad P_k' = \frac{1{,}92 f_2 K^{1/2} R}{3{,}53\zeta F_B},$$
$$R = \exp\left(-0{,}00222 R_{k\zeta}^2\right), \quad f_2 = 1 - 0{,}3\exp(-R_t^2), \quad R_t = \frac{K^2}{\nu\varepsilon}.$$

В модернизированном варианте в отличие от [72] предполагается $\varepsilon_w = 0$ и в уравнения (15.12), (15.13) для K и ε добавлены члены $D \neq 0$, $E \neq 0$,

определяемые как в модели [54]. Функция A_μ^* в демпфирующем множителе F_A связана с величиной η_* аналогично (15.15), (15.16):

$$A_\mu^* = \frac{D_0'}{\eta_*}, \quad A \leqslant A_0', \quad A_\mu^* = A_\mu, \quad A > A_0'.$$

Для A_0' используется зависимость (15.17), для величины η_* — выражения (15.16), для функций $B_0'(Tu_\infty)$, $D_0' = D_0'(Tu_\infty)$ принято $B_0' = \mathrm{const}$, $D_0' = \mathrm{const}$.

На поверхности и на внешней границе пограничного слоя задаются граничные условия:

$$\zeta = 0, \quad K = 0, \quad \varepsilon = 0, \quad \zeta \to \infty, \quad K \to K_e(\xi), \quad \varepsilon \to \varepsilon_e(\xi).$$

При заданном распределении $u_e(\xi)$ вне окрестности передней критической точки функции $K_e(\xi)$, $\varepsilon_e(\xi)$ удовлетворяют уравнениям:

$$u_e \frac{\partial K_e}{\partial \xi} = -\varepsilon_e, \quad u_e \frac{\partial \varepsilon_e}{\partial \xi} = -c_2 \frac{\varepsilon_e^2}{K_e}. \tag{15.19}$$

Начальные условия для функций K_e и ε_e задаются в сечении $\xi = \xi_0$: $K_e(\xi_0) = K_{e0}$, $\varepsilon_e(\xi_0) = \varepsilon_{e0}$. Тогда система (15.19) имеет решение:

$$K_\mathrm{e} = K_{\mathrm{e}0} \left[1 - (1 - c_2) \frac{\varepsilon_{e0}}{K_{\mathrm{e}0}} \int\limits_{\xi_0}^{\xi} \frac{d\xi}{u_\mathrm{e}} \right]^{1/(1-c_2)}, \quad \varepsilon_e = \varepsilon_{e_0} \left[\frac{K_\mathrm{e}}{K_{\mathrm{e}0}} \right]^{c_2}.$$

При обтекании тела, имеющего переднюю критическую точку, в ее окрестности при известном невязком обтекании определяются решения более полных, чем (15.19), уравнений для $K_{e0}(\zeta)$, $\varepsilon_{e0}(\zeta)$, которые и служат начальными условиями для области вниз по потоку.

Для высокоскоростных сжимаемых пристенных течений уравнения модели, осредненные по Фавру, для энергии турбулентности K и соленоидальной составляющей скорости диссипации ε_s представлены в дивергентной форме относительно декартовой системы координат ξ_i $(i = 1, \ldots, 3)$, где ζ — нормальная к стенке координата [39]:

$$\frac{\partial(\overline{\rho}K)}{\partial t} + \frac{\partial(\overline{\rho}\widetilde{u}_i K)}{\partial \xi_i} = \frac{\partial}{\partial \xi_i} \left[\mu_{\Sigma,k} \frac{\partial K}{\partial \xi_i} \right] + P_k - \overline{\rho}\varepsilon_s,$$

$$\frac{\partial(\overline{\rho}\varepsilon_s)}{\partial t} + \frac{\partial(\overline{\rho}\widetilde{u}_i \varepsilon_s)}{\partial \xi_i} = \frac{\partial}{\partial \xi_i} \left[\mu_{\Sigma,\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon_s}{\partial \xi_i} \right] + P_\varepsilon - \overline{\rho}(D_\varepsilon + E),$$

$$\mu_T = \overline{\rho} c_\mu f_\mu \frac{K^2}{\varepsilon_s}, \quad \mu_{\Sigma,k} = \overline{\mu} + \frac{\mu_T}{\sigma_k}, \quad \mu_{\Sigma,\varepsilon} = \overline{\mu} + \frac{\mu_T}{\sigma_\varepsilon},$$

$$P_k = \tau_{ij} \frac{\partial \widetilde{u}_i}{\partial \xi_j}, \quad P_\varepsilon = c_1 f_1 \frac{\varepsilon_s}{K} \tau_{ij} \left[\frac{\partial \widetilde{u}_i}{\partial \xi_j} \right],$$

$$D = 0, \quad D_\varepsilon = c_2 f_2 \frac{\varepsilon_s^2}{K}, \quad E = 0, \quad f_1 = 1,$$

$$f_\mu = \left(1 + \frac{3.45}{\sqrt{R_t}}\right) \operatorname{th}\left(\frac{\zeta_w^+}{115}\right), \quad f_2 = \frac{\widetilde{\varepsilon}_s}{\varepsilon_s}\left[1 + \frac{2f_{w2}}{c_2} - \frac{3}{2}\frac{2f_{w2}}{c_2}\frac{\varepsilon_s^*}{\varepsilon_s\widetilde{\varepsilon}_s}\right],$$

$$f_{w2} = \exp\left\{-\left(\frac{R_t}{64}\right)^2\right\}, \quad \varepsilon_s^* = \varepsilon_s - \frac{2\overline{\nu}K}{\zeta^2}, \quad \widetilde{\varepsilon}_s = \varepsilon_s - 2\overline{\nu}\frac{\partial\sqrt{K}}{\partial\xi_i}\frac{\partial\sqrt{K}}{\partial\xi_i},$$

$$\zeta_w^+ = \frac{\upsilon_*\zeta}{\overline{\nu}}, \quad \upsilon_* = \sqrt{\frac{\tau_w}{\overline{\rho}_w}}, \quad \mathbf{Pr}_T = 0{,}9,$$

$$(c_\mu, c_1, c_2, \sigma_k, \sigma_\varepsilon, \sigma_\rho) = (0{,}096; 1{,}5; 1{,}83; 0{,}75; 1{,}45, 0{,}5).$$

Здесь принято, что флуктуации молекулярных коэффициентов вязкости и теплопроводности много меньше их средних значений, которые введены в уравнения, как и соленоидальная составляющая скорости диссипации ε_s, преобладающая над сжимаемой ε_c, а именно из условия $\varepsilon_s \geqslant \varepsilon_c$ для изотропной составляющей $\varepsilon = \varepsilon_s + \varepsilon_c$ в итоге следует $\varepsilon = \varepsilon_s$. Кроме того, в уравнении притока тепла предположена малость члена $\overline{p'u_i'}$, $i \approx 0$, а σ_ρ входит в $\overline{u_i''}$.

3.3. Соотношения для линейных K–ε-моделей. В приведенных K–ε–моделях в приближении пограничного слоя использовано линейное соотношение напряжения Рейнольдса и производной скорости (15.11) (приближение Буссинеска), обобщенное для расчетов вязких течений. В декартовых координатах компоненты полного тензора напряжений задаются соотношением

$$\tau_{\Sigma ij} = 2\mu\left[S_{ij} - \frac{1}{3}\frac{\partial u_k}{\partial\xi_k}\delta_{ij}\right] + \tau_{ij}, \tag{15.20}$$

которые линейно связаны с компонентами тензора скоростей деформации

$$S_{ij} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u_i}{\partial\xi_j} + \frac{\partial u_{\mathrm{j}}}{\partial\xi_i}\right]. \tag{15.21}$$

Приближение Буссинеска дает линейную связь компонент тензора напряжений Рейнольдса с компонентами тензора скоростей деформации

$$\tau_{ij} = 2\mu_T\left[S_{ij} - \frac{1}{3}\frac{\partial u_k}{\partial\xi_k}\delta_{ij}\right] - \frac{2}{3}\rho K\delta_{ij}. \tag{15.22}$$

В этом случае компоненты полного тензора напряжений определяются как:

$$\tau_{\Sigma ij} = 2\mu_\Sigma\left[S_{ij} - \frac{1}{3}\frac{\partial u_k}{\partial\xi_k}\delta_{ij}\right] - \frac{2}{3}\rho K\delta_{ij}, \quad \mu_\Sigma = \mu + \mu_T. \tag{15.23}$$

Компонента полного теплового потока на координату ξ_i определяется выражением

$$q_{\Sigma i} = -\left(\frac{\mu}{\mathbf{Pr}} + \frac{\mu_T}{\mathbf{Pr}_T}\right)\frac{\partial h}{\partial\xi_i}, \tag{15.24}$$

где $\mathbf{Pr}$ и $\mathbf{Pr}_T$ — ламинарное и турбулентное числа Прандтля.

Для учета анизотропных свойств течений введены нелинейные соотношения для компонент тензора напряжений Рейнольдса с компонентами тензора скоростей деформации S_{ij} [58] (случаи квадратичной и кубической связей).

3.4. Двухпараметрические K–ω-модели. В основе модели лежат феноменологические уравнения [1] для кинетической энергии турбулентности K и частоты турбулентности $\omega = \sqrt{K}\,/L$.

Для пограничного слоя выделяются два варианта, которые предполагают выполнения линейного соотношения (15.11): для параметров $K-\omega$ (для F: $n=\dfrac{1}{2}$, $m=-1$) и $K-\omega^2$ ($n=1$, $m=-2$). Основная модель [55] — для параметров турбулентности $K-\omega$:

$$\frac{dK}{dt} = \frac{\partial}{\partial\zeta}\left[\sigma^*\nu_T\frac{\partial K}{\partial\zeta}\right] + \frac{P_k}{\rho} - \varepsilon_k,$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\partial}{\partial\zeta}\left[\sigma\nu_T\frac{\partial\omega}{\partial\zeta}\right] + \frac{P_\omega}{\rho} - D_\omega,$$

$$\nu_T = \frac{K}{\omega}, \quad P_k = \tau_T\frac{\partial u}{\partial\zeta} = \rho\nu_T\left[\frac{\partial u}{\partial\zeta}\right]^2, \quad \varepsilon_k = \beta^* K\omega, \quad P_\omega = \gamma\rho\left[\frac{\partial u}{\partial\zeta}\right]^2, D_\omega = \beta\omega^2,$$

$$\gamma = \frac{5}{9}, \quad \beta = \frac{3}{40}, \quad \beta^* = \frac{9}{100}, \quad \sigma = \frac{1}{2}, \quad \sigma^* = \frac{1}{2}.$$

В модели $K-\omega^2$ [56] второе уравнение для ω^2 имеет вид:

$$\frac{d\omega^2}{dt} = \frac{\partial}{\partial\zeta}\left[\sigma\nu_T\frac{\partial\omega^2}{\partial\zeta}\right] + \frac{\widetilde{P}_\omega}{\rho} - \widetilde{D}_\omega,$$

$$\widetilde{P}_\omega = \gamma\rho\omega\left[\frac{\partial u}{\partial\zeta}\right]^2, \widetilde{D}_\omega = \left[\beta + 2\sigma\left(\frac{\partial l}{\partial\zeta}\right)^2\right]\omega^3, \quad l = \frac{\sqrt{K}}{\omega},$$

$$\gamma = \frac{10}{9}, \quad \beta = \frac{3}{20}, \quad \beta^* = \frac{9}{100}, \quad \sigma = \frac{1}{2}, \quad \sigma^* = \frac{1}{2}.$$

В общем случае для сжимаемого турбулентного потока при осреднении Фавра уравнения первой модели представляются как:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho K) + \frac{\partial}{\partial\xi_j}(\rho u_j K) = \frac{\partial}{\partial\xi_j}\left[(\mu + \sigma^*\mu_T)\frac{\partial K}{\partial\xi_j}\right] + P_k - \rho\varepsilon_k,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\omega) + \frac{\partial}{\partial\xi_j}(\rho u_j\omega) = \frac{\partial}{\partial\xi_j}\left[(\mu + \sigma\mu_T)\frac{\partial\omega}{\partial\xi_j}\right] + P_\omega - \rho D_\omega,$$

$$\mu_T = \gamma^*\frac{\rho K}{\omega}, \quad P_k = \tau_{ij}\frac{\partial u_i}{\partial\xi_j}, \quad \varepsilon_k = \beta^* K\omega, \quad P_\omega = \left(\gamma\frac{\omega}{K}\right)\tau_{ij}\frac{\partial u_i}{\partial\xi_{\mathrm{j}}}, \quad D_\omega = \beta\omega^2,$$

$$\gamma = \frac{5}{9}, \quad \gamma^* = 1, \quad \beta = \frac{3}{40}, \quad \beta^* = \frac{9}{100}, \quad \sigma = \frac{1}{2}, \quad \sigma^* = \frac{1}{2}.$$

Для расчетов вязких течений в декартовых координатах компоненты полного тензора напряжений и теплового потока задаются соотношениями (15.20)–(15.24).

4. Трехпараметрические K–F–R-модели

Для расчетов течений в пограничном слое в многопараметрических моделях может не использоваться предположение Буссинеска, и они содержат различное число уравнений для характеристик турбулентности или их функций — от трех и выше: K–ω–R [73, 74], K–ε–R [75–77], где $R = \tau_T/\rho = -\overline{u'v'}$ — кинематическое напряжение Рейнольдса.

В трехпараметрических моделях уравнения записываются для трех характеристик турбулентности K, $F = K^m L^n$, R [73]. Добавление еще одного уравнения в этих моделях приводит к снятию ограничения, которое накладывает алгебраический характер гипотезы Буссинеска, что дает им ряд преимуществ перед двухпараметрическими моделями.

Наиболее распространенные K–F–R–модели, в которых второе уравнение дается для трех комбинаций параметров K и L: $F = \sqrt{K}\,/L$, K/L^2, $K^{3/2}/L$. В двухпараметрических моделях это соответствует характеристикам турбулентности ω, ω^2, ε_k. Так уравнения для параметров K–F–R для сжимаемого осесимметричного потока имеют вид [74]. Последнее уравнение системы для R используется вместо гипотезы Буссинеска (15.11).

5. Модели, основанные на уравнениях для напряжений Рейнольдса

К этому классу относятся модели, в которых уравнения переноса представлены непосредственно для моментов второго порядка — напряжений Рейнольдса. Подобные модели называются моделями замыкания второго порядка. В разработанных различных вариантах учитывалось воздействие вращения (закрутки) потока и внешних сил, значительных искривлений линий тока, что приводит к анизотропии турбулентности пространственного течения [8, 78–81].

5.1. Дифференциальные модели для напряжений Рейнольдса. Модель с уравнениями переноса напряжений Рейнольдса ($-\tau_{ij} = R_{ij} = \overline{u_i' u_j'}$, где черта сверху — осреднение по Рейнольдсу) для потока несжимаемой жидкости предполагает введение параметров турбулентности: энергии K и скорости ее диссипации ε, имеет структурный вид

$$\frac{DR_{ij}}{Dt} = d_{ij} + P_{ij} + F_{ij} + \Phi_{ij} - \varepsilon_{ij}. \tag{15.25}$$

Здесь в правой части уравнения представлены последовательно члены d_{ij}, P_{ij}, F_{ij}, Φ_{ij}, ε_{ij}, описывающие процессы диффузии, производства за счет скоростей деформации и распределенных сил (например, плавучести или инерционных), перераспределения за счет корреляционного момента давление-деформации, и диссипации.

Члены производства напряжений Рейнольдса из-за средней сдвиговой деформации и сил в этой модели записываются точно:

$$P_{ij} = -\left[R_{ik}\frac{\partial u_j}{\partial x_k} + R_{jk}\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right], \quad F_{ij} = \left[\overline{f_i' u'}_j + \overline{f_j' u'}_i\right].$$

В областях потока с большими локальными числами Рейнольдса масштаб диссипации L_ε предполагается изотропным, что дает соотношение $\varepsilon_{ij} = 2/3 \cdot \varepsilon\delta_{ij}$, где ε — скорость диссипации энергии K. При приближении к стенке анизотропия диссипации возрастает и это предположение нарушается. Анизотропия скорости диссипации характеризуется инвариантами тензора с компонентами $e_{ij} = \varepsilon_{ij}/\varepsilon - 2/3\delta_{ij}$. Варианты моделей для анизотропного тензора с компонентами $\varepsilon_{ij} = 2/3 \cdot \varepsilon\delta_{ij} + (1 - f_\varepsilon)\,\varepsilon^*_{ij}$, где ε^*_{ij} — предельное его значение при $\zeta \to 0$ (нормаль к стенке), различаются функцией f_ε [81].

Член уравнения Φ_{ij}, учитывающий перераспределение R_{ij} за счет корреляционного момента давление–деформации

$$\Phi_{ij} = \overline{\frac{p'}{\rho}\left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j'}{\partial x_i}\right)},$$

представляется в виде двух частей: медленной и быстрой, ответственных за перераспределения между только турбулентными характеристиками Φ_{ij1} и средней скоростью деформации и турбулентными флуктуациями Φ_{ij2}:

$$\Phi_{ij} = \Phi_{ij1} + \Phi_{ij2} + \Phi^w_{ij1} + \Phi^w_{ij2},$$

$$\Phi_{ij1} = \frac{-c_1\varepsilon}{K}\left(R_{ij} - \frac{2}{3}\delta_{ij}K\right) = -c_1\varepsilon a_{ij}, \quad \Phi_{ij2} = -c_2\left(P_{ij} - \frac{2}{3}\delta_{ij}P\right),$$

$$\Phi^w_{ij1} = \frac{c_1^w\varepsilon}{K}\left(R_{km}n_k n_m\delta_{ij} - \frac{3}{2}R_{ki}n_k n_j - \frac{3}{2}R_{kj}n_k n_i\right) f,$$

$$\Phi^w_{ij2} = c_2^w\left(\Phi_{km2}n_k n_m\delta_{ij} - \frac{3}{2}\Phi_{ik2}n_k n_j - \frac{3}{2}\Phi_{jk2}n_k n_i\right) f.$$

Здесь введены: безразмерная анизотропная часть напряжений Рейнольдса $a_{ij} = R_{ij}/K - 2/3\delta_{ij}$, производство этих напряжений $P = P_{kk}/2$, энергия турбулентности $K = R_{kk}/2$, демпфирующая функция $f = 0{,}4K^{3/2}/\left(\varepsilon x^2\right)$, где x^2 — координата нормальная стенке, n^k — компоненты единичного вектора, перпендикулярного поверхности.

В выражения приведенных функций входят два независимых инварианта тензора анизотропии $\mathbf{a}$: $A_2 = a_{ik}a_{ki}$, $A_3 = a_{ik}a_{kj}a_{ji}$, и параметр $A = [1 - 9/8\,(A_2 - A_3)]$:

$$c_1 = 1 + 2{,}58AA_2^{1/4}\left(1 - \exp\left[-\left(0{,}0067R_t\right)^2\right]\right), \quad c_2 = 0{,}75A^{1/2},$$

$$c_1^w = -\frac{2}{3}c_1 + 1{,}67, \quad c_2^w = \max\left[\left(\frac{2}{3}c_2 - \frac{1}{6}\right)\frac{1}{c_2}, 0\right].$$

Для описания диффузионного члена d_{ij} применяется гипотеза градиентной диффузии

$$d_{ij}=-\frac{\partial}{\partial x_k}\left[\overline{u_i'u_j'u_k'}+\frac{1}{\rho}\left\{\overline{p'u_j'}\delta_{ik}+\overline{p'u_i'}\delta_{jk}\right\}-\nu\frac{\partial R_{ij}}{\partial x_k}\right]=\frac{\partial}{\partial x_k}\left[\left(c_s\frac{K}{\varepsilon}R_{kl}+\nu\right)\frac{\partial R_{ij}}{\partial x_l}\right].$$

Уравнение переноса для напряжений Рейнольдса (15.25) имеет вид:

$$\frac{DR_{ij}}{Dt}=\frac{\partial}{\partial x_k}\left[\left(c_s\frac{K}{\varepsilon}R_{kl}+\nu\right)\frac{\partial R_{ij}}{\partial x_l}\right]-\left[R_{ik}\frac{\partial u_j}{\partial x_k}+R_{jk}\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right]-$$
$$-c_1\frac{\varepsilon}{K}\left(R_{ij}-\frac{2}{3}\delta_{ij}K\right)-c_2\left(P_{ij}-\frac{2}{3}\delta_{ij}P\right)-\frac{2}{3}\varepsilon\delta_{ij}. \quad (15.26)$$

Скорость диссипации ε энергии турбулентности может быть найдена из уравнения переноса [80]:

$$\frac{D\varepsilon}{Dt}=\frac{\partial}{\partial x_k}\left[\left(c_\varepsilon\frac{K}{\varepsilon}R_{kl}+\nu\delta_{kl}\right)\frac{\partial\varepsilon}{\partial x_l}\right]+\left(c_{1\varepsilon}+\psi_1+\psi_2\right)\frac{\varepsilon}{K}P-c_{2\varepsilon}\left(\frac{\varepsilon\widetilde{\varepsilon}}{K}\right), \quad (15.27)$$

$$\widetilde{\varepsilon}=\varepsilon-2\nu\left(\frac{\partial K^{1/2}}{\partial x_j}\right)^2, \quad \psi_1=2{,}5A\left(\frac{P}{\varepsilon}-1\right),$$

$$\psi_2=0{,}3\left(1-0{,}3A_2\right)\exp\left[-0{,}002\left(R_t\right)^2\right],$$

$$c_\varepsilon=0{,}18, \quad c_{1\varepsilon}=1{,}45, \quad c_{2\varepsilon}=1{,}9.$$

5.2. Модели, основанные на алгебраических соотношениях для напряжений Рейнольдса. В основе этих моделей, как и нелинейных двухпараметрических моделей, лежит обобщенное тензорное выражение для компонент $\mathbf{a}$ [80]

$$a_{ij}=\sum_\lambda\alpha_\lambda T_{ij}^\lambda.$$

Здесь $\mathbf{T}=\{T_{ij}\}$ — функция тензоров скорости деформации $\mathbf{S}=\{S_{ij}\}$ и завихренности $\mathbf{\Omega}=\{\Omega_{ij}\}$. Для линейных моделей выполнены: $\lambda=1$, $T_{ij}=$ $=S_{ij}$, $\alpha_1=-2\mu_T/K=-c_\mu K/\varepsilon$.

Вместо решения полной системы дифференциальных уравнений для напряжений Рейнольдса в модели алгебраических соотношениях для R_{ij} принята приближенная «алгебраическая» аппроксимация конвективных и диффузионных членов в этих уравнениях переноса (15.27) [81, 82]

$$\frac{DR_{ij}}{Dt}-d_{ij}\cong\frac{R_{ij}}{K}\left(\frac{DK}{Dt}-d_k\right)=\frac{R_{ij}}{K}\left(P_k-\varepsilon\right). \quad (15.28)$$

Приближенная замена в соотношении (15.28) основывается на выполнении равенства для компонент $\mathbf{a}$

$$\frac{Da_{ij}}{Dt}=0,$$

из которого следует незначительность полного изменения анизотропии турбулентности в потоке, при этом структура турбулентности остается неизменной и она находится в равновесном состоянии. После замены конвективных и диффузионных членов в уравнениях для R_{ij} остаются алгебраические соотношения, но они нелинейные и включают характеристики турбулентности K и ε, определяемые численно из дифференциальных уравнений. Аналогичный

подход предложен в [83]. Для сжимаемых потоков модели алгебраических соотношений в модернизированных вариантах используются в [84].

5.3. Учет в моделях высокого порядка замыкания эффектов сжимаемости. Сопоставление расчетных результатов с данными экспериментов и их анализ для сверхзвуковых течений [40, 81] показал незначительность этих неявных эффектов для течений с числами Маха ниже 5.

Необходимость учета сжимаемости приводит к выделению в уравнениях напряжений Рейнольдса продольных составляющих членов давление — деформации и скорости диссипации [77]:

$$\Phi_{ij}^{(d)} = \frac{2}{3}\overline{p'\frac{\partial u'_k}{\partial x_k}}\delta_{ij}, \quad \varepsilon_{ij}^{(d)} = \frac{8}{3}\nu\overline{s'_{kk}s'_{ij}},$$

где s'_{ij} — флуктуации скоростей деформации, подобно источниковым членам с $\overline{u''_k}$

$$\overline{\rho}S_{ij}^{(P)} = -\overline{\rho}\overline{u''_i}\frac{\partial p}{\partial x_j} - \overline{\rho}\overline{u''_j}\frac{\partial p}{\partial x_i}.$$

Расчетные исследования, проведенные по модифицированным моделям замыкания второго порядка, так же установили, что с ростом числа Маха в этом диапазоне для пристеночных пограничных слоев отмечается уменьшение уровня турбулентных пульсаций вблизи стенки.

Заключение

Приведены полуэмпирические модели турбулентности для численного расчета пристенных течений несжимаемой жидкости и сжимаемого газа. Рассмотрены алгебраические и дифференциальные классы моделей, основополагающие гипотезы турбулентности и системы дифференциальных уравнений в окончательном виде, дополненные граничными условиями. Представлены варианты учета процессов взаимодействия ламинарного и турбулентного переносов вблизи твердой поверхности обтекаемого тела, используемые в моделях турбулентности, как для несжимаемой жидкости, так и в условиях сжимаемости потока и теплообмена. Рассмотренные модели позволяются замкнуть системы осредненных уравнений пограничного слоя и Рейнольдса для решения их численными методами.

Исследования поддержаны Роснаукой (Гос. контракты 02.740.11.0615).

Список литературы

1. *Колмогоров А.Н.* Уравнения турбулентного движения несжимаемой жидкости // Изв. АН СССР. Физ. 1942. Т.6. № 1–2. С. 56–58.

2. *Prandtl L.* Uber ein neues Formelsystem fur die ausgebildete Turbulenz // Nachrichten Akademie der Wissenschaften. Gottingen. Math.-Phys. Klasse. 1945. H. 6. P. 6.
3. *Глушко Г.С.* Турбулентный пограничный слой на плоской пластине в несжимаемой жидкости // Изв. АН СССР. МЖГ. 1965. № 4. С. 13–23.
4. *Bradshaw P., Ferris D.H. Atwell N.P.* Calculation of boundary layer development using the turbulent energy equation // J. Fluid Mech., 28. 1967. № 3. P. 593–616.
5. *Секундов А.Н.* Применение дифференциального уравнения для турбулентной вязкости к анализу плоских неавтомодельных течений // Изв. АН СССР. МЖГ. 1971. № 5. С. 119–127.
6. *Лапин Ю.В.* Турбулентный пограничный слой в сверхзвуковых потоках газа. — М.: Наука, 1982. 312 с.
7. *Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя. — М.:, Наука, 1974. 711 с.
8. *Bradshaw P.* (ed). Turbulence. Top. Appl. Phys., 12. Berlin e.a., Springer, 1976. XI. 335 p.
9. *Bradshaw P.* Compressible turbulent shear layers. Ann. Rev. Fluid. Mech. 1977. V. 9. P. 33–54.
10. *Лапин Ю.В., Стрелец М.Х.* Внутренние течения газовых смесей. — М.: Наука, 1989. 368 с.
11. *Favre A.* Équations statistiques des gaz turbulents // CR. Ac. Sci. T. 246. P. 2576, 2723, 2839, 3216. 1958. В сб. Проблемы гидромеханики и механики сплошной среды. — М.: Наука, 1969. С. 483–511.
12. *Клаузер Ф.* Турбулентный пограничный слой // Проблемы механики. Вып.2. — М.: 1959. ИЛ, С. 297–340.
13. *Coles D.* The law of the wake in turbulent boundary layer // J. Fluid Mech. 1956. 1. № 2. P. 191–196.
14. *Гиневский А. С., Иосилевич В. А., Колесников А.В.* и др. Методы расчета турбулентного пограничного слоя // Итоги науки и техники. Сер. Механика жидкости и газа. — М.: ВИНИТИ. 1978. Т. 11. С. 155–304.
15. *Van Driest E.R.* On turbulent flow near a wall // J. of Aeronautical Science. 1956. V. 23. № 11. P. 1007–1011, 1036.
16. *Kays W M.* Heat transfer to transpired turbulent boundary 1ayer // Int. J. Heat and Mass Transfer. 1972. V. 15, № 5, P. 1023–1044.
17. *Reynolds W.C.* Computation of turbulent flow // Ann. Review of Fluid Mech. 1976. V. 8. P. 183–208.
18. *Pletcher R.H.* On a Finite Difference Solution for the Constant Property Turbulent Boundary Layer // AIAA J., 1969. V. 7. № 2. P. 305–311.
19. *Krause E., Hirshel E.H., Kordulla W.* Fourth order «Mehrstellen»- Integration For Three - Dimensional Turbulent Boundary Layers // Euromech Colloquium 33, Berlin. 1972.
20. *Cebeci T.* Calculation of three-dimensional boundary layers. I. Swept infinite cylinders and small cross flow // AIAA J. 1974. V. 12. № 6. P. 779–786.
21. *Adams J.C.* Three-dimensional compressible turbulent boundary layer on a sharp cone at incidence in supersonic flow // Int. J. Heat and Mass Transfer. 1974. V. 17. № 5. P. 581–593.
22. *Fannelop T.K., Hymphreys D.A.* A simple finite-difference method for solving the three-dimensional turbulent boundary layer equations // AIAA. Pap., 1974. № 74–13. 12 p.
23. *Michel R., Quemard C, Gousteix J.* Methode practigue de prevision des couche limites turbulents bi-et tri-dimensonnelles // Rech. aerosp., 1972. № I. P. 1–14.
24. *Mellor G.L, Herring H.J.* Simple Eddy Viscosity Relations for Three-Dimensional Turbulent Boundary Layers // AIAA J., 1977. V. 15, № 6.

25. *Johnston L.J.* A solution method the three-dimensional compressible turbulent boundary layer equations // Aeronaut. J., 1989. № 4, P. 115–131.
26. *Rotta J.C.* A Family of turbulence models for three-dimensional boundary layers // Proc. of Turbulent Shear Flows I. First Int. Symp., Springer-Verlag. Berlin e.a., 1979. P.267–279.
27. *Алексин В.А., Шевелев Ю.Д.* Пространственные турбулентные пограничные слои на биэллиптических телах, обтекаемых потоком сжимаемого газа под углом атаки // Изв. АН СССР. Мех. жидк. и газа, 1983. № 2, С. 39–47.
28. *Совершенный В.Д.* Модель полной вязкости в пристеночной области турбулентного пограничного слоя // ИФЖ, Т. XXIY,1974. № 5,
29. *Алексин В.А., Совершенный В.Д.* Численный расчет турбулентного пограничного слоя с резким изменением граничных условий // В сб. Турбулентные течения, — М.: Наука, 1977. С. 55–63.
30. *Лапин Ю.В.* Турбулентный пограничный слой в сверхзвуковых потоках газа. — М.: Наука, 1970. 343 с.
31. *Backx E., Richards B.E.* A High Mach Number Turbulent Boundary- Layer Study // AIAA J., 1976. № 9.
32. *Laderman A.J.* New Measuments of Turbulent Shear Stresses in Hypersonic Boundary Layer // AIAA J, 1976. № 9.
33. *Lee R.E., Smith R.A.* Evaluation of Mach 5 Nozzle Wall Turbulent Transport Models // AIAA J., 1975. № 2.
34. *Cebeci T.* A Model for Eddy Conductivity and Turbulent Prandtl Number // J. Heat Transfer. Tr. of the ASME. 1973. № 5. P. 227–234.
35. *Meier H.U., and Rotta J.C.* Experimental and Theoretical Investigations of Temperature Distributions in Supersonic Boundary Layers // AIAA Paper 1970. № 70–744, 23 p.
36. *Simpson R.L., Wnitteh D.G, Moffat R.J.* An experimental study of the turbulent Prandtl number of air with injection and suction // Int. J. of Heat and Mass Transfer, 1970. V. 13, № 1. P.
37. *Galmes J.M., Dussauge F.P., Dekeyser I.* Couches-limites turbulentes supersoniques soumises à un qradient de pression: calcul à l'aide d'un modèle k–ε // Journal de mècanique. Thèorique et appliqueè. 1983. V. 2. № 4.
38. *Wilcox D.C.* Delatation-Dissipation Corrections for Advanced Turbulence Models // AIAA J. 1992. V. 30, № 11. P. 2639–2646.
39. *Zhang H.S. and So R.M.C., Speziale C.G.* et al. Near-Wall Two-Equation Model Compressible Turbulent Flow // AIAA J. 1993. V. 31, № 1. P. 196–199.
40. *Sommer T.P., So R.M.C. and Gatski T.B.* Verification of Morkovin's Hypotheses for the Compressible Turbulence Field Using Direct Numerical Simulation // AIAA Pap. 1995. № 95 P. 1–11.
41. *Гуляев А.Н., Козлов В.Е., Секундов А.Н.* К созданию универсальной однопараметрической модели для турбулентной вязкости // Изв. РАН. МЖГ. 1993. № 4. С. 69–84.
42. *Spalart P.R., Allmaras S.R.* A one-equation turbulence model for aerodynamic flows // La Recherche Aerospatial. 1994. № 1. P. 5–21.
43. *Baldwin B. and Barth T.* A one-equation turbulence transport model for high Reynolds wall-bounded flows, 1990. № NASA TM 102847
44. *Rotta J.C.* Statistische Theorie nichthomogener Turbulenz // Z.Phys. Mitt. 1. 1951. V. 129. H 6. S. 547–572; Mitt. 2. 1951. V. 131. № 1. S. 51–77.
45. *Hassid S., Poreh M.* A turbulent energy model for flows with drag reduction // Trans. ASME. Ser.I. J. Fluids Eng. 1975. V. 97. № 2. P. 234–241.

46. *Norris L.H., and Reynold W.C.* Turbulent channel flow with a moving wavy boundary // Report № FM-10, Depart. Of Mech. Engin., Standford Univ. 1975.

47. *Wolfstein M.* The velocity and temperature distribution in one-dimensional flow with turbulence augmentation and pressure gradient // Int. J. Heat Mass Transfer, 1969. V. 12. P. 301–318.

48. *Aleksin V.A.* Modelling of free stream turbulence parameter effect on flow and heat transfer in boundary layer // IPM RAS. Preprint 1979. № 600. 28 p.

49. *Совершенный В.Д., Алексин В.А.* О расчете пограничного слоя на профилях при наличии зон ламинарного и турбулентного режимов течения // Изв. вузов. Авиац. техника. 1983. № 2. С. 68–72.

50. *Глушко Г.С.* Некоторые особенности турбулентных течений несжимаемой жидкости с поперечным сдвигом // Изв. РАН. МЖГ. 1971. № 4. С. 128–136.

51. Турбулентность (принципы и применения). Под ред. У. Фроста, Т. Моулдена. — М.: Мир, 1980. 536 с.

52. *Jones W.P., Launder B.E.* The calculation of low-Reynolds-number phenomena with a two-equation model of turbulence // Int. J. Heat and Mass Transfer. V.16. № 6. P. 1119–1130. 1973.

53. *Launder B.E., Sharma B.I.* Application of energy-dissipation model to the calculation of flow near a spinning disc // Lett. Heat and Mass Transfer. 1974. V.1. № 2. P. 131–138.

54. *Chien K.-Y.* Predictions of channel and boundary-layer flows with a low-Reynolds-number turbulence model // AIAA Journal. 1982. V.20. № 1. P. 33–38.

55. *Wilcox D.C.* Reassessment of the scale determining equation for advanced turbulence models // AIAA J. 1988. V. 26, № 11. P. 1299–1310.

56. *Coakly T.J.* Development of Turbulence Models for Aerodynamics Applications // AIAA Paper, AIAA 97-2009. 1997. 10 p.

57. *Савельев А.Д.* Расчеты течений вязкого газа, основанные на q-ν модели турбулентности // ЖВМ и ВФ. 2003. Т.43. № 4. Р. 589–600.

58. *Lien F.S., Chen W.L., and Leschziner M.A.* Low-Reynolds-Number Eddy-Viscosity Modelling Based on Non-Linear Stress-Strain/Vorticity Relation //W.Rodi and G.Bergeles (Ed) Proc. 3rd Int Symp. On Engineering Turbulence Modelling and Measurements. Crete. Greece. Elselvier. 1996. P. 91–100.

59. *Launder B.E., Spalding D.B.* Lecture in mathematical models of turbulence. London – New-York, Acad. Press, 1972. 169 p.

60. *Зайчик Л.И., Леонтьев А.И.* Применение предельных законов турбулентного трения и теплообмена для построения пристеночных функций на проницаемых поверхностях // ТВТ. 2000. Т. 38. № 4. С. 609–613.

61. *Вигдорович И.И.* Законы подобия для скорости, температуры, компонент тензора Рейнольдса в пристеночной области турбулентного пограничного слоя на проницаемой поверхности // ЖЭВТ. 2004. Т. 126. вып. 5(11). С. 1180–1191.

62. *Utyuzhnikov S.W.*. Generalized wall functions and their application for simulation of turbulent flows // Int. J. Numer. Meth. Fluids. 2005. V. 47. P. 1323–1328.

63. *Patel V.C., Rodi W., Schenerer G.* Turbulence models for near-wall and low Reynolds number flows: a review // AIAA J. 1985. V. 23. № 9. P. 1308–1319.

64. *Nagano Y., Hishida M., Asano T.* Improved form of the k–ε model for wall turbulent shear flows // Trans. Jap. Soc. Mech. Eng. 1984. V. B50. № 457. P. 2022–2029.

65. *Aleksin V.A., Zubarev V.M.* Modelling of free stream turbulence effect on boundary layer flow // Preprint of Institute for Problems in Mechanics of RAS. — M.: № 628. 1999. 44 p.

66. *Speziable C.G., Abid R., and* Anderson E.C. Critical Evaluation of Two-Equation Models for Near-Wall Turbulence // AIAA J., 1992. V. 30. № 2. P. 324–331.

67. *Lam C.K.G., Bramhorst K.A.* Modified form of the k–ε model for predicting wall turbulence // J. Fluid Eng., 1981. V. 103. P. 456–460.

68. *Зубков В.Г.* Математическая модель пограничного слоя для широкого диапазона турбулентных чисел Рейнольдса // ИФЖ. 1985. Т. 17. № 5, С. 746–754.

69. *Myong H.K., Kasagi N.* A New Proposal for a k–ε Turbulence Model for and Its Evaluation (2nd Report, Evaluation of the Model) // Trans. Jap. Soc. Mech. Eng. 1988. V. B 54. № 508. P. 3512–3520.

70. *Epik E. Ya.* Heat transfer

71. *Abu-Ghannam B.J., Shaw R.* Natural transition of boundary layers- the effect of turbulence, pressure gradient, and flow history // J. Mech. Eng. Sci. 1980.V.22. № 5. P. 213–228.

72. *Lien F.S., Leschziner M.A.* A general non-orthogonal finite-volume algorithm for turbulence-flow at all. speed incorporating second-moment turbulence-transport closure, Pt 1: Computational implementation // Comput. Method. Appl. Mech. Engrg. 1994. V. 114. P. 123–148.

73. *Лущик В.Г., Павельев А.А., Якубенко А.Е.* Уравнение переноса для характеристик турбулентности: модели и результаты расчетов // Итоги науки и техники. Механика жидкости и газа. 1988. Т.22. — М.: ВИНИТИ. С. 3–61.

74. *Лущик В.Г., Павельев А.А., Якубенко А.Е.* Турбулентные течения. Модели и численные исследования. Обзор // Изв. АН СССР. МЖГ. 1994. № 4. С. 4–27.

75. *Hanjalic K., Launder B.E.* A Reynolds-stress model of turbulence and its application to thin shear flows // J. Fluid Mech., 1972. V. 52, № 4, P. 609–638.

76. *Hanjalic K., Launder B.E.* Contribution towards a Reynolds-stress closure for low-Reynolds-number turbulence // J. Fluid Mech., 1976. V. 74, № 4, P. 593–610.

77. *Savill A.M.* (Ed). Transition modelling for turbomachinery II, III: Updated and Final Summ. of ERCOFTAC Trans. SIG Progr. 2nd and 3rd WORKSHOPS/ Cambridge: Univ. Press. 1995. 226 p. 1994. 253 p.

78. *So R.M.C., Lai Y.G., and Zhang H.S., Hwang B.C.* Second-Order Near-Wall Turbulence Closures // AIAA J, 1991. V. 29, № 11. P. 1819–1835.

79. *Gibson M.M., Launder B.E.* Grounds Effects on Pressure Fluctuations in the Atmospheric Boundary Layers // J. Fluid Mech. 1978. V. 86. P. 491–511.

80. *Launder B.E., Shima N.* Second-Moment Closure for the Near-Wall Sublayer: Development and Application // AIAA J. 1989. V. 27. № 10. P. 1319–1325.

81. *Leschziner M.A., Drikakis D.* Turbulence modelling and turbulent- flow computation in aeronautics // The Aeronautical Journal. 2002. July. P. 349–383.

82. *Rodi W.* A new algebraic relation for calculating the Reynolds stresses //Z. Angew. Math Mech. 1976. V. 56. P. 219–221.

83. *Pope S.B.* A more general effective-viscosity hyposesis // J. Fluid Mech. 1975. V. 72. P. 331–340.

84. *Launder B.E.* A Generalized algebraic stress transport hypothesis // AIAA J. 1982. V. 20. № 3. P. 436–437.

85. *Gatski T.B.* Simulation and modelling turbulence shear flows // Proc. of West East High Speed Flow Fields. Aerospace applications from high subsonic to hypersonic regime. D. E. Zeitoun, J. Périaux, J.A. Désidéri, M. Marini (Eds). CIMNE, Barcelona. Spain. 2003. P. 76–85,

16

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ВЯЗКОГО УДАРНОГО СЛОЯ В ШИРОКОМ ДИАПАЗОНЕ ЧИСЕЛ РЕЙНОЛЬДСА

Б. В. Рогов
Институт математического моделирования РАН

Система уравнений *вязкого ударного слоя* (ВУС) [1] широко и успешно используется для расчета параметров взаимодействия сверхзвукового и гиперзвукового вязкого потока с наветренной частью обтекаемых затупленных тел (см., например, обзоры [2, 3] и ссылки в них). Это обусловлено следующими свойствами и особенностями системы уравнений ВУС.

Во-первых, эта композитная система уравнений включает все члены уравнений Эйлера и члены второго приближения теории пограничного слоя (ПС), поэтому она имеет широкую область применимости по числу Рейнольдса $\mathbf{Re}$.

Во-вторых, показано [4], что система уравнений ВУС с асимптотически согласованными условиями скольжения и скачка температуры на обтекаемой поверхности и головной ударной волне (УВ) дает правильное предсказание тепловых потоков и сопротивления в задачах гиперзвукового стационарного ламинарного обтекания затупленных тел в переходном режиме обтекания (число Кнудсена $0{,}1 < \mathbf{Kn} < 10$).

В-третьих, в рамках газодинамической модели ВУС можно учесть разнообразные физико-химические процессы, протекающие как в ударном слое (УС), так и на поверхности тела, обтекаемого высокотемпературным потоком многокомпонентного газа.

В-четвертых, система уравнений ВУС является эволюционной по продольной координате, отсчитываемой в преимущественном направлении движения газа. Поэтому для нахождения ее численного решения можно использовать эволюционные по продольной координате (маршевые) алгоритмы, соответствующие математическому типу системы уравнений ВУС. Эти экономичные алгоритмы позволяют существенно сократить затраты вычислительных ресурсов (времени, памяти) на решение задачи обтекания по сравнению с затратами, необходимыми для нахождения решения в рамках полных уравнений Навье–Стокса.

В настоящей главе приводятся обоснования и важные детали итерационно-маршевого алгоритма численного решения системы уравнений ВУС. В [5–9] представлены отдельные элементы этого алгоритма, здесь же представлен его полный вариант. Основные отличия предложенного алгоритма от итерационных алгоритмов [10, 11] следующие. В [10, 11] итерируемой функцией наряду с маршевым градиентом давления является контур

УВ, т. е. при определении на текущей итерации обновленного контура УВ используется контур с предыдущей итерации. В предложенном алгоритме контур УВ не итерируется, а находится на текущей итерации совместно с другими газодинамическими величинами (давлением, температурой, компонентами скорости). В алгоритмах, приведенных в работах [10, 11], и в данном алгоритме решение находится глобальными итерациями по эллиптической части продольного градиента давления, которая ответственна за передачу акустических возмущений вверх по потоку. Однако, авторы [10, 11] рассчитывают эллиптическую составляющую продольного градиента давления на основе формулы *Vigneron et.al.* [12]. В настоящем алгоритме эллиптическая составляющая рассчитывается по оригинальной формуле [5–9], которая максимально минимизирует эту часть продольного градиента давления. В частности, в изложенном ниже алгоритме эллиптическая составляющая равна нулю, если поле давления в УС зависит только от маршевой координаты. В этом случае итераций проводить не нужно. Использование оригинальной формулы позволяет уменьшить число итераций до одной-двух для расчета основных интегральных характеристик (сопротивления, теплообмена) с приемлемой для практики точностью. Это важно, поскольку на каждой глобальной итерации эллиптическая составляющая продольного градиента давления рассчитывается по результатам предыдущей итерации по соответствующим формулам численного дифференцирования. Операция численного дифференцирования, как известно, является некорректной. Это выражается, прежде всего, в существенном накоплении ошибок округления от итерации к итерации, особенно при достаточно малых разностных шагах по продольной независимой переменной. Поэтому в итерационных алгоритмах, где число итераций достигает десятка, приходится прибегать к процедурам сглаживания поля давления [11].

1. Постановка задачи

Рассмотрим стационарное сверхзвуковое обтекание плоского или осесимметричного затупленного тела поступательным потоком однородного вязкого и теплопроводного газа под нулевым углом атаки. Контур тела предполагается достаточно гладким. Область возмущенного течения при умеренных и больших $\mathbf{Re}$ может быть разбита на два слоя: слой перехода через головную УВ и УС — область между УВ и поверхностью обтекаемого тела (см. рис. 16.1). При достаточно больших числах $\mathbf{Re}$ толщиной и структурой УВ можно пренебречь [13, 14]. В этом случае задача сверхзвукового обтекания сводится к расчету вязкого смешанного (до- и сверхзвукового) течения в УС. Основными определяющими безразмерными параметрами в задаче сверх- и гиперзвукового обтекания затупленных тел являются характерное число $\mathbf{Re}$ и характерное отношение плотностей газа $\varepsilon = \rho_\infty/\rho_s$ до и сразу после головного скачка уплотнения [14–16]. Здесь и далее индексы ∞ и s относятся

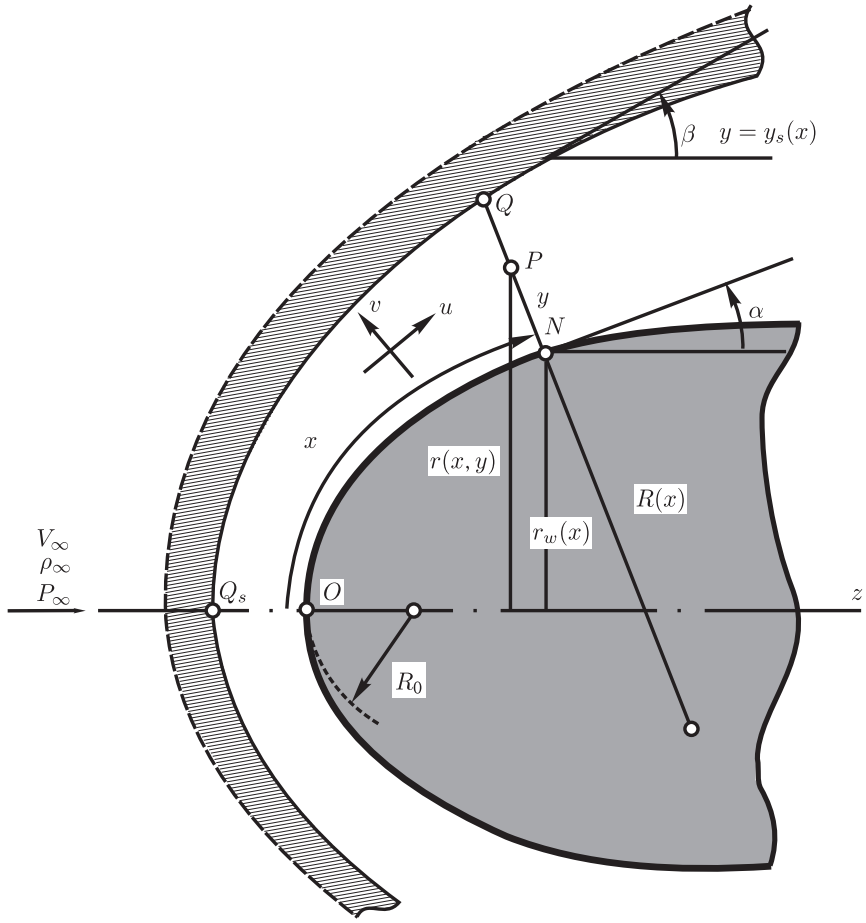


Рис. 16.1. Картина обтекания затупленного тела сверхзвуковым потоком вязкого газа

к значениям физических величин в набегающем потоке и непосредственно за УВ. Для совершенного двухатомного газа с постоянными теплоемкостями при больших числах $\mathbf{Re}$ и Маха параметр ε можно вычислить явно. Его максимальное значение равно $\varepsilon = (\gamma - 1)/(\gamma + 1)$, где γ — отношение теплоемкостей (или показатель адиабаты). При движении тел в атмосфере Земли с числами Маха $\mathbf{M}_\infty \geqslant 6$ этот параметр ε определяет толщину УС $y_s \sim \varepsilon R_0$ [17], где R_0 — радиус затупления носовой части тела.

Уравнения модели ВУС получаются из полных уравнений Навье–Стокса (НС), если в каждом из уравнений удерживаются члены порядка O(1) и O(δ) ($\delta = \mathbf{Re}^{-1/2}$ — так называемый погранслойный параметр) относительно главных членов. При этом оценка членов уравнений проводится в области существенного влияния вязких эффектов, т. е. в пограничном слое около тела [18]. В отличие от модели тонкого вязкого ударного слоя (ТВУС) предположение о тонкости ударного слоя не делается. Впервые система уравнений ВУС

получена в работе [19]. В ортогональной системе координат (x, y), связанной с поверхностью обтекаемого тела, уравнения ВУС имеют следующий вид:

— уравнение неразрывности

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(r^{\nu}\rho u\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(r^{\nu}H_1\rho v\right)=0, \tag{16.1}$$

— уравнение импульса в продольном направлении

$$\rho\left(\frac{u}{H_1}\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+K_{12}uv\right)+\frac{1}{H_1}\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{1}{H_1^2r^{\nu}}\frac{\partial}{\partial y}\left[H_1^2r^{\nu}\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}-K_{12}u\right)\right], \tag{16.2}$$

— уравнение импульса в поперечном направлении

$$\rho\left(\frac{u}{H_1}\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}-K_{12}u^2\right)+\frac{\partial p}{\partial y}=0, \tag{16.3}$$

— уравнение энергии в форме уравнения притока тепла

$$\rho\left(\frac{u}{H_1}\frac{\partial h}{\partial x}+v\frac{\partial h}{\partial y}\right)-\left(\frac{u}{H_1}\frac{\partial p}{\partial x}+v\frac{\partial p}{\partial y}\right)= \\ =\frac{1}{H_1r^{\nu}}\frac{\partial}{\partial y}\left(H_1r^{\nu}\lambda\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}-K_{12}u\right)^2, \tag{16.4}$$

или в форме уравнения для полной энтальпии H

$$\begin{gathered}\rho\left(\frac{u}{H_1}\frac{\partial H}{\partial x}+v\frac{\partial H}{\partial y}\right)=\frac{1}{H_1r^{\nu}}\frac{\partial}{\partial y}\left\{H_1r^{\nu}\left[\lambda\frac{\partial T}{\partial y}+\mu u\left(\frac{\partial u}{\partial y}-K_{12}u\right)\right]\right\}, \\ H=h+\frac{1}{2}\left(u^2+v^2\right),\end{gathered} \tag{16.5}$$

где u, v — касательная и нормальная к поверхности составляющие вектора скорости; ρ, p, T, h — плотность, давление, температура, удельная энтальпия; μ, λ — коэффициенты динамической вязкости и теплопроводности; $r = r_w + y\cdot\cos\alpha$ — расстояние от точки с координатами $(x,\ y)$ до оси (плоскости) симметрии тела; α — угол между касательной к поверхности и осью (плоскостью) симметрии тела; $H_1 = 1 + K_w\cdot y$ — коэффициент Ламе; $K_{12} = K_w/H_1$ — локальная кривизна продольных координатных линий $y = \mathrm{const}$; $r_w(x)$ и $K_w(x)$ — контур поверхности обтекаемого тела и его кривизна; α — угол наклона контура тела к оси (плоскости) симметрии течения; $\nu = 0$ и 1 для плоского и осесимметричного течения соответственно. Система определяющих уравнений замыкается уравнением состояния и температурными законами для коэффициентов μ и λ.

Невязкой составляющей уравнений ВУС является система уравнений Эйлера. Поэтому в случае безотрывных течений система уравнений ВУС описывает акустический механизм передачи возмущений вверх по потоку. Вязкая составляющая этих уравнений содержит все члены полных уравнений НС, которые вносят вклад во второе приближение теории ПС [18, 20].

В криволинейных координатах x, $\eta = y/y_s(x)$ эта система, записанная относительно естественных переменных ρ, u, v, p, T имеет следующий безразмерный вид:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(r^\nu \rho u\right) - \frac{\eta y_s'}{y_s}\frac{\partial}{\partial \eta}\left(r^\nu \rho u\right) + \frac{1}{y_s}\frac{\partial}{\partial \eta}\left(r^\nu H_1 \rho v\right) = 0, \tag{16.6}$$

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{V}{y_s}\frac{\partial u}{\partial \eta} - \frac{\eta y_s'}{y_s \rho}\frac{\partial p}{\partial \eta} + K_w uv = \\ = \frac{1}{r^\nu H_1 y_s^2 \rho \mathbf{Re}_\infty}\frac{\partial}{\partial \eta}\left[r^\nu H_1^2 \mu\left(\frac{\partial u}{\partial \eta} - \frac{K_w y_s u}{H_1}\right)\right], \tag{16.7}$$

$$u\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{V}{y_s}\frac{\partial v}{\partial \eta} + \frac{H_1}{y_s \rho}\frac{\partial p}{\partial \eta} - K_w u^2 = 0, \tag{16.8}$$

$$u\frac{\partial}{\partial x}\left[T + \frac{1}{2}\left(u^2 + v^2\right)\right] + \frac{V}{y_s}\frac{\partial}{\partial \eta}\left[T + \frac{1}{2}\left(u^2 + v^2\right)\right] = \\ = \frac{1}{r^\nu \rho y_s^2 \mathbf{Re}_\infty}\frac{\partial}{\partial \eta}\left\{r^\nu H_1 \mu\left[\frac{1}{\mathbf{Pr}}\frac{\partial T}{\partial \eta} + u\left(\frac{\partial u}{\partial \eta} - \frac{K_w y_s u}{H_1}\right)\right]\right\}, \tag{16.9}$$

где

$$y_s' = \frac{dy_s}{dx}, \quad V = H_1 v - \eta y_s' u.$$

В уравнениях (16.7), (16.9) коэффициент вязкости отнесен к μ_∞, а температура газа — к V_∞^2/c_p, где c_p — удельная теплоёмкость при постоянном давлении. В (16.7), (16.9) вошли безразмерные критерии подобия: число Рейнольдса

$$\mathbf{Re}_\infty = \frac{\rho_\infty V_\infty R_{w0}}{\mu_\infty},$$

и число Прандтля

$$\mathbf{Pr} = \frac{\mu c_p}{\lambda},$$

которое здесь предполагается постоянным. Система уравнений (16.6)–(16.9) замыкается уравнением состояния совершенного газа

$$\rho = \frac{\gamma}{\gamma - 1}\frac{p}{T}, \tag{16.10}$$

а также зависимостью коэффициента вязкости от температуры.

Производная y_s', входящая в уравнения (16.6)–(16.9), связана с углом наклона β УВ к оси симметрии и отходом УВ y_s геометрическим соотношением

$$\frac{dy_s}{dx} = H_{1s} tg\beta_s, \quad H_{1s} = 1 + K_w y_s, \quad \beta_s = \beta - \alpha. \tag{16.11}$$

Для нахождения неизвестного отхода y_s используется уравнение (16.11) совместно с одним из обобщенных соотношений Ренкина–Гюгонио, которые связывают значения газодинамических переменных в невозмущенном потоке

со значениями этих переменных и их производных за головным скачком уплотнения [10, 15]:

$$v_s = u_s tg\beta_s - \frac{1}{\rho_s}\frac{\sin\beta}{\cos\beta_s}, \tag{16.12}$$

$$u_s = \cos\beta\cos\beta_s + \frac{1}{\rho_s}\sin\beta\sin\beta_s - \frac{\mu_s}{\mathbf{Re}_\infty y_s \sin\beta}\left(\frac{\partial u}{\partial\eta} - \frac{K_w y_s u}{H_1}\right)_s, \tag{16.13}$$

$$T_s + \frac{1}{2}\left(u_s^2 + v_s^2\right) = \\ = \frac{1}{2} + \frac{1}{(\gamma-1)M_\infty^2} - \frac{\mu_s}{\mathbf{Re}_\infty y_s \sin\beta}\left[\frac{1}{\mathbf{Pr}}\frac{\partial T}{\partial\eta} + u\left(\frac{\partial u}{\partial\eta} - \frac{K_w y_s u}{H_1}\right)\right]_s, \tag{16.14}$$

$$p_s = \left(1 - \frac{1}{\rho_s}\right)\sin^2\beta + \frac{1}{\gamma M_\infty^2}. \tag{16.15}$$

В качестве такого соотношения удобно взять уравнение (16.15). Другие соотношения Ренкина–Гюгонио (16.12)–(16.14) служат краевыми условиями для искомых функций p, u, T на УВ (η=1) (см. рис. 16.2). Остальными

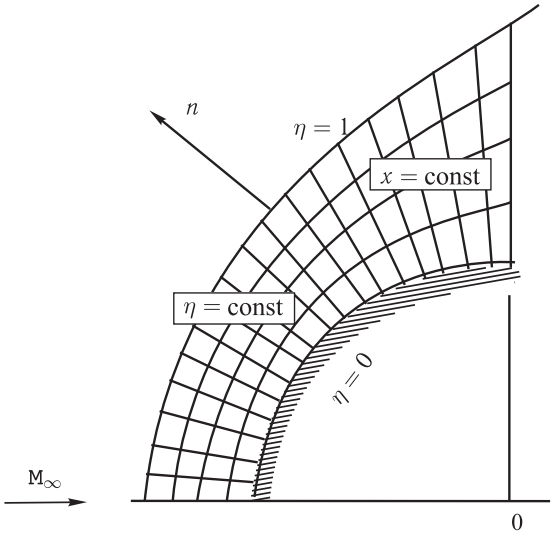


Рис. 16.2. Координатные линии $x = \text{const}$ и $\eta = \text{const}$. Поверхность тела $\eta = 0$ и головная ударная волна $\eta = 1$

краевыми условиями являются условия на обтекаемой поверхности ($\eta = 0$). Для компонент скорости это — условия прилипания и непротекания

$$u = v = 0, \tag{16.16}$$

для температуры газа это — либо заданная температура поверхности

$$T = T_w, \tag{16.17}$$

либо условие тепловой изоляции поверхности

$$\frac{\partial T}{\partial \eta} = 0. \tag{16.18}$$

Граничные условия на УВ и на стенке для уравнений ВУС приведены выше в упрощенной форме (16.12)–(16.18). Более точные, асимптотически согласованные граничные условия можно взять из работ [4, 16].

2. Характеристический анализ системы уравнений ВУС и модель параболо-гиперболического вязкого ударного слоя

Упростим систему уравнений ВУС, взяв для градиента давления в уравнении продольного импульса (16.7) приближение:

$$\frac{\partial p}{\partial x} \approx (1-\omega)\,\overline{p}\frac{dp_s}{dx} + \omega\frac{\partial p}{\partial x} = \overline{p}\frac{dp_s}{dx} + \omega\, p_s\frac{\partial \overline{p}}{\partial x}, \quad \overline{p} = \frac{p(x,\eta)}{p_s(x)}, \tag{16.19}$$

с весовой функцией ω, определяемой формулой

$$\omega = \min\left\{1, \sigma\frac{\gamma \mathbf{M}_x^2}{1+(\gamma-1)\mathbf{M}_x^2}\right\}, \quad 0 \leqslant \sigma \leqslant 1, \tag{16.20}$$

где $\mathbf{M}_x$ — локальное значение числа Маха, определенное по продольной составляющей скорости u. В результате указанное уравнение примет вид

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho}\left((1-\omega)\frac{p}{p_s}\frac{dp_s}{dx} + \omega\frac{\partial p}{\partial x}\right) + \frac{V}{y_s}\frac{\partial u}{\partial \eta} - \frac{\eta y_s'}{y_s\rho}\frac{\partial p}{\partial \eta} + K_w uv =$$
$$= \frac{1}{r^\nu H_1 y_s^2 \rho \mathbf{Re}_\infty}\frac{\partial}{\partial \eta}\left[r^\nu H_1^2 \mu\left(\frac{\partial u}{\partial \eta} - \frac{K_w y_s u}{H_1}\right)\right]. \tag{16.21}$$

Подставим производную (16.11) в уравнения (16.6), (16.8), (16.9), (16.21) и исключим из этих уравнений плотность ρ с помощью уравнения состояния (16.10). К преобразованным уравнениям (16.6), (16.8), (16.9), (16.21) добавим уравнение (16.11) и тривиальное уравнение для давления $p_s(x)$

$$\frac{\partial p_s}{\partial \eta} = 0. \tag{16.22}$$

Исследуем математический тип полученной системы уравнений относительно вектора неизвестных

$$\mathbf{Z} = [p, u, v, T, p_s, y_s]^{\,T}. \tag{16.23}$$

Следуя [12, 21], исследуем тип системы уравнений в предельных случаях невязкого и полностью вязкого течений. Такой анализ позволяет судить о математической природе полной системы уравнений [15].

В предельном случае невязкого течения ($\mathbf{Re}_\infty \to \infty$) представим невязкую часть системы уравнений в характеристической матрично-векторной форме:

$$[\mathbf{A}]\,\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial x} + [\mathbf{B}]\,\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial \eta} = \mathbf{d}, \tag{16.24}$$

где $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ — матрицы коэффициентов при продольных и поперечных градиентах компонент вектора $\mathbf{Z}$, $\mathbf{d}$ — вектор-функция от $\mathbf{Z}$.

Характеристическое уравнение для системы уравнений (16.24):

$$\det(\lambda\mathbf{A} - \mathbf{B}) = 0, \tag{16.25}$$

можно привести к виду

$$\lambda\,(uz - V)^2\left(a_1 z^2 + b_1 z + c_1\right) = 0, \quad z = y_s\lambda, \tag{16.26}$$

$$\begin{aligned} a_1 &= \gamma\mathbf{M}_x^2 - \omega\left[1 + (\gamma - 1)\mathbf{M}_x^2\right], \\ b_1 &= \left[\gamma + 1 - \omega(\gamma - 1)\right]\mathbf{M}_x\left(\varepsilon\mathbf{M}_x - H_1\mathbf{M}_y\right) - \varepsilon(1 + \omega), \\ c_1 &= \left(\varepsilon\mathbf{M}_x - H_1\mathbf{M}_y\right)^2 - H_1^2 - \varepsilon^2, \end{aligned} \tag{16.27}$$

где λ — собственные значения матрицы $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$, $\mathbf{M}_y$ — локальное значение числа Маха, определенное по поперечной составляющей скорости v; $\varepsilon = \eta dy_s/dx$.

Если $\mathbf{M}_x > 1$ и согласно (16.20) $\omega = 1$ при $\sigma \approx 1$, то дискриминант $D = b_1^2 - 4a_1c_1$ квадратного уравнения в (16.26) положителен

$$D = 4H_1^2\left(M_x^2 + M_y^2 - 1\right) > 0. \tag{16.28}$$

Поэтому все собственные значения λ матрицы $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$ вещественны, а система уравнений (16.6), (16.8), (16.9), (16.11), (16.21), (16.22) относительно вектора неизвестных $\mathbf{Z}$ является x-гиперболической [21, 22].

Если же $\varepsilon = 0$, т. е. форма УВ эквидистантна поверхности тела, то дискриминант D может быть представлен в следующем виде:

$$D = H_1^2\left\{4a_1 + \left[(1 - \omega)^2(\gamma - 1)^2\mathbf{M}_x^2 + 4\omega\right]\mathbf{M}_y^2\right\}. \tag{16.29}$$

Выбор весовой функции ω в виде (16.20) обеспечивает выполнение неравенства

$$a_1 \geqslant 0. \tag{16.30}$$

Поэтому в случае $\varepsilon = 0$ дискриминант D неотрицателен, а рассматриваемая система уравнений имеет гиперболический тип во всем диапазоне изменения $\mathbf{M}_x$ и $\mathbf{M}_y$.

Рассмотрим теперь случай, когда $\varepsilon \neq 0$ и $\mathbf{M}_x \leqslant 1$.

Неравенство для коэффициента c_1

$$c_1 < 0, \tag{16.31}$$

означает, что

$$\mathbf{M}_n^2 < 1, \tag{16.32}$$

где $\mathbf{M}_n$ — локальное число Маха, построенное по нормальной к координатной линии $\eta = \mathrm{const}$ составляющей скорости (рис. 16.2). Непосредственно за скачком уплотнения неравенство (16.32) выполняется [23]. Также это неравенство выполняется на поверхности тела, где $\mathbf{M}_n = 0$ вследствие условия непротекания. Если распределение $\mathbf{M}_n$ вдоль луча $x = \mathrm{const}$ между УВ

и поверхностью тела является монотонным, то неравенство (16.32) выполняется во всем УС. Проведенные в широком диапазоне изменения числа $\mathbf{M}_\infty$ расчеты показали, что это неравенство действительно выполняется.

Таким образом, рассматриваемая система уравнений, записанная относительно вектора неизвестных (16.23), в пределе невязкого течения имеет гиперболический тип.

Рассмотрим предельный случай вязкого течения, пренебрегая в системе уравнений членами с первыми производными по поперечной координате η [21]. Соответствующую предельную систему уравнений для вектора искомых функций $\mathbf{Z}$ можно записать в матрично-векторном виде:

$$[\mathbf{A}]\,\frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial x} = [\mathbf{C}]\,\frac{\partial^2 \mathbf{Z}}{\partial \eta^2} + \mathbf{d}, \tag{16.33}$$

где

$$[\mathbf{A}] = \begin{bmatrix} \dfrac{\rho u}{p} & \rho & 0 & -\dfrac{\rho u}{T} & 0 & 0 \\ \dfrac{\omega}{\rho} & u & 0 & 0 & \dfrac{1-\omega}{\rho}\dfrac{p}{p_s} & 0 \\ 0 & 0 & u & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u^2 & uv & u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{16.34}$$

$$[\mathbf{C}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \kappa & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \kappa u & 0 & \dfrac{\kappa}{\mathbf{Pr}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \kappa = \frac{H_1 \mu}{y_s^2 \rho \mathbf{Re}_\infty}, \tag{16.35}$$

а $\mathbf{d}$ — вектор-функция от $\mathbf{Z}$. В системе (16.33) в качестве уравнения для p_s взято уравнение (16.22), продифференцированное по переменной η:

$$\frac{\partial^2 p_s}{\partial \eta^2} = 0. \tag{16.36}$$

Полагая, что $u \neq 0$, характеристическое уравнение

$$\det(\lambda \mathbf{A} - \mathbf{C}) = 0, \tag{16.37}$$

для собственных значений λ матрицы $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{C}$ можно привести к следующему виду

$$\lambda^2 z \left(a_2 z^2 + b_2 z + c_2\right) = 0, \quad z = \frac{\mathbf{Re}_\infty y_s^2 \rho u}{H_1 \mu}\lambda, \tag{16.38}$$

$$\begin{aligned} a_2 &= [\gamma - \omega(\gamma-1)]\,\mathbf{M}_x^2 - \omega = \gamma \mathbf{M}_x^2 - \omega\left[1 + (\gamma-1)\mathbf{M}_x^2\right], \\ b_2 &= \left[\omega(\gamma-1) - \gamma\left(1 + \frac{1}{\mathbf{Pr}}\right)\right]\mathbf{M}_x^2 + \frac{\omega}{\mathbf{Pr}}, \quad c_2 = \frac{\gamma}{\mathbf{Pr}}\mathbf{M}_x^2. \end{aligned} \tag{16.39}$$

Дискриминант D квадратного уравнения $a_2z^2 + b_2z + c_2 = 0$ в (16.38) может быть представлен следующим образом:

$$D = \left\{ \left[\gamma - \omega(\gamma - 1) - \frac{\gamma}{\mathbf{Pr}} \right] \mathbf{M}_x^2 + \frac{\omega}{\mathbf{Pr}} \right\}^2 + \frac{4(\gamma - 1)}{\mathbf{Pr}} \omega^2 \mathbf{M}_x^2. \tag{16.40}$$

Поскольку дискриминант (16.40) всегда неотрицателен, характеристическое уравнение (16.38) имеет только действительные корни λ. Эти корни будут неотрицательными, если весовая функция ω берется в виде (16.20), а продольная скорость удовлетворяет условию

$$u > 0, \tag{16.41}$$

которое означает, что течение должно быть безотрывным. Указанные свойства собственных значений λ матрицы $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{C}$ обеспечивают параболический тип системы уравнений (16.33) относительно переменной x [21, 24].

Таким образом, система дифференциальных уравнений (16.6), (16.8), (16.9), (16.21) относительно естественных зависимых переменных u, v, p, T (плотность ρ определяется из уравнения состояния (16.10)) вместе с уравнениями (16.22) для p_s и (16.11) для y_s имеет смешанный параболо-гиперболический тип.

Данную упрощенную систему уравнений ВУС будем называть моделью *параболо-гиперболического вязкого ударного слоя* (ПГВУС). Упрощение связано с гиперболическим приближением продольного градиента давления, описываемого формулой (16.19), в уравнении продольного импульса. При $\sigma \approx 1$ эта модель описывает сверхзвуковые области течения так же, как и модель ВУС и максимально полно учитывает невязкую передачу возмущений по потоку и не учитывает её против потока. Эллиптические свойства исходной системы уравнений ВУС связаны с частью градиента давления $(1 - \omega)p_s\partial\overline{p}/\partial x$ в (16.7), которая в параболо-гиперболической системе ПГВУС отсутствует.

Система уравнений ПГВУС как и система ВУС имеет особенность на оси симметрии $x = 0$. Чтобы разрешить эту особенность, вводятся растянутая в окрестности оси симметрии продольная координата

$$\xi = \int_0^x \cos\alpha dx \tag{16.42}$$

и нормированная продольная скорость

$$\overline{u} = \frac{u}{\cos\alpha}. \tag{16.43}$$

Уравнения (16.6), (16.8), (16.9), (16.11) и (16.21) в новых переменных ξ, $\overline{u}$ примут вид:

$$g\frac{\partial}{\partial\xi}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial\eta}(f\rho) + h\rho u = 0, \tag{16.44}$$

$$g\frac{\partial}{\partial\xi}(\rho u^2)+\tau y_s\left((1-\omega)\frac{p}{p_s}\frac{dp_s}{d\xi}+\omega\frac{\partial p}{\partial\xi}\right)+$$
$$+\frac{\partial}{\partial\eta}\left[f\rho u-\tau\eta y_s' p-\frac{\tau H_1\mu}{\mathbf{Re}_\infty}\left(\frac{1}{y_s}\frac{\partial u}{\partial\eta}-\frac{K_w u}{H_1}\right)\right]-\frac{\tau K_w y_s\mu}{\mathbf{Re}_\infty}\left(\frac{1}{y_s}\frac{\partial u}{\partial\eta}-\frac{K_w u}{H_1}\right)+$$
$$+(h+\tau K_w y_s\sin\alpha)\rho u^2+\tau K_w y_s\rho uv+(2\tau-1)y_s' p=0, \quad (16.45)$$
$$g\frac{\partial}{\partial\xi}(\rho uv)+\frac{\partial}{\partial\eta}(f\rho v+\tau H_1 p)-gK_w\rho u^2+h\rho uv-qy_s p=0, \quad (16.46)$$

$$g\frac{\partial}{\partial\xi}(\rho uT^*)+\frac{\partial}{\partial\eta}\left\{f\rho T^*-\frac{\tau H_1\mu}{\mathbf{Re}_\infty}\left[\frac{1}{y_s\mathbf{Pr}}\frac{\partial T}{\partial\eta}+u\cos^2\alpha\left(\frac{1}{y_s}\frac{\partial u}{\partial\eta}-\frac{K_w u}{H_1}\right)\right]\right\}+$$
$$+h\rho uT^*=0, T^*=T+\frac{1}{2}(u^2\cos^2\alpha+v^2), \quad (16.47)$$
$$\frac{dy_s}{d\xi}=\frac{\operatorname{tg}(\beta-\alpha)}{\cos\alpha}\left(1+K_w y_s\right), \quad (16.48)$$

где

$$\tau=\left(\frac{r}{r_w}\right)^\nu, \quad y_s'=\frac{dy_s}{d\xi},$$
$$f=\tau(H_1 v-\eta y_s' u\cos^2\alpha), \qquad g=\tau y_s\cos^2\alpha,$$
$$h=(2\tau-1)y_s'\cos^2\alpha+qy_s\sin\alpha, \qquad q=\nu H_1\frac{\cos\alpha}{r_w}+\tau K_w.$$

В уравнениях (16.44)–(16.47) черта над символом u опущена. Координата ξ совпадает с цилиндрической координатой z в осесимметричном случае ($\nu=1$). Угол β в правой части уравнения (16.48) рассчитывается с помощью уравнения (16.15). Уравнение для $p_s(\xi)$ имеет вид (16.22).

Начальные условия для искомых функций u, v, T, p на оси (плоскости) симметрии определяются из решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений, к которым при $\xi=0$ приводятся уравнения (16.44)–(16.48), и уравнения для y_s

$$\frac{\partial y_s}{\partial\eta}=0. \quad (16.49)$$

Давление p_s определяется из уравнения (16.15) при условии, что $\beta=\pi/2$ при $\xi=0$. Нетрудно показать, что, как и в случае невязкого течения [5], распределения искомых функций на оси симметрии, а также значение отхода УВ y_{s0} зависят от свободного параметра — величины кривизны ударной волны K_{s0} при $\xi=0$.

Искомое решение задачи Коши по переменной ξ для системы уравнений ПГВУС соответствует бифуркационному (или критическому) значению параметра $K_{s0}=(K_{s0})_{cr}$. Это критическое значение определяется из картины ветвления решений, соответствующих различным околокритическим значениям K_{s0}, в бифуркационном сечении $\xi=\xi_{cr}=\mathrm{const}$, которое расположено в трансзвуковой области, где число Маха непосредственно за УВ $\mathbf{M}_s\approx 1$. Картина ветвления решений такова, что среди решений системы уравнений ПГВУС, существующих при $\xi>\xi_{cr}$, имеется только одно, у кото-

рого число Маха $\mathbf{M}_s$ монотонно возрастает вниз по потоку при $\xi > \xi_{cr}$. Таким образом, задача для параболо-гиперболической системы уравнений ПГВУС в *дозвуковой* области ударного слоя (около лобовой поверхности тела) по существу является *краевой* по продольной координате ξ.

Теперь рассмотрим вопрос о выборе значения коэффициента σ в формуле (16.20) для весовой функции ω. Изложенный выше характеристический анализ для нелинейной системы дифференциальных уравнений ПГВУС проведен в приближении «замороженных» коэффициентов при градиентах искомых функций [21]. С помощью выбора коэффициента запаса σ можно учесть нелинейный характер данной системы уравнений. Проведенные расчеты показали, что коэффициент σ можно взять очень близко к единице, если вместо давления p в число неизвестных (16.23) ввести нормированное давление $\overline{p}$. Краевым условием для функции $\overline{p}$ на УВ ($\eta = 1$) является условие $\overline{p} = 1$.

3. Расщепление продольного градиента давления и метод глобальных итераций

В предыдущем пункте показано, что продольный градиент давления может быть расщеплен следующим образом:

$$\frac{\partial p}{\partial \xi} = \overline{p}\left(\frac{dp_s}{d\xi}\right)_h + p_s\left[\omega\left(\frac{\partial \overline{p}}{\partial \xi}\right)_h + (1-\omega)\left(\frac{\partial \overline{p}}{\partial \xi}\right)_e\right], \quad \overline{p} = \frac{p}{p_s}, \tag{16.50}$$

или

$$\frac{\partial p}{\partial \xi} = (1-\omega)\,\overline{p}\left(\frac{dp_s}{d\xi}\right)_h + \omega\left(\frac{\partial p}{\partial \xi}\right)_h + (1-\omega)\,p_s\left(\frac{\partial \overline{p}}{\partial \xi}\right)_e, \tag{16.51}$$

где $p_s(\xi)$ — распределение давления непосредственно за УВ ($\eta = 1$); весовая функция ω определяется формулой (16.20) и изменяется от нуля при $\mathbf{M}_x \ll 1$ до единицы при $\mathbf{M}_x \geqslant 1$ и $\sigma \cong 1$; гиперболическая составляющая (с индексом «h») градиента давления отвечает за распространение акустических возмущений вниз по потоку, эллиптическая (с индексом «e») — вверх по потоку. Из формулы (16.51) следует, что второй член в правой части расщепления *Vigneron et.al.* [12]

$$\frac{\partial p}{\partial \xi} = \omega\left(\frac{\partial p}{\partial \xi}\right)_h + (1-\omega)\left(\frac{\partial p}{\partial \xi}\right)_e, \tag{16.52}$$

в свою очередь, может быть разложен на гиперболическую и эллиптическую составляющие. В отличие от (16.52) в расщеплении (16.51) гиперболическая часть градиента давления является его основной составляющей для течений с низкими числами Маха ($\mathbf{M}_\xi^2 \ll 1$). В то же время, для этих течений гиперболическая часть градиента давления в расщеплении (16.52) пренебрежимо мала. В свете сказанного, трехчленное расщепление (16.51) можно рассматривать как более детальное по сравнению с (16.52) разложение градиента давления на гиперболическую и эллиптическую составляющие.

При формальном предельном переходе в формуле (16.51) от двумерного течения к одномерному ($\overline{p} \to 1$, $p \to p_s$) получается очевидный результат:

$$\frac{\partial p}{\partial \xi} = (1-\omega)\left(\frac{\partial p_s}{\partial \xi}\right)_h + \omega\left(\frac{\partial p_s}{\partial \xi}\right)_h = \left(\frac{\partial p_s}{\partial \xi}\right)_h,$$

т. е. одномерные уравнения газовой динамики можно интегрировать маршевым методом по продольной координате ξ при любых положительных скоростях потока. Такой результат не получается при аналогичном предельном переходе в формуле (16.52).

Производная $\partial\overline{p}/\partial\xi$ в (16.51), ответственная за эллиптическую передачу информации против потока через дозвуковые зоны течения, характеризует степень отклонения поля давления в УС от функциональной симметрии с разделением переменных x и η

$$p(\xi,\eta) = p_s(\xi)\,\overline{p}(\eta).$$

Если $\partial\overline{p}/\partial\xi = 0$, то поле давление в УС описывается функцией с разделенными независимыми переменными (ξ, η) или (x, η).

Расщепление (16.50) или (16.51) положено в основу ускоренного итерационно-маршевого метода. Суть метода заключается в решении упрощенных уравнений НС эллиптико-гиперболического типа (уравнений ВУС) глобальными итерациями по эллиптической составляющей продольного градиента давления $(\partial\overline{p}/\partial\xi)_e$ в дозвуковых областях течения [5–7]. Ускорение сходимости глобальных итераций в предложенном методе достигается тем, что в расщеплении (16.51) вклад эллиптической составляющей в продольный градиент давления минимизирован по сравнению с расщеплением (16.52).

При расчете течения в ударном слое в рамках модели ВУС [1] определяющие уравнения (16.6)–(16.9) предварительно были преобразованы к независимым переменным ξ, η. Плотность исключена из этих уравнений с помощью уравнения состояния (16.10), а продольная производная отхода УВ y_s — с помощью уравнения (16.48). Вместо u введена нормированная скорость (16.43), а вместо давления p — две искомые функции $\overline{p} = p/p_s$ и p_s. Уравнение для p_s бралось в виде (16.22). Начальные и граничные условия для преобразованной системы уравнений относительно неизвестных u, v, T, $\overline{p}$, p_s и y_s сформулированы в предыдущем пункте.

При решении указанной системы уравнений методом глобальных итераций градиент давления в уравнении продольного импульса заменялся на выражение (16.51). В разностной схеме производные в правой части (16.51) аппроксимировались направленными конечными разностями. Производные с индексом «h» аппроксимировались разностями против потока, а производные с индексом «e» — разностями по потоку. Критическое значение кривизны УВ на оси симметрии течения K_{s0} рассчитывалось на каждой глобальной итерации либо методом дихотомии, либо методом минимальной длины [8]. После каждой глобальной итерации градиент $\partial\overline{p}/\partial\xi$ на линии симметрии

течения, проходящей через переднюю точку торможения, уточнялся путем линейной экстраполяции из внутренних точек расчетной области.

Преобразованная система уравнений (16.6)–(16.9), (16.22) и (16.48) интегрировалась с помощью неявной конечно-разностной схемы [25, 26]. Использовалась неравномерная сетка, сгущающаяся к поверхности тела. Разностные аналоги уравнений для u, v, T, $\overline{p}$, p_s на каждом маршевом слое решались матричной прогонкой совместно с уравнениями (16.48), (16.15) для y_s. Коэффициент σ в формуле (16.20) для весовой функции ω полагался равным 0,95. В качестве начального приближения для итерационного процесса использовалось параболо-гиперболическое приближение с $(\partial\overline{p}/\partial\xi)_e = 0$ в (16.51), т. е. решение для модели ПГВУС.

4. Маршевый метод решения задачи Коши с трансзвуковой бифуркацией

Если вышеописанным итерационно-маршевым методом рассчитываются смешанные (с переходом через скорость звука) течения в ударном слое или в сопле Лаваля соответственно в рамках модели ВУС и эллиптико-гиперболической модели гладкого канала [6, 27], то, как будет показано ниже, на каждой глобальной итерации необходимо решить задачу Коши по продольной (маршевой) координате ξ при наличии бифуркации решения в некотором сечении $\xi = \xi_{cr} = \mathrm{const}$, находящимся в трансзвуковой области течения. Решение этой задачи включает в себя нахождение бифуркационного (критического) значения свободного параметра задачи. В случае задачи Коши для расчета вязкого ударного слоя таким параметром является кривизна УВ K_{s0}, в случае задачи Коши для расчета смешанного течения в сопле Лаваля — значение массового расхода газа [6]. Этому критическому значению свободного параметра соответствует единственное решение задачи Коши, которое может быть продолжено достаточно далеко вниз по потоку через бифуркационное сечение. В этом решении течение непрерывно ускоряется вниз по потоку переходя от дозвукового режима к сверхзвуковому в окрестности бифуркационного сечения.

Ниже описывается методика нахождения решения задачи Коши с трансзвуковой бифуркацией сначала на примере модельной задачи одномерной теории сопла Лаваля, а затем на примере задачи расчета УС в рамках модели ПГВУС.

4.1. Численное решение модельной задачи одномерной теории сопла Лаваля. Рассмотрим невязкое течение совершенного газа с постоянными теплоёмкостями в сопле Лаваля в одномерном приближении [28, 29]. Для определенности сопло будем считать симметричным и плоским с заданным гладким контуром стенки $y = y_w(x)$. Соответствующие дифференциальные уравнения газовой динамики, записанные относительно скорости u,

температуры T и логарифма давления p, для плоского течения имеют следующий безразмерный вид:

$$\frac{du}{dx} - \frac{u}{T}\frac{dT}{dx} + u\frac{d\ln p}{dx} + u\frac{d\ln y_w}{dx} = 0, \tag{16.53}$$

$$\frac{\gamma u}{T}\frac{du}{dx} + \frac{d\ln p}{dx} = 0, \tag{16.54}$$

$$(\gamma - 1)\, u\frac{du}{dx} + \frac{dT}{dx} = 0. \tag{16.55}$$

При приведении системы уравнений к безразмерной форме использованы следующие масштабы: для плотности и температуры — их значения ρ_{in}, T_{in} во входном сечении сопла, для скорости — величина скорости звука $a_{in} = \sqrt{\gamma R T_{\text{in}}}$, для давления — $\rho_{\text{in}} a_{\text{in}}^2$, для координат — полувысота минимального сечения сопла r_*. Параметры торможения ρ_o, T_o на входе в сопло связаны со значениями ρ_{in}, T_{in} изоэнтропическими формулами [30], в которые входит число Маха $\mathbf{M}_{\text{in}}$ во входном сечении сопла.

Плотность исключена из уравнений (16.53)–(16.55) с помощью уравнения состояния

$$\rho = \gamma\frac{p}{T}.$$

Эволюционная (маршевая) матрица коэффициентов при градиентах искомых функций $\ln p$, u и T в системе уравнений (16.53)–(16.55)

$$[\mathbf{A}] = \begin{bmatrix} u & 1 & \dfrac{-u}{T} \\ 1 & \dfrac{\gamma u}{T} & 0 \\ 0 & (\gamma - 1)u & 1 \end{bmatrix}, \tag{16.56}$$

является особой в точке, где число Маха $\mathbf{M} = u/T^{1/2} = 1$, а вблизи этой точки матрица плохо обусловлена. Эта особенность системы уравнений обуславливает наличие седловой особой точки [29] $x = 0$, расположенной в минимальном сечении сопла, где $d\ln y_w/dx = 0$.

Как следует из уравнения неразрывности (16.53), безразмерный массовый расход газа через сопло $Q = \rho u y_w$ сохраняется вдоль сопла и равен его значению во входном сечении

$$Q_{\text{in}} = \mathbf{M}_{\text{in}}(y_w)_{\text{in}}. \tag{16.57}$$

Из этой формулы следует, что расход пропорционален $\mathbf{M}_{\text{in}}$.

Всюду далее будут рассматриваться только гладкие (без разрывов) решения системы уравнений (16.53)–(16.55). Задачу нахождения этих решений будем ставить как задачу Коши. В этом случае начальными условиями, задаваемыми во входном сечении сопла $x = x_{\text{in}}$, для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (16.53)–(16.55) будут

$$u = u_{\text{in}} = \mathbf{M}_{\text{in}}, \quad T = 1, \quad \ln p = -\ln\gamma. \tag{16.58}$$

В рамках такой постановки задачи семейство интегральных кривых рассматриваемой системы уравнений является однопараметрическим семейством, зависящим от параметра $\mathbf{M}_{\text{in}}$, при заданных геометрии канала (прямая задача сопла) и показателе адиабаты γ. Это однопараметрическое семейство интегральных кривых можно найти точно из решения системы нелинейных алгебраических уравнений [28, 29].

Как известно, система нелинейных дифференциальных уравнений (16.53)–(16.55) имеет единственное аналитическое решение [28, 29], соответствующее расчётному сверхзвуковому режиму истечения газа из сопла. При этом режиме течения расход газа достигает максимального, критического значения $(Q_{\text{in}})_{cr}$ при заданных параметрах торможения на входе в сопло. При этом же значении расхода существует также решение с дозвуковыми скоростями потока. Это означает, что при критическом значении расхода имеет место бифуркация (раздвоение) решения, причем она реализуется в минимальном сечении сопла $x = 0$, где достигается скорость звука. При расходах меньших критического значения реализуются дозвуковые режимы течения. Важно отметить, что бифуркация решений системы нелинейных уравнений имеет место в особой точке, где число Маха равно единице.

Предлагаемый в настоящей работе способ интегрирования системы уравнений (16.53)–(16.55) с трансзвуковой бифуркацией рассмотрим на примере полностью неявной разностной схемы Эйлера. Эту схему для системы уравнений (16.53)–(16.55) можно записать в следующей матричной форме относительно вектора неизвестных $\mathbf{q}$:

$$[\mathbf{A}]_{n+1}\,\Delta\mathbf{q} = h\mathbf{b}_{n+1}, \Delta\mathbf{q} = \mathbf{q}_{n+1} - \mathbf{q}_n, \quad h = x_{n+1} - x_n, \tag{16.59}$$

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \ln p \\ u \\ T \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = -\begin{bmatrix} \dfrac{ud\ln y_w}{dx} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{16.60}$$

где индекс $n+1$ относится к значениям переменных в узле x_{n+1}, в котором проводится текущий расчет, индекс n — к уже рассчитанным значениям величин в узле x_n, h — шаг разностной сетки, матрица $\mathbf{A}$ определяется формулой (16.56).

В трансзвуковой области течения ($0{,}8 < \mathbf{M} < 1{,}2$), где имеется особая точка и возможна бифуркация *численных* решений, система уравнений (16.53)–(16.55) интегрируется следующим способом. На текущем (n+1)-ом шаге в уравнении импульсов (16.54) задается величина градиента логарифма давления. Обозначим её символом τ. Затем «параметризованная» система

уравнений интегрируется по неявной схеме Эйлера:

$$\left[\widetilde{\mathbf{A}}\right]_{n+1} \Delta\mathbf{q} = h\widetilde{\mathbf{b}}_{n+1}, \tag{16.61}$$

$$\left[\widetilde{\mathbf{A}}\right] = \begin{bmatrix} u & 1 & \dfrac{-u}{T} \\ 0 & \dfrac{\gamma u}{T} & 0 \\ 0 & (\gamma-1)u & 1 \end{bmatrix}, \quad \widetilde{\mathbf{b}} = -\begin{bmatrix} \dfrac{ud\ln y_w}{dx} \\ \tau \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{16.62}$$

при различных значениях параметра τ из интервала, содержащего значение градиента логарифма давления, полученное экстраполяцией его значений с предыдущих узлов. В результате интегрирования определяется разностный аналог градиента логарифма давления как функция параметра τ

$$\frac{\Delta \ln p}{h} = g(\tau). \tag{16.63}$$

Последующее определение нулей функции $f(\tau)$

$$f(\tau) \equiv \tau - g(\tau), \tag{16.64}$$

позволяет найти разностное решение в текущем узле x_{n+1} и исследовать возможную бифуркацию численных решений в трансзвуковой области течения. Поскольку значения функции $f(\tau)$ определяются численно, то для нахождения нулей этой функции используется комбинация методов парабол и секущих [31].

Важно отметить, что матрица коэффициентов $\widetilde{\mathbf{A}}$ (16.62) в отличие от матрицы $\mathbf{A}$ (16.56) является хорошо обусловленной всюду, включая окрестность особой точки, где $\mathbf{M} = 1$. Таким образом, параметризация системы уравнений привела к регуляризации её маршевой матрицы.

Рассмотрим поведение разностных решений системы уравнений (16.53)–(16.55) в зависимости от параметра Q_{in} (или $\mathbf{M}_{\text{in}}$ (16.57)) на примере расчета смешанного течения совершенного газа с $\gamma = 1{,}4$ в плоском сопле Лаваля с заданным гиперболическим контуром. Последний характеризуется его безразмерной кривизной $K_w = 0{,}5$ в минимальном сечении сопла $x = 0$ и углами наклона левой и правой асимптот гиперболы к линии симметрии сопла: $\alpha_{1,\text{lim}} = 30^\circ$ и $\alpha_{2,\text{lim}} = 20^\circ$. Расчеты проводились от входного сечения $x = x_{\text{in}} = -5$ до среза сопла с координатой $x = x_{\text{out}} = 5$.

На рис. 16.3 показано поведение интегральных кривых (штриховые линии), рассчитанных по нерегуляризованной неявной схеме Эйлера при околокритических значениях расхода Q_{in}, в окрестности особой точки $x = 0$. Верхние штриховые кривые соответствуют значениям Q_{in}, меньших критического значения $(Q_{\text{in}})_{cr}$, а нижние кривые — больших $(Q_{\text{in}})_{cr}$. Видна плохая обусловленность полученных по нерегуляризованной схеме численных решений в зависимости от значений параметра Q_{in} в области плохой обусловленности маршевой матрицы системы уравнений. Сплошная кривая на рис. 16.3 показывает

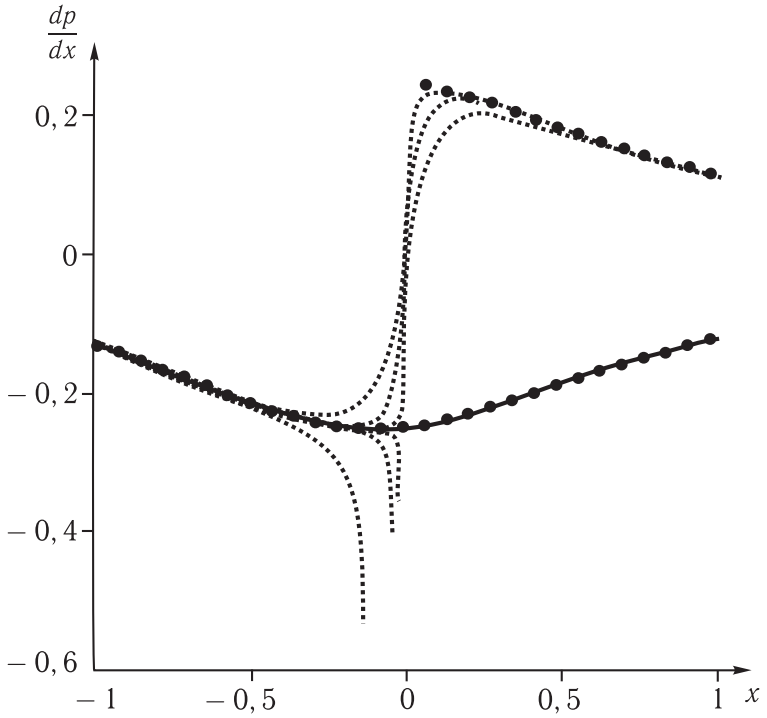


Рис. 16.3. Распределения градиента давления вдоль сопла при различных значениях массового расхода Q_{in}. Штриховые кривые соответствуют расчету по нерегуляризованной неявной схеме (16.59), сплошная кривая — по регуляризованной схеме (16.61). Точки показывают две ветви точного решения, соответствующего критическому значению расхода

интегральную кривую, рассчитанную по регуляризованной неявной схеме Эйлера (16.61) при значении $Q_{\text{in}} = (Q_{\text{in}})_{cr}$. Точки показывают две ветви точного решения, соответствующего этому же значению расхода. Бифуркация точного решения имеет место в особой точке $x = 0$ при критическом значении расхода $(Q_{\text{in}})_{cr}$. На рис. 16.3 верхние точки при $x > 0$ соответствуют дозвуковой ветви точного решения, а нижние точки — сверхзвуковой ветви.

Результаты расчетов, представленные на рис. 16.3, получены на равномерной разностной сетке с шагом $h = 1/128$, а результаты, показанные на других рисунках этого пункта, получены на сетке с $h = 1/16$, если не указаны другие значения h.

Поведение функции $f(\tau)$ (16.64) в расположенных вблизи особой точки узлах разностной сетки демонстрируется на рис. 16.4 для случая $Q_{\text{in}} = (Q_{\text{in}})_{cr}$. Существование двух нулей этой функции во втором и четвертом узле указывает на возможность бифуркации численного решения. Кривая *3* на рис. 16.4 показывает функцию $f(\tau)$, имеющую ноль кратности два. Эта кривая соответствует узлу, находящемуся в особой точке конечно-разностной схемы.

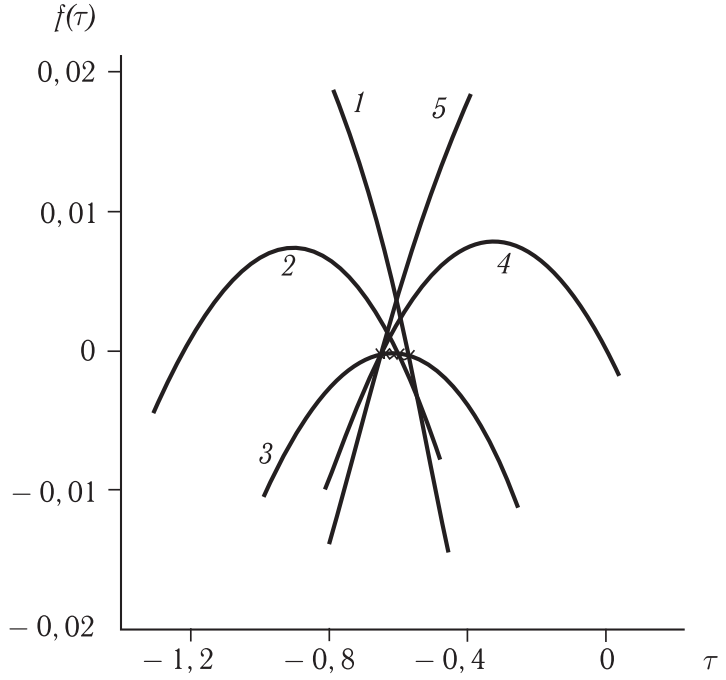


Рис. 16.4. Графики функции $f(\tau)$ в пяти последовательных узлах разностной сетки, помеченных цифрами *1–5* и расположенных в окрестности особой точки, в случае $Q_{\text{in}} = (Q_{\text{in}})_{cr}$. Крестиками помечены нули функции $f(\tau)$

Различные типы бифуркации численных решений, рассчитанных по регуляризованной схеме (16.61) при различных околокритических значениях расхода, показаны на рис. 16.5. В окрестности особой точки возможны три типа ветвления численного решения: *а* — на две дозвуковые ветви, *б* — на дозвуковую и сверхзвуковую ветви, *в* — на две сверхзвуковые ветви.

Рисунок 16.6 иллюстрирует вид интегральных кривых в плоскостях $(x, d\ln p/dx)$, $(x, \mathbf{M})$ и $(x, df/d\tau)$, при этом производная $df/d\tau$ вычисляется вдоль решения $f(\tau) = 0$. Кривая *1* соответствует значению расхода $Q_{\text{in}} > (Q_{\text{in}})_{cr}$, кривая *3* — значению расхода $Q_{\text{in}} < (Q_{\text{in}})_{cr}$. Кривые *2* и *2′* показывают бифуркацию численного решения при значении расхода, совпадающим с точным значением критического расхода $(Q_{\text{in}})_{cr}$ в восьми значащих цифрах. Точки на рис. 16.6, *а, б* показывают точное решение системы дифференциальных уравнений (16.53)–(16.55), соответствующее максимальному (критическому) расходу. Это решение раздваивается в минимальном сечении сопла на дозвуковую и сверхзвуковую ветви [28, 29]. При этом на дозвуковой ветви в плоскости $(x, d\ln p/dx)$ имеет место разрыв в особой точке. Из рис. 16.6, *в* видно, что производная $df/d\tau$ вдоль решения $f(\tau) = 0$, соответствующего режиму *смешанного* течения в сопле, меняет знак вблизи особой точки.

На рис. 16.7 показаны интегральные кривые, соответствующие критическому значению расхода и рассчитанные на сетках с шагом $h = 1/16$, $1/32$

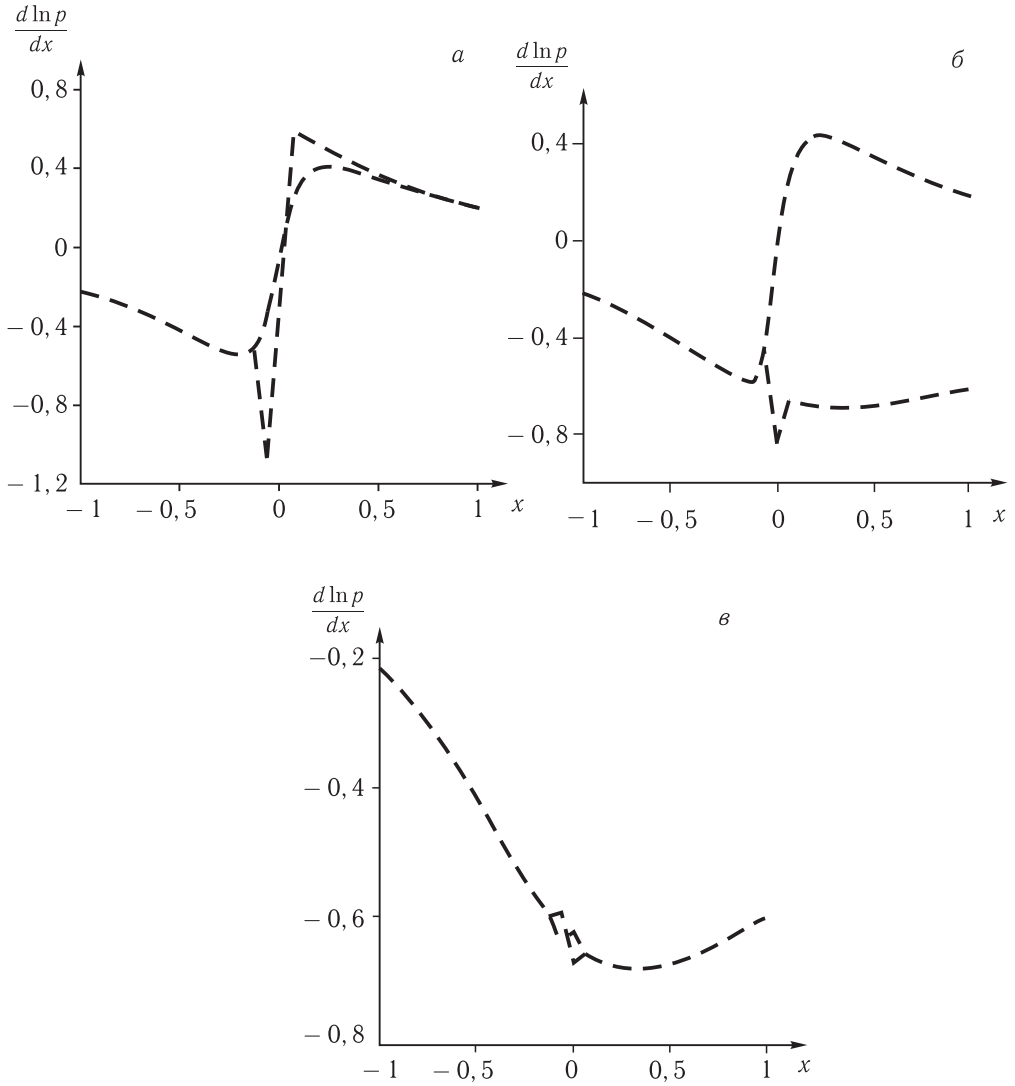


Рис. 16.5. Бифуркация численных решений: *а* — две дозвуковые ветви, *б* — одна ветвь — дозвуковая, другая — сверхзвуковая, *в* — две сверхзвуковые ветви

и 1/64, в плоскости $(df/d\tau, \mathbf{M})$. Видно, что при сгущении сетки интегральная кривая в этой плоскости приближается к точке (0, 1). Путем несложных выкладок можно показать, что в пределе $h \to 0$ зависимость $df/d\tau$ от числа $\mathbf{M}$ имеет вид

$$\frac{df}{d\tau} = \frac{1}{\gamma}\left(1 - \frac{1}{M^2}\right).$$

Эта зависимость показана штриховой кривой на рис. 16.7. Таким образом, при параметризации системы уравнений особенность маршевой матрицы

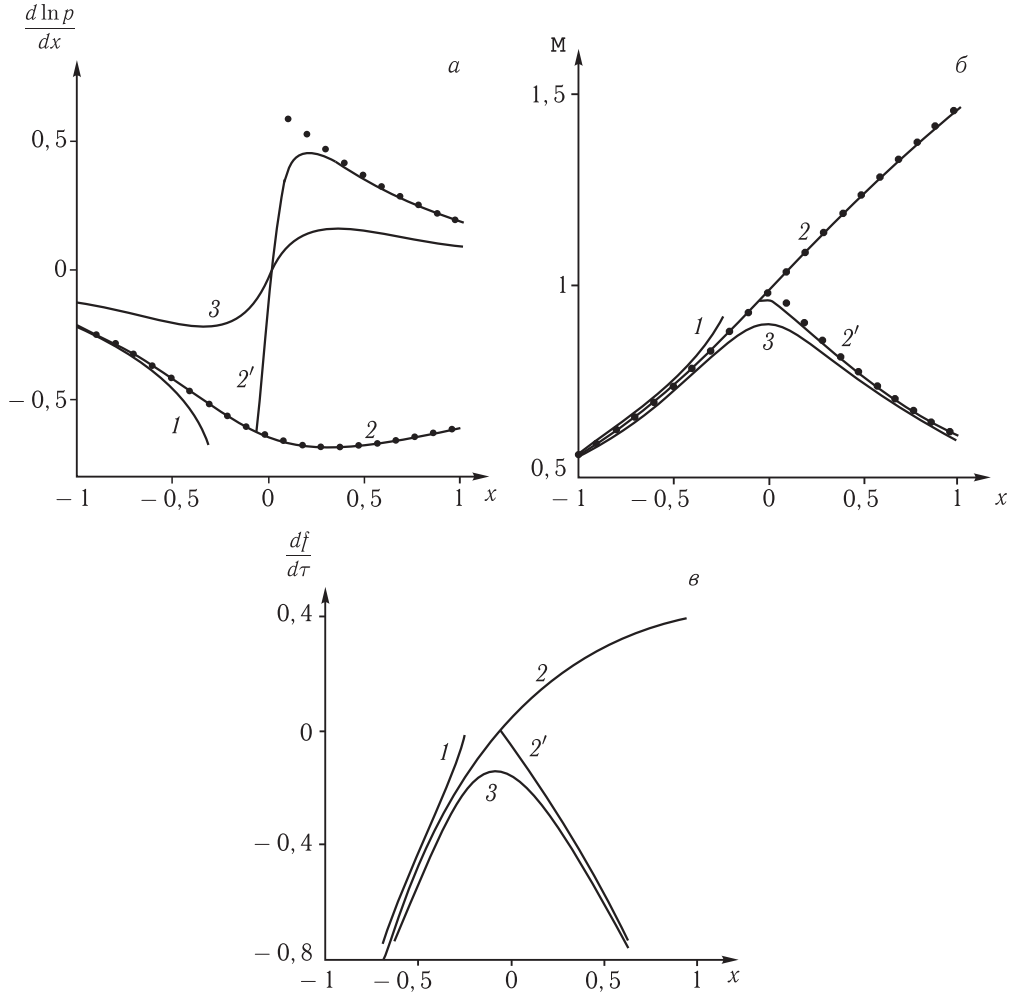


Рис. 16.6. Численные интегральные кривые в плоскостях *а* — $(x, d\ln p/dx)$, *б* — $(x, \mathbf{M})$, *в* — $(x, df/d\tau)$

переходит в особенность алгебраического уравнения $f(\tau) = 0$: наличие кратного корня этого уравнения в точке бифуркации разностной схемы.

Наибольший интерес для практики представляет режим смешанного до- и сверхзвукового течения, реализуемый при достаточно большом, «сверхкритическом» перепаде давления между входным и выходным сечениями сопла [28]. Как уже было сказано, уравнения одномерной теории сопла дают единственное гладкое решение, которому соответствует смешанное течение в сопле с максимальным значением массового расхода. Это решение проходит через особую точку $x = 0$, в которой число $\mathbf{M} = 1$ и вырождается маршевая матрица (16.56). Вследствие этого вырождения система дифференциальных уравнений (16.53)–(16.55) дает алгебраическую связь между

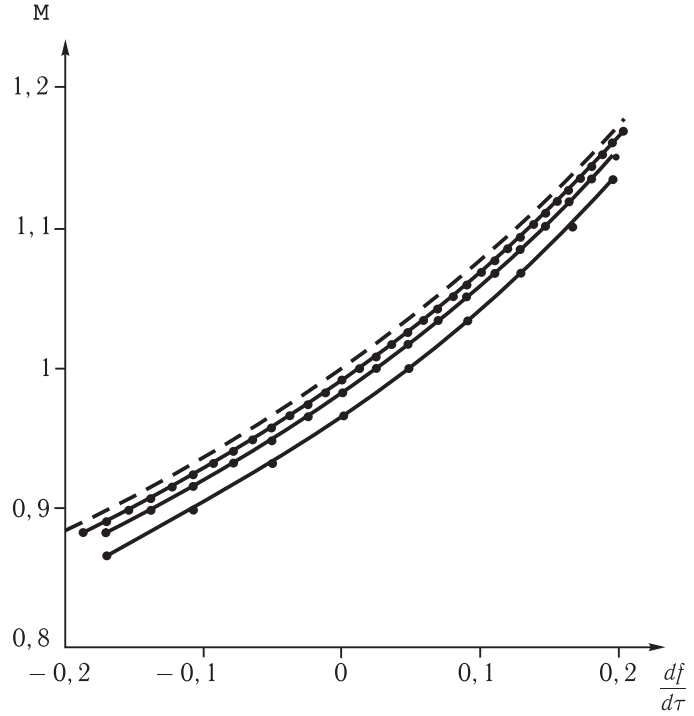


Рис. 16.7. Зависимость числа **M** от производной $df/d\tau$, вычисленной на решении. Сплошные кривые показывают результаты расчетов на сетках с $h = 1/16$, $1/32$ и $1/64$, а точки — узлы сеток. Штриховая кривая представляет предельную зависимость при $h \to 0$

искомыми функциями в особой точке. Эта связь является дополнительным условием для определения значения критического расхода $(Q_{\text{in}})_{cr}$. Используя данную связь, можно, например, получить значение производной логарифма давления при $x = 0$:

$$\frac{d\ln p}{dx} = \gamma\sqrt{\frac{K_{w0}}{\gamma+1}}\,, \tag{16.65}$$

где K_{w0} — кривизна контура сопла в минимальном сечении сопла $x = 0$. Соотношение (16.65) также может быть использовано в качестве дополнительного условия для нахождения $(Q_{\text{in}})_{cr}$.

Таким образом, задача нахождении смешанного течения в сопле Лаваля с заданным контуром (прямая задача сопла [28]) является краевой задачей с внутренним граничным условием в особой точке типа (16.65).

При постановке разностной задачи о нахождении смешанного течения в сопле Лаваля условие для определения критического значения расхода можно получить таким же образом, как и для исходной системы дифференциальных уравнений. Однако это условие будет существенно более сложным, чем условие (16.65). С вычислительной точки зрения более удобной является постановка «мягкого» условия для определения значения $(Q_{\text{in}})_{cr}$, например,

условия для градиента давления в виде

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{dp}{dx}\right) = 0, \tag{16.66}$$

которое ставится в узле, расположенном на разностном интервале, где производная $df/d\tau$, вычисленная вдоль решения $f(\tau) = 0$, меняет знак. В этом случае величина $(Q_{\text{in}})_{cr}$ рассчитывается из уравнения (16.66) методом стрельбы в сочетании с методом секущих [31].

На рис. 16.8 представлены решения, рассчитанные по регуляризованной неявной схеме (16.61) и соответствующие режиму смешанного течения в сопле Лаваля. В этих расчетах при бифуркации *численного* решения в текущем узле сетки выбирался тот корень уравнения $f(\tau) = 0$, который лежит ближе к линейно экстраполированному с предыдущих узлов значению $d\ln p/dx$. Сплошная кривая показывает решение, рассчитанное с использованием условия (16.66) и соответствующее критическому расходу $(Q_{\text{in}})_{cr}$. Точка на этой кривой показывает место, при переходе через которое производная $df/d\tau$ меняет знак. Штриховые линии показывают численные решения, соответствующие околокритическим значениям расхода. Расчеты на сгущающихся, вложенных сетках показали сходимость разностного решения к точному решению задачи.

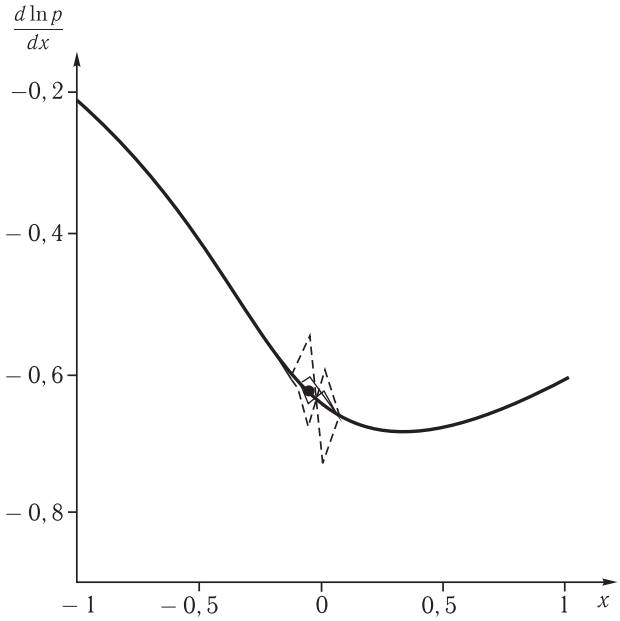


Рис. 16.8. Численные решения, описывающие режим смешанного течения в сопле Лаваля в плоскости $(x, d\ln p/dx)$. Сплошная кривая соответствует критическому значению расхода (шесть точных значащих цифр), штриховые кривые — околокритическим значениям расхода, отличающимся от критического значения в пятой и шестой значащих цифрах

Заметим, что поскольку трансзвуковая особенность системы уравнений является локальной, то «мягкое» условие (16.66) асимптотически (при $h \to 0$) эквивалентно «мягкому» условию, сформулированному в виде задачи минимизации функционала (принцип минимальной длины) [8, 32].

4.2. Маршевый метод решения системы уравнений ПГВУС. Как уже было отмечено выше, если формулировать задачу для системы уравнений ПГВУС как задачу Коши по продольной независимой переменной ξ, то решения этой задачи образуют семейство интегральных кривых, зависящих от свободного параметра — кривизны УВ K_{s0}. Здесь имеется аналогия с поведением решений задачи Коши в одномерной теории сопла Лаваля (разд. 4.1). Также решение системы нелинейных алгебраических уравнений, представляющих разностную схему для системы уравнений ПГВУС, раздваивается в трансзвуковой области течения при некотором «критическом» значении $K_{s0} = (K_{s0})_{cr}$. Искомое решение задачи сверхзвукового обтекания является той из двух ветвей, вдоль которой поток непрерывно ускоряется.

Чтобы найти «критическое» (бифуркационное) значение $K_{s0} = (K_{s0})_{cr}$ и соответствующее ему искомое смешанное течение в УС, используем прием, который был применен для нахождения критического значения расхода в прямой задаче сопла Лаваля (разд. 4.1). В трансзвуковой области (вблизи звуковой линии в УС) параметризуем систему уравнений ПГВУС с помощью величины продольного градиента давления p_s в уравнении продольного импульса (16.45)

$$\tau = \frac{dp_s}{d\xi}, \tag{16.67}$$

подобно тому, как это делается для одномерных уравнений газовой динамики в разд. 4.1. Благодаря этому приёму маршевая матрица при продольных градиентах искомых функций в системе уравнений становится хорошо обусловленной при $u \neq 0$ во всех точках трансзвуковой области течения. Значения параметра τ (16.67) определяются из решения уравнения

$$f(\tau) \equiv \tau - g(\tau) = 0, \tag{16.68}$$

где $g(\tau)$ есть величина продольного градиента давления $dp_s/d\xi$, вычисляемая на текущем маршевом шаге из разностной схемы для параметризованной системы уравнений при различных значениях параметра τ. При этом для интегрирования данной системы уравнений используется полностью неявная схема. Решение системы уравнений существует на текущем маршевом шаге, если существуют корень (корни) алгебраического уравнения (16.68). В сечении $\xi = \xi_{cr} = \mathrm{const}$, где имеет место бифуркация решения разностной схемы при $K_{s0} = (K_{s0})_{cr}$, алгебраическое уравнение имеет кратный корень, в котором производная $df/d\tau$ равна нулю.

Сказанное выше иллюстрируется кривыми на рис. 16.9, *а–в*, которые качественно подобны кривым 2 и 2′ на рис. 16.6, *а–в* и представляют

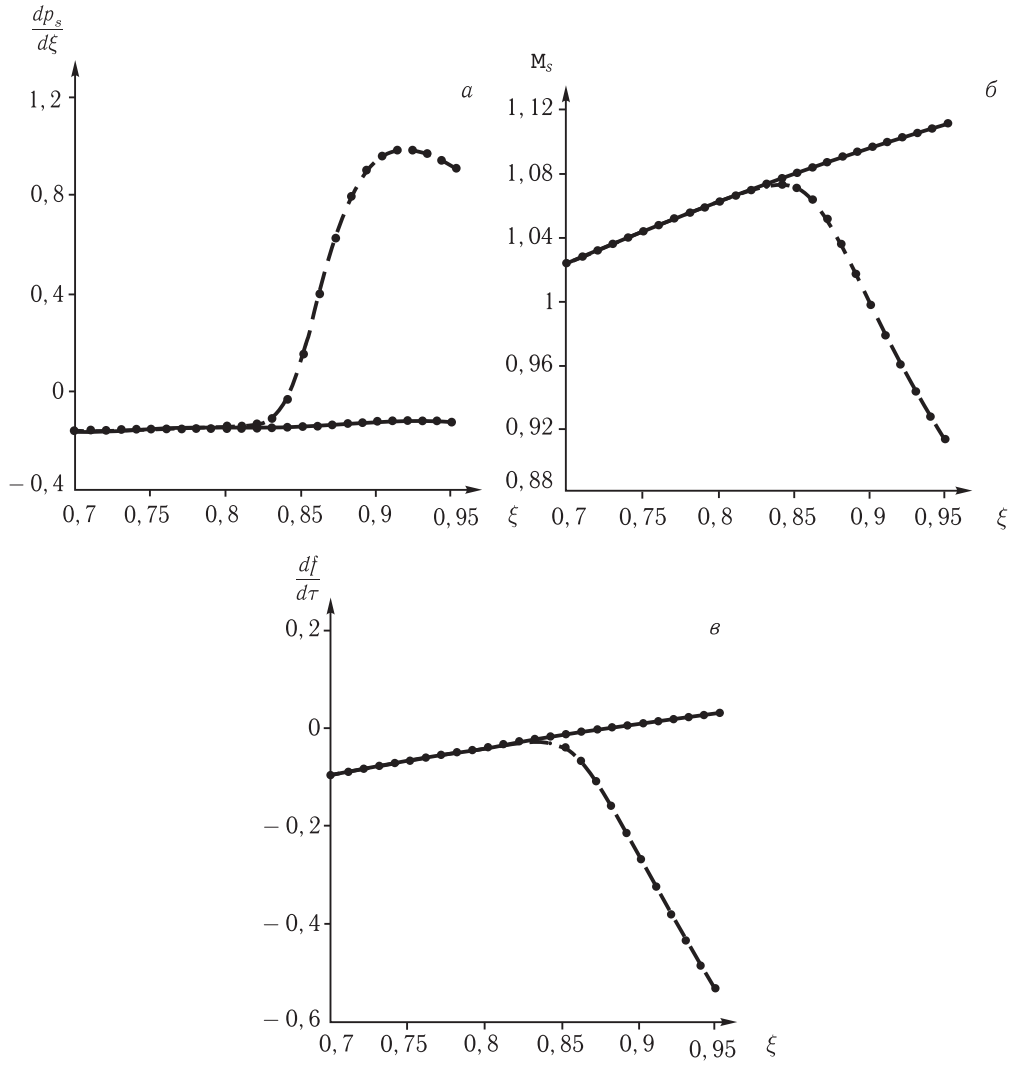


Рис. 16.9. Численные интегральные кривые в плоскостях *а* — $(\xi, dp_s/d\xi)$, *б* — $(\xi, \mathbf{M}_s)$, *в* — $(\xi, df/d\tau)$

результаты расчета гиперзвукового обтекания гиперболоида с углом полураствора $\alpha\,(\xi \to \infty) = 42{,}5^\circ$ потоком воздуха со следующими параметрами: $\gamma = 1{,}25$, $\mathbf{M}_\infty = 17{,}7$, $\mathbf{Re}_\infty = 8$, $\mu \sim T^{0{,}75}$, $\mathbf{Pr} = 0{,}71$, $T_w = 0{,}02 \cdot T_0$, где T_0 — температура адиабатически заторможенного набегающего потока. Рисунки 16.9, *а–в* показывают численные интегральные кривые системы уравнений ПГВУС в плоскостях $(\xi, dp_s/d\xi)$, $(\xi, \mathbf{M}_s)$, $(\xi, df/d\tau)$; производная $df/d\tau$ вычисляется вдоль решения $f(\tau) = 0$. Сплошные кривые на этих рисунках соответствуют значению $K_{s0} = (K_{s0})_{cr}$, штриховые кривые — значению K_{s0}, которое меньше значения $(K_{s0})_{cr}$ и отличается от него в четырнадцатом

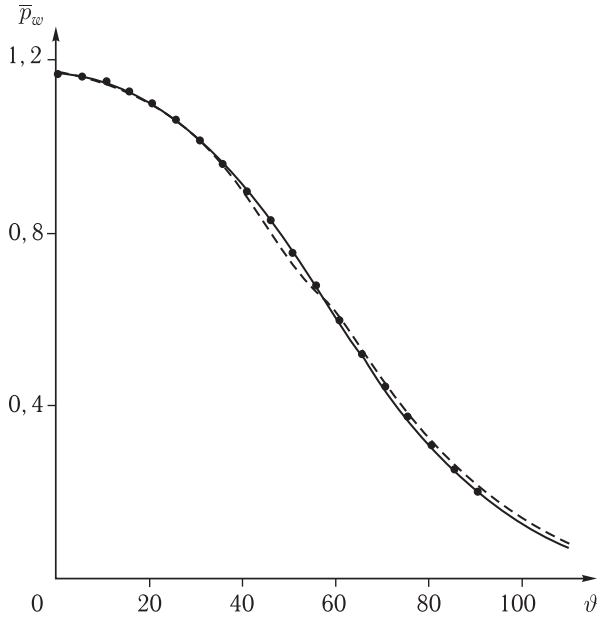


Рис. 16.10. Распределения $\overline{p}$ вдоль поверхности сферы при $\mathbf{M}_\infty = 3$. Штриховая линия — гиперболическое приближение [5], сплошная — первая глобальная итерация, точки — табличные данные [33]

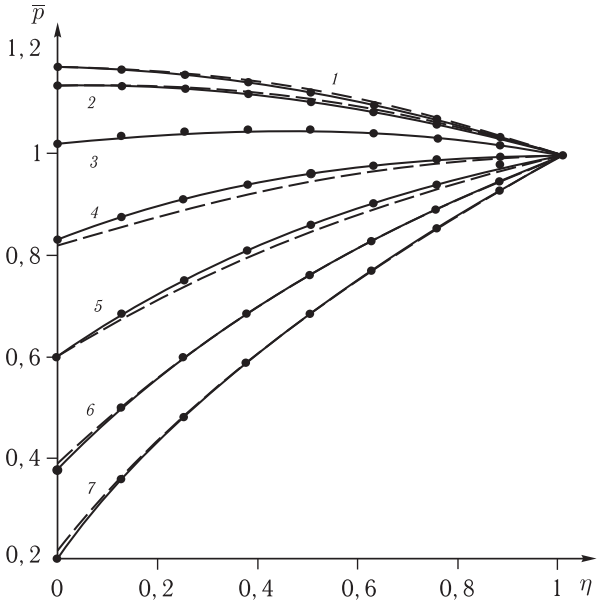


Рис. 16.11. Распределения $\overline{p}$ поперек ударного слоя при $\mathbf{M}_\infty = 3$. Штриховые линии — гиперболическое приближение [5], сплошные — первая глобальная итерация, точки — данные [33]. Кривые *1–7* соответствуют значениям центрального угла θ, равным 0, 15, 30, 45, 60, 75 и 90 градусов

знаке после запятой. Точки на рис. 16.9, *а–в* показывают положение узлов разностной сетки по переменной ξ.

Дополнительный запас устойчивости маршевому интегрированию системы уравнений (16.44)–(16.47) даёт процедура совместного решения этих уравнений на каждом маршевом шаге. Для реализации этой процедуры в число искомых функций u, v, T, p вместо давления вводятся две функции $\overline{p}$ и $p_s(\xi)$, при этом к системе уравнений (16.44)–(16.47) добавляется уравнение (16.22), а к системе краевых условий — условие

$$\overline{p} = 1 \quad \text{при} \quad \eta = 1.$$

5. Сходимость глобальных итераций

В данном параграфе эффективность метода демонстрируется на примерах расчета сверхзвукового обтекания сферы и затупленного по сфере конуса совершенным газом в рамках уравнений Эйлера и модели ВУС. Как уже было сказано, течение в ударном слое между поверхностью затупленного тела и УВ является примером до– и сверхзвукового смешанного внешнего течения.

5.1. Невязкий ударный слой. Результаты расчета обтекания сферы невязким совершенным газом с показателем адиабаты $\gamma = 1{,}4$ показаны на рис. 16.10–16.13.

Сходимость глобальных итераций по полю функции $\overline{p}$ иллюстрируется на рис. 16.10 и 16.11, где приводятся продольные и поперечные распределения этой функции для гиперболического приближения уравнений Эйлера [5] и первой глобальной итерации вместе с прецизионными данными [33], полученными в результате расчета методом установления. Результаты расчетов для второй и последующих глобальных итераций графически совпадают с результатами первой итерации для всех характеристик течения. Из указанных рисунков видно, что уже гиперболическое приближение даёт решение, близкое к точному, а первая итерация совпадает с ним.

Формы УВ и звуковые линии, рассчитанные в данной работе и эталонные [33], показаны на рис. 16.12. Абсцисса на этом рисунке — координата вдоль оси течения, ордината — расстояние от этой оси. Видно, что уже первая глобальная итерация даёт решение с точностью, достаточной для инженерной практики.

На рис. 16.13 для различных значений числа $\mathbf{M}_\infty$ показана убыль невязки в отходе ударной волны на линии симметрии в зависимости от номера глобальной итерации k. Значению $k = 0$ соответствует гиперболическое приближение [5] уравнений Эйлера. Для $\mathbf{M}_\infty = 1{,}5$ невязка в отходе ударной волны после каждой итерации убывает примерно в 7 раз по линейному закону. Для $\mathbf{M}_\infty \geqslant 3{,}0$ невязка убывает примерно в 20 раз и более по нелинейному закону.

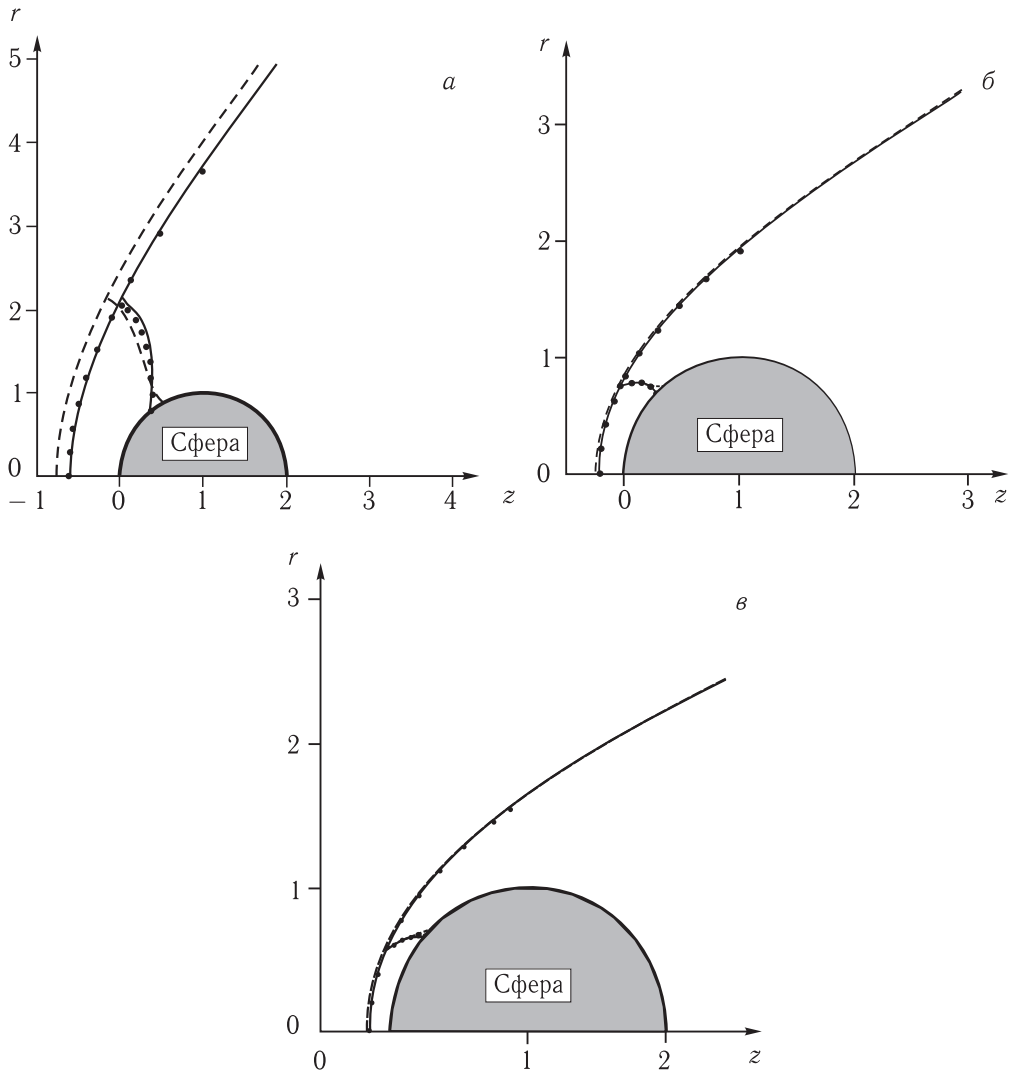


Рис. 16.12. Формы ударной волны и звуковой линии около сферы: *а* — $\mathbf{M}_\infty = 1{,}5$, *б* — 3,0, *в* — 6,0. Штриховые линии — гиперболическое приближение [5], сплошная линия — первая глобальная итерация, точки — данные [33]

5.2. Вязкий ударный слой. Результаты расчета сверхзвукового обтекания сферы воздухом с $\gamma = 1{,}4$, $\mu \sim T^{0{,}5}$, $\mathbf{Pr} = 0{,}7$ в рамках модели ВУС показаны на рис. 16.14–16.15.

Убыль максимальных невязок $\Delta f^k = f^k - f^{k-1}$ газодинамических функций $f = y_s$, $dy_s/d\xi$ и p в зависимости от номера глобальной итерации k для случая обтекания охлаждаемой сферы ($T_w = 0{,}2 \cdot T_0$) сверхзвуковым потоком с $\mathbf{M}_\infty$=5 и $\mathbf{Re}_\infty = 10^3$ показана на рис. 16.14. Нулевой итерации соответствует расчет по модели ПГВУС (разд. 2). Видно, что невяз-

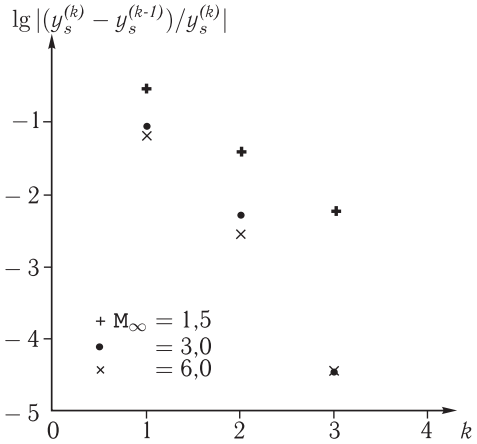


Рис. 16.13. Убыль невязки отхода ударной волны y_s в зависимости от номера глобальной итерации k для различных значений числа $\mathbf{M}_\infty$

ки Δf^k убывают приблизительно по линейному закону. Для получения решения уравнений ВУС с точностью до 1% достаточно одной глобальной итерации. На рис. 16.15 представлены распределения относительного теплового потока q_w/q_{w0} (q_{w0} — значение теплового потока в точке торможения) вдоль поверхности сферы для параболо-гиперболического приближения и первой глобальной итерации вместе с данными [34], получен-

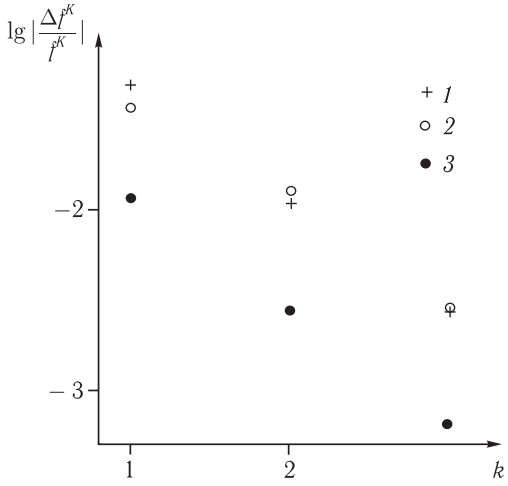


Рис. 16.14. Убыль невязки Δf газодинамической функции f в зависимости от номера глобальной итерации k для $f = y_s$, $dy_s/d\xi$ и p (точки *1–3*)

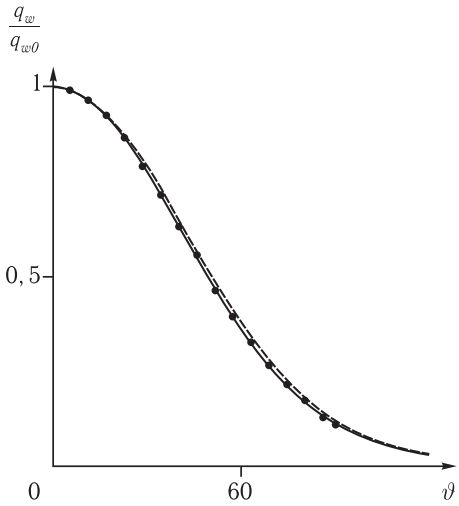


Рис. 16.15. Распределения теплового потока q_w/q_{w0} вдоль поверхности сферы для $\mathbf{M}_\infty = 7{,}5$, $\mathbf{Re}_\infty = 10^3$, $T_w = 0{,}24 \cdot T_0$. Штриховая кривая — параболо-гиперболическое приближение; сплошная — первая глобальная итерация; точки — результаты расчета [34] методом установления

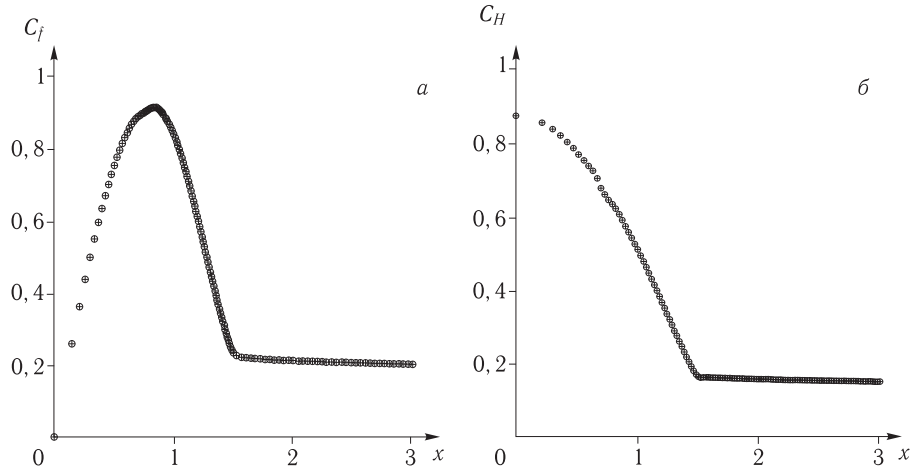


Рис. 16.16. Распределения коэффициентов (*а*) трения C_f и (*б*) теплоотдачи C_H по поверхности сферически затупленного конуса, обтекаемого гиперзвуковым потоком воздуха с $\gamma = 1{,}25$, $\mathbf{M}_\infty = 26{,}5$, $\mathbf{Re}_\infty = 8$. Маркерами-кружочками показаны результаты расчета по параболо-гиперболической модели, крестиками — 1-ой глобальной итерации

ными в результате расчета методом установления с точностью 1%. Видно, что уже параболо-гиперболическое приближение даёт решение, близкое к данным [34], а первая итерация совпадает с ними.

На рис. 16.16, *а,б* представлены результаты расчета гиперзвукового обтекания затупленного по сфере конуса с углом полураствора $\alpha\,(\xi \to \infty) = 5^\circ$ потоком воздуха со следующими параметрами: $\gamma = 1{,}25$, $\mathbf{M}_\infty = 26{,}5$, $\mathbf{Re}_\infty = 8$, $\mu \sim T^{0{,}5}$, $\mathbf{Pr} = 0{,}71$, $T_w = 0{,}07 \cdot T_0$. Видно, что параболо-гиперболическая модель (ПГВУС) и первая глобальная итерация дают графически неотличимые результаты. Отметим, что в этих расчетах число $\mathbf{Re}_\infty$ невелико, ему соответствует число Рейнольдса $\mathbf{Re}_0 = 0{,}85$, построенное по температуре торможения T_0.

Заключение

Разработан итерационно-маршевый метод для численного решения двумерных стационарных уравнений ВУС в широком диапазоне чисел Рейнольдса. Контур УВ находится маршевым интегрированием по продольной координате совместно с другими газодинамическими переменными, что способствует устойчивости алгоритма. Итерации проводятся по эллиптической составляющей продольного градиента давления, отвечающей за акустический механизм передачи возмущений вверх по потоку. Эта составляющая минимизирована так, что для расчета тепловых потоков и сопротивления в задачах гиперзвукового стационарного обтекания затупленных тел с точностью до 0,1% достаточно одной–двух итераций.

Исследования поддержаны Роснаукой (Гос. контракт 02.740.11.0615 и П 594) и грантом РФФИ 09-01-00728.

Список литературы

1. *Davis R.T.* Numerical solution of the hypersonic viscous shock layer equations // AIAA Journal. 1970. V. 8. № 5. P 843–851.
2. *Тирский Г.А.* Современные газодинамические модели гиперзвуковой аэродинамики и теплообмена с учетом вязкости и реальных свойств газа // Современные газодинамические и физико-химические модели гиперзвуковой аэродинамики и теплообмена / Под ред. Л.И. Седова.— М.: Изд-во МГУ, 1994. Ч. 1. С. 9–43.
3. *Алексин В.А., Марков А.А., Рогов Б.В., Тирский Г.А.* Упрощенные газодинамические модели вязких внутренних и внешних задач аэродинамики // Энциклопедия низкотемпературной плазмы. Т.VII-1. Ч.2.— М.: Янус-К, 2008, С. 333–370.
4. *Брыкина И.Г., Рогов Б.В., Тирский Г.А.* О применимости континуальных моделей в переходном режиме гиперзвукового обтекания затупленных тел // ПММ. 2009. Т. 73. Вып. 5. С. 700–716.
5. *Рогов Б.В., Соколова И.А.* Маршевый расчет ударной волны при невязком сверхзвуковом обтекании затупленных тел // Математическое моделирование. 2001. Т. 13. № 5. С. 110–118.
6. *Рогов Б.В., Соколова И.А.* Гиперболическое приближение уравнений Навье–Стокса для вязких смешанных течений // Изв. РАН. МЖГ. 2002. № 3. С. 30–49.
7. *Rogov B.V., Tirskiy G.A.* The Accelerated Method of Global Iterations for Solving the External and Internal Problems of Aerohydrodynamics // Proc. 4th Europ. Symp. Aerothermodynamics for Space Applications, 15–18 Oct. 2001, Capua, Italy, ESA SP–487, March 2002, P. 537–544.
8. *Рогов Б.В.* Метод минимальной длины для нахождения критических параметров смешанных течений // Математическое моделирование. 2002. Т. 14. № 1. С. 87–96.
9. *Рогов Б.В.* Сквозной маршевый метод расчета трансзвуковых вязких течений // Математическое моделирование. 2004. Т. 16. № 5. С. 3–22.
10. *Васильевский С.А., Тирский Г.А., Утюжников С.В.* Численный метод решения уравнений вязкого ударного слоя // Ж. вычисл. математики и мат. физики. 1987. Т. 27. № 5. С. 741–750.
11. *Ковалев В.Л., Крупнов А.А., Тирский Г.А.* Решение уравнений вязкого ударного слоя методом простых глобальных итераций по градиенту давления и форме ударной волны // Докл. РАН. 1994. Т. 338. № 3. С. 333–336.
12. *Vigneron Y.C., Rakich J.V., Tannehill J.C.* Calculation of supersonic viscous flow over delta wings with sharp subsonic leading edges // AIAA Paper. 1978. № 78–1137. 19 p.
13. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика.— М.: Наука, 1986. 736 с.
14. *Кокошинская Н.С., Павлов Б.М., Пасконов В.М.* Численное исследование сверхзвукового обтекания тел вязким газом.— М.: Изд-во МГУ, 1980. 247 с.
15. *Головачев Ю.П.* Численное моделирование течений вязкого газа в ударном слое.— М.: Наука. Физматлит, 1996. 376 с.

16. *Тирский Г.А.* Континуальные модели в задачах гиперзвукового обтекания затупленных тел разреженным газом // ПММ. 1997. Т. 61. Вып. 6. С. 903–930.

17. *Лунев В.В.* Гиперзвуковая аэродинамика.— М.: Машиностроение, 1975. 327 с

18. *Ван-Дайк М.* Теория сжимаемого пограничного слоя во втором приближении с применением к обтеканию затупленных тел гиперзвуковым потоком // Исследование гиперзвуковых течений. — М.: Мир, 1964. С. 35–58.

19. *Davis R.T., Flugge–Lotz I.* Second-order boundary layer effects in hypersonic flow past axisymmetric blunt bodies // J. Fluid Mech. 1964. V.20. Pt.4. P. 593–623.

20. *Davis R.T., Werle M.J., Wornom S.F.* A consistent formulation of compressible boundary-layer theory with second-order curvature and displacement effects // AIAA Journal. 1970. V. 8. № 9. P. 1701–1703.

21. *Tannehill J.C., Anderson D.A., Pletcher R.H.* Computational Fluids Mechanics and Heat Transfer, 2nd ed., Washington DC: Taylor&Francis, Hemisphere, 1997.

22. *Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю.* Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. 608 с.

23. *Седов Л.И.* Механика сплошной среды.— М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 2-е изд., 1973.

24. *Fletcher C.A.J.* Computational Techniques for Fluid Dynamics, Vols. 1 and 2, Springer-Verlag, Berlin, 1988.

25. *Rogov B.V., Sokolova I.A.* Fast numerical method for calculating flows through a Laval nozzle // In: Proc. 2nd Int. Conf. Finite–Difference Methods (CFDM 98), Minsk, Belarus, July 5–9, 1998. Vol. 3. P. 47–52.

26. *Калиткин Н.Н., Рогов Б.В., Соколова И.А.* Двухстадийный маршевый расчет вязких течений через сопло Лаваля // Математическое моделирование. 1999. Т.11. № 7. С. 95–117.

27. *Рогов Б.В., Соколова И.А.* Обзор моделей вязких внутренних течений // Математическое моделирование. 2002. Т. 14. № 1. С. 41–72.

28. *Пирумов У.Г., Росляков Г.С.*. Течения газа в соплах.— М.: МГУ. 1978. 351 с.

29. *Степанов Г.Ю., Гогиш Л.В.* Квазиодномерная газодинамика сопел ракетных двигателей.— М.: Машиностроение, 1973. 168 с.

30. *Лойцянский Л.Г.* Механика жидкости и газа. Изд. 5-е. Наука, 1978. 736 с.

31. *Калиткин Н.Н.* Численные методы.— М.: Наука, 1978. 512 с.

32. *Рогов Б.В.* Метод минимальной длины для течений с трансзвуковой бифуркацией // Доклады Академии Наук, 2001. Т. 381. № 1. С. 23–26.

33. *Любимов А.Н., Русанов В.В.* Течения газа около затупленных тел. В 2-х т. — М.: Наука, 1970.

34. *Бородин А.И., Иванов В.А., Пейгин С.В.* Численное исследование сверхзвукового обтекания затупленных тел в рамках модели вязкого ударного слоя // Ж. вычисл. математики и мат. физики, 1996. Т. 36. № 8. С. 158–168.

17

АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ТОНКОГО ВЯЗКОГО УДАРНОГО СЛОЯ ПРИ МАЛЫХ ЧИСЛАХ РЕЙНОЛЬДСА

И. Г. Брыкина
Научно-исследовательский институт механики МГУ им. М.В. Ломоносова

Введение

При исследовании теплообмена и аэродинамики космических аппаратов, движущихся в верхних слоях атмосферы Земли, возникает необходимость решать пространственные задачи гиперзвукового обтекания затупленных тел разреженным газом в переходном от континуального к свободномолекулярному режиме течения. Наиболее распространенным методом решения таких задач в переходном режиме обтекания, характеризующимся большими числами Кнудсена набегающего потока $\mathbf{Kn}_\infty$, или малыми числами Рейнольдса $\mathbf{Re}$, является метод прямого статистического моделирования Монте–Карло. Однако метод становится трудно применимым при приближении к континуальному режиму обтекания, т.к. в этом случае требуется огромное количество моделирующих частиц. Решение этих задач в рамках кинетических уравнений — уравнения Больцмана или его упрощенных моделей — до сих пор представляет сложную проблему. В последние годы развиваются гибридные методы, сопрягающие решение кинетических уравнений, или решение, полученное методом Монте–Карло, с решением континуальных уравнений. Существует также приближенный полуэмпирический метод интерполяции коэффициентов сопротивления между их значениями в свободномолекулярном режиме обтекания и в пограничном слое, так назывемый мостовой метод. Он дает весьма приближенную зависимость этих коэффициентов как от газодинамических параметров обтекания, так и от геометрических, не учитывая, в частности, зависимость от кривизны тела, что может приводить к значительным ошибкам. Обзор различных методов решения задач гиперзвукового обтекания в переходном режиме приведен в [1].

В работах [1, 2] для исследования теплообмена и аэродинамики затупленных тел, обтекаемых гиперзвуковым потоком разреженного газа, предложен континуальный подход с использованием моделей вязкого ударного слоя (ВУС) и тонкого вязкого ударного слоя (ТВУС). Ранее было принято считать, что в переходном режиме континуальные модели течения неприменимы для решения таких задач, поскольку в расчетах уравнений пограничного слоя и полных и параболизованных уравнения Навье–Стокса, даже с учетом эффектов

скольжения на поверхности, получались значения коэффициентов теплопередачи и трения, которые при уменьшении числа **Re**, начиная с некоторых его значений, начинали резко возрастать, превышая значения в свободномолекулярном потоке. Однако в [1, 2] показано, что модель ВУС с корректным учетом скольжения и скачка температуры на поверхности применима для расчета теплопередачи в наветренной области холодного затупленного тела вплоть до $\mathbf{Kn}_\infty \sim 15$, или до высот ~ 130–140 км возвратной траектории «Space Shuttle» (при радиусе затупления ~ 1 м). Модель ТВУС дает достоверные результаты для теплопередачи и трения в переходном режиме обтекания при $\mathbf{Kn}_\infty \geqslant 0{,}1$, или на высотах выше 100 км, вплоть до выхода на свободномолекулярный режим при увеличении $\mathbf{Kn}_\infty$.

В данной главе излагается континуальный подход предсказания коэффициентов теплопередачи, трения и давления на наветренной стороне затупленных тел, основанный на использовании асимптотически корректной модели ТВУС. Эта модель является уникальной в том смысле, что, будучи континуальной, она дает правильный предельный переход для этих коэффициентов к их значениям в свободномолекулярном потоке при $\mathbf{Kn}_\infty \to \infty$. На основании асимптотического анализа при малых числах **Re** выявлены разные режимы течения и определены параметры подобия гиперзвукового обтекания тел разреженным газом в различных режимах.

Разработан асимптотический метод решения уравнений ТВУС при малых числах **Re** с использованием интегрального метода последовательных приближений и асимптотического разложения в ряды. Этим методом получены простые аналитические выражения для коэффициентов теплопередачи, трения и давления в зависимости от параметров набегающего потока и геометрии обтекаемого тела в случае двумерных и ряда трехмерных течений, которые дают правильные свободномолекулярные пределы при стремлении числа **Re** к нулю. На основании сравнений с численными решениями ТВУС, экспериментальными данными и результатами, полученными методом Монте–Карло, оценивается точность и область применимости аналитических решений в переходном режиме обтекания.

1. Модель тонкого вязкого ударного слоя (ТВУС) при малых числах Re. Двумерные течения

Задача гиперзвукового обтекания затупленных тел вязким теплопроводным газом рассматривается в рамках модели тонкого вязкого ударного слоя (ТВУС). Уравнения ТВУС были впервые выведены Ченгом для осесимметричного течения [3, 4] при умеренно больших числах **Re** в предположении:

$$(\gamma - 1)\mathbf{M}_\infty^2 \gg 1, \quad \varepsilon \ll 1, \quad \mathbf{Re} \gg 1, \quad \varepsilon\mathbf{Re} = \mathrm{O}(1),$$
$$\mathbf{Re} = \frac{\rho_\infty V_\infty R_0}{\mu_0}, \quad \varepsilon = \frac{\gamma - 1}{2\gamma}.$$

Здесь: ε — гиперзвуковой параметр, γ — отношение удельных теплоемкостей, $\mathbf{M}_\infty$, ρ_∞ и V_∞ — число Маха, плотность и скорость набегающего потока, μ_0 — коэффициент вязкости при температуре T_0, $T_0 = V_\infty^2/(2c_p)$, c_p — удельная теплоемкость при постоянном давлении, R_0 — радиус кривизны тела в его вершине.

Для того чтобы обосновать правомерность использования ТВУС при малых числах $\mathbf{Re}$, был проведен [1] асимптотический анализ уравнений Навье–Стокса в гиперзвуковом вязком ударном слое около затупленного тела при малых числах $\mathbf{Re}$. Этот анализ позволил обнаружить наличие двух важных параметров задачи χ и τ:

$$\chi = \frac{1}{\rho_s u_s} = \mathrm{O}\left(\left(\frac{\mu_s}{\rho_s \mathbf{Re}}\right)^{1/2}\right), \quad \tau = u_s = \mathrm{O}\left(\left(\frac{\mathbf{Re}}{\mu_s \rho_s}\right)^{1/2}\right),$$

где индекс s соответствует значениям безразмерных параметров на ударной волне (УВ), ρ_s — плотность, отнесенная к ρ_∞, u_s — касательная к УВ компонента скорости, отнесенная к V_∞, μ_s — коэффициент вязкости, отнесенный к μ_0. Толщина ударного слоя — порядка χ, безразмерные касательная скорость и энтальпия на УВ имеют порядок τ.

Асимптотический анализ уравнений Навье–Стокса показал, что уравнения ТВУС справедливы не только при больших, но и при малых числах $\mathbf{Re}$, в предположении малости параметра χ: $\chi \ll 1$. Уравнения ТВУС получаются из уравнений Навье–Стокса, если пренебречь членами $\mathrm{O}(\chi)$, за исключением члена с продольным градиентом давления, имеющего порядок χ, который обычно оставляется в уравнениях ТВУС, поскольку играет существенную роль при больших числах $\mathbf{Re}$.

Заметим, что уравнения ВУС, предложенные и обоснованные Дэвисом [5] для больших чисел $\mathbf{Re}$, также как и уравнения ТВУС, оказываются справедливыми и при малых числах $\mathbf{Re}$. Они получаются из уравнений Навье–Стокса, если пренебречь членами $\mathrm{O}(\chi^2)$ и учесть члены $\mathrm{O}(\chi)$.

Двумерные уравнения ТВУС в криволинейной ортогональной системе координат (x, y), естественным образом связанной с поверхностью обтекаемого тела (положение точки в потоке определяется ее расстоянием y до контура по нормали и длиной дуги x вдоль контура, отсчитываемой от его вершины до основания нормали) имеют вид:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(r_w^\nu \rho u\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(r_w^\nu \rho v\right) = 0,$$

$$\rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{\mathbf{Re}}\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\rho u^2}{R} = 0, \tag{17.1}$$

$$\rho\left(u\frac{\partial H}{\partial x} + v\frac{\partial H}{\partial y}\right) = \frac{1}{\mathbf{RePr}}\frac{\partial}{\partial y}\left\{\mu\frac{\partial}{\partial y}\left[H - (1-\mathbf{Pr})u^2\right]\right\}, \quad H = T + u^2.$$

Здесь: $r_w(x)$ — расстояние от точки на контуре тела до оси симметрии, $\alpha(x)$ — угол между касательной к контуру тела и осью симметрии,

$R(x)$ — радиус кривизны контура тела, $V_\infty u$ и $V_\infty v$ — компоненты вектора скорости вдоль осей x и y соответственно, $\rho_\infty \rho$ — плотность, $\mu_0 \mu$ — коэффициент вязкости, $\rho_\infty V_\infty^2 p$ — давление, $T_0 T$ — температура, $HV_\infty^2/2$ — полная энтальпия, $\mathbf{Pr}$ — число Прандтля; $\nu = 0$ для плоской задачи и $\nu = 1$ для осесимметричной. Все величины с размерностью длины отнесены к R_0.

Асимптотически строгая модель ТВУС при малых числах $\mathbf{Re}$ — это уравнения без внепорядкового члена с продольным градиентом давления в первом уравнении импульсов. Как будет показано ниже, именно эта модель дает правильные предельные значения для коэффициента трения, когда $\mathbf{Re} \to 0$.

Система уравнений (17.1) дополняется уравнением состояния совершенного газа, а также соотношением, определяющим зависимость коэффициента вязкости от температуры, которая в данной работе полагается степенной с показателем ω:

$$\rho = \frac{p}{\varepsilon T}, \quad \mu = T^\omega. \tag{17.2}$$

Для получения асимптотически корректных граничных условий для модели ТВУС при малых числах $\mathbf{Re}$ проведен асимптотический анализ граничных условий на УВ [1] и на поверхности тела [2]. Если пренебречь членами $\mathrm{O}(\chi)$ в общих соотношениях на сильном скачке [6], получим обобщенные условия Ренкина–Гюгонио на УВ $y = y_s(x)$ для уравнений ТВУС:

$$\begin{gathered} v_s = u_s \frac{dy_s}{dx} - \frac{1}{\rho_s} \sin\alpha, \quad u_s = \cos\alpha - \frac{\mu_s}{\mathbf{Re}\sin\alpha} \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_s, \\ H_s = 1 - \frac{\mu_s}{\mathbf{RePr}\sin\alpha} \frac{\partial}{\partial y} \left[H - (1 - \mathbf{Pr})u^2\right]_s, \quad p_s = \sin^2\alpha. \end{gathered} \tag{17.3}$$

Асимптотический анализ граничных условий на поверхности тела, учитывающих скорость скольжения и скачок температуры [7], показал, что эффекты скольжения на поверхности имеют порядок χ. Уравнения ТВУС выводятся в пренебрежении членами $\mathrm{O}(\chi)$, поэтому асимптотически строгая модель ТВУС получается в пренебрежении эффектами скольжения на поверхности. Асимптотически корректные условия на поверхности для модели ТВУС при малых числах $\mathbf{Re}$ — это условия прилипания и равенства температуры газа температуре стенки:

$$u = 0, \quad v = 0, \quad T = T_w. \tag{17.4}$$

Модель ТВУС именно с условиями прилипания на поверхности дает для коэффициентов теплопередачи и трения при $\mathbf{Re} \to 0$ их значения в свободномолекулярном потоке при коэффициенте аккомодации, равном единице. Численные и асимптотические решения показывают, что при использовании граничных условий со скольжением модель ТВУС при $\mathbf{Re} \to 0$ дает заниженные предельные значения этих коэффициентов.

Таким образом, асимптотически корректная модель ТВУС в случае осесимметричных и плоских течений включает в себя уравнения (17.1) (без члена $\partial p/\partial x$), (17.2), обобщенные соотношения Ренкина–Гюгонио на УВ (17.3) и условия прилипания (17.4) на теле.

Коэффициенты теплопередачи и трения на поверхности определяются следующим образом:

$$c_f = \frac{2\tau_w}{\rho_\infty V_\infty^2}, \quad \tau_w = \left(\mu_0 \mu \frac{\partial(V_\infty u)}{\partial y}\right)_w,$$
$$c_H = \frac{q_w}{\rho_\infty V_\infty (H_\infty - H_w)}, \quad q_w = \left(\lambda \frac{\partial(T_0 T)}{\partial y}\right)_w.$$

2. ТВУС в окрестности линии торможения при трехмерном течении

Рассмотрим трехмерное гиперзвуковое течение около гладкого затупленного тела. Выберем систему координат таким образом, чтобы оси x_1 и x_2 лежали в плоскостях главных кривизн, ось y — по нормали к поверхности. Уравнения ТВУС в окрестности линии торможения в переменных Дородницына–Лиза имеют вид [8]:

$$\begin{gathered}
-(f_1+\kappa f_2)\frac{du_i}{d\zeta}+d_i u_i^2+\frac{2d_i p_i'}{\rho}=\frac{d}{d\zeta}\left(\frac{\mu\rho}{\mathbf{Re}\Delta^2}\frac{du_i}{d\zeta}\right), \quad \frac{df_i}{d\zeta}=u_i \quad (i=1,2),\\
-(f_1+\kappa f_2)\frac{dG}{d\zeta}=\frac{d}{d\zeta}\left(\frac{\mu\rho}{\mathbf{PrRe}\Delta^2}\frac{dG}{d\zeta}\right), \quad \frac{dp_i'}{d\zeta}=\Delta\, u_i^2,\\
p_i'=\frac{1}{2d_i}\frac{\partial^2 p}{\partial(x_i)^2}\bigg|_{x_1=0,x_2=0}, \quad \zeta=\frac{1}{\Delta R_0}\int\limits_0^y \rho\, dy, \quad \Delta=\frac{1}{R_0}\int\limits_0^{y_s}\rho dy,\\
y_s=\Delta R_0\int\limits_0^1\frac{1}{\rho}\,d\zeta, \quad G=\frac{H-H_w}{H_\infty-H_w}, \quad \frac{1}{\rho}=\varepsilon T, \quad \mu=T^\omega,\\
T=G(1-T_w)+T_w, \quad d_1=1, \quad d_2=\kappa.
\end{gathered} \tag{17.5}$$

Здесь: $V_\infty v_i$ — компоненты вектора скорости, $v_i = v_{i\infty} u_i$ $(i = 1, 2)$; G — приведенная энтальпия, κ — отношение радиусов главных кривизн в точке торможения, $0 \leqslant \kappa \leqslant= 1$. В случае осесимметричных и плоских течений соответственно:

$$\kappa = 1, \quad d_1 = d_2, \quad f_1 = f_2, \quad p_1\prime = p_2\prime, \quad u_1 = u_2,$$

$$\kappa = 0, \quad d_2 = 0, \quad f_2 = 0, \quad p_2\prime = 0, \quad u_2 = 0.$$

Граничные условия на поверхности и на УВ для уравнений (17.5) будут:

$$\zeta = 0 : u_i = 0, \quad G = 0, \quad f_i = 0 \quad (i = 1,\, 2). \tag{17.6}$$

$$\zeta = 1 : u_i = 1 - \frac{\mu\rho}{\mathbf{Re}\Delta}\frac{du_i}{d\zeta}, \quad G = 1 - \frac{\mu\rho}{\mathbf{PrRe}\Delta}\frac{dG}{d\zeta},$$
$$p = 1, \quad p_i' = -1, \quad \Delta = \frac{1}{f_1 + \kappa f_2}. \tag{17.7}$$

Коэффициенты трения и теплопередачи на поверхности определяются как:

$$c_f^i = \frac{2\tau_{iw}}{v_{i\infty}\rho_\infty V_\infty^2} = \frac{\mu\rho}{\Delta\mathbf{Re}}\frac{du_i}{d\zeta}\Big|_w, \quad \tau_{iw} = \left(\mu_0\mu\frac{d(V_\infty v_{i\infty}u_i)}{dy}\right)_w \quad (i = 1, 2),$$

$$c_H = \frac{q_w}{\rho_\infty V_\infty(H_\infty - H_w)} = \frac{\mu\rho}{\mathbf{Pr}\Delta\mathbf{Re}}\frac{dG}{d\zeta}\Big|_w, \quad q_w = \left(\lambda\frac{d(T_0T)}{dy}\right)_w.$$

3. ТВУС в окрестности плоскости симметрии при трехмерном течении

Рассмотрим трехмерное гиперзвуковое течение около затупленного тела, обладающее плоскостью симметрии. Пусть поверхность тела задана уравнением $z = f(x, y)$ в декартовой системе координат (x, y, z), начало которой помещено в точке торможения на поверхности тела, ось z направлена вдоль вектора скорости набегающего потока $\boldsymbol{V}_\infty$, а $y = 0$ — плоскость симметрии. Выберем систему криволинейных неортогональных координат (ξ^1, ξ^2, ξ^3), связанную с поверхностью тела следующим образом: ξ^3 — расстояние от поверхности ($\xi^3 = 0$) по нормали, $\xi^1 = x$, $\xi^2 = y$. При этом $\xi^2 = 0$ — плоскость симметрии течения. Система уравнений ТВУС, описывающая течение в окрестности плоскости симметрии, в переменных Дородницына–Лиза имеет вид [9]:

$$\begin{gathered}
\xi = \frac{\xi^1}{R_0}, \quad \zeta = \frac{1}{R_0\Delta}\int\limits_0^{\xi^3}\rho\,d\xi^3, \quad \Delta = \frac{1}{R_0}\int\limits_0^{\xi_s^3}\rho\,d\xi^3,\\
\beta_3 u^1\frac{\partial u^1}{\partial\xi} - S\frac{\partial u^1}{\partial\zeta} + \beta_1\left(u^1\right)^2 = -\frac{p_1}{\rho} + \frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{\mu\rho}{\mathbf{Re}\Delta^2}\frac{\partial u^1}{\partial\zeta}\right),\\
\beta_3 u^1\frac{\partial u^2}{\partial\xi} - S\frac{\partial u^2}{\partial\zeta} + \beta_2\left(u^2\right)^2 + \beta_4\left(u^1\right)^2 + \beta_8 u^1u^2 =\\
= -\frac{g(p_2 - \beta_0 p_1)}{\rho} + \frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{\mu\rho}{\mathbf{Re}\Delta^2}\frac{\partial u^2}{\partial\zeta}\right),\\
\beta_3 u^1\frac{\partial G}{\partial\xi} - S\frac{\partial G}{\partial\zeta} = \frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{\mu\rho}{\mathbf{RePr}\Delta^2}\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(G - \frac{1-\mathbf{Pr}}{1-T_w}\beta_0\left(u^1\right)^2\right)\right),\\
S = \beta_1\varphi^1 + \beta_2\varphi^2 + \beta_3\left(\frac{\partial\varphi^1}{\partial\xi} + \frac{\varphi^1}{\Delta}\frac{d\Delta}{d\xi}\right), \quad u^1 = \frac{\partial\varphi^1}{\partial\zeta}, \quad u^2 = \frac{\partial\varphi^2}{\partial\zeta},\\
\sqrt{g}\,\frac{\partial p}{\partial\zeta} = \beta_4\left(u^1\right)^2, \quad \sqrt{g}\,\frac{\partial p_1}{\partial\zeta} = g\beta_1\beta_3 u^1\left(2\Delta\frac{\partial u^1}{\partial\xi} + u^1\frac{d\Delta}{d\xi}\right) + \beta_5\Delta\left(u^1\right)^2,
\end{gathered} \tag{17.8}$$

$$\sqrt{g}\,\frac{\partial p_2}{\partial\zeta} = \Delta\left(\beta_6\left(u^1\right)^2 + 4\beta_7 u^1 u^2 + 2\beta_2^2\left(u^2\right)^2\right),\quad p_1 = \frac{1}{g\beta_3}\frac{\partial p}{\partial\xi^1},\quad p_2 = \frac{1}{g\beta_2}\frac{\partial^2 p}{(\partial\xi^2)^2},$$
$$T = G(1-T_w) + T_w - \beta_0\left(u^1\right)^2,\quad G = \frac{H-H_w}{H_\infty - H_w},\quad \frac{1}{\rho} = \frac{\varepsilon T}{p},\quad \mu = T^\omega.$$

Коэффициенты β_i зависят от геометрии обтекаемого тела:

$$\beta_1 = \frac{f_{11}''}{g^2},\quad \beta_2 = \frac{f_{22}''}{g},\quad \beta_3 = \frac{f_1'}{g},\quad \beta_4 = f_1'^2\beta_1,\quad \beta_5 = \frac{f_{111}'''}{g^2}f_1' + \beta_1^2 g(6-4g),$$
$$\beta_6 = \frac{1}{\beta_2}\left[\frac{f_{1122}''''}{g^2}\beta_0 + \beta_1\big(\beta_7 g(6-4g) + 6\beta_2^2(1-g)\big)\right],\quad \beta_7 = \frac{f_{122}'''}{g^2}f_1',$$
$$\beta_8 = \frac{f_{122}'''}{f_{22}''}\beta_3 - 2\beta_4,\quad \beta_0 = \frac{f_1'^2}{g},\quad g = 1 + f_1'^2.$$

Здесь: $V_\infty u_\infty^i u^i$ $(i=1,2)$ — составляющие вектора скорости в направлениях ξ^1 и ξ^2 ($V_\infty u_\infty^i$ — компоненты вектора скорости в набегающем потоке), R_0 — радиус кривизны контура тела в плоскости симметрии в точке торможения, индексы 1 и 2 при производных функции f обозначают, по какой координате, ξ^1 или ξ^2, производится дифференцирование.

Асимптотически строгая модель ТВУС при малых числах $\mathbf{Re}$ — это уравнения (17.8) без внепорядковых членов с производными давления в направлениях ξ^1 и ξ^2 в уравнениях импульсов. Эти члены добавляются в уравнения ТВУС при умеренно больших числах $\mathbf{Re}$.

Обобщенные условия Ренкина–Гюгонио на УВ $\zeta = 1$ будут:

$$\begin{gathered} u^i = 1 - \frac{\mu\rho\sqrt{g}}{\mathbf{Re}\Delta}\frac{\partial u^i}{\partial\zeta}\ (i=1,2),\quad G = 1 - \frac{\mu\rho\sqrt{g}}{\mathbf{PrRe}\Delta}\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(G - 1\frac{1-\mathbf{Pr}}{1-T_w}\beta_0 {u^1}^2\right),\\ p = \frac{1}{g},\quad p_1 = -2\beta_1,\quad p_2 = -\frac{2}{g}\left(\beta_1 + \frac{\beta_7}{\beta_2}\right),\\ \beta_3\varphi^1\frac{d\Delta}{d\xi} + \Delta\left(\beta_1\varphi^1 + \beta_2\varphi^2 + \beta_3\frac{\partial\varphi^1}{\partial\xi}\right) = \frac{1}{\sqrt{g}}. \end{gathered} \tag{17.9}$$

Граничные условия на поверхности тела $\zeta = 0$ имеют вид:

$$u^i = 0\ (i=1,2),\quad G = 0,\quad \beta_3\varphi^1\frac{d\Delta}{d\xi} + \Delta\left(\beta_1\varphi^1 + \beta_2\varphi^2 + \beta_3\frac{\partial\varphi^1}{\partial\xi}\right) = 0. \tag{17.10}$$

Коэффициенты трения и теплопередачи в плоскости симметрии на поверхности тела определяются по формулам:

$$c_f = c_f^1\frac{f_1'}{\sqrt{g}},\quad c_f^i = \left.\frac{\mu\mu_0\partial\left(V_\infty u^i\right)/\partial\xi^3}{\rho_\infty V_\infty^2/2}\right|_w = \left.\frac{2\mu\rho}{\mathbf{\Delta Re}}\frac{\partial u^i}{\partial\zeta}\right|_w (i=1,2),$$
$$c_H = \left.\frac{\lambda\partial\left(T_0 T\right)/\partial\xi^3}{\rho_\infty V_\infty(H_\infty - H_w)}\right|_w = \left.\frac{\mu\rho}{\mathbf{Pr\Delta Re}}\frac{\partial G}{\partial\zeta}\right|_w.$$

4. Режимы и параметры гиперзвукового течения разреженного газа

При асимптотическом исследовании обтекания тел при малых числах $\mathbf{Re}$ возникает вопрос оценки входящих в уравнения функций. Такую оценку позволяет произвести асимптотическое исследование граничных условий на УВ. Рассмотрим течение в окрестности точки торможения тела. Выражая плотность и коэффициент вязкости через температуру T, а T — через G и T_w, запишем соотношения (17.7) в виде:

$$\begin{aligned} u_s &= 1 - \mathrm{O}\left(\frac{u_s^2}{\varepsilon\mathbf{Re}\left[G_s(1-T_w)+T_w\right]^{1-\omega}}\right), \\ g_s &= 1 - \mathrm{O}\left(\frac{u_s G_s}{\mathbf{Pr}\,\varepsilon\mathbf{Re}\left[G_s(1-T_w)+T_w\right]^{1-\omega}}\right). \end{aligned} \tag{17.11}$$

Индекс s соответствует значениям на УВ. Из анализа соотношений (17.11) следует, что при $\varepsilon\mathbf{Re} = \mathrm{o}(1)$:

$$\begin{aligned} &\frac{u_s^2}{\varepsilon\mathbf{Re}\left[G_s(1-T_w)+T_w\right]^{1-\omega}} = \mathrm{O}(1), \\ &\frac{u_s G_s}{\mathbf{Pr}\,\varepsilon\mathbf{Re}\left[G_s(1-T_w)+T_w\right]^{1-\omega}} = \mathrm{O}(1), \quad u_s,\, G_s = \mathrm{o}(1). \end{aligned} \tag{17.12}$$

Асимптотическая оценка T, ρ, μ зависит от соотношения между G_s и T_w. Рассмотрим три возможных соотношения между G_s и T_w:

$$\mathrm{I} - G_s \gg T_w, \quad \mathrm{II} - G_s = \mathrm{O}(T_w), \quad \mathrm{III} - G_s \ll T_w. \tag{17.13}$$

Этим соотношениям будет соответствовать:

$$\mathrm{I} - T_s = \mathrm{O}(G_s), \quad \mathrm{II} - T_s = \mathrm{O}(G_s + T_w), \quad \mathrm{III} - T_s = \mathrm{O}(T_w). \tag{17.14}$$

Из (17.12), (17.14) для каждых трех случаев получим:

$$\mathrm{I,II} - u_s,\ G_s = \mathrm{O}\left((\varepsilon\mathbf{Re})^{1/(1+\omega)}\right), \quad \mathrm{III} - u_s,\ G_s = \mathrm{O}\left((\mathbf{Re}\varepsilon T_w^{1-\omega})^{1/2}\right). \tag{17.15}$$

С учетом (17.13) и (17.15) можно выделить три режима течения в гиперзвуковом вязком ударном слое в области торможения при малых числах $\mathbf{Re}$:

$$\mathrm{I} - \varepsilon\mathbf{Re} \gg T_w^{1+\omega} \quad \mathrm{II} - \varepsilon\mathbf{Re} = \mathrm{O}(T_w^{1+\omega}) \quad \mathrm{III} - \varepsilon\mathbf{Re} \ll T_w^{1+\omega}. \tag{17.16}$$

В каждом из режимов температура оценивается соответствующим этому режиму образом. Зная оценку температуры, легко получить оценку плотности и коэффициента вязкости. При аналогичном рассмотрении для боковой поверхности, в соотношениях появляются коэффициенты, связанные с геометрией тела, в отношении газодинамических параметров ничего не меняется.

Режим I соответствует холодной поверхности: $T_w \ll (\varepsilon\mathbf{Re})^{1/(1+\omega)}$, в этом случае температурный фактор T_w выпадает из определяющих параметров задачи.

Основные безразмерные параметры гиперзвукового течения разреженного газа около затупленного тела при малых числах $\mathbf{Re}$ — χ и τ. Параметры χ и τ определяются по значениям параметров течения на УВ u_s, ρ_s и μ_s и для них получаются следующие оценки:

$$\chi = \mathrm{O}(\varepsilon), \quad \tau = \mathrm{O}\big((\varepsilon\mathbf{Re})^{1/(1+\omega)}\big) \quad \text{в режимах I и II},$$

$$\chi = \mathrm{O}(\varepsilon T_w^{1+\omega}), \quad \tau = \mathrm{O}\big((\varepsilon\mathbf{Re}T_w^{1-\omega})^{1/2}\big) \quad \text{в режиме III}\ .$$

Параметр τ характеризует разреженность потока, а также применимость асимптотического решения, о котором пойдет речь ниже, в окрестности точки торможения. Параметр χ порядка толщины ударного слоя, в режимах I и II параметр $\chi = \mathrm{O}(\varepsilon)$, и в гиперзвуковом потоке он мал в области торможения.

5. Асимптотическое решение уравнений ТВУС

Уравнения ТВУС для рассмотренных типов двумерных и трехмерных течений будем решать с использованием интегрального метода последовательных приближений и асимптотического разложения в ряды в предположении малости параметра $\varepsilon\mathbf{Re}$. Метод последовательных приближений [10] позволяет получать как численное решение задачи путем вычисления достаточно большого числа итераций, так и аналитическое решение в первом приближении. Исследование [10] показало, что погрешность первого приближения для коэффициентов трения и теплопередачи в точке торможения при $\mathbf{Re} = 1$ не превышала 1% и что сходимость метода и точность первого приближения улучшаются с уменьшением числа $\mathbf{Re}$. Изложим алгоритм получения асимптотического решения для течения в окрестности точки торможения двоякой кривизны.

Систему уравнений (17.5) с граничными условиями (17.6), (17.7) будем решать методом последовательных приближений с помощью итерационного процесса, изложенного в [8], где получено аналитическое решение уравнений ТВУС в окрестности линии торможения трехмерного тела для $\omega = 1/2$. Получим выражения для коэффициентов теплопередачи и трения c_H и c_f^i для произвольных значений ω. Поскольку предстоит проведение асимптотических разложений при малых числах $\mathbf{Re}$, а асимптотические оценки для температуры, плотности и коэффициента вязкости различны, как показано в разд. 4, для разных режимов, то будем рассматривать каждый режим отдельно.

Рассмотрим режим I — режим холодной поверхности. Зададим нулевое приближение в виде линейных функций по поперечной координате ζ. Опуская длинные выкладки, связанные с вычислением однократных и двойных

интегралов при применении метода последовательных приближений, запишем полученные в результате выражения для c_H, c_f^i:

$$\begin{aligned} c_H &= \Delta_H \frac{1+\kappa}{2} a \left(1 - \frac{2b}{3}\right), \\ c_f^i &= 2\Delta_{ui} \left[\frac{1+\kappa}{2} a \left(1 - \frac{2a}{3}\right) - \frac{d_i a^2}{3} + \varepsilon b d_i \left(1 + \frac{2d_i a}{5(1+\kappa)}\right)\right] \quad (i=1,2). \end{aligned} \tag{17.17}$$

$$\Delta_H = \frac{-b_4 + \sqrt{b_4^2 + 4b_3}}{2b_3}, \quad \Delta_{ui} = \frac{-a_{4i} + \sqrt{a_{4i}^2 + 4a_{3i}}}{2a_{3i}} \quad (i = 1, 2). \tag{17.18}$$

$$\begin{aligned} b_3 &= \frac{(1+\kappa)\mathbf{Pr}\varepsilon\mathbf{Re}ab^{1-\omega}}{2(2-\omega)} \left(1 - \frac{4-\omega}{5-\omega} b\right), \quad b_4 = \frac{1+\kappa}{2} a(1-b), \\ a_{3i} &= \frac{\varepsilon\mathbf{Re}ab^{1-\omega}}{(2-\omega)} \left(\frac{(1+\kappa)}{2}\left(1 - \frac{4-\omega}{5-\omega} a\right) - \frac{d_i a}{5-\omega} + \frac{2d_i \varepsilon b}{(4-\omega)a}\right), \\ a_{4i} &= \frac{1+\kappa}{2} a(1-a). \end{aligned} \tag{17.19}$$

Здесь: a и b определяются из системы уравнений:

$$a = 1 - \frac{(1+\kappa)a^2}{2\varepsilon\mathbf{Re}b^{1-\omega}}, \quad b = 1 - \frac{(1+\kappa)ab}{2\mathbf{Pr}\varepsilon\mathbf{Re}b^{1-\omega}}. \tag{17.20}$$

Соотношения (17.17)–(17.20) представляют собой замкнутую задачу для определения коэффициентов c_H, c_f^i. Сначала следует решить уравнения (17.20), полученное решение подставить в соотношения (17.19), с помощью найденных функций a_{3i}, a_{4i}, b_3 и b_4 определить из (17.18) выражения для Δ_{ui} и Δ_H и подставить их в (17.17).

При $\varepsilon\mathbf{Re} = \mathrm{o}(1)$ решение уравнений (17.20) будет:

$$a = \tau, \quad b = \mathbf{Pr}\tau, \quad \tau = \left(\frac{2}{1+\kappa}\mathbf{Pr}^{1-\omega}\varepsilon\mathbf{Re}\right)^{\frac{1}{1+\omega}}, \tag{17.21}$$

С использованием (17.21) запишем (17.19) в виде:

$$b_3 = \frac{(1+\kappa)^2\mathbf{Pr}\tau^3}{4(2-\omega)} \left(1 - \frac{4-\omega}{5-\omega}\mathbf{Pr}\tau\right), \quad b_4 = \frac{1+\kappa}{2}\tau(1 - \mathbf{Pr}\tau),$$

$$a_{3i} = \frac{(1+\kappa)\tau^3}{2(2-\omega)} \left(\frac{(1+\kappa)}{2}\left(1 - \frac{4-\omega}{5-\omega}\tau\right) - \frac{d_i\tau}{5-\omega} + \frac{2d_i\mathbf{Pr}\varepsilon}{4-\omega}\right), \quad a_{4i} = \frac{1+\kappa}{2}\tau(1-\tau).$$

Подставив эти соотношения в (17.18), найдем выражения для функций Δ_{ui} и Δ_H в зависимости от геометрических параметров, числа $\mathbf{Pr}$, ω, ε и параметра τ. Считая $\varepsilon\mathbf{Re} = \mathrm{o}(1)$, и соответственно, $\tau = \mathrm{o}(1)$ и раскладывая в полученных выражениях все функции в ряды по τ, запишем выражения для Δ_{ui} и Δ_H в виде:

$$\Delta_H = \frac{2}{(1+\kappa)\tau}\left(1 + \mathbf{Pr}\tau\left(1 - \frac{1}{2-\omega}\right) + \mathrm{O}\left(\tau^2\right)\right),$$
$$\Delta_{ui} = \frac{2}{(1+\kappa)\tau}\left(1 + \tau\left(1 - \frac{1}{2-\omega} - \frac{4\mathbf{Pr}d_i\varepsilon}{(1+\kappa)(2-\omega)(4-\omega)}\right) + \mathrm{O}\left(\tau^2\right)\right) \quad (i = 1, 2). \tag{17.22}$$

После подстановки выражений (17.22) в соотношения (17.17) с учетом (17.21) получим решение для коэффициентов теплопередачи и трения в точке торможения трехмерного тела в режиме I холодной стенки:

$$c_H = 1 - \frac{1+\omega}{3(2-\omega)}\mathbf{Pr}\tau + \mathrm{O}(\tau^2), \quad \tau = \left(\frac{2}{1+\kappa}\mathbf{Pr}^{1-\omega}\varepsilon\mathbf{Re}\right)^{1/(1+\omega)}, \tag{17.23}$$

$$c_f^i = 2 - \frac{2}{3}\left(\frac{1+\omega}{2-\omega} + \frac{2d_i}{1+\kappa}\right)\tau + \frac{4d_i\mathbf{Pr}\varepsilon}{1+\kappa}\times$$
$$\times\left(1 + \left(\frac{2d_i}{5(1+\kappa)} + \frac{(1-\omega)(4-\omega)-2}{(2-\omega)(4-\omega)} - \frac{4d_i\mathbf{Pr}\varepsilon}{(1+\kappa)(2-\omega)(4-\omega)}\right)\tau\right) + \mathrm{O}\left(\tau^2\right), \tag{17.24}$$

$$\lim_{\varepsilon\mathbf{Re}\to 0} c_H = 1, \quad \lim_{\varepsilon\mathbf{Re}\to 0} c_f^i = 2 + \frac{4d_i\mathbf{Pr}\varepsilon}{1+\kappa}, \quad i = 1, 2. \tag{17.25}$$

Здесь для сравнения получено решение общепринятых уравнений ТВУС с учетом продольных составляющих градиента давления в уравнениях импульсов. При $\varepsilon\mathbf{Re} \to 0$ значение коэффициента теплопередачи c_H стремится к его значению в свободномолекулярном потоке, равному 1 при коэффициенте аккомодации 1 [11]. Коэффициенты трения c_f^i превышают свой свободномолекулярный предел, равный 2, что связано с влиянием продольных составляющих градиента давления, которое проявляется через члены с параметром ε. Учет членов более высокого порядка приводит здесь не к уточнению, а к искажению решения. В выражении для c_H отсутствуют члены с параметром ε, что говорит о том, что при малых числах $\mathbf{Re}$ учет продольных составляющих градиента давления влияет на трение и не влияет на теплообмен. Это подтверждается и численными расчетами.

Асимптотически строгая модель ТВУС без внепорядковых членов с продольными составляющими градиентами давления дает для c_H то же выражение (17.23), что и общепринятая модель, а для c_f^i она дает решение с правильными свободномолекулярными пределами:

$$c_f^i = 2 - \frac{2}{3}\left(\frac{1+\omega}{2-\omega} + \frac{2d_i}{1+\kappa}\right)\tau + \mathrm{O}(\tau^2), \quad \lim_{\varepsilon\mathbf{Re}\to 0} c_f^i = 2 \quad (i = 1, 2). \tag{17.26}$$

Таким образом, соотношения (17.25) и (17.26) подтверждают необходимость использовать при малых числах $\mathbf{Re}$ асимптотически корректную модель ТВУС, так как именно эта модель дает асимптотически правильное поведение

коэффициентов трения при $\mathbf{Re} \to 0$. В дальнейшем будем иметь дело только с этой моделью.

Для режимов II и III решение в точке торможения находится аналогично тому, как это было сделано для режима I:

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{II} - c_H = 1 - \left(\phi - \frac{1}{3}\right)\mathbf{Pr}\tau + \mathrm{O}\left(\tau^2\right),\\
&\tau = \left(\frac{2}{1+\kappa}\mathbf{Pr}^{1-\omega}\varepsilon\mathbf{Re}\right)^{\frac{1}{1+\omega}}(1+\lambda)^{\frac{1-\omega}{1+\omega}},\\
&c_f^i = 2\left[1 - \left(\phi + \frac{2d_i}{1+\kappa} - \frac{1}{3}\right)\tau\right] + \mathrm{O}\left(\tau^2\right), \quad \phi = \frac{(1+\lambda)^{2-\omega} - \lambda^{2-\omega}}{(2-\omega)(1+\lambda)^{1-\omega}},\\
&T_w = \left(\frac{2}{1+\kappa}\mathbf{Pr}^2\varepsilon\mathbf{Re}\right)^{\frac{1}{1+\omega}}\lambda(1+\lambda)^{\frac{1-\omega}{1+\omega}},\\
&\mathrm{III} - c_H = 1 - \frac{2}{3}\mathbf{Pr}\tau + \mathrm{O}\left(\tau^2\right), \quad \tau = \left(\frac{2}{1+\kappa}\varepsilon\mathbf{Re}T_w^{1-\omega}\right)^{\frac{1}{2}},\\
&c_f^i = 2 - \frac{4}{3}\left(1 + \frac{d_i}{1+\kappa}\right)\tau + \mathrm{O}\left(\tau^2\right) \quad (i = 1,\, 2).
\end{aligned}
\tag{17.27}
$$

Режим I, соответствующий холодной поверхности, можно рассматривать как предельный случай режима II при $\lambda \to 0$.

В случае осесимметричных и плоских задач применение к уравнениям (17.1)–(17.4) алгоритма метода последовательных приближений [10] совместно с асимптотическими разложениями по малому параметру $\varepsilon\mathbf{Re}$ позволяет получить аналитические решения для коэффициентов теплопередачи, трения и давления c_H, c_f и c_p (c_p — безразмерное давление p на поверхности тела) для трех режимов течения:

$$
\begin{aligned}
&c_H = \sin\alpha\left[1 - \left(\phi - \frac{1}{3}\right)\mathbf{Pr}\tau\right] + \mathrm{O}(\tau^2), \quad \beta = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin\alpha}{R} + \nu\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{r_w}\right),\\
&c_f = 2\sin\alpha\cos\alpha\left[1 - \left(\phi + \frac{\sin\alpha}{3R\beta} - \frac{1}{3}\right)\tau\right] + \mathrm{O}(\tau^2),\\
&c_p = \sin^2\alpha - \frac{\sin\alpha\cos^2\alpha}{3R\beta}\tau + \mathrm{O}(\tau^2).
\end{aligned}
\tag{17.28}
$$

Параметр разреженности τ для режимов I, II, III имеет вид:

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{I} - \tau = \left(\frac{\mathbf{Pr}^{1-\omega}\varepsilon\mathbf{Re}}{\beta}\right)^{\frac{1}{1+\omega}},\\
&\mathrm{II} - \tau = \left(\frac{\mathbf{Pr}^{1-\omega}\varepsilon\mathbf{Re}}{\beta}\right)^{\frac{1}{1+\omega}}(1+\lambda)^{\frac{1-\omega}{1+\omega}},\\
&\mathrm{III} - \tau = \left(\frac{\varepsilon\mathbf{Re}T_w^{1-\omega}}{\beta}\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}
\tag{17.29}
$$

Функции ϕ для каждого из режимов:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{I} - \phi = \frac{1}{2-\omega},\\
&\mathrm{II} - \phi = \frac{(1+\lambda)^{2-\omega} - \lambda^{2-\omega}}{(2-\omega)(1+\lambda)^{1-\omega}}, \quad T_w = \left(\mathbf{Pr}^2 \cdot \frac{\varepsilon\mathbf{Re}}{\beta}\right)^{\frac{1}{1+\omega}} \lambda(1+\lambda)^{\frac{1-\omega}{1+\omega}},\\
&\mathrm{III} - \phi = 1.
\end{aligned} \tag{17.30}$$

При $\tau \to 0$, или $\varepsilon\mathbf{Re} \to 0$, значения коэффициентов теплопередачи и трения стремятся к их значениям в свободномолекулярном потоке при единичном коэффициенте аккомодации [11], а распределение давления переходит в распределение давление по Ньютону:

$$\lim_{\varepsilon\mathbf{Re}\to 0} c_H = \sin\alpha, \quad \lim_{\varepsilon\mathbf{Re}\to 0} c_f = 2\sin\alpha\cos\alpha, \quad \lim_{\varepsilon\mathbf{Re}\to 0} c_p = \sin^2\alpha. \tag{17.31}$$

При $\omega = 1$ решения для всех трех режимов совпадают, при этом $\tau = (\varepsilon\mathbf{Re}/\beta)^{1/2}$.

При $\omega = 1$ параметр подобия τ совпадает с параметром Ченга $K = (\varepsilon\mathbf{Re})^{1/2}$ [3, 4], за тем исключением, что параметр τ включает в себя еще и геометрический параметр β, т. е. учитывает влияние геометрии тела. Однако в точке торможения осесимметричного тела параметр τ и параметр Ченга полностью совпадают при $\omega = 1$ (именно такое ω рассматривалось Ченгом). В общем случае, параметр τ, в отличие от параметра Ченга, кроме геометрии тела, учитывает еще влияние показателя ω и температуры стенки T_w.

В случае течения в окрестности плоскости симметрии тела задача (17.8)–(17.10) решается с использованием итерационного алгоритма [9] и асимптотического разложения решения в ряды в предположении малости параметра $\varepsilon\mathbf{Re}$. Асимптотические решения для коэффициентов теплопередачи, трения и давления для трех режимов течения имеют вид:

$$\begin{aligned}
&c_H = \frac{1}{\sqrt{g}}\left[1 - \left(\phi - \frac{1}{3}\right)\mathbf{Pr}\tau\right] + \mathrm{O}(\tau^2),\\
&c_f^i = \frac{2}{\sqrt{g}}\left[1 - \left(\phi + \frac{\beta_i}{3\beta} - \frac{1}{3}\right)\tau\right] + \mathrm{O}(\tau^2), \quad i = 1, 2,\\
&c_f = \frac{2f'_x}{g}\left[1 - \left(\phi + \frac{\beta_1}{3\beta} - \frac{1}{3}\right)\tau\right] + \mathrm{O}(\tau^2),\\
&c_p = \frac{1}{g} - \frac{f_x'^2\beta_1}{3g\beta}\tau + \mathrm{O}\left(\tau^2\right), \quad \beta = \frac{1}{2}(\beta_1 + \beta_2),\\
&\beta_1 = \frac{f''_{xx}}{g^2}, \quad \beta_2 = \frac{f''_{yy}}{g}, \quad g = 1 + f_x'^2.
\end{aligned} \tag{17.32}$$

Решения для режимов I, II, III находятся из соотношений (17.32) после подстановки соответствующих каждому режиму функции ϕ и τ. Функции ϕ даются соотношениями (17.30). Функции τ для разных режимов определяются по формулам (17.29), при этом в соотношения (17.29) надо подставлять соответствующий задаче геометрический параметр β из (17.32). Иными

словами, соотношения (17.29) для параметра τ формально одни и те же как для двумерных, так и для трехмерных течений в окрестности плоскости симметрии тела, однако по сути отличаются за счет разных геометрических параметров. При решении двумерной задачи предполагается, что геометрический параметр β в соотношениях (17.29) определяется из (17.28), а при решении пространственной задачи в окрестности плоскости симметрии подразумевается, что β определяется из (17.32).

Переходя в (17.32) к пределу при $\varepsilon\mathbf{Re} \to 0$, получим для всех трех режимов одинаковые предельные значения коэффициентов теплопередачи, трения и давления:

$$\lim_{\mathbf{Re}\varepsilon\to 0} c_H = \frac{1}{\sqrt{g}}, \quad \lim_{\mathbf{Re}\varepsilon\to 0} c_f = 2\frac{f'_x}{g}, \quad \lim_{\mathbf{Re}\varepsilon\to 0} p_w = \frac{1}{g}. \tag{17.33}$$

Рассматриваемый здесь случай течения в окрестности плоскости симметрии затупленного тела отличается от случая осесимметричного течения лишь более сложной геометрией тела, необходимостью учитывать влияние поперечного растекания и решать более сложные уравнения и не отличается от него с физической точки зрения. При $\varepsilon\mathbf{Re} \to 0$ значения коэффициентов c_H, c_f и c_p так же, как и в осесимметричном случае, стремятся к своим значениям в свободномолекулярном потоке. Таким образом, из соотношений (17.33) следует, что значения коэффициентов c_H, c_f и c_p в свободномолекулярном потоке вдоль линии растекания $y = 0$ затупленного тела $z = f(x, y)$ при единичном коэффициенте аккомодации составляют соответственно $1/\sqrt{g}$, $2f'_x/g$, $1/g$.

В выражения (17.33) не входят параметры β_2 и β, связанные с поперечной кривизной тела, т. е. отсутствует влияние поперечного растекания или стекания на значения коэффициентов c_H, c_f и c_p, что соответствует физике свободномолекулярного обтекания, где молекулы не взаимодействуют между собой. Таким образом, в режиме свободномолекулярного обтекания трехмерную задачу в окрестности плоскости симметрии тела можно заменить осесимметричной, рассматривая осесимметричное тело, где линия растекания является образующей, при этом получатся те же значения c_H, c_f и c_p

$$\sqrt{g} = \sin\alpha, \quad \frac{2f'_x}{g} = 2\sin\alpha\cos\alpha, \quad \frac{1}{g} = \sin^2\alpha. \tag{17.34}$$

Однако в общем случае, когда решение зависит от числа $\mathbf{Re}$, необходимо учитывать трехмерность течения, т. е. влияние поперечного растекания (стекания), которое в полученном решении проявляется через параметры β_2 и β.

Выше были получены решения для всех трех режимов гиперзвукового обтекания тел разреженным газом. Однако в ряде задач для расчета коэффициентов теплопередачи, трения и давления можно просто использовать решение для холодной поверхности, не зависящее от T_w, соответствующее режиму I ($T_w \ll (\varepsilon\mathbf{Re})^{1/(1+\omega)}$).

Во-первых, область определения режимов II и III — это $\mathbf{Re} \sim T_w^{1+\omega}/\varepsilon$ и $\mathbf{Re} \ll T_w^{1+\omega}/\varepsilon$, а здесь решения для разных режимов очень близки друг к другу, приближаясь к единому пределу при $\mathbf{Re} \to 0$.

Во-вторых, при $\omega = 1$ решения для всех трех режимов в точности совпадают, в частности, с решением для холодной стенки. Что касается $\omega \neq 1$, то в [2] были проведены численные расчеты уравнений ТВУС для зависимости коэффициента c_H в точке торможения осесимметричного тела с $R_0 = 1{,}36$ м от температуры T_w при разных значениях ω и разных $\mathbf{Kn}_\infty = 1{,}2$, $2{,}9$, $6{,}2$, $22{,}7$, соответствующих высотам $h = 115$, $122{,}5$, 130, 150 км полета корабля «Space Shuttle».

Анализ результатов показал, что при $\omega = 0{,}75$ зависимость решения от T_w довольно слабая, а отличие c_H при $T_w < 0{,}2$ от c_H при $T_w = 0$ составляет от 0,5 до 1,5% для разных высот. При $\omega = 0{,}5$ это отличие составляет от 1,5 до 4%, причем при $T_w < 0{,}1$, что соответствует реальным задачам движения в верхних слоях атмосферы Земли космических аппаратов, — до 2,5%. Таким образом, в переходном режиме обтекания, где и справедливо асимптотическое решение, с достаточно хорошей точностью можно пользоваться решением для режима I, что подтверждают и приведенные ниже сравнения с результатами, полученными другими методами. Выпишем в заключение отдельно это простое решение для холодной стенки для рассмотренных типов течения.

Коэффициенты теплопередачи, трения и давления при малых числах $\mathbf{Re}$ с точностью до $\mathrm{O}(\tau^2)$ определяются по следующим формулам.

В окрестности точки торможения тела с отношением радиусов главных кривизн κ $(0 \leqslant \kappa \leqslant 1)$:

$$\begin{gathered} c_H = 1 - \frac{1+\omega}{3(2-\omega)}\mathbf{Pr}\tau, \quad \tau = \left(\frac{2}{1+\kappa}\mathbf{Pr}^{1-\omega}\varepsilon\mathbf{Re}\right)^{\frac{1}{1+\omega}}, \\ c_f^i = 2 - \frac{2}{3}\left(\frac{1+\omega}{2-\omega} + \frac{2d_i}{1+\kappa}\right)\tau \quad (i = 1, 2), \quad d_1 = 1, \quad d_2 = \kappa. \end{gathered} \tag{17.35}$$

На наветренной стороне затупленных тел в осесимметричных ($\nu = 1$) и плоских ($\nu = 0$) течениях:

$$\begin{gathered} c_H = \sin\alpha\left[1 - \frac{1+\omega}{3(2-\omega)}\mathbf{Pr}\tau\right], \quad \tau = \left(\frac{\varepsilon\mathbf{Pr}^{1-\omega}\mathbf{Re}}{\beta}\right)^{\frac{1}{1+\omega}}, \\ \beta = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin\alpha}{R} + \nu\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{r_w}\right), \\ c_f = 2\sin\alpha\cos\alpha\left[1 - \frac{1}{3}\left(\frac{1+\omega}{2-\omega} + \frac{\sin\alpha}{R\beta}\right)\tau\right], \quad c_p = \sin^2\alpha - \frac{\sin\alpha\cos^2\alpha}{3R\beta}\tau. \end{gathered} \tag{17.36}$$

Здесь: α — угол между касательной к контуру тела и осью симметрии, R — радиус кривизны контура тела, r_w — расстояние от точки на контуре до оси симметрии. R, r_w отнесены к радиусу кривизны тела в точке торможения.

В окрестности плоскости симметрии $y = 0$ тела, поверхность которого задана уравнением $z = f(x, y)$ в декартовой системе координат с началом в точке торможения и осью z, направленной вдоль вектора скорости набегающего потока:

$$c_H = \frac{1}{\sqrt{g}}\left[1 - \frac{1+\omega}{3(2-\omega)}\mathbf{Pr}\tau\right], \quad c_f = \frac{2f'_x}{g}\left[1 - \frac{1}{3}\left(\frac{1+\omega}{2-\omega} + \frac{\beta_1}{\beta}\right)\tau\right], \qquad (17.37)$$

$$c_p = \frac{1}{g} - \frac{f_x'^2\beta_1}{3g\beta}\tau, \quad \tau = \left(\frac{\mathbf{Pr}^{1-\omega}\varepsilon\mathbf{Re}}{\beta}\right)^{\frac{1}{1+\omega}}, \quad \beta = \frac{1}{2}(\beta_1 + \beta_2),$$

$$\beta_1 = \frac{f''_{xx}}{g^2}, \quad \beta_2 = \frac{f''_{yy}}{g}, \quad g = 1 + f_x'^2.$$

6. Оценка точности и области применимости аналитического решения

Для оценки точности и области применимости полученных аналитических решений для коэффициентов теплопередачи и трения (17.35)–(17.37) в переходном от континуального к свободномолекулярному режиме обтекания проводились сравнения:

— с численными решениями уравнений ТВУС,
— ВУС и Навье–Стокса (НС),
— с результатами расчетов методом прямого статистического моделирования Монте–Карло (ПСМ),
— с экспериментальными данными и с решениями в свободномолекулярном потоке.

Сравнение между различными методами расчета коэффициента теплообмена в зависимости от числа $\mathbf{Kn}_\infty$ демонстрируется на рис. 17.1. Параметры набегающего потока соответствуют траектории входа в атмосферу Земли космического корабля «Space Shuttle» на высотах h от 90 до 150 км, $V_\infty = 7{,}5$ км/с.

Значения коэффициента теплопередачи, полученные из решения уравнений НС, с увеличением высоты полета, или увеличением числа $\mathbf{Kn}_\infty$, начинают резко возрастать, отклоняясь от результатов расчета методом ПСМ. Использование условий со скольжением и скачком температуры на поверхности приводит к снижению коэффициента теплопередачи, но не устраняет его тенденцию к возрастанию и превышению значения в свободномолекулярном потоке, равного 1. Наилучшее из решений уравнений НС [13] с учетом эффектов скольжения на поверхности дает правильное предсказание теплового потока в точке торможения до высоты 115 км, или до $\mathbf{Kn}_\infty \approx 1$. Три решения — асимптотическое и численное решения ТВУС и решение ВУС с учетом скольжения хорошо согласуются с результатами ПСМ вплоть до

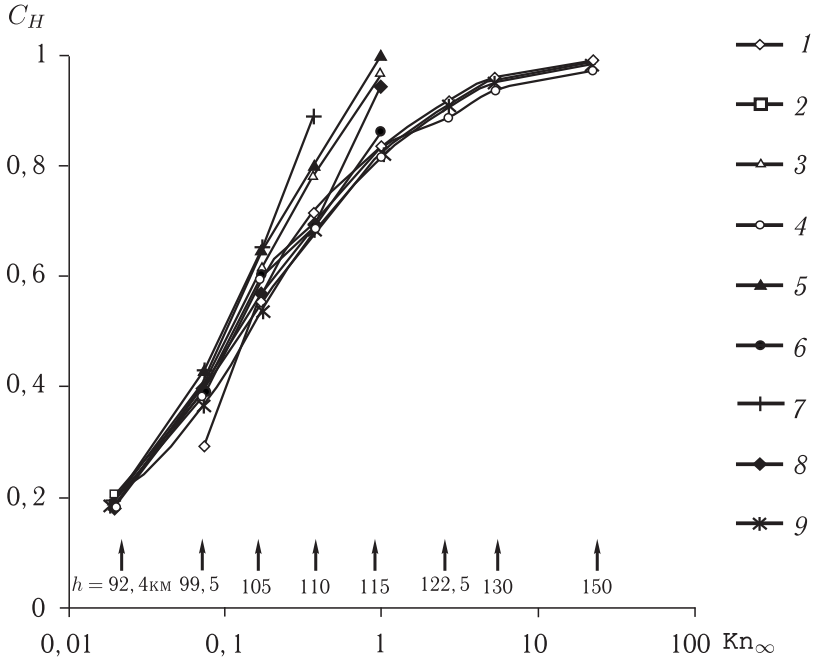


Рис. 17.1. Коэффициент c_H в точке торможения осесимметричного тела с радиусом затупления $R_0 = 1{,}36$ м в зависимости от $\mathbf{Kn}_\infty$. *1* — ТВУС, аналитическое решение; *2* — ТВУС, численное решение; *3* — ВУС без скольжения [1]; *4* — метод ПСМ [12]; *5* — НС без скольжения [13]; *6* — НС со скольжением [13]; *7* — НС со скольжением [14]; *8* — НС со скольжением [15]; *9* — ВУС со скольжением [2]

высоты 150 км, или до $\mathbf{Kn}_\infty \approx 20$. Решение (17.35) дает удовлетворительную точность на высотах более 100 км.

На рис. 17.2 сравнение аналитического решения для коэффициента теплопередачи с расчетами методом ПСМ вдоль траектории «Space Shuttle» на высотах $h = 80$–100 км показано для точки торможения цилиндрического тела. Решение (17.35) хорошо согласуется с результатами ПСМ [16] вплоть до 80 км. Значительно меньшее значение радиуса затупления на рис. 17.2 по сравнению с рис. 17.1 ведет к уменьшению числа $\mathbf{Re}$, соответствующего одной и той же высоте, и, соответственно, к расширению области применимости асимптотического решения до более низких высот.

Рисунок 17.3 демонстрирует хорошее согласование аналитического решения для c_H с экспериментальными данными [17–19] и с результатами расчетов, выполненных в рамках теории первых межмолекулярных столкновений [20]. Уменьшение γ ведет к уменьшению ε и τ, и таким образом, к расширению области применимости асимптотического решения до больших чисел $\mathbf{Re}$.

Распределения коэффициентов теплопередачи и трения вдоль поверхности сферы и цилиндра представлены на рис. 17.4–17.6. На рис. 17.4, 17.5

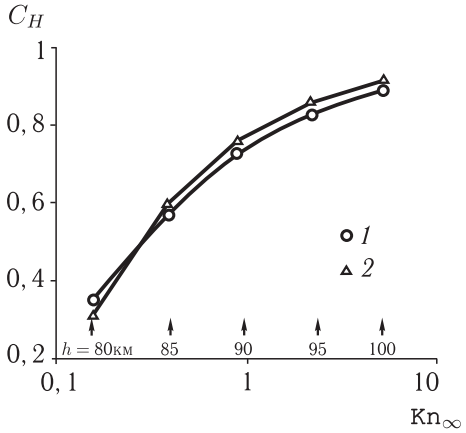


Рис. 17.2. Коэффициент c_H в точке торможения цилиндрического тела с $R_0 = 0{,}025$ м, $T_w = 0{,}07$, в зависимости от $\mathbf{Kn}_\infty$. *1* — расчеты ПСМ [16], *2* — аналитическое решение

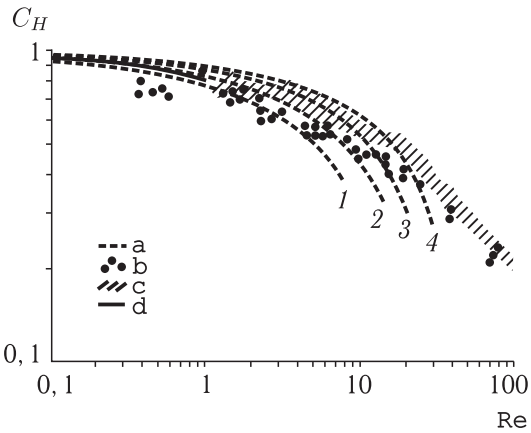


Рис. 17.3. Коэффициент c_H в точке торможения осесимметричного тела в зависимости от $\mathbf{Re}$. a — аналитическое решение: *1–4* — $\gamma = 1{,}67$, 1,4, 1,25, 1,1; b и c — экспериментальные данные [17] ($T_w = 0{,}18$) и [18, 19] ($T_w = 0{,}1$-$0{,}18$); d — теория первых межмолекулярных столкновений [20]

проводится сравнение аналитических решений с расчетами ПСМ [16, 21] на высотах 90, 100 и 110 км траектории «Space Shuttle» и с решением в свободномолекулярном потоке. На рис. 17.6 проводится сравнение для коэффициента c_f и теплового потока, отнесенного к его значению в точке торможения, q/q_0 с расчетами ПСМ [22], проведенными для одноатомного газа при использовании молекулярной модели твердых сфер, $\gamma = 5/3$, $\omega = 0{,}5$, $\mathbf{Pr} = 0{,}71$. Решения (17.36) для c_H и c_f хорошо согласуются с решениями, полученными методом Монте–Карло, при $\mathbf{Kn}_\infty \geqslant 5$, или $\varepsilon\mathbf{Re} \leqslant 0{,}3$. При $\varepsilon\mathbf{Re} \sim 0{,}5$

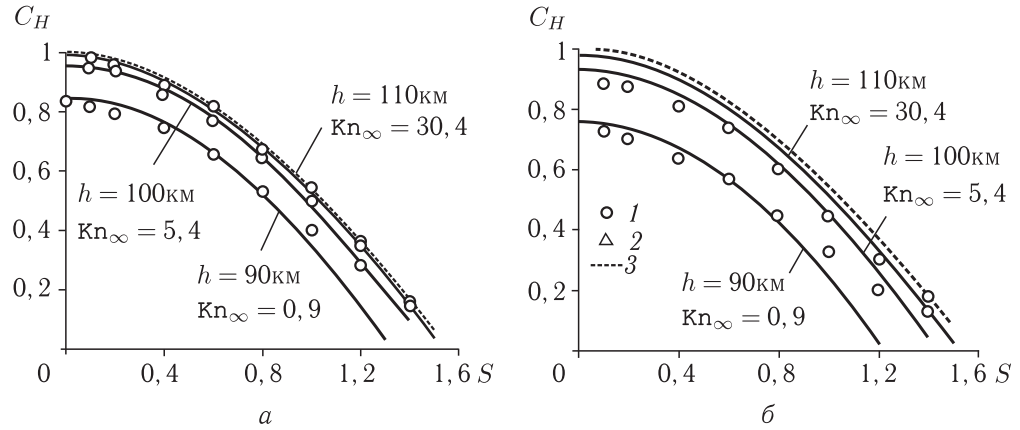


Рис. 17.4. Распределение коэффициента c_H вдоль сферы (*а*) и цилиндра (*б*) с $R_0 = 0{,}025$ м, $T_w = 0{,}07$, в зависимости от расстояния от точки торможения s. *1* — расчеты ПСМ: [21] (*а*) и [16] (*б*), *2* — аналитическое решение, *3* — свободномолекулярное решение

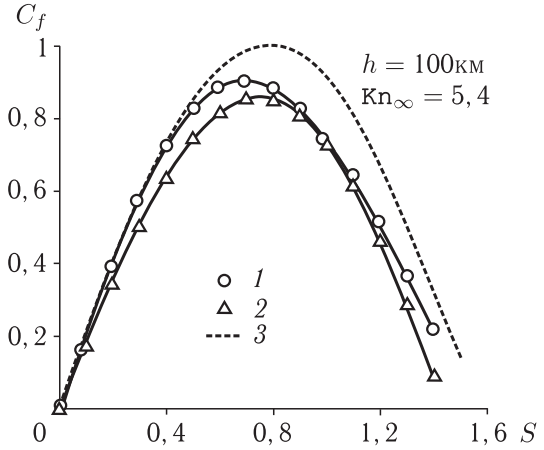


Рис. 17.5. Распределение коэффициента c_f вдоль сферы с $R_0 = 0{,}025$ м, $T_w = 0{,}07$ в зависимости от s. *1* — расчеты ПСМ [21], *2* — аналитическое решение, *3* — свободномолекулярное решение

аналитическое решение для коэффициента трения согласуется с расчетами ПСМ до значений угла $\theta \approx 50°$, а для теплового потока — до значений $\theta \approx 70°$. С увеличением расстояния от точки торможения асимптотическое решение становится неточным, так как предположение о малости параметра τ начинает нарушаться из-за влияния геометрического параметра β. Рисунки 17.4–17.6 иллюстрируют также, что решение, полученное на основе модели ТВУС, с увеличением числа $\mathbf{Kn}_\infty$ (уменьшением числа $\mathbf{Re}$) приближается к решению в свободномолекулярном потоке.

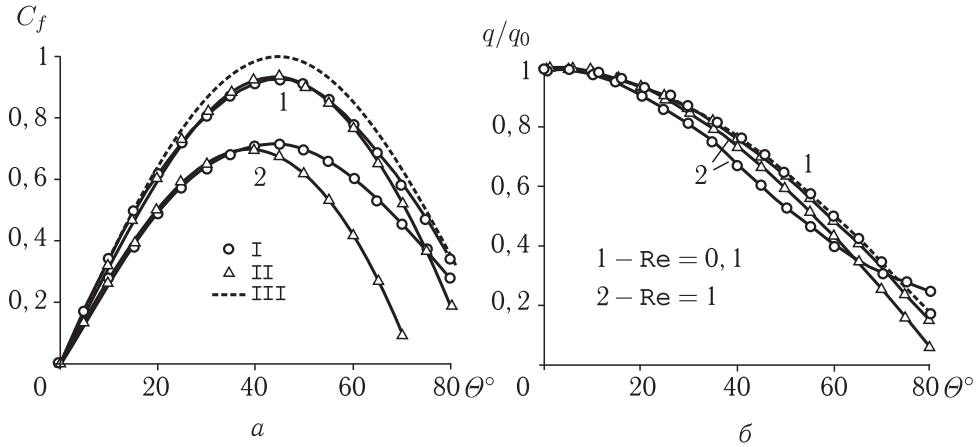


Рис. 17.6. Распределение коэффициента c_f (*а*), $T_w = 0{,}01$, и относительного теплового потока q/q_0 (*б*), $T_w = 0{,}1$, вдоль сферы в зависимости от угла $\theta = \pi/2 - \alpha$. I — расчеты ПСМ [22], II — аналитическое решение, III — свободномолекулярное решение

На рис. 17.7 показано сравнение распределений коэффициентов теплопередачи и трения вдоль поверхности гиперболоида с углом полураствора 42,5° на высотах $h = 150$, 122,5, 110, 99,5 км траектории «Space Shuttle», полученных из численного и асимптотического решения уравнений ТВУС ($\gamma = 1{,}25$, $\omega = 0{,}73$, $\mathbf{Pr} = 0{,}7$), с решением методом ПСМ [12] и решением в свободномолекулярном потоке. Численное решение уравнений ТВУС дает хорошее предсказание для коэффициентов теплопередачи и трения на высотах выше 100 км (при $R_0 \approx 1$ м), или $\mathbf{Kn}_\infty \geqslant 0{,}1$.

Распределения коэффициентов c_H и c_f вдоль поверхности 50° гиперболоида, моделирующего линию растекания корабля «Space Shuttle», обтекаемого под углом атаки 40°, полученные из аналитического решения и из расчетов ПСМ [23] на высотах 95, 110, 140 км, соответствующих $\mathbf{Kn}_\infty = 0{,}05$, 0,67, 15,4, приведены на рис. 17.8.

Область хорошего согласования асимптотического решения с результатами расчетов методом Монте–Карло для коэффициента теплопередачи шире, чем для коэффициента трения. Так, при таком большом (для асимптотического приближения) значении $\mathbf{Re} \approx 36$ ($\mathbf{Kn}_\infty = 0{,}05$, $\gamma = 1{,}25$) формула для трения перестает работать, в то время как формула для теплового потока дает корректные результаты вблизи точки торможения. Возможно, это связано с неточностью определения распределения давления в модели ТВУС, поскольку при малых числах $\mathbf{Re}$ продольный градиент давления гораздо сильнее влияет на коэффициент трения, чем на коэффициент теплопередачи. В целом можно сказать, что вблизи точки торможения асимптотическое решение для c_H справедливо при $\mathbf{Kn}_\infty \geqslant 0{,}1$ ($\mathbf{Re} \leqslant 30$), а для c_f — при $\mathbf{Kn}_\infty \geqslant 0{,}5$ ($\mathbf{Re} \leqslant 5$). Применительно к траектории «Space Shuttle» аналитическое решение позволяет приемлемо предсказывать тепловой поток в окрестности точки торможения тела (при $R_0 \sim 1$ м) на высотах более 100 км.

Правомерность асимптотического решения зависит не только от значения $\mathbf{Kn}_\infty$, или $\mathbf{Re}$, но и от расстояния от точки торможения. В рассматриваемой задаче оно справедливо вдали от точки торможения при $\mathbf{Re} \leqslant 3$ ($\mathbf{Kn}_\infty \geqslant 1$) для c_H и при $\mathbf{Re} \leqslant 0{,}5$ ($\mathbf{Kn}_\infty \geqslant 5$) для c_f. Как упоминалось выше, с увеличением расстояния от точки торможения предположение о малости τ нарушается из-за влияния геометрического параметра β (особенно для длинного тела, как гиперболоид), и асимптотическое решение становится неправомерным. Параметр τ, по которому фактически проводятся асимптотические разложения, характеризует разреженность потока и область применимости асимптотического решения. Газодинамическая часть τ, зависящая от параметров набегающего потока $\mathbf{Re}$, ε, ω, $\mathbf{Pr}$, определяет разреженность потока вблизи точки торможения, где $\beta \sim 1$. С увеличением расстояния от точки торможения влияние параметра β выражается в увеличении параметра τ. При этом, как показывают многочисленные сравнения, решение для коэффициента теплопередачи обладает достаточно хорошей точностью даже при $\tau \sim 1$.

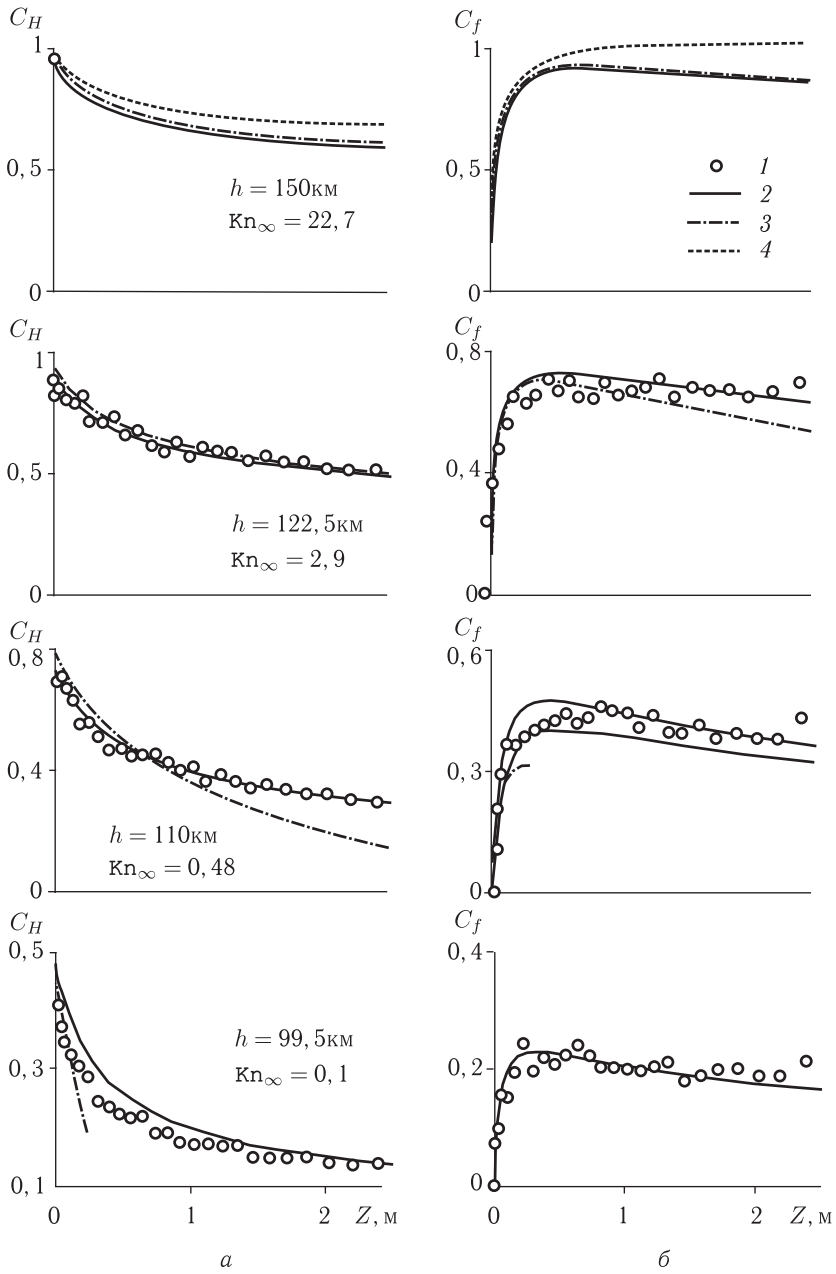


Рис. 17.7. Распределение коэффициентов c_H (*а*) и c_f (*б*) на поверхности 42,5° гиперболоида, $R_0 = 1{,}36$ м, $T_w = 0{,}02$–$0{,}03$ в зависимости от расстояния z от вершины вдоль оси симметрии. *1* — расчеты ПСМ [12], *2* — численное решение ТВУС [2], *3* — аналитическое решение, *4* — свободномолекулярное решение

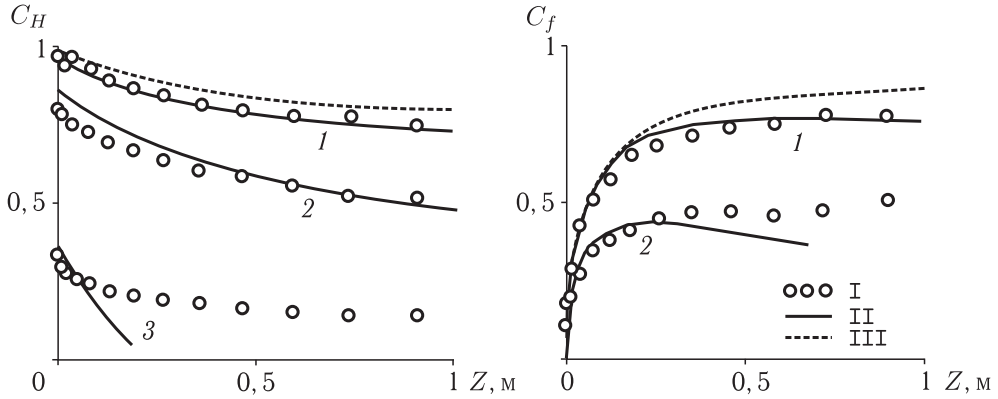


Рис. 17.8. Распределение коэффициентов c_H и c_f вдоль линии растекания 50° гиперболоида, $R_0 = 1{,}14$ м, $T_w = 0{,}02$–$0{,}05$ в зависимости от z. I — расчеты ПСМ [23], II — аналитическое решение, III — свободномолекулярное решение, *1–3* — $h = 140$, 110, 95 км

Влияние трехмерности течения, т. е. влияние поперечного растекания (стекания), при исследовании течения в окрестности плоскости симметрии тела, которое в решении (17.37) проявляется через параметры β_2 и β, связанные с поперечной кривизной, демонстрируется на рис. 17.9, где представлены результаты расчетов коэффициента теплопередачи вдоль линии растекания трехмерных гиперболоидов

$$z = k\left(\sqrt{1 + \frac{1}{k}x^2 + \frac{k_1}{k}y^2}\right). \tag{17.38}$$

При постоянном k все трехмерные гиперболоиды в плоскости симметрии имеют одну и ту же форму линии растекания и отличаются лишь поперечной кривизной, характеризующейся параметром k_1. На рис. 17.9 представлены результаты расчета обтекания гиперболоидов с $k = 1{,}191$ и $k_1 = 4$, 1, 0,25, при

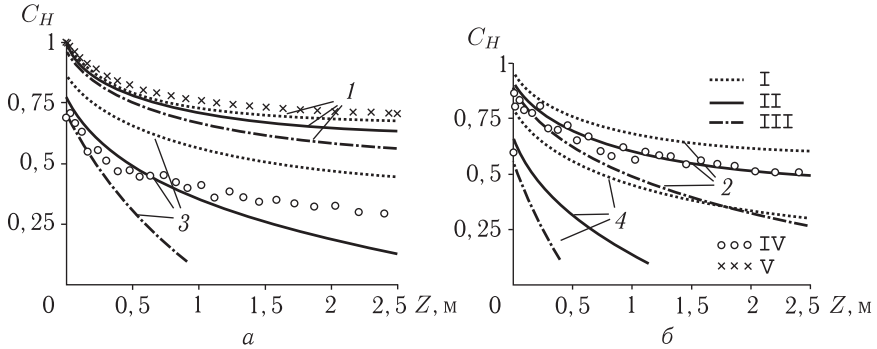


Рис. 17.9. Распределение коэффициента c_H вдоль поверхности трехмерных гиперболоидов в плоскости симметрии. I–III — решение (17.37) при $k_1 = 4$, 1, 0,25, IV — расчеты ПСМ [12] при $k_1 = 1$, V — свободномолекулярное решение; 1–4 — $h = 150$, 122,5, 110, 105 км; *1, 3* — на (*а*) и *2, 4* — на (*б*)

этом $k_1 = 1$ соответствует осесимметричному гиперболоиду с углом полураствора 42,5. Параметры набегающего потока соответствуют высотам $h = 150$, 122,5, 110, 105 км траектории «Space Shuttle» ($R_0 = 1{,}36$ м), или $\mathbf{Kn}_\infty = 22{,}7$, 2,9, 0,48, 0,1. Здесь же приведены результаты расчета соответствующего осесимметричного гиперболоида методом ПСМ [12].

При больших числах $\mathbf{Kn}_\infty$ влияние k_1 на тепловой поток невелико. С увеличением числа $\mathbf{Kn}_\infty$, при $\mathbf{Kn}_\infty \to \infty$ влияние поперечной кривизны исчезает и все три решения приближаются к решению в режиме свободномолекулярного обтекания, не зависящему от кривизны поверхности. В то же время с уменьшением числа $\mathbf{Kn}_\infty$ это влияние возрастает. Так, при $\mathbf{Kn}_\infty = 22{,}7$, 2,9, 0,48, 0,1 разница в c_H при $k_1 = 4$ по сравнению с осесимметричным решением $k_1 = 1$ составляет соответственно 1, 3,6, 10, 18, 35% в точке торможения и возрастает с увеличением расстояния от этой точки. Таким образом, при исследовании течения вдоль линии растекания пространственного тела нельзя заменять трехмерную задачу оссесимметричной, рассматривая линию растекания в качестве образующей осесимметричного тела. Заметим, что увеличение радиуса поперечной кривизны (для гиперболоидов (17.38) — увеличение k_1) ведет к возрастанию β и уменьшению τ, и таким образом, к расширению области применимости асимптотического решения.

На основании проведенных сравнений с результатами расчетов методом прямого статистического моделирования Монте–Карло можно сделать вывод, что асимптотическое решение обладает удовлетворительной точностью в переходном режиме обтекания при $\mathbf{Kn}_\infty \geqslant 0{,}1$ для коэффициента теплопередачи и при $\mathbf{Kn}_\infty \geqslant 0{,}5$ для коэффициента трения вблизи точки торможения. Чем больше $\mathbf{Kn}_\infty$ (больше высота полета, меньше $\mathbf{Re}$), тем на все более далеких расстояниях от точки торможения это решение правомерно, приближаясь при $\mathbf{Kn}_\infty \to \infty$ ($\mathbf{Re} \to 0$) к решению в свободномолекулярном потоке.

7. Заключение

Существует континуальная модель — модель тонкого вязкого ударного слоя (ТВУС), — которая дает правильное решение для коэффициентов теплообмена и сопротивления в переходном от континуального к свободномолекулярному режиме гиперзвукового обтекания тел разреженным газом и выход на свободномолекулярный режим при стремлении числа Рейнольдса $\mathbf{Re}$ к нулю. Это важное свойство уравнений ТВУС открывает возможность предсказания теплообмена и сопротивления тел во всем диапазоне чисел $\mathbf{Re}$ с использованием только континуальных моделей течения, решая при больших и умеренных числах $\mathbf{Re}$ уравнения ВУС или Навье–Стокса, а при малых числах $\mathbf{Re}$ — уравнения ТВУС.

Разработан асимптотический метод решения уравнений ТВУС при малых числах $\mathbf{Re}$. Выявлены параметры подобия гиперзвукового обтекания тел разреженным газом. Получены простые аналитические решения для

коэффициентов теплопередачи, трения и давления в зависимости от параметров набегающего потока и геометрических параметров обтекаемого тела для осесимметричных и плоских течений, а также для трехмерных течений в окрестности точки торможения и в окрестности плоскости симметрии тела при малых числах $\mathbf{Re}$. Эти решения достаточно точны в большей части переходного режима обтекания и при $\mathbf{Re} \to 0$ приближаются к решениям в свободномолекулярном потоке (при единичном коэффициенте аккомодации). Полученные аналитические зависимости полезны для проведения многочисленных оценочных расчетов теплообмена и сопротивления тел, необходимых при варьировании параметров обтекания при оптимизации формы новых проектируемых аппаратов.

Исследования выполнены при поддержке РФФИ (гранты 09-01-00728-а и 11-01-00504-а).

Список литературы

1. *Брыкина И.Г., Рогов Б.В., Тирский Г.А.* Континуальные модели разреженных потоков газа в задачах гиперзвуковой аэротермодинамики // ПММ. 2006. Т. 70. Вып. 6. С. 990–1016.
2. *Брыкина И.Г., Рогов Б.В., Тирский Г.А.* О применимости континуальных моделей в переходном режиме гиперзвукового обтекания // ПММ. 2009. Т. 73. ВЫП. 5. С. 700–716.
3. *Cheng H.K.* Hypersonic shock-layer theory of the stagnation region at low Reynolds Number // Proc. 1961 Heat Transfer and Fluid Mech. Inst. Stanford, Calif.: Stanford Univ. Press, 1961. P. 161–175.
4. *Cheng H.K.* The Blunt Body Problem in Hypersonic Flow at Low Reynolds Number // IAS Paper, 1963. № 63–92. 100 p.
5. *Davis R.T.* Numerical solution of the hypersonic viscous shock layer equations // AIAA Journal. 1970. V. 8. № 5. P. 843–851.
6. *Седов Л.И.* Механика сплошной среды. Т.1. — М.: Наука, 1970. 492 с.
7. *Шидловский В.П.* Введение в динамику разреженного газа. — М.: Наука, 1965. 218 С.
8. *Брыкина И. Г., Русаков В.В.* Аналитическое исследование трения и теплообмена в окрестности трехмерной критической точки при малых и умеренных числах Рейнольдса // Изв. АН СССР. МЖГ. 1988. № 2. С. 143–150.
9. *Брыкина И.Г., В.В. Русаков.* Аналитическое исследование пространственного вязкого ударного слоя в окрестности плоскости симметрии // Ж. прикл. механики и техн. физики. 1989. № 4. С. 16–22.
10. *Брыкина И.Г.* Интегрирование уравнений гиперзвукового вязкого ударного слоя методом последовательных приближений // Ж. вычисл. математики и мат. физики. 1978. Т. 18. № 1. С. 154–166.
11. *Хейз У.Д., Пробстин Р.Ф.* Теория гиперзвуковых течений. — М.: Изд-во иностр. лит., 1962. 407 с.
12. *Moss J.N., Bird, G.A.* Direct simulation of transitional flow for hypersonic reentry conditions // AIAA Paper. 1984. № 84–0223. 14 p.

13. *Gupta R.N., Simmonds A.L.* Hypersonic low-density solutions of the Navier –Stockes equations with chemical nonequilibrium and multicomponent surface slip // AIAA Paper. 1986. № 86–1349. 18 p.
14. *Jain A.C.* Hypersonic merged-layer flow on a sphere // J. Thermophys. Heat Transfer. 1987. V. 1. № 1. P. 21–27.
15. *Власов В.И., Горшков А.Б.* Сравнение результатов расчетов гиперзвукового обтекания затупленных тел с летным экспериментом OREX // Изв. РАН. МЖГ. 2001. № 5. С. 160–168.
16. *Cuda V.J., Moss J.N.* Direct Simulation of Hypersonic Flows Over Blunt Wedges // J. Thermophysics. 1987. V. 1. № 2. P. 97–104.
17. *Гусев В.Н., Никольский Ю.В.* Экспериментальное исследование теплопередачи в критической точке сферы в гиперзвуковом потоке разреженного газа // Учен. зап. ЦАГИ. 1971. Т. 2. № 1. С. 122–125.
18. *Wilson M.R., Wittliff C.E.* Low density stagnation point heat transfer measurements in the hypersonic shock tunnel // ARS Journal. 1962. V. 32. № 2. P. 275–276.
19. *Vidal R.J., Wittliff C.E.* Hypersonic low density studies of blunt and slender bodies // Rarefied Gas Dynamics. N.-Y.; — L.: Acad. Press, 1963. V. 2. P. 343–378.
20. *Перепухов В.А.* Аэродинамические характеристики сферы и затупленного конуса в потоке сильно разреженного газа // Ж. вычисл. математики и мат. физики. 1967. Т. 7. № 2. С. 444–452.
21. *Moss J.N., Cuda V.J., Simmonds A.L.* Nonequilibrium effects for hypersonic transitional flows // AIAA Paper, 1987. № 87–0404. 17 p.
22. *Николаев К.В.* Распределенные аэродинамические и тепловые характеристики обтекания сферы гиперзвуковым потоком разреженного газа // Труды IX Всесоюзной конференции по динамике разреженных газов. 1987. Т.1. С. 130–135.
23. *Moss J.N., Bird G.A.* Monte Carlo simulations in support of the Shuttle upper atmosphere mass spectrometer experiment // AIAA Paper. 1985. № 85–0968. 13 p.

Abstract

HYPERSONIC AERODYNAMICS AND HEAT TRANSFER OF RE-ENTRY SPACE VEHICLES AND PLANETARY PROBES

Edited by G.A.Tirtskiy

Results of theoretical and experimental studies of the problems concerned super/hypersonic flows around the models of real space vehicle configurations such as «Buran»-orbiter, winged cone (airplane-like body), Clipper space vehicle, Martian planetary probe are presented. Theoretical analysis is based on solution 2/3D Navier-Stokes equations and their simplified asymptotic models with account for equilibrium and nonequillibrium chemical reactions taking place at the background of relaxation of excited internal energy modes of the particles in the shock layer and on the vehicle surface.

Exact and simple relationships for the transport of species mass and heat are derived from rigorous kinetic theory for multicomponent mixtures of gases and plasma with different diffusion characteristics of the species (governing relations – thermodynamic parameter gradients expressed through the fluxes) as well as velocity slip, temperature and species concentration jumps boundary conditions for the surfaces of finite catalycity in multicomponent chemically and thermally nonequillibrium gas flow.

Phenomenological and kinetic models are developed for heterogeneous catalytic reactions on the thermal protection materials of the space vehicles entering Earth and Mars atmospheres along gliding trajectories.

The problem of multicomonent thermally and chemically nonequillbrium air flow in inductively coupled plasma torch and jet flow around the models installed in the facility work section is considered. The possibility to specify catalytic properties of real heat shield coatings are demonstrated using numerical and test values of heat fluxes or surface equilibrium radiation temperatures.

Original iterative/marching method to solve viscous shock layer equations is presented. The method is based on splitting of marching component of the pressure gradient onto hyperbolic part and a part that minimizes the elliptic part to a maximum degree that are then subjected to the global iterations procedure. Using the splitting of this kind allows numerical obtaining the drug and heat transfer coefficients within single or couple global iterations with reasonable for practical purposes accuracy.

The knowledge area connected to development of large computer software for conjugate problem of ballistics, aerodynamics, vehicle heat transfer and thermal strength of constructions of variable mass and shape is developed for all stages of the modern rocket-space vehicles designing.

The monograph will be interested for the scientists and engineers working in spacecraft industry, graduate and post-graduate students of universities and physical-engennering faculties of institutes of similar specialties.

The monograph is published under financial support of Russian foundation for basic research, publishing project №09–01–07070, and Moscow Institute for Physics and Technology (State University).

Научное издание

ТИРСКИЙ Григорий Александрович
КОВАЛЕВ Валерий Леонидович
ГОРШКОВ Андрей Борисович
БОРОВОЙ Вольф Яковлевич
БЕЛОШИЦКИЙ Александр Васильевич
БРЫКИНА Ирина Григорьевна
ГРОМОВ Валерий Григорьевич
ЛУНЕВ Владимир Васильевич
АЛЕКСИН Владимир Адамович
ДЯДЬКИН Анатолий Александрович
САХАРОВ Владимир Игоревич
ВЛАСОВ Вячеслав Иванович
КОВАЛЕВ Роман Вячеславович
ЕГОРОВ Иван Владимирович
ГОРСКИЙ Валерий Владимирович
АФОНИНА Наталья Евгеньевна
КИРЮТИН Борис Альбертович
СКУРАТОВ Аркадий Сергеевич
РОГОВ Борис Вадимович
ЖУРИН Сергей Викторович

ГИПЕРЗВУКОВАЯ АЭРОДИНАМИКА И ТЕПЛОМАССООБМЕН СПУСКАЕМЫХ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ И ПЛАНЕТНЫХ ЗОНДОВ

Редактор *А.П. Скороход*
Оригинал-макет: *Е.В. Чернина*
Оформление переплета: *В.Ф. Киселев*

Подписано в печать 26.04.2011. Формат 70×100/16. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 44,5. Уч.-изд. л. 49. Тираж 300 экз. Заказ №

Издательская фирма «Физико-математическая литература»
МАИК «Наука/Интерпериодика»
117997, Москва, ул. Профсоюзная, 90
E-mail: fizmat@maik.ru, fmlsale@maik.ru;
http://www.fml.ru

Отпечатано в ООО «Чебоксарская типография № 1»
428019, г. Чебоксары, пр. И. Яковлева, 15